



HAL
open science

Familles à un paramètre de surfaces en genre 2

Olivier Rodriguez

► **To cite this version:**

Olivier Rodriguez. Familles à un paramètre de surfaces en genre 2. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2010. Français. NNT: . tel-00546119v3

HAL Id: tel-00546119

<https://theses.hal.science/tel-00546119v3>

Submitted on 17 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2

Discipline : Mathématiques
École Doctorale : Information, Structures et Systèmes

**FAMILLES À UN PARAMÈTRE DE SURFACES
EN GENRE 2**

présentée et soutenue publiquement par

Olivier RODRIGUEZ

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier

le 8 décembre 2010

Composition du jury

| | | |
|-------------------|--------------------------------------|------------|
| Ivan BABENKO | Professeur, Université Montpellier 2 | Examineur |
| Antonio COSTA | Catedrático, UNED, Madrid | Rapporteur |
| Pascal HUBERT | Professeur, Université Paul Cézanne | Rapporteur |
| Frédéric MANGOLTE | Professeur, Université d'Angers | Examineur |
| Emmanuel ROYER | Professeur, Université Blaise Pascal | Examineur |
| Robert SILHOL | Professeur, Université Montpellier 2 | Directeur |

Young man, in mathematics you don't understand things.
You just get used to them.

John von Neumann

Remerciements

C'est envers Robert Silhol que je veux avant tout exprimer ma reconnaissance, pour m'avoir dirigé et témoigné sa confiance tout au long de cette thèse. Je lui dois mes tous premiers pas dans le monde de la recherche. Il m'a accordé une grande liberté tout en sachant se montrer présent dans les moments difficiles, je ne saurais le remercier assez pour son immense patience. Je garderai le souvenir de sa culture mathématique des plus impressionnantes, servie par une curiosité et un enthousiasme communicatifs.

Antonio Costa et Pascal Hubert m'ont accordé à la fois un grand honneur et un plaisir en acceptant de rapporter cette thèse, je souhaite vivement les en remercier.

J'aimerais adresser mes sincères remerciements à Emmanuel Royer, pour avoir accepté d'être examinateur de cette thèse, mais aussi pour ses conseils précieux ainsi que pour son accueil et les bonnes conditions de travail qu'il m'a fournies lors de mes séjours à Clermont-Ferrand.

Je souhaite également remercier Ivan Babenko et Frédéric Mangolte pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers l'ensemble du personnel de l'Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier pour son accueil et son aide, tant sur le plan administratif que matériel. Pour l'aide qu'ils m'ont apportée, je ne saurais oublier de saluer Franck Nicoud et Marc Herzlich ainsi que la disponibilité, l'efficacité et la gentillesse extraordinaires de Bernadette Lacan. Merci également à Christian Mercat, qui a contribué à développer mon goût pour la vulgarisation scientifique, et à Patrick Redont, pour son aide technique.

L'ambiance chaleureuse et dynamique que font régner mes amis doctorants, jeunes et moins jeunes docteurs au sein du département de Mathématiques n'est pas étrangère à l'aboutissement de ce travail. C'est une joie de les citer ici : un grand merci à Afaf, Alexander, Benoît, Boris, Bruno, Chady, Chloé, Claudia, Clément, Damien, Elamine, Frédéric, Guillaume, Gwladys, Hilde, Ioan, Jérôme, Julien, Kevin, Mathieu et Matthieu, Mickaël, Mohamed «Junior», Nathaël, Nicolas, Pierre, Rémi et Rémy, Romain, Thomas, Soffana, Yashonidhi et à tous ceux que j'aurais pu oublier dans cette liste. J'ai été très sensible à leur soutien indéfectible, tout spécialement au cours de la rédaction de ce mémoire. J'ai une pensée particulière pour Miguel et Nadia, avec lesquels j'ai partagé non seulement un bureau, mais également un quotidien fait d'espoirs, de déconvenues, de joies enfin, de tout ce qui fait une thèse. Je suis aussi extrêmement reconnaissant envers Guillaume Bulteau d'avoir relu ce mémoire avec une si grande patience, de ses conseils et des nombreuses discussions enrichissantes que nous avons eu.

Mes parents m'ont toujours encouragé et soutenu dans mes choix et l'achèvement de cette thèse doit beaucoup à leurs encouragements constants, autant qu'à ceux de ma sœur et mon frère.

Merci enfin, Linda, d'avoir été à mes côtés tout au long de cette thèse, dans les meilleurs moments comme dans les plus éprouvants, et merci surtout, d'avoir toujours eu davantage confiance en moi que je n'en ai eu moi-même.

Résumé

Cette thèse porte sur certaines familles à un paramètre de surfaces de Riemann compactes de genre 2 définies par des surfaces de translation. Les familles que nous considérons constituent des géodésiques de Teichmüller dans l'espace des modules.

Nous nous attachons en particulier à décrire ces surfaces par leurs matrices des périodes et par les équations des courbes algébriques associées. Nous étudions notamment les automorphismes admissibles par les surfaces qui sont des courbes réelles à trois composantes réelles dans ces familles.

Le principal résultat consiste en une caractérisation explicite des matrices des périodes des courbes réelles à trois composantes réelles appartenant à la famille obtenue par projection dans l'espace des modules de la $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite de la surface de translation en «L» pavée par trois carreaux.

Nous montrons enfin, grâce à une interprétation en termes de transformations de Schwarz-Christoffel, comment calculer numériquement une équation de la courbe algébrique définie par une surface de translation en «L».

Abstract

In this thesis we study some one parameter families of compact Riemann surfaces of genus 2 defined by translation surfaces. The families we consider are Teichmüller geodesics in the moduli space.

We mainly describe these surfaces by means of period matrices and equations of the associated algebraic curves. We study admissible automorphisms for surfaces that are real curves with three real components in those families.

The main result is an explicit characterisation of period matrices of real curves with three real components belonging to the family obtained by projecting the $SL_2(\mathbb{R})$ -orbit of the «L»-shaped translation surface tiled by three squares into the moduli space.

We finally show, using an interpretation in terms of Schwarz-Christoffel transformations, how to numerically compute an equation of the algebraic curve defined by a «L»-shaped translation surface.

INTRODUCTION

Cette thèse porte sur certaines familles à un paramètre de surfaces de Riemann compactes de genre 2 définies par des surfaces de translation ; les familles que nous considérons constituent des géodésiques pour la métrique de Teichmüller.

Les surfaces de Riemann peuvent revêtir de multiples aspects. Historiquement, B. Riemann a introduit ces surfaces afin de rendre univaluées des fonctions multivaluées, telles que le logarithme complexe ou les fonctions algébriques. On peut ainsi les considérer tour à tour comme des revêtements ramifiés du plan complexe, des variétés analytiques, des courbes algébriques complexes, etc. Établir des liens explicites entre ces différentes formes est un problème classique et, dans sa généralité, largement ouvert.

Ces dernières années, les familles à un paramètre de surfaces de Riemann ont fait l'objet de nombreux travaux. Nombre d'entre elles apparaissent notamment comme familles de surfaces hyperboliques, comme familles algébriques de courbes algébriques ou encore comme géodésiques dans l'espace de Teichmüller. Ces géodésiques, également appelées disques de Teichmüller, sont des plongements holomorphes isométriques du demi-plan de Poincaré dans l'espace de Teichmüller. Ce sont précisément les familles auxquelles nous nous intéressons dans ce travail.

Dans les années 1960, les recherches de L. Ahlfors, L. Bers, J. Jenkins et K. Strebel notamment, permettent de doter l'espace de Teichmüller d'une structure analytique, donnant ainsi la solution au fameux problème des modules posé par B. Riemann au milieu du XIX^e siècle. La pierre angulaire de leurs travaux est la correspondance entre les structures complexes et les différentielles quadratiques, lesquelles définissent des métriques euclidiennes à singularités coniques.

Un moyen naturel de produire des métriques euclidiennes consiste à considérer des surfaces de translation. Une telle surface peut être construite géométriquement par un assemblage de polygones euclidiens, dont les côtés sont identifiés par translation de manière appropriée. Les tores constituent sans doute les exemples les plus connus. Lorsque le genre de la surface obtenue par cette construction est au moins 2, la métrique présente nécessairement des singularités coniques. L'ensemble des structures de translation sur une surface topologique est muni d'une action naturelle du groupe $SL_2(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, une surface de translation équivaut à la donnée d'une surface de Riemann compacte X équipée d'une différentielle abélienne ω (autrement dit, une

1-forme holomorphe). Une surface de translation définie par un polygone en forme de «L», par exemple, fournit une surface de Riemann de genre 2 pourvue d'une différentielle abélienne avec un zéro double. De la sorte, une telle surface peut être vue comme un élément (X, ω) du fibré au-dessus de l'espace de Teichmüller dont la fibre en un point $[X]$ est donnée par l'espace vectoriel $\Omega(X)$ des différentielles abéliennes sur la surface de Riemann correspondante. On peut définir l'action du groupe $SL_2(\mathbb{R})$ au niveau des différentielles abéliennes et la projection dans l'espace de Teichmüller de l'orbite d'un élément (X, ω) est un disque de Teichmüller. Lorsque le stabilisateur de (X, ω) est un réseau, ce disque se projette en une courbe algébrique dans l'espaces des modules de Riemann, appelée courbe de Teichmüller. Ces courbes jouent le rôle de géodésiques complexes pour la métrique de Teichmüller.

Les surfaces à petits carreaux sont des surfaces de translation construites par revêtement ramifié du tore et apparaissent notamment dans les travaux de W. Thurston [Thu88]. W. Veech [Vee89, Vee92] construit les premières courbes de Teichmüller ne provenant pas de tores, engendrées par des surfaces de translation pavées par des polygones réguliers, et montre que le stabilisateur de ces surfaces pour l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ est un réseau. J. Smillie prouve au milieu des années 1990 que cette dernière condition est en fait nécessaire et suffisante pour que le disque de Teichmüller engendré par ces surfaces se projette en une courbe de Teichmüller.

C. McMullen [McM03] considère des polygones en forme de «L» et obtient les premiers exemples de courbes de Teichmüller engendrées par des surfaces de translation dont les stabilisateurs ne sont pas commensurables à des groupes fuchsien triangulaires. Une caractéristique remarquable qui émerge des travaux de McMullen est l'existence d'une multiplication réelle par un ordre quadratique sur les jacobiniennes des surfaces de Riemann définies par ces surfaces de translation. Cette propriété frappante peut se traduire comme une manifestation algébrique des propriétés dynamiques des trajectoires de billard dans ces polygones en «L».

Le critère établi par McMullen lui permet de dresser, au cours des années 2000, la classification complète des courbes de Teichmüller en genre 2 dans [McM05a, McM05b, McM06]. McMullen montre que les courbes de Teichmüller engendrées par des polygones en «L» admettent au plus deux composantes irréductibles. Ces courbes sont déterminées par deux invariants numériques entiers, à savoir le discriminant D de la multiplication réelle et, lorsque la courbe admet deux composantes irréductibles, un invariant de spin binaire qui les distingue. De façon indépendante, P. Hubert et S. Lelièvre [HL06] établissent ce résultat pour les surfaces à petits carreaux. Les surfaces de translation auxquelles nous nous intéressons dans cette thèse engendrent des courbes de Teichmüller irréductibles que McMullen note W_D .

Poursuivant ses travaux sur le problème de l'uniformisation explicite des courbes algébriques, R. Silhol [Sil07] s'intéresse notamment à la $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite de la surface de translation définie par un polygone en «L» pavé par trois carrés. Pour ces surfaces, Silhol décrit explicitement la structure hyperbolique et donne la forme des équations des courbes algébriques associées. Considérant une famille plus générale de surfaces de translation, Silhol [Sil06] calcule les matrices des périodes

des courbes algébriques définies par des surfaces de translation de genre 2 admettant un automorphisme d'ordre 4. La forme en «L» correspond au cas où la surface de translation définit une courbe algébrique réelle à trois composantes réelles. L'étude plus avancée de cet exemple fournit la motivation et le cadre des travaux de cette thèse.

Le plan que nous adoptons est le suivant.

Le premier chapitre a pour objectif de présenter les notions qui interviendront tout au long de ce travail et les résultats essentiels qui leur sont liés.

Nous commençons par rappeler quelques propriétés des surfaces hyperelliptiques, sur lesquelles porte notre étude. Nous présentons ensuite quelques éléments de la théorie de Teichmüller, puis nous abordons la notion de surface de translation. Nous exposons plusieurs définitions équivalentes de ces surfaces et décrivons l'action du groupe $GL_2^+(\mathbb{R})$ pour chacune d'elles.

Nous introduisons quelques rudiments de la théorie des variétés abéliennes complexes, en particulier les variétés jacobiniennes et les matrices des périodes. Les surfaces abéliennes à multiplication réelle et leurs espaces de modules, les surfaces modulaires de Hilbert, sont évoquées en vue d'énoncer la classification des courbes de Teichmüller en genre 2, qui fait l'objet de la dernière section de ce chapitre.

Pour clôturer ce chapitre, nous montrons enfin, pour les surfaces de translation en «L», comment la caractérisation des surfaces de Veech de genre 2 obtenue par K. Calta [Cal04] peut se déduire de la classification de C. McMullen, formulée en termes de jacobiniennes à multiplication réelle.

Le deuxième chapitre porte un intérêt particulier aux surfaces de translation définies par un polygone en forme de croix suisse. De telles surfaces déterminent des courbes algébriques réelles à trois composantes réelles admettant un automorphisme d'ordre 4. En laissant opérer le sous-groupe $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right\}_{t \geq 1}$ de $GL_2^+(\mathbb{R})$, on obtient une géodésique de Teichmüller, pour laquelle nous donnons une expression de la famille à un paramètre de matrices des périodes associée. Nous montrons que toutes les courbes réelles de genre 2 à trois composantes réelles admettent en fait une matrice des périodes de la forme présentée.

La seule donnée des périodes d'une différentielle abélienne sur une surface de Riemann est généralement insuffisante pour déterminer une équation de la courbe algébrique associée. Néanmoins, si cette courbe est réelle à trois composantes réelles et que l'on suppose de plus que la différentielle a un zéro double, alors ces hypothèses suffisent à déterminer une équation de la courbe. Ce cas coïncide avec celui où la courbe algébrique est définie par une surface de translation en «L» et la transformation de Schwarz-Christoffel fournit alors un moyen d'exprimer cette équation. Lorsqu'une surface de translation définie par une croix suisse engendre une courbe de Teichmüller, la jacobienne de la surface de Riemann compacte correspondante admet une multiplication réelle. Nous montrons que l'espace des différentielles abéliennes sur cette surface admet alors une base de formes à zéro double, propres pour l'action de la multiplication réelle. L'existence d'une telle base est liée à celle

d'une involution non hyperelliptique, qui est une donnée précieuse en vue du calcul de matrices des périodes.

Ceci nous conduit naturellement à examiner, dans le troisième chapitre, les automorphismes admissibles par les courbes réelles à trois composantes réelles des familles engendrées par une croix suisse.

Les groupes d'automorphismes complexes des courbes réelles de genre 2 ont été classifiés en termes de leurs équations par F.-J. Cirre [Cir01]. Nous donnons également, pour les courbes réelles à trois composantes réelles, une formulation de cette classification du point de vue de leurs matrices des périodes et de leur structure hyperbolique.

Nous nous appuyons sur cette classification pour établir le résultat suivant.

Théorème A. — *Pour $D = 5$ et 9 , à l'exception de la courbe algébrique définie par la croix suisse, aucune des courbes réelles à trois composantes réelles de la famille W_D n'admet d'automorphisme non hyperelliptique.*

Nous faisons appel à la description des équations des courbes algébriques associées aux surfaces de Riemann de la famille W_5 proposée par P. Lochak [Loc05]. En ce qui concerne la famille W_9 , nous invoquons la description de ces courbes établie par R. Silhol [Sil07].

Nous présentons également des arguments nous permettant de conjecturer le résultat précédent pour $D = 12$, où la famille est engendrée par la surface de Riemann dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 24.

La situation apparaît donc comme particulièrement rigide dans le cas réel à trois composantes. Nous présentons en contre-partie l'exemple d'une courbe réelle à deux composantes dans la famille W_9 admettant une involution non hyperelliptique.

Le quatrième chapitre est consacré à la $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite de la surface de translation en «L» pavée par trois carrés.

Le problème de Schottky classique consiste à caractériser les jacobiniennes de courbes algébriques parmi les variétés abéliennes principalement polarisées. La question à laquelle nous nous intéressons s'énonce comme suit : étant donné un élément Z du demi-espace de Siegel de genre 2, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que Z soit une matrice des périodes d'une surface de Riemann appartenant à la famille W_9 ? Le résultat suivant fournit une réponse à cette question.

Théorème B. — *Soit (X_1, ω_1) la surface de translation en «L» pavée par trois carrés. Pour tout réel $t \geq 1$, soit $(X_t, \omega_t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot (X_1, \omega_1)$. Alors Z_t est une matrice des périodes de X_t si, et seulement si, il existe un unique réel y tel que $y > 2t/3$, vérifiant*

$$Z_t = \begin{pmatrix} 1 + i(2y - t) & iy \\ iy & i(y/2 + t) \end{pmatrix}$$

et satisfaisant à la condition

$$\sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3} \exp \pi \left[\left(\frac{t}{2} - y + \frac{1}{2}i \right) \sum_{\ell=1}^3 k_\ell^2 + (y - t + i) \sum_{1 \leq \ell < m \leq 3} k_\ell k_m + \left(\frac{3}{2}i - \frac{t}{2} \right) \sum_{\ell=1}^3 k_\ell \right] = 0.$$

Les surfaces de translation dans la $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ -orbite de la surface à trois carrés sont caractérisées par l'existence d'un certain revêtement double admettant un automorphisme d'ordre 3, introduit dans [Sil07]. La surface revêtante est hyperelliptique de genre 3 et admet une matrice des périodes d'une forme bien particulière. L'identité précédente provient de l'annulation d'une certaine thêta-caractéristique associée à cette forme de matrices des périodes, que nous identifierons dans la démonstration du résultat suivant.

Théorème C. — *Une surface de translation (X, ω) appartient à la $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ -orbite de la surface en «L» pavée par trois carrés si, et seulement si le revêtement double \widehat{X} de X admet une matrice des périodes \widehat{Z} de la forme*

$$\widehat{Z} = \begin{pmatrix} z_1 & & \frac{1}{2}z_1 & & z_{13} \\ \frac{1}{2}z_1 & \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z_1 - \frac{1}{2}z_{13} & & & \frac{1}{2}z_1 \\ z_{13} & & \frac{1}{2}z_1 & & z_1 \end{pmatrix}$$

pour laquelle $\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\widehat{Z}) = 0$.

Nous décrivons la construction de ce revêtement et de la base de l'homologie à laquelle sont associées les matrices des périodes de la forme ci-dessus.

Nous proposons enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, une méthode numérique basée sur les transformations de Schwarz-Christoffel, permettant de calculer une équation de la courbe algébrique définie par un polygone en «L». Nous donnons plusieurs exemples pour les familles étudiées dans les chapitres précédents.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|------------|
| Résumé — abstract | iii |
| Introduction | v |
| 1 Préliminaires | 1 |
| 1.1 Courbes hyperelliptiques | 1 |
| 1.2 Espaces de Teichmüller | 4 |
| 1.3 Différentielles abéliennes et surfaces de translation | 6 |
| 1.3.1 Différentielles abéliennes | 6 |
| 1.3.2 Surfaces de translation | 7 |
| 1.3.3 Action de $GL_2^+(\mathbb{R})$ | 12 |
| 1.4 Variétés abéliennes complexes | 15 |
| 1.4.1 Tores complexes et polarisation | 15 |
| 1.4.2 Multiplication réelle | 18 |
| 1.4.3 Variétés jacobiniennes | 24 |
| 1.5 Courbes de Teichmüller en genre 2 | 27 |
| 1.5.1 Les théorèmes de McMullen | 27 |
| 1.5.2 À propos de la classification de Calta | 29 |
| 2 Géodésique de Teichmüller engendrée par une croix suisse | 33 |
| 2.1 Exemples et motivations | 33 |
| 2.2 Familles de matrices des périodes | 36 |
| 2.2.1 M-courbes réelles | 36 |
| 2.2.2 Déformations de Teichmüller | 38 |
| 2.2.3 Forme de la matrice des périodes | 39 |
| 2.3 Détermination de la structure complexe | 42 |
| 2.3.1 Transformation de Schwarz-Christoffel | 42 |
| 2.3.2 Différentielle abélienne avec un zéro double | 43 |
| 2.3.3 Différentielle abélienne avec deux zéros simples | 45 |
| 2.3.4 Isopériodicité et structure complexe | 46 |
| 2.4 Multiplication réelle et base de formes à zéro double | 47 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3 | M-courbes réelles de W_D et leurs automorphismes | 51 |
| 3.1 | Automorphismes de M-courbes réelles de genre 2 | 51 |
| 3.1.1 | Automorphismes réels | 51 |
| 3.1.2 | Classification des automorphismes en genre 2 | 52 |
| 3.1.3 | Géodésiques de Teichmüller et automorphismes | 60 |
| 3.2 | M-courbes réelles de W_5 | 62 |
| 3.2.1 | Description de W_5 | 62 |
| 3.2.2 | M-courbes réelles avec automorphismes dans W_5 | 65 |
| 3.3 | M-courbes réelles dans W_9 | 67 |
| 3.3.1 | Description de W_9 | 67 |
| 3.3.2 | M-courbes réelles avec automorphismes dans W_9 | 69 |
| 3.3.3 | Une courbe réelle de W_9 avec automorphisme d'ordre 2 | 70 |
| 3.4 | À propos des M-courbes réelles de la famille W_{12} | 72 |
| 4 | Problème de Schottky pour W_9^M | 75 |
| 4.1 | Thêta-caractéristiques | 76 |
| 4.1.1 | Définitions et propriétés élémentaires | 76 |
| 4.2 | Revêtement double associé à une courbe de W_9 | 78 |
| 4.2.1 | Construction du revêtement | 78 |
| 4.2.2 | Automorphismes de la courbe revêtante | 79 |
| 4.2.3 | Base de l'homologie | 80 |
| 4.3 | Caractérisation du revêtement double | 84 |
| 4.4 | Relation entre les périodes | 89 |
| 5 | Méthodes numériques | 91 |
| 5.1 | Calcul de l'équation | 91 |
| 5.2 | Du polygone à l'équation | 92 |
| 5.2.1 | Surfaces de la strate $\mathcal{H}(2)$ | 93 |
| 5.2.2 | Surfaces de la strate $\mathcal{H}(1, 1)$ | 95 |
| 5.3 | De l'équation aux périodes | 96 |
| 5.3.1 | Test de précision | 96 |
| 5.3.2 | Seconde forme propre pour la multiplication réelle | 97 |
| | Références | 101 |
| | Index | 105 |

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce travail, une courbe algébrique désigne, sauf précision explicite, une courbe projective complexe (irréductible) lisse. Par définition, il s'agit de l'ensemble des zéros d'équations polynomiales à coefficients complexes. Les courbes algébriques peuvent néanmoins se présenter sous des aspects très différents.

Ainsi, une telle courbe est naturellement une variété analytique complexe de dimension 1, c'est-à-dire une surface de Riemann. Réciproquement, un résultat classique dû à B. Riemann affirme qu'une telle surface compacte admet un plongement dans un espace projectif complexe, permettant alors de la réaliser comme une courbe algébrique. Les notions de surface de Riemann compacte et de courbe algébrique sont donc équivalentes et, dans tout ce qui suit, nous ferons systématiquement usage de cette équivalence.

Par ailleurs, une collection de polygones euclidiens pourvus d'identifications appropriées permet de définir une surface topologique munie de ce que l'on appelle une structure de translation. Il s'avère qu'une telle structure équivaut à la donnée d'une surface de Riemann compacte et d'une 1-forme holomorphe sur cette surface, déterminant de la sorte un moyen supplémentaire de produire une courbe algébrique.

Enfin, le théorème de Torelli affirme que la géométrie d'une courbe algébrique est complètement caractérisée par sa jacobienne polarisée, que l'on peut définir par une matrice des périodes de la courbe.

Ce chapitre est principalement destiné à présenter les objets que nous venons de mentionner et les principaux résultats liés.

1.1. Courbes hyperelliptiques

Les surfaces de Riemann de genre 2, sur lesquelles portent l'ensemble de ce travail, présentent la particularité d'être hyperelliptiques. Cette section a pour but de présenter quelques résultats spécifiques aux surfaces hyperelliptiques ; le lecteur est invité à consulter le livre de H. Farkas et I. Kra [FK92, §III.7] par exemple, pour une présentation plus détaillée.

Soit X une courbe algébrique de genre $g \geq 2$. On dit que X est *hyperelliptique*

si X est définie par une équation affine de la forme

$$(1.1.1) \quad y^2 = P(x) = \prod_{j=1}^m (x - x_j)$$

où les x_j sont des complexes distincts et $m = 2g + 1$ ou $2g + 2$. On notera

$$B_X = \begin{cases} \{x_1, \dots, x_{2g+2}\} & \text{si } \deg P(x) = 2g + 2, \\ \{x_1, \dots, x_{2g+1}\} \cup \{\infty\} & \text{si } \deg P(x) = 2g + 1. \end{cases}$$

La projection $\pi : (x, y) \mapsto x$ fait de X un revêtement double de la sphère de Riemann $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ramifié au-dessus de B_X . L'application

$$h_X : (x, y) \mapsto (x, -y)$$

est un automorphisme d'ordre 2, appelé *involution hyperelliptique*. Cette involution appartient au centre du groupe $\text{Aut } X$ et agit par échange des deux feuillettes du revêtement $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Les points fixes de h_X sont exactement les $2g + 2$ points de ramification du revêtement, appelés *points de Weierstrass*.

Réciproquement, si une courbe algébrique X admet un automorphisme h_X d'ordre 2 fixant exactement $2g + 2$ points, alors le quotient de X par le sous-groupe de $\text{Aut } X$ engendré par h_X est de genre 0 d'après la formule de Riemann-Hürwitz. Le revêtement $\pi : X \rightarrow X/\langle h_X \rangle$ se ramifie aux $2g + 2$ points fixes de h_X et π est une fonction méromorphe de degré 2 sur X . On montre alors que la courbe X peut être définie par une équation de la forme (1.1.1).

Notons que pour une courbe algébrique de genre $g \geq 2$, l'involution hyperelliptique est l'unique automorphisme d'ordre 2 admettant $2g + 2$ points fixes ; la fonction méromorphe $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est alors unique à transformation de Möbius près.

L'énoncé suivant s'obtient par une application directe du théorème de Riemann-Roch et illustre la spécificité des courbes de genre 2.

Proposition 1.1.1. — *Toute courbe algébrique de genre 2 est hyperelliptique.*

L'espace des 1-formes holomorphes sur une courbe hyperelliptique admet une base privilégiée.

Proposition 1.1.2. — *Soit X une courbe hyperelliptique de genre g définie par une équation de la forme $y^2 = P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme à coefficients complexes. Alors les g différentielles*

$$\frac{dx}{y}, \frac{xdx}{y}, \dots, \frac{x^{g-1}dx}{y}$$

forment une base de l'espace des 1-formes holomorphes sur X .

Automorphismes et transformations de Möbius. — Soient X et Y deux courbes hyperelliptiques de genre g , définies respectivement par les équations $y^2 = P_X(x)$ et $w^2 = P_Y(z)$. Un isomorphisme $f : X \rightarrow Y$ induit une transformation de Möbius $M : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ telle que $M(B_X) = B_Y$.

Réciproquement, toute transformation de Möbius définie par

$$M : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ tels que } |M| := ad - bc \neq 0$$

et vérifiant $M(B_X) = B_Y$ induit exactement deux isomorphismes $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$. Puisque l'involution hyperelliptique est un élément central du groupe des automorphismes, les isomorphismes f_1 et f_2 vérifient

$$f_2 = f_1 \circ h_X = h_Y \circ f_1.$$

Ces isomorphismes sont appelés les *relèvements de M* . Suivant [Cir06], il est possible de calculer explicitement leurs expressions, que nous donnons ci-dessous. Un relèvement f_1 de M est défini par :

(a) si $\infty \in B_X$ et $M(\infty) = \infty$, alors

$$f_1(x, y) = \left(\frac{ax + b}{d}, y \left(\frac{a}{d} \right)^g \frac{\sqrt{|M|}}{d} \right);$$

(b) si $\infty \in B_X$ et $M(\infty) \neq \infty$, alors

$$f_1(x, y) = \left(\frac{ax + b}{cx + d}, \frac{yc^g}{(cx + d)^{g+1}} \sqrt{-|M|P'_Y(M(\infty))} \right);$$

(c) si $\infty \notin B_X$ et $M(\infty) = \infty$, alors

$$f_1(x, y) = \left(\frac{ax + b}{d}, y \left(\frac{a}{d} \right)^{g+1} \right);$$

(d) si $\infty \notin B_X$ et $M(\infty) \neq \infty$, alors

$$f_1(x, y) = \left(\frac{ax + b}{cx + d}, \frac{yc^{g+1}}{(cx + d)^{g+1}} \sqrt{P_Y(M(\infty))} \right).$$

Si on note $(z, w) = f_1(x, y)$, alors le second relèvement f_2 de M est défini par

$$f_2(x, y) = f_1(x, -y) = (z, -w).$$

Remarque 1.1.3. — Puisqu'une transformation de Möbius est complètement déterminée par la donnée de trois points de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, la classe d'isomorphisme d'une courbe hyperelliptique de genre g dépend de $2g - 1$ paramètres complexes.

Classification des groupes d'automorphismes en genre 2. — Si X est une courbe hyperelliptique et h_X son involution hyperelliptique, on note

$$\overline{\text{Aut}}(X) = \text{Aut } X / \langle h_X \rangle$$

le *groupe d'automorphismes réduit* de X . La classification des groupes d'automorphismes réduits des courbes de genre 2 est connue depuis les travaux de O. Bolza [Bol87]. Elle est rappelée dans le tableau suivant, où \mathbb{Z}_n désigne le groupe cyclique d'ordre n , D_n le groupe diédral d'ordre $2n$ et Σ_n le groupe des permutations de n éléments :

| Famille | $\overline{\text{Aut}}(X)$ | Forme classique de l'équation |
|--------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| \mathcal{F}_2 | \mathbb{Z}_2 | $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$ |
| \mathcal{F}_4 | D_2 | $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - 1/a)$ |
| \mathcal{F}_6 | D_3 | $y^2 = x^6 + ax^3 + 1$ |
| \mathcal{F}_{12} | D_6 | $y^2 = x^6 - 1$ |
| \mathcal{F}_{24} | Σ_4 | $y^2 = x^5 - x$ |
| \mathcal{F}_5 | \mathbb{Z}_5 | $y^2 = x^5 - 1$ |

Remarque 1.1.4. — Exception faite de la courbe d'équation $y^2 = x^5 - 1$, cette classification montre en particulier qu'une courbe de genre 2 dont le groupe d'automorphismes réduit est non trivial admet toujours une involution non hyperelliptique.

On trouvera une classification des groupes d'automorphismes des courbes hyperelliptiques de genre 3 dans [GSS05].

1.2. Espaces de Teichmüller

La classification des surfaces de Riemann compactes présente deux perspectives ambivalentes. Une première question, à laquelle répond la notion de genre, repose sur la recherche d'invariants numériques discrets. La seconde, qui est la contre-partie continue, réside dans le problème des modules, qui consiste à munir l'ensemble des classes d'isomorphisme d'une structure géométrique.

B. Riemann conjecture dans les années 1850 que l'ensemble des structures complexes dont on peut munir une surface compacte admet un paramétrage analytique dépendant de $3g - 3$ paramètres complexes. L. Ahlfors et L. Bers, développant largement des idées introduites par O. Teichmüller vers 1940, décrivent une structure analytique sur l'espace des modules de Riemann et donnent ainsi la solution au problème des modules.

Nous présentons ici quelques éléments de la théorie de Teichmüller ; le lecteur se référera aux ouvrages de Y. Imayoshi et M. Taniguchi [IT92] ou S. Nag [Nag88] pour un exposé détaillé.

On se fixe une surface de Riemann X compacte de genre $g \geq 2$, destinée à servir de surface de référence dans ce qui suit.

Une *différentielle abélienne* sur X est une 1-forme holomorphe. Les différentielles abéliennes constituent un espace vectoriel complexe de dimension g noté $\Omega(X)$. Dans ce qui suit, toutes les différentielles abéliennes considérées seront supposées non identiquement nulles.

Soit $\{(U_j, z_j)\}$ un atlas analytique de X , une *différentielle quadratique* est une collection d'expressions $\{f_j(z_j)(dz_j)^2\}$ où f_j est une fonction méromorphe sur U_j satisfaisant à la condition

$$f_j(z_j) \left(\frac{dz_j}{dz_k} \right)^2 = f_k(z_k).$$

Les différentielles quadratiques sur X forment un espace vectoriel complexe de dimension $3g - 3$.

Une *surface de Riemann marquée* est un couple (X_1, f_1) où X_1 est une surface de Riemann et $f_1 : X \rightarrow X_1$ un difféomorphisme quasi-conforme.

Deux surfaces marquées (X_1, f_1) et (X_2, f_2) sont dites équivalentes au sens de Teichmüller s'il existe une application $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ biholomorphe telle que $f_2 \circ \varphi \circ f_1^{-1} : X \rightarrow X$ soit isotope à l'identité id_X . Par abus de notation, on omettra de préciser les marquages f_1 et f_2 si aucune confusion n'est à craindre.

L'*espace de Teichmüller* de X , noté $\mathcal{T}(X)$, est l'ensemble des classes d'équivalence de surfaces de Riemann marquées. Soit $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ est un difféomorphisme quasi-conforme, on note

$$\mu_\phi(P) = \frac{\bar{\partial}\phi(P)}{\partial\phi(P)}$$

pour tout $P \in X_1$. On définit alors la *dilatation maximale* de ϕ , notée $K(\phi)$, par

$$(1.2.1) \quad K(\phi) = \sup_{P \in X_1} \frac{1 + |\mu_\phi(P)|}{1 - |\mu_\phi(P)|}.$$

La *distance de Teichmüller* est définie par

$$(1.2.2) \quad d_{\mathcal{T}}(X_1, X_2) = \inf_{\phi} \log K(\phi)$$

où ϕ décrit l'ensemble des difféomorphismes quasi-conformes $X_1 \rightarrow X_2$ isotopes à $f_2 \circ f_1^{-1}$. Muni de la topologie induite par cette distance, l'espace $\mathcal{T}(X)$ est complet et homéomorphe à la boule unité ouverte de l'espace des différentielles quadratiques sur X .

Le théorème suivant est crucial dans la théorie des déformations des surfaces de Riemann.

Théorème 1.2.1 (Teichmüller). — *Soient (X_1, f_1) et (X_2, f_2) deux surfaces de Riemann marquées, alors il existe un unique difféomorphisme quasi-conforme $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ isotope à $f_2 \circ f_1^{-1}$ tel que $d_{\mathcal{T}}(X_1, X_2) = \log K(\phi)$.*

En d'autres termes, l'application ϕ , dite *extrémale*, minimise la dilatation maximale K . On pourra consulter [IT92, §5.2] pour une démonstration de ce résultat.

Le *groupe modulaire de Teichmüller*, noté $\text{Mod}(X)$, est par définition le groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes de X préservant l'orientation. Ce groupe agit à droite sur $\mathcal{T}(X)$ par

$$\begin{aligned} \text{Mod}(X) \times \mathcal{T}(X) &\rightarrow \mathcal{T}(X) \\ (\varphi, (X_1, f_1)) &\mapsto (X_1, f_1 \circ \varphi^{-1}), \end{aligned}$$

l'action d'un élément φ se faisant par isométries pour la distance de Teichmüller (voir [IT92, §6.3]).

La topologie induite sur $\mathcal{T}(X)$ par la distance de Teichmüller est donc indépendante du choix du point base (X, id_X) . Ainsi, on notera par la suite \mathcal{T}_g et Mod_g respectivement l'espace de Teichmüller et le groupe modulaire de genre g .

D'après les travaux d'Ahlfors et Bers, on peut munir l'espace de Teichmüller d'une structure de variété analytique complexe, pour laquelle H. Royden [Roy71] montre que Mod_g agit proprement et discontinûment par biholomorphismes (voir [IT92, §6.4]).

L'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces de Riemann compactes de genre g est l'*espace des modules de Riemann* de genre g , noté \mathcal{M}_g . On peut montrer que

$$\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g / \text{Mod}_g$$

(voir [IT92, §1.3]). L'action de Mod_g sur \mathcal{T}_g n'est cependant pas libre : ainsi, l'espace des modules n'est pas une variété analytique, mais un orbifold complexe de dimension $3g - 3$.

1.3. Différentielles abéliennes et surfaces de translation

Cette section est consacrée à une brève présentation des liens existant entre les différentielles abéliennes, les surfaces de translation et les structures complexes.

1.3.1. Différentielles abéliennes

Soient (X_1, f_1) et (X_2, f_2) deux surfaces de Riemann marquées, supposées équivalentes au sens de Teichmüller par une application $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ biholomorphe, et soient ω_1 et ω_2 deux différentielles abéliennes sur X_1 et X_2 respectivement. Deux couples (X_1, ω_1) et (X_2, ω_2) sont dits équivalents si $\omega_1 = \varphi^*(\omega_2)$.

Les espaces $\Omega(X)$ forment un fibré vectoriel de rang g au-dessus de l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g et l'ensemble des classes d'équivalence (X, ω) ainsi définies est l'*espace de Teichmüller des différentielles abéliennes* de genre g , noté $\Omega\mathcal{T}_g$.

L'*espace des modules des différentielles abéliennes* de genre g , noté $\Omega\mathcal{M}_g$, est par définition le quotient de $\Omega\mathcal{T}_g$ sous l'action du groupe modulaire Mod_g .

Soit (X, ω) un élément de $\Omega\mathcal{T}_g$ et soient P_1, \dots, P_n les zéros de ω d'ordres respectifs k_1, \dots, k_n . Alors la formule d'indice de Poincaré-Hopf donne

$$\sum_{j=1}^n k_j = 2g - 2.$$

Ceci donne lieu à une stratification de l'espace $\Omega\mathcal{M}_g$: par définition, la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ est le sous-espace de $\Omega\mathcal{M}_g$ constitué des classes d'équivalences de couples (X, ω) où ω a exactement n zéros, ordonnés de manière telle que leurs multiplicités soient k_1, \dots, k_n . Cette notation est symétrique, au sens où $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n) = \mathcal{H}(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)})$ pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_n$. Chaque strate est invariante sous l'action du groupe modulaire Mod_g .

Ces strates portent une structure affine complexe (décrite dans [KZ03] par exemple), provenant du premier groupe de cohomologie relative. Leur dimension a été calculée par H. Masur et W. Veech :

Théorème 1.3.1 (Masur [Mas82] ; Veech [Vee90]). — *Chacune des strates est un orbifold complexe de dimension*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n) = 2g + n - 1.$$

Il existe une action naturelle du groupe $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur les espaces $\Omega\mathcal{T}_g$ et $\Omega\mathcal{M}_g$, préservant la stratification, que nous décrirons plus loin.

1.3.2. Surfaces de translation

Nous évoquons ici l'équivalence entre les notions de différentielle abélienne et de surface de translation. On trouvera une introduction plus avancée à ce sujet dans les articles de synthèse de P. Hubert et T. Schmidt [HS06] ou A. Zorich [Zor06], par exemple.

Différentielles abéliennes et structures de translation

Dans tout ce qui suit, on identifie le plan complexe \mathbb{C} au plan réel \mathbb{R}^2 par l'application \mathbb{R} -linéaire qui envoie $(1, i)$ sur la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Définition 1.3.2. — Une surface de translation est la donnée d'un couple (S, Σ) où S est une surface topologique compacte et $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ un ensemble fini de points de S , dits singuliers, tels que $S \setminus \Sigma$ admet un atlas maximal dont les changements de cartes sont des translations.

Les changements de cartes d'une structure de translation sont donc biholomorphes. Par ailleurs, si l'on note ω la forme différentielle obtenue en tirant en arrière la forme dz sur \mathbb{C} par les cartes de $S \setminus \Sigma$, alors il existe une unique structure complexe sur S telle que ω est holomorphe. Les points singuliers donnent lieu à des zéros de ω . Une structure de translation sur S fournit ainsi la donnée d'une surface de Riemann compacte X et d'une différentielle abélienne ω sur X .

Réciproquement, la donnée d'un couple (X, ω) , où X est une surface de Riemann compacte et ω une différentielle abélienne sur X , définit une structure de translation de la manière suivante. Fixons un point P_0 de X et soit U un voisinage ouvert simplement connexe de P_0 , on définit une carte (U, z) en posant, pour tout $P \in U$:

$$z(P) = \int_{P_0}^P \omega.$$

Si P_0 n'est pas un zéro de ω alors, dans cette coordonnée locale, on a $\omega = dz$. Considérons, en un point Q_0 de X , une carte (V, w) définie de la même manière, alors pour tout $P \in U \cap V$, on a $w(P) - z(P) = c$ et la constante complexe c ne dépend pas du point P . Ainsi, les changements de cartes sont des translations. Si on note $\Sigma = Z(\omega)$ l'ensemble des zéros de ω , on construit de cette manière un atlas maximal sur $X \setminus \Sigma$ de telle sorte que (X, Σ) soit une surface de translation.

Les cartes définies ci-dessus permettent de munir la surface de Riemann X d'une métrique euclidienne $|\omega|$. Puisqu'on a supposé que X est de genre au moins 2, d'après le théorème de Gauss-Bonnet, cette métrique a une courbure non nulle, concentrée aux zéros de ω . Au voisinage d'un zéro d'ordre k , il existe une carte (U, z) dans laquelle

$$\omega = z^k dz = d\left(\frac{z^{k+1}}{k+1}\right),$$

faisant de la surface X un revêtement de degré $k+1$ ramifié en ce zéro. Un zéro d'ordre k de ω produit ainsi une singularité de type conique d'angle $2\pi(k+1)$. On dispose donc de la définition suivante, équivalente à la définition 1.3.2.

Définition 1.3.3. — Une surface de translation est définie par la donnée d'un couple (X, ω) où X est une surface de Riemann compacte et ω une différentielle abélienne sur X .

Billards, polygones euclidiens et structures de translation

Les trajectoires de billard dans un polygone euclidien dont les angles sont des multiples rationnels de π donnent lieu à de nombreux exemples de surfaces de translation. De tels billards engendrent, via un processus de dépliage, une collection de polygones dont plusieurs côtés opposés sont identifiés. Nous invitons le lecteur à consulter [HS06] pour des exemples détaillés et [MT02] pour plus de détails sur les billards et les sujets associés. La construction décrite dans l'exemple suivant suffira à illustrer notre propos.

Exemple 1.3.4 (dépliage d'un polygone en «L»). — Considérons une particule décrivant une trajectoire rectiligne dans un polygone en forme de «L» assimilé à un billard : lorsque la particule atteint l'un des côtés du polygone, la trajectoire est réfléchiée avec un angle égal à l'angle d'incidence. On peut prolonger la trajectoire à l'extérieur du polygone de départ en le «dépliant» c'est-à-dire en assemblant, le long du côté atteint par la particule, l'image symétrique du polygone par rapport

En chaque point régulier, l'angle est égal à 2π et a donc une contribution nulle. Les sommets de \mathcal{Q} s'identifient en un unique point, en lequel l'angle total est 6π : il s'agit de l'unique singularité conique de cette surface de translation. La surface de translation (Y, ξ) est donc de genre 2 et appartient à la strate $\mathcal{H}(2)$.

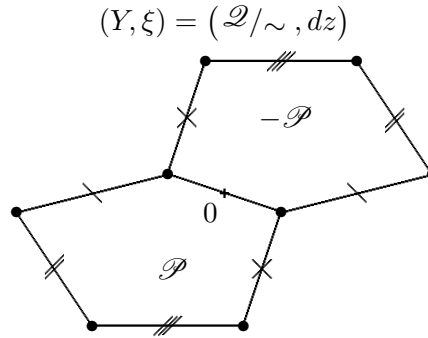


FIGURE 1.2 – Une surface de translation (Y, ξ) de la strate $\mathcal{H}(2)$.

Exemple 1.3.7 (la surface en «L», de nouveau). — Considérons la surface de translation (X, ω) définie par le polygone en forme de croix muni des identifications décrites sur la figure 1.3. En découpant et recollant par translation certaines parties de ce polygone, on obtient le polygone en forme de «L» décrit par la figure, dont les côtés opposés sont identifiés par translation. Les points marqués en noir s'identifient en un unique point de X , en lequel l'angle total est 6π : il s'agit de l'unique singularité conique. La surface de translation (X, ω) est donc de genre 2 et appartient à la strate $\mathcal{H}(2)$.

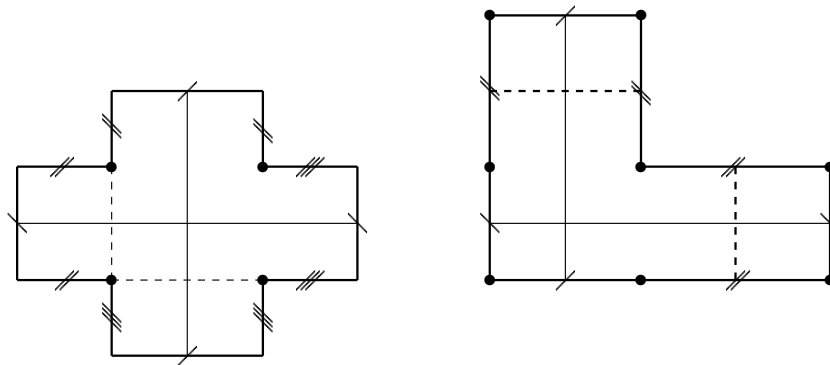


FIGURE 1.3 – La surface de translation en «L» est de genre 2.

Par abus de langage, si (X, ω) est une différentielle abélienne de genre g admettant n zéros d'ordres k_1, \dots, k_n , on parlera également de la surface de translation (X, ω) de la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$. On utilisera aussi la notation $(X, \omega) = (\mathcal{P}/\sim, dz)$ où le quotient \mathcal{P}/\sim désigne un arrangement de polygones muni d'identifications de ses côtés par translation et dz la 1-forme holomorphe sur \mathbb{C} .

Remarque 1.3.8. — Pour être tout à fait précis, le cadre général adéquat est celui des *surfaces de demi-translation*, c'est-à-dire pour lesquelles les atlas admettent des changements de cartes de la forme $z \mapsto \pm z + c$ avec $c \in \mathbb{C}$; une telle structure correspond à un couple (X, ψ) où ψ est une différentielle quadratique sur la surface de Riemann compacte X . Les travaux d'Ahlfors et Bers mettent en évidence une correspondance entre les structures complexes sur une surface et les différentielles quadratiques (voir [IT92, §6.1] par exemple). Une telle généralité n'est cependant pas nécessaire pour notre propos, nous nous en tiendrons donc à la brève présentation ci-dessous.

Soient ψ une différentielle quadratique holomorphe ou à pôles simples sur X et (U, w) une coordonnée locale de X dans laquelle $\psi = f(w)(dw)^2$. On peut toujours supposer qu'il existe une détermination holomorphe de \sqrt{f} dans U . Étant donné un point P_0 de U fixé, on pose pour tout $P \in U$:

$$z(P) = \int_{P_0}^P \sqrt{f(w)} dw.$$

Un zéro d'ordre k de ψ produit une singularité conique d'angle $\pi(k+2)$ et un pôle simple donne un point conique d'angle π . Si on note X^* l'ensemble des points de X qui ne sont ni des zéros, ni des pôles de ψ , on vérifie que les cartes (U, z) construites de cette sorte forment un atlas de X^* pour lequel les changements de cartes sont des demi-translations.

En termes de polygones euclidiens, les recollements sont effectués le long des côtés soit par des translations, soit par des rotations d'angle π .

Une surface de translation au sens introduit ci-dessus correspond en fait à la donnée d'un couple (X, ψ) tel que la différentielle quadratique $\psi = \omega^2$ est globalement le carré d'une différentielle abélienne.

Surfaces à petits carreaux

Soient (X_1, ω_1) et (X_2, ω_2) deux surfaces de translation, un revêtement ramifié $\pi : X_1 \rightarrow X_2$ est dit *de translation* si π s'exprime comme une translation dans les cartes définies par les différentielles ω_1 et ω_2 . Pour $j = 1, 2$, notons $\Sigma_j = Z(\omega_j)$ l'ensemble des zéros de ω_j ; un revêtement de translation est dit *équilibré* si on a de plus $\pi(\Sigma_1) = \Sigma_2$.

Soit (T, dz) le tore carré $T = \mathbb{C}/i\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ muni de la structure de translation définie par la différentielle dz sur \mathbb{C} . Une *surface à petits carreaux*⁽ⁱ⁾ est un revêtement de translation équilibré $\pi : (X, \omega) \rightarrow (T, dz)$.

Soit (X, ω) une surface à petits carreaux et soit P_0 un zéro de ω , l'application

$$\begin{aligned} \pi : (X, \omega) &\mapsto (T, dz) \\ P &\rightarrow \int_{P_0}^P \omega \pmod{i\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est un revêtement ramifié dont les points de ramification sont les zéros de ω . Si le revêtement π est de degré n , alors X est pavée par les n préimages du carré unité.

(i). On rencontre parfois la dénomination «origami» dans la littérature.

Exemple 1.3.9 (la surface à trois carrés). — Le polygone en forme de «L» obtenu en assemblant trois carrés et muni des identifications naturelles définit une surface de translation de la strate $\mathcal{H}(2)$. La singularité conique d'angle 6π est représentée en noir sur la figure 1.4.

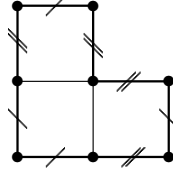


FIGURE 1.4 – Une surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ pavée par trois carrés.

1.3.3. Action de $GL_2^+(\mathbb{R})$

On trouvera dans [HS07, §2] un exposé agréable et complet sur les notions et résultats que nous abordons ci-dessous.

Définitions

Dans tout ce qui suit, on est amené à considérer l'action suivante du groupe $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur le plan complexe. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$, on pose pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$M \cdot z = ax + by + i(cx + dy).$$

Il s'agit de l'action naturelle de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur le plan affine réel \mathbb{R}^2 auquel est identifié \mathbb{C} .

Lorsqu'une surface de translation est définie géométriquement par un quotient $(\mathcal{P}/\sim, dz)$ où $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$ est un arrangement de polygones euclidiens, le groupe $GL_2^+(\mathbb{R})$ agit naturellement sur ces polygones, pour donner une nouvelle surface de translation. L'action est bien définie puisque les applications linéaires transforment les parallélogrammes en des parallélogrammes.

Si une surface est munie d'une structure de translation, alors $GL_2^+(\mathbb{R})$ opère par post-composition avec les cartes.

Lorsque la surface de translation est définie par la donnée d'une différentielle abélienne (X, ω) , on définit l'action de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur $\Omega\mathcal{T}_g$ comme suit : soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$, alors

$$\eta := a\Re(\omega) + b\Im(\omega) + i(c\Re(\omega) + d\Im(\omega))$$

est une forme harmonique sur X et il existe, sur la surface topologique S sous-jacente à X , une unique structure complexe pour laquelle η est holomorphe. On obtient de la sorte une nouvelle surface de Riemann notée Y et on note

$$M \cdot (X, \omega) = (Y, \eta).$$

Pour toute classe de cycle $[\gamma] \in H_1(S, \mathbb{Z})$, cette action vérifie

$$\int_{\gamma} \eta = M \cdot \int_{\gamma} \omega.$$

Compte tenu de l'identité $\|\eta\| = |\det(M)| \cdot \|\omega\|$, l'étude de l'action du sous-groupe $SL_2(\mathbb{R})$ est souvent privilégiée, car elle est à l'avantage de préserver la norme définie par $\|\omega\| = \frac{1}{2} \int_X \omega \wedge \omega^*$. En d'autres termes, l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ préserve l'aire de la surface de translation considérée.

Géodésiques de Teichmüller

Nous donnons ici un exemple fondamental pour la suite de notre propos. Soit ω une différentielle abélienne sur une surface de Riemann compacte X , alors ω définit sur $X^* := X \setminus Z(\omega)$ une structure de translation dont les cartes sont données par intégration, comme nous l'avons vu précédemment. Pour un réel $t > 1$ donné, posons $D_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et considérons l'application \mathbb{R} -linéaire $M_t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$z = x + iy \mapsto tx + iy = \frac{1}{2}(t+1)z + \frac{1}{2}(t-1)\bar{z}.$$

En composant par D_t chacune des cartes de la structure de translation sur X^* , on définit une nouvelle structure de translation sur la surface topologique sous-jacente à X^* , qui donne lieu à une unique structure complexe sur X . On obtient de la sorte une nouvelle surface de Riemann que l'on note X_t et une différentielle abélienne notée ω_t provenant de la nouvelle structure de translation.

Le changement de structure complexe donne lieu à une application naturelle $f_t : X \rightarrow X_t$ (qui est topologiquement l'identité) vérifiant $df_t = D_t$ et telle que, pour tout $P \in X$:

$$\mu_{f_t}(P) = \frac{\bar{\partial} f_t(P)}{\partial f_t(P)} = \frac{t-1}{t+1}.$$

Sa dilatation maximale est donc

$$K(f_t) = \sup_{P \in X} \frac{1 + |\mu_{f_t}(P)|}{1 - |\mu_{f_t}(P)|} = t,$$

d'où

$$d_{\mathcal{G}}(X, X_t) = \log(t).$$

L'homéomorphisme $f_t : X \rightarrow X_t$ est une application extrémale de Teichmüller. La surface X_t est appelée la *déformation de Teichmüller de dilatation t associée à ω* et la famille de surfaces de Riemann $\{X_t\}_{t \geq 1}$ ainsi définie est une *géodésique de Teichmüller*.

Dans les cartes déterminées par ω et ω_t , l'application f_t s'exprime comme une application affine réelle, c'est-à-dire de la forme $z \mapsto M \cdot z + c$ avec $M \in GL_2^+(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{C}$: on dit que $f_t : (X, \omega) \rightarrow (X_t, \omega_t)$ est un *homéomorphisme affine*.

De manière plus générale, pour $M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, l'action $M \cdot (X, \omega) = (Y, \eta)$ induit un homéomorphisme affine $\phi : (X, \omega) \rightarrow (Y, \eta)$ avec $d\phi = M$, qui est l'application quasi-conforme extrémale dans sa classe d'isotopie. La condition $\det(M) > 0$ garantit que ϕ préserve bien l'orientation.

Disques et courbes de Teichmüller

Les fibres de $\Omega\mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{T}_g$ sont stabilisées par le sous-groupe des similitudes $\mathbb{R}^* \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. En effet, l'action d'une telle transformation sur une surface de translation (X, ω) correspond à multiplier ω par un scalaire complexe non nul.

L'action de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ sur $\Omega\mathcal{T}_g$ commute avec l'action du groupe modulaire Mod_g et passe en une action sur le quotient $\Omega\mathcal{M}_g$, préservant chacune des strates $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$. On obtient alors une action de $\mathbb{H} \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\Omega\mathcal{M}_g$.

Pour une forme (X, ω) de référence sur laquelle on laisse opérer $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{F} & \Omega\mathcal{M}_g \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}_g \end{array}$$

où $F(M) = M \cdot (X, \omega)$ pour tout $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Soit $t \in \mathbb{H}$, notons

$$M_t = \frac{1}{\sqrt{\Im(t)}} \begin{pmatrix} 1 & \Re(t) \\ 0 & \Im(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

et désignons par X_t la surface de Riemann définie par $M_t \cdot (X, \omega) = (X_t, \omega_t)$. Alors l'application $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}_g$ est définie par $f(t) = [X_t]$ et on montre que f_t est une isométrie pour les distances respectives (voir par exemple [HS07, §2]). Toute forme (X, ω) de $\Omega\mathcal{M}_g$ engendre ainsi une *géodésique complexe* $\mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}_g$.

Un *disque de Teichmüller* est l'orbite dans $\Omega\mathcal{M}_g$ d'un élément (X, ω) sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{SL}(X, \omega)$ le stabilisateur de (X, ω) dans $\Omega\mathcal{M}_g$ sous l'action du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. D'après les travaux de W. Veech [Vee89], le groupe $\mathrm{SL}(X, \omega)$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm 1\}$ opère fidèlement sur le demi-plan supérieur, à la différence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. L'image de $\mathrm{SL}(X, \omega)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{PSL}(X, \omega)$ est le *groupe de Veech* de (X, ω) . C'est un réseau si l'aire du quotient $\mathrm{PSL}(X, \omega) \backslash \mathbb{H}$ est finie pour la métrique hyperbolique induite. Lorsque c'est le cas, on dira aussi que $\mathrm{SL}(X, \omega)$ est un réseau. Le résultat suivant, attribué à J. Smillie mais non publié à l'origine, est annoncé par Veech dans [Vee95].

Théorème 1.3.10 (Smillie). — *Si (X, ω) est un élément de $\Omega\mathcal{T}_g$, alors le disque de Teichmüller engendré par (X, ω) est fermé si, et seulement si $\mathrm{SL}(X, \omega)$ est un réseau.*

On dit alors que la surface de translation (X, ω) est une *surface de Veech*.

Si (X, ω) est une surface de Veech, alors le disque de Teichmüller engendré par (X, ω) se projette en une courbe algébrique dans \mathcal{M}_g appelée *courbe de Teichmüller*. Sa normalisation est la surface de Riemann $V := \text{PSL}(X, \omega) \backslash \mathbb{H}$.

1.4. Variétés abéliennes complexes

L'étude de la classification des courbes de Teichmüller en genre 2 nécessite d'introduire quelques notions concernant les variétés abéliennes et tout particulièrement les jacobiniennes de surfaces de Riemann.

1.4.1. Tores complexes et polarisation

Les précisions et les démonstrations des résultats cités ici sont disponibles dans le livre de C. Birkenhake et H. Lange [BL04].

Matrices des périodes

Soient V un espace vectoriel complexe de dimension finie g et Λ un réseau de V . Par définition, Λ est un sous-groupe discret de rang $2g$ agissant par translation sur V et le tore complexe $A = V/\Lambda$ est une variété analytique complexe, compacte et connexe.

Soient (v_1, \dots, v_g) une base de V et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g})$ une base du réseau Λ . Dans la base (v_1, \dots, v_g) , on peut écrire chaque λ_j sous la forme $\lambda_j = \sum_{k=1}^g \lambda_{jk} v_k$ et définir la *matrice des périodes* de A associée à ces bases par

$$\Pi = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{g,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{2g,1} & \dots & \lambda_{2g,g} \end{pmatrix} \in M_{2g,g}(\mathbb{C}).$$

On a alors $A = \mathbb{C}^g / {}^t\Pi \mathbb{Z}^{2g}$ et la donnée de Π détermine complètement A . Un exposé détaillé sur ces notions est disponible dans [BL04, §1.1].

Endomorphismes de tores complexes

Soient $A = V/\Lambda$ et $A' = V'/\Lambda'$ deux tores complexes de dimension g , un homomorphisme $f : A \rightarrow A'$ est une application holomorphe compatible avec les structures de groupes ; lorsque $A = A'$, on parle des *endomorphismes* de A . Les homomorphismes de A dans A' forment un groupe abélien libre de rang fini ; on notera $\text{End}(A)$ le groupe des endomorphismes de A .

Soit $f \in \text{End}(A)$, alors f est induit par une unique application \mathbb{C} -linéaire $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ vérifiant $F(\Lambda) \subset \Lambda$. On obtient alors un homomorphisme injectif

$$\rho_a : \begin{array}{ccc} \text{End}(A) & \rightarrow & \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong M_g(\mathbb{C}) \\ f & \mapsto & F \end{array}$$

appelé *représentation analytique* de $\text{End}(A)$. La restriction F_Λ de F au réseau Λ est \mathbb{Z} -linéaire et détermine complètement F et f , donnant ainsi un homomorphisme injectif

$$\begin{array}{ccc} \rho_r : \text{End}(A) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda) \cong M_{2g}(\mathbb{C}) \\ f & \mapsto & F_\Lambda \end{array}$$

nommé *représentation rationnelle* de $\text{End}(A)$. Étant données des bases de V et Λ auxquelles est associée une matrice des périodes Π de A , la condition $\rho_a(f)(\Lambda) \subset \Lambda$ revient à supposer qu'il existe des matrices $R \in M_{2g}(\mathbb{Z})$ et $\Gamma \in M_g(\mathbb{C})$ telles que

$$R\Pi = \Pi\Gamma.$$

Réciproquement, la donnée de deux matrices $R \in M_{2g}(\mathbb{Z})$ et $\Gamma \in M_g(\mathbb{C})$ vérifiant la condition ci-dessus définit un endomorphisme $f : A \rightarrow A$ tel que

$$\rho_a(f) = \Gamma \text{ et } \rho_r(f) = {}^t R.$$

On trouvera plus de détails dans [BL04, §1.2].

Polarisation

Une *polarisation* sur un tore complexe $A = V/\Lambda$ est une 2-forme alternée $E(\cdot, \cdot)$ sur Λ compatible avec la structure complexe sur A , c'est-à-dire vérifiant les conditions suivantes :

- (1) le prolongement \mathbb{R} -linéaire de E à V vérifie $E(ix, iy) = E(x, y)$ pour tous $x, y \in V$;
- (2) la forme hermitienne définie par $H(x, y) = E(x, iy) + iE(x, y)$ pour tous $x, y \in V$ est définie positive sur V .

Une *variété abélienne* est un tore complexe muni d'une polarisation. Un morphisme de variétés abéliennes polarisées est un morphisme de tores complexes qui préserve les polarisations.

Une polarisation E est dite *principale* si $\det(E) = 1$, c'est-à-dire s'il existe une base du réseau Λ , dite *symplectique*, dans laquelle la matrice de E s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix}.$$

Un tore complexe A admet une polarisation principale si, et seulement si une matrice des périodes Π de A vérifie les relations suivantes, appelées *relations bilinéaires de Riemann*.

Théorème 1.4.1 (Riemann). — *Soit $A = \mathbb{C}^g / {}^t\Pi\mathbb{Z}^{2g}$ un tore complexe de dimension g , avec $\Pi \in M_{2g,g}(\mathbb{C})$. Alors A admet une polarisation principale si, et seulement si*

$$\begin{aligned} {}^t\Pi J \Pi &= 0, \\ i {}^t\Pi J \bar{\Pi} &> 0. \end{aligned}$$

Une version plus générale de ce résultat est prouvée dans [BL04, §4.2]

Un théorème de Lefschetz affirme que les variétés abéliennes sont exactement les tores complexes admettant un plongement dans un espace projectif complexe, ce qui en fait des variétés algébriques d'après le théorème de Chow.

Théorème 1.4.2 (Lefschetz). — *Soit A un tore complexe, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) A admet une polarisation ;
- (ii) A admet une structure de variété algébrique projective.

On pourra consulter [BL04, §4.5] pour davantage de détails sur ce théorème et sa démonstration.

Variété modulaire de Siegel

Le demi-espace de Siegel, défini par

$$\mathfrak{S}_g = \{Z \in M_g(\mathbb{C}) : {}^t Z = Z \text{ et } \Im m(Z) > 0\},$$

est un ouvert de l'espace des matrices complexes symétriques, dont la dimension est $g(g+1)/2$.

Le groupe symplectique réel, défini par

$$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}) = \left\{ M \in M_{2g}(\mathbb{R}) : {}^t M \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

admet la description suivante : une matrice M est un élément de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ si, et seulement si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec α, β, γ et δ des matrices de dimension (g, g) à coefficients réels telles que

$$\begin{cases} {}^t \alpha \gamma \text{ et } {}^t \beta \delta \text{ sont symétriques,} \\ {}^t \alpha \delta - {}^t \gamma \beta = I_g. \end{cases}$$

Notons par ailleurs que ce sous-groupe de $M_{2g}(\mathbb{R})$ est stable par transposition.

Ce groupe agit à gauche par biholomorphismes sur \mathfrak{S}_g de la façon suivante : soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$, on pose pour tout $Z \in \mathfrak{S}_g$:

$$M(Z) = (\alpha Z + \beta)(\gamma Z + \delta)^{-1}.$$

Cette action est transitive.

On peut associer à chaque matrice $Z \in \mathfrak{S}_g$ une variété abélienne principalement polarisée : on définit un tore complexe en posant

$$A_Z = \mathbb{C}^g / (Z \ I_g) \mathbb{Z}^{2g},$$

que l'on munit de la polarisation induite par la forme hermitienne sur \mathbb{C}^g définie par la matrice $\Im m(Z)^{-1}$. Réciproquement, toute variété abélienne principalement polarisée peut s'obtenir de la sorte, d'après les relations bilinéaires de Riemann.

On peut montrer que deux matrices Z et Z' de \mathfrak{S}_g définissent des variétés abéliennes principalement polarisées isomorphes si, et seulement si, il existe une matrice symplectique $M \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ telle que $Z' = M(Z)$. Le sous-groupe $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ agit proprement et discontinûment sur le demi-espace de Siegel et le quotient $\mathcal{A}_g = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{S}_g$ est une variété analytique complexe, appelée *variété modulaire de Siegel*.

Théorème 1.4.3. — *La variété modulaire de Siegel \mathcal{A}_g est l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g .*

On pourra consulter [BL04, §8.2] pour une démonstration.

1.4.2. Multiplication réelle

L'anneau des endomorphismes d'une variété abélienne complexe simple⁽ⁱⁱ⁾ générique est isomorphe à \mathbb{Z} . Il arrive cependant que cet anneau contienne un sous-anneau bien plus gros que l'anneau des entiers, notamment lorsque la variété abélienne admet ce que l'on appelle une multiplication réelle. Plus précisément, on a la classification des algèbres d'endomorphismes suivante :

Théorème 1.4.4. — *Soit A une variété abélienne complexe de dimension $g \geq 2$ telle que $\mathrm{End}(A) \neq \mathbb{Z}$, on a :*

- (a) *soit A n'est pas simple, alors A est isogène⁽ⁱⁱⁱ⁾ à un produit de variétés abéliennes $B \times B'$ avec $1 \leq \dim B < A$;*
- (b) *soit A est simple et $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ contient un corps totalement réel $K \neq \mathbb{Q}$;*
- (c) *soit A est simple et $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ contient un corps imaginaire quadratique L .*

Dans le cas (b), on dit que A est à *multiplication réelle*. On introduit ci-dessous une définition plus précise.

Soit K un corps de nombres de degré g , un *ordre* de K est un sous-anneau \mathfrak{o} de l'anneau des entiers tel que $1 \in \mathfrak{o}$ et $\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Q} = K$.

Définition 1.4.5. — Soit $A = V/\Lambda$ un tore complexe de dimension g , une multiplication réelle sur A est la donnée

- (1) d'un ordre \mathfrak{o} d'un corps de nombres totalement réel de degré g sur \mathbb{Q} ;
- (2) d'un morphisme injectif de \mathbb{Q} -algèbres $\rho : \mathfrak{o} \rightarrow \mathrm{End}(A)$ tel que ρ n'admette aucun prolongement en un morphisme injectif $\rho' : \mathfrak{o}' \rightarrow \mathrm{End}(A)$ avec \mathfrak{o}' contenant strictement \mathfrak{o} .

(ii). Une variété abélienne est dite *simple* si elle n'admet aucune sous-variété abélienne non triviale.

(iii). Un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ entre deux variétés abéliennes de même dimension est une *isogénie* si son noyau est fini.

- (3) Si A est une variété abélienne, on supposera de plus que pour tout $\lambda \in \mathfrak{o}$, le relèvement $\tilde{\rho}(\lambda) : V \rightarrow V$ est auto-adjoint pour la forme hermitienne définie par la polarisation de A .

On dira alors que (A, ρ) est à multiplication réelle par \mathfrak{o} et on omettra de mentionner ρ s'il n'y a aucun risque de confusion.

On trouvera dans [BL04, §5.5] la classification des algèbres d'endomorphismes de variétés abéliennes complexes. On pourra également consulter [Mum70, §IV.21].

Polarisation

L'existence d'une multiplication réelle sur un tore complexe est une condition contraignante, à tel point qu'elle détermine une polarisation et donne donc lieu une structure de variété algébrique projective.

Lemme 1.4.6. — *Un tore complexe admettant une multiplication réelle est une variété abélienne.*

Démonstration. Suivant [vdG88, §IX.1], si un tore complexe $A = V/\Lambda$ de dimension g admet une multiplication réelle par $\mathfrak{o} \subset K$, alors $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ est un K -module projectif de rang 2. Soit $\varphi : \Lambda \otimes \mathbb{Q} \rightarrow K \oplus K$ un isomorphisme de K -modules, alors φ détermine un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire $\tilde{\varphi} : V \rightarrow \mathbb{C}^g$ tel que si $x_2 \in K$, alors $\varphi^{-1}(0, x_2) \in \Lambda \otimes \mathbb{Q} \subset V$ et

$$\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(0, x_2)) = (x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(g)}) \in \mathbb{R}^g$$

où $x \mapsto x^{(j)}$ désigne le j -ème plongement $K \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $x_1 \in K$, il existe alors $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_g) \in \mathbb{C}^g$ avec $\tau_j \notin \mathbb{R}$ pour tout j , tel que

$$\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(x_1, 0)) = (x_1^{(1)}\tau_1, \dots, x_1^{(g)}\tau_g).$$

On peut toujours supposer $\tau_j \in \mathbb{H}$ pour $j = 1, \dots, g$, quitte à changer l'isomorphisme φ . Pour tout $x = (x_1, x_2) \in K \oplus K$, on note

$$\phi_\tau(x) = (x_1^{(1)}\tau_1 + x_2^{(1)}, \dots, x_1^{(g)}\tau_g + x_2^{(g)}).$$

Considérons la forme alternée $E(\cdot, \cdot)$ sur $K \oplus K$ définie par

$$E(x, y) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}} \left({}^t x \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y \right)$$

pour tous $x, y \in K \oplus K$. À multiplication par un entier naturel près, E prend des valeurs entières sur le réseau Λ . On définit une forme hermitienne $H(\cdot, \cdot)$ sur \mathbb{C}^g par

$$H(z, w) = {}^t \bar{z} \mathrm{diag} (\Im(\tau_1), \dots, \Im(\tau_g))^{-1} w$$

pour tous $z, w \in \mathbb{C}^g$. La forme H est définie positive sur \mathbb{C}^n et pour tous $x, y \in K \oplus K$, on a

$$\begin{aligned} \Im(H(\phi_\tau(x), \phi_\tau(y))) &= \sum_{i=1}^g (\Im(\tau_i))^{-1} \Im\left((x_1^{(i)} \bar{\tau}_i + x_2^{(i)})(y_1^{(i)} \tau_i + y_2^{(i)})\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\Im(\tau_i))^{-1} x^{(i)} \Im\left({}^t(\bar{\tau}_i \ 1) (\tau_i \ 1)\right) y^{(i)} \\ &= \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left({}^t x \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\Im(H) = E$ prend des valeurs entières sur le réseau Λ et définit donc une polarisation sur le tore A . \square

Ordres quadratiques

Dans ce qui suit, on considère $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ comme l'extension de \mathbb{Q} par l'inclusion diagonale $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, avec l'automorphisme de Galois $(x, y) \mapsto (y, x)$.

Soit K un corps quadratique ou $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, tout ordre quadratique est isomorphe à un

$$\mathfrak{o}_D = \mathbb{Z}[X]/(X^2 - bX - c)$$

où b et c sont des entiers tels que $b^2 + 4c = D$. La classe d'isomorphisme de \mathfrak{o}_D dépend uniquement de l'entier D vérifiant $D \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$ et appelé *discriminant* de \mathfrak{o}_D .

Si D s'écrit $D = f^2 E$ avec f et E des entiers tels que $E \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$ et $f \geq 1$, alors on dit que D est un *discriminant fondamental*.

Si D n'est pas un carré, alors \mathfrak{o}_D est un sous-anneau de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ et \mathfrak{o}_D est exactement l'anneau des entiers si, et seulement si D est un discriminant fondamental.

Si $D = d^2$ est un carré, alors \mathfrak{o}_D est un sous-anneau de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et

$$\mathfrak{o}_{d^2} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod{d}\}.$$

Si A est une surface abélienne, on peut définir, de manière équivalente à la définition 1.4.5, une multiplication réelle sur A comme la donnée d'un endomorphisme T de A , auto-adjoint pour la polarisation et engendrant un sous-anneau $\mathbb{Z}[T] \cong \mathfrak{o}_D$ propre^(iv) dans $\text{End}(A)$.

Surface modulaire de Hilbert

Les surfaces modulaires de Hilbert sont traitées en détails dans [vdG88]; nous présentons ici les rudiments de cette théorie utiles à notre propos.

(iv). Un sous-anneau $R \subset \text{End}(A)$ est dit propre si, pour tout $T \in R$

$$\{nT \in R, n \neq 0\} \Rightarrow T \in R.$$

Soit D un discriminant quadratique, on note $K_D = \mathfrak{o}_D \otimes \mathbb{Q}$ c'est-à-dire :

$$K_D = \begin{cases} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \text{si } D \text{ est un carré,} \\ \mathbb{Q}(\sqrt{D}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque D n'est pas un carré, on note $x \mapsto x^\sigma$ pour tout $x \in K_D$, l'involution de Galois, qui envoie \sqrt{D} sur $-\sqrt{D}$.

On définit l'idéal fractionnaire \mathfrak{o}_D^\vee par

$$\mathfrak{o}_D^\vee = \{x \in K_D : \text{Tr}(xy) \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathfrak{o}_D\}.$$

Dans le cas où D n'est pas un carré, on a donc $\mathfrak{o}_D^\vee = \frac{1}{\sqrt{D}}\mathfrak{o}_D$. Le groupe modulaire de Hilbert $\Gamma_D = \text{SL}(\mathfrak{o}_D^\vee \oplus \mathfrak{o}_D)$ est défini par

$$\Gamma_D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(K_D) : a, d \in \mathfrak{o}_D, b \in (\mathfrak{o}_D^\vee)^{-1}, c \in \mathfrak{o}_D^\vee \right\}.$$

Ce groupe admet deux plongements dans $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, donnés par les deux plongements $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^\sigma$ de K_D dans \mathbb{R} , et agit donc proprement et discontinûment sur $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ par

$$\tau = (\tau_1, \tau_2) \mapsto g(\tau) = \begin{pmatrix} a\tau_1 + b & a^\sigma\tau_2 + b^\sigma \\ c\tau_1 + d & c^\sigma\tau_2 + d^\sigma \end{pmatrix}$$

pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D$. La *surface modulaire de Hilbert de discriminant D* est le quotient

$$H_D = \mathbb{H} \times \mathbb{H} / \Gamma_D.$$

Le lien entre les surfaces modulaires de Hilbert et la théorie des variétés abéliennes apparaît clairement dans le résultat suivant.

Théorème 1.4.7. — *La surface modulaire de Hilbert H_D est l'espace des modules des couples (A, ρ) où A est une surface abélienne principalement polarisée et $\rho : \mathfrak{o}_D \rightarrow \text{End}(A)$ le choix d'une multiplication réelle sur A .*

On trouvera une démonstration de ce résultat dans [vdG88, §IX.2] ou encore dans [McM07]. On pourra également consulter [BL04, §9.2] pour un exposé plus général.

Plongement dans la surface modulaire de Siegel. — On peut, suivant des idées de E. Hecke [Hec11], plonger la surface modulaire de Hilbert H_D dans le demi-espace de Siegel \mathfrak{S}_2 grâce à la construction suivante (voir [vdGU82] pour les détails).

Supposons que D n'est pas un carré et considérons le réseau $\mathfrak{o}_D^\vee \oplus \mathfrak{o}_D$ muni de la forme alternée $E(\cdot, \cdot)$ définie dans la démonstration du lemme 1.4.6 par

$$E(x, y) = \text{Tr}_{K_D/\mathbb{Q}}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

pour tous $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathfrak{o}_D^\vee \oplus \mathfrak{o}_D$. Soient $\gamma = (D + \sqrt{D})/2$ et

$$a_1 = \left(-\frac{\gamma^\sigma}{\sqrt{D}}, 0\right), a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{D}}, 0\right), b_1 = (0, 1), b_2 = (0, \gamma),$$

alors (a_1, a_2, b_1, b_2) est une base symplectique de $\mathfrak{o}_D^\vee \oplus \mathfrak{o}_D$, c'est-à-dire que la matrice de E dans cette base s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fixons $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ et notons $\Lambda_\tau = \phi_\tau(\mathfrak{o}_D^\vee \oplus \mathfrak{o}_D)$, où

$$\phi_\tau(x) = (x_1\tau_1 + x_2, \dots, x_1^\sigma\tau_2 + x_2^\sigma)$$

pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{o}_D^\vee \oplus \mathfrak{o}_D$. Si l'on note

$$Z_{a_\tau} = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{pmatrix} -\gamma^\sigma\tau_1 & \gamma\tau_2 \\ \tau_1 & -\tau_2 \end{pmatrix}$$

$$Z_{b_\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & \gamma^\sigma \end{pmatrix},$$

on a alors

$$\Lambda_\tau = Z_{a_\tau} \mathbb{Z}^2 \oplus Z_{b_\tau} \mathbb{Z}^2, \text{ avec .}$$

La forme alternée E définit une polarisation principale sur le tore complexe $\mathbb{C}^2/\Lambda_\tau$. Soit Z_τ la matrice

$$Z_\tau = Z_{a_\tau}(Z_{b_\tau})^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} (\gamma^\sigma)^2\tau_1 + \gamma^2\tau_2 & -(\gamma^\sigma\tau_1 + \gamma\tau_2) \\ -(\gamma^\sigma\tau_1 + \gamma\tau_2) & \tau_1 + \tau_2 \end{pmatrix},$$

alors on vérifie que $Z_\tau \in \mathfrak{S}_2$, ce qui fait de

$$A_\tau := \mathbb{C}^2/(Z_\tau \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2)$$

une variété abélienne principalement polarisée, isomorphe à $\mathbb{C}^2/\Lambda_\tau$. On définit ainsi une application

$$p_D : H_D \rightarrow \mathcal{A}_2$$

$$[\tau] \mapsto [Z_\tau].$$

Pour chaque $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_D$, la variété abélienne $A_{g(\tau)}$ est isomorphe à A_τ , où $g(\tau) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ est caractérisé par

$$\phi_{g(\tau)}(x) = \begin{pmatrix} c\tau_1 + d & 0 \\ 0 & c^\sigma\tau_2 + d^\sigma \end{pmatrix}^{-1} \phi_\tau \left(\frac{ax + c}{bx + d} \right)$$

pour tout $x \in \mathfrak{o}_D^\vee \oplus \mathfrak{o}_D$.

Remarque 1.4.8. — D'après le théorème 1.4.7, pour toute surface abélienne A principalement polarisée à multiplication réelle par un ordre quadratique \mathfrak{o}_D avec $D \neq d^2$, il existe $\tau \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ tel que A est isomorphe à A_τ . En particulier, si $\Pi = {}^t(\Pi_a \ \Pi_b) \in M_{4,2}(\mathbb{C})$ est la matrice des périodes d'une telle surface abélienne A , les réseaux des périodes Π et Λ_τ diffèrent par l'action d'un élément de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ et les rapports des périodes

$$\frac{(\Pi_a)_{11}}{(\Pi_a)_{21}}, \frac{(\Pi_a)_{12}}{(\Pi_a)_{22}}, \frac{(\Pi_b)_{11}}{(\Pi_b)_{21}}, \frac{(\Pi_b)_{12}}{(\Pi_b)_{22}}$$

sont des éléments de K_D .

Relation singulière de Humbert. — Soit

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_{12} \\ z_{12} & z_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_2$$

et supposons que la surface abélienne $A = \mathbb{C}^2 / Z\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2$ admet une multiplication réelle par un ordre quadratique \mathfrak{o}_D . L'anneau $\mathrm{End}(A)$ contient alors un élément T auto-adjoint pour la polarisation et vérifiant $T^2 - bT - c \mathrm{id} = 0$ où b et c sont des entiers tels que $b^2 + 4c = D$. On a ainsi

$${}^t \rho_r(T) \begin{pmatrix} Z \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ I_2 \end{pmatrix} \rho_a(T)$$

où la représentation rationnelle $\rho_r(T) = {}^t \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z})$ vérifie

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} {}^t \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}.$$

On en déduit d'une part

$$PZ + Q = Z(RZ + {}^tP),$$

et d'autre part

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tS = P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

d'où, notant $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$, la *relation singulière*

$$(1.4.1) \quad p_3 z_1 + (p_4 - p_1) z_{12} - p_2 z_2 + r(z_1 z_2 - z_{12}^2) - q = 0.$$

avec $(p_4 - p_1)^2 - 4p_2 p_3 - 4qr = D$. On pourra également consulter [vdG88, chap. IX].

1.4.3. Variétés jacobiennes

Les premiers exemples de variétés abéliennes complexes qui apparurent furent les jacobiennes de surfaces de Riemann, ce qui en fait sans doute les objets les plus importants et les mieux connus qui soient dans cette théorie.

Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$. Soit γ une courbe fermée simple sur X , on définit, pour toute différentielle abélienne ω sur X ,

$$\text{per}_\gamma(\omega) = \int_\gamma \omega.$$

On obtient ainsi une application linéaire injective

$$\begin{aligned} \text{per} : H_1(X, \mathbb{Z}) &\rightarrow \Omega(X)^* \\ [\gamma] &\mapsto \text{per}_\gamma \end{aligned}$$

indépendante du choix d'une base de $H_1(X, \mathbb{Z})$ et bien définie, puisque $\int_\gamma \omega$ dépend uniquement de la classe d'homologie $[\gamma]$. Cette application fait de l'image de $H_1(X, \mathbb{Z})$ un réseau de $\Omega(X)^*$, simplement noté $\text{Per}(X)$.

Définition 1.4.9. — La jacobienne de X est le tore complexe

$$\text{Jac}(X) = \Omega(X)^* / \text{Per}(X).$$

Produit d'intersection

Soit γ une courbe fermée simple sur une surface de Riemann X , alors on peut associer à γ une 1-forme différentielle réelle η_γ lisse, fermée et à support compact sur X , telle que

$$\int_\gamma \theta = - \int_X \theta \wedge \eta_\gamma$$

pour toute 1-forme réelle fermée θ (voir [FK92, §II.3]). Soient α et β deux cycles de X , le *nombre d'intersection de α et β* est défini par

$$(\alpha \cdot \beta) = \int_X \eta_\alpha \wedge \eta_\beta.$$

Le produit d'intersection (\cdot) dépend uniquement de la classe d'homologie des cycles ; il est anti-commutatif, distributif par rapport à l'addition des cycles et à valeurs entières (voir [FK92, §III.1]).

Une *base symplectique* de $H_1(X, \mathbb{Z})$ est une base $(\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$ telle que les nombres d'intersection sont

$$\begin{aligned} (\alpha_j \cdot \beta_k) &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ -1 & \text{si } j = k, \end{cases} \\ (\alpha_j \cdot \alpha_k) &= 0 = (\beta_j \cdot \beta_k). \end{aligned}$$

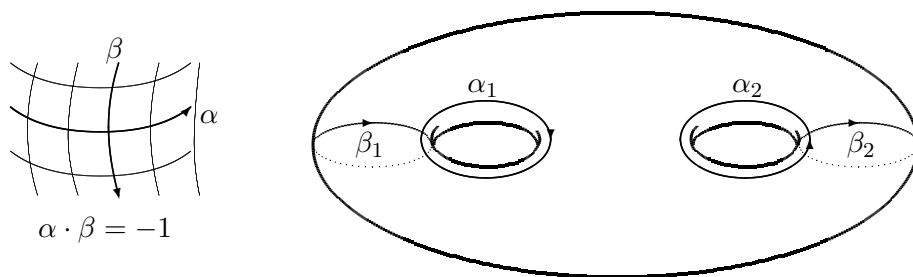


FIGURE 1.5 – Produit d'intersection de deux cycles et base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$ sur une surface de Riemann X de genre 2.

Relations bilinéaires et matrices des périodes

Les périodes d'une surface de Riemann compacte vérifient les relations bilinéaires de Riemann :

Proposition 1.4.10. — *Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$ et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$ une base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$. Soient ω et η deux différentielles abéliennes sur X , alors*

$$\sum_{j=1}^g \int_{\alpha_j} \omega \int_{\beta_j} \eta - \int_{\alpha_j} \eta \int_{\beta_j} \omega = 0,$$

$$i \sum_{j=1}^g \overline{\int_{\alpha_j} \omega} \int_{\beta_j} \eta > 0.$$

Ce résultat est établi dans [FK92, §III.3] notamment. En conséquence, étant donnée $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ une base de $\Omega(X)$, si on note

$$A = \left(\int_{\alpha_j} \omega_k \right)_{j,k} \quad \text{et} \quad B = \left(\int_{\beta_j} \omega_k \right)_{j,k}$$

alors $Z = AB^{-1}$ est un élément du demi-espace de Siegel \mathfrak{S}_g . Ainsi, la jacobienne $\text{Jac}(X) \cong \mathbb{C}^g / (Z \ I_g) \mathbb{Z}^{2g}$ est en fait une variété abélienne complexe.

Notons que, par construction, la matrice Z dépend uniquement de la base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$ et aucunement du choix d'une base de $\Omega(X)$: on dit que Z est la matrice des périodes normalisée associée à la base $(\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$.

Cas d'une surface de Riemann hyperelliptique. — Dans le cas d'une surface hyperelliptique X de genre $g \geq 2$ définie par une équation de la forme

$$y^2 = P(x) = \prod_{j=1}^m (x - x_j),$$

la description d'une base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$ et le calcul de la matrice des périodes associée peuvent être rendus particulièrement explicites. On détaille dans cette section la construction d'une telle base ; notons π la projection $(x, y) \mapsto x$ et, si $m = 2g + 1$, posons $x_{2g+2} = \infty$.

Soit ε_1 un arc simple dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ joignant x_1 à x_2 sans passer par aucun autre des x_j pour $j \geq 3$. Soit ε_2 un deuxième arc simple joignant x_2 à x_3 sans passer par x_1 ni aucun autre des x_j pour $j \geq 4$, et tel que ε_2 intersecte ε_1 uniquement en x_2 . On construit de la même manière des arcs simples $\varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2g+1}, \varepsilon_{2g+2}$ joignant respectivement x_3 à x_4, \dots, x_{2g+1} à x_{2g+2} et x_{2g+2} à x_1 , de telle sorte que ε_j n'intersecte ε_{j+1} qu'en un seul point ($j \bmod 2g + 2$). Pour $j = 1, \dots, 2g + 2$, le relevé dans X de ε_j par π est une courbe fermée simple que l'on note δ_j .

On choisit sur chaque arc ε_j une détermination holomorphe de \sqrt{P} pour laquelle l'orientation induite sur δ_j est telle que $(\delta_j \cdot \delta_{j+1}) = 1$ ($j \bmod 2g + 2$), tous les autres nombres d'intersection étant nuls. Avec cette convention, on a $\sum_{j=1}^{g+1} \delta_{2j} = 0$ et $\sum_{j=1}^{g+1} \delta_{2j-1} = 0$.

Pour $j = 1, \dots, g$, on définit alors

$$\alpha_j = - \sum_{\ell=1}^{j-1} \delta_{2\ell} - \delta_{2g+2},$$

$$\beta_j = \delta_{2j-1},$$

et on vérifie que $\mathcal{B} := (\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$ forme une base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$. Si on pose

$$A = \left(- \sum_{\ell=1}^{j-1} \int_{\varepsilon_{2\ell}} \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{P(x)}} - \int_{\varepsilon_{2g+2}} \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{P(x)}} \right)_{j,k}$$

$$B = \left(\int_{\varepsilon_{2j-1}} \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{P(x)}} \right)_{j,k}$$

alors $Z = AB^{-1}$ est la matrice des périodes associée à \mathcal{B} .

Le théorème de Torelli

Le résultat suivant montre à quel point la théorie des variétés jacobiniennes et celle des surfaces de Riemann sont intimement liées.

Théorème 1.4.11 (Torelli). — *Soient X_1 et X_2 deux surfaces de Riemann compactes de genre g . Alors X_1 et X_2 sont isomorphes si, et seulement si $\text{Jac}(X_1)$ et $\text{Jac}(X_2)$ sont isomorphes en tant que variétés abéliennes principalement polarisées.*

En d'autres termes, d'après le théorème 1.4.3, si Z_1 et Z_2 sont des matrices des périodes normalisées de X_1 et X_2 respectivement, alors X_1 et X_2 sont isomorphes si, et seulement si il existe une matrice $M \in \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ telle que $M(X_1) = X_2$. On peut trouver une démonstration de ce résultat dans [FK92, §III.12] par exemple.

1.5. Courbes de Teichmüller en genre 2

C. McMullen établit dans les années 2000 la classification complète des courbes de Teichmüller en genre 2 en abordant le problème à travers l'étude des familles de variétés jacobiniennes associées. La structure des anneaux d'endomorphismes de ces jacobiniennes, et plus précisément l'existence d'une multiplication réelle, joue un rôle crucial dans cette classification.

1.5.1. Les théorèmes de McMullen

Une forme (X, ω) de genre g est dite *primitive* si elle ne peut s'obtenir comme le tiré en arrière d'une forme (Y, η) de genre $h < g$, c'est-à-dire s'il n'existe aucune application holomorphe surjective $f : X \rightarrow Y$ telle que $f^*(\eta) = \omega$. En ce sens, les surfaces à petits carreaux donnent lieu, par définition, à des formes non primitives. Une courbe de Teichmüller est dite primitive si elle est engendrée par une forme primitive.

McMullen montre que si une différentielle abélienne (X, ω) de $\mathcal{H}(2)$ engendre une courbe de Teichmüller primitive, alors $\text{Jac}(X)$ admet une multiplication réelle pour laquelle la forme ω est propre. Plus précisément, on a l'énoncé suivant.

Théorème 1.5.1 (McMullen [McM03]). — *Soit $f : V \rightarrow \mathcal{M}_2$ une courbe de Teichmüller primitive engendrée par une forme (X, ω) de $\mathcal{H}(2)$. Alors il existe un unique discriminant $D \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$ qui n'est pas un carré, tel que $\text{Jac}(X)$ admet une multiplication réelle par un ordre quadratique \mathfrak{o}_D pour laquelle la différentielle ω est propre et l'application composée $V \rightarrow \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$ se factorise par une surface modulaire de Hilbert H_D , donnant le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & V & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}_2 \\ \phi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Jac} \\ \mathbb{H} \times \mathbb{H} & \longrightarrow & H_D & \xrightarrow{p_D} & \mathcal{A}_2 \end{array}$$

Quitte à changer la forme de référence (X, ω) , on peut supposer sans perte de généralité que $\text{SL}(X, \omega) \subset \text{SL}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{D}))$ et que l'application ϕ est de la forme $\phi(t) = (t, F(t))$ où $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ est une application holomorphe strictement contractante pour la métrique hyperbolique.

On dit que D est le discriminant de la courbe de Teichmüller $f : V \rightarrow \mathcal{M}_2$.

L'application $p_D : H_D \rightarrow \mathcal{A}_2$ est le plongement décrit au §1.4.2. Notons que l'application F vérifie, pour tout $z \in \mathbb{H}$ et tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(X, \omega)$,

$$F\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{a^\sigma F(z) + b^\sigma}{c^\sigma F(z) + d^\sigma},$$

où $x \mapsto x^\sigma$ désigne l'involution de Galois de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Une telle application est appelée un *plongement modulaire* et apparaît entre autre dans les travaux de P. Cohen et J. Wolfart [CW90] ou encore P. Schmutz Schaller et Wolfart [SSW00]. On trouvera notamment dans [CW90] une description de F lorsque $\mathrm{SL}(X, \omega)$ est un groupe fuchsien triangulaire.

Au vu du théorème 1.5.1, il est utile d'introduire la définition suivante.

Définition 1.5.2. — La courbe de Weierstrass de discriminant D , notée W_D , est le lieu dans \mathcal{M}_2 des surfaces de Riemann compactes X de genre 2 vérifiant les conditions suivantes :

- (1) $\mathrm{Jac}(X)$ admet une multiplication par l'ordre quadratique \mathfrak{o}_D ;
- (2) X admet une différentielle abélienne ω avec un zéro double, propre pour l'action de \mathfrak{o}_D .

Chaque composante irréductible de W_D est une courbe de Teichmüller de discriminant D . On notera $\Omega W_D \rightarrow W_D$ le fibré des formes propres (X, ω) avec un zéro double.

Afin d'établir la classification complète des courbes de Teichmüller engendrées par des formes de $\mathcal{H}(2)$, McMullen introduit un invariant de spin $\epsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, constant sur chaque composante irréductible, et prouve que D et ϵ sont les seuls invariants discrets de ces courbes.

Théorème 1.5.3 (McMullen [McM05a]). — *Soit $D \geq 5$ un discriminant, alors*

- (a) *si $D \equiv 1 \pmod{8}$ et $D \neq 9$, alors la courbe de Weierstrass W_D admet exactement deux composantes irréductibles disjointes W_D^0 et W_D^1 distinguées par leur invariant de spin ;*
- (b) *sinon, W_D est irréductible.*

Notons que $W_D = \emptyset$ pour $D \leq 4$.

Remarque 1.5.4. — Pour une surface de translation (X, ω) , notons

$$\mathrm{Per}(\omega) = \left\{ \int_\gamma \omega : \gamma \in H_1(X; \mathbb{Z}) \right\} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2.$$

Si (X, ω) est une surface pavée par d carreaux telle que $\mathrm{Per}(\omega) = \mathbb{Z}^2$, alors (X, ω) est un élément de ΩW_{d^2} . P. Hubert et S. Lelièvre [HL05] montrent, indépendamment de l'étude de McMullen, que la courbe de Weierstrass W_{d^2} engendrée par une telle surface à petits carreaux admet au moins deux composantes connexes lorsque l'entier $d > 3$ est impair, et exactement deux lorsque $d \geq 5$ est premier.

Notons que la courbe de Teichmüller W_9 engendrée par une surface à trois carreaux admet une unique composante connexe.

Enfin, McMullen décrit également un représentant canonique pour chacune des courbes de Teichmüller engendrée par une différentielle abélienne à zéro double.

Soient b et c des entiers et $\lambda = (b + \sqrt{b^2 + 4c})/2$, soit $\mathcal{P}(b, c)$ le polygone obtenu en assemblant un carré de côté λ sur un rectangle de dimensions $1 \times c$ (voir la figure 1.6). Un tel polygone est dit *admissible* si $b = -1, 0$ ou 1 , si $b + 1 < c$ et si c est pair lorsque $b = 1$.

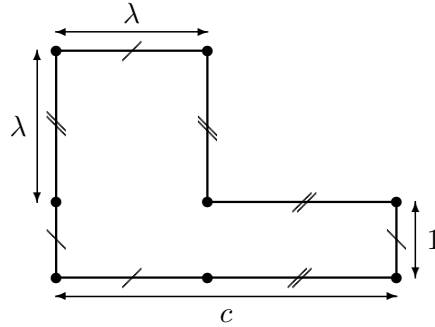


FIGURE 1.6 – Représentant canonique $\mathcal{P}(b, c)$ de W_D^ϵ .

Théorème 1.5.5 (McMullen [McM05a]). — *Toute courbe de Teichmüller engendrée par une forme de genre 2 avec un zéro double est également engendrée par un unique polygone admissible $\mathcal{P}(b, c)$.*

Remarque 1.5.6. — Considérons la surface de translation (Y, η) définie géométriquement par le quotient $(\mathcal{D}/\sim, dz)$, où \mathcal{D} est un décagone régulier dont les côtés opposés sont identifiés par translation. Les dix sommets de \mathcal{D} s'identifient en deux singularités coniques d'angle 4π , qui donnent donc les deux zéros simples de la différentielle abélienne η sur la surface de Riemann Y de genre 2. Le décagone régulier définit ainsi une forme de la strate $\mathcal{H}(1, 1)$.

McMullen montre dans [McM05b] que la forme (Y, η) engendre une courbe de Teichmüller de discriminant 5 et conjecture qu'il s'agit de l'unique courbe de Teichmüller engendrée par une forme de la strate $\mathcal{H}(1, 1)$; il prouve ce résultat dans [McM06].

Les courbes de Teichmüller en genre 2 sont donc complètement classifiées et sont engendrées

- (a) soit par des polygones admissibles en forme de «L», qui définissent des formes primitives à zéro double ;
- (b) soit par des surfaces à petits carreaux, correspondant à des formes non primitives ;
- (c) soit par la forme définie par le décagone régulier, qui est l'unique forme primitive à zéros simples en genre 2.

1.5.2. À propos de la classification de Calta

K. Calta [Cal04] établit, indépendamment des travaux de McMullen, une classification des surfaces de Veech de $\mathcal{H}(2)$, obtenue à partir de l'invariant J des surfaces de translation introduit par R. Kenyon et J. Smillie [KS00].

Une direction v sur une surface de translation est dite *complètement périodique* si toutes les trajectoires dans la direction v sont soit périodiques, soit partent et aboutissent à une singularité.

Décomposition en cylindres horizontaux maximaux. — Supposons que les trajectoires horizontales issues de points réguliers sur une surface de translation (X, ω) sont périodiques : on obtient de la sorte des familles de géodésiques paramétrées continûment, c'est-à-dire des bandes de géodésiques périodiques, que l'on peut voir comme des cylindres euclidiens de la forme $\mathbb{R}/w\mathbb{Z} \times [0; h]$, où w et h sont des réels strictement positifs.

La surface (X, ω) se décompose ainsi en une union de cylindres horizontaux^(v) maximaux, dont les bords sont des géodésiques pour la métrique localement euclidienne $|\omega|$ joignant soit deux singularités coniques, soit une singularité conique à elle-même. En recollant ces cylindres le long des bords, on reconstruit la surface.

Dans le cas d'une surface de translation de $\mathcal{H}(2)$, une telle décomposition compte au plus deux cylindres horizontaux maximaux C_1 et C_2 , représentés sur la figure 1.7 (voir [HL06]). Chaque cylindre C_j est décrit par un paramètre de largeur w_j et un de hauteur h_j . Il peut être nécessaire d'effectuer une rotation de l'un des bords d'un cylindre lors du recollement, donnant lieu à un troisième paramètre de torsion t_j .

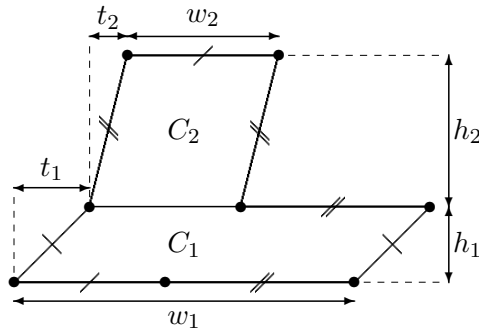


FIGURE 1.7 – Décomposition d'une surface de $\mathcal{H}(2)$ en cylindres horizontaux.

Calta donne, pour les surfaces de translation de la strate $\mathcal{H}(2)$, des relations sur les paramètres de la décomposition en cylindres horizontaux permettant de caractériser les surfaces de Veech.

Théorème 1.5.7 (Calta [Cal04]). — Soit (X, ω) une surface de Veech de $\mathcal{H}(2)$ telle que $\text{Per}(\lambda\omega) \not\subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Soit v une direction complètement périodique, supposons que (X, ω) se décompose en deux cylindres dans la direction v . Pour $j = 1, 2$, notons w_j , h_j et t_j respectivement les paramètres de largeur, hauteur et de torsion de ces cylindres : on peut supposer sans perte de généralité que ces variables sont des entiers algébriques

(v). En dépit de cette terminologie, ce sont en fait les bases de ces cylindres qui sont horizontales.

dans $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, où D est un entier positif sans facteur carré. Alors on a les équations suivantes :

$$(1.5.1) \quad w_1 h_1^\sigma = -w_2 h_2^\sigma,$$

$$(1.5.2) \quad w_1^\sigma t_1 + w_2^\sigma t_2 = w_1 t_1^\sigma + w_2 t_2^\sigma.$$

Réciproquement, soit (X, ω) une surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ satisfaisant aux hypothèses ci-dessus et vérifiant les relations (1.5.1) et (1.5.2), alors (X, ω) est une surface de Veech.

Cylindres horizontaux et multiplication réelle. — Grâce au lemme suivant, nous allons établir un lien direct entre la classification de McMullen, formulée en termes de jacobiennes à multiplication réelle, et la classification de Calta énoncée ci-dessus. Nous montrons ainsi que, pour une surface de translation en «L» de la strate $\mathcal{H}(2)$, les conditions obtenues par Calta permettant de caractériser les surfaces de Veech peuvent se déduire de l'existence d'une forme propre pour la multiplication réelle.

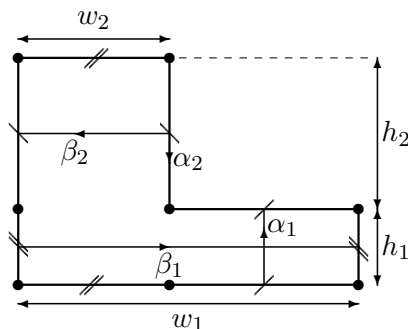


FIGURE 1.8 – Cylindres horizontaux de (X, ω) et base de $H_1(X, \mathbb{Z})$.

Proposition 1.5.8. — Soit (X, ω_1) une surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ définie, pour $t > 0$, par l'action de $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ sur un polygone admissible. Soient w_1, h_1, w_2 et h_2 , les paramètres de la décomposition en cylindres horizontaux maximaux de (X, ω) ; quitte à multiplier w_1 par un scalaire complexe non nul, on peut toujours supposer qu'il existe un discriminant D tel que ces paramètres sont dans \mathfrak{o}_D . Alors ces paramètres vérifient l'équation de Calta (1.5.1) :

$$w_1 h_1^\sigma = -w_2 h_2^\sigma.$$

Démonstration. D'après le théorème de McMullen 1.5.1, la différentielle ω_1 est propre pour la multiplication réelle par \mathfrak{o}_D sur $\text{Jac}(X)$ (où D n'est pas un carré). D'après la remarque Soient ω_2 une différentielle abélienne sur X telle que (ω_1, ω_2) est une base propre de $\Omega(X)$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ la base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$ définie par la figure 1.8, on note $(A_{jk}) = \left(\int_{\alpha_j} \omega_k \right)$ et $(B_{jk}) = \left(\int_{\beta_j} \omega_k \right)$.

L'existence d'une multiplication réelle sur $\text{Jac}(X)$ revient à dire que l'anneau $\text{End}(\text{Jac}(X))$ contient un élément T auto-adjoint pour la polarisation et vérifiant $T^2 - bT - c\text{id} = 0$ où b et c sont des entiers tels que $b^2 + 4c = D$; on a alors

$$(1.5.3) \quad {}^t\rho_r(T) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \rho_a(T).$$

La représentation analytique de T dans la base (ω_1, ω_2) s'écrit $\rho_a(T) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^\sigma \end{pmatrix}$ où λ et λ^σ sont les racines du polynôme $X^2 - bX - c$.

D'après le §1.4.2, la représentation rationnelle $\rho_r(T) = {}^t \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z})$ vérifie

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tS = P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

avec $\text{Tr}(P) = b$ et $\det(P) = -c$. Par ailleurs, on a

$$\int_{T^*(\gamma)} \omega_k = \int_{\gamma} T^*(\omega_k) = \lambda^{(k)} \int_{\gamma} \omega_k,$$

pour tout $[\gamma] \in H_1(X, \mathbb{Z})$, où $\lambda^{(1)} = \lambda$ et $\lambda^{(2)} = \lambda^\sigma$. Les périodes réelles (resp. imaginaires pures) s'envoient donc sur des périodes réelles (resp. imaginaires pures) sous l'action de T , d'où $q = r = 0$.

En développant (1.5.3), on obtient alors

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \left(\frac{A_{12}}{A_{22}} \right)^\sigma = \frac{p_2}{\lambda - p_1} = \frac{\lambda - p_4}{p_3},$$

$$\frac{B_{11}}{B_{21}} = \left(\frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^\sigma = \frac{\lambda - p_4}{p_2} = \frac{p_3}{\lambda - p_1}.$$

En remarquant (par exemple) que

$$\frac{p_2}{\lambda - p_1} + \frac{\lambda^\sigma - p_1}{p_3} = 0,$$

on obtient alors l'identité

$$(1.5.4) \quad \frac{A_{11}}{A_{21}} = \left(\frac{A_{12}}{A_{22}} \right)^\sigma = - \left(\frac{B_{21}}{B_{11}} \right)^\sigma = - \frac{B_{22}}{B_{12}}.$$

Compte tenu du choix de la base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$, on a alors $t_1 = t_2 = 0$, $B_{11} = w_1$, $A_{11} = h_1$, $B_{21} = -w_2$ et $A_{21} = -h_2$, d'où le résultat. \square

Remarque 1.5.9. — La relation (1.5.4) est en fait valide pour toute base symplectique obtenue à partir de $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ par une transformation symplectique donnée par $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & {}^tN^{-1} \end{pmatrix}$ avec $N \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$.

CHAPITRE 2

GÉODÉSIQUE DE TEICHMÜLLER ENGENDRÉE PAR UNE CROIX SUISSE

Un polygone euclidien en forme de «L» détermine une surface de translation (X, ω) de la strate $\mathcal{H}(2)$. L'action du sous-groupe diagonal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ donne lieu à une famille de courbes algébriques à un paramètre réel constituant une géodésique de Teichmüller dans l'espace des modules \mathcal{M}_2 .

Nous nous intéressons dans ce qui suit aux moyens de décrire les courbes algébriques d'une telle famille dans le cas où la surface de translation (X, ω) est définie par un polygone en forme de croix suisse. Plus précisément, la question qui sous-tend ce chapitre est celle du calcul des matrices des périodes de ces courbes.

2.1. Exemples et motivations

Nous présentons quelques exemples connus de surfaces de translation pour lesquels on connaît de façon exacte des descriptions des courbes algébriques qu'elles définissent.

Le double pentagone régulier

Reprenons l'exemple de la surface de translation (Y, ξ) définie géométriquement par un double pentagone $(\mathcal{Q}/\sim, dz)$, dont la construction a été décrite dans l'exemple 1.3.6. On suppose à présent que le pentagone \mathcal{P} de départ est régulier (voir la figure 2.1).

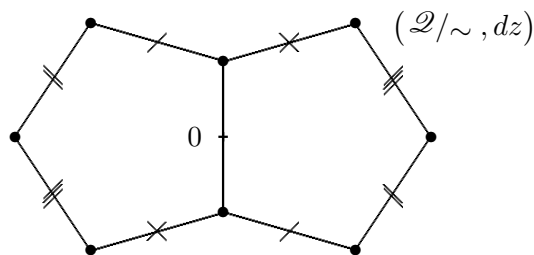


FIGURE 2.1 – Surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ avec un automorphisme d'ordre 5.

La rotation d'angle π dont le centre est le milieu du côté commun aux deux pentagones induit alors un automorphisme h_Y d'ordre 2 sur Y qui fixe six points, à savoir les milieux des cinq paires de côtés identifiés et la singularité conique d'angle 6π . L'automorphisme h_Y est donc l'involution hyperelliptique (voir §1.1).

En faisant agir, sur chacun des deux polygones, la rotation d'angle $2\pi/5$ dont le centre est le milieu du polygone, on définit un automorphisme d'ordre 5 sur Y . Ainsi, le groupe $\text{Aut } Y$ contient un sous-groupe d'ordre 10 : d'après la classification des groupes d'automorphismes des surfaces de Riemann de genre 2 (voir le tableau (1.1.2)), la surface Y est donc biholomorphe à la courbe algébrique définie par l'équation affine $y^2 = x^5 - 1$.

La différentielle ξ admet un zéro double, qui est nécessairement un point de Weierstrass de Y , autrement dit un point de ramification du revêtement double $Y \rightarrow \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ (voir §1.1). On peut donc supposer sans perte de généralité que $\xi = dx/y$ qui est, à multiplication par un scalaire complexe près, l'unique différentielle abélienne admettant un zéro double au-dessus de ∞ .

En étudiant les actions induites par l'automorphisme d'ordre 5 sur l'espace $\Omega(Y)$ d'une part, et sur $H_1(Y, \mathbb{Z})$ d'autre part, on peut alors mettre en évidence des relations entre les périodes de Y , permettant ainsi de calculer une matrice des périodes normalisée de la surface Y (un exemple est décrit en détails dans [BL04, §11.7]). On obtient alors

$$(2.1.1) \quad Z = \begin{pmatrix} 1 - \zeta^4 & -\zeta^2 - \zeta^4 \\ -\zeta^2 - \zeta^4 & \zeta \end{pmatrix} \text{ avec } \zeta = \exp(2\pi i/5).$$

Notons que, d'après [Vee89] et [McM03], la surface de translation $(\mathcal{Q}/\sim, dz)$ définie par le double pentagone régulier engendre une courbe de Teichmüller de discriminant 5.

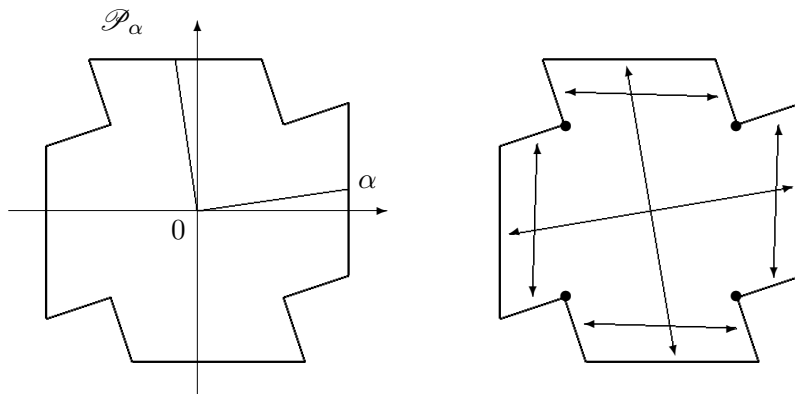
La croix suisse et ses variantes

C. McMullen présente dans [McM03] une famille de surfaces de translation, construites à partir de polygones en forme de «L», engendrant des courbes de Teichmüller. L'étude de cette famille motive l'exemple suivant, qui est le point de départ de cette thèse.

R. Silhol décrit dans [Sil06] un procédé permettant de calculer une matrice des périodes de la courbe algébrique définie par une surface de translation (X, ω) de la strate $\mathcal{H}(2)$ avec un automorphisme d'ordre 4.

Une telle surface peut être définie par le quotient $(\mathcal{P}_\alpha/\sim, dz)$ où \mathcal{P}_α est un polygone euclidien de la forme représentée par la figure 2.2 avec $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, stable par rotation d'angle $\pi/2$ et muni des identifications indiquées sur la figure.

Dans le cas particulier où α est réel, on dira que le polygone \mathcal{P}_α est une *croix suisse*. Un tel polygone s'obtient en assemblant quatre copies d'un hexagone euclidien dit *en forme de «L»*, c'est-à-dire avec cinq angles de $\pi/2$ et un angle de $3\pi/2$.

FIGURE 2.2 – Surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ avec un automorphisme d'ordre 4.

Les points représentés en noir s'identifient en une unique singularité conique d'angle 6π . Cette surface de translation (X, ω) appartient donc à la strate $\mathcal{H}(2)$.

L'involution hyperelliptique sur X est, là encore, induite par la rotation d'angle π . La rotation d'angle $\pi/2$ induit un automorphisme φ d'ordre 4, admettant exactement deux points fixes, à savoir le centre de symétrie de \mathcal{P}_α et la singularité conique. Le groupe $\text{Aut } X$ contient donc un sous-groupe isomorphe au groupe diédral D_4 . La courbe algébrique correspondante admet donc une équation de la forme

$$(2.1.2) \quad y^2 = x(x^2 - 1)(x - a)(x - 1/a) \text{ avec } a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

En particulier, $\text{Aut } X$ contient également une involution non hyperelliptique ψ qui permute les points fixes de φ (voir §2.4). Ceci permet d'exprimer explicitement les périodes d'une seconde différentielle abélienne à zéro double sur X en fonction des périodes de ω .

Silhol montre qu'une matrice des périodes de X s'exprime par

$$(2.1.3) \quad Z = i \begin{pmatrix} \frac{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha - 1} & \frac{-2\alpha(\alpha - 1)}{2\alpha - 1} \\ \frac{-2\alpha(\alpha - 1)}{2\alpha - 1} & \frac{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha - 1} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, il est possible, étant donnée une équation de la forme (2.1.2), d'exprimer en fonction de a le paramètre α déterminant entièrement la surface de translation (X, ω) , au moyen d'intégrales hyperelliptiques.

Remarque 2.1.1. — L'expression (2.1.3) donne, pour le cas particulier $\alpha = (\sqrt{3} + 1)/2$, la matrice des périodes

$$Z = i \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

On reconnaît une matrice des périodes normalisée de la courbe algébrique d'équation $y^2 = x^6 - 1$ dont le groupe d'automorphismes est d'ordre 24 (il s'agit de

l'exemple traité dans [BL04, §11.7]). La surface hyperbolique correspondante s'obtient en assemblant quatre images miroir d'un hexagone hyperbolique à angles droits, dont tous les côtés sont de longueur $\operatorname{arccosh}(2)$ (voir la construction décrite par la figure 3.1 et [Sil06]).

Pour une surface de translation (X, ω) décrite par la figure 2.2, l'expression (2.1.3) de la matrice des périodes de X fournit une description complète de la jacobienne de X . Il existe alors une expression analytique permettant de calculer avec précision les racines d'une équation de la courbe algébrique associée (voir §5.1).

Par ailleurs, les surfaces de Riemann de genre 2 avec un automorphisme d'ordre 4 constituent une famille à un paramètre complexe dans l'espace des modules des surfaces de genre 2 (voir [CR01] à ce propos). L'expression (2.1.3) donne donc un paramétrage de cette famille dans l'espace des modules \mathcal{M}_2 des surfaces abéliennes principalement polarisées.

En vue d'étendre les résultats de [Sil06], les surfaces de translation vers lesquelles se portent naturellement l'attention sont celles qui engendrent des courbes de Teichmüller et tout spécialement les surfaces définies par des polygones en forme de «L». Ces surfaces correspondent au cas où le paramètre noté α sur la figure 2.2 est réel. En particulier, la famille de surfaces de Riemann définie en laissant opérer le sous-groupe diagonal $\left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \right\}_{t>0}$ de $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ sur la surface en forme de croix suisse est une géodésique de Teichmüller. De plus, d'après [McM03], la surface de translation $(\mathcal{P}_\alpha/\sim, dz)$ engendre une courbe de Teichmüller dans \mathcal{M}_2 si, et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$ ou $\alpha = 1/2 + b\sqrt{d}$ avec $b \in \mathbb{Q}$ et $d \in \mathbb{N}$.

Il serait intéressant d'obtenir pour cette situation un paramétrage de la famille à un paramètre complexe de matrices des périodes déterminée par une courbe de Teichmüller. De la sorte, on pourrait espérer calculer, en fonction des périodes d'une surface de référence, les périodes d'une autre surface de la même famille. Cette question est la principale motivation de ce chapitre.

2.2. Famille de matrices des périodes associée à une géodésique de Teichmüller

Une surface de translation obtenue à partir d'un polygone en forme de «L» admet deux involutions anti-holomorphes et définit ce que l'on appelle une M-courbe réelle. Commençons par introduire quelques définitions.

2.2.1. M-courbes réelles

D'après un théorème de Weil, une courbe algébrique complexe X peut être définie par des équations polynomiales à coefficients réels si, et seulement si, il existe une involution anti-holomorphe σ sur X . De plus, on peut toujours choisir ces polynômes de telle sorte que σ soit l'involution induite par la conjugaison complexe.

Une *courbe algébrique réelle* est par définition la donnée d'un tel couple (X, σ) ; on dit aussi que σ est une *structure réelle* sur X . Si aucune ambiguïté n'est à craindre, on omet de préciser σ et on dit simplement que X est une courbe réelle. Nous adopterons cette convention lorsque X est défini par une équation polynomiale à coefficients réels et que σ est la conjugaison complexe, ce qui sera le cas qui nous intéressera tout au long de ce travail.

Soit (X, σ) une courbe réelle de genre $g \geq 2$, on note $X(\mathbb{R})$ l'ensemble des points fixes de σ , dont les composantes connexes sont dites *réelles*. On dit que X est une *M-courbe réelle* si elle admet le nombre maximal possible de composantes réelles, à savoir $g + 1$ (voir par exemple [GH81, §6]). Le cas échéant, $X \setminus X(\mathbb{R})$ admet alors exactement deux composantes connexes, chacune homéomorphe à une sphère privée de $g + 1$ disques.

M-courbes hyperelliptiques réelles. — Supposons que X est une courbe hyperelliptique définie par une équation polynomiale de la forme $y^2 = P(x)$ avec $\deg P(x) = 2g + 1$ ou $2g + 2$, et telle que σ est induite par la conjugaison complexe, avec $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Alors (X, σ) est une M-courbe réelle si, et seulement si toutes les racines de $P(x)$ sont réelles. En composant σ par l'involution hyperelliptique, on obtient une seconde structure réelle notée $-\sigma$, pour laquelle on note $X(i\mathbb{R})$ l'ensemble des points fixes. Les composantes connexes de $X(i\mathbb{R})$ sont dites *imaginaires pures* et si X est une M-courbe, alors l'ensemble des points de Weierstrass coïncide avec l'ensemble des points d'intersection de $X(\mathbb{R})$ et $X(i\mathbb{R})$.

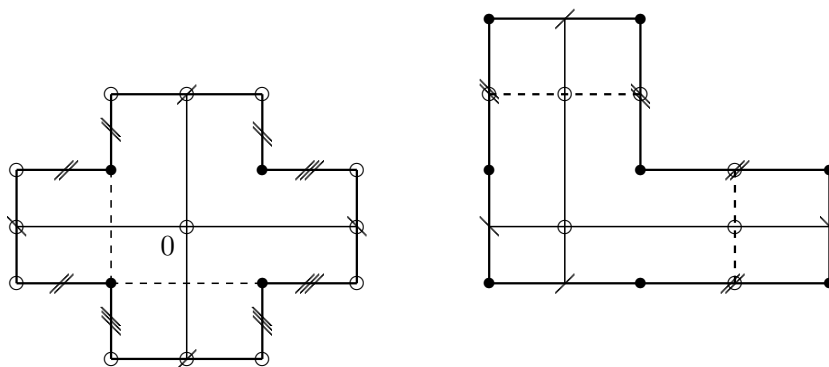


FIGURE 2.3 – Une surface de translation en «L» définit une M-courbe réelle.

Exemple 2.2.1. — Soit $(X, \omega) = (\mathcal{P}/\sim, dz)$ une surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ obtenue à partir de quatre images miroir d'un polygone en forme de «L» (voir la partie gauche de la figure 2.3). Quitte à faire agir une isométrie de \mathbb{C} , on peut toujours supposer que le polygone \mathcal{P} admet 0 pour centre de symétrie et est stable par la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$. Cette dernière définit une involution antiholomorphe σ sur X , qui fixe les points des trois courbes fermées simples provenant de l'axe de symétrie horizontale de \mathcal{P} et de ses côtés horizontaux : on obtient

ainsi une M-courbe réelle (X, σ) .

L'involution hyperelliptique agit sur (X, ω) par $z \mapsto -z$ et les points fixes de la seconde structure réelle $-\sigma$, induite par $z \mapsto -\bar{z}$, proviennent de l'axe de symétrie verticale et des côtés verticaux de \mathcal{P} . Sur la figure, des cercles repèrent les points de Weierstrass autres que la singularité conique, représentée quant à elle par un point noir.

La partie droite de la figure permet de repérer les composantes réelles et imaginaires pures de (X, σ) et les points de Weierstrass sur la représentation en forme de «L».

2.2.2. Déformations de Teichmüller

Étant donné un réel $x > 0$ fixé, soit $(X, \omega) = (\mathcal{P}_x/\sim, dz)$ la surface de translation en «L» de $\mathcal{H}(2)$ décrite par figure 2.4.

Pour tout réel $t > 0$, notons $g_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ et $(X_{g_t}, \omega_{g_t}) = g_t \cdot (X, \omega)$. L'action du sous-groupe $\{g_t\}_{t>0}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur (X, ω) définit une famille de formes $\{(X_{g_t}, \omega_{g_t})\}_{t>0}$ dans $\mathcal{H}(2)$ telle que $\{X_{g_t}\}_{t>0}$ est une géodésique de Teichmüller dans \mathcal{M}_2 , ainsi que nous l'avons vu au §1.3.3.

Plutôt que de considérer l'orbite du sous-groupe $\{g_t\}_{t>0}$, nous allons nous intéresser à celle d'un autre sous-groupe diagonal de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ définissant la même famille de surfaces de Riemann, mais donnant lieu à une expression plus simple pour la famille de matrices des périodes associée.

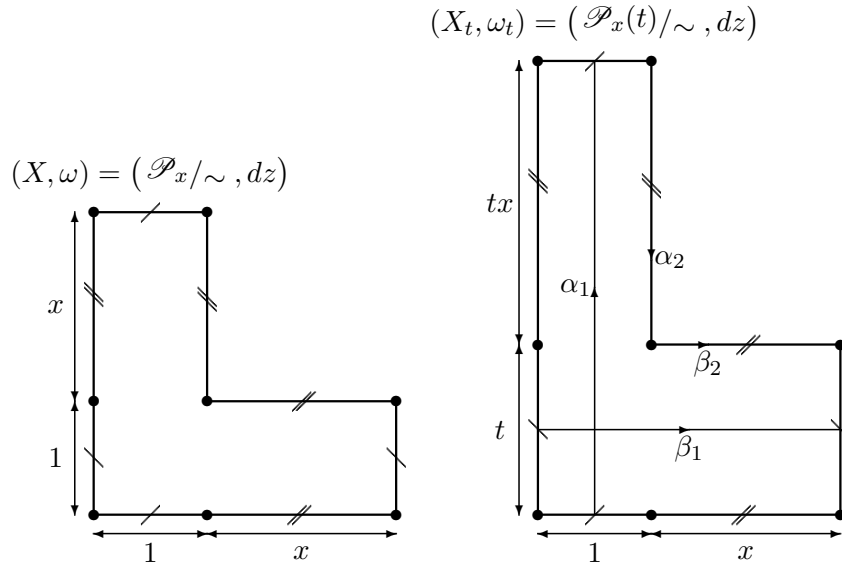


FIGURE 2.4 – La surface de translation (X_t, ω_t) .

Nous commençons par rassembler quelques faits élémentaires dans la remarque suivante.

Remarque 2.2.2. — Soit t un réel strictement positif, notons $h_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $v_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$. On définit les surfaces de translation $(X_{h_t}, \omega_{h_t}) = h_t \cdot (X, \omega)$ et $(X_{v_t}, \omega_{v_t}) = v_t \cdot (X, \omega)$. Rappelons que l'action du sous-groupe $\mathbb{R}^* \cdot \text{SO}_2(\mathbb{R})$ de $\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ laisse invariante les fibres de $\Omega \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$: en d'autres termes, deux surfaces de translation qui diffèrent par l'action d'une similitude définissent une même structure complexe.

On vérifie alors facilement que

- (1) les surfaces de Riemann X_{g_t} et $X_{h_{t^2}}$ (resp. $X_{g_{t^{-1}}}$ et $X_{v_{t^2}}$) sont isomorphes ;
- (2) les surfaces de Riemann X_{h_t} et X_{v_t} sont isomorphes ;
- (3) les surfaces de Riemann X_{h_t} et $X_{h_{t^{-1}}}$ (resp. X_{v_t} et $X_{v_{t^{-1}}}$) sont isomorphes.

Ainsi, il nous suffira par la suite de considérer l'action sur (X, ω) des éléments v_t avec $t \geq 1$ et on notera simplement $(X_t, \omega_t) = v_t \cdot (X, \omega)$ (voir la figure 2.4).

2.2.3. Forme de la matrice des périodes

Nous décrivons ici une forme générale pour la matrice des périodes de la surface de Riemann X_t définie ci-dessus.

Matrices des périodes réelle

Soit (X, σ) une courbe réelle, notons G le groupe engendré par σ_* agissant sur $H_1(X, \mathbb{Z})$. Le sous-groupe invariant $H_1(X, \mathbb{Z})^G$ est de rang g et, d'après [Sil82] et la théorie de Comessatti, toute base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = (\beta_1, \dots, \beta_g)$ de $H_1(X, \mathbb{Z})^G$ se complète de manière unique en une base symplectique $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$, de telle sorte que la matrice des périodes Z associée à cette base vérifie

$$2\Re(Z) \in M_g(\{0, 1\})$$

(voir [Sil89, §IV.4], par exemple). On dira que Z est la *matrice des périodes réelle* de X associée à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

En particulier, si Z est une matrice des périodes réelle d'une M-courbe réelle, alors suivant [SS89, §7] par exemple, on a $\Re(Z) = 0$.

Matrice des périodes d'une déformation de Teichmüller

Avec les notations de la figure 2.4, la différentielle abélienne ω_t est l'unique différentielle sur X admettant un zéro double en P_4 et telle que $\int_{\beta_1 - \beta_2} \omega = 1$.

On équipe $H_1(X, \mathbb{Z})$ de la base symplectique $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ définie par la figure 2.4. D'après la description de l'action de $\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ présentée au §1.3.3, on a

$$\int_{\gamma} \omega_t = v_t \cdot \int_{\gamma} \omega$$

pour tout $[\gamma] \in H_1(S, \mathbb{Z})$, où S désigne la surface topologique de genre 2 sous-jacente à X et X_t .

Pour t fixé, notons $\eta_1 = \omega_t$; il existe une unique différentielle abélienne η_2 sur X_t telle que $\int_{\beta_1} \eta_2 = 0$ et $\int_{\beta_2} \eta_2 = 1$. Remarquons que (η_1, η_2) forme bien une base de $\Omega(X)$ puisque $\int_{\beta_1} \eta_1 \neq 0$ (voir [FK92, §III.2]).

Si on note $A_t = \left(\int_{\alpha_j} \eta_k \right)_{j,k}$ et $B = \left(\int_{\beta_j} \eta_k \right)_{j,k}$, alors on a

$$A_t = \begin{pmatrix} it(x+1) & A_{21} \\ -itx & A_{22} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix},$$

d'où la matrice des périodes normalisée associée à la base $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ de $H_1(X_t, \mathbb{Z})$:

$$Z_t = A_t B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(x+1)t-xA_{21}}{x+1} & A_{21} \\ -\frac{x(t+A_{22})}{x+1} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice des périodes Z_t est symétrique, on a $A_{22} = -\frac{(x+1)A_{21}+tx}{x}$ et

$$Z_t = \begin{pmatrix} \frac{(x+1)t-xA_{21}}{x+1} & A_{21} \\ A_{21} & -\frac{(x+1)A_{21}+tx}{x} \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice des périodes Z_t vérifie $\Re(Z_t) = 0$, on a alors $A_{21} = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, d'où

$$(2.2.1) \quad Z_t = i \begin{pmatrix} \frac{(x+1)t-xy}{x+1} & y \\ y & -\frac{(x+1)y+tx}{x} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, la matrice $\Im(Z_t)$ est définie positive, d'où les conditions

$$\Im(Z_t)_{11} > 0, \quad \Im(Z_t)_{22} > 0 \quad \text{et} \quad \det(\Im(Z_t)) > 0.$$

On obtient donc respectivement

$$y < \frac{t(x+1)}{x}, \quad y < \frac{-tx}{x+1} \quad \text{et} \quad y < -\frac{tx(x+1)}{2x+1}$$

et en remarquant que, pour tous réels $x > 0$ et $t \geq 1$, on a

$$-\frac{tx(x+1)}{2x+1} < -\frac{tx}{x+1} < 0 < \frac{t(x+1)}{x},$$

on en déduit que $Z_t \in \mathfrak{S}_2$ si, et seulement si $y < -tx(x+1)/(2x+1)$.

Pour des réels $x > 0$ et $t \geq 1$ donnés, le paramètre réel y est défini de manière unique et détermine donc complètement la structure complexe de la déformation de Teichmüller X_t .

Si x est de la forme $x = (\sqrt{D} - 1)/2$, alors $(X, \omega) = (\mathcal{P}_x/\sim, dz)$ engendre une courbe de Teichmüller et en particulier $\text{Jac}(X_t)$ admet une multiplication réelle pour tout $t \geq 1$. L'existence d'une multiplication réelle est une condition assez forte, comme en atteste le lemme 1.4.6. Néanmoins, à la différence de ce que

nous avons rencontré dans la section précédente lorsque la surface de Riemann admet des automorphismes non triviaux, le théorème de McMullen 1.5.1 suggère une relation de nature transcendante entre les périodes. Plus précisément, on cherchera à caractériser les paramètres x , y et t par l'annulation d'une expression analytique en ces variables. Le quatrième chapitre sera consacré à cette question dans le cas $x = 1$, correspondant aux déformations de Teichmüller de la surface de Riemann définie par la surface de translation pavée par trois carrés.

Notons enfin que, lorsque le paramètre y n'est plus nécessairement assujéti à déterminer la déformation de Teichmüller X_t , l'expression (2.2.1) fournit une description de l'espace des modules des M-courbes réelles. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 2.2.3. — *Soit Z une matrice des périodes réelle d'une M-courbe réelle. Alors il existe des réels x , y et t vérifiant $x > 0$, $t \geq 1$ et $y < -tx(x + 1)/(2x + 1)$ tels que*

$$(2.2.2) \quad Z = i \begin{pmatrix} \frac{(x+1)t-xy}{x+1} & y \\ y & -\frac{(x+1)y+tx}{x} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Suivant [Sil89, §IV.4], on peut montrer que toute M-courbe réelle admet une matrice des périodes $Z \in \mathfrak{S}_2$ de la forme

$$(2.2.3) \quad Z = i \begin{pmatrix} y_1 & y_{12} \\ y_{12} & y_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} 0 < y_2 \leq y_1 \\ 0 \leq -2y_{12} \leq y_1 + y_2. \end{cases}$$

Il suffit alors de poser

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{y_1 + y_2 - 2y_{12}}{y_1 + y_2 + 2y_{12}}} - 1 \right), \\ y &= y_{12}, \\ t &= \frac{1}{2} \left(y_1 - y_2 + \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - (2y_{12})^2} \right). \end{aligned}$$

pour obtenir la forme (2.2.2) annoncée. □

Remarque 2.2.4. — La base de $H_1(X, \mathbb{Z})$ décrite par la figure 2.4 et dont nous faisons usage dans cette section n'est pas la seule base symplectique qui apparaîtra dans ce travail. Il en sera de même, par conséquent, des conditions satisfaites par les coefficients des matrices des périodes des M-courbes réelles. Afin d'éviter toute confusion, nous prendrons soin de mentionner explicitement les bases de l'homologie auxquelles sont associées les matrices des périodes considérées lorsque le contexte le nécessite.

2.3. Détermination de la structure complexe

Une surface de translation (X, ω) fournit la donnée des périodes d'une différentielle abélienne sur X . En général, cette donnée est insuffisante à elle seule pour déterminer la surface de Riemann X (que ce soit sous la forme d'une équation de la courbe algébrique associée, d'une matrice des périodes ou d'un polygone hyperbolique). Lorsque X est une M-courbe réelle, nous allons voir que, si l'on suppose que ω a un zéro double, cette hypothèse supplémentaire suffit à déterminer la structure complexe. Cette situation coïncide avec le cas où la surface de translation est définie par un polygone en forme de «L».

2.3.1. Transformation de Schwarz-Christoffel

Commençons par rappeler un résultat classique d'analyse complexe qui, énoncé sous la forme ci-dessous, compte parmi ses principaux contributeurs Riemann, Poincaré, Koebe, Carathéodory et Osgood.

Théorème 2.3.1 (Théorème de l'application conforme). — *Soit U un ouvert non vide simplement connexe du plan complexe, distinct de \mathbb{C} , dont le bord est une courbe de Jordan, et soit $x_0 \in U$. Alors il existe une application biholomorphe $f : \mathbb{H} \rightarrow U$, se prolongeant en un homéomorphisme $\overline{\mathbb{H}} \rightarrow \overline{U}$. Si on suppose de plus $f(x_0) = 0$ et $f'(x_0) = 1$, alors f est unique.*

Intéressons-nous au cas où l'ouvert U est l'intérieur d'un polygone euclidien \mathcal{P} simplement connexe dans le plan complexe⁽ⁱ⁾ dont le bord est orienté dans le sens direct et dont les sommets sont notés w_1, \dots, w_n .

Si on note respectivement $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ avec $0 < \alpha_j \leq 2$ les angles intérieurs correspondants, alors un exercice de géométrie euclidienne élémentaire permet de montrer que $\sum_{j=1}^n \alpha_j = n - 2$.

D'après le théorème 2.3.1, il existe une application biholomorphe $f : \mathbb{H} \rightarrow U$ se prolongeant en un homéomorphisme qui envoie l'axe réel sur les côtés de \mathcal{P} . Par abus de notation, cet homéomorphisme sera de nouveau noté f . Le résultat suivant fournit alors une expression explicite pour f .

Théorème 2.3.2 (Formule de Schwarz-Christoffel). — *Soit U l'intérieur d'un polygone euclidien \mathcal{P} défini comme ci-dessus. Soient $f : \mathbb{H} \rightarrow U$ une application biholomorphe et x_1, \dots, x_n des réels tels que $x_1 < \dots < x_n$ et vérifiant $f(x_j) = w_j$ pour $j = 1, \dots, n$. Alors il existe des constantes $A \in \mathbb{C}^\times$ et $B \in \mathbb{C}$ telles que*

$$(2.3.1) \quad f(z) = A \int_0^z \prod_{j=1}^n (x - x_j)^{\alpha_j - 1} dx + B.$$

(i). On peut également envisager des cas où le «polygone» \mathcal{P} admet un ou plusieurs sommets à l'infini, mais cela ne sera pas utile pour notre propos.

Sous les mêmes hypothèses, si on suppose de plus que $x_n = \infty$, alors la formule ci-dessus devient

$$(2.3.2) \quad f(z) = A \int_0^z \prod_{j=1}^{n-1} (x - x_j)^{\alpha_j - 1} dx + B.$$

On pourra consulter [Neh52, §V.6] pour une démonstration de ce résultat et de ses variantes.

Remarque 2.3.3. — Les pré-images x_j des sommets w_j de \mathcal{P} sont appelées les *paramètres de Schwarz-Christoffel*. Puisqu’une transformation de Möbius est entièrement déterminée par l’image de trois points, on peut choisir arbitrairement trois de ces paramètres, incluant le point à l’infini dans le cas où ce dernier est la pré-image d’un des sommets du polygone. Les $n - 3$ paramètres restants sont solutions d’un système d’équations non linéaire. Les constantes complexes A et B , quant à elles, expriment la position et la taille du polygone \mathcal{P} et sont complètement déterminées par la donnée de deux de ses sommets dans le plan complexe. Ainsi, si on prescrit les sommets d’un polygone euclidien \mathcal{P} et trois des paramètres x_j , alors l’application de Schwarz-Christoffel est l’unique application bi-holomorphe de \mathbb{H} dans l’intérieur de \mathcal{P} qui envoie x_j sur w_j .

On détaille dans ce qui suit deux applications au cas d’une M-courbe réelle de genre 2 définie par une surface de translation.

2.3.2. Différentielle abélienne avec un zéro double sur une M-courbe réelle de genre 2

Le polygone \mathcal{P} qui nous intéresse tout particulièrement est un hexagone euclidien en forme de «L» c’est-à-dire tel que $\alpha_j = 1/2$ pour $j = 1, \dots, 5$ et $\alpha_6 = 3/2$, le bord de \mathcal{P} étant orienté dans le sens direct. Notons w_1, \dots, w_6 les sommets de \mathcal{P} : quitte à faire agir une isométrie directe du plan complexe, on peut supposer que $w_3 = 0$ et que w_4 est un réel strictement positif.

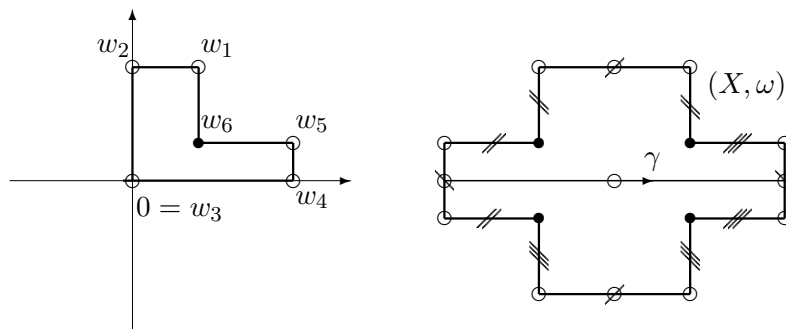
D’après la remarque 2.3.3, on peut faire agir une transformation de Möbius de telle sorte que l’application de Schwarz-Christoffel admette pour expression

$$(2.3.3) \quad f(z) = A \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

pour tout $z \in \mathbb{H}$, avec $A \in \mathbb{C}^\times$ et où a, b et c sont des réels vérifiant $a < b < 0 < 1 < c$ et tels que

$$f(a) = w_1, f(b) = w_2, f(0) = w_3 = 0, f(1) = w_4, f(c) = w_5 \text{ et } f(\infty) = w_6.$$

Notons (X, ω) la surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ définie par l’hexagone \mathcal{P} via le processus de dépliage évoqué au §1.3.2 (voir la figure 2.5).

FIGURE 2.5 – Polygone en «L» et $(X, \omega) \in \mathcal{H}(2)$.

Proposition 2.3.4. — Soient \mathcal{P} le polygone décrit ci-dessus et f l'application de Schwarz-Christoffel définie par (2.3.3). Soit (X, ω) la surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ définie par dépliage de \mathcal{P} , alors la courbe algébrique X admet pour équation

$$y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c) \text{ avec } \omega = A \frac{dx}{y}.$$

Démonstration. Par construction, X est une M-courbe réelle de genre 2 (voir l'exemple 2.2.1) et admet donc une équation de la forme

$$y^2 = P(x) = \prod_{j=1}^5 (x - u_j),$$

où les u_j sont des réels tels que $u_1 < \dots < u_5$. Quitte à faire agir une transformation de Möbius, on peut supposer sans perte de généralité que $u_3 = 0$ et $u_4 = 1$.

Le polynôme P ne s'annule pas dans \mathbb{H} : choisissons la détermination holomorphe de \sqrt{P} qui est réelle et négative sur le segment $[u_1; u_2]$ et considérons l'application $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}.$$

L'image de \mathbb{H} par φ est un hexagone euclidien avec cinq angles droits aux sommets $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_5)$ et un angle de $3\pi/2$ au sommet $\varphi(\infty)$.

La différentielle abélienne ω induite sur X par la forme dz sur \mathbb{C} est, à multiplication par un scalaire complexe près, l'unique différentielle admettant un zéro double au-dessus de ∞ , d'où $\omega = \lambda dx/y$ pour une certaine constante $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Soit γ la courbe fermée simple sur X définie à partir du segment $[w_3; w_4]$, alors

$$\int_{\gamma} \omega = 2 \int_{w_3}^{w_4} dz = 2f(w_4),$$

d'où on déduit $\lambda = A$. Puisque, lorsque les sommets du polygone sont spécifiés, les paramètres de Schwarz-Christoffel sont uniques, on a $\varphi = f$ et $u_1 = a$, $u_2 = b$ et $u_5 = c$. \square

Remarque 2.3.5. — Requérir l'unicité des paramètres de Schwarz-Christoffel revient ici à prescrire le diviseur *et* les périodes de la différentielle ω sur X , une fois l'un des sommets du polygone \mathcal{P} fixé (en 0 par exemple).

2.3.3. Différentielle abélienne avec deux zéros simples sur une M-courbe réelle de genre 2

Un second exemple intéressant consiste à considérer un polygone semblable à celui de la section précédente, mais «fendu» par l'un de ses côtés. Plus précisément, on définit un polygone \mathcal{P} à sept sommets, notés w_1, \dots, s, w_n dans cet ordre, le bord de \mathcal{P} étant orienté dans le sens direct. Notons $\alpha_s\pi$ l'angle intérieur au sommet s et, comme précédemment, soit $\alpha_j\pi$ l'angle intérieur au sommet w_j pour $j = 1, \dots, 6$. On suppose que $\alpha_s = 2$, $\alpha_j = 1/2$ pour $j = 1, \dots, 5$ et $\alpha_6 = 3\pi/2$.

On peut interpréter graphiquement $\alpha_s = 2$ en imaginant une particule se déplaçant le long du côté $[w_5; s]$, s'arrêtant en s et repartant dans la même direction mais dans le sens opposé (voir la figure 2.6).

Quitte à faire agir une isométrie directe du plan complexe, on peut de nouveau supposer que $w_3 = 0$ et que w_4 est un réel strictement positif. Il existe alors une transformation de Möbius telle que la formule de Schwarz-Christoffel pour le polygone \mathcal{P} s'écrive

$$(2.3.4) \quad f(z) = A \int_0^z \frac{(x - x_s)dx}{\sqrt{x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

pour tout $z \in \mathbb{H}$, avec $A \in \mathbb{C}^\times$ et où a, b, c et x_s sont des réels vérifiant $a < b < 0 < 1 < c < x_s$ et tels que

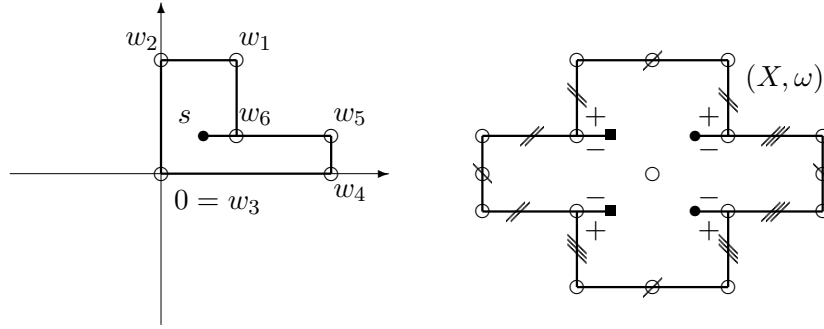
$$\begin{aligned} f(a) = w_1, f(b) = w_2, f(0) = w_3 = 0, f(1) = w_4, f(c) = w_5, \\ f(x_s) = s \text{ et } f(\infty) = w_6. \end{aligned}$$

En assemblant quatre images miroirs de \mathcal{P} et avec les identifications indiquées sur la figure 2.6, on obtient une surface de translation notée (X, ω) . Cette dernière admet exactement deux singularités coniques d'angle conique 4π , repérées sur la figure par des cercles et des carrés noirs : la forme (X, ω) appartient donc à la strate $\mathcal{H}(1, 1)$.

Proposition 2.3.6. — Soient \mathcal{P} le polygone décrit ci-dessus et f l'application de Schwarz-Christoffel définie par (2.3.4). Soit (X, ω) la surface de translation de $\mathcal{H}(1, 1)$ définie par dépliage de \mathcal{P} , alors la courbe algébrique X admet pour équation

$$y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c) \text{ avec } \omega = A \left(\frac{xdx}{y} - x_s \frac{dx}{y} \right).$$

Démonstration. La preuve suit un schéma identique à celle de la proposition 2.3.4, en tenant compte du fait que la différentielle abélienne ω induite sur X par la forme dz sur \mathbb{C} est, à multiplication par un scalaire complexe près, l'unique différentielle admettant deux zéros simples au-dessus de x_s . \square

FIGURE 2.6 – Polygone en «L fendu» et $(X, \omega) \in \mathcal{H}(1, 1)$.

2.3.4. Isopériodicité et structure complexe

Soit X une M -courbe réelle admettant une équation de la forme

$$y^2 = P(x) = \prod_{j=1}^5 (x - x_j)$$

où les x_j sont des réels. Soit ω une différentielle abélienne admettant un zéro double, on peut supposer sans perte de généralité que $\omega = dx/y$. On choisit une détermination holomorphe de \sqrt{P} et on considère l'application de Schwarz-Christoffel définie par

$$f(z) = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

pour tout $z \in \mathbb{H}$, qui envoie le demi-plan supérieur dans l'intérieur d'un hexagone euclidien \mathcal{P} à cinq angles droits aux sommets images des racines de $P(x)$ par f , et un angle de $3\pi/2$ en $f(\infty)$. Si les périodes de ω sont prescrites, alors \mathcal{P} est l'unique polygone fermé qui puisse être construit de la sorte. La surface de translation (X, ω) obtenue en assemblant quatre images miroirs de \mathcal{P} détermine complètement la structure complexe sur X .

On résume la discussion précédente dans l'énoncé suivant.

Proposition 2.3.7. — *Soient X une M -courbe réelle et ω une différentielle abélienne sur X admettant un zéro double. Alors la donnée du diviseur et des périodes de ω détermine complètement la surface de translation (X, ω) , et donc la classe d'isomorphisme complexe de la courbe X .*

Remarque 2.3.8. — En général, connaissant les périodes d'une différentielle abélienne ω sur X et sachant que cette différentielle admet un zéro double, ces données ne suffisent pas à déterminer la forme (X, ω) . En effet, C. McMullen montre dans [McM07, §9] que la $SL(2, \mathbb{R})$ -orbite de toute forme de genre 2 propre pour la multiplication réelle par un ordre quadratique \mathfrak{o}_D ($D \neq d^2$) contient une infinité de formes *isopériodiques*, au sens suivant : deux formes (X_1, ω_1) et (X_2, ω_2) de

même genre sont dites isopériodiques s’il existe un isomorphisme symplectique $\phi : H_1(X_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X_2, \mathbb{Z})$ tel que $\text{per}_{\omega_1} = \text{per}_{\omega_2} \circ \phi$, où

$$\begin{aligned} \text{per}_{\omega_j} : H_1(X_j, \mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ [\gamma] &\mapsto \int_{\gamma} \omega_j. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.9. — Dans le cas où une différentielle abélienne ω admet deux zéros simples sur une M-courbe réelle X , la donnée des périodes de ω ne permet pas *a priori* de déterminer la surface de translation (X, ω) .

2.4. Multiplication réelle et base de formes à zéro double

McMullen montre dans [McM03, §9] que la surface de translation $(X, \omega) = (\mathcal{P}_x/\sim, dz)$ engendre une courbe de Teichmüller primitive lorsque $x = (\sqrt{D} - 1)/2$ où $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ n’est pas un carré. En particulier, la jacobienne de X admet dans ce cas une multiplication réelle par σ_D pour laquelle la différentielle abélienne ω est propre.

Dans ce cas précis, on peut en fait décrire une base d’éléments de $\Omega(X)$ propres pour l’action de σ_D .

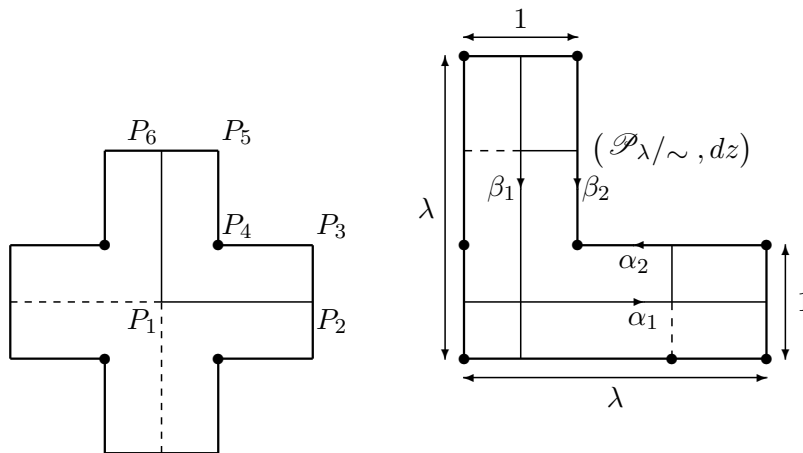


FIGURE 2.7 – Surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ avec automorphisme d’ordre 4.

Proposition 2.4.1. — Soit (X, ω_1) la surface de translation de genre 2 définie géométriquement par le quotient $(\mathcal{P}_\lambda/\sim, dz)$ décrit par la figure 2.7 avec $\lambda = (\sqrt{D} + 1)/2$, où $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ n’est pas un carré. Alors $\Omega(X)$ admet une base de différentielles abéliennes à zéro double, propres pour l’action de la multiplication réelle par σ_D sur $\text{Jac}(X)$.

Nous allons voir que les zéros doubles de ces différentielles propres sont les points fixes de l’automorphisme d’ordre 4.

Démonstration. Suivant [Sil06], la surface de Riemann X admet un automorphisme φ d'ordre 4, induit par la rotation d'angle $\pi/2$: la courbe algébrique associée admet donc une équation de la forme

$$y^2 = x(x^2 - 1)(x - a)(x - 1/a) \text{ avec } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\},$$

pour laquelle φ est défini par

$$\varphi : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{iy}{x^3} \right).$$

Cet automorphisme admet comme uniques points fixes les points de Weierstrass $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

La surface X admet un automorphisme d'ordre 2 supplémentaire noté ψ défini par

$$\psi : (x, y) \mapsto \left(\frac{ax - 1}{x - a}, y \left(\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{x - a} \right)^3 \right),$$

qui échange les deux points de Weierstrass ci-dessus.

La surface de translation (X, ω_1) est stable par $z \mapsto -iz$: la différentielle ω_1 vérifie donc $\varphi_1^*(\omega_1) = -i\omega_1$ où φ_1 est l'automorphisme induit par la rotation d'angle $\pi/2$. Si on pose

$$\omega = \frac{dx}{y} - \frac{xdx}{y},$$

alors on vérifie que $\varphi^*(\omega) = -i\omega$. Or, à multiplication par un scalaire complexe près, ω est l'unique différentielle abélienne satisfaisant cette condition, d'où $\omega_1 = \mu_1\omega$ avec $\mu_1 \in \mathbb{C}^\times$.

Puisque ω_1 admet un zéro double en P_4 , les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ fixés par φ correspondent respectivement aux points P_1 et P_4 représentés sur la figure 2.7.

On vérifie par ailleurs que

$$\psi^*(\omega) = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \left(\frac{dx}{y} + \frac{xdx}{y} \right).$$

On pose alors

$$\omega_2 = \mu_2 \left(\frac{dx}{y} + \frac{xdx}{y} \right).$$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ la base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$ décrite par la figure 2.7, on choisit la constante $\mu_2 \in \mathbb{C}^\times$ de telle sorte que $\int_{\beta_2 - \beta_1} \omega_2 = i$. La différentielle abélienne ω_2 est, à un multiple scalaire près, l'unique différentielle admettant un zéro double en $(1, 0)$.

Soient $A = \left(\int_{\alpha_j} \omega_k \right)_{j,k}$ et $B = \left(\int_{\beta_j} \omega_k \right)_{j,k}$. D'après [Sil06], on a alors :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^\sigma \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda^\sigma \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -i\lambda & i(1 - \lambda) \\ i(1 - \lambda) & -i\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\lambda & i\lambda^\sigma \\ i(1 - \lambda) & i(\lambda^\sigma - 1) \end{pmatrix},$$

où $x \mapsto x^\sigma$ désigne l'involution de Galois de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Les hypothèses garantissent que $\text{Jac}(X)$ admet une multiplication réelle par l'ordre quadratique \mathfrak{o}_D pour laquelle la forme ω_1 est propre : il existe donc un endomorphisme T de $\text{Jac}(X)$, auto-adjoint pour la polarisation et vérifiant $T^2 - T - c \text{id} = 0$ avec $1 + 4c = D$, et tel que ω_1 est une forme propre pour T^* . Ainsi, pour tout $[\gamma] \in H_1(X, \mathbb{Z})$, on a

$$\int_{T_*(\gamma)} \omega = \int_{\gamma} T^*(\omega) = \lambda \int_{\gamma} \omega,$$

ce qui permet de calculer, dans une base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$ donnée, la représentation rationnelle de T . D'après le §1.4.2, celle-ci s'écrit sous la forme $\rho_r(T) = \begin{pmatrix} {}^t P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ avec $P \in M_2(\mathbb{Z})$, dans la base $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. En remarquant (par exemple) que

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\alpha_1} \omega &= \lambda^2 = \lambda + c = \int_{\alpha_1} \omega + c \int_{\alpha_1 + \alpha_2} \omega, \\ \lambda \int_{\alpha_2} \omega &= \lambda(1 - \lambda) = -c = -c \int_{\alpha_1 + \alpha_2} \omega, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} T_*(\alpha_1) &= (1 + c)\alpha_1 + c\alpha_2, \\ T_*(\alpha_2) &= -c\alpha_1 - c\alpha_2, \end{aligned}$$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 + c & c \\ -c & -c \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors directement que

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & {}^t P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^\sigma \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, la représentation analytique de T dans la base (ω_1, ω_2) s'écrit $\rho_a(T) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^\sigma \end{pmatrix}$, d'où le résultat. \square

La description d'une base de l'espace des différentielles abéliennes s'avère précieuse en vue de calculer la matrice des périodes d'une courbe algébrique définie par une surface de translation. En particulier, il serait intéressant de savoir s'il existe d'autres surfaces de translation de genre 2 engendrant une courbe de Teichmüller, pour lesquelles il existe une base de différentielles à zéro double et propres pour l'action de la multiplication réelle. Ainsi, dans le cas précédent, l'existence d'un automorphisme d'ordre 4 est une hypothèse cruciale, mais très forte, qui permet de mener à une telle description. En vue d'affaiblir cette hypothèse, on pourrait se restreindre aux automorphismes d'ordre 2 non hyperelliptiques.

Cependant, on constate rapidement que, pour une surface (X, ω) de la strate $\mathcal{H}(2)$, une telle involution ne peut être induite par une transformation affine préservant la surface de translation. En effet, si on note φ un tel automorphisme d'ordre 2, alors un résultat classique de la théorie des surfaces de Riemann hyperelliptiques affirme que φ vérifie nécessairement l'un des cas suivants :

- (a) soit φ n'a aucun point fixe ;
- (b) soit φ ne fixe que des points qui ne sont pas de Weierstrass ;
- (c) soit φ est l'involution hyperelliptique

(voir [FK92, §V.2] pour la démonstration d'une version plus générale de ce résultat). Or par hypothèse, φ fixe le zéro double de ω , qui est nécessairement un point de Weierstrass. On a donc le fait suivant.

Lemme 2.4.2. — *Soit (X, ω) une surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ et soit φ un automorphisme d'ordre 2 de X induit par une transformation affine préservant (X, ω) . Alors φ est l'involution hyperelliptique.*

Soit (X, ω) la surface de translation définie par une croix suisse et considérons la géodésique de Teichmüller $\{X_t\}_{t \geq 1}$ définie comme la projection dans \mathcal{M}_2 de l'orbite de (X, ω) sous l'action du sous-groupe $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right\}_{t \geq 1}$ de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$. Nous suspectons en fait qu'à l'exception de $t = 1$, les surfaces de Riemann de cette famille n'admettent aucun automorphisme non hyperelliptique.

Dans le chapitre suivant, nous traiterons en détails le cas de deux familles de courbes algébriques pour lesquelles on dispose d'une description des équations.

CHAPITRE 3

M-COURBES RÉELLES DE W_D ET LEURS AUTOMORPHISMES

Pour tout discriminant $D \geq 5$ tel que $D \not\equiv 1 \pmod{8}$, la courbe de Weierstrass W_D est une courbe de Teichmüller irréductible dans l'espace des modules \mathcal{M}_2 . On notera W_D^M la famille des M-courbes réelles de W_D , c'est-à-dire l'intersection dans \mathcal{M}_2 de W_D et des classes d'isomorphisme complexe de courbes algébriques réelles à trois composantes réelles.

L'objet de ce chapitre est d'établir le résultat suivant.

Théorème 3.1. — *Pour $D = 5$ et 9 , la seule surface de Riemann de la famille W_D^M admettant un automorphisme non hyperelliptique est définie par la surface de translation en forme de croix suisse.*

Nous conjecturons que ce résultat est valide pour $D = 12$. Plus généralement, il serait intéressant de savoir si l'énoncé reste vrai pour tout discriminant $D \geq 5$ tel que $D \not\equiv 1 \pmod{8}$.

3.1. Automorphismes de M-courbes réelles de genre 2

Cette section rassemble quelques notions concernant les automorphismes des courbes réelles, et en particulier des M-courbes hyperelliptiques. On pourra consulter [GH81] pour une présentation plus générale et détaillée.

3.1.1. Automorphismes réels

Un isomorphisme de courbes réelles $\phi : (X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)$ est une application biholomorphe $X \rightarrow Y$ commutant avec les structures réelles, c'est-à-dire telle que $\phi \circ \sigma = \tau \circ \phi$.

Lorsque $X = Y$ et $\sigma = \tau$, on dit que ϕ est un automorphisme de (X, σ) ; si la définition de σ est claire d'après le contexte, on dit plus simplement que ϕ est un *automorphisme réel* de X . On note $\text{Aut}(X, \sigma)$ le groupe des automorphismes de (X, σ) . Le groupe $\text{Aut } X$ des automorphismes de X (démunie de sa structure réelle) est souvent appelé groupe des *automorphismes complexes* de (X, σ) .

Courbes hyperelliptiques réelles. — Soit (X, σ) une courbe hyperelliptique réelle définie par une équation de la forme $y^2 = P(x)$ et soit $M : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ une transformation de Möbius avec $|M| \neq 0$ telle que $M(B_X) = B_X$. On dit que M admet des *relèvements réels* si

- (a) $|M| > 0$ si $\infty \in B_X$ et $M(\infty) = \infty$;
- (b) $|M|P'(M(\infty)) < 0$ si $\infty \in B_X$ et $M(\infty) \neq \infty$;
- (c) toujours si $\infty \notin B_X$ et $M(\infty) = \infty$;
- (d) $P(M(\infty)) > 0$ si $\infty \notin B_X$ et $M(\infty) \neq \infty$

(comparer avec les formules des relèvements de transformations de Möbius du §1.1). Alors, d'après [Cir03], les automorphismes réels de X sont exactement les relèvements de transformations de Möbius qui laissent B_X globalement invariant et qui admettent des relèvements réels.

3.1.2. Classification des automorphismes en genre 2

Nous abordons à présent la classification des groupes d'automorphismes complexes d'une M-courbe réelle de genre 2.

En termes d'équations

F.-J. Cirre [Cir01] décrit les groupes d'automorphismes complexes admissibles par une courbe réelle de genre 2 ; le cas des M-courbes réelles est traité ci-dessous.

Théorème 3.1.1 (Cirre). — Soient a, b et c trois réels tels que $0 < a < b < c < 1$ et soit (X, σ) la M-courbe réelle définie par l'équation

$$y^2 = P(x) = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c).$$

Alors $\text{Aut}(X, \sigma) = \text{Aut } X$ si, et seulement si $a \neq b(c-1)/(b-1)$. De plus, on distingue les cas suivants :

- (1) supposons $a \neq b(c-1)/(b-1)$:
 - (a) si on a soit $a = bc$, soit $a = (b-c)/(c-1)$, soit $a = 1 + c - c/b$, alors $\text{Aut } X \simeq D_2$;
 - (b) si on a soit $bc = a = (b-c)/(c-1)$, soit $bc = a = 1 + c - c/b$, soit $(b-c)/(c-1) = a = 1 + c - c/b$, alors $\text{Aut } X \simeq D_6$;
 - (c) sinon, $\text{Aut } X \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (2) Supposons $a = b(c-1)/(b-1)$:
 - (a) si on a soit $a = bc$, soit $a = (b-c)/(c-1)$, soit $a = 1 + c - c/b$, alors $\text{Aut}(X, \sigma) \simeq D_2$ et $\text{Aut } X \simeq D_4$;
 - (b) si on a soit $bc = a = (b-c)/(c-1)$, soit $bc = a = 1 + c - c/b$, soit $(b-c)/(c-1) = a = 1 + c - c/b$, alors

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right)$$

et $\text{Aut}(X, \sigma) \simeq D_6$ et $\text{Aut } X$ est isomorphe au groupe G_{24} d'ordre 24 admettant la présentation

$$(3.1.1) \quad \langle r, s \mid r^4, s^6, (rs)^2, (r^{-1}s)^2 \rangle;$$

(c) sinon, $\text{Aut}(X, \sigma) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\text{Aut } X \simeq D_2$.

Schéma de la preuve, d'après Cirre. On pourra consulter [Cir03, §3] et [Cir01, §4] pour les détails de la démonstration.

Par hypothèse, l'ensemble B_X des racines de $P(x)$ est contenu dans \mathbb{R} . Ainsi, une transformation de Möbius M laissant B_X globalement invariant admet des coefficients réels. De plus, l'image par M du sextuplet $(0, a, b, c, 1, \infty)$ est soit une permutation circulaire de lui-même, soit une permutation circulaire du sextuplet $(\infty, 1, c, b, a, 0)$. On obtient ainsi douze transformations de Möbius pouvant éventuellement se relever en un automorphisme et on trouve, pour chacune d'entre elles, les conditions nécessaires et suffisantes pour que B_X soit globalement invariant.

Par ailleurs, il s'avère que les seules transformations de Möbius préservant B_X admettent des relèvements réels si, et seulement si $a \neq b(c-1)/(b-1)$. À l'aide des formules de relèvements de transformations de Möbius du §1.1, on obtient alors ce qui suit.

(1) Supposons $a \neq b(c-1)/(b-1)$ et posons

$$e(x, y) = \left(\frac{b-c}{a-c} \frac{x-a}{x-b}, y \frac{b^{1/2}(1-b)(c-b)^{3/2}}{(x-b)^3} \right)$$

$$f(x, y) = \left(\frac{a}{x}, -y \frac{a^{3/2}}{x^3} \right)$$

$$g(x, y) = \left(\frac{x-c}{x-1}, y \frac{(1-c)^{3/2}}{(x-1)^3} \right).$$

- (a) Si $a = bc$, alors $\text{Aut } X = \langle h_X, f \rangle \simeq D_2$.
 Si $a = (b-c)/(c-1)$, alors $\text{Aut } X = \langle h_X, g \rangle \simeq D_2$.
 Si $a = 1 + c - c/b$, alors $\text{Aut } X = \langle h_X, e \rangle \simeq D_2$.
- (b) Si $a = bc = (b-c)/(c-1)$, alors $\text{Aut } X = \langle f, g \rangle \simeq D_6$.
 Si $a = bc = 1 + c - c/b$, alors $\text{Aut } X = \langle e, f \rangle \simeq D_6$.
 Si $a = (b-c)/(c-1) = 1 + c - c/b$, alors $\text{Aut } X = \langle e, g \rangle \simeq D_6$.
- (c) Dans tous les autres cas, on a $\text{Aut } X = \langle h_X \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) Supposons $a = b(c-1)/(b-1)$ et posons

$$t(x, y) = \left(\frac{b(x-c)}{x-b}, iy \frac{(b(c-b))^{3/2}}{(x-b)^3} \right).$$

- (a) Si $a = bc$, alors $\text{Aut}(X, \sigma) = \langle h_X, f \rangle \simeq D_2$ et $\text{Aut } X = \langle f, t \rangle \simeq D_4$.
 Si $a = (b - c)/(c - 1)$, alors $\text{Aut}(X, \sigma) = \langle h_X, g \rangle \simeq D_2$ et $\text{Aut } X = \langle g, t \rangle \simeq D_4$.
 Si $a = 1 + c - c/b$, alors $\text{Aut}(X, \sigma) = \langle h_X, e \rangle \simeq D_2$ et $\text{Aut } X = \langle e, t \rangle \simeq D_4$.
- (b) Si $(a, b, c) = (1/3, 1/2, 2/3)$, alors $\text{Aut}(X, \sigma) = \langle f, g \rangle \simeq D_6$ et $\text{Aut } X$ est isomorphe au groupe G_{24} admettant la présentation (3.1.1), avec

$$r(x, y) = (1 - x, iy) \text{ et } s(x, y) = \left(\frac{-1}{3x - 3}, iy \frac{3\sqrt{3}}{(3x - 3)^3} \right).$$

- (c) Dans tous les autres cas, on a $\text{Aut}(X, \sigma) = \langle h_X \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\text{Aut } X = \langle h_X, t \rangle \simeq D_2$.

□

Remarque 3.1.2. — Soit $\zeta = \exp(\pi i/3)$, un calcul direct montre que la transformation de Möbius définie par

$$x \mapsto \frac{\zeta - 1}{\zeta^2 - 1} \frac{x - \zeta^2}{x - \zeta}$$

induit un isomorphisme entre la courbe algébrique d'équation $y^2 = x^6 - 1$ et celle définie par $y^2 = x(x - 1)(x - 1/3)(x - 1/2)(x - 2/3)$.

En termes de matrices des périodes

La classification des groupes d'automorphismes complexes, énoncée ci-dessus en termes des équations de ces courbes, peut être reformulée en termes de leurs matrices des périodes. Pour les M-courbes réelles, on peut décrire une construction normalisée de ces matrices des périodes à partir de leur équation.

Matrices des périodes standard. — Soit X une M-courbe hyperelliptique réelle de genre $g \geq 2$ définie par une équation de la forme

$$y^2 = P(x) = \prod_{j=1}^m (x - x_j)$$

où les x_j sont des réels tels que

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < \dots < x_{2g+1} < x_{2g+2} & \text{si } m = 2g + 2, \\ x_1 < x_2 < \dots < x_{2g+1} \text{ et } x_{2g+2} := \infty & \text{si } m = 2g + 1. \end{cases}$$

Alors on peut spécialiser la construction d'une base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$ décrite au §1.4.3 de la manière suivante.

Notons $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ le revêtement double ramifié au-dessus des points x_j ($j = 1, \dots, 2g + 2$). On définit δ_1 comme le relevé dans X par π du segment $[x_1; x_2]$, δ_2 comme le relevé de $[x_2; x_3]$, et ainsi de suite. Puisque \mathbb{H} est simplement connexe et que P ne s'y annule pas, on peut choisir une détermination holomorphe de \sqrt{P} que l'on peut prolonger à \mathbb{R} .

Si $m = 2g + 1$, on choisit celle qui est réelle et positive sur le segment $[x_1; x_2]$; elle est alors réelle et négative sur $[x_3; x_4]$, positive sur $[x_5; x_6]$, et ainsi de suite. Cette détermination est aussi imaginaire pure à partie imaginaire positive sur $] -\infty; x_1]$, imaginaire pure à partie imaginaire négative sur $[x_2; x_3]$, etc.

Si $m = 2g + 2$, on choisit la détermination qui est réelle et positive sur $[x_2; x_3]$ et qui est réelle et négative sur $[x_4; x_5]$, positive sur $[x_6; x_7]$, et ainsi de suite.

Pour tout $x \in \mathbb{H}$, la projection π admet pour réciproque l'application holomorphe $x \mapsto (x, \sqrt{P(x)})$; l'orientation voulue sur les cycles δ_j est définie par cette application et x croissant. Notons qu'avec cette convention, les cycles δ_{2j-1} correspondent aux composantes réelles et les cycles δ_{2j} aux composantes imaginaires pures ($j = 1, \dots, g + 1$).

La base symplectique $\mathcal{B} := (\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$ ainsi construite à partir de l'équation $y^2 = P(x)$ est dite *standard*. Si on pose

$$A = \left(-\sum_{\ell=1}^{j-1} \int_{x_{2\ell}}^{x_{2\ell+1}} \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{P(x)}} - \int_{x_{2g+2}}^{x_1} \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{P(x)}} \right)_{j,k}$$

$$B = \left(\int_{x_{2j-1}}^{x_{2j}} \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{P(x)}} \right)_{j,k},$$

alors $Z = AB^{-1}$ est la matrice des périodes normalisée de X associée à \mathcal{B} : on dira que Z est la *matrice des périodes standard* de X associée à l'équation $y^2 = P(x)$.

Classification des automorphismes. — On peut maintenant reformuler la classification énoncée dans le théorème 3.1.1.

Corollaire 3.1.3. — Soient a, b et c trois réels tels que $0 < a < b < c < 1$ et soit (X, σ) la M-courbe réelle définie par l'équation

$$y^2 = P(x) = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c).$$

Soit

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_{12} \\ z_{12} & z_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_2$$

la matrice des périodes standard de X associée à l'équation $y^2 = P(x)$. Alors $\text{Aut}(X, \sigma) = \text{Aut } X$ si, et seulement si $\det(Z) \neq -1$. De plus, on distingue les cas suivants :

(1) Supposons $\det(Z) \neq -1$:

- (a) si on a soit $z_1 = 2z_{12}$, soit $z_1 = z_2$, soit $z_2 = 2z_{12}$, alors $\text{Aut } X \simeq D_2$;
 (b) si on a $z_1 = z_2 = 2z_{12}$, alors $\text{Aut } X \simeq D_6$;
 (c) sinon, $\text{Aut } X \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (2) Supposons $\det(Z) = -1$:
- (a) si on a soit $z_1 = 2z_{12}$, soit $z_1 = z_2$, soit $z_2 = 2z_{12}$, alors $\text{Aut}(X, \sigma) \simeq D_2$ et $\text{Aut } X \simeq D_4$;
 (b) si on a $z_1 = z_2 = 2z_{12}$, alors

$$Z = i \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

et $\text{Aut}(X, \sigma) \simeq D_6$ et $\text{Aut } X \simeq G_{24}$ où G_{24} est le groupe d'ordre 24 de présentation (3.1.1) ;

- (c) sinon $\text{Aut}(X, \sigma) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\text{Aut } X \simeq D_2$.

Démonstration. La démonstration du théorème 3.1.1 fournit la liste exhaustive des groupes d'automorphismes admissibles pour X , tout en présentant la structure de chacun d'entre eux. À partir des expressions des applications rationnelles e , f , g et t définies dans cette démonstration, on peut calculer la représentation rationnelle des automorphismes qu'elles induisent, le cas échéant, dans la base symplectique standard $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$ associée à l'équation $y^2 = P(x)$.

D'après le théorème 3.1.1, on a $\text{Aut}(X, \sigma) = \text{Aut } X$ si, et seulement si l'application rationnelle t laisse globalement invariant l'ensemble des points de Weierstrass de X . Ainsi, lorsque t induit un automorphisme de X , le calcul de la représentation rationnelle de t donne

$${}^t\rho_r(t) := M_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, t induit un automorphisme de X si, et seulement si $M_t(Z) = Z$, ce qui équivaut à $\det(Z) = -1$.

On raisonne de même pour les applications e , f et g : sous l'hypothèse garantissant que e (resp. f , resp. g) induit un automorphisme de X , le calcul de $\rho_r(e)$ (resp. $\rho_r(f)$, resp. $\rho_r(g)$) donne

$$\begin{aligned} {}^t\rho_r(e) &:= M_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ {}^t\rho_r(f) &:= M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ {}^t\rho_r(g) &:= M_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On distingue alors les cas suivants :

- (a) On a $a = bc$ si, et seulement si $M_f(Z) = Z$, ce qui équivaut à $z_1 = 2z_{12}$.
 On a $a = (b - c)/(c - 1)$ si, et seulement si $M_g(Z) = Z$, ce qui équivaut à $z_1 = z_2$.
 On a $a = 1 + c - c/b$ si, et seulement si $M_e(Z) = Z$, ce qui équivaut à $z_2 = 2z_{12}$.
- (b) Deux parmi les trois égalités ci-dessus sont vérifiées si, et seulement si $z_1 = 2z_{12} = z_2$.

Le reste de l'énoncé résulte alors du théorème 3.1.1. \square

Remarque 3.1.4. — Si $\varphi : X \rightarrow X$ est un automorphisme de (X, σ) , alors φ envoie les composantes réelles sur des composantes réelles. Par ailleurs, l'involution hyperelliptique appartient au centre du groupe $\text{Aut } X$, donc φ induit également un automorphisme de $(X, -\sigma)$ et envoie les composantes imaginaires pures sur les composantes imaginaires pures. On montre alors (voir [BS01, §2]) que, si

$$Z = i \begin{pmatrix} y_1 & y_{12} \\ y_{12} & y_2 \end{pmatrix} \in i M_2(\mathbb{R})$$

est la matrice des périodes standard associée à l'équation $y^2 = P(x)$, alors toute matrice des périodes standard Z' de (X, σ) est de la forme $Z' = M(Z)$ avec $M = \begin{pmatrix} {}^t N^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ où N est un élément du sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par

$$N_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

isomorphe au groupe diédral D_3 . Notons que si l'on conjugue ce groupe par l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui revient à changer l'orientation des cycles α_2 et β_2 , alors les matrices des périodes associées à la nouvelle base de $H_1(X, \mathbb{Z})$ sont de la forme

$$Z'' = i \begin{pmatrix} y_1 & -y_{12} \\ -y_{12} & y_2 \end{pmatrix}.$$

Au vu des conditions imposées sur la matrice des périodes, mentionnées au §2.2.3 et en particulier dans la proposition 2.2.3, il s'agit de la forme que nous privilégierons dans ce chapitre.

En termes d'hexagones hyperboliques

Les M-courbes réelles admettent une description hyperbolique particulière.

Lemme 3.1.5. — *Soit (X, σ) une M-courbe hyperelliptique réelle de genre $g \geq 2$. Alors le complémentaire des composantes réelles et imaginaires pures de X consiste en quatre polygones hyperboliques, isométriques, à angles droits et à $2g + 2$ côtés.*

Réciproquement, toute M-courbe hyperelliptique réelle s'obtient à partir de quatre images miroir d'un polygone hyperbolique à angles droits à $2g + 2$ côtés.

Ce lemme est démontré dans [BS01]. Nous présentons en détails le cas du genre 2 ci-dessous.

Description hyperbolique en genre 2. — Soient ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 trois réels strictement positifs, alors il existe un hexagone hyperbolique \mathcal{H} à angles droits dans le disque de Poincaré, unique à isométrie près, dont les côtés non adjacents sont de longueur ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 (voir [Bus92, §1.7] par exemple). Notons $\widehat{\ell}_1, \widehat{\ell}_2$ et $\widehat{\ell}_3$ les longueurs des côtés opposés respectivement à ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 , de telle sorte que, le bord de l'hexagone étant orienté dans le sens direct, les côtés de \mathcal{H} soient de longueur $\ell_1, \widehat{\ell}_3, \ell_2, \widehat{\ell}_1, \ell_3$ et $\widehat{\ell}_2$ dans cet ordre (voir la figure 3.1). On a alors la loi des sinus :

$$(3.1.2) \quad \frac{\sinh(\ell_1)}{\sinh(\widehat{\ell}_1)} = \frac{\sinh(\ell_2)}{\sinh(\widehat{\ell}_2)} = \frac{\sinh(\ell_3)}{\sinh(\widehat{\ell}_3)}$$

(voir [Bus92, §2.4]). Les longueurs $\widehat{\ell}_j$ des trois autres côtés non adjacents de \mathcal{H} se calculent explicitement en fonction des ℓ_j et sont données par

$$(3.1.3) \quad \cosh(\widehat{\ell}_j) = \frac{\cosh(\ell_j) + \cosh(\ell_{j-1}) \cosh(\ell_{j+1})}{\sqrt{(\cosh(\ell_{j-1})^2 - 1)(\cosh(\ell_{j+1})^2 - 1)}} \quad (j \bmod 3).$$

Soit \mathcal{H} un tel hexagone hyperbolique à angles droits. Recollons \mathcal{H} et une image miroir de \mathcal{H} le long des côtés de longueurs ℓ_j , de façon à obtenir un pantalon noté \mathcal{P} , c'est-à-dire une surface hyperbolique de signature $(0, 3)$ (topologiquement, une sphère privée de trois disques). On recolle à présent \mathcal{P} et une image miroir de \mathcal{P} le long des géodésiques fermées de longueurs $2\widehat{\ell}_j$ avec des paramètres de twist nuls (voir la partie gauche de la figure 3.1). On obtient ainsi une surface de Riemann compacte X de genre 2 avec deux involutions anti-holomorphes, autrement dit, une courbe algébrique réelle de genre 2 munie de deux structures réelles admettant chacune trois composantes réelles.

On peut donner une variante de la construction précédente : quitte à appliquer une isométrie du disque, on peut supposer que l'un des côtés (celui de longueur ℓ_1 , par exemple) est un segment de l'axe réel et que 0 en est l'une des extrémités. En faisant agir les involutions anti-holomorphes $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto -\bar{z}$, on obtient quatre images miroir de \mathcal{H} . Le dodécagone hyperbolique à angles droits ainsi obtenu, muni des identifications décrites sur la partie droite de la figure 3.1, donne lieu à une M-courbe réelle de genre 2.

Si on note σ la structure réelle sur X induite par la conjugaison complexe, alors les trois composantes réelles (resp. imaginaires pures) sont les géodésiques fermées simples de longueur $2\ell_j$ (resp. de longueur $2\widehat{\ell}_j$). L'involution hyperelliptique sur X est induite par la symétrie centrale $z \mapsto -z$, qui fixe exactement six points coïncidant avec les sommets de \mathcal{H} et correspondant aux points de Weierstrass.

Classification des automorphismes. — Le théorème 3.1.1 admet une reformulation supplémentaire, en termes de l'hexagone hyperbolique à angles droits à partir duquel est construite une M-courbe réelle.

Corollaire 3.1.6. — Soient a, b et c trois réels tels que $0 < a < b < c < 1$ et soit (X, σ) la M-courbe réelle définie par l'équation

$$y^2 = P(x) = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c).$$

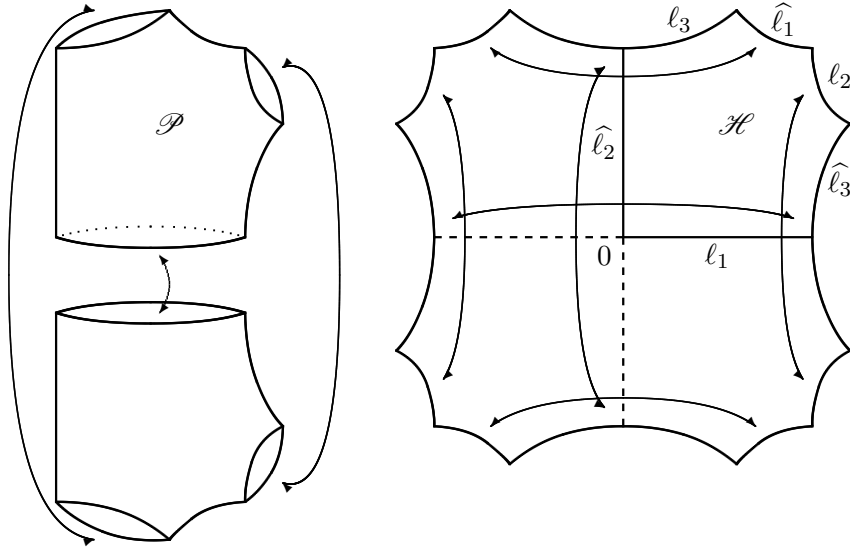


FIGURE 3.1 – Construction hyperbolique d'une M-courbe réelle de genre 2

Considérons la décomposition en quatre hexagones hyperboliques à angles droits, isométriques, décrite ci-dessus. Notons \mathcal{H} l'un de ces hexagones, dont le bord est orienté dans le sens direct et dont les côtés ont pour longueurs $\ell_1, \widehat{\ell}_3, \ell_2, \widehat{\ell}_1, \ell_3, \widehat{\ell}_2$ dans cet ordre. Alors $\text{Aut}(X, \sigma) = \text{Aut } X$ si, et seulement si $\ell_1 \neq \widehat{\ell}_1$. De plus, on distingue les cas suivants :

(1) Supposons $\ell_1 \neq \widehat{\ell}_1$:

(a) si on a soit $\ell_1 = \ell_3$, soit $\ell_1 = \ell_2$, soit $\ell_2 = \ell_3$, alors $\text{Aut } X \simeq D_2$;

(b) si on a $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$, alors $\text{Aut } X \simeq D_6$;

(c) sinon, $\text{Aut } X \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) Supposons $\ell_1 = \widehat{\ell}_1$:

(a) si on a soit $\ell_1 = \ell_3$, soit $\ell_1 = \ell_2$, soit $\ell_2 = \ell_3$, alors $\text{Aut}(X, \sigma) \simeq D_2$ et $\text{Aut } X \simeq D_4$;

(b) si on a $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$, alors pour $j = 1, 2, 3$,

$$\ell_j = \widehat{\ell}_j = \text{arccosh}(2)$$

et $\text{Aut}(X, \sigma) \simeq D_6$ et $\text{Aut } X \simeq G_{24}$ où G_{24} est le groupe d'ordre 24 de présentation (3.1.1) ;

(c) sinon $\text{Aut}(X, \sigma) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\text{Aut } X \simeq D_2$.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que la courbe fermée simple de longueur $2\ell_1$ correspond au cycle réel β_1 de la base symplectique standard $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$. Alors les courbes fermées simples de longueur

$2\widehat{\ell}_3, 2\widehat{\ell}_2, 2\widehat{\ell}_1, 2\widehat{\ell}_3$ et $2\widehat{\ell}_2$ correspondent respectivement aux cycles $-\alpha_1 + \alpha_2, \beta_2, \alpha_2, -\beta_1 - \beta_2$ et $-\alpha_1$.

Par ailleurs, un isomorphisme de X est une isométrie pour la métrique hyperbolique héritée du recollement des quatre images miroir de \mathcal{H} .

Ainsi, le calcul de $\rho_r(t)$ dans la démonstration du corollaire 3.1.3 montre que l'application t induit un automorphisme de X si, et seulement si $\ell_1 = \widehat{\ell}_1$. De même, les applications f, g et e induisent des automorphismes si, et seulement si $\ell_1 = \ell_3, \ell_1 = \ell_2$ et $\ell_2 = \ell_3$ respectivement. L'énoncé découle alors du corollaire 3.1.3. \square

3.1.3. Géodésiques de Teichmüller et automorphismes

Reprenons les notations du §2.2 et soit $(X, \omega) = (\mathcal{P}_x/\sim, dz)$ la surface de translation avec automorphisme d'ordre 4 définie par la figure 2.4, munie de la base $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$. L'action du sous-groupe $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right\}_{t \geq 1}$ de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur (X, ω) définit une famille $\{(X_t, \omega_t)\}_{t \geq 1}$ dans $\mathcal{H}(2)$, qui se projette en une géodésique de Teichmüller $\{X_t\}_{t \geq 1}$ dans \mathcal{M}_2 .

Soient $x > 0$ et $t \geq 1$ des réels fixés, considérons l'expression (2.2.1) de la matrice des périodes réelle Z_t associée à (β_1, β_2) :

$$Z_t = i \begin{pmatrix} \frac{(x+1)t-xy}{x+1} & y \\ y & -\frac{(x+1)y+tx}{x} \end{pmatrix}$$

où y est un paramètre réel dépendant uniquement de x et t et vérifiant $y < -tx(x+1)/(2x+1)$. Grâce au corollaire 3.1.3 et à la remarque 3.1.4, on peut énoncer les conditions particulières qui seraient imposées à cette matrice par l'existence d'éventuels automorphismes de X_t .

Les trois cas suivants sont remarquables et correspondent à des automorphismes réels d'ordre 2 :

- (1) si $(Z_t)_{11} = (Z_t)_{22}$, alors $y = -2tx(x+1)/(2x+1)$ et

$$Z_t = it \begin{pmatrix} \frac{2x^2+2x+1}{2x+1} & -\frac{2x(x+1)}{2x+1} \\ -\frac{2x(x+1)}{2x+1} & \frac{2x^2+2x+1}{2x+1} \end{pmatrix}.$$

On remarque ici que si l'on pose $t = 1$ et $\alpha = x + 1$, ce dernier cas conduit à l'expression (2.1.3) d'une matrice des périodes de la courbe avec automorphisme d'ordre 4 présentée au §2.1 ;

- (2) le cas $(Z_t)_{11} = -2(Z_t)_{12}$ donne $y = -t(x+1)/(x+2)$ et mène à la matrice

$$Z_t = it \begin{pmatrix} \frac{2(x+1)}{x+2} & -\frac{x+1}{x+2} \\ -\frac{x+1}{x+2} & \frac{1}{x(x+2)} \end{pmatrix}$$

qui vérifie $\det(\Im(Z_t)) \leq 0$ pour $x \geq 1$;

(3) le cas $(Z_t)_{22} = -2(Z_t)_{12}$ implique $y = tx/(x-1)$, d'où

$$Z_t = it \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2-1} & \frac{x}{x-1} \\ \frac{x}{x-1} & -\frac{2x}{x-1} \end{pmatrix}.$$

On note que dans ce dernier cas, comme dans le précédent, la matrice Z_t obtenue appartient au demi-espace de Siegel \mathfrak{S}_2 si, et seulement si $x < 1$.

Soulignons que rien n'assure *a priori* qu'une des matrices Z_t obtenues ci-dessus soit une matrice des périodes de la surface de Riemann X_t .

Pour les deux derniers cas ci-dessus, on peut donner l'exemple $x = (\sqrt{5} - 1)/2 < 1$ qui se révèle particulièrement intéressant :

(1) si on suppose $(Z_t)_{11} = -2(Z_t)_{12}$, alors on obtient

$$Z_t = it \begin{pmatrix} \sqrt{5} - 1 & -\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \\ -\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) & \frac{1}{2}\sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}.$$

En faisant agir la matrice symplectique $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & {}^t N^{-1} \end{pmatrix}$ avec $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il vient

$$Z_t' = it \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \end{pmatrix}$$

qui est une matrice des périodes d'une courbe singulière dont la jacobienne est isomorphe au produit de deux courbes elliptiques $E_t \times E_t$ où

$$E_t = \mathbb{C}/i\lambda t \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ avec } \lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

(2) si on suppose $(Z_t)_{22} = -2(Z_t)_{12}$, alors on a

$$Z_t = it \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5} + 1 & -\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \\ -\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) & \sqrt{5} + 1 \end{pmatrix}.$$

En faisant agir cette fois la matrice symplectique $\begin{pmatrix} {}^t N & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix}$, on voit apparaître la matrice des périodes du produit des deux courbes elliptiques de période $it(\sqrt{5} + 1)/2$.

Le paramètre $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ correspond à la situation dans laquelle la surface de translation $(X, \omega) = (\mathcal{P}_x/\sim, dz)$ définie par la figure 2.4 engendre la courbe de Teichmüller W_5 .

La question qui se pose alors naturellement est la suivante. Soit X une M-courbe réelle avec un automorphisme d'ordre 4 et ω une différentielle abélienne sur X avec un zéro double ; considérons la géodésique de Teichmüller $\{X_t\}_{t \geq 1}$ engendrée par (X, ω) : existe-t-il une surface de Riemann X_t de cette famille dont le groupe d'automorphismes contienne un sous-groupe isomorphe à D_2 ?

Ce chapitre apporte une réponse négative dans les cas où (X, ω) engendre les courbes de Teichmüller de discriminant $D = 5$ et 9. Avec les notations du §2.2, ces

surfaces sont définies respectivement par $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ et $x = 1$. Les familles de surfaces considérées figurent parmi les rares pour lesquelles on dispose d'une description explicite des équations des courbes algébriques correspondantes.

Nous suspectons également le cas $D = 12$, pour lequel la famille est engendrée par la surface de translation $(\mathcal{P}_x/\sim, dz)$ avec $x = (\sqrt{3} - 1)/2$, correspondant à la courbe algébrique d'équation $y^2 = x^6 - 1$ dont le groupe d'automorphismes est maximal parmi les M-courbes réelles de genre 2 (voir la remarque 2.1.1).

Il serait par ailleurs intéressant d'étudier la généralisation de ce phénomène lorsque (X, ω) engendre une courbe de Teichmüller de discriminant $D \geq 5$ quelconque, voire même pour des valeurs du paramètre réel $x > 0$ quelconques.

3.2. M-courbes réelles de W_5

La première famille à laquelle nous nous intéressons, notée W_5^M , est l'intersection dans \mathcal{M}_2 de la courbe de Teichmüller W_5 et de l'ensemble des structures complexes sur les M-courbes réelles de genre 2.

3.2.1. Description de W_5

Soit Y la courbe algébrique d'équation $y^2 = x^5 - 1$ et $\xi = dx/y$ la différentielle abélienne (unique à multiplication par un scalaire complexe près) sur Y admettant un zéro double au-dessus de ∞ . On peut décrire géométriquement la forme (Y, ξ) comme le quotient $(\mathcal{Q}/\sim, dz)$ où \mathcal{Q} est le polygone obtenu en recollant deux copies d'un pentagone régulier (voir les exemples 1.3.6 et le §2.1).

W. Veech [Vee89] montre que $\text{SL}(Y, \xi)$ est le groupe triangulaire de signature $\Delta(2, 5, \infty)$, qui est un réseau de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. La surface de translation (Y, ξ) engendre donc une courbe de Teichmüller

$$f : V \simeq \Delta(2, 5, \infty) \backslash \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}_2$$

qui, d'après [McM03], est envoyée par l'application de Torelli $\text{Jac} : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$ dans le lieu des surfaces abéliennes à multiplication réelle par σ_5 . C. McMullen montre que la courbe $f : V \rightarrow \mathcal{M}_2$ est également engendrée par la surface de translation $(\mathcal{P}_x/\sim, dz)$ décrite au §2.2.2 avec $x = (\sqrt{5} - 1)/2$.

P. Lochak [Loc05, §4] donne une description algébrique de cette courbe de Teichmüller : soient $\zeta = \exp(2\pi i/5)$ et $x_j(s) = \zeta^j + s\zeta^{-j}$ pour $j = 1, \dots, 2g + 1$. Pour $s \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ considérons la courbe hyperelliptique X_s définie par l'équation

$$y^2 = P_s(x) = \prod_{j=1}^{2g+1} (x - x_j(s)).$$

Si on note $G \subset \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ le groupe diédral engendré par $s \mapsto s^{-1}$ et $s \mapsto \zeta s$, alors

$$V = (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{s^5 = 1\})/G$$

et le plongement isométrique f ci-dessus est donné par $f(s) = [X_s] \in \mathcal{M}_2$.

Équations des courbes de W_5^M

Nous allons considérer une variante de la description précédente : en faisant agir la transformation de Möbius

$$x \mapsto \frac{x - x_2(s)}{x_5(s) - x_2(s)}$$

sur l'ensemble des racines du polynôme $P_s(x)$, une équation de la courbe X_s s'écrit alors sous la forme

$$y^2 = Q_s(x) = x(x-1)(x-a(s))(x-b(s))(x-c(s)),$$

où l'on a noté

$$\begin{aligned} a(s) &= \frac{\zeta - \zeta^2 + s(\zeta^4 - \zeta^3)}{\zeta - \zeta^4 + s(\zeta^4 - \zeta)} \\ b(s) &= \frac{\zeta - 1 + s(\zeta^4 - 1)}{\zeta - \zeta^4 + s(\zeta^4 - \zeta)} \\ c(s) &= \frac{\zeta - \zeta^3 + s(\zeta^4 - \zeta^2)}{\zeta - \zeta^4 + s(\zeta^4 - \zeta)} \end{aligned}$$

les racines de $Q_s(x)$. Le lemme suivant fournit une description des M-courbes réelles de la famille W_5 .

Lemme 3.2.1. — *Soit $s = \exp(i\theta)$ avec $\theta \in]4\pi/5; 6\pi/5[$ et soit X_s la M-courbe réelle définie par l'équation*

$$(3.2.1) \quad y^2 = Q_s(x) = x(x-1)(x-a(s))(x-b(s))(x-c(s)),$$

où $a(s)$, $b(s)$ et $c(s)$ sont définis ci-dessus. Alors X_s est une M-courbe réelle dans la famille W_5 .

Réciproquement, toute M-courbe réelle X_s de la famille W_5 admet une telle description.

Démonstration. Considérons le pentagone euclidien dans le plan complexe dont les sommets sont les racines cinquièmes de l'unité. Un calcul de géométrie euclidienne élémentaire permet d'obtenir

$$\arg(\zeta - \zeta^2) = \frac{\pi}{10} = -\arg(\zeta^4 - \zeta^3).$$

On trouve également

$$\begin{aligned} \arg(\zeta - 1) &= \frac{7\pi}{10} = -\arg(\zeta^4 - 1) \\ \arg(\zeta - \zeta^3) &= \frac{3\pi}{10} = -\arg(\zeta^4 - \zeta^2) \\ \arg(\zeta - \zeta^4) &= \frac{\pi}{2} = -\arg(\zeta^4 - \zeta). \end{aligned}$$

Soit $s = \rho \exp(i\theta)$ avec $\rho > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Pour $\theta \neq 6\pi/5$, considérons le parallélogramme engendré par $\zeta - \zeta^2$ et $s(\zeta^4 - \zeta^3)$: ce parallélogramme est un losange si, et seulement si $\rho = 1$. Le cas échéant, notons

$$\alpha_\theta = \arg(\zeta - \zeta^2) - \arg(s(\zeta^4 - \zeta^3)) \text{ avec } \theta \neq 6\pi/5.$$

Puisque les diagonales de ce losange sont des bissectrices, on obtient

$$\arg(\zeta - \zeta^2 + s(\zeta^4 - \zeta^3)) = \arg(\zeta - \zeta^2) - \frac{1}{2}\alpha_\theta = \frac{\theta}{2} \pmod{\pi}$$

et, comme ses diagonales s'intersectent en leur milieu,

$$\begin{aligned} |\zeta - \zeta^2 + s(\zeta^4 - \zeta^3)| &= 2|\zeta - \zeta^2| |\cos(\alpha_\theta/2)| \\ &= 2|\zeta - \zeta^2| |\cos(\pi/10 - \theta/2)| \end{aligned}$$

(voir la figure 3.2). Un raisonnement identique permet d'obtenir

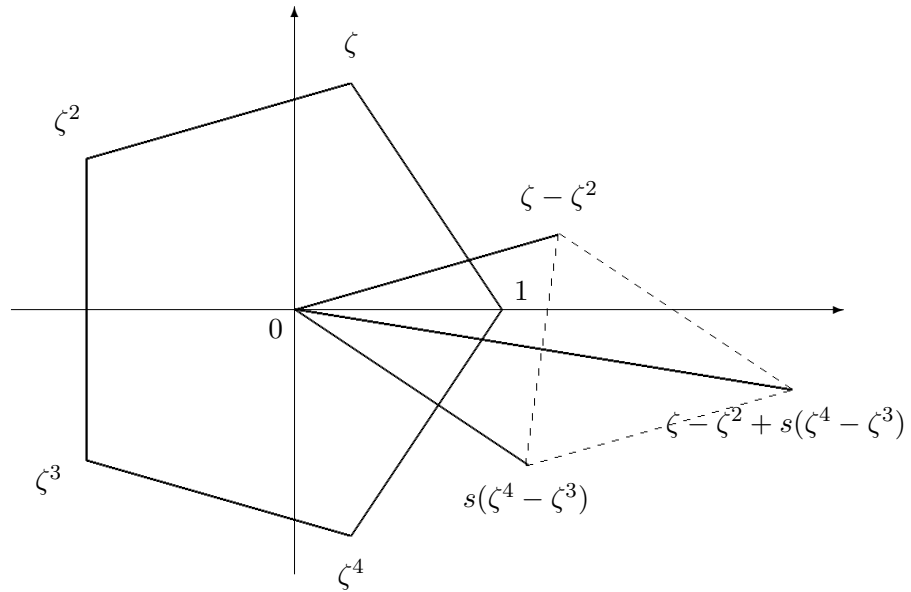


FIGURE 3.2 –

$$\begin{aligned} \arg(\zeta - 1 + s(\zeta^4 - 1)) &= \frac{\theta}{2} \pmod{\pi} \quad (\theta \neq 2\pi/5) \\ \arg(\zeta - \zeta^3 + s(\zeta^4 - \zeta^2)) &= \frac{\theta}{2} \pmod{\pi} \quad (\theta \neq 8\pi/5) \\ \arg(\zeta - \zeta^4 + s(\zeta^4 - \zeta)) &= \frac{\theta}{2} \pmod{\pi} \quad (\theta \neq 0) \end{aligned}$$

d'une part, et

$$\begin{aligned} |a(s)| &= \left| \frac{\zeta - \zeta^2}{\zeta - \zeta^4} \right| \left| \frac{\cos(\pi/10 - \theta/2)}{\cos(\pi/2 - \theta/2)} \right| \\ |b(s)| &= \left| \frac{\zeta - 1}{\zeta - \zeta^4} \right| \left| \frac{\cos(7\pi/10 - \theta/2)}{\cos(\pi/2 - \theta/2)} \right| \\ |c(s)| &= \left| \frac{\zeta - \zeta^3}{\zeta - \zeta^4} \right| \left| \frac{\cos(3\pi/10 - \theta/2)}{\cos(\pi/2 - \theta/2)} \right| \end{aligned}$$

d'autre part, avec

$$\begin{aligned} |\zeta - \zeta^2|^2 &= \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = |\zeta - 1|^2 \\ |\zeta - \zeta^3|^2 &= \frac{5 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $a(s)$, $b(s)$ et $c(s)$ sont réels si, et seulement si $\rho = 1$ et on vérifie que $0 < a(s) < b(s) < c(s) < 1$ pour $4\pi/5 < \theta < 6\pi/5$. \square

Remarque 3.2.2. — Pour tout $\theta \in]4\pi/5; 6\pi/5[$, un calcul direct permet de vérifier que la transformation de Möbius $M : x \mapsto 1 - x$ envoie le triplet $(a(s), b(s), c(s))$ sur $(c(s^{-1}), b(s^{-1}), a(s^{-1}))$, tandis qu'elle échange 0 et 1 et fixe ∞ ; la transformation M induit donc un isomorphisme entre les courbes X_s et $X_{s^{-1}}$. L'ensemble des classes d'isomorphisme complexe des M-courbes réelles de W_5 s'identifie donc à

$$\{s \in \mathbb{C} : |s| = 1 \text{ et } 4\pi/5 < \arg(s) \leq \pi\}.$$

3.2.2. M-courbes réelles avec automorphismes dans W_5

La famille W_5 contient un représentant remarquable *a priori* : avec les notations du lemme 3.2.1, la courbe X_{-1} a pour équation

$$y^2 = x(x - (3 - \sqrt{5})/4)(x - 1/2)(x - (1 + \sqrt{5})/4)(x - 1)$$

et admet un automorphisme d'ordre 4 défini par $(x, y) \mapsto (1 - x, iy)$. Le groupe d'automorphismes de cette courbe contient donc un sous-groupe isomorphe au groupe diédral D_4 . En appliquant la transformation de Möbius $x \mapsto x/(x - 1)$ à $B_{X_{-1}}$, on obtient l'équation

$$y^2 = x(x^2 - 1)(x - a)(x - 1/a) \text{ avec } a = 2 + \sqrt{5}.$$

D'après [Sil06], cette courbe algébrique est définie par la surface de translation définie par la croix suisse $(X, \omega) = (\mathcal{P}_x/\sim, dz)$, avec $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ et $\omega = dx/y - xdx/y$ (voir la figure 2.7).

Cet exemple est en fait le seul cas de M-courbe réelle de cette famille admettant un groupe d'automorphisme réduit non trivial.

Proposition 3.2.3. — Soit X_s une M-courbe réelle définie par une équation de la forme (3.2.1). Alors $\overline{\text{Aut}}(X_s) \neq \{\text{id}\}$ si, et seulement si $s = -1$.

Démonstration. Au vu du théorème 3.1.1, il suffit de considérer les transformations de Möbius pouvant mener à un automorphisme d'ordre 2. Les possibilités sont les suivantes :

(a) la courbe X_s admet une involution induite par la transformation de Möbius

$$x \mapsto \frac{c(s) - b(s)}{c(s) - a(s)} \frac{x - a(s)}{x - b(s)},$$

ce qui est équivalent à $a(s) = 1 + c(s) - c(s)/b(s)$ et mène à $s = \pm 1$. Ce cas correspond donc à la courbe X_{-1} présentée ci-dessus.

(b) La transformation

$$x \mapsto \frac{a(s)}{x}$$

induit un automorphisme sur X_s si, et seulement si $a(s) = b(s)c(s)$, qui donne $s = \pm \exp(4\pi i/5)$. Ce cas conduit ainsi à la courbe singulière X_{ζ^2} d'équation

$$y^2 = x(x - (3 - \sqrt{5})/2)^2(x - 1)^2.$$

(c) La transformation

$$x \mapsto \frac{x - c(s)}{x - 1}$$

induit un automorphisme sur X_s si, et seulement si

$$a(s) = \frac{b(s) - c(s)}{b(s) - 1},$$

d'où $s = \pm \exp(6\pi i/5)$, qui mène à la courbe singulière X_{ζ^3} d'équation

$$y^2 = x^2(x - (\sqrt{5} - 1)/2)^2(x - 1).$$

Notons que la transformation de Möbius $x \mapsto 1 - x$ induit un isomorphisme entre X_{ζ^2} et X_{ζ^3} .

(d) Enfin, la courbe X_s admet une involution induite par

$$x \mapsto b(s) \frac{x - c(s)}{x - b(s)}$$

si, et seulement si

$$a(s) = b(s) \frac{c(s) - 1}{b(s) - 1},$$

qui implique de nouveau $s = \pm 1$.

Les calculs, quoiqu'un peu fastidieux, ne présentent pas de difficulté particulière. En conclusion, la seule M-courbe réelle (non singulière) de la famille W_5 admettant un groupe d'automorphismes réduit non trivial est la courbe admettant un automorphisme d'ordre 4. \square

3.3. M-courbes réelles dans W_9

Cette section est consacrée à la famille W_9^M et, à l'instar de la précédente, a pour but de montrer que les courbes de cette famille n'admettent aucun automorphisme non trivial, hormis celle définie par la croix suisse. Dans ce cas-ci, cette dernière n'est autre que la surface de translation en «L» de $\mathcal{H}(2)$ pavée par trois carrés.

3.3.1. Description de W_9

La $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite dans $\mathcal{H}(2)$ de la surface de translation en «L» pavée par trois carrés, notée ΩW_9 , se projette dans l'espace des modules \mathcal{M}_2 en une courbe algébrique irréductible, notée W_9 . Cette dernière est la courbe modulaire définie par le quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ où Γ est le sous-groupe de congruence de niveau 2 engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(voir [HL05]). R. Silhol [Sil07, théorème A] donne une description des courbes algébriques de la famille W_9 et montre qu'une surface de translation $(X, \omega) \in \mathcal{H}(2)$ est un élément de ΩW_9 si, et seulement si la courbe algébrique X admet une équation de la forme

$$(3.3.1) \quad y^2 = P_u(x) = x(x-1) \left(x^3 + ux^2 - \frac{8}{3}ux + \frac{16}{9}u \right)$$

avec $\omega = \lambda \frac{xdx}{y}$

pour $u \in \mathbb{C} \setminus \{-9, 0\}$ et pour une certaine constante $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Le polynôme $x^3 + ux^2 - \frac{8}{3}ux + \frac{16}{9}u$ admet exactement trois racines réelles distinctes si, et seulement si son discriminant est strictement négatif, ce qui équivaut à supposer que u est un réel tel que $u < -9$. Ainsi, une courbe $X = X_u$ de genre 2 définie par une équation de la forme (3.3.1) est une M-courbe réelle si, et seulement si $u < -9$.

De plus, la transformation $x \mapsto x/(x-1)$ induit un isomorphisme (complexe, mais non réel) entre les courbes X_u et $X_{u'}$ avec $u' = -9u/(u+9)$ (voir [Sil07, §4]). On peut donc identifier l'ensemble des classes d'isomorphisme complexe des courbes de W_9^M à l'intervalle $[-18; -9[$.

On définit

$$(3.3.2) \quad f_3 : x \mapsto \frac{x + \sqrt{3}}{-\sqrt{3}x + 1}$$

et on considère une courbe algébrique de genre 2 définie par une équation de la forme

$$(3.3.3) \quad y^2 = Q_s(x) = x(x+1)(x-s^2)(x-f_3(s)^2)(x-f_3(f_3(s))^2).$$

En faisant agir la transformation $x \mapsto x + 1$ sur les racines de $Q_s(x)$, un calcul direct montre que cette courbe admet également une équation de la forme $y^2 = P_u(x)$ avec

$$(3.3.4) \quad u = \frac{-81(s^2 + 1)^3}{(3s + \sqrt{3})^2(3s - \sqrt{3})^2}.$$

On note que la transformation de Möbius f_3 est d'ordre 3 et fixe les points i et $-i$. Les orbites de 0 et ∞ sous f_3 sont respectivement

$$\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\} \text{ et } \{-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \infty\}.$$

On obtient ainsi l'énoncé suivant.

Proposition 3.3.1. — *Une surface de translation $(X, \omega) \in \mathcal{H}(2)$ est dans la $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite de la surface de translation en «L» pavée par trois carrés si, et seulement si la courbe algébrique X admet une équation de la forme*

$$y^2 = Q_s(x) = x(x+1)(x-s^2)(x-f_3(s)^2)(x-f_3(f_3(s))^2)$$

avec $\omega = \lambda \left(\frac{dx}{y} + \frac{xdx}{y} \right)$

pour $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i, \pm\sqrt{3}/3, \pm\sqrt{3}\}$ et pour une certaine constante $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Démonstration. La différentielle abélienne $dx/y + xdx/y$ est, à un multiple scalaire complexe près, la seule sur $X = X_s$ admettant un zéro double en $(-1, 0)$. Le reste de l'assertion découle de la discussion précédente. \square

Équations des courbes de W_9^M

On vérifie que la fonction

$$s \mapsto g(s) = \frac{-81(s^2 + 1)^3}{(3s + \sqrt{3})^2(3s - \sqrt{3})^2}$$

définie par l'expression (3.3.4) est paire et invariante par f_3 ; de plus, on a $g(s) \leq -9$ pour tout s réel et $s^2 < f_3(f_3(s))^2 < f_3(s)^2$ pour tout $s \in]0; \sqrt{3}/3[$. Au vu de ce qui précède, on peut alors identifier l'ensemble des classes d'isomorphisme complexe des M-courbes réelles de W_9 avec l'intervalle ouvert $]0; \sqrt{3}/3[$. On obtient ainsi une autre description des M-courbes réelles de la famille W_9 .

Lemme 3.3.2. — *Soit s un réel tel que $0 < s < \sqrt{3}/3$ et soit X_s la M-courbe réelle définie par l'équation*

$$(3.3.5) \quad y^2 = Q_s(x) = x(x+1)(x-a(s))(x-b(s))(x-c(s)),$$

avec $a(s) = s^2$, $b(s) = f_3(f_3(s))$ et $c(s) = f_3(s)$. Alors X_s est une M-courbe réelle dans la famille W_9 .

Réciproquement, toute M-courbe réelle X_s de la famille W_9 admet une telle description.

3.3.2. M-courbes réelles avec automorphismes dans W_9

La discussion ci-dessus incite à considérer en premier lieu la courbe définie par une équation de la forme (3.3.1) avec $u = -18$, c'est-à-dire

$$y^2 = x(x-1)(x-8+4\sqrt{3})(x-2)(x-8-4\sqrt{3}).$$

Cette courbe admet un automorphisme d'ordre 4 induit par la transformation de Möbius $x \mapsto x/(x-1)$. Si on applique la transformation $x \mapsto x-1$ à $B_{X_{-18}}$, alors on a l'équation

$$y^2 = x(x^2-1)(x-a)(x-1/a) \text{ avec } a = 7+4\sqrt{3}.$$

D'après [Sil06], cette courbe est définie par la croix suisse $(X, \omega) = (\mathcal{P}_x/\sim, dz)$ avec $x = 1$ et $\omega = dx/y - xdx/y$; autrement dit, (X, ω) est la surface de translation pavée par trois carrés (voir la figure 1.4). On peut remarquer que $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$ avec $0 < 2-\sqrt{3} < \sqrt{3}/3$, et que

$$f_3(2-\sqrt{3})^2 = 7+4\sqrt{3} \text{ et } f_3(f_3(2-4\sqrt{3}))^2 = 1.$$

Nous allons voir que cette surface est la seule M-courbe réelle de la famille W_9 à admettre un groupe d'automorphismes réduit non trivial.

Proposition 3.3.3. — *Soit X_s une M-courbe réelle définie par une équation de la forme (3.3.5). Alors $\overline{\text{Aut}}(X_s) \neq \{\text{id}\}$ si, et seulement si $s = 2-\sqrt{3}$.*

Démonstration. Le raisonnement est identique à celui adopté pour la preuve de la proposition 3.2.3. En reprenant la démonstration du théorème 3.1.1, on peut aisément adapter les conditions assurant l'existence d'automorphismes à la forme des équations qui est utilisée ici. Les possibilités sont les suivantes :

(a) la courbe X_s admet une involution induite par la transformation de Möbius

$$x \mapsto \frac{c(s) - b(s)}{b(s) - a(s)} \frac{x - a(s)}{x - c(s)},$$

ce qui équivaut à

$$a(s) = b(s) - 1 + \frac{b(s)}{c(s)}$$

et mène à une seule solution réelle dans l'intervalle $]0; \sqrt{3}/3[$, à savoir $s = 2-\sqrt{3}$. D'après la discussion précédente, cette courbe admet un automorphisme d'ordre 4 ;

(b) la transformation

$$x \mapsto a(s) \frac{x+1}{x-a(s)}$$

induit un automorphisme sur X_s si, et seulement si

$$a(s) = \frac{b(s)c(s)}{1+b(s)+c(s)}.$$

Les seules solutions réelles conduisent à la courbe singulière d'équation

$$y^2 = x(x+1)(x - \sqrt{3}/3)(x + \sqrt{3}/3)$$

correspondant à $s = \sqrt{3}/3$;

(c) la transformation

$$x \mapsto \frac{c(s) - x}{x + 1}$$

induit un automorphisme sur X_s si, et seulement si

$$a(s) = \frac{c(s) - b(s)}{1 + b(s)},$$

qui mène à la courbe singulière d'équation

$$y^2 = x^2(x+1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

correspondant à $s = 0$.

Notons que la transformation de Möbius $x \mapsto 1/x$ induit un isomorphisme entre les courbes X_0 et $X_{\sqrt{3}/3}$;

(d) enfin, la courbe X_s admet une involution induite par

$$x \mapsto \frac{a(s) - b(s)}{b(s) - c(s)} \frac{x - c(s)}{x - a(s)}$$

si, et seulement si

$$a(s) = \frac{b(s)}{1 - b(s) + c(s)},$$

qui donne de nouveau la solution $s = 2 - \sqrt{3}$.

□

Au vu de ce qui précède, le théorème 3.1 est maintenant établi.

Démonstration du théorème 3.1. Pour $D = 5$ et 9 , les preuves des propositions 3.2.3 et 3.3.3 font apparaître que les seules surfaces de Riemann de la famille W_D^M avec un automorphisme non hyperelliptique admettent un automorphisme d'ordre 4 et sont définies par une surface de translation en forme de croix suisse. □

3.3.3. Une courbe réelle de W_9 avec automorphisme d'ordre 2

Nous décrivons ici une courbe réelle de la famille W_9 qui n'est pas une M-courbe et qui admet un automorphisme d'ordre 2 non hyperelliptique. Nous tenons à remercier R. Silhol pour nous avoir mentionné cet exemple et communiqué le calcul des matrices des périodes ci-dessous.

Considérons la surface de translation (X_{u_0}, ω_{u_0}) où X_{u_0} est la courbe réelle définie par l'équation

$$y^2 = P_{u_0}(x) = x(x-1) \left(x^3 + u_0 x^2 - \frac{8}{3} u_0 x + \frac{16}{9} u_0 \right) \text{ avec } u_0 = \frac{9}{80}$$

et $\omega = \lambda \frac{xdx}{y}$

pour une certaine constante $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Les racines de $P_{u_0}(x)$ sont 0, 1 et

$$a = -\frac{4}{5}, b = \frac{11}{32} + \frac{3}{32}i\sqrt{15} \text{ et } c = \bar{b} = \frac{11}{32} - \frac{3}{32}i\sqrt{15}.$$

On vérifie alors que la transformation de Möbius

$$x \mapsto a \frac{x-1}{x-a}$$

induit un automorphisme d'ordre 2 sur X_{u_0} .

D'après [Sil07], l'action de l'élément $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ est induite au niveau de l'espace des paramètres de la famille W_9^M par la transformation $u \mapsto -u - 9$. Ainsi, la courbe X_{u_0} peut être définie par la surface de translation

$$(X_{u_0}, \omega_{u_0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (X_{u'_0}, \omega_{u'_0}),$$

où $X_{u'_0}$ est la M-courbe réelle d'équation

$$y^2 = P_{u'_0}(x) = x(x-1) \left(x^3 + u'_0 x^2 - \frac{8}{3} u'_0 x + \frac{16}{9} u'_0 \right) \text{ avec } u'_0 = -\frac{729}{80}$$

et $\omega = \mu \frac{xdx}{y}$

pour une certaine constante $\mu \in \mathbb{C}^\times$ (voir la figure 3.3).

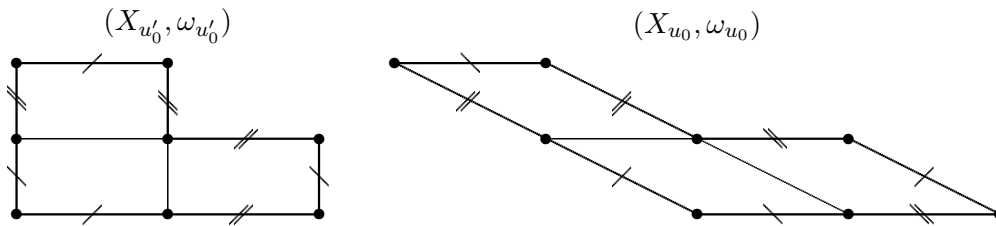


FIGURE 3.3 – La courbe algébrique X_{u_0} admet un automorphisme d'ordre 2.

D'après le §2.2, la matrice des périodes $Z_{u'_0}$ de $X_{u'_0}$ associée à la base de $H_1(X_{u'_0}, \mathbb{Z})$ définie par la figure 2.4 admet une expression de la forme

$$Z_{u'_0} = i \begin{pmatrix} t' - y'/2 & y' \\ y' & -t' - 2y' \end{pmatrix}$$

avec t' et y' réels. À partir de l'équation $y^2 = P_{u'_0}(x)$, on calcule une approximation de la matrice $Z_{u'_0}$ et de là, on obtient des valeurs approchées à 10^{-15} près pour les paramètres t' et y' :

$$\begin{aligned} t' &\approx 0.438718830674111, \\ y' &\approx -0.693170467669358, \end{aligned}$$

d'où

$$Z_{u'_0} \approx i \begin{pmatrix} 0.947622104664605 & -0.693170467669358 \\ -0.693170467669358 & 0.785304064508790 \end{pmatrix}.$$

Il est alors possible d'exprimer une matrice des périodes Z_{u_0} de la courbe X_{u_0} sous la forme

$$\begin{aligned} Z_{u_0} &= i \begin{pmatrix} t - y/2 & y \\ y & -t - 2y \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} t = t' + i \\ y = -2t' - i \end{cases} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2t' & -2t' \\ -2t' & 3t' \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0.877437661348222 & -0.877437661348222 \\ -0.877437661348222 & 1.316156492022333 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, on peut constater que la différentielle abélienne dont les périodes sont iy , $-i(t + 2y)$, 0 et 1 admet un zéro double au-dessus de 1.

D'un point de vue hyperbolique, Silhol montre dans [Sil07, §4-5] que l'action du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ sur les surfaces de translation en «L» pavées par trois carreaux se réalise par composition de demi-twists de Dehn. En particulier, dans la décomposition en pantalons associée à une M-courbe réelle décrite au §3.1.2, l'élément $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ opère par un demi-twist de Dehn le long de la géodésique fermée simple de longueur $2\ell_2$ et un twist de Dehn le long de celle de longueur $2\ell_3$ (voir la figure 3.1).

Ce exemple n'est *a priori* pas unique : il serait intéressant de savoir quelles sont les courbes (non nécessairement réelles) de la famille W_9 admettant des automorphismes non hyperelliptiques et de mettre en évidence des relations vérifiées par leurs périodes.

3.4. À propos des M-courbes réelles de la famille W_{12}

Intéressons-nous à présent au cas de la surface de translation $(X, \omega) = (\mathcal{P}_x/\sim, dz)$ avec $x = (\sqrt{3} - 1)/2$. D'après la remarque 2.1.1, la courbe algébrique X est définie par l'équation

$$y^2 = x^6 - 1$$

et il s'agit de l'unique courbe de genre 2 dont le groupe d'automorphisme est d'ordre 24. La jacobienne de X admet une multiplication réelle par

$\mathfrak{o}_{12} \cong \mathbb{Z}[T]/(T^2 - 2T - 2)$ dont la représentation rationnelle s'écrit

$$\rho_r(T) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base d'homologie $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ décrite par la figure 2.4. D'après les théorèmes de McMullen, la forme (X, ω) de $\mathcal{H}(2)$ engendre donc l'unique courbe de Teichmüller W_{12} .

Considérons la géodésique de Teichmüller $\{X_t\}_{t \geq 1}$ dans \mathcal{M}_2 définie par projection de l'orbite de (X, ω) sous l'action du sous-groupe $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right\}_{t \geq 1}$ de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$. D'après le §2.2, la matrice des périodes normalisée de X_t associée à $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ admet la forme

$$Z_t = i \begin{pmatrix} t + (\sqrt{3} - 2)y & y \\ y & -t - (\sqrt{3} + 2)y \end{pmatrix}.$$

Supposons à présent que la M-courbe réelle X_t admette un automorphisme réel d'ordre 2 : au vu de la discussion du §3.1.3, la matrice Z_t vérifie

$$(Z_t)_{11} = Z_{22}, \text{ ou } (Z_t)_{11} = -2(Z_t)_{12}, \text{ ou } (Z_t)_{22} = -2Z_t_{12}.$$

Chacune de ces trois hypothèses mène à $y = -t\sqrt{3}/3$, qui donne

$$Z_t = it \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

D'après le corollaire 3.1.3, une matrice de la forme ci-dessus correspond à une matrice des périodes d'une courbe réelle dont le groupe des automorphismes réels est isomorphe au groupe diédral D_6 . Le cas $t = 1$ donne la matrice des périodes de la courbe X d'équation $y^2 = x^6 - 1$.

On résume ce qui précède par l'énoncé suivant :

Lemme 3.4.1. — *Soit t un réel tel que $t > 1$ et $(X_t, \omega_t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot (X, \omega)$. Si X_t admet un automorphisme réel d'ordre 2, alors $\mathrm{Aut} X_t$ contient un sous-groupe isomorphe au groupe diédral D_6 .*

Ceci suggère en fait fortement que pour $t > 1$, aucune des courbes X_t n'admet d'automorphisme non hyperelliptique et que la situation de la famille W_{12}^M est identique à celle de W_9^M et W_5^M . En effet, l'espace des modules des surfaces de Riemann dont le groupe d'automorphismes contient un sous-groupe isomorphe à D_6 est une courbe algébrique dans \mathcal{M}_2 : d'après A. Costa et G. Riera [CR01] sa normalisation est la surface de Riemann $\Delta(2, 6, \infty) \setminus \mathbb{H}$. Par ailleurs, l'image par l'application de Torelli $\mathrm{Jac} : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$ de cette famille à un paramètre intersecte le lieu de la multiplication réelle par l'ordre quadratique \mathfrak{o}_{12} (paramétré par la surface de Hilbert H_{12}) en au moins un point. Ce dernier correspond bien entendu à la jacobienne de la courbe d'équation $y^2 = x^6 - 1$.

Conjecture 3.4.2. — *Sous les hypothèses du lemme 3.4.1, si $t > 1$, alors la surface de Riemann X_t n'admet aucun automorphisme non hyperelliptique.*

Nous donnons un argument numérique en faveur de cette conjecture dans la remarque 5.2.4.

CHAPITRE 4

PROBLÈME DE SCHOTTKY POUR LES M-COURBES RÉELLES DE W_9

Ce chapitre est consacré à la famille notée W_9 , c'est-à-dire la projection dans l'espace des modules \mathcal{M}_2 du disque de Teichmüller engendré par la surface de translation en «L» pavée par trois carrés.

D'après les travaux de C. McMullen, une courbe de Teichmüller $V \rightarrow \mathcal{M}_2$ admet un plongement sur une certaine surface modulaire de Hilbert, qui décrit le lieu des surfaces abéliennes à multiplication réelle. Dès lors, les périodes d'une courbe algébrique X dans cette famille vérifient une relation dite singulière traduisant l'existence d'une multiplication réelle sur $\text{Jac}(X)$, comme nous l'avons déjà vu au §1.4.2 notamment.

En revanche, il est en général bien plus délicat de mettre en évidence des relations explicites entre les coefficients d'une matrice $Z \in \mathfrak{S}_2$ qui soient vérifiées si, et seulement si Z est la matrice des périodes d'une courbe algébrique appartenant à la famille $V \rightarrow \mathcal{M}_2$.

Nous établissons dans ce chapitre une telle relation pour les matrices des périodes des M-courbes réelles de W_9 .

Théorème 4.1. — *Soit (X_1, ω_1) la surface de translation en «L» pavée par trois carrés. Pour tout réel $t \geq 1$, soit $(X_t, \omega_t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot (X_1, \omega_1)$. Alors Z_t est une matrice des périodes de X_t si, et seulement si il existe un unique réel y tel que $y > 2t/3$, vérifiant*

$$Z_t = \begin{pmatrix} 1 + i(2y - t) & iy \\ iy & i(y/2 + t) \end{pmatrix}$$

et satisfaisant à la condition

$$(4.0.1) \quad \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3} \exp \pi \left[\left(\frac{t}{2} - y + \frac{1}{2}i \right) \sum_{\ell=1}^3 k_\ell^2 + (y - t + i) \sum_{1 \leq \ell < m \leq 3} k_\ell k_m + \left(\frac{3}{2}i - \frac{t}{2} \right) \sum_{\ell=1}^3 k_\ell \right] = 0.$$

qui, d'après l'identité précédente, sont également des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^g \times \mathfrak{S}_g$.

Les propriétés suivantes sont bien connues, on pourra consulter par exemple [Mum83, p. 123 et §II.3, Proposition 3.14].

Proposition 4.1.1. — Soient $Z \in \mathfrak{S}_g$ et $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^g$, les fonctions $\vartheta \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}$ vérifient :

$$(4.1.2) \quad \vartheta \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}(-z, Z) = \exp(4\pi i {}^t mn) \vartheta \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}(z, Z).$$

Pour tous $p, q \in \mathbb{Z}^g$, on a les identités suivantes :

$$(4.1.3) \quad \vartheta \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}(z, Z) = \exp(\pi i {}^t p Z p + 2\pi i {}^t p(z+n) - 2\pi i {}^t m q) \vartheta \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}(z + Zp + q, Z)$$

et

$$(4.1.4) \quad \vartheta \begin{bmatrix} 2m+2p \\ 2n+2q \end{bmatrix}(z, Z) = \exp(2\pi i {}^t m q) \vartheta \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}(z, Z).$$

Remarque 4.1.2. — D'après l'identité (4.1.2), la fonction $z \mapsto \vartheta \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}(z, Z)$ est paire (resp. impaire) si, et seulement si $4 {}^t mn \equiv 0 \pmod{2}$ (resp. $4 {}^t mn \equiv 1 \pmod{2}$).

On peut montrer qu'il y a exactement 2^{2g} thêta-caractéristiques d'ordre 2, parmi lesquelles $2^{g-1}(2^g + 1)$ fonctions paires et $2^{g-1}(2^g - 1)$ impaires.

Formule de transformation modulaire

La proposition 4.1.1 montre certaines propriétés des $\vartheta \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}(z, Z)$ considérées comme fonctions de la variable $z \in \mathbb{C}^g$; le résultat suivant décrit leur transformation sous l'action de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ essentiellement en tant que fonctions de la variable modulaire $Z \in \mathfrak{S}_g$.

Théorème 4.1.3. — Soient $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$, soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$. Pour tout $(z, Z) \in \mathbb{C}^g \times \mathfrak{S}_g$, on définit

$$M(z, Z) = \left({}^t(\gamma Z + \delta)^{-1} z, (\alpha Z + \beta)(\gamma Z + \delta)^{-1} \right).$$

Alors on a la formule de transformation des thêta-caractéristiques suivante :

$$\vartheta \begin{bmatrix} 2m' \\ 2n' \end{bmatrix}(M(z, Z)) = \zeta_M \exp(\pi i {}^t z(\gamma Z + \delta)^{-1} \gamma z) \det(\gamma Z + \delta)^{\frac{1}{2}} \vartheta \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}(z, Z)$$

avec

$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta m - \gamma n \\ -\beta m + \alpha n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\gamma {}^t \delta) \\ \mathrm{diag}(\alpha {}^t \beta) \end{pmatrix},$$

où l'on note $\mathrm{diag}(N) = (N_{11}, \dots, N_{gg})$ pour $N \in \mathrm{M}_g(\mathbb{C})$, et où $\zeta_M \in \mathbb{C}^\times$ est une racine huitième de l'unité dépendant uniquement de M .

Pour une démonstration, voir par exemple [Mum83, §II.5, pp. 189-197].

Thêta-caractéristiques et courbes hyperelliptiques

Soient X une courbe algébrique de genre $g \geq 1$ et $Z \in \mathfrak{S}_g$ une matrice des périodes de X . Soient $m, n \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$, dans tout ce qui suit on adoptera la notation

$$\vartheta \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (Z) = \vartheta \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (0, Z).$$

On appelle *thêta-caractéristiques de Z* les valeurs de $\vartheta \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (Z)$. Une thêta-caractéristique est dite *paire* (resp. *impaire*) si ${}^t mn$ est pair (resp. impair). En particulier, toutes les thêta-caractéristiques impaires de Z sont nulles.

Remarque 4.1.4. — Si $\vartheta \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (Z)$ est nulle, alors d'après (4.1.4), pour tous $p, q \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ tels que $p, q \equiv 0 \pmod{2}$, la thêta-caractéristique $\vartheta \begin{bmatrix} m+p \\ n+q \end{bmatrix} (Z)$ est également nulle.

Les thêta-caractéristiques jouent un rôle particulièrement important dans la théorie des courbes hyperelliptiques, comme l'illustre le résultat suivant.

Théorème 4.1.5. — *Soit Z une matrice des périodes d'une courbe X de genre 3. Si X est non hyperelliptique, alors aucune thêta-caractéristique paire de Z n'est nulle, et X est hyperelliptique si, et seulement si exactement une thêta-caractéristique paire de X est nulle.*

Ainsi, on peut voir la famille des courbes hyperelliptiques de genre 3 comme l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe sur \mathfrak{S}_3 , c'est-à-dire une hypersurface de cet espace. Le lecteur pourra consulter [FK92, §VII.1] ou [Mum84, §III.a.9] pour une démonstration de ce théorème.

4.2. Revêtement double associé à une courbe de W_9

Nous décrivons dans cette section la construction d'un revêtement double non ramifié d'une surface de $\mathcal{H}(2)$ pavée par trois carreaux.

4.2.1. Construction du revêtement

Soit (X, ω) une surface de translation de la famille ΩW_9 , c'est-à-dire la $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ -orbite dans $\mathcal{H}(2)$ de la surface en «L» pavée par trois carrés. Une telle surface est définie géométriquement par le quotient $(\mathcal{P}/\sim, dz)$ où \mathcal{P} est l'hexagone euclidien obtenu en assemblant trois copies d'un parallélogramme d'aire unité, par exemple de la façon décrite sur la figure 4.1.

- Dans cette représentation, les six points de Weierstrass de X correspondent
- à la singularité conique d'angle 6π , représentée par un point noir sur la figure,
 - aux centres des carreaux et
 - aux milieux des deux côtés horizontaux et verticaux, identifiés deux-à-deux, des deux carreaux non adjacents,

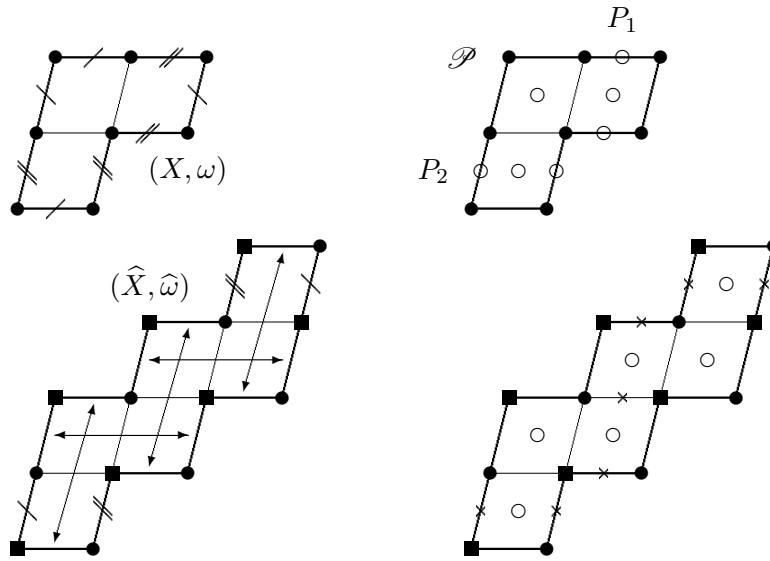


FIGURE 4.1 – Revêtement double : identifications et points de Weierstrass.

et sont tous représentés par des petits cercles.

On construit le revêtement double non ramifié $p : (\widehat{X}, \widehat{\omega}) \rightarrow (X, \omega)$ en assemblant (X, ω) avec son image par la symétrie dont le centre est l'un des deux points de Weierstrass qui n'est ni la singularité, ni le centre d'un carreau. Plus précisément, on peut supposer, quitte à appliquer une translation, que le point noté P_1 sur la figure 4.1 est 0 et on note $-\mathcal{P}$ l'image du polygone \mathcal{P} par la symétrie centrale $z \mapsto -z$. Notons que le choix de l'un ou l'autre des deux points de Weierstrass P_1 ou P_2 n'a aucune incidence sur la construction, comme on peut le vérifier facilement en réassemblant les carreaux. Alors $\mathcal{P} \cup (-\mathcal{P})$ est un dodécagone euclidien, que l'on munit des identifications par translation spécifiées sur la figure 4.1. Le quotient $(\mathcal{P} \cup (-\mathcal{P})/\sim, dz)$ définit une surface de translation «en escalier» pavée par six carreaux, dont les sommets s'identifient à deux singularités coniques d'angle 6π , repérées sur la figure par des disques et des carrés noirs. On obtient ainsi une surface de translation de genre 3 dans la strate $\mathcal{H}(2, 2)$, que l'on note $(\widehat{X}, \widehat{\omega})$.

Remarque 4.2.1. — Avec les notations de [LS07], les surfaces de translation en «L» pavées par trois carreaux rectangulaires forment la famille nommée $\text{St}_2(2)$, tandis que leurs revêtements doubles à six carreaux constituent la famille $\text{Esc}_2(3)$.

4.2.2. Automorphismes de la courbe revêtante

La courbe algébrique \widehat{X} définie ci-dessus est hyperelliptique : les huit points de Weierstrass sont

- les deux singularités coniques et

- les centres des six carreaux, représentés par des petits cercles sur la figure 4.1.

La symétrie centrale induit un automorphisme d'ordre 2 supplémentaire, noté ψ_2 . La courbe \widehat{X} admet donc une équation de la forme

$$w^2 = \widehat{P}(z) = (z^2 + 1)(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)(z^2 - c^2)$$

avec $\widehat{\omega} = \frac{dz}{w} + \frac{z^2 dz}{w}$,

dans laquelle ψ_2 s'exprime par $(z, w) \mapsto (-z, w)$. L'involution ψ_2 fixe quatre points, repérés par des croix sur la figure 4.1, qui correspondent

- au centre de symétrie de l'arrangement de carreaux,
- aux milieux des deux côtés horizontaux, identifiés, des deux carreaux centraux, et
- aux milieux des quatre côtés verticaux, identifiés deux-à-deux comme indiqué sur la figure, des deux carreaux situés aux extrémités.

En composant ψ_2 avec l'involution hyperelliptique $h_{\widehat{X}} : (z, w) \mapsto (z, -w)$, on obtient une involution supplémentaire $\tau : (z, w) \mapsto (-z, -w)$, sans point fixe, de telle sorte que $X = \widehat{X}/\langle \tau \rangle$ et que l'application quotient $p : \widehat{X} \rightarrow X$ soit donnée par $(z, w) \mapsto (z^2, zw)$. La courbe algébrique X admet alors pour équation

$$y^2 = P(x) = x(x+1)(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)$$

avec $\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{y} + \frac{x dx}{y} \right)$.

La courbe \widehat{X} admet de plus un automorphisme d'ordre 3 défini comme suit. Considérons la transformation affine induite par la rotation d'angle π autour de chacune des deux singularités, qui opère par permutation circulaire des carreaux d'une même rangée «diagonale» de trois carreaux. Faire agir trois fois cette transformation revient à remplacer $\widehat{\omega}$ par $-\widehat{\omega}$. Or, cette opération laisse invariante la différentielle quadratique $\widehat{\omega}^2$ qui induit la structure complexe sur \widehat{X} (voir la remarque 1.3.8). L'automorphisme sur \widehat{X} ainsi défini est d'ordre 3 et sera noté ψ_3 .

4.2.3. Base de l'homologie

Considérons une courbe complexe lisse X de genre 2 définie par une équation de la forme

$$(4.2.1) \quad y^2 = P(x) = x(x+1)(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2).$$

On note $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ la projection $(x, y) \mapsto x$.

Nous décrivons ici une base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$ à partir de la construction exposée au §1.4.3, dont nous reprenons les notations avec

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = a^2, x_4 = b^2 \text{ et } x_5 = c^2.$$

On obtient des courbes fermées simples $\delta_1, \dots, \delta_6$ sur X , orientées de telle sorte que les nombres d'intersection sont $(\delta_j \cdot \delta_{j+1}) = 1$ ($j \bmod 6$), tous les autres étant nuls, et telles que $\sum_{j=1}^3 \delta_{2j} = 0$ et $\sum_{j=1}^3 \delta_{2j-1} = 0$.

Soit \widehat{X} la courbe hyperelliptique de genre 3 définie par l'équation

$$(4.2.2) \quad w^2 = \widehat{P}(z) = (z^2 + 1)(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)(z^2 - c^2),$$

on note $\widehat{\pi} : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ la projection $(z, w) \mapsto z$.

Procédons de même pour \widehat{X} , en appliquant la construction du §1.4.3 à

$$x_1 = -c, x_2 = -b, x_3 = -a, x_4 = i, x_5 = -i, x_6 = a, x_7 = b \text{ et } x_8 = c.$$

Notons $\gamma_1, \dots, \gamma_8$ les cycles obtenus, vérifiant de nouveau $(\gamma_j \cdot \gamma_{j+1}) = 1$ ($j \bmod 8$), tous les autres nombres d'intersection étant nuls, et tels que $\sum_{j=1}^4 \gamma_{2j} = 0$ et $\sum_{j=1}^4 \gamma_{2j-1} = 0$.

Posons à présent

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_1, & \beta_1 &= -\gamma_2, \\ \alpha_2 &= \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_4, & \beta_2 &= -\gamma_4, \\ \alpha_3 &= \gamma_7, & \beta_3 &= \gamma_6 \end{aligned}$$

et

$$(4.2.4) \quad \begin{aligned} \check{\alpha}_1 &= \delta_1 - \delta_6, & \check{\beta}_1 &= \delta_1, \\ \check{\alpha}_2 &= \delta_4, & \check{\beta}_2 &= \delta_3. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{B} := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ et $\check{\mathcal{B}} := (\check{\alpha}_1, \check{\alpha}_2, \check{\beta}_1, \check{\beta}_2)$ sont respectivement des bases symplectiques de $H_1(\widehat{X}, \mathbb{Z})$ et $H_1(X, \mathbb{Z})$, représentées par la figure 4.2.

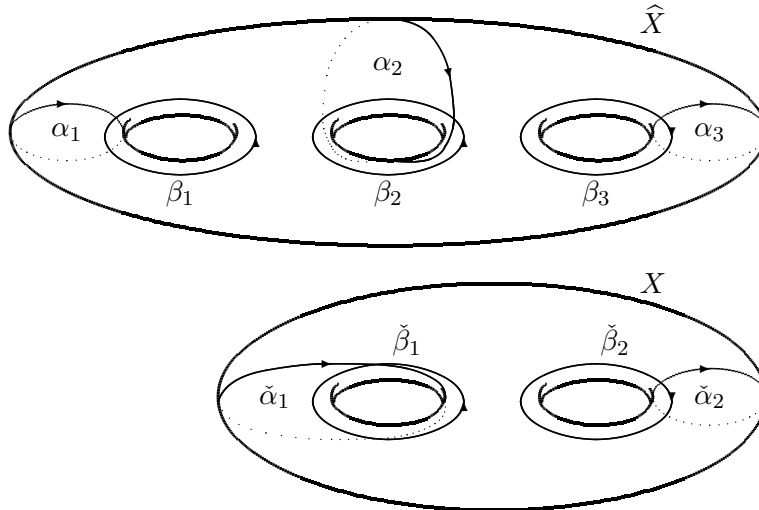


FIGURE 4.2 – Bases symplectiques de $H_1(X, \mathbb{Z})$ et $H_1(\widehat{X}, \mathbb{Z})$.

Remarque 4.2.2. — Si a^2 , b^2 et c^2 sont des réels strictement positifs, alors X est une M-courbe réelle de genre 2 et \widehat{X} est une courbe réelle de genre 3 à trois composantes réelles : ce cas correspond à la situation dans laquelle les surfaces de translation (X, ω) et $(\widehat{X}, \widehat{\omega})$ sont pavées par des rectangles. On peut alors spécialiser davantage la construction ci-dessus, en suivant les conventions du §3.1.2.

On définit δ_1 comme le relevé dans X par π du segment $[-1; 0]$, δ_2 comme le relevé de $[0; a^2]$ et ainsi de suite, et on choisit la détermination holomorphe de \sqrt{P} qui est réelle positive sur le segment $[-1; 0]$.

On construit de manière similaire les cycles γ_j sur \widehat{X} ($j = 1, \dots, 8$), l'orientation étant définie par le choix d'une détermination holomorphe de $\sqrt{\widehat{P}}$ réelle et positive sur $[-b; -a]$.

La construction précédente permet d'exprimer les périodes de la courbe X à partir des périodes de son revêtement double \widehat{X} .

Lemme 4.2.3. — Soient X une courbe algébrique de genre 2 définie par une équation de la forme

$$y^2 = P(x) = x(x+1)(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)$$

et \widehat{X} son revêtement double de genre 3 défini par

$$w^2 = \widehat{P}(z) = (z^2+1)(z^2-a^2)(z^2-b^2)(z^2-c^2).$$

Alors la matrice des périodes \widehat{Z} de \widehat{X} associée à la base \mathcal{B} de $H_1(\widehat{X}, \mathbb{Z})$ est de la forme

$$(4.2.5) \quad \widehat{Z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_{12} & z_{13} \\ z_{12} & z_2 & z_{12} \\ z_{13} & z_{12} & z_1 \end{pmatrix}$$

et la matrice des périodes Z de X associée à la base $\check{\mathcal{B}}$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$ est donnée par

$$(4.2.6) \quad Z = \begin{pmatrix} 2z_2 & 2z_{12} \\ 2z_{12} & z_1 + z_{13} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. La courbe \widehat{X} admet un automorphisme d'ordre 2 non hyperelliptique ψ_2 défini par

$$(4.2.7) \quad \psi_2 : (z, w) \mapsto (-z, w).$$

On note que $\psi_{2*}(\alpha_1) = -\alpha_3$, $\psi_{2*}(\alpha_2) = -\alpha_2$ et $\psi_{2*}(\alpha_3) = -\alpha_1$; de même pour les β_j . On obtient ainsi la représentation rationnelle de ψ_2 dans la base symplec-

tique (α_j, β_j) de $H_1(\widehat{X}, \mathbb{Z})$:

$${}^t M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho_r(\psi_2).$$

La matrice \widehat{Z} est donc stable sous l'action de la matrice symplectique M_2 , d'où on déduit la forme (4.2.5).

On peut détailler davantage, ce qui s'avérera utile pour la suite : notons

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left(\frac{dz}{w}, \frac{zdz}{w}, \frac{z^2 dz}{w} \right)$$

la base usuelle de formes holomorphes sur la courbe hyperelliptique \widehat{X} , on introduit les matrices

$$A = \left(\int_{\alpha_j} \omega_k \right)_{j,k} \quad \text{et} \quad B = \left(\int_{\beta_j} \omega_k \right)_{j,k}.$$

En remarquant que $\psi_2^*(\omega_k) = -\omega_k$ pour $k = 1, 3$, on déduit du calcul de M_2 ci-dessus que $A_{11} = A_{31}$ et $A_{13} = A_{33}$. En notant aussi que $\psi_2^*(\omega_2) = \omega_2$, on a $A_{12} = -A_{32}$ et $A_{22} = 0$. On obtient des relations identiques pour B , on a ainsi

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_1 & -a_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_{21} & 0 & b_{23} \\ b_1 & -b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors $\widehat{Z} = AB^{-1}$ sous la forme annoncée, avec

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{2} \frac{a_1 b_{23} - a_3 b_{21}}{b_1 b_{23} - a_3 b_{21}}, \\ z_{12} &= \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{b_1 b_{23} - b_3 b_{21}} = \frac{1}{2} \frac{a_{21} b_{23} - a_{23} b_{21}}{b_1 b_{23} - b_3 b_{21}}, \\ z_{13} &= \frac{1}{2} \frac{a_1 b_{23} - a_3 b_{21}}{b_1 b_{23} - b_3 b_{21}} - \frac{1}{2} \frac{a_2}{b_2}, \\ z_2 &= \frac{a_{23} b_1 - a_{21} b_3}{b_1 b_{23} - b_3 b_{21}}. \end{aligned}$$

La courbe X est le quotient de \widehat{X} par l'involution sans point fixe $\tau : (z, w) \mapsto (-z, -w)$. Les formes holomorphes ω_1 et ω_3 sur \widehat{X} sont invariantes par τ et induisent donc des formes holomorphes sur X , notées $\check{\omega}_1$ et $\check{\omega}_2$ respectivement. Notons

$$\check{A} = \left(\int_{\check{\alpha}_j} \check{\omega}_k \right)_{j,k} \quad \text{et} \quad \check{B} = \left(\int_{\check{\beta}_j} \check{\omega}_k \right)_{j,k}.$$

Soit $p : \widehat{X} \rightarrow X$ l'application quotient, alors p envoie α_1 et α_3 sur $\check{\alpha}_2$, et α_2 sur $\check{\alpha}_1$, tandis que β_1 et β_3 s'envoient sur $\check{\beta}_2$, et β_2 sur $\check{\beta}_1$. De plus, la restriction de p est de degré 2 sur β_2 et bijective sur chaque α_j, β_j pour $j \neq 2$. On a donc

$$\check{A} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} \text{ et } \check{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{21} & \frac{1}{2}b_{23} \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix},$$

et un calcul direct donne alors l'expression (4.2.6) de la matrice des périodes $Z = \check{A}\check{B}^{-1}$ pour la courbe X . \square

4.3. Caractérisation du revêtement double

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 4.2. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons essentiellement aux M-courbes réelles de W_9 . Ceci permet uniquement de fixer les idées car les démonstrations suivantes fonctionnent à l'identique dans le cas non réel : la seule difficulté réside alors éventuellement dans l'expression du choix des arcs dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ dont les relevés fourniront les cycles appropriés à la construction de la base symplectique \mathcal{B} . La méthode utilisée pour exhiber la forme de la matrice des périodes et identifier la thêta-caractéristique nulle correspondante est inspirée de [Sil01].

Nous commençons par établir l'expression (4.0.2) d'une matrice des périodes de \widehat{X} lorsque X est une M-courbe réelle de W_9 .

Proposition 4.3.1. — *Soit X une M-courbe réelle dans la famille W_9 . Soit \widehat{Z} la matrice des périodes de \widehat{X} associée à la base symplectique \mathcal{B} de $H_1(\widehat{X}, \mathbb{Z})$ décrite au §4.2.3. Alors \widehat{Z} est de la forme*

$$(4.3.1) \quad \widehat{Z} = \begin{pmatrix} iy_1 & \frac{1}{2}iy_1 & iy_{13} \\ \frac{1}{2}iy_1 & \frac{1}{2} + \frac{3}{4}iy_1 - \frac{1}{2}iy_{13} & \frac{1}{2}iy_1 \\ iy_{13} & \frac{1}{2}iy_1 & iy_1 \end{pmatrix} \text{ avec } y_1, y_{13} \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit f_3 la transformation de Möbius définie par

$$(4.3.2) \quad f_3 : x \mapsto \frac{x + \sqrt{3}}{-\sqrt{3}x + 1},$$

alors d'après la discussion du §3.3.1 (et notamment la proposition 3.3.1), la courbe X admet une équation de la forme

$$y^2 = x(x+1)(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)$$

où a, b et c sont des réels tels que

$$0 < |a| < \frac{\sqrt{3}}{3} < |b| < \sqrt{3} < |c|$$

et vérifiant $b^2 = f_3(f_3(a))^2$ et $c^2 = f_3(a)^2$. Le revêtement double \widehat{X} de X est défini par

$$w^2 = (z^2 + 1)(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)(z^2 - c^2),$$

et la transformation de Möbius réelle f_3 se relève sur \widehat{X} en un automorphisme d'ordre 3 noté ψ_3 , dont on calcule l'expression grâce aux formules du §1.1 :

$$(4.3.3) \quad \psi_3 : (z, w) \mapsto \left(\frac{z + \sqrt{3}}{-\sqrt{3}z + 1}, \frac{16w}{(1 - \sqrt{3}z)^4} \right).$$

Soient α_j et β_j ($j = 1, 2, 3$) les cycles définis par (4.2.3) et soit $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (dz/w, z dz/w, z^2 dz/w)$ la base de formes holomorphes sur \widehat{X} , on note $A = \left(\int_{\alpha_j} \omega_k \right)_{j,k}$ et $B = \left(\int_{\beta_j} \omega_k \right)_{j,k}$.

D'après la démonstration du lemme 4.2.3, on sait que $A_{11} = A_{31}$, $A_{13} = A_{33}$, $A_{12} = -A_{32}$ et $A_{22} = 0$ d'une part, et $B_{11} = B_{31}$, $B_{13} = B_{33}$, $B_{12} = -B_{32}$ et $B_{22} = 0$ d'autre part.

Un calcul direct donne

$$\psi_3^*(\omega_1) = \frac{1}{4}\omega_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2 + \frac{3}{4}\omega_3$$

et en remarquant que $\psi_{3*}(\alpha_3) = \alpha_1$, on obtient $A_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}(A_{11} - A_{13})$. Puisque $\psi_{3*}(\beta_1) = \beta_3$, on a aussi $B_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}(B_{13} - B_{11})$.

Comme $\psi_{3*}(\alpha_1) = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\psi_{3*}(\alpha_1)} \omega_1 &= A_{11} - 2A_{21} + A_{31} + B_{21} \\ &= \int_{\alpha_1} \psi_3^*(\omega_1) = \frac{1}{4}A_{11} - \frac{\sqrt{3}}{2}A_{12} + \frac{3}{4}A_{13}, \end{aligned}$$

d'où $A_{21} = \frac{5}{4}A_{11} - \frac{3}{4}A_{13} + \frac{1}{2}B_{21}$. En notant que $\psi_{3*}(\beta_3) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, le même raisonnement donne $B_{21} = \frac{3}{2}B_{13} - \frac{5}{2}B_{11}$.

Considérait $\int_{\psi_{3*}(\alpha_1)} \omega_3 = \int_{\alpha_1} \psi_3^*(\omega_3)$ avec

$$\psi_3^*(\omega_3) = \frac{3}{4}\omega_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2 + \frac{1}{4}\omega_3,$$

on trouve $A_{23} = \frac{5}{4}A_{13} - \frac{3}{4}A_{11} + \frac{1}{2}B_{23}$ et on obtient enfin $B_{23} = \frac{3}{2}B_{11} - \frac{5}{2}B_{13}$ de manière similaire.

On a ainsi montré que A et B sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 - a_3) & a_3 \\ \frac{5}{4}(a_1 - b_1) + \frac{3}{4}(b_3 - a_3) & 0 & \frac{3}{4}(b_1 - a_1) + \frac{5}{4}(a_3 - b_3) \\ a_1 & \frac{\sqrt{3}}{2}(a_3 - a_1) & a_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \frac{\sqrt{3}}{2}(b_3 - b_1) & b_3 \\ \frac{3}{2}b_3 - \frac{5}{2}b_1 & 0 & \frac{3}{2}b_1 - \frac{5}{2}b_3 \\ b_1 & \frac{\sqrt{3}}{2}(b_1 - b_3) & b_3 \end{pmatrix}$$

avec $a_1, a_3 \in i\mathbb{R}$ et $b_1, b_3 \in \mathbb{R}$ d'après les conventions de la remarque 4.2.2. La matrice des périodes de \widehat{X} associée à la base symplectique \mathcal{B} de $H_1(\widehat{X}, \mathbb{Z})$ est alors

$$(4.3.4) \quad AB^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & \frac{1}{2}z_1 & z_{13} \\ \frac{1}{2}z_1 & \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z_1 - \frac{1}{2}z_{13} & \frac{1}{2}z_1 \\ z_{13} & \frac{1}{2}z_1 & z_1 \end{pmatrix}$$

avec $z_1, z_{13} \in i\mathbb{R}$ définis par

$$z_1 = \frac{4a_3b_1 - a_1b_3}{3b_1^2 - b_3^2}$$

$$z_{13} = \frac{1}{3} \frac{a_3b_1 - a_1b_3 + 3(a_1b_1 - a_3b_3)}{b_1^2 - b_3^2}$$

d'où la forme (4.3.1) annoncée. \square

Nous calculons à présent la matrices des périodes du revêtement double d'une des M-courbes réelles de cette famille. Le choix se porte naturellement sur la courbe définie par la surface de translation pavée par trois carrés : il s'agit en effet de l'unique courbe de la famille W_9^M admettant un automorphisme non hyperelliptique, dont nous avons donné une équation au §3.3.2.

Lemme 4.3.2. — Soit X_1 la courbe d'équation

$$y^2 = P(x) = x(x^2 - 1)(x - a^2) \left(x - \frac{1}{a^2} \right) \text{ avec } a = 2 - \sqrt{3}$$

et \widehat{X}_1 son revêtement double. Alors la matrice des périodes \widehat{Z}_1 de \widehat{X}_1 associée à la base \mathcal{B} est

$$\widehat{Z}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}i & \frac{2}{3}i & \frac{1}{3}i \\ \frac{3}{3}i & \frac{1}{2} + \frac{5}{6}i & \frac{3}{3}i \\ \frac{1}{3}i & \frac{2}{3}i & \frac{4}{3}i \end{pmatrix}.$$

Démonstration. La courbe X_1 admet un automorphisme φ d'ordre 4 induit par $x \mapsto 1/x$. Son revêtement double \widehat{X}_1 est défini par l'équation

$$w^2 = \widehat{P}(z) = (z^4 - 1)(z^2 - a^2) \left(z^2 - \frac{1}{a^2} \right)$$

et φ se relève en un automorphisme d'ordre 4 de \widehat{X}_1 , noté ψ_4 et défini par

$$(4.3.5) \quad \psi_4 : (z, w) \mapsto \left(\frac{1}{z}, \frac{iw}{z^4} \right).$$

On vérifie facilement que

$$\psi_4^* \left(\frac{dz}{w} \right) = i \frac{z^2 dz}{w} \text{ et } \psi_4^* \left(\frac{z^2 dz}{w} \right) = i \frac{dz}{w}.$$

On remarque également que $\psi_4^*(\alpha_1) = -\beta_1$ d'où, en reprenant les notations de la preuve de la proposition 4.3.1, $B_{11} = -iA_{13}$ et $B_{13} = -iA_{11}$. Un calcul direct donne alors la matrice des périodes \widehat{Z}_1 annoncée. \square

Remarque 4.3.3. — D'après le lemme 4.2.3, la matrice des périodes de X_1 associée à la base $\check{\mathcal{B}}$ est

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{5}{3}i & \frac{4}{3}i \\ \frac{4}{3}i & \frac{5}{3}i \end{pmatrix}.$$

Grâce aux nombreux automorphismes de la courbe hyperelliptique \widehat{X}_1 , la formule de transformation modulaire du théorème 4.1.3 va nous permettre d'identifier la thêta-caractéristique paire annulée par la matrice \widehat{Z}_1 .

Proposition 4.3.4. — Soient X_1 , \widehat{X}_1 et \widehat{Z}_1 vérifiant les hypothèses du lemme 4.3.2. Alors

$$\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\widehat{Z}_1) = 0.$$

Démonstration. Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_6(\mathbb{R})$, notons

$$p = \mathrm{diag}(\gamma^t \delta) \text{ et } q = \mathrm{diag}(\alpha^t \beta).$$

Alors d'après le théorème 4.1.3, on a la formule de transformation des thêta-caractéristiques suivante :

$$(4.3.6) \quad \vartheta \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix} (M(Z)) = \phi(M, m, n, Z) \vartheta \begin{bmatrix} 2m' \\ 2n' \end{bmatrix} (Z),$$

avec

$$(4.3.7) \quad \begin{bmatrix} m' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t \alpha \left(m - \frac{1}{2}p\right) + {}^t \gamma \left(n - \frac{1}{2}q\right) \\ {}^t \beta \left(m - \frac{1}{2}p\right) + {}^t \delta \left(n - \frac{1}{2}q\right) \end{bmatrix} =: M \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix},$$

et où ϕ est une fonction dépendant uniquement de M , de $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^3$ et de $Z \in \mathfrak{S}_3$ et ne s'annulant pas.

La courbe \widehat{X}_1 est hyperelliptique de genre 3 par construction, donc d'après le théorème 4.1.5, il existe une unique caractéristique paire $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$ pour laquelle $\vartheta \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (\widehat{Z}_1) = 0$.

Les matrices des périodes de la forme (4.3.1) sont stables sous l'action des matrices symplectiques

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^t \rho_r(\psi_2)$$

$$\text{et } M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = {}^t \rho_r(\psi_3),$$

donc d'après l'identité (4.3.6) et la remarque 4.1.4, on doit avoir $M_k \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \pmod{2}$ pour $k = 2, 3$. On en déduit

$$\begin{cases} m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \pmod{2} \\ n_1 \equiv m_2 \equiv n_3 \pmod{2} \end{cases}$$

ce qui, parmi les thêta-caractéristiques paires, réduit les possibilités aux trois suivantes : $\vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, cette dernière n'étant jamais nulle (d'après le théorème de Riemann sur le diviseur de la fonction ϑ , voir [FK92, §VI.3] ou [Mum83, §II.3]). Par ailleurs, la matrice des périodes \widehat{Z}_1 est stable sous l'action de

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^t \rho_r(\psi_4),$$

donc $M_4 \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \pmod{2}$, ce qui fournit la condition supplémentaire $m_2 \equiv 1 \pmod{2}$, d'où le résultat. \square

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 4.2.

Démonstration du théorème 4.2. On suppose que les matrices des périodes des revêtements doubles sont associées à la même base de l'homologie \mathcal{B} de $H_1(\widehat{X}, \mathbb{Z})$, de telle sorte que les matrices des périodes présentent la forme annoncée dans le théorème 4.2.

L'ensemble des (classes d'isomorphisme de) courbes algébriques de genre 2 définies par une équation de la forme

$$(4.3.8) \quad y^2 = Q_s(x) = x(x+1)(x-s^2)(x-f_3(s)^2)(x-f_3(f_3(s))^2).$$

est connexe, puisque les racines du polynôme $Q_s(x)$ sont des fonctions continues de la variable s . De même, les revêtements doubles associés forment également un sous-ensemble connexe de l'ensemble des courbes hyperelliptiques de genre 3. L'application qui, à l'équation d'un tel revêtement, associe sa matrice des périodes, est continue, donc l'ensemble des matrices des périodes des revêtements doubles est connexe.

D'après le théorème 4.1.5, ces matrices annulent une et une seule thêta-caractéristique paire $\vartheta \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$. Puisque, par la proposition 4.3.4, la thêta-caractéristique $\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ s'annule pour un représentant de cette famille, elle s'annule donc également pour la matrice des périodes de tout revêtement double d'un élément de la famille définie par (4.3.8). \square

Remarque 4.3.5. — Pour une courbe X de la famille W_9 , considérons la base de $H_1(\widehat{X}, \mathbb{Z})$, notée \mathcal{B}' , obtenue à partir de \mathcal{B} en effectuant le changement de base symplectique donné par

$$(4.3.9) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_6(\mathbb{Z})$$

Les matrices des périodes des revêtements doubles des courbes de la famille W_9 associée à cette base admettent la forme plus usuelle

$$\widehat{Z}' = \begin{pmatrix} z_1' & z_{12}' & z_{12}' \\ z_{12}' & z_1' & z_{12}' \\ z_{12}' & z_{12}' & z_1' \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} z_1' = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z_1 - \frac{1}{2}z_{13} \\ z_{12}' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z_1 + \frac{1}{2}z_{13}, \end{cases}$$

pour laquelle on montre que $\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\widehat{Z}') = 0$. En particulier, pour la M-courbe réelle X_1 définie par la surface de translation pavée par trois carrés, la matrice des périodes du revêtement double \widehat{X}_1 associée à la base \mathcal{B}' est

$$\widehat{Z}'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{5}{6}i & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i & \frac{1}{2} + \frac{5}{6}i & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i & \frac{1}{2} + \frac{5}{6}i \end{pmatrix}.$$

4.4. Relation entre les périodes

Nous passons à présent à la démonstration du théorème 4.1. Soit (X_1, ω_1) la surface de translation en «L» pavée par trois carrés, définie par l'équation

$$(4.4.1) \quad y^2 = x(x^2 - 1)(x - 7 + 4\sqrt{3})(x - 7 - 4\sqrt{3})$$

$$\text{avec } \omega_1 = \lambda \left(\frac{dx}{y} + \frac{xdx}{y} \right)$$

pour une certaine constante $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Considérons la base symplectique standard de $H_1(X_1, \mathbb{Z})$ associée à l'équation 4.4.1 : avec les conventions adoptées dans la figure 4.3, le point P_1 correspond à $(-1, 0)$, P_2 à $(0, 0)$, P_3 à $(7 - 4\sqrt{3}, 0)$, P_4 à $(1, 0)$, P_5 à $(7 + 4\sqrt{3}, 0)$ et P_6 au point à l'infini. La constante λ est choisie de telle sorte que $\int_{\beta_1} \omega_1 = 1$.

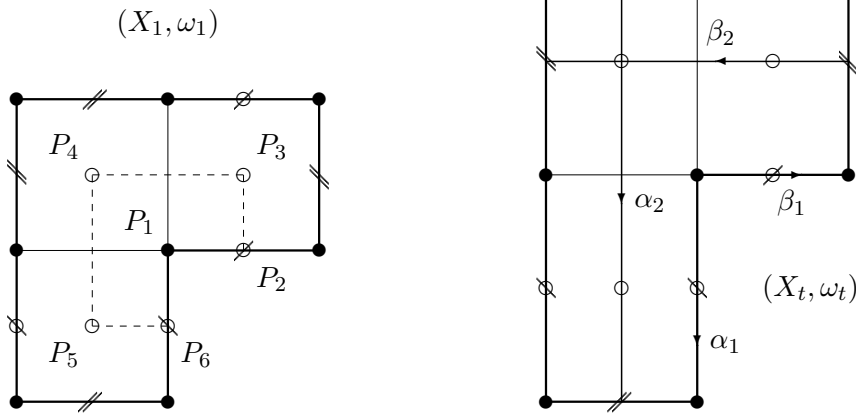


FIGURE 4.3 – La surface à trois carrés : base symplectique et déformation de Teichmüller.

Pour tout réel $t \geq 1$, notons $(X_t, \omega_t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot (X, \omega)$. Pour t fixé, soient $\eta_1 = \omega_t$ et η_2 l'unique différentielle abélienne sur X_t vérifiant $\int_{\beta_1} \eta_2 = 0$ et $\int_{\beta_2} \eta_2 = 1$, alors il existe des réels y et y' uniques tels que

$$A_t := \left(\int_{\alpha_j} \eta_k \right)_{j,k} = \begin{pmatrix} -it & iy \\ -2it & iy' \end{pmatrix} \text{ et } B := \left(\int_{\beta_j} \eta_k \right)_{j,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que la matrice des périodes ci-dessus vérifie la relation singulière

$$2(A_t B^{-1})_{11} - 5(A_t B^{-1})_{12} + 2(A_t B^{-1})_{22} = 0$$

de discriminant 9, caractérisant le fait que $\text{Jac}(X_t)$ appartient au lieu de la multiplication réelle par \mathfrak{o}_9 dans l'espace des modules \mathcal{A}_2 des surfaces abéliennes principalement polarisées.

La base $\check{\mathcal{B}} = (\check{\alpha}_1, \check{\alpha}_2, \check{\beta}_1, \check{\beta}_2)$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$ définie au §4.2.3 s'obtient par le changement de base symplectique donné par

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Sp}_4(\mathbb{Z}).$$

La matrice des périodes de X_t associée à la base $\check{\mathcal{B}}$ est donc

$$Z_t = {}^t N(A_t B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 + i(2y - t) & iy \\ iy & i(y/2 + t) \end{pmatrix}$$

dont la partie imaginaire est définie positive si, et seulement si $y > 2t/3$. Avec les notations du théorème 4.2, il vient

$$\begin{aligned} z_1 &= iy \\ z_{13} &= i(t - y/2) \end{aligned}$$

d'où on déduit l'expression de la matrice des périodes associée à la base \mathcal{B} du revêtement double \hat{X}_t :

$$\hat{Z}_t = \begin{pmatrix} iy & iy/2 & i(t - y/2) \\ iy/2 & \frac{1}{2} + i(y - t/2) & iy/2 \\ i(t - y/2) & iy/2 & iy \end{pmatrix}.$$

En faisant agir la transformation symplectique donnée par (4.3.9), on obtient la matrice

$$\hat{Z}'_t = {}^t M(\hat{Z}_t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + i(y - \frac{1}{2}t) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i(y - t) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i(y - t) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i(y - t) & \frac{1}{2} + i(y - \frac{1}{2}t) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i(y - t) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i(y - t) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i(y - t) & \frac{1}{2} + i(y - \frac{1}{2}t) \end{pmatrix}$$

associée à la base \mathcal{B}' qui, d'après la remarque 4.3.5, annule la thêta-caractéristique $\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. En développant, on obtient

$$\begin{aligned} \vartheta \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}(\hat{Z}'_t) &= \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3} \exp \pi \left[y \left(k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1 - (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \right) \right. \\ &+ t \left(\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - (k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1) - \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3) - \frac{3}{8} \right) \\ &\left. + i \left(\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1 + \frac{3}{2}(k_1 + k_2 + k_3) + \frac{9}{8} \right) \right], \end{aligned}$$

d'où on déduit l'identité (4.0.1) du théorème 4.1.

CHAPITRE 5

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Nous proposons dans ce chapitre une méthode de calcul approché de l'équation d'une M-courbe réelle définie par une surface de translation en «L», basée sur les transformations de Schwarz-Christoffel.

5.1. Calcul de l'équation

Soit X une courbe hyperelliptique de genre g , définie par une équation de la forme

$$y^2 = P(x) = x(x-1)(x-x_1)\dots(x-x_{2g-1}),$$

où les x_1, \dots, x_{2g-1} sont des complexes distincts et différents de 0 et 1. Si \mathcal{B} est, par exemple, la base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$ décrite au §1.4.3, alors les racines x_1, \dots, x_{2g-1} du polynôme $P(x)$ sont des fonctions holomorphes de la matrice des périodes normalisée Z associée à la base \mathcal{B} . Plus précisément, on peut exprimer les x_j ($j = 1, \dots, 2g-1$) au moyen des thêta-caractéristiques de Z . Par exemple, pour $g = 2$, on a les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{\vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (Z) \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (Z)}{\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (Z) \vartheta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (Z)} \right)^2 \\ x_2 &= \left(\frac{\vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (Z) \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (Z)}{\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (Z) \vartheta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (Z)} \right)^2 \\ x_3 &= \left(\frac{\vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (Z) \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (Z)}{\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (Z) \vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (Z)} \right)^2. \end{aligned}$$

La méthode générale est exposée en détails dans [FK92, §VII.4] et permet de produire de très bonnes approximations des racines de $P(x)$.

Dans le cadre de notre étude, une surface de translation fournit seulement les périodes d'une différentielle abélienne. En général, en l'absence d'automorphismes non triviaux, nous avons vu que cette donnée se révèle insuffisante pour calculer une matrice des périodes et la méthode ci-dessus est inadaptée. Toutefois, dans le cas d'une M-courbe réelle, l'application de Schwarz-Christoffel fournit un moyen direct d'obtenir les racines de l'équation, comme nous l'avons vu au §2.3.1.

Schwarz-Christoffel Toolbox pour MATLAB

En pratique, l'écueil majeur dans la formule de Schwarz-Christoffel (2.3.1) réside dans le calcul effectif des pré-images des sommets du polygone, connu comme le *problème des paramètres* de Schwarz-Christoffel, qui se ramène à la résolution d'un système d'équations non linéaires.

Lorsque le polygone présente notamment un degré de symétrie élevé, il est possible de résoudre analytiquement le problème des paramètres (quelques exemples sont traités dans [Hen88, §5.12]). Néanmoins, exception faite de ces rares cas particuliers, il n'existe en général aucune méthode analytique permettant de calculer ces paramètres lorsque les sommets sont au moins au nombre de 4 et on fait alors appel à des méthodes numériques.

À la fin des années 1970, L. Trefethen développe le paquetage SCPACK pour FORTRAN et présente dans [Tre80] ce qui apparaît comme la première solution fiable au problème des paramètres, pour l'application du disque unité dans un polygone (voir [Hen86, §16.10] pour une introduction sur le sujet).

Le successeur du SCPACK de Trefethen est le logiciel *Schwarz-Christoffel Toolbox* (*S-C Toolbox*) conçu par T. Driscoll. Il s'agit d'un environnement pour MATLAB permettant de calculer l'application de Schwarz-Christoffel depuis plusieurs domaines, parmi lesquels le demi-plan supérieur et le disque unité, et comportant une interface graphique. Le logiciel ainsi qu'un guide détaillé pour l'utilisateur sont disponibles à l'adresse web suivante :

<http://www.math.udel.edu/~driscoll/software/SC/>.

Le lecteur est invité à consulter le livre [DT02] pour un exposé détaillé concernant les aspects pratiques des transformations de Schwarz-Christoffel et les méthodes numériques qui y sont liées.

Commandes basiques. — Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$ un polygone euclidien dont le bord est orienté dans le sens direct et les sommets notés w_1, \dots, w_n .

La fonction `polygon` permet de définir le polygone $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$ en spécifiant ses sommets.

La commande `hplmap` calcule les paramètres de Schwarz-Christoffel pour l'unique transformation conforme $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{P}$ envoyant \mathbb{H} dans l'intérieur de \mathcal{P} et vérifiant

$$f(-1) = w_1, f(1) = w_{n-1} \text{ et } f(\infty) = w_n.$$

Il est possible d'extraire cette donnée à l'aide de `prevertex` et d'appliquer une transformation de Möbius M , que l'on peut déclarer grâce à la fonction `moebius`, afin de prescrire les pré-images de trois sommets.

5.2. Du polygone à l'équation

Nous donnons quelques exemples d'applications du *S-C Toolbox* au calcul des racines d'équations d'une M-courbe réelle définie par une surface de translation.

5.2.1. Surfaces de la strate $\mathcal{H}(2)$

La situation qui nous intéresse est bien entendu celle où le polygone est un hexagone euclidien en forme de «L» définissant une surface de translation de $\mathcal{H}(2)$. Soit un réel $x > 0$ fixé, on considère le polygone $\mathcal{P}_x \subset \mathbb{C}$ dont les sommets sont

$$0, 1 + x, 1 + x + i, 1 + i, 1 + i(1 + x) \text{ et } i(1 + x).$$

Notons (X, ω) la surface de translation de $\mathcal{H}(2)$ obtenue en assemblant quatre copies de \mathcal{P}_x munies des identifications usuelles.

Étant donné un réel $t \geq 1$, notons $(X_t, \omega_t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot (X, \omega)$. Géométriquement, (X_t, ω_t) s'obtient à partir du polygone $\mathcal{P}_x(t)$ dont les sommets sont

$$\begin{aligned} w_1(t) &= 0, w_2(t) = 1 + x, w_3(t) = 1 + x + it, \\ w_4(t) &= 1 + it, w_5(t) = 1 + i(1 + x)t \text{ et } w_6(t) = i(1 + x)t \end{aligned}$$

(voir la figure 2.4). Grâce à *S-C Toolbox*, nous pouvons alors calculer des valeurs approchées des racines de l'équation de la courbe algébrique associée à X_t pour de petites valeurs de t . Nous donnons ici un exemple de code en MATLAB, correspondant au cas de la surface pavée par trois carrés.

```
format long ;
x=1
for t=1:0.2:2
t
p=polygon([0 1+x 1+x+t*i 1+t*i 1+t*i*(1+x) t*i*(1+x)]);
f=hplmap(p);
e=prevertex(f);
m=moebius([e(3) e(4) 1],[Inf 0 1]);
sort(m(e))
end
```

Les pré-images prescrites sont

$$f(\infty) = w_3(t), f(0) = w_4(t) \text{ et } f(1) = w_5(t)$$

et la différentielle ω admet un zéro double au-dessus de 0. Le résultat fournit trois autres réels que nous notons $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$, vérifiant $1 < a(t) < b(t) < c(t)$, tels que la courbe algébrique associée à X_t admette pour équation

$$y^2 = x(x-1)(x-a(t))(x-b(t))(x-c(t)).$$

Avec ces conventions, l'automorphisme d'ordre 4 sur la M-courbe réelle correspondant à $t = 1$ est induit par transformation de Möbius $x \mapsto x/(x-1)$.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de valeurs approchées à 10^{-14} près pour les familles étudiées au chapitre 3.

Exemple 5.2.1 (famille W_5^M , $x = (\sqrt{5} - 1)/2$). — Cette famille est engendrée par la M-courbe réelle d'équation

$$y^2 = x(x - 1)(x + 1 - \sqrt{5})(x - 2)(x - 3 - \sqrt{5}).$$

| t | $a(t)$ | $b(t)$ | $c(t)$ |
|-----|------------------|------------------|------------------|
| 1.0 | 1.23606797823798 | 2.00000000047463 | 5.23606798853573 |
| 1.2 | 1.15879726209384 | 2.14289192327064 | 4.08280374058920 |
| 1.4 | 1.10641036848146 | 2.26548704190606 | 3.49907534865017 |
| 1.6 | 1.07138016128584 | 2.36327165859567 | 3.17116505675340 |
| 1.8 | 1.04799134403505 | 2.43743091474219 | 2.97466451142364 |
| 2.0 | 1.03233853200817 | 2.49173838074197 | 2.85192383484649 |
| 2.5 | 1.01213829214724 | 2.56819903780785 | 2.70289782232094 |
| 3.0 | 1.00458103920795 | 2.59885837544478 | 2.64966737510841 |
| 3.5 | 1.00173276254835 | 2.61072704334034 | 2.62994391888068 |
| 4.0 | 1.00065598068184 | 2.61525997792407 | 2.62253492850119 |
| 4.5 | 1.00024842042951 | 2.61698229987291 | 2.61973732492892 |
| 5.0 | 1.00009408887696 | 2.61763551831413 | 2.61867898000159 |

La forme d'équations à laquelle nous avons eu recours au §3.2 (notamment dans le lemme 3.2.1) s'obtient en appliquant la transformation de Möbius $x \mapsto (x - 1)/x$.

Exemple 5.2.2 (famille W_9^M , $x = 1$). — Cette famille est engendrée par la M-courbe réelle d'équation

$$y^2 = x(x - 1)(x - 8 + 4\sqrt{3})(x - 2)(x - 8 - 4\sqrt{3}).$$

| t | $a(t)$ | $b(t)$ | $c(t)$ |
|-----|------------------|------------------|-------------------|
| 1.0 | 1.07179677054380 | 2.00000000452986 | 14.92820355377485 |
| 1.2 | 1.03956677427964 | 2.30023363474102 | 9.67844504008467 |
| 1.4 | 1.02146369458998 | 2.59931120960474 | 7.33700557523007 |
| 1.6 | 1.01155089602826 | 2.87585378937431 | 6.10887825683047 |
| 1.8 | 1.00619066053065 | 3.11724017123538 | 5.39502389635177 |
| 2.0 | 1.00331070244055 | 3.31878114150643 | 4.95087901162208 |
| 2.5 | 1.00068974201855 | 3.66202002072149 | 4.39336548047517 |
| 3.0 | 1.00014344865742 | 3.83961737947435 | 4.17186740236022 |
| 3.5 | 1.00002982286924 | 3.92550703364006 | 4.07687919047939 |
| 4.0 | 1.00000619968773 | 3.96574519370040 | 4.03475079796903 |
| 4.5 | 1.00000128879368 | 3.98432092469360 | 4.01578219331241 |
| 5.0 | 1.00000026791403 | 3.99283863023006 | 4.00718292387462 |

La forme d'équations (3.3.5) invoquée dans le lemme 3.3.2 s'obtient en faisant agir la transformation de Möbius $x \mapsto x - 1$.

Exemple 5.2.3 (famille W_{12}^M , $x = (\sqrt{3} - 1)/2$). — Cette famille est engendrée par la M-courbe réelle d'équation

$$y^2 = x(x - 1)(x - 3/2)(x - 2)(x - 3).$$

| t | $a(t)$ | $b(t)$ | $c(t)$ |
|-----|------------------|------------------|------------------|
| 1.0 | 1.50000000042915 | 2.00000000101190 | 3.00000000299884 |
| 1.2 | 1.37838187862676 | 1.99878240015980 | 2.58172155344708 |
| 1.4 | 1.28868569862519 | 1.99287099041075 | 2.34311409081520 |
| 1.6 | 1.22212877345353 | 1.98234770747424 | 2.19617523759317 |
| 1.8 | 1.17215203628947 | 1.96908007025837 | 2.10085750436318 |
| 2.0 | 1.13418124472439 | 1.95492744310471 | 2.03663347855191 |
| 2.5 | 1.07320028126606 | 1.92294324883099 | 1.94807740505548 |
| 3.0 | 1.04051442629050 | 1.90025774934083 | 1.90809220492412 |
| 3.5 | 1.02259343426117 | 1.88598322120621 | 1.88844245125972 |
| 4.0 | 1.01265064137228 | 1.87747479732193 | 1.87824973831327 |
| 4.5 | 1.00709912518551 | 1.87253722333982 | 1.87278194624617 |
| 5.0 | 1.00398868678254 | 1.86971156286004 | 1.86978893868383 |

Remarque 5.2.4 (à propos de la famille W_{12}^M , de nouveau). — Nous avons vu au §3.4 que si une courbe X_t de la famille W_{12}^M admettait un automorphisme réel d'ordre 2, alors elle aurait également un automorphisme d'ordre 3. Si X_t est définie par une équation de la forme

$$y^2 = x(x-1)(x-a(t))(x-b(t))(x-c(t))$$

avec $1 < a(t) < b(t) < c(t)$,

alors un tel automorphisme d'ordre 3 doit être induit par l'une des transformations de Möbius

$$x \mapsto \frac{x-c(t)}{x-b(t)} \text{ et } x \mapsto b(t) \frac{x-a(t)}{x-1}.$$

De plus, dans le premier cas, on a $f(0) = a(t)$, ce qui mène à $a(t)b(t) = c(t)$. Dans le second, il vient $f(0) = c(t)$, ce qui conduit à la même condition.

Les valeurs numériques calculées pour $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ semblent donc étayer la conjecture 3.4.2.

5.2.2. Surfaces de la strate $\mathcal{H}(1, 1)$

D'après la proposition 2.3.6, la méthode peut également être utilisée dans le cas d'une surface de translation de $\mathcal{H}(1, 1)$.

L'exemple traité ici, décrit par McMullen dans [McM05b, §8], est un représentant canonique pour l'unique courbe de Teichmüller engendrée par une forme (X, ω) de genre 2 à zéros simples, décrite par la figure 5.1. Les points de Weierstrass sont représentés en noir tandis que le petit cercle figure l'image par l'application de Schwarz-Christoffel du point de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ noté s au-dessus duquel ω admet deux zéros simples. Si on pose

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ et } t = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10},$$

alors (X, ω) est la surface de translation définie par la figure 5.1.

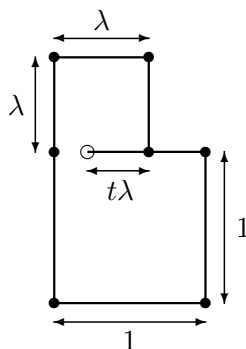


FIGURE 5.1 – Représentant canonique pour la courbe de Teichmüller engendrée par une forme de $\mathcal{H}(1, 1)$.

Pour obtenir une équation de X de la forme

$$y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)$$

avec $1 < a < b < c$, le code en MATLAB est le suivant :

```
format long
x=(sqrt(5)-1)/2;
t=1/2+sqrt(5)/10;
p=polygon([0 1 1+i x-t*x+i x+i x+i*(1+x) i*(1+x)]);
f=hplmap(p);
e=prevertex(f);
m=moebius([e(3) e(5) 1],[Inf 0 1]);
sort(m(e))
```

On obtient

$$a \approx 1.87612924395$$

$$b \approx 1137.97103156317$$

$$c \approx 2219.35384872120$$

et la différentielle ω admet deux zéros simples au-dessus de $s \approx -27.92896766822$.

5.3. De l'équation aux périodes

5.3.1. Test de précision

Nous pouvons évaluer la précision de la méthode décrite dans la section précédente en recalculant une approximation des longueurs des côtés du polygone en «L». Disposant d'une approximation de l'équation et connaissant le zéro double de la différentielle abélienne ω , ceci revient à un calcul classique d'intégrales hyperelliptiques.

Notons $y^2 = P_t(x)$ l'équation de la courbe définie par le polygone $\mathcal{P}_x(t)$ (voir la figure 5.2, alors d'après les conventions adoptées dans la section précédente, on a $\omega = \lambda x dx/y$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. On choisit la constante de normalisation λ de telle sorte que $\int_{w_2(t)}^{w_3(t)} dz = -1$; on pose :

$$\lambda_t = - \left(\int_1^{a(t)} \frac{x dx}{\sqrt{P_t(x)}} \right)^{-1}$$

où $\sqrt{P_t}$ est la détermination holomorphe de $\sqrt{P_t}$ définie au §3.1.2.

Exemple 5.3.1. — On donne ci-dessous le résultat obtenu pour $x = 1$ et $t = 3$.

$$\begin{aligned} \lambda_t \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{P_t(x)}} &\approx 2.99999999673987i, \\ \lambda_t \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{x dx}{\sqrt{P_t(x)}} &\approx 5.99999999598618i, \\ \lambda_t \int_{b(t)}^{c(t)} \frac{x dx}{\sqrt{P_t(x)}} &\approx -1.99999999897302. \end{aligned}$$

5.3.2. Une seconde forme propre pour la multiplication réelle

Nous avons vu que si la surface de translation (X, ω) engendre une courbe de Teichmüller de discriminant D , alors la différentielle abélienne est propre pour l'action de la multiplication réelle par σ_D sur $\text{Jac}(X)$. Grâce aux méthodes introduites ci-dessus, il est possible de calculer une approximation du point au-dessus duquel s'annule une seconde différentielle propre. Nous étudions ci-dessous l'exemple des M-courbes réelles de la famille W_5 .

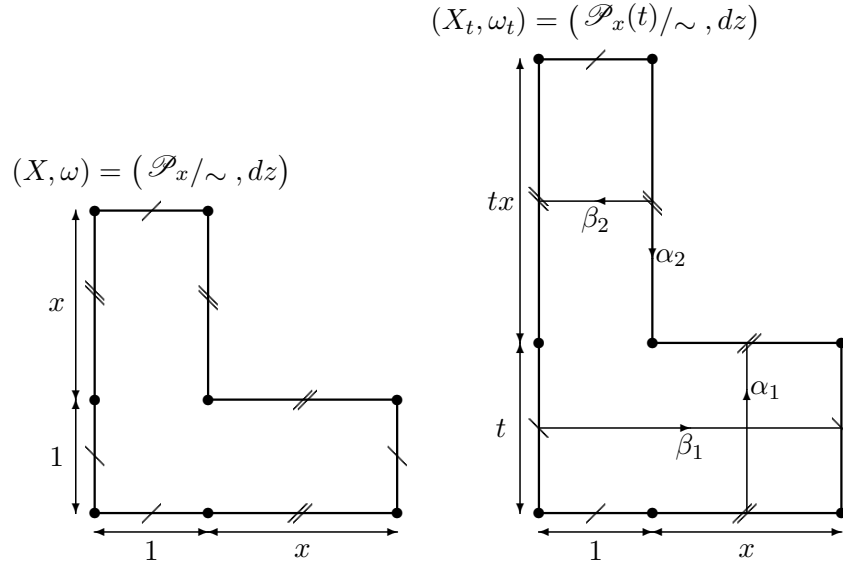
Exemple 5.3.2. — Soit (X, ω) la surface de translation de ΩW_5 définie géométriquement par $(\mathcal{P}_x/\sim, dz)$ avec $x = (\sqrt{5} - 1)/2$, munie de la base symplectique $\mathcal{B} := (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$ décrite par la figure 5.2. Avec les conventions adoptées au §5.2.1, la courbe X est définie par l'équation

$$\begin{aligned} y^2 = P(x) &= x(x-1)(x+1-\sqrt{5})(x-2)(x-3-\sqrt{5}) \\ \text{avec } \omega &= \lambda \frac{x dx}{y} \end{aligned}$$

où la constante $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ est choisie de telle sorte que $\int_{\beta_2} \omega = -1$.

Soit $t \geq 1$, notons $(X_t, \omega_t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right) \cdot (X, \omega)$. Si T est un endomorphisme propre de $\text{Jac}(X_t)$, auto-adjoint pour la polarisation sur $\text{Jac}(X_t)$ et tel que $T^2 - T - \text{id} = 0$, alors on vérifie que la représentation rationnelle de T dans la base \mathcal{B} s'écrit

$$\rho_r(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 5.2 – Base symplectique de $H_1(X_t, \mathbb{Z})$.

(voir la preuve de la proposition 2.4.1 par exemple).

L'environnement *S-C Toolbox* permet de calculer une approximation des racines de l'équation de la M-courbe réelle X_t . Si cette dernière est définie par l'équation

$$y^2 = x(x-1)(x-a(t))(x-b(t))(x-c(t)),$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont définis au §5.2.1, alors on pose

$$\omega_t^\sigma = \mu \left(s(t) \frac{dx}{y} - \frac{x dx}{y} \right)$$

où la constante $\mu \in \mathbb{C}^\times$ est choisie de telle sorte que $\int_{\beta_2} \omega_t^\sigma = 1$. Par dichotomie, il est alors possible d'obtenir une valeur approchée du point $s(t) \in \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ au-dessus duquel s'annule la seconde différentielle propre ω_t^σ : d'après la proposition 1.5.8, cette forme vérifie

$$\frac{\int_{\alpha_1} \omega_t}{\int_{\alpha_2} \omega_t} = - \frac{\int_{\beta_2} \omega_t^\sigma}{\int_{\beta_1} \omega_t^\sigma}.$$

Les périodes ci-dessus sont alors évaluées par un calcul numérique d'intégrales hyperelliptiques. Nous donnons dans le tableau ci-dessous des valeurs approchées

de $s(t)$ pour quelques valeurs de t :

| t | $s(t)$ |
|-----|----------------|
| 1 | 2.000000000000 |
| 2 | 1.837802037948 |
| 3 | 1.813151114384 |
| 4 | 1.809610141453 |
| 5 | 1.809102092729 |
| 6 | 1.809029195214 |
| 7 | 1.809019160582 |

Si l'on note

$$A_t = \begin{pmatrix} \int_{\alpha_1} \omega_t & \int_{\alpha_1} \omega_t^\sigma \\ \int_{\beta_2} \omega_t & \int_{\beta_2} \omega_t^\sigma \end{pmatrix} \text{ et } B_t = \begin{pmatrix} \int_{\beta_1} \omega_t & \int_{\beta_1} \omega_t^\sigma \\ \int_{\beta_2} \omega_t & \int_{\beta_2} \omega_t^\sigma \end{pmatrix},$$

on peut ainsi vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ B_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_t \\ B_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} \approx 0,$$

le terme d'erreur étant de l'ordre de 10^{-7} à 10^{-10} selon les valeurs de t ci-dessus.

RÉFÉRENCES

- [BL04] Christina BIRKENHAKE et Herbert LANGE : *Complex abelian varieties*, volume 302 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 2004.
- [Bol87] Oskar BOLZA : On Binary Sextics with Linear Transformations into Themselves. *Amer. J. Math.*, 10(1):47–70, 1887.
- [BS01] Peter BUSER et Robert SILHOL : Geodesics, periods, and equations of real hyperelliptic curves. *Duke Math. J.*, 108(2):211–250, 2001.
- [Bus92] Peter BUSER : *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, volume 106 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.
- [Cal04] Kariane CALTA : Veech surfaces and complete periodicity in genus two. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(4):871–908 (electronic), 2004.
- [Cir01] Francisco-Javier CIRRE : Complex automorphism groups of real algebraic curves of genus 2. *J. Pure Appl. Algebra*, 157(2-3):157–181, 2001.
- [Cir03] Francisco-Javier CIRRE : The moduli space of real algebraic curves of genus 2. *Pacific J. Math.*, 208(1):53–72, 2003.
- [Cir06] Francisco-Javier CIRRE : Birational classification of hyperelliptic real algebraic curves. In *The geometry of Riemann surfaces and abelian varieties*, volume 397 de *Contemp. Math.*, pages 15–25. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [CR01] Antonio F. COSTA et Gonzalo RIERA : One parameter families of Riemann surfaces of genus two. *Glasg. Math. J.*, 43(2):255–268, 2001.
- [CW90] Paula COHEN et Jürgen WOLFART : Modular embeddings for some nonarithmetic Fuchsian groups. *Acta Arith.*, 56(2):93–110, 1990.
- [DT02] Tobin A. DRISCOLL et Lloyd N. TREFETHEN : *Schwarz-Christoffel mapping*, volume 8 de *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [FK92] Hershel M. FARKAS et Irwin KRA : *Riemann surfaces*, volume 71 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1992.

- [GH81] Benedict H. GROSS et Joseph HARRIS : Real algebraic curves. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2):157–182, 1981.
- [GSS05] Jaime GUTIERREZ, David SEVILLA et Tanush SHASKA : Hyperelliptic curves of genus 3 with prescribed automorphism group. In *Computational aspects of algebraic curves*, volume 13 de *Lecture Notes Ser. Comput.*, pages 109–123. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.
- [Hec11] Erich HECKE : Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. *Math. Ann.*, 71(1):1–37, 1911.
- [Hen86] Peter HENRICI : *Applied and computational complex analysis. Vol. 3.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1986.
- [Hen88] Peter HENRICI : *Applied and computational complex analysis. Vol. 1.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988.
- [HL05] Pascal HUBERT et Samuel LELIÈVRE : Noncongruence subgroups in $\mathcal{H}(2)$. *Int. Math. Res. Not.*, (1):47–64, 2005.
- [HL06] Pascal HUBERT et Samuel LELIÈVRE : Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$. *Israel J. Math.*, 151:281–321, 2006.
- [HS06] Pascal HUBERT et Thomas A. SCHMIDT : An introduction to Veech surfaces. In *Handbook of dynamical systems. Vol. 1B*, pages 501–526. Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.
- [HS07] Frank HERRLICH et Gabriela SCHMITHÜSEN : On the boundary of Teichmüller disks in Teichmüller and in Schottky space. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. I*, volume 11 de *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 293–349. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [IT92] Ysoichi IMAYOSHI et Masahiko TANIGUCHI : *An introduction to Teichmüller spaces.* Springer-Verlag, Tokyo, 1992. Translated and revised from the Japanese by the authors.
- [KS00] Richard KENYON et John SMILLIE : Billiards on rational-angled triangles. *Comment. Math. Helv.*, 75(1):65–108, 2000.
- [KZ03] Maxim KONTSEVICH et Anton ZORICH : Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities. *Invent. Math.*, 153(3):631–678, 2003.
- [Loc05] Pierre LOCHAK : On arithmetic curves in the moduli spaces of curves. *J. Inst. Math. Jussieu*, 4(3):443–508, 2005.
- [LS07] Samuel LELIÈVRE et Robert SILHOL : Multi-geodesic tessellations, fractional Dehn twists and uniformization of algebraic curves, 2007. <http://arxiv.org/abs/math/0702374>.
- [Mas82] Howard MASUR : Interval exchange transformations and measured foliations. *Ann. of Math. (2)*, 115(1):169–200, 1982.

- [Mas06] Howard MASUR : Ergodic theory of translation surfaces. *In Handbook of dynamical systems. Vol. 1B*, pages 527–547. Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.
- [McM03] Curtis T. MCMULLEN : Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(4):857–885 (electronic), 2003.
- [McM05a] Curtis T. MCMULLEN : Teichmüller curves in genus two : discriminant and spin. *Math. Ann.*, 333(1):87–130, 2005.
- [McM05b] Curtis T. MCMULLEN : Teichmüller curves in genus two : the decagon and beyond. *J. Reine Angew. Math.*, 582:173–199, 2005.
- [McM06] Curtis T. MCMULLEN : Teichmüller curves in genus two : torsion divisors and ratios of sines. *Invent. Math.*, 165(3):651–672, 2006.
- [McM07] Curtis T. MCMULLEN : Foliations of Hilbert modular surfaces. *Amer. J. Math.*, 129(1):183–215, 2007.
- [MT02] Howard MASUR et Serge TABACHNIKOV : Rational billiards and flat structures. *In Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 1015–1089. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [Mum70] David MUMFORD : *Abelian varieties*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.
- [Mum83] David MUMFORD : *Tata lectures on theta. I*, volume 28 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1983. With the assistance of C. Musili, M. Nori, E. Previato and M. Stillman.
- [Mum84] David MUMFORD : *Tata lectures on theta. II*, volume 43 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1984. Jacobian theta functions and differential equations, With the collaboration of C. Musili, M. Nori, E. Previato, M. Stillman and H. Umemura.
- [Nag88] Subhashis NAG : *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. A Wiley-Interscience Publication.
- [Neh52] Zeev NEHARI : *Conformal mapping*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, Toronto, London, 1952.
- [Roy71] Halsey L. ROYDEN : Automorphisms and isometries of Teichmüller space. *In Advances in the Theory of Riemann Surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969)*, pages 369–383. Ann. of Math. Studies, No. 66. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.
- [Sil82] Robert SILHOL : Real abelian varieties and the theory of Comessatti. *Math. Z.*, 181(3):345–364, 1982.
- [Sil89] Robert SILHOL : *Real algebraic surfaces*, volume 1392 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

- [Sil01] Robert SILHOL : The Schottky problem for real genus 3 M-curves. *Math. Z.*, 236(4):841–881, 2001.
- [Sil06] Robert SILHOL : Genus 2 translation surfaces with an order 4 automorphism. In *The geometry of Riemann surfaces and abelian varieties*, volume 397 de *Contemp. Math.*, pages 207–213. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [Sil07] Robert SILHOL : On some one parameter families of genus 2 algebraic curves and half twists. *Comment. Math. Helv.*, 82(2):413–449, 2007.
- [SS89] Mika SEPPÄLÄ et Robert SILHOL : Moduli spaces for real algebraic curves and real abelian varieties. *Math. Z.*, 201(2):151–165, 1989.
- [SSW00] Paul SCHMUTZ SCHALLER et Jürgen WOLFART : Semi-arithmetic Fuchsian groups and modular embeddings. *J. London Math. Soc. (2)*, 61(1):13–24, 2000.
- [Thu88] William P. THURSTON : On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2):417–431, 1988.
- [Tre80] Lloyd N. TREFETHEN : Numerical computation of the Schwarz-Christoffel transformation. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 1(1):82–102, 1980.
- [vdG88] Gerard van der GEER : *Hilbert modular surfaces*, volume 16 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [vdGU82] Gerard van der GEER et Kenji UENO : Families of abelian surfaces with real multiplication over Hilbert modular surfaces. *Nagoya Math. J.*, 88:17–53, 1982.
- [Vee89] William A. VEECH : Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.*, 97(3):553–583, 1989.
- [Vee90] William A. VEECH : Moduli spaces of quadratic differentials. *J. Analyse Math.*, 55:117–171, 1990.
- [Vee92] William A. VEECH : The billiard in a regular polygon. *Geom. Funct. Anal.*, 2(3):341–379, 1992.
- [Vee95] William A. VEECH : Geometric realizations of hyperelliptic curves. In *Algorithms, fractals, and dynamics (Okayama/Kyoto, 1992)*, pages 217–226. Plenum, New York, 1995.
- [Zor06] Anton ZORICH : Flat surfaces. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, pages 437–583. Springer, Berlin, 2006.

INDEX

- base symplectique, 16
- composante imaginaire pure, 37
- composante réelle, 37
- courbe algébrique réelle, 36
- courbe de Teichmüller, 15
- courbe de Weierstrass W_D , 28
- demi-espace de Siegel \mathfrak{S}_g , 17
- différentielle abélienne, 5
- différentielle quadratique, 5
- fonction ϑ de Riemann, 76
- groupe d'automorphismes réduit, 4
- groupe symplectique réel $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$, 17
- jacobienne, 24
- M-courbe réelle, 37
- matrice des périodes, 15
 - normalisée, 25
 - réelle, 39
 - standard, 55
- multiplication réelle, 18
- ordre quadratique \mathfrak{o}_D , 20
- représentation analytique ρ_a , 16
- représentation rationnelle ρ_r , 16
- surface de translation, 7
- surface modulaire de Hilbert H_D , 21
- surfaces à petits carreaux, 11
- thêta-caractéristiques, 76
- variété abélienne, 16
- variété modulaire de Siegel \mathcal{A}_g , 18

Familles à un paramètre de surfaces en genre 2

Résumé

Cette thèse porte sur certaines familles à un paramètre de surfaces de Riemann compactes de genre 2 définies par des surfaces de translation. Les familles que nous considérons constituent des géodésiques de Teichmüller dans l'espace des modules.

Nous nous attachons en particulier à décrire ces surfaces par leurs matrices des périodes et par les équations des courbes algébriques associées. Nous étudions notamment les automorphismes admissibles par les surfaces qui sont des courbes réelles à trois composantes réelles dans ces familles.

Le principal résultat consiste en une caractérisation explicite des matrices des périodes des courbes réelles à trois composantes réelles appartenant à la famille obtenue par projection dans l'espace des modules de la $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite de la surface de translation en «L» pavée par trois carreaux.

Nous montrons enfin, grâce à une interprétation en termes de transformations de Schwarz-Christoffel, comment calculer numériquement une équation de la courbe algébrique définie par une surface de translation en «L».

Mots clés. — surfaces de Riemann, surfaces de translation, courbes algébriques, matrices des périodes, géodésiques de Teichmüller.

One parameter families of surfaces in genus 2

Abstract

In this thesis we study some one parameter families of compact Riemann surfaces of genus 2 defined by translation surfaces. The families we consider are Teichmüller geodesics in the moduli space.

We mainly describe these surfaces by means of period matrices and equations of the associated algebraic curves. We study admissible automorphisms for surfaces that are real curves with three real components in those families.

The main result is an explicit characterisation of period matrices of real curves with three real components belonging to the family obtained by projecting the $SL_2(\mathbb{R})$ -orbit of the «L»-shaped translation surface tiled by three squares into the moduli space.

We finally show, using an interpretation in terms of Schwarz-Christoffel transformations, how to numerically compute an equation of the algebraic curve defined by a «L»-shaped translation surface.

Key words. — Riemann surfaces, translation surfaces, algebraic curves, period matrices, Teichmüller geodesics.

2010 Mathematics Subject Classification

14H37, 14H40, 14H45, 14H55, 30F10, 32G05, 32G15, 32G20.