



Conditions aux bords dans des theories conformes non unitaires

Jerome Dubail

► To cite this version:

Jerome Dubail. Conditions aux bords dans des theories conformes non unitaires. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2010. Français. ⟨NNT : ⟩. ⟨tel-00555624⟩

HAL Id: tel-00555624

<https://theses.hal.science/tel-00555624v1>

Submitted on 14 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



UNIVERSITÉ PARIS 11 - ORSAY

et

INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE - CEA/SACLAY

Thèse de doctorat

Spécialité

Physique Théorique

Sujet de la thèse :

Conditions aux bords dans des théories conformes non unitaires

présentée par

Jérôme DUBAIL

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 11

Soutenue le 7 septembre 2010 devant le jury composé de :

M. Denis BERNARD	Examineur
M. John CARDY	Rapporteur
M. Ilya GRUZBERG	Rapporteur
M. Henk HILHORST	Président du jury
M. Jesper JACOBSEN	Directeur de thèse
M. Hubert SALEUR	Membre invité
M. Jean-Bernard ZUBER	Examineur



UNIVERSITÉ PARIS 11 - ORSAY

et

INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE - CEA/SACLAY

Thèse de doctorat

Spécialité

Physique Théorique

Sujet de la thèse :

Conditions aux bords dans des théories conformes non unitaires

présentée par

Jérôme DUBAIL

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 11

Soutenue le 7 septembre 2010 devant le jury composé de :

M. Denis BERNARD	Examineur
M. John CARDY	Rapporteur
M. Ilya GRUZBERG	Rapporteur
M. Henk HILHORST	Président du jury
M. Jesper JACOBSEN	Directeur de thèse
M. Hubert SALEUR	Membre invité
M. Jean-Bernard ZUBER	Examineur

Conditions aux bords dans des théories conformes non unitaires

Résumé :

La compréhension des effets de surface et de taille finie est cruciale dans l'étude des phénomènes critiques. En effet, si les modèles théoriques sont le plus souvent construits sur des domaines arbitrairement grands avec des conditions aux limites périodiques, les échantillons expérimentaux ont toujours des bords et sont de taille finie. A un point critique, la longueur de corrélation diverge, elle peut donc devenir comparable ou supérieure à la taille de l'échantillon. Les effets provoqués par la présence d'un bord peuvent ainsi être ressentis dans tout l'échantillon. La physique des phénomènes de surface a progressé en même temps que les modèles décrivant des transitions de phase dans le volume. A deux dimensions, en particulier, les théories des champs invariantes sous les transformations conformes se sont révélées des outils extrêmement puissants pour décrire de manière non-perturbative les transitions de phase. L'étude des phénomènes de surface dans ce contexte a produit de nombreux résultats exacts tels que des exposants critiques et des fonctions de corrélations dans divers modèles critiques.

Dans cette thèse nous nous intéressons à des théories statistiques à deux dimensions dont les degrés de liberté sont non locaux, comme par exemple des polymères en solution. Ces théories peuvent être formulées localement au prix de poids de Boltzmann négatifs ou complexes, elles sont alors non-unitaires. Nous nous intéressons aux effets de surface dans ces théories, et décrivons les différentes conditions au bord qui sont compatibles avec l'invariance conforme. Notre stratégie n'est pas de formuler une approche axiomatique, mais plutôt de partir de modèles concrets sur réseau, et d'étudier leur limite continue. Dans ces modèles, les configurations du système sont en général définies en termes d'objets géométriques non-locaux. Nos résultats peuvent être reformulés dans le cadre de l'évolution (stochastique) de Schramm-Loewner (SLE), qui décrit ces objets géométriques directement dans la limite continue.

Des certains cas les modèles étudiés ici pourraient également être vus comme des modèles jouets pour les théories logarithmiques. Si l'on veut comprendre la structure algébrique d'une théorie conforme logarithmique, il est plus simple de partir d'une théorie avec bord, puisque la même théorie dans le volume mélange les actions de l'algèbre chirale et de l'algèbre anti-chirale. Par exemple, il doit être possible d'extraire des paramètres universels caractérisant l'indécomposabilité des représentations de l'algèbre de Virasoro à partir de modèles sur réseau avec un bord. D'autres résultats de cette thèse peuvent être utilisés pour prédire des quantités universelles caractéristiques de points critiques quantiques de systèmes unidimensionnels (par exemple des chaînes de spin), comme des entropies d'intrication ou des fidélités, en particulier dans des systèmes de taille finie.

Mots clés : transitions de phase, phénomènes critiques, invariance conforme, théories conformes avec bord, modèles intégrables, phénomènes de surface, Evolution de Schramm-Loewner.

Boundary conditions in some non-unitary conformal field theories

Abstract :

Understanding the surface effects, as well as finite size effects, is crucial in the study of critical phenomena. Indeed, whereas theoretical models are most often built in very large systems with periodic boundary conditions, the samples which are used in experimental physics are finite and have some boundaries. At a critical point, the correlation length diverges, so it can be comparable to, or even larger than the size of the sample. Thus, surface effects are important even in the bulk, and they cannot be neglected in the sample. Our understanding of critical phenomena at a surface has made the same progress as its bulk counterpart. In particular, in two dimensions, conformally invariant field theories are now extremely powerful tools which are used to describe phase transitions in a non-perturbative way. In this context, the study of surface critical phenomena has produced numerous new exact results, such as boundary critical exponents or correlation functions in several critical models.

In this thesis, we are interested in some statistical field theories in two dimensions, with non-local degrees of freedom. For example, polymers in a good solvent are described by such theories. One can try to turn these theories into local ones, but the price to pay is that we get negative or even complex Boltzmann weights : these theories are then non-unitary. We are interested in surface effects, and in finding out which boundary conditions are compatible with conformal invariance in these theories. Our strategy does not involve an axiomatic approach, but rather relies on concrete lattice models which have an interesting scaling limit. In these models, the configurations of the model are given in terms of geometrical objects that are non-local. Our results can be reformulated in the context of the (stochastic) Schramm-Loewner Evolution (SLE), which gives a description of these objects directly in the scaling limit.

In some cases, the models we study can be considered as toy-models for logarithmic theories. Indeed, it should be easier to understand the algebraic structure which underlies a particular theory in the boundary case, because in the bulk theory the actions of the chiral and anti-chiral algebras are mixed. For example, it must be possible to extract universal parameters which characterize the indecomposability of representations of the Virasoro algebra. Some other results in this thesis can be used to compute some universal quantities which appear at quantum critical points of 1+1D systems (e.g. gapless spin chains), such as entanglement entropies or fidelities, in particular in finite-size systems.

Key words : phase transitions, critical phenomena, conformal invariance, boundary conformal field theory, integrable models, surface effects, Schramm-Loewner Evolution.

Articles de références

Ce rapport de thèse reprend des résultats publiés dans les articles suivants :

Publiés dans des revues à comité de lecture

1. *Conformal two-boundary loop model on the annulus*, J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, Nucl. Phys. **B 813**, 430 (2009), arXiv :0812.2746.
2. *Exact solution of the anisotropic special transition in the $O(n)$ model in two dimensions*, J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **103**, 145701 (2009), arXiv :0909.2949.
3. *Conformal boundary conditions in the critical $O(n)$ model and dilute loop models*, J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, Nucl. Phys. **B 827**, 457 (2010), arXiv :0905.1382.
4. *Conformal field theory at central charge $c = 0$: a measure of the indecomposability b parameters*, J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, Nucl. Phys. **B 834**, 399 (2010), arXiv :1001.1151.
5. *Critical exponents of domain walls in the two-dimensional Potts model*, J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, J. Phys. A : Math. Theor. **43**, 482002 (2010), arXiv :1008.1216.

Remerciements

Je remercie Jesper et Hubert, qui ont encadré mes travaux pendant ces trois années de thèse, et avec qui j'ai pris plaisir à développer mes connaissances théoriques. Je les remercie également pour leur soutien actif et leurs conseils à divers moments importants de ma thèse, surtout lorsque je prospectais pour mon postdoc.

Je suis honoré par la présence de tous les membres du jury, en particulier de John Cardy et d'Ilya Gruzberg, qui ont accepté de traverser respectivement la Manche et l'Atlantique pour assister à ma soutenance. Je leur sais gré d'avoir accepté le rôle de rapporteur, malgré l'effort linguistique que cela représentait a priori, puisque mon manuscrit est rédigé en français. Je remercie Henk Hilhorst, Denis Bernard et Jean-Bernard Zuber d'avoir bravé les traditionnelles grèves du RER B pour venir à Saclay le jour de la soutenance. Enfin je remercie les rapporteurs et les autres membres du jury qui, par leur lecture minutieuse et critique de mon manuscrit de thèse, m'ont aidé à l'améliorer.

J'ai passé trois années à l'IPhT à Saclay, qui est un laboratoire fort convivial, et je tiens à remercier ceux et celles qui font de cet institut un endroit où il est si agréable de travailler au quotidien : Henri Orland, Jean-Yves Ollitrault, Olivier Golinelli, Sylvie Zaffanella, Anne Capdepon, Laure Sauboy, Bruno Savelli, Alexandre Thaumoux, Catherine Cataldi, Loïc Bervas ... Leur travail à tous permet de surmonter les lourdeurs et tracas administratifs. En outre, l'IPhT possède sans aucun doute l'une des plus belles salles café de France, en tout cas pour un laboratoire de physique. J'ai beaucoup apprécié le temps passé dans cette salle café, et les nombreuses discussions que j'ai eues avec certains des individus que l'on peut y croiser.

Parmi les Saclaysiens, je remercie particulièrement les thésards, qui constituent une communauté jeune, chaleureuse et dynamique. Je les remercie pour tout ce qui faisait notre quotidien à Saclay, et qui me manquera dorénavant : les interminables discussions, débats, conseils de cinéphiles, repas à la cantine 3, bières du vendredi soir, soirées chez Clément, etc.

J'ai eu la chance de partager un bureau (le 109) avec Clément et Jean-Marie, avec qui j'ai vécu de nombreuses anecdotes inoubliables. On a bien rigolé pendant ces trois ans, et je les en remercie. Sur le plan scientifique aussi, j'ai eu le plaisir de pouvoir discuter avec eux. J'ai pu collaborer avec Jean-Marie à la fin de ma thèse, et m'initier de cette façon aux questions d'intrication avec Vincent et Grégoire, que je remercie également.

Je remercie mes colocataires successifs pour l'ambiance à la fois studieuse et conviviale qui régnait dans notre appartement à Paris puis à Palaiseau. Je suis particulièrement reconnaissant à Thomas, tant pour nos discussions de physique que pour ses conseils informatiques inestimables. Par exemple, les images de cette thèse ont presque toutes été réalisées à partir de geekeries dont il est l'auteur.

Je remercie mes parents, qui m'ont encouragé avec bienveillance pendant ces innombrables années d'études.

Enfin, je remercie Laure, qui est à mes côtés depuis toutes ces années, et qui n'a jamais cessé de me soutenir dans cette voie que j'ai choisie, malgré les sacrifices auxquels elle devait consentir et les perspectives d'avenir incertaines que représente pour elle mon doctorat.

Table des matières

I	Phénomènes critiques et effets de surface : quelques exemples	5
I.1	Comportement critique de surface dans les milieux ferromagnétiques	6
I.2	Polymères en solution et transition d'adsorption	9
I.3	Problèmes d'impuretés quantiques : l'effet Kondo	14
II	Théorie conforme avec bord	21
II.1	Invariance conforme	21
II.1.1	Phénomènes critiques et invariance conforme	21
II.1.2	Premières conséquences de l'invariance conforme. Fonction à un point.	24
II.2	Fonctions de corrélation dans le demi-plan	25
II.2.1	Tenseur énergie-impulsion, invariance conforme au bord.	25
II.2.2	Identité de Ward. Algèbre de Virasoro.	26
II.2.3	L'astuce des images miroir	27
II.2.4	Exemple : le modèle d'Ising dans le demi-plan	29
II.3	Un bord dans le volume : les états d'Ishibashi	30
II.4	Localité d'un changement de condition au bord : opérateurs B.C.C.	34
II.5	Théorie conforme sur le ruban	36
II.5.1	Systèmes critiques ouverts en $1 + 1D$	36
II.5.2	Exemple : la chaîne d'Ising au point critique	38
II.6	Contraintes de Cardy	40
II.7	Classification des conditions aux bords : quel est le rôle de l'unitarité/la ratio- nalité ?	44
II.8	Facteur g et entropie de bord	45
II.9	Bord et algèbre de Virasoro	46
II.9.1	Retour au demi-plan. Déformation locale du bord.	47
II.9.2	Etat pantalon	49
II.9.3	Etat complètement ouvert	51
II.10	Bords stochastiques : Evolution de Schramm-Loewner (SLE)	53
II.10.1	Conditions au bord et courbes dans le demi-plan	54
II.10.2	L'équation de Loewner	55
II.10.3	L'argument de Schramm. Evolution de Schramm-Loewner.	57
II.10.4	SLE/CFT	58

III	Le gaz de boucles : pourquoi ?	63
III.1	Le modèle $O(n)$ sur réseau hexagonal	64
III.2	Formulation du modèle de Potts à la Fortuin-Kasteleyn	65
III.3	Quelques idées sur le gaz de Coulomb	66
III.4	A quoi ressemble la limite continue ? Boucles et SLE	68
III.5	Boucles et algèbre de Temperley-Lieb	70
III.6	Temperley-Lieb/Virasoro	75
IV	Conditions aux bords dans le modèle de boucles denses	83
IV.1	Quelles conditions au bord ?	84
IV.2	Algèbres $1BTL$ et $2BTL$	85
IV.3	Opérateurs B.C.C et lignes	88
IV.4	Fonction de partition sur l'anneau	90
IV.4.1	La fonction de partition n'est pas une trace	90
IV.4.2	Caractères conformes	92
IV.4.3	Entropie de bord des conditions marquées	93
IV.5	Restrictions RSOS	95
IV.6	Lien avec la chaîne XXZ	97
V	Transition spéciale anisotrope dans le modèle $O(n)$	105
V.1	Anisotropie au bord, boucles et marques	106
V.2	Diagramme de phase	107
V.3	Conditions au bord invariantes conforme pour le modèle $O(n)$	110
V.4	Géométrie de la transition anisotrope spéciale : $SLE_{\kappa,\rho}$	113
VI	Conclusion	119
A	Annexe (en anglais) : Boundary extensions of the Temperley-Lieb algebra : representations, lattice models and boundary conformal field theory	127
A.1	Introduction	127
A.1.1	The Temperley-Lieb algebra	127
A.1.2	Representations in the generic case	128
A.1.3	Representations at root of unity $q = e^{i\frac{\pi}{m+1}}$	128
A.2	Boundary extensions of the TL algebra : definitions and known results (generic case)	130
A.2.1	The boundary algebras $1BTL$ and $2BTL$	130
A.2.2	Generic irreducible representations of $1BTL$	132
A.2.3	Generic modules for $2BTL$	133
A.3	Jones-Wenzl projectors	134
A.3.1	Jones-Wenzl projectors for $1BTL$	134
A.3.2	Extensions to the two-boundary case	136
A.3.3	Markov traces in $1BTL$ and $2BTL$	137
A.4	Magic parameters	142
A.4.1	Gram determinants	142

A.4.2	Magic boundary in $1BTL$	144
A.4.3	Full restriction and RSOS representation	147
A.4.4	Non-generic representations of $2BTL$	149
A.5	Relation with Boundary Conformal Field Theory	153
A.5.1	From boundary Temperley-Lieb algebras to Virasoro algebra : magic in the spectra	157
A.5.2	Conformal partition functions on the annulus for RSOS models	158
A.6	Derivation of Gram determinants for $1BTL$	161

Phénomènes critiques et effets de surface : quelques exemples

Le travail présenté dans cette thèse traite de divers aspects des théories conformes avec bords. Les théories conformes sont des théories des champs qui apparaissent naturellement quand on veut décrire la physique à basse énergie d'un système à un point critique. Dans un tel système les fonctions de corrélation ne décroissent pas exponentiellement avec la distance entre les points, mais plutôt algébriquement. Par exemple dans un milieu magnétique à haute température la fonction de corrélation de l'aimantation locale $S(\vec{r})$ se comporte à grande distance comme

$$\langle S(\vec{r}_1)S(\vec{r}_2) \rangle \sim e^{-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|/\xi}$$

où ξ est la longueur de corrélation caractéristique. Quand la température diminue, cette longueur de corrélation augmente. Elle diverge à la température de Curie, et la fonction de corrélation se comporte alors comme

$$\langle S(\vec{r}_1)S(\vec{r}_2) \rangle \sim |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{2-d-\eta}$$

où η est un exposant critique qui est caractéristique de la classe d'universalité du point critique. Dans notre exemple (la transition paramagnétique/ferromagnétique) η dépend de la dimension du système et de la symétrie des interactions entre les spins^a.

Les modèles les plus simples que l'on peut construire pour étudier les comportements critiques sont souvent choisis de taille infinie, ou avec des conditions aux limites périodiques. Cela permet de définir des quantités thermodynamiques finies (comme l'énergie libre) tout en évitant d'avoir à travailler avec des conditions aux bords qui compliqueraient les calculs. De toute façon, on attend en général que les effets dus à ces conditions aux bords soient négligeables dans la limite thermodynamique. On peut effectivement justifier ce dernier point dans le cas où la longueur de corrélation ξ est finie, puisque les effets de surface doivent rester confinés dans une zone de largeur ξ le long du bord. Pour un système de très grande taille $L \gg \xi$ les observables dans le volume (c'est-à-dire loin du bord) sont insensibles aux effets de surface.

Cet argument s'écroule évidemment quand la longueur de corrélation devient comparable à la taille du système : $\xi \approx L$. Au voisinage du point critique les effets de surface peuvent

^aPar exemple pour la classe d'universalité du modèle d'Ising $\eta = 1/8$ si $d = 2$, $\eta \approx 0,039$ si $d = 3$ et $\eta = 0$ en champ moyen.

donc jouer un rôle important. La suite de cette introduction contient quelques exemples de ces comportements critiques de surface.

I.1 Comportement critique de surface dans les milieux ferromagnétiques

Les matériaux magnétiques fournissent un exemple simple de comportement critique de surface. Considérons un échantillon d'un matériau ferromagnétique en d dimensions. En l'absence de champ magnétique extérieur, le matériau a une aimantation spontanée $\langle S(\vec{r}) \rangle = m(\vec{r})$. Dans un système isotrope et sans bords on attend évidemment que l'aimantation soit constante dans tout le volume $m(\vec{r}) = m_V$. Par contre, dans un système avec un bord, l'aimantation spontanée peut varier près de la surface. Si $z > 0$ mesure la distance à la surface, dans la région $z \lesssim \xi$ l'aimantaion peut varier $m(z) \neq m_V$.

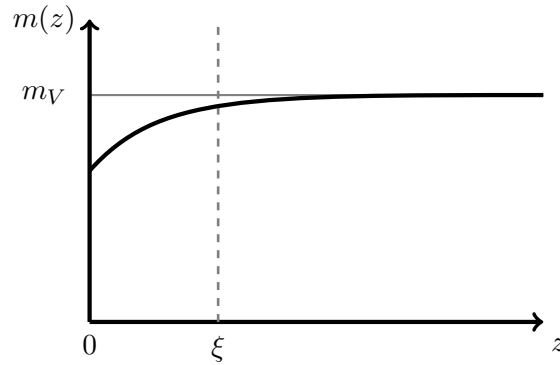


FIG. I.1 – Profil typique de l'aimantation locale $m(z)$, où z mesure la distance à la surface. ξ est la longueur de corrélation dans le volume.

Un spin localisé sur la surface a moins de voisins qu'un spin dans le volume, donc en général l'aimantation doit diminuer près de la surface (figure I.1). Mais il est parfois possible que le profil d'aimantation augmente si les interactions entre les spins de surface sont suffisamment fortes, ou simplement si l'on applique un champ magnétique dans le voisinage de la surface.

Pour rendre la discussion plus concrète on peut par exemple considérer le modèle d'Ising sur le réseau $(a\mathbb{Z})^d$. Sur chaque site du réseau vit un spin $S_i = \pm 1$. Dans le volume l'énergie d'une configuration est

$$H_V = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \quad (\text{I.1})$$

et au bord (on considère par exemple un réseau semi-infini $(a\mathbb{Z})^{d-1} \times a\mathbb{N}$)

$$H_s = -J_s \sum_{\langle bc \rangle} S_b S_c \quad (\text{I.2})$$

où la somme est restreinte aux paires de sites voisins à la surface $\langle bc \rangle$. En dépit de sa simplicité ce modèle a un comportement critique de surface riche (figure I.2) qu'on peut esquisser rapidement par un traitement en champ moyen. L'approximation consiste dans ce cas à remplacer l'interaction d'un spin S_i avec ses voisins $-JS_i \sum_j S_j$ par une interaction plus simple. On découpe le système en une suite d'hyperplans parallèles à la surface et situés à distance $z \in a\mathbb{N}$ de celle-ci, et on considère l'aimantation moyennée sur chaque hyperplan $m(z)$. Le terme $\sum_j S_j$ (les j désignent les voisins du site i) est remplacé par $2(d-1)m(z) + m(z-a) + m(z+a)$. De la même façon l'interaction d'un site b sur la surface avec ses voisins est remplacée par $-J_s S_b 2(d-1)m(0) - J S_b m(a)$. Pour que cette approximation soit cohérente, l'aimantation moyenne en chaque site $\langle S_i \rangle$ (ou $\langle S_b \rangle$) doit être égale à $m(z)$

$$m(z) = \tanh \left[\frac{2J(d-1)}{T} m(z) + \frac{J}{T} m(z-a) + \frac{J}{T} m(z+a) \right] \quad (\text{I.3a})$$

$$m(0) = \tanh \left[\frac{2J_s(d-1)}{T} m(0) + \frac{J}{T} m(a) \right]. \quad (\text{I.3b})$$

Phase ferromagnétique. Si $T < T_C = 2Jd$ l'aimantation spontanée loin de la surface $m_V = m(z \rightarrow \infty)$ est non-nulle et vérifie $m_V = \tanh \left[\frac{T_C}{T} m_V \right]$. Dans la limite $T/T_C \rightarrow 1^-$ l'aimantation spontanée doit être faible dans le volume : $m_V^2 \simeq 3(T/T_C)^2(1 - T/T_C)$. Dans cette limite on peut facilement déterminer le profil d'aimantation. En considérant z comme une variable continue, le système (I.3) devient à l'ordre le plus bas en $m(z)$

$$-\xi^2 \frac{d^2 m}{dz^2}(z) + m(z) = m_V \quad (\text{I.4a})$$

$$-\lambda \frac{dm}{dz}(0) + m(0) = 0 \quad (\text{I.4b})$$

où $\xi^2 \simeq \frac{a^2/(2d)}{1-T/T_C}$ et $\lambda \simeq \frac{a}{1-2(d-1)(J_s/J-1)}$. On retrouve bien le comportement décrit qualitativement sur la figure I.1 : $m(z) = m_V \left(1 - \frac{1}{1+\lambda/\xi} e^{-z/\xi} \right)$ pour $J = J_s$. On voit également qu'en augmentant suffisamment J_s/J , l'aimantation au voisinage de la surface devient supérieure à l'aimantation du volume ($m(0) > m_V$).

Phase paramagnétique et transition de surface. Quand $T > T_C$ les spins dans le volume sont désordonnés. Les spins à la surface ne peuvent être ordonnés que si le couplage J_s est suffisamment fort. Dans ce cas la transition désordre/ordre des spins du bord a lieu à une température $T_{Cs}(J_s) > T_C$. Elle est appelée traditionnellement *transition de surface*. Puisque cette transition ne concerne que les spins dans le voisinage du bord, il s'agit en fait d'une transition paramagnétique/ferromagnétique pour un système à $d-1$ dimensions. Il est clair qu'elle ne peut avoir lieu que si $d-1 \geq d_{\text{inf}}$, où d_{inf} est la dimension critique inférieure. En général pour les modèles de magnétisme avec symétrie continue on est limité par le théorème de Mermin-Wagner. Pour le modèle d'Ising, on est plutôt limité par l'argument de Peierls : on voit qu'il ne peut pas y avoir de transition de surface en dimension 2 (surface de dimension 1), mais qu'elle existe si $d \geq 3$.

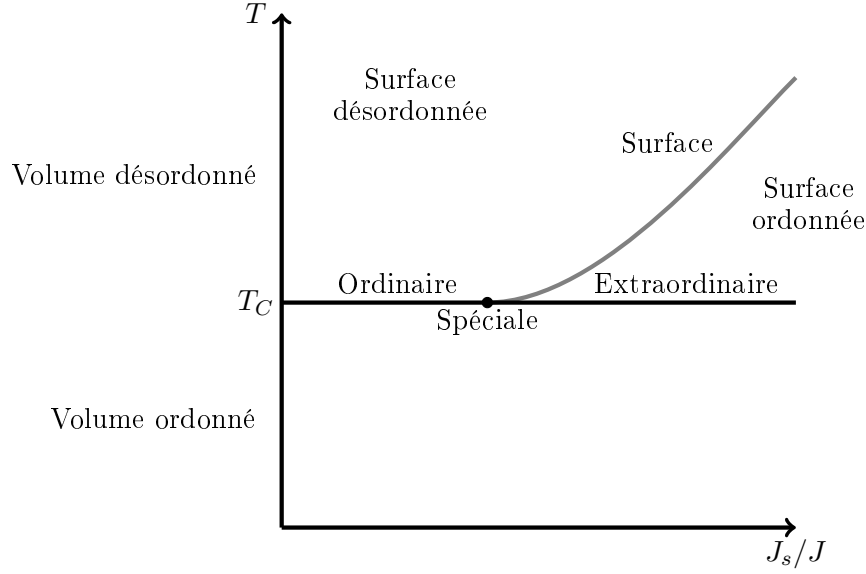


FIG. I.2 – Diagramme de phase typique d'un milieu ferromagnétique en fonction de la température T et du rapport des couplages J_s/J entre spins du volume et spins du bord. A la transition ferromagnétique/paramagnétique $T = T_C$, différents comportements critiques de surface sont possibles en fonction de la valeur de J_s/J : on parle alors de transition ordinaire, spéciale ou extraordinaire.

Par définition notre modèle en champ moyen n'est pas sensible aux finesses venant de la dimension de l'espace. On peut y voir la transition de surface de la façon suivante. Puisque l'aimantation est nulle dans le volume, on suppose $m(z) \ll 1$, ce qui permet à nouveau de linéariser les équations (I.3).

$$-\xi^2 \frac{d^2 m}{dz^2}(z) + m(z) = 0 \quad (\text{I.5a})$$

$$-\lambda \frac{dm}{dz}(0) + m(0) = 0 \quad (\text{I.5b})$$

où $\xi^2 = \frac{a^2/(2d)}{T/T_C - 1}$ et $\lambda = \frac{a}{1+2d(T/T_C - 1) - 2(d-1)(J_s/J - 1)}$. Il est clair que $m(z) = 0$ est une solution de ces équations. Mais quand $\lambda/\xi = -1$, la solution $m(z) = \text{cste.} e^{-z/\xi}$ est également acceptable. Dans ce cas l'aimantation n'est plus nécessairement négligeable près de la surface, et on est obligé de tenir compte d'un terme $m(z)^3$ dans le membre de gauche de (I.5.b). En insérant ce nouveau terme, on voit qu'une solution $m(z) \neq 0$ existe dès que $\lambda \leq -\xi$. La température critique $T_{Cs}(J_s)$ de la transition de surface est donc donnée par la solution de $\lambda(T_{Cs})/\xi(T_{Cs}) = -1$, ce qui nous mène dans la limite $T \rightarrow T_C^+$ à

$$\frac{T_{Cs}}{T_C} - 1 = \frac{1}{2d} \left[1 - 2(d-1) \left(\frac{J_s}{J} - 1 \right) \right]^{1/\Phi}. \quad (\text{I.6})$$

$\Phi = 1/2$ est un exposant critique qui détermine la forme de la ligne de transition de surface dans le diagramme de phase I.2 au voisinage de T_C .

Transition ordinaire, extraordinaire, spéciale. A la température de Curie $T = T_C$, il y a trois comportements possibles à la surface, selon la valeur de J_s/J . Pour caractériser ces trois classes d'universalité on peut définir une myriade d'exposants critiques associés à la décroissance des différentes fonctions de corrélation dans les directions transverses ou parallèles à la surface. Pour ne pas surcharger cette introduction nous ne discutons pas ces exposants ici, mais on pourra consulter entre autres les excellentes revues [1, 2, 3].

- *Transition ordinaire.* Elle a lieu à $T = T_C$ dès que J_s/J est assez faible. L'aimantation spontanée est nulle partout. Pour mieux caractériser cette transition il est utile d'utiliser le langage du groupe de renormalisation à la surface. Puisque la classe d'universalité de cette transition ne dépend pas de la valeur spécifique de J_s/J , l'opérateur qui correspond à une variation du couplage entre spins à la surface est irrelevant. Il n'existe qu'une perturbation relevante au bord, qui correspond à l'application d'un champ magnétique localisé à la surface.

- *Transition extraordinaire.* Dans le cas où J_s/J est assez fort, on a vu précédemment que l'aimantation n'est pas nulle à la surface même si les spins dans le volume sont désordonnés. Ceci est toujours vrai à la transition de Curie dans le volume. Comme dans le cas de la transition ordinaire, la perturbation du couplage J_s/J est irrélègente.

- *Transition spéciale.* Les lignes des transitions ordinaire, extraordinaire et de surface se rejoignent en un point multicritique dans le diagramme de phase I.2. Par exemple, dans le cas de notre modèle en champ moyen la relation (I.6) montre que cette transition a lieu quand $J_s/J = 1 + 1/(2d - 2)$. Même en l'absence d'un champ magnétique extérieur appliqué à la surface, la transition spéciale est instable : une perturbation du couplage J_s/J provoque un flot vers la transition ordinaire ou extraordinaire.

I.2 Polymères en solution et transition d'adsorption

La modélisation la plus simple d'un polymère en solution [4, 5] consiste à le considérer comme une longue chaîne flexible constituée de N maillons (les *monomères*), qu'on peut placer sur les arêtes d'un réseau cubique $(a\mathbb{Z})^d$. En négligeant les interactions entre les monomères le long de la chaîne, le modèle est équivalent à une marche aléatoire de N pas sur le réseau (figure I.3). On parle alors de *chaîne idéale*. La *chaîne "réelle"* est un modèle plus réaliste dans lequel la marche aléatoire est auto-évitante. Ces deux modèles correspondent à des classes d'universalité différentes (si $d < 4$). La physique des polymères est décrite correctement par les modèles construits à partir de la marche aléatoire auto-évitante. Mais ce processus est considérablement plus difficile à appréhender théoriquement que la marche simple, qui est un processus Markovien. En fait la marche simple est une description en champ moyen de la marche auto-évitante, et les deux modèles sont équivalents dans la limite continue si $d \geq 4$.

Notre compréhension de la physique des polymères au-delà du champ moyen est basée sur

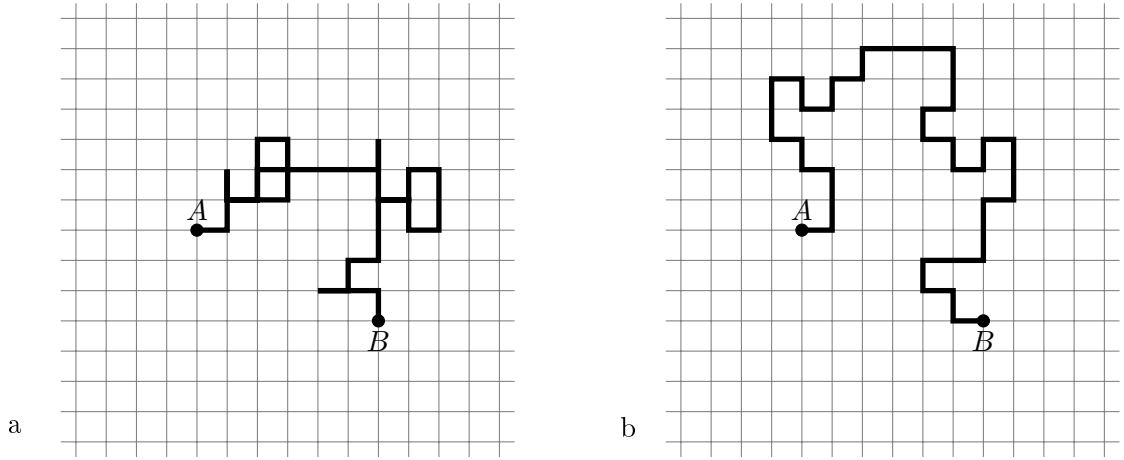


FIG. I.3 – Deux modèles de polymère sur réseau : la chaîne idéalisée (a) correspond à une marche aléatoire simple, la chaîne “réelle” (b) est une marche auto-évitante. Les deux classes d’universalité sont différentes si $d < 4$, identiques si $d \geq 4$. La chaîne idéale est une approximation de champ moyen de la chaîne “réelle”.

une analogie célèbre avec les systèmes magnétiques. Elle a été mise en avant par de Gennes en 1972 et a été très exploitée depuis. Cette analogie est très profonde, et peut être rendue quantitative en considérant la limite à $n \rightarrow 0$ composantes des modèles de spin avec symétrie $O(n)$ [4]. Nous reviendrons sur cette limite dans les chapitres suivants. Dans cette introduction nous nous limitons à quelques idées qualitatives et une petite modélisation en champ moyen.

Comme dans le cas des matériaux magnétiques, la présence d’une surface dans le système peut provoquer des phénomènes spécifiques. L’entropie d’un polymère est plus petite quand celui-ci est proche d’un bord. Les molécules du polymère interagissent avec les constituants de la surface à courte portée (interaction de type Van der Waals). A priori cette interaction peut être attractive ou répulsive. Si l’interaction est très fortement attractive, tout le polymère doit être collé sur la surface. Si l’interaction est répulsive, ou si elle est attractive mais trop faible, le polymère se détache de la surface pour gagner de l’entropie. La transition entre ces deux régimes (figure I.4) est appelée transition d’*adsorption*. C’est une transition du second ordre, qui peut être vue comme l’analogie de la transition spéciale pour le magnétisme.

La transition d’adsorption peut être analysée facilement en champ moyen (pour un traitement plus complet on pourra consulter l’ouvrage [6] qui est dédié intégralement à la modélisation de ce phénomène). On considère une chaîne idéale de longueur N sur le réseau $(a\mathbb{Z})^d$, dont une des extrémités est fixée en 0 et l’autre en $\vec{r}$. Dans la limite $N \gg 1$ la distribution de $\vec{r}$ est gaussienne

$$p(\vec{r}) \propto N^{-d/2} \exp\left(-\frac{|\vec{r}|^2}{2Na^2/d}\right). \quad (\text{I.7})$$

En particulier, l’exposant de Flory défini par $\langle |\vec{r}|^2 \rangle \sim a^2 N^{2\nu}$ vaut $\nu = 1/2$ en champ moyen.

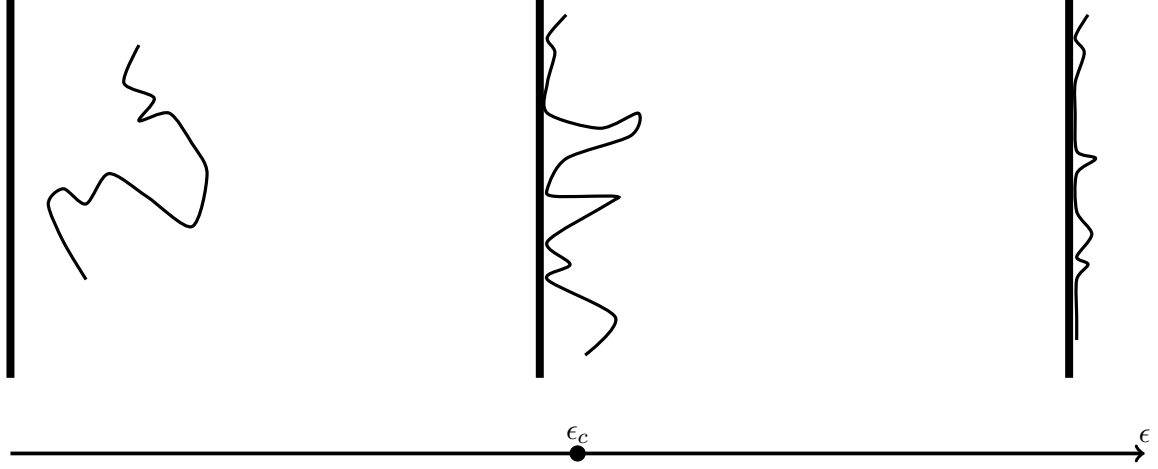


FIG. I.4 – La transition d'adsorption : quand l'énergie d'interaction ϵ entre un monomère et la surface devient assez grande, elle peut compenser l'entropie perdue par les monomères qui adhèrent au bord. Le polymère se colle sur la surface.

Passons maintenant au comportement de surface. On travaille sur le réseau $a\mathbb{N} \times (a\mathbb{Z})^{d-1}$, avec une des extrémités du polymère attachée en 0. En notant $\vec{r} = (r_\perp, \vec{r}_\parallel)$, dans la limite $N \gg 1$ on a $p(\vec{r}) = p(r_\perp)p(\vec{r}_\parallel)$. La distribution $p(\vec{r}_\parallel)$ est la même qu'en (I.7) en $d - 1$ dimensions. La distribution de $r_\perp$ est plus intéressante. On peut considérer que les coordonnées transverses des maillons de la chaîne réalisent une marche aléatoire à 1 dimension de $N' = N/d$ pas. Cette approximation est vraie uniquement en moyenne, mais elle devient exacte dans la limite $N \gg 1$. La marche aléatoire $\{X_n\}_{0 \leq n \leq N'}$ vérifie

$$|X_{n+1} - X_n| = 1 \quad (\text{I.8a})$$

$$X_n \geq 0 \quad (\text{I.8b})$$

$$X_0 = 0 \quad (\text{I.8c})$$

et le poids de Boltzmann d'une marche $\{X_n\}$ de longueur N' vaut

$$p(\{X_n\}) = e^{\frac{\epsilon}{T} N_0} \quad (\text{I.9})$$

où $-\epsilon$ est l'énergie donnée à un monomère qui touche la surface, T est la température, et $N_0 = \sum_{n=1}^{N'} \delta_{X_n, 0}$ est le nombre de retours en 0. On pourrait résoudre ce modèle pour un paramètre $e^{\epsilon/T}$ général, mais le résultat serait assez technique. Dans cette introduction, nous allons nous limiter à trois points particulièrement simples $e^{\epsilon/T} = 1, 2, \infty$. Ces trois points sont suffisants pour illustrer la transition d'adsorption.

- $e^{\epsilon/T} = 1$. La marche aléatoire $\{X_n\}_{0 \leq n \leq N'}$ est particulièrement simple dans ce cas puisque tous les chemins admis ont la même probabilité. Il suffit donc de compter le nombre de chemins allant de 0 à k en N' pas, sans jamais passer par le site -1 . Un chemin qui passe par -1 n'est

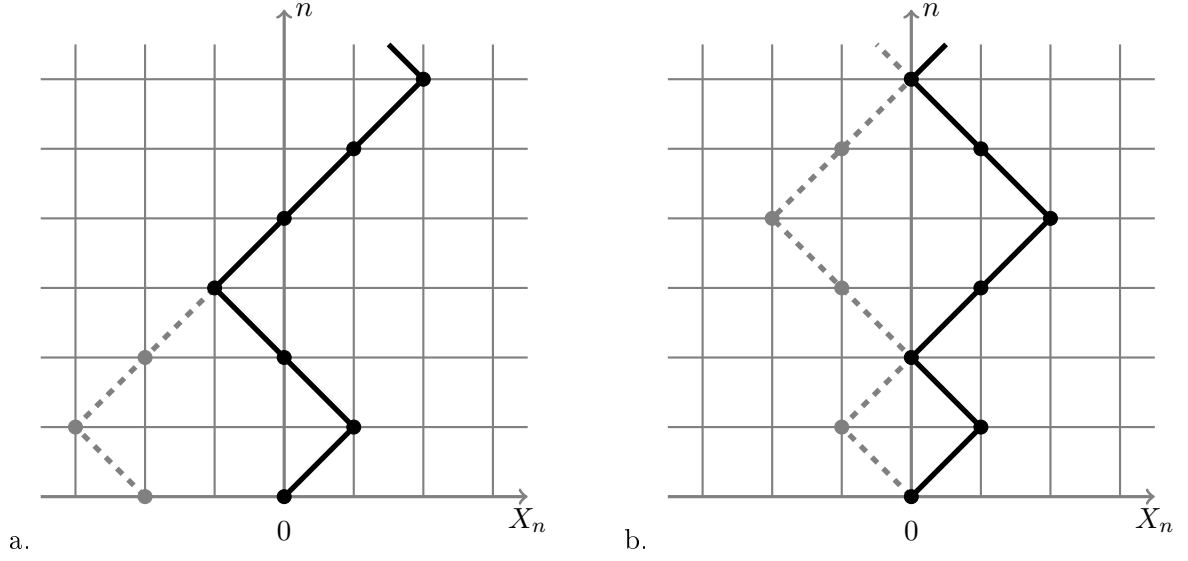


FIG. I.5 – (a) Les chemins interdits pour la marche X_n sont en bijection avec les chemins non restreints partant de -2 . (b) La marche aléatoire $\{X_n\}_{0 \leq n \leq N'}$ et son image par la réflexion $X_n \mapsto -X_n$.

pas admis, néanmoins il est facile de voir qu'il peut être envoyé par une réflexion autour du site -1 sur un chemin non restreint qui part du site -2 (figure I.5.a). Il est donc très facile d'évaluer le nombre total de chemins $\{X_n\}_{0 \leq n \leq N'}$ qui vont de 0 à k en restant sur les sites positifs

$$Z_{N',k} = \binom{N'}{\frac{N'-k}{2}} - \binom{N'}{\frac{N'-k-2}{2}} = \frac{2(k+1)}{N'+k+2} \binom{N'}{\frac{N'-k}{2}} \quad (\text{I.10})$$

Le nombre total de marches de longueur N' est $Z_{N'} = \sum_{k=0}^{N'} Z_{N',k} = \binom{N'}{N'/2}$. Ceci permet de calculer la probabilité $p_{N'}(k) = Z_{N',k}/Z_{N'}$. Le comportement asymptotique de cette probabilité quand $N, k \gg 1$ vaut

$$p_{N'}(k) \propto \frac{k}{N'} \exp\left(-\frac{k^2}{2N'}\right) \quad (\text{I.11})$$

donc dans le modèle de départ sur le réseau $a\mathbb{N} \times (a\mathbb{Z})^{d-1}$

$$p_N(r_\perp) \propto \frac{r_\perp}{aN} \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{2Na^2/d}\right). \quad (\text{I.12})$$

Dans une configuration typique, l'extrémité libre du polymère est à une distance $\propto a\sqrt{N}$ de la surface. Une autre quantité intéressante qu'il est possible d'évaluer est le nombre moyen de monomères adsorbés $\langle N_0 \rangle$, ou le nombre moyen de retours à l'origine dans le langage de la marche aléatoire. Nous n'allons pas faire le calcul ici pour ne pas surcharger cette introduction,

mais il n'est pas difficile. On trouve [6]

$$\langle N_0 \rangle = O(1) \quad (\text{I.13})$$

quand $N' \gg 1$, c'est-à-dire que $\langle N_0 \rangle$ ne croît pas avec la longueur N' . Ceci est compatible avec l'interprétation du polymère non-adsorbé : l'extrémité libre du polymère flotte dans le volume loin de la surface. Seuls quelques monomères voisins de l'extrémité attachée à la surface sont en contact avec celle-ci.

- $e^{\epsilon/T} = 2$. Dans ce cas le poids donné à la marche à chaque fois qu'elle rencontre l'origine ($X_n = 0$) compense exactement le manque d'entropie dû à la restriction $X_n \geq 0$. En d'autres termes, le facteur 2 dans la fonction de partition peut être interprété comme un choix gauche/droite que l'on fait à chaque fois que la marche touche l'origine (figure I.5.b), et on retrouve ainsi le cas de la marche non restreinte. La fonction de partition est maintenant

$$Z_{N',k} = \left(\frac{N'}{\frac{N'-k}{2}} \right) \quad (\text{I.14})$$

et on trouve évidemment le comportement asymptotique gaussien habituel

$$p_{N'}(k) \propto (N')^{-1/2} \exp\left(-\frac{k^2}{2N'}\right) \quad (\text{I.15})$$

c'est-à-dire $p(r_\perp) \propto N^{-1/2} \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{2Na^2/d}\right)$ dans le modèle initial sur le réseau $a\mathbb{N} \times (a\mathbb{Z})^{d-1}$. Le maximum de cette distribution est toujours en $r_\perp = 0$, contrairement au cas précédent. Le nombre moyen de monomères adsorbés $\langle N_0 \rangle$ peut aussi être calculé à ce point [6]. On trouve

$$\langle N_0 \rangle \propto \sqrt{N} \quad (\text{I.16})$$

dans la limite $N \gg 1$. Ce comportement correspond à la transition d'adsorption dans ce modèle simplifié. On a une fraction de monomères adsorbés qui varie algébriquement avec la taille du polymère, et l'extrémité libre du polymère explore le volume tout en restant fortement influencée par la surface.

- $e^{\epsilon/T} = \infty$. Dans la fonction de partition, seules les configurations avec un nombre maximal de monomères adsorbés à la surface ont une contribution non nulle. Cela signifie que la marche est triviale : on a $X_n = 0$ si n est pair, et $X_n = 1$ si n est impair. Dans le modèle de départ, la distribution de $r_\perp$ est concentrée à la surface

$$p(r_\perp) = \delta(r_\perp) \quad (\text{I.17})$$

et le nombre moyen de monomères adsorbés croît linéairement avec la taille du polymère

$$\langle N_0 \rangle \propto N. \quad (\text{I.18})$$

Pour d'autres valeurs de $e^{\epsilon/T}$, on peut montrer que l'on retrouve toujours les mêmes comportements asymptotiques quand $N \gg 1$ que ceux décrits ici dans les cas $e^{\epsilon/T} = 1$ ou ∞ . Evidemment, on doit voir cela comme une conséquence du flot du groupe de renormalisation qui n'a que deux points fixes stables, l'un correspondant au polymère complètement adsorbé à la surface, l'autre au polymère non-adsorbé qui flotte librement dans le volume. A la transition d'adsorption, c'est-à-dire au point $e^{\epsilon/T} = 2$ dans ce modèle de marche aléatoire simple, on a un comportement critique non-trivial. Nous reviendrons sur cette transition dans le chapitre V.

1.3 Problèmes d'impuretés quantiques : l'effet Kondo

Les problèmes d'impuretés quantiques concernent le comportement des électrons dans un solide en présence d'impuretés isolées, qui peuvent être distribuées de manière aléatoire dans les système. On va se contenter ici d'une impureté unique. A priori, la physique abordée dans ces problèmes n'a rien à voir avec les phénomènes de surface décrits dans les deux sections ci-dessus. Mais, sous certaines conditions, il est possible de reformuler ces questions dans le langage des comportements critiques en présence d'un bord. L'analogie avec les systèmes magnétiques et les polymères est alors frappante. L'effet Kondo est un exemple important. Les théories conformes ont un intérêt particulier dans ce problème, et de nombreux résultats exacts ont été obtenus dans ce contexte [7].

Le modèle de Kondo est destiné à l'étude des effets d'une impureté magnétique sur la conductivité à basse température d'un matériau conducteur. D'habitude, la contribution dominante à la résistivité électrique dans les métaux vient de la diffusion des électrons sur les noyaux atomiques en vibration, c'est-à-dire sur les phonons. Cette diffusion augmente rapidement avec la température puisque de plus en plus de phonons sont excités. Dans la plupart des métaux la résistivité électrique augmente ainsi de manière monotone. Il y a également une résistivité résiduelle indépendante de la température due à la diffusion des électrons sur les impuretés et les défauts dans le matériau, qui persiste même à très basse température, quand les phonons ne sont presque plus excités. Cependant, dans certains métaux non magnétiques tels que l'or ou le cuivre, la résistivité augmente à basse température, ce qui indique qu'un autre type de diffusion doit apparaître dans ces matériaux, et que cette diffusion est plus forte quand on diminue la température. Dans les années 1960 cette diffusion anormale a été identifiée comme la diffusion sur des impuretés magnétiques localisées dans le matériau. En particulier, en 1964, Kondo a montré comment l'interaction entre le spin d'une impureté et le spin d'un électron de conduction pouvait générer une contribution à la résistivité en $R \propto -J \log T$, où J est le couplage antiferromagnétique (quand $J > 0$) entre l'impureté et les électrons, expliquant ainsi l'effet observé. Néanmoins, la résolution de ce problème s'accompagne d'une nouvelle question : que se passe-t-il quand $T \rightarrow 0$? Le terme de Kondo $-J \log T$ diverge dans ce cas. Expérimentalement, à très basse température la résistivité tend vers une résistivité résiduelle comme dans le cas habituel. La théorie de Kondo n'est donc valable qu'au-dessus d'une température caractéristique T_K . Cette divergence de la théorie de Kondo à basse température (basse énergie) a motivé de nombreux travaux. Des contributions importantes ont été apportées notamment par Anderson, par Wilson et par Nozières, qui ont abouti à un scénario physique relativement simple. Dans un langage moderne, on dit que le couplage $J > 0$ (antiferromagnétique) augmente quand on

abaisse l'échelle d'énergie. A très basse température, des électrons de conduction se couplent à l'impureté et viennent ainsi l'écranter. Plus précisément, un des électrons de conduction forme un singulet avec l'impureté (si celle-ci a un spin 1/2). Le spin des autres électrons n'interagit plus avec celui de l'impureté.

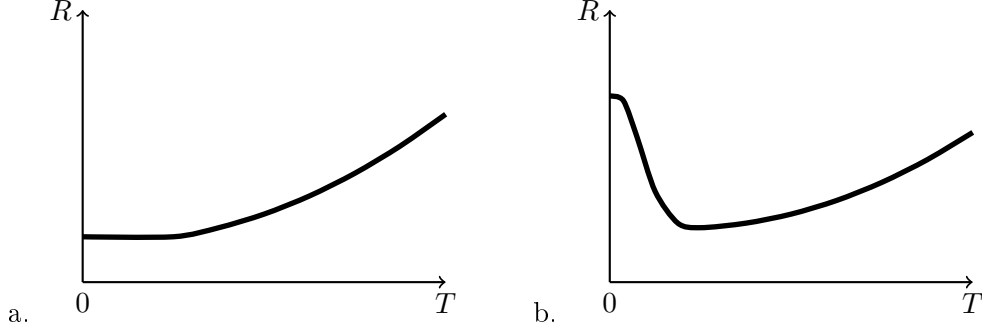


FIG. I.6 – Profil de résistivité typique dans un métal sans impuretés magnétiques (a) et avec des impuretés magnétiques qui ont une interaction antiferromagnétique avec les électrons de conduction (b). L'augmentation de la résistivité dans le cas (b) à basse température correspond à l'effet Kondo.

Réduction à un problème 1 + 1D avec bord. On peut s'intéresser à un modèle simple avec une seule impureté [7]

$$H = \int d^3\vec{r} \left[\psi^{\dagger\alpha}(\vec{r}) \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 - \epsilon_F \right) \psi_{\alpha}(\vec{r}) + J \delta^3(\vec{r}) \psi^{\dagger\alpha} \frac{\vec{\sigma}_{\alpha}^{\beta}}{2} \psi_{\beta} \cdot \vec{S} \right] \quad (\text{I.19})$$

où l'on utilise la relation de dispersion $\epsilon(\vec{k}) = \frac{k^2}{2m} - \epsilon_F$. $\vec{S}$ est l'opérateur de spin de l'impureté située en 0. Les électrons de conduction sont annihilés par les opérateurs $\psi_{\alpha}(\vec{r})$. Ce modèle a une divergence ultraviolette qui doit être régularisée, par exemple en imposant $|\vec{k} - k_F| < \Lambda$. La simplicité de ce modèle vient de la symétrie sphérique : on peut développer les opérateurs électroniques en harmoniques sphériques, pour trouver finalement que seule l'harmonique s interagit avec l'impureté. En écrivant

$$\psi_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \psi_0(k) + \text{autres harmoniques} \quad (\text{I.20})$$

on arrive à l'expression suivante pour le Hamiltonien (I.19)

$$H = \frac{v_F}{2\pi} i \int_0^{\infty} dr \left(\psi_L^{\dagger} \frac{d}{dr} \psi_L - \psi_R^{\dagger} \frac{d}{dr} \psi_R \right) + v_F \lambda \psi_L^{\dagger}(0) \frac{\vec{\sigma}}{2} \psi_L(0) \cdot \vec{S} + \text{autres harmoniques} \quad (\text{I.21})$$

Les “autres harmoniques” n'interagissent pas avec $\vec{S}$ et on peut les négliger. Pour passer de (I.19) à (I.21) on a linéarisé la relation de dispersion $\epsilon(k) \approx v_F(k - k_F)$ et on a introduit le couplage adimensionné $\lambda = J \frac{mk_F}{\pi^2}$ (noter que $\frac{mk_F}{\pi^2}$ est la densité d'états par unité d'énergie et de volume

par spin). On a ainsi réduit le problème initial à 3+1D à un problème 1+1D grâce à la symétrie sphérique. En outre, on voit que l'impureté est située au bord du demi-axe réel positif. On a donc réduit le modèle de Kondo initial à un problème 1+1D avec bord.

On peut calculer la fonction β à l'ordre le plus bas en λ (voir [7])

$$\frac{d\lambda}{d\log D} = -\lambda^2 \quad (\text{I.22})$$

où D est un régulateur infrarouge. En terme du couplage non renormalisé λ_0 à l'échelle D_0 on a donc

$$\lambda(D) \approx \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0 \log(D_0/D)} \quad (\text{I.23})$$

et on voit que si le couplage est antiferromagnétique ($\lambda > 0$), alors λ augmente quand on abaisse l'échelle d'énergie, comme on l'a discuté plus haut.

Comportement infrarouge et modèle d'électrons libres sur réseau. Pour comprendre ce comportement, on peut introduire l'analogue sur réseau du modèle (I.21).

$$H = -t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\psi_i^\dagger \psi_{i+1} + \psi_{i+1}^\dagger \psi_i \right) + J \psi_0^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2} \psi_0 \cdot \vec{S} \quad (\text{I.24})$$

On n'a pas noté les indices de spin pour les fermions Ψ_i . La limite $J/t \rightarrow \infty$ est très simple dans ce modèle. L'électron sur le site 0 et l'impureté subissent une interaction antiferromagnétique infinie, ils forment donc un singulet $|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$. Dans ce cas les autres électrons n'interagissent plus du tout avec l'impureté, tant qu'ils ne se déplacent pas sur le site 0 (figure I.7). Il y a deux

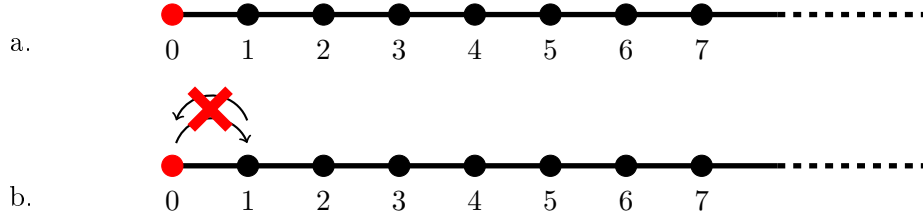


FIG. I.7 – Modèle d'électrons libres sur réseau. (a) Quand le couplage est nul ($J = 0$) les électrons se déplacent librement. (b) Quand le couplage est fort ($J/t \gg 1$) un électron vient sur le site 0 et forme un singulet avec l'impureté. Les autres électrons se déplacent en évitant le site 0, et ils n'interagissent pas avec le spin de l'impureté.

points fixes sous le flot RG pour ce modèle. Le point $J/t = 0$ est répulsif, et le point $J/t = \infty$ est attractif. La différence entre ces deux points est la forme des états propres, qui sont des ondes planes de la forme $\psi_i \propto \sin(\pi k i)$ quand $J/t = 0$ et $\psi_i \propto \sin(\pi k(i+1))$ quand $J/t \rightarrow \infty$. Dans la limite continue, cela se traduit par une différence de phase entre les deux conditions au bord pour les fermions [7].

L'analogie entre ce modèle de fermions libres sur le réseau et le modèle de marche aléatoire en 1D que nous avons étudié dans la section précédente pour introduire la transition d'adsorption pour les polymères est assez frappante. Evidemment il subsiste des différences importantes entre ces modèles, et la trajectoire d'un électron dans l'espace-temps en $1 + 1D$ ne peut pas être directement comparée au polymère idéal. Néanmoins, on pressent que tous ces phénomènes dérivent, au niveau théorique, d'un même concept : le groupe de renormalisation et les flots qui peuvent exister entre les différentes conditions au bord d'un modèle. Dans ce sens, l'effet Kondo, la transition d'adsorption pour les polymères et la transition spéciale dans les matériaux ferromagnétiques sont similaires.

Bibliographie

- [1] K. Binder, *Critical Behaviour at Surfaces*, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. C. Domb & J.L. Lebowitz, Vol. 8, 145-266, Academic Press, London, 1983.
- [2] H.W. Diehl, *Field-Theoretical Approach to Critical Behaviour at Surfaces*, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. C. Domb & J.L. Lebowitz, Vol. 10, 75-267, Academic Press, London, 1986.
- [3] H.W. Diehl, *The Theory of Boundary Critical Phenomena*, Int. J. Mod. Phys. **B 11**, 3503-3523, 1997.
- [4] P.-G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell University Press, Ithaca, 1979.
- [5] J. des Cloiseaux & G. Jannink, *Polymers in Solution : their Modelling and Structure*, Oxford University Press, 1990.
- [6] E. Eisenriegler, *Polymers near Surfaces*, World Scientific, Singapore, 1993.
- [7] I. Affleck, *Quantum Impurity Problems in Condensed Matter Physics*, in *Exact Methods in Low-Dimensional Statistical Physics and Quantum Computing*, Ecole de Physique des Houches, Session LXXXIX, 2008.

CHAPITRE II

Théorie conforme avec bord

Dans cette thèse, nous étudions des systèmes à deux dimensions. L'intérêt théorique de la dimension $d = 2$ (ou $d = 1 + 1$ pour des systèmes quantiques) vient du fait que de nombreux modèles peuvent être résolus exactement, au moins partiellement. En dimension supérieure $d > 2$, on ne peut souvent obtenir des résultats exacts qu'en champ moyen. Pour aborder la dimension physique la plus intéressante, $d = 3$, on doit malheureusement se restreindre le plus souvent à des calculs perturbatifs, par exemple en-dessous de la dimension critique supérieure (développements en $d_c - \epsilon$, voir par exemple [1]).

A deux dimensions, les premiers résultats exacts ont été obtenus pour des modèles discrets définis sur réseau : le modèle d'Ising bidimensionnel a été résolu^a par Onsager en 1944. Depuis, les progrès de l'intégrabilité sur réseau ont été considérables [2]. Mais les modèles discrets ne sont pas les seuls à permettre de déduire des résultats exacts : on peut aussi définir des modèles solubles directement dans la limite continue, c'est-à-dire des théories des champs. Evidemment, la limite continue doit pouvoir être extraite de la solution d'un modèle sur réseau : en ce sens ce dernier est plus complet. Mais la théorie des champs fait apparaître de manière plus simple et plus directe les quantités universelles qui apparaissent dans le modèle, d'une façon qui est "dépolluée" des corrections dues au réseau. Les théories conformes et les théories des champs intégrables [3] sont des modèles qui donnent accès à des quantités universelles et exactes directement dans le continu.

Ce chapitre est une introduction à la théorie conforme avec bord. Nous allons décrire les aspects les plus génériques, sans aborder les spécificités de chaque modèle^b. Les théories plus particulières qui font l'objet de cette thèse seront discutées dans les chapitres suivants.

II.1 Invariance conforme

II.1.1 Phénomènes critiques et invariance conforme

La physique des transitions de phase peut être analysée dans le langage du groupe de renormalisation (RG). Par exemple, le modèle d'Ising en champ extérieur nul (figure II.1) possède

^aOnsager a calculé l'énergie libre du modèle d'Ising bidimensionnel en champ nul, et a montré qu'il y avait bien une transition de phase. Il y a eu évidemment beaucoup d'autres contributions intéressantes sur le modèle d'Ising depuis le calcul d'Onsager, et il reste de nombreuses questions ouvertes.

^bA part le modèle d'Ising, qui nous servira d'exemple.

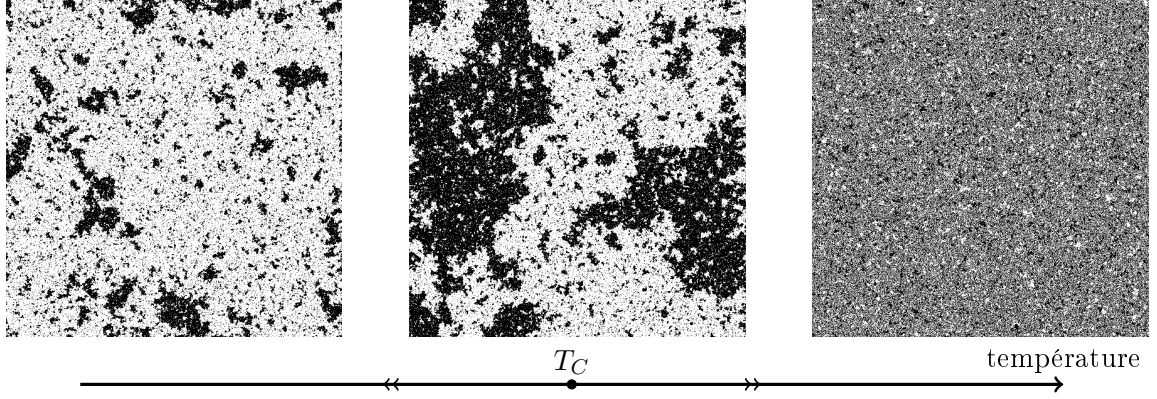


FIG. II.1 – Configurations typiques du modèle d’Ising et flot du groupe de renormalisation.

deux phases, à haute température et à basse température, qui sont attirées respectivement par les points stables $T = \infty$ et $T = 0$ sous le flot du groupe de renormalisation (flot RG). Les deux phases sont séparées par un troisième point fixe sous le flot RG, qui est instable et qui correspond à la température de Curie T_C . Si une théorie des champs décrit ce point fixe, elle est nécessairement invariante sous une transformation d’échelle. Concrètement cela signifie que, si une configuration $\mathcal{C}$ du modèle est envoyée sur la configuration $\mathcal{C}'$ par une dilatation de l’espace (assimilé ici au plan complexe)

$$z \mapsto z' = \lambda z \quad (\text{II.1})$$

alors leurs poids de Boltzmann $e^{S[\mathcal{C}]}$ sont identiques

$$S[\mathcal{C}] = S[\mathcal{C}'] . \quad (\text{II.2})$$

Les opérateurs locaux $\Phi(z, \bar{z})$ présents dans la théorie peuvent être vus comme des moyennes locales renormalisées de quantités physiques. La dimension d’échelle Δ de l’opérateur Φ est telle que, sous la dilatation (II.1), la quantité suivante est invariante

$$\Phi(z', \bar{z}') |dz'|^\Delta = \Phi(z, \bar{z}) |dz|^\Delta \quad (\text{II.3})$$

où $|dz|^2$ représente un “volume” infinitésimal autour du point z . Pour des théories libres, par exemple le boson libre, la dimension d’échelle des champs est obtenue par simple comptage des puissances dans l’action S . Pour des théories plus générales avec des interactions, les dimensions Δ sont des nombres non triviaux. Leur identification est une étape importante dans la compréhension d’un nouveau modèle. Remarquons que (II.3) implique que les dimensions des dérivées successives de Φ sont données par $\Delta + 1$, $\Delta + 2$, etc. Le plus souvent la théorie est aussi invariante par rotation

$$z \mapsto z' = e^{i\theta} z. \quad (\text{II.4})$$

L’opérateur local Φ doit se transformer de manière covariante également sous (II.4)

$$\Phi(z, \bar{z}) \mapsto e^{is\theta} \Phi(z', \bar{z}') \quad (\text{II.5})$$

où s est le spin de l’opérateur ($s = 0$ pour une observable invariante par rotation).

L'invariance sous les dilatations, rotations et translations ne fixent pas plus de contraintes sur la théorie. Pour aller plus loin, Polyakov a proposé une hypothèse plus forte qui est une version locale de l'invariance d'échelle. Cette hypothèse est particulièrement plausible quand les interactions du modèle sont de courte portée. On suppose alors que toutes les transformations conformes laissent la théorie invariante. Une transformation conforme $z \mapsto z' = f(z, \bar{z})$ préserve l'orientation et les angles (localement, voir figure II.2). A deux dimensions les transformations conformes sont des fonctions analytiques $z \mapsto f(z)$. Les fonctions analytiques sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$ ne sont pas en général univaluées, on travaille donc souvent avec des domaines bornés inclus dans $\mathbb{C}$ (voir ci-dessous).

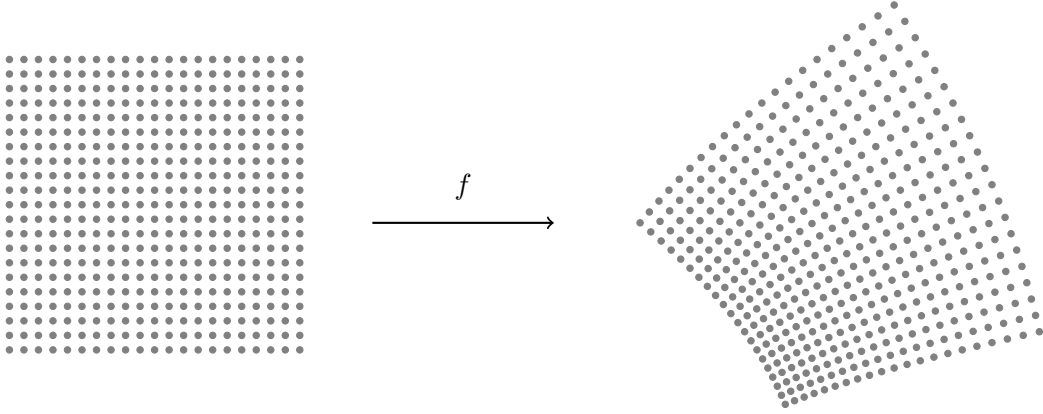


FIG. II.2 – Une transformation conforme préserve localement les angles.

Puisqu'une transformation conforme n'est autre, localement, qu'une rotation composée avec une dilatation, les relations (II.3) et (II.5) peuvent être promues aisément pour donner la relation fondamentale

$$\Phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{dz'}{dz} \right)^h \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} \Phi(z', \bar{z}') \quad (\text{II.6})$$

où les exposants h et $\bar{h}$ sont reliés à la dimension d'échelle et au spin de Φ par

$$\begin{cases} \Delta &= h + \bar{h} \\ s &= h - \bar{h} \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Il y néanmoins une ambiguïté dans le passage de (II.3) et (II.5) à la relation générale (II.6). En effet, si un opérateur Φ satisfait (II.6), ses dérivées successives ne se transforment pas de la même façon. Pour passer des dilatations et rotations globales aux transformation conformes, on doit donc distinguer les opérateurs *primaires*, qui vérifient (II.6), des autres opérateurs présents dans la théorie, qui sont en général des combinaisons de dérivées d'opérateurs primaires. Intuitivement, les opérateurs primaires sont “plus locaux” que les autres.

II.1.2 Premières conséquences de l'invariance conforme. Fonction à un point.

On considère un modèle statistique au point critique dans le demi-plan complexe $\mathbb{H}$ qui correspond à $\Im z > 0$. L'invariance d'échelle et l'invariance par translation suffisent à fixer la forme de la fonction à un point d'un opérateur Φ qui satisfait (II.3)

$$\langle \Phi(z, \bar{z}) \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{C}{(2\Im z)^\Delta} \quad (\text{II.8})$$

La constante C peut éventuellement être nulle, et en général elle dépend de la condition au bord. Le facteur 2 est une simple convention qui assure la cohérence avec la suite du texte. Il pourrait bien sûr être absorbé dans la constante C .

L'invariance conforme est beaucoup plus contraignante. En effet, elle fixe la fonction à un point d'un opérateur primaire (II.6) dans n'importe quel domaine simplement connexe Ω . Le théorème suivant est standard en analyse complexe [4], et il est bon de l'avoir à l'esprit quand on travaille avec une théorie conforme.

Théorème de l'application conforme de Riemann : si Ω est un ouvert simplement connexe du plan complexe $\mathbb{C}$, tel que $\Omega \neq \emptyset$ et $\Omega \neq \mathbb{C}$, alors il existe une transformation $f : \mathbb{H} \rightarrow \Omega$ bijective et conforme.

Il est clair que la transformation f n'est pas unique, puisque si h est une transformation conforme du demi-plan $\mathbb{H}$ sur lui-même, alors $f \circ h$ est aussi une transformation conforme et bijective qui convient. Les transformations conformes $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ sont connues. Ce sont les fonctions de la forme

$$h : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad ad - bc = 1 \quad (\text{II.9})$$

La fonction à un point de Φ dans un domaine Ω peut maintenant être calculée en utilisant (II.6) et (II.8). Pour ne pas obscurcir l'argument, on suppose que le spin de Φ est nul : $h = \bar{h}$. On note $g = f^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ et $z = g(z') \in \mathbb{H}$ pour $z' \in \Omega$.

$$\begin{aligned} \langle \Phi(z', \bar{z}') \rangle_{\Omega} &= \left(\frac{dz'}{dz} \right)^h \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} \langle \Phi(z, \bar{z}) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \frac{C}{\left(2 \left| \frac{dg}{dz'} \right|^{-1} \Im g(z') \right)^\Delta} \\ &= \frac{C}{d_\Omega(z', \bar{z}')^\Delta} \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

La fonction d_Ω représente une distance entre un point et le bord du domaine Ω . Par construction, elle est harmonique. Elle est aussi invariante sous une redéfinition de f en $f \circ h$ avec h de la forme (II.9), ce qui est nécessaire pour que la fonction à un point (II.10) soit bien définie. Par exemple, si le domaine est le disque $D = \{z' : |z'| < R\}$, la distance harmonique au bord vaut

$$d_D(z', \bar{z}') = R \left[1 - \left(\frac{|z'|}{R} \right)^2 \right]. \quad (\text{II.11})$$

II.2 Fonctions de corrélation dans le demi-plan

L'exemple donné dans la section précédente illustre le fait que l'invariance conforme permet, grâce au théorème de Riemann, de ramener le calcul de n'importe quelle fonction de corrélation dans un domaine simplement connexe Ω à son homologue dans le demi-plan complexe $\mathbb{H}$. Nous nous intéressons donc maintenant spécifiquement à la géométrie du demi-plan, en suivant les idées introduites par Cardy en 1984 [5].

II.2.1 Tenseur énergie-impulsion, invariance conforme au bord.

Pour étudier plus en détail les contraintes fixées par l'invariance conforme de la théorie, on doit introduire le tenseur-énergie impulsion $T_{\mu\nu}$, qui mesure la variation de l'action S de la théorie sous une transformation infinitésimale $x^\mu \mapsto x^\mu + \alpha^\mu(x)$

$$\delta S = \frac{1}{2\pi} \int T_{\mu\nu} \partial^\mu \alpha^\nu d^2x \quad (\text{II.12})$$

Il est plus pratique de manipuler des coordonnées complexes : on introduit

$$\begin{aligned} T &= T_{zz} = \frac{1}{4} (T_{11} - T_{22} + 2iT_{12}) \\ \bar{T} &= T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4} (T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}) \\ T_{z\bar{z}} &= \frac{1}{4} (T_{11} + T_{22}) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

L'invariance de l'action S sous les translations et rotations se traduit par $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ et $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, et l'invariance sous les dilatations par $\delta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0$. En coordonnées complexes, cela s'écrit

$$\partial_{\bar{z}} T = 0 \quad \partial_z \bar{T} = 0 \quad T_{z\bar{z}} = 0 \quad (\text{II.14})$$

Le tenseur énergie-impulsion a donc deux coordonnées indépendantes, l'une holomorphe et l'autre anti-holomorphe, $T(z)$ et $\bar{T}(\bar{z})$. Pour l'instant nous ne nous sommes pas intéressés au bord. Si la théorie est définie dans le demi-plan $\mathbb{H}$, l'axe réel brise l'invariance par translation selon $x^2 = \Im z$. Par contre, le système est toujours invariant par translation selon $x^1 = \Re z$, donc le courant $j^\mu = T_1^\mu = T_{||}^\mu$ est conservé, même au bord. Le flux de ce courant à travers le bord doit être nul : $j^\perp = 0$, c'est-à-dire $T_{\perp||} = T_{12} = 0$. Ceci s'écrit en coordonnées complexes

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z}) \quad \text{sur le bord.} \quad (\text{II.15})$$

Cette relation est souvent appelée *condition d'invariance conforme au bord*. Physiquement, elle exprime le fait qu'il n'y a pas de flux d'énergie ou d'impulsion à travers le bord, assurant ainsi le découplage du système avec l'extérieur.

Par définition, puisque la théorie que l'on étudie est conforme, la variation de l'action (II.12) est nulle si $x^\mu \mapsto x^\mu + \alpha^\mu$ est une transformation conforme infinitésimale. Néanmoins, en dehors des translations et rotations, une telle transformation n'existe pas. Pour avoir une transformation conforme infinitésimale, on doit se restreindre à un domaine fini délimité par un contour C dans le demi-plan (figure II.3). En-dehors de ce contour, on prend $\alpha^\mu = 0$. Bien sûr, la fonction

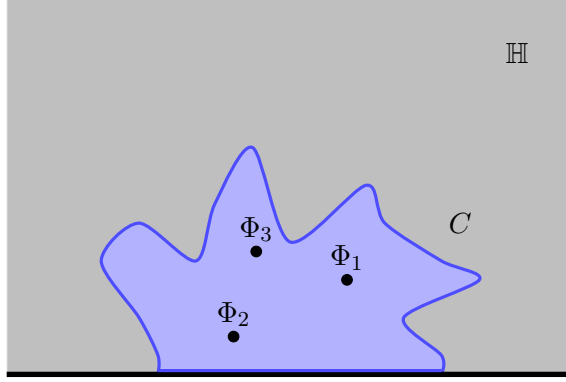


FIG. II.3 – On s'intéresse à la variation de la fonction de corrélation $\langle \Phi_1 \dots \Phi_N \rangle_{\mathbb{H}}$ sous une transformation conforme infinitésimale à l'intérieur du contour C .

$\alpha^\mu(x)$ doit avoir une discontinuité le long de C . C'est cette discontinuité qui produit une variation non nulle de l'action (II.12). Après une intégration par partie et quelques manipulations^c des coordonnées z et $\bar{z}$

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \alpha(z) T(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \bar{\alpha}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z}) d\bar{z} \quad (\text{II.16})$$

où $\alpha(z) = \alpha^1 + i\alpha^2$ et $\bar{\alpha}(\bar{z}) = \alpha^1 - i\alpha^2$. On a utilisé le fait que $x^\mu \mapsto x^\mu + \alpha^\mu(x)$ est une transformation conforme : $\partial_{\bar{z}}\alpha = \partial_z\bar{\alpha} = 0$.

II.2.2 Identité de Ward. Algèbre de Virasoro.

On veut maintenant calculer la variation de la fonction de corrélation de N opérateurs primaires Φ_i dans le demi-plan $\mathbb{H}$ sous une transformation conforme infinitésimale. Comme dans la relation (II.16), on utilise en fait une transformation qui est conforme à l'intérieur du contour C et qui est l'identité à l'extérieur. On impose aussi que cette transformation envoie l'axe réel sur lui-même, et que tous les opérateurs Φ_i soient situés à l'intérieur du contour (figure II.3). La variation de la fonction de corrélation $\langle \Phi_1 \dots \Phi_N \rangle_{\mathbb{H}}$ au premier ordre en α provient de la variation du poids de Boltzmann d'une configuration $e^{-S[\mathcal{C}] - \delta S} \simeq (1 - \delta S)e^{-S[\mathcal{C}]}$. Ce terme provient donc directement de la relation (II.16), et vaut

$$\delta_\alpha \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \alpha(z) \langle T(z) \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle_{\mathbb{H}} + \text{c.c.} \quad (\text{II.17})$$

La variation due au poids de Boltzmann va être compensée exactement par la variation explicite des opérateurs primaires (II.6). La compensation de ces deux contributions constitue l'*identité*

^cVoir par exemple [3, 6] pour plus de détails.

de Ward conforme

$$\begin{aligned} & \langle [T(z) + \bar{T}(\bar{z})] \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \sum_i \left(\frac{h_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \partial_{z_i} + \frac{\bar{h}_i}{(\bar{z} - \bar{z}_i)^2} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_i} \partial_{\bar{z}_i} \right) \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle_{\mathbb{H}} \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

L'identité de Ward (II.18) n'est valable que pour les opérateurs primaires. Les autres opérateurs de la théorie peuvent être obtenus en agissant sur les primaires avec les générateurs

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C w^{n+1} T(w) dw - \frac{1}{2\pi i} \int_C \bar{w}^{n+1} \bar{T}(\bar{w}) d\bar{w} \quad (\text{II.19})$$

c'est-à-dire que si $\Phi(z, \bar{z})$ est un opérateur primaire

$$L_n \Phi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z} w^{n+1} T(w) \Phi(z, \bar{z}) dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z} \bar{w}^{n+1} \bar{T}(\bar{w}) \Phi(z, \bar{z}) d\bar{w} \quad (\text{II.20})$$

est un autre opérateur local, mais qui, en général, n'est pas primaire. C_z désigne un contour qui contient z .

Par exemple, l'opérateur $L_{-1} \Phi(z, \bar{z})$ est simplement $\partial_z \Phi + \partial_{\bar{z}} \Phi = \partial_1 \Phi = \partial_{||} \Phi$, ce qui signifie que L_{-1} génère les translations le long du bord. De même, on peut voir que L_0 génère les dilatations. L'action de L_n sur un opérateur primaire est toujours nulle si $n > 0$.

On peut calculer facilement les fonctions de corrélation des opérateurs $L_n \Phi$ ($n \leq 0$) en terme des dérivées de $\langle \Phi_1 \dots \Phi_N \rangle_{\mathbb{H}}$. Par exemple,

$$\begin{aligned} & \langle (L_n \Phi)(z, \bar{z}) \Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \dots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \sum_{i \geq 2} (h_i(n+1)(z_i - z)^n + (z_i - z)^{n-1} \partial_{z_i} + \text{c.c.}) \langle \Phi(z, \bar{z}) \Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \dots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle_{\mathbb{H}} \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Enfin, signalons que les générateurs (II.20) commutent selon l'algèbre de Virasoro [3, 6]

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2 - 1) \delta_{n+m, 0} \quad (\text{II.22})$$

où c est la *charge centrale*, qui est un nombre caractérisant la théorie. Nous reviendrons plus tard sur ce point.

II.2.3 L'astuce des images miroir

On peut simplifier les expressions précédentes en introduisant l'image de $\bar{T}(\bar{z})$ par une réflexion par rapport à l'axe réel. Puisque la réflexion change l'orientation, cette image est une fonction holomorphe de la coordonnée $\bar{z}^*$. D'après (II.15), $\bar{T}$ coïncide avec T sur l'axe réel. On

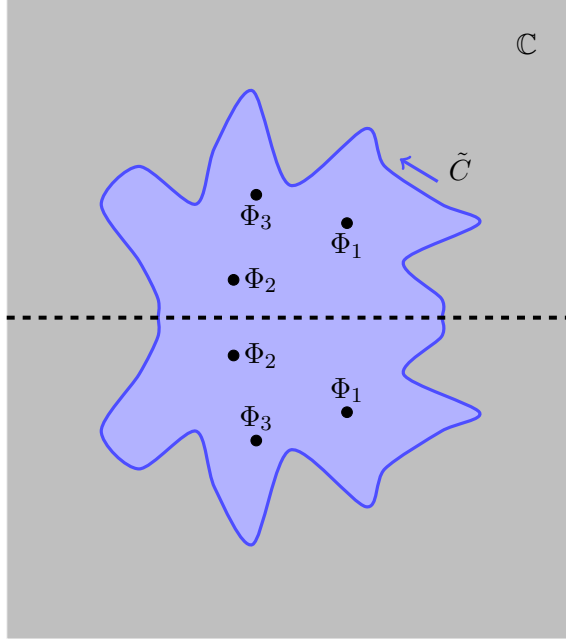


FIG. II.4 – Techniquement, le calcul d’une fonction de corrélation à N points dans le demi-plan est équivalent à celui d’une fonction à $2N$ points pour une théorie chirale dans le plan complexe. Physiquement, les opérateurs interagissent avec leurs images miroir.

peut donc interpréter la réflexion de $\bar{T}$ comme le prolongement analytique de $T(z)$ au plan complexe tout entier (figure II.4)

$$\bar{T}(\bar{z}) = T(\bar{z}^*) = T(z) \quad \Im z < 0 \quad (\text{II.23})$$

Avec cette nouvelle définition la relation (II.16) devient

$$\delta S = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} \alpha(z) T(z) dz \quad (\text{II.24})$$

où $\tilde{C}$ correspond au contour C et à son image (figure II.4).

Cette astuce peut être utilisée au niveau des fonctions de corrélation elles-mêmes, en introduisant les images des opérateurs $\Phi_i(z_i, \bar{z}_i)$. La relation (II.17) devient

$$\delta_\alpha \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} \alpha(z) \langle T(z) \Phi_1(z_1) \dots \Phi_N(z_N) \Phi_1(z_1^*) \dots \Phi_N(z_N^*) \rangle_{\mathbb{C}} \quad (\text{II.25})$$

et (II.18)

$$\begin{aligned} & \langle T(z) \Phi_1(z_1) \dots \Phi_N(z_N) \Phi_1(z_1^*) \dots \Phi_N(z_N^*) \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_i \left(\frac{h_i}{(z - z_i)^2} + \frac{1}{z - z_i} \partial_{z_i} + \frac{\bar{h}_i}{(z - z_i^*)^2} + \frac{1}{z - z_i^*} \partial_{z_i^*} \right) \langle \Phi_1(z_1) \dots \Phi_N(z_N) \Phi_1(z_1^*) \dots \Phi_N(z_N^*) \rangle_{\mathbb{C}} \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Techniquement, on voit que le calcul d'une fonction à N points dans $\mathbb{H}$ est similaire à celui d'une fonction à $2N$ points pour une théorie chirale dans le plan $\mathbb{C}$.

Les générateurs de l'algèbre de Virasoro (II.20) prennent la forme plus familière

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} w^{n+1} T(w) dw \quad (\text{II.27})$$

qui s'écrit aussi

$$T(z) = \sum_n \frac{L_n}{z^{n+2}}. \quad (\text{II.28})$$

II.2.4 Exemple : le modèle d'Ising dans le demi-plan

Le formalisme développé jusqu'à présent permet déjà de faire des prédictions intéressantes. On peut par exemple analyser le comportement critique de surface du modèle d'Ising dans ce cadre. Nous allons voir qu'un certain nombre de phénomènes génériques discutés dans le chapitre I apparaissent au niveau de la théorie conforme dans le demi-plan. Là encore, on suit la discussion proposée par Cardy [5].

L'identité de Ward (II.18) ou (II.26) seule ne permet pas de calculer des fonctions de corrélation pour n'importe quelle théorie. On a besoin pour cela de contraintes supplémentaires. Dans le cas des théories minimales, la structure algébrique de la théorie est choisie de telle manière que des contraintes supplémentaires apparaissent naturellement. C'est le cas en particulier pour le modèle minimal le plus simple, qui décrit le modèle d'Ising critique. Cette théorie contient un opérateur primaire $\sigma(z, \bar{z})$ qui correspond à la magnétisation locale. Il est primaire, n'a pas de spin ($h = \bar{h}$) et a une dimension d'échelle $1/8$ (donc $h = 1/16$). Cet opérateur correspond à une représentation de l'algèbre de Virasoro $\{|\sigma\rangle, L_{-1}|\sigma\rangle, \dots\}$ dans laquelle la relation

$$\left[L_{-2} - \frac{4}{3} L_{-1}^2 \right] |\sigma\rangle = 0 \quad (\text{II.29})$$

est vérifiée. Cette contrainte algébrique se transpose en une équation différentielle sur les fonctions de corrélation qui font intervenir l'opérateur $\sigma(z, \bar{z})$, de la forme que l'on a vue en (II.21). Par exemple on peut calculer la fonction à deux points dans le demi-plan. En utilisant l'astuce des images miroir (figure II.4)

$$\langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \sigma(z_2, \bar{z}_2) \rangle_{\mathbb{H}} = \langle \sigma(z_1) \sigma(z_2) \sigma(z_1^*) \sigma(z_2^*) \rangle_{\mathbb{C}} \quad (\text{II.30})$$

et la relation (II.29) devient [5]

$$\left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{z - z_i} \partial_{z_i} + \frac{1/16}{(z - z_i)^2} - \frac{4}{3} \partial_z^2 \right) \right] \langle \sigma(z_1) \sigma(z_2) \sigma(z_3) \sigma(z) \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \quad (\text{II.31})$$

Cette équation est résolue dans [5]. Le résultat final pour la fonction à deux points dans $\mathbb{H}$ est de la forme

$$\langle \sigma(z_1) \sigma(z_2) \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{(\Im z_1 \Im z_2)^{1/8}} \left[A \sqrt{\tau^{1/4} + \tau^{-1/4}} + B \sqrt{\tau^{1/4} - \tau^{-1/4}} \right], \quad \tau = \frac{|z_1 - z_2^*|^2}{|z_1 - z_2|^2} \quad (\text{II.32})$$

Les constantes A et B doivent être choisies en fonction de la condition au bord, en analysant le cas où les deux points sont très éloignés l'un de l'autre, tout en restant près du bord : $|z_1 - z_1^*|, |z_2 - z_2^*| \ll |z_1 - z_2|$. Dans cette limite la fonction (II.32) se factorise en deux fonctions à un point de la forme (II.8). Si les spins sont désordonnés à la surface (transition ordinaire, voir chapitre I) alors la magnétisation est nulle au bord : $\langle \sigma \rangle_{\mathbb{H}} = 0$. Si les spins sont fixés au bord (équivalent à la transition extraordinaire), la magnétisation diverge dans la théorie conforme.

II.3 Un bord dans le volume : les états d'Ishibashi

La géométrie du demi-plan étudiée dans la section précédente est utile pour calculer des fonctions de corrélation. En particulier, elle permet d'utiliser l'astuce des images miroir (figure II.4). Maintenant, nous allons plutôt étudier le lien entre un bord et le formalisme algébrique habituel utilisé pour construire une théorie conforme dans le volume : la quantification radiale.

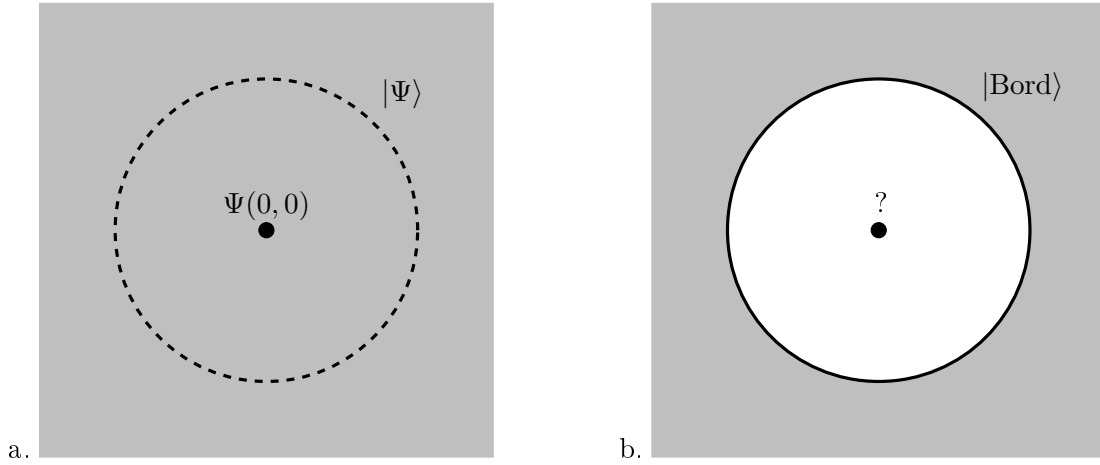


FIG. II.5 – Quantification radiale : (a) l'état $|\Psi\rangle$ décrit l'état du système sur le cercle de rayon 1 si un opérateur $\Psi(w, \bar{w})$ est inséré en 0, et après intégration sur tous les degrés de liberté contenus dans le disque. (b) Quelle doit être la combinaison d'opérateurs insérés en 0 pour que l'état du système soit un bord physique, c'est-à-dire que le flux d'énergie ou d'impulsion est nul à travers le bord ?

Les états qui constituent l'espace de Hilbert de la théorie dans le plan représentent chacun une configuration du système sur un cercle de rayon 1 centré en 0. En intégrant sur tous les degrés de liberté contenus dans le disque de rayon 1, on obtient une combinaison d'états sur le cercle qui sont pondérés par $\int [d\mathcal{C}] e^{-S[\mathcal{C}]}$. Dans cette expression, les $\mathcal{C}$ sont les configurations du système à l'intérieur du disque (figure II.5.a). Cette combinaison linéaire, par définition, est le vide de la théorie dans le plan $|0\rangle$. En insérant des opérateurs (des contraintes ou des poids locaux différents sur les configurations $\mathcal{C}$) à l'intérieur du disque on peut générer des états excités. Par exemple, si Φ est un opérateur primaire on définit

$$|\Phi\rangle = \Phi(0,0) |0\rangle. \quad (\text{II.33})$$

On peut obtenir d'autres états en utilisant les générateurs de l'algèbre de Virasoro (II.28). A ce stade, on doit faire une remarque importante. Dans les sections précédentes on s'est concentré sur une théorie avec bord, alors que l'on veut ici partir d'une théorie définie dans le volume. La contrainte (II.15) n'existe pas dans le volume. Les composantes $T(w)$ et $\bar{T}(\bar{w})$ sont maintenant indépendantes, et il y a donc deux algèbres de Virasoro, générées par les modes de T et $\bar{T}$ respectivement

$$T(w) = \sum_n \frac{L_n}{w^{n+2}} \quad \bar{T}(\bar{w}) = \sum_n \frac{\bar{L}_n}{\bar{w}^{n+2}} \quad (\text{II.34})$$

Les opérateurs primaires vérifient $L_n |\Phi\rangle = \bar{L}_n |\Phi\rangle = 0$ si $n > 0$. Les états de la théorie sont obtenus en faisant agir tous les générateurs L_{-n} et $\bar{L}_{-n}$, $n > 0$, sur les états $|\Phi\rangle$:

$$\begin{aligned} & |\Phi\rangle \\ & L_{-1} |\Phi\rangle ; \bar{L}_{-1} |\Phi\rangle \\ & L_{-1}^2 |\Phi\rangle, L_{-1} \bar{L}_{-1} |\Phi\rangle, \bar{L}_{-1}^2 |\Phi\rangle, L_{-2} |\Phi\rangle, \bar{L}_{-2} |\Phi\rangle \\ & \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Les états introduits ici sont tous des états propres de l'opérateur de dilatation $L_0 + \bar{L}_0$. On les a organisés selon la valeur propre associée.

Ce formalisme est très courant et est décrit dans de très nombreux ouvrages et revues [3, 6, 7]. Nous n'allons pas nous y attarder, et nous allons vite passer à la question qui nous intéresse ici : comment réaliser un bord au niveau de la théorie dans le volume, en utilisant les états présents dans la théorie ? Si le modèle n'était pas défini dans tout le plan, mais dans un plan avec trou correspondant au disque de rayon 1, alors l'état au bord ne serait pas obtenu par une somme pondérée par le poids des configurations $\mathcal{C}$ à l'intérieur du disque (figure II.5.b). Il s'agirait simplement d'un état donné sur le bord, par exemple un état libre où toutes les configurations du système sur le cercle sont admises et ont le même poids de Boltzmann. Comment créer un tel état au niveau de la théorie conforme dans le plan ? Quelle combinaison d'états de la forme (II.35) doit-on choisir ?

Pour commencer, on dispose de la condition d'invariance conforme au bord (II.15) qui est valable dans le demi-plan. Celui-ci peut être envoyé sur la géométrie de la figure II.5.b par la transformation

$$z \mapsto w = \frac{z+i}{z-i} \quad (\text{II.36})$$

où $z \in \mathbb{H}$ et $w \in \mathbb{C}$, $|w| > 1$. Les composantes du tenseur énergie-impulsion dans les deux géométries sont alors reliées par

$$w^2 T(w) = T(z) \quad \bar{w}^2 \bar{T}(\bar{w}) = \bar{T}(\bar{z}) \quad (\text{II.37})$$

La relation (II.15) se traduit donc ici par

$$w^2 T(w) = \bar{w}^2 \bar{T}(\bar{w}) \quad \text{si } |w| = 1. \quad (\text{II.38})$$

Cette contrainte peut être écrite en fonction des générateurs (II.34). Si $B(w, \bar{w})$ représente l'opérateur qu'il faut placer en 0 pour générer l'état de bord $|\text{Bord}\rangle$ (figure II.5.b) :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} w^{n-1} (w^2 T(w) - \bar{w}^2 \bar{T}(\bar{w})) B(0, 0) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} w^{n+1} T(w) B(0, 0) dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\bar{w}|=1} \bar{w}^{-n+1} \bar{T}(\bar{w}) B(0, 0) d\bar{w} \\ &= L_n B(0, 0) - \bar{L}_{-n} B(0, 0) \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

où l'on a utilisé $w = 1/\bar{w}$ quand $|w| = 1$. On voit que la condition d'invariance conforme au bord (II.38) se traduit par une relation qui lie les modes chiraux L_n aux modes anti-chiraux $\bar{L}_{-n}$

$$(L_n - \bar{L}_{-n}) |\text{Bord}\rangle = 0. \quad (\text{II.40})$$

Les états $|\text{Bord}\rangle$ qui satisfont cette contrainte sont très peu nombreux. Si on exige que ces états soient linéairement indépendants, alors il y en a exactement un par opérateur primaire Φ , que nous allons noter $|\Phi\rangle\rangle$ pour ne pas le confondre avec l'état (II.33). Ces états sont souvent appelés *états d'Ishibashi*.

L'état d'Ishibashi $|\Phi\rangle\rangle$ est construit de la façon suivante. Notons

$$\mathcal{V}_\Phi = \{|\Phi\rangle, L_{-1}|\Phi\rangle, L_{-1}^2|\Phi\rangle, L_{-2}|\Phi\rangle, \dots\} \quad (\text{II.41})$$

la représentation de l'algèbre de Virasoro^d (chirale) obtenue en agissant avec les générateurs L_{-n} , $n > 0$, sur $|\Phi\rangle$. De même, on introduit la représentation de l'algèbre anti-chirale $\overline{\mathcal{V}}_\Phi$. L'espace de Hilbert^e de la théorie décrit en (II.35) n'est autre que $\bigoplus_\Phi \mathcal{V}_\Phi \otimes \overline{\mathcal{V}}_\Phi$. On peut choisir

une base orthonormée $\{|\Phi, k\rangle\}_{k \geq 0}$ de la représentation $\mathcal{V}_\Phi$. Nous allons supposer pour simplifier^f que les éléments de matrice $\langle \Phi, i | L_n | \Phi, j \rangle$ sont réels. On introduit la même base pour la partie anti-chirale $\{|\Phi, k\rangle\}_{k \geq 0}$, c'est-à-dire que l'on suppose $\langle \Phi, i | L_n | \Phi, j \rangle = \overline{\langle \Phi, i | \bar{L}_n | \Phi, j \rangle}$.

L'état d'Ishibashi est alors donné par

$$|\Phi\rangle\rangle = \sum_k |\Phi, k\rangle \otimes \overline{|\Phi, k\rangle}. \quad (\text{II.42})$$

Pour voir que l'état $|\Phi\rangle\rangle$ satisfait bien (II.40), on vérifie que le produit scalaire de $(L_n - \bar{L}_{-n}) |\Phi\rangle\rangle$

^dOn suppose que la représentation (II.41) ne contient pas de vecteurs nuls, par exemple $L_{-1} |0\rangle = 0$.

^eA ce stade, le produit scalaire n'a pas encore été défini, mais il s'agit évidemment du produit scalaire habituel associé à l'algèbre de Virasoro : $L_n^\dagger = L_{-n}$ et $\langle \Phi | \Phi \rangle = 1$.

^fLa construction des états d'Ishibashi n'est pas beaucoup plus compliquée sans cette hypothèse, mais les détails techniques dus à la conjugaison complexe encombreraient la discussion. Pour un traitement plus rigoureux, on pourra se reporter à [8, 9].

avec n'importe quel état dans $\mathcal{V}_\Phi \otimes \overline{\mathcal{V}_\Phi}$ est nul. On utilise $\bar{L}_n^\dagger = \bar{L}_{-n}$:

$$\begin{aligned}
\left(\langle \Phi, i | \otimes \overline{\langle \Phi, j |} \right) L_n | \Phi \rangle &= \sum_k \langle \Phi, i | L_n | \Phi, k \rangle \overline{\langle \Phi, j | \Phi, k \rangle} \\
&= \langle \Phi, i | L_n | \Phi, j \rangle \\
&= \overline{\langle \Phi, i | \bar{L}_n | \Phi, j \rangle} \\
&= \overline{\langle \Phi, j | \bar{L}_{-n} | \Phi, i \rangle} \\
&= \sum_k \langle \Phi, i | \Phi, k \rangle \overline{\langle \Phi, j | \bar{L}_{-n} | \Phi, k \rangle} \\
&= \left(\langle \Phi, i | \otimes \overline{\langle \Phi, j |} \right) \bar{L}_{-n} | \Phi \rangle
\end{aligned}$$

Il y a une façon simple d'interpréter la forme de l'état d'Ishibashi (II.42). Pour cela, il suffit de remarquer que l'astuce de l'image miroir (section II.2.3) peut être étendue à la géométrie de la figure II.5.b si l'on utilise une inversion composée avec une réflexion $w \mapsto 1/w^*$. Sous l'inversion seule, la composante anti-holomorphe $\bar{T}(\bar{w})$ pour $|w| > 1$ devient $1/\bar{w}^4 \bar{T}(1/\bar{w})$. En ajoutant la conjugaison complexe, on voit que l'on peut prolonger $T(w)$ à tout le plan en définissant

$$T(w) = \begin{cases} T(w) & \text{si } |w| \geq 1 \\ 1/w^4 \bar{T}(1/w^*) & \text{si } |w| < 1 \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

$T(z)$ est analytique dans $\mathbb{C}$ grâce à la condition d'invariance conforme au bord (II.38).

Les états de cette théorie chirale s'organisent en représentations $\mathcal{V}_\Phi$. Pour simplifier, supposons qu'il n'y a qu'un opérateur primaire Φ . Pour cette théorie définie dans le plan, rien de particulier ne se passe sur le cercle $|w| = 1$, ce qui correspond simplement à l'action de l'identité $\mathcal{I}$ sur les états de la représentation $\mathcal{V}_\Phi$, ce qui peut être noté

$$\mathcal{I} = \sum_k |\Phi, k\rangle \langle \Phi, k|. \quad (\text{II.44})$$

Sous la transformation $z \mapsto 1/z^*$, un état de la représentation conjuguée à $\mathcal{V}_\Phi$ se transforme comme

$$\langle \Phi | L_{n_1} \dots L_{n_i} \mapsto \bar{L}_{-n_i} \dots \bar{L}_{-n_1} | \Phi \rangle. \quad (\text{II.45})$$

On voit donc que l'identité $\mathcal{I}$, vue comme une interface entre les régions $|w| < 1$ et $|w| > 1$ du plan $\mathbb{C}$, est envoyée sur l'état d'Ishibashi quand on "replie" la région $|w| < 1$ en appliquant $w \mapsto 1/w^*$

$$\mathcal{I} = \sum_k |\Phi, k\rangle \langle \Phi, k| \mapsto \sum_k |\Phi, k\rangle \otimes \overline{|\Phi, k\rangle} = |\Phi\rangle. \quad (\text{II.46})$$

Remarque : produit scalaire de deux états d'Ishibashi. Les états d'Ishibashi ne sont pas normalisables : $\langle \langle \Phi | \Phi \rangle \rangle = \infty$. Mais ce produit scalaire n'a pas vraiment de sens physique. L'objet naturel que l'on peut considérer est le produit scalaire entre deux états de bord sur des

cercles de rayons différents $r_1 > r_2$

$$\begin{aligned}
& \langle \langle \Phi_1 | \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{L_0 + \bar{L}_0} | \Phi_2 \rangle \rangle \\
&= \sum_{k_1, k_2} \langle \Phi, k_1 | \otimes \overline{\langle \Phi, k_1 |} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{L_0 + \bar{L}_0} | \Phi_2, k_2 \rangle \otimes \overline{| \Phi_2, k_2 \rangle} \\
&= \delta_{\Phi_1, \Phi_2} \sum_k \langle \Phi_1, k | \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{2k} | \Phi_1, k \rangle
\end{aligned} \tag{II.47}$$

où $L_0 + \bar{L}_0$ est l'opérateur de dilatation dans le plan. On voit que le résultat prend la forme d'une trace sur la représentation $\mathcal{V}_{\Phi_1}$:

$$\langle \langle \Phi_1 | \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{L_0 + \bar{L}_0} | \Phi_2 \rangle \rangle = \delta_{\Phi_1, \Phi_2} \text{tr}_{\mathcal{V}_{\Phi_1}} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{L_0 + \bar{L}_0} \right] \tag{II.48}$$

Le fait que la trace ne soit prise que sur la partie chirale de l'espace et non sur l'espace tout entier $\mathcal{V}_{\Phi} \otimes \overline{\mathcal{V}_{\Phi}}$ reflète une fois encore le fait que les composantes $T(w)$ et $\bar{T}(\bar{w})$ ne sont pas indépendantes mais peuvent être considérées comme le prolongement analytique l'une de l'autre.

II.4 Localité d'un changement de condition au bord : opérateurs B.C.C.

Une théorie conforme, par définition, est un point fixe du groupe de renormalisation. De la même façon, une condition au bord invariante conforme, c'est-à-dire qui satisfait la contrainte $T_{\perp\parallel} = 0$ (voir (II.15)), correspond à un point fixe sous le flot RG. Nous avons vu au chapitre I quelques exemples de points fixes. On peut penser, par exemple, à un modèle d'Ising avec les spins fixés sur le bord.

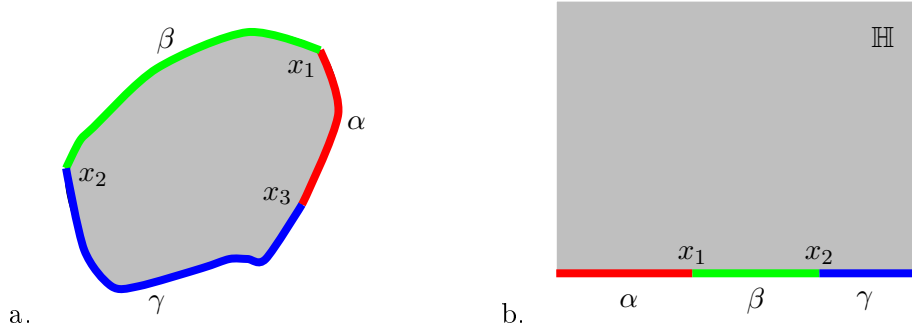


FIG. II.6 – Un domaine avec trois conditions au bord α , β et γ , qui peut être envoyé sur le demi-plan $\mathbb{H}$. Le point x_3 est envoyé à l'infini.

Jusqu'à présent nous avons toujours considéré que le bord du domaine sur lequel est définie la théorie était "homogène". Sur le demi-plan, le bord préserve l'invariance par translation, ce

qui implique que la condition au bord est la même partout. Néanmoins, on peut considérer des domaines où la condition au bord change en certains points (figure II.6.a), par exemple de $+$ à $-$ pour le modèle d'Ising. Le domaine peut être envoyé sur le demi-plan $\mathcal{H}$, avec des changements de conditions au bord sur l'axe réel qui brisent l'invariance par translation (figure II.6.b).

Comment peut-on prendre en compte ce type de changement de condition au bord en théorie conforme ? Pour répondre à cette question, considérons le domaine de la figure II.6.a. La fonction de partition de la théorie sur ce domaine est une fonction des positions des points x_1, x_2, x_3 où la condition au bord change : $Z_{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, x_3)$. Si on a les mêmes conditions au bord $\alpha = \beta = \gamma$, alors rien de particulier ne se passe aux points x_1, x_2 ou x_3 , la fonction de partition Z_α dans ce cas dépend juste de la géométrie du domaine. On peut définir le rapport

$$G(x_1, x_2, x_3) = \frac{Z_{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, x_3)}{Z_\alpha} \quad (\text{II.49})$$

qui permet de compenser les contributions qui ne sont pas dues aux changements de condition au bord. La fonction $G(x_1, x_2, x_3)$ ne contient donc que des effets locaux au voisinage des changements de condition au bord, et des corrélations entre ceux-ci. Il est donc naturel d'interpréter la fonction $G(x_1, x_2, x_3)$ comme une fonction de corrélation. Il est naturel pour cela d'introduire des *opérateurs de changement de condition au bord* (opérateurs B.C.C., pour "boundary condition changing") $\Phi_{\alpha\beta}(x_1)$, $\Phi_{\beta\gamma}(x_2)$, $\Phi_{\gamma\alpha}(x_3)$ qui, par définition, vont vérifier

$$\langle \Phi_{\alpha\beta}(x_1) \Phi_{\beta\gamma}(x_2) \Phi_{\gamma\alpha}(x_3) \rangle = G(x_1, x_2, x_3). \quad (\text{II.50})$$

Les relations du type (II.50), obtenues en interprétant les changements de condition au bord comme des opérateurs locaux, sont en fait très puissantes. En effet, on peut en général identifier les opérateurs B.C.C. avec des opérateurs primaires de la théorie, ce qui permet d'appliquer directement tout l'arsenal habituel pour le calcul de ces fonctions de corrélation.

Dans la limite où deux changements de condition au bord, disons de α vers β puis de β vers γ sont très proches, on ne doit voir, à grande distance, qu'un changement de α vers γ . On peut interpréter ce fait très simplement en terme de fusion[§] des opérateurs B.C.C. En fusionnant les opérateurs $\Phi_{\alpha\beta}$ et $\Phi_{\beta\gamma}$ on doit nécessairement obtenir $\Phi_{\alpha\gamma}$ (et éventuellement d'autres opérateurs primaires)

$$\Phi_{\alpha\beta} \times \Phi_{\beta\gamma} = \Phi_{\alpha\gamma} + \dots \quad (\text{II.51})$$

Par exemple, dans la théorie conforme qui correspond au modèle d'Ising critique, il y a trois opérateurs primaires 1 , σ et ϵ qui vérifient les règles de fusion [3, 6]

$$\begin{aligned} \sigma \times \sigma &= 1 + \epsilon \\ \sigma \times \epsilon &= \sigma \\ \epsilon \times \epsilon &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

[§]Voir les ouvrages classiques pour les définitions des développements de produits d'opérateurs (O.P.E) et de la fusion [3, 6].

et la fusion avec l'identité 1 est triviale. On note $\Phi_{+ \text{ libre}}$ l'opérateur B.C.C. correspondant à des spins libres sur le bord à gauche et fixés à $+$ à droite. En admettant que $\Phi_{+ \text{ libre}}$ est un opérateur primaire de la théorie, on peut se demander s'il s'agit de 1, σ ou ϵ . Puisque $\Phi_{+ \text{ libre}}$ et $\Phi_{\text{ libre } -}$ sont reliés par la symétrie $\mathbb{Z}_2$ correspondant au renversement des spins $+\leftrightarrow -$, ils doivent correspondre au même opérateur. La fusion $\Phi_{+, \text{ libre}} \times \Phi_{\text{ libre } -}$ doit contenir l'opérateur Φ_{+-} , qui n'est vraisemblablement ni l'opérateur trivial 1 ni le même opérateur que $\Phi_{+, \text{ libre}}$. Il n'y a alors qu'une seule identification possible d'après (II.52)

$$\begin{aligned}\Phi_{+ \text{ libre}} &= \sigma \\ \Phi_{+-} &= \epsilon\end{aligned}\tag{II.53}$$

Nous allons revenir sur l'exemple des opérateurs B.C.C du modèle d'Ising dans la section suivante.

II.5 Théorie conforme sur le ruban

Dans cette section nous abordons brièvement le lien entre le formalisme Hamiltonien en $1+1\text{D}$ et les quelques idées de théorie conforme avec bord que nous avons présentées jusqu'ici. En particulier, on va voir comment le formalisme des opérateurs B.C.C. du modèle d'Ising (II.53) émerge comme une théorie effective décrivant le spectre de basse énergie de la chaîne d'Ising en $1+1\text{D}$.

II.5.1 Systèmes critiques ouverts en $1+1\text{D}$

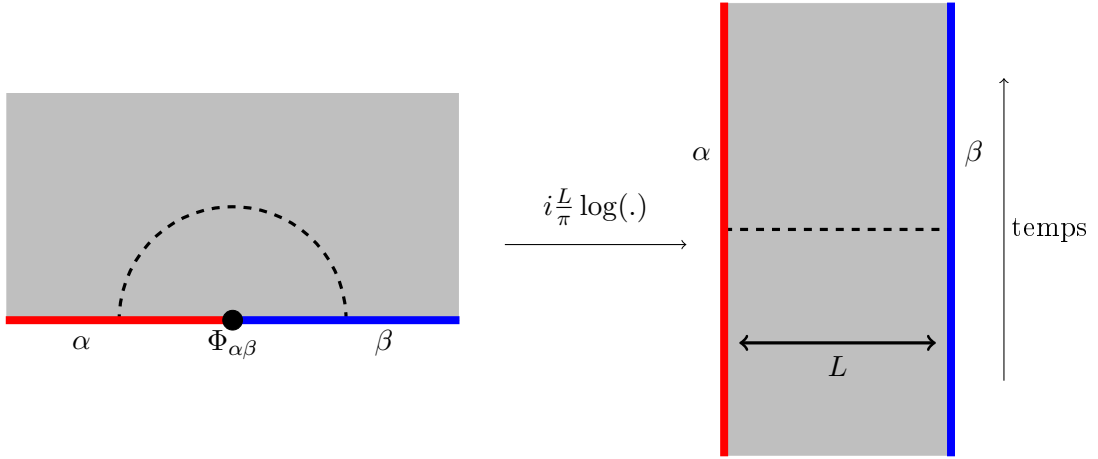


FIG. II.7 – Un système $1+1\text{D}$ avec la condition au bord α à gauche et β est équivalent à la théorie dans le plan avec un opérateur B.C.C en 0 et le même opérateur à l'infini.

Le demi-plan $\mathbb{H}$ peut être envoyé sur la bande infinie de largeur L (ou *ruban*) par la transformation conforme

$$w = \frac{iL}{\pi} \log z\tag{II.54}$$

où $z \in \mathbb{H}$ et w est un point du ruban. Les composantes holomorphes du tenseur énergie-impulsion sur le demi-plan et le ruban sont reliées par

$$T(w) = \left(\frac{dz}{dw} \right)^2 T(z) + \frac{c}{12} \{z, w\} \quad (\text{II.55})$$

où $\{z, w\}$ désigne la dérivée schwarzienne [3, 6]. Dans le cas de la transformation (II.54) on a

$$T(w) = - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[z^2 T(z) - \frac{c}{24} \right] \quad (\text{II.56})$$

et la relation équivalente pour $\bar{T}(\bar{w})$. Le Hamiltonien H_L d'un système 1 + 1D de largeur L est le générateur de la translation le long du ruban (figure II.7). Si les coordonnées sur le ruban sont notées (x, τ) , où τ est le temps imaginaire, alors le Hamiltonien s'écrit

$$H_L = \frac{\pi}{L} \left(L_0 - \frac{c}{24} \right). \quad (\text{II.57})$$

On peut calculer cela de la façon suivante

$$\begin{aligned} H_L &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-L, 0]} T_{\tau\tau} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-L, 0]} \{T(w) + \bar{T}(\bar{w})\} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-L, 0]} T(w) dw - \frac{1}{2\pi} \int_{[-L, 0]} \bar{T}(\bar{w}) d\bar{w} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_C \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[z^2 T(z) - \frac{c}{24} \right] \frac{dw}{dz} dz - \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[\bar{z}^2 \bar{T}(\bar{z}) + \frac{c}{24} \right] \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} d\bar{z} \\ &= \frac{\pi}{L} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \left[z T(z) - \frac{c}{24} \right] dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\bar{z} \bar{T}(\bar{z}) - \frac{c}{24} \right] d\bar{z} \right) \\ &= \frac{\pi}{L} \left(L_0 - \frac{c}{24} \right) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé successivement les relations (II.13), (II.56), (II.54), (II.20), et où le contour C est celui de la figure II.3.

La relation (II.57) montre que le spectre du Hamiltonien H_L est relié à celui de l'opérateur de dilatation L_0 dans le demi-plan. Ce spectre dépend des conditions au bord α et β à gauche et à droite du système. Dans le demi-plan, ces deux conditions au bord sont représentées par un opérateur B.C.C situé en 0 (figure II.7). Cet opérateur $\Phi_{\alpha\beta}$ est primaire et il possède des descendants générés par les L_{-n} , $n > 0$, on a donc une représentation de la forme (II.41) associée à l'opérateur $\Phi_{\alpha\beta}$, que l'on note $\mathcal{V}_{\alpha\beta}$. Si $h_{\alpha\beta}$ est la dimension d'échelle^h de cet opérateur, le spectre de L_0 évalué sur $\mathcal{V}_{\alpha\beta}$ est donné par $h_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta} + 1, h_{\alpha\beta} + 2, \dots$. On voit de cette façon que pour un système critique 1 + 1D, le spectre du Hamiltonien est directement relié à l'opérateur B.C.C. $\Phi_{\alpha\beta}$, et prend la forme

$$E_L = E_{\text{ext.}} L + E_{\text{surf.}} + \frac{\pi}{L} \left(h_{\alpha\beta} + \text{entier} - \frac{c}{24} \right) + O(1/L). \quad (\text{II.58})$$

^hDans le cas d'un opérateur de bord, la dimension conforme h est aussi la dimension d'échelle : puisqu'ici il n'y a qu'une algèbre de Virasoro, la relation (II.7) devient $h = \Delta$.

Les termes $E_{\text{ext.}}$ et $E_{\text{surf.}}$ représentent les contributions extensives du volume et des deux bords. Par définition, ces termes dépendent du cutoff ultraviolet (par exemple le réseau), et ne peuvent pas être universels. Ils ne sont donc pas présents dans la théorie conforme. Le terme intéressant est évidemment le terme suivant, qui est universel.

II.5.2 Exemple : la chaîne d'Ising au point critique

La chaîne d'Ising en champ transverse est une chaîne de spins dont l'espace de Hilbert est $(1/2)^{\otimes L}$, où $(1/2)$ représente l'espace des configurations sur un site $\{+, -\}$. Le Hamiltonien¹ est

$$H_L = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{L-1} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \frac{\mu}{2} \sum_{j=2}^{L-1} \sigma_j^x \quad (\text{II.59})$$

où les σ^x , σ^z sont les matrices de Pauli. On va considérer successivement les deux jeux de conditions au bord

$$\sigma_1^z = + \quad \sigma_L^z = + \quad (\text{II.60a})$$

$$\sigma_1^z = - \quad \sigma_L^z = + \quad (\text{II.60b})$$

Dans la limite thermodynamique, ce système possède un point critique quantique à $\mu = 1$. On peut diagonaliser H_L à l'aide d'une transformation de Jordan-Wigner

$$\sigma_j^x = 2 c_j^\dagger c_j - 1 = -(c_j^\dagger + c_j)(c_j^\dagger - c_j) \quad (\text{II.61})$$

$$\sigma_j^y + i\sigma_j^z = 2 c_j^\dagger \exp\left(i\pi \sum_{i=0}^{j-1} c_i^\dagger c_i\right) \quad (\text{II.62})$$

$$\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z = -(c_j^\dagger + c_j)(c_{j+1}^\dagger - c_{j+1}) \quad (\text{II.63})$$

où les fermions satisfont $\{c_j, c_{j'}^\dagger\} = \delta_{j,j'}$. On introduit les modes de Fourier

$$b_k^\dagger + b_k = \frac{2}{\sqrt{2L-1}} \sum_{j=1}^{L-1} \sin\left(\frac{(j-1/2)k\pi}{L-1/2}\right) (c_j^\dagger + c_j)$$

$$b_k^\dagger - b_k = \frac{-2}{\sqrt{2L-1}} \sum_{j=2}^L \sin\left(\frac{(j-1)k\pi}{L-1/2}\right) (c_j^\dagger - c_j)$$

pour $k \in \{1, \dots, L-1\}$. On a $\{b_k, b_{k'}^\dagger\} = \delta_{k,k'}$. Le Hamiltonien (II.59) avec $\mu = 1$ prend la forme

$$H_L = E_0(L) + \sum_{k=1}^{L-1} \omega_k b_k^\dagger b_k \quad (\text{II.64})$$

$$\text{avec } \omega_k = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2L-1}\right) \quad \text{et} \quad E_0(L) = -\sum_{k=1}^{L-1} \cos\left(\frac{k\pi}{2L-1}\right).$$

¹La normalisation du Hamiltonien est choisie de telle façon que la relation de dispersion au point critique est $E = v_F |k|$, où la vitesse de Fermi vaut $v_F = 1$.

Il est important de remarquer que $\{b_k^\dagger, \sigma_0^z\} = 0$ pour tout k . Cela signifie que les fermions $b^\dagger$ qui génèrent le spectre de H_L changent l'orientation du premier spin à gauche de $+$ à $-$, ou le contraire. Pour que deux états propres du Hamiltonien correspondent à la même condition au bord à gauche, il faut donc que l'on puisse passer d'un état à l'autre en agissant avec un nombre *pair* de fermions. La condition au bord à droite, par contre, ne change pas sous l'action des fermions car $[b_k^\dagger, \sigma_L^z] = 0$. On voit donc que les deux conditions au bord (II.60a, II.60b) ont été traitées en même temps. La seule différence vient de la parité du nombre de fermions que l'on va faire agir sur le vide fermionique $|\Omega\rangle$, défini par

$$b_k |\Omega\rangle = 0, \quad k \in \{1, \dots, L-1\}. \quad (\text{II.65})$$

Il y a deux secteurs, dont les états de plus basse énergie sont

$$\text{pair :} \quad |\Omega\rangle, b_{L-2}^\dagger b_{L-1}^\dagger |\Omega\rangle, b_{L-3}^\dagger b_{L-1}^\dagger |\Omega\rangle, b_{L-3}^\dagger b_{L-2}^\dagger |\Omega\rangle, \dots \quad (\text{II.66})$$

$$\text{impair :} \quad b_{L-1}^\dagger |\Omega\rangle, b_{L-2}^\dagger |\Omega\rangle, b_{L-3}^\dagger |\Omega\rangle, \dots, b_{L-3}^\dagger b_{L-2}^\dagger b_{L-1}^\dagger |\Omega\rangle, \dots \quad (\text{II.67})$$

Energétiquement, les conditions au bord les plus favorables sont celles où les spins sont dans le même état aux deux extrémités de la chaîne. Le secteur pair, qui contient l'état de plus basse énergie $|\Omega\rangle$, correspond donc aux conditions (II.60a). Le secteur impair correspond aux conditions (II.60b).

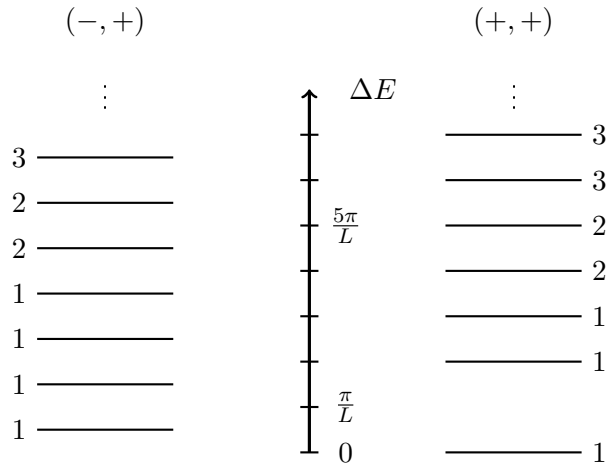


FIG. II.8 – Spectres du Hamiltonien H_L dans la limite thermodynamique pour les conditions au bord $(+, +)$ et $(-, +)$. Les nombres indiquent la dégénérescence de chaque niveau.

L'énergie du vide $|\Omega\rangle$ est donnée par $E_0(L)$, et se comporte dans la limite thermodynamique $L \rightarrow \infty$ comme

$$E_0(L) \sim -\frac{2}{\pi}L + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) - \frac{\pi}{48L} + \dots \quad (\text{II.68})$$

Ce développement doit être comparé à l'équation (II.58). Puisqu'on traite ici un système sans changement de condition au bord en 0 (figure II.7), la dimension d'échelle h_{++} qui doit apparaître dans (II.58) est nulle. Ceci est compatible avec la valeur de la charge centrale $c = 1/2$ pour le modèle d'Ising.

Dans le secteur impair, l'état de plus basse énergie est $b_{L-1}^\dagger |\Omega\rangle$, avec $E_L = E_0(L) + \omega_{L-1}$, qui est équivalent dans la limite thermodynamique à

$$E_L \sim -\frac{2}{\pi}L + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) + \frac{\pi}{L} \left(1/2 - \frac{1}{48}\right) + \dots \quad (\text{II.69})$$

La dimension d'échelle de l'opérateur B.C.C. qui permet de passer de $+$ à $-$ sur le bord est donc $h_{-+} = 1/2$, qui est la dimension conforme de l'opérateur primaire ϵ (II.52). On retrouve ainsi le résultat (II.53) dans le spectre du modèle sur réseau.

On peut évidemment s'intéresser aux états excités dans les deux secteurs. Les deux spectres sont représentés sur la figure (II.8). On retrouve exactement le spectre des dimensions conformes des descendants de 1 et ϵ pour le modèle d'Ising (voir par exemple [6]).

II.6 Contraintes de Cardy

Deux concepts importants de la théorie conforme avec bord émergent de la discussion menée jusqu'à présent.

- Le concept d'état de bord, qui traduit la condition d'invariance conforme au bord (II.15) pour une théorie définie dans le volume. On a vu que l'on arrivait de cette façon à la construction des états d'Isibashi (section II.3).
- Le concept d'opérateur B.C.C. qui prend en compte la localité d'un changement de condition au bord, et qui impose des contraintes fortes sur le spectre d'une théorie 1 + 1D avec bords (sections II.4 et II.5).

A priori, il n'est pas évident de savoir comment relier ces deux concepts. Cardy a répondu à cette question dans un article célèbre [9]. Pour que la théorie soit cohérente, les états de bord et les opérateurs B.C.C. doivent satisfaire un jeu de contraintes. Pour un certain nombre de théories¹, ces contraintes sont suffisamment fortes pour permettre de classifier les conditions au bord physiques compatibles avec l'invariance conforme.

L'idée de base est de considérer la théorie conforme sur un anneau de taille $L \times T$ (T dans la direction périodique, L dans la direction ouverte, voir figure II.9). On peut quantifier la théorie de deux façons différentes. La première consiste à voir un système 1 + 1D périodique qui évolue d'un état de bord à un autre (en temps imaginaire). Dans la seconde, on a un système 1 + 1D avec bords qui évolue périodiquement pendant un temps imaginaire T (on peut aussi y penser comme un système à température finie $1/T$). La fonction de partition $Z_{\alpha\beta}(L, T)$ doit être la

¹Nous discuterons plus loin les propriétés de ces théories.

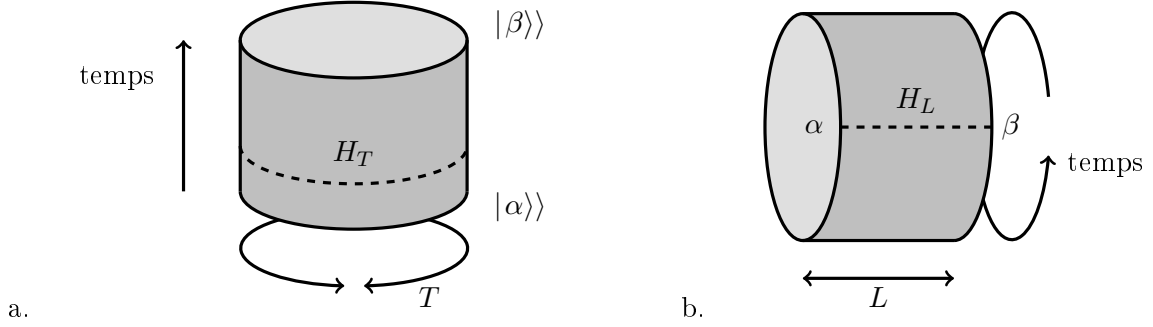


FIG. II.9 – Théorie conforme sur l’anneau. Techniquement, il y a deux façons de quantifier la théorie, dans la direction périodique (a) ou dans la direction ouverte (b). Physiquement, les deux formalismes doivent être équivalents.

même dans les deux cas. Pour le système quantifié dans la direction périodique (figure II.9.a), on a

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta}(L, T) &= \langle\langle\beta| e^{-L H_T} |\alpha\rangle\rangle \\ &= \langle\langle\beta| \tilde{q}^{L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}} |\alpha\rangle\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

où $\tilde{q} = e^{-2\pi L/T}$. On a utilisé l’expression du Hamiltonien pour un système périodique $H_T = \frac{2\pi}{T} (L_0 + \bar{L}_0 - c/12)$. Cette expression est analogue à (II.57), mais puisque ce Hamiltonien agit sur un système périodique, il fait intervenir les composantes holomorphes et anti-holomorphes de la théorie que l’on quantifie. Ici, cette théorie est définie dans le volume. Le bord n’intervient qu’à travers les états de bord $|\alpha\rangle\rangle$ et $|\beta\rangle\rangle$. Ces états doivent satisfaire la condition d’invariance conforme au bord (II.15), ce sont donc des combinaisons linéaires d’états d’Ishibashi

$$|\alpha\rangle\rangle = \sum_{\Phi} \alpha_{\Phi} |\Phi\rangle\rangle \quad |\beta\rangle\rangle = \sum_{\Phi} \beta_{\Phi} |\Phi\rangle\rangle \quad (\text{II.71})$$

Les Φ sont des opérateurs primaires de la théorie. En utilisant le résultat (II.48) on obtient

$$Z_{\alpha\beta}(L, T) = \sum_{\Phi} \langle\langle\beta| \Phi\rangle\rangle \langle\Phi| \alpha\rangle\rangle \text{tr}_{\mathcal{V}_{\Phi}} \left(\tilde{q}^{L_0 + L_0 - \frac{c}{12}} \right). \quad (\text{II.72})$$

où les produits scalaires valent simplement $\langle\Phi| \alpha\rangle\rangle = \alpha_{\Phi}$ et $\langle\Phi| \beta\rangle\rangle = \beta_{\Phi}$. Comme dans la section II.3, nous insistons sur le fait que la trace n’est prise que sur la partie symétrique chirale/anti-chirale désignée par $\mathcal{V}_{\Phi}$, et non sur l’espace entier $\mathcal{V}_{\Phi} \otimes \overline{\mathcal{V}_{\Phi}}$. La trace dans le membre de droite peut donc être écrite $\text{tr}_{\mathcal{V}_{\Phi}} \left(\tilde{q}^{2L_0 - \frac{c}{12}} \right)$. En général, on appelle cet objet le *caractère* de $\mathcal{V}_{\Phi}$, par analogie avec la théorie des groupes. Considérons maintenant le même système quantifié dans la direction ouverte (figure II.9.b). On a un système 1 + 1D avec des conditions au bord α et β à gauche et à droite. Les conditions au bord déterminent le spectre du Hamiltonien $H_L = \frac{\pi}{L} (L_0 - \frac{c}{24})$ via la représentation $\alpha\beta$ qui correspond à l’opérateur B.C.C. $\Phi_{\alpha\beta}$, comme on l’a vu en (II.58). La fonction de partition du système s’écrit donc

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta}(L, T) &= \text{tr}_{\mathcal{V}_{\alpha\beta}} (e^{-T H_L}) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{V}_{\alpha\beta}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

où $q = e^{-\pi T/L}$. La représentation $\mathcal{V}_{\alpha\beta}$ peut éventuellement contenir plusieurs opérateurs primaires, parfois avec des multiplicités $n_{\alpha\beta}^\Phi : \mathcal{V}_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta}^{\Phi_1} \mathcal{V}_{\Phi_1} \oplus n_{\alpha\beta}^{\Phi_2} \mathcal{V}_{\Phi_2} \oplus \dots$. Dans tous les cas on doit pouvoir écrire la relation (II.73) comme

$$Z_{\alpha\beta}(L, T) = \sum_{\Phi} n_{\alpha\beta}^\Phi \text{tr}_{\mathcal{V}_{\Phi}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) \quad (\text{II.74})$$

où les coefficients $n_{\alpha\beta}^\Phi$ sont des entiers positifs ou nuls. Les expressions (II.72) et (II.74) doivent être équivalentes, bien que cela n'apparaisse pas du tout de manière évidente pour l'instant.

Pour faire le lien entre les deux formules (II.72) et (II.74), on doit savoir comment passer des caractères contenant $\tilde{q}$ à ceux contenant q . On fait donc l'hypothèse qu'il existe une *matrice de transformée modulaire* $\mathcal{S}_{\Phi\Phi'}$ qui réalise exactement cela.

$$\text{tr}_{\mathcal{V}_{\Phi}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) = \sum_{\Phi'} \mathcal{S}_{\Phi\Phi'} \text{tr}_{\mathcal{V}_{\Phi'}} \left(\tilde{q}^{2L_0 - \frac{c}{12}} \right) \quad (\text{II.75})$$

La matrice $\mathcal{S}$ est en général unitaire, et vérifie $\mathcal{S}^2 = 1$. En utilisant cela et la relation (II.75) on voit que l'égalité des expressions (II.72) et (II.72) conduit à l'ensemble de contraintes

$$n_{\alpha\beta}^\Phi = \sum_{\Phi'} \mathcal{S}_{\Phi\Phi'} \langle \langle \alpha | \Phi' \rangle \langle \Phi' | \beta \rangle \rangle \quad (\text{II.76a})$$

$$\langle \langle \alpha | \Phi' \rangle \langle \Phi' | \beta \rangle \rangle = \sum_{\Phi} \mathcal{S}_{\Phi'\Phi} n_{\alpha\beta}^\Phi \quad (\text{II.76b})$$

que l'on appelle les *contraintes de Cardy*. Ces contraintes sont hautement non-triviales.

Pour un certain nombre de théories ces contraintes permettent de déterminer toutes les conditions au bord invariantes conformes. On peut procéder de la façon suivante. En général on peut supposer que $\mathcal{S}_{\Phi 1} > 0$, où 1 désigne l'identité dans la théorie. On considère une première combinaison d'états d'Ishibashi

$$|\tilde{1}\rangle\rangle = \sum_{\Phi} \sqrt{\mathcal{S}_{\Phi 1}} |\Phi\rangle\rangle \quad (\text{II.77})$$

qui a des coefficients réels. Cet état définit une condition au bord, que nous notons $\tilde{1}$. Cette condition au bord particulière est choisie de telle façon que $n_{\tilde{1}\tilde{1}}^1 = 1$ et les autres $n_{\tilde{1}\tilde{1}}^\Phi$ sont nuls. En d'autres termes, le spectre du Hamiltonien H_L avec les conditions au bord $\tilde{1}$ à gauche et à droite correspond au spectre des dimensions conformes de l'identité et de ses descendants.

On peut construire les autres états de bord de la théorie de la même façon. Pour chaque opérateur primaire Φ on construit l'état

$$|\tilde{\Phi}\rangle\rangle = \sum_{\Phi'} \frac{\mathcal{S}_{\Phi\Phi'}}{\sqrt{\mathcal{S}_{\Phi' 1}}} |\Phi'\rangle\rangle \quad (\text{II.78})$$

qui définit à son tour une condition de bord $\tilde{\Phi}$. Ces conditions de bord sont définies pour que $n_{\tilde{\Phi}\tilde{1}}^{\Phi'} = \delta_{\Phi\Phi'}$. A ce stade, toutes les fonctions de partition $Z_{\tilde{\Phi}\tilde{1}}$ ont la forme (II.74) avec des

coefficients entiers positifs ou nuls. Mais, pour que la théorie soit vraiment cohérente, on doit encore s'assurer que cette contrainte est satisfaite si les conditions au bord à gauche et à droite sont toutes les deux différentes de $\tilde{1}$. On arrive ainsi à la relation

$$n_{\tilde{\Phi}'\tilde{\Phi}''}^{\Phi} = \sum_{\varphi} \frac{\mathcal{S}_{\Phi\varphi} \mathcal{S}_{\varphi\Phi'} \mathcal{S}_{\varphi\Phi''}}{\mathcal{S}_{\varphi 1}} \quad (\text{II.79})$$

qui s'avère être identique à la *formule de Verlinde* [6]. Plus précisément, la formule de Verlinde dit que le membre de droite de (II.79) est égal au coefficient $N_{\tilde{\Phi}'\tilde{\Phi}''}^{\Phi}$ qui intervient dans la fusion $\Phi' \times \Phi'' = \sum_{\Phi} N_{\tilde{\Phi}'\tilde{\Phi}''}^{\Phi} \Phi$. Puisque ces coefficients sont des entiers positifs ou nuls, on voit que l'ensemble des états de bord $|\tilde{\Phi}\rangle\rangle$ satisfait les contraintes de Cardy (II.76). Puisque $n_{\tilde{\Phi}'\tilde{\Phi}''}^{\Phi} = N_{\tilde{\Phi}'\tilde{\Phi}''}^{\Phi}$, cette construction valide également l'interprétation de la fusion des opérateurs B.C.C. (section II.4). En effet, par définition, l'opérateur Φ' génère un changement de condition au bord entre la condition $\tilde{1}$ et la condition $\tilde{\Phi}'$. En rapprochant les opérateurs Φ' et Φ'' on doit obtenir un système équivalent où la condition au bord change de $\tilde{\Phi}'$ à $\tilde{\Phi}''$ (figure II.10). L'opérateur B.C.C qui passe de $\tilde{\Phi}'$ à $\tilde{\Phi}''$ est généré par la fusion $\Phi' \times \Phi''$.

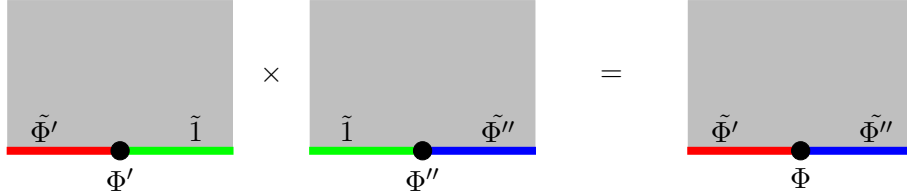


FIG. II.10 – Opérateurs B.C.C. et fusion : Φ apparaît dans la fusion $\Phi' \times \Phi''$. Cette interprétation est validée par la formule de Verlinde (II.79).

Les états qui satisfont les contraintes de Cardy (II.76) sont souvent appelés *états physiques* ou *états de Cardy*. Il faut bien les distinguer des états d'Ishibashi, qui satisfont seulement la condition d'invariance conforme au bord (II.15). Les états d'Ishibashi ne correspondent pas, en général, à des conditions au bord ayant un sens physique.

Pour conclure cette section, on peut illustrer le formalisme précédent dans le cas du modèle d'Ising. Dans ce cas, la matrice de transformée modulaire vaut [6]

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.80})$$

dans la base des caractères de 1, ϵ et σ . On construit les états physiques

$$|\tilde{0}\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\epsilon\rangle\rangle + \frac{1}{2^{1/4}} |\sigma\rangle\rangle \quad (\text{II.81a})$$

$$|\tilde{\epsilon}\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\epsilon\rangle\rangle - \frac{1}{2^{1/4}} |\sigma\rangle\rangle \quad (\text{II.81b})$$

$$|\tilde{\sigma}\rangle\rangle = |0\rangle\rangle - |\epsilon\rangle\rangle \quad (\text{II.81c})$$

Il y donc trois conditions au bord physiques, correspondant aux conditions libres et fixes $+$ et $-$. On peut identifier la condition libre avec $\tilde{\sigma}$, $+$ avec $\tilde{1}$, et $-$ avec $\tilde{\epsilon}$. Les fonctions de partition sur l'anneau sont, en fonction des caractères $\chi_1(q)$, $\chi_\epsilon(q)$ et $\chi_\sigma(q)$:

$$Z_{++} = Z_{--} = \chi_1 \quad Z_{+-} = \chi_\epsilon \quad (\text{II.82})$$

$$Z_{\text{libre}+} = Z_{\text{libre}-} = \chi_\sigma \quad Z_{\text{libre libre}} = \chi_1 + \chi_\epsilon \quad (\text{II.83})$$

On retrouve très simplement en (II.82) le spectre de la chaîne d'Ising (section II.5 et figure II.8).

II.7 Classification des conditions aux bords : quel est le rôle de l'unitarité/la rationalité ?

Dans la section précédente, nous avons présenté le principe de la classification des conditions au bord introduit par Cardy [9]. D'autres présentations de cette classification peuvent être trouvées dans [6, 10, 11, 12]. Il y a un certain nombre d'hypothèses plus ou moins explicites dans cette présentation. Nous allons discuter rapidement quelles sont ces hypothèses, en mettant l'accent sur ce qui différencie le travail effectué dans cette thèse de la classification de Cardy.

- *Fonction de partition sur l'anneau.* Le point de départ de la classification de Cardy est qu'une théorie conforme avec bord peut être étudiée sur l'anneau, et que le choix de conditions au bord α et β spécifie complètement la fonction de partition $Z_{\alpha\beta}(L, T)$. Ceci ne suppose aucune hypothèse préalable sur la théorie.

- *Etats de bord et trace.* On peut calculer cette fonction de partition de deux manières différentes, en quantifiant la théorie soit dans la direction ouverte, soit dans la direction périodique (figure II.9). Dans la direction périodique, on a besoin de deux états de bord $|\alpha\rangle\rangle$ et $|\beta\rangle\rangle$. Dans la direction ouverte, la fonction de partition est une trace.

Ce dernier point est une hypothèse. Il n'est pas toujours vrai que la fonction de partition d'un modèle sur un anneau est une trace. En utilisant le langage de la physique statistique, cela suppose que les poids de Boltzmann sont complètement locaux, et que le système revient exactement dans le même état quand on tourne autour de l'anneau. On peut trouver facilement des modèles dont la fonction de partition ne peut pas être écrite de cette façon. Par exemple, le modèle d'Ising avec des conditions anti-périodiques : un spin $+$ est identifié avec un spin $-$ quand on tourne autour de l'anneau. Pour ce modèle avec des conditions aux bords libres, la fonction de partition est (on peut voir qu'il s'agit en fait d'une trace où l'on insère un opérateur $(-1)^F$ où F est le nombre de fermions)

$$Z_{\text{libre libre}}^{\text{anti-per.}} = \chi_1 - \chi_\epsilon \quad (\text{II.84})$$

L'état de bord $|\text{libre}\rangle\rangle$ pour le modèle d'Ising anti-périodique est donc $2^{1/4}|\sigma\rangle\rangle$. En général, on considère souvent des fonctions de partition qui sont des traces modifiées, avec des insertions d'opérateurs (qu'on appelle parfois "twists"). Dans ce cas, on ne peut pas supposer que les coefficients $n_{\alpha\beta}^\Phi$ sont des entiers positifs ou nuls dans les contraintes de Cardy (II.76).

L'hypothèse que la fonction de partition est une trace est reliée à l'unitarité de la théorie dans le sens que la trace peut être écrite comme $\text{tr} A = \sum_k \langle k|A|k \rangle$ si l'on dispose d'une base orthonormée $\{|k\rangle\} : \langle k|k' \rangle = \delta_{kk'}$ pour le produit scalaire de la théorie. Dans le cas où la théorie possède des vecteurs de norme nulle, ce qui est parfois le cas dans les théories non unitaires (en particulier les théories logarithmiques), cette relation très simple n'est plus vérifiée.

- *Théorie diagonale.* On a fait l'hypothèse que la théorie périodique est diagonale, c'est-à-dire que chaque opérateur primaire de la théorie correspond à la même représentation de l'algèbre de Virasoro chirale et antichirale. Cette hypothèse est essentiellement technique, et permet de simplifier la discussion. Le même genre de classification a pu être obtenu pour des théories non-diagonales en adaptant les arguments (par exemple pour le modèle de Potts à 3 états dans [9] ou pour d'autres théories rationnelles dans [13, 14, 15]).

- *Rationalité.* La matrice de transformée modulaire $\mathcal{S}_{\Phi\Phi'}$, la formule de Verlinde, la construction des états de bord à partir de l'état physique $|\tilde{1}\rangle$, ainsi que l'identification des conditions au bord avec les opérateurs $\Phi_{r,s}$ présents dans la théorie, sont des objets ou des idées qui sont liées à la rationalité de la théorie. Pour être plus précis, on pourrait toujours définir un objet qui génère la transformée modulaire $\mathcal{S}$ dans une théorie non-rationnelle, mais il s'agirait plutôt d'un noyau de convolution. Formellement, les étapes de la section précédente peuvent être adaptées, mais les contraintes de Cardy ne sont plus vraiment des contraintes s'il y a une infinité d'opérateurs présents dans la théorie. De plus, la construction est extrêmement élégante parce qu'elle permet de mettre en avant la fusion des opérateurs B.C.C. Dans les théories non-rationnelles, en général on ne sait pas grand chose de la fusion de deux opérateurs. Le formalisme précédent montre qu'en principe, il est aussi difficile de comprendre les conditions au bord dans une telle théorie que de comprendre la fusion.

II.8 Facteur g et entropie de bord

La fonction de partition sur un cylindre de longueur L et de circonférence T devient particulièrement simple dans la limite $L \gg T$

$$Z_{\alpha\beta}(L, T) \sim \langle \langle \alpha | 0 \rangle \langle 0 | \beta \rangle \rangle e^{\frac{\pi c}{6} \frac{L}{T}} \quad (\text{II.85})$$

Dans cette limite, on a une contribution universelle à l'énergie libre

$$f(L, T) = f_{\text{volume}} LT + f_{\text{surface}} T - \frac{\pi c}{6} \frac{L}{T} + s_{\alpha} + s_{\beta} + o(1) \quad (\text{II.86})$$

où $s_{\alpha} = -\log \langle \langle \alpha | 0 \rangle$ et $s_{\beta} = -\log \langle \langle \beta | 0 \rangle$ sont les *entropies de bord universelles* associées aux conditions au bord α et β . La notion d'entropie de bord universelle a été mise en avant par Affleck et Ludwig [16]. Cette quantité joue un rôle analogue à celui de la charge centrale pour les théories dans le volume. A deux dimensions, on peut définir une quantité c pour des théories massives, qui coïncide avec la charge centrale de la théorie conforme quand la longueur de corrélation devient infinie (ou nulle). Cette quantité c décroît toujours sous le flot RG [17], ce qui permet par exemple d'organiser ces flots dans un diagramme de phase. L'entropie de bord vérifie un théorème équivalent pour les conditions au bord. Pour une théorie fixe sous le flot RG dans le volume, il y a plusieurs conditions au bord possibles, et on passe de l'une à l'autre sous

le flot du groupe de renormalisation. Sous l'action de ce flot, l'entropie doit toujours augmenter [16, 18].

Par exemple, dans le modèle d'Ising (II.81.a)-(II.81.c), l'entropie de bord universelle de la condition au bord libre vaut $s_{\text{libre}} = 0$, alors qu'elle vaut $s_+ = s_- = \log 2$ pour les conditions au bord fixées. Sous le flot RG, la condition au bord libre est instable. Une perturbation au bord, par exemple un faible champ magnétique appliqué à la surface, va provoquer un flot RG vers une des deux conditions au bord fixes (+ ou -). Physiquement, sous une transformation du groupe de renormalisation, on absorbe de plus en plus de degrés de liberté, l'entropie de bord doit donc augmenter.

L'entropie de bord universelle peut être obtenue à partir du modèle sur réseau, en calculant le produit scalaire de l'état de bord $|\alpha\rangle_T$ et du fondamental de l'Hamiltonien ou de la matrice de transfert périodique sur T sites $|0\rangle_T$. On a alors

$$-\log({}_T\langle\alpha|0\rangle_T) = f_{\text{surf},\alpha}T + s_\alpha + o(1) \quad (\text{II.87})$$

Par exemple, pour le modèle d'Ising, l'état de bord fixe + est simplement $|++++\dots++\rangle_T$. Le fondamental de la matrice de transfert (ou du Hamiltonien) est une combinaison compliquée $|0\rangle_T = \sum_{\sigma} a_{\sigma} |\sigma\rangle$, normalisée telle que $\sum_{\sigma} (a_{\sigma})^2 = 1$. L'état de bord libre est $|\text{libre}\rangle = \sum_{\sigma} |\sigma\rangle$. On peut alors vérifier, par exemple numériquement, que

$$-\log({}_T\langle++|0\rangle_T) = a_{++++\dots++} \sim \log 2 + o(1) \quad (\text{II.88a})$$

$$-\log({}_T\langle\text{libre}|0\rangle_T) = \sum_{\sigma} a_{\sigma} \sim f_{\text{libre}}T + 0 + o(1) \quad (\text{II.88b})$$

Il y a une subtilité due à la normalisation des états de bord. Noter que l'état de bord $|+\rangle$ a une norme 1, tandis que l'état de bord $|\text{libre}\rangle$ a une norme 2^T . Ceci ne contribue qu'à la partie non-universelle de l'énergie libre. Par contre, en multipliant simplement l'état de bord $|+\rangle \mapsto \lambda|+\rangle$, il est clair que l'on peut générer un terme $-\log \lambda$ qui est d'ordre 1. Pour fixer la normalisation des états de bord, on peut utiliser le fait que l'état de bord doit correspondre à une condition au bord dans la direction ouverte (figure II.9). C'est de cette façon que la normalisation des états de bord est fixée dans la théorie des champs. On peut utiliser ce même fait au niveau du réseau.

II.9 Bord et algèbre de Virasoro

Jusqu'à présent nous avons considéré des géométries standard, telles que le demi-plan, le plan complexe avec une trou circulaire, l'anneau, etc. Ces géométries sont pratiques pour discuter le rôle des opérateurs B.C.C., pour motiver l'introduction des états d'Ishibashi et des états de bord physiques, pour calculer des fonctions de corrélation, etc. Mais il est également intéressant d'analyser plus en détail les effets d'une déformation du bord, comme nous allons le voir maintenant. L'idée de base de cette section est de relier une déformation du bord localisée au voisinage de l'origine à l'action des générateurs de l'algèbre de Virasoro. Ce type de déformation a été introduit dans [19], pour faire le lien entre les théories conformes et l'Evolution de Schramm-Loewner (section II.10.4).

II.9.1 Retour au demi-plan. Déformation locale du bord.

Revenons à la géométrie du demi-plan $\mathbb{H}$, que nous avons déjà étudiée dans la section II.2. Ici, nous ne considérons pas d'insertion d'opérateurs Φ , ni dans le volume, ni sur le bord. On peut décrire la théorie en quantification radiale dans le demi-plan, et dans ce cadre, le vide de la théorie $|0\rangle$ est défini par

$$|0\rangle = \int [d\mathcal{C}(|z| < 1, z \in \mathbb{H})] e^{-S[\mathcal{C}]} |\mathcal{C}(|z| = 1)\rangle \quad (\text{II.89})$$

où les $\mathcal{C}(|z|)$ sont les configurations du modèle sur le demi-cercle de rayon $|z|$ centré en 0. Maintenant, considérons une déformation du bord localisée au voisinage de 0 (figure II.11). Appelons $\mathbb{H}'$ ce demi-plan déformé. La question que l'on pose est : quel est l'état $|s\rangle$ obtenu avec cette déformation ? Autrement dit, on veut calculer (voir figure II.11)

$$|s\rangle = \int [d\mathcal{C}(|z| < 1, z \in \mathbb{H}')] e^{-S[\mathcal{C}]} |\mathcal{C}(|z| = 1)\rangle \quad (\text{II.90})$$

L'état $|s\rangle$ doit être une combinaison du vide $|0\rangle$ et de ses descendants. On doit donc pouvoir l'écrire $|s\rangle = G|0\rangle$, où G est un opérateur linéaire qui est formé à partir des générateurs de l'algèbre de Virasoro.

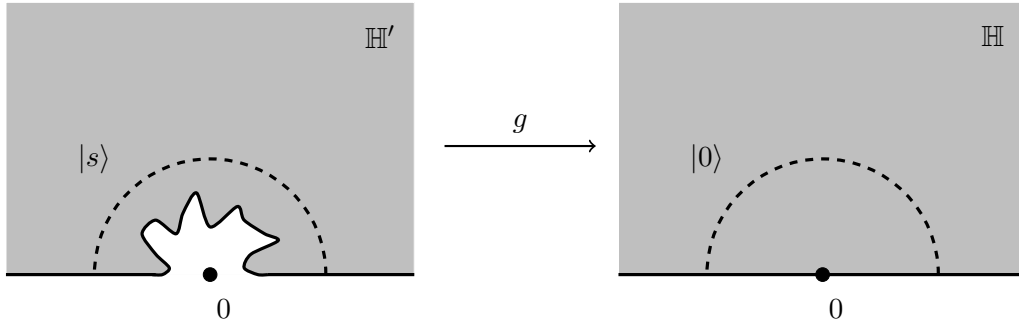


FIG. II.11 – Une déformation du bord au voisinage de l'origine est encodée par une transformation conforme g . En quantification radiale, cette géométrie du bord correspond à un état $|s\rangle = G|0\rangle$. Nous voulons exprimer l'opérateur G en fonction de g .

Nous allons relier l'opérateur G à la géométrie $\mathbb{H}'$ de la déformation. Pour cela, nous allons considérer une famille $\mathbb{H}_t$ de géométries telles que $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}'$ et $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}$, et que $\mathbb{H}_t$ et $\mathbb{H}_{t+dt}$ soient infiniment proches.

Le théorème de Riemann assure l'existence d'une transformation conforme g_t qui envoie $\mathbb{H}_t$ sur le demi-plan $\mathbb{H}$ pour tout t . On peut de plus exiger que le développement de $g_t(z)$ en $z \rightarrow \infty$ prenne la forme

$$g_t(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots \quad (\text{II.91})$$

La fonction g_t est alors unique. Puisque les géométries $\mathbb{H}_t$ et $\mathbb{H}_{t+dt}$ sont infiniment proches, la transformation $g_t^{-1} \circ g_{t+dt}$ qui envoie $\mathbb{H}_{t+dt}$ sur $\mathbb{H}_t$ doit être infinitésimalement proche de

l'identité. On a donc

$$g_t^{-1} \circ g_{t+dt}(z) = z + \frac{b_1 dt}{z} + \frac{b_2 dt}{z^2} + \frac{b_3 dt}{z^2} + \dots \quad (\text{II.92})$$

A partir de cette fonction, on peut construire la transformation infinitésimale $z \mapsto z + \alpha(z)$

$$\alpha(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \geq 1 \\ \frac{b_1 dt}{z} + \frac{b_2 dt}{z^2} + \frac{b_3 dt}{z^3} + \dots & \text{si } |z| < 1 \end{cases} \quad (\text{II.93})$$

qui est conforme sur $\mathbb{H}_{t+dt} \cap \{z, |z| < 1\}$ et qui a une discontinuité infinitésimale quand $|z| = 1$. On peut maintenant calculer la variation entre $|s_{t+dt}\rangle$ et $|s_t\rangle$. z désigne toujours un point dans $\mathbb{H}_{t+dt}$.

$$\begin{aligned} |s_t\rangle &= |s_{t+dt}\rangle + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \alpha(z) T(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \bar{\alpha}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z}) d\bar{z} \right) |s_{t+dt}\rangle \\ &= |s_{t+dt}\rangle + dt (b_1 L_{-2} + b_2 L_{-3} + b_3 L_{-4} + \dots) |s_{t+dt}\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.94})$$

On voit donc que

$$\frac{\partial}{\partial t} |s_t\rangle = (-b_1 L_{-2} - b_2 L_{-3} - b_3 L_{-4} - \dots) |s_t\rangle \quad (\text{II.95})$$

ou encore en notant $|s_t\rangle = G_t |0\rangle$

$$\frac{\partial G_t}{\partial t} \cdot G_t^{-1} = -b_1 L_{-2} - b_2 L_{-3} - b_3 L_{-4} - \dots \quad (\text{II.96})$$

Cette relation signifie que la déformation du bord qui est codée dans (II.92) peut être transposée directement dans le formalisme de l'algèbre de Virasoro.

Remarque sur l'algèbre de Witt. Une fonction g qui envoie une géométrie $\mathbb{H}'$ sur le demi-plan $\mathbb{H}$ peut être vue comme un opérateur agissant sur l'espace des fonctions F définies sur $\mathbb{H}$, et qui donne de nouvelles fonctions $G \cdot F = F \circ g$ définies sur $\mathbb{H}'$. Dans ce cas la transformation (II.92) peut être vue comme

$$(G_t + dG_t) \cdot G_t^{-1} \cdot F(z) = F \circ g_t^{-1} \circ g_{t+dt}(z) = F(z) + \frac{b_1 dt}{z} \partial_z F(z) + \frac{b_2}{z^2} \partial_z F(z) + \frac{b_3 dt}{z^3} \partial_z F(z) + \dots \quad (\text{II.97})$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial G_t}{\partial t} \cdot G_t^{-1} = -b_1 \ell_{-2} - b_2 \ell_{-3} - b_3 \ell_{-4} - \dots \quad (\text{II.98})$$

si les $\ell_n = -z^{n+1} \partial_z$ sont les générateurs de l'algèbre de Witt $[\ell_m, \ell_n] = (m-n)\ell_{m+n}$. Clairement, les deux relations (II.96) et (II.98) sont très proches. On peut passer directement de l'algèbre de Witt à l'algèbre de Virasoro, parce qu'une déformation infinitésimale du demi-plan au voisinage de l'origine ne fait intervenir que les générateurs L_{-n} ou ℓ_{-n} avec $n \geq 0$. Par conséquent la charge centrale c n'apparaît jamais dans ce type de calculs, et on ne travaille qu'avec une algèbre $Vir^- = Witt^-$. La charge centrale n'apparaît que lorsque l'on veut considérer des produits scalaires entre différents états de bord, comme nous allons le voir dans la suite. Le produit scalaire quand $c = 0$ est trivial dans le module de l'identité, seul l'état $|0\rangle$ a une norme non nulle. Une charge centrale $c \neq 0$ peut être vue comme une déformation non-triviale du produit scalaire entre les états de bord qui représentent une déformation au voisinage de l'origine, et ceux représentant une déformation à l'infini.

II.9.2 Etat pantalon

On peut utiliser la formule (II.94) pour écrire des états de bord qui correspondent à des géométries simples. Par exemple, la géométrie $\mathbb{H} \setminus \{z, z^2 \in [-\sqrt{2t}, 0]\}$ (figure II.12.a) peut être envoyée sur le demi-plan $\mathbb{H}$ par la transformation conforme

$$g_t(z) = \sqrt{z^2 + 2t} = z + \frac{t}{z} + \dots \quad (\text{II.99})$$

qui peut aussi s'écrire sous forme infinitésimale

$$g_t(z) \frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = 1 \quad (\text{II.100})$$

ou encore, en posant $z = g_t^{-1}(w)$

$$\left(\frac{\partial g_t}{\partial t} \right) \circ g_t^{-1}(w) = \frac{1}{w}. \quad (\text{II.101})$$

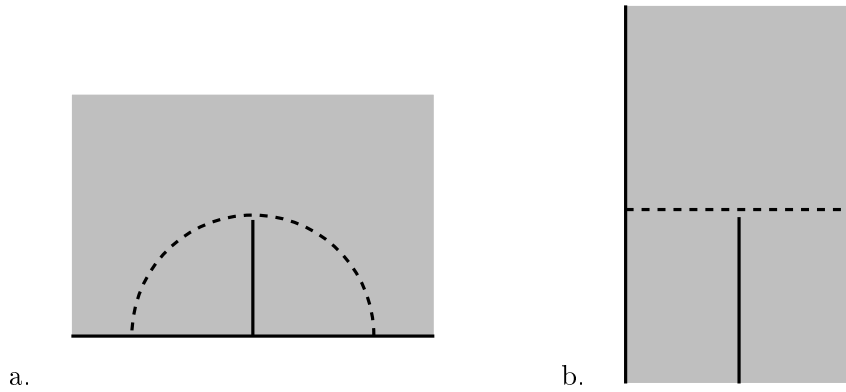


FIG. II.12 – La transformation $g(z) = \sqrt{z^2 + 2t}$ encode une fente verticale de hauteur $\sqrt{2t}$ (a). Cette géométrie correspond à l'état $e^{-tL_{-2}}|0\rangle$. Elle est équivalente au “pantalon” sur le ruban (b).

La relation (II.94) permet de traduire directement cette équation dans le langage des générateurs de Virasoro agissant sur des états $G_t|0\rangle$

$$G_t^{-1} \cdot \frac{\partial G_t}{\partial t} = -L_{-2} \quad (\text{II.102})$$

qui s'intègre en $G_t|0\rangle = e^{-tL_{-2}}|0\rangle$. En particulier, pour une fente de hauteur 1, on a l'état

$$|\text{pantalon}\rangle = e^{-\frac{1}{2}L_{-2}}|0\rangle. \quad (\text{II.103})$$

On peut utiliser cet état de bord dans des calculs concrets. Par exemple, imaginons que l'on veuille calculer la fonction de partition d'une théorie conforme sur la géométrie “double-pantalon” (figure II.13). Plus précisément, pour avoir une quantité finie, on veut calculer le

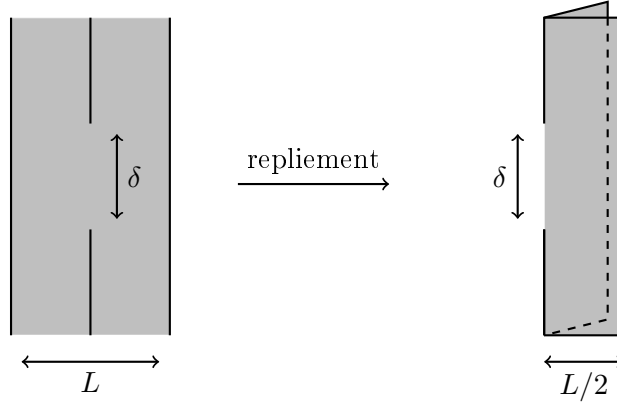


FIG. II.13 – La géométrie “double-pantalon” peut être repliée pour donner une théorie doublée sur le ruban de largeur $L/2$, avec deux changements de condition au bord à gauche.

rapport de cette fonction de partition et de celle sur un double-ruban de largeur $L/2$

$$\begin{aligned}
 \frac{Z_{\text{double-pantalon}}}{(Z_{\text{ruban } L/2})^2} &= \frac{\langle \text{pantalon} | e^{-\frac{\pi\delta}{L}(L_0 - \frac{c}{24})} | \text{pantalon} \rangle}{\left(\langle 0 | e^{-\frac{\pi\delta}{L/2}(L_0 - \frac{c}{24})} | 0 \rangle \right)^2} \\
 &= e^{-\frac{\pi\delta c}{16L}} \left(1 - e^{-\frac{\pi\delta}{L}} \right)^{-c/8} = \left(2 \sinh \frac{\pi\delta}{2L} \right)^{-c/8}
 \end{aligned} \tag{II.104}$$

où l’on a utilisé la relation

$$\langle 0 | L_2^k L_{-2}^k | 0 \rangle = \frac{k!}{2^k} \prod_{p=0}^{k-1} (8p + c). \tag{II.105}$$

Mais le rapport (II.104) peut également être vu comme une fonction de corrélation de deux opérateurs B.C.C. Φ_Δ sur le bord du ruban de taille $L/2$ (figure II.13), après un repliement. L’opérateur Φ_Δ agit dans la théorie repliée, que l’on peut voir comme deux théories superposées. Ces deux théories sont soit indépendantes, soit reliées sur le bord. Φ_Δ permet de passer de l’une de ces deux conditions au bord à l’autre. On a

$$\langle \Phi_\Delta(0) \Phi_\Delta(\delta) \rangle = \frac{1}{\left(\frac{2L}{\pi} \sinh \frac{\pi\delta}{2L} \right)^{2\Delta}} \tag{II.106}$$

si Δ est la dimension d’échelle de cet opérateur. On voit que l’on retrouve l’expression (II.104) avec $\Delta = \frac{c}{16}$, à un facteur $(\pi/L)^{c/8}$ près qui provient du produit scalaire de l’état $|\text{pantalon}\rangle$ avec le fondamental $|0\rangle$. Il s’agit en fait d’une contribution due au “coin” central, où le bord tourne brusquement d’un angle π . L’apparition de ce type de facteur est habituelle quand on traite des géométries avec des angles [20]. Ce facteur n’apparaît pas directement au niveau des générateurs de l’algèbre de Virasoro, mais on peut vérifier sur le réseau qu’il est bien présent. La dimension d’échelle $\Delta = \frac{c}{16}$ peut être calculée directement à la manière de Cardy-Peschel [20].

II.9.3 Etat complètement ouvert

On peut utiliser l'action des générateurs de Virasoro sur le bord pour atteindre des déformations plus compliquées. Par exemple, définissons la transformation conforme

$$g_k(z) = \left(z^k + 2\right)^{1/k} \quad (\text{II.107})$$

Pour voir précisément ce que fait cette transformation, il faut définir la géométrie $\mathbb{H}_k$ (figure II.14)

$$\mathbb{H}_k = \mathbb{H} \setminus \left\{ z \mid z^k \in [-2, 2] \right\} \quad (\text{II.108})$$

Notons que $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}$. Pour $k \geq 2$, $\mathbb{H}_k$ est le demi-plan moins une demi-étoile à $k - 1$ branches centrée en 0. On peut se convaincre que la transformation g_{2^n} envoie $\mathbb{H}_{2^n}$ sur $\mathbb{H}_{2^{n-1}}$. Par exemple,

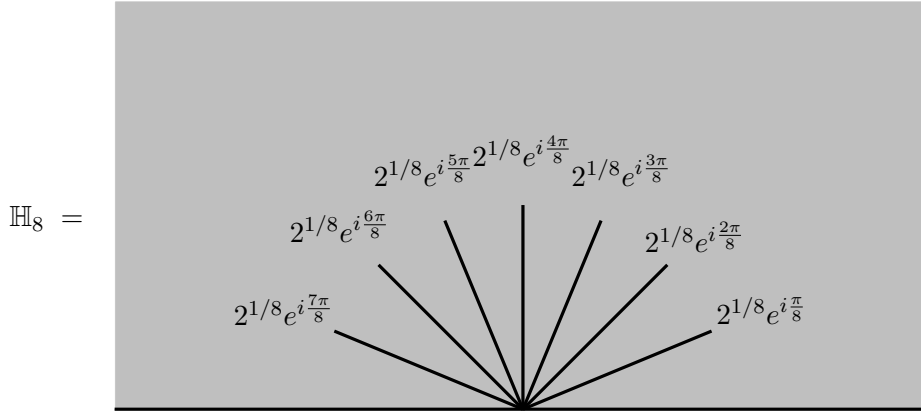


FIG. II.14 – Les surfaces $\mathbb{H}_k$ sont des demi-plan moins des étoiles à $k - 1$ branches centrées en 0.

g_4 envoie $\mathbb{H}_4$ sur $\mathbb{H}_2$ comme sur la figure II.15. L'idée principale que l'on veut illustrer ici est que les transformations g_k peuvent être transcrites directement en termes des générateurs de Virasoro. En effet, en introduisant $g_{k;t}(z) = (z^k + 2t)^{1/k}$, on a

$$(g_{k;t}(z))^{k-1} \frac{\partial}{\partial t} g_{k;t}(z) = 2/k \quad (\text{II.109})$$

ou en prenant $z = g_{k;t}^{-1}(w)$

$$\left(\frac{\partial g_{k;t}}{\partial t} \right) \circ g_{k;t}^{-1}(w) = \frac{2/k}{w^{k-1}} \quad (\text{II.110})$$

De la même façon que dans la section précédente, chacune de ces déformations infinitésimales peut être transposée directement dans l'algèbre de Virasoro

$$G_{g_{k;t}}^{-1} \circ \frac{\partial G_{g_{k;t}}}{\partial t} = -\frac{2}{k} L_{-k} \quad (\text{II.111})$$

qui s'intègre en

$$G_{g_{k;t}} = e^{-\frac{2t}{k} L_{-k}}. \quad (\text{II.112})$$

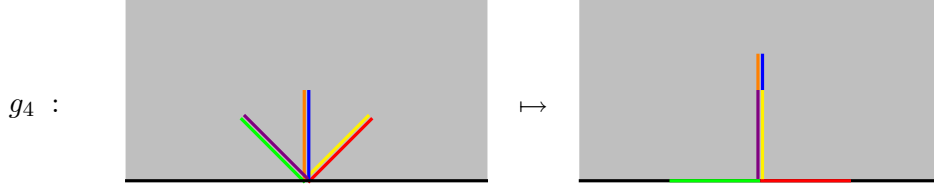


FIG. II.15 – La fonction g_4 est une transformation conforme qui envoie $\mathbb{H}_4$ sur $\mathbb{H}_2$. De manière générale, g_{2^n} envoie $\mathbb{H}_{2^n}$ sur $\mathbb{H}_{2^{n-1}}$.

Maintenant, il est facile de composer les fonctions g_{2^n} pour obtenir $g_2 \circ g_4 \circ \dots \circ g_{2^n}$ pour obtenir une transformation conforme qui envoie $\mathbb{H}_{2^n}$ sur le demi-plan $\mathbb{H}$. On voit que l'état de bord à $2^n - 1$ branches s'écrit donc

$$|2^n - 1 \text{ branches}\rangle = G_{-2^n} \dots G_{-4} G_{-2} |0\rangle. \quad (\text{II.113})$$

Pour finir, on s'intéresse à la limite $n \rightarrow \infty$ (figure II.16). On a en fait

$$g_2 \circ g_4 \circ \dots \circ g_{2^n}(z) = \sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{z^{2^n} + 2 + 2 \dots + 2 + 2}}}} \quad (\text{II.114})$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} z + \frac{1}{z} \quad \text{si } |z| > 1. \quad (\text{II.115})$$

et la fonction $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ envoie $\mathbb{H} \setminus \{z, |z| \leq 1\}$ sur $\mathbb{H}$. La géométrie du demi-plan privé d'un demi-disque correspond finalement à l'état de bord

$$|B\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2^{n-1}} L_{-2^n}} \dots e^{-\frac{1}{2} L_{-4}} e^{-L_{-2}} |0\rangle. \quad (\text{II.116})$$

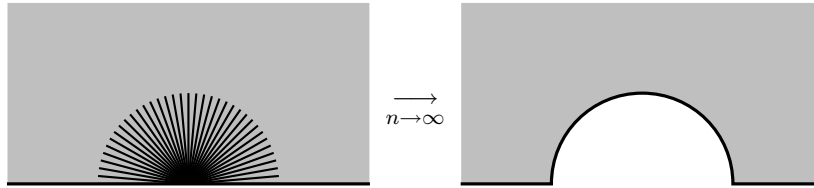


FIG. II.16 – Le demi-plan moins un demi-disque est obtenu comme une limite des géométries $\mathbb{H}_{2^n}$.

Comme dans la section précédente, on peut utiliser cet état de bord pour calculer des fonctions de partition. Ici, le plus naturel est de calculer la fonction de partition d'une théorie conforme sur un rectangle de taille $L \times T$. On a

$$Z(L, T) = \langle B | e^{-\frac{\pi}{L} T (L_0 - \frac{c}{24})} | B \rangle \quad (\text{II.117})$$

$$= q^{-\frac{c}{24}} \left(1 + \frac{c}{2} q^2 + \dots \right) \quad (\text{II.118})$$

et on peut reconnaître le développement de la fonction $\eta(q^2)^{-c/2}$. A nouveau, pour obtenir la vraie fonction de partition sur le rectangle, on doit tenir compte des termes de type Cardy-Peschel. Le résultat final est

$$(L/T)^{c/4} \eta(q^2)^{-c/2} \quad (\text{II.119})$$

Ce résultat a été dérivé dans [21] par une méthode différente. En fait, il est clair dès le départ que Z doit être une fonction de L/T qui vérifie $Z(L/T) = Z(T/L)$. Ce seul fait est déjà très contraignant. En ajoutant une hypothèse simple, par exemple sur le comportement asymptotique $Z \sim e^{-\frac{\pi c}{24} L/T}$ quand $L/T \rightarrow \infty$, cela suffit à fixer complètement la fonction de partition [22].

II.10 Bords stochastiques : Evolution de Schramm-Loewner (SLE)

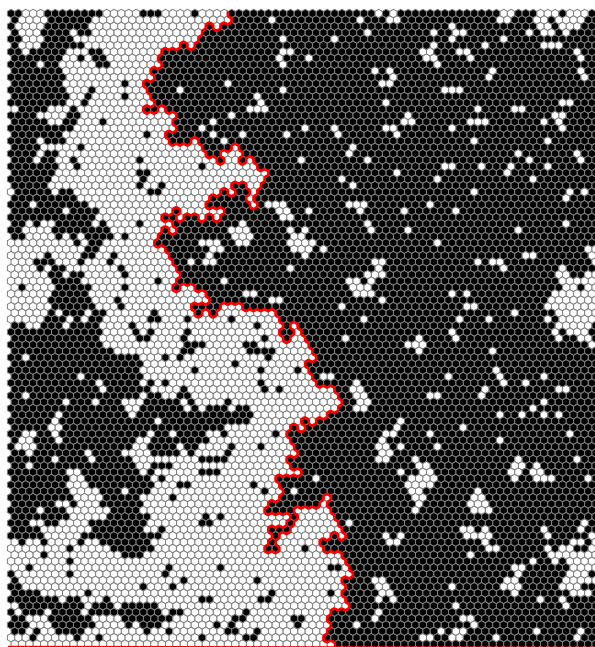


FIG. II.17 – Modèle d’Ising dans le demi-plan avec un changement de condition au bord à l’origine. Les spins sont fixés à $+$ à gauche (en noir) et à $-$ à droite (en blanc).

Dans la section précédente nous avons étudié des déformations du bord au voisinage de l’origine, et nous avons vu que ces déformations peuvent être écrites algébriquement en théorie conforme avec l’algèbre de Virasoro. Nous allons poursuivre avec l’idée de déformation du bord, mais cette fois pour décrire l’évolution d’une courbe dans le demi-plan. Cette évolution peut être stochastique. La réunion des méthodes des processus stochastiques avec celles de l’analyse complexe a été développée par Schramm et ses collaborateurs Lawler et Werner au début des années 2000. L’évolution stochastique de Schramm-Loewner (SLE) est un concept majeur introduit dans ce contexte. Bien que SLE n’ait pas vraiment apporté de résultats nouveaux sur le

plan physique^k, il s'agit d'un nouveau point de vue, à la fois plus géométrique et plus "probabiliste" que la théorie des champs. Avec SLE, le lien avec les objets géométriques dans les modèles statistiques (les parois de domaine en particulier) est plus direct qu'avec les théories conformes habituelles. Evidemment, du point de vue mathématique, SLE est une approche correctement définie et rigoureuse qui permet de démontrer des théorèmes, et qui ne repose pas sur l'intuition de la théorie des champs. Dans cette section nous allons donner quelques arguments simples pour introduire SLE et pour relier cette approche au formalisme des théories conformes avec bord que nous avons vu jusqu'à présent. La discussion menée ici est inspirée de la référence [23], qui est beaucoup plus complète. La revue [24] est également très utile.

II.10.1 Conditions au bord et courbes dans le demi-plan

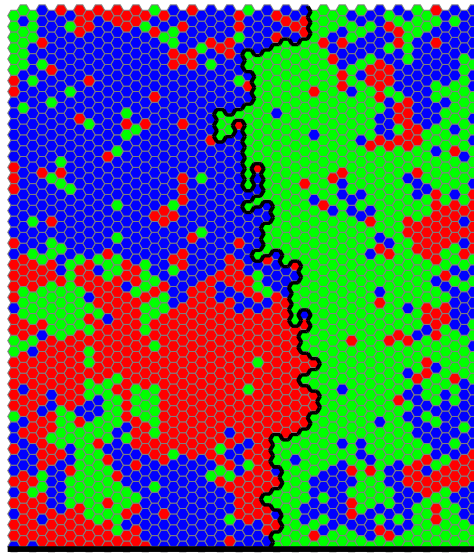


FIG. II.18 – Modèle de Potts à 3 états dans le demi-plan avec un changement de condition au bord à l'origine. Les spins sont bleus ou rouges à gauche et verts à droite.

Les objets géométriques auxquels on s'intéresse dans le cadre des modèles statistiques sur réseau à l'équilibre sont souvent des parois de domaine. Dans le modèle d'Ising par exemple, à n'importe quelle température, on peut s'intéresser au bord d'un domaine de magnétisation. Il n'y a pas forcément de limite d'échelle intéressante pour ces parois de domaine. En général, si le modèle n'est pas critique, il y a une tension superficielle associée à la longueur de l'interface entre deux domaines de magnétisation. Cette tension superficielle augmente sous le flot RG, et dans la limite d'échelle les interfaces disparaissent ou deviennent triviales. Si on considère le modèle d'Ising dans le demi-plan, avec les spins fixés à $+$ sur l'axe réel positif et à $-$ sur l'axe réel négatif (figure II.17), alors il existe toujours une interface partant de l'origine entre deux

^kLa quasi-totalité des résultats quantitatifs (exposants critiques, dimensions fractales, probabilités de traversée, etc.) obtenus depuis l'introduction de SLE avaient été calculés dans les vingt années précédentes par les physiciens, grâce à l'invariance conforme, à l'intégrabilité ou au gaz de Coulomb.

domaines d'aimantations $+$ et $-$. A très basse température cette paroi de domaine est une ligne droite, ce qui minimise l'énergie de surface entre les deux domaines. Au point critique, l'entropie compense la tension superficielle, et l'interface devient un objet fractal non trivial dans la limite continue. Au-delà du point critique, dans le modèle d'Ising, l'interface est toujours non-triviale : il s'agit d'un contour d'amas de percolation critique (cela est particulier au modèle d'Ising).

Dans le modèle d'Ising, ou dans la percolation, il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition de l'interface. Ces deux modèles sont définis en termes de spins $+$ et $-$, ou de sites (ou liens) “allumés” ou “éteints”, il est donc clair qu'il suffit de considérer la frontière entre ces deux sous-ensembles. Au point critique du modèle d'Ising, ou de la percolation, ces deux sous-ensembles sont interchangeables : on a une symétrie $\mathbb{Z}_2$ évidente qui passe de $+$ à $-$ ou de “allumés” à “éteints”.

En général, cependant, la définition d'une interface n'est pas si évidente. Dans le modèle de Potts à trois états, il est facile de définir les parois de domaines, mais celles-ci sont des objets ramifiés. Il n'est pas du tout évident que ces objets ont une limite d'échelle intéressante. Ce type d'interface branchée est, de toute façon, hors de portée de SLE. Il est plus facile de se restreindre à des courbes. Les courbes, si elles ont une limite continue non triviale, doivent être décrites par SLE ou une de ses variantes. Dans le modèle de Potts à 3 états (disons rouge, vert et bleu), on peut obtenir une courbe en suivant la paroi d'un domaine vert. Cette courbe sépare le domaine vert de tous les autres domaines rouges ou bleus qui sont en contact avec lui (figure II.18). Ce type d'interface a été étudié dans [25, 26], et il est conjecturé que cette courbe a une limite d'échelle non-triviale décrite par SLE.

Dans les exemples présentés ici, la courbe considérée est une interface entre deux types de conditions au bord. Du côté gauche de la courbe, on a un certain type de contrainte sur les spins. Ils sont fixés à $-$ dans le modèle d'Ising, et peuvent être bleus ou rouges dans le modèle de Potts. A droite de la courbe, les spins subissent une autre contrainte. Ils sont fixés à $+$ dans le modèle d'Ising, et sont verts dans le modèle de Potts. Le changement de contrainte de part et d'autre de la courbe est très similaire à un changement de condition au bord. En fait, dans le demi-plan (figures II.17 et II.18), l'interface est générée par un changement de condition au bord à l'origine.

II.10.2 L'équation de Loewner

Le point de départ de la théorie de Loewner est la transformation conforme

$$g_{t,0}(z) = \sqrt{z^2 + 4t} \quad (\text{II.120})$$

que nous avons déjà rencontrée dans la section précédente. Cette transformation envoie le demi-plan moins une fente de hauteur $2\sqrt{t}$, $\mathbb{H} \setminus \{z, z^2 \in [4t, 0]\}$, sur le demi-plan $\mathbb{H}$. On a bien sûr une transformation similaire pour une fente de hauteur $2\sqrt{t}$ au dessus d'un point a sur l'axe réel

$$g_{t,a}(z) = a + \sqrt{(z-a)^2 + 4t} \quad (\text{II.121})$$

La version infinitésimale de cette transformation s'écrit

$$dg_a(z) = g_{t+dt,a} \circ g_{t,a}^{-1}(z) = z + \frac{2 dt}{z-a} \quad (\text{II.122})$$

et on voit que l'on a $g_{t,a}(z) = dg_a \circ dg_a \circ dg_a \circ \dots \circ dg_a(z)$. L'idée de la théorie de Loewner est que l'on peut faire bouger le point a le long de l'axe réel à chaque étape infinitésimale. Si l'on connaît la position a_t , on peut construire la fonction $g_t(z)$ en intégrant l'équation de Loewner

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{z - a_t} \quad (\text{II.123})$$

La fonction g_t ainsi construite peut être développée en $z \rightarrow \infty$, on peut vérifier que

$$g_t(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots \quad (\text{II.124})$$

avec $\alpha_1 = 2t$. Elle envoie le demi-plan moins un certain domaine K_t sur le demi-plan $\mathbb{H}$. Quand la fonction a_t est suffisamment régulière, on peut montrer que le domaine K_t est une courbe simple, que l'on notera Γ_t . La théorie de Loewner permet donc de décrire l'évolution d'une

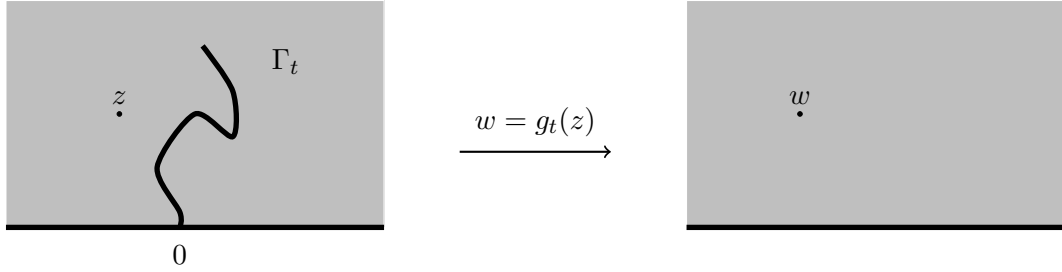


FIG. II.19 – La courbe Γ_t est décrite par la transformation conforme g_t qui envoie $\mathbb{H} \setminus \Gamma_t$ sur $\mathbb{H}$.

courbe comme un processus à une dimension : le mouvement du point a_t le long de l'axe réel. Mais on décrit en réalité plus que l'évolution de la courbe : on décrit toute la transformation conforme g_t à chaque instant t . Cela va jouer un rôle crucial dans la suite.

Quand la variation de a_t est moins régulière, plusieurs cas plus ou moins “sauvages” peuvent apparaître. Pour ce que nous allons discuter dans la suite, nous n'avons besoin que du cas où K_t peut toujours être associé à une courbe, mais où celle-ci a des points doubles. L'ensemble

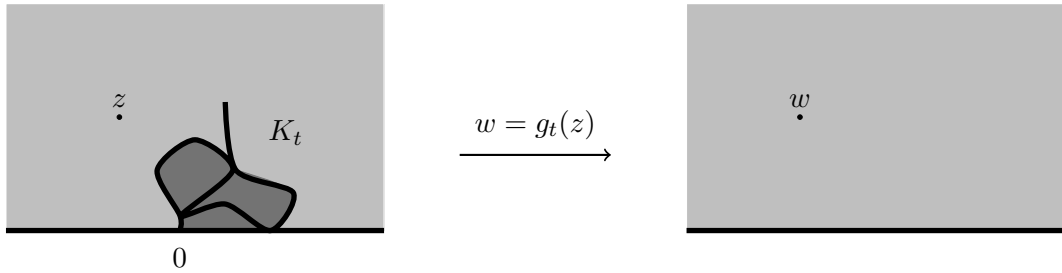


FIG. II.20 – La courbe Γ_t est décrite par la transformation conforme g_t qui envoie $\mathbb{H} \setminus \Gamma_t$ sur $\mathbb{H}$.

K_t est alors l'union de la courbe et du domaine enfermé à l'intérieur de celle-ci (figure II.20). Cette possibilité joue un rôle important dans la suite.

II.10.3 L'argument de Schramm. Evolution de Schramm-Loewner.

Dans [27], Schramm a introduit l'idée suivante. La notion d'invariance conforme pour des courbes qui rejoignent deux points au bord d'un domaine, par exemple l'origine et l'infini au bord du demi-plan $\mathbb{H}$, peut être formalisée facilement. Premièrement, il faut comprendre que l'on veut avoir une description probabiliste des interfaces. Pour cela, il est utile de considérer un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. On choisit deux points distincts x_1 et x_2 sur le bord de ce domaine. On veut définir une mesure $\mu_{\Omega, x_1, x_2}(\Gamma)$ sur l'ensemble des courbes Γ qui vont de x_1 à x_2 . Dans les exemples considérés précédemment, le domaine Ω est le demi-plan $\mathbb{H}$ et les points x_1 et x_2 correspondent à l'origine et à l'infini. Ensuite, en suivant Schramm, on voit que la notion d'invariance conforme peut être formulée précisément en deux propriétés sur la mesure μ .

- *Propriété de Markov de domaine.* Considérons une courbe $\Gamma \subset \Omega$ qui rejoint deux points x_1 et x_2 sur le bord du domaine Ω . On divise cette courbe en deux segments disjoints Γ_1 et Γ_2 qui se touchent en un point $x_3 \in \Gamma$. Alors la mesure conditionnelle $\mu_{\Omega, x_1, x_2}(\Gamma|\Gamma_1)$ est la même que $\mu_{\Omega \setminus \Gamma_1, x_3, x_2}(\Gamma_2)$.

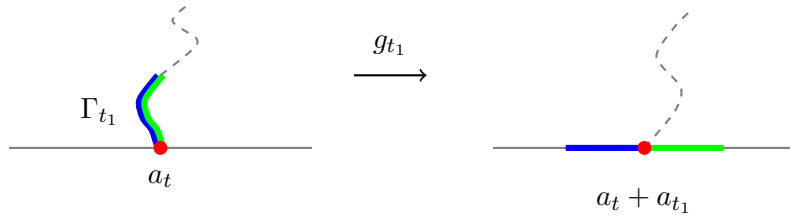
- *Invariance conforme.* Si φ est une transformation conforme qui envoie Ω sur Ω' , et que x_1 et x_2 sont des points sur le bord de Ω , la mesure $\mu(\Gamma, \Omega, x_1, x_2)$ induit une mesure $\varphi * \mu$ sur les courbes dans Ω' qui vont de $x'_1 = \varphi(x_1)$ à $x'_2 = \varphi(x_2)$, qui est simplement

$$(\varphi * \mu_{\Omega, x_1, x_2})(\Gamma') = \mu_{\Omega, x_1, x_2}(\varphi^{-1}(\Gamma')) \quad (\text{II.125})$$

La propriété d'invariance conforme est vérifiée si $\varphi * \mu_{\Omega, x_1, x_2} = \mu_{\Omega', x'_1, x'_2}$.

Ces deux propriétés sont naturelles si l'on voit μ_{Ω, x_1, x_2} comme la mesure obtenue dans la limite continue d'un modèle statistique critique. Elles sont en général très difficiles à prouver de manière rigoureuse, mais pour la physique, elles peuvent être admises au même titre que l'invariance conforme en théorie des champs.

Les deux propriétés peuvent être couplées à la théorie de Loewner, et sont très contraignantes. Considérons une courbe Γ qui va de l'origine à l'infini dans le demi-plan $\mathbb{H}$. Cette courbe est décrite par une équation de Loewner avec un processus a_t . Notons Γ_1 au temps t_1 , définie par la transformation g_{t_1} . Si $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$, la propriété de Markov de domaine implique $\mu_{\mathbb{H}, 0, \infty}(\Gamma|\Gamma_1) = \mu_{\mathbb{H} \setminus \Gamma_1, g_{t_1}^{-1}(0), \infty}(\Gamma_2)$. L'invariance conforme implique $\mu_{\mathbb{H} \setminus \Gamma_1, g_{t_1}^{-1}(a_{t_1}), \infty}(\Gamma_2) = \mu_{\mathbb{H}, a_{t_1}, \infty}(g(\Gamma_2))$.



On voit donc que la mesure obtenue par conditionnement puis par la transformation conforme g_{t_1} est la même que la mesure de départ, translatée de a_{t_1} . Si $t > t_1$, on voit donc que la distribution de $a_t - a_{t_1}$ est la même que celle de a_{t-t_1} . Cela implique que, pour n'importe quel $\delta t > 0$, les incréments $a_{t+\delta t} - a_t$ sont des variables aléatoires indépendantes distribuées identiquement. Le processus a_t doit donc être un mouvement brownien avec éventuellement un terme de dérive $a_t = \sqrt{\kappa} B_t + v t$. Si la mesure μ a une symétrie par réflexion gauche/droite, le terme de dérive doit être nul : $v = 0$. Les arguments présentés ici constituent le coeur de l'argument de Schramm.

Théorème (Schramm). Si la mesure $\mu_{\mathbb{H},0,\infty}(\Gamma)$ vérifie les deux propriétés ci-dessus (Markov et invariance conforme), et est symétrique sous une réflexion gauche/droite, alors le processus a_t est un mouvement brownien.

On définit de cette façon l'évolution de Schramm-Loewner SLE_κ

$$\begin{cases} dg_t(z) &= \frac{2dt}{g_t(z)-a_t} \\ da_t &= \sqrt{\kappa} dB_t \end{cases} \quad (\text{II.126})$$

B_t est un mouvement brownien normalisé : $\langle (B_t - B_{t'})^2 \rangle = |t - t'|$. Pour différentes valeurs de κ , SLE_κ correspond à des classes d'universalité différentes.

Comportements de SLE_κ .

- $\kappa < 4$. Dans ce cas on a une courbe simple Γ_t (figure II.19), qui ne touche pas le bord, et ne se touche pas elle-même (presque sûrement).

- $4 \leq \kappa < 8$. On a toujours une courbe, mais celle-ci possède (presque sûrement) des points doubles (figure II.20).

- $\kappa \geq 8$. Dans ce cas la courbe remplit presque sûrement tout le plan. Elle est de dimension fractale 2.

II.10.4 SLE/CFT

Nous allons maintenant revenir au formalisme traditionnel des théories conformes. On considère une théorie conforme qui décrit la limite continue d'un modèle statistique dans le demi-plan. On a un changement de condition au bord à l'origine, traduit dans le formalisme par un opérateur B.C.C Φ en 0. Ce changement de condition au bord génère, dans le modèle statistique, une interface qui sépare les deux domaines associés à ces deux conditions au bord (voir les exemples sur les figures II.17 et II.18). On suppose que, dans la limite continue, cette interface est décrite par SLE_κ pour un certain κ . Notre but est d'identifier l'opérateur B.C.C Φ qui est responsable de la création de cette interface.

Afin de voir quel type de contraintes doit satisfaire l'opérateur Φ , nous allons adapter l'argument de Schramm dans le langage de la quantification radiale. Considérons le demi-plan $\mathbb{H}$ avec un opérateur B.C.C. Φ inséré en 0. En quantification radiale, ceci est représenté par l'état

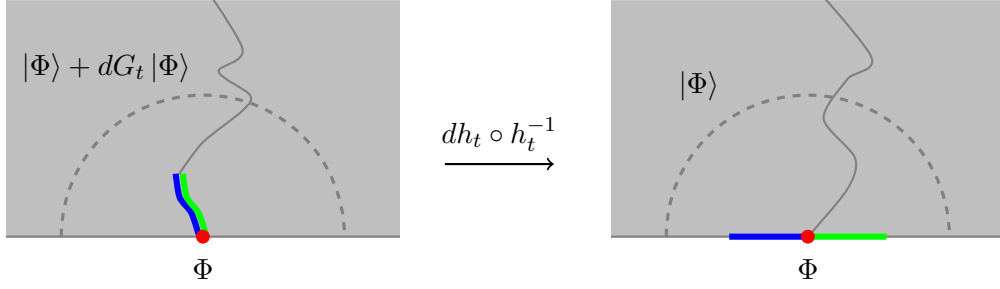


FIG. II.21 – Equivalent de l'argument de Schramm dans le formalisme habituel des théories conformes : la quantification radiale. La transformation infinitésimale $z \mapsto z + dh_t \circ h_t^{-1}(z)$ se traduit par une action dG_t sur l'état $|\Phi\rangle$.

$|\Phi\rangle$. On utilise maintenant la transformation conforme infinitésimale $z \mapsto z + dh_t \circ h_t^{-1}(z)$ où $h_t = g_t - a_t$, et g_t est donnée en (II.126). La translation da_t est introduite pour que l'opérateur B.C.C reste toujours à l'origine. Noter que la transformation h_t vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dh_t = \frac{2dt}{h_t} - \sqrt{\kappa} dB_t \quad (\text{II.127})$$

On arrive à la géométrie de la figure II.21 (droite), qui est la même que la géométrie de départ. La transformation $dh_t \circ h_t^{-1}$ n'a donc pas modifié l'état $|\Phi\rangle$.

Pourtant, la transformation infinitésimale $dh_t \circ h_t$ n'est pas triviale. Nous allons pouvoir utiliser le résultat (II.94) de la section II.9. Pour n'importe quelle fonction F définie sur $\mathbb{H}$, les transformations conformes h_t agissent par composition $h_t \cdot F = F \circ h_t$. Pour une transformation infinitésimale stochastique $dh_t \circ h_t^{-1}(z) = \frac{2dt}{z} + \sqrt{\kappa} dB_t$, l'action sur F doit être calculée avec la formule d'Itô. On trouve

$$\begin{aligned} dF(z) &= F \circ (h_t + dh_t) \circ h_t^{-1}(z) - F(z) \\ &= F\left(z + \frac{2}{z}dt - \sqrt{\kappa}B_t\right) - F(z) \\ &= \left(\frac{2}{z}F' + \frac{\kappa}{2}F''\right)dt - \sqrt{\kappa}F' dB_t \\ &= \left(-2\ell_{-2} + \frac{\kappa}{2}\ell_{-1}^2\right)dt + \sqrt{\kappa}dB_t \ell_{-1} \end{aligned} \quad (\text{II.128})$$

où l'on a utilisé les générateurs de l'algèbre de Witt $\ell_n = -z^{n+1}\partial_z$. Nous avons vu en (II.94) que l'on peut transposer ce type d'expression dans l'algèbre de Virasoro. La transformation infinitésimale $z \mapsto z + dh_t \circ h_t^{-1}(z)$ se traduit par une action sur l'état $|\Phi\rangle$

$$|\Phi\rangle \mapsto |\Phi\rangle + dG|\Phi\rangle = |\Phi\rangle + \left(-2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}L_{-1}^2\right)dt + \sqrt{\kappa}dB_t L_{-1}|\Phi\rangle \quad (\text{II.129})$$

Puisque $dh_t \circ h_t^{-1}$ ne modifie pas l'état $|\Phi\rangle$, on doit avoir $dG|\Phi\rangle = 0$. Plus précisément, cette équation doit être vraie quand on évalue une quantité physique dans la théorie, c'est-à-dire quand

l'état $dG|\Phi\rangle$ est utilisé dans une fonction de corrélation, par exemple $\langle\Phi(z_1, \bar{z}_1)\Phi(z_2, \bar{z}_2)\dots dG|\Phi\rangle = 0$. Dans ce type de fonction de corrélation, on doit moyenner sur les réalisations du mouvement Brownien B_t , le terme $\sqrt{\kappa} dB_t L_{-1}|\Phi\rangle$ a donc toujours une contribution nulle. Par contre, le terme proportionnel à dt donne une contrainte non-triviale

$$\left(-2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}L_{-1}^2\right)|\Phi\rangle = 0 \quad (\text{II.130})$$

Cette relation est bien connue comme étant l'équation de dégénérescence au niveau 2 dans le déterminant de Kac [6]. Pour κ fixé, il n'y a qu'une valeur possible pour la dimension conforme de l'opérateur Φ . Il s'agit de

$$h = \frac{6 - \kappa}{2\kappa} \quad (\text{II.131})$$

qui peut être écrite $h_{1,2}$ ou $h_{2,1}$ en utilisant les notations de Kac [6], selon que $\kappa > 4$ ou $\kappa < 4$ respectivement. La charge centrale de la théorie est également fixée en fonction de κ

$$c = \frac{(6 - \kappa)(3\kappa - 8)}{2\kappa} \quad (\text{II.132})$$

et l'on voit apparaître ici le fait que deux valeurs de κ peuvent correspondre à une même charge centrale c . L'une est supérieure à 4, l'autre inférieure à 4. Nous reviendrons sur cette dualité dans le chapitre suivant.

Bibliographie

- [1] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 4^e Ed., Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [2] R.J. Baxter, *Exactly solved models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [3] G. Mussardo, *Statistical Field Theory. An introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
- [4] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [5] J.L. Cardy, *Conformal invariance and critical surface behaviour*, Nucl. Phys. **B 240**, 514, 1984.
- [6] P. di Francesco, P. Matthieu & D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [7] J. Polchinski, *String Theory : an introduction to the bosonic string*, Cambridge Monographs in Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1998.
- [8] N. Ishibashi, *The boundary and crosscap states in conformal field theories*, Mod. Phys. Lett. **A 4**, 251, 1988.
- [9] J.L. Cardy, *Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula*, Nucl. Phys. **B 324**, 581, 1989.
- [10] J.L. Cardy, *Conformal field theory and statistical mechanics*, in *Exact Methods in Low-Dimensional Statistical Physics and Quantum Computing*, Ecole de Physique des Houches, Session LXXXIX, 2008.
- [11] J.L. Cardy, *Boundary Conformal Field Theory*, Encyclopedia of Mathematical Physics, Elsevier, 2006.
- [12] V.B. Petkova & J.-B. Zuber, *Conformal Boundary Conditions and what they teach us*, Lecture given at the *Summer School and Conference on Nonperturbative Quantum Field Theoretic Methods and Their Applications*, Budapest, Hungary, August 2000.
- [13] R.E. Behrend, P.A. Pearce & J.-B. Zuber, *Integrable Boundaries, Conformal Boundary Conditions and ADE Fusion rules*, J. Phys. **A 31**, L73-L770, 1998.
- [14] R.E. Behrend, P.A. Pearce, V. Petkova & J.-B. Zuber, *On the classification of Bulk and Boundary Conformal Field Theories*, Phys. Lett. **B 444**, 163-166, 1998.
- [15] R.E. Behrend, P.A. Pearce, V. Petkova & J.-B. Zuber, *Boundary conditions in rational conformal field theories*, Nucl. Phys. **B 579**, 707-773, 2000.

- [16] I. Affleck & A.W.W. Ludwig, *Universal noninteger “ground-state degeneracy” in critical quantum systems*, Phys. Rev. Lett. **67**, 161-164, 1991.
- [17] A.B. Zamolodchikov, *“Irreversibility” of the flux of the renormalization group in a 2D field theory*, JETP Lett. **43**, No. 12, 565-567, 1986.
- [18] D. Friedan & A. Konechny, *On the boundary entropy of one-dimensional quantum systems at low temperatures*, Phys. Rev. Lett. **93**, 030402, 2004.
- [19] M. Bauer & D. Bernard, *Conformal field theories of Stochastic Loewner Evolutions*, Commun. Math. Phys. **239**, 493-521, 2003.
- [20] J.L. Cardy, I. Peschel, *Finite-size dependence of the free energy in two-dimensional critical systems*, Nucl. Phys. **B 300**, 377, 1988.
- [21] P. Kleban & I. Vassileva, *Free energy of rectangular domains at criticality*, J. Phys. A : Math. Gen. **24**, 3407, 1991.
- [22] P. Kleban & D. Zagier, *Crossing probabilities and modular forms*, J. Stat. Phys. **113**, 431-454, 2003.
- [23] M. Bauer & D. Bernard, *2D growth processes : SLE and Loewner chains*, Physics Reports **432**, 115, 2006.
- [24] J.L. Cardy, *SLE for theoretical physicists*, Annals of Physics **318**, 81-118, 2005.
- [25] A. Gamsa & J.L. Cardy, *Schramm-Loewner Evolution in the three-state Potts model—a numerical study*, J. Stat. Mech. P08020, 2007.
- [26] R. Santachiara, *SLE in self-dual critical $Z(N)$ spin systems : CFT predictions*, Nucl. Phys. **B 793**, 396, 2008.
- [27] O. Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel Journal of Mathematics **118**, 221-288, 2000.

CHAPITRE III

Le gaz de boucles : pourquoi ?

Les gaz de boucles sont des modèles statistiques classiques dont les configurations sont données par des objets géométriques : les boucles. Ces boucles peuvent, par exemple, correspondre aux parois de domaines de modèles locaux, tels que le modèle d'Ising ou certaines de ses généralisations, en particulier les modèles RSOS^a. Dans d'autres cas, certains de ces modèles n'ont pas d'interprétation directe en termes de degrés de liberté locaux. C'est précisément là que réside la particularité des modèles de boucles. D'un côté, le fait que ces modèles soient plus généraux que les modèles statistiques locaux habituels permet d'accéder à des observables non-locales qui n'apparaissent pas d'habitude. Par exemple, on peut penser aux propriétés des amas de la percolation critique en 2D, ou aux amas des domaines de magnétisation du modèle d'Ising. D'un autre côté, la définition de ces modèles n'est souvent pas très naturelle, ce qui, en dehors de quelques cas particuliers identifiés depuis longtemps^b, ne les rend pas vraiment intéressants pour la physique réelle.

Dans ce chapitre, nous allons motiver l'introduction des modèles de boucles comme des reformulations de modèles historiques de la physique statistique à l'équilibre : le modèle de Potts et le modèle $O(n)$. Nous allons mettre l'accent sur les liens entre ces modèles et les théories conformes, à plusieurs niveaux. Premièrement, la construction historique du gaz de Coulomb est naturelle dans le cadre des modèles de boucles, et, bien qu'étant rarement complètement satisfaisante, elle permet néanmoins d'obtenir une connexion directe entre un modèle sur réseau et la théorie continue qui le décrit. Ensuite, les boucles sont des objets géométriques qui ont des reformulations naturelles dans le contexte de SLE. Enfin, les modèles de boucles reposent sur une structure algébrique sous-jacente, l'algèbre de Temperley-Lieb, qui possède des similitudes profondes avec l'algèbre de Virasoro. Certaines caractéristiques algébriques de la théorie conforme peuvent ainsi être repérées simplement au niveau du modèle sur réseau.

Ce chapitre traite de propriétés génériques des modèles de boucles. Les conditions au bord que nous avons étudiées dans cette thèse apparaîtront au chapitre suivant.

^a“Restricted Solid On Solid”.

^bEn plus des deux exemples déjà cités, on peut ajouter les polymères en 2D.

III.1 Le modèle $O(n)$ sur réseau hexagonal.

Nous allons commencer par le modèle le plus commun qui puisse être reformulé comme un modèle de boucles. Il s'agit du modèle $O(n)$. Comme nous l'avons vu dans le chapitre I, de Gennes a mis en avant l'analogie entre la physique des polymères et les modèles classiques de transition paramagnétique/ferromagnétique. C'est de la même analogie qu'il s'agit ici.

On considère un réseau hexagonal, avec un spin à n composantes S_i^α , $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ sur chaque site i . Les spins sont tous normalisés : $\sum_\alpha (S_i^\alpha)^2 = \text{cste}$. La fonction de partition du modèle est définie par

$$Z = \text{tr} \left[\prod_{\langle ij \rangle} (1 + x S_i^\alpha S_j^\alpha) \right] \quad (\text{III.1})$$

où les $\langle ij \rangle$ sont les paires de sites voisins sur le réseau. La normalisation des spins peut être choisie de manière que la trace sur les configurations vérifie

$$\text{tr}[1] = 1 \quad (\text{III.2a})$$

$$\text{tr}[S_i^\alpha S_i^\beta] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{III.2b})$$

Par symétrie $S_i^\alpha \mapsto -S_i^\alpha$, on a aussi $\text{tr}[S_i^\alpha] = \text{tr}[S_i^\alpha S_i^\beta S_i^\gamma] = 0$. En développant le produit dans (III.1), on voit que les seuls termes qui vont contribuer à la fonction de partition sont de la forme $(S_{i_1}^{\alpha_1} S_{i_2}^{\alpha_1}) (S_{i_2}^{\alpha_2} S_{i_3}^{\alpha_2}) \dots (S_{i_k}^{\alpha_k} S_{i_1}^{\alpha_k})$. Ces termes peuvent être représentés comme des boucles sur le réseau hexagonal, et chacun d'entre eux a une trace n . On arrive ainsi à une

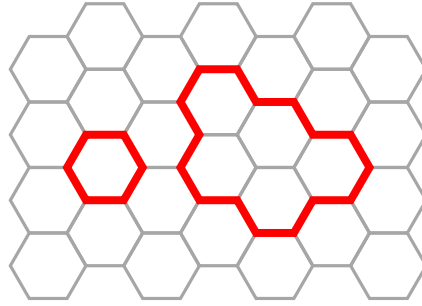


FIG. III.1 – Développement en boucles du modèle $O(n)$ sur réseau hexagonal. Chaque boucle a un poids $x^{\text{longueur}} n$.

nouvelle expression de la fonction de partition (III.1)

$$Z = \sum_{\text{conf.}} x^{\text{longueur}} n^{N_{\text{boucles}}} \quad (\text{III.3})$$

Dans (III.3), le paramètre n intervient comme un paramètre. Ce modèle de boucles réalise donc une continuation analytique du modèle $O(n)$ pour n'importe quel n réel, même négatif. Notons encore que la correspondance spins/boucles dans ce modèle ne s'arrête pas à la fonction de

partition Z . La fonction à deux points $\langle S_i^\alpha S_j^\alpha \rangle$, par exemple, est exprimée en termes de boucles comme la somme de toutes les configurations d'une chaîne reliant i à j , qui évolue au milieu du gaz de boucles. Dans le cas où $n \rightarrow 0$, ces boucles disparaissent et la chaîne peut être vue comme la modélisation d'un polymère unique dans un solvant (chapitre I).

III.2 Formulation du modèle de Potts à la Fortuin-Kasteleyn

Le modèle de Potts à Q peut être formulé comme un modèle de percolation généralisé. Cette formulation est due à Fortuin et Kasteleyn [1]. La fonction de partition du modèle de Potts est

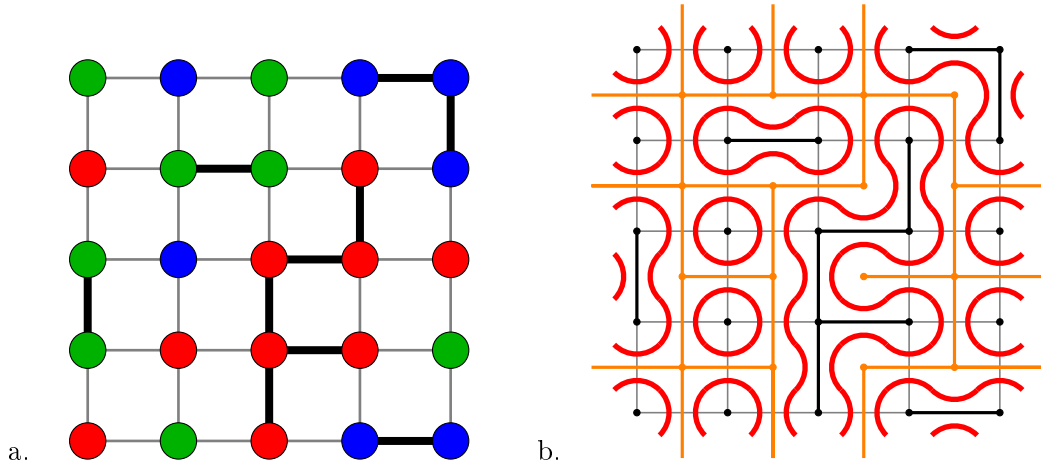


FIG. III.2 – Spins du modèle de Potts et amas FK (a), et modèle de boucles (b).

donnée par

$$Z = \sum_{\sigma} \prod_{\langle ij \rangle} e^{K \delta_{\sigma_i \sigma_j}}. \quad (\text{III.4})$$

L'idée de Fortuin et Kasteleyn est de développer le terme d'interaction $e^{K \delta_{\sigma_i \sigma_j}} = 1 + (e^K - 1) \delta_{\sigma_i \sigma_j}$, et d'interpréter ces deux contributions comme venant d'un degré de liberté supplémentaire vivant sur les liens du réseau de départ. Si deux spins de Potts voisins ont des couleurs différentes, ce degré de liberté n'apparaît pas. Mais s'ils ont la même couleur, on peut "allumer" ou non le lien, avec des poids $e^K - 1$ ou 1 respectivement. Autrement dit, on a maintenant des amas de percolation (ou *amas FK*) qui vivent sur les amas de spins (figure III.2.a). Pour une configuration de spins donnée, chaque configuration d'amas FK a un poids $(e^K - 1)^{N_{\text{liens FK}}}$. On peut alors prendre la trace sur les configurations de spins : chaque amas FK prend une couleur qui doit être choisie indépendamment. On arrive ainsi à la fonction de partition

$$Z = \sum_{\text{amas FK}} (e^K - 1)^{N_{\text{liens FK}}} Q^{N_{\text{amas FK}}} \quad (\text{III.5})$$

En regardant le contour des amas FK, on obtient des configurations de boucles (figure III.2.b). La relation d'Euler permet de relier le nombre d'amas FK au nombre d'amas FK duaux (en

orange sur la figure III.2.b), et de voir que le nombre de boucles est ainsi relié au nombre d'amas FK à un facteur 2 près

$$\begin{aligned}
N_{\text{amas FK}} &= N_{\text{sommets}} - N_{\text{liens FK}} + N_{\text{amas FK duaux}} \\
\Rightarrow N_{\text{boucles}} &= N_{\text{amas FK}} + N_{\text{amas FK duaux}} \\
&= 2 N_{\text{amas FK}} + N_{\text{liens FK}} - N_{\text{sommets}}
\end{aligned} \tag{III.6}$$

La fonction de partition (III.2) devient

$$Z \propto \sum_{\text{conf.}} \sqrt{Q}^{N_{\text{boucles}}} \left(\frac{e^K - 1}{\sqrt{Q}} \right)^{N_{\text{liens FK}}} \tag{III.7}$$

avec un facteur constant indépendant de la configuration. Puisque $N_{\text{liens FK}} + N_{\text{liens FK duaux}} = \text{cte}$, on voit que cette formulation a le mérite de faire apparaître de manière limpide la dualité de Kramers-Wannier [2]. En effet, en passant du réseau carré au réseau carré dual, on voit que l'on a : $\frac{e^K - 1}{\sqrt{Q}} \mapsto \frac{\sqrt{Q}}{e^K - 1}$. Le point critique sur ce réseau est donc situé en $e^K = 1 + \sqrt{Q}$. La fonction de partition dans ce cas est similaire à celle du modèle $O(n)$ avec $n = \sqrt{Q}$ (III.3), mais puisqu'ici les boucles couvrent tout le réseau, la longueur totale de celles-ci est une constante. Il n'y donc pas besoin d'un paramètre x de couplage à la longueur des boucles.

III.3 Quelques idées sur le gaz de Coulomb

Le succès des modèles de boucles et du gaz de Coulomb [3] dans les années 80 tient au fait que de nombreux résultats exacts ont pu être dérivés avec des techniques qui restent élémentaires sur le plan calculatoire.

Pour construire le gaz de Coulomb à partir d'un modèle de boucles, on commence par orienter celles-ci indépendamment les unes des autres. Pour une configuration donnée, il y a $2^{N_{\text{boucles}}}$ choix possibles. Une boucle orientée a un poids de Boltzmann $e^{\pm i\gamma}$ selon son orientation. La trace sur les deux orientations donne le poids total d'une boucle $n = e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}$. Il est important de remarquer que ceci peut être formulé localement : un morceau de boucle qui tourne d'un angle α prend une phase $e^{i\gamma \frac{\alpha}{2\pi}}$. Les boucles orientées sont maintenant vues comme les lignes de niveau d'un modèle de hauteur. On a donc un champ $h(x)$ défini en chaque point de l'espace. En traversant une boucle, le champ $h(x)$ varie de $\Delta h = \pm\pi$ selon l'orientation^c. L'hypothèse centrale sur laquelle repose toute la construction est que ce modèle de hauteur est attiré vers un champ libre gaussien sous le flot RG

$$S[h] = \frac{g}{4\pi} \int (\partial h)^2 d^2x. \tag{III.8}$$

La constante de couplage g n'est pas libre, puisque la normalisation de h est fixée par le fait que $h \in \pi\mathbb{Z}$ dans le modèle de départ (avant l'évolution sous le flot RG). g sera fixée plus tard en fonction de $n = 2 \cos \gamma$.

^cLe choix $|\Delta h| = \pi$ est une convention, on pourrait évidemment choisir n'importe quelle autre valeur.

On sait bien que la charge centrale d'un boson libre vaut $c = 1$, ce qui implique a priori que l'on ne peut décrire que des théories à $c = 1$ avec une telle construction. Pour permettre au gaz de Coulomb d'atteindre d'autres valeurs de c , il faut introduire des charges "écran". Pour voir cela on peut considérer le modèle de boucles sur le cylindre. Les boucles orientées contractibles tournent toutes d'un angle total $\alpha \pm 2\pi$ et ont donc un poids $e^{\pm i\gamma}$ comme attendu, mais cela n'est pas vrai des boucles qui s'enroulent autour du cylindre. Ces boucles font un tour complet autour du cylindre avec $\alpha = 0$, elles ne sont donc pas comptées correctement. Pour corriger cela, on doit ajouter un terme à l'action (III.8)

$$S'[h] = \frac{i\gamma}{\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) - h(-x)) \quad (\text{III.9})$$

Si on a une configuration de boucles orientées avec k boucles qui tournent dans le même sens autour du cylindre, alors la différence de hauteur entre les deux extrémités du cylindre est $\Delta h = k\pi$, ce qui donne un facteur $e^{\pm i\gamma k}$. Les boucles non-contractibles sont donc comptées correctement grâce au terme (III.9).

Le terme (III.9) dans l'action modifie la forme du tenseur énergie-impulsion et la dimension d'échelle des opérateurs de vertex $e^{i\alpha h}$

$$\Delta_\alpha = \frac{g}{4} [(\alpha + \gamma/\pi)^2 - (\gamma/\pi)^2]. \quad (\text{III.10})$$

La constante de couplage g peut maintenant être fixée par l'argument suivant. Le modèle de départ est défini avec $h \in \pi\mathbb{Z}$, l'opérateur $\cos 2h$ devrait donc être marginal. On attend donc $\Delta_2 = 2$, ce qui permet deux solutions pour g

$$g = 1 \pm \frac{\gamma}{\pi}. \quad (\text{III.11})$$

Chacune de ces deux solutions définit une théorie conforme. Ces deux théories ne sont pas équivalentes. Physiquement, plus la constante de couplage est grande, plus le profil de h doit être plat, donc plus les boucles doivent être des objets étendus et "lisses". Au contraire, si g est petit les boucles sont des objets plus "sauvages". Nous allons définir plus précisément le comportement de ces objets géométriques dans la section suivante. Dans le cas $g > 1$ on parlera de modèle *dilué*, et dans le cas $g < 1$, de modèle *dense*.

Pour obtenir la charge centrale de la théorie conforme que l'on est en train de construire avec ce gaz de Coulomb, on peut évaluer la fonction de partition sur un cylindre de taille $T \times L$ (T dans la direction périodique). Dans la limite où le cylindre est très long ($L \gg T$), on doit avoir $Z \sim e^{-\frac{\pi c}{6} \frac{L}{T}}$. Dans le cas présent, on a $Z \sim e^{-\frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{(\gamma/\pi)^2}{6g}\right) \frac{L}{T}}$, ce qui donne dans les deux cas (dense et dilué) :

$$c = 1 - \frac{1}{6} (\sqrt{g} - 1/\sqrt{g})^2. \quad (\text{III.12})$$

Le gaz de Coulomb permet également d'obtenir tout un spectre d'exposants critiques. Ces exposants "magnétiques" ou "électriques" correspondent au passage de boucles en un point (exposants à k *pattes*), ou à un changement du poids des boucles qui tournent autour d'un point particulier. Ces exposants sont décrits en détail dans de nombreuses revues [3, 4], nous n'allons pas

insister sur ce point ici. En général, il est utile d'utiliser la formule de Kac pour paramétrer ces exposants

$$h_{r,s} = \frac{(gr - s)^2 - (g - 1)^2}{4g} \quad g \geq 1 \text{ (dilué)} \quad (\text{III.13a})$$

$$h_{r,s} = \frac{(r - gs)^2 - (1 - g)^2}{4g} \quad g < 1 \text{ (dense)} \quad (\text{III.13b})$$

Les formules (III.12) et (III.13) font apparaître la *dualité dense/dilué*. Deux modèles de boucles différents, l'un dilué et l'autre dense^d, mènent à deux théories conformes qui ont la même charge centrale. On peut passer de l'une à l'autre en changeant g en $1/g$.

III.4 A quoi ressemble la limite continue ? Boucles et SLE.

Nous allons maintenant donner quelques caractéristiques géométriques des modèles de boucle dans la limite continue. Pour cela, il est utile de revenir au modèle $O(n)$ (section III.1), dont la fonction de partition est donnée en termes des configurations de boucles sur le réseau hexagonal par la fonction de partition déjà vue en III.3

$$Z = \sum_{\text{conf.}} x^{\text{longueur}} n^{N_{\text{boucles}}}. \quad (\text{III.14})$$

En variant le paramètre x , on obtient le diagramme de phase de la figure III.3 quand $-2 < n \leq 2$. Au-delà de $n = 2$, le modèle n'a plus de point critique à cause du théorème de Mermin-Wagner [5].

Les principales caractéristiques des boucles sont les suivantes^e.

- *Phase massive*. Quand $x < x_c$ les boucles les plus longues sont très pénalisées dans la fonction de partition III.3. Il y a une longueur caractéristique finie qui correspond à la taille typique des boucles. Clairement, sous le flot RG, cette phase est attirée par le point fixe trivial $x = 0$. A ce point il ne subsiste plus aucune boucle, le réseau est complètement vide.
- *Phase dense*. Quand $x > x_c$, les boucles prolifèrent. Certaines d'entre elles sont très grandes, et la taille caractéristique des boucles est infinie. Dans la limite continue, le contour d'une boucle correspond à un SLE_κ avec $\kappa > 4$. Les boucles ont donc de nombreux points doubles : chaque boucle se touche elle-même une infinité de fois avec probabilité 1, et elle touche également ses voisines. Du point de vue des théories conformes classiques, cette phase est décrite par un gaz de Coulomb avec $g < 1$. La constante de couplage g et le paramètre κ sont reliés par $g = \frac{4}{\kappa}$, et le poids des boucles est donné par $n = -2 \cos(\pi g)$.
- *Point critique dilué*. Quand $x = x_c$, il y a également des boucles de tailles arbitrairement grandes. Néanmoins, la limite continue est très différente du cas dense. Les boucles n'ont cette fois pas de point double et ne se touchent pas entre elles. Les boucles sont décrites par SLE_κ

^dNoter que le poids des boucles n n'est pas le même pour ces deux modèles.

^eIl y a un point fixe non trivial dont nous ne parlons pas ici quand $x = \infty$. Dans ce cas tous les sites du réseau hexagonal doivent être traversés par une boucle. Ce point fixe est instable sous le flot RG. Il correspond à une théorie conforme avec une charge centrale $c \leq 2$. Pour plus de détails sur cette théorie, voir [6].

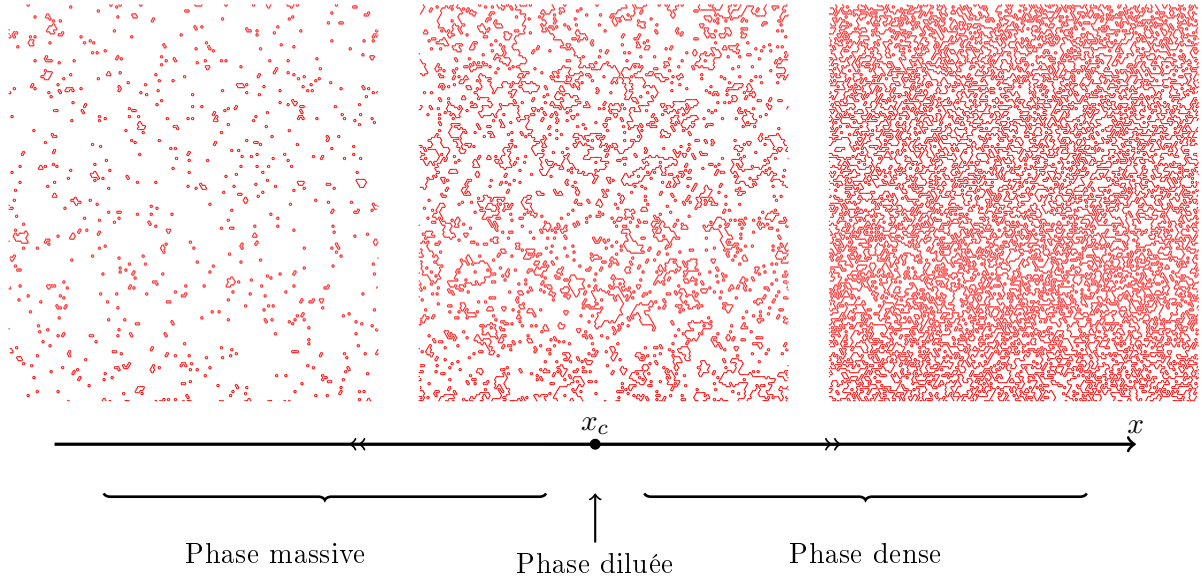


FIG. III.3 – Diagramme de phase du modèle $O(n)$ pour $-2 < n \leq 2$, et configurations typiques dans la phase massive, la phase diluée et la phase dense.

avec $\kappa < 4$ dans ce cas, ou par le gaz de Coulomb avec $g > 1$. On a à nouveau $g = \frac{4}{\kappa}$ avec $n = -2 \cos(\pi g)$. On parlera parfois de *phase diluée* par abus de langage, mais il s'agit bien d'un point critique répulsif sous le flot RG.

Conjecture de Nienhuis : la valeur du couplage critique x_c sur le réseau hexagonal est connue exactement. Elle a été découverte par Nienhuis [7], qui a supposé que le point critique sur réseau hexagonal coïncidait avec un point particulier d'un modèle $O(n)$ généralisé défini sur réseau carré. Ce dernier n'est intégrable au sens de Yang-Baxter que pour des poids de Boltzmann particuliers, qui mènent à la valeur $x_c = \sqrt{2 + \sqrt{2 - n}}$ sur réseau hexagonal. Il y a également un point intégrable dans la phase dense (figure III.3), qui correspond à la valeur $x = \sqrt{2 - \sqrt{2 - n}}$. La validité de ce résultat est incontestable, néanmoins il apparaît dans la littérature mathématique comme une conjecture ouverte^f.

Dans cette section nous n'avons parlé que du modèle $O(n)$, mais le modèle de Potts en formulation de Fortuin-Kasteleyn possède la même limite continue. Plus précisément, bien que ce modèle soit différent du modèle $O(n)$ sur le réseau, son point critique (ou autodual pour la dualité de Kramers-Wannier) est en fait dans la même classe d'universalité que la phase dense du modèle $O(n)$. La discussion des propriétés géométriques des boucles s'applique donc aussi au modèle de Potts.

^fPour les valeurs $n = 1$ (modèle d'Ising) et $n = 0$, ce résultat a été démontré par Smirnov et ses collaborateurs [8, 9].

III.5 Boucles et algèbre de Temperley-Lieb.

Nous avons introduit les modèles de boucles comme des modèles statistiques 2D dont les configurations sont données par des boucles dessinées sur les liens d'un réseau carré ou hexagonal. Ce point de vue est utile, par exemple, pour faire le lien avec le gaz de Coulomb ou *SLE*. Néanmoins, quand on veut "résoudre" ces modèles, on veut en général réduire le problème à la diagonalisation d'une matrice de transfert ou d'un Hamiltonien, et l'on adopte dans ce cas un point de vue 1+1D. Il existe un objet algébrique naturel et profond qui permet de formaliser ce passage en 1+1D dans le cas des modèles de boucles : l'algèbre de Temperley-Lieb [10]. Dans cette section, nous donnons les idées de base qui concernent cette algèbre, et dans la section suivante nous discuterons les raisons pour lesquelles l'algèbre de Temperley-Lieb est intéressante dans le cadre des théories conformes. Pour un traitement plus mathématique, il existe de nombreuses références utilisant un vocabulaire plus ou moins formel dans la littérature. Dans cette thèse, nous n'insistons pas sur ces aspects techniques, et nous éviterons le vocabulaire pédant autant que possible.

Les éléments de l'algèbre de Temperley-Lieb peuvent être écrits comme des diagrammes. Sur chaque diagramme, il y a N sites en bas et N sites en haut. Ces sites sont attachés deux par deux par des liens qui ne se croisent pas. Par exemple sur 3 sites on peut dessiner les 5 diagrammes suivants

$$||| \quad | \cup \quad \cup | \quad \cup \diagdown \quad \diagup \cup$$

Il n'y a pas d'autres diagrammes pour 3 sites, l'algèbre de Temperley-Lieb est donc de dimension $d_3 = 5$ dans ce cas. Il est très facile d'évaluer la dimension de l'algèbre sur N sites. La fonction génératrice des dimensions d_N vaut

$$\sum_N d_N z^N = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} \quad (\text{III.15})$$

donc les dimensions d_N sont simplement les nombres de Catalan

$$d_N = \frac{1}{N+1} \binom{2N}{N}. \quad (\text{III.16})$$

N'importe quel élément de l'algèbre peut être écrit comme une somme de ces diagrammes avec des coefficients réels. Le produit de deux diagrammes est obtenu par concaténation, par exemple

$$\cup | \times \diagdown \cup = \begin{array}{c} \cup \\ \diagdown \cup \end{array} = \cup |$$

En concaténant deux diagrammes, il peut arriver qu'une boucle se ferme. Dans ce cas on enlève la boucle du diagramme, et on multiplie celui-ci par un facteur n .

$$\diagdown \cup \times \diagdown \cup = \begin{array}{c} \cup \\ \diagdown \cup \end{array} = n \cup |$$

Cette définition du produit s'étend par linéarité à tous les éléments de l'algèbre. Nous notons $TL_N(n)$ l'algèbre de Temperley-Lieb sur N sites avec un poids n pour les boucles fermées.

L'algèbre de Temperley-Lieb est un cadre algébrique naturel si on veut écrire la matrice de transfert d'un modèle de boucles. Pour voir cela il est utile d'introduire la notation

$$1 = \underbrace{|| \dots ||}_N \quad e_i = \underbrace{|| \dots || \overset{i \ i+1}{\cup \cap} || \dots ||}_N \quad (\text{III.17})$$

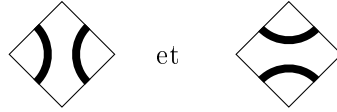
Il n'est pas difficile de voir que les e_i et l'identité 1 génèrent toute l'algèbre de Temperley-Lieb. De plus, les règles graphiques de concaténation des diagrammes peuvent s'écrire

$$e_i^2 = n e_i \quad (\text{III.18a})$$

$$e_i e_j = e_j e_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \quad (\text{III.18b})$$

$$e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i \quad (\text{III.18c})$$

Une configuration de boucles du type de celle représentée sur la figure III.2 peut être obtenue en pavant le réseau carré avec les plaquettes



Imaginons que le réseau est une bande infinie de largeur N . Alors toutes les configurations de boucles possibles sont générées en agissant avec la matrice de transfert

$$T_N = \prod_{i \text{ impair}} (1 + e_i) \prod_{i \text{ pair}} (1 + e_i). \quad (\text{III.19})$$

Pour rendre cette formule plus explicite, on peut par exemple écrire cette matrice de transfert pour $N = 4$

$$T_4 = \begin{array}{cccc} \text{Diagram 1} & + & \text{Diagram 2} & + & \text{Diagram 3} & + & \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} & + & \text{Diagram 6} & + & \text{Diagram 7} & + & \text{Diagram 8} \end{array}$$

Pour écrire une matrice de transfert pour le modèle $O(n)$, on doit travailler avec une version étendue de l'algèbre de Temperley-Lieb, qui permet de changer le nombre de sites en haut et en bas des diagrammes. En pratique, cela ne change pas grand chose. Les propriétés les plus intéressantes des algèbres de Temperley-Lieb sont celles qui ne dépendent pas de la taille N , mais uniquement de la valeur du poids des boucles n . Nous reviendrons plus tard sur ce point.

Représentations irréductibles. La matrice de transfert (III.19) est un objet purement formel pour l'instant, puisque nous n'avons pas défini dans quel espace elle agit. Nous avons besoin pour cela de connaître les représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb. Pour des valeurs génériques du paramètre n , la théorie des représentations de l'algèbre est très simple. Mais dans le cas où $n = q + q^{-1}$ avec $q^k = 1$ pour un certain entier $k \neq 0$, l'algèbre de Temperley-Lieb n'est pas semi-simple, et la théorie des représentations devient beaucoup plus compliquée. Ici, nous allons nous restreindre au cas générique.

On introduit les *projecteurs de Jones-Wenzl*, qui vont nous permettre de comprendre facilement la théorie des représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb. On note les projecteurs de Jones-Wenzl P_k de la façon suivante

$$P_k = \underbrace{\text{diagram of } k \text{ strands with a cap}}_k$$

Ces opérateurs sont définis de manière à satisfaire deux propriétés. Premièrement, ce sont des projecteurs, c'est-à-dire qu'ils vérifient $P_k^2 = P_k$, ce qui s'écrit

$$\underbrace{\text{diagram of } k \text{ strands with two caps}}_k = \underbrace{\text{diagram of } k \text{ strands with one cap}}_k$$

Ensuite, les projecteurs P_k vérifient $P_k e_i = e_i P_k = 0$ quand $i < k$. Autrement dit, la contraction de deux brins consécutifs sur le projecteur donne 0

$$\underbrace{\text{diagram of } k \text{ strands with a cap and a crossing at strands } i, i+1}}_k = \underbrace{\text{diagram of } k \text{ strands with a cap and a crossing at strands } i, i+1}}_k = 0$$

Ces projecteurs existent dès que $n = q + q^{-1}$ où q n'est pas une racine de l'unité. Quand ils existent ils sont aussi uniques. En fait, on peut construire facilement ces projecteurs par récurrence^g, mais nous n'avons pas vraiment besoin de cette construction explicite ici. On peut utiliser

^gLa formule explicite est $P_{k+1} = P_k - \frac{[k]_q}{[k+1]_q} P_k e_k P_k$ où $[a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$ et $P_1 = 1$, qui s'écrit aussi

$$\underbrace{\text{diagram of } k+1 \text{ strands with a cap}}_{k+1} = \underbrace{\text{diagram of } k \text{ strands with a cap}}_k - \frac{[k]_q}{[k+1]_q} \underbrace{\text{diagram of } k \text{ strands with a cap and a crossing at strands } i, i+1}}_k$$

ces projecteurs pour construire une nouvelle base de l'algèbre $TL_N(n)$ avec des diagrammes de la forme



Tous les liens qui traversent le diagramme de bas en haut passent à travers un projecteur. Notons $\mathcal{I}_k$ l'ensemble de ces diagrammes avec k lignes qui traversent. L'intérêt de cette construction est que deux diagrammes appartenant à $\mathcal{I}_k$ et $\mathcal{I}_{k'}$ donnent 0 quand on les concatène (si $k \neq k'$). Par exemple

$$\text{Diagram with 3 lines crossing a projector} = 0$$

Les $\mathcal{I}_k$ sont donc des idéaux de l'algèbre (ce sont simplement les idéaux engendrés par les projecteurs de Jones-Wenzl). L'algèbre $TL_N(n)$ peut être décomposée comme

$$TL_N(n) = \mathcal{I}_0 \oplus \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_N \quad (\text{III.20})$$

où, par convention, $\mathcal{I}_k = \{0\}$ si k et N n'ont pas la même parité. Chaque idéal $\mathcal{I}_k$ est en fait simple^h. Chaque représentation irréductible de l'algèbre $TL_N(n)$ correspond donc à la représentation élémentaire de l'un des $\mathcal{I}_k$. On note $\mathcal{V}_k$ ces représentations. Par exemple pour $N = 4$, les trois idéaux non nuls sont $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_4$, qui sont respectivement de dimension 4, 9 et 1. La dimension totale de l'algèbre est 14. Les trois représentations irréductibles $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_4$ sont

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \cup \cup \\ \cup \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \cup \cup \cup \\ | \cup | \\ | \cup | \\ | \cup \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_4 = \{ | | | | \}$$

L'action de l'algèbre $TL_N(n)$ sur ces modules est purement géométrique, comme on l'a vu plus haut pour l'algèbre elle-même. Les lignes verticales qui apparaissent dans les états de $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_4$, par définition, ne peuvent pas être contractées. En agissant avec un élément de l'algèbre qui contracte deux lignes, on obtient 0. Par exemple, le seul élément de $TL_4(n)$ qui soit non nul quand il agit sur $\mathcal{V}_4$ est l'identité 1. Les dimensions de ces représentations peuvent être calculées facilement

$$\dim \mathcal{V}_k = \binom{N}{\frac{N-k}{2}} - \binom{N}{\frac{N-k-2}{2}} \quad (\text{III.21})$$

si k et N ont la même parité, et on peut vérifier qu'on a la relation habituelle $\sum_{\mathcal{V}_k} (\dim \mathcal{V}_k)^2 = d_N$ qui est la dimension totale de l'algèbre.

Maintenant que nous disposons des représentations irréductibles de l'algèbre, la matrice de transfert (III.19) peut être vraiment écrite comme une matrice. Evidemment, elle n'a pas la même forme selon la représentation que l'on choisit. Par exemple,

$$\mathcal{V}_0 : T_4 = \begin{pmatrix} (1+n)^2 & 2+n \\ (1+n)^2 & 3+2n \end{pmatrix} \quad \mathcal{V}_2 : T_4 = \begin{pmatrix} 1+n & 2 & 0 \\ 1+n & 1+n & 1+n \\ 0 & 2 & 1+n \end{pmatrix} \quad \mathcal{V}_4 : T_4 = (1)$$

et clairement la matrice de transfert a un spectre différent selon la représentation choisie.

^hOn peut par exemple prouver cela en calculant un déterminant de Gram, comme présenté en annexe.

Produit scalaire. Les modules $\mathcal{V}_k$ peuvent être dotés d'un produit scalaire. En général, celui-ci est défini en exigeant que les générateurs 1 et e_i définis plus haut soient auto-adjoints. En pratique le produit scalaire de deux états de base peut être calculé en renversant un des deux états et en contractant les deux diagrammes. Chaque boucle fermée donne un facteur n . Si deux lignes sont contractées le produit scalaire est nul. Par exemple

$$\langle \cup \cup \mid \cup \cup \cup \rangle = 0 \cap = n^2$$

$$\langle \cap \cup \mid \cup \cap \cup \rangle = \cup \cap = 0$$

$$\langle \cup \cup \cap \mid \cup \cap \cup \rangle = 0 \cap \mid = n$$

Cette définition du produit scalaire s'étend à tout le module par linéarité. En général ce produit scalaire n'est pas positif. Par exemple l'état

$$|v\rangle = |\cup \cup\rangle - |\cup\rangle$$

a une norme au carré $\langle v|v\rangle = 2(n-1)n$ qui est négative dès que $n < 1$. On peut montrer que si $n \geq 2$, les modules $\mathcal{V}_k$ n'ont pas d'états de norme négative, mais qu'ils en ont dès que $n < 2$ (si la taille N est assez grande). Le fait que le produit scalaire n'est pas positif est profondément lié à la non-localité des configurations de boucles. Cela signifie qu'il n'est pas possible, quand n est générique, de reproduire la fonction de partition (ou n'importe quelle observable) d'un modèle de boucles avec des poids de Boltzmann qui sont à la fois locaux et réels. Le poids d'une configuration de boucles est réel, mais il n'est pas local. Au contraire, dans la construction du gaz de Coulomb, le poids de Boltzmann est réparti localement sous la forme d'une phase $e^{\pm i\gamma}$, mais ce poids n'est pas réel. C'est précisément parce que le produit scalaire défini ici n'est pas positif que, dans la limite continue, les modèles de boucles sont décrits par des théories conformes non-unitaires.

Fusion. Pour conclure cette section, signalons qu'il est possible de définir la fusion pour l'algèbre de Temperley-Lieb. Là encore, on se restreint au cas où n prend une valeur générique. L'idée de base est que le produit $TL_N(n) \otimes TL_M(n)$ peut être vu comme une sous-algèbre de $TL_{N+M}(n)$. Tous les générateurs e_i de $TL_{N+M}(n)$ sont présents dans ce produit, à part e_N , qui agit sur le dernier site du diagramme de gauche, et sur le premier site du diagramme de droite.

Pour commencer, considérons l'espace $\mathcal{V}_0 \otimes \mathcal{V}_0$ sous l'action de $TL_2(n) \otimes TL_2(n)$. Cet espace est de dimension 1, il est généré uniquement par l'état $w = \cup \cup$. Evidemment, par définition cet espace est stable sous l'action de e_1 et e_3 . Par contre l'action de e_2 n'est pas définie. On doit compléter l'espace avec un nouvel état pour que l'action de $TL_4(n)$ soit bien définie sur ce nouveau module : $\{w, e_2 w\}$. Cet espace est maintenant stable sous l'action de $TL_4(n)$. Par exemple, $e_1(e_2 w) = e_1 e_2 (\frac{1}{n} e_1 w) = \frac{1}{n} (e_1 e_2 e_1) w = \frac{1}{n} e_1 w = w$. Clairement, ce module est (isomorphe à) $\mathcal{V}_0$ pour $TL_4(n)$.

Maintenant, considérons l'espace $\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{V}_2$, d'abord pour $TL_2(n) \otimes TL_2(n)$. Cet espace est de dimension 1, et contient l'état $u = \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array}$ qui, par définition, est annihilé par e_1 et e_3 . Mais, là encore, l'action de e_2 n'est pas définie. On doit donc compléter l'espace avec l'état $e_2 u$, mais cette fois cela n'est pas suffisant, il faut également ajouter d'autres états. Il n'est pas difficile de voir que l'espace $\{u, e_2 u, e_1 e_2 u, e_3 e_2 u, e_1 e_3 e_2 u, e_2 e_1 e_3 e_2 u\}$ est stable sous l'action de $TL_4(n)$. Ce module n'est pas irréductible, on peut le décomposer en $\{e_1 e_3 e_2 u, e_2 e_1 e_3 e_2 u\} \oplus \{(1 - \frac{1}{n} e_2 e_1 e_3) e_2 u, (1 - \frac{1}{n} e_3) e_1 e_2 u, (1 - \frac{1}{n} e_1) e_3 e_2 u\} \oplus \{P_4 u\}$ où P_4 est le projecteur de Jones-Wenzl que nous avons introduit précédemment. On voit donc que le module obtenu est (isomorphe à) $\mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_4$.

De manière générale, la fusion de deux modules $\mathcal{V}_k$ et $\mathcal{V}_{k'}$ peut être construite en considérant l'espace généré par l'action libre de $TL_{N+M}(n)$ sur $\mathcal{V}_k \otimes \mathcal{V}_{k'}$ vu comme un module de la sous-algèbre $TL_N(n) \otimes TL_M(n)$. Ceci définit un nouveau module de $TL_{N+M}(n)$ que l'on note $\mathcal{V}_k \times \mathcal{V}_{k'}$. On dira que $\mathcal{V}_k \times \mathcal{V}_{k'}$ est le *produit de fusion* de $\mathcal{V}_k$ et $\mathcal{V}_{k'}$. Il n'est pas difficile de se convaincre, en utilisant les projecteurs de Jones-Wenzl pour construire une nouvelle base, que ce module peut être décomposé en modules irréductibles, et que l'on a toujours

$$\mathcal{V}_k \times \mathcal{V}_{k'} = \bigoplus_{k''=|k-k'|}^{k+k'} \mathcal{V}_{k''} \quad (\text{III.22})$$

Cette règle de décomposition n'est vraie que quand n est générique, puisque les projecteurs de Jones-Wenzl ne sont pas tous définis dans le cas où $n = q + q^{-1}$ avec q une racine de l'unité. On voit que l'on retrouve une structure similaire au produit tensoriel pour des représentations de $SU(2)$ de spin $k/2$ et $k'/2$. Ceci n'est pas un accident, et le lien entre l'algèbre de Temperley-Lieb et les q -déformations de $SU(2)$ est bien connu [11, 12], mais nous n'aborderons pas cet aspect ici. Il est important de remarquer aussi que dans cette construction, les tailles des diagrammes N et M importent peu. La décomposition (III.22), en particulier, n'est pas du tout sensible à la taille des diagrammes que l'on choisit. Cet aspect de la structure de l'algèbre de Temperley-Lieb est très important quand on veut construire des modèles statistiques sur réseau, puisqu'il permet d'avoir des modèles sur des réseaux de taille arbitraire, avec des caractéristiques algébriques qui sont indépendantes de celle-ci. C'est aussi ce qui permet de définir si facilement des versions diluées de ces modèles, comme le modèle $O(n)$ que nous avons introduit ci-dessus. Le nombre de boucles n'a pas nécessairement besoin d'être constant par la matrice de transfert. Le nombre qui est conservé est le nombre de lignes k qui indexe la représentation $\mathcal{V}_k$ (on parle aussi du spin $k/2$), et pas forcément le nombre de sites N .

III.6 Temperley-Lieb/Virasoro

Dans cette thèse nous nous intéressons particulièrement à la limite continue des modèles de boucles critiques. Dans la section précédente nous avons vu que l'on peut adopter un point de vue $1 + 1D$ pour étudier ces modèles, grâce à l'algèbre de Temperley-Lieb. On peut voir cela comme l'analogie de la quantification radiale pour une théorie conforme, qui permet de mettre en évidence l'algèbre de Virasoro qui génère la théorie. De manière générale, il y a

des analogies profondes entre l'algèbre qui génère le modèle sur réseau et celle qui génère la théorie continue. Il existe une certaine littérature mathématique qui formalise ces analogies dans un vocabulaire plus ou moins mystique (catégories, foncteurs, équivalences de Morita, etc.). Pour ce qui nous concerne, ce formalisme n'est pas particulièrement illuminant, ce n'est donc pas le point de vue que nous voulons adopter dans ce travail. Nous constatons plutôt certaines caractéristiques des modèles au niveau du réseau en étant particulièrement attentifs aux aspects qui sont indépendants de la taille (quand le réseau est assez grand). Dans ce cas il est parfaitement raisonnable de supposer que ces mêmes caractéristiques vont aussi apparaître au niveau de la théorie des champs.

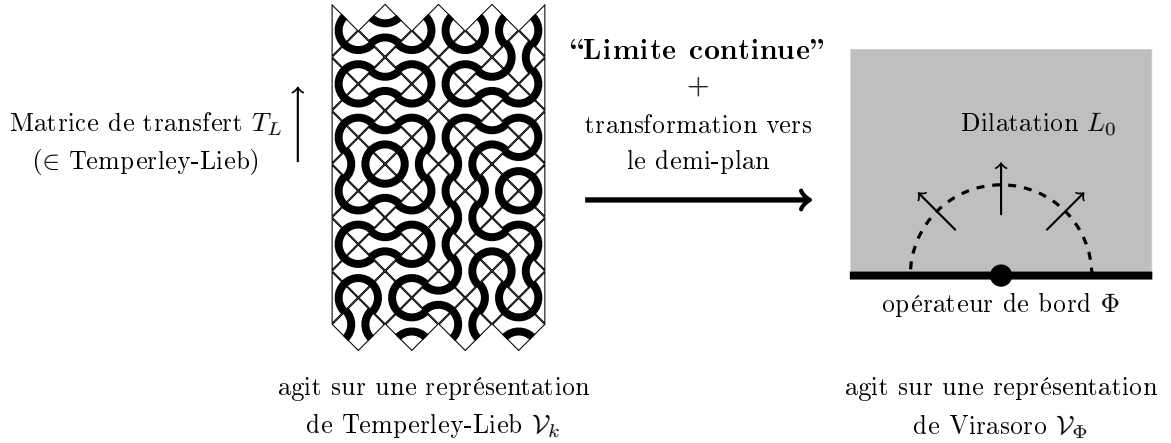


FIG. III.4 – La stratégie de cette thèse consiste à étudier des modèles sur réseau et de déduire des contraintes sur la limite continue.

La stratégie que nous adoptons dans cette thèse peut être résumée simplement (figure III.4). Partant d'un modèle statistique critique, il doit exister, au moins heuristiquement, une certaine procédure qui consiste à “prendre la limite continue”, et cette “limite continue” est une théorie conforme. Plus concrètement, la matrice de transfert sur le réseau correspond à l'opérateur de translation sur le ruban (ou dilatation sur le demi-plan) dans la limite continue. Le spectre de cette matrice de transfert contient une partie universelle qui correspond au spectre de la théorie conforme. L'algèbre qui génère ce spectre sur le réseau (Temperley-Lieb) est l'analogue de l'algèbre génératrice du spectre de la théorie conforme (Virasoro), etc.

Pour donner un exemple plus précis de la relation entre le modèle sur réseau et sa limite continue, considérons à nouveau la matrice de transfert (III.19) qui génère le modèle de boucles représenté sur la figure III.4. Le spectre de T_L dépend de la représentation sur laquelle on agit. Les valeurs propres de T_L contiennent une partie universelle comme on l'a vu dans la section II.5. Plus précisément, puisque la matrice de transfert est l'analogue sur réseau de l'opérateur de translation sur le ruban $e^{-\frac{a\pi}{L}(L_0 - \frac{c}{24})}$, si $\lambda_i^{(k)}$ est une valeur propre de T_L

$$-\log \lambda_i^{(k)} \simeq \frac{a\pi}{L} (\Delta_k + \text{entier}) \quad (\text{III.23})$$

où Δ_k est la dimension d'un opérateur de bord inséré en 0 sur le demi-planⁱ. a est la hauteur d'une plaquette, dans cet exemple on a simplement $a = 1$.

Dans ce problème particulier, le spectre de T_L dans les différentes représentations $\mathcal{V}_k$ peut être calculé analytiquement par Ansatz de Bethe et le résultat est bien connu [11]. Mais ici, nous voulons plutôt deviner le résultat en exploitant les similitudes entre l'algèbre de Temperley-Lieb et l'algèbre de Virasoro. On a vu que l'on peut définir une fusion dans l'algèbre de Temperley-Lieb, qui correspond précisément à l'image intuitive que l'on se fait de la fusion dans la limite continue. Par conséquent, si des opérateurs primaires $\Phi^{(k)}$ correspondent à la "limite continue" des représentations $\mathcal{V}_k$, alors ils doivent vérifier l'analogue des règles de fusion (III.22)

$$\Phi^{(k)} \times \Phi^{(k')} = \bigoplus_{k''=|k-k'|}^{k+k'} \Phi^{(k'')} \quad (\text{III.24})$$

Cette contrainte est très forte. La façon la plus simple de la satisfaire est de choisir

$$\Phi^{(k)} = \Psi_{1,1+k} \quad (\text{III.25})$$

où $\Psi_{r,s}$ a la dimension conforme donnée par la formule de Kac (III.13). De plus, cet opérateur a un vecteur nul au niveau $r \times s$ qui génère un sous-module que l'on quotiente. Autrement dit, on définit

$$\mathcal{V}_{\Psi_{r,s}} = \mathcal{V}_{r,s} / \mathcal{V}_{r,-s} \quad (\text{III.26})$$

où $\mathcal{V}_{r,s}$ désigne le module de Verma complet formé par tous les descendants de l'opérateur primaire de dimension conforme $h_{r,s}$. Le quotient (III.26) est très important : par exemple pour $\Psi_{1,2}$ il implique les règles de fusion [13]

$$\Psi_{1,2} \times \Psi_{1,1+k} = \Psi_{1,k} + \Psi_{1,k+2} \quad (\text{III.27})$$

et en itérant la fusion avec d'autres facteurs $\Psi_{1,2}$, on obtient bien la fusion (III.24)

$$\Psi_{1,1+k} \times \Psi_{1,1+k'} = \bigoplus_{k''=|k-k'|}^{k+k'} \Psi_{1,1+k''} \quad (\text{III.28})$$

Les opérateurs $\Psi_{1,1+k}$ sont donc de bons candidats à la "limite continue" des représentations $\mathcal{V}_k$, et la solution analytique [11] montre qu'en effet le spectre de la matrice de transfert correspond à cet opérateur. En fait, il y avait un autre choix possible, qui est tout aussi simple que $\Psi_{1,1+k}$. Il s'agit simplement de $\Psi_{1+k,1}$, qui vérifie les mêmes règles de fusion pour le premier indice de Kac. En fait, ce cas apparaît également comme la limite continue d'une représentation de Temperley-Lieb avec k lignes, mais il s'agit du modèle $O(n)$ dilué. On voit donc apparaître à nouveau la dualité dense/dilué qui revient ici à échanger les deux indices de Kac.

ⁱComme on l'a déjà vu au chapitre II, il peut parfois y avoir plusieurs opérateurs primaires insérés en 0. Dans ce cas la formule III.23 doit être corrigée : il y a plusieurs Δ_k différents.

Il y a un autre type de contrainte que l'on peut obtenir à partir du réseau, qui est différent de l'argument de fusion (III.24). En effet, le spectre de la matrice de transfert varie continuellement avec le poids des boucles n , et on suppose en général que les exposants dans la limite continue varient aussi continuellement avec n (du moins tant que le modèle reste critique). Mais on sait que pour certaines valeurs particulières de n ($n = q + q^{-1}$ avec q une racine de l'unité), la théorie des représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb est plus compliquée que dans le cas d'un poids n générique. Plus concrètement cela signifie que les modules $\mathcal{V}_k$ ne sont plus irréductibles, et que l'on peut considérer des quotients de ceux-ci. Par exemple, on sait^j que si $n = e^{i\frac{\pi}{m+1}} + e^{-i\frac{\pi}{m+1}} = 2 \cos \frac{\pi}{m+1}$, alors les modules $\mathcal{V}_k$ s'organisent selon la suite exacte

$$0 \leftarrow \mathcal{V}_k \leftarrow \mathcal{V}_{2(m+1)-2-k} \leftarrow \mathcal{V}_{2(m+1)+k} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{V}_{2p(m+1)-2-k} \leftarrow \mathcal{V}_{2p(m+1)+k} \leftarrow \cdots \quad (\text{III.29})$$

pour $k \leq m$. Une fois de plus, cette structure est vraie pour n'importe quelle largeur du réseau, et on s'attend à ce que cette structure soit présente dans la limite continue. En effet, au lieu de s'intéresser à l'action de la matrice de transfert T_L sur les $\mathcal{V}_k$, on peut dans ce cas regarder directement le spectre de T_L dans la représentation quotient $\langle k \rangle = \mathcal{V}_k / \text{Im}(\mathcal{V}_{2p(m+1)+k})$. En fait il s'agit précisément ici de regarder le spectre d'un modèle RSOS avec m états (voir annexe). En particulier les représentations $\langle k \rangle$ ainsi obtenues sont dotées d'un produit scalaire positif (voir section précédente et annexe). Pour qu'une telle restriction soit possible au niveau de la théorie conforme, il faut que les représentations de l'algèbre de Virasoro correspondant à la "limite continue" des $\mathcal{V}_k$ soient très particulières. De telles réductions dans l'algèbre de Virasoro ne peuvent apparaître que pour des valeurs très spécifiques de la charge centrale et des dimensions conformes h . Dans l'exemple présent, on trouve en fait la série des modèles minimaux unitaires [14] avec

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad h_{1,1+k} = \frac{((m+1) - m(1+k))^2 - 1}{4m(m+1)} \quad (\text{III.30})$$

et la suite exacte (III.29) devient, dans la limite continue

$$0 \leftarrow \mathcal{V}_{\Psi_{1,1+k}} \leftarrow \mathcal{V}_{\Psi_{1,1+2(m+1)-2-k}} \leftarrow \mathcal{V}_{\Psi_{1,1+2(m+1)+k}} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{V}_{\Psi_{1,1+2p(m+1)-2-k}} \leftarrow \cdots \quad (\text{III.31})$$

qui peut aussi être écrite, compte tenu du quotient (III.26)

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V}_{1,1+k} & \leftarrow & \mathcal{V}_{1,1+2(m+1)-2-k} & \leftarrow & \mathcal{V}_{1,1+2(m+1)+k} & \leftarrow & \cdots \\ & \swarrow & \nwarrow & \swarrow & \nwarrow & \swarrow & \nwarrow \\ & & \mathcal{V}_{1,-1-k} & & \mathcal{V}_{1,-1-2(m+1)+2+k} & & \cdots \end{array} \quad (\text{III.32})$$

On reconnaît ici la construction de Rocha-Caridi (ou Feigin-Fuchs) [13, 15]. A ce stade, nous devons souligner que le fait de retrouver cette construction exacte dans le modèle en taille finie est assez remarquable. Nous verrons au chapitre suivant d'autres exemples de ce type. Evidemment, on pourrait obtenir avec les mêmes quotients des versions diluées de modèles RSOS. Au final, cela reviendrait une fois encore à échanger les deux indices de Kac.

^jCeci est en partie expliqué en annexe, mais on peut consulter aussi [11, 12]

Pour conclure ce chapitre d'introduction aux modèles de boucles, nous présentons quelques aspects de l'analogie Temperley-Lieb/Virasoro. Encore une fois, ces considérations sont plutôt heuristiques et ne doivent pas être prises trop à la lettre. Elles sont plutôt des sources d'inspiration, qui permettent d'utiliser la compréhension que l'on a du modèle sur réseau pour décortiquer la théorie conforme (et parfois vice-versa).

	Modèle sur réseau	Théorie conforme
Algèbre génératrice du spectre	Temperley-Lieb	Virasoro
Paramètre	Poids des boucles n	Charge centrale c
Cas non génériques	$n = q + q^{-1}$ q racine de l'unité	$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$ p, q entiers
Modules	$\mathcal{V}_k$	$\mathcal{V}_\Phi$
Transposition (produit scalaire)	$e_i^\dagger = e_i$	$L_n^\dagger = L_{-n}$
Déterminant	Dét. de Gram	Dét. de Kac
Restrictions	Modèles RSOS	Modèles minimaux (Rocha-Caridi)

Bibliographie

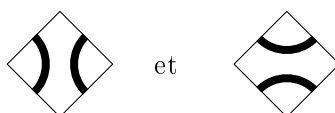
- [1] C.M. Fortuin & P.W. Kasteleyn, *On the random-cluster model : I. Introduction and relation to other models*, Physica **57**, 536-564, 1972.
- [2] H.A. Kramers & G.H. Wannier, *Statistics of the two-dimensional ferromagnet. Part II*, Phys. Rev. **60**, 263-276, 1941.
- [3] B. Nienhuis, *Two-dimensional critical phenomena and the Coulomb gas*, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. C. Domb, M. Green & J.L. Lebowitz, Vol. 11, Academic Press, London, 1983.
- [4] B. Nienhuis, *Loop Models*, in *Exact Methods in Low-Dimensional Statistical Physics and Quantum Computing*, Ecole de Physique des Houches, Session LXXXIX, 2008.
- [5] N.D. Mermin & H. Wagner, *Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models*, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133-1136, 1966.
- [6] J. Kondev, J. de Gier & B. Nienhuis, *Operator spectrum and exact exponents of the fully packed loop model*, J. Phys. A : Math. Gen. **29**, 6489, 1996.
- [7] B. Nienhuis, *Exact critical point and critical exponents of $O(n)$ models in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1062-1065, 1982.
- [8] D. Chelkak & S. Smirnov, *Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables*, arXiv :0910.2045
- [9] H. Duminil-Copin & S. Smirnov, *The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$* , arXiv :1007.0575
- [10] H.N.V. Temperley & E.H. Lieb, *Relations between the ‘percolation’ and ‘colouring’ problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices : some exact results for the ‘percolation’ problem*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **322**, 251-280, 1971.
- [11] V. Pasquier & H. Saleur, *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, Nucl. Phys. **B 330**, 523-556, 1990.
- [12] C. Gomez, M. Ruiz-Altaba & G. Sierra, *Quantum groups in two-dimensional physics*, Cambridge Monographs in Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1996.
- [13] P. Di Francesco, P. Matthieu & D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [14] V. Pasquier, *Two-dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams*, Nucl. Phys. **B 285**, 162-172, 1987.

- [15] A. Rocha-Caridi, *Vacuum vector representations of the Virasoro algebra*, in *Vertex Operators in Mathematics and Physics*, Eds. J. Lepowsky, S. Mandelstam & I. Singer, Publ. Math. Sciences, Springer-Verlag, New York, 451, 1985.

CHAPITRE IV

Conditions aux bords dans le modèle de boucles denses

Dans ce chapitre nous travaillons sur le modèle de boucles denses. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il s'agit en fait du modèle de Potts critique dans la formulation de Fortuin-Kasteleyn [1], mais on peut aussi y penser comme décrivant la phase dense du modèle $O(n)$. Cette phase est stable sous le flot RG quand on perturbe le couplage à la longueur des boucles x dans la fonction de partition (III.3). C'est la principale différence avec la phase diluée (ou plutôt point critique dilué), où x est cette fois couplé à un opérateur relevant. L'absence de cet opérateur relevant dans la phase dense simplifie l'étude du modèle. Numériquement, par exemple, on n'a pas besoin d'ajuster de manière fine le couplage x pour voir les propriétés de la phase dense, n'importe quel $x > x_c$ fait l'affaire. Analytiquement, cela signifie aussi que n'importe quel point intégrable dans cette phase va donner accès aux caractéristiques universelles de celle-ci. Le modèle de boucles denses sur le réseau carré est un représentant particulièrement simple de cette classe d'universalité. Les configurations de ce modèle sont données par des pavages de plaquettes



comme nous l'avons déjà vu. Dans ce modèle la longueur totale des boucles est tout simplement constante : elle dépend uniquement de la taille du réseau. Il est donc évident que le couplage x n'intervient pas ici. L'étude des phénomènes de surface est simplifiée considérablement par l'absence de l'opérateur relevant associé au couplage x . En effet, en général, on devrait se demander s'il existe un opérateur équivalent à la surface qui se couple à la longueur des boucles au bord, c'est-à-dire au nombre de monomères qui touchent la surface. Dans le modèle de boucles denses, il n'existe pas de tel opérateur, pour la même raison que dans le volume : la longueur totale au bord est une constante.

Mais dans le cas des boucles diluées, cet opérateur existe et le comportement critique de surface est beaucoup plus subtil. Nous reviendrons sur ce problème dans le chapitre suivant. Pour l'instant, nous étudions le cas le plus simple, qui va déjà nous permettre d'introduire un nouveau type de conditions au bord dans les modèles de boucles [2].

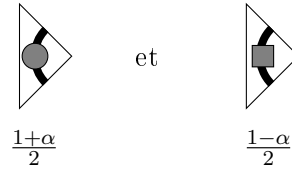
IV.1 Quelles conditions au bord ?

Pour commencer, considérons le modèle de Potts à Q états sur le réseau carré avec un bord. Au bord, les spins peuvent être libres, mais il est naturel de considérer des conditions au bord plus générales où les spins sont restreints à un sous-ensemble de couleurs $\{1, \dots, Q_1\} \subset \{1, \dots, Q\}$. En répétant la construction de Fortuyn-Kasteleyn que nous avons vue dans la section III.2, on voit que l'on arrive à un modèle de boucles avec des poids

$$\begin{cases} \text{boucle dans le volume :} & n = \sqrt{Q} \\ \text{boucle qui touche la surface :} & n_1 = Q_1/\sqrt{Q} \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

D'un autre côté, si on pense aux boucles en termes du modèle $O(n)$, il est naturel d'interpréter le poids n_1 comme une trace sur un sous-ensemble de composantes des spins S^α , $\alpha \in \{1, \dots, n_1\} \subset \{1, \dots, n\}$. On peut voir cela comme provenant d'une brisure de la symétrie sphérique $O(n)$ à la surface : $O(n) \rightarrow O(n_1) \times O(n - n_1)$.

Le modèle de boucles dense peut être vu comme un prolongement analytique à des n ou Q continus. A la surface, on peut donc aussi considérer que n_1 est un paramètre continu. Pour cela on introduit les plaquettes de bord suivantes



auxquelles on donne les poids de Boltzmann $\frac{1+\alpha}{2}$ et $\frac{1-\alpha}{2}$ respectivement. Grâce à ces plaquettes on peut construire des configurations comme celle représentée sur la figure IV.1. Les boucles qui touchent le bord peuvent être marquées soit par un rond, soit par un carré, mais pas les deux à la fois. Une boucle marquée par un rond a un poids de Boltzmann n_1 , une boucle marquée par

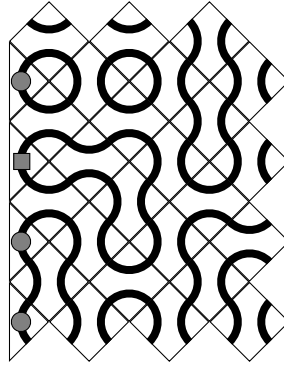
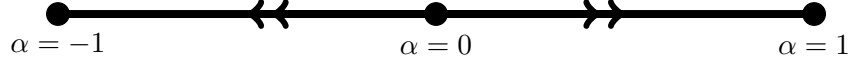


FIG. IV.1 – Condition au bord pour le modèle de boucles denses. Les boucles fermées dans le volume ont un poids n , les boucles qui sont marquées d'un rond ont un poids n_1 et les boucles marquées d'un carré ont un poids $n - n_1$.

un carré a un poids $n - n_1$. Evidemment, quand $\alpha = 0$, les plaquettes avec le rond et le carré

ont le même poids, et le poids total d'une boucle qui touche le bord est alors $n_1 + (n - n_1) = n$. On retrouve donc un modèle bien connu (voir chapitre précédent). Mais quand $\alpha \neq 0$ on obtient une condition au bord différente. Ce modèle a le diagramme de phase suivant.



Nous n'allons pas justifier ce diagramme de phase ici, mais des arguments analytiques ont été obtenus par Ansatz de Bethe dans [4, 5, 6, 7], et des vérifications numériques convaincantes ont été effectuées dans [2]. On voit donc que le modèle représenté sur la figure IV.1 est attiré automatiquement sous le flot RG vers un modèle où toutes les plaquettes de bord sont marquées avec un rond (si $\alpha > 0$), ou avec un carré (si $\alpha < 0$). Clairement, ces deux situations sont reliées par une dualité très simple qui consiste à changer n_1 en $n - n_1$ et les ronds en carrés. On peut argumenter que la perturbation du couplage α au point $\alpha = 0$ est associée à un opérateur primaire sur le bord de dimension conforme $h_{1,3}$ (voir la formule de Kac (III.13.b)), et que cet opérateur est bien relevant : $h_{1,3} < 1$ dès que $-2 < n < 2$.

IV.2 Algèbres 1BTL et 2BTL

On peut formuler le modèle représenté sur la figure IV.1 en termes de l'algèbre de Temperley-Lieb avec une *marque*. Nous noterons 1BTL cette algèbre, qui a été introduite dans [8]. Comme l'algèbre de Temperley-Lieb habituelle (section III.5), l'algèbre avec une marque est un ensemble de diagrammes qui peuvent être additionnés, et multipliés par concaténation. Mais cette fois les diagrammes peuvent être décorés avec une marque (un rond). Par exemple, les diagrammes suivants sont des éléments de l'algèbre avec une marque sur 4 sites



Pour être plus précis, l'algèbre 1BTL est générée par les éléments

$$1 = \underbrace{|| \dots ||}_N \quad b_1 = \underbrace{|| \bullet \dots ||}_N \quad e_i = \underbrace{|| \dots || \bigcup_{i=1}^{i+1} || \dots ||}_N \quad (\text{IV.2})$$

et les marques ne peuvent pas apparaître n'importe où dans le diagramme. Elles apparaissent forcément sur un lien qui peut être déformé continûment jusqu'à toucher le bord gauche du diagramme. La multiplication est toujours définie par concaténation. La marque est un projecteur : deux marques sur le même lien peuvent être réduites à une seule marque. Une boucle fermée peut avoir un poids n ou n_1 selon qu'elle porte une marque ou non. On peut résumer cela avec les relations de commutation

$$b_1^2 = b_1 \quad (\text{IV.3a})$$

$$e_1 b_1 e_1 = n_1 e_1 \quad (\text{IV.3b})$$

$$b_1 e_i = e_i b_1 \quad \text{si } i \geq 2 \quad (\text{IV.3c})$$

qui viennent compléter les relations (III.18). Par exemple, on a le produit

$$\begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \times \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} = \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} = n n_1 \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array}$$

La dimension totale de l'algèbre sur N sites $1BTL_N(n, n_1)$ est (voir annexe)

$$d_N^{1BTL} = \binom{2N}{N}. \quad (\text{IV.4})$$

Dans le cas où les paramètres n et n_1 sont génériques, les algèbres $1BTL_N(n, n_1)$ sont semi-simples, et la théorie des représentations est pratiquement la même que celle de l'algèbre $TL_N(n)$ (section III.5). On définit l'*antimarque* $\bar{b}_1$, qui vérifie $b_1 \bar{b}_1 = \bar{b}_1 b_1 = 0$ et $\bar{b}_1^2 = \bar{b}_1$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array}}_N = \bar{b}_1 = 1 - b_1 = \underbrace{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array}}_N - \underbrace{\begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \end{array}}_N \quad (\text{IV.5})$$

Il faut noter qu'une boucle fermée qui porte une antimarque a un poids $n - n_1$. Les représentations irréductibles de $1BTL$ pour n et n_1 génériques peuvent être indexées par le nombre k de lignes qui traversent le diagramme de bas en haut, et quand $k > 0$ on doit aussi préciser si la ligne la plus à gauche est *marquée* ou *antimarquée*. On note $\mathcal{V}_k^\circ$ et $\mathcal{V}_k^\square$ ces représentations. Par exemple, pour la taille $N = 4$

$$\mathcal{V}_4^\square = \{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \} \quad \mathcal{V}_2^\square = \left\{ \begin{array}{c} \cup \cap \\ \cap \cup \\ \cap \cup \\ \cup \cap \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \cup \cup \\ \cap \cap \\ \cup \cap \\ \cap \cup \\ \cup \cup \\ \cap \cap \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_2^\circ = \left\{ \begin{array}{c} \cup \cap \\ \cap \cup \\ \cap \cup \\ \cup \cap \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_4^\circ = \{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \}$$

Les dimensions de ces représentations sont

$$\dim(\mathcal{V}_k^\square) = \dim(\mathcal{V}_k^\circ) = \binom{N}{\frac{N-k}{2}} \quad (\text{IV.6})$$

quand k et N ont la même parité, 0 sinon. L'algèbre $1BTL$ et ses représentations vont nous servir à étudier le modèle de boucles avec bord introduit dans la section précédente (voir aussi figure IV.1). Avant de passer à la description de la limite continue de ce modèle et à la théorie conforme, nous voulons introduire une version de l'algèbre de Temperley-Lieb avec deux marques, qu'on notera $2BTL$. Il s'agit d'une extension de l'algèbre $1BTL$ définie par les générateurs (IV.7), auxquels on ajoute la deuxième marque, qui cette fois agit sur la droite des diagrammes

$$b_2 = \underbrace{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array}}_N \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \quad (\text{IV.7})$$

La deuxième marque vérifie évidemment des relations similaires à (IV.3)

$$b_2^2 = b_2 \quad (\text{IV.8a})$$

$$e_{N-1} b_2 e_{N-1} = n_2 e_{N-1} \quad (\text{IV.8b})$$

$$b_2 e_i = e_i b_2 \quad \text{si } i \leq N-2 \quad (\text{IV.8c})$$

Les boucles qui portent cette nouvelle marque ont donc un poids de Boltzmann n_2 . Cette algèbre va évidemment nous servir à étudier un modèle sur le ruban avec des conditions aux bords différentes à gauche et à droite. Néanmoins, cette extension de $1BTL$ à $2BTL$ n'est pas complètement triviale. La définition de $2BTL$ n'est pas complète à ce stade. On voit en effet que l'on n'a pas défini comment traiter les diagrammes du type



qui comportent des boucles portant à la fois la marque b_1 et la marque b_2 . Pour l'instant, l'algèbre que nous avons définie est donc de dimension infinie, puisqu'on peut construire des diagrammes avec un nombre arbitrairement grand de boucles qui touchent les deux bords. On peut en fait donner n'importe quel poids n_{12} à ce nouveau type de boucle

$$\begin{array}{c} \cup \cup \\ \bullet \circ \\ \cup \cup \\ \bullet \circ \\ \cup \cup \end{array} = (n_{12})^2 \begin{array}{c} \cup \cup \\ \cup \cup \end{array}$$

ce qui est formalisé par le quotient

$$\left(\prod_{i \text{ impair}} e_i \right) \left(\prod_{i \text{ pair}} e_i \right) b_1 b_2 \left(\prod_{i \text{ impair}} e_i \right) = n_{12} \left(\prod_{i \text{ impair}} e_i \right) \quad (\text{IV.9})$$

On a supposé ici que le nombre de sites N était pair. Il est facile de voir qu'un quotient similaire doit être pris quand N est impair pour éviter qu'on ne génère une infinité de diagrammes en faisant toucher une ligne alternativement à gauche et à droite. De même que dans le cas pair, on peut introduire un nouveau paramètre qui est le poids de Boltzmann donné à chaque fois que la ligne fait un aller-retour entre le bord gauche et le bord droit. Pour simplifier, nous allons nous restreindre au cas N pair dans ce qui suit.

Les représentations génériques de l'algèbre $2BTL_N(n, n_1, n_2, n_{12})$ peuvent être construites de la même façon que précédemment. Elles sont indexées par le nombre de lignes k , et si $k > 0$, par l'état de la ligne la plus à gauche (marquée ou antimarquée pour b_1) et l'état de la ligne la plus à droite (marquée ou antimarquée pour b_2). On note ces différentes représentations $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_k^{\bullet\circ}$, $\mathcal{V}_k^{\circ\bullet}$, $\mathcal{V}_k^{\bullet\bullet}$, $\mathcal{V}_k^{\circ\circ}$. Des exemples plus explicites de ces représentations sont donnés en annexe. L'algèbre $2BTL$ y est étudiée plus en détail. Les références [9, 10] traitent également de cette algèbre.

IV.3 Opérateurs B.C.C et lignes

Dans cette section nous présentons un des résultats principaux de la référence [2], qui a initié le travail sur les conditions au bord marquées dans les modèles de boucles. Ce résultat consiste, pour le modèle de boucles denses, en l'identification de l'opérateur B.C.C. $\Phi(n_1)$ qui passe de la condition au bord habituelle (non-marquée) à la condition au bord marquée avec un paramètre n_1 . On utilise donc le principe décrit sur la figure III.4 pour construire des conditions aux bords invariantes conformes pour les modèles de boucles. La matrice de transfert que l'on utilise sur le réseau est un élément de l'algèbre $1BTL$

$$T_N = b_1 \prod_{i \text{ pair}} (1 + e_i) \prod_{i \text{ impair}} (1 + e_i) \in 1BTL_N(n, n_1) \quad (\text{IV.10})$$

qui génère toutes les configurations possibles de boucles (figure IV.1), qui sont marquées dès qu'elle touchent une fois le côté gauche du réseau. Par contre, rien de particulier ne se passe sur le côté droit : le poids d'une boucle qui touche le bord droit n'est pas modifié. Dans la limite continue, après avoir envoyé le ruban sur le demi-plan, on a une théorie conforme représentée schématiquement sur la figure IV.2.

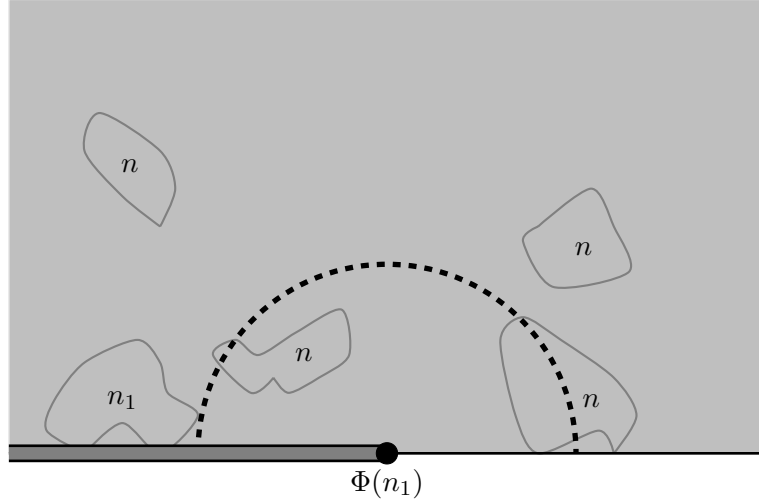


FIG. IV.2 – Le modèle de boucles denses avec la condition au bord marquée à gauche, non marquée à droite.

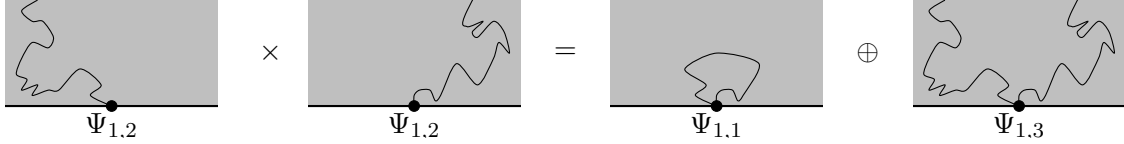
L'opérateur $\Phi(n_1)$ a été identifié pour la première fois dans [2] à partir de résultats analytiques qui avaient été obtenus précédemment [4, 5, 6, 7], et par diagonalisation numérique de la matrice de transfert (IV.10)

$$\Phi(n_1) = \Phi_{r_1, r_1} \quad \text{où} \quad n_1 = \frac{\sin((r_1 + 1)\gamma)}{\sin r_1 \gamma} \quad \text{et} \quad n = 2 \cos \gamma \quad (\text{IV.11})$$

avec $\gamma \in (0, \pi)$ et $r_1 \in (0, \pi/\gamma)$, et où la dimension conforme de Φ_{r_1, r_1} est donnée par la formule de Kac (III.13.b). Le module de Verma associé à Φ_{r_1, r_1} est complet, il est formé par tous les

descendants générés par l'algèbre de Virasoro. Il n'y a pas de vecteur nul pour des valeurs génériques de n et n_1 .

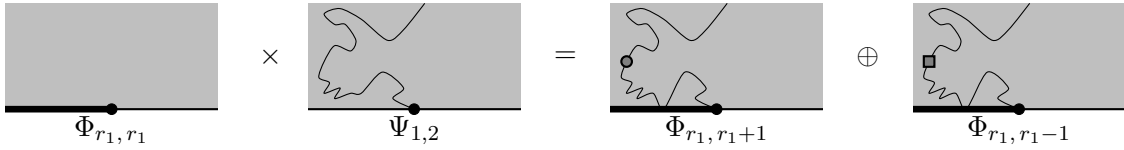
On peut combiner cet opérateur B.C.C. avec les opérateurs $\Psi_{1,1+k}$ qui créent des lignes qui se propagent à travers le système (voir section III.6). En particulier, la fusion de $\Psi_{1,2}$ avec lui-même (III.22) peut être interprétée géométriquement en termes des lignes



On peut interpréter de la même façon la fusion entre Φ_{r_1, r_1} et $\Psi_{1,2}$. En effet, à cause du quotient (III.26) qui définit $\Psi_{1,2}$, la fusion de ces deux opérateurs est contrainte [11, 12]

$$\Phi_{r_1, r_1} \times \Psi_{1,2} = \Phi_{r_1, r_1+1} + \Phi_{r_1, r_1-1} \quad (\text{IV.12})$$

Chacun des deux opérateurs que l'on obtient dans le membre de droite a une signification bien précise. Le plus relevant est Φ_{r_1, r_1+1} , et il correspond au cas où la ligne est marquée. Le moins relevant est Φ_{r_1, r_1-1} , il correspond au cas où la ligne est antimarquée. On peut voir cela graphiquement sur la figure suivante



En résumé, dans le modèle de boucles denses (figure IV.2) avec la condition au bord marquée à gauche, on a la correspondance suivante entre les représentations de Temperley-Lieb avec une marque et celles de Virasoro :

1BTL	Virasoro
poids des boucles n	charge centrale c
poids au bord n_1	exposant de Kac h_{r_1, r_1}
$\mathcal{V}_0$	$\mathcal{V}_{r_1, r_1}$
$\mathcal{V}_k^\circ$	$\mathcal{V}_{r_1, r_1+k}$
$\mathcal{V}_k^\square$	$\mathcal{V}_{r_1, r_1-k}$

A ce stade, néanmoins, il semble plus difficile de faire des prédictions sur le modèle avec des conditions au bord marquées à la fois à gauche et à droite. Le problème dans ce cas vient du fait qu'il faudrait savoir fusionner deux opérateurs B.C.C. : " $\Phi_{r_1, r_1} \times \Phi_{r_2, r_2}$ ". Aucun de ces deux opérateurs n'a de descendant nul, il n'y a donc aucune contrainte du type (IV.12). On n'a donc aucune information sur cette fusion qui vient de la théorie conforme. Pour répondre à cette question il faut revenir au modèle sur réseau et essayer d'obtenir des contraintes sur la limite continue.

IV.4 Fonction de partition sur l'anneau.

On veut comprendre la fusion de deux opérateurs B.C.C. $\Phi(n_1)$ et $\Phi(n_2)$. Dans une théorie conforme générique, rien ne permet d'imposer de contrainte particulière sur cette fusion. Mais puisque nous travaillons avec un modèle sur réseau qui est parfaitement bien défini et qui est critique, cette fusion a un sens sur le réseau et elle doit mener à une structure cohérente dans la théorie des champs. Cette constatation simple permet effectivement de calculer le spectre du nouvel opérateur B.C.C. qui permet de passer d'une condition au bord marquée à une autre, en changeant le paramètre n_1 en n_2 . Ceci constitue le résultat principal de la référence [3]. L'idée de base de cette référence est de calculer la fonction de partition sur l'anneau en jouant avec l'invariance modulaire et en partant du cas avec un bord. Il y a une subtilité provenant du secteur sans lignes ($k = 0$), mais en combinant des arguments analytiques et des vérifications numériques, on peut déduire le résultat.

IV.4.1 La fonction de partition n'est pas une trace

Dans le chapitre II, nous avons vu que les contraintes de Cardy (II.76) provenaient du fait que la fonction de partition d'une théorie conforme sur l'anneau pouvait être obtenue de deux façons différentes, qui doivent mener au même résultat. L'une des deux façons de calculer cette fonction de partition est de calculer la trace de l'opérateur d'évolution sur le ruban $e^{-\frac{\pi}{L}(L_0 - \frac{c}{24})}$ sur le module de Verma correspondant à l'opérateur B.C.C inséré entre le bord gauche et le bord droit. Nous insistons sur le fait que, dans le cas des modèles de boucle, la fonction de partition n'est pas une trace. En particulier, pour ce qui nous intéresse ici, les contraintes de Cardy (II.76) ne peuvent pas être utilisées en l'état.

Pour comprendre que la fonction de partition sur l'anneau n'est pas une trace, on peut se contenter du modèle de boucles avec les conditions au bord habituelles (non marquées). Les configurations de boucles sur l'anneau de taille $T \times L$ (T dans la direction périodique) correspondent à des diagrammes (des éléments de l'algèbre de Temperley-Lieb) qui sont générés par la T -ème puissance de la matrice de transfert (III.19) : $(T_L)^T$. On veut évidemment identifier le haut et le bas des diagrammes pour obtenir la géométrie de l'anneau. En faisant cette identification, on ferme un certain nombre de boucles, qui contribuent chacune avec un facteur n au poids de Boltzmann total de la configuration.

Trace de Markov. L'algèbre de Temperley-Lieb peut être équipée d'une trace de Markov. La trace de Markov d'un diagramme A de l'algèbre TL est le nombre obtenu en identifiant le haut et le bas de A , si on donne un poids n à chaque boucle fermée. Cette définition s'étend par linéarité à toute l'algèbre. Clairement, il s'agit là précisément de l'objet dont on a besoin pour calculer la fonction de partition du modèle de boucles sur l'anneau. La trace de Markov $\text{Tr } A$ d'un élément A de l'algèbre de Temperley-Lieb est vraiment très différente de la trace habituelle prise dans une représentation particulière. Néanmoins, il existe une relation entre ces deux objets.

$$\text{Tr } A = \sum_{k \geq 0} \mathcal{D}_k \text{tr}_{\mathcal{V}_k}(A) \quad (\text{IV.13})$$

où les coefficients $\mathcal{D}_k$ sont les polynômes de Chebyshev de seconde espèce $\mathcal{D}_0 = 1$, $\mathcal{D}_1 = n$, $\mathcal{D}_2 = n^2 - 1$, $\mathcal{D}_3 = n(n^2 - 2)$, etc. La formule générale qui donne ces coefficients est

$$\mathcal{D}_k = \frac{\sin((k+1)\gamma)}{\sin \gamma} \quad (\text{IV.14})$$

Bien sûr, on utilise toujours la convention que la représentation $\mathcal{V}_k$ est nulle si k et N n'ont pas la même parité, ou si $k > N$. On peut se convaincre sur un exemple que la relation (IV.13) est correcte :

$$\text{Tr} \left| \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle = \sum_{k=0,2,4} \text{tr}_{\mathcal{V}_k} \left| \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle = \mathcal{D}_0.(1) + \mathcal{D}_2.(1) + \mathcal{D}_4.(0) = n^2$$

Les algèbres $1BTL$ et $2BTL$ peuvent aussi être dotées d'une trace de Markov. De la même façon qu'en (IV.13), ces traces de Markov peuvent être décomposées sur les traces habituelles évaluées dans les différentes représentations $\mathcal{V}_k^\circ$, $\mathcal{V}_k^\square$, etc. Par exemple pour $1BTL$ on a la décomposition

$$\text{Tr} A = \text{tr}_{\mathcal{V}_k}(A) + \sum_{k \geq 1} \mathcal{D}_k^\circ \text{tr}_{\mathcal{V}_k^\circ}(A) + \sum_{k \geq 1} \mathcal{D}_k^\square \text{tr}_{\mathcal{V}_k^\square}(A) \quad (\text{IV.15})$$

Le calcul des coefficients $\mathcal{D}_k^\circ$ et $\mathcal{D}_k^\square$ a été effectué de manière combinatoire dans [2, 10]. Une autre dérivation possible est présentée en annexe. Ces coefficients pour $1BTL$ sont

$$\mathcal{D}_k^\circ = \frac{\sin((r_1 + k)\gamma)}{\sin(r_1\gamma)} \quad (\text{IV.16a})$$

$$\mathcal{D}_k^\square = \frac{\sin((-r_1 + k)\gamma)}{\sin(-r_1\gamma)} \quad (\text{IV.16b})$$

et pour $2BTL$

$$\mathcal{D}_k^{\circ\circ} = \frac{\sin((r_1 + r_2 - 1 + k)\gamma) \sin \gamma}{\sin(r_1\gamma) \sin(r_2\gamma)} \quad (\text{IV.17a})$$

$$\mathcal{D}_k^{\circ\square} = \frac{\sin((r_1 - r_2 - 1 + k)\gamma) \sin \gamma}{\sin(r_1\gamma) \sin(-r_2\gamma)} \quad (\text{IV.17b})$$

$$\mathcal{D}_k^{\square\circ} = \frac{\sin((-r_1 + r_2 - 1 + k)\gamma) \sin \gamma}{\sin(-r_1\gamma) \sin(r_2\gamma)} \quad (\text{IV.17c})$$

$$\mathcal{D}_k^{\square\square} = \frac{\sin((-r_1 - r_2 - 1 + k)\gamma) \sin \gamma}{\sin(-r_1\gamma) \sin(-r_2\gamma)} \quad (\text{IV.17d})$$

Il est important de remarquer que les décompositions de la trace de Markov de la forme (IV.13) et (IV.15) ne dépendent pas du tout de la largeur L du système. La fonction de partition sur l'anneau avec des conditions au bord habituelles (*i.e.* sans modification du poids des boucles au bord) est

$$Z(L, T) = \text{Tr} \left[(T_L)^T \right] \quad (\text{IV.18})$$

et on voit que les coefficients (IV.15) vont apparaître dans cette fonction de partition pour n'importe quelle taille. Ils doivent donc aussi apparaître dans la limite continue.

IV.4.2 Caractères conformes

En décomposant la fonction de partition (IV.18), on voit que l'on a besoin des caractères

$$\text{tr}_{\mathcal{V}_k} \left[(T_L)^T \right] \quad (\text{IV.19})$$

ainsi que des caractères pour $1BTL$ et $2BTL$. Dans la limite $L \rightarrow \infty$ on sait que le comportement des valeurs propres de la matrice de transfert est relié au spectre de l'opérateur de translation le long du ruban $e^{-\frac{\pi}{L}(L_0 - \frac{c}{24})}$

$$\lambda_{L,i}^{(k)} = \exp \left[-L f_{\text{volume}} - f_{\text{bord}} - \frac{\pi}{L} \left(h_i^{(k)} - \frac{c}{24} \right) + \dots \right] \quad (\text{IV.20})$$

Dans cette relation, les $\lambda_{L,i}^{(k)}$ sont les valeurs propres de T_L dans la représentation $\mathcal{V}_k$ et les $h_i^{(k)}$ sont les poids conformes des états dans la limite continue. f_{volume} et f_{bord} sont les énergies libres de volume et de bord, qui sont extensives et non universelles. On voit donc que les caractères (IV.19) vont se comporter, dans la limite continue, comme

$$\text{tr}_{\mathcal{V}_k} \left[(T_L)^T \right] \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} e^{-L f_{\text{volume}} - f_{\text{bord}}} \text{tr}_{\mathcal{V}_{1,1+k}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) \quad (\text{IV.21})$$

où $q = e^{-\frac{\pi T}{L}}$. La fonction de partition sur le réseau (IV.18) possède donc une partie universelle Z_{CFT}

$$Z(L, T) = e^{-L T f_{\text{volume}} - T f_{\text{bord}}} Z_{CFT} \quad (\text{IV.22})$$

où Z_{CFT} est donnée pour les conditions au bord habituelles (*i.e.* sans marques), par

$$Z_{CFT} = \sum_{k \geq 0} \mathcal{D}_k \text{tr}_{\mathcal{V}_{\Psi_k}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) \quad (\text{IV.23})$$

On voit clairement que la fonction de partition en théorie conforme hérite directement de la structure de trace de Markov (IV.13). Ceci s'étend évidemment à $1BTL$ et $2BTL$. Le calcul de la fonction de partition en théorie conforme revient donc à l'identification des caractères conformes

$$K_k(q) = \text{tr}_{\mathcal{V}_{\Psi_k}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) \quad (\text{IV.24})$$

Pour l'algèbre de Temperley-Lieb habituelle, ces caractères sont connus depuis longtemps (voir par exemple [13, 14]). Puisque nous avons déjà identifié le module $\mathcal{V}_k$ de l'algèbre de Temperley-Lieb avec le module $\mathcal{V}_{\Psi_k} = \mathcal{V}_{1,1+k} / \mathcal{V}_{1,-1-k}$, ce caractère est

$$K_k(q) = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \left(q^{h_{1,1+k}} - q^{h_{1,-1,-k}} \right) \quad (\text{IV.25})$$

On utilise la notation $P(q) = \prod_{p \geq 1} (1 - q^p)$. De même, pour $1BTL$ on a identifié dans la section précédente l'opérateur B.C.C et sa fusion avec les opérateurs qui génèrent k lignes. On obtient

ainsi les opérateurs $\Phi_{r_1, r_1 \pm k}$. Les caractères conformes pour $1BTL$ sont donc (voir aussi [2])

$$K_0(q) = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} q^{h_{r_1, r_1}} \quad (\text{IV.26a})$$

$$K_k^\circ(q) = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} q^{h_{r_1, r_1+k}} \quad (\text{IV.26b})$$

$$K_k^\square(q) = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} q^{h_{-r_1, -r_1+k}} \quad (\text{IV.26c})$$

où, comme on l'a vu précédemment, les poids des boucles n et n_1 sont paramétrés par $n = 2 \cos \gamma$ et $n_1 = \frac{\sin((r_1+1)\gamma)}{\sin(r_1\gamma)}$. Les caractères pour $2BTL$ sont dérivés dans [3]

$$K_0(q) = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{h_{r_{12}-2n, r_{12}}} \quad (\text{IV.27a})$$

$$K_k^{\circ\circ}(q) = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{r_1+r_2-1-2n, r_1+r_2-1+k}} \quad (\text{IV.27b})$$

$$K_k^{\square\circ}(q) = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{-r_1+r_2-1-2n, -r_1+r_2-1+k}} \quad (\text{IV.27c})$$

$$K_k^{\circ\square}(q) = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{r_1-r_2-1-2n, r_1-r_2-1+k}} \quad (\text{IV.27d})$$

$$K_k^{\square\square}(q) = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{-r_1-r_2-1-2n, -r_1-r_2-1+k}} \quad (\text{IV.27e})$$

où on utilise le jeu de paramétrisations

$$\begin{aligned} n = 2 \cos \gamma \quad n_1 &= \frac{\sin((r_1+1)\gamma)}{\sin(r_1\gamma)} \quad n_2 = \frac{\sin((r_2+1)\gamma)}{\sin(r_2\gamma)} \\ n_{12} &= \frac{\sin((r_1+r_2+1-r_{12})\frac{\gamma}{2}) \sin((r_1+r_2+1+r_{12})\frac{\gamma}{2})}{\sin(r_1\gamma) \sin(r_2\gamma)} \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

La façon dont apparaît le poids n_{12} des boucles qui touchent à la fois le bord gauche et le bord droit (figure IV.3) est très intéressante. Ces boucles ne peuvent apparaître que s'il n'y a pas de lignes qui traversent le système, c'est-à-dire si $k = 0$. C'est pourquoi n_{12} n'intervient pas dans les caractères (IV.27) dès que $k > 0$. Par contre, ce paramètre est crucial dans le secteur $k = 0$. Il faut remarquer aussi que K_0 (IV.27.a) dépend de n_1 et n_2 seulement via la paramétrisation (IV.28), mais n'est pas directement une fonction de r_1 et r_2 .

IV.4.3 Entropie de bord des conditions marquées

Les fonctions de partition ci-dessus permettent de calculer l'entropie de bord des conditions aux bords qui nous intéressent ici (voir section II.8 pour la définition de l'entropie de bord).

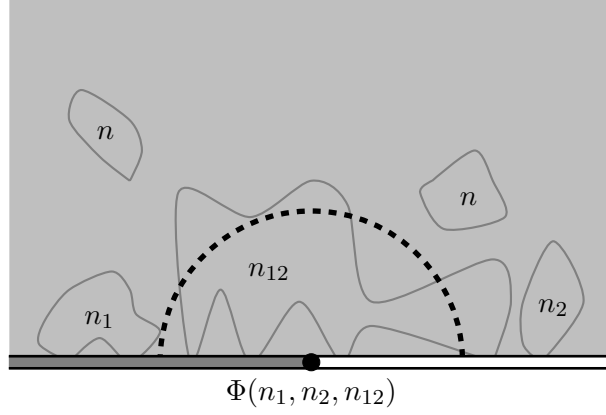


FIG. IV.3 – Le modèle de boucles denses avec un poids n_1 pour une boucle touchant le bord gauche, n_2 pour une boucle touchant le bord droit, et n_{12} pour une boucle qui touche les deux bords.

Pour le modèle de boucles denses, ce calcul apparaît dans [3]. L'entropie de bord de la condition au bord marquée avec un poids n_1 pour les boucles vaut

$$s_{n,n_1} = -\log \left[(2g)^{-\frac{1}{4}} \frac{\sin \frac{r_1 \gamma}{g}}{\sin r_1 \gamma} \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \frac{\gamma}{g}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{IV.29})$$

Comme nous l'avons expliqué dans la section II.8, cette entropie de bord peut être extraite du modèle sur réseau. Cette entropie de bord peut donc être calculée numériquement. L'accord entre les données numériques et la formule (IV.29) est remarquable (figure IV.4).

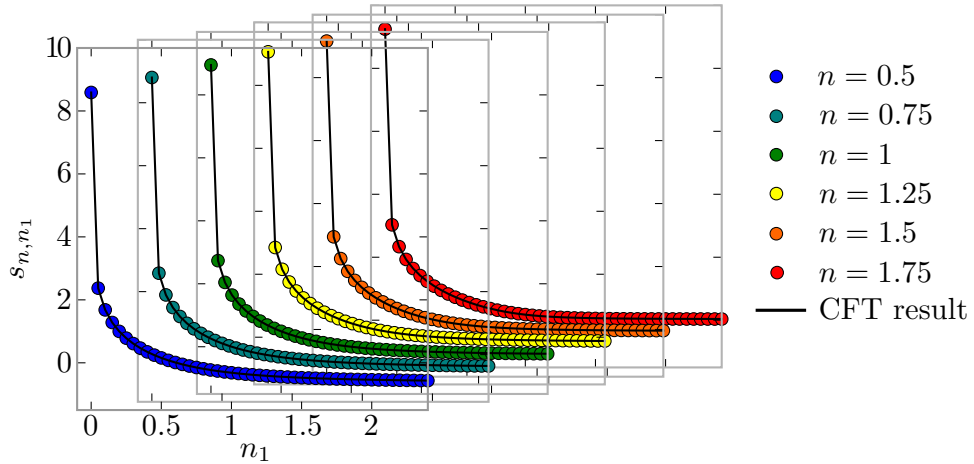


FIG. IV.4 – Contribution universelle à l'entropie de bord dans le modèle de boucles denses (d'après [15]).

IV.5 Restrictions RSOS

Les caractères conformes que nous avons écrits en (IV.25), (IV.26) et (IV.27) correspondent aux représentations génériques de l'algèbre de Temperley-Lieb et de ses extensions avec marques. Mais dans le cas où n , n_1 , n_2 ou n_{12} prennent certaines valeurs spécifiques, ces représentations génériques ne sont plus irréductibles, et on peut considérer des quotients de celles-ci. Les représentations que l'on obtient de cette manière correspondent aux modèles RSOS (*Restricted Solid On Solid*) [16, 17].

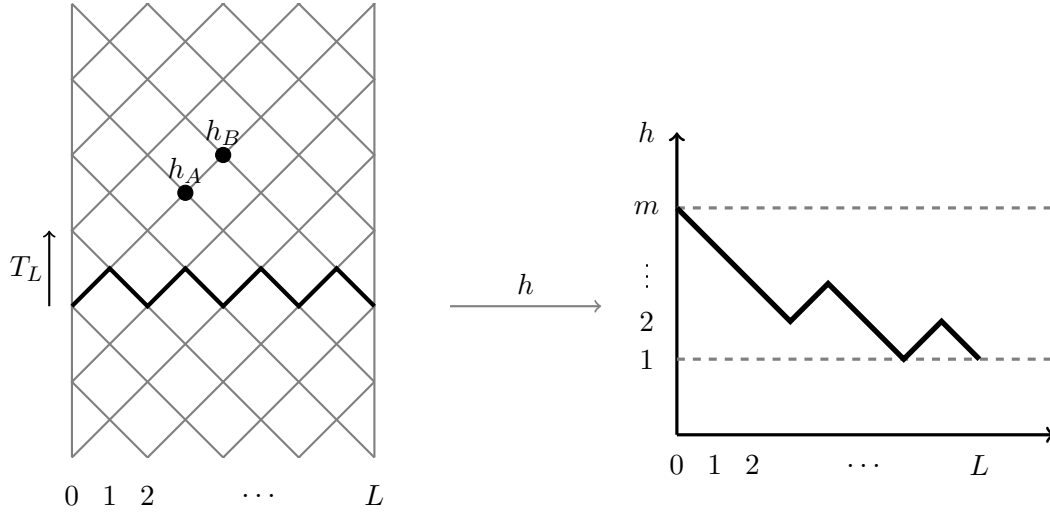


FIG. IV.5 – Modèle RSOS sur le réseau carré, avec un bord à gauche et à droite. Sur chaque nœud A du réseau, on a une variable $h_A \in \{1, \dots, m\}$. Si A et B sont voisins sur le réseau, $|h_A - h_B| = 1$. La matrice de transfert T_L qui génère ce modèle agit sur des configurations h_i , $i = 1, \dots, L$.

Le modèle RSOS peut être défini sur le réseau carré (figure IV.5). Sur chaque site du réseau, on a une hauteur $h \in \{1, \dots, m\}$. Si deux sites A et B sont voisins, alors on a la contrainte $|h_A - h_B| = 1$. La matrice de transfert qui génère les configurations de ce modèle sur le ruban peut être écrite exactement comme (III.19), où l'algèbre de Temperley-Lieb a un paramètre

$$n = 2 \cos \left(\frac{\pi}{m+1} \right) \quad (\text{IV.30})$$

Cette valeur de n correspond bien sûr à un cas non générique, et les représentations RSOS sont en fait des quotients des représentations génériques. La représentation précise sur laquelle on agit dépend des conditions au bord que l'on impose aux configurations RSOS. Nous allons donner quelques résultats représentatifs, sans justification. On peut se reporter à l'annexe pour un traitement plus détaillé.

Temperley-Lieb sans marque. Quand on choisit les conditions au bord

$$\text{gauche : } h_0 = 1 + k \quad \text{droite : } h_L = 1 \quad (\text{IV.31})$$

on obtient la représentation quotient $\langle k \rangle$ que nous avons définie en (III.29) dans le chapitre précédent à partir du diagramme

$$0 \leftarrow \mathcal{V}_k \leftarrow \mathcal{V}_{2(m+1)-2-k} \leftarrow \mathcal{V}_{2(m+1)+k} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{V}_{2p(m+1)-2-k} \leftarrow \mathcal{V}_{2p(m+1)+k} \leftarrow \cdots \quad (\text{IV.32})$$

où tous les $\mathcal{V}_k$ sont des représentations génériques de l'algèbre TL . Ce diagramme permet de calculer directement la fonction de partition sur l'anneau pour ce modèle RSOS

$$\begin{aligned} Z(h_0 = 1+k, h_L = 1) &= \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \left[\left(q^{h_{1,1+k}} - q^{h_{1,-1-k}} \right) - \left(q^{h_{1,1+2(m+1)-2-k}} - q^{h_{1,-1-2(m+1)+2+k}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(q^{h_{1,1+2(m+1)+k}} - q^{h_{1,-1-2(m+1)-k}} \right) - \cdots \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

On retrouve évidemment les caractères de Rocha-Caridi [18], que nous notons

$$\chi_{r,s} = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left(q^{h_{r,s+2(m+1)p}} - q^{h_{r,-s+2(m+1)p}} \right) \quad (\text{IV.34})$$

c'est-à-dire

$$Z(h_0 = 1+k, h_L = 1) = \chi_{1,1+k} \quad (\text{IV.35})$$

Ce résultat apparaît à plusieurs endroits dans la littérature, notamment dans [13, 14, 19].

Modèle RSOS et 1BTL. Les conditions au bord correspondant à la matrice de transfert (IV.10) dans 1BTL sont

$$\text{gauche : } \begin{cases} h_0 = r_1 \\ h_1 = r_1 + 1 \end{cases} \quad \text{droite : } h_L = r_1 + k \quad (\text{IV.36})$$

dans le cas où $r_1 + k \leq m$. Evidemment, ici, r_1 est un entier. Dans ce cas le modèle RSOS correspond à la représentation $\langle k, \bullet \rangle$ qui est définie comme le quotient

$$\langle k, \bullet \rangle = \mathcal{V}_k^\bullet / \text{Im} \left(\mathcal{V}_{2(m+1)-2r_1-k}^\bullet \cup \mathcal{V}_{2r_1+k}^\square \right)$$

dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V}_k^\bullet & \longleftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)-2r_1-k}^\bullet & \longleftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+k}^\bullet & \longleftarrow & \mathcal{V}_{4(m+1)-2r_1-k}^\bullet & \longleftarrow & \cdots \\ & \searrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ & & \mathcal{V}_{2r_1+k}^\square & \longleftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)-k}^\square & \longleftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+2r_1+k}^\square & \longleftarrow & \cdots \end{array} \quad (\text{IV.37})$$

Ce diagramme doit bien sûr être interprété comme la version discrète (sur réseau) de la construction de Rocha-Caridi (ou Feigin-Fuchs) [18]. Nous avons vu que $\mathcal{V}_k^\bullet$ et $\mathcal{V}_k^\square$ correspondaient dans la limite continue aux modules de Verma $\mathcal{V}_{r_1, r_1+k}$ et $\mathcal{V}_{r_1, r_1-k}$ respectivement. C'est exactement ce dont on a besoin ici pour retrouver la construction de Rocha-Caridi (ou Feigin-Fuchs)

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V}_{r_1, r_1+k} & \longleftarrow & \mathcal{V}_{r_1, -r_1-k+2(m+1)} & \longleftarrow & \mathcal{V}_{r_1, r_1+k+2(m+1)} & \longleftarrow & \mathcal{V}_{r_1, -r_1-k+4(m+1)} & \longleftarrow & \cdots \\ & \searrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ & & \mathcal{V}_{r_1, -r_1-k} & \longleftarrow & \mathcal{V}_{r_1, r_1+k-2(m+1)} & \longleftarrow & \mathcal{V}_{r_1, r_1-k-2(m+1)} & \longleftarrow & \cdots \end{array} \quad (\text{IV.38})$$

Le caractère associé à la représentation $\langle k, \bullet \rangle$ dans la limite continue est donc simplement le caractère de Rocha-Caridi χ_{r_1, r_1+k} , la fonction de partition est donc

$$Z \left(\begin{array}{l} h_0 = r_1 \\ h_1 = r_1 + 1 \end{array}, h_L = r_1 + k \right) = \chi_{r_1, r_1+k} \quad (\text{IV.39})$$

Modèle RSOS et 2BTL. On peut obtenir la fonction de partition de n'importe quel modèle RSOS avec des conditions au bord de la forme précédente, c'est-à-dire avec une hauteur h fixée sur la première rangée au bord, ou sur les deux premières rangées. Ces conditions au bord pour les modèles RSOS ont été introduites dans [14]. Pour obtenir ces différents modèles à partir de quotients de représentations génériques de 1BTL ou 2BTL en toute généralité, il faut distinguer un certain nombre de cas. Nous n'allons pas nous lancer dans cette discussion ici. L'annexe traite cette question de manière plus complète.

De manière générale, en analysant la théorie des représentations des algèbres 1BTL et 2BTL, on peut retrouver toutes les conditions au bord pour les modèles RSOS introduites dans [14]. On trouve (voir annexe)

$$Z(h_0 = a_1, h_L = a_2) = \sum_{\substack{n=|a_1-a_2| \\ n=a_1+a_2 \bmod 2}}^{\min(a_1+a_2-2, 2m-a_1-a_2)} \chi_{1,1+n} \quad (\text{IV.40a})$$

$$Z \left(\begin{array}{l} h_0 = r_1 \\ h_1 = r_1 \pm 1 \end{array}, h_L = a_2 \right) = \chi_{d_1, a_2} \quad (\text{IV.40b})$$

$$Z \left(\begin{array}{ll} h_0 = r_1 & h_{L-1} = r_2 \pm 1 \\ h_1 = r_1 \pm 1 & h_L = r_2 \end{array} \right) = \sum_{\substack{n=|d_1-d_2| \\ n=d_1+d_2 \bmod 2}}^{\min(d_1+d_2-2, 2m-2-d_1-d_2)} \chi_{1+n, 1} \quad (\text{IV.40c})$$

où $d_1 = \min(r_1, r_1 \pm 1)$ et $d_2 = \min(r_2, r_2 \pm 1)$. Ces fonctions de partition doivent être interprétées comme provenant de la fusion des opérateurs B.C.C $\phi_{1,a}$ et $\phi_{d,1}$ dans les modèles minimaux [11, 12]. On retrouve ainsi les résultats prédits dans [19].

IV.6 Lien avec la chaîne XXZ

Toute la construction que nous avons présentée jusqu'à présent reposait sur l'algèbre de Temperley-Lieb et ses extensions avec des marques. Nous avons défini ces algèbres purement en termes de diagrammes que l'on peut concaténer. Mais il existe une autre construction de l'algèbre de Temperley-Lieb, qui permet de mettre l'accent sur sa relation avec le groupe quantique $U_q[SU(2)]$. Dans cette section nous esquissons la manière dont cette relation peut être étendue au cas de l'algèbre avec marque 1BTL.

Nous n'allons pas rentrer dans les détails techniques associés au groupe quantique $U_q[SU(2)]$. La littérature sur ce sujet est très riche (voir par exemple [13, 20, 21]). Dans cette section, nous n'allons utiliser que la notion de singulet q -déformé

$$|s\rangle = q^{-1/2} |\uparrow\downarrow\rangle - q^{1/2} |\downarrow\uparrow\rangle \quad (\text{IV.41})$$

qui généralise le singulet $SU(2)$, que l'on retrouve dans la limite $q \rightarrow 1$ (il n'est pas normalisé). Quand on transpose cet état, q doit être traité comme un paramètre formel, et ne doit pas être conjugué

$$\langle s| = q^{-1/2} \langle \uparrow\downarrow| - q^{1/2} \langle \downarrow\uparrow| \quad (\text{IV.42})$$

On voit qu'avec cette définition $\langle s|s\rangle = q + q^{-1}$. On considère maintenant la chaîne de spin $(\{\uparrow, \downarrow\})^{\otimes L}$, et on note

$$e_i = |s\rangle \langle s|_{i,i+1} \quad (\text{IV.43})$$

le projecteur (non normalisé) sur le singulet pour les spins voisins i et $i+1$. Ces projecteurs vérifient les relations (III.17), ils génèrent donc l'algèbre de Temperley-Lieb. En fait, la chaîne $(\{\uparrow, \downarrow\})^{\otimes L}$ peut être vue comme la représentation $(1/2)^{\otimes L}$ de $U_q[SU(2)]$ (où $(1/2)$ est la représentation de spin $1/2$ pour ce même groupe quantique). L'algèbre de Temperley-Lieb peut alors être définie comme le commutant de $U_q[SU(2)]$ dans cette représentation. L'algèbre $TL_L(q + q^{-1}) \otimes U_q[SU(2)]$ agit librement sur l'espace $(1/2)^{\otimes L}$: c'est un exemple de *dualité de Schur-Weyl*. La chaîne de spin $(1/2)^{\otimes L}$, vue comme une représentation de l'algèbre TL , peut être décomposée comme

$$(1/2)^{\otimes L} = \bigoplus_{k=0, L \bmod 2}^L (k+1) \mathcal{V}_k \quad (\text{IV.44})$$

où l'on voit apparaître les multiplicités $(k+1)$ qui sont les dimensions des représentations de $U_q[SU(2)]$ de spin $k/2$.

Les projecteurs e_i (IV.43) peuvent être utilisés pour construire la chaîne XXZ [13].

$$\begin{aligned} H_{XXZ} &= \frac{q + q^{-1}}{2} (L-1) - 2 \sum_{i=1}^{L-1} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{L-1} \left[\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \frac{q + q^{-1}}{2} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right] + \frac{q - q^{-1}}{2} [\sigma_1^z - \sigma_L^z] \end{aligned} \quad (\text{IV.45})$$

La somme correspond à l'interaction antiferromagnétique habituelle entre deux spins successifs $H \propto \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$, avec une anisotropie selon z . Le deuxième terme est dû à la symétrie $U_q[SU(2)]$ de ce Hamiltonien. Quand $q + q^{-1} < 2$ ce terme n'est pas hermitien. Le spectre de H_{XXZ} est néanmoins réel. On sait [13] que les valeurs propres correspondent aux poids conformes h dans le module de Verma de $\Psi_{1,1+k}$, où $j = k/2$ est le spin de la représentation irréductible de $U_q[SU(2)]$ que l'on choisit

$$E_n^{(j)} - E_0 \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi v_F}{L} \left(h - \frac{c}{24} \right) \quad (\text{IV.46})$$

avec la vitesse de Fermi $v_F = \frac{2\pi \sin \gamma}{\gamma}$ et E_0 est l'énergie du fondamental, qui a un spin $j = 0$ (on suppose que L est pair).

Nous voulons étendre cette correspondance avec la chaîne XXZ au cas avec une marque. Pour cela on considère maintenant une chaîne avec un spin additionnel à gauche (sur le site $i = 0$)

$$\underset{\text{spin } j}{\uparrow\uparrow} \otimes \underbrace{\uparrow \otimes \downarrow \otimes \cdots \otimes \uparrow}_L$$

c'est-à-dire, plus précisément, la représentation $(j) \otimes (1/2)^{\otimes L}$ de $U_q[SU(2)]$. Le commutant de $U_q[SU(2)]$ dans cette représentation est une extension de l'algèbre $TL_L(q + q^{-1})$. En effet, les e_i définis en (IV.45) sont toujours présents et commutent encore avec $U_q[SU(2)]$, mais il y a un nouvel opérateur qui est dans le commutant : le projecteur sur la représentation de spin $j + 1/2$ pour les deux premiers spins $\uparrow \otimes \uparrow$

$$b = \sum_m |j + 1/2; m\rangle \langle j + 1/2; m|_{0,1} \quad (\text{IV.47})$$

Contrairement aux e_i , b est normalisé : $b^2 = b$. L'expression exacte de ce projecteur fait intervenir les coefficients de Clebsch-Gordan q -déformés, que l'on peut trouver dans [21]. A l'aide de ces coefficients, on peut vérifier que^a

$$e_1 b e_1 = \frac{[2j + 2]_q}{[2j + 1]_q} e_1 \quad (\text{IV.48})$$

et il est par ailleurs évident que $b e_i = e_i b$ si $i \geq 2$. Evidemment, on a envie de conclure que le commutant de $U_q[SU(2)]$, qui est généré par b et l'ensemble des e_i , est $1BTL$ pour le paramètre $n_1 = \frac{[r_1 + 1]_q}{[r_1]_q}$ et $r_1 = 1 + 2j$. Ceci n'est pas tout à fait exact cependant.

Pour voir cela, on a besoin d'introduire la suite d'opérateurs P_n^u définie par^b

$$\begin{aligned} P_1^u &= 1 - b \\ P_{n+1}^u &= P_n^u - \frac{[-r_1 - 1 + n]_q}{[-r_1 + n]_q} P_n^u e_n P_n^u \end{aligned} \quad (\text{IV.49})$$

Puisque $r_1 = 1 + 2j$ est entier, ces opérateurs ne sont définis que pour $n < r_1 = 1 + 2j$. On peut vérifier que l'opérateur P_{1+2j}^u est nul

$$P_{1+2j}^u = 0 \quad (\text{IV.50})$$

Cette relation est une contrainte supplémentaire sur le commutant de $U_q[SU(2)]$, qui n'apparaissait pas dans la définition de $1BTL$ que nous avons donnée plus haut. Le commutant n'est donc pas l'algèbre $1BTL$ tout entière, mais seulement un quotient de celle-ci

$$[\text{commutant de } U_q[SU(2)] \text{ dans } (j) \otimes (1/2)^{\otimes L}] = 1BTL/\mathcal{I}_{1+2j}^u \quad (\text{IV.51})$$

^aOn utilise les nombres q -déformés

$$[a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$$

^bIl s'agit en fait des projecteurs de Jones-Wenzl pour $1BTL$ étudiés dans l'annexe.

où $\mathcal{I}_{1+2j}^u$ désigne l'idéal engendré par P_{1+2j}^u dans $1BTL$ (dans $1BTL$ la relation (IV.50) n'est pas vérifiée). Les représentations de l'algèbre $1BTL/\mathcal{I}_{1+2j}^u$ sont des quotients des représentations génériques de $1BTL$, de la forme $\mathcal{V}_k^\bullet/\mathcal{V}_{k+2r_1}^\square$, ainsi que $\mathcal{V}_k^\square/\mathcal{V}_{2r_1-k}^\square$ (seulement si $k \leq r_1$). On a donc la décomposition suivante de la chaîne de spin $(j) \otimes (1/2)^{\otimes L}$

$$(j) \otimes (1/2)^{\otimes L} = \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k=L+2j \bmod 2}}^{\min(2j+1, L)} (2j+1-k) [\mathcal{V}_k^\square/\mathcal{V}_{2+4j-k}^\square] \oplus \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k=L+2j \bmod 2}}^L (2j+1+k) [\mathcal{V}_k^\bullet/\mathcal{V}_{k+2+4j}^\square] \quad (\text{IV.52})$$

où les multiplicités $2j \pm k + 1$ sont les dimensions des représentations de spin $j \pm k/2$ de $U_q[SU(2)]$. Imaginons que l'on s'intéresse au Hamiltonien

$$H_{XXZ}(j) = \frac{q+q^{-1}}{2}(L-1) - 2 \sum_{i=1}^{L-1} e_i - \lambda b \quad (\text{IV.53})$$

avec $\lambda > 0$. Le spectre de $H_{XXZ}(j)$ peut être écrit directement grâce à la décomposition (IV.52). Le caractère conforme pour un spin $j' = j \pm k/2$ est simplement

$$\begin{aligned} K_{1+2j, 1+2(j-k/2)} &= K_k^\square(q) - K_{2+4j-k}^\square(q) \\ &= \frac{q^{-\frac{c}{24}}}{P(q)} \left(q^{h_{1+2j, 1+2j-k}} - q^{h_{1+2j, 1+2j-2-4j+k}} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

$$\begin{aligned} K_{1+2j, 1+2(j+k/2)} &= K_k^\bullet(q) - K_{2+4j-k}^\square(q) \\ &= \frac{q^{-\frac{c}{24}}}{P(q)} \left(q^{h_{1+2j, 1+2j+k}} - q^{h_{1+2j, 1+2j-2-4j-k}} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

$$(\text{IV.56})$$

donc dans les deux cas, on a le caractère

$$K_{1+2j, 1+2j'} = \frac{q^{-\frac{c}{24}}}{P(q)} \left(q^{h_{1+2j, 1+2j'}} - q^{h_{1+2j, -1-2j'}} \right) \quad (\text{IV.57})$$

La fonction de partition du système (IV.53) à température finie $1/\beta$ contient donc une partie universelle que l'on peut écrire directement à partir de (IV.52) et (IV.57)

$$Z_{XXZ}(j)(q) = \sum_{j'} (2j' + 1) K_{1+2j, 1+2j'}(q) \quad (\text{IV.58})$$

où $q = e^{-\frac{\beta \pi v_F}{L}}$. On arrive donc à une forme de la fonction de partition très élégante, qui fait apparaître clairement le spin au bord j et le spin total de la chaîne j' .

Il paraît naturel de vouloir étendre cette construction, en particulier la décomposition (IV.52), à une chaîne de la forme

$$\uparrow\uparrow_{\text{spin } j_1} \otimes \underbrace{\uparrow \otimes \downarrow \otimes \cdots \otimes \uparrow \otimes \downarrow}_L \otimes \uparrow\uparrow_{\text{spin } j_2}$$

On aimerait, bien sûr, faire apparaître $2BTL$ (ou au moins un quotient de cette algèbre) comme le commutant de $U_q[SU(2)]$ dans la représentation $(j_1) \otimes (1/2)^{\otimes L} \otimes (j_2)$. Cette extension n'est pas triviale cependant, et on se heurte rapidement à des difficultés techniques^c. Nous n'allons pas aborder cela ici.

^cIl est facile de se convaincre qu'un problème majeur vient de la définition du coproduit de $U_q[SU(2)]$. Le coproduit permet de passer simplement de la chaîne $(j_1) \otimes (1/2)^L$ à la chaîne $(j_1) \otimes (1/2)^{L+1}$. Par contre, il n'y a pas de construction similaire avec le coproduit habituel qui permette de passer d'une chaîne $(j_1) \otimes (1/2)^{\otimes L} \otimes (j_2)$ à une chaîne $(j_1) \otimes (1/2)^{\otimes L+1} \otimes (j_2)$.

Bibliographie

- [1] C.M. Fortuin & P.W. Kasteleyn, *On the random-cluster model : I. Introduction and relation to other models*, Physica **57**, 536-564, 1972.
- [2] J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Conformal boundary loop models*, Nucl. Phys. **B 788**, 137-166, 2008.
- [3] J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Conformal two-boundary loop model on the annulus*, Nucl. Phys. **B 813**, 430-459, 2009.
- [4] A. Doikou & P.P. Martin, *Hecke algebraic approach to the reflection equation for spin chains*, J. Phys. A **36**, 2203-2226, 2003.
- [5] A. Nichols, V. Rittenberg & J. de Gier, *One-boundary Temperley-Lieb algebras in the XXZ and loop models*, J. Stat. Mech. **0503** P003, 2005.
- [6] A. Nichols, *The Temperley-Lieb algebra and its generalizations in the Potts and XXZ models*, J. Stat. Mech. **0601**, P003, 2006.
- [7] A. Nichols, *Structure of the two-boundary XXZ model with non-diagonal boundary terms*, J. Stat. Mech. **0602**, L004, 2006.
- [8] P. Martin & H. Saleur, *The blob algebra and the periodic Temperley-Lieb algebra*, Lett. Math. Phys. **30**, 189-206, 1994.
- [9] J. de Gier & A. Nichols, *The two-boundary Temperley-Lieb algebra*, Journal of Algebra **321**, 1132-1167, 2009.
- [10] J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Combinatorial aspects of boundary loop models*, J. Stat. Mech. P01021, 2008.
- [11] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B 241**, 333-380, 1984.
- [12] P. di Francesco, P. Matthieu & D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [13] V. Pasquier & H. Saleur, *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, Nucl. Phys. **B 330**, 523-556, 1990.
- [14] M. Bauer & H. Saleur, *On some relations between local height probabilities and conformal invariance*, Nucl. Phys. **B 320**, 591-624, 1989.
- [15] J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Conformal field theory at central charge $c = 0$: a measure of the indecomposability (b) parameters*, Nucl. Phys. **B 834**, 399-422, 2010.

- [16] G.E. Andrews, R.J. Baxter & P.J. Forrester, *Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan-type identities*, J. Stat. Phys. **35**, 193-266, 1984.
- [17] V. Pasquier, *Two-dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams*, Nucl. Phys. **B 285**, 162-172, 1987.
- [18] A. Rocha-Caridi, *Vacuum vector representations of the Virasoro algebra*, in *Vertex Operators in Mathematics and Physics*, Eds. J. Lepowsky, S. Mandelstam & I. Singer, Publ. Math. Sciences, Springer-Verlag, New York, 451, 1985.
- [19] J. Cardy, *Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula*, Nucl. Phys. **B 324**, 581-596, 1989.
- [20] J. Fuchs, *Affine Lie algebras and quantum groups*, Cambridge Monographs in Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1992.
- [21] C. Gomez, M. Ruiz-Altaba & G. Sierra, *Quantum groups in two-dimensional physics*, Cambridge Monographs in Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1996.

CHAPITRE V

Transition spéciale anisotrope dans le modèle $O(n)$

Le modèle $O(n)$, qui est à l'origine un modèle de spins destiné à décrire la transition paramagnétique/ferromagnétique, peut être reformulé comme un modèle de boucles (chapitre III) où chaque boucle fermée a un poids de Boltzmann $n x^{\text{longueur}}$. Quand $x > x_c$, le modèle de boucles est dans la phase dense, et cette phase est stable sous le flot RG si on perturbe le paramètre x . Nous avons étudié la phase dense dans les chapitres III et IV. Maintenant nous allons nous intéresser au cas $x = x_c$. A ce point critique, la perturbation du paramètre x correspond à un opérateur relevant. Evidemment, on parle ici d'une perturbation de ce paramètre dans le volume. Mais cette caractéristique de la phase diluée va se traduire par un comportement critique de surface beaucoup plus riche que dans la phase dense (chapitre IV).

Nous avons vu dans le chapitre I que dans les modèles de magnétisme, on peut parfois avoir une transition de surface : dans la phase paramagnétique (dans le volume), l'aimantation spontanée est non nulle près du bord si l'interaction entre les spins est suffisamment forte à la surface. Dans ce cas, quand on traverse le point critique dans le volume, le comportement de surface est différent selon que les spins à la surface sont alignés ou non. Cette transition peut être *ordinaire*, *extraordinaire* ou *spéciale* (voir chapitre I).

Dans ce chapitre nous allons considérer une brisure de la symétrie $O(n)$ au bord : $O(n) \rightarrow O(n_1) \times O(n - n_1)$. Plus précisément, l'interaction entre deux spins, qui est de la forme $E_{<ij>} \propto \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \propto \sum_{\alpha=1}^n S_i^\alpha S_j^\alpha$ dans le volume, va devenir anisotrope entre deux spins de surface $\vec{S}_b$ et $\vec{S}_c$

$$E_{<bc>} = -J_s \left((1 + \Delta) \sum_{\alpha=1}^{n_1} S_b^\alpha S_c^\alpha + (1 - \Delta) \sum_{\gamma=n_1+1}^n S_b^\gamma S_c^\gamma \right) \quad (\text{V.1})$$

Ce modèle a été introduit par Diehl et Eisenriegler dans [1]. Leur motivation provenait en partie de résultats expérimentaux. Certains exposants critiques prévus théoriquement pour la transition spéciale (isotrope) n'étaient pas compatibles avec les mesures expérimentales. Pour expliquer ce désaccord, Diehl et Eisenriegler avaient considéré la possibilité d'une faible brisure de symétrie de l'interaction spin-spin à la surface de l'échantillon.

V.1 Anisotropie au bord, boucles et marques

Le modèle $O(n)$ peut être reformulé comme un modèle de boucles (chapitre III). En suivant les mêmes étapes que dans la section III.1, on peut réécrire le modèle $O(n)$ avec l'interaction anisotrope (V.1) au bord sous la forme

$$\begin{aligned}
 Z = \sum_{\text{conf.}} & \left[x^{\text{longueur totale}} n^{N_{\text{boucles volume}}} \right. \\
 & \times (w_{\bullet})^{N_{\text{contacts surface } \bullet}} n_1^{N_{\text{boucles surface } \bullet}} \\
 & \left. \times (w_{\blacksquare})^{N_{\text{contacts surface } \blacksquare}} (n - n_1)^{N_{\text{boucles surface } \blacksquare}} \right] \quad (\text{V.2})
 \end{aligned}$$

Les boucles qui ne touchent pas le bord correspondent à des termes $(\beta J)^k S_{i_1}^{\alpha_1} S_{i_2}^{\alpha_1} S_{i_2}^{\alpha_2} S_{i_3}^{\alpha_2} \dots S_{i_k}^{\alpha_k} S_{i_1}^{\alpha_k}$ dans le développement de la fonction de partition (III.1), avec la température inverse β . Leur trace vaut $x^k n$ (voir section III.1) avec $x = \beta J$, ce qui correspond au premier terme dans (V.2). Les boucles qui touchent le bord impliquent des spins couplés entre eux par l'interaction anisotrope (V.1). Pour prendre en compte correctement cette anisotropie, on sépare les n composantes initiales en $\{1, \dots, n_1\}$ et $\{n_1 + 1, \dots, n\}$. On prend la trace séparément sur le premier sous-ensemble de composantes et sur le second. Les termes $(\beta J)^k ((1+\Delta) J_s/J)^p S_{i_1}^{\alpha_1} S_{i_2}^{\alpha_1} S_{i_2}^{\alpha_2} S_{i_3}^{\alpha_2} \dots S_{i_k}^{\alpha_k} S_{i_1}^{\alpha_k}$ (où $p+1$ spins sont sur le bord) ont une trace partielle $(\beta J)^k ((1+\Delta) J_s/J)^p n_1$, qui correspond à la deuxième ligne dans (V.2), avec $w_{\bullet} = (1+\Delta) J_s/J$. Le dernier terme est évidemment la trace sur l'autre sous-ensemble de composantes, avec $w_{\blacksquare} = (1-\Delta) J_s/J$.

Les boucles correspondant aux composantes $\{1, \dots, n_1\}$ seront marquées $\bullet$, et les boucles correspondant aux composantes $\{n_1 + 1, \dots, n\}$ seront antimarquées $\blacksquare$. Une configuration du modèle de boucles (V.1) est représentée sur la figure V.1. Les quatre boucles qui apparaissent sur cette figure ont respectivement des poids $n x^6$, $n x^{16}$, $n_1 w_{\bullet} x^6$, et $(n - n_1) (w_{\blacksquare})^2 x^{14}$. Le poids total de cette configuration est donc $n^2 (w_{\bullet})^2 (n - n_1) x^{42}$.

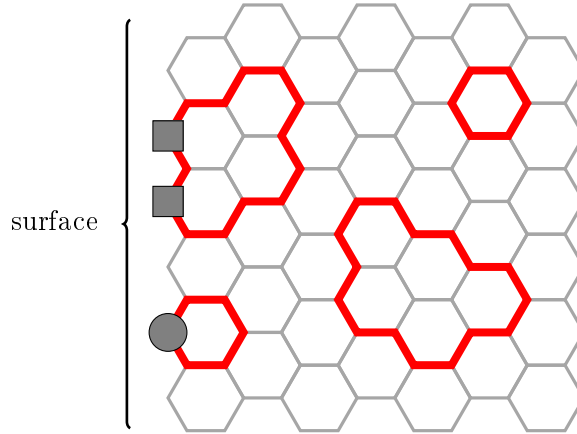


FIG. V.1 – Développement en boucles du modèle $O(n)$ sur réseau hexagonal avec une interaction anisotrope à la surface. Les boucles qui touchent la surface sont soit *marquées* soit *antimarquées*.

V.2 Diagramme de phase

Nous allons maintenant discuter le diagramme de phase du modèle $O(n)$ avec une interaction anisotrope au bord, d'abord dans le langage du magnétisme et des spins, puis dans le langage des boucles, qui peuvent être vus comme des polymères cycliques. Evidemment, cette discussion va beaucoup ressembler à celle que nous avons menée dans le chapitre I, mais en tenant compte cette fois de l'anisotropie.

Spins et magnétisme. Considérons un matériau magnétique en dimension d avec un bord, décrit par le modèle $O(n)$ avec une interaction avec la symétrie $O(n_1) \times O(n - n_1)$ à la surface. Les paramètres n et n_1 sont fixés, mais on peut faire varier le couplage J entre les spins dans le volume, le couplage entre les spins à la surface J_s , et l'amplitude de l'anisotropie Δ . Dans tout ce qui suit nous nous restreignons au cas où le couplage dans le volume est au point critique $J = J_c$. Nous ne nous intéressons qu'aux différents comportements de surface à ce point.

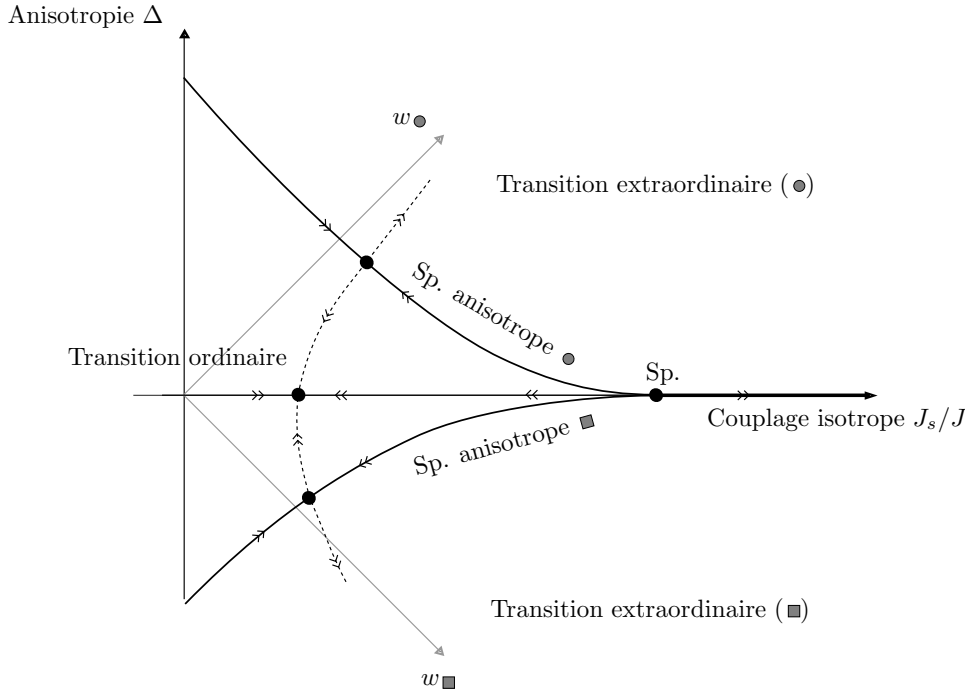


FIG. V.2 – Diagramme de phase du modèle $O(n)$ avec anisotropie au bord. J_s/J mesure l'augmentation du couplage spin-spin à la surface. Δ mesure l'amplitude de l'anisotropie, voir la relation (V.1). Ce diagramme de phase apparaît dans [1, 2].

- *Transition ordinaire.* Nous avons déjà rencontré la transition ordinaire au chapitre I. Le couplage entre spins à la surface est trop faible pour que les spins soient alignés. Une légère anisotropie ne permet pas de changer le comportement de surface, puisque le couplage entre spins reste toujours faible. La transition ordinaire est donc stable sous le flot RG, aussi bien pour une perturbation selon J_s/J que selon Δ .

• *Transitions extraordinaires.* Dans le cas où J_s/J est suffisamment grand, les spins à la surface sont alignés (chapitre I). Si, en plus, $\Delta > 0$, alors il est plus favorable pour les spins d'être alignés dans une direction du sous-groupe $O(n_1)$. On peut appeler ce cas *transition extraordinaire marquée*. Evidemment, le cas $\Delta < 0$ correspond à une *transition extraordinaire antimarquée*. Lorsque l'on passe de l'une à l'autre de ces deux transitions extraordinaires anisotropes, on traverse la ligne isotrope de la transition extraordinaire (chapitre I). Il s'agit alors d'une transition du premier ordre.

• *Transitions spéciales.* Dans le cas isotrope, nous avons vu que la transition ordinaire et la transition extraordinaire sont séparées par un point fixe sous le flot RG : la transition spéciale (chapitre I). Le couplage entre les spins à la surface est ajusté à une certaine valeur critique J_{sc}/J . Passons maintenant au cas anisotrope $\Delta > 0$. L'idée est que dans ce cas-là, il est possible que les composantes dans $O(n_1)$ subissent une transition spéciale, alors que les composantes dans $O(n - n_1)$ voient toujours une transition ordinaire [1]. Pour cela, le couplage J_s/J doit être ajusté en fonction de l'anisotropie Δ : on a une ligne de transition spéciale anisotrope. Evidemment, il existe une autre ligne pour $\Delta < 0$. Dans le diagramme de phase V.2, il y a donc deux lignes de transition anisotrope spéciale, l'une pour les composantes de $O(n_1)$ (qu'on appelle marquées) et l'autre pour les composantes de $O(n - n_1)$ (antimarquées). Pour comprendre la forme de ces deux lignes, on peut donner les arguments d'échelle suivants. Sous une transformation RG $x \mapsto (1 - \epsilon)x$, la longueur de corrélation le long de la surface se transforme comme $\xi_s \mapsto (1 - \epsilon)\xi_s$. Le couplage des spins de surface doit être renormalisé $(J_s/J) \mapsto (1 - \epsilon)^y(J_s/J)$, de même que l'anisotropie $\Delta \mapsto (1 - \epsilon)^{y_\Delta}\Delta$. Les dimensions y et y_Δ sont reliées aux dimensions d'échelle des opérateurs auxquels les paramètres (J_s/J) et Δ sont couplés. Dans le cas présent on peut argumenter [1, 2, 3, 4] que $y_\Delta > y$, c'est-à-dire que l'anisotropie est un paramètre plus relevant que le couplage au voisinage de la transition spéciale (isotrope). Imaginons que l'on dispose d'une quantité qui possède un comportement d'échelle universel au voisinage de la transition spéciale (isotrope). Par exemple, l'énergie libre de surface f_s doit avoir une partie singulière $f_{s,\text{sing}}$ qui se comporte comme

$$f_{s,\text{sing.}} = \frac{1}{\xi_s} F\left(\frac{(J_s - J_{sc})/J}{\xi_s^y}, \frac{\Delta}{\xi_s^{y_\Delta}}\right) \quad (\text{V.3})$$

Si $J_s < J_{sc}$, on peut appliquer plusieurs transformations RG jusqu'à ce que $\xi_s^{-y}(J_s - J_{sc})/J = -1$. On voit alors que

$$f_{s,\text{sing.}} = \frac{1}{\xi_s} F\left(-1, \frac{\Delta}{((J_{sc} - J_s)/J)^{y_\Delta/y}}\right) \quad (\text{V.4})$$

On a donc une fonction qui ne dépend plus que d'une variable. Le long de la ligne de transition anisotrope spéciale l'énergie libre de surface doit être singulière, alors qu'elle ne l'est pas ailleurs. Cette ligne correspond donc à $\frac{\Delta}{((J_{sc} - J_s)/J)^{y_\Delta/y}} = \text{cste}$. Puisque $y_\Delta/y > 1$, le diagramme de phase doit avoir la forme illustrée sur la figure V.2.

Boucles et polymères. Le modèle défini par la fonction de partition V.2 peut être vu comme des polymères cycliques généralisés (les boucles) en solution dans un bon solvant (les boucles sont dans la phase diluée). Ces polymères cycliques subissent la transition d'adsorption (chapitre I). Il y a deux variétés de polymères, marqués ou antimarqués, et ces deux types de polymères

ont des fugacités différentes n_1 et $n - n_1$. Les polymères interagissent différemment avec la surface selon qu'il sont marqués ou antimarqués.

- *Polymères non adsorbés (transition ordinaire)*. Si les couplages à la surface des deux variétés de polymères sont faibles, alors les polymères ne sont pas adsorbés. Ils évitent la surface pour gagner de l'entropie. Une très petite fraction d'entre eux est en contact avec la surface (figure V.3). Cette phase est stable sous une petite perturbation de $w_\bullet$ ou de $w_\blacksquare$.

- *Polymères adsorbés (transitions extraordinaires)*. Si le couplage $w_\bullet \gg 1$, et si $w_\bullet > w_\blacksquare$, alors la surface est recouverte par un ou plusieurs polymères marqués adsorbés (figure V.3). Si on augmente $w_\blacksquare$ jusqu'à avoir $w_\bullet < w_\blacksquare$, alors il est plus favorable d'avoir des polymères antimarqués adsorbés. Néanmoins, il faut d'abord détacher les polymères marqués de la surface, ce qui coûte beaucoup d'énergie. Il y a donc hystérésis, et l'on retrouve le fait que la transition entre les deux phases extraordinaires est du premier ordre.

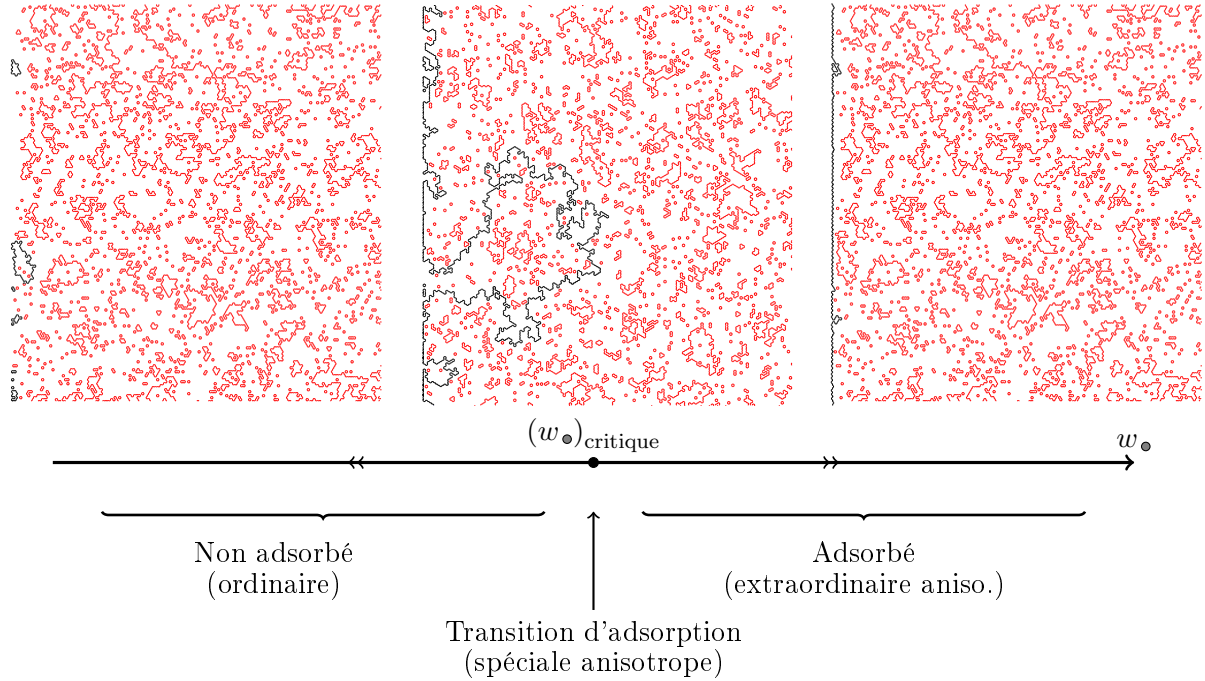


FIG. V.3 – Coupe dans le diagramme de phase de la figure V.2 : $w_\bullet$ varie alors que $w_\blacksquare=0$. La surface correspond au bord gauche des images. Les boucles marquées qui touchent la surface sont en noir.

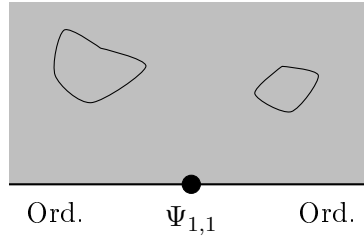
- *Transition d'adsorption (transition spéciale anisotrope)*. Si le couplage $w_\blacksquare$ est faible, les polymères antimarqués ne sont pas adsorbés. Quand on fait varier le couplage $w_\bullet$, on peut passer de la phase où les polymères marqués sont non-adsorbés à celle où ils sont adsorbés (figure V.3). Entre les deux, les polymères marqués subissent une attraction critique à la surface : ils subissent la transition d'adsorption. C'est l'analogue de la transition spéciale anisotrope. Les effets de surface sont ressentis arbitrairement loin dans le volume : il y a des polymères marqués arbitrairement longs qui sont attirés de manière critique par la surface.

V.3 Conditions au bord invariantes conforme pour le modèle $O(n)$

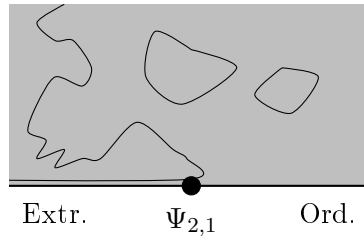
On peut écrire une matrice de transfert pour le modèle $O(n)$ avec une interaction anisotrope à la surface grâce à l'algèbre de Temperley-Lieb avec un bord (voir chapitre IV). Cela permet d'étudier ce modèle grâce à des méthodes analytiques (Ansatz de Bethe) ou numériques. Nous n'allons pas analyser en détail la structure du modèle sur réseau ici. Nous allons passer directement à la limite continue et à la description du modèle en théorie conforme. Néanmoins, notons que de nombreux résultats importants ont été obtenus par l'intégrabilité sur le réseau (voir par exemple [5, 6, 7, 8]) pour le modèle $O(n)$ dans le volume ou avec une surface (pour une interaction isotrope). Des points intégrables pour le modèle avec interaction anisotrope ont été identifiés dans [3], ce qui devrait permettre un calcul analytique dans ce cas.

Les différentes transitions que nous avons évoquées plus haut correspondent à 2D à des conditions au bord invariantes conformes pour le modèle $O(n)$. Nous allons parler de *condition au bord ordinaire*, de *condition au bord extraordinaire*, et de *condition au bord spéciale* (d'abord isotrope puis *marquée* ou *antimarquée*).

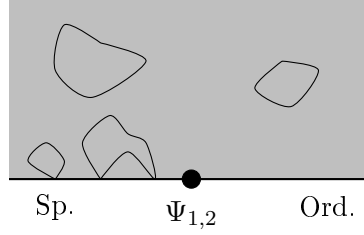
Cas isotrope. Le long de la ligne $\Delta = 0$, on rencontre la condition au bord ordinaire, la condition au bord spéciale et la condition au bord extraordinaire. Pour décrire ces différentes conditions au bord en théorie conforme, on a besoin d'identifier les opérateurs B.C.C qui permettent de passer de l'une à l'autre de ces conditions au bord. Ce travail a été fait dans plusieurs références [7, 8, 9, 10, 11]. La condition au bord ordinaire est la plus simple : l'opérateur qui passe d'ordinaire à ordinaire est simplement l'identité $\Psi_{1,1}$ (l'identité a un vecteur nul $L_{-1}\Psi_{1,1} = 0$).



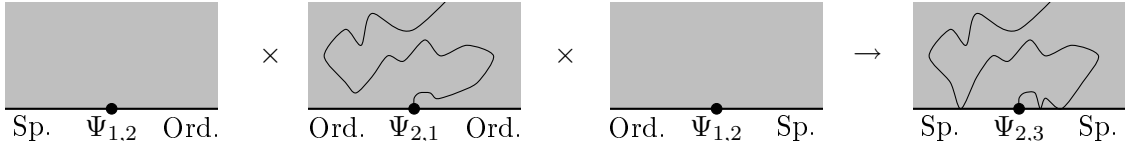
L'opérateur qui passe de la condition ordinaire à extraordinaire est $\Psi_{2,1}$. Il a un vecteur nul au niveau 2. Il s'agit de l'opérateur à une patte au bord dans le modèle. Cet opérateur apparaît parce que la moitié d'un polymère est adsorbée sur le bord extraordinaire, alors que l'autre moitié évolue librement dans le volume (voir aussi [11]).



L'opérateur qui passe de la condition ordinaire à spéciale est $\Psi_{1,2}$ (voir [9, 10]). Il a un également un vecteur nul au niveau 2.



On peut fusionner ces différents opérateurs B.C.C entre eux, ou on peut aussi les fusionner avec les opérateurs à k pattes $\Psi_{1+k,1}$, qui génèrent k lignes qui traversent le système. Par exemple, l'opérateur qui génère une ligne avec des conditions au bord spéciales à gauche et à droite apparaît dans la fusion $\Psi_{2,1} \times \Psi_{1,2} \times \Psi_{1,2}$, il s'agit de $\Psi_{2,3}$



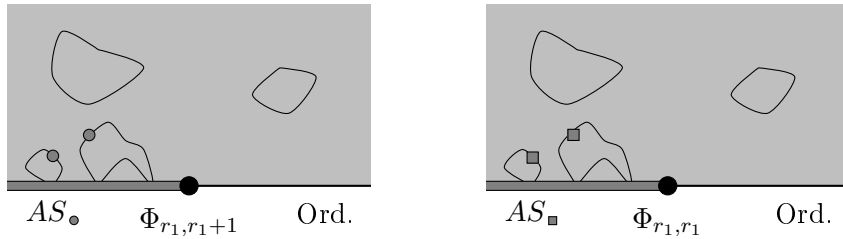
Condition au bord “spéciale anisotrope”. Dans le cas d'une interaction anisotrope au bord, il est utile d'utiliser la paramétrisation

$$n = 2 \cos \gamma \quad n_1 = \frac{\sin((r_1 + 1)\gamma)}{\sin(r_1\gamma)} \quad n - n_1 = \frac{\sin((\pi/\gamma - r_1 + 1)\gamma)}{\sin((\pi/\gamma - r_1)\gamma)} \quad (\text{V.5})$$

De manière générale, dans toutes les formules qui suivent, on a une dualité

$$\begin{aligned} n_1 &\leftrightarrow n - n_1 \\ \bullet &\leftrightarrow \blacksquare \\ r_1 &\leftrightarrow \pi/\gamma - r_1 \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

qui échange les deux lignes de transitions spéciales anisotropes. L'opérateur qui permet de passer de la condition au bord ordinaire à la condition spéciale anisotrope marquée $AS_\bullet$ a été identifié dans [2, 3] : il s'agit de Φ_{r_1, r_1+1} . Cet opérateur n'a pas de vecteur nul, le module associé est un module de Verma générique $\mathcal{V}_{r_1, r_1+1}$. L'opérateur B.C.C qui passe de la condition ordinaire à la condition spéciale antimarquée $AS_\blacksquare$ est Φ_{r_1, r_1} . Il n'a pas non plus de vecteur nul.



On peut fusionner ces opérateurs B.C.C avec les opérateurs $\Psi_{1+k,1}$ qui génèrent des lignes non contractibles. La ligne la plus à gauche (sur la figure ci-dessous) peut être soit marquée, soit antimarquée.

$$\begin{array}{c}
\text{AS}_\bullet \quad \Phi_{r_1, r_1+1} \quad \text{Ord} \\
\times \\
\text{Ord} \quad \Psi_{2,1} \quad \text{Ord}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\Phi_{r_1+1, r_1+1} \\
+ \\
\Phi_{r_1-1, r_1+1}
\end{array}$$

On retrouve une structure très similaire à celle du modèle de boucle dense (chapitre IV). Néanmoins, il faut faire attention aux indices de Kac, qui ne sont pas exactement ceux que l'on attendrait par la dualité dense/diluée. Pour la condition $AS_\bullet$, le deuxième indice de Kac est $r_1 + 1$, et non r_1 comme on aurait pu le penser. Cela reflète le fait qu'il y a vraiment un processus physique différent ici : on a besoin d'ajuster les deux couplages $w_\bullet$ et $w_\blacksquare$ pour atteindre la nouvelle condition au bord $AS_\blacksquare$, qui est une déformation de la condition spéciale isotrope correspondant à l'opérateur B.C.C $\Psi_{1,2}$. Dans la phase dense, la condition au bord marquée peut être vue plutôt comme une déformation de la condition au bord habituelle (l'équivalent de la condition ordinaire ici) qui correspond simplement à l'identité $\Psi_{1,1}$.

Caractères conformes. Les caractères conformes pour les différentes conditions au bord conformes présentées jusqu'ici ont été calculés dans [3]. Le cas de deux conditions au bord $AS_\bullet$ et $AS_\bullet$ y est aussi présenté en utilisant les similitudes avec le cas dense (chapitre IV et [12]).

Ces caractères sont les suivants pour k lignes qui traversent le système (nous ne parlons pas des conditions au bord extraordinaires puisque, comme nous l'avons vu plus haut, celles-ci correspondent simplement au cas ordinaire avec un ligne additionnelle dans le système, voir aussi [11]) :

$$\text{Ord/Ord} : \quad K_k(q) = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} (q^{h_{1+k,1}} - q^{h_{1+k,-1}}) \quad (\text{V.7})$$

$$AS_\bullet/\text{Ord} : \quad \begin{cases} K_0(q) = \frac{q^{h_{r_1, r_1+1} - c/24}}{P(q)} \\ K_k^\circ(q) = \frac{q^{h_{r_1+k, r_1+1} - c/24}}{P(q)} \\ K_k^\blacksquare(q) = \frac{q^{h_{r_1-k, r_1+1} - c/24}}{P(q)} \end{cases} \quad (\text{V.8})$$

$$AS_\blacksquare/\text{Ord} : \quad \begin{cases} K_0(q) = \frac{q^{h_{r_1, r_1} - c/24}}{P(q)} \\ K_k^\circ(q) = \frac{q^{h_{r_1+k, r_1} - c/24}}{P(q)} \\ K_k^\blacksquare(q) = \frac{q^{h_{r_1-k, r_1} - c/24}}{P(q)} \end{cases} \quad (\text{V.9})$$

Pour le cas avec deux conditions au bord anisotropes spéciales, on utilise le jeu de paramétrisations suivant (noter qu'il s'agit des mêmes paramétrisations que dans le cas dense, reflétant ainsi le rôle crucial que joue l'algèbre de Temperley-Lieb et ses extensions avec bords dans les

deux modèles) :

$$\begin{aligned} n &= 2 \cos \gamma & n_1 &= \frac{\sin((r_1 + 1)\gamma)}{\sin(r_1\gamma)} & n_2 &= \frac{\sin((r_2 + 1)\gamma)}{\sin(r_2\gamma)} \\ n_{12} &= \frac{\sin((r_1 + r_2 + 1 - r_{12})\frac{\gamma}{2}) \sin((r_1 + r_2 + 1 + r_{12})\frac{\gamma}{2})}{\sin(r_1\gamma) \sin(r_2\gamma)} \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

On les caractères suivants

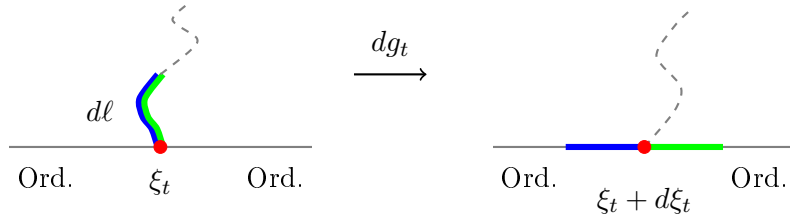
$$AS_{\bullet}/AS_{\circ} : \quad \begin{cases} K_0(q) &= \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{h_{r_{12}, r_{12} - 2n}} \\ K_k^{\circ\circ}(q) &= \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{r_1 + r_2 - 1 + k, r_1 + r_2 + 1 - 2n}} \\ K_k^{\circ\Box}(q) &= \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{r_1 - r_2 - 1 + k, r_1 - r_2 - 1 - 2n}} \\ K_k^{\Box\circ}(q) &= \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{-r_1 + r_2 - 1 + k, -r_1 + r_2 - 1 - 2n}} \\ K_k^{\Box\Box}(q) &= \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{-r_1 - r_2 - 1 + k, -r_1 - r_2 - 3 - 2n}} \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

Les caractères pour les autres conditions au bord $AS_{\bullet}/AS_{\Box}$, $AS_{\Box}/AS_{\circ}$ et $AS_{\Box}/AS_{\Box}$ peuvent être déduites de (V.11) en utilisant la dualité (V.6).

V.4 Géométrie de la transition anisotrope spéciale : $SLE_{\kappa, \rho}$

Pour conclure ce chapitre, nous allons discuter le lien entre les conditions au bord marquées dans les modèles de boucles et l'évolution de Schramm-Loewner. Nous allons discuter cela dans le langage du modèle $O(n)$ dilué, mais nous verrons que les résultats s'étendent immédiatement à la phase dense (chapitre IV).

Nous avons introduit l'évolution de Schramm-Loewner SLE_{κ} dans le chapitre (II). Considérons une configuration du modèle $O(n)$ avec une ligne (un morceau de boucle) qui part de la surface. On a une condition au bord ordinaire à gauche et à droite de la ligne (figure V.4.a). On peut découper un petit élément de longueur $d\ell$ le long de la ligne, et développer la géométrie sur le demi-plan :



Le point crucial ici est que la nouvelle configuration que l'on obtient de cette façon est toujours une configuration avec une ligne et la condition au bord ordinaire à gauche et à droite de celle-ci.

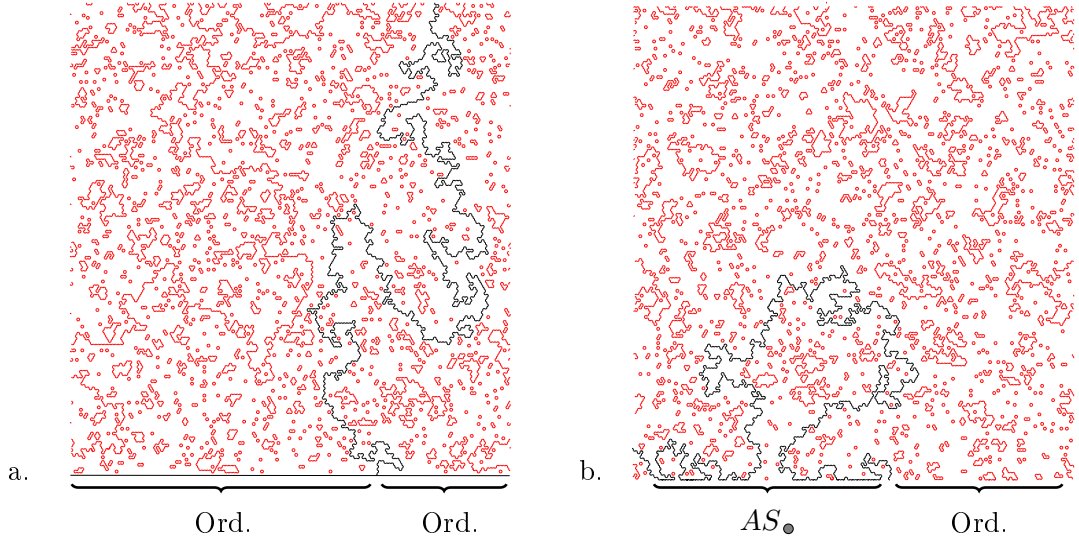
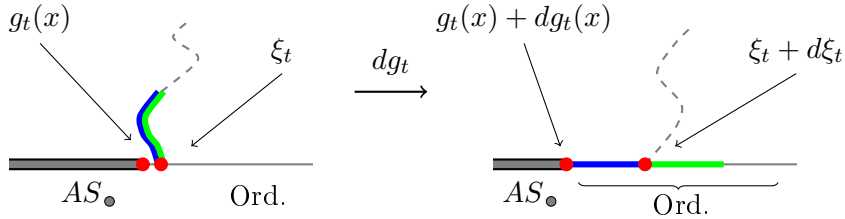


FIG. V.4 – Une ligne partant de la surface avec des conditions au bord ordinaires à gauche et à droite (a) est décrite par SLE_κ , avec $n = -2 \cos\left(\frac{4\pi}{\kappa}\right)$. Une ligne avec une condition au bord spéciale anisotrope à gauche et ordinaire à droite est décrite par $SLE_{\kappa,\rho}$ avec $n_1 = \sin\left(\frac{2\rho+8-\kappa}{\kappa}\pi\right) / \sin\left(\frac{2\rho+4}{\kappa}\pi\right)$.

Il est donc raisonnable de supposer que ce processus est Markovien, et qu'il s'agit d'un SLE_κ . Puisque nous considérons la phase diluée du modèle $O(n)$, on a $\kappa \leq 4$.

$$\begin{cases} dg_t(z) &= \frac{2 dt}{g_t(z) - \xi_t} \\ d\xi_t &= \sqrt{\kappa} dB_t \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

où B_t est un mouvement Brownien standard. Nous voulons maintenant décrire une ligne avec une condition au bord marquée à gauche ($AS_\bullet$) et ordinaire à droite (figure V.4.b). Cette fois, quand on développe la géométrie coupée sur une petite longueur $d\ell$ sur le demi-plan, la condition au bord change :



Il faut donc tenir compte de l'évolution de deux points sur l'axe réel : ξ_t et $g_t(x)$. Le mouvement de ξ_t est affecté par la position de $g_t(x)$ [13]

$$d\xi_t = \sqrt{\kappa} dB_t + \kappa \partial_\xi \log Z(\xi_t, g_t(x)) \quad (\text{V.13})$$

où la fonction de partition $Z(\xi_t, g_t(x))$ est donnée par [13]

$$Z(\xi, x) \propto \langle \Psi_{2,1}(\xi) \Phi_{r_1, r_1+1}(x) \Phi_{r_1+1, r_1+1}(\infty) \rangle_{\mathbb{H}} \propto (\xi - x)^{h_{r_1+1, r_1+1} - h_{r_1, r_1+1} - h_{2,1}} \quad (\text{V.14})$$

On a cette fois

$$\begin{cases} dg_t(z) &= \frac{2 dt}{g_t(z) - \xi_t} \\ d\xi_t &= \sqrt{\kappa} dB_t + \frac{\rho dt}{\xi_t - g_t(x)} \end{cases} \quad (\text{V.15})$$

avec $\rho = \kappa (h_{r_1+1, r_1+1} - h_{r_1, r_1+1} - h_{2,1})$, ce qui s'écrit également

$$\rho = -2 + \frac{4 - \kappa}{2} r_1 \quad (\text{V.16})$$

Le processus (V.15) s'appelle $SLE_{\kappa, \rho}$. Il a été introduit dans [14] comme une généralisation de SLE_{κ} (qui correspond simplement à $\rho = 0$).

Dimensions fractales de $SLE_{\kappa, \rho}$. Dans [15], Duplantier et Saleur ont montré que l'on pouvait relier la dimension fractale des boucles du modèle $O(n)$ à la dimension d'échelle des opérateurs à k pattes par un argument d'échelle. L'exposant à 2 pattes dans le volume $h_{1,0}$ donne ainsi la dimension fractale d'une boucle dans le volume $D_f = 2 - 2h_{1,0}$, ou en fonction de κ

$$D_f = 1 + \frac{\kappa}{8} \quad (\text{V.17})$$

Cette formule donne donc la dimension fractale de la courbe Γ décrite par SLE_{κ} dans le volume. Elle a motivé un certain nombre de travaux en mathématiques (elle a été démontrée par Beffara dans [16]). Avec les résultats précédents, il est très facile d'obtenir une relation similaire pour une courbe Γ décrite par $SLE_{\kappa, \rho}$. Dans le volume, on peut toujours considérer un volume infinitésimal autour d'un point de la courbe. Dans ce volume, on est loin du bord et on ne ressent pas l'effet de la condition au bord. La dimension fractale de Γ dans le volume ne doit donc pas être affectée par la valeur de ρ (ou de n_1 dans le modèle de boucles d'origine). Par contre, au voisinage du bord la forme de la courbe change radicalement. On peut s'intéresser à la dimension fractale de la courbe Γ au bord : $D_{f, \text{surf.}} = \dim(\Gamma \cap \mathbb{R})$. Elle peut être reliée à la dimension au bord de l'opérateur à 2 pattes [15]. On peut donc utiliser les exposants (V.11) pour déduire cette dimension fractale. On a besoin ici de conditions au bord $AS_{\bullet}/AS_{\bullet}$, avec $r_2 = r_1$ et $k = 2$. On a alors $D_{f, \text{surf.}} = 1 - h_{2r_1+1, 2r_1+1}$, c'est-à-dire en fonction de κ et ρ :

$$D_{f, \text{surf.}} = \left(1 + \frac{\rho}{4}\right) \left(2 - \frac{8}{\kappa} - \frac{4\rho}{\kappa}\right) \quad (\text{V.18})$$

Cette relation est valable pour $-\frac{8-\kappa}{2} < \rho < -\frac{4-\kappa}{2}$. Si $\rho \leq -\frac{8-\kappa}{2}$ la dimension fractale vaut 1, si $\rho \geq -\frac{4-\kappa}{2}$, elle vaut 0.

Il est clair à ce stade que la discussion menée ici sur $SLE_{\kappa, \rho}$ ne dépend pas vraiment du fait que l'on travaille dans la phase diluée. On pourrait aussi bien travailler dans la phase dense (chapitre IV), c'est-à-dire avec $\kappa > 4$. Dans ce cas, on pourrait répéter tous les arguments point

par point, en utilisant les exposants critiques pour les conditions au bord marquées calculés dans le chapitre IV. La relation entre ρ et r_1 devient alors

$$\rho = -\frac{(\kappa - 4)(r_1 - 1)}{2} \quad (\text{V.19})$$

Il se trouve que la dimension fractale de $SLE_{\kappa,\rho}$ à laquelle on arrive dans ce cas est aussi donnée par (V.18), mais cette fois avec $4 \leq \kappa < 8$, et $-\frac{8-\kappa}{2} < \rho < \frac{\kappa-4}{2}$. Si $\rho \geq \frac{\kappa-4}{2}$ la dimension fractale au bord vaut 0, si $\rho \leq -\frac{8-\kappa}{2}$ elle vaut 1. Les deux cas $\kappa \leq 4$ et $\kappa > 4$ sont représentés sur la figure V.5.

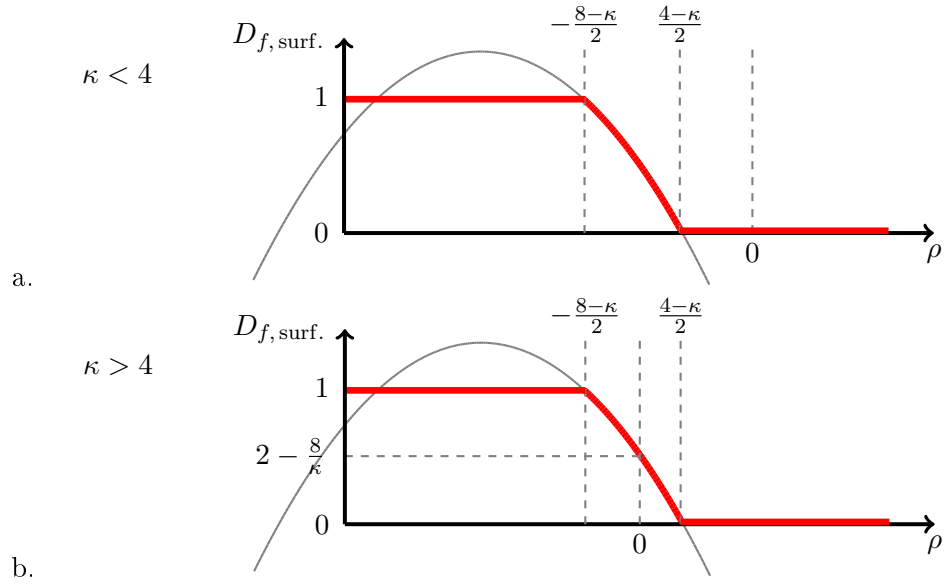


FIG. V.5 – Dimension fractale de l'intersection de la courbe décrite par $SLE_{\kappa,\rho}$ avec le bord (l'axe réel) en fonction de ρ .

Bibliographie

- [1] *Effects of surface exchange anisotropies on magnetic critical and multicritical behavior at surfaces*, H.W. Diehl, E. Eisenriegler, Phys. Rev. **B 30**, 300–314 (1984).
- [2] *Exact solution of the anisotropic special transition in the $O(n)$ model in two dimensions*, J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **103**, 145701 (2009).
- [3] *Conformal boundary conditions in the critical $O(n)$ model and dilute loop models*, J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, Nucl. Phys. **B 827**, 457 (2010).
- [4] J.-E. Bourguine, K. Hosomichi & I. Kostov, *Boundary transitions of the $O(n)$ model on a dynamical lattice*, Nucl. Phys. **B 832**, 462-499, 2010.
- [5] B. Nienhuis, *Exact critical point and critical exponents of $O(n)$ models in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1062-1065, 1982.
- [6] B. Nienhuis, *Critical and multicritical $O(n)$ models*, Physica A **163**, 152-157, 1990.
- [7] C.M. Yung & M.T. Batchelor, *$O(n)$ model on the honeycomb lattice via reflexion matrices : surface critical behaviour*, Nucl. Phys. **B 453**, 552-580, 1995.
- [8] M.T. Batchelor & C.M. Yung, *Exact results for the adsorption of a flexible self-avoiding polymer chain in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **74**, 2026-2029, 1995.
- [9] T.W. Burkhardt & E. Eisenriegler, *Conformal theory of the two-dimensional $O(n)$ model with ordinary, extraordinary and special boundary conditions*, Nucl. Phys. **B 424**, 487-504, 1994.
- [10] P. Fendley & H. Saleur, *Exact theory of polymer adsorption in analogy with the Kondo problem*, J. Phys A : Math. Gen. **27**, L789, 1994.
- [11] M.T. Batchelor & J.L. Cardy, *Extraordinary transition in the two-dimensional $O(n)$ model*, Nucl. Phys. **B 506**, 553-564, 1997.
- [12] J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Conformal two-boundary loop model on the annulus*, Nucl. Phys. **B 813**, 430-459, 2009.
- [13] M. Bauer & D. Bernard, *2D growth processes : SLE and Loewner chains*, Physics Reports **432**, 115, 2006.
- [14] G. Lawler, O. Schramm & W. Werner, *Conformal restriction : the chordal case*, J. Am. Math. Soc. **16**, 917-955, 2003.
- [15] H. Saleur & B. Duplantier, *Exact determination of the percolation hull exponent in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2325-2328, 1987.
- [16] V. Beffara, *The dimension of the SLE curves*, Annals of Probability **36**, 1421-1452, 2008.

CHAPITRE VI

Conclusion

Nous avons présenté dans cette thèse certains résultats qui concernent l'étude de conditions au bord dans des théories conformes qui ne sont pas unitaires. Ces théories ne sont pas non plus rationnelles. Ces théories sont obtenues comme la limite de modèles statistiques définis sur réseau, dont les degrés de liberté sont des objets non locaux : les boucles. Les modèles de boucles ont été introduits dans le chapitre III comme des généralisations de modèles historiques de la physique statistique à l'équilibre : le modèle d'Ising, le modèle de Potts ou le modèle $O(n)$. Au point critique, ces modèles sont décrits dans la limite continue par des théories conformes avec des charges centrales $c \leq 1$. Pour chaque valeur de la charge centrale c (si $c < 1$), deux théories sont possibles : l'une correspond à un modèle de boucles denses, l'autre à un modèle de boucles diluées. Du point de vue du groupe de renormalisation, la principale différence entre ces deux théories est la stabilité sous une petite perturbation du paramètre couplé à la longueur des boucles $x^{\text{longueur des boucles}}$. La phase dense est stable sous une perturbation de x , tandis que la phase diluée (ou point critique dilué) est instable. Du point de vue de l'évolution de Schramm-Loewner (SLE), les boucles dans la phase dense sont décrites par SLE_κ avec $\kappa > 4$, et possèdent de nombreux points doubles dans la limite continue. Dans la phase diluée par contre, les boucles sont toujours des courbes simples même dans la limite continue. Elles sont décrites par SLE_κ avec $\kappa < 4$.

Nous avons étudié le comportement critique de surface dans ces deux types de modèles. Pour cela, nous modifions le poids de Boltzmann des boucles qui viennent toucher le bord du système [1, 2, 3, 4]. Cela peut être interprété comme une brisure de la symétrie $O(n)$ au bord dans le modèle $O(n)$: $O(n) \rightarrow O(n_1) \times O(n - n_1)$. Dans le modèle de Potts, cela correspond plutôt à une restriction de la couleur des spins à la surface à un sous-ensemble de couleurs $\{1, \dots, Q_1\} \subset \{1, \dots, Q\}$. Le diagramme de phase est très différent dans les cas où les boucles sont denses ou diluées. Ceci est dû à la présence d'un opérateur relevant qui couple aux monomères touchant la surface dans la phase diluée (chapitre V). Dans la phase dense, cet opérateur n'est pas relevant, et le diagramme de phase est alors plus simple (chapitre IV). Néanmoins, bien que les diagrammes de phase soient qualitativement très différents dans ces deux cas, le traitement en théorie conforme des deux types de conditions au bord reste similaire. La condition au bord la plus naturelle dans un modèle de boucles est simplement obtenue en ne faisant rien : les boucles peuvent toucher le bord mais leur poids n'est pas affecté (c'est la condition au bord utilisée par exemple dans [5]). A partir de cette condition au bord (appelée *ordinaire* dans le langage du

modèle $O(n)$), on peut générer les conditions au bord marquées en agissant avec un opérateur B.C.C. Cet opérateur a une dimension conforme générique qui est reliée au nouveau poids n_1 donné aux boucles qui touchent le bord. Il est aussi important de noter que cet opérateur n'a pas de descendant nul, c'est-à-dire que la représentation de l'algèbre de Virasoro qui lui correspond est un module de Verma générique. Ces opérateurs peuvent être fusionnés avec les opérateurs à k pattes qui génèrent k lignes sur le bord. On obtient ainsi le spectre de la théorie avec un changement de condition au bord. On peut choisir si la ligne la plus à gauche touche le bord ou non, ce qui donne deux exposants différents. La fusion de deux opérateurs B.C.C est plus compliquée, et fait intervenir le poids n_{12} des boucles qui touchent les deux bords.

Il est intéressant de voir que les résultats obtenus dans cette thèse sur les conditions aux bords dans les modèles de boucles peuvent être traduits dans le langage de l'évolution de Schramm-Loewner (SLE). Une ligne générée au bord avec la condition marquée (anisotrope spéciale dans le langage du modèle $O(n)$) à gauche est décrite par le processus $SLE_{\kappa,\rho}$, comme nous l'avons vu dans le chapitre V. Nous avons pu déterminer, en particulier, la dimension fractale au bord d'un $SLE_{\kappa,\rho}$, c'est-à-dire la dimension fractale de l'intersection entre la courbe décrite par $SLE_{\kappa,\rho}$ et le bord du domaine. Là encore, les deux comportements sont semblables pour $\kappa < 4$ et $\kappa > 4$, mais pas identiques. La différence principale tient au fait que si $\kappa > 4$, dans le cas $\rho = 0$ (qui correspond au processus SLE_κ habituel), la courbe vient toujours toucher le bord et a une dimension fractale au bord non triviale $d_f = 2 - \frac{\kappa}{8}$. Dans le cas $\kappa < 4$, c'est-à-dire dans la phase diluée, un SLE_κ évite le bord, et ne se touche pas non plus lui-même. On a donc toujours $d_f = 0$. Pour avoir une courbe qui se met à toucher le bord, il faut atteindre une valeur de ρ finie. Dans le modèle sur réseau, cela se traduit par le fait qu'il faut ajuster de manière critique le couplage entre les monomères et la surface.

La formulation algébrique de ces nouvelles conditions au bord dans les modèles de boucles repose sur des extensions avec bord de l'algèbre de Temperley-Lieb. Nous avons évoqué quelques aspects de ces nouvelles algèbres dans les chapitres IV et V, qui sont développés plus en détails en annexe. Un point particulièrement important est le lien entre les paramètres n et n_1 sur le réseau et la charge centrale c et la dimension conforme h de l'opérateur B.C.C qui passe de la condition au bord ordinaire à la nouvelle condition au bord marquée. Pour certaines valeurs spécifiques de n et n_1 , l'algèbre de Temperley-Lieb avec un bord admet des représentations réduites (des quotients de représentations génériques). Dans certains cas on peut même obtenir des représentations unitaires de l'algèbre de Temperley-Lieb avec un bord. Le modèle sur réseau devient alors simplement un modèle RSOS [6, 7]. Ce type de réduction a lieu également dans la limite continue, c'est-à-dire pour l'algèbre de Virasoro. En particulier, on retrouve ainsi des conditions au bord pour les modèles minimaux. On voit donc que l'algèbre de Temperley-Lieb et ses extensions avec bord permettent de réaliser des analogues de la construction de Rocha-Caridi (Feigin-Fuchs) sur le réseau (voir aussi [8]).

Pour finir la petite revue des résultats que nous présentons ici, signalons que la plupart d'entre eux ont été reformulés dans le langage des matrices aléatoires et des modèles statistiques couplés à la gravité quantique par J.-E. Bourgine, I. Kostov et K. Hosomichi. Leurs résultats ont été

obtenus par des techniques différentes des nôtres. I. Kostov [9] a retrouvé les résultats initiaux de [1]. J.-E. Bourguine et K. Hosomichi [10, 11] ont retrouvé les résultats de la fusion de deux opérateurs B.C.C, qui faisaient l’objet de la publication [2]. Enfin, la référence [12] dérive les résultats de [3, 4].

Nous allons maintenant conclure en donnant quelques idées de projets possibles qui pourraient venir prolonger le travail présenté ici. Pour les points deux à cinq, il s’agit de travail en cours, effectué soit par R. Bondesan, soit par moi-même pendant ma dernière année de thèse.

- *Dérivation des exposants de bord par Ansatz de Bethe.* Les modèles de boucle que nous avons présenté ci-dessus sont intégrables. Tandis que dans le cas du modèle de boucles denses un certain nombre de travaux dans cette direction avaient précédé la publication [1], nos travaux sur la phase diluée ne reposent pas sur des résultats antérieurs provenant de l’intégrabilité. Une condition au bord intégrable a cependant été construite pour le modèle dilué dans [3]. La dérivation des équations de Bethe pour la matrice de transfert de ce modèle pourrait venir compléter les résultats de [3, 4].

- *Modèles de boucles avec croisements des boucles au bord.* Il s’agit du travail de thèse effectué par R. Bondesan. Ces modèles proviennent de chaînes supersymétriques [13], et sont motivés par l’effet Hall quantique (de spin) et les modèles d’électrons désordonnés. Les modèles de boucles que nous avons étudiés ici sont plus simples mais ils constituent un bon point de départ pour ce sujet.

- *Théories logarithmiques.* Il s’agit là d’un sujet majeur actuellement, essentiellement le seul sujet majeur encore ouvert en théorie conforme aujourd’hui. Il est très probable que des progrès dans les théories logarithmiques puissent apporter des réponses à des questions importantes qui n’ont jamais pu être résolues avec les théories conformes “classiques” : théorie de la transition entre plateaux de l’effet Hall quantique entier, théories conformes pour les systèmes désordonnés, exposants de type “backbone”, etc. La difficulté des théories logarithmiques réside dans le fait que les méthodes traditionnelles de théorie conforme, qui reposent le plus souvent sur des contraintes algébriques *a priori* (comme la rationalité, l’unitarité, les symétries additionnelles, etc.), ne sont d’aucune utilité, puisque par définition une théorie logarithmique ne possède pas de telles propriétés. Dans ce cas, l’approche plus pédestre qui consiste à définir des modèles sur réseau et à essayer de comprendre la théorie des champs qui décrit leur limite continue semble très raisonnable. Les modèles de boucles peuvent être utiles en ce sens.

Dans le cas que nous avons déjà évoqué où les paramètres n et n_1 prennent des valeurs particulières, l’algèbre de Temperley-Lieb avec un bord n’est plus semi-simple. Au lieu de prendre des quotients de représentations génériques pour obtenir des représentations irréductibles (ce que nous avons fait dans cette thèse, voir l’annexe), on pourrait évidemment garder des représentations indécomposables, et obtenir des modèles logarithmiques. De manière générale, trouver des modèles sur réseau avec des structures indécomposables et des cellules de Jordan n’est pas difficile en partant des modèles de boucles, mais cela ne donne pas nécessairement beaucoup d’informations sur ce qui est vraiment la structure algébrique dans la limite continue.

Ces modèles sont en général intégrables, mais l'Ansatz de Bethe ne donne accès qu'au spectre de la théorie, qui, dans le cas des modèles de boucles présentés ici, n'est jamais que le spectre de la chaîne XXZ [8] ou du modèle à 19 vertex de Fateev-Zamolodchikov [14], qui sont des modèles étudiés depuis très longtemps. Pour étudier vraiment les théories logarithmiques, il faut aller plus loin que le spectre, c'est-à-dire s'attaquer vraiment à la structure indécomposable des modules. On sait [15] qu'il existe des nombres b qui caractérisent la structure algébrique dans la limite continue. Nous avons expliqué [16] comment ces nombres b peuvent être définis en taille finie sur le réseau dans certains modèles de boucles avec bord. On espère alors qu'ils convergent vers une valeur universelle de b dans la limite continue. Avoir une meilleure compréhension analytique de ces nombres b , autant sur le réseau que dans la limite continue, serait vraiment un progrès important. Une autre question cruciale est de comprendre le lien entre la théorie avec bord (qui ne contient qu'une algèbre chirale) et la théorie complète (qui mélange le secteur chiral et antichiral).

Un autre progrès concernant les théories logarithmiques serait de construire une observable qui fasse intervenir clairement la structure indécomposable. Les modèles géométriques comme les modèles de boucles pourraient être utiles pour cela. En particulier, il serait intéressant de savoir définir une observable "logarithmique" qui fasse intervenir un paramètre d'indécomposabilité b et qui puisse être calculée, par exemple, avec SLE, ou encore dans une simulation Monte-Carlo.

- *Modèles géométriques avec branchements.* La géométrie critique est bien comprise dans le cas des modèles de boucles, aussi bien du point de vue des théories conformes et du gaz de Coulomb que de SLE. Mais tous les objets géométriques intéressants ne sont pas nécessairement des boucles. L'exemple le plus élémentaire est donné par le modèle de Potts à $Q = 3$ états, où les parois de domaine possèdent des branchements. Peu de résultats ont été obtenus sur ce sujet pour l'instant, et il n'est même pas clair que ce type d'objets soit vraiment distribué selon une mesure invariante conforme dans la limite d'échelle. Pour le modèle de Potts, des résultats ont été donnés dans [17, 18]. Il semble en particulier que l'on puisse définir des équivalents des exposants à k pattes pour les parois de domaines [19]. La plupart des résultats obtenus jusqu'à présent sont numériques, une description analytique de ce type d'objets manque cruellement. En particulier, pour l'instant, et pour autant que je sache, ces interfaces avec branchements semblent totalement hors de portée des approches de type SLE.

- *Etats de bord ouverts, fidélités et "quantum quenches".* Dans une série d'articles récents, Cardy et Calabrese ont montré comment utiliser les théories conformes pour obtenir des résultats sur l'entropie d'intrication (de von Neumann) dans des systèmes critiques en $1 + 1D$, aussi bien statiques dans des systèmes périodiques ou avec bords, que dynamiques (après une "trempe quantique", ou "quantum quench"). Vraisemblablement, dans ce contexte de théories conformes et d'entropie de von Neumann, il reste peu de cas physiquement pertinents qui n'ont pas été étudiés par ces auteurs. Le cas de systèmes de taille finie dynamiques, cependant, n'a pas encore été vraiment exploré dans ce contexte. En particulier, dans un système critique de taille finie, les niveaux d'énergie sont commensurables et l'évolution du système doit donc être périodique dans le temps. Il est amusant de voir comment cette périodicité est obtenue dans les calculs de théorie conforme, et de comparer ces résultats exacts avec des résultats numériques. Un autre travail en cours concerne l'extension de résultats généraux obtenus par Cardy et Calabrese

sur l'entropie de von Neumann à d'autres quantités mesurées (numériquement) couramment dans la communauté de l'information quantique, en particulier à différents types de fidélités. Ces fidélités sont définies comme le recouvrement de deux fonctions d'onde, en général des états fondamentaux de deux Hamiltoniens où l'on allume/éteint une interaction. Ce type de quantité se comporte de manière radicalement différente selon que l'on est dans un régime massif ou proche d'un point critique quantique. Dans ce dernier cas, on peut mettre à jour diverses quantités universelles dans ces fidélités. Les résultats présentés dans le chapitre II sur les états de bord “pantalon” et complètement ouverts, et de manière plus générale les théories conformes avec bord, sont utiles dans ce contexte.

Bibliographie

- [1] J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Conformal boundary loop models*, Nucl. Phys. **B 788**, 137-166, 2008.
- [2] J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Conformal two-boundary loop model on the annulus*, Nucl. Phys. **B 813**, 430-459, 2009.
- [3] J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Conformal boundary conditions in the critical $O(n)$ model and dilute loop models*, Nucl. Phys. **B 827**, 457-502, 2010.
- [4] J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Exact solution of the anisotropic special transition in 2D*, Phys. Rev. Lett. **103**, 145701, 2009.
- [5] J.L. Cardy, *The $O(n)$ model on the annulus*, J. Stat. Phys. **125**, 1-21, 2006.
- [6] G.E. Andrews, R.J. Baxter & P.J. Forrester, *Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan-type identities*, J. Stat. Phys. **35**, 193-266, 1984.
- [7] V. Pasquier, *Two-dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams*, Nucl. Phys. **B 285**, 162-172, 1987.
- [8] V. Pasquier & H. Saleur, *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, Nucl. Phys. **B 330**, 523-556, 1990.
- [9] I. Kostov, *Boundary loop models and 2D quantum gravity*, J. Stat. Mech. P08023, 2007.
- [10] J.-E. Bourgine & K. Hosomichi, *Boundary operators in the $O(n)$ and RSOS matrix models*, JHEP01(2009)009, 2009.
- [11] J.-E. Bourgine, *Boundary changing operators in the $O(n)$ matrix model*, JHEP09(2009)020, 2009.
- [12] J.-E. Bourgine, K. Hosomichi & I. Kostov, *Boundary transitions of the $O(n)$ model on a dynamical lattice*, Nucl. Phys. **B 832**, 462-499, 2010.
- [13] N. Read & H. Saleur, *Exact spectra of conformal supersymmetric nonlinear sigma models in two dimensions*, Nucl. Phys. **B 613**, 409-444, 2001.
- [14] V.A. Fateev & A.B. Zamolodchikov, *Model factorized S-matrix and an integrable spin-1 Heisenberg chain*, Sov. J. Nucl. Phys. **32**, 1980.
- [15] V. Gurarie & A.W.W. Ludwig, *Conformal algebras of 2D disordered systems*, J. Phys. **A 35**, L377-L384, 2002.
- [16] J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Conformal field theory at central charge $c = 0$: a measure of the indecomposability (b) parameters*, Nucl. Phys. **B 834**, 399-422, 2010.

- [17] C. Vanderzande, *Fractal dimension of Potts clusters*, J. Phys. **A 25**, L75, 1992.
- [18] A. Gamsa & J. Cardy, *Schramm-Loewner Evolution in the three-state Potts model—a numerical study*, J. Stat. Mech. P08020, 2007.
- [19] J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Critical exponents of domain walls in the two-dimensional Potts model*, en préparation.

ANNEXE A

Boundary extensions of the Temperley-Lieb algebra : representations, lattice models and boundary conformal field theory

A.1 Introduction

The Temperley-Lieb algebra arises in a lot of well-known lattice models in statistical physics. In this appendix we present its boundary extensions, giving more technical details than in the main part of this thesis. As an introduction to this appendix, we recall some well-known results about this algebra and its representations. We will introduce the boundary extensions only in the following section.

A.1.1 The Temperley-Lieb algebra

To begin with, let us fix the notation $[\alpha]_q = \frac{q^\alpha - q^{-\alpha}}{q - q^{-1}}$. The Temperley-Lieb algebra TL_N is defined by its generators e_i ($1 \leq i \leq N - 1$) satisfying the relations

$$|i - j| \geq 2 \Rightarrow e_i e_j = e_j e_i \quad (\text{A.1a})$$

$$e_i^2 = [2]_q e_i \quad (\text{A.1b})$$

$$e_i e_{i \pm 1} e_i = e_i \quad (\text{A.1c})$$

The algebra TL_N can be viewed equivalently as the algebra of diagrams acting on N vertical strands as

$$e_i = \underbrace{\left| \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right| \right|_N$$

(The diagram shows a horizontal line with N vertical strands. Strands i and $i+1$ are connected by a cup and a cap, forming a loop. The rest of the strands are straight vertical lines.)

then (A.1b), (A.1c) write respectively

$$\begin{array}{c} \text{ } \\ \bigcirc \\ \text{ } \end{array} = [2]_q \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array}$$

(The diagram shows a vertical strand with a circle in the middle, representing a loop. The right side shows a straight vertical strand.)

and

$$\text{Diagram of a strand with two loops} = \text{Diagram of a crossing} \cdot \text{Diagram of a vertical strand}.$$

A.1.2 Representations in the generic case

In the generic case (that is, when q is not a root of unity) the irreducible representations of the Temperley-Lieb algebra TL_N are well-known and especially simple. They are given by the sets of half-diagrams with s strings and $(N - s)/2$ half loops. The action of the e_i 's on these states follows from the graphic representation, with the additional rule that two strings cannot be contracted with each other, so the action of e_i on two strings on the sites i and $i + 1$ is zero. Let us give as an example the three generic modules $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_2$ and $\mathcal{V}_4$ on $N = 4$ strands :

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \cup \cup \\ \cup \cup \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_2 = \left\{ \begin{array}{c} | | \cup \\ | \cup | \\ \cup | | \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_4 = \{ | | | | \}.$$

The dimensions of these representations can be easily computed, and they are

$$\dim(\mathcal{V}_s) = \binom{N}{\frac{N-s}{2}} - \binom{N}{\frac{N-s}{2} - 1}. \quad (\text{A.2})$$

By convention, the module $\mathcal{V}_s$ is reduced to zero if $s > N$ or $s \neq N \bmod 2$.

A.1.3 Representations at root of unity $q = e^{i\frac{\pi}{m+1}}$

Statistical models such as the Ising model, three-states Potts model or RSOS models all correspond to $q = e^{i\frac{\pi}{m+1}}$ with m integer. In that case the generic modules are no longer irreducible, but have an indecomposable structure. Again, let us give some example. Consider $q = e^{i\frac{\pi}{3}}$ (so $[2]_q = 1$), and the generic modules $\mathcal{V}_0$ and $\mathcal{V}_4$ of the example above with $N = 4$. The injection from $\mathcal{V}_4$ to $\mathcal{V}_0$

$$| | | | \mapsto \cup \cup - \cup \cup \quad (\text{A.3})$$

is then a morphism, since both states are annihilated by e_1 , e_2 and e_3 . The image of $\mathcal{V}_4$ by this injection is then a submodule of $\mathcal{V}_0$, isomorphic to $\mathcal{V}_4$. We can quotient out this submodule to obtain an irreducible representation. In the example we are considering, this representation is trivial : it has dimension 1 and e_1 , e_2 and e_3 act as the identity (note this is compatible with the relations (A.1) only because $[2]_q = 1$).

Now we arrive at a simple but very important and fundamental remark. In the example we have just considered, $N = 4$. It is clear, however, that the same mapping holds for $N > 4$ since it is sufficient to replace the four strings of every state in $\mathcal{V}_4$ by the same state as before. It is

clear that this defines again a morphism from $\mathcal{V}_4$ to $\mathcal{V}_0$. To complete our example, this morphism for $N = 6$ would be

$$\begin{aligned}
||||\cup &\mapsto \cup\cup - \cup\cup\cup \\
|||\cup| &\mapsto \cup\cup - \cup\cup \\
||\cup|| &\mapsto \cup\cup - \cup\cup\cup \\
|\cup||| &\mapsto \cup\cup - \cup\cup \\
\cup|||| &\mapsto \cup\cup - \cup\cup\cup
\end{aligned}$$

This time, however, this is not an injection. The kernel must also be a module. Here it is one dimensional, generated by the state

$$\cup|||| - |\cup||| + |||\cup| - ||||\cup$$

and is isomorphic to $\mathcal{V}_6$. Thus for $N = 6$ we have the following exact sequence

$$0 \leftarrow \mathcal{V}_0 \leftarrow \mathcal{V}_4 \leftarrow \mathcal{V}_6 \leftarrow 0. \quad (\text{A.4})$$

The modules $\mathcal{W}_6 = \mathcal{V}_6$, $\mathcal{W}_4 = \mathcal{V}_4/\mathcal{W}_6$, $\mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0/\mathcal{W}_4$ are irreducible. Note that if we had taken N larger, then we would have a longer exact sequence, and of course more irreducible representations.

We turn to the general case now. For m integer, $q = e^{i\frac{\pi}{m+1}}$, and $s < m$ we have the exact sequence [9]

$$\mathcal{V}_s \leftarrow \mathcal{V}_{2(m+1)-2-s} \leftarrow \mathcal{V}_{2(m+1)+s} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{V}_{2k(m+1)-2-s} \leftarrow \mathcal{V}_{2k(m+1)+s} \leftarrow \cdots \quad (\text{A.5})$$

As we have described in our example, this does not depend on N . Of course we work with the convention that $\mathcal{V}_s = 0$ if $s > N$, so the sequence is actually finite. We can define the irreducible modules $\mathcal{W}_s$ as $\mathcal{W}_s = 0$ for $s > N$ and $\mathcal{W}_{2k(m+1)-2-s} = \mathcal{V}_{2k(m+1)-2-s}/\text{Im}(\mathcal{V}_{2k(m+1)+s})$ and $\mathcal{W}_{2k(m+1)+s} = \mathcal{V}_{2k(m+1)+s}/\text{Im}(\mathcal{W}_{2(k+1)(m+1)-2-s})$, where Im stands for the image of the morphisms appearing in the sequence (A.5). For $s < m$, the representation $\mathcal{W}_s$ is well-known in physics : it is the RSOS^a representation. Let us conclude this introduction by giving a small description of it. The space is the set of Dyck paths

$$|h\rangle = |h_0, h_1, \dots, h_N\rangle \quad (\text{A.6})$$

with $h_i \in \mathbf{N}^*$, satisfying the condition

$$|h_i - h_{i+1}| = 1. \quad (\text{A.7})$$

The action of the Temperley-Lieb generators on these states is

$$e_i |h\rangle = \delta_{h_{i-1}, h_{i+1}} \sum_{\tilde{h}_i = \pm 1} \frac{([h_i]_q [\tilde{h}_i]_q)^{1/2}}{[h_{i+1}]_q} |h_0, \dots, \tilde{h}_i, \dots, h_N\rangle. \quad (\text{A.8})$$

^aRestricted Solid On Solid

We must specify the boundary conditions. Take $h_0 = 1$ and $h_N = 1 + s$. When m is not an integer (q is not a root of unity), the space of paths satisfying (A.7) and with those boundary conditions is isomorphic to $\mathcal{V}_s$. Now if m is an integer, the paths satisfying $\forall i, h_i \in \{1, \dots, m\}$ decouple and form a submodule isomorphic to $\mathcal{W}_s$. This last representation is the RSOS one (with m an integer, and $s < m$).

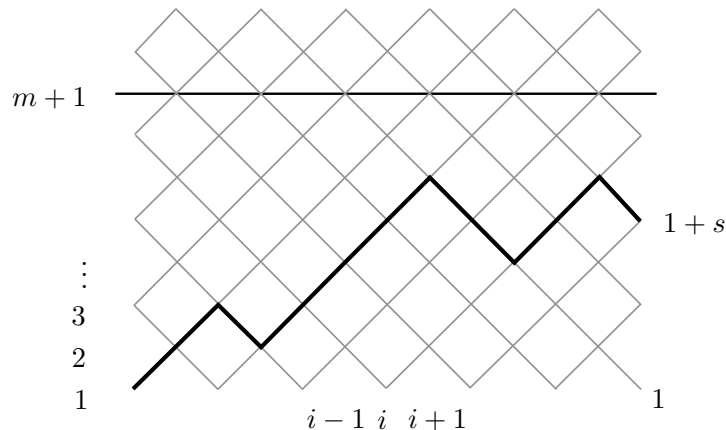


FIG. A.1 – A state $|h_0, h_1, \dots, h_N\rangle$ in the RSOS module $\mathcal{V}_s$. It satisfies the constraint (A.7), the boundary conditions $h_0 = 1 + s$ and $h_N = 1$, and $\forall i, h_i \in \{1, \dots, N\}$.

A.2 Boundary extensions of the TL algebra : definitions and known results (generic case)

In this part we introduce the extensions of the Temperley-Lieb algebra which are the subject of this paper. To our knowledge, these boundary extensions have been first introduced in [4] in the case of one boundary operator, then studied for the two-boundary case in [6],[8]. We give some review of the most important results appearing in these references in the next sections.

A.2.1 The boundary algebras 1BTL and 2BTL

We introduce the "blob" operator acting in our graphic representation as

and satisfies the relation

$$i > 2 \Rightarrow b_1 e_i = e_i b_1 \quad (\text{A.9a})$$

$$b_1^2 = b_1 \quad (\text{A.9b})$$

$$e_1 b_1 e_1 = \frac{[r_1 + 1]_q}{[r_1]_q} e_1 \quad (\text{A.9c})$$

so in the diagrammatic framework, a closed loop carrying a blob is given a weight $\frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q}$ instead of $[2]_q$. The algebra generated by the e_i 's and b_1 is the one-boundary Temperley-Lieb algebra on N strands $1BTL_N$.

To obtain the two-boundary Temperley-Lieb algebra $2BTL_N$, one can simply add a second blob operator b_2 acting as



and defined by the relations

$$i \leq N-2 \Rightarrow b_2 e_i = e_i b_2 \quad (\text{A.10a})$$

$$b_2^2 = b_2 \quad (\text{A.10b})$$

$$e_{N-1} b_2 e_{N-1} = \frac{[r_2+1]_q}{[r_2]_q} e_{N-1} \quad (\text{A.10c})$$

We add to these relations the commutation of the two blobs

$$b_1 b_2 = b_2 b_1. \quad (\text{A.11})$$

In what follows, we will assume that N is always even when we work with the two blobs. In that case it is possible to have closed loops touching both boundaries. In order to have a finite algebra, we decide to remove these loops with a weight n_{12} in our diagrammatic representation. This corresponds to the quotient

$$\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ even}}}^N e_i \right) b_1 b_2 \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ odd}}}^N e_i \right) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ even}}}^N e_i \right) = n_{12} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ even}}}^N e_i \right) \quad (\text{A.12})$$

which can be represented as

The definition of the algebra $2BTL_N$ then includes all the relation (A.1), (A.9), (A.10), (A.11), (A.12). In [6],[7] and [8] it has been shown that the following parametrization of n_{12} was quite natural.

$$n_{12} = \frac{\left[\frac{r_1+r_2-1+r_{12}}{2} \right]_q \left[\frac{r_1+r_2-1-r_{12}}{2} \right]_q}{[r_1]_q [r_2]_q} \quad (\text{A.13})$$

In particular, the parameter r_{12} acquires a nice interpretation in conformal field theory, as will be shown later in section A.5.

A.2.2 Generic irreducible representations of 1BTL

The generic representation theory of the one-boundary Temperley-Lieb algebra follows the one of the ordinary Temperley-Lieb algebra. Note that in the case of 1BTL, generic means that r_1 is not an integer. Again, the generic modules are given by the sets of states with $(N - s)/2$ half-loops and s non-contractible strings. The half-loops situated on the left of all the strings can carry a blob, as can the leftmost string. Since b_1 is a projector, if the leftmost string is given a blob, then it can never disappear under the action of the e_i 's or of b_1 . The same remark holds for the orthogonal projector $1 - b_1$. So actually there two generically irreducible representations for a same number of strgins $s > 0$, related by the "blobbed/unblobbed" transformation

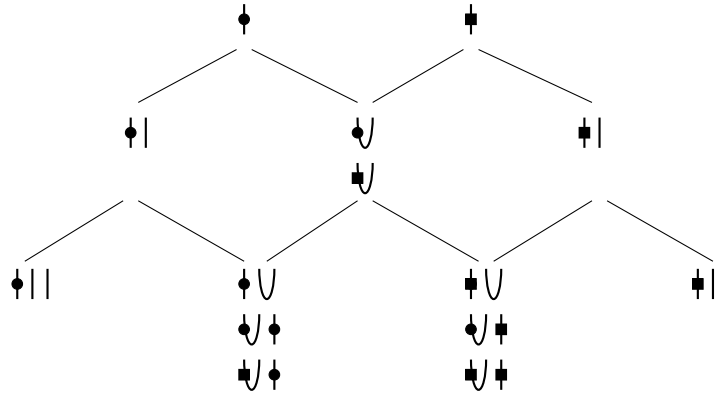
$$b_1 \rightarrow 1 - b_1 \quad (\text{A.14})$$

We note the action of $1 - b_1$ with a square instead of a blob. Note that the weight of a closed loop marked with a square is just $[2]_q - \frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q} = \frac{[-r_1+1]_q}{[-r_1]_q}$, so the transformation (A.14) is the same as taking $r_1 \rightarrow -r_1$ in the definition (A.9). Let us give some graphic example of modules. Consider $N = 4$, then the non-trivial modules are

$$\mathcal{V}_{0,1BTL} = \left\{ \begin{array}{c} \cup \cup \\ \cup \\ \downarrow \cup \\ \cup \downarrow \\ \downarrow \downarrow \\ \bullet \cup \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_2^b = \left\{ \begin{array}{c} \blacklozenge | \cup \\ \blacklozenge \cup | \\ \cup \blacklozenge | \\ \downarrow \blacklozenge | \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_2^u = \left\{ \begin{array}{c} \blacklozenge | \cup \\ \blacklozenge \cup | \\ \cup \blacklozenge | \\ \downarrow \blacklozenge | \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{V}_4^b = \{ \blacklozenge | | | \} \quad \mathcal{V}_4^u = \{ \blacklozenge | | | \}.$$

All the modules follow from a Pascal triangle construction (see also [4])



where the successive states are constructed as follows. All the states in a module on $N + 1$ strands can be obtained from the two modules on N strands which lie above it in the Pascal triangle. If this module is on the right in the right part of the triangle, one adds a string to each states of the module, and the two rightmost strings are contracted with each other to give a state on $N + 1$ strands with the right number of strings. If the module is on the left,

one adds a string on the right of each state. Of course, in the left half-triangle the two rules are inverted. This construction gives all the generic modules, as shown on the previous picture. Their dimensions can be read immediately on Pascal triangle

$$\dim(\mathcal{V}_s^b) = \dim(\mathcal{V}_s^u) = \binom{N}{\frac{N-s}{2}}. \quad (\text{A.15})$$

Note that these relations can be easily related to the dimensions of the generic modules of the Temperley-Lieb algebra TL_N . To see this, consider for example a generic module $\mathcal{V}_s^b$, and replace each half-loop carrying a blob by a couple of strings. This gives exactly the states appearing in the modules of TL_N , with at least s strings. So we see that

$$\dim(\mathcal{V}_s^b) = \sum_{\substack{s'=s \\ s=N \bmod 2}}^N \dim(\mathcal{V}_{s'}) \quad (\text{A.16})$$

in agreement with (A.2) and (A.15).

A.2.3 Generic modules for 2BTL

The generic modules for the two-boundary Temperley-Lieb algebra have been studied in [6] and [8]. The principle is quite the same as for the one-boundary case : the modules are given by the sets of half-loops and strings, some of them carrying black or white blobs. The black blobs are all on the left of all the white ones, and they cannot be between two non-contractible strings. The action of the generators e_i , b_1 and b_2 follows from the graphic representation. For example, the module $\mathcal{V}_{0,2BTL}$ for $N = 4$ strands is

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{array}{cccc} \text{UU} & \text{U} \bullet \text{U} & \text{U} \text{U} \text{U} & \text{U} \text{U} \text{U} \\ \text{U} \bullet \text{U} & \text{U} \text{U} & \text{U} \text{U} & \text{U} \text{U} \\ \bullet \bullet \text{U} & \text{U} \text{U} & \bullet \text{U} \text{U} & \bullet \text{U} \text{U} \\ \text{U} \text{U} & \bullet \text{U} & \text{U} \text{U} & \bullet \text{U} \end{array} \right\}.$$

Note that the dimension of this module is related to the ones of the 1BTL modules exactly as detailed for the relation (A.16) : replace each half-loop carrying a white blob by a pair of strings. Clearly, this gives again all the states of the generic modules of 1BTL, so we have simply

$$\dim(\mathcal{V}_{0,2BTL}) = \dim(\mathcal{V}_{0,1BTL}) + \sum_{\substack{s>0 \\ s=N \bmod 2}}^N \dim(\mathcal{V}_s^b) + \sum_{\substack{s>0 \\ s=N \bmod 2}}^N \dim(\mathcal{V}_s^u) = 2^N. \quad (\text{A.17})$$

For the modules with strings, there are four different modules related by the transformation (A.14) for b_1 or b_2 . Again let us give some simple example, with $N = 4$ and $s = 2$

$$\mathcal{V}_2^{bb} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \bullet \text{U} \\ \bullet \bullet \text{U} \\ \bullet \text{U} \text{U} \\ \text{U} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_2^{bu} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \bullet \text{U} \\ \bullet \bullet \text{U} \\ \bullet \text{U} \text{U} \\ \text{U} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_2^{ub} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \bullet \text{U} \\ \bullet \bullet \text{U} \\ \bullet \text{U} \text{U} \\ \text{U} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \end{array} \right\} \quad \mathcal{V}_2^{uu} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \bullet \text{U} \\ \bullet \bullet \text{U} \\ \bullet \text{U} \text{U} \\ \text{U} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \end{array} \right\}.$$

Again we can apply the trick leading to (A.16) to compute the dimensions of these modules.

$$\dim(\mathcal{V}_s^{bb}) = \sum_{\substack{s'=s \\ s'=N \bmod 2}}^N \dim(\mathcal{V}_{s'}^b) = \sum_{\substack{s'=s \\ s'=N \bmod 2}}^N \binom{N}{\frac{N-s'}{2}}. \quad (\text{A.18})$$

A.3 Jones-Wenzl projectors

In the study of the representation theory of the Temperley-Lieb algebra, there is a set of idempotents playing a central and crucial role, called Jones-Wenzl idempotents or projectors in the literature. In this paper we want to extend the definition of these objects to the case of our boundary algebras *1BTL* and *2BTL*. To begin with, let us recall what the Jones-Wenzl projectors are in the ordinary Temperley-Lieb algebra. They are defined inductively for q generic by

$$\begin{cases} P_1 &= 1 \\ P_{k+1} &= P_k - \frac{[k]_q}{[k+1]_q} P_k e_k P_k \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

For example,

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{---} \\ P_2 &= \text{---} \text{---} - \frac{1}{[2]_q} \text{---} \cup \\ P_3 &= \text{---} \text{---} \text{---} - \frac{[2]_q}{[3]_q} \text{---} \cup \text{---} - \frac{[2]_q}{[3]_q} \text{---} \cup - \frac{1}{[3]_q} \text{---} \cup \text{---} - \frac{1}{[3]_q} \text{---} \cup \end{aligned}$$

The crucial property of the P_k 's is

$$\forall i < k, \quad e_i P_k = P_k e_i = 0. \quad (\text{A.20})$$

Note that this property implies that P_N always acts trivially in the generic modules of TL_N : it acts on $\mathcal{V}_N$ as the identity, and on all the other modules as zero. So the only state on N strands which is not annihilated by P_N is the "full-string state"

$$\underbrace{\text{---} \cdots \text{---}}_N.$$

It is an easy exercise to prove that the P_k 's satisfy the property (A.20) starting from (A.19). The two following statements are proven simultaneously by induction

$$\begin{aligned} - P_{k+1} e_k &= e_k P_{k+1} = 0 \\ - e_{k+1} P_{k+1} e_{k+1} &= \frac{[k+2]_q}{[k+1]_q} P_k e_{k+1} = \frac{[k+2]_q}{[k+1]_q} e_{k+1} P_k. \end{aligned}$$

A.3.1 Jones-Wenzl projectors for *1BTL*

It is not difficult to extend the definition of the Jones-Wenzl projectors to the *1BTL* case. They must be projectors on the "full-string states", either blobbed or unblobbed. So there are

two series of such projectors, related by the usual blobbed/unblobbed transformation (A.14). We define them as the elements of $1BTL$ which satisfy the properties analogous to (A.20)

$$\forall i < k, \quad e_i P_k^b = P_k^b e_i = e_i P_k^u = P_k^u e_i = 0. \quad (\text{A.21})$$

and the additional relations

$$b_1 P_k^b = P_k^b b_1 = P_k^b \quad (\text{A.22a})$$

$$(1 - b_1) P_k^u = P_k^u (1 - b_1) = P_k^u. \quad (\text{A.22b})$$

This is achieved with the definitions

$$\begin{cases} P_1^b &= b_1 \\ P_{k+1}^b &= P_k^b - \frac{[k+r_1-1]_q}{[k+r_1]_q} P_k^b e_k P_k^b \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

and

$$\begin{cases} P_1^u &= 1 - b_1 \\ P_{k+1}^u &= P_k^u - \frac{[k-r_1-1]_q}{[k-r_1]_q} P_k^u e_k P_k^u \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

The three first blobbed projectors are

$$P_1 = \bullet$$

$$P_2 = \bullet \mid - \frac{1}{[2]_q} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array}$$

$$P_3 = \bullet \mid \mid - \frac{[r_1]_q}{[r_1+1]_q} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \mid - \frac{[r_1]_q^2}{[r_1+1]_q [r_1+2]_q} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \bullet - \frac{[r_1+1]_q}{[r_1+2]_q} \bullet \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} + \frac{[r_1]_q}{[r_1+2]_q} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} + \frac{[r_1]_q}{[r_1+2]_q} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array}$$

and the unblobbed ones are obtained by replacing the blobs by the usual squares, and r_1 by $-r_1$. Again the projector P_N^b act trivially on the different generic modules of $1BTL$: it is the identity on $\mathcal{V}_N^b$ and zero in all other modules. To conclude this section, let us introduce the convenient notation

$$P_k^b \equiv \underbrace{\begin{array}{c} \text{blob} \\ \text{blob} \\ \text{blob} \\ \text{blob} \end{array}}_k$$

then the induction which defines P_k^b is (with k strands in each term)

$$\begin{array}{c} \text{blob} \\ \text{blob} \\ \text{blob} \\ \text{blob} \end{array} = \begin{array}{c} \text{blob} \\ \text{blob} \\ \text{blob} \end{array} \mid - \frac{[k+r_1-2]_q}{[k+r_1-1]_q} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array}$$

In the next section we will work with the right and left blob, so we will need the following relation including the right blob

$$\begin{array}{c} \text{blob} \\ \text{blob} \\ \text{blob} \\ \text{blob} \end{array} = \mid \begin{array}{c} \text{blob} \\ \text{blob} \\ \text{blob} \end{array} - \frac{[k+r_2-2]_q}{[k+r_2-1]_q} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array}$$

A.3.2 Extensions to the two-boundary case

Because of the right blob, it seems difficult to find a simple relation which defines all the 2BTL projectors by induction. A better way to define them is using directly the left and right blob JW projectors. To do this, we will restrict our construction to the case N even. Note that this is when loops touching both boundaries can appear, a situation which we treated with the quotient (A.12). Let us define

$$\alpha_{j,p} = \frac{[r_1 + j]_q [r_2 + j - 1]_q - [r_1 + j - p]_q [r_2 + j - p - 1]_q}{[r_1 + j - 1]_q [r_2 + j - 1]_q} \quad (\text{A.25})$$

and

$$\beta_{j,p} = \frac{[r_1 + j - p - 1]_q [r_2 + j - p - 1]_q}{[r_1 + j - 1]_q [r_2 + j - 1]_q}. \quad (\text{A.26})$$

Then the projector P_{2j}^{bb} is

$$\begin{aligned} P_{2j}^{bb} = & \text{diagram} - \frac{1}{\alpha_{j,1}} \text{diagram} \\ & + \frac{\beta_{j,1}}{\alpha_{j,1}\alpha_{j,2}} \text{diagram} - \dots + (-1)^{j-1} \frac{\prod_{p=1}^{j-2} \beta_{j,p}}{\prod_{p=1}^{j-1} \alpha_{j,p}} \text{diagram} \\ & + \frac{(-1)^j}{\alpha_{j,j-1} + n_{12}\beta_{j,j-1}} \prod_{p=1}^{j-1} \frac{\beta_{j,p}}{\alpha_{j,p}} \text{diagram} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

The key relations to understand this formula are

$$\text{diagram} = \alpha_{j,1} \text{diagram} + \beta_{j,1} \text{diagram}$$

and

$$\text{diagram} = \alpha_{j,2} \text{diagram} + \beta_{j,2} \text{diagram}$$

and

$$\text{diagram} = \alpha_{j,3} \text{diagram} + \beta_{j,3} \text{diagram}$$

etc. The other terms are similar, except the last one which is

$$\text{diagram} = (\alpha_{j,j-1} + n_{12}\beta_{j,j-1}) \text{diagram}$$

Of course the coefficients have been computed such that

$$P_{2j}^{bb}e_j = e_jP_{2j}^{bb} = 0 \quad (\text{A.28})$$

then with this definition of P_{2j}^{bb} we have

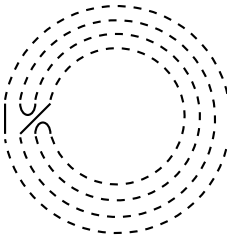
$$P_{2j}^{bb}e_i = P_{2j}^{bb}e_i = 0 \quad (i < 2j) \quad (\text{A.29})$$

$$P_{2j}^{bb}b_1 = b_1P_{2j}^{bb} = P_{2j}^{bb}b_2 = b_2P_{2j}^{bb} = P_{2j}^{bb}. \quad (\text{A.30})$$

so P_{2j}^{bb} has all the natural properties extending (A.20).

A.3.3 Markov traces in 1BTL and 2BTL

As a first application of the objects we have just introduced, we would like to extend the concept of Markov trace to *1BTL* and *2BTL*. There exist several ways to define the Markov trace in the Temperley-Lieb algebra, more or less axiomatic. Here we give but a very naive definition, but this will be sufficient to be extended to the boundary cases. The Markov trace of an element M of TL_N is defined as follows. First, the Markov trace is linear, so we can assume that M is a single word on the e_i 's. Then M can be represented as a diagram with N strands entering the diagram from the bottom and exiting at the top. The Markov trace of M is obtained by gluing the top and the bottom of the diagram, and counting each closed loop thus obtained with a factor $[2]_q$. For example,

$$\text{Tr}\{e_2e_3\} = \text{Tr}\left\{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = [2]_q^2$$


It is well-known that the Markov trace in the Temperley-Lieb algebra is related to the usual traces over the generic modules by the relation

$$\text{Tr}\{M\} = \sum_{\substack{s=0 \\ s=N \bmod 2}}^N \mathcal{D}_s \text{tr}_{\mathcal{V}_s}\{M\} \quad (\text{A.31})$$

where the coefficients $\mathcal{D}_s$ are the quantum dimensions of the quantum group $U_q[SU(2)]$

$$\mathcal{D}_s = [s+1]_q. \quad (\text{A.32})$$

We want to give an elementary proof of the relation (A.31) relying only on the Jones-Wenzl projectors, in order to extend it to *1BTL* and *2BTL* later. Assume that q is not a root of unity, so the modules $\mathcal{V}_s$ are irreducible. We define the following scalar product in the module $\mathcal{V}_s$. Consider two states v_1 and v_2 in $\mathcal{V}_s$, and assume that each one corresponds to a single diagram

with $(N - s)/2$ half-loops and s strings. Then turn v_2 upside-down by a horizontal reflexion, and glue its top with the top of v_1 . This gives a new diagram with closed loops and strings. If the number of strings is not s , then the scalar product is defined to be zero. If it is s , then just count each closed loop with a factor $[2]_q$. Again let us agree on this definition with some graphic example

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= | \cup \cup \cup \cup | \\ |v_2\rangle &= | \smile \smile \smile | \\ |v_3\rangle &= \cup \cup \cup \cup \end{aligned}$$

then with our definition we have

$$\begin{aligned} \langle v_1 | v_2 \rangle &= | \smile \smile \smile \smile | = 1 \\ \langle v_1 | v_3 \rangle &= \cup \cup \cup \cup = [2]_q^2 \\ \langle v_1 | v_3 \rangle &= \cup \cup \cup \cup = 0 \end{aligned}$$

Note that our scalar product is not positive definite. This is not a problem, because we will just use it as a tool to compute the Markov trace (A.31), so it just has to behave as expected from the diagrammatic representation. We have assumed that the modules $\mathcal{V}_s$ are generic. This allows us to consider some basis $\mathcal{B}_s$ which are orthonormed for our scalar product

$$\forall b_i, b_j \in \mathcal{B}_s, \langle b_i | b_j \rangle = \delta_{i,j}. \quad (\text{A.33})$$

Now the next step is to remark that the elements of the Temperley-Lieb algebra can be represented as "ket-bra" products from two states in a same modules $\mathcal{V}_s$. For example

$$| \cup \cup \cup \rangle \langle \cap \cap \cap | = \text{diagram of three crossings}$$

and we would like to identify this as the element $e_3 e_2 e_1$ of TL_4 . However, this is obviously not compatible with the definition of our scalar product. The problem comes from through strings. The element we have just drawn does not annihilate the states of the module $\mathcal{V}_0$. Our scalar product is not defined between two states belonging to different modules $\mathcal{V}_s, \mathcal{V}_{s'}$ ($s \neq s'$), and we would prefer it to be zero. In order to do this, we can insert the JW projector $P_2^{(JW)}$ between the "bra" and the "ket". This gives

$$| \cup \cup \cup \rangle \circ P_2^{(JW)} \circ \langle \cap \cap \cap | = \text{diagram of three crossings with a loop} = \text{diagram of three crossings} - \frac{1}{[2]_q} \text{diagram of two loops}$$

We want to use this trick to construct an element of TL_N which acts as the identity on the module $\mathcal{V}_s$, and as zero on all the other modules. For $s = N$ this is exactly the JW projector

P_N , but we do not have any such object for $s < N$. However, we are ready to define it now. Let us call $\mathcal{P}_{N,s}$ such a projector. Graphically, we can define it as the sum of diagrams obtained when we insert the JW projector $P_s^{(JW)}$ in the graphic "ket-bra" product of the states of the basis $\mathcal{B}_s$.

$$\mathcal{P}_{N,s} = \sum_{b \in \mathcal{B}_s} |b\rangle \circ P_s^{(JW)} \circ \langle b|. \quad (\text{A.34})$$

With this definition, these projectors satisfy the completeness relation

$$\sum_{\substack{s=0 \\ s=N \bmod 2}}^N \mathcal{P}_{N,s} = 1 \quad (\text{in } TL_N) \quad (\text{A.35})$$

Indeed, this is true in all the irreducible representations so it has to be true in the algebra. The completeness relation allows us to prove the relation (A.31) very easily. Consider again an element M of TL_N . Using (A.35) we have

$$M = \sum_s \mathcal{P}_{N,s} M = \sum_s \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \boxed{\mathcal{P}_{N,s}} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \boxed{M} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

and we can use this together with (A.34) to compute the Markov trace of M graphically (for the picture we use $N = 4$ and $s = 2$)

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \boxed{\mathcal{P}_{N,s}} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \boxed{M} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} &= \sum_{b \in \mathcal{B}_s} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ &= \sum_{b \in \mathcal{B}_s} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ &= \sum_{b \in \mathcal{B}_s} \langle b|M|b\rangle \text{Tr} \left\{ P_s^{(JW)} \right\} \end{aligned}$$

so we end up with the general formula

$$\text{Tr} \{M\} = \sum_s \text{Tr} \left\{ P_s^{(JW)} \right\} \text{tr}_{\mathcal{V}_s} M. \quad (\text{A.36})$$

We have reduced the problem of computing the Markov trace of M to the one of computing the Markov traces of the JW projectors. This can be very easily done using the induction relation

(A.19), from which we can easily derive the property (this is often called “partial trace” or “conditionnal expectation” in the litterature)

$$\underbrace{\text{diagram with } k \text{ strands and a circle}}_k = \frac{[k+1]_q}{[k]_q} \underbrace{\text{diagram with } k-1 \text{ strands}}_{k-1}.$$

Then we see that $\text{Tr} \{P_k^{(JW)}\} = \frac{[k+1]_q}{[k]_q} \text{Tr} \{P_{k-1}^{(JW)}\}$ and $\text{Tr} \{P_1^{(JW)}\} = [2]_q$, so we recover the quantum dimensions (A.32)

$$\text{Tr} \{P_s^{(JW)}\} = \mathcal{D}_s = [s+1]_q. \quad (\text{A.37})$$

Now it is not difficult to extend the previous formalism to $1BTL$ and $2BTL$ in order to define Markov traces for these algebras, and to get a decomposition on the usual traces such as (A.31). Note that the principal steps in the reasoning were :

- consider the generic case, so the generic modules are irreducible. Then introduce a scalar product defined graphically by the gluing of the diagrams which represent the states.
- construct the projectors $\mathcal{P}_s$ which act as the identity on $\mathcal{V}_s$ and as zero on all the other modules. To do this, use an orthonormal basis $\mathcal{B}_s$ of the module $\mathcal{V}_s$ and the JW projector P_s .
- use the completeness relation for the $\mathcal{P}_s$'s to compute the Markov trace of an element of TL_N . This reduces to a decomposition on the usual traces over the generic modules, including some coefficients which turn out to be the Markov traces of the JW projectors.

All these steps can be repeated exactly in the same way for the algebras $1BTL$ and $2BTL$. For $1BTL$ we thus arrive to the formula

$$\text{Tr} \{M\} = \text{tr}_{\mathcal{V}_{0,1BTL}} + \sum_{\substack{s \geq 0 \\ \alpha=b,u}} \text{Tr} \{P_s^\alpha\} \text{tr}_{\mathcal{V}_s^\alpha} M \quad (\text{A.38})$$

and again the Markov trace of the JW projectors are computed inductively, using (A.23) and taking the partial traces on the last strands. This gives $\text{Tr} \{P_1^b\} = \frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q}$ and $\text{Tr} \{P_k^b\} = \frac{[r_1+k]_q}{[r_1+k-1]_q} \text{Tr} \{P_{k-1}^b\}$, so we have

$$\mathcal{D}_s^b \equiv \text{Tr} \{P_s^b\} = \frac{[r_1+s]_q}{[r_1]_q} \quad (\text{A.39})$$

and the corresponding relation for the unblobbed JW projector

$$\mathcal{D}_s^u \equiv \text{Tr} \{P_s^u\} = \frac{[-r_1+s]_q}{[-r_1]_q}. \quad (\text{A.40})$$

In the case of $2BTL$, only the computation of the Markov traces of the JW projectors $P_{2j}^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = b, u$) is a bit more difficult. Again this arises because we have no induction relation to define these projectors. Here the key tool is the trace

$$t_{j,p} \equiv \text{Tr} \left[\text{diagram with } 2j \text{ strands and } p \text{ blobs} \right] = \text{diagram with } 2j \text{ strands and } p \text{ blobs}$$

where in the rightmost drawing there are p loops in the middle, $j - p$ on the left side and $j - p$ on the right side. These traces satisfy

$$\begin{aligned} t_{j,p} &= \alpha_{j,p} t_{j-1,p-1} + \beta_{j,p} t_{j-1,p} \\ t_{j,0} &= \frac{[r_1 + j]_q}{[r_1]_q} \frac{[r_2 + j]_q}{[r_2]_q} = \mathcal{D}_j^{b(1)} \mathcal{D}_j^{b(2)} \\ t_{j,j} &= (\alpha_{j,j-1} + n_{12} \beta_{j,j-1}) t_{j-1,j-1}. \end{aligned}$$

The definition (A.27) of P_{2j}^{bb} gives

$$\text{Tr} P_{2j}^{bb} = t_{j,0} + \sum_{k=1}^{j-1} \left((-1)^k \frac{\prod_{p=1}^{k-1} \beta_{j,p}}{\prod_{p=1}^k \alpha_{j,p}} \right) t_{j,p} + \frac{(-1)^j}{\alpha_{j,j-1} + n_{12} \beta_{j,j-1}} \left(\prod_{p=1}^{j-1} \frac{\beta_{j,p}}{\alpha_{j,p}} \right) t_{j,j}$$

and with the relations given above we see that almost all the terms collapse. Only two of them remain and they give

$$\text{Tr} \{ P_{2j}^{bb} \} = t_{j,0} - t_{j-1,0}$$

so we have

$$\mathcal{D}_{2j}^{bb} \equiv \text{Tr} \{ P_{2N}^{bb} \} = \frac{[r_1 + r_2 - 1 + 2j]_q}{[r_1]_q [r_2]_q} \quad (\text{A.41})$$

and the corresponding formulas for $\mathcal{D}_{2j}^{bu}$, $\mathcal{D}_{2j}^{ub}$, $\mathcal{D}_{2j}^{uu}$ obtained by changing r_1 into $-r_1$ or/and r_2 into $-r_2$. Thus we have the decomposition of the Markov trace in $2BTL$

$$\text{Tr} \{ M \} = \text{tr}_{\mathcal{V}_{0,2BTL}} + \sum_{\substack{j>0 \\ \alpha, \beta=b,u}} \mathcal{D}_{2j}^{\alpha\beta} \text{tr}_{\mathcal{V}_{2j}^{\alpha\beta}} M. \quad (\text{A.42})$$

To conclude this first application of the boundary JW projectors we have just defined, we would like to make some comment. This is not important for what follows, so it can be skipped by first lecture. It is possible to modify our definition of the Markov trace in the algebras TL , $1BTL$, $2BTL$ to be a bit more general. This is particularly interesting for the study of loop models in statistical physics, as they appear to be an important paradigm to study the critical Q -state Potts models and the $O(n)$ models. In that context, the partition function of these models on an annulus is exactly the Markov trace of a power of the transfer matrix, which is an element of the Temperley-Lieb algebra (or its boundary extensions if one considers a boundary loop model). This has been studied in the context of conformal field theory in [5],[7]. For both physical and combinatorial applications, it is interesting to be able to distinguish the contractible loops on the annulus from the non-contractible ones. To do this, we can introduce a modified Markov trace. We can decide that we draw all the Temperley-Lieb diagrams in $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ instead of $\mathbf{R}^2$, and when we compute the Markov trace, we give a weight $[2]_q$ only to the contractible loops,

and a weight $[2]_\chi$ to the non-contractible ones. For example

$$\mathrm{Tr}_\chi \left\{ \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \text{Diagram: A vertical line on the left, followed by a dashed circle with a central dot labeled '0'. Inside the circle, there are two dashed loops that cross each other.} \end{array} = ([2]_\chi)^2 [2]_q.$$

With that definition, all the preceding steps can be repeated, and we arrive to the same decomposition formulas for TL , $1BTL$ and $2BTL$. Again, this reduces to the computation of the modified Markov traces of the JW projectors. This can be achieved exactly as for the usual Markov trace : using the induction definition for the JW projectors in TL and $1BTL$, and the formula (A.27) for $2BTL$. It turns out that these new coefficients do not depend on q at all, but only on χ . The only effect of giving a different weight to the non-contractible loops is thus to change q into χ in the coefficients $\mathcal{D}_s$, $\mathcal{D}_s^\alpha$ or $\mathcal{D}_{2j}^{\alpha\beta}$, as claimed in [2],[5],[7].

A.4 Magic parameters

The generic representation theory of $1BTL$ and $2BTL$ is known and has been reviewed in section A.2. Now we turn to the non-generic cases.

A.4.1 Gram determinants

Gram determinants are a convenient tool for the study of the irreducibility of the modules. They are defined as the determinant of the matrix of the scalar products $M_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle$ where the v_i are the basis vectors of the modules $\mathcal{V}_s$ (or $\mathcal{V}_s^\alpha$ for $1BTL$, $\mathcal{V}_s^{\alpha\beta}$ for $2BTL$). The scalar product is the one we have defined for our discussion of Markov traces. For example Gram

determinant of $\mathcal{V}_2^b$ for $N = 4$ is

$$\Delta_2^b = \left| \begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} \\ \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \\ \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} \\ \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} [2]_q & 1 & 0 & 0 \\ 1 & [2]_q & 1 & 1 \\ 0 & 1 & [2]_q & \frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q} \\ 0 & 1 & \frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q} & \frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q} \end{array} \right| = \mathcal{D}_3^b \mathcal{D}_1^u.$$

These objects are interesting because they locate automatically the points where the generic modules are no longer irreducible. Indeed, it is equivalent to say that a generic module is irreducible or that its Gram determinant is not zero. Note that this quantity is always polynomial in $[2]_q$ and $[r_1 + 1]_q/[r_1]_q$ (and of course $\frac{[r_2+1]}{[r_2]_q}$ and n_{12} for $2BTL$), for convenience we do not write explicitly this dependence in what follows). The degree of a zero of Gram determinant is exactly the number of states which decouple from the others, so it has to be the dimension of the submodule appearing at this special value. The total degree of the determinant corresponding to a module $\mathcal{V}_s$ is exactly $(N - s)/2 \times \dim(\mathcal{V}_s)$, and the coefficient of the highest degree monomial is always 1, (both statements follow by looking at the diagonal terms on the example above). Then the expected form of such a determinant is

$$\Delta_s^\alpha = \prod_{\mathcal{V}} \left[p_{\mathcal{V}} \left([2]_q, \frac{[r_1 + 1]_q}{[r_1]_q} \right) \right]^{\dim(\mathcal{V})} \quad (\text{A.43})$$

where the product is over all the submodules of $\mathcal{V}_s$ which can appear at different special values of the parameters $[2]_q$ and $\frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q}$, and $p_{\mathcal{V}}$ is a polynomial in those two variables whose roots are simple and are precisely the points where the submodule $\mathcal{V}$ appears.

Some numerical conjectures have been made in [6], and the Gram determinant of the module $\mathcal{V}_{0,2BTL}$ has been computed rigorously in [8]. We will see in the following sections that all these results agree with our analysis of the irreducibility of generic modules based on the Jones-Wenzl projectors we have just defined.

A.4.2 Magic boundary in $1BTL$

We begin with the one-boundary Temperley-Lieb algebra $1BTL$ with q generic and $r_1 \in \mathbf{N}^*$. In that case, there is a morphism

$$\mathcal{V}_s^b \leftarrow \mathcal{V}_{s+2r_1}^u. \quad (\text{A.44})$$

It is easily constructed with the JW projectors for $1BTL$. Recall that it is sufficient to define this morphism for $N = s + 2r_1$ and it will extend naturally to greater N . Recall also that for r_1 integer the JW projector P_k^u is well defined for $k \leq r_1$. Consider the mapping from $\mathcal{V}_{s+2r_1}^u$ to $\mathcal{V}_s^b$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \blacksquare \\ | \\ | \\ \dots \\ | \end{array}}_{s+2r_1} \mapsto \underbrace{\begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \cup \\ \cup \\ \cup \end{array}}_{2r_1} \quad \underbrace{\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ | \\ \dots \\ | \end{array}}_s \quad (\text{A.45})$$

where the black rectangle represents the projector $P_{r_1}^u$. This is the morphism we want. To see this it is sufficient to check that the state on the right is annihilated by all the e_i 's. For the e_i 's acting on two strings ($i > 2r_1$), this is obvious. For e_{2r_1} , this is true because the last strand and the first string carry orthogonal blobs. For the other e_i 's ($i < 2r_1$) this follows from the definition of the JW projectors, except for e_{r_1} . For this one, we need the partial trace of P_k^u

$$\underbrace{\text{Diagram with } k \text{ vertical lines and a circle on the right}}_k = \frac{[-r_1 + k]_q}{[-r_1 + k - 1]_q} \underbrace{\text{Diagram with } k-1 \text{ vertical lines}}_{k-1} \quad (\text{A.46})$$

and we see that this term is zero for $r_1 = k$, so (A.45) is indeed a morphism. This extends to greater N just by completing the states in (A.45) with as many half-loops as needed. By construction, this mapping is always injective. Then $\mathcal{V}_s^b$ contains a submodule isomorphic to $\mathcal{V}_{s+2r_1}^u$, which can be quotiented out to give a new irreducible representation $\mathcal{V}_s^b / \mathcal{V}_{s+2r_1}^u$.

Now we consider r_1 a negative integer, and look at the irreducibility of $\mathcal{V}_s^b$ (of course, it would be the same to consider r_1 positive and look at $\mathcal{V}_s^u$). It is not difficult, extending the preceding idea, to establish what happens for $s < (-r_1)$. Consider the mapping

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \underbrace{\quad \dots \quad}_ {2(-r_1)-s} \end{array} \mapsto \begin{array}{cc} & \text{---} \\ | & \vdots \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_{s} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{2(-r_1)-2s} \end{array}. \tag{A.47}$$

where the black ellipse is the JW projector $P_{-r_1}^b$. It defines an injective morphism

$$\mathcal{V}_s^b \leftarrow \mathcal{V}_{2(-r_1)-s}^b. \quad (\text{A.48})$$

This comes from the partial trace of the projector P_k^b

$$\underbrace{\text{Diagram with } k \text{ vertical lines and a circle}}_k = \frac{[r_1 + k]_q}{[r_1 + k - 1]_q} \underbrace{\text{Diagram with } k-1 \text{ vertical lines}}_{k-1}. \quad (\text{A.49})$$

which is zero when $k = -r_1$. Again, this shows that $\mathcal{V}_s^b$ contains a submodule isomorphic to $\mathcal{V}_{2r_1-s}^b$, and that we can quotient out that submodule to obtain a new irreducible representation. Note that this construction does not work for $r_1 \geq s$, so we can guess in that case $\mathcal{V}_s^b$ remains irreducible.

We can use the two morphisms (A.45) and (A.47) to make some guess about the Gram determinant Δ_s^b . Recall the general form (A.43). We know the special values of $\frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q}$, so we can deduce

$$p_{\mathcal{V}_{s+2k}^u} \propto \frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q} - \frac{[k+1]}{[k]_q} = -\frac{[-r_1+k]_q}{[-r_1]_q[k]_q} \propto \mathcal{D}_k^u \quad (\text{A.50})$$

and for $k > s$

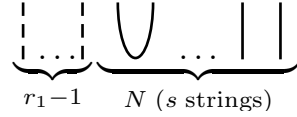
$$p_{\mathcal{V}_{2k-s}^b} \propto \frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q} - \frac{[-k+1]}{[-k]_q} = \frac{[r_1+k]_q}{[r_1]_q[k]_q} \propto \mathcal{D}_k^b \quad (\text{A.51})$$

so we can make the guess

$$\Delta_s^b \propto \left(\prod_{k=s+1}^{(N+s)/2} (\mathcal{D}_k^b)^{\dim(\mathcal{V}_{2k-s}^b)} \right) \left(\prod_{k=1}^{(N-s)/2} (\mathcal{D}_k^u)^{\dim(\mathcal{V}_{s+2k}^u)} \right) \quad (\text{A.52})$$

and fix the normalization to one since we know that the leading term comes with a factor 1. This result can be easily derived rigorously (see in appendix), and is consistent with the results of [4] and [6]. The determinant Δ_s^u is obtained from this one by exchanging b and u as usual.

We would like to give some description of the quotient representation $\mathcal{V}_s^b / \mathcal{V}_{s+2r_1}^u$ for r_1 a positive integer. In [5] the following idea appeared. Consider the states of a generic module $\mathcal{V}_s$ for the Temperley-Lieb algebra. Add $r_1 - 1$ "ghost" strings labeled $0, -1, \dots, -(r_1 - 2)$ on the left of all these states.



We could act with e_0, e_{-1} , etc. on the ghost strings, and then this would simply be the generic module $\mathcal{V}_{s+r_1-1}$, but we will not allow this. We just allow the JW projector $P_{r_1}^{(\text{ghost})}$ to act on the $r_1 - 1$ ghost strings and the first strand, and we define $\tilde{e}_i = P_{r_1-1}^{(\text{ghost})} e_i$ for $1 \leq i \leq N$. Note that

$$i \geq 2 \Rightarrow P_k \tilde{e}_i = \tilde{e}_i P_k \quad (\text{A.53a})$$

$$\left(P_{r_1}^{(\text{ghost})} \right)^2 = P_{r_1}^{(\text{ghost})} \quad (\text{A.53b})$$

$$\tilde{e}_1 P_{r_1}^{(\text{ghost})} \tilde{e}_1 = \frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q} \tilde{e}_1 \quad (\text{A.53c})$$

so clearly $P_{r_1}^{(\text{ghost})}$ and the $r_1 - 1$ ghost strings have been introduced to play the role of b_1 . The last identity comes once again from the partial trace of the JW projector^b

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \cup \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} = \frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q} \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \cup \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad (\text{A.54})$$

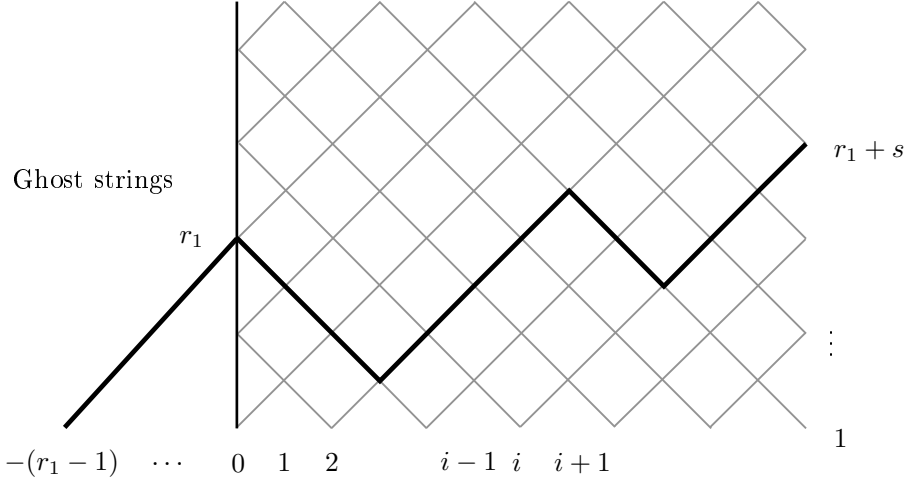


FIG. A.2 – A state $|h_{-(r_1-1)}, \dots, h_0, h_1, \dots, h_N\rangle$ satisfying $h_{-(r_1-1)} = 1$ and projected by $P_{r_1-1}^{(\text{ghost})}$, so $h_0 = r_1$. This representation is isomorphic to $\mathcal{V}_s^b / \mathcal{V}_{s+2r_1}^u$.

We claim that this is a representation of $1BTL$, isomorphic to $\mathcal{V}_s^b / \mathcal{V}_{s+2r_1}^u$. To prove this, it is sufficient to show that $P_{r_1}^b = 0$ in that representation (recall the morphism (A.45)). To do this, it is simpler to turn to the height model framework presented in the introduction of this paper. The ghost strings can be added as shown in figure A.2. This is clearly equivalent to the ghost string representation we have just introduced because both can be viewed as the module $\mathcal{V}_{r_1-1+s}$ of the Temperley-Lieb algebra. Recall the action of the e_i 's on the states $|h_0, \dots, h_N\rangle$ given by formula (A.8). Then the ghost strings and the projector $P_{r_1-1}^{(\text{ghost})}$ is equivalent to say that we work with the states $|h_0, \dots, h_N\rangle$ satisfying the boundary conditions $h_0 = r_1$ and $h_N = r_1 + s$. b_1 acts as follows

$$b_1 |h_0 = r_1, h_1, \dots, h_N = r_1 + s\rangle = \delta_{h_1, r_1+1} |h_0 = r_1, h_1, \dots, h_N = r_1 + s\rangle \quad (\text{A.55})$$

and more generally, the blobbed JW projector P_k^b is simply

$$P_k^b |h_0 = r_1, \dots, h_k, \dots, h_N = r_1 + s\rangle = \delta_{h_k, r_1+k} |h_0 = r_1, \dots, h_k, \dots, h_N = r_1 + s\rangle. \quad (\text{A.56})$$

The unblobbed JW projector is also very simple. For $k \leq r_1 - 1$ it is a simple task to prove by induction that

$$P_k^u |h_0 = r_1, \dots, h_k, \dots, h_N = r_1 + s\rangle = \delta_{h_k, r_1-k} |h_0 = r_1, \dots, h_k, \dots, h_N = r_1 + s\rangle. \quad (\text{A.57})$$

and then it follows from (A.23) that

$$P_{r_1}^u = 0 \quad (\text{A.58})$$

as claimed. Of course, P_k^u is not defined for $k > r_1$, as expected from (A.23).

^bOf course the white ellipses here are our notation for the JW projectors $P_{r_1}^{(\text{ghost})}$, not $P_{r_1}^b$ in $1BTL$.

We conclude this section with a simple but important remark. In the case $r_1 = 1$, we have the injective morphism $\mathcal{V}_s^b \leftarrow \mathcal{V}_{s+2}^u$ for all $s \geq 0$, and we can consider the quotient representation $\mathcal{V}_s^b/\mathcal{V}_{s+2}^u$ of $1BTL$. Note that here the quotient representation is isomorphic to the module $\mathcal{V}_s$ for TL , where the blob operator b_1 acts as the identity. In that sense, the one-boundary Temperley-Lieb algebra $1BTL$ "reduces" to the ordinary one TL when the weight of blobbed loops is exactly the same as the weight of ordinary ones, which was to be expected intuitively.

A.4.3 Full restriction and RSOS representation

The Gram determinants for $1BTL$ show that the generic modules $\mathcal{V}_s^\alpha$ are still irreducible if q is a root of unity but r_1 is not an integer. This is because the $U_q[SU(2)]$ symmetry is completely broken by the blob in that case, so all what usually happens in the Temperley-Lieb algebra at a root of unity simply does not occur here. Hence there is nothing more interesting to study in that case.

When r_1 is integer, the quotient representations such as $\mathcal{V}_s^b/\mathcal{V}_{s+2r_1}^u$ admit a ghost string representation based on the TL module $\mathcal{V}_{r_1-1+s}$, as we have just seen in the previous section.. Then when q is a root of unity, even the quotient representations of $1BTL$ inherit some structure from the ordinary Temperley-Lieb algebra, and hence from the quantum group $U_q[SU(2)]$. In that sense, the quantum symmetry is not "completely" broken. The next interesting case is then when $q = e^{i\frac{\pi}{m+1}}$, with both r_1 and m positive integers, with which we deal in this section.

Let us begin with the quotient representation $\mathcal{V}_s^b/\mathcal{V}_{s+2r_1}^u$ viewed as a ghost string representation constructed from the TL module $\mathcal{V}_{r_1-1+s}$. We have the exact sequence following from (A.5) when $r_1 + s < m + 1$

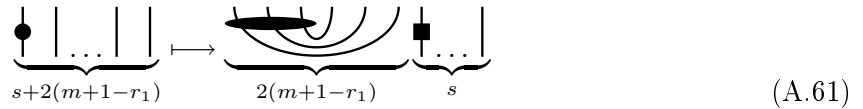
$$\mathcal{V}_{r_1-1+s} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{V}_{2k(m+1)-1-r_1-s} \leftarrow \mathcal{V}_{2k(m+1)+r_1-1+s} \leftarrow \cdots \quad (\text{A.59})$$

and if we look at these modules as ghost string representations of $1BTL$ we see

$$\mathcal{V}_s^b/\mathcal{V}_{s+2r_1}^u \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{V}_{2k(m+1)-2r_1-s}^b/\mathcal{V}_{2k(m+1)-s}^u \leftarrow \mathcal{V}_{2k(m+1)+s}^b/\mathcal{V}_{2k(m+1)+2r_1+s}^u \leftarrow \cdots \quad (\text{A.60})$$

This is a rigorous consequence of the well-known result (A.5) for the Temperley-Lieb algebra at $q = e^{i\frac{\pi}{m+1}}$ and from the equivalence between quotient representations at r_1 integer and ghost string representations. Again, the successive quotients give irreducible representations of $1BTL$ at the special point $q = e^{i\frac{\pi}{m+1}}$ and $0 < r_1 < m + 1 - s$. In particular, the representation $\mathcal{W}_s^b = (\mathcal{V}_s^b/\mathcal{V}_{s+2r_1}^u) / \text{Im} \left(\mathcal{V}_{2(m+1)-2r_1-s}^b/\mathcal{V}_{2(m+1)+s}^u \right)$ is a boundary generalisation of the RSOS representation of the Temperley-Lieb algebra given in the introduction of this paper (figure A.3).

We can make the same analysis for the unblobbed module $\mathcal{V}_s^u$ when $0 \leq s \leq r_1 - 1$. When $q = e^{i\frac{\pi}{m+1}}$, m integer, the following mapping from $\mathcal{V}_{2(m+1)-2r_1+s}^b$ to $\mathcal{V}_s^u$ is an injective morphism



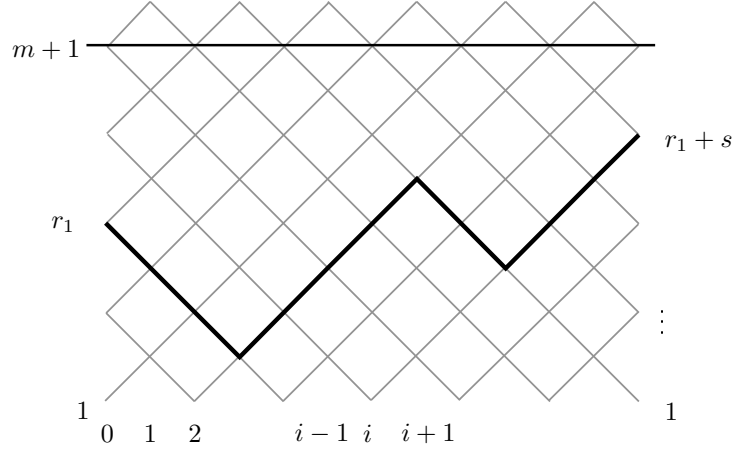


FIG. A.3 – A state $|h_0, h_1, \dots, h_N\rangle$ in the RSOS representation $\mathcal{W}_s^b$ of $1BTL$.

and this comes from the partial trace of P_k^b

$$\underbrace{\text{blobbed module}}_k = \frac{[r_1 + k]_q}{[r_1 + k - 1]_q} \underbrace{\text{blobbed module}}_{k-1} \quad (\text{A.62})$$

which is zero when $k = m + 1 - r_1$. Then we can repeat all the previous discussion, replacing the blobbed modules by the unblobbed ones and r_1 by $m + 1 - r_1$. Then we obtain the following exact sequence

$$\mathcal{V}_s^u / \mathcal{V}_{2(m+1)-2r_1+s}^b \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{V}_{2(k-1)(m+1)+2r_1-s}^u / \mathcal{V}_{2k(m+1)-s}^b \leftarrow \mathcal{V}_{2k(m+1)+s}^u / \mathcal{V}_{2(k+1)(m+1)-2r_1+s}^b \leftarrow \dots \quad (\text{A.63})$$

analogous to (A.60). Again the quotients we can make from this exact sequence define irreducible representations of $1BTL$ with the special choice of m and r_1 . In particular, the representation $\mathcal{W}_s^u$ corresponding to the first quotient in the exact sequence is again a boundary RSOS representation given by the states

$$|h_0, \dots, h_N\rangle, \quad h_i \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{A.64})$$

with the boundary conditions

$$h_0 = r_1 \quad h_N = r_1 - s. \quad (\text{A.65})$$

We would like to conclude that section by some conjecture. We think that (A.60) and (A.63) are generalised by the inclusion diagrams

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V}_s^b & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)-2r_1-s}^b & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+s}^b & \leftarrow & \mathcal{V}_{4(m+1)-2r_1-s}^b & \leftarrow & \mathcal{V}_{4(m+1)+s}^b & \leftarrow & \dots \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ & \mathcal{V}_{2r_1+s}^u & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)-s}^u & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+2r_1+s}^u & \leftarrow & \mathcal{V}_{4(m+1)-s}^u & \leftarrow & \dots \end{array} \quad (\text{A.66})$$

for $r_1 + s < m + 1$ and

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{V}_s^u & \leftarrow & \mathcal{V}_{2r_1-s}^u & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+s}^u & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+2r_1-s}^u & \leftarrow & \mathcal{V}_{4(m+1)+s}^u & \leftarrow & \cdots \\
& \nwarrow & & \nearrow & \nwarrow & & \nearrow & \nwarrow & & \nearrow & \\
& \mathcal{V}_{2(m+1)-2r_1+s}^b & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)-s}^b & \leftarrow & \mathcal{V}_{4(m+1)-2r_1+s}^b & \leftarrow & \mathcal{V}_{4(m+1)-s}^b & \leftarrow & \cdots
\end{array} \quad (\text{A.67})$$

for $s \leq r_1 - 1$. The precise meaning of these diagrams is as follows. Each arrow stands for an injective morphism. For example on the first diagram there is an injection from $\mathcal{V}_{2(m+1)-2r_1-s}^b$ to $\mathcal{V}_s^b$ and from $\mathcal{V}_{2r_1+s}^u$ to $\mathcal{V}_s^b$. Then we can consider the quotient representation

$$\mathcal{W}_s^b \cong \mathcal{V}_s^b / \left(\mathcal{V}_{2(m+1)-2r_1-s}^b \cup \mathcal{V}_{2r_1+s}^u \right).$$

The intersection of the two images is $\mathcal{V}_{2(m+1)-2r_1-s}^b \cap \mathcal{V}_{2r_1+s}^u \cong \mathcal{V}_{2(m+1)+s}^b \cup \mathcal{V}_{2(m+1)-s}^u$, and this continues as shown on the diagram.

A.4.4 Non-generic representations of 2BTL

Now we extend what precedes to the two boundary Temperley-Lieb algebra $2BTL$. Again our strategy is to build morphisms from one generic module to another, and then quotient out the image of these morphisms to obtain irreducible representation.

a Magic boundaries in the module without strings $\mathcal{V}_{0,2BTL}$

We begin with the magic values of r_{12} (recall the parametrization (A.13)). The other parameters q , r_1 and r_2 are generic. Using the one-boundary JW projectors $P_j^{b(1)}$ and $P_j^{b(2)}$ we have

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} = \frac{[r_1 + r_2 + j]_q [j - 1]_q + n_{12} [r_1]_q [r_2]_q}{[r_1 + j - 1]_q [r_2 + j - 1]_q} \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \quad (\text{A.68})$$

so using (A.13) we see that for

$$r_{12} = r_1 + r_2 - 1 + 2j \quad (\text{A.69})$$

the right term of (A.68) is zero, so the following mapping is an injective morphism from $\mathcal{V}_{2j}^{bb}$ to $\mathcal{V}_{0,2BTL}$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \quad (\text{A.70})$$

Again we can use the transformation (A.14) to extend this to the unblobbed modules when $r_{12} = \pm r_1 \pm r_2 - 1 + 2j$. Taking all these possible restrictions into account, we arrive to the following guess for the Gram determinant of $\mathcal{V}_{0,2BTL}$ on N (even) strands

$$\Delta_{0,2BTL} \propto \prod_{j=1}^{N/2} \prod_{\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1} \left(\frac{\left[\frac{\epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 - 1 + r_{12} + 2j}{2} \right]_q \left[\frac{\epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 - 1 - r_{12} + 2j}{2} \right]_q}{[r_1]_q [r_2]_q} \right)^{\dim(\mathcal{V}_{2j}^{bb})} \quad (\text{A.71})$$

and again this is consistent with the numerical result [6] and with the rigorous derivation of [8].

As a particularly simple example, consider the restriction when $r_{12} = r_1 - r_2 - 1 + 2$. Then we have a quotient representation $\mathcal{V}_{0,2BTL}/\mathcal{V}_2^{bu}$. In this representation we have the following simple rule for loops touching both boundaries

$$\bullet \phi = \bullet \cup . \quad (\text{A.72})$$

Assume moreover that $r_2 = 1$. In that case we have an additional quotient $\mathcal{V}_{0,2BTL}/(\mathcal{V}_2^{bu} \cup \mathcal{V}_2^{uu})$ which can be written as

$$\bullet \phi = \bullet \cup \quad \text{and} \quad \cup \phi = \cup . \quad (\text{A.73})$$

The representation thus obtained is isomorphic to $\mathcal{V}_{0,1BTL}$ where b_2 acts trivially as the identity operator. Again this was to be expected, because the choice $r_2 = 1$ and $r_{12} = r_1$ corresponds to giving the same weight to loops touching the boundary 2 as to those which do not touch it. Then we should expect that the algebra $2BTL$ "collapses" to give the one-boundary algebra $1BTL$. This acquires a precise meaning with the quotient representation we are considering.

b Magic boundaries with strings

We work with the module $\mathcal{V}_{2j}^{bb}$, and we assume first that r_1 and r_2 are not integers and q is generic, so all the JW projectors are well defined. Consider the following state with $2j$ strings and k half-loops, on which we act with the one-boundary JW projectors $P_{j+k}^{b(1)}$ and $P_{j+k}^{b(1)}$

$$\left| \text{Diagram} \right\rangle = \frac{[r_1 + r_2 - 1 + 2j + k]_q [k]_q}{[r_1 + j + k - 1]_q [r_2 + j + k - 1]_q} \left| \text{Diagram} \right\rangle \quad (\text{A.74})$$

so again we see that for $r_1 + r_2 = -2j - k + 1$ the right term is zero and the following mapping is an injective morphism from $\mathcal{V}_{2j+2k}^{bb}$ to $\mathcal{V}_{2j}^{bb}$.

$$\left| \text{Diagram} \right\rangle \mapsto \left| \text{Diagram} \right\rangle \quad (\text{A.75})$$

Of course when r_1 is a positive integer the morphism (A.45) from $\mathcal{V}_{2j+2r_1}^{ub}$ to $\mathcal{V}_{2j}^{bb}$ still holds, and we have an equivalent morphism when r_2 is a positive integer. Putting all things together, we arrive at the following guess for the Gram determinant on N strands

$$\Delta_{2j}^{bb} \propto \prod_{k=1}^{N/2-j} \left(\mathcal{D}_{2j+k}^{bb} \mathcal{D}_{k-1} \right)^{\dim(\mathcal{V}_{2j+2k}^{bb})} \left(\mathcal{D}_k^{u(1)} \right)^{\dim(\mathcal{V}_{2j+2k}^{ub})} \left(\mathcal{D}_k^{u(2)} \right)^{\dim(\mathcal{V}_{2j+2k}^{bu})} \quad (\text{A.76})$$

and again this is the conjectured result of [5].

Again, the "restriction from $2BTL$ to $1BTL$ " acquires a precise meaning when we consider the quotient representations. For $r_2 = 1$ it is easy to see that $\mathcal{V}_{2j}^{bb}/\mathcal{V}_{2j+2}^{bu} \cong \mathcal{V}_{2j}^b$ and $\mathcal{V}_{2j}^{ub}/\mathcal{V}_{2j+2}^{uu} \cong \mathcal{V}_{2j}^u$ where b_2 acts as the identity operator.

c RSOS representations of $2BTL$

Now we turn to the case when all the parameters take magic values : $q = e^{i\frac{\pi}{m+1}}$ with m a positive integer, and r_1, r_2 are both positive integers. We could again consider some ghost string representation and deduce an exact sequence for the quotients representations, like (A.60) and (A.63) in the $1BTL$ case. However, it seems to us that the inclusion diagrams are more complete and more interesting than these results on the quotient representation, even if we are not able to prove them. When $r_1 + r_2 - 1 + s \leq m$ we conjecture that the following diagram holds

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \mathcal{V}_{2r_1+s}^{ub} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)-2(r_2-1)-s}^{ub} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+2r_1+s}^{ub} & \leftarrow \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 \mathcal{V}_s^{bb} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)-2(r_1+r_2-1)-s}^{bb} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+s}^{bb} & \leftarrow & \mathcal{V}_{4(m+1)-2(r_1+r_2-1)-s}^{bb} \leftarrow \dots \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & \mathcal{V}_{2r_2+s}^{bu} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)-2(r_1-1)-s}^{bu} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+2r_2+s}^{bu} & \leftarrow \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 & \mathcal{V}_{2(r_1+r_2)+s}^{uu} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+2-s}^{uu} & \leftarrow & \dots &
 \end{array}
 \tag{A.77}$$

other diagrams such as this one can be obtained by replacing for example $b(1)$ by $u(1)$ and r_1 by $m+1-r_1$ as in the $1BTL$ case. Again we can consider the quotient representation

$$\mathcal{W}_s^{bb} \cong \mathcal{V}_s^{bb} / \left(\mathcal{V}_{2r_1+s}^{ub} \cup \mathcal{V}_{2(m+1)-2(r_1+r_2-1)-s}^{uu} \cup \mathcal{V}_{2r_2+s}^{bu} \right)
 \tag{A.78}$$

which is an irreducible representation of $2BTL$ with these special values of q, r_1 and r_2 . Let us give another example including the module $\mathcal{V}_{0,2BTL}$. For $r_{12} = 1$ and $r_1 = r_2 = r$ we conjecture that the following diagram holds

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \mathcal{V}_2^{bu} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)-2r+2}^{bb} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+2}^{bu} & \leftarrow \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 \mathcal{V}_{0,2BTL} & \leftarrow & \mathcal{V}_2^{ub} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2r+2}^{uu} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+2}^{ub} \leftarrow \dots \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & \mathcal{V}_{2(m+1)-2r}^{bb} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)}^{bu} & \leftarrow & \mathcal{V}_{4(m+1)-2r}^{bb} & \leftarrow \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 & \mathcal{V}_{2r}^{uu} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)}^{ub} & \leftarrow & \mathcal{V}_{2(m+1)+2r}^{uu} & \leftarrow \dots
 \end{array}
 \tag{A.79}$$

and we can again define the quotient representation $\mathcal{W}_{0,2BTL}$.

These examples have not been picked at random. To see where they come from, consider again the RSOS framework. Consider the space of states

$$\mathcal{H}_{d_1+1,d_2} = \{|h_0 = d_1 + 1, \dots, h_N = d_2\rangle\}, \quad h_i \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{A.80})$$

with the condition

$$|h_i - h_{i+1}| = 1. \quad (\text{A.81})$$

Assume the blobs act as

$$b_1 |h_0 = d_1 + 1, h_1, \dots\rangle = \delta_{h_1, d_1} |h_0 = d_1 + 1, h_1, \dots\rangle \quad (\text{A.82a})$$

$$b_2 |\dots, h_{N-1}, h_N = d_2\rangle = \delta_{h_{N-1}, d_2+1} |\dots, h_{N-1}, h_N = d_2\rangle \quad (\text{A.82b})$$

$$(\text{A.82c})$$

then it is easy using (A.8) to see that

$$e_1 b_1 e_1 = \frac{[m+1-d_1]_q}{[m-d_1]_q} e_1 \quad (\text{A.83a})$$

$$e_{N-1} b_2 e_{N-1} = \frac{[d_2+1]_q}{[d_2]_q} e_{N-1} \quad (\text{A.83b})$$

$$(\text{A.83c})$$

so we can identify the parameters r_1 and r_2 as

$$r_1 = m - d_1 \quad r_2 = d_2. \quad (\text{A.84})$$

We would like to identify the space $\mathcal{H}_{d_1+1,d_2}$ as a $2BTL$ module. It is not difficult, as in the $1BTL$ case, to see how the boundary JW projectors act in $\mathcal{H}_{d_1+1,d_2}$. We have

$$P_k^{b(1)} |h_0 = d_1 + 1, h_1, \dots\rangle = \delta_{h_k, d_1+1-k} |h_0 = d_1 + 1, h_1, \dots\rangle \quad (k \leq m - r_1) \quad (\text{A.85a})$$

$$P_k^{u(1)} |h_0 = d_1 + 1, h_1, \dots\rangle = \delta_{h_k, d_1+1+k} |h_0 = d_1 + 1, h_1, \dots\rangle \quad (k \leq r_1 - 1) \quad (\text{A.85b})$$

$$P_k^{b(2)} |\dots, h_{N-1}, h_N = d_2\rangle = \delta_{h_{N-k}, d_2+k} |\dots, h_{N-1}, h_N = d_2\rangle \quad (k \leq m - r_2) \quad (\text{A.85c})$$

$$P_k^{u(2)} |\dots, h_{N-1}, h_N = d_2\rangle = \delta_{h_{N-k}, d_2-k} |\dots, h_{N-1}, h_N = d_2\rangle \quad (k \leq r_2 - 1) \quad (\text{A.85d})$$

and $P_{m+1-r_1}^{b(1)} = P_{r_1}^{u(1)} = P_{m+1-r_2}^{b(2)} = P_{r_2}^{u(2)} = 0$.

Now remark that the module $\mathcal{W}_s^{bb}$ with exactly s strands must contain a state $|h\rangle$ characterised by

$$P_s^{b(1)} |h\rangle = P_s^{b(2)} |h\rangle = |h\rangle \quad (\text{A.86})$$

Clearly such a state appears in $\mathcal{H}_{d_1+1,d_2}$ only when $d_1 + 1 > d_2$ and $s = d_1 + 1 - d_2$ (as shown in figure A.4). Then we claim that in this case

$$\mathcal{H}_{d_1+1,d_2} \cong \mathcal{W}_{d_1+1-d_2}^{bb}. \quad (\text{A.87})$$

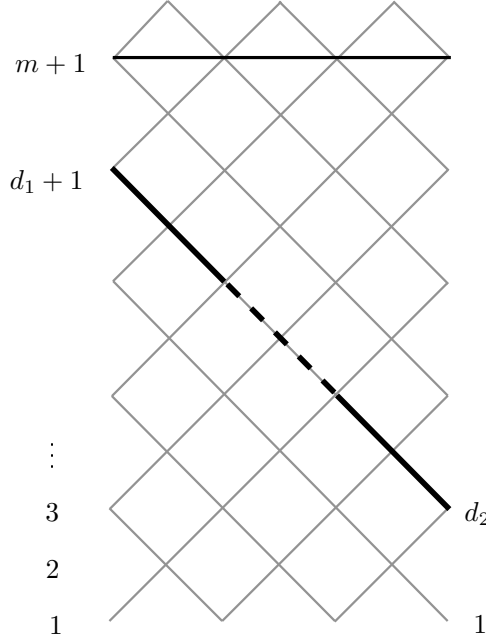


FIG. A.4 – A state $|h\rangle$ in $\mathcal{H}_{d_1+1,d_2}$ (with $N = d_1 + 1 - d_2$) which satisfies $P_{d_1+1-d_2}^{b(1)} |h\rangle = P_{d_1+1-d_2}^{b(2)} |h\rangle = |h\rangle$.

When $d_1 + 1 < d_2$, we can find a state satisfying

$$P_s^{u(1)} |h\rangle = P_s^{u(2)} |h\rangle = |h\rangle \quad (\text{A.88})$$

instead of (A.86), with $s = d_1 + 1 - d_2$, so we claim that for $d_1 + 1 < d_2$

$$\mathcal{H}_{d_1+1,d_2} \cong \mathcal{W}_{d_2-d_1-1}^{uu}. \quad (\text{A.89})$$

When $d_1 + 1 = d_2$, we have to take care of the states corresponding to loops touching both boundaries. In the case we are studying here it is not difficult to see that we have

$$\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ even}}}^N e_i \right) b_1 b_2 \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ odd}}}^N e_i \right) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ even}}}^N e_i \right) = 0 \quad (\text{A.90})$$

with our definition of the action of b_1 and b_2 in $\mathcal{H}_{d_1+1,d_2}$, so we see that $n_{12} = 0$ here, and then $r_{12} = r_1 + r_2 + 1$. The analysis we make here can be made systematically and the results are given in table A.1. Corresponding results for the *1BTL* case are given in [5].

A.5 Relation with Boundary Conformal Field Theory

The Temperley-Lieb algebra was first introduced as a unifying tool for the study of several integrable statistical models, such as the critical Potts model or the RSOS models. Those models

Space	blob 1	blob 2	r_1	r_2	r_{12}	isomorphic to. . .
$\mathcal{H}_{d_1+1,d_2}$ $d_1 + 1 > d_2$	$h_1 = d_1$	$h_{N-1} = d_2 + 1$	$m - d_1$	d_2		$\mathcal{W}_{d_1+1-d_2}^{bb}$
$\mathcal{H}_{d_1+1,d_2}$ $d_1 + 1 < d_2$	$h_1 = d_1$	$h_{N-1} = d_2 + 1$	$m - d_1$	d_2		$\mathcal{W}_{d_2-d_1-1}^{uu}$
$\mathcal{H}_{d+1,d}$	$h_1 = d$	$h_{N-1} = d + 1$	$m - d$	d	$r_1 + r_2 + 1$	$\mathcal{W}_{0,2BTL}$
$\mathcal{H}_{d_1,d_2}$ $d_1 > d_2$	$h_1 = d_1 + 1$	$h_{N-1} = d_2 + 1$	d_1	d_2		$\mathcal{W}_{d_1-d_2}^{ub}$
$\mathcal{H}_{d_1,d_2}$ $d_1 < d_2$	$h_1 = d_1 + 1$	$h_{N-1} = d_2 + 1$	d_1	d_2		$\mathcal{W}_{d_2-d_1}^{bu}$
$\mathcal{H}_{d,d}$	$h_1 = d + 1$	$h_{N-1} = d + 1$	d	d	$r_{12} = 1$	$\mathcal{W}_{0,2BTL}$
$\mathcal{H}_{d_1,d_2+1}$ $d_1 > d_2 + 1$	$h_1 = d_1 + 1$	$h_{N-1} = d_2$	d_1	$m - d_2$		$\mathcal{W}_{d_1-d_2-1}^{uu}$
$\mathcal{H}_{d_1,d_2+1}$ $d_1 < d_2 + 1$	$h_1 = d_1 + 1$	$h_{N-1} = d_2$	d_1	$m - d_2$		$\mathcal{W}_{d_2+1-d_1}^{bb}$
$\mathcal{H}_{d,d+1}$	$h_1 = d + 1$	$h_{N-1} = d$	d	$m - d$	$r_1 + r_2 + 1$	$\mathcal{W}_{0,2BTL}$
$\mathcal{H}_{d_1+1,d_2+1}$ $d_1 > d_2$	$h_1 = d_1$	$h_{N-1} = d_2$	$m - d_1$	$m - d_2$		$\mathcal{W}_{d_1-d_2}^{bu}$
$\mathcal{H}_{d_1+1,d_2+1}$ $d_1 < d_2$	$h_1 = d_1$	$h_{N-1} = d_2$	$m - d_1$	$m - d_2$		$\mathcal{W}_{d_2-d_1}^{ub}$
$\mathcal{H}_{d+1,d+1}$	$h_1 = d + 1$	$h_{N-1} = d + 1$	$m - d$	$m - d$	$r_{12} = 1$	$\mathcal{W}_{0,2BTL}$

TAB. A.1 – 2BTL Modules corresponding to the RSOS models for different boundary conditions.

are now well-known by physicists, both from the point of view of integrability and from the one of conformal field theory. In CFT, the RSOS models arise as a particular series of minimal unitary theories.

In [7], we have studied a conformal boundary loop model on the annulus. This model is defined on a finite-size square lattice, and we gave some conformal theoretic arguments to find the expression of the partition function of this model in the continuum limit. To be more precise, our model is generated by the transfer matrix on N strands

$$T_N = b_1 b_2 \left(\prod_{i \text{ even}} 1 + e_i \right) \left(\prod_{i \text{ odd}} 1 + e_i \right) \quad (\text{A.91})$$

so the loops touching the first boundary are given a Boltzmann weight $n_1 = \frac{[r_1+1]_q}{[r_1]_q}$, those touching the second boundary a weight $n_2 = \frac{[r_2+1]_q}{[r_2]_q}$, and those touching both boundaries a weight $n_{12} = \frac{\left[\frac{r_1+r_2-1+r_{12}}{2} \right]_q \left[\frac{r_1+r_2-1-r_{12}}{2} \right]_q}{[r_1]_q [r_2]_q}$.

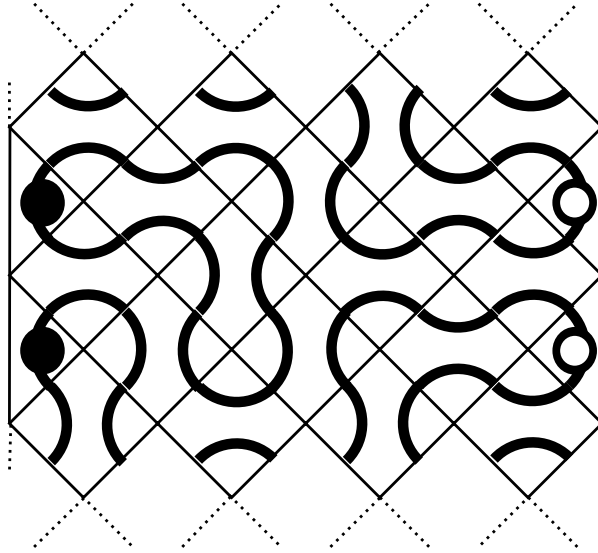


FIG. A.5 – A configuration of the loop model studied in [7].

The partition function of this boundary loop model on an annulus is a Markov trace (or a modified Markov trace if one wants to give different weight to non-contractible loops)

$$Z = \text{Tr} \left\{ (T_N)^L \right\}. \quad (\text{A.92})$$

In particular, the partition function Z can be decomposed using (A.42)

$$Z = \text{tr}_{\mathcal{V}_{0,2BTL}} (T_N)^L + \sum_{\substack{j>0 \\ \alpha, \beta=b,u}} \mathcal{D}_{2j}^{\alpha\beta} \text{tr}_{\mathcal{V}_{2j}^{\alpha\beta}} (T_N)^L. \quad (\text{A.93})$$

This partition function is computed in the scaling limit $L, N \rightarrow \infty$ with $\tau = L/N$ fixed. Let us introduce the conformal characters

$$K_s^{\alpha\beta} = \left(\lim_{L, N \rightarrow \infty} \text{tr}_{\mathcal{V}_s^{\alpha\beta}} (T_N)^L \right)_{\text{renorm.}} \quad (\text{A.94})$$

then the conformal partition function must have the form

$$Z = K_{0,2BTL} + \sum_{\substack{j>0 \\ \alpha, \beta=b,u}} \mathcal{D}_{2j}^{\alpha\beta} K_{2j}^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.95})$$

This is exactly what was found in [7], with the conformal characters

$$K_{0,2BTL} = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{h_{r_{12}-2n, r_{12}}} \quad (\text{A.96a})$$

$$K_{2j}^{bb} = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{r_1+r_2-1-2n, r_1+r_2-1+2j}} \quad (\text{A.96b})$$

$$K_{2j}^{bu} = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{r_1-r_2-1-2n, r_1-r_2-1+2j}} \quad (\text{A.96c})$$

$$K_{2j}^{ub} = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{-r_1+r_2-1-2n, -r_1+r_2-1+2j}} \quad (\text{A.96d})$$

$$K_{2j}^{uu} = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n \geq 0} q^{h_{-r_1-r_2-1-2n, -r_1-r_2-1+2j}} \quad (\text{A.96e})$$

where $q = e^{-\pi\tau}$ (of course this is not the q of the quantum group $U_q[SU(2)]$), $P(q) = \prod_{k \geq 1} (1 - q^k)$, the central charge is

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad (\text{A.97})$$

and the Kac formula for the exponents is

$$h_{r,s} = \frac{[(m+1)r - ms]^2 - 1}{4m(m+1)}. \quad (\text{A.98})$$

The same model with only one blob was considered in [5]. There the conformal characters corresponding to a $1BTL$ transfer matrix were computed

$$K_s^b = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} q^{h_{r_1, r_1+s}} \quad (\text{A.99a})$$

$$K_s^u = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} q^{h_{-r_1, -r_1+s}} \quad (\text{A.99b})$$

and finally, the conformal characters for the same loop model with free boundary conditions are well known (see for example [2],[9])

$$K_s = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \left(q^{h_{1,1+s}} - q^{h_{-1,1+s}} \right). \quad (\text{A.100})$$

A.5.1 From boundary Temperley-Lieb algebras to Virasoro algebra : magic in the spectra

Clearly, the conformal characters (A.99) for $1BTL$ correspond to a trace of the operator $q^{L_0 - c/24}$ over the generic Virasoro module $\mathcal{V}_{r_1, r_1+s}$ or $\mathcal{V}_{-r_1, -r_1+s}$. Then the continuum limit (properly renormalized) of the trace of $(T_N)^L$ over the generic $1BTL$ module $\mathcal{V}_s^b$ is a trace over a generic Virasoro module. It seems rather hopeless to be more precise mathematically about the correspondance between the Temperley-Lieb algebra and the Virasoro one here. However, we can use the conformal characters directly to deduce some quantitative things using what we learned about the non-generic representation of the boundary Temperley-Lieb algebras, and see how this translates in the scaling limit to the representations of the Virasoro algebra. Let us begin with a simple example. In the case $r_1 = 1$ we found that the quotient representation $\mathcal{V}_s^b / \mathcal{V}_{s+2}^u$ is isomorphic to the TL module $\mathcal{V}_s$ where b_1 acts trivially as the identity operator. Then in the continuum limit, for $r_1 = 1$, we expect to have the inclusion of Verma modules for the Virasoro algebra $\mathcal{V}_{-r_1, -r_1+s+2} \subset \mathcal{V}_{r_1, r_1+s}$. This is indeed the case, because it is a well-known result that for r and s positive integers, we have the inclusion $\mathcal{V}_{-r, s} \subset \mathcal{V}_{r, s}$ (no matter what the value of m is). We can even be more precise about the conformal characters. We expect when $r_1 = 1$

$$\left(\lim_{L, N \rightarrow \infty} \text{tr}_{(\mathcal{V}_s^b / \mathcal{V}_{s+2}^u)} (T_N)^L \right)_{\text{renorm.}} = K_s^b - K_{s+2}^u = K_s \quad (\text{A.101})$$

which is consistent with (A.99) and (A.100). This shows how the conformal characters of $1BTL$ reduce to those of TL when $r_1 = 1$. More generally, for r_1 a positive integer, we have seen that we can consider the quotient representation of $1BTL$ $\mathcal{V}_s^b / \mathcal{V}_{s+2r_1}^u$. The conformal character of such a representation is then

$$K_s^b - K_{s+2r_1}^u = \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \left(q^{h_{r_1, r_1+s}} - q^{h_{-r_1, r_1+s}} \right) \quad (\text{A.102})$$

and again this is an irreducible character of the generic Virasoro algebra (m generic).

In the case of the two-boundary Temperley-Lieb algebra $2BTL$, we have seen that when $r_2 = 1$ and $r_{12} = r_1$ the algebra "reduces" to $1BTL$ in the sense that we can consider the quotient representation $\mathcal{V}_{2j}^{bb} / \mathcal{V}_{2j+2}^{bu}$ which is isomorphic to $\mathcal{V}_{2j}^b$ (where $b_2 = Id$). This translates to the conformal characters as

$$K_{2j}^{bb} - K_{2j+2}^{bu} = K_{2j}^b \quad (\text{A.103})$$

and the same thing for $\mathcal{V}_{2j}^{ub} / \mathcal{V}_{2j+2}^{uu} \cong \mathcal{V}_{2j}^u$

$$K_{2j}^{ub} - K_{2j+2}^{uu} = K_{2j}^u. \quad (\text{A.104})$$

For the module without string we have seen that $\mathcal{V}_{0,2BTL} / (\mathcal{V}_2^{bu} \cup \mathcal{V}_2^{uu}) \cong \mathcal{V}_{0,1BTL}$ (where $b_2 = Id$) and again this translates to the Virasoro characters

$$K_{0,2BTL} - K_2^{bu} - K_2^{uu} = K_{0,1BTL}. \quad (\text{A.105})$$

The spirit of all these relations should be quite clear now : we claim that all the coincidences which appear in the energy spectra in finite-size systems due to the non-generic representation theory of the boundary Temperley-Lieb algebras also appear in the scaling limit as inclusions of Verma modules for the Virasoro algebra. For a system constructed out of the transfer matrix (A.91), this is given exactly by the conformal characters (A.96), (A.99) and (A.100).

A.5.2 Conformal partition functions on the annulus for RSOS models

In this section we turn to the RSOS representation, so m is again a positive integer. In [3], partition functions in the scaling limit for RSOS models on an annulus were computed, with the following boundary conditions. The model is defined on a lattice of size $N \times L$ with periodic boundary conditions in the L direction. The transfer matrix is

$$T_N = \left(\prod_{i \text{ even}} 1 + e_i \right) \left(\prod_{i \text{ odd}} 1 + e_i \right) \quad (\text{A.106})$$

where the e_i 's act on the RSOS states $|h_0, \dots, h_N\rangle$ as defined by (A.8). Two different types of boundary conditions on the leftmost heights are considered. The first one is to fix $h_0 = a_1$, with $1 \leq a_1 \leq m$ for all successive states. The second one is to fix both $h_0 = d_1$ and $h_1 = d_1 + 1$ (or $h_0 = d_1 + 1$ and $h_1 = d_1$). We will refer to these two types of boundary conditions as "a" and "d" boundary conditions. One can similarly impose boundary conditions on the rightmost heights.

a "a₁/a₂" boundary conditions

Let us introduce once again the space

$$\mathcal{H}_{a_1, a_2} = \{|h_0 = a_1, \dots, h_N = a_2\rangle \mid h_i \in \{1, \dots, m\} \text{ and } |h_i - h_{i+1}| = 1\}$$

which is a TL module with the definition (A.8). The first question we would like to answer is whether this module is irreducible or not. We claim that this is not the case and that it can be decomposed in exactly the same way as the tensor product of two representations of spin $\sigma_1 = (a_1 - 1)/2$ and $\sigma_2 = (a_2 - 1)/2$ of $U_q[SU(2)]$

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2 = \bigoplus_{\sigma = |\sigma_1 - \sigma_2|}^{\min(\sigma_1 + \sigma_2, m-1-\sigma_1-\sigma_2)} \sigma \quad (\text{A.107})$$

so we have

$$\mathcal{H}_{a_1, a_2} \cong \bigoplus_{\substack{s = |a_1 - a_2| \\ s = a_1 + a_2 \bmod 2}}^{\min(a_1 + a_2 - 2, 2m - a_1 - a_2)} \mathcal{W}_s \quad (\text{A.108})$$

where the $\mathcal{W}_s$ are the RSOS representations given in the introduction of this paper, with $h_0 = 1$ and $h_N = 1 + s$. Now using the generic conformal character (A.100) and the exact sequence (A.5) we find that the character corresponding to the RSOS representation $\mathcal{W}_s$ is

$$\chi_s = \sum_{k \geq 0} K_{2k(m+1)+s} - \sum_{k \geq 1} K_{2k(m+1)-2-s}. \quad (\text{A.109})$$

This is nothing but the well-known Rocha-Caridi formula for the irreducible Virasoro characters.

$$\chi_s = \chi_{1,1+s}. \quad (\text{A.110})$$

Using the decomposition (A.108) we find that the partition function of the RSOS model on an annulus with those boundary conditions is, in the scaling limit

$$Z_{a_1/a_2} = \sum_{\substack{s=|a_1-a_2| \\ s=a_1+a_2 \bmod 2}}^{\min(a_1+a_2-2, 2m-a_1-a_2)} \chi_{1,1+s} \quad (\text{A.111})$$

which is consistent with [3] and [1].

b "d/a" boundary conditions

Now we turn to the case of the boundary conditions $h_0 = d$, $h_1 = d + 1$ and $h_N = a$. We consider the space

$$\mathcal{H}_{d,a} = \{|h_0 = d, \dots, h_N = a\rangle \mid h_i \in \{1, \dots, m\} \text{ and } |h_i - h_{i+1}| = 1\}.$$

Note that we do not impose $h_1 = d + 1$ in the definition of $\mathcal{H}_{d,a}$. This time we take the transfer matrix

$$T_N = b_1 \left(\prod_{i \text{ even}} 1 + e_i \right) \left(\prod_{i \text{ odd}} 1 + e_i \right) \quad (\text{A.112})$$

where b_1 acts as

$$b_1 |h_0 = d, h_1, \dots\rangle = \delta_{h_1, d+1} |h_0, h_1, \dots\rangle. \quad (\text{A.113})$$

This case was treated in section A.4.3 and we have seen that with this action of b_1 we have $r_1 = d$, and if $a \geq d$

$$\mathcal{H}_{d,a} \cong \mathcal{W}_{a-d}^b \quad (\text{A.114})$$

else if $a < d$

$$\mathcal{H}_{d,a} \cong \mathcal{W}_{d-a}^u \quad (\text{A.115})$$

as *1BTL* modules. Then using the generic characters (A.99) and the diagram (A.66) (or (A.67) in the second case) we see that the conformal character corresponding to $\mathcal{W}_s^b$ is

$$\chi_s^b = \sum_{k \geq 0} \left(K_{2k(m+1)+s}^b - K_{2k(m+1)+2r_1+s}^u \right) - \sum_{k \geq 1} \left(K_{2k(m+1)-2r_1-s}^b - K_{2k(m+1)-s}^u \right) = \chi_{r_1, r_1+s} \quad (\text{A.116})$$

which is again the Rocha-Caridi formula for the irreducible Virasoro character χ_{r_1, r_1+s} . The second case is similar and we find

$$\chi_s^u = \chi_{-r_1, -r_1+s}. \quad (\text{A.117})$$

In both cases, we end up with the partition function in the scaling limit

$$Z_{d/a} = \chi_{d,a} \quad (\text{A.118})$$

which is again a result consistent with [3] and [1].

c "d₁/d₂" boundary conditions

We turn to the last set of boundary conditions now. We take for example $h_0 = d_1 + 1$, $h_1 = d_1$, and $h_{N-1} = d_2 + 1$, $h_N = d_2$. Then the space we consider is

$$\mathcal{H}_{d_1+1,d_2} = \{|h_0 = d_1 + 1, \dots, h_N = d_2\rangle \mid h_i \in \{1, \dots, m\} \text{ and } |h_i - h_{i+1}| = 1\}$$

which is a *2BTL* module with the following definition of b_1 and b_2

$$b_1 |h_0 = d_1 + 1, h_1, \dots\rangle = \delta_{h_1, d_1} |h_0, h_1, \dots\rangle. \quad (\text{A.119})$$

and

$$b_2 |\dots, h_{N-1}, h_N = d_2\rangle = \delta_{h_{N-1}, d_2+1} |\dots, h_{N-1}, h_N = d_2\rangle. \quad (\text{A.120})$$

The transfer matrix is given by (A.91). This is exactly the case we dealt with in section *c*, so we just have to apply the results given in that section and in table A.1. We have seen that for $d_1 + 1 > d_2$ we have

$$\mathcal{H}_{d_1+1,d_2} \cong \mathcal{W}_{d_1+1-d_2}^{bb} \quad (\text{A.121})$$

and using the conformal characters (A.96) together with the diagram (A.77), the character corresponding to $\mathcal{W}_{d_1+1-d_2}^{bb}$ writes

$$\begin{aligned} \chi_s^{bb} &= \sum_{k \geq 0} K_{2k(m+1)+s}^{bb} - \sum_{k \geq 1} K_{2k(m+1)-2(r_1+r_2-1)-s}^{bb} \\ &- \sum_{k \geq 0} K_{2k(m+1)+2r_1+s}^{ub} + \sum_{k \geq 1} K_{2k(m+1)-2(r_2-1)-s}^{ub} \\ &- \sum_{k \geq 0} K_{2k(m+1)+2r_2+s}^{bu} + \sum_{k \geq 1} K_{2k(m+1)-2(r_1-1)-s}^{bu} \\ &+ \sum_{k \geq 0} K_{2k(m+1)+2(r_1+r_2)+s}^{uu} - \sum_{k \geq 1} K_{2k(m+1)+2-s}^{uu} \end{aligned}$$

which is again a Rocha-Caridi formula for

$$\chi_s^{bb} = \sum_{\substack{n=|r_1-r_2| \\ n=r_1+r_2 \bmod 2}}^{r_1+r_2-2} \chi_{1+n, r_1+r_2-1+s}. \quad (\text{A.122})$$

The case of the second diagram (A.79) is similar. According to table A.1, it corresponds to the boundary conditions $h_0 = d$, $h_1 = d + 1$ and $h_{N-1} = d + 1$, $h_N = d$. In that case we have $r_1 = r_2 = d$ and $r_{12} = 1$, and the space we have to consider is $\mathcal{H}_{d,d} \cong \mathcal{W}_{0,2BTL}$. The character

of this module is obtained with the diagram (A.77)

$$\begin{aligned}
\chi_0 &= K_0 - \sum_{k \geq 1} \left(K_{2k(m+1)-2d}^{bb} - K_{2k(m+1)-2d+2}^{bb} \right) \\
&\quad - \sum_{k \geq 0} \left(K_{2k(m+1)+2d}^{uu} - K_{2k(m+1)+2d+2}^{uu} \right) \\
&\quad - \sum_{k \geq 0} K_{2k(m+1)+2}^{bu} + \sum_{k \geq 1} K_{2k(m+1)}^{bu} \\
&\quad - \sum_{k \geq 0} K_{2k(m+1)+2}^{ub} + \sum_{k \geq 1} K_{2k(m+1)}^{ub} \\
&= \frac{q^{-c/24}}{P(q)} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(q^{h_{1+2n,1+2k(m+1)}} - q^{h_{1+2n,-1+2k(m+1)}} \right)
\end{aligned}$$

which gives the sum over irreducible Virasoro characters

$$\chi_0 = \sum_{n=0}^{\min(d-1, m-d-1)} \chi_{1+2n,1}. \quad (\text{A.123})$$

Such formulas can be obtained in all the cases listed in table A.1. They all agree with the general formula

$$Z_{d_1, d_2} = \sum_{\substack{n=|d_1-d_2| \\ n=d_1+d_2 \bmod 2}}^{\min(d_1+d_2-2, 2m-2-d_1-d_2)} \chi_{1+n,1}. \quad (\text{A.124})$$

According to Cardy [1], the partition functions (A.111), (A.118), and (A.124) must be interpreted as a fusion rule of an operator $\Phi_{1,a}$ creating the "a" boundary condition, and $\Phi_{d,1}$ creating the "d" boundary condition. This is a purely conformal theoretic point of view. In the boundary Temperley-Lieb approach we develop here, these partition functions come from finite-size considerations. In particular, the diagrams we draw in sections A.4.3 and c can be viewed as a finite-size construction analogous to the Rocha-Caridi one in CFT. Clearly, in our derivation of (A.111), it is the decomposition of the space $\mathcal{H}_{a_1, a_2}$ following the tensor product rules of $U_q[SU(2)]$ which gives its final form to the partition function, consistent with the fusion $\Phi_{1, a_1} \times \Phi_{1, a_2}$. For the "d" boundary condition, however it is rather surprising that we have to go through such complicated computations before we arrive at the nice formula (A.124).

A.6 Derivation of Gram determinants for 1BTL

In this additional section we come back to the Gram determinant for the generic representations of 1BTL. We give an elementary proof of formula (A.52). The Gram determinants of the generic modules of 1BTL are very easily computed as follows. We use the one-boundary JW projectors (see relation (A.23)) and the Pascal triangle construction to build a basis where the

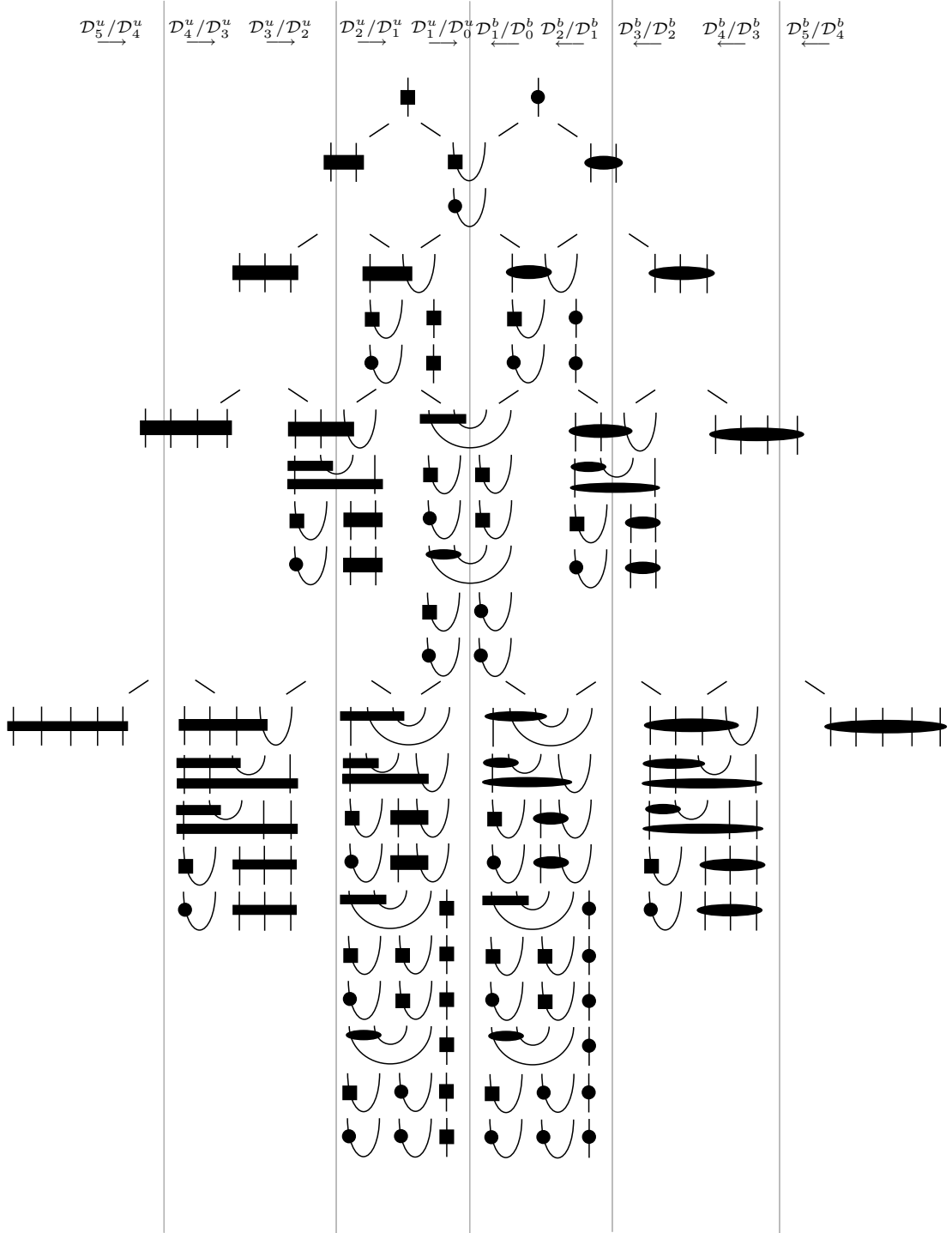


FIG. A.6 – Pascal triangle construction for the basis of the 1BTL generic modules. The black ellipses and rectangles are the one-boundary JW projectors defined by (A.23). Two different states in the same module are orthogonal.

scalar product matrix is diagonal. Then a simple induction relation for the Gram determinants follows from the Pascal triangle, which implies (A.52).

The Pascal triangle construction is shown in figure A.6. We use the following rules to build the basis of the different modules.

- If one goes to the left in the left half-triangle, then one simply adds a string on the right of the state with s strings we are considering. The $s + 1$ strings carry the JW projector P_{s+1}^u .
- If one goes to the right in the left half-triangle, one adds a new strand on the right of the state, which we contract with the rightmost string. Since the string was attached to the other ones by the JW projector P_s^u , the new half-loop is attached to this projector too. This produces a state with $s - 1$ strings.
- If one goes to the right in the right half-triangle, one adds a string on the right of the state with s strings. The $s + 1$ strings carry the JW projector P_{s+1}^b .
- If one goes to the left in the right half-triangle, one adds a new strand on the right of the state, which we contract with the rightmost string. The new half-loop thus obtained is attached to the JW projector P_s^b .

With these rules, it is clear that each state in a generic module $\mathcal{V}_s^b$ or $\mathcal{V}_s^u$ is in one-to-one correspondence with a path on the Pascal triangle. Moreover, note that if two states are different, then one can check that their scalar product (see section A.4.1) is zero. This can be seen by considering the first time the two paths corresponding to the two states differ from each other, and looking at the action of the JW projectors.

The norm of each state can be read directly on the Pascal triangle. Using the rules above and the relation (A.49) for the partial trace of a one-boundary JW projector, the norm of a state can be computed as follows, using its path representation on the Pascal triangle.

- Each time one goes from a state with s unblobbed strings to a state with $s - 1$ unblobbed strings (*ie* to the right in the left half-triangle), the norm is multiplied by $\mathcal{D}_s^u/\mathcal{D}_{s-1}^u$.
- Each time one goes from a state with s blobbed strings to a state with $s - 1$ blobbed strings (*ie* to the left in the right half-triangle), the norm is multiplied by $\mathcal{D}_s^b/\mathcal{D}_{s-1}^b$.
- The other movements in the Pascal triangle do not change the norm of the states.

Another important fact is that the identity operator appears with a factor 1 in every JW projector. This shows that the Gram determinant computed in our Pascal triangle basis is the same as the one considered in section A.4.1. Now we are ready to derive an induction relation for the Gram determinants for *1BTL*. Let $\Delta_s^b(N)$ be the Gram determinant of the generic module $\mathcal{V}_s^b$ on N strands (and the same for the unblobbed module). Then the rules given above for the Pascal triangle construction give for $s > 0$

$$\Delta_s^b(N + 1) = \left(\mathcal{D}_{s+1}^b / \mathcal{D}_s^b \right)^{\dim \mathcal{V}_{s+1}^b(N)} \Delta_{s+1}^b(N) \Delta_{s-1}^b(N) \quad (\text{A.125})$$

and the same equation for the unblobbed determinant, with b replaced by u . For $s = 0$ we have

$$\Delta_0(N + 1) = \left(\mathcal{D}_1^b \right)^{\dim \mathcal{V}_1^b(N)} \left(\mathcal{D}_1^u \right)^{\dim \mathcal{V}_1^u(N)} \Delta_1^b(N) \Delta_1^u(N). \quad (\text{A.126})$$

Since the modules for $N = 1$ are trivial, we have simply $\Delta_1^b(1) = \Delta_1^u(1) = 1$. Then by induction we the formula (A.52) is proven.

This construction can be adapted to the Temperley-Lieb algebra, where the Pascal triangle (say the Bratelli diagram in that context) is truncated. However, it seems difficult to use it for the two-boundary algebra $2BTL$, because here there is an important difference between the odd and even numbers of strands, which make a generalisation of the Pascal triangle difficult. Hence we have not been able to derive formula (A.76) rigorously yet. Recall that formula (A.71) was proven in [8].

Bibliographie

- [1] J. Cardy, *Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula*, Nucl. Phys. **B 324**, 581-596, 1989.
- [2] J.L. Cardy, *The $O(n)$ model on the annulus*, J. Stat. Phys. **125**, 1-21, 2006.
- [3] M. Bauer & H. Saleur, *On some relations between local height probabilities and conformal invariance*, Nucl. Phys. **B 320**, 591-624, 1989.
- [4] P. Martin & H. Saleur, *The blob algebra and the periodic Temperley-Lieb algebra*, Lett. Math. Phys. **30**, 189-206, 1994.
- [5] J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Conformal boundary loop models*, Nucl. Phys. **B 788**, 137-166, 2008.
- [6] J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Combinatorial aspects of boundary loop models*, J. Stat. Mech. P01021, 2008.
- [7] J. Dubail, J.L. Jacobsen & H. Saleur, *Conformal two-boundary loop model on the annulus*, Nucl. Phys. **B 813**, 430-459, 2009.
- [8] J. de Gier & A. Nichols, *The two-boundary Temperley-Lieb algebra*, Journal of Algebra **321**, 1132-1167, 2009.
- [9] V. Pasquier & H. Saleur, *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, Nucl. Phys. **B 330**, 523-556, 1990.