



HAL
open science

Ballottement des Liquides avec Tension Superficielle : Etudes Statique et Dynamique

Mahdi El-Kamali

► **To cite this version:**

Mahdi El-Kamali. Ballottement des Liquides avec Tension Superficielle: Etudes Statique et Dynamique. Mécanique [physics.med-ph]. Conservatoire national des arts et metiers - CNAM, 2010. Français. NNT: . tel-00522656

HAL Id: tel-00522656

<https://theses.hal.science/tel-00522656>

Submitted on 1 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Conservatoire National des Arts et Métiers
2, rue Conté 75003 Paris

Chaire de Mécanique - ED415
LMSSC - EA3196

Ballottement des Liquides avec Tension Superficielle : Études Statique et Dynamique

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 25 mars 2010

pour l'obtention du diplôme de

Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers
(spécialité Mécanique)

par

Mahdi EL-KAMALI

Composition du jury

- Président :* A. Bermúdez, Professeur, Universidade de Santiago de Compostela
- Rapporteurs :* D. Clouteau, Professeur, École Centrale Paris
D. Rixen, Professeur, Delft University of Technology
- Examineurs :* J.-P. Grisval, Directeur du département DADS, ONERA
V. Perrin, Ingénieur Études Système, Thales Alenia Space
J.-S. Schotté, Ingénieur de Recherche, ONERA
- Directeur de thèse :* R. Ohayon, Professeur, Conservatoire National des Arts et Métiers

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Le présent mémoire de thèse résume trois années de recherches qui n'auraient sans doute jamais vu le jour sans la contribution ni le soutien d'un certain nombre de personnes que je tiens à remercier ici.

Je souhaite tout d'abord remercier M. le Professeur Roger OHAYON pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce sujet de recherche passionnant, et la liberté dont j'ai joui pour le mener à bien. Je remercie les rapporteurs, MM. les professeurs Didier CLOUTEAU et Daniel RIXEN, pour avoir accepté de relire ce document. Leurs remarques avisées m'ont permis de mieux clarifier certains points de la thèse et m'ont apporté plus de recul sur le travail effectué. Je remercie aussi M. le Professeur Alfredo BERMÚDEZ de s'être déplacé depuis l'Espagne et d'avoir accepté de présider le jury au cours de la soutenance. Enfin, je tiens à remercier Mme. Véronique PERRIN pour l'intérêt qu'elle a porté à mes travaux en participant au jury de thèse, et aussi à M. Jean-Pierre GRISVAL pour m'avoir accueilli au cours de ces années au sein du département DADS de l'Onera.

Je tiens aussi à adresser un grand merci à Jean-Sébastien SCHOTTÉ pour son encadrement exemplaire : sa compétence, combinée à sa patience et sa gentillesse, m'ont toujours mis sur le bon chemin. Je remercie également l'ensemble des collègues du département DADS pour l'ambiance qui y règne. Merci aussi à Jean-Luc AKIAN pour son aide et ses remarques pertinentes sur les aspects mathématiques. Sans oublier l'équipe du LMSSC pour son accueil et son apport lors des nombreux séminaires qu'elle organise.

Merci également à la Team TDM (Minh, Fabrice, Antoine, Naka, Sylvie, Thomas, ainsi que ceux qui s'y sont geffés plus ou moins régulièrement) avec qui la pause café a toujours été l'occasion de passer de bons moments. Les débats, souvent passionnés, qui s'y sont déroulés et les enseignements de Minh ont été l'occasion de voyager dans le temps et dans l'espace.

Je remercie aussi la bande des Toquevillains avec qui je passe toujours de bons moments pleins de fraternité (sur place ou à emporter).

Enfin un grand merci à ceux qui ne sont certainement pas les derniers à devoir être remerciés, à savoir mes parents qui m'ont tout donné et qui m'ont permis d'arriver jusqu'ici, à ma sœur qui m'a toujours supporté et à Ibtisam grâce à qui les moments difficiles de fin de thèse sont restés malgré tout fort agréables.

Pour m'avoir permis de rencontrer toutes ces personnes et pour bien d'autres choses, je remercie Dieu.

*Je dédie cette thèse
à ma mère*
♡

Table des matières

Introduction générale	ix
Préliminaire : Introduction à la tension superficielle	1
0.1 Énergie d'interface	2
0.2 Ordres de grandeurs	2
0.3 Tension superficielle	3
0.4 Ménisque en présence de 3 milieux et angle de contact	4
0.4.1 Courbure de l'interface	4
0.4.2 Angle de contact	5
0.5 Saut de pression à l'interface	6
0.5.1 Première approche : équilibre des forces	6
0.5.2 Deuxième approche : démonstration énergétique	7
0.6 Influence de la gravité sur la forme de la surface libre à l'équilibre	9
Partie I Étude statique	
Introduction	13
Chapitre 1 Minimisation de l'énergie potentielle et formulation variationnelle non linéaire	15
1.1 Description du système	16
1.2 Minimisation sous contrainte d'incompressibilité	16
1.3 Calcul des variations au premier ordre	18
1.3.1 Variation au premier ordre des aires des interfaces	18
1.3.2 Variation au premier ordre de l'énergie potentielle de pesanteur	24
1.3.3 Variation au premier ordre du volume liquide	26
1.4 Formulation variationnelle du problème	26
1.5 Equation locale et condition aux limites	26

Chapitre 2	Résolution itérative du problème statique non linéaire	29
2.1	Formulation variationnelle à linéariser	30
2.2	Newton-Raphson : linéarisation des opérateurs	31
2.2.1	Linéarisation de l'opérateur d'aire	32
2.2.2	Linéarisation de l'opérateur de bord	33
2.2.3	Linéarisation de l'opérateur de pesanteur	34
2.2.4	Linéarisation de l'opérateur d'incompressibilité	35
2.2.5	Linéarisation du volume liquide	35
2.2.6	Synthèse du problème	36
2.3	Régularisation	36
2.3.1	Singularité	36
2.3.2	Analogie mécanique	37
2.3.3	Régularisation URS avec continuation	38
2.3.4	Régularisation URS avec minimisation de la distorsion du maillage	39
2.4	Synthèse du problème	40
Chapitre 3	Mise en œuvre numérique et validation	43
3.1	Numérisation par la méthode des éléments finis	44
3.1.1	Présentation de la démarche	44
3.1.2	Problème matriciel	45
3.1.3	Prise en compte de la contrainte de glissement	46
3.2	Résolution	46
3.2.1	Pas de charge sur la condition aux limites	46
3.2.2	Glissement sur le réservoir	47
3.2.3	Calcul du volume liquide	48
3.3	Exemples d'application	49
3.3.1	Cadre général pour les exemples	49
3.3.2	Configurations simples	49
3.3.3	Configurations complexes	51
3.4	Validation	54
3.4.1	Solution 2D axisymétrique	54
3.4.2	Critère de Concus-Finn : angle de contact critique	57

Partie II Étude dynamique

Introduction	63
---------------------	-----------

Chapitre 4 Equations linéarisées d'un liquide parfait incompressible avec tension superficielle	65
4.1 Description du système étudié	66
4.1.1 Le système	66
4.1.2 Notations	66
4.1.3 Hypothèses de linéarisation	67
4.2 Équations locales linéarisées dans le domaine liquide	67
4.2.1 Équations d'Euler	67
4.2.2 Fluctuations lagrangienne $p_{\mathcal{L}}$ et eulérienne p de pression	67
4.2.3 Linéarisation des équations d'Euler	68
4.2.4 Représentation du liquide dans Ω_L	68
4.2.5 Condition d'incompressibilité	70
4.3 Équations linéarisées au bord $\partial\Omega_L$ du domaine	70
4.3.1 Condition aux limites sur Σ_L	70
4.3.2 Condition aux limites sur Γ	71
4.3.3 Condition d'angle de contact sur γ	72
Chapitre 5 Formulation variationnelle du problème de ballottement avec tension superficielle	75
5.1 Problème en (φ, η, π)	76
5.1.1 Rappel des équations locales	76
5.1.2 Difficultés d'implémentation	76
5.2 Problème en $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$	77
5.2.1 Formulation $(\varphi, \eta, \mu_{\Sigma}, \pi)$	77
5.2.2 Formulation $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$	78
5.3 Formulation variationnelle	79
5.3.1 Équation variationnelle sur la surface libre	79
5.3.2 Équation variationnelle dans le volume liquide	82
5.3.3 Espaces des fonctions-tests	83
5.4 Synthèse et remarques	84
5.4.1 Formulation variationnelle et récapitulatif des opérateurs	84
5.4.2 Étude du cas $\omega = 0$	85
5.4.3 Conditions aux limites particulières sur γ	86
Chapitre 6 Implémentation et validation	89
6.1 Implémentation	90
6.1.1 Discrétisation des opérateurs	90

6.1.2	Problème matriciel	92
6.1.3	Symétrisation	92
6.2	Validation	96
6.2.1	Cas d'une goutte de liquide en apesanteur	96
6.2.2	Cas d'un réservoir cylindrique vertical avec $\theta = 90^\circ$	97
6.2.3	Cas d'un réservoir sphérique avec $\theta = 5^\circ$	99
6.3	Influence de la courbure du réservoir	103
Conclusions et perspectives		107
Bibliographie		109
Annexes		
Annexe A Variation au premier ordre de la courbure moyenne		117
Annexe B Linéarisation de la condition d'angle de contact		121
Annexe C Quelques formules utiles		125

Introduction générale

L'étude de l'interaction entre une structure et le liquide interne suscite un intérêt grandissant auprès des industriels (industrie aéronautique et spatiale, constructeurs automobiles, industrie navale, nucléaire, etc). En effet, les mouvements des liquides internes embarqués (en général le carburant, mais aussi les liquides de refroidissement, ou tout simplement une cargaison liquide) peuvent avoir un impact non négligeable sur le comportement vibratoire ou vibroacoustique, ainsi que sur la stabilité dynamique de l'engin (satellite, lanceur, avion, pétrolier, camion-citerne, etc). On pourra commencer par citer, à titre d'exemple, l'ouvrage de R. A. Ibrahim [50] traitant des aspects généraux du problème de ballonnement.

Le but dans cette thèse est d'étudier ces mouvements de liquides internes dans un environnement à faible gravité ou en microgravité, et cela pour des applications spatiales. En effet, les satellites, les sondes spatiales ou la Station Spatiale Internationale (SSI), contiennent souvent une très grande quantité de liquides. Les mouvements de ces derniers influencent surtout la stabilité dynamique du véhicule et peuvent perturber sa trajectoire : plusieurs incidents plus ou moins graves ont été reportés, pouvant causer un retard dans une mission (plus d'un an de retard pour la sonde NEAR Shoemaker) ou aller jusqu'à la perte de satellite (ATS-5). Les mouvements des liquides internes, s'ils sont mal maîtrisés, peuvent aussi compliquer certaines manœuvres critiques nécessitant une grande précision (alunissage d'Apollo 11, réorientation d'un satellite, arrimage d'une navette à la SSI, etc), ou bien limiter l'efficacité des dispositifs de contrôle vibratoire lors de certaines expériences menées en orbite (dans une navette spatiale ou sur la SSI) qui nécessitent de maintenir les plates-formes à un niveau d'accélération très faible.

Le problème de ballonnement des liquides au sein de réservoirs dans un environnement de faible gravité ou en microgravité a fait l'objet de beaucoup d'investigations, et cela depuis le début de la conquête spatiale. On pourra se référer à la fameuse synthèse de la NASA, faite par H. N. Abramson et ses collaborateurs [1] (une version actualisée par F. T. Dodge [29] est aussi disponible), et aux références [30, 20, 23, 76, 88, 64], ainsi qu'à l'ouvrage précurseur de N. N. Moiseyev et V. V. Rumyantsev [61], suivi dans les années quatre-vingts par différents travaux dans le monde académique et industriel [71, 63].

Plus récemment, différentes missions dédiées à l'étude du ballonnement des liquides en microgravité ont été menées, entre autres à la NASA, avec les investigations de H. A. Snyder [86] et les programmes tels que LOWGSLOSH, et en Europe, avec le lancement en 2005 du satellite SloshSat FLEVO (Facility for Liquid Experimentation and Verification in Orbit) [60] dont le rôle fut de valider des simulations numériques de mouvements de liquides en microgravité. Ce sujet est toujours d'actualité au sein de l'industrie spatiale, puisque des études actives continuent d'être menées dans ce domaine, notamment par les constructeurs et les exploitants de satellites [70, 98, 95, 90].

Un grand nombre de travaux dans le domaine du ballonnement se fait avec une approche "mécanique des fluides" en formulation eulérienne. Cette approche est particulièrement adaptée à la simulation des fluides en écoulement pour lesquels l'inconnue naturelle pour le fluide est sa

vitesse en tout point du domaine fluide, supposé connu. Cependant dans certains cas, l'espace occupé par le fluide est une inconnue du problème : par exemple dans le cas d'un fluide avec surface libre. L'approche eulérienne standard doit alors être adaptée pour pouvoir tenir compte des déformations du domaine fluide. On distingue alors principalement deux types de méthodes qui correspondent à deux façons différentes de suivre les évolutions de la surface libre. La première consiste à "traquer" la surface libre (*surface tracking*) : pour cela, la surface libre est considérée comme n'importe quel autre bord du domaine et est donc maillée comme l'ensemble du domaine fluide et de ses contours. Le mouvement de la surface libre est obtenu au travers du calcul de la déformation du maillage fluide par une approche lagrangienne. Une approche eulérienne est par contre conservée pour représenter le mouvement du fluide par rapport à ce maillage déformé [59, 16, 28]. Cette méthode, appelée ALE (Arbitrary Lagrange Euler) [31], trouve ses limites dès que les déformations de la surface libre sont importantes car la qualité du maillage fluide se dégrade alors rapidement. Bien qu'on puisse limiter cet effet en effectuant des remaillages [92, 67], on ne pourra pas représenter avec cette méthode des changements de topologie du domaine fluide tels que des séparations de gouttes, des vagues cassantes (*breaking waves*), etc. Pour traiter ces cas, plus complexes, une deuxième approche consiste à "recapturer" (c'est-à-dire à reconstruire) la surface libre du liquide à chaque étape de la simulation (*surface capturing*). Plusieurs méthodes utilisent ce principe, dont la méthode MAC (Marker And Cell) [96], la méthode Level Set (LS) [69] et la méthode VOF (Volume Of Fluid) [47] qui semble être la plus utilisée [60, 17]. Dans cette dernière, l'ensemble du domaine susceptible d'être occupé par le fluide est maillé et, par une approche eulérienne, on détermine la fraction volumique de liquide dans chacune des cellules de ce maillage. La méthode de Youngs [97] est ensuite utilisée pour reconstruire la surface libre du liquide à partir de cette information. En plus d'être très coûteuses en temps de calcul (en particulier pour des problèmes tri-dimensionnels), ces méthodes fournissent une description géométrique assez peu précise de la surface libre et, par conséquent, une estimation peu fiable de sa courbure.

Quand il s'agit de prendre en compte les effets de la tension superficielle (qui sont proportionnels à la courbure de la surface libre), les méthodes de *surface capturing* sont donc pénalisées [91]. De plus, la surface libre du liquide n'étant pas une frontière du domaine, les forces de tension superficielle ne peuvent pas être intégrées dans le modèle comme une condition aux limites en effort surfacique. On couple alors à l'approche VOF, la méthode CSF (Continuum Surface Force) [13, 51] pour modéliser la tension de surface localisée à l'interface par une force volumique équivalente agissant sur les éléments appartenant à un domaine de transition d'épaisseur finie, défini autour de l'interface [93]. Dans le cas d'une approche Level Set, on utilise plutôt la méthode GFM (Ghost Fluid Method) [37] pour modéliser les forces de tension de surface car cette méthode utilise la notion de distance à l'interface qui est naturellement disponible dans l'approche LS [40]. La méthode LS+GFM est en général plus précise que la méthode VOF+CSF, mais la condition de conservation de masse est plus délicate à imposer. Pour finir, on peut noter que certains travaux récents visent à améliorer la méthode VOF en introduisant un aspect lagrangien dans la détermination de la surface libre (méthode CLEAR-VOF, pour Computational Lagrangian-Eulerian Advection Remap) et en effectuant un lissage de la surface libre obtenue [93]. D'autre part, notons qu'il est possible de coupler les deux approches pour tirer parti des avantages de chacune. Ainsi Aquelet *et al.* proposent d'utiliser la formulation ALE pour décrire le mouvement du réservoir, couplée à une méthode VOF pour décrire l'évolution du liquide à l'intérieur de celui-ci [2].

Il est clair d'après ce descriptif que la paramétrisation lagrangienne (*surface tracking*) est plus adaptée pour un problème avec tension superficielle, surtout dans les cas où les déformations ne sont pas trop importantes [73, 16]. Ainsi, pour étudier les vibrations non linéaires d'une

goutte d'eau, Perić *et al.* ont utilisé dans un premier temps une méthode ALE [28]. Cependant, pour décrire un liquide sans écoulement, oscillant autour d'une position d'équilibre, la variable naturelle n'est pas sa vitesse mais plutôt son déplacement et, au même titre que la structure, le liquide peut être décrit par une formulation lagrangienne [72]. Dans leurs travaux récents, Perić *et al.* ont ainsi opté pour une formulation complètement lagrangienne du problème [74, 75].

Les approches décrites ci-dessus entraînent une résolution dans le domaine temporel qui est en général coûteuse en temps de calcul, surtout pour les cas tridimensionnels. De plus, les réponses obtenues sont liées aux excitations imposées au système, ce qui ne permet pas d'avoir une connaissance "intrinsèque" du système et rend cette approche peu adaptée pour le prédimensionnement. L'approche qui sera adoptée ici est du type "réponse modale" du système, qui convient bien pour traiter les problèmes de résonance dynamique, stabilité, bruit, etc. Cette thèse s'inscrit donc dans la continuité des développements menés à l'ONERA par J.-S. Schotté [77] sur la thématique de l'interaction liquide-structure, et basés sur les travaux de H. J.-P. Morand et R. Ohayon [62].

Les résultats récents du programme SloshSat [60] montrent que l'effet de la capillarité sur le mouvement du liquide est beaucoup plus sensible dans le cas du ballonnement d'amplitude modérée. Puisqu'on s'intéresse aux vibrations de faibles amplitudes du système, notre étude tiendra donc compte du phénomène de capillarité. Les mouvements de ballonnement de liquide se font autour de sa position d'équilibre, c'est pour cela que la première partie de cette thèse traitera le problème de recherche de la position d'équilibre statique du liquide au sein d'un réservoir de forme quelconque 3D. La seconde partie est dédiée au problème dynamique, linéarisé au voisinage de cette position d'équilibre. Les travaux de la première partie ont déjà fait l'objet de présentations dans deux congrès [34, 35] ainsi que d'un article [36], alors que ceux de la deuxième partie donneront lieu, dans un futur proche, à un second article.

Préliminaire :

Introduction à la tension superficielle



0.1 Énergie d'interface

Schématiquement, un matériau condensé (comme un cristal ou un liquide) peut être vu comme un agglomérat de particules (atomes ou molécules). La cohésion du milieu vient du fait qu'à chaque fois que deux particules sont accolées, on « gagne »¹ une énergie égale au potentiel d'interaction attractive entre particules.

Pour créer une interface S entre le corps et le milieu environnant (l'air par exemple), on doit fournir l'équivalent de cette énergie de cohésion, pour chaque couple d'atomes séparés (modèle des liaisons coupées [84]). On appelle *énergie d'interface* E_S l'énergie correspondant à la création de S , et elle sera donc proportionnelle au nombre de particules sur la surface :

$$E_S = k_1 N_S \quad (0.1)$$

où N_S est le nombre de particules à la surface et k_1 un coefficient positif de proportionnalité, homogène à une énergie, et qui dépend des deux milieux mis en jeu.

D'autre part, puisque le matériau est considéré homogène, le nombre d'atomes à la surface de S sera proportionnel à l'aire \mathcal{A}_S de celle-ci, on a alors :

$$N_S = k_2 \mathcal{A}_S \quad (0.2)$$

où k_2 est un réel strictement positif, dont l'inverse est homogène à une surface. On a alors :

$$E_S = \sigma_S \mathcal{A}_S \quad (0.3)$$

avec $\sigma_S = k_1 k_2$, énergie par unité de surface (densité surfacique d'énergie de surface).

Ces considérations peuvent être généralisées à toute interface entre deux milieux (a) et (b) dont, au moins un, est condensé et on a alors :

$$E_{\Sigma_{ab}} = \sigma_{ab} \mathcal{A}_{\Sigma_{ab}} \quad (0.4)$$

où Σ_{ab} est l'interface d'aire $\mathcal{A}_{\Sigma_{ab}}$ entre ces deux milieux et σ_{ab} le coefficient d'énergie d'interface entre eux.

On retiendra donc qu'on associe à une interface entre deux milieux une énergie potentielle surfacique d'interface, proportionnelle à l'aire de celle-ci. Pour les concepts de base liés à la tension de surface, on pourra se référer aux travaux de L. D. Landau and E. M. Lifshitz [56] (Chap. 7).

0.2 Ordres de grandeurs

Pour un liquide peu cohésif comme une huile volatile, $\sigma \approx 20 \text{ mJ/m}^2$. L'eau, plus cohésive à cause des liaisons hydrogène, a une densité surfacique d'énergie plus élevée : elle vaut 72 mJ/m^2 à 20°C . Condensé par des liaisons fortes, le mercure a une densité surfacique d'énergie encore plus élevée de l'ordre de 500 mJ/m^2 .

Sur terre, la présence de l'énergie potentielle de pesanteur nous amène souvent à négliger l'énergie potentielle d'interface car l'intensité de cette dernière est beaucoup plus faible, cependant, deux situations peuvent faire pencher la balance en faveur de l'énergie d'interface :

La première situation est quand la gravité diminue, par exemple en orbite. Cette situation concerne essentiellement les satellites et les stations spatiales car ils contiennent souvent de

1. Gagner de l'énergie signifie ici que le système diminue son énergie potentielle.

grandes quantités de liquides (carburant, liquides de refroidissement, etc). Puisque l'énergie potentielle de pesanteur est proportionnelle à l'intensité du champ de gravité, elle tend donc naturellement vers zéro alors que l'énergie d'interface reste la même, et de ce fait devient l'énergie prépondérante.

La deuxième situation est bien plus facile à observer car elle se manifeste sur terre. En effet, pour les domaines liquides de petites dimensions (à partir de quelques millimètres), l'énergie d'interface devient non négligeable, voire dominante, comparée à l'énergie de pesanteur, et c'est cela qui donne, par exemple, à une goutte d'eau sa forme sphérique. Ce comportement se justifie par le fait que les énergies d'interfaces sont proportionnelles aux aires des interfaces du domaine liquide, alors que l'énergie de pesanteur est proportionnelle au volume de ce dernier. Comme la fonction L^3 (volume) tend plus rapidement vers zéro que L^2 (surface) quand $L \rightarrow 0$ (L désigne la longueur caractéristique du domaine), l'influence des deux contributions sur la physique du problème sera fonction de la dimension spatiale de l'échantillon. Afin de quantifier le degré de contribution de ces deux énergies potentielles, on a l'habitude d'introduire en mécanique des fluides, pour une interface S donnée d'un domaine liquide, un paramètre adimensionné B , appelé *nombre de Bond*, défini par :

$$B = \frac{\rho g L^2}{\sigma_s} = \frac{L^2}{l_c^2} \quad \text{avec} \quad l_c = \sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho g}} \quad (0.5)$$

où ρ est la densité du liquide, g l'intensité du champ de pesanteur, et σ_s la densité d'énergie d'interface. l_c est ce qu'on appelle la *longueur capillaire*. En milieu borné par un récipient de forme géométrique complexe, la définition d'une longueur caractéristique L devient difficile, c'est pour cette raison qu'on préfère ne pas utiliser ce paramètre B dans le reste de cette étude, et continuer à utiliser ρ , g et σ_s pour caractériser le système.

0.3 Tension superficielle

Nous allons établir l'existence d'une densité surfacique de force, tangentielle à l'interface, appelée tension de surface, qui est directement associée à la densité d'énergie de surface que l'on vient de présenter.

On considère pour cela une lame mince Σ d'eau savonneuse fixée sur un cadre en fil de fer dont un des côtés est mobile (voir Figure 0.1). Le travail nécessaire pour augmenter les deux faces de la lame d'eau savonneuse d'une quantité $d\Sigma$ est égal, d'après (0.3), à :

$$dW = 2 \sigma d\Sigma \quad (0.6)$$

L'augmentation d'aire des côtés du volume de la pellicule savonneuse est évidemment négligeable face à l'augmentation d'aire des deux faces principales. Chacune des deux faces de la lame d'eau savonneuse va exercer sur le fil de fer une force de rappel f et va donc se comporter comme une membrane élastique. Le travail nécessaire pour déplacer le côté mobile d'une distance dx peut donc également s'écrire :

$$dW = 2 f dx = 2 \varsigma l dx \quad (0.7)$$

où ς est la *tension superficielle* exprimée en Nm^{-1} . Comme $d\Sigma = l dx$, d'après ces deux dernières expressions on a :

$$\boxed{\sigma = \varsigma} \quad (0.8)$$

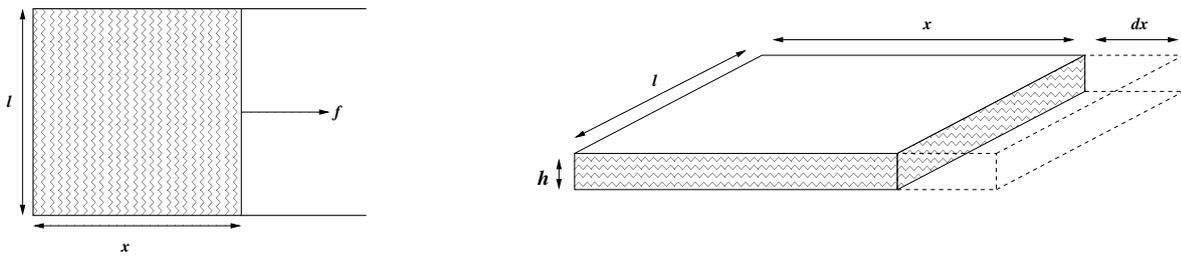


FIGURE 0.1 – Expérience de la lame d'eau savonneuse

Cette relation explique pourquoi par la suite on pourra confondre *densité d'énergie de surface* et *tension superficielle*.

Pour toute la suite, on notera par σ_L le coefficient de tension superficielle entre le liquide et le solide, σ_G celui de l'interface entre le gaz et le solide et σ celui de l'interface entre le liquide et le gaz.

0.4 Méнисque en présence de 3 milieux et angle de contact

0.4.1 Courbure de l'interface

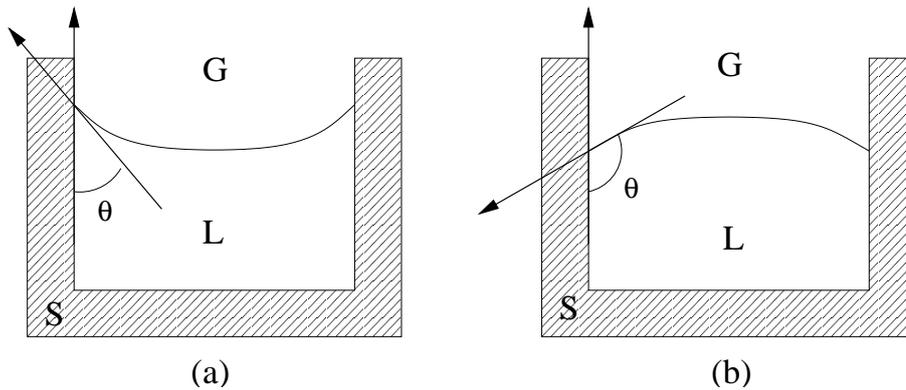


FIGURE 0.2 – Interface entre trois milieux

Quand on est en présence de trois milieux (par exemple, un solide S, un liquide L et un gaz G) trois énergies d'interfaces entrent en jeu. Le système cherchant à minimiser son énergie potentielle totale, il aura tendance à se mettre dans une configuration permettant de réduire au maximum l'aire de la surface entre les milieux dont l'énergie d'interface est la plus importante : l'interface fluide (G/L) est donc susceptible de se courber (voir Figure 0.2).

Ainsi par exemple, en remarquant que l'énergie d'interface du couple verre/air est plus importante que celle du couple verre/eau, on peut expliquer la formation d'un méнисque dans un tube à essai rempli d'eau (voir Figure 0.2a) : le système cherche à minimiser l'interface verre/air, même au prix d'une augmentation de la surface verre/eau et eau/air, ainsi que de l'énergie potentielle de pesanteur. Au contraire, dans le cas d'un tube en verre rempli de mercure, on pourra remarquer que le méнисque ne se forme pas en se creusant côté mercure, mais côté air. L'énergie d'interface du couple verre/mercure étant la plus élevée, le système veut minimiser l'interface

entre le verre et le mercure, même au prix d'une augmentation des autres énergies (voir Figure 0.2b).

0.4.2 Angle de contact

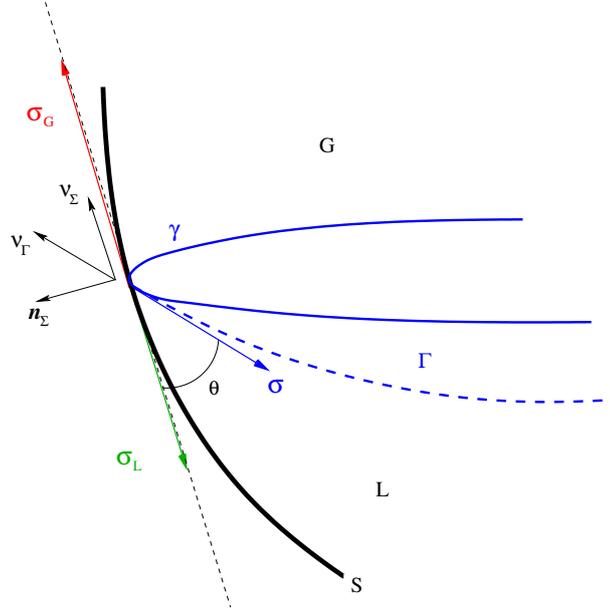


FIGURE 0.3 – Équilibre des tensions superficielles au bord de Γ

Si on se place sur le bord γ de Γ (ligne de contact entre les trois milieux, voir Figure 0.3), l'équation traduisant la somme des forces qui s'exercent sur un élément du bord $d\gamma$ (de masse nulle) s'écrit :

$$\sigma_G d\gamma \boldsymbol{\nu}_\Sigma - \sigma_L d\gamma \boldsymbol{\nu}_\Sigma - \sigma d\gamma \boldsymbol{\nu}_\Gamma + f_\Sigma \boldsymbol{n}_\Sigma = \mathbf{0} \quad (0.9)$$

où $\boldsymbol{\nu}_\Sigma$ et $\boldsymbol{\nu}_\Gamma$ sont les vecteurs unitaires orthogonaux à γ et tangents aux interfaces liquide/solide et liquide/gaz respectivement et où \boldsymbol{n}_Σ est la normale unitaire au récipient (voir Figure 0.3). Quant à $f_\Sigma \boldsymbol{n}_\Sigma$, elle représente la force de contact appliquée par le réservoir sur $d\gamma$, perpendiculaire au réservoir car on suppose que le liquide glisse parfaitement sur le solide.

La projection de l'équation (0.9) sur le plan tangent au réservoir (S) donne :

$$\sigma_G - \sigma_L - \sigma \cos(\theta) = 0 \quad (0.10)$$

Ainsi, on peut trouver la valeur de l'angle θ que fait la surface libre du liquide avec le réservoir :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\sigma_G - \sigma_L}{\sigma}} \quad (0.11)$$

Cette condition limite s'appelle *condition d'angle de contact* valable en statique (à l'équilibre) et en dynamique (au cours du mouvement) si on suppose que le glissement du liquide sur le solide est parfait. Elle montre que l'angle de contact du ménisque avec le récipient, ne dépend que de la nature des trois corps mis en jeu.

0.5 Saut de pression à l'interface

Considérons un système composé d'un réservoir S contenant un liquide L présentant une surface libre Γ . L'espace restant du réservoir sera rempli d'un gaz G (voir Figure 0.4). On va

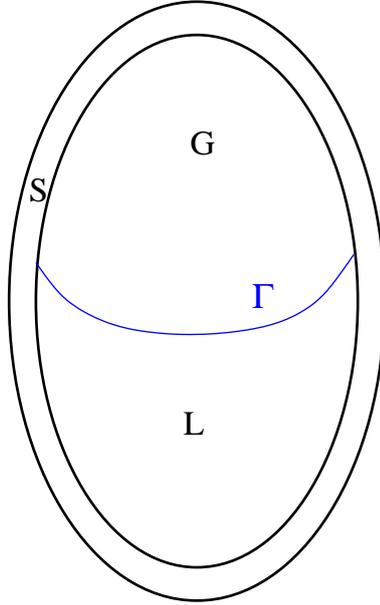


FIGURE 0.4 – Milieux considérés

démontrer dans cette partie l'existence d'un saut de pression au niveau de l'interface Γ (entre le liquide et le gaz) dû à la courbure de celle-ci.

0.5.1 Première approche : équilibre des forces

Du fait de la courbure de la surface, les efforts résultant de la tension superficielle ne sont pas compris dans un plan. Ainsi, leur résultante selon la normale à la surface est non nulle. Pour assurer l'équilibre des forces à l'interface, une différence de pression entre les deux milieux L et G apparaît.

En effet, soit $d\Gamma$ un élément de surface de Γ (supposée d'épaisseur nulle), de normale \mathbf{n} à dirigée vers G . L'élément de surface $d\Gamma$ est ici une portion de la surface Γ délimitée par des lignes paramétriques orthogonales. Les forces s'exerçant sur $d\Gamma$ sont d'une part :

$$\mathbf{f}_n = (P - P_G) d\Gamma \mathbf{n} = \Delta P d\Gamma \mathbf{n} \quad (0.12)$$

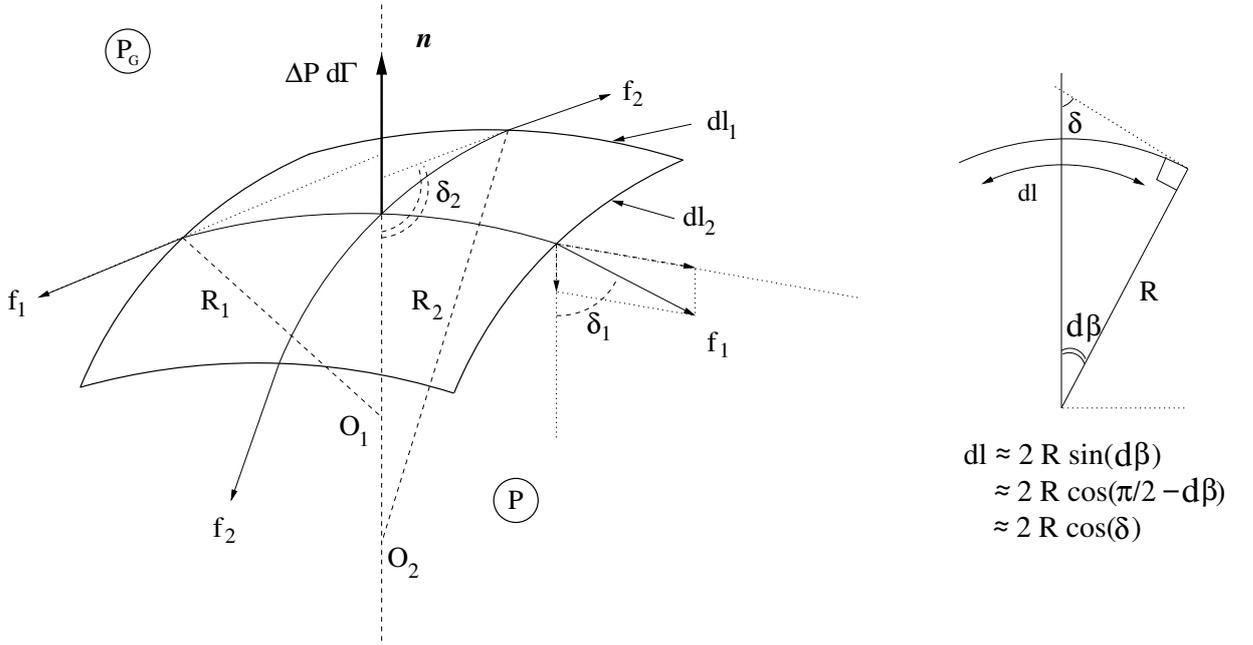
où P et P_G sont, respectivement, la pression dans le liquide et dans le gaz, et d'autre part \mathbf{f}_t , la résultante des forces de tension superficielle (voir Figure 0.5).

D'après le principe fondamental de la dynamique, la somme de ces deux forces est égale au vecteur nul (car la surface est supposée de masse nulle) :

$$\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t = \mathbf{0} \quad (0.13)$$

En projetant cette équation sur la direction \mathbf{n} , on obtient :

$$\Delta P d\Gamma = 2 f_1 \cos(\delta_1) + 2 f_2 \cos(\delta_2) \quad (0.14)$$


 FIGURE 0.5 – Équilibre des forces pour un élément de surface $d\Gamma$

Puisque $d\Gamma = dl_1 dl_2$ et que les forces de tension superficielle s'écrivent :

$$f_1 = \sigma dl_2 \quad \text{et} \quad f_2 = \sigma dl_1 \quad (0.15)$$

Ainsi, on peut écrire au premier ordre :

$$\Delta P \approx 2\sigma \frac{\cos(\delta_1)}{dl_1} + 2\sigma \frac{\cos(\delta_2)}{dl_2} \quad (0.16)$$

Le rayon de courbure étant une grandeur algébrique, on adoptera la convention suivante : si le centre de courbure est dans le milieu vers lequel la normale \mathbf{n} pointe, alors le rayon de courbure est négatif. Ainsi, d'après la Figure 0.5, on a $dl_1 = 2 R_1 \cos(\delta_1)$ et $dl_2 = 2 R_2 \cos(\delta_2)$. On déduit que le saut de pression peut s'écrire :

$$\boxed{\Delta P = P - P_G = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \quad (0.17)$$

0.5.2 Deuxième approche : démonstration énergétique

On peut également démontrer la relation (0.17) en adoptant un point de vue énergétique. Pour cela, on considère encore une fois $d\Gamma$ une surface élémentaire de normale \mathbf{n} de l'interface liquide/gaz, avec les mêmes conventions. On note par $\delta\eta$ un petit déplacement normal qui transforme $d\Gamma$ en $d\Gamma'$. Le travail nécessaire à une telle perturbation est δW . Ce dernier se décompose en un travail des forces de pression δW_n et un travail de la tension superficielle δW_t (égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle de surface) tels que :

$$\delta W_n = \delta\eta (P - P_G) d\Gamma \quad \text{et} \quad \delta W_t = -\sigma (d\Gamma' - d\Gamma) \quad (0.18)$$

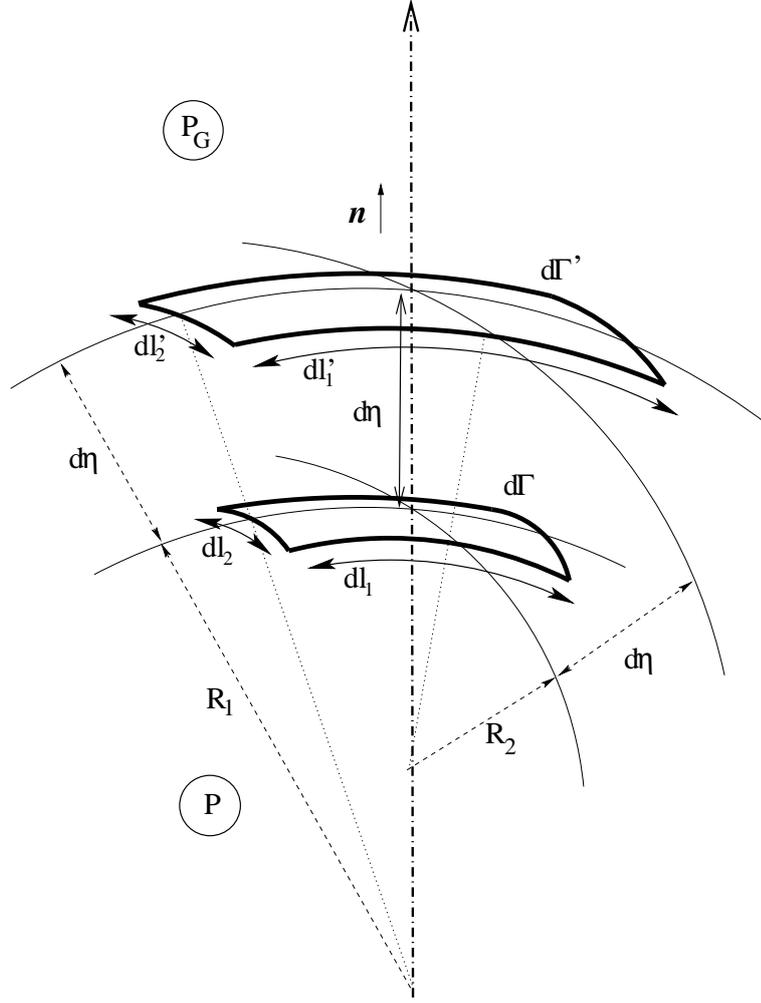


FIGURE 0.6 – Évolution de $d\Gamma$

Ainsi

$$\delta W = \delta W_n + \delta W_t = \delta\eta (P - P_G) d\Gamma - \sigma (d\Gamma' - d\Gamma) \quad (0.19)$$

Lors du déplacement de la surface, les éléments de longueur dl_1 et dl_2 varient de $(\delta\eta/R_1) dl_1$ et $(\delta\eta/R_2) dl_2$ respectivement (voir Figure 0.6), ainsi, après le déplacement, l'élément de surface $d\Gamma = dl_1 dl_2$ devient :

$$d\Gamma' = dl_1 (1 + \delta\eta/R_1) dl_2 (1 + \delta\eta/R_2) = dl_1 dl_2 (1 + \delta\eta/R_1 + \delta\eta/R_2) + o(\delta\eta) \quad (0.20)$$

Cette approximation au premier ordre implique que la variation locale de la surface est :

$$d\Gamma' - d\Gamma \approx \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta\eta d\Gamma$$

Étant donné que la surface est supposée de masse nulle, c'est à dire sans énergie cinétique, et puisqu'on néglige les dissipations, on peut montrer que le principe des moindres actions, appliqué à l'interface, donne :

$$\int_{\Gamma} \delta W = 0 \quad \forall \delta\eta \quad (0.21)$$

On obtient alors :

$$(P - P_G) - \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad (0.22)$$

et on retrouve donc :

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (0.23)$$

Cette relation est appelée *Loi de Laplace-Young*. On remarque bien que dans le cas où la somme² $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ est positive, $P > P_G$. Ce qui implique que c'est toujours dans le milieu convexe que la pression est la plus grande. Si on se place par contre dans un cas de surface plane, on observe que le saut de pression est nul, puisque le rayon de courbure est infini.

0.6 Influence de la gravité sur la forme de la surface libre à l'équilibre

Étudions l'équilibre mécanique du système grâce à l'équation (0.17). On suppose que le système est en apesanteur et n'est soumis à aucune autre action mécanique extérieure. Dans ce cas, on peut considérer que la pression est constante dans chacun des milieux. Ainsi le saut de pression peut être considéré comme une constante :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \text{constante} \quad (0.24)$$

Ceci montre qu'en deux dimensions et en apesanteur, le ménisque est un arc de cercle.

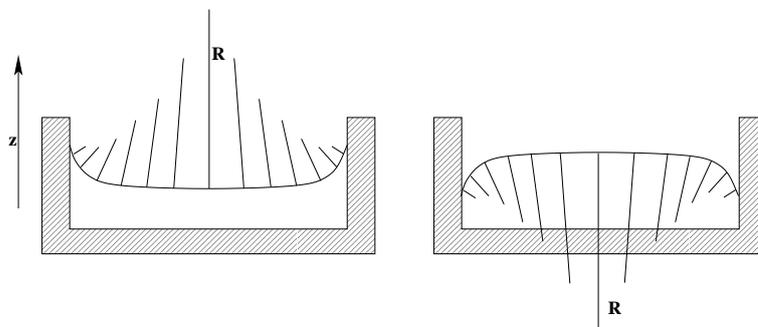


FIGURE 0.7 – Variation de R en fonction de z

Dans le cas où le système est dans un champ de pesanteur, d'après les lois de l'hydrostatique,

$$P = P_{Z=0} - \rho g Z$$

où l'axe Z est vertical orienté vers le haut. Ainsi, la condition d'équilibre de la surface libre Γ devient :

$$\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \rho g Z = \text{constante} = P_{Z=0} - P_G \quad (0.25)$$

2. La quantité $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ est égale au double de la courbure moyenne H de la surface libre. C'est une grandeur intrinsèque (ne dépend pas du choix du repère orthonormé local), et est aussi définie comme étant la trace du tenseur de courbure de la surface libre.

L'équation (0.25) montre que dans un cas en deux dimensions (avec un angle de contact différent de 90°), comme celui de la Figure 0.7, si la surface libre du liquide est concave (respectivement convexe) alors Z diminue si $|R|$ augmente (respectivement diminue). Autrement dit, plus on s'éloigne du bord, plus la courbure de la surface libre diminue.

Première partie
Étude statique

Introduction

Comme on s'intéresse ici aux vibrations d'un liquide au sein d'un réservoir, la position d'équilibre du système doit d'abord être déterminée. Le faible niveau de gravité fait que les effets de capillarité ne peuvent plus être négligés, comme c'est généralement le cas pour les applications terrestres où la surface libre du liquide est assimilée à un plan horizontal.

Le calcul de la position statique d'un liquide au sein d'un réservoir donné est un problème non linéaire dans lequel le liquide (supposé non visqueux) glisse sur la paroi interne du réservoir. Plus la géométrie de ce dernier sera complexe, plus le problème sera difficile à résoudre. Pour cette raison, la majorité des auteurs traitent uniquement des réservoirs de formes simples (axisymétriques, sphériques ou à parois verticales) en utilisant des paramétrisations adaptées [38, 86, 98, 90]. Ces approches ne peuvent cependant être utilisées ni pour des cas de réservoirs complexes tridimensionnels, ni même pour les cas où la direction de la gravité n'est pas compatible avec les symétries du réservoir³.

À notre connaissance, le seul logiciel capable de calculer les positions d'équilibres d'un liquide avec tension de surface en 3D est *Surface Evolver*, développé par K. A. Brakke [14]. Cet outil est utilisé dans beaucoup de domaines où l'énergie de tension superficielle, à laquelle s'ajoutent éventuellement d'autres énergies, doit être minimisée sous différentes contraintes. Malgré ses qualités et sa polyvalence, *Surface Evolver* reste assez peu adapté à notre problème dans la mesure où il nécessite l'intervention répétée de l'utilisateur durant les itérations du calcul pour modifier certains paramètres, vérifier la qualité du maillage, fractionner des éléments, lisser la surface, etc. Ce caractère interactif pose problème dans le cas de problèmes complexes de grande taille.

Dans la première partie de ce document, on propose une approche automatique (ne nécessitant pas l'intervention de l'utilisateur au cours du calcul), où le calcul de la position d'équilibre d'un liquide dans un cas général 3D (quelque soit la géométrie du réservoir) et pour n'importe quelle intensité et orientation du champ de gravité⁴, en utilisant la méthode des éléments finis standard. Une description lagrangienne du déplacement est adoptée car elle permet d'avoir une définition précise de la géométrie de la surface libre du liquide [74], ce qui est particulièrement important dans notre problème car l'effet de tension de surface est proportionnel à la courbure de la surface libre. Les équations d'équilibre seront déduites de la caractérisation du minimum de l'énergie potentielle totale du système. Au lieu de déformer le domaine liquide en entier, nous allons ramener le problème à une recherche de la géométrie de la surface libre uniquement, ce qui permet de réduire considérablement la taille du problème. Un multiplicateur de Lagrange sera utilisé pour prendre en compte la contrainte d'incompressibilité du liquide. Afin de permettre à

3. Même un réservoir de forme simple comme un parallélépipède peut donner lieu à une situation 3D complexe quand ce dernier est incliné par rapport à la direction de la gravité apparente (un exemple est donné dans les Figures 3.5 et 3.7).

4. On désigne par "gravité" l'accélération apparente due à l'attraction gravitationnelle et/ou à tout autre source d'accélération constante due à une force de propulsion par exemple.

la surface libre de glisser sur les parois d'un réservoir de forme quelconque, le déplacement de chaque point de la surface libre sera décrit par un vecteur à trois composantes. Cependant, cela introduit une singularité dans le problème car les mouvements tangents à la surface libre sont indéterminés (ils ne font pas varier l'énergie potentielle du système). Pour résoudre ce problème, on utilisera une procédure appelée *Updated Reference Strategy* (URS) proposée pour résoudre un problème singulier similaire, rencontré dans le cadre de la recherche de surfaces d'aire minimale [10, 11, 12].

Chapitre 1

Minimisation de l'énergie potentielle et formulation variationnelle non linéaire

Sommaire

1.1	Description du système	16
1.2	Minimisation sous contrainte d'incompressibilité	16
1.3	Calcul des variations au premier ordre	18
1.3.1	Variation au premier ordre des aires des interfaces	18
1.3.2	Variation au premier ordre de l'énergie potentielle de pesanteur . .	24
1.3.3	Variation au premier ordre du volume liquide	26
1.4	Formulation variationnelle du problème	26
1.5	Equation locale et condition aux limites	26

1.1 Description du système

On va établir ici les équations décrivant la statique d'un liquide incompressible homogène (L) au sein d'un réservoir (S) de géométrie quelconque, le reste étant occupé par un gaz (G) de pression constante. Le système est soumis à un champ de pesanteur constant \mathbf{g} . Soit Ω_L le domaine liquide à l'équilibre, on note respectivement Γ , Σ_L et Σ_G les surfaces de séparation liquide/gaz, solide/liquide et solide/gaz, $\gamma = \partial\Gamma$ le bord de Γ , et enfin on rappelle que σ , σ_L et σ_G sont les coefficients de tension superficielle —supposés constants— correspondant à ces surfaces.

La recherche de la configuration d'équilibre se résume à trouver la position du liquide minimisant l'énergie potentielle totale E du système, donnée par :

$$E = E_\Gamma + E_{\Sigma_L} + E_{\Sigma_G} + E_{pes} + \text{Cte} \quad (1.1)$$

où E_Γ , E_{Σ_L} et E_{Σ_G} désignent les énergies de tension superficielle associées aux interfaces Γ , Σ_L et Σ_G , et où E_{pes} est l'énergie potentielle de pesanteur du liquide (voir Figure 1.1). La constante « Cte » traduit le fait que toutes les énergies potentielles sont définies par rapport à une origine arbitraire, c'est-à-dire à une constante additive près.

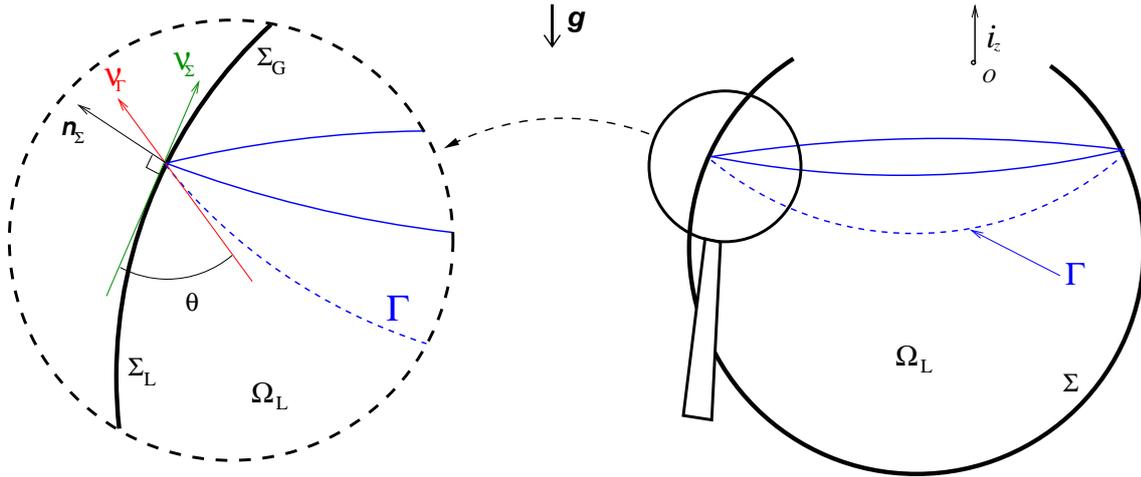


FIGURE 1.1 – Configuration d'équilibre

Le problème est soumis de plus à la condition d'incompressibilité :

$$V(\Gamma) = \int_{\Omega_L} d\Omega_L = V_0 = \text{constante} \quad (1.2)$$

où $V(\Gamma)$ désigne la valeur du volume du liquide correspondant à la position de la surface libre Γ , et V_0 la valeur du volume du liquide (donnée du problème).

1.2 Minimisation sous contrainte d'incompressibilité

On considère une configuration arbitraire du liquide Ω_{L_0} de surface libre Γ_0 . On peut donc décrire le domaine Ω_L avec un champ vectoriel \mathbf{U} défini dans le volume Ω_{L_0} . On introduit ainsi

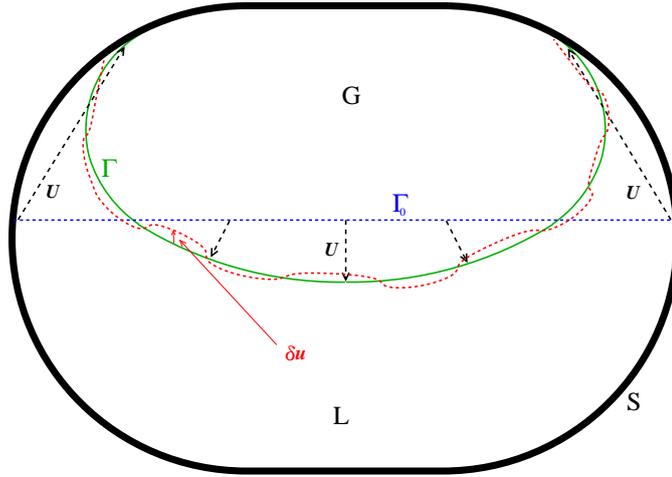


FIGURE 1.2 – Paramétrisation de Γ par un champ \mathbf{U} , et représentation d'une perturbation cinématiquement admissible $\delta\mathbf{u}$

l'ensemble $\mathcal{C}_U^{\text{vol}}$ des champs admissibles \mathbf{U} tel que le liquide ne peut ni pénétrer dans la paroi ni s'en décoller (voir Figure 1.2). Le problème s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{U}^* \in \mathcal{I} / E(\mathbf{U}^*) = \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{I}} E(\mathbf{U}) \\ \text{où} \\ \mathcal{I} = \{ \mathbf{U} \in \mathcal{C}_U^{\text{vol}} / V(\mathbf{U}) = V_0 \} \end{aligned} \quad (1.3)$$

La résolution de ce problème nécessite d'exprimer la stationnarité de l'énergie potentielle E , quand on perturbe cette dernière par un champ $\delta\mathbf{u}$ dans \mathcal{I} , c'est à dire que $\mathbf{U} + \delta\mathbf{u} \in \mathcal{I}$. Cela veut dire qu'il faudra exprimer la nullité de la "dérivée de E dans \mathcal{I} en \mathbf{U}^* ". Il est délicat d'aborder le problème sous cet angle car on ne sait pas intégrer la contrainte d'incompressibilité dans le calcul de cette variation. Pour contourner cette difficulté, on va utiliser un multiplicateur de Lagrange Λ pour prendre en compte la contrainte de volume constant, ce qui va nous permettre de ramener le problème à la recherche de l'extrémum (point selle) du Lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{U}, \Lambda)$, défini par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \Lambda) = E(\mathbf{U}) + \Lambda (V(\mathbf{U}) - V_0) \quad (1.4)$$

La différence est que le domaine de recherche est cette fois $\mathcal{C}_U^{\text{vol}} \times \mathbb{R}$ et non pas \mathcal{I} .

Le problème de minimisation sous contrainte d'incompressibilité devient :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\mathbf{U}^*, \Lambda^*) \in \mathcal{C}_U^{\text{vol}} \times \mathbb{R} / \mathcal{L}(\mathbf{U}^*, \Lambda^*) = \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{C}_U^{\text{vol}}} \left(\max_{\Lambda \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(\mathbf{U}, \Lambda) \right) \\ \text{avec} \\ \mathcal{L}(\mathbf{U}, \Lambda) = E(\mathbf{U}) + \Lambda (V(\mathbf{U}) - V_0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

\mathbf{U}^* et Λ^* solutions de (1.5) implique que les dérivées de \mathcal{L} par rapport à \mathbf{U} et par rapport à Λ sont nulles en $(\mathbf{U}^*, \Lambda^*)$.

Dire que la dérivée de \mathcal{L} par rapport à \mathbf{U} est nulle au point $(\mathbf{U}^*, \Lambda^*)$ revient à dire que la dérivée directionnelle (ou variation au premier ordre) en ce point $\mathbf{D}_{\mathbf{U}}^* \mathcal{L}(\delta \mathbf{u})$, est nulle dans toutes les directions $\delta \mathbf{u}$:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{U}}^* \mathcal{L}(\delta \mathbf{u}) = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{U}}(\delta \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ vérifiant } \mathbf{U}^* + \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}}^{\text{vol}} \quad (1.6)$$

Puisque \mathbf{U}^* et $\mathbf{U}^* + \delta \mathbf{u}$ appartiennent à $\mathcal{C}_{\mathbf{U}}^{\text{vol}}$, alors on peut dire que $\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} = 0$ sur Σ_L (voir Figure 1.1 pour la définition de \mathbf{n}_{Σ}). On introduit ainsi l'espace $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{\text{vol}}$ où vivent les $\delta \mathbf{u}$:

$$\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{\text{vol}} = \{ \mathbf{u} \text{ définis dans } \Omega_L / \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma_L \} \quad (1.7)$$

La dérivée par rapport à Λ permet de retrouver la condition d'incompressibilité :

$$\mathbf{D}_{\Lambda}^* \mathcal{L}(\delta \lambda) = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \Lambda}(\delta \lambda) = \delta \lambda (V(\mathbf{U}^*) - V_0) = 0, \quad \forall \delta \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Afin d'alléger les écritures, on notera dans la suite $\mathbf{D}_{\mathbf{U}}^* \mathcal{L}(\delta \mathbf{u})$ par $\delta[\mathcal{L}](\delta \mathbf{u})$, où on ne mettra plus le symbole "*" pour désigner la solution. Ainsi, le problème à résoudre devient :

Trouver $(\mathbf{U}, \Lambda) \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}}^{\text{vol}} \times \mathbb{R} / \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \lambda) \in \mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{\text{vol}} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \delta[\mathcal{L}(\mathbf{U}, \Lambda)](\delta \mathbf{u}) = 0 \\ \delta \lambda (V(\mathbf{U}) - V_0) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

D'après (0.4), (1.1) et (1.4) :

$$\delta[\mathcal{L}](\delta \mathbf{u}) = \sigma \delta[\mathcal{A}_{\Gamma}](\delta \mathbf{u}) + \sigma_L \delta[\mathcal{A}_{\Sigma_L}](\delta \mathbf{u}) + \sigma_G \delta[\mathcal{A}_{\Sigma_G}](\delta \mathbf{u}) + \delta[E_{pes}](\delta \mathbf{u}) + \Lambda \delta[V](\delta \mathbf{u}) \quad (1.10)$$

Il faut à présent exprimer les différentes variations au premier ordre de l'équation ci-dessus.

1.3 Calcul des variations au premier ordre

1.3.1 Variation au premier ordre des aires des interfaces

Géométrie différentielle des surfaces

On va calculer ici la variation au premier ordre de l'aire \mathcal{A}_S d'une surface S perturbée par un champ $\delta \mathbf{u}$ (i.e. : on va calculer $\delta[\mathcal{A}_S](\delta \mathbf{u})$, dérivée de \mathcal{A}_S par rapport à \mathbf{U} dans la direction $\delta \mathbf{u}$). On prendra la surface S_0 comme surface de référence connue, à partir de laquelle on définit le champ \mathbf{U} . Un point M de la surface S est paramétré par deux variables indépendantes ξ_1 et ξ_2 (parcourant le domaine paramétrique S_p), et repéré par le vecteur position $\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2)$ dans un repère orthonormé direct $(O, \mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$. La Figure 1.3 représente un schéma de cette paramétrisation.

5. Par définition de la dérivée directionnelle, on a : $\lim_{\|\delta \mathbf{u}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{L}(\mathbf{U}^* + \delta \mathbf{u}, \Lambda^*) - \mathcal{L}(\mathbf{U}^*, \Lambda^*) - \mathbf{D}_{\mathbf{U}} \mathcal{L}^*(\delta \mathbf{u})\|}{\|\delta \mathbf{u}\|} = 0$.

Pour que $\mathcal{L}(\mathbf{U}^* + \delta \mathbf{u}, \Lambda^*)$ soit défini, il faut donc que $\mathbf{U}^* + \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}}^{\text{vol}}$.

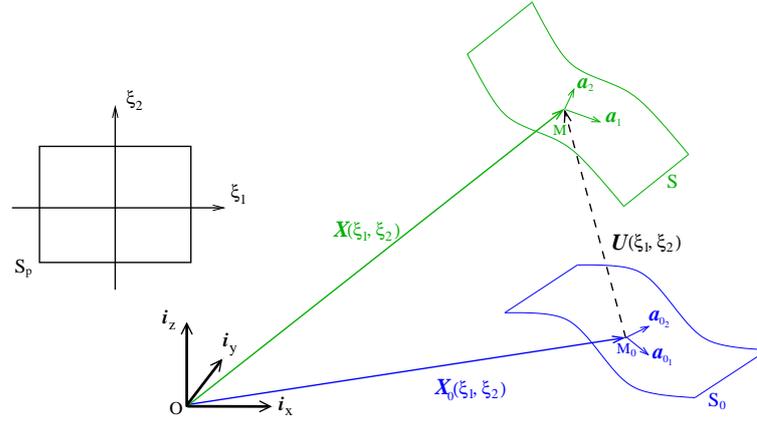


FIGURE 1.3 – Paramétrisation

Les deux premiers vecteurs de la *base covariante* de S en M , \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 , sont des vecteurs tangents à cette surface en M et définis en dérivant \mathbf{X} par rapport à ξ_1 et ξ_2 :

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_1} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_2} \quad (1.11)$$

On complète cette base en y ajoutant un troisième vecteur \mathbf{a}_3 orthogonal aux deux premiers et unitaire :

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}, \quad \|\mathbf{a}_3\| = 1 \quad (1.12)$$

Les deux premiers vecteurs de la *base contravariante* de S , \mathbf{a}^1 et \mathbf{a}^2 , sont eux aussi tangents à S en M et définis par ⁶ :

$$\mathbf{a}^m \cdot \mathbf{a}_n = \delta_{mn} \quad \text{avec} \quad m, n \in \{1, 2\} \quad (1.13)$$

On complète la base contravariante en construisant \mathbf{a}^3 de la même façon que \mathbf{a}_3 :

$$\mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2}{\|\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2\|}, \quad \|\mathbf{a}^3\| = 1 \quad (1.14)$$

D'une façon analogue, on définit la base covariante $(\mathbf{a}_{0i})_{i=1,3}$, et contravariante $(\mathbf{a}_0^i)_{i=1,3}$, de la surface S_0 en M_0 .

Notation : On note $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p]$ la matrice formée par les composantes des vecteurs \mathbf{v}_i dans la base $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$, disposées en colonnes.

Soit $\underline{\mathbf{a}}$ le tenseur métrique covariant de la surface S , défini par :

$$\underline{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]^T [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \quad (1.15)$$

Ainsi, si on note dS un élément d'aire de S , on a alors ⁷ :

$$dS = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\| d\xi_1 d\xi_2 = \sqrt{\det(\underline{\mathbf{a}})} d\xi_1 d\xi_2 = J d\xi_1 d\xi_2 \quad (1.16)$$

6. δ_{mn} est le symbole de Kronecker valant 1 si $m = n$ et 0 sinon.

7. On peut facilement montrer que $\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\| = \sqrt{\det(\underline{\mathbf{a}})}$ en utilisant les coordonnées des vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 dans $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$.

Remarque : Puisqu'on a d'une manière analogue $dS_0 = J_0 d\xi_1 d\xi_2$, alors on pourra également écrire :

$$dS = \frac{J}{J_0} dS_0 = \sqrt{(\det(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_0^i))^2} = \det(\mathbf{F}_s) dS_0 \quad (1.17)$$

où \mathbf{F}_s est le gradient de la transformation $S_0 \longrightarrow S$, donné par⁸ :

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_0^i \quad \text{avec } i \in \{1, 2, 3\} \quad (1.18)$$

Soit $\bar{\mathbf{a}}$ le tenseur métrique contravariant de la surface S , définit par

$$\bar{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]^T [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2] \quad (1.19)$$

alors, ce tenseur contravariant est l'inverse du tenseur covariant. Pour démontrer ce résultat, on prend un vecteur \mathbf{v} quelconque tangent à S en M , on peut alors écrire \mathbf{v} dans la base covariante :

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^1) \mathbf{a}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^2) \mathbf{a}_2 \quad (1.20)$$

ainsi que dans la base contravariante :

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1) \mathbf{a}^1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2) \mathbf{a}^2 \quad (1.21)$$

En multipliant (1.20) scalairement par \mathbf{a}_1 puis par \mathbf{a}_2 , on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^1) (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^2) (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^1) (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^2) (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{a}} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^2 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

De manière analogue, en multipliant (1.21) scalairement par \mathbf{a}^1 puis par \mathbf{a}^2 , on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1) (\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^1) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2) (\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^2) \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1) (\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^1) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2) (\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{a}} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

À partir de (1.22) et (1.23), on arrive à la conclusion que :

$$\boxed{\bar{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}^{-1}} \quad (1.24)$$

En plus, on a la propriété suivante :

$$\|\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2\| = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|^{-1} = J^{-1} \quad (1.25)$$

Le résultat (1.25) est, en effet, facile à démontrer en utilisant (1.24), puisque :

$$\|\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2\| = \sqrt{\det(\bar{\mathbf{a}})} = \sqrt{\det(\underline{\mathbf{a}}^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{\det(\underline{\mathbf{a}})}} = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|^{-1} = J^{-1} \quad (1.26)$$

La dernière propriété à démontrer est que les deux normales à S , \mathbf{a}_3 et \mathbf{a}^3 sont confondues. En effet, par définition :

$$\mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2}{\|\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2\|}$$

d'après (1.25) :

$$\mathbf{a}^3 = J (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \quad (1.27)$$

8. On adopte la convention de la sommation sur les indices répétés.

Par ailleurs, en écrivant les vecteurs \mathbf{a}^1 et \mathbf{a}^2 dans la base covariante, on aura :

$$\begin{cases} \mathbf{a}^1 = (\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^1) \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^2) \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}^2 = (\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^1) \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^2) \mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (1.28)$$

ainsi,

$$\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2 = \det(\bar{\mathbf{a}}) (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) = J^{-2} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \quad (1.29)$$

donc,

$$\mathbf{a}^3 = \frac{(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)}{J} = \frac{(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|} = \mathbf{a}_3$$

On désignera dans la suite \mathbf{a}_3 et \mathbf{a}^3 par un unique vecteur \mathbf{n} .

À présent, on peut passer au calcul de la variation de l'aire d'une surface S .

Variation au premier ordre de \mathcal{A}_S

D'après (1.16), l'aire de S est donnée par :

$$\mathcal{A}_S = \int_S dS = \int_{\xi_1, \xi_2} J d\xi_1 d\xi_2 \quad (1.30)$$

Contrairement à S , la surface paramétrique S_p ne dépendant pas de \mathbf{U} , alors :

$$\delta[\mathcal{A}_S](\delta\mathbf{u}) = \delta \left[\int_S dS \right] (\delta\mathbf{u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \delta[J](\delta\mathbf{u}) d\xi_1 d\xi_2 \quad (1.31)$$

Puisque $J(\mathbf{U}) = \|\mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U})\|$, alors :

$$\begin{aligned} \delta[J](\delta\mathbf{u}) &= \delta[\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|](\delta\mathbf{u}) \\ &= \frac{(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)}{J} \cdot (\delta[\mathbf{a}_1](\delta\mathbf{u}) \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \delta[\mathbf{a}_2](\delta\mathbf{u})) \\ &= \mathbf{n} \cdot (\delta[\mathbf{a}_1](\delta\mathbf{u}) \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \delta[\mathbf{a}_2](\delta\mathbf{u})) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Par ailleurs, on a $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{U}$ (voir Figure 1.3), et d'après (1.11), on peut écrire :

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{01} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_1} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_{02} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_2} \quad (1.33)$$

ainsi,

$$\delta[\mathbf{a}_1](\delta\mathbf{u}) = \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \quad \text{et} \quad \delta[\mathbf{a}_2](\delta\mathbf{u}) = \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_2} \quad (1.34)$$

donc,

$$\delta[\mathcal{A}_S](\delta\mathbf{u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (1.35)$$

Pour donner un sens physique à cette équation, on va revenir à une expression intégrale sur la surface S . Puisque $J d\xi_1 d\xi_2 = dS$, alors,

$$\delta[\mathcal{A}_S](\delta\mathbf{u}) = \int_S J^{-1} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) dS \quad (1.36)$$

D'après (1.27) :

$$J^{-1} \mathbf{n} = \mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2 \quad (1.37)$$

Donc :

$$\delta[\mathcal{A}_S](\delta\mathbf{u}) = \int_S (\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2) \cdot \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) dS \quad (1.38)$$

En écrivant $\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1}$ dans la base covariante on a :

$$\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 = \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{a}^i \right) \mathbf{a}_i \right] \wedge \mathbf{a}_2 = \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{a}^1 \right) (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) + \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{a}^3 \right) (\mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_2) \quad (1.39)$$

Puisque le vecteur $(\mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_2)$ est orthogonal à $\mathbf{a}_3 = \mathbf{n}$, et que $(\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2)$ est porté par \mathbf{n} , donc leur produit scalaire est nul, d'où :

$$(\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2) \cdot \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 \right) = \underbrace{(\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2)}_{J^{-1} \mathbf{n}} \cdot \underbrace{(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)}_{J \mathbf{n}} \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{a}^1 \right) = \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{a}^1 \right) \quad (1.40)$$

De la même manière on montre que :

$$(\mathbf{a}^1 \wedge \mathbf{a}^2) \cdot \left(\mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) = \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_2} \cdot \mathbf{a}^2 \right) \quad (1.41)$$

En reportant (1.40) et (1.41) dans (1.38), on obtient alors :

$$\delta[\mathcal{A}_S](\delta\mathbf{u}) = \int_S \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{a}^1 + \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_2} \cdot \mathbf{a}^2 \right) dS = 0 \quad (1.42)$$

Or, par définition de la divergence surfacique⁹, on a :

$$\text{div}_s(\delta\mathbf{u}) = \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{a}^1 + \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_2} \cdot \mathbf{a}^2 \quad (1.43)$$

Donc :

$$\boxed{\delta[\mathcal{A}_S](\delta\mathbf{u}) = \int_S \text{div}_s(\delta\mathbf{u}) dS} \quad (1.44)$$

Si on décompose maintenant $\delta\mathbf{u}$ en une partie $\delta\mathbf{u}_{\parallel}$ tangentielle à S et une autre normale $\delta\mathbf{u}_{\perp} = (\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$, on aura :

$$\text{div}_s(\delta\mathbf{u}) = \text{div}_s(\delta\mathbf{u}_{\parallel}) + \mathbf{n} \cdot \nabla_s(\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + (\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \text{div}_s(\mathbf{n}) \quad (1.45)$$

Le produit scalaire $\mathbf{n} \cdot \nabla_s(\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ est nul puisque ces deux vecteurs sont toujours orthogonaux. D'autre part, on a par définition :

$$\text{div}_s(\mathbf{n}) = 2H \quad (1.46)$$

où H est la courbure moyenne¹⁰ de la surface S (avec la convention que la courbure est négative si le centre de courbure est situé dans le milieu vers lequel \mathbf{n} pointe). Ainsi, on obtient

$$\delta[\mathcal{A}_S](\delta\mathbf{u}) = \int_S 2H \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \text{div}_s(\delta\mathbf{u}_{\parallel}) dS \quad (1.47)$$

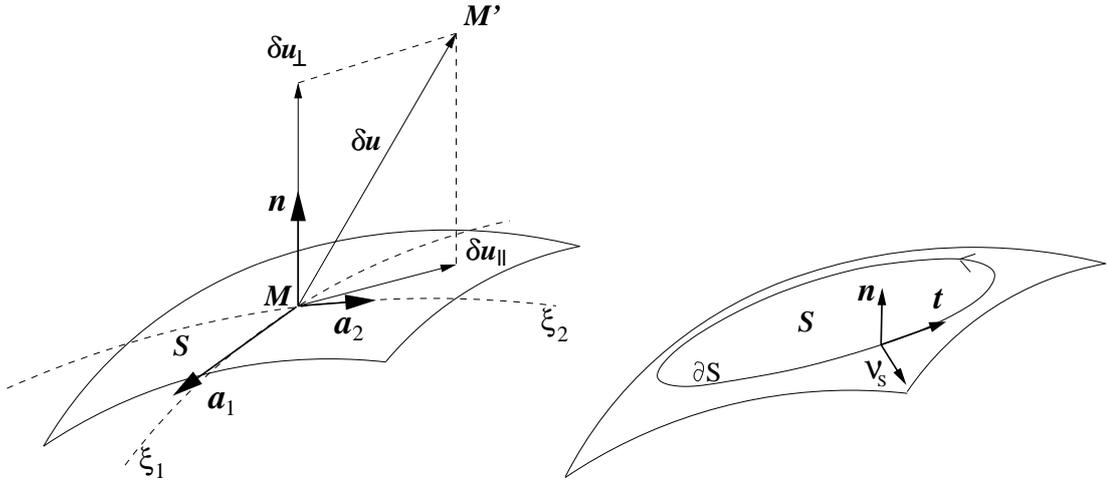


FIGURE 1.4 – Éléments de notation de géométrie différentielle.

Le second terme de cette expression peut être transformé par la formule d'Ostrogradsky, pour le ramener à une intégrale sur le bord ∂S de S :

$$\int_S \operatorname{div}_s(\delta u_{\parallel}) dS = \oint_{\partial S} \delta u \cdot \nu_S dl \quad (1.48)$$

où ν_S est le vecteur unitaire sortant tangent à S et perpendiculaire à ∂S (voir Figure 1.4).

Finalement,

$$\delta[\mathcal{A}_S](\delta u) = \int_S 2H \delta u \cdot n dS + \oint_{\partial S} \delta u \cdot \nu_S dl \quad (1.49)$$

On remarque que ces deux termes ont une signification physique bien précise : le premier représente la variation de l'aire de S due à la déformation normale ($\delta u \cdot n$) et proportionnel au double de la courbure moyenne H , alors que le second terme représente la variation d'aire due au déplacement tangentiel ramené au bord de la surface S .

En appliquant le résultat (1.49) au calcul de $\delta[\mathcal{A}_\Gamma](\delta u)$, $\delta[\mathcal{A}_{\Sigma_L}](\delta u)$ et $\delta[\mathcal{A}_{\Sigma_G}](\delta u)$, et vu que le champ δu est tangent à Σ_L et Σ_G , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta[\mathcal{A}_\Gamma](\delta u) = \int_\Gamma 2H \delta u \cdot n d\Gamma + \oint_\gamma \delta u \cdot \nu_\Gamma d\gamma \\ \delta[\mathcal{A}_{\Sigma_L}](\delta u) = \oint_\gamma \delta u \cdot \nu_\Sigma d\gamma \\ \delta[\mathcal{A}_{\Sigma_G}](\delta u) = - \oint_\gamma \delta u \cdot \nu_\Sigma d\gamma \end{array} \right. \quad (1.50)$$

où n est la normale unitaire sortante du volume liquide, et où ν_Γ et ν_Σ représentent les vecteurs unitaires tangents à Γ et Σ_L et orthogonaux à γ (voir Figure 1.1 et Figure 1.5).

9. La divergence surfacique d'un champ vectoriel v défini sur S est donnée par $\operatorname{div}_s(v) = \nabla_s \cdot v$, où ∇_s est le gradient surfacique défini pour toute fonction scalaire f sur S par $df = \nabla_s f \cdot d\mathbf{M}$. Puisque $df = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} d\xi_2$ et $d\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_2} d\xi_2 = \mathbf{a}_1 d\xi_1 + \mathbf{a}_2 d\xi_2$, alors $\nabla_s = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathbf{a}^1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \mathbf{a}^2$ et ainsi $\operatorname{div}_s(v) = \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{a}^1 + \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \cdot \mathbf{a}^2$.

10. Si R_1 et R_2 représentent les deux rayons de courbure selon une paramétrisation orthonormée, on peut écrire : $2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

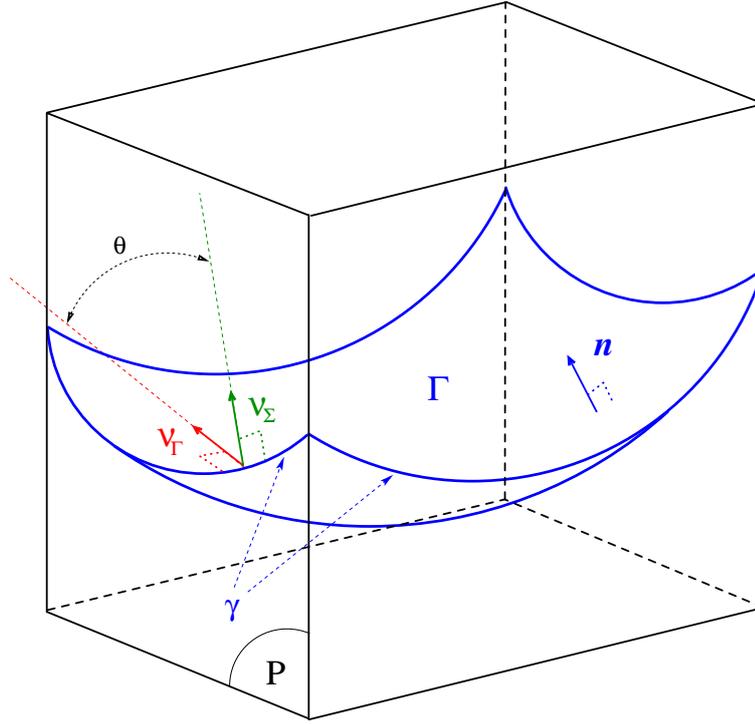


FIGURE 1.5 – Définition de ν_Γ et ν_Σ

1.3.2 Variation au premier ordre de l'énergie potentielle de pesanteur

En considérant une configuration initiale fixe Ω_{L_0} du domaine liquide (correspondant à la surface Γ_0), repérée par le vecteur position \mathbf{X}_0 , et une configuration actuelle Ω_L (correspondant à Γ), repérée par le vecteur $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{U}$, on a :

$$E_{pes} = \rho g \int_{\Omega_L} \mathbf{X} \cdot \mathbf{i}_z \, d\Omega_L = \rho g \int_{\Omega_{L_0}} \mathbf{X} \cdot \mathbf{i}_z \, \det(\mathbf{F}) \, d\Omega_{L_0} \quad (1.51)$$

où \mathbf{F} représente le gradient de la déformation volumique, défini par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \quad (1.52)$$

Les deux fonctions de \mathbf{U} sont $\mathbf{X}(\mathbf{U})$ et $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, donc

$$\begin{aligned} \delta[E_{pes}](\delta \mathbf{u}) &= \rho g \int_{\Omega_{L_0}} \delta[\mathbf{X} \det(\mathbf{F})](\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{i}_z \, d\Omega_{L_0} \\ &= \rho g \int_{\Omega_{L_0}} \left(\delta[\mathbf{X}](\delta \mathbf{u}) \det(\mathbf{F}) + \mathbf{X} \delta[\det(\mathbf{F})](\delta \mathbf{u}) \right) \cdot \mathbf{i}_z \, d\Omega_{L_0} \end{aligned} \quad (1.53)$$

D'une part :

$$\delta[\mathbf{X}](\delta \mathbf{u}) = \delta[\mathbf{X}_0 + \mathbf{U}](\delta \mathbf{u}) = \delta[\mathbf{U}](\delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{u} \quad (1.54)$$

et d'autre part, on a :

$$\delta[\det(\mathbf{F})](\delta \mathbf{u}) = \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{U}}(\delta \mathbf{u}) = \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(\delta \mathbf{u}) = \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}(\delta[\mathbf{F}](\delta \mathbf{u})) \quad (1.55)$$

Pour exprimer $\delta[\det(\mathbf{F})](\delta\mathbf{u})$, il faut donc calculer la dérivée de $\det(\mathbf{F})$ par rapport à \mathbf{F} dans la direction $\delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u})$. Comme on suppose \mathbf{F} inversible¹¹, on a :

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{F} + \epsilon \delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u})) &= \det(\mathbf{F}(\mathbf{I} + \epsilon \mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u}))) \\ &= \det(\mathbf{F}) \det(\mathbf{I} + \epsilon \mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u})) \\ &= \det(\mathbf{F}) (1 + \epsilon \operatorname{Tr}(\mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u}))) + o(\epsilon)\end{aligned}\quad (1.56)$$

Alors,

$$\delta[\det(\mathbf{F})](\delta\mathbf{u}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det(\mathbf{F} + \epsilon \delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u})) - \det(\mathbf{F})}{\epsilon} = \det(\mathbf{F}) \operatorname{Tr}(\mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u})) \quad (1.57)$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\delta[E_{pes}](\delta\mathbf{u}) &= \rho g \int_{\Omega_{L_0}} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z \det(\mathbf{F}) \, d\Omega_{L_0} + \rho g \int_{\Omega_{L_0}} \mathbf{X} \cdot \mathbf{i}_z \det(\mathbf{F}) \operatorname{Tr}(\mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u})) \, d\Omega_{L_0} \\ &= \rho g \int_{\Omega_L} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z \, d\Omega_L + \rho g \int_{\Omega_L} Z \operatorname{Tr}(\mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u})) \, d\Omega_L\end{aligned}\quad (1.58)$$

où $Z = \mathbf{X} \cdot \mathbf{i}_z$. Puisqu'on peut écrire $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}_0}$, alors $\delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u}) = \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}_0}$, donc :

$$\mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\delta\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}_0} = \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{D}_x \delta\mathbf{u} \quad (1.59)$$

Sachant que :

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{D}_x \delta\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\delta\mathbf{u}) \quad (1.60)$$

et étant donnée la formule :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(Z \delta\mathbf{u}) &= Z \operatorname{div}(\delta\mathbf{u}) + \delta\mathbf{u} \cdot \nabla Z \\ &= Z \operatorname{div}(\delta\mathbf{u}) + \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z\end{aligned}\quad (1.61)$$

alors, (1.58),(1.60) et (1.61) donnent :

$$\delta[E_{pes}](\delta\mathbf{u}) = \rho g \int_{\Omega_L} \operatorname{div}(Z \delta\mathbf{u}) \, d\Omega_L \quad (1.62)$$

Transformée par la formule d'Ostrogradsky, avec $\partial\Omega_L = \Gamma \cup \Sigma_L$, cette dernière expression devient :

$$\delta[E_{pes}](\delta\mathbf{u}) = \rho g \int_{\Gamma} Z \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \rho g \int_{\Sigma_L} Z \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} \, d\Sigma_L \quad (1.63)$$

Or $\delta\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}^{\text{vol}}$, alors $\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} = 0$ sur Σ_L , ainsi la deuxième intégrale s'annule, et on a le résultat final :

$$\boxed{\delta[E_{pes}](\delta\mathbf{u}) = \rho g \int_{\Gamma} Z \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma} \quad (1.64)$$

11. $\det(\mathbf{F})$ est le rapport entre deux volumes élémentaires non nuls.

1.3.3 Variation au premier ordre du volume liquide

$$\delta[V](\delta\mathbf{u}) = \delta \left[\int_{\Omega_L} d\Omega_L \right](\delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_{L_0}} \delta[\det(\mathbf{F})](\delta\mathbf{u}) d\Omega_{L_0} \quad (1.65)$$

D'après (1.57), (1.60) et en utilisant la formule d'Ostrogradsky, on arrive facilement à :

$$\delta[V](\delta\mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega_L} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega_L \quad (1.66)$$

Pour la même raison que plus haut, l'intégrale sur $\partial\Omega_L$ se réduit seulement à une intégrale sur Γ . On obtient alors :

$$\boxed{\delta[V](\delta\mathbf{u}) = \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma} \quad (1.67)$$

1.4 Formulation variationnelle du problème

D'après les résultats (1.50), (1.64) et (1.67), on voit que toutes les variations au premier ordre du problème peuvent s'exprimer uniquement sur la surface libre Γ du domaine liquide. En plus, le volume V du liquide peut être calculé à partir de l'intersection entre Γ et le réservoir, donc la taille du problème peut être réduite significativement en le limitant à la recherche de la surface libre uniquement : au lieu de chercher \mathbf{U} défini dans Ω_{L_0} ($\mathbf{U} \in \mathcal{C}_U^{\text{vol}}$), on va chercher uniquement sa restriction à Γ_0 , et ce nouvel espace de recherche sera noté \mathcal{C}_U . Le champ test $\delta\mathbf{u}$ qui est initialement défini dans Ω_L sera aussi restreint à Γ , donc on a désormais $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_u$, avec

$$\mathcal{C}_u = \{ \mathbf{u} \text{ définis sur } \Gamma / \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \text{ sur } \gamma \} \quad (1.68)$$

Finalement, le système (1.9) devient :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{U}, \Lambda) \in \mathcal{C}_U \times \mathbb{R} / \forall (\delta\mathbf{u}, \delta\lambda) \in \mathcal{C}_u \times \mathbb{R} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma \int_{\Gamma} 2H \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \sigma \oint_{\gamma} \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma d\gamma - (\sigma_G - \sigma_L) \oint_{\gamma} \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma d\gamma + \dots \\ \dots \rho g \int_{\Gamma} Z \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \Lambda \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \\ \delta\lambda (V - V_0) = 0 \end{array} \right. \end{array}} \quad (1.69)$$

1.5 Equation locale et condition aux limites

À partir de (1.69), on peut retrouver l'équation locale vérifiée en tout point de Γ , ainsi que la condition aux limites à imposer sur le bord γ , et cela en choisissant des fonctions tests $\delta\mathbf{u}$ particulières :

En prenant $\delta\mathbf{u}$ nulle sur γ on obtient :

$\forall \delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur γ :

$$\sigma \int_{\Gamma} 2H \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \rho g \int_{\Gamma} Z \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \Lambda \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (1.70)$$

d'où l'on retrouve l'équation locale (loi de Laplace-Young), énoncée précédemment dans (0.25) :

$$\boxed{\sigma 2H + \rho g Z = -\Lambda = \text{Cte} \quad \text{sur } \Gamma} \quad (1.71)$$

Remarque : La loi de Laplace-Young s'écrit plus généralement sous la forme $P - P_G = \sigma 2H$. Puisqu'en hydrostatique on a $P = P_{Z=0} - \rho g Z$, donc :

$$\boxed{P_G - P_{Z=0} = \Lambda} \quad (1.72)$$

En reportant (1.71) dans (1.69) et en prenant $\delta \mathbf{u} = k \boldsymbol{\nu}_\Sigma$ on obtient :

$$(\sigma_G - \sigma_L) \oint_\gamma k \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma \, d\gamma - \sigma \oint_\gamma k \boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma = 0, \quad \forall k \quad (1.73)$$

k est une fonction scalaire définie sur γ . Or, $\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma = \cos(\theta)$ (voir Figure 1.1 et Figure 1.5), alors :

$$\boxed{\boldsymbol{\nu}_\Sigma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma = \cos(\theta) = \frac{\sigma_G - \sigma_L}{\sigma}} \quad (1.74)$$

On démontre ainsi la condition d'angle de contact énoncée au §0.4. (On admet que les valeurs physiques des constantes σ , σ_L et σ_G garantissent l'existence de θ).

Remarque : On vérifie qu'en prenant $\delta \mathbf{u} = k (\boldsymbol{\nu}_\Sigma \wedge \mathbf{n}_\Sigma)$ sur γ , on obtient l'équation "0 = 0", ce qui signifie que les déplacements le long de γ ne travaillent pas (ne font pas varier l'énergie potentielle du système). D'après (1.70), on voit d'ailleurs que les déplacements tangents à Γ ne font pas, non plus, varier cette énergie.

Chapitre 2

Résolution itérative du problème statique non linéaire

Sommaire

2.1	Formulation variationnelle à linéariser	30
2.2	Newton-Raphson : linéarisation des opérateurs	31
2.2.1	Linéarisation de l'opérateur d'aire	32
2.2.2	Linéarisation de l'opérateur de bord	33
2.2.3	Linéarisation de l'opérateur de pesanteur	34
2.2.4	Linéarisation de l'opérateur d'incompressibilité	35
2.2.5	Linéarisation du volume liquide	35
2.2.6	Synthèse du problème	36
2.3	Régularisation	36
2.3.1	Singularité	36
2.3.2	Analogie mécanique	37
2.3.3	Régularisation URS avec continuation	38
2.3.4	Régularisation URS avec minimisation de la distorsion du maillage	39
2.4	Synthèse du problème	40

2.1 Formulation variationnelle à linéariser

On rappelle qu'on cherche à déterminer la position d'équilibre d'un liquide incompressible (celle de sa surface libre Γ) en présence d'un champ de pesanteur \mathbf{g} , en prenant en compte les forces de tension superficielle à la surface. La position de la surface libre Γ est paramétrée par un champ de déplacements \mathbf{U} défini par rapport à une surface de référence Γ_0 (voir Figure 1.2). La solution de ce problème statique est obtenue en résolvant le système (1.69). La condition d'angle de contact (1.74) nous permet d'écrire :

$$\sigma_G - \sigma_L = \sigma \cos(\theta) \quad (2.1)$$

Le problème (1.69) devient alors :

Trouver $(\mathbf{U}, \Lambda) \in \mathcal{C}_U \times \mathbb{R} / \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \lambda) \in \mathcal{C}_u \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sigma \int_{\Gamma} 2H \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \sigma \oint_{\gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\Gamma} \, d\gamma - \sigma \cos(\theta) \oint_{\gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\Sigma} \, d\gamma + \dots \\ \dots \rho g \int_{\Gamma} Z \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \Lambda \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \\ \delta \lambda (V - V_0) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Il s'agit d'un problème non linéaire en grands déplacements, pour le résoudre, on va utiliser la méthode de résolution itérative de Newton-Raphson : on suppose qu'on a une solution $(\mathbf{U}_k, \Lambda_k)$ à l'itération k , et qu'on veut trouver $(\mathbf{U}_{k+1}, \Lambda_{k+1})$, plus proche de la solution finale, telle que $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \mathbf{u}$ et $\Lambda_{k+1} = \Lambda_k + \lambda$. En adoptant l'hypothèse des petites perturbations, à chaque pas de calcul, on peut faire une linéarisation des opérateurs, ainsi, on se ramène à une suite de calculs linéaires dont les inconnues sont (\mathbf{u}, λ) (voir Figure 2.1).

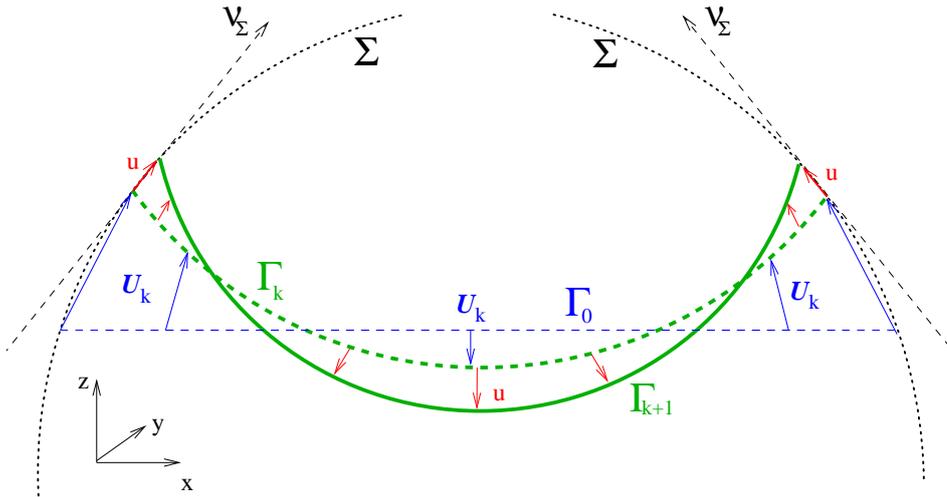


FIGURE 2.1 – Résolution itérative

Si on commence la linéarisation du problème tel qu'il est formulé dans (2.2), on va devoir linéariser l'opérateur de courbure $2H$. Pour éviter ce calcul, on va changer le formalisme d'écriture.

En effet, d'après (1.35) et (1.49), on peut écrire :

$$\int_{\Gamma} 2H \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \oint_{\gamma} \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\Gamma} \, d\gamma = \int_{\xi_1, \xi_2} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.3)$$

De plus, et pour faciliter la dérivation des opérateurs (nécessaire pour l'étape de linéarisation de la méthode Newton-Raphson), on va reporter toutes les intégrales du problème sur la surface paramétrique S_p : pour les intégrales surfaciques (opérateur de pesanteur et opérateur d'incompressibilité), on utilise la relation : $\mathbf{n} \, d\Gamma = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \, d\xi_1 d\xi_2$, alors que pour l'intégrale sur le bord γ (condition d'angle de contact), on introduit une courbe fermée de référence, paramétrée par une variable ξ de vecteur directeur $\mathbf{a}_{\gamma} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}$, on a ainsi $d\gamma = \|\mathbf{a}_{\gamma}\| \, d\xi$. En utilisant donc (2.3) et avec ce changement de variable d'intégration, le problème (2.2) devient :

Trouver $(\mathbf{U}, \Lambda) \in \mathcal{C}_U \times \mathbb{R} / \forall (\boldsymbol{\delta u}, \delta\lambda) \in \mathcal{C}_u \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sigma \mathbf{R}_{\Gamma}^{\sigma}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u}) - \sigma \cos(\theta) \mathbf{R}_{\gamma}^{\theta}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u}) + \rho g \mathbf{R}_{\Gamma}^g(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u}) + \Lambda \mathbf{R}_{\Gamma}^{\Lambda}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u}) = 0 \\ \delta\lambda (V(\mathbf{U}) - V_0) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{\Gamma}^{\sigma}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \mathbf{n}(\mathbf{U}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U}) + \mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \\ \mathbf{R}_{\gamma}^{\theta}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u}) = \oint_{\xi} \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\Sigma}(\mathbf{U}) \|\mathbf{a}_{\gamma}(\mathbf{U})\| \, d\xi \\ \mathbf{R}_{\Gamma}^g(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} Z(\mathbf{U}) \boldsymbol{\delta u} \cdot (\mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U})) \, d\xi_1 d\xi_2 \\ \mathbf{R}_{\Gamma}^{\Lambda}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \boldsymbol{\delta u} \cdot (\mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U})) \, d\xi_1 d\xi_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2 Newton-Raphson : linéarisation des opérateurs

Dans cette section, on va linéariser les opérateurs du problème (2.4). Cette opération signifie que l'on va dériver ces opérateurs, notamment par rapport au champ \mathbf{U} dans la direction du champ \mathbf{u} . D'un point de vue mathématique, cette opération s'appelle la dérivée de Lie, généralisant la notion de dérivation directionnelle d'une fonction sur une variété différentielle. On suppose que les conditions de régularité sont satisfaites ici pour légitimer de telles opérations.

Remarque concernant la dérivation de $\boldsymbol{\delta u}$: le champ $\boldsymbol{\delta u}$ est choisi d'une manière arbitraire (ses trois composantes sont arbitraires) à l'intérieur de la surface Γ , donc lors de la dérivation des opérateurs surfacique, on aura directement $\delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Cependant, ce champ test est contraint sur γ par la condition $\boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} = 0$, et on ne pourra pas, en général, considérer $\delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ sur γ . En effet, puisque la condition de glissement est vérifiée sur γ , $\forall \mathbf{U}$, alors on a sur le bord :

$$\delta[\boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}](\mathbf{u}) = 0 \quad (2.6)$$

donc

$$\delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_\Sigma = -\delta[\mathbf{n}_\Sigma](\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\delta u} = -\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma \cdot \boldsymbol{\delta u} \quad (2.7)$$

où $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma$ est le tenseur de courbure de Σ . Il est donc évident que $\delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$ sur γ , à moins de faire l'hypothèse supplémentaire que la courbure du réservoir est nulle. C'est justement le cadre choisi pour la résolution du problème statique. En effet, si on considère une telle hypothèse, le vecteur \mathbf{n}_Σ est constant lors d'un pas de calcul (indépendant de \mathbf{U}), donc on pourra construire deux vecteurs indépendants de \mathbf{U} notés \mathbf{t}_{Σ_1} et \mathbf{t}_{Σ_2} tangents à Σ en γ de telle sorte que $(\mathbf{t}_{\Sigma_1}^1, \mathbf{t}_{\Sigma_2}^2, \mathbf{n}_\Sigma)$ soit une base orthonormée, et alors on pourra écrire dans cette base $\boldsymbol{\delta u} = \delta u_1 \mathbf{t}_{\Sigma_1} + \delta u_2 \mathbf{t}_{\Sigma_2}$. Avec cette écriture, on voit clairement que $\delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Sans l'hypothèse sur la courbure du réservoir, les vecteurs $\mathbf{t}_{\Sigma_1}^1$ et $\mathbf{t}_{\Sigma_2}^2$ dépendent de \mathbf{U} et on devra donc écrire :

$$\delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u}) = \delta u_1 \delta[\mathbf{t}_{\Sigma_1}^1](\mathbf{u}) + \delta u_2 \delta[\mathbf{t}_{\Sigma_2}^2](\mathbf{u})$$

Finalement, dans toute cette partie (étude statique) $\delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ sur Γ (naturellement) et également sur le bord γ (car on fait l'hypothèse que la courbure du réservoir est négligeable sur la ligne de contact au cours d'un pas de calcul).

2.2.1 Linéarisation de l'opérateur d'aire

On a

$$\mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \mathbf{n}(\mathbf{U}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U}) + \mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.8)$$

Pour linéariser $\mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{U}_{k+1}; \boldsymbol{\delta u})$ autour de Γ_k , on écrit :

$$\mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{U}_k + \mathbf{u}; \boldsymbol{\delta u}) = \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{U}_k; \boldsymbol{\delta u}) + \underbrace{\mathbf{D}_U^k \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u})(\mathbf{u})}_{\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u})} \quad (2.9)$$

où $\mathbf{D}_U^k \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u})(\mathbf{u})$ est la dérivée de $\mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u})$ par rapport à \mathbf{U} en Γ_k , dans la direction \mathbf{u} , cette dérivée n'est autre que l'opérateur bilinéaire de rigidité (ou matrice tangente) noté : $\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u})$.

Dans la suite, et pour alléger les écritures, on continuera d'utiliser l'écriture $\delta[\mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\boldsymbol{\delta u})](\mathbf{u})$ pour désigner $\mathbf{D}_U^k \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{U}; \boldsymbol{\delta u})(\mathbf{u})$. Bien que les dérivations se fassent en Γ_k , les entités relatives à cette surface, telles que $J_k, \mathbf{n}_k, \mathbf{g}_{1k}, \mathbf{g}_{2k} \dots$, seront simplement notées $J, \mathbf{n}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots$ à l'intérieur des intégrales, c'est à dire sans l'indice k . Ainsi, pour trouver l'expression de $\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u})$, on écrit :

$$\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \delta \left[\mathbf{n}(\mathbf{U}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U}) + \mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_2} \right) \right] (\mathbf{u}) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.10)$$

L'intégrande peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta \left[\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_2} \right) \right] (\mathbf{u}) &= \underbrace{\delta[\mathbf{n}](\mathbf{u}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_1 \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_2} \right)}_{T_1} + \dots \\ &\dots + \underbrace{\mathbf{n} \cdot \delta \left[\frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_2} \right] (\mathbf{u})}_{T_2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Calcul de T_1 :

Puisque $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{J}$, alors

$$\begin{aligned} \delta[\mathbf{n}](\mathbf{u}) &= \frac{1}{J^2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) J - (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \left(\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) \right) \right] \\ &= J^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) - \mathbf{n} \left(J^{-1} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

D'après §1.3.1,

$$\begin{cases} J^{-1} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) = \operatorname{div}_s(\delta \mathbf{u}) \\ J^{-1} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) = \operatorname{div}_s(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (2.13)$$

donc

$$T_1 = J^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) - J \operatorname{div}_s(\mathbf{u}) \operatorname{div}_s(\delta \mathbf{u}) \quad (2.14)$$

Calcul de T_2 :

Puisque

$$\delta \left[\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right](\mathbf{u}) = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \quad (2.15)$$

alors

$$T_2 = \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) \quad (2.16)$$

Ainsi, on obtient la linéarisation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{U}_k + \mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) &= \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{U}_k; \delta \mathbf{u}) + \underbrace{{}^1\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) - {}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + {}^3\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})}_{\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})}, \text{ avec} \\ \begin{cases} {}^1\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\xi_1, \xi_2} J^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \\ {}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\xi_1, \xi_2} \operatorname{div}_s(\mathbf{u}) \operatorname{div}_s(\delta \mathbf{u}) J d\xi_1 d\xi_2 \\ {}^3\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\xi_1, \xi_2} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

On remarquera que les opérateurs de raideur ${}^1\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$, ${}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ et ${}^3\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ sont symétriques, et donc $\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ l'est aussi.

2.2.2 Linéarisation de l'opérateur de bord

On a

$$\mathbf{R}_\gamma^\theta(\mathbf{U}; \delta \mathbf{u}) = \oint_\xi \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma(\mathbf{U}) \|\mathbf{a}_\gamma(\mathbf{U})\| d\xi \quad (2.18)$$

De la même manière, la linéarisation de $\mathbf{R}_\gamma^\theta(\mathbf{U}_{k+1}; \delta\mathbf{u})$ au voisinage de Γ_k s'écrit¹² ici :

$$\mathbf{R}_\gamma^\theta(\mathbf{U}_k + \mathbf{u}; \delta\mathbf{u}) = \mathbf{R}_\gamma^\theta(\mathbf{U}_k; \delta\mathbf{u}) + {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad (2.19)$$

avec

$${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \oint_\xi \delta\mathbf{u} \cdot \delta[\boldsymbol{\nu}_\Sigma(\mathbf{U}) \|\mathbf{a}_\gamma(\mathbf{U})\|](\mathbf{u}) \, d\xi \quad (2.20)$$

D'autre part, on a sur le γ la relation $\boldsymbol{\nu}_\Sigma \|\mathbf{a}_\gamma\| = \mathbf{n}_\Sigma \wedge \mathbf{a}_\gamma$, et puisque $\delta[\mathbf{a}_\gamma](\mathbf{u}) = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi}$, alors :

$$\delta\mathbf{u} \cdot \delta[\boldsymbol{\nu}_\Sigma \|\mathbf{a}_\gamma\|](\mathbf{u}) = \underbrace{\delta\mathbf{u} \cdot (\delta[\mathbf{n}_\Sigma](\mathbf{u}) \wedge \mathbf{a}_\gamma)}_{=0} + \delta\mathbf{u} \cdot \left(\mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi} \right) \quad (2.21)$$

Le premier produit mixte s'annule¹³ car les vecteurs $\delta\mathbf{u}$, $\delta[\mathbf{n}_\Sigma](\mathbf{u})$ et \mathbf{a}_γ sont coplanaires (appartiennent tous au plan tangent au réservoir). La linéarisation de l'opérateur de bord s'écrit donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{R}_\gamma^\theta(\mathbf{U}_k + \mathbf{u}; \delta\mathbf{u}) &= \mathbf{R}_\gamma^\theta(\mathbf{U}_k; \delta\mathbf{u}) + {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}), \text{ avec} \\ {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \oint_\xi \delta\mathbf{u} \cdot \left(\mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi} \right) \, d\xi \end{aligned}} \quad (2.22)$$

2.2.3 Linéarisation de l'opérateur de pesanteur

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\Gamma^g(\mathbf{U}; \delta\mathbf{u}) &= \int_{\xi_1, \xi_2} Z(\mathbf{U}) \delta\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U})) \, d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{\xi_1, \xi_2} (Z_0 + \mathbf{U} \cdot \mathbf{i}_z) \delta\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U})) \, d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

En linéarisant $\mathbf{R}_\Gamma^g(\mathbf{U}_{k+1}; \delta\mathbf{u})$ autour de Γ_k , on aura

$$\mathbf{R}_\Gamma^g(\mathbf{U}_k + \mathbf{u}; \delta\mathbf{u}) = \mathbf{R}_\Gamma^g(\mathbf{U}_k; \delta\mathbf{u}) + \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad (2.24)$$

avec

$$\mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \delta\mathbf{u} \cdot \delta[(Z_0 + \mathbf{U} \cdot \mathbf{i}_z)(\mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U}))](\mathbf{u}) \, d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.25)$$

On a

$$\delta[(Z_0 + \mathbf{U} \cdot \mathbf{i}_z)(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)](\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z)(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) + Z \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi_2} \right) \quad (2.26)$$

12. On rappelle que dans cette partie, on néglige les effets de courbure du réservoir, cela se manifeste dans la linéarisation de la condition d'angle de contact par la disparition d'un terme dans la raideur du bord, c'est pour cela qu'on a choisi de noter cette dernière avec l'indice « 1 », le complément tenant compte de la courbure de Σ sera introduit dans la deuxième partie (étude dynamique).

13. Puisqu'on néglige la courbure du réservoir, alors $\delta[\mathbf{n}_\Sigma](\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, mais cela est ici transparent car le produit mixte est de toute façon nul.

Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\Gamma^g(\mathbf{U}_k + \mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) &= \mathbf{R}_\Gamma^g(\mathbf{U}_k; \delta \mathbf{u}) + \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}), \text{ avec} \\ \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\xi_1, \xi_2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z) \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\xi_1, \xi_2} Z \delta \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2.4 Linéarisation de l'opérateur d'incompressibilité

On a

$$\Lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}; \delta \mathbf{u}) = \Lambda \int_{\xi_1, \xi_2} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U})) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.28)$$

En linéarisant $\Lambda_{k+1} \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}_{k+1}; \delta \mathbf{u})$ autour de Γ_k , on aura

$$(\Lambda_k + \lambda) \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}_k + \mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) = \Lambda_k \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}_k; \delta \mathbf{u}) + \Lambda_k \underbrace{\delta[\mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}; \delta \mathbf{u})](\mathbf{u})}_{\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})} + \underbrace{\mathbf{D}_\Lambda^k \Lambda(\lambda)}_\lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}_k; \delta \mathbf{u}) \quad (2.29)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\xi_1, \xi_2} \delta \mathbf{u} \cdot \delta[\mathbf{a}_1(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{U})](\mathbf{u}) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{\xi_1, \xi_2} \delta \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (\Lambda_k + \lambda) \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}_k + \mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) &= \Lambda_k \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}_k; \delta \mathbf{u}) + \Lambda_k \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}_k; \delta \mathbf{u}), \text{ avec} \\ \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\xi_1, \xi_2} \delta \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.2.5 Linéarisation du volume liquide

Pour linéariser la contrainte d'incompressibilité, on doit linéariser $V(\mathbf{U}_{k+1})$. Or d'après §1.3.3 on a immédiatement :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{U}_k + \mathbf{u}) &= V(\mathbf{U}_k) + \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= V(\mathbf{U}_k) + \int_{\xi_1, \xi_2} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= V(\mathbf{U}_k) + \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}_k; \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ainsi :

$$V(\mathbf{U}_k + \mathbf{u}) = V(\mathbf{U}_k) + \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{U}_k; \mathbf{u}) \quad (2.33)$$

2.2.6 Synthèse du problème

Avec les résultats qu'on vient d'établir, le problème à l'itération k peut s'écrire sous la forme suivante¹⁴ :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \lambda) \in \mathcal{C}_u \times \mathbb{R} / \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \lambda) \in \mathcal{C}_u \times \mathbb{R} \\ \sigma \mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) - \sigma \cos(\theta) {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \rho g \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \dots \\ \dots \Lambda \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\delta \mathbf{u}) = -\mathbf{R}(\delta \mathbf{u}) \\ \delta \lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}) = \delta \lambda (V_0 - V) \end{cases} \quad (2.34)$$

où $\mathbf{R}(\delta \mathbf{u})$ est le résidu à l'itération k :

$$\mathbf{R}(\delta \mathbf{u}) = \sigma \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\delta \mathbf{u}) - \sigma \cos(\theta) \mathbf{R}_\gamma^\theta(\delta \mathbf{u}) + \rho g \mathbf{R}_\Gamma^g(\delta \mathbf{u}) + \Lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\delta \mathbf{u})$$

2.3 Régularisation

2.3.1 Singularité

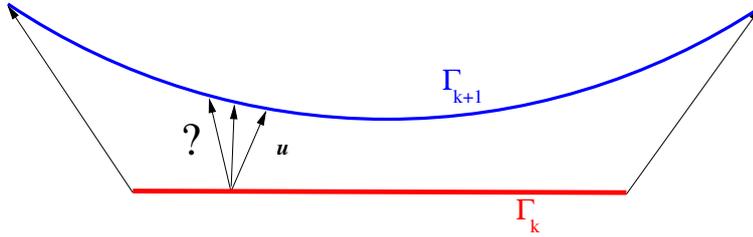


FIGURE 2.2 – Indétermination tangentielle

Dans le problème (2.34), les déplacements tangentiels ne travaillent pas, ce qui se traduit par l'absence de raideur tangentielle et fait que le problème est mal conditionné lorsque l'on fait le choix de chercher un champ tridimensionnel. Cette singularité est bien connue dans les problèmes de minimisation de surfaces [46], et est liée au fait qu'il n'existe pas un unique champ vectoriel \mathbf{u} qui permet de décrire une surface Γ_{k+1} à partir d'une surface Γ_k (voir Figure 2.2).

Pour remédier à ce manque de raideur, une première solution est de restreindre les déplacements de la surface libre à des directions prédéfinies et non tangentes à la surface actuelle [5], ainsi les trois degrés de liberté par nœud se réduisent à un seul. Le problème avec cette solution est qu'il est techniquement difficile de trouver, à priori, ces directions pour un réservoir de forme arbitraire dans le cas de grandes déformations (ce qui est le cas dans notre problème). Ce type de régularisation est pourtant utilisé dans le logiciel Surface-Evolver (K. A. Brakke [14]), où les nœuds de la surface sont contraints à se déplacer dans la direction normale, mais dans ce

14. Les opérateurs de ce problème sont calculés sur Γ_k , c'est à dire qu'ils dépendent de \mathbf{U}_k . Cependant, et pour plus de lisibilité, on ne va écrire que les dépendances en \mathbf{u} et $\delta \mathbf{u}$.

cas, l'utilisateur doit interrompre le calcul régulièrement pour visualier la qualité du maillage, corriger la distorsion de ce dernier et appliquer certaines opérations d'accompagnement pour que le calcul puisse se poursuivre.

Afin d'avoir une méthode de régularisation adaptée à des géométries complexes (même pour des déplacements relativement grands) et qui soit autonome (ne nécessitant pas l'intervention de l'utilisateur durant le calcul), on a choisi d'adapter une méthode appelée *Updated Reference Strategy (URS)*, proposée par K.-U. Bletzinger [10, 11] pour la régularisation de problèmes de recherche de surfaces minimales. L'idée principale de cette procédure est de garder les trois degrés de libertés par nœud, et de modifier le problème initial en lui ajoutant un terme supplémentaire dépendant de la surface de référence Γ_0 et qui va introduire une raideur additionnelle. En mettant à jour cette surface de référence au cours des itérations, on garantit que la solution finale ne va pas dépendre du terme ajouté et va correspondre en plus à l'une des solutions du problème initial. Pour présenter cette méthodologie, il est nécessaire de rappeler tout d'abord l'analogie qui existe entre le problème de minimisation de surface et le problème mécanique d'équilibre de membrane élastique.

2.3.2 Analogie mécanique

La singularité du problème (2.34) correspond à la singularité du problème de minimisation de l'énergie de tension superficielle E_Γ . D'après (1.17), cette énergie peut être calculée en se référant à une surface de référence arbitraire Γ_0 (isomorphe à Γ), et on a donc :

$$E_\Gamma = \sigma \int_\Gamma d\Gamma = \sigma \int_{\Gamma_0} \det(\mathbf{F}_s) d\Gamma_0 \quad (2.35)$$

où \mathbf{F}_s est le gradient de la transformation $\Gamma_0 \rightarrow \Gamma$, donné par¹⁵ :

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_0^i \quad \text{avec } i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.36)$$

On montre donc, grâce à (1.57), que la variation au premier ordre de E_Γ , quand Γ est perturbée par un champ vectoriel $\delta\mathbf{u}$, peut être exprimée par :

$$\delta[E_\Gamma](\delta\mathbf{u}) = \sigma \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\delta\mathbf{u}) = \sigma \int_{\Gamma_0} \det(\mathbf{F}_s) \mathbf{F}_s^{-\top} : \delta[\mathbf{F}_s](\delta\mathbf{u}) d\Gamma_0 \quad (2.37)$$

D'autre part, la variation au premier ordre de l'énergie de déformation d'une membrane coïncidant avec Γ , subissant un champ de contraintes donné $\boldsymbol{\sigma}$ et ayant une épaisseur constante e , peut être calculée sur la surface de référence Γ_0 par :

$$\delta[E_{déf}](\delta\mathbf{u}) = e \int_{\Gamma_0} \det(\mathbf{F}_s) (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}_s^{-\top}) : \delta[\mathbf{F}_s](\delta\mathbf{u}) d\Gamma_0 \quad (2.38)$$

On remarque donc une analogie entre le problème de minimisation de surface et le problème de membrane élastique si le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ est isotrope et uniforme tel que $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\sigma}{e} \mathbf{I}$.

Dans la suite, on utilisera le terme « contrainte » pour désigner une force par unité de longueur de membrane, de cette manière, on évitera toute allusion à l'épaisseur puisque l'on considère ici des surfaces d'épaisseur nulle.

Soit \mathbf{S} le second tenseur de Piola-Kirchhoff défini par :

$$\mathbf{S} = \det(\mathbf{F}_s) \mathbf{F}_s^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}_s^{-\top} \quad (2.39)$$

15. On adopte la convention de la sommation sur les indices répétés.

où le tenseur de contraintes de Cauchy-Green est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{I} \quad (2.40)$$

alors, (2.37) devient :

$$\sigma \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\boldsymbol{\delta u}) = \int_{\Gamma_0} (\mathbf{F}_s \mathbf{S}) : \delta[\mathbf{F}_s](\boldsymbol{\delta u}) \, d\Gamma_0 \quad (2.41)$$

2.3.3 Régularisation URS avec continuation

Bletzinger et al. [11] ont proposé de résoudre le problème de singularité en utilisant le principe de continuation¹⁶, de paramètre $r \in]0, 1]$, entre le terme (2.37) et un terme de régularisation $\sigma \mathbf{R}_\Gamma^r(\boldsymbol{\delta u})$ construit à partir de (2.41) en prenant $\mathbf{S} = \sigma \mathbf{I}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{R}_\Gamma^r(\boldsymbol{\delta u}) &= \sigma \int_{\Gamma_0} \mathbf{F}_s : \delta[\mathbf{F}_s](\boldsymbol{\delta u}) \, d\Gamma_0 \\ &= \sigma \int_{\Gamma_0} a_0^{ij} \frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_i} \cdot \mathbf{a}_j \, d\Gamma_0, \quad \text{avec } i, j \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

où a_0^{ij} sont les composantes du tenseur métrique contravariant $\bar{\mathbf{a}}_0$ de Γ_0 . Ainsi, on modifie (2.4) en remplaçant la première équation par :

$$\sigma [(1-r) \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\boldsymbol{\delta u}) + r \mathbf{R}_\Gamma^r(\boldsymbol{\delta u})] - \sigma \cos(\theta) \mathbf{R}_\gamma^\theta(\boldsymbol{\delta u}) + \rho g \mathbf{R}_\Gamma^g(\boldsymbol{\delta u}) + \Lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\boldsymbol{\delta u}) = 0 \quad (2.43)$$

Si Γ_0 tend vers Γ , on aura $\mathbf{F}_s \rightarrow \mathbf{I}$ alors $\mathbf{R}_\Gamma^r \rightarrow \mathbf{R}_\Gamma^\sigma$, cela veut dire que la solution du problème modifié va converger vers une solution du problème initial ($\forall r > 0$). D'autre part, la différentiation de $\mathbf{R}_\Gamma^r(\boldsymbol{\delta u})$ va donner au problème une raideur additionnelle $\mathbf{K}_\Gamma^r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u})$ donnée par :

$$\mathbf{K}_\Gamma^r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \delta[\mathbf{R}_\Gamma^r(\boldsymbol{\delta u})](\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_0} a_0^{ij} \frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} \, d\Gamma_0, \quad \text{avec } i, j \in \{1, 2\} \quad (2.44)$$

\mathbf{K}_Γ^r est un terme de raideur classique connu sous le nom de *raideur géométrique*.

Dans le contexte de la résolution itérative de Newton-Raphson, le problème (2.34) sera transformé en remplaçant \mathbf{R}_Γ^σ par $[(1-r) \mathbf{R}_\Gamma^\sigma + r \mathbf{R}_\Gamma^r]$ et \mathbf{K}_Γ^σ sera remplacée par $[(1-r) \mathbf{K}_\Gamma^\sigma + r \mathbf{K}_\Gamma^r]$. La méthode URS, comme son nom l'indique, sera appliquée à ce nouveau problème en mettant à jour la surface de référence : à chaque pas de calcul, la surface de référence sera la surface obtenue à l'itération précédente, ainsi $\mathbf{F}_s = \mathbf{I}$, donc $\mathbf{R}_\Gamma^\sigma = \mathbf{R}_\Gamma^r$ à chaque itération. Cela signifie que la procédure URS ne modifie pas le résidu dans (2.34), mais ajoute seulement une raideur supplémentaire qui va régulariser le problème.

Dans [11], les auteurs proposent de changer la valeur de r au cours des itérations de 1 vers 0.1 afin d'accélérer la convergence. La résolution reste cependant efficace et robuste sans avoir recours à cette continuation. Il faut noter que quand $r \rightarrow 0$, le problème devient de plus en plus singulier, et on préfère pour notre cas, fixer la valeur de r à 1, de cette manière, la matrice du système linéaire modifié reste bien conditionnée et en plus de cela, on évite l'assemblage de l'opérateur \mathbf{K}_Γ^σ à chaque pas de calcul.

16. Le principe de la méthode de continuation peut se résumer ainsi : si on veut résoudre une équation $f(x) = 0$ mais que cette dernière est singulière (admet une infinité de solutions possibles), on résout plutôt le problème $(1-r)f(x) + rg(x) = 0$, où $g(x) = 0$ est un problème régulier. On fait ensuite tendre le paramètre r vers 0 pour avoir une solution du problème initial.

2.3.4 Régularisation URS avec minimisation de la distorsion du maillage

La méthode URS proposée par Bletzinger est efficace et donne de bons résultats, cependant, le choix de l'opérateur de régularisation \mathbf{R}_Γ^r (construit à partir de (2.41) en prenant $\mathbf{S} = \sigma \mathbf{I}$) reste quelque peu arbitraire et intuitif dans la mesure où l'on peut construire une infinité de ces opérateurs qui auront à peu près les mêmes propriétés.

On présente ici une autre manière de régulariser le problème qui a l'avantage d'être plus méthodique dans la construction du terme de régularisation. Cette procédure a été proposée par J. Bonet and J. Mahaney dans le contexte de recherche de surfaces minimales [12]. Cette méthode consiste à ajouter au problème de minimisation d'énergie, une énergie de distorsion E_d faisant travailler les déplacements tangents. Cette énergie de distorsion E_d est définie en utilisant un modèle neo-hookéen communément utilisé pour décrire les comportements hyperélastiques :

$$E_d = \frac{\sigma_d}{2} \int_{\Gamma_0} \left(\tilde{\mathbf{F}}_s : \tilde{\mathbf{F}}_s - 3 \right) d\Gamma_0 \quad (2.45)$$

où σ_d est un module de cisaillement fictif ajouté au comportement de membrane de la surface libre et $\tilde{\mathbf{F}}_s$ la partie isochore¹⁷ de \mathbf{F}_s définie par :

$$\tilde{\mathbf{F}}_s = \det(\mathbf{F}_s)^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}_s \quad (2.46)$$

La différentiation de cette énergie donne un nouvel opérateur de régularisation \mathbf{R}_Γ^d tel que :

$$\delta[E_d](\delta\mathbf{u}) = \sigma_d \mathbf{R}_\Gamma^d(\delta\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_0} (\mathbf{F}_s \tilde{\mathbf{S}}) : \delta[\mathbf{F}_s](\delta\mathbf{u}) d\Gamma_0 \quad (2.47)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{S}} = \sigma_d \det(\mathbf{F}_s)^{-\frac{2}{3}} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{F}_s : \mathbf{F}_s) (\mathbf{F}_s^\top \mathbf{F}_s)^{-1} \right) \quad (2.48)$$

D'après (2.39), le tenseur de Cauchy-Green correspondant à $\tilde{\mathbf{S}}$ est :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_d \det(\mathbf{F}_s)^{-\frac{5}{3}} \left(\mathbf{F}_s \mathbf{F}_s^\top - \frac{1}{3} (\mathbf{F}_s : \mathbf{F}_s) \mathbf{I} \right) \quad (2.49)$$

Il est facile de vérifier que la trace de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ est bien nulle : le tenseur des contraintes que l'on a ajouté à la surface libre est purement déviateur.

Maintenant, la première équation du problème (2.4) sera remplacée par :

$$\sigma \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\delta\mathbf{u}) + \sigma_d \mathbf{R}_\Gamma^d(\delta\mathbf{u}) - \sigma \cos(\theta) \mathbf{R}_\Gamma^\theta(\delta\mathbf{u}) + \rho g \mathbf{R}_\Gamma^g(\delta\mathbf{u}) + \Lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\delta\mathbf{u}) = 0 \quad (2.50)$$

On peut vérifier que si $\mathbf{F}_s \rightarrow \mathbf{I}$, alors l'opérateur $\mathbf{R}_\Gamma^d \rightarrow \mathbf{0}$. Dans le cadre de la procédure URS ($\mathbf{F}_s = \mathbf{I}$ à chaque pas), le résidu de (2.34) ne sera toujours pas changé. Par contre, la matrice de raideur \mathbf{K}_Γ^d introduite par cette énergie de distorsion ne sera pas nulle, et elle est obtenue en différentiant \mathbf{R}_Γ^d dans la direction \mathbf{u} puis en prenant $\mathbf{F}_s = \mathbf{I}$. Après avoir effectué ces calculs on arrive à :

$$\mathbf{K}_\Gamma^d = \mathbf{K}_\Gamma^r - \mathbf{K}_\Gamma^\sigma + \frac{1}{3} {}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma \quad (2.51)$$

17. La construction de $\tilde{\mathbf{F}}_s$ fait que $\det(\tilde{\mathbf{F}}_s) = 1$, cela veut dire que la transformation représentée par $\tilde{\mathbf{F}}_s$ ne voit pas la variation du volume entre la configuration de référence et la configuration finale, c'est à dire que $\tilde{\mathbf{F}}_s$ ne voit pas la variation de l'aire de la surface (puisque l'épaisseur est constante).

Si on écrit $\sigma_d = r \sigma$, où $r > 0$, le problème (2.34) sera transformé en remplaçant la raideur de tension de surface initiale \mathbf{K}_Γ^σ par $[(1-r)\mathbf{K}_\Gamma^\sigma + r\mathbf{K}_\Gamma^r + \frac{r}{3}{}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma]$. Comparé avec la méthode de continuation, on a ici un terme supplémentaire : $\frac{r}{3}{}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma$. Même si on a pas noté de différences notables en utilisant ces deux approches, on retiendra cette deuxième méthode car la construction du terme de régularisation est plus rigoureuse. Comme précédemment, on choisi $r = 1$ pour les mêmes raisons (voir §2.3.3).

2.4 Synthèse du problème

Avec les résultats qu'on vient d'établir, et en adoptant la seconde méthode de régularisation, le problème à l'itération k peut s'écrire sous la forme suivante :

Trouver $(\mathbf{u}, \lambda) \in \mathcal{C}_u \times \mathbb{R} / \forall (\delta\mathbf{u}, \delta\lambda) \in \mathcal{C}_u \times \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \left(\mathbf{K}_\Gamma^r(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \frac{1}{3}{}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \right) - \sigma \cos(\theta) {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \dots \\ \dots \rho g \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \Lambda \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\delta\mathbf{u}) = -\mathbf{R}(\delta\mathbf{u}) \\ \delta\lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}) = \delta\lambda (V_0 - V) \end{array} \right. \quad (2.52)$$

où $\mathbf{R}(\delta\mathbf{u})$ est le résidu à l'itération k :

$$\mathbf{R}(\delta\mathbf{u}) = \sigma \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\delta\mathbf{u}) - \sigma \cos(\theta) \mathbf{R}_\gamma^\theta(\delta\mathbf{u}) + \rho g \mathbf{R}_\Gamma^g(\delta\mathbf{u}) + \Lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\delta\mathbf{u})$$

Au fur et à mesure des itérations, le résidu tendra vers zéro, et l'incrément (\mathbf{u}, λ) également. Le critère d'arrêt consiste classiquement à tester, soit la nullité du résidu ou bien celle de l'incrément. On préfère la première solution car un résidu qui tend vers zéro signifie directement que la solution s'approche de l'équilibre. Le fait que l'incrément $(\mathbf{u}, \lambda) \rightarrow (\mathbf{0}, 0)$ veut dire que l'évolution est lente, ceci pourrait se produire loin de la solution si, par exemple, la fonctionnelle à minimiser présente une "vallée".

Remarque : la généralisation au cas de surfaces libres à plusieurs bords est immédiate. En effet, si par exemple Γ est traversée par m structures (tuyaux, antiballottants,...etc), elle aura donc m bords supplémentaires γ_i . Si en plus chaque poutre est faite dans un matériau différent, les angles de contact θ_i seront, en général, différents d'un bord à l'autre. Le problème à chaque

pas de calcul sera :

Trouver $(\mathbf{u}, \lambda) \in \mathcal{C}_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R} / \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \lambda) \in \mathcal{C}_{\mathbf{u}} \times \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \left(\mathbf{K}_{\Gamma}^r(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \frac{1}{3} {}^2\mathbf{K}_{\Gamma}^{\sigma}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \right) - \sigma \cos(\theta) {}^1\mathbf{K}_{\gamma}^{\theta}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) - \dots \\ \dots \sigma \sum_{i=1}^m \cos(\theta_i) {}^1\mathbf{K}_{\gamma_i}^{\theta}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \rho g \mathbf{K}_{\Gamma}^g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \Lambda \mathbf{K}_{\Gamma}^{\Lambda}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \lambda \mathbf{R}_{\Gamma}^{\Lambda}(\delta \mathbf{u}) = -\mathbf{R}(\delta \mathbf{u}) \\ \delta \lambda \mathbf{R}_{\Gamma}^{\Lambda}(\mathbf{u}) = \delta \lambda (V_0 - V) \end{array} \right.$$

où $\mathbf{R}(\delta \mathbf{u})$ est le résidu à l'itération k :

$$\mathbf{R}(\delta \mathbf{u}) = \sigma \mathbf{R}_{\Gamma}^{\sigma}(\delta \mathbf{u}) - \sigma \cos(\theta) \mathbf{R}_{\gamma}^{\theta}(\delta \mathbf{u}) - \sigma \sum_{i=1}^m \cos(\theta_i) \mathbf{R}_{\gamma_i}^{\theta}(\delta \mathbf{u}) + \rho g \mathbf{R}_{\Gamma}^g(\delta \mathbf{u}) + \Lambda \mathbf{R}_{\Gamma}^{\Lambda}(\delta \mathbf{u})$$

(2.53)

où les opérateurs ${}^1\mathbf{K}_{\gamma_i}^{\theta}$ et $\mathbf{R}_{\gamma_i}^{\theta}$ ont les mêmes expressions que ${}^1\mathbf{K}_{\gamma}^{\theta}$ et $\mathbf{R}_{\gamma}^{\theta}$ respectivement, la seule différence est qu'ils sont calculés sur γ_i .

Chapitre 3

Mise en œuvre numérique et validation

Sommaire

3.1	Numérisation par la méthode des éléments finis	44
3.1.1	Présentation de la démarche	44
3.1.2	Problème matriciel	45
3.1.3	Prise en compte de la contrainte de glissement	46
3.2	Résolution	46
3.2.1	Pas de charge sur la condition aux limites	46
3.2.2	Glissement sur le réservoir	47
3.2.3	Calcul du volume liquide	48
3.3	Exemples d'application	49
3.3.1	Cadre général pour les exemples	49
3.3.2	Configurations simples	49
3.3.3	Configurations complexes	51
3.4	Validation	54
3.4.1	Solution 2D axisymétrique	54
3.4.2	Critère de Concus-Finn : angle de contact critique	57

3.1 Numérisation par la méthode des éléments finis

3.1.1 Présentation de la démarche

La méthode retenue pour la résolution numérique du problème (2.52) est la méthode des éléments finis. Ce choix se justifie par la souplesse de cette méthode, notamment pour traiter des cas 3D complexes, et aussi par la possibilité d'intégration dans les logiciels commerciaux qui utilisent en grande majorité cette méthode. De nombreux ouvrages détaillent cette méthode : citons entre autre ceux de Zienkiewicz & Taylor [99], Ciarlet [21] et Bathe [3].

La méthode des éléments finis se base sur la discrétisation spatiale (maillage) du domaine d'étude au moyen d'éléments de géométries simples standardisés. Comme notre problème est surfacique (recherche de la surface libre du domaine liquide), on va utiliser la discrétisation la plus simple et la plus souple qui est le maillage triangulaire non structuré. Des logiciels (mailleurs) existent pour générer automatiquement de tels discrétisations. Ainsi, à partir des valeurs aux nœuds d'un triangle élémentaire s_e , la géométrie et le champ inconnu seront interpolés à l'intérieur de l'élément (maille de la surface libre) au moyen de trois fonctions de forme $N_1(\Xi)$, $N_2(\Xi)$ et $N_3(\Xi)$, où Ξ est une paramétrisation bidimensionnelle décrivant le triangle de référence. Grâce à la formulation du problème (2.52) qui ne fait intervenir que la dérivée première (car on a éliminé les termes contenant la courbure), on pourra se contenter des fonctions de forme les plus simples, à savoir des polynômes du premier degré en Ξ . On utilisera cette interpolation pour la géométrie ainsi que pour le champ inconnu (éléments finis isoparamétriques). Puisque la formulation du problème (2.52) est indépendante du choix des coordonnées de référence ξ_1 et ξ_2 , alors chaque triangle du maillage surfacique pourra simplement être paramétré à partir du triangle de référence éléments finis. Ainsi, ξ_1 et ξ_2 seront tout simplement les variables des fonctions de forme ($\Xi = (\xi_1, \xi_2)$), et on aura donc $N_1 = 1 - \xi_1 - \xi_2$, $N_2 = \xi_1$ et $N_3 = \xi_2$. Ainsi sur l'élément s_e , le vecteur position \mathbf{X}^{s_e} , décrivant la géométrie, le champ inconnu \mathbf{u}^{s_e} et le champ test $\delta\mathbf{u}^{s_e}$ seront discrétisés en écrivant :

$$\mathbf{X}^{s_e} = \mathbf{N}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{X}^{s_e}, \quad \mathbf{u}^{s_e} = \mathbf{N}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}^{s_e} \quad \text{et} \quad \delta\mathbf{u}^{s_e} = \mathbf{N}(\xi_1, \xi_2) \delta\mathbf{u}^{s_e} \quad (3.1)$$

où \mathbf{X}^{s_e} , \mathbf{u}^{s_e} et $\delta\mathbf{u}^{s_e}$ sont les vecteurs colonnes (9×1) des valeurs aux nœuds du triangle s_e de \mathbf{X}^{s_e} , \mathbf{u}^{s_e} et $\delta\mathbf{u}^{s_e}$ respectivement, disposés, par exemple, en regroupant les trois degrés de liberté (ddl) de chaque nœud (composantes selon \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y puis \mathbf{i}_z) tout en respectant l'ordre conventionnel de numérotation des nœuds du triangle. Avec ces conventions, la matrice des fonctions de forme \mathbf{N} aura la forme :

$$\mathbf{N}(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Vu les formes complexes que peuvent avoir les réservoirs réels, la géométrie de ces derniers est souvent disponible sous forme de modèle éléments finis. Pour cette raison, on va utiliser également des maillages triangulaires non structurés pour la représentation du réservoir (qui est une donnée du problème). On rappelle que ce dernier est non déformable, il est là uniquement pour guider le glissement de la surface libre au cours des itérations, et aussi pour évaluer le volume liquide présent entre le réservoir et la surface libre.

La surface initiale Γ_0 sera horizontale et correspondra au volume V_0 .

3.1.2 Problème matriciel

Le problème (2.52) peut aisément être discrétisé puisque tous les opérateurs sont déjà exprimés en fonction des variables ξ_1 et ξ_2 . Les dérivées présentes dans ces opérateurs sont également faciles à calculer puisqu'elles consistent uniquement à dériver les polynômes du premier degré N_i . Pour les opérateurs de bord (intégrales linéiques), une discrétisation de la courbe γ avec des éléments finis unidimensionnels (segments) est nécessaire. Par soucis de simplicité, les nœuds du bord γ coïncident avec ceux de Γ .

Sans entrer plus dans les détails de cette méthode très classique, on passera directement au problème discrétisé obtenu après assemblage des différents opérateurs, ainsi on obtient les écritures matricielles suivantes :

$$\mathbf{K}_\Gamma^r(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{K}_\Gamma^r \mathbf{u} \quad (3.3a)$$

$${}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top {}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma \mathbf{u} \quad (3.3b)$$

$${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta \mathbf{u} \quad (3.3c)$$

$$\mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{K}_\Gamma^g \mathbf{u} \quad (3.3d)$$

$$\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda \mathbf{u} \quad (3.3e)$$

$$\mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{R}_\Gamma^\sigma \quad (3.3f)$$

$$\mathbf{R}_\gamma^\theta(\delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{R}_\gamma^\theta \quad (3.3g)$$

$$\mathbf{R}_\Gamma^g(\delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{R}_\Gamma^g \quad (3.3h)$$

$$\mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda \quad (3.3i)$$

où \mathbf{u} et $\delta\mathbf{u}$ sont les vecteurs colonnes contenant tous les ddls de la surface libre (3 ddls par nœud correspondant aux déplacements dans les trois directions de l'espace, y compris pour les nœuds du bord γ car la contrainte de glissement n'a pas encore été prise en compte à ce stade). Ainsi, l'équation (2.52) est équivalente au problème matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^\top & \delta\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda \\ \mathbf{R}_\Gamma^{\Lambda\top} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^\top & \delta\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{R} \\ V_0 - V \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

où \mathbf{R} est le vecteur résidu à l'itération k donné par :

$$\mathbf{R} = \sigma \mathbf{R}_\Gamma^\sigma - \sigma \cos(\theta) \mathbf{R}_\gamma^\theta + \rho g \mathbf{R}_\Gamma^g + \Lambda \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda \quad (3.5)$$

et où \mathbf{K} est la matrice hessienne du problème régularisé, donnée par :

$$\mathbf{K} = \sigma \left(\mathbf{K}_\Gamma^r + \frac{1}{3} {}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma \right) - \sigma \cos(\theta) {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta + \rho g \mathbf{K}_\Gamma^g + \Lambda \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda \quad (3.6)$$

La taille de \mathbf{K} est $3N_\Gamma \times 3N_\Gamma$, où N_Γ est le nombre des nœuds de Γ .

3.1.3 Prise en compte de la contrainte de glissement

Dans la discrétisation que l'on vient de faire, on n'a pas tenu compte du fait que \mathbf{u} et $\delta\mathbf{u}$ appartiennent à \mathcal{C}_u (c'est à dire que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ et $\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ sur γ). Il s'agit là d'une contrainte dite « forte » qu'il s'agit d'imposer directement dans l'espace de recherche, c'est à dire que pour tout nœud i qui se trouve sur γ , on utilisera un champ test tel que $\delta\mathbf{u}^i = \delta u_1^i \mathbf{t}_{\Sigma_1}^i + \delta u_2^i \mathbf{t}_{\Sigma_2}^i$, et on cherchera un déplacement tel que $\mathbf{u}^i = u_1^i \mathbf{t}_{\Sigma_1}^i + u_2^i \mathbf{t}_{\Sigma_2}^i$, où $\mathbf{t}_{\Sigma_1}^i$ et $\mathbf{t}_{\Sigma_2}^i$ sont deux vecteurs unitaires tangents à Σ en i tels que $(\mathbf{t}_{\Sigma_1}^i, \mathbf{t}_{\Sigma_2}^i, \mathbf{n}_\Sigma^i)$ est une base orthonormée (\mathbf{n}_Σ^i étant la normale à Σ en i). On peut construire une infinité de bases de cette façon, obtenues par rotation autour de \mathbf{n}_Σ^i , et ici on en choisit une arbitrairement.

Ainsi, dans $\delta\mathbf{u}$ et \mathbf{u} , on remplacera, pour chaque nœud i du bord, les 3 dds initiaux par les deux dds glissant en écrivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_x^i \\ \delta u_y^i \\ \delta u_z^i \end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{u}^i} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\Sigma_1}^i & \mathbf{t}_{\Sigma_2}^i \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1^i \\ \delta u_2^i \end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{u}_G^i} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ u_z^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^i} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\Sigma_1}^i & \mathbf{t}_{\Sigma_2}^i \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_G^i} \quad (3.7)$$

Pour les nœuds qui ne sont pas sur le bord de la surface Γ , on ne change pas les dds (on multiplie par l'identité), de cette façon, on arrive à construire une matrice \mathbf{G} de taille $3N_\Gamma \times (3N_\Gamma - N_\gamma)$, où N_γ est le nombre de nœuds de γ , telle que :

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{G} \delta\mathbf{u}_G \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{u}_G \quad (3.8)$$

où $\delta\mathbf{u}_G$ et \mathbf{u}_G tiennent compte du glissement grâce à (3.7), et auront donc N_γ composantes en moins. Ainsi, le système (3.4) devient :

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}_G^\top & \delta\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}^\top \mathbf{K} \mathbf{G} & \mathbf{G}^\top \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda \\ \mathbf{R}_\Gamma^{\Lambda^\top} \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_G \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}_G^\top & \delta\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{G}^\top \mathbf{R} \\ V_0 - V \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Le système (3.9) est vérifié $\forall \delta\mathbf{u}_G$ et $\forall \delta\lambda$, ce qui revient à résoudre le système linéaire :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{G}^\top \mathbf{K} \mathbf{G} & \mathbf{G}^\top \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda \\ \mathbf{R}_\Gamma^{\Lambda^\top} \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_G \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}^\top \mathbf{R} \\ V_0 - V \end{bmatrix}} \quad (3.10)$$

3.2 Résolution

3.2.1 Pas de charge sur la condition aux limites

L'algorithme itératif de Newton-Raphson que l'on utilise ici pour résoudre le problème statique est une méthode de minimisation qui utilise la matrice hessienne (matrice des dérivées secondes) de \mathcal{L} . Comparée aux méthodes du gradient (n'utilisant que les dérivées premières de la fonctionnelle à minimiser), cette démarche est plus efficace et donne une convergence très rapide quand on est au voisinage de la solution. Cependant, le point de départ (que l'on choisira simplement être une surface plane horizontale) peut être en général loin de la solution finale, et la méthode de Newton-Raphson a de grandes chances de diverger. Afin d'éviter ce problème, un algorithme a été implémenté dans le but de rester en permanence au voisinage d'une solution intermédiaire, et cela en incrémentant petit à petit la condition d'angle de contact.

En effet, puisque la surface initiale Γ_0 est plane, alors si on applique l'angle de contact θ_0 que fait cette surface avec le réservoir (en fonction de la géométrie du réservoir, cet angle de contact peut être variable le long de γ_0), alors la surface libre se trouve en état d'équilibre. L'angle de contact θ_0 est donc choisi pour initialiser les pas de charge.

Maintenant, étant donné une surface à l'équilibre Γ_k correspondant à une condition aux limites θ_k , le prochain pas de charge (angle de contact à appliquer) sera :

$$\theta_{k+1} = (1 - x) \theta_k + x \theta \quad (3.11)$$

où θ est l'angle de contact final que l'on désire atteindre, et on choisit la valeur de x de telle sorte que :

$$\max |\theta_{k+1} - \theta_k| = \Delta\theta_{max} \quad (3.12)$$

avec $\Delta\theta_{max}$ l'amplitude maximale que l'on veut appliquer le long de γ_k . Dans les exemples d'application qui seront présentés, des pas de charge de 10° et de 5° ont été utilisés (un pas de charge plus fin de 1° a été adopté pour le dernier exemple de validation §3.4.2).

La solution de ce problème intermédiaire sera la surface Γ_{k+1} , proche de Γ_k , et ainsi on garantit l'efficacité et la convergence de la méthode Newton-Raphson. Ces calculs intermédiaires convergent en général au bout de 1, 2 ou 3 pas de calculs.

On teste à la fin de chaque calcul intermédiaire si $\max |\theta_k - \theta| < \Delta\theta_{max}$. Si c'est le cas, $\theta_{k+1} = \theta$ et ainsi ce sera le dernier calcul.

Pour des réservoirs à fortes courbures, on peut imaginer que, au cours des itérations d'un des calculs intermédiaires, la surface traverse une zone telle que l'angle de contact effectif θ_{eff} formé par la surface et le réservoir, sorte brusquement de l'intervalle toléré, à savoir $[\theta_{k+1} - \Delta\theta_{max}, \theta_{k+1} + \Delta\theta_{max}]$. Dans ce cas, le résidu augmente brusquement en raison de l'éloignement brutal entre l'angle de contact objectif et l'angle de contact effectif et on retombe dans le problème qu'on essaye d'éviter. Pour remédier à cela, un test de réinitialisation a été inclus après chaque pas de calcul, et qui fait que la procédure redémarre en initialisant l'angle de contact appliqué à $\theta_0 = \theta_{eff}$. Un exemple illustrant cette situation est présenté dans la Figure 3.7, où la surface libre traverse un coin du réservoir.

3.2.2 Glissement sur le réservoir

La contrainte cinématique $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_u$ signifie que chaque nœud du bord γ ne peut se déplacer que tangentionnellement au réservoir, représenté par Σ . Cette condition linéarisée n'est pas suffisante dans un calcul non linéaire avec un réservoir à parois courbées. En effet, à cause de cette courbure, le bord de Γ peut se retrouver décollé de Σ après un pas de calcul. Pour corriger cela, on effectue, après chaque pas, une projection des nœuds de γ sur le maillage de Σ dans les directions des normales géodésiques de Γ , c'est à dire selon $\boldsymbol{\nu}_\Gamma$. Après cela, on déforme le maillage de la surface libre avec ce déplacement imposé du bord, tout en n'autorisant que les déplacements tangentiels à la surface. De cette manière, on préserve la topologie de Γ (voir la Figure 3.1 pour une illustration en 2D).

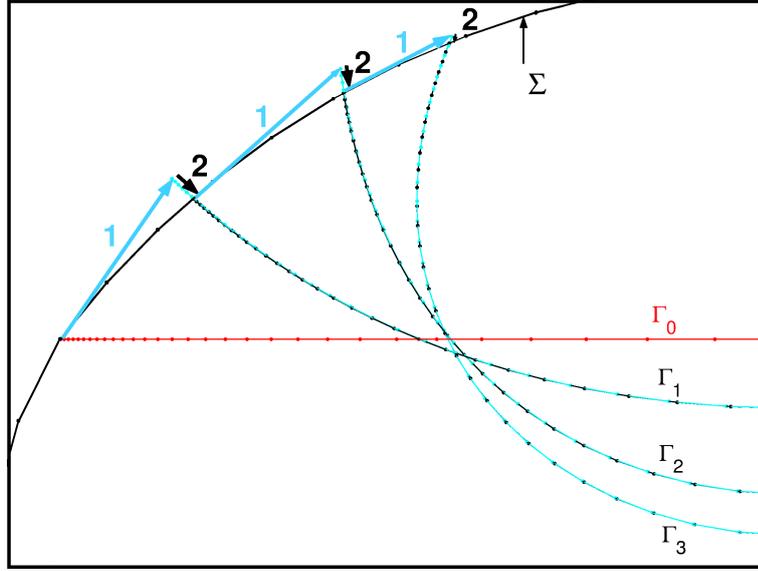


FIGURE 3.1 – Correction du glissement de la surface libre sur le réservoir : l'étape "1" (en bleu) est la surface après un pas de calcul, alors que l'étape "2" (en noir) est la surface après correction.

La déformation du maillage est faite selon la méthode classique introduite par J.T. Batina [4], où la matrice de déformation de maillage est constante, donc assemblée une seule fois au début du calcul.

La projection de γ sur le réservoir nous donne également les nouveaux éléments de Σ en contact avec la surface libre. Ces derniers seront donc utilisés pour construire les nouvelles conditions aux limites, mais aussi pour le calcul du volume liquide.

3.2.3 Calcul du volume liquide

Après la correction du glissement de la ligne de contact sur Σ , le volume V du liquide devra être évalué pour renseigner le dernier terme du vecteur résidu de (3.4). Puisqu'on ne dispose que de maillages surfaciques, celui de Γ et celui du réservoir Σ , ce volume ne pourra pas être calculé directement, on utilise pour cela la relation suivante :

$$\begin{aligned} V(\Gamma) &= \int_{\Omega_L} d\Omega_L = \frac{1}{3} \int_{\Omega_L} \operatorname{div}(\mathbf{OM}) d\Omega_L \\ &= \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega_L} \mathbf{OM} \cdot \mathbf{n}_L d\partial\Omega_L \end{aligned} \quad (3.13)$$

où O est l'origine du repère global (dans lequel sont exprimées les coordonnées des nœuds du problème), M le point courant décrivant le domaine et \mathbf{n}_L la normale unitaire sortante de Ω_L . Puisque $\partial\Omega_L = \Gamma \cup \Sigma_L$, alors cette dernière expression devient :

$$V(\Gamma) = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \mathbf{OM} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \frac{1}{3} \int_{\Sigma_L} \mathbf{OM} \cdot \mathbf{n}_\Sigma d\Sigma_L \quad (3.14)$$

Le premier terme de (3.14) est facile à évaluer car on dispose directement du maillage de Γ . Cependant, Σ_L va être déterminée en faisant l'intersection entre les maillages du réservoir et de la surface libre du liquide. Pour cela, un algorithme à été implémenté pour extraire,

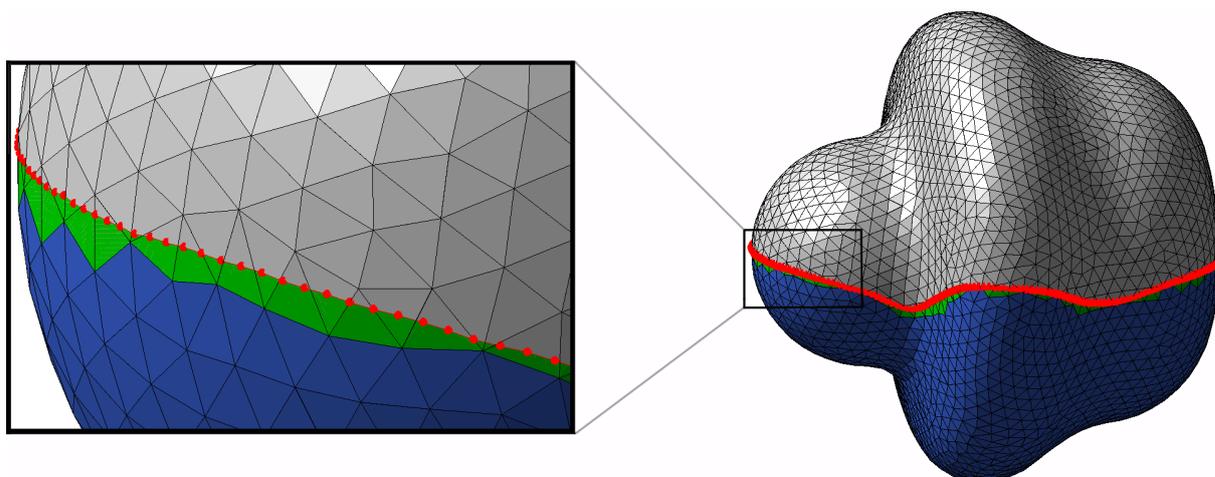


FIGURE 3.2 – Construction de l’interface Σ_L à partir de l’intersection entre les éléments finis du réservoir (gris) et ceux du bord (rouge) : $\Sigma_L = \text{“éléments bleus”} \cup \text{“morceaux verts”}$.

automatiquement après l’étape de projection précédente, tous les éléments “mouillés” du réservoir (de couleur bleue dans la Figure 3.2), et cela en utilisant les connectivités des éléments finis de Σ . En plus de cela, les éléments finis du réservoir qui sont traversés par le bord γ seront fractionnés¹⁸ (de couleur verte dans la Figure 3.2) afin de pouvoir reconstituer le plus précisément possible l’interface liquide-structure Σ_L . Cette procédure est efficace et n’est pas très gourmande en temps de calcul. Grâce à elle, les deux maillages sont complètement indépendants et peuvent être générés séparément. Ainsi, pour traiter différents niveaux de remplissage, il suffit de translater le maillage de Γ_0 , puis de le projeter sur Σ selon la procédure décrite dans §3.2.2.

3.3 Exemples d’application

3.3.1 Cadre général pour les exemples

Sans perte de généralité, la valeur du coefficient de tension de surface sera fixée à $\sigma = 0.072$ N/m (valeur pour l’interface eau-air à 25°C) et celle de la masse volumique à $\rho = 1000$ kg/m³ (densité de l’eau), et cela pour tous les exemples qui seront présentés ici. Le champ de gravité \mathbf{g} sera toujours vertical et dirigé vers le bas, quant aux dimensions des réservoirs, elles sont de l’ordre du mètre.

Pour tester les configurations d’équilibre possibles au sein des réservoirs, on va faire varier trois paramètres : le niveau de remplissage, la valeur de l’angle de contact θ et l’intensité du champ de pesanteur g . Ce dernier sera exprimé comme un produit entre la gravité terrestre $g_0 = 9.81$ ms⁻² et un facteur à faire varier.

3.3.2 Configurations simples

Le premier exemple (Figure 3.3) est un réservoir à parois verticales. L’équilibre a été obtenu après quelques itérations (entre 4 et 10). Cette configuration est parmi les plus simples à traiter

18. On précise ici que le maillage du réservoir ne sera pas modifié par cette opération : les nouveaux “éléments” verts dans la figure 3.2 seront créés juste pour le calcul du volume liquide et seront éliminés tout de suite après ce calcul.

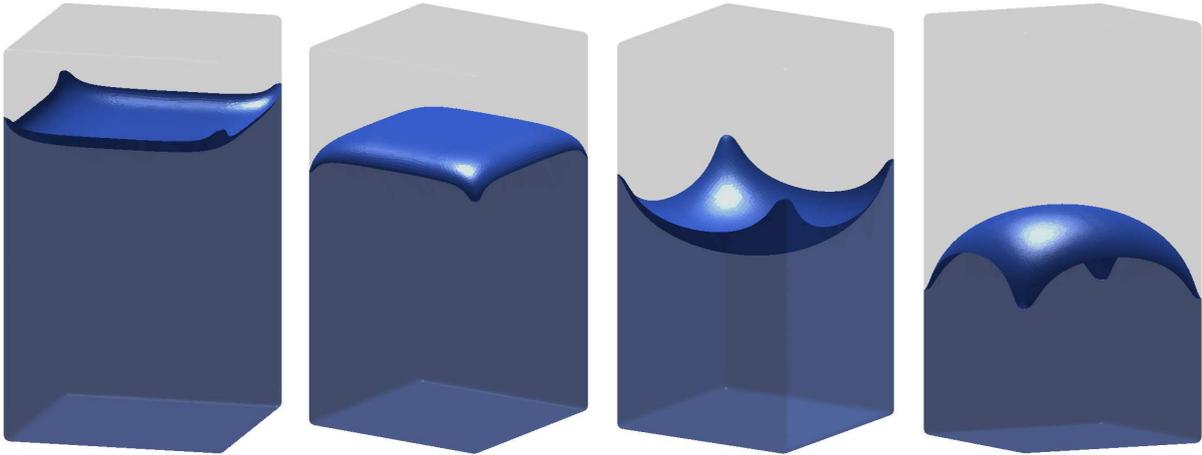


FIGURE 3.3 – Positions d'équilibre d'un liquide au sein d'un réservoir parallélépipédique vertical pour différentes valeurs de gravité et d'angle de contact

car la surface libre peut être paramétrée par un champ scalaire qui n'est autre que le déplacement vertical. Ainsi la taille du problème pourra être divisée par trois et on n'aura pas de problème de singularité car les déplacements tangents ne seront plus libres. En plus de cela, la condition de glissement est automatiquement satisfaite. Cependant, il est très rare de rencontrer ce cas

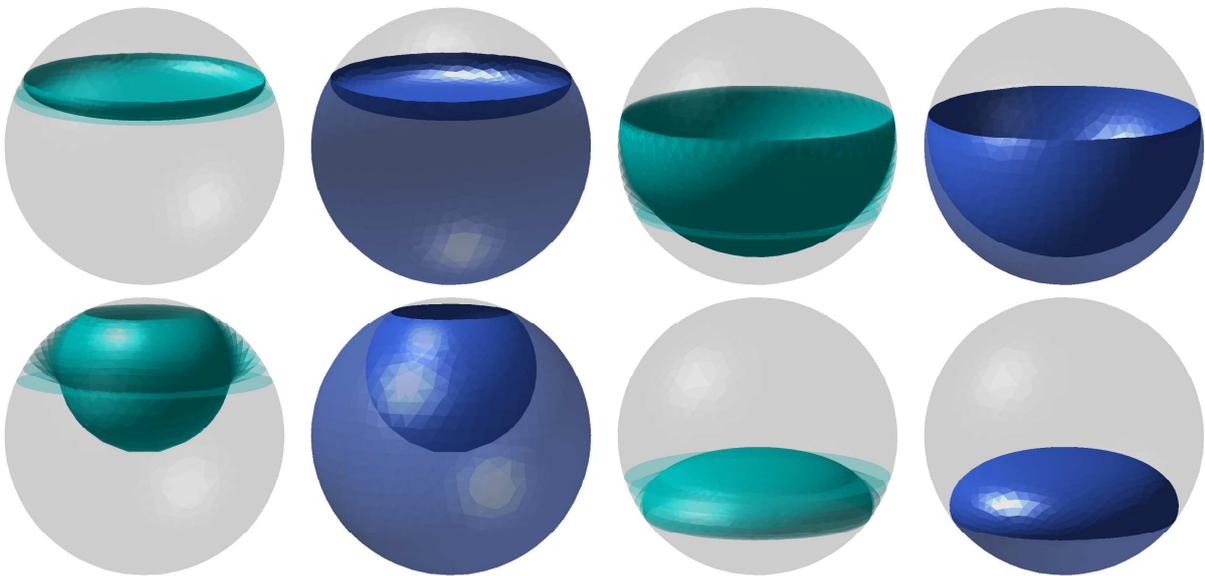


FIGURE 3.4 – Positions d'équilibre d'un liquide au sein d'un réservoir sphérique. Les surfaces vertes représentent les solutions intermédiaires pour les incréments d'angle de contact

de figure dans les applications industrielles. En effet, les réservoirs de liquides ont rarement des parois planes, de ce fait, le cas des réservoirs sphériques est beaucoup plus réaliste. Différents cas ont été testés (voir Figure 3.4). Pour une telle géométrie, la paramétrisation du déplacement de la surface libre par un champ scalaire vertical est inadaptée car, d'une part, le glissement

de la ligne de contact sur la sphère serait impossible, et d'autre part, la surface libre pourrait devenir si courbée (quand l'angle de contact est loin de la zone 90°) que la description verticale donnerait lieu à une fonction à deux valeurs (ce qui est évidemment exclu mathématiquement). Une autre alternative serait l'utilisation de coordonnées sphériques [90], mais cette approche serait réservée aux cas particuliers des réservoirs de forme sphérique.

3.3.3 Configurations complexes

La méthode proposée pour résoudre le problème d'équilibre trouve toute sa justification dans les cas 3D où la complexité de la configuration exclut le recours aux paramétrisations particulières. Il est important de préciser que même une géométrie simple, comme celle d'un réservoir parallélépipédique illustré dans l'exemple Figure 3.5, ou bien celle d'un réservoir axisymétrique dans l'exemple Figure 3.6, peut donner lieu à une configuration complexe qui nécessite un calcul 3D et cela dès que la direction de la gravité n'est pas parallèle aux parois (Figure 3.5) ou non colinéaire à l'axe de symétrie (Figure 3.6).

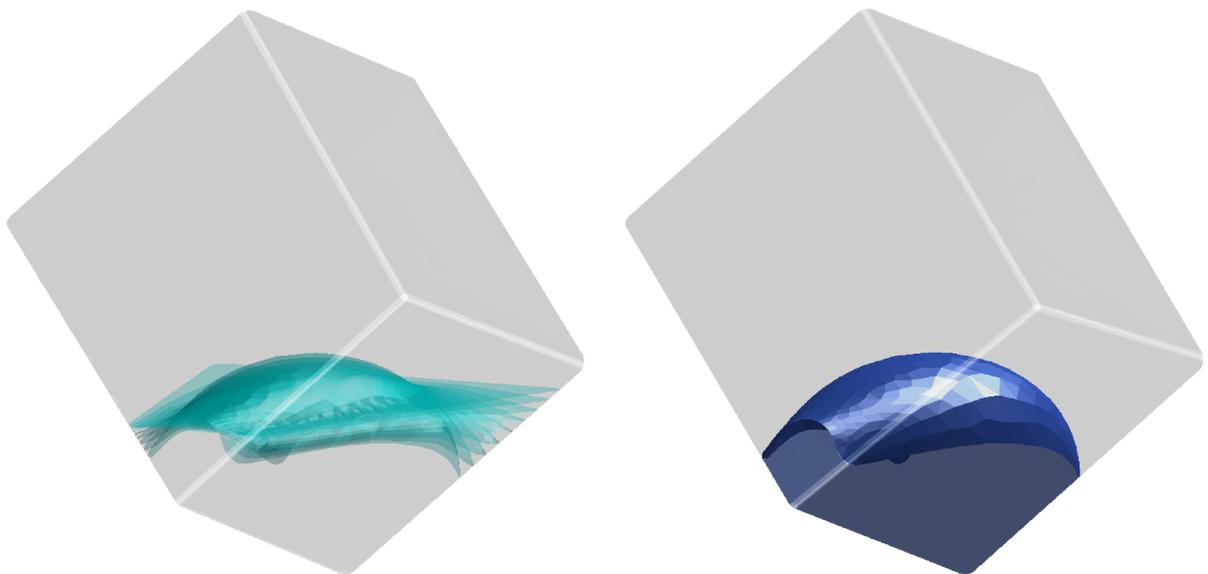


FIGURE 3.5 – Position d'équilibre d'un liquide non mouillant au sein d'un réservoir parallélépipédique incliné

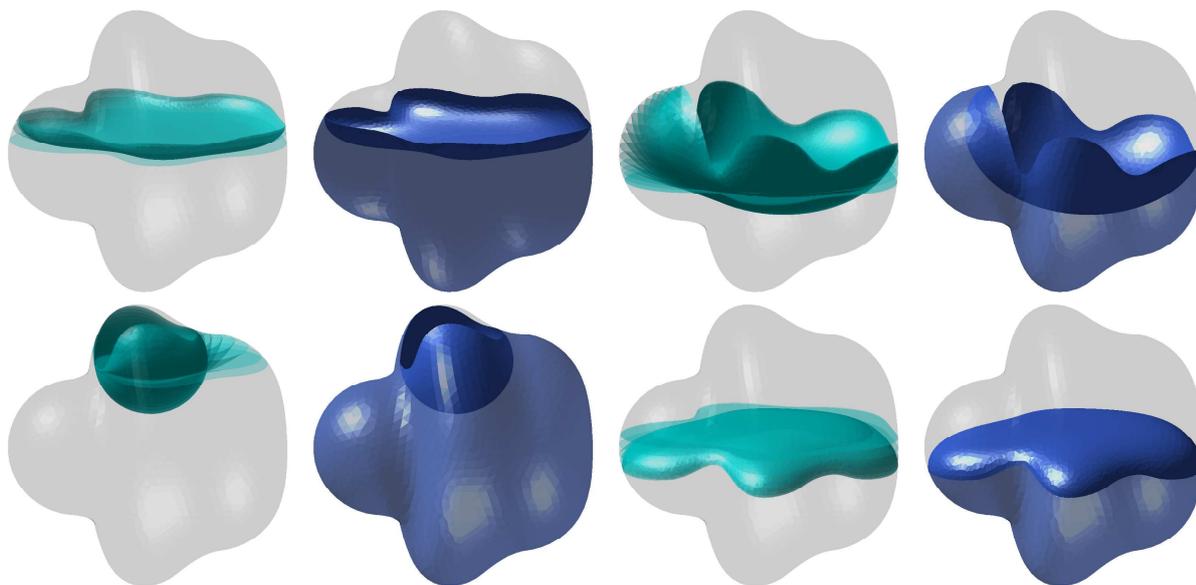


FIGURE 3.6 – Positions d'équilibre d'un liquide au sein d'un réservoir axisymétrique d'axe perpendiculaire au champ de gravité

Traversée d'un coin

Un coin est considéré comme étant une zone de la paroi où la courbure de celle-ci varie violemment. Les coins vifs ne sont pas considérés dans cette étude car la présence de ces derniers remettrait en cause certaines hypothèses sur la régularité des champs qu'on utilise, et introduit en plus des problèmes de définition des vecteurs \mathbf{n}_Σ , $\boldsymbol{\nu}_\Sigma$ et $\boldsymbol{\nu}_\Gamma$ sur γ . Pour éviter cela, les coins traités sont arrondis, ce qui a aussi l'avantage de ne pas avoir à implémenter, en plus, une procédure spécifique pour gérer le glissement de la surface libre sur ces formes singulières.

Dans l'exemple Figure 3.7, on montre un calcul statique où la surface libre traverse un coin (arrondi) du réservoir pour atteindre sa position d'équilibre. Cet exemple illustre bien l'intérêt de la procédure de réinitialisation des pas de charge d'angle de contact décrite dans §3.2.1. En effet, dans la Figure 3.8, on a représenté en rouge l'angle de contact initial θ_0 que fait la surface initiale (horizontale) Γ_0 avec le réservoir, et en vert l'angle de contact objectif $\theta = 23^\circ$. Entre ces deux courbes on voit, en traits bleus, les différents pas de charge progressifs de la valeur de l'angle de contact, qui convergent uniformément vers la courbe verte, sauf les nœuds de la zone voisine du nœud 550 (sur l'axe des abscisses) qui, à un moment donné, traversent le coin du réservoir. La procédure de réinitialisation décrite dans §3.2.1 garantit à ce moment là, l'adaptation à ce changement brutal de la condition aux limites.

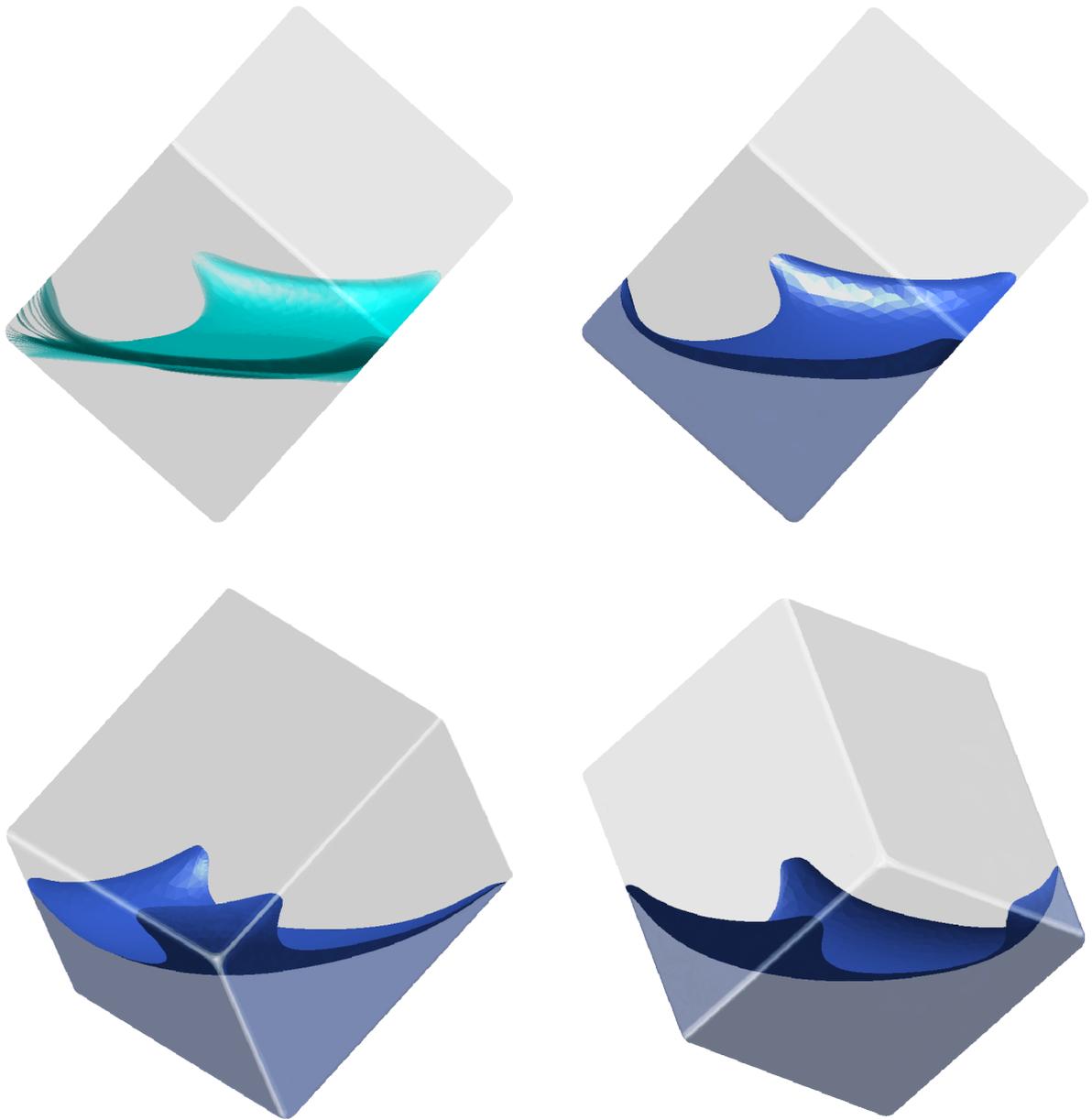


FIGURE 3.7 – Position d'équilibre d'un liquide au sein d'un réservoir parallélépipédique incliné. La première figure montre les itérations de surfaces libres (vert transparent) traversant un coin du réservoir. Les autres figures montrent la solution finale sous trois angles de vues

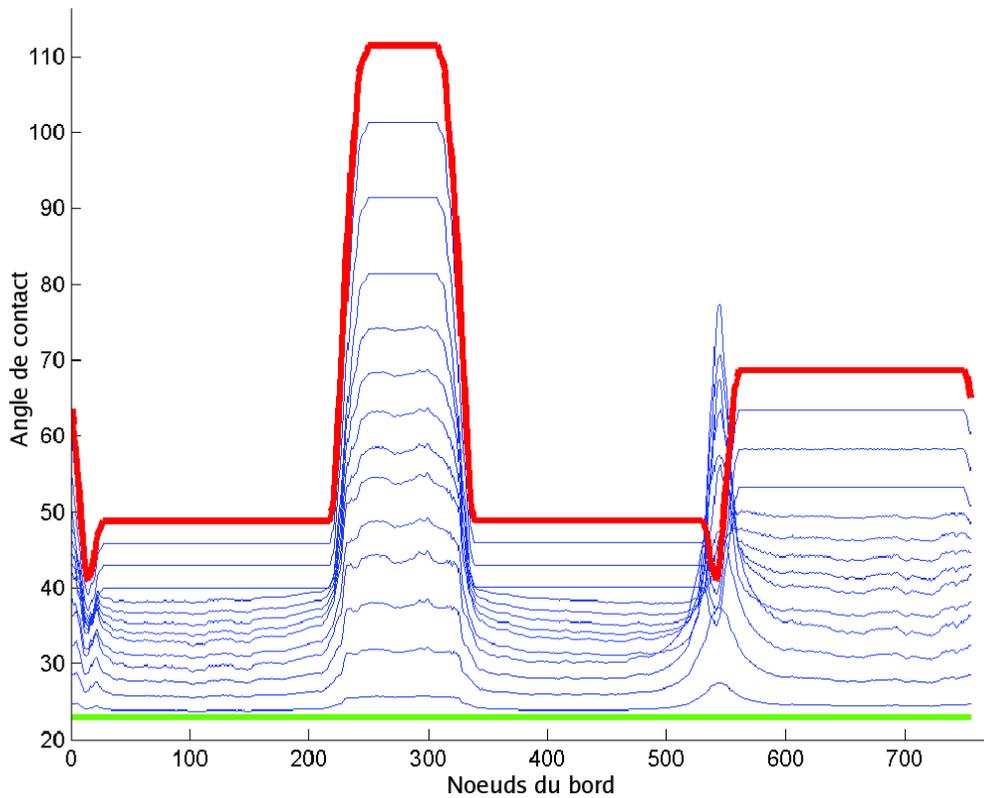


FIGURE 3.8 – Évolution des pas de charges d’angle de contact pour le calcul de la Figure 3.7

Surface libre à deux bords

Un réservoir réaliste de satellite a souvent une géométrie interne très complexe, due à la présence de composants ayant des formes plus ou moins complexes, comme des tuyaux ou des anti-ballottants par exemple. Ces éléments peuvent traverser la surface libre du liquide et donner lieu à de nouveaux bords. Le matériau constituant chaque élément donnera la valeur de l’angle de contact à appliquer sur ce nouveau bord, selon la formule (1.74).

Un exemple simple illustrant cette situation est donné dans la Figure 3.9, où l’on a calculé quatre surfaces d’équilibre en faisant varier le niveau de remplissage, l’angle de contact et la gravité, dans un réservoir cylindrique incliné, traversé par un tube le long de son axe de révolution.

3.4 Validation

3.4.1 Solution 2D axisymétrique

On considère ici le cylindre du dernier exemple (Figure 3.9), mais disposé cette fois verticalement (parallèlement à \mathbf{g}). Le problème devient ainsi complètement axisymétrique et sa résolution pourra se limiter à un plan contenant l’axe de révolution du réservoir. La trace de la surface libre du liquide sur ce plan est une courbe qui peut être paramétrée par le champ vertical $Z(r)$, où r est la coordonnée radiale (voir Figure 3.10).

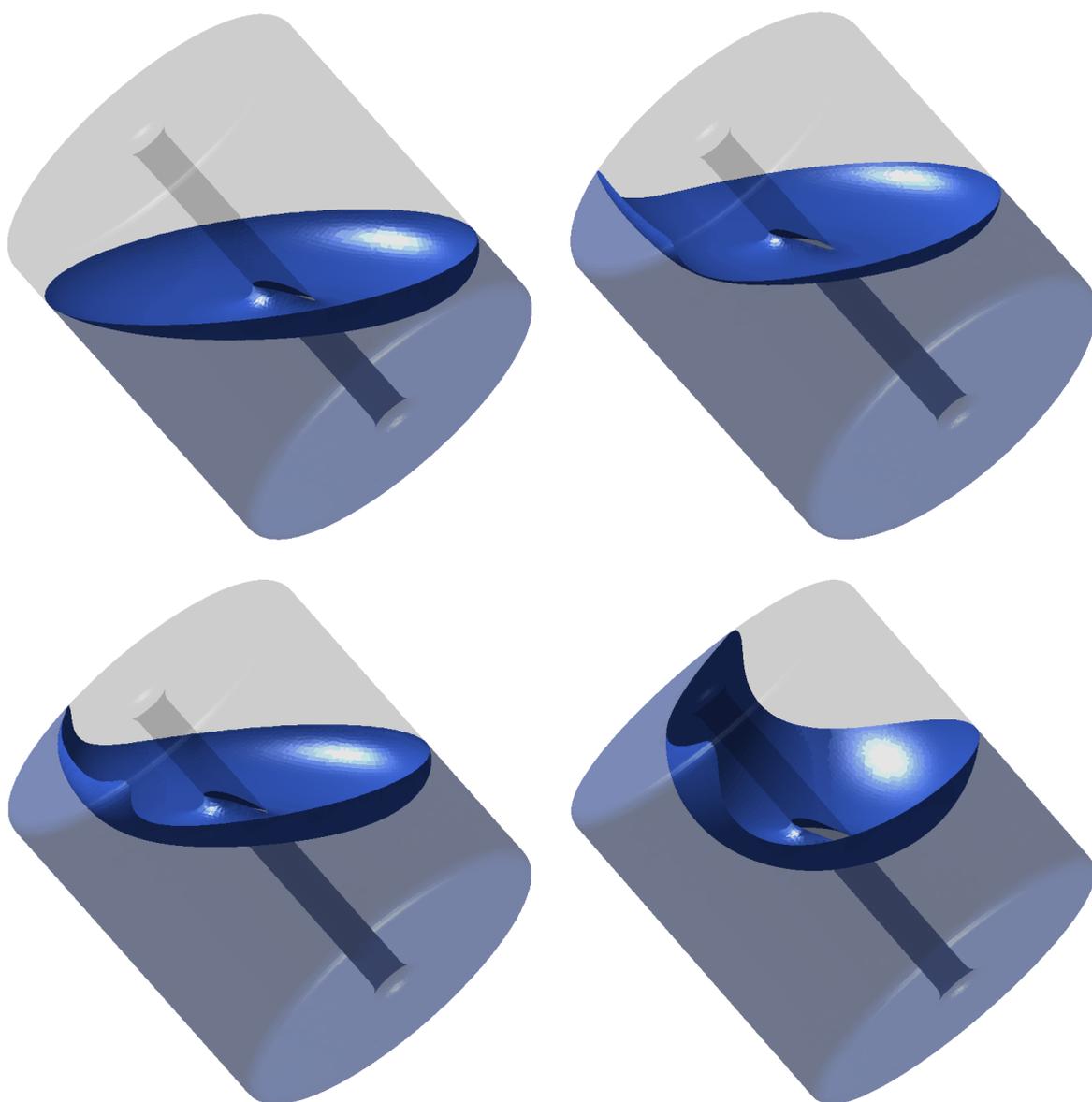


FIGURE 3.9 – Différentes configurations d'équilibre d'un liquide au sein d'un réservoir axisymétrique incliné, traversé par un tuyau cylindrique le long de son axe de symétrie

Dans ce cas particulier, la courbure moyenne $2H$ de la surface libre pourra s'écrire :

$$2H(r) = -\frac{Z''(r)}{(1 + Z'(r)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Z'(r)}{r(1 + Z'(r)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.15)$$

où $Z'(r)$ et $Z''(r)$ sont, respectivement, les dérivées première et seconde de $Z(r)$ par rapport à r . Ainsi l'équation de Laplace-Young (1.71) devient :

$$Z''(r) + \frac{1}{r}Z'(r)(1 + Z'(r)^2) - \frac{\rho g}{\sigma}Z(r)(1 + Z'(r)^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\Lambda}{\sigma}(1 + Z'(r)^2)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (3.16)$$

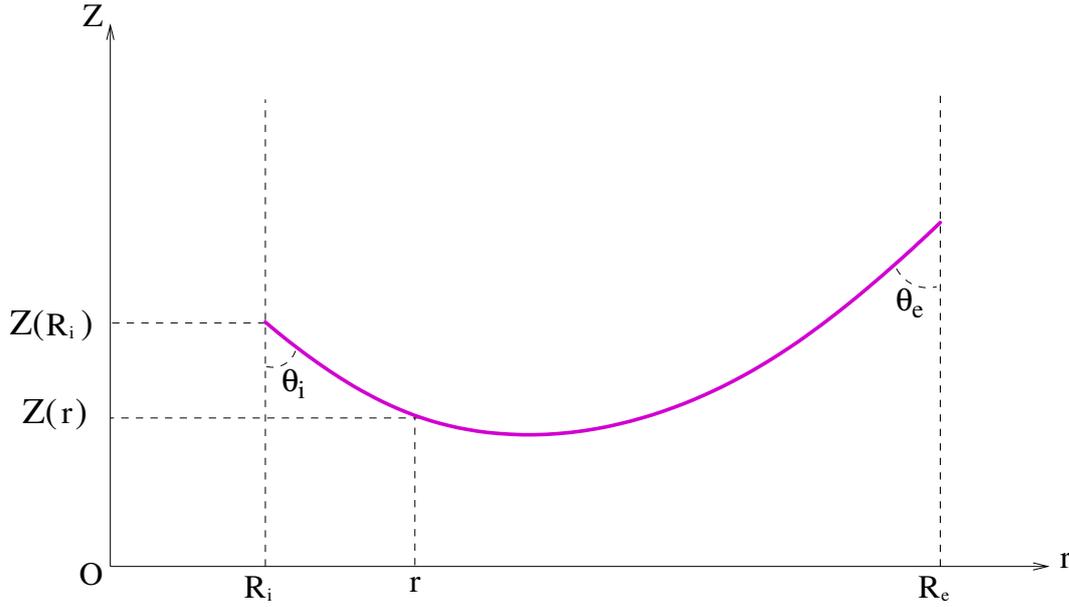


FIGURE 3.10 – Paramétrisation axisymétrique

Quant aux conditions aux limites, elles s'écrivent :

$$Z'(R_i) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) \text{ and } Z'(R_e) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_e\right) \quad (3.17)$$

où $R_i = 0.05$ m et $R_e = 0.5$ m. Ces paramètres sont, respectivement, les rayons interne et externe du réservoir.

Si (Z, Λ) est une solution de (3.16) et (3.17), alors on pourra facilement vérifier que $(Z + C, \Lambda - \rho g C)$ l'est aussi, et cela quelque soit la valeur de la constante C . Cela est dû au fait que le problème est invariant par translation verticale car on n'a pas pris en compte la contrainte d'incompressibilité. On remplace ici cette contrainte par l'ajout d'une condition limite supplémentaire sur Z :

$$Z(R_i) = Z_{EF} \quad (3.18)$$

où Z_{EF} est la valeur de la coordonnée verticale du bord interne de la solution 3D obtenue par éléments finis (solution que l'on souhaite valider). Le système d'équations (3.16), (3.17) et (3.18) est maintenant bien posé.

La résolution numérique de ce problème non linéaire est effectuée avec le solveur "bvp4c" du logiciel Matlab[®]. Comme on peut le constater dans la Figure 3.11, on obtient une très bonne concordance entre cette solution 2D axisymétrique (la courbe violette) et la solution 3D éléments finis (la surface bleue), même pour des angles de contact très faibles.

Remarque : il est utile de signaler qu'à la convergence, on vérifie que les nœuds du maillage de la surface libre coïncident bien avec la solution de référence alors que l'angle de contact EF à l'équilibre (angle entre le maillage de la surface libre et celui du réservoir) est forcément différent de la valeur de référence θ en raison de la courbure de la surface libre (les éléments de surface étant, quant à eux, plats). L'angle de contact EF n'est donc pas un moyen précis pour contrôler la valeur de l'angle de contact à la convergence. Cela dit, l'angle EF converge vers la valeur théorique quand on raffine les maillages au voisinage du bord.

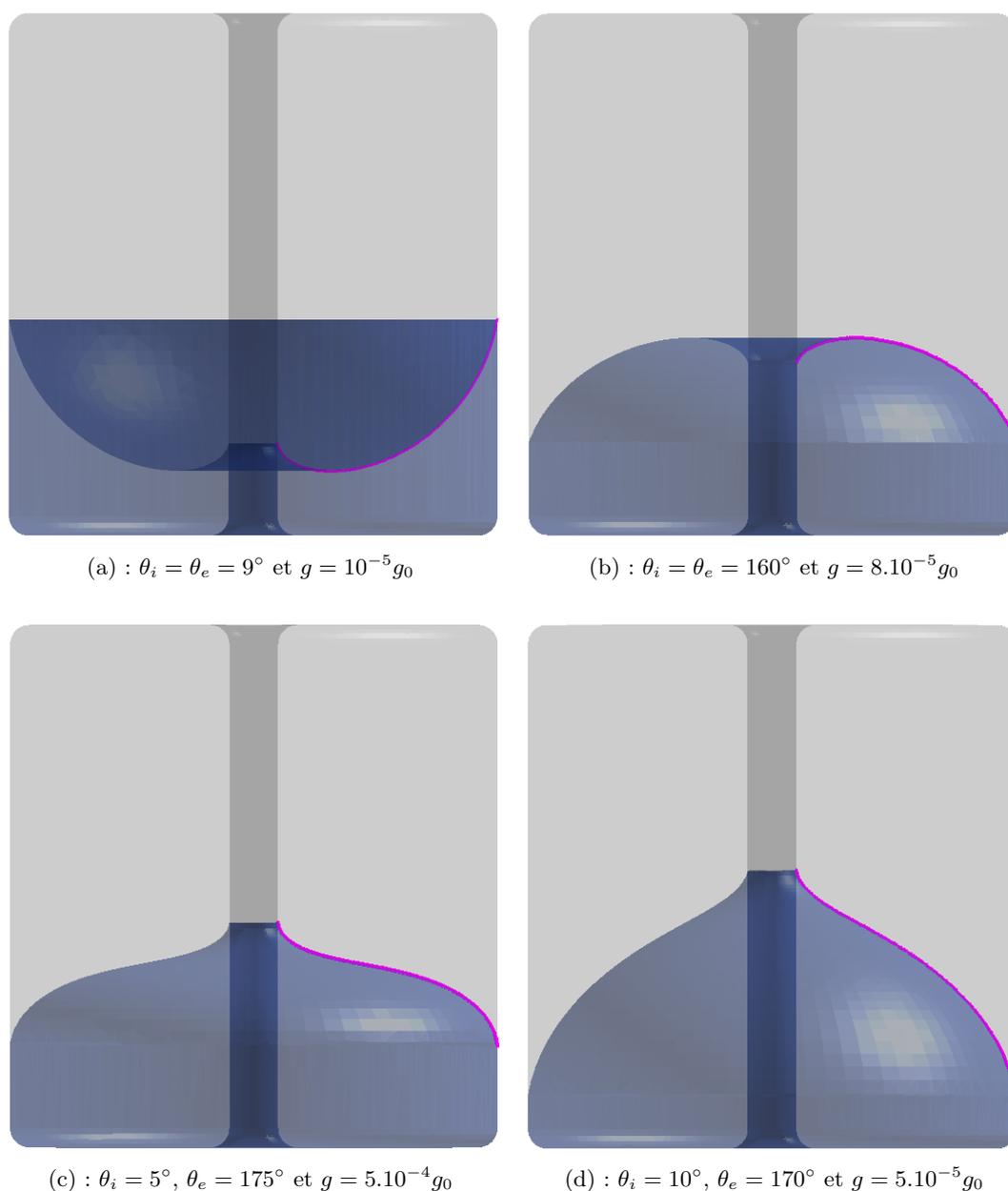


FIGURE 3.11 – Comparaison entre les solutions 3D obtenues par éléments finis, et les solutions 2D axisymétriques, pour différents angles de contact et niveaux de gravité

3.4.2 Critère de Concus-Finn : angle de contact critique

L'étude de l'existence et de la stabilité des surfaces d'équilibre de liquides avec tension de surface est un problème mathématique très complexe. Un des résultats intéressants qui ressort de ces études est un critère d'existence établi par P. Concus and R. Finn, applicable à une certaine classe de réservoirs ayant un ou plusieurs coins.

Cette théorie n'exige pas une gravité nulle, mais le phénomène d'instabilité qu'on va mettre en évidence ici est plus visible dans cette configuration, donc on prendra ici $g = 0$.

On considère un réservoir à parois verticales. Si ϕ est la valeur du plus petit angle intérieur en un coin, alors P. Concus and R. Finn [24] ont montré que pour un liquide mouillant¹⁹, aucune solution ne peut exister si $\theta < \theta_{cr}$, où l'angle de contact critique θ_{cr} est donné par :

$$\theta_{cr} = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \quad (3.19)$$

Des expériences en tour de crash [85] et en orbite [26] ont confirmés la validité de ce critère.

Concus et Finn ont également montré que, en général, la valeur critique θ_{cr} diminue quand on arrondit les coins du réservoir, et ont proposé une procédure pour calculer la valeur critique dans ce cas, en fonction du rayon de l'arrondi [25].

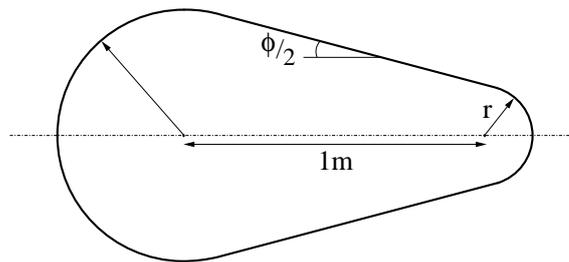


FIGURE 3.12 – Section horizontale d'un réservoir ayant un angle dont le rayon de l'arrondi est r .

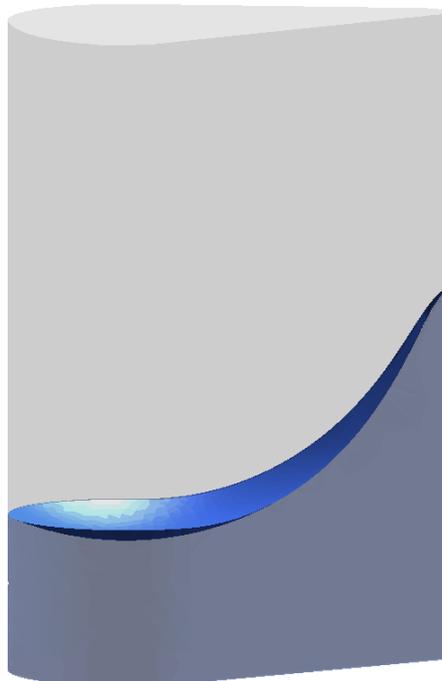


FIGURE 3.13 – Exemple d'une surface libre en équilibre pour un $\theta > \theta_{cr}$

19. Le cas de liquide non mouillant peut être traité d'une manière analogue.

Afin de confronter notre algorithme de résolution 3D à cette théorie, on utilise un cylindre vertical, dont la section présente un coin intérieur d'angle $\phi = 40^\circ$, avec un rayon d'arrondi de $r = 0.01\text{m}$ (voir Figure 3.12). D'après la procédure décrite dans [25], l'angle de contact critique dans cette configuration est $\theta_{cr} = 67.80^\circ$. Pour retrouver numériquement la valeur de l'angle de contact critique, on commence par une surface horizontale ($\theta = 90^\circ$), et on cherche les surfaces d'équilibre pour des angles de contact décroissants : $\theta = 89^\circ, \theta = 88^\circ, \theta = 87^\circ, \dots$ etc. La surface libre est discrétisée par un maillage de 8081 triangles, dont la taille diminue progressivement quand on va vers la pointe.

Dans la Figure 3.14a, on a représenté les différentes surfaces d'équilibre correspondantes aux différents angles de contact, alors que dans la Figure 3.14b, c'est l'évolution de la norme du résidu pour chaque calcul qui est représentée, en fonction des itérations du calcul Newton-Raphson. On remarque que la convergence est très rapide dans les premiers calculs (θ loin de θ_{cr}), et au fur et à mesure que l'on se rapproche de la valeur critique, le calcul peine à converger.

D'après ce calcul, l'angle de contact critique est à peu près égal à 65° , puisque c'est la dernière valeur d'angle de contact pour laquelle un équilibre²⁰ a été trouvé. La valeur que l'on a trouvé pour θ_{cr} (qui est 2.8° en deça de la valeur attendue) pourrait être améliorée en raffinant le maillage de la surface libre et aussi celui du réservoir. En plus de cela, un critère d'arrêt plus exigeant (donc plus d'itérations) pourra donner lieu à une meilleure estimation de l'angle de contact critique, comme il est montré avec Surface Evolver [22]. Dans le calcul avec $\theta = 64^\circ$

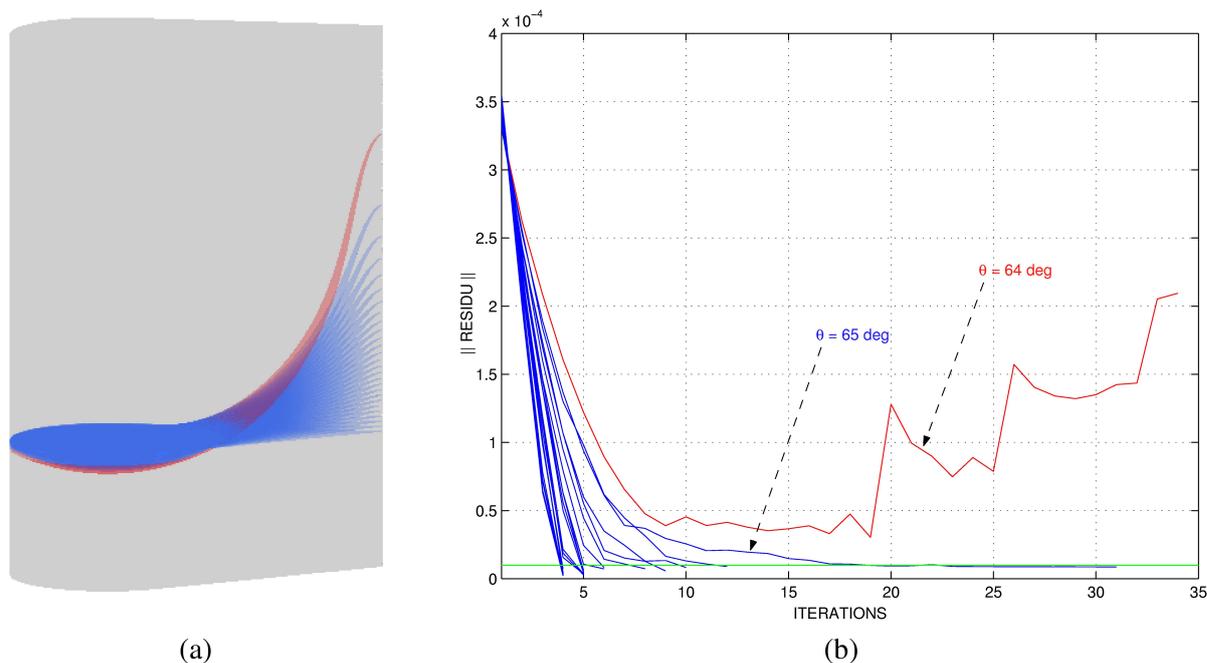


FIGURE 3.14 – Recherche itérative de la valeur de l'angle de contact critique

(correspondant à la surface rouge dans la Figure 3.14a et à la courbe rouge dans la Figure 3.14b), la surface continue de monter le long du coin.

En conclusion, cet exemple montre que la valeur calculée de θ_{cr} ainsi que le comportement

²⁰. Dans cet exemple, le calcul statique est arrêté quand la norme euclidienne du résidu devient inférieure à 10^{-5} .

de la surface quand $\theta < \theta_{cr}$ sont tous les deux conformes aux prévisions de la théorie de Concus-Finn.

Deuxième partie
Étude dynamique

Introduction

Connaissant la configuration d'équilibre du liquide au sein du réservoir, on se propose dans cette partie d'étudier ses vibrations au voisinage de cette position, en considérant le réservoir immobile. Alors que la majorité des travaux dans ce domaine concerne des réservoirs à géométries simples [38, 86, 98, 90], on propose ici une résolution 3D par la méthode des éléments finis.

Dans le premier chapitre de cette partie, on va établir les équations locales régissant ce problème de ballonnement. Ainsi, on pourra construire dans le chapitre suivant la formulation variationnelle du problème. Le dernier chapitre est consacré à la discrétisation par la méthode des éléments finis ainsi qu'à la symétrisation du problème matriciel spectral qui en découle.

Cette partie a été largement inspirée de l'ouvrage de H. J.-P. Morand et R. Ohayon [62] (Chap. 2 et Chap. 4) pour l'établissement des équations locales et pour la symétrisation du système matriciel obtenu. L'originalité du travail présenté ici réside essentiellement dans la formulation variationnelle proposée qui présente plusieurs avantages facilitant sa mise en œuvre numérique.

Chapitre 4

Equations linéarisées d'un liquide parfait incompressible avec tension superficielle

Sommaire

4.1	Description du système étudié	66
4.1.1	Le système	66
4.1.2	Notations	66
4.1.3	Hypothèses de linéarisation	67
4.2	Équations locales linéarisées dans le domaine liquide	67
4.2.1	Équations d'Euler	67
4.2.2	Fluctuations lagrangienne $p_{\mathcal{L}}$ et eulérienne p de pression	67
4.2.3	Linéarisation des équations d'Euler	68
4.2.4	Représentation du liquide dans Ω_L	68
4.2.5	Condition d'incompressibilité	70
4.3	Équations linéarisées au bord $\partial\Omega_L$ du domaine	70
4.3.1	Condition aux limites sur Σ_L	70
4.3.2	Condition aux limites sur Γ	71
4.3.3	Condition d'angle de contact sur γ	72

4.1 Description du système étudié

Dans ce chapitre, on va établir les équations linéarisées décrivant les petits mouvements d'un fluide (liquide) non visqueux et pesant en prenant en compte la tension superficielle. On va introduire les fluctuations lagrangienne et eulérienne de pression pour ensuite établir les équations locales du problème. On introduira ensuite le potentiel de déplacement φ qui sera la variable décrivant le mouvement à l'intérieur du volume liquide. Quant au mouvement de la surface libre, on utilisera la variable supplémentaire η qui est le déplacement normal à la surface libre.

4.1.1 Le système

On s'intéresse aux petits mouvements d'un liquide incompressible non visqueux L de densité homogène ρ au voisinage de sa position d'équilibre statique. Le liquide remplit partiellement un réservoir rigide et fixe, le reste du volume est occupé par un gaz G de pression constante P_G . Le phénomène de capillarité est pris en compte à travers le coefficient de tension superficielle σ de la surface libre considéré constant ainsi qu'à travers l'angle de contact statique θ (voir partie statique). Enfin la gravité est supposée constante $\mathbf{g} = -g \mathbf{i}_z$, où \mathbf{i}_z est le vecteur unitaire ascendant. Un tel système peut être schématisé par la figure 4.1.

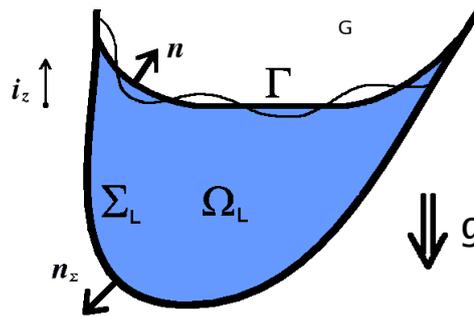


FIGURE 4.1 – Petits mouvements d'un liquide dans le champs de pesanteur

4.1.2 Notations

Les variables notées avec un prime «'» seront associées à la configuration déformée à un instant t , ainsi :

Entité	à l'équilibre	à l'instant t
Position d'une particule liquide	M	M'
Domaine liquide	Ω_L	Ω'_L
Surface libre	Γ	Γ'
Normale unitaire sortante à la surface libre	\mathbf{n}	\mathbf{n}'
Interface liquide-réservoir	Σ_L	Σ'_L
Normale unitaire sortante à l'interface liquide-réservoir	\mathbf{n}_Σ	\mathbf{n}'_Σ
Pression du liquide	P	P'
Courbure moyenne de la surface libre	H	H'

4.1.3 Hypothèses de linéarisation

Pour décrire les mouvements, on note \mathbf{u} le déplacement d'une particule liquide occupant le point M à l'équilibre, ainsi on a :

$$M' = M + \mathbf{u}(M, t) \quad \forall M \in \Omega_L \quad (4.1)$$

La linéarisation des équations du problème se fera en faisant l'hypothèse des petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre statique. Les déplacements et les variations de pression —ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles— seront considérés comme des infiniments petits. Le but sera d'établir des équations vérifiées dans Ω_L .

4.2 Équations locales linéarisées dans le domaine liquide

4.2.1 Équations d'Euler

On rappelle que les petits mouvements d'un liquide incompressible, homogène et non visqueux sont gouvernés par l'équation d'Euler :

$$\nabla P' = \rho (\mathbf{g} - \mathbf{a}_{cc}) \quad \text{dans } \Omega'_L \quad (4.2)$$

où $\mathbf{a}_{cc}(M', t)$ est le vecteur accélération instantanée en M' .

À l'équilibre, l'équation classique de l'hydrostatique s'appliquera :

$$\nabla P = \rho \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega_L \quad (4.3)$$

4.2.2 Fluctuations lagrangienne $p_{\mathcal{L}}$ et eulérienne p de pression

La fluctuation lagrangienne de pression $p_{\mathcal{L}}(M)$ est défini pour tout point M de la configuration d'équilibre en suivant la particule de liquide dans son mouvement :

$$p_{\mathcal{L}}(M) = P'(M', t) - P(M) \quad (4.4a)$$

alors que la fluctuation eulérienne $p(M)$ est défini au point géométrique M par :

$$p(M) = P'(M, t) - P(M) \quad (4.4b)$$

En calculant la différence entre ces 2 expressions, on obtient, au 1^{er} ordre en \mathbf{u} :

$$p_{\mathcal{L}}(M) - p(M) = P'(M', t) - P'(M, t) \simeq \nabla P'(M, t) \cdot \mathbf{u}(M, t)$$

Or d'après (4.4b) on a :

$$\nabla P'(M, t) = \nabla p(M) + \nabla P(M) \quad (4.5)$$

En utilisant (4.3) et le fait que $\nabla p(M)$ est un infiniment petit du premier ordre, on arrive à :

$$p_{\mathcal{L}}(M) - p(M) = -\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z \quad \forall M \in \Omega_L \quad (4.6)$$

Remarques :

- la fluctuation lagrangienne de pression peut s'écrire mathématiquement comme la dérivée de P par rapport à la position de la particule liquide dans la direction de \mathbf{u} . En utilisant les notations de la partie I, on peut donc l'écrire $p_{\mathcal{L}} = \delta[P](\mathbf{u})$.
- l'équation (4.6) montre que, pour un fluide pesant en présence d'un champ de gravité, la fluctuation de pression p —mesurée en un point géométrique— et $p_{\mathcal{L}}$ —mesurée en suivant la particule fluide dans son déplacement— ne sont pas égales, malgré l'hypothèse des petits mouvements. Si le fluide est non pesant, (comme un gaz) ou si la gravité est négligeable, on aura $p = p_{\mathcal{L}}$.
- on remarque que, contrairement à $p_{\mathcal{L}}$ qui est directement définie dans le domaine d'équilibre Ω_L par (4.4a), la fluctuation eulérienne p n'est rigoureusement définie que pour un point appartenant à $\Omega_L \cap \Omega'_L$. Cependant, l'hypothèse des petits déplacements peut étendre cette définition aux points appartenant au bord de Ω_L , grâce à l'équation (4.6).

4.2.3 Linéarisation des équations d'Euler

On se place en un point géométrique $M \in \Omega_L \cap \Omega'_L$ à un instant t . En faisant la différence des deux équations (4.2) et (4.3), et en utilisant (4.5), on obtient :

$$\nabla p(M) = -\rho \mathbf{a}_{cc}(M, t) \quad (4.7)$$

D'autre part, en dérivant (4.1) deux fois par rapport au temps, on trouve :

$$\mathbf{a}_{cc}(M', t) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(M, t)}{\partial t^2} \quad (4.8)$$

En plus, on a au premier ordre en \mathbf{u} pour les trois composantes de l'accélération, $a_i(M', t) - a_i(M, t) = \nabla a_i(M, t) \cdot \mathbf{u}(M, t)$. Donc d'après les hypothèses de linéarisation, les accélérations en M et en M' sont égales au premier ordre. Ainsi on arrive aux équations d'Euler linéarisées, reliant la fluctuation eulérienne de pression p et le déplacement \mathbf{u} d'une particule liquide autour d'une position d'équilibre statique :

$$\nabla p = -\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_L \quad (4.9)$$

Les mouvements étudiés ici sont les petits mouvements harmoniques où le déplacement \mathbf{u} et la fluctuation de pression p varient sinusoidalement autour de leur valeur d'équilibre, on écrit donc :

$$\mathbf{u}(M, t) = \mathbf{u}(M) \cos(\omega t) , \quad p(M, t) = p(M) \cos(\omega t) \quad (4.10)$$

où ω est la pulsation du mouvement. À partir d'ici, on considère uniquement l'amplitude du déplacement \mathbf{u} et celle de la fluctuation de pression p . Les équations linéarisées d'Euler (4.9) deviennent :

$$\nabla p - \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega_L \quad (4.11)$$

4.2.4 Représentation du liquide dans Ω_L

Irrotationnalité du liquide et potentiel de déplacement

En appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (4.11), et en utilisant le résultat classique $\text{rot}(\nabla p) = \mathbf{0}$, on obtient que $\rho \omega^2 \text{rot}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Or $\rho > 0$, donc pour $\omega \neq 0$ on a le résultat

classique d'irrotationnalité du mouvement :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_L \quad (4.12)$$

Cette dernière propriété implique l'existence d'un champ scalaire φ , appelé *potentiel de déplacement*, défini à une constante additive près par :

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi \quad \text{dans } \Omega_L \quad (4.13)$$

Choix de la variable décrivant le liquide

A ce stade, il y a plusieurs choix de variable d'état possibles pour écrire les équations du liquide dans Ω_L :

- soit son champ de déplacement \mathbf{u} [53, 8, 68] : la compatibilité des déplacements à l'interface $\partial\Omega_L$ est ainsi facilement satisfaite, mais l'apparition de “modes de circulation” non physiques apporte des problèmes numériques. Bien que des méthodes aient été développées pour faire disparaître ces modes indésirables (soit par ajout d'un terme de pénalité proportionnel à $\mathbf{rot}(\mathbf{u})$ [19], soit par l'utilisation d'éléments finis spéciaux [9, 7, 8]), ces méthodes restent exigeantes en terme de capacité de calcul, vue la taille des modèles qu'elles engendrent ²¹.
- soit la fluctuation de pression p dans le liquide : cependant, l'introduction de cette variable duale dans la formulation rend le système obtenu non symétrique et moins facilement implémentable dans des codes de calcul standards [58]. La symétrisation nécessite alors une projection modale [65].
- soit, grâce à l'introduction du potentiel ²² de déplacement φ . En introduisant ce potentiel, on élimine les solutions stationnaires irrotationnelles parasites qui peuvent exister [49], ainsi que les mouvements rotationnels permanents (qui ne sont pas le sujet de l'analyse vibratoire qu'on désire faire ici).

C'est cette dernière possibilité qui sera utilisée par la suite.

Unicité du potentiel de déplacement φ

En utilisant la relation (4.13) dans (4.11), on obtient que $\nabla p - \rho\omega^2 \nabla\varphi = 0$. Une définition alternative du potentiel φ va être :

$$\boxed{\begin{cases} p = \rho\omega^2\varphi + \pi & \text{(a)} \\ l(\varphi) = 0 \quad \text{avec} \quad l(1) \neq 0 & \text{(b)} \end{cases}} \quad (4.14)$$

où π est une constante et $l(\varphi)$ est une relation linéaire arbitraire garantissant l'unicité de la définition de φ (et donc de π). Cette relation linéaire doit toutefois vérifier $l(1) \neq 0$. En effet, soit φ un champ scalaire sur Ω_L et c une constante tels que $l(\varphi + c) = l(\varphi) = 0$. Pour établir l'unicité de φ , il faut montrer que $c = 0$. Or $l(\varphi + c) = l(\varphi) + cl(1) = cl(1) = 0$, donc la propriété $l(1) \neq 0$ est nécessaire pour conclure sur la nullité de c , et donc l'unicité de φ .

²¹. Si la viscosité du fluide devait être prise en compte, une formulation en déplacement pour le fluide serait certainement le seul choix possible.

²². Dans le cas de domaines fluides multiples, il faut définir des potentiels φ_i pour chaque domaine.

4.2.5 Condition d'incompressibilité

La condition d'incompressibilité du liquide est classiquement écrite sous la forme

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}(M', t)) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega'_L$$

où \mathbf{v} est la vitesse instantannée de la particule fluide. Cependant, ici on utilisera la relation linéarisée qui fait intervenir la déformation :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_L \quad (4.15)$$

Cette relation peut être obtenue directement en considérant la loi de conservation de la masse en coordonnées lagrangiennes, qui s'écrit :

$$\rho' \det(\mathbf{F}) = \rho$$

où \mathbf{F} est le gradient de la déformation $\Omega_L \rightarrow \Omega'_L$. Puisque le liquide est incompressible, on a $\rho' = \rho$ donc $\det(\mathbf{F}) = 1$. Comme $\det(\mathbf{F}) = 1 + \operatorname{div}(\mathbf{u})$ au 1^{er} ordre en \mathbf{u} , on obtient donc bien la relation (4.15).

Finalement, du fait que $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, la condition d'incompressibilité devient :

$$\boxed{\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_L} \quad (4.16)$$

où $\Delta\varphi = \operatorname{div}(\nabla\varphi)$ est le laplacien de φ .

4.3 Équations linéarisées au bord $\partial\Omega_L$ du domaine

Pour résoudre l'équation différentielle (4.16), on aura besoin de conditions aux limites sur le bord du domaine $\partial\Omega_L = \Sigma_L \cup \Gamma$. Cette condition aux limites renseigne sur la valeur de la trace normale de $\nabla\varphi$ sur $\partial\Omega_L$, c'est à dire la valeur de $\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}_\Sigma$ sur Σ_L et $\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$ sur Γ .

4.3.1 Condition aux limites sur Σ_L

La condition aux limites linéarisée à l'interface avec la structure immobile est simplement :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_L \quad (4.17)$$

Ce qui est la traduction, au premier ordre, du fait qu'une particule liquide, initialement sur l'interface Σ_L , ne peut ni pénétrer cette dernière ni s'en décoller. Cela signifie qu'en théorie linéarisée, le mouvement de cette particule est limité au plan tangent au réservoir à cet endroit. D'autre part, puisque $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, la condition limite en φ s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial n_\Sigma} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_L} \quad (4.18)$$

où $\frac{\partial\varphi}{\partial n_\Sigma}$ désigne le produit scalaire $\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}_\Sigma$.

4.3.2 Condition aux limites sur Γ

Sur Γ , le déplacement normal $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ (où $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ désigne le produit scalaire $\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$) est inconnu, il sera noté η dans la suite :

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \eta \quad \text{sur} \quad \Gamma} \quad (4.19)$$

Il faut à présent établir une équation permettant de déterminer η sur la surface libre. Pour cela, on va linéariser l'équation de Laplace-Young traduisant le saut de pression sur Γ .

On sait que cette équation s'applique à l'équilibre :

$$P - P_G - \sigma 2H = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad (4.20)$$

ainsi qu'à l'instant t sur Γ' :

$$P' - P_G - \sigma 2H' = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma' \quad (4.21)$$

La linéarisation de la condition de surface libre, consiste à exprimer la différence entre (4.20) et (4.21) au premier ordre. Cette opération n'est autre que le calcul de la dérivée directionnelle suivant \mathbf{u} en Γ , notée :

$$\delta[P - P_G - \sigma 2H](\mathbf{u}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad (4.22)$$

On désignera désormais par \mathbf{u} le déplacement du liquide à la surface libre, et on décompose ce dernier de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \underbrace{\mu_1 \mathbf{t}_1 + \mu_2 \mathbf{t}_2}_{\mathbf{u}_{\parallel}} + \eta \mathbf{n} \quad (4.23)$$

où $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$ est une des bases orthonormées locales, où \mathbf{n} est la normale à Γ et où \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 y sont tangents. On peut construire une infinité de bases possibles, obtenues par rotation autour de \mathbf{n} . Le choix reste ici arbitraire. On fait le choix de dériver l'équation de Laplace-Young dans la direction normale à Γ uniquement, ceci afin d'éviter d'introduire les inconnues supplémentaires μ_1 et μ_2 dans les équations. Ce choix sera justifié plus tard dans la deuxième remarque §6.1.3. La linéarisation de la condition de surface libre sera donc :

$$\delta[P - P_G - \sigma 2H](\eta \mathbf{n}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad (4.24)$$

Puisque la pression du gaz est supposée constante, alors $\delta P_G(\eta \mathbf{n}) = 0$. Il reste à calculer $\delta P(\eta \mathbf{n})$ et $\delta[2H](\eta \mathbf{n})$. Une première manière d'exprimer ces variations est présentée dans [62], où l'on trouve :

$$\delta[P](\eta \mathbf{n}) = p - \rho g (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n}) \eta \quad (4.25a)$$

$$\delta[2H](\eta \mathbf{n}) = -\left(\frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2}\right)\eta - \text{div}_s(\nabla_s \eta) \quad (4.25b)$$

où R_α et R_β sont les rayons principaux²³ de courbure de la surface libre. La condition linéarisée de surface libre est ainsi donnée par l'équation :

$$p = \rho g (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n}) \eta - \sigma \left[\left(\frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2}\right) \eta + \text{div}_s(\nabla_s \eta) \right] \quad (4.26)$$

23. Les courbures principales $\frac{1}{R_\alpha}$ et $\frac{1}{R_\beta}$ sont les valeurs propres du tenseur de courbure de Γ .

Puisque p peut s'exprimer en fonction de φ et π grâce à (4.14a), on obtient finalement :

$$\boxed{\rho \omega^2 \varphi + \pi = \rho g (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n}) \eta - \sigma \left[\left(\frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2} \right) \eta + \Delta_s \eta \right]} \quad (4.27)$$

où $\Delta_s \eta = \text{div}_s(\nabla_s \eta)$ est le laplacien surfacique de η .

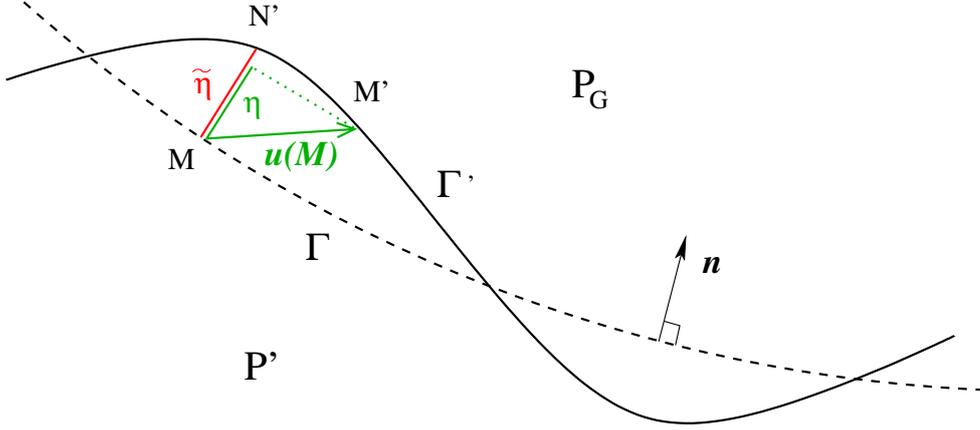


FIGURE 4.2 – La surface libre du fluide

Remarque : le calcul de la variation de l'équation de surface libre dans la direction normale (4.24) est une dérivation partielle où on maintient les composantes tangentielles de \mathbf{u} nulles. L'équation qui en résulte, à savoir (4.27), fait donc en réalité intervenir le déplacement $\tilde{\eta}$ mesuré entre les points M et N' (voir Figure 4.2). La valeur de $\tilde{\eta}$ est, en général, différente de celle de $\eta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, mais cette différence reste du second ordre en \mathbf{u} . En effet, pour des petits mouvements, les points N' et M' sont assez proches pour écrire $\mathbf{N}'\mathbf{M}' \cdot \mathbf{n}' = 0$. Or on a d'une part $\mathbf{N}'\mathbf{M}' = \mathbf{u} - \tilde{\eta} \mathbf{n}$ et d'autre part $\mathbf{n}' = \mathbf{n} + \delta[\mathbf{n}](\mathbf{u})$, alors en utilisant le fait que $\delta[\mathbf{n}](\mathbf{u})$ est un vecteur orthogonal à \mathbf{n} , on obtient :

$$\tilde{\eta} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \delta[\mathbf{n}](\mathbf{u}) = 0 + o(\|\mathbf{u}\|)$$

Ainsi, on peut considérer, dans un cadre linéarisé, que $\tilde{\eta} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \eta$.

4.3.3 Condition d'angle de contact sur γ

La linéarisation (4.27) de l'équation de surface libre fait intervenir des dérivées secondes de η au travers du terme $\Delta_s \eta$. Il est donc nécessaire d'adjoindre au système d'équations aux dérivées partielles régissant les petits mouvements, une condition aux limites donnant la valeur de $\frac{\partial \eta}{\partial \nu_\Gamma} = (\nabla_s \eta) \cdot \nu_\Gamma$ sur le bord de la surface libre. Cette condition aux limites viendra de la linéarisation de la condition de conservation de l'angle de contact au cours du mouvement :

$$\nu_\Gamma \cdot \nu_\Sigma = \cos(\theta) = \text{Cte} \quad (4.28)$$

Cette linéarisation devra tenir compte de la condition de glissement (4.17) appliquée sur le bord γ , et cela oblige à introduire une inconnue supplémentaire, qui est le déplacement tangentiel dans la direction de la normale géodésique ν_Γ , notée μ_Γ . En effet, prenons un point situé sur la ligne

de contact γ , si on considère la base locale $(\boldsymbol{\nu}_\Gamma, \boldsymbol{t}_\gamma, \boldsymbol{n})$, où \boldsymbol{t}_γ est le vecteur directeur de γ (voir Figure 4.3), le déplacement de la surface libre en ce point peut s'écrire $\boldsymbol{u} = \mu_\Gamma \boldsymbol{\nu}_\Gamma + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t}_\gamma) \boldsymbol{t}_\gamma + \eta \boldsymbol{n}$, avec $\mu_\Gamma = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma$. Compte tenu du fait que $\boldsymbol{\nu}_\Gamma \cdot \boldsymbol{n}_\Sigma = \sin(\theta)$, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_\Sigma = -\cos(\theta)$ et que $\boldsymbol{t}_\gamma \cdot \boldsymbol{n}_\Sigma = 0$, la condition de glissement (4.17) sur la ligne de contact γ devient :

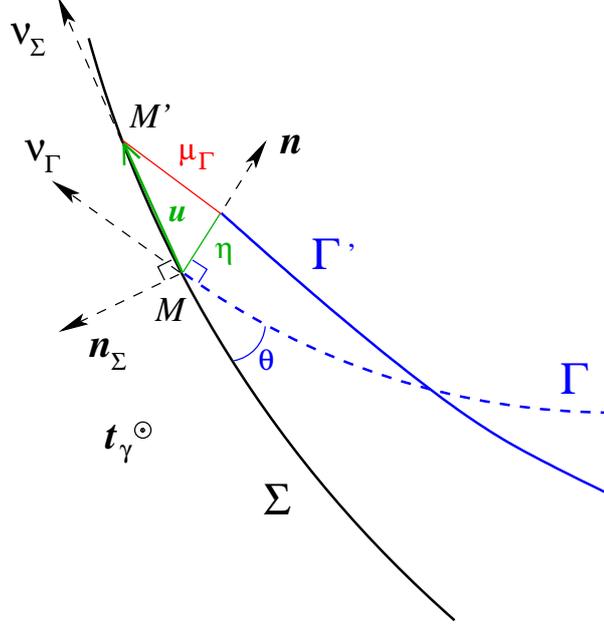


FIGURE 4.3 – Déplacement au bord de la surface libre

$$\mu_\Gamma \sin(\theta) - \eta \cos(\theta) = 0 \quad (4.29)$$

Morand et Ohayon [62] ont proposé une linéarisation de (4.28) dans la direction $\eta \boldsymbol{n} + \mu_\Gamma \boldsymbol{\nu}_\Gamma$ en calculant²⁴ sur γ :

$$\delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma](\eta \boldsymbol{n} + \mu_\Gamma \boldsymbol{\nu}_\Gamma) = 0, \quad (4.30)$$

pour ensuite éliminer l'inconnue μ_Γ en fonction de η , grâce à (4.29), en écrivant :

$$\mu_\Gamma = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \eta. \quad (4.31)$$

Ils ont ainsi montré que la linéarisation de la condition aux limites d'angle de contact (tenant compte de la contrainte de glissement au bord) pouvait s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\nu}_\Gamma} = \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\cos(\theta) \frac{1}{R_{\Gamma\Gamma}} + \frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} \right) \eta \quad (4.32)$$

où $\frac{1}{R_{\Gamma\Gamma}} = \boldsymbol{\kappa}_\Gamma(\boldsymbol{\nu}_\Gamma) \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma$ et $\frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} = \boldsymbol{\kappa}_\Sigma(\boldsymbol{\nu}_\Sigma) \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma$, avec $\boldsymbol{\kappa}_\Gamma$ et $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma$ les tenseurs de courbure de Γ et Σ respectivement, définis par $\boldsymbol{\kappa}_\Gamma = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{M}}$ et $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma = \frac{\partial \boldsymbol{n}_\Sigma}{\partial \boldsymbol{M}}$ où \boldsymbol{M} décrit la surface considérée. Cette expression sera utilisée, dans un premier temps, comme condition aux limites sur le bord γ .

24. Cette linéarisation de la condition d'angle de contact donne, en réalité, une équation faisant intervenir des variables $\hat{\mu}_\gamma$ et $\hat{\eta}$, en général, différentes de μ_Γ et η . Cependant, compte tenu des hypothèses de linéarisation et de régularité de γ , on peut montrer que cette différence est du second ordre (de la même manière que la différence entre $\hat{\eta}$ et η dans la remarque §4.3.2).

Chapitre 5

Formulation variationnelle du problème de ballottement avec tension superficielle

Sommaire

5.1	Problème en (φ, η, π)	76
5.1.1	Rappel des équations locales	76
5.1.2	Difficultés d'implémentation	76
5.2	Problème en $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$	77
5.2.1	Formulation $(\varphi, \eta, \mu_\Sigma, \pi)$	77
5.2.2	Formulation $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$	78
5.3	Formulation variationnelle	79
5.3.1	Équation variationnelle sur la surface libre	79
5.3.2	Équation variationnelle dans le volume liquide	82
5.3.3	Espaces des fonctions-tests	83
5.4	Synthèse et remarques	84
5.4.1	Formulation variationnelle et récapitulatif des opérateurs	84
5.4.2	Étude du cas $\omega = 0$	85
5.4.3	Conditions aux limites particulières sur γ	86

5.1 Problème en (φ, η, π)

5.1.1 Rappel des équations locales

Dans le chapitre précédent, les équations locales linéarisées régissant le problème de ballotement avec capillarité ont été établies pour le jeu de variables (φ, η, π) . Le problème spectral s'écrit alors :

$\Delta\varphi = 0$	dans Ω_L	(a)	(5.1)
$\frac{\partial\varphi}{\partial n_\Sigma} = 0$	sur Σ_L	(b)	
$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \eta$	sur Γ	(c)	
$l(\varphi) = 0$	avec $l(1) \neq 0$	(d)	
$\rho\omega^2\varphi + \pi = \rho g(\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n})\eta + \sigma L(\eta)$	sur Γ	(e)	
$\frac{\partial\eta}{\partial\nu_\Gamma} = D\eta$	sur γ	(f)	

où $L(\eta)$ et D sont donnés, respectivement par (4.27) et (4.32) :

$$L(\eta) = -\left(\frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2}\right)\eta - \Delta_s\eta \quad (5.2a)$$

$$D = \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\cos(\theta) \frac{1}{R_{\Gamma\Gamma}} + \frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} \right) \quad (5.2b)$$

5.1.2 Difficultés d'implémentation

Les équations locales (5.1) du problème de ballotement avec tension superficielle ont permis à Morand et Ohayon [62] (chapitre 4) d'établir une formulation variationnelle symétrique. C'est de plus la seule formulation, à notre connaissance, qui prend en compte la courbure du réservoir (le terme $\frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}}$ dans 5.2b) dans l'expression de la condition d'angle de contact dynamique. La signification physique de la présence de cette courbure dans la condition limite (5.1f) sera discutée ultérieurement.

La formulation variationnelle qu'ils proposent, obtenue par multiplication des équations locales par des champs tests puis intégration sur le domaine d'équilibre, présente cependant quelques difficultés techniques pour son implémentation par la méthode des éléments finis :

- **description de la géométrie de la surface libre** : la présence de la quantité $\frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2}$ dans l'opérateur L nous oblige à calculer avec une bonne précision les courbures principales de la surface d'équilibre Γ . Or la géométrie de cette dernière est donnée par un maillage linéaire obtenu par le calcul statique (cf. Partie I). Bien que des méthodes —plus ou moins complexes— existent pour estimer la courbure sur un maillage surfacique [44, 42], la précision de cette estimation restera limitée par le niveau de finesse du maillage utilisé dans la description de la surface, d'autant plus que l'erreur relative est doublée ici par la présence des carrés.

- **précision dans la condition aux limites** : la présence de la quantité $\frac{1}{R_{\Gamma\Gamma}}$ dans l'opérateur de bord D signifie que nous devons estimer aussi la courbure de Γ au niveau de son bord γ . Les méthodes d'estimation de la courbure sur un maillage ont besoin d'évaluer les dérivées discrètes premières et secondes en chaque nœud du maillage ce qui nécessite un certain nombre de points dans leur voisinage. Par conséquent, le calcul de la courbure aux points qui se trouvent sur le bord γ sera le moins précis (le voisinage du point est restreint). Cela est d'autant plus vrai que c'est précisément au bord de la surface libre que la courbure est en général la plus élevée donc nécessiterait plus de points. D'après la littérature, le problème de ballonnement avec capillarité est sensible à la condition aux limites, donc les résultats numériques obtenus risquent d'être entâchés d'une erreur importante due à la mauvaise estimation de ces courbures.
- **description du déplacement sur γ** : le champ η a été retenu comme unique variable pour décrire le mouvement de la surface libre, y compris sur son bord. Bien que la contrainte de glissement (4.17) ait été prise en compte, ce choix reste, quelque part, peu naturel, dès que l'angle de contact est différent de $\pi/2$. Cependant, le vrai problème avec cette formulation est dû à la présence de $\frac{1}{\sin(\theta)}$ dans (5.2b), qui laisse présager de problèmes numériques si l'angle de contact devient voisin de zéro.

Nous proposons dans ce qui suit une écriture alternative du problème (5.1) avec un autre jeu de variables au bord et une manière de procéder permettant d'éviter les problèmes décrits ci-dessus.

5.2 Problème en $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$

5.2.1 Formulation $(\varphi, \eta, \mu_\Sigma, \pi)$

Dans le chapitre précédent, la condition aux limites d'angle de contact de la formulation (φ, η, π) a été établie en calculant la variation au premier ordre de (4.28), dans la direction $\eta \mathbf{n} + \mu_\Gamma \boldsymbol{\nu}_\Gamma$, pour ensuite éliminer μ_Γ par l'intermédiaire de (4.31) et arriver enfin à (5.1f). Pour avoir une formulation qui évite le terme en $\frac{1}{\sin(\theta)}$, on choisit une paramétrisation du déplacement au bord sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mu_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma \quad \text{au lieu de} \quad \begin{cases} \mathbf{u} = \eta \mathbf{n} + \mu_\Gamma \boldsymbol{\nu}_\Gamma \\ \mu_\Gamma \sin(\theta) - \eta \cos(\theta) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Ainsi, la contrainte cinématique $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ sera prise directement en compte dans l'espace admissible. On remplace ainsi (5.1f) par $\delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma](\mu_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma) = 0$. Le problème spectral en $(\varphi, \eta, \mu_\Sigma, \pi)$

s'écrit :

$\Delta\varphi = 0$	dans Ω_L	(a)	(5.4)
$\frac{\partial\varphi}{\partial n_\Sigma} = 0$	sur Σ_L	(b)	
$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \eta$	sur Γ	(c)	
$l(\varphi) = 0$	avec $l(1) \neq 0$	(d)	
$\rho\omega^2\varphi + \pi = \rho g(\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n})\eta + \sigma L(\eta)$	sur Γ	(e)	
$\delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma](\mu_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma) = 0$	sur γ	(f)	

5.2.2 Formulation $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$

L'équation (5.4e) a été établie à partir de (4.24), où les dérivées de P et de $2H$ dans la direction $\eta \mathbf{n}$ sont données respectivement dans (4.25a) et (4.25b). D'une manière plus générale, on peut calculer les variations au premier ordre dans une direction donnée, comme $\eta \mathbf{n}$ par exemple, en procédant en deux temps : d'abord on exprime ces variations dans la direction du champ complet \mathbf{u} , puis on annule la contribution des directions indésirables, ce qui revient, dans notre exemple, à remplacer \mathbf{u} par $\eta \mathbf{n}$. Autrement dit, pour toute fonction f défini sur Γ , on a l'équivalence :

$$\delta[f](\eta \mathbf{n}) \iff \begin{cases} \delta[f](\mathbf{u}) \\ \mathbf{u} = \eta \mathbf{n} \end{cases} \quad (5.5)$$

Appliquons cette démarche au calcul de $\delta[P](\eta \mathbf{n})$ et de $\delta[2H](\eta \mathbf{n})$:

– on sait que $\delta[P](\mathbf{u}) = p_{\mathcal{L}}$, donc d'après (4.6), on a directement :

$$\delta[P](\mathbf{u}) = p - \rho g \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{u} \quad (5.6)$$

En prenant $\mathbf{u} = \eta \mathbf{n}$, on arrive bien à (4.25a).

– on montre (voir Annexe A) que la variation au premier ordre de la courbure moyenne de la surface libre dans la direction \mathbf{u} s'écrit :

$$\delta[2H](\mathbf{u}) = -\left(\frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2}\right)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \operatorname{div}_s(\nabla_s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) + h_{2H}(\mathbf{u}_\parallel) \quad (5.7)$$

où $h_{2H}(\mathbf{u}_\parallel)$ est une fonction linéaire de la partie tangente du déplacements \mathbf{u}_\parallel , dont une écriture est donnée dans l'Annexe A (dans la base orthogonale de Gauss). Encore une fois, si on prend $\mathbf{u} = \eta \mathbf{n}$, on retrouve bien (4.25b).

D'après (4.14a), $p = \rho\omega^2\varphi + \pi$, et puisque $\delta[P_G](\mathbf{u}) = 0$ alors :

$$(5.4e) \iff \begin{cases} \delta[P - P_G - \sigma 2H](\mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{u} = \eta \mathbf{n} \end{cases} \quad (5.8)$$

Cette démarche peut également être utilisée sur γ pour retrouver (5.4f) en utilisant :

$$\delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma](\mu_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma) \iff \begin{cases} \delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma](\mathbf{u}) \\ \mathbf{u} = \mu_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma \end{cases} \quad (5.9)$$

En introduisant l'espace \mathcal{C}_φ^l défini par :

$$\mathcal{C}_\varphi^l = \{\varphi \in \mathcal{C}_\varphi / l(\varphi) = 0, l(1) \neq 0\} \quad (5.10)$$

ainsi que l'espace $\mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp$ défini²⁵ par :

$$\mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u} / \mathbf{u} \parallel \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma \text{ et } \mathbf{u} \parallel \boldsymbol{\nu}_\Sigma \text{ sur } \gamma\} \quad (5.11)$$

alors le problème (5.4) peut s'écrire sous la forme :

$\Delta\varphi = 0$	dans Ω_L	(a)	(5.12)
$\frac{\partial\varphi}{\partial n_\Sigma} = 0$	sur Σ_L	(b)	
$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$	sur Γ	(c)	
$\rho\omega^2\varphi + \pi = \rho g \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{u} + \sigma \delta[2H](\mathbf{u})$	sur Γ	(d)	
$\delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma](\mathbf{u}) = 0$	sur γ	(e)	
avec $\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^l$, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp$ et $\pi \in \mathbb{R}$			

C'est la formulation $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$ ci-dessus qui sera utilisée dans la résolution du problème.

5.3 Formulation variationnelle

On considère une solution $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$ des équations (5.12) correspondant à une pulsation ω . Pour établir une formulation variationnelle de ce système d'équations, on procède par la méthode des fonctions-tests.

5.3.1 Équation variationnelle sur la surface libre

Opérateurs de surface

On considère un champ-test $\boldsymbol{\delta u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u}$ (i.e. défini sur Γ avec $\boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ sur γ). Avant de pouvoir multiplier (5.12d) par $\boldsymbol{\delta u}$, on va proposer une expression vectorielle de cette équation. En effet, on a vu d'après (5.8) que l'équation de surface libre (5.12d) est équivalente à la linéarisation de l'équation de Laplace-Young :

$$\delta[P - P_G - \sigma 2H](\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (5.13)$$

25. La notation « \perp » vient du fait que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp$ est tel que $\mathbf{u} \perp \Gamma$ sur la surface libre et $\mathbf{u} \perp \gamma$ le long du bord.

Or l'équation de Laplace-Young est à l'origine une équation vectorielle portée par la normale \mathbf{n} et traduisant l'équilibre des forces à la surface libre. Ainsi, une équation vectorielle équivalente à (5.12d) peut être obtenue en écrivant :

$$\delta[(P - P_G - \sigma 2H) \mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

La règle de dérivation du produit de fonctions nous permet d'écrire (5.14) sous la forme :

$$\left(\delta[P - P_G - \sigma 2H](\mathbf{u}) \right) \mathbf{n} \, d\Gamma + (P - P_G - \sigma 2H) \delta[\mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (5.15)$$

Puisque l'équation de Laplace-Young ($P - P_G - \sigma 2H = 0$) est vérifiée et que $\mathbf{n} \, d\Gamma \neq \mathbf{0}$, alors les équations (5.15) et (5.13) sont bien équivalentes. Bien que le deuxième terme de (5.15) soit donc nul, on choisit quand même de le conserver pour pouvoir le réarranger avec les autres termes de l'équation. En utilisant (5.6) et en rappelant qu'à l'équilibre on a $P = P_{Z=0} - \rho g Z$ où $Z = \mathbf{X} \cdot \mathbf{i}_z$ avec \mathbf{X} le vecteur position dans le repère absolu, (5.15) devient :

$$p \mathbf{n} \, d\Gamma = \rho g \left(Z \delta[\mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z) \mathbf{n} \, d\Gamma \right) + \dots \quad (5.16)$$

$$(P_G - P_{Z=0}) \delta[\mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u}) + \sigma \delta[2H \mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u})$$

Or d'après (1.72), $P_G - P_{Z=0} = \Lambda$, où Λ est la valeur à l'équilibre du multiplicateur de Lagrange assurant la condition d'incompressibilité dans le problème statique²⁶. Cette valeur est connue, en même temps que \mathbf{X} (cf. Partie I). Finalement, en introduisant le vecteur $\boldsymbol{\tau}$ défini par :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \, d\Gamma = \delta[\mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u}) \quad (5.17)$$

alors (5.16) devient :

$$p \mathbf{n} \, d\Gamma = \rho g \left(Z \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z) \mathbf{n} \right) \, d\Gamma + \Lambda \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \, d\Gamma + \sigma \delta[2H \mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u}) \quad (5.18)$$

Enfin, grâce à (4.14a), on écrit p en fonction de φ et de π , et on arrive à l'équation :

$$(\rho \omega^2 \varphi + \pi) \mathbf{n} \, d\Gamma = \rho g \left(Z \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z) \mathbf{n} \right) \, d\Gamma + \Lambda \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \, d\Gamma + \sigma \delta[2H \mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u}) \quad (5.19)$$

Cette dernière équation, vérifiée sur Γ , est donc équivalente à (5.12d). En la multipliant scalairement par $\boldsymbol{\delta u}$ et en intégrant sur Γ on obtient :

$$\sigma \int_{\Gamma} \boldsymbol{\delta u} \cdot \delta[2H \mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u}) \, d\Gamma + \rho g \int_{\Gamma} \boldsymbol{\delta u} \cdot \left(Z \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z) \mathbf{n} \right) \, d\Gamma + \dots$$

$$\Lambda \int_{\Gamma} \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \, d\Gamma - \rho \omega^2 \int_{\Gamma} \varphi \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \pi \int_{\Gamma} \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (5.20)$$

En reprenant la paramétrisation introduite dans la partie I §1.3.1, où la surface de référence est ici Γ elle-même ($\mathbf{U} = \mathbf{0}$), on peut écrire $\mathbf{n} \, d\Gamma = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \, d\xi_1 d\xi_2$ et donc :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \, d\Gamma = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) \, d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.21)$$

²⁶ $P_G - P_{Z=0} = \Lambda$ si les origines des repères utilisés dans le calcul statique et le calcul dynamique ont la même altitude. Si cela n'est pas le cas, il faudra changer la valeur de Λ pour tenir compte du changement de repère.

On reconnaît ainsi immédiatement dans (5.20) les opérateurs \mathbf{K}_Γ^g , $\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda$ et $\mathbf{R}_\Gamma^\Lambda$ participant à la matrice hessienne du calcul statique. On introduit en plus l'opérateur \mathbf{C} de couplage entre le potentiel de déplacement et le déplacement normal à la surface libre :

$$\mathbf{C}(\varphi, \boldsymbol{\delta u}) = \int_\Gamma \varphi \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\xi_1, \xi_2} \varphi \boldsymbol{\delta u} \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \, d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.22)$$

L'équation (5.20) est donc équivalente à :

$$\sigma \int_\Gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \delta[2H \mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u}) + \rho g \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) + \Lambda \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) - \rho \omega^2 \mathbf{C}(\varphi, \boldsymbol{\delta u}) - \pi \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\boldsymbol{\delta u}) = 0 \quad (5.23)$$

D'autre part, d'après (2.3) et la définition de \mathbf{R}_Γ^σ dans (2.5), on a pour tout champ $\boldsymbol{\delta u}$:

$$\int_\Gamma 2H \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\boldsymbol{\delta u}) - \oint_\gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma \quad (5.24)$$

En différentiant cette dernière intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \delta[2H \mathbf{n} \, d\Gamma](\mathbf{u}) &= \mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) - \oint_\gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma](\mathbf{u}) + \dots \\ &\quad \underbrace{\dots \mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\mathbf{v}) - \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma - \int_\Gamma 2H \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}_{=0, \text{ d'après (5.24)}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

où $\mathbf{v} = \delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u})$. L'opérateur $\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u})$ est la variation au premier ordre de $\mathbf{R}_\Gamma^\sigma(\boldsymbol{\delta u})$ en gardant $\boldsymbol{\delta u}$ constant, déjà exprimée dans (2.17). Finalement (5.20) s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) + \rho g \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) + \Lambda \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) - \dots \\ \rho \omega^2 \mathbf{C}(\varphi, \boldsymbol{\delta u}) - \pi \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\boldsymbol{\delta u}) - \sigma \oint_\gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma](\mathbf{u}) = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Opérateurs de bord

Dans l'équation (5.26), le dernier terme —qui est une intégrale sur le bord γ — devra être exprimé en tenant compte de la condition d'angle de contact (5.12e). Pour arriver à une formulation variationnelle de cette condition d'angle de contact on va, cette fois encore, revenir à l'équilibre des forces à l'origine de cette condition. On a vu dans §0.4.2 que cet équilibre peut s'écrire sur un élément $d\gamma$ sous la forme :

$$\sigma \cos(\theta) \boldsymbol{\nu}_\Sigma \, d\gamma - \sigma \boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma + f_\Sigma \mathbf{n}_\Sigma \, d\gamma = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

où f_Σ est la réaction linéique appliquée par le réservoir sur le bord de la surface libre pour assurer que ce dernier ne se décolle pas. On multiplie maintenant (5.27) scalairement par $\boldsymbol{\delta u}$, en utilisant le fait que $\boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$, puis on intègre sur γ pour obtenir :

$$\sigma \oint_\gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma - \sigma \cos(\theta) \oint_\gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma \, d\gamma = 0 \quad (5.28)$$

La variation au premier ordre de cette relation s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma \oint_\gamma \delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma + \sigma \oint_\gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma](\mathbf{u}) - \dots \\ \sigma \delta[\cos(\theta)](\mathbf{u}) \oint_\gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma \, d\gamma - \sigma \cos(\theta) \oint_\gamma \delta[\boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma \, d\gamma](\mathbf{u}) = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

En utilisant maintenant (5.12f), on a :

$$\delta[\cos(\theta)](\mathbf{u}) = \delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma](\mathbf{u}) = 0 \quad (5.30)$$

Finalement, et grâce à la condition de conservation de l'angle de contact au cours du mouvement, on arrive à :

$$\sigma \oint_\gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma](\mathbf{u}) = \underbrace{\sigma \cos(\theta) \oint_\gamma \delta[\boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma \, d\gamma](\mathbf{u}) - \sigma \oint_\gamma \delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma \, d\gamma}_{\sigma \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u})} \quad (5.31)$$

Le développement des calculs a été mené dans l'Annexe B, où on montre que l'opérateur de bord \mathbf{K}_γ^θ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \cos(\theta) \, {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) + \sin(\theta) \, {}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) \quad (5.32)$$

où ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta$ est l'opérateur d'angle de contact, introduit dans la partie I dans (2.22), ne tenant pas compte de la courbure du réservoir, et où ${}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta$ est un nouvel opérateur tenant contenant l'information sur la courbure de Σ , et donné par :

$$\boxed{{}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \oint_\gamma \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma \cdot \mathbf{u} \, d\gamma = \oint_\xi \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma \cdot \mathbf{u} \, \|\mathbf{a}_\gamma\| \, d\xi} \quad (5.33)$$

avec la notation $\boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma(\mathbf{u})$.

Équation variationnelle sur Γ avec conditions aux limites

À partir de (5.26) et (5.32), on arrive finalement à l'équation variationnelle de la surface libre avec prise en compte des conditions aux limites :

$$\boxed{\sigma \mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) - \sigma \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) + \rho g \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) + \dots} \quad (5.34)$$

$$\dots + \Lambda \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta u}) - \rho \omega^2 \mathbf{C}(\varphi, \boldsymbol{\delta u}) - \pi \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\boldsymbol{\delta u}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\delta u} \in \mathcal{C}_u$$

5.3.2 Équation variationnelle dans le volume liquide

On introduit l'espace \mathcal{C}_φ des fonctions-tests $\delta\varphi$ régulières dans Ω_L . On multiplie (5.12a) par une fonction-test $\delta\varphi \in \Omega_L$ puis on intègre dans Ω_L , et enfin en appliquant la formule de Green suivante (sachant que $\partial\Omega_L = \Sigma_L \cup \Gamma$) :

$$\int_{\Omega_L} \Delta\varphi \delta\varphi \, d\Omega_L = \int_{\Sigma_L} \frac{\partial\varphi}{\partial n_\Sigma} \delta\varphi \, d\Sigma_L + \int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial n} \delta\varphi \, d\Gamma - \int_{\Omega_L} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi \, d\Omega_L \quad (5.35)$$

on obtient :

$$\int_{\Omega_L} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi \, d\Omega_L - \int_{\Sigma_L} \frac{\partial\varphi}{\partial n_\Sigma} \delta\varphi \, d\Sigma_L - \int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial n} \delta\varphi \, d\Gamma = 0 \quad (5.36)$$

Finalement, en prenant en compte (5.12b) et (5.12c), on arrive à l'équation variationnelle vérifiée dans Ω_L :

$$\boxed{\mathbf{M}(\varphi, \delta\varphi) - \mathbf{C}(\delta\varphi, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi} \quad (5.37)$$

où \mathbf{M} est un nouvel opérateur²⁷ donné par $\mathbf{M}(\varphi, \delta\varphi) = \int_{\Omega_L} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi \, d\Omega_L$.

27. On verra plus tard que \mathbf{M} est l'opérateur de masse du problème de ballotement.

5.3.3 Espaces des fonctions-tests

On remarque que dans (5.37), les fonctions-tests $\delta\varphi$ ne sont pas soumises à la condition (5.4d) que doit satisfaire φ (puisque $\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^l$). On remarque également que dans (5.34), les fonctions-test $\delta\mathbf{u}$ n'appartiennent pas à $\mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp$ comme l'est \mathbf{u} . Le but de cette section sera d'établir une formulation variationnelle où φ et $\delta\varphi$ appartiennent au même espace admissible, et la même chose pour \mathbf{u} et $\delta\mathbf{u}$.

Espace des fonctions-tests $\delta\mathbf{u}$

On va montrer ici que les fonctions-tests $\delta\mathbf{u}$ peuvent être restreintes à $\mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp$ sans modification des équations. En effet, si on introduit l'espace $\mathcal{C}_\mathbf{u}^\parallel$ défini²⁸ par :

$$\mathcal{C}_\mathbf{u}^\parallel = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u} / \mathbf{u} \perp \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma \text{ et } \mathbf{u} \perp \boldsymbol{\nu}_\Sigma \text{ sur } \gamma \} \quad (5.38)$$

alors, il est évident que tout $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u}$ se décompose d'une manière unique sous la forme :

$$\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^\perp + \delta\mathbf{u}^\parallel \quad \text{avec} \quad \delta\mathbf{u}^\perp \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp \quad \text{et} \quad \delta\mathbf{u}^\parallel \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\parallel \quad (5.39)$$

Par conséquent, $\mathcal{C}_\mathbf{u}$ peut s'écrire comme la somme directe :

$$\mathcal{C}_\mathbf{u} = \mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp \oplus \mathcal{C}_\mathbf{u}^\parallel \quad (5.40)$$

Compte tenu de cette décomposition, (5.34) peut être remplacé par l'ensemble équivalent des deux équations variationnelles obtenues en restreignant successivement (5.34) à la classe des fonctions-tests $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp$ et aux fonctions-tests $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\parallel$. Seulement, pour un champ-test $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\parallel$, l'équation (5.34) n'est pas significative (elle est du type "0 = 0") et pourra donc être éliminée. En effet, on a vu que l'équation variationnelle (5.34) a été obtenue à partir de deux opérations : la première est le produit scalaire de (5.19) avec $\delta\mathbf{u}$, et la deuxième est la linéarisation de (5.28). Concernant la première opération, on peut remarquer que la partie $\delta\mathbf{u}^\parallel$ du champ-test ne travaille pas puisque (5.19) est équivalente à (5.15). Quant à la deuxième opération, on voit, d'après (5.28), que la partie du champ-test tangente au bord n'est pas impliquée dans l'équilibre des forces, et peut donc être éliminée d'emblée. En conclusion, pour tout champ-test $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\parallel$, l'équation (5.34) est équivalente à "0 = 0". Bien qu'inutile sur le plan énergétique, on a préféré garder cette partie du champ-test pour conserver la symétrie de la formulation.

En conclusion, (5.34) peut être remplacée uniquement par :

$$\begin{aligned} & \sigma \mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \sigma \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \rho g \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \dots \\ & \dots + \Lambda \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \rho \omega^2 \mathbf{C}(\varphi, \delta\mathbf{u}) - \pi \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\delta\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp \end{aligned} \quad (5.41)$$

Espace des fonctions-tests $\delta\varphi$

Pour mettre en place un cadre où φ et $\delta\varphi$ appartiennent au même espace admissible, on va commencer par montrer que $\varphi \in \mathcal{C}_\varphi$ peut s'écrire d'une manière unique sous la forme :

$$\varphi = \varphi^l + \text{Cte} \quad \text{avec} \quad \varphi^l \in \mathcal{C}_\varphi^l \quad (5.42)$$

28. La notation « // » vient du fait que si $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\parallel$, alors $\mathbf{u} \parallel \Gamma$ sur la surface libre et $\mathbf{u} \parallel \gamma$ le long du bord.

En effet, en appliquant l à (5.42) et en utilisant $l(\varphi^l) = 0$, on détermine de façon unique la valeur de la constante : $Cte = l(\varphi)/l(1)$. Par conséquent, \mathcal{C}_φ se décompose selon :

$$\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{C}_\varphi^l \oplus \mathbb{R} \quad (5.43)$$

Compte tenu de cette décomposition, (5.37) peut être remplacé par l'ensemble équivalent des deux équations variationnelles obtenues en restreignant successivement (5.37) à la classe des fonctions-tests $\delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^l$ et aux fonctions-tests constantes $\delta\pi \in \mathbb{R}$, ce qui donne :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{M}(\varphi, \delta\varphi) - \mathbf{C}(\delta\varphi, \mathbf{u}) = 0 & \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^l \quad (\text{a}) \\ \delta\pi \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}) = 0 & \forall \delta\pi \in \mathbb{R} \quad (\text{b}) \end{array} \quad (5.44)$$

On note que (5.44b) conduit à $\int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$, ce qui permet de retrouver la condition d'invariance du volume liquide.

5.4 Synthèse et remarques

5.4.1 Formulation variationnelle et récapitulatif des opérateurs

Formulation variationnelle du problème dynamique

La formulation variationnelle du problème spectral de ballonnement d'un liquide, avec prise en compte de la tension superficielle, s'obtient en regroupant (5.41) et (5.44) :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \omega^2 \in \mathbb{R}^+ ; (\mathbf{u}, \varphi, \pi) \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp \times \mathcal{C}_\varphi^l \times \mathbb{R} / \forall (\delta\mathbf{u}, \delta\varphi, \delta\pi) \in \mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp \times \mathcal{C}_\varphi^l \times \mathbb{R} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \sigma \mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \sigma \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \rho g \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \dots \\ \dots \wedge \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \rho \omega^2 \mathbf{C}(\varphi, \delta\mathbf{u}) - \pi \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\delta\mathbf{u}) = 0 & (\text{a}) \\ \mathbf{M}(\varphi, \delta\varphi) - \mathbf{C}(\delta\varphi, \mathbf{u}) = 0 & (\text{b}) \\ \delta\pi \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}) = 0 & (\text{c}) \end{array} \right. \quad (5.45) \end{array}$$

où les opérateurs \mathbf{K}_Γ^σ et \mathbf{K}_γ^θ sont donnés par :

$$\mathbf{K}_\Gamma^\sigma = {}^1\mathbf{K}_\Gamma^\sigma - {}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma + {}^3\mathbf{K}_\Gamma^\sigma \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_\gamma^\theta = \cos(\theta) {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta + \sin(\theta) {}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta$$

Rappel des opérateurs

On récapitule ici les expressions des différents opérateurs intervenant dans (5.45), dont la majorité a été introduite dans la partie statique. Les dix opérateurs constituant (5.45) sont donc :

$${}^1\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} J^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.46a)$$

$${}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \operatorname{div}_s(\mathbf{u}) \operatorname{div}_s(\delta\mathbf{u}) J d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.46b)$$

$${}^3\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.46c)$$

$${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \oint_\xi \delta\mathbf{u} \cdot \left(\mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (5.46d)$$

$${}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \oint_\xi \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma \cdot \mathbf{u} \|\mathbf{a}_\gamma\| d\xi \quad (5.46e)$$

$$\mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z) \delta\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\xi_1, \xi_2} Z \delta\mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.46f)$$

$$\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \delta\mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.46g)$$

$$\mathbf{C}(\varphi, \delta\varphi) = \int_{\xi_1, \xi_2} \varphi \delta\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.46h)$$

$$\mathbf{M}(\varphi, \delta\varphi) = \int_{\Omega_L} \nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi d\Omega_L \quad (5.46i)$$

$$\mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\delta\mathbf{u}) = \int_{\xi_1, \xi_2} \delta\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.46j)$$

Remarque : Si la surface libre présente plusieurs bords, comme par exemple dans le cas où m tuyaux traversant Γ , alors il suffit (comme il a été fait dans (2.53) pour le problème statique) d'ajouter à l'équation (5.45a), le terme $-\sigma \sum_{i=1}^m \cos(\theta_i) \mathbf{K}_{\gamma_i}^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$, où θ_i est l'angle de contact sur le bord γ_i , formé entre la surface libre et le corps i . L'opérateur $\mathbf{K}_{\gamma_i}^\theta$ a la même expression que \mathbf{K}_γ^θ , mais calculé sur γ_i .

5.4.2 Étude du cas $\omega = 0$

Pour le cas $\omega = 0$, on va montrer ici que le problème (5.45) est bien posé, c'est à dire qu'il admet une solution unique $(\varphi^0, \mathbf{u}^0, \pi^0)$, en l'occurrence $(0, \mathbf{0}, 0)$.

En effet, le système formé par les deux équations (5.45a) et (5.45c) avec $\omega = 0$ n'est autre que le problème statique (2.34) à l'équilibre ($\mathbf{R} = \mathbf{0}$ et $V_0 - V = 0$), où $\pi^0 = -\lambda$ et $\delta\pi = \delta\lambda$. Puisqu'on considère un état d'équilibre stable, alors la seule solution de ce problème est $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ et $\pi^0 = 0$. D'autre part, puisque $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$, alors l'équation restante (5.45b) devient :

$$\mathbf{M}(\varphi^0, \delta\varphi) = 0 \quad (5.47)$$

Cette équation variationnelle est équivalente au problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \varphi^0 = 0 & \text{dans } \Omega_L \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial n_\Sigma} = 0 & \text{sur } \Sigma_L \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (5.48)$$

où $\varphi^0 \in \mathcal{C}_\varphi^l$. On sait que l'unique solution de (5.48) est $\varphi^0 = \text{Cte}$, mais avec la contrainte $l(\varphi^0) = 0$, on a $\varphi^0 = 0$.

En conclusion, si $\omega = 0$, alors la solution de (5.45) est $(\varphi^0, \mathbf{u}^0, \pi^0) = (0, \mathbf{0}, 0)$. Ce résultat signifie aussi qu'il n'existe pas de modes propres à fréquence nulle au voisinage d'un état d'équilibre stable puisqu'un vecteur propre $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$ est, par définition, un vecteur non nul.

5.4.3 Conditions aux limites particulières sur γ

Cas d'un angle de contact $\theta = 90^\circ$

Dans le cas où la surface libre rencontre le réservoir avec un angle droit $\theta = 90^\circ$, l'opérateur de bord \mathbf{K}_γ^θ se réduit à ${}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta$. D'autre par, $\delta\mathbf{u}$ et \mathbf{u} appartiennent à $\mathcal{C}_\mathbf{u}^\perp$, donc on peut écrire sur γ :

$$\delta\mathbf{u} = \delta\mu_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \mu_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma \quad (5.49)$$

ainsi :

$${}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_\gamma \frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} \mu_\Sigma \delta\mu_\Sigma \, d\gamma \quad (5.50)$$

Par ailleurs, on voit d'après (5.2b) que l'opérateur d'angle de contact, dans le cadre de la formulation (φ, η, π) , s'écrit :

$$\int_\gamma D \eta \delta\eta \, d\gamma = \int_\gamma \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\cos(\theta) \frac{1}{R_{\Gamma\Gamma}} + \frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} \right) \eta \delta\eta \, d\gamma \quad (5.51)$$

Or, pour $\theta = 90^\circ$, on a $\sin(\theta) = 1$ et $\cos(\theta) = 0$, et en plus $\boldsymbol{\nu}_\Sigma = \mathbf{n}$ ce qui signifie que $(\mu_\Sigma, \delta\mu_\Sigma) = (\eta, \delta\eta)$, et dans ce cas seulement, on remarque que (5.51), coïncide avec (5.50). En effet, on peut voir d'après l'Annexe B que \mathbf{K}_γ^θ ne contient pas la partie $\frac{1}{R_{\Gamma\Gamma}}$ de la courbure de la surface libre²⁹ (quelque soit la valeur de θ), alors le seul cas où ces deux formulations peuvent avoir le même opérateur d'angle de contact est quand $\frac{1}{R_{\Gamma\Gamma}}$ disparaît également de (5.51), c'est à dire pour $\theta = 90^\circ$.

Cas d'un angle de contact $\theta = 0^\circ$

Pour la formulation (φ, η, π) , le cas —rarement rencontré— de mouillage total correspondant à $\theta = 0^\circ$, fait que le terme D , défini par (5.2b), devient infini. En même temps, la condition de glissement (4.29) devient équivalente à imposer $\eta = 0$ sur γ , de façon à ce que le terme $D\eta$ dans (5.51) reste fini. On fait généralement disparaître ce terme en restreignant l'espace de recherche à des champs η nuls sur γ et en utilisant des champs-tests $\delta\eta$ également nuls sur le bord. Cependant, dans le cas où l'angle de contact s'approche de zéro (sans être nul), cette procédure ne peut s'appliquer car la valeur de η redevient inconnue. Dans ce cas, D est très grand et des problèmes de conditionnement numérique peuvent apparaître. Une manière de contourner ce problème est de faire un changement de variable en introduisant une inconnue supplémentaire $q = D\eta$ sur γ . Cette opération —correspondant à une *transformation de Legendre*— s'accompagnera d'une équation supplémentaire sur le bord.

Avec la formulation $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$ proposée ici, le cas $\theta = 0^\circ$ fait que l'opérateur de bord \mathbf{K}_γ^θ se réduit cette fois-ci à ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta$, et on n'a plus besoin de calculer la courbure du réservoir. Par ailleurs, le déplacement au bord devient purement tangentiel à la surface libre car $\boldsymbol{\nu}_\Sigma = \boldsymbol{\nu}_\Gamma$, et la raideur associée contient deux contributions, celle du terme de bord ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta$ d'une part, et celle de \mathbf{K}_Γ^σ d'autre part. Cependant, puisque l'opérateur de masse \mathbf{M} ne "voit" que la partie normale à Γ du déplacement, alors ces ddls de bord peuvent être exclus du problème spectral car ils donneront lieu à des modes locaux parasites à fréquences infinies. Malgré cela, la solution retenue pour ce cas est de ne rien faire puisqu'on va chercher les valeurs propres du système dans un intervalle borné de la forme $]0, \omega_{max}^2]$. La formulation (5.45) peut donc être utilisée telle qu'elle, quelque soit la valeur de θ .

29. Dans la formulation $(\varphi, \mathbf{u}, \pi)$, la partie $\frac{1}{R_{\Gamma\Gamma}}$ de la courbure de la surface libre est contenue uniquement dans les opérateurs surfaciques, et d'une manière implicite.

Effet de la courbure du réservoir $\frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}}$

Dans la littérature traitant du problème de ballottement avec tension superficielle, on rencontre souvent deux types de conditions sur le bord γ . La première est la condition de bord libre —*free-end boundary condition*— où on impose un angle de contact constant et où le bord γ glisse librement³⁰ sur Σ . Les prédictions avec ce modèle ne donnant pas toujours des résultats compatibles avec les expériences, un deuxième modèle est introduit [6, 43] qui est la condition de bord immobile —*pinned-end boundary condition*— où la ligne de contact ne bouge pas, par contre l’angle de contact varie librement.

Pour valider la condition de bord libre, on se place souvent dans la situation d’un réservoir cylindrique vertical à section circulaire (où \mathbf{g} est parallèle à l’axe de révolution) partiellement rempli [95], alors que pour valider la condition de bord fixe, on utilise un réservoir rempli à ras-bord [45]. Ces deux conditions aux limites ne sont autres que deux cas particuliers contenus dans l’opérateur ${}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta$. En effet, d’après (5.45), cet opérateur apporte au problème une raideur qui a la forme :

$$-\sigma \sin(\theta) \int_\gamma \frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} \mu_\Sigma \delta\mu_\Sigma \, d\gamma \quad (5.52)$$

Le terme de courbure du réservoir $\frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}}$ est nul dans le premier cas et tend vers $-\infty$ dans le deuxième cas. Il peut être vu comme un facteur de pénalisation qui, dans le cas de condition de bord libre ($\frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} = 0$) l’effet de courbure du réservoir est absent, alors que dans le cas du réservoir rempli à ras-bord ($\frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} = -\infty$) le déplacement de la ligne de contact est nul. Une étude de ces deux cas, avec $\theta = 90^\circ$, a été menée par Wang *et al* [95] où il a été nécessaire d’introduire un tel coefficient de pénalisation car la formulation ne tient pas compte de l’effet de courbure du réservoir.

L’absence de prise en compte de la courbure du réservoir dans les modèles de ballottement avec tension de surface pourrait expliquer les écarts constatés dans la littérature entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux. En effet, les meilleurs résultats sont obtenus dans les cas particuliers où cet effet est absent (comme c’est le cas pour le cylindre vertical partiellement rempli) ou bien dans les cas où un traitement spécial remplace l’effet de cette courbure (cas du réservoir rempli à ras-bord). Il est clair que dans le cas général, la prise en compte de la courbure du réservoir est nécessaire et influence nettement le résultat, comme on va l’illustrer dans le chapitre suivant.

30. Un glissement “libre” signifie ici que l’on ne prend pas en compte la courbure du réservoir. En effet, cette dernière introduit une raideur proportionnelle à $\frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}}$ par le biais de l’opérateur ${}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta$.

Chapitre 6

Implémentation et validation

Sommaire

6.1	Implémentation	90
6.1.1	Discrétisation des opérateurs	90
6.1.2	Problème matriciel	92
6.1.3	Symétrisation	92
6.2	Validation	96
6.2.1	Cas d'une goutte de liquide en apesanteur	96
6.2.2	Cas d'un réservoir cylindrique vertical avec $\theta = 90^\circ$	97
6.2.3	Cas d'un réservoir sphérique avec $\theta = 5^\circ$	99
6.3	Influence de la courbure du réservoir	103

6.1 Implémentation

6.1.1 Discrétisation des opérateurs

Cadre général

La résolution numérique du problème spectral (5.45) se fera après discrétisation de ce dernier par la méthode des éléments finis, déjà présentée dans §3.1.1. En utilisant les mêmes fonctions de formes linéaires N_i que dans (3.1), les champs scalaires φ et $\delta\varphi$ seront discrétisés sur un triangle élémentaire s_e de la surface libre par :

$$\varphi^{s_e} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \Phi^{s_e} \quad \text{et} \quad \delta\varphi^{s_e} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \delta\Phi^{s_e} \quad (6.1)$$

où Φ^{s_e} et $\delta\Phi^{s_e}$ sont les vecteurs colonnes formés par les trois valeurs aux nœuds de φ et $\delta\varphi$, respectivement. Cette représentation est destinée à discrétiser l'opérateur surfacique \mathbf{C} . Quant à la discrétisation de l'opérateur volumique \mathbf{M} , un maillage volumique du domaine liquide Ω_L sera nécessaire. Les éléments finis utilisés seront des tétraèdres, dont les nœuds coïncident avec ceux du maillage du réservoir sur l'interface Σ_L d'une part, et ceux du maillage de la surface libre Γ d'autre part. Ainsi, les champs scalaires φ et $\delta\varphi$ seront interpolés sur un tétraèdre élémentaire v_e par :

$$\varphi^{v_e} = [N_1^v \quad N_2^v \quad N_3^v \quad N_4^v] \Phi^{v_e} \quad \text{et} \quad \delta\varphi^{v_e} = [N_1^v \quad N_2^v \quad N_3^v \quad N_4^v] \delta\Phi^{v_e} \quad (6.2)$$

où $N_1^v = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$, $N_2^v = \xi_1$, $N_3^v = \xi_2$ et $N_4^v = \xi_3$, sont les fonctions d'interpolation linéaires classiques pour un tétraèdre, où les paramètres ξ_i décrivent le tétraèdre de référence. Ici les vecteurs Φ^{v_e} et $\delta\Phi^{v_e}$ contiennent les 4 valeurs de φ et $\delta\varphi$ aux nœuds du tétraèdre. La géométrie est également interpolée dans le domaine liquide par ces mêmes fonctions de forme :

$$\mathbf{X}^{v_e} = \mathbf{N}^{v_e}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{X}^{v_e} \quad (6.3)$$

où \mathbf{X}^{v_e} est le vecteur colonne (12×1) des valeurs aux nœuds du tétraèdre v_e de \mathbf{X}^{v_e} , disposées, par exemple, en regroupant les trois ddls de chaque nœud (composante selon i_x , i_y puis i_z), ainsi la matrice des fonctions de forme \mathbf{N}^{v_e} pourra avoir la forme :

$$\mathbf{N}^{v_e}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} N_1^v & 0 & 0 & N_2^v & 0 & 0 & N_3^v & 0 & 0 & N_4^v & 0 & 0 \\ 0 & N_1^v & 0 & 0 & N_2^v & 0 & 0 & N_3^v & 0 & 0 & N_4^v & 0 \\ 0 & 0 & N_1^v & 0 & 0 & N_2^v & 0 & 0 & N_3^v & 0 & 0 & N_4^v \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Bien que le système étudié ici soit borné, certains auteurs discrétisent le fluide par des éléments de frontière [57, 33, 39], habituellement réservés au traitement des fluides externes infinis (pour l'étude du rayonnement acoustique par exemple). Cette méthode s'affranchit de la construction d'un maillage volumique du fluide et peut donc être avantageuse dans certains cas. Notons que des méthodes ont également été développées pour coupler les deux techniques [54] dans le but de profiter de leurs avantages respectifs. Pour des raisons de facilité d'implémentation dans les codes standards et pour éviter les problèmes spécifiques à la méthode des éléments de frontière, nous avons opté pour une discrétisation EF classique.

Opérateurs matriciels

La discrétisation des différents opérateurs intégraux du problème (5.45) donne naissance aux opérateurs matriciels —dont plusieurs ont déjà été introduits dans (3.3)— suivant :

$${}^1\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top {}^1\mathbf{K}_\Gamma^\sigma \mathbf{u} \quad (6.5a)$$

$${}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top {}^2\mathbf{K}_\Gamma^\sigma \mathbf{u} \quad (6.5b)$$

$${}^3\mathbf{K}_\Gamma^\sigma(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top {}^3\mathbf{K}_\Gamma^\sigma \mathbf{u} \quad (6.5c)$$

$${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta \mathbf{u} \quad (6.5d)$$

$${}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top {}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta \mathbf{u} \quad (6.5e)$$

$$\mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{K}_\Gamma^g \mathbf{u} \quad (6.5f)$$

$$\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda \mathbf{u} \quad (6.5g)$$

$$\mathbf{C}(\varphi, \delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{C} \Phi \quad (6.5h)$$

$$\mathbf{M}(\varphi, \delta\varphi) \implies \delta\Phi^\top \mathbf{M} \Phi \quad (6.5i)$$

$$\mathbf{R}_\Gamma^\Lambda(\delta\mathbf{u}) \implies \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda \quad (6.5j)$$

La numérisation et l'assemblage de ces opérateurs ne pose aucun problème particulier. Le seul opérateur qui nécessite un traitement spécial est ${}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma \cdot \mathbf{u} \, d\gamma$, en raison de la présence du tenseur de courbure de Σ .

Calcul de la courbure de Σ sur γ

Afin d'éviter les problèmes d'interpolation de tenseurs d'ordre 2, $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma$ est supposé constant par élément (segment) de γ et est estimé au milieu de ce dernier. Suivant la procédure décrite dans [41], on commence par construire, au milieu de chaque élément du bord, un repère orthonormé local où le troisième vecteur est une première estimation de la normale à Σ (par exemple la normale à l'élément triangulaire de Σ le plus proche). On approxime ensuite localement la surface du réservoir par une fonction polynomiale du second degré f_0 sous la forme :

$$f_0(\mu_{\Sigma_1}, \mu_{\Sigma_2}) = a_0 \mu_{\Sigma_1}^2 + b_0 \mu_{\Sigma_2}^2 + c_0 \mu_{\Sigma_1} \mu_{\Sigma_2} + d_0 \mu_{\Sigma_1} + e_0 \mu_{\Sigma_2} + f_0 \quad (6.6)$$

en la faisant passer par les nœuds voisins du réservoir (par le critère des moindres carrés). Un voisinage étendu est nécessaire (au moins 6 nœuds) pour pouvoir trouver les six paramètres du polynôme. Ce premier polynôme ne sert que pour trouver une meilleure approximation de l'origine du repère local, qui sera ici $(0, 0, f_0)$, ainsi que de \mathbf{n}_Σ , qui sera donnée par :

$$\mathbf{n}_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + d_0^2 + e_0^2}} \begin{bmatrix} -d_0 \\ -e_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Avec cette nouvelle normale et cette nouvelle origine, on construit le nouveau repère local dans lequel on recherche, de la même façon, les paramètres d'un nouveau polynôme f de la même forme que f_0 dont les paramètres sont notés sans l'indice « 0 ». En exprimant le gradient du vecteur normal à ce polynôme à l'origine, on arrive à l'expression du tenseur de courbure dans la base locale aura comme expression :

$$\boldsymbol{\kappa}_\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{2ad^2+ecd}{(1+d^2+e^2)^{3/2}} - \frac{2a}{\sqrt{1+d^2+e^2}} & \frac{cd^2+2ebd}{(1+d^2+e^2)^{3/2}} - \frac{c}{\sqrt{1+d^2+e^2}} & 0 \\ \frac{ce^2+2ead}{(1+d^2+e^2)^{3/2}} - \frac{c}{\sqrt{1+d^2+e^2}} & \frac{2be^2+ecd}{(1+d^2+e^2)^{3/2}} - \frac{2b}{\sqrt{1+d^2+e^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Il suffit maintenant de faire un changement de base pour écrire ce tenseur dans la base globale (où sont exprimés les vecteurs \mathbf{u} et $\delta\mathbf{u}$) pour l'utiliser finalement dans la discrétisation de ${}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta$.

6.1.2 Problème matriciel

L'écriture matriciel du problème spectral (5.45) est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^\top & \delta \Phi^\top & \delta \pi \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_\Gamma^\Lambda \\ -\mathbf{C}^\top & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_\Gamma^{\Lambda\top} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \rho \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Phi \\ \pi \end{bmatrix} = 0 \quad (6.9)$$

où $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{K}_\Gamma^\sigma - \sigma \mathbf{K}_\gamma^\theta + \rho g \mathbf{K}_\Gamma^g + \Lambda \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda$.

Comme \mathbf{u} et $\delta \mathbf{u}$ appartiennent à \mathcal{C}_u^\perp , alors on pose, pour chaque nœud i interne du maillage de Γ , les relations $\mathbf{u}^i = \mathbf{n}^i \eta^i$ et $\delta \mathbf{u}^i = \mathbf{n}^i \delta \eta^i$, où \mathbf{n}^i est la normale sortante au nœud i , obtenue en moyennant les normales aux triangles de la surface libre connectés au nœud i . Pour les nœuds j situés sur le bord γ , on pose $\mathbf{u}^j = \boldsymbol{\nu}_\Sigma^j \mu_\Sigma^j$ et $\delta \mathbf{u}^j = \boldsymbol{\nu}_\Sigma^j \delta \mu_\Sigma^j$, où $\boldsymbol{\nu}_\Sigma^j = \mathbf{n}_\Sigma^j \wedge \mathbf{t}_\gamma^j$. Les vecteurs \mathbf{n}_Σ^j et \mathbf{t}_γ^j sont obtenus en moyennant les deux contributions sur les segments adjacents : on pourra utiliser comme \mathbf{n}_Σ^j le vecteur donné par (6.7), alors que \mathbf{t}_γ^j n'est autre que le vecteur directeur de l'élément de bord correspondant. Ainsi, avec ces opérations, on arrive à construire une matrice \mathbf{Q} , de taille $(3N_\Gamma \times N_\Gamma)$, telle que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q} \mathbf{u}^\perp \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{Q} \delta \mathbf{u}^\perp \quad (6.10)$$

où \mathbf{u}^\perp , respectivement $\delta \mathbf{u}^\perp$, est le vecteur des inconnues nodales η^i et μ_Σ^j , respectivement $\delta \eta^i$ et $\delta \mu_\Sigma^j$.

D'autre part, φ et $\delta \varphi$ appartiennent à \mathcal{C}_φ^l , donc on doit imposer dans le problème matriciel (6.9), une relation linéaire (correspondant à l) entre les composantes du vecteur Φ , et de même pour $\delta \Phi$. Comme cette relation peut être choisie arbitrairement, on choisira ici d'annuler le premier degré de liberté en prenant $\Phi_1 = 0$ et $\delta \Phi_1 = 0$, et on notera par Φ_2 et $\delta \Phi_2$ les vecteurs ainsi tronqués, à $N_\varphi - 1$ composantes. On notera \mathbf{C}_2 la matrice obtenue en éliminant la première colonne de \mathbf{C} , et \mathbf{M}_{22} la matrice obtenue en éliminant la première ligne et la première colonne de \mathbf{M} , correspondant à φ_1 et $\delta \varphi_1$.

Finalement, le problème matriciel (6.9) devient équivalent à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^\perp & \mathbf{0} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{B}_2^\top & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^\top & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\perp \\ \Phi_2 \\ \pi \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \rho \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\perp \\ \Phi_2 \\ \pi \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

où les matrices \mathbf{K}^\perp et \mathbf{B}_2 et le vecteur \mathbf{b} sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{K}^\perp = \mathbf{Q}^\top \mathbf{K} \mathbf{Q} & \text{(a)} \\ \mathbf{B}_2 = \mathbf{Q}^\top \mathbf{C}_2 & \text{(b)} \\ \mathbf{b} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{R}_\Gamma^\Lambda & \text{(c)} \end{cases} \quad (6.12)$$

6.1.3 Symétrisation

On constate que le système obtenu (6.11) n'est pas symétrique alors qu'en théorie des milieux continus, la propriété de symétrie du système est assurée par l'existence, pour tout système linéaire conservatif, d'opérateurs quadratiques associés à des concepts énergétiques [15]. Cependant, dans le cas présent, le choix d'une variable primale (le déplacement \mathbf{u}) pour la surface libre,

associée à une variable duale (le potentiel φ que l'on peut apparenter à une pression) pour le liquide rend le problème de la recherche d'une formulation symétrique non standard d'un point de vue théorique et aboutit naturellement à des formulations non symétriques [66]. Les nombreuses formulations non symétriques sont dues, en général, à un choix inapproprié des variables d'état pour décrire le système. Le choix de la même variable primale \mathbf{u} pour Γ et pour Ω_L peut sembler plus intéressant de ce point de vue, mais cela pose d'autres problèmes déjà évoqués dans §4.2.4. On préférera plutôt rechercher une méthode de symétrisation des équations qui nous permettra ensuite d'utiliser les algorithmes de résolution standards réservés aux systèmes symétriques (méthode de Lanczos).

Symétrie des opérateurs \mathbf{K}^\perp et \mathbf{M}_{22}

La première phase de la symétrisation de (6.11) consiste à montrer que la matrice de raideur \mathbf{K}^\perp et celle de masse \mathbf{M}_{22} sont symétriques.

D'après l'expression (5.46i) de l'opérateur \mathbf{M} , il est évident que la matrice \mathbf{M} est symétrique. En éliminant la première ligne et la première colonne de cette dernière, on a obtenu \mathbf{M}_{22} , qui sera donc elle aussi symétrique.

Concernant la matrice de raideur, on peut voir dans (5.46) que les expressions des différents opérateurs constituant \mathbf{K} , mis à part ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta$, \mathbf{K}_Γ^g et $\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda$, sont tous, d'évidence, symétriques. La symétrie de ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta$ étant évidente³¹ d'après l'Annexe B, il reste enfin à établir que \mathbf{K}_Γ^g et $\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda$ sont eux aussi des opérateurs symétriques. Pour cela, on considère l'opérateur \mathbf{K}_Γ^α défini par :

$$\mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Gamma (\mathbf{v} \cdot \nabla \alpha) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_\Gamma \alpha \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}) \, d\Gamma \quad (6.13)$$

où α est un champ scalaire et \mathbf{v} et \mathbf{w} des champs vectoriels, définis dans le domaine liquide. On se propose maintenant de montrer que cet opérateur est symétrique. En effet, si on note $\Gamma' = \Gamma + \mathbf{v}$ et \mathbf{F} le gradient de cette transformation, alors d'après la formule de transport d'une surface orientée (C.7b) :

$$\mathbf{n}' \, d\Gamma' = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (6.14)$$

Puisqu'on a, au premier ordre en \mathbf{v} , $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{D}_x \mathbf{v}$ et $\det(\mathbf{F}) = 1 + \operatorname{div}(\mathbf{v})$, alors on peut écrire au premier ordre en \mathbf{v} :

$$\det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top} = (1 + \operatorname{div}(\mathbf{v})) (\mathbf{I} - (\mathbf{D}_x \mathbf{v})^\top) \quad (6.15)$$

$$= \mathbf{I} + \operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{I} - (\mathbf{D}_x \mathbf{v})^\top \quad (6.16)$$

D'après (5.17), le vecteur $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{v})$ pourra s'écrire :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{n} - (\mathbf{D}_x \mathbf{v})^\top \mathbf{n} \quad (6.17)$$

Ce qui nous permet d'obtenir une autre expression de \mathbf{K}_Γ^α sous la forme :

$$\mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Gamma (\mathbf{v} \cdot \nabla \alpha) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_\Gamma \alpha (\operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{w} - (\mathbf{D}_x \mathbf{v}) \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (6.18)$$

31. Dans l'Annexe B, on voit dans (B.19) que ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta$ est symétrique pour des champs vectoriels \mathbf{u} et $\delta \mathbf{u}$ appartenant à \mathcal{C}_u , ce qui est suffisant dans notre cas puisque \mathcal{C}_u^\perp est un sous espace de \mathcal{C}_u .

Pour montrer que cet opérateur est symétrique, on va utiliser l'écriture (6.18) pour exprimer la différence $\mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \underbrace{\int_\Gamma \left((\mathbf{v} \cdot \nabla \alpha) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla \alpha) \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}_{T_1} + \dots \\ &\dots \underbrace{\int_\Gamma \alpha \left(\operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{w} - (\mathbf{D}_x \mathbf{v}) \mathbf{w} - \operatorname{div}(\mathbf{w}) \mathbf{v} + (\mathbf{D}_x \mathbf{w}) \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}_{T_2} \quad (6.19) \end{aligned}$$

Le terme T_1 de l'équation (6.19) est transformé grâce à l'identité classique sur le double produit vectoriel (C.3) :

$$T_1 = \int_\Gamma \left(\nabla \alpha \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \right) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

En remarquant que la notation $(\mathbf{D}_x \mathbf{v}) \mathbf{w}$ est équivalente à la notation "nabla" $(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, et que $\operatorname{div}(\mathbf{v})$ est équivalente à $\nabla \cdot \mathbf{v}$, on reconnaît, dans le terme T_2 de l'équation (6.19), l'identité de l'analyse vectorielle (C.4a), d'où :

$$T_2 = \int_\Gamma \alpha \nabla \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_\Gamma \alpha \operatorname{rot}(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

En utilisant l'identité de l'analyse vectorielle (C.4b), on effectue la transformation suivante :

$$T_2 = \int_\Gamma \operatorname{rot}(\alpha \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_\Gamma (\nabla \alpha \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

On fait ensuite intervenir la formule de Stokes (C.5) pour obtenir :

$$T_2 = \int_\gamma \alpha (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}_\gamma \, d\gamma - \int_\Gamma (\nabla \alpha \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

Ainsi :

$$\mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_\gamma \alpha (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}_\gamma \, d\gamma \quad (6.20)$$

Si \mathbf{v} et \mathbf{w} sont tangents à Σ sur γ — autrement dit si \mathbf{v} et \mathbf{w} appartiennent à $\mathcal{C}_u \supset \mathcal{C}_u^\perp$ — alors les vecteurs \mathbf{v} , \mathbf{w} et \mathbf{t}_γ sont coplanaires et on aura donc $(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}_\gamma = 0$. L'opérateur \mathbf{K}_Γ^α est donc symétrique si les champs vectoriels glissent sur Σ au bord γ , et cela quelque soit le champ scalaire α .

Enfin, en remarquant que

$$\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda = \mathbf{K}_\Gamma^\alpha|_{\alpha=1} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_\Gamma^g = \mathbf{K}_\Gamma^\alpha|_{\alpha=Z} \quad (6.21)$$

et puisque le glissement sur Σ au bord est pris en compte par (6.12a), alors \mathbf{K}^\perp est une matrice symétrique³².

32. La matrice \mathbf{K} n'est pas symétrique car la contrainte de glissement sur le bord n'y est pas encore intégrée.

Remarques :

1. La matrice du problème statique (3.10) est aussi symétrique. En effet, que cela soit dans la formulation non régularisée (2.34), ou dans les formulations régularisées (2.52) et (2.53), les seuls opérateurs qui ne sont pas, d'évidence, symétriques sont encore une fois ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta$, \mathbf{K}_Γ^g et $\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda$. Vu que dans ces problèmes, les champs vectoriels appartiennent à \mathcal{C}_u , alors la matrice globale du problème statique (3.10) est bien symétrique.
2. Si \mathbf{u} et $\delta\mathbf{u}$ appartaient à \mathcal{C}_u , alors grâce à (5.39) on peut séparer ces vecteurs en une partie appartenant à \mathcal{C}_u^\perp et une autre appartenant à \mathcal{C}_u^\parallel . Dans ce cas, la matrice de raideur de surface libre du problème dynamique pourra s'écrire :

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{G}^\top \mathbf{K} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^\perp & \mathbf{K}^{\perp\parallel} \\ \mathbf{K}^{\parallel\perp} & \mathbf{K}^\parallel \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

où \mathbf{G} est la matrice qui traduit la contrainte de glissement, introduite dans (3.1.3). Vu qu'on a montré dans §5.3.3 que le champ test $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_u$ pouvait être restreint à \mathcal{C}_u^\perp parce que $\delta\mathbf{u}^\parallel$ ne travaillait pas, alors cela signifie que $\mathbf{K}^{\parallel\perp} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{K}^\parallel = \mathbf{0}$. Comme \mathbf{K}_G est symétrique³³, alors $\mathbf{K}^{\perp\parallel} = \mathbf{0}$. Ce résultat vient valider le choix fait depuis §4.3.2 et jusqu'à l'établissement de la formulation (5.12) du problème dynamique, qui consiste à ne considérer que la partie $\mathbf{u}^\perp \in \mathcal{C}_u^\perp$ du déplacement \mathbf{u} de la surface libre, c'est à dire à négliger la partie $\mathbf{K}^{\perp\parallel}$ de la raideur de celle-ci.

Élimination de Φ_2

La deuxième phase de la symétrisation de (6.11) passe par la méthode proposée dans [62], et qui consiste à éliminer les inconnues Φ_2 en l'exprimant en fonction de \mathbf{u}^\perp . En effet, la deuxième équation de (6.11) n'est autre que :

$$\mathbf{M}_{22} \Phi_2 = \mathbf{B}_2^\top \mathbf{u}^\perp \quad (6.23)$$

Puisque $\int_{\Omega_L} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi \, d\Omega_L = 0$ si et seulement si $\varphi = \text{constante}$, alors le noyau de \mathbf{M} est de dimension 1 généré par le vecteur colonne $\mathbf{1}_{N_\varphi}$ de taille N_φ , ne contenant que des 1 :

$$\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0} \iff \mathbf{X} = \text{constante} \times \mathbf{1}_{N_\varphi} \quad (6.24)$$

Ce résultat implique que toute sous matrice de \mathbf{M} obtenue par élimination d'une, ou plusieurs lignes, avec les colonnes correspondantes sera inversible, en particulier \mathbf{M}_{22} . Cela nous autorise donc à écrire :

$$\Phi_2 = \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^\top \mathbf{u}^\perp \quad (6.25)$$

En reportant cette relation dans (6.11) tout en multipliant la dernière ligne par -1 , on arrive finalement à une formulation matricielle symétrique (vu que \mathbf{K}^\perp et \mathbf{M}_{22} sont symétriques) suivante :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{K}^\perp & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{b}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\perp \\ \pi \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \rho \mathbf{B}_2 \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^\top & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\perp \\ \pi \end{bmatrix}} \quad (6.26)$$

33. $\mathbf{K}_G = \mathbf{G}^\top \mathbf{K} \mathbf{G}$ est symétrique car le glissement au bord est pris en compte.

Remarques :

1. La matrice \mathbf{K}^\perp est définie positive si l'équilibre est stable, ce qui est admis par hypothèse. Quant à la matrice $\rho \mathbf{B}_2 \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^\top$, elle est définie positive puisque \mathbf{M}_{22} l'est.
2. Si on note N_Γ le nombre de nœuds de la surface libre, alors (6.26) admet $N_\Gamma - 1$ valeurs propres positives. En effet, (6.26) est équivalent à résoudre le problème spectral $\delta \mathbf{u}^\perp \mathbf{K}^\perp \mathbf{u}^\perp = \omega^2 \delta \mathbf{u}^\perp \rho \mathbf{B}_2 \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^\top \mathbf{u}^\perp$, où \mathbf{u}^\perp et $\delta \mathbf{u}^\perp$ vérifient la contrainte $\mathbf{b}^\top \mathbf{u}^\perp = 0$ (appartiennent au sous-espace orthogonal à \mathbf{b}). Comme le vecteur \mathbf{b} est non nul, alors on peut construire une matrice $\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N_\Gamma-1}]$ formée par les $N_\Gamma - 1$ vecteurs d'une base du sous-espace orthogonal à \mathbf{b} . Cette matrice sera de dimension $(N_\Gamma \times N_\Gamma - 1)$, et on pourra ainsi écrire $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{P} \mathbf{X}$ et $\delta \mathbf{u}^\perp = \mathbf{P} \delta \mathbf{X}$, où \mathbf{X} et $\delta \mathbf{X}$ sont de taille $N_\Gamma - 1$. Par conséquence, le problème (6.26) est équivalent à

$$(\mathbf{P}^\top \mathbf{K}^\perp \mathbf{P}) \mathbf{X} = \omega^2 (\rho \mathbf{P}^\top \mathbf{B}_2 \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^\top \mathbf{P}) \mathbf{X} \quad (6.27)$$

Les deux matrices de ce problème spectral sont symétriques définies positives et de taille $(N_\Gamma - 1 \times N_\Gamma - 1)$, donc il admet $N_\Gamma - 1$ valeurs propres positives.

3. Une manière pratique et économique pour le calcul de la matrice $\mathbf{B}_2 \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^\top$ est de résoudre le système $\mathbf{M}_{22} \mathbf{X} = \mathbf{B}_2$, ensuite il suffira de multiplier \mathbf{X} , à gauche, par \mathbf{B}_2 pour obtenir $\mathbf{B}_2 \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2^\top$, ce qui évite d'avoir à calculer explicitement la matrice pleine \mathbf{M}_{22}^{-1} de taille $(N_\varphi - 1 \times N_\varphi - 1)$, où N_φ est le nombre de nœuds du maillage du liquide.

6.2 Validation

En raison de la difficulté de trouver des résultats expérimentaux pour les problèmes du ballonnement des liquides avec tension superficielle, la validation de la formulation matricielle (6.26) se fera sur des cas simples, où des solutions analytiques ou semi-analytiques existent.

Dans toutes les figures montrant les déformées modales, les couleurs du liquide représentent le champ de pression p .

6.2.1 Cas d'une goutte de liquide en apesanteur

La première validation se fera sur le cas d'une goutte de liquide en apesanteur ($g = 0$). L'état d'équilibre est donc une boule, dont la surface est une sphère de rayon R_{gte} . Pour cet exemple, une solution analytique existe dans [55], où la $n^{\text{ème}}$ fréquence propre ω_n est donnée par :

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R_{\text{gte}}^3} n(n+2)(n-1) \quad (6.28)$$

Un maillage de 6900 éléments triangulaires a été utilisé pour la discrétisation de la surface de la goutte. On a choisi les paramètres σ , ρ et R_{gte} de telle façon que $\frac{\sigma}{\rho R_{\text{gte}}^3} = 5.7920 \text{ s}^{-2}$.

La Figure 6.1 montre les six premières déformées propres non nulles³⁴ ($n = 2$ à $n = 7$), données par (6.26) et la Table 6.1 compare les valeurs propres correspondantes avec les valeurs analytiques données par (6.28).

Remarque : pour les modes d'ordre élevé ($n = 6$ et $n = 7$), on constate que l'erreur est relativement importante, cela dit, la multiplicité des modes de ce problème ($2n + 1$) fait que le rang des modes propres devient vite très élevé.

³⁴. Le cas $n = 1$ correspond au mode de corps rigide ($\omega_1 = 0$) de rang 1 à 3.

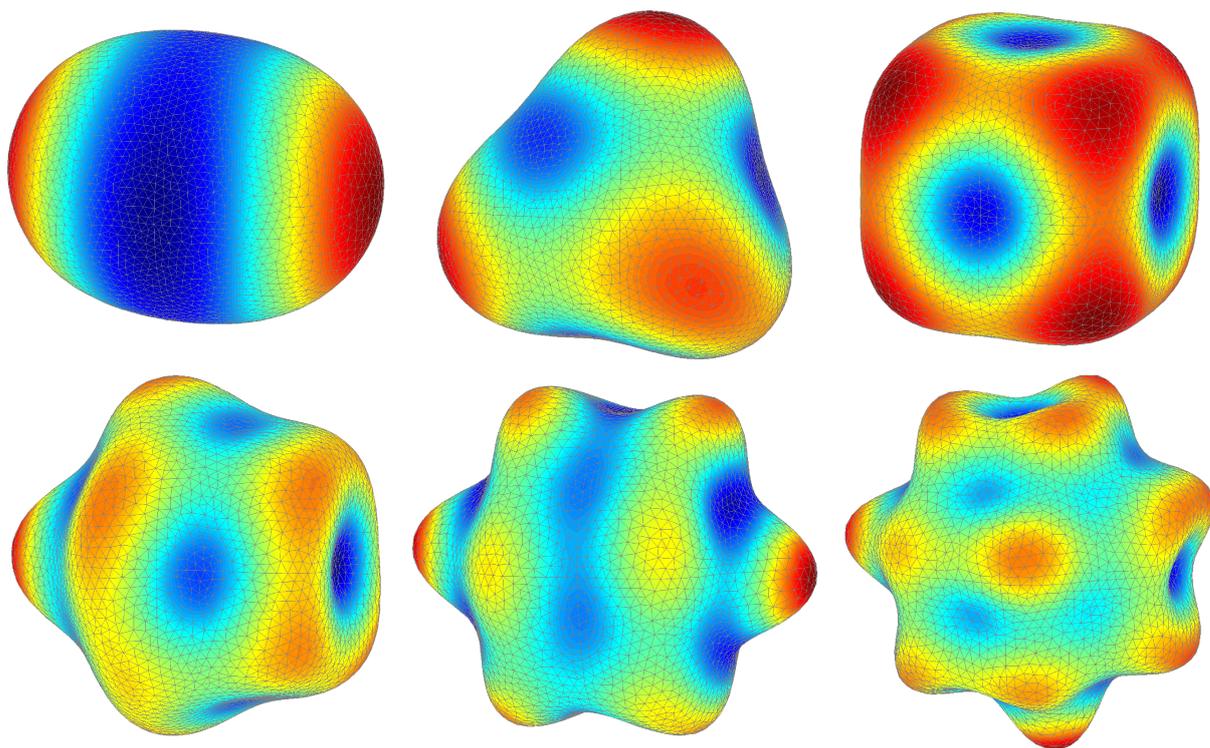


FIGURE 6.1 – Les six premières déformées propres non nulles ($n = 2$ à $n = 7$) calculées par éléments finis pour l'exemple de la goutte de liquide, classées de gauche à droite et de haut en bas

TABLE 6.1 – Comparaison entre les valeurs numériques et analytiques des six premières fréquences propres non nulles de vibration d'une goutte de liquide en apesanteur

Rang	4-8	9-15	16-24	25-35	36-48	49-63
n	2	3	4	5	6	7
Valeur numérique en Hz	1.09	2.12	3.32	4.69	6.24	7.96
Valeur analytique en Hz	1.08	2.09	3.25	4.53	5.93	7.44
Erreur	< 1%	1.2%	2.1%	3.4%	5.1%	7.0%

6.2.2 Cas d'un réservoir cylindrique vertical avec $\theta = 90^\circ$

Le deuxième cas de validation —également étudié dans [95]— est un réservoir cylindrique à section circulaire dont le rayon $R_{cyl} = 2.766$ cm. Ce réservoir est partiellement rempli d'un liquide (l'eau) de densité $\rho = 1000$ kg/m³ et de coefficient de tension de surface σ . Le niveau du liquide dans le cylindre atteint une hauteur $h = 3.80$ cm. L'angle de contact statique est $\theta = 90^\circ$, ce qui implique que la surface libre du liquide à l'équilibre est plane et horizontale. Les modes de ballonnement de ce système ont été étudiés analytiquement [18] et leurs fréquences $\omega_{d,c}$ sont données par :

$$\omega_{d,c}^2 = \frac{g \lambda_{d,c}}{R_{cyl}} \left(1 + \frac{\sigma \lambda_{d,c}^2}{\rho g R_{cyl}^2} \right) \tanh \left(\frac{h \lambda_{d,c}}{R_{cyl}} \right) \quad (6.29)$$

avec $\lambda_{d,c}$ solution de $\mathcal{J}'_d(\lambda_{d,c}) = 0$ où \mathcal{J}_d est la fonction de Bessel de première espèce. Les entiers d et c représentent, respectivement, le nombre de diamètres nodaux et le nombre de cercles nodaux. Pour la résolution numérique, la surface libre du liquide est maillée par 840 éléments

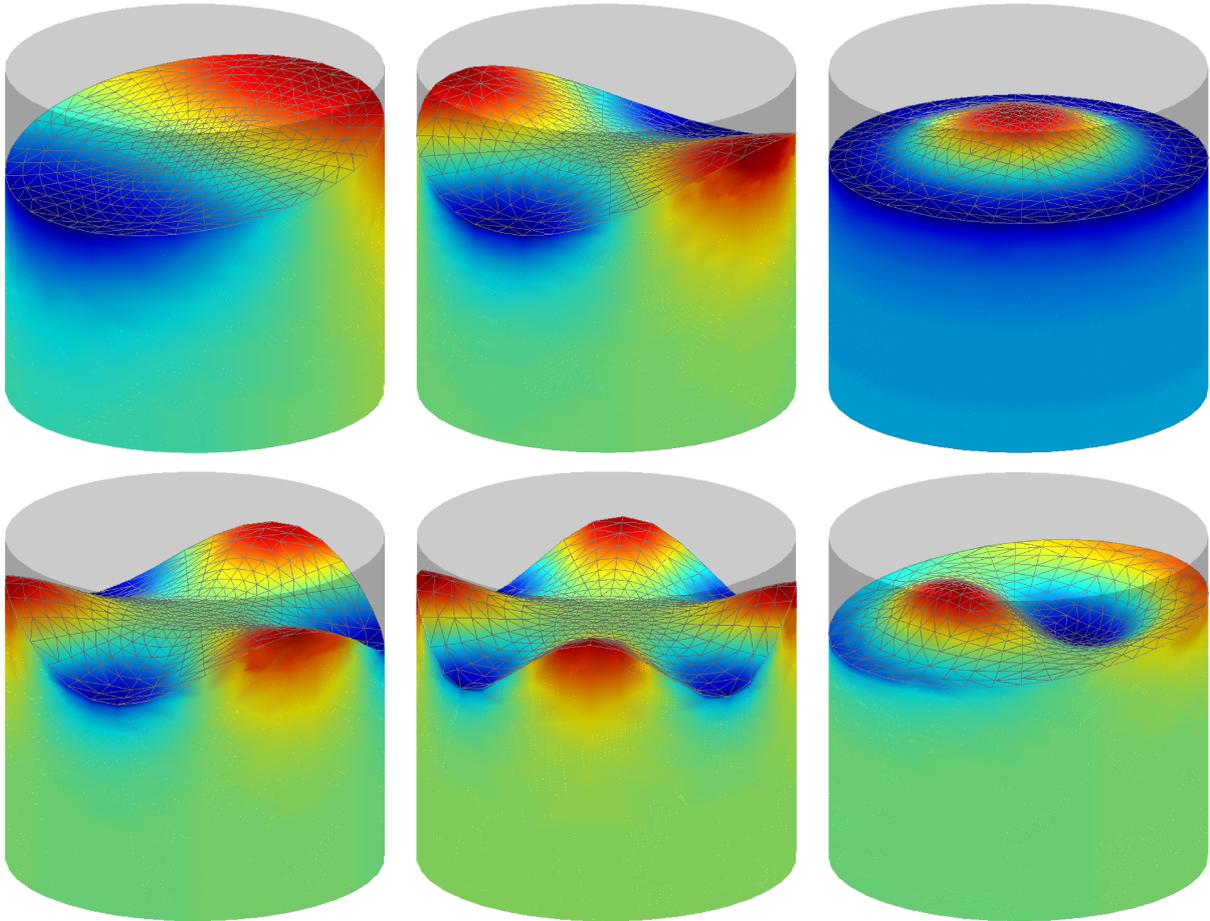


FIGURE 6.2 – Les six premières déformées propres calculées par éléments finis pour l'exemple du cylindre partiellement rempli, classées de gauche à droite et de haut en bas dans l'ordre suivant : $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$ and $(1, 1)$

triangulaires. La Figure 6.2 montre les six premiers modes de ballottement du liquide au sein de ce réservoir, calculés grâce à (6.26). Ces déformées restent inchangées pour les différentes valeurs de gravité et de tension de surface qu'on a testées. La Table 6.2 compare les fréquences propres obtenues numériquement avec les valeurs données par (6.29).

TABLE 6.2 – Comparaison entre les valeurs numériques et analytiques des six premières fréquences propres de vibration pour l'exemple du cylindre, pour différentes valeurs de gravité et de capillarité

Rang	1-2	3-4	5	6-7	8-9	10-11
(d, c)	(1, 0)	(2, 0)	(0, 1)	(3, 0)	(4, 0)	(1, 1)
• $\sigma = 0, g = g_0$						
Valeur numérique en Hz	4.05	5.27	5.91	6.24	7.11	7.03
Valeur analytique en Hz	4.04	5.24	5.87	6.14	6.91	6.92
Erreur	< 1%	< 1%	< 1%	1.6%	3.2%	1.9%
• $\sigma = 0.0724 \text{ N/m}, g = g_0$						
Valeur numérique en Hz	4.11	5.50	6.32	6.76	8.05	7.96
Valeur analytique en Hz	4.11	5.47	6.27	6.65	7.80	7.81
Erreur	< 1%	< 1%	< 1%	1.6%	2.9%	1.6%
• $\sigma = 0.0724 \text{ N/m}, g = 10^{-3}g_0$						
Valeur numérique en Hz	0.74	1.60	2.24	2.61	3.78	3.73
Valeur analytique en Hz	0.74	1.58	2.22	2.54	3.62	3.63
Erreur	< 1%	1.2%	< 1%	2.7%	4.4%	2.7%

6.2.3 Cas d'un réservoir sphérique avec $\theta = 5^\circ$

Le troisième et dernier cas de validation est un réservoir sous forme de sphère de rayon $R_{sph} = 1\text{m}$. Pour une telle géométrie, une paramétrisation en coordonnées sphériques a été proposée par M. Utsumi [89], ce qui lui permet de résoudre le problème de ballonnement par une approche semi-analytique. Le liquide utilisé ici est l'hydrazine (N_2H_4) —souvent employé dans la propulsion spatiale— de densité $\rho = 1011 \text{ kg/m}^3$ et de coefficient de tension de surface $\sigma = 0.0725 \text{ N/m}$. L'angle de contact est de valeur très petite : $\theta = 5^\circ$. Le calcul numérique par éléments finis sera effectué sur trois configurations³⁵ d'équilibre, A, B et C, données dans la Figure 6.3. Ces différentes configurations sont caractérisées par l'intensité du champ de gravité g et la valeur du paramètre Z_γ/R_{sph} où Z_γ est l'élévation du bord de la surface libre mesurée à partir du point le plus bas du réservoir.

35. La moitié supérieure du réservoir de l'exemple A est maillée très grossièrement car elle est loin de la zone d'intérêt.

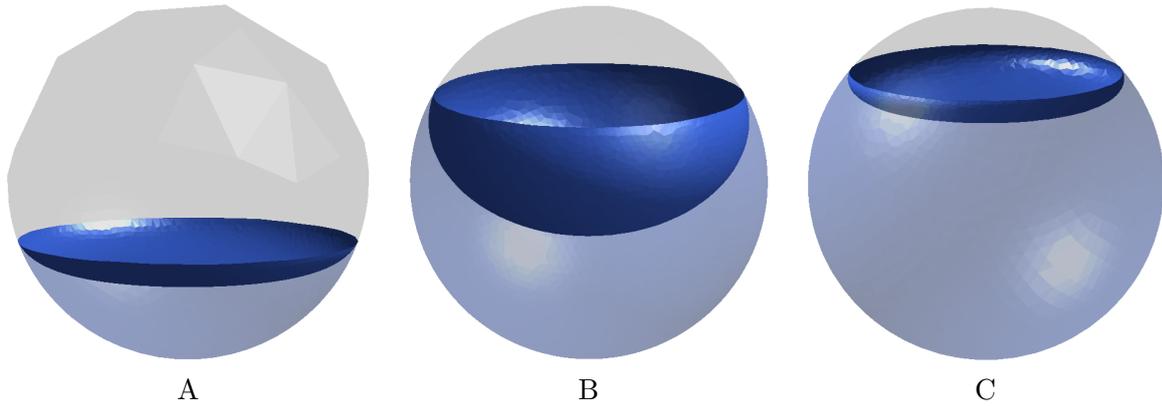


FIGURE 6.3 – Différentes configurations d'équilibre dans un réservoir sphérique, avec un angle de contact de 5°

Deux modes propres particuliers ont été étudiés dans [89] pour leur influence sur la dynamique de la structure (satellite), il s'agit des modes $(1, 0)$ et $(0, 1)$, dont les fréquences propres respectives sont $\omega_{1,0}$ et $\omega_{0,1}$ (le premier indice est le nombre des diamètres nodaux et le second, celui des cercles nodaux). La Figure 6.4 montre ces déformées modales pour le cas C, calculées par la formulation éléments finis (6.26).

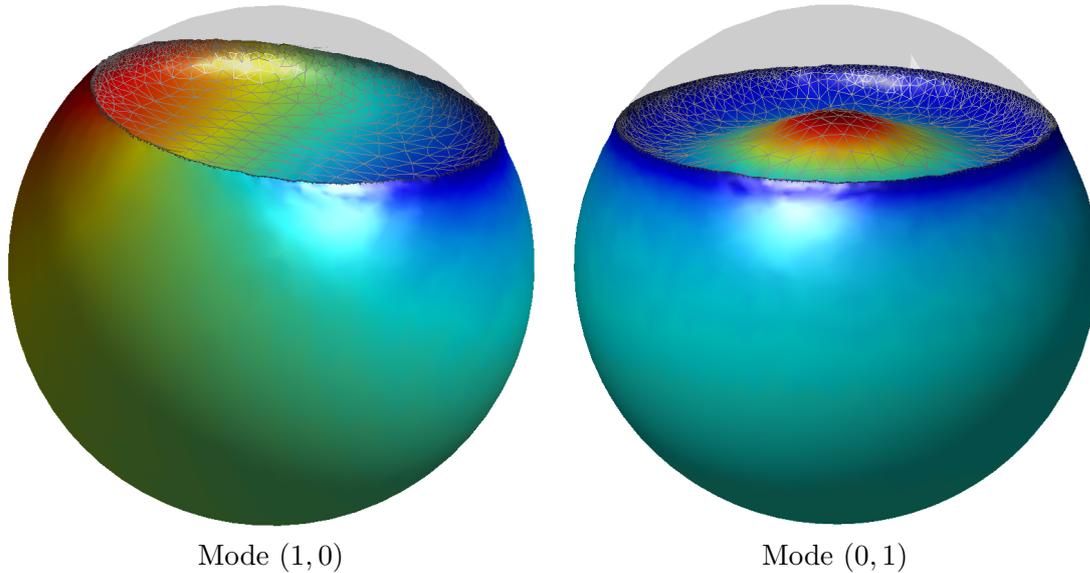


FIGURE 6.4 – Déformées modales $(1, 0)$ et $(0, 1)$ pour la configuration C

Grâce à une résolution semi-analytique, M. Utsumi a dressé (voir Figure 6.5) les évolutions de ces deux fréquences en fonction de Z_γ/R_{sph} , pour différentes valeurs du nombre de Bond $B = \rho g R_{sph}^2 / \sigma$. Les indices 0, 0.5, 1, 1.5 et 2 sur les courbes de la Figure 6.5 sont les valeurs de $\log_{10}(B)$ correspondantes. La formulation utilisée par M. Utsumi ne tenant pas compte de l'influence de la courbure du réservoir, nous avons donc supprimé la contribution du terme $-\sigma \sin(\theta)^2 \mathbf{K}_\gamma^\theta$ dans (6.26) pour que la comparaison soit pertinente. Les résultats numériques correspondant aux cas A, B et C ont été reportés dans la Table 6.3, et comparés avec les

résultats extraits des courbes de la Figure 6.5.

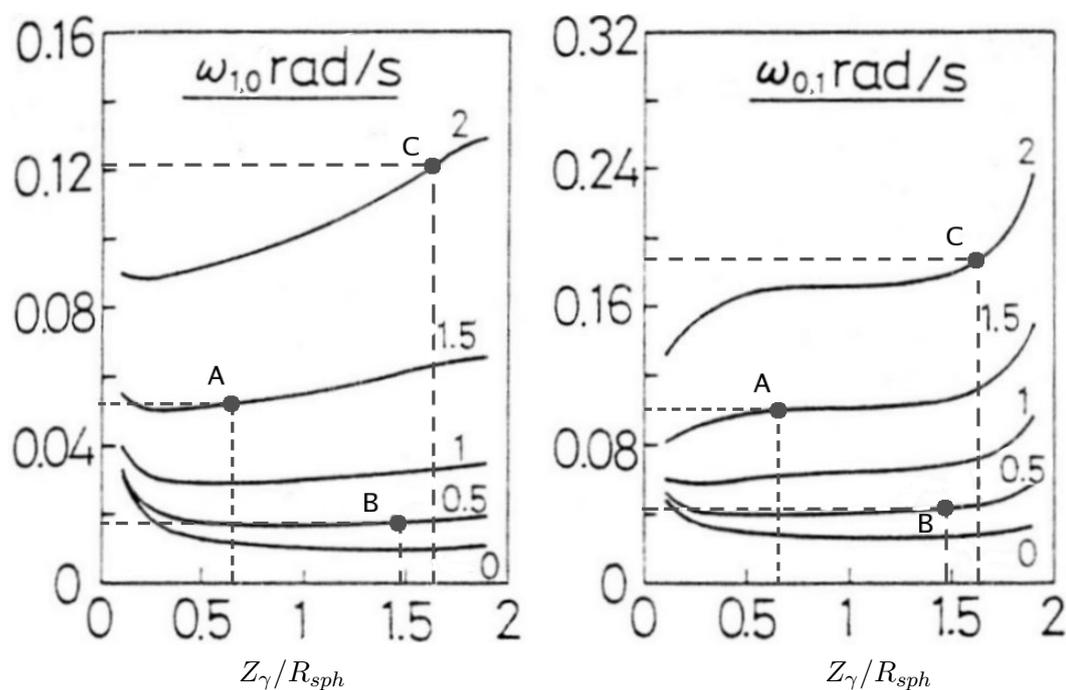


FIGURE 6.5 – Évolution des pulsations $\omega_{1,0}$ et $\omega_{0,1}$ en fonction du niveau de remplissage pour différentes valeurs du nombre de Bond. Les points A, B, et C correspondent aux 3 calculs de validation

Les Figures 6.6 et 6.7 montrent des exemples de déformées modales pour les cas A et B.

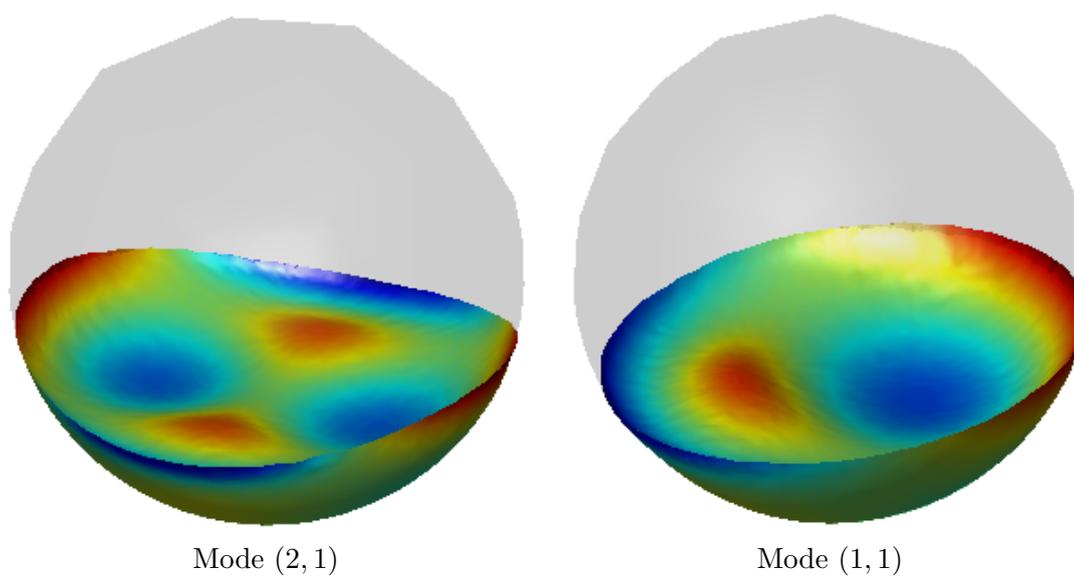


FIGURE 6.6 – Déformées modales (2,1) et (1,1) pour la configuration A

TABLE 6.3 – Comparaison entre les valeurs numériques et semi-analytiques pour l'exemple du réservoir sphérique, pour les cas A, B et C

- A : $Z_\gamma/R_{sph} = 0.657$, $g = 2.35 \times 10^{-4}g_0$ ($\log_{10}(B) = 1.5$)

Rang	1-2	3-4	5-6	7	8-9	10-11
(d, c)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(0, 1)	(4, 0)	(1, 1)
Valeur numérique en 10^{-2}rad/s	5.24	7.82	10.27	10.30	12.78	14.40
Valeur M. Utsumi en 10^{-2}rad/s	5.2	—	—	10.0	—	—
Erreur	< 1%	—	—	< 3%	—	—

- B : $Z_\gamma/R_{sph} = 1.497$, $g = 2.32 \times 10^{-5}g_0$ ($\log_{10}(B) = 0.5$)

Rang	1-2	3-4	5	6-7	8-9	10-11
(d, c)	(1, 0)	(2, 0)	(0, 1)	(3, 0)	(1, 1)	(4, 0)
Valeur numérique en 10^{-2}rad/s	1.81	3.44	4.31	5.29	6.78	7.33
Valeur M. Utsumi en 10^{-2}rad/s	1.8	—	4.3	—	—	—
Erreur	< 1%	—	< 1%	—	—	—

- C : $Z_\gamma/R_{sph} = 1.641$, $g = 7.34 \times 10^{-4}g_0$ ($\log_{10}(B) = 2$)

Rang	1-2	3-4	5	6-7	8-9	10-11
(d, c)	(1, 0)	(2, 0)	(0, 1)	(3, 0)	(4, 0)	(1, 1)
Valeur numérique en 10^{-2}rad/s	12.50	16.73	19.33	20.61	24.63	25.25
Valeur M. Utsumi en 10^{-2}rad/s	12.2	—	18.8	—	—	—
Erreur	< 3%	—	< 3%	—	—	—

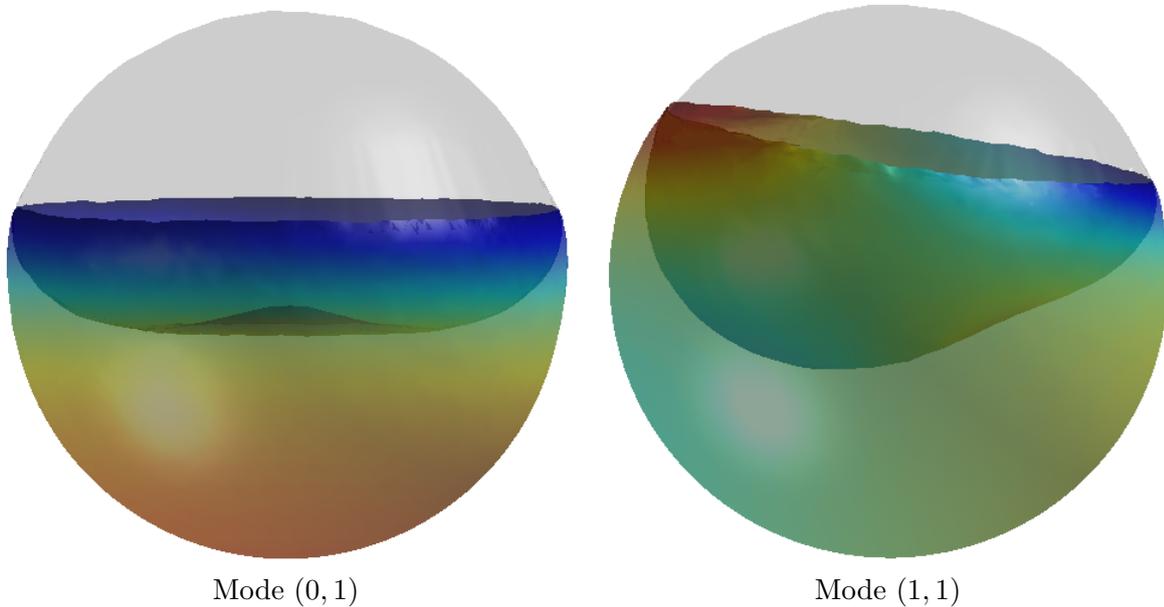


FIGURE 6.7 – Déformées modales (0, 1) et (1, 1) pour la configuration B avec liquide transparent

Remarque : en effectuant le calcul avec prise en compte de la courbure du réservoir, on constate une légère baisse des valeurs des fréquences (de l'ordre de quelques %). Cette tendance est prévisible dans un réservoir sphérique car la raideur apportée par le terme $-\sigma \sin(\theta)^2 \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = -\sigma \sin(5^\circ) \mu_\Sigma \delta \mu_\Sigma / R_{\Sigma\Sigma}$ est négative vu que $R_{\Sigma\Sigma}$ est positif selon nos conventions.

6.3 Influence de la courbure du réservoir

On a vu dans l'exemple précédent (réservoir sphérique) que la prise en compte de la courbure du réservoir n'avait qu'un impact mineur sur les modes propres de ballonnement. Ici on présente un cas où l'influence de cette courbure sur les fréquences de ballonnement est non négligeable. On profitera également de cet exemple pour récapituler l'ensemble de la procédure mise en place dans les deux parties de cette thèse, en indiquant les logiciels utilisés :

1. On commence par créer le modèle EF du réservoir (en utilisant le logiciel Patran[©]).
2. On crée ensuite la surface libre initiale du liquide, en faisant l'intersection entre le réservoir et un plan horizontal, choisi en fonction du niveau de remplissage désiré. Le maillage surfacique et celui du bord de la surface libre sont alors générés, toujours en utilisant le même logiciel. On rappelle que le maillage de la surface libre est indépendant de celui du réservoir.
3. Après avoir entré les valeurs de ρ , g , σ , θ , l'algorithme itératif (Partie I), implémenté en totalité sous Matlab[©], effectue le calcul de la position d'équilibre de la surface libre (voir Figure 6.8), en utilisant les tableaux de nœuds et de connectivités décrivant les maillages (générés par Patran[©]).
4. Une fois le calcul statique convergé, on transfère les nouvelles coordonnées du maillage de la surface libre dans un logiciel de CAO pour construire la géométrie du domaine liquide à l'équilibre et pour générer les nouveaux maillages qui seront utilisés dans le calcul dynamique, notamment celui du volume liquide. Ces opérations ont été réalisées en utilisant une nouvelle fois le logiciel Patran[©].
5. En utilisant ces nouveaux maillages, on assemble, dans Matlab[©], les matrices de raideur et de masse du problème spectral (6.26). Le solveur symétrique de Nastran[©] a été choisi, en raison de ses performances, pour la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de (6.26). Les résultats sont enfin affichés avec Matlab[©] (voir Figure 6.9).

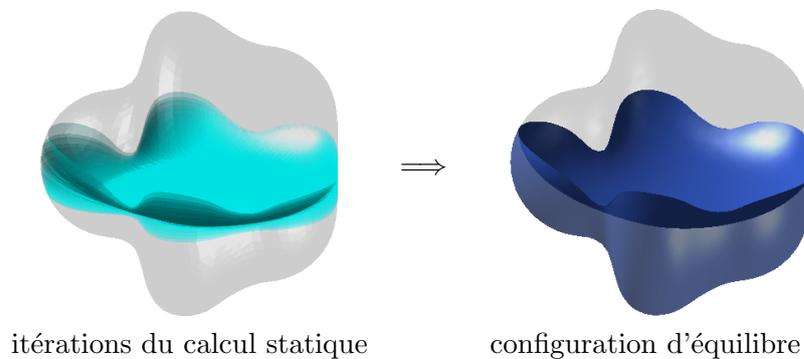


FIGURE 6.8 – Recherche de la configuration d'équilibre du liquide

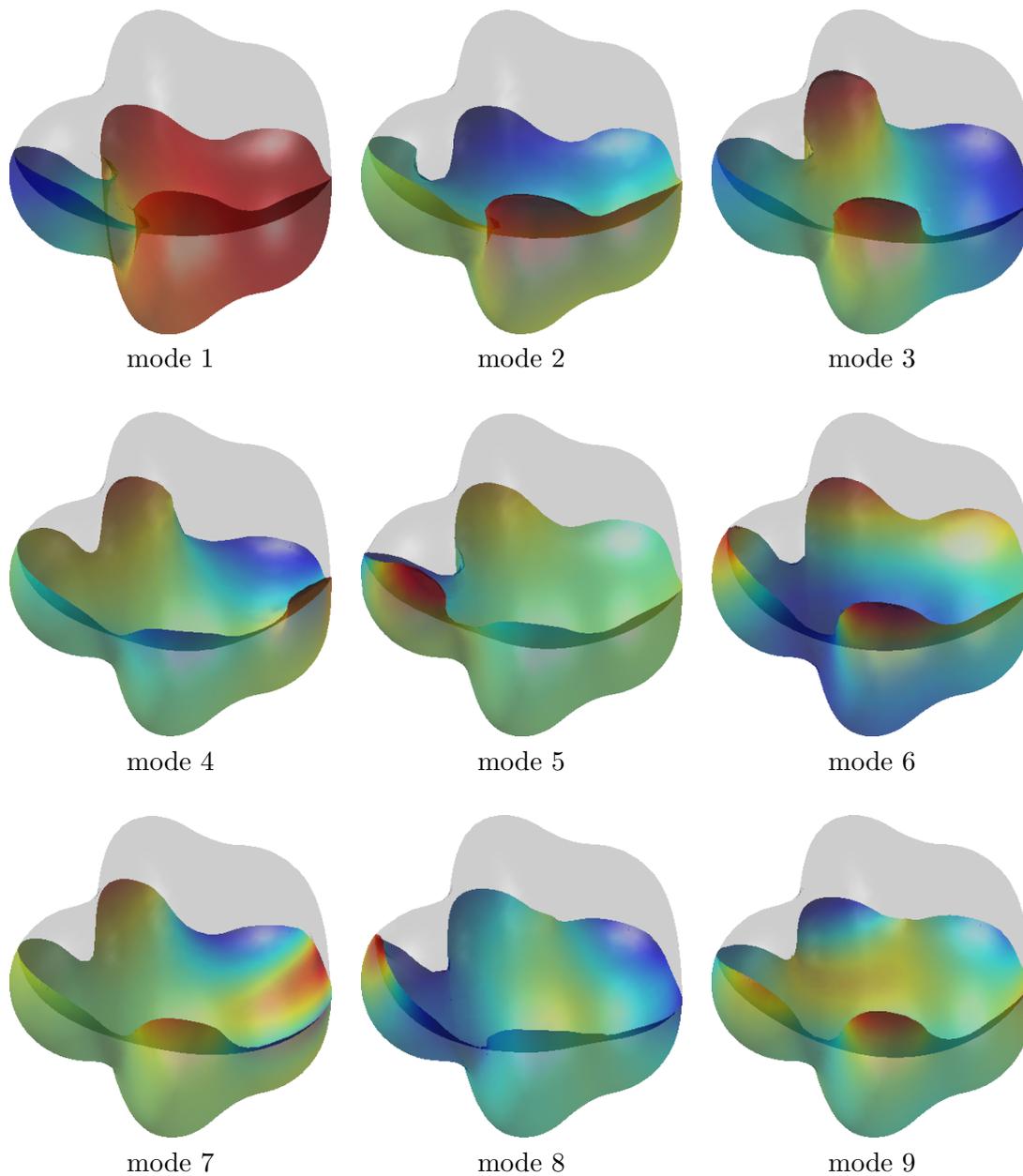


FIGURE 6.9 – Les 9 premiers modes de ballottement correspondant à la configuration Figure 6.8

Les fréquences de ballottement de ces 9 premiers modes, obtenus avec prise en compte de l'effet de courbure du réservoir, sont comparées dans la Table 6.4 aux valeurs obtenues sans la prise en compte de cette courbure. On constate alors des écarts relatifs non négligeables, surtout pour les premiers modes.

TABLE 6.4 – Comparaison entre les fréquences de ballonnement avec et sans la prise en compte de la courbure du réservoir

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \theta = 30^\circ, g = 5 \times 10^{-5} g_0 \quad (\text{Longeur du réservoir} = 1\text{m})$$

mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sans courbure (10^{-2}Hz)	0.34	0.44	0.60	0.77	0.97	0.92	1.24	1.32	1.39
Avec courbure (10^{-2}Hz)	0.26	0.40	0.55	0.69	0.81	0.85	1.17	1.23	1.31
Écart	30%	10%	9%	12%	20%	8%	6%	5%	6%

Conclusions et perspectives

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à la modélisation des effets de la capillarité sur les mouvements de ballottement (de faible amplitude) d'un liquide pesant, incompressible et non visqueux.

Dans un premier temps, la formulation du problème de minimisation de l'énergie potentielle du liquide (contenant un terme d'énergie de tension de surface) a permis d'établir l'équation variationnelle non linéaire régissant l'équilibre statique du liquide. Grâce à une paramétrisation vectorielle de la surface libre du liquide, il a été possible, d'une part, d'assurer correctement la condition de glissement du liquide sur la paroi interne du réservoir, mais également de proposer une formulation des différents opérateurs du problème qui ne fassent pas intervenir explicitement la courbure de la surface libre. La méthode des Eléments Finis linéaires standard a ainsi pu être utilisée pour discrétiser les équations du problème et un algorithme automatique de recherche de la position d'équilibre statique du liquide au sein d'un réservoir de forme tridimensionnelle quelconque a pu être proposé.

Une fois l'état d'équilibre du liquide déterminé, les équations dynamiques non linéaires de ballottement ont pu être linéarisées autour de cette position de référence, en faisant l'hypothèse que l'angle de contact entre la surface libre et la paroi du réservoir reste constant au cours du mouvement. Il a été montré que la formulation obtenue peut être symétrisée de façon à pouvoir calculer les fréquences et modes propres de ballottement du liquide avec un algorithme de Lanczos standard.

Les solutions des problèmes statiques et dynamiques obtenues pour des réservoirs de géométries simples ont pu être validées par comparaison avec des résultats analytiques ou semi-analytiques. Cependant, l'absence de résultats publiés pour des géométries complexes de réservoirs ne nous a pas permis de valider certains termes liés à la courbure du réservoir au niveau de la ligne de contact et la mise en place d'une campagne de validation expérimentale de ces termes pourrait être envisageable par la suite.

D'un point de vue formulation, la suite directe de ces travaux consistera à établir les termes de couplage entre les déformations de la structure (qui a été supposée rigide jusqu'à maintenant) et les mouvements du liquide. Du point de vue du liquide, cela consistera entre autre à prendre en compte le déplacement de la paroi de la structure dans la linéarisation de la condition d'angle de contact ([62] chapitre 4). Du point de vue de la structure, la difficulté sera d'écrire une condition d'équilibre, au niveau de la ligne triple (ligne de mouillage), entre les efforts de tension superficielle linéique à la surface libre du liquide et la contrainte surfacique à la paroi la structure. Une façon de contourner ce problème consiste à ne considérer que des mouvements de corps rigides du réservoir (ce qui, dans le domaine très basse fréquence auquel on s'intéresse, reste une hypothèse tout à fait raisonnable) ou à supposer au moins que le réservoir est rigide dans une zone localisée au voisinage de la ligne de contact avec la surface libre [87].

Une fois la formulation couplée fluide-structure établie, les modes propres du liquide avec capillarité, que nous avons calculés ici, pourront servir de base de projection pour les inconnues du

liquide, de façon à obtenir un modèle réduit de liquide ballottant [82]. Afin de pouvoir calculer les réponses fréquentielles, ou temporelles linéarisées, du système couplé “structure + liquide interne” à une déformation imposée par la structure ou à des sollicitations extérieures, il paraît nécessaire d’introduire la notion d’amortissement dans ce modèle de liquide ballottant. Parmi les différents phénomènes dissipatifs concernés [45], certains, comme la dissipation par mouillage (qui est due à l’adhérence du liquide sur la paroi du réservoir) [52, 48] ou la dissipation par effet Marangoni à la surface libre [27, 32], sont directement liés au phénomène de capillarité et leur modélisation pourra donc s’appuyer sur les travaux présentés ici. Des études menées par T. Miras et J.-S. Schotté sur ce thème sont actuellement en cours à l’ONERA.

Bibliographie

- [1] H. N. Abramson. *The dynamic behaviour of liquids in moving containers*. NASA SP-106, 1966.
- [2] N. Aquelet, M. Souli, J. Gabrys, and L. Olovson. A new ALE formulation for sloshing analysis. *Structural Engineering and Mechanics*, 16(4), 2003.
- [3] K.-J. Bathe. *Finite-Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [4] J. T. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA Journal*, 89-0115, January 1988.
- [5] J. Bellmann. Membrantragwerk und seifenhaut-unterschiede in der formfindung. *Bauingenieur*, 73 :118–123, 1998.
- [6] T. B. Benjamin and J. C. Scott. Gravity-capillary waves with edge constraints. *Journal of Fluid Mechanics*, 92 :241–267, 1979.
- [7] A. Bermúdez, R. Durán, and R. Rodríguez. Finite element solution of incompressible fluid-structure vibration problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :1435–1448, 1997.
- [8] A. Bermúdez and R. Rodríguez. Finite element analysis of sloshing and hydroelastic vibrations under gravity. *Mathematical modelling and numerical analysis*, 33 :305–327, 1999.
- [9] A. Bermúdez, R. Rodríguez, and D. Santamarina. A finite element solution of an added mass formulation for coupled fluid-solid vibrations. *Numer. Math.*, 87 :201–227, 2000.
- [10] K-U. Bletzinger. Form finding of tensile structures by the updated reference strategy. In *Proceedings of the IASS International Colloquium Structural Morphology-Towards the New Millenium*, Chilton JW et al. (eds), University of Nottingham, U. K., 1997.
- [11] K-U. Bletzinger and R. Wuchner. Stress-adapted numerical form finding of pre-stressed surfaces by the updated reference strategy. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 64 :143–166, May 2005.
- [12] J. Bonet and J. Mahaney. Form finding of membrane structures by the updated reference method with minimum mesh distortion. *Int. Journal of Solids and Structures*, 38 :5469–5480, 2001.
- [13] J. U. Brackbill, D. B. Kothe, and C. Zemach. A continuum method for modelling surface tension. *J. Comp. Physics.*, 100 :335–354, 1992.
- [14] K. A. Brakke. The Surface Evolver. *Experimental Mathematics*, 1 :141–165, 1992.
- [15] H. Buefler. Conservative systems, potential operators and tangent stiffness : reconsideration and generalization. *Archive of Applied Mechanics*, 63 :51–58, 1993.
- [16] R. A. Cairncross, P. R. Schunk, T. A. Baer, R. R. Rao, and P. A. Sackinger. A finite element method for free surface flows of incompressible fluids in three dimensions. part I, boundary

- fitted mesh motion. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 33(3) :375–403, June 2000.
- [17] S. Casalino, S. Petitot, B. Vieille, B. Lazaro, and E. Gonzalez. Study of liquid sloshing in tanks coupled with dynamical behaviour of the new ARIANE5-ECA cryogenic upper stage. In *Proc. of European Conference for Aerospace Sciences*, Moscow, Russia, 2005.
- [18] K. M. Case and W. C. Parkinson. Damping of Surface Waves in an Incompressible Liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 2 :172–184, 1957.
- [19] E. R. Christensen. Vibration analysis of fluid-structure systems in the space shuttle main engine. In *Proceedings of the 35th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, volume AIAA 94-1643, pages 2580–2587, Hilton Head, April 1994.
- [20] W.-H. Chu. Low gravity liquid sloshing in an arbitrary axisymmetric tank performing translational oscillations. Technical Report No. 4, DCN 1-6-75-00010, NASA, 1967.
- [21] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1979.
- [22] S. H. Collicott and M. M. Weislogel. Computing existence and stability of capillary surfaces using Surface Evolver. *AIAA Journal*, 42 :289–295, February 2004.
- [23] P. Concus, G. E. Crane, and H. M. Satterlee. Small amplitude lateral sloshing in a cylindrical tank with a hemispherical bottom under low gravitational conditions. Technical Report CR-54700, LMSC-A852007, NASA, 1967.
- [24] P. Concus and R. Finn. On the behavior of capillary free surface in a wedge. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 63, 1969.
- [25] P. Concus and R. Finn. Dichotomous behavior of capillary surfaces in zero gravity. *Microgravity Sci. Technol.*, 3 :87–92, 1990.
- [26] P. Concus, R. Finn, and M. Weislogel. Measurement of critical contact angle in a microgravity space experiment. *Experiments in Fluids*, 28(3), 2000.
- [27] J. T. Davies and R. W. Vose. On the damping of capillary waves by surface films. In *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, volume 286, pages 218–234, 1965.
- [28] W. Dettmer, P.H. Saksono, and D. Perić. On finite element formulation for incompressible newtonian fluid flows on moving domains in the presence of surface tension. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 19 :659–668, 2003.
- [29] F. T. Dodge. *The new “dynamic behaviour of liquids in moving containers”*. Southwest Research Institute, 2000.
- [30] F. T. Dodge and L. R. Garza. Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravities. Technical Report No. 2, NAS8-20290, NASA, 1966.
- [31] J. Donea. Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 32 :199–259, 1982.
- [32] W. G. Van Dorn. Boundary dissipation of oscillatory waves. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 24 :769–779, 1966.
- [33] S. Dutta and M. K. Laha. Analysis of the small amplitude sloshing of a liquid in a rigid container of arbitrary shape using a low-order boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47 :1633–1648, 2000.
- [34] M. El-kamali, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Computation of the free surface of a liquid with surface tension for any tank geometry. In *Proceedings of ISMA2008, International Conference on Noise and Vibration Engineering*, Leuven, Belgium, September 15-17 2008.

-
- [35] M. El-kamali, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Finite-elements analysis of liquid sloshing in low gravity environment. In *USNCCM-X, 10th US National Congress on Computational Mechanics*, Columbus, Ohio, USA, July 16-19 2009.
- [36] M. El-kamali, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Computation of the equilibrium position of a liquid with surface tension inside a tank of complex geometry. Extension to sloshing dynamic cases. *Computational Mechanics*, 2010 (accepted).
- [37] R. Fedkiw and X.-D. Liu. The ghost fluid method for viscous flows. In M. Hafez and J.-J. Chattot, editors, *Innovative Methods for Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, pages 111–143. World Scientific Publishing, New Jersey, 2002.
- [38] R. Finn. *Equilibrium capillary surfaces*. Springer-Verlag, 1986.
- [39] R. D. Firouz-Abadi, H. Haddadpour, M. A. Noorian, and M. Ghasemi. A 3D BEM model for liquid sloshing in baffled tanks. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 76 :1419–1433, 2008.
- [40] M. M. Francois, D. B. Kothe, and S. J. Cummins. Modelling surface tension using a ghost fluid technique within a volume of fluid formulation. In *Proc. of XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Warsaw, Poland, August 2004.
- [41] R. V. Garimella and B. K. Swartz. Curvature estimation for unstructured triangulations of surfaces. Technical report, Los Alamos National Laboratory, year = 2003, number = LA-UR-03-8240.
- [42] R. V. Garimella and B. K. Swartz. Curvature estimation for unstructured triangulations of surfaces. Technical Report LA-UR-03-8240, Los Alamos National Laboratory, 2003.
- [43] J. Graham-Eagle. A new method for calculating eigenvalues with application to gravity-capillary waves edge constraints. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 94 :553–564, 1983.
- [44] B. Hamann. Curvature approximation for triangulated surfaces. *Computing Suppl.*, 8 :139–153, 1993.
- [45] D. M. Henderson and J. W. Miles. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line. *Journal of Fluid Mechanics*, 275 :285–299, 1994.
- [46] S. Hildebrandt and A. Tromba. *Mathematics and optimal form*. Scientific American Library, 1985.
- [47] C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39 :201–225, january 1981.
- [48] L. M. Hocking. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 179 :253–266, 1987.
- [49] J. Sanchez Hubert and E. Sanchez Palencia. *Vibration and coupling of continuous systems – Asymptotic methods*. Springer-Verlag, 1989.
- [50] R. A. Ibrahim. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press, 2005.
- [51] D. Jamet, D. Torres, and J. U. Brackbill. On the theory and computations of surface tension : The elimination of parasitic currents through energy conservation in the second-gradient method. *J. Comp. Physics.*, 182 :262–276, 2002.
- [52] G. H. Keulegan. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins. *Journal of Fluid Mechanics*, 1 :33–50, 1959.
- [53] L. Kiefling and G. C.Feng. Fluid-structure finite element vibrational analysis. *A.I.A.A. Journal*, 14 :199–203, 1976.

- [54] M. Klein, S. M. Niku, R. A. Adey, and A. Kreis. Analysis of the behaviour of liquid filled tanks by coupling boundary element and finite element methods. Technical Report www.compmech.com/beasy, Computational Mechanics BEASY, Ashurst Southampton, USA.
- [55] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1945.
- [56] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics*, volume 6 : Fluid Mechanics. Pergamon Press, 2nd edition, 1987.
- [57] J. L. Liow. Boundary integral method for slosh simulation. In *Proceedings of the 6th Asian Congress of Fluid Mechanics*, volume 2, pages 1524–1527, Singapore, May 22-26 1995. Nanyang Technological University.
- [58] W. K. Liu and D. C. Ma. Coupling effect between liquid sloshing and flexible fluid-filled systems. *Nucl. Engrg. Des.*, 72 :345–357, 1982.
- [59] Z. Liu and Y. Huang. A new method for large amplitude sloshing problems. *Journal of Sound and Vibration*, 175(2) :185–195, 1994.
- [60] R. Luppès, J. A. Helder, and A. E. P. Veldman. The numerical simulation of liquid sloshing in microgravity. In *Proc. of European Conference on Computational Fluid Dynamics*, University of Groningen, The Netherlands, 2006.
- [61] N. N. Moiseyev and V. V. Romyantsev. *Dynamic stability of bodies containing fluid*, volume 6. Applied Physics and Engineering, springer-verlag edition, 1968.
- [62] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Fluid-Structure Interaction : Applied Numerical Methods*. Wiley, 1995.
- [63] A. D. Myshkis, V. G. Babskii, N. D. Kopachevskii, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov. *Low-Gravity Fluid Mechanics : Mathematical Theory of Capillary Phenomena*. Springer-Verlag, 1987.
- [64] P. Nezit. Hydrodynamique. onde de gravitation avec tension superficielle. *Journal de Mécanique*, 16(1).
- [65] R. Ohayon. Reduced symmetric models for modal analysis of internal structural-acoustic and hydroelastic-sloshing systems. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering - special issue on Advanced Numerical Method for Fluid-Structure Interaction and Coupled Problems*, pages 3009–3019, March 2001.
- [66] R. Ohayon and R. Valid. True symmetric variational formulations for fluid-structure interaction in bounded domains - finite element results. In E. Hinton R.W. Lewis, P. Bettess, editor, *Numerical Methods in Coupled Systems*, number 10. John Wiley and Sons Ltd, 1984.
- [67] T. Okamoto and M. Kawahara. 3-d sloshing analysis by an arbitrary lagrangian eulerian finite element method. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 8 :129–146, 1997.
- [68] L. Olson and T. Vandini. Eigenproblems from finite element analysis of fluid-structure interactions. *Computers and Structures*, 33 :679–687, 1989.
- [69] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [70] V. Perrin, O. Allain, C. Leca, and P. Boh. Liquid propellant behaviour under very low gravity. In *AIAA/SAE/ASME/ASEE 37th Joint Propulsion Conference*, Salt Lake City, Utah, USA, July 2001.

-
- [71] L. D. Peterson, E. D. Crawley, and R. J. Hansman. Nonlinear fluid slosh coupled to the dynamics of a spacecraft. *AIAA Journal*, 27(9), 1989.
- [72] B. Ramaswamy, M. Kawahara, and T. Nakayama. Lagrangian finite element method for the analysis of two-dimensional sloshing problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6 :659–670, September 1986.
- [73] P. A. Sackinger, P. R. Schunk, and R. R. Rao. A newton-raphson pseudo-solid domain mapping technique for free and moving boundary problems : A finite element implementation. *Journal of Computational Physics*, 125(1) :83–103, April 1996.
- [74] P. H. Saksono and D. Perić. On finite element modelling of surface tension. variational formulation and applications - part I : Quasistatic problems. *Computational Mechanics*, 38 :265–281, 2006.
- [75] P. H. Saksono and D. Perić. On finite element modelling of surface tension. Variational formulation and applications - Part II : Dynamic problems. *Computational Mechanics*, 38 :251–263, 2006.
- [76] H. M. Satterlee and W. C. Reynolds. The dynamics of free surface in cylindrical containers under strong capillarity and weak gravity conditions. Technical Report LG-2, Stanford University, Palo Alto, California, USA, 1964.
- [77] J.-S. Schotté. *Influence de la gravité sur les vibrations linéaires d’une structure élastique contenant un liquide incompressible*. PhD thesis, CNAM Paris, France, December 2001.
- [78] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Vibration analysis of elastic tanks partially filled with incompressible liquids in presence of a gravity field. In *Proceedings of the Launch Vehicle Vibrations, First European conference on Launcher Technology*. CNES Toulouse (France), December 1999.
- [79] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Couplage structure-fluide interne en présence de la gravité. In *Actes du 5ème Colloque National en Calcul des Structures*, volume 1, pages 311–317, Giens (Var), France, Mai 2001. CSMA, Teknea.
- [80] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Interactions between sloshing modes and incompressible hydroelastic modes for internal fluid-structure systems. In K. J. Bathe, editor, *Proceedings of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, volume 2, pages 957–959, Boston, USA, June 2001. Elsevier Science Ltd.
- [81] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Effect of gravity on a free-free fluid-structure system. In *Proceedings of the 5th International Symposium on FSI, AE & FIV+N, ISBN 0-7918-1691-5*, volume 3, New Orleans, Louisiana, US, November 17-22 2002. ASME.
- [82] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Various modelling levels to represent internal liquids in the vibratory analysis of complex structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :1913–1925, 2009.
- [83] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Vibration analysis of elastic tanks partially filled with incompressible liquids in presence of a gravity field. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, to be submitted.
- [84] A. S. Skapsky. A theory of surface tension of solids. *Acta Metall.*, (4) :576, 1956.
- [85] G. Smedley. Preliminary drop-tower experiments on liquid-interface geometry in partially filled containers at zero-gravity. *Experiments in Fluids*, 8 :312–318, 1990.
- [86] H. A. Snyder. Sloshing in microgravity. *Cryogenics*, 39 :1047–1055, 1999.
- [87] P. Tong. *Liquid sloshing in an elastic container*. PhD thesis, Cal. Tech., 1966. AFOSR-66-0943.

- [88] P. Tong and Y. C. Fung. The effect of wall elasticity and surface tension on the forced oscillations of a liquid in a cylindrical container. Technical Report 1-DTIC AND NTIS, 0620, California Inst of Tech Pasadena, 1966.
- [89] M. Utsumi. Meniscus and sloshing of a liquid in an axisymmetric container at low-gravity. In *The 1989 ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Sloshing and Fluid Structure Vibration*, Honolulu, Hawaii, July 23-27 1989.
- [90] M. Utsumi. Low-gravity propellant slosh analysis using spherical coordinates. *Journal of Fluids and Structures*, 12 :57–83, 1998.
- [91] S. Vincent and J.-P. Caltagirone. Modélisation différentielle de la tension superficielle pour la simulation numérique directe d écoulements incompressibles à surface libre. In *16ème Congrès Français de Mécanique*, Nice, France, Septembre 2003.
- [92] M. A. Walkley, P. H. Gaskell, P. K. Jimack, M. A. Kelmanson, and J. L. Summers. Adaptive finite element simulation of three dimensional surface tension dominated free surface flow problems. *ANZIAM Journal*, 46 :C558–C571, June 2005.
- [93] G. Wang. Finite element simulation of free surface flows with surface tension in complex geometries. *ASME*, 124 :584–594, September 2002.
- [94] C. E. Weatherburn. *Differential geometry of three dimensions*. Cambridge University Press, 1930.
- [95] Wang Wei, Li Junfeng, and Wang Tianshu. Modal analysis of liquid sloshing with different contact line boundary conditions using FEM. *Journal of Sound and Vibration*, 317 :739–759, 2008.
- [96] J. R. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon, and B. J. Daly. The MAC method. Technical Report LA-3425, Los Alamos Scientific Laboratory, 1965.
- [97] D. L. Youngs. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, pages 273–285, 1982.
- [98] H. Yuanjun, M. Xingrui, W. Pingping, and W. Benli. Low-gravity liquid nonlinear sloshing analysis in a tank under pitching excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 299 :164–177, 2007.
- [99] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1,2. Mc Graw-Hill, 2000 (5th Ed.).

Annexes

Annexe A

Variation au premier ordre de la courbure moyenne

Dans l'espace \mathbb{R}^3 , on considère un point M sur la surface Γ , repéré par le vecteur position $\mathbf{X}(\alpha, \beta)$, où α et β sont des coordonnées orthogonales surfaciques. On introduit les vecteurs unitaires \mathbf{i}_α et \mathbf{i}_β définis par :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \alpha} = A \mathbf{i}_\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \beta} = B \mathbf{i}_\beta \quad (\text{A.1})$$

et on complète cette base avec la normale unitaire $\mathbf{n} = \mathbf{i}_\alpha \wedge \mathbf{i}_\beta$.

Le tenseur de courbure $\boldsymbol{\kappa}_\Gamma$ de cette surface en M est un endomorphisme du plan tangent à Γ en M , et est défini par :

$$\boldsymbol{\kappa}_\Gamma = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{A.2})$$

Si on suppose que (α, β) est le système de coordonnées orthogonales de Gauss, alors on aura $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{i}_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \mathbf{i}_\alpha$ et $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{i}_\beta = \frac{1}{R_\beta} \mathbf{i}_\beta$, où R_α et R_β sont les rayons principaux de courbure en M . Ainsi, le tenseur de courbure pourra s'écrire dans la base de ses vecteurs propres $(\mathbf{i}_\alpha, \mathbf{i}_\beta)$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\kappa}_\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Les invariants $H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right)$ et $G = \frac{1}{R_\alpha R_\beta}$ (correspondant à la demi-trace et au déterminant de $\boldsymbol{\kappa}_\Gamma$) sont appelés, respectivement, *courbure moyenne* et *courbure totale* de la surface Γ en M .

Soit Γ' la surface obtenue en déformant Γ par un champ vectoriel \mathbf{u} . On se propose ici de calculer, au premier ordre en \mathbf{u} , la différence $2H' - 2H = \delta[2H](\mathbf{u})$, où H' est la courbure moyenne au point M' repéré par le vecteur $\mathbf{X}'(\alpha, \beta) = \mathbf{X}(\alpha, \beta) + \mathbf{u}(\alpha, \beta)$. D'après [94] (page 281), on a :

$$\boxed{\delta[2H](\mathbf{u}) = 2 \bar{\nabla}_s \cdot \mathbf{u} - \mathbf{n} \cdot \nabla_s^2 \mathbf{u}} \quad (\text{A.4})$$

où $\bar{\nabla}_s$ et $\nabla_s^2 \mathbf{u}$ sont donnés par :

$$\bar{\nabla}_s = -[\nabla_s \mathbf{n}] \cdot \nabla_s \quad \text{et} \quad \nabla_s^2 \mathbf{u} = \nabla_s \cdot [\nabla_s \mathbf{u}]$$

Afin de simplifier les calculs, on va développer (A.4) dans le système orthogonal de Gauss, dans lequel on peut écrire :

$$\nabla_s = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{i}_\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \mathbf{i}_\beta \quad (\text{A.5})$$

On aura également besoin des relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} = \frac{A}{R_\alpha} \mathbf{i}_\alpha \\ \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \alpha} = -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \mathbf{i}_\beta - \frac{A}{R_\alpha} \mathbf{n} \\ \frac{\partial \mathbf{i}_\beta}{\partial \alpha} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \mathbf{i}_\alpha \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} = \frac{B}{R_\beta} \mathbf{i}_\beta \\ \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \beta} = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \mathbf{i}_\beta \\ \frac{\partial \mathbf{i}_\beta}{\partial \beta} = -\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \mathbf{i}_\alpha - \frac{B}{R_\beta} \mathbf{n} \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

Calcul du terme $\overline{\nabla_s} \cdot \mathbf{u}$

Sachant que $\overline{\nabla_s} \cdot \mathbf{u} = -([\nabla_s \mathbf{n}] \cdot \nabla_s) \cdot \mathbf{u}$, on va commencer par exprimer $\nabla_s \mathbf{n}$. D'après (A.5), et en utilisant les formules (A.6) on a :

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{n} &= \frac{1}{A} \mathbf{i}_\alpha \otimes \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \mathbf{i}_\beta \otimes \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} \\ &= \frac{1}{R_\alpha} \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{i}_\alpha + \frac{1}{R_\beta} \mathbf{i}_\beta \otimes \mathbf{i}_\beta \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$\nabla_s \mathbf{n}$ n'est autre donc que le tenseur de courbure $\boldsymbol{\kappa}_\Gamma$. On aura donc :

$$([\nabla_s \mathbf{n}] \cdot \nabla_s) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{AR_\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{i}_\alpha + \frac{1}{BR_\beta} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \cdot \mathbf{i}_\beta \quad (\text{A.8})$$

En exprimant \mathbf{u} dans la base locale $(\mathbf{i}_\alpha, \mathbf{i}_\beta, \mathbf{n})$ tel que :

$$\mathbf{u} = \underbrace{u_\alpha \mathbf{i}_\alpha + u_\beta \mathbf{i}_\beta}_{\mathbf{u}_\parallel} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (\text{A.9})$$

et en utilisant les formules (A.6), on arrive facilement au résultat :

$$\overline{\nabla_s} \cdot \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2} \right) - \frac{1}{AR_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{BR_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \left(\frac{u_\beta}{R_\alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{u_\alpha}{R_\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{A.10})$$

Calcul du terme $\mathbf{n} \cdot \nabla_s^2 \mathbf{u}$

Sachant que $\mathbf{n} \cdot \nabla_s^2 \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot (\nabla_s \cdot [\nabla_s \mathbf{u}])$, on va commencer ici par exprimer $\nabla_s \mathbf{u}$. D'après (A.5), on a :

$$\nabla_s \mathbf{u} = \frac{1}{A} \mathbf{i}_\alpha \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \mathbf{i}_\beta \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \quad (\text{A.11})$$

Par ailleurs, d'après (A.9) et (A.6), on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} = \underbrace{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{A(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{R_\alpha} \right)}_{a_1} \mathbf{i}_\alpha + \underbrace{\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}_{a_2} \mathbf{i}_\beta + \underbrace{\left(\frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial \alpha} - \frac{A u_\alpha}{R_\alpha} \right)}_{a_3} \mathbf{n} \quad (\text{A.12a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} = \underbrace{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - \frac{u_\beta}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)}_{b_1} \mathbf{i}_\alpha + \underbrace{\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_\alpha}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{B(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{R_\beta} \right)}_{b_2} \mathbf{i}_\beta + \underbrace{\left(\frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial \beta} - \frac{B u_\beta}{R_\beta} \right)}_{b_3} \mathbf{n} \quad (\text{A.12b})$$

Ainsi, on pourra écrire :

$$\nabla_s \mathbf{u} = \frac{a_1}{A} \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{i}_\alpha + \frac{a_2}{A} \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{i}_\beta + \frac{a_3}{A} \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{n} + \frac{b_1}{B} \mathbf{i}_\beta \otimes \mathbf{i}_\alpha + \frac{b_2}{B} \mathbf{i}_\beta \otimes \mathbf{i}_\beta + \frac{b_3}{B} \mathbf{i}_\beta \otimes \mathbf{n} \quad (\text{A.13})$$

et donc :

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla_s \cdot [\nabla_s \mathbf{u}]) = -\frac{a_1}{AR_\alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{a_3}{A} \right) - \frac{b_2}{BR_\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{b_3}{B} \right) \quad (\text{A.14})$$

En remplaçant a_1 , a_3 , b_2 et b_3 par leurs expressions introduites dans (A.12), on arrive finalement à :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla_s^2 \mathbf{u} = & -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2} \right) - \frac{1}{AR_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{BR_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} - \dots \\ & \frac{1}{AB} \left(\frac{u_\beta}{R_\alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{u_\alpha}{R_\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{R_\alpha} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{R_\beta} \right) + \text{div}_s(\nabla_s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) \end{aligned}} \quad (\text{A.15})$$

où $\text{div}_s(\nabla_s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) = \nabla_s \cdot (\nabla_s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}))$, et ainsi :

$$\text{div}_s(\nabla_s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial \beta^2} - \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial \alpha} - \frac{1}{B^3} \frac{\partial B}{\partial \beta} \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial \beta} \quad (\text{A.16})$$

D'après (A.4), (A.10) et (A.15), on arrive à l'expression de la variation au premier ordre en \mathbf{u} de l'opérateur $2H$:

$$\boxed{\delta[2H](\mathbf{u}) = - \left(\frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2} \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \text{div}_s(\nabla_s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) + h_{2H}(\mathbf{u}_\parallel)} \quad (\text{A.17})$$

où la fonction h_{2H} est donnée par :

$$h_{2H}(\mathbf{u}_\parallel) = -\frac{u_\alpha}{AR_\alpha^2} \frac{\partial R_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{u_\beta}{BR_\beta^2} \frac{\partial R_\beta}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \left(\frac{u_\beta}{R_\alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{u_\alpha}{R_\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{A.18})$$

Annexe B

Linéarisation de la condition d'angle de contact

Dans cette annexe, on va établir la linéarisation de la condition d'angle de contact, en tenant compte de la courbure du réservoir. Pour cela, on va montrer que l'opérateur de bord \mathbf{K}_γ^θ défini dans (5.31) par :

$$\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \cos(\theta) \oint_\gamma \delta[\delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma d\gamma](\mathbf{u}) - \oint_\gamma \delta[\delta\mathbf{u}](\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma d\gamma \quad (\text{B.1})$$

s'exprime bien sous la forme (5.32).

Puisque les champs \mathbf{u} et $\delta\mathbf{u}$ appartiennent ici à $\mathcal{C}_\mathbf{u}$, on choisi de les décomposer, au niveau du bord γ , dans la base locale³⁶ $(\mathbf{t}_\gamma, \boldsymbol{\nu}_\Sigma, \mathbf{n}_\Sigma)$ représentée dans la Figure B.1, et on écrit alors :

$$\mathbf{u} = \mu_\gamma \mathbf{t}_\gamma + \mu_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma \quad \text{et} \quad \delta\mathbf{u} = \delta\mu_\gamma \mathbf{t}_\gamma + \delta\mu_\Sigma \boldsymbol{\nu}_\Sigma \quad (\text{B.2})$$

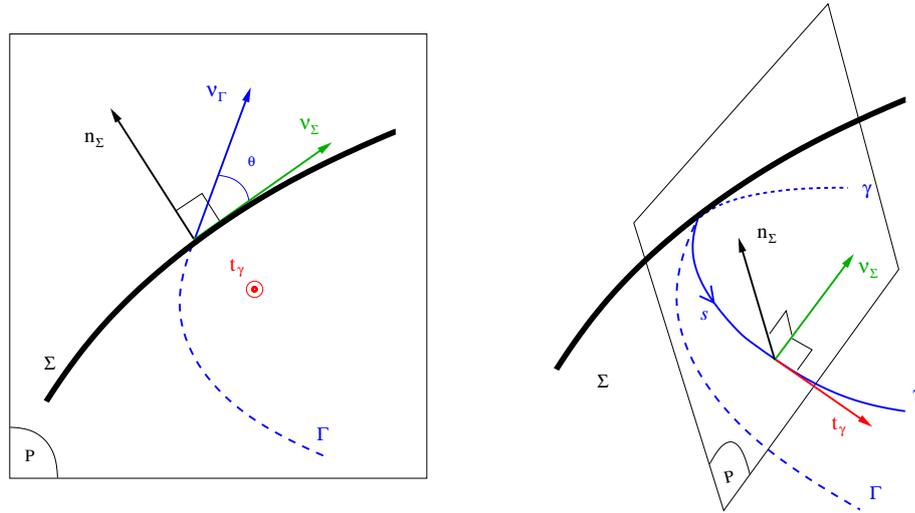


FIGURE B.1 – Base locale sur la ligne de contact

36. Cette base mobile est également appelée *trièdre de Darboux-Ribaucour*, utile pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces.

En gardant la même notation adoptée dans la thèse, le vecteur position $\mathbf{X}(\xi)$ décrivant γ est paramétré par une variable ξ , ainsi on a :

$$\mathbf{t}_\gamma = \frac{\mathbf{a}_\gamma}{\|\mathbf{a}_\gamma\|} \quad \text{où} \quad \mathbf{a}_\gamma = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \quad (\text{B.3})$$

Calcul du terme $\delta[\delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma d\gamma](\mathbf{u})$

D'après (B.2) et (B.3), et puisque $d\gamma = \|\mathbf{a}_\gamma\| d\xi$ et $\delta[\mathbf{a}_\gamma](\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi}$, alors on a :

$$\begin{aligned} \delta[\delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma d\gamma](\mathbf{u}) &= \delta[\delta\mu_\Sigma \|\mathbf{a}_\gamma\| d\xi](\mathbf{u}) \\ &= \delta\mu_\Sigma \delta[\|\mathbf{a}_\gamma\|](\mathbf{u}) d\xi \\ &= \delta\mu_\Sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \cdot \mathbf{t}_\gamma d\xi \\ &= \delta\mu_\Sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{t}_\gamma d\gamma \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où s est l'abscisse curviligne de la courbe γ . Compte tenu de (B.2), on a :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} = \frac{\partial \mu_\gamma}{\partial s} \mathbf{t}_\gamma + \mu_\gamma \frac{\partial \mathbf{t}_\gamma}{\partial s} + \frac{\partial \mu_\Sigma}{\partial s} \boldsymbol{\nu}_\Sigma + \mu_\Sigma \frac{\partial \boldsymbol{\nu}_\Sigma}{\partial s} \quad (\text{B.5})$$

D'après les formules de Darboux-Ribaucour et compte tenu de nos conventions de signe et d'orientation, on a :

$$\frac{\partial \mathbf{t}_\gamma}{\partial s} = -\frac{1}{R_g} \boldsymbol{\nu}_\Sigma - \frac{1}{R_{\gamma\gamma}} \mathbf{n}_\Sigma \quad \text{et} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\nu}_\Sigma}{\partial s} = \frac{1}{R_g} \mathbf{t}_\gamma - \frac{1}{R_{\gamma\Sigma}} \mathbf{n}_\Sigma \quad (\text{B.6})$$

où $\frac{1}{R_{\gamma\gamma}}$, $\frac{1}{R_g}$ et $\frac{1}{R_{\gamma\Sigma}}$ sont, respectivement, la courbure normale, la courbure géodésique et la torsion géodésique de la courbe γ . Ainsi, le vecteur $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}$ pourra s'écrire dans la base $(\mathbf{t}_\gamma, \boldsymbol{\nu}_\Sigma, \mathbf{n}_\Sigma)$ sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_\gamma}{\partial s} + \frac{\mu_\Sigma}{R_g} \\ \frac{\partial \mu_\Sigma}{\partial s} - \frac{\mu_\gamma}{R_g} \\ -\frac{\mu_\gamma}{R_{\gamma\gamma}} - \frac{\mu_\Sigma}{R_{\gamma\Sigma}} \end{bmatrix} (\mathbf{t}_\gamma, \boldsymbol{\nu}_\Sigma, \mathbf{n}_\Sigma) \quad (\text{B.7})$$

Donc on obtient d'après (B.4) et (B.7) :

$$\delta[\delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma d\gamma](\mathbf{u}) = \delta\mu_\Sigma \left(\frac{\partial \mu_\gamma}{\partial s} + \frac{\mu_\Sigma}{R_g} \right) d\gamma \quad (\text{B.8})$$

Calcul du terme $\delta[\delta\mathbf{u}](\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma$

D'après (B.2), on a :

$$\delta[\delta\mathbf{u}](\mathbf{u}) = \delta\mu_\gamma \delta[\mathbf{t}_\gamma](\mathbf{u}) + \delta\mu_\Sigma \delta[\boldsymbol{\nu}_\Sigma](\mathbf{u}) \quad (\text{B.9})$$

Le vecteur directeur \mathbf{t}_γ de la ligne de contact étant donné par (B.3), on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\delta[\mathbf{t}_\gamma](\mathbf{u}) &= \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \|\mathbf{a}_\gamma\| - \mathbf{a}_\gamma \frac{\mathbf{a}_\gamma}{\|\mathbf{a}_\gamma\|} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi}}{\|\mathbf{a}_\gamma\|^2} \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{t}_\gamma \right) \mathbf{t}_\gamma\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

Compte tenu de (B.7), on a alors :

$$\delta[\mathbf{t}_\gamma](\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \mu_\Sigma}{\partial s} - \frac{\mu_\gamma}{R_g} \\ -\frac{\mu_\gamma}{R_{\gamma\gamma}} - \frac{\mu_\Sigma}{R_{\gamma\Sigma}} \end{bmatrix} (\mathbf{t}_\gamma, \boldsymbol{\nu}_\Sigma, \mathbf{n}_\Sigma) \quad (\text{B.11})$$

D'autre part, puisque $\boldsymbol{\nu}_\Sigma = \mathbf{n}_\Sigma \wedge \mathbf{t}_\gamma$, alors :

$$\delta[\boldsymbol{\nu}_\Sigma](\mathbf{u}) = \boldsymbol{\kappa}_\Sigma(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{t}_\gamma + \mathbf{n}_\Sigma \wedge \delta[\mathbf{t}_\gamma](\mathbf{u}) \quad (\text{B.12})$$

avec $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma(\mathbf{u}) = \delta[\mathbf{n}_\Sigma](\mathbf{u})$ où $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma$ est le tenseur de courbure de la surface Σ . Ce dernier s'écrit dans la base $(\mathbf{t}_\gamma, \boldsymbol{\nu}_\Sigma)$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\kappa}_\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{\gamma\gamma}} & \frac{1}{R_{\gamma\Sigma}} \\ \frac{1}{R_{\gamma\Sigma}} & \frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{\kappa}_\Sigma(\mathbf{u}) = \left(\frac{\mu_\gamma}{R_{\gamma\gamma}} + \frac{\mu_\Sigma}{R_{\gamma\Sigma}} \right) \mathbf{t}_\gamma + \left(\frac{\mu_\gamma}{R_{\gamma\Sigma}} + \frac{\mu_\Sigma}{R_{\Sigma\Sigma}} \right) \boldsymbol{\nu}_\Sigma \quad (\text{B.14})$$

Compte tenu de (B.14) et de (B.11), la linéarisation (B.12) devient :

$$\delta[\boldsymbol{\nu}_\Sigma](\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\mu_\gamma}{R_g} - \frac{\partial \mu_\Sigma}{\partial s} \\ 0 \\ -\frac{\mu_\gamma}{R_{\gamma\Sigma}} - \frac{\mu_\Sigma}{R_{\Sigma\Sigma}} \end{bmatrix} (\mathbf{t}_\gamma, \boldsymbol{\nu}_\Sigma, \mathbf{n}_\Sigma) \quad (\text{B.15})$$

Finalement, en utilisant (B.11) et (B.15) dans (B.9) puis multipliant scalairement par $\boldsymbol{\nu}_\Gamma$, on arrive à :

$$\boxed{\delta[\boldsymbol{\delta u}](\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma = -\delta\mu_\gamma \mu_\gamma \left(\frac{\sin(\theta)}{R_{\gamma\gamma}} + \frac{\cos(\theta)}{R_g} \right) - \delta\mu_\Sigma \mu_\Sigma \frac{\sin(\theta)}{R_{\Sigma\Sigma}} - \dots} \quad (\text{B.16})$$

$$\dots (\delta\mu_\Sigma \mu_\gamma + \delta\mu_\gamma \mu_\Sigma) \frac{\sin(\theta)}{R_{\gamma\Sigma}} + \cos(\theta) \delta\mu_\gamma \frac{\partial \mu_\Sigma}{\partial s}$$

Expression de l'opérateur de bord \mathbf{K}_γ^θ

D'après les expressions (B.8) et (B.16), l'opérateur de bord défini dans (B.1) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \oint_\gamma \left(\frac{\sin(\theta)}{R_{\gamma\gamma}} + \frac{\cos(\theta)}{R_g} \right) \delta\mu_\gamma \mu_\gamma \, d\gamma + \dots \\
 &\dots \oint_\gamma \left(\frac{\sin(\theta)}{R_{\Sigma\Sigma}} + \frac{\cos(\theta)}{R_g} \right) \delta\mu_\Sigma \mu_\Sigma \, d\gamma + \dots \\
 &\dots \sin(\theta) \oint_\gamma \frac{1}{R_{\gamma\Sigma}} (\delta\mu_\Sigma \mu_\gamma + \delta\mu_\gamma \mu_\Sigma) \, d\gamma - \dots \\
 &\dots \cos(\theta) \oint_\gamma \left(\delta\mu_\gamma \frac{\partial\mu_\Sigma}{\partial s} - \delta\mu_\Sigma \frac{\partial\mu_\gamma}{\partial s} \right) \, d\gamma
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

D'autre part, puisque le bord γ est une courbe fermée, alors :

$$\oint_\gamma \delta\mu_\Sigma \frac{\partial\mu_\gamma}{\partial s} \, d\gamma = \underbrace{[\delta\mu_\Sigma \mu_\gamma]_\gamma}_0 - \oint_\gamma \mu_\gamma \frac{\partial\delta\mu_\Sigma}{\partial s} \, d\gamma \tag{B.18}$$

Finalement, on obtient une première expression de \mathbf{K}_γ^θ où le caractère symétrique de cet opérateur est exhibé :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \oint_\gamma \left(\frac{\sin(\theta)}{R_{\gamma\gamma}} + \frac{\cos(\theta)}{R_g} \right) \delta\mu_\gamma \mu_\gamma \, d\gamma + \dots \\
 &\dots \oint_\gamma \left(\frac{\sin(\theta)}{R_{\Sigma\Sigma}} + \frac{\cos(\theta)}{R_g} \right) \delta\mu_\Sigma \mu_\Sigma \, d\gamma + \dots \\
 &\dots \sin(\theta) \oint_\gamma \frac{1}{R_{\gamma\Sigma}} (\delta\mu_\Sigma \mu_\gamma + \delta\mu_\gamma \mu_\Sigma) \, d\gamma - \dots \\
 &\dots \cos(\theta) \oint_\gamma \left(\delta\mu_\gamma \frac{\partial\mu_\Sigma}{\partial s} + \mu_\gamma \frac{\partial\delta\mu_\Sigma}{\partial s} \right) \, d\gamma
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

L'implémentation de cette dernière expression nécessite le calcul des quatre composantes du tenseur de courbure $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma$, mais aussi de la courbure géodésique $\frac{1}{R_g}$ de γ (courbure de γ projetée sur le plan tangent au réservoir). Afin d'éviter le calcul de cette partie de la courbure de la surface libre Γ , on propose une autre expression de \mathbf{K}_γ^θ beaucoup plus concise et indépendante du choix de la base locale, obtenue en factorisant par $\sin(\theta)$ d'une part et $\cos(\theta)$ d'autre part. Ainsi, et compte tenu de (B.2), (B.7) et de (B.13), on obtient :

$$\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \cos(\theta) \underbrace{\oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \left(\mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s} \right) \, d\gamma}_{\mathbf{1}\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})} + \sin(\theta) \underbrace{\oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma \cdot \mathbf{u} \, d\gamma}_{\mathbf{2}\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})} \tag{B.20}$$

Le premier opérateur $\mathbf{1}\mathbf{K}_\gamma^\theta$ ne tient pas compte de la courbure du réservoir, et a été introduit dans la partie I (étude statique) où cette courbure a été négligée par hypothèse. Le second opérateur $\mathbf{2}\mathbf{K}_\gamma^\theta$ prend en compte les effets de courbures de Σ par l'intermédiaire de $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma$. Paramétré par ξ , l'opérateur d'angle de contact s'écrit finalement :

$$\boxed{\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \cos(\theta) \oint_\xi \delta\mathbf{u} \cdot \left(\mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial \xi} \right) \, d\xi + \sin(\theta) \oint_\xi \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma \cdot \mathbf{u} \, \|\mathbf{a}_\gamma\| \, d\xi} \tag{B.21}$$

Annexe C

Quelques formules utiles

Propriétés de l'opérateur Trace

Soit 3 matrices carrées \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et une matrice symétrique \mathbf{S} :

$$\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top) = \text{Tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}^\top) \quad (\text{C.1a})$$

$$\text{Tr}(\mathbf{S}\mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{S}\mathbf{A}^\top) = \text{Tr}\left(\frac{1}{2}\mathbf{S}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)\right) \quad (\text{C.1b})$$

$$\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \text{Tr}(\mathbf{C}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top) = \text{Tr}(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{C}^\top) = \text{Tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{B}^\top) \quad (\text{C.1c})$$

Formules d'analyse vectorielle

Equivalent matriciel du produit vectoriel : matrice $\mathbf{spin}(\mathbf{u})$

Soit 2 vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} de \mathbb{R}^3 . Pour la discrétisation d'un opérateur contenant le produit vectoriel $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, il est souvent pratique d'écrire ce produit sous forme de produit d'une matrice et d'un vecteur :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = [\mathbf{spin}(\mathbf{u})] \mathbf{v} \quad \text{avec} \quad [\mathbf{spin}(\mathbf{u})] = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Double produit vectoriel

Soit 3 vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} de \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w} \quad (\text{C.3})$$

Relations vectorielles

Soit 2 vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} de \mathbb{R}^3 et un scalaire α :

$$\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} \quad (\text{C.4a})$$

$$\nabla \wedge (\alpha \mathbf{u}) = \alpha \nabla \wedge \mathbf{u} + (\nabla \alpha) \wedge \mathbf{u} \quad (\text{C.4b})$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{rot}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{rot}(\mathbf{v}) \quad (\text{C.4c})$$

$$\text{div}(\alpha \mathbf{u}) = \alpha \text{div}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \text{grad}(\alpha) \quad (\text{C.4d})$$

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \nabla \wedge \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge \nabla \wedge \mathbf{v} \quad (\text{C.4e})$$

Formule de Stokes

Soit \mathbf{u} un champ vectoriel sur une surface S de normale \mathbf{n} et de bord ∂S :

$$\int_S \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{C.5})$$

Changements de variable

Dans les intégrales de volume

Soit une application vectorielle bijective régulière Φ différentiable et de dérivée \mathbf{F} , alors les intégrales sur les domaines Ω et $\Phi(\Omega)$ se déduisent l'une de l'autre par la formule de changement de variable suivante :

$$\int_{x \in \Phi(\Omega)} f(x) \, d\Omega_x = \int_{X \in \Omega} f(\Phi(X)) \det(\mathbf{F}) \, d\Omega_X \quad (\text{C.6a})$$

Dans les intégrales de surface

Soit une application vectorielle bijective régulière Φ différentiable et de dérivée \mathbf{F} . Soit $\partial\Omega$, la frontière du domaine Ω , \mathbf{n}_x et \mathbf{n}_X les normales extérieures aux domaines respectivement $\Phi(\Omega)$ et Ω . Alors les intégrales sur les frontières $\partial\Omega$ et $\Phi(\partial\Omega)$ se déduisent l'une de l'autre par la formule de changement de variable suivante :

$$\int_{x \in \Phi(\partial\Omega)} f(x) \mathbf{n}_x \, d\Sigma_x = \int_{X \in \partial\Omega} f(\Phi(X)) \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{n}_X \, d\Omega_X \quad (\text{C.6b})$$

Formulations locales

Des formulations locales de changement de variable peuvent être déduites des relations intégrales précédentes :

Transport par changement de variable d'un élément de volume

$$d\Omega_x = \det(\mathbf{F}) \, d\Omega_X \quad (\text{C.7a})$$

Transport par changement de variable d'un élément de surface orienté

$$\mathbf{n}_x \, d\Sigma_x = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{n}_X \, d\Sigma_X \quad (\text{C.7b})$$

