



**HAL**  
open science

**Modélisation numérique des phénomènes  
d'amortissement par dissipation d'énergie matérielle  
dans les structures de type portique en béton armé sous  
séisme.**

Pierre Jehel

► **To cite this version:**

Pierre Jehel. Modélisation numérique des phénomènes d'amortissement par dissipation d'énergie matérielle dans les structures de type portique en béton armé sous séisme.. Matériaux. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2009. Français. NNT: . tel-00477015

**HAL Id: tel-00477015**

**<https://theses.hal.science/tel-00477015v1>**

Submitted on 27 Apr 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

présentée par

Pierre JEHEL

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Domaine :  
**MECANIQUE - GENIE MECANIQUE - GENIE CIVIL**

Sujet de la thèse :  
**Modélisation numérique des phénomènes d'amortissement par  
dissipation d'énergie matérielle dans les structures de type portique en  
béton armé sous séisme**

Thèse présentée et soutenue à l'École Normale Supérieure de Cachan le 10  
décembre 2009 devant le jury composé de :

Jean-Louis BATOZ	Pr. - UT de Compiègne	Président
Guy BONNET	Pr. - U. de Marne-la-Vallée	Rapporteur
Luc DAVENNE	MDC HDR - U. Paris X	Examinateur
Ying-Qiao GUO	Pr. - U. de Reims	Rapporteur
Adnan IBRAHIMBEGOVIĆ	Pr. - ENS Cachan	Directeur de thèse
Pierre LÉGER	Pr. - EP de Montréal	Directeur de thèse
Georges NAHAS	PAST - ENS Cachan	Invité

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
(ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris)  
61 Avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)



# Résumé

Les nouvelles méthodes de dimensionnement parasismique à partir des déformations reposent sur la prédiction de quantités locales dans les analyses sismiques non-linéaires. Sur un tout autre plan, le développement de techniques expérimentales en génie parasismique a permis d'accéder à des mesures locales que les modèles doivent être en mesure d'interpréter. Compte tenu de ces deux exigences, la modélisation de l'amortissement est un point faible dans les simulations sismiques numériques non-linéaires des structures de génie civil. En effet, dans la grande majorité des cas supposés visqueux (amortissement de Rayleigh, modal, etc.), les modèles d'amortissement manquent d'une base physique claire, et la quantité d'énergie qu'ils dissipent est difficile à maîtriser au cours des analyses numériques sismiques. Ces modèles ne permettent notamment pas de représenter les trois phases chronologiques caractéristiques de la réponse sismique d'une structure.

Une représentation physique des phénomènes d'amortissement permettrait d'améliorer les prédictions des analyses sismiques non-linéaires. Nos travaux ont porté sur le développement d'une telle représentation pour les sections courantes des éléments de structure de type portique en béton armé. Nous avons formulé et implanté dans un code de calcul par éléments finis un nouvel élément de poutre multifibre capable de représenter les principales sources de dissipation d'énergie matérielle. Cet élément repose sur la théorie des poutres de Euler-Bernoulli que nous avons enrichie par des discontinuités de déplacement, de sorte que l'apparition de fissures et les phénomènes dissipatifs qui y sont associés puissent être représentés. Un nouveau modèle de béton a été développé et intégré dans cet élément ; il intègre de nombreux mécanismes dissipatifs continus et discrets (dans les discontinuités) : (i) viscoélasticité, plasticité continue avec écrouissages (ii) isotrope et (iii) cinématique, (iv) endommagement continu, (v) plasticité discrète avec adoucissement et endommagement discret avec adoucissement (vi) ; il est de plus capable de représenter des comportements différents en traction et en compression. L'implantation numérique a été réalisée dans le cadre d'une méthode mixte des éléments finis.

De nombreux phénomènes dissipatifs autres que matériels (glissement entre acier et béton, comportement non-linéaire des nœuds d'ossature, etc.) devraient aussi être représentés pour espérer pouvoir se passer des modèles d'amortissement visqueux global couramment utilisés. Les simulations numériques faites avec ce nouvel élément multifibre montrent néanmoins son aptitude à représenter la réponse temporelle non-linéaire d'une structure de type portique en béton armé en un temps de calcul satisfaisant.



# Abstract

Recently developed deformation-based seismic design methods rely on the prediction of the evolution of local quantities in the nonlinear seismic analyses. Moreover, experimental techniques capable of measuring local quantities have recently been developed in earthquake engineering and the measures obtained have to be interpreted by numerical models. When one aims at meeting these new challenges, modeling damping in the nonlinear seismic analyses of civil engineering structures is a weak point. Indeed, in most of the cases, damping is introduced with a viscous assumption (Rayleigh and modal damping) which lacks a clear physical background. These viscous models fail to represent the three characteristic phases in the seismic response of a structure and the amount of dissipated energy is thus difficult to control all along the numerical analyses.

A physical representation of the damping phenomena would allow improving the predictions of the seismic nonlinear analyses. Our works deal with the development of such a representation for the sections of reinforced concrete frame structures elements. We have formulated a new fiber beam element capable of representing the main material energy dissipation sources and implemented it in a finite element program. This element is based on the Euler-Bernoulli beam assumption that we enhanced with displacement jumps so that cracking – and its associated energy dissipative phenomena – can be explicitly represented. This element integrates a new concrete material model that we developed and that can represent the following phenomena : (i) viscoelasticity, continuum plasticity with (ii) isotropic and (iii) kinematic hardenings, (iv) continuum damage, (v) discrete plasticity and (vi) discrete damage that represent softening ; the model is moreover capable of representing a different behavior in tension and in compression. The numerical implementation was realized in the framework of a mixed finite element method.

Along with material ones, many other energy dissipative phenomena (steel-concrete bond, nonlinear response of the beam-column connections, and so on) should also be modeled to get rid of the commonly used global viscous damping models. Nevertheless, the numerical simulations performed with the fiber element that we developed show that it is capable of representing the time-history of a reinforced concrete frame structure within a satisfying computation time.



# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à MM. Adnan Ibrahimbegovic, Pierre Léger et Luc Davenne qui ont initié et encadré mes travaux de thèse. Je leur suis reconnaissant de m'avoir accordé leur confiance et d'avoir su partager leur dynamisme et leur excellence scientifique avec une grande attention, faisant de nos rencontres des événements toujours stimulants.

Je remercie les rapporteurs pour leurs précieux commentaires, ainsi que les autres membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je voudrais aussi remercier les membres du LMT et du département de génie civil de l'École Polytechnique de Montréal, et plus particulièrement les membres de l'UTR « ouvrages sous conditions extrêmes » au LMT et du « groupe de recherche sur les structures » à l'EPM pour avoir créé un environnement de travail agréable et motivant.

Enfin, je pense à tout ce que mes famille et belle-famille m'apportent. Mon épouse est sublime. Mes beaux-parents sont merveilleux. À mes parents, je ne trouve pas de mots pour exprimer ce que je voudrais, mais je sais qu'ils savent lire tout ce que l'amour qu'ils me portent fait naître de bon en moi.





# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1 Présentation générale . . . . .	2
2 Énoncé de la thèse . . . . .	2
3 Motivations et objectifs . . . . .	3
4 Méthodologie . . . . .	5
5 Plan . . . . .	6
6 Contributions originales de la thèse . . . . .	7
<b>2 Revue de l'état de l'art</b>	<b>9</b>
1 Introduction . . . . .	10
2 Analyses sismiques non-linéaires . . . . .	13
2.1 L'avènement des analyses non-linéaires . . . . .	13
2.2 Évolution des propriétés d'une structure sous séisme . . . . .	14
3 Modèles de dissipation d'énergie sismique . . . . .	15
3.1 Amortissement physique et amortissement global forfaitaire . . . . .	15
3.2 Formulation de l'amortissement de Rayleigh . . . . .	17
3.3 Applications expérimentales et numériques . . . . .	18
3.4 Critique de l'amortissement global forfaitaire . . . . .	20
4 Analyse sismique numérique d'un portique en béton armé . . . . .	22
4.1 Description du portique et du signal sismique . . . . .	22
4.2 Modèles développés pour les simulations . . . . .	23
4.3 Analyse des résultats . . . . .	27
4.4 Conséquence locale du choix des modèles . . . . .	33
5 Orientations pour l'amélioration des modèles . . . . .	35
5.1 Trois prérequis pour des analyses sismiques plus prédictives . . . . .	35

5.2	Projet de modèle de structure enrichi . . . . .	38
6	Conclusion - Précision des objectifs de la thèse . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Modèle d'élément de structure enrichi avec lois matérielles 1D</b>	<b>41</b>
1	Introduction . . . . .	42
2	Notions de mécanique des milieux continus – Notations . . . . .	45
2.1	Configuration d'un solide déformable . . . . .	45
2.2	Hypothèse des petits déplacements et des petites déformations	45
2.3	Discontinuités fortes . . . . .	46
3	Modèle constitutif 1D de béton . . . . .	46
3.1	Thermodynamique avec variables internes . . . . .	46
3.2	Équations qui gouvernent le modèle constitutif . . . . .	48
3.3	Énergie matérielle dissipée . . . . .	55
3.4	Procédure d'identification des paramètres . . . . .	56
4	Matériaux standards généralisés . . . . .	60
5	Équations de Euler-Lagrange dynamiques . . . . .	62
5.1	Cinématique enrichie du champ de déplacement . . . . .	63
5.2	Formulation variationnelle lagrangienne complémentaire . . . . .	64
6	Élément poutre de Euler-Bernoulli multifibre . . . . .	68
6.1	Décomposition du domaine en fibres . . . . .	68
6.2	Hypothèses . . . . .	69
7	Conclusion . . . . .	70
8	Annexe : paramètre d'adoucissement en traction . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Implantation numérique du modèle dynamique enrichi</b>	<b>75</b>
1	Introduction . . . . .	76
2	Discrétisation du problème mécanique . . . . .	77
2.1	Méthode des éléments finis . . . . .	77
2.2	Discrétisation temporelle . . . . .	79
2.3	Équations discrétisées du problème . . . . .	80
3	Stratégie de résolution . . . . .	82
3.1	Méthode de Newton-Raphson . . . . .	82
3.2	Algorithme dit « return mapping » . . . . .	83
3.3	Résidu élémentaire . . . . .	88
3.4	Matrice de raideur tangente consistante . . . . .	89
4	Application 1 : élément barre avec contrainte constante . . . . .	90
4.1	Interpolation des champs de déplacement et de contrainte . . . . .	90
4.2	Équations discrétisées du problème . . . . .	91
4.3	Algorithme « return mapping » . . . . .	92
4.4	Matrice de raideur tangente consistante et résidu . . . . .	95

4.5	Applications numériques . . . . .	95
5	Application 2 : élément poutre 2D de Euler-Bernoulli . . . . .	101
5.1	Base enrichie des fonctions de forme du déplacement . . . . .	101
5.2	Découplage des points d'intégration numérique . . . . .	102
5.3	Exemple de calcul : essai de flexion simple . . . . .	103
6	Conclusion . . . . .	104
7	Annexes . . . . .	105
7.1	Annexe 1 : calcul de $sign(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{v_{n+1}}^p)$ . . . . .	105
7.2	Annexe 2 : calcul des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>111</b>
1	Introduction . . . . .	112
2	Chargement monotone quasi-statique . . . . .	112
2.1	Essai de flexion trois points . . . . .	112
2.2	Cas d'une poutre élastique . . . . .	112
2.3	Cas d'une poutre avec matériaux non-linéaires . . . . .	113
3	Chargement cyclique quasi-statique . . . . .	114
3.1	Poteau encasté à la base latéralement chargé en tête . . . . .	114
3.2	Identification des modèles de matériaux . . . . .	115
3.3	Résultats numériques . . . . .	115
4	Chargements dynamiques . . . . .	116
4.1	Oscillation libre d'un poteau . . . . .	116
4.2	Modélisation du portique testé sur table vibrante . . . . .	117
5	Conclusion . . . . .	121
6	Annexe : données d'entrée pour le calcul du portique . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>131</b>
1	Rappel des principales contributions . . . . .	132
2	Quelques points à développer . . . . .	134
3	Perspectives . . . . .	135
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>



# Table des figures

2.1	Modélisation multi-échelle pour la dissipation d'énergie . . . . .	12
2.2	Réponse sismique typique d'une structure en béton armé inélastique.	16
2.3	Portique en BA testé sur table vibrante. . . . .	23
2.4	Excitation sismique. . . . .	24
2.5	Modèle avec plasticité concentrée. . . . .	25
2.6	Modèle avec éléments de poutres multifibres. . . . .	25
2.7	Modèle éléments finis 2D . . . . .	27
2.8	Déplacement relatif et cisaillement. . . . .	31
2.9	Sources de dissipation d'énergie. . . . .	32
2.10	Vibrations libres. . . . .	32
2.11	Réponse moment-courbure. . . . .	34
2.12	Classification des sources de dissipation d'énergie. . . . .	37
2.13	Réponse cyclique quasi-statique du béton. . . . .	39
3.1	Réponse cyclique quasi-statique du béton. . . . .	47
3.2	Mécanismes physiques associés aux variables internes. . . . .	48
3.3	Réponse viscoélastique en vibrations libres. . . . .	57
3.4	Réponse hystérétique du modèle viscoélastique. . . . .	58
3.5	Modèle d'éprouvette de béton pour l'identification des paramètres. . .	59
3.6	Composante longitudinale enrichie du champ de déplacement. . . . .	63
3.7	Transformation d'une poutre de Euler-Bernoulli. . . . .	70
4.1	Modèle de structure 1D . . . . .	96
4.2	Réponse de la barre en traction . . . . .	97
4.3	Réponse en fonction du taux de chargement . . . . .	98
4.4	Réponse du béton sous chargement cyclique quasi-statique . . . . .	98
4.5	Histoire du chargement : charge statique + charge sismique. . . . .	99
4.6	Réponse sismique globale de la barre . . . . .	99
4.7	Réponse sismique locale de la barre . . . . .	100
4.8	Dissipation d'énergie intrinsèque dans la barre . . . . .	101

---

4.9	Géométrie et chargement . . . . .	104
4.10	Réponses de la section d'encastrement 1 . . . . .	104
4.11	Réponses de la section d'encastrement 2 . . . . .	105
4.12	Réponse locale de la structure . . . . .	106
5.1	Test en flexion trois points : géométrie et chargement . . . . .	112
5.2	Poutre élastique en flexion trois points . . . . .	113
5.3	Courbe enveloppe des lois de béton [gauche] et d'acier [droite]. . . . .	114
5.4	Réaction sur appui en fonction de la flèche au centre . . . . .	115
5.5	Comportement cyclique du béton et de l'acier . . . . .	115
5.6	Réaction latérale à la base en fonction du déplacement latéral en tête	116
5.7	Réponse à une courte excitation sismique . . . . .	117
5.8	Maillage FEAP . . . . .	118
5.9	Comportement cyclique du béton. . . . .	118
5.10	Réponse globale du modèle FEAP. . . . .	119
5.11	Équilibre énergétique. . . . .	120

# Liste des tableaux

2.1	Modèles de structures et d'amortissement global. . . . .	21
2.2	Analyses de la réponse sismique d'un portique en BA . . . . .	28
3.1	Variables internes du modèle. . . . .	47
3.2	Équations d'état du système $\mathcal{S}$ . . . . .	53
3.3	Équations d'évolution des variables internes. . . . .	55
4.1	Expression du problème élémentaire. . . . .	85
5.1	Comparaison des résultats numériques et théoriques . . . . .	113





# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

1	Présentation générale . . . . .	2
2	Énoncé de la thèse . . . . .	2
3	Motivations et objectifs . . . . .	3
4	Méthodologie . . . . .	5
5	Plan . . . . .	6
6	Contributions originales de la thèse . . . . .	7

---

# 1 Présentation générale

Cette thèse de doctorat a commencé le 1<sup>er</sup> octobre 2006 et a été réalisée au sein de l'UTR « ouvrages sous conditions extrêmes » du LMT à Cachan et du « groupe de recherche sur les structures » de l'École Polytechnique de Montréal (EPM) où j'ai passé quatre sessions dans le cadre d'un accord de codirection. Cette collaboration internationale avec des spécialistes de la modélisation numérique non-linéaire des structures de génie civil a été fructueuse. Elle a tout d'abord permis de souligner que la modélisation de l'amortissement est un point faible dans les simulations sismiques numériques non-linéaires. Ce constat a ensuite donné lieu à la formulation et à l'implantation d'un nouvel élément fini de poutre en béton armé capable de représenter de façon physique les principales sources d'amortissement qui proviennent de la dissipation d'énergie dans les matériaux.

Grâce à cette collaboration j'ai pu bénéficier de compétences et d'outils de travail complémentaires. À l'EPM, j'ai profité des résultats expérimentaux d'une structure en béton armé de type portique testée sur la table vibrante du laboratoire de génie civil de l'école. Des logiciels commerciaux et de recherche dédiés à l'analyse non-linéaire de telles structures y ont aussi été mis à ma disposition. À l'ENS Cachan, j'ai bénéficié de l'expertise de l'UTR « ouvrages sous conditions extrêmes » dans la formulation théorique et l'implantation numérique de modèles de matériaux et de problèmes de mécanique des solides déformables.

Ce rapprochement entre les deux équipes, à l'ENS Cachan et à L'EPM, a été également motivé par la volonté de préparer ensemble une nouvelle famille de modèles capables de donner une interprétation plus fine des résultats expérimentaux en génie parasismique, avec la prise en compte des mesures locales des champs, par exemple les contraintes et les mécanismes d'endommagement dans les zones les plus sollicitées.

## 2 Énoncé de la thèse

Les simulations numériques sismiques non-linéaires ont une place importante dans les méthodes récentes d'analyse des structures de génie civil sous charge sismique. La réponse de la structure est déterminée par l'équilibre entre, d'une part, les énergies sismique et des charges externes statiques et, d'autre part, l'énergie dissipée par le comportement non-linéaire de la structure, l'énergie dissipée par un modèle d'amortissement ainsi que l'énergie cinétique. La définition d'un modèle d'amortissement est à la fois conséquence et cause d'incertitudes dans les simulations non-linéaires : dans la grande majorité des cas supposés visqueux,

les modèles d'amortissement manquent d'une interprétation physique claire et la quantité d'énergie qu'ils dissipent est difficile à maîtriser au cours des analyses sismiques. Ces incertitudes sont d'autant plus préjudiciables que des méthodes récentes d'analyse des structures reposent sur des quantités locales, comme la demande en déformation dans les sections des rotules plastiques. Or, la prédiction de la demande en déformation est directement liée à la quantité d'énergie que doit dissiper le modèle non-linéaire de la structure, elle-même liée à la quantité d'énergie dissipée par le modèle global d'amortissement introduit dans la simulation. C'est cette interaction mal maîtrisée entre l'amortissement généré par la réponse non-linéaire dissipative d'énergie de la structure et l'amortissement généré par un modèle d'amortissement qui fait l'objet de notre attention dans cette thèse.

Nous voudrions démontrer les points suivants :

1. Plusieurs modèles d'amortissement différents sont utilisés dans les simulations sismiques non-linéaires (amortissements de type Rayleigh, modal, etc.) et le choix d'un de ces modèles a des conséquences sur la prédiction des quantités locales comme par exemple la demande en déformation dans les sections d'une rotule plastique. De ce fait, les méthodes de l'état de l'art pour modéliser l'amortissement ne sont pas consistantes avec ce qu'on attend d'une analyse sismique non-linéaire.
2. Afin d'améliorer la prédiction des quantités locales, les modèles de structure doivent être capables de dissiper par des mécanismes non-linéaires l'énergie sismique qui leur est fournie. L'énergie sismique ne doit idéalement pas être dissipée par un modèle d'amortissement global, mais par la modélisation explicite des mécanismes physiques qui modifient irréversiblement les caractéristiques de la structure.
3. Il est possible de formuler des modèles d'élément de structure capables de représenter physiquement l'amortissement qui provient de la modélisation explicite de nombreuses sources de dissipation d'énergie dans les matériaux qui constituent la structure, et d'implanter ces modèles de façon robuste dans un code de calcul par éléments finis, ceci sans générer de temps de calcul trop longs.

### 3 Motivations et objectifs

Deux motivations principales sont à l'origine de ce travail de thèse. La première a déjà été abordée dans la section précédente : améliorer la prédiction de quantités locales dans les analyses sismiques non-linéaires. En effet, de nouvelles méthodes

ont récemment été développées pour le dimensionnement et l'analyse de structures sous chargement sismique : ces méthodes sont basées sur les déplacements ou les déformations et doivent pallier les inconvénients des méthodes basées sur les forces. À partir des caractéristiques géométriques d'une structure et des plans de ferrailage, la demande en déplacement ou en déformation – préférée par certaines méthodes car directement liée à l'endommagement – est déterminée à partir d'analyses sismiques non-linéaires temporelles ou d'analyses en poussée progressive. Ces méthodes d'ingénierie reposent sur la modélisation du comportement sismique non-linéaire des structures qui doit être fiable par conséquent. L'amélioration de la fiabilité de ces méthodes passe par une meilleure représentation physique des phénomènes dissipatifs d'énergie, parmi lesquels ceux qui se produisent dans les matériaux.

La deuxième motivation nous vient du développement de nouvelles tendances dans les essais sur structures. D'une part, l'utilisation par exemple de capteurs optiques associée à des techniques de corrélation d'images permet de reconstituer l'évolution du champ de déformation dans les structures testées et donne donc accès à des données importantes pour la validation de la prédiction numérique de l'évolution de quantités locales. D'autre part, il est impossible, pour des essais réalisés sur des structures à grande échelle (table vibrante, essais pseudo-dynamiques), de faire l'acquisition de toutes les quantités qui pourraient s'avérer utiles lors du dépouillement et de l'interprétation des données expérimentales ; la simulation numérique des comportements locaux constitue alors une aide pour la réalisation de cette tâche.

Une tendance actuelle consiste à développer des modèles adaptatifs – dédiés à un problème donné – plutôt que des modèles généraux capables de s'adapter à toutes les situations. Dans cette logique, nous avons choisi de nous concentrer sur le développement d'un modèle capable de reproduire le comportement non-linéaire jusqu'à la ruine d'une poutre ou d'un poteau sous une sollicitation de flexion composée et pour laquelle les effets du cisaillement sont négligeables. Nous voulons que ce modèle soit capable de reproduire les principales caractéristiques de la réponse non-linéaire de chacun des matériaux qui le composent afin de donner une base physique solide à la dissipation d'énergie matérielle. L'implantation numérique de ce modèle doit être robuste et générer des temps de calcul acceptables. Un tel élément sera adapté pour décrire le comportement des sections courantes des structures de type portique. Cet élément associé à un autre type d'éléments capables de tenir compte des effets du cisaillement pour modéliser les nœuds d'ossature et éventuellement à d'autres éléments encore pour représenter les effets de l'interaction sol-structure, permettrait de définir un modèle de portique dont on peut espérer qu'il reproduise avec précision l'amortissement structurel.

## 4 Méthodologie

Pour résoudre un problème de mécanique classique, deux stratégies peuvent être suivies : ou bien (i) accumuler des données expérimentales et ainsi acquérir une connaissance du problème qui permettra de le comprendre et de le résoudre, ou bien (ii) le formuler dans une théorie mathématique existante qui donnera les clés permettant de le résoudre.

Ces deux méthodes sont, en ce qui concerne la modélisation de l'évolution d'une structure non-linéaire de type portique en béton armé sous un chargement sismique, présentes dans la littérature. La majorité des publications sur ce sujet participent à l'accumulation des connaissances et au partage d'une expérience dans la communauté du génie parasismique. Ces publications présentent en général des résultats expérimentaux ainsi qu'un modèle de structure associé à un modèle global d'amortissement et finissent par définir sous quelles hypothèses les modélisations permettent de retrouver les résultats expérimentaux. D'autres publications présentent la formulation théorique d'un nouveau modèle de structure et montrent sa capacité à prédire certains phénomènes physiques.

Historiquement, ces deux démarches ont montré leur importance. C'est en partie grâce aux observations expérimentales de Galilée et d'autres scientifiques qui l'ont précédé que Newton a pu développer les concepts qui lui ont permis de mettre en équation des phénomènes astronomiques et de développer ainsi des outils que nous utilisons encore aujourd'hui pour prédire l'évolution temporelle de systèmes mécaniques. La théorie de Newton est toutefois insuffisante pour résoudre le problème qui nous intéresse : modéliser les sources de dissipation d'énergie dans un système dynamique. À ce sujet, Maxwell a écrit [Max] : « C'est seulement pour un être de niveau intermédiaire, qui peut mettre la main sur certaines formes d'énergie alors que d'autres lui échappent, que l'énergie semble se transformer de manière inévitable d'un état où elle est disponible en un état où elle est dissipée. »

C'est peut-être à cause de ces mots peu optimistes que beaucoup de recherches sur l'amortissement se limitent à accumuler de l'expérience et qu'une formalisation plus théorique du problème n'est que rarement abordée. Nous voudrions utiliser des théories qui ont déjà montré leur utilité en mécanique pour contribuer à la mise en place d'une base physique plus solide pour modéliser l'amortissement dans les structures de type portique en béton armé. Pour cela, les théories physiques et numériques – postérieures à Maxwell pour certaines d'entre-elles, d'où un regain d'optimisme! – sur lesquelles nous nous appuyerons sont :

- La mécanique des milieux continus [Bat90a, Bat90b, Eri67, Ibr09] ;

- La thermodynamique des milieux continus avec variables internes [Ger83, Mau99] ;
- La méthode des éléments finis [Zie00, Ibr09, Bat96] ;
- Les méthodes numériques pour résoudre les problèmes d'inélasticité matérielle [Sim98, Ibr09].

## 5 Plan

Après ce chapitre d'introduction, le chapitre 2 sera consacré à l'étude d'un cas pratique. Nous reprendrons dans ce chapitre les résultats expérimentaux d'un portique en béton armé qui a été testé sur la table vibrante de l'École Polytechnique de Montréal et développerons plusieurs simulations numériques du comportement sismique non-linéaire de ce portique à l'aide de plusieurs modèles de réponse non-linéaire de la structure et plusieurs modèles globaux d'amortissement. L'analyse des résultats mettra en évidence les faiblesses des méthodes actuelles utilisées pour la modélisation de l'amortissement ; nous montrerons en particulier qu'elles mènent à une prédiction peu fiable des quantités locales. Enfin, nous identifierons trois conditions que les modèles de comportement non-linéaire de structures devraient remplir pour améliorer la fiabilité de la prédiction de l'évolution de quantités locales.

Dans le chapitre 3, nous présenterons la formulation théorique dans le cadre de la *thermodynamique avec variables internes* d'un modèle dynamique d'un élément de structure de type poutre avec une cinématique enrichie par des sauts de déplacements dus à la localisation des déplacements dans certaines sections de l'élément (fissures). La cinématique adoptée est celle d'une poutre de Euler-Bernoulli – les effets du cisaillement y sont négligés – et permet de reproduire un comportement 2D ou 3D avec des lois de comportement des matériaux 1D. Une partie de ce chapitre sera consacrée à la comparaison du modèle de béton avec les modèles de la classe des *matériaux standards généralisés*, ce qui permettra d'identifier plusieurs points qui pourront poser des problèmes de stabilité de l'algorithme de résolution numérique du problème mécanique, et de les traiter ensuite.

L'implantation de ce modèle d'élément de structure avec loi de matériau 1D dans un code de calcul par éléments finis sera présentée dans le chapitre 4. Un algorithme de résolution sera tout d'abord présenté dans un cadre général puis les applications aux cas d'un élément de barre et d'un élément de poutre multifibre seront ensuite développées.

Avant d'aborder le chapitre de conclusion qui reprendra les contributions apportées par ce travail de thèse ainsi que des perspectives de développement, le

chapitre 5 présentera des exemples d'application de l'élément multifibre. Ces exemples illustreront le comportement de l'élément sous des chargements monotone et cyclique quasi-statiques et sous des chargements sismiques.

## 6 Contributions originales de la thèse

Dans le chapitre 2 :

- Définition de deux concepts : (i) l'amortissement physique : part de l'amortissement provenant de la modélisation physique de phénomènes dissipatifs d'énergie caractéristiques de la réponse non-linéaire de la structure ; (ii) l'amortissement global forfaitaire : part de l'amortissement provenant d'un modèle d'amortissement structurel qui tient compte, sans distinction explicite, de nombreuses sources de dissipation d'énergie.
- Simulations numériques d'un portique testé sur table vibrante avec plusieurs modèles non-linéaires de réponse de la structure et plusieurs modèles d'amortissement global. Mise en évidence du manque de fiabilité de la prédiction de l'évolution des quantités locales par les modèles existants.
- Identification de propriétés que devraient posséder les modèles de réponse non-linéaire des structures afin d'améliorer la prédiction de l'évolution des quantités locales.

Dans le chapitre 3 :

- Formulation d'un nouveau modèle de matériau capable de représenter les principales sources de dissipation d'énergie, dans le béton et dans l'acier sous sollicitation sismique. Les phénomènes non-linéaires représentés sont : (i) la viscosité, la plasticité continue avec écrouissages (ii) isotrope et (iii) cinématique (apparition de déformations permanentes et de boucles d'hystérésis lors des cycles de charge-décharge), (iv) l'endommagement continu (perte de raideur), la (v) plasticité discrète avec adoucissement et (vi) l'endommagement discret avec adoucissement. De plus le modèle est capable de représenter des comportements différents en traction et en compression.
- Les aspects de la formulation du modèle qui devront être traités pour garantir la stabilité de la procédure de résolution numérique sont clairement identifiés.
- Le modèle possède toutes les qualités identifiées dans le chapitre 2 pour améliorer la prédiction du comportement sismique non-linéaire des structures. Il contient notamment les ingrédients nécessaires pour représenter les trois phases de la réponse sismique d'une structure qui sont chronologiquement : (i) une phase de faible intensité sismique où la réponse est dominée par la viscosité, (ii) une phase de forte intensité sismique où la plasticité et l'endommagement,



continus et discrets sont activés, (iii) une phase de faible intensité sismique où la structure présente des caractéristiques dissipatives différentes de celles de la structure initiale.

- Généralisation du principe du maximum de la dissipation plastique au maximum de la dissipation intrinsèque pour caractériser l'évolution des variables internes.
- Plusieurs discontinuités peuvent apparaître dans un même élément.
- Les paramètres du modèle ont une signification physique claire et leur identification est simple. La procédure complète d'identification est détaillée.

Dans le chapitre 4 :

- La formulation théorique de l'élément multifibre standard est modifiée afin de permettre l'intégration du modèle de matériau : la matrice de raideur et le vecteur des forces internes élémentaires ne sont plus fabriqués par assemblage des matrices de raideur des sections de contrôle mais par assemblage des matrices de raideur des fibres.
- Les discontinuités fortes sont introduites dans un champ de contrainte qui n'est pas nécessairement constant.
- La formulation mixte permet de construire une matrice tangente élémentaire symétrique, contrairement aux méthodes classiques formulées en déplacement.
- L'énergie dissipée par chacun des mécanismes non-linéaires explicitement modélisés dans la réponse des matériaux est quantifiée.

Dans le chapitre 5 : Les résultats de la simulation numérique sismique – réalisée avec l'élément multifibre développé dans ce travail de doctorat – d'un portique 2D en béton armé (BA) testé sur la table vibrante de l'École Polytechnique de Montréal il y a plusieurs années sont présentés et comparés à la réponse expérimentale.

## Chapitre 2

# Revue de l'état de l'art et orientations pour l'amélioration des modèles

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	10
2	Analyses sismiques non-linéaires . . . . .	13
3	Modèles de dissipation d'énergie sismique . . . . .	15
4	Analyse sismique numérique d'un portique en béton armé	22
5	Orientations pour l'amélioration des modèles . . . . .	35
6	Conclusion - Précision des objectifs de la thèse . . . . .	39

---

# 1 Introduction

Des analyses dynamiques non-linéaires sont aujourd'hui fréquemment utilisées pour la prédiction de l'endommagement des structures et la réhabilitation de structures en béton armé (BA) existantes [ASC07, ATC08]. La dissipation de l'énergie sismique en respectant un niveau des déformations inélastiques – et de l'endommagement qui leur est lié – acceptable pour satisfaire à des critères de performance donnés est requise pour obtenir un comportement sismique structurel souhaité [Vas08].

Une stratégie de réhabilitation actuelle, utilisant des critères de dimensionnement basés sur la performance, consiste à ajouter des dispositifs dissipatifs d'énergie dont les caractéristiques dissipatives sont connues [Mar04, Sod96]. Cependant, le développement des analyses dynamiques non-linéaires ne saurait se faire sans le développement de modèles de comportement non-linéaire des structures toujours plus élaborés et prédictifs. En effet, d'une part, les propriétés fondamentales d'une structure en BA initialement fissurée sont difficiles à quantifier et peuvent affecter de façon non négligeable la demande en déplacement et en ductilité [Faj93]; et, d'autre part, l'évolution de quantités fondamentales dans la structure doit être prédite pour mener des analyses non-linéaires dynamiques fiables : le déplacement inter-étage, la capacité résiduelle des sections endommagées, et même la demande locale en déformation pour des méthodes de dimensionnement récentes basées sur le concept de risque d'endommagement uniforme [Pri07] (p.32). L'énergie sismique est dissipée par des phénomènes physiques qui se produisent à de nombreuses échelles qui sont difficiles à représenter pour des structures en BA (figure 2.1), à moins que les modèles non-linéaires adéquats ne soient utilisés [Ibr03b, Mar06, Ibr09, Ibr05].

Le besoin d'améliorer la précision des modèles non-linéaires est aussi motivé par les importants progrès qui ont été réalisés dans le domaine des essais dynamiques réalisés sur des structures de génie civil complexes [Zem03, Les07, Kaz06, Far02]. Le développement de nouveaux appareils de mesure, par exemple les capteurs optiques, permettent aujourd'hui de faire une meilleure corrélation entre des résultats expérimentaux locaux (cycles d'ouverture-fermeture de fissures, friction dans les fissures, rotations, courbures, hystérésis de la déformation, etc.) et des résultats numériques provenant de modèles structuraux élaborés.

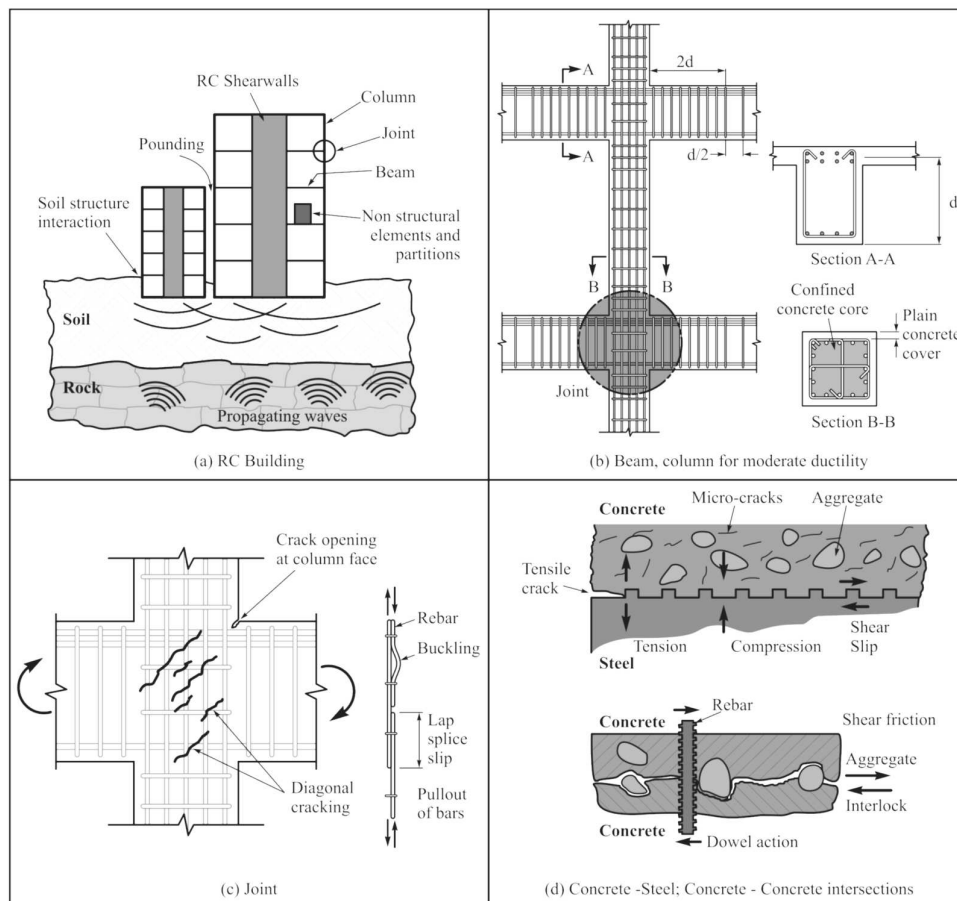
Les codes réglementaires de dimensionnement [NRC05, Eur05, PS 95] spécifient le plus souvent les accélérogrammes sous forme de spectres de réponse qui tiennent compte de certaines caractéristiques dissipatives des structures : (i) spectres linéaires avec un pourcentage d'amortissement critique visqueux  $\xi$  ou (ii) spectres inélastiques. Le rapport ATC-63 [ATC08] donne des directives pour mener des analyses dynamiques non-linéaires. Il y est notamment mentionné que, dans les analyses

non-linéaires, la plus grande partie de l'énergie provient de la réponse inélastique des composants structuraux; l'ajout d'une part d'amortissement visqueux supplémentaire comprise entre 2% et 5% de l'amortissement critique est recommandé pour prendre en compte les mécanismes dissipatifs qui ne sont pas autrement représentés dans le modèle de réponse inélastique de la structure. Deux sources d'amortissement sont ainsi modélisées dans les analyses temporelles inélastiques : (i) la dissipation d'énergie qui provient de phénomènes dissipatifs explicitement modélisés dans la réponse inélastique des éléments structurels; (ii) l'amortissement additionnel, censé représenter de nombreuses sources incertaines de dissipation de l'énergie sismique dans les structures en BA (figure 2.1). La quantité d'énergie dissipée par l'amortissement visqueux additionnel doit être contrôlée pour ne pas prendre des valeurs trop importantes par rapport à l'énergie dissipée par le modèle inélastique de structure.

La part de la dissipation d'énergie provenant de phénomènes dissipatifs explicitement modélisés dans une analyse dynamique non-linéaire sera dans la suite mentionnée par l'expression **amortissement modélisé de façon physique**; la part restante de la dissipation d'énergie n'est en fait pas dissipée par la structure et sera mentionnée dans la suite par l'expression **amortissement global forfaitaire**. Le principal objectif de ce chapitre est de définir une base théorique pour la modélisation physique de l'amortissement et augmenter sa part vis-à-vis de l'amortissement global forfaitaire dans les simulations non-linéaires. Nous nous sommes limités aux structures en BA de type portique.

Nous verrons tout d'abord dans ce chapitre que la prédiction de l'évolution des propriétés d'une structure joue un rôle fondamental dans les démarches actuelles d'analyse des structures. Nous présenterons ensuite les modèles d'amortissement actuellement utilisés en dynamique des structures et insisterons sur la dépendance entre l'amortissement global forfaitaire et le modèle inélastique de structure. Cette dépendance est mise en évidence lorsqu'on cherche à obtenir, à partir d'un modèle de structure non-linéaire donné, des résultats numériques en accord avec des résultats expérimentaux connus. Ensuite, nous donnerons la description d'une structure de type portique en BA qui a été testée sur la table vibrante de l'École Polytechnique de Montréal [Fil98a, Fil98b], puis nous évaluerons les performances de plusieurs analyses dynamiques non-linéaires à partir de différents modèles structuraux disponibles dans les logiciels – plasticité concentrée [Car04], éléments fibres [CSI07, Pet99], éléments finis 2D [Won02, Saa07] – associés à différents modèles d'amortissement global forfaitaire de type Rayleigh. Les analyses que nous faisons visent à prédire l'évolution de paramètres de la réponse globale tels que les déplacements et l'effort tranchant à la base et l'évolution de paramètres décrivant des comportements plus locaux tels que la réponse sous forme de courbes représentant le moment fléchissant

en fonction de la rotation dans des sections fortement sollicitées. Les paramètres de la réponse globale sont des quantités couramment utilisées dans les analyses sismiques d'ouvrages. La réponse inélastique de sections permet d'estimer la quantité d'énergie dissipée par des processus irréversibles qui modifient les propriétés de la structure. L'objectif de cette section est de discuter des conséquences de la décomposition classique de la quantité totale d'énergie dissipée en une partie globale forfaitaire et une partie physique sur des résultats globaux et locaux d'analyses sismiques temporelles non-linéaires. Finalement, nous proposerons une classification des phénomènes dissipatifs qui caractérise les méthodes actuelles et nous définirons des lignes directrices à suivre afin d'améliorer leur capacité prédictive. Le cadre de la *thermodynamique avec variables internes* dans lequel il est possible de développer des modèles de matériau détaillés possédant les qualités numériques requises pour une implantation robuste dans un code de calcul sera aussi rapidement introduit.



**Fig. 2.1:** Modélisation multi-échelle pour la dissipation d'énergie dans les structures en BA de type portique.

## 2 Analyses sismiques non-linéaires

### 2.1 L'avènement des analyses non-linéaires

Les méthodes basées sur le concept de force sont largement utilisées dans le dimensionnement des ouvrages de génie civil sous chargement sismique [PS 95, Eur05] mais sont remises en question aujourd'hui. Nous reprenons ici les arguments qui se trouvent dans le premier chapitre de l'imposant ouvrage de Priestley, Calvi et Kowalsky consacré aux méthodes récentes de dimensionnement basées sur les déplacements [Pri07] :

- La procédure de dimensionnement basée sur les forces commence par une estimation de la raideur qui permet de calculer les périodes propres et la façon dont les efforts sismiques se répartissent dans les éléments. Or, la raideur ne peut pas être connue avant le dimensionnement des rotules plastiques à la fin du processus de dimensionnement ;
- Répartir les forces entre les différents éléments de structure en considérant leur raideur initiale revient à supposer que tous les éléments atteindront leur limite élastique en même temps, ce qui n'est souvent pas le cas ;
- La procédure de dimensionnement basée sur les forces repose sur l'hypothèse qu'un unique coefficient de comportement (déterminé à partir de la demande en ductilité) suffit pour un certain type de structures et de matériaux, ce qui est faux.

Afin de pallier ces inconvénients, des méthodes de dimensionnement basées sur les déplacements ont été développées. Elles comprennent notamment la méthode de dimensionnement basées sur la performance qui consiste à définir *a priori* des critères que la structure devra remplir une fois dimensionnée. Ces critères de performance sont concrètement exprimés en terme de déplacement inter-étage et même, dans les procédures les plus évoluées, en terme d'état de déformation, quantités locales qui peuvent être reliées à l'endommagement [Pri07]. La définition de ces critères exige en particulier de se référer à des relations entre le degré de détail du ferrailage des sections et la demande en déformation : relations déterminées par des analyses de poussée progressive ("pushover") ou par des analyses dynamiques temporelles non-linéaires ("time-history inelastic analysis").

Dans l'ingénierie, des méthodes simplifiées sont utilisées pour prendre en compte la réponse non-linéaire d'une structure sans avoir à faire d'analyses en poussée progressive ou d'analyses dynamiques temporelles non-linéaires coûteuses en temps de

modélisation et de calcul. Plusieurs méthodes simplifiées existent selon que (i) la raideur utilisée pour le calcul des périodes propres, de la répartition des efforts sismiques entre les éléments de structure et pour quantifier l'amortissement élastique – qui n'est pas représenté dans la réponse non-linéaire de la structure – est la raideur élastique ou bien la raideur sécante au déplacement maximum ; et que (ii) l'amortissement généré par la réponse non-linéaire de la structure est introduit par l'utilisation de spectres inélastiques ou d'un amortissement visqueux équivalent. Nous voudrions insister ici sur le fait que ces méthodes simplifiées reposent, implicitement, sur des résultats d'analyses en poussée progressive ou d'analyses sismiques temporelles non-linéaires – que ce soit pour la fabrication de spectres inélastiques ou de spectres fonction d'un certain pourcentage d'amortissement visqueux équivalent et pour la prédiction de la demande en déformation en fonction de la géométrie de certaines sections – qui sont à la base des pratiques de dimensionnement et d'analyses sismiques des structures. Chercher à améliorer les analyses sismiques temporelles non-linéaires est donc d'un intérêt fondamental en génie parasismique.

## 2.2 Évolution des propriétés d'une structure sous séisme

La figure 2.1 représente une structure en béton armé dans son environnement. Si l'on considère une structure standard de type portique en béton armé, les sources de dissipation d'énergie, qui dépendent en général de l'amplitude de l'excitation [Ste80] et de la fréquence d'excitation, peuvent être classifiées en sources internes et externes à la structure. La dissipation d'énergie externe provient (i) de la géométrie et du type de fondations (amortissement par radiations d'énergie) et d'effets de site [Dri09], (ii) de la quantité et du type de composants non-structuraux, (iii) de l'interaction avec les constructions voisines (entrechoquements, perturbation de la propagation des ondes dans les fondations), (iv) de la résistance de l'air environnant, (v) d'une interaction fluide-structure [Seg09], etc. Les sources de dissipation d'énergie externes ne modifient pas directement les caractéristiques de la structure. La dissipation d'énergie interne provient (i) de sources matérielles : amortissement inhérent au comportement constitutif des matériaux [Ami06], déformations plastiques, endommagement local (microfissures), friction entre lèvres de béton, ouvertures et refermetures de fissures qui créent un impact inélastique, chaleur générée par de la fatigue à faible nombre de cycles, etc. et (ii) de sources structurelles : la quantité et le niveau de détail du ferrailage qui confine le béton et lui confère de la ductilité, la déformabilité des joints d'ossature, flambement des barres d'acier, effet goujon, glissement entre acier et béton, etc. La dissipation d'énergie interne est le résultat de modifications irréversibles dans la structure. Ce sont des phénomènes non-linéaires qui se produisent à différentes échelles et qui modifient les propriétés

de la structure telle par exemple la capacité résistante de certaines de ses sections. Modéliser ces phénomènes dissipatifs est de ce fait un point clé dans les analyses basées sur la performance et pour la définition de procédures de dimensionnement fiables pour les systèmes dynamiques non-linéaires.

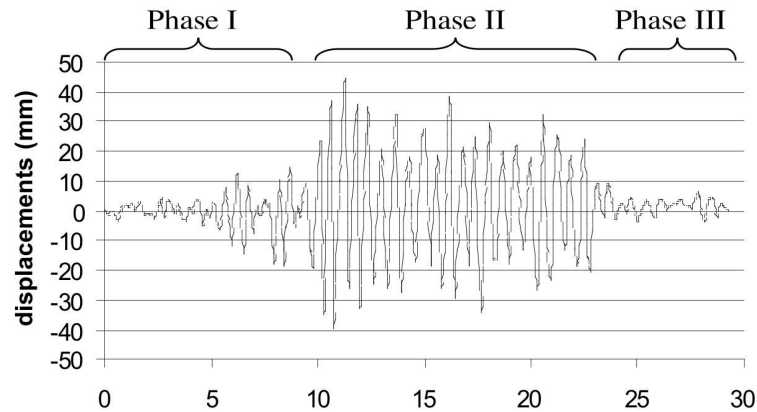
La figure 2.2 illustre les trois phases qui peuvent être communément distinguées dans la réponse sismique inélastique d'une structure en béton armé et qui témoignent de l'évolution de ses propriétés. La phase I représente la réponse à de faibles intensités du signal sismique, quand la structure reste dans son domaine linéaire. L'énergie sismique est essentiellement dissipée par le comportement viscoélastique des matériaux [Les07]. Dans la phase II, l'intensité du signal sismique est la plus forte, la structure s'endommage (dégradation de sa raideur et de sa capacité résistante) et des déformations résiduelles apparaissent. L'énergie sismique est à la fois stockée par la structure (écrouissage) et dissipée de façon irréversible par les mécanismes non-linéaires qui sont mis en jeu lors de ses modifications internes. Finalement, dans la phase III, après avoir été fortement excitée, la structure subit à nouveau de faibles sollicitations mais cette fois avec des déplacements résiduels, des périodes de vibration plus grandes que pour la structure avant séisme, et des caractéristiques dissipatives différentes à cause, par exemple, des frottements dans les fissures qui se sont ouvertes. Une quatrième phase de retour vers un état de repos en vibrations libres suit ces trois phases. La figure 2.2 montre que pendant les phases I et III, la quantité d'énergie sismique que la structure doit stocker et dissiper est petite alors que pendant la phase II, entre 10 s et 23 s, la structure doit absorber et dissiper une grande quantité d'énergie sismique. Les caractéristiques particulières de ces trois phases doivent être modélisées de sorte que les analyses sismiques basées sur la performance, pour des structures existantes ou pour le dimensionnement de nouvelles structures soient fiables ; cependant, peu de modèles sont actuellement capables de représenter chacune de ces trois phases.

## **3 Modèles de dissipation d'énergie pour les bâtiments sous séisme**

### **3.1 Amortissement physique et amortissement global forfaitaire**

Nous avons défini dans l'introduction de ce chapitre les notions d'amortissement physique et d'amortissement global forfaitaire ainsi que, dans la section précédente,





**Fig. 2.2:** Réponse sismique typique d'une structure en béton armé inélastique.

les notions d'amortissement élastique et d'amortissement provenant de la réponse non-linéaire de la structure. Nous voudrions ici préciser ces notions et justifier le fait que nous préférons dans la suite les notions d'amortissements physique et global forfaitaire. Tout modèle de structure présente une phase élastique dans laquelle aucune source de dissipation d'énergie n'est interne à la structure. Or, physiquement, une structure élastique mise en mouvement finit par retourner au repos, ce qui témoigne de l'existence de sources d'amortissement : ces sources sont modélisées par un amortissement élastique externe à la structure, par exemple par l'amortissement de Rayleigh. Quand la structure sort de son domaine élastique, le modèle inélastique de structure génère de l'amortissement puisqu'il représente des sources internes de dissipation d'énergie.

Cette classification des phénomènes d'amortissement ne nous satisfait pas car elle manque de précision. En effet, il est possible par exemple d'introduire de la viscoélasticité dans les modèles : c'est une source d'amortissement élastique modélisée par une source interne de dissipation (la viscosité des matériaux). La modélisation non-physique de l'amortissement élastique pose notamment le problème du choix d'une matrice de raideur pour définir l'amortissement externe : raideur initiale ou tangente ? Nous verrons dans cette section que ce choix n'est pas évident mais qu'il a des conséquences importantes sur les conclusions des simulations. En effet, comment être certain que l'amortissement externe élastique ne prend pas déjà en compte – à cause du manque de précision des modèles inélastiques de structure – des sources d'amortissement provenant de la réponse inélastique de la structure ? Et que se passe-t-il alors par exemple quand une même source physique d'amortissement est prise en compte deux fois ?

Ainsi préférons-nous distinguer les sources d'amortissement physique – provenant

de phénomènes dissipatifs explicitement modélisés – des sources d'amortissement global forfaitaire – rassemblant toutes les sources de dissipation d'énergie qui ne sont pas explicitement modélisées. Il existe plusieurs méthodes pour prendre en compte dans les simulations l'amortissement global forfaitaire : amortissement modal, de Caughey, de Rayleigh. Pour illustrer nos idées, il nous suffira dans la suite de présenter l'amortissement de Rayleigh, d'ailleurs largement utilisé dans les simulations sismiques.

### 3.2 Formulation de l'amortissement de Rayleigh

La réponse inélastique d'une structure à un séisme peut être calculée à partir de l'équation de mouvement suivante :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{R}(t) = \mathbf{F}_{sta} - \mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{C}$  sont les matrices de masse et d'amortissement et  $\mathbf{R}(t)$  est le vecteur des efforts résistants développés par la structure ;  $\mathbf{F}_{sta}$  est le vecteur des charges statiques appliquées à la structure et  $-\mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{\mathbf{u}}_g(t)$  représente la force sismique appliquée, avec  $\mathbf{r}$  la matrice indiquant les degrés de liberté dynamiques pour les masses directionnelles et enfin  $\mathbf{u}_g(t)$  le vecteur de l'accélération sismique du sol. Dans la plupart des analyses sismiques, une forme d'amortissement de Rayleigh est utilisée pour dissiper la part de l'énergie sismique qui n'est pas prise en compte dans la réponse non-linéaire de la structure  $\mathbf{R}(t)$  (amortissement forfaitaire global). Dans ce cas, plusieurs définitions de la matrice d'amortissement sont données dans la littérature :

$$\mathbf{C}(t)_{[i]} = (a_M \mathbf{M} + b_K \mathbf{K}_0)_{[1]} \quad \text{ou} \quad (a_M \mathbf{M} + b_K \mathbf{K}_{tan})_{[2]} \quad \text{ou} \quad (a_M(t) \mathbf{M} + b_K(t) \mathbf{K}_{tan})_{[3]} \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{K}_0$  est la matrice de raideur élastique initiale et  $\mathbf{K}_{tan}$  est la matrice de raideur tangente. Les coefficients  $a_M$  et  $b_K$  déterminent la quantité d'amortissement forfaitaire global pour deux fréquences propres de la structure choisies. La raideur, les efforts résistants et d'inertie ont une signification physique claire ; l'amortissement de Rayleigh, quant à lui, n'en a pas [Kar90, Jea86]. Plusieurs chercheurs ont présenté des analyses sismiques de systèmes structurels non-linéaires en utilisant plusieurs des modèles d'amortissement présentés dans les équations (2.2) [Cha08, Hal06, Pri05, Lé92]. Il en ressort que le modèle  $\mathbf{C}(t)_{[3]}$  est le meilleur modèle pour maintenir une valeur constante d'amortissement global forfaitaire tout au long de l'analyse et ainsi éviter l'apparition de forces internes d'amortissement irréalistes. Cependant, cela ne signifie pas que le modèle  $\mathbf{C}(t)_{[3]}$  est, dans l'absolu, le meilleur pour une analyse sismique non linéaire : (i) il sera question dans la section 3.4 de montrer que la qualité

d'un modèle d'amortissement global forfaitaire dépend du modèle structurel non-linéaire qui lui est associé et (ii) la mise à jour des paramètres  $a_M(t)$  et  $b_K(t)$  requiert la résolution à chaque pas de temps d'un problème aux valeurs propres, ce qui n'est pas, du point de vue des performances numériques de la simulation, un avantage. Comme alternative, le modèle  $\mathbf{C}(t)_{[2]}$  permet de prendre en compte les changements de raideur de la structure et ainsi, lui aussi, de contrôler les forces d'amortissement internes, contrairement au modèle  $\mathbf{C}_{[1]}$ . Dans ce cas, les coefficients  $a_M$  et  $b_K$  sont le plus souvent calculés à partir des propriétés dynamiques initiales de la structure. À noter qu'une analyse dite "pushover", ou toute autre approximation, peut être utilisée afin d'estimer la raideur sécante une fois que la ductilité pour laquelle la structure a été dimensionnée est atteinte. Il est ainsi possible d'estimer la période de vibration de la structure endommagée pour les calculs de  $a_M$  et  $b_K$ . Dans de nombreuses analyses non-linéaires, les propriétés dynamiques initiales de la structure sont utilisées pour identifier un modèle d'amortissement global forfaitaire  $\mathbf{C}_{[1]}$  qui restera constant pendant toute la durée de l'analyse [Les07, Kaz06, Fil98b], ce qui a été insatisfaisant dans plusieurs autres cas [Cha08, Hal06, Pri05, Lé92]. Ainsi le choix d'un modèle d'amortissement global forfaitaire ne repose-t-il sur aucune base physique solide, et des stratégies de modélisation différentes peuvent aboutir à des résultats satisfaisants.

### 3.3 Applications expérimentales et numériques

Plusieurs auteurs présentent les résultats d'analyses de structures en utilisant différents modèles d'amortissement. Premièrement, en ce qui concerne les études expérimentales, Lamarche *et al.* [Lam08] ont réalisé des tests de vibration forcée sur des structures de taille réelle de type portique à deux étages, construites en béton haute performance, préalablement soumises à des chargements sismiques et, en conséquence, endommagées. Les pourcentages d'amortissement critique mesurés s'étalent entre 1,5% et 2,5%. Dans l'analyse *a posteriori* de murs de refend en béton armé testés sur table vibrante, Lestuzzi et Bachmann [Les07] retrouvent la quantité totale d'énergie sismique donnée à la structure après retour à l'équilibre en vibration libre en additionnant, à partir des mesures expérimentales, l'énergie dissipée dans la rotule plastique qui s'est formée à la base du mur, l'énergie de friction dissipée dans le système de roulement sous les masses concentrées et l'énergie dissipée par un amortissement supposé visqueux. Un pourcentage d'amortissement critique de 1,5% a été retenu à une fréquence de 1,5 Hz pour calculer la quantité d'amortissement visqueux dissipée.

### Quelques mots sur Rayleigh :

L'amortissement de Rayleigh est bien souvent vivement critiqué ; il serait d'autant plus injuste de ne pas rendre hommage à John William Strutt, lord Rayleigh (1842-1919), à qui on doit l'introduction de la dissipation d'énergie dans les systèmes physiques. Avant lui, les équations de mouvement étaient dérivées dans un monde qu'on pourrait qualifier de parfait – sans frottements ni perte d'énergie sous quelque forme que ce soit dans les systèmes mécaniques étudiés. Je reproduis ici un extrait de sa *Theory of Sound* [Ray45] :

- Vol. I, §80 : “By d'Alembert's Principle in combination with that of Virtual Velocities,

$$\sum m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = \sum (F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z)$$

where  $\delta x, \delta y, \delta z$  denote a displacement of the system of the most general kind possible without violating the connections of its parts.” ;

- Vol. I, § 81 : “There is also another group of forces whose existence it is often advantageous to recognize specially, namely those arising from friction and viscosity. If we suppose that each particle of the system is retarded by forces proportional to its component velocities, the effect will be shown in the fundamental equation (ci-dessus) §80 by the addition to the left-hand member of the terms

$$\sum (k_x\dot{x}\delta x + k_y\dot{y}\delta y + k_z\dot{z}\delta z)$$

where  $k_x, k_y, k_z$  are coefficients independent of the velocities, but possibly dependent on the configuration of the system.” (...)

- Rayleigh then defines “the function  $F$ , which may be called the Dissipation Function” :

$$F = \frac{1}{2} \sum (k_x\dot{x}^2 + k_y\dot{y}^2 + k_z\dot{z}^2)$$

“ $F$  represents half the rate at which energy is dissipated”.

Cette idée de fonction de dissipation est d'ailleurs reprise en thermodynamique quand on définit un potentiel de dissipation (équivalent à la fonction critère pour les modèles associés)

Deuxièmement, en ce qui concerne les études numériques, même si un amortissement de Rayleigh conventionnel est difficilement contrôlable quand la structure est non-linéaire, de nombreux chercheurs ont fait état de corrélations satisfaisantes avec des résultats expérimentaux dans leurs travaux. Maragakis *et al.* [Mar93] ont mené

des analyses dynamiques linéaires de quatre bâtiments en béton armé frappés par le séisme de Wihittier Narrows de 1987. Afin de reproduire, à partir d'un modèle élastique, la réponse observée expérimentalement pour ces structures, le modèle d'amortissement global forfaitaire  $\mathbf{C}_{[1]}$  avec un pourcentage d'amortissement critique de 7% a été retenu. Takayanagi and Schnobrich [Tak79] ont modélisé la réponse non-linéaire de murs de refend en béton armé couplés testés sur table vibrante à l'aide de lois de comportement non-linéaires concentrées dans certaines sections. Ces lois sont de type moment-courbure et définies, à l'échelle de la section de structure, d'une façon fine puisqu'elles sont capable de reproduire des dégradations de raideur et de capacité résistante, des effets de pincement au cours des cycles et qu'elles prennent de plus en compte l'interaction entre effort normal et moment fléchissant. L'utilisation d'un modèle d'amortissement global forfaitaire  $\mathbf{C}_{[2]}$  avec un pourcentage d'amortissement critique de 2% pour le premier mode initial a permis d'obtenir une bonne correspondance entre résultats expérimentaux et numériques. Kazaz *et al.* [Kaz06] ont reproduit numériquement des tests de murs en béton armé à l'aide d'éléments finis 2D contenant des lois constitutives non-linéaires pour le béton et pour l'acier. La table vibrante ainsi que les connections ont aussi été modélisées. Les auteurs présentent des résultats numériques en accord avec les données expérimentales avec le choix du modèle d'amortissement  $\mathbf{C}_{[1]}$  calibré de sorte qu'il génère un amortissement de 2% pour les deux premiers modes. Faria *et al.* [Far02] ont effectué des analyses *a posteriori* des essais dits « Camus » mettant en jeu un bâtiment de six étages composé de deux murs de contreventement parallèles en béton armé et réduit à l'échelle  $\frac{1}{3}$ . Ici encore, la structure a été modélisée avec des éléments finis 2D contenant des lois constitutives non-linéaires pour le béton et l'acier, et la table vibrante a été modélisée. Deux modèles d'amortissement global forfaitaire ont été considérés : un amortissement quasi nul  $\bar{\mathbf{C}}_{[1]} = \frac{b_K}{10} \mathbf{K}_0$  et un amortissement  $\bar{\mathbf{C}}_{[2]} = b_K \mathbf{K}_{tan}$  de sorte que le pourcentage d'amortissement critique est de 2% pour le premier mode de vibration de la structure élastique. L'abandon du paramètre  $a_M$  est du au fait que des fissures se développent et qu'alors il est considéré qu'un élément fissuré ( $\mathbf{K}_{tan} = 0$ ) ne peut pas transmettre d'efforts d'amortissement, ce que sous-entend la présence d'un terme proportionnel à la masse. Les meilleurs résultats ont été obtenus avec le modèle d'amortissement quasi nul. Il existe beaucoup d'autres résultats d'analyses disponibles dans la littérature [Mar09, Dav03], mais ceux présentés ici suffisent à introduire la critique de l'amortissement global forfaitaire qui suit immédiatement.

### 3.4 Critique de l'amortissement global forfaitaire

Étant donnée la variété des solutions proposées dans la table 2.1, il existe beaucoup d'incertitudes sur la façon de prendre en compte l'amortissement dans l'anal-

Modèle structurel	Amortissement forfaitaire
énergies hystérétique et de friction [Les07] élastique [Mar93]	$\mathbf{C}_{[1]}$ avec $\xi_1^{elas} = 1,5\%$ $\mathbf{C}_{[1]}$ avec $7\%$
comportement inélastique concentré dans certaines sections [Tak79]	$\mathbf{C}(t)_{[2]}$ avec $\xi_1^{elas} = 2\%$
éléments finis 2D avec loi de béton et acier non-linéaires + table vibrante modélisée [Kaz06]	$\mathbf{C}_{[1]}$ avec $\xi_1^{elas} = 2\%$
éléments finis 2D avec loi de béton et acier non-linéaires + table vibrante modélisée [Far02]	$\bar{\mathbf{C}}_{[1]} = \frac{b_K}{10} \mathbf{K}_0$ avec $b_K$ de sorte que $\xi_1^{elas} = 2\%$

**Tab. 2.1:** Modèles de structures (grossièrement décrits) et modèles d'amortissement global forfaitaire associés dans quelques analyses sismiques ( $\xi_1^{elas}$  est le pourcentage d'amortissement critique pour le premier mode de la structure élastique).

analyse non-linéaire de structures en béton armé. La table 2.1 montre en outre que le choix d'un modèle d'amortissement global forfaitaire approprié pour l'analyse sismique d'une structure non-linéaire dépend du modèle utilisé pour représenter le comportement de la structure. Par exemple, dans le cas d'une analyse linéaire équivalente [Mar93], la totalité de l'énergie sismique est dissipée par le modèle d'amortissement global et la structure ne dissipe rien par elle-même. Une telle analyse n'est pas appropriée pour prédire les propriétés modifiées de la structure (endommagement) après le passage du séisme puisque la structure sera identique à celle du début. Dans le cas d'une analyse non-linéaire, une part de la dissipation d'énergie totale est représentée physiquement par la réponse non-linéaire de la structure et la part restante est ajoutée dans la simulation, forfaitairement, par un certain modèle d'amortissement global déterminé de sorte que les résultats numériques reproduisent les déplacements, les efforts de cisaillement à la base et les autres quantités structurelles communément mesurées et d'intérêt. Cette stratégie est appropriée à la prédiction du comportement de structures qui restent élastiques et à la prédiction de quantités globales pour les structures inélastiques. Cependant, lorsque des quantités plus locales, comme la demande en déformation dans une section, sont requises [Pri07] (p.32), cette stratégie peut s'avérer peu fiable.

Il paraît impossible de modéliser toutes les sources de dissipation d'énergie. Le recours à une part d'amortissement global forfaitaire est donc nécessaire, mais il doit être maîtrisé (voir Hall [Hal06] et Charney [Cha08] pour des exemples de cas où il n'est pas maîtrisé) et il le sera d'autant plus que les modèles structuraux seront détaillés. Si l'énergie sismique est dissipée par la structure – ses propriétés sont alors modifiées – ou non, est une question fondamentale dans les analyses sismiques non-

linéaires pour prédire l'évolution de quantités comme l'endommagement. La section suivante présente une étude numérique d'un portique en béton armé testé sur la table vibrante de l'École Polytechnique de Montréal. Son objectif est d'illustrer certains effets sur des quantités globales et locales qui sont la conséquence du choix d'un modèle de structure et d'un modèle d'amortissement global forfaitaire associé. Pour cela, des logiciels de calcul proposés aux praticiens ou aux chercheurs, ainsi que des méthodes classiques de modélisation de l'amortissement global forfaitaire sont utilisés.

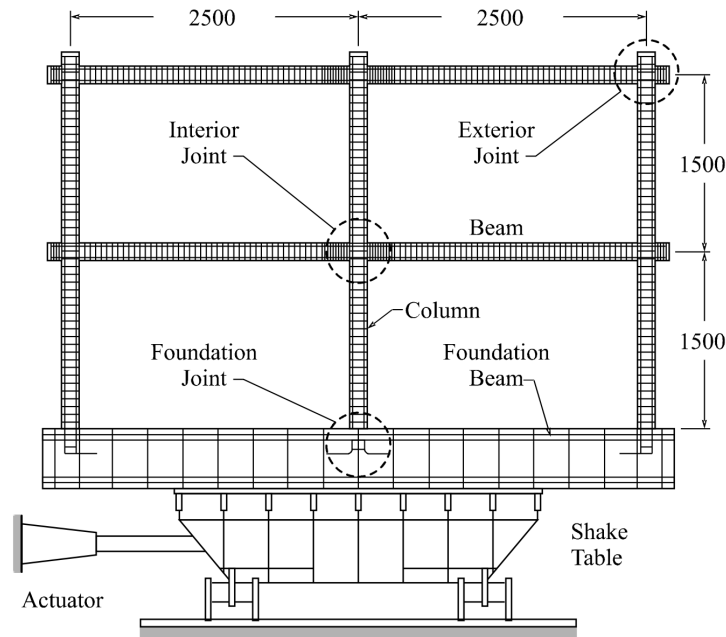
## 4 Analyse sismique numérique d'un portique en béton armé

### 4.1 Description du portique et du signal sismique

La géométrie du portique en béton armé à l'échelle  $\frac{1}{2}$  qui a été testé sur la table vibrante de l'École Polytechnique de Montréal par Filiatrault *et al.* [Fil98a, Fil98b], ainsi que le ferrailage dimensionné pour conférer à la structure une ductilité globale égale à deux sont représentés sur la figure 2.3. Une présentation détaillée du portique est donnée dans [Fil98a]. Le portique se compose de deux étages d'une hauteur de 3 m chacun soutenus par trois poteaux régulièrement positionnés tous les 5 m. Les poutres des premier et second étages ont une section carrée de 14 x 15 cm et 15 x 16 cm, les poteaux extérieurs et intérieur de 13 x 17 cm et 13 x 18 cm. Le béton a un module de Young  $E_c = 25200$  MPa, une résistance à la compression  $f'_c = 31$  MPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0,17$ ; les barres d'acier ont un module de Young  $E_s = 224600$  MPa avec une contrainte limite élastique  $f_y = 438$  MPa et une contrainte limite ultime  $f_u = 601$  MPa pour les barres longitudinales et  $f_y = 750$  MPa et  $f_u = 900$  MPa pour les aciers transversaux. Quatre blocs de béton en forme de U inversé sont attachés aux quatre poutres du portique pour représenter le poids propre. La forme de chacune de ces masses additionnelles a été calculée de sorte que son centre de gravité coïncide avec celui de la poutre. La mise en place de ces masses a provoqué l'apparition de fissures dans la structure. Le poids total de la structure est  $P = 95$  kN. Après application des charges additionnelles, la période fondamentale  $T_1 = 0,36$  s et le pourcentage d'amortissement critique  $\xi_1 = 3,3\%$  sont mesurés par un test d'impact. Le premier mode excite 91% de la masse totale de la structure et le deuxième mode excite quasiment la totalité des 9% restants.

L'accélérogramme sélectionné pour la campagne d'essais correspond à la composante N04W du séisme enregistré à Olympia, Washington le 13 avril 1949. L'accélérogramme utilisé pour les tests a été préalablement calibré de sorte que l'accélération

maximale du sol soit de 0,21 g. La figure 2.4 représente la réponse de la table vibrante à vide – ce que subira la structure une fois installée sur la table vibrante – soumise à l'accélérogramme calibré ainsi que le spectre correspondant.



**Fig. 2.3:** Portique en BA testé sur table vibrante (dimensions en mm).

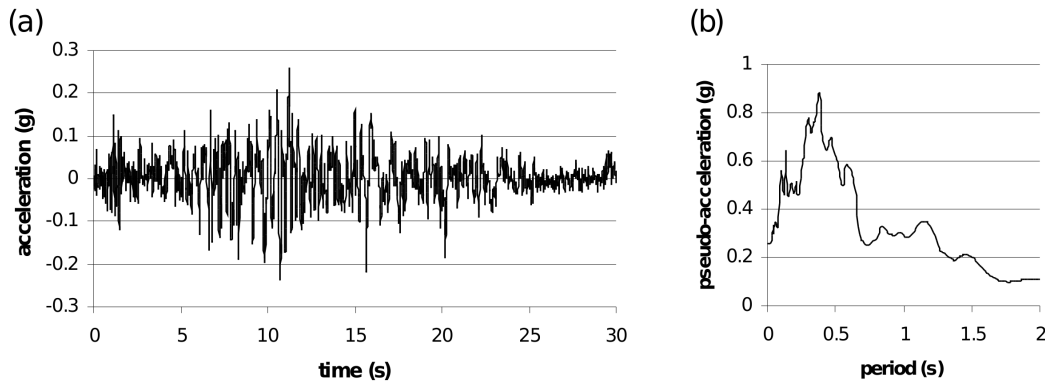
## 4.2 Modèles développés pour les simulations

Nous avons développé des modèles du portique à l'aide de trois logiciels d'analyse dynamique non-linéaire : Ruaumoko permet de définir des modèles de structure où les non-linéarités sont concentrées dans des zones prédéfinies, Perform3D a été développé dans la logique des méthodes d'analyse sismique basées sur la performance et offre la possibilité de recourir à des éléments multifibres, Vector2 est un logiciel de calculs par éléments finis pour l'analyse des structures en béton armé basé sur la "Modified Compression Field Theory".

### 4.2.1 Modèle à plasticité concentrée

Les modèles construits avec le logiciel Ruaumoko [Car04] (figure 2.5a) sont basés sur des éléments de poutre (ou poteau) avec des rotules plastiques concentrées à



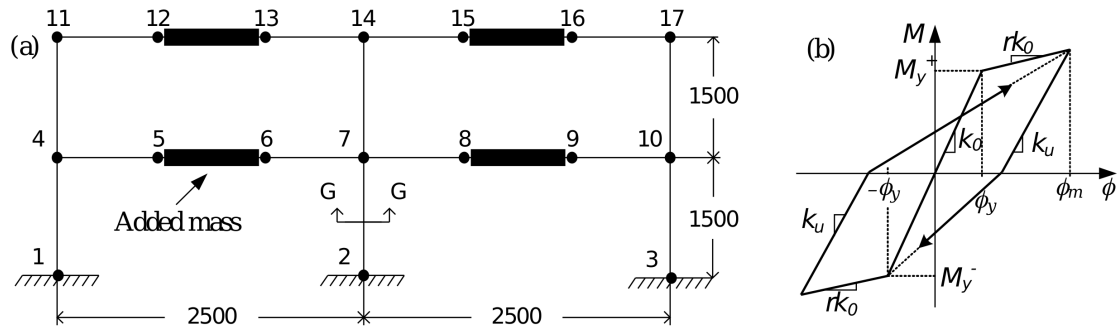


**Fig. 2.4:** Excitation sismique : (a) accélérations mesurées sur la table vibrante, (b) spectre de réponse élastique (calculé avec 5% d'amortissement critique).

leurs extrémités et dont la longueur est calculée en fonction de la géométrie des sections (demie hauteur entre des cadres d'acier transversaux). Une version modifiée du modèle de Takeda (« Q-HYST degrading rule », figure 2.5b) a été utilisée pour représenter la loi de réponse moment-courbure des rotules plastiques. La courbe enveloppe de cette loi de comportement hystérétique a été obtenue à partir du logiciel d'analyse de sections planes Response2000 [Ben01]. Conformément aux normes canadiennes sur le béton [Canadian concrete standard CSA 1994], afin de prendre en compte la fissuration due au poids propre et aux charges de service au début des analyses sismiques, le moment d'inertie des sections de poutre est réduit à 40% du moment d'inertie des sections non-fissurées et le moment d'inertie des sections de poteaux à 70% de sa valeur non-fissurée [Fil98b]. À chaque nœud d'ossature, les connections entre éléments de poutres et de poteaux sont modélisées à l'aide d'extrémités infiniment rigides dont la longueur correspond à celle de la partie encastree dans l'élément adjacent, afin de prendre en compte l'augmentation de rigidité au niveau des nœuds d'ossature. Le logiciel Ruaumoko permet d'utiliser les modèles d'amortissement global forfaitaire  $\mathbf{C}_{[1]}$  et  $\mathbf{C}(t)_{[2]}$ .

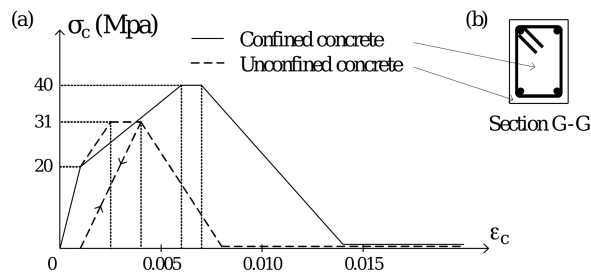
#### 4.2.2 Modèle avec éléments multifibres

Un autre modèle a été construit à partir d'éléments multifibres définis dans le logiciel de calculs non-linéaires Perform3D [CSI07]. Les sections des différents composants du portique ont été divisées en 6 couches de béton et d'acier pour les poteaux et en 8 couches pour les poutres. Une loi de comportement non-linéaire a été associée à chacun des matériaux ; la figure 2.6a montre celle adoptée pour le béton. Le maillage est identique à celui de la figure a. Nous appelons Perform3D\_1 le modèle



**Fig. 2.5:** Modèle avec plasticité concentrée : (a) géométrie, (b) modèle de réponse structurelle inélastique de Takeda modifié.

de structure pour lequel une loi de béton non-confiné est donnée à toutes les fibres de béton et où 5 points d'intégration numérique ont été considérés ; et nous appelons Perform3D\_2 le modèle de structure pour lequel une loi de béton confiné a été donnée aux fibres de béton qui se trouvent à l'intérieur des cadres d'acier transversaux et une loi de béton non-confiné aux autres fibres (figure 2.6b) et seulement 2 point d'intégration numérique ont été considérés. Les connexions à chaque nœud indiqués sont modélisées par des zones rigides aux extrémités des poteaux et des poutres : ces zones ont une longueur égale à la profondeur d'encastrement de l'élément dans l'élément voisin et ont une rigidité 10 fois supérieure à celle des autres sections de l'élément.



**Fig. 2.6:** Modèle avec éléments de poutres multifibres : (a) géométrie, (b) modèle de béton, (c) fibres confinés et non-confinés.

Aucun des modèles d'amortissement global forfaitaire  $\mathbf{C}_{[1]}$  et  $\mathbf{C}(t)_{[2]}$  n'est disponible pour les éléments multifibres de Perform3D, mais une méthode pour ajouter de l'amortissement de type Rayleigh est préconisée dans le manuel d'utilisation du logiciel [CSI07]. Afin de contrôler les modes prépondérants, la procédure est basée

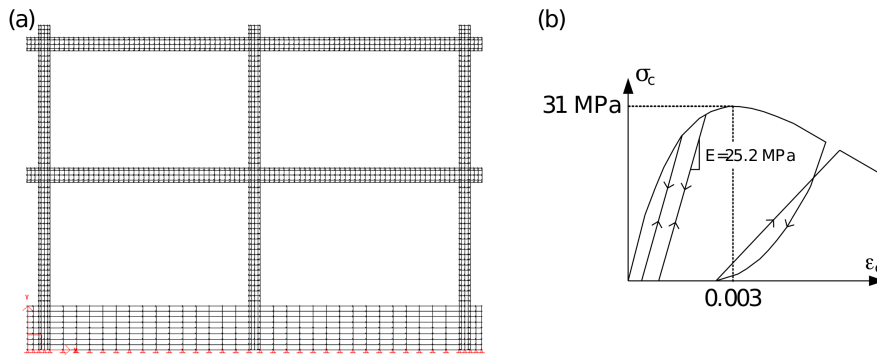
sur l'identification des coefficients de Rayleigh à partir de deux périodes  $T_A$  et  $T_B$  que le manuel pour utilisateur conseille – afin de contrôler l'amortissement pour un intervalle de période pertinent – de calculer ainsi :  $T_A = 0,25T_1$  et  $T_B = 0,9T_1$  où  $T_1$  est la période fondamentale de la structure élastique. En effet, les premiers modes correspondent aux périodes les plus grandes et – afin de contrôler l'amortissement dans un intervalle de périodes assez large – il est préférable d'identifier les coefficients de Rayleigh à partir d'une période plus petite que  $T_1$ . Dans le logiciel Perform3D, la matrice d'amortissement de Rayleigh est calculée à partir de la matrice de raideur initiale  $\mathbf{K}_0$  et ensuite gardée constante pendant toute la durée de l'analyse. Cette méthode peut générer des forces d'amortissement trop importantes pour être réalistes dans les fibres de béton dont la rigidité diminue beaucoup, comme c'est le cas en traction après fissuration. Afin d'éviter ce problème, une valeur réduite de  $\mathbf{K}_0$  est calculée dans Perform3D en ne considérant que 15% de l'aire du matériau béton dans les sections de l'élément multifibre. De plus, en raison de la dégradation de la raideur, les périodes propres de la structure augmentent et il est donc conseillé de calculer les périodes  $T_A$  et  $T_B$  en prenant en compte le fait que, pour une ductilité donnée  $\mu$ , la période est susceptible d'être multipliée par le facteur  $\sqrt{\mu}$  au cours de l'évolution de la structure.

Dans cette étude pratique, nous définissons deux modèles d'amortissement global forfaitaire de type Rayleigh que nous écrivons  $\mathbf{C}_{[F1]}$  et  $\mathbf{C}_{[F2]}$ .  $\mathbf{C}_{[F1]}$  est défini de sorte que le pourcentage d'amortissement critique soit déterminé à partir des deux premières périodes propres  $T_1 = 0,262$  s et  $T_2 = 0,093$  s, sans prendre en compte le fait que les périodes propres de la structure sont susceptibles d'augmenter (à la manière du modèle  $\mathbf{C}_{[1]}$ ). En conséquence, nous choisissons d'entrer dans le logiciel les rapports suivants :  $\frac{T_B}{T_1} = 1$  et  $\frac{T_A}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{0,093}{0,262} = 0,355$ . Nous rappelons que le portique a été dimensionné pour une ductilité  $\mu = 2$ , le second modèle d'amortissement global  $\mathbf{C}_{[F2]}$  est donc défini en entrant dans le logiciel les rapports suivants :  $\frac{T_B}{T_1} = 0,9\sqrt{2} = 1,273$  et  $\frac{T_A}{T_1} = 0,25\sqrt{2} = 0,354$  afin de contrôler la valeur du pourcentage d'amortissement critique pour les modes prépondérants et prendre en compte l'augmentation des périodes propres au cours de l'analyse (à la manière du modèle  $\mathbf{C}(t)_{[2]}$ ).

### 4.2.3 Modèle avec éléments finis 2D

Vector2 [Won02, Saa07] est un logiciel de calcul par éléments finis pour l'analyse des structures en béton armé initialement basé sur la "Modified Compression Field Theory". La figure 2.7 montre le maillage du portique et la loi de comportement adoptée pour le béton. Les effets du confinement sur le comportement du béton sont pris en compte par le logiciel en fonction de la quantité des aciers [Saa07]; la

liaison entre l'acier et le béton est supposée parfaite. Vector2 permet d'utiliser le modèle d'amortissement global  $C_{[1]}$ ; notons qu'il est recommandé dans [Saa07] de réduire l'amortissement global forfaitaire au minimum de sorte que le calcul soit encore stable.



**Fig. 2.7:** Modèle éléments finis 2D : (a) géométrie, (b) modèle de béton non-confiné.

### 4.3 Analyse des résultats

Un résumé des résultats obtenus lors de l'étude expérimentale du portique et lors des analyses numériques faites avec les logiciels de calculs Ruaumoko, Perform3D et Vector2 avec plusieurs modèles de structure et d'amortissement global forfaitaire est donné dans la table 2.2. L'algorithme d'intégration temporelle choisi est le schéma implicite de Newmark avec les coefficients  $\beta = 0,25$  et  $\gamma = 0,5$ , inconditionnellement stable et conservatif, au moins pour les problèmes linéaires [Ibr09]. Sur un ordinateur portable équipé d'un processeur Intel Centrino duo/1,83 GHz, avec 4 Go de RAM et le système d'exploitation Windows XP, le temps de calcul n'excède pas quelques minutes pour les analyses faites avec le logiciel Ruaumoko, sont de l'ordre de la dizaine de minutes avec Perform3D et de plusieurs heures avec Vector2. Les analyses menées avec Vector2 ne sont donc pas adaptées à une utilisation industrielle, parce que beaucoup d'analyses sont souvent requises pour traiter un problème de génie parasismique. Notre propos est ici d'illustrer les conséquences que le choix de la combinaison d'un modèle de structure inélastique et d'un modèle d'amortissement global forfaitaire peut avoir sur la prédiction de quantités globales et locales.

#### Calibration du modèle numérique :

Le poids total  $P$  des structures modélisées ainsi que leur période élastique fondamentale  $T^{ela}$  sont tout d'abord indiqués dans la table 2.2a. Dans les logiciels

Structural model	Exp	Ruaumoko					Perform3D_1			Perform3D_2		VecTor2	
Damping model	/	$I^{(1)}$	$[C]_{[1]}$	$[C]_{[2]}$	$[C]_{[1]}$	$[C]_{[2]}$	$[C]_{[F1]}$	$[C]_{[F1]}$	$[C]_{[F2]}$	$[C]_{[F1]}$	$[C]_{[F2]}$	$I^{(1)}$	$[C]_{[1]}$
$\xi_{2.2}$ (%)	/	0.0	1.5	1.5	3.3	3.3	0.1	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0	1.5
(a)													
$P$ (kN)	95	93.8					94.8			94.7			
$T_{ela}$ (s)	NA <sup>(2)</sup>	0.28					0.26			0.27			
$T_{FV}^{ini}$ (s) <sup>(3)</sup>	0.36	0.44					0.38			0.33			
(b)													
$d_{max}$ (mm)	48.9	47.1	44.1	45.8	42.2	42.2	46.4	45.5	46.1	43.6	43.8	45.3	42.4
RMS (mm)	/	19	20	15	15	16	13	13	13	13	13	16	15
$V_{max}$ (kN)	37.2	35.5	37.8	37.9	35.5	35.3	46.1	45.0	45.0	55.7	55.7	52.0	49.8
RMS (kN)	/	14.2	14.2	13.8	13.8	13.9	18.6	16.6	16.8	18.6	17.9	15.7	15.5
W (N.m)	2822	3781	3354	3486	2907	3132	2796	3543	3570	2722	2643	NA	NA
(c)													
$E_T$ (N.m)	/	3735	3307	3442	2861	3089	2782	3534	3557	2698	2620	NA	NA
$E_p/E_T$ (%)	/	0.0	23.7	22.2	46.2	43.3	8.2	60.2	55.9	83.0	81.7	/	/
$E_H/E_T$ (%)	/	100.0	76.3	77.8	53.8	56.7	89.8	38.2	42.4	20.4	18.3	/	/
$T_{FV}^{fin}$ (s)	0.55	0.46	0.45	0.45	0.46	0.45	0.51	0.49	0.50	0.40	0.40	0.43	0.42
$\xi_{FV}^{fin}$ (%)	3.7	1.5 <sup>(4)</sup>	2.2	1.8	4.2	3.5	0.4 <sup>(3)</sup>	3.1	1.6	2.8	2.3	1.1 <sup>(3)</sup>	5.2

<sup>(1)</sup> No added damping introduced in the model.

<sup>(3)</sup> FV: Free Vibrations.

<sup>(2)</sup> NA: Not Available.

<sup>(4)</sup> Estimated value. Response is not clearly pseudo-periodic.

**Tab. 2.2:** Analyses de la réponse sismique d'un portique en BA en utilisant différents modèles non-linéaires de structure et différents modèles d'amortissement global forfaitaire. a) Paramètres de calibration des modèles, b) quantités globales, c) répartition de l'énergie et caractéristiques dynamiques après séisme.

Ruaumoko et Perform3D, l'augmentation locale de la raideur due à la fixation des masses additionnelles sur les poutres du portique est prise en compte par l'ajout de liens rigides entre les éléments sur lesquels reposent ces masses et les éléments adjacents. Les paramètres des lois de comportement inélastique des sections sont définis dans le logiciel Ruaumoko avec un coefficient de réduction de l'inertie donné

par la réglementation pour représenter les effets de la fissuration sous poids propre et charges de service. Afin de calculer la période propre élastique de la structure modélisée par Ruaumoko, nous faisons donc une analyse modale avec des lois hystérétiques définies sans appliquer au préalable de coefficients de réduction des inerties. Dans les logiciels Perform3D et Vector2, l'analyse modale est faite avant application du poids propre et aucun facteur de réduction d'inertie n'est appliqué lors de l'entrée des paramètres du modèle : la période élastique des structures modélisées avec Perform3D et Vector2 est donc celle calculée lors de l'analyse modale faite au début des calculs.

*A posteriori* – avec les résultats expérimentaux en notre possession – les valeurs obtenues numériquement pour  $T^{ela}$  peuvent être validées de la façon suivante. À cause du poids propre, l'endommagement initial – avant séisme – de la structure n'est pas négligeable et la période fondamentale initialement mesurée expérimentalement ( $T_{FV}^{ini,exp} = 0,36$  s) est plus grande que la période fondamentale élastique. Les propriétés élastiques de la maquette ne sont donc pas connues. Nous évaluons la période fondamentale des modèles après application du poids propre et des charges additionnelles en excitant faiblement – l'accélération imposée est égale à 0,01 g de façon que les mécanismes non-linéaires ne soient pas activés – la structure après que le poids propre a été appliqué, puis en la laissant revenir au repos en vibrations libres ce qui permet alors de mesurer  $T_{FV}^{ini}$  (le 1<sup>er</sup> mode est prépondérant). Les valeurs obtenues sont en bon accord avec la mesure expérimentale et, si on suppose que l'évolution non-linéaire quasi-statique de la structure sous application du poids propre est bien modélisée pour les logiciels Perform3D et Vector2, on peut conclure que  $T^{ela} = 0,27$  s est la bonne valeur de la période fondamentale élastique.

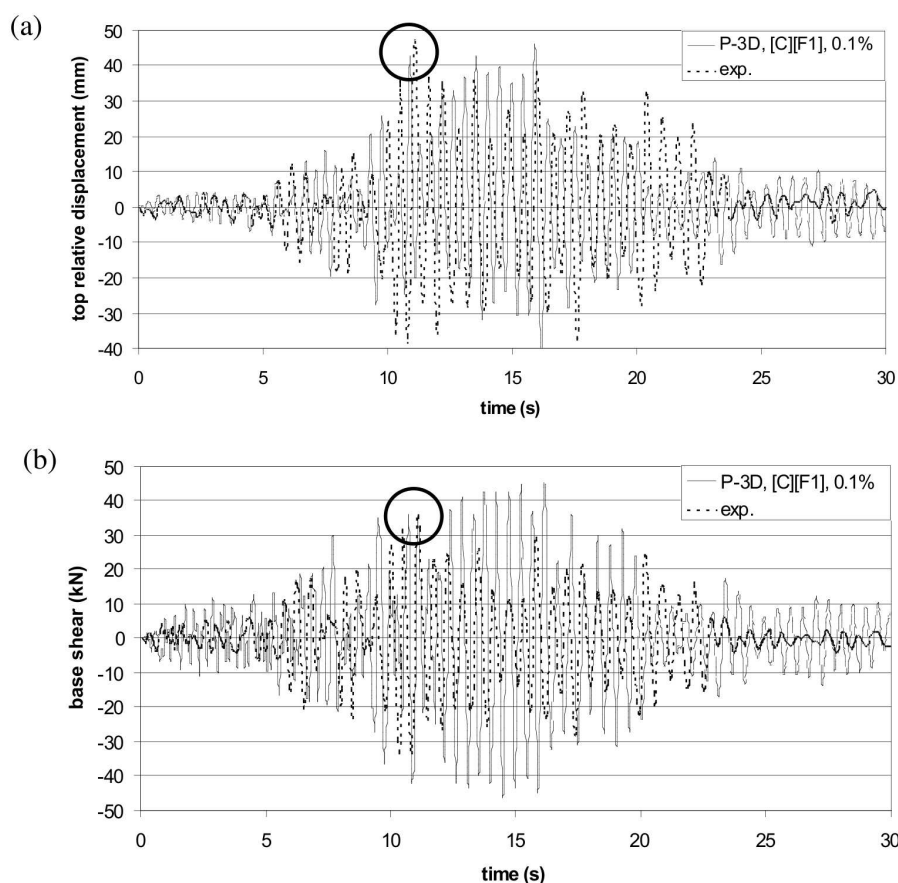
### **Analyse des résultats globaux :**

Tout d'abord, nous examinons la qualité de la prédiction du déplacement latéral relatif maximum en tête du portique  $d_{max}$  et de l'effort tranchant maximum à la base du portique  $V_{max}$  – ce dernier est calculé en additionnant les efforts tranchants à la base de chacun des trois poteaux – indiqués dans la table 2.2b. La meilleure prédiction des valeurs maximales est obtenue avec le logiciel Ruaumoko avec 0% et 1,5% d'amortissement critique pour les deux premiers modes. Perform3D et Vector2 surestiment la valeur maximale du cisaillement à la base. Ces valeurs extrêmes ne sont pas vraiment représentatives de la prédiction générale de la réponse, qui est mieux caractérisée par le calcul de la *root mean square* (RMS) de la différence entre les données expérimentales et les résultats numériques. Notons que la RMS est calculée avec 1000 points équidistants entre 0 et 30 s (durée du séisme).

Ensuite, nous comparons la prédiction de la quantité globale d'énergie sismique

fournie à la structure (énergie externe  $W$ ). Au cours de l'essai,  $W$  a été calculée en multipliant la force et le déplacement du vérin qui contrôle le mouvement de la table vibrante. Dans les simulations numériques, les quantités énergétiques indiquées dans la table 2.2 sont relatives et déterminées une fois que la structure est retournée au repos, après la fin de l'excitation sismique. Les quantités énergétiques ne sont pas disponibles avec le logiciel Vector2. Pour Ruaumoko, bien que tous les modèles d'amortissement global forfaitaire testés permettent de simuler avec une erreur raisonnable les valeurs  $d_{max}$  et  $V_{max}$ , seul un d'entre eux est capable de reproduire la quantité totale d'énergie à dissiper mesurée expérimentalement – produit de la force et du déplacement dans le vérin de la table vibrante – le modèle  $\mathbf{C}_{[1]}$  3,3%. Les modèles de structure Perform3D\_1 avec une très petite quantité d'amortissement global forfaitaire et les deux modèles Perform3D\_2 dissipent globalement la bonne quantité d'énergie.

Si on se concentre sur les trois quantités globales  $d_{max}$ ,  $V_{max}$  et  $W$  (en excluant Vector2 de la discussion parce que  $W$  n'est pas disponible), seuls deux modélisations mènent à des résultats acceptables : Ruaumoko  $\mathbf{C}_{[1]}$  3,3% et Perform3D\_1  $\mathbf{C}_{[F1]}$  0,1%. Ils reposent cependant sur des hypothèses fondamentalement différentes. Les rotules plastiques dans les modèles Ruaumoko suivent une loi moment-courbure préétablie dans laquelle sont concentrés tous les mécanismes dissipatifs susceptible de se produire dans l'élément de structure. Les modèles de structure développés avec Perform3D sont construits avec des éléments fibres et la dissipation d'énergie ne provient donc que des lois constitutives non-linéaires définies pour les matériaux aux points d'intégration numérique dans chacune des fibres ; les sources de dissipation d'énergie tels le glissement entre l'acier et le béton, les effets goujon, ainsi que d'autres phénomènes dissipatifs qui ne peuvent pas être représentés à l'échelle du matériau ne sont donc pas prises en compte dans les modélisations faites avec Perform3D mais sont implicitement présentes dans les modèles développés avec Ruaumoko. De ce fait, même si ces deux simulations peuvent prédire de façon satisfaisante des quantités globales et dissiper la quantité d'énergie globale appropriée, il est très probable que cela ne provienne pas de la description des bons mécanismes dissipatifs. Ceci pourrait expliquer pourquoi, par exemple, le modèle Perform3D\_1  $\mathbf{C}_{[F1]}$  0,1% ne reproduit pas de façon tout à fait convenable l'évolution temporelle du déplacement latéral relatif en tête et du cisaillement à la base pendant toute la durée du chargement sismique (figure 2.8).



**Fig. 2.8:** Évolutions temporelles expérimentales et numériques du (a) déplacement latéral relatif en tête du portique et (b) du cisaillement à la base.

### Répartition de l'énergie dissipée et évolution des propriétés dynamiques :

Dans la table 2.2c, la quantité totale d'énergie dissipée  $E_T$  dans la modélisation numérique est tout d'abord indiquée. En théorie,  $E_T$  devrait être égal à  $W$ , mais ce n'est pas tout à fait exact en pratique en raison de l'erreur dans la relation d'équilibre énergétique introduite par l'algorithme – discret – d'intégration temporelle [Fil94]. Ensuite, les rapports entre  $E_D$  et  $E_H$  – les quantités relatives d'énergie dissipées par l'amortissement global forfaitaire et par la réponse inélastique de la structure – sont calculés. Ces rapports donnent des indications sur les modifications internes subies par la structure. La figure 2.9 illustre que la répartition des sources de dissipation d'énergie peut être différente d'une analyse à une autre et donc que les mécanismes dissipatifs impliqués dans l'évolution temporelle de la structure peuvent être différents.



Quelques indications sur les modifications internes de la structure sont données en évaluant la période fondamentale  $T_{FV}^{fin}$  après le passage du séisme quand la structure retourne à un état de repos en vibrations libres (figures 2.10). La valeur de  $T_{FV}^{fin}$  dépend directement de l'endommagement (perte de raideur) de la structure qui se produit au cours de la phase II de l'excitation sismique, quand la quantité d'énergie qui doit être dissipée augmente beaucoup (figure 2.9 peu après 10 s). Si nous comparons l'évolution de la période fondamentale pour les trois modèles Perform3D qui dissipent à peu près la même quantité d'énergie (2700 N.m), il est clair que plus la part d'énergie dissipée par le comportement inélastique de la structure est grande, plus l'augmentation de la période fondamentale est importante. Pour le modèle Perform3D\_1  $C_{[F1]}$  0,1%, presque toute la quantité d'énergie est dissipée par la réponse inélastique de la structure et la période finale  $T_{FV}^{fin} = 0,51$  s, atteint presque la valeur mesurée expérimentalement  $T_{FV}^{fin} = 0,55$  s.

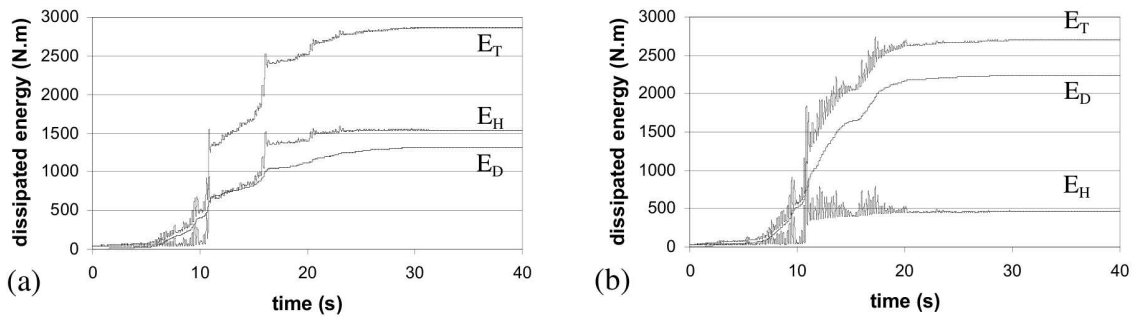


Fig. 2.9: Sources de dissipation d'énergie : (a) Ruamoko  $C_{[1]}$  3,3%, (b) Perform3D\_2  $C_{[F2]}$  1,5%.

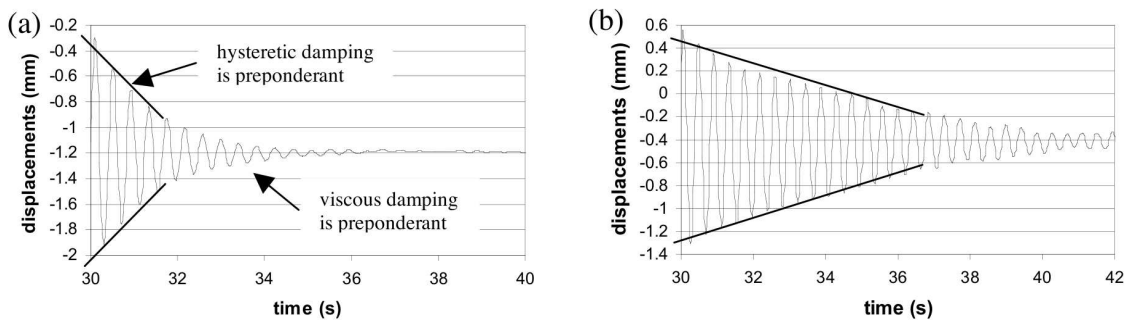


Fig. 2.10: Phase de vibrations libres (Vector2) : (a) avec amortissement global, (b) sans amortissement global.

Le dernier paramètre calculé dans la table 2.2c est le pourcentage d'amortissement critique final  $\xi_{FV}^{fin}$  mesuré pendant la phase d'oscillations libres à la fin de l'excitation sismique. Deux points remarquables méritent d'être commentés à ce sujet :

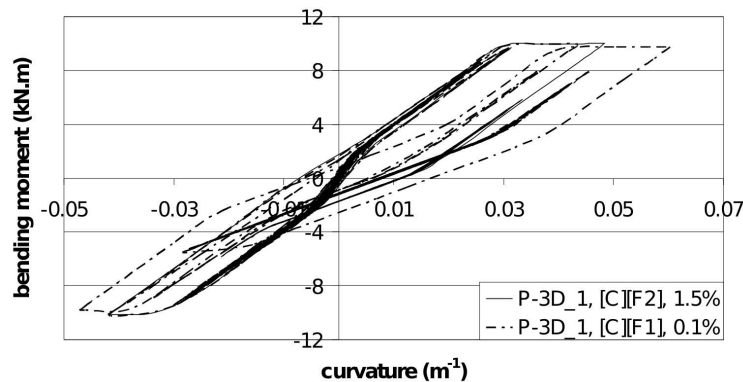
1. Sa valeur dépend de l'amplitude des oscillations comme illustré par la figure 2.10. Il y a en fait deux phases dans les oscillations libres post-sismiques : (i) une phase d'amortissement due à la réponse non-linéaire de la structure domine tout d'abord la réponse, (ii) l'amortissement visqueux provenant du modèle d'amortissement global forfaitaire devient ensuite prépondérant (figure 2.10a) ;
2. Pour chacun des logiciels de calcul, la structure ne retourne pas à un état de repos en l'absence d'amortissement global forfaitaire (figure 2.10b) parce que les modèles de structure utilisés ne peuvent que dissiper de l'énergie au-dessus d'un seuil d'excitation minimum donné. Il leur manque donc la capacité à représenter physiquement certains mécanismes dissipatifs pour qu'il puisse dissiper toute l'énergie sismique reçue.

#### 4.4 Conséquence locale du choix d'un modèle global d'amortissement forfaitaire

Toutes les analyses non-linéaires ont été faites de façon aveugle : les modélisations n'ont pas fait l'objet de modifications visant à améliorer la correspondance entre résultats numériques et expérimentaux, une fois la période propre fondamentale bien calibrée (le premier mode excitant 91% de la masse modale, nous négligeons les autres modes). La variabilité des résultats, que ce soit pour la réponse globale, la répartition de la dissipation d'énergie ou l'évolution de la période propre, obtenus par les différents modèles soulève la question de la capacité prédictive des analyses non-linéaires. Le choix d'un modèle d'amortissement global forfaitaire est d'une grande importance dans les analyses sismiques puisqu'il a une influence significative sur les quantités d'énergie dissipées par la réponse inélastique de la structure, due à des modifications internes à la structure. Afin d'illustrer ce propos, regardons de plus près les analyses Perform3D-1  $C_{[F1]}$  0,1% et Perform3D-1  $C_{[F2]}$  1,5%. La seule différence entre ces deux analyses est le modèle d'amortissement global forfaitaire utilisé. Les résultats obtenus pour le déplacement relatif en tête du portique et pour le cisaillement à la base sont proches (Table 2.2b), cependant les quantités énergétiques sont très différentes : l'énergie sismique n'est pas dissipée par les mêmes mécanismes physiques au cours de ces deux simulations et cela aboutit à la prédiction de différentes réponses inélastiques des sections. La figure 2.11 montre que la dégradation de raideur et la demande en déformation – un concept très impor-

tant dans de récentes méthodes de dimensionnement en déplacement [Pri07] (p.32) – peuvent être différentes pour ces deux analyses du même problème mécanique. Ceci pourrait, globalement, mener à des conclusions différentes en ce qui concerne la capacité résiduelle et les effets P-delta dans une structure après passage d'un séisme.

La modélisation de l'amortissement est donc un point clé dans les analyses dynamiques non-linéaires. Les modèles d'amortissement global forfaitaire tel celui de Rayleigh ne devraient être utilisés que pour introduire une faible proportion d'amortissement. En effet, tous les autres phénomènes dissipatifs devraient être modélisés explicitement à l'échelle où ils se produisent. Bien entendu, la part de l'amortissement de Rayleigh proportionnelle à la matrice de raideur peut être vue comme une modélisation physique de la viscosité de la structure [Hal06], mais le coefficient  $b_K$  devrait être déterminé à partir de propriétés matérielles plutôt qu'à partir d'un pourcentage d'amortissement critique global. Nous insistons de plus sur le fait qu'utiliser la matrice de raideur tangente dans la définition de la matrice d'amortissement de Rayleigh est une méthode qui prend globalement en compte les changements des caractéristiques dissipatives durant l'évolution temporelle de la structure, mais qui ne repose pas sur une représentation physique des mécanismes dissipatifs internes. Voici donc un défi en génie parasismique : développer des modèles qui sont suffisamment évolués pour donner une représentation physique de l'amortissement, de façon robuste et raisonnablement coûteuse en mémoire et en temps, une fois implantés dans une procédure de simulation numérique dynamique non-linéaire d'une structure. Quelques idées générales sur cette question sont présentées dans la section qui suit.



**Fig. 2.11:** Réponse moment-courbure de la section en tête du poteau central de l'étage inférieur (section connectée au joint d'ossature central) pour deux modèles d'amortissement global différents du modèle de structure Perform3D\_1.

## 5 Orientations pour l'amélioration des modèles

### 5.1 Trois prérequis pour des analyses sismiques plus prédictives

Dans la section 3, nous avons mis en évidence le fait qu'on trouve dans la littérature beaucoup de modèles de dissipation d'énergie différents qui permettent d'aboutir à des modélisations globalement correctes de structures en BA. Ces modélisations reposent sur l'utilisation d'un modèle global d'amortissement particulier associé à un modèle inélastique de structure donné. À la fin de la section 4, nous avons conclu que, bien que les pratiques couramment utilisées dans les analyses sismiques non-linéaires puissent prédire avec une précision satisfaisante les valeurs extrêmes de quantités globales telles que les déplacements et le cisaillement, la prédiction de l'évolution temporelle de quantités plus locales est plus incertaine. Ainsi, de telles analyses se montrent peu fiables pour le dimensionnement et l'analyse de structures non-linéaires en BA basés sur la performance. Dans cette section, nous donnerons sur la figure 2.12 une classification des phénomènes dissipatifs d'énergie qui illustre, d'une part, la dépendance qui existe entre le choix d'un modèle d'amortissement global forfaitaire et le modèle de réponse non-linéaire utilisé pour la structure et, d'autre part, pourquoi les quantités locales ne sont pas bien représentées par les pratiques habituellement adoptées. À partir de cette classification, nous caractériserons la démarche actuellement suivie pour modéliser l'amortissement, nous proposerons ensuite une démarche idéale et nous définirons enfin quelques points sur lesquelles il nous semblerait bénéfique de concentrer des efforts dans des recherches futures, afin de conduire des analyses dynamiques non-linéaires plus fiables pour le dimensionnement basé sur la performance et la prédiction de l'endommagement dans les structures. Finalement, nous mettrons en avant les avantages du cadre physique donné par la *thermodynamique avec variables internes* pour développer des modèles de matériau non-linéaires visant à améliorer la fiabilité des analyses.

Commençons par réécrire l'équation (2.1) d'une façon plus exacte :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{C}^L(t) + \mathbf{C}^P(t)) \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{R}(t) = \mathbf{F}_{sta} - \mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (2.3)$$

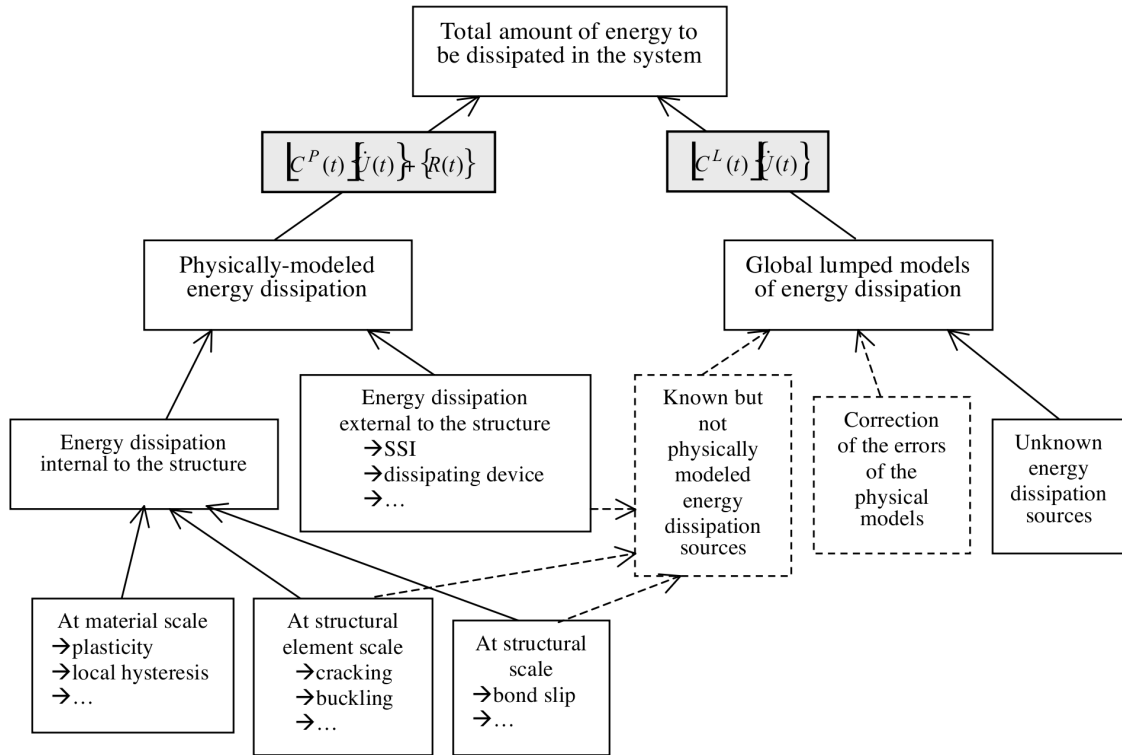
où  $\mathbf{C}^L(t)$  est la matrice d'amortissement qui traduit la part forfaitaire de l'amortissement global introduite avec l'hypothèse que cet amortissement est visqueux. Toutes les sources de dissipation d'énergie (visqueuses ou non) qui ne sont pas modélisées

physiquement sont prises en compte dans la modélisation par l'introduction de cette matrice d'amortissement global forfaitaire.  $\mathbf{C}^P(t)$  est la part de l'amortissement visqueux qui provient d'une modélisation physique, aux échelles appropriées, du comportement visqueux des composants de la structure. En effet, la prise en compte du comportement visqueux des matériaux génère l'apparition d'une matrice globale d'amortissement physique visqueux [Wan09].

Les lignes discontinues dans la figure 2.12 caractérisent la démarche actuellement suivie dans les modélisations non-linéaires ; la figure 2.12 sans ces lignes discontinues représenterait une situation idéale avec des modèles capables de représenter de façon physique toutes les sources de dissipation d'énergie connues. Les lignes discontinues ne peuvent pas être ignorées dans les modélisations actuelles car certains phénomènes dissipatifs connus ne sont pas physiquement modélisés, le plus souvent parce qu'on ne sait pas comment les introduire de façon efficace et fiable. La diversité des manières de modéliser l'amortissement, présentée dans la section 3, provient principalement de deux causes : (i) la dissipation d'énergie est en fait introduite dans les simulations non-linéaires par un modèle physique et un modèle global forfaitaire et (ii) certains modèles physiques de dissipation d'énergie sont peu précis et introduisent des erreurs importantes qui doivent être corrigées par le modèle d'amortissement global. Le recours à un modèle forfaitaire n'est pas satisfaisant pour développer des analyses non-linéaires prédictives. Ce recours émerge en effet de notre manque de connaissances : comment modéliser certains phénomènes connus ?, comment développer des modèles robustes et précis ? Il se peut aussi qu'il y ait des phénomènes dissipatifs qui ne puissent pas être observés ni même imaginés, et, malheureusement, on ne peut pas prédire ce qui est totalement inconnu.

L'amélioration de la fiabilité des analyses non-linéaires passe par l'amélioration de la modélisation de la dissipation d'énergie dans les structures. Comme mentionné dans la section 4, les pratiques couramment employées peuvent prédire de façon satisfaisante l'évolution de quantités globales telles que les déplacements ou le cisaillement à la base, mais manquent d'une base physique solide pour prédire l'évolution de quantités plus locales, par exemple l'endommagement dans une section d'élément de structure. Afin de palier cet inconvénient, nous identifions trois prérequis :

1. Autant de phénomènes dissipatifs que possible – dans la mesure où une modélisation numérique efficace de la structure reste possible (temps de calculs et besoins en mémoire raisonnables pour une application donnée) – devraient être explicitement identifiés et modélisés de façon physique ;



**Fig. 2.12:** Classification des sources de dissipation d'énergie dans un {système} = {structure en BA + environnement proche} : situations actuelle (avec lignes discontinues) et idéale (sans les lignes discontinues).

2. Ces phénomènes devraient être modélisés à l'échelle où ils se produisent afin d'en donner une représentation précise. Par exemple, le modèle de Takeda modifié présenté dans la section 4 est un modèle physique forfaitaire de dissipation d'énergie car il incorpore, sans distinction explicite, de nombreux phénomènes dissipatifs qui se produisent dans une section de BA ;
3. Les modèles non-linéaires devraient être capables de représenter les trois phases de la réponse typique d'une structure en BA sous séisme (figure 2.2). À savoir : dans la phase I, la structure reste essentiellement dans son domaine élastique et seules quelques rares incursions dans le domaine inélastique se produisent, si bien que l'énergie est principalement dissipée par son comportement visqueux ; dans la phase II, l'excitation sismique est plus forte et la réponse de la structure est conditionnée par l'activation de nombreux phénomènes dissipatifs ; dans la phase III, l'excitation sismique est à nouveau faible mais le comportement de la structure n'est plus le même qu'au cours de la phase I parce qu'elle est endommagée et ses propriétés ont été modifiées de façon irréversible. Les modèles non-linéaires devraient être en particulier capables de représenter les

dégradations de raideur et de capacité portante des sections ainsi que la demande en ductilité.

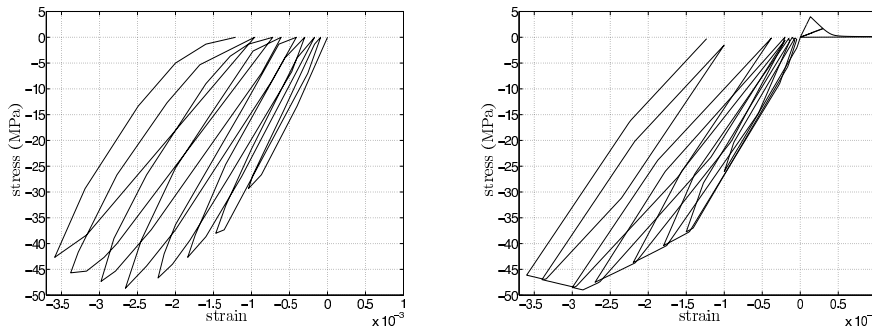
## 5.2 Projet de modèle de structure enrichi

La *thermodynamique avec variables internes* donne un cadre mathématique pour développer des modèles de milieu continu capables de représenter des phénomènes dissipatifs locaux et qui peuvent être implantés de façon robuste dans des procédures de résolution numériques comme un code de calcul par éléments finis. Nous nous contentons ici seulement d'exprimer de façon générale les principaux avantages d'un tel cadre mathématique. Nous renvoyons le lecteur à [Mau99] pour une présentation détaillée des principes de la *thermodynamique avec variables internes*, à [Ibr09] pour de nombreuses applications numériques dans le cadre de la méthode des éléments finis et à [Ibr08] pour le développement détaillé d'une loi uni-axiale cyclique de béton dans un contexte compatible avec une implantation numérique robuste (ce sera l'objet du chapitre suivant où ce modèle de béton sera présenté en détail).

Un modèle de matériau adapté au béton devrait idéalement être capable – afin de satisfaire aux trois prérequis mentionnés plus haut – de représenter les phénomènes dissipatifs suivants observés sur la figure 2.13 [gauche] : phases d'écroutissage et d'adoucissement – j'insiste, en anticipant sur le chapitre suivant, que par les termes du type « écroutissage », nous n'entendons que donner une description phénoménologique du comportement macroscopique d'un VER de béton, rien de plus –, apparition de déformations permanentes, perte de raideur, comportement hystérétique local (apparition de boucles dans les cycles de charges-décharges) et visqueux.

La figure 2.13 [droite] illustre la réponse du modèle numérique que nous avons développé. Comme nous le verrons dans les chapitres 4 et 5, ce modèle de béton est implanté dans un élément multifibre capable de représenter le comportement des sections courantes de poutres dominées par la flexion. À ce modèle de poutre, il faudrait ajouter des modèles dédiés aux joints d'ossature [Ibr03c] (figures 2.1b & c) de même que d'autres modèles capables de représenter l'interaction de la structure avec son environnement (figure 2.1a) [Dav03, Cre01] afin de représenter d'autres sources de dissipation d'énergie. Cette stratégie, nous l'espérons, aboutirait à des analyses dynamiques non-linéaires plus prédictives des structures de type portique en BA. Des échelles de description plus fines des phénomènes physiques peuvent être introduites dans des simulations numériques [Hau09] (figure 2.1d), mais une telle approche n'est pas encore envisageable pour des structures de génie civil. Il est cependant clair que, pour des problématiques liées à la durabilité des ouvrages, des

phénomènes qui se produisent à des échelles plus petites que l'échelle macroscopique du VER à laquelle nous nous sommes arrêtés sont mis en jeu.



**Fig. 2.13:** Réponse d'une éprouvette de béton sous chargement cyclique quasi-statique : courbes expérimentale (adaptée de [Ram90]) [gauche] et numérique (en utilisant le modèle constitutif de béton qui sera présenté dans le chapitre suivant) [droite].

## 6 Conclusion - Précision des objectifs de la thèse

Dans ce chapitre, il est question de la modélisation de l'amortissement dans les analyses dynamiques non-linéaires de structures en BA. Nous y présentons une revue de la littérature puis les résultats des simulations numériques d'un portique en BA qui a été testé sur la table vibrante de l'École Polytechnique de Montréal et que nous avons réalisées avec plusieurs modèles non-linéaires de structure – définis avec plusieurs logiciels de simulation – et plusieurs modèles d'amortissement global forfaitaire. Nous tirons deux conclusions de ce chapitre : (i) dans les démarches d'analyse post-sismique habituelles, afin de faire concorder résultats numériques et expérimentaux, le choix du modèle d'amortissement global adapté dépend du modèle de structure choisi : pour un modèle de structure donné, la matrice d'amortissement est ajustée de sorte que les quantités globales calculées (déplacements, cisaillement à la base, etc.) soient en accord avec les résultats des tests ; et (ii) même si les simulations mènent à des résultats satisfaisants pour les quantités globales, les mécanismes dissipatifs impliqués dans l'évolution des structures modélisées sont très différents selon les simulations (modèles de structure et d'amortissement global) et des quantités plus locales (réponse moment-courbure des sections, etc.) peuvent être différentes d'une simulation à une autre : leur prédiction est donc peu fiable.

Cependant, pour des analyses sismiques basées sur la performance, il est important que la prédiction de quantités locales comme la demande en déformation dans



les sections d'éléments de structure les plus sollicitées soit bonne pour permettre ensuite des analyses fiables. Une façon d'améliorer les capacités prédictives des analyses dynamiques non-linéaires est de modéliser (i) autant de mécanismes physiques de dissipation d'énergie que possible – intégrés dans une procédure de résolution numérique robuste, avec des temps de calculs et des besoins en mémoire acceptables, ce qui, nous voudrions le montrer dans cette thèse, est possible à l'échelle des matériaux – ; (ii) à l'échelle où ils se produisent et (iii) de sorte qu'ils soient capables de représenter les trois phases caractéristiques de la réponse sismique d'une structure. Beaucoup de travaux ont été réalisés pour mettre en évidence les problèmes rencontrés lorsqu'un modèle d'amortissement global forfaitaire est utilisé et pour améliorer ces modèles. On peut espérer que des recherches orientées vers une représentation plus physique et plus détaillée des caractéristiques dissipatives – non-linéaires – des structures aboutira à des modélisations capables de prédire de façon fiable l'évolution temporelle des quantités locales d'intérêt pour les structures de type portique en BA.

Nous avons limité notre domaine d'investigation aux éléments de structures de type portique (poteaux, poutres). Les éléments multifibres donnent une représentation détaillée de comportement 1D des matériaux tout en générant des temps de calcul acceptables. C'est en vue de développer un élément multifibre que le chapitre 3 sera consacré à la formulation théorique d'un modèle dynamique enrichi d'élément de structure avec des lois de comportement matérielles 1D capables de reproduire les principaux phénomènes dissipatifs rencontrés dans le béton et l'acier sous sollicitation sismique. Ensuite, l'objectif du chapitre 4 sera de présenter l'implantation du modèle physique dans un code de calcul par éléments finis et de définir une stratégie de résolution numérique robuste, malgré la présence de nombreux phénomènes non-linéaires explicitement modélisés à l'échelle des matériaux.

# Chapitre 3

## Modèle dynamique d'élément de structure enrichi avec lois matérielles 1D

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	42
2	Notions de mécanique des milieux continus – Notations . .	45
3	Modèle constitutif 1D de béton . . . . .	46
4	Matériaux standards généralisés . . . . .	60
5	Équations de Euler-Lagrange dynamiques . . . . .	62
6	Élément poutre de Euler-Bernoulli multifibre . . . . .	68
7	Conclusion . . . . .	70
8	Annexe : paramètre d'adoucissement en traction . . . . .	72

---

# 1 Introduction

Dans la majorité des cas, les sections courantes des poutres et poteaux qui constituent l'ossature des structures de type portique en béton armé sont principalement sollicitées par un chargement de flexion. De plus, le dimensionnement en capacité des éléments des portiques consiste à dessiner le ferrailage de sorte que les sections gardent un comportement élastique sous l'action du cisaillement. Les mécanismes non-linéaires dans les éléments de structure – qui génèrent de la dissipation d'énergie et ainsi de l'amortissement structurel – ne sont donc souvent activés que par les effets de la flexion. Parallèlement, le développement des éléments multifibres [Tay03, Dav03, Mar09, Mou08] a donné un outil performant pour modéliser des sections de BA dominées par la flexion puisqu'ils permettent de prendre en compte le comportement local des matériaux – contrairement par exemple aux modèles de type Takeda qui représentent le comportement des sections sous forme d'une loi moment-courbure [Iba05] – sous la forme d'une loi uni-axiale de la contrainte en fonction de la déformation, tout en générant des temps de calculs et des besoins en ressources informatiques acceptables pour la simulation d'ouvrages de grande échelle à des fins industrielles. Le modèle d'élément de structure enrichi avec loi de comportement des matériaux 1D qui sera présenté dans ce chapitre s'inscrit dans une démarche de développement d'un élément multifibre. La particularité de l'élément que nous allons présenter réside dans sa cinématique enrichie pour être consistante avec le nouveau modèle de matériau – aussi présenté dans ce chapitre – que nous avons développé pour représenter les sources de dissipation d'énergie matérielle volumique et surfacique dans les éléments de structures en BA dominés par la flexion.

Il existe de nombreux modèles pour représenter le comportement 1D du béton et de l'acier. Lorsqu'ils sont développés pour des calculs de structure de génie civil, tous ces modèles sont phénoménologiques – ils essaient de reproduire les phénomènes macroscopiques observés à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif du matériau – mais certains sont empiriques – construits à partir d'un savoir expérimental uniquement – et d'autres sont théoriques – construits dans un cadre théorique qui impose des règles auxquelles doivent se soumettre les observations expérimentales. Il existe aussi des modèles de béton qui ne sont pas phénoménologiques [Hau09] mais qui sont encore peu adaptées à la simulation de structures de grande échelle à cause des importantes ressources numériques qu'ils requièrent.

Le développement des outils de simulation numérique de ces dernière décennies a permis de réaliser des analyses numériques dynamiques non-linéaires de structures de grande taille dans lesquelles le comportement non-linéaire des matériaux est pris

en compte [Bha93, Dav03, Mar09, Mou08]. L'implantation numérique robuste de modèles fins de matériaux dans des codes de calculs est devenue un problème de premier plan en génie parasismique. En effet, la prédiction de l'évolution temporelle de certaines quantités matérielles fournit des informations utiles pour prédire la réponse sismique de la structure : la quantité d'énergie dissipée par les matériaux participe au phénomène d'amortissement ; les dégradations de la contrainte maximale admissible et de la raideur, de même que les déformations résiduelles dans les matériaux après passage d'un séisme aident à tirer des conclusions quant aux performances atteintes par la structure.

Nous présentons dans ce chapitre la formulation physique (pas numérique) du modèle d'élément de structure en béton que nous avons développé afin de représenter les sources de dissipation d'énergie matérielle dans les ossatures de type portique en BA sous séisme. Ce modèle consiste en une loi de comportement non-linéaire de béton et en une cinématique enrichie adaptée à la loi de comportement. Nous avons développé une loi de comportement viscoélastique avec plasticité et endommagement continu et discret (ces notions seront précisées plus loin), capable de représenter des comportements différents en traction et en compression. Cette loi de comportement présente les caractéristiques nécessaires pour représenter les principaux phénomènes de dissipation d'énergie dans le béton. On trouve dans la littérature plusieurs modèles de matériau qui couplent plasticité et endommagement continus [Mar06, Ju 89, Lem85, Mes98, Rag99] avec représentation des boucles d'hystérésis lors des cycles de charges-décharges [Rag00], des modèles d'endommagement seul [Sim87, La 93], d'endommagement dépendant de la vitesse [Cer96], des modèles avec plasticité ou endommagement discret [Ibr03a, Bra03], des modèles avec endommagement continu, fissuration et prise en compte de la fatigue [Bog08]. Notre modèle s'appuie directement sur les travaux rapportés dans [Mar06] pour la plasticité et l'endommagement continus et dans [Ibr03a] pour la plasticité et l'endommagement discrets.

Plusieurs facteurs peuvent motiver l'introduction de viscosité dans un modèle de matériau. (i) Le comportement visqueux du béton peut être associé à son comportement macroscopique dépendant de la vitesse de chargement résultant de plusieurs phénomènes nano- et microscopiques complexes [Ped08]. (ii) La viscosité peut aussi être associée à des phénomènes de fluage dans des matériaux à haut pouvoir dissipatif comme les bétons bitumineux [Pan07]. (iii) L'introduction de viscosité dans la formulation des modèles numériques permet de faire apparaître explicitement un pas de temps dans les équations discrétisées qui gouvernent l'évolution du système étudié ; la possibilité alors donnée de définir un pas de temps critique est un outil très utile pour régulariser des problèmes qui pourraient être mal posés, en particulier

en présence de matériaux qui présentent une phase adoucissante [Oli04]. (iv) Définir un comportement visqueux pour un matériau est aussi un moyen d'introduire une source de dissipation d'énergie à l'échelle des matériaux : il permet de quantifier de façon forfaitaire (sans se soucier de ses origines) toutes les sources de dissipation d'énergie qui ont leur origine physique dans des phénomènes se produisant à des échelles plus petites et qui ne sont pas modélisés explicitement ; c'est ce que nous avons à l'esprit lorsque nous introduisons de la viscosité dans notre modèle.

Le modèle de matériau est formulé dans le cadre de la *thermodynamique avec variables internes* (*TIV*) qui est bien adapté au développement de modèles constitutifs phénoménologiques dont les propriétés numériques peuvent être directement étudiées [Mau99]. Un cadre très proche pour les applications que nous visons est celui de la *thermodynamique des processus irréversibles* [Lem88] (*TIP*), voir [Mau99] pour une comparaison entre *TIP* et *TIV*. Un jeu de variables internes est choisi pour décrire un certain nombre de phénomènes non-linéaires qui se produisent dans le matériau. Ceci constitue d'ailleurs une définition du concept de variable interne : une variable dont l'évolution est source de dissipation d'énergie. L'approche que nous avons suivie est macroscopique et phénoménologique, parce que les phénomènes que nous cherchons à modéliser sont ceux observés sur la réponse cyclique expérimentale d'un *volume élémentaire représentatif* (*VER*) de matériau, notamment sous la forme d'une courbe de la contrainte en fonction de la déformation. Les variables internes permettent de donner une représentation macroscopique de phénomènes qui se produisent à des échelles plus petites – telles par exemple les dislocations microscopiques observées dans les aciers dont la conséquence macroscopique est l'écroutissement ; ce ne sera pourtant pas l'ambition donnée aux variables internes que nous définirons plus tard et dont l'unique fonction sera phénoménologique : reproduire les effets des sources de dissipation d'énergie (phénomènes non-linéaires) sur la réponse observée à l'échelle macroscopique du matériau (contrainte en fonction de la déformation).

L'objectif de ce chapitre est de présenter la formulation théorique d'un modèle de béton – de loin plus difficile à modéliser que l'acier – capable de représenter les principales sources de dissipation d'énergie matérielle. Ce modèle, nous le verrons, est suffisamment versatile pour représenter les principales sources de dissipation d'énergie dans le béton et dans l'acier. Le modèle a été développé dans un cadre adéquat pour une implantation robuste dans des procédures de résolution numérique basée sur la méthode des éléments finis. Après quelques rappels de notions de mécanique des milieux continus donnés dans la section 2, la section 3 sera consacrée à la formulation théorique du modèle constitutif de béton ; dans la section 4, les conditions sous lesquelles le modèle entre dans la classe des *matériaux standards généralisés* [Hal75] seront examinées au bénéfice d'une implantation numérique – qui ne sera détaillée

que dans le prochain chapitre – robuste; la section 5 sera consacrée à l’écriture des équations de Euler-Lagrange du problème mécanique d’une structure composée de matériaux dont la loi de comportement est 1D et sous sollicitation dynamique; avant de conclure, le cas particulier des structures de type portique modélisées par des éléments multifibres sera abordé.

## 2 Notions de mécanique des milieux continus – Notations

Nous nous inspirons fortement dans cette section du premier chapitre de [Bat90a] ainsi que du premier chapitre de [Eri67] et du deuxième chapitre de [Ibr09].

### 2.1 Configuration d’un solide déformable

Les points matériels d’un milieu continu occupent à un instant donné une région  $\bar{\Omega}(t)$  de l’espace, composée du volume matériel  $\Omega(t)$  et de sa surface  $\partial\Omega(t)$  :  $\bar{\Omega}(t) = \Omega(t) \cup \partial\Omega(t)$ . Nous caractérisons la configuration  $C(t)$  du solide au cours du temps par :

- La position des points matériels  $P$  de  $\bar{\Omega}(t)$  exprimée par un système de coordonnées  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}^T$ . Nous notons  $C^0$  la configuration de référence du solide et  $\mathbf{x}^0$  les coordonnées des points matériels dans cette configuration. Lorsque les variables sont exprimées en fonction de la configuration de référence  $C^0$  –  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$  – on parle de description lagrangienne.
- Les vitesses et accélérations des points matériels  $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  et  $\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ .
- La masse volumique  $\rho(\mathbf{x}, t)$ .
- Les contraintes internes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \alpha, t)$  des points matériels, où  $\alpha$  est un jeu de variables internes qui caractérisent la réponse du matériau.
- Les forces par unité de volume  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  et les forces par unité de surface  $\mathbf{t}(\mathbf{x}^s, t)$  qui agissent sur le solide.

### 2.2 Hypothèse des petits déplacements et des petites déformations

Dans l’hypothèse de petits déplacements, les configurations  $C(t)$  et  $C^0$  peuvent être confondues. Dans la suite, nous nous contenterons de définir les variables qui nous intéressent, dans la configuration de référence uniquement. Nous décrirons le déplacement d’un point matériel par le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)\}^T$ .

Dans le contexte 1D où nous nous plaçons pour décrire le comportement des matériaux qui composent le solide, une seule composante  $\epsilon(\mathbf{x}, t)$  du tenseur des déformations et  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  du tenseur des contraintes est nécessaire. Nous faisons de plus l'hypothèse que les déformations sont petites, d'où la relation linéaire :  $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x}$ .

## 2.3 Discontinuités fortes

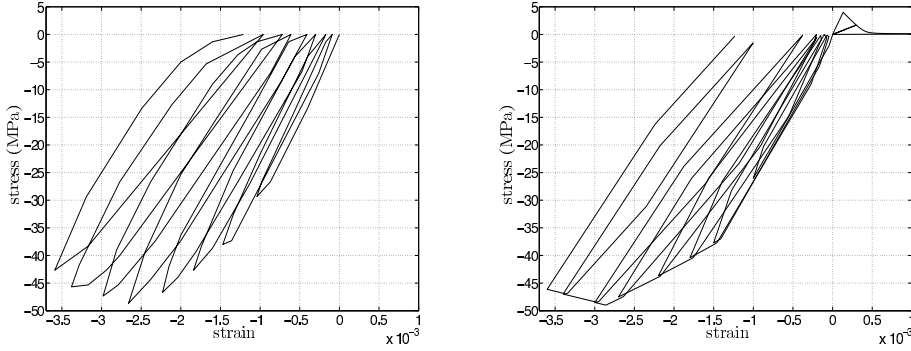
Nous appelons discontinuité forte une discontinuité de déplacement [Sim93, Bra03, Ibr03a]. Dans le milieu continu  $\Omega$ , nous permettons l'apparition de discontinuités de déplacement  $\bar{u}_i(\mathbf{x}_i, t)$ ,  $i \in [1, \dots, n_{dis}]$  où  $n_{dis}$  est le nombre de discontinuités et  $\mathbf{x}_i = \{\mathbf{x} / \mathbf{x} \in \Gamma_i\}$  avec  $\Gamma_i \in \Gamma = \cup_{i=1}^{n_{dis}} \Gamma_i$  une section de discontinuité dans  $\Omega$ . Nous supposons que ces discontinuités ne remettent pas en cause les hypothèses des petits déplacements et des petites déformations et qu'elles n'affectent que la composante longitudinale  $u(\mathbf{x}, t)$  du champ de déplacement. Enfin, nous notons  $t_i(\mathbf{x}_i, t)$  la contrainte dans la section  $\Gamma_i$ .

# 3 Modèle constitutif 1D de béton

## 3.1 Thermodynamique avec variables internes

Afin de représenter les principaux phénomènes observés sur la réponse expérimentale d'un *VER* de béton sous chargement cyclique (Fig. 3.1), un jeu  $\alpha$  de variables internes est choisi. Les phénomènes que nous voudrions modéliser sont : (i) un comportement dépendant du taux de chargement, (ii) l'écroutissement, (iii) l'adoucissement, (iv) l'apparition de déformations résiduelles, (v) les dégradations de la contrainte ultime et de la raideur, (vi) les boucles d'hystérésis locales. Nous considérons que les phénomènes (ii), (iv) et (vi) ne se produisent qu'en compression, que l'adoucissement en compression est du à la localisation de déformations permanentes tandis que l'adoucissement en traction est du à la localisation de déformations qui disparaissent complètement après décharge. Une variable interne est associée à chacun de ces mécanismes identifiés.

Le jeu de variables internes que nous avons choisi est défini dans la table 3.1 et le mécanisme physique associé à chacune des variables est illustré sur la figure 3.2.  $\bullet$  et  $\bar{\bullet}$  désignent des quantités continues et discrètes. En ce qui concerne les variables internes continues :  $\bar{\epsilon}^v$  et  $\bar{\epsilon}^p$  sont les déformations visqueuse et plastique,  $\bar{\xi}^p$  et  $\bar{\lambda}^p$  sont les variables – de même dimension qu'une déformation – qui décrivent



**Fig. 3.1:** Réponse d'une éprouvette de béton sous chargement cyclique quasi-statique : courbes expérimentale (adaptée de [Ram90]) [gauche] et numérique (en utilisant le modèle constitutif de béton présenté dans ce chapitre) [droite].

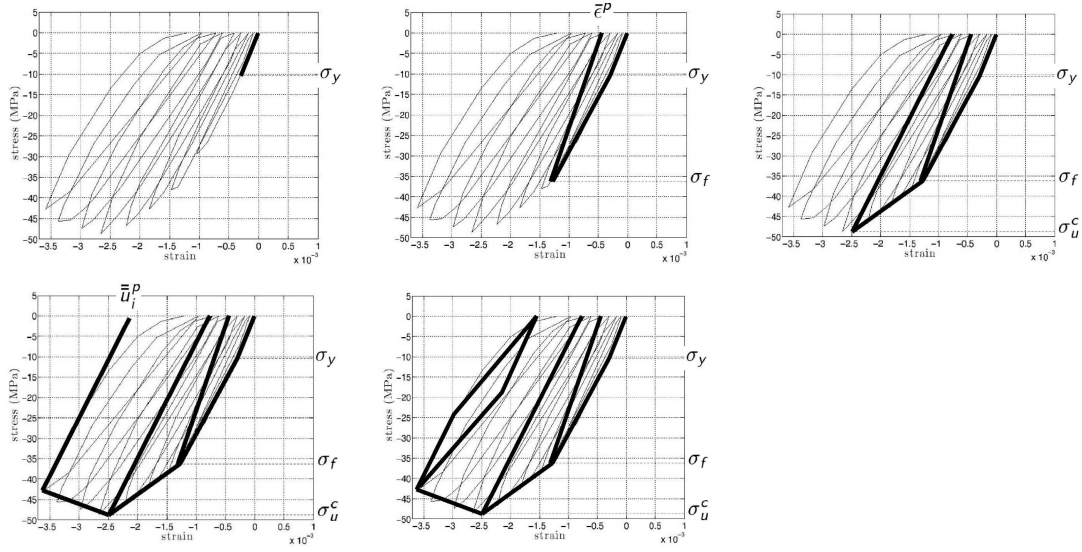
les écrouissages isotrope et cinématique plastiques,  $\bar{D}$  représente la dégradation de raideur et  $\bar{\xi}^d$  l'écrouissage isotrope du modèle d'endommagement continu. Ensuite, en ce qui concerne les variables internes discrètes – les variables qui décrivent la réponse des sections dans lesquelles la déformation peut se localiser –  $\bar{u}^p$  représente la déformation plastique localisée et  $\bar{\xi}^p$  l'adoucissement plastique en compression,  $\bar{D}$  caractérise la dégradation de raideur et  $\bar{\xi}^d$  l'adoucissement du modèle d'endommagement en traction.

	t/c	compression							traction	
$\alpha$	$\bar{\epsilon}^v$	$\bar{\epsilon}^p$	$\bar{\xi}^p$	$\bar{\lambda}^p$	$\bar{D}$	$\bar{\xi}^d$	$\bar{u}^p$	$\bar{\xi}^p$	$\bar{D}$	$\bar{\xi}^d$
$\mathcal{A}$	$\sigma^v$	$\sigma$	$\bar{q}^p$	$\bar{\kappa}^p$	$\frac{\sigma^2}{2}$	$\bar{q}^d$	$\mathbf{t}$	$\bar{q}^p$	$\frac{\mathbf{t}^2}{2}$	$\bar{q}^d$
PC	$\eta$	$\bar{E}$	$\bar{K}^p$	$\bar{H}^p$	$\bar{E}^{-1}$	$\bar{K}^d$	$\bar{E}$	$\bar{K}^p$	$\bar{E}^{-1}$	$\sigma_\infty, a$

**Tab. 3.1:** Jeu de variables internes  $\alpha$ , affinités correspondantes  $\mathcal{A}$  et coefficients phénoménologiques CP (paramètres du modèle).

Une qualité importante de ce modèle de matériau est que tous ses paramètres ont une signification claire et peuvent donc être facilement identifiés à partir de courbes expérimentales. La procédure complète d'identification d'une loi de béton est présentée dans la section 3.4 : le paramètre visqueux  $\eta$  peut être vu comme une propriété matérielle et identifié à partir par exemple de tests générant des vibrations libres ; le paramètre  $a$  d'adoucissement en traction est relié à l'énergie de fracturation  $G_F$ , un concept de mécanique de la rupture [Hil76] qui définit la quantité totale d'énergie qui doit être fournie en traction à une section de béton entre l'instant où le déplacement commence à se localiser et l'instant où la section est complètement cassée ; tous les autres paramètres du modèle de matériau peuvent être identifiés à





**Fig. 3.2:** Mécanismes physiques associés aux variables internes en compression : [haut, gauche]  $\bar{\epsilon}^v$  représente le comportement viscoélastique ; [haut, centre]  $\bar{\epsilon}^p$  et  $\bar{\xi}^p$  représentent l'apparition de déformations plastiques et l'écroissage plastique ; [haut, droite]  $\bar{D}$  et  $\bar{\xi}^d$  représentent la perte de raideur et l'écroissage d'endommagement ; [bas, gauche]  $\bar{u}^p$  et  $\bar{\xi}^p$  représentent l'apparition d'un saut de déplacement plastique et l'adoucissement ; [bas, droite]  $\bar{\lambda}^p$  représente l'apparition de boucles d'hystérésis locales.

partir de courbes contrainte-déformation d'éprouvettes de béton sous chargement cyclique quasi-statique.

## 3.2 Équations qui gouvernent le modèle constitutif

### 3.2.1 Ingrédients de base

Commençons la présentation de la formulation du modèle dans le cadre de la *TIV* par la définition de ses trois ingrédients de base :

1. Décomposition de la déformation totale en des déformations viscoélastique, plastique, d'endommagement et discrètes. Les déformations discrètes rendent compte de la localisation du déplacement dans certaines sections du solide. L'espace  $\mathcal{A}$  des affinités (forces thermodynamiques) associées aux variables internes est divisé en deux parties : les termes impliqués dans la description du comportement en traction ( $\sigma \geq 0$ ) sont mentionnés par le signe  $\bullet^+$  et ceux impliqués en compression ( $\sigma < 0$ ) par le signe  $\bullet^-$ . Notons que dans le cas d'un modèle matériel 1D, traction et compression ont une signification claire.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, t) &= \bar{u}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \bar{u}_i(t) \mathcal{H}_{\Gamma_i}(x) \\
\epsilon(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x} = \underbrace{\bar{\epsilon}^v(\mathbf{x}, t) + \bar{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t)}_{\bar{\epsilon}(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{dis}} (\bar{u}_i^\diamond(t) + \bar{u}_i^p(t)) \delta_{\Gamma_i}(x)}_{\bar{\epsilon}(\mathbf{x}, t)}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $\bar{\epsilon}(\mathbf{x}, t)$  est la partie continue de la déformation et  $\bar{\epsilon}(\mathbf{x}, t)$  – avec  $\bar{u}^\diamond = \bar{u}^d$  en traction et  $\bar{u}^\diamond = \bar{u}^e$  en compression – sa partie discrète introduite par la fonction de Dirac  $\delta_{\Gamma_i}(x)$  qui est la dérivée de la fonction de Heaviside  $\mathcal{H}_{\Gamma_i}(x)$  qui introduit les sauts de déplacement  $\bar{u}_i(t)$  dans la description de la composante longitudinale du champ de déplacement.  $\bar{\epsilon}^v$  correspond à la déformation visqueuse dans un modèle rhéologique de Kelvin-Voigt : un ressort – élastique en traction ( $\bar{\epsilon}^v = \bar{\epsilon}^e$ ) et endommageable en compression ( $\bar{\epsilon}^v = \bar{\epsilon}^d$ ) – et un amortisseur en parallèle dont le coefficient visqueux est  $\eta$ .

**Remarque :** La déformation  $\epsilon(\mathbf{x}, t)$  ainsi enrichie par des sauts de déplacements localisés n'est pas une quantité locale : la déformation en un point matériel dépend en effet des sauts  $\bar{u}_i(\mathbf{x}_i, t)$  de la composante longitudinale du champ de déplacement qui apparaissent dans les sections  $\Gamma_i$ , auxquelles n'appartient pas nécessairement le point matériel considéré. Notons cependant qu'il n'est pas question ici de recourir à la théorie non-locale de la plasticité [Baz88a] ni de l'endommagement [Baz88b].

2. Définition de la fonctionnelle de l'énergie matérielle stockée (énergie libre de Helmholtz) :

$$\begin{aligned}
\psi^+(u, \boldsymbol{\alpha}) &= \bar{\psi}^e(\bar{u}^+) + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \bar{\psi}_i^d(\bar{u}_i^+, \bar{D}_i) + \bar{\Xi}_i^d(\bar{\xi}_i^d) \right) \delta_{\Gamma_i} \\
\psi^-(u, \boldsymbol{\alpha}) &= \bar{\psi}^d(\bar{u}^-, \bar{\epsilon}^p, \bar{D}) + \bar{\Xi}^p(\bar{\xi}^p) + \bar{\Lambda}^p(\bar{\lambda}^p) + \bar{\Xi}^d(\bar{\xi}^d) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \bar{\psi}_i^e(\bar{u}_i^-, \bar{u}_i^p) + \bar{\Xi}_i^p(\bar{\xi}_i^p) \right) \delta_{\Gamma_i}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

3. Les mécanismes non-linéaires de plasticité et d'endommagement sont activés pour une valeur positive de la fonction de critère associée :

– **Pour  $\sigma \geq 0$  (traction)**, les mécanismes dissipatifs qui peuvent être impliqués dans le processus d'évolution du système sont activés selon les fonc-

tions critères suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{\phi}^{v,+}(\sigma) &= \sigma^v = \sigma - \sigma^e \leq 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \bar{\phi}^{d,+}(\mathbf{t}_i, \bar{q}_i^d) &= \mathbf{t}_i - (\sigma_u^t - \bar{q}_i^d) \leq 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i\end{aligned}\quad (3.3)$$

où  $\mathbf{t}_i(t)$  est la contrainte dans la section de discontinuité  $\Gamma_i$  et  $\sigma_u^t$  est la contrainte ultime en traction.

– **Pour  $\sigma < 0$  (compression)**, les fonctions critères sont :

$$\begin{aligned}\bar{\phi}^{v,-}(\sigma) &= -\sigma^v = -(\sigma - \sigma^d) \leq 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \bar{\phi}^{p,-}(\sigma, \bar{q}^p, \bar{\kappa}^p) &= |\sigma + \bar{\kappa}^p| - (\sigma_y - \bar{q}^p) \leq 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \bar{\phi}^{d,-}(\sigma, \bar{q}^d) &= -\sigma - (\sigma_f - \bar{q}^d) \leq 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \bar{\phi}^{p,-}(\mathbf{t}_i, \bar{q}_i^p) &= -\mathbf{t}_i - (\sigma_u^c - \bar{q}_i^p) \leq 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i\end{aligned}\quad (3.4)$$

où  $\sigma_y$ ,  $\sigma_f$  et  $\sigma_u^c$  sont la limite élastique, la limite de microfissuration et la contrainte ultime en compression.

Maintenant en possession de ces trois ingrédients de base, nous pouvons nous attaquer aux deux questions essentielles pour atteindre l'objectif que nous nous sommes fixé (prédire l'évolution d'un maximum de mécanismes non-linéaires à l'échelle des matériaux ou – ce qui est la même chose – modéliser un maximum de sources de dissipation d'énergie matérielles) : décrire l'état de notre système à un instant donné et prédire son évolution vers des états futurs.

### 3.2.2 Équations d'état du système

**Remarque :** Nous entendons ici par « système », le système  $\mathcal{S}$  constitué d'un point matériel quelconque dans  $\Omega$  associé à l'ensemble des points matériels appartenant à une section de discontinuité  $\{\mathbf{x}/\mathbf{x} \in \Gamma\}$ . On ne peut pas se limiter à un point matériel seul puisque l'état du point matériel considéré dépend de l'état des discontinuités.

Commençons par dériver les équations d'état du système – en d'autres termes les équations qui caractérisent l'état du système dans l'espace  $\mathcal{A}$  des contraintes (plus précisément des affinités thermodynamiques) – en partant de l'écriture du taux de dissipation d'énergie par unité de volume. Ce dernier peut-être calculé comme la différence entre les taux d'énergie fournie au système et d'énergie stockée par le système.

**En traction :**

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{D}}^+ &= \left( \sigma \dot{\bar{\epsilon}}^+ + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{t}_i \dot{\bar{u}}_i^+ \delta_{\Gamma_i} \right) - \dot{\psi}^+(\bar{u}^+, \bar{\mathbf{u}}^+, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}^d) \\ &= (\sigma^e + \sigma^v) \dot{\bar{\epsilon}}^+ + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{t}_i \dot{\bar{u}}_i^+ \delta_{\Gamma_i} - \frac{\partial \bar{\psi}^e}{\partial \bar{\epsilon}^+} \dot{\bar{\epsilon}}^+ - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_i^d}{\partial \bar{u}_i^+} \dot{\bar{u}}_i^+ + \frac{\partial \bar{\psi}_i^d}{\partial \bar{D}_i} \dot{\bar{D}}_i + \frac{\partial \bar{\Xi}_i^d}{\partial \bar{\xi}_i^d} \dot{\bar{\xi}}_i^d \right) \delta_{\Gamma_i}\end{aligned}$$

où  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{\mathbf{D}}$  et  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  sont les vecteurs de dimension  $n_{dis}$  qui contiennent les quantités discrètes  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{D}_i$  et  $\bar{\xi}_i^d$  de toutes les sections de discontinuité  $\Gamma_i$ .

Nous savons de plus que  $\dot{\bar{\epsilon}}^+ = \dot{\bar{\epsilon}}^e = \dot{\bar{\epsilon}}^v$  et  $\dot{\bar{u}}_i^+ = \dot{\bar{u}}_i^d$  parce que  $\bar{u}_i^p$  n'évolue pas en traction conformément aux équations (3.3) et (3.4). Ainsi :

$$\dot{\mathcal{D}}^+ = \left( \sigma^e - \frac{\partial \bar{\psi}^e}{\partial \bar{\epsilon}^e} \right) \dot{\bar{\epsilon}}^e + \sigma^{v,+} \dot{\bar{\epsilon}}^{v,+} + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \mathbf{t}_i - \frac{\partial \bar{\psi}_i^d}{\partial \bar{u}_i^d} \right) \dot{\bar{u}}_i^d \delta_{\Gamma_i} - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \frac{\partial \bar{\psi}_i^d}{\partial \bar{D}_i} \dot{\bar{D}}_i \delta_{\Gamma_i} - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \frac{\partial \bar{\Xi}_i^d}{\partial \bar{\xi}_i^d} \dot{\bar{\xi}}_i^d \delta_{\Gamma_i} \quad (3.5)$$

**En compression :**

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{D}}^- &= \left( \sigma \dot{\bar{\epsilon}}^- + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{t}_i \dot{\bar{u}}_i^- \delta_{\Gamma_i} \right) - \dot{\psi}^-(\bar{u}^-, \bar{\mathbf{u}}^-, \bar{\epsilon}^p, \bar{\xi}^p, \bar{\lambda}^p, \bar{D}, \bar{\xi}^d, \bar{\mathbf{u}}^p, \bar{\boldsymbol{\xi}}^p) \\ &= (\sigma^d + \sigma^v) \dot{\bar{\epsilon}}^- + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{t}_i \dot{\bar{u}}_i^- \delta_{\Gamma_i} - \left( \frac{\partial \bar{\psi}^d}{\partial (\bar{\epsilon}^- - \bar{\epsilon}^p)} (\dot{\bar{\epsilon}}^- - \dot{\bar{\epsilon}}^p) + \frac{\partial \bar{\psi}^d}{\partial \bar{D}} \dot{\bar{D}} + \frac{\partial \bar{\Xi}^p}{\partial \bar{\xi}^p} \dot{\bar{\xi}}^p \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{\Lambda}^p}{\partial \bar{\lambda}^p} \dot{\bar{\lambda}}^p + \frac{\partial \bar{\Xi}^d}{\partial \bar{\xi}^d} \dot{\bar{\xi}}^d \right) - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_i^e}{\partial (\bar{u}_i^- - \bar{u}_i^p)} (\dot{\bar{u}}_i^- - \dot{\bar{u}}_i^p) + \frac{\partial \bar{\Xi}_i^p}{\partial \bar{\xi}_i^p} \dot{\bar{\xi}}_i^p \right) \delta_{\Gamma_i}\end{aligned}$$

Nous savons de plus que  $\dot{\bar{\epsilon}}^- = \dot{\bar{\epsilon}}^v + \dot{\bar{\epsilon}}^p$  avec  $\dot{\bar{\epsilon}}^v = \dot{\bar{\epsilon}}^d$  et  $\dot{\bar{u}}_i^- = \dot{\bar{u}}_i^e + \dot{\bar{u}}_i^p$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{D}}^- &= \left( \sigma^d - \frac{\partial \bar{\psi}^d}{\partial (\bar{\epsilon}^- - \bar{\epsilon}^p)} \right) \dot{\bar{\epsilon}}^d + \sigma^v \dot{\bar{\epsilon}}^{v,-} + \sigma \dot{\bar{\epsilon}}^p - \frac{\partial \bar{\psi}^d}{\partial \bar{D}} \dot{\bar{D}} - \frac{\partial \bar{\Xi}^p}{\partial \bar{\xi}^p} \dot{\bar{\xi}}^p - \frac{\partial \bar{\Lambda}^p}{\partial \bar{\lambda}^p} \dot{\bar{\lambda}}^p - \\ &\quad \frac{\partial \bar{\Xi}^d}{\partial \bar{\xi}^d} \dot{\bar{\xi}}^d + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \mathbf{t}_i - \frac{\partial \bar{\psi}_i^e}{\partial (\bar{u}_i^- - \bar{u}_i^p)} \right) \dot{\bar{u}}_i^e \delta_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{t}_i \dot{\bar{u}}_i^p \delta_{\Gamma_i} - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \frac{\partial \bar{\Xi}_i^p}{\partial \bar{\xi}_i^p} \dot{\bar{\xi}}_i^p \delta_{\Gamma_i} \quad (3.6)\end{aligned}$$

Notons de plus que lorsque le système n'évolue pas, aucune variable interne n'évolue et donc la dissipation est nulle. C'est cette propriété des variables internes qui permet de définir les équations d'état associées aux autres variables que les variables internes du système. Ainsi, si nous posons  $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}$  et  $\dot{\mathcal{D}}^- = \dot{\mathcal{D}}^- = 0$  dans

les équations (3.5) et (3.6), nous obtenons les équations d'état suivantes :

$$\sigma^e = \frac{\partial \bar{\psi}^e}{\partial \bar{\epsilon}^e} \quad , \quad \sigma^d = \frac{\partial \bar{\psi}^d}{\partial \bar{\epsilon}^d} \quad , \quad \mathbf{t}_i^+ = \frac{\partial \bar{\psi}_i^d}{\partial \bar{u}_i^d} \quad , \quad \mathbf{t}_i^- = \frac{\partial \bar{\psi}_i^e}{\partial \bar{u}_i^e} \quad (3.7)$$

Précisons que  $\bar{\epsilon}^e, \bar{\mathbf{u}}^d, \bar{\epsilon}^d, \bar{\mathbf{u}}^e$  ne sont pas des variables internes puisqu'elles ne participent pas à la dissipation d'énergie matérielle : les variables d'état du système sont  $\bar{\epsilon}^e, \bar{\mathbf{u}}^d, \bar{\epsilon}^d, \bar{\mathbf{u}}^e$  et les variables internes  $\boldsymbol{\alpha}$ .

Afin de donner une écriture des équations d'état qui soit exploitable, nous sommes maintenant amenés à définir les termes de l'énergie libre de Helmholtz en fonction des variables d'état du système  $\mathcal{S}$  (les inconnues du problème). Pour cela, nous adoptons une démarche phénoménologique et définissons les termes en question de sorte qu'ils permettent de reproduire la réponse expérimentale du béton de façon précise :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^e &= \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^e \bar{E} \bar{\epsilon}^e & \bar{\psi}^d &= \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}^- - \bar{\epsilon}^p) \bar{D}^{-1} (\bar{\epsilon}^- - \bar{\epsilon}^p) & (3.8) \\ \bar{\psi}_i^d &= \frac{1}{2} \bar{u}_i^d \bar{D}^{-1} \bar{u}_i^d & \bar{\Xi}^p &= \frac{1}{2} \bar{\xi}^p \bar{K}^p \bar{\xi}^p \\ \bar{\Xi}_i^d &= -(\sigma_u^t - \sigma_\infty) \left( \bar{\xi}_i^d + \frac{1}{a} e^{-a \bar{\xi}_i^d} \right) & \bar{\Lambda}^p &= \bar{\lambda}^p \bar{H}^p \bar{\lambda}^p \\ & & \bar{\Xi}^d &= \frac{1}{2} \bar{\xi}^d \bar{K}^d \bar{\xi}^d \\ & & \bar{\psi}_i^e &= (\bar{u}_i^- - \bar{u}_i^p) \bar{E} (\bar{u}_i^- - \bar{u}_i^p) \\ & & \bar{\Xi}_i^p &= \frac{1}{2} \bar{\xi}_i^p \bar{K}^p \bar{\xi}_i^p \end{aligned}$$

Nous définissons de plus les équations d'état associées aux variables internes à partir de la fonctionnelle de l'énergie libre de Helmholtz qui joue alors le rôle de potentiel thermodynamique d'où dérivent des forces dissipatives d'énergie – ou d'amortissement si on veut pousser un peu plus loin l'analogie avec l'idée du potentiel dissipatif introduite par Rayleigh! – :

$$\mathcal{A}_i = -\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \quad (3.9)$$

Finalement, l'ensemble des équations qui caractérisent l'état du système  $\mathcal{S}$ , à un instant donné, dans l'espace  $\mathcal{A}$  des contraintes, est donné dans la table 3.2.

Traction	Compression
$\sigma^e = \bar{E}\bar{\epsilon}^e$	$\sigma^d = \bar{D}\bar{\epsilon}^d$
$\mathbf{t}_i = \bar{D}_i^{-1}\bar{u}_i^d$	$\mathbf{t}_i = \bar{E}\bar{u}_i^e$
$\bar{q}_i^d = -\frac{\partial \bar{\Xi}_i^d}{\partial \bar{\xi}_i^d} = (\sigma_u^t - \sigma_\infty) \left(1 - e^{-a\bar{\xi}_i^d}\right)$	$\bar{q}^p = -\frac{\partial \bar{\Xi}^p}{\partial \bar{\xi}^p} = -\bar{K}^p \bar{\xi}^p$
$\frac{1}{2}\mathbf{t}_i^2 = -\frac{\partial \bar{\psi}_i^d}{\partial \bar{D}_i}$	$\bar{\kappa}^p = -\frac{\partial \bar{\Lambda}^p}{\partial \bar{\lambda}^p} = -\bar{H}^p \bar{\lambda}^p$
	$\bar{q}^d = -\frac{\partial \bar{\Xi}^d}{\partial \bar{\xi}^d} = -\bar{K}^d \bar{\xi}^d$
	$\frac{1}{2}\sigma^2 = -\frac{\partial \bar{\psi}^d}{\partial \bar{D}}$
	$\bar{q}_i^p = -\frac{\partial \bar{\Xi}_i^p}{\partial \bar{\xi}_i^p} = -\bar{K}^p \bar{\xi}_i^p$

**Tab. 3.2:** Équations d'état du système  $\mathcal{S}$ .

### 3.2.3 Équations d'évolution des variables internes

À présent, passons à cette étape indispensable pour espérer prédire l'état du système à un instant futur donné qu'est l'écriture des équations d'évolution des variables internes. Pour cela, il nous faut faire appel à un principe physique : le *principe du maximum de la dissipation*. Ce principe a été utilisé à l'origine dans les problèmes de plasticité [Hil50, Lub90], mais il nous semble que son extension à l'ensemble des mécanismes dissipatifs présents dans ce modèle est possible. Premièrement, d'un point de vue pratique, cette extension a déjà été utilisée avec succès pour formuler des modèles associant plasticité et endommagement continu [Mar06]. Deuxièmement, d'un point de vue plus théorique, la dissipation peut être vue comme l'entropie du système et les systèmes tendent, en général, à maximiser le taux de production d'entropie au cours de leur évolution [Pri98]. Le physicien Ludwig Boltzmann (1844-1906) a en outre donné une interprétation statistique de ce principe : le chemin le plus probable d'un système entre un état d'équilibre et un autre est celui qui maximise la production d'entropie.

Nous supposons donc que l'évolution de l'état du système  $\mathcal{S}$  est déterminée par le principe du maximum de la dissipation intrinsèque. Afin d'appliquer ce principe, commençons par réécrire les équations (3.5) et (3.6) en y injectant les équations

d'état rassemblées dans la table 3.2 :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{D}} &= \underbrace{\sigma^v \dot{\bar{\epsilon}}^v}_{\dot{\mathcal{D}}^v} + \underbrace{\sigma \dot{\bar{\epsilon}}^p + \bar{q}^p \dot{\bar{\xi}}^p + \bar{\kappa}^p \dot{\bar{\lambda}}^p}_{\dot{\mathcal{D}}^p} + \underbrace{\frac{1}{2} \sigma \dot{D} \sigma + \bar{q}^p \dot{\bar{\xi}}^d}_{\dot{\mathcal{D}}^d} + \\ &\sum_{i=1}^{n_{dis}} \underbrace{\left( \mathbf{t} \dot{\bar{u}}^p + \bar{q}^p \dot{\bar{\xi}}^p \right)}_{\dot{\mathcal{D}}_i^p} \delta_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \underbrace{\left( \frac{1}{2} \mathbf{t} \dot{D} \mathbf{t} + \bar{q}^d \dot{\bar{\xi}}^d \right)}_{\dot{\mathcal{D}}_i^d} \delta_{\Gamma_i} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Les lois d'écoulement des variables internes du système doivent maintenant être exprimées de sorte qu'elles maximisent le taux de dissipation ci-dessus ; en outre, l'évolution doit se faire en accord avec les fonctions critères des équations (3.3) et (3.4) : nous sommes donc en présence d'un problème de maximisation sous contraintes exprimées sous forme d'inégalités. Introduisons la notation  $\mathbf{f} = (\sigma, \mathbf{t}, q^p, \kappa^p, q^d, \bar{\mathbf{q}}^p, \bar{\mathbf{q}}^d)$  et formulons alors le problème  $\mathcal{P}$  de maximisation :

$$\max_{\mathbf{f}} \dot{\mathcal{D}} \text{ sous contraintes } \bar{\phi}^v(\mathbf{f}) \leq 0, \bar{\phi}^p(\mathbf{f}) \leq 0, \bar{\phi}^d(\mathbf{f}) \leq 0, \bar{\bar{\phi}}^p(\mathbf{f}) \leq 0, \bar{\bar{\phi}}^d(\mathbf{f}) \leq 0 \quad (3.11)$$

Le problème  $\mathcal{P}$  peut être résolu par la méthode des multiplicateurs de Lagrange [Ibr09, Str86]. Le Lagrangien est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{f}, \dot{\gamma}) = \dot{\mathcal{D}} - (\dot{\gamma}^v \bar{\phi}^v + \dot{\gamma}^p \bar{\phi}^p + \dot{\gamma}^d \bar{\phi}^d + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \dot{\bar{\gamma}}_i^p \bar{\bar{\phi}}_i^p + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \dot{\bar{\gamma}}_i^d \bar{\bar{\phi}}_i^d) \quad (3.12)$$

où  $\dot{\gamma} = (\dot{\gamma}^v, \dot{\gamma}^p, \dot{\gamma}^d, \dot{\bar{\gamma}}^p, \dot{\bar{\gamma}}^d)$  est un vecteur de multiplicateurs de Lagrange associés à chaque contrainte. D'après les conditions dites d'optimalité de Kuhn-Tucker selon lesquelles : si le vecteur  $\mathbf{f}^* = \{f_i^*\}$  est une solution de  $\mathcal{P}$ , alors il existe un unique vecteur de multiplicateurs de Lagrange  $\dot{\gamma}^* = \{\dot{\gamma}_j^*\}$  tel que les relations suivantes sont vérifiées pour tout  $i$  et pour tout  $j$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(f^*, \dot{\gamma}^*)}{\partial f_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(f^*, \dot{\gamma}^*)}{\partial \dot{\gamma}_j} \geq 0, \quad \dot{\gamma}_j^* \geq 0, \quad \dot{\gamma}_j^* \phi_j(f^*) = 0 \quad (3.13)$$

Les trois dernières conditions sont connues sous le nom de conditions de charge / décharge. Finalement, les équations d'évolution des variables internes sont déduites des relations précédentes et rassemblées dans la table 3.3.

En ce qui concerne la variable interne de viscosité  $\bar{\epsilon}^v$ , nous donnons l'expression du multiplicateur visqueux  $\dot{\gamma}^v$  de sorte que la relation rhéologique d'un solide de Kelvin-Voigt -  $\sigma^v = \eta \dot{\bar{\epsilon}}^v$  - soit vérifiée. Nous définissons donc  $\dot{\gamma}^v = \frac{\dot{\bar{\phi}}^v}{\eta}$  ; de cette façon la loi d'évolution de la variable interne visqueuse s'exprime sous la forme

Plasticité continue	Endommagement continu
$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma}^p \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma}$ $\dot{\xi}^p = \dot{\gamma}^p \frac{\partial \phi^p}{\partial q^p}$ $\dot{\lambda}^p = \dot{\gamma}^p \frac{\partial \phi^p}{\partial \kappa^p}$ $\dot{\gamma}^p \geq 0, \phi^p \leq 0, \dot{\gamma}^p \phi^p = 0$	$\dot{D}\sigma = \dot{\gamma}^d \frac{\partial \phi^d}{\partial \sigma}$ $\dot{\xi}^d = \dot{\gamma}^d \frac{\partial \phi^d}{\partial q^d}$ $\dot{\gamma}^d \geq 0, \phi^d \leq 0, \dot{\gamma}^d \phi^d = 0$
Plasticité discrète	Endommagement discret
$\dot{\bar{u}}_i^p = \dot{\bar{\gamma}}_i^p \frac{\partial \bar{\phi}_i^p}{\partial \bar{\mathbf{t}}_i}$ $\dot{\bar{\xi}}_i^p = \dot{\bar{\gamma}}_i^p \frac{\partial \bar{\phi}_i^p}{\partial \bar{q}_i^p}$ $\dot{\bar{\gamma}}_i^p \geq 0, \bar{\phi}_i^p \leq 0, \dot{\bar{\gamma}}_i^p \bar{\phi}_i^p = 0$	$\dot{\bar{D}}_i \bar{\mathbf{t}}_i = \dot{\bar{\gamma}}_i^d \frac{\partial \bar{\phi}_i^d}{\partial \bar{\mathbf{t}}_i}$ $\dot{\bar{\xi}}_i^d = \dot{\bar{\gamma}}_i^d \frac{\partial \bar{\phi}_i^d}{\partial \bar{q}_i^d}$ $\dot{\bar{\gamma}}_i^d \geq 0, \bar{\phi}_i^d \leq 0, \dot{\bar{\gamma}}_i^d \bar{\phi}_i^d = 0$

**Tab. 3.3:** Équations d'évolution des variables internes.

d'une relation de normalité, à la façon dont l'avait définie Perzina [Per66] :

$$\dot{\epsilon}^v = \frac{\bar{\phi}^v}{\eta} \frac{\partial \bar{\phi}^v}{\partial \sigma} \quad (3.14)$$

où le paramètre de viscosité  $\eta$  est supposé ici comme indépendant de la vitesse, bien que ce ne soit pas toujours le cas dans la réalité physique [Ped08].

**Remarque :** Nous avons défini un modèle associé pour le béton (lois d'écoulement normales à la surface de charge). Cette hypothèse n'est pas valable dans un cas général, mais tout à fait pertinente dans notre contexte 1D.

### 3.3 Énergie matérielle dissipée

L'énergie dissipée par le matériau est ainsi calculée :

$$E = \int_{\Omega} \int_0^T \dot{D} dt d\Omega \quad (3.15)$$

D'où, d'après l'équation (3.10) :

$$E = \int_{\Omega} \int_0^T \left( \dot{\bar{D}}^v + \dot{\bar{D}}^d \right) dt d\Omega + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \int_{\Gamma_i} \int_0^T \left( \dot{\bar{D}}_i^p + \dot{\bar{D}}_i^d \right) dt d\Gamma_i \quad (3.16)$$



Une part de la dissipation d'énergie matérielle est donc volumique et l'autre surfacique. La première provient de mécanismes non-linéaires continus et la seconde de mécanismes non-linéaires discrets concentrés dans les sections où des discontinuités apparaissent.

### 3.4 Procédure d'identification des paramètres

Tous les paramètres du modèle cyclique de béton 1D présenté dans ce chapitre ont une signification physique claire. Nous montrons dans cette section que (i) le paramètre visqueux  $\eta$  peut être déterminé à partir de la connaissance – par un test de vibrations libres par exemple – du pourcentage d'amortissement critique élastique  $\xi$ , (ii) le paramètre  $a$  de la loi d'adoucissement en traction peut être déterminé à partir de l'énergie de fracturation  $G_F$  calculée à partir d'une formule empirique et (iii) tous les autres paramètres peuvent être identifiés directement à partir de la réponse expérimentale contrainte-déformation d'une éprouvette de béton sous chargement cyclique quasi-statique.

#### 3.4.1 Identification du paramètre visqueux $\eta$

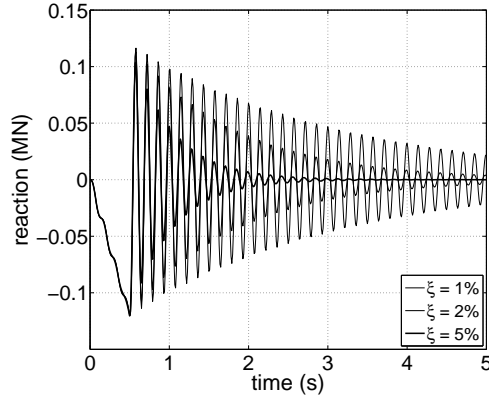
Nous montrons ici que le paramètre visqueux  $\eta$  peut être vu comme une propriété matérielle qui peut être identifiée, par exemple, à partir de la réponse en vibrations libres d'une éprouvette frappée de sorte qu'elle reste dans son domaine élastique afin de ne pas mélanger l'amortissement provenant de la viscoélasticité du béton et l'amortissement provenant de l'activation de mécanismes non-linéaires que le modèle serait capable de prendre en compte explicitement (plasticité,...). La figure 3.3 montre la réponse dynamique du béton – reproduite ici numériquement avec notre modèle – qu'on pourrait obtenir expérimentalement.

1. Premièrement, notons  $\xi$  le pourcentage d'amortissement critique du béton et  $c$  le paramètre visqueux structurel (de l'éprouvette de béton). Tenant compte du fait que pour le béton  $\xi \ll 1$ , nous pouvons écrire [Cho01] :

$$c = 2\xi m\omega \quad (3.17)$$

2. Ensuite, nous exprimons le paramètre matériel  $\eta$  en fonction du paramètre structurel  $c$  en partant des expressions locales 1D de l'équilibre et de la loi constitutive d'un solide de Kelvin-Voigt :

$$\rho\ddot{u} + \frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \sigma = E\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (3.18)$$



**Fig. 3.3:** Réponse viscoélastique en vibrations libres (reproduite avec notre modèle) d'une barre en béton testée pour différents pourcentages d'amortissement critique.

Pour une structure testée de section d'aire  $A$  constante et en admettant que la déformation longitudinale – ce qui est effectivement le cas lorsqu'on considère que la structure reste élastique – est constante ( $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{L}$ ), l'introduction de l'équation (3.18)<sub>2</sub> dans l'équation (3.18)<sub>1</sub> et, ensuite, l'intégration de l'équation locale résultante sur tout le domaine de la structure donne :

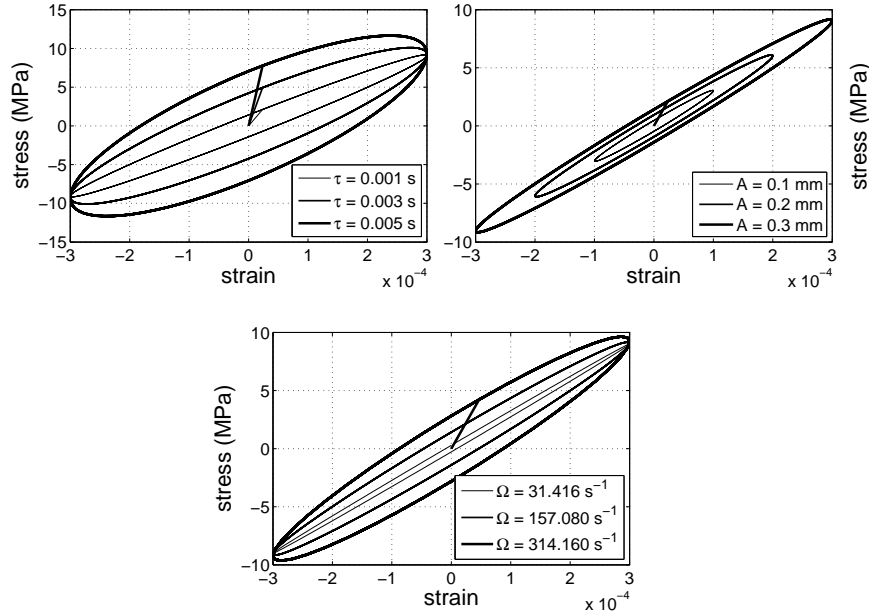
$$\underbrace{\rho AL}_{m} \ddot{u} + \underbrace{\frac{A}{L}\eta}_{c} \dot{u} + \underbrace{\frac{EA}{L}}_k u = 0 \quad (3.19)$$

3. Le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt possède un comportement hystérétique – dissipatif d'énergie – sous chargement cyclique sinusoïdal comme illustré sur les figures 3.4 pour une excitation de la forme  $\bar{u} = U \cdot \sin(\Omega t)$  avec, sauf indication contraire,  $U = 0,3 \text{ mm}$ ,  $\Omega = 157,08 \text{ s}^{-1}$  et  $\tau = 0,001 \text{ s}$ . La quantité d'énergie dissipée par cycle  $D^{cyc}$  – l'aire dessinée par l'ellipse – s'écrit de façon analytique [Wan09] :

$$D^{cyc} = \pi c \Omega U^2 \quad (3.20)$$

Le principal inconvénient du modèle de Kelvin-Voigt est que  $D^{cyc}$  dépend de la fréquence  $\Omega$  du chargement, ce qui ne semble physiquement pas réaliste en particulier dans le cas d'excitations sismiques [Wan09]. Cette dépendance est négligeable si la réponse de la structure est dominée par sa période fondamentale, soit lorsque  $\Omega \simeq \omega$ .

4. Supposons maintenant qu'une structure de béton comme celle décrite sur la figure 3.5 soit excitée par une impulsion qui est suffisamment faible pour ne pas activer les phénomènes non-linéaires qui pourraient être représentés par notre modèle et que, en supposant que la réponse de la structure testée soit dominée



**Fig. 3.4:** Réponse hystérétique du modèle viscoélastique sous chargement sinusoïdal quasi-statique pour différents [haut-gauche] paramètres visqueux, [haut-droite] amplitude des oscillations et [bas] pulsations forcées.

par son mode fondamental  $\omega$ , un pourcentage d'amortissement critique  $\xi = 1\%$  est mesuré, par la méthode du décrément logarithmique par exemple. Nous pouvons alors voir  $\eta$  comme une propriété matérielle et l'identifier à partir de la relation :

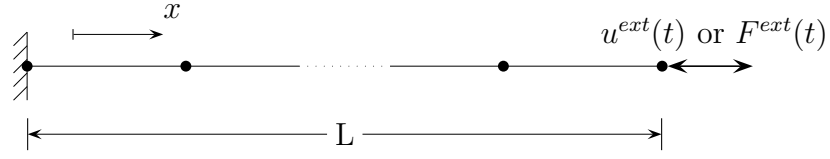
$$\eta = \frac{2\xi m\omega L}{A} \quad (3.21)$$

Avec les propriétés géométriques indiquées sur la figure 3.5, il vient :

$$\eta = 15,7 \text{ MPa}\cdot\text{s} \quad ; \quad \tau = \frac{\eta}{E} \simeq 4,5e^{-4} \text{ s} \quad (3.22)$$

### 3.4.2 Identification du paramètre $a$ de la loi d'adoucissement en traction

Le paramètre  $a$  d'adoucissement en traction peut être calculé à partir de l'énergie de fracturation  $G_F$ .  $G_F$  est un des paramètres qui caractérisent la courbe contrainte-séparation (ouverture de fissure) adoucissante du *cohesive crack model* [Hil76, Baz02b] et représente la quantité totale d'énergie qui doit être fournie par un chargement de traction à une section entre le temps  $t_{loc}$  marquant l'activation du phénomène de localisation des déplacements dans la structure et le temps  $t_{cri}$  que nous définirons



**Fig. 3.5:** Modèle d'éprouvette de béton utilisée pour l'identification des paramètres. Les sections ont une aire  $A = 0,04 \text{ m}^2$ , la longueur  $L = 1 \text{ m}$ , la masse additionnelle  $M = 7,0e^5 \text{ kg}$ , la masse volumique  $\rho = 2400 \text{ kg.m}^{-3}$  et le module élastique du béton  $E = 35 \text{ GPa}$ .

numériquement comme le temps auquel le problème local d'adoucissement devient mal posé (parce que  $\bar{K}^d < 0$ ); physiquement,  $t_{cri}$  coïncide avec le temps où la section est complètement cassée en traction : quand toute l'énergie  $G_F$  a été consommée. Nous démontrons dans l'annexe 1 de ce chapitre que :

$$G_F = \int_{t_{loc}}^{t_{cri}} \dot{t} \dot{u} dt = \frac{\sigma_u^t}{2a} \Rightarrow a = \frac{\sigma_u^t}{2G_F} \quad (3.23)$$

De plus, il existe une relation empirique [Baz02a] qui permet de calculer  $G_F$  à partir de caractéristiques matérielles :

$$G_F = 2,5 \alpha_0 \left( \frac{\sigma_u^c}{0,051} \right)^{0,46} \left( 1 + \frac{d_a}{11,27} \right)^{0,22} \left( \frac{w}{c} \right)^{-0,30} \quad (3.24)$$

avec  $\sigma_u^c$  en MPa et où  $\alpha_0 = 1$  pour des agrégats roulés (forme régulière et lisse),  $\alpha_0 = 1,44$  pour des agrégats concassés ou qui présentent des aspérités,  $d_a$  est la taille maximale des agrégats en mm et  $\frac{w}{c}$  est le rapport eau-ciment. Finalement, pour un béton avec  $\alpha_0 = 1,44$ ,  $d_a = 25 \text{ mm}$  et  $\frac{w}{c} = 0,5$ , nous calculons  $G_F = 136 \text{ N.m}^{-1}$  ce qui permet, en utilisant l'équation (3.23) avec  $\sigma_u^t = 3 \text{ MPa}$ , de calculer :

$$a = 22060 \text{ m}^{-1} \quad (3.25)$$

### 3.4.3 Identification des autres paramètres

Nous présentons ici la procédure permettant d'identifier les autres paramètres du modèle – seuls manquent les paramètres pour décrire la réponse en compression – à partir de la réponse expérimentale contrainte-déformation d'une éprouvette de béton reproduite sur la figure 3.1 [gauche] :

1. Identifier le module de Young en traction et en compression. Nous considérons ici qu'ils ont la même valeur :  $E = \bar{E} = 35 \text{ GPa}$ .
2. Identifier les contraintes seuils  $\sigma_y, \sigma_f, \sigma_u^c, \sigma_u^t$  de façon à caractériser les différents changements de pente de l'enveloppe de la réponse du béton. Nous déterminons

$$\sigma_y = 3 \text{ MPa}, \sigma_f = 37 \text{ MPa}, \sigma_u^c = 49 \text{ MPa} \text{ et } \sigma_u^t = 0,6 \cdot \sigma_u^c = 3 \text{ MPa}.$$

3. Identifier simultanément  $\bar{K}^p$  et  $\bar{H}^p$  de sorte qu'à la fois la phase d'écrouissage de l'enveloppe de la réponse dans l'intervalle  $\sigma_y < \sigma < \sigma_f$  et la forme des boucles locales d'hystérésis apparaissant lors des cycles de charges-décharges soient bien représentées.
4. Identifier  $\bar{K}^d$  de sorte que la partie restante de la phase d'écrouissage de l'enveloppe de la réponse dans l'intervalle  $\sigma_f < \sigma < \sigma_u^c$  soit bien décrite.
5. Identifier  $\bar{K}^p$  de sorte que la partie adoucissante de l'enveloppe de la réponse soit bien décrite par le modèle.

La figure 3.1 [droite] est tracée avec les paramètres indiqués ci-dessus. Notons que bien que les paramètres ont tous une signification physique claire, ils sont aussi pour la plupart interdépendants. Les résultats donnés par un premier processus d'identification ont donc souvent besoin d'être repris. En effet, la pente de l'écrouissage de l'enveloppe de la réponse est, dans l'intervalle  $\sigma_y < \sigma < \sigma_f$  :  $C_1 = \frac{E\bar{K}^p}{E+\bar{K}^p}$ , dans l'intervalle  $\sigma_f < \sigma < \sigma_u^c$  :  $C_2 = \frac{C_1\bar{K}^d}{C_1+\bar{K}^d}$  et pour la partie adoucissante :  $C_3 = \frac{C_2\bar{K}^p}{C_2+\bar{K}^p}$ . Cependant, en l'absence d'un processus automatique d'identification des paramètres [Kuc09], la procédure présentée ci-dessus aboutit à un jeu de paramètres satisfaisant après quelques itérations. Notons encore que, bien que nous ayons pu observer que l'activation du mécanisme de plasticité continue avant celui d'endommagement continu mène à une meilleure reproduction de la réponse expérimentale cyclique quasi-statique du béton, il est possible d'activer ces mécanismes dans l'ordre contraire.

## 4 Matériaux standards généralisés

Les matériaux qui appartiennent à la classe des *matériaux standards généralisés* bénéficient de propriétés numériques de stabilité locale – au niveau du point de Gauss – et globale – au niveau de la structure – requises pour une implantation robuste dans, par exemple, des procédures de résolution de problèmes mécaniques par la méthode des éléments finis. Pour les autres matériaux, quelque attention doit être portée sur la stabilité du modèle numérique. Dans cette section, nous déterminerons ce qu'il manque au modèle de matériau développé dans ce chapitre pour être un *matériau standard généralisé* et identifierons ainsi des questions qu'il faudra nous poser lorsque nous aborderons la question de l'implantation numérique robuste du modèle.

Dans un cadre isotherme – il semble raisonnable de négliger les échanges thermiques entre une structure de génie civil et son environnement – un matériau insensible au taux de chargement doit remplir cinq conditions pour appartenir à la classe

des *matériaux standards généralisés* [Mau99] :

1. L'énergie libre de Helmholtz  $\psi(\boldsymbol{\alpha})$  est convexe en  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}$ .
2. Les lois d'état des variables internes sont dérivées de l'énergie libre de Helmholtz qui joue le rôle d'un potentiel thermodynamique :  $\mathcal{A}_i = -\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}$ .
3. La dissipation intrinsèque vérifie :  $\dot{\mathcal{D}} = \sum \mathcal{A}_i \dot{\alpha}_i \geq 0$ .
4. Il existe un convexe fermé  $\mathcal{K}$  dans l'espace des variables associées  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ . Dans [Mau99], le convexe doit être fermé, mais il semble qu'on puisse obtenir de bons résultats sans cette condition [Sim89] : nous ne demanderons pas dans la suite au convexe  $\mathcal{K}$  d'être fermé.
5. Le flux des variables internes  $\alpha_i$  est normal à la frontière de  $\mathcal{K}$  (loi de normalité).

Comme nous l'avons vu dans la section 3.2, le modèle matériau présenté dans ce chapitre satisfait les conditions 2) et 5). Les ensembles convexes  $\mathcal{K}$  mentionnés dans la condition 4) sont définis par les fonctions seuils  $\phi(\mathcal{A})$  introduites dans les équations (3.3) et (3.4) ; la frontière de ces ensembles est définie par les équations  $\phi(\mathcal{A}) = 0$ . Ces fonctions critères définissent des cônes dans l'espace  $\mathcal{A}$  : ce sont des domaines convexes. Étant donné que le coefficient  $\bar{K}^p$  est négatif et que la loi d'adoucissement en compression est linéaire, il est possible que certains états des affinités sortent de ces cônes. Au sujet de la condition 1), nous rappelons qu'une fonction de la forme  $f(x) = cx^2$  est convexe seulement si  $c > 0$ . La convexité de la fonctionnelle de l'énergie libre de Helmholtz en  $\bar{\xi}^p$  n'est pas vérifiée car le coefficient phénoménologique  $\bar{K}$  est négatif pour représenter l'adoucissement.

Démontrons maintenant que notre modèle satisfait la condition 3). Premièrement, puisque  $\eta > 0$ ,  $\dot{\mathcal{D}}^v = \sigma \dot{\epsilon}^v = \eta (\dot{\epsilon}^v)^2 \geq 0$ . Ensuite, pour les autres mécanismes, commençons par remarquer que chacune des fonctions critères présentées dans les équations (3.3) et (3.4) peut se mettre sous la forme :

$$\phi^\diamond = (\sigma + \kappa^\diamond) \frac{\partial\phi^\diamond}{\partial\kappa^\diamond} - (\sigma_\diamond - q^\diamond) \quad (3.26)$$

avec – lorsque  $\frac{\partial\phi^\diamond}{\partial\kappa^\diamond}$  a un sens (pour la plasticité continue –  $\frac{\partial\phi^\diamond}{\partial\sigma} = \frac{\partial\phi^\diamond}{\partial\kappa^\diamond}$ ). De plus,  $\frac{\partial\phi^\diamond}{\partial q^\diamond} = 1$ . D'où :

$$\dot{\mathcal{D}}^\diamond = \dot{\gamma}^\diamond \left( (\sigma + \kappa^\diamond) \frac{\partial\phi^\diamond}{\partial\sigma} + q^\diamond \right) = \dot{\gamma}^\diamond (\phi^\diamond + \sigma_\diamond) \quad (3.27)$$

D'après les conditions de charge / décharge (3.13),  $\dot{\gamma}^\diamond \geq 0$  et  $\dot{\gamma}^\diamond \phi^\diamond = 0$  ; de plus, le paramètre  $\sigma_\diamond$  du matériau est toujours positif et donc nous avons démontré que

$\dot{D}^\diamond \geq 0$ . La vérification de la condition 3) permet de garantir la stabilité locale du modèle, en garantissant en particulier que les boucles d'hystérésis sont construites dans le sens horaire [Mau99].

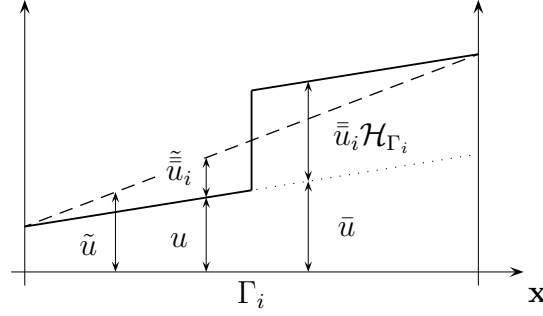
Pour conclure cette section, résumons les points sur lesquels il faudra porter notre attention pour assurer la robustesse de l'implantation numérique – ce sera l'objet du chapitre suivant – du modèle :

- Puisque la condition 1) n'est pas satisfaite à cause de la présence de coefficients phénoménologiques négatifs ( $\bar{K} < 0$ ), la stabilité du modèle numérique n'est pas garantie : la matrice de raideur tangente pourrait devenir non-inversible et le problème mal posé pendant la procédure de résolution non-linéaire ;
- La condition 4) n'est pas non plus nécessairement satisfaite à cause de l'adoucissement ; il se peut que l'état du système (exprimé dans l'espace des contraintes) sorte du domaine admissible : il faudra veiller à ce que la contrainte reste positive lors de la phase d'adoucissement en compression.
- Le modèle constitutif possède une composante visqueuse et est donc dépendant du taux de chargement, ce qui se traduit par l'apparition explicite du pas de temps dans la forme discrétisée des équations qui gouvernent l'évolution de la structure : l'existence d'un pas de temps critique devra être étudiée.
- L'espace  $\mathcal{A}$  des contraintes est divisé en deux sous-espaces complémentaires – un sous-espace pour la traction  $\sigma \geq 0$  et l'autre pour la compression  $\sigma < 0$  – dans lesquelles se trouvera alternativement l'état du système. À ce stade, rien ne garantit encore que le passage du système d'un sous-espace à l'autre se fasse sans difficulté.

## 5 Équations de Euler-Lagrange dynamiques

Dans cette section, nous passons de la formulation du modèle constitutif – qui décrit l'évolution de l'état de chacun des points matériels de la structure sous l'action de champs donnés – à la formulation du modèle mécanique de la structure – qui décrit l'évolution du champ de déplacement, de la contrainte et de la déformation en fonction des sollicitations extérieures à la structure et de l'évolution de l'état des points matériels. Le modèle mécanique de la structure doit être consistant avec le modèle constitutif de matériau et donc être capable de représenter les sauts de déplacement  $\bar{u}_i$  qui sont susceptibles d'apparaître dans certaines sections  $\Gamma_i$  de la structure, ce qui nécessite la définition d'une composante longitudinale du champ de déplacement enrichie.

## 5.1 Cinématique enrichie du champ de déplacement



**Fig. 3.6:** Composante horizontale enrichie du champ de déplacement. Les traits pleins, tirets et pointillés représentent le déplacement enrichi  $u(\mathbf{x}, t)$ , un déplacement lisse  $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$  et un déplacement continu  $\bar{u}(\mathbf{x}, t)$ .

Comme le montre la figure 3.6, nous écrivons le déplacement – pour être précis : la composante longitudinale du champ de déplacement, mais je raccourcis – comme un déplacement lisse  $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$  enrichi par des composantes additionnelles  $\tilde{\bar{u}}_i(\mathbf{x}, t)$  afin de représenter la possible apparition de sauts de déplacement  $\bar{u}_i$  dans les sections  $\Gamma_i$ . Cette écriture enrichie du déplacement a été présentée pour l'apparition d'une seule discontinuité dans des travaux antérieurs [Gar98] et, bien que présentée sous une autre forme, dans les travaux sur lesquels je m'appuie directement [Ibr03a, Bra03]. Nous obtenons donc :

$$u(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \underbrace{(\mathcal{H}_{\Gamma_i}(\mathbf{x}) - \varphi_i(\mathbf{x}))}_{\tilde{\bar{u}}_i(\mathbf{x}, t)} \bar{u}_i(t) \quad (3.28)$$

qui peut aussi être écrite, sous une forme qu'il est possible d'identifier à l'équation (3.1) :

$$u(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\tilde{u}(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \varphi_i(\mathbf{x}) \bar{u}_i(t)}_{\bar{u}(\mathbf{x}, t)} + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathcal{H}_{\Gamma_i}(\mathbf{x}) \bar{u}_i(t) \quad (3.29)$$

Nous en déduisons l'expression de la déformation enrichie :  $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \bar{\epsilon}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \bar{u}_i(t) \delta_{\Gamma_i}$  avec :

$$\bar{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \bar{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \frac{d\varphi_i(\mathbf{x})}{dx} \bar{u}_i(t) \quad (3.30)$$



## 5.2 Formulation variationnelle lagrangienne complémentaire

Il nous faut à présent faire appel à un principe mécanique pour caractériser l'évolution de la structure. Le principe variationnel de Lagrange marque, par sa concision et sa simplicité d'application, l'aboutissement des efforts de rationalisation des principes de la mécanique qu'à connu le 18<sup>ème</sup> siècle. L'application de ce principe variationnel – pour une présentation mathématique très claire du calcul variationnel, voir [Gel63] – repose sur la définition du Lagrangien  $L = T - U$  où  $T$  est l'énergie cinétique du système étudié – la structure de génie civil – et  $U$  son énergie potentielle.

Le principe variationnel du mathématicien Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) exprime de façon rationnelle – sans recours à la métaphysique – une idée exprimée plus tôt dans le *principe de moindre action* de Maupertuis (1698-1759) selon lequel la Nature minimise l'effort à produire lors de l'évolution d'un système [Bir68, Dug50]. En effet, l'intégration dans le temps du Lagrangien est appelée l'*action*, notée  $S$  ( $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ ); le principe variationnel de Lagrange exprime le fait que la première variation de l'*action* s'annule ( $\delta S = 0$ ). Dans son traité intitulé *Mécanique Analytique* publié en 1788, Lagrange a rassemblé sous forme concise et pratique de nombreux développements mathématiques – la mécanique était alors une branche des mathématiques – associés aux noms de Euler, d'Alembert et Bernoulli entre autres.

Afin de calculer l'énergie cinétique du domaine  $\Omega$  de la structure de génie civil qu'on souhaite modéliser, nous supposons qu'elle ne dépende que de la partie lisse du déplacement. En d'autres termes et dans une démarche multi-échelle, nous regardons la structure de suffisamment loin pour que l'influence des sauts de déplacements ne soit pas visible :

$$T(\tilde{u}, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)^2 d\Omega \quad (3.31)$$

où la masse volumique  $\rho$  est supposée constante. De plus, l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$U(\tilde{u}, \bar{u}, \boldsymbol{\alpha}, t) = \int_{\Omega} \psi(\tilde{u}, \bar{u}, \boldsymbol{\alpha}, t) d\Omega - U^{ext}(\tilde{u}, t) \quad (3.32)$$

où  $U^{ext}(\tilde{u}, t)$  est le potentiel des actions extérieures exercées sur le domaine  $\Omega$  que nous supposons, là encore, uniquement dépendant de la partie lisse du déplacement.

Afin d'introduire les contraintes – plus précisément les composantes verticales des champs de contrainte –  $\sigma$  et  $\mathbf{t}$  comme d'autres variables indépendantes du problème

mécanique, nous pouvons faire appel à la transformation de Legendre et réécrire la fonctionnelle de l'énergie libre de Helmholtz :

$$\begin{aligned}\psi^+ &= \sigma^e \bar{\epsilon}^e - \frac{1}{2} \sigma^e \bar{E}^{-1} \sigma^e + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \mathbf{t} \bar{u}^d - \frac{1}{2} \mathbf{t} \bar{D} \mathbf{t} + \bar{\Xi}^d \right) \delta_{\Gamma_i} \\ \psi^- &= \sigma^d \bar{\epsilon}^d - \frac{1}{2} \sigma^d \bar{D} \sigma^d + \bar{\Xi}^p + \bar{\Lambda}^p + \bar{\Xi}^d + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \mathbf{t} \bar{u}^e - \frac{1}{2} \mathbf{t} \bar{E}^{-1} \mathbf{t} + \bar{\Xi}^p \right) \delta_{\Gamma_i}\end{aligned}\quad (3.33)$$

L'idée d'introduire la contrainte  $\sigma$  comme variable indépendante a été utilisée dans [Sim89] et dans [Mar06] sur lesquels ces travaux s'appuient directement. Cette méthode, qualifiée de *mixte*, donne une formulation plus générale du problème que la méthode classique dite des *déplacements* pour laquelle seuls les déplacements sont inconnus. Dans notre cas, en plus des inconnues de déplacement  $\tilde{u}$  et  $\bar{u}$ , nous introduisons les contraintes  $\sigma$  et  $\mathbf{t}$  comme variables indépendantes ce qui, nous le verrons dans le chapitre suivant, permettra de définir une matrice tangente symétrique pour la résolution numérique non-linéaire du problème, contrairement aux formulations en déplacements.

Les déformations dans les deux branches d'un modèle rhéologique de Kelvin-Voigt (KV) – un ressort et un amortisseur en parallèle – sont égales à  $\bar{\epsilon}^v$ . En traction, la déformation dans le ressort est élastique :  $\bar{\epsilon}^e = \bar{\epsilon}^v$  et la contrainte dans le ressort est notée  $\sigma^e$  ; en compression, la déformation est celle du ressort endommageable :  $\bar{\epsilon}^d = \bar{\epsilon}^v$  et la contrainte dans le ressort est notée  $\sigma^d$ . La contrainte totale dans le solide KV est notée  $\sigma = \sigma^v + \sigma^{e/d}$  selon que  $\sigma \geq 0$  (traction) ou  $\sigma < 0$  (compression). En utilisant de plus les équations (3.1) et (3.30), et en notant  $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_{dis}}\}^T$ ,  $\bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n_{dis}}\}^T$  et  $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_{dis}}\}^T$ , nous pouvons réécrire les équations (3.33) en fonction de  $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\bar{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\sigma(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{t}(t)$  et  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$  :

$$\begin{aligned}\psi^+ &= \sigma \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{d\boldsymbol{\varphi}^T}{dx} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \bar{\epsilon}^p \right) - \sigma^v \bar{\epsilon}^v - \frac{1}{2} (\sigma - \sigma^v) \bar{E}^{-1} (\sigma - \sigma^v) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \mathbf{t} (\bar{u} - \bar{u}^p) - \frac{1}{2} \mathbf{t} \bar{D} \mathbf{t} + \bar{\Xi}^d \right) \delta_{\Gamma_i} \\ \psi^- &= \sigma \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{d\boldsymbol{\varphi}^T}{dx} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \bar{\epsilon}^p \right) - \sigma^v \bar{\epsilon}^v - \frac{1}{2} (\sigma - \sigma^v) \bar{D} (\sigma - \sigma^v) \\ &\quad + \bar{\Xi}^p + \bar{\Lambda}^p + \bar{\Xi}^d + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \mathbf{t} (\bar{u} - \bar{u}^p) - \frac{1}{2} \mathbf{t} \bar{E}^{-1} \mathbf{t} + \bar{\Xi}^p \right) \delta_{\Gamma_i}\end{aligned}\quad (3.34)$$

Le principe variationnel de Lagrange s'écrit alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L(\tilde{u}, \bar{\mathbf{u}}, \sigma, \mathbf{t}, t) dt = 0 \quad \forall t_1, \forall t_2 \quad (3.35)$$

avec  $\delta\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $\delta\bar{\mathbf{u}}(t)$  cinématiquement admissibles et  $\delta\sigma(\mathbf{x}, t)$  et  $\delta\mathbf{t}(t)$  statiquement admissibles, soit concrètement des variations  $\delta\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\delta\bar{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\delta\sigma(\mathbf{x}, t)$  et  $\delta\mathbf{t}(t)$  nulles aux extrémités  $t = t_1$  et  $t = t_2$ .

Après quelques manipulations mathématiques (intégration par parties,...), et en considérant que les sauts de déplacements  $\bar{u}_i$  sont indépendants et que les contraintes normales aux surfaces de discontinuité  $\mathbf{t}_i$  sont indépendantes, nous obtenons les équations suivantes, valables en traction et en compression :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \delta \tilde{u} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{u}} \delta \tilde{u} d\Omega - \delta U^{ext} &= 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}_i} d\Omega \delta \bar{u}_i &= 0 \quad \forall i \in [1, \dots, n_{dis}] \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \delta \sigma d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{t}_i} d\Omega \delta \mathbf{t}_i &= 0 \quad \forall i \in [1, \dots, n_{dis}] \end{aligned} \quad (3.36)$$

ce qui mène, en nous rappelant que ni  $\bar{u}_i$  ni  $\mathbf{t}_i$  ne dépend de la position  $\mathbf{x}$  (ils sont seulement définis dans les sections  $\Gamma_i$  où une discontinuité est susceptible d'apparaître), aux équations de Euler-Lagrange dynamiques et enrichies d'une structure dont les matériaux obéissent à la loi de comportement présentée dans ce chapitre :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left( \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \delta \tilde{u} + \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial x} \sigma \right) d\Omega - \delta U^{ext} \\ 0 &= \int_{\Omega} \left( \frac{d\varphi_i}{dx} \sigma - \mathbf{t}_i \delta_{\Gamma_i} \right) d\Omega \delta \bar{u}_i \quad \forall i \in [1, \dots, n_{dis}] \\ 0 &= \int_{\Omega} \delta \sigma \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{d\varphi}{dx} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\epsilon}^v - \bar{\epsilon}^p \right) d\Omega \\ 0 &= \int_{\Gamma_i} \left( \bar{u}_i - \bar{u}_i^p - \bar{D}_i \langle \mathbf{t}_i \rangle_+ - \bar{E}^{-1} \langle \mathbf{t}_i \rangle_- \right) d\Gamma_i \delta \mathbf{t}_i \quad \forall i \in [1, \dots, n_{dis}] \end{aligned} \quad (3.37)$$

où les notations suivantes ont été introduites :

$$\langle \bullet \rangle_+ = \begin{cases} \bullet & \text{si } \bullet > 0 \\ 0 & \text{si } \bullet \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \langle \bullet \rangle_- = \begin{cases} 0 & \text{si } \bullet \geq 0 \\ \bullet & \text{si } \bullet < 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

L'équation (3.37)<sub>1</sub> impose la vérification de l'équation d'équilibre de la structure, l'équation (3.37)<sub>2</sub> donne la condition de compatibilité entre les contraintes continue  $\sigma$  et discrètes  $\mathbf{t}_i$ , les équations (3.37)<sub>3</sub> et (3.37)<sub>4</sub> correspondent à la forme faible des équations locales des modèles constitutifs continu et discrets : elles définissent la loi de comportement pour un point matériel quelconque et pour les points matériels situés sur les surfaces de discontinuité.

Afin de donner une autre écriture – simplifiée de notre point de vue – de ce système d'équations, il est possible de tirer avantage de la dépendance entre les contraintes continue et discrètes qui apparaît dans les équations (3.37)<sub>2</sub> :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{d\varphi_i}{dx} \sigma - \mathbf{t}_i \delta_{\Gamma_i} \right) d\Omega = 0 \Rightarrow \mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i(\sigma) \quad (3.39)$$

Ainsi l'expression du Lagrangien peut-elle être modifiée en remarquant que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi^+ d\Omega &= \int_{\Omega} \left( \sigma \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \bar{\epsilon}^v - \bar{\epsilon}^p \right) + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( -\mathbf{t} \bar{u}^p - \frac{1}{2} \mathbf{t} \bar{D} \mathbf{t} + \bar{\Xi}^d \right) \delta_{\Gamma_i} \right) d\Omega \\ \int_{\Omega} \psi^- d\Omega &= \int_{\Omega} \left( \sigma \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \bar{\epsilon}^v - \bar{\epsilon}^p \right) + \bar{\Xi}^p + \bar{\Lambda}^p + \bar{\Xi}^d \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( -\mathbf{t} \bar{u}^p - \frac{1}{2} \mathbf{t} \bar{E}^{-1} \mathbf{t} + \bar{\Xi}^p \right) \delta_{\Gamma_i} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.40)$$

De plus, nous supposons que la loi de comportement  $\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i(\bar{u}_i)$  soit infiniment rigide avant que la contrainte n'atteigne une valeur ultime et donc  $\bar{E}^{-1} \rightarrow 0$ . Finalement, en notant  $A_{\Gamma_i}$  l'aire de la section  $\Gamma_i$  dans laquelle une localisation du déplacement peut se produire, la forme simplifiée des équations de Euler-Lagrange dynamiques enrichies du problème est alors :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \left( \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \delta \tilde{u} + \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial x} \sigma \right) d\Omega - \delta U^{ext} & (3.41) \\
0 &= \int_{\Omega} \delta \sigma \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \bar{\epsilon}^v - \bar{\epsilon}^p - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \left( \bar{u}^p + \bar{D} \langle \mathbf{t} \rangle_+ \right) \frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} \delta \Gamma_i \right) d\Omega \\
&\text{avec } \mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i(\sigma) = \frac{1}{A_{\Gamma_i}} \int_{\Omega} \frac{d\varphi_i}{dx} \sigma d\Omega \quad \forall i \in [1, \dots, n_{dis}]
\end{aligned}$$

Au niveau global – les variables internes sont d'autres inconnues – seules deux inconnues subsistent : le déplacement lisse  $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$  et la contrainte continue  $\sigma(\mathbf{x}, t)$ .

## 6 Élément poutre de Euler-Bernoulli multifibre

### 6.1 Décomposition du domaine en fibres

Nous avons considéré dans tout le développement qui précède que l'élément de structure n'est composé que d'un seul matériau. Dans un élément multifibre de structure en béton armé, les matériaux béton et acier sont différenciés et leur comportement est décrit par une loi 1D. Pour adapter les sections précédentes au cas d'un élément multifibre, nous décomposons le domaine  $\Omega$  :  $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_a$  où  $\Omega_b$  et  $\Omega_a$  sont les régions de  $\Omega$  constitués de béton et d'acier, puis nous réécrivons l'énergie potentielle du système de l'équation (3.32) ainsi :

$$\begin{aligned}
U(\tilde{u}, \bar{u}, \boldsymbol{\alpha}, t) &= \int_{\Omega_b} \psi^b(\tilde{u}, \bar{u}, \boldsymbol{\alpha}_b, t) d\Omega_b + \int_{\Omega_a} \psi^a(\tilde{u}, \bar{u}, \boldsymbol{\alpha}_a, t) d\Omega_a - U^{ext}(\tilde{u}, t) \\
&= \sum_{f=1}^{n_{fib}^b} \int_{\Omega_b^f} \psi^b(\tilde{u}^f, \bar{u}^f, \boldsymbol{\alpha}_b^f, t) d\Omega_b^f + \sum_{f=1}^{n_{fib}^a} \int_{\Omega_a^f} \psi^a(\tilde{u}^f, \bar{u}^f, \boldsymbol{\alpha}_a^f, t) d\Omega_a^f
\end{aligned} \tag{3.42}$$

où  $n_{fib}^b$  et  $n_{fib}^a$  sont le nombre de fibres de béton et d'acier et  $\Omega_b^f$  et  $\Omega_a^f$  les volumes associés.

La loi de comportement de l'acier peut être construite avec le même formalisme que la loi de béton, avec un jeu de variables internes et d'ingrédients de base appropriés pour reproduire la réponse cyclique macroscopique 1D d'une éprouvette d'acier.

## 6.2 Hypothèses

Nous restons dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements et petites déformations. La théorie des poutres de Euler-Bernoulli repose sur des hypothèses spécifiques, simplificatrices, permettant de développer un élément de structure simple capable de donner une représentation correcte du comportement des poutres et des poteaux dans les cas où les effets du cisaillement sont négligeables par rapport à ceux des efforts normaux et de flexion. Le développement de ce type d'élément simplifié est utile pour effectuer des simulations numériques de structures performantes. Nous rappelons ici ces hypothèses simplificatrices et mettons en évidence leurs conséquences sur le comportement de l'élément de structure résultant. Une description détaillée d'un tel élément est proposée par exemple dans [Bat90b].

Dans un cadre 2D, les hypothèses fondamentales de la théorie des poutres de Euler-Bernoulli sont :

- Les sections planes dans la configuration initiales  $C^0$  restent planes dans la configuration déformée  $C(t)$  (*H1*) ;
- Les sections perpendiculaires à l'axe de la poutre dans  $C^0$  restent perpendiculaires à l'axe de la poutre dans  $C(t)$  (*H2*).

Notons que l'axe de référence est un axe quelconque perpendiculaire à l'axe  $Oz$  (voir figure 3.7) qui, en particulier, ne coïncide pas nécessairement avec l'axe neutre de la poutre.

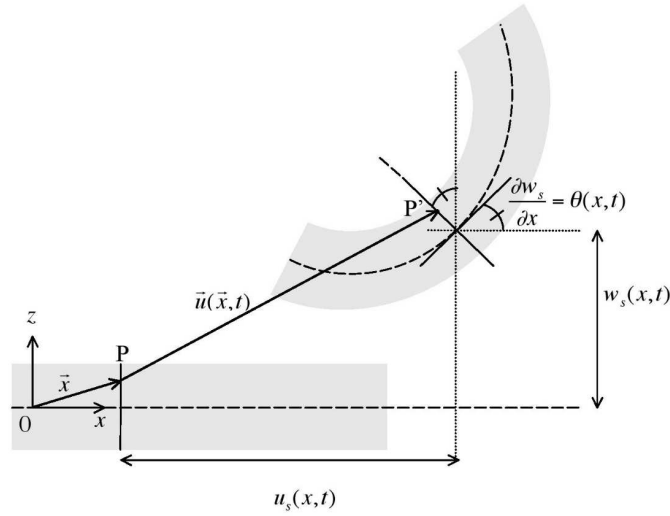
(*H1*) implique que la rotation décrite, pendant une transformation, par un point  $P$  de coordonnées  $\mathbf{x} = \{x, z\}^T$  quelconques est la même quelle que soit la position  $z$  de ce point et que cette rotation peut donc être décrite, à une abscisse  $x$  donnée, par une rotation d'ensemble de la section que nous notons  $\tilde{\theta}_s(x, t)$ .

D'après (*H2*), la rotation de section  $\tilde{\theta}_s(x, t)$  est égale à l'angle entre l'horizontale et la tangente à l'axe de la poutre (voir figure 3.7). De plus, puisque les déformations sont supposées petites, il vient :  $\tilde{\theta}_s(x, t) = \frac{\partial \tilde{w}_s(x, t)}{\partial x}$ , où  $\tilde{w}_s(x, t)$  est le déplacement transversal de l'axe de la poutre.

En considérant ces deux hypothèses et en introduisant  $\tilde{u}_s(x, t)$ , le déplacement d'ensemble d'une section à l'abscisse  $x$ , nous pouvons exprimer le déplacement longitudinal du point  $P$  de la façon suivante (voir figure 3.7) :

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}_s(x, t) - z \frac{\partial \tilde{w}_s(x, t)}{\partial x} \quad (3.43)$$

L'équation (3.43) permet de calculer la déformation longitudinale  $\epsilon_{xx}$ . Par ailleurs, la composante du tenseur des contraintes  $\sigma_{zz}$  (en 2D) est nulle sur le bord de la



**Fig. 3.7:** Transformation d'une poutre de Euler-Bernoulli. Les déplacements et déformations sont exagérés par souci de clarté, mais nous restons dans le cadre de l'hypothèse de petits déplacements et petites déformations.

poutre et supposée du deuxième ordre à l'intérieur de la poutre, d'où  $\sigma_{xx} = \hat{\sigma}_{xx}(\epsilon_{xx})$ , ce qui revient à dire que chaque fibre se comporte comme une poutre en traction/compression (comportement 1D).

En toute rigueur, il existe un transfert de charge entre fibres à partir du moment où la contrainte n'est plus constante le long des fibres. Ce transfert de charge passe nécessairement par des valeurs locales de contraintes de cisaillement très importantes quand une fibre se fissure. Toutefois, l'hypothèse à la base des calculs qui suivent est de considérer que, localement, le comportement d'une fibre est indépendant de celui des autres fibres, et cela même lorsqu'elle se fissure. Cette hypothèse est considérée comme valable dans la mesure où la fissuration est suffisamment localisée.

## 7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation théorique d'un modèle constitutif cyclique 1D de béton. Ce modèle est développé dans le cadre de la *thermodynamique avec variables internes*. Il est capable de représenter les principaux phénomènes caractéristiques de la réponse macroscopique expérimentale d'un volume élémentaire représentatif de béton, considérée sous la forme d'une relation entre la contrainte et la déformation : comportement dépendant du taux de chargement, fragile en traction et quasi-fragile en compression, écoulement, apparition

de déformations résiduelles, dégradations de la raideur et de la contrainte ultime, phénomènes hystérétiques lors des cycles de charges-décharges en compression. Le modèle a été développé en vue d'être implanté dans un code de calculs par éléments finis et nous avons donc porté notre attention sur la robustesse du modèle : (i) les raisons pour lesquelles le modèle n'appartient pas à la classe des *matériaux standards généralisés* ont été clairement établies et feront l'objet d'une attention particulière dans le prochain chapitre où il sera question de l'implantation numérique du modèle ; (ii) des lois d'écrouissage et d'adoucissement linéaires ont été utilisées en priorité car elles permettront de rendre le processus de résolution locale – au niveau des points d'intégration numérique – non-itératif. Un autre point important est que tous les paramètres de ce modèle ont une signification physique claire, ce qui rend leur identification simple.

Au niveau global, les équations de Euler-Lagrange dynamiques enrichies d'une structure, constituée du matériau dont la loi de comportement est construite dans ce chapitre, sont formulées à partir du principe variationnel de Lagrange exprimé en fonction des quatre inconnues suivantes : la partie lisse de la composante longitudinale du champ de déplacement, les sauts de déplacements, la contrainte continue et les contraintes discrètes dans les sections où une discontinuité apparaît. En exprimant de façon forte la relation de compatibilité entre contrainte continue et contraintes discrètes, les équations de Euler-Lagrange ne sont finalement exprimées qu'en fonction de deux inconnues : la partie lisse du déplacement et la contrainte continue.

Nous avons donc à présent en notre possession un modèle capable de représenter de façon physique les principales sources de dissipation matérielle dans des éléments de structure en béton armé dont le comportement des matériaux peut être décrit par une loi 1D (éléments barre et poutre multifibre de Euler-Bernoulli). Ce modèle satisfait les pré-requis que nous avons identifiés à la fin du chapitre précédent pour améliorer la capacité prédictive des analyses sismiques non-linéaires. Toutes les sources de dissipation d'énergie qu'on rencontre dans une structure en BA ne sont pas représentés par ce modèle d'élément de structure : les effets du cisaillement, de la torsion, de l'adhérence entre l'acier et le béton, etc. ne sont pas pris en compte. Cependant, ce modèle est adapté à la modélisation des éléments de structures dominés par la flexion comme les sections courantes des poutres et poteaux d'une structure de type portique. Afin d'utiliser ce modèle dans les simulations numériques, il nous faut à présent l'implanter dans un code de calculs et définir une stratégie robuste pour la résolution numérique des équations qui gouvernent son évolution sous un champ de sollicitations donné. Ce sera l'objet du prochain chapitre.



## 8 Annexe : expression du paramètre d'adoucissement en traction $a$

Nous démontrons ici la relation entre paramètre d'adoucissement en traction  $a$  et énergie de fracturation  $G_F$ . Pour cela, partons de la définition de  $G_F$ , en remarquant tout d'abord que  $t_{cri} = \infty$  car la loi d'adoucissement est l'inverse d'une fonction exponentielle :

$$G_F = \int_{t_{loc}}^{\infty} \dot{t} u dt \quad (3.44)$$

Ensuite, comme  $\bar{q}^d = (\sigma_u^t - \sigma_\infty) (1 - e^{-a\bar{\xi}^d})$ , nous remarquons, en prenant pour simplifier l'écriture  $\sigma_\infty = 0$ , que :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^d = 0 &\Rightarrow t - (\sigma_u^t - \bar{q}^d) = 0 \Rightarrow t = \sigma_u^t e^{-a\bar{\xi}^d} \\ \dot{u} = \frac{d}{dt}(\bar{D}t) &= \dot{\bar{D}}t + \bar{D}\dot{t} \end{aligned} \quad (3.45)$$

De plus, les équations d'évolution des variables internes permettent d'écrire :

$$\dot{\bar{D}}t = \dot{\xi} \quad (3.46)$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} G_F &= \int_{t_{loc}}^{\infty} \sigma_u^t e^{-a\bar{\xi}^d} \left( \dot{\xi} + \sigma_u^t \bar{D} \frac{d}{dt} e^{-a\bar{\xi}^d} \right) dt \\ &= \underbrace{-\frac{\sigma_u^t}{a} \int_{t_{loc}}^{\infty} \frac{d}{dt} e^{-a\bar{\xi}^d} dt}_A + \underbrace{\frac{(\sigma_u^t)^2}{2} \int_{t_{loc}}^{\infty} \bar{D} \frac{d}{dt} e^{-2a\bar{\xi}^d} dt}_B \end{aligned}$$

où  $A = \frac{\sigma_u^t}{a} (1 - e^{-a\bar{\xi}_{cri}^d})$  et  $B$  est calculé à l'aide d'une intégration par parties :

$$B = \frac{(\sigma_u^t)^2}{2} \left( \left[ \bar{D} e^{-2a\bar{\xi}^d} \right]_{t_{loc}}^{\infty} - \int_{t_{loc}}^{\infty} \dot{\bar{D}} e^{-2a\bar{\xi}^d} dt \right) \quad (3.47)$$

Maintenant, utilisons le fait que  $\dot{\bar{D}}t = \dot{\xi}$  avec  $t = \sigma_u^t e^{-a\bar{\xi}^d}$  pour calculer  $\dot{\bar{D}} e^{-2a\bar{\xi}^d} = \frac{-1}{a\sigma_u^t} \frac{d}{dt} e^{-a\bar{\xi}^d}$  et en déduire que :

$$B = \frac{(\sigma_u^t)^2}{2} \bar{D}_\infty e^{-2a\bar{\xi}_\infty^d} - \frac{A}{2} \quad (3.48)$$

et donner l'expression de l'énergie de fissuration :

$$G_F = \frac{\sigma_u^t}{2a} \left( 1 - e^{-a\bar{\xi}^d} + a\sigma_u^t \bar{D}_\infty e^{-2a\bar{\xi}^d} \right) \quad (3.49)$$

Cette expression présente une indétermination puisque  $\bar{D}_\infty \rightarrow \infty$  et  $e^{-2a\bar{\xi}^d} \rightarrow 0$ . En anticipant sur le chapitre qui suit, nous introduisons un temps critique  $t_{cri}$  auquel le problème local d'adoucissement devient mal posé. À  $t = t_{cri}$ , nous avons :

$$\bar{D}_{cri} = \left( \frac{d\bar{q}^d}{d\bar{\xi}^d} \right)_{t=t_{cri}}^{-1} = \frac{1}{a\sigma_u^t} e^{-a\bar{\xi}_{cri}^d} \quad (3.50)$$

Ce temps critique existe toujours. En effet, au temps  $t = 0$ ,  $\bar{D} = 0$  et  $\frac{d\bar{q}^d}{d\bar{\xi}^d} > 0$  et on peut montrer que  $\bar{D}$  grandit plus vite que  $\left( \frac{d\bar{q}^d}{d\bar{\xi}^d} \right)^{-1}$  :

$$\dot{\bar{D}} = \frac{-e^{2a\bar{\xi}^d}}{a\sigma_u^t} \frac{d}{dt} e^{-a\bar{\xi}^d} \geq \frac{d}{dt} \left( \frac{d\bar{q}^d}{d\bar{\xi}^d} \right)^{-1} = \frac{-1}{\sigma_u^t} \frac{d}{dt} e^{-a\bar{\xi}^d} \quad (3.51)$$

Maintenant, nous interprétons ce temps critique de façon physique et non plus numérique, en le faisant coïncider avec le temps où toute l'énergie de fracturation a été consommée. Nous réécrivons donc l'équation (3.49) ainsi :

$$G_F = \frac{\sigma_u^t}{2a} \left( 1 - e^{-a\bar{\xi}_{cri}^d} + a\sigma_u^t \bar{D}_{cri} e^{-2a\bar{\xi}_{cri}^d} \right) \quad (3.52)$$

En injectant la relation (3.50) dans l'équation ci-dessus, il vient finalement :

$$G_F = \frac{\sigma_u^t}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sigma_u^t}{2G_F} \quad (3.53)$$



# Chapitre 4

## Implantation numérique du modèle dynamique enrichi

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	76
2	Discrétisation du problème mécanique . . . . .	77
3	Stratégie de résolution . . . . .	82
4	Application 1 : élément barre avec contrainte constante . .	90
5	Application 2 : élément poutre 2D de Euler-Bernoulli . . .	101
6	Conclusion . . . . .	104
7	Annexes . . . . .	105

---

# 1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre l'implantation dans un code de calculs par éléments finis du modèle physique présenté au chapitre précédent. Étant donné que le problème physique a deux inconnues autres que les variables internes locales : la partie lisse de la composante longitudinale du champ de déformation  $\tilde{u}$  et la contrainte continue  $\sigma$ , nous serons amenés à donner une approximation de chacune d'elles ; la méthode des éléments finis est alors qualifiée de « mixte ». Nous n'aborderons pas le cas des poutres tridimensionnelles [Guo87, Guo89] et nous nous limiterons aux poutres planes.

Une formulation mixte des éléments finis basée sur l'approximation des champs de déplacement et des efforts internes a déjà été proposée pour formuler des éléments de poutre [Tay03, Spa96, Lee09]. On peut trouver dans [Hje02] une étude des avantages et des inconvénients des méthodes mixtes et des méthodes en déplacement. Dans le cas des éléments poutres dans une structure de type portique, pour comprendre l'intérêt de l'approximation des efforts internes, on peut remarquer que les équations d'équilibre imposent que l'effort normal soit constant le long des éléments et les moments fléchissants linéaires ; et cela, quel que soit le comportement de l'élément : qu'il soit élastique, plastique, adoucissant, etc. Ainsi la définition d'approximations constantes et linéaires pour les efforts normaux et les moments fléchissants donne-t-elle une représentation exacte des efforts internes. Ceci permet aussi de prendre en compte les charges réparties qui s'appliquent sur la structure sans avoir à les concentrer aux nœuds [Tay03] : partant des équations différentielles d'équilibre d'une poutre, les approximations des efforts internes par la MEF sont vues comme une solution homogène – les charges réparties sont supposées nulles – de ces équations et une solution particulière, fonction des charges réparties, y est superposée.

Dans notre cas, nous avons choisi d'approximer la contrainte plutôt que les efforts internes. Il n'est pas facile de donner une approximation exacte du champ de contrainte comme pour les efforts internes. Cependant, dans le cas d'un élément multifibre, cela permet de définir l'apparition de discontinuités au niveau des fibres plutôt qu'au niveau élémentaire comme dans d'autres travaux [Arm06] ; ce qui présente l'avantage de donner accès à des informations intéressantes sur les fissures qui apparaissent : profondeur, ouverture en fonction de la profondeur, etc.

La section suivante sera consacrée aux discrétisations spatiale et temporelle des équations de Euler-Lagrange que nous avons établies au chapitre précédent. La stratégie de résolution numérique du problème discrétisé sera présentée dans la section 3. Ensuite, des cas particuliers d'applications seront illustrés dans les sections

4 et 5 : une structure modélisée par des éléments barre et une structure modélisée par des éléments multifibres 2D.

## 2 Discrétisation du problème mécanique

### 2.1 Méthode des éléments finis

Il est difficile, pour des géométries complexes, de trouver une solution analytique aux équations (3.41). Nous traitons donc ces équations à l'aide d'une méthode numérique d'approximation ; plusieurs méthodes existent – méthodes de Galerkin, méthode de Ritz, etc. – mais la plus utilisée en mécanique est la méthode des éléments finis [Zie00, Bat96, Ibr09], peut-être parce qu'elle étend les possibilités des méthodes matricielles rencontrées en résistance des matériaux [Imb95]. Ces méthodes d'approximation consistent à déterminer les inconnues du problème de façon approchée, soit concrètement dans notre cas, à trouver une forme approchée  $\{\tilde{u}^h(\mathbf{x}, t), \sigma^h(\mathbf{x}, t)\}$  de la solution exacte  $\{u(\mathbf{x}, t), \sigma(\mathbf{x}, t)\}$  des équations de Euler-Lagrange (3.41) de notre problème mécanique.

La méthode des éléments finis (MEF) repose sur la décomposition du domaine  $\Omega$  en sous-domaines  $\Omega^e$  appelés éléments finis et connectés par des nœuds. En imposant que l'équation (3.41)<sub>2</sub> soit vérifiée pour chaque élément  $e \in [1, \dots, n_{el}]$ , les équations (3.41) deviennent :

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left( \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}^h}{\partial t^2} \delta \tilde{u}^h + \frac{\partial \delta \tilde{u}^h}{\partial x} \sigma^h \right) d\Omega^e - \delta U^{ext} & (4.1) \\
 0 &= \int_{\Omega^e} \delta \sigma^h \left( \frac{\partial \tilde{u}^h}{\partial x} - \bar{\epsilon}^v - \bar{\epsilon}^p - \sum_{i=1}^{n_{dis}^e} \left( \bar{u}^p + \bar{D} \langle \mathbf{t}^h \rangle_+ \right) \frac{d\mathbf{t}^h}{d\sigma^h} \delta_{\Gamma_i} \right) d\Omega^e \quad \forall e \\
 \text{avec } \mathbf{t}_i^h &= \mathbf{t}_i(\sigma^h) = \frac{1}{A_{\Gamma_i}} \int_{\Omega^e} \frac{d\varphi_i}{dx} \sigma^h d\Omega^e \quad \forall i \in [1, \dots, n_{dis}^e]
 \end{aligned}$$

Le déplacement lisse approché  $\tilde{u}^h(x, t)$  est interpolé à partir du vecteur des déplacements nodaux  $\mathbf{d}^e(t)$  par des fonctions de forme  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  :

$$\tilde{u}^h(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \Omega^e} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{d}^e(t) \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [N_1(\mathbf{x}), \dots, N_{n_{\tilde{u}}}(\mathbf{x})]$  sont les fonctions de forme et  $\mathbf{d}^e(t)$  est le vecteur des déplacements aux nœuds de l'élément fini  $e$ . Les fonctions de forme doivent vérifier quelques propriétés nécessaires pour garantir la consistance de la méthode : garantir que plus le maillage est fin, plus la solution approchée tend vers la solution exacte.

Nous approximations de plus la contrainte à partir d'un jeu de coordonnées généralisées  $\boldsymbol{\beta}^e(t) = \{\beta_i(t)\}_{i \in [1, \dots, n_\sigma]}$  et de fonctions de forme élémentaires  $\mathbf{S}(x)$  :

$$\sigma^h(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \Omega^e} = \mathbf{S}(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}^e(t) \quad (4.3)$$

La méthode des éléments finis est alors qualifiée de *mixte*. Contrairement à celle du déplacement, l'approximation de la contrainte est interne à l'élément et aucune condition particulière ne doit, *a priori*, être remplie par les fonctions de forme de la contrainte. Nous donnerons dans les sections 4 et 5 de ce chapitre des exemples d'approximation de la contrainte dans le cas d'un élément barre et d'un élément multifibre.

Écrivons maintenant les expressions des approximations de la déformation lisse  $\tilde{\epsilon}^h(\mathbf{x}, t)$  et de la composante longitudinale enrichie du champ de déplacement  $u(\mathbf{x}, t)$  qui découlent de ces approximations. D'après les équations (3.28) et (3.29), il vient :

$$\tilde{\epsilon}^h(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{d}^e(t) \quad (4.4)$$

$$u^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{d}^e(t) + \sum_{i=1}^{n_{dis}} M_i(x)\bar{u}_i^e(t)$$

avec  $\mathbf{B} = \left[ \frac{dN_1}{dx}, \dots, \frac{dN_{n_{\bar{u}}}}{dx} \right]$  et  $M_i(x) = \mathcal{H}_{\Gamma_i}(x) - \varphi_i(x)$ . Écrivons enfin, à partir de l'équation (4.1)<sub>3</sub>, l'approximation de la contrainte  $\mathbf{t}_i(t)$  dans les sections  $\Gamma_i$  où une discontinuité est susceptible d'apparaître :

$$\mathbf{T}_i = \frac{1}{A_{\Gamma_i}} \int_{\Omega} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \mathbf{S}(\mathbf{x}) d\Omega \Rightarrow \mathbf{t}_i(t) = \mathbf{T}_i \boldsymbol{\beta}^e(t) \quad (4.5)$$

### Remarques :

1. La mise en œuvre de la méthode ne nécessite aucune modification de la structure des codes de calculs par éléments finis standards. En effet, les sauts de déplacement  $\bar{u}_i(t)$  qui enrichissent la cinématique de la structure modélisée sont internes à chaque élément et sont en fait traités localement, dans les sections où une discontinuité est susceptible d'apparaître, comme des variables internes.
2. Le modèle que nous avons présenté au chapitre précédent n'est pas nécessairement un modèle de réponse local (d'un point d'intégration numérique). Le modèle est physiquement formulé de sorte que la réponse d'un point matériel dépende des sauts de déplacement en d'autres points matériels. Du point de vue numérique, selon le choix des fonctions d'approximation de la contrainte

et des fonctions  $\varphi_i(x)$ , la réponse d'un point d'intégration peut dépendre ou non de ce qui se passe dans les sections où les sauts  $\bar{u}_i(t)$  sont susceptibles d'apparaître. Dans l'affirmative, l'implantation du modèle dans un code de calculs par éléments finis ne se limite pas à l'écriture d'une loi de type UMAT (« user material ») mais nécessite la définition d'un élément fini qui lui est dédié.

Afin que l'apparition de sauts de déplacement ne modifie pas les déplacements aux nœuds et qu'ainsi en particulier la continuité du champ de déplacement aux nœuds soit garantie, nous définissons les fonctions  $M_i(x)$  de sorte qu'elles soient nulles aux nœuds :

$$\begin{aligned} M_i(0) = 0 &\Rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma_i}(0) - \varphi_i(0) = 0 \Rightarrow \varphi_i(0) = 0 \quad \forall i, \forall e \\ M_i(L^e) = 0 &\Rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma_i}(L^e) - \varphi_i(L^e) = 0 \Rightarrow \varphi_i(L^e) = 1 \quad \forall i, \forall e \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ceci définit deux conditions que devront vérifier les fonctions  $\varphi_i(x)$  lorsque nous serons amenés à les définir explicitement dans les sections 4 et 5 de ce chapitre.

En ce qui concerne l'approximation des variations  $\delta\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $\delta\sigma(\mathbf{x}, t)$ , nous utilisons les mêmes fonctions de forme que pour l'approximation des champs  $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $\sigma^h(\mathbf{x}, t)$  (élément isoparamétrique) :

$$\delta\tilde{u}^h(\mathbf{x}, t)|_{\Omega^e} = \mathbf{N}(\mathbf{x})\delta\mathbf{d}^e(t) \quad ; \quad \delta\sigma^h(\mathbf{x}, t)|_{\Omega^e} = \mathbf{S}(\mathbf{x})\delta\boldsymbol{\beta}^e(t) \quad (4.7)$$

## 2.2 Discrétisation temporelle

Maintenant, passons à la discrétisation temporelle du système d'équations. Le schéma d'intégration implicite dit « Euler arrière » est utilisé pour intégrer les équations locales d'évolution des variables internes  $\boldsymbol{\alpha}$  (voir la table 3.3 et l'équation (3.14)) :

$$\dot{\alpha}(t) = f(t) \longrightarrow \alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta t_{n+1} f_{n+1} \quad (4.8)$$

Dans le cas de la variable interne de viscosité,  $\dot{\bar{\epsilon}}_{n+1}^v = \frac{\sigma_{n+1}^v}{\eta}$  avec, en traction,  $\sigma_{n+1}^v = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^e$ . Selon la table 3.2,  $\sigma_{n+1}^e = \bar{E}\bar{\epsilon}_{n+1}^e$  avec  $\bar{\epsilon}_{n+1}^e = \bar{\epsilon}_{n+1}^v$  et, en notant  $\tau = \frac{\eta}{E}$  le temps caractéristique du matériau :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\epsilon}_{n+1}^v - \bar{\epsilon}_n^v}{\Delta t_{n+1}} &= \frac{\sigma_{n+1}}{\eta} - \frac{\bar{\epsilon}_{n+1}^v}{\tau} \\ \Rightarrow \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^v &= \bar{\epsilon}_{n+1}^v - \bar{\epsilon}_n^v = \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau + \Delta t_{n+1}} \left( \frac{\sigma_{n+1}}{E} - \bar{\epsilon}_n^v \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$



En compression,  $\tau = \frac{\eta}{D^{-1}}$  et on suppose que cette valeur est constante. Ainsi, comme  $\bar{D}_0 = \frac{1}{E}$ ,  $\tau = \frac{\eta_0}{E}$  et je retiens aussi la relation (4.9) comme équation d'évolution de la contrainte visqueuse, mais avec  $\bar{D}^{-1}$  au lieu de  $\bar{E}$ .

## 2.3 Équations discrétisées du problème

Soient  $\bar{\mathbf{t}}$  les efforts surfaciques de traction appliqués sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$ ,  $\mathbf{b}$  les efforts volumiques appliqués à  $\Omega$ ,  $\Omega^+ = \{\mathbf{x} \in \Omega / \sigma(\mathbf{x}) \geq 0\}$  et  $\Omega^- = \{\mathbf{x} \in \Omega / \sigma(\mathbf{x}) < 0\}$ , ce qui vérifie notamment  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$  et  $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$ . Finalement, nous écrivons la forme discrète des équations qui gouvernent l'évolution du système mécanique sous la forme suivante :

**Les équations de Euler-Lagrange définies sur tout le domaine  $\Omega$  :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= A_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega^e \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^e + A_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega^e \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e & (4.10) \\
&\quad - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1} dS \\
\mathbf{0} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{S}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{d}_{n+1} - \frac{\tau}{\tau + \Delta t} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^v - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \bar{u}_n^p \frac{d\mathbf{t}^h}{d\sigma^h} \delta_{\Gamma_i} \right) d\Omega^e \\
&\quad - \int_{\Omega^{e+}} \mathbf{S}^T \left( \left( \frac{\Delta t \bar{E}^{-1}}{\tau + \Delta t} \mathbf{S} + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \bar{D}_n \mathbf{T} \frac{d\mathbf{t}^h}{d\sigma^h} \delta_{\Gamma_i} \right) \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e \right. \\
&\quad \quad \left. + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \bar{\gamma}_{n+1}^d \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \mathbf{t}_{n+1}} \frac{d\mathbf{t}^h}{d\sigma^h} \delta_{\Gamma_i} \right) d\Omega^{e+} \\
&\quad - \int_{\Omega^{e-}} \mathbf{S}^T \left( \frac{\Delta t \bar{D}_n}{\tau + \Delta t} \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e + \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \sigma_{n+1}} + \frac{\Delta t \bar{\gamma}_{n+1}^d}{\tau + \Delta t} \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \sigma_{n+1}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \mathbf{t}_{n+1}} \frac{d\mathbf{t}^h}{d\sigma^h} \delta_{\Gamma_i} \right) d\Omega^{e-} \quad \forall e
\end{aligned}$$

où  $A_{e=1}^{nel}$  indique la procédure d'assemblage des éléments finis. Il est possible de réécrire ces équations sans les fonctions de Dirac ; en remarquant que, si l'aire  $A^e(x)$  des sections de l'élément fini  $\Omega^e$  est constante, il vient :

$$\frac{d\mathbf{t}_i^h}{d\sigma^h} = \frac{1}{A_{\Gamma_i}} \int_{\Omega^e} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} d\Omega^e = \int_{L^e} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} dx \quad (4.11)$$

les équations (4.10), en utilisant l'indice  $i$  en référence à la position  $\mathbf{x}_i$ , prennent la

forme ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 0 &= A_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega^e \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^e + A_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega^e \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e & (4.12) \\
 &- \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1} dS \\
 0 &= \int_{\Omega^e} \left\{ \mathbf{S}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{d}_{n+1} - \frac{\tau}{\tau + \Delta t} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^v - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p \right) - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{S}_i^T \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \bar{u}_{i,n}^p \right\} d\Omega^e \\
 &- \int_{\Omega^{e+}} \left\{ \left( \mathbf{S}^T \frac{\Delta t \bar{E}^{-1}}{\tau + \Delta t} \mathbf{S} + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{S}_i^T \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \bar{D}_{i,n} \mathbf{T}_i \right) \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{S}_i^T \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \bar{\gamma}_{i,n+1}^d \frac{\partial \bar{\phi}_{i,n+1}^d}{\partial \mathbf{t}_{i,n+1}} \right\} d\Omega^{e+} \\
 &- \int_{\Omega^{e-}} \left\{ \mathbf{S}^T \left( \frac{\Delta t \bar{D}_n}{\tau + \Delta t} \mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e + \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \sigma_{n+1}} + \frac{\Delta t \bar{\gamma}_{n+1}^d}{\tau + \Delta t} \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{S}_i^T \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \bar{\gamma}_{i,n+1}^p \frac{\partial \bar{\phi}_{i,n+1}^p}{\partial \mathbf{t}_{i,n+1}} \right\} d\Omega^{e-} \quad \forall e
 \end{aligned}$$

Pour simplifier les écritures, posons :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega^e \quad ; \quad \mathbf{G}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega^e \\
 \mathbf{E}(\mathbf{d}_{n+1}^e) &= \int_{\Omega^e} \left\{ \mathbf{S}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{d}_{n+1}^e - \frac{\tau}{\tau + \Delta t} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^v - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p \right) - \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{S}_i^T \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \bar{u}_{i,n}^p \right\} d\Omega^e \\
 \mathbf{H}_n^+ &= \int_{\Omega^{e+}} \left( \mathbf{S}^T \frac{\Delta t \bar{E}^{-1}}{\tau + \Delta t} \mathbf{S} + \sum_{i=1}^{n_{dis}} \mathbf{S}_i^T \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \bar{D}_{i,n} \mathbf{T}_i \right) d\Omega^{e+} \\
 \mathbf{H}_n^- &= \int_{\Omega^{e-}} \mathbf{S}^T \frac{\Delta t \bar{D}_n}{\tau + \Delta t} \mathbf{S} d\Omega^{e-} \\
 \bar{\mathbf{P}}^p(\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e, \bar{\gamma}_{n+1}^p) &= \int_{\Omega^e} \mathbf{S}^T \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \sigma_{n+1}} d\Omega^e \\
 \bar{\mathbf{P}}^d(\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e, \bar{\gamma}_{n+1}^d) &= \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t} \int_{\Omega^e} \mathbf{S}^T \bar{\gamma}_{n+1}^d \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \sigma_{n+1}} d\Omega^e \\
 \bar{\bar{\mathbf{P}}}^p(\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e, \bar{\bar{\gamma}}_{n+1}^p) &= \sum_{i=1}^{n_{dis}} \int_{\Omega^e} \mathbf{S}_i^T \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \bar{\bar{\gamma}}_{i,n+1}^p \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_{i,n+1}^p}{\partial \mathbf{t}_{i,n+1}} d\Omega^e \\
 \bar{\bar{\mathbf{P}}}^d(\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e, \bar{\bar{\gamma}}_{n+1}^d) &= \sum_{i=1}^{n_{dis}} \int_{\Omega^e} \mathbf{S}_i^T \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \bar{\bar{\gamma}}_{i,n+1}^d \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_{i,n+1}^d}{\partial \mathbf{t}_{i,n+1}} d\Omega^e
 \end{aligned}$$

et les équations (4.12) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{A}_{e=1}^{nel} \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^e + \mathbf{A}_{e=1}^{nel} \mathbf{G}^e \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1} dS \\ 0 &= \mathbf{E}_{n+1} - (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-) \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d \quad (4.13) \end{aligned}$$

Les conditions de charge-décharge définies en chaque point matériel  $\mathbf{x}$  écrites, pour simplifier, en supposant que  $\Delta t$  est constant et en adoptant l'écriture habituelle  $\Delta \gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{i,n+1}^d &\geq 0 ; \bar{\phi}_{i,n+1}^d \leq 0 ; \bar{\gamma}_{i,n+1}^d \bar{\phi}_{i,n+1}^d = 0 & (4.14) \\ \text{avec } \bar{\phi}_{i,n+1}^d &= \mathbf{T}_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e - (\sigma_u^t - \bar{q}^d(\bar{\gamma}_{i,n+1}^d)) \quad \forall i \\ \bar{\gamma}_{n+1}^p &\geq 0 ; \bar{\phi}_{n+1}^p \leq 0 ; \bar{\gamma}_{n+1}^p \bar{\phi}_{n+1}^p = 0 \\ \text{avec } \bar{\phi}_{n+1}^p &= |\mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e + \bar{\kappa}^p(\bar{\gamma}_{n+1}^p)| - (\sigma_y - \bar{q}^p(\bar{\gamma}_{n+1}^p)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ \bar{\gamma}_{n+1}^d &\geq 0 ; \bar{\phi}_{n+1}^d \leq 0 ; \bar{\gamma}_{n+1}^d \bar{\phi}_{n+1}^d = 0 \\ \text{avec } \bar{\phi}_{n+1}^d &= -\mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e - (\sigma_f - \bar{q}^d(\bar{\gamma}_{n+1}^d)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ \bar{\gamma}_{i,n+1}^p &\geq 0 ; \bar{\phi}_{i,n+1}^p \leq 0 ; \bar{\gamma}_{i,n+1}^p \bar{\phi}_{i,n+1}^p = 0 \\ \text{avec } \bar{\phi}_{i,n+1}^p &= -\mathbf{T}_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e - (\sigma_u^c - \bar{q}^p(\bar{\gamma}_{i,n+1}^p)) \quad \forall i \end{aligned}$$

### 3 Stratégie de résolution

#### 3.1 Méthode de Newton-Raphson

Les lois de comportement des matériaux étant non-linéaires, le système d'équations (4.13) est non-linéaire ; l'équation (4.14)<sub>1</sub> est elle aussi non-linéaire puisque la loi d'adoucissement l'est. Nous définissons les résidus suivants qui devront être annulés :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{d},n+1} &= \mathbf{A}_{e=1}^{nel} \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^e + \mathbf{A}_{e=1}^{nel} \mathbf{G}^e \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1} dS \\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}^e,n+1} &= \mathbf{E}_{n+1} - (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-) \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d \\ \bar{\phi}_{i,n+1}^d &= \mathbf{T}_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e - (\sigma_u^t - \bar{q}^d(\bar{\gamma}_{i,n+1}^d)) \quad \forall i \in [1, \dots, n_{dis}] \\ \bar{\phi}_{i,n+1}^p &= -\mathbf{T}_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e - (\sigma_u^c - \bar{q}^p(\bar{\gamma}_{i,n+1}^p)) \quad \forall i \in [1, \dots, n_{dis}] \\ \bar{\phi}_{n+1}^p &= |\mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e + \bar{\kappa}^p(\bar{\gamma}_{n+1}^p)| - (\sigma_y - \bar{q}^p(\bar{\gamma}_{n+1}^p)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ \bar{\phi}_{n+1}^d &= -\mathbf{S} \boldsymbol{\beta}_{n+1}^e - (\sigma_f - \bar{q}^d(\bar{\gamma}_{n+1}^d)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \quad (4.15) \end{aligned}$$

Trois niveaux de résolution sont distincts : les déplacements généralisés  $\mathbf{d}_{n+1}^e$  sont calculés au niveau global de sorte que  $\mathbf{R}_{\mathbf{d},n+1} = 0$ , les contraintes généralisées sont calculées au niveau élémentaire de sorte que  $\mathbf{R}_{\beta^e,n+1} = 0$  et les multiplicateurs de Lagrange sont calculés au niveau local de sorte que les fonctions seuils  $\phi$  soient négatives ou nulles. À chaque niveau de résolution, les variables qui sont calculées à un autre niveau sont gardées fixes. Nous utiliserons la méthode dite « operator split » afin de ne pas résoudre ce système d'un seul bloc. Cette méthode consiste à atteindre la convergence à un niveau de résolution avant de passer au niveau de résolution supérieur [Ibr09]. Nous utilisons la méthode itérative de Newton-Raphson [Ibr09, Zie00, Bat96] pour la résolution de ces équations à chaque niveau de résolution. L'application de la dérivée directionnelle permet de linéariser les résidus (4.15) (pour simplifier les notations, nous abandonnons la référence au pas de temps :  $\bullet_{n+1}$ ) :

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_{\mathbf{d}}^{(i)} + \frac{d}{d\nu}|_{\nu=0} \mathbf{R}_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}^{(i)} + \nu\Delta\mathbf{d}^{(i)}, \beta^e + \nu\Delta\beta^e) \quad (4.16)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_{\beta}^{(j)} + \frac{d}{d\nu}|_{\nu=0} \mathbf{R}_{\beta}(\mathbf{d}^{e(i)} + \nu\Delta\mathbf{d}^{e(i)}, \beta^{e(j)} + \nu\Delta\beta^{e(j)}, \bar{\gamma} + \nu\Delta\bar{\gamma}, \bar{\gamma} + \nu\Delta\bar{\gamma}) \quad \forall e$$

$$0 = \bar{\phi}_i^{d,(k)} + \frac{d}{d\nu}|_{\nu=0} \bar{\phi}_i^d(\beta^{e(j)} + \nu\Delta\beta^{e(j)}, \bar{\gamma}_i^{d,(k)} + \nu\Delta\bar{\gamma}_i^{d,(k)}) \quad \forall i \in [1, \dots, n_{dis}]$$

$$0 = \bar{\phi}_i^{p,(k)} + \frac{d}{d\nu}|_{\nu=0} \bar{\phi}_i^p(\beta^{e(j)} + \nu\Delta\beta^{e(j)}, \bar{\gamma}_i^{p,(k)} + \nu\Delta\bar{\gamma}_i^{p,(k)}) \quad \forall i \in [1, \dots, n_{dis}]$$

$$0 = \bar{\phi}_l^{p,(k)} + \frac{d}{d\nu}|_{\nu=0} \bar{\phi}_l^p(\beta^{e(j)} + \nu\Delta\beta^{e(j)}, \bar{\gamma}^{p,(k)} + \nu\Delta\bar{\gamma}^{p,(k)}) \quad \forall \mathbf{x}_l$$

$$0 = \bar{\phi}_l^{d,(k)} + \frac{d}{d\nu}|_{\nu=0} \bar{\phi}_l^d(\beta^{e(j)} + \nu\Delta\beta^{e(j)}, \bar{\gamma}^{d,(k)} + \nu\Delta\bar{\gamma}^{d,(k)}) \quad \forall \mathbf{x}_l$$

où  $\bar{\gamma} = \{\bar{\gamma}_i\}_{i \in [1, \dots, n_{dis}]}$  et  $\bar{\gamma} = \{\bar{\gamma}_l^p, \bar{\gamma}_l^d\}_{l \in [1, \dots, n_{int}^e]}$  avec  $n_{int}^e$  le nombre de points d'intégration numérique dans l'élément  $e$ . Précisons aussi que les fonctions critère  $\phi$  ne doivent être annulées qu'à partir du moment où elles deviennent positives.

### 3.2 Algorithme dit « return mapping »

**Remarque :** Les algorithmes de résolution pour lesquels l'état de contrainte final peut être interprété comme la projection d'un état de contrainte test sur la surface de charge sont qualifiés de « return mapping » [Sim98].

Le problème numérique défini par les systèmes d'équations (4.13) et (4.14) est analogue à celui présenté dans les articles [Sim89, Mar06], mais comporte une particularité qui nous oblige à définir un algorithme « return mapping » différent de celui détaillé dans ces deux articles : dans notre cas, l'algorithme doit être capable de gérer l'adoucissement dans les matériaux. Dans les articles [Sim89, Mar06], trois

niveaux de résolution sont définis : au niveau global, un incrément des déplacements généralisés  $\Delta \mathbf{d}^{(i)}(t)$  est calculé de sorte que l'équation (4.13)<sub>1</sub> est vérifiée ; à partir des nouveaux déplacements, un incrément des contraintes généralisées  $\Delta \boldsymbol{\beta}^{e(j)}(t)$  est alors calculé de sorte que (4.13)<sub>2</sub> soit vérifiée ; au niveau local enfin, étant donnée la valeur actualisée de la contrainte, les multiplicateurs de Lagrange sont mis à jour de sorte qu'ils vérifient les équations (4.14). La stabilité de cet algorithme repose notamment sur le fait que, en tout point d'intégration numérique, pour une contrainte fixée donnée, il est possible d'actualiser les multiplicateurs de Lagrange. Ceci ne pose aucun problème dans le cas d'un comportement avec écrouissage ; par contre, pour un comportement adoucissant, au-delà d'une certaine contrainte, il n'est plus possible de trouver un nouvel état des déformations qui vérifie  $\bar{\phi} = 0$ .

La stratégie que nous choisissons consiste à résoudre d'un seul bloc les problèmes élémentaires et locaux, en exprimant les contraintes généralisées en fonction des multiplicateurs de Lagrange à partir de l'équation (4.13)<sub>2</sub> comme défini dans la table 4.1. Cette démarche est analogue à celle suivie dans le cas des méthodes en déplacement mais comporte la particularité de coupler tous les points  $\mathbf{x}_i$  où une discontinuité est susceptible d'apparaître et les points d'intégration numérique  $\mathbf{x}_l$ . Cette stratégie fait appel à la résolution, dans chaque élément fini, d'un système dont le nombre d'équations dépend du nombre de discontinuités susceptibles d'apparaître  $n_{dis}^e$  et du nombre de points d'intégration numérique  $n_{int}^e$ . La majorité des équations de ce système sont linéaires car seule la loi d'adoucissement en traction est non-linéaire. Il est toujours possible, comme nous le verrons plus loin, de choisir des fonctions d'approximation telles que les points matériels  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_l$  sont traités de façon indépendante : cela revient cette fois à une situation identique à celle rencontrée avec les méthodes classiques formulées en déplacement [Ibr98]. Cependant, la formulation mixte originale que nous avons développée permet de définir une matrice tangente consistante élémentaire qui est symétrique ; de plus, notre formulation intègre une condition de compatibilité entre contraintes continue  $\sigma$  et discrètes  $t_i$  ( $t_i(t) = t_i(\sigma)$ ) directement dans la loi de comportement du matériau : le résidu qui apparaît avec les méthodes en déplacement pour imposer cette condition – et qui doit être annulé par un procédé itératif – n'apparaît donc pas avec notre formulation.

Présentons maintenant de façon plus détaillée les étapes de l'algorithme de résolution « return mapping » que nous avons défini :

Traction	Compression
<p>Étant donnés <math>\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{e(i)}</math>, <math>\mathbf{d}_n^e</math>, <math>\sigma_n</math> et <math>\boldsymbol{\alpha}_n</math>,</p> <p>trouver <math>\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e</math> et <math>\boldsymbol{\alpha}_{n+1}</math></p> <p>de sorte que :</p> <p style="text-align: center;"><math>\mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}, n+1} = \mathbf{0}</math></p> <p style="text-align: center;">ET <math>\forall \mathbf{x}_i, i \in [1, \dots, n_{dis}^e] :</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\bar{\gamma}_{n+1}^d \geq 0, \bar{\phi}_{n+1}^d \leq 0, \bar{\gamma}_{n+1}^d \bar{\phi}_{n+1}^d = 0. \quad \bar{\gamma}_{n+1}^p \geq 0, \bar{\phi}_{n+1}^p \leq 0, \bar{\gamma}_{n+1}^p \bar{\phi}_{n+1}^p = 0,</math></p> <p style="text-align: center;">ET <math>\forall \mathbf{x}_l, l \in [1, \dots, n_{int}^e] :</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\bar{\gamma}_{n+1}^p \geq 0, \bar{\phi}_{n+1}^p \leq 0, \bar{\gamma}_{n+1}^p \bar{\phi}_{n+1}^p = 0,</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\bar{\gamma}_{n+1}^d \geq 0, \bar{\phi}_{n+1}^d \leq 0, \bar{\gamma}_{n+1}^d \bar{\phi}_{n+1}^d = 0.</math></p>	

**Tab. 4.1:** Expression du problème élémentaire.

**Étape 1a :** Calcul d'un état test élastique à partir d'une valeur actualisée des coordonnées de déplacement généralisées  $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$ .

Soit  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e$  défini en fonction de tous les multiplicateurs de Lagrange élémentaires de sorte que  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}, n+1} = \mathbf{0}$  :

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e = (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-)^{-1} \left( \mathbf{E}_{n+1} - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p - \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d \right)$$

L'état test élastique est défini comme l'état supposé où aucun mécanisme anélastique n'est activé :  $\bar{\gamma}_{n+1}^p = \bar{\gamma}_{n+1}^d = 0$  en tout point d'intégration numérique  $\mathbf{x}_l$  et  $\bar{\gamma}_{n+1}^d = \bar{\gamma}_{n+1}^p = 0$  en tout point matériel  $\mathbf{x}_i$ . D'où :

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e, test} = (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-)^{-1} \mathbf{E}_{n+1} \quad (4.17)$$

et les fonctions critères s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i, n+1}^{d, test} &= \mathbf{T}_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e, test} - (\sigma_u^t - \bar{q}_{i, n}^d) & \forall i \\ \bar{\phi}_{i, n+1}^{p, test} &= -\mathbf{T}_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e, test} - (\sigma_u^c - \bar{q}_{i, n}^p) & \forall i \\ \bar{\phi}_{l, n+1}^{p, test} &= |\mathbf{S}(\mathbf{x}_l) \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e, test} + \bar{\kappa}_{l, n}^p| - (\sigma_y - \bar{q}_{l, n}^p) & \forall l \\ \bar{\phi}_{l, n+1}^{d, test} &= -\mathbf{S}(\mathbf{x}_l) \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e, test} - (\sigma_f - \bar{q}_{l, n}^d) & \forall l \end{aligned} \quad (4.18)$$

Définissons  $\Omega^{p/d} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \bar{\phi}_{n+1}^{p/d, test}(\mathbf{x}) > 0\}$ , et  $\Gamma^{p/d} = \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid \bar{\phi}_{n+1}^{p/d, test}(\mathbf{x}) > 0\}$ .

**Étape 1b** : Vérification de l'admissibilité de l'état test élastique.

Si chacune des fonctions critère, en chaque point d'intégration numérique et en chaque point où une discontinuité est susceptible d'apparaître, est négative ou nulle ( $\Omega^p \cup \Omega^d \cup \Gamma^p \cup \Gamma^d = \emptyset$ ), alors l'état test est l'état de contrainte et d'évolution des variables internes qui correspond au déplacement  $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$ . Sinon, une correction doit être apportée à l'état test.

**Étape 2** : Correction anélastique : projection de l'état test sur la surface de charge (« return mapping »).

Cette étape consiste à corriger l'état du système de manière à annuler toutes les fonctions critères test strictement positives. Afin d'écrire le système d'équations qui devra être résolu pour cela, commençons par remarquer que :

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e,test} - (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-)^{-1} \left( \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d + \bar{\bar{\mathbf{P}}}_{n+1}^p + \bar{\bar{\mathbf{P}}}_{n+1}^d \right) \quad (4.19)$$

Maintenant, donnons la forme linéarisée des lois d'érouissage et d'adoucissement :

$$q_{n+1} := q \left( \xi_n + \gamma_{n+1} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial q_{n+1}} \right) = q_n + \frac{dq_{n+1}}{d\xi_{n+1}} \gamma_{n+1} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial q_{n+1}} \quad (4.20)$$

Dans le cas de la loi non-linéaire d'adoucissement en traction, la relation ci-dessus n'est plus une égalité mais une approximation et nous calculons  $\bar{\gamma}_{n+1}^d$  avec la méthode itérative de Newton-Raphson.

**Étape 2a** : Correction anélastique continue – calcul d'un état test continu.

L'état test continu est défini comme l'état supposé où aucun mécanisme discret n'est activé :  $\bar{\gamma}_{n+1}^d = \bar{\gamma}_{n+1}^p = 0$  en tout point matériel  $\mathbf{x}_i$ . D'où :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e,test-con} &= (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-)^{-1} (\mathbf{E}_{n+1} - \bar{P}_{n+1}^p - \bar{P}_{n+1}^d) \\ &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e,test} - (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-)^{-1} (\bar{P}_{n+1}^p + \bar{P}_{n+1}^d) \end{aligned} \quad (4.21)$$

On résout alors en tout point d'intégration numérique  $\mathbf{x}_l$  le problème continu suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\phi}_{n+1}^{p,test-con}(\bar{\gamma}_{n+1}^p, \bar{\gamma}_{n+1}^d) = \bar{\phi}_{n+1}^{p,test} - \mathbf{S} (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-)^{-1} (\bar{P}_{n+1}^p + \bar{P}_{n+1}^d) - \frac{d\bar{q}_{n+1}^p}{d\bar{\xi}_{n+1}^p} \bar{\gamma}_{n+1}^p \\ 0 &= \bar{\phi}_{n+1}^{d,test-con}(\bar{\gamma}_{n+1}^p, \bar{\gamma}_{n+1}^d) = \bar{\phi}_{n+1}^{d,test} - \mathbf{S} (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-)^{-1} (\bar{P}_{n+1}^p + \bar{P}_{n+1}^d) - \frac{d\bar{q}_{n+1}^d}{d\bar{\xi}_{n+1}^d} \bar{\gamma}_{n+1}^d \end{aligned} \quad (4.22)$$

où  $\bar{\gamma} = \{\bar{\gamma}_l\}_{l \in [1, \dots, n_{int}^e]}$ .

**Étape 2b** : Vérification de l'admissibilité de l'état test continu.

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{i,n+1}^{d,test-con} &= \mathbf{T}_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e,test-con} - (\sigma_u^t - \bar{q}_{i,n}^d) & \forall i \\ \bar{\phi}_{i,n+1}^{p,test-con} &= -\mathbf{T}_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e,test-con} - (\sigma_u^c - \bar{q}_{i,n}^p) & \forall i\end{aligned}\quad (4.23)$$

IF  $\forall i \in [1, \dots, n_{dis}^e]$ ,  $\bar{\phi}_{i,n+1}^{d,test-con} \leq 0$  AND  $\bar{\phi}_{i,n+1}^{p,test-con} \leq 0$  THEN

GO TO "Étape 3"

ELSE

CONTINUE

ENDIF

**Étape 2c** : Corrections anélastiques continues et discrètes. Cette étape consiste à repartir de l'état test élastique et à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}0 &= \bar{\phi}_i^d(\bar{\gamma}_{n+1}^{d(k)}, \bar{\gamma}_{n+1}^p, \bar{\gamma}_{n+1}^p, \bar{\gamma}_{n+1}^d) & \forall \mathbf{x}_i \in \Gamma^d \\ 0 &= \bar{\phi}_i^p(\bar{\gamma}_{n+1}^{d(k)}, \bar{\gamma}_{n+1}^p, \bar{\gamma}_{n+1}^p, \bar{\gamma}_{n+1}^d) & \forall \mathbf{x}_i \in \Gamma^p \\ 0 &= \bar{\phi}_l^p(\bar{\gamma}_{n+1}^{d(k)}, \bar{\gamma}_{n+1}^p, \bar{\gamma}_{n+1}^p, \bar{\gamma}_{n+1}^d) & \forall \mathbf{x} \in \Omega^p \\ 0 &= \bar{\phi}_l^d(\bar{\gamma}_{n+1}^{d(k)}, \bar{\gamma}_{n+1}^p, \bar{\gamma}_{n+1}^p, \bar{\gamma}_{n+1}^d) & \forall \mathbf{x} \in \Omega^d\end{aligned}\quad (4.24)$$

où  $\bar{\gamma} = \{\bar{\gamma}_i\}_{i \in [1, \dots, n_{dis}^e]}$  et avec :

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{n+1}^{d,(k)} &= \bar{\phi}_{n+1}^{d,test} - \mathbf{T}_i (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-)^{-1} \left( \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^{d,(k)} \right) - \frac{d\bar{q}_{n+1}^{d,(k)}}{d\xi_{n+1}^{d,(k)}} \bar{\gamma}_{n+1}^{d,(k)} \\ \bar{\phi}_{n+1}^p &= \bar{\phi}_{n+1}^{p,test} - \mathbf{T}_i (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-)^{-1} \left( \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^{d,(k)} \right) - \frac{d\bar{q}_{n+1}^p}{d\xi_{n+1}^p} \bar{\gamma}_{n+1}^p \\ \bar{\phi}_{n+1}^p &= \bar{\phi}_{n+1}^{p,test} - \mathbf{S} (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-)^{-1} \left( \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^{d,(k)} \right) - \frac{d\bar{q}_{n+1}^p}{d\xi_{n+1}^p} \bar{\gamma}_{n+1}^p \\ \bar{\phi}_{n+1}^d &= \bar{\phi}_{n+1}^{d,test} - \mathbf{S} (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-)^{-1} \left( \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^{d,(k)} \right) - \frac{d\bar{q}_{n+1}^d}{d\xi_{n+1}^d} \bar{\gamma}_{n+1}^d\end{aligned}\quad (4.25)$$

**Remarques :**

1. Dans les équations (4.25) nous avons tenu compte du fait que, quel que soit le mécanisme impliqué, discret ou continu :  $\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial q_{n+1}} = 1$ .
2. La relation (4.18)<sub>3</sub> n'est valable que dans le cas où le signe de la vraie contrainte  $sign(\sigma_{n+1}) = \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \kappa_{n+1}}$  est égal au signe de la contrainte test  $sign(\sigma_{n+1}^{test}) = \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^{p,test}}{\partial \sigma_{n+1}^{test}} = \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^{p,test}}{\partial \kappa_{n+1}^{test}}$ . L'annexe 1 montre, dans le cas simple d'un élément barre avec contrainte constante, qu'une telle hypothèse est valable.



**Étape 3 :** Actualisation des contraintes généralisées et des variables internes.

Maintenant que les multiplicateurs de Lagrange ont été actualisés, on calcule  $\bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p$ ,  $\bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_{n+1}^p$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_{n+1}^d$  pour mettre ensuite à jour les coordonnées de contrainte généralisées :

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e,test} - (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-)^{-1} \left( \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^p + \bar{\mathbf{P}}_{n+1}^d + \bar{\bar{\mathbf{P}}}_{n+1}^p + \bar{\bar{\mathbf{P}}}_{n+1}^d \right) \quad (4.26)$$

et les variables internes :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}_{n+1}^d &= \bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^d + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{n+1}^d \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_{n+1}^d}{\partial \bar{\mathcal{A}}^d} & \forall \mathbf{x}_i \in \Gamma^d \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^p + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{n+1}^p \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_{n+1}^p}{\partial \bar{\mathcal{A}}^p} & \forall \mathbf{x}_i \in \Gamma^p \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^p + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{n+1}^p \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \mathcal{A}^p} & \forall \mathbf{x}_l \in \Omega^p \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1}^d &= \bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^d + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{n+1}^d \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \mathcal{A}^d} & \forall \mathbf{x}_l \in \Omega^d \end{aligned} \quad (4.27)$$

**Remarque :** Tous les points d'intégration numérique sont liés par cet algorithme « return mapping » : la communication entre points matériels ne se fait pas simplement par passage au niveau global de résolution, mais pendant la résolution du problème élémentaire.

### 3.3 Résidu élémentaire

D'après (4.15), le résidu élémentaire est :

$$\mathbf{R}_d^e = \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{d}}^e + \mathbf{G}^e \boldsymbol{\beta}^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}^e d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}}^e dS^e \quad (4.28)$$

avec :

$\mathbf{f}^{e,ine} = \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{d}}^e \quad \text{la contribution élémentaire aux efforts d'inertie} \quad (4.29)$ $\mathbf{f}^{e,int} = \mathbf{G}^e \boldsymbol{\beta}^e \quad \text{la contribution élémentaire aux efforts internes}$ $\mathbf{f}^{e,ext} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}^e d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}}^e dS^e \quad \text{la contribution élémentaire aux efforts externes}$
--

### 3.4 Matrice de raideur tangente consistante

Au niveau local, quand les résidus  $\phi$  sont annulés, d'après les équations (4.16), (4.15) et (4.20), et en adoptant la notation habituelle  $\Delta\gamma := \gamma$ , il vient :

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{T}_i \Delta\beta^e + \frac{d\bar{q}_i^d}{d\bar{\xi}_i^d} \frac{\partial \bar{\phi}_i^d}{\partial \bar{q}_i^d} \bar{\gamma}_i^d \Rightarrow \bar{\gamma}_i^d = - \left( \frac{d\bar{q}_i^d}{d\bar{\xi}_i^d} \right)^{-1} \mathbf{T}_i \Delta\beta^e & (4.30) \\
0 &= -\mathbf{T}_i \Delta\beta^e + \frac{d\bar{q}_i^p}{d\bar{\xi}_i^p} \frac{\partial \bar{\phi}_i^p}{\partial \bar{q}_i^p} \bar{\gamma}_i^p \Rightarrow \bar{\gamma}_i^p = \left( \frac{d\bar{q}_i^p}{d\bar{\xi}_i^p} \right)^{-1} \mathbf{T}_i \Delta\beta^e \\
0 &= \frac{\partial \bar{\phi}_l^p}{\partial \sigma_l} \mathbf{S}_l \Delta\beta^e + \left( \frac{d\bar{\kappa}_l^p}{d\lambda_l^p} + \frac{d\bar{q}_l^p}{d\bar{\xi}_l^p} \frac{\partial \bar{\phi}_l^p}{\partial \bar{q}_l^p} \right) \bar{\gamma}_l^p \Rightarrow \bar{\gamma}_l^p = - \left( \frac{d\bar{\kappa}_l^p}{d\lambda_l^p} + \frac{d\bar{q}_l^p}{d\bar{\xi}_l^p} \right)^{-1} \frac{\partial \bar{\phi}_l^p}{\partial \sigma_l} \mathbf{S}_l \Delta\beta^e \\
0 &= -\mathbf{S}_l \Delta\beta^e + \frac{d\bar{q}_l^d}{d\bar{\xi}_l^d} \frac{\partial \bar{\phi}_l^d}{\partial \bar{q}_l^d} \bar{\gamma}_l^d \Rightarrow \bar{\gamma}_l^d = \left( \frac{d\bar{q}_l^d}{d\bar{\xi}_l^d} \right)^{-1} \mathbf{S}_l \Delta\beta^e
\end{aligned}$$

Introduisons les notations de l'intégration numérique des intégrales. En notant  $x_l$  et  $w_l$  les positions et poids des points d'intégration numérique et  $j_l$  le jacobien de la transformation isoparamétrique, nous avons la relation suivante :

$$\int_{L^e} f(x) dx := \sum_{l=1}^{n_{int}^e} f(x_l) j_l w_l \quad (4.31)$$

Au niveau élémentaire, quand le résidu  $\mathbf{R}_\beta$  est annulé, d'après les équations (4.16), (4.15), (4.13) et (4.31), il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{G}^{eT} \Delta \mathbf{d}^e - (\mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^-) \Delta\beta^e - \int_A \left\{ \sum_{l=1}^{n_{int}^e} \mathbf{S}_l^T \left( \bar{\gamma}_l^p \frac{\partial \bar{\phi}_l^p}{\partial \sigma_l} + \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t} \bar{\gamma}_l^d \frac{\partial \bar{\phi}_l^d}{\partial \sigma_l} \right) j_l w_l \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{n_{dis}^e} \mathbf{S}_i^T \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \left( \bar{\gamma}_i^p \frac{\partial \bar{\phi}_i^p}{\partial \mathbf{t}_i} + \bar{\gamma}_i^d \frac{\partial \bar{\phi}_i^d}{\partial \mathbf{t}_i} \right) \right\} dA \quad (4.32)
\end{aligned}$$

En y injectant les expressions des multiplicateurs de Lagrange (4.30), nous définissons :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_n^+ + \mathbf{H}_n^- - \int_A \left\{ \sum_{l=1}^{n_{int}^e} \mathbf{S}_l^T \left( \left( \frac{d\bar{\kappa}_l^p}{d\lambda_l^p} + \frac{d\bar{q}_l^p}{d\bar{\xi}_l^p} \right)^{-1} + \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t} \left( \frac{d\bar{q}_l^d}{d\bar{\xi}_l^d} \right)^{-1} \right) \mathbf{S}_l j_l w_l \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{n_{dis}^e} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \mathbf{S}_i^T \left( \left( \frac{d\bar{q}_i^p}{d\bar{\xi}_i^p} \right)^{-1} + \left( \frac{d\bar{q}_i^d}{d\bar{\xi}_i^d} \right)^{-1} \right) \mathbf{T}_i \right\} dA \quad (4.33)
\end{aligned}$$

et réécrivons (4.32) :

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}^{eT} \Delta \mathbf{d}^e - \hat{\mathbf{H}} \Delta \boldsymbol{\beta}^e \quad (4.34)$$

Toujours d'après les mêmes équations (4.16), (4.15), (4.13) et (4.31), et en notant  $c_t$  le coefficient qui apparaît devant la matrice de masse par application d'un algorithme d'intégration temporelle, il vient au niveau global :

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_d^{(i)} + A_{e=1}^{n_{el}} \left( c_t \mathbf{M}^e + \mathbf{G}^e \hat{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{G}^{eT} \right) \Delta \mathbf{d}^{e(i)} \quad (4.35)$$

Par définition  $\mathbf{K}^{tan(i)} := -\frac{\mathbf{R}_d^{(i)}}{\Delta \mathbf{d}^{(i)}}$ , d'où :

$$\mathbf{K}^{e,tan(i)} = c_t \mathbf{M}^e + \mathbf{G}^e \hat{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{G}^{eT} \quad (4.36)$$

### Remarques :

1. Étant donnée la réponse adoucissante des matériaux, la matrice  $\hat{\mathbf{H}}$  n'est pas nécessairement inversible. Exprimer les conditions précises dans lesquelles  $\hat{\mathbf{H}}$  est inversible n'est pas simple dans le cas général. Dans les applications qui suivent, la tâche sera plus simple à accomplir pour permettre une implantation numérique robuste.
2. Nous n'avons pas abordé ici la question des passages de la traction vers la compression et inversement. Nous allons traiter ce problème dans l'application qui suit.

## 4 Application 1 : élément barre avec contrainte constante

### 4.1 Interpolation des champs de déplacement et de contrainte

Dans le cas particulier d'un élément barre à deux nœuds, les coordonnées de déplacement généralisées – dans le repère local de l'élément – sont  $\mathbf{d}(t) = \{u_1; u_2\}^T$ . Nous utilisons des fonctions de forme linéaires pour l'approximation de la partie lisse du champ de déplacement le long d'un élément de longueur  $L$  :

$$\mathbf{N}(x) = \left[ 1 - \frac{x}{L} ; \frac{x}{L} \right] \quad (4.37)$$

De plus, une seule contrainte généralisée  $\beta(t)$  est suffisante pour décrire un champ de contrainte constant. Nous posons  $S(x) = 1$ , d'où :

$$\sigma(x, t) = \beta^e(t) \quad (4.38)$$

Il reste à choisir le nombre  $n_{dis}^e$  de discontinuités de déplacement qu'on souhaite pouvoir voir apparaître dans un élément et à exprimer l'expression des fonctions  $\varphi_i(x)$  associées. Comme la contrainte dans l'élément barre est constante et que l'apparition d'une discontinuité est déterminée par un critère de contrainte ultime à ne pas dépasser, l'apparition possible d'une seule discontinuité par élément suffit. L'unique fonction  $\varphi(x)$  est déterminée de sorte que les conditions exprimées par les équations (4.6) soient vérifiées et que l'élément vérifie le « patch test » : l'élément doit être capable de représenter un champ de contrainte constant. Rappelons alors l'expression de l'équation (4.1)<sub>3</sub> dans le cas où la section  $A(x)$  de la barre est constante :

$$\mathbf{t}^h(t) = \int_L \frac{d\varphi(x)}{dx} \sigma^h dx \quad (4.39)$$

Pour que l'élément puisse vérifier le « patch test », il faut et il suffit que  $\int_L \frac{d\varphi(x)}{dx} dx = 1$ . La fonction continue la plus simple qui vérifie cela est :

$$\varphi(x) = \frac{x}{L} \quad (4.40)$$

De plus, on remarque que cette fonction vérifie les conditions exprimées par les équations (4.6) :  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(L) = 1$ . Notons qu'aucune indication n'est donnée sur la position de la discontinuité dans l'élément.

Enfin, d'après l'équation (4.5) :

$$\mathbf{T} = \int_L \frac{d\varphi(x)}{dx} dx = 1 \quad (4.41)$$

## 4.2 Équations discrétisées du problème

L'approximation du champ de déformation étant constante, un seul point d'intégration de Gauss  $x_1$  est suffisant pour intégrer numériquement les intégrales des équations de Euler-Lagrange du problème. Nous notons  $\bar{x}$  la position de la discontinuité qui peut être quelconque puisque le champ de contrainte est constant. Certaines quantités exprimées dans les relations (4.13) prennent alors la forme scalaire

suivante :

$$\begin{aligned}
E_{n+1} &= \left( \mathbf{B}(x_1) \mathbf{d}_{n+1} - \frac{\tau}{\tau + \Delta t} \bar{\epsilon}_n^v(x_1) - \bar{\epsilon}_n^p(x_1) \right) L - \bar{u}_n^p(\bar{x}) & (4.42) \\
H_n^+ &= \frac{\Delta t \bar{E}^{-1}}{\tau + \Delta t} L + \bar{D}_n(\bar{x}) & H_n^- &= \frac{\Delta t \bar{D}_n(x_1)}{\tau + \Delta t} L \\
\bar{P}_{n+1}^p &= \bar{\gamma}_{n+1}^p(x_1) \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p(x_1)}{\partial \beta_{n+1}} L & \bar{P}_{n+1}^d &= \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t} \bar{\gamma}_{n+1}^d(x_1) \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d(x_1)}{\partial \beta_{n+1}} L \\
\bar{P}_{n+1}^p &= \bar{\gamma}_{n+1}^p(\bar{x}) \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p(\bar{x})}{\partial \beta_{n+1}} & \bar{P}_{n+1}^d &= \bar{\gamma}_{n+1}^d(\bar{x}) \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d(\bar{x})}{\partial \beta_{n+1}}
\end{aligned}$$

et l'équation (4.13)<sub>2</sub> devient alors :

$$0 = E_{n+1} - H_n^+ \langle \beta_{n+1} \rangle^+ - H_n^- \langle \beta_{n+1} \rangle^- - \bar{P}_{n+1}^p - \bar{P}_{n+1}^d - \bar{P}_{n+1}^p - \bar{P}_{n+1}^d \quad (4.43)$$

Puisque la discontinuité peut apparaître indifféremment dans une des sections de la barre, nous prendrons dans la suite, pour simplifier,  $\bar{x} = x_1$ .

### 4.3 Algorithme « return mapping »

L'espace des contraintes  $\mathcal{A}$  a été divisé en deux parties : une partie pour la traction et son complément pour la compression. Les itérations durant lesquelles un changement du signe de la contrainte est observé doivent faire l'objet d'un traitement particulier.

**Étape 1a :** Calcul d'un état test élastique.

IF (  $|\sigma_{n+1}| < tol$  AND  $\Delta \epsilon_{n+1}^{(i)} \geq 0$  ) OR (  $\sigma_n > 0$  ) THEN !incrément de traction

$$\beta_{n+1}^{e,test} = (H_n^+)^{-1} E_{n+1} \quad (4.44)$$

IF  $sign(\beta_{n+1}^{e,test}) \neq sign(\beta_n^e)$  THEN !la contrainte change de signe

$$\beta_{n+1}^{e,test} = (H_n^-)^{-1} E_{n+1} \quad !compression$$

ENDIF

ELSE !incrément de compression

$$\beta_{n+1}^{e,test} = (H_n^-)^{-1} E_{n+1} \quad (4.45)$$

IF  $sign(\beta_{n+1}^{e,test}) \neq sign(\beta_n^e)$  THEN !la contrainte change de signe

$$\beta_{n+1}^{e,test} = (H_n^+)^{-1} E_{n+1} \quad !traction$$

ENDIF

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_{n+1}^{d,test} &= \beta_{n+1}^{e,test} - (\sigma_u^t - \bar{q}_n^d) \\
\bar{\phi}_{n+1}^{p,test} &= -\beta_{n+1}^{e,test} - (\sigma_u^c - \bar{q}_n^p) \\
\bar{\phi}_{n+1}^{p,test} &= |\beta_{n+1}^{e,test} + \bar{\kappa}_n^p| - (\sigma_y - \bar{q}_n^p) \\
\bar{\phi}_{n+1}^{d,test} &= -\beta_{n+1}^{e,test} - (\sigma_f - \bar{q}_n^d)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

**Remarque :** Ce qui précède n'est valable que dans l'hypothèse simplificatrice où la décharge est élastique. Cela n'est pas toujours le cas puisqu'il se peut que la plasticité continue soit activée pendant la décharge (boucles d'hystérésis).

**Étape 1b :** Vérification de l'admissibilité des contraintes (uniquement en compression).

IF AND  $\bar{\phi}_{n+1}^{p,test} \leq 0$  AND  $\bar{\phi}_{n+1}^{p,test} \leq 0$  AND  $\bar{\phi}_{n+1}^{d,test} \leq 0$  THEN EXIT  
ELSE CONTINUE

**Étape 2a :** Correction anélastique continue – Calcul des multiplicateurs de Lagrange continus (uniquement en compression).

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{\phi}_{n+1}^{p,test-con} = (\beta_{n+1}^{e,test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}) \text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) - (\sigma_y - \bar{q}_n^{p,test}) \\
&\quad - \left( (H_n^-)^{-1} (\bar{P}_{n+1}^p + \bar{P}_{n+1}^d) - \frac{d\bar{\kappa}_{n+1}^p}{d\lambda_{n+1}^p} \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \bar{\kappa}_{n+1}^p} \right) \cdot \text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) \\
&\quad + \frac{d\bar{q}_{n+1}^p}{d\xi_{n+1}^p} \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \bar{q}_{n+1}^p} \\
0 &= \bar{\phi}_{n+1}^{d,test-con} = -\beta_{n+1}^{test,(k)} - (\sigma_f - \bar{q}_n^d) + (H_n^-)^{-1} (\bar{P}_{n+1}^p + \bar{P}_{n+1}^d) + \frac{d\bar{q}_{n+1}^d}{d\xi_{n+1}^d} \bar{\gamma}_{n+1}^d \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \bar{q}_{n+1}^d}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

L'écriture de ces équations est simplifiée lorsqu'on tient compte du fait que  $\frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \beta_{n+1}} = \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \bar{\kappa}_{n+1}^p} = \text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p)$ ,  $\frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \beta_{n+1}} = \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \beta_{n+1}} = -1$ ,  $\frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \bar{q}_{n+1}^p} = \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \bar{q}_{n+1}^d} = \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \bar{q}_{n+1}^p} = 1$ ,  $\frac{d\bar{q}_{n+1}^p}{d\xi_{n+1}^p} = -\bar{K}^p$ ,  $\frac{d\bar{\kappa}_{n+1}^p}{d\lambda_{n+1}^p} = -\bar{H}^p$ ,  $\frac{d\bar{q}_{n+1}^d}{d\xi_{n+1}^d} = -\bar{K}^d$  et  $\frac{d\bar{q}_{n+1}^p}{d\xi_{n+1}^p} = -\bar{K}^p$ .

De plus, le terme  $\frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \beta_{n+1}}$  dépend de  $\bar{\gamma}_{n+1}^p$ , ce qui rend ce système d'équations non-linéaire. Cependant, nous démontrons dans l'annexe 1 de ce chapitre qu'on peut raisonnablement considérer que  $\frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \beta_{n+1}} = \text{sign}(\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test})$ . Avec cette approxi-

mation, le système d'équations (4.47) devient linéaire et s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 = \bar{\phi}_{n+1}^{p, test-con} &= \bar{\phi}_{n+1}^{p, test} - \left( (H_n^-)^{-1} L + (\bar{K}^p + \bar{H}^p) \right) \bar{\gamma}_{n+1}^p + \bar{D}_n^{-1} \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \beta_{n+1}} \bar{\gamma}_{n+1}^d \\ 0 = \bar{\phi}_{n+1}^{d, test-con} &= \bar{\phi}_{n+1}^{d, test} + (H_n^-)^{-1} L \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \beta_{n+1}} \bar{\gamma}_{n+1}^p - (\bar{D}_n^{-1} + \bar{K}^d) \bar{\gamma}_{n+1}^d \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ce système linéaire est résolu analytiquement avant d'être implanté (voir l'annexe 2 de ce chapitre). Ceci est un point important pour la robustesse de l'implantation numérique puisque le problème local continu est alors résolu sans itération.

**Étape 2b** : Vérification de l'admissibilité de l'état test continu (uniquement en compression).

$$\beta_{n+1}^{e, test-con} = \beta_{n+1}^{e, test} - (H_n^-)^{-1} (\bar{P}_{n+1}^p + \bar{P}_{n+1}^d) \quad (4.49)$$

$$\bar{\phi}_{n+1}^{p, test-con} = -\beta_{n+1}^{e, test-con} - (\sigma_u^c - \bar{q}_n^p)$$

IF  $\bar{\phi}_{n+1}^{p, test} \leq 0$  THEN GO TO "Étape 3"

ELSE CONTINUE

**Étape 2c** : corrections anélastiques continues et discrètes.

– En traction :

IF  $\bar{\phi}_{n+1}^{d, test} \leq 0$  THEN EXIT

ELSE résoudre l'équation non-linéaire suivante :

$$0 = \bar{\phi}_{n+1}^{d, (k)} = \bar{\phi}_{n+1}^{d, test} - (H_n^+)^{-1} \bar{P}_{n+1}^{d, (k)} + \frac{d\bar{q}_{n+1}^d}{d\bar{\xi}_{n+1}^d} \bar{\gamma}_{n+1}^{d, (k)} \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \bar{q}_{n+1}^d} \quad (4.50)$$

– En compression : résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} 0 = \bar{\phi}_{n+1}^p &= \bar{\phi}_{n+1}^{p, test} + (H_n^-)^{-1} \left( \bar{P}_{n+1}^p + \bar{P}_{n+1}^d + \bar{P}_{n+1}^p \right) + \frac{d\bar{q}_{n+1}^p}{d\bar{\xi}_{n+1}^p} \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \bar{q}_{n+1}^p} \\ 0 = \bar{\phi}_{n+1}^d &= \bar{\phi}_{n+1}^{d, test} + (H_n^-)^{-1} \left( \bar{P}_{n+1}^p + \bar{P}_{n+1}^d + \bar{P}_{n+1}^p \right) + \frac{d\bar{q}_{n+1}^p}{d\bar{\xi}_{n+1}^p} \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^p}{\partial \bar{q}_{n+1}^p} \\ 0 = \bar{\phi}_{n+1}^d &= \bar{\phi}_{n+1}^{d, test} + (H_n^-)^{-1} \left( \bar{P}_{n+1}^p + \bar{P}_{n+1}^d + \bar{P}_{n+1}^p \right) + \frac{d\bar{q}_{n+1}^d}{d\bar{\xi}_{n+1}^d} \bar{\gamma}_{n+1}^d \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^d}{\partial \bar{q}_{n+1}^d} \end{aligned} \quad (4.51)$$

**Remarque :**

1. Voir l'annexe 2 de ce chapitre pour la solution analytique du système d'équations ci-dessus.
2. Lorsque le phénomène discret est activé en compression, les phénomènes continus ne sont plus activés puisque la contrainte diminue. En pratique, le cas où les deux mécanismes continus et le mécanisme discret sont activés ensemble n'apparaît, dans toute l'histoire du chargement cyclique, que lorsque le mécanisme discret est activé pour la première fois.

**Étape 3 :** Actualisation de la contrainte et des variables internes continues.

– En traction :

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= \beta_{n+1}^{test} - (H_n^+)^{-1} \bar{P}_{n+1}^d \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \gamma_{n+1} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \mathcal{A}}\end{aligned}\quad (4.52)$$

– En compression :

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= \beta_{n+1}^{test} - (H_n^-)^{-1} \left( \bar{P}_{n+1}^p + \bar{P}_{n+1}^d + \bar{P}_{n+1}^{\bar{p}} \right) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \gamma_{n+1} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \mathcal{A}}\end{aligned}\quad (4.53)$$

**4.4 Matrice de raideur tangente consistante et résidu**

– En traction :

$$\hat{\mathbf{H}}_{n+1}^+ = H_n^+ - \underbrace{\left( \frac{d\bar{q}_{n+1}^d}{d\bar{\xi}_{n+1}^d} \right)^{-1}}_{\text{si } \bar{\gamma}_{n+1}^d > 0}\quad (4.54)$$

– En compression :

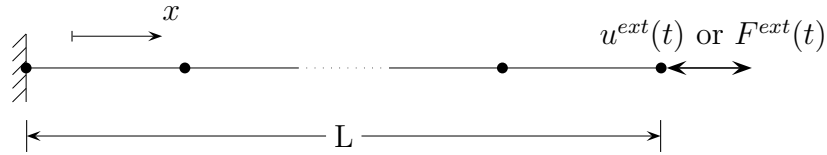
$$\hat{\mathbf{H}}_{n+1}^- = H_n^- - \underbrace{\left( \frac{\bar{q}_{n+1}^p}{\bar{\xi}_{n+1}^p} \right)^{-1}}_{\text{si } \bar{\gamma}_{n+1}^p > 0} L - \underbrace{\left( \frac{\bar{q}_{n+1}^d}{\bar{q}_{n+1}^d} \right)^{-1}}_{\text{si } \bar{\gamma}_{n+1}^d > 0} L - \underbrace{\left( \frac{\bar{q}_{n+1}^{\bar{p}}}{\bar{q}_{n+1}^{\bar{p}}} \right)^{-1}}_{\text{si } \bar{\gamma}_{n+1}^{\bar{p}} > 0}\quad (4.55)$$

**4.5 Applications numériques**

L'implantation numérique du modèle a été réalisée dans le logiciel de calcul par éléments finis FEAP [Tay05]. Puisqu'aucune charge répartie extérieure n'est impliquée dans les applications qui suivent, la structure est dans tous les cas modélisée



avec des éléments à contrainte constante. Le détail de la structure testée est donné sur la figure 4.1.



**Fig. 4.1:** Modèle de structure 1D en béton utilisé pour les applications numériques.

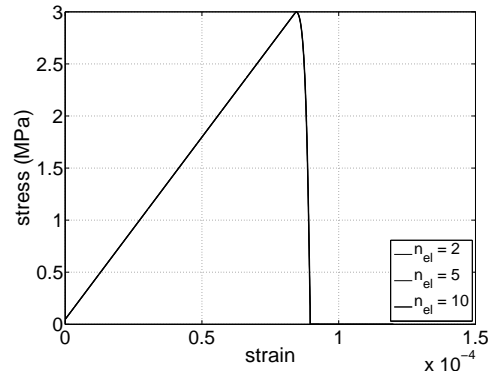
#### 4.5.1 Objectivité du maillage

Dans les procédures de résolution d'un problème mécanique par éléments finis, quand le déplacement se localise, la solution du problème peut dépendre de façon pathologique de la taille du maillage. Dans la formulation de notre modèle, nous avons introduit une discontinuité forte – une discontinuité du champ de déplacement – [Ibr03a, Sim93] et ainsi concentré la localisation dans une zone d'épaisseur nulle. Cette méthode aboutit à une formulation qui ne nécessite aucune longueur caractéristique et permet d'assurer l'objectivité du maillage, c'est-à-dire l'unicité de la solution. La figure 4.2 illustre les réponses quasi-statiques en traction et en compression de la barre présentée sur la figure 4.1 sous un déplacement imposé.

En ce qui concerne la modélisation du comportement en traction, l'énergie de fracturation est si petite par rapport à l'énergie élastique qu'il est difficile de reproduire numériquement la réponse adoucissante d'une barre de béton. Les courbes de la figure 4.2 [gauche] ont été tracées à partir de 4000 points, ce qui serait impossible à réaliser dans le cas d'un calcul sismique par exemple. À noter que la présence de viscosité aide à la représentation numérique de la partie adoucissante en traction.

#### 4.5.2 Dépendance de la réponse au taux de chargement

Les quatre principaux effets d'une augmentation du taux de déformation sur la réponse du béton sont : les augmentations (i) de la capacité résistante en compression [Bis95, Lu 04], (ii) de la capacité résistante en traction [Wee06], (iii) du module de Young [Wee06] et (iv) du comportement fragile [Dil84]. Pour des excitations sismiques, les taux de déformation sont compris entre  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$  et  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$ , ce qui correspond à des augmentations (i) de la résistance en compression de 0 à 30% [Bis95, Lu 04], (ii) de la résistance en traction de 0 à 60% [Wee06] et (iii) du module de Young de 0 à 10% [Wee06].



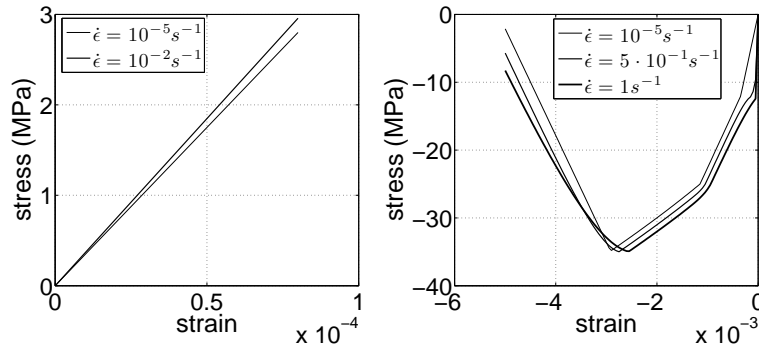
**Fig. 4.2:** Réponse en traction de la section où la discontinuité de déplacement se développe.  $n_{el}$  est le nombre d'éléments du maillage régulier de la barre.

Les applications numériques présentées sur la figure 4.3 [gauche] montrent que le module de Young calculé pour un taux de déformation de  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  est 5,7% plus élevé que celui calculé pour un taux de déformation de  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . L'augmentation du module de Young est donc représentée par le modèle mais légèrement sous-estimée. Cependant, cette augmentation est liée au paramètre visqueux  $\tau$  calculé dans ces applications numériques à partir d'un pourcentage d'amortissement critique  $\xi = 1\%$  dont la valeur a été arbitrairement choisie dans la section 3.4.1 du précédent chapitre : on peut donc espérer qu'en réalité la bonne valeur du pourcentage d'amortissement critique permettrait de retrouver une augmentation plus importante du module élastique. La réponse en compression est présentée sur la figure 4.3 [droite] : on remarque notamment que plus le taux de déformation est grand et plus la contrainte ultime est atteinte rapidement. Actuellement, le modèle de béton présenté dans le chapitre précédent n'a pas été développé pour représenter par lui-même les augmentations des résistances en traction et en compression, ce qui peut être fait *a priori* à la main, comme c'est souvent le cas en ingénierie où les paramètres définissant les résistances maximales sous sollicitation quasi-statique sont majorés pour une étude sismique.

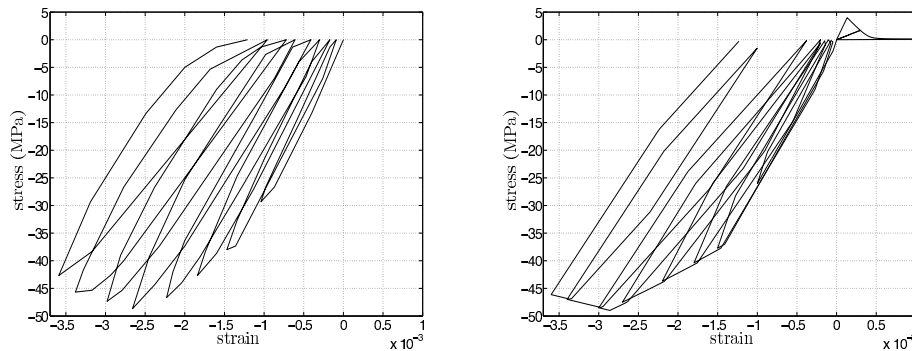
### 4.5.3 Application sismique

#### Loi constitutive de béton

Nous utilisons la loi de béton qui a été identifiée au chapitre précédent et que nous reproduisons sur la figure 4.4 [droite].



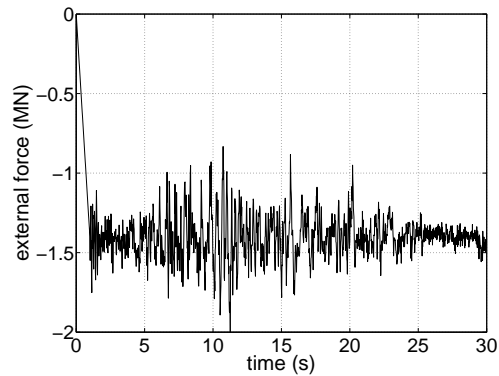
**Fig. 4.3:** Réponse en traction [gauche] et en compression [droite] pour différents taux de chargement.



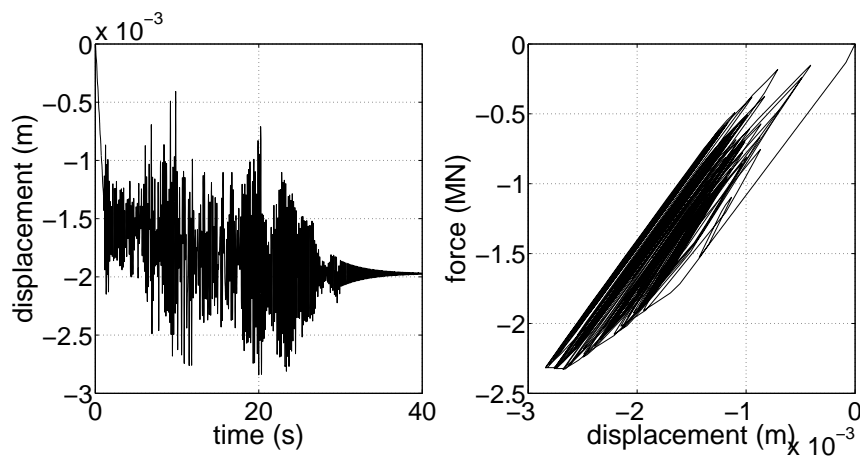
**Fig. 4.4:** Réponse d'une éprouvette de béton sous chargement cyclique quasi-statique : courbes expérimentale (adaptée de [Ram90]) [gauche] et numérique (en utilisant le modèle constitutif de béton présenté dans ce chapitre) [droite].

### Réponse sismique globale

Nous nous concentrons sur la réponse du béton en compression, car la capacité du béton à dissiper l'énergie sismique en traction est très faible. Avant d'appliquer le chargement sismique, une charge statique est appliquée progressivement – car elle active déjà certains mécanismes non-linéaires – jusqu'à imposer une contrainte de 35 MPa dans la barre : l'histoire du chargement est représentée sur la figure 4.6. Dans une structure isostatique telle que celle de la figure 4.1, en l'absence d'acier, une fois que la phase adoucissante du matériau est activée, la structure n'est plus capable de résister à la charge extérieure et l'équilibre ne peut plus être satisfait ; nous ajoutons donc à la section de béton  $A_b$  une section d'acier  $A_a$  élastique telle que  $A_a = 0.02 \cdot A_b = 8e^{-4} \text{ m}^2$  et de module élastique  $E_a = 210 \text{ GPa}$ .



**Fig. 4.5:** Histoire du chargement : charge statique + charge sismique.



**Fig. 4.6:** [gauche] Évolution temporelle du déplacement du nœud à droite de la barre; [droite] réponse hystérétique globale de la barre.

### Réponse locale et dissipation intrinsèque

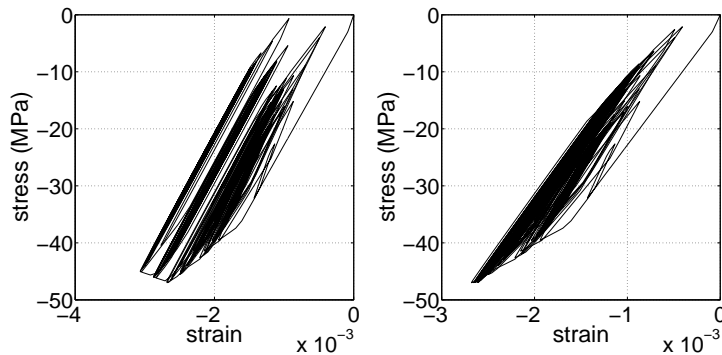
La *TVI* fournit un cadre utile pour quantifier la dissipation d'énergie intrinsèque aux matériaux. En effet, les quantités d'énergie volumiques de viscosité ( $\bar{E}^v$ ), de plasticité et d'endommagement continu ( $\bar{E}^p$  et  $\bar{E}^d$ ) dissipées par toute la structure ainsi que les quantités d'énergie surfaciques de plasticité et d'endommagement discrets ( $\bar{\bar{E}}^p$  et  $\bar{\bar{E}}^d$ ) dissipées dans la section  $\Gamma$  où il y a localisation des déplacements peuvent

être calculées :

$$\begin{aligned}
\bar{E}^v &= \int_0^T \int_{\Omega} \dot{\bar{D}}^v d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} \sigma^v \dot{\bar{\epsilon}}^v d\Omega dt & (4.56) \\
\bar{E}^p &= \int_0^T \int_{\Omega} \dot{\bar{D}}^p d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \sigma \dot{\bar{\epsilon}}^p + \bar{q}^p \dot{\bar{\xi}}^p + \bar{\kappa}^p \dot{\bar{\lambda}}^p \right) d\Omega dt \\
\bar{E}^d &= \int_0^T \int_{\Omega} \dot{\bar{D}}^d d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \sigma \dot{D} \sigma + \bar{q}^p \dot{\bar{\xi}}^d \right) d\Omega dt \\
\bar{\bar{E}}^p &= \int_0^T \int_{\Omega} \dot{\bar{D}}^p d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \mathbf{t} \dot{\bar{u}}^p + \bar{q}^p \dot{\bar{\xi}}^p \right) d\Gamma dt \\
\bar{\bar{E}}^d &= \int_0^T \int_{\Omega} \dot{\bar{D}}^d d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \mathbf{t} \dot{D} \mathbf{t} + \bar{q}^d \dot{\bar{\xi}}^d \right) d\Gamma dt
\end{aligned}$$

Notons que la dissipation intrinsèque est composée d'une part volumique et d'une part surfacique.

La réponse locale des points matériels situés hors et dans la section  $\Gamma$  est représentée sur la figure 4.7 : la localisation du déplacement dans la section  $\Gamma$  se traduit par une quantité totale d'énergie dissipée plus grande que dans les autres sections. Les sources de dissipation intrinsèque et l'évolution de la quantité d'énergie dissipée qui leur est associée tout au long du séisme sont présentées sur la figure 4.8. À environ  $t = 11$  s, une grande quantité d'énergie sismique est fournie à la structure (voir figure 4.5). Pour que la structure ne s'écroule pas, elle doit dissiper toute l'énergie sismique : une partie de cette énergie est stockée par la structure sous forme réversible (énergie élastique), une autre partie est stockée sous forme irréversible (les propriétés de la structure sont différentes) et le stockage de cette énergie ne se fait pas sans un effort traduit par la dissipation intrinsèque (mesure de l'irréversibilité).



**Fig. 4.7:** Réponse locale d'un point matériel situé [gauche] dans et [droite] hors la section  $\Gamma$  où le déplacement se localise.

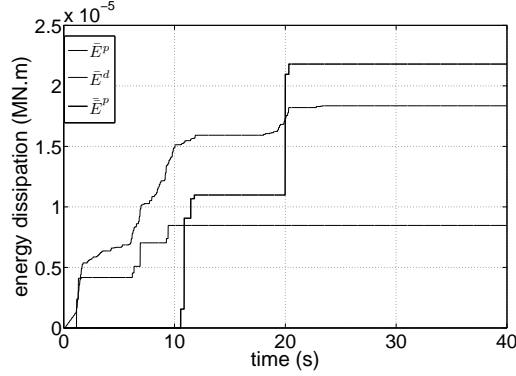


Fig. 4.8: Dissipation intrinsèque de plasticité continue  $\bar{E}^p$ , d'endommagement continu  $\bar{E}^d$  et de plasticité discrète  $\bar{\bar{E}}^p$ .

## 5 Application 2 : élément poutre 2D de Euler-Bernoulli multifibre

### 5.1 Base enrichie des fonctions de forme du déplacement

Pour un élément de poutre 2D, les coordonnées généralisées au nœud  $a$  sont  $\mathbf{d}_a(t) = \{u_a(t), w_a(t), \theta_a(t)\}^T$  où  $u(t)$  est un déplacement longitudinal,  $w(t)$  un déplacement transversal et  $\theta(t)$  une rotation. Dans l'hypothèse – poutre de Euler-Bernoulli – où les effets du cisaillement peuvent être négligés, les sections planes restent planes au cours des transformations et la rotation peut donc s'exprimer en fonction du déplacement transversal :  $\theta(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$ ; la déformation en un point matériel  $\mathbf{x} = (x, z)$  est alors le résultat de la combinaison d'une translation  $\tilde{u}(x, t)$  et d'une rotation  $\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$  de l'ensemble de la section située à l'abscisse  $x$  de la poutre :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (4.57)$$

La base des fonctions de forme utilisée pour l'approximation par éléments finis de la partie lisse de la composante horizontale du champ de déplacement est, de façon classique pour un élément fini à deux nœuds :

$$\mathbf{N}^0(\mathbf{x}) = \left[ 1 - \frac{x}{L}; -z \frac{dH_1^w(x)}{dx}; -z \frac{dH_1^\theta(x)}{dx}; \frac{x}{L}; -z \frac{dH_2^w(x)}{dx}; -z \frac{dH_2^\theta(x)}{dx} \right] \quad (4.58)$$

où les fonctions  $H_a(x)$  sont les polynômes de Hermite (voir par exemple [Bat90b] p.82); ces polynômes sont de degré trois.

Cette approximation définit une déformation  $\tilde{\epsilon}(x, t) = \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x}$  constante le long de l'élément. Or, lorsque l'axe neutre ne coïncide pas avec l'axe moyen, il est possible que la variation de la déformation  $\tilde{\epsilon}(x, t)$  ne soit pas constante [Dav03]. La base d'approximation par éléments finis n'est donc pas assez riche pour représenter physiquement le comportement d'une poutre constituée de matériaux non-linéaires. Nous l'enrichissons alors par l'ajout d'une nouvelle coordonnée généralisée  $\zeta(t)$  qu'on associe à la fonction de forme  $Z(\mathbf{x})$  qu'on définit de sorte que  $\zeta(t)$  soit une quantité élémentaire afin de ne pas ajouter de degrés de liberté supplémentaires que les algorithmes de résolution globale des codes de calculs par éléments finis ne sauraient pas traiter. Ainsi :

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{[N_1^u(x) \ N_1^w(\mathbf{x}) \ N_1^\theta(\mathbf{x}) \ N_2^u(x) \ N_2^w(\mathbf{x}) \ N_2^\theta(\mathbf{x}) \ Z(x)]}_{\mathbf{N}^0(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{d}(t) \quad (4.59)$$

avec  $Z(x) = \frac{4x}{L} (1 - \frac{x}{L})$ ,  $\mathbf{d}(t) = \{u_1(t) \ w_1(t) \ \theta_1(t) \ u_2(t) \ w_2(t) \ \theta_2(t) \ \zeta(t)\}^T$  et  $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}^0(\mathbf{x}) \ Z(x)]$ .

## 5.2 Découplage des points d'intégration numérique

L'hypothèse des sections divisées en fibres permet, outre le fait de pouvoir différencier les différents matériaux qui composent une section, de simplifier la résolution du problème élémentaire énoncé dans la table 4.1 car elle isole les points d'intégration de chaque fibre de tous les autres. La résolution du problème élémentaire est alors remplacée par la résolution de problèmes plus petits, propres à chaque fibre. À noter que les points d'intégration d'une même fibre restent quant à eux couplés.

Nous avons modifié l'architecture de l'implantation numérique de l'élément multifibre dans le logiciel *FEAP* afin de prendre en compte le couplage entre les différents points d'intégration numérique d'une même fibre. Cependant, afin de profiter des propriétés de stabilité numérique du modèle de matériau tel qu'il est présenté en détail dans l'application 1 ci-dessus, nous choisissons les fonctions  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  d'approximation de la contrainte et les fonctions  $\varphi_i(x)$  de sorte que les points d'intégration numérique dans une fibre (i) coïncident avec les points matériels où une discontinuité de déplacement est susceptible d'apparaître et (ii) soient découplés. Les problèmes locaux – en chacun des points d'intégration numérique ainsi définis – sont donc tous identiques à celui décrit dans l'application 1.

Cette hypothèse rend la formulation analogue à une formulation en déplacement, mais présente encore deux particularités intéressantes : contrairement aux méthodes en déplacement [Ibr03a, Bra03], (i) la matrice de raideur tangente est symétrique

et (ii) les conditions de compatibilité entre contraintes continue et discrètes sont intégrées dans la loi de comportement locale et il n'y a donc pas de résidu élémentaire à annuler. De plus, avec cette hypothèse, il est encore possible de voir apparaître plusieurs discontinuités dans un champ de contrainte non-constant.

Choisissons maintenant les fonctions  $\mathbf{S}^f(x)$  d'approximation de la contrainte dans la fibre  $f$ . Une façon simple de découpler les points de Gauss dans chacune des fibres est de définir les fonctions  $S_a^f(x_l^f) - a \in [1, \dots, n_\sigma^f]$  et  $l \in [1, \dots, n_{int}^f]$  où  $n_\sigma^f$  est le nombre de contraintes généralisées utilisées pour représenter le champ de contrainte et  $n_{int}^f$  est le nombre de points d'intégration numérique, dans la fibre  $f$  – telles que :

$$S^f(x_l^f) = \delta_{a,l} \quad (4.60)$$

où  $\delta_{a,l}$  est le symbole de Kronecker :  $\delta_{a,l} = 1$  si  $a = l$  et  $\delta_{a,l} = 0$  sinon. Par exemple, les polynômes de Lagrange satisfont à cette définition de même que des fonctions discontinues unitaires au point d'intégration adéquat et nulles ailleurs. Dans ce dernier cas, les longueurs des paliers des fonctions discontinues peuvent être prises égales aux poids d'intégration numérique pour ne pas introduire de paramètres inconnus supplémentaires.

Le nombre  $n_{dis}^f$  des discontinuités de déplacement susceptibles d'apparaître dans une fibre est pris égal au nombre de points d'intégration numérique dans la fibre  $n_{int}^f$  et leurs positions sont confondues. Les fonctions  $\varphi_i(x)$  sont déterminées par les conditions de « patch test » :

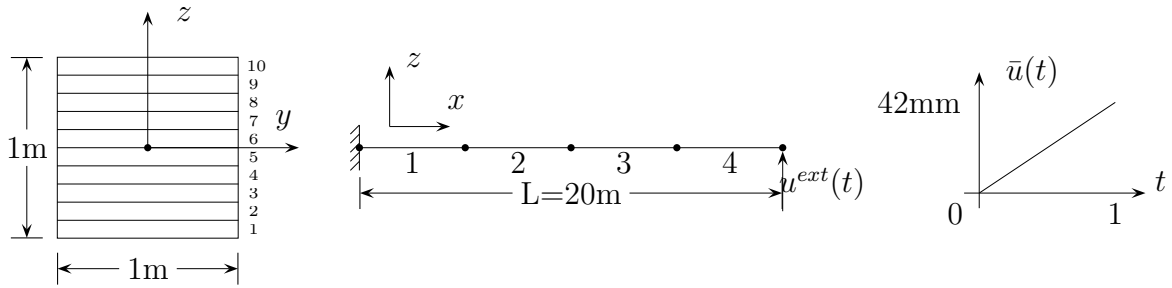
$$\forall i \in [1, \dots, n_{dis}^f], \quad \mathbf{t}_i^f = \int_{L^f} \frac{d\varphi_i^f(x)}{dx} \sigma^f dx \Rightarrow \int_{L^f} \frac{d\varphi_i^f(x)}{dx} = 1 \quad (4.61)$$

L'exemple de calcul ci-dessous a été réalisé avec, pour chacune des fibres, les mêmes fonctions discontinues  $\mathbf{S}^f(x)$  et les mêmes fonctions  $\varphi_i^f(x)$  et avec deux points d'intégration numérique de type Gauss. Les problèmes locaux sont résolus de la même manière que dans l'application 1.

### 5.3 Exemple de calcul : essai de flexion simple monotone quasi-statique

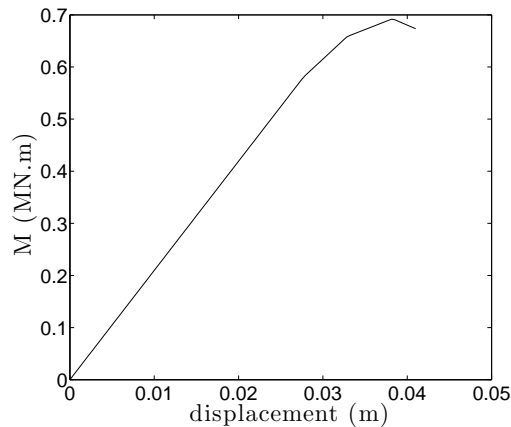
Un comportement « simple » a été considéré ici pour représenter le comportement local des dix fibres de béton utilisées pour modéliser la structure présentée sur la figure 4.9 : le béton est considéré élastique en compression et fragile en traction. La phase d'adoucissement en traction est activée dès que la contrainte atteint  $\sigma_u^t = 3$  MPa et l'adoucissement est représenté de façon linéaire. La réponse de la structure





**Fig. 4.9:** Description de la géométrie de la structure et du chargement.

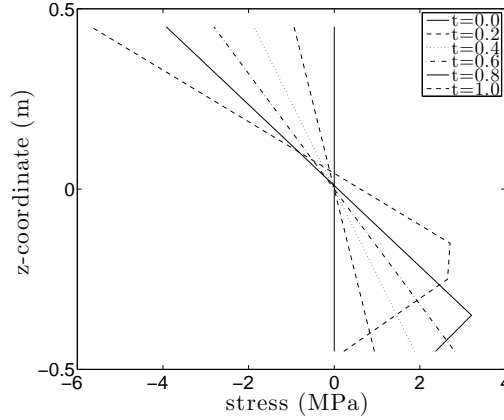
aux niveaux global, élémentaire et local est illustré sur les figures 4.10, 4.11 et 4.12. Notons que ce test n'est pas réaliste et n'est fait que pour illustrer certaines capacités du nouvel élément multifibre développé.



**Fig. 4.10:** Moment fléchissant dans la section d'encastrement en fonction du déplacement imposé.

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'implantation numérique du modèle formulé dans le chapitre 3 est présentée. Les champs inconnus du problème que nous voulons évaluer numériquement sont la partie lisse de la composante longitudinale du champ de déplacement et la contrainte ; pour cela, nous utilisons la méthode des éléments finis, alors qualifiée de « mixte ». La discrétisation temporelle des équations d'évolution des variables internes est réalisée avec un schéma d'intégration implicite. Dans la présentation générale de la stratégie de résolution du problème discrétisé, nous mettons en évidence



**Fig. 4.11:** Évolution du profil des contraintes dans la section d'encastrement.

que, dans un élément, tous les points d'intégration numérique et tous les points matériels où une discontinuité est susceptible d'apparaître sont *a priori* couplés.

L'élément fini enrichi développé dans cette section est utilisé dans le cas de deux applications : une structure modélisée avec des éléments barre et une autre modélisée avec des éléments de poutre multifibre 2D. Les calculs illustrent certaines capacités de l'élément fini implanté de sorte que les points d'intégration numérique soient découplés et coïncident avec les points matériels où une discontinuité est susceptible d'apparaître. Dans ce cadre, la stabilité de l'algorithme de résolution peut être assurée. Le chapitre suivant présentera des résultats d'autres simulations plus représentatives d'une analyse de structure de génie civil.

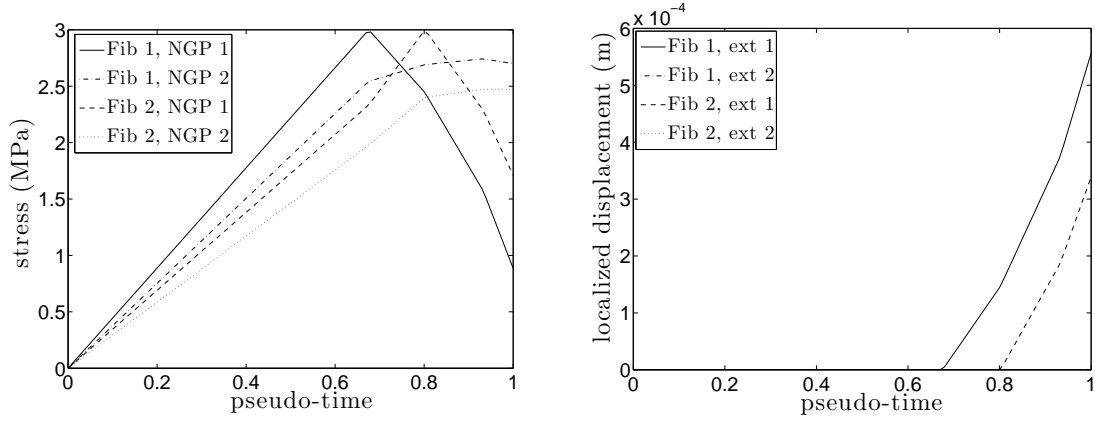
## 7 Annexes

### 7.1 Annexe 1 : calcul de $sign(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p)$

L'équation (4.47) donne :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{n+1}^p &= (\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}) sign(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) - (\sigma_y - \bar{q}_n^p) \\ &\quad - \left( (H_n^-)^{-1} L + (\bar{K}^p + \bar{H}^p) \right) \bar{\gamma}_{n+1}^p \\ &\quad + \left( \bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^d + (H_n^-)^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^p \right) sign(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Cette équation est non-linéaire parce que  $sign(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p)$  dépend de  $\bar{\gamma}_{n+1}^p$ ,  $\bar{\gamma}_{n+1}^d$  et  $\bar{\gamma}_{n+1}^p$ . Cette difficulté apparaît avec l'introduction de l'érouissage cinématique



**Fig. 4.12:** Éléments multifibres 1 & 2 : [gauche] évolution de la contrainte aux points d'intégration 1 & 2 ; [droite] déplacement localisé. Quand la contrainte ultime est atteinte dans une fibre, il y a localisation du déplacement et redistribution des contraintes.

dans le modèle de plasticité continue dont le but est de représenter les boucles d'hystérésis lors de cycles de charge-décharge ; sinon, l'équation (4.47) serait linéaire. Cependant, on peut essayer de réécrire  $\text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p)$  de façon à en obtenir une expression explicite :

$$\beta_{n+1} = \beta_{n+1}^{\text{test}} - (H_n^-)^{-1} \left( \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\bar{\phi}_{n+1}^p}{\beta_{n+1}} L - \frac{\Delta t \bar{\gamma}_{n+1}^d}{\tau + \Delta t} \bar{\gamma}_{n+1}^d L - \bar{\gamma}_{n+1}^p \right) \quad (4.63)$$

$$\bar{\kappa}_{n+1}^p = -\bar{H}^p \left( \bar{\lambda}_{n+1}^p + \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\bar{\phi}_{n+1}^p}{\bar{\kappa}_{n+1}^p} \right) = \bar{\kappa}_{n+1}^{\text{test}} - \bar{H}^p \bar{\gamma}_{n+1}^p \frac{\bar{\phi}_{n+1}^p}{\bar{\kappa}_{n+1}^p}$$

et ainsi :

$$\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p = \beta_{n+1}^{\text{test}} + \bar{\kappa}_{n+1}^{\text{test}} - \bar{\gamma}_{n+1}^p \left( (H_n^-)^{-1} L + \bar{H}^p \right) \text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) + \bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^d + (H_n^-)^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^p \quad (4.64)$$

Ensuite :

$$\underbrace{\left( |\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p| + \bar{\gamma}_{n+1}^p \left( (H_n^-)^{-1} L + \bar{H}^p \right) \right)}_{\geq 0} \text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) = \quad (4.65)$$

$$\underbrace{|\beta_{n+1}^{\text{test}} + \bar{\kappa}_{n+1}^{\text{test}}|}_{\geq 0} \text{sign}(\beta_{n+1}^{\text{test}} + \bar{\kappa}_{n+1}^{\text{test}}) + \underbrace{\bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^d + (H_n^-)^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^p}_{\geq 0}$$

Discutons ce dernier résultat :

- Si  $\text{sign}(\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}) = 1$ , alors le membre à gauche doit être positif ou nul et par conséquent  $\text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) = \text{sign}(\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test})$ .
- Si  $\text{sign}(\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}) = -1$ , alors :

$$\underbrace{(|\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p| + \bar{\gamma}_{n+1}^p \left( (H_n^-)^{-1} L + \bar{H}^p \right))}_{\geq 0} \text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) = \underbrace{|\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}|}_{\geq 0} + \underbrace{\bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^d + (H_n^-)^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^p}_{\geq 0} \quad (4.66)$$

et :

- si  $\bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^d + (H_n^-)^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^p < |\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}|$ , alors  $\text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) = -1$ ,
- si  $\bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^d + (H_n^-)^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^p \geq |\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}|$ , alors  $\text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) = 1$ .

Finalement, il vient :

$$\begin{aligned} & (\text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) = \text{sign}(\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test})) \Leftrightarrow \quad (4.67) \\ & (\text{sign}(\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}) = 1) \text{ or } \left( \bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^d + (H_n^-)^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^p < |\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}| \right) \end{aligned}$$

$\bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^d + (H_n^-)^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^p$  est la correction de la contrainte provenant de la possible activation des mécanismes non-linéaires. Il est important de remarquer que :

- Quand  $|\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}|$  approche de zéro,  $\bar{\phi}_{n+1}^p < 0$  et il n'est donc pas nécessaire d'actualiser le multiplicateur plastique continu ;
- Dans les autres cas, il est toujours possible de réduire le pas de temps de sorte que la correction de la contrainte n'excède pas  $|\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}|$ .

Finalement, nous implantons le modèle constitutif avec l'hypothèse – raisonnable – suivante :

$$\text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) = \text{sign}(\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}) \quad (4.68)$$

Pour plus de sécurité, on peut vérifier à chaque fois si  $\bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^d + (H_n^-)^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^p \geq |\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test}|$ . Quoi qu'il en soit, s'il se trouve une situation où ce point pose une difficulté, on peut encore considérer l'expression suivante qui est toujours vraie :

$$\begin{aligned} \text{sign}(\beta_{n+1} + \bar{\kappa}_{n+1}^p) = \\ \text{sign} \left( \beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test} + \bar{D}_n^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^d + (H_n^-)^{-1} \bar{\gamma}_{n+1}^p \right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

et résoudre alors un système d'équations non-linéaire au niveau local.

## 7.2 Annexe 2 : calcul des multiplicateurs de Lagrange

Notons  $s^{test} = \text{sign}(\beta_{n+1}^{test} + \bar{\kappa}_{n+1}^{p,test})$ , et réécrivons le système d'équations (4.47) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{n+1}^p \\ \bar{\gamma}_{n+1}^d \\ \bar{\gamma}_{n+1}^p \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_{n+1}^{p,test} \\ \bar{\phi}_{n+1}^{d,test} \\ \bar{\phi}_{n+1}^{p,test} \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

Dans le cas où seuls la plasticité et l'endommagement continus sont activés,  $\bar{\gamma}_{n+1}^p = 0$  et nous avons :

$$M = \begin{pmatrix} -(H_n)^{-1} L - (\bar{H}^p + \bar{K}^p) & \bar{D}_n^{-1} s^{test} \\ (H_n)^{-1} L s^{test} & -\bar{D}_n^{-1} - \bar{K}^d \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Ensuite :

$$M^{-1} = \frac{-1}{\det M} \begin{pmatrix} \bar{D}_n^{-1} + \bar{K}^d & \bar{D}_n^{-1} s^{test} \\ (H_n)^{-1} L s^{test} & (H_n)^{-1} L + \bar{H}^p + \bar{K}^p \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

avec  $\det M = (H_n)^{-1} L \bar{K}^d + \bar{D}_n^{-1} (\bar{H}^p + \bar{K}^p) + (\bar{H}^p + \bar{K}^p) \bar{K}^d$ . Comme  $\det M \neq 0$ , ce système a une et une seule solution.

Notons que la plasticité et l'endommagement continus, ainsi que la plasticité discrète ne sont pas activés ensemble, excepté lorsque le mécanisme discret est activé pour la première fois. Dans ce cas, nous avons :

$$M = \begin{pmatrix} -(H_n)^{-1} L - (\bar{H}^p + \bar{K}^p) & \bar{D}_n^{-1} s^{test} & (H_n)^{-1} s^{test} \\ (H_n)^{-1} L s^{test} & -\bar{D}_n^{-1} - \bar{K}^d & -(H_n)^{-1} \\ (H_n)^{-1} L s^{test} & -\bar{D}_n^{-1} & -(H_n)^{-1} - \bar{K}^p \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Ensuite :

$$M^{-1} = \frac{-1}{\det M} \begin{pmatrix} (H_n)^{-1} \bar{K}^d & & & \\ + \bar{D}_n^{-1} \bar{K}^p & \bar{D}_n^{-1} s^{test} \bar{K}^p & & (H_n)^{-1} s^{test} \bar{K}^d \\ + \bar{K}^d \bar{K}^p & & & \\ (H_n)^{-1} L s^{test} \bar{K}^p & (H_n)^{-1} L \bar{K}^p & & \\ & + (H_n)^{-1} (\bar{H}^p + \bar{K}^p) & & - (H_n)^{-1} (\bar{H}^p + \bar{K}^p) \\ & + (\bar{H}^p + \bar{K}^p) \bar{K}^p & & \\ (H_n)^{-1} L s^{test} \bar{K}^d & -\bar{D}_n^{-1} (\bar{H}^p + \bar{K}^p) & & (H_n)^{-1} L \bar{K}^d \\ & & & + \bar{D}_n^{-1} (\bar{H}^p + \bar{K}^p) \\ & & & + (\bar{H}^p + \bar{K}^p) \bar{K}^d \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

avec :

$$\begin{aligned} \det M &= (H_n)^{-1} L \bar{K}^d \bar{\bar{K}}^p + (H_n)^{-1} (\bar{H}^p + \bar{K}^p) \bar{K}^d + \bar{D}_n^{-1} (\bar{H}^p + \bar{K}^p) \bar{\bar{K}}^p \\ &\quad + (\bar{H}^p + \bar{K}^p) \bar{K}^d \bar{\bar{K}}^p \end{aligned} \quad (4.75)$$

Ce problème a une solution unique seulement si  $\det M \neq 0$ , ce qui n'est pas toujours satisfait puisque  $\bar{\bar{K}}^p < 0$ .



# Chapitre 5

## Applications numériques

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	112
2	Chargement monotone quasi-statique . . . . .	112
3	Chargement cyclique quasi-statique . . . . .	114
4	Chargements dynamiques . . . . .	116
5	Conclusion . . . . .	121
6	Annexe : données d'entrée pour le calcul du portique . . .	122

---



## 1 Introduction

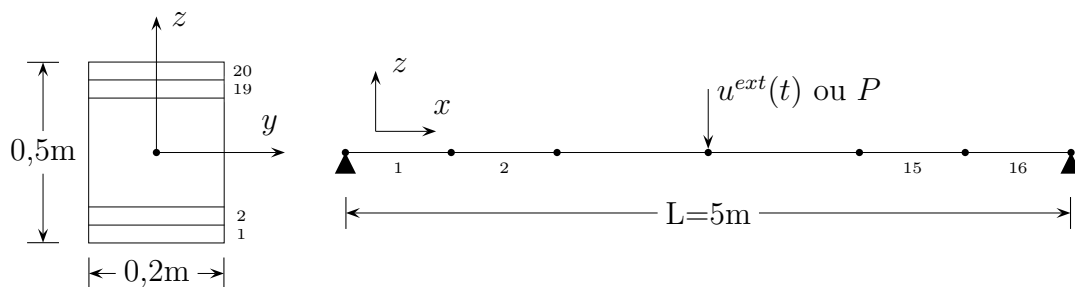
Dans ce chapitre, nous utilisons l'élément multifibre enrichi présenté au chapitre précédent et implanté dans le code FEAP [Tay05] pour modéliser les réponses :

1. d'une poutre sous chargement monotone quasi-statique de flexion trois points ;
2. d'un poteau encastré à la base sous chargement cyclique quasi-statique latéral en tête ;
3. d'un poteau encastré à la base, avec masse concentrée en tête, en oscillation libre ;
4. du portique testé sur table vibrante déjà présenté dans le chapitre 2.

## 2 Chargement monotone quasi-statique

### 2.1 Essai de flexion trois points

L'essai de flexion trois points que nous reproduisons numériquement est présenté dans le manuel de validation du code ASTER<sup>®</sup> [Mou02]. Nous reproduisons sur la figure 5.1 le modèle de poutre qui a été utilisé pour les modélisations par le code ASTER<sup>®</sup> et le code EFICOS [Gha98] qui nous servent de référence pour la validation de notre élément.

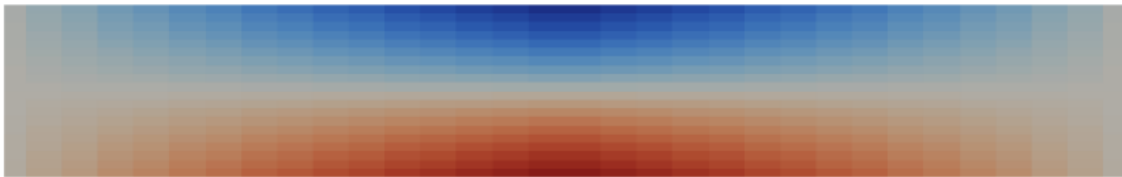


**Fig. 5.1:** Description de la géométrie de la structure et du chargement. La poutre est discrétisée par 16 éléments de longueur identique. Les sections sont divisées en 20 couches de même épaisseur. Les barres d'acier supérieures et inférieures sont respectivement de type HA8 et HA32 et l'enrobage est de 2,8 cm.

### 2.2 Cas d'une poutre élastique

Commençons par vérifier si le comportement élastique reproduit par notre élément multifibre enrichi est correct. La poutre est constituée d'un matériau dont le mod-

ule d'élasticité est  $E = 30$  GPa et soumise à une charge ponctuelle  $P = 100$  kN appliquée à mi-travée. Nous utilisons le modèle de poutre et les caractéristiques du maillage décrits sur la figure 5.1. Chaque fibre des éléments multifibres comporte deux points d'intégration numérique de type Gauss. Nous représentons sur la figure 5.2 la réponse de notre modèle à l'aide d'un module de post-traitement que nous avons développé pour illustrer les résultats donnés par le code FEAP utilisé avec l'élément multifibre que nous y avons développé.



**Fig. 5.2:** Champ de contrainte dans la poutre élastique en flexion trois points.

Dans le cadre de la théorie des poutres de Euler-Bernoulli élastiques, il est possible de calculer analytiquement la valeur de la flèche et de la contrainte maximale de cette poutre. La comparaison avec les résultats numériques est présentée dans la table 5.1. Pour le calcul de la contrainte maximale, les valeurs de la contrainte connues aux points d'intégration numérique ont été extrapolées.

	Théorie (EB)	Modèle (20 couches)	Erreur (%)
flèche	$-4,1733 \cdot 10^{-3}$ m	$-4,1771 \cdot 10^{-3}$ m	0,09
contrainte max	15,0000 MPa	15,0397 MPa	0,26

**Tab. 5.1:** Poutre élastique : comparaison des résultats numériques et théoriques.

Ces résultats valident les modifications importantes que nous avons apportées à l'implantation numérique de l'élément multifibre du code FEAP pour l'adapter à la formulation mixte.

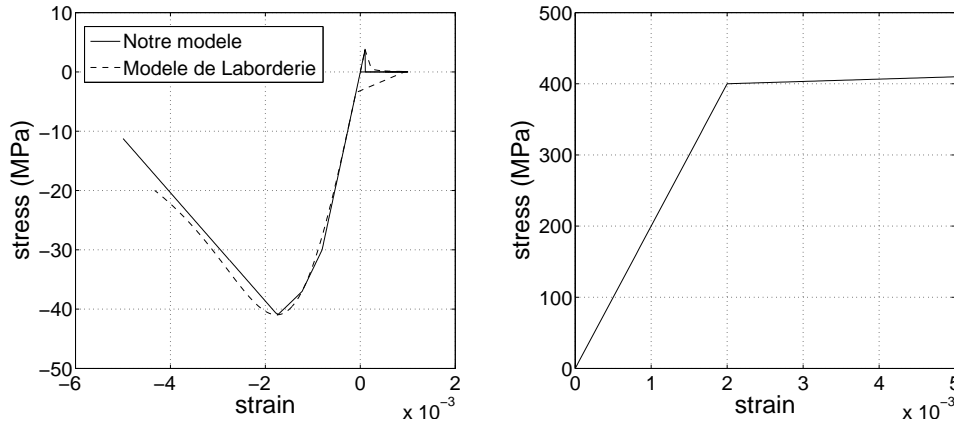
## 2.3 Cas d'une poutre avec matériaux non-linéaires

### 2.3.1 Identification des modèles de matériaux

La loi de comportement du béton de notre élément multifibre est différente de la loi de La Borderie [La 93] utilisée dans les codes ASTER<sup>®</sup> et EFICOS et dont les paramètres sont donnés dans [Mou02]. Nous identifions la loi de béton de notre modèle de sorte qu'elle reproduise au mieux celle identifiée pour les simulations présentées dans [Mou02]. Les paramètres retenus sont :

- Pour la loi du béton :  $\bar{E} = 37272$  MPa,  $\sigma_y = 30$  MPa,  $\bar{K}^p = 30000$  MPa,  $\bar{H}^p = 0$ ,  $\sigma_f = 37$  MPa,  $\bar{K}^d = 15000$  MPa,  $\sigma_u^c = 41$  MPa,  $\bar{K}^p = -7000$  MPa,  $\sigma_u^t = 3,9$  MPa,  $\tau = 0$ .
- Pour la loi de l'acier :  $\bar{E} = 200000$  MPa,  $\sigma_y = 400$  MPa,  $\bar{K}^p = 0$ ,  $\bar{H}^p = 3335$  MPa,  $\sigma_f = \infty$ ,  $\sigma_u^c = \infty$ ,  $\sigma_u^t = \infty$ ,  $\tau = 0$ .

La comparaison entre ces deux lois de béton est donnée sur la figure 5.3.



**Fig. 5.3:** Courbe enveloppe des lois de béton [gauche] et d'acier [droite].

### 2.3.2 Validation des résultats numériques

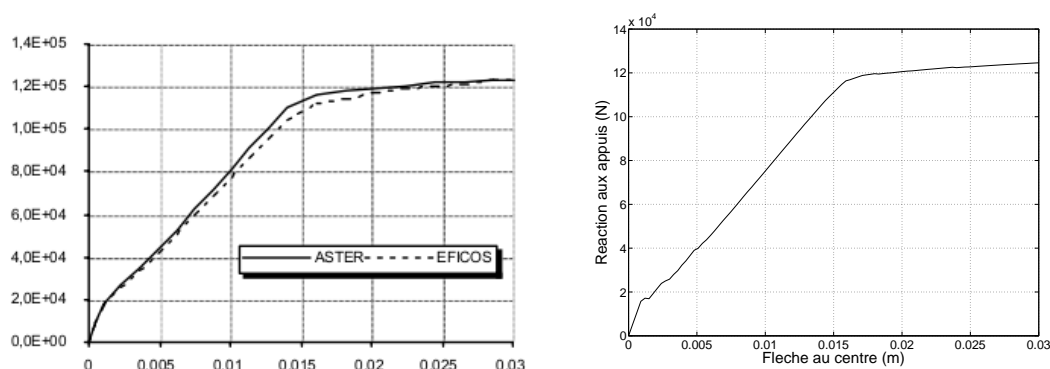
Un déplacement  $u^{ext}(t) = 3$  cm est imposé à mi-travée en 100 pas de temps égaux. La réponse globale de notre modèle numérique est comparée à celle obtenue avec les codes EFICOS et ASTER<sup>®</sup> [Mou02] sur la figure 5.4.

## 3 Chargement cyclique quasi-statique

### 3.1 Poteau encastré à la base latéralement chargé en tête

Nous reprenons des essais de [Ohn84] dont la description est rappelée dans [Tay97], p.15. Il s'agit d'un poteau de hauteur  $H = 1,6$  m et de section carrée de côté  $L = 40$  cm encastré à la base. Les aciers longitudinaux sont répartis en deux couches de quatre barres de section identique chacune, le pourcentage d'acier est  $\rho_s = 1,42\%$ , soit 8 barres de section  $284$  mm<sup>2</sup>.

Le poteau est soumis à l'action d'une force de compression simple constante  $P = 157$  kN et chargé latéralement en tête de façon quasi-statique par un déplacement cyclique  $v^{ext}(t)$  d'amplitude croissante.



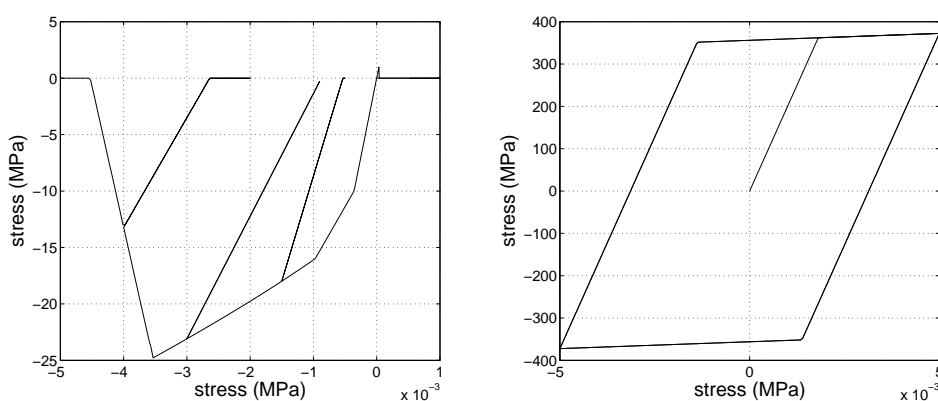
**Fig. 5.4:** Réaction sur appui en fonction de la flèche au centre : [gauche] codes EFICOS et ASTER® ; [droite] code FEAP avec notre nouvel élément multifibre.

### 3.2 Identification des modèles de matériaux

Nous disposons de peu d'informations sur le comportement cyclique des matériaux :

- le béton a une résistance caractéristique en compression  $f'_c = 24,8$  MPa ;
- l'acier a une résistance caractéristique  $f'_s = 362$  MPa.

La figure 5.5 montre le comportement cyclique des lois de béton et d'acier que nous avons définies pour notre simulation.

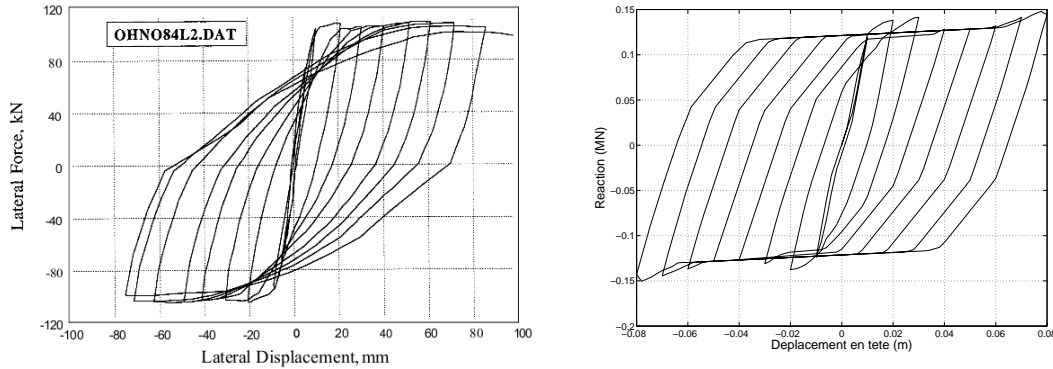


**Fig. 5.5:** Lois de comportement cyclique du béton [gauche] et de l'acier [droite].

### 3.3 Résultats numériques

Les effets géométriques P- $\Delta$  ne sont pas pris en compte. Le poteau est modélisé par un seul élément multifibre dont les sections sont divisées en dix couches d'épaisseur identique et avec trois points d'intégration de type Gauss-Lobatto par couche

pour capter les contraintes maximales à la base. Les résultats expérimentaux [Tay97], p.65 et numériques sont présentés dans la figure 5.6.



**Fig. 5.6:** Réaction latérale à la base en fonction du déplacement latéral en tête : [gauche] résultats expérimentaux ; [droite] résultats numériques.

Notre élément multifibre reproduit un comportement cyclique, mais peu en accord avec les observations expérimentales. Nous ne disposons que de peu d'informations sur le comportement des matériaux : il nous est difficile d'analyser les résultats avec plus de précisions.

## 4 Chargements dynamiques

### 4.1 Oscillation libre d'un poteau encastré à la base avec masse additionnelle en tête

#### 4.1.1 Description de l'essai

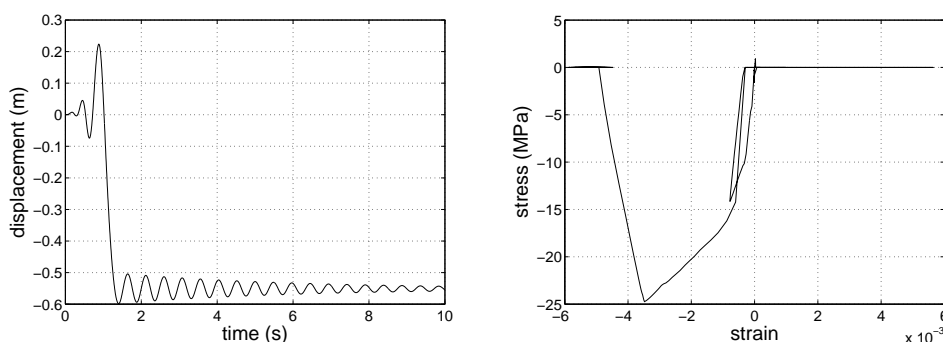
Le poteau a une hauteur  $H = 4$  m, une section carrée de côté  $L = 20$  cm constituée de deux couches de trois barres d'acier de  $300 \text{ mm}^2$  chacune. Une masse  $M = 300$  kg est concentrée en tête du poteau. La période propre du modèle est  $T_0 = 0,20$  s.

Le chargement est une accélération du sol progressivement appliquée puis annulée. La réponse du poteau en vibrations libres est alors observée.

Les lois de comportement des matériaux sont les mêmes que pour la simulation précédente, avec les caractéristiques du comportement visqueux des matériaux suivantes : pour le béton  $\tau^b = 0,005$  s, et pour l'acier  $\tau^a = 0,002$  s.

### 4.1.2 Résultats numériques

Le poteau est modélisé par deux éléments multifibres, chacun constitué de dix couches avec trois points d'intégration numérique de type Gauss-Lobatto. Certaines informations globales et locales sont données sur la figure 5.7.



**Fig. 5.7:** Réponse à une courte excitation sismique : [gauche] histoire du déplacement latéral en tête ; [droite] contrainte en fonction de la déformation au point d'intégration numérique situé à la base de la couche extrême supérieure.

La structure revient à un état de repos sans qu'aucune forme d'amortissement forfaitaire global ne soit introduite dans la simulation : la totalité de l'énergie sismique est dissipée par la réponse non-linéaire des matériaux.

## 4.2 Modélisation du portique testé sur table vibrante

Nous reprenons ici la modélisation du portique déjà étudié dans le chapitre 2, mais cette fois avec le modèle que nous avons développé.

### 4.2.1 Hypothèses du modèle

Le maillage utilisé pour modéliser le portique est identique à celui défini pour les logiciels Ruaumoko et Perform3D au chapitre 2 (voir figure 5.8). Il y a ici 2 points d'intégration numérique par élément. Les sections des éléments sont divisées en 6 couches de béton et d'acier pour les poteaux et 8 couches pour les poutres. Des extrémités de rigidité infinie et de longueur égale à la demi-longueur d'encastrement dans l'élément adjacent sont modélisées aux extrémités des éléments au niveau des joints d'ossature et au niveau des zones de fixation des masses additionnelles sur les poutres. Les lois de comportement du béton confiné – à l'intérieur des cadres d'acier transversaux – et non-confiné sont présentés sur la figure 5.9. Aucune source d'amortissement global forfaitaire n'est ajoutée au modèle inélastique de la structure.

Le fichier de données d'entrée du programme *FEAP* relatif à la modélisation de ce portique est donnée en annexe à la fin de ce chapitre.

Le temps de calculs est d'environ 20 minutes sur un PC portable équipé d'un processeur Intel Centrino duo/1,83 GHz, avec 4 Go de RAM et un système d'exploitation UNIX.

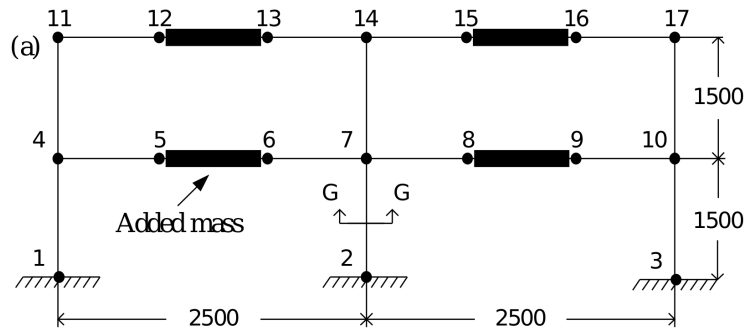


Fig. 5.8: Maillage FEAP.

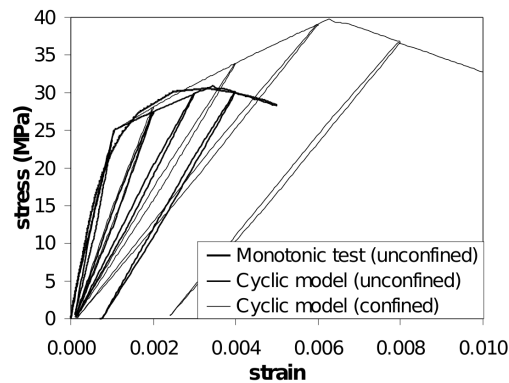


Fig. 5.9: Comportement 1D du béton : réponse expérimentale monotone, modèles cycliques de béton confiné et non-confiné. En traction, le comportement est élastique-fragile avec  $\sigma_u^t = 0,5$  MPa.

#### 4.2.2 Analyse de la réponse sismique du modèle de portique

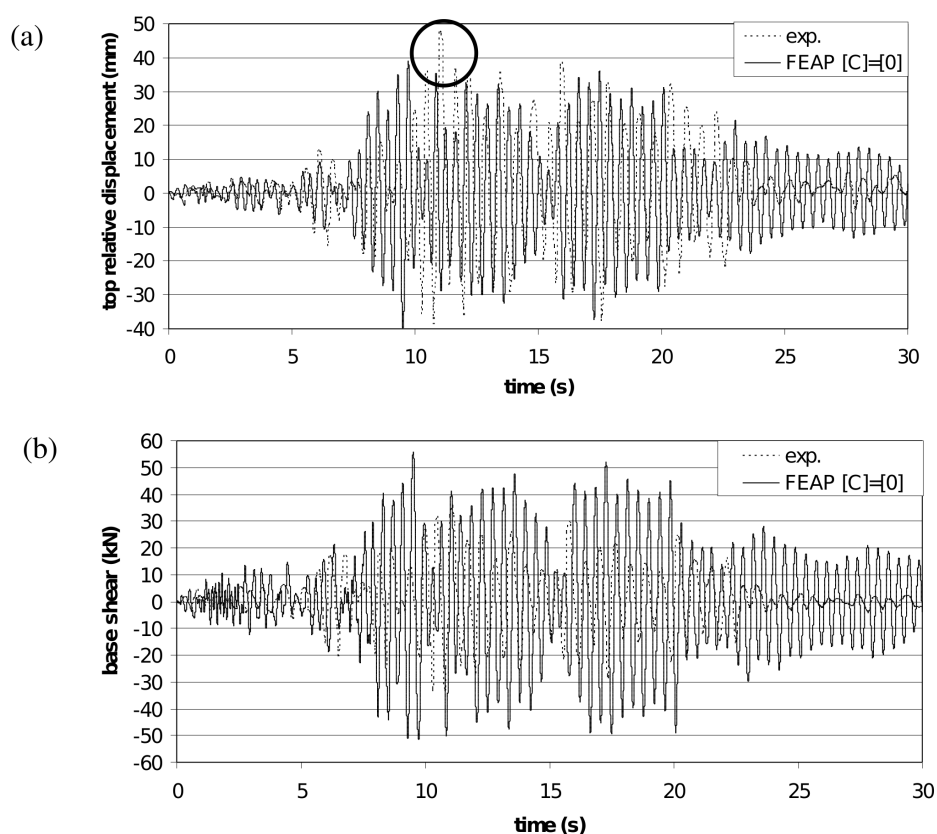
##### Calibration du modèle numérique :

Le poids total de la structure  $P = 94,7$  kN et la période fondamentale  $T^{ela} = 0,26$  s, ce qui est en accord avec les valeurs indiquées dans la table 2.2 du chapitre

2. De plus, cette période fondamentale atteint  $T_{FV}^{ini} = 0,35$  s après application des masses additionnelles, ce qui correspond à la valeur  $T_{FV}^{ini,exp} = 0,36$  s mesurée expérimentalement sur la maquette.

### Résultats globaux :

Les évolutions du déplacement relatif en tête du portique et du cisaillement à la base en fonction du temps sont reproduites sur la figure 5.10. La valeur maximale du déplacement relatif en tête est sous-estimée et le cisaillement à la base est globalement surestimé. La même tendance avait déjà été observée dans les analyses faites avec Perform3D et Vector2 au chapitre 2.

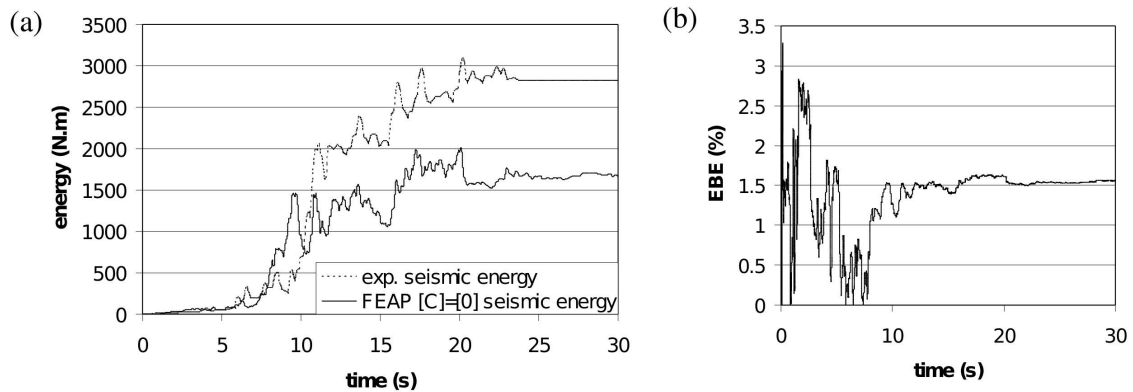


**Fig. 5.10:** Évolutions temporelles expérimentales et numériques (a) du déplacement relatif en tête et (b) du cisaillement à la base du portique.

En ce qui concerne l'énergie sismique dissipée par le modèle, la figure 5.11a montre qu'elle est globalement sous-estimée. Les énergies dissipées par le modèle inélastique de structure et par le modèle d'amortissement global forfaitaire ne sont



pas distinguées ici car aucune source d'amortissement global n'est introduite dans la simulation. La figure 5.11b indique que l'erreur (EBE) dans l'équilibre entre l'énergie externe et la somme des énergies interne et cinétique satisfait, avec un pas de temps de 0,001 s, le critère proposé dans [Fil94] :  $EBE(t) \leq 5\%$ .



**Fig. 5.11:** (a) Énergies sismiques expérimentale et numérique; (b) Erreur de l'équilibre énergétique (EBE(t)) [Fil94].

### Propriétés dynamiques à la fin du chargement sismique :

À la fin de l'excitation sismique, l'observation des vibrations libres permet d'évaluer la période fondamentale – période qui est prédominante –  $T_{FV}^{fin} = 0,42$  s. Cette valeur est inférieure à  $T_{FV}^{fin} = 0,55$  s mesurée expérimentalement, mais proche de celle obtenue par les simulations faites avec les modèles Perform3D\_2 et ceux de Vector2 dans le chapitre 2 (voir table 2.2). Nous observons aussi que 20 s après la fin de l'excitation sismique, la structure est encore en mouvement, ce qui montre que le modèle n'est pas capable de prédire les propriétés dissipatives attendues dans la phase III.

#### 4.2.3 Besoin de modéliser d'autres sources de dissipation d'énergie

Ce modèle inélastique du portique, exclusivement basé sur la prise en compte de sources matérielles de dissipation d'énergie, n'est pas capable de reproduire de façon précise la réponse expérimentale durant toute la durée du séisme. Malheureusement, nous n'avons pas en notre possession de résultats expérimentaux qui pourraient donner une quantification d'énergie dissipée par les matériaux uniquement dans un élément de structure en béton armé sous chargement sismique, c'est-à-dire sans dissipation d'énergie due au comportement non-linéaire de la liaison entre l'acier et

le béton, sans radiation d'énergie dans le sol, etc. Dans la mesure où l'on considère qu'un modèle fin de matériau – tels ceux utilisés dans cette section et dans le chapitre 2 avec les logiciels Perfom3D et Vector2 – peut prédire de façon réaliste l'histoire de la dissipation d'énergie matérielle tout au long du chargement sismique, nous concluons que les phénomènes dissipatifs autres que matériels ne peuvent pas être ignorés et devraient être modélisés de sorte que la simulation soit plus prédictive.

La modélisation explicite de phénomènes inélastiques comme le comportement non-linéaire de la liaison entre l'acier et le béton [Ibr10, Dom05], le glissement des barres d'ancrage, l'interaction entre la structure et son support, etc., en plus de la modélisation explicite des phénomènes matériels qui dissipent de l'énergie, permettrait de réduire les efforts internes pour une demande en déplacement donnée et de modifier la quantité d'énergie dissipée dans le modèle numérique. Nous considérons donc qu'ajouter d'autres sources de dissipation de l'énergie sismique à notre modèle de poutre est une orientation à suivre pour améliorer sa capacité à prédire la réponse inélastique des structures de type portique en béton armé.

## 5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons validé l'implantation numérique de notre nouvel élément multifibre. De plus nous avons montré que le modèle de comportement cyclique 1D du béton que nous avons développé peut donner des résultats en accord avec l'état de l'art pour ce qui est d'un chargement monotone quasi-statique. En ce qui concerne les capacités de l'élément multifibre à reproduire la réponse d'une structure sous chargement cyclique quasi-statique, des tests de validation supplémentaires devraient être réalisés avec des informations plus précises sur le comportement cyclique des matériaux. Dans le cas d'un portique 2D en BA sous chargement sismique – sans amortissement forfaitaire global introduit dans les simulations – nous avons mis en évidence le fait que l'introduction de sources de dissipation d'énergie exclusivement matérielles n'est pas suffisante pour prédire de façon satisfaisante le comportement de la structure et que, par conséquent, d'autres phénomènes physiques de dissipation d'énergie (liaison acier-béton, interaction sol-structure, comportement particulier des nœuds d'ossature, etc.) devraient aussi être explicitement modélisés.

## 6 Annexe : données d'entrée pour la modélisation du portique 2D avec le programme FEAP

FEAP \* \* PORTIQUE BA - EXTREMITES SEMI-RIGIDES - BETON CONFINE  
 ,,2,3,2

! Unités : MN, m, kg

! \_\_\_\_\_

! Lois constitutives des materiaux :

! 1- béton confiné

! 2- béton non-confiné

! 3- aciers longitudinaux

! \_\_\_\_\_

ML1D

CONCRETE\_9,1

25157	! $\bar{E}$
5,5000,85000	! $\sigma_y, \bar{K}^p, \bar{H}^p$
25,4000	! $\sigma_f, \bar{K}^d$
40,-1500	! $\sigma_u^c, \bar{K}^p$
0.5,0,0,3000	! $\sigma_u^t, \bar{K}^d, \sigma_\infty, a$
0.001	! $\tau$

CONCRETE\_9,2

25157  
 5,5000,85000  
 25,3000  
 31,-1500  
 0.5,0,0,3000  
 0.001

STEEL\_5,3

224595  
 438,0000,26000  
 1E99,0  
 1E99,0  
 1E99,0,0,0  
 0.0005

---

! Description des sections de fibres :

- ! 1- Section des poteaux externes
- ! 2- Section des poteaux internes
- ! 3- Section courante de la poutre du 1<sup>er</sup> étage
- ! 4- Section courante de la poutre du 2<sup>ème</sup> étage
- ! 5- Section de la poutre au niveau du joint central du portique

---

## FSEC

1	! identité de la section
3 0	! nombre de patches,translation de coordonnées
1 1 1 4 1 1	! matériau,patch carré,1x4 fibres (4 couches),1,1
-0.041 0.085	! point 1 (y1,z1)
-0.041 -0.085	! point 2 (y2,z2)
0.041 -0.085	! point 3 (y3,z3)
0.041 0.085	! point 4 (y4,z4) : description dans le sens horaire
2 1 1 1 1 1	! patch 2...
-0.065 0.085	
-0.065 -0.085	
-0.041 -0.085	
-0.041 0.085	
2 1 1 1 1 1	! patch 3...
0.041 0.085	
0.041 -0.085	
0.065 -0.085	
0.065 0.085	
2	! nombre de couches d'acier
3 1 2 0 1.0e-4	! modèle d'acier,couche droite,barres par couche,0,aire des barres
-0.041 -0.063	! centre de gravité de la 1 <sup>ère</sup> barre de la couche
-0.041 0.063	! centre de gravité de la dernière barre de la couche
0 0	! 0 0
3 1 2 0 1.0e-4	! 2 <sup>ème</sup> couche d'aciers...
0.041 -0.063	
0.041 0.063	
0 0	
0	! voir macro SENSor

FSEC	FSEC	FSEC	FSEC
2	3	4	5
3 0	3 0	3 0	3 0
1 1 1 4 1 1	1 1 1 4 1 1	1 1 1 4 1 1	1 1 1 4 1 1
-0.041 0.090	-0.056 0.075	-0.051 0.070	-0.056 0.075
-0.041 -0.090	-0.056 -0.075	-0.051 -0.070	-0.056 -0.075
0.041 -0.090	0.056 -0.075	0.051 -0.070	0.056 -0.075
0.041 0.090	0.056 0.075	0.051 0.070	0.056 0.075
2 1 1 1 1 1	2 1 1 2 1 1	2 1 1 2 1 1	2 1 1 2 1 1
-0.065 0.090	-0.080 0.075	-0.075 0.070	-0.080 0.075
-0.065 -0.090	-0.080 -0.075	-0.075 -0.070	-0.080 -0.075
-0.041 -0.090	-0.056 -0.075	-0.051 -0.070	-0.056 -0.075
-0.041 0.090	-0.056 0.075	-0.051 0.070	-0.056 0.075
2 1 1 1 1 1	2 1 1 2 1 1	2 1 1 2 1 1	2 1 1 2 1 1
0.041 0.090	0.056 0.075	0.051 0.070	0.056 0.075
0.041 -0.090	0.056 -0.075	0.051 -0.070	0.056 -0.075
0.065 -0.090	0.080 -0.075	0.075 -0.070	0.080 -0.075
0.065 0.090	0.080 0.075	0.075 0.070	0.080 0.075
2	2	2	2
3 1 2 0 1.0e-4	3 1 2 0 1.0e-4	3 1 2 0 1.0e-4	3 1 2 0 1.0e-4
-0.041 -0.067	-0.056 -0.051	-0.051 -0.046	-0.056 -0.051
-0.041 0.067	-0.056 0.051	-0.051 0.046	-0.056 0.051
0 0	0 0	0 0	0 0
3 1 2 0 1.0e-4	3 1 2 0 1.0e-4	3 1 2 0 1.0e-4	3 1 3 0 1.0e-4
0.041 -0.067	0.056 -0.051	0.051 -0.046	0.056 -0.051
0.041 0.067	0.056 0.051	0.051 0.046	0.056 0.051
0 0	0 0	0 0	0 0
0	0	0	0

---

! Choix des éléments :

- ! 1- Poteau extérieur au rez-de-chaussée
- ! 2- Poteau extérieur à l'étage
- ! 3- Poteau intérieur au rez-de-chaussée
- ! 4- Poteau intérieur à l'étage
- ! 5- Poutre à l'étage (sections au niveau du joint central [gauche])
- ! 6- Poutre à l'étage (sections courantes)
- ! 7- Poutre à l'étage (sections courantes)
- ! 8- Poutre au toit
- ! 9- Poutre au toit
- ! 10- Poutre à l'étage (sections au niveau du joint central [droite])
- ! 11- Poutre à l'étage (sections courantes)
- ! 12- Poutre à l'étage (sections courantes)
- ! 13- Poutre au toit avec masse additionnelle
- ! 14- Poutre à l'étage avec masse additionnelle

---

MATERial,1

USER,10

1 ! prise en compte des effets P-delta (1=off ou 2=on)  
 1 ! inertie de torsion (pour les problèmes 3D)  
 3 1 1 ! pts d'int.,1=Gauss-Lob. ou 2=Gauss,1=fibres ou 2=Takeda  
 1 ! identité de la section  
 1 0 1 0 ! orientation du repère local (pour les problèmes 3D)  
 0 0 0 0 ! charge répartie (dans le repère local)  
 0 0.0 -0.04 0 0 ! 0 (repère local),longueur des extrémités rigides,0,0  
 0.0024 ! densité  
 0 0 ! coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour l'amortissement de Rayleigh  
 1000 ! pas de temps pour la macro PVTk (post-traitement)

MATERial,2

USER,10

1  
 1  
 3 1 1  
 1  
 1 0 1 0  
 0 0 0 0  
 0 0.04 -0.0375 0 0  
 0.0024  
 0 0  
 1000

MATERial,3

USER,10

1  
 1  
 3 1 1  
 2  
 1 0 1 0  
 0 0 0 0  
 0 0.0 -0.04 0 0  
 0.0024  
 0 0  
 1000

MATERial,4

USER,10

1  
 1  
 3 1 1  
 2  
 1 0 1 0  
 0 0 0 0  
 0 0.04 -0.0375 0 0  
 0.0024  
 0 0  
 1000

MATERial,5	MATERial,6	MATERial,7
USER,10	USER,10	USER,10
1	1	1
1	1	1
3 1 1	3 1 1	3 1 1
5	3	3
1 0 1 0	1 0 1 0	1 0 1 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0.0 -0.0325 0 0	0 0.0325 -0.0375 0 0	0 0.0375 -0.0325 0 0
0.0024	0.0024	0.0024
0 0	0 0	0 0
1000	1000	1000

MATERial,8	MATERial,9	MATERial,10
USER,10	USER,10	USER,10
1	1	1
1	1	1
3 1 1	3 1 1	3 1 1
4	4	5
1 0 1 0	1 0 1 0	1 0 1 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0.0325 -0.0375 0 0	0 0.0375 -0.0325 0 0	0 0.0325 0.0 0 0
0.0024	0.0024	0.0024
0 0	0 0	0 0
1000	1000	1000

MATERial,11	MATERial,12	MATERial,13
USER,10	USER,10	USER,10
1	1	1
1	1	1
3 1 1	3 1 1	3 1 1
3	3	4
1 0 1 0	1 0 1 0	1 0 1 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0.0375 0.0 0 0	0 0.0 -0.0375 0 0	0 0.0375 -0.0375 0 0
0.0024	0.0024	0.0850
0 0	0 0	0 0
1000	1000	1000

MATERial,14

USER,10

1

1

3 1 1

3

1 0 1 0

0 0 0 0

0 0.0375 -0.0375 0 0

0.1370

0 0

1000

!-----

! Maillage

!-----

COORdinates

ELEMent

1 0 -2.500 0.000 ! noeud,0,X,Y,Z

1 0 1 1 4

! élément,0,matériau,I,J

2 0 0.000 0.000

2 0 2 4 11

3 0 2.500 0.000

3 0 1 3 10

4 0 -2.500 1.500

4 0 2 10 17

5 0 -1.667 1.500

5 0 3 2 7

6 0 -0.833 1.500

6 0 4 7 14

7 0 -0.000 1.500

7 0 6 4 5

8 0 0.833 1.500

8 0 14 5 6

9 0 1.667 1.500

9 0 11 6 18

10 0 2.500 1.500

10 0 12 19 8

11 0 -2.500 3.000

11 0 14 8 9

12 0 -1.667 3.000

12 0 7 9 10

13 0 -0.833 3.000

13 0 8 11 12

14 0 -0.000 3.000

14 0 13 12 13

15 0 0.833 3.000

15 0 9 13 14

16 0 1.667 3.000

16 0 8 14 15

17 0 2.500 3.000

17 0 13 15 16

18 0 -0.504 1.500

18 0 9 16 17

19 0 0.504 1.500

19 0 5 18 7

20 0 10 7 19

BOUNDaries

1 0 1 1 1 ! noeud,0,ddl 1,ddl 2,ddl 3

2 0 1 1 1

3 0 1 1 1



```
!-----  
! Chargement  
!-----  
GRAC      ! chargement sismique  
  9.81 0 0 ! facteur selon X,Y,Z  
  2 0 0    ! historique de chargement selon X,Y,Z  
FORC  
  1,,0 0.88E-3 0 ! noeud,,FX,FY,FZ  
  2,,0 0.94E-3 0  
  3,,0 0.88E-3 0  
  4,,0 1.68E-3 0  
  5,,0 13.30E-3 0  
  6,,0 13.30E-3 0  
  7,,0 2.54E-3 0  
  8,,0 13.30E-3 0  
  9,,0 13.30E-3 0  
 10,,0 1.68E-3 0  
 11,,0 0.70E-3 0  
 12,,0 7.60E-3 0  
 13,,0 7.60E-3 0  
 14,,0 1.40E-3 0  
 15,,0 7.60E-3 0  
 16,,0 7.60E-3 0  
 17,,0 0.70E-3 0  
FPRO  
  1,,0 1 0 ! noeud,historique de chargement selon X,Y,Z  
  2,,0 1 0  
  3,,0 1 0  
  4,,0 1 0  
  5,,0 1 0  
  6,,0 1 0  
  7,,0 1 0  
  8,,0 1 0  
  9,,0 1 0  
 10,,0 1 0  
 11,,0 1 0  
 12,,0 1 0  
 13,,0 1 0  
 14,,0 1 0  
 15,,0 1 0  
 16,,0 1 0  
 17,,0 1 0
```

```
!-----  
! Fin de l'entree des donnees pour le maillage  
!-----  
END  
  
!-----  
! Historiques de chargements  
!-----  
! poids propre et charges de service      ! accélérogramme sismique (durée : 50 s)  
MACRO                                     MACRO  
  PROP,,1                                 NOPrint,data  
END                                       PROP,,2  
  2                                       END  
  0.0 0.0                                 2,1  
  1.0 -1.0                               INCLude,ps_fv_1.acce  
  50.0 -1.0  
  
!-----  
! Sortie de résultats  
!-----  
MACRO  
  TPLOT  
END  
  DISP,10,1  ! déplacement du 1er étage  
  DISP,17,1  ! déplacement du 2ème étage  
  REAC,1,1   ! réaction horizontale à la base du poteau de gauche  
  REAC,2,1   ! réaction horizontale à la base du poteau central  
  REAC,3,1   ! réaction horizontale à la base du poteau de droite  
  ENER,7     ! énergie cinétique  
  ENER,8     ! énergie interne  
  ENER,9     ! énergie externe (sauf sismique)  
  ENER,21    ! énergie sismique  
  
!-----  
! Procédure de résolution  
!-----  
! Pas de temps :  
MACRO  
  DT,,0.001  
END
```

```
! Calcul des périodes propres :
BATCH
  MASS
  TANGent
  SUBSpace,,1,6
END

! Algorithme de résolution, macro PVTk développée pour le post-traitement :
MACRo
  NOPrint
  TRANsient,newmark
  PVTk,all
  LOOP,time,50000
    TIME,,50
    LOOP,newton,50
      TANG,,1
      NEXT,newton
      PLOT, defo,200
      PLOT, mesh
      PVTk,all
    NEXT,time
  END
!-----
! Fin
!-----
STOP
```

# Chapitre 6

# Conclusion

## Sommaire

---

1	Rappel des principales contributions . . . . .	132
2	Quelques points à développer . . . . .	134
3	Perspectives . . . . .	135

---

# 1 Rappel des principales contributions

Dans le chapitre 2, nous avons mis en évidence que les méthodes de l'état de l'art disponibles pour prédire l'évolution temporelle des structures en béton armé sous chargement sismique présentent des défauts. Ces méthodes reposent sur l'utilisation d'un modèle de comportement hystérétique pour représenter la réponse de la structure – réponse non-linéaire source de dissipation d'énergie et donc d'amortissement – associé à un modèle global d'amortissement. Ce modèle global d'amortissement représente, dans la grande majorité des analyses, l'apparition de forces visqueuses qui dissipent une part de l'énergie sismique; cette source d'amortissement, contrairement à celle qui provient de la réponse non-linéaire de la structure, ne repose sur aucune base physique clairement établie. Par manque de fondement physique, de nombreux choix sont possibles pour modéliser la réponse sismique d'une structure : structure élastique associée à un modèle d'amortissement global avec un fort pourcentage d'amortissement critique, modèle de structure non-linéaire très riche sans modèle d'amortissement global, etc. Quelle que soit la combinaison retenue, les analyses sont en général capables de représenter l'évolution de quantités globales; cependant, nous avons montré dans le chapitre 2 que la prédiction de l'évolution de quantités locales, comme par exemple la demande en déformation dans les sections des rotules plastiques, est peu fiable. Les méthodes d'ingénierie récentes basées sur les déplacements ou les déformations reposent cependant sur la prédiction de telles quantités locales.

À la fin du chapitre 2, nous avons déterminé trois qualités que devraient présenter les modèles de matériaux pour espérer prédire l'évolution de quantités locales avec plus de fiabilité :

1. Autant de phénomènes dissipatifs que possible – cela signifie dans la mesure où une modélisation numérique efficace (temps de calculs et besoins en mémoire raisonnables pour une application donnée) de la structure reste possible – devraient être explicitement identifiés et modélisés de façon physique ;
2. Ces phénomènes devraient être modélisés à l'échelle où ils se produisent afin d'en donner une représentation précise ;
3. Les modèles non-linéaires devraient être capables de représenter les trois phases de la réponse typique d'une structure en BA sous séisme (figure 2.2) : dans la phase I, la structure reste essentiellement dans son domaine élastique et seules quelques rares incursions dans le domaine inélastique se produisent, si bien que l'énergie est principalement dissipée par son comportement visqueux ; dans la phase II, l'excitation sismique est plus forte et la réponse de la structure est conditionnée par l'activation de nombreux phénomènes dissipatifs ;

dans la phase III, l'excitation sismique est à nouveau faible mais le comportement de la structure n'est plus le même qu'au cours de la phase I parce qu'elle est endommagée et ses propriétés ont été modifiées de façon irréversible. Les modèles non-linéaires devraient être en particulier capables de représenter les dégradations de raideur et de capacité portante des sections ainsi que la demande en ductilité.

Dans le chapitre 3, nous avons développé la formulation théorique d'un nouveau modèle de matériau qui possède les trois qualités énoncées ci-dessus. Ce modèle est capable de représenter les principales caractéristiques de la réponse cyclique macroscopique d'une éprouvette de béton : (i) viscosité, plasticité continue avec écrouissements (ii) isotrope et (iii) cinématique (apparition de déformations permanentes et de boucles d'hystérésis lors des cycles de charge-décharge), (iv) endommagement continu (perte de raideur), (v) plasticité discrète avec adoucissement et (vi) endommagement discret avec adoucissement. De plus le modèle est capable de représenter des comportements différents en traction et en compression. Ce même modèle, avec d'autres paramètres, est aussi capable de représenter la réponse cyclique de l'acier. La formulation est développée de sorte que la réponse locale du modèle de matériau puisse être affectée par l'apparition de plusieurs discontinuités de déplacement dans la structure. Les points de la formulation physique qui sont susceptibles de poser un problème de stabilité de l'algorithme de résolution numérique du problème sont mis en évidence afin d'être traités. Ce modèle de matériau a été développé dans un cadre 1D pour être intégré dans un élément de structure de type barre ou poutre multifibre avec effets du cisaillement négligeables. Il s'applique donc aux sections courantes des poutres et poteaux d'une structure de type portique en BA sous sollicitation sismique. Les paramètres du modèle ont une signification physique claire, la procédure d'identification de chacun des paramètres est présentée.

Le chapitre 4 est consacré à l'implantation du modèle dans un code de calculs par éléments finis. La méthode des éléments finis est qualifiée de « mixte » car les champs de déformation et de contrainte sont représentés de façon approchée. La contrainte n'est pas nécessairement constante le long de l'élément et la fissuration (ou localisation des déplacements), activée par un critère en contrainte, est donc susceptible d'apparaître dans différentes sections de l'élément. La stratégie de résolution numérique retenue couple, dans chaque élément fini, l'ensemble des points matériels  $\mathbf{x}_i$  où une discontinuité de déplacement est susceptible d'apparaître et l'ensemble des points d'intégration numérique  $\mathbf{x}_j$ . Pour certains choix – toujours possibles – de définition des fonctions d'approximation, chacun des points matériels

$\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_l$  est traité de façon indépendante, à la manière de ce qui découle des formulations classiques en déplacement ; cependant, la formulation mixte originale que nous avons développée permet de définir une matrice tangente élémentaire symétrique et d'intégrer directement dans la loi de comportement du matériau l'équation de continuité de la contrainte qui apparaît dans les formulations en déplacement.

Le chapitre 5 illustre le comportement de l'élément sous des chargements monotone et cyclique quasi-statiques et sous des chargements sismiques. L'élément fini développé a la capacité de dissiper, par des mécanismes non-linéaires représentés à l'échelle des matériaux acier et béton, la totalité de l'énergie sismique qui lui est fournie. De plus, il est possible de quantifier l'énergie dissipée par chacun des mécanismes dissipatifs explicitement représentés dans la réponse des matériaux. La simulation d'un portique 2D en BA, sans amortissement global et avec uniquement des sources matérielles de dissipation de l'énergie sismique, a permis de mettre en évidence le fait que d'autres sources de dissipation d'énergie (liaison acier-béton, interaction sol-structure, comportement particulier des nœuds d'ossature, etc.) que celles considérées dans ce travail devraient être aussi explicitement modélisées pour améliorer la prédiction de l'évolution des quantités globales et locales d'intérêt dans la structure.

## 2 Quelques points à développer

La nouvelle formulation du modèle d'élément multifibre ouvre des perspectives nouvelles :

- Les approximations par éléments finis peuvent être définies de sorte que les points d'intégration numérique sont couplés au niveau de chaque fibre. Dans ce cas, la stabilité de la procédure de résolution et l'intérêt que présente un tel couplage par rapport à la formulation que nous avons retenue ici doivent être étudiés.
- La méthode donne une description du champ de contrainte utile pour décrire les sollicitations subies par la liaison acier-béton. Ceci pourrait faciliter la modélisation physique de cette autre source de dissipation d'énergie dans le béton armé.

La modélisation non-linéaire d'une structure de type portique uniquement avec l'élément multifibre que nous avons développé ne serait pas en mesure de représenter physiquement toutes les sources de dissipation qui proviennent notamment aussi de la réponse non-linéaire des nœuds d'ossature – où les effets du cisaillement ne sont pas négligeables et les lois de comportement ne sont plus 1D –, des non-linéarités

dans les fondations, du glissement des barres d'acier, etc. qui devraient aussi être explicitement modélisés.

### 3 Perspectives

Le domaine d'application de l'élément fini développé est limité aux sections courantes des poutres et des poteaux des structures de type portique en BA. Des thèses ont débuté en collaboration entre l'UTR « ouvrages sous conditions extrêmes » du LMT Cachan et le « groupe de recherche sur les structures » de l'École Polytechnique de Montréal afin de développer des modèles fins du comportement non-linéaire 2D du béton armé, avec prise en compte des effets du cisaillement. Ces modèles seront utiles pour représenter la dissipation d'énergie dans les joints des portiques. La prise en compte de la perte d'adhérence à l'interface acier-béton apporterait aussi une nouvelle source de dissipation d'énergie.

Outre l'amélioration de la fiabilité de la prédiction de l'évolution de quantités locales utiles pour le dimensionnement et l'analyse des structures sous séisme, une autre application pratique des modèles développés concerne l'interprétation des données expérimentales acquises lors d'essais parasismiques menés sur des structures en béton armé (table vibrante, essais pseudo-dynamiques). Sur ces aspects expérimentaux, une thèse est actuellement en cours en partenariat avec UC Berkeley.





# Bibliographie

- [Ami06] Amick H, Monteiro PJM. Experimental determination of modal damping in concrete beams. *ACI Materials Journal*, 103(3) :153–160, 2006.
- [Arm06] Armero F, Ehrlich D. Numerical modeling of softening hinges in thin euler-bernoulli beams. *Computers and Structures*, 84 :641–656, 2006.
- [ASC07] ASCE/SEI. *Seismic rehabilitation of existing buildings*. American Society of Civil Engineers, ASCE/SEI, 2007. 41-06.
- [ATC08] ATC-63 Applied Technology Council. Quantification of building seismic performance factors. Report FEMA P695, FEMA (Federal Emergency Management Agency), California, USA, 2008.
- [Bat90a] Batoz J-L, Dhatt G. *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 1, solides élastiques. Hermès, Paris, 1990.
- [Bat90b] Batoz J-L, Dhatt G. *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 2, poutres et plaques. Hermès, Paris, 1990.
- [Bat96] Bathe K-J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [Baz88a] Bazant Z, Lin F. Non-local yield limit degradation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 :1805–1823, 1988.
- [Baz88b] Bazant Z, Pijaudier-Cabot G. Non-linear continuous damage, localization instability and convergence. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 55 :287–293, 1988.
- [Baz02a] Bazant ZP, Becq-Giraudon E. Statistical prediction of fracture parameters of concrete and implications for choice of testing standard. *Cement and Concrete Research*, 32 :529–556, 2002.
- [Baz02b] Bazant ZP, Yu Q, Zi G. Choice of standard fracture test for concrete and its statistical evaluation. *International Journal of Fracture*, 118 :303–337, 2002.
- [Ben01] Bentz E. *Response2000 - User Manual*. University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada, September 2001.

- [Bha93] Bhattacharjee SS, Léger P. Seismic cracking and energy dissipation in concrete gravity dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22(11) :991–1007, 1993.
- [Bir68] Birkhoff GD. *The four color problem - Miscellaneous papers*, volume 3 of *Collected Mathematical Papers*. Dover, New York, 1968.
- [Bis95] Bischoff PH, Perry SH. Impact behavior of plain concrete loaded in uniaxial compression. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(6) :685–693, 1995.
- [Bog08] Bogard F, Lestriez P, Guo YQ. Numerical modeling of fatigue damage and fissure propagation under cyclic loadings. *International Journal of Damage Mechanics*, 17(2) :173–187, 2008.
- [Bra03] Brancherie D. *Modèles continus et « discrets » pour les problèmes de localisation et de rupture fragile et / ou ductile*. PhD thesis, ENS Cachan, 2003.
- [Car04] Carr AJ. *Ruaumoko manual, theory and user's guide to associated programs*. University of Cantabury, Christchurch, New Zealand, 2004.
- [Cer96] Cervera M, Oliver J, Manzoli O. A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25 :987–1010, 1996.
- [Cha08] Charney FA. Unintended consequences of modeling damping in structures. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 134(4) :581–592, 2008.
- [Cho01] Chopra AK. *Dynamics of Structures : Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J, 2001.
- [Cre01] Cremer C, Pecker A, Davenne L. Cyclic macro-element for soil-structure interaction : material and geometrical non-linearities. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 25 :1257–1284, 2001.
- [CSI07] CSI. *Perform3D User's manual*. Computers and Structures Inc., California USA, 2007.
- [Dav03] Davenne L, Ragueneau F, Mazars J, Ibrahimbegovic A. Efficient approaches to finite element analysis in earthquake engineering. *Computers and Structures*, 81 :1223–1239, 2003.
- [Dil84] Dilger WH, Koch R, Kowalczyk R. Ductility of plain and confined concrete under different strain rates. *ACI Journal*, 81(11) :73–81, 1984.
- [Dom05] Dominguez N, Brancherie D, Davenne L, Ibrahimbegovic A. Prediction of crack pattern distribution in reinforced concrete by coupling a strong

- discontinuity model of concrete cracking and a bond-slip of reinforcement model. *Engineering Computations*, 22 :558–582, 2005.
- [Dri09] Driad-Lebeau L, Lokmanea N, Semblat J-F, Bonnet G. Local amplification of deep mining induced vibrations part 1 : Experimental evidence for site effects in a coal basin. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29(1) :39–50, 2009.
- [Dug50] Dugas, R. *Histoire de la mécanique*. éditions du Griffon, Neuchâtel, 1950.
- [Eri67] Eringen AC. *Mechanics of Continua*. John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- [Eur05] Eurocode 8. *Calcul des structures pour leur résistance aux séismes - Partie 1 : règles générales, actions sismiques et règles pour les bâtiments*, septembre 2005. NF EN 1998-1 P 06-030-1.
- [Faj93] Fajfar P, Vidic T, Fishinger M. Influence of damping model on the seismic response of nonlinear sdof systems. In Moan *et al.*, editor, *EURODYN'93 Conference*, pages 77–84, 1993.
- [Far02] Faria R, Vila Pouca N, Delgado R. Seismic behavior of a r/c wall : numerical simulation and experimental validation. *Journal of Earthquake Engineering*, 6(4) :473–498, 2002.
- [Fil94] Filiatrault A, Léger P, Tinawi R. On the computation of seismic energy in inelastic structures. *Engineering Structures*, 16(6) :425–436, 1994.
- [Fil98a] Filiatrault A, Lachapelle E, Lamontagne P. Seismic performance of ductile and normally ductile concrete moment resisting frames, i - experimental study. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 35 :331–341, 1998.
- [Fil98b] Filiatrault A, Lachapelle E, Lamontagne P. Seismic performance of ductile and normally ductile concrete moment resisting frames, ii - analytical study. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 35 :342–352, 1998.
- [Gar98] Garikipati K, Hughes TJR. A study of strain localization in a multiple scale framework – the one-dimensional problem. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159 :193–222, 1998.
- [Gel63] Gelfand IM, Fomin SV. *Calculus of Variations*. Selected Russian publications in the mathematical sciences. Prentice-Hall, Inc., Englewood, NJ, revised english edition, 1963. Translated by Silverman RA.
- [Ger83] Germain P, Nguyen QS, Suquet P. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :1010–1020, December 1983.
- [Gha98] Ghavamian S, Mazars J. Stratégie de calculs simplifiés pour l'analyse du comportement sismique des structures en béton armé : le code eficos. *Revue Française de Génie Civil*, 2 :61–90, 1998.

- [Guo87] Guo YQ. *Analyse non-linéaire statique et dynamique des poutres tridimensionnelles élasto-plastiques*. PhD thesis, UTC, 1987.
- [Guo89] Guo YQ, Batoz J-L. Résultats du cas-test sur la poutre console. *Bulletin du club  $\Phi^2AS - IPSI$* , 13(3A), 1989.
- [Hal75] Halphen B, Nguyen QS. On generalized standard materials (in french). *Journal de Mécanique*, 14 :39–63, 1975.
- [Hal06] Hall JF. Problems encountered from the use (or misuse) of rayleigh damping. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 35 :525–545, 2006.
- [Hau09] Hautefeuille M, Melnyk S, Colliat J-B. Failure model for heterogeneous structures using structured meshes and accounting for probability aspects. *Engineering Computations*, 26(1/2) :166–184, 2009.
- [Hil50] Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [Hil76] Hillerborg A, Modéer M, Petersson PE. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6 :773–782, 1976.
- [Hje02] Hjelmstad KD, Taciroglu E. Mixed methods and flexibility approaches for nonlinear frame analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, 58 :967–993, 2002.
- [Iba05] Ibara LF, Medina RA, Krawinkler H. Hysteretic models that incorporate strength and stiffness deterioration. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 34 :1489–1511, 2005.
- [Ibr98] Ibrahimbegovic A, Gharzeddine F, Chorfi L. Classical plasticity and viscoplasticity reformulated : theoretical basis and numerical implementation. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 42 :1499–1535, 1998.
- [Ibr03a] Ibrahimbegovic A, Brancherie D. Combined hardening and softening constitutive model of plasticity : precursor to shear slip line failure. *Computational Mechanics*, 31 :89–100, 2003.
- [Ibr03b] Ibrahimbegovic A, Markovic D. Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3089–3107, 2003.
- [Ibr03c] Ibrahimbegovic A, Markovic D, Gatuingt F. Constitutive model of coupled damage-plasticity and its finite element implementation. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 12 :381–405, 2003. in French.

- [Ibr05] Ibrahimbegovic A, Brank B. *Multi-physics and multi-scale computer models in nonlinear analysis and optimal design of engineering structures under extreme conditions*. IOS Press, Amsterdam, 2005.
- [Ibr08] Ibrahimbegovic A, Jehel P, Davenne L. Coupled plasticity-damage model and direct stress interpolation. *Computational Mechanics*, 42 :1–11, 2008.
- [Ibr09] Ibrahimbegovic A. *Nonlinear Solids Mechanics – Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods*. Springer, Berlin, 2009.
- [Ibr10] Ibrahimbegovic A, Boulkertous A, Davenne L, Brancherie D. Modeling of reinforced-concrete structures providing crack-spacing based on XFEM, ED-FEM and novel operator split solution procedure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, page in press, 2010.
- [Imb95] Imbert J-F. *Analyse des Structures par Éléments Finis*. Cépaduès-Éditions, 3<sup>ème</sup> édition, 1995.
- [Jea86] Jeary AP. Damping in tall buildings – a mechanism and a predictor. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 14 :733–750, 1986.
- [Ju 89] Ju W. On energy-based coupled elasto-plastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 25 :803–833, 1989.
- [Kar90] Kareem A, Sun W-J. Dynamic response of structures with uncertain damping. *Engineering Structures*, 12 :2–8, 1990.
- [Kaz06] Kazaz I, Yakut A, Gulkan P. Numerical simulation of dynamic shear wall tests : a benchmark study. *Computers and Structures*, 84 :549–562, 2006.
- [Kuc09] Kucerova A, Brancherie D, Ibrahimbegovic A, Zeman J, Bittnar Z. Novel anisotropic continuum-discrete damage model capable of representing localized failure of massive structures – part ii : identification from tests under heterogeneous stress field. *Engineering Computations*, 42(1/2) :128–144, 2009.
- [La 93] La Borderie C. *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structures en béton*. PhD thesis, niversité Paris 6, 1993.
- [Lam08] Lamarche CP, Paultre P, Proulx J, Mousseau S. Assessment of the frequency domain decomposition technique by forced vibration tests of a full scale structure. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 37 :487–494, 2008.
- [Lee09] Lee C-L, Filippou FC. Frame elements with mixed formulation for singular section response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78 :1320–1344, 2009.

- [Lem85] Lemaître J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51 :31–49, 1985.
- [Lem88] Lemaître J, Chaboche J-L. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1988.
- [Les07] Lestuzzi P, Bachmann H. Displacement ductility and energy assessment from shaking table tests on rc structural walls. *Engineering Structures*, 29 :1708–1721, 2007.
- [Lu 04] Lu Y, Xu K. Modelling of dynamic behaviour of concrete materials under blast loading. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :131–143, 2004.
- [Lub90] Lubliner J. *Plasticity Theory*. Macmillan, New York, 1990.
- [Lé92] Léger P, Dussault S. Seismic energy dissipation in mdof structures. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 118(5) :1251–1269, 1992.
- [Mar93] Maragakis E, Saiidi M, Abdel-Ghaffar S. Response of r/c buildings during the 1987 whittier narrows earthquake. *Earthquake Spectra*, 9(1) :67–95, 1993.
- [Mar04] Marko J, Thambiratnam D, Perera N. Influence of damping systems on building structures subject to seismic effects. *Engineering Structures*, 26 :1939–1956, 2004.
- [Mar06] Markovic D, Ibrahimbegovic A. Complementary energy based fe modelling of coupled elasto-plastic and damage behavior for continuum microstructure computations. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :5077–5093, 2006.
- [Mar09] Martinelli P, Filippou F. Simulation of the shaking table test of a seven-story shear wall building. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 38 :587–607, 2009.
- [Mau99] Maugin GA. *The Thermodynamics of Nonlinear Irreversible Behaviors – an Introduction*. World Scientific. River Edge, Singapore, 1999.
- [Max] Maxwell JC. Diffusion. In *Encyclopedie Britannica*. 9ème édition.
- [Mes98] Meschke G, Lackner R, Mang HA. An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 42 :703–727, 1998.
- [Mou02] Moulin S, Davenne L, Gatuingt F. Ssn119 – réponse statique d’un poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non-linéaire. Code aster – manuel de validation, EDF R&D / AMA, LMT Cachan, novembre 2002.

- [Mou08] Mousseau S, Paultre P, Mazars J. Seismic performance of a full-scale, reinforced high-performance concrete building – part ii : analytical study. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 35 :849–862, 2008.
- [NRC05] NRC. *National building code of Canada*. National Research Council of Canada, Ottawa, Ontario, Canada, 2005.
- [Ohn84] Ohno T, Nishioka T. An experimental study on energy absorption capacity of columns in reinforced concrete structures. *Proceedings of the JSCE, Structural Engineering/Earthquake Engineering*, 1(2) :137–147, 1984.
- [Oli04] Oliver J, Huespe AE. Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :2987–3014, 2004.
- [Pan07] Panoskaltzis VP, Papoulia KD, Bahuguna S, Korovajchuk I. The generalized kuhn model of linear viscoelasticity. *Mechanical Time-Dependent Materials*, 11 :217–230, 2007.
- [Ped08] Pedersen RR, Simone A, Sluys LJ. An analysis of dynamic fracture in concrete with a continuum visco-elastic visco-plastic damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 75 :3782–3805, 2008.
- [Per66] Perzyna P. *Fundamental Problems in Viscoplasticity*. Number 9 in Advances in applied mechanics. Academic Press, New-York, 1966. 243-377.
- [Pet99] Petrangeli M. Fibre element for cyclic bending and shear of rc structures ii - verification. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 125(9) :1002–1009, 1999.
- [Pri98] Prigogine I, Kondepudi D. *Modern Thermodynamics : From Heat Engines to Dissipative Structures*. John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [Pri05] Priestley MJN, Grant DN. Viscous damping for analysis and design. *Journal of Earthquake Engineering*, 9(Special Issue 2) :229–255, 2005.
- [Pri07] Priestley MJN, Calvi GM, Kowalsky MJ. *Displacement-based Seismic Design of Structures*. IUSS Press, Pavia, Italy, 2007.
- [PS 95] PS 92. *Règles PS applicables aux bâtiments, dites règles PS 92*, décembre 1995. NF P 06-013 - DTU Règles PS 92.
- [Rag99] Ragueneau F. *Fonctionnement dynamique des structures en béton - Influence des comportements hystérétiques locaux*. PhD thesis, ENS Cachan, 1999.
- [Rag00] Ragueneau F, La Borderie C, Mazars J. Damage model for concrete-like materials coupling cracking and friction, contribution towards structural damping : first uniaxial applications. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 5 :607–625, 2000.



- [Ram90] Ramtani S. *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description des caractéristiques unilatérales*. PhD thesis, Université Paris 6, 1990.
- [Ray45] Rayleigh, lord (Strutt JW). *The Theory of Sound*, volume 1, § 80 & §81. Dover, New York, 2<sup>nd</sup> edition, 1945. Publication originelle en 1877.
- [Saa07] Saatci S. *Behavior and modeling of reinforced concrete structures subjected to impact loads*. PhD thesis, University of Toronto, Department of Civil Engineering, Toronto, Ontario, Canada, 2007. <http://www.civ.utoronto.ca/vector/>.
- [Seg09] Seghir A, Tahakourt A. Bonnet G. Coupling fem and symmetric bem for dynamic interaction of dam-reservoir systems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(10) :1201–1210, 2009.
- [Sim87] Simo JC, Ju W. Stress and strain-based continuum damage model i. formulation, ii. computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 23 :821–869, 1987.
- [Sim89] Simo JC, Kennedy JG, Taylor RL. Complementary mixed finite element formulations for elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 74 :177–206, 1989.
- [Sim93] Simo JC, Oliver J, Armero F. An analysis of strong discontinuity induced by strain softening solutions in rate-independent solids. *Journal of Computational Mechanics*, 12 :277–296, 1993.
- [Sim98] Simo JC, Hughes T. *Computational Inelasticity*, volume 7 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Sod96] Soda S. Role of viscous damping in nonlinear vibration of buildings exposed to intense ground motion. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 59(2-3) :247–264, 1996.
- [Spa96] Spacone E, Ciampi V, Filippou FC. Mixed formulation of nonlinear beam finite element. *Computers and Structures*, 58(1) :71–83, 1996.
- [Ste80] Stevenson JD. Structural damping values as a function of dynamic response stress and deformation levels. *Nuclear Engineering and Design*, 60 :211–237, 1980.
- [Str86] Strang G. *Introduction to Applied Mathematics*. Cambridge Press, Wellesley, MA, 1986.
- [Tak79] Takayanagi T, Schnobrich WC. Nonlinear analysis of coupled wall systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 7(1) :1–22, 1979.

- [Tay97] Taylor AW, Kuo C, Wellenius K, Chung D. A summary of cyclic lateral load tests on rectangular reinforced concrete columns. Technical report, National Institute of Standards and Technology, January 1997. p.65.
- [Tay03] Taylor RL, Filippou FC, Saritas A, Aurrichio S. A mixed finite element method for beam and frame problems. *Computational Mechanics*, 31 :192–203, 2003.
- [Tay05] Taylor RL. *FEAP : A Finite Element Analysis Program, User manual and Programmer manual*. University of California, Berkeley, California, 2005. Version 7.4.
- [Vas08] Vaseghi Amiri J, Ghodrati Amiri G, Ganjavi B. Seismic vulnerability assessment of multi-degree-of-freedom systems based on total input energy and momentary input energy response. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 35 :41–56, 2008.
- [Wan09] Wang J. Intrinsic damping : modeling techniques for engineering systems. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 135(3) :282–291, 2009.
- [Wee06] Weerheijm J, Van Doormaal JCAM. Tensile failure of concrete at high loading rates : new test data on strength and fracture energy from instrumented spalling tests. *International Journal of Impact Engineering*, 24(3) :609–626, 2006.
- [Won02] Wong PS, Vecchio FJ. *VecTor2 & Formworks User's Manuals*. University of Toronto, Department of Civil Engineering, Toronto, Ontario, Canada, 2002.
- [Zem03] Zembaty Z, Kowalski M. Experimental investigations of modal properties of cracked reinforced concrete structures. *Advances in Earthquake Engineering*, 13 :245–251, 2003.
- [Zie00] Zienkiewicz OC, Taylor RL. *The Finite Element Method*, volume 1 & 2. Butterworth-Heinemann, 5<sup>th</sup> edition, 2000.