



Contribution à la gestion quantitative des risques en assurance

Stéphane Loisel

► To cite this version:

Stéphane Loisel. Contribution à la gestion quantitative des risques en assurance. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2010. tel-00540617

HAL Id: tel-00540617

<https://theses.hal.science/tel-00540617>

Submitted on 28 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contribution à la gestion quantitative des risques en assurance.

HDR

présentée et soutenue publiquement le 9 novembre 2010

pour l'obtention de

**l'Habilitation à Diriger les Recherches de l'Université Claude
Bernard Lyon I**

(mathématiques appliquées)

par

Stéphane Loisel

Composition du jury

Président : Jean-Paul Laurent

Rapporteurs : Hans Gerber
Marc Goovaerts
Monique Jeanblanc

Examineurs : Véronique Maume-Deschamps
Susan Pitts

**CONTRIBUTION À LA GESTION QUANTITATIVE
DES RISQUES EN ASSURANCE**

STÉPHANE LOISEL,
ISFA, UNIVERSITÉ LYON 1

Mes premiers remerciements vont bien évidemment à ma femme Anne, en premier lieu pour m'avoir donné deux beaux enfants Maud et Arthur, et plus généralement pour le fait de supporter entre autres mon rythme de travail en dents de scie, mon côté étourdi et mes voyages fréquents. Je n'aurais pas pu faire le quart de ce que j'ai fait depuis ma thèse sans son soutien constant, quelquefois au détriment de sa propre évolution de carrière.

Merci aux nounous des enfants (en particulier Brigitte alias Tatïe, Fayeza et Jessica, Ada, et surtout bien souvent ma belle-mère Eve) qui s'occupent si bien de Maud et Arthur et nous ont permis de gérer un rythme parfois effréné. Habiter à 100 mètres de sa belle-mère peut en effrayer plus d'un, mais je peux témoigner que dans mon cas les avantages se chiffrent au centuple des inconvénients...

Merci à Jérôme d'avoir emmené Anne à l'hôpital à chaque fois que c'était nécessaire quand j'étais en déplacement.

Ce manuscrit a été en grande partie rédigé au Chambon-sur-Lignon, dans un fauteuil très confortable. Je remercie chaleureusement mon beau-père Jean-Michel pour cet achat judicieux, et de façon plus générale pour toutes les distractions qu'il m'a offertes ces derniers temps.

Bravo à Christelle pour son concours (c'est mérité, et je suis content !), et tous mes voeux à Yannick et Audrey pour l'arrivée de mon deuxième neveu. Merci à Luc et Guillaume pour l'accueil à Washington et bises aux autres cousins.

Merci à mes parents et grands-parents pour l'amour et l'exemple qu'ils me donnent tout simplement. Merci à Papa pour l'invitation chez Troigros (qu'il reste toutefois encore à honorer...).

Je souhaiterais remercier chaleureusement Marc Goovaerts, Hans Gerber et Monique Jeanblanc d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette habilitation à diriger les recherches, ainsi que Jean-Paul Laurent, Véronique Maume-Deschamps et Susan Pitts pour leur participation au jury.

J'aimerais remercier et m'excuser auprès des secrétaires de l'ISFA, de l'ENSAE, d'HEC, de l'X, de l'Institut des Actuaïres, de Lausanne et d'ailleurs, qui m'ont souvent relancé indéfiniment et sans succès pour que je remplisse certains papiers. Je présente des excuses toutes particulières à la secrétaire de Paris VII dont j'ai bloqué la clôture de la comptabilité de l'année dernière.

Merci à mes directeurs de thèse Daniel Serant et Christian Mazza pour leur gentillesse et toute l'aide qu'ils m'ont apportée. Merci à Philippe Picard pour la persévérance dans la relecture de ma thèse bien que les macros LaTeX ne soient pas passées dans sa version et surtout pour le dévouement dont il fait preuve pour nos étudiants vietnamiens et libanais. Merci aux titulaires de chaire de recherche Nicole El Karoui, Véronique Maume-Deschamps et Jean-Paul Laurent, ainsi qu'aux mécènes Milliman, la Fédération des Banques Françaises et BNP Paribas Assurance qui m'ont permis de participer à des projets passionnants.

Merci à François Bonnin de m'avoir proposé de faire partie de sa liste aux élections du Conseil d'Administration de l'Institut des Actuaire. Merci à Thomas Béhar, Fabrice Sauvignon et Régis de Laroulière pour la confiance qu'ils m'ont accordée à plusieurs reprises et pour leur amitié. Merci aux étudiants de la formation ERM et aux intervenants pour les échanges enrichissants dont je retire beaucoup de plaisir et beaucoup d'informations aussi. Merci aussi aux étudiants de l'ISFA, d'HEC Lausanne, de Paris VII, de l'ENSAE, d'HEC, de la Hong Kong University, de la METU à Ankara, de l'Université Nationale D'Economie à Hanoi et de l'Université d'Economie d'Hô-Chi-Minh-Ville, de l'USJ et de l'université Los Andes pour les bons moments passés ensemble.

Merci à Catherine Pigeon de me faire participer au Conseil d'Administration d'Axéria Prévoyance et surtout de m'avoir fait découvrir le Georges Five, le meilleur bar à vins de Lyon et peut-être du monde !

Merci à l'équipe de l'ordre des Canardiens pour leur bonne humeur et leur amour de la gastronomie.

Merci et félicitations aux docteurs qui ont brillamment soutenu leur thèse et que je suis fier d'avoir co-encadrés : Mathieu Bargès, Anthony Derien et Romain Biard. Chacun d'entre eux occupe une place un peu spéciale dans mon coeur : Mathieu parce qu'il a été le premier à soutenir, Anthony du fait de son projet de thèse qui devait se faire initialement avec Christian Partrat pour qui j'ai une pensée aujourd'hui, et Romain parce qu'il s'agit de mon premier étudiant qui souhaite poursuivre une carrière académique. Merci également pour l'aventure que nous partageons ensemble à mes autres thésards Florent Toureille, Manel Kacem, Christophe Dutang, Xavier Milhaud, Yahia Salhi et Alexandre Mornet, ainsi qu'aux collègues qui co-encadrent ou ont co-encadré ces thèses avec moi : Hélène Cossette, Etienne Marceau, Jean Claude Augros, Véronique Maume-Deschamps, Jean-Paul

Laurent, Pauline Barrieu.

Merci pour les discussions et pour les bons moments partagés à mes autres co-auteurs (d'articles, de chapitres de livres et de pré-publications) : dans le désordre Haikady Nagaraja, Harry Bensusan, Nicole El Karoui, Caroline Hillairet, Claudia Ravanelli, Claudio Macci, Noël Veraverbeke, Christian Mazza, Didier Rulhière, Nicolas Privault, Laurent Devineau, Wayne Fisher, Shaun Wang, Pierre Arnal, Romain Durand, Marie-Pierre Gonon, Matthieu Chauvigny, Julien Trufin, Hansjoerg Albrecher, Corina Constantinescu, Sana Louhichi, Christophette Blanchet-Scalliet, Diana Dorobantu, Esterina Masiello, Olivier Faugeras, Patrice Bertail, Jean-Luc Besson.

Merci à tous ceux qui ont relu certains de mes travaux et m'ont permis de les enrichir (ou de les corriger!), et en particulier à Christian Gouriéroux.

Merci aux éditeurs des revues qui m'ont proposé de rejoindre leur comité éditorial, Rob Kaas et Marc Goovaerts pour IME, Joe Glaz pour MCAP, Christian Hipp pour EAJ et Christian Partrat pour le BFA, ainsi qu'aux personnes qui leur ont suggéré mon nom et qui se reconnaîtront !

Merci aux collègues François Dufresne, André Dubey, Claude Lefèvre, Michel Denuit et Denis Boscq qui m'ont convié à des jurys de thèse, félicitations aux docteurs Cristina Parlogea, Sébastien Viquérat, Séverine Gaille, Maude Gathy, Julien Trufin et merci pour l'accueil sympathique qui m'a à chaque fois été réservé. M... à Laure Sardet pour sa soutenance prévue le lendemain de ma soutenance d'HDR.

Merci beaucoup aux collègues qui m'ont invité en France ou à l'étranger pour un séjour de recherche, un cours ou une conférence invitée : Mike Sherris, John Evans et l'équipe du département d'actuariat de l'University of New South Wales, Hayri Korezlioglu à qui je dédie cette HDR, Michel Denuit, Hansjoerg Albrecher, Armelle Guillou, Wayne Fisher, Shaun Wang et l'équipe de l'ERMII, Hailiang Yang et l'équipe d'actuariat de la Hong Kong University, Anne-Laure Fougères, Denys Pommeret et les autres organisateurs des journées de statistique de la SFDS, l'Université Los Andes à Bogota, Toni Sayah, Charbel Klayani et le département de mathématiques de l'Université Saint-Joseph à Beyrouth, Jean-Jacques Driesbeke et Gilbert Saporta, les équipes de l'Université Nationale D'Economie à Hanoi et de l'Université d'Economie d'Hô-Chi-Minh-Ville). Merci à Claude, Etienne et Hélène pour des invitations que je n'ai pas encore pu honorer.

Merci à l'équipe enseignante et administrative de l'ISFA pour tout ce que nous partageons : Marijo, Sondès, Michèle, Delphine, Marie, Samy, Marie-Claude, Jean-Daniel, François, Frédéric, Béatrice, Areski, Didier, Alexis, Denis, Yvan, Cécile, ainsi que les autres enseignants, chercheurs associés, ATER, post-docs et thésards qui y sont passé ou en font partie. Bienvenue à Christian et à Ragnar ! Félicitations à Thomas pour son poste à Nice. Falemnderit Zonjusha Caja pour le cours d'albanais. Enfin, un énorme merci à Jean Claude et à Véronique pour l'énergie qu'ils passent à défendre l'intérêt de l'ISFA et du laboratoire SAF, pour leur confiance, le Gevrey-Chambertin et pour tout le reste !

Merci à Diana et Nicolas ainsi qu'à Esterina et Pierre de nous avoir fait découvrir la Roumanie et l'Italie du Sud, et pour tout ce que nous partageons.

Nicolas, plutôt que de te remercier, je préfère te dire simplement que tu fais partie des gens qui comptent le plus pour moi (mais bon il y en a beaucoup quand même !).

Claude, dont le nom est revenu plusieurs fois, est devenu bien plus un ami qu'un co-auteur. Merci Claude pour les liens d'amitié qui nous unissent.

Merci à Jean-Baptiste Gouéré, Mathieu Florence et Guillaume Deschamps qui sont bien plus forts que moi en maths mais m'ont laissé soutenir l'HDR en premier.

Un grand merci à Jacques Gorgeret pour sa compétence et pour sa réactivité qui nous ont évité à Anne, à moi et à l'équipe de l'ISFA de longues et pénibles procédures.

Merci à Denis de m'avoir aidé à trouver de très bons artisans pour la rénovation de notre futur appartement.

Bon rétablissement à Eric.

Merci à tous mes amis, Benoît et Marie, Caroline et Yves, François, Aurélie et Edouard, Assia et Erwan, Claire, Ophélie, Thom, Marco, Max et Delphine, Jérémie C., Jérémie et Sophie, David, Sylvain et Sylvie, Vincent, Damien et Sandrine, Alexis et tous les autres (si vous n'êtes pas cités ailleurs, cette ligne est pour vous !) pour les bons moments passés ensemble.

Merci à Marine pour ses encouragements raisonnés.

Grazie mille à Ada pour l'accueil formidable à Benevento et pour le limoncello final qui a été décisif pour terminer la rédaction de ce document !

CE TEXTE EST UNE SYNTHÈSE DES TRAVAUX SUIVANTS (PRÉCÉDÉS DE LEUR NUMÉRO DANS LA BIBLIOGRAPHIE) :

- [35] R. Biard, C. Lefèvre, S. Loisel, H. Nagaraja, *Asymptotic finite-time ruin probabilities for a class of path-dependent claim amounts using Poisson spacings*, to appear in *Applied Stochastic Models in Business and Industry* (2010).
- [30] P. Barrieu, H. Bensusan, N. El Karoui, C. Hillairet, S. Loisel, C. Ravanelli, Y. Salhi, *Understanding, modelling and managing longevity risk : key issues and main challenges*, to appear in *Scandinavian Actuarial Journal* (2010).
- * [138] X. Milhaud, M.-P. Gonon, S. Loisel, *Les comportements de rachat en Assurance Vie en régime de croisière et en période de crise*, *Risques* (2010), Vol. 83, pp 76-81.
- [115] C. Lefèvre, S. Loisel, *Stationary-excess operator and convex stochastic orders*, *Insurance : Mathematics and Economics* (2010), Vol. 47, pp. 64-75.
- [36] R. Biard, S. Loisel, C. Macci, N. Veraverbeke, *Asymptotic behavior of the finite-time expected time-integrated negative part of some risk processes*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2010), Vol. 367, No2, pp. 535-549 .
- [125] S. Loisel, C. Mazza, D. Rullière, *Convergence and asymptotic variance of bootstrapped finite-time ruin probabilities with partly shifted risk processes*, *Insurance : Mathematics and Economics* (2009), Vol. 45, No 3, 374-381.
- * [70] L. Devineau, S. Loisel, *Risk aggregation in Solvency II : How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula ?*, *Bulletin Français d'Actuariat*, No 18, Vol. 9, 107-145 (2009).
- [127] S. Loisel, N. Privault, *Sensitivity analysis and density estimation for finite-time ruin probabilities*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 230, No 1, 107-120 (2009).
- [113] C. Lefèvre, S. Loisel, *Finite-Time Ruin Probabilities for Discrete, Possibly Dependent, Claim Severities*, *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 11, No 3 (2009), 425-441.
- * [69] L. Devineau, S. Loisel, *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des "simulations dans les simulations" pour le calcul du capital économique Solvabilité II*, *Bulletin Français d'Actuariat (BFA)*, No. 17, Vol. 10, 188-221 (2009).
- * [131] S. Loisel, *From Liquidity Crisis to Correlation Crisis, and the Need for "Quanls" in ERM*, in *Risk Management : The Current Financial Crisis, Lessons Learned and Future Implications*, Edited by the SOA, CAS and CIA, 75-77 (2008).
- [38] R. Biard, C. Lefèvre, S. Loisel, *Impact of correlation crises in risk theory : asymptotics of finite-time ruin probabilities for heavy-tailed claim amounts when some independence and stationarity assumptions*

*. Article relevant plutôt du domaine *Sciences de gestion*.

- are relaxed, *Insurance : Mathematics and Economics*, Vol. 43-3, 412-421 (2008).
- * [78] W. Fisher, S. Loisel, S. Wang, On some key research issues in Enterprise Risk Management related to economic capital and diversification effect at group level, *Bulletin Français d'Actuariat (BFA)*, No. 15, Vol. 9 (2008).
 - [112] C. Lefèvre, S. Loisel, On finite-time ruin probabilities for classical risk models, *Scandinavian Actuarial Journal* (2008), Vol. 1, 41-60.
 - [124] S. Loisel, C. Mazza, D. Rullière, Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin, *Insurance : Mathematics and Economics*, Vol. 42, Issue 2, April 2008, 746-762.
 - † [130] S. Loisel, Time to ruin, insolvency penalties and dividends in a Markov-modulated multirisk model with common shocks, *Bulletin Français d'Actuariat*, No. 14, Vol. 8, 4-24 (2007).
 - † [163] D. Rullière, S. Loisel, The win-first probability under interest force, *Insurance Mathematics and Economics*, Vol. 37, Issue 3, pp 421-442, 2005.
 - † [121] S. Loisel, Differentiation of some functionals of risk processes and optimal reserve allocation, *Journal of Applied Probability*, 42-2 (2005).
 - † [129] S. Loisel, Ruin theory with K lines of business, *Proceedings of the 3rd Actuarial and Financial Day, Bruxelles*, pp 4-24, 2004.
 - † [162] D. Rullière, S. Loisel, Another look at the Picard-Lefèvre formula for finite-time ruin probabilities, *Insurance : Mathematics and Economics*, Vol. 35-2, 187-203, 2004.

Mes pré-publications soumises sont disponibles en ligne sur Hal à l'adresse <http://hal.archives-ouvertes.fr/aut/St%C3%A9phane+Loisel/> (attention il y aussi les notifications de conférences sur cette page).

†. Article commencé pendant ma thèse

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	2
partie I. Théorie de la ruine	6
1. Le modèle classique de la théorie de la ruine	6
2. Dividendes et taxes	9
2.1. Versement de dividendes au delà d'une barrière	9
2.2. Taxes	11
3. Propriétés asymptotiques dans le modèle de Sparre Andersen	12
4. Méthodes pour le calcul exact ou approché de probabilités de ruine	13
4.1. Formule de Picard-Lefèvre	13
4.2. Formules de Takács et de type Seal	15
4.3. Equivalence entre les deux formules et cas continu	17
5. Robustesse et sensibilité	18
6. Modulation par un processus d'environnement Markovien	26
7. Dépendance stochastique en univers univarié	28
7.1. Principaux types de dépendance en théorie du risque	28
7.2. Corrélacion entre montants de sinistres	30
7.3. Corrélacion entre temps inter-sinistres et montants de sinistres	31
8. Au-delà de la probabilité de ruine : fonctions de pénalité	33
8.1. Fonction de pénalité escomptée de Gerber-Shiu	34
8.2. Aire en dessous de zéro	34
9. Modèle multi-branches	36
9.1. Processus de risque multivarié et dépendances inter-branches	37
9.2. Critères de risque	40
9.3. Allocation optimale	44
partie II. Nouvelles thématiques et perspectives	47
1. Extrema s-convexes	47
2. Risque de longévité	49
3. Théorie du risque	55
3.1. Crises de corrélation en univers multivarié	55
3.2. Méthode dite d'Erlangisation	56
3.3. Autres travaux en cours en théorie de la ruine	57
4. Risques liés au climat	59
5. Solvabilité II et ERM	62
6. Théorie des jeux et comportement des assurés	67
6.1. Rachats en assurance vie	67
6.2. Résiliations en assurance non-vie et théorie des jeux	73
Références	75

Introduction

Ce document présente une synthèse de mes travaux sur des problématiques de mathématiques appliquées à l'actuariat. La théorie du risque, également appelée théorie de la ruine, concerne d'une manière générale l'évaluation de probabilités de réalisations d'événements défavorables pour des compagnies d'assurances. Au-delà de ces calculs de probabilités dans un modèle fixé, des branches de cette théorie s'intéressent aussi à différents problèmes d'optimisation : d'allocation de réserve, de stratégie de versement de dividendes ou d'imposition (au sens de la fiscalité), d'investissement dans des actifs risqués, de programme de réassurance...

De nos jours, dans une démarche (appelée ERM, *Enterprise Risk Management* en anglais) de gestion globale des risques qui pèsent sur une entreprise ou une entité en général, les compagnies d'assurance définissent leur appétit pour le risque en déterminant entre autres des limites (*risk limits* en anglais). Certaines de ces limites peuvent concerner les provisions techniques de certaines branches d'activité dans un ou plusieurs référentiels comptables. D'autres limites concernent le matelas de sécurité que la compagnie d'assurance doit détenir en plus des provisions techniques pour pouvoir continuer à exercer sans subir d'intervention automatique et progressive de l'autorité de contrôle (le régulateur pouvant intervenir pour d'autres raisons qu'un problème de solvabilité).

Jusqu'à présent, ce matelas de sécurité était déterminé de manière proportionnelle au maximum entre les cotisations attendues et ce qui avait été payé l'année précédente en assurance non-vie, et proportionnellement aux provisions mathématiques en assurance-vie, sans tenir vraiment compte de la nature des risques. Dans le projet européen Solvabilité II, selon la directive votée en avril 2009 qui en fixe les grands principes, le matelas de sécurité appelé *Solvency Capital Requirement* (SCR) devrait en théorie permettre d'atteindre un niveau de sécurité correspondant à une probabilité de ruine à horizon d'un an inférieure à 0,5%. D'un point de vue scientifique, il est bien évidemment difficilement imaginable de prétendre analyser le comportement de la compagnie d'assurance et de l'économie à ce niveau si extrême de risque. En effet, s'il est déjà ardu en finance, où les quantiles (appelés Value-at-Risk ou VaR) considérés le sont en général sur un horizon d'un jour, d'estimer de tels quantiles, alors qu'on dispose d'un grand nombre de données du fait du pas de temps journalier, on ne dispose souvent que d'un historique d'une dizaine à une vingtaine d'années tout au plus en assurance. Il semble donc bien délicat de s'intéresser à des événements qui devraient se produire une fois tous les deux cents ans environ avec

un historique pertinent si limité... Ceci est d'autant plus vrai qu'un certain nombre de phénomènes liés aux comportements des assurés en cas de hausse des taux d'intérêt par exemple n'ont tout simplement jamais été observés. De plus, dans des scénarios si extrêmes, les raccourcis de valorisation des portefeuilles d'assurance utilisant entre autres des méthodes de type risque-neutre devraient se trouver être encore plus inadaptés qu'en régime de croisière. C'est la raison pour laquelle un certain nombre de chercheurs en actuariat et en mathématiques financières (dont je fais partie) et de directeurs des risques de compagnies d'assurance pensent qu'un niveau de risque correspondant à des probabilités de ruine de l'ordre de 10% sur un horizon un peu plus long serait plus adapté (quitte à ensuite utiliser un facteur multiplicatif qui serait fixé au niveau européen).

Toujours est-il que le but d'une compagnie d'assurances n'est pas seulement d'être capable de rembourser ses assurés dans un an : si un événement défavorable, mais pas extrême se produisait dans l'année courante, la compagnie d'assurances qui disposerait d'un matelas de sécurité exactement égal au SCR au début de l'année serait certes en mesure de payer ses dettes, mais pourrait ne plus respecter la contrainte de solvabilité à la fin de l'année. Si cela se produisait, la compagnie d'assurances pourrait être mise en *run-off*, c'est-à-dire ne plus avoir le droit d'accepter de nouveaux contrats. Un objectif plus raisonnable de la compagnie d'assurances consiste donc à respecter la contrainte de solvabilité sur le long terme avec une probabilité suffisante. Pour cela, il ne faut pas disposer uniquement du SCR mais d'un matelas de sécurité supplémentaire. L'épaisseur de ce matelas supplémentaire peut être estimé par un calcul de probabilité de ruine en temps discret (avec un pas de temps d'un an) sur un horizon de 5 ans ou de 10 ans par exemple.

De plus, pour les grands groupes d'assurances, la situation est souvent beaucoup plus compliquée. La fongibilité du capital (qui permet de transférer une partie du capital d'une branche d'activités ou d'une filiale pays vers une autre) est très variable d'un groupe à un autre, en fonction des positions de la gouvernance, des lois et règles comptables et de solvabilité des états concernés, et de la structure financière du groupe. Les réserves globales du groupe restant bien sûr un indicateur de risque primordial, il est toutefois pertinent dans de nombreux cas de considérer conjointement les réserves propres à chaque branche d'activité ou à chaque filiale. Cela conduit à s'intéresser à la fois à des probabilités de ruine dans un cadre univarié dans lequel on somme des processus de risque corrélés entre eux, et à des indicateurs de risque en dimension supérieure comme par exemple la probabilité qu'au moins une branche soit ruinée avant une certaine date, ou comme la somme de certaines pénalités (sorte d'aggios) subies par certaines branches pour

cause d'insolvabilité temporaire.

Le coeur de cette habilitation à diriger les recherches correspond à l'étude de certains de ces indicateurs univariés et multivariés de théorie du risque. Lors de ma soutenance de thèse en décembre 2004, une question sur la faisabilité de la transposition de certains résultats obtenus en temps continu au cas à temps discret avait été posée. L'article [112] co-écrit avec Claude Lefèvre répond à cette interrogation, dans la continuité directe de certains de mes travaux de thèse. Deux articles co-écrits avec Christian Mazza et Didier Rullière [124, 125] et un article co-écrit avec Nicolas Privault [127] traitent de questions liées à la robustesse et à la sensibilité des calculs de probabilité de ruine en temps fini : comment la probabilité de ruine réagit-elle en cas de contamination des données, ou de changement de réserve ? Quelle marge de sécurité supplémentaire devrait-on constituer à cause de certains risques d'estimation ?

Dans trois travaux co-écrits respectivement avec Claude Lefèvre [113], avec Romain Biard et Claude Lefèvre [38], et avec Romain Biard, Claude Lefèvre et Haikady Nagaraja [35], nous cherchons à relâcher les hypothèses d'indépendance et de stationnarité entre les montants de sinistres, et d'indépendance entre les montants et le nombre de sinistres.

Avec Romain Biard, Claudio Macci et Noël Veraverbeke [36], nous nous intéressons au comportement asymptotique de l'allocation de réserve optimale entre branches d'activité pour différents types de queues de distribution de montants de sinistres individuels. D'autres problématiques liées à la gestion des risques et à Solvabilité II ont été abordées dans deux articles avec Laurent Devineau [69, 70], dans un article de vulgarisation sur le risque de rachats et les crises de corrélation co-écrit avec Xavier Milhaud et Marie-Pierre Gonon [138], et dans un article avec Wayne Fisher et Shaun Wang [78], d'un point de vue plus orienté gestion que mathématiques appliquées. J'ai également travaillé sur deux thématiques plus orthogonales à la théorie du risque : les extrema s -convexes avec Claude Lefèvre [115] et le risque de longévité [30] avec l'équipe de la chaire de recherche Dérivés du Futur portée par Nicole El Karoui au laboratoire CMAP de l'Ecole Polytechnique.

Ce document de synthèse est donc organisé de la manière suivante : à une partie qui introduit les concepts généraux et les principales définitions de théorie de la ruine et vise à replacer dans leur contexte les huit articles [112, 124, 125, 127, 113, 38, 35, 36] (publiés ou acceptés) cités plus haut de mathématiques appliquées relatifs à la théorie du

risque qui ont été *commencés après* ma thèse[‡] succède une deuxième partie consacrée aux nouvelles thématiques (extréma s-convexes [115] et risque de longévité [30]) et perspectives de recherche sur lesquelles j'ai déjà commencé à travailler ou que j'aimerais explorer dans le proche futur. Dans cette partie, mes publications relevant plus du domaine des sciences de gestion [138, 69, 70, 78, 131] seront également brièvement évoquées, notamment dans le but d'introduire certaines pistes de recherche futures.

[‡]. Certains travaux commencés pendant ma thèse n'ont été publiés que plus tard. Ils sont rappelés dans la liste complète de mes publications pages viii et ix mais ne sont pas présentés en détail dans l'introduction.

Première partie I. Théorie de la ruine

La théorie de la ruine étant le thème principal de cette habilitation, il est naturel de commencer par en faire une description générale. Pour cela, je commence par m'inspirer du début de mon introduction de thèse, puis je décris deux sous-thématiques qui me semblent importantes : la prise en compte de certaines corrélations, les études de sensibilité et de robustesse, et les problématiques d'allocation optimale. Même si je n'ai pas contribué depuis ma thèse sur ces sujets, je dirai aussi quelques mots à propos de modèles prenant en compte certains impôts dont les compagnies doivent s'acquitter auprès des états, et à propos des fonctions de pénalité escomptées dites de Gerber-Shiu. Les ouvrages suivants (dans l'ordre chronologique) de Gerber [82] Grandell [93], Rolski et al. [160], Asmussen [15], Goovaerts et al. [90], Marceau [133], et d'Asmussen et Albrecher [16] donnent un aperçu général des principaux résultats de cette théorie.

Le concept de *ruine* doit se comprendre dans ce travail comme la survenance d'un scénario défavorable, pouvant conduire à l'impossibilité, pour la compagnie, de faire face à certains de ses engagements, aussi bien envers ses assurés que ses actionnaires, voire à devoir cesser son activité pour cause d'insolvabilité.

Le but premier de la théorie de la ruine a donc logiquement été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, d'évaluer la probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que le scénario traduisant un échec se réalise, et d'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette probabilité de ruine suffisamment faible.

1. LE MODÈLE CLASSIQUE DE LA THÉORIE DE LA RUINE

Le modèle classique de la théorie de la ruine représente le fonctionnement d'une compagnie d'assurance de la façon suivante. On suppose que la compagnie d'assurance reçoit des cotisations de ses assurés, appelées primes, de façon déterministe et continue, à raison de c unités de compte par unité de temps. Elle dispose d'une réserve initiale u pour absorber un éventuel excès de sinistralité, et doit indemniser ses assurés pour les sinistres qui la concernent.

Le montant cumulé des sinistres au temps $t \geq 0$ est représenté par le processus stochastique

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} W_i,$$

avec la convention selon laquelle la somme est nulle si $N(t) = 0$. Le nombre de sinistres survenus jusqu'au temps t , $N(t)$, est dans ce modèle décrit par un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le montant

du $i^{\text{ième}}$ sinistre est modélisé par une variable aléatoire W_i à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Les $\{W_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, et indépendantes du processus de Poisson $N(t)$. F_W désignera leur fonction de répartition, et leur espérance supposée finie sera notée μ . Le montant des réserves de la compagnie d'assurances au temps t est alors donné par le processus

$$(1.1) \quad R(t) = u + ct - S(t),$$

qui pourra également être noté R_t au lieu de $R(t)$ (idem pour S_t au lieu de $S(t)$). La probabilité de ruine en temps fini t avec réserve initiale u correspond à la probabilité que la réserve devienne strictement négative à un instant précédant t , et se note traditionnellement

$$\psi(u, t) = \mathbb{P}[\exists s \in [0, t], \quad R(s) < 0].$$

En temps infini, définissons la probabilité de ruine par

$$\psi(u) = \psi(u, +\infty) = \mathbb{P}[\exists s \geq 0, \quad R(s) < 0].$$

Les probabilités de non ruine correspondantes seront notées

$$\bar{\psi}(u, t) = 1 - \psi(u, t) \quad \text{et} \quad \bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$$

afin de garder la lettre φ pour la fonction de pénalité escomptée de Gerber-Shiu (cf page 34) selon la préférence d'Hans Gerber. Le chargement de sécurité est défini par

$$\rho = c - \lambda\mu.$$

Si $\rho > 0$, alors l'activité est dite rentable. En effet, la loi des grands nombres assure que, dans ce cas, R_t tend vers $+\infty$ presque sûrement quand t tend vers l'infini. La probabilité de non ruine est alors non nulle. Si $\rho < 0$, alors R_t tend vers $-\infty$ presque sûrement quand t tend vers l'infini, et par conséquent $\psi(u) = 1$. Généralement, nous ferons l'hypothèse que l'activité est rentable (même si cette hypothèse n'est pas toujours nécessaire en temps fini).

La probabilité de non ruine $\bar{\psi}(u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet comme dérivées à gauche et à droite respectivement $\bar{\psi}'_-$ et $\bar{\psi}'_+$, qui vérifient les équations intégral-différentielles respectives :

$$(1.2) \quad c\bar{\psi}'_+(u) = \lambda(\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y)dF_W(y))$$

$$(1.3) \quad c\bar{\psi}'_-(u) = \lambda(\bar{\psi}(u) - \int_0^{u-} \bar{\psi}(u-y)dF_W(y))$$

Les équations 1.2 et 1.3 font intervenir à la fois une dérivée et une intégrale de $\bar{\psi}$. Il est possible de se ramener à une équation intégrale en intégrant 1.2 :

$$c\psi(u) = \lambda\left(\int_u^\infty \bar{F}_W(x)dx + \int_0^u \psi(u-x)\bar{F}_W(x)dx\right)$$

Les transformées de Laplace respectives $\hat{L}_\psi(s) = \int_0^\infty \psi(u)e^{-su}du$ et $\hat{L}_{\bar{\psi}}(s) = \int_0^\infty \bar{\psi}(u)e^{-su}du$ de ψ et de $\bar{\psi}$ s'expriment alors en fonction de la transformée de Laplace $\hat{l}_W$ de W :

Proposition 1. *Pour tout $s > 0$,*

$$\begin{aligned}\hat{L}_{\bar{\psi}}(s) &= \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - \hat{l}_W(s))} \\ \hat{L}_\psi(s) &= \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - \hat{l}_W(s))}\end{aligned}$$

On peut ensuite obtenir la *formule de Pollaczek-Khinchine* qui fait intervenir des produits de convolution infinis de la fonction de survie intégrée F_W^s de W définie pour $x \geq 0$ par

$$F_W^s(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}_W(y)dy,$$

où $\bar{F}_W(y) = 1 - F_W(y)$ est la fonction de survie de W . Dans toute la suite, g^{*n} désignera le $n^{\text{ième}}$ produit de convolution d'une fonction g avec elle-même (avec $g^{*0} \equiv 1$).

Proposition 2. (Formule de Pollaczek-Khinchine) *Pour tout $u \geq 0$, la probabilité de survie partant de u vérifie*

$$\bar{\psi}(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \rho} \right)^n (F_W^s)^{*n}(u).$$

Cette formule fournit un premier moyen d'obtenir numériquement la probabilité de ruine en temps infini.

La première généralisation possible du modèle classique est le modèle dit de Sparre Andersen, dans lequel $N(t)$ n'est plus un processus de Poisson, mais un processus de renouvellement stationnarisé, donné par des temps inter-sauts Δ_i i.i.d., indépendants des W_i , et de fonction de répartition F_Δ . Lorsque u est grand, on dispose dans ce modèle de renouvellement de résultats asymptotiques, qui seront exposés au chapitre 3. Ces résultats sont utilisables pour des montants de réserve initiale très grands; lorsqu'on est en dehors de ce domaine d'applicabilité, il faut utiliser d'autres formules dont nous parlerons dans les chapitre 4 et suivants. Le modèle classique de la théorie de la ruine, décrit précédemment page 6, peut être généralisé sous diverses formes, que l'on peut classer en deux rubriques, suivant que l'on s'intéresse aux hypothèses portant sur le passif de la compagnie (sur la modélisation des sinistres) ou sur son actif (sur les hypothèses modélisant la stratégie de versement de dividendes ou l'investissement de la réserve et la prise en compte du taux d'intérêt).

Au niveau du passif, les modifications concernent principalement la prise en compte des corrélations et des changements éventuels de régime,

présentés plus en détail au chapitre 7. Les modifications plutôt financières consistent à introduire un taux d'intérêt instantané (déterministe ou stochastique), et dans le processus des réserves une composante Brownienne ou de type Lévy. La plus importante de ces modifications prend en compte une politique de versements de dividendes aux actionnaires dès que la richesse devient assez élevée. Même si je n'ai pas vraiment travaillé sur ce sujet précis depuis la fin de ma thèse, il me semble utile de dire quelques mots sur les modèles avec dividendes et taxes, qui sont devenus un champ de recherche à part entière de la théorie du risque.

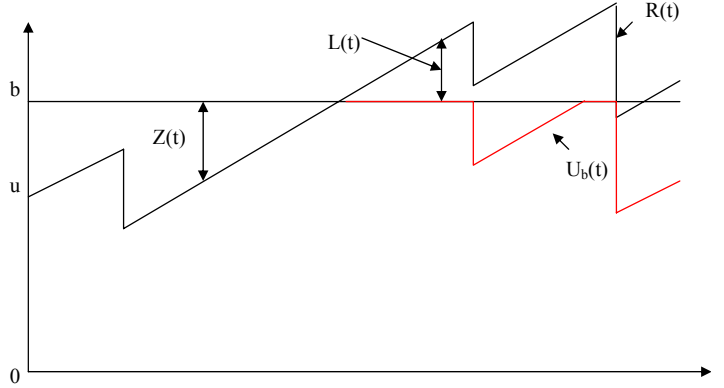
2. DIVIDENDES ET TAXES

2.1. Versement de dividendes au delà d'une barrière. Outre le fait que le versement de dividendes aux actionnaires au-delà d'une barrière supérieure est un phénomène réaliste, il "présente l'énorme avantage" de conduire à une probabilité de ruine en temps infini égale à 1, même si le chargement de sécurité est positif. Cela permet de rapprocher la théorie de la ruine avec celle du risque de défaut, selon laquelle aucune compagnie n'est éternelle. La probabilité de ruine en temps infini est donc toujours 1 en risque de défaut, alors que la théorie de la ruine avait pour but initial de déterminer le niveau de réserve nécessaire pour rendre cette probabilité inférieure à ε .

On attribue traditionnellement les premières études de ce type de modèle à De Finetti[53]. Dès lors, on peut se poser des problèmes de politique de versement de dividendes optimale. On peut également ajouter une composante brownienne ou Lévy, et utiliser des méthodes du type Hamilton-Jacobi-Bellmann (voir Asmussen et Taksar [19], Gerber et Shiu [87]), ou utiliser les méthodes du contrôle impulsionnel, c'est-à-dire réagir à un excès de capital par un versement de dividendes traduit par un saut (voir les travaux d'Agnès Sulem et de ses co-auteurs, par exemple [145]). La méthode la plus simple consiste à considérer une barrière horizontale de niveau $b \geq u$, et à verser instantanément aux actionnaires l'excès ou une fraction de l'excès de réserve par rapport à ce niveau b . Cela correspond soit à faire stagner le processus en b jusqu'au prochain sinistre (figure 1), soit à créer une sorte d'angle de réfraction lors de la traversée de la barrière en b (voir par exemple Asmussen et Taksar [19]). Le processus $U_b(t)$ représentant la richesse de la compagnie au temps t avec cette stratégie de dividendes se déduit du processus classique $R(t)$. Soit $b > u$ et

$$X(t) = S(t) - ct.$$

La stratégie qui consiste à limiter supérieurement le surplus de la compagnie à la valeur b en versant sous forme de dividendes l'excès par rapport à b donne le processus $U_b(t)$. Le temps de ruine est alors $\tau = \inf\{t > 0, U_b(t) < 0\}$. Le cumul des dividendes versés jusqu'au

FIGURE 1. Illustration de $U_b(t)$, $Z(t)$ et de $L(t)$.

temps t est

$$L_t = - \inf_{0 \leq s \leq t} \{b - u + X(s)\}^-,$$

où $x^- = \min(x, 0)$.

Soit

$$Z(t) = b - u + X(t) + L(t).$$

Alors $U_b(t) = b - Z(t)$ est le processus recherché. Notons que

$$L_t = c \int_0^t \mathbf{1}_{U_b(s)=b} ds$$

quand $U_b(s) = b$, jusqu'au prochain sinistre, la richesse de la compagnie stagne en b , alors que l'accroissement de richesse avec une pente c est transféré aux actionnaires sous forme de dividendes. L augmente en t si et seulement si $U_b(t) = b$, ou encore $Z(t) = 0$. Ceci est illustré sur une trajectoire par la figure 1.

Asmussen et Taksar [19] démontrent que, dans certains cas assez généraux, le modèle à barrière horizontal est un modèle optimal de versement de dividendes. Les travaux de Palmowski, Loeffen, Albrecher, Kyprianou et leurs coauteurs fournissent une base importante des travaux récents et des résultats disponibles sur les problèmes de dividendes dans le cas de processus de Lévy.

Dans l'article [130] commencé pendant ma thèse, j'avais montré qu'il était possible de calculer la moyenne des dividendes versés aux actionnaires et de ceux qui ont dû être utilisés pour payer des pénalités à cause de l'insolvabilité temporaire d'une autre branche. Nous avons calculé aussi le temps moyen de ruine de la branche principale et la loi de la richesse des autres branches à cet instant, ce qui donnait une information sur la capacité des autres branches à faire face à la défaillance

de la branche principale. Pour cela, j'utilisais une approximation du taux de cotisation continu et déterministe par un processus de Poisson composé à sauts positifs de même moyenne par unité de temps. Albrecher et al. [1] ont très récemment commencé à analyser un modèle de risque univarié avec cotisations cumulées aléatoires représentées par un processus de Poisson composé.

2.2. Taxes. Albrecher et Hipp [8] ont introduit un modèle avec taxes (ou impôts) : dès que le processus de risque est à son maximum courant, la compagnie d'assurances paie des taxes à un taux déterministe $\gamma \in [0, 1]$. Ce processus de risque modifié $(R_\gamma(t))_{t \geq 0}$ vérifie donc $R_\gamma(0) = u$ et

$$dR_\gamma(t) = c \left[1 - \gamma \mathbb{1}_{\{R_\gamma(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} R_\gamma(s)\}} \right] dt - dS(t),$$

où $(S(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson composé tel que la condition de profit soit réalisée dans le modèle équivalent sans taxe ($\gamma = 0$). Si à l'extrême le taux d'imposition est de $\gamma = 100\%$, on se retrouve dans le modèle de versement de dividendes avec barrière horizontale au niveau de la réserve initiale, et la probabilité de ruine est alors égale à 1. L'idée du modèle avec taxes est qu'une perte ouvre droit à un crédit d'impôt et que l'état ne commencerait à taxer que les bénéfices. Ce modèle est évidemment très simplifié par rapport aux mécanismes réels d'imposition pratiqués par les états, toutefois il en capture à mon avis l'essentiel. Albrecher et Hipp obtiennent une formule très élégante pour la probabilité de ruine $\psi_\gamma(u)$ en partant de u quand le taux d'imposition est $\gamma > 0$:

$$(2.1) \quad \psi_\gamma(u) = 1 - (1 - \psi_0(u))^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Cette formule a été étendue à des cas plus généraux (notamment à certaines classes de processus de Lévy) et discutée plus en détails notamment dans les articles d'Hansjoerg Albrecher et de ses coauteurs [9, 4, 5].

Si nous écrivions un livre sur la théorie de la ruine, ce chapitre serait certainement beaucoup plus long. Néanmoins, n'ayant pas vraiment contribué sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur intéressé aux articles cités plus hauts et à leurs références pour plus de détails. Revenons maintenant au problème d'approximation de la probabilité de ruine dans le modèle dit de renouvellement ou de Sparre Andersen, sans versement de dividende ou de taxe, dans le cas d'une réserve initiale très élevée. C'est en travaillant sur ces problèmes que l'école scandinave du début du vingtième siècle (Lundberg, Cramer,...) posera les premiers jalons de la théorie des grandes déviations. Ces résultats asymptotiques, qui portent maintenant le nom de Cramer-Lundberg, fournissent une information sur le comportement de la probabilité de ruine pour des réserves initiales élevées.

3. PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DANS LE MODÈLE DE SPARRE ANDERSEN

Considérons le modèle de Sparre Andersen, toujours avec des montants de sinistres modélisés par des variables aléatoires indépendantes distribués comme U , et des temps inter-sinistres indépendants et distribués comme Δ , et indépendants des montants des sinistres. Supposons aussi que le chargement de sécurité est strictement positif. Le processus décrivant la réserve disponible au temps t s'écrit encore :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} W_i.$$

Soit

$$\hat{m}_W(s) = \mathbb{E} [e^{sW}].$$

Pour les distributions de montants de sinistres à queues légères, l'équation en s

$$\hat{m}_W(s) \hat{l}_\Delta(cs) = 1$$

admet une solution non nulle γ (appelée le *coefficient d'ajustement*).

Soit $Y = W - c\Delta$, et

$$x_0 = \sup \{x, F_Y(x) < 1\}.$$

Théorème 1. *Pour tout $u \geq 0$, on a l'encadrement*

$$b_- e^{-\gamma u} \leq \psi(u) \leq b_+ e^{-\gamma u},$$

où $0 \leq b_- \leq b_+ \leq 1$ vérifient :

$$b_- = \inf_{x \in [0, x_0[} \frac{e^{\gamma x} \bar{F}_Y(x)}{\int_x^\infty e^{\gamma y} d\bar{F}_Y(y)}, \quad \text{et} \quad b_+ = \sup_{x \in [0, x_0[} \frac{e^{\gamma x} \bar{F}_Y(x)}{\int_x^\infty e^{\gamma y} d\bar{F}_Y(y)}.$$

Si W suit une loi exponentielle de paramètre $1/\mu$, et si $N(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ , alors la propriété asymptotique devient une égalité vraie pour tout $u \geq 0$:

$$\psi(u) = (1 - \mu\gamma) e^{-\gamma u}.$$

Cette formule peut être généralisée à une famille de lois appelées lois *phase-type*, que nous introduirons plus tard, dont font partie entre autres les lois exponentielles et gamma.

Pour les distributions de montants de sinistres à queues lourdes, si la fonction de survie intégrée est sous-exponentielle, pour $E[W]$ fixée, le comportement asymptotique de la probabilité de ruine $\psi(u)$ ne dépend de W qu'à travers ses queues, et du temps inter-sinistres Δ seulement par rapport à son espérance :

Théorème 2. *Si $F_W^s \in \mathcal{S}$, alors*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{F_W^s(u)} = \frac{E[W]}{cE[\Delta] - E[W]}$$

Dans Rolski et al. [160] page 267, on peut trouver des équivalents de $\psi(u)$ pour des montants de sinistres suivant des lois de Weibull, Pareto et lognormale. En particulier, lorsque la loi du montant de sinistre individuel est à variation régulière (ce qui veut dire que

$$1 - F_W(x) = x^{-a}l(x),$$

où l est une fonction à variation lente), Embrechts et Veraverbeke [75] ont montré que lorsque $a > 1$ et si la condition de profit est respectée dans le modèle Poisson-composé, on a

$$(3.1) \quad \psi(u) \sim \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \frac{1}{a - 1} u^{-a+1}.$$

Ce résultat est utilisé dans l'article [36] pour déterminer le comportement asymptotique d'une certaine fonction de pénalité dans le cas où les montants de sinistres sont à variation régulière (cf page 34).

4. MÉTHODES POUR LE CALCUL EXACT OU APPROCHÉ DE PROBABILITÉS DE RUINE

Le pendant de l'étude asymptotique est le calcul ou l'approximation de la probabilité de ruine en temps fini ou infini. Un des buts poursuivis dans les articles [124, 125, 112, 127] est d'étendre et d'unifier des méthodes numériques pour calculer explicitement des probabilités de ruine en temps fini, ainsi que d'étudier leur sensibilité à certains paramètres et leur robustesse. Rappelons donc ici deux formules intervenant dans ces quatre travaux, celle dite de Picard-Lefèvre et celle dite de Seal, ainsi que le lemme du ballot (ou scrutin) qui en est un ingrédient important.

La probabilité de ruine en temps fini avec des montants de sinistres à *valeurs entières* (contrairement à l'article [112] dans lequel certaines lois de montant de sinistre individuel peuvent être absolument continues) était l'objet de mon premier article de thèse [162]. Dans ce cadre, le modèle à temps continu coïncidait avec certains modèles à temps discret. En effet, pour déterminer si la réserve devient négative à un certain temps $t \in [0, T]$, il suffit de savoir si la réserve est négative à l'une des dates d'inventaires $0 < t_1 < \dots < t_n < T$ judicieusement choisies.

4.1. Formule de Picard-Lefèvre. Pour calculer la probabilité de ruine en temps fini dans ce modèle, on dispose de la formule de Picard et Lefèvre [151], et nous expliquons comment il est possible d'y adapter une formule de Seal [169]. La formule de Picard-Lefèvre est basée sur les

polynômes d'Appell généralisés. Ces polynômes sont définis récursivement par : $A_0 = 1$ et pour $n > 0$,

$$(4.1) \quad A'_n = \sum_{j=1}^n \lambda f_j A_{n-j}$$

$$(4.2) \quad A_n(v_n) = 0,$$

où

$$(4.3) \quad v_n = \max \left(\frac{n-u}{c}, 0 \right),$$

et

$$f_j = \mathcal{P}[W_1 = j].$$

Soit

$$T_u = \inf \{t > 0, R^u(t) < 0\}$$

le temps de ruine, éventuellement égal à $+\infty$. Soit pour $t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$,

$$(4.4) \quad P_n(t) = P(S_t = n, T_u > t).$$

En conditionnant par rapport au dernier instant de sinistre, Picard et Lefèvre [151] montrent que $P_n(t) = 0$ quand $t < v_n$ et que

$$(4.5) \quad P_n(t) = e^{-\lambda t} A_n(t)$$

quand $t \geq v_n$, où les A_n sont des polynômes de degré n définis récursivement par (4.1).

Ces polynômes (voir Picard et Lefèvre [151] pour une bibliographie sur ce sujet) peuvent aussi être obtenus grâce aux polynômes e_n , définis par la fonction génératrice formelle

$$(4.6) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(t) s^n = e^{tg(s)}$$

où $g(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda f_j s^j$. Les polynômes e_n s'obtiennent assez aisément à partir des convolutions successives de F_W . On peut alors exprimer les A_n en fonction des e_n et en déduire la formule suivante :

Théorème 3. ([151])

(4.7)

$$\bar{\psi}(u, t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^u \left[e_j(t) + \sum_{n=u+1}^{\lfloor u+ct \rfloor} e_j \left(\frac{j-u}{c} \right) \frac{u+ct-n}{u+ct-j} e_{n-j} \left(t + \frac{u-j}{c} \right) \right]$$

En pratique, la taille du portefeuille d'assurances peut fluctuer dans le temps du fait de fusions-acquisitions, de souscription importante d'affaires nouvelles ou d'une perte de part de marché. Dans l'article [113], nous étendons la formule de Picard-Lefèvre au cas où les cotisations, et éventuellement la fréquence des sinistres change au cours du

temps : en effet si la taille du portefeuille augmente, le taux de cotisation doit augmenter, mais aussi le nombre moyen de sinistres par unité de temps. Nous proposons également une formule qui permet de mieux mettre en évidence et de mieux pouvoir utiliser les propriétés de type Appell que celle proposée par Ignatov et al. [101] dans le cas où les montants de sinistres ne sont plus indépendants entre eux. Néanmoins, cette formule qui est vraie pour une structure de dépendance générale entre les montants de sinistres, peut être améliorée dans des cas plus spécifiques si l'on précise la loi jointe des montants de sinistres. Nous verrons dans le chapitre 7 comment prendre en compte certains types de dépendance stochastique entre montants de sinistres et entre instants et montants de sinistres.

La manipulation de ces polynômes présente l'avantage d'être généralisable au cas multidimensionnel (voir Picard et al. [152], Pommeret [153] ainsi que ma thèse [128]). Néanmoins, même en utilisant leurs propriétés, les temps de calcul de probabilité de ruine deviennent rapidement difficilement gérables sur des cas concrets en dimension supérieure. La formule "de type Seal" repose sur un résultat de Takács [176], adaptation du problème du scrutin au processus de Poisson composé avec dérive.

4.2. Formules de Takács et de type Seal. Exposons maintenant les formules de Seal pour une distribution de W admettant une densité f_W , et dont la formule exposée dans [162] est une adaptation au cas de montants de sinistres à valeurs entières. Supposons que $P(W > 0) = 1$. Dans le cas d'une arrivée poissonnienne, cette hypothèse n'est pas restrictive. On peut toujours se ramener au cas $P(W > 0) = 1$, quitte à remplacer le paramètre λ par le paramètre $\lambda(1 - P(W = 0))$ et W par W' , tel que $\forall k \geq 1, P(W' = k)(1 - P(W = 0)) = P(W = k)$ et $P(W' = 0) = 0$. La fonction de répartition $F_{S(t)}$ de la variable aléatoire représentant le montant agrégé des sinistres jusqu'au temps t vérifie pour $x \geq 0$

$$F_{S(t)}(x) = e^{-\lambda x} + \int_0^x \tilde{f}_{S(t)}(y) dy,$$

où

$$\tilde{f}_{S(t)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_W^{*n}(y),$$

Cette fonction permet de calculer les probabilités $\bar{\psi}(u, x)$ de non ruine avant la date x avec réserve initiale u :

Théorème 4. (Formules de Seal)

$$\bar{\psi}(0, t) = \frac{1}{ct} E[R(t)_+] = \frac{1}{ct} \int_0^{ct} F_{S(x)}(y) dy$$

et pour $u > 0$ si W admet pour densité f_W ,

$$\bar{\psi}(u, t) = F_{S(x)}(u + ct) - c \int_0^u \bar{\psi}(0, t - y) \tilde{f}_{S(y)}(u + cy) dy.$$

Quand les montants des sinistres suivent une loi exponentielle de paramètre $1/\mu$, on a les formules suivantes :

$$\psi(u, t) = 1 - e^{-u/\mu - (1+\alpha)\lambda t} g(u/\mu + \alpha\lambda t, \lambda t),$$

où $\alpha = c/(\lambda\mu)$, et où g est la fonction définie par

$$g(z, \theta) = J(\theta z) + \theta J'(\theta z) + \int_0^z e^{z-v} J(\theta v) dv - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha\theta} e^{\alpha\theta-v} J(zv/\alpha) dv$$

en notant

$$J(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!n!} = I_0(2\sqrt{x})$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k!k!}.$$

On peut aussi obtenir une formule équivalente :

$$\psi(u, t) = \frac{1}{\alpha} e^{-u \frac{\alpha-1}{\alpha\mu}} - \frac{1}{\pi} e^{-u/\mu - (1+\alpha)t} \int_0^\pi h(u/\mu, \lambda t, y) dy,$$

où h est définie par

$$q(w, \theta, y) = 2\sqrt{\alpha} \frac{e^{(2\sqrt{\alpha}\theta + w/\sqrt{\alpha}) \cos y}}{1 + \alpha - 2\sqrt{\alpha} \cos y} \left(\sin y \sin\left(y + \frac{w}{\sqrt{\alpha}} \sin y\right) \right).$$

On trouvera dans Seal [169], Takács [176], et Rolski et al. [160] les démonstrations et des extensions.

La formule classique de Takács [176] est un outil clé pour obtenir notre formule de type Seal.

Lemme 1. (Takács [176]) Soit $Y_n = X_1 + \dots + X_n$, où les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\{0, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $i \in \mathbb{N}$, $i \leq n$,

$$\Pr[\{Y_r < r, r = 1, \dots, n\} \cap \{Y_n = n - i\}] = \frac{i}{n} \Pr[Y_n = n - i].$$

Le membre de gauche correspond à la probabilité que le candidat vainqueur d'un scrutin à deux candidats avec le score final i voix contre $n - i$ ait toujours été en tête lors du dépouillement. Cette probabilité s'écrit donc comme une fraction fois la probabilité d'arriver au même score final.

Grâce aux propriétés du processus de Poisson composé, la formule de Takács [176] donne les deux résultats bien connus suivants dans le cas où W est à valeurs dans $\mathbb{N}$:

Théorème 5. (Takács [176]) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $x_+ = \max(x, 0)$. On a

$$\begin{aligned} \Pr \left[S_{\frac{n}{c}} = i \cap R_t \geq 0, t \in [0, \frac{n}{c}] \right] &= \frac{n-i}{n} \Pr [S_{\frac{n}{c}} = i], i = 0, \dots, n \\ \varphi \left(0, \frac{n}{c} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{n} \Pr [S_{\frac{n}{c}} = i] = \frac{1}{n} E \left[(R_{n/c}^0)_+ \right] \end{aligned}$$

Théorème 6. Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(0, t) &= \frac{1}{ct} E \left[(R_t^0)_+ \right] \\ \varphi(0, t/c) &= \sum_{i=1}^{[t]} \left(1 - \frac{i}{t} \right) \Pr \left[S_{\frac{t}{c}} = i \right]. \end{aligned}$$

En conditionnant par le dernier temps avant t où le processus $R(t)$ est égal à 0 en cas de ruine, le résultat précédent permet d'obtenir dans [162] une formule alternative pour la probabilité de ruine en temps fini avec des montants de sinistres à valeurs entières. Nous verrons dans le chapitre 5 que ces résultats peuvent être généralisés à des processus dits partiellement translatés que nous introduirons page 19.

4.3. Equivalence entre les deux formules et cas continu. Nous avons expliqué l'équivalence entre ces deux formules dans l'article [162], qui constituait le premier chapitre de ma thèse. La démonstration s'appuie sur le résultat de Takács [176] et sur le comportement des trajectoires, et fait intervenir ce que De Vylder [56] a appelé des pseudo-distributions Poisson composées. Ces pseudo-distributions correspondent à des mesures signées ne permettant pas d'interprétation probabiliste immédiate, mais vérifiant des propriétés de convolution formelle qui permettent de conclure la démonstration, et qui fournissent toute une classe de formules avec un paramètre libre, dont la formule de type Seal et la formule de Picard-Lefèvre font partie. Pouvoir choisir l'une ou l'autre formule présente un intérêt non négligeable, car les temps de calcul sont très différents suivant le rapport entre la réserve initiale et les primes qui seront reçues jusqu'à l'horizon de temps.

La question posée lors de ma soutenance de thèse était la suivante : peut-on faire la même chose dans le cas discret et dans le cas continu ? J'avais alors botté en touche en répondant que Philippe Picard m'avait toujours dit que les deux approches étaient quasiment toujours équivalentes. Le travail réalisé avec Claude Lefèvre [112] vise à unifier les deux approches dans les cas discrets et continus, et à montrer que la formule de Picard Lefèvre peut être utilisée d'une manière unifiée à la fois dans le modèle à temps discret binomial composé avec une loi de montants de sinistres discrète et dans le modèle à temps continu Poisson composé avec une loi de montants de sinistres absolument continue par rapport

à la mesure de Lebesgue.

Notons que d'autres techniques d'approximation existent pour le calcul de probabilités de ruine en temps fini, notamment la méthode dite d'Erlangisation, que nous évoquerons dans le chapitre 3.2 de la partie II pour dire quelques mots du preprint [29].

5. ROBUSTESSE ET SENSIBILITÉ

Dans les articles [124] et [125] co-écrits avec Christian Mazza et Didier Rullière, nous nous intéressons à l'impact d'une contamination des données de montants de sinistres individuels sur l'estimation de la probabilité de ruine en temps fini effectuée à l'aide de la fonction de répartition empirique du montant de sinistre individuel. Pour cela, nous commençons par calculer les fonctions d'influence de diverses quantités. En effet, les montants de sinistres observés ne colleront jamais parfaitement à la modélisation qui en a été faite, ils correspondront dans un cas très favorable à une faible perturbation de la distribution initiale. Il est donc intéressant de disposer d'estimateurs qui ne soient pas trop sensibles à de légers changements des entrées du modèle. De tels estimateurs sont dits robustes. La fonction d'influence, introduite par Hampel [94] pour étudier le comportement infinitésimal de fonctions réelles, est un des outils principaux pour mesurer l'impact d'une petite perturbation du modèle sur les résultats.

Définition 1 (Fonction d'influence (notée IF en anglais)). *Soit $\mathcal{T}$ une fonction d'une loi F . La fonction d'influence au point $x \in \mathbb{R}$ est définie comme la limite (quand elle existe)*

$$\text{IF}_x[\mathcal{T}] = \lim_{s \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}(F^{(s,x)}) - \mathcal{T}(F)}{s}$$

où $F^{(s,x)}$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $0 < s < 1$ par

$$\text{for } u \in \mathbb{R}, \quad F^{(s,x)}(u) = s\mathbb{1}_{\{x \leq u\}} + (1-s)F(u).$$

On peut également considérer ce concept pour un X aléatoire, ce qui donne alors une variable aléatoire.

On utilisera désormais l'exposant $^{(s,x)}$ pour signaler qu'une quantité est reliée à la loi contaminée $F^{(s,x)}$. Etant donné un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de fonction de répartition F , soit F_n la fonction de répartition empirique associée à l'échantillon. La fonction d'influence a deux intérêts principaux : elle fournit des informations sur l'influence de perturbations des données (de l'échantillon) sur les valeurs prises par la fonctionnelle $\mathcal{T}$, et elle permet, sous certaines conditions de régularité, d'obtenir la variance asymptotique de l'erreur quand le processus renormalisé converge faiblement vers une variable aléatoire gaussienne

$$\text{Var}(\sqrt{n}|\mathcal{T}(F_n) - \mathcal{T}(F)|) \longrightarrow A(F, \mathcal{T}),$$

quand $n \rightarrow \infty$, où

$$(5.1) \quad A(F, \mathcal{T}) = \int_{\mathbb{R}} (\text{IF}_x[\mathcal{T}(F)])^2 F(dx)$$

(voir Huber [98], Hampel [94] ou Hampel et al. [95]).

Marceau et Rioux [132] ont fourni un algorithme pour calculer la fonction d'influence de la probabilité de ruine en temps infini. Nous commençons par calculer la fonction d'influence de la probabilité de ruine dans le cas d'un horizon de temps fini (ce qui fait intervenir des outils différents).

Pour une réserve initiale $u \geq 0$ (cela a en pratique été fait en deux étapes, d'abord pour $u = 0$ dans [124] puis pour $u \geq 0$ quelconque dans [125]), nous démontrons ensuite la convergence en loi de l'écart renormalisé

$$\sqrt{N} (\bar{\psi}(u, t) - \bar{\psi}^N(u, t))$$

entre la probabilité de non ruine en temps fini classique $\bar{\psi}(u, t)$ et son équivalent calculé à partir de la loi empirique obtenue avec un échantillon de taille N vers une loi normale centrée de variance asymptotique

$$(5.2) \quad V_u = \text{Var} [\text{IF}_Y [\bar{\psi}(u, t)]] .$$

Ici dans cette partie dédiée à la robustesse de la probabilité de ruine, Y désigne une variable aléatoire de même loi que le montant de sinistre individuel habituel W_1 . Nous parvenons à exprimer la variance asymptotique en fonction d'une grandeur aisée à obtenir par simulations directes, à l'aide de processus de risque dits modifiés, ou partiellement translatés (*partly shifted* en anglais).

Pour $x \geq 0$, nous définissons le processus de risque partiellement translaté de x comme

$$R_t^x = u + ct - S_t^x,$$

où

$$S_t^x = S_t + x \mathbf{1}_{\{U \leq t\}},$$

et U est une certaine variable aléatoire positive. Après ce délai aléatoire U , la trajectoire de R_t^x est translatée de x unités vers le bas. Cela revient à ajouter un saut d'amplitude x vers le bas à un instant aléatoire U . Cet ajout d'un saut vers le bas peut faire penser aux dérivées verticales introduites par Rama Cont[§].

Les accroissements du processus modifié $(R_t^x)_{t \geq 0}$ ne sont ni stationnaires ni indépendants. Néanmoins, nous montrons dans [125] comment

§. Merci à Monique Jeanblanc pour cette remarque.

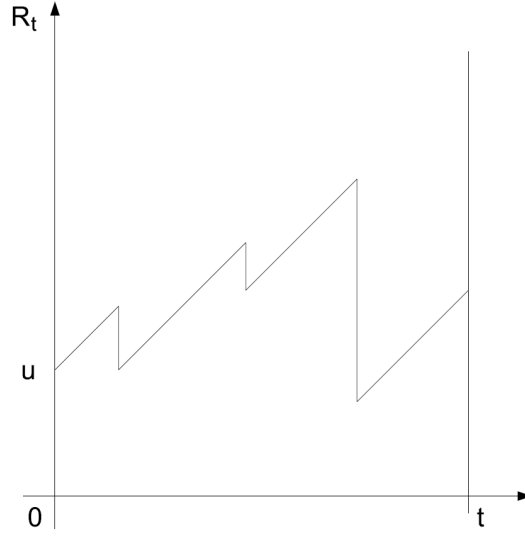


FIGURE 2. Une trajectoire du processus de risque classique $(R_t)_{t \geq 0}$.

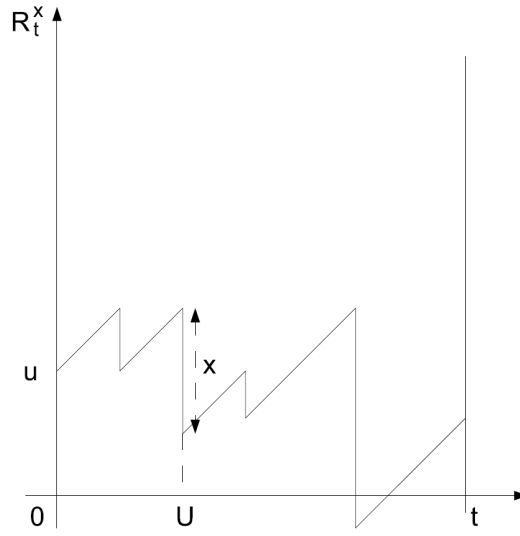


FIGURE 3. Une trajectoire du processus de risque $(R_t^x)_{t \geq 0}$ partiellement translaté de x .

adapter certains résultats de théorie du risque, dont le lemme 1 dû à Takács [176], à ces processus de risque partiellement translatés. Ceci est intéressant car nous montrons que la variance asymptotique V_u (5.2) fait directement intervenir la probabilité de ruine en temps fini pour des processus de risque partiellement translatés :

Théorème 7 (Lien avec les processus de risque partiellement translatés [115]). *Soit*

$$\bar{\psi}^x(u, t) = \mathcal{P}(R_s^x \geq 0 \forall s < t \mid R_0^x = u),$$

où $R_s^x = R_s - \mathbf{1}_{\{U < s\}}x$, $s \geq 0$, et où U est une variable uniforme sur l'intervalle $[0, t]$. Alors la variance asymptotique de

$$\sqrt{N}(\bar{\psi}(u, t) - \bar{\psi}^N(u, t))$$

peut être obtenue par la formule suivante :

$$V_u = \text{Var}[\lambda t \bar{\psi}^Y(u, t)],$$

où $\bar{\psi}^Y(u, t)$ correspond à la probabilité de non-ruine pour le processus de risque modifié en rajoutant un saut d'amplitude aléatoire Y à un instant aléatoire de loi uniforme sur $[0, t]$.

Normalement, dans le projet Solvabilité II, le risque d'estimation doit être contrôlé, en particulier si on utilise un modèle interne. Toutefois, la plupart des approches consistent à utiliser un modèle calibré sur les données et à rajouter *a posteriori* un facteur de sécurité proportionnel pour tenir compte de ce risque d'estimation. Il serait évidemment préférable d'accomplir une analyse de robustesse en même temps. Cela nous conduit à définir dans [124] les concepts de probabilité de ruine fiable et de marge de solvabilité pour risque d'estimation (ERSM, *Estimation Risk Solvency Margin* en anglais) : soit $\psi^N(u, t)$ la probabilité de ruine avant la date $t \geq 0$ dans le modèle où les montants de sinistres ont pour fonction de répartition F_N la fonction de répartition empirique associée à un échantillon de taille $N \geq 1$ de la loi initiale. On définit alors la *probabilité de ruine fiable en temps fini* $\psi_{1-\varepsilon}^{N, \text{reliable}}(u, t)$ comme le $(1 - \varepsilon)$ -quantile de la probabilité de ruine (aléatoire) avec montants de sinistres bootstrappés $\psi^N(u, t)$:

$$\psi_{1-\varepsilon}^{N, \text{reliable}}(u, t) = \inf_{s \geq 0} \{ \mathcal{P}(\psi^N(u, t) \geq s) \leq \varepsilon \}.$$

Si u_η (resp. $u_{\eta, \varepsilon}$) est défini comme le capital initial requis pour assurer que

$$\psi(u_\eta, t) \leq \eta$$

$$\left(\text{resp. } \psi_{1-\varepsilon}^{N, \text{reliable}}(u_{\eta, \varepsilon}, t) \leq \eta \right),$$

la marge de solvabilité pour risque d'estimation $ERSM_{\eta, 1-\varepsilon}$ peut être défini comme le capital requis *supplémentaire* pour gérer le risque d'estimation :

$$ERSM_{\eta, 1-\varepsilon} = u_{\eta, \varepsilon} - u_\eta.$$

Dans le graphique 5, nous déterminons les plus petites valeurs u_η et $u_{\eta, \varepsilon}$ telles que $\psi(u_\eta, t)$ et $\tilde{\psi}_{1-\varepsilon\%}^{ON, \text{reliable}}(u_{\eta, \varepsilon}, t)$ soient inférieures à η .

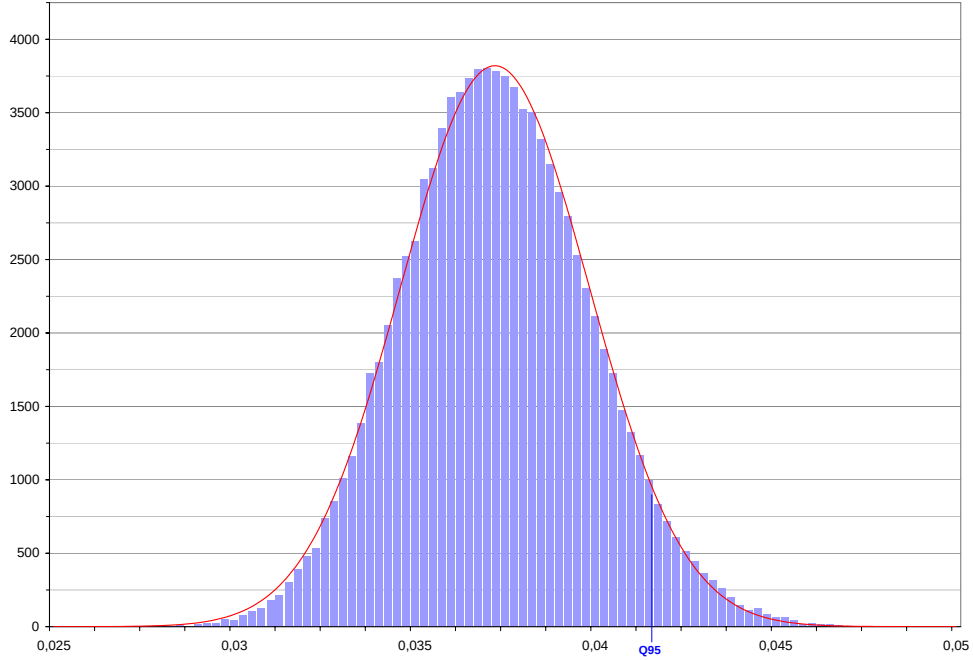


FIGURE 4. Histogramme de 100000 probabilités de ruine empiriques $\psi^N(u, t)$ pour $N = 5000$ et densité d'une loi normale de moyenne $\mu = \psi(u, t)$ et de variance $Var(\text{IF}_Y[\psi(u, t)])/N$, $\lambda_0 = 1, c = 1.1, t = 10, u = 10, \delta = 1$. Q_{95} désigne le quantile à 95% de la probabilité de ruine.

Grâce à l'approximation normale de $\psi^N(u, t)$ pour $N \geq 1000$ (la qualité de cette approximation pour $N = 5000$ est illustrée par le graphique 4), nous estimons la marge de solvabilité pour risque d'estimation $ERSM_{\eta, 1-\varepsilon}$ par la différence $u_{\eta, \varepsilon} - u_\eta$. Cette marge est logiquement décroissante en la taille N de l'échantillon disponible.

Nous verrons au chapitre 5 de la deuxième partie de ce document de synthèse (page 64) que dans d'autres cas (comme dans certaines problématiques directement liées au projet Solvabilité II que nous étudions actuellement avec Matthieu Chauvigny, Laurent Devineau et Véronique Maume-Deschamps dans la pré-publication [47] en cours de finalisation), ce sont d'autres techniques qui peuvent nous fournir des intervalles de confiance asymptotiques, et donc l'équivalent d'une marge pour risque d'estimation.

Une autre possibilité pour la compagnie d'assurances est d'adapter ses niveaux de cotisation en fonction de l'historique des données disponibles qui croît avec le temps (ici nous avons une approche statique du point de vue du volume des données disponibles). Nous verrons dans le

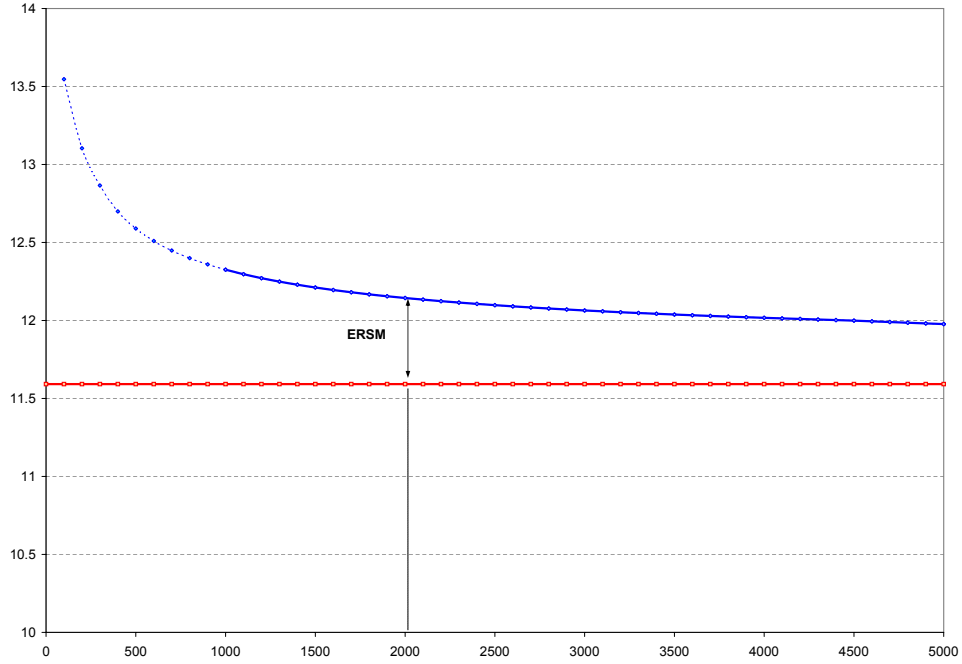


FIGURE 5. Valeurs de u_η et $u_{\eta,\varepsilon} > u_\eta$ comme fonctions de N , telles que $\psi(u_\eta, t) = 2\%$ et $\tilde{\psi}_{1-\varepsilon\%}^{O_N \text{ reliable}}(u_{\eta,\varepsilon}, t) = 2\%$, $\lambda_0 = 1, c = 1.1, t = 10, \delta = 1, \varepsilon = 5\%$.

chapitre 3.3 de la partie II quand nous évoquerons la pré-publication [177] co-écrite avec Julien Trufin comment la probabilité de ruine peut être calculée quand les niveaux de cotisation changent au cours du temps en fonction des sinistres qui se sont produits et sont mis à jour à l'aide de la théorie de la crédibilité.

Notons également qu'avec Christian Mazza et Didier Rullière, nous avons le projet d'étudier la robustesse d'autres mesures de risques, en particulier de certains indicateurs définis comme des supréma de certaines L -statistiques, dont Heyde et al. [96] ont étudié certaines propriétés pour la mesure des risques. Rappelons que pour un échantillon $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ de taille $n \geq 1$ d'une variable aléatoire X représentant une perte par exemple, la L -statistique $\hat{\rho}_{\tilde{w}}$ paramétrée par un vecteur $\tilde{w} \in \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\hat{\rho}_{\tilde{w}}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)}.$$

Dans l'article [124], nous avons donné des premières formules de calcul de la sensibilité de la probabilité de ruine en temps fini en partant de $u \geq 0$ par rapport à c dans le cas continu où le montant de sinistre individuel admet une densité continue, ainsi qu'en partant d'une

réserve initiale nulle par rapport à λ dans le modèle Poisson composé avec montants de sinistres à valeurs entières. Nous avons également donné une première formule pour la dérivée de la probabilité de (non)-ruine par rapport à la réserve initiale dans le cas où la densité du montant de sinistre est continue, dans le modèle Poisson composé avec taux de cotisation constant. Cette formule faisait malgré tout intervenir une intégrale d'une fonction (une probabilité de ruine partant de zéro) contre la dérivée de la densité du montant cumulé de sinistres jusqu'à la date t , ce qui n'est pas forcément toujours facile à calculer en pratique.

Dans l'article [127] co-écrit avec Nicolas Privault, nous nous intéressons plus spécifiquement à la sensibilité de la probabilité de ruine par rapport à la réserve initiale

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, t),$$

et donc à la densité, si elle existe, de l'infimum du processus de risque sur une période de temps fini car dans ce cas

$$(5.3) \quad -\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, t)$$

est égal à la densité de

$$\mathcal{M}_{[0,T]} = \inf_{t \in [0,T]} (R(t) - R(0))$$

au point $-u$. Ici, la réserve courante de la compagnie d'assurances est supposée être définie par

$$R(t) = u + C(t) - S_t,$$

où $(S_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson composé à sauts positifs, et où C est une fonction qui évaluée en $t \geq 0$ représente l'ensemble des cotisations accumulées par la compagnie jusqu'à la date t , en excluant la réserve initiale u . Si l'on se plaçait dans le cas le plus classique, on aurait $C(t) = ct$, où c est le taux de cotisation par unité de temps. Ici en pratique on supposera que C est une fonction continûment dérivable de dérivée bornée inférieurement par une constante strictement positive (ce qui garantit au passage l'existence de sa bijection réciproque que nous noterons C^{-1}).

Privault et Wei [156] avaient utilisé des techniques du calcul de Malliavin sur l'espace de Poisson pour calculer la sensibilité de la probabilité que la réserve terminale soit strictement négative

$$P(R(T) < 0)$$

par rapport à la réserve initiale. Pour une introduction au calcul de Malliavin, nous renvoyons le lecteur au livre de Nualart [143], ainsi qu'à Privault [155] et Carlen et al. [44] pour son adaptation à l'espace

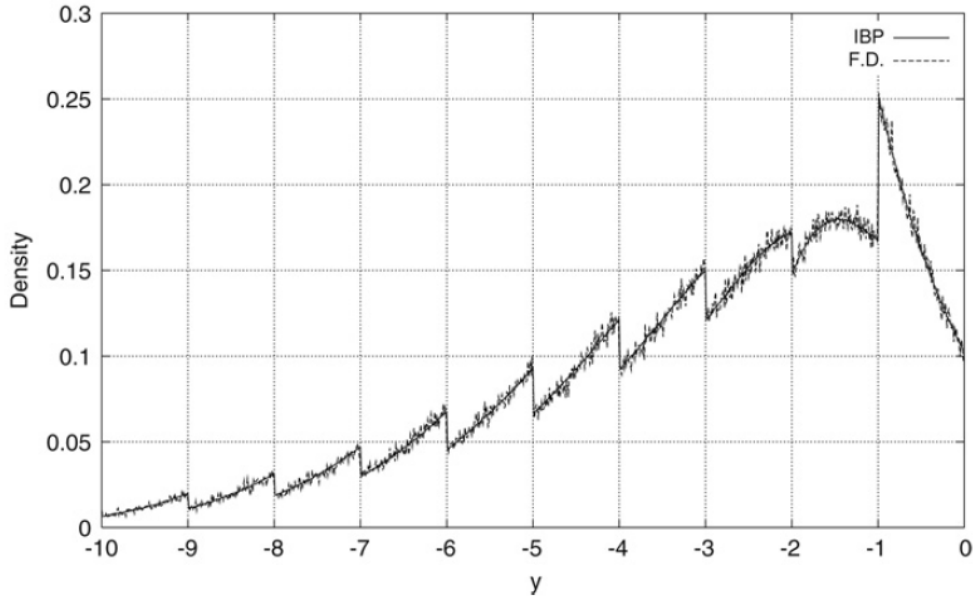


FIGURE 6. Densité de l'infimum du processus de risque, calculée par la méthode des différences finies et par intégration par parties.

de Poisson.

Toutefois nous ne pouvions pas utiliser les outils de Privault et Wei [156] pour calculer la sensibilité recherchée (5.3), car l'infimum du processus sur $[0, T]$, contrairement à la valeur terminale du processus, ne respecte pas les conditions de régularité requises : par exemple, comme on le voit sur la figure 6, dans le cas de sinistres de montants unitaires, la densité de l'infimum du processus n'est pas continue et présente des sauts. Nous développons donc une approche alternative, fondée sur des techniques d'intégration par parties. Nous obtenons entre autres une formule qui est utile pour calculer directement la densité par simulations de Monte Carlo :

Proposition 3. *Résultat d'intégration par parties [127]*

Supposons que C est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $C'(t) > c > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Alors la densité de probabilité conditionnelle $g_{\mathcal{M}_{[0,T]}|\mathcal{M}_{[0,T]}<0}$ de $\mathcal{M}_{[0,T]}$ au point $y < 0$ sachant que $\{\mathcal{M}_{[0,T]} < 0\}$ est égale à

$$g_{\mathcal{M}_{[0,T]}|\mathcal{M}_{[0,T]}<0}(y) = \frac{\lambda(C^{-1})'(y)}{P(\mathcal{M}_{[0,T]} < 0)} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{N(T)} \mathbf{1}_{\{y \leq \inf_{1 \leq l \leq j} (C(T_l) - Y_l)\}} \mathbf{1}_{\{C(T_{j-1}) - Y_j < y\}} \mathbf{1}_{\{y \leq \inf_{j \leq l \leq N(T)} (C(T_l) - Y_{l+1})\}} \right] + \frac{\lambda(C^{-1})'(y)}{P(\mathcal{M}_{[0,T]} < 0)} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{0 < Y_{N(T)+1} + y < C(T)\}} \mathbf{1}_{\{C(T_{N(T)}) < Y_{N(T)+1} + y\}} \mathbf{1}_{\{\inf_{1 \leq l \leq N(T)} (C(T_l) - Y_l) > y\}} \right],$$

$y < 0$, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

Dans la proposition 3, les cotisations sont reçues de manière déterministe avec un taux de cotisation minimum à chaque instant. Nous relâchons ensuite cette hypothèse en permettant aux primes d'être stochastiques et modélisées par un processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ nul en zéro, à accroissements indépendants et tel que pour tous $0 \leq a < b$,

$$\inf_{t \in [a, b]} Z(t)$$

admet une densité. Un exemple typique correspond au cas où $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

Dans la grande majorité des travaux cités jusqu'à présent, les montants de sinistres étaient représentés par des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes du processus d'arrivée des sinistres. Voyons maintenant comment on peut essayer de rendre moins strictes ces hypothèses pour prendre en compte des corrélations qui existent en pratique.

6. MODULATION PAR UN PROCESSUS D'ENVIRONNEMENT MARKOVIENT

Le modèle avec modulation par un processus d'environnement markovien, introduit dans le domaine de la théorie du risque par Asmussen [13], et étudié ensuite en particulier par Frostig [79] et Asmussen et Kella [20], peut être étendu à un modèle multirisques, que nous introduirons ultérieurement (voir page 38). Nous le présentons maintenant car ce cadre va nous servir à construire un modèle avec une corrélation dynamique entre les montants de sinistre au chapitre 7. Soit n le nombre fini d'états possibles de l'environnement. Soit $(J_t)_{t \geq 0}$ un processus markovien à temps continu représentant l'état de l'environnement à la date t , et pour chaque état de la nature $1 \leq i \leq n$, soient

$$X^i(t) = S^i(t) - c^i t$$

des processus de Lévy indépendants et d'exposants

$$r^i(\alpha) = \ln \left(\mathbb{E} \left[e^{\alpha X^i(1)} \right] \right).$$

Soit T_p l'instant du $p^{\text{ième}}$ saut du processus $(J_t)_{t \geq 0}$. On construit le processus $(X(t))_{t \geq 0}$ modulé par le processus d'environnement $(J_t)_{t \geq 0}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X(t) - X(0) &= \sum_{p \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq n} (X^i(T_p) - X^i(T_{p-1})) \mathbb{1}_{\{J_{T_{p-1}} = i, T_p \leq t\}} \\ &+ \sum_{p \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq n} (X^i(t) - X^i(T_{p-1})) \mathbb{1}_{\{J_{T_{p-1}} = i, T_{p-1} \leq t < T_p\}}. \end{aligned}$$

La Figure 7 montre un exemple de modulation avec $n = 2$ états. La trajectoire bleue est celle d'un monde virtuel dans lequel on serait toujours dans l'état 1 (bleu) ; la trajectoire rouge correspond au monde virtuel dans lequel on serait toujours dans l'état 2 (rouge). En dessous, la trajectoire mixte correspond à une trajectoire qu'on pourrait observer dans le monde réel avec une alternance de périodes de séjour dans l'état 1 et dans l'état 2. Soit Q la matrice des taux de transition de

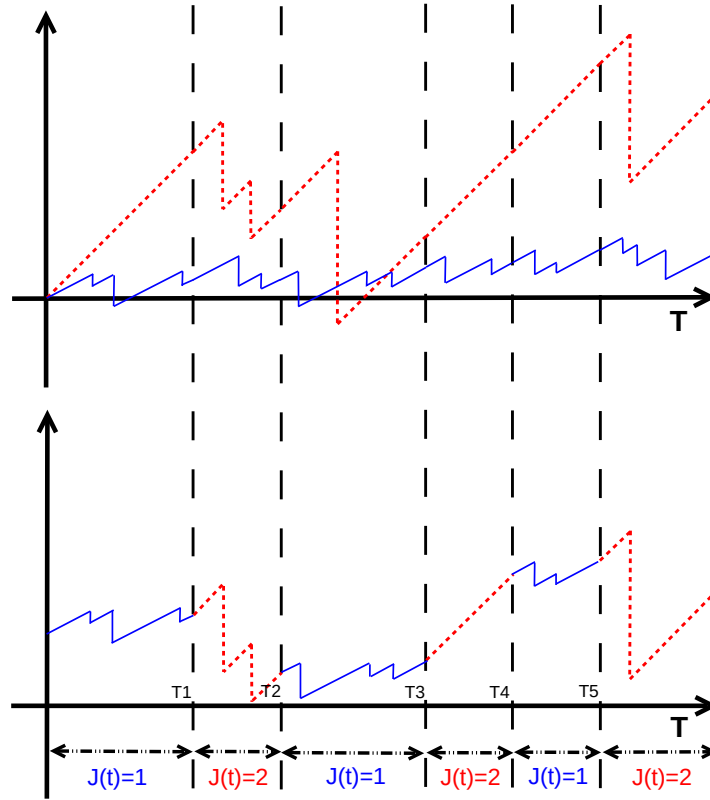


FIGURE 7. Exemple d'un processus de risque modulé, avec deux états (un rouge, l'autre bleu)

$(J_t)_{t \geq 0}$. Définissons

$$F(\alpha) = Q + \text{diag}(r^1(\alpha), \dots, r^n(\alpha)).$$

D'après le lemme 2.1 d'Asmussen et Kella [20], en notant pour $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbb{1}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0),$$

$$M^W(t, \alpha) = e^{\alpha X(t)} \mathbb{1}_{J_t} e^{-F(\alpha)t}$$

est une martingale de dimension n (le nombre d'états) pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$ tel que tous les $r^i(\alpha)$ existent et pour toute distribution de $(X(0), J_0)$. Si $h(\alpha)$ est un vecteur propre (à droite) de $F(\alpha)$ pour la valeur propre $\lambda(\alpha)$, alors

$$N(t, \alpha) = e^{\alpha X(t) - \lambda(\alpha)t} h_{J_t}(\alpha)$$

est une martingale.

Cette modulation peut, par exemple, servir à incorporer dans le modèle l'impact de facteurs climatiques sur l'occurrence de catastrophes naturelles, ou l'impact de la répression et du climat sur le nombre d'accidents de la route et les coûts qu'ils engendrent. Une version discrète de ce modèle est utilisée par Lévi et Partrat [116] pour modéliser les variations annuelles des nombres de cyclones.

La modulation par un environnement markovien permet en général de créer de la surdispersion, souvent observée dans la réalité. Cela nous permettra aussi dans l'article [38] évoqué au chapitre 7 de prendre en compte des changements dans les niveaux de corrélation entre montants de sinistres. Mais le principal atout de ce modèle est qu'il permet, combiné à des chocs communs, de traduire de façon assez réaliste la dépendance entre plusieurs branches d'activité d'une compagnie d'assurances (voir chapitre 9.1).

7. DÉPENDANCE STOCHASTIQUE EN UNIVERS UNIVARIÉ

7.1. Principaux types de dépendance en théorie du risque.

Nous avons déjà évoqué page 14 la formule que nous proposons dans [113] pour la probabilité de ruine en temps fini dans le modèle Poisson composé quand les montants de sinistres admettent une structure de dépendance arbitraire. Cette formule générale peut être améliorée ou complétée quand on précise le type de dépendance entre les montants de sinistres. Nous verrons dans le chapitre 7.2 comment prendre en compte le fait que les montants de sinistres sont souvent influencés par des facteurs communs, ce qui génère une corrélation aléatoire, susceptible de changer au cours du temps à cause de l'incertitude de paramètre (voir Meyers [136]) ou à des crises de corrélation : des risques supposés quasiment indépendants en régime de croisière peuvent soudain devenir extrêmement positivement corrélés en temps de crise. Des raisons pour lesquelles les crises de corrélation peuvent se produire sont exposées en détail dans le preprint coécrit avec Pierre Arnal et Romain Durand [123] et dans l'article [130]. Lorsqu'on est en présence de montants de sinistres dépendants et qu'on souhaite obtenir la loi du montant de

sinistre cumulé, des références utiles sont Barbe et al. [27], Albrecher et al. [3], Kortschak et Albrecher [109] et Demarta [60]. Nous essayons également de prendre en compte ce type de phénomène dans le cadre du risque de rachat en assurance-vie dans le preprint coécrit avec Xavier Milhaud [126].

Nous avons déjà brièvement mentionné page 23 le fait qu'en pratique, le taux de cotisation par unité de temps est souvent dépendant des sinistres passés, ce qui correspond à une corrélation entre le processus des sinistres cumulés et le processus (qui devient aléatoire) des cotisations cumulées, avec retard et avec une mémoire plus ou moins longue. Nous reviendrons plus en détail sur ce type de modèle dans le chapitre 3.3 de la deuxième partie de ce document de synthèse.

Un autre type de corrélation peut provenir de l'influence de l'arrivée des sinistres sur le processus de risque. Un premier exemple où l'impact est sur le nombre de sinistres principalement correspond à celui des processus de type shot-noise, étudiés en théorie de la ruine par Albrecher et Asmussen [2] : dans ce cas, lorsqu'un sinistre survient, cela engendre un saut vers le haut pour l'intensité (qui est dans ce cas un processus) ; l'intensité revient ensuite vers un niveau cible exponentiellement vite. Ces processus peuvent dans certains cas avoir un comportement explosif, ce qui rejoint un peu par certains côtés le phénomène de cercle vicieux source de crises de corrélation décrit dans la pré-publication [123].

Au lieu d'avoir un impact sur lui-même, le processus d'arrivée des sinistres peut aussi avoir des conséquences sur les montants de sinistres. Dans le chapitre 7.3, nous introduirons des modèles dans lesquels soit le montant de sinistre et le temps inter-sinistres précédent ou suivant sont corrélés, soit une accumulation de temps inter-sinistres trop courts ou trop longs joue sur la loi du montant de sinistre suivant.

Enfin, si nous avons choisi de distinguer plus bas corrélation entre montants de sinistres et corrélation entre temps inter-sinistres et montants de sinistres, il faut préciser que certains modèles engendrent des dépendances moins faciles à caractériser. Par exemple, dans la pré-publication [29] co-écrite avec Mathieu Bargès et Xavier Venel et évoquée plus en détail page 56, nous nous intéressons à l'influence des sinistres importants sur les cycles de réassurance. Dans ce cadre de modélisation, les montants de sinistres ne sont plus indépendants, et l'arrivée de sinistres de montant important influence le taux de cotisation et éventuellement certains autres paramètres.

7.2. Corrélation entre montants de sinistres. Dans l'article co-écrit avec Romain Biard et Claude Lefèvre [38], nous commençons par examiner l'impact de la dépendance entre montants de sinistres sur la probabilité de ruine, et remarquons un comportement analogue à celui observé par Paul Embrechts et ses co-auteurs au sujet de la Value-at-Risk : dans le cas de montants de sinistres identiquement distribués et de loi à variation régulière d'ordre $\alpha > 0$, la probabilité de ruine en temps fini est asymptotiquement croissante en la corrélation lorsqu'on a $\alpha > 1$; en revanche, pour des risques "très" extrêmes comme certains risques opérationnels, pour lesquels il est probable qu'on ait $\alpha < 1$ (rappelez que dans ce cas la moyenne est infinie), alors la corrélation a tendance à diminuer la probabilité de ruine. Ceci peut paraître contre-intuitif à première vue car la corrélation entre des risques de pertes est le plus souvent synonyme d'augmentation du risque global.

Pour rendre ce phénomène plus accessible, prenons l'exemple très schématique suivant. Imaginons deux cataclysmes susceptibles de se produire chacun avec probabilité 10^{-6} , et qui ne laisserait dans ce cas aucun survivant : une collision d'une grosse météorite avec la Terre, et une pandémie foudroyante. Les indicatrices de survenance de ces deux événements semblent à première vue relativement indépendantes, ce qui conduit à une probabilité d'extinction de notre espèce d'à peine moins de $2 \cdot 10^{-6}$. Tout philanthrope préférerait à cette situation d'indépendance la situation de dépendance positive parfaite (ou comonotonie, voir les travaux de Marc Goovaerts et ses co-auteurs sur ce sujet) dans laquelle soit les deux cataclysmes se produisent simultanément (avec probabilité $q_C = 10^{-6}$), soit aucun des deux cataclysmes ne se produit avec probabilité $1 - q_C$, puisque cela permettrait de diviser la probabilité d'extinction d'un facteur voisin de 2. La probabilité de ruine en temps fini se comporte donc un peu comme la Value-at-Risk, alors que l'aire en rouge moyenne qui sera définie dans le chapitre 8.2 se comporte vis-à-vis de la corrélation un peu plus comme la Tail-Value-at-Risk (définie comme une moyenne des Value-at-Risk de niveau supérieur au seuil de la Tail-Value-at-Risk) : augmenter la corrélation augmentera en général la vision du risque.

Nous permettons ensuite (toujours dans [38]) à la corrélation entre les montants de sinistres de varier au cours du temps afin de prendre en compte d'éventuelles crises de corrélation évoquées plus haut. Afin de simplifier le problème, nous considérons le cas où la corrélation dépend de l'état de l'environnement, décrit par un processus markovien à nombre d'états fini. Le caractère markovien de ce processus d'environnement pourrait tout à fait être assoupli. Toutefois, dans le cas markovien, nous sommes capables d'obtenir des formules explicites pour l'équivalent de la probabilité de ruine en temps fini pour

des montants de sinistres distribués selon des lois à variation régulière dans chaque état. Le coefficient de variation régulière peut différer d'un état à l'autre. Lorsque le plus petit de ces coefficients est un entier α (forcément supérieur ou égal à 1), nous sommes en mesure, pour un certain nombre de types de dépendance entre montants de sinistres, de calculer explicitement pour tout horizon de gestion $T > 0$ la limite

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\psi(u, T)}{u^{-\alpha}}.$$

Ce calcul fait intervenir les nombres de Stirling de seconde espèce ainsi que des formules récursives sur les moments des temps passés par un processus markovien à nombre d'états fini dans un certain état i en partant d'un certain état j dues à Castella et al. [45]. Notons que dans certains modèles faisant intervenir des sinistres comonotones, la dépendance est persistante : on peut dans certains cas, si on le souhaite, permettre d'avoir une certaine probabilité des sinistres égaux à un certain W_0 aléatoire dans chaque passage dans un certain état (la valeur de W_0 n'étant pas réinitialisée à la sortie de l'état en question). Cela peut permettre d'approcher des situations dans lesquelles on déboucle une situation financière délicate par des chocs importants espacés très corrélés.

Dans les modèles de l'article [38] évoqués plus haut, la corrélation provenait essentiellement du processus d'environnement, qui pourrait éventuellement moduler également la fréquence des sinistres (cela ne poserait pas de problème technique). Toutefois, un autre type de corrélation mentionné précédemment correspond aux phénomènes d'accumulation de risque (par exemple en cas de pluies trop rapprochées pour le risque d'inondation, ou en cas d'absence prolongée d'ajustement ou de trop petit nombre d'ajustements de la croûte terrestre dans le cas des séismes). C'est ce que nous essayons de prendre en compte dans l'article co-écrit avec Romain Biard, Claude Lefèvre et Haikady Nagaraja [35].

7.3. Corrélation entre temps inter-sinistres et montants de sinistres. La dépendance entre les temps inter-sinistres et les montants des sinistres a été étudiée dans plusieurs travaux en théorie de la ruine. Dans Albrecher et Boxma [6], le temps inter-sinistres est dépendant du montant du sinistre qui le précède. Plus précisément, si le montant W_j du j ème sinistre est plus grand qu'une certaine barrière, alors le temps d'attente du prochain sinistre est distribué selon une loi exponentielle de paramètre λ_1 , dans le cas contraire, le temps d'attente est distribué selon une loi exponentielle de paramètre λ_2 . Dans ce modèle, Albrecher et Boxma [6] obtiennent des résultats explicites de la transformée de Laplace de la probabilité de ruine. Albrecher et Teugels [10] considèrent que chaque montant de sinistre est corrélé avec le temps

inter-sinistre *précédent* et non plus suivant. Dans ce cadre, des résultats asymptotiques de la probabilité de ruine en temps fini et infini sont obtenus dans le cas de montants de sinistres ayant une distribution à queue légère pour une structure de dépendance arbitraire. Supposant également dépendants le montant de sinistre et le temps inter-sinistre précédent, Boudreault et al. [39] étudient la fonction de pénalité de Gerber-Shiu (qui sera introduite au chapitre 8.1) et considèrent une forme particulière de dépendance en définissant la densité conditionnelle $f_{W_j|V_j}$ du montant du j ème sinistre W_j sachant le temps inter-sinistre précédent V_j par

$$f_{W_j|V_j}(x) = e^{-\beta V_j} x f_1(x) + (1 - e^{-\beta V_j}) f_2(x) \quad x \geq 0 ,$$

pour un certain $\beta > 0$, et certaines densités f_1 et f_2 . Dans Meng et al. [135], le temps précédant un sinistre influence la distribution de son montant ; si le temps inter-sinistre V_i est plus grand qu'une certaine barrière M_i alors le montant du sinistre aura une certaine distribution, dans le cas contraire, le montant du sinistre aura une distribution différente. La probabilité de non-ruine en temps infini est calculée avec des montants de sinistres exponentiels. Enfin, Ambagaspitiya [11] modélise la loi jointe du temps inter-sinistre et du montant du sinistre suivant par deux distributions gamma bivariées et calcule dans son modèle la probabilité de ruine en temps infini. Dans la pré-publication [28] co-écrite avec Mathieu Bargès, Hélène Cossette et Etienne Marceau, nous nous intéressons aux moments escomptés du cumul des sinistres en temps fini dans un modèle où les temps inter-sinistres et les montants de sinistres sont dépendants et admettent une loi jointe bien particulière, en laissant la possibilité de prendre en compte d'éventuelles crises d'inflation.

Le modèle que nous proposons dans [35] peut être vu comme une extension de certains travaux précédemment cités : cette fois, en gardant de la dépendance entre les montants de sinistres utilisant les résultats de l'article [38], la distribution d'un montant de sinistre dépend de plusieurs temps inter-sinistre qui le précèdent ; ceci permet de modéliser des phénomènes d'accumulation propres aux risques de tremblement de terre ou d'inondation par exemple, et de mieux prendre en considération le passé du processus. Si une personne boit des bières de façon trop rapprochée, au bout d'un certain nombre d'intervalles consécutifs trop courts entre deux bières, la bière suivante risque de produire un effet décuplé. Cela correspond au phénomène de pluies répétées pour le risque d'inondation que nous considérons dans [35]. A l'inverse, si une personne laisse passer beaucoup trop de temps entre les prises de bière de manière répétée, alors son corps risque de se déshabituer et de réagir plus violemment à la prochaine bière. Cela correspond au risque d'ajustement trop peu fréquents de la croûte terrestre pour le risque sismique

que nous considérons également dans [35]. Nous y obtenons de manière récursive les lois du nombre $M_+(n, k, t, \tau)$ de séquences entre 0 et t de k temps inter-sinistres plus grands que τ (risque de type sismique) et du nombre $M_-(n, k, t, \tau)$ de séquences entre 0 et t d'au moins k temps inter-sinistres plus petits que τ (risque de type inondation), ainsi que des équivalents de la probabilité de ruine en temps fini.

8. AU-DELÀ DE LA PROBABILITÉ DE RUINE : FONCTIONS DE PÉNALITÉ

La probabilité de ruine peut sembler trop binaire, comme toute probabilité de franchissement de barrière. On peut compléter cette vision par un calcul de sensibilité (voir chapitre 5), ou par des mesures de risque qui prennent en compte la gravité de la situation si la barrière est franchie comme la sévérité de la ruine

$$|u + X_{T_u}|,$$

ou le temps écoulé avant la ruine

$$T_u = \inf\{t > 0, u + X_t < 0\}$$

appelé instant de ruine (voir par exemple Gerber [84], Dufresne et Gerber [73] et Picard [150]). On peut aussi considérer le temps passé en-dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement $T'_u - T_u$, où

$$T'_u = \inf\{t > T_u, u + X_t = 0\},$$

la sévérité agrégée de la ruine jusqu'au rétablissement

$$J(u) = \int_{T_u}^{T'_u} |u + X_t| dt,$$

ou encore le temps total passé en-dessous de zéro

$$\tau(u) = \int_0^{+\infty} 1_{\{u + X_t < 0\}} dt$$

étudié par Dos Reis [71] en utilisant les résultats de Gerber [84]. La distribution du temps de ruine et du temps passé en dessous de zéro est aussi étudiée par Picard [150], Frostig [80], Dos Reis [72], et Gerber et Shiu [86].

On peut aussi s'intéresser aux probabilités

$$f(u, x, y) = \mathcal{P}(T_u < +\infty, -R^u(T_u) > x, R^u(T_u^-) > y).$$

Remarquons que pour $x = y = 0$, on retrouve la probabilité de ruine $\psi(u) = f(u, 0, 0)$. Pour un processus de Poisson composé avec distribution de montant de sinistre W , on a la formule explicite pour une réserve initiale nulle :

$$f(0, x, y) = \frac{\lambda}{c} \int_{x+y}^{+\infty} \bar{F}_W(v) dv$$

où $\bar{F}_W$ est la fonction de survie de W (voir par exemple le livre de Rolski et al. [160] pour la preuve). Ce résultat peut être généralisé à une classe plus large de processus. Lin et Wilmott [119, 118] ont étudié les propriétés et les moments du temps de ruine, du déficit juste après et du surplus juste avant la ruine et des fonctionnelles de ces quantités introduites par Gerber et Landry [85]. Usábel [180] donne des moyens pratiques d'approcher $f(u, x, y)$.

8.1. Fonction de pénalité escomptée de Gerber-Shiu. Depuis maintenant quelques années, une autre fonction de risque est apparue, et a fait maintenant l'objet de nombreux papiers et de trois conférences spécialisées ; il s'agit de la fonction de pénalité escomptée de Gerber-Shiu. Cette fonction est apparue dans Gerber et Shiu [86] en 1998 et est définie comme suit :

$$\varphi(u) = E \left[e^{-\delta\tau} w(R(\tau-), |R(\tau)|) \mathbf{1}_{\tau < \infty} | R(0) = u \right] ,$$

où $\tau = \inf\{t \geq 0, R(t) < 0\}$ est l'instant de ruine, $\delta \geq 0$ est un facteur d'actualisation, et w est une certaine fonction positive définie sur $[0, \infty]^2$, normalement croissante en son deuxième argument. Hans Gerber aime à dire que ceux qui sont avec lui utilisent la notation φ , alors que ceux qui sont contre lui utilisent la notation m . Etant donné qu'il est un de mes rapporteurs, je privilégie donc ici la première notation... Si l'on choisit $\delta = 0$ et $w \equiv 1$, on retrouve la probabilité de ruine en temps infini. Plus généralement, pour $w \equiv 1$ et $\delta \geq 0$, φ correspond à la transformée de Laplace du temps de ruine au point δ . Pour $\delta = 0$ et $w(x, y) = y$, on obtient la sévérité de la ruine. Avec Corina Constantinescu, Claude Lefèvre et Didier Rullière, nous comptons adapter à un cadre discret certaines techniques de calcul de la fonction de pénalité de Gerber-Shiu développées dans Albrecher et al. [7] et faisant intervenir le calcul symbolique.

Les mesures de risque en présence de plusieurs sources de risque et les problèmes d'allocation optimale de capital qui en découlent seront évoqués dans la partie de l'introduction consacrée aux modèles multidimensionnels (voir pages 40 et suivantes).

8.2. Aire en dessous de zéro. Dans l'hypothèse où la compagnie, en cas de ruine, a l'opportunité de combler sa dette sous la forme d'un emprunt tant que sa richesse algébrique est négative, l'aire entre le processus et zéro quand celui-ci est en-dessous de zéro (voir figure 8) peut être interprétée comme un multiple des intérêts à payer par la compagnie jusqu'au retour à la solvabilité.

Pour mesurer cela, considérons un processus de risque univarié $(R(t))_{t \geq 0}$ et définissons, pour $u, T > 0$,

$$(8.1) \quad I_T(u) = \int_0^T \mathbf{1}_{\{R(t) < 0\}} |R(t)| dt .$$

(8.1) correspond à l'aire délimitée d'une part par la droite d'équation $y = 0$ et d'autre part par la trajectoire du processus de risque $(R(t))_{t \geq 0}$ lorsque celui-ci est négatif. Sur la Figure 8, (8.1) correspond à l'aire en rouge. Nous pouvons ainsi définir comme indicateur de risque pour un processus univarié $(R(t))_{t \geq 0}$, l'espérance de $I_T(u)$. En considérant

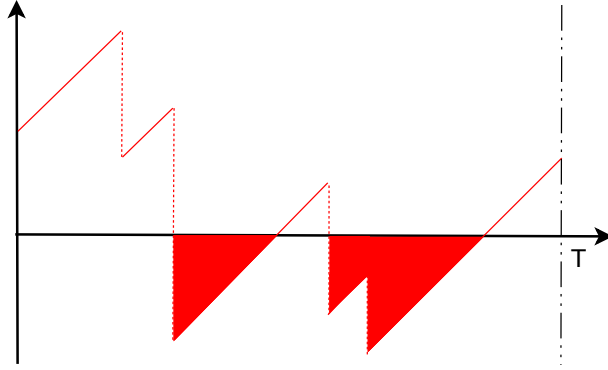


FIGURE 8. Partie négative du processus intégré par rapport au temps.

un horizon de temps infini, on peut obtenir $E[I_\infty(u)]$ à partir de la probabilité de ruine $\psi(u)$ en utilisant les résultats ci-dessous obtenus dans [122].

Théorème 8. Soit $T \in \mathbb{R}^+$, $(Y_t)_{t \in [0, T)}$ un processus de renouvellement (qui peut-être modulé par un processus d'environnement avec un nombre d'états finis) intégrable par rapport au temps. Soit $u \in \mathbb{R}$, notons par $\tau(u, T)$ la variable aléatoire correspondant au temps passé par le processus $u + Y_t$ sous la barrière zéro entre 0 et T :

$$\tau(u, T) = \int_0^T \mathbf{1}_{\{u + Y_t < 0\}} dt,$$

Soit $\tau_0(u, T)$ le temps passé en zéro par le processus $u + Y_t$ entre 0 et T :

$$\tau_0(u, T) = \int_0^T \mathbf{1}_{\{u + Y_t = 0\}} dt.$$

Enfin, soit $I_T(u)$ représentant l'intégrale par rapport au temps de la partie négative du processus $u + Y_t$ entre 0 et T :

$$I_T(u) = \int_0^T \mathbb{1}_{\{u+X_t < 0\}} |u + X_t| dt$$

et $f(u) = E(I_T(u))$.

Pour $u \in \mathbb{R}$, si $E(\tau_0(u, T)) = 0$, alors f est dérivable en u et $f'(u) = -E(\tau(u, T))$.

Théorème 9. Soit $Y_t = ct - S(t)$, avec $S(t)$ un processus de Poisson composé. Soit $T < +\infty$ et h défini par $h(u) = E(\tau(u))$ pour $u \in \mathbb{R}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+ = (0, \infty)$, et pour $u > 0$,

$$h'(u) = -\frac{1}{c} E(N^0(u, T)),$$

où $N^0(u, T) = \text{Card}(\{t \in [0, T], u + ct - S(t) = 0\})$. De plus pour $T = \infty$, si $\tau(u)$ est intégrable pour tout $u > 0$,

$$(8.2) \quad E(N^0(u, \infty)) = \frac{\psi(u)}{1 - \psi(0)}.$$

Dans le modèle Poisson composé, dès qu'on a une formule explicite pour la probabilité de ruine en partant de $u \geq 0$, il est possible après deux intégrations d'en déduire une formule explicite pour l'aire moyenne en rouge en-dessous de zéro en temps infini (voir Loisel [121]).

Dans l'article [36], on utilise (3.1) et d'autres formules pour faire l'analyse asymptotique de l'aire moyenne en rouge quand la réserve initiale tend vers l'infini. Ces mesures de risque sont définies par rapport à la richesse globale de la compagnie, en agrégeant les richesses de ses différentes branches. Dans le modèle multirisques, nous verrons des propositions d'extension de ces mesures de risque en présence de plusieurs sources de risque. Voyons donc quels types de modèles et quels indicateurs de risque sont pertinents et étudiés en univers multivarié, avant d'évoquer les résultats d'allocation optimale obtenus dans l'article [36].

9. MODÈLE MULTI-BRANCHES

Il est évident que la somme des richesses est un indicateur important pour apprécier la solvabilité de l'entreprise. Toutefois, il est discutable que cet indicateur soit suffisant pour la décrire totalement.

En effet, il semble logique que les actionnaires redoutent en cas de déséquilibre entre les branches, de devoir combler dans le futur les dettes appelées à empirer au détriment de versements de dividendes qui pourraient avoir lieu dans une configuration plus stable.

De plus, les problèmes de gestion interne de la compagnie et les nouvelles réglementations sont susceptibles de créer des besoins d'analyse multidimensionnelle. Par exemple, il n'est pas clair qu'un réassureur ayant des opérations dans le monde entier pourra se contenter d'un capital de solvabilité global au niveau groupe en profitant de l'effet de diversification géographique (par exemple entre l'Europe, bientôt soumise au référentiel Solvabilité II, et l'Amérique). En effet, les efforts pour essayer de coordonner la supervision des groupes internationaux butent sur de nombreuses questions politiques, économiques et autres. Il faudra donc probablement un capital de solvabilité pour chaque zone, ce qui oblige les stratèges du groupe à adopter une vision multivariée en plus de la vision agrégée.

De plus, dans une démarche de gestion globale de leurs risques, les compagnies commencent à allouer le capital économique calculé au niveau groupe vers les branches d'activité, de manière à répercuter sur les assurés le coût de l'immobilisation du capital de manière plus équitable (en fonction de la contribution de la branche au besoin en capital global et à l'effet de diversification). Cela correspond à des problématiques d'allocation optimale que nous évoquerons au chapitre 9.3.

Ces considérations amènent à considérer l'évolution conjointe des richesses des $K \geq 1$ branches d'activité d'une compagnie d'assurance, et donc d'un processus multivarié

$$\mathbf{R}(t) = (R^{(1)}(t), \dots, R^{(K)}(t)).$$

Ces branches peuvent représenter des filiales différentes, des secteurs d'activité différents (assurance santé, habitation, automobile, responsabilité civile) ou encore des activités, différentes ou identiques, dans différents continents, pays ou régions. On trouve aussi des articles dans lesquels la première branche correspond à un assureur et la deuxième à un réassureur (voir par exemple Avram et al. [24, 23]).

9.1. Processus de risque multivarié et dépendances inter-branches.

Picard et al. [152] et Collamore [49] considèrent des marches aléatoires à accroissement indépendants, de loi jointe quelconque sur une sorte de sous-réseau de $\mathbb{Z}^d$ avec des généralisations des polynômes d'Appell pour Picard et al. [152], et dans $\mathbb{R}^d$ avec des méthodes de grandes déviations pour Collamore [49]. Ces modèles sont intéressants et assez généraux, mais présentent le léger défaut de considérer que ce qui se produit pour la branche 2 à la période 1 est corrélé avec ce qui se passe pour la branche 1 à la période 1, mais indépendant de ce qui se passe pour la branche 1 à la période 2. Il y a en effet un déséquilibre entre l'indépendance temporelle et la totale généralité de la distribution multidimensionnelle des montants cumulés de sinistres sur une période. Avram et al. [24, 23] s'intéressent à l'évolution conjointe de la richesse

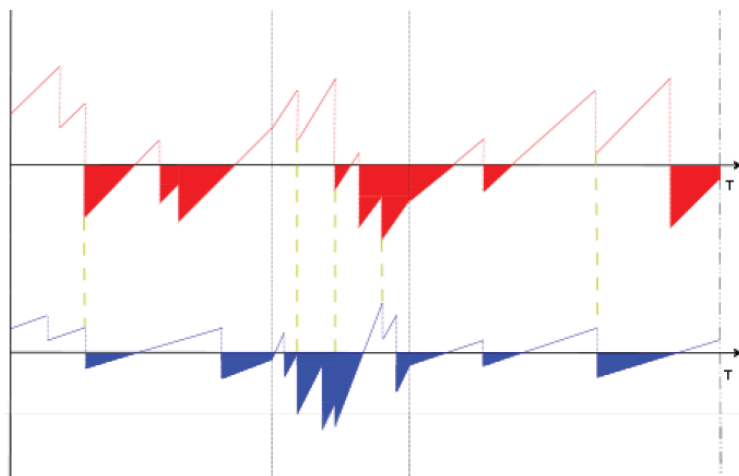


FIGURE 9. Deux branches d'activité modulées par le même processus d'environnement

d'un assureur et de son réassureur. La réassurance étant de type proportionnel, la dépendance entre les deux composantes est totale, et la probabilité qu'au moins une des deux branches soit ruinée (que nous appellerons bientôt ψ_{or} à partir de la page 40) se ramène à la probabilité qu'un processus univarié touche au moins une parmi deux barrières.

Pour identifier la source de la corrélation entre les branches, comme cela était expliqué dans ma thèse [128], on peut sélectionner deux phénomènes principaux :

- dans certains cas, l'influence du climat, des marchés financiers, de la répression et de la prévention routière, ou d'autres paramètres peuvent avoir un impact sur la fréquence de sinistres a priori indépendants les uns des autres une fois le climat et les autres paramètres influents fixés. Typiquement, une année particulièrement pluvieuse peut causer une augmentation du nombre d'accidents, le seul point commun entre deux accidents dans deux régions différentes étant la dégradation des conditions de circulation par la pluie. Cela correspond à la modulation du processus d'arrivée des sinistres par un processus représentant l'état de variables d'environnement commun aux branches d'activité (voir figure 9 pour un exemple avec $K = 2$ branches).
- Dans d'autres cas, un événement unique peut induire des sinistres dans plusieurs branches d'activités différentes. Par exemple, pour un accident de voiture, il faut dans certains cas réparer la voiture (branche automobile), indemniser et réparer les dommages causés au tiers (responsabilité civile), et indemniser le conducteur en cas d'invalidité ou prendre en charge des frais de santé. Ces phénomènes peuvent se produire également pour deux branches d'activité reliées de façon moins évidente et situées dans deux zones

géographiques très différentes, comme la branche assurance décès suédoise et la branche assurance ouvrages de l'Asie du sud-est ! Le tsunami de 2004 a en effet ravagé le sud-est asiatique, endroit de villégiature des Suédois pour y passer leurs vacances en hiver, et détruit ou fortement endommagé de nombreux ports (voir la pré-publication [123] co-écrite avec Pierre Arnal et Romain Durand pour plus de détails). Le modèle le plus classique pour prendre en compte cette éventualité est le modèle de chocs communs de Poisson. Lindskog et McNeil [120] ont travaillé sur des problèmes de risque de crédit faisant intervenir des modèles à chocs communs. Sundt [175] fournit une sorte de généralisation de la formule de Panjer pour le calcul de distributions Poisson composées multivariées.

La modélisation du premier phénomène a déjà été évoquée en dimension 1 page 26. En plus des travaux déjà cités sur ce sujet dans le modèle unidimensionnel, il faut mentionner l'article de Masuda et al. [174], qui ont étudié des propriétés d'un processus de Poisson multidimensionnel modulé par un environnement markovien dans le domaine des files d'attente. De plus, les problèmes d'inférence statistique pour les paramètres de ce type de processus ont été examinés par Rydén [164, 165].

L'environnement commun peut en particulier favoriser l'apparition de crises de corrélation au sein de plusieurs branches simultanément, ou entre des branches différentes. Un prolongement de l'article [38] évoqué page 28 correspond à la première des perspectives de recherche en théorie de la ruine évoquées après les deux nouvelles thématiques (extrema s -convexes et risque de longévité) dans le chapitre 3.1 de la partie II, avec un sujet connexe, qui concerne la détection et les problèmes d'estimation dans ces modèles multivariés à environnement markovien commun. Nous travaillons en effet actuellement avec Armelle Guillou et Gilles Stupfler sur des problèmes liés à ceux considérés par Rydén [164, 165] (voir page 56).

On peut aussi incorporer dans ce type de modèle une influence de la situation financière des autres sur le comportement d'une branche d'activité de la compagnie. Cela permet de définir le processus modifié par la stratégie de barrière $(b_1, \dots, b_K)$: quand une branche k parvient au niveau maximal b_k , les primes sont reversées sous forme de dividendes jusqu'au prochain instant de sinistre frappant la branche k . Il semble toutefois inconcevable de verser des dividendes aux actionnaires alors que les autres branches vont très mal. De plus, il est très probable que la situation financière des autres branches ait un impact, d'une façon ou d'une autre, sur chaque branche. Dans cet esprit, nous avons considéré dans l'article [130] (qui faisait partie de ma thèse) des processus pour

lesquels les taux de cotisations sont fonctions de la position du processus. Nous avons montré qu'il était possible de calculer la moyenne des dividendes versés aux actionnaires et de ceux qui avaient dû être utilisés pour payer des pénalités à cause de l'insolvabilité temporaire d'une autre branche. Nous avons aussi calculé le temps moyen de ruine de la branche principale et la loi de la richesse des autres branches à cet instant, ce qui donnait une information sur la capacité des autres branches à faire face à la défaillance de la branche principale.

9.2. Critères de risque. Barrieu et El Karoui [31], Picard et al. [152] se sont intéressés à la probabilité que le processus entre avant un temps fini dans une zone d'insolvabilité, et principalement à la probabilité qu'au moins une des branches soit ruinée avant un temps fini. Il est possible de choisir d'autres formes de zones de solvabilité (voir la thèse de Romain Biard [37] et la mienne [128], ainsi que Cai et Li [42]), un peu à la manière des domaines d'acceptance définis par Artzner et al. [12] ou Barrieu et El Karoui [31].

Voici une présentation des concepts principaux de probabilité de ruine multivariée, en suivant les notations de Cai et Li [42]. Pour $T > 0$ et

$$\mathbf{u} = (u^{(1)}, \dots, u^{(K)}) \in (0, \infty)^K$$

tel que le vecteur des réserves initiales $\mathbf{R}(0)$ soit égal à $\mathbf{u}$, on définit la probabilité ψ_{sum} (9.1) que la richesse agrégée (la somme des richesses des branches) devienne à un certain moment négative :

$$(9.1) \quad \psi_{sum}(\mathbf{u}, T) = P \left(\exists t \in [0, T], \quad \sum_{j=1}^K R^{(j)}(t) < 0 \right).$$

L'impact de la dépendance entre les risques sur le processus somme a été par exemple considéré par Denuit et al. [62]. Cette probabilité ψ_{sum} (9.1) est à mon sens une fausse probabilité de ruine multivariée, puisque son analyse conduit à étudier au final un processus univarié. La (vraie) probabilité de ruine multivariée la plus fréquemment rencontrée dans la littérature est la probabilité ψ_{or} (9.2) qu'au moins une des branches soit ruinée avant la date T :

$$(9.2) \quad \psi_{or}(\mathbf{u}, T) = P \left(\exists 1 \leq j \leq K, \quad \exists t^j \in [0, T], \quad R^{(j)}(t^j) < 0 \right).$$

La probabilité de ruine multivariée ψ_{or} (9.2) n'est pas le bon indicateur de risque à regarder en premier pour choisir ses risques. En effet, calculer uniquement la probabilité qu'au moins une branche soit ruinée avant un temps fini donné va à l'encontre du principe de recherches de risques plus ou moins compensatoires les uns des autres (et donc de l'effet de diversification au niveau groupe). Picard et al. [152] montrent en effet que si les branches sont positivement corrélées sous une certaine forme, alors les temps de ruine sont aussi positivement corrélés, ce qui

diminue la probabilité de ruine ainsi définie. Cela signifie pour moi que ψ_{or} (9.2) ne doit pas être utilisée comme outil de choix des risques dans lesquels investir, mais plutôt à un deuxième stade, une fois la politique de souscription des risques choisie (par exemple à l'aide de l'indicateur de risque ψ_{sum} (9.1)), dans la perspective du choix de l'allocation optimale de la réserve entre les branches par exemple (voir chapitre 9.3).

La probabilité de ruine ψ_{and} (9.3) est définie comme la probabilité que toutes les branches soient ruinées avant la date T , mais pas forcément simultanément, ce qui peut permettre par le jeu de solidarité entre les branches (si cela est autorisé et si le groupe n'est pas ruiné au niveau agrégé) de garder une chance de poursuivre l'activité, probablement au prix d'une certaine pénalité due à l'insolvabilité temporaire de chaque branche (que l'on cherchera à minimiser dans le chapitre 9.3 sur l'allocation optimale de réserve) :

$$(9.3) \quad \psi_{and}(\mathbf{u}, T) = P \left(\forall 1 \leq j \leq K, \quad \exists t^j \in [0, T], \quad R^{(j)}(t^j) < 0 \right) .$$

La probabilité de ruine ψ_{sim} (9.4) est la probabilité d'un événement beaucoup plus défavorable et rédhibitoire : le fait que toutes les branches de la compagnie soient simultanément dans le rouge à une certaine date. Dans ce cas, la poursuite des activités semble difficilement envisageable. Cette probabilité est formellement définie par

$$(9.4) \quad \psi_{sim}(\mathbf{u}, T) = P \left(\exists t \in [0, T], \quad \forall 1 \leq j \leq K, \quad R^{(j)}(t) < 0 \right) .$$

Ces quatre définitions coïncident bien entendu en dimension 1. On peut naturellement définir les probabilités de ruine correspondantes en temps infini en prenant $T = \infty$. On pourrait aussi introduire des concepts équivalents aux probabilités de déclenchement de produits de type i^{th} -to default en risque de crédit, pour lesquels une indemnisation sera versée dès qu'au moins i parmi les K noms concernés ont fait défaut avant la maturité.

Dans sa thèse [37], Romain Biard étudie une autre probabilité de ruine multivariée, définie par Hu et Lin [99] : pour $\beta \in [0, 1]$, soit

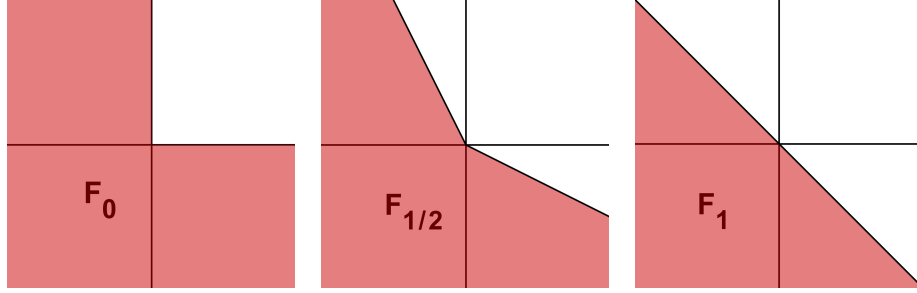
$$(9.5) \quad F_\beta = \left\{ \mathbf{x} : \beta \sum_{k=1}^d (x^{(k)} \vee 0) < - \sum_{k=1}^d (x^{(k)} \wedge 0) \right\} ,$$

où $\vee = \min$ et $\wedge = \max$. Pour $T > 0$, la probabilité de ruine multivariée en temps fini $\psi_{d,\beta}(\mathbf{u}, T)$ est définie comme la probabilité que le processus de risque multivarié $(\mathbf{R}(t))_{t \geq 0}$ appartienne à F_β à un certain moment t avant T . Explicitement, pour $T > 0$, on a

$$(9.6) \quad \psi_{d,\beta}(\mathbf{u}, T) = P \left(\exists t \in [0, T], \quad \mathbf{R}(t) \in F_\beta \right) .$$

On a aussi, en temps infini

$$(9.7) \quad \psi_{d,\beta}(\mathbf{u}) = P \left(\exists t > 0, \quad \mathbf{R}(t) \in F_\beta \right) .$$

FIGURE 10. F_β pour $\beta = 0, \frac{1}{2}$ et 1 en dimension 2

Remarque 1. – *L'ensemble F_β correspond à la possibilité de transférer du capital entre les branches; une branche d'activité qui est dans une position confortable au regard de sa solvabilité peut transférer une fraction β de sa richesse vers une autre branche qui est en position d'insolvabilité.*

- *Pour $\beta = 0$, les transferts de capitaux ne sont pas autorisés et donc $\psi_{d,0} = \psi_{or}$.*
- *Pour $\beta = 1$, les transferts sont autorisés sans aucune restriction et $\psi_{d,1} = \psi_{sum}$.*

La Figure 10 représente l'ensemble F_β pour $\beta = 0, \frac{1}{2}$ et 1 en dimension 2.

Dans l'article [36] co-écrit avec Romain Biard, Claudio Macci et Noël Veraverbeke, nous nous intéressons à un autre critère de risque que j'avais introduit dans l'article [121] pendant ma thèse [128]. Ce critère de risque prend en considération le comportement du processus lorsque certaines de ses composantes sont négatives et correspond à la somme des indicateurs univariés définis pour une branche en (8.1). Le but est de différencier des branches d'activité en ruine avec un déficit petit et donc assez facile à combler, d'une autre compagnie qui est en ruine soit très longtemps, soit avec un déficit conséquent, soit les deux. Il s'agit de l'espérance de la somme des aires délimitées par la droite $y = 0$ et par la partie négative de chaque branche d'activité, (sur la figure 11, en dimension 2, cela correspond à l'espérance de l'aire en rouge plus l'espérance de l'aire en bleu), c'est-à-dire que nous nous intéressons à la fonction

$$(9.8) \quad I_T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^d E[I_T^{(i)}(u_i)] ,$$

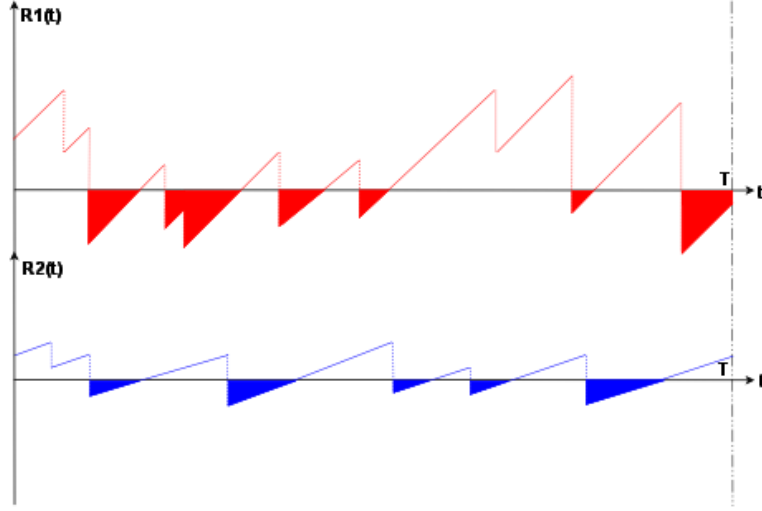


FIGURE 11. Critère de risque en dimension 2

où pour un processus de risque multivarié $\mathbf{R}(t) = (R^{(1)}(t), \dots, R^{(d)}(t))'$, on a, pour $1 \leq i \leq d$, et $u_i, T > 0$,

$$I_T^{(i)}(u_i) = \int_0^T \mathbb{1}_{\{R^{(i)}(t) < 0\}} |R^{(i)}(t)| dt .$$

Ce critère de risque ne fait pas intervenir la dépendance entre les branches (ce qui peut être vu de manière positive comme une référence, ou de manière négative si l'on souhaite prendre en compte la dépendance entre les branches). Cependant, en le modifiant quelque peu, on peut obtenir un indicateur de risque qui prend en compte cette dépendance. Par exemple, dans [121], nous avons introduit pour $T > 0$ l'indicateur

$$\sum_{i=1}^d E \left(\int_0^T \mathbb{1}_{\{R^{(i)}(t) < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^d R^{(j)}(t) > 0\}} dt \right) .$$

Pour un processus discret multivarié $(\mathbf{R}_p)_{p \in \mathbb{N}}$, Cénac et al. [46] étudient des problématiques d'allocation optimale liées à l'indicateur de risque

$$(9.9) \quad \sum_{i=1}^d E \left(\sum_{p=1}^n g_i(R_p^{(i)}) \mathbb{1}_{\{R_p^{(i)} < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^d R_p^{(j)} > 0\}} \right) .$$

pour $n > 0$ et des fonctions g_i dérivables, convexes et satisfaisant $g_i(x) \geq 0$ pour $x \leq 0$, $i = 1, \dots, d$. Nous reverrons l'indicateur de risque défini par (9.9) dans la partie consacrée aux perspectives de recherche. Ces indicateurs de risque vont servir de critère pour allouer de manière optimale une réserve initiale globale entre les branches d'activité de la compagnie.

9.3. Allocation optimale. Jouini et al. [103] a introduit récemment des mesures de risque vectorielles. Panjer [148] et Panjer et Jing [149] s'intéressent à la solvabilité à une unique date fixée d'une entreprise en présence de plusieurs risques décrits par des lois normales multivariées, et à l'allocation optimale de capital. Cette problématique, et les travaux (parmi plein d'autres) de Tsanakas et Barnett [179] et de Finkelshstein et al. [76] nous amènent naturellement à évoquer maintenant la question de l'allocation optimale de capital, ou de réserve.

Les mesures de risques évoquées plus haut sont directement liées au problème d'allocation de capital économique ou d'allocation de réserve, à distinguer du capital à investir dans plusieurs branches.

Soit ρ une mesure de risque, et soit $(X_1, \dots, X_K)$ un vecteur aléatoire représentant K risques p -intégrables (éventuellement à valeurs dans $\mathbb{Q}$ pour faciliter les preuves). On considère les portefeuilles de valeurs

$$X(u) = \sum_{k=1}^K u_k X_k$$

correspondant à une allocation u_k du capital total u à chaque risque k . ρ induit sur le portefeuille une mesure de risque ρ_B par $\rho_B(u) = \rho(X(u))$. Denault [61] donne des conditions sur ρ et sur les risques pour que ρ_B soit une mesure de risque cohérente. Denault [61] et Delbaen [59] entre autres utilisent des résultats sur les jeux de coalition avec des joueurs fractionnels (notamment d'Aubin [21]) pour démontrer que l'allocation optimale peut être dans certains cas obtenue avec la méthode du gradient : l'allocation par unité de capital optimale (u_k^*) est donnée par

$$\rho_B(u) = \sum_{k=1}^K u_k^* \frac{\partial \rho_B}{\partial u_k}(u).$$

Cette allocation de capital est différente du problème auquel nous étions naturellement intéressé dans l'article [121] (rédigé pendant ma thèse) et dans l'article [36] : comment répartir la réserve initiale globale u entre les branches de façon à minimiser une certaine mesure de risque ? Il serait intéressant de disposer d'une mesure de risque neutre par rapport à la structure de dépendance entre les branches pour pouvoir ensuite déterminer si l'utilisation de la mesure de risque choisie favorise les branches positivement corrélées en leur allouant plus de capital, ou en tout cas si la dépendance a un impact significatif sur la stratégie d'allocation de capital.

Les théorèmes de différentiation 8 et 9, combinés à un lagrangien, permettent de déterminer l'allocation optimale $u_1 + \dots + u_K = u$ telle que la somme des aires moyennes est minimale. Les figures 12

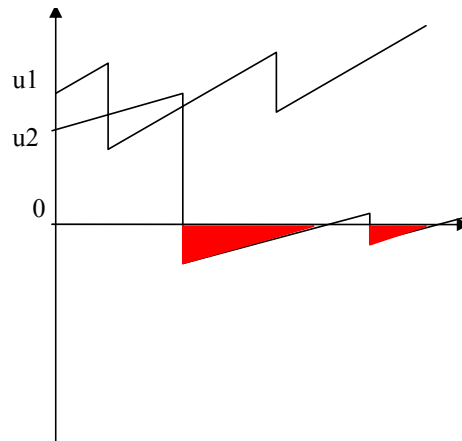


FIGURE 12. Première stratégie d'allocation de réserve (u_1, u_2)

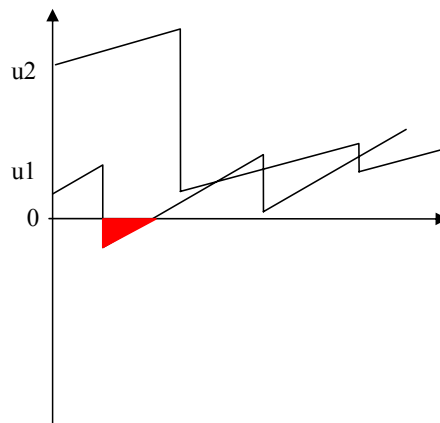


FIGURE 13. Une autre stratégie d'allocation de réserve (u_1, u_2)

et 13 présentent deux trajectoires pour deux stratégies d'allocation différentes.

Elle consiste à ne pas affecter de réserve aux branches les plus sûres, et à répartir la réserve totale u entre les autres de façon à rendre égaux entre eux les temps moyens passés en-dessous de zéro par ces branches plus risquées. Ce résultat très parlant permet d'avoir une bonne conception de la stratégie d'allocation de capital avec cette mesure de risque. Mentionnons que les contrats d'assurance étant souvent annuels, on ne peut s'en dégager aussi rapidement qu'une banque achète ou vend des titres. De plus, des règles comptables ou fiscales peuvent imposer de ne pas faire varier les réserves entre les branches trop souvent. C'est pour

cette raison que nous ne nous sommes pas intéressés à des problèmes de contrôle optimal sur les capitaux des branches.

En économie du risque, tout ce qui correspond à de la monnaie est toujours regroupé dans une seule et même variable. Le seul cas où l'on considère des fonctions d'utilité à deux arguments est celui où le deuxième bien ne s'échange pas avec de la monnaie, typiquement l'état de santé (voir les travaux de Courbage [50] et de Rey-Fournier [158]). Même si les richesses de deux branches d'une compagnie d'assurance sont toutes deux exprimées en monnaie, il est théoriquement interdit de combler le déficit de l'une avec l'autre. Dès lors, il semble intéressant de considérer une façon de représenter la satisfaction des actionnaires ou l'évaluation boursière de la compagnie grâce à une fonction d'utilité à K arguments, où K est le nombre de branches de la compagnie. Le transfert d'une partie de la réserve initiale de la branche 1 au profit de la branche 2 correspondrait alors au paiement d'une prime déduite de la richesse de la branche 1 pour réduire le risque supporté par la branche 2, ce qui correspond au type de problème étudié par Courbage [50] et Rey [158].

Dans l'article [36], nous déterminons le comportement asymptotique de l'allocation optimale de réserve lorsqu'on cherche à minimiser la somme des aires en rouge et bleu espérées pour des processus de risque multivariés dont les marginales correspondent à des processus de risque classiques. Cénac et al. [46] utilisent des techniques d'algorithmes stochastiques pour estimer l'allocation optimale pour l'indicateur de risque (9.9) dans le cas de processus discrets à accroissements indépendants et gaussiens. Nous avons le projet d'étudier ensemble (avec Peggy Cénac, Véronique Maume-Deschamps et Clémentine Prieur) l'allocation optimale de l'indicateur (9.9) pour des processus de risque plus actuariels.

Romain Biard [37] s'intéresse dans le dernier chapitre de sa thèse aux comportements asymptotiques de l'allocation optimale lorsque la réserve initiale est particulièrement grande pour l'indicateur de risque $\psi_{d,\beta=0}(\mathbf{u})$ défini en (9.6) :

$$(9.10) \quad \begin{cases} \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^d} \psi_{d,0}(\mathbf{u}) , \\ \text{sous la contrainte } u^{(1)} + \dots + u^{(d)} = u . \end{cases}$$

Il étudie l'allocation qui répond au problème (9.10) et analyse l'impact de la dépendance entre les branches sur l'allocation optimale. Il suppose dans un souci de simplification que les risques souscrits par chaque branche ont des distributions dont les queues sont équivalentes.

Deuxième partie II. Nouvelles thématiques et perspectives

1. EXTREMA S -CONVEXES

Les concepts d'ordres stochastiques sont utiles dans de nombreux modèles de probabilité appliquée. C'est particulièrement le cas en assurance et en finance où différents scénarios sont possibles et doivent souvent être comparés, par exemple en assurance-vie, en théorie de la ruine et en théorie du portefeuille. Les ouvrages de Goovaerts et al. [89], Kaas et al. [104], Ross [161], Müller et Stoyan [140] et Shaked et Shanthikumar [170, 171] sont de bonnes références pour découvrir ou approfondir ses connaissances sur la théorie des ordres stochastiques et ses applications variées.

Dans l'article [115] avec Claude Lefèvre, nous considérons la classe des ordres stochastiques s -convexes, où $s \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, \dots\}$. Pour $s = 1$, cet ordre est l'ordre de dominance stochastique usuel. Pour $s = 2$, il s'agit de l'ordre convexe qui correspond en actuariat à l'ordre stop-loss avec moyenne finie (car il permet d'ordonner les primes de contrats de réassurance de type stop-loss). Pour une valeur de s arbitraire, l'ordre s -convexe compare les fonction de survie d'ordre s de variables aléatoires qui ont les mêmes $s - 1$ premiers moments. La classe des ordres s -convexes a été entre autres analysée pour les distributions discrètes par Lefèvre et Picard [111], Fishburn et Lavalley [77], Lefèvre et Utev [114], Denuit et Lefèvre [64] et Denuit et al. [67], [65]. Le cas plus traditionnel des variables aléatoires réelles a été étudié par Rolski [159], Levy [117], Denuit et al. [66, 68] et par de nombreux autres auteurs.

Quand on dispose d'un ordre, se pose immédiatement la question de la construction d'extréma. D'un point de vue actuariel, les risques extrémaux représentent les risques les plus et moins dangereux, et leur connaissance peut permettre de déduire des bornes inférieures et supérieures précises pour un certain nombre de quantités (par exemple la prime, ou la variance du résultat). Le problème d'optimisation s -convexe correspond à un problème de moments traditionnel (voir par exemple Hoeffding [97], Karlin et Studden [105], Kemperman [106], Utev [181], Prékopa [154] et Hürlimann [100]). Dans le cas discret, les distributions extrémales sont connues explicitement pour $s = 1, 2, 3, 4$ et ont été obtenues par Denuit et Lefèvre [64], Denuit et al. [65] et Courtois et al. [51]. Pour les variables aléatoires réelles, les distributions extrémales ont été explicitement trouvées par Jansen et al. [102], De Vylder [57] et Denuit et al. [66, 68], entre autres.

L'opérateur que nous désignerons par son nom anglais de *stationary-excess operator* et que nous noterons SE est un outil mathématique standard qui joue un rôle important dans la théorie du renouvellement et des fonctions de survie (voir Cox [52]). Dans le cas continu (pour

une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ de fonction de répartition F_X et de moyenne $\mathbb{E}(X) > 0$), l'opérateur SE est défini comme suit (voir Cox [52]) :

Définition 2. *L'opérateur SE noté H associe à toute variable aléatoire X comme ci-dessus une variable aléatoire X_H à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ dont la fonction de répartition $H(F_X)$ est définie par*

$$H(F_X)(x) \equiv P(X_H \leq x) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \int_0^x [1 - F_X(y)] dy, \quad x \geq 0.$$

De façon équivalente, on a

$$(1.1) \quad P(X_H > x) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \int_x^\infty P(X > y) dy, \quad x \geq 0.$$

Cette définition de H garantit son caractère bijectif. En notant la densité de X_H par q_{X_H} , on a

$$(1.2) \quad P(X > x) = \mathbb{E}(X) q_{X_H}(x), \quad x \geq 0,$$

et $\mathbb{E}(X)$ vient par suite. Les moments de X_H et X sont reliés par une formule simple.

Supposons maintenant que X est une variable aléatoire *discrète positive ou nulle* de loi décrite par les masses de probabilité $P_X = \{P(X = j), j \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}\}$ et de moyenne $\mathbb{E}(X) > 0$. L'opérateur SE peut évidemment être utilisé dans ce cadre également. Toutefois, comme souligné par Whitt [183], il est plus approprié de travailler avec une version discrète qui est directement applicable aux processus de renouvellement à temps discret. Nous proposons donc la définition suivante dans le cas discret :

Définition 3. *L'opérateur SE discret H associe à toute variable aléatoire X comme ci-dessus une variable aléatoire discrète positive ou nulle X_H de la fonction de masse de probabilité $H(P_X)$ est donnée par*

$$(1.3) \quad H(P_X)(j) \equiv P(X_H = j) = \frac{P(X \geq j+1)}{\mathbb{E}(X)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Une version légèrement différente de cet opérateur a été considérée par Whitt [183] pour des variables aléatoires X discrètes **strictement** positives. Dans ce cas, X_H est décrite par

$$P(X_H = j) = \frac{P(X \geq j)}{\mathbb{E}(X)}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Contrairement à ce dernier opérateur, H défini en (1.3) ne garantit pas une bijection sur l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{N}$. On peut directement vérifier que X_H et $(\nu X)_H$ sont identiquement distribués si ν est un indicateur indépendant de X . Cependant, quand

$\mathbb{E}(X)$ est fixée, H est bien bijectif car

$$\begin{aligned} (1P)X = 0 &= 1 - \mathbb{E}(X) P(X_H = 0), \quad \text{and} \\ (1P)X = j &= \mathbb{E}(X) [P(X_H = j - 1) - P(X_H = j)], \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

La définition (1.3) présente l'avantage de fournir une relation simple entre les moments binomiaux de X_H et X .

Dans l'article [115], nous montrons comment cet opérateur et ses itérés transforment les ordres s -convexes et les espaces de moments associés, à la fois dans le cas discret et dans le cas continu. Cela nous permet de plus de proposer une méthode pour résoudre le problème d'optimisation s -convexe dans le sous-ensemble des distributions qui sont t -monotones, $t \in \mathbb{N}_0$. Pour $t = 1$, cette propriété correspond à la décroissance de la densité (discrète ou continue), et pour $t = 2$ cela correspond à la décroissance et convexité de la densité. La monotonie d'ordre t dans le cas discret (resp. continu) signifie que les t premières différences de la densité discrète (resp. dérivées de la fonction de densité) sont de signes alternés, la première étant négative. Notre théorème principal dit que le problème d'optimisation s -convexe parmi les distributions t -monotones est (presque) équivalent, en appliquant l'opérateur SE, à un problème d'optimisation $s + t$ -convexe sans contrainte de monotonie. Il avait déjà été montré dans plusieurs articles que les extréma s -convexes pouvaient être améliorés quand on se limitait à des lois à densité décroissante et, plus généralement, unimodale (voir par exemple Denuit et al. [66], [68], [65]). Notre contribution dans [115] peut être vue comme une extension de ces résultats qui est obtenue en utilisant l'opérateur SE et ses itérés.

Lorsque $s = t = 2$, le suprémum 2-convexe a bien une densité discrète convexe sur le support $[0, n]$ mais pas sur $\mathbb{N}$ (il y a un décrochage au point n) : soit $\nu_1 = \mathbb{E}(Y)$ la moyenne fixée dans l'ensemble d'admissibilité $\mathcal{B}_{2,2}(n)$. Alors le suprémum est $Y_{max}^{(2,2)}$ décrit par

$$(1.6)_{max}^{(2,2)}(n) = \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } 1 - 2\nu_1/(n+1), \\ 1, \dots, n & \text{avec probabilité } 2\nu_1/n(n+1). \end{cases}$$

Avec Manel Kacem et Claude Lefèvre, nous finalisons actuellement un article dans lequel nous déterminons les extréma s -convexes t -monotones pour $s \leq 2$ et $t \leq 2$ en imposant que la t -monotonie soit vérifiée sur $\mathbb{N}$ tout entier. Nous avons également un autre projet d'article sur les extréma s -convexes avec Claude Lefèvre et Esterina Masiello.

2. RISQUE DE LONGÉVITÉ

Le risque de longévité est le risque (horrible !) que les assurés vivent plus longtemps que prévu. Plus sérieusement, au-delà du risque que chaque personne qui atteint l'âge de cent vingt ans sorte un disque

comme Jeanne Calment, l'allongement de la durée de vie, s'il est bienvenu d'un point de vue philanthrope tant que les gens vivent en moyenne plus longtemps en bonne santé, pose évidemment des problèmes aux organismes ou institutions qui se sont engagés à leur verser des rentes (retraites, retraites complémentaires, autres rentes viagères, etc...).

Il ne faut pas confondre risques de longévité et de mortalité : le premier est un risque de long terme ; le second est un risque de court terme, dont une composante importante est le risque de catastrophe (pandémie, terrorisme, risques biologiques et sanitaires, ...).

Comprendre et gérer le risque de longévité n'est pas une chose aisée. Ce domaine de recherche est au centre de nombreux autres : probabilités, statistiques, assurance-vie, démographie, médecine, finance (risque de taux, risque de contrepartie entre autres) bien sûr, mais aussi théorie de la fiabilité, géostatistique (lors de forages pétroliers, les résultats de deux ou trois carottages imposent des contraintes fortes sur la composition du sous-sol au voisinage de ces forages, qui permettent de réduire l'incertitude sur la taille et la forme de la nappe potentielle ; de la même façon, certaines informations ou hypothèses sur la mortalité peuvent permettre de reconstituer en partie les tables prospectives ou du moment utilisées par les assureurs). Nous espérons contribuer à faciliter la communication entre les chercheurs des différents domaines impliqués en profitant de la complémentarité des chaires de recherche de l'Institut Louis Bachelier, en particulier lors du semestre spécial sur le risque de longévité qui sera organisé début 2011 à Paris par les membres des chaires impliquées.

Les actuaires ont pendant de nombreuses années utilisé des tables de mortalité dites du moment, avant de passer à des tables prospectives pour les engagements de rentes. Ils regroupaient donc les probabilités pour quelqu'un (de vivant et) d'âge $x \in \mathbb{N}$ de décéder avant d'atteindre l'âge $x + 1$. Ces probabilités étaient estimées sur une période d'observation commune et permettaient de reconstituer (en mélangeant donc des générations différentes) une table de mortalité dite du moment, qui commençait avec 100 000 assurés à l'âge 0 et qui continuait avec le nombre de survivants moyen obtenu en multipliant la population initiale par le produit des taux de mortalité annuels. Bien évidemment, le problème de cette méthode est qu'elle sous-estime énormément la longévité des individus dans les pays développés dans lesquels la longévité progresse : sur la base de l'évolution de la population fictive d'une table du moment, quelqu'un qui a 20 ans aujourd'hui serait supposé avoir dans 50 ans le même taux de mortalité annuel à l'âge $x = 70$ que celui constaté sur la génération de son grand-père actuellement. Des tables dites prospectives ou par génération sont depuis quelques décennies construites dans les pays développés afin de tenir compte

de la progression anticipée de la longévité. Le gros problème est que les démographes sont très divisés sur les prévisions des tendances de longévité futures. Comme il n'y a pas de consensus au niveau de la tendance moyenne, on se doute qu'il y a évidemment un très grand nombre de modèles de mortalité stochastiques, certains très différents des autres, qui visent à représenter l'aléa pesant sur la longévité future. Dans l'article [30] co-écrit avec Pauline Barrieu, Harry Bensusan, Nicole El Karoui, Caroline Hillairet, Claudia Ravanelli et Yahia Salhi, nous avons, dans un travail collectif impliquant l'équipe de recherche sur la longévité de la chaire de recherche Dérivés du Futur, tenté de faire le point et de proposer des idées sur les types de modélisations du risque de longévité, les questions réglementaires, ainsi que les problématiques relatives au transfert du risque, à l'évaluation et à la couverture de ces produits. Comme cet article [30] est écrit dans un but de synthèse, je renvoie le lecteur à ce document pour une revue détaillée sur ces sujets. Je vais néanmoins expliquer brièvement comment les premières lois de durée de survie étaient construites et pourquoi les chercheurs en risque de taux et de crédit se sont lancés sur le sujet du risque de longévité.

Le modèle non trivial de durée le plus simple est probablement celui défini par la loi exponentielle. Il intervient notamment en assurance non-vie et en finance dans la modélisation de la durée entre deux sauts (qui peuvent représenter des sinistres en assurance et des sauts dans les rendements des actifs en finance) du processus de Poisson. La propriété de perte de mémoire rend la loi exponentielle particulièrement inadaptée pour le risque de longévité. Pour traduire les variations de la mortalité en fonction de l'âge (mortalité infantile, accidentelle, vieillissement, etc...), on peut définir la fonction de survie S par

$$S(t) = P(T > t) = e^{-\int_0^t \mu(s) ds},$$

où $\mu(s)$ est appelé taux de hasard de S à l'âge $s \geq 0$ et est défini par

$$(2.1) \quad \mu(s) = -\frac{\partial(\ln S)}{\partial s}(s).$$

En choisissant des formes paramétriques pour μ on peut obtenir les modèles classiques de Gompertz, Makeham, etc ... Pour un individu vivant d'âge x aujourd'hui, la probabilité de vivre encore au moins t années supplémentaires est donnée par

$$S(t | x) = e^{-\int_0^t \mu(x+s) ds}.$$

Si on souhaite intégrer une dynamique d'évolution calendaire de la mortalité, on est amené à définir le taux de hasard $\mu(x, t)$ pour l'âge x à la date t . La probabilité de survivre jusqu'à une date $\tau > t$ sachant qu'on a l'âge x à la date t est alors égale à :

$$(2.2) \quad S(t, x, \tau) = P_t(T > x + (\tau - t) | T > x) = e^{-\int_t^\tau \mu(x+s-t, s) ds}.$$

Dans les modèles de mortalité stochastique, les $\mu(x, s)$ sont aléatoires. Plus précisément, les lois de ces variables aléatoires sont déduites :

- soit de l'étude pour chaque âge x du processus $s \rightarrow \mu(x, s)$. On peut parler dans ce cas d'un modèle qui traduit la variation aléatoire de la mortalité du moment (ici à l'instant s),
- soit de l'étude du processus $s \rightarrow \mu(x + s, s)$ qui traduit l'évolution de la survie dans le temps d'un individu d'âge x . On peut parler dans ce cas de modèle de "cohorte".

Le plus souvent les chercheurs ayant une culture financière choisissent un modèle de diffusion pour le second, appelé processus d'intensité stochastique, de manière à obtenir des expressions explicites ou semi-explicites de la fonction de survie.

Avec les modèles déterministes (pour l'instant, mais cela se généralisera aux modèles stochastiques), l'équation (2.2) fait évoluer la définition du taux de hasard en fonction de la fonction de survie de la formule (2.1) à la formule suivante : pour $\tau > 0$,

$$(2.3) \quad \mu(x, \tau) = \lim_{t \uparrow \tau} \left[-\frac{\partial(\ln S)}{\partial \tau}(x, t, \tau) \right].$$

Le terme entre crochets dans l'équation (2.3), qu'on pourrait noter $\mu(x, t, \tau)$ est à rapprocher de la notion de taux d'intérêt instantané forward dans la théorie de l'évaluation des zéro-coupons (produits financiers caractérisés par le versement d'un (euro, dollar, ...) à la maturité T), la fonction de survie étant à rapprocher du prix. Cela conduit donc la plupart des auteurs inspirés par les modèles de taux d'intérêt à définir un taux de mortalité instantané forward qui devient un processus à ajouter au taux d'intérêt instantané forward dans les modèles stochastiques qui traitent simultanément le risque de longévité et le risque financier (en les supposant quasiment toujours indépendants).

Sans rentrer dans les détails et sans nous lancer dans une revue du sujet, rappelons tout de même le modèle de Lee-Carter qui a été utilisé par le *Bureau of Census* américain pour l'élaboration des tables de mortalité prospectives (pour prévoir la mortalité future), et dont s'inspirent un grand nombre de techniques de construction de tables de mortalité prospectives et de modèles de mortalité stochastique. Le livre de Delwaerde et Denuit [63] est une bonne référence sur l'élaboration de tables de mortalité prospectives.

Le modèle de Lee-Carter est plutôt un modèle d'inspiration "mortalité du moment", puisque les $\mu(x, t)$ s'écrivent

$$\mu(x, t) = e^{\alpha(x) + \beta(x)\kappa(t)},$$

même si l'on pourrait en avoir une approche par générations.

Les modélisations stochastiques issues du modèle de Lee-Carter partent soit de l'étude des "résidus", soit de l'étude du processus (de la série) des $(\kappa(t))$ en temps continu (ou discret).

Une des caractéristiques communes testées sur des périodes et des pays développés différents est que la série $(\kappa(t))$ se modélise par une dérive affine décroissante qui se prolonge facilement tout au moins sur une période future d'amplitude raisonnable (une dérive linéaire négative conduit asymptotiquement à des taux de mortalité nuls (quel que soit l'âge) !). Il est donc inévitable d'observer des changements de tendance de longévité régulièrement.

Dans un projet d'article avec Yahia Salhi et Christian Mazza, nous tentons de détecter rétrospectivement ces changements de tendance dans un cadre univarié (en regroupant toutes les plages d'âge) et dans un cadre multivarié (la dimension correspondant au nombre de classes d'âge distinguées). Dans un autre projet d'article avec Nicole El Karoui, Christian Mazza et Yahia Salhi, nous nous intéressons à la problématique de détection rapide de changements de tendance de longévité par différents acteurs (réassureurs, assureurs directs, investisseurs, analystes, gouvernements, ...) qui ont accès à des sources d'information très diverses. Tenter de détecter le plus vite possible un changement de tendance tout en contrôlant la probabilité de fausse alerte n'est pas un problème nouveau. A l'époque de la guerre froide, l'école russe a beaucoup travaillé sur ces problèmes dans le domaine des radars : on cherchait alors à détecter un changement de tendance dans le signal capté par le radar (cela correspondait en première approximation à un passage d'un mouvement brownien avec dérive nulle à un brownien avec dérive non nulle) le plus vite possible (de manière à pouvoir riposter ou tenter d'intercepter le missile avant qu'il ne soit arrivé), tout en évitant si possible les fausses alarmes (de manière à ne pas déclencher un conflit mondial à cause d'une excursion un peu trop longue d'un mouvement brownien). La détection de rupture et la détection "rapide" de rupture ont fait l'objet de nombreux travaux, par exemple par P. Gapeev, A. Shiryaev, et N. El Karoui.

Avec les membres de l'équipe de la chaire "Dérivés du futur", nous comptons réfléchir sur les types de produits de titrisation du risque de longévité qui auraient à la fois suffisamment de simplicité et de transparence pour les marchés financiers et qui permettraient de maintenir le risque de base et le risque de contrepartie (qui est particulièrement important du fait de la maturité des engagements) suffisamment bas.

Le risque de base correspond au risque que les flux financiers générés par un portefeuille financier détenu par un assureur ou un réassureur

ne correspondent pas assez bien aux flux engendrés par les mouvements de la mortalité et des marchés financiers. Nous évoquons dans l'article de synthèse [30] mentionné plus haut certains moyens de prendre en compte le risque de base, notamment en suivant l'approche de Ben-susan et El Karoui [34] fondée sur des techniques de dynamique des populations.

Dans la prépublication [166] co-écrite avec Yahia Salhi, nous nous intéressons à une modélisation conjointe de la longévité de la population nationale (sur laquelle la plupart des indices utilisés dans les opérations de titrisation devraient être fondés) et de celle de la population assurée (qui est celle qui engendre les flux réels pour l'assureur). Nous montrons que dans certains pays des séries temporelles associées à la longévité de ces deux groupes semblent présenter de la co-intégration (un peu comme les prix du pétrole et du gas, voir Benmenzer et al. [33], ou les indicateurs de mortalité de plusieurs pays étudiés par Lazar et Denuit [110]). Cela nous amène à nous intéresser pour un âge x donné ou une classe d'âges à des séries temporelles de dimension 2 comme $Q_t(x) = (q_t^N(x) \quad q_t^E(x))^T$. La première coordonnée (avec un N) correspond au taux de mortalité annuel de la population nationale, alors que la seconde (avec un E) correspond à celui du portefeuille d'assurances, constaté par l'expérience (d'où le E). Rappelons que pour $z \in [0, 1]$, le logit de z est défini par

$$\text{logit}(z) = \ln \frac{z}{1-z}.$$

Nous nous intéressons à la représentation de $\text{logit}Q_t(x)$ par une équation qui fait entrer de la co-intégration dans le modèle dit de Cairns et al. [43] : pour $t \geq p$, où p est un certain entier naturel (fréquemment égal à 1 dans les cas considérés)

(2.4)

$$\text{logit}Q_t(x) = \Phi_t + \sum_{k=1}^{k=p} A_k \text{logit}Q_{t-k}(x) + \varepsilon_t(x), \quad \varepsilon_t(x) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

où chaque A_i est une matrice (2×2) de paramètres et Φ_t correspond à la tendance. Les $(\varepsilon_t(x))_t$ sont i.i.d. en t . Nous testons la présence de co-intégration dans les séries obtenues à partir des données de plusieurs pays, et nous quantifions l'impact de la présence ou de l'absence de la co-intégration sur le besoin en capital économique dû au risque de base.

Deux sources de risque de base particulières sont l'objets de deux projets d'articles. Le premier, une véritable arlésienne, consiste à étudier avec Elsa Renouf l'effet de sélection médicale sur la mortalité de la population assurée : grossièrement, on observe sur les portefeuilles d'assurés devant passer une visite médicale à la signature du contrat, une sous-mortalité pendant les cinq premières années. Au-delà de cette

période, l'effet de la sélection médicale à l'entrée semble fortement diminué. Il est donc important de prendre en compte l'âge des différents contrats (la durée de détention écoulée) de manière à ne pas trop surestimer la différence future entre la mortalité du portefeuille d'assurances et la mortalité nationale si le portefeuille est "jeune".

Le deuxième projet porte sur un phénomène qui est plus marqué dans certains pays que dans d'autres : l'effet cohorte. En effet, certaines générations, ou cohortes (groupes de personnes nées la même année) présentent des taux de mortalité particulièrement différents de ce à quoi on pourrait s'attendre au vu des générations alentours. Avec Séverine Gaille, Yahia Salhi et Michael Sherris, nous allons commencer à chercher une explication à certains de ces effets du côté des causes de mortalité (cancers, problèmes cardio-vasculaires, accidents, ...). Il est en général assez difficile de travailler sur les causes de mortalité, qui sont assez mal renseignées dans les données, et sont souvent multiples et corrélées. Néanmoins, nous espérons trouver un début d'explication rationnelle à cet effet cohorte, qui est particulièrement présent au Royaume-Uni par exemple. Cela est important pour savoir dans quelle mesure cet effet risque de persister, de se renforcer ou de s'atténuer dans les vingt années à venir.

Enfin, nous travaillons avec Martin Jimenez sur les problématiques d'évaluation et de couverture de certains produits de type *variable annuities*, produits d'assurance-vie complexes contenant de multiples options pour l'assuré. Nous allons poursuivre notre travail sur le sujet en collaboration avec Nicole El Karoui et Trung Lap Nguyen, qui réfléchissent également sur le sujet. Comme pour le risque de rachat dans les contrats d'épargne plus traditionnels qui seront abordés dans le chapitre 6.1, il convient dans ce cas de figure d'adapter les techniques financières classiques pour prendre en compte les comportements des assurés qui sont loin d'être toujours financièrement rationnels, et peuvent présenter des crises de corrélation, dont nous avons déjà parlé au chapitre 7 de la première partie en théorie du risque en univers univarié. Nous commençons maintenant à parler des pistes de recherche en théorie du risque avec une problématique liée aux crises de corrélation en univers multivarié.

3. THÉORIE DU RISQUE

3.1. Crises de corrélation en univers multivarié. Dans un projet d'article, nous nous intéressons à deux types de crises de corrélation : celles qui se produisent indépendamment des pertes observées jusqu'au début de la crise, et celles qui sont déclenchées par un sinistre important. Nous considérons des modèles univariés, ainsi que des modèles à quatre branches d'activité (réparties éventuellement dans deux pays

différents). Nous essayons de montrer que sous des hypothèses raisonnables, au niveau d'un pays et au niveau agrégé, les crises de corrélation déclenchées par un sinistre important sont en général plus dangereuses que celles qui surviendraient de manière moins directe. En revanche, si l'on s'intéresse à des indicateurs de risque comme la probabilité qu'au moins une branche soit ruinée (notée ψ_{or} et définie en (9.2) au chapitre 9.2), alors comme souvent pour les probabilités de ruine multivariées, on observe l'effet inverse pour des niveaux de réserve initiale élevés.

Avec Gilles Stupfler et sa directrice de thèse Armelle Guillou, nous nous intéressons à la détection de crises de corrélation en assurance et en finance et à certains problèmes d'estimation dans ces modèles multivariés à environnement markovien commun. Nous travaillons actuellement à la fois sur des applications à des bases de données de sinistres de type incendies (en assurance non-vie) et également à une base de données de rachats et d'arbitrages par les épargnants en assurance-vie. Le risque de rachat en assurance-vie sera traité plus en détail dans le chapitre 6.1 de cette deuxième partie. L'arbitrage évoqué précédemment n'a rien à voir avec la notion financière de stratégie de coût initial négatif ou nul ouvrant à un profit toujours positif ou nul et d'espérance strictement positive (arbitrage du premier type) ou de profit strictement positif à la date zéro avec un gain futur positif ou nul (arbitrage du second type); un arbitrage désigne ici la décision par un assuré de changer de support de contrat d'épargne (par exemple de passer d'un support en unité de compte avec une forte composante de type actions à un support en euros). De tels mouvements, s'ils sont massifs et se produisent à un mauvais moment, peuvent avoir des conséquences néfastes pour l'assureur. La récente crise financière a engendré un grand nombre d'arbitrages dans plusieurs portefeuilles d'assurance vie en France de supports comportant une composante actions vers des supports en euros, ce qui a constitué un exemple de crise de corrélation entre risques d'assurance et de finance habituellement supposés peu corrélés. Ce phénomène est décrit plus en détail dans la pré-publication [123] coécrite avec Pierre Arnal et Romain Durand dont nous reparlerons au chapitre 5 de cette deuxième partie.

3.2. Méthode dite d'Erlangisation. Dans le projet d'article [29] avec Mathieu Bargès et Xavier Venel, nous calculons la probabilité de ruine en temps fini de manière approchée en utilisant la méthode d'Erlangisation, qui consiste à remplacer l'horizon de fin T par une variable aléatoire $T_k = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$ de loi Erlang de moyenne T (les σ_i sont i.i.d. et de loi exponentielle de paramètre $\frac{k}{T}$). Lorsque k est suffisamment grand, la variance de T_k (qui est égale à $\frac{T^2}{k}$) est suffisamment petite pour donner une approximation correcte. Cette méthode, introduite en

théorie de la ruine par Asmussen et al. [18] et utilisée et développée par de nombreux auteurs (voir par exemple Asmussen et al. [17], Badescu et al. [26] et Avram et al. [22]) est une alternative intéressante aux méthodes asymptotiques lorsque la réserve initiale n'est pas assez grande pour qu'on puisse utiliser l'équivalent asymptotique de la probabilité de ruine en temps fini. Nous nous intéressons à la prise en compte des cycles de réassurance, et du fait que certains changements de phase peuvent être causés par un sinistre important ou un cumul de sinistres importants. Les niveaux de prix des contrats de réassurance fluctuent en effet au cours du temps, alternant entre niveaux de prix relativement bas (résultant d'une concurrence entre nombreux réassureurs) et prix élevés suite par exemple à la sélection faite entre les réassureurs après une ou deux mauvaises années : comme évoqué dans l'article [30] sur la longévité, le transfert de risque (que ce soit par titrisation ou par réassurance traditionnelle) devient plus compliqué et plus onéreux après des événements tels que l'attentat du World Trade Center, l'ouragan Katrina ou la faillite de Lehmann Brothers. Or, habituellement, les changements de cycle étaient modélisés en théorie de la ruine en utilisant le modèle de modulation par un processus d'environnement markovien introduit au chapitre 6 de la partie 1. Dans ce modèle, les montants de sinistre n'ont pas d'impact sur les changements d'état de l'environnement. Nous proposons un modèle qui prend en compte l'impact des sinistres importants sur les cycles de réassurance et analysons l'impact de cet effet sur la probabilité de ruine en temps fini.

3.3. Autres travaux en cours en théorie de la ruine. Dans le modèle classique de théorie de la ruine, le taux de cotisation par unité de temps c est déterministe et fixe dans le temps. Comme mentionné page 14, nous avons montré dans l'article [113] qu'il est possible d'étendre certaines formules comme celle de Picard-Lefèvre au cas où le taux de cotisation pour unité de temps varie au cours du temps de manière déterministe (de manière à prendre en compte une évolution de la taille du portefeuille d'assurés par exemple). Toutefois, en pratique, le taux de cotisation est souvent calculé à partir d'un barycentre entre un indicateur de sinistralité du marché et un indicateur basé sur la sinistralité passée observée par la compagnie : lorsqu'un assuré d'une certaine mutuelle française avait percuté un pont avec sa 2CV et engendré une perte d'exploitation importante pour l'usine approvisionnée habituellement par la voie ferrée qui passait sur le pont endommagé, les assurés de la mutuelle ont vu leur cotisation augmenter de 20% l'année suivante. Evidemment, cela peut engendrer des mouvements d'un certain nombre d'assurés vers un autre assureur, ce que nous ne prenons pas en compte ici, mais qui sera évoqué au chapitre 6.2. Le poids accordé à la sinistralité passée observée par l'assureur lui-même peut être obtenu grâce à la théorie de la crédibilité. Les fondements de

ce domaine peuvent être consultés dans ces deux articles de Bühlmann [40, 41]. Dans une pré-publication en cours de révision avec Julien Truffin [177], nous nous intéressons au comportement asymptotique de la probabilité de ruine quand les niveaux de cotisation sont mis à jour à partir du modèle de crédibilité linéaire de Bühlmann. Notre approche est voisine de celle d'Asmussen [14]. Nous obtenons des résultats de grandes déviations pour des montants de sinistres de loi à queue lourde et à queue légère ainsi qu'une borne pour la probabilité de ruine. Dans certains cas, nous retrouvons des résultats de travaux sur les processus à moyennes mobiles de Nyrhinen [144] et de Mikosch et Samorodnitsky [137], ainsi que de travaux de Gerber [83] et de Promislow [157].

Dans un travail en cours avec Christophette Blanchet, Diana Dorobantu et Sana Louhichi, nous nous intéressons à l'impact de la prise en compte du défaut potentiel du réassureur sur la probabilité de ruine d'un assureur. Nous commençons par analyser le cas très schématique dans lequel l'assureur cède la totalité du risque au réassureur. Dans ce modèle de risque en dimension 2, la dépendance entre les processus de risque de l'assureur et du réassureur est prise en compte à l'aide de chocs communs : si le réassureur fait défaut, la compagnie d'assurances peut éventuellement subir un sinistre au moment du défaut du réassureur, et doit par la suite prendre en charge les sinistres qui se produisent. Nous espérons ensuite considérer des cas dans lesquels l'assureur conserve une partie du risque.

Dans un autre travail en cours avec Sana Louhichi, nous nous intéressons à l'approximation brownienne du processus de risque lorsqu'on est en présence d'une multitude de sauts d'amplitudes peu importantes. Pour certains risques d'assurance santé, on a en effet un grand nombre de remboursements dont les montants sont assez faibles (rien à voir avec les risques de catastrophes naturelles pour lesquelles on est en présence d'un petit nombre de sinistres très coûteux). Or ces montants sont soumis à l'influence de certains facteurs (déremboursement de certains médicaments par la sécurité sociale, augmentation du ticket modérateur, inflation sectorielle, inflation générale, ...) qui ont tendance à créer une dépendance positive entre les montants de sinistres. Nous montrons que l'on peut généraliser certains résultats de convergence (lorsque les sauts deviennent de plus en plus petits et de plus en plus fréquents) de processus de risque pour la topologie de Skorohod quand les montants de sinistres ont une variance finie et présentent certaines formes de dépendance positive utilisées pour prendre en compte la corrélation évoquée plus haut.

Nous travaillons également actuellement sur des formules exactes pour la probabilité de ruine en temps infini en dimension 1 ainsi qu'en

dimension supérieure (ψ_{or}) lorsque les montants de sinistres individuels suivent une loi de Pareto et présentent certaines forme de dépendance.

Enfin, dans un travail en cours avec Manel Kacem et Véronique Maume-Deschamps, nous nous intéressons à un modèle de risque dans lequel les montants de sinistres sont conditionnellement indépendants par rapport à un processus d'environnement qui n'est pas forcément markovien. Dans ce cadre, la mémoire du processus d'environnement joue un rôle important, ce qui nous permet par exemple de tenir compte du fait qu'il y a eu une crise financière dans les trois dernières années (ce qui est connu comme un facteur aggravant pour plusieurs branches d'activité comme la branche incendies de locaux commerciaux et industriels, la fraude à l'assurance augmentant régulièrement suite à une période de crise). Ce travail va dans le sens de la prise en compte des corrélations entre marchés de l'assurance et de la finance, dont nous avons déjà parlé dans le chapitre 2 sur le risque de longévité, et dont nous reparlerons notamment dans le chapitre 6.1 sur le risque de rachat en assurance-vie.

4. RISQUES LIÉS AU CLIMAT

Avec Alexandre Mornet, Esterina Masiello et Pierre Ribereau, nous avons pour l'instant deux projets d'article concrets, qui portent sur l'exploitation de deux bases de données. La première concerne la sinistralité des conducteurs de voitures ayant souscrit l'assurance au kilomètre. Le rapport avec le réchauffement climatique est assez vague, il s'agit de voir dans quelle mesure l'incitation à conduire moins ou mieux peut être récompensée par une tarification avantageuse pour les assurés respectueux de l'environnement. La deuxième base de données vient d'être constituée par Alexandre Mornet : il s'agit des localisations précises et des conditions météorologiques dans la station la plus proche de chaque sinistre de la base de données tempêtes d'Allianz, chez qui Alexandre effectue sa thèse en contrat CIFRE sur le thème réchauffement climatique et actuariat.

Au-delà du co-encadrement avec Pauline Barrieu de la thèse d'Alexandre Mornet, je compte participer activement au projet MIRACCLE (Mesures et Indicateurs de Risques Adaptées au Changement CLimatiquE et assurabilité des risques associés) porté par Pierre Ribereau et qui vient d'être retenu par le ministère de l'écologie. Je reprends ici des passages du projet rédigé par l'équipe du projet MIRACCLE afin de préciser un peu plus ce qui deviendra certainement un nouvel axe de recherche (à côté des autres et non en remplacement) pour moi dans le futur proche.

Evaluer l'impact du changement climatique et mettre en place une politique publique de gestion des risques associés suppose de disposer d'indicateurs de risque pertinents. Dans le cadre du projet MIRACCLE, nous proposons de définir de nouveaux indicateurs ou mesures de risques adaptés aux problèmes du changement climatique. Ces mesures devront prendre en compte la nature vectorielle (nature multifactorielle des risques environnementaux) et/ou spatio-temporelle des données climatiques ainsi que la non-stationnarité de leurs lois.

Ces mesures de risques permettront de mieux comprendre les impacts et les conséquences du changement climatique et donc de permettre aux instances décisionnelles d'adapter leur politique en fonction des risques. Une attention particulière sera apportée à l'assurabilité des risques climatiques. En effet, l'état, à travers la Caisse Centrale de Réassurance se trouve directement affecté lors d'une catastrophe naturelle. Or, le changement climatique semble produire un accroissement des phénomènes extrêmes. Nous nous intéresserons en particulier à l'apparition de nouveaux titres sur les marchés financiers associés à la réalisation de conditions climatiques extrêmes (cat-bonds, produits indexés sur des indicateurs climatiques de type HDD/CDD, Heating ou Cooling Degree Day) et à leurs conséquences dans le contexte du changement climatique.

Le but du projet est donc double : mesurer les risques climatiques en proposant de nouvelles mesures de risques adaptées au changement climatique mais aussi mesurer l'impact économique du changement climatique sur les compagnies d'assurance, l'état et les marchés financiers.

Pour comprendre la problématique des mesures de risques associées aux changements climatiques, prenons un exemple pédagogique simple. Un décideur est confronté à la question suivante : quelle est la valeur u que la hauteur d'une crue ne dépassera qu'avec une probabilité faible α ($= 0,1\%$ par exemple) étant donné qu'il a observé les hauteurs des n crues précédentes ? Cette valeur u est la Value-at-Risk (VaR) de niveau $1 - \alpha$ du risque associé à la crue, à rapprocher de la réserve initiale du processus de risque classique. Si α est plus petit que $\frac{1}{n}$, les techniques statistiques simples ne peuvent pas répondre à cette question, à moins de se placer dans un cadre paramétrique (c'est-à-dire supposer connue la loi des hauteurs des crues). La théorie des valeurs extrêmes permet néanmoins d'estimer ce quantile si on suppose que les n crues sont issues de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, qui servent de base à la construction d'estimateurs de la VaR. Or, le changement climatique actuel va, à moyen et long terme, à l'encontre de cette hypothèse que les variables, d'une année à une autre sont de même loi (non stationnarité). C'est pourquoi de nouvelles mesures ou

indicateurs de risques doivent être développées, la non stationnarité ne pouvant être négligée pour des indicateurs de long terme. Ainsi, si l'on considère le risque de crues d'une rivière, il faut une mesure de risques "instantanée" et une mesure de risques à plus long terme. Le risque "instantané" (qui correspond à la VaR de la variable au temps t) est utile pour les compagnies d'assurance pour tarifier leurs contrats mais aussi pour prévoir les fonds nécessaires à la solvabilité de l'entreprise. Le risque à plus long terme (qui correspond à la valeur qui sera dépassée en moyenne une seule fois au cours des toutes les x prochaines années, appelé niveau de période de retour x années et donc au niveau de retour de x ans) est utile pour les compagnies de réassurance qui interviennent au-delà d'un seuil défini contractuellement avec l'assureur, mais aussi pour les collectivités et les instances décisionnelles dans le cadre de la construction d'ouvrages comme des digues, ou de la planification des politiques de prévention (un événement est déclaré catastrophe naturelle si son intensité dépasse le niveau de retour de 10 ans). Cet exemple simple peut se compliquer en prenant deux variables conjointement (crue et précipitations, crue et débit, crue Saône-Rhône....), ou plusieurs variables conjointes. En passant à la dimension spatiale, la notion de mesure de risque dépendra du support considéré. Est-ce que l'on doit mesurer le risque global d'une région ? Est-ce que la mesure du risque peut autoriser localement des valeurs élevées ? Ceci implique que les mesures de risques "classiques" ne peuvent pas être utilisées dans le contexte climatique, et encore moins en parlant de changement climatique. La méthodologie à utiliser regroupera donc diverses méthodes : des modèles probabilistes adaptés aux valeurs extrêmes et à la nature multivariée et/ou spatiale des données, l'identification et l'estimation de la dépendance entre variables, mais aussi de la dépendance temporelle et spatiale, et finalement l'adaptation des mesures de risques existantes aux contraintes propres aux données climatiques.

La Théorie des Valeurs Extrêmes est la branche des statistiques qui étudie le comportement des plus grandes observations d'un échantillon, quantifie de manière précise leur incertitude et, par extension, propose des estimations de probabilités ou de seuils encore jamais observés. Son résultat fondateur date de 1928 par Fisher et Tippett et depuis, elle a conquis de nombreux domaines d'applications comme la finance et l'assurance (Embrechts et al. [74]), l'hydrologie ou même les sciences du vivant. L'intérêt pour les valeurs extrêmes en sciences du climat est relativement récent (Kharin et al. [107], Goubanova et Li [92], Salvadori et al. [167]). Le résultat de Fisher et Tippett qui représente la base de cette théorie montre que le comportement du maximum, la plus grande valeur d'un échantillon, va ressembler de plus en plus (va converger) à celui d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi des extrêmes généralisées. Bien évidemment cette approche est critiquable puisqu'elle n'est basée que sur le maximum de l'échantillon et donc

n'exploite pas les informations contenues dans les autres grandes valeurs de l'échantillon ; ainsi elle ne doit être privilégiée que si l'on ne dispose que de maxima.

Des modélisations cherchant à intégrer une dimension spatiale pour les extrêmes des processus de précipitations ont été proposées, comme le modèle "tempête" de Smith [173] basée sur les processus max-stables (voir de Haan [54]). Cependant, la mise en oeuvre de ces techniques est extrêmement complexe. Il est d'ailleurs instructif de constater que dans les livres de références comme Coles [48] et Beirlant et al. [32], l'état de l'art de la recherche sur les extrêmes spatiaux n'occupe qu'une demi-page. Très récemment de nouveaux modèles (de Haan et Pereira [55], Schlather [168]) sont apparus, associés à des techniques d'estimation déjà connues dans d'autres domaines mais qui semblent particulièrement efficaces sur ces modèles (Padoan et al. [146]). Nous proposons de développer ces modèles spatiaux dans un cadre spatio-temporel, pour obtenir une approche spatio-temporelle des extrêmes et ainsi proposer des mesures de risques adaptées.

5. SOLVABILITÉ II ET ERM

Dans le dispositif Solvabilité II, le capital économique (au sens de capital de solvabilité, appelé précédemment SCR) correspond au montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon 1 an et au niveau de confiance 99,5%. Ce capital économique peut être en pratique calculé de deux façons : soit à l'aide d'une formule standard fournie pour le CEIOPS ¶, soit à l'aide d'un modèle interne ou d'un modèle interne partiel. Dans l'article [70] co-écrit avec Laurent Devineau, nous tentons d'expliquer les sources principales de différence de résultats que les compagnies d'assurance peuvent observer entre les deux modes de calcul. *Grosso modo*, la formule standard peut être vue comme le résultat obtenu avec une sorte de développement limité à l'ordre 1 du calcul du modèle interne. Nous montrons comment on peut essayer d'expliquer la différence entre les deux résultats par un petit nombre de termes croisés d'ordre supérieur lorsqu'on reste dans un certain domaine. Néanmoins, comme d'habitude, lorsqu'on est trop loin du point autour duquel le développement limité a été fait, on ne parvient en général que difficilement à expliquer l'écart dû à l'emploi d'une méthode locale pour un problème global.

La définition précise du capital économique repose sur trois notions :

- La ruine économique correspond à une situation où l'actif de la compagnie évalué en valeur de marché est inférieur à la valeur

¶. Le CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors) regroupe les représentants à haut niveau des autorités de contrôle des 30 États membres de l'Union Européenne et de l'Espace Economique Européen.

économique des passifs. En d'autres termes, il s'agit d'une situation dans laquelle les fonds propres économiques de la compagnie (calculés comme différence entre la valeur de marché de l'actif et de la valeur économique des passifs) sont négatifs.

- L'horizon d'une année impose de pouvoir disposer de la distribution des fonds propres économiques dans un an. Notons en effet qu'en date initiale les fonds propres économiques de la compagnie constituent une grandeur déterministe alors qu'un an plus tard, il s'agit d'une variable aléatoire dont les valeurs dépendent des aléas (financiers, démographiques, ...) qui se sont réalisés durant l'année.
- Le seuil 99,5% représente le niveau de solvabilité requis. La probabilité de l'événement « ruine économique » est dans ce cas inférieure à 0,5%.

Or, pour la plupart des portefeuilles d'assurance-vie, il est délicat d'obtenir cette distribution compte tenu de la complexité des liens de dépendances actif / passif qui découlent des mécanismes de participation aux bénéfices et des comportements de rachats dynamiques des assurés. La méthode de calcul du capital économique la plus précise revient à effectuer des simulations « market-consistent » (simulations secondaires) au sein de simulations « monde-réel » de première année (simulations primaires) afin de disposer d'une distribution de bilans économiques de la compagnie au bout d'un an. Cette mise en oeuvre (utilisée par exemple par Gordy et Juneja [91]) est connue sous le nom de « simulations dans les simulations » (SdS). Cependant, cette approche requiert un grand nombre de simulations et conduit à des temps de calcul conséquents. Ainsi, actuellement, pour estimer une VaR à 99,5%, de nombreux assureurs sont limités à 2000 ou 5000 simulations primaires ! De nombreuses techniques permettent d'améliorer la rapidité de convergence des simulations de Monte Carlo. Ces méthodes, notamment celles basées sur les systèmes de particules en interaction, sont décrites dans le livre de Del Moral [58], et dans celui de Glasserman [88] pour ce qui concerne l'ingénierie financière. Nous présentons dans l'article [69] co-écrit avec Laurent Devineau un algorithme de calcul permettant de réduire très significativement le nombre de simulations d'une projection SdS. Si la méthodologie SdS standard pouvait jusqu'alors s'avérer délicate à mettre en oeuvre au sein de certaines compagnies (en fonction notamment de leur nombre de portefeuilles), l'algorithme que nous avons développé rend désormais l'approche SdS envisageable quelle que soit la taille et la structure de la compagnie considérée. Le principe de cette méthode, que nous désignerons par « accélérateur SdS », consiste à « localiser » les scénarii les plus adverses en termes de solvabilité au moyen de facteurs de risques. L'accélérateur SdS repose en outre sur trois étapes clés : l'extraction de facteurs de risques élémentaires véhiculant l'intensité du risque des simulations primaires, la construction de régions d'exécution, une procédure itérative sur les seuils des

régions d'exécution de manière à prioriser les calculs relatifs aux situations les plus adverses en termes de solvabilité. L'idéal serait de disposer de l'équivalent d'un million de simulations primaires. Sur la plupart des portefeuilles d'assurance vie réels testés, en dimension inférieure ou égale à 4, l'accélérateur permet de n'exécuter les simulations secondaires que pour moins d'environ 60000 à 80000 simulations primaires. On peut espérer qu'avec les progrès de l'informatique, cet objectif soit atteignable d'ici quelques années, même si les simulations secondaires, qui courent jusqu'à l'extinction du portefeuille (horizon très long) sont très longues.

Dans la pré-publication en cours de finalisation [47] co-écrite avec Matthieu Chauvigny, Laurent Devineau et Véronique Maume-Deschamps, nous montrons la convergence de l'estimateur de la VaR des fonds propres économiques à 1 an lorsque la fonction situation nette à 1 an vérifie soit une hypothèse de concavité globale en les facteurs de risque, soit des hypothèses plus souples mêlant concavité directionnelle locale et monotonie en certains facteurs de risques sur certains sous-espaces. Nous obtenons également, à l'aide de techniques usuelles de la théorie des processus empiriques, des intervalles de confiance asymptotiques qui pourraient (devraient !) être utilisés dans Solvabilité II, sous la forme par exemple de l'Estimation Risk Solvency Margin introduite dans l'article [124] et évoquée dans le chapitre 5 de la première partie de ce document de synthèse. Nous calculons également la probabilité d'arrêt inopiné de l'accélérateur alors qu'il ne devrait pas s'arrêter. Nous proposons une méthode de vérification qui, sous l'hypothèse de concavité, garantit qu'on ne s'est pas arrêté trop tôt. Cette méthode est fondée sur un corollaire du théorème de Krein-Milman. Enfin, nous donnons différentes manières de définir les zones de non exécution des simulations secondaires, lorsque la loi des facteurs de risque élémentaires est connue ou lorsqu'elle ne l'est pas (par les méthodes des lignes de niveau de la densité jointe, des quantiles géométriques, des bagplots et des fonctions de profondeur, voir [47] pour les définitions de ces différents concepts). En effet, les générateurs de scénarios économiques étant payants et vendus par un oligopole, les compagnies ne connaissent pas forcément le modèle exact qui a servi à générer les facteurs de risques primaires (même s'ils en connaissent les grands principes par la documentation). La plupart des compagnies d'assurance utilisent actuellement des facteurs de risques distribués selon une loi elliptique, et nous sommes partis de ce qui était utilisé le plus souvent pour illustrer notre méthode d'accélération sur des cas réels. Néanmoins, nous sommes convaincus que certains de ces modèles (notamment ceux de taux et d'actions) ont tendance à sous-estimer les queues de distribution des risques ainsi que les crises de corrélation ou corrélations des extrêmes. C'est la raison pour laquelle nous proposons dans [47] des

méthodes qui ne dépendent pas de la loi jointe des facteurs de risque. A titre d'exemple, même si cela n'est pas vraiment encore passé dans les mœurs en assurance, nous montrons comment définir des zones de non exécution pour des facteurs de risque dont les lois marginales sont α -stables (voir les travaux de John Nolan, par exemple [142] pour en savoir plus sur les lois α -stables) ou pour des facteurs de risques dont la structure de dépendance est décrite par une copule de survie de Clayton, qui présente de la dépendance forte des extrêmes à droite (ce qui signifie que la probabilité de valeurs très grandes pour plusieurs risques simultanément est beaucoup plus élevée avec cette structure de corrélation que dans le cas indépendant). Nous ne détaillons pas ici la théorie des copules, le lecteur intéressé par ce sujet peut consulter le livre de Nelsen [141].

La plupart des compagnies d'assurances utilisent une technique d'évaluation de leur situation nette en prenant *grosso modo* l'espérance, sous une probabilité risque-neutre, de la somme des flux futurs actualisés. Le plus souvent, cela s'estime par une série de simulations secondaires en univers risque-neutre (dans l'approche SdS mentionnée ci-dessous), ou par des simulations directes en univers risque-neutre pour le calcul de la Market-Consistent Embedded Value (MCEV) qui est censée représenter une certaine valeur virtuelle de la compagnie s'il n'y avait pas d'affaire nouvelle. Les professionnels avertis savent que cette valeur absolue ne veut pas dire grand chose mais espèrent qu'on puisse tirer des informations en relatif lorsqu'on compare les MCEV de deux compagnies. Je compte m'interroger dans les prochaines années sur la notion de valeur dans ces deux contextes et sur la façon dont on devrait évaluer les portefeuilles d'assurance. Cela dépend évidemment de ce que l'on veut en faire ; toutefois, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 au sujet du risque de longévité, nous pensons qu'il faut très souvent sortir de la méthode risque-neutre pour un certain nombre de raisons. On peut en citer deux : la première est que les passifs d'assurance sont très loin d'être répliquables sur les marchés financiers, même avec le développement d'outils de titrisation comme les cat-bonds ou les mortality bonds. La deuxième est que les assureurs qui investissent une partie de leur actif dans des actions ne cherchent pas du tout à éliminer le risque (même si l'investissement d'une partie du surplus en actions peut protéger de certains risques) mais au contraire à augmenter la performance moyenne (d'ailleurs au fur et à mesure que l'on se rapproche de la maturité du contrat, l'investissement se fait de plus en plus en obligations).

Au-delà de Solvabilité II, nous avons réfléchi dans l'article [130] co-écrit avec Wayne Fisher et Shaun Wang aux problématiques liées à la

prise en compte de l'effet de diversification au niveau groupe. Ce document faisait suite au premier séminaire de recherche de l'ERMII (Enterprise Risk Management Institute, International) qui avait regroupé plus de 100 personnes de trente pays différents à Lyon en 2007. Dans l'article [131], nous expliquons comment une crise de liquidité peut engendrer une crise de corrélation quand la plupart des acteurs du marché se retrouvent dans des expositions similaires et quand le marché manque de profondeur pour absorber le choc. D'une façon générale, je compte réfléchir sur des questions diverses liées à l'ERM en interaction avec l'ERMII, avec le club ERM que je vais relancer et qui regroupe à Paris une dizaine de chercheurs et enseignants-chercheurs et une trentaine de professionnels en ERM, ainsi que dans le cadre de la chaire de recherche en cours de finalisation au laboratoire SAF dans laquelle je suis impliquée.

Dans la pré-publication [123] co-écrite avec Pierre Arnal et Romain Durand, nous analysons plus en détail les différents mécanismes qui peuvent créer des crises de corrélation en assurance et en finance. Ces mécanismes peuvent entre autres provenir de source de corrélation ignorée, d'un risque de défaut ou de liquidité partagé, du fait que le marché tout entier utilise les mêmes scénarios économiques (car Barrie and Hibbert ont un quasi-monopole) ou les mêmes courbes d'exposition de catastrophes naturelles (car AIR, EQECAT et RMS ont un oligopole avec une grande partie de modèles *black-box*^{||}), de risques endogènes capables de générer des cercles vicieux ou de comportements moutonniers potentiels d'assurés (comme nous le verrons au chapitre suivant) ou d'investisseurs. La cartographie des risques que les compagnies d'assurances ont mis en place ou sont sur le point de mettre en place est souvent statique (mono-périodique). C'est d'ailleurs d'une certaine façon le cas de l'approche SdS de Solvabilité II dans laquelle seule la valeur finale (au bout d'un an) du facteur de risque est retenue et non la simulation primaire sur la première année tout entière (même s'il serait possible de rajouter un facteur de risque pour incorporer plus de mémoire au détriment de la vitesse et de la capacité de calcul). Nous insistons dans ce papier [123] sur la nécessité d'avoir une vision dynamique de ces phénomènes, le temps disponible pour gérer ces crises lorsqu'elles surviennent et la capacité de le faire, ainsi que leur durée ou leur enchaînement sont en effet des éléments très importants pour mesurer la dangerosité potentielle de certains événements défavorables. Ce passage à une vision dynamique reste encore à venir, y compris pour ce qui est du risque de rachat en assurance-vie et des résiliations en assurance non-vie que nous allons aborder maintenant.

^{||}. boîte-noire, car propriétaires

6. THÉORIE DES JEUX ET COMPORTEMENT DES ASSURÉS

6.1. Rachats en assurance vie. Ce paragraphe reprend essentiellement l'article co-écrit avec Xavier Milhaud et Marie-Pierre Gonon [138] sur le risque de rachats en assurance-vie, à paraître dans la revue *Risques*. Cet article étant écrit dans un souci de vulgarisation, je trouve plus logique de l'inclure ici que dans le recueil d'articles acceptés et publiés.

Le contrat d'Assurance Vie est un accord entre une compagnie d'assurance qui prend l'engagement irrévocable de verser des prestations au bénéficiaire du contrat en fonction de la réalisation d'événements aléatoires viagers, en échange de quoi le souscripteur prend l'engagement révocable de verser des primes en fonction de la réalisation d'événements viagers. Le risque de rachat est omniprésent dans les problématiques de valorisation et de provisionnement de contrats d'épargne dans les compagnies d'Assurance Vie. Pour satisfaire par exemple à un besoin de liquidité immédiat, l'assuré peut à tout moment résilier son contrat et récupérer tout (rachat total) ou une partie (rachat partiel) de son épargne capitalisée, éventuellement diminuée de pénalités prévues à cet effet et dépendantes des conditions fixées lors de la souscription. Une bonne compréhension du comportement des assurés et plus globalement du rachat et de ses facteurs explicatifs permet d'adapter les caractéristiques et clauses lors de la création de nouveaux produits, avec pour objectif la rétention de clients par exemple, ainsi que de mettre en place de meilleures stratégies de gestion actif-passif. Dans la pré-publication co-écrite avec Xavier Milhaud et Véronique Maume-Deschamps [139], nous utilisons et comparons deux méthodes pour analyser les causes de rachat en régime de croisière en assurance-vie : la régression logistique et les méthodes CART (Classification And Regression Trees).

Deux questions sous-jacentes au rachat doivent être abordées : tout d'abord les conséquences financières d'un mauvais choix de modélisation pour les lois de rachat et ensuite son impact sur les garanties. Nous nous focalisons ici sur le premier point, étroitement lié au contexte économique et financier et donc à la dynamique des taux d'intérêt. Selon la position de l'assureur (phase d'investissement ou de désinvestissement) et son anticipation du marché, un scénario haussier aussi bien que baissier des taux d'intérêts peut avoir des conséquences importantes au niveau de sa gestion actif-passif et de son stock de réserves. Ces conséquences peuvent même devenir critiques en cas de rachat massif (dans un scénario haussier) ou d'absence de rachat (scénario baissier), obligeant ainsi l'assureur à emprunter ou à verser un taux garanti supérieur au rendement de ses propres actifs. Nous distinguons ainsi qu'un problème d'adéquation se pose pour l'assureur dans tous

les cas. Habituellement, l'assureur fait l'hypothèse que son portefeuille d'assurés est composé de personnes se comportant indépendamment les unes des autres, ce qui est relativement juste en régime de croisière. Néanmoins un problème majeur se pose dans le cas d'une perturbation de l'équilibre économique et financier : cette hypothèse est clairement inadaptée et les comportements des assurés deviennent fortement corrélés (Loisel et Milhaud [126]). La recherche académique s'est penchée sur le sujet et les travaux de Lee et al. (2008) apparaissent comme un premier essai de modélisation dynamique du comportement humain, de même que Fum et al. [81], Kim et al. [108] et Pan et al. [147] qui étudient les réactions humaines en cas de panique. D'un point de vue plus quantitatif, Loisel et Milhaud [126] présentent certains outils théoriques servant à modéliser l'interaction et la corrélation entre les comportements des assurés, de même que McNeil et al. [134] qui posent la question dans un contexte plus général. Des problématiques telles que l'anti-sélection et l'aléa moral ont aussi une importance toute particulière, notamment dans un contexte de contrat d'Assurance Vie Prévoyance où la santé des assurés est la question centrale dans le processus de tarification et de gestion des risques. Il est par exemple interdit en France de racheter des contrats de type rente viagère pour éviter le phénomène d'anti-sélection. En épargne, la santé des marchés financiers a une incidence directe sur le comportement de rachat des assurés, créant une corrélation entre leurs décisions. Vandaele et Vanmaele [182], Bacinello [25], Siu [172] et Tsai et al. [178] entre autres ont développé des méthodes de valorisation financière de l'option de rachat. Ces méthodes ont vocation à être améliorées pour une meilleure prise en compte de la modélisation comportementale et des réelles questions et besoins de l'assuré lors du rachat, notamment en ce qui concerne la rationalité de son choix. Commençons par dresser un panorama du rachat en France et évoquer certains aspects clefs dans la compréhension de ce risque. Après avoir abordé la question du risque de rachat et de son évaluation dans le contexte réglementaire de la directive Solvabilité II, nous parlerons de l'intégration du problème de corrélation des comportements dans un modèle interne et donnerons un aperçu de l'impact des crises de corrélation en termes de rachat sur le capital économique et donc indirectement la santé financière d'une compagnie d'Assurance Vie.

6.1.1. *Bref panorama des rachats en France.* L'assurance vie reste aujourd'hui le placement préféré des français en offrant la meilleure combinaison risque-rendement-fiscalité : fin 2008, 27 millions de contrats ouverts avaient déjà été ouverts et les prestations annuelles versées par les compagnies d'Assurance Vie dépassaient 100 milliards d'euros ! Les offres sont multiples et permettent de répondre aux besoins des

épargnants, les principaux critères étant la liquidité des sommes investies, le rendement et la sécurité financière associée aux entreprises d'assurance. La liquidité se traduit principalement pour les contrats d'épargne mono-support (un seul support en euro, à valeur plancher garantie) et multi-supports par la liberté de sortir du contrat sans perdre les avantages du produit. Pour cela, l'assuré devra connaître quelques bases de fiscalité applicables aux contrats d'assurance vie. Cette fiscalité évolue régulièrement mais continue d'offrir certains avantages, notamment pour les contrats d'une durée de détention supérieure à huit ans. Cette caractéristique est clairement identifiable dans les observations passées, avec un pic de rachat lors de la neuvième année de présence en portefeuille. L'assuré devra aussi porter attention aux pénalités qui pourraient lui être prélevées au moment de la sortie, qui selon les codes des assurances sont cependant limitées à 5% de la somme épargnée sur 10 ans. Enfin, il pourra étudier les options qui lui sont offertes dans le contrat pour bénéficier de cette liquidité sans pour autant clore son contrat d'assurance vie et ainsi ne pas perdre son antériorité fiscale, au travers notamment des possibilités de rachat partiel ou d'avance. On entend par rachat partiel la possibilité qui est offerte à un assuré de ne racheter qu'une partie de son épargne, et ainsi ne pas demander la fermeture de son contrat. L'avance quand à elle est assimilable à un prêt que consent l'assureur envers l'assuré, l'épargne de l'assuré constituant alors le collatéral. D'autres clients, souvent plus fortunés sont également intéressés par le caractère non rachetable de leur contrat, mais cela est un autre sujet... Le phénomène de rachat est important pour les assureurs français. Meilleure en est leur connaissance, meilleure sera leur anticipation de gestion des flux entrants et sortants en termes de trésorerie. Ils pourront même parfois en profiter pour améliorer leur offre produit. Alors quelles sont les variables explicatives du choix de l'assuré, comment pouvons-nous projeter les comportements humains, pouvons-nous répondre en moyenne ? Tout d'abord en termes de variables explicatives, on a observé pendant de nombreuses années l'influence directe de la fiscalité, des profils patrimoniaux des assurés... Ces observations avaient pour avantage qu'elles étaient connues parfaitement de l'assureur et ainsi pouvaient faire l'objet de modélisations relativement adaptées. Puis, on a introduit des effets moins évidents tels que la tenue des marchés financiers. Lorsque les taux baissent, les assurés seraient-ils plus fidèles ? Lorsque les taux montent, auraient-ils tendance à sortir ? Rien n'est moins évident, d'autant que les données sur lesquelles les variations de taux pourraient influencer le comportement des assurés ne sont pas nombreuses. Même au plus haut de la crise financière que l'on vient de connaître, la fidélité des clients n'a pas été énormément entamée. Ce n'est pas tant que les assurés ne suivent pas l'actualité ou ne prennent pas le temps de modifier leur allocation d'épargne, que la difficulté d'évaluer à quel taux

de marché il serait intéressant pour eux d'aller souscrire ailleurs en tenant compte de nouveaux frais d'entrée, d'une perte de l'antériorité fiscale... Ces nombreux facteurs compliquent les décisions à prendre de manière rationnelle. En revanche, c'est lorsque l'on commence à s'intéresser au rendement relatif des contrats d'assurance vie entre eux que l'épargnant devient plus vigilant, voir plus susceptible. Et c'est ainsi que les assureurs se sont penchés sur cette question. Combien de clients vont racheter leur contrat lorsque je servirai un taux de rendement différent de mon concurrent, et à partir de quel écart de taux commenceront-ils à réagir ? Là encore, les statistiques ne sont pas nombreuses. Quelques assureurs ont démarché leurs clients pour connaître leur sensibilité à un écart de taux, mais les résultats obtenus ne permettent pas de modéliser de façon fiable une courbe de comportement. D'autres facteurs comme le relai d'information par la presse quant aux taux garantis peuvent influencer les décisions des souscripteurs. A ce titre, de nombreux assureurs ont élu un produit vitrine sur lequel ils communiquent pour le marché. De là à penser que tous les assurés aient été aussi largement récompensés... Voyons maintenant comment Solvabilité 2 traite le risque de rachat.

6.1.2. *Le risque de rachat dans le cadre de Solvabilité II.* Avant de parler du risque de rachat en tant que tel, évalué pour les besoins en solvabilité, rappelons que Solvabilité 2 réforme également les calculs de provisions. Dans un bilan au format économique, les provisions techniques seront estimées avec des hypothèses de type best estimate, quand elles sont aujourd'hui estimées avec des hypothèses prudentes définies par exemple par le code des assurances. Quelles sont les implications pour ce qui est des rachats ? Aujourd'hui, le taux de rachat estimé dans les provisions techniques d'épargne est de 100% à chaque instant. L'entreprise d'assurance se doit donc d'immobiliser en permanence, dans ses comptes, le montant de l'épargne de chaque client, comme si le rachat devait intervenir demain. Dans un bilan plus économique, les provisions incluront des probabilités de rachat estimées en best-estimate, c'est-à-dire reflétant au mieux la probabilité de rachat observée par l'assureur. Ainsi, les hypothèses de rachat qui ne servaient hier que dans le cadre des calculs d'embedded value ou d'études ALM (Gestion Actif-Passif) vont-elles être introduites dans la comptabilité des entreprises d'assurances. Ces lois de probabilités vont également servir à simuler le comportement des assurés dans le cadre des stress tests qui interviennent dans le calcul du SCR (Solvency Capital Requirement). Les assureurs sont encouragés à utiliser la meilleure connaissance possible qu'ils ont de leur portefeuille, pour modéliser les flux financiers de passif dans les scénarios de stress comme ceux des marchés financiers permettant d'estimer les SCR de taux, d'actions...

Les dernières pré-spécifications techniques de la cinquième étude quantitative d'impact (QIS 5) donnent des formules fermées (cf TP 4.58) pour modéliser les rachats en fonction des garanties offertes, des taux servis, des conditions de marchés financiers... Ces différentes formules devant encore être calibrées par les assureurs pour refléter au mieux leur portefeuille. Enfin, dans la liste des risques nécessitant la mise en oeuvre d'un calcul de SCR, se trouve à part entière le risque de rachat à l'intérieur du module de risque de souscription. Dans les dernières parutions des pré-spécifications techniques, les assureurs sont priés d'étudier l'impact d'une hausse constante du taux de rachat de 50% (limité à un taux de rachat de 100%), l'impact d'une baisse constante du taux de rachat de 50% (limité à un taux de rachat diminué de 20% en absolu) et l'impact d'un rachat massif de 30% de la population sous risque. L'impact le plus significatif sera retenu pour être intégré au risque de souscription vie selon la matrice de corrélation définie dans les textes (paramètre de pseudo-corrélation égal à 50% avec le SCR du risque de dérive des frais). Au-delà du référentiel Solvabilité II, voyons de plus près comment gérer les corrélations potentielles entre les comportements des assurés durant les périodes de crises, susceptibles de venir entamer la solvabilité des entreprises.

6.1.3. *Crises de corrélation.* Au cours de périodes de crise, les assurés ont tendance à se comporter de manière irrationnelle et à prendre des décisions qui deviennent très corrélées. Ce comportement moutonnier, que nous avons déjà évoqué au chapitre 5 de cette deuxième partie, s'il était poussé à l'extrême, pourrait conduire à deux situations extrêmes possibles : soit les assurés peuvent quasiment tous racheter leur contrat, soit personne ne rachète. Dans la pré-publication co-écrite avec Xavier Milhaud [126], nous décrivons comment modéliser mathématiquement cette dépendance, par l'introduction d'un paramètre de corrélation traduisant avec quelle intensité l'assuré moyen va avoir tendance à se comporter comme ses voisins. La corrélation induite par une situation de crise change radicalement l'allure du risque de rachat supporté par l'assureur et augmente très significativement le matelas de sécurité qu'il doit mettre de côté pour éventuellement faire face à un risque de rachat extrême. Ce matelas de sécurité, représenté par la notion de capital économique dans Solvabilité II, peut être schématiquement calculé dans un modèle interne partiel comme la différence entre la Value-at-Risk (notée VaR) de niveau α et le best estimate. Dans notre contexte, l'assureur veut déterminer un taux de rachat qui ne sera pas dépassé avec probabilité 99,5%. Mais étant donné qu'une baisse soudaine et intense des taux de rachat peut également le mettre en péril, l'assureur pourrait aussi être intéressé par s'assurer que le taux de rachat sera toujours supérieur à un niveau minimal avec probabilité (ce dont nous ne parlons pas ici). La figure 6.1.3 illustre notre raisonnement dans le

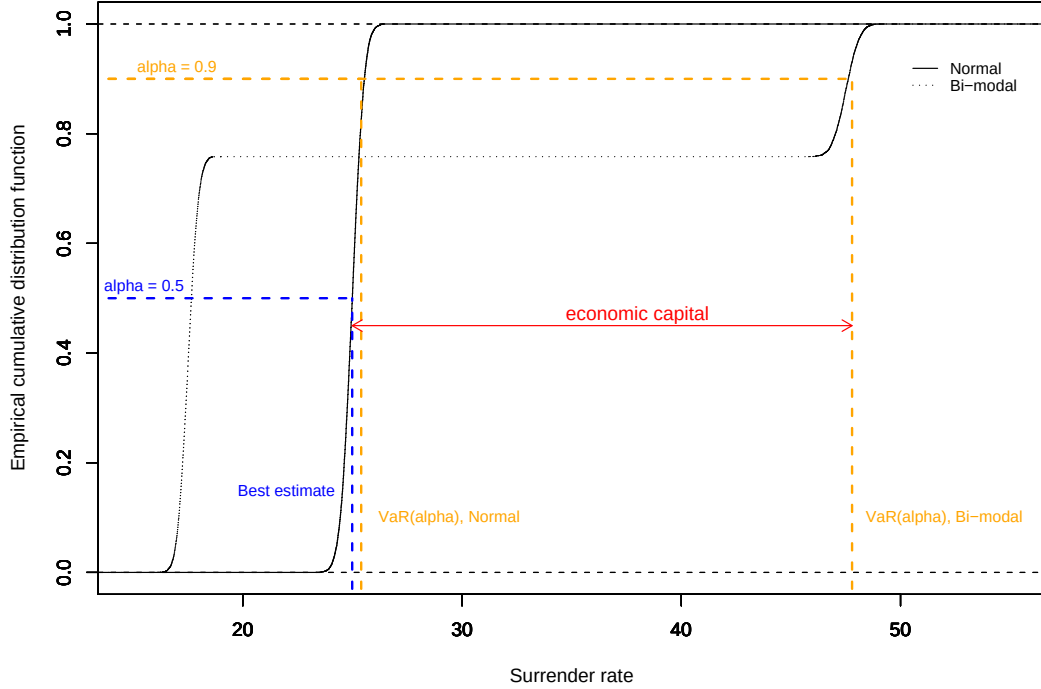


FIGURE 14. Différence de capital économique en fonction de l'hypothèse de corrélation des comportements.

premier cas, c'est à dire celui d'un niveau de taux de rachat à ne pas dépasser. La fonction de répartition du taux de rachat dessinée sur ce graphe représente la probabilité que le taux de rachat soit inférieur à un certain niveau (ce niveau est donné par l'axe des ordonnées). Cette courbe tend vers la valeur 1 lorsque le taux de rachat augmente vers de grandes valeurs, ce qui traduit le fait que la probabilité que le taux de rachat observé soit inférieur à un taux de rachat maximal très grand vaut quasiment 1. La courbe noire en pointillés représente le cas où l'on prend en compte la corrélation entre les comportements des assurés (comme dans Loisel et Milhaud [126]) tandis que la courbe noire en trait plein correspond au cas où les comportements sont supposés indépendants. Le best estimate tel que défini dans la directive Solvabilité II est l'estimation du taux de rachat moyen prédit. Le capital économique est la différence entre la VaR et le best estimate. Ce graphe montre l'énorme différence entre le matelas de sécurité ou capital économique à allouer suivant l'hypothèse de dépendance ou non des comportements des assurés et permet de se rendre compte de l'ampleur de la négligence en termes de risque de rachat couvert lorsque l'assureur considère que ses assurés agissent indépendamment les uns

des autres. Sur ce graphe où le taux de rachat moyen est de 25% et la corrélation lorsqu'elle est introduite est de 30%, nous voyons que la Value-at-Risk du taux de rachat augmente quasiment de 23%. Toutefois, la corrélation peut être bien plus élevée, et la différence en capital économique serait par conséquent bien plus importante. De plus, même une corrélation très faible peut avoir un impact non négligeable sur les besoins en capital économique.

6.2. Résiliations en assurance non-vie et théorie des jeux. En assurance non-vie, on parle de taux de résiliation plutôt que de taux de rachat. En effet, en France, la plupart des contrats d'assurance non-vie traditionnels sont annuels avec tacite reconduction. Cette situation est très différente dans d'autres pays comme le Royaume-Uni, où le contrat prend fin au bout d'un an si l'assuré ne se manifeste pas. On observe d'ailleurs outre-Manche des taux de départ des assurés beaucoup plus élevés, un marché de l'assurance automobile déficitaire et très concurrentiel : un assureur qui ne se trouverait pas parmi la première page (celle des tarifs les plus avantageux) sur les comparateurs de devis d'assurance en ligne risquerait de ne pas avoir d'affaires nouvelles (et donc plus d'affaires du tout, puisque les contrats en cours ne sont pas renouvelés automatiquement). Ces comparateurs sont très précis et prennent en compte une tarification (souvent basée sur les modèles linéaires généralisés) qui fait intervenir un grand nombre de variables explicatives allant jusqu'au code postal de l'assuré ! En effet, au Royaume-Uni, le code postal est très précis et permet d'obtenir indirectement beaucoup d'informations, sur le niveau de vie de l'assuré par exemple. En France, le fait que les contrats soient reconduits automatiquement en l'absence de résiliation par l'assuré maintient des taux de résiliation assez bas, entre 5% et 20% pour la plupart des assureurs automobiles par exemple. L'évolution des réseaux de courtage et de distribution des contrats d'assurances, ainsi que celle des comparateurs en ligne qui existent déjà mais ont une influence limitée pour l'instant en France (en comparaison du Royaume-Uni par exemple) auront un effet non négligeable sur les taux de résiliation futurs. Avec Christophe Dutang, dont je co-encadre avec Véronique Maume-Deschamps la thèse en contrat CIFRE chez Axa, nous avons le projet d'analyser les facteurs qui augmentent la probabilité de résiliation en assurance non-vie, en prenant en compte l'historique sur plusieurs années, car la décision de résilier son contrat d'assurance non-vie semble être influencée non seulement par l'augmentation du tarif l'année courante, mais aussi ce qui s'est passé lors des années précédentes.

Ces mouvements d'assurés d'une compagnie à une autre, ou du statut d'assuré à celui de non assuré pour les assurances non obligatoires, ne sont pas du tout pris en compte dans les modèles de théorie de la

ruine. Nous avons vu au chapitre 3.3 que la compagnie d'assurance adaptait ses niveaux de cotisation à la sinistralité observée lors des années précédentes, et que cela pouvait jouer sur la probabilité de ruine. Toutefois, dans ces modèles, il manque un élément important : si les niveaux de prime montent trop chez un assureur, ou si un autre assureur est très agressif en termes de tarification afin d'attirer de nouveaux clients, des assurés sont susceptibles de changer d'assureur de façon assez massive. Il convient donc dans l'idéal de considérer l'évolution de la compagnie d'assurances et du marché, au lieu de ne s'intéresser qu'à la compagnie d'assurances dans un monde virtuel dans lequel la stabilité du portefeuille d'assurés est garantie. Les compagnies d'assurances devraient normalement fixer leur niveau de cotisation en fonction de ce qui s'est passé avant et de leur anticipation des réactions des concurrents. Nous commençons à travailler sur des problèmes au confluent de la théorie du risque et de la théorie des jeux avec Christophe Dutang, Hansjoerg Albrecher et Marco Scarsini.

RÉFÉRENCES

- [1] Hansjoerg Albrecher, Hans-Ulrich Gerber, and Hailiang Yang. Dividends and gerber-shiu functions : Canadized. 2010.
- [2] Hansjörg Albrecher and Søren Asmussen. Ruin probabilities and aggregate claims distributions for shot noise Cox processes. *Scand. Actuar. J.*, (2) :86–110, 2006.
- [3] Hansjörg Albrecher, Søren Asmussen, and Dominik Kortschak. Tail asymptotics for the sum of two heavy-tailed dependent risks. *Extremes*, 9(2) :107–130, 2006.
- [4] Hansjörg Albrecher, Andrei Badescu, and David Landriault. On the dual risk model with tax payments. *Insurance Math. Econom.*, 42(3) :1086–1094, 2008.
- [5] Hansjörg Albrecher, Sem Borst, Onno Boxma, and Jacques Resing. The tax identity in risk theory—a simple proof and an extension. *Insurance Math. Econom.*, 44(2) :304–306, 2009.
- [6] Hansjörg Albrecher and Onno J. Boxma. A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance : Mathematics & Economics*, 35(2) :245–254, 2004.
- [7] Hansjörg Albrecher, Corina Constantinescu, Gottlieb Pirsic, Georg Regensburger, and Markus Rosenkranz. An algebraic operator approach to the analysis of Gerber-Shiu functions. *Insurance Math. Econom.*, 46(1) :42–51, 2010.
- [8] Hansjörg Albrecher and Christian Hipp. Lundberg’s risk process with tax. *Bl. DGVFM*, 28(1) :13–28, 2007.
- [9] Hansjörg Albrecher, Jean-François Renaud, and Xiaowen Zhou. A Lévy insurance risk process with tax. *J. Appl. Probab.*, 45(2) :363–375, 2008.
- [10] Hansjörg Albrecher and Jef L. Teugels. Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *Journal of Applied Probability*, 43(1) :257–273, 2006.
- [11] Rohana S. Ambagaspitiya. Ultimate ruin probability in the Sparre Andersen model with dependent claim sizes and claim occurrence times. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44(3) :464 – 472, 2009.
- [12] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Math. Finance*, 9(3) :203–228, 1999.
- [13] Søren Asmussen. Risk theory in a Markovian environment. *Scand. Actuar. J.*, (2) :69–100, 1989.
- [14] Søren Asmussen. On the ruin problem for some adapted premium rules. *Ma-PhysSto Research Report No 5, University of Aarhus, Denmark*, 1999.
- [15] Søren Asmussen. *Ruin probabilities*, volume 2 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000.
- [16] Søren Asmussen and Hansjoerg Albrecher. *Ruin probabilities*, volume 14 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*.
- [17] Søren Asmussen, Florin Avram, and Martijn R. Pistorius. Russian and American put options under exponential phase-type Lévy models. *Stochastic Process. Appl.*, 109(1) :79–111, 2004.
- [18] Søren Asmussen, Florin Avram, and Miguel Usabel. Erlangian approximations for finite-horizon ruin probabilities. *Astin Bull.*, 32(2) :267–281, 2002.

- [19] Søren Asmussen, Bjarne Højgaard, and Michael Taksar. Optimal risk control and dividend distribution policies. Example of excess-of loss reinsurance for an insurance corporation. *Finance Stoch.*, 4(3) :299–324, 2000.
- [20] Søren Asmussen and Offer Kella. A multi-dimensional martingale for Markov additive processes and its applications. *Adv. in Appl. Probab.*, 32(2) :376–393, 2000.
- [21] J.-P. Aubin. *Mathematical methods of game and economic theory*. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [22] Florin Avram, Nikolai Leonenko, and Landy Rabehasaina. Series expansions for the first passage distribution of Wong-Pearson jump-diffusions. *Stoch. Anal. Appl.*, 27(4) :770–796, 2009.
- [23] Florin Avram, Zbigniew Palmowski, and Martijn Pistorius. A two-dimensional ruin problem on the positive quadrant. *Insurance Math. Econom.*, 42(1) :227–234, 2008.
- [24] Florin Avram, Zbigniew Palmowski, and Martijn R. Pistorius. Exit problem of a two-dimensional risk process from the quadrant : exact and asymptotic results. *Ann. Appl. Probab.*, 18(6) :2421–2449, 2008.
- [25] Anna Rita Bacinello. Endogenous model of surrender conditions in equity-linked life insurance. *Insurance : Mathematics and Economics*, 37(2) :270–296, 2005.
- [26] Andrei L. Badescu, Eric C. K. Cheung, and David Landriault. Dependent risk models with bivariate phase-type distributions. *J. Appl. Probab.*, 46(1) :113–131, 2009.
- [27] Philippe Barbe, Anne-Laure Fougères, and Christian Genest. On the tail behavior of sums of dependent risks. *Astin Bulletin*, 36(2) :361–373, 2006.
- [28] Mathieu Bargès, Hélène Cossette, Stéphane Loisel, and Etienne Marceau. On the Moments of the Aggregate Discounted Claims with Dependence Introduced by a FGM Copula.
- [29] Mathieu Bargès, Stéphane Loisel, and Xavier Venel. On finite-time ruin probabilities with reinsurance cycles influenced by large claims. 2010.
- [30] P. Barrieu, H. Bensusan, N. El Karoui, C. Hillairet, S. Loisel, C. Ravanelli, and Y. Salhi. Understanding, modelling and managing longevity risk : key issues and main challenges. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010.
- [31] Pauline Barrieu and Nicole El Karoui. Optimal derivatives design under dynamic risk measures. In *Mathematics of finance*, volume 351 of *Contemp. Math.*, pages 13–25. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [32] J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Teugels, and Segers J. *Statistics of Extremes Theory and Applications*. Wiley Series in Probability and Statistics, 2004.
- [33] G. Benmenzer, E. Gobet, and C. Jerusalem. Arbitrage free co-integrated models in gas and oil future markets. *preprint*, 2007.
- [34] Harry Bensusan and Nicole El Karoui. Microscopic modelling of population dynamics : an analysis of longevity risk. 2010.
- [35] R. Biard, C. Lefèvre, S. Loisel, and H. Nagaraja. Asymptotic finite-time ruin probabilities for a class of path-dependent claim amounts using poisson spacings. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2010.
- [36] R. Biard, S. Loisel, C. Macci, and N. Veraverbeke. Asymptotic behavior of the finite-time expected time-integrated negative part of some risk processes and optimal reserve allocation. *J. Math. Anal. Appl.*, 367(2) :535–549, 2010.

- [37] Romain Biard. *Dépendance et événements extrêmes en théorie de la ruine : étude univariée et multivariée, problèmes d'allocation optimale*. PhD thesis, Université Lyon 1, 2010.
- [38] Romain Biard, Claude Lefèvre, and Stéphane Loisel. Impact of correlation crises in risk theory : asymptotics of finite-time ruin probabilities for heavy-tailed claim amounts when some independence and stationarity assumptions are relaxed. *Insurance Math. Econom.*, 43(3) :412–421, 2008.
- [39] Mathieu Boudreault, Hélène Cossette, David Landriault, and Etienne Marceau. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. *Scandinavian Actuarial Journal*, (5) :265–285, 2006.
- [40] Hans Bühlmann. Experience rating and credibility i. *Astin Bull.*, 4 :199–207, 1967.
- [41] Hans Bühlmann. Experience rating and credibility ii. *Astin Bull.*, 5 :157–165, 1969.
- [42] Jun Cai and Haijun Li. Dependence properties and bounds for ruin probabilities in multivariate compound risk models. *Journal of Multivariate Analysis*, 98(4) :757–773, 2007.
- [43] A.J.G. Cairns, D. Blake, and K. Dowd. A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty : Theory and calibration. *The Journal of Risk and Insurance*, 73(4) :687–718, 2006.
- [44] Eric A. Carlen and Étienne Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. In *Stochastics, algebra and analysis in classical and quantum dynamics (Marseille, 1988)*, volume 59 of *Math. Appl.*, pages 63–73. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.
- [45] F. Castella, G. Dujardin, and B. Sericola. Moments analysis in Homogeneous Markov reward models. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11(2) :583–601, 2009.
- [46] Peggy Cenac, Maume-Deschamps Véronique, and Clémentine Prieur. Some multivariate risk indicators ; minimization by using a Kiefer-Wolfowitz approach to the mirror stochastic algorithm. *submitted*, 2010.
- [47] Matthieu Chauvigny, Laurent Devineau, Stéphane Loisel, and Véronique Maume-Deschamps. Accelerating nested simulations in solvency ii : theory and practice in a copula and distribution-free framework. 2010.
- [48] S.G. Coles. *An introduction to statistical modelling of extreme values*. Springer, London, 2001.
- [49] Jeffrey F. Collamore. First passage times of general sequences of random vectors : a large deviations approach. *Stochastic Process. Appl.*, 78(1) :97–130, 1998.
- [50] Christophe Courbage. On bivariate risk premia. *Theory and Decision*, 50(1) :29–34, 2001.
- [51] Cindy Courtois, Michel Denuit, and Sébastien Van Bellegem. Discrete s -convex extremal distributions : theory and applications. *Appl. Math. Lett.*, 19(12) :1367–1377, 2006.
- [52] D.R. Cox. *Renewal Theory*. Methuen, London, 1972.
- [53] Bruno de Finetti. Su un impostazione alternativa della teoria colectiva del rischio. *Transactions of the XV International Congress of Actuaries*, 2 :433–443, 1957.
- [54] L. de Haan. A spectral representation for max-stable processes. *Ann. Probab.*, 12(4) :1194–1204, 1984.

- [55] L. de Haan and T.T. Pereira. Spatial extremes : Models for the stationary case. *Ann. Statist.*, 34(1) :146–168, 2006.
- [56] F. Etienne De Vylder. Numerical finite-time ruin probabilities by the Picard-Lefèvre formula. *Scand. Actuar. J.*, (2) :97–105, 1999.
- [57] F.E. De Vylder. *Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction*. Editions de l'Université Libre de Bruxelles - Swiss Association of Actuaries, Bruxelles, 1996.
- [58] Pierre Del Moral. *Feynman-Kac formulae*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 2004. Genealogical and interacting particle systems with applications.
- [59] F. Delbaen. Coherent risk measures on general probability spaces. In *Advances in finance and stochastics*, pages 1–37. Springer, Berlin, 2002.
- [60] S. Demarta. Multivariate Extreme Value Theory and Copulas. 2002. PhD thesis.
- [61] M. Denault. Coherent allocation of risk capital. *Journal of Risk*, 4(1) :7–21, 2001.
- [62] M. Denuit, C. Genest, and É. Marceau. Stochastic bounds on sums of dependent risks. *Insurance Math. Econom.*, 25(1) :85–104, 1999.
- [63] Michel Denuit and Antoine Delwaerde. *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*. 2005.
- [64] Michel Denuit and Claude Lefèvre. Some new classes of stochastic order relations among arithmetic random variables, with applications in actuarial sciences. *Insurance Math. Econom.*, 20(3) :197–213, 1997.
- [65] Michel Denuit, Claude Lefèvre, and M'hamed Mesfioui. On s -convex stochastic extrema for arithmetic risks. *Insurance Math. Econom.*, 25(2) :143–155, 1999.
- [66] Michel Denuit, Claude Lefèvre, and Moshe Shaked. The s -convex orders among real random variables, with applications. *Math. Inequal. Appl.*, 1(4) :585–613, 1998.
- [67] Michel Denuit, Claude Lefèvre, and Sergey Utev. Stochastic orderings of convex/concave-type on an arbitrary grid. *Math. Oper. Res.*, 24(4) :835–846, 1999.
- [68] Michel Denuit, Etienne De Vylder, and Claude Lefèvre. Extremal generators and extremal distributions for the continuous s -convex stochastic orderings. *Insurance : Mathematics and Economics*, 24(3) :201 – 217, 1999.
- [69] Laurent Devineau and Stéphane Loisel. Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des simulations dans les simulations pour le calcul du capital économique solvabilité ii. *Bulletin Français d'Actuariat*, 10(17) :188–221, 2009.
- [70] Laurent Devineau and Stéphane Loisel. Risk aggregation in solvency ii : How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula? *Bulletin Français d'Actuariat*, 9(18) :107–145, 2009.
- [71] Alfredo Egídio Dos Reis. How long is the surplus below zero? *Insurance Math. Econom.*, 12(1) :23–38, 1993.
- [72] Alfredo Egídio Dos Reis. On the moments of ruin and recovery times. *Insurance Math. Econom.*, 27(3) :331–343, 2000.
- [73] François Dufresne and Hans U. Gerber. The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin. *Insurance Math. Econom.*, 7(3) :193–199, 1988.

- [74] P. Embrechts, C. Klüppelberg, and T. Mikosch. *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [75] P. Embrechts and N. Veraverbeke. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. *Insurance : Mathematics & Economics*, 1(1) :55–72, 1982.
- [76] Israel Finkelshtain, Offer Kella, and Marco Scarsini. On risk aversion with two risks. *J. Math. Econom.*, 31(2) :239–250, 1999.
- [77] Peter C. Fishburn and Irving H. Lavalley. Stochastic dominance on unidimensional grids. *Math. Oper. Res.*, 20(3) :513–525, 1995.
- [78] Wayne Fisher, Stéphane Loisel, and Shaun Wang. On some key research issues in enterprise risk management related to economic capital and diversification effect at group level. *Bulletin Français d'Actuariat*, 8(15) :32–37, 2008.
- [79] Esther Frostig. The expected time to ruin in a risk process with constant barrier via martingales. *Working paper*.
- [80] Esther Frostig. Upper bounds on the expected time to ruin and on the expected recovery time. *Adv. in Appl. Probab.*, 36(2) :377–397, 2004.
- [81] D. Fum, F Del Missier, and Stocco A. The cognitive modeling of human behavior : Why a model is (sometimes) better than 10,000 words. *Cognitive Systems Research*, 8 :135–142, 2007.
- [82] Hans U. Gerber. *An introduction to mathematical risk theory*, volume 8 of *S.S. Heubner Foundation Monograph Series*. University of Pennsylvania Wharton School S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, Philadelphia, Pa., 1979. With a foreword by James C. Hickman.
- [83] Hans U. Gerber. Ruin theory in the linear model. *Insurance Math. Econom.*, 1(3) :177–184, 1982.
- [84] Hans U. Gerber. Mathematical fun with ruin theory. *Insurance Math. Econom.*, 7(1) :15–23, 1988.
- [85] Hans U. Gerber and Bruno Landry. On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option. *Insurance Math. Econom.*, 22(3) :263–276, 1998.
- [86] Hans U. Gerber and Elias S. W. Shiu. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1) :48–78, 1998.
- [87] Hans U. Gerber and Elias S. W. Shiu. Pricing perpetual options for jump processes. *N. Am. Actuar. J.*, 2(3) :101–112, 1998. With discussion by X. Sheldon Lin and Xiaolan Zhang and a reply by the authors.
- [88] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [89] Kaas R. Van Heerwaarden A.E. Bauwelinckx T. Goovaerts, M.J. *Effective Actuarial Methods*. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [90] MJ Goovaerts, R. Kaas, J. Dhaene, and M. Denuit. *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic, The Netherlands, 2001.
- [91] M. Gordy and S. Juneja. Nested simulation in portfolio risk measurement. *Finance and Economics Discussion Series, Divisions of Research, Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board, Washington D.C.*, 2008.
- [92] K. Goubanova and L. Li. Extremes in temperature and precipitation around the mediterranean basin in an ensemble of future climate scenario simulations. *Global and planetary change*, 2006.

- [93] Jan Grandell. *Aspects of risk theory*. Springer Series in Statistics : Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [94] F. Hampel. The influence curve and its role in robust estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 69 :383–393, 1974.
- [95] Ronchetti E.M. Rousseeuw P.J. Stahel W.A. Hampel, F.R. *Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, New York, 1986.
- [96] CC Heyde, SG Kou, and XH Peng. What Is a Good Risk Measure : Bridging the Gaps between Data, Coherent Risk Measures, and Insurance Risk Measures. *Preprint, Columbia University*, 2006.
- [97] Wassily Hoeffding. The extrema of the expected value of a function of independent random variables. *Ann. Math. Statist.*, 26 :268–275, 1955.
- [98] P.J. Huber. *Robust Statistics*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, New York, 1981.
- [99] H. Hult and F. Lindskog. Heavy-tailed insurance portfolios : buffer capital and ruin probabilities. Technical Report 1441, School of ORIE, Cornell University, 2006.
- [100] W. Hürlimann. Extremal moment methods and stochastic orders. applications in actuarial sciences. *Monograph*, 1999.
- [101] Zvetan G. Ignatov, Vladimir K. Kaishev, and Rossen S. Krachunov. An improved finite-time ruin probability formula and its Mathematica implementation. *Insurance Math. Econom.*, 29(3) :375–386, 2001. 4th IME Conference (Barcelona, 2000).
- [102] K. Jansen, J. Haezendonck, and M. J. Goovaerts. Upper bounds on stop-loss premiums in case of known moments up to the fourth order. *Insurance Math. Econom.*, 5(4) :315–334, 1986.
- [103] E. Jouini, M. Meddeb, and N. Touzi. Vector-valued measures of risk. *Finance and Stochastics*, 2005.
- [104] R. Kaas, A.E. Van Heerwaarden, and M.J. Goovaerts. Ordering of actuarial risks. *CAIRE, Brussels*, 1994.
- [105] Samuel Karlin and William J. Studden. *Tchebycheff systems : With applications in analysis and statistics*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XV. Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1966.
- [106] J. H. B. Kemperman. The general moment problem, a geometric approach. *Ann. Math. Statist*, 39 :93–122, 1968.
- [107] V.V. Kharin, F.W. Zwiers, X. Zhang, and G.C. Hegerl. Changes in temperature and precipitation extremes in the ipcc ensemble of global coupled model simulations. *J. Clim.*, 20 :1419–1444, 2007.
- [108] C. N. Kim, K. H. Yang, and J. Kim. Human decision-making behavior and modeling effects. *Decision Support Systems*, 45 :517–527, 2008.
- [109] D. Kortschak and H. Albrecher. Asymptotic results for the sum of dependent non-identically distributed random variables. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11(3) :279–306, 2009.
- [110] D. Lazar and M.M. Denuit. A multivariate time series approach to projected life tables. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2009.
- [111] C. Lefèvre and P. Picard. An unusual stochastic order relation with some applications in sampling and epidemic theory. *Advances in Applied Probability*, 25 :63–81, 1993.

- [112] Claude Lefèvre and Stéphane Loisel. On finite-time ruin probabilities for classical risk models. *Scand. Actuar. J.*, (1) :41–60, 2008.
- [113] Claude Lefèvre and Stéphane Loisel. Finite-time ruin probabilities for discrete, possibly dependent, claim severities. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 11(3) :425–441, 2009.
- [114] Claude Lefèvre and Sergey Utev. Comparing sums of exchangeable Bernoulli random variables. *J. Appl. Probab.*, 33(2) :285–310, 1996.
- [115] Claude Lefèvre and Stéphane Loisel. Stationary-excess operator and convex stochastic orders. *Insurance Math. Econom.*, 47 :64–75, 2010.
- [116] Charles Levi and Christian Partrat. Statistical analysis of natural events in the united states. *Astin Bull.*, 21(2) :253–276, 1991.
- [117] H. Levy. Stochastic dominance and expected utility : Survey and analysis. *Management Science*, 38 :555–593, 1992.
- [118] X. S. Lin and G. E. Willmot. Exact and approximate properties of the distribution of surplus before and after ruin. *Insurance Math. Econom.*, 23(1) :91–110, 1998.
- [119] X. S. Lin and G. E. Willmot. The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance Math. Econom.*, 27(1) :19–44, 2000.
- [120] Filip Lindskog and Alexander J. McNeil. Common Poisson shock models : applications to insurance and credit risk modelling. *Astin Bull.*, 33(2) :209–238, 2003.
- [121] Stéphane Loisel. Differentiation of some functionals of risk processes, and optimal reserve allocation. *J. Appl. Probab.*, 42(2) :379–392, 2005.
- [122] Stéphane Loisel. Differentiation of some functionals of risk processes, and optimal reserve allocation. *Journal of Applied Probability*, 42(2) :379–392, 2005.
- [123] Stéphane Loisel, Pierre Arnal, and Romain Durand. Correlation crises in insurance and finance, and the need for dynamic risk maps in ORSA. 2010.
- [124] Stéphane Loisel, Christian Mazza, and Didier Rullière. Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin. *Insurance Math. Econom.*, 42(2) :746–762, 2008.
- [125] Stéphane Loisel, Christian Mazza, and Didier Rullière. Convergence and asymptotic variance of bootstrapped finite-time ruin probabilities with partly shifted risk processes. *Insurance Math. Econom.*, 45(3) :374–381, 2009.
- [126] Stéphane Loisel and Xavier Milhaud. From deterministic to stochastic surrender risk models : impact of correlation crises on economic capital. 2010.
- [127] Stéphane Loisel and Nicolas Privault. Sensitivity analysis and density estimation for finite-time ruin probabilities. *J. Comput. Appl. Math.*, 230(1) :107–120, 2009.
- [128] Stéphane Loisel. *Contribution à l'étude de processus univariés et multivariés de la théorie de la ruine*. PhD thesis, Université Lyon 1, 2004.
- [129] Stéphane Loisel. Ruin theory with k lines of business. In *Proceedings of the 3rd Actuarial and Financial Day, Bruxelles*, pages 4–24, 2004.
- [130] Stéphane Loisel. Time to ruin, insolvency penalties and dividends in a markov-modulated multirisk model with common shocks. *Bulletin Français d'Actuariat*, 8(14) :4–24, 2007.

- [131] Stéphane Loisel. From liquidity crisis to correlation crisis, and the need for "quants" in erm. in *Risk Management : The Current Financial Crisis, Lessons Learned and Future Implications*, Edited by the SOA, CAS and CIA, pages 75–78, 2008.
- [132] E. Marceau and J. Rioux. On robustness in risk theory. *Insurance : Mathematics and Economics*, 29 :167–185, 2001.
- [133] Etienne Marceau. *Modélisation et évaluation des risques en actuariat*. Springer-Verlag, 2010.
- [134] A.J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative Risk Management*. Princeton Series In Finance, 2005.
- [135] Qingbin Meng, Xin Zhang, and Junyi Guo. On a risk model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Statistics & Probability Letters*, 78(13) :1727 – 1734, 2008.
- [136] G.G. Meyers. Estimating Between Line Correlations Generated by Parameter Uncertainty. *CAS Forum*, 1999.
- [137] Thomas Mikosch and Gennady Samorodnitsky. The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps. *Ann. Appl. Probab.*, 10(3) :1025–1064, 2000.
- [138] Xavier Milhaud, Marie-Pierre Gonon, and Stéphane Loisel. Les comportements de rachat en Assurance Vie en régime de croisière et en période de crise. *Risques*, 83 :76 – 81, Septembre 2010.
- [139] Xavier Milhaud, Stéphane Loisel, and Véronique Maume Deschamps. Surrender triggers in life insurance : classification and risk predictions. 2010.
- [140] Alfred Müller and Dietrich Stoyan. *Comparison methods for stochastic models and risks*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2002.
- [141] R.B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer Science+ Business Media, Inc., 2006.
- [142] John Nolan. Multivariate stable densities and distribution functions : general and elliptical case. In *Proceedings of the Deutsche Bundesbank's 2005 Annual Fall Conference*, 2005.
- [143] David Nualart. Analysis on Wiener space and anticipating stochastic calculus. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1995)*, volume 1690 of *Lecture Notes in Math.*, pages 123–227. Springer, Berlin, 1998.
- [144] Harri Nyhinen. Rough limit results for level-crossing probabilities. *J. Appl. Probab.*, 31(2) :373–382, 1994.
- [145] Bernt Oksendal and Agnès Sulem. Optimal stochastic impulse control with delayed reaction. *Appl. Math. Optim.*, 58(2) :243–255, 2008.
- [146] S.A. Padoan, M. Ribatet, and S.A. Sisson. Likelihood-based inference for max-stable processes. *Journal of the American Statistical Association*, 2009.
- [147] X. Pan, C. S. Han, K Dauber, and K. H. Law. Human and social behavior in computational modeling and analysis of egress. *Automation in Construction*, 15 :448–461, 2006.
- [148] H.H. Panjer. Measurement of risk, solvency requirements and allocation of capital within financial conglomerates. *University of Waterloo*, 2001.
- [149] H.H. Panjer and J. Jing. Solvency and capital allocation. *University of Waterloo*, 2001.

- [150] Philippe Picard. On some measures of the severity of ruin in the classical Poisson model. *Insurance Math. Econom.*, 14(2) :107–115, 1994.
- [151] Philippe Picard and Claude Lefèvre. The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution. *Scand. Actuar. J.*, (1) :58–69, 1997.
- [152] Philippe Picard, Claude Lefèvre, and Ibrahim Coulibaly. Multirisks model and finite-time ruin probabilities. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 5(3) :337–353, 2003.
- [153] Denys Pommeret. Orthogonal and pseudo-orthogonal multi-dimensional Appell polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 117(2-3) :285–299, 2001.
- [154] András Prékopa. The discrete moment problem and linear programming. *Discrete Appl. Math.*, 27(3) :235–254, 1990.
- [155] Nicolas Privault. Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson process. *Stochastics Stochastics Rep.*, 51(1-2) :83–109, 1994.
- [156] Nicolas Privault and Xiao Wei. A Malliavin calculus approach to sensitivity analysis in insurance. *Insurance Math. Econom.*, 35(3) :679–690, 2004.
- [157] S. David Promislow. The probability of ruin in a process with dependent increments. *Insurance Math. Econom.*, 10(2) :99–107, 1991.
- [158] Béatrice Rey. Total and partial bivariate risk premia : an extension. *Theory and Decision*, 55(1) :59–69, 2003.
- [159] T. Rolski. Order relations in the set of distribution functions and their applications in queueing theory. *Dissertations Math. CXXXII, Polish Academy of Sciences, Warsaw*, 1976.
- [160] Tomasz Rolski, Hanspeter Schmidli, Volker Schmidt, and Jozef Teugels. *Stochastic processes for insurance and finance*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1999.
- [161] Sheldon M. Ross. *Stochastic processes*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1996.
- [162] Didier Rullière and Stéphane Loisel. Another look at the Picard-Lefèvre formula for finite-time ruin probabilities. *Insurance Math. Econom.*, 35(2) :187–203, 2004.
- [163] Didier Rullière and Stéphane Loisel. The win-first probability under interest force. *Insurance Math. Econom.*, 37(3) :421–442, 2005.
- [164] Tobias Rydén. Parameter estimation for Markov modulated Poisson processes. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 10(4) :795–829, 1994.
- [165] Tobias Rydén. An EM algorithm for estimation in Markov-modulated Poisson processes. *Comput. Statist. Data Anal.*, 21(4) :431–447, 1996.
- [166] Yahia Salhi and Stéphane Loisel. Joint modeling of portfolio experienced and national mortality : a co-integration based approach. 2010.
- [167] G. Salvadori, C. De Michele, N.T. Kottegoda, and R. Rosso. Extremes in nature. an approach using copulas. volume 56 of *Water Science and Technology Library Series*. Springer.
- [168] M. Schlather. Models for stationary max-stable random fields. *Extremes*, 5(1) :33–44, 2002.
- [169] Hilary L. Seal. *Stochastic Theory of a Risky Business*. New York : Wiley, 1969.

- [170] Moshe Shaked and J. George Shanthikumar. *Stochastic orders and their applications*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994.
- [171] Moshe Shaked and J. George Shanthikumar. *Stochastic orders*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2007.
- [172] Tak Kuen Siu. Fair valuation of participating policies with surrender options and regime switching. *Insurance Math. Econom.*, 37(3) :533–552, 2005.
- [173] R.L. Smith. Max-stable processes and spatial extremes. *Unpublished manuscript*, 1990.
- [174] Ushio Sumita and Yasushi Masuda. Analysis of multivariate Markov modulated Poisson processes. *Oper. Res. Lett.*, 12(1) :37–45, 1992.
- [175] Bjørn Sundt. Multivariate compound Poisson distributions and infinite divisibility. *Astin Bull.*, 30(2) :305–308, 2000.
- [176] Lajos Takács. A generalization of the ballot problem and its application in the theory of queues. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 57 :327–337, 1962.
- [177] Julien Trufin and Stéphane Loisel. Ultimate ruin probability in discrete time with Bühlmann credibility premium adjustments.
- [178] C. Tsai, W. Kuo, and W.-K. Chen. Early surrender and the distribution of policy reserves. *Insurance : Mathematics and Economics*, 31(3) :429–445, 2002.
- [179] A. Tsanakas and C. Barnett. Risk capital allocation and cooperative pricing of insurance liabilities. *Insurance Math. Econom.*, 33(2) :239–254, 2003.
- [180] M. A. Usábel. Practical approximations for multivariate characteristics of risk processes. *Insurance Math. Econom.*, 25(3) :397–413, 1999.
- [181] S. A. Utev. Extremal problems in moment inequalities. In *Limit theorems of probability theory*, volume 5 of *Trudy Inst. Mat.*, pages 56–75, 175. “Nauka” Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1985.
- [182] Nele Vandaele and Michèle Vanmaele. Explicit portfolio for unit-linked life insurance contracts with surrender option. *J. Comput. Appl. Math.*, 233(1) :16–26, 2009.
- [183] Ward Whitt. The renewal-process stationary-excess operator. *J. Appl. Probab.*, 22(1) :156–167, 1985.