



**HAL**  
open science

# Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires de structures

Remi Arquier

► **To cite this version:**

Remi Arquier. Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires de structures. Mécanique [physics.med-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2007. Français. NNT: . tel-00487857

**HAL Id: tel-00487857**

**<https://theses.hal.science/tel-00487857>**

Submitted on 31 May 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

*Discipline : MÉCANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**RÉMI ARQUIER**

le 30 mai 2007

---

**UNE MÉTHODE DE CALCUL DES  
MODES DE VIBRATIONS NON  
LINÉAIRES DE STRUCTURES**

---

**Directeur et Codirecteur de thèse :**

Bruno COCHELIN et Sergio BELLIZZI

---

**JURY**

Mr Antoine	CHAIGNE	Président
Mr Denis	AUBRY	Rapporteur
Mr Claude-Henri	LAMARQUE	Rapporteur
Mr Sergio	BELLIZZI	Examineur
Mr Bruno	COCHELIN	Examineur
Mr Gaetan	KERSCHEN	Examineur



UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

*Discipline : MÉCANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**RÉMI ARQUIER**

le 30 mai 2007

---

**UNE MÉTHODE DE CALCUL DES  
MODES DE VIBRATIONS NON  
LINÉAIRES DE STRUCTURES**

---

**Directeur et Codirecteur de thèse :**

Bruno COCHELIN et Sergio BELLIZZI

---

**JURY**

Mr Antoine	CHAIGNE	Président
Mr Denis	AUBRY	Rapporteur
Mr Claude-Henri	LAMARQUE	Rapporteur
Mr Sergio	BELLIZZI	Examineur
Mr Bruno	COCHELIN	Examineur
Mr Gaetan	KERSCHEN	Examineur

## Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mes deux directeurs de thèse Bruno Cochelin et Sergio Bellizzi pour m'avoir donné un sujet de thèse à la fois pertinent, intéressant et ambitieux, ainsi que les moyens de le réaliser. Grâce à vous, ces quatre années ont été l'occasion pour moi d'acquérir le sens de la démarche scientifique et des connaissances qui constituent aujourd'hui un bagage fondamental pour mes futurs projets. Sachez aussi que j'ai particulièrement apprécié "les discussions devant tableau blanc" que nous avons partagés, qui avec du recul et de manière un peu surprenante, semblent avoir été une des mes principales sources de motivation, elles représentent pour moi un des aspects les plus attrayant de la recherche scientifique. Je garde enfin un très bon souvenir des congrès en France, au Maroc, en Grèce et au Portugal. Merci d'avoir eu confiance en moi en me donnant l'opportunité de m'exprimer avec mon anglais très approximatif devant des "experts du non linéaire", ce fût un peu stressant, mais formateur surtout. Bruno, merci pour ta disponibilité, ta bonne humeur toujours présente, et ton indulgence concernant mes horaires décalés.

Merci également aux membres du jury, Mr Antoine Chaigne, président, Mr Denis Aubry et Mr Claude-Henry Lamarque, rapporteurs et Gaetan Kerschen, examinateur, tout d'abord pour avoir porté intérêt à mon travail puis pour vos appréciations sur le mémoire et vos questions lors de la soutenance.

Un grand merci à l'Université de la Méditerranée pour ma bourse AMN sans quoi rien n'aurait été fait. Je souhaite aussi remercier le personnel administratif du LMA et celui de l'École centrale de Marseille, avec une "spéciale dédicace" à Dominique Bigliazzi, qui à toujours été là pour m'expliquer comment remplir tout ces formulaires qui me semblent si obscurs.

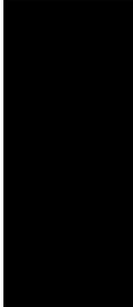
Merci à Christophe Vergez pour la collaboration sur MANLAB, ton enthousiasme fut très motivant.

Un merci général à toutes les personnes du plot 6 que j'ai côtoyé tout au long de ma thèse et bien sûr à l'ensemble de l'équipe MN. Merci à Thierry, Jean et Adnane pour leur débats enflammés sur la thermodynamique. Merci à Boubou pour ton aide scientifique et pour tes conseils avisés sur les autres domaines. Merci à Franck tout d'abord pour avoir été l'exemple à suivre (!), merci infiniment pour ton mémoire. Hélène, merci pour ta gentillesse, tes conseils pour le monitorat et pour plein d'autres choses. Mohamed pour ton couscous, ne débronzes pas trop en Belgique s'il te plaît, Jean Marc pour ta bonne humeur, Julie pour ta joie communicative, ton humour et pour les discussions quotidiennes indispensables avec notre copine la machine à café. Stef, je ne sais comment te remercier, notamment pour ton aide si précieuse avec latex, linux, les configs réseaux et imprimantes, que de temps gagné grâce à toi! Merci de m'avoir aidé en gardant le sourire quand je râlais devant les machines. Deux mots pour Romain : Lève toi.

Un très gros clin d'oeil à Denis et Josianne, ainsi qu'à l'équipe d'Action Synthèse. Je suis aussi particulièrement reconnaissant envers mes amis qui ont supporté ma mauvaise humeur lors des derniers jours, spécialement Manu, Thomas, et Nioki pour les derniers mois (pardon). Merci à ma famille, Miette, Mathieu, Florence, Fadi, Guillaume, Nicole, et mon Père pour m'avoir poussé là où je suis. Merci à Mamouk et à ma mère pour ...pas assez de place ici...

Julia, merci pour ton soutien, ta patience, ta présence.





---

# SOMMAIRE

Remerciements

v

Introduction générale

## I Manlab, un outil de continuation interactif

### Chapitre 1 Continuation de solutions de systèmes d'équations non linéaires

1.1	Contexte d'application . . . . .	9
1.1.1	Formalisme en $U$ . . . . .	9
1.1.2	Théorème des fonctions implicites . . . . .	10
1.2	Méthodes de continuation . . . . .	11
1.2.1	Méthode de Newton-Raphson . . . . .	11
1.2.2	Méthode asymptotique numérique . . . . .	12
1.2.3	Comparaison . . . . .	13
1.3	Branches solutions et bifurcations . . . . .	14
1.3.1	Quasi-bifurcations . . . . .	14
1.3.2	Problème perturbé . . . . .	16
1.3.3	Méthode de branchement . . . . .	16
1.4	Bilan du chapitre . . . . .	17

**Chapitre 2 Quelques apports autour de la méthode asymptotique numérique**

2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Analyse du comportement de la MAN et pilotage . . . . .	21
2.2.1	Loin des points de bifurcation . . . . .	21
2.2.2	A proximité d'un point de bifurcation . . . . .	22
2.2.3	Proposition de pilotage . . . . .	23
2.2.4	Complément pour les points de quasi-bifurcation . . . . .	25
2.3	Conception de l'outil numérique . . . . .	26
2.3.1	Formulation et mise en donnée . . . . .	27
2.3.2	Structuration . . . . .	28
2.3.3	Intégration du branchement par perturbation . . . . .	28
2.3.4	Intégration du saut tangent . . . . .	29
2.3.5	Extentions aux systèmes réguliers quelconques (non rationnels) . . . . .	29
2.4	Bilan du chapitre . . . . .	31

---

**Chapitre 3 Manlab à l'épreuve**

3.1	Introduction . . . . .	35
3.2	Système à deux inconnues . . . . .	35
3.2.1	Mise en donnée . . . . .	35
3.2.2	Lancement du programme . . . . .	36
3.3	Flambement de structures discrétisées par éléments finis . . . . .	38
3.3.1	Module du problème de statique . . . . .	38
3.3.2	Module du modèle élément finis . . . . .	39
3.3.3	Bibliothèque de fonctions élémentaires DKT . . . . .	39
3.3.4	Cas d'étude du flambement d'une plaque . . . . .	40
3.4	Conclusion . . . . .	44

---

**II Modes non linéaires****45****Chapitre 4 Vibrations et modes non linéaires**

4.1	Introduction . . . . .	49
4.2	Systèmes dynamiques et vibrations non linéaires . . . . .	49
4.3	Cas d'étude en mécanique . . . . .	50
4.4	Rappels sur le cas linéaire . . . . .	51
4.4.1	Modes linéaires conservatifs . . . . .	52

4.4.2	Modes complexes . . . . .	54
4.4.3	Aspect géométrique et invariance . . . . .	56
4.4.4	Modes normaux pour les systèmes linéaires . . . . .	56
4.5	Généralités sur le cas non linéaire . . . . .	58
4.5.1	Définition des modes non linéaires . . . . .	59
4.5.2	Réponses et modes non linéaires . . . . .	60
4.5.3	Résonances secondaires et résonances internes . . . . .	61
4.5.4	Quelques méthodes de calcul des MNLs . . . . .	62
4.6	Solutions périodiques de l'oscillateur de Duffing . . . . .	63
4.6.1	Réponse libre . . . . .	63
4.6.2	Réponse forcée harmonique conservative . . . . .	65
4.6.3	Réponse forcée harmonique non conservative . . . . .	67
4.7	Conclusion . . . . .	69

---

## Chapitre 5 Orbites périodiques de systèmes dynamiques autonomes et conservatifs, formulation appliquée à la mécanique

5.1	Introduction . . . . .	73
5.2	Famille d'orbites périodiques et modes non linéaires . . . . .	75
5.3	Préliminaires . . . . .	77
5.3.1	Trajectoires dans l'espace des phases . . . . .	78
5.3.2	Normalisation temporelle . . . . .	78
5.3.3	Matrice fondamentale . . . . .	79
5.3.4	Matrice de monodromie et stabilité . . . . .	80
5.4	Orbites périodiques de systèmes dynamiques autonomes et conservatifs . . . . .	82
5.4.1	Equation de phase . . . . .	83
5.4.2	Formulation à gradient d'énergie . . . . .	86
5.4.3	Formulation amortie . . . . .	92
5.5	Orbites périodiques de systèmes dynamiques non-autonomes . . . . .	94
5.6	Conclusion . . . . .	96

---

## Chapitre 6 Une méthode de calcul des modes non linéaires : la méthode OP-MAN

6.1	Introduction . . . . .	99
6.2	Elastodynamique en non linéaire géométrique . . . . .	99
6.2.1	Problème 3D . . . . .	100

6.2.2	Approximation des structures minces . . . . .	101
6.3	Discrétisation spatiale . . . . .	103
6.4	Discrétisation temporelle . . . . .	105
6.4.1	Schéma de Newmark . . . . .	105
6.4.2	Schéma de Simo . . . . .	106
6.4.3	Etude comparative et choix . . . . .	106
6.4.4	Erreur de périodicité et fréquence de Shannon . . . . .	107
6.5	Formulation discrète du problème des orbites périodiques . . . . .	109
6.5.1	Méthode de tir . . . . .	109
6.5.2	Méthode simultanée . . . . .	110
6.5.3	Condensation des vitesses . . . . .	111
6.6	Continuation des orbites par la MAN (méthode OPMAN) . . . . .	113
6.6.1	Mise en forme quadratique . . . . .	114
6.6.2	Problème à l'ordre $p$ . . . . .	114
6.6.3	Algorithme de calcul des termes des séries . . . . .	116
6.7	Implémentation . . . . .	117
6.7.1	Structure . . . . .	118
6.7.2	Niveau 1 : Manlab . . . . .	118
6.7.3	Niveau 2 : Classe MODELEEFOP . . . . .	119
6.8	Conclusion . . . . .	121

---

## Chapitre 7 Expérimentations numériques avec la méthode OPMAN

7.1	Introduction . . . . .	125
7.2	Expérimentations numériques sur une poutre . . . . .	125
7.2.1	Présentation de la poutre . . . . .	125
7.2.2	Réponse libre . . . . .	127
7.2.3	Analyse par participation modale . . . . .	130
7.2.4	Dépendance à la discrétisation temporelle . . . . .	135
7.3	Interprétations . . . . .	137
7.3.1	Présentation du modèle simplifié . . . . .	137
7.3.2	Solutions périodiques du modèle simplifié . . . . .	140
7.4	Expérimentation numérique sur une coque mince . . . . .	145
7.4.1	Présentation du panneau avec raidisseurs . . . . .	146
7.4.2	Réponse libre . . . . .	146
7.4.3	Analyse par participation modale . . . . .	147
7.5	Conclusion . . . . .	151

---

**Chapitre 8 Conclusion générale**

---

**BIBLIOGRAPHIE** **157**

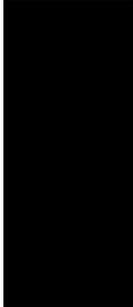
**Table des figures** **161**

---

**Annexe pour la bibliothèque EVEMATLABLIB** **165**

1	Introduction . . . . .	167
2	Inventaire des constantes . . . . .	167
3	Inventaire des variables . . . . .	167
4	Inventaire des fonctions . . . . .	168
4.1	Calcul de la matrice de comportement element DKT . . . . .	168
4.2	Calcul des forces internes element DKT non lineaire . . . . .	168
4.3	Calcul du second membre element DKT non lineaire . . . . .	168
4.4	Calcul du terme résiduel des contraintes element DKT non linéaire . .	168
4.5	Calcul des forces internes lineaires element DKT . . . . .	168
4.6	Calcul de la matrice de rigidite tangente elementaire DKT . . . . .	168





---

# Introduction générale

Depuis le début des années soixante, l'informatique et la recherche, notablement poussés par les besoins industriels, ont permis d'importantes avancées dans le domaine du calcul de vibrations de structures, si bien qu'aujourd'hui la théorie linéaire des vibrations fondée par Rayleigh (1877) semble être parfaitement maîtrisée et exploitée. On dispose en effet de techniques robustes et fiables capables de traiter efficacement les problèmes de réponses forcées et d'analyse modale, pour ne citer que les deux principaux. Les logiciels de vibrations du commerce, largement utilisés dans l'industrie du transport et de l'aéronautique, autorisent aujourd'hui le traitement de structures définies avec plusieurs dizaines de milliers de degrés de liberté et cela sur des ordinateurs de puissance moyenne.

Parallèlement, le besoin incessant d'optimiser les structures a poussé les entreprises aux limites du domaine de validité du linéaire et donc vers un intérêt croissant envers la modélisation non linéaire, la dynamique et les vibrations n'échappant pas à cette tendance. Les applications visées concernent la modélisation de phénomènes très divers ; loi de comportement hyper-élastique, plastique, structures comportant des dommages, des contacts, du frottement (notamment dans les liaisons entre pièces), et bien sûr la modélisation des structures minces de plus en plus minces soumises à des efforts toujours plus importants. D'autres domaines sont aussi concernés, on pense notamment à l'étude dynamique des instruments de musiques, où les non linéarités sont nécessaires pour la reproduction de la richesse spectrale ainsi qu'aux vibrations de chaînes de molécules présentant des forces d'interactions non linéaires. Dans tous les cas, les techniques classiques utilisées pour l'étude des vibrations, toutes fondées sur le principe de superposition linéaire, deviennent obsolètes avec ces modèles. Du point de vue du chercheur, il s'agit donc de trouver de nouveaux concepts et techniques de calculs, adaptés au cas non linéaire tout en se passant du fameux principe de superposition et de ses implications.

La recherche a pourtant précédé les besoins industriels dans le domaine du non linéaire. Historiquement, l'étude des phénomènes non linéaires débute avec ceux de la mécanique céleste au

XIX<sup>ème</sup> (avec la loi de gravitation de Newton), inspirant les travaux ultérieurs de Poincaré<sup>(1)</sup>, Lindstedt<sup>(2)</sup>, Liapunov<sup>(3)</sup> et prolongés par ceux de Krylov, Bogoliubov, Hayashi (1864) (HAYASHI (1985)), et Nayfeh (NAYFEH et MOOK (1979)). Ces derniers ont très grandement participé à l'élaboration des théories d'analyses des systèmes dynamiques multidimensionnels à faible nombre de degrés de liberté. Cependant ces théories ont été appliquées à des systèmes à un seul degré de liberté, ou limité à l'approche "single-mode"<sup>(4)</sup>, où la forme des solutions est donnée par la forme d'un des modes linéaires (SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a) ou FERTIS (1995)). Ces approches permettent l'observation de certains effets caractéristiques des réponses non linéaires : Lien entre l'amplitude et la fréquence, phénomènes de saut et résonances secondaires. Cependant, elles ont montré leurs limites, en occultant notamment les phénomènes de couplages entre les modes, souvent capital pour les structures réelles. Rosenberg a proposé dans ROSENBERG (1966) une approche originale, pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté introduisant les notions de *vibration à l'unisson* et de *ligne modale* dans l'espace des configurations (voir également l'ouvrage de VAKAKIS *et al.* (1996) à ce sujet). Même si sa méthode est limitée aux systèmes à forces internes impaires, elle constitue un pas important pour la définition des modes non linéaires. Par la suite, d'autres définitions et techniques de calculs ont vu le jour, comme la méthode de l'équilibrage harmonique, la méthode des échelles multiples, celle des perturbations, celle des formes normales (voir JEZEQUEL et LAMARQUE (1991)), ainsi que la méthode phase-amplitude (voir BELLIZZI et BOUC (2005)). En ce qui concerne la définition des modes, Shaw et Pierre (1991-1994) ont exposé dans SHAW et PIERRE (1993a) puis pour les systèmes continus dans SHAW et PIERRE (1993b) une approche générale et moderne qui s'appuie sur le formalisme des systèmes dynamiques. Les modes non linéaires y sont définis à l'aide de sous-espaces invariants courbés de dimension 2 de l'espace des phases. Ce cadre, plus large que celui défini par Rosenberg, permet d'inclure de l'amortissement et n'est pas limité aux forces impaires. Il constitue maintenant une théorie acceptée dans la communauté et peut servir de base aux méthodes de calculs de modes non linéaires ainsi que pour les investigations en matière d'analyse modale non linéaire.

Dans le domaine des vibrations non linéaires, il est aujourd'hui très courant de résoudre les équations qui définissent les modes au moyen d'une méthode de perturbation limitée à quelques termes de séries asymptotiques que l'on calcule analytiquement ou numériquement. On sait pourtant que ces approximations ont un domaine de validité assez faible et qu'elles ne permettent pas une représentation correcte des changements de régimes (bifurcations). Les méthodes purement numériques (équilibrage harmonique avec un grand nombre d'harmoniques, méthodes de tir) tendent à se développer rapidement compte tenu des moyens de calcul disponibles actuellement. Elles permettent de s'affranchir de cette hypothèse de faible non linéarité si souvent invoquée dans les articles du domaine. L'étape suivante est d'appliquer ces techniques purement numériques pour des structures de géométries complexes discrétisées par éléments finis. On rejoint alors l'état de l'art actuel des vibrations linéaires. Il ne s'agit pas d'un simple exercice de style, ou d'un travail simplement technique. Le passage de quelques degrés de liberté à un grand nombre de degrés de

---

(1). Henri Poincaré est l'auteur du mémoire "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique", il a découvert le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Il a amené aussi la notion capitale de *portrait de phase*.

(2). La méthode de Lindstedt-Poincaré a permis une avancée dans la résolution des équations différentielles en donnant une méthode permettant l'élimination des termes séculaires. Cette méthode permet notamment d'obtenir les solutions approchées de l'équation de Duffing.

(3). Le théorème de Liapunov (1892), définit la stabilité (la stabilité de Liapunov) d'un système dynamique donnée.

(4). Il s'agit de projeter les équations du mouvement sur le mode linéaire, ce qui conduit à une simplification importante, mais aussi une approximation importante.

liberté peut poser des problèmes et soulever de nouvelles interrogations, comme nous allons le constater dans ce mémoire.

Depuis quelques années, le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA), en collaboration avec l'ENSTA, l'INSA de Lyon, et l'ENTPE, ont formé un groupe national de recherche dédié au thème des vibrations non linéaires. Les axes d'études traités sont les suivants : 1/ Élaboration de nouvelles méthodes de calculs de modes non linéaires ; 2/ Investigations sur une méthode de réduction de modèle basée sur les modes non linéaires ; 3/ Étude de réponses forcées de structures avec une excitation déterministe ou aléatoire - 4/ Analyse et compréhension des phénomènes de bifurcations de mode de vibrations. Au LMA, les applications concernent notamment, les structures minces en non linéaire géométrique, l'étude des instruments de musique (clarinette), l'étude de systèmes à pompage d'énergie (le LMA dispose d'un dispositif expérimental de pompage acoustique passif), l'étude des vibrations d'assemblages de combustibles (collaboration avec le CEA Cadarache). Pour les structures minces, la conception de codes de calcul de vibrations pour l'obtention des modes non linéaires et des réponses vibratoires forcées est une préoccupation majeure du laboratoire (un premier code de calcul basé sur la méthode de la balance harmonique est présenté dans le mémoire de thèse PERIGNON (2004) et deux dispositifs expérimentaux sont opérationnels : le premier étant une poutre mince doublement encadrée et le second une plaque encadrées sur ses 4 bords).

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans ce cadre. Il porte sur l'étude et le calcul numérique de vibrations libres et forcées de structures minces en non linéaires géométrique. On vise le calcul "exact<sup>(5)</sup>" des modes non linéaires d'une structure discrétisée par éléments finis. Ces modes sont obtenus en effectuant la continuation de branches de solutions périodiques calculées au moyen d'une méthode d'intégration temporelle pas à pas. Dans le cas de nos structures modélisées par éléments finis, les diagrammes de continuation présentent des réseaux de branches complexes, c'est pourquoi une méthode de continuation adaptée a été choisie : la Méthode Asymptotique Numérique (MAN), et un outil de continuation "pilote" du code de vibration a été conçu afin de parcourir le réseau de branche efficacement (notamment à l'aide d'une interface graphique dédiée rendant le calcul interactif). Il est important de mentionner que cet outil a été conçu de manière totalement indépendante du problème de vibration. Ainsi, il peut être utilisé, avec le code utilisateur approprié, pour traiter une large gamme de problèmes non nécessairement issus du domaine de la physique. La première partie de ce manuscrit est donc consacrée à cet outil ainsi qu'aux aspects théoriques liées à la continuation de solutions de systèmes d'équations non linéaires. Ces mêmes aspects, serviront aussi de base à la formulation saine du problème de vibrations non linéaires, ainsi qu'à la conception robuste du code de calcul de vibrations présentés tous deux en seconde partie de ce manuscrit.

Le premier chapitre du manuscrit aborde brièvement les notions relatives à la continuation de branches de solutions, on rappellera notamment la méthode de continuation utilisé dans ce mémoire (la MAN). Le second chapitre propose quelques apports autour de cette méthode, permettant une avancée dans le contrôle de son comportement au niveau des points de bifurcations, il s'agira ensuite de présenter l'outil de continuation précité intégrant de nouvelles fonctionnalités de contrôle. Le troisième chapitre présente deux exemples d'applications utilisant l'outil de continuation. C'est seulement au quatrième chapitre que l'on abordera le domaine des vibrations

---

(5). Le mot "exact" signifie que l'on emploie pas de méthodes de perturbations pour le calcul des modes. Bien entendu, les méthodes de discrétisation temporelle et spatiale utilisées introduisent leur part d'erreur.

non linéaires. Il s'agira de rappeler quelques notions fondamentales appartenant au domaine en s'attardant sur la définition des modes linéaires et non linéaires. Le cinquième chapitre est à forte connotation théorique. On y présentera une formulation du problèmes des solutions périodiques de systèmes autonomes et conservatifs permettant la construction des surfaces invariantes des modes non linéaires. Dans le sixième chapitre, on présentera la forme numérique de cette formulation en utilisant la méthode des éléments finis, une méthode de discrétisation temporelle, ainsi qu'une méthode de calcul d'orbites périodiques nommée méthode simultanée. Enfin le dernier chapitre contient les résultats des expérimentations numériques menées sur deux structures minces.

Première partie

Manlab, un outil de continuation  
interactif



# Continuation de solutions de systèmes d'équations non linéaires

**C** e chapitre aborde brièvement les notions relatives à la continuation de branches de solutions, on rappelle notamment la méthode de continuation qui est utilisée dans ce mémoire : la Méthode Asymptotique Numérique (MAN).

## PLAN DU CHAPITRE 1

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte d'application</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1.1	Formalisme en $U$ . . . . .	9
1.1.2	Théorème des fonctions implicites . . . . .	10
<b>1.2</b>	<b>Méthodes de continuation</b> . . . . .	<b>11</b>
1.2.1	Méthode de Newton-Raphson . . . . .	11
1.2.2	Méthode asymptotique numérique . . . . .	12
1.2.3	Comparaison . . . . .	13
<b>1.3</b>	<b>Branches solutions et bifurcations</b> . . . . .	<b>14</b>
1.3.1	Quasi-bifurcations . . . . .	14
1.3.2	Problème perturbé . . . . .	16
1.3.3	Méthode de branchement . . . . .	16
<b>1.4</b>	<b>Bilan du chapitre</b> . . . . .	<b>17</b>

---

## Introduction

Il s'agit ici d'obtenir les solutions des problèmes pouvant se mettre sous la forme suivante

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{U}$  est le vecteur des inconnues de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lambda$  le paramètre et  $\mathbf{R}$  une fonction de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  composée de  $n$  équations non linéaires en  $\mathbf{U}$ . En mécanique, on peut citer l'exemple classique du problème de flambement de structure discrétisée par éléments finis où le vecteur  $\mathbf{R}$  représente les équations d'équilibre,  $\mathbf{U}$  les déplacements aux noeuds et  $\lambda$  le paramètre de charge. La représentation d'une projection des courbes solutions dans le plan  $U_i, \lambda$  (ou parfois dans le plan  $\|\mathbf{U}\|, \lambda$ ) se nomme *diagramme de bifurcation*. Dans le cas d'un problème de flambement classique, on observera dans ce diagramme une première courbe partant du point d'équilibre, appelée *branche fondamentale*, puis d'autres courbes coupant la première en des points nommés *points de bifurcation*. Les branches issues des points de bifurcations sont nommées *branches bifurquées* et correspondent dans le problème de flambement aux divers modes de flambement de la structure.

Le calcul numérique des branches de solutions  $\mathbf{U}(\lambda)$  de (1.1), nommé *continuation de solution*, est notamment basée sur les travaux théoriques de Poincaré (1881-1886), Klein (1882-1883), Bernstein (1910), et Keller. Les ouvrages SEYDEL (1994) et surtout ALLGOWER et GEORG (1990) détaillent les procédures permettant d'obtenir de façon numérique ces solutions. Deux méthodes ressortent principalement de ces ouvrages, la famille des méthodes PC (Prédiction-Correction), très souvent basées sur l'algorithme de correction de Newton-Raphson, et la méthode PL (Piecewise Linear), moins répandue, basée sur une approximation linéaire par morceaux des équations de (1.1). Les méthodes PC sont généralement faciles à mettre en oeuvre, ainsi la plupart des problèmes comportant des équations non-linéaires telles que (1.1) sont résolus par ces méthodes, sous réserve que la fonction  $\mathbf{R}$  soit suffisamment différentiable pour le calcul du jacobien. Toutefois, ces dernières souffrent d'un manque de robustesse notamment lorsque les solutions présentent de nombreux *points de bifurcations*. Inversement, la Méthode Asymptotique Numérique (MAN), basée sur un calcul de séries entières à grand nombre de termes avec un calcul automatique et adaptatif du domaine de validité conserve sa robustesse, ceci au prix d'un développement supplémentaire raisonnable.

Dans cette partie, on rappellera quelques notions relatives à la continuation de branches de solutions, puis on rappellera la méthode de Newton-Raphson ainsi que la MAN. Les notions seront alors utilisées dans le chapitre suivant, pour la présentation d'une méthode de branchement utilisant les avantages de la MAN et la simplicité du principe de perturbation.

## 1.1 Contexte d'application

### 1.1.1 Formalisme en $U$

Dans le domaine de la continuation de branches de solutions de systèmes d'équations non linéaires, il est coutume d'utiliser la forme (1.1) page 9 qui sépare les variables du vecteur  $\mathbf{U}$  et la variable du paramètre  $\lambda$ . Cette forme amène une écriture lisible et adaptée aux méthodes incrémentales en  $\lambda$ . Avec cette forme, l'ensemble de solution est usuellement paramétré avec le scalaire  $\lambda$ , on a donc

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\lambda)$$

. Pour éviter les problèmes de points limites (voir par exemple SEYDEL (1994) pour leur définition), on préfère utiliser ici une méthode de continuation avec une paramétrisation par longueur d'arc faisant intervenir  $\mathbf{U}$  et  $\lambda$ . Dans ce cas, les écritures et calculs ne justifient plus vraiment la séparation entre le scalaire  $\lambda$  et le vecteur  $\mathbf{U}$ . C'est pourquoi nous utiliserons la forme suivante pour l'ensemble du mémoire

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

avec le vecteur résidu appartenant à  $\mathbb{R}^n$  et le vecteur  $\mathbf{U}$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Avec cette forme, le scalaire de paramétrisation est noté  $a$  et sera appelé *paramètre de chemin* de sorte que l'on ai

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(a)$$

. Et on insistera sur le fait que le paramètre  $\lambda$  se trouve maintenant parmi les  $n+1$  composantes du vecteur  $\mathbf{U}$  au même titre que les autres variables.

### 1.1.2 Théorème des fonctions implicites

Très souvent, les systèmes comportant une inconnue de plus que d'équations (c'est le cas des systèmes de la forme (1.2)) définissent une fonction implicite liant les variables du vecteur  $\mathbf{U}$  entre elles, de façon à ce que ces dernières évoluent dans un sous ensemble unidimensionnel de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on dit dans ce cas que la fonction  $\mathbf{R}(\mathbf{U})$  est *submersive*. Pour un tel système, la tangente au voisinage d'un point solution est unique et sert de base de calcul à la majorité des méthodes de continuation. Cependant, les systèmes d'équations non linéaires peuvent présenter des particularités qui enlèvent cette unicité, ce qui est le cas au niveau des points de bifurcations par exemple, où plusieurs branches de solutions se croisent. Les points de bifurcations ne sont pas les seules particularités des systèmes non linéaires. La forme générale (1.2)) permet par exemple l'existence d'espace solution de dimension supérieure à 1 (surfaces solutions ou autre). Bien entendu, les méthodes de continuations classiques sont conçues pour effectuer la continuation de courbes solutions unidimensionnelles et les particularités précédemment citées leur posent problème.

Le théorème des fonctions implicites permet de définir un cadre dans lequel les méthodes de continuations doivent opérer en dehors de toutes les particularités précitées. Ce théorème utilise les propriétés de *surjectivité* du système linéaire sous-jacent pour assurer la submersivité de la fonction implicite  $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$  au voisinage d'un point donné. Ce théorème est rappelé brièvement ci dessous dans le cas où la dimension de  $\mathbf{U}$  est d'une dimension supérieure à la dimension de  $\mathbf{R}$ .

#### THÉORÈME 1

Si la fonction  $\mathbf{R} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est indéfiniment différentiable et si  $\mathbf{U}_0$  est solution de

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_0) = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

et si de plus l'application linéaire de matrice  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}_0)$  est surjective (ce qui revient à dire que la matrice  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}_0)$  est de rang  $n$ .), alors au voisinage du point  $\mathbf{U}_0$  l'ensemble de solution de (1.3) est un sous espace de dimension un.

□

Ainsi, pour s'assurer que le système d'équation définis une branche de solution, il faudra vérifier la surjectivité de son problème linéaire sous-jacent.

## 1.2 Méthodes de continuation

Lorsque le domaine de validité des méthodes de perturbations classiques n'est pas suffisamment grand, les méthodes de continuations prennent le relais en construisant les ensembles de solutions par morceaux. Les méthodes de prédiction-correction décrivent cet ensemble de solution par une liste de points calculés de manière séquentielle. Quand à la méthode asymptotique numérique, celle-ci découpera les courbes solutions en morceaux appelés *tronçons*, chacun décrits par une série entière aussi calculés séquentiellement (voir plus loin).

On rappellera ici le principe de la méthode de Newton-Raphson qui est la plus utilisée des méthodes incrémentales itératives et on présentera brièvement ensuite la méthode asymptotique numérique pour finir sur une comparaison des deux méthodes.

### 1.2.1 Méthode de Newton-Raphson

Cette méthode consiste à chercher une succession de points  $\mathbf{U}^j$  solutions de (1.3) et vérifiant le critère suivant :

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^j)\| \leq \epsilon_{nr} \quad (1.4)$$

Le calcul se fait en deux étapes, une prédiction puis une série de corrections, l'ensemble étant fonction du paramètre de chemin, noté  $a$ , abscisse curviligne le long de la courbe. Le point  $\mathbf{U}_j$  étant supposé connu<sup>(1)</sup>, le point suivant est donné par :

$$\mathbf{U}^{j+1} = \mathbf{U}^j + \underbrace{\Delta \mathbf{U}^j}_{\text{prédiction}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k \Delta \mathbf{U}_i}_{k \text{ corrections}} \quad (1.5)$$

On se contente ici de rappeler brièvement les étapes de calcul, sans entrer dans les détails. Pour cela, on pourra consulter par exemple CRISFIELD (1997a). La démarche est donc la suivante :

– **prédiction :**

On effectue un pas de prédiction, tangent à la courbe qui conduit à la résolution de :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^j} \Delta \mathbf{U}^j = 0 \quad (1.6)$$

Ce système est sous-déterminé, on le complète donc par une équation qui donne la longueur du pas tangent :

$$\|\Delta \mathbf{U}^j\| = \Delta a \quad (1.7)$$

avec  $a$  étant le paramètre de chemin (la courbe est paramétrée par  $a$ ).

– **corrections :**

On effectue  $k$  corrections, jusqu'à ce que le critère (1.4) soit vérifié. Pour chaque itération, il s'agit de résoudre le système :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^j} \Delta \mathbf{U}_i = -\mathbf{R}(\mathbf{U}_i) \quad (1.8)$$

Ce système doit aussi être complété, on peut par exemple choisir des pas de corrections orthogonaux à la prédiction, soit

$$\Delta \mathbf{U}^{jT} \Delta \mathbf{U}_i = 0 \quad (1.9)$$

A noter que les systèmes (1.6) et (1.8) sont obtenus en se limitant aux développements au premier ordre. Le principe de la méthode de Newton-Raphson est résumé sur la figure 1.1.

---

(1). le premier point peut être obtenu par exemple par homotopie

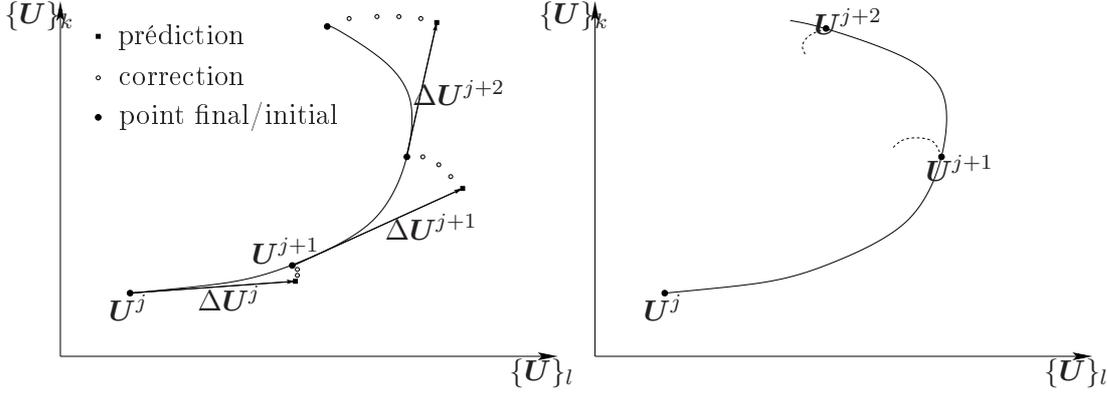


Figure 1.1 – Prédiction et corrections pour les méthodes incrémentales-itératives (à gauche) - Calcul des branches de solutions par la MAN (à droite)

### 1.2.2 Méthode asymptotique numérique

On recherche les solutions du système (1.2) sous forme de séries entières tronquées à l'ordre  $N$  en fonction d'un paramètre de chemin  $a$  :

$$\mathbf{U}(a) = \mathbf{U}^j + \sum_{k=1}^N a^k \mathbf{U}_k \quad (1.10)$$

avec  $\mathbf{U}^j$  un point solution de départ connu déterminé par exemple par une méthode classique de correction (Newton-Raphson ou Homotopie).

L'introduction des développements (1.10) dans (1.2) conduit à :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{R}(\mathbf{U}^j) + a\mathbf{R}_1 + a^2\mathbf{R}_2 + \dots = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

ceci étant valable pour tout  $a$ , on obtient une série de problèmes linéaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^j} \mathbf{U}_1 = \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{R}_p &= \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^j} \mathbf{U}_p - \mathbf{F}_p^{nl} = \mathbf{0} \\ \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ainsi, à l'ordre  $p$ ,  $\mathbf{R}_p = \mathbf{0}$  est équivalent à :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^j} \mathbf{U}_p = \mathbf{F}_p^{nl} \quad (1.13)$$

Les seconds membres  $\mathbf{F}_p^{nl}$  dépendent exclusivement des ordres précédents et sont donc entièrement déterminés à l'ordre  $p$ . Le calcul de ces "seconds membres" est le point crucial de la MAN. Comme dans le cas de Newton-Raphson, ces systèmes sont sous-déterminés. On ajoute donc une condition qui provient de la définition du paramètre de chemin  $a$ . Si par exemple ce paramètre de chemin est égal à la pseudo longueur d'arc, inspirée de la définition du paramètre de longueur d'arc classique :

$$\mathbf{U}_1^T (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) = a \quad (1.14)$$

alors la condition à l'ordre  $p$  s'écrit

$$\mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_p = 0 \quad (1.15)$$

Ainsi avec l'équation (1.13) et l'équation (1.15) on peut déterminer les composantes  $\mathbf{U}_p$  du développement (1.10) de manière séquentielle en partant de l'ordre 1 jusqu'à l'ordre  $N$ .

Le domaine de validité  $a_{max}$  des solutions obtenues par les résolutions successives des systèmes (1.12) est donné par la condition pour

$$a \in [0, a_{max}], \quad \|\mathbf{R}(\mathbf{U}(a)) - \mathbf{R}(\mathbf{U}^j)\| \leq \epsilon_{man} \quad (1.16)$$

où  $\epsilon_{man}$  est un critère de précision donné et  $\mathbf{R}(\mathbf{U}^j)$  le résidu initial. On a alors la propriété suivante :

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}(a_{max})) - \mathbf{R}(\mathbf{U}^j)\| = \|a_{max}\mathbf{R}_1 + \dots + a_{max}^{n+1}\mathbf{R}_{n+1} + \dots\| = \|a_{max}^{n+1}\mathbf{R}_{n+1}\| \quad (1.17)$$

Pour des séries (1.10) tronquées à l'ordre  $n$ , les  $R_i$  sont nuls pour  $i = 1..n$  (simple application de (1.12)). Le terme prépondérant est  $a_{max}^{n+1}\mathbf{R}_{n+1}$  et on montre facilement que  $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{nl}$  et donc, une bonne expression de  $a_{max}$  est donnée par l'équation

$$a_{max} = \left( \frac{\epsilon_{man}}{\|\mathbf{F}_{N+1}^{nl}\|} \right)^{\frac{1}{N+1}} \quad (1.18)$$

Concrètement, on calcule les termes des séries (1.10) en résolvant (1.12) puis on évalue  $a_{max}$  avec 1.18. Ensuite  $\mathbf{U}(a_{max})$  donne un nouveau point de départ noté  $\mathbf{U}^{j+1}$  pour un nouveau calcul de série.

A noter qu'il existe également une variante de la MAN, permettant d'améliorer la convergence des séries. Il s'agit d'utiliser des approximants de Padé, et donc de remplacer les termes des séries (1.10) par des fractions rationnelles (voir par exemple COCHELIN *et al.* (1994)).

### 1.2.3 Comparaison

Les principaux points forts de la MAN, relativement à Newton-Raphson, se résument en trois points :

- *simplicité d'utilisation et du pilotage* : ce point constitue le principal avantage de la MAN. En effet, le choix de la longueur du pas est entièrement automatique et adaptatif (« ralentissement » à proximité des points limites, augmentation du pas dans les zones linéaires), et se fait a posteriori, avec le calcul du domaine de validité  $a_{max}$ . Il n'est donc pas nécessaire de se préoccuper de la longueur du pas, comme avec Newton-Raphson où un pas trop petit ralentit l'algorithme et un trop grand le fait diverger. Finalement, du point de vue de l'utilisateur, il suffit de fixer l'ordre des séries,  $N$  (en pratique,  $N$  est choisi entre 20 et 40, entre ces deux bornes la valeur choisie n'a finalement que peu d'influence sur la performance globale de l'algorithme), un critère de convergence,  $\epsilon$  qui sera choisi en fonction de la précision souhaitée. Conformément à (1.18), plus le seuil sera petit, plus les tronçons seront courts, plus le temps de calcul d'une branche sera long.
- *une seule inversion de la matrice  $\mathbf{K}_{t(0)}$*  par pas de MAN, quand il en faut  $k+1$  (une pour la prédiction plus  $k$  pour la corrections) pour Newton-Raphson, ce qui peut représenter un gain en temps de calcul conséquent si les temps d'évaluation et d'inversion de matrices tangentes sont longs. En fait, pour la MAN, l'essentiel de ce temps est utilisé pour le calcul des seconds membres  $\mathbf{F}_p^{nl}$ , en sachant que le calcul de l'un d'entre eux correspond approximativement à celui du résidu de Newton-Raphson.

- *solutions analytiques* des branches de solutions plutôt que des valeurs ponctuelles. De fait, les séries tronquées sont riches en informations, notamment en ce qui concerne les bifurcations.

On remarque également qu'une MAN à l'ordre 1 correspond à un pas de prédiction de Newton-Raphson (voir terme  $\Delta \mathbf{U}^j$  de (1.6) et le terme  $\mathbf{U}_1$  de la première équation de (1.12)). En fait la possibilité de prendre un grand nombre de termes dans les séries permet d'avoir une précision importante sans avoir obligatoirement recours à des corrections.

## 1.3 Branches solutions et bifurcations

Une des particularités importantes des systèmes d'équations non linéaires réside dans la multiplicité des branches solutions de leur ensemble de solution. Selon la nature du système d'équation, le réseau de branches pourra avoir des formes plus ou moins complexes. On pourra rencontrer entre autres des branches fermées sur elles mêmes, des branches reliées, des branches isolées, ainsi que des ensembles de solutions de dimension supérieure à un.

Les lieux où les branches du réseau se croisent sont nommés *point de bifurcation* ou *points singuliers*, ils constituent une caractéristique importante des systèmes d'équations non linéaires. Comme dit précédemment, en ces points la tangente n'est pas unique<sup>(2)</sup> et la matrice tangente du système n'est pas de rang complet (les hypothèses du théorème des fonctions implicites ne sont pas satisfaites en ces points). Il s'en suit que les méthodes de continuations doivent adopter une stratégie particulière lors du passage de ces points. D'autre part, ces points étant une manifestation théorique d'un phénomène physique, ils font souvent l'objet d'études (i.e : points de flambement de structures) et permettent une caractérisation des branches qu'ils initient (i.e : les modes de flambements de la même structure).

### 1.3.1 Quasi-bifurcations

Dans ce mémoire, on distinguera deux grand type de bifurcations : les points de *bifurcations exactes* et les *quasi-bifurcations*, illustrés tout deux dans la figure 1.2 page 15. Généralement, les quasi-bifurcations sont des versions perturbées des bifurcations exactes. C'est à dire que ces quasi-bifurcations sont la manifestation d'un phénomène théorique *perturbé* par un autre phénomène. D'une manière générale en mécanique, on rencontrera les points de bifurcations exactes lors de la résolution de problèmes théoriques où la modélisation du phénomène ne tient pas compte des imperfections<sup>(3)</sup>. Inversement, lors d'une étude expérimentale d'un système non linéaire (imparfait par essence) ou lors d'une modélisation plus poussée du phénomène étudié (modélisation des imperfections), les points de bifurcations exacts se trouvent *perturbés* et deviennent des *quasi-bifurcations*. Un exemple typique d'illustration de ces considérations est le problème de flambement d'une structure parfaite et son homologue réel. Dans le cas parfait, la branche principale de compression comporte plusieurs points de bifurcations exacts, menant de manière symétrique aux divers modes de flambement. Dans le cas réel, à cause des défauts de formes, la branche de compression comportera des quasi-bifurcations (asymétriques) menant aussi aux même modes de flambement. Ainsi, la modélisation d'un problème donné pourra donner lieu aux deux types de bifurcations, et ces bifurcations se manifesteront de manière logique et normale dans les diagrammes de solutions.

(2). Le nombre de tangente est égal au nombre de branches se croisant en ce point.

(3). Défaut de forme, hétérogénéité en raideur ou en température dans la structure, efforts extérieurs non pris en compte etc...

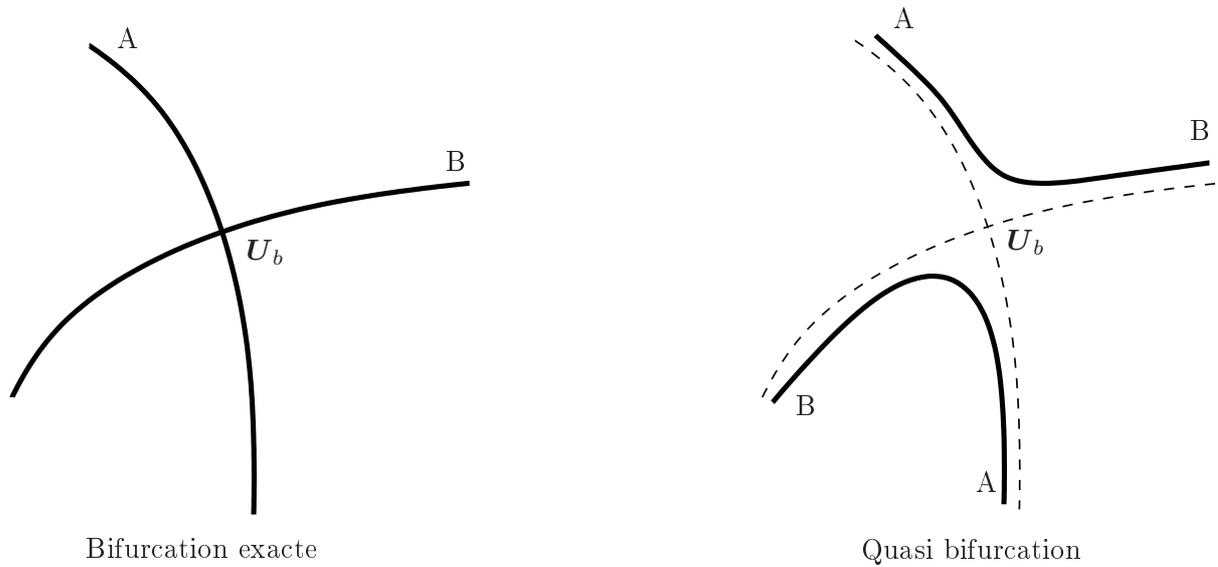


Figure 1.2 – *Exemple de bifurcation exacte et quasi bifurcation. Lors d'un point de quasi bifurcation, nous désignerons du même nom les branches de part et d'autre du point de quasi bifurcation, comme le montre la figure de droite.*

Il est important de mentionner que les imperfections transformant les points de bifurcations exacts en points de quasi-bifurcations peuvent provenir aussi des approximations faites lors de l'écriture des équations du problème qui ont pour effet de perturber les solutions exactes. Par exemple, et ce sera le cas dans la deuxième partie de ce mémoire, l'utilisation d'une méthode de discrétisation spatiale<sup>(4)</sup> ou de discrétisation temporelle des équations aux dérivées partielles, peuvent (ce n'est pas toujours le cas) modifier le type des points de bifurcations initialement présents dans le modèle théorique. Afin de se rapprocher des solutions exactes, et donc obtenir les bonnes bifurcations, il faudra augmenter le nombre d'éléments utilisés lors de la discrétisation.

Enfin, une autre source importante de perturbation est l'erreur due à l'imprécision du calcul numérique. En effet, la majorité des méthodes de calculs numériques utilisent des algorithmes itératifs utilisant des seuils de précisions : plus le seuil choisi est faible, plus le calcul est précis mais long. Inversement plus le seuil est grand, plus le calcul est rapide mais plus les branches de solutions calculées s'éloignent des branches de solutions exactes, ce qui a pour effet de transformer les bifurcations exactes en quasi-bifurcations. Cette fois ci, afin de se rapprocher des solutions exactes (et donc obtenir les bons types de bifurcations) il faudra choisir le seuil de résolution le plus faible possible (au prix d'un temps de calcul plus long).

Ainsi, le fait d'ajouter une perturbation dans les équations du problème exact à pour effet d'éloigner les branches solutions du problème perturbé par rapport à celles du problème initial exact. Comme dit précédemment, cet effet est visible surtout au niveau des points de bifurcations mais il peut l'être aussi sur les courbes elles mêmes si la perturbation est d'amplitude suffisamment importante.

---

(4). Comme la méthode des éléments finis.

### 1.3.2 Problème perturbé

Derrière les notions de bifurcations exactes et quasi-bifurcations, se trouve donc la notion de *problème perturbé* qui provient du fait que les diverses approximations faites lors de l'écriture du problème exact ainsi que celles apportées par les méthodes de résolutions rendent le problème exact inaccessible, ce qui nous contraint d'étudier le problème perturbé à la place.

On définira le problème perturbé ainsi

#### DÉFINITION 1

Soit  $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$  le problème exact et  $\mathbf{f}_p$  une perturbation imposée considérée comme constante, on notera alors le problème perturbé

$$\mathbf{R}_p(\mathbf{U}) = \mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{f}_p = 0$$

□

avec le vecteur de perturbation  $\mathbf{f}_p$  pouvant provenir de sources diverses. En résumé des lignes qui précèdent, on distinguera les sources de perturbations suivantes :

1. Perturbations dues à l'imprécision de la méthode de résolution numérique (erreur de résolution).
2. Perturbations ajoutées intentionnellement (voir plus loin).

En pratique, la perturbation due à l'erreur de résolution est maîtrisable à l'aide du choix approprié du seuil de précision de calcul. En ce qui concerne la perturbation intentionnelle, celle-ci servira à la méthode de branchement.

### 1.3.3 Méthode de branchement

Lors de la phase de continuation, la rencontre avec un point de bifurcation et le choix de la direction à prendre (aller tout droit, tourner à gauche ou à droite), se nomme *branchement*. On distingue deux grandes classes de méthodes de branchements,

- *Les méthodes basées sur la théorie de la bifurcation*. Elles reposent sur un calcul précis du point de bifurcation et des tangentes au point de bifurcation. On peut utiliser une fonction *indicatrice* scalaire dont le signe change lors de la traversée de la bifurcation. On pourra prendre par exemple

$$I(\mathbf{U}) = \det\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}}\right)$$

et utiliser une méthode dichotomique pour trouver le point de bifurcation. Une fois situé sur ce dernier, l'étude du noyau de  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}}$  donne les tangentes utilisées pour faire des prédictions des branches bifurquées.

Une autre approche consiste à chercher directement le point de bifurcation

$$\mathbf{P}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) & = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{V} & = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

à l'aide d'un système augmenté, où  $\mathbf{V}$  est le vecteur propre de valeur propre nulle.

- *Les méthodes de perturbation*. Celles-ci consistent à ajouter une perturbation dans le système afin de transformer une bifurcation exacte en quasi-bifurcation et à cheminer ensuite sur la branche perturbée pour passer le point de bifurcation.

Les méthodes basées sur la théorie de la bifurcation sont généralement complexes et nécessitent un développement important. Elles fournissent cependant des informations quantitatives et fiables (nombres de branches se coupant au point de bifurcation, donnent explicitement les tangentes). D'un autre côté, les méthodes de branchement par perturbation sont extrêmement simples à mettre en oeuvre mais sont peu fiables lorsqu'elles sont utilisées avec la méthode de Newton-Raphson. En effet, la phase prédiction n'est pas adaptée à la continuation d'une zone de forte courbure, comme le montre la figure 1.3 page 17. Un des objectifs de ce mémoire est de redécouvrir cette méthode de branchement au travers de la conception d'un outil à base de MAN, donc plus à l'aise au passage des fortes courbures. On montrera dans le chapitre suivant comment contrôler le comportement de branchement de la MAN avec l'ajout intentionnel d'un vecteur de perturbation allié aux choix appropriés des seuils de résolution.

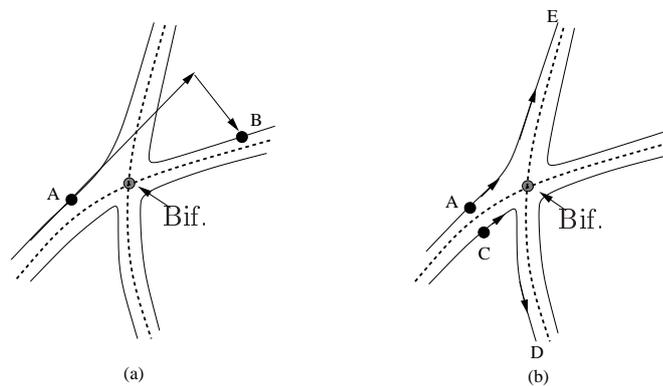


Figure 1.3 – Passage d'une bifurcation par Newton-Raphson (a) et la MAN (b). La méthode de Newton-Raphson présente le défaut important de sauter les points de bifurcation lorsque la longueur de pas  $\Delta a$  est trop grande par rapport au type de bifurcation (voir figure 1.3 page 17). En effet, il se peut que celle-ci, en effectuant des pas trop grands par rapport à la courbure de la branche située près du point de bifurcation ignore celui-ci en le sautant purement et simplement. La MAN par contre, en adaptant sa longueur de pas, tournera systématiquement aux points de bifurcations même si la courbure de la branche est importante.

## 1.4 Bilan du chapitre

On a présenté dans ce chapitre un cadre applicatif à travers une formulation en  $\mathbf{U}$  et au travers des hypothèses du théorème des fonctions implicites. Sauf indication contraire, on conviendra pour la suite du mémoire que les systèmes d'équations non linéaires étudiés satisferont les hypothèses du théorème. Dans les autres cas (voir seconde partie du mémoire), on vérifiera explicitement la surjectivité de l'application tangente de la fonction résidu du problème étudié.

On a rappelé et comparé ensuite deux méthodes de continuation de branches de solutions. On choisira pour la suite la méthode de continuation MAN pour son meilleur comportement au niveau des points de bifurcations et on choisira la méthode de Newton-Raphson lors de la phase de correction pour sa simplicité de mise en oeuvre et son utilité pour la phase de débogage.

On a enfin rappelé le phénomène de perturbation et son implication sur les branches de solutions et notamment sur son effet au niveau des points de bifurcations.



## Quelques apports autour de la méthode asymptotique numérique

**C** e chapitre propose quelques apports autour de la MAN, qui permettent une avancée dans le contrôle de son comportement au niveau des points de bifurcations. On présente ensuite un outil de continuation qui intègre ces nouvelles fonctionnalités de contrôle.

PLAN DU CHAPITRE 2

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Analyse du comportement de la MAN et pilotage</b>	<b>21</b>
2.2.1	Loin des points de bifurcation	21
2.2.2	A proximité d'un point de bifurcation	22
2.2.3	Proposition de pilotage	23
2.2.4	Complément pour les points de quasi-bifurcation	25
<b>2.3</b>	<b>Conception de l'outil numérique</b>	<b>26</b>
2.3.1	Formulation et mise en donnée	27
2.3.2	Structuration	28
2.3.3	Intégration du branchement par perturbation	28
2.3.4	Intégration du saut tangent	29
2.3.5	Extensions aux systèmes réguliers quelconques (non rationnels)	29
<b>2.4</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>31</b>

---

## 2.1 Introduction

Le chapitre précédent consistait à rappeler quelques propriétés importantes des systèmes non linéaires ainsi que les méthodes de continuations numériques permettant d'obtenir leur solutions. On se fixe maintenant pour objectif de présenter le travail effectué pendant la thèse, relatif au contrôle du branchement et à la conception d'un outil de continuation à base de MAN. Il s'agit de rendre interactive la phase de calcul en contrôlant notamment le cheminement de la MAN à travers le choix des directions de branchements à chaque points de bifurcations. L'idée motrice est d'allier la simplicité du principe de branchement par perturbation avec la robustesse de la MAN au service d'une interface graphique contrôlable à la souris, ce qui constitue en soit une première.

Les connaissances liées au comportement de la MAN au passage des points de bifurcations n'étant pas complètes, on s'essayera dans un premier temps de les affiner. On présentera brièvement ensuite les points forts de la phase de conception de l'outil de continuation, on s'attardera notamment sur le système de branchement ainsi que sur un système de saut tangent permettant de traverser les points de quasi-bifurcation. On n'effectuera pas de description exhaustive des fonctionnalités de l'outil, cette description étant consultable dans la documentation utilisateur ARQUIER (2004).

## 2.2 Analyse du comportement de la MAN et pilotage

L'objectif de cette section est d'étudier le comportement de la MAN lors de la continuation des branches et tout particulièrement aux passages des points de bifurcations et de quasi-bifurcations. On souhaite pouvoir affiner les connaissances relatives à l'évolution de la norme du résidu et de la norme d'erreur sur les solutions elles-mêmes lors du calcul des branches (augmentation des erreurs d'un pas de MAN au suivant). On souhaite aussi prédire, en vue de pouvoir contrôler, le comportement de branchement de la MAN au niveau d'un point de bifurcation.

### 2.2.1 Loin des points de bifurcation

Il s'agit donc dans un premier temps d'étudier l'évolution puis l'influence des erreurs de résolution (norme du résidu) sur les résultats de calculs lors de la continuation d'une branche par la MAN, à la suite d'une correction de Newton-Raphson et loin d'une bifurcation.

Soit  $\mathbf{U}_0$  le point obtenu après une correction de Newton-Raphson, on a

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}_0)\| < \epsilon_{nr}. \quad (2.1)$$

Rappelons ensuite que d'un pas de MAN à un autre on a

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^{j+1}) - \mathbf{R}(\mathbf{U}^j)\| < \epsilon_{man} \quad (2.2)$$

ainsi, après plusieurs pas de la MAN, les erreurs dues aux imprécisions de (2.1) et de (2.2) s'accumulent. On a donc <sup>(1)</sup> après une correction de Newton-Raphson et  $j$  pas de MAN,

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^j)\| < \epsilon_{nr} + j\epsilon_{man} \quad (2.3)$$

ce qui constitue un premier résultat donnant une borne maximale sur la norme des résidus. Notons que cette borne n'implique pas une croissance linéaire en  $j\epsilon_{man}$  de la norme du résidu.

---

(1). Soit  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  3 vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| < \epsilon_1$  et si  $\|\mathbf{C} - \mathbf{B}\| < \epsilon_2$  alors  $\|\mathbf{C} - \mathbf{A}\| < \epsilon_1 + \epsilon_2$ .

En pratique, on constate plutôt une évolution croissante, puis une évolution stationnaire telle que

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^j)\| \approx \epsilon_{nr} + \hat{k}\epsilon_{man} \quad (2.4)$$

avec  $\hat{k}$  souvent proche de la valeur 10.

### 2.2.2 A proximité d'un point de bifurcation

Plaçons nous maintenant au voisinage d'un point de bifurcation. L'objectif est de déterminer le comportement de la MAN au passage d'un point de bifurcation en fonction de l'intensité de la perturbation (due à une erreur de résolution ou ajoutée intentionnellement) et en fonction du seuil de résolution  $\epsilon_{man}$ . Pour cela, nous reprenons le système à une équation et deux inconnues déjà exposé dans BAGUET et COCHELIN (2003),

$$R(\mathbf{U}) = R(x,y) = x(1-y) = 0$$

dont l'ensemble de solution est constitué des deux droites  $x = 0$  et  $y = 1$  qui s'intersectent au point de bifurcation exacte  $(0,1)$ .

Plaçons nous maintenant dans le contexte de calcul des pas de la MAN, en considérant que le pas précédent de calcul ( ou plus généralement une correction de Newton-Raphson ) ai placé le point de sortie au voisinage de l'origine, ou plus précisément, au point  $\mathbf{U}^j = (x^j, y^j)$ , avec  $x^j \approx 0$  et  $y^j \approx 0$ . En sortie de ce pas de calcul, le résidu sera donc égal à

$$R(\mathbf{U}^j) = R(x^j, y^j) = x^j(1-y^j) = f_p$$

on notera  $f_p$  la valeur de  $R(\mathbf{U}^j)$ . D'après (1.11) page 12, on sait que le résidu  $\mathbf{R}(\mathbf{U}^j)$  qui est du à l'imprécision de la valeur du pas de sortie  $\mathbf{U}^j$  est conservée car seul les résidus d'ordre supérieurs sont annulés (voir équation (1.12) page 12). Cela revient à dire que pour le pas suivant, la MAN ne résout pas le problème exact mais le problème perturbé

$$R_p(x,y) = R(x,y) - R(\mathbf{U}^j) = x(1-y) - f_p = 0 \quad (2.5)$$

précisons que ceci est vrai même si l'on ne se trouve pas au voisinage d'un point de perturbation.

Intéressons nous maintenant à la solution du problème perturbé (2.5) au voisinage du point d'origine qui peut se réécrire à l'aide d'une série entière comme il suit

$$x = \frac{f_p}{1-y} = f_p(1+y+y^2+y^3+\dots) = f_p \sum_{p=0}^{\infty} y^p$$

La MAN utilisant une série tronquée à l'ordre  $N$ , on limitera de même notre série entière de la même manière

$$x_N = f_p \sum_{i=0}^N y^i$$

en réinjectant ensuite l'expression de  $x_N$  dans le problème perturbé 2.5, on obtient

$$\begin{aligned} R_p(x_N, y) &= f_p(\sum_{i=0}^N y^i)(1-y^i) - f_p \\ &= f_p(1-y^{N+1}) - f_p \\ &= -f_p y^{N+1} \end{aligned}$$

Enfin, pour déterminer le domaine de validité de la série tronquée, on utilise le critère (1.16) page 13, soit dans notre cas

$$|R(x_N, y) - R(\mathbf{U}^j)| = |R_p(x_N, y)| = |-f_p y^{N+1}| < \epsilon_{man}$$

on a donc

$$y_{max} = \left( \frac{\epsilon_{man}}{|f_p|} \right)^{\frac{1}{N+1}}$$

Selon la valeur du rapport  $\frac{\epsilon_{man}}{|f_p|}$  le point de sortie du nouveau pas se trouvera avant ou après le point de bifurcation

- Cas  $\frac{\epsilon_{man}}{|f_p|} < 1$  : le point de sortie se trouvera avant le point de bifurcation. Dans ce cas, la série "détecte" le point de bifurcation et s'arrête avant. Le pas suivant sera donc initié juste avant le point de bifurcation et sera aussi solution du problème perturbé. Ce nouveau pas se stoppera alors une nouvelle fois avant la bifurcation. Le scénario se répétera ainsi pour plusieurs pas de calculs, ce qui entraînera le branchement de la procédure sur la branche bifurquée (la branche tournera à droite ou à gauche du point de bifurcation).
- Cas  $\frac{\epsilon_{man}}{|f_p|} > 1$  : le point de sortie se trouvera après le point de bifurcation. Dans ce cas, on peut dire que la série "ne voit" pas le point de bifurcation (elle passe au travers). Le point suivant, qui sera initié après le point de bifurcation, continuera dans la direction des  $y$  positifs parallèlement à l'axe des ordonnées. Ce scénario se répétera ainsi pour plusieurs pas de calculs, ce qui entraînera la MAN à traverser le point de bifurcation.

#### REMARQUE 1

De l'équation (2.4) page 22, on peut déduire qu'après un nombre suffisant de pas de MAN, on a

$$|f_p| \approx \epsilon_{nr} + \hat{k}\epsilon_{man}$$

et dans ces conditions on aura  $\frac{\epsilon_{man}}{|f_p|} < 1$ . On se trouvera dans le cas où la procédure de continuation "tourne" au niveau d'un point de bifurcation. Ce type de comportement correspond à celui de la MAN "basique" détectant et tournant presque systématiquement aux points de bifurcation.  $\square$

De ces résultats on peut en tirer une méthode de contrôle du comportement de la MAN au niveau d'un point de bifurcation en rappelant tout de même que les résultats de cette étude sont seulement basés sur cet exemple à une équation et deux inconnues.

### 2.2.3 Proposition de pilotage

#### Tourner au point de bifurcation :

Pour tourner à un point de bifurcation il faudra augmenter au maximum la norme de la perturbation due au résidu de calcul. Pour cela on pourra simplement laisser la MAN dévier de la branche exacte en augmentant le résidu de calcul (faisant l'office d'une perturbation), ce qui correspond au comportement de la MAN "basique". Cependant, il faut remarquer que cette déviation n'est pas garantie : Il se peut très bien que la MAN reste proche de la branche exacte ( $|f_p|$  resterait petit). Pour obliger la MAN à dévier de la branche exacte, on pourra ajouter intentionnellement une perturbation dont la norme sera contrôlée par l'utilisateur. Ainsi

en choisissant de plus un seuil  $\epsilon_{man}$  petit, on pourra garantir la validité de l'inéquation  $\frac{\epsilon_{man}}{|f_p|} < 1$  et forcer la MAN à tourner au point de bifurcation.

### Traverser un point de bifurcation :

Pour traverser un point de bifurcation il faudra,

1. diminuer au maximum la norme de la perturbation due au résidu de calcul. Pour cela on pourra effectuer une correction avant le passage du point de bifurcation pour annuler le résidu de calcul (en choisissant un seuil de correction  $\epsilon_{nr}$  petit).
2. annuler une éventuelle perturbation intentionnelle,
3. choisir un seuil  $\epsilon_{man}$  grand afin de garantir la validité de l'inéquation  $\frac{\epsilon_{man}}{|f_p|} > 1$

### Choisir le sens de branchement :

On a vu précédemment comment l'ajout d'une perturbation combiné à une valeur bien choisie du seuil de calcul  $\epsilon_{man}$  permettait de tourner au point de bifurcation. Pour aller encore plus loin dans le contrôle de la continuation par la MAN, les lignes suivante montrent comment choisir le sens de branchement <sup>(2)</sup>.

Par une étude au premier ordre, on pourrait montrer que le fait de changer le signe du vecteur de perturbation à pour effet de "symétriser" le point perturbé par rapport à la branche exacte (voir figure 2.1 page 24).

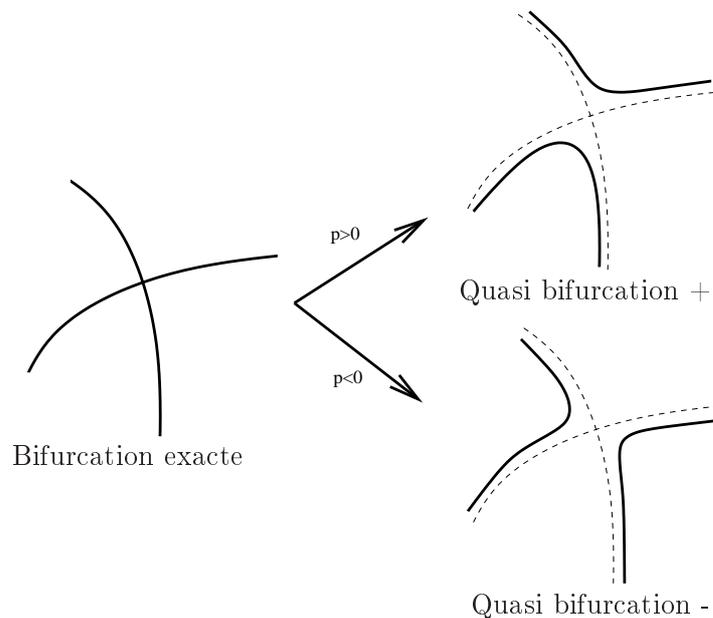


Figure 2.1 – Le fait de changer le signe du vecteur de perturbation à pour effet de symétriser la branche perturbée par rapport à la branche exacte

Il est alors possible d'utiliser le scénario suivant pour bifurquer dans une direction choisie (voir figure figure 2.2 page 25)

1. Se trouvant sur la branche exacte avant une bifurcation, on ajoute une perturbation dans le système.

(2). En d'autres termes comment tourner "à droite" ou "à gauche"

2. On lance un algorithme de correction pour rejoindre la branche perturbée.
3. Si l'on se trouve du "bon côté" on continue, sinon on change le signe de la perturbation et on reprend au point 2.
4. On calcule une partie de la branche perturbée de façon à traverser la bifurcation.
5. On retire la perturbation.
6. On lance à nouveau un algorithme de correction pour rejoindre la branche exacte bifurquée que l'on voulait atteindre.

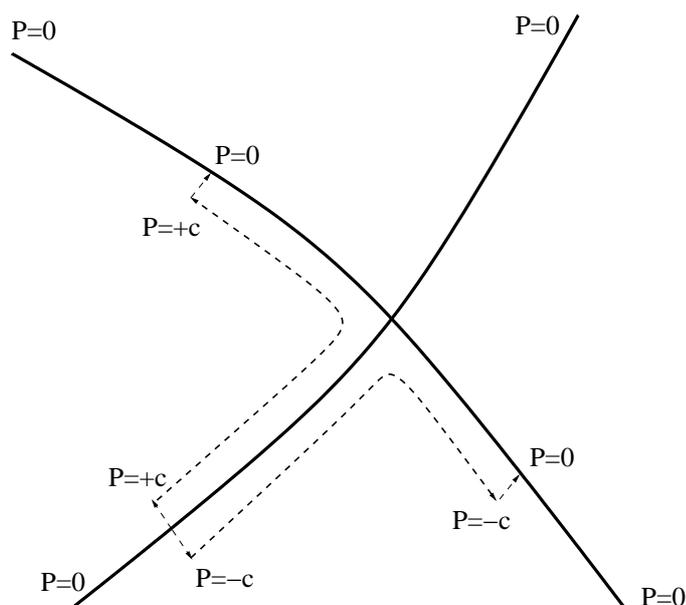


Figure 2.2 – En combinant différentes phases de corrections, de calculs de branches et d'ajout de perturbation, on arrive à choisir la direction de branchement au niveau d'un point de bifurcation.

Le scénario de branchement par perturbation qui est décrit ici n'est pas nouveau et à déjà été présenté dans ALLGOWER et GEORG (1990). La nouveauté réside dans l'utilisation conjointe de cette méthode de branchement avec la MAN au lieu d'une méthode de prédiction-corrrection classique. Ceci a pour effet d'éliminer les problèmes de saut intempestifs (déjà présentés dans la figure 1.3 page 17) et d'améliorer radicalement la robustesse de la procédure en la rendant réellement viable.

#### 2.2.4 Complément pour les points de quasi-bifurcation

La perturbation définissant l'aspect du point de quasi-bifurcation est intrinsèque au problème et indépendante des seuils et des méthodes de résolution. Par conséquent, l'utilisateur de la méthode de continuation n'aura aucun moyen<sup>(3)</sup> pour agir sur la "norme" et l'influence de la perturbation. D'autre part, l'ajout d'une perturbation intentionnelle supplémentaire permet rarement l'augmentation du rayon de courbure des branches en ces points et encore moins sa diminution (en vue d'une très hypothétique transformation du point de quasi-bifurcation en un point de bifurcation exacte).

(3). autre bien sûr que de modifier le problème lui même ou de modifier les paramètres de discrétisation responsables de la dégénérescence d'une bifurcation exacte.

Lorsque la perturbation intrinsèque sera suffisamment importante (c'est à dire lorsque que les résidus de résolution sont négligeables par rapport à la perturbation), la courbe solution créée par la quasi-bifurcation aura un rayon de courbure important, ce qui ne posera alors aucun problème pour la MAN qui suivra la courbe solution et bifurquera (tournera) sans aucune difficulté. Pour aller tout droit dans ce même cas, le seul moyen sera d'utiliser une méthode de saut tangent. Cette méthode, revient à effectuer une prédiction puis une correction de Newton-Raphson à la différence près que la norme du pas de prédiction devra être contrôlée afin que le point de départ et le point d'arrivée soient situés de part et d'autre du point de bifurcation. La méthode de saut tangent, sera présenté en détail dans la section suivante.

Lorsque la perturbation intrinsèque est faible (c'est à dire lorsque les résidus de résolution sont du même ordre ou supérieurs à la norme de la perturbation), des précautions sont à prendre. Pour tourner, on pourra soit résoudre les équations très précisément (choisir  $\epsilon_{man}$  très petit) au pris d'un patinage<sup>(4)</sup> de la MAN, soit considérer le point de quasi-bifurcation comme un point de bifurcation exacte et appliquer les méthodes décrites précédemment. Pour aller tout droit, l'expérience montre que le saut tangent est la solution la plus viable.

## 2.3 Conception de l'outil numérique

On a vu précédemment comment le choix des paramètres de continuation combinés à l'action contrôlée d'une perturbation permettaient de maîtriser le cheminement du calcul des branches solutions en tournant "à gauche" ou "à droite" ou bien en allant tout droit au niveau de chaque points de bifurcation. Ceci constituait une première étape théorique dans l'objectif d'une conception d'un outil numérique capable de calculer de manière interactive les branches de solutions d'un problème donné.

La seconde étape consistait à concevoir l'outil lui même et à intégrer cette méthode de branchement en son sein. Il s'agissait aussi, d'apporter à cet outil les éléments rudimentaires d'une base de données dans laquelle se trouvait une liste de branches déjà calculées. L'accès à la base de données de branches, permet à l'utilisateur de se placer (à l'aide de clics de souris sur l'interface (voir figure 2.3 page 27) puis sur le graphique du diagramme) sur une branche précédemment calculée, de consulter/visualiser/sauvegarder les résultats, ou de relancer des calculs en sélectionnant des directions de branchements différentes de celles déjà choisies de façon à compléter le diagramme de solution de la manière voulue.

Un point important concernait la mise en donnée du problème par l'utilisateur. Cette mise en donnée était déjà facilitée par le langage de programmation choisi : l'environnement Matlab. En effet, le langage de l'environnement Matlab est un langage interprété<sup>(5)</sup> ce qui donne l'opportunité de définir le problème utilisateur à l'aide de simples fichiers textes contenant l'expression des équations. Il restait cependant à définir un cadre dans lequel l'utilisateur aurait le moins de travail à faire pour définir son problème tout en le concevant le plus ouvert possible de façon à ne pas limiter la portée d'utilisation.

Le dernier point fut la rédaction d'une documentation utilisateur (ARQUIER (2004)), permettant l'utilisation de l'outil par une personne non initiée directement. Les grandes lignes de la documentation (40 pages) sont décrites ci dessous :

– Introduction

---

(4). Le "patinage" est le mot utilisé lorsque la MAN effectue de très petits pas, lorsqu'elle se trouve tout près d'un point de bifurcation, ou plus généralement lorsqu'elle se trouve sur une zone ayant un très fort rayon de courbure.

(5). Le code source est exécuté sans qu'une compilation explicite soit nécessaire.

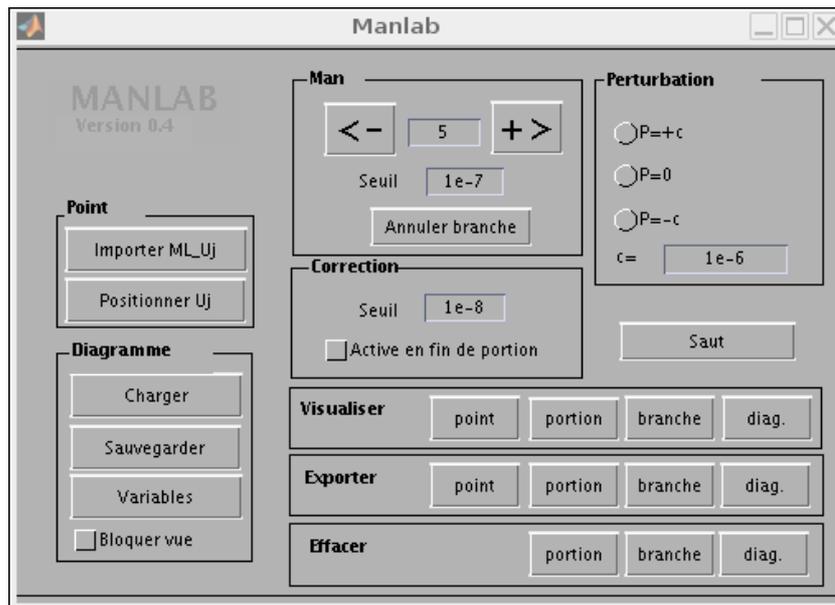


Figure 2.3 – Interface utilisateur de Manlab.

- Prérequis
- Type de problèmes traités
- Installation
- Démarrage rapide
- Mise en donnée
- Interface
- Affichage utilisateur
- Éléments théoriques
- Exemples

Dans cette section, on reviendra rapidement sur les points méritant le plus d'attention, à savoir la formulation choisie pour la mise en donnée du problème, la structuration du code, l'intégration du branchement par perturbation, et l'intégration du saut tangent.

### 2.3.1 Formulation et mise en donnée

L'algorithme de résolution de la MAN contient notamment l'étape de calcul des termes de séries. Selon la forme du système d'équation, l'écriture de l'algorithme de calcul de ces termes peut être très complexe. Cependant, la forme quadratique

$$\mathbf{R} = \mathbf{L0} + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{L0}$  un vecteur constant,  $\mathbf{L}(\mathbf{U})$  une forme linéaire,  $\mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$  une forme bilinéaire, qui peut paraître restrictive au premier abord, permet une écriture simple des seconds membres de l'équation (1.13) page 12 :

$$\mathbf{F}_p^{nl} = - \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{Q}(\mathbf{U}^r, \mathbf{U}^{p-r}) \quad (2.7)$$

où  $F_p^{nl}$  dépend uniquement des vecteurs aux ordres précédents (ordres 1 à  $p - 1$ ), ce qui permet le calcul des ordres suivants de manière séquentielle selon un algorithme très simple et facile à mettre en oeuvre numériquement.

Bien entendu, cette forme quadratique ne permet pas d'exprimer tout types de systèmes d'équations (on ne pourra pas par exemple utiliser d'équations transcendantes). Cependant, on peut montrer que tout problème rationnel ( et donc aussi polynomial) peut se transformer en problème quadratique à l'aide d'un ajout de variables intermédiaires et par l'ajout d'un nombre égal d'équation, ce qui diminue considérablement la limitation présupposée de la forme quadratique.

En respect de sa simplicité de mise en oeuvre et de son cadre applicatif relativement important, cette forme quadratique est utilisée dans la majorité des applications de la MAN et notamment dans COCHELIN et PERIGNON (2004). Malgré ses restrictions, cette forme fut donc choisie pour définir le cadre d'utilisation de Manlab. Ainsi, pour définir son problème, l'utilisateur doit écrire les 3 fonctions  $L0$ ,  $L(U)$  et  $Q(U,U)$  dans 3 fichiers textes différents et les placer dans un même répertoire (voir ARQUIER (2004) pour plus de détails) et Manlab se charge de tout le reste pour la résolution (calcul automatique de la matrice tangente, du résidu, de la correction, du calcul des termes de séries, etc...).

### 2.3.2 Structuration

Afin de ne pas se limiter au cadre défini précédemment, les spécificités de la programmation orienté objet ont été utilisés. La mise en donnée s'effectue au travers d'une dérivation d'une classe de base définissant un cadre strict. Cependant la surcharge autorise la modification des procédures standards de cette classe de base. Par exemple, la classe de base contient la procédure de calcul automatique de la matrice tangente par l'intermédiaire des fonctions surchargées de l'utilisateur  $L0$ ,  $L(U)$  et  $Q(U,U)$ . Dans le cas où le nombre d'équations devient très important, le calcul automatique de la matrice tangente par cette procédure peut devenir lent. Ainsi la surcharge autorise le remplacement de la procédure standard par une autre procédure plus rapide, écrite par l'utilisateur. Il en va de même pour la procédure de calcul des termes de séries. En effet, libre à l'utilisateur d'écrire sa propre procédure de calcul de termes de série, voire même son propre type de formulation (pas forcément quadratique). Dans ce dernier cas, seules l'interface graphique et la base de données de Manlab sont utilisées lors de la résolution du problème, le reste étant entièrement écrit par l'utilisateur, ce qui constitue un gage d'ouverture de l'application.

### 2.3.3 Intégration du branchement par perturbation

Le système de branchement est réalisé par l'ajout d'une perturbation dont l'intensité et le sens sont contrôlés par l'utilisateur. Soit

$$R(U) = 0 \tag{2.8}$$

le problème utilisateur défini par les formes  $L0$ ,  $L(U)$  et  $Q(U,U)$ , Manlab résout le problème perturbé

$$R_p(U) = R(U) + cP \tag{2.9}$$

où  $c$  est un scalaire dont la valeur est accessible dans l'interface utilisateur et  $P$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont les composantes sont choisies aléatoirement mais de telle sorte que  $\|P\| = 1$ . Ajoutons que la valeur de  $c$  est nulle par défaut et qu'à chaque chargement du problème, le générateur aléatoire de Matlab est initialisé systématiquement avec la même graine de sorte que le problème perturbé soit toujours le même.

### 2.3.4 Intégration du saut tangent

Lorsque le calcul d'un certain nombre de branche est effectué, l'utilisateur peut déplacer le point courant de calcul (le point  $U^j$ ) sur n'importe quelle branche contenue dans la base de données. Il est alors possible de se placer juste avant une bifurcation ou une quasi bifurcation et d'enclencher la procédure de saut tangent. Dans la procédure normale comme dans la procédure de saut tangent, une flèche est tracée au niveau du point courant représentant la tangente à la courbe projetée dans l'espace écran. La procédure de saut tangent se passe alors comme il suit,

1. l'utilisateur pointe à la souris la zone "d'atterrissage" souhaité (fin de saut), notons les coordonnées dimensionnelles de ce point  $(x_f, y_f)$ ,
2. soit  $(x, y)$  les deux coordonnées visibles du point courant et  $(\Delta_x, \Delta_y)$  les deux coordonnées visibles du vecteur tangent, on calcule le produit scalaire

$$p = (x - x_f)\Delta_x + (y - y_f)\Delta_y$$

pour calculer le point de fin de saut

$$U^f = U^j + \frac{p}{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} \Delta U^j$$

. Le terme  $\frac{1}{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$  normalise le vecteur  $(\Delta_x, \Delta_y)$  d'une part et le vecteur  $\Delta U^j$  par les seules coordonnées visibles du vecteur tangent afin que le point de fin de saut soit effectivement situé sur la zone pointé par l'utilisateur.

3. le point  $U^f$  est ensuite corrigé par la méthode Newton-Raphson afin de revenir sur la courbe.

### 2.3.5 Extentions aux systèmes réguliers quelconques (non rationnels)

Comme dit précédemment, les systèmes d'équations polynomiaux et rationnels peuvent se transformer sous forme quadratique à l'aide d'un ajout suffisant d'inconnues et d'équations. Mais lorsque les systèmes comportent des fonctions transcendentes (fonctions exponentielles, logarithmes, trigonométriques, hyperboliques, etc...) la transformation quadratique est un peu plus complexe. Cependant, on peut toujours calculer efficacement les séries en utilisant la méthode décrite dans l'ouvrage très complet sur la MAN COCHELIN *et al.* (2007) et rappelée ici sur un exemple :

Soit

$$\mathbf{R}(u_1, u_2, \lambda) = \begin{cases} u_1 + \lambda e^{u_2} = 0 \\ \tan(u_2) + u_1 u_2 = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

le problème à résoudre, en introduisant

$$\begin{cases} u_3 = e^{u_2} \\ u_4 = \tan(u_2) \\ u_5 = 1 + u_4^2 \end{cases} \quad (2.11)$$

et en différentiant les 2 premières équations par rapport au paramètre de chemin  $a$ , on réécrit le

système sous forme quadratique

$$\mathbf{R}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \lambda) = \begin{cases} u_1 + \lambda u_3 = 0 \\ u_4 + u_1 u_2 = 0 \\ u_5 = 1 + u_4^2 \\ \frac{du_3}{da} = u_3 \frac{u_2}{da} \\ \frac{du_2}{da} = u_5 \frac{u_4}{da} \end{cases} \quad (2.12)$$

Pour la résolution de tels systèmes, Manlab fournit un formalisme assez similaire à celui présenté en 2.3.1. Son utilisation passe par le remplacement des fonctions transcendantes par de nouvelles variables et l'ajout de nouvelles équations comportant leurs dérivées. Il suffit ensuite de fournir les fonctions habituelles quadratiques  $\mathbf{L0}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{Q}$ , et 3 nouvelles,  $\mathbf{Lh}$ ,  $\mathbf{Qh}$  et  $\mathbf{f}$  pour traduire les équations qui contiennent des termes en  $\frac{d}{da}$ . L'utilisation ultérieure de l'interface reste par contre parfaitement similaire (un exemple nommé *circuit* est fourni dans la notice d'utilisation).

L'ajout de cette fonctionnalité ouvre le champs d'application de Manlab de manière considérable, en permettant la résolution de pratiquement tous les systèmes réguliers.

## 2.4 Bilan du chapitre

A l'issue de ce chapitre, on dispose des connaissances nécessaires au contrôle de la continuation de branches. Il est désormais possible de choisir la direction de branchement à chaque points de bifurcations (avec la méthode de perturbation) et à chaque points de quasi-bifurcation (avec la méthode de saut tangent). Enfin, on dispose d'un outil facile d'accès et ouvert intégrant ces fonctionnalités. Il s'agit maintenant de mettre ce dernier à l'épreuve.



---

## Manlab à l'épreuve

**C** *e chapitre présente deux exemples d'application de l'outil de continuation.*

PLAN DU CHAPITRE 3

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>35</b>
<b>3.2</b>	<b>Système à deux inconnues</b>	<b>35</b>
3.2.1	Mise en donnée	35
3.2.2	Lancement du programme	36
<b>3.3</b>	<b>Flambement de structures discrétisées par éléments finis</b>	<b>38</b>
3.3.1	Module du problème de statique	38
3.3.2	Module du modèle élément finis	39
3.3.3	Bibliothèque de fonctions élémentaires DKT	39
3.3.4	Cas d'étude du flambement d'une plaque	40
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>

---

## 3.1 Introduction

On présente dans ce chapitre deux exemples d'application de Manlab. Le premier exemple d'application consiste à montrer en détail le déroulement de la mise en donnée d'un problème simple à travers une reformulation quadratique et l'écriture de fonctions clefs. Le second exemple, plus poussé, s'applique sur des structures modélisées par éléments finis. Les objectifs sont d'une part de montrer que Manlab est adapté à la résolution de problèmes ayant un grand nombre de degrés de liberté, et d'autre part à présenter rapidement un module éléments finis indépendant (MODELEEF) implémenté et testé pour les besoins de la seconde partie du mémoire.

## 3.2 Système à deux inconnues

Le premier problème d'illustration est à une équation et deux inconnues. Il s'agit de deux paraboles se coupant en deux points de bifurcations.

$$R(U) = R([x,y]^T) = (x - y^2)(y - (x - 2)^2) + a \quad (3.1)$$

avec  $a$  une constante. Le problème est à l'origine un problème d'ordre 4 en  $x$  et  $y$ , mais en posant  $v = x - y^2$  et  $w = y - (x - 2)^2$ , on peut se ramener à un problème quadratique à 3 équations. Ainsi,  $R(U)$  se réécrit

$$\mathbf{R}(U) = \mathbf{R}([x,y,v,w]^T) = \begin{cases} vw + a & = 0 \\ x - v - y^2 & = 0 \\ 4 - 4x + w - y + x^2 & = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Qui est de la forme quadratique

$$\mathbf{R}(U) = \mathbf{L0} + \mathbf{L}(U) + \mathbf{Q}(U,U) \quad (3.3)$$

avec

$$\mathbf{L0} = \begin{cases} a \\ 0 \\ 4 \end{cases}, \quad \mathbf{L}(U) = \begin{cases} 0 \\ x - v \\ -4x + w - y \end{cases}, \quad \mathbf{Q}(U1,U2) = \begin{cases} v_1w_2 \\ -y_1y_2 \\ x_1x_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

### 3.2.1 Mise en donnée

L'écriture des 4 fichiers suivants permet la mise en donnée complète du problème pour Manlab

—————Fichier QUADBIF.m :

```
function obj = QUADBIF(a)
% Creation de l'objet de base SYS
% Avec 3 equations, 4 inconnues.
sys = SYS(4);
% Creation de la structure de donnee partagée par les methodes de la classe
obj.a = a;
% Creation de la classe 'QUADBIF' avec la structure de donnee obj,
% et derivant de la classe SYS
obj = class(obj, 'QUADBIF', sys);
% U = [x, y , v, w]
```

—————Fichier L0.m :

```
function L0 = L0(obj)
L0 = zeros(3,1);
L0(1) = obj.a;
L0(2) = 0;
L0(3) = 4;
```

—————Fichier L.m :

```
function L = L(obj,U)
L = zeros(3,1);
L(1) = 0;
L(2) = U(1)-U(3);
L(3) = -4*U(1) + U(4) - U(2) ;
```

—————Fichier Q.m :

```
function Q = Q(obj,U1,U2)
Q = zeros(3,1);
Q(1) = U1(3) * U2(4);
Q(2) = -U1(2) * U2(2);
Q(3) = U1(1) * U2(1);
```

Il suffit ensuite de placer les 4 fichiers dans un même répertoire pour terminer la mise en donnée.

### 3.2.2 Lancement du programme

Le script ci dessous permet l'initialisation de Manlab en lui transmettant les données à traiter (problème, solution initiale, variables à afficher),

```
> manlabinit;
> ML_problem = QUADBIF(0);
> ML_Ustart = [2;sqrt(2);0;0];
> ML_dispvars = [1,2];
> manlabstart;
```

Lorsque le script est exécuté sous l'environnement Matlab, Manlab corrige la solution initiale et laisse la main à l'utilisateur. La manipulation de l'interface permet le lancement du calcul séquentiel de plusieurs tronçons de la MAN. Une fois la première parabole obtenue, l'ajout d'une perturbation et le choix approprié de la valeur de  $c$  et de celle de  $\epsilon_{man}$  permettent le passage vers l'autre parabole au niveau d'un des points de bifurcation (voir figure 3.1 page 37 et figure 3.2 page 37). Notons que la matrice tangente, nécessaire au calcul des termes de séries et pour la correction, n'a pas été explicitement définie. Cette tâche est remplie par une procédure intégrée dans la classe de base *SYS* de Manlab qui utilise la forme quadratique du problème pour construire séquentiellement chaque vecteur colonne de la matrice tangente à partir de vecteurs unitaires (voir COCHELIN et PERIGNON (2004)).

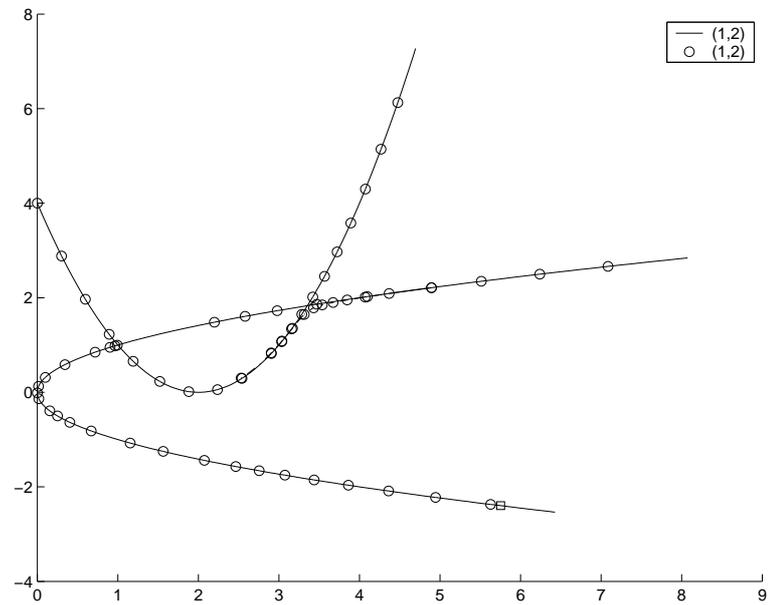


Figure 3.1 – Diagramme du problème QUADBIF. Le diagramme est constitué de deux paraboles qui s'intersectent en deux points de bifurcation.

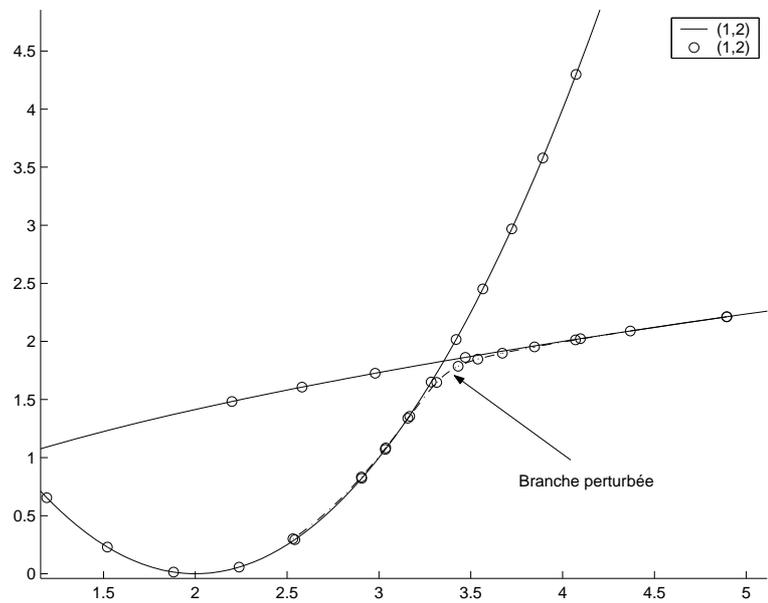


Figure 3.2 – Zoom sur le diagramme du problème QUADBIF. La branche perturbée a permis le passage d'une parabole à une autre.

### 3.3 Flambement de structures discrétisées par éléments finis

On présente ici un exemple d'application utilisant un modèle de structures discrétisées par éléments finis. Il s'agit d'illustrer les possibilités d'ouverture de l'application Manlab en montrant la faisabilité du calcul de solutions de problèmes possédant plusieurs milliers d'équations. Pour cela on a choisi un exemple typique en mécanique des structures non linéaires qui est celui du flambement sous charge. Par ailleurs, on présente aussi dans cette section un module pour modèle éléments finis avec MAN, utilisé pour ce problème du flambement sous charge, et qui sera réutilisé pour le problème de vibration de la seconde partie du mémoire.

On décrira donc successivement et brièvement dans cette section :

- Les fonctions niveau problème (module MODELEEFSTAT).
- Les fonctions élémentaires niveau modèle (module MODELEEF).
- Les fonctions élémentaires de calcul éléments finis (module EVEMATLABLIB).

chaque modules faisant partie de la structure décrite dans la figure 3.3 page 38.

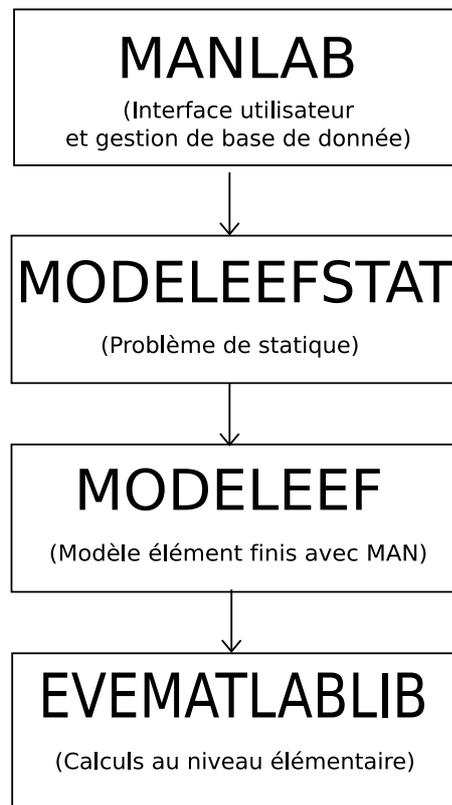


Figure 3.3 – Structure du programme de statique.

#### 3.3.1 Module du problème de statique

Le module MODELEEFSTAT, implanté sous la forme d'une classe (programmation orienté objet sous Matlab), concerne la mise en forme du problème de statique et contient notamment les fonctionnalités suivantes :

1. Définition du nombre d'équations et d'inconnues.

2. Calcul du résidu. Sans entrer dans les détails, que l'on pourra trouver dans DAMIL et POTIER-FERRY (1990) et dans AZRAR *et al.* (1993), la formulation classique du problème de statique,

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{q}) + \lambda \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$$

avec  $\mathbf{U} = [\mathbf{q}, \lambda]^T$ ,  $\mathbf{q}$  étant le vecteur contenant les degrés de liberté de la structure,  $\lambda$  étant le paramètre de charge,  $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{q})$  étant le vecteur des forces internes (non linéaire en  $\mathbf{q}$ ),  $\mathbf{F}_{ext}$  étant le vecteur des forces extérieures appliquées sur les noeuds, est remplacée par une forme quadratique de type

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \begin{cases} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\theta}) - \lambda \mathbf{F}_{ext} = 0 \\ \mathbf{S} - \mathbf{D}(\mathbf{H}_l + \frac{1}{2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})) \boldsymbol{\theta} = 0 \\ \boldsymbol{\theta} - \mathbf{G} \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

avec  $\mathbf{S}$  étant le vecteur des contraintes aux points de gauss, et  $\boldsymbol{\theta}$  étant le vecteur des gradients des déformations. Cette forme quadratique permet l'écriture d'un algorithme simple donnant les termes de série de la MAN.

3. Surcharge de la fonction de calcul automatique des termes de série, de la fonction de correction, et de la fonction de calcul de tangente en fournissant des versions adaptées et optimisées pour les modèles éléments finis non linéaires.

### 3.3.2 Module du modèle élément finis

La classe MODELEEF (modèle Éléments Finis), écrite aussi en langage Matlab, concerne la gestion du modèle éléments finis. Ses fonctions principales sont relatives à l'interprétation des fichiers de définition de modèle (géométrie + matériaux + chargement), au calcul de vecteur des forces internes, de construction de matrices de masse et de matrices tangentes au forces internes, ainsi qu'au seconds membres de la MAN. Ce module a été conçu de manière indépendante et évolutive, ainsi il a été réutilisé tel quel au sein du programme de continuation d'orbites périodique qui est décrit dans la seconde partie de ce mémoire. Il est donc envisageable de poursuivre le travail effectué pour en constituer un outil plus généraliste. On recense dans les lignes qui suivent les fonctions les plus importantes de cette classe :

1. Interprétation de fichiers de définition de modèle. La géométrie, les conditions aux limites, les matériaux ainsi que le chargement sont décrits dans des fichiers textes lus au moment de création de l'instance de la classe. Lors de la lecture du fichier, des listes contenant des structures de type matériaux, éléments finis, conditions aux limites, ainsi que des chargements sont créés et stockés.
2. Construction des indices des éléments non zéros de la matrice tangente des forces internes (cette fonction est utilisée une seule fois lors de l'initialisation du modèle).
3. Définition des valeurs des éléments non zéros de la matrice tangente des forces internes (cette fonction est utilisée pour chaque évaluation de la matrice) à partir des fonctions élémentaires de la bibliothèque décrite ci-dessous.
4. Assemblages des seconds membres de la MAN (Les *Fpnl*) et des parties non linéaires des contraintes (*Spnl*) à partir des fonctions élémentaires de la bibliothèque décrite ci-dessous.

### 3.3.3 Bibliothèque de fonctions élémentaires DKT

Cette bibliothèque concerne le calcul des données relatives à chaque élément-finis (Matrices de masse et matrice tangente, forces internes, second membres de séries et parties non linéaire

des contraintes). Elle consiste en une série de fonctions d'interfaces entre le langage Matlab et les fonctions élémentaires des éléments finis de type DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) du code EVE<sup>(1)</sup>. Ces fonctions sont écrites en Fortran 77 et sont compilées avec le module Matlab MEX<sup>(2)</sup>. Notons qu'un bon nombre des fonctions élémentaires de EVE ont été réécrites et intégrées dans les fonctions d'interfaces afin de palier à des problèmes d'incompatibilités (1400 lignes de nouveau code Fortran).

Cette bibliothèque étant elle aussi conçue de manière indépendante, elle pourra être utilisée pour d'autres projets. Sa documentation est fournie en annexe.

### 3.3.4 Cas d'étude du flambement d'une plaque

On présente ici un exemple d'application du programme de statique avec une plaque contrainte sur deux de ses bords (dimension  $100 \times 100 \times 5mm^3$ ). Le chargement est appliqué orthogonalement aux deux bords non contraints et ce de manière symétrique. La plaque, modélisée à l'aide de 200 éléments DKT, est présentée avec les points d'applications des forces et les conditions aux limites en figure 3.4 page 41.

La figure 3.5 page 42 montre un résultat de continuation de la branche fondamentale et de quelques branches bifurquées (modes de flambements). Après le lancement du script d'initialisation, le point initial est situé sur l'origine. A la suite du calcul de quelques tronçons, la branche fondamentale est obtenue sans intervention particulière. L'obtention des branches bifurquées passe par la méthode précédemment décrite : on replace le point courant de calcul près de l'origine (avant la première bifurcation), on ajoute une perturbation, on corrige, on calcule une portion de la branche perturbée, on enlève la perturbation, on recorrige, puis on continue sur la branche bifurquée exacte. Le scénario a été répété pour toutes les branches bifurquées de premier ordre et de second ordre. Le diagramme complet à nécessité approximativement 30 minutes de calcul.

---

(1). EVE est un code éléments finis pour le calcul de structure, développé en Fortran par des enseignants chercheurs, des doctorants ou des étudiants au cours de projets d'études. Il est essentiellement destiné à la recherche et à l'enseignement, il est capable de traiter des problèmes de calcul sur des structures réelles, avec un grand nombre de degré de liberté.

(2). L'outil MEX, fournis avec la distribution de Matlab, permet la compilation de bibliothèques de communication entre l'environnement Matlab et des routines écrites en Fortran

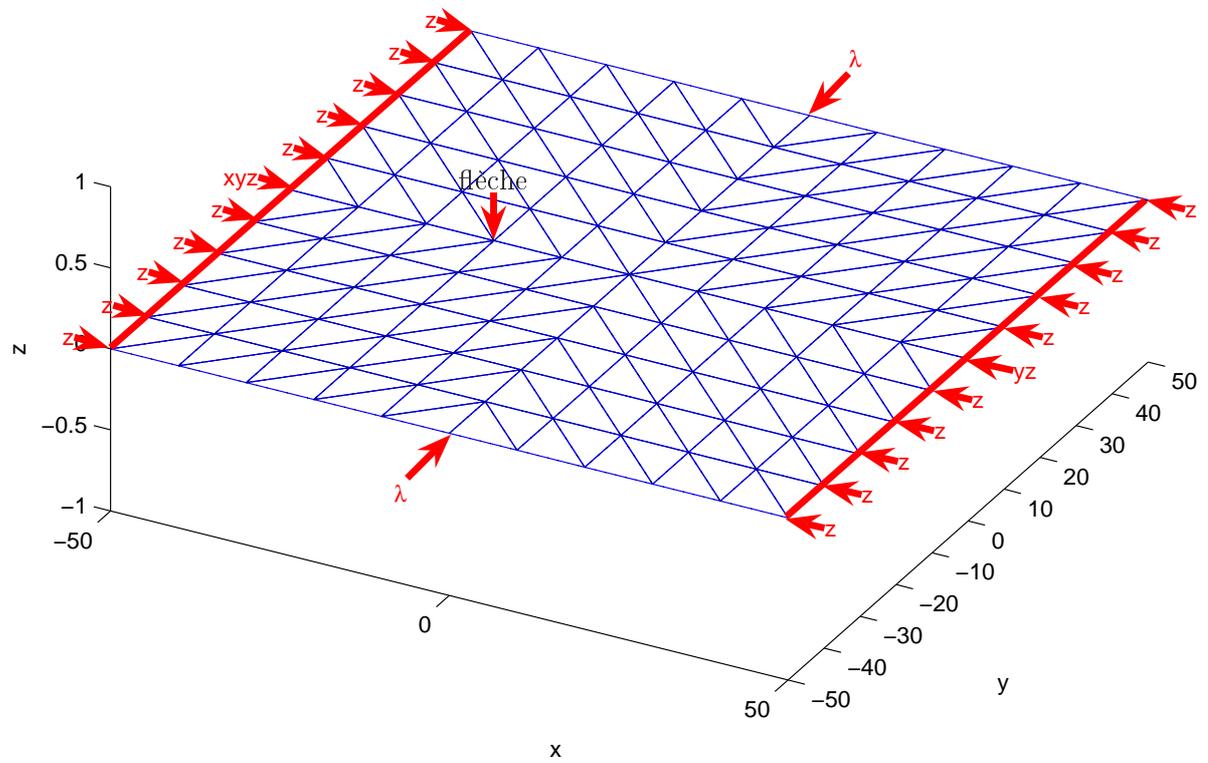


Figure 3.4 – *Plaque en position d'équilibre (force de flambement nulle).*

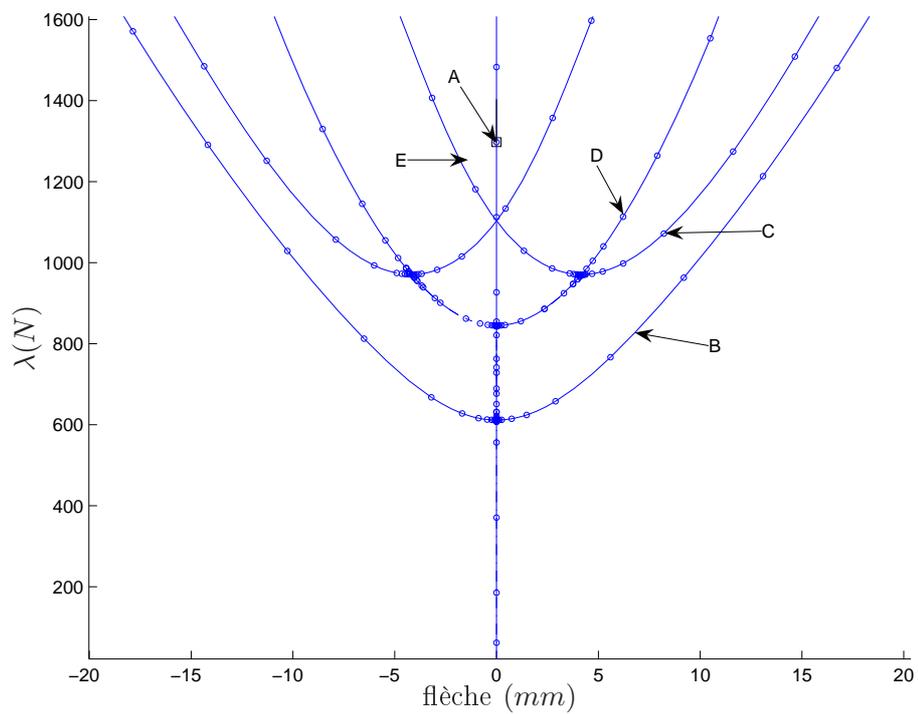


Figure 3.5 – Résultat de continuation de la branche fondamentale et de quelques branches bifurquées (modes de flambements). Intensité de la charge  $\lambda$  en fonction du déplacement selon  $z$  en un point particulier de la plaque (voir figure figure 3.4 page 41).

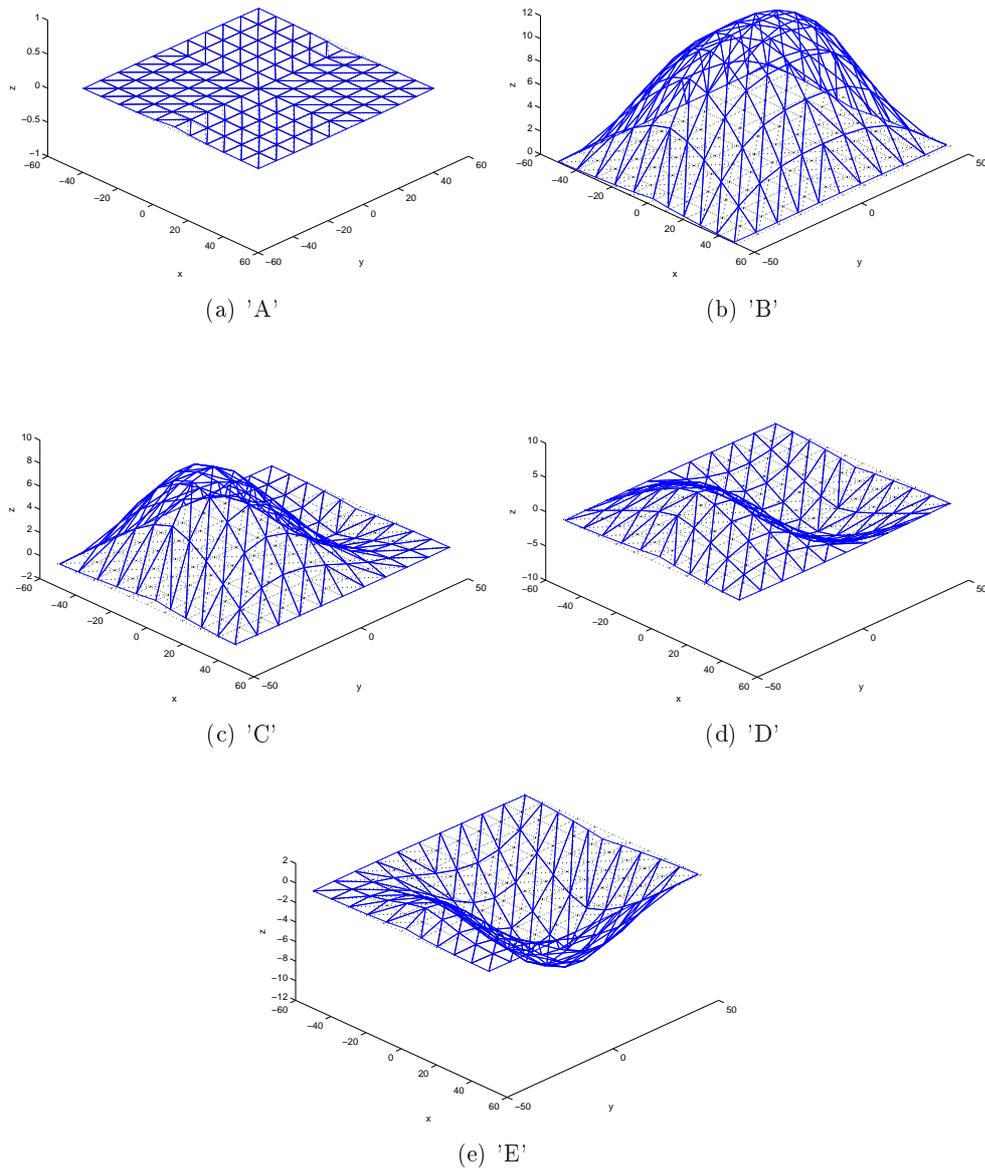


Figure 3.6 – Déformées de la plaque pour divers points du diagramme de continuation figure 3.5 page 42

### 3.4 Conclusion

On a vu dans ce chapitre deux exemples d'applications pour Manlab. Le premier exemple a montré le déroulement de la mise en donnée d'un problème simple et le second l'ouverture aux problèmes possédant plusieurs milliers de degrés de liberté. En ce qui concerne le premier problème, seuls 4 fichiers textes de faible longueur sont à saisir après la mise en forme quadratique du problème, ce qui constitue un très faible investissement en temps. D'autant plus qu'une fois la mise en donnée terminée, l'obtention des solutions est extrêmement aisée. En ce qui concerne le second exemple, le travail a été bien plus conséquent. Celui-ci a consisté en une élaboration de modules indépendants (réutilisés dans la seconde partie du mémoire) permettant le calcul des seconds membres de la MAN et de la matrice tangente aux forces internes. Une fois doté des modules éléments finis pour MAN, l'intégration dans MANLAB s'est déroulée à travers un autre module (MODELEFSTAT) possédant des fonctions de calculs de termes de séries dédiées.

Pour les deux problèmes, le principe de branchement par perturbation a permis l'obtention des branches bifurquées de premier ordre et de second ordre (pour le problème de flambement). Le choix des seuils et des valeurs de perturbations pour le branchement (voir (2.2.2) page 22), bien que non détaillés dans ces deux exemples, permet effectivement le déroulement attendu des opérations de branchements. Il semble donc que le couple branchement par perturbation / MAN soit une réussite (ceci sera confirmé dans la seconde partie du mémoire).

Deuxième partie

Modes non linéaires



## Vibrations et modes non linéaires

**O**n aborde ici le domaine des vibrations non linéaires. Il s'agit de rappeler quelques notions fondamentales, en s'attardant sur la définition des modes linéaires et non linéaires. On présente aussi, en fin de chapitre, une étude des solutions périodiques de l'oscillateur de Duffing.

PLAN DU CHAPITRE 4

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>49</b>
<b>4.2</b>	<b>Systèmes dynamiques et vibrations non linéaires</b>	<b>49</b>
<b>4.3</b>	<b>Cas d'étude en mécanique</b>	<b>50</b>
<b>4.4</b>	<b>Rappels sur le cas linéaire</b>	<b>51</b>
4.4.1	Modes linéaires conservatifs	52
4.4.1.a	Utilisation pour la réponse libre conservative	53
4.4.1.b	Utilisation pour la réponse forcée harmonique avec amortissement proportionnel	54
4.4.2	Modes complexes	54
4.4.3	Aspect géométrique et invariance	56
4.4.4	Modes normaux pour les systèmes linéaires	56
<b>4.5</b>	<b>Généralités sur le cas non linéaire</b>	<b>58</b>
4.5.1	Définition des modes non linéaires	59
4.5.2	Réponses et modes non linéaires	60
4.5.2.a	La réponse libre conservative	60
4.5.2.b	La réponse libre non conservative	60
4.5.2.c	La réponse forcée non conservative	60
4.5.2.d	La réponse forcée conservative	61
4.5.3	Résonances secondaires et résonances internes	61
4.5.4	Quelques méthodes de calcul des MNLs	62
<b>4.6</b>	<b>Solutions périodiques de l'oscillateur de Duffing</b>	<b>63</b>
4.6.1	Réponse libre	63
4.6.2	Réponse forcée harmonique conservative	65
4.6.3	Réponse forcée harmonique non conservative	67
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>69</b>

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre est une introduction aux vibrations et aux modes non linéaires. La plupart des notions présentées ici sont bien connues. Il s'agit donc de rappels dans le but d'essayer de donner au lecteur une vision globale des vibrations non linéaires. Sans entrer dans les détails, on présentera tout d'abord le formalisme des systèmes dynamiques continus en temps, qui constitue un cadre général permettant l'étude de systèmes à états évolutifs. On précisera ensuite le contexte mécanique du mémoire en présentant les équations du mouvement de nos systèmes. Pour cela, on fera un inventaire des différents types de non linéarités et des différents types d'excitations rencontrés dans le domaine des vibrations mécaniques non linéaires, en s'attardant sur le cas précis des *non linéarités géométriques*.

L'étude des vibrations non linéaires utilisant fortement les notions et les résultats du cas linéaire, on présentera les *modes linéaires conservatifs* et leurs utilisations pour le calcul des *réponses libres conservatives* et des *réponses forcées avec amortissement proportionnel*. Après avoir constaté la limitation imposée par la forme de solution trop restrictive utilisée par ces modes, on présentera leur généralisation nommée *modes complexes*, qui permet la représentation et les calculs des systèmes avec amortissement linéaire quelconque. La présentation de cette généralisation permettra surtout de mettre en avant l'*aspect géométrique* et l'*aspect d'invariance* des mouvements modaux, liés tous deux à la notion de *surfaces invariantes de l'espace des phases*. Ces surfaces invariantes serviront la présentation des *modes normaux linéaires*, et à leur généralisation dans le cas non linéaire nommée *modes normaux non linéaires* de Shaw et Pierre.

On poursuivra ce chapitre avec des généralités sur le cas non linéaire. On présentera tout d'abord les surfaces invariantes de l'espace des phases utilisées pour la définition des modes normaux non linéaires. On présentera ensuite 4 cas de réponses de systèmes mécaniques non linéaires, il s'agira essentiellement de décrire qualitativement les réponses des systèmes lorsque les trajectoires sont initiées sur, ou en dehors de la surface invariante du mode non linéaire. On poursuivra par une brève description des phénomènes particuliers rencontrés en vibrations non linéaires, à savoir les *résonances secondaires* et les *résonances internes*.

On terminera le chapitre avec un exemple unidimensionnel, illustré par l'étude des solutions périodiques de l'oscillateur de Duffing dans le cas libre, forcé harmonique conservatif, et le cas forcé harmonique non conservatif.

## 4.2 Systèmes dynamiques et vibrations non linéaires

Dans le cas le plus général, l'étude des vibrations non linéaires fait référence à l'étude de mouvements oscillatoires de systèmes mécaniques comportant un ou plusieurs degrés de liberté. Ces systèmes mécaniques entrent dans la catégorie des *systèmes dynamiques non linéaires continus* dont les équations régissant leurs évolutions se mettent sous la forme très classique

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{F}(z,t) \quad (4.1)$$

avec  $t$  étant la variable temps,  $\mathbf{z}$  le vecteur d'état de dimension  $N$  et  $\mathbf{F}$  étant le vecteur de *flot*, aussi de dimension  $N$  qui est non linéaire en  $\mathbf{z}$ . Le vecteur d'état  $\mathbf{z}$  contient l'ensemble des variables permettant de définir l'état du système à l'instant  $t$ . En mécanique, les composantes de ce vecteur sont la plupart du temps des positions, des vitesses, des efforts ou des pressions.

Dans d'autres domaines de la physique, par exemple en électricité, les équations (4.1) permettent de définir les évolutions des grandeurs caractéristiques des circuits électriques à comportements non linéaires (montages à comparateurs à hystérésis, ampli-opérationnels non idéaux, diodes, transistors, etc. ), dans ces cas le vecteur d'état  $\mathbf{z}$  contient les tensions aux noeuds ainsi que les intensités dans les branches d'un circuit donné. L'étude des systèmes dynamiques non linéaires ne se résume pas bien sûr à ces seuls domaines. En écologie ou pourra trouver le modèle d'interaction proies/prédateur de Lotka-Volterra, en économie le modèle de croissance monétaire de Tobin, en chimie la modélisation de réactions chimiques oscillantes, en biologie l'étude des influx nerveux, en climatologie les modèles de comportements océaniques/atmosphériques à grande échelle, etc... Autant d'exemples qui mènent à l'étude des solutions des équations de type (4.1).

Mais le domaine qui nous intéresse ici est bien sûr celui de la mécanique. Dans le cas des systèmes mécaniques discrets, généralement modélisés par des masses reliées par des ressorts, des amortisseurs, des patins frottants ou/et des butées, l'écriture du principe fondamental de la dynamique aboutit à un système d'équations différentielles de taille égale au nombre de degrés de liberté. Dans le cas des milieux continus, les équations aux dérivées partielles (conservation de la quantité de mouvement, conservation de la masse, conservation de l'énergie), sont habituellement discrétisées spatialement (méthode des éléments finis pour les solides, méthode des volumes finis pour les fluides, ou méthode des différences finies pour les deux) pour être mises sous la forme d'équations différentielles.

### 4.3 Cas d'étude en mécanique

A quelques exceptions près, les équations du mouvement des structures modélisées par éléments finis et celles des systèmes mécaniques discrets peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_{ext}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) \quad (4.2)$$

avec  $\mathbf{u}$  étant le vecteur des degrés de liberté de la structure discrétisée par éléments finis ou des déplacements des masses dans le cas des systèmes mécaniques discrets et  $\mathbf{M}$  étant la matrice de masse, toujours définie positive. Le vecteur  $\mathbf{f}_{int}$ , nommé vecteur des *forces internes* contient les valeurs d'efforts internes agissant sur chaque degré de liberté de la structure ou les efforts des ressorts dans le cas des systèmes dynamiques discrets. Le vecteur  $\mathbf{f}_{ext}$  nommé vecteur des efforts extérieurs, contient les valeurs d'efforts appliqués par le monde extérieur sur le système.

#### REMARQUE 2

*Si cela s'avère nécessaire (pour des raisons d'ordre théorique ou pour rendre le flot compatible avec des solveurs au premier ordre), ces équations au second ordre peuvent facilement se transformer en équations au premier ordre afin de se conformer au formalisme de (4.1).*

□

En mécanique du solide, ainsi que pour le cas des systèmes mécaniques discrets, l'expression des forces internes  $\mathbf{f}_{int}$  varient bien sûr avec le *type de non linéarité* étudié. On distinguera notamment les non linéarités de type

- *contact/frottement* :  $\mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ , avec  $\mathbf{f}_{int}$  non régulière en  $\mathbf{u}$  et  $\dot{\mathbf{u}}$ ,
- *amortissement visqueux*, ou/et présence de *plasticité* :  $\mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ , avec  $\mathbf{f}_{int}$  comportant par exemple des termes non linéaires en  $\dot{\mathbf{u}}$  ou/et  $\mathbf{f}_{int}$  dépendant de "l'histoire" de  $\mathbf{u}$ ,

- *géométrique* :  $\mathbf{f}_{int} = \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$ , non linéarité provenant de l'expression de la déformation de Green-Lagrange, comportant un terme linéaire  $\mathbf{L}$ , un terme quadratique  $\mathbf{Q}$  et un terme cubique  $\mathbf{C}$ .

En ce qui concerne le terme de forçage  $\mathbf{f}_{ext}$ , il détermine le *type d'excitation*. Sans que la liste soit exhaustive, on recensera les types d'excitation suivants :

- *harmonique* :  $\mathbf{f}_{ext}(t) = \mathbf{f} \cos(\Omega t)$ ,
- *multi harmonique* :  $\mathbf{f}_{ext}(t) = \sum_i \mathbf{f}_i \cos(\Omega_i t)$ ,
- *paramétrique* :  $\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_{ext}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)$ ,
- (*vibrations libres* :  $\mathbf{f}_{ext} = 0$ ),

Dans ce mémoire, on s'intéresse plus particulièrement aux calculs de réponses en vibrations libres et en vibrations forcées de structures minces en non linéaire géométrique. Concrètement nous avons donc affaire à des systèmes d'équations différentielles à non linéarité polynomiale, obtenues par discrétisation (méthode des éléments finis) des équations aux dérivées partielles non linéaires elles mêmes issues du *problème de l'élastodynamique*. On retiendra donc seulement trois cas d'étude :

1. Cas de la *réponse forcée amortie*, lorsque nous étudierons les mouvements solutions des équations

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \cos(\Omega t) \quad (4.3)$$

avec  $\mathbf{C}$  étant la matrice d'amortissement.

2. Cas de la *réponse forcée conservative*, lorsque le terme d'amortissement est nul, soit

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \cos(\Omega t) \quad (4.4)$$

3. Cas de la *réponse libre conservative*, lorsque le terme d'amortissement ainsi que le terme de forçage sont nuls, soit

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = 0. \quad (4.5)$$

L'expression du vecteur des forces internes  $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u})$  sera décrite dans les chapitres suivants. Pour le moment, on se contentera de dire que cette expression est conforme au domaine du *non linéaire géométrique*, relié à l'expression des déformations de Green-Lagrange, et que cette expression peut s'écrire à l'aide de trois opérateurs fonctions du déplacement  $\mathbf{u}$  ; un opérateur linéaire  $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ , un opérateur quadratique  $\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  et un opérateur cubique  $\mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$ , soit  $\mathbf{f}_{int} = \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$ .

## 4.4 Rappels sur le cas linéaire

Le cas des systèmes linéaires est bien connu et largement traité dans la littérature, leur utilisation dans l'industrie est de plus très répandue. Ce cas relate l'étude des solutions  $\mathbf{u}(t)$  de l'équation de mouvement

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{ext}(t) \quad (4.6)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}(t_0) &= \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (4.7)$$

qui provient généralement de l'écriture du principe fondamental de la dynamique dans le cas des systèmes discrets et du principe des puissances virtuelles dans le cas des systèmes continus discrétisés par éléments finis.

L'étude des réponses du cas linéaire passe très souvent par le calcul des modes propres linéaires. Comme nous allons le voir, ces modes constituent une base de décomposition commode. Dans cette base, les équations (4.6) sont découplées et la résolution se ramène à traiter une succession de système à 1 degré de liberté. On peut donc facilement obtenir les réponses en régime permanent et les régimes transitoires après calcul de la base.

Le cas linéaire sert aussi de base d'étude aux problèmes non linéaires définis précédemment. Ainsi, on parlera de *système linéaire sous-jacent*, lorsque l'équation (4.6) est la linéarisation de l'équation du mouvement d'un système non linéaire donné, comme par exemple (4.3), (4.4), ou bien (4.5). Notons que cette linéarisation se fait habituellement au voisinage d'une position d'équilibre stable. Dans ce cas, la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  sera égale à la jacobienne des forces internes évaluée pour une valeur des déplacements nuls, soit

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}) \quad (4.8)$$

et sera définie positive<sup>(1)</sup>. Cette *linéarisation* des équations non linéaires permet le calcul des modes propres du système linéaire sous-jacent. Ces modes propres étant une approximation des modes non linéaires, ils servent souvent de solutions approchées pour les algorithmes de calculs de modes non linéaires.

Il s'agit maintenant de rappeler les notions fondamentales des vibrations linéaires de systèmes conservatifs discrets, à savoir les fréquences et modes propres ainsi que leur utilisation dans le calcul de la réponse libre conservative et la réponse forcée non conservative. Bien que souvent suffisants, les modes linéaires conservatifs ne permettent pas de décomposer tous les mouvements possibles, même dans le domaine du linéaire. En effet, les mouvements gyroscopiques et plus généralement les mouvements solutions de systèmes mécaniques ayant un amortissement non proportionnel ne sont pas représentables avec ces modes linéaires. Ainsi les *modes complexes*, présentés dans cette section, viennent palier au manque en apportant une base plus générale. De plus, les modes complexes sont une parfaite introduction à la présentation des modes normaux linéaires définis à l'aide de surfaces invariantes planes, eux-même étant une ébauche des modes normaux non linéaires à surface courbe, qui seront présentés à la section suivante.

#### 4.4.1 Modes linéaires conservatifs

Les modes linéaires, aussi nommés modes propres, sont définis comme les solutions périodiques du problème conservatif associé,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (4.9)$$

avec la matrice  $\mathbf{M}$  définie positive et la matrice  $\mathbf{K}$  au moins semi-positive, données par la forme de solution :

$$\mathbf{u}(t) = \phi_i a_i \cos(\omega_i t + \nu_i) = \phi_i q_i(t) \quad (4.10)$$

#### REMARQUE 3

La forme (4.10) impose un mouvement modal où tous les degrés de liberté sont synchrones<sup>(2)</sup>

□

(1). ou semi-positive s'il existe des déplacements solides possibles

(2). Tous les degrés de liberté atteignent zéro ou leur position maximale au même instant.

Les fréquences propres  $\omega_i$  et les formes propres (ou déformées modales)  $\phi_i$  sont des constantes indépendantes du temps, obtenues par la résolution du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\phi_i = 0 \quad (4.11)$$

avec  $i$  variant de 1 à  $n$ , nombre de degrés de liberté du système.

#### PROPRIÉTÉ 1

Les vecteurs des déformées modales  $\phi_i$  sont orthogonaux vis à vis de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  et de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$ , on a donc

$$\begin{aligned} \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j &= 0 \quad \forall i, j \text{ et } i \neq j \\ \phi_i^T \mathbf{K} \phi_j &= 0 \quad \forall i, j \text{ et } i \neq j \end{aligned} \quad (4.12)$$

Si on normalise les vecteurs par rapport à la matrice de masse de manière à avoir

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1 \quad \forall i$$

alors on aura aussi

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_i = \omega_i^2 \quad \forall i$$

□

#### 4.4.1.a Utilisation pour la réponse libre conservative

Intéressons-nous maintenant au calcul des oscillations libres d'un système discret conservatif de la forme (4.9). Les modes définis ci-dessus constituent une base de  $\mathbb{R}^n$  et toutes les solutions de 4.9 peuvent donc se décomposer ainsi :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \theta_i(t) \quad (4.13)$$

avec les  $\theta_i$  étant les *coordonnées modales*. En projetant les équations du mouvement (4.9) sur cette décomposition, on obtient  $n$  équations découplées correspondantes à  $n$  oscillateurs à un degré de liberté. :

$$\begin{cases} \ddot{\Theta} + \mathbf{\Lambda} \Theta = \mathbf{0}, & \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2), \quad \Theta = [\theta_1, \dots, \theta_n] \\ + \text{conditions initiales} \end{cases} \quad (4.14)$$

dont les solutions sont :

$$\theta_i(t) = a_i \cos(\omega_i t + \nu_i) \quad (4.15)$$

les variables  $a_i$  et  $\nu_i$  étant déterminées par les conditions initiales. A noter que si les conditions initiales sont colinéaires à un  $\phi_i$ , alors le mouvement restera colinéaire à la déformée  $\phi_i$  et tous les degrés de liberté oscilleront à la même pulsation  $\omega_i$ , et ce quelle que soit l'amplitude des oscillations.

En pratique, notamment lors de l'étude des structures continues discrétisées par éléments finis, on utilisera seulement quelques modes pour reconstruire le mouvement avec (4.13). Cette méthode se nomme *réduction de modèle* et permet de diminuer considérablement la complexité de l'étude de la réponse. Cette technique est aussi utilisée pour discrétiser les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, en décrivant le mouvement sur un ou plusieurs modes (approches "single-mode" ou "multi-mode"), voir notamment SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b).

#### 4.4.1.b Utilisation pour la réponse forcée harmonique avec amortissement proportionnel

Reconsidérons le système (4.6) page 51 en lui ajoutant un terme d'amortissement proportionnel et un forçage, soit le système

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{ext}(t) \quad (4.16)$$

avec  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ , et  $(\alpha, \beta)$  étant les paramètres de Rayleigh  $\in \mathbb{R}^2$ . La réponse d'un tel système est la somme d'une réponse transitoire, fonction des conditions initiales et qui est la solution en régime libre pour  $\mathbf{f}_{ext} = 0$ , et d'une solution particulière, fonction du vecteur de forçage  $\mathbf{f}_{ext}$  et qui correspond au régime établi. D'une manière générale, on s'intéressera dans ce mémoire à la réponse en régime établi, avec un vecteur de forçage harmonique  $\mathbf{f}_{ext}(t) = \mathbf{f}\cos\Omega t$  et après disparition du transitoire. La forme particulière de  $\mathbf{C}$  permet à nouveau la décomposition sur la base des vecteurs propres pour obtenir un système d'équations découplées

$$\ddot{\Theta} + \xi\dot{\Theta} + \Lambda\Theta = \phi^T \mathbf{f}_{ext}(t) \quad (4.17)$$

avec  $\phi$  étant la matrice des vecteurs propres,  $\xi$  étant une matrice diagonale. Les solutions de cette équation sont

$$\theta_i(t) = a_i \cos(\Omega t + \nu_i) \quad (4.18)$$

avec

$$\begin{cases} a_i &= \frac{\sum_j \phi_{i,j}^t \mathbf{f}_j}{\sqrt{(\omega_i^2 - \Omega^2) + (\xi_i \Omega)^2}} \\ \tan \nu_i &= \frac{\xi_i \Omega}{\Omega^2 - \omega_i^2} \end{cases} \quad (4.19)$$

Pour obtenir la réponse dans la base initiale des degrés de liberté, il suffit de réutiliser la décomposition (4.13). Lorsque  $\Omega = \omega_i$ , on obtient le maximum de l'expression de  $a_i$ , ce qui correspond à la résonance autour du mode linéaire  $i$ .

La décomposition (4.13) page 53 permet la représentation des réponses forcées conservatives et non conservatives lorsque la matrice d'amortissement se diagonalise sur les modes linéaires conservatifs. Dans le cas d'une matrice d'amortissement gyroscopique, ou plus généralement d'une matrice d'amortissement quelconque, il n'existe plus de décomposition réelle permettant la décomposition simultanée des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$ . Ainsi, la décomposition (4.13) page 53 et la forme de solution (4.10) page 52 ne sont plus adaptées. Pour obtenir un découplage des équations du mouvement, similaire à celui précédemment présenté, on pourra utiliser les modes complexes.

#### 4.4.2 Modes complexes

Avec  $\mathbf{z} = [\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}]^t$  on peut réexprimer le système dynamique au second ordre (4.6) page 51 en un système du premier ordre équivalent

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{z}(t) = \mathbf{D}(t) \quad (4.20)$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{z}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

et avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}, \mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Les modes complexes formés par les valeurs propres  $\lambda_i \in \mathcal{C}$  et les vecteurs propres  $\Phi_i \in \mathcal{C}^2$  sont définis comme les solutions du problème aux valeurs propres

$$A\Phi_i\lambda_i + B\Phi_i = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

. Avec une matrice de masse symétrique (réelle) définie positive et une matrice d'amortissement symétrique (réelle) semi-définie positive, il existe  $2n$  valeurs propres  $\lambda_i$  apparaissant par paires conjuguées et  $2n$  vecteurs propres indépendants apparaissant aussi par paires complexes conjuguées  $\Phi_i$ . Ces modes peuvent être ensuite utilisés comme base de décomposition du mouvement, en écrivant le changement de variable suivant,

$$z(t) = \sum_{i=1}^{2n} \Phi_i \theta_i(t) \quad (4.24)$$

il est alors possible de découpler les équations du mouvement dans la base formée par les vecteurs propres complexes,

$$\begin{cases} \dot{\Theta} + \Lambda\Theta = \mathbf{0}, & \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}), & \Theta = [\theta_1, \dots, \theta_{2n}] \\ \Theta(t = t_0) = \Phi^{-1}z_0 & & \Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_{2n}] \end{cases} \quad (4.25)$$

dont les solutions complexes sont

$$\theta_i(t) = (\sigma_i + j\rho_i)e^{\lambda_i t} \quad (4.26)$$

où les  $\sigma_i$  et  $\rho_i$  dépendent des conditions initiales. En regroupant les paires complexes conjuguées, la décomposition (4.24) peut se réécrire

$$z(t) = \sum_{i=1}^n (\Phi_i(\sigma_i + j\rho_i)e^{\lambda_i t} + \bar{\Phi}_i(\sigma'_i + j\rho'_i)e^{\bar{\lambda}_i t}) \quad (4.27)$$

avec  $(\bar{\cdot})$  désignant l'opérateur complexe conjugué et  $\sigma'_i$  et  $\rho'_i$  les constantes du mode complexe conjugué  $i$ . Le mouvement final  $z(t)$  étant un mouvement dans l'espace réel, il existe forcément des relations entre les couples  $(\sigma_i, \rho_i)$  et  $(\sigma'_i, \rho'_i)$  qui doivent rendre les parties imaginaires de (4.27) nulles. Ceci est montré dans les lignes suivantes qui expriment la décomposition (4.27) au temps  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} z(0) &= \sum_{i=1}^n (\Phi_i \theta_i(0) + \bar{\Phi}_i \theta'_i(0)) \\ &= \sum_{i=1}^n (\Phi_i(\sigma_i + j\rho_i) + \bar{\Phi}_i(\sigma'_i + j\rho'_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \Phi_i^R \sigma_i - \Phi_i^I \rho_i + j(\Phi_i^R \rho_i + \Phi_i^I \sigma_i) + \bar{\Phi}_i^R \sigma'_i - \bar{\Phi}_i^I \rho'_i + j(\bar{\Phi}_i^R \rho'_i + \bar{\Phi}_i^I \sigma'_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\Phi_i^R(\sigma_i + \sigma'_i) - \Phi_i^I(\rho_i - \rho'_i) + j(\Phi_i^R(\rho_i + \rho'_i) + \Phi_i^I(\sigma_i - \sigma'_i))) \end{aligned}$$

avec  $\Phi_i = \Phi_i^R + j\Phi_i^I$ , comme dit précédemment, cette expression doit avoir une partie imaginaire nulle, on a donc  $\sigma_i = \sigma'_i$  et  $\rho_i = -\rho'_i$ , ce qui implique que l'on peut réécrire (4.27) de la manière suivante

$$z(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{n_i t} (\Phi_i e^{j(\omega_i t + \varphi_i)} + \bar{\Phi}_i e^{-j(\omega_i t + \varphi_i)}) \quad (4.28)$$

avec  $\lambda_i = \eta_i + j\omega_i$  et  $\sigma_i + j\rho_i = a_i e^{j\varphi_i}$ . Après calcul<sup>(3)</sup>, cette expression se simplifie en la suivante

$$\mathbf{z}(t) = 2 \sum_{i=1}^n a_i e^{\eta_i t} (\Phi_i^R \cos(\omega_i t + \varphi_i) - \Phi_i^I \sin(\omega_i t + \varphi_i)) \quad (4.29)$$

qui montre clairement le mouvement réel recomposé à l'aide des modes  $\Phi_i$ .

Notons ensuite que le mouvement suivant le mode  $i$  s'écrit

$$\mathbf{z}_i(t) = 2a_i e^{\eta_i t} (\Phi_i^R \cos(\omega_i t + \varphi_i) - \Phi_i^I \sin(\omega_i t + \varphi_i)) \quad (4.30)$$

et soulignons qu'il est inscrit dans le plan engendré par le couple de vecteurs

$$\Phi_i^R, -\Phi_i^I \quad (4.31)$$

### 4.4.3 Aspect géométrique et invariance

Supposons que l'on choisisse un vecteur de conditions initiales  $\mathbf{z}_0$  contenu dans le plan défini par les vecteurs (4.31), on aura donc

$$\mathbf{z}_0 = \alpha \Phi_i^R - \beta \Phi_i^I \quad (4.32)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux constantes réelles. Or, en utilisant la décomposition (4.29) on a

$$\mathbf{z}(0) = 2 \sum_{i=1}^n a_i (\Phi_i^R \cos(\varphi_i) - \Phi_i^I \sin(\varphi_i)) \quad (4.33)$$

, en combinant (4.32) et (4.33) on obtient

$$\begin{cases} 2a_i \cos(\varphi_i) = \alpha \\ 2a_i \sin(\varphi_i) = \beta \\ a_j = 0 \quad \forall j \in 1 \dots n, \quad j \neq i \end{cases} \quad (4.34)$$

ce qui montre que pour des conditions initiales engendrées par les vecteurs (4.31) du mode  $i$ , le mouvement induit sera décrit seulement par le mode  $i$  (les autres modes ne participent pas au mouvement).

Géométriquement parlant, le fait de choisir une condition initiale dans le plan engendré par les vecteurs (4.31) génère un mouvement qui reste inscrit dans ce même plan. Ce résultat consiste une propriété d'*invariance* des mouvements modaux. La figure 4.1.a page 57 montre un exemple de plan dans l'espace des phases et montre aussi quelques trajectoires contenues dans ce plan issues du vecteur de condition initiale  $\mathbf{z}_0$  dans le cas où  $\eta_i = 0$  (amortissement nul) et la figure 4.1.b montre une trajectoire dans le cas où  $\eta_i < 0$  (mode amorti).

### 4.4.4 Modes normaux pour les systèmes linéaires

Dans SHAW et PIERRE (1993a), S. W. Shaw et C. Pierre utilisent la propriété d'invariance des mouvements modaux pour définir les *modes normaux* linéaires (ainsi que les modes non linéaires, pour cela voir la section 4.5.1) à l'aide de surfaces invariantes de l'espace des phases.

(3). On utilise les propriétés des nombres complexes  $1/\bar{A}\bar{A} = \overline{AA}$  et  $2/\bar{A} + A = 2\text{Re}(A)$

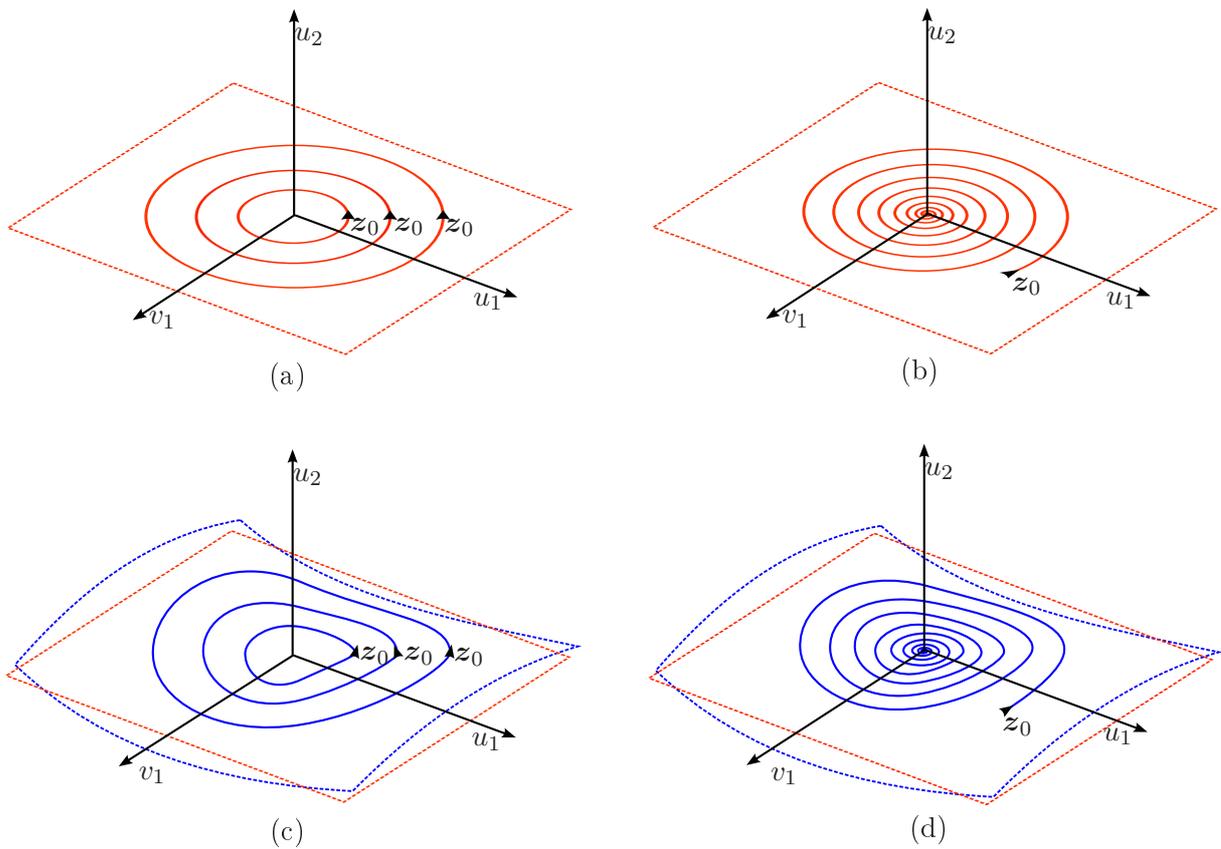


Figure 4.1 – figure (a) : plan invariant pour la cas linéaire conservatif, avec quelques trajectoires périodiques inscrites. figure (b) : plan invariant pour le cas linéaire non conservatif, avec un exemple de trajectoire dissipative inscrite. figure (c) : surface invariante pour le cas non linéaire conservatif, avec quelques trajectoires périodiques inscrites. figure (d) : surface invariante pour le cas non linéaire et non conservatif, avec une trajectoire dissipative inscrite.

Dans le cas linéaire, cette surface invariante est un plan et le mouvement qui y est inscrit est paramétré par deux des composantes du vecteur d'état. Ainsi, pour un mouvement gouverné par le déplacement  $u_1$  et la vitesse  $v_1$  du premier degré de liberté (le choix du premier degré de liberté est arbitraire, on pourrait très bien choisir les autres) on aura

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \\ 0 & 1 \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

qui est l'équation paramétrique d'un plan plongé dans l'espace des phases. Notons que cette formulation permet la représentation des mouvements ayant des composantes déphasées, comme par exemple les mouvements des modes gyroscopiques et les mouvements des modes avec amortissement non proportionnel.

L'utilisation de ce changement de variable dans les équations du mouvement (4.20) mais sans forçage (terme  $\mathbf{B}(t)$  nul), et moyennant quelques transformations, donne un système non linéaire en  $a_{1i}, b_{1i}$  de  $4n - 4$  équations possédant  $n$  solutions correspondant aux  $n$  plans des  $n$  modes du système dynamique linéaire.

Pour obtenir ensuite la dynamique de chaque mode, le mouvement est exprimé à l'aide d'un changement de variable utilisant les  $n$  plans précédemment calculés. L'équation (4.20) ainsi projetée, donne une dynamique pour chaque couple  $u_i, v_i$ , régie par  $n$  systèmes du premier ordre indépendants donnant chacun la valeur de la pulsation et de l'amortissement pour chacun des  $n$  modes.

L'utilisation des surfaces invariantes est une approche différente de celle utilisée pour les modes complexes. Cependant, les auteurs de SHAW et PIERRE (1993a) ont montré que les modes obtenus sont strictement équivalents (les sous-espaces contenant les mouvements modaux sont les mêmes ainsi que leur pulsation et amortissement respectifs). L'intérêt de cette approche réside en fait dans son extension aux modes non linéaires (voir la section 4.5.1).

## 4.5 Généralités sur le cas non linéaire

Par l'intermédiaire du principe de superposition, nous avons vu que les modes propres permettaient de reconstruire les oscillations libres et les réponses forcées de systèmes linéaires. En non linéaire ce principe ne s'appliquant plus, il est donc légitime de mettre en doute l'intérêt de l'extension de la définition des modes au cas non linéaire. En fait, leur utilité est déjà démontrée. On peut montrer tout d'abord que la réponse forcée ainsi que la réponse amortie d'un système non linéaire non conservatif se produit au voisinage des modes non linéaires, ce qui constitue une première motivation en vue de la prédiction des réponses. Les modes non linéaires sont des *attracteurs* des trajectoires amorties et ils définissent de plus une "ossature" de la réponse forcée. D'un point de vue qualitatif, les modes non linéaires permettent de prédire le comportement

"raidissant" ou "assouplissant" de tel ou tel modèle au voisinage de la résonance du-dit mode et permettent de plus de prévoir les divers changements de régimes vibratoires aux voisinages de points de bifurcations et lors des divers types de résonances. Dans un autre ordre d'idée, ces modes semblent être des candidats possibles pour une éventuelle transposition de la méthode de réduction de modèle et il semble envisageable de les utiliser aussi pour élaborer une méthode d'analyse modale dans le cas non linéaire.

#### 4.5.1 Définition des modes non linéaires

Il existe plusieurs manières de définir les modes non linéaires. On retiendra ici la définition proposée dans l'approche de Shaw et Pierre qui est valable pour les systèmes conservatifs et non conservatifs et qui n'impose pas de conditions particulières fortes sur la forme du flot  $\mathbf{f}$  de (4.1) page 49. Leur définition est basée sur le concept mathématique d'invariant de l'espace des phases. Il s'agit de généraliser les surfaces planes (linéaires) déjà présentées dans la section 4.4.4 en surfaces courbes (non linéaires).

Qualitativement, une surface est dite invariante pour un système dynamique donné lorsque pour toutes conditions initiales choisies dans l'ensemble de cette surface, les trajectoires obtenues restent inscrites dans cette même surface (voir section 4.4.3). Shaw et Pierre définissent donc le mode non linéaire pour un système autonome comme :

*"[...] un mouvement sur une surface à deux dimensions, définie comme une variété invariante de l'espace des phases."*

En outre, cet invariant est tangent en un point d'équilibre stable du système au sous-espace plan correspondant au mode du système linéarisé autour de ce même point d'équilibre. La figure 4.1.c page 57 illustre quelques trajectoires inscrites dans la surface des invariants de l'espace des phases dans le cas conservatif et la figure 4.1.d les illustre dans le cas non conservatif.

Pour fixer les idées, on présente une façon de représenter mathématiquement ces surfaces à l'aide d'équations paramétriques,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2(u_1, v_1) \\ \vdots \\ u_n(u_1, v_1) \\ v_1 \\ v_2(u_1, v_1) \\ \vdots \\ v_n(u_1, v_1) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Comme pour le cas des plans, les fonctions  $u_i, v_i$  sont arbitrairement paramétrées par les premiers degrés de liberté en déplacement et en vitesse. Dans SHAW et PIERRE (1993a) ces surfaces servent ensuite pour opérer un changement de variable permettant d'obtenir (lorsque les équations du système ne sont pas trop nombreuses et compliquées) la dynamique non linéaire de  $u_1(t)$  et de  $v_1(t)$  sur le mode concerné.

### 4.5.2 Réponses et modes non linéaires

Nous avons vu dans la section (4.3) 3 des principaux cas d'étude de vibrations non linéaires. Il s'agit ici de rappeler brièvement et qualitativement le comportement des réponses de ces cas d'étude sous l'éclairage des surfaces invariantes des MNLs et dans l'optique d'éventuels calculs de ces réponses avec la méthode des orbites périodiques. Pour les lignes suivantes, nous ferons l'hypothèse que le système dynamique concerné ne comporte pas de résonances internes.

#### 4.5.2.a La réponse libre conservative

On peut séparer en deux parties le cas de la réponse libre conservative. Le premier cas concerne les réponses initiées en dehors de la surface invariante<sup>(4)</sup>, et le second concerne celles qui sont initiées sur la surface. Dans le premier cas les réponses induites sont indéfiniment a-périodiques, voire indéfiniment chaotiques lorsque leur amplitude est suffisante. Dans le second cas, les réponses induites sont la plupart du temps périodiques et leurs trajectoires restent indéfiniment inscrites dans la surface invariante (le MNL).

Dans ce mémoire, il est question de construire la surface du MNL de manière numérique et c'est à partir des trajectoires périodiques de la réponse libre conservative que nous le ferons.

#### 4.5.2.b La réponse libre non conservative

Lorsque la trajectoire est initiée hors d'une surface invariante d'un mode non linéaire non conservatif, on peut montrer qu'au bout d'un certain temps, la trajectoire des états rejoint une des surfaces invariantes (un des MNLs non conservatif stable) avant de se terminer sur un des points d'équilibre stable. On peut donc dire que les surfaces invariantes des MNLs non conservatifs sont des attracteurs des trajectoires (voir notamment l'ouvrage GUCKENHEIMER et HOLMES (1983) pour de plus amples informations à ce sujet). Dans le cas où la trajectoire est initiée sur la surface invariante du mode non linéaire non conservatif, et si le mouvement ne rencontre pas de bifurcation lors de l'amortissement, la trajectoire restera inscrite dans la surface invariante pour se terminer sur un point d'équilibre stable. Inversement, lors de l'amortissement, il peut arriver que la réponse "rencontre un point de bifurcation", ce qui la fera changer de surface invariante (donc de MNL). Le *phénomène de pompage*, rencontré dans les systèmes dynamiques à puit d'énergie est très lié à ce type de scénario (voir GOURDON *et al.* (2007) pour l'étude des systèmes à puit d'énergie). Le point important est que les trajectoires libres de systèmes dissipatifs sont des trajectoires amorties et donc non périodiques.

Dans ce mémoire, les surfaces invariantes étant construites à partir de trajectoires périodiques il ne sera pas possible de les obtenir dans le cas non conservatif (et sans forçage). Cependant, il est important de rappeler que lorsque l'amortissement est faible, les MNLs conservatifs sont suffisants pour interpréter qualitativement les réponses libres non conservatives.

#### 4.5.2.c La réponse forcée non conservative

L'apport d'énergie du vecteur de forçage permet de compenser la perte énergétique due à la dissipation par amortissement, ce qui permet l'existence de trajectoires périodiques. Lorsque l'amplitude d'excitation est harmonique et de faible amplitude, la réponse du régime établi est la plupart du temps périodique et se situe au voisinage d'un MNL stable<sup>(5)</sup> de fréquence proche de la fréquence de l'excitation. Plus précisément, la distance entre le MNL et la réponse est liée à

(4). C'est à dire lorsque la trajectoire des états  $z(t)$  est initiée hors d'une surface invariante

(5). En toute rigueur, il s'agit du MNL du système non conservatif

l'amplitude de l'excitation ainsi qu'à sa fréquence. Si l'amplitude est très faible, et si la fréquence d'excitation est loin de celles des MNLs, les réponses seront pratiquement d'amplitude nulles. Si par contre, la fréquence d'excitation vient glisser sur celle d'un MNL, la réponse peut devenir grande (phénomène de résonance aussi nommé résonance principale), voire subitement grande (phénomène de sauts).

Le point important est que ce voisinage comporte aussi une surface invariante. Mais, contrairement à la surface du MNL qui ne possède pas de référence temporelle, la surface invariante du régime forcé harmonique est liée temporellement au vecteur d'excitation<sup>(6)</sup>. Cette surface invariante temporellement liée étant aussi constituée de trajectoires périodiques, il sera possible de la calculer avec la méthode décrite dans ce mémoire.

Lorsque le signal excitant est de type aléatoire, il n'est pas toujours possible de faire un lien entre les surfaces invariantes et les trajectoires des réponses. Si le vecteur d'excitation possède un contenu fréquentiel proche d'un MNL, il y a de fortes chances que la réponse "résonne" sur ce mode, mais la trajectoire ne sera pas exactement périodique.

#### 4.5.2.d La réponse forcée conservative

Sans amortissement, le "régime transitoire" qui était amorti dans le cas forcé non conservatif ne disparaît plus dans le cas conservatif. Ainsi, pour des conditions initiales arbitrairement choisies, les trajectoires induites seront la plupart du temps indéfiniment a-périodiques. Pour obtenir une réponse périodique, il faudra choisir des conditions initiales inscrites dans une surface invariante temporellement liée, proche de celle du MNL conservatif (l'écart entre les deux surfaces invariantes est liée à l'amplitude du vecteur forçage). Nous verrons que la surface invariante du régime forcé peut être vue comme une version perturbée (par le vecteur de forçage) de la surface du MNL. Cette propriété est d'ailleurs utilisée pour obtenir la surface du MNL à l'aide de méthodes de calculs forcées, mais avec une amplitude de forçage très faible.

Dans ce mémoire, on présentera deux versions distinctes de calcul de surfaces invariantes. Une pour le cas forcé (conservatif ou non), et une autre pour le cas libre conservatif. Ainsi, nous obtiendrons les réponses forcées d'une part et le MNL exact d'autre part sans utiliser de forçage à très faible amplitude.

### 4.5.3 Résonances secondaires et résonances internes

On a vu précédemment que la réponse d'un système dynamique pouvait devenir grande, voire très grande, lorsque la pulsation d'excitation  $\Omega$  (mono-harmonique) se rapprochait de la pulsation  $\omega_i$  d'un de ses modes propres. Ce phénomène est connu sous le nom de résonance primaire ou de résonance principale. A contrario, lorsque  $\Omega$  est éloignée des pulsations propres  $\omega_i$ , la réponse du système reste faible. Cependant, les non-linéarités peuvent induire des phénomènes de résonances appelés *résonances secondaires* qui se produisent lorsque  $\Omega$  est éloignée des pulsations propres. Sans entrer dans les détails, que l'on pourra trouver par exemple dans SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a) et dans SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b), on distinguera notamment les résonances secondaires suivantes, sachant qu'il en existe d'autres :

1. *Les résonances super-harmoniques*, qui ont lieu lorsque  $\Omega \approx \frac{\omega_i}{p}$  avec  $p$  entier. Notons que lors de ces résonances, l'harmonique dominante caractérisant la réponse vibre à une fréquence plus élevée que la fréquence d'excitation (d'où le nom, *super-harmonique*).

(6). Pour générer un mouvement ayant une trajectoire complètement inscrite dans la surface invariante de l'espace des phases en régime forcé, il faut non seulement que le point initial soit inscrit dans la surface, mais il faut aussi le synchroniser avec le signal d'excitation (c-a-d avec le décalage de phase approprié).

2. *Les résonances sous-harmoniques*, qui ont lieu lorsque  $\Omega \approx p\omega_i$  avec  $p$  entier.
3. *Combinaison de résonances*, qui ont lieu lorsque  $\Omega \approx \sum_j p_j \omega_i$  avec  $p$  entier.

On parle de *résonance interne* lorsque certaines pulsations propres d'un système donné sont commensurables. On a donc par exemple des relations du type

$$\omega_i = p\omega_j \quad (4.37)$$

ou

$$\omega_i = p\omega_j + n\omega_k \quad (4.38)$$

Dans le cas d'une réponse libre par exemple, et si une de ces relations est satisfaite, alors des phénomènes de couplage entre les modes peuvent apparaître. Dans ce cas, l'énergie est constamment échangée entre les modes avec une décroissance dans les cas amortis. Notons qu'en non linéaire, les fréquences de résonance évoluent avec l'amplitude, ce qui montre que les relations (4.37) et (4.38), exprimées à l'aide des pulsations (constantes) des modes propres, ne sont pas suffisantes pour prédire les couplages entre les modes non linéaires.

#### 4.5.4 Quelques méthodes de calcul des MNLs

La classification des méthode de calcul des MNLs est une tâche difficile. On propose ici de les séparer en deux grandes familles :

1. la famille des méthodes à dominante analytique :
  - comprenant l'ensemble des méthodes de perturbations comme : la méthode des échelles multiples (NAYFEH (1973), NAYFEH (1985), NAYFEH et BALACHANDRAN (1995)), les formes normales JEZEQUEL et LAMARQUE (1991), la méthode Lindsted-Poincaré, et la méthode de renormalisation, la méthode moyenne, et comprenant aussi la méthode phase-amplitude (BELLIZZI et BOUC (2005) et ARQUIER *et al.* (2006)).
2. la famille des méthodes à dominante numérique, qui regroupe, sans que la liste soit exhaustive, la méthode de l'équilibrage harmonique (SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a), SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b)), les méthodes de continuation d'orbites périodiques (méthode de tir SEYDEL (1994), ou méthode simultanée NAYFEH et BALACHANDRAN (1995)).

Les méthodes de la première famille ont l'avantage de fournir des solutions analytiques, d'où une meilleure compréhension des phénomènes, mais au prix de calculs rapidement lourds et pour un domaine de validité limité. En ce qui concerne les méthodes à dominante numérique, elles permettent d'obtenir les solutions "exactes" et dans un domaine de validité a priori illimité sous réserve d'une discrétisation suffisamment précise (nombre d'harmoniques suffisant pour l'équilibrage harmonique, nombre de pas de temps suffisants pour la méthode de continuation d'orbites périodiques). Cependant, l'interprétation des solutions numériques est délicate et ne permet pas toujours la compréhension de phénomènes, c'est pourquoi des calculs supplémentaires sont souvent nécessaires (on pense ici à l'étude des valeurs propres des matrices de monodromie).

Avant d'aborder les points théoriques nécessaires à la formulation de notre méthode d'obtention de MNLs de systèmes mécaniques à plusieurs degrés de liberté, on va présenter tout d'abord quelques solutions périodiques d'un système dynamique unidimensionnel. Il s'agit de montrer quelques phénomènes observables lors de l'étude des réponses d'un système non linéaire simplifié au maximum, afin de mieux comprendre les résultats du cas multidimensionnel.

## 4.6 Solutions périodiques de l'oscillateur de Duffing

L'oscillateur de Duffing (1918) est un bon exemple d'illustration des phénomènes observables en vibrations non linéaires unidimensionnelles. Il possède la particularité importante d'être le représentant le plus simple d'une non-linéarité géométrique. En effet, on peut montrer que la projection des équations de la dynamique d'une structure à non linéarité géométrique sur un des modes linéaires donne une équation similaire à l'équation de Duffing avec un terme quadratique supplémentaire<sup>(7)</sup>, soit

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku + k_2u^2 + k_3u^3 = f_e(t)$$

La connaissance des réponses d'un tel système est donc importante car celle-ci se rapproche fortement des réponses mono-modales de structures à non linéarité géométrique (ceci est d'autant plus vrai lorsque les couplages entre les modes sont faibles).

En anticipant, on présente dans la suite des résultats de continuations de solutions périodiques calculées par la méthode des orbites périodiques. Il aurait été possible d'utiliser d'autres méthodes de calcul déjà validées pour obtenir ces résultats (comme la méthode de la balance harmonique), mais il ne s'agit pas ici de présenter les méthodes, mais de faire un rappel sur les solutions périodiques admissibles par l'oscillateur de Duffing en insistant sur des points qui seront utiles pour la fin de ce mémoire. On admettra donc que les résultats présentés ici (réponse libre, réponse forcée conservative, réponse forcée amortie), sont valides et identiques aux réponses exactes. Nous rappelons l'article HSU (1960) au lecteur désirant connaître les solutions analytiques de cet oscillateur.

Les diagrammes de réponses sont traditionnellement présentés dans le plan (amplitude-pulsation). Dans ce document nous prendrons pour habitude de représenter les diagrammes de réponses vibratoires dans le plan *déplacement initial*, noté  $u(t=0)$  sur l'axe des ordonnées, et *pulsation des oscillations*  $\omega$  sur l'axe des abscisses dans le cas non forcé (réponse libre) et *pulsation du signal d'excitation*  $\Omega$  dans le cas forcé. Cette représentation étant plus adaptée à la méthode des orbites périodiques.

### 4.6.1 Réponse libre

On s'intéresse tout d'abord à la réponse libre (donc un forçage  $f(t)$  nul pour tout  $t$ ) de l'oscillateur de Duffing, noté  $u(t)$ , pour une valeur de la masse  $m = 1$ , un amortissement nul  $c = 0$ , une raideur linéaire  $k = 1$ , une raideur quadratique nulle  $k_2 = 0$ , et une raideur cubique  $k_3 = 1$ . Soit

$$\ddot{u} + u + u^3 = 0. \quad (4.39)$$

ce qui correspond à l'équation de mouvement d'un système autonome et conservatif. Étant donné que nous présentons ici des solutions périodiques d'un système autonome, nous devons imposer une condition supplémentaire pour sélectionner seulement une solution périodique parmi toutes les autres solutions invariantes par translation temporelle. En effet, pour un système autonome, si  $u(t)$  est une solution périodique, alors,  $u_{\delta t}(t) = u(t + \delta t)$  est une solution périodique identique translatée temporellement. Pour choisir une solution parmi les possibles, on peut imposer la condition initiale  $\dot{u}(t) = 0$  pour  $t = 0$ . Le fait d'imposer cette condition initiale est équivalent à choisir une référence temporelle pour l'étude de ce système autonome. Le système (4.39) devient donc

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + u^3 = 0 \\ \dot{u} = 0 \quad \text{pour } t = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

---

(7). Dans les calculs qui vont suivre, nous omettrons volontairement le terme quadratique  $k_2u^2$  afin de s'approcher des équations du mouvement d'une poutre droite projetées sur son premier mode linéaire de flexion.

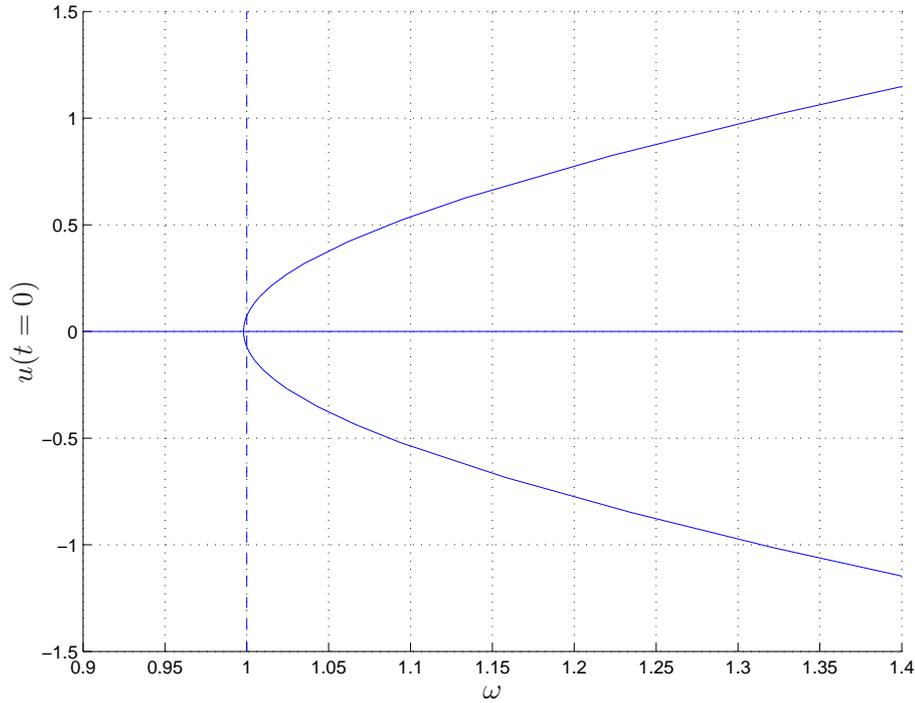


Figure 4.2 – Solutions périodiques du système (4.39). Déplacement  $u$  de la masse pour  $t = 0$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . Deux solutions distinctes sont présentes, une triviale (l'axe des abscisses) et l'autre non nulle en forme d'arc parabolique. En traits discontinus est représentée la solution du système linéarisé (4.41).

La réponse libre de l'oscillateur autour du point d'équilibre stable  $u = 0$  calculée par la méthode des orbites périodiques est tracée en figure 4.2 pour une plage de valeur de la pulsation des oscillations  $\omega$  variant de  $0.9\text{rad/s}$  à  $1.4\text{rad/s}$ . L'axe des abscisses correspond à la pulsation  $\omega$ , et l'axe des ordonnées correspond au déplacement  $u$  de la masse pour  $t = 0$ .

Les branches de solutions en traits pleins correspondent aux ensembles de signaux périodiques admissibles par l'équation (4.40). Deux branches de solutions distinctes sont présentes, se rejoignant en un point de bifurcation exacte en  $(\omega = 1, u(t = 0) = 0)$ . La première branche étant la solution triviale  $u(t = 0) = 0$  qui est superposée à l'axe des abscisses où les oscillations de la masse sont nulles, i.e  $u(t) = 0$  pour tout  $t$ . La seconde branche étant la solution non nulle en forme d'arc parabolique, symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Il est utile de rappeler que le point de bifurcation en  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$  correspond à la pulsation des oscillations du système (4.39) linéarisé, souvent notée  $\omega_0$ , au voisinage du point d'équilibre  $u = 0$  soit

$$\ddot{u} + u = 0 \quad (4.41)$$

qui admet comme ensemble de solutions  $u(t) = a \cos(t + \phi)$ , avec  $a$  l'amplitude du mouvement et  $\phi$  la phase. L'ensemble de solution est donc de dimension deux. Pour ce système linéarisé, le fait de sélectionner seulement les solutions  $\dot{u}(t = 0) = 0$  implique  $\phi = 0$ , ce qui réduit la dimension de l'espace de solution à une. Cet ensemble de solutions est représenté en figure [FIG] par la droite verticale  $\omega = 1$ , visible en pointillés.

On s'intéresse maintenant au contenu fréquentiel de la réponse en trois points du diagramme de la figure 4.2, pour  $u(t = 0) = 0.162$ ,  $u(t = 0) = 0.42$ ,  $u(t = 0) = 0.972$  c'est à dire

pour trois points de la partie supérieure de la solution parabolique. Les résultats des transformées de Fourier discrètes sont contenues dans le tableau suivant :

$u(t = 0)$	0.162	0.42	0.972
$\omega(rad/s)$	1.0078	1.062	1.3
Terme constant	0	0	0
Harm 1 ( ou fondamental.)	3.3192	8.5902	19.477
Harm 2	0	0	0
Harm 3	0.0026	0.0412	0.3344
Harm 4	0	0	0
Harm 5	0.0000	0.0002	0.0054
Harm 6	0	0	0
Harm 7	0.0000	0.0000	0.0001

On retiendra de ce tableau les résultats suivants :

- Les composantes impaires sont non nulles et décroissantes en fonction de l'indice d'harmonique.
- Les composantes paires sont nulles.
- Pour des amplitudes très faibles, la réponse est presque mono-harmonique, comme la réponse du système linéarisé (4.41).
- Les composantes impaires d'indice supérieur croissent plus vite en fonction de l'amplitude que les composantes d'indices faible. Autrement dit, le contenu fréquentiel de la réponse est d'autant plus riche que l'amplitude des oscillations est importante.

#### REMARQUE 4

Dans ce mémoire nous appelons *fondamental* et *premier harmonique* le premier terme non constant d'un développement harmonique donnée de façon à rester cohérent vis à vis du mémoire de thèse PERIGNON (2004). Cette remarque est valable pour toute série de Fourier ou pour un développement d'une méthode de balance harmonique. □

#### 4.6.2 Réponse forcée harmonique conservative

Passons maintenant à la réponse de l'oscillateur de Duffing à une excitation mono fréquentielle  $f_e(t) = 0.001\cos(\Omega t)$  en régime permanent. Soit le système

$$\ddot{u} + u + u^3 = 0.001\cos(\Omega t). \quad (4.42)$$

La réponse forcée calculée par la méthode des orbites périodiques est présentée en figure 4.3. L'axe des abscisses correspond maintenant à la pulsation  $\Omega$  de l'excitation et l'axe des ordonnées correspond au déplacement pour  $t = 0$ , soit  $u(t = 0)$ . On rappellera brièvement qu'en régime permanent le signal de réponse est accordé au signal de forçage, on a donc  $\omega = \Omega$ . D'autre part nous n'avons pas, comme précédemment, à choisir de référence temporelle car celle-ci est implicitement donnée par le forçage  $0.001\cos(\Omega t)$ . Ainsi la vitesse  $\dot{u}$  n'est pas nécessairement égale à zéro pour  $t = 0$ , car un déphasage existe entre le signal d'excitation et le signal de réponse.

Deux solutions distinctes sont présentes, une première, située sur la partie supérieure du diagramme, correspond à des oscillations où le signal de réponse est en phase au signal d'excitation, l'autre, située sur la partie inférieure, correspond à des oscillations où le signal est en opposition de phase.

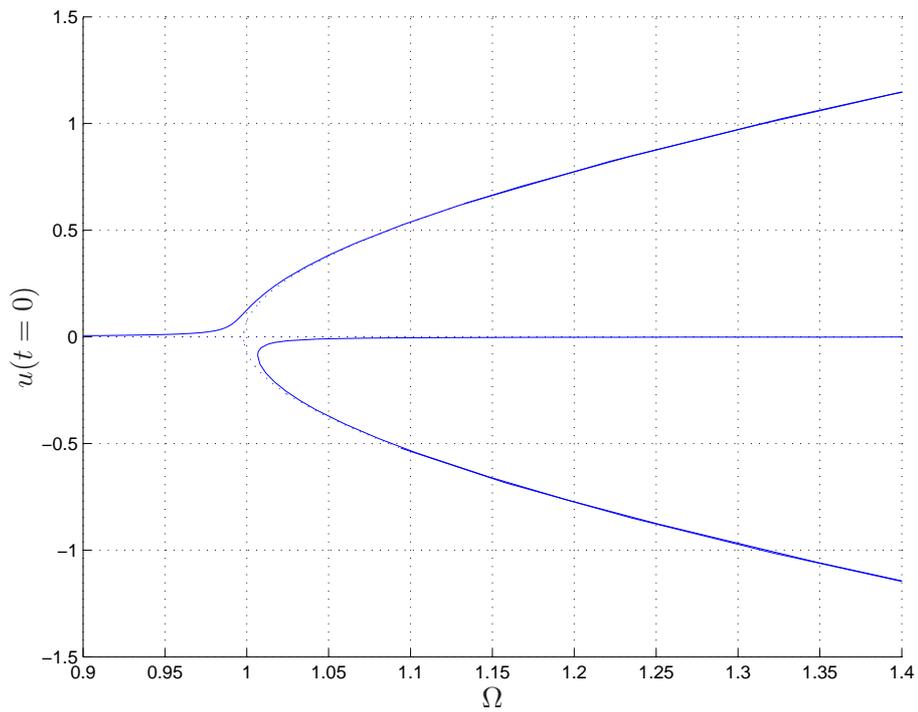


Figure 4.3 – Solutions périodiques du système (4.42). Déplacement  $u$  de la masse pour  $t = 0$  en fonction de la pulsation d'excitation  $\Omega$ . Deux solutions distinctes sont présentes, une première, située sur la partie supérieure du diagramme, correspond à des oscillations où le signal de réponse est en phase avec le signal d'excitation, l'autre, située sur la partie inférieure, correspond à des oscillations où le signal est en opposition de phase.

On observe de plus une grande similarité avec la réponse libre présentée précédemment en figure 4.2. Plus précisément, l'ajout d'un forçage a pour effet de transformer la bifurcation exacte présente en ( $\omega = 1, u(t = 0) = 0$ ) en quasi bifurcation. D'autre part, on peut observer que les branches de solutions de la réponse forcée (traits pleins) et celles de la réponse libre (rappelées en traits pointillés) se rejoignent lorsque l'amplitude tend vers l'infini.

### 4.6.3 Réponse forcée harmonique non conservative

Pour finir sur l'équation de Duffing, on rajoute maintenant un terme d'amortissement visqueux faible  $c = 0.0001$  et on augmente l'amplitude du forçage  $f(t) = 0.03\cos(\Omega t)$ . Ce qui revient à l'étude du système

$$\ddot{u} + 0.0001\dot{u} + u + u^3 = 0.03\cos(\Omega t). \quad (4.43)$$

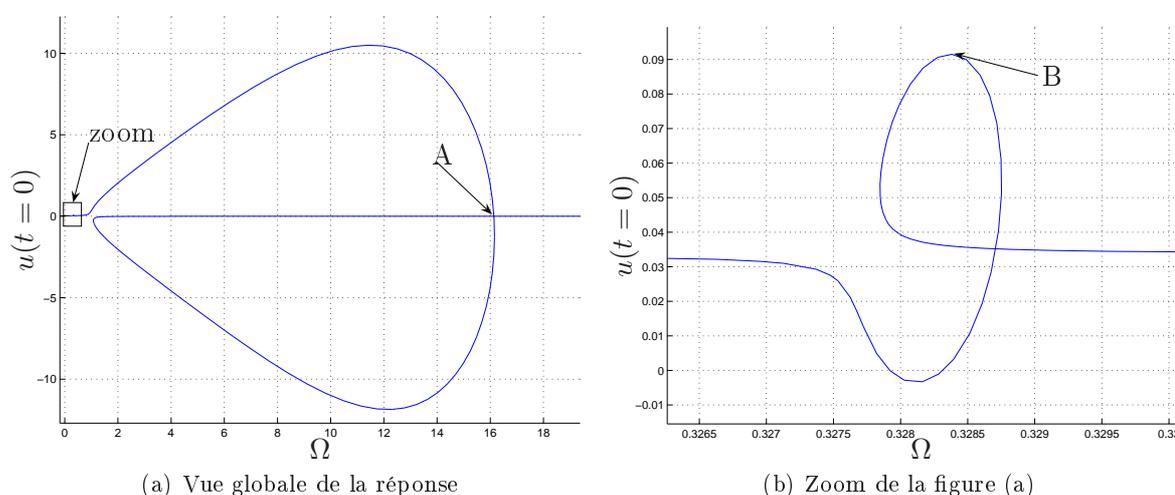


Figure 4.4 – Solutions périodiques du système (4.43). Déplacement  $u$  de la masse pour  $t = 0$  en fonction de la pulsation d'excitation  $\Omega$ . En figure (a), les deux branches de solutions présentes dans le cas forcé conservatif, se rejoignent dans le cas forcé amorti pour former une boucle. En figure (b) on observe une résonance super harmonique de faible amplitude.

La réponse forcée amortie calculée par la méthode des orbites périodiques est présentée en double figure 4.4. L'axe des abscisses correspond à la pulsation  $\Omega$  de l'excitation et l'axe des ordonnées correspond au déplacement pour  $t = 0$ , soit  $u(t = 0)$ . Le calcul a été effectué pour une plage de valeurs de la pulsation de forçage  $\Omega$  comprise entre  $0.1\text{rad/s}$  et  $19\text{rad/s}$ .

Sur la figure de gauche, est représentée la totalité de la plage des pulsations. Contrairement à la réponse non amortie présentée en figure 4.3, les deux branches issues de la quasi bifurcation en  $\Omega = 1$  ne partent pas à l'infini, mais se rejoignent pour former une boucle. On mettra en garde le lecteur sur le fait suivant : le point  $A$  n'est pas un point de bifurcation, mais juste un effet de la projection de l'ensemble de solutions sur le plan de la figure<sup>(8)</sup>. Au point  $A$ , la valeur du déplacement initial est nulle, par contre l'oscillation n'est pas nulle, elle-même maximale en ce point avec un déphasage par rapport au signal d'excitation égal à  $\pi/2$ . Cette boucle montre que la réponse de l'oscillateur amorti est bornée, contrairement au cas conservatif

(8). On pourrait s'en convaincre en utilisant une autre projection et les branches ne se couperaient pas de la sorte.

forcé qui peut répondre avec des déplacements d'amplitude infinie. Ce fait est du à la présence du terme d'amortissement, on pourrait montrer d'ailleurs que l'augmentation de la valeur du terme d'amortissement réduirait encore l'amplitude maximale de la réponse, ce qui se traduirait graphiquement par une diminution de la taille, voire une disparition, de la boucle présentée en figure 4.4.a.

Sur la figure de droite un zoom à été effectué sur l'étroite plage de pulsation  $0.326rad/s$  à  $0.33rad/s$  pour montrer une résonance *superharmonique* en  $\Omega = \omega_0/3 = 1/3$ . Les supers harmoniques sont une des caractéristiques des oscillateurs non-linéaires. En ces points, le signal de réponse possède un contenu harmonique particulier. En effet, l'harmonique fondamental possède une amplitude inférieure aux harmoniques supérieures, comme le montre le tableau suivant, présentant les 7 premières harmoniques de la transformée de Fourier du signal de réponse au point  $B$  :

$u(t = 0)$	0.092
$\Omega(rad/s)$	$0.3282 \simeq 1/3$
Terme constant	0
Harm 1	0.6841
Harm 2	0
Harm 3	1.5203
Harm 4	0
Harm 5	0.0019
Harm 6	0
Harm 7	0.0006

Concrètement, lors d'une résonance superharmonique la masse semble osciller plus vite que le signal d'excitation. Dans le cas présent, si l'on néglige le premier harmonique, la masse effectue trois allers-retours lorsque le signal d'excitation n'en effectue qu'un seul.

## 4.7 Conclusion

Ce chapitre est constitué de rappels et de définitions de notions liées aux vibrations non linéaires de systèmes mécaniques. On a précisé le contexte mécanique de l'étude qui est consacrée aux structures possédant des non-linéarités géométriques sans toutefois préciser l'expression du vecteur des forces internes (pour cela voir chapitre 6). On a ensuite rappelé les principaux résultats du cas linéaire en insistant sur l'aspect géométrique des modes et sur ses surfaces invariantes planes. Les modes non linéaires ont ensuite été présentés comme une généralisation des modes normaux linéaires et définis à l'aide de surfaces invariantes gauches plongées dans l'espace des phases. S'en est suivi une description qualitative des différents types de réponses non linéaires, ce qui nous a permis de recenser celles qui présentaient des solutions périodiques, donc calculables par la méthode des orbites périodiques. Après avoir rappelé les phénomènes particuliers rencontrés dans le domaine des vibrations non linéaires, on a terminé ce chapitre par une description des réponses périodiques de l'oscillateur de Duffing. Pour ce dernier point, on a noté la nécessité de choisir une référence temporelle (par l'intermédiaire d'une condition initiale) pour rendre unique l'ensemble des solutions libres de l'oscillateur. On a retenu aussi la manière dont la courbe de réponse forcée était "perturbée" comparée à celle de la réponse libre.

Vient maintenant la partie la plus théorique de ce mémoire, qui est consacrée à la construction des surfaces invariantes (celles de modes non linéaires) via une formulation du problème des orbites périodiques de systèmes autonomes et conservatifs. On présentera dans la foulée un rappel de la méthode de calcul des réponses forcées sans toutefois s'y attarder.



---

# Orbites périodiques de systèmes dynamiques autonomes et conservatifs, formulation appliquée à la mécanique

**C**'est un chapitre théorique. On montre comment les surfaces invariantes des modes non linéaires peuvent être construites à partir d'orbites périodiques de systèmes autonomes et conservatifs. On présente ensuite une formulation du problème des orbites périodiques pour ces mêmes systèmes.

PLAN DU CHAPITRE 5

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>73</b>
<b>5.2</b>	<b>Famille d'orbites périodiques et modes non linéaires</b>	<b>75</b>
<b>5.3</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>77</b>
5.3.1	Trajectoires dans l'espace des phases	78
5.3.2	Normalisation temporelle	78
5.3.3	Matrice fondamentale	79
5.3.4	Matrice de monodromie et stabilité	80
<b>5.4</b>	<b>Orbites périodiques de systèmes dynamiques autonomes et conservatifs</b>	<b>82</b>
5.4.1	Equation de phase	83
5.4.2	Formulation à gradient d'énergie	86
5.4.2.a	Formulation	86
5.4.2.b	Application tangente	88
5.4.2.c	Orbite périodique normale	89
5.4.2.d	Surjectivité au voisinage d'une orbite périodique normale	90
5.4.3	Formulation amortie	92
5.4.3.a	Formulation	92
5.4.3.b	Application tangente	93
5.4.3.c	Surjectivité au voisinage d'une orbite périodique normale	93
5.4.3.d	Equation de phase simplifiée	94
<b>5.5</b>	<b>Orbites périodiques de systèmes dynamiques non-autonomes</b>	<b>94</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>96</b>

---

## 5.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent un exemple de définition des modes non linéaires utilisant la notion de surface invariante ainsi qu'une description de la classe des systèmes dynamiques que nous considérons dans ce mémoire. Dans l'objectif du calcul numérique de ces modes, il s'agira tout d'abord de décrire le Mode Non Linéaire (MNL) à l'aide d'objets mathématiques appelés *orbites périodiques de l'espace des phases* du système *conservatif et autonome* associé. Nous allons voir que la surface invariante du MNL peut, sous certaines conditions, être composée d'une famille de ces orbites périodiques. Il s'agira ensuite de poser les bases théoriques nécessaires à l'élaboration d'un problème bien posé, sous forme d'une application submersion<sup>(1)</sup>, dont cette famille d'orbites périodiques sera la solution.

L'application non linéaire que nous obtiendrons ne nous permettra pas d'obtenir directement/numériquement notre famille d'orbite périodique mais seulement de la définir de manière unique. Il faudra appliquer (et ce sera fait dans le chapitre suivant), une méthode de discrétisation temporelle pour transformer cette application en un système d'équations non linéaires algébriques, et appliquer dans un second temps une méthode de continuation (la MAN par exemple) pour obtenir les solutions de ce système d'équations sous forme numérique. Ainsi, le système d'équations non linéaires algébriques découlera de la transformation par discrétisation de l'application du problème des orbites périodiques présenté dans ce chapitre.

Conformément aux considérations évoquées dans la première partie de ce mémoire, il faudra assurer la surjectivité de l'application tangente linéaire du système d'équations non linéaires algébriques pour pouvoir appliquer une méthode de continuation. Par conséquent, l'application tangente linéaire du problème des orbites périodiques devra être elle aussi surjective. La figure 5.1 page 74 illustre les lignes précédentes.

Le calcul des solutions périodiques d'un système forcé (non autonome) par une méthode d'intégration temporelle de tir (shooting) ou une méthode simultanée est présenté dans SEYDEL (1994) et NAYFEH et BALACHANDRAN (1995). On peut l'utiliser pour l'obtention des orbites périodiques de systèmes autonomes et conservatifs en utilisant un forçage de très faible amplitude. Le système étudié reste conservatif mais devient aussi "légèrement non autonome". Cette méthode conduit à l'obtention d'une surface invariante proche de celle du MNL. La distance (ou erreur) entre la surface obtenue et celle du MNL étant liée à la norme du vecteur de forçage et ainsi, plus l'amplitude de forçage est petite, moins l'erreur est grande. Cette idée conduit à la question suivante : Que se passe-t-il lorsque l'amplitude du forçage tend vers zéro ? Dans ce cas, on se retrouve dans le cas autonome et conservatif parfait et avec le problème suivant, qui a été partiellement évoqué dans le chapitre précédent : *Pour un système autonome et conservatif, si  $u(t)$  est une solution périodique, alors,  $u_{\delta t}(t) = u(t + \delta t)$  est une solution périodique identique translatée temporellement.* Ceci conduit à un problème de non-unicité de la solution (l'application n'est plus surjective). Lors de mon stage de DEA, la méthode a d'ailleurs été testée sur des systèmes à faible nombre de degrés de liberté, et a effectivement conduit à de sérieux problèmes numériques. On peut donc répondre à la question ainsi : Si cette amplitude devient trop faible, le conditionnement de la matrice tangente devient mauvais, et les algorithmes itératifs ne convergent pas toujours. Si l'amplitude est parfaitement nulle, la matrice tangente est alors

---

(1). Nous rappelons qu'une application est dite submersive si son application tangente linéaire est surjective (voir partie une).

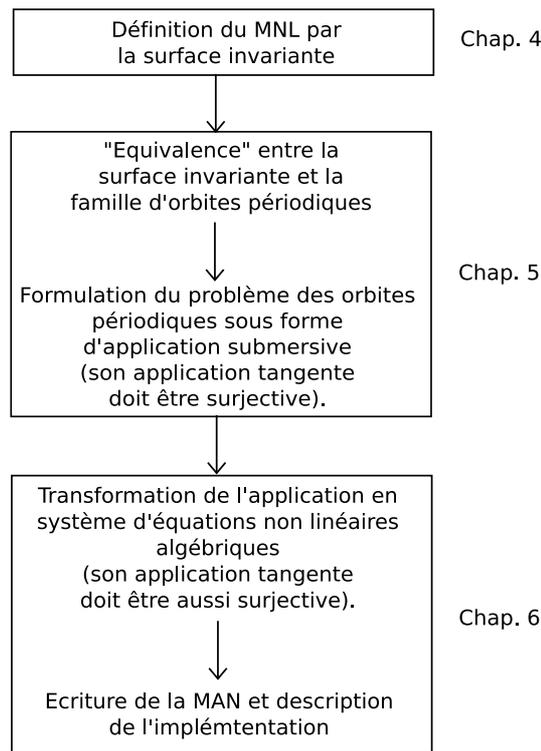


Figure 5.1 –

parfaitement singulière, ce qui empêche purement et simplement l'obtention des solutions. La difficulté provient notamment du fait que nos systèmes non forcés et non amortis possèdent une intégrale première (la conservation de l'énergie mécanique totale). Les solutions périodiques ne sont plus isolées (comme dans le cas d'un cycle limite) mais appartiennent généralement à des continus de dimension 1 de solutions périodiques.

Dans ce chapitre, on s'attachera donc à la description d'une nouvelle formulation viable pour le cas autonome et conservatif parfait, basée sur les travaux de Munoz et al. qui proposent une formulation pour la continuation de solutions périodiques de systèmes dynamiques possédant plusieurs intégrales premières<sup>(2)</sup>. Dans ce chapitre, après quelques rappels sur certaines notions liées à l'étude des systèmes dynamiques, nous reprendrons une partie des démonstrations présentées dans MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003), pour le cas des systèmes possédant une seule intégrale première<sup>(3)</sup>, et nous (re)montrerons la surjectivité de l'application tangente linéaire du problème des orbites périodiques dans ce cas. Nous aboutirons à une première formulation appelée *formulation à gradient d'énergie*, valable d'un point de vue mathématique mais difficilement réalisable numériquement. Nous proposerons donc une autre formulation appelée *formulation amortie*, basée sur la première mais plus facilement réalisable.

Enfin, nous terminerons ce chapitre par un rappel de la formulation de la continuation de solutions périodiques pour le cas des systèmes non autonomes.

(2). Une intégrale première est une constante du mouvement.

(3). en l'occurrence il s'agit de l'énergie mécanique totale

## 5.2 Famille d'orbites périodiques et modes non linéaires

Nous avons vu au chapitre précédent que le MNL pouvait être défini à l'aide d'une surface invariante (bidimensionnelle) dans l'espace des phases tangente au plan invariant défini par le mode linéaire. Considérons de plus le cas des systèmes conservatifs dont l'ensemble des points constituant leurs trajectoires sont au même potentiel d'énergie mécanique totale. Dans le cas linéaire, les trajectoires inscrites dans le plan invariant sont forcément toutes périodiques au regard de la définition du mouvement sur le mode linéaire (voir l'expression (4.13)). Dans le cas non linéaire, il semble a priori évident, et cela est confirmé par le théorème de la variété centrale, que toutes les trajectoires inscrites dans la surface invariante sont aussi périodiques, du moins localement lorsque l'on est proche du point d'équilibre, c'est à dire lorsque les effets non linéaires sont faibles, voire négligeables. Ainsi, au voisinage du point d'équilibre la surface invariante du MNL est composée d'une famille de trajectoires périodiques aussi nommées *orbites périodiques de l'espace des phases*. Nous pouvons d'ailleurs ajouter que chacune de ces orbites périodiques courbées est aussi un sous-espace invariant mais de dimension un. Le principe de la méthode de calcul du MNL qui est décrite dans ce mémoire repose sur ces constats. La figure 5.2 page 76 montre un exemple de surface invariante de l'espace des phases et quelques orbites périodiques qui y sont inscrites.

Dans la suite, nous ne ferons pas de distinction entre les termes *mode non linéaire (MNL)* et la *famille des orbites périodiques* solution de notre formulation. Pourtant, cette association n'est pas à prendre à la légère comme le montrent les lignes suivantes.

Implicitement, nous avons fait l'hypothèse forte que la surface invariante du MNL n'est composée que de trajectoires périodiques dans l'espace des phases. En réalité, les systèmes dynamiques que nous étudions possèdent aussi des trajectoires quasi-périodiques ainsi que des trajectoires homocliniques ou autres trajectoires spécifiques aux cas des vibrations non linéaires qui apparaissent notamment lors des phénomènes de bifurcation. Avec la méthode qui sera décrite, qui est basée sur la recherche de solutions périodiques, nous ne pourrions donc pas obtenir ces trajectoires particulières.

D'autre part, le fait de rechercher des solutions périodiques au sens strict, sans imposer de conditions sur la *période minimale* (notre méthode n'impose pas de telles conditions), implique le fait que les solutions doublement<sup>(4)</sup> ou triplement périodiques (ou plus) sont aussi des solutions admissibles par notre méthode. Nous verrons par la suite que ceci a une influence importante sur la caractérisation de l'ensemble des solutions admissibles.

Afin de calculer la surface invariante du MNL, que nous supposons composée uniquement d'orbites périodiques, nous partons tout d'abord d'une orbite périodique de très faible amplitude, proche d'un point d'équilibre, construite à l'aide du mode linéaire du système dynamique linéarisé. Cette première orbite se trouve donc dans le plan invariant du mode linéaire mais n'est pas exactement inscrite dans la surface invariante du MNL. Nous appellerons cette orbite de départ l'*orbite périodique approchée*. N'étant pas exactement inscrite sur la surface invariante du MNL, nous appliquons une méthode de correction sur cette orbite périodique approchée pour obtenir une première orbite périodique exactement inscrite sur la surface invariante du MNL. Nous appliquons ensuite une méthode de continuation pour construire de proche en proche les orbites périodiques composant la surface invariante du MNL. Cette méthode est illustrée dans la figure 5.2 page 76.

---

(4). Une solution doublement périodique est une solution périodique de période moitié qui se répète deux fois à l'identique.

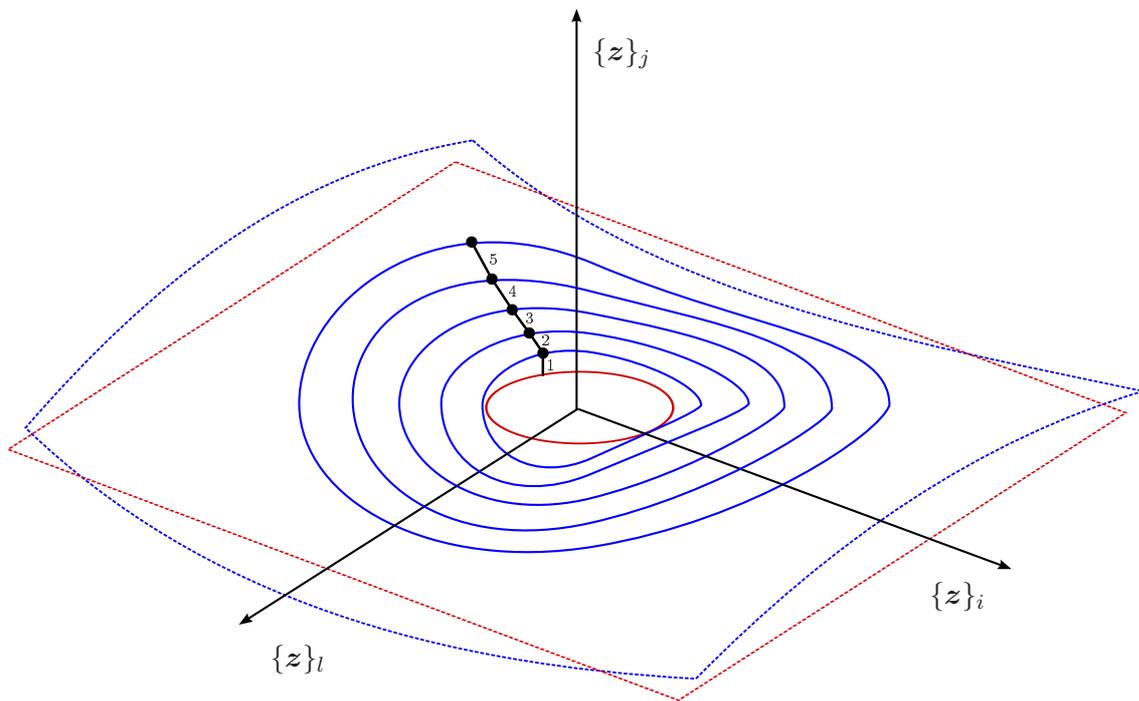


Figure 5.2 – Illustration d'une portion de la surface invariante de l'espace des phases construite par continuation d'orbites périodiques. La méthode de calcul consiste à partir d'une orbite périodique de très faible amplitude construite à l'aide du mode linéaire (en rouge) se trouvant dans le plan invariant du mode linéaire (en traits discontinus rouge). Nous appliquons ensuite une méthode de correction (phase 1) sur l'orbite périodique approchée pour obtenir une première orbite périodique exactement inscrite sur la surface invariante du MNL (la surface est dessinée en traits discontinus bleu). Nous appliquons enfin une méthode de continuation (phases 2,3,4 et 5 etc...) pour construire de proche en proche les orbites périodiques composant la surface invariante du MNL.

### 5.3 Préliminaires

Dans le chapitre précédent, nous avons restreint l'étude aux cas des systèmes dynamiques (4.3) page 51, (4.4) et (4.5) qui sont issus des équations de la dynamique, donc sous forme d'équations différentielles du second ordre. D'un autre coté, le formalisme utilisé dans MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003) est celui des systèmes dynamiques du premier ordre. Cependant, il suffit de quelques lignes pour ramener les équations au second ordre (4.3) page 51, (4.4) et (4.5) en équations au premier ordre, comme le montre les lignes suivantes.

Soit le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  défini avec l'équation  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}$ , on peut ensuite écrire (4.4) ainsi

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{v} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_{ext}(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

et (4.5) ainsi

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (5.2)$$

qui correspond au cas autonome et conservatif. Dans ce dernier cas, l'expression de l'énergie mécanique totale, qui est aussi l'unique intégrale première du mouvement, s'écrit

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} + W(\mathbf{u}) \quad (5.3)$$

avec  $W$  étant l'énergie potentielle de déformation avec  $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}$ .

Le système (5.2) peut enfin se mettre sous forme d'un système du premier ordre

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, t) \quad (5.4)$$

avec  $\mathbf{z}$  étant le vecteur d'état,  $\mathbf{z} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]^t$ . Ainsi, les équations du mouvement de nos structures discrétisées par éléments finis entrent dans le formalisme utilisé dans MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003).

#### PROPRIÉTÉ 2

*H étant une intégrale du mouvement, nous avons dans le cas conservatif et autonome une relation d'orthogonalité entre le vecteur de flot  $\mathbf{F}$  et le gradient de  $H$  dans l'espace des phases, soit,*

$$\mathbf{F}(\mathbf{z})^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (5.5)$$

□

Nous allons maintenant effectuer quelques brefs rappels sur l'étude des systèmes dynamiques afin de mieux comprendre les démonstrations de la section suivante. Les orbites périodiques étant un cas particulier de la classe des trajectoires, on présentera donc la notion de trajectoire dans l'espace des phases. On présentera ensuite la méthode de normalisation temporelle, qui consiste à faire un changement de variable dans le temps afin de ramener à l'unité la période d'intégration temporelle sur une orbite périodique. Viendra ensuite une définition de la *matrice fondamentale* d'un système dynamique linéaire avec coefficients dépendant du temps, qui sera utilisée pour l'expression de l'application tangente du problème des orbites périodiques. Enfin, nous présenterons la *matrice de monodromie*, habituellement utilisée pour l'étude de stabilité des orbites périodiques, qui servira aussi à l'expression de l'application tangente.

### 5.3.1 Trajectoires dans l'espace des phases

En dynamique, une trajectoire de l'espace des phases peut classiquement se définir à l'aide d'un problème aux valeurs initiales (PVI), comme celui présenté ci dessous,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, t) & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{z}(0, \mathbf{p}, T) = \mathbf{p} \end{cases} \quad (5.6)$$

la première équation étant l'équation de la dynamique régissant le système, la deuxième étant l'équation imposant les conditions initiales. L'inconnue étant la trajectoire elle-même que l'on pourra noter  $\mathbf{z}(t, \mathbf{p}, T)$ , avec  $t$  désignant la variable temps paramétrisant la trajectoire sur l'intervalle  $0 \leq t \leq T$ , avec  $T$  étant la durée de l'intégration (qui sera égale à la période lorsque la trajectoire en question sera périodique), et avec le vecteur des conditions initiales  $\mathbf{p}$  définissant le point de départ de la trajectoire. Ceci est illustré dans la figure 5.3 page 78.

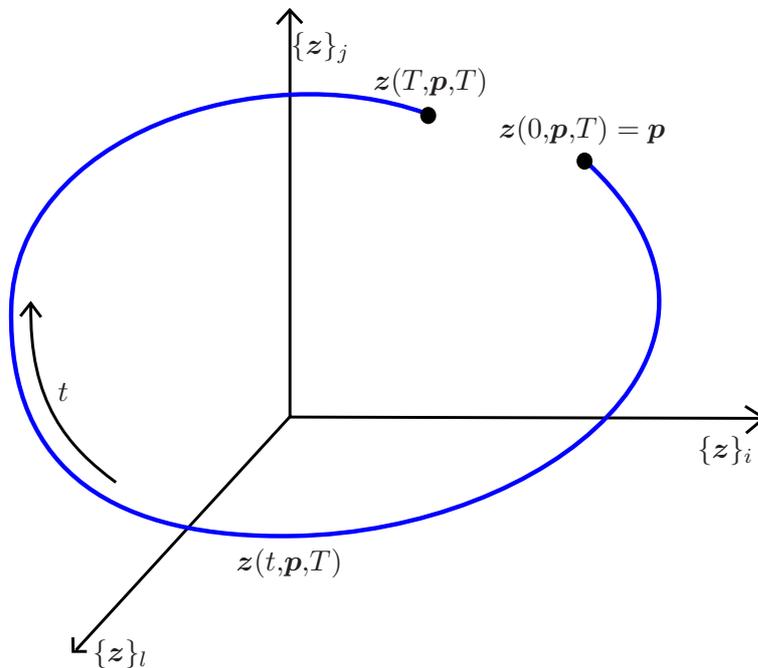


Figure 5.3 – Trajectoire dans l'espace des phases, solution du problème aux valeurs initiales (PVI) (5.6) page 78.

Par la suite nous ne ferons pas de distinction entre les formulations suivantes

- la trajectoire  $\mathbf{z}(t, \mathbf{p}, T)$ .
- la trajectoire  $\mathbf{z}$ .
- la trajectoire  $(\mathbf{p}, T)$ .

### 5.3.2 Normalisation temporelle

Dans l'objectif d'une recherche de solutions périodiques de l'espace des phases, aussi solutions du système (5.6), la variable de durée d'intervalle d'intégration  $T$  doit être vue comme une inconnue qu'il faudra déterminer en même temps que l'orbite elle-même. En effet, nous voulons que la durée de l'intervalle d'intégration  $T$  soit exactement la valeur de la période de la solution périodique. Or nous ne savons pas à l'avance quelle sera la durée de cette période. Pour cette

raison, il est préférable, essentiellement pour des raisons techniques qui seront visibles au chapitre suivant, d'appliquer une *normalisation temporelle* au système (5.6). Cette normalisation consiste à effectuer le changement de variable temporel  $t = \tau T$  de façon à ce que la nouvelle variable de temps normalisée  $\tau$  évolue dans l'intervalle unitaire  $0 \leq \tau \leq 1$ . On notera finalement  $z(\tau, \mathbf{p}, T)$ , la trajectoire de l'espace des phases paramétrée par la variable temps normalisée  $\tau$  et issue du point initial  $\mathbf{p}$ , la solution du problème aux valeurs initiales normalisé en temps

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \tau} = T\mathbf{F}(z, t) & \text{pour } 0 \leq \tau \leq 1 \\ z(0, \mathbf{p}, T) = \mathbf{p} \end{cases} \quad (5.7)$$

avec la variable  $T$  qui sera abusivement appelée *période*, mais qui demeure en toute rigueur la *durée de l'intervalle d'intégration*, car il se peut que  $T$  ne soit pas toujours la *période minimale* de la solution périodique désignée (il en sera donc forcément de même pour la fréquence du signal, qui est définie comme étant  $f = 1/T$ , avec  $T$  étant la durée de l'intervalle d'intégration) La figure 5.4 page 79 illustre la trajectoire solution du problème (5.7).

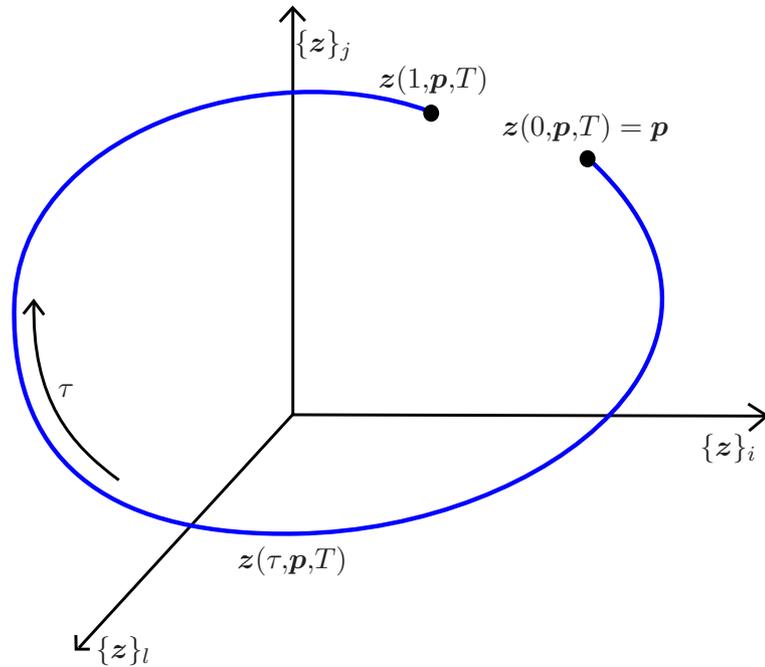


Figure 5.4 – Trajectoire normalisée en temps dans l'espace des phases, solution du problème aux valeurs initiales (PVI) (5.7) page 79.

On insistera sur le fait que l'ensemble de solutions de ce nouveau système est strictement équivalent à celui du précédent noté (5.6).

### 5.3.3 Matrice fondamentale

#### DÉFINITION 2

Une fonction matrice  $\psi$  de dimension  $l \times l$  est une matrice fondamentale pour le système  $\frac{\partial x}{\partial t}(t) = \mathbf{A}(t)x(t)$  si

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \mathbf{A}(t)\psi(t), \quad \psi(t_0) = \psi_0 \text{ non singulière pour une valeur } t_0 \quad (5.8)$$

□

**PROPRIÉTÉ 3**

Si  $\mathbf{v}(t)$  est une trajectoire solution du système (5.8) de matrice fondamentale  $\boldsymbol{\psi}(t)$  telle que  $\boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{I}$ , alors on peut exprimer  $\mathbf{v}(t)$  seulement à l'aide de la matrice fondamentale et du vecteur des conditions initiales  $\mathbf{v}(0)$ ,

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\psi}(t)\mathbf{v}(0)$$

□

Afin de préparer les démonstrations qui viendront par la suite, nous devons calculer la matrice fondamentale du système dynamique tangent à (5.7) défini au voisinage d'une solution périodique. Soit  $\mathbf{z}_0(\tau) = \mathbf{z}(\tau, \mathbf{p}_0, T_0)$  une solution périodique solution de (5.7). On a donc

$$\frac{\partial \mathbf{z}_0}{\partial \tau}(\tau) = T_0 \mathbf{F}(\mathbf{z}_0(\tau)) \quad \forall \tau \in [0, 1]. \quad (5.9)$$

en différentiant cette dernière égalité par rapport à  $\mathbf{p}$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \mathbf{z}_0(\tau)}{\partial \mathbf{p}} \right) = T_0 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_0(\tau)) \frac{\partial \mathbf{z}_0(\tau)}{\partial \mathbf{p}} \quad \forall \tau \in [0, 1].$$

avec  $\frac{\partial \mathbf{z}_0(0)}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{I}$ . D'après la définition 2,  $\mathbf{V}(\tau) = \frac{\partial \mathbf{z}_0(\tau)}{\partial \mathbf{p}}$  est la matrice fondamentale du système variationnel

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = T_0 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_0(\tau)) \mathbf{v}. \quad (5.10)$$

**REMARQUE 5**

D'après la propriété 3, toutes trajectoires  $\mathbf{v}(\tau)$  solution de (5.10) vérifient

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{V}(\tau)\mathbf{v}(0) \quad (5.11)$$

□

**5.3.4 Matrice de monodromie et stabilité**

Floquet a introduit la notion de stabilité d'une solution périodique d'un système dynamique exprimée à l'aide d'une matrice nommée matrice de *monodromie*.

**DÉFINITION 3**

La matrice de monodromie  $\mathbf{M}$  d'une solution périodique  $\mathbf{z}(\tau, \mathbf{p}_0, T_0)$  de période  $T_0$  et de vecteur initial  $\mathbf{p}_0$  solution de (5.7) est définie par

$$\mathbf{M} := \mathbf{V}(1) = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}}(1, \mathbf{p}_0, T_0)$$

□

Cette matrice permet d'exprimer l'effet d'une perturbation  $\delta\mathbf{p}_0$  du vecteur initial  $\mathbf{p}_0$  sur la position au bout d'une période  $T_0$  d'intégration de l'équation de la dynamique. En effet, en effectuant un développement de Taylor au premier ordre par rapport à la variable  $\mathbf{p}_0$  sur la solution périodique  $\mathbf{z}(\tau, \mathbf{p}_0, T_0)$  à l'instant  $\tau = 1$ , on obtient

$$\mathbf{z}(1, \mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p}_0, T_0) \simeq \mathbf{z}(1, \mathbf{p}_0, T_0) + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}}(1, \mathbf{p}_0, T_0) \delta\mathbf{p}_0$$

Si l'on note  $\delta\mathbf{p}_1$  l'écart créé par la perturbation  $\delta\mathbf{p}_0$  au bout d'un tour d'intégration on a toujours au premier ordre

$$\delta\mathbf{p}_1 \simeq \mathbf{z}(1, \mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p}_0, T_0) - \mathbf{z}(1, \mathbf{p}_0, T_0) = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}}(1, \mathbf{p}_0, T_0) \delta\mathbf{p}_0 = \mathbf{M} \delta\mathbf{p}_0$$

En introduisant  $\delta\mathbf{p}_k$  l'écart créé par la perturbation au bout de  $k$  tours, on aura

$$\delta\mathbf{p}_k \simeq \mathbf{M}^k \delta\mathbf{p}_0 \quad (5.12)$$

Soit la matrice  $\mathbf{P}$  base des vecteur propres et  $\mathbf{Q}$  la matrice diagonale des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{M}$ , la relation (5.12) peut s'écrire

$$\delta\mathbf{p}_k \simeq (\mathbf{PQ P}^{-1})^k \delta\mathbf{p}_0$$

soit

$$\delta\mathbf{p}_k \simeq \mathbf{PQ}^k \mathbf{P} \delta\mathbf{p}_0$$

ainsi, les valeurs propres de la matrice de monodromie sont directement liées à la stabilité de la solution périodique  $\mathbf{z}(\tau, \mathbf{p}_0, T_0)$ . Plus précisément, on regardera la position des valeurs propres (complexes) de  $\mathbf{M}$  par rapport au cercle unité dans le plan complexe,

- si au moins une des valeurs propres est située à l'extérieur du cercle unité l'orbite sera instable.
- si toutes les valeurs propres sont strictement à l'intérieur du cercle unité, l'orbite sera stable.
- si toutes les valeurs propres sont situées à l'intérieur du cercle unité, dont au moins une située sur le cercle, l'orbite sera indifféremment stable.

En plus de l'information donnée sur la stabilité de la solution périodique, la matrice de monodromie permet la caractérisation des bifurcations. Cette caractérisation s'effectue en étudiant la manière dont les valeurs propres rentrent ou sortent du cercle unité lors du passage en un point de bifurcation. On pourra distinguer trois cas particuliers,

1. si une valeur propre traverse le cercle sur le demi-axe réel positif, la bifurcation sera qualifiée de bifurcation *transcritique*, *symmetry-breaking*, ou bien de type *cyclic-fold*, selon la configuration des branches stables et instables qui sont issues du point de bifurcation,
2. si une valeur propre traverse le cercle sur le demi-axe réel positif, alors la bifurcation donnera lieu à deux nouvelles solutions de période doublée par rapport à la solution existante avant la bifurcation,
3. si une valeur propre traverse le cercle en dehors de l'axe réel, alors la bifurcation donnera lieu à deux solutions contenant de nouveaux harmoniques de fréquences pas forcément commensurables avec celles présentes dans la solution située avant la bifurcation.

Bien que ces informations soient précieuses pour l'interprétation et le calcul des diagrammes de solutions (pour la détection des bifurcations ainsi que pour leur caractérisation), on ne calculera pas dans ce mémoire la matrice de monodromie. En effet, dans le cas des systèmes mécaniques modélisés par éléments finis, le calcul des valeurs propres de cette matrice ainsi que le calcul de la matrice elle-même impliquent des calculs numériques trop importants<sup>(5)</sup>. Pour la détection des bifurcations, on utilisera plutôt les avantages apportés par la MAN, qui rappelons-le, détecte automatiquement ces points (diminution des pas près d'un point de bifurcation, et suivi des branches avec des courbures importantes). Pour la caractérisation des solutions naissantes au point de bifurcation, on analysera directement les solutions elles-mêmes (voir dernier chapitre de cette partie).

## 5.4 Orbites périodiques de systèmes dynamiques autonomes et conservatifs

Ayant présenté les rappels nécessaires, nous pouvons maintenant commencer à écrire la formulation du problème des orbites périodiques pour les systèmes autonomes et conservatifs. Nous rappelons que dans ce cas le vecteur de flot  $\mathbf{F}$  ne dépend pas du temps.

Notre objectif est de définir correctement un ensemble de solutions périodiques de l'espace des phases admissibles par les équations de la dynamique. Un moyen simple de le faire est de poser l'équation de *périodicité*

$$\mathbf{r}(\mathbf{p}, T) := \mathbf{z}(1, \mathbf{p}, T) - \mathbf{p} = 0 \quad (5.13)$$

avec  $\mathbf{z}(1, \mathbf{p}, T)$  étant la valeur dans  $\mathbb{R}^{2n}$  correspondant au point final de la trajectoire (c'est à dire pour  $\tau = 1$ ) solution du PVI (5.7). Ainsi, lorsque (5.13) est satisfaite, le point initial  $\mathbf{p}$  de la trajectoire  $\mathbf{z}$  est égal à son point final  $\mathbf{z}(1, \mathbf{p}, T)$ . Le fait d'imposer des conditions sur le début et la fin de la trajectoire fait rentrer l'équation (5.13) dans la catégorie des problèmes aux valeurs aux bords (PVB). Dans l'espace des phases, la trajectoire  $\mathbf{z}(\tau, \mathbf{p}, T)$  ainsi obtenue est fermée et correspond donc à une *orbite périodique*, ceci est illustré dans la figure 5.5 page 83.

Dans le cas des systèmes non autonomes, on verra par la suite que l'équation (5.13) permet de définir une orbite périodique unique pour une valeur de la période  $T$  donnée. Dans le cas autonome et conservatif, le problème de translation de phase, déjà évoqué dans l'étude des vibrations libres de l'oscillateur de Duffing (voir premier chapitre de cette partie), est de nouveau d'actualité. Nous rappelons que pour un système autonome et conservatif, si  $\mathbf{z}(t)$  est une solution périodique, alors pour tout décalage temporel  $\delta t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{z}_{\delta t}(t) = \mathbf{z}(t + \delta t)$  est aussi une solution périodique géométriquement identique dans l'espace des phases. Ainsi, autour d'une solution périodique, le système d'équation (5.13) définit un ensemble de dimension 2. La première dimension correspond à la variation de l'énergie  $H$  qui correspond aussi à une variation de la période  $T$ , et la seconde dimension correspond à une rotation par translation de phase de l'ensemble des orbites périodiques (voir figure 5.6 page 84). Dans le cas autonome et conservatif, la relation de périodicité (5.13) n'est donc pas suffisante pour définir de manière unique une orbite périodique pour une valeur de la période  $T$  donnée.

---

(5). Pour un système mécanique modélisé par éléments finis, la taille de la matrice de monodromie peut être très importante, puisqu'elle est égale au nombre de degrés de liberté de la structure. D'autre part, rappelons que le calcul de valeurs propres de matrices est un problème non linéaire, et dans le cas des matrices de grande taille, la détermination exhaustive des valeurs propres est rarement possible.

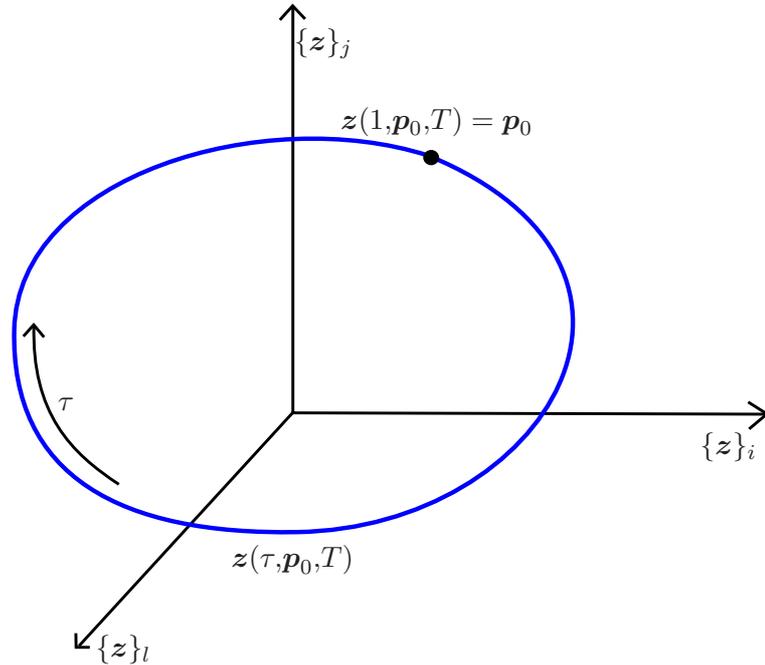


Figure 5.5 – *Orbite périodique normalisée en temps dans l'espace des phases, solution du problème aux valeurs aux bords (PVB) (5.13) page 82. Le point  $p_0$  désigne le point de l'espace des phases tel que  $z(1, p_0, T) = p_0$ , ce point est situé sur l'orbite périodique de trajectoire  $z(\tau, p_0, T)$  avec  $0 < \tau < 1$ .*

#### 5.4.1 Equation de phase

Afin que le système (5.13) définisse une orbite unique pour une valeur de la période  $T$  donné, il est nécessaire de lui rajouter une *équation de phase*. Il existe plusieurs manières de choisir une orbite parmi toutes ses soeurs jumelles géométriquement identiques,

- en imposant la valeur d'une composante du vecteur des conditions initiales  $p$

$$\{p\}_i = \{z(0, p, T)\}_i = \eta. \quad (5.14)$$

- en imposant l'orthogonalité entre le point initial de la trajectoire et un vecteur  $\mathbf{n}$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  bien choisi

$$z(0, p, T)^T \mathbf{n} = 0. \quad (5.15)$$

- en rendant nulle la valeur d'une composante de la dérivée du vecteur d'état au temps initial

$$\{F(p)\}_i = 0. \quad (5.16)$$

ou plus généralement

$$F(p)^T \mathbf{n} = 0. \quad (5.17)$$

avec un vecteur  $\mathbf{n}$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  bien choisi. Cette condition est illustrée en figure 5.7 page 85.

Lors de l'écriture des équations (5.14) et (5.16), il faudra choisir une composante  $i$  du vecteur d'état non toujours nulle lors du mouvement que l'on veut calculer<sup>(6)</sup>. En ce qui concerne

(6). Par exemple, lors de l'étude du mouvement du mode 2 de flexion d'une poutre, la composante  $i$  pourra être celle correspondant au degré de liberté de la flèche située au quart ou aux trois-quarts de la longueur de la poutre. Il ne faudra pas choisir un degré de liberté de la flèche au milieu de la poutre, car cette position correspond à un noeud lors du mouvement sur un mode 2 de flexion. Dans ce dernier cas, l'équation de phase serait sans effet.

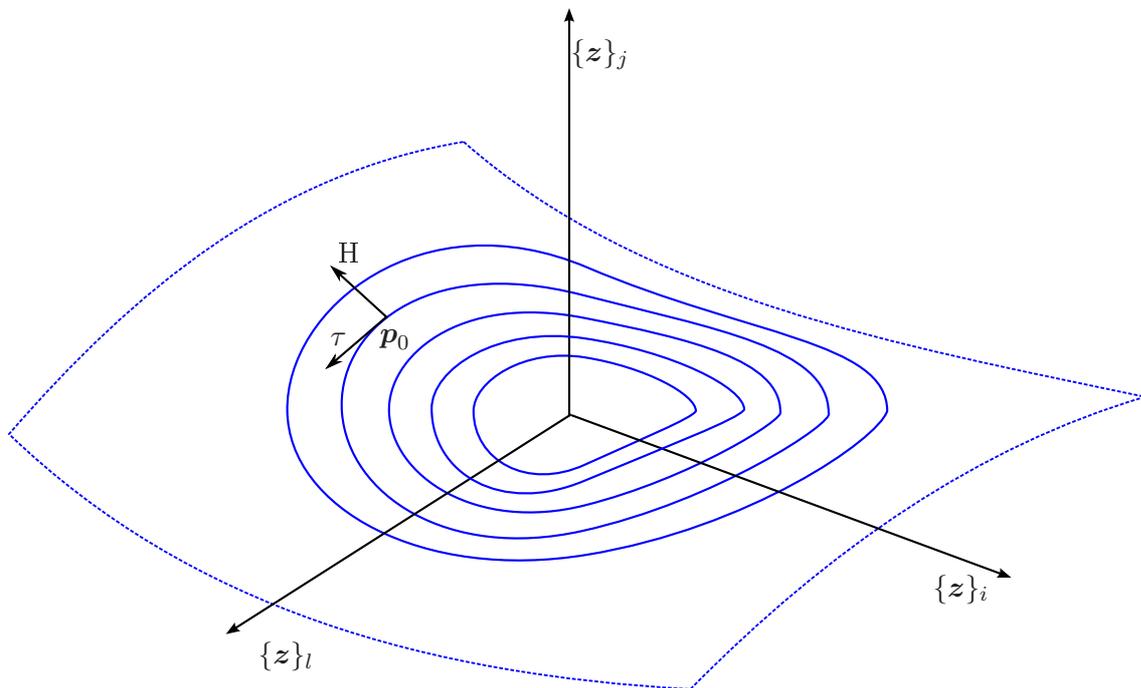


Figure 5.6 – Paramétrisation possible de la surface invariante de l'espace des phases. Le point  $p_0$ , qui définit de manière unique l'orbite périodique, peut se "positionner" sur la surface à l'aide de deux coordonnées. La première coordonnée correspond à la variation de l'énergie  $H$  qui correspond aussi à une variation de la période  $T$ , et la seconde coordonnée correspond à la variable  $\tau$ , qui se traduit par une rotation par translation de phase de l'orbite périodique définie par le point  $p_0$ .

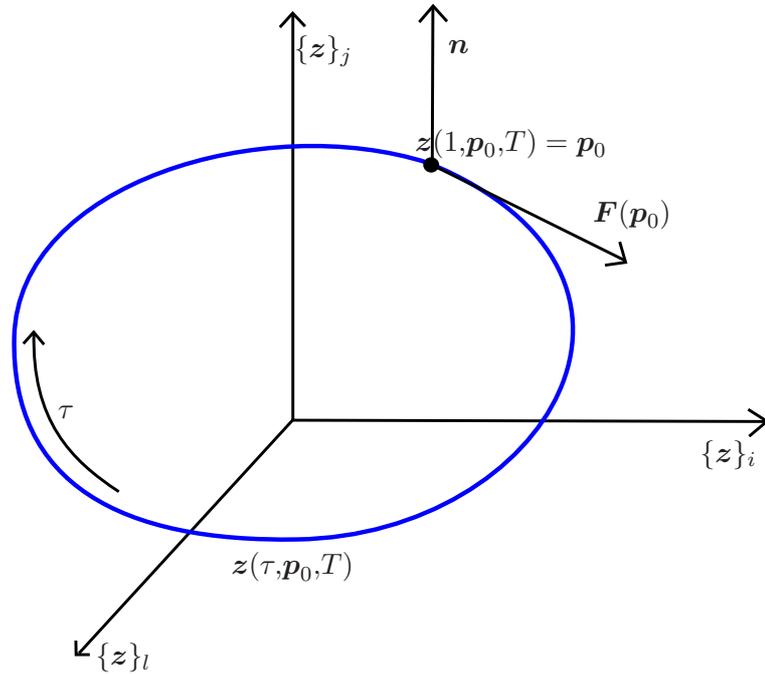


Figure 5.7 – *Orbite périodique normalisée en temps dans l'espace des phases. Afin de sélectionner une orbite parmi toutes ses soeurs jumelles construites par translation temporelle, on impose une condition supplémentaire sur le point initial de la trajectoire. La condition représentée ici est celle qui consiste à imposer l'orthogonalité entre le flot initial  $F(p_0)$  et un vecteur donné  $\mathbf{n}$ .*

le vecteur de phase  $\mathbf{n}$  de l'équation de phase (5.17) ou (5.15), il devra être choisi tel que lors du mouvement on ait

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau}(\tau, \mathbf{p}, T)^T \mathbf{n} \neq 0 \quad \text{pour} \quad 0 < \tau < 1 \quad (\text{inégalité stricte})$$

Le fait de devoir choisir la composante  $i$  ou plus généralement le vecteur de phase  $\mathbf{n}$  en fonction de la nature du mouvement que l'on veut étudier est un constat gênant. En effet, lors de la continuation d'un ensemble de solutions périodiques, les divers changements de déformées modales d'une structure peuvent amener de nouveaux noeuds de vibrations inattendus ou plus simplement de nouvelles composantes nulles durant l'évolution du mouvement périodique. Dans ces conditions, le problème redeviendrait mal posé. Pour répondre à ce problème, on pourra utiliser une équation nommée *condition d'orthogonalité* présentée dans le chapitre 6 de NAYFEH et BALACHANDRAN (1995) et aussi dans MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003) écrite comme il suit

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau}(0, \mathbf{p}, T)^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0. \quad (5.18)$$

Dans le contexte de la continuation de solutions périodiques, le vecteur  $\mathbf{p}_0$  de (5.18) est le point initial d'une orbite périodique connue et le vecteur  $\mathbf{p}$  est le point initial d'une orbite voisine que l'on cherche à déterminer. Ainsi, la relation (5.18) empêche le déphasage de l'orbite en cours de calcul par rapport à l'orbite déjà calculée. On remarquera que cette condition n'implique pas de considérations particulières sur le mouvement que l'on veut étudier. Cependant la présence du vecteur  $\mathbf{p}_0$  n'est pas compatible avec la méthode numérique décrite au chapitre suivant. Pour des raisons théoriques nous garderons tout de même cette dernière équation de phase et nous reviendrons plus tard sur une des précédentes lorsque cela sera possible.

En considérant le problème du choix de l'équation de phase comme étant réglé, le problème (5.13), augmenté de l'équation de phase sera noté

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, T) := \begin{cases} \mathbf{z}(1, \mathbf{p}, T) - \mathbf{p} & = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau}(0, \mathbf{p}, T)^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

qui est un système d'équations composé de  $2n + 1$  équations et de  $2n + 1$  inconnues. Le système est donc carré<sup>(7)</sup> mais l'ensemble des solutions de ce système est un ensemble de dimension un, on montrera d'ailleurs par la suite que le rang de l'application tangente  $D_{\mathbf{p}, T} \mathbf{R}(\mathbf{p}_0, T_0)$  n'est pas complet. Ainsi, si le couple  $(\mathbf{p}_0, T_0)$  est solution de (5.19), lorsque la variable  $T_0$  varie, le point  $\mathbf{p}_0$  parcourt l'ensemble des conditions initiales donnant lieu à des trajectoires périodiques. Autrement dit, l'ensemble de solutions du système (5.19) est étroitement lié au mode non linéaire que nous recherchons. Cependant, les systèmes carrés comme (5.19) n'entrent pas dans le cadre de la continuation de branches de solutions (voir la première partie de ce document). Nous rappelons que ce cadre est compatible seulement avec des systèmes d'équations ayant une inconnue de plus que d'équations et nécessite aussi que la matrice  $D_{\mathbf{p}, T} \mathbf{R}(\mathbf{p}_0, T_0)$  soit de rang complet. Par conséquent, cet aspect technique nous pousse à aller encore plus loin dans la recherche d'une formulation numériquement solvable du problème des orbites périodiques pour un système autonome et conservatif.

### 5.4.2 Formulation à gradient d'énergie

Dans MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003), les auteurs proposent une formulation du problème des orbites périodiques qui est compatible avec la méthode de continuation décrite dans la première partie de ce mémoire. Cette méthode consiste en premier lieu à transformer le système dynamique autonome et conservatif en un système non conservatif par l'ajout d'un terme proportionnel au gradient de l'intégrale première  $H$  dans les équations du mouvement. Ensuite, en utilisant une formulation telle que (5.19) mais avec le nouveau système dynamique comportant le terme dissipatif dont l'amplitude est contrôlée par une nouvelle inconnue scalaire nommée  $\alpha$ , les auteurs démontrent que l'application tangente de leur formulation est surjective au voisinage d'une *orbite périodique normale* et est de taille  $2n + 2 \times 2n + 1$ , soit compatible avec notre méthode de continuation.

Au cours des lignes suivantes, nous allons reprendre ce qui constitue la première partie de leur article en simplifiant au cas des systèmes dynamiques ayant une seule intégrale première. Nous allons donc revisiter les sujets suivants :

1. La formulation du problème comportant le terme dissipatif définissant les orbites périodiques.
2. Montrer que les solutions admissibles par ce problème définissent<sup>(8)</sup>  $\alpha = 0$ .
3. Exprimer l'application tangente correspondant au problème des orbites périodiques.
4. Définir ce que l'on appelle *les orbites normales*.
5. Montrer que l'application tangente du problème des orbites périodiques avec le terme dissipatif est surjective au voisinage d'une orbite normale.

#### 5.4.2.a Formulation

Comme dit précédemment, dans MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003), les auteurs ajoutent le terme dissipatif  $T\alpha \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}$  correspondant au gradient de l'intégrale première  $H$  avec une amplitude

(7). Les systèmes carrés sont des systèmes ayant autant d'inconnues que d'équations

(8). En d'autres termes, la dissipation est toujours nulle pour les solutions périodiques.

modulée par le scalaire constant<sup>(9)</sup>  $\alpha$  dans les équations du système dynamique. Ce qui donne le système dynamique dissipatif suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau} = T\mathbf{F}(\mathbf{z}) + T\alpha \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}. \quad (5.20)$$

Ce terme dissipatif est orthogonal à l'orbite et tend donc à écarter le vecteur d'état  $\mathbf{z}$  de sa trajectoire initiale conservative. Selon le signe du scalaire constant  $\alpha$ , ce nouveau terme dissipera ou bien emmagasinerà de l'énergie dans le système (voir figure 5.8 page 87).

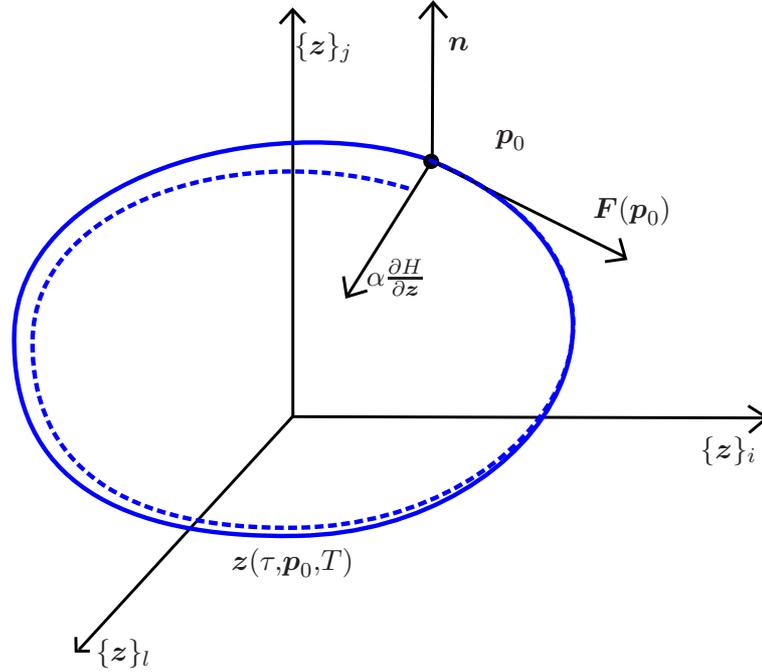


Figure 5.8 – *Orbite périodique normalisée en temps dans l'espace des phases (trait plein), ainsi que sa trajectoire déviée par ajout de dissipation (traits discontinus).*

Avec ce nouveau système dynamique la formulation des orbites périodiques prend maintenant la forme suivante :

$$\mathbf{R}_H(\mathbf{p}, T, \alpha) := \begin{cases} z(1, \mathbf{p}, T, \alpha) - \mathbf{p} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \tau}(0, \mathbf{p}, T, \alpha)^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

avec la trajectoire dépendant maintenant aussi de  $\alpha$  et étant solution du problème aux valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \tau} = T\mathbf{F}(z) + T\alpha \frac{\partial H}{\partial z} & \text{pour } 0 \leq \tau \leq 1 \\ z(0, \mathbf{p}, T, \alpha) = \mathbf{p} \end{cases} \quad (5.22)$$

On remarquera que la fonction  $\mathbf{R}_H(\mathbf{p}, T, \alpha)$  est définie de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  et on montrera plus tard que son application tangente au voisinage d'une solution périodique est surjective, ce qui permet donc la continuation de ses solutions.

Le lecteur avisé aura noté que ce terme dissipatif modifie radicalement le comportement du système dynamique conservatif originel, de sorte qu'il semblerait que nous nous écartions de notre

(9). Le scalaire est constant lors de la trajectoire sur l'orbite ( $\dot{\alpha} = 0$ ).

objectif initial qui est de calculer des orbites périodiques d'un système conservatif et autonome. En fait, les lignes suivantes montrent que les solutions de (5.20) existent seulement pour  $\alpha = 0$  (terme dissipatif nul sur toute la durée d'intégration de (5.22)). Soit  $\mathbf{z}_0(\tau) = \mathbf{z}(\tau, \mathbf{p}_0, T_0, \alpha)$  une solution périodique de (5.22). Puisque  $\mathbf{z}_0(1) - \mathbf{z}_0(0) = 0$ , nous avons aussi

$$\begin{aligned} 0 &= H(\mathbf{z}_0(1)) - H(\mathbf{z}_0(0)) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} (H(\mathbf{z}_0(\tau))) d\tau \\ &= \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z}_0(\tau))^T \frac{\partial \mathbf{z}_0}{\partial \tau} d\tau \\ &= \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z}_0(\tau))^T \left( T_0 \mathbf{F}(\mathbf{z}_0) + T_0 \alpha \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}_0} \right) d\tau \\ &= T_0 \alpha \int_0^1 \left\| \frac{dH}{d\tau} (\mathbf{z}_0(\tau)) \right\|^2 d\tau \quad \text{voir 5.5} \end{aligned} \tag{5.23}$$

donc  $\alpha = 0$ . Ainsi lorsque  $\mathbf{R}_H(\mathbf{p}, T, \alpha) = 0$  le scalaire  $\alpha$  ne peut qu'être égal à zéro<sup>(10)</sup>.

#### 5.4.2.b Application tangente

Afin de montrer que la continuation est possible, nous devons montrer que l'application tangente de  $\mathbf{R}_H(\mathbf{p}, T, \alpha)$  est surjective au voisinage d'une orbite périodique (voir théorème des fonctions implicites dans la première partie de ce mémoire). Pour cela nous devons en premier lieu exprimer cette application tangente au voisinage d'une solution périodique que nous noterons  $\mathbf{z}_0(\tau) = \mathbf{z}(\tau, \mathbf{p}_0, T_0, \alpha_0)$ , avec  $(\mathbf{p}_0, T_0, \alpha_0) = 0$  solution de (5.21)<sup>(11)</sup>. Occupons-nous tout d'abord de la première équation de (5.21) correspondant à l'équation de périodicité définie de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Nous noterons cette équation

$$\mathbf{r}_H(\mathbf{p}, T, 0) := \mathbf{z}(1, \mathbf{p}, T, 0) - \mathbf{p} = 0.$$

En ce qui concerne la dérivée par rapport à  $\mathbf{p}$ , il vient immédiatement avec la définition de la matrice de monodromie (présentée précédemment dans ce même chapitre) que

$$\frac{\partial \mathbf{r}_H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0, T_0, 0) = \mathbf{M} - \mathbf{I}$$

avec  $\mathbf{I}$  étant la matrice identité de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

En ce qui concerne la dérivée par rapport à  $T$ , le calcul, étant long et moins évident, on présente ici seulement le résultat

$$\frac{\partial \mathbf{r}_H}{\partial T}(\mathbf{p}_0, T_0, 0) = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0)$$

En ce qui concerne la dérivée par rapport à  $\alpha$ , on gardera l'expression :

$$\frac{\partial \mathbf{r}_H}{\partial \alpha}(\mathbf{p}_0, T_0, 0) = T_0 \mathbf{M} \int_0^1 \mathbf{V}(\tau)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\tau) d\tau \tag{5.24}$$

Pour finir, en regroupant les trois derniers résultats en ajoutant la ligne correspondant au gradient de l'équation de phase, l'application tangente de la fonction  $\mathbf{R}_H(\mathbf{p}, T, \alpha)$  est la suivante

(10). Le fait de rajouter un terme qui est au final nul peut sembler a priori paradoxal. Mais nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que lors des calculs numériques nous avons parfois  $\mathbf{R}_H(\mathbf{p}, T, \alpha) \neq 0$  avec  $\alpha \neq 0$ . C'est le cas lors d'une correction de type Newton-Raphson par exemple. En somme, l'ajout du terme dissipatif et du scalaire  $\alpha$  se justifie seulement pour des raisons de régularisations et de solvabilité numérique.

(11). Nous rappelons que l'on a forcément  $\alpha_0 = 0$  pour toutes les solutions de (5.21).

$$D_{\mathbf{p},T,\alpha}\mathbf{R}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0).(\mathbf{p},T,\alpha) := \begin{cases} (\mathbf{M} - \mathbf{I})\mathbf{p} + \mathbf{F}(\mathbf{p}_0)T + \left(T_0\mathbf{M} \int_0^1 \mathbf{V}(\tau)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\tau) d\tau\right) \alpha \\ \mathbf{F}(\mathbf{p}_0)^T \mathbf{p} \end{cases} \quad (5.25)$$

#### 5.4.2.c Orbite périodique normale

Nous savons que les diagrammes de solutions de réponses libres de systèmes dynamiques peuvent comporter des points de bifurcation. En ces points singuliers les solutions périodiques sont dites *dégénérées* et cela se traduit par une perte de la surjectivité de l'application tangente (5.25). La formulation MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003) n'a pas prétention de régulariser les points singuliers<sup>(12)</sup>, mais seulement de proposer une formulation viable des orbites périodiques de systèmes autonomes et conservatifs au voisinage d'*orbites périodiques normales*. Ainsi, les auteurs de MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003) proposent une définition des orbites périodiques normales définies comme des orbites périodiques non situées en des points de bifurcation afin d'assurer la surjectivité de l'application tangente de leur formulation en leur voisinage.

#### DÉFINITION 4

On appellera orbite périodique normale  $\mathbf{z}_0(\tau)$  une orbite périodique ayant la propriété suivante :

$$Im(\mathbf{M} - \mathbf{I}) + \mathbb{R}\mathbf{F}(\mathbf{p}_0) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)^\perp \quad (5.26)$$

□

Une orbite périodique normale est donc telle que l'espace vectoriel engendré par l'image de  $\mathbf{M} - \mathbf{I}$  et par le vecteur  $\mathbf{F}(\mathbf{p}_0)$  sont supplémentaires à l'espace vectoriel composé de tous les vecteurs orthogonaux<sup>(13)</sup> à  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)$ .

#### PROPRIÉTÉ 4

L'espace engendré par l'image de  $\mathbf{M} - \mathbf{I}$  et par le vecteur  $\mathbf{F}(\mathbf{p}_0)$  est de dimension égale à l'espace vectoriel composé de tous les vecteurs orthogonaux à  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)$ . L'espace engendré par l'unique vecteur  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)$  étant 1, on aura donc

$$dim(Im(\mathbf{M} - \mathbf{I}) + \mathbb{R}\mathbf{F}(\mathbf{p}_0)) = 2n - 1 \quad (5.27)$$

□

#### REMARQUE 6

L'espace engendré, présent dans le membre de gauche de (5.26), est égal à l'espace engendré par l'application tangente

$$D_{\mathbf{p},T}\mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0).(\mathbf{p},T) = (\mathbf{M} - \mathbf{I})\mathbf{p} + \mathbf{F}(\mathbf{p}_0)T \quad (5.28)$$

Et donc d'après la propriété, le rang de cette application de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  est  $2n - 1$ .

□

(12). Les points singuliers, correspondant à des bifurcations exactes dans les diagrammes de continuation, poseront donc toujours des problèmes techniques lors des calculs des branches de solutions. Il faudra donc employer les techniques de sauts ou de perturbation pour passer ces points (voir partie une).

(13). Le lecteur prendra garde à ne pas confondre la notation *orthogonale*  $\mathbf{X}^\perp$  qui désigne l'espace vectoriel orthogonal au vecteur  $\mathbf{X}$  et la notation *transposé*  $\mathbf{X}^T$ .

Dans MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003), on montre que la définition 4 est équivalente à la proposition suivante, légèrement plus parlante,

**PROPRIÉTÉ 5**

L'orbite périodique  $\mathbf{z}_0(\tau)$  est normale si et seulement si

$$\begin{aligned} (i) \quad \dim(\text{Ker}(\mathbf{M} - \mathbf{I})) &= 1 \quad \text{ou} \\ (ii) \quad \dim(\text{Ker}(\mathbf{M} - \mathbf{I})) &= 2 \quad \text{et} \quad \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) \notin \text{Im}(\mathbf{M} - \mathbf{I}) \end{aligned} \tag{5.29}$$

□

Afin d'éclairer un peu plus les points (i) et (ii), une analyse du noyau de  $(\mathbf{M} - \mathbf{I})$  s'impose.

En différenciant par rapport à la variable  $\tau$  l'équation du système dynamique de (5.7) page 79 prise au voisinage d'une solution périodique  $\mathbf{z}_0$ , on obtient

$$\frac{\partial^2 \mathbf{z}_0}{\partial^2 \tau} = T_0 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_0(\tau)) \frac{\partial \mathbf{z}_0}{\partial \tau}(\tau)$$

on a donc, aussi d'après l'équation (5.7),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{F}(\mathbf{z}_0(\tau))) = T_0 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_0(\tau)) \mathbf{F}(\mathbf{z}_0(\tau))$$

on en déduit que le vecteur  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_0(\tau))$  est solution du système dynamique tangent  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}(\tau) = T_0 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_0(\tau)) \mathbf{x}(\tau)$  de matrice fondamentale  $\mathbf{V}(\tau)$ . Donc

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_0(\tau)) = \mathbf{V}(\tau) \mathbf{F}(\mathbf{z}_0(0))$$

et pour  $\tau = 1$  on a  $\mathbf{V}(\tau) = \mathbf{M}$  soit

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_0(1)) = \mathbf{M} \mathbf{F}(\mathbf{z}_0(0))$$

enfin, puisque  $\mathbf{z}_0(0) = \mathbf{z}_0(1)$ , on a au final

$$(\mathbf{M} - \mathbf{I}) \mathbf{F}(\mathbf{z}_0(0)) = 0$$

donc

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_0(0)) \in \text{Ker}(\mathbf{M} - \mathbf{I}) \tag{5.30}$$

Ainsi, +1 est valeur propre de la matrice de monodromie  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_0(0))$  est un vecteur propre. Dans le cas (i), le noyau de  $\mathbf{M} - \mathbf{I}$  est complètement déterminé, contrairement au cas (ii) où le second vecteur composant le noyau de  $\mathbf{M} - \mathbf{I}$  n'est pas connu. Cependant, nous allons voir qu'avec les résultats présentés, il est maintenant possible de montrer la surjectivité de l'application tangente que l'on soit dans le cas (i) ou dans le cas (ii).

#### 5.4.2.d Surjectivité au voisinage d'une orbite périodique normale

Afin de montrer la surjectivité de l'application tangente (5.25) page 89, nous commençons tout d'abord par montrer la surjectivité dans  $\mathbb{R}^{2n}$  de l'application tangente contenue dans la première ligne de (5.25), soit l'application tangente de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  suivante :

$$D_{\mathbf{p}, T, \alpha} \mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0, T_0, 0) \cdot (\mathbf{p}, T, \alpha) = (\mathbf{M} - \mathbf{I}) \mathbf{p} + \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) T + D_{\alpha} \mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0, T_0, 0) \alpha$$

Pour cela, il suffit de reconsidérer le fait que le rang de  $D_{\mathbf{p},T}\mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0).(\mathbf{p},T,0)$  est égal à  $2n-1$  (voir remarque 6) et de montrer que  $D_\alpha\mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0)$  est un vecteur manquant de la base de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Ceci peut être fait par le raisonnement par l'absurde suivant :

Supposons que "*le vecteur  $D_\alpha\mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0)$  soit contenu dans l'image de l'application  $D_{\mathbf{p},T}\mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0).(\mathbf{p},T,0)$* " autrement dit " $D_\alpha\mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0) \in \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)^\perp$ " ce qui revient à l'expression

$$P := \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)^T D_\alpha\mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0) = 0$$

soit d'après (5.24),

$$P := T_0 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)^T \mathbf{M} \int_0^1 \mathbf{V}(\tau)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\tau) d\tau = 0 \quad (5.31)$$

D'autre part, d'après (5.26), on a

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)^T (\mathbf{M} - \mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$$

donc aussi pour  $\mathbf{x} = \int_0^1 \mathbf{V}(\tau)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\tau) d\tau$ , en combinant avec (5.31) on obtient

$$P := T_0 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)^T \int_0^1 \mathbf{V}(\tau)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\tau) d\tau = 0$$

en remarquant que  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)$  est constant par rapport à  $\tau$ , on a maintenant

$$P := T_0 \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)^T \mathbf{V}(\tau)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\tau) d\tau = 0$$

D'autre part, dérivant par rapport à  $\mathbf{p}$  l'égalité  $H(\mathbf{z}(\tau,\mathbf{p},T)) = H(\mathbf{p}) \quad \forall \tau \in [0,1]$  au voisinage de  $(\mathbf{p}_0,T_0,0)$ , on obtient  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{z}_0(\tau))^T \mathbf{V}(\tau) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0) \quad \forall \tau \in [0,1]$ , ce qui donne enfin, en substituant ce dernier résultat dans la relation 5.4.2.d,

$$P := T_0 \int_0^1 \left\| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\tau) \right\|^2 d\tau = 0$$

ce qui est impossible car  $\left\| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\tau) \right\|$  est strictement positif pour toutes les trajectoires non triviales. On en déduit que la proposition initiale du raisonnement est fautive, et donc que sa négation est vraie, à savoir, "*le vecteur  $D_\alpha\mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0)$  n'est pas contenu dans l'image de l'application  $D_{\mathbf{p},T}\mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0).(\mathbf{p},T,0)$* ". Ainsi, avec la remarque 6, l'application tangente définie de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$   $D_{\mathbf{p},T,\alpha}\mathbf{r}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0).(\mathbf{p},T,0)$  est de rang  $2n$ .

Reconsidérons maintenant l'application complète tangente du PVB

$$D_{\mathbf{p},T,\alpha}\mathbf{R}_H(\mathbf{p}_0,T_0,0).(\mathbf{p},T,0)$$

définie de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  comportant la ligne de l'équation de phase. Il faut montrer que cette application est de rang  $2n+1$ . Sachant que les  $2n$  premières lignes sont de rang  $2n$ , il suffit de montrer<sup>(14)</sup> que le vecteur ligne correspondant à l'application tangente de l'équation de phase

(14). Soit  $\mathbf{Q}$  une matrice de dimension  $n \times (n+1)$  telle que  $\text{rang}(\mathbf{Q}) = n$  et  $\mathbf{v}$  l'unique vecteur du noyau de  $\mathbf{Q}$ , soit la matrice  $\mathbf{A}$  formée par la matrice  $\mathbf{Q}$  et le vecteur transposé de  $\mathbf{v}$ , alors l'application linéaire de matrice  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix}$  est de rang  $n+1$ .

est indépendante des  $2n$  premières lignes. Nous rappelons que la dérivée de l'équation de phase (5.18) par rapport à  $\mathbf{p}$  est égale à

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau}(0, \mathbf{p}, T) = T_0 \mathbf{F}(z_0(0)) = T_0 \mathbf{F}(\mathbf{p}_0).$$

Or d'après (5.30),  $[\mathbf{F}(\mathbf{p}_0)^T, 0, 0]$  est une ligne indépendante de la matrice de l'application tangente. On en déduit enfin que l'application tangente

$$D_{\mathbf{p}, T, \alpha} \mathbf{R}_H(\mathbf{p}_0, T_0, 0) \cdot (\mathbf{p}, T, 0),$$

définie de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  est surjective au voisinage d'une orbite périodique normale et donc que l'application  $\mathbf{R}_H(\mathbf{p}, T, \alpha)$  du système (5.21) satisfait le théorème des fonctions implicites au voisinage de  $(\mathbf{p}_0, T_0, \alpha = 0)$ .

### 5.4.3 Formulation amortie

La formulation à gradient d'énergie (5.21) permet de définir correctement l'ensemble des solutions périodiques admissibles. Elle pourrait être utilisée sous forme numérique pour effectuer la continuation d'ensembles d'orbites périodiques. Cependant, la présence du terme dissipatif complique remarquablement la réalisation de l'implantation numérique. En effet, outre l'augmentation du degré polynômial qu'il impose (on pense ici à l'écriture quadratique de la MAN), il empêche l'élimination des équations en vitesse (équations reliant les données en vitesse et en position du schéma de Newmark, voir section 6.4.1 page 105 et 6.5.3 page 111) en imposant un terme contenant une multiplication matricielle de taille égale au nombre de degrés de liberté. Ainsi, pour cette raison uniquement, nous proposons une nouvelle formulation, plus simple, valable pour les systèmes tels que (5.2) et possédant une seule intégrale première. Cette formulation est basée sur une simplification extrême du vecteur dissipatif, tout en ayant un sens mécanique évident.

Après la présentation de la nouvelle formulation comportant le terme dissipatif simplifié, nous montrerons la persistance des arguments utilisés pour la validation de la formulation précédente avec la nouvelle. Ainsi, dans les lignes qui suivent nous allons montrer que

1. les solutions de la formulation amortie existent aussi seulement pour  $\alpha = 0$ ,
2. l'application tangente du PVB reste surjective au voisinage d'une orbite périodique normale.

#### 5.4.3.a Formulation

A la place du gradient de l'énergie comme terme dissipatif, nous proposons le vecteur de  $\mathbb{R}^{2n}$ ,

$$\mathbf{D}(\mathbf{z}) := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ -\mathbf{C}\mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

avec  $\mathbf{v}$  étant la vitesse et  $\mathbf{C}$  étant la matrice identité ou la matrice de masse  $\mathbf{M}$ , ou pourquoi pas, si l'implantation numérique le suggère, on pourra prendre la matrice  $\mathbf{C}$  égale à la matrice d'amortissement de Rayleigh. Ce qui donne le nouveau système dynamique suivant

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} = T\mathbf{F}(\mathbf{z}) + T\alpha\mathbf{D}(\mathbf{z}) \quad (5.33)$$

En se rappelant que les  $n$  dernières lignes de (5.33) correspondent à l'équation du principe fondamental de la dynamique, on s'aperçoit rapidement que le terme  $-\mathbf{C}\mathbf{v}$  du vecteur  $\mathbf{D}$  joue le

rôle d'un amortissement. Comme pour le gradient d'énergie, le scalaire  $\alpha$  va contrôler l'apport ou la perte d'énergie au système dynamique lors de son mouvement.

Ainsi la formulation du PVB des orbites périodiques, avec le nouveau terme dissipatif simplifié, sera noté ainsi

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{p}, T, \alpha) := \begin{cases} \mathbf{z}(1, \mathbf{p}, T, \alpha) - \mathbf{p} & = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau}(0, \mathbf{p}, T, \alpha)^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

avec la trajectoire dépendant de  $\alpha$  et étant solution du PVI suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau} & = T\mathbf{F}(\mathbf{z}) + T\alpha\mathbf{D}(\mathbf{z}) \quad \text{pour } 0 \leq \tau \leq 1 \\ \mathbf{z}(0, \mathbf{p}, T, \alpha) & = \mathbf{p} \end{cases} \quad (5.35)$$

La fonction  $\mathbf{R}_A(\mathbf{p}, T, \alpha)$  est définie de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  et on doit montrer que son application tangente au voisinage d'une solution périodique est surjective. Mais avant cela, nous devons montrer que les solutions périodiques existent seulement pour  $\alpha = 0$ .

Soit  $\mathbf{z}_0(\tau) = \mathbf{z}(\tau, \mathbf{p}_0, T_0, \alpha)$  une solution périodique solution de (5.35). Nous avons en reprenant l'avant-dernière étape du calcul (5.23), mais avec le terme dissipatif simplifié,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_0(\tau))^T (T_0\mathbf{F}(\mathbf{z}_0) + T_0\alpha\mathbf{D}(\mathbf{z}_0(\tau))) d\tau \\ &= \alpha T_0 \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_0(\tau))^T \mathbf{D}(\mathbf{z}_0(\tau)) d\tau \\ &= \alpha T_0 \int_0^1 \mathbf{v}_0(\tau)^T \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{v}_0(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.36)$$

Ainsi, avec la matrice  $\mathbf{M}^T \mathbf{C}$  définie positive, on a  $\int_0^1 \mathbf{v}_0(\tau)^T \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{v}_0(\tau) d\tau \neq 0$  et donc  $\alpha = 0$ .

#### 5.4.3.b Application tangente

L'application tangente du PVB (5.34) au voisinage d'une solution périodique  $(\mathbf{p}_0, T_0, 0)$  est presque la même que celle du (5.21), seul le terme correspondant à la dérivée du scalaire  $\alpha$  diffère

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{p}, T, \alpha} \mathbf{R}_A(\mathbf{p}_0, T_0, 0) \cdot (\mathbf{p}, T, \alpha) &:= \\ \begin{cases} (\mathbf{M} - \mathbf{I})\mathbf{p} + \mathbf{F}(\mathbf{p}_0)T + \left( T_0 \mathbf{M} \int_0^1 \mathbf{V}(\tau)^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{z}_0(\tau)) d\tau \right) \alpha \\ \mathbf{F}(\mathbf{p}_0)^T \mathbf{p} \end{cases} & \quad (5.37) \end{aligned}$$

#### 5.4.3.c Surjectivité au voisinage d'une orbite périodique normale

Pour montrer la surjectivité de l'application tangente du PVB (5.34), nous reprenons exactement le même raisonnement qu'en 5.4.2.d, mais en utilisant le nouveau terme dissipatif simplifié. Ce qui donne en reprenant l'avant dernière étape du calcul (5.4.2.d),

$$P := T_0 \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0)^T \mathbf{V}(\tau)^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{z}_0(\tau)) d\tau = 0 \quad (5.38)$$

soit

$$P := T_0 \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{z}_0(\tau))^T \mathbf{D}(\mathbf{z}_0(\tau)) d\tau = 0 \quad (5.39)$$

enfin

$$P := T_0 \int_0^1 \mathbf{v}_0(\tau)^T \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{v}_0(\tau) d\tau = 0 \quad (5.40)$$

ce qui est impossible avec la matrice  $M^T C$  définie positive. En considérant à nouveau le raisonnement présent en 5.4.2.d, on en déduit que la colonne correspondant à la dérivée de  $\alpha$  est indépendante des autres et qu'avec l'équation de phase l'application tangente (5.37) du PVB (5.34) est surjective au voisinage d'une orbite périodique normale.

#### 5.4.3.d Equation de phase simplifiée

Comme dit précédemment, l'équation de phase du système (5.34) page 93 permet de rendre la solution unique pour une valeur de  $T$  donnée, mais l'écriture numérique de cette équation n'est pas compatible avec toutes les méthodes de continuation car elle fait intervenir le point  $\mathbf{p}_0$ . On préférera donc utiliser une forme plus simple ne faisant pas intervenir ce point. L'équation de phase déjà présentée dans ce chapitre (équation (5.15) page 83) satisfait cette condition, nous la rappelons ici,

$$\mathbf{n}^T \mathbf{p} = 0 \quad (5.41)$$

Il reste à choisir maintenant les composantes du vecteur  $\mathbf{n}$  afin qu'il joue correctement le rôle de vecteur de phase.

On a vu précédemment que le vecteur "idéale" permettant la surjectivité de l'application tangente était  $\mathbf{F}(\mathbf{p}_0)$ , on peut montrer<sup>(15)</sup> qu'il suffit de choisir le vecteur  $\mathbf{n}$  tel que

$$\mathbf{n}^T \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) \neq 0$$

pour que l'application tangente reste surjective. En pratique on restreindra l'action du vecteur  $\mathbf{n}$  aux données en vitesses, en rendant nulle la vitesse de certains degrés de liberté de la structure à l'instant  $\tau = 0$ . L'action du vecteur de phase  $\mathbf{n}$  se restreindra donc au  $n$  dernières composantes du vecteur  $\mathbf{p}$ .

## 5.5 Orbites périodiques de systèmes dynamiques non-autonomes

Dans les sections précédentes, on a présenté une manière de définir le problème des orbites périodiques pour un système autonome et conservatif. On a vu aussi que cette formulation définissait de manière unique la surface invariante de l'espace des phases (le MNL). Il s'agit maintenant de s'intéresser au cas de la réponse forcée périodique en régime permanent. Notons qu'il s'agit uniquement de rappels.

Dans le cas des systèmes non autonomes, le vecteur de forçage "amène" une référence temporelle et synchronise la réponse avec le signal d'excitation<sup>(16)</sup>. Dans ce cas, l'équation de phase n'est pas nécessaire, et même fortement déconseillée puisqu'elle sur-contraint le problème en créant une compétition entre cette équation et la référence temporelle "naturelle" donnée par le signal d'excitation.

Sans justifications théoriques, on prendra simplement l'équation de périodicité (5.13) présentée précédemment en page 82 pour définir les orbites périodiques des systèmes non-autonomes.

$$\mathbf{R}_n(\mathbf{p}, T) := \mathbf{z}(1, \mathbf{p}, T) - \mathbf{p} = 0 \quad (5.42)$$

(15). Soit  $\mathbf{Q}$  une matrice de dimension  $n \times (n+1)$ , telle que  $\text{rang}(\mathbf{Q}) = n$  et soit  $\mathbf{v}$  un vecteur de la base du noyau de  $\mathbf{Q}$ . Soit la matrice  $\mathbf{A}$  formée par la matrice  $\mathbf{Q}$  et un vecteur  $\mathbf{u}$  tel que  $\mathbf{u}^T \mathbf{v} \neq 0$ , alors l'application de matrice  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{u}^T \end{bmatrix}$  est de rang  $n+1$ .

(16). Ceci est d'ailleurs illustré par l'étude des systèmes à un degré de liberté en automatisme où l'on trace le *diagramme de phase* qui représente le "décalage temporel" entre le signal d'entrée et le signal de sortie.

avec la trajectoire  $\mathbf{z}(\tau, \mathbf{p}, T)$  solution du PVI,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau} = T\mathbf{F}(\mathbf{z}, t) & \text{pour } 0 \leq \tau \leq 1 \\ \mathbf{z}(0, \mathbf{p}, T) = \mathbf{p} \end{cases} \quad (5.43)$$

avec le vecteur de flot  $\mathbf{F}(\mathbf{z}, t)$  qui dépend du temps et qui n'est pas forcément conservatif.

## 5.6 Conclusion

On a tout d'abord présenté le lien existant entre les MNL définis comme surfaces invariantes de l'espace des phases et les familles d'orbites périodiques. On a vu que, sous réserves, la surface invariante pouvait être composée d'une famille d'orbites périodiques définies comme solutions périodiques du système dynamique autonome et conservatif associé suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = 0.$$

Est venue ensuite une partie relative à la formulation du problème des orbites périodiques. La méthode classiquement utilisée pour le calcul des orbites périodiques de systèmes non autonomes

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = \alpha \mathbf{f}_{ext}$$

conduit à des problèmes numériques lorsqu'elle est appliquée naïvement à des systèmes autonomes et conservatifs, c'est à dire lorsque  $\alpha$  devient très faible ou nul. Ainsi nous avons proposé une nouvelle formulation permettant la définition, et ce de manière unique, de la famille des orbites périodiques dans le cas des systèmes autonomes et conservatifs rencontrés en mécanique. Cette formulation est issue des travaux théoriques présentés dans MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003), qui montre une formulation viable pour les systèmes autonomes comportant plusieurs intégrales premières. Nous avons tout d'abord repris et présenté les résultats de ces travaux en les adaptant au cas des systèmes possédant une seule intégrale première (cas classique en mécanique où la seule intégrale première est l'énergie mécanique totale). La formulation obtenue n'étant pas simplement réalisable numériquement pour le cas des structures modélisées par éléments finis (implantation trop complexe), nous avons ensuite proposé une version simplifiée dont l'application numérique n'apporte pas de travail de codage supplémentaire, valable pour le cas des systèmes dynamiques issus du principe fondamental de la dynamique. Cette méthode consiste à trouver les solutions périodiques du système

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \alpha \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = 0$$

avec  $\alpha$  étant une nouvelle inconnue scalaire.

---

## Une méthode de calcul des modes non linéaires : la méthode OPMAN

**O**n présente la forme numérique de la formulation du problème des orbites périodiques en utilisant la méthode des éléments finis, une méthode de discrétisation temporelle, ainsi qu'une méthode numérique de calcul d'orbites périodiques nommée méthode simultanée. Le problème non linéaire ainsi obtenu, on présente ensuite son algorithme de résolution par la MAN.

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>99</b>
<b>6.2</b>	<b>Elastodynamique en non linéaire géométrique</b>	<b>99</b>
6.2.1	Problème 3D	100
6.2.1.a	Déplacement	100
6.2.1.b	Déformation de Green-Lagrange	100
6.2.1.c	Contrainte et loi de comportement	100
6.2.1.d	Equations du mouvement	101
6.2.2	Approximation des structures minces	101
6.2.2.a	Déplacements	101
6.2.2.b	Contraintes	102
6.2.2.c	Déformations	102
6.2.2.d	Loi de comportement	102
6.2.2.e	Equations du mouvement	102
<b>6.3</b>	<b>Discrétisation spatiale</b>	<b>103</b>
<b>6.4</b>	<b>Discrétisation temporelle</b>	<b>105</b>
6.4.1	Schéma de Newmark	105
6.4.2	Schéma de Simo	106
6.4.3	Etude comparative et choix	106
6.4.4	Erreur de périodicité et fréquence de Shannon	107
<b>6.5</b>	<b>Formulation discrète du problème des orbites périodiques</b>	<b>109</b>
6.5.1	Méthode de tir	109
6.5.2	Méthode simultanée	110
6.5.3	Condensation des vitesses	111
<b>6.6</b>	<b>Continuation des orbites par la MAN (méthode OPMAN)</b>	<b>113</b>
6.6.1	Mise en forme quadratique	114
6.6.2	Problème à l'ordre $p$	114
6.6.3	Algorithme de calcul des termes des séries	116
<b>6.7</b>	<b>Implémentation</b>	<b>117</b>
6.7.1	Structure	118
6.7.2	Niveau 1: Manlab	118
6.7.3	Niveau 2: Classe MODELEEFOP	119
6.7.3.a	Construction de la matrice tangente	119
6.7.3.b	Construction des seconds membres	120
<b>6.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>

---

## 6.1 Introduction

A l'issue du chapitre précédent, nous possédons une formulation sous forme applicative définissant notre famille d'orbites périodiques (PVB (5.34) page 93). Il s'agit maintenant et dans un premier temps, de préciser les équations du système dynamique (4.5) page 51 (et aussi (4.3) page 51 ainsi que (4.4)) pour le cas de l'élastodynamique en non linéaire géométrique et notamment pour le cas de l'approximation des structures minces. Dans un second temps, on transformera le système non linéaire différentiel défini par l'application en un système d'équations non linéaires algébriques afin de pouvoir appliquer les méthodes de continuation numérique présentées dans la première partie du mémoire et obtenir ainsi les MNL sous forme numérique.

L'écriture du système algébrique passe tout d'abord par la discrétisation des équations du mouvement par le biais des discrétisations des champs de déplacements, contraintes et déformations, tous continus en espace et en temps. On présentera brièvement l'étape de discrétisation spatiale, connue sous le nom de méthode des éléments finis, et on s'attardera plus sur la méthode de discrétisation temporelle. Pour cette dernière, on rappellera le schéma de Newmark, et on présentera un autre schéma, moins connu, que nous nommerons du nom de son auteur : schéma de Simo. Viendra ensuite une comparaison des deux ainsi qu'une étude des erreurs induites par leur application sur la période ( $T$ ) des solutions obtenues (l'étude de cette erreur étant motivée par les interprétations des résultats présentés dans le chapitre suivant).

Une fois l'équation du mouvement obtenue sous forme discrète, on présentera deux méthodes numériques permettant d'obtenir les solutions du PVB (5.34) page 93 sous forme discrète (plus précisément il s'agira d'une liste de points dans l'espace des phases pour une orbite donnée de la famille). La première méthode de discrétisation, connue sous le nom de méthode de tir, sera brièvement rappelée, la seconde, que nous nommerons *méthode simultanées* sera plus amplement présentée et utilisée.

L'application de la MAN, à partir du système d'équations issues de la méthode simultanée sera ensuite détaillée (mise en forme quadratique, problème à l'ordre  $p$ , algorithme de calcul des termes des séries et implantation de l'ensemble). A ce stade, toutes les étapes permettant l'obtention de suites de tronçons de la surface invariante seront atteintes.

## 6.2 Elastodynamique en non linéaire géométrique

On présente ici la modélisation des structures mécaniques continues utilisée dans ce mémoire. L'objectif est d'écrire les équations non linéaires du mouvement de manière exacte, sans aucune discrétisation spatiale ou temporelle. Le modèle utilisé mène à des équations aux dérivées partielles comportant des termes quadratiques et cubiques en fonction du déplacement. La non-linéarité provient uniquement de la relation entre les déplacements et les déformations, appelée *déformation de Green-Lagrange*. En effet, dans ce mémoire, on ne s'intéresse pas aux non-linéarités provenant des conditions aux limites, comme par exemple celles que l'on peut trouver lors des modélisations de chocs/contacts/frottements, ni aux relations non linéaires provenant de la loi de comportement, comme par exemple les relations issues des modélisations de matériaux plastiques, visqueux, ou visco-plastiques. La relation entre les déformations et les contraintes est donc une loi de comportement simplement élastique linéaire isotrope.

On présente le modèle du cas général 3D, pour s'attaquer ensuite au cas particulier du modèle de l'approximation des poutres et plaques, qui est fortement utilisée dans le domaine de l'étude des structures minces. Aussi bien pour le modèle du cas général 3D que pour le cas de l'approximation des poutres et plaques, on présentera la description de la géométrie ainsi que celle du champ de déplacement. On s'intéressera ensuite à l'expression de la déformation non linéaire puis à l'expression de la contrainte via la loi de comportement, pour finir avec l'écriture des équations du mouvement.

### 6.2.1 Problème 3D

On considère d'une part un corps élastique déformable 3D de volume initial  $\Omega_0$  et sa frontière initiale  $\partial\Omega_0$  et d'autre part son volume déformé correspondant  $\Omega$  avec sa frontière déformée  $\partial\Omega$ . On considère de plus un repère cartésien orthonormé  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  avec ses coordonnées  $(x, y, z)$ .

#### 6.2.1.a Déplacement

Soit  $\mathbf{X}_0$  un point de l'espace situé dans le volume  $\Omega_0$  de la configuration initiale et  $\mathbf{X}$  le point de l'espace correspondant après déformation situé dans la configuration déformée  $\Omega$ . On notera  $\mathbf{u}(t, x, y, z)$  ou  $\mathbf{u}(t, \mathbf{X}_0)$  le champ de déplacement défini sur  $\mathbb{R}^+ \times \Omega_0$  de telle sorte que l'on ait

$$\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{u}(t, \mathbf{X}_0)$$

#### 6.2.1.b Déformation de Green-Lagrange

L'expression de la déformation suit la loi de Green-Lagrange, qui est exprimée sous la forme d'un tenseur du second ordre fonction du déplacement  $\mathbf{u}$ . Sans aucune approximation sur l'amplitude des déplacements ou des rotations, la relation entre les déplacements et la déformation est la suivante :

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}_0} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}_0} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}_0} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}_0} \quad (6.1)$$

soit

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\gamma}_l(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

avec  $\boldsymbol{\gamma}_l(\mathbf{u})$  étant la partie linéaire correspondant à l'approximation HPP, et  $\boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  correspondant au terme d'où provient l'unique non-linéarité de notre étude.

Pour la suite, on utilisera implicitement la notation de Voigt<sup>(1)</sup>.

#### 6.2.1.c Contrainte et loi de comportement

Pour un matériau linéaire isotrope, la densité d'énergie est la suivante :

$$w(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$$

avec la contrainte exprimée par la loi de comportement linéaire

$$\mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{D} \boldsymbol{\gamma} \quad (6.2)$$

$\mathbf{S}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et  $\mathbf{D}$  la matrice de raideur élastique du matériau.

---

(1). Cette notation consiste à écrire les tenseurs du second ordre  $(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{S})$  sous forme de vecteurs, et les tenseurs du quatrième ordre (comme le tenseur  $\mathbf{D}$ ) sous forme matricielle.

### 6.2.1.d Equations du mouvement

L'équation du mouvement peut être obtenue en utilisant le principe de Halmiton qui stipule que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T(\mathbf{u}) - V(\mathbf{u}) dt = 0 \quad \text{pour } \delta \mathbf{u}(t_1) = \delta \mathbf{u}(t_2) = 0 \quad (6.3)$$

avec  $T$  et  $V$  étant respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

$$T(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 d\Omega_0$$

$$V(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} w(\mathbf{u}) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{f}}_{ext}(t) \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\delta\Omega_0} \bar{\mathbf{f}}_{\delta ext}(t) \mathbf{u} d\delta\Omega_0 \quad (6.4)$$

L'application du principe (6.3) avec les expressions de  $T$  et de  $V$  conduit aux équations du mouvement sous forme variationnelle, nommée *principe des puissances virtuelles*

$$\underbrace{- \int_{\Omega_0} \mathbf{S} \delta \gamma(\mathbf{u}) d\Omega_0}_{\text{Puiss. efforts intérieurs}} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{f}}_{ext}(t) \delta \mathbf{u} d\Omega_0 + \int_{\delta\Omega_0} \bar{\mathbf{f}}_{\delta ext}(t) \delta \mathbf{u} d\delta\Omega_0}_{\text{Puiss. efforts extérieurs}} = \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta \mathbf{u} d\Omega_0}_{\text{Puiss. accélérations}} \quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ C.A.0} \quad (6.5)$$

## 6.2.2 Approximation des structures minces

L'étude des vibrations de structures minces et des poutres constituent la majeure partie des applications des vibrations de structures en non linéaire géométrique. Dans le cas des poutres, la dimension longitudinale qui est très supérieure aux deux autres facilite les déplacements transversaux (phénomène de flexion). Ces mêmes déplacements transversaux engendrent par couplage non linéaire une tension longitudinale. Dans le cas des plaques, ce sont les déplacements orthogonaux à la surface qui sont facilités et qui engendrent des phénomènes de tension de membrane. Le modèle des poutres avec l'hypothèse des rotations modérées et le modèle des plaques de Von Kärman permettent de modéliser les phénomènes pré-cités. Ces deux modèles sont rappelés ci-dessous, sans entrer dans les détails de la démarche de calcul, qu'on pourra trouver par exemple dans GERADIN (1993), CHIA (1980), ou encore REDDY (1997).

On considère une poutre droite de section  $\Sigma$  et de longueur  $l$  et une plaque de surface moyenne  $\omega$  et d'épaisseur  $h$ . On conserve toutes les notations utilisées auparavant dans ce chapitre. On utilisera de plus la notation d'Einstein pour les indices.

### 6.2.2.a Déplacements

On se limite au cas où les sections droites ont un mouvement de corps rigide et restent normales à la déformée de la ligne moyenne (hypothèse de Kirchhoff-Love). Les déplacements sont alors entièrement déterminés par ceux de la ligne moyenne pour la poutre et par ceux de la surface moyenne pour la plaque, noté  $(\bar{\mathbf{u}}, \omega)$  dans  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ , avec  $\bar{\mathbf{u}} = u_1(x, t) \mathbf{x}_1$ ,  $w = \omega(x, t)$  pour une poutre et  $\bar{\mathbf{u}} = u_1(x, y, t) \mathbf{x}_1 + u_2(x, y, t) \mathbf{x}_2$ ,  $\omega = \omega(x, y, t)$  pour une plaque. On a alors

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \left( u_\alpha - z \frac{\partial \omega}{\partial x_\alpha} \right) \mathbf{x}_\alpha + \omega \mathbf{x}_3$$

avec  $\alpha = 1$  pour une poutre et variant de 1 à 2 pour une plaque.

### 6.2.2.b Contraintes

On utilise l'hypothèse des contraintes planes. Celles-ci se réduisent donc à la composante  $S_{xx}$  pour une poutre et pour une plaque, elles s'écrivent :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On introduit ensuite les contraintes généralisées suivantes (avec  $\Delta = [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$  pour une plaque et  $\Delta = \Sigma$  pour une poutre) :

$$N_{\alpha\beta} = \int_{\Delta} S_{\alpha\beta} d\Delta \quad \text{et} \quad M_{\alpha\beta} = \int_{\Delta} z S_{\alpha\beta} d\Delta$$

nommés respectivement efforts normaux et moments de flexion.

### 6.2.2.c Déformations

A cela on ajoute l'hypothèse des rotations modérées (ie les termes de rotations sont petits mais non négligeables par rapport aux gradients des déplacements), ce qui conduit à l'écriture de  $\gamma$  :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \underbrace{e_{\alpha\beta}^l(\bar{\mathbf{u}}) + e_{\alpha\beta}^{nl}(w, w)}_{e_{\alpha\beta}} + z k_{\alpha\beta}(w) \quad (6.6)$$

pour

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}^l(\bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \\ e_{\alpha\beta}^{nl}(w, w) &= \frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta} \\ k_{\alpha\beta}(w) &= -w_{,\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$\mathbf{e}$  représente les déformations de membrane (tension pour une poutre) et  $\mathbf{k}$  celles de flexion parfois appelées courbure.

### 6.2.2.d Loi de comportement

De la loi de comportement 3D (6.2), on déduit les lois de comportement pour les structures minces, dans le cas des poutres ( $I$  désigne le moment d'inertie quadratique) :

$$\begin{aligned} N_{11} &= E\Sigma e_{11} \\ M_{11} &= EI k_{11} \end{aligned} \quad (6.8)$$

dans le cas des plaques :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}((1-\nu)e_{\alpha\beta} + \nu e_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \\ M_{\alpha\beta} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}((1-\nu)k_{\alpha\beta} + \nu k_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

### 6.2.2.e Equations du mouvement

On déduit alors de 6.4 la formulation variationnelle du problème pour les structures minces :

$$- \int_{\Gamma} (N_{\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}^l(\delta\bar{\mathbf{u}}) + 2e_{\alpha\beta}^{nl}(w, \delta w)) + M_{\alpha\beta}k_{\alpha\beta}(\delta w)) d\Gamma + \mathcal{P}_{ext}(\delta\bar{\mathbf{u}}, \delta w) = \int_{\Gamma} \rho_{\Gamma}(\ddot{u}_{\alpha}\delta u_{\alpha} + \ddot{w}\delta w) d\Gamma$$

$$\forall \delta\bar{\mathbf{u}} \text{ et } \delta w \text{ C.A.O} \quad (6.10)$$

$\Gamma = [0, l]$  pour une poutre et  $\Gamma = \omega$  pour une plaque.  $\rho_\Gamma$  désigne respectivement la masse linéique (poutre) ou surfacique (plaque), définie par :

$$\rho_\Gamma = \int_\Sigma \rho d\Sigma \text{ (poutre) ou } \rho_\Gamma = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz \text{ (plaque)}$$

A noter qu'on néglige également l'énergie d'inertie de rotation.

Ce qui donne, pour les équations du mouvement sous forme locale :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta} + \bar{F}_\alpha &= \rho_\Gamma \ddot{u}_\alpha \text{ dans } \Gamma \\ M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + (N_{\alpha\beta} w_{,\alpha(x)})_{,\beta} + \bar{F}_z &= \rho_\Gamma \ddot{w} \quad + \text{conditions aux limites.} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Les deux formulations rappelées ci-dessus pour les poutres et les plaques appellent quelques brefs commentaires. Tout d'abord, dans les deux cas, le problème est découpé en deux parties : celui de membrane, ou tension pour les poutres, ( $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{N}$ ) et celui de flexion ( $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{M}$ ). Dans le cas linéaire, ces deux aspects sont découplés, et donc solubles indépendamment l'un de l'autre. En non linéaire géométrique des termes de couplage interviennent et compliquent donc la résolution. En outre, le fait de considérer un matériau linéaire élastique simplifie fortement le problème. D'autres couplages ont lieu, par exemple dans le cas des composites. Mais ce n'est pas le propos de cette thèse et on pourra trouver plus de détails à ce sujet, entre autres dans REDDY (1997). Quoiqu'il en soit, au final les équations de poutres et de plaques ont la même structure que celles du cas général, (6.4), il suffit pour passer d'un cas à l'autre "d'adapter" les écritures (passage de  $\mathbf{S}$  à  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  etc ...). Dans la suite on utilisera le formalisme "trois dimensions" de (6.4) sans se préoccuper du cas considéré (général, poutre ou plaque). Notons que l'on pourra aussi étendre le formalisme au cas des coques en grandes rotations, pour cela voir ZAHROUNI *et al.* (1999).

### 6.3 Discrétisation spatiale

Dans l'objectif de résoudre numériquement les équations du mouvement, nous devons les transformer en équations algébriques. La première étape consiste à discrétiser spatialement les équations aux dérivées partielles du mouvement par la méthode des éléments finis. Nous rappelons que cette méthode consiste à discrétiser le volume continu  $\Omega_0$  en sous-domaines. Sur chaque sous-domaine, nommés éléments finis, le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  ou/et le champ de contrainte  $\mathbf{S}$  sont approchés à l'aide de *fonctions de formes* paramétrées par les valeurs de ces mêmes champs en leurs *noeuds*. Dans notre étude nous utiliserons une *formulation en déplacement* de sorte que seul le champ de déplacement sera projeté sur un ensemble d'éléments finis. Ainsi, nous aurons pour chaque élément fini noté  $e$ ,

$$\mathbf{u}^e(t, x, y, z) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{q}^e(t)$$

avec  $\mathbf{u}^e(t, x, y, z)$  étant le déplacement défini sur le volume  $\delta\Omega_0^e$  de l'élément fini  $e$ ,  $\mathbf{N}$  une fonction de forme, et  $\mathbf{q}^e$  étant le vecteur de déplacement aux noeuds de l'élément qui est de dimension égale au nombre de degrés de liberté de l'élément. En ce qui concerne le champ de contrainte, il sera déterminé seulement aux *points de Gauss*, lieux où les sommations continues des intégrales présentes dans (6.5) sont transformées en sommations discrètes. La relation (6.1), est écrite sous forme discrète à l'aide des matrices  $\mathbf{B}_l^e$  et  $\mathbf{B}_{nl}^e$  bien connues dans le domaine du non linéaire géométrique

$$\boldsymbol{\gamma}^e = (\mathbf{B}_l^e + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}^e(\mathbf{q}^e)) \mathbf{q}^e$$

avec la matrice  $\mathbf{B}_{nl}^e(\mathbf{q}^e)$  linéaire en  $\mathbf{q}^e$ . L'expression de la variation discrete de la déformation est

$$\delta\gamma^e = (\mathbf{B}_l^e + \mathbf{B}_{nl}^e(\mathbf{q}^e))\delta\mathbf{q}^e = \mathbf{B}^e(\mathbf{q}_e)\delta\mathbf{q}^e$$

Ce qui permet d'exprimer les équations du mouvement (6.5) et la relation de comportement (6.2) sous forme variationnelle pour la structure complète

$$\sum_e -\delta\mathbf{q}^{eT} \left\{ \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}^e(\mathbf{q}^e)^T \mathbf{S}^e d\Omega_O + \mathbf{f}_{ext}^e(t) - \mathbf{M}^e \frac{d^2\mathbf{q}^e}{dt^2} \right\} = 0 \quad (6.12)$$

$$\text{avec } \mathbf{S}^e = \mathbf{D}(\mathbf{B}_l^e + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{nl}^e(\mathbf{q}^e))\mathbf{q}^e$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{ext}^e(t) = \int_{\Omega_0^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}}_{ext}(t) d\Omega_O + \int_{\delta\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}}_{\delta ext}(t) d\delta\Omega_O \\ \mathbf{M}^e = \int_{\Omega_0^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_0 \end{cases}$$

Les vecteurs des déplacements aux noeuds  $\mathbf{q}_e$  sont classiquement assemblés de manière à former un unique vecteur  $\mathbf{q}$  de déplacement de tous les noeuds<sup>(2)</sup>. Ainsi, les équations pour la structure complète peuvent être notées ainsi

$$- \int_{\Omega_0} \mathbf{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{S} d\Omega_O + \mathbf{f}_{ext}(t) = \mathbf{M} \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} \quad (6.13)$$

$$\text{avec } \mathbf{S} = \mathbf{D}(\mathbf{B}_l + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}))\mathbf{q}$$

et avec la matrice de masse  $\mathbf{M}$  étant un assemblage des matrices élémentaires  $\mathbf{M}^e$ , de même pour le vecteur des efforts extérieurs  $\mathbf{f}_{ext}$  ainsi que pour le vecteur des contraintes  $\mathbf{S}$ . En ce qui concerne les matrices globales  $\mathbf{B}_l$ ,  $\mathbf{B}_{nl}$  et  $\mathbf{B}$  présentes notamment dans le terme des forces internes

$$- \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{S} d\Omega_O$$

, leur notation n'est que formelle, de sorte que ces matrices ne sont pas explicitement construites. Au lieu de ça, cette expression intégrale est construite par assemblage des vecteurs forces internes élémentaires présents dans (6.12). Nous reviendrons sur le problème d'assemblage dans le chapitre suivant. Avant d'effectuer la seconde discrétisation temporelle concernant cette fois-ci la variable temps, il faut tout d'abord appliquer le principe de normalisation temporelle déjà évoqué dans ce chapitre. Le système (6.13) après normalisation s'écrit

$$- \int_{\Omega_0} \mathbf{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{S} d\Omega_O + \mathbf{f}_{ext}(\tau) = \frac{1}{T^2} \mathbf{M} \frac{d^2\mathbf{q}}{d\tau^2} \quad (6.14)$$

$$\text{avec } \mathbf{S} = \mathbf{D}(\mathbf{B}_l + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}))\mathbf{q}$$

avec le vecteur  $\mathbf{f}_{ext}$  ayant subi aussi<sup>(3)</sup> le changement de variable  $t = \frac{\tau}{T}$ .

(2). Cet assemblage n'est pas une simple conconcatation des vecteurs  $\mathbf{q}_e$  (vecteur mis bouts à bouts), car la majorité des noeuds sont partagés par plusieurs éléments finis. La *table de connectivité* des noeuds permet l'assemblage des vecteurs d'efforts, des vecteurs déplacements et des matrices tangentes de la structure complète à partir des données élémentaires

(3). Nous garderons la même notation pour ce vecteur malgré le changement de variable temporel

## 6.4 Discrétisation temporelle

Toujours dans l'objectif de résoudre les équations du mouvement de manière numérique, nous devons effectuer maintenant une discrétisation temporelle de (6.14). Cette discrétisation consiste à partager l'intervalle de temps normalisé  $[0,1]$  en  $m$  sous-domaines de dimensions égales, et à transformer les inconnues  $\mathbf{q}(\tau)$  et  $\mathbf{S}(\tau)$  continues en temps en variables discrètes, seulement déterminées aux temps discrets normalisés  $\tau_k = \frac{k}{m}$ . Nous noterons  $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}(\tau_k)$  et  $\mathbf{S}_k = \mathbf{S}(\tau_k)$  respectivement les vecteurs de déplacements aux noeuds de la structure globale à l'instant  $\tau_k$ , et  $\mathbf{S}_k$  le vecteur des contraintes aux points de gauss de la structure globale aussi à l'instant  $\tau_k$ .

En mécanique des structures, les schémas les plus classiquement utilisés sont le schéma de Newmark et ses variantes (schéma de Hilbert-Hugue-Taylor (HHT) entre autres). Cependant, ces schémas<sup>(4)</sup> peuvent s'avérer être instables en non linéaire géométrique lorsque l'amortissement est inexistant (cas des systèmes conservatifs), pour de plus amples informations voir CRISFIELD (1997b). Dans SIMO et TAMOW (1992) est présenté un schéma d'intégration numérique ayant la propriété de conserver exactement l'énergie mécanique entre deux pas de temps. En plus de la stabilité accrue amenée par ce schéma, sa propriété de conservation est un aspect qui semble souhaitable lorsque l'on calcule des solutions périodiques<sup>(5)</sup>. Cependant, cette conservation se paye au prix d'une modification dans l'écriture des forces internes qui pousse à la réécriture des opérateurs classiques de calculs de forces internes et de leurs opérateurs tangents, et ceci jusqu'au niveau le plus bas de l'implantation (réécriture des procédures jusqu'au niveau élémentaire des éléments finis). La réécriture de ces opérateurs étant un travail conséquent, nous avons effectué des tests comparatifs sur un système à deux degrés de liberté afin d'avoir une idée de l'apport concret et éventuel de ce schéma sur notre problème de calcul d'orbites périodiques.

Après une brève description des deux schémas numériques en question, nous présentons une étude comparative qualitative.

### 6.4.1 Schéma de Newmark

Nous rappelons que dans le formalisme des systèmes dynamiques du premier ordre, les équations du mouvement au second ordre de (6.14) peuvent s'écrire ainsi

$$\begin{cases} -\int_{\Omega_0} \mathbf{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{S} d\Omega_O - \alpha \frac{1}{T} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_{ext}(\tau) & = \frac{1}{T^2} \mathbf{M} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{d\tau} \\ \dot{\mathbf{q}} & = \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\text{avec } \mathbf{S} = \mathbf{D}(\mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q})) \mathbf{q}$$

et avec  $\dot{\mathbf{q}}$  désignant la vitesse normalisée égale à  $\frac{d\mathbf{q}}{d\tau}$  et en ayant pris soin de rajouter le terme dissipatif  $\alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}$ . Le schéma de newmark consiste à écrire les équations de (6.15) à l'instant  $\tau_{k+\frac{1}{2}}$

(4). En linéaire, ces schémas sont stables et performants

(5). En effet, lorsqu'un schéma numérique introduit de la dissipation (ou au contraire introduit de l'énergie "artificielle"), les trajectoires initialement périodiques se transforment en spirales (ou partent à l'infini) et il semble évident qu'une trajectoire périodique ne puisse exister dans ces conditions sans un apport (ou une dissipation) compensatoire "artificiel(le)" d'énergie

en utilisant le schéma du trapèze pour l'expression des dérivées en temps. Ce qui donne

$$\Delta_k(\mathbf{Z}_k, \mathbf{Z}_{k+1}, T, \alpha) := \begin{cases} - \int_{\Omega_0} \mathbf{B}(\frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k+1}}{2})^T \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}} d\Omega_O - \alpha \frac{1}{T} \mathbf{C} \frac{\dot{\mathbf{q}}_{k+1} + \dot{\mathbf{q}}_k}{2} + \mathbf{f}_{ext}(\tau_{k+\frac{1}{2}}) & = \frac{1}{T^2} \mathbf{M} \frac{\dot{\mathbf{q}}_{k+1} - \dot{\mathbf{q}}_k}{d\tau} \\ \frac{\dot{\mathbf{q}}_k + \dot{\mathbf{q}}_{k+1}}{2} & = \frac{\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k}{d\tau} \end{cases} \quad (6.16)$$

$$\text{avec } \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{D}(\mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k+1}}{2})) \left( \frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k+1}}{2} \right)$$

et avec<sup>(6)</sup>  $d\tau = \frac{1}{m}$ ,  $\mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}$  étant la contrainte au temps  $\tau_{k+\frac{1}{2}}$  et  $\mathbf{Z}_k$  étant le vecteur d'état  $\mathbf{Z}_k = [\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k]^T$ .

### 6.4.2 Schéma de Simo

Comme dit précédemment, le schéma de Simo consiste à modifier légèrement l'expression des forces internes, de sorte que les contraintes soient exprimées aux temps  $\tau_k$ . Ainsi les forces internes utilisent la moyenne des contraintes aux temps  $\tau_k$  et  $\tau_{k+1}$ ,

$$\Delta_k(\mathbf{Z}_k, \mathbf{Z}_{k+1}, T, \alpha) := \begin{cases} - \int_{\Omega_0} \mathbf{B}(\frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k+1}}{2})^T \frac{\mathbf{S}_k + \mathbf{S}_{k+1}}{2} d\Omega_O - \alpha \frac{1}{T} \mathbf{C} \frac{\dot{\mathbf{q}}_{k+1} + \dot{\mathbf{q}}_k}{2} + \mathbf{f}_{ext}(\tau_{k+\frac{1}{2}}) & = \frac{1}{T^2} \mathbf{M} \frac{\dot{\mathbf{q}}_{k+1} - \dot{\mathbf{q}}_k}{d\tau} \\ \frac{\dot{\mathbf{q}}_k + \dot{\mathbf{q}}_{k+1}}{2} & = \frac{\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k}{d\tau} \end{cases} \quad (6.17)$$

$$\text{avec } \mathbf{S}_k = \mathbf{D}(\mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}_k)) \mathbf{q}_k$$

avec  $\mathbf{Z}_k = [\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k]^T$ .

La forme (6.17) (il en est de même pour (6.16)) peut être utilisée pour faire de l'*intégration directe* des équations de la dynamique. Hors du contexte de la recherche des orbites périodiques par méthode simultanée (voir plus loin), cette intégration directe consiste à calculer des trajectoires discrètes quelconques solutions d'un PVI tel que (5.35). On pourra pour cela utiliser un processus itératif de prédiction-correction qui permettra de passer d'un pas de temps  $\tau_k$ , où l'état  $\mathbf{Z}_k$  est connu, au pas de temps suivant  $\tau_{k+1}$ , où l'inconnue  $\mathbf{Z}_{k+1}$  est calculée de manière itérative à partir des résidus de l'équation (6.17) et de son application tangente  $\frac{\partial \Delta_k}{\partial \mathbf{Z}_{k+1}}$  (GERADIN (1993)).

### 6.4.3 Etude comparative et choix

Dans SIMO et TAMOW (1992), et avec  $\mathbf{f}_{ext}(\tau_k) = 0$  et  $\alpha = 0$ , on montre que le schéma de Simo (6.17) conserve exactement la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle entre deux pas de temps. Dans un contexte où (6.17) est utilisé pour faire de l'intégration numérique directe, cette conservation implique une réponse bornée de la suite  $\mathbf{q}_{k=0\dots m}$  même lorsque  $m$  est petit et  $T$  est grande. Ainsi le schéma numérique de Simo ne diverge<sup>(7)</sup> jamais, contrairement à un schéma de Newmark dans certaines conditions. Cette divergence provient de l'amplification du bruit numérique souvent amenée dans la partie supérieure de la décomposition de Fourier du

(6). On a  $\tau = \frac{t}{T}$  donc  $d\tau = \frac{dt}{T}$  et de plus  $T = dtm$  donc  $d\tau = \frac{1}{m}$ .

(7). On dit qu'une intégration diverge lorsque la suite  $\|\mathbf{q}_k\|$  tend vers l'infini.

signal de réponse (les hautes fréquences). Ce problème survient d'autant plus si le système est *raide*<sup>(8)</sup>, ce qui est le cas pour nos structures modélisées par éléments finis.

Les considérations précédentes nous poussent donc à utiliser le schéma de Simo. Cependant, pour justifier l'effort de codage nécessaire de son implantation pour les modèles éléments finis, nous avons effectué au préalable une étude comparative sur un système dynamique raide à deux degrés de liberté. Cette étude comparative consistait en divers tests :

- Test d'intégration directe sur une période d'oscillation correspondant au mode basse fréquence ainsi que pour des durées plus longues. Le test consistait à rechercher la raideur maximale autorisant la convergence des algorithmes du processus d'intégration directe des équations du mouvement. Ceci pour les deux schémas en question.
- Test d'intégration directe sur une période d'oscillation correspondant aussi au mode basse fréquence ainsi que pour des durées plus longues. Le test consistait à rechercher la longueur du pas de temps ( $d\tau$ ) autorisant la convergence des algorithmes du processus d'intégration directe des équations du mouvement. Ceci pour les deux schémas en question.
- Test de convergence de la méthode de tir (voir plus loin). Le test consistait à partir d'une orbite périodique discrétisée en temps, puis de rechercher le pas maximal autorisant la convergence vers une orbite de plus grande énergie. Ceci pour les deux schémas en question.
- Test de convergence de la méthode simultanée (voir plus loin). Le test consistait à partir d'une orbite périodique discrétisée en temps, puis de rechercher le pas maximal autorisant la convergence vers une orbite de plus grande énergie. Ceci pour les deux schémas en question.

Ces tests, n'ont cependant pas donné les résultats escomptés, à savoir une meilleure robustesse du schéma de Simo comparé au schéma de Newmark. En effet, les deux schémas ont montré des performances équivalentes sur l'ensemble des tests comparatifs. Bien entendu, il est probable que ces mêmes tests, effectués sur des structures éléments finis à grand nombre de degrés de liberté auraient donné l'avantage au schéma de Simo.

N'ayant pas le temps nécessaire d'effectuer de nouveaux tests comparatifs sur des structures éléments finis, nous restons à ce jour sans résultats nous permettant de faire un choix pertinent. Ainsi, nous écrirons la suite du problème en conservant les deux schémas d'intégrations tant que cela ne surchargera pas trop l'écriture. En ce qui concerne l'implantation de la méthode des orbites périodiques, présenté à la fin de ce chapitre, elle utilisera le schéma d'intégration de Newmark, qui est plus facile à mettre en oeuvre numériquement.

#### 6.4.4 Erreur de périodicité et fréquence de Shannon

Il est connu que la fréquence maximale représentable par un signal discret est limitée par la fréquence dite de *Shannon*. Nous rappelons que la fréquence de Shannon d'un signal discrétisé en temps se définit ainsi

$$f_s = \frac{f_e}{2} = \frac{1}{2dt} = \frac{m}{2T} \quad (6.18)$$

avec  $f_e$  étant la fréquence d'échantillonnage du signal discret,  $dt$  la valeur du pas de temps et  $T$  la valeur de la période d'intégration. Ainsi, lors d'une discrétisation d'un signal multi-harmonique continu en temps, seules les harmoniques inférieures à la fréquence de Shannon

---

(8). On dit qu'un système mécanique est raide lorsque le rapport  $\sigma$  entre la plus grande fréquence propre et la plus petite est grand (lorsque  $\sigma \gtrsim 20$ ). En pratique, la majorité des structures modélisées en éléments finis sont raides et ceci est d'autant plus vrai lorsque la structure est discrétisée finement.

sont correctement représentés. En ce qui concerne les harmoniques de fréquences supérieures, ils seront translatés<sup>(9)</sup> dans le spectre en des harmoniques de fréquences inférieures à  $f_s$ , c'est le phénomène de *repliement*.

Lorsque l'on discrétise les équations du mouvement d'un système dynamique pour obtenir par intégration directe les solutions discrétisées en temps, ces considérations restent valables. Par conséquent, et selon (6.18), le nombre de points d'intégration choisis pour décrire une solution périodique (ou non périodique) conditionne la valeur de la fréquence de Shannon et donc aussi la fréquence maximale représentable dans le signal discret.

D'autre part, se serait une erreur de penser qu'en se limitant aux fréquences inférieures à la fréquence de Shannon, le signal discrétisé s'en trouverait exactement représenté. En fait, les harmoniques inférieurs à la fréquence de Shannon sont légèrement translatés dans le spectre suivant une loi dépendant du schéma d'intégration. Dans le contexte du calcul de solutions périodiques on peut d'ailleurs introduire une *erreur de périodicité*, liée à cette translation en fréquence dans le spectre, définie dans GERADIN (1993) à l'aide de l'expression suivante,

$$E_p = \frac{T_m - T}{T} \quad (6.19)$$

avec  $E_p$  étant l'erreur de périodicité,  $T_m$  étant la période d'une réponse d'un système dynamique discrétisé en temps calculée par intégration numérique,  $T$  étant la période de la solution périodique exacte du même système dynamique mais continu en temps et  $m$  étant le nombre de pas de temps utilisé.

Pour illustrer ceci, nous avons dans ARQUIER (2003), calculé<sup>(10)</sup> l'erreur de périodicité de la solution discrétisée par schéma de Newmark du système dynamique unidimensionnel

$$\ddot{u} + u = 0 \quad (6.20)$$

pour un ensemble de valeurs de  $m$  à l'aide d'une méthode proche de la *méthode simultanée* couplée à une étude aux valeurs propres. La figure 6.1 page 109 montre l'évolution de l'erreur de périodicité en fonction du rapport  $\frac{f}{f_s}$  entre la fréquence du signal de réponse  $f (= \frac{1}{2\pi} Hz)$  et la fréquence du Shannon  $f_s$ , elle-même liée (voir relation 6.18) au nombre de pas de temps utilisé pour la description de la solution mono-harmonique  $u(t) = a \cos(t)$ .

La figure montre l'augmentation de l'erreur  $E_p$  avec le rapport  $\frac{f}{f_s}$ . Ainsi, lorsque le rapport  $\frac{f}{f_s}$  est faible ( $\frac{f}{f_s} < 0.1$ ), l'erreur en périodicité reste raisonnable ( $E_p < 1.10^{-2}$ ). Inversement lorsque la fréquence du signal  $f$  se rapproche de la fréquence de Shannon (rapport  $\frac{f}{f_s}$  proche de 1), l'erreur en périodicité n'est plus négligeable.

### REMARQUE 7

*Cette remarque est importante pour le chapitre suivant. Lorsque le signal est multi-harmonique (ceci inclut le cas d'une réponse multimodale), les différentes harmoniques sont décalés non-uniformément suivant une loi proche de celle présentée dans la figure 6.1 page 109. Ainsi, les harmoniques de basses fréquences seront peu décalées dans le spectre, contrairement aux harmoniques de hautes fréquences, proches de la fréquence de Shannon. En somme, la présence de la*

(9). Plus précisément, si  $f_i$  est la fréquence d'un harmonique tel que  $f_i > f_s$ , alors cet harmonique se retrouvera à la fréquence "symétrique" à  $f_s$  soit  $f'_i = 2f_s - f_i$ .

(10). Ce calcul n'est cependant que qualitatif. En effet, le système (6.20) est linéaire alors que les systèmes considérés dans cette étude sont non-linéaires. Il est fort probable que la présence d'une non-linéarité modifie les valeurs de l'erreur en périodicité. Malheureusement, ne possédant pas de solutions non linéaire exactes, nous ne pouvons pas calculer l'erreur avec des systèmes dynamiques non linéaires. Par conséquent, il faudra se contenter de l'aspect qualitatif des résultats.

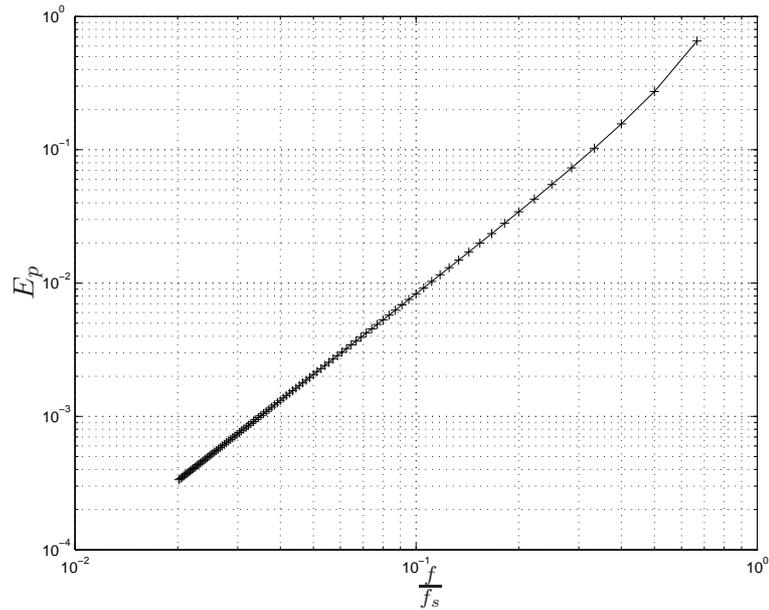


Figure 6.1 – Erreur de périodicité en fonction du rapport entre la fréquence du signal solution du système dynamique (6.20) et la fréquence de Shannon.

discrétisation temporelle induit une distortion des diagrammes de réponse, d'autant plus présente lorsque le nombre de pas de temps  $m$  est faible et que les signaux de réponses comportent des harmoniques à hautes fréquences. □

## 6.5 Formulation discrète du problème des orbites périodiques

Nous arrivons à terme de la formulation discrète du PVB (5.34) page 93. Ayant formulé nos équations du mouvement sous forme algébrique (6.16) ou (6.17), il est maintenant possible de résoudre les équations d'intégration du sous-problème aux valeurs initiales (5.35). En ce qui concerne les équations de périodicité ainsi que l'équation de phase de (5.34), leur écriture dépend de la méthode de résolution. En effet, ici deux choix s'offrent à nous. Le premier, plus classique, consiste à utiliser la *méthode de tir*, et le second, beaucoup moins répandu, consiste à résoudre simultanément le problème (5.34) et son sous-problème aux valeurs initiales (5.35). Ces deux méthodes sont décrites dans les lignes qui vont suivre. Enfin, sauf indications contraires, nous considérerons pour la suite seulement le système autonome conservatif, c'est à dire que nous considérons la réponse libre du système sans forçage ( $\mathbf{f}_{ext} = 0$ ), afin d'obtenir les orbites périodiques constituant les modes non linéaires conservatifs.

### 6.5.1 Méthode de tir

La méthode de tir est décrite dans SEYDEL (1994) et dans NAYFEH et BALACHANDRAN (1995). C'est une méthode largement répandue dans la communauté et qui a fait de nombreuses fois ses preuves pour la résolution de PVB de toutes sortes<sup>(11)</sup>. Cette dernière permet aisément de calculer les solutions périodiques de systèmes dynamiques ayant un nombre raisonnable de

(11). Pas seulement des PVB définissant des orbites périodiques.

degrés de liberté (le logiciel AUTO utilise cette méthode DOEDEL (2007)) et lorsque ces solutions correspondent à des orbites stables. Le principe de cette méthode peut s'énoncer de la manière suivante :

1. Connaissant  $(\mathbf{p}^0, T^0, 0)$  une solution approchée du PVB (5.34) page 93.
2. On résout par intégration directe la forme discrétisée (6.16) du sous-problème aux valeurs initiales (5.35) page 93 avec  $(\mathbf{p}^i, T^i, \alpha^i)$  comme point initial, ce qui nous donne la valeur  $\mathbf{z}(1; \mathbf{p}^i, T^i, \alpha^i)$  correspondante au point final de la trajectoire <sup>(12)</sup>.
3. On calcule le résidu du système d'équations  $\mathbf{R}_A$  de (5.35) à partir de la valeur de  $\mathbf{z}(1; \mathbf{p}^i, T^i, \alpha^i)$ . Si  $\|\mathbf{R}_A\| < \epsilon$ , on stoppe en considérant que  $(\mathbf{p}^i, T^i, \alpha^i)$  est notre solution  $(\mathbf{p}_0, T_0, \alpha_0 (\simeq 0))$ , sinon on continue.
4. On corrige  $(\mathbf{p}^i, T^i, \alpha^i)$  à l'aide de l'application tangente (5.37) page 93 et de son résidu  $\mathbf{R}_A$ , ce qui donne  $(\mathbf{p}^{i+1}, T^{i+1}, \alpha^{i+1})$ . On reprend à l'étape 2 avec  $(\mathbf{p}^{i+1}, T^{i+1}, \alpha^{i+1}) \rightarrow (\mathbf{p}^i, T^i, \alpha^i)$ .

Cet algorithme montre que pour obtenir le point solution  $(\mathbf{p}_0, T_0, \alpha_0 (\simeq 0))$ , deux processus itératifs imbriqués sont nécessaires. Le premier est celui de l'intégration directe <sup>(13)</sup> présent dans l'étape 2, et le second est l'algorithme lui-même. D'autre part, la matrice tangente de  $\mathbf{R}_A$ , faisant notamment intervenir la matrice de monodromie, construite lors de l'étape 2, nécessite  $m$  multiplications matricielles de taille  $2n \times 2n$ , ce qui est lourd d'un point de vue numérique. Enfin, le fait que l'étape 2 soit en elle-même un processus itératif et non une simple fonction, empêche l'utilisation de la MAN pour la résolution du problème global. Pour toutes ces raisons, nous avons orienté notre choix vers la méthode simultanée, décrite dans les lignes suivantes.

### 6.5.2 Méthode simultanée

Comme dit précédemment, la méthode simultanée consiste à résoudre simultanément le PVB et son sous-problème aux valeurs initiales. Soit  $\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_k, \dots, \mathbf{Z}_m]^T$  le vecteur contenant l'ensemble de tous les vecteurs d'états de la trajectoire aux instants  $\tau_{k=0\dots m}$ , l'idée de la méthode est d'obtenir simultanément le vecteur d'ensemble des d'états  $\mathbf{Z}$ , la période  $T$ , ainsi que le scalaire  $\alpha$ . Pour cela, on écrit dans un même système les formes algébriques discrétisées des équations du PVI (5.35) ainsi que celles du PVB (5.34) avec l'équation de phase simplifiée jouant sur les données en vitesse seulement. Ce qui donne

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{Z}, T, \alpha) := \begin{cases} \Delta_0(\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, T, \alpha) & = 0 \\ \Delta_1(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, T, \alpha) & = 0 \\ & \vdots \\ \Delta_k(\mathbf{Z}_k, \mathbf{Z}_{k+1}, T, \alpha) & = 0 \\ & \vdots \\ \Delta_{m-1}(\mathbf{Z}_{m-1}, \mathbf{Z}_m, T, \alpha) & = 0 \\ \mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}_m & = 0 \\ \mathbf{v}_0^T \mathbf{n} & = 0 \end{cases}$$

(12). Pour les premières itérations, le point  $(\mathbf{p}^i, T^i, \alpha^i)$  n'étant pas un point exactement situé sur une orbite périodique, la trajectoire  $\mathbf{z}(\tau; \mathbf{p}^i, T^i, \alpha^i)$  n'est donc pas exactement périodique.

(13). Pour passer d'un pas de temps  $k$  au suivant  $k+1$ , la forme implicite non linéaire de (6.16) oblige l'application d'une méthode itérative comme par exemple la méthode de Newton-Raphson

Pour des raisons d'écriture et dans un souci de simplification de l'implantation, on éliminera l'état  $\mathbf{Z}_0$  et on condensera l'équation de périodicité de sorte que le vecteur d'ensemble des états soit égal à  $\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_m]^T$  (l'état initial devient donc  $\mathbf{Z}_1$ ). On introduira de plus l'indice à rotation circulaire ( $k$ ) tel que

$$\begin{cases} \text{si } k < 1 & \text{alors } (k) = k + m \\ \text{si } 1 \leq k \leq m & \text{alors } (k) = k \\ \text{si } k > m & \text{alors } (k) = k - m \end{cases} \quad (6.21)$$

Ce qui donne la nouvelle écriture du problème

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{Z}, T, \alpha) := \begin{cases} \Delta_k(\mathbf{Z}_{(k)}, \mathbf{Z}_{(k+1)}, T, \alpha) = 0 & \text{pour } k = 1 \dots m \\ \mathbf{v}_1^T \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

qui est un système à  $2nm + 1$  équations et  $2nm + 2$  inconnues.

#### REMARQUE 8

Même si la condition de périodicité n'est plus présente, la condition de bouclage subsiste. En effet, en prenant  $k = m$ , la dernière équation de (6.22) s'écrit  $\Delta_k(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_1, T, \alpha) = 0$ , ce qui montre la présence implicite d'une condition de bouclage sur les états  $\mathbf{Z}_m$  et  $\mathbf{Z}_1$ . □

Pour une valeur de la période  $T$  fixée, le système (6.22) permet de définir localement une orbite unique. Ainsi à l'aide d'un simple algorithme de Newton-Raphson, et d'une solution approchée, on pourra obtenir la solution exacte correspondante. On pourra aussi employer une méthode classique de prédiction-correction avec algorithme de Newton-Raphson pour effectuer la continuation des solutions et obtenir ainsi les surfaces invariantes de l'espace des phases.

Bien que peu utilisée, cette technique, consistant à écrire toutes les équations discrétisées en temps de la dynamique plus l'équation de périodicité dans un seul et même système et résoudre le tout simultanément n'est pas nouvelle. Dans NAYFEH et BALACHANDRAN (1995), une méthode similaire est décrite, nommée *finite difference method*, utilisée pour le calcul de cycles limites de systèmes autonomes mais non conservatifs. Comparée à la méthode de tir, les auteurs parlent d'une "meilleure convergence" de la méthode *finite difference method* dans les cas où les solutions correspondent à des orbites instables (voir aussi DOEDEL (1997)). Ce résultat n'est pas étonnant, puisque cette méthode comporte un processus itératif de moins que la méthode de tir. En effet, lors de l'intégration d'une orbite instable, les trajectoires sont fortement sensibles aux conditions initiales, ce qui est fatal pour la procédure de correction lors des tirs successifs (étapes 2,3,4 de l'algorithme présenté en section 6.5.1). En éliminant le processus d'intégration numérique direct, on élimine en même temps cette sensibilité aux conditions initiales en recherchant directement l'ensemble des vecteurs d'états correspondant à une solution périodique. En plus bien sûr de l'amélioration de la convergence, cette méthode apporte aussi l'avantage dominant d'être compatible avec la méthode numérique asymptotique (MAN) décrite dans la première partie de ce mémoire.

#### 6.5.3 Condensation des vitesses

Comme dit précédemment le système (6.22) est de taille  $2nm + 1$ . Lorsque  $n$  est grand, la taille du système peut devenir préoccupante d'un point de vue numérique. Afin de diminuer la

taille du système, on peut condenser<sup>(14)</sup> les relations liant la vitesse aux déplacements contenus dans (6.16) et (6.17). Ceci est possible grâce à la forme particulière du système (6.22). En effet, les relations vitesses/déplacements étant toutes écrites dans un même système et ayant de plus une relation de bouclage implicite, on peut en déduire une relation exprimant la vitesse  $\dot{\mathbf{q}}$  au temps  $\tau_k$  simplement en fonction des données en positions  $\mathbf{q}_{k=1\dots m}$ . Cette relation est obtenue avec les calculs qui suivent.

Soit  $\mathbf{Q}$  le vecteur contenant toutes les inconnues en déplacement, c'est à dire  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m]$ . En prenant la seconde équation de (6.16) ou de (6.17), on peut écrire

$$\dot{\mathbf{q}}^{(k)} = \chi_k \mathbf{Q} - \dot{\mathbf{q}}^{(k-1)} \quad (6.23)$$

avec la matrice  $\chi_k$  de taille  $n \times mn$  telle que  $\chi_k \mathbf{Q} = \frac{2}{d\tau}(\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{q}^{(k-1)})$ . On peut écrire aussi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \chi_1 \mathbf{Q} - \dot{\mathbf{q}}_m \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= \chi_2 \mathbf{Q} - \chi_1 \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{q}}_m \\ \dot{\mathbf{q}}_3 &= \chi_3 \mathbf{Q} - \chi_2 \mathbf{Q} + \chi_1 \mathbf{Q} - \dot{\mathbf{q}}_m \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{q}}_k &= \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k} \chi_j \right) \mathbf{Q} + (-1)^k \dot{\mathbf{q}}_m \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{q}}_m &= \left( \sum_{j=1}^m (-1)^{j+m} \chi_j \right) \mathbf{Q} + (-1)^m \dot{\mathbf{q}}_m \end{aligned} \quad (6.24)$$

De la dernière ligne on tire l'expression de  $\dot{\mathbf{q}}_m$ ,

$$\dot{\mathbf{q}}_m = \frac{1}{1 - (-1)^m} \left( \sum_{j=1}^m (-1)^{j+m} \chi_j \right) \mathbf{Q} \quad (6.25)$$

D'où l'expression recherchée de  $\dot{\mathbf{q}}_k$  simplement en fonction de  $\mathbf{Q}$ ,

$$\dot{\mathbf{q}}_k = \left( \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k} \chi_j \right) + \frac{(-1)^k}{1 - (-1)^m} \left( \sum_{j=1}^m (-1)^{j+m} \chi_j \right) \right) \mathbf{Q} = \mathbf{V}_k \mathbf{Q} \quad (6.26)$$

.Ainsi la matrice  $\mathbf{V}_k$  permet d'obtenir l'expression des vitesses normalisées en fonction des déplacements seulement. Afin de simplifier l'écriture, on introduit aussi la matrice  $\mathbf{\Gamma}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{V}_{(k+1)} - \mathbf{V}_k}{d\tau}$  permettant d'exprimer les accélérations normalisées en fonction des déplacements, c'est à dire  $\ddot{\mathbf{q}}_{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{\Gamma}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q}$ .

#### REMARQUE 9

Le dénominateur de la fraction  $\frac{(-1)^k}{1 - (-1)^m}$  rend l'expression (6.26) valide uniquement pour  $m$  impair<sup>(15)</sup>.

□

(14). C'est à dire éliminer les inconnues en vitesses et les équations reliant les données en déplacements aux données en vitesses.

(15). Pour  $m$  pair,  $\mathbf{V}_k$  n'est pas définie.

Utilisons donc maintenant les matrices  $\mathbf{V}_k$  et  $\mathbf{\Gamma}_k$  pour réécrire la relation (6.16) du schéma de Newmark sans les données en vitesses, tout en introduisant la notation  $\bar{x}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{x_k + x_{(k+1)}}{2}$  pour alléger l'écriture.

$$\begin{aligned} \Delta_k(\mathbf{Q}, T, \alpha) := \\ - \int_{\Omega_0} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}_{k+\frac{1}{2}})^T \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}} d\Omega_O - \alpha \frac{1}{T} \mathbf{C} \bar{\mathbf{V}}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q} + \mathbf{f}_{ext}(\tau_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{T^2} \mathbf{M} \mathbf{\Gamma}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\text{avec } \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{D}(\mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\bar{\mathbf{q}}_{k+\frac{1}{2}})) \bar{\mathbf{q}}_{k+\frac{1}{2}}$$

de même pour la relation (6.17) du schéma de Simo,

$$\begin{aligned} \Delta_k(\mathbf{Q}, T, \alpha) := \\ - \int_{\Omega_0} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}_{k+\frac{1}{2}})^T \bar{\mathbf{S}}_{k+\frac{1}{2}} d\Omega_O - \alpha \frac{1}{T} \mathbf{C} \bar{\mathbf{V}}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q} + \mathbf{f}_{ext}(\tau_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{T^2} \mathbf{M} \mathbf{\Gamma}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\text{avec } \mathbf{S}_k = \mathbf{D}(\mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}_k)) \mathbf{q}_k$$

Ainsi, avec (6.27) ou bien (6.28), le système (6.22) se réécrit seulement avec les données en positions, soit

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{Q}, T, \alpha) := \begin{cases} \Delta_k(\mathbf{Q}, T, \alpha) = 0 & \text{pour } k = 1 \dots m \\ \mathbf{n}^T \mathbf{V}_1 \mathbf{Q} = 0 \end{cases} \quad (6.29)$$

qui est un système à  $n * m + 1$  équations et  $n * m + 2$  inconnues.

## 6.6 Continuation des orbites par la MAN (méthode OPMAN)

Les solutions du système (6.29) peuvent se calculer par continuation avec des méthodes incrémentales-itératives de type prédiction-correction avec algorithme de Newton-Raphson. Cependant, selon les considérations déjà évoquées dans la première partie de ce mémoire, nous préférons utiliser la méthode asymptotique numérique pour effectuer la continuation des solutions de (6.29). D'autre part, conformément au choix du schéma d'intégration explicité en (6.4.3) nous écrirons ici le problème des orbites périodiques associé aux équations du schéma de Newmark seulement<sup>(16)</sup>.

Pour écrire le problème des Orbites Périodiques avec la MAN (méthode OPMAN), nous allons tour à tour décrire

1. la mise en forme quadratique des équations et une introduction des gradients des déplacements  $\boldsymbol{\theta}$ ,
2. l'écriture du problème à l'ordre  $p$  donnant l'expression des termes des séries de la MAN
3. l'algorithme permettant d'obtenir les termes des séries en fonction du point de départ du tronçon.

---

(16). Bien que les équations du problème des orbites périodiques écrites avec l'algorithme de Simo soient très proches de celles écrites avec l'algorithme de Newmark, nous ne voulons pas surcharger l'écriture

### 6.6.1 Mise en forme quadratique

Pour cela, nous devons formuler le système (6.29) sous forme quadratique en séparant le calcul des contraintes du calcul des autres membres des équations de (6.27). D'autre part, nous allons aussi, et ceci pour des raisons d'optimisations numériques, introduire la variable des gradients des déplacements  $\boldsymbol{\theta}$  dans le calcul des déformations. Ainsi, le système (6.27) correspondant aux équations de Newmark se réécrit,

$$\Delta_k(\mathbf{Q}, \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_{k+1}, F, \beta) := - \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{B}_l + \mathbf{A}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+\frac{1}{2}}) \mathbf{G} \right)^T \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}} d\Omega_O - \beta \mathbf{C} \bar{\mathbf{V}}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q} + \mathbf{f}_{ext}(\tau_{k+\frac{1}{2}}) = \mathbf{F} \mathbf{M} \Gamma_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q} \quad (6.30)$$

avec  $\mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{D}(\mathbf{H}_l + \frac{1}{2} \mathbf{A}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+\frac{1}{2}})) \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+\frac{1}{2}}$  et avec  $\boldsymbol{\theta}_k = \mathbf{G} \mathbf{q}_k$

Avec  $F = \frac{1}{T^2}$  et  $\beta = \frac{\alpha}{T}$ . Ainsi, la forme quadratique des équations du système (6.29) s'écrit

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\theta}, F, \beta) := \begin{cases} \Delta_k(\mathbf{Q}, \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_{k+1}, T, \alpha) = 0 & \text{pour } k = 1 \dots m \\ \mathbf{n}^T \mathbf{V}_1 \mathbf{Q} = 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

avec le vecteur (sans indices)  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_{1+\frac{1}{2}}, \dots, \mathbf{S}_{m+\frac{1}{2}}]^T$  et  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_m]^T$ .

### 6.6.2 Problème à l'ordre $p$

Nous exprimons les variables  $\mathbf{q}_k$ ,  $\mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}$  et  $\boldsymbol{\theta}_k$  en développement asymptotique à l'ordre  $N$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{q}_k(a) = \sum_{r=0}^N a^r \mathbf{q}_k^r \\ F_k(a) = \sum_{r=0}^N a^r F_k^r \\ \beta_k(a) = \sum_{r=0}^N a^r \beta_k^r \\ \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}(a) = \sum_{r=0}^N a^r \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}^r \\ \boldsymbol{\theta}_k(a) = \sum_{r=0}^N a^r \boldsymbol{\theta}_k^r \end{cases} \quad (6.32)$$

ainsi nous avons implicitement  $\mathbf{Q}(a) = \sum_{r=0}^N a^r \mathbf{Q}^r$ . Pour le calcul des termes de séries de  $\mathbf{q}_k^r$ ,  $\mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}^r$  et  $\boldsymbol{\theta}_k^r$ , nous devons introduire le développement (6.32) dans les équations de (6.31) pour  $k = 1, \dots, m$  ainsi que dans l'équation de phase présente dans (6.29). Ainsi, en séparant les termes de même puissance de  $a$  on obtient les équations à l'ordre  $p$ ,

*Mouvement à l'ordre  $p$  :*

$$\begin{aligned} 0 &= F^0 \mathbf{M} \Gamma_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^p + F^p \mathbf{M} \Gamma_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^0 + \beta^0 \mathbf{C} \bar{\mathbf{V}}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^p + \beta^p \mathbf{C} \bar{\mathbf{V}}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^0 \\ &+ \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{B}_l + \mathbf{A}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+\frac{1}{2}}^0) \mathbf{G} \right)^T \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}^p d\Omega_O + \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{A}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+\frac{1}{2}}^p) \mathbf{G} \right)^T \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}^0 d\Omega_O \\ &+ \sum_{r=1}^{p-1} F^r \mathbf{M} \Gamma_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^{p-r} + \sum_{r=1}^{p-1} \beta^r \mathbf{C} \bar{\mathbf{V}}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^{p-r} + \sum_{r=1}^{p-1} \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{A}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+\frac{1}{2}}^r) \mathbf{G} \right)^T \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}^{p-r} d\Omega_O \end{aligned} \quad (6.33)$$

*Contraintes à l'ordre  $p$  :*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}^p &= \mathbf{DH}\bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^p + \frac{1}{2}\mathbf{DA}(\bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^0)\bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^p + \frac{1}{2}\mathbf{DA}(\bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^p)\bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^0 \\ &+ \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{DA}(\bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^r)\bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^{p-r} \end{aligned} \quad (6.34)$$

*Gradients à l'ordre  $p$  :*

$$\theta_k^p = \mathbf{Gq}^p$$

*Phase à l'ordre  $p$  :*

$$\mathbf{n}^T \mathbf{V}_1 \mathbf{Q}^p = 0$$

Ces équations doivent être remaniées afin d'exprimer le problème linéaire ayant pour inconnue le vecteur à l'ordre  $p$ ,  $\mathbf{U}^p = [\mathbf{Q}^p, \mathbf{F}^p, \beta^p]$ . Ce système d'équations linéaires est obtenu en substituant l'expression des contraintes à l'ordre  $p$  (6.34) dans l'équation du mouvement à l'ordre  $p$  (6.33) et en rajoutant l'équation de phase et l'équation de longueur d'arc avec la matrice de chemin diagonale<sup>(17)</sup>  $\mathbf{A}$ , soit

*Problème à l'ordre  $p$  :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_\Delta \mathbf{U}^p = \mathbf{Fnl}^p \\ \mathbf{n}^T \mathbf{V}_1 \mathbf{Q}^p = 0 \\ (\mathbf{U}^1)^T \mathbf{A} \mathbf{U}^p = 0 \quad \text{si } p > 1 \quad , \quad (\mathbf{U}^1)^T \mathbf{A} \mathbf{U}^p = 1 \quad \text{sinon} \end{array} \right. \quad (6.35)$$

avec le second membre  $\mathbf{Fnl}^p$  construit par assemblage vertical des petits seconds membres  $\mathbf{Fnl}_k^p$  donnés par l'équation :

*Second membre à l'ordre  $p$  au pas  $k$  :*

$$\begin{aligned} \mathbf{Fnl}_k^p &= - \sum_{r=1}^{p-1} F^r \mathbf{M} \Gamma_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^{p-r} - \sum_{r=1}^{p-1} \beta^r \mathbf{C} \bar{\mathbf{V}}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^{p-r} \\ &- \sum_{r=1}^{p-1} \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{A}(\bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^r) \mathbf{G} \right)^T \mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}^{p-r} d\Omega_O - \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{B}_l + \mathbf{A}(\bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^0) \mathbf{G} \right)^T \mathbf{Snl}_{k+\frac{1}{2}}^p d\Omega_O \\ &\text{avec } \mathbf{Snl}_{k+\frac{1}{2}}^p = \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{DA}(\bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^r) \bar{\theta}_{k+\frac{1}{2}}^{p-r} \end{aligned} \quad (6.36)$$

et ceci pour  $k = 1, \dots, m$ . D'autre part, la matrice  $\mathbf{K}_\Delta$  du système (6.35) est construite par assemblage (aussi par conconcatation verticale) des petites matrices tangentes rectangulaires de taille  $n \times nm$  de l'équation (6.27) elles-mêmes définies ainsi :

*Matrice tangente au pas  $k$  au point  $\mathbf{U}^0$  :*

$$\mathbf{K}_{\Delta k} = \left[ \frac{\partial \Delta_k}{\partial \mathbf{Q}} \mid \frac{\partial \Delta_k}{\partial \mathbf{F}} \mid \frac{\partial \Delta_k}{\partial \beta} \right] (\mathbf{U}^0) \quad (6.37)$$

(17). Qu'il ne faudra pas confondre avec la matrice de même notation utilisée pour l'expression de la partie non linéaire des déformations.

### 6.6.3 Algorithme de calcul des termes des séries

L'algorithme de calcul des termes des séries se sépare en deux parties distinctes. La première partie concerne le calcul du premier terme (ordre  $p = 1$ ), et la seconde concerne le calcul des termes suivants jusqu'à l'ordre  $N$  (soit  $p = 2 \dots N$ ).

**Calcul de l'ordre 1 :** Soit  $\mathbf{U}^0$  le terme constant du développement, aussi point de départ du tronçon de la MAN et solution du système d'équations (6.29), calculé par exemple par une méthode de correction<sup>(18)</sup>.

1. On calcule la matrice jacobienne  $\mathbf{K}$  du système d'équations (6.29), égale à  $\frac{\partial \mathbf{R}_A}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^0)$ , qui est une matrice de taille  $(nm + 1) \times (nm + 2)$ .
2. On calcule le terme  $\mathbf{U}^1$  à l'aide du vecteur tangent à la branche au point  $\mathbf{U}^0$  :
  - (a) Soit  $\mathbf{W}$ , un vecteur de  $\mathbb{R}^{n+2}$ , on résout le système linéaire d'inconnue  $\mathbf{W}$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{R}_A}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^0) \mathbf{W} = 0$$

avec la composante  $nm + 2$  du vecteur  $\mathbf{W}$  égale à 1, ce qui revient à résoudre le système,

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{R}_A}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{U}^0) \quad \frac{\partial \mathbf{R}_A}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{U}^0) \right] \{ \mathbf{W} \}_{1, \dots, nm+1} = - \frac{\partial \mathbf{R}_A}{\partial \beta}(\mathbf{U}^0) \quad (6.38)$$

- (b) Pour être conforme à l'équation de longueur d'arc, on normalise le vecteur calculé précédemment avec l'expression

$$\mathbf{U}_t = \frac{\mathbf{W}}{\sqrt{\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{W}}}$$

- (c) Soit  $\mathbf{U}_s$ , le vecteur de sortie tangent au tronçon précédent de la continuation évaluée pour la valeur du paramètre de chemin  $a = a_{max}$ , on prendra enfin

$$\begin{cases} \mathbf{U}^1 = \mathbf{U}_t & \text{si } \mathbf{U}_s^T \mathbf{U}_t > 0 \\ \mathbf{U}^1 = -\mathbf{U}_t & \text{si } \mathbf{U}_s^T \mathbf{U}_t < 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

Ce dernier test permet d'assurer la continuité du sens de progression sur la courbe solution d'un tronçon à l'autre.

3. On calcule  $\mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}}^1 = \mathbf{D} \left( \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}(\bar{\mathbf{q}}_{k+\frac{1}{2}}^0) \right) \bar{\mathbf{q}}_{k+\frac{1}{2}}^1$  pour  $k = 1, \dots, m$ .
4. On calcule  $\boldsymbol{\theta}_k^1 = \mathbf{G} \mathbf{q}_k^1$  pour  $k = 1, \dots, m$ .
5. On calcule  $\mathbf{S}nl^2$  et  $\mathbf{F}nl^2$  conformément à (6.36) mais pour  $k = 1, \dots, m$ .

#### Calcul des ordres $p$ :

1. On construit la matrice  $\mathbf{K}_t$  de taille  $nm + 2 \times nm + 2$  (matrice carrée) par concañétation verticale de la matrice  $\mathbf{K}$  précédemment calculé pour l'ordre 1 et du vecteur tangent à l'équation de longueur d'arc  $\mathbf{U}^{1T} \mathbf{A}$ , on a donc

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{U}^{1T} \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

(18). On pourra utiliser la méthode de correction de Newton-Raphson ou une méthode d'homotopie.

2. Pour des raisons d'optimisation de calcul, on décompose une bonne fois pour toutes la matrice  $\mathbf{K}_t$  par factorisation LU + réorganisation de sorte que  $\mathbf{K}_t = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{U} \mathbf{Q}^{-1}$ , avec  $\mathbf{L}$  étant une matrice triangulaire inférieure,  $\mathbf{U}$  étant une matrice supérieure et  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  des matrices de réorganisation d'indices, permettant une décomposition de  $\mathbf{K}_t$  optimale (voir documentation du logiciel Matlab).
3. Pour  $p$  compris variant de 2 à  $N$ 
  - (a) On calcule<sup>(19)</sup> l'ordre  $p$ ,

$$\mathbf{U}^p = \mathbf{Q} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} [\mathbf{F} \mathbf{n} \mathbf{l}^{pT} \ 0]^T$$

- (b) On calcule  $\mathbf{S}^p_{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{D} \left( \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}(\bar{\mathbf{q}}_{k+\frac{1}{2}}^0) \right) \bar{\mathbf{q}}^p_{k+\frac{1}{2}} + \mathbf{S} \mathbf{n} \mathbf{l}^p_{k+\frac{1}{2}}$  pour  $k = 1, \dots, m$ .
- (c) On calcule  $\boldsymbol{\theta}_k^p = \mathbf{G} \mathbf{q}_k^p$  pour  $k = 1, \dots, m$ .
- (d) On calcule  $\mathbf{S} \mathbf{n} \mathbf{l}^{p+1}$  et  $\mathbf{F} \mathbf{n} \mathbf{l}^{p+1}$  conformément à (6.36) mais pour  $k = 1, \dots, m$ .

Ainsi, l'application de l'algorithme permet d'obtenir les termes de séries pour un tronçon ayant comme point de départ  $\mathbf{U}^0$ . Cet algorithme est ensuite ré-itéré afin de construire le tronçon suivant, ayant comme point de départ le nouveau point  $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}(a_{max})$ , avec  $\mathbf{U}(a_{max})$  étant la "fin" du tronçon venant juste d'être calculé. Ainsi, en itérant plusieurs fois l'algorithme, on construit de proche en proche les tronçons constituant la branche de solution, qui constitue une partie de la surface invariante du MNL.

## 6.7 Implémentation

Il s'agit maintenant de traduire l'algorithme de la méthode OPMAN dans le langage informatique. Nous présentons ici la version la plus aboutie de l'écriture de la méthode, tout en mentionnant qu'une dizaine de versions très différentes les unes des autres ont été implantées. On recensera ici les 6 versions les plus déterminantes, listées dans l'ordre chronologique de création :

- Version pour le système à deux degrés de liberté du benchmark de l'Euromech 457.
- Version pour les équations du modèle de Westerveld, permettant de calculer les modes non-linéaires de certains instruments de musique à vents (il s'agit d'ondes stationnaires unidimensionnelles du fluide dans le résonateur).
- Version pour un modèle de poutre discrétisée par éléments finis.
- Version pour les systèmes à deux degrés de liberté à pompage d'énergie.
- Version générique pour les systèmes à faible nombre de degrés de liberté à non-linéarité quadratique et cubique.
- Version pour les modèles continus discrétisés par éléments finis avec élément pour coques minces (version présentée ici).

Toutes ces versions sauf la première ont été interfacées avec MANLAB. La dernière version, utilisant les modèles éléments finis de coques, fait l'objet de cette section.

Les lignes suivantes n'ont pas prétention d'être une description exhaustive. On exposera seulement les grandes lignes de cette implantation, tout en insistant sur les points qui méritent une attention particulière, comme par exemple la description d'une méthode de construction efficace de la matrice tangente ainsi que la construction optimisée des seconds membres de la MAN.

---

(19). les matrices  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{L}$  ne sont pas explicitement inversées. En effet, lors du calcul du vecteur  $\mathbf{U}^p$ , deux systèmes linéaires sont résolus. Etant donnés que  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{L}$  sont triangulaires, le calcul est effectué rapidement.

### 6.7.1 Structure

La figure (6.2) présente la structure en 4 modules utilisée pour le codage de la méthode OPMAN. Seules les fonctionnalités d'interfaçage utilisateur et de gestion de base de donnée du programme MANLAB sont utilisées dans cette implantation. L'algorithme de calcul des termes de série ainsi que l'algorithme de correction de solutions approchées, déjà présents dans le programme MANLAB, ont été remplacés par des algorithmes dédiés à la méthode OPMAN afin de permettre une écriture optimisée. Ce remplacement est notamment permis par la surcharge des fonctions de la classe de base de l'implantation de MANLAB (voir documentation de MANLAB pour plus d'information sur le principe de surcharge).

On présente maintenant les deux plus haut niveaux de la structure du code (module MANLAB) et le module de calcul d'orbites périodiques (module MODELEEFOP), les deux modules au plus bas niveau (module MODELEEF, et bibliothèque EVEMATLABLIB) ayant déjà été présentés dans la première partie du mémoire.

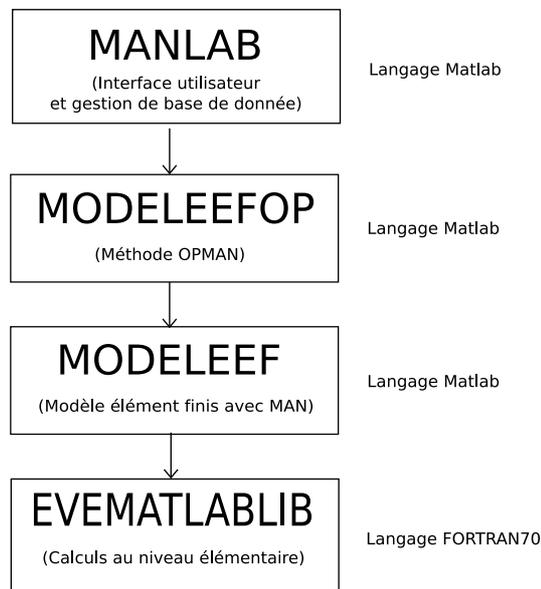


Figure 6.2 – *Structure du code de la méthode OPMAN liée avec MANLAB. Les flèches doivent se lire comme le terme "utilise".*

### 6.7.2 Niveau 1 : Manlab

Le module MANLAB a déjà été présenté dans la première partie de ce mémoire. Nous indiquons seulement ici les fonctionnalités utilisées :

1. Affichage du diagramme de réponse (présentation du diagramme, repositionnement du point courant et consultation de la base de données etc...).
2. Interfaçage avec l'utilisateur (lancement du calcul de tronçons, sauts, ajout de perturbations etc...)
3. Gestion de la base de données de tronçons (sauvegardes et chargements).

### 6.7.3 Niveau 2 : Classe MODELEEFOP

La classe MODELEEFOP (MODELE Eléments Finis Orbits Périodiques), écrite en langage Matlab, est l'image de la méthode OPMAN. Ses fonctions principales sont le calcul et la correction de solutions approchées, ainsi que le calcul des termes de séries. On retiendra donc les fonctionnalités principales suivantes :

1. Construction de solutions approchées à l'aide des modes propres linéaires calculés dans le module inférieur MODELEEF.
2. Correction de solutions approchées par la méthode de Newton-Rapson.
3. Calcul du résidu  $\mathbf{R}_A(\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\theta}, F, \beta)$  du système (6.31) page 114.
4. Initialisation des liste d'indices non-zeros de la matrice  $\mathbf{Kt}$  par assemblage des listes d'indices des sous-matrices  $\mathbf{K}_{\Delta_k}$  et des vecteurs  $\mathbf{n}^T \mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{Q}^{1T} \mathbf{A}$ .
5. Assemblage des listes de valeurs de la matrice  $\mathbf{Kt}$  à partir des listes de valeurs des sous-matrices  $\mathbf{K}_{\Delta_k}$ , des valeurs des vecteurs  $\mathbf{n}^T \mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{Q}^{1T} \mathbf{A}$  et construction effective de la matrice  $\mathbf{Kt}$  au format creux à partir de la liste d'indices d'éléments non-zeros.
6. Assemblage des seconds membres  $\mathbf{Fnl}^p$  de la méthode OPMAN.
7. Assemblage du vecteur de contrainte  $\mathbf{S}$ .
8. Assemblage du vecteur de gradient  $\boldsymbol{\theta}$ .
9. Algorithme de calcul des termes de séries de la méthode OPMAN (voir sous-section 6.6.3).

#### 6.7.3.a Construction de la matrice tangente

Les points 5 et 6 concernent la construction de la matrice tangente au format creux  $\mathbf{Kt}$ . Matlab possède une gestion des matrices relativement performante, qui permet en outre d'effectuer aisément des assemblages "à la volée" de matrice creuses à partir de sous-matrices creuses. Cet assemblage peut cependant s'avérer extrêmement lent lorsque les matrices et sous-matrices sont de grandes dimensions. En effet, les premières implantations de la méthode OPMAN utilisaient cette méthode d'assemblage à la volée, ce qui rendait les temps de calculs très longs, à tel point que le temps de calcul total d'une branche était pratiquement égal au temps de constructions de matrices. Afin de remédier au problème, nous avons fait la distinction entre

- la construction des listes de coordonnées d'indices des coefficients non-zéros<sup>(20)</sup>, `Kt_rows` et `Kt_cols`,
- la liste des valeurs des coefficients de la matrice (liste de nombres réels), `Kt_vals`,
- la matrice complète au format creux (structure non zéros + valeurs), `Kt`.

Ainsi, les listes d'indices des coefficients non-zéros `Kt_rows` et `Kt_cols`, qui restent les mêmes pour toute l'exécution, sont construites et stockées une bonne fois pour toutes lors de l'initialisation du programme. Ensuite, lors d'une évaluation de la matrice (itération de Newton-Rapshon ou tronçon de MAN), les valeurs des coefficients `Kt_vals` sont calculés, afin de construire la matrice au format creux `Kt`. à l'aide de la ligne suivante :

```
Kt = sparse(Kt_rows, Kt_cols, Kt_vals);
```

Comparé à la première méthode (construction à la volée) le temps d'exécution de la commande Matlab `sparse`, dédié à la conversion des listes de coordonnées au format *Compressed Column Storage* (CCS), est très raisonnable (10% environ du temps de calcul total).

(20). Autrement dit, la liste des coordonnées (i,j) des coefficients non nuls de la matrice en question.

### 6.7.3.b Construction des seconds membres

Le point 6 concerne la construction du vecteur second membre de la MAN. Comme on peut le voir dans l'expression (6.36) page 115, l'expression des seconds membres fait intervenir plusieurs sommations sur les indices des termes du développement de la MAN ( $r = 1, \dots, N$ ). Ces sommations peuvent s'effectuer à plusieurs niveaux. Si on choisit le plus haut niveau (sommations dans une fonction de la classe `MODELEEFOP`), on multiplie les appels de fonctions de plus bas niveau, ce qui implique de calculer plusieurs fois certaines données qui restent constantes lors de la sommation (les matrices  $\mathbf{B}(\mathbf{q}^0)$  et  $\mathbf{G}$  restent les mêmes pour chaque valeur de l'indice  $r$ ). Si l'on choisit d'effectuer les sommations dans le plus bas niveau (bibliothèque `EVEMATLABLIB`), on diminue grandement le nombre d'appels de fonctions de plus bas niveau, tout en calculant une seule fois les matrices  $\mathbf{B}(\mathbf{q}^0)$  et  $\mathbf{G}$  pour chaque valeur de l'ordre  $p$ . La première solution (sommations au plus haut niveau) est plus simple d'un point de vue codage mais plus lente, alors que la seconde (sommation au plus bas niveau) est plus complexe mais plus rapide. Par expérience<sup>(21)</sup>, le gain de temps apporté par la seconde solution est important. Nous avons donc choisi d'effectuer les sommations au plus bas niveau.

---

(21). La comparaison de plusieurs programmes de MAN développés sous matlab et l'implantation du code éléments finis EVE ont montré que les sommations doivent se faire au plus bas niveau.

## 6.8 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre le passage entre la formulation théorique du problème des orbites périodiques et son écriture discrète, nommée méthode OPMAN. On a tout d'abord précisé le cadre mécanique de l'élastodynamique en non linéaire géométrique pour le cas exact 3D et le cas de l'approximation des structures minces. En conservant la formulation générale et exacte du cas 3D, on a discrétisé les équations du mouvement en espace par la méthode des éléments finis, puis en temps, à l'aide de deux schémas temporels différents. Bien que le schéma de Simo possède la propriété intéressante de conservation de l'énergie mécanique totale, la comparaison avec le schéma de Newmark n'a pas donné de résultats suffisamment convaincants justifiant sa mise en oeuvre plus complexe, du moins dans le cas du calcul d'orbites périodiques.

Une fois les équations du mouvement obtenues sous forme discrète, on a décrit deux méthodes d'obtention d'orbites périodiques. Pour cela on a rappelé une méthode itérative connue sous le nom de méthode de tir, puis on a présenté la méthode simultanée qui possède l'avantage de définir l'orbite discrète sans processus itératif et surtout sous forme de système algébrique.

Après avoir divisé par deux la taille du système algébrique en supprimant les données en vitesse, on a choisi d'utiliser la MAN pour le résoudre au lieu de la méthode plus classique de Newton Raphson, ceci afin de bénéficier des avantages décrits dans la première partie du mémoire (détection des bifurcations, adaptation automatique des longueurs de pas et méthode de branchement robuste par perturbation). Il s'en est suivi une nécessaire reformulation quadratique du système et la description de l'algorithme de calcul des termes des séries de la MAN. On a terminé ce chapitre par une description des grandes lignes de l'implantation numérique de la méthode OPMAN, à savoir la structuration du code, et le calcul efficace de la matrice tangente et des seconds membres.

Vient maintenant la mise à l'épreuve de l'ensemble, à l'aide de structures minces modélisées par éléments finis.



---

## Expérimentations numériques avec la méthode OPMAN

**C** *e chapitre présente les résultats des expérimentations numériques menées sur deux structures minces.*

## PLAN DU CHAPITRE 7

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>125</b>
<b>7.2</b>	<b>Expérimentations numériques sur une poutre</b>	<b>125</b>
7.2.1	Présentation de la poutre	125
7.2.2	Réponse libre	127
7.2.3	Analyse par participation modale	130
7.2.3.a	Résultats pour le diagramme complet	131
7.2.3.b	Résultats ponctuels avec analyse du contenu fréquentiel	133
7.2.4	Dépendance à la discrétisation temporelle	135
<b>7.3</b>	<b>Interprétations</b>	<b>137</b>
7.3.1	Présentation du modèle simplifié	137
7.3.2	Solutions périodiques du modèle simplifié	140
7.3.2.a	Système non couplé	140
7.3.2.b	Système avec couplage linéaire	140
<b>7.4</b>	<b>Expérimentation numérique sur une coque mince</b>	<b>145</b>
7.4.1	Présentation du panneau avec raidisseurs	146
7.4.2	Réponse libre	146
7.4.3	Analyse par participation modale	147
<b>7.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>

---

## 7.1 Introduction

On présente dans ce chapitre des simulations de vibrations libres de deux structures minces avec la méthode OPMAN, en apportant quelques interprétations sur les résultats obtenus.

Après une description d'une poutre mince et de ses fréquences et modes propres linéaires, on enchaînera sur la présentation des résultats de continuation de ses solutions périodiques. On étudiera l'ensemble du diagramme et quelques images de déformées obtenues en des points particuliers, en essayant de classifier les diverses branches et points de bifurcation.

Afin de pousser la classification au maximum, on projettera l'ensemble des solutions sur la base des modes linéaires, on obtiendra alors pour chaque mode linéaire un diagramme représentant la participation de sa déformée dans le mouvement non linéaire. Il ne s'agira pas d'effectuer une décomposition modale à proprement parler, mais cela nous permettra en tout cas d'avoir une vision plus compréhensible des résultats. On montrera notamment et clairement des branches reliant des modes non linéaires entre eux, branches qui ont d'ailleurs déjà été présentées dans PERIGNON (2004) sur une poutre de dimensions similaires.

D'autre part, on a montré dans le chapitre précédent comment le nombre de pas de temps utilisés pour décrire une solution périodique pouvait en modifier sa période. Pour en savoir d'avantage sur l'influence de la discrétisation temporelle, on effectuera un second calcul, avec un nombre de pas différent. On comparera alors les deux diagrammes et on essayera d'en tirer une conclusion.

D'autre part, un des points importants de ce chapitre concerne la présence de points de bifurcation particuliers, qui donnent naissance à des branches bifurquées calculables seulement avec ajout de perturbation (il s'agira des bifurcations notées  $ax$ ). Ces bifurcations étant assez nombreuses et problématiques, il semblait important de déterminer leur origine. On présente donc pour cela, les solutions périodiques d'un système discret à deux degrés de liberté, similaire à deux oscillateurs de Duffing couplés. On retrouvera sur ce système plus simple les mêmes types de bifurcations particulières, ce qui nous permettra d'apporter quelques explications sur leur présence. De fait, à l'issue du chapitre, on pourra mieux évaluer la méthode décrite dans ce mémoire.

Enfin, pour terminer le chapitre, on présentera les résultats de continuation d'une structure plus complexe. L'objectif étant d'évaluer l'implantation numérique et notamment son aptitude à gérer des modèles ayant un nombre important de degrés de liberté.

## 7.2 Expérimentations numériques sur une poutre

### 7.2.1 Présentation de la poutre

Nous présentons ici le modèle éléments finis utilisé pour les expérimentations numériques. Il s'agit d'une poutre doublement encastree de dimensions  $600 \times 30 \times 2(mm)$  discrétisée à l'aide de 16 éléments finis de type DKT. Le choix des dimensions du modèle est motivé par l'existence de la poutre du banc d'essai réel présenté dans PERIGNON (2004). La figure 7.1 page 126 montre le modèle discrétisé qui sera utilisé dans nos expérimentations numériques.

D'une manière générale, nous savons que la discrétisation d'un modèle continu a une influence sur le contenu spectral du problème aux valeurs propres linéaires correspondant. Dans le cas présent, avec seulement 16 éléments finis, les modes à haute fréquence du problème continu

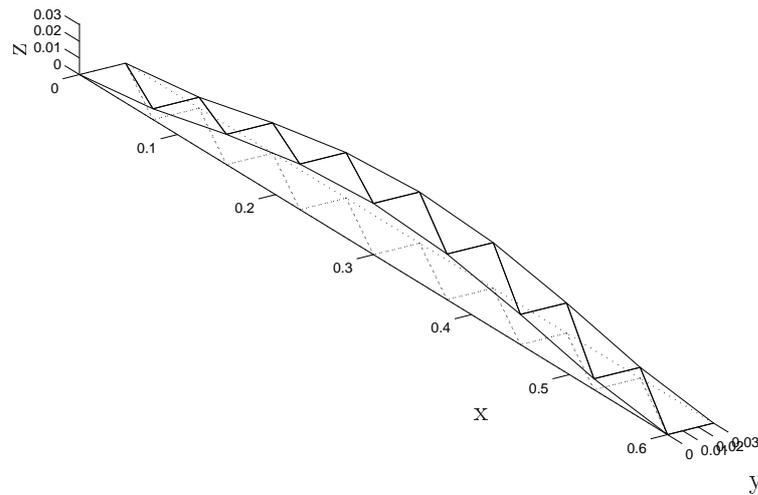


Figure 7.1 – Poutre doublement encastrée de dimensions  $600 \times 30 \times 2$  (mm) discrétisée à l'aide de 16 éléments finis de type DKT. L'image montre la déformée du premier mode ainsi que la poutre au repos (en pointillés)

sont mal représentés, voire non représentés dans le modèle discrétisé. Ce problème est bien connu dans le domaine de l'étude des vibrations linéaires et non linéaires de structures. L'étude de l'influence de la discrétisation spatiale n'est pas le propos de ce mémoire. Ainsi, nous considérerons le problème discrétisé en tant que simple système dynamique discret, sans se préoccuper des différences avec le modèle continu.

La figure 7.2 page 127 montre le spectre de fréquences du problème aux valeurs propres des équations du mouvement linéarisées. Etant donné que la structure possède 70 degrés de liberté, le spectre de fréquences comporte donc aussi 70 fréquences propres. Certaines fréquences correspondent à des modes de flexion, d'autres à des modes de traction-compression, d'autres à des modes de torsion et d'autres à des modes de cisaillement. La première barre verticale située en  $f_i = 30,09 Hz$  correspond au premier mode qui est un mode de flexion. Seuls les modes à basses fréquences sont correctement représentés spatialement, contrairement aux modes à hautes fréquences qui souffrent d'un manque de définition spatiale et sont par conséquent dépourvus de réalité physique. Ceci dit, ces modes de vibrations sont des solutions du problème aux valeurs propres des équations du mouvement linéarisées et leurs pendants non linéaires sont donc aussi solutions des équations du mouvement non linéaires. Nous verrons par la suite que certains de ces modes à hautes fréquences se manifestent lors du calcul des modes non linéaires à basse fréquence et ne peuvent donc pas être ignorés. Nous présentons par ailleurs les fréquences des 16

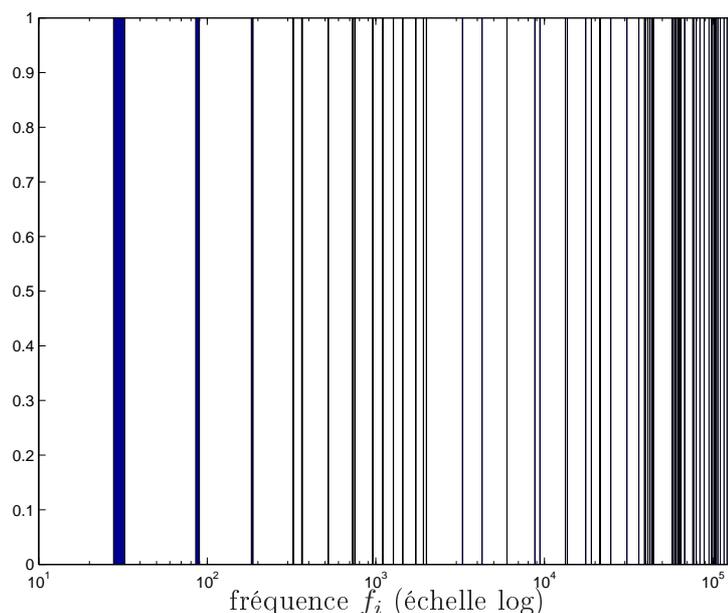


Figure 7.2 – Spectre de fréquences correspondant au problème aux valeurs propres des équations du mouvement linéarisé du modèle de poutre discrétisée par éléments finis.

premiers modes linéaires dans le tableau suivant

$i$ (mode)	$f_i$ (fréquence Hz)	$i$ mode	$f_i$ (fréquence Hz)
1	30.09	9	958.43
2	87.58	10	1099.0
3	184.85	11	1443.6
4	365.13	12	1726.3
5	324.04	13	1914.4
6	522.33	14	1994.7
7	727.68	15	42102.2
8	750.47	16	43113.6

### 7.2.2 Réponse libre

La figure 7.3 page 128 montre un résultat de continuation par la méthode OPMAN avec 27 pas de temps ( $m = 27$ ), avec un vecteur de phase  $\mathbf{n}$  choisi tel que la vitesse verticale au quart de la poutre soit nulle, soit  $v_z(\tau = 0, x \approx L/3) = 0$ , de telle sorte que le mouvement sur le premier mode et le troisième mode soit verrouillé de façon certaine. Le calcul a été effectué avec un départ sur le premier mode linéaire à  $30,09\text{Hz}$  (mode de flexion) et sur une plage de fréquence normalisée ( $\frac{f}{f_1}$ ) comprise entre 1 et 1.4 (seule la plage 1 à 1.3 est affichée) avec  $f_1$  étant la fréquence du premier mode linéaire ( $f_1 = 30,09\text{Hz}$ ). Le diagramme présente la flèche au milieu de la poutre et pour le premier pas de temps ( $\tau = \tau_1 = 0$ ), soit  $u_z(x = \frac{L}{2}, \tau = 0)$ , en fonction de la fréquence normalisée ( $\frac{f}{f_1} = \frac{1}{f_1 T}$ ), avec  $T$  étant toujours la période d'intégration de l'orbite périodique. Plus précisément, chaque point du diagramme de continuation représente un départ d'un tronçon de la MAN (termes  $\mathbf{U}^0$  de l'algorithme (6.6.3) page 116). Pour information, la flèche au milieu de la poutre au premier pas de temps  $u_z(x = \frac{L}{2}, \tau = 0)$  correspond à la valeur de la composante 51 du vecteur  $\mathbf{U}$ . De même, la fréquence au carré (variable  $F$ ) est présente

dans la composante 2916. Le diagramme de continuation est donc une projection de l'ensemble des solutions dans le plan

$$\left(\frac{\sqrt{U_{2916}}}{f_1}, U_{51}\right)$$

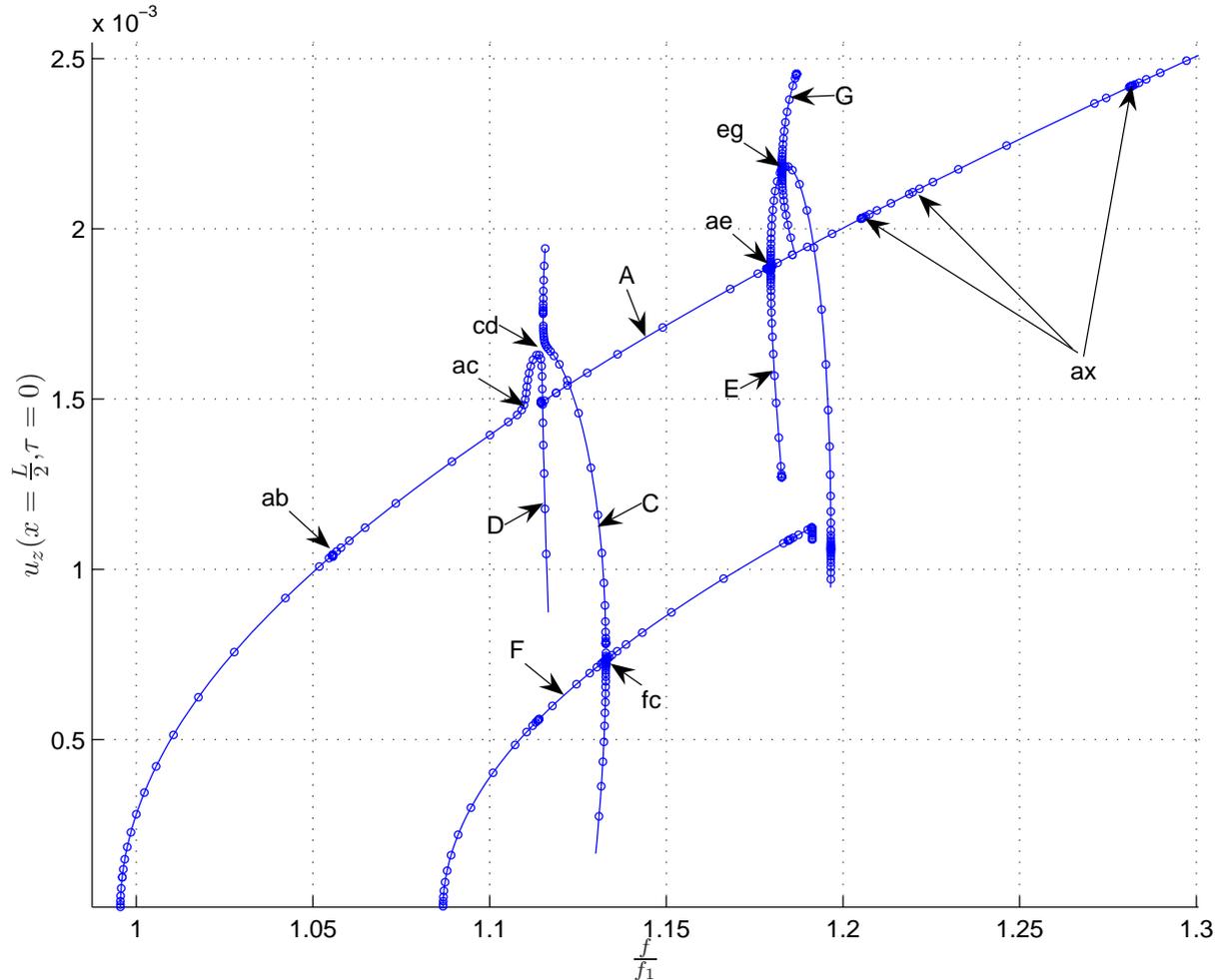


Figure 7.3 – Branche fondamentale et quelques branches bifurquées de la réponse libre conservative de la poutre présentée en figure 7.1 page 126 calculée par la méthode OPMAN avec 27 pas de temps ( $m = 27$ ) et avec un départ sur le mode 1. Flèche au milieu de la poutre et pour le premier pas de temps ( $\tau = \tau_1 = 0$ ) soit  $u_z(x = \frac{L}{2}, \tau = 0)$  en fonction de la fréquence normalisée ( $\frac{f}{f_1} = \frac{1}{f_1 T}$ ). Les flèches A, C, D, E, F et G indiquent le noms des branches et indiquent aussi les coordonnées où les déformées sont affichées en figure 7.4 page 129. Les points ab, ac, cd, fc, ae et, eg signalent les points de bifurcation et de quasi-bifurcations.

Le calcul du diagramme de réponse tel qu'il est présenté en figure 7.3 page 128 a nécessité une dizaine d'heures de calcul étalées sur plusieurs jours. A l'issue de chaque session de calcul, la base de données des tronçons a été sauvegardée puis rechargée pour les sessions suivantes afin d'être complétée par sélection manuelle des branches secondaires a priori intéressantes (toujours à l'aide du logiciel MANLAB). Pour passer les points de bifurcation, des sauts ainsi que des changements de sens de continuation ont été effectués. Par contre, nous n'avons pas utilisé la

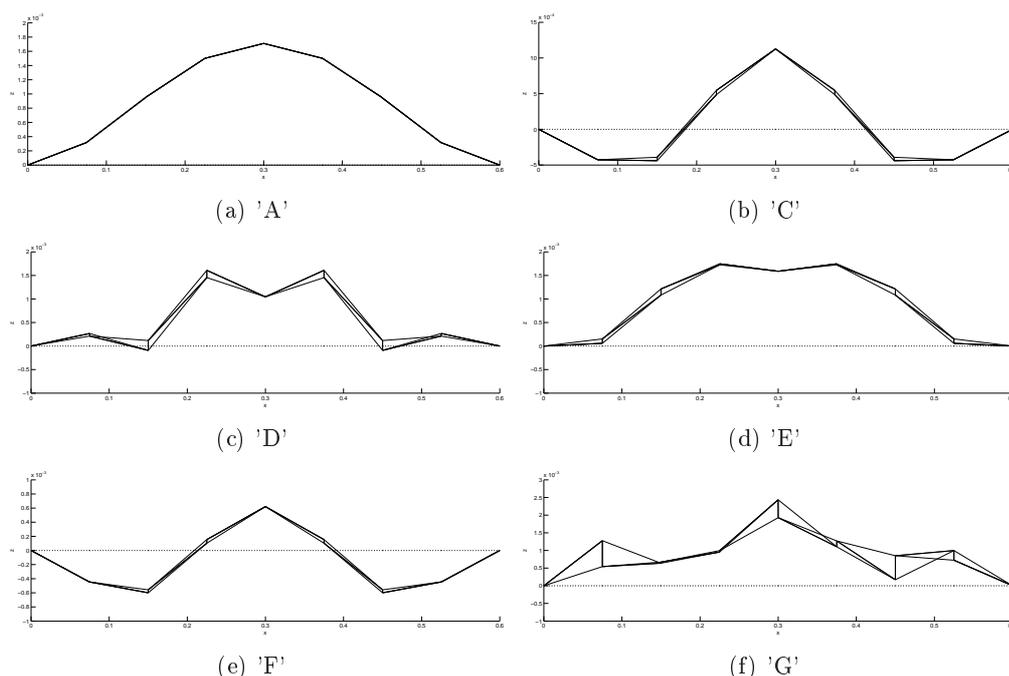


Figure 7.4 – Déformées au premier pas de temps ( $\tau = \tau_1 = 0$ ) pour les points  $A, C, D, E, F$  et  $G$  du diagramme de continuation figure 7.3 page 128.

méthode de branchement par perturbation. Ainsi, toutes les branches présentées sont issues du problème non perturbé.

On observe donc la branche fondamentale ainsi que plusieurs branches bifurquées. Les points de bifurcation (ou quasi bifurcations) sont notés en minuscules ( $ab, ac, cd, fc, ae$  et  $eg$ ) et les majuscules ( $A, C, D, E, F$  et  $G$ ) désignent le nom des diverses branches et représentent aussi les coordonnées où les déformées au temps  $\tau = \tau_1 = 0$  (premier pas de temps) sont affichées en figure 7.4 page 129.

On retiendra de ces résultats les faits suivants :

1. Le "début" de la branche  $A$ , situé à l'intersection de l'axe des abscisses et de la branche  $A$ , qui correspond à l'orbite initiale obtenue par correction itérative de l'orbite du problème aux valeurs propres (premier mode linéaire), n'est pas exactement située en  $\frac{f}{f_1} = 1$ . Cette erreur en périodicité, due à la discrétisation temporelle, est expliquée dans le paragraphe (6.4.4) page 107.
2. La branche fondamentale, désignée par la lettre  $A$ , témoigne d'un comportement raidissant, caractéristique des raideurs cubiques d'une poutre droite.
3. La branche fondamentale  $A$  présente un grand nombre de points de bifurcation. Ces points sont signalés soit par une accumulation des départs de séries de la MAN (points de bifurcation exacte  $ax$ ), soit par une très forte courbure (points de quasi-bifurcations  $ac$  et  $cd$ ), ou soit par la présence de branches bifurquées coupant la branche fondamentale (points  $ab$  et  $ae$ ).
4. Par rapport à la branche fondamentale  $A$ , les branches  $C$  et  $E$  sont des branches bifurquées de premier ordre coupant respectivement la branche fondamentale au point de quasi

bifurcation  $ac$  et au point de bifurcation  $ae$ .

5. Par rapport à la branche fondamentale  $A$ , les points de bifurcation  $eg$  et  $fc$  et le point de quasi bifurcation  $cd$  donnent lieu à trois branches bifurquées de second ordre (branches  $G, F$  et  $D$ ).
6. La branche  $F$  est reliée à la branche fondamentale  $A$  par l'intermédiaire de la branche  $C$ , en passant par les points de quasi bifurcation  $ac$ , puis  $cd$ , puis par le point de bifurcation  $fc$ .
7. Les déformées aux points  $C, D$  et  $E$  mettent en évidence la présence simultanée de déformées de modes de flexion (voir figure 7.4 page 129).
8. La déformée au point  $G$  met en évidence la présence de torsion mêlée à des déformées d'autres modes de flexion (voir figure 7.4 page 129).
9. Dans la branche  $A$ , seule la déformée du premier mode semble présente (voir figure 7.4 page 129).
10. Dans la branche  $F$ , seule la déformée du troisième mode semble présente (voir figure 7.4 page 129).
11. Dans la branche  $C$ , la déformée du premier mode et la déformée du troisième mode semblent simultanément présentes (voir figure 7.4 page 129).
12. Les points de bifurcation signalés  $ax$ , donnent lieu à des branches bifurquées singulières (la matrice tangente du problème simultanée n'est plus inversible). Notons que le changement du degrés de liberté utilisé pour l'équation de phase ne change pas le problème. Les branches issues de ces points peuvent cependant être calculées en ajoutant une perturbation d'amplitude suffisamment importante. On donnera une explication de ce phénomène en section 7.3 page 137.

Les informations données par le diagramme de la figure 7.3 page 128 et par les déformées de la figure 7.4 page 129 nous apportent des informations qualitatives portant la présence de déformées des modes linéaires dans les réponses non linéaires. Afin de rendre ces résultats quantitatifs, nous présentons dans les lignes suivantes une méthode de post-traitement permettant d'obtenir des résultats globalement plus lisibles et qui permettent donc une interprétation physique plus poussée.

### 7.2.3 Analyse par participation modale

Comme dit précédemment, les résultats présentés en figure 7.3 page 128 montrent un nombre important de points de bifurcation et de branches secondaires, mais ces données brutes sont peu lisibles et ne permettent donc pas d'interprétation physique.

En observant les déformées présentées en figure 7.4 page 129, on peut tout de même détecter la présence simultanée de plusieurs déformées modales, proches des celles données par le calcul aux valeurs propres. D'où l'idée de projeter les trajectoires périodiques composant le MNL sur une base des déformées des modes linéaires. Cette projection peut se faire de la manière suivante, soit  $\mathbf{q}_k$  pour  $k = 1, \dots, m$  les valeurs discrètes des déplacements des degrés de liberté de la structure pour un point (une orbite périodique) du diagramme de continuation donné,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\phi_i$  étant la déformée du mode linéaire  $i$  obtenu par le problème aux valeurs propres, on définira  $\theta_k^i$ , la projection du mouvement discret sur le mode  $i$  au pas de temps  $k$  de la manière

suivante :<sup>(1)</sup>

$$\theta_i^k = \Phi_i^T M \mathbf{q}_k \quad (7.1)$$

Les données  $\theta_i^k$  pour  $k = 1 \dots m$  nous permettent ainsi d'avoir le mouvement projeté sur chaque modes  $i$  et pour un point donné du diagramme de continuation. On peut définir ensuite la *participation modale*  $P_i$  comme étant l'énergie (au sens de l'analyse du signal) de chaque signaux discrets  $\theta_{k=1, \dots, m}^i$  sur la totalité d'une orbite périodique. On définira cette participation modale comme il suit :

$$P_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\Phi_i^T M \mathbf{q}_k)^2 \quad (7.2)$$

#### REMARQUE 10

L'énergie  $P_i$  peut être interprétée comme étant la participation de la déformée du mode linéaire  $i$  lors du mouvement de la structure pour un point donné du diagramme de continuation. □

#### 7.2.3.a Résultats pour le diagramme complet

Nous avons effectué le calcul de la participation modale (7.2) pour l'ensemble des points solutions constituant le diagramme figure 7.3 page 128 et pour  $i$  balayant les 70 modes linéaires de la structure à partir de la base de données de Manlab. Le résultat de ce post-traitement est présenté en figure 7.5 page 132. Seules les participations modales des déformées des modes linéaires  $i = 1, 3, 6, 9$  et 12 sont présentées et tracée dans cette même figure (les autres participations étant nulles à la précision machine près, ce qui en soit est un résultat important). En ordonnée est présentée la participation modale de la déformée de chaque mode linéaire  $i$  et en abscisse, on retrouve la fréquence normalisée  $\frac{f}{f_1} = \frac{1}{f_1 T}$ . Les flèches  $A, C, D, E, F$  et  $G$  indiquent le nom des branches ainsi que les coordonnées où les harmoniques des signaux  $\theta_i$  sont affichées en figure 7.5 page 132. Comme pour le diagramme précédent, les points  $ab, ac, cd, fc, ae$  et,  $eg$  signalent les points de bifurcation et de quasi-bifurcations<sup>(2)</sup>.

*Etant donné que les participations sont superposées dans le même diagramme, certaines branches apparaissent simultanément (c'est le cas pour les branches  $C, D, G$  et  $E$ ). Pour comprendre comment lire le diagramme, prenons l'exemple de la branche  $G$ , située à la droite du diagramme (vers  $\frac{f}{f_1} = 1.19$ ). Cette branche apparaît 3 fois, dans les participations  $P_1, P_6$  et  $P_{12}$ . Ainsi lors d'un mouvement sur la branche  $G$ , les déformées des modes 1, 6 et 12 participent simultanément au mouvement.*

On retiendra de ce diagramme les faits suivants :

1. Pour l'ensemble du diagramme de continuation de la poutre, seules 5 déformées modales linéaires sont suffisantes pour reconstruire les diverses déformées non linéaires.
2. Les branches bifurquées sont généralement symétriques au voisinage des points de bifurcation exacte, c'est le cas notamment pour les branches  $E$  et  $G$  du diagramme précédent

---

(1). Les vecteurs des déformées des modes linéaires sont certes une base de  $\mathbb{R}^n$ , mais ils ne sont pas orthogonaux entre-eux. Par contre, ils vérifient la propriété suivante :  $\Phi_i^T M \Phi_j = 0 \quad \forall i, j \text{ and } i \neq j$ . D'où la nécessité d'effectuer le changement de variable  $\mathbf{y} = M \mathbf{q}$  pour que la participation d'un mode  $i$  dans le mouvement n'affecte les valeurs que d'un seul signal discret  $\theta_i$ .

(2). Les points  $A, C, D, E, F, G$  ainsi que les points  $ab, ac, cd, fc, ae$  et,  $eg$  correspondent aux points de mêmes noms de la figure 7.3 page 128.

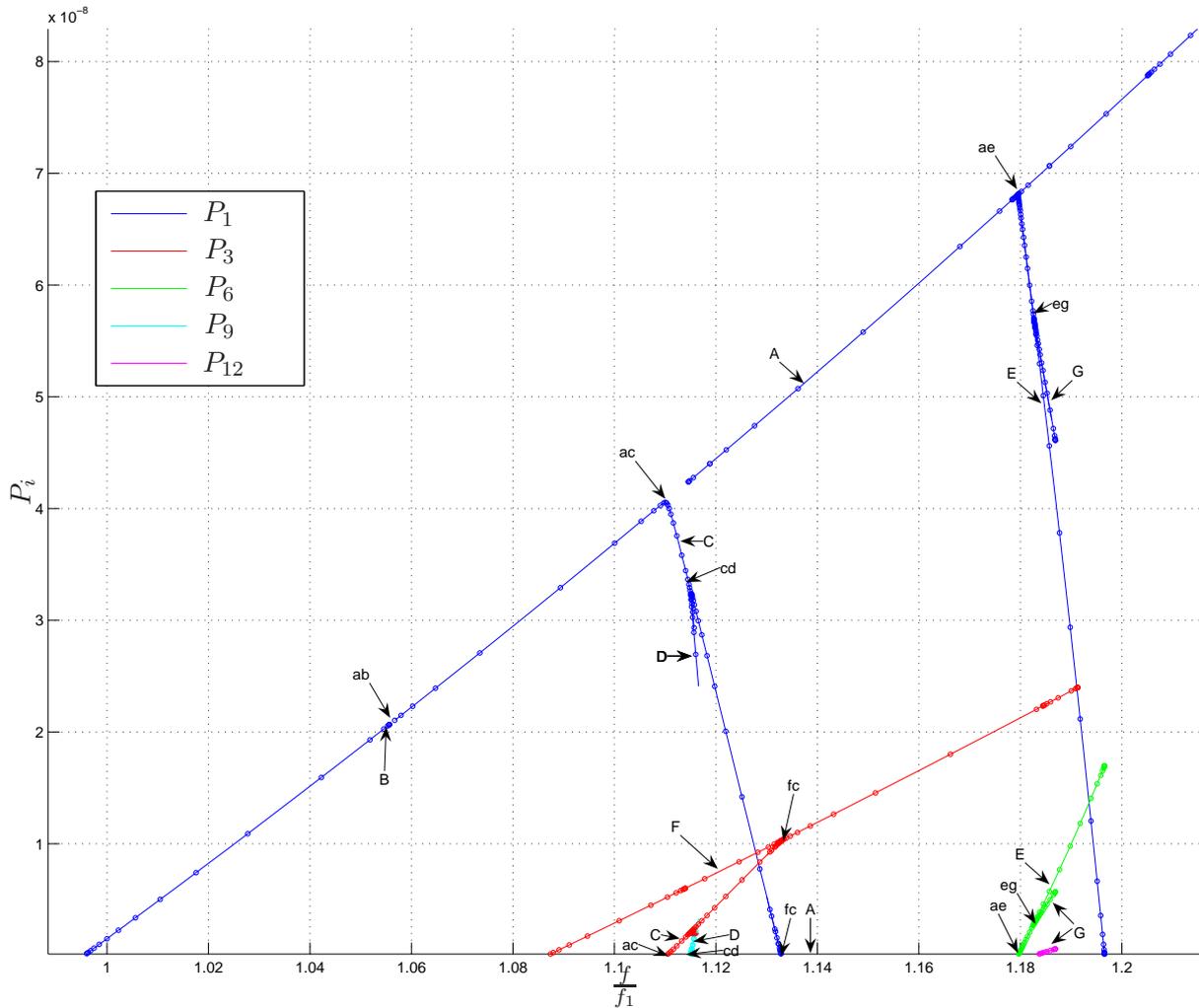


Figure 7.5 – Post traitement par participation modale de la branche fondamentale et quelques branches bifurquées de la réponse libre conservative de la poutre calculée par la méthode OPMAN avec 27 pas de temps ( $m = 27$ ) et avec un départ sur le mode 1. En ordonnée, la participation modale  $P_i$  des déformées des modes linéaires 1,3,6,9,12, en abscisse, la fréquence normalisée ( $\frac{f_1}{f_{1T}} = \frac{1}{f_{1T}}$ ). Les flèches A,C,D,E,F et G indiquent les noms des branches et indiquent aussi les coordonnées où les harmoniques des signaux  $\theta_i$  sont affichées en figure 7.5 page 132. Les points ab,ac,cd,fc,ae et, eg signalent les points de bifurcation et de quasi-bifurcation. Les points A,C,D,E,F,G ainsi que les points ab,ac,cd,fc,ae et, eg correspondent aux points de mêmes noms de la figure 7.3 page 128.

en figure 7.3 page 128 qui témoignent de l'apparition déphasée de  $180^\circ$  de nouvelles composantes du mouvement de part et d'autre du point de bifurcation. Il est intéressant de remarquer que la transformation de ce diagramme à l'aide des participations modales a replié les branches bifurquées symétriques les unes sur les autres (voir branches  $E$  et  $G$  sur le diagramme figure 7.5 page 132). Ceci a pour effet bénéfique de simplifier le diagramme en éliminant les branches qui n'apportent pas d'informations réellement nouvelles pour la compréhension du mouvement.

3. La branche fondamentale  $A$  est non nulle seulement dans la participation modale  $P_1$  (déformée du premier mode linéaire). La branche bifurquée de second ordre  $F$  est non nulle seulement dans la participation modale  $P_3$  (déformée du troisième mode linéaire). Enfin, La branche bifurquée de premier ordre  $C$  est non nulle dans les participations modales  $P_1$  et  $P_3$  (présence simultanée des déformées du premier et du troisième mode linéaire). Si l'on observe plus précisément la branche  $C$ , qui est située entre les bifurcations  $ac$  et  $fc$ , on peut voir qu'au point  $ac$  (situé sur la branche fondamentale du mode non linéaire 1), la participation modale  $P_1$  est non nulle alors que la participation modale  $P_3$  est nulle, et inversement, au point  $fc$  (situé sur un mouvement porté par la déformée du mode linéaire 3), la participation modale  $P_1$  est nulle alors que la participation modale  $P_3$  est non nulle. Il semblerait donc que la branche  $C$  soit une branche de transition entre le premier mode non linéaire (branche  $A$ ) et une branche (branche  $F$ ) dans laquelle le mouvement est porté par la déformée du mode linéaire 3.
4. Si l'on observe maintenant la branche  $E$ , il semblerait qu'un scénario identique se produise. En effet, au point de bifurcation  $ae$  situé sur la branche du premier mode non linéaire, la participation modale  $P_1$  est non nulle alors que la participation  $P_6$  est nulle. Puis, progressivement, la participation du mode  $P_1$  laisse la place à la participation modale  $P_6$ . Comme précédemment nous avons une transition entre la participation de la déformée du mode 1 et la déformée du mode 6. Le scénario s'arrête malheureusement là, car les calculs n'ont pas été poussés jusqu'à l'apparition d'une branche où seule la participation modale  $P_6$  serait non nulle.
5. Observons maintenant la branche bifurquée secondaire  $D$ . Cette branche naît au point de bifurcation  $cd$  et "fait rentrer" la participation modale  $P_9$ . Sur cette branche nous avons la présence des participations  $P_1$ ,  $P_3$  ainsi que  $P_9$  qui semblent aller (là encore les calculs n'ont pas été faits assez loin) vers une disparition des participations  $P_1$  et  $P_3$  au profit de la participation  $P_9$ .
6. En ce qui concerne la branche bifurquée secondaire  $G$ , on observera un scénario similaire au précédent, joué avec les participations  $P_1$ ,  $P_6$  et  $P_{12}$ .

L'analyse par participation modale semble montrer qu'il existe des branches de transitions entre des mouvements portés par une déformée d'un mode linéaire donné vers un mouvement porté sur une ou plusieurs déformées d'un ou plusieurs modes linéaires. A ce stade de l'analyse, nous avons donc montré comment les déformées des modes linéaires pouvaient composer les déformées des mouvement du MNL de la poutre. Afin d'aller encore plus loin dans l'analyse, nous pouvons maintenant étudier le mouvement vibratoire (évolution dans le temps) de chaque déformée des modes linéaires.

### 7.2.3.b Résultats ponctuels avec analyse du contenu fréquentiel

Afin d'avoir des informations sur la fréquence de vibration de chaque déformée linéaire  $i$ , on peut appliquer à chaque signal  $\theta_i$  une transformée de Fourier discrète. Nous noterons  $H_i^j$

le module de l'harmonique  $j$  du signal discret  $\theta_i$ . Les résultats de ces calculs sont donnés dans la figure 7.6 page 134. Chaque sous-figure présente les valeurs des harmoniques indicés  $j$  de la projection du mouvement sur la déformée du mode linéaire  $i$  pour chaque point  $A, B, C, D, E, F$  et  $G$  de la figure 7.5 page 132. Les lignes suivantes commentent les harmoniques des mouvements pour certains points

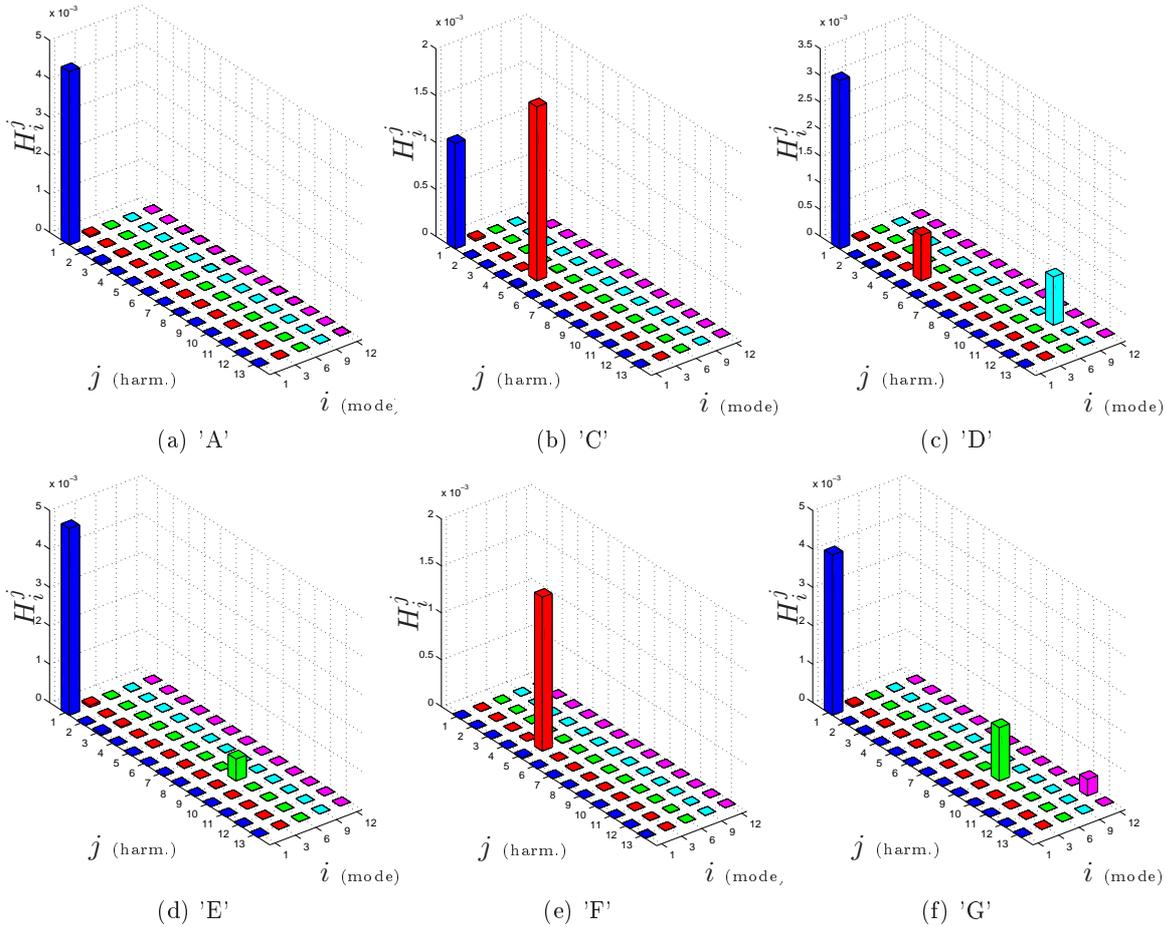


Figure 7.6 – Harmoniques  $H_i^j$  des signaux  $\theta_i$  pour les déformées des modes linéaires 1,3,6,9 et 12 et pour les points  $A, B, C, D, E, F$  et  $G$  du diagramme de participation modale figure 7.5 page 132.

- Point  $A$ . Seule la déformée du premier mode linéaire participe à la vibration. Cette vibration s'effectue principalement sur l'harmonique 1 et légèrement sur l'harmonique 3. Même si cela n'est pas montré dans les figures, la participation de l'harmonique 3 et l'harmonique 5 augmentent lorsque l'on se déplace sur la branche principale du MNL (la branche  $A$ ) dans le sens des amplitudes croissantes. Ce phénomène a déjà été rencontré dans l'étude des vibrations libres de l'oscillateur de Duffing dans le chapitre d'introduction de cette partie.
- Point  $F$ . Seule la déformée du troisième mode linéaire participe à la vibration. Cette vibration s'effectue sur l'harmonique 5 dont la fréquence fondamentale ( $f = \frac{1}{T}$ ) du signal se trouve à

$$f = 1.12f_1 = 1.12 \times 30.09Hz = 33.70Hz$$

. Dans ces conditions, un observateur de la poutre voit un mouvement vibrant à

$$5 \times 33.70Hz = 168.50Hz$$

, qui est une fréquence proche de la fréquence  $f_3 = 184.00Hz$  du troisième mode linéaire. Ainsi, au point  $F$ , l'observateur de la poutre voit une déformée du troisième mode linéaire vibrant à une fréquence proche du même mode linéaire. En regardant de plus sa forme en parabole caractéristique des modes non linéaires, il semblerait donc que la branche  $F$  soit une image du troisième mode non linéaire si ce n'est le troisième mode non linéaire lui-même mais "ramené" ou "tracé" dans le diagramme à une fréquence 5 fois inférieure. En ce point, il est important de comprendre que la vibration de la poutre est tout à fait similaire à la vibration du "véritable" troisième mode non linéaire. En effet, dans l'intervalle d'intégration  $T$ , la poutre effectue 5 vibrations identiques, ce qui veut dire que l'intervalle  $T$  n'est pas la période minimale du mouvement (la véritable période étant  $T' = T/5$ , avec  $f' = \frac{1}{T'} \approx f_3$ ).

- Point  $C$ . Deux participations modales sont non nulles, celle du premier mode linéaire qui vibre essentiellement sur l'harmonique 1, et celle du troisième mode linéaire qui vibre sur l'harmonique 5. Or, comme précédemment, la fréquence  $f$  du fondamental dans la zone de la branche 5 multiplié par le numéro d'harmonique 5 est égale à la fréquence du troisième mode linéaire. Il semblerait donc que la branche soit représentative d'une résonance interne 1 : 5 entre le MNL 1 et le MNL 3.

Dans PERIGNON (2004), on trouvera des résultats similaires obtenus par la méthode de la balance harmonique appliquée sur une poutre de mêmes dimensions aussi discrétisée par éléments finis. Ces résultats montrent en effet l'existence d'une branche de liaison entre la branche du premier MNL et la branche du troisième MNL vibrant sur le cinquième harmonique du développement harmonique (cette branche de liaison, notée  $C$  dans nos figures, apparaît et disparaît entre les fréquences normalisées  $f/f_1 \simeq 1.1$  et  $f/f_1 \simeq 1.13$  et ceci pour les deux méthodes). Cette branche de résonance interne non linéaire entre le premier MNL et le troisième MNL n'est d'ailleurs pas unique. En effet, la continuation du deuxième et du troisième mode non linéaire de la poutre met en évidence des phénomènes similaires. Pour le deuxième MNL, les calculs de PERIGNON (2004), confirmés aussi par nos calculs, montrent une branche de liaison entre le deuxième MNL et le quatrième MNL vibrant sur le troisième harmonique (il s'agit d'une résonance 1 : 3). De même, la continuation du troisième MNL montre une résonance 1 : 2 entre le mode 3 et le mode 6.

#### 7.2.4 Dépendance à la discrétisation temporelle

D'après le paragraphe (6.4.4) page 107 du chapitre précédent, on doit s'attendre à ce que la discrétisation temporelle ait une influence sur les résultats de continuation. On rappelle que cette influence doit se manifester notamment par l'introduction d'un décalage dans le spectre de fréquences et d'une distortion du diagramme de continuation. On présente ici un second calcul de continuation de solutions périodiques de la poutre doublement encastree (figure 7.1 page 126) mais avec 25 pas de temps ( $m = 25$ ) au lieu de 27 pour le calcul précédent. Il s'agit de comparer les deux résultats de continuation (pour  $m = 25$  et  $m = 27$ ) afin d'évaluer l'influence réelle de la discrétisation tout en s'attardant sur la position des points de bifurcations.

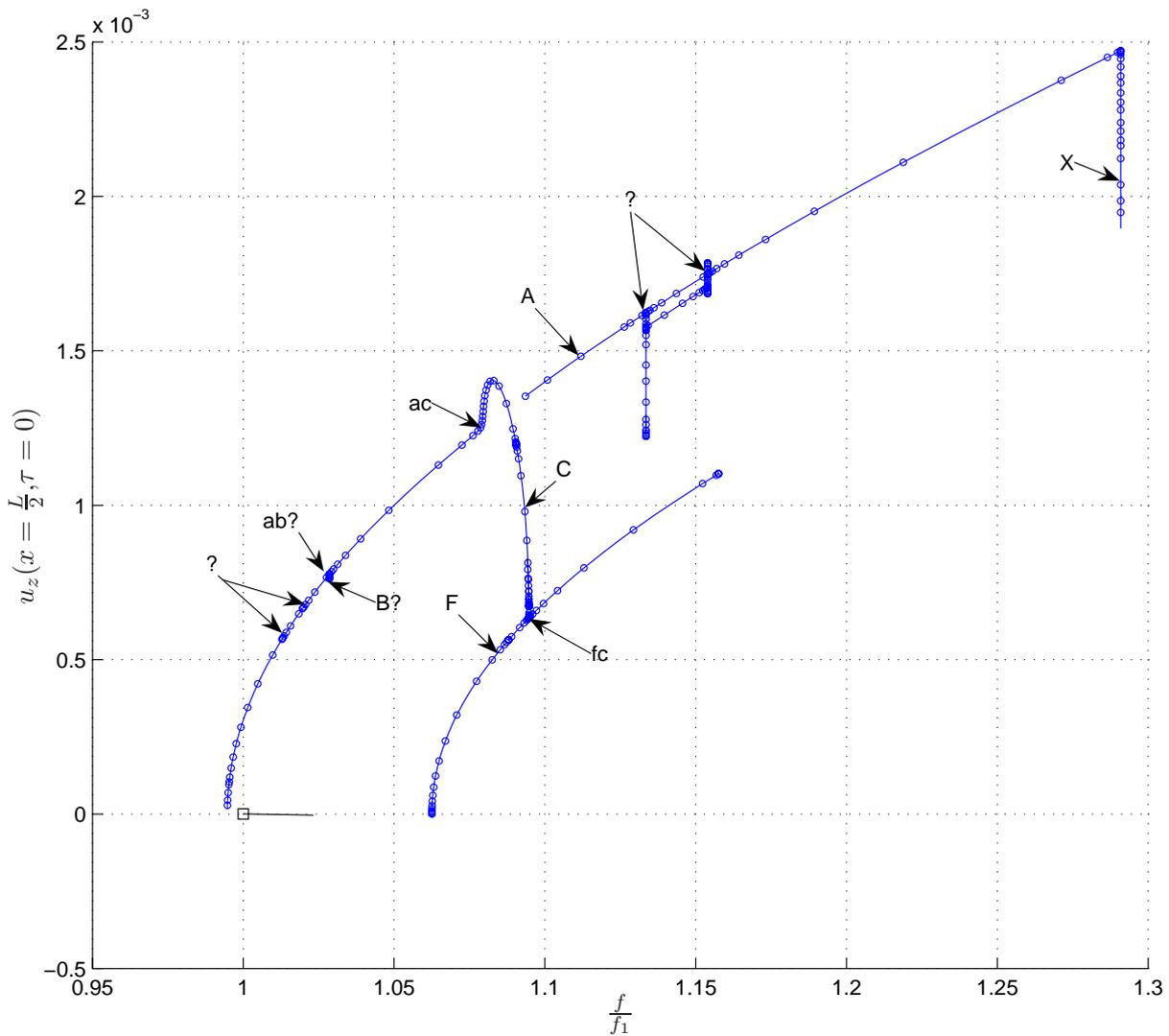


Figure 7.7 – Branche fondamentale et quelques branches bifurquées de la réponse libre conservative de la poutre avec 25 pas de temps (et avec un départ sur le mode 1, dans le plan du déplacement  $u_z(x = \frac{L}{2}, \tau = 0)$  et de la fréquence normalisée  $\frac{f}{f_1}$ ). Le changement du nombre de pas a affecté la position des points de bifurcation de la branche A. D'autre part, le point d'intersection de la branche A (mode 1 décrit principalement par l'harmonique 1) et de l'axe des abscisses a été légèrement déplacé vers la gauche. En ce qui concerne le point d'intersection de la branche F (mode 3 décrit principalement par l'harmonique 5) et de l'axe des abscisses, il a aussi été déplacé vers la gauche mais d'une manière bien plus conséquente. Ceci confirme que le nombre de pas de temps possède une influence liée au contenu harmonique des solutions.

En comparaison avec le diagramme à 27 pas de temps, on observe tout d'abord le déplacement en fréquence des points d'intersection avec l'axe des abscisses et des branches des modes 1 et 3. Le mode 1, principalement représenté par l'harmonique 1, s'est peu déplacé comparé à sa position dans le diagramme précédent. Par contre le mode 3, principalement représenté par l'harmonique 5 (nous rappelons que le signal est cinq fois périodique sur cette branche) s'est déplacé d'une manière bien plus conséquente vers les fréquences les plus basses. Ceci confirme la remarque (7) page 109 du chapitre précédent.

D'autre part, on remarquera que d'un diagramme à l'autre, certains points de bifurcation et certaines branches ont disparu. C'est le cas pour les points de bifurcation  $ax$  et  $cd$ , et c'est le cas des branches  $D$ ,  $E$  et  $G$  qui ne sont plus présentes dans le diagramme à 25 pas de temps. En ce qui concerne la disparition des branches  $E$  et  $G$  qui étaient représentées notamment par les harmoniques 9 et 12 on peut se demander si l'erreur due à la discrétisation temporelle n'a pas déplacé ces branches en dehors de la fenêtre de fréquence du diagramme. Un calcul supplémentaire serait nécessaire pour confirmer cette hypothèse.

Enfin, d'autres points de bifurcation et d'autres branches sont apparus (désignés par les points d'interrogation).

## 7.3 Interprétations

Les résultats de continuations qui précèdent nous montrent donc deux ensembles de points de bifurcation. Le premier ensemble regroupe les points de quasi-bifurcation qui donnent lieu à des branches bifurquées régulières. Ce groupe ne pose pas a priori de problèmes étant donné que ces solutions périodiques sont correctement calculées et semblent correspondre à des changements de régimes déjà observés dans la littérature PERIGNON (2004) et RIBEIRO et PETYT (1999). Le second groupe de points de bifurcation (notés  $ax$ ), constitué de bifurcations exactes, donne lieu à des branches bifurquées singulières qui ne sont pas calculables sans l'adjonction de perturbation.

Nous essayerons ici de donner une interprétation de ces faits. Dans un premier temps, on considèrera un système à deux degrés de liberté censé représenter deux modes non linéaires de notre poutre discrétisée par éléments finis. Le système à deux degrés de liberté étant simple, on pourra aisément interpréter les résultats de continuation de ses solutions périodiques. A partir de ces mêmes interprétations, on cherchera à expliquer certains phénomènes observés lors de la continuation des orbites périodiques de la poutre.

### 7.3.1 Présentation du modèle simplifié

Nous présentons un système à deux degrés de liberté composé de deux masses  $m_1$  et  $m_2$  et de quatre ressorts linéaires et non linéaires de raideur  $k_1$ ,  $k_l$ ,  $k_{nl}$  et  $k_2$ , disposés horizontalement comme le montre la figure 7.8 page 138. Selon la valeur des raideurs  $k_l$  (raideur linéaire) et  $k_{nl}$  (raideur non linéaire pure) des ressorts centraux, on pourra réaliser différents types de couplages entre les masses  $m_1$  et  $m_2$  :

- couplage nul,  $k_l = k_{nl} = 0$ ,
- couplage linéaire,  $k_l \neq 0$  et  $k_{nl} = 0$ ,
- couplage non linéaire pur,  $k_l = 0$  et  $k_{nl} \neq 0$ ,

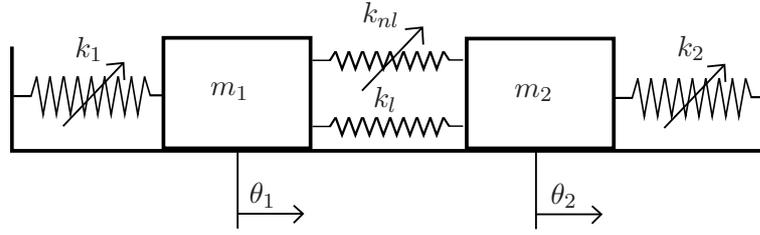


Figure 7.8 – Double ressort horizontal. Système à deux degrés de liberté avec 3 ressorts non linéaires.

– couplage mixte,  $k_l \neq 0$  et  $k_{nl} \neq 0$ .

L'écriture et le modèle des efforts exercés par les ressorts sont faits de telle sorte que les équations du mouvement soient similaires à celles d'une structure à non linéarité de Green Lagrange. Ceci conduit aux équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\theta}_1 = -k_1(\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1^3) - k_l(\theta_1 - \theta_2) - \frac{k_{nl}}{2}(\theta_1 - \theta_2)^3 \\ m_2 \ddot{\theta}_2 = -k_2(\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_2^3) - k_l(\theta_2 - \theta_1) - \frac{k_{nl}}{2}(\theta_2 - \theta_1)^3 \end{cases} \quad (7.3)$$

qui peuvent se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} &= -(\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}(\boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{S} \\ \text{avec } \mathbf{S} &= \mathbf{K}(\mathbf{B}_l + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{nl}(\boldsymbol{\theta}))\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (7.4)$$

avec  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2]^T$  et  $\mathbf{S} = [S_1, S_l, S_{nl}, S_2]^T$  ainsi que

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_l & & \\ & & k_{nl} & \\ & & & k_2 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$, \mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathbf{B}_{nl}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \theta_1 - \theta_2 & \theta_2 - \theta_1 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Cette forme est similaire à celle obtenue après application du principe aux puissances virtuelles sur les structures discretisées par éléments finis (6.13) page 104. Ainsi, avec les mêmes calculs que ceux présentés dans le chapitre précédent, on aboutit aux équations de la méthode OPMAN pour ce système à deux degrés de liberté. Par conséquent, il est possible d'obtenir les familles d'orbites périodiques sans travail théorique supplémentaire.

**REMARQUE 11**

En réorganisant les équations du mouvement comme il suit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{m_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \left( \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_1^3 \right)}_{\text{mouvement mode 1}} + \underbrace{k_l (\theta_1 - \theta_2) + \frac{k_{nl}}{2} (\theta_1 - \theta_2)^3}_{\text{couplage 1/2}} = 0 \\ \underbrace{m_2 \ddot{\theta}_2 + k_2 \left( \theta_2 + \frac{1}{2} \theta_2^3 \right)}_{\text{mouvement mode 2}} + \underbrace{k_l (\theta_2 - \theta_1) + \frac{k_{nl}}{2} (\theta_2 - \theta_1)^3}_{\text{couplage 2/1}} = 0 \end{array} \right. \quad (7.7)$$

on peut séparer les termes des équations en deux groupes : Le groupe dénoté *mouvement mode 1* (et 2) ainsi que le groupe *couplage 1/2* (et 2/1). Le groupe *mouvement mode* est similaire à une équation de Duffing sans terme quadratique et le groupe *couplage* introduit le lien en efforts entre les deux équations de Duffing par l'intermédiaire des ressorts de couplages. Lorsque les ressorts de couplages sont de raideurs nulles, on aboutit donc à deux équations de Duffing indépendantes dont les solutions libres, forcées et forcées amorties ont déjà été présentées dans le premier chapitre de cette partie.

□

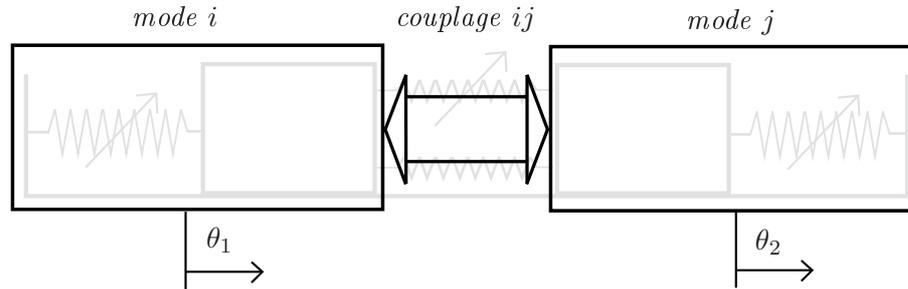


Figure 7.9 – Modélisation simplifiée des relations entre deux modes non linéaires d'une structure complexe telle que la poutre. Le système présenté en figure 7.8 page 138 joue ainsi le rôle de deux modes non linéaires (ressorts de raideur  $k_1$  et  $k_2$  et masses  $m_1$  et  $m_2$ ) couplés avec deux ressorts linéaires et non linéaires (de raideur  $k_l$  et  $k_{nl}$ ). Cette modélisation n'est bien sûr que partielle et n'a pas prétention d'être fidèle aux équations du mouvement de la poutre.

**REMARQUE 12**

Les équations (7.7) sont similaires, aux termes quadratiques près, à la projection des équations de mouvement de la poutre sur deux de ses modes linéaires. En effet, en projetant le mouvement de la poutre  $\mathbf{q}(t)$  sur deux modes linéaires  $i$  et  $j$  comme il suit

$$\mathbf{q}(t) = \theta_1(t) \Phi_i + \theta_2(t) \Phi_j \quad (7.8)$$

et en substituant l'expression de  $\mathbf{q}(t)$  ainsi obtenue dans les équations du mouvement (6.13) page 104, on obtient des équations similaires à (7.7).

□

On a présenté un système non linéaire à deux degrés de liberté jouant le rôle de deux modes non linéaires d'une structure éléments finis. Nous allons maintenant calculer et interpréter les solutions périodiques admises par ses équations du mouvement afin de mieux comprendre les phénomènes observés dans le cas de la poutre.

### 7.3.2 Solutions périodiques du modèle simplifié

#### 7.3.2.a Système non couplé

On présente tout d'abord le système non couplé ( $k_l = k_{nl} = 0$ ) avec  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 12$  et des masses unitaires ( $m_1 = 1$  et  $m_2 = 2$ ). On a donc dans ce cas deux systèmes masse-ressort non linéaire complètement indépendants. Chacun de ces systèmes est donc équivalent à un Duffing en réponse libre (voir premier chapitre de cette partie). La figure 7.10 page 141 montre les courbes de réponses libres pour les deux systèmes calculées de manière indépendante (en ordonnée on a le déplacement pour  $t = 0$  et en abscisse on a la fréquence  $f = 1/T$ , avec  $T$  étant toujours notre période d'intégration). La courbe bleue concerne le premier système et démarre en

$$f = f_1 = \sqrt{k_1/m_1} = 1.$$

La courbe rouge concerne le second système et démarre en

$$f = f_2 = \sqrt{k_2/m_2} \approx 3.46.$$

#### 7.3.2.b Système avec couplage linéaire

On présente maintenant le système avec un faible couplage linéaire, soit  $k_l = 0.01$  et  $k_{nl} = 0$  avec toujours  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 12$  et des masses unitaires ( $m_1 = 1$  et  $m_2 = 2$ ). Pour l'interprétation du diagramme de réponse libre de ce système, présenté en figure 7.11 page 142 ainsi qu'en figure 7.12 page 143, il sera pratique de considérer le système ressort 1 + masse 1, comme *système maître* et le système ressort 2 + masse 2, comme *système esclave* même si la dénomination est contestable.

Le calcul a été effectué avec la méthode OPMAN, avec  $m = 21$ , et avec une équation de phase imposant une vitesse nulle pour le système masse-ressort 1 au temps  $t = 0$ . Le calcul a été initié pour  $f = f_1 = 1$  avec un mouvement de faible amplitude pour la masse 1 et un mouvement nul pour la masse 2. Il s'agit donc d'un départ très proche du mode 1. On a poursuivi le calcul du premier mode non linéaire avec des amplitudes et fréquences croissantes et l'on a rencontré trois bifurcations (quasi bifurcation *ab*, bifurcation exate *ac*, et quasi bifurcation *ad*), menant respectivement aux branches *B*, *C*, et *D*. Avec les déplacements affichés en figure 7.12, on peut faire les remarques suivantes :

- Sur la branche *A*, seul le système maître oscille.
- Sur la branche *B*, les deux systèmes oscillent. D'après la figure 7.12.b (point B), lorsque le système maître effectue un aller-retour, le système esclave en effectue 3. Il s'agit donc d'une résonance 1 : 3.
- Sur la branche perturbée *C*, les deux systèmes oscillent. D'après la figure 7.12.c (point C), lorsque le système maître effectue un aller-retour, le système esclave en effectue 2. Il s'agit donc d'une résonance 1 : 2.

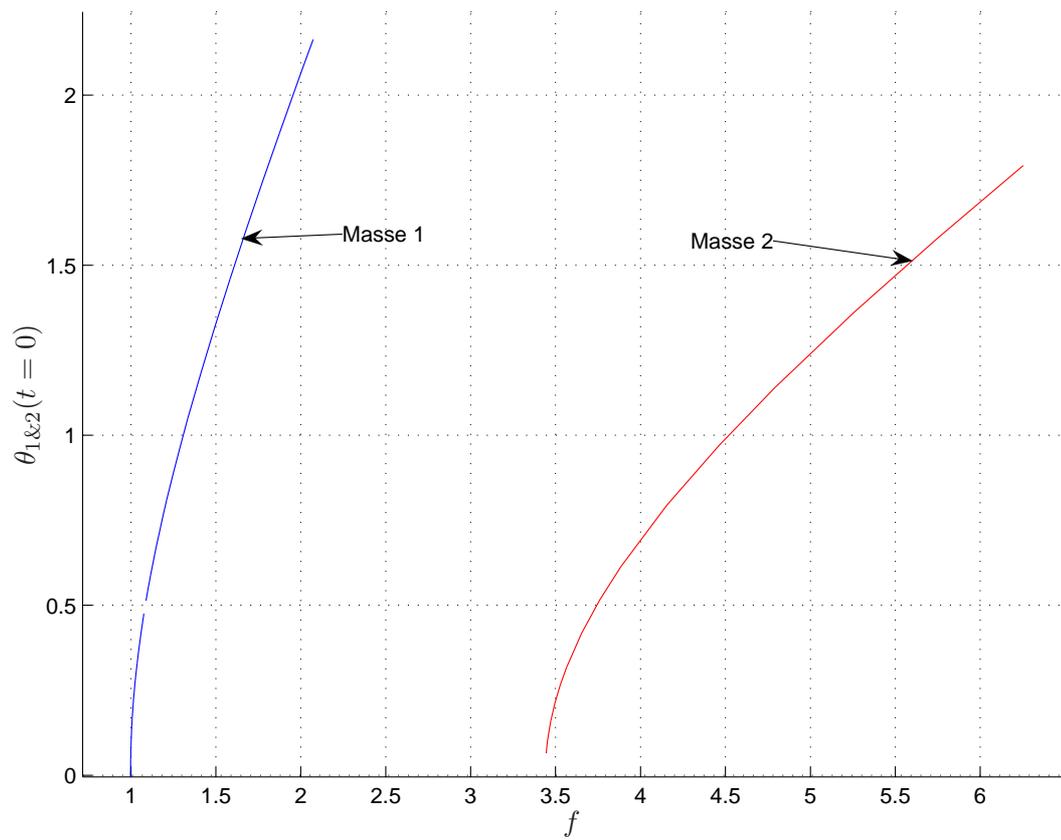


Figure 7.10 – Superposition des réponses des deux systèmes (de type Duffing). Le diagramme de la figure à nécessité deux calculs bien distincts effectués l'un après l'autre.

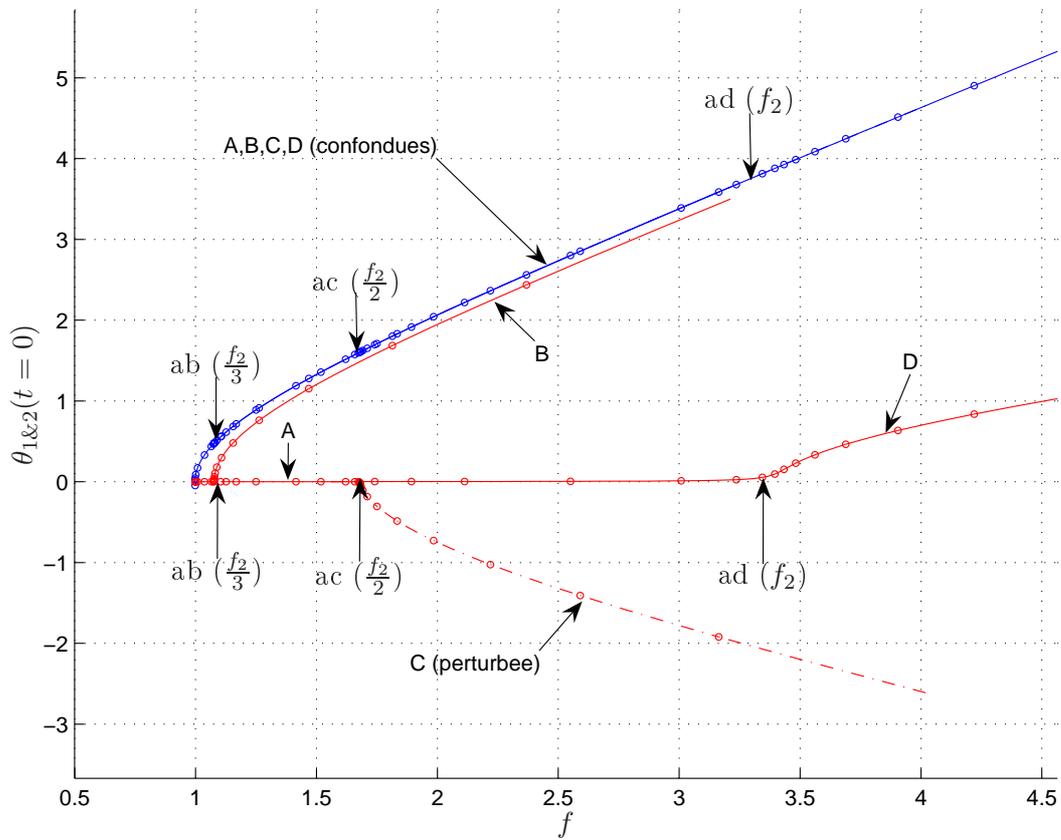


Figure 7.11 – Réponses périodiques libres du système avec couplage linéaire. En bleu, on a  $\theta_1(t=0)$  (déplacement au pas initial du système "maître"), en rouge,  $\theta_2(t=0)$  (déplacement au pas initial du système "esclave"), en fonction de la "fréquence"  $f = 1/T$ , avec  $T$  étant la durée d'intégration.

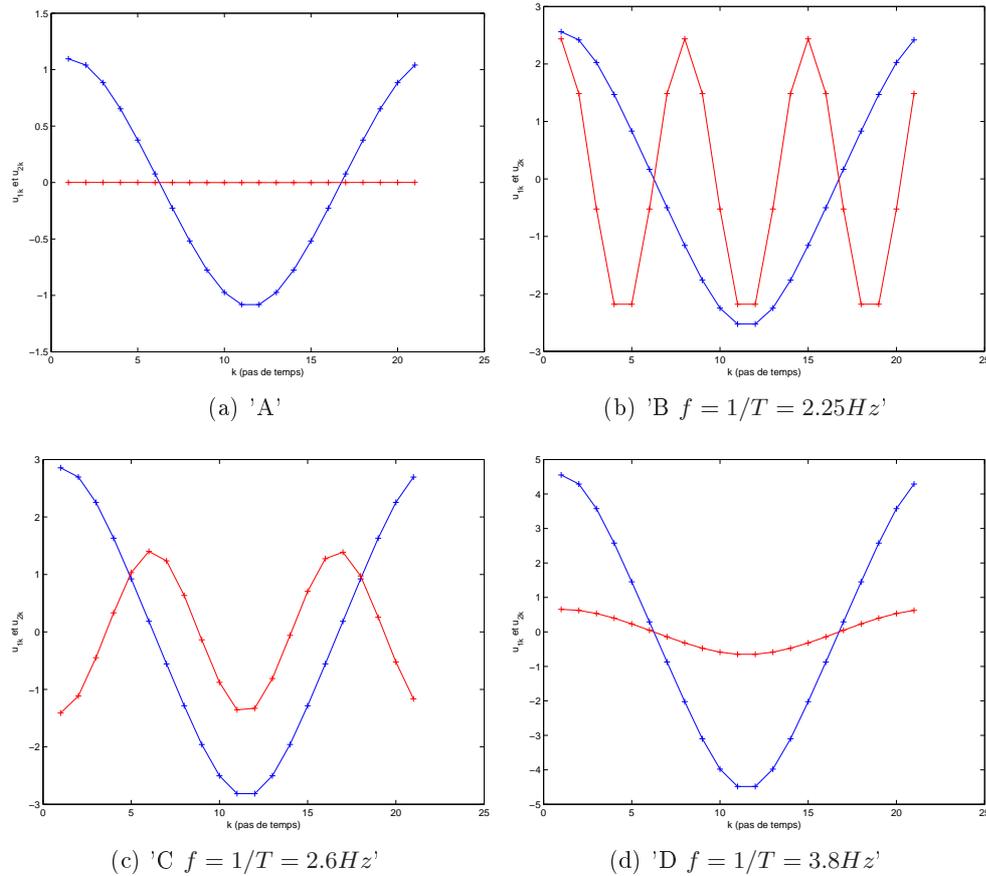


Figure 7.12 – Réponses de  $\theta_1$  (en bleu) et  $\theta_2$  (en rouge) en fonction du pas de temps  $k$  pour 4 points du diagramme de continuation de la figure 7.11 page 142

- Sur la branche  $D$ , les deux systèmes oscillent. D’après la figure 7.12.d (point  $D$ ), lorsque le système maître effectue un aller-retour, le système esclave en effectue 1. Il s’agit donc d’une résonance 1 : 1.

En résumé, lors de la continuation du premier mode, on a des bifurcations à chaque fois que  $f = 1/T$  devient commensurable avec la fréquence du deuxième mode linéaire  $f_2$ .

Il est primordial de préciser que la branche  $C$ , issue du point de bifurcation  $ac$ , a nécessité l’ajout d’une perturbation (de type aléatoire) pour être calculée. Si l’on enlève la perturbation, le calcul de la branche est impossible (les corrections de Newton-Raphson ne convergent plus). Ceci rappelle les problèmes rencontrés lors de l’étude la poutre (bifurcations  $ax$  de la figure 7.3 page 128). Cette remarque appelle les questions suivantes :

1. Pourquoi les branches  $B$  et  $D$  se calculent-elles sans adjonction de perturbation ?
2. Pourquoi l’adjonction d’une perturbation régularise t-elle les solutions de la branche  $C$  ?

Essayons tout d’abord de répondre à la première question en nous plaçant sur la branche  $A$ , juste avant la quasi-bifurcation  $ad$ , soit pour  $f = 1/T < f_2$ . Précisons qu’en ce point on a un mouvement périodique non nul pour le système maître et un mouvement quasi-nul pour le système esclave. Considérons alors le système maître comme étant une source d’effort oscillante

(un forçage), transmettant un effort au système esclave par l'intermédiaire du ressort de couplage. D'après le premier chapitre de cette partie (voir étude du Duffing conservatif en réponse libre), et compte tenu de la quasi-nullité du mouvement esclave, on peut affirmer sans trop faire d'approximation que le mouvement du système maître est de type multi-harmonique impair :

$$\theta_1(t) = a_1 \cos(1 \times 2\pi/Tt) + a_3 \cos(3 \times 2\pi/Tt) + a_5 \cos(5 \times 2\pi/Tt) + \dots \quad (7.9)$$

avec les  $a_i$  fortement décroissants lorsque  $i$  augmente. L'effort reçu par le système esclave est donc de type

$$f(t) = \alpha \theta_1(t) \quad (7.10)$$

avec  $\alpha$  étant une constante réelle soit aussi un signal multi-harmonique impair. Déplaçons-nous maintenant dans le sens des  $f$  croissants (ce qui correspond à une décroissance de la période d'intégration  $T$ , puisque  $f = 1/T$ ). Lorsque la fréquence  $f$  devient telle que  $f \approx f_2$ , on a donc  $f$  et  $f_2$  commensurables et il existe une *coïncidence* entre le premier harmonique du signal (7.10) donné par le système maître et la fréquence propre du système esclave. Il s'en suit une *résonance* du système esclave à peu près conformément à ce que l'on a vu dans l'étude du Duffing en réponse forcée (figure 4.3 page 66) mais avec le système maître jouant le rôle de forçage multiharmonique. Insistons sur le fait que seul l'harmonique de fréquence égale à la fréquence de résonance  $f_2$  influe notablement sur le mouvement induit du système esclave.

Plaçons-nous maintenant juste avant le point de quasi-bifurcation *ab*. Comme précédemment, le ressort de couplage transmet des efforts toujours de type (7.10). Lorsque la fréquence  $f = 1/T$  devient telle que  $f \approx f_2/3$ , on a donc  $f$  et  $f_2$  commensurables et il existe une *coïncidence* entre le troisième harmonique du signal (d'amplitude plus faible) (7.10) donnée le par système maître et la fréquence propre  $f_2$  du système esclave. Il s'en suit, comme précédemment une *résonance* du système esclave à peu près conformément à ce que l'on a vu dans l'étude du Duffing en réponse forcée. Notons que la quasi-bifurcation *ad* est proche d'une bifurcation exacte. Insistons encore sur le fait que seule l'harmonique de fréquence égale à la fréquence de résonance  $f_2$  (l'harmonique 3) influe notablement sur le mouvement induit du système esclave.

Plaçons-nous enfin juste avant le point de bifurcation exact *ac*. Comme dans les deux cas précédents, le ressort de couplage transmet un effort de type (7.10). Lorsque la fréquence devient telle que  $f \approx f_2/2$ , on a donc certes,  $f$  et  $f_2$  commensurables

- *mais il n'existe aucune coïncidence entre les fréquences des harmoniques du signal excitant et la fréquence propre  $f_2$ .* -

Il s'en suit qu'il n'y a pas de résonance du système esclave vis à vis du signal d'excitation. En fait, sur la branche *C*, dans l'intervalle de période  $T = 1/f$ , deux solutions indépendantes sont présentes. La première correspond à la branche non linéaire du système maître (mode 1), la seconde à l'initiation de la branche non linéaire du système esclave (mode 2) dont la solution est *doublée* dans l'intervalle  $T$ . Puisque les deux réponses sont libres et non couplées<sup>(3)</sup>, alors on peut supposer l'existence d'un déphasage arbitraire entre la réponse du système libre maître

---

(3). En toute rigueur, un couplage très faible existe entre les réponses des deux systèmes. Pour voir pourquoi ce couplage est faible, on peut revenir à la (4.3) page 66 de la réponse forcée mono-harmonique de l'oscillateur de Duffing : Lorsque le signal d'excitation est de faible amplitude et que la fréquence d'excitation est éloigné de la fréquence de résonance linéaire, alors la réponse du système est pratiquement nulle. Dans notre cas, le "signal d'excitation" est multi-harmonique, mais aucune de ses harmoniques est suffisamment proche de la fréquence de résonance du système esclave pour que celui-ci résonne : les deux réponses sont donc "presque totalement" découplées.

et la réponse du système libre esclave (la dénomination n'a d'ailleurs plus de sens dans ce cas, il serait plus judicieux de parler simplement des modes 1 et 2). En supposant ce déphasage possible, alors l'équation de phase, ajoutée initialement pour régler l'unicité du système maître, n'est plus suffisante pour régler simultanément l'unicité de la solution du système esclave. Ceci explique l'apparition d'une singularité dans la matrice tangente et donc l'impossibilité de calculer la branche (sans ajout de perturbation du moins).

Essayons maintenant de répondre à la seconde question, qui fait référence à l'aspect régularisant de la perturbation aléatoire. Rappelons tout d'abord que la perturbation aléatoire est définie par MANLAB et qu'il s'agit d'un vecteur *dont les composantes sont constantes et choisies aléatoirement au moment de l'initialisation et ne sont plus modifiées pour le reste du calcul*. Lorsqu'un tel vecteur de forçage est ajouté au système simultané ((6.22) page 111), chaque degré de liberté de la structure reçoit un forçage périodique, dont les harmoniques sont aléatoirement et uniformément choisis dans le spectre des fréquences<sup>(4)</sup>. Ainsi, le fait d'ajouter une telle perturbation au système à deux ressorts puis de calculer les réponses libres de celui-ci revient finalement à effectuer un calcul de réponse forcée multiharmonique. Ceci permet d'expliquer l'effet régularisant de la perturbation, puisqu'en forçant la synchronisation des réponses avec l'excitation, cette dernière élimine les problèmes d'unicité liés aux déphasages (voir chapitre cinq).

De ces remarques, on peut tirer une conclusion sur la capacité de la méthode OPMAN à calculer les réponses lors des phénomènes de résonances entre les modes. Lors d'une résonance interne non linéaire, c-a-d lorsque l'on se trouve en présence d'une combinaison commensurable entre les fréquences, si les modes mis en jeu sont suffisamment couplés, alors la méthode OPMAN n'aura pas de difficulté à calculer la réponse. Si par contre les modes mis en jeu ne sont pas couplés (ou pas suffisamment couplés en regard de la précision numérique et des solveurs utilisés), alors le calcul conduira à des problèmes numériques. Pour obtenir tout de même les réponses, on pourra ajouter un forçage agissant sur un des modes pour régulariser le système. Pour le signal du vecteur de forçage, on pourra choisir un "bruit blanc périodique" sur l'intervalle d'intégration.

En ce qui concerne les branches issues des bifurcations  $ax$  de la poutre, on peut les interpréter comme étant représentatives du même phénomène que celui de la branche  $C$  du système à deux degrés de liberté : étant donné le nombre de modes du système (voir figure 7.2 page 127) il existe un nombre important de relations de commensurabilités entre leurs fréquences. D'autre part, on sait qu'un bon nombre de modes non linéaires d'une poutre droite sont peu couplés (c'est le cas par exemple pour le premier mode de flexion et le second lorsque les amplitudes restent faibles, et plus généralement pour les modes pairs avec les modes impairs de flexion). Ceci montre que pour la poutre, les situations de commensurabilité entre les modes non couplés sont nombreuses. Avec les résultats actuels, on ne peut bien sûr pas répondre de façon ferme quand à la validité de cette hypothèse et on est conscient de la complexité du phénomène, il en reste que cette dernière reste très plausible.

## 7.4 Expérimentation numérique sur une coque mince

On termine ce chapitre avec une expérimentation numérique d'un modèle élément fini plus complexe, possédant un nombre de degré de liberté plus important. Après une présentation de la coque avec ses toutes premières fréquences propres, on étudiera rapidement ses réponses libres

---

(4). La transformée de Fourier d'un bruit blanc donne un spectre harmonique constant.

périodiques et quelques déformées situées au voisinage de son premier mode non linéaire. On terminera l'étude de cette structure avec une étude par participation modale sur les modes les plus influents. Notons que les résultats ne sont pas complètement analysés et exploités.

### 7.4.1 Présentation du panneau avec raidisseurs

Il s'agit d'un panneau à courbure circulaire de dimensions  $1 \times 1(m)$  et d'épaisseur  $6mm$  munie de deux raidisseurs longitudinaux. Il s'agit donc d'une coque très mince d'un rapport d'aspect  $6/1000$ , on s'attend donc à un problème difficile, fortement non linéaire. La discrétisation spatiale du modèle est effectuée à l'aide de 110 éléments finis de type DKT (on a 432 degrés de liberté). La figure figure 7.13 page 146 montre la structure dans sa position d'équilibre. Notons que le panneau est encastré sur ses deux bords rectilignes.

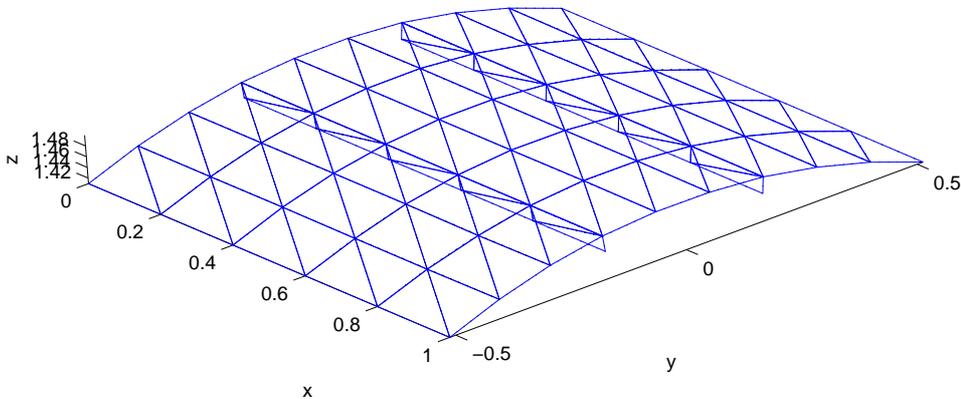


Figure 7.13 – *Panneau avec deux raidisseurs en position d'équilibre.*

Les fréquences des 6 premiers modes linéaires (ainsi que 2 autres jouant dans la réponse libre au voisinage du premier mode non linéaire) sont affichées dans le tableau suivant :

$i$ (mode)	$f_i$ (fréquence Hz)	$i$ mode	$f_i$ (fréquence Hz)
1	76	5	258
2	147	6	258
3	161	28	552
4	177	29	554

### 7.4.2 Réponse libre

On présente maintenant les résultats de continuation de la réponse libre après application de la méthode OPMAN avec 11 pas de temps ( $m = 11$ ). Le calcul a été étalé sur plusieurs jours et comme pour la poutre, les données du diagramme ont été sauvegardées puis rechargées pour la complétion du diagramme. A titre indicatif, le système comporte 4754 équations et le temps de calcul d'un pas de MAN est de 3 minutes<sup>(5)</sup>, lors du calcul, on atteint donc les limites de l'interactivité : choix d'un point du point courant ; lancement du calcul de quelques tronçons (une à deux heures d'attente) ; nouveau choix d'un point de calcul courant ; Nouveau lancement du

(5). sur un ordinateur Pentium IV 3.0GHz.

calcul de quelques tronçons (une à deux heures d'attente) ; etc. On présente donc seulement les branches proches du premier mode linéaire sur une faible plage de fréquence dans la figure figure 7.14 page 147.

Sur la branche *A*, on observe tout d'abord un comportement assouplissant, puis raidissant,

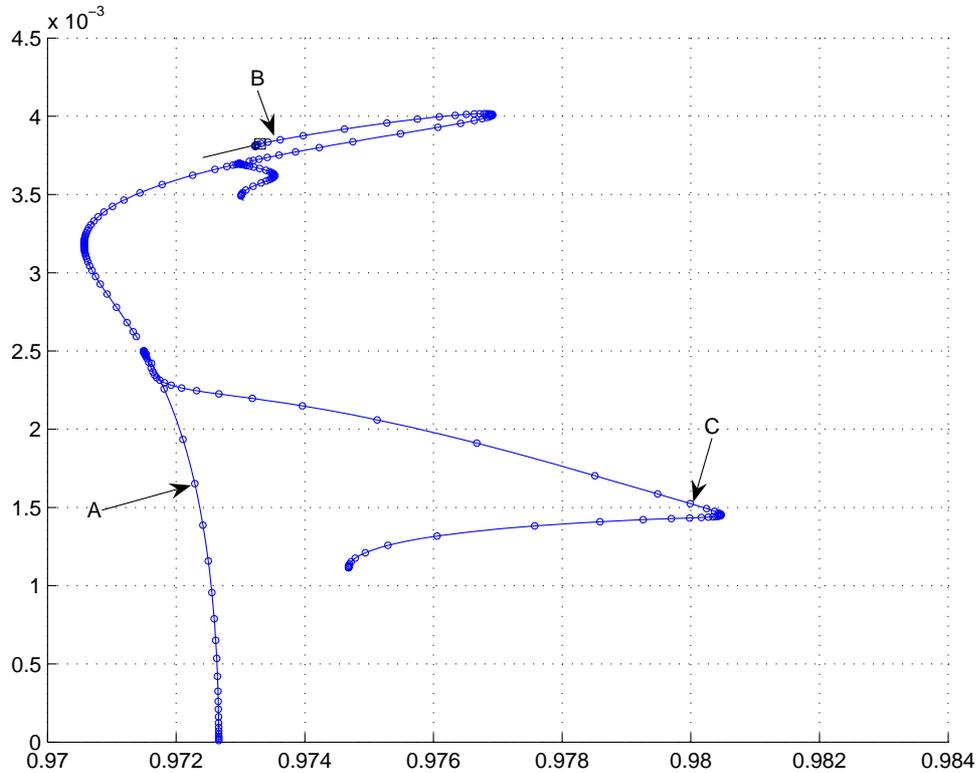


Figure 7.14 – Continuation de la réponse libre autour du premier mode. En ordonnée, la flèche au premier pas de temps du noeud positionné en  $x = 1$  et  $y = 1/3$ , et en abscisse, la fréquence normalisée  $f/f_1$ . Notons qu'au point *B*, le rapport d'amplitude sur l'épaisseur avoisine l'unité.

puis à nouveau assouplissant (pour arriver au point *B*). La déformée de la figure 7.15 page 149 montre un mouvement de flexion à "double bosses" (point *A*, il s'agit de la déformée du premier mode) mêlé progressivement à un mode de géométrie plus complexe (voir point *B*). Sur cette même branche *A*, on a rencontré une bifurcation menant à la branche *C*, qui mêle elle aussi un mouvement de flexion à "double bosses" (il s'agit aussi de la déformée du premier mode) avec un autre mode à géométrie complexe.

Par manque de temps, on ne présente pas d'interprétation plus fine du diagramme ni de calculs d'autres modes de cette structure.

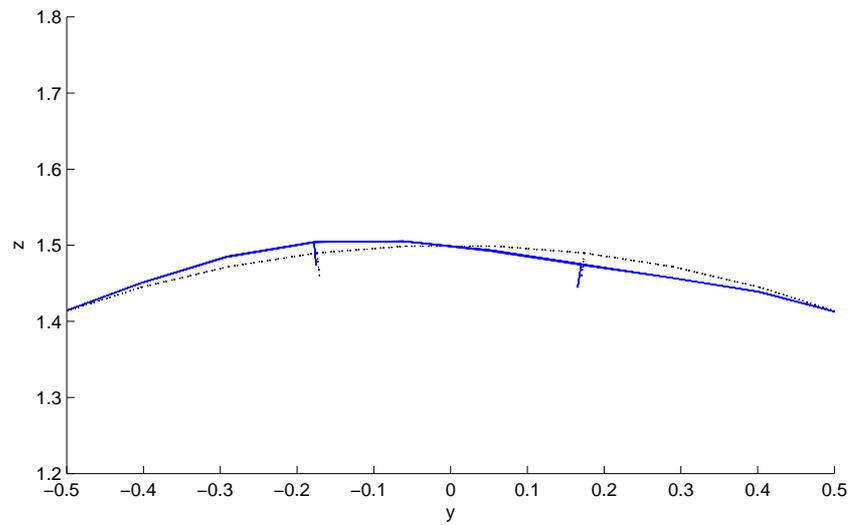
### 7.4.3 Analyse par participation modale

La figure 7.16 page 150 présente les résultats de participation modale par projection sur les 6 modes linéaires les plus influents. La plage de fréquence correspond à celle de la figure 7.14 page 147. Afin de pouvoir observer les détails on présente aussi un zoom pour une plage d'amplitude plus faible (et même plage de fréquence).

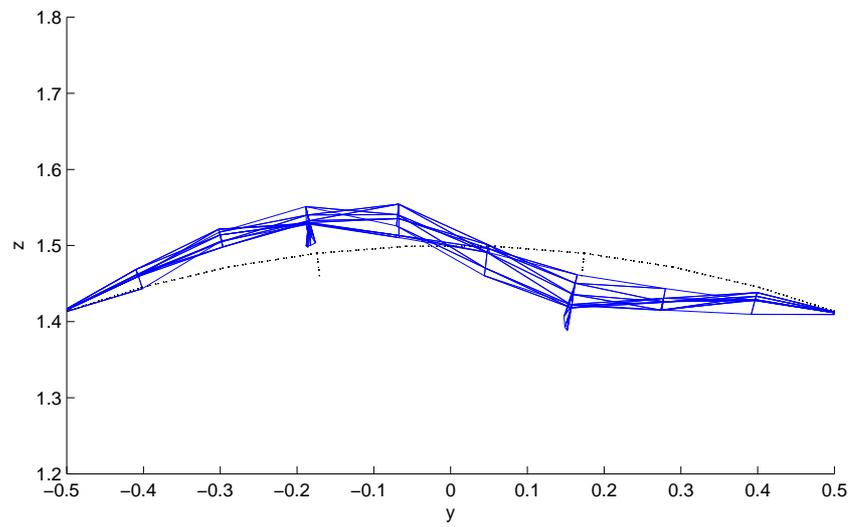
Comparé aux résultats de participation modale de la poutre, on observe deux différences essentielles :

- D'une manière générale, l'étude de participation modale n'amène pas de simplification de lecture flagrante.
- Les courbes de participations modales ne sont plus des droites.
- Pour la branche fondamentale, plusieurs participations modales sont présentes, contrairement au cas de la poutre, où seule la participation du premier mode linéaire participait au mouvement de la branche fondamentale. Pour la branche fondamentale  $A$ , le mode participant le plus est le mode 1, mais d'autres déformées participent aussi de manière non négligeable. En effet, si l'on compare le rapport de participation du premier mode sur le second, lorsque les déplacements sont maximaux, on obtient un rapport  $10^{-4}/(4 \times 10^{-6}) = 25$ . La participation du premier mode, en terme d'énergie, est donc 25 fois plus importante que celle du second. Mais, qualitativement parlant, il vaut mieux prendre la racine carré de ce rapport pour obtenir un rapport "d'amplitudes" et non "d'énergies" des participations des déformées (voir équation (7.2) page 131 ). En terme de rapport d'amplitudes, la déformée du second mode participe donc approximativement dans un rapport 1 : 5 dans le mouvement, ce qui est loin d'être négligeable.
- Aucune bifurcation de "type  $ax$ " n'a été rencontrée.

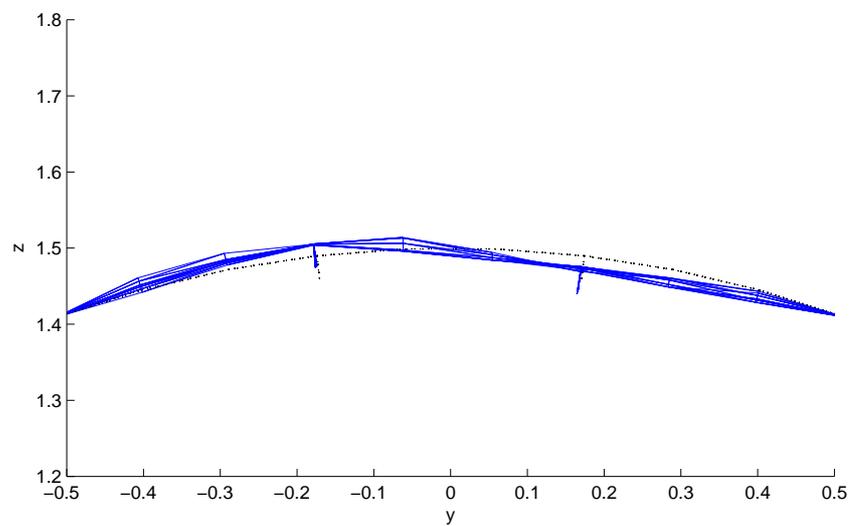
Pour ce mode de vibration, les déformées 1,2,4,31,29,28 participent donc au mouvement. Ce résultat confirme un fait avéré et fondamental, lié à l'utilisation des méthodes de Galerkin pour l'étude des réponses non linéaires. Pour un maillage complexe comme celui du panneau, une projection sur seulement un, deux ou trois modes linéaires ne semble pas suffisante lorsque les déplacements sont importants. Pour obtenir une représentation du mouvement correcte, les modes linéaires ne semblant pas être de bon candidats, une utilisation de la déformée donnée par le mode non linéaire semble plus appropriée.



(a) 'A'



(b) 'B'



(c) 'C'

Figure 7.15 – Déformées de la coque pour 3 points du diagramme

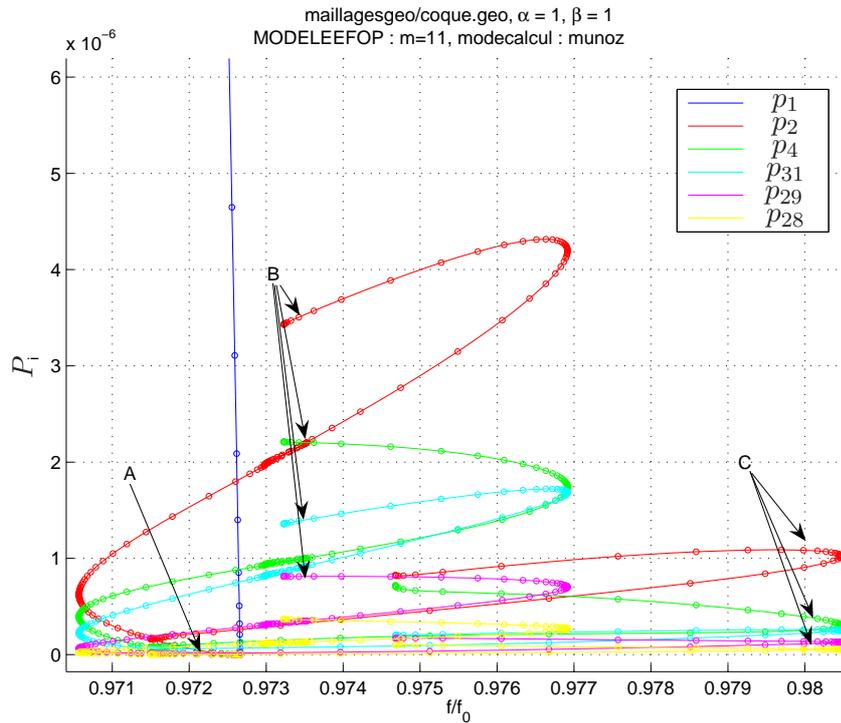
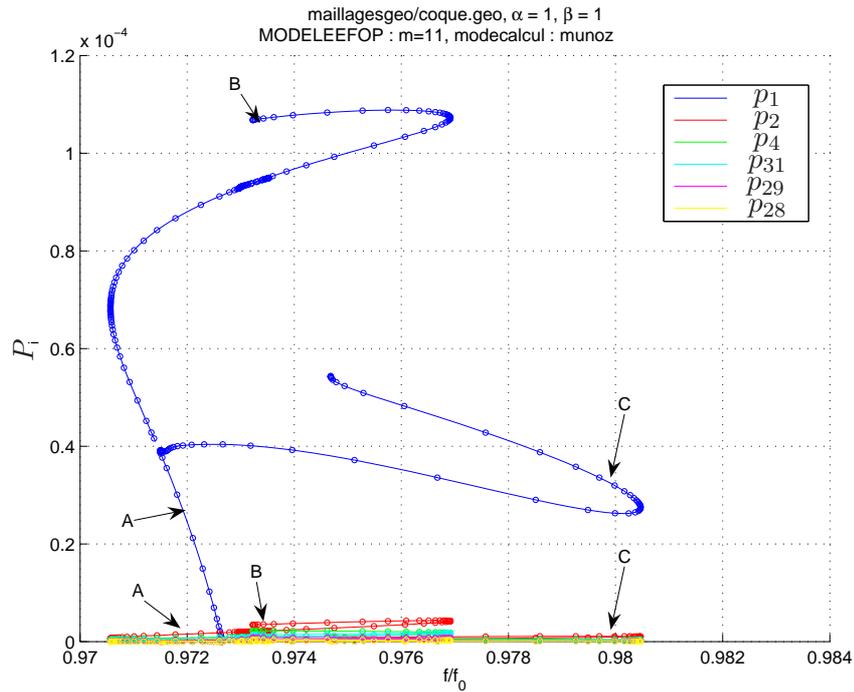


Figure 7.16 – Post traitement par participation modale de la branche fondamentale et quelques branches bifurquées de la réponse libre conservative de la coque calculée par la méthode OPMAN avec 11 pas de temps et avec un départ sur le mode 1. En ordonnée, la participation modale  $P_i$  des déformées des modes linéaires 1,2,4,29,28,31, en abscisse, la fréquence normalisée ( $\frac{f}{f_1} = \frac{1}{f_1 T}$ ). Les points A,B,C correspondent aux points de mêmes noms de la figure 7.14 page 147.

## 7.5 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre deux simulations de vibration libres de modèles éléments finis de structures minces, ainsi qu'une simulation des réponses libres d'un système à deux degrés de liberté.

Les résultats de simulation de la structure poutre ont amené un grand nombre d'éléments permettant l'évaluation de la méthode OPMAN couplé avec Manlab. Tout d'abord, l'aspect interactif de la méthode (interface graphique, possibilité de déplacer le point courant dans le diagramme, effectuer des sauts, ajouter une perturbation, etc..) a permis une exploration efficace et précise du diagramme de solution. Ensuite, les résultats de continuation autour du premier mode non linéaire ont confirmé l'existence de nombreux points de bifurcation menant à des branches de couplages avec d'autres modes non linéaires. Ensuite, on a rencontré des points de bifurcation particuliers menant à des branches spéciales qui ne sont calculables qu'avec un ajout d'une perturbation ou d'un forçage. Enfin, à l'aide d'un second calcul de réponse libre effectué avec un nombre de pas de temps différent, on a montré l'influence de la discrétisation temporelle en soulignant la sensibilité plus importante des réponses possédant des harmoniques élevées.

Dans un second temps, le système à deux degrés de liberté a apporté un éclairage sur les branches spéciales : Il semblerait donc que les branches spéciale soient dues à l'existence d'une relation commensurable entre les fréquences d'un ou plusieurs modes non couplés (ou pas suffisamment en regard de la précision numérique des solveurs). Un ajout d'un forçage ou d'une perturbation permet la régularisation et le calcul des ces branches.

Dans un dernier temps, on a présenté un modèle élément finis plus complexe ainsi qu'un diagramme de continuation de ses solutions périodiques. Cela reste un exemple académique, mais qui est proche des structures réelles que l'on souhaite aborder. L'objectif de tracer le diagramme complet des premiers modes et de leur interaction éventuelle n'a pas été atteint par faute de temps, compte tenu des performances limités de la version actuelle. Un objectif à court terme est d'optimiser le logiciel et d'utiliser une machine plus puissante pour retrouver à nouveau le caractère interactif de la continuation.



---

## Conclusion générale

Ce mémoire qui est consacré aux modes non linéaires a finalement été organisé en deux parties pour traiter séparément les apports à la méthode de continuation utilisée. La première partie du manuscrit, concerne donc la continuation de solutions de systèmes d'équations non linéaires. On a rappelé dans cette partie certaines notions fondamentales de cette discipline, ainsi que deux méthodes numériques, dont la MAN. On a ensuite apporté des compléments sur l'analyse du comportement de la MAN ainsi qu'une méthode permettant de piloter le branchement au niveau d'un point de bifurcation. Cette méthode combine l'utilisation d'un vecteur perturbateur, utilisé pour le cas des bifurcations exactes, et la méthode de saut tangent pour le cas des quasi-bifurcations. On a ensuite présenté un logiciel intégrant ces fonctionnalités, ainsi que d'autres fonctionnalités permettant la manipulation efficace des données traitées lors des calculs et lors de l'exploitation des résultats.

Pour la MAN, les travaux du second chapitre ont amené une meilleure compréhension du comportement de la continuation au voisinage des bifurcations, notamment en soulignant l'importance de la qualité du point de départ pour le franchissement effectif ou non des bifurcations. Ce recul nous a permis de définir une stratégie de pilotage simple et efficace, qui permet de tracer des diagrammes complexes avec un algorithme basique. Il n'est jamais fait appel à des procédures spécifiques pour détecter les bifurcations (calcul d'indicateur de bifurcation, résolution de problèmes aux valeurs propres). C'est un avantage pour les gros systèmes, pour lesquels ces calculs supplémentaires sont souvent lourds.

Après deux années d'exploitation de Manlab, on tire un bilan très positif du principe et de son implantation en langage interprété Manlab : Sur des systèmes de petites tailles (inférieurs à une dizaine d'inconnues), les fonctionnalités de branchement par perturbation et de saut tangent fonctionnent à merveille, l'interactivité prend son plein intérêt, rendant le calcul et l'exploration des diagrammes solution extrêmement rapide et efficace ; Pour des systèmes de taille moyenne (plusieurs centaines d'inconnues), l'écriture des fonctions de bases ( $L0, L, Q$ ) en langage Matlab reste viable, mais l'utilisateur aura tout intérêt à écrire sa propre fonction de

calcul de matrice tangente pour conserver une réactivité suffisante ; Pour des systèmes de grandes tailles, le langage interprété n'offrant pas de performances suffisantes pour conserver une utilisation agréable, il faudra obligatoirement avoir recours au langage compilé pour la conception des sous-procédures de calcul (bibliothèques MAEX) et cela au plus haut niveau possible, l'idéal étant bien sûr d'écrire le fonction  $LO, L, Q$ , ainsi que la fonction de calcul de matrice tangente, en langage compilé. Si ces dernières conditions sont correctement remplies, alors la taille du système ne nuira pas à l'intérêt de la solution (voir l'exemple du problème de statique pour les plaques dans le troisième chapitre).

En terme de qualité logicielle, Manlab ne remplit cependant pas encore tous les critères nécessaires à une utilisation industrielle<sup>(1)</sup>. Dans cette optique, on considèrera plutôt cette première réalisation comme un démonstrateur fonctionnel. Lors d'une éventuelle réécriture du code, plus propre et plus aboutie, on gardera les choix et concepts suivants : Le principe de base de données de branches et de tronçons, la structuration, les modèles de systèmes d'équations (quadratique et régulier), le principe de surcharge des fonctions de bases et surtout la méthode de branchement combinée à la MAN. Un dernier aspect non négligeable, est d'avoir choisi d'intégrer Manlab au sein de Matlab. Ce choix permet de faire bénéficier à l'utilisateur toutes les fonctionnalités de cet environnement très complet (fonctions d'affichages, calcul matriciel et vectoriel, etc...).

En ce qui concerne les perspectives, il reste à améliorer les performances lors d'un branchement au niveau d'un point de bifurcation. En effet, lorsque les branches perturbées restent trop proches d'un point de bifurcation, la MAN peut effectuer de très petits et nombreux pas, ce qui implique une perte de temps conséquente. On pourra donc répondre au problème en améliorant les séries et leur domaine de validité en utilisant les approximations de Padé (COCHELIN *et al.* (1994)) ou les transformations d'Euler. D'autre part, on a présenté et réalisé numériquement une méthode permettant la résolution de systèmes d'équations quelconques (non quadratiques). Bien que testée sur quelques exemples simples, cette méthode doit être évaluée de manière plus poussée.

Le second thème, abordé dans la seconde partie du manuscrit, concerne l'étude de vibrations de structures minces non linéaires. Après avoir introduit ce thème à l'aide du cadre très général des systèmes dynamiques, on a rappelé le cas linéaire, en soulignant l'invariance des mouvements modaux et l'aspect géométrique des modes complexes et des modes normaux linéaires. Est venu un rappel de certaines notions importantes du cas non linéaire, avec une présentation des modes normaux non linéaires définis à l'aide de surfaces invariantes de l'espace des phases. Dans le chapitre qui a suivi, on a montré comment construire ces surfaces invariantes à l'aide d'orbites périodiques de systèmes autonomes et conservatifs. La difficulté résidait dans l'écriture d'un système bien posé ; il fallait résoudre le problème de translation de phase qui est inhérent aux systèmes autonomes et conservatifs. La solution fut trouvée dans l'article MUNOZ-ALMARAZ *et al.* (2003). Une simplification sur la formulation a cependant été apportée afin pour pouvoir diminuer par deux la taille du système tout en facilitant grandement son implantation numérique. Dans le chapitre suivant, on a précisé les équations de l'élastodynamique mises en jeu pour la modélisation des non linéarités géométriques. On a ensuite présenté l'étape de discrétisation temporelle en montrant l'influence de son application sur la période des solutions obtenues. Pour

---

(1). Par exemple, lors de mauvaises manipulations de l'utilisateur (lancement d'un calcul alors que le calcul en cours n'est pas terminé; essai d'un chargement d'une base de donnée inexistante; impossibilité de stopper un calcul de correction qui ne converge pas) les effets entraînent des défaillances plus ou moins gênantes (perte du calcul en cours, messages d'erreurs intempestifs, perte de temps).

obtenir numériquement les orbites périodiques, on a utilisé la méthode simultanée, qui consiste à écrire l'ensemble des équations d'équilibres discrétisées à chaque pas de temps dans un seul et même système. Cette méthode, qui apporte en outre une meilleure convergence des algorithmes de résolutions que la méthode de tir, permet l'utilisation de la MAN au lieu des méthodes de continuations classiques de prédiction-corrrection. On a ensuite présenté de manière complète l'algorithme de résolution de la MAN appliqué à notre problème de solutions périodiques de nos structures discrétisées par éléments finis. Dans le dernier chapitre, on a présenté les résultats des expérimentations numériques menées sur deux structures minces. Ces expérimentations ont permis de valider la méthode en fournissant un domaine conséquent de l'ensemble des solutions périodique autour de leur premier mode linéaire. Afin d'améliorer la phase d'interprétation des résultats, on a projeté l'ensemble de solutions sur la base des modes linéaires. Le diagramme de participations modales a permis ainsi un autre regard sur les branches<sup>(2)</sup>.

En conclusion, ce travail a apporté une méthode, ainsi que sa réalisation numérique, permettant le calcul de familles de réponses libres conservatives et périodiques de structures minces. Contrairement aux autres méthodes qui approximent ces familles de réponses périodiques libres à partir des réponses forcées avec un forçage de faible amplitude, notre méthode calcule la réponse libre de manière exacte, permettant ainsi le calcul approprié des surfaces invariantes qui définissent les modes non linéaires conservatifs. De plus, notre formulation a été associée à des méthodes de résolutions performantes et robustes sur des structures mécaniques à géométries arbitraires (poutres, plaques et coques), toutes modélisées par éléments finis. Comparée au calcul numérique direct des surfaces invariantes (voir PESHEK *et al.* (2002)) qui reste très lourd à mettre en oeuvre, surtout dans un code éléments finis, notre méthode est plus simple, car elle utilise des outils plus standards (on pense notamment à la méthode d'intégration temporelle). Cette simplicité amène de plus la capacité de traiter d'autres types de non linéarités, comme le contact ou le frottement, qui semblent plus facile à réaliser avec une résolution par intégration temporelle. Enfin, la complexité implicite de l'algorithme global est d'un ordre faible : lorsque le nombre de pas de temps augmente, la taille du système augmente linéairement contrairement au cas de la méthode de la balance harmonique où l'augmentation du nombre d'harmoniques impose une complexité d'un ordre supérieur pour le calcul des seconds membres.

Le fait que cette méthode ne permette pas le calcul des solutions libres non conservatives constitue la principale limitation de ce travail. On pourra donc reprocher à la version actuelle de la méthode OPMAN de ne pas pouvoir fournir les modes non conservatifs des structures, qui sont importants pour les systèmes à pompage d'énergie par exemple. Contrairement à la méthode phase-amplitude ou la méthode de la balance harmonique, on ne sait pas étendre notre technique de continuation d'orbites pour capturer les modes non linéaires amortis. Il existe peut être un moyen de construire les surfaces de ces modes amortis, avec des orbites fermées (ou non), mais cela reste un problème ouvert. Cependant, on tient à signaler que les réponses forcées conservatives et non conservatives ne posent aucun problèmes pour la méthode OPMAN (voir fin du chapitre 5 pour la formulation, l'implantation étant évidente : ajout d'un terme de forçage, retrait de l'équation de phase et de l'inconnue  $\lambda$ ). Le code actuel est d'ailleurs conçu pour calculer aussi de telles réponses (des calculs ont été menés avec succès sur la poutre, mais non présentés dans le mémoire).

Au niveau de l'implantation numérique de la méthode OPMAN, on a observé une relative

---

(2). Comparé au diagramme obtenu par projection sur un seul degrés de liberté au premier pas de temps, les diagrammes de participations modales sont en effet moins "arbitraires" et plus "parlant".

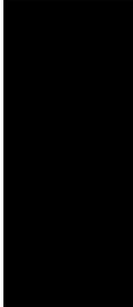
lenteur des calculs lorsque le nombre de degrés de liberté de la structure devient trop important (voir étude du panneau) ou lorsque le nombre de pas de temps est grand. Cette lenteur de l'implantation actuelle est due à l'utilisation à trop bas niveau du langage interprété Matlab. Comme dit précédemment, il sera préférable à l'avenir de compiler à plus haut niveau les différents modules de l'outil de calcul de vibration. On pense notamment à compiler le module de modèle éléments finis MODELEEF (voir figure 6.2 page 118), tout en conservant la structuration actuelle qui a le mérite d'avoir montré la faisabilité de l'outil global : Il est en effet possible de concevoir une bibliothèque de gestion modèles éléments finis avec MAN totalement indépendante du problème auquel elle est rattachée (on l'a vu avec l'étude du flambement de structure et la réalisation de la méthode OPMAN qui utilisent strictement le même module de structures éléments finis).

D'autre part, nous n'avons pas présenté d'étude de stabilité des solutions périodiques. Cette étude aurait permis d'améliorer l'interprétation des résultats du dernier chapitre, ou de conforter les hypothèses émises. En outre, la méthode OPMAN n'empêche en rien la mise en place d'une telle étude, il "suffirait juste" d'ajouter une procédure de calcul de la matrice de monodromie<sup>(3)</sup>. Cependant, pour des structures de grande taille, ce calcul peut devenir extrêmement lourd d'un point de vue numérique. C'est pourquoi, on a espoir d'obtenir les informations de stabilité (détection et classification des bifurcations) à partir des termes de série de la MAN basique, mais c'est un travail qui reste à conduire.

Enfin, durant ces années de thèse, on a passé beaucoup de temps pour la formulation du problème des orbites périodiques conservatives ainsi que pour le développement de l'outil, mais finalement assez peu sur son exploitation. Il reste donc à appliquer notre méthode sur des exemples plus concrets.

---

(3). Par exemple à l'aide d'un produit des matrices élémentaires de la matrice tangente du problème simultané, voir ARQUIER (2003) et d'imaginer une procédure d'interprétation des résultats de calcul du problème aux valeurs propres qu'elle implique (pour les structures, ce problème est loin d'être trivial numériquement parlant).



---

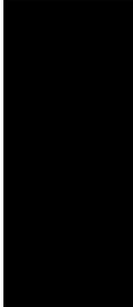
## BIBLIOGRAPHIE

- E.L. ALLGOWER ET K. GEORG. *Numerical Continuation Methods*. Springer-Verlag, 1990.
- R. ARQUIER. Vibrations et modes non linéaires, mémoire de dea. 2003.
- R. ARQUIER. Manlab, documentation utilisateur. 2004.
- R. ARQUIER, S. BELLIZZI, R. BOUC, ET B. COCHELIN. Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems a large amplitudes. *Computers and Structures*, 84: 1565–1576, 2006.
- L. AZRAR, B. COCHELIN, N. DAMIL, ET M. POTIER-FERRY. An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behavior of elastic plates and shells. *International journal for numerical methods in engineering*, 36:1251–1277, 1993.
- S. BAGUET ET B. COCHELIN. On the behaviour of the anm continuation in the presence of bifurcations. *Communications in numerical methods in engineering*, (19):459–471, 2003.
- S. BELLIZZI ET R. BOUC. A new formulation for the existance and calculation of nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 287(3):545–569, 2005.
- C.Y. CHIA. *Nonlinear analysis of plates*. McGraw-Hill, 1980.
- B. COCHELIN, N. DAMIL, ET M. POTIER-FERRY. Asymptotic numerical methods and pade approximants for non-linear elastic structures. *International journal for numerical methods in engineering*, 37:1187–1213, 1994.
- B. COCHELIN, N. DAMIL, ET M. POTIER-FERRY. *Méthode Asymptotique Numérique - Une technique de résolution des équations non linéaires*. Hermes, 2007.
- B. COCHELIN ET F. PERIGNON. Résolution de petits systèmes algébriques par la man sous matlab. *Revue européenne des éléments finis*, vol 13:79–96, 2004.
- M.A. CRISFIELD. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1. John Wiley and Sons, 1997a.
- M.A. CRISFIELD. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, advanced topics*, volume 2. John Wiley and Sons, 1997b.
- N. DAMIL ET M. POTIER-FERRY. Une nouvelle méthode pour calculer le flambage élastique des structures avec défaut. *Calcul des structures et intelligence artificielle*, 3:97–110, 1990.

- E. DOEDEL. Nonlinear numerics. *The Franklin Institute.*, 334B :1049–1073, 1997.
- E. DOEDEL. Auto, software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations. 2007.
- D.G. FERTIS. *Mechanical and structural vibrations*. Wiley interscience, 1995.
- D. GERADIN, M. RIXEN. *Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures*. Masson, 1993.
- E. GOURDON, N.A. ALEXANDER, C.A. TAYLOR, C.H. LAMARQUE, ET S. PERNOT. Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: theoretical and experiments results. *Journal of Sound and Vibration*, pages 522–551, 2007.
- J. GUCKENHEIMER ET P. HOLMES. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag - Applied Mathematical sciences, 1983.
- C. HAYASHI. *Nonlinear oscillations in physical systems*. Princeton univ. press, 1985. Reprint.
- C.S. HSU. On the application of elliptic functions in nonlinear forced oscillations. *Journal Quarterly journal of applied mathematics*, 17 :393–407, 1960.
- L. JEZEQUEL ET C.H. LAMARQUE. Analysis of nonlinear structural vibrations by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149 :429–459, 1991.
- F.J. MUNOZ-ALMARAZ, E. DOEDEL, J. GALAN, A. VANDERBAUWHEDE, ET E. FREIRE. Continuation of periodic orbits in conservative and hamiltonian systems. pages 1–38, 2003.
- A.H. NAYFEH. *perturbation methods*. Wiley, 1973.
- A.H. NAYFEH. *Problems in perturbation*. 1985.
- A.H. NAYFEH ET B. BALACHANDRAN. *Applied Nonlinear dynamics - Analytical, computational and experimental methods*. Wiley, 1995.
- A.H. NAYFEH ET D.T. MOOK. *Nonlinear Oscillations*. Wiley interscience, New York, 1979.
- F. PERIGNON. Vibration de structures minces, élastiques, non linéaires. Master's thesis, Université de la méditerranée (Aix-Marseille II), 2004.
- E. PESHEK, C. PIERRE, ET S.W. SHAW. A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5) :971–993, 2002.
- J.N. REDDY. *Mechanics of laminated composite plates - Theory and analysis*. CRC Press, Inc., 1997.
- P. RIBEIRO ET M. PETYT. Nonlinear vibration of plates by the hierarchical finite element and continuation methods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41 :437–459, 1999.
- R.M. ROSENBERG. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in applied mechanics*, pages 155–242, 1966.
- R. SEYDEL. *Practical Bifurcation and Stability Analysis, from equilibrium to chaos*. Springer-Verlag, second edition, 1994.
- S.W. SHAW ET C. PIERRE. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1) :85–124, 1993a.
- S.W. SHAW ET C. PIERRE. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169 :319–347, 1993b.
- J.C. SIMO ET N. TAMOW. The discrete energy-momentum method. conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. pages 757–792, 1992.
- W. SZEMPLINSKA-STUPNICKA. *The behavior of nonlinear vibrating systems - Volume I - Fundamental concepts and methods : application to single-degree-of-freedom systems*. Kluwer academic publishers, 1990a.

- W. SZEMPLINSKA-STUPNICKA. *The behavior of nonlinear vibrating systems - Volume II - Advanced concepts and application to multi-degree-of-freedom-systems*. Kluwer academic publishers, 1990b.
- A.F. VAKAKIS, L.I. MANEVITCH, Y.V. MIKHLIN, V.N. PILIPCHUK, ET A.A. ZEVIN. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. John Wiley and Sons, inc., Wiley Series in Nonlinear Science, 1996.
- H. ZAHROUNI, B. COCHELIN, ET M. POTIER-FERRY. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 175:71–85, 1999.





---

# Table des figures

1.1	Prédiction et corrections pour les méthodes incrémentales-itératives (à gauche) - Calcul des branches de solutions par la MAN (à droite) . . . . .	12
1.2	Exemple de bifurcation exacte et quasi bifurcation. Lors d'un point de quasi bifurcation, nous désignerons du même nom les branches de part et d'autre du point de quasi bifurcation, comme le montre la figure de droite. . . . .	15
1.3	Passage d'une bifurcation par Newton-Raphson (a) et la MAN (b). La méthode de Newton-Raphson présente le défaut important de sauter les points de bifurcation lorsque la longueur de pas $\Delta a$ est trop grande par rapport au type de bifurcation (voir figure 1.3 page 17). En effet, il se peut que celle-ci, en effectuant des pas trop grands par rapport à la courbure de la branche située près du point de bifurcation ignore celui-ci en le sautant purement et simplement. La MAN par contre, en adaptant sa longueur de pas, tournera systématiquement aux points de bifurcations même si la courbure de la branche est importante. . . . .	17
2.1	Le fait de changer le signe du vecteur de perturbation à pour effet de symétriser la branche perturbée par rapport à la branche exacte . . . . .	24
2.2	En combinant différentes phases de corrections, de calculs de branches et d'ajout de perturbation, on arrive à choisir la direction de branchement au niveau d'un point de bifurcation. . . . .	25
2.3	Interface utilisateur de Manlab. . . . .	27
3.1	Diagramme du problème QUADBIF. Le diagramme est constitué de deux paraboles qui s'intersectent en deux points de bifurcation. . . . .	37
3.2	Zoom sur le diagramme du problème QUADBIF. La branche perturbée a permis le passage d'une parabole à une autre. . . . .	37
3.3	Structure du programme de statique. . . . .	38
3.4	Plaque en position d'équilibre (force de flambement nulle). . . . .	41

3.5	Résultat de continuation de la branche fondamentale et de quelques branches bifurquées (modes de flambements). Intensité de la charge $\lambda$ en fonction du déplacement selon $z$ en un point particulier de la plaque (voir figure figure 3.4 page 41). . . . .	42
3.6	Déformées de la plaque pour divers points du diagramme de continuation figure 3.5 page 42 . . . . .	43
4.1	figure (a) : plan invariant pour la cas linéaire conservatif, avec quelques trajectoires périodiques inscrites. figure (b) : plan invariant pour le cas linéaire non conservatif, avec un exemple de trajectoire dissipative inscrite. figure (c) : surface invariante pour le cas non linéaire conservatif, avec quelques trajectoires périodiques inscrites. figure (d) : surface invariante pour le cas non linéaire et non conservatif, avec une trajectoire dissipative inscrite. . . . .	57
4.2	Solutions périodiques du système (4.39). Déplacement $u$ de la masse pour $t = 0$ en fonction de la pulsation $\omega$ . Deux solutions distinctes sont présentes, une triviale (l'axe des abscisses) et l'autre non nulle en forme d'arc parabolique. En traits discontinus est représentée la solution du système linéarisé (4.41). . . . .	64
4.3	Solutions périodiques du système (4.42). Déplacement $u$ de la masse pour $t = 0$ en fonction de la pulsation d'excitation $\Omega$ . Deux solutions distinctes sont présentes, une première, située sur la partie supérieure du diagramme, correspond à des oscillations où le signal de réponse est en phase avec le signal d'excitation, l'autre, située sur la partie inférieure, correspond à des oscillations où le signal est en opposition de phase. . . . .	66
4.4	Solutions périodiques du système (4.43). Déplacement $u$ de la masse pour $t = 0$ en fonction de la pulsation d'excitation $\Omega$ . En figure (a), les deux branches de solutions présentes dans le cas forcé conservatif, se rejoignent dans le cas forcé amorti pour former une boucle. En figure (b) on observe une résonance super harmonique de faible amplitude. . . . .	67
5.1	. . . . .	74
5.2	Illustration d'une portion de la surface invariante de l'espace des phases construite par continuation d'orbites périodiques. La méthode de calcul consiste à partir d'une orbite périodique de très faible amplitude construite à l'aide du mode linéaire (en rouge) se trouvant dans le plan invariant du mode linéaire (en traits discontinus rouge). Nous appliquons ensuite une méthode de correction (phase 1) sur l'orbite périodique approchée pour obtenir une première orbite périodique exactement inscrite sur la surface invariante du MNL (la surface est dessinée en traits discontinus bleu). Nous appliquons enfin une méthode de continuation (phases 2,3,4 et 5 etc...) pour construire de proche en proche les orbites périodiques composant la surface invariante du MNL. . . . .	76
5.3	Trajectoire dans l'espace des phases, solution du problème aux valeurs initiales (PVI) (5.6) page 78. . . . .	78
5.4	Trajectoire normalisée en temps dans l'espace des phases, solution du problème aux valeurs initiales (PVI) (5.7) page 79. . . . .	79
5.5	Orbite périodique normalisée en temps dans l'espace des phases, solution du problème aux valeurs aux bords (PVB) (5.13) page 82. Le point $\mathbf{p}_0$ désigne le point de l'espace des phases tel que $\mathbf{z}(1, \mathbf{p}_0, T) = \mathbf{p}_0$ , ce point est situé sur l'orbite périodique de trajectoire $\mathbf{z}(\tau, \mathbf{p}_0, T)$ avec $0 < \tau < 1$ . . . . .	83

5.6	Paramétrisation possible de la surface invariante de l'espace des phases. Le point $\mathbf{p}_0$ , qui définit de manière unique l'orbite périodique, peut se "positionner" sur la surface à l'aide de deux coordonnées. La première coordonnée correspond à la variation de l'énergie $H$ qui correspond aussi à une variation de la période $T$ , et la seconde coordonnée correspond à la variable $\tau$ , qui se traduit par une rotation par translation de phase de l'orbite périodique définie par le point $\mathbf{p}_0$ . . . . .	84
5.7	Orbite périodique normalisée en temps dans l'espace des phases. Afin de sélectionner une orbite parmi toutes ses soeurs jumelles construites par translation temporelle, on impose une condition supplémentaire sur le point initial de la trajectoire. La condition représentée ici est celle qui consiste à imposer l'orthogonalité entre le flot initial $\mathbf{F}(\mathbf{p}_0)$ et un vecteur donné $\mathbf{n}$ . . . . .	85
5.8	Orbite périodique normalisée en temps dans l'espace des phases (trait plein), ainsi que sa trajectoire déviée par ajout de dissipation (traits discontinus). . . . .	87
6.1	Erreur de périodicité en fonction du rapport entre la fréquence du signal solution du système dynamique (6.20) et la fréquence de Shannon. . . . .	109
6.2	Structure du code de la méthode OPMAN liée avec MANLAB. Les flèches doivent se lire comme le terme "utilise". . . . .	118
7.1	Poutre doublement encastree de dimensions $600 \times 30 \times 2(mm)$ discrétisée à l'aide de 16 éléments finis de type DKT. L'image montre la déformée du premier mode ainsi que la poutre au repos (en pointillés) . . . . .	126
7.2	Spectre de fréquences correspondant au problème aux valeurs propres des équations du mouvement linéarisé du modèle de poutre discrétisée par éléments finis. . . . .	127
7.3	Branche fondamentale et quelques branches bifurquées de la réponse libre conservative de la poutre présentée en figure 7.1 page 126 calculée par la méthode OPMAN avec 27 pas de temps ( $m = 27$ ) et avec un départ sur le mode 1. Flèche au milieu de la poutre et pour le premier pas de temps ( $\tau = \tau_1 = 0$ ) soit $u_z(x = \frac{L}{2}, \tau = 0)$ en fonction de la fréquence normalisée ( $\frac{f}{f_1} = \frac{1}{f_1 T}$ ). Les flèches $A, C, D, E, F$ et $G$ indiquent le noms des branches et indiquent aussi les coordonnées où les déformées sont affichées en figure 7.4 page 129. Les points $ab, ac, cd, fc, ae$ et, $eg$ signalent les points de bifurcation et de quasi-bifurcations. . . . .	128
7.4	Déformées au premier pas de temps ( $\tau = \tau_1 = 0$ ) pour les points $A, C, D, E, F$ et $G$ du diagramme de continuation figure 7.3 page 128. . . . .	129
7.5	Post traitement par participation modale de la branche fondamentale et quelques branches bifurquées de la réponse libre conservative de la poutre calculée par la méthode OPMAN avec 27 pas de temps ( $m = 27$ ) et avec un départ sur le mode 1. En ordonnée, la participation modale $P_i$ des déformées des modes linéaires 1,3,6,9,12, en abscisse, la fréquence normalisée ( $\frac{f}{f_1} = \frac{1}{f_1 T}$ ). Les flèches $A, C, D, E, F$ et $G$ indiquent le noms des branches et indiquent aussi les coordonnées où les harmoniques des signaux $\theta_i$ sont affichées en figure 7.5 page 132. Les points $ab, ac, cd, fc, ae$ et, $eg$ signalent les points de bifurcation et de quasi-bifurcation. Les points $A, C, D, E, F, G$ ainsi que les points $ab, ac, cd, fc, ae$ et, $eg$ correspondent aux points de mêmes noms de la figure 7.3 page 128. . . . .	132
7.6	Harmoniques $H_i^j$ des signaux $\theta_i$ pour les déformées des modes linéaires 1,3,6,9 et 12 et pour les points $A, B, C, D, E, F$ et $G$ du diagramme de participation modale figure 7.5 page 132. . . . .	134

7.7	Branche fondamentale et quelques branches bifurquées de la réponse libre conservative de la poutre avec 25 pas de temps (et avec un départ sur le mode 1, dans le plan du déplacement $u_z(x = \frac{L}{2}, \tau = 0)$ et de la fréquence normalisée $\frac{f}{f_1}$ . Le changement du nombre de pas a affecté la position des points de bifurcation de la branche $A$ . D'autre part, le point d'intersection de la branche $A$ (mode 1 décrit principalement par l'harmonique 1) et de l'axe des abscisses a été légèrement déplacé vers la gauche. En ce qui concerne le point d'intersection de la branche $F$ (mode 3 décrit principalement par l'harmonique 5) et de l'axe des abscisses, il a aussi été déplacé vers la gauche mais d'une manière bien plus conséquente. Ceci confirme que le nombre de pas de temps possède une influence liée au contenu harmonique des solutions. . . . .	136
7.8	Double ressort horizontal. Système à deux degrés de liberté avec 3 ressorts non linéaires. . . . .	138
7.9	Modélisation simplifiée des relations entre deux modes non linéaires d'une structure complexe telle que la poutre. Le système présenté en figure 7.8 page 138 joue ainsi le rôle de deux modes non linéaires (ressorts de raideur $k_1$ et $k_2$ et masses $m_1$ et $m_2$ ) couplés avec deux ressorts linéaires et non linéaires (de raideur $k_l$ et $k_{nl}$ ). Cette modélisation n'est bien sûr que partielle et n'a pas prétention d'être fidèle aux équations du mouvement de la poutre. . . . .	139
7.10	Superposition des réponses des deux systèmes (de type Duffing). Le diagramme de la figure à nécessité deux calculs bien distincts effectués l'un après l'autre. . .	141
7.11	Réponses périodiques libres du système avec couplage linéaire. En bleu, on a $\theta_1(t = 0)$ (déplacement au pas initial du système "maître"), en rouge, $\theta_2(t = 0)$ (déplacement au pas initial du système "esclave"), en fonction de la "fréquence" $f = 1/T$ , avec $T$ étant la durée d'intégration. . . . .	142
7.12	Réponses de $\theta_1$ (en bleu) et $\theta_2$ (en rouge) en fonction du pas de temps $k$ pour 4 points du diagramme de continuation de la figure 7.11 page 142 . . . . .	143
7.13	Panneau avec deux raidisseurs en position d'équilibre. . . . .	146
7.14	Continuation de la réponse libre autour du premier mode. En ordonnée, la flèche au premier pas de temps du noeud positionné en $x = 1$ et $y = 1/3$ , et en abscisse, la fréquence normalisée $f/f_1$ . Notons qu'au point $B$ , le rapport d'amplitude sur l'épaisseur avoisine l'unité. . . . .	147
7.15	Déformées de la coque pour 3 points du diagramme . . . . .	149
7.16	Post traitement par participation modale de la branche fondamentale et quelques branches bifurquées de la réponse libre conservative de la coque calculée par la méthode OPMAN avec 11 pas de temps et avec un départ sur le mode 1. En ordonnée, la participation modale $P_i$ des déformées des modes linéaires 1,2,4,29,28,31, en abscisse, la fréquence normalisée ( $\frac{f}{f_1} = \frac{1}{f_1 T}$ ). Les points $A, B, C$ correspondent aux points de mêmes noms de la figure 7.14 page 147. . . . .	150

Annexe pour la bibliothèque  
EVEMATLABLIB



## 1 Introduction

Les sections suivantes sont une documentation sommaire de la bibliothèque EVEMATLABLIB.

## 2 Inventaire des constantes

NOM	CONTENU	VALEUR
NNOEUD_DKT	nombre de noeuds	3
NDDLNOEUD_DKT	nombre de ddl par noeuds	6
NDDLE_DKT	nombre de ddls	18
NGAUSS_DKT	nombre de points de gauss	3
NSGAUSS_DKT	taille vecteur contrainte point gauss	6
NSE_DKT	dim. vecteur contrainte	18
MAXNORDRE	ordre maximum calculable	40
NTETAGAUSS_DKT	dim. du vecteur teta point gauss	2
NTETA_DKT	dim. du vecteur teta	6

Remarque :

$$\begin{aligned} \text{NDDLE\_DKT} &= \text{NDDLNOEUD\_DKT} * \text{NNOEUD\_DKT} \\ \text{NSE\_DKT} &= \text{NSGAUSS\_DKT} * \text{NGAUSS\_DKT} \\ \text{NTETA\_DKT} &= \text{NGAUSS\_DKT} * \text{NTETAGAUSS\_DKT} \end{aligned}$$

## 3 Inventaire des variables

NOM	CONTENU	TYPE	NLIGNES	NCOLS
YG	module d young	reel	1	1
PS	coef de poisson	reel	1	1
H	epaisseur	reel	1	1
D	matrice comportement	reel	NSGAUSS_DKT	NSGAUSS_DKT
X	coord x noeuds	reel	NNOEUD_DKT	1
Y	coord y noeuds	reel	NNOEUD_DKT	1
Z	coord z noeuds	reel	NNOEUD_DKT	1
P	ordre de serie demande	entier	1	1
VE	deplacements ddls	reel	NDDLE_DKT	1
V0	terme 0 des series deplacements ddls	reel	NDDLE_DKT	1
FINTE	forces internes	reel	NDDLE_DKT	1
SE	contraintes	reel	NSE_DKT	1
SPS	serie des contraintes lin	reel	NSE_DKT	P-1
SPNLE	contrainte non lin partielle	reel	NSE_DKT	1
S0PE	contrainte residuelle	reel	NSE_DKT	1
TETAPS	serie des tetas	reel	NTETAE_DKT	P-1
TETAE	vecteur teta	reel	NTETAE_DKT	1
RIGTGTE	rigidite tangente	reel	NDDLE_DKT	NDDLE_DKT
RIGGEOME	rigidite geometrique	reel	NDDLE_DKT	NDDLE_DKT
R	matrice de passage	reel	NDDLE_DKT	NDDLE_DKT
POIDS	poids de gauss	reel	NGAUSS_DKT	1

## 4 Inventaire des fonctions

### 4.1 Calcul de la matrice de comportement element DKT

$D = \text{LIBEM\_DISOCO\_DKT}(Y, G, P, S, H)$

### 4.2 Calcul des forces internes element DKT non lineaire

$\text{FINTE} = \text{LIBEM\_FINTE\_DKT}(X, Y, Z, D, VE, SE)$

Calcule la quantité :

$$\mathbf{FINTE} = \mathbf{R}^t * \left( \sum_{i=1}^{NGAUSS\_DKT} (\mathbf{Bl}_i + \mathbf{Bnl}_i(\mathbf{RVE}))^t * \mathbf{SE}_i * \mathbf{POIDS}_i * \mathbf{DETJ}_i \right) \quad (1)$$

### 4.3 Calcul du second membre element DKT non lineaire

$[\text{FPNLE}, \text{SPNLE}] = \text{LIBEM\_FPNLE\_SPNLE\_DKT}(X, Y, Z, D, V0, \text{TETAPS}, \text{SPS}, P)$

Calcule la quantité :

$$\text{Pour } i = 1 \dots NGAUSS\_DKT, \mathbf{SPNLE}_i = \mathbf{D} * \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{A}(\mathbf{TETAPS}_i^{p-r}) \mathbf{TETAPS}_i^r \quad (2)$$

ainsi que la quantité :

$$\mathbf{FPNLE} = - \sum_{i=1}^{NGAUSS\_DKT} \sum_{r=1}^{p-1} \left( \mathbf{G}^t \mathbf{A}(\mathbf{TETAPS}_i^{p-r})^t \mathbf{SPS}_i^p + \mathbf{B}_i(\mathbf{RV0})^t \mathbf{SPNLE}_i \right) \quad (3)$$

Remarque : Si P=2 on obtient les forces non lineaires classiques sans séries.

### 4.4 Calcul du terme résiduel des contraintes element DKT non linéaire

$[\text{SOPE}] = \text{LIBEM\_SOPE\_DKT}(X, Y, Z, D, V0, VP)$

Calcule la quantité :

$$\text{Pour } i = 1 \dots NGAUSS\_DKT, \mathbf{SOPE}_i = \mathbf{D} * (\mathbf{Bl}_i + 1/2 \mathbf{Bnl}_i(\mathbf{RV0})) * \mathbf{RVP} \quad (4)$$

### 4.5 Calcul des forces internes lineaires element DKT

$[\text{TETAE}] = \text{LIBEM\_TE\_DKT}(X, Y, Z, VE)$

Calcule la quantité :

$$\text{Pour } i = 1 \dots NGAUSS\_DKT, \mathbf{TETAE}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{RVE} \quad (5)$$

### 4.6 Calcul de la matrice de rigidite tangente elementaire DKT

$\text{RIGTGTE} = \text{LIBEM\_RIGTGTE\_DKT}(X, Y, Z, VE, SE, D)$

Retourne la matrice tangente aux forces internes non linéaires pour un élément.

[autx]





**Résumé :** Cette thèse vise à fournir et éprouver de nouveaux outils théoriques, numériques et informatiques de calculs de modes non linéaires pour des structures à non linéarité géométrique et discrétisées par éléments finis. La surface invariante de l'espace des phases caractérisant le mode non linéaire est décrite à partir d'une famille d'orbites périodiques solutions des équations du mouvement. Chaque orbite périodique est discrétisée en temps (schéma de Newmark et de Simo) et formulée à l'aide d'un système d'équation global contenant toutes les inconnues à tous les pas de temps, c'est la méthode simultanée, par opposition à la méthode de tir classique. Les familles d'orbites solutions du système global sont obtenues par la méthode de continuation MAN (Méthode Asymptotique Numérique).

Des variations autour de la MAN sont aussi abordées. Il s'agit d'apports liés au contrôle de la continuation au passage des points de bifurcations à l'aide d'une perturbation ajoutée au système d'équation non linéaire. On présente un outil-logiciel, MANLAB, permettant la continuation interactive de diagrammes de bifurcation complexes, qui est appliquée à la continuation de famille d'orbites périodiques.

**Mots clefs :** Mots Clés : Modes non linéaires, orbites périodiques, éléments-finis, méthode asymptotique numérique, bifurcation, discrétisation temporelle

**Abstract :** The aim of this thesis is to evaluate new theoretic and numeric tools for non linear modes computation of structures with geometric non linearity discretised by the finite element method. The invariant surface which characterises the non linear mode is defined with a family of periodic orbits solution of the equation of motion. Each orbit is time discretised (Newmark or Simo scheme) and formulated with a global system containing all unknowns for every time steps, this is the simultaneous method, by opposition with the classic shooting method. The orbit family solution of the global system is obtained with the continuation method ANM (Asymptotic Numerical Method).

Some variations around the ANM are also addressed. We introduced new approach to control continuation around a bifurcation point by adding a perturbation to the non linear system. We also present a software, MANLAB, allowing interactive continuation of complex bifurcation diagrams, which is applied to the family of periodic orbits.

**Keywords :** Non linear modes, periodic orbits, finite element, asymptotic numerical method, bifurcation, temporal discretisation