



**HAL**  
open science

# Prise en compte d'une échelle mésoscopique dans l'étude du comportement des milieux granulaires

Ngoc-Son Nguyen

► **To cite this version:**

Ngoc-Son Nguyen. Prise en compte d'une échelle mésoscopique dans l'étude du comportement des milieux granulaires. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Centrale de Lyon, 2009. Français. NNT : 2009ECDL0029 . tel-00564501

**HAL Id: tel-00564501**

**<https://theses.hal.science/tel-00564501>**

Submitted on 9 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre :

Année 2009

# THÈSE

présentée devant l'

**ECOLE CENTRALE DE LYON**

pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

Spécialité : **Génie Civil**

par

**Ngoc Son NGUYEN**

Ingénieur ENSGC Hanoï

## **PRISE EN COMPTE D'UNE ECHELLE MESOSCOPIQUE DANS L'ETUDE DU COMPORTEMENT DES MILIEUX GRANULAIRES**

Soutenue le 11 Décembre 2009 devant la commission d'examen composée de :

MM.	S. BONELLI	Rapporteur	Chercheur	CEMAGREF
	B. CAMBOU	Examineur	Professeur	INRETS, EC Lyon
	A. DANESCU	Directeur de thèse	Maître de Conférence	LTDS, EC Lyon
	F. DARVE	Président du jury	Professeur	3S-R, INP Grenoble
	P.-Y. HICHER	Rapporteur	Professeur	GEM, EC Nantes
	H. MAGOARIEC	Directeur de thèse	Maître de Conférence	LTDS, EC Lyon

**Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes  
Département de Mécanique des Solids, Génie Mécanique et Génie Civil  
Ecole Centrale de Lyon  
36 Avenue Guy de Collongue 69130 Ecully**



# Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches à l'Ecole Centrale de Lyon

AURIOL Philippe	<i>Professeur</i>	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	<i>Professeur</i>	AMPERE	ECL
BURET François	<i>Maître de conférences</i>	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	<i>Directeur de recherche</i>	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	<i>Directeur de recherche</i>	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	<i>Professeur</i>	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	<i>Professeur</i>	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	<i>Directeur de recherche</i>	AMPERE	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	<i>Chargé de recherche</i>	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	<i>Professeur</i>	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	<i>Maître de conférences</i>	AMPERE	ECL
HELLOUIN Yves	<i>Maître de conférences</i>	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	<i>Professeur</i>	DER EEA	ECL
GUIRALDENQ Pierre	<i>Professeur émérite</i>	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	<i>Professeur</i>	DER STMS	ECL
LOHEAC Jean-Pierre	<i>Maître de conférences</i>	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	<i>Professeur émérite</i>	ICJ	ECL
MARION Martine	<i>Professeur</i>	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	<i>Professeur</i>	ICJ	ECL
MUSY François	<i>Maître de conférences</i>	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	<i>Professeur</i>	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	<i>Maître de conférences</i>	ICJ	ECL
DAVID Bertrand	<i>Professeur</i>	ICTT	ECL
CALLARD Anne-Ségolène	<i>Maître de conférences</i>	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	<i>Maître de conférences</i>	INL ECL	
GAFFIOT Frédéric	<i>Professeur</i>	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	<i>Maître de conférences</i>	INL	ECL
GARRIGUES Michel	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	<i>Professeur</i>	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL

MARTIN Jean-René	<i>Professeur émérite</i>	INL	ECL
O'CONNOR Ian	<i>Maître de conférences</i>	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	<i>Professeur</i>	INL	ECL
ROBACH Yves	<i>Professeur</i>	INL	ECL
SEASSAL Christian	<i>Chargé de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
CHEN Liming	<i>Professeur</i>	LIRIS	ECL
BAILLY Christophe	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	<i>Directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	<i>Directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	<i>Directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	<i>Professeur émérite</i>	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT genevièvre	<i>Professeur émérite</i>	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	<i>Directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	<i>Maître de conférences</i>	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
HENRY Daniel	<i>Directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
JUVE Daniel	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	<i>Chargée de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
PERKINS Richard	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
ROGER Michel	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
SCOTT Julian	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
SHAO Liang	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	<i>Maître de conférences</i>	LMFA	ECL
BENAYOUN Stéphane	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	<i>Chargé de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	<i>Professeur émérite</i>	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	<i>Chargé de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	<i>Past</i>	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL

JEZEQUEL Louis	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
JUVE Denyse	<i>Ingénieur de recherche</i>	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	<i>Directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	<i>Chargé de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	<i>Directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	<i>Directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL
SIDOROFF François	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
SINOUE Jean-Jacques	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	<i>Professeur émérite</i>	LTDS	ECL



# Remerciements

Avant tout, je tiens à témoigner ma reconnaissance à mes directeurs de thèse Alexandre Danescu et Hélène Magoariéc pour la confiance que vous m'avez accordée. Je vous remercie pour vos encadrements, vos suivis durant toute ma thèse.

J'exprime mes sincères remerciements à Bernard Cambou pour votre motivation et votre préoccupation vis-à-vis de ma thèse. C'est grâce à vos idées, vos suggestions que ma thèse peut prendre la forme.

Je voudrais remercier, ensuite, Félix Darve d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Je remercie aussi Pierre-Yves Hicher et Stéphane Bonelli, rapporteurs de mon manuscrit. Vos critiques ainsi que vos commentaires ont sensiblement contribué à compléter mon travail.

Enfin, je voudrais saluer à tous les membres du G8 pour votre aide, votre gentillesse, votre encouragement, etc. Ce précieux soutien moral m'a aidé à surpasser les moments difficiles lors de mon séjour au laboratoire. Je pense tout particulièrement à Yahanis Yunus, avec qui j'ai eu l'occasion de partager le même bureau et les moments pleins de joies inoubliables.



# Résumé

La technique de changement d'échelles a été largement développée dans la littérature pour décrire le comportement global des milieux granulaires en prenant en compte leurs propriétés locales. Cette technique considère classiquement deux échelles : l'échelle macroscopique du volume élémentaire représentatif et l'échelle microscopique du contact entre particules. Le défi majeur de ce changement d'échelles "micro-macro" réside dans la définition de la déformation macroscopique : en effet, si la contrainte macroscopique peut être clairement définie à partir des forces de contact, il a été montré qu'il n'était pas approprié de déduire la déformation macroscopique à partir de la cinématique aux contacts.

Dans ce cadre, ce travail propose d'introduire une troisième échelle dite mésoscopique. Cette échelle, à laquelle peuvent être définies à la fois contrainte et déformation, est intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique et permet de palier au défi majeur mentionné ci-dessus. Elle est définie au niveau d'arrangements locaux de particules, appelés sous-domaines, et sa pertinence est étudiée sur la base d'échantillons numériques composés de particules circulaires puis sphériques, simulés par la méthode des éléments discrets.

Les milieux bidimensionnels sont géométriquement représentés par un graphe de particules composé de sous-domaines fermés, encore appelés cellules de vide, dont la frontière est constituée de branches connectant les centres de particules en contact : l'échelle mésoscopique est donc définie au niveau de ces cellules de vide fermées. A cette échelle locale, on décrit tout d'abord la structure du milieu en termes de densité et de texture puis l'on définit les variables statique et cinématique locales du milieu en termes de contrainte et déformation. De fortes hétérogénéités des milieux granulaires en termes de structure, déformation et contrainte sont mises en évidence à l'échelle mésoscopique, avec de plus une structuration des hétérogénéités de contraintes et de déformations et une forte corrélation entre ces deux quantités.

Concernant les milieux tridimensionnels, une partition en cellules de vide fermées est impossible du fait de la complexité de la structure 3D de ces milieux. On propose donc une méthode de partition du milieu basée sur la distribution des vides en son sein. La méthode consiste en premier lieu en une subdivision du milieu en tétraèdres, par une partition de Delaunay, puis en une association de tétraèdres voisins selon un critère prédéfini en vue de la création de sous-domaines, non fermés, mais au rôle analogue aux sous-domaines fermés de l'étude 2D. Le critère d'association proposé est basé sur le rapport entre la taille des constriction (vide sur chaque face des tétraèdres) et la taille des pores au voisinage de chaque constriction. Cette méthode d'association constitue donc l'étape préliminaire à l'extension au cas tridimensionnel des résultats obtenus dans le cas bidimensionnel.

**Mots-clés :** Matériau granulaire, méthode des éléments discrets, changement d'échelles, échelle mésoscopique, graphe de particules, sous-domaines.



# Abstract

The technique of change of scales has been extensively developed in the literature to describe the global behaviour of granular materials taking into account their local properties. This method usually considers two scales : the macroscopic scale at the level of representative elementary volume and the microscopic scale at the level of contact between particles. The major difficulty of this "micro-macro" change of scales lies in the definition of the macroscopic strain : indeed, the macroscopic stress is clearly defined from contact forces while it is not appropriate to derive the macroscopic strain from the kinematics at contacts.

In this framework, this work proposes to introduce a third scale called mesoscopic scale. This scale, at which both stress and strain can be defined, is intermediate between macroscopic and microscopic scales and allows to overcome the major difficulty mentioned above. The mesoscopic scale is defined at the level of local arrangements of particles, called sub-domains, and its relevance is studied on numerical 2D and 3D materials composed of circular then spherical particles, simulated with the discrete element method.

Bidimensional media are geometrically represented by a particle graph composed of closed sub-domains, also called void cells, whose border is constituted by the branches joining the centers of particles in contact : the mesoscopic scale is thus defined at the level of these closed void cells. At this local scale, we first describe the structure of the medium in terms of density and fabric ; we define then the static and kinematic variables in terms of stress and of strain. Strong heterogeneities of granular media in terms of structure, stress and strain are highlighted at this scale, with a structuration of heterogeneities of stress and strain and a significant correlation between these two quantities.

Concerning tridimensional media, a partition into closed void cells is impossible, because of the complexity of the 3D structure of these media. We propose a partition method based on the distribution of voids inside the medium. This method consists first in subdividing the medium into tetrahedrons by a Delaunay partition and then in associating neighbouring tetrahedrons, according to a criterion to be defined. This allows us to form sub-domains which are not closed but which play a role analogous to the role of closed sub-domains in the 2D study. The proposed association criterion is based on the ratio between the size of constriction (void on each face of tetrahedrons) and the size of pores around each constriction. This partition method constitutes a preliminary step for an extension of the results obtained in the bidimensional case to the tridimensional case.

**Keywords** : Granular materials, discrete element method, change of scales, mesoscopic scale, particle graph, sub-domains.



# Sommaire

Introduction générale	1
Notations	5
<b>I Etude bibliographique</b>	<b>9</b>
<b>1 Généralités sur le comportement des matériaux granulaires</b>	<b>11</b>
1.1 Comportement global	11
1.2 Comportement local	12
1.2.1 Variables statiques locales	13
1.2.2 Variables cinématiques	14
1.2.3 Anisotropie	16
<b>2 Changement d'échelles dans les milieux granulaires</b>	<b>21</b>
2.1 Schéma général	21
2.2 Définition des échelles étudiées	21
2.3 Changement d'échelles micro-macro	24
2.3.1 Loi d'interaction entre particules	25
2.3.2 Description géométrique	25
2.3.3 Description des variables statiques	28
2.3.4 Description des variables cinématiques	34
2.3.5 Homogénéisation élastique	41
2.3.6 Difficultés et limitations des techniques de changement d'échelles micro-macro	44
2.4 Changement d'échelles méso-macro	45
2.4.1 Approche de Liao <i>et al.</i> (1997)	45
2.4.2 Approche de Sab (1997)	49
<b>II Echelle mésoscopique en 2D</b>	<b>55</b>
<b>3 Simulation numérique des milieux granulaires 2D</b>	<b>57</b>
3.1 Méthode des Éléments Discrets	57
3.1.1 Hypothèses	57
3.1.2 Schéma de calcul de la MED	58
3.1.3 Loi de contact	59
3.1.4 Amortissement numérique	59

3.1.5	Pas de temps . . . . .	60
3.1.6	Conditions aux limites . . . . .	60
3.2	Simulation de l'essai biaxial . . . . .	60
3.2.1	Génération de l'échantillon . . . . .	61
3.2.2	Compactage de l'échantillon . . . . .	61
3.2.3	Réalisation de l'essai biaxial . . . . .	63
3.3	Comportement de l'échantillon . . . . .	64
3.3.1	Comportement macroscopique . . . . .	64
3.3.2	Comportement microscopique . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Définition de l'échelle mésoscopique</b>	<b>73</b>
4.1	Etat de l'art . . . . .	73
4.1.1	Systèmes de Voronoi, de Dirichlet et de Delaunay . . . . .	73
4.1.2	Deux systèmes géométriques duals de Bagi . . . . .	76
4.1.3	Graphe de particules et graphe de vides . . . . .	77
4.1.4	Choix d'une représentation géométrique appropriée . . . . .	79
4.2	Construction du graphe de particules . . . . .	80
4.2.1	Procédure de construction . . . . .	80
4.2.2	Caractéristiques du graphe des particules . . . . .	81
4.2.3	Définition de l'échelle mésoscopique . . . . .	84
4.3	Description géométrique à l'échelle mésoscopique . . . . .	85
4.3.1	Volume des sous-domaines . . . . .	85
4.3.2	Densité des sous-domaines . . . . .	86
4.3.3	Texture des sous-domaines . . . . .	90
4.3.4	Classification des sous-domaines . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Déformation à l'échelle mésoscopique</b>	<b>105</b>
5.1	Etat de l'art . . . . .	105
5.1.1	Déformation des sous-domaines triangulaires . . . . .	105
5.1.2	Déformation des sous-domaines polygonaux . . . . .	108
5.1.3	Comparaison entre les différentes définitions de la déformation proposées . . . . .	112
5.2	Estimation de la déformation macroscopique . . . . .	112
5.3	Hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique . . . . .	118
5.3.1	Distribution spatiale de la déformation à l'échelle mésoscopique	119
5.3.2	Analyse statistique de l'hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique . . . . .	120
5.3.3	Mesures complémentaires de l'hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique . . . . .	124
5.4	Nature structurée de la déformation à l'échelle mésoscopique . . . . .	127
5.4.1	Relation entre la déformation et la densité à l'échelle méso- scopique . . . . .	127
5.4.2	Relation entre la déformation et la texture à l'échelle méso- scopique . . . . .	128

<b>6</b>	<b>Contrainte à l'échelle mésoscopique</b>	<b>147</b>
6.1	Définition de la contrainte . . . . .	147
6.1.1	Première définition : contrainte dans un volume continu équivalent . . . . .	147
6.1.2	Deuxième définition : contrainte définie sur la base d'un partage de forces de contact . . . . .	151
6.1.3	Troisième définition : contrainte à partir des forces de contact appliquées à l'extérieur des sous-domaines . . . . .	153
6.1.4	Discussion sur les différentes définitions . . . . .	155
6.2	Hétérogénéité de la contrainte à l'échelle mésoscopique . . . . .	157
6.2.1	Distribution spatiale de la contrainte à l'échelle mésoscopique	159
6.2.2	Analyse statistique de l'hétérogénéité de la contrainte . . . . .	160
6.2.3	Mesures complémentaires de l'hétérogénéité de la contrainte . . . . .	161
6.2.4	Comparaison entre les hétérogénéités de la déformation et de la contrainte . . . . .	164
6.3	Nature structurée de la contrainte à l'échelle mésoscopique . . . . .	166
6.3.1	Contraintes $\sigma_{11}$ et $\sigma_{22}$ dans les directions principales majeure et mineure macroscopiques . . . . .	166
6.3.2	Contrainte moyenne $\sigma_m$ . . . . .	166
6.3.3	Contrainte déviatoire $\mathbf{s}$ et angle de frottement interne mobilisé $\varphi$	167
6.3.4	Liens entre la contrainte dans les structures mésoscopiques et les mécanismes au niveau des contacts . . . . .	174
<b>7</b>	<b>Relation contrainte-déformation à l'échelle mésoscopique</b>	<b>179</b>
7.1	Etat de l'art . . . . .	179
7.1.1	Critère de plasticité de Mohr-Coulomb . . . . .	179
7.1.2	Relation contrainte-dilatance . . . . .	180
7.2	Relations entre la contrainte et la déformation à l'échelle mésoscopique	180
7.2.1	Etat caractéristique à l'échelle mésoscopique . . . . .	181
7.2.2	Relation entre l'angle de frottement interne mobilisé et l'angle de dilatance à l'échelle mésoscopique . . . . .	183
<b>III</b>	<b>Echelle mésoscopique en 3D</b>	<b>189</b>
<b>8</b>	<b>Partition des milieux granulaires 3D</b>	<b>191</b>
8.1	Introduction . . . . .	191
8.2	Description du milieu granulaire 3D étudié . . . . .	191
8.3	Représentation géométrique de l'assemblage granulaire 3D . . . . .	191
8.3.1	Représentation par un système de Delaunay . . . . .	191
8.3.2	Critères d'association des tétraèdres . . . . .	193
	<b>Conclusion générale</b>	<b>205</b>
	<b>Perspectives</b>	<b>207</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>209</b>

<b>A Opérations mathématiques</b>	<b>221</b>
<b>B Variables de déformation et de contrainte</b>	<b>223</b>
B.1 Variables de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ en 2D . . . . .	223
B.2 Variables de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ en 2D . . . . .	223
<b>C Analyse de l'hétérogénéité d'un champ de variable locale</b>	<b>225</b>
C.1 Mesures statistiques . . . . .	225
C.1.1 Pour un champ de variable locale $a^h$ non pondérée . . . . .	225
C.1.2 Pour un champ de variable locale $a^h$ pondérée par un poids $p^h$	225
C.2 Degré d'hétérogénéité . . . . .	225
C.3 Mesures d'hétérogénéité . . . . .	227
C.3.1 Participation, non-conformité et alignement . . . . .	227
C.3.2 Contribution cumulée et poids cumulé . . . . .	229

# Introduction générale

Le comportement des matériaux granulaires est difficile à modéliser dans le cadre classique de la mécanique des milieux continus. Cette difficulté provient essentiellement de la nature discrète de ces milieux qui leur confère des propriétés très spécifiques. La modélisation du comportement de ce type de matériaux a fait l'objet de différentes approches proposées dans la littérature, dont on distingue généralement deux grandes classes : d'une part les approches phénoménologiques et d'autre part les approches par changement d'échelles.

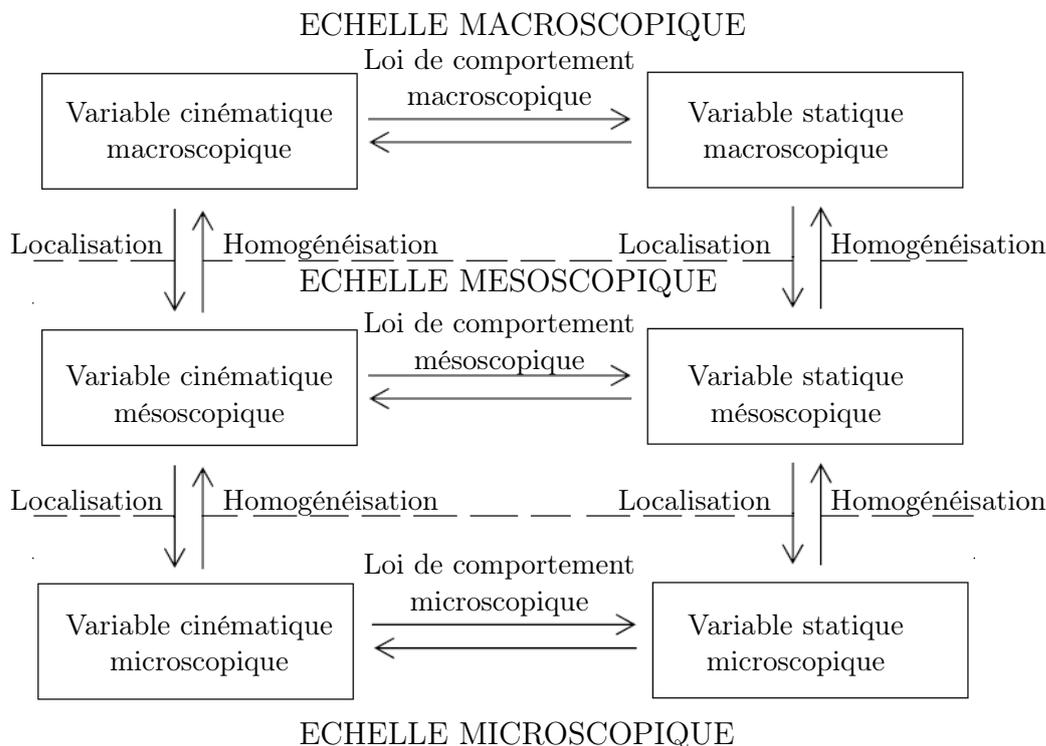
Les approches phénoménologiques consistent à adapter la théorie de la mécanique des milieux continus aux milieux granulaires. Ces approches sont souvent développées dans le cadre de formalismes désormais classiques tels que l'élasticité, la plasticité, la viscosité ou encore la modélisation incrémentale non linéaire. Elles permettent de modéliser l'essentiel du comportement des matériaux granulaires mais présentent plusieurs inconvénients significatifs :

- la mécanique des milieux continus fait l'hypothèse de la continuité des champs de contrainte et de déformation dans un milieu supposé continu, tandis que les milieux granulaires sont des milieux discrets et que certaines de leurs propriétés découlent de cette nature discrète ;
- les mécanismes souvent pris en compte dans ces approches phénoménologiques ne sont pas clairement reliés à une physique réelle identifiable et mesurable ;
- la modélisation phénoménologique fait apparaître un nombre important de paramètres, souvent difficiles à identifier à partir de résultats expérimentaux.

Les approches par changement d'échelles ont été initialement développées pour les milieux continus hétérogènes qui présentent certaines difficultés de modélisation similaires à celles observées pour les matériaux granulaires. Ces approches permettent de prendre en compte une structure locale complexe en écrivant la loi de comportement à une échelle locale bien choisie. Elles ont ensuite été développées pour les milieux granulaires pour lesquels l'échelle locale s'impose au niveau d'une ou de quelques particules. Elles ont pour objectif de modéliser le comportement des matériaux granulaires, à l'échelle du volume élémentaire représentatif, à partir de la modélisation des interactions entre les particules. Concernant les matériaux granulaires, deux approches par changement d'échelles ont été développées, l'une est basée sur une modélisation numérique des interactions entre particules, l'autre relève des techniques d'homogénéisation et est développée à partir de modèles analytiques. Toutes ces méthodes présentent l'avantage de prendre en compte de façon explicite la structure locale des matériaux et son évolution sous l'effet de sollicitations.

La méthode des éléments discrets (MED) fait partie des approches multi-échelles de type numérique. Cette méthode consiste à simuler numériquement le comportement des matériaux granulaires à partir de la modélisation des particules et de leurs

interactions. Elle est largement utilisée pour modéliser le comportement des sols, des massifs rocheux et de nombreux autres matériaux granulaires ou divisés.



**FIGURE 1** – Echelle mésoscopique dans le schéma d’homogénéisation pour les milieux granulaires.

On trouve également dans la littérature des approches multi-échelles de type homogénéisation. Ces approches modélisent de façon analytique le comportement en se basant sur la théorie de l’homogénéisation initialement proposée pour les milieux continus hétérogènes tels que les matériaux cristallins, ou encore les matériaux composites. Une technique d’homogénéisation pour les milieux granulaires prend en compte la nature discrète du milieu et des variables locales, souvent sous forme vectorielles (forces de contact, déplacements,.. etc.) et non tensorielles comme c’est le cas en homogénéisation des milieux continus. Ces méthodes restent à ce jour peu utilisées pour les matériaux granulaires car de nombreux verrous empêchent d’obtenir des approches convaincantes pour la modélisation des comportements irréversibles et non linéaires de ces matériaux.

Les techniques d’homogénéisation proposées dans la littérature consistent habituellement à effectuer un changement entre deux échelles : l’échelle macroscopique correspondant au niveau du volume élémentaire représentatif et l’échelle microscopique correspondant au niveau du contact entre deux particules. Ces techniques de changement d’échelles micro-macro permettent généralement de définir une borne inférieure et une borne supérieure du comportement élastique. Les résultats obtenus sont par contre loin d’être satisfaisants pour la modélisation des comportements non linéaires et non réversibles.

Pour pallier à ces limitations, il est possible d’introduire une échelle mésoscopique, intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique (figure 1). C’est la définition d’une telle échelle mésoscopique, ainsi que sa prise en compte

dans une approche par changement d'échelles, que nous nous proposons d'étudier dans le cadre de ce travail.

Ce mémoire comporte trois parties. La première partie présente un certain nombre de travaux existants dans la littérature permettant d'éclairer l'approche proposée. La seconde partie est consacrée à la définition d'une échelle mésoscopique pour les milieux granulaires 2D, à l'analyse des distributions des variables locales (texture, contraintes et déformations) à cette échelle et à l'analyse des relations entre ces variables, ce qui permet de définir le comportement à l'échelle locale. La dernière partie est dédiée à la définition d'une échelle mésoscopique pour les milieux granulaires 3D. Différentes méthodes de définition d'une telle échelle pour les assemblages 3D sont présentées. Cette définition est beaucoup moins naturelle et évidente dans les milieux 3D que dans les milieux 2D, ce qui constitue le verrou essentiel pour généraliser l'approche 2D, présentée dans ce mémoire, à un matériau 3D.



# Notations

## Notations générales

$ \mathbf{a} $	Norme d'un vecteur $\mathbf{a}$
$ \mathbf{A} $	Norme d'une matrice $\mathbf{A}$
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker
$e_{ijk}$ ( $e_{ij}$ )	Symbole de permutation (en 2D)
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Produit scalaire de deux tenseurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$
$\langle a \rangle$	Moyenne de la distribution d'une variable $a$ non pondérée
$S[a]$	Ecart-type de la distribution d'une variable $a$ non pondérée
$\langle a \rangle_p$	Moyenne de la distribution d'une variable $a$ pondérée par un poids $p$
$S_p[a]$	Ecart-type de la distribution d'une variable $a$ pondérée par un poids $p$

## Quantités macroscopiques

$\Sigma$	Tenseur de contrainte
$\Sigma_1$	Contrainte principale majeure
$\Sigma_3$ ( $\Sigma_2$ )	Contrainte principale mineure (en 2D)
$\Sigma_m$	Contrainte moyenne
$\Sigma_d$	2 <sup>ème</sup> invariant de la contrainte déviatoire
$\Phi$	Angle de frottement interne mobilisé
$\Phi_{\max}$	Angle de frottement interne mobilisé maximal
$\Phi_o$	Angle de frottement interne mobilisé caractéristique
$\mathbf{E}$	Tenseur de déformation
$E_1$	Déformation principale majeure
$E_3$ ( $E_2$ )	Déformation principale mineure(en 2D)
$E_v$	Déformation volumique
$E_d$	2 <sup>ème</sup> invariant de la déformation déviatoire
$\delta \mathbf{E}$	Incrément de déformation
$\delta \mathbf{A}$	Incrément de gradient de déplacement
$\delta E_v$	Incrément de déformation volumique
$\delta E_d$	2 <sup>ème</sup> invariant de l'incrément de déformation déviatoire
$\Psi$	Angle de dilatance
$P$	Porosité sans particules isolées
$\hat{P}$	Porosité avec particules isolées

## Quantités microscopiques

$\mathbf{n}^k$	Vecteur normal au contact $k$
$\mathbf{t}^k$	Vecteur tangentiel au contact $k$
$\mathbf{l}^k$	Vecteur branche du contact $k$
$l^k$	Longueur d'une branche $k$
$\delta\mathbf{u}^m$	Déplacement du centre de gravité de la particule $m$
$\delta\boldsymbol{\omega}^m$	Rotation de la particule $m$
$\delta\mathbf{c}^k$	Déplacement relatif au contact $k$
$\delta\mathbf{c}_N^k$	Déplacement relatif normal au contact $k$
$\delta\mathbf{c}_T^k$	Déplacement relatif tangentiel au contact $k$
$\delta\mathbf{u}^k$	Déplacement relatif des centres de gravité de particules en contact $k$
$\delta\mathbf{u}_N^k$	Déplacement relatif normal des centres de gravité de particules en contact $k$
$\delta\mathbf{u}_T^k$	Déplacement relatif tangentiel des centres de gravité de particules en contact $k$
$\mathbf{f}^k$	Force de contact $k$
$f_N^k$	Force normale de contact $k$
$f_T^k$	Force tangentielle de contact $k$
$\bar{N}$	Nombre de coordination d'un assemblage granulaire
$\mathbf{b}^p$	Direction d'allongement de la particule $p$
$N_c$	Nombre total de contacts dans un assemblage granulaire
$N_o$	Nombre de contacts par une unité de volume
$N_p$	Nombre total de particules dans un assemblage granulaire
$\mathbf{H}$	Tenseurs de texture de contact
$\mathbf{H}'$	Tenseurs de texture de branche
$\mathbf{H}''$	Tenseurs de texture combiné
$\mathbf{H}'''$	Tenseurs de texture d'orientation des particules
$P(\mathbf{n})$	Densité de probabilité de contact
$\bar{D}$	Diamètre moyenne des particules
$E$	Modules de Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\phi_c$	Angle de frottement mobilisé au contact
$\phi_\mu$	Angle de frottement intergranulaire
$k_N, k_T$	Rigidités normale et tangentielle de contact respectivement

## Quantités mésoscopiques

$N_b$	Nombre de sous-domaines
$\hat{V}$	Volume de la partie de l'échantillon couverte par le graphe
$\hat{N}_p$	Nombre de particules dans le graphe
$\hat{N}_c$	Nombre de contacts dans le graphe
$R$	Nombre moyen de redondance
$\bar{N}'$	Nombre de coordination de la partie de l'échantillon couverte par le graphe

$Q, \hat{Q}$	Tenseurs de méso-texture
$S$	Classe des sous-domaines fortement allongés
$W$	Classe des sous-domaines faiblement allongés
$SV, WV$	Types de sous-domaines fortement (S) et faiblement (W) allongés, orientés dans la direction majeure de contrainte macroscopique (V)
$SH, WH$	Types de sous-domaines fortement (S) et faiblement (W) allongés, orientés dans la direction mineure de contrainte macroscopique (H)
$SO, WO$	Types de sous-domaines fortement (S) et faiblement (W) allongés, orientés obliquement (O)

**Pour le réseau de Delaunay 2D :**

$N_L$	Nombre total de triangles
$\delta \mathbf{a}^L$	Tenseur gradient de déplacement de chaque triangle
$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^L$	Tenseur de déformation de chaque triangle
$V^L$	Volume de chaque triangle

**Pour le réseau de Dirichlet 2D :**

$N_d$	Nombre total de cellules de Dirichlet
$\boldsymbol{\sigma}^d$	Tenseur de contrainte de chaque cellule de Dirichlet
$V^d$	Volume de chaque cellule de Dirichlet

**Pour chaque sous-domaine :**

$\boldsymbol{\sigma}^h$	Tenseur de contrainte
$\mathbf{s}^h$	Tenseur de contrainte déviatoire
$\sigma_m^h$	Contrainte moyenne
$\sigma_d^h$	2 <sup>ème</sup> invariant de la contrainte déviatoire
$\varphi^h$	Angle de frottement interne mobilisé
$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^h$	Tenseur de déformation
$\delta \mathbf{e}^h$	Tenseur de déformation déviatoire
$\delta \varepsilon_v^h$	Déformation volumique
$\delta V^h$	Variation volumique
$\delta \varepsilon_d^h$	2 <sup>ème</sup> invariant de la déformation déviatoire
$\psi^h$	Angle de dilatance
$r^h$	Valence
$\rho^h$	Porosité sans particules isolées
$\hat{\rho}^h$	Porosité avec particules isolées
$\mathbf{L}^h$	Tenseur de boucle
$\mathbf{m}^h$	Direction d'allongement
$\theta^h$	Angle d'orientation
$\beta^h$	Degré d'allongement

**Pour chaque ensemble de sous-domaines de texture similaire :**

$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur de contrainte
-----------------------	-----------------------

## Notations

---

$\mathbf{s}$	Tenseur de contrainte déviatoire
$\sigma_m$	Contrainte moyenne
$\sigma_d$	2 <sup>ème</sup> invariant de la contrainte déviatoire
$\varphi$	Angle de frottement interne mobilisé
$\varphi_{\max}$	Angle de frottement interne mobilisé maximal
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur de déformation
$\delta\mathbf{e}$	Tenseur de déformation déviatoire
$\delta\varepsilon_v$	Déformation volumique
$\delta V$	Variation volumique totale
$\delta\varepsilon_d$	2 <sup>ème</sup> invariant de la contrainte déviatoire
$\psi$	Angle de dilatance

Première partie  
Etude bibliographique



# Chapitre 1

## Généralités sur le comportement des matériaux granulaires

### Introduction

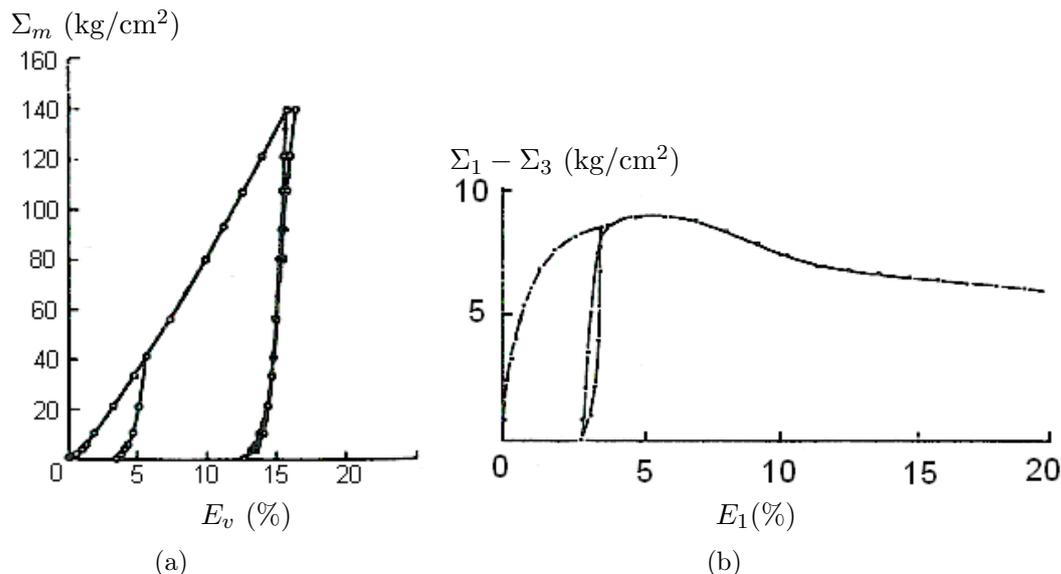
Les matériaux granulaires s'inscrivent dans la catégorie de matériaux ayant une structure complexe. Ces matériaux sont formés de grains dont les interactions mécaniques régissent le comportement. Il existe plusieurs phases (solide, air, eau, etc.) dont les propriétés mécaniques sont très différentes. Par conséquent, les matériaux granulaires sont discrets et hétérogènes. La complexité de la structure confère à ces matériaux un comportement mécanique très typique, aux aspects différents selon que l'on considère une échelle globale ou locale. L'objectif de ce chapitre est de présenter brièvement les aspects fondamentaux du comportement mécanique des matériaux granulaires à ces échelles.

### 1.1 Comportement global

Le comportement des matériaux granulaires a été largement étudié dans la littérature. Lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations isotropes ou déviatoires ces matériaux présentent un comportement typique. La figure 1.1 illustre ce type de comportement. Il apparaît que :

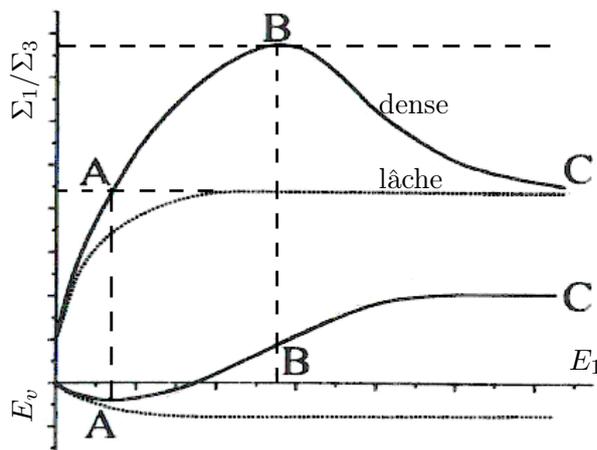
- la déformation des matériaux granulaires n'est que partiellement réversible. Dans ce sens, Hicher (1993) a montré que pour un sol, la déformation élastique est limitée à environ  $10^{-5}$ .
- la relation entre la déformation et la contrainte appliquée est aussi fortement non linéaire et non réversible.

De plus, comme le montre sur la figure 1.2, le comportement des matériaux granulaires dépend fortement de la compacité de l'arrangement des particules. Un matériau dense ou à faible pression de confinement présente un pic bien marqué (B) mais ce n'est pas le cas pour un matériau lâche ou à forte pression de confinement. Le plateau final (C) atteint à grande déformation ne dépend pas de l'état initial du matériau. La variation de volume lors d'une sollicitation déviatoire est une des caractéristiques typiques du comportement des matériaux granulaires. Un matériau dense se contracte pour de faibles déviateurs de contrainte (phase de contractance) et ensuite se dilate fortement (phase de dilatance). La limite entre la phase de



**FIGURE 1.1** – Comportement d’un matériau granulaire soumis à : (a) une sollicitation isotrope (Lade et Duncan, 1975) et (b) une sollicitation déviatoire (Biarez, 1962).

contractance et la phase de dilatance est appelée *état caractéristique* (A). Cet état correspond à une transition entre un régime gouverné principalement par le frottement intergranulaire et un régime gouverné principalement par le réarrangement des particules. Casagrande (1940) a mis en évidence l’importance de la phase de dilatance sur la résistance des matériaux granulaires.

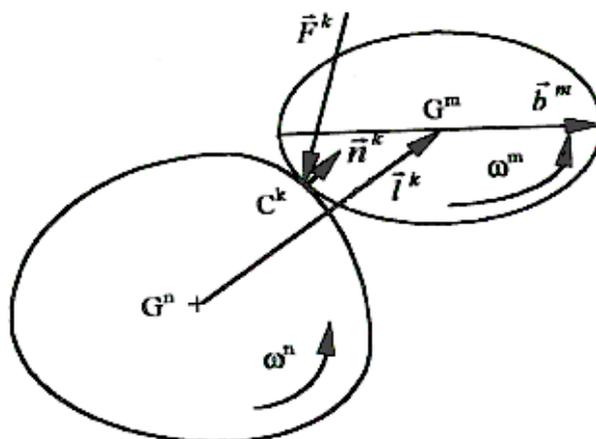


**FIGURE 1.2** – Comportement des matériaux granulaires à différentes densités (Deluzarche, 2004).

## 1.2 Comportement local

Lors de la sollicitation appliquée à un matériau granulaire, différents phénomènes locaux peuvent se produire. Ces phénomènes influent plus ou moins sur le compor-

tement des matériaux granulaires selon la nature du matériau. On présente ici les phénomènes à privilégier dans l'étude du comportement local des matériaux granulaires. Ces phénomènes locaux sont décrits par des variables locales telles que des variables statique, cinématique et de texture, comme illustré sur la figure 1.3.



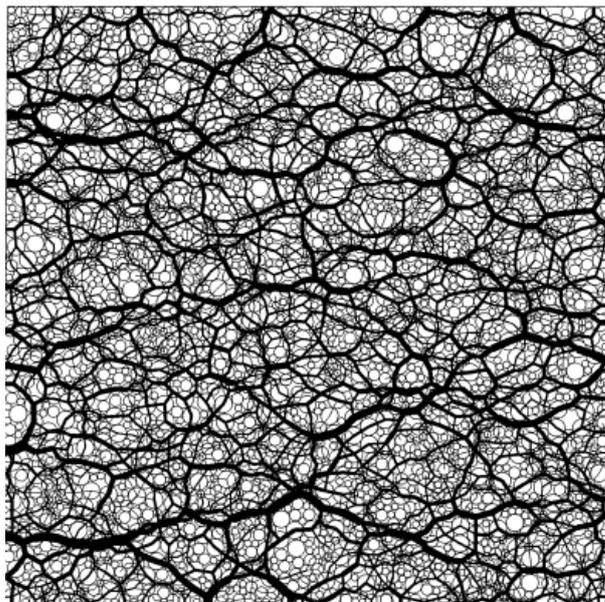
**FIGURE 1.3** – Définition des variables statique, cinématique et de texture aux contacts entre particules (Cambou et Jean, 2001).

### 1.2.1 Variables statiques locales

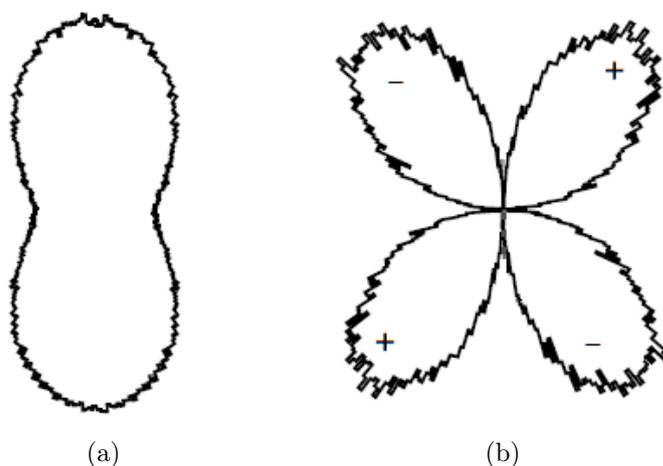
La charge appliquée à un matériau granulaire est supportée par les forces qui sont transmises par les contacts entre particules (forces de contact). Dantu (1957) a mis en évidence, en utilisant la méthode de photoélasticimétrie, une grande inhomogénéité de la transmission des forces de contact. Les forces de contact sont concentrées dans des *chaînes de forces*, composées par les contacts transmettant les forces de contact importantes (figure 1.4).

Les contacts localisés hors de ces chaînes de force transmettent de faibles forces de contact. Radjai *et al.* (1997), Radjai et Wolf (1998) et Radjai *et al.* (1998) ont distingué deux types de chaînes de forces : *les chaînes de forces fortes* et *les chaînes de forces faibles*. En particulier, les chaînes de forces fortes ont tendance à s'orienter préférentiellement dans la direction principale majeure de contrainte tandis que les chaînes de forces faibles ont tendance à s'orienter préférentiellement dans la direction perpendiculaire pour maintenir latéralement les chaînes de forces fortes (Radjai *et al.*, 1997).

Les forces de contact varient significativement d'un contact à l'autre, même pour les contacts d'orientation similaire. De plus, la distribution des forces de contact (forces normales et forces tangentielles) n'est pas uniforme, elle dépend de l'orientation des contacts (Cundall et Strack, 1979; Rothenburg et Bathurst, 1989; Kruyt et Rothenburg, 2002). On obtient classiquement des diagrammes polaires en forme de *haricot* pour la distribution des forces normales et en forme de *trèfle à quatre feuilles* pour la distribution des forces tangentielles (figure 1.5).



**FIGURE 1.4** – Chaînes de forces dans un assemblage granulaire compressé horizontalement. L'épaisseur des lignes est proportionnel à l'amplitude des forces normales aux contacts (Radjai et Wolf, 1998).

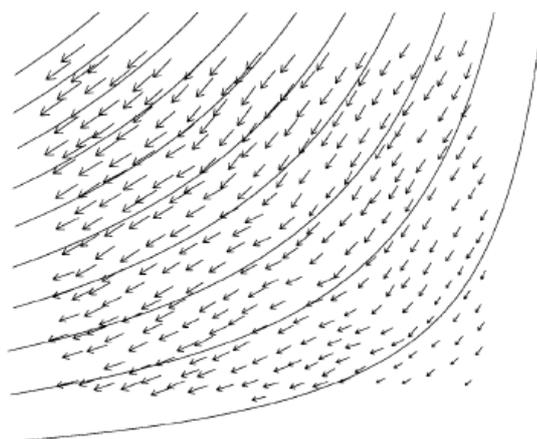


**FIGURE 1.5** – Distributions des forces de contact dans un essai biaxial de compression : (a) pour les forces normales de contact et (b) pour les forces tangentiels de contact (Kruyt et Rothenburg, 2002).

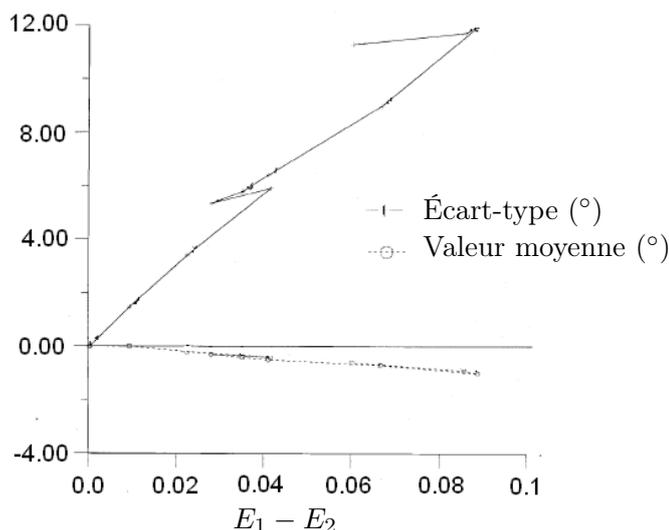
## 1.2.2 Variables cinématiques

La déformation globale d'un matériau granulaire se traduit localement par le déplacement des particules. Chaque particule possède six degrés de liberté en 3D (trois translations et trois rotations) ou trois degrés de liberté en 2D (deux translations et une rotation). L'évaluation des variables cinématiques dans les milieux granulaires est techniquement difficile à réaliser expérimentalement. La plupart des études trouvées dans la littérature ont donc été réalisées sur des assemblages de type analogique bidimensionnel (Chapuis, 1976; Oda *et al.*, 1982; Calvetti *et al.*, 1997) ou sur des assemblages numériques (Bardet, 1994; Dedecker *et al.*, 2000).

Les figures 1.6 et 1.7 présentent les résultats obtenus par Calvetti *et al.* (1997) sur des essais sur des assemblages composés de rouleaux en bois. Les flèches ( $\nearrow$ ) sur la figure 1.6 représentent le déplacement des centres des rouleaux dans un essai biaxial de compression. Les lignes continues représentent des lignes de courant correspondant à la déformation supposée homogène. On peut constater que, en moyenne, les rouleaux se déplacent dans les directions prescrites par la mécanique des milieux continus mais il y a des déviations considérables observées localement.



**FIGURE 1.6** – Champ de déplacement des centres des rouleaux (flèches) dans un essai biaxial de compression et lignes de courant (ligne continue) correspondant à la déformation supposée homogène (Calvetti *et al.*, 1997).



**FIGURE 1.7** – Valeur moyenne et écart-type de la distribution des rotations des particules au cours d'un essai biaxial de compression réalisé sur un assemblage de rouleaux (Calvetti *et al.*, 1997).

Les auteurs ont également montré que la valeur moyenne des rotations des particules augmente légèrement au cours de l'essai et reste proche de la rotation rigide de l'échantillon tandis que l'écart-type de la distribution des rotations des particules

augmente significativement et atteint une valeur importante ( $12^\circ$ ) (figure 1.7). Ce résultat est en accord avec celui obtenu par Bardet (1994) et par Dedecker *et al.* (2000) sur des assemblages numériques.

Considérons deux particules rigides  $m$  et  $n$  en contact (figure 1.3), le déplacement relatif au contact peut être défini par :

$$\delta c_i^k = \delta u_i^m - \delta u_i^n + e_{ijl}(r_l^m \delta \omega_j^m - r_l^n \delta \omega_j^n), \quad (1.1)$$

où :

- $e_{ijl}$  est le symbole de permutation (voir l'annexe A) ;
- $\delta \mathbf{u}^m$ ,  $\delta \mathbf{u}^n$  sont, respectivement, les déplacements des centres de gravité  $G^m$  et  $G^n$  des particules  $m$  et  $n$  ;
- $\mathbf{r}^m = \overrightarrow{G^m C^k}$  et  $\mathbf{r}^n = \overrightarrow{G^n C^k}$  ;
- $\delta \mathbf{u}^{mn} = \delta \mathbf{u}^m - \delta \mathbf{u}^n$  est le déplacement relatif des centres de particules  $m$  et  $n$  en contact ;
- le terme  $\delta \omega_i^{mn} = e_{ijl}(r_l^m \delta \omega_j^m - r_l^n \delta \omega_j^n)$  est appelé *rotation au contact*.

En 2D, l'expression (1.1) s'écrit sous la forme :

$$\delta c_i^k = \delta u_i^m - \delta u_i^n - (r^m \delta \omega^m + r^n \delta \omega^n) t_i, \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{t}$  est le vecteur tangentiel au contact. La condition de roulement sans glissement au contact se traduit par :

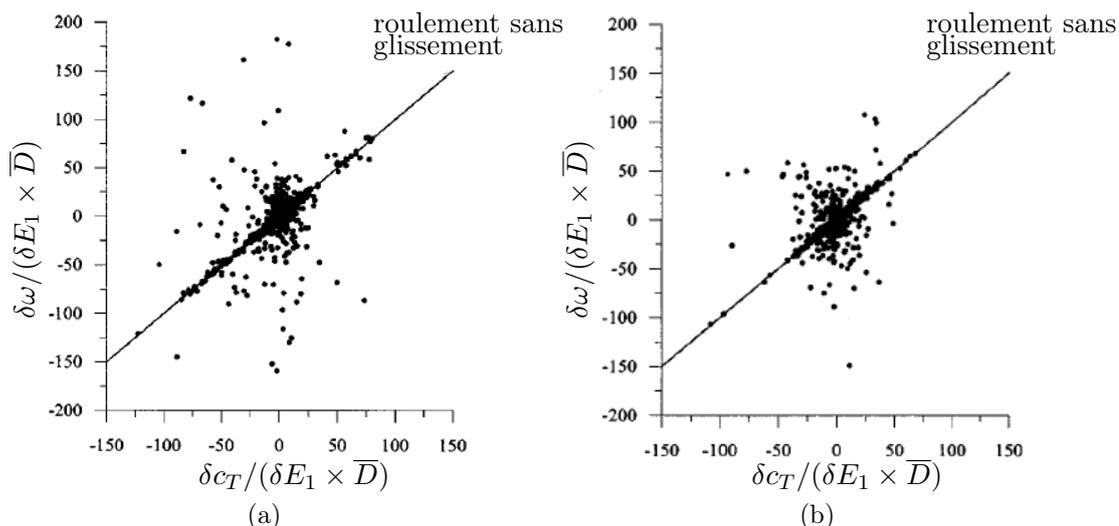
$$\delta c_i^k = 0 \Rightarrow \delta u_i^m - \delta u_i^n = (r^m \delta \omega^m + r^n \delta \omega^n) t_i. \quad (1.3)$$

Il est à noter que la cinématique de roulement sans glissement ne produit aucune énergie au contact. Elle est cependant liée à une déformation souvent irréversible des milieux granulaires. Dedecker *et al.* (2000) ont étudié cette cinématique particulière sur un assemblage numérique composé de disques. La figure 1.8 représente les valeurs des rotations au contact,  $\delta \omega$ , en fonction des valeurs du déplacement tangentiel relatif des centres de particules en contact,  $\delta c_T$ , pour deux incréments de déformation dans la zone près du pic et post-pic du comportement de l'assemblage. Ces deux quantités sont normalisées par l'incrément de déformation axiale imposé,  $\delta E_1$ , et le diamètre moyen des particules,  $\overline{D}$ . Les diagonales de cette figure correspondent à la condition de roulement sans glissement. Cette figure souligne l'importance de la cinématique de roulement sans glissement dans les milieux granulaires, particulièrement, dans les zones au pic et au post-pic du comportement de ce type de milieux. Ce résultat a aussi été obtenu par Chapuis (1976), Oda *et al.* (1982), Bardet (1994) et Oda *et al.* (1997).

### 1.2.3 Anisotropie

L'anisotropie est l'une des caractéristiques fondamentales du comportement des matériaux granulaires. Casagrande et Carillo (1944) ont distingué deux types d'anisotropie pour les matériaux granulaires :

- L'anisotropie initiale qui s'établit lors de la mise en place des matériaux, par exemple, la sédimentation naturelle ou la mise en place de l'échantillon sous gravité ;



**FIGURE 1.8** – Relation entre la rotation au contact  $\delta\omega$  et le déplacement relatif tangentiel  $\delta c_T$  entre deux particules en contact permettant de mettre en évidence l'importance de la cinématique de roulement sans glissement dans un assemblage de disques : (a) dans la zone près du pic, et (b) dans la zone post-pic (Dedecker *et al.*, 2000).

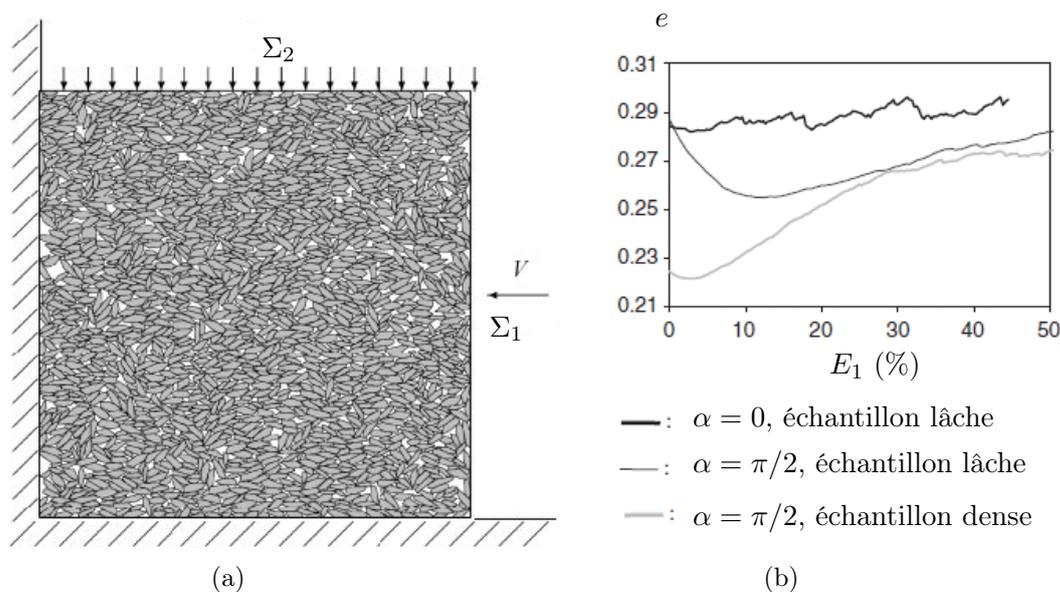
- L'anisotropie induite qui provient du développement de la déformation irréversible au sein du milieu.

D'après Oda (1972b), l'anisotropie provient, d'une part, de l'orientation préférentielle des particules non-sphériques et, d'autre part, de l'orientation préférentielle des contacts entre les particules, même pour des particules sphériques.

### 1.2.3.1 Anisotropie initiale

D'après Oda (1972b), lors de la mise en place de l'échantillon sous gravité, les particules non-sphériques ont tendance à s'orienter perpendiculairement à la direction de gravité. De plus, même pour des particules sphériques déposées sous gravité, les normales de contact entre les particules ont également tendance à s'orienter dans la direction de la gravité.

Pour étudier l'influence de l'anisotropie initiale sur le comportement des matériaux granulaires, Biarez (1962) a mis en place un échantillon dans le champ de pesanteur et puis l'a soumis à une compression isotrope. L'auteur a constaté que la déformation est nettement plus petite pour la compression dans la direction de la gravité que dans les deux autres directions. Ce résultat a aussi été obtenu par Nouguier-Lehon *et al.* (2003) en simulant numériquement des essais biaxiaux à contrainte mineure constante sur des échantillons composés de particules polygonales allongées. Les échantillons à différentes densités sont d'abord générés sous gravité et ensuite compressés dans différentes directions : la direction de la gravité ( $\alpha = 0$ ) et la direction perpendiculaire ( $\alpha = \pi/2$ ).

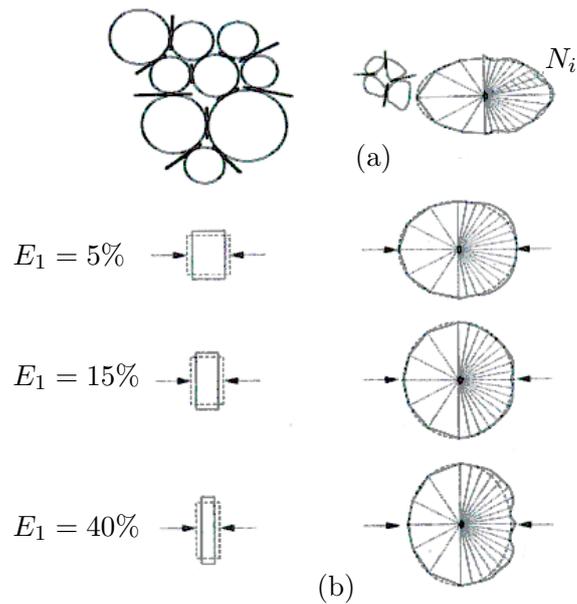


**FIGURE 1.9** – (a) Assemblage de particules polygonales allongées et (b) évolutions de l'indice de vides  $e$  de l'assemblage compressé selon différentes directions (Nouguier-Lehon *et al.*, 2003).

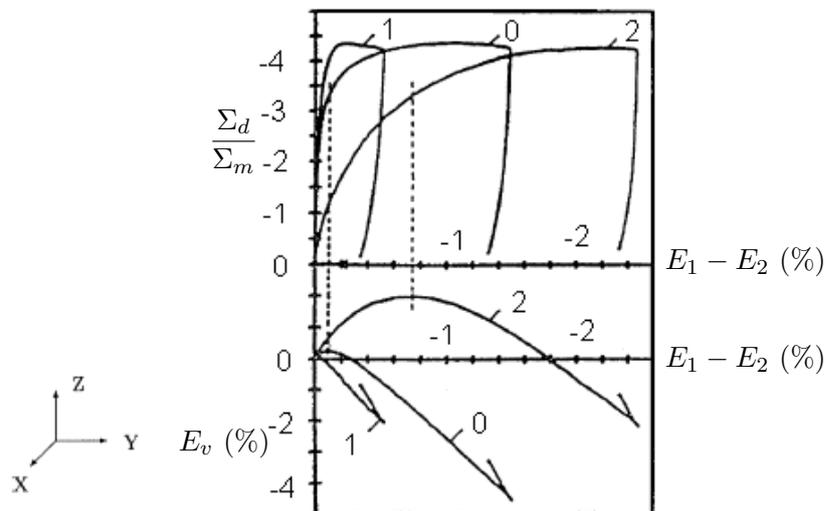
### 1.2.3.2 Anisotropie induite

Lorsqu'un matériau granulaire est soumis à une sollicitation déviatoire, les particules voisines se déplacent et peuvent générer de nouveaux contacts tandis que certains des contacts existants peuvent disparaître. Biarez et Wiendieck (1963) et Oda (1972b) ont conclu que les contacts créés ont tendance à s'orienter dans la direction principale majeure de contrainte tandis que certains contacts existant, orientés dans la direction principale mineure de contrainte, disparaissent. La figure 1.10 présente l'anisotropie initiale d'un assemblage analogique bidimensionnel et l'anisotropie induite lors d'une sollicitation déviatoire appliquée à cet assemblage.

Cette évolution non-isotrope de la distribution des orientations de contacts lors d'une sollicitation déviatoire génère en partie le phénomène d'écrouissage : le durcissement résulte en particulier de la concentration des normales de contact et le radoucissement résulte de la perte des contacts. Cambou et Lanier (1988) ont réalisé des essais triaxiaux de compressions successives sur un même matériau : le matériau vierge est d'abord compressé dans la direction  $Z$  (compression (0)), il est ensuite compressé soit dans la direction  $Z$  (compression (1)) soit dans la direction  $X$  (compression (2)) (figure 1.11). On peut constater que les trois compressions (0), (1) et (2) atteignent à peu près la même valeur limite, mais les pentes initiales des courbes contrainte - déformation et les comportements volumiques sont différents. Cette différence met en évidence le phénomène d'écrouissage dans les matériaux granulaires.



**FIGURE 1.10** – (a) Anisotropie initiale et (b) anisotropie induite dans un assemblage analogique bidimensionnel en terme d'orientation des plans tangentiels de contact (Biarez et Wiendieck, 1963).



**FIGURE 1.11** – Comportement d'un matériau granulaire sous trois compressions différentes : (0) compression du matériau vierge dans la direction Z, (1) compression dans la direction Z (après la compression (0)), (2) compression dans la direction X (après la compression (0)) (Cambou et Lanier, 1988).



# Chapitre 2

## Changement d'échelles dans les milieux granulaires

### Introduction

Comme analysé dans le chapitre précédent, le comportement global des matériaux granulaires est fortement lié aux comportements locaux et à l'état interne du milieu. De plus, ces comportements locaux sont fortement hétérogènes. Du fait de cette complexité des phénomènes à l'échelle locale, l'étude du comportement à l'échelle globale s'avère difficile. Pour passer outre cette difficulté, il paraît intéressant d'introduire une approche de type *multi-échelles*, également appelée *technique de changement d'échelles* (Koenders, 1987; Walton, 1987; Chang et Liao, 1994; Cambou *et al.*, 1995; Emeriault et Cambou, 1996; Emeriault *et al.*, 1996). Cette technique de changement d'échelles est l'objet de l'étude de ce chapitre.

### 2.1 Schéma général

Le schéma général d'une technique de changement d'échelles est illustré sur la figure 2.1. Cette technique se décompose principalement selon les étapes suivantes :

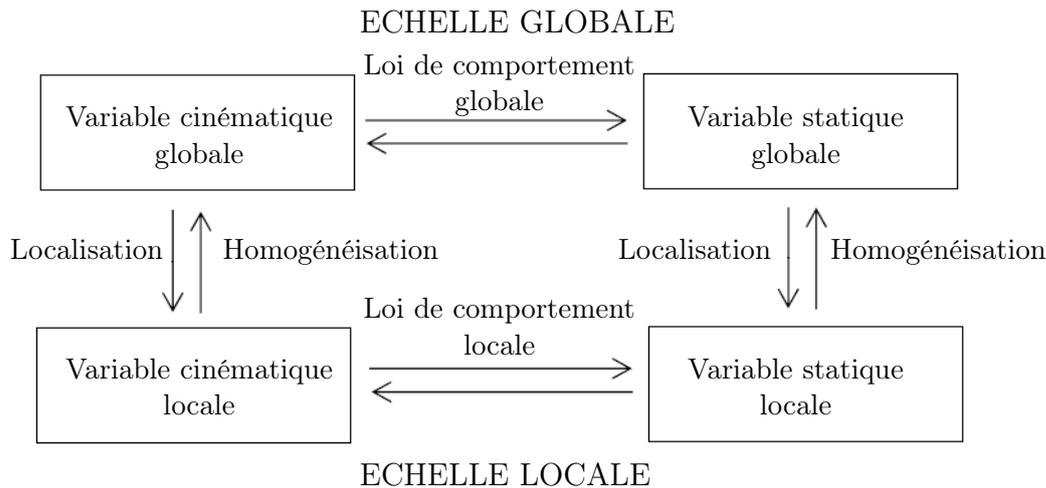
- définition des échelles considérées : l'échelle globale et l'échelle locale ;
- description locale du milieu granulaire étudié : cette étape consiste à décrire la structure locale du milieu, les variables statique et cinématique locales ;
- définition d'une loi locale permettant de relier les variables statique et cinématique locales ;
- bouclage du schéma d'homogénéisation général afin de déduire une loi de comportement macroscopique.

Il est important, dans cette technique, de définir les échelles étudiées.

### 2.2 Définition des échelles étudiées

#### a) Echelle globale

L'échelle globale, appelée autrement *échelle macroscopique*, correspond à l'échelle permettant de résoudre le problème aux limites en utilisant les équations constitu-



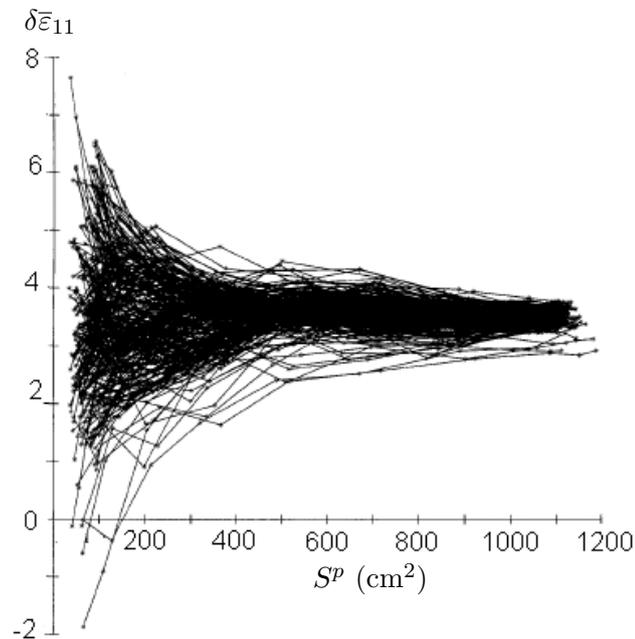
**FIGURE 2.1** – Schéma général d’une technique de changement d’échelles.

tives décrivant le comportement global des matériaux granulaires. Elle correspond, par exemple, à la dimension du plus petit élément du maillage dans la Méthode des Eléments Finis (M.E.F). Pour les milieux granulaires où les phases sont distribuées de façon aléatoire, cette échelle sera définie par le volume élémentaire représentatif (VER).

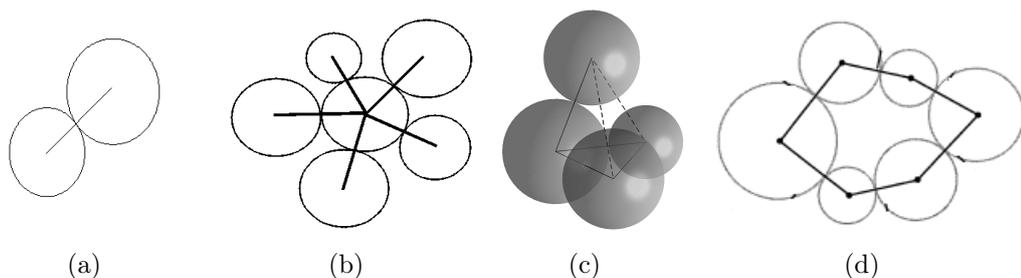
Le choix de la taille du VER constitue un point important dans l’approche multi-échelles. En effet, le VER est *élémentaire* parce qu’il est considéré comme un point matériel du milieu homogène équivalent et *représentatif* parce qu’il est possible de déterminer un comportement macroscopique unique pour ce volume. Pour être élémentaire, ce volume doit être suffisamment petit devant la dimension caractéristique du problème aux limites analysé. Pour être représentatif, il doit contenir beaucoup d’hétérogénéités (particules, vides, etc.). D’après Cambou et Jean (2001), le véritable test de séparation d’échelles porte sans doute sur la vérification de l’unicité de comportement, quelle que soit la sollicitation appliquée au VER. Nous citons ci-après quelques procédures proposées dans la littérature pour estimer la taille du VER.

- Calvetti *et al.* (1997) ont réalisé des essais biaxiaux sur des échantillons composés de rouleaux de Schneebeli. La déformation homogénéisée d’un domaine polygonal dont les côtés passent par les centres de rouleaux est calculée à partir du déplacement des centres de rouleaux. La figure 2.2 représente la composante  $\delta\varepsilon_{11}^p$  du tenseur de déformation en fonction de l’aire  $S^p$  du domaine, associé à chaque particule, sur lequel la déformation est homogénéisée. Il a constaté que, dans un premier temps, les valeurs de cette composante sont très dispersées pour de faibles valeurs de l’aire  $S^p$ , mais convergent rapidement vers la valeur macroscopique. Il a estimé que, pour être représentatif, le VER doit avoir une longueur caractéristique au moins égale à dix fois le diamètre de la plus grosse particule ;
- Chareyre (2003) a réalisé des essais pour vérifier l’unicité du comportement macroscopique d’échantillons numériques composés de disques. Plusieurs échantillons de même granulométrie, de même nombre de particules, de même compacité, de mêmes paramètres locaux sont soumis à des essais de compression biaxiaux. Il a constaté que la dispersion des comportements macroscopiques

des échantillons testés diminue quand le nombre de particules augmente. Une valeur d'écart-type de  $1^\circ$  sur la valeur de l'angle de frottement interne est obtenue pour des échantillons composés de 4000 grains, ce qui est jugé satisfaisant. L'auteur a estimé qu'avec un échantillon rectangulaire, d'élançement égal à 2, composé de grains de taille unique, cela correspond à un échantillon de taille  $45 \times 90$  grains.



**FIGURE 2.2** – Déformation homogénéisée  $\delta\bar{\varepsilon}_{11}$  en fonction de l'aire  $S^p$  du domaine sur lequel l'opération d'homogénéisation est effectuée (Calvetti *et al.*, 1997).



**FIGURE 2.3** – Différents constituants élémentaires considérés dans les techniques de changement d'échelles :  
 (a) constituant élémentaire microscopique  
 (b), (c), (d) constituants élémentaires mésoscopiques considérés, respectivement, par Liao *et al.* (1997), par Sab (1997) et par Kuhn (1999).

## b) Echelle locale

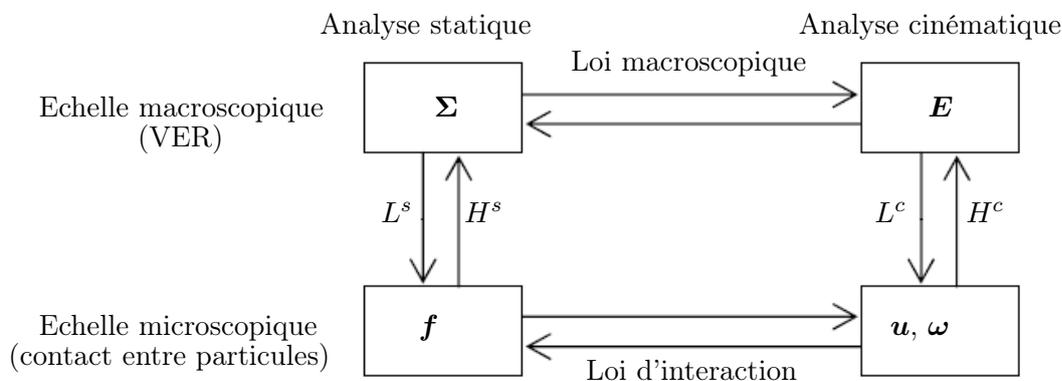
L'échelle locale est une échelle plus petite que l'échelle macroscopique, à laquelle l'hétérogénéité, appelée autrement *constituant élémentaire*, existe (particules, vides,

etc.). Habituellement, l'échelle locale définie pour les milieux granulaires se situe au niveau des particules, particulièrement, des particules en contact. Cette échelle est appelée *échelle microscopique*. En plus de cette échelle, l'on peut également introduire une échelle intermédiaire entre les échelles macroscopiques et microscopiques (Satake, 1978, 1992; Liao *et al.*, 1997; Sab, 1997; Kuhn, 1999). Cette échelle, appelée *échelle mésoscopique*, se situe au niveau d'*assemblages locaux de particules*. La figure 2.3 présente des différents constituants élémentaires considérés dans les techniques de changement d'échelles pour les milieux granulaires.

Les techniques de changement d'échelles micro-macro et méso-macro existant dans la littérature sont brièvement présentées dans la suite.

## 2.3 Changement d'échelles micro-macro

La figure 2.4 illustre le schéma général pour une technique de changement d'échelles micro-macro dans les milieux granulaires. Les variables statique et cinématique macroscopiques sont, respectivement, la contrainte  $\Sigma$  et la déformation  $E$ . Les variables statique et cinématique microscopiques sont, respectivement, la force de contact  $f$  et le déplacement des particules (translation  $u$  et rotation  $\omega$ ). Les variables statique et cinématique microscopiques sont reliées par une *loi d'interaction* au contact entre particules. Les passages entre les variables microscopique et macroscopique se font par des opérateurs d'*homogénéisation*  $H^s, H^c$  et de *localisation*  $L^s, L^c$ .



**FIGURE 2.4** – Schéma général d'une technique de changement d'échelles micro-macro.

Les sections suivantes sont consacrées à présenter brièvement cette technique de changement d'échelles. La première section présente des lois d'interaction au contact entre particules. La structure des matériaux granulaires à l'échelle microscopique sera décrite dans la deuxième section. Les troisième et quatrième sections analysent les passages entre les variables microscopiques et macroscopiques. La dernière section présente quelques résultats issus des homogénéisations élastiques.

### 2.3.1 Loi d'interaction entre particules

Dans le cadre de ce travail, nous présentons deux lois d'interaction simples usuellement adoptées dans la littérature pour modéliser le comportement des matériaux granulaires. Ce sont les lois d'interaction élastiques (linéaire ou non-linéaire) unilatérales avec frottement de Coulomb.

La force de contact est reliée au déplacement relatif au contact par une loi force-déplacement. Cette loi peut être la loi élastique linéaire ou la loi élastique non-linéaire proposée par Mindlin et Deresiewicz (1953) :

- la loi élastique linéaire s'écrit sous la forme :

$$\delta f_N = k_N \delta c_N, \quad (2.1)$$

$$\delta f_T = k_T \delta c_T, \quad (2.2)$$

où :

- $\delta f_N$  et  $\delta f_T$  sont respectivement les composantes normale et tangentielle de l'incrément de force de contact ;
- $k_N$  et  $k_T$  sont respectivement les rigidités normale et tangentielle du contact ;
- $\delta c_N$  et  $\delta c_T$  sont respectivement les composantes normale et tangentielle de l'incrément de déplacement relatif au contact.
- la loi élastique non-linéaire, qui est valable seulement pour des particules sphériques et qui s'écrit sous la forme :

$$\delta f_N = \left(\frac{3D}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{G_m}{1-\nu_m}\right)^{2/3} (f_N)^{1/3} \delta c_N, \quad (2.3)$$

$$\delta f_T = \left(\frac{3D}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{G_m}{1-\nu_m}\right)^{2/3} \frac{2(1-\nu_m)}{2-\nu_m} \left(1 - \frac{f_T}{f_T \tan \phi_\mu}\right)^{1/3} \delta c_T, \quad (2.4)$$

où  $G_m$  et  $\nu_m$  sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau constitutif des particules et  $\phi_\mu$  est l'angle de frottement intergranulaire.

La figure 2.5(a) représente la condition d'unilatéralité qui s'écrit :

$$f_N = 0, \quad \delta c_N \geq 0 \Rightarrow \delta f_N = 0. \quad (2.5)$$

La figure 2.5(b) montre la loi de frottement de Coulomb qui s'écrit :

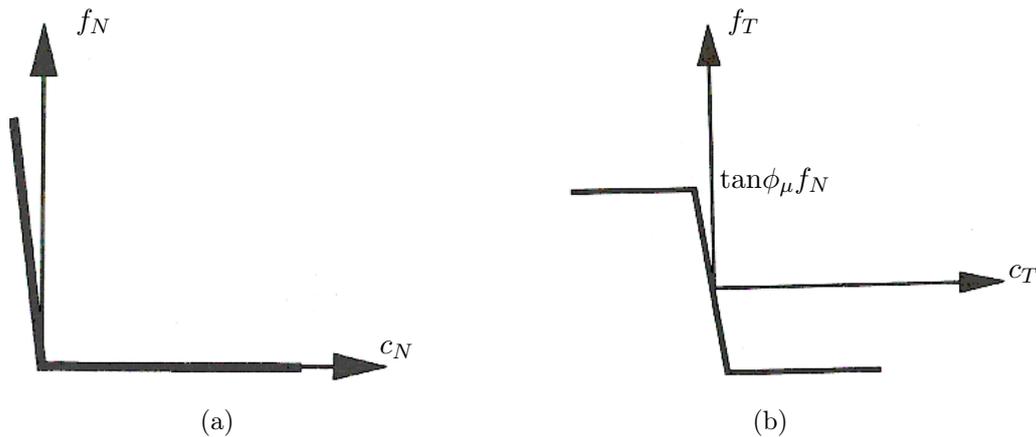
$$|f_T| \leq \tan \phi_\mu f_N. \quad (2.6)$$

### 2.3.2 Description géométrique

La description géométrique microscopique d'une structure granulaire nécessite généralement deux types de variables : la première décrivant la densité de l'arrangement et la seconde décrivant la distribution des orientations de contacts.

#### 2.3.2.1 Densité de l'arrangement

A l'échelle macroscopique, la densité de l'arrangement des particules d'un matériau granulaire est définie par l'indice des vides, noté  $e$  ou bien la porosité, notée



**FIGURE 2.5** – (a) Condition d'unilatéralité et b) loi de frottement de Coulomb (Cambou et Jean, 2001).

$P$ , ou la compacité, notée  $n$ . A l'échelle microscopique, le nombre de coordination,  $\bar{N}$ , défini comme le nombre moyen de contacts par particule, constitue une mesure de la densité de l'arrangement du matériau. En effet, le nombre de coordination  $\bar{N}$  est lié aux degrés de liberté des particules puisque plus sa valeur est grande, moins les particules peuvent se déplacer. La corrélation entre la compacité et le nombre de coordination peut être facilement exprimée de façon théorique, pour certains cas simples tels que les arrangements réguliers de particules cylindriques ou sphériques. Cependant, pour des arrangements irréguliers, cette corrélation ne peut qu'être formulée de façon empirique, sans tenir compte de la taille et de la forme des particules.

– Field (1963) a proposé la relation suivante entre  $\bar{N}$  et  $e$  :

$$\bar{N} = \frac{12}{1 + e}. \quad (2.7)$$

– Chang *et al.* (1990) ont donné, à partir d'une compilation de résultats expérimentaux, la relation suivante entre  $\bar{N}$  et  $e$  qui est jugée satisfaisante dans la plage  $0.38 < e < 0.87$  :

$$\bar{N} = 13.28 - 8e. \quad (2.8)$$

### 2.3.2.2 Anisotropie de l'arrangement

L'anisotropie de l'arrangement entre particules peut être décrite à partir de différentes variables locales. Ces variables locales peuvent être l'orientation de la plus grande longueur de chaque particule, notée  $\mathbf{b}^p$ , l'orientation de la normale au contact, notée  $\mathbf{n}^k$ , l'orientation du vecteur de branche de contact joignant les centres de gravité des deux particules en contact, noté  $\mathbf{l}^k$ . Satake (1982) a proposé les tenseurs de texture suivants (équations (2.9), (2.10), (2.11), (2.12)) pour décrire l'anisotropie de l'arrangement du milieu granulaire.

– le tenseur de texture de contact :

$$H_{ij} = \frac{1}{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} n_i^k n_j^k, \quad (2.9)$$

– le tenseur de texture de branche :

$$H'_{ij} = \frac{1}{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} l_i^k l_j^k, \quad (2.10)$$

– le tenseur de texture combiné :

$$H''_{ij} = \frac{1}{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} n_i^k l_j^k, \quad (2.11)$$

– le tenseur de texture d'orientation des particules :

$$H'''_{ij} = \frac{1}{N_p} \sum_{p=1}^{N_p} b_i^p b_j^p, \quad (2.12)$$

où  $N_c$ ,  $N_p$  sont, respectivement, le nombre de contacts et le nombre de particules.

Il est à noter que les tenseurs  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{H}'''$  sont symétriques, alors que le tenseur  $\mathbf{H}''$  ne l'est pas. Dans le cas des particules sphériques, les trois tenseurs  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{H}''$  coïncident.

Kanatani (1981) a proposé le tenseur de structure  $\mathbf{F}$  qui régit la densité de probabilité de contact,  $P(\mathbf{n})$  :

$$P(\mathbf{n}) = F_{ij} n_i n_j. \quad (2.13)$$

On remarque qu'il existe une relation entre le tenseur de structure  $\mathbf{F}$  et le tenseur de texture de contact  $\mathbf{H}$  :

$$\begin{cases} H_{ij} = \frac{\pi}{4} (F_{kk} \delta_{ij} + 2F_{ij}) & \text{en 2D,} \\ H_{ij} = \frac{\pi}{15} (F_{kk} \delta_{ij} + 2F_{ij}) & \text{en 3D,} \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker (voir l'annexe A).

D'autres descriptions tensorielles de la texture du milieu granulaire ont été proposées par Horne (1965), Oda (1972b) et Cambou et Sidoroff (1985). Les tenseurs de texture sont définis à partir de la densité de probabilité de contact  $P(\mathbf{n})$  :

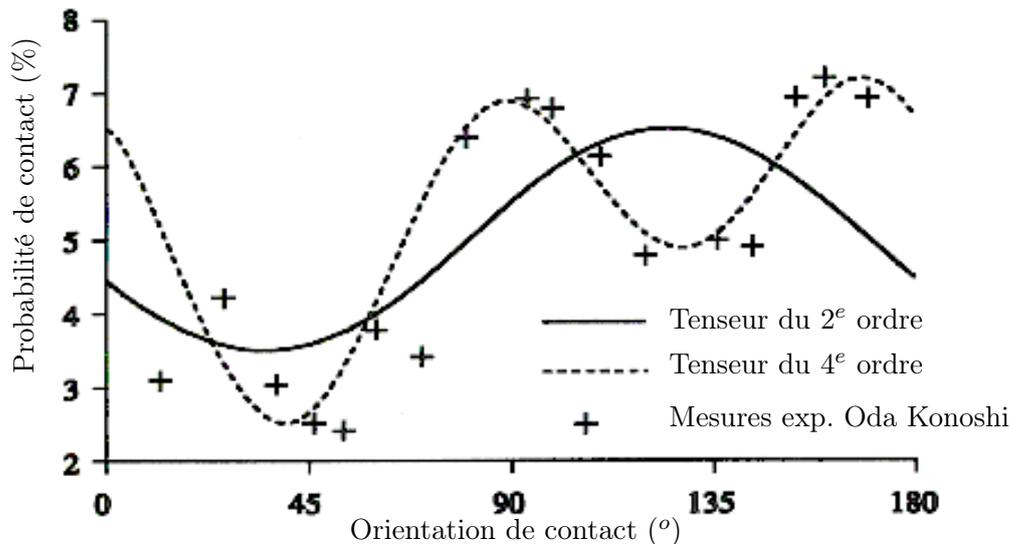
$$P(\mathbf{n}) = C_o + C_{ij} n_i n_j + C_{ijkl} n_i n_j n_k n_l + \dots \quad (2.15)$$

Cambou et Sidoroff (1984) ont montré que la description de la distribution de l'orientation de contacts  $P(\mathbf{n})$  à partir d'un tenseur de texture du deuxième ordre n'est pas suffisante pour un milieu qui a été soumis à un chargement complexe dans son histoire. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer un tenseur de texture du quatrième ordre (figure 2.6).

La densité de probabilité  $P(\mathbf{n})$  doit vérifier la condition :

$$\int_{\Omega} P(\mathbf{n}) d\Omega = 1 \quad (2.16)$$

où  $\Omega$  est la sphère d'unité,  $d\Omega$  est l'angle solide infinitésimal associé à la direction de contact  $\mathbf{n}$ .



**FIGURE 2.6** – Distribution de l'orientation de contacts dans un matériau granulaire bidimensionnel après un essai de cisaillement. Descriptions par un tenseur de texture du 2<sup>e</sup> ordre et du 4<sup>e</sup> ordre (Cambou et Sidoroff, 1984).

Le développement de l'expression (2.15), limité au tenseur de texture du deuxième ordre, conduit à la relation suivante :

$$\begin{cases} P(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi} + C_{ij}n_i n_j & \text{en 2D,} \\ P(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} + C_{ij}n_i n_j & \text{en 3D.} \end{cases} \quad (2.17)$$

### 2.3.3 Description des variables statiques

L'objectif de cette section est de décrire des relations entre les variables statiques microscopique et macroscopique, c'est-à-dire le tenseur de contrainte macroscopique  $\Sigma$  à partir de la connaissance des forces de contact  $\mathbf{f}^k$  et la distribution des forces de contact à partir de la connaissance de la contrainte macroscopique.

#### 2.3.3.1 Opérateur d'homogénéisation statique

Différents opérateurs d'*homogénéisation statique* ont été proposés pour exprimer le tenseur de contrainte macroscopique dans un milieu granulaire en fonction des forces de contact entre particules. Trois méthodes principales ont été utilisées pour déterminer le tenseur de contrainte macroscopique : la méthode proposée par (Weber, 1966) consistant à considérer la résultante des efforts sur une facette séparant deux parties du milieu, la méthode basée sur l'analogie avec les milieux continus proposée par (Drescher et Jong, 1972; Cundall et Strack, 1979; Christophersen *et al.*, 1981; Moreau, 1997) et enfin la méthode consistant à identifier les puissances virtuelles des efforts intérieurs du milieu granulaire et d'un milieu continu. Les différents tenseurs des contraintes obtenus avec ces trois méthodes sont très similaires mais

pas identiques. Nous nous limitons à présenter ici la deuxième méthode qui s'inspire de résultats valables en mécanique des milieux continus pour définir le tenseur de contrainte macroscopique dans les milieux granulaires.

Très souvent, le milieu granulaire est supposé en équilibre en l'absence de force de volume. Par contre, Moreau (1997) ne fait pas cette hypothèse et le tenseur de contrainte est défini pour des milieux en évolution dynamique. Une telle démarche est plus compliquée que la première et dépasse le cadre de la présentation qui en est faite ici.

Dans un milieu continu en équilibre, en l'absence de force de volume, le tenseur de contrainte doit vérifier l'équation :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (2.18)$$

La moyenne des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  sur une partie  $W$  du milieu continu de volume  $V_W$  et de frontière  $\partial W$  s'écrit :

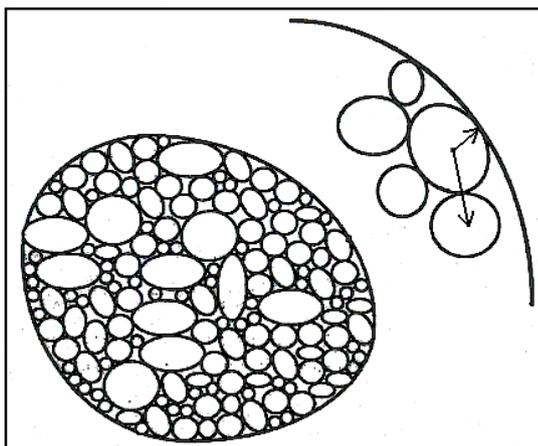
$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V_W} \int_W \sigma_{ij} dV. \quad (2.19)$$

En utilisant le théorème Gauss-Ostrogradski et l'équation (2.18), l'intégrale volumique dans (2.19) peut être transformée en l'intégrale surfacique :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V_W} \int_{\partial W} f_i x_j dS, \quad (2.20)$$

où :

- $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$  est la densité surfacique d'efforts extérieurs exercée sur la frontière  $\partial W$  de vecteur unitaire normal extérieur  $\boldsymbol{n}$  ;
- $\boldsymbol{x}$  est le vecteur position des points sur la frontière  $\partial W$  par rapport à une origine arbitraire  $O$ .



**FIGURE 2.7** – Volume de définition de la contrainte dans un milieu granulaire, dont la frontière passe par tous les points de contact entre les particules extérieures et intérieures du volume (Dedecker, 1999).

Pour un volume granulaire  $W$  dont la frontière passe par tous les points de contact entre les particules situées aux limites intérieure et extérieure du volume (figure 2.7), les efforts sont des forces de contact exercées ponctuellement par des

particules extérieures sur des particules intérieures. Dans ce cas, la relation (2.20) peut être écrite sous une forme discrète :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V_W} \sum_{k \in K_W^b} f_i^k x_j^k, \quad (2.21)$$

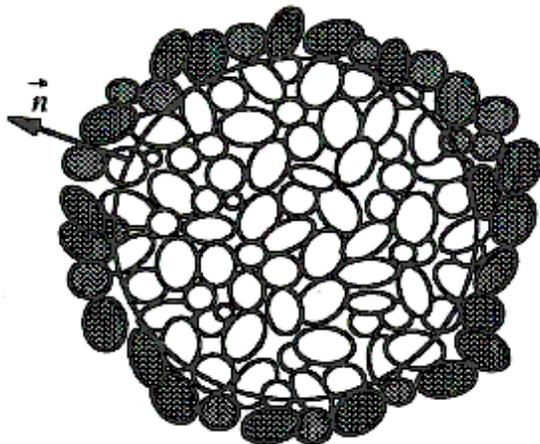
où  $K_W^b$  est l'ensemble de contacts situés sur la frontière du volume ;  $\mathbf{f}^k$  est la force au contact  $k$  et  $\mathbf{x}^k$  est le vecteur position du point de contact  $k$ .

Il est également possible d'exprimer la dernière relation par une sommation sur l'ensemble des contacts entre particules en utilisant la condition d'équilibre statique en force sur chaque particule dans la partie  $W$  du milieu. Cela conduit à l'expression suivante du tenseur de contrainte  $\Sigma$  :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V_W} \sum_{k \in K_W^i \cup K_W^b} f_i^k l_j^k = \frac{1}{V_W} \sum_{k \in K_W} f_i^k l_j^k, \quad (2.22)$$

où :

- $K_W^i$  est l'ensemble de contacts internes des couples de particules intérieures ;
- $K_W$  est l'ensemble de contacts dans la partie  $W$  ( $K_W = K_W^i \cup K_W^b$ ) ;
- le vecteur branche  $\mathbf{l}^k$ , pour un contact interne, joint deux points de repérage de deux particules en contact, et pour un contact externe, joint le point de repérage de la particule intérieure au point de contact (figure 2.7).



**FIGURE 2.8** – Volume de définition de la contrainte dans un milieu granulaire, dont la frontière coupe certaines particules dans le volume. Les particules en gras sont les particules extérieures du volume (Cambou et Jean, 2001).

Il est à noter que sous l'hypothèse d'équilibre statique des particules, le tenseur de contrainte défini par (2.22) est symétrique et ne dépend pas du choix des points de repérage dans les particules et de l'origine du repère  $O$ . Cependant, ce n'est pas le cas lorsque cette hypothèse n'est pas satisfaite.

Si l'on considère que la frontière du volume analysé ne passe pas par les points de contact mais coupe certaines particules (figure 2.8), on distingue alors deux ensembles de contact : l'ensemble de contacts internes (contact entre deux particules intérieures) et l'ensemble de contacts externes (contact entre une particule coupée

par la frontière et une particule extérieure). Si seul l'ensemble de contacts internes est pris en compte dans l'expression (2.22), le tenseur de contrainte  $\Sigma$  obtenu n'est plus symétrique. Cependant, si le nombre de contacts externes est petit devant le nombre de contacts internes, la partie antisymétrique de  $\Sigma$  devient négligeable et le tenseur  $\Sigma$  peut alors être considéré comme symétrique, en première approximation.

Comme montré dans la section 1.2.1, l'orientation de contacts est une variable de base dans la description des forces de contact. Par conséquent, il est raisonnable de considérer la valeur moyenne des forces de contact  $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{n})$  pour une direction de contact donnée  $\mathbf{n}$  comme la variable locale statique. De plus, si la distribution des tailles des particules, de moyenne  $\bar{D}$ , est supposée non corrélée à celle des forces de contact, l'on peut écrire l'opérateur d'homogénéisation statique  $H^s$  sous la forme continue suivante :

$$H^s : \quad \Sigma_{ij} = N_o \bar{D} \int_{\Omega} P(\mathbf{n}) \bar{f}_i(\mathbf{n}) n_j d\Omega, \quad (2.23)$$

où  $N_o$  est le nombre de contacts par unité de volume.

### 2.3.3.2 Opérateur de localisation statique

La définition d'un opérateur de *localisation statique* permettant de définir la force de contact à partir du tenseur de contrainte macroscopique est plus délicate que l'opérateur d'*homogénéisation statique*. En effet, les forces de contact étant très variables, comme analysé dans la section 1.2.1, elles ne peuvent pas être définies uniquement par la connaissance de la contrainte appliquée. Par conséquent, seule la détermination d'une valeur moyenne des forces de contact pour une direction  $\mathbf{n}$  donnée est possible (Weber, 1966; Delyon *et al.*, 1990).

De nombreuses approches ont été proposées pour définir l'opérateur de localisation statique (Rothenburg et Bathurst, 1989; Bathurst et Rothenburg, 1990; Chang et Liao, 1994; Chang *et al.*, 1995; Cambou *et al.*, 1995; Ouadfel et Rothenburg, 1999; Magoariéc *et al.*, 2008). Parmi ces définitions, nous ne retenons ici que deux définitions : l'une basée sur l'hypothèse proposée par Chang (Chang et Liao, 1994; Chang *et al.*, 1995), et l'autre basée sur le théorème de représentation (Cambou *et al.*, 1995; Emeriault et Cambou, 1996; Magoariéc *et al.*, 2008).

#### a) Opérateur basé sur l'hypothèse proposée par Chang

Cette hypothèse consiste à déterminer la distribution des forces de contact dans un milieu granulaire en fonction du tenseur de contrainte macroscopique  $\Sigma$ , de l'orientation de contact  $\mathbf{n}$ , et d'un tenseur  $\mathbf{A}$  lié à la structure du milieu (Chang et Liao, 1994; Chang *et al.*, 1995). L'opérateur  $L_1^s$  proposé est écrit sous la forme :

$$L_1^s : \quad \bar{f}_i(\mathbf{n}) = \Sigma_{ij} A_{jk} n_k. \quad (2.24)$$

En remplaçant  $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{n})$  dans la relation (2.23) par la relation (2.24), on a alors :

$$\Sigma_{ij} = N_o \bar{D} \int_{\Omega} P(\mathbf{n}) \Sigma_{ik} A_{kl} n_l n_j d\Omega. \quad (2.25)$$

Le développement de la relation (2.25) conduit à :

$$\delta_{mn} = N_o A_{mk} \left\{ \bar{D} \int_{\Omega} P(\mathbf{n}) n_k n_n d\Omega \right\}, \quad (2.26)$$

et si l'on introduit le tenseur de texture combiné  $\mathbf{H}''$  défini par (2.11) (sous une forme continue) on déduit que :

$$H''_{ij} = \overline{D} \int_{\Omega} P(\mathbf{n}) n_k n_n d\Omega. \quad (2.27)$$

La combinaison des relations (2.26) et (2.27) permet de définir le tenseur  $\mathbf{A}$  comme l'inverse du tenseur  $N_o \mathbf{H}''$ , i.e.,

$$A_{mk} \{N_o H''_{kn}\} = \delta_{mn}, \quad (2.28)$$

où  $\delta$  est le tenseur unité.

### b) Opérateur basé sur le théorème de représentation

Dans l'approche proposée par Cambou *et al.* (1995), la variable locale statique considérée n'est plus la valeur moyenne des forces aux contacts suivant une direction donnée  $\mathbf{n}$ , mais est une variable prenant en compte l'anisotropie de distribution de contacts  $P(\mathbf{n})$  et ayant la dimension d'une contrainte :

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \frac{4\pi N_o \overline{D}}{3} P(\mathbf{n}) \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{n}). \quad (2.29)$$

Avec cette nouvelle variable statique, l'opérateur  $H^s$  exprimé dans la relation (2.23) devient :

$$\Sigma_{ij} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} F_i(\mathbf{n}) n_j d\Omega. \quad (2.30)$$

La détermination de l'opérateur de localisation statique se base sur le théorème de représentation générale de Spencer (Spencer, 1987). L'anisotropie du milieu est décrite par un tenseur purement déviatoire  $\mathbf{e}$ . Les hypothèses suivantes sont faites :  $\mathbf{F}(\mathbf{n})$  est linéaire en  $\Sigma$  et  $\mathbf{e}$ , isotrope en  $\Sigma$ ,  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{n}$ . L'opérateur de localisation doit satisfaire la relation (2.30) quelle que soit  $\Sigma$ . L'opérateur de localisation statique  $L_2^s$  obtenu par cette approche s'écrit sous la forme suivante (Emeriault et Cambou, 1996) :

$$L_2^s : F_i(\mathbf{n}) = \mu \Sigma_{ij} n_j + \frac{1-\mu}{2} (5n_u \Sigma_{uv} n_v - \Sigma_{kk}) n_i + \Sigma_{kk} [(n_u e_{uv} n_v) n_i - \frac{2}{5} e_{ij} n_j]. \quad (2.31)$$

Les paramètres intervenant dans l'opérateur  $L_2^s$  sont le tenseur de contrainte  $\Sigma$ , le tenseur d'anisotropie  $\mathbf{e}$  et  $\mu$ . Si l'on analyse le cas le plus simple où  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , le paramètre  $\mu$  a une influence importante sur la distribution des forces de contact :

- pour  $\mu = 0$ , la force de contact est purement normale ;
- pour  $\mu = 1$ , la force de contact est orientée dans la direction de  $\Sigma \mathbf{n}$ .

Il peut être aussi noté qu'une augmentation de  $\mu$  tend à accroître la valeur de la force tangentielle tout en diminuant la force normale. Emeriault (1995) a également montré, à partir de considérations physiques simples, basées sur la statique locale de deux particules en contact, que :

$$\begin{cases} 0 < \mu < \frac{5}{3} & \text{en 3D,} \\ 0 < \mu < 2 & \text{en 2D.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Le tenseur de contrainte  $\Sigma$  peut être décomposé en deux parties  $\Sigma^N$  and  $\Sigma^T$  correspondant respectivement aux contributions des forces normales et tangentielles. Sidoroff *et al.* (1993) ont trouvé la relation suivante entre le déviateur  $\mathbf{S}^N$  de  $\Sigma^N$  et le déviateur  $\mathbf{S}$  de  $\Sigma$  :

$$\mathbf{S}^N = \left(1 - \frac{3\mu}{5}\right) \mathbf{S}. \quad (2.33)$$

Le paramètre  $\mu$  représente donc la fraction du déviateur du tenseur de contrainte supportée par les forces normales aux contacts.

Magoaric *et al.* (2008) ont suivi la même démarche pour formuler un opérateur de localisation statique dans lequel le tenseur de texture de branche  $\mathbf{H}'$ , défini par (2.10), est introduit pour décrire l'anisotropie des milieux granulaires, en particulier pour les milieux composés de particules non-sphériques. Pour cette approche, la variable statique considérée est  $\mathbf{F}(\mathbf{n}) = P(\mathbf{n})\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{n})$ . L'opérateur de localisation statique obtenu dans ce cas s'écrit :

$$L_3^s : \quad \mathbf{F}(\mathbf{n}) = g(\Sigma, \mathbf{n}) + h(\Sigma, \mathbf{H}', \mathbf{n}), \quad (2.34)$$

où :

$g(\Sigma, \mathbf{n})$  est la partie liée à l'isotropie du milieu :

$$g(\Sigma, \mathbf{n}) = \bar{l}\Sigma\mathbf{n} + \alpha_2\mathbf{I}_2(\Sigma, \mathbf{n}) \quad (2.35)$$

$h(\Sigma, \mathbf{H}', \mathbf{n})$  est la partie liée à l'anisotropie du milieu :

$$g(\Sigma, \mathbf{H}', \mathbf{n}) = \sum_{i=3}^6 \alpha_i \mathbf{I}_i(\Sigma, \mathbf{H}', \mathbf{n}) \quad (2.36)$$

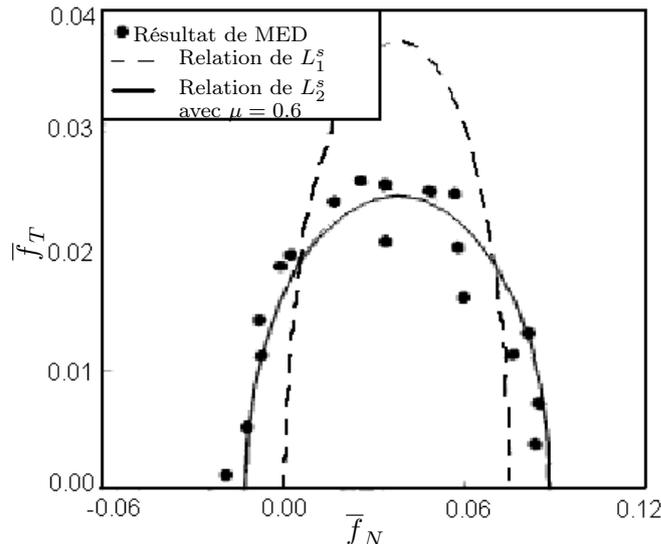
où :

- $\bar{l}$  est une longueur caractéristique à définir ;
- les constantes  $\alpha_i$  sont les paramètres caractérisant la distribution ;
- $\mathbf{I}_i$  sont des invariants détaillés dans Magoaric *et al.* (2008).

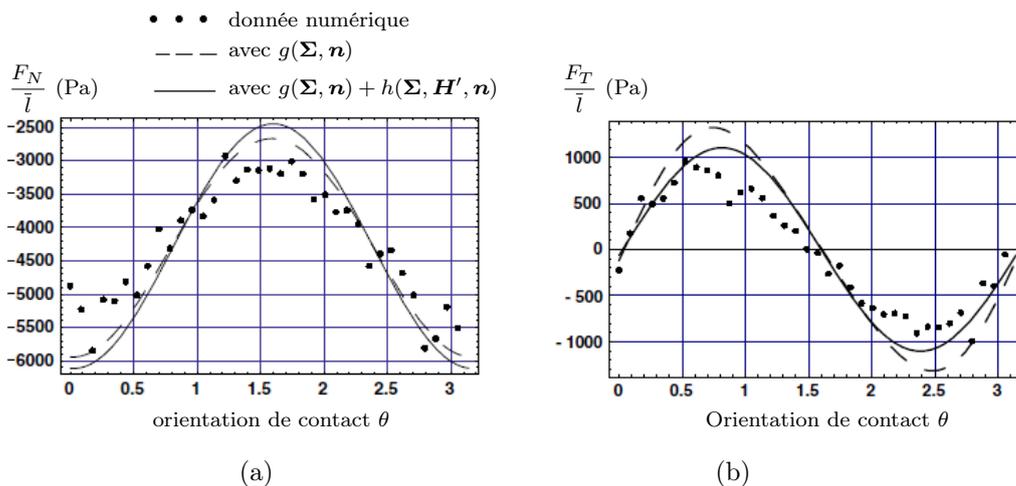
### c) Comparaison des différents opérateurs de localisation statique

Emeriault et Chang (1997) ont comparé les opérateurs de localisation statique  $L_1^s$  (2.24) et  $L_2^s$  (2.31) avec le résultat obtenu avec un assemblage isotrope en utilisant la méthode des éléments discrets (MED). La figure 2.9 souligne que l'opérateur  $L_1^s$  (2.24) surestime la gamme des forces tangentielles et sousestime la gamme des forces normales. L'opérateur  $L_2^s$  (2.31), avec la flexibilité du paramètre  $\mu$ , donne une description satisfaisante avec  $\mu = 0.6$ . Ce résultat est en accord avec celui de Mahboubi (1995) selon lequel une valeur de  $\mu$  proche de 0.7 donne une bonne description des distributions des forces de contact.

La figure 2.10 présente les distributions numériques des forces normales et tangentielles de contact dans un assemblage anisotrope et de polygones allongés simulé par Nougier-Lehon *et al.* (2005), comparées avec celles obtenues avec l'opérateur  $L_3^s$  (2.34). Les distributions des forces de contact sont d'abord décrites uniquement par la partie isotrope  $g(\Sigma, \mathbf{n})$  et puis par les deux parties isotrope et anisotrope  $g(\Sigma, \mathbf{n}) + h(\Sigma, \mathbf{H}', \mathbf{n})$ . On trouve que l'introduction de la partie anisotrope dans



**FIGURE 2.9** – Comparaison des opérateurs de localisation statique  $L_1^s$  (2.24) et  $L_2^s$  (2.31) avec le résultat de la méthode MED pour un matériau isotrope (Emeriault et Chang, 1997).



**FIGURE 2.10** – Distributions numériques des forces de contact pour un assemblage anisotrope de polygones allongés et distributions obtenues par l'opérateur  $L_3^s$  (2.34) (a) pour les forces normales et (b) pour les forces tangentielles (Magoaric *et al.*, 2008).

l'opérateur, par l'intermédiaire du tenseur de texture de branche  $\mathbf{H}'$ , donne une meilleure description des distributions des forces de contact pour un milieu granulaire anisotrope.

### 2.3.4 Description des variables cinématiques

Si l'on considère l'assemblage granulaire comme étant composé des solides rigides en interaction, les variables cinématiques à l'échelle microscopique sont :

- $\mathbf{u}^m$  : le déplacement du centre de gravité de la particule  $m$  ;
- $\boldsymbol{\omega}^m$  : la rotation de la particule  $m$ .

Contrairement à la description des variables statiques, la description des variables cinématiques apparaît plus difficile. Le passage entre les variables cinématiques microscopiques et macroscopiques a fait l'objet de différentes approches dans la littérature. Ces approches se différencient essentiellement par les variables microscopiques considérées : le déplacement relatif en contact, le déplacement relatif des centres de particules en contact, et le déplacement relatif des centres de particules voisines (en contact ou non).

### 2.3.4.1 Opérateur d'homogénéisation cinématique

La formulation du tenseur des déformations d'un milieu granulaire en fonction des variables cinématiques microscopiques a été étudiée dans différentes approches dans la littérature (Cundall et Strack, 1979; ISSMFE, 1989; Bagi, 1996a; Kruyt et Rothenburg, 1996; Kuhn, 1997; Liao *et al.*, 1997; Cambou *et al.*, 2000; Bagi, 2006). Parmi ces approches, nous présentons dans les sections suivantes les approches proposées par ISSMFE (1989), Liao *et al.* (1997), Cambou *et al.* (2000) et Cambou *et al.* (1995).

#### a) Approche basée sur le principe de conservation de l'énergie

Cette approche a été initialement proposée dans ISSMFE (1989) en utilisant le principe de conservation de l'énergie pour le milieu granulaire. Ce principe exprime que l'énergie globale d'une partie  $W$  du milieu granulaire soumis à une sollicitation quasi-statique est égale à la sommation des énergies locales sur tous les contacts. Il s'écrit :

$$\Sigma_{ij}\delta E_{ij} = \frac{1}{V_W} \sum_{k \in K_W} f_i^k \delta c_i^k, \quad (2.37)$$

où  $\delta \mathbf{E}$  est l'incrément de déformation de la partie  $W$  et  $\delta \mathbf{c}^k$  est l'incrément de déplacement relatif au contact  $k$ .

La relation (2.37) peut être écrite sous la forme :

$$\Sigma_{ij}\delta E_{ij} = \frac{1}{V_W} \sum_{k \in K_W} \frac{f_i^k l_j^k l_j^k \delta c_i^k}{l_i^k l_l^k} = \frac{1}{V_W} \sum_{k \in K_W} (f_i^k l_j^k) \left( \frac{l_j^k \delta c_i^k}{l_l^k l_l^k} \right). \quad (2.38)$$

Si l'on suppose que les termes  $(f_i^k l_j^k)$  et  $\left( \frac{l_j^k \delta c_i^k}{l_l^k l_l^k} \right)$  sont non corrélés, la précédente relation peut être écrite :

$$\Sigma_{ij}\delta E_{ij} = \frac{1}{V_W} \sum_{k \in K_W} (f_i^k l_j^k) \frac{1}{N_c} \sum_{k \in K_W} \left( \frac{l_j^k \delta c_i^k}{l_l^k l_l^k} \right). \quad (2.39)$$

En utilisant l'expression de  $\Sigma$  dans (2.22) et en considérant que le tenseur  $\delta \mathbf{E}$  est symétrique, on obtient l'expression suivante pour l'opérateur d'homogénéisation cinématique  $H_1^c$  :

$$H_1^c : \quad \delta E_{ij} = \frac{1}{2N_c} \sum_{k \in K_W} \frac{l_j^k \delta c_i^k + l_i^k \delta c_j^k}{l_l^k l_l^k}. \quad (2.40)$$

Dedecker *et al.* (2000) ont montré, à partir d'une simulation numérique, que cette expression du tenseur des déformations n'est pas acceptable car l'hypothèse de non-corrélation des termes  $(f_i^k l_j^k)$  et  $\left(\frac{l_j^k \delta c_i^k}{l_i^k l_l^k}\right)$  n'est pas réaliste. Calvetti *et al.* (1997) ont donné la même conclusion à partir de résultats expérimentaux.

## b) Approche de la meilleure approximation (best fit method)

### b.1) Approche de Liao *et al.* (1997)

Cette approche est basée sur l'hypothèse que le champ de déplacement généré par le tenseur de déformation macroscopique  $\delta \mathbf{E}$  est la meilleure approximation du champ réel de déplacement relatif aux contacts entre particules.

Soit  $\delta \mathbf{A}$  le tenseur gradient de déplacement du milieu continu équivalent. Le champ de déplacement généré par  $\delta \mathbf{A}$  est donc :  $\delta \mathbf{A} \mathbf{x}$  où  $\mathbf{x}$  est le vecteur position du point considéré. Si toutes les particules subissent un déplacement coïncidant avec ce champ, le champ de déplacement relatif aux contacts est :  $\delta \mathbf{A} \mathbf{l}^k$  où  $\mathbf{l}^k$  est le vecteur de branche joignant les centres des particules en contact au contact  $k$ . Le champ réel de déplacement relatif aux contacts est, d'après (1.1),  $\delta \mathbf{c}^k$ . Cette hypothèse conduit donc à minimiser l'écart quadratique  $S$  entre ces deux champs définies sur un volume  $V$  dans lequel il existe  $N_c$  contacts. On obtient l'expression suivante pour l'écart  $S$ .

$$S = \sum_{k=1}^{N_c} [\delta A_{ij} l_j^k - \delta c_i^k] [\delta A_{ip} l_p^k - \delta c_i^k]. \quad (2.41)$$

La minimisation de  $S$  conduit à

$$\frac{\partial S}{\partial \delta A_{uv}} = 0, \quad (2.42)$$

et le développement de la relation (2.42) conduit à l'expression de  $\delta \mathbf{A}$  dont la partie symétrique est le tenseur de déformation  $\delta \mathbf{E}$  :

$$H_2^c : \quad \delta E_{ij} = \frac{1}{2N_c} \left[ G'_{nj} \sum_{k=1}^{N_c} \delta c_i^k l_n^k + G'_{ni} \sum_{k=1}^{N_c} \delta c_j^k l_n^k \right], \quad (2.43)$$

où  $\mathbf{G}$  est l'inverse du tenseur de texture de branche  $\mathbf{H}'$  défini par (2.10).

### b.2) Approche de Cambou *et al.* (2000)

Dans cette approche, les auteurs ont proposé de considérer le champ de déplacement relatif des centres des particules en contact au lieu du champ de déplacement relatif aux contacts dans la méthode de la meilleure approximation précédemment présentée. Le tenseur de déformation  $\delta \mathbf{E}$  obtenu avec le champ de déplacement relatif des centres des particules en contact est :

$$H_3^c : \quad \delta E_{ij} = \frac{1}{2N_c} \left[ G'_{nj} \sum_{k=1}^{N_c} \delta l_i^k l_n^k + G'_{ni} \sum_{k=1}^{N_c} \delta l_j^k l_n^k \right], \quad (2.44)$$

où  $\delta \mathbf{l}^k = \delta \mathbf{u}^m - \delta \mathbf{u}^n$  et  $\delta \mathbf{u}^m, \delta \mathbf{u}^n$  sont respectivement les déplacements des centres de particules  $m$  et  $n$  en contact.

De plus, les auteurs ont également proposé une autre formulation prenant en compte le déplacement relatif des centres des particules voisines qui ne sont pas nécessairement en contact. Ceci est dû au fait que, la déformation globale dans un milieu granulaire va impliquer non seulement la cinématique des particules en contact mais aussi celle des particules voisines qui ne sont pas en contact. Les deux types de cinématique sont très différents : le déplacement relatif de rapprochement de deux particules rigides en contact est faible, ce qui n'est pas le cas pour des particules voisines qui ne sont pas en contact. Pour cela, il est nécessaire de définir la notion de particules voisines.

Cambou *et al.* (2000) ont défini que deux particules sont voisines si elles sont connectées par une branche dans un réseau de triangulation de Delaunay (Lee et Schachter, 1980; Guibas *et al.*, 1990). Pour définir le tenseur de déformation  $\delta \mathbf{E}$ , il suffit de remplacer les branches en contact  $\mathbf{l}^k$  dans la relation (2.44) par la totalité des branches  $\mathbf{l}^{k'}$ . Cela conduit à l'expression suivante :

$$H_4^c : \quad \delta E_{ij} = \frac{1}{2N'} \left[ G_{nj}^v \sum_{k'=1}^{N'} \delta l_i^{k'} l_n^{k'} + G_{ni}^v \sum_{k'=1}^{N'} \delta l_j^{k'} l_n^{k'} \right], \quad (2.45)$$

où  $N'$  est le nombre total des branches connectant des particules voisines,  $\mathbf{G}^v = (\mathbf{H}^v)^{-1}$  avec  $\mathbf{H}^v$  un nouveau tenseur de texture de branche défini par :

$$H_{ij}^v = \frac{1}{N'} \sum_{k'=1}^{N'} l_i^{k'} l_j^{k'}. \quad (2.46)$$

### c) Approche de Cambou *et al.* (1995)

La variable cinématique locale considérée dans l'approche proposée par Cambou *et al.* (1995) est homologue à une déformation :

$$\delta \mathbf{U}(\mathbf{n}) = \frac{3}{4\pi D} \delta \bar{\mathbf{c}}(\mathbf{n}). \quad (2.47)$$

Le principe de conservation de l'énergie exprimé dans (2.37) peut être réécrit avec les nouvelles variables locales considérées sous la forme

$$\Sigma_{ij} \delta E_{ij} = \int_{\Omega} F_i(\mathbf{n}) \delta U_i(\mathbf{n}). \quad (2.48)$$

En introduisant (2.31) dans (2.48), la relation obtenue doit être vérifiée quelle que soit  $\Sigma$ , d'où l'opérateur d'homogénéisation cinématique  $H_c^5$  :

$$H_c^5 : \quad \delta E_{ij} = \int_{\Omega} \left\{ \mu \delta U_i n_j + \frac{1-\mu}{2} (5n_i n_j - \delta_{ij}) \delta U_k n_k + \delta_{ij} \left[ n_a e_{uv} n_v n_k n_k - \frac{2}{5} \delta U_k e_{kl} n_l \right] \right\} d\Omega. \quad (2.49)$$

## d) Comparaison de différents opérateurs d'homogénéisation cinématique.

Cambou *et al.* (2000) ont évalué la qualité des différents opérateurs d'homogénéisation présentés ci-dessus en simulant un essai biaxial de compression sur un assemblage composé de particules cylindriques avec la méthode MED. La compression de l'échantillon s'effectue par incréments de déformation  $\delta E_{11}$  égaux approximativement à  $4 \cdot 10^{-3}$ . Les opérateurs d'homogénéisation cinématique  $H_1^c$  (2.40),  $H_2^c$  (2.43),  $H_3^c$  (2.44),  $H_4^c$  (2.45) sont appliqués sur chaque incrément de déformation.

La figure 2.11 présente les évaluations des incréments de déformation par les opérateurs  $H_1^c$  et  $H_2^c$ . Les incréments de déformation obtenus sont comparés avec ceux mesurés aux limites de l'échantillon. L'opérateur  $H_1^c$  donne des résultats très différents des incréments de déformation macroscopique. Cela confirme que l'hypothèse utilisée dans l'approche énergétique n'est pas réaliste. L'opérateur  $H_2^c$  donne des résultats meilleurs mais est loin d'être acceptable.

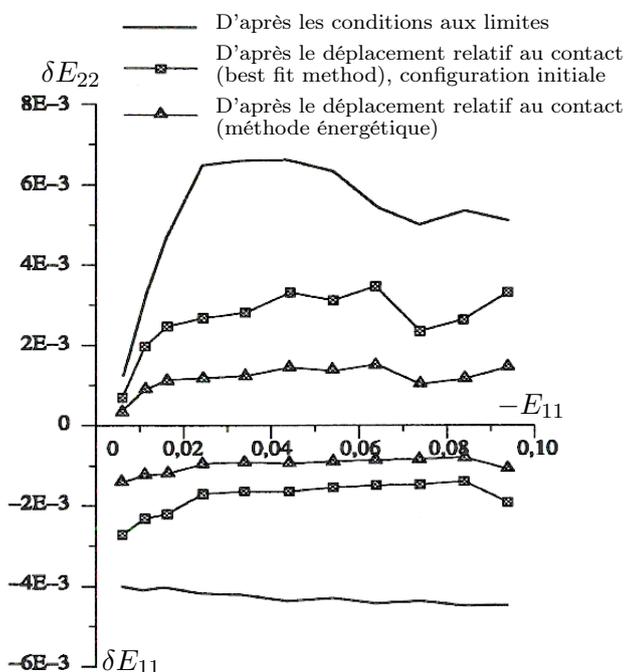


FIGURE 2.11 – Evaluations des incréments de déformation macroscopique à partir du déplacement relatif au contact (Cambou *et al.*, 2000).

La figure 2.12 présente les évaluations des incréments de déformation par l'opérateur  $H_3^c$ . Les particules en contact sont définies soit à la configuration initiale soit à la configuration finale de chaque incrément de déformation. On trouve que l'opérateur  $H_3^c$  donne des résultats significativement meilleurs que ceux obtenus avec les opérateurs  $H_1^c$  et  $H_2^c$ . Il reste cependant un écart important entre les incréments de déformation évalués et ceux mesurés aux limites. De plus, on note que les résultats obtenus avec l'opérateur  $H_3^c$  dépendent du choix de la configuration de référence pour définir les particules en contact.

La figure 2.13 présente l'évaluation des incréments de déformation à partir du déplacement relatif des centres de particules voisines. L'évaluation obtenue est en très bon accord avec la mesure aux limites de l'échantillon. De plus, cette évaluation

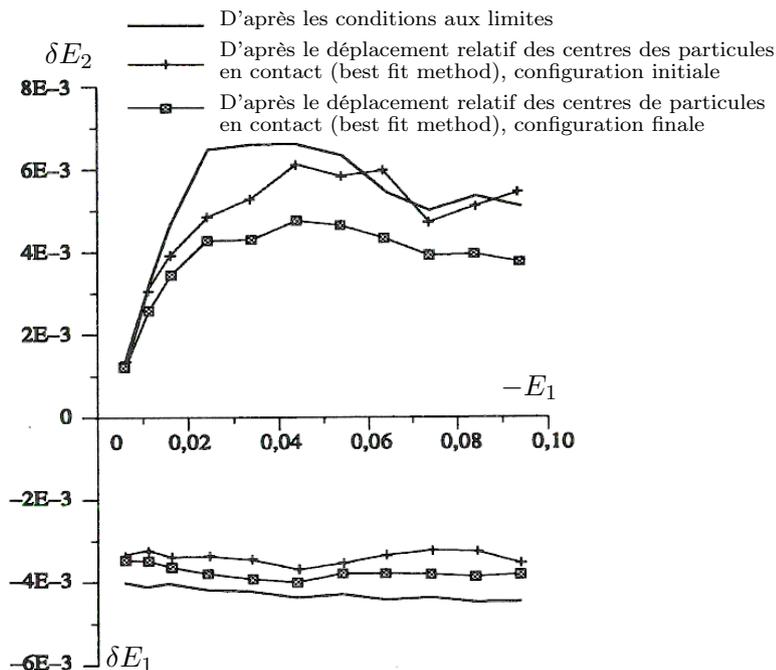


FIGURE 2.12 – Evaluations des incréments de déformation macroscopique à partir du déplacement relatif des centres de particules en contact (Cambou *et al.*, 2000).

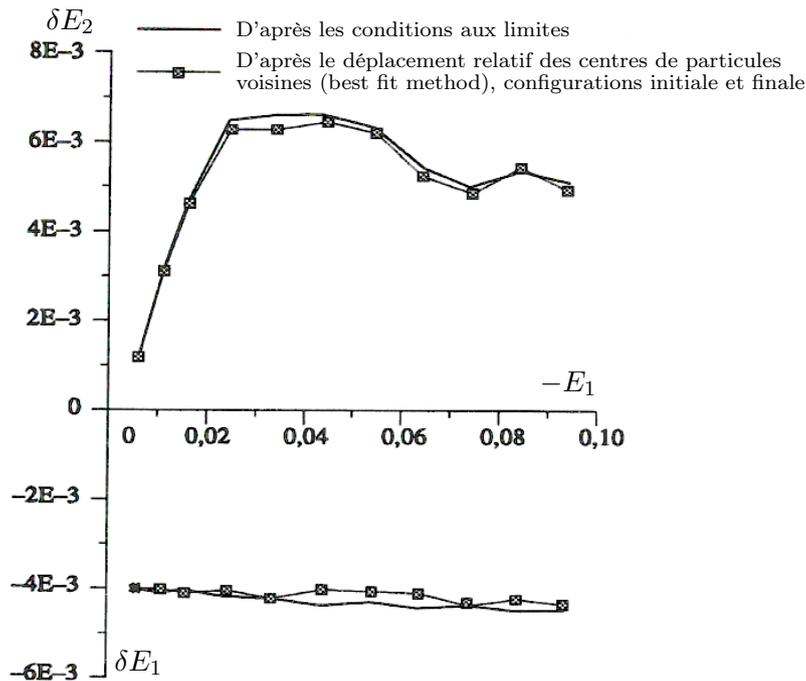
ne dépend pas du choix de la configuration de référence pour définir les particules voisines. Ces résultats mettent l'accent sur le fait qu'*une bonne évaluation des déformations dans un matériau granulaire nécessite de prendre en compte non seulement la cinématique des particules en contact mais aussi celle des particules voisines qui ne sont pas nécessairement en contact.* Bagi (2006) a trouvé des résultats similaires.

### 2.3.4.2 Opérateur de localisation cinématique

L'opérateur de localisation cinématique a pour but de déterminer une expression de la distribution des variables cinématiques locales. Similairement à la formulation de l'opérateur d'homogénéisation cinématique, les variables cinématiques microscopiques considérées peuvent être le déplacement relatif au contact ou le déplacement des centres des particules (en contact ou voisines). Nous présentons ici deux grandes options choisies pour définir l'opérateur de localisation cinématique : l'une basée sur l'hypothèse cinématique (Chang *et al.*, 1990; Chang et Misra, 1990; Chang et Liao, 1994; Jenkins, 1991; Walton, 1987) et l'autre basée sur le théorème de représentation (Cambou *et al.*, 1995; Emeriault et Cambou, 1996).

#### a) Opérateur basé sur l'hypothèse cinématique

L'hypothèse cinématique consiste à supposer que les particules dans un milieu granulaire subissent un déplacement coïncidant avec celui du milieu continue équivalent. Le déplacement relatif au contact entre deux particules obtenu avec cette



**FIGURE 2.13** – Evaluation des incréments de déformation macroscopique à partir du déplacement relatif des centres de particules voisines (Cambou *et al.*, 2000).

hypothèse est alors :

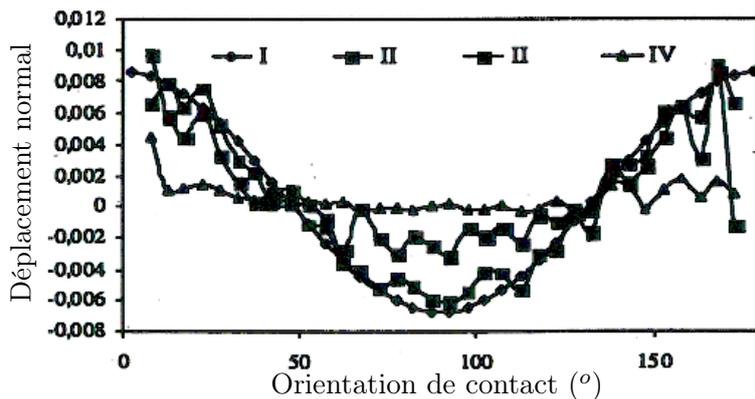
$$L_1^c : \quad \delta c_i^k = \delta E_{ij} l_j^k. \quad (2.50)$$

Cambou et Dubujet (2001) ont proposé de considérer le déplacement relatif des centres de particules voisines au lieu du déplacement relatif au contact dans l'opérateur  $L_1^c$  (2.50). Deux particules sont définies voisines si la distance entre ses centres est inférieure à une distance donnée. Les auteurs ont comparé les résultats donnés par cet opérateur avec les résultats obtenus dans une simulation numérique avec la méthode MED sur un échantillon de disques (figure 2.14). Il est clair que le déplacement relatif des centres de particules en contact ne peut pas être décrit par l'opérateur  $L_1^c$ . Cependant, cet opérateur donne des résultats acceptables si le déplacement relatif des centres de particules voisines est considéré.

### b) Opérateur basé sur le théorème de représentation

La variable cinématique locale  $\delta \mathbf{U}$  définie par (2.47) est supposée être linéaire avec la déformation macroscopique  $\delta \mathbf{E}$  et et tenseur d'anisotropie  $\mathbf{e}$ . L'opérateur de localisation cinématique  $L_2^c$  est établi en utilisant le théorème de représentation de Spencer pour la fonction  $\delta \mathbf{U}(\delta \mathbf{E}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$  isotrope en  $\delta \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{n}$  et la condition (2.49).

$$L_2^c : \quad \delta U_i(\mathbf{n}) = \frac{3}{4\pi} \left[ [1 + b(3\mu/5 - 1)] \delta E_{ij} n_j + b [n_u \delta E_{uv} n_v - \mu/5 \delta E_{kk}] n_i + \right. \\ \left. + c [2(\delta E_{uv} e_{vu}) n_i - 20 n_k e_{ku} \delta E_{uv} n_v - 5(\delta E_{kk}) e_{ij} n_j + 6 e_{ij} \delta E_{jk} n_k - 6 \delta E_{ij} e_{jk} n_k \right. \\ \left. - 15(n_u e_{uv} n_v) \delta E_{ij} n_j + 15(n_u \delta E_{uv} n_v) e_{ij} n_j + 35(n_u e_{uv} n_v)(n_u \delta E_{uv} n_v) n_i \right] \quad (2.51)$$



**FIGURE 2.14** – Comparaison des résultats donnés par l'opérateur  $L_1^c$  avec les résultats de MED considérant le déplacement relatif des centres de particules voisines avec différentes définitions des particules voisines (Cambou et Dubujet, 2001) :

$$\begin{aligned}
 \text{I} : \delta l_n(\mathbf{n}) &= n_i \delta E_{ij} l_j^{mn} \\
 \text{II} : \delta l_n(\mathbf{n}) &= \langle \delta u_n^m - \delta u_n^n \rangle \quad d(m, n) < 2.27 \times \bar{D} \\
 \text{III} : \delta l_n(\mathbf{n}) &= \langle \delta u_n^m - \delta u_n^n \rangle \quad d(m, n) < 1.136 \times \bar{D} \\
 \text{IV} : \delta l_n(\mathbf{n}) &= \langle \delta u_n^m - \delta u_n^n \rangle \quad d(m, n) < \bar{D}.
 \end{aligned}$$

Le paramètre  $b$  joue un rôle important sur les distributions des déplacements normaux et tangentiels : plus  $b$  augmente, moins la contribution des déplacements tangentiels à la déformation globale est importante (Emeriault, 1995). D'après Cambou (1993),  $b$  est lié à la rotation locale des particules et aux créations et pertes de contacts dans un matériau granulaire. La valeur  $b = 0$  correspond au cas de non rotation possible des particules. En se basant sur des considérations physiques simples, Emeriault (1995) a également montré que :

$$\begin{cases} -\frac{5}{3\mu} < b < \frac{5}{5-3\mu} & \text{en 3D,} \\ -\frac{2}{\mu} < b < \frac{2}{2-\mu} & \text{en 2D.} \end{cases} \quad (2.52)$$

Pour un milieu isotrope ( $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ ) et  $b = 0$ , l'opérateur  $L_2^c$  coïncide avec l'opérateur  $L_1^c$  défini par (2.50).

### 2.3.5 Homogénéisation élastique

Il existe plusieurs techniques d'homogénéisation élastique dans la littérature ayant pour objectif d'estimer les caractéristiques élastiques des matériaux granulaires. Ces approches se différencient essentiellement par le choix des opérateurs d'homogénéisation et de localisation. Nous présentons trois de ces approches pour illustrer la technique d'homogénéisation élastique utilisée dans les matériaux granulaires. Par simplicité, le milieu granulaire considéré est isotrope. La loi de contact utilisée est la loi élastique non-linéaire de Hertz-Mindlin présentée dans la section 2.3.1.

### 2.3.5.1 Homogénéisation de Voigt

La figure 2.15 présente le schéma d'homogénéisation de Voigt qui est un schéma d'homogénéisation en déformation imposée. L'opérateur de localisation cinématique  $L_1^c$  (2.50) et l'opérateur d'homogénéisation statique  $H^s$  (2.23) sont utilisés dans cette homogénéisation.

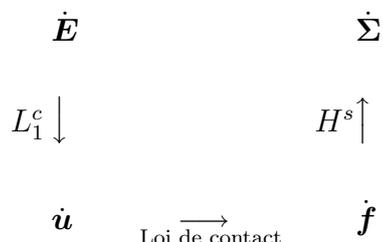


FIGURE 2.15 – Schéma d'homogénéisation en déformation imposée de Voigt.

Cette homogénéisation conduit aux caractéristiques élastiques suivantes :

$$E = E_o \frac{5 - 4\nu_m}{5 - 3\nu_m}, \quad (2.53)$$

$$\nu = \frac{\nu_m}{10 - 6\nu_m}, \quad (2.54)$$

$$E_o = \left( \frac{G_m N_o D^3}{\sqrt{6}(1 - \nu_m)} \right)^{2/3} \Sigma_m^{1/3}. \quad (2.55)$$

où  $\Sigma_m$  est la contrainte moyenne.

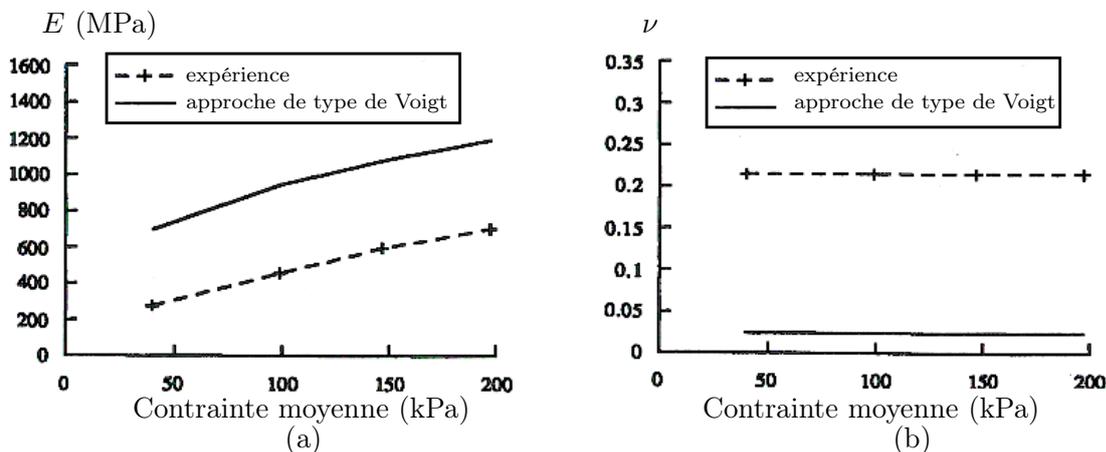


FIGURE 2.16 – Comparaison entre les caractéristiques élastiques observées expérimentalement et obtenues avec l'homogénéisation de type Voigt (a) pour le module de Young et (b) pour le coefficient de Poisson (Emeriault et Cambou, 1996).

Emeriault et Cambou (1996) ont comparé les caractéristiques élastiques observées expérimentalement par Hosri (1984) sur des matériaux composés de billes de verre et obtenues avec l'homogénéisation de type de Voigt (figure 2.16). Cette figure montre que l'approche de type Voigt donne un module de Young beaucoup plus

élevé que celui observé expérimentalement, et conduit à un coefficient de Poisson irréaliste. Cependant, la variation de ces caractéristiques élastiques avec la contrainte moyenne est raisonnable.

### 2.3.5.2 Homogénéisation de Emeriault et Cambou (1996)

Cette technique d'homogénéisation suit le schéma présenté figure 2.17 pour lequel l'opérateur de localisation statique  $L_2^s$  (2.31) et l'opérateur d'homogénéisation cinématique  $H_2^c$  (2.49) sont utilisés.

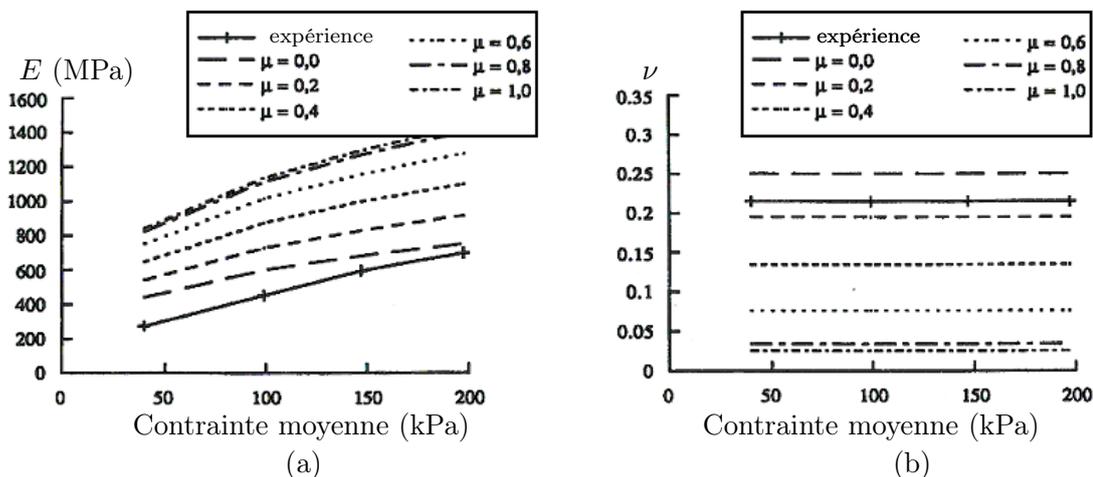
$$\begin{array}{ccc}
 \dot{\Sigma} & & \dot{E} \\
 L_2^s \downarrow & & H_2^c \uparrow \\
 \dot{f} & \xrightarrow{\text{Loi de contact}} & \dot{u}
 \end{array}$$

**FIGURE 2.17** – Schéma d'homogénéisation en contrainte imposée dans la technique de Emeriault et Cambou (1996).

Cette homogénéisation conduit à :

$$E = E_o \frac{1 - \nu_m}{2(1 - \nu_m)(1 - \mu) + \frac{\mu^2}{5}(5 - 4\nu_m)}, \quad (2.56)$$

$$\nu = \frac{2(1 - \nu_m)(5 - 10\mu) + 2\mu^2(5 - 4\nu_m)}{2(1 - \nu_m)(20 - 20\mu)}. \quad (2.57)$$



**FIGURE 2.18** – Comparaison entre les caractéristiques élastiques observées expérimentalement et obtenues avec l'homogénéisation de Emeriault et Cambou (1996) (a) pour le module de Young et (b) pour le coefficient de Poisson (Emeriault et Cambou, 1996).

La figure 2.18 présente la comparaison entre les caractéristiques élastiques observées expérimentalement et obtenues avec cette technique. Différentes valeurs de  $\mu$  sont étudiées. On voit qu'avec la flexibilité du paramètre  $\mu$ , les caractéristiques

élastiques sont plus proches des valeurs expérimentales. Une valeur de  $\mu$  approximativement égale à 0.0 donne les résultats les plus proches de ceux expérimentaux. Cependant, cette valeur n'est pas dans la gamme des valeurs de  $\mu$  donnant une bonne description des distributions des forces de contact, ce qui est discuté dans la section 2.3.3.

### 2.3.6 Difficultés et limitations des techniques de changement d'échelles micro-macro

La structure géométrique interne des matériaux granulaires est très complexe. La description de la structure interne, basée principalement sur la distribution de l'orientation de contacts par les tenseurs de texture présentés dans la section 2.3.2 semble une forte simplification. Ces tenseurs de texture, impliquant la réalisation d'une moyenne sur la totalité du volume élémentaire représentatif, entraînent la perte des informations locales sur la structure interne. Ces informations locales peuvent être la densité locale, l'arrangement des particules voisines, la géométrie des pores, etc.

L'opérateur d'homogénéisation statique est clairement établi. Par contre, l'opérateur de localisation statique paraît beaucoup moins bien établi. L'analyse présentée dans la section 2.3.3 montre que les opérateurs proposés par Cambou *et al.* (1995) et Magoariéc *et al.* (2008) donnent des descriptions satisfaisantes des forces de contact. Cependant, le nombre de paramètres dans ces opérateurs est important et les paramètres semblent difficiles à identifier.

L'opérateur d'homogénéisation cinématique fait l'objet de nombreuses discussions. La divergence entre eux réside principalement dans le choix de la variable cinématique locale. A l'échelle microscopique, on préfère souvent dans la littérature considérer le déplacement relatif au contact qui peut être relié à la force de contact par les lois de contact. Mais cette considération conduit à une déformation macroscopique irréaliste. La prise en compte du déplacement relatif des centres de particules en contact donne un meilleur résultat mais est loin d'être acceptable. L'analyse de Cambou *et al.* (2000) et Bagi (2006) souligne que la prise en compte du déplacement relatif des centres de particules voisines conduit seul à de bonnes estimations de la déformation macroscopique.

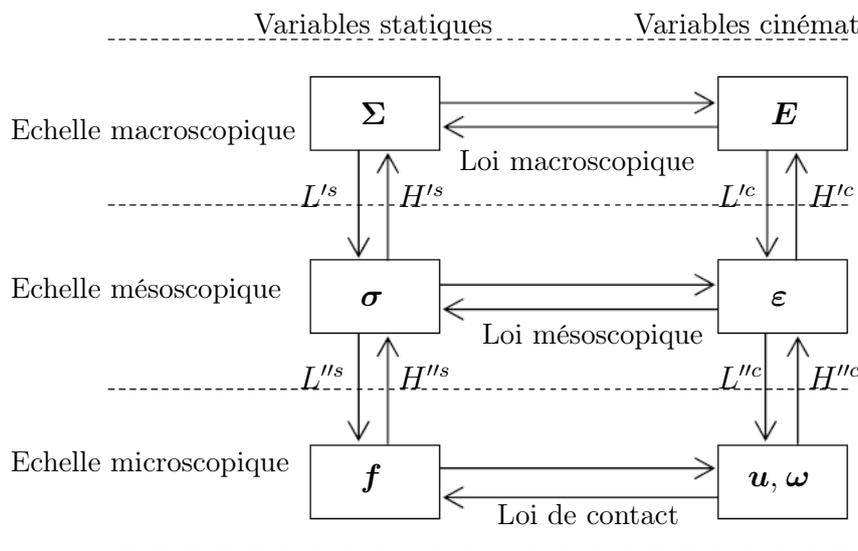
L'opérateur de localisation cinématique fait également l'objet de nombreuses discussions avec les mêmes difficultés que l'opérateur d'homogénéisation cinématique. L'opérateur établi par Cambou *et al.* (1995) qui est basé sur l'opérateur d'homogénéisation  $H_5^c$  (2.49), est discutable. Ceci provient du fait que la prise en compte du déplacement relatif au contact dans l'opérateur  $H_5^c$ , comme analysé ci-dessus, peut conduire à une mauvaise estimation de la déformation macroscopique. L'opérateur de localisation cinématique basé sur l'hypothèse cinématique ne donne de bonnes descriptions pour les variables cinématiques locales que si le déplacement relatif des centres de particules voisines est pris en compte.

Les raisons mentionnées ci-dessus permettent de conclure que le passage micro-macro reste un problème largement ouvert dans les milieux granulaires. Des travaux de recherche supplémentaires sont donc nécessaires pour pallier les limitations du passage micro-macro et pour compléter la procédure d'homogénéisation pour les matériaux granulaires. L'une des façons de contourner ces limitations est d'introduire

une échelle intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique, appelée *échelle mésoscopique*, dans la technique de changement d'échelles pour les matériaux granulaires. Dans la suite, nous présenterons les techniques de changement d'échelles considérant une échelle mésoscopique dans la littérature.

## 2.4 Changement d'échelles méso-macro

Un milieu granulaire peut être subdivisé entièrement en sous-domaines, chacun contient un ensemble localisé de particules. Grâce à cette partition, on peut définir une échelle mésoscopique qui se situe au niveau de sous-domaines. Les variables statique et cinématique à l'échelle mésoscopique sont la contrainte et la déformation locales, qui peuvent être définies à partir des variables microscopiques. Le passage micro-macro précédemment présenté peut se fait indirectement par un passage micro-méso et un passage méso-macro (figure 2.19). Nous présenterons ci-dessous deux techniques de changement d'échelles pour les milieux granulaires qui introduisent une telle échelle mésoscopique dans le passage micro-macro.



**FIGURE 2.19** – Introduction d'une échelle mésoscopique dans le schéma d'homogénéisation pour les milieux granulaires.

### 2.4.1 Approche de Liao *et al.* (1997)

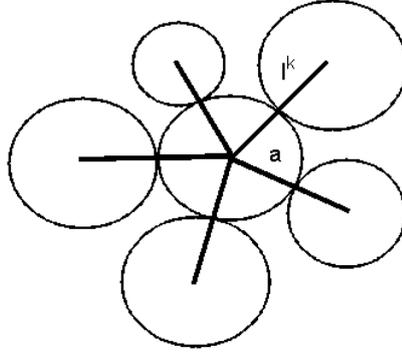
Dans cette approche, les auteurs considèrent une échelle qui correspond au niveau de groupes de particules, chacun est composé d'une particule centrale  $a$  et de ses voisines avec lesquelles elle est en contact (figure 2.20). Un volume local  $V^a$  est associé à chaque groupe de particules de telle façon que la réunion de  $V_a$  des volumes locaux de tous les groupes donne le volume total de l'assemblage de particules.

$$\sum_a V^a = V. \tag{2.58}$$

Le volume local  $V^a$  est défini comme suit :

$$V^a = v_a(1 + e), \quad (2.59)$$

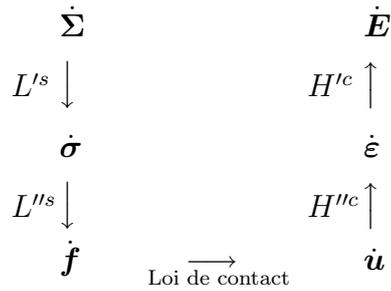
où  $v_a$  est le volume de la particule centrale  $a$  et  $e$  est l'indice de vides de l'assemblage granulaire.



**FIGURE 2.20** – Groupe de particules composé d'une particule centrale  $a$  et de ses particules voisines avec lesquelles elle est en contact dans l'approche de Liao *et al.* (1997).

### Schéma d'homogénéisation

Cette approche suit le schéma d'homogénéisation en contrainte imposée, présenté sur la figure 2.21. Les forces de contact  $\mathbf{f}^k$  ne sont pas localisées directement à partir de la connaissance de la contrainte macroscopique  $\Sigma$  et la structure interne des milieux granulaires mais indirectement par l'intermédiaire de la contrainte  $\sigma^a$  et de la structure à l'échelle mésoscopique. De même, l'homogénéisation cinématique se fait par l'intermédiaire de la déformation  $\delta\epsilon^a$  à l'échelle mésoscopique.



**FIGURE 2.21** – Schéma d'homogénéisation en contrainte imposée dans l'approche de Liao *et al.* (1997).

### Structure mésoscopique

La structure de chaque groupe de particules est caractérisée par un tenseur de texture de branche  $\mathbf{H}'^a$  :

$$H'_{ij}{}^a = \frac{1}{2V^a} \sum_{k=1}^{N^a} l_i^k l_j^k, \quad (2.60)$$

où  $N^a$  est le nombre de contacts sur la particule  $a$  et  $\mathbf{l}^k$  est le vecteur de branche joignant le centre de la particule  $a$  et le centre d'une particule voisine.

### Localisation statique

L'opérateur de localisation statique est basé sur hypothèse proposée par Chang (Chang et Liao, 1994; Chang *et al.*, 1995) :

$$f_i^k = \dot{\sigma}_{ij}^a l_n^k A_{jn}^a. \quad (2.61)$$

Cette opérateur fait intervenir la contrainte mésoscopique  $\dot{\sigma}^a$  et le tenseur  $\mathbf{A}^a$  qui est l'inverse du tenseur de texture de branche  $\mathbf{H}^a$  défini par (2.60). Le champ de contraintes à l'échelle mésoscopique  $\dot{\sigma}^a$  est ensuite supposé *homogène et uniforme* avec la contrainte macroscopique :

$$\dot{\sigma}_{ij}^a = \dot{\Sigma}_{ij}. \quad (2.62)$$

### Homogénéisation cinématique

La déformation du volume local  $V^a$  de chaque groupe de particules est définie en utilisant *la méthode de la meilleure approximation*, présentée dans la section 2.3.4.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^a = \frac{1}{2V^a} \sum_{k=1}^{N^a} \dot{c}_i^k l_n^k A_{jn}^a. \quad (2.63)$$

et la déformation macroscopique  $\dot{\mathbf{E}}$  est la moyenne volumique des déformations locales  $\dot{\epsilon}^a$  :

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_a \dot{\epsilon}_{ij}^a V^a. \quad (2.64)$$

### Loi d'interaction

La loi d'interaction au contact utilisée est élastique linéaire :

$$c_i^k = S_{ij}^k f_j^k, \quad (2.65)$$

où  $\mathbf{S}^k$  est la matrice de souplesse au contact  $k$ .

### Loi élastique macroscopique homogénéisée

En bouclant le schéma d'homogénéisation présenté sur la figure 2.21, la loi élastique macroscopique est obtenue comme suit :

$$\begin{cases} \dot{E}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\Sigma}_{kl}, \\ H_{ijkl} = \left[ \frac{1}{2V} \sum_a A_{mi}^a \sum_{k=1}^{N^a} l_m^k S_{jl}^k l_p^k A_{pk}^a \right]. \end{cases} \quad (2.66)$$

On trouve que les caractéristiques élastiques macroscopiques homogénéisées en (2.66) dépendent également des structures à l'échelle mésoscopique (par l'intermédiaire du tenseur  $\mathbf{A}^a$ ). Afin d'analyser cette dépendance, plusieurs échantillons avec différentes structures locales sont générés en utilisant la méthode MED. Chaque

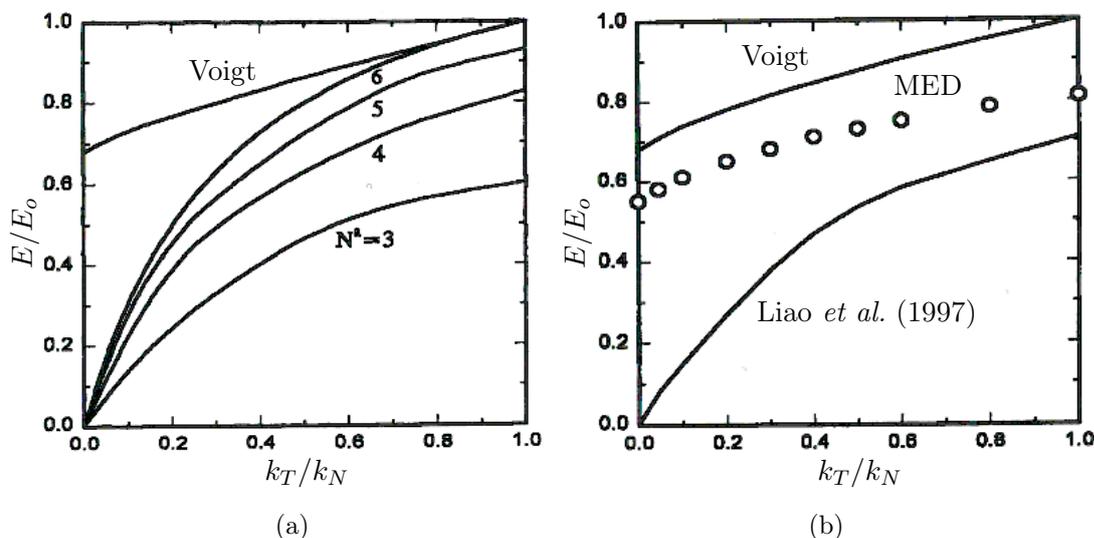
échantillon contient plusieurs groupes de particules dont les particules qui sont en contacts avec la particule centrale sont distribuées de façon aléatoire. Le nombre de contacts  $N^a$  par particule est le même pour toutes particules dans un même échantillon mais diffère d'un échantillon à un autre. Les échantillons générés sont isotropes mais les structures locales des groupes de particules sont inévitablement anisotropes. Les caractéristiques élastiques de ces échantillons sont calculées en utilisant la relation (2.66) à partir de la connaissance des structures locales décrites par les tenseurs  $\mathbf{A}^a$ .

La figure 2.22(a) présente les relations entre le module de Young  $E$  normalisé par  $E_o$  (défini par (2.67)) et le rapport entre les rigidités tangentielle  $k_T$  et normale  $k_N$  des contacts pour différentes valeurs de  $N^a$ . On trouve une dépendance significative du module de Young  $E$  vis-à-vis de la densité locale de l'assemblage, décrite par le nombre de contact par particule  $N^a$  :

$$E_o = \frac{4Nr^2k_N}{3V}, \quad (2.67)$$

où  $N$  est le nombre de contacts dans le volume élémentaire représentative  $V$  et  $r$  est le rayon des particules.

La figure 2.22(b) présente la comparaison du module de Young obtenu par la présente approche, par la méthode MED, et par l'homogénéisation de type Voigt. Cette figure montre que le résultat obtenu par la présente approche constitue une limite inférieure du module de Young pour les matériaux granulaires.



**FIGURE 2.22** – Relation entre le module de Young obtenu par l'homogénéisation de Liao *et al.* (1997) et le rapport  $k_T/k_N$  au contact : (a) pour différentes valeurs du nombre de contacts  $N^a$  par particule, et (b) comparé avec celle obtenue par la méthode MED et par l'homogénéisation de type de Voigt.

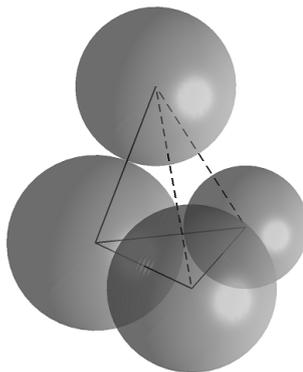
### Remarques

Cette approche permet de prendre en compte la variation de la structure locale dans la loi de comportement globale. Bien que cette approche utilise les hypothèses

très simples (le champ des contraintes locales homogène, l'hypothèse statique, hypothèse cinématique de type *best-fit*), elle donne un module de Young dépendant de la densité locale au sein des milieux granulaires, ce qui n'est pas obtenu avec les techniques d'homogénéisation macro-micro précédemment présentées.

### 2.4.2 Approche de Sab (1997)

Le volume élémentaire représentatif d'un matériau granulaire est subdivisé, dans cette approche, en tétraèdres dont les sommets sont occupés par les centres des particules. En effet, on relie les centres de toutes paires de particules en contact par des branches. Si l'on obtient une partition,  $\mathcal{T}_V$ , du volume  $V$  en tétraèdres  $T \in \mathcal{T}_V$ , l'on dit que l'assemblage est *dense*. Dans le cas d'un assemblage qui n'est pas dense, on complète l'ensemble des branches *réelles* joignant les centres de toutes les paires de particules en contact par des branches *fictives* joignant les centres de paires de particules qui ne sont pas en contact. On obtient donc toujours une partition  $\mathcal{T}_V$  de  $V$  en tétraèdres (figure 2.23) mais les branches dans chaque tétraèdre ne sont pas nécessairement réelles. Grâce à cette partition, l'auteur a défini une échelle mésoscopique qui correspond au niveau des tétraèdres.



**FIGURE 2.23** – Illustration d'un tétraèdre avec les branches réelles (ligne continue) et les branches fictives (ligne pointillée).

### Schéma d'homogénéisation

Cette approche suit le schéma d'homogénéisation illustré sur la figure 2.24. D'abord, les variables cinématiques et statiques à l'échelle mésoscopique sont définies à partir des variables cinématiques et statiques à l'échelle microscopique. Les variables cinématiques mésoscopiques sont ensuite localisées par un opérateur de localisation. Les variables statiques mésoscopiques sont calculées à partir des variables cinématiques par une loi mésoscopique déduite de la loi d'interaction au contact considérée. Enfin, les variables statiques macroscopiques sont calculées à partir des variables statiques mésoscopiques par un opérateur d'homogénéisation.

### Contrainte mésoscopique

Pour chaque tétraèdre on définit un tenseur de contrainte symétrique  $\boldsymbol{\sigma}^T$ , et un vecteur de contrainte antisymétrique  $\boldsymbol{\tau}^T$ , en *partageant les forces de contacts sur les*

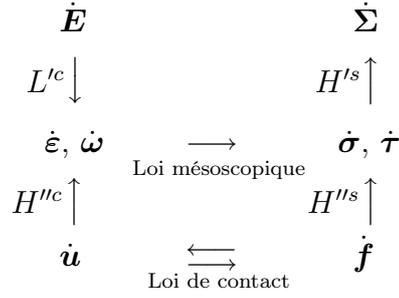


FIGURE 2.24 – Sch\u00e9ma d'homog\u00e9n\u00e9isation dans l'approche de Sab (1997).

t\u00e9tra\u00e8dres voisins en fonction du volume de ces t\u00e9tra\u00e8dres.

$$\sigma_{ij}^T = \frac{1}{V^T} \sum_{k \in K_T} \frac{V^T}{D^k} \frac{f_i^k l_j^k + f_j^k l_i^k}{2} = \sum_{k \in K_T} \frac{1}{D^k} \frac{f_i^k l_j^k + f_j^k l_i^k}{2} \quad (2.68)$$

$$\tau_i^T = \frac{1}{V^T} \sum_{k \in K_T} \frac{V^T}{D_k} e_{ijl} l_j^k f_l^k = \sum_{k \in K_T} \frac{1}{D_k} e_{ijl} l_j^k f_l^k \quad (2.69)$$

o\u00f9 :

- $K_T$  est l'ensemble des branches sur le t\u00e9tra\u00e8dre  $T$ .
- $D_k$  est le volume form\u00e9 par la r\u00e9union de tous les t\u00e9tra\u00e8dres qui prend la branche  $k$  en commun.

Les moyennes volumiques des tenseurs de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^T$  et des vecteurs de contrainte  $\boldsymbol{\tau}^T$  sur tous les t\u00e9tra\u00e8dres sont, respectivement, \u00e9gales \u00e0 la contrainte macroscopique  $\Sigma$  et \u00e0  $\mathbf{0}$  :

$$\langle \sigma_{ij}^T \rangle = \frac{1}{V} \sum_{T \in \mathcal{T}_V} V^T \sigma_{ij}^T = \frac{1}{V} \sum_{k \in K_V} f_i^k l_j^k = \Sigma_{ij}, \quad (2.70)$$

$$\langle \tau_i^T \rangle = \frac{1}{V} \sum_{T \in \mathcal{T}_V} V^T \tau_i^T = \frac{1}{V} \sum_{k \in K_V} e_{ijl} l_j^k f_l^k = 0, \quad (2.71)$$

o\u00f9  $K_V$  est l'ensemble des branches dans le volume  $V$ .

### D\u00e9formation m\u00e9soscopique

Un taux de d\u00e9formation,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$ , et une vitesse de rotation,  $\boldsymbol{\omega}^T$  sont d\u00e9finis pour chaque t\u00e9tra\u00e8dre \u00e0 partir du champ de vitesses obtenu par interpolation continue, affine par morceaux sur les t\u00e9tra\u00e8dres, des vitesses des centres des particules. Les moyennes volumiques des taux de d\u00e9formation  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$  et des vitesses de rotation  $\boldsymbol{\omega}^T$  sur l'ensemble de t\u00e9tra\u00e8dres sont, respectivement, \u00e9gales au taux de d\u00e9formation macroscopique  $\dot{\mathbf{E}}$  et \u00e0 la vitesse de rotation macroscopique  $\boldsymbol{\Omega}$  :

$$\dot{E}_{ij} = \langle \dot{\varepsilon}_{ij}^T \rangle = \frac{1}{V} \sum_{T \in \mathcal{T}_V} V^T \dot{\varepsilon}_{ij}^T, \quad (2.72)$$

$$\Omega_{ij} = \langle \omega_i^T \rangle = \frac{1}{V} \sum_{T \in \mathcal{T}_V} V^T \omega_i^T. \quad (2.73)$$

La vitesse relative au point de contact  $k$  entre deux particules  $m$  et  $n$  appartenant au tétraèdre  $T$  peut être calculée par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\dot{c}_i^k &= \dot{u}_i^m - \dot{u}_i^n + e_{ijl}(\omega_j^m r_l^m - \omega_j^n r_l^n) \\ &= \dot{\varepsilon}_{ij}^T l_j^k + e_{ijl} \omega_j^T l_l^k + e_{ijl}(\omega_j^m r_l^m - \omega_j^n r_l^n).\end{aligned}\quad (2.74)$$

Si l'on néglige l'effet de la dispersion des vitesses de rotation des particules appartenant à un même tétraèdre (c'est-à-dire on suppose que  $\boldsymbol{\omega}^m \approx \boldsymbol{\omega}^n$ ), l'on obtient la relation suivante :

$$\dot{c}_i^k = \dot{\varepsilon}_{ij}^T + e_{ijl} \omega_j^T l_l^k, \quad (2.75)$$

où  $\boldsymbol{\omega}'^T$  est la rotation relative entre le tétraèdre  $T$  et les particules appartenant à ce tétraèdre ( $\boldsymbol{\omega}'^T = \boldsymbol{\omega}^T - \boldsymbol{\omega}^m$ ).

### Loi de comportement mésoscopique

La loi de contact élastique linéaire unilatérale avec frottement de Coulomb présentée dans la section 2.3.1 est utilisée dans cette approche. Une combinaison de cette loi avec les relations (2.68), (2.69), et (2.75), donne une loi de comportement incrémentale pour un tétraèdre  $T$  sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \\ \dot{\boldsymbol{\tau}}^T \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \\ \boldsymbol{\omega}'^T \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

où  $\mathbf{A}_T$  est l'opérateur d'élasticité.

### Opérateur de localisation

L'opérateur de localisation utilisé dans cette approche est une adaptation de la loi de localisation pour les matériaux polycristallins, proposée par Zaoui (1986). Cet opérateur s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\Sigma}^n = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{T,n} \\ \dot{\boldsymbol{\tau}}^{T,n} \end{pmatrix} = 0, \\ \dot{\Sigma}^n \neq 0 \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T,n} \\ \boldsymbol{\omega}'^{T,n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{E}}^n \\ \boldsymbol{\Omega}^n \end{pmatrix} = -\alpha \frac{|\dot{\mathbf{E}}^n|}{|\dot{\Sigma}^n|} \left[ \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{T,n} \\ \beta \dot{\boldsymbol{\tau}}^{T,n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\Sigma}^n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right]. \end{cases} \quad (2.77)$$

où :

- $\alpha$  et  $\beta$  sont les constantes positives caractéristiques de la géométrie de l'assemblage.
- $|\mathbf{X}|^2 = X_{ij} X_{ij}$ , et  $\dot{\Sigma}^n$ ,  $\dot{\mathbf{E}}^n$ ,  $\boldsymbol{\Omega}^n$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T,n}$ ,  $\boldsymbol{\omega}'^{T,n}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{T,n}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\tau}}^{T,n}$  sont définis par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} P &= -(\Sigma_{kk})/3 > 0, \quad \dot{\Sigma}^n = \dot{\Sigma}/P, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{T,n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T/P, \quad \dot{\boldsymbol{\tau}}^{T,n} = \dot{\boldsymbol{\tau}}^T/P, \\ \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T,n} \\ \boldsymbol{\omega}'^{T,n} \end{pmatrix} &= (\mathbf{A}^T)^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{T,n} \\ \dot{\boldsymbol{\tau}}^{T,n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{E}}^n \\ \boldsymbol{\Omega}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T,n} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\omega}'^{T,n} \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Cette loi de localisation est une loi intermédiaire entre celle de Voigt ( $\alpha = 0$ ) et celle de Reuss ( $\alpha = +\infty$ ). Le paramètre  $\beta$  rend compte de l'influence des rotations relatives sur le comportement macroscopique. La valeur  $\beta = 0$  correspond au cas où les rotations relatives  $\omega'^{T,n}$  sont uniformes dans tous les tétraèdres.

Il est à noter que cette loi de localisation n'a de sens que si la contrainte moyenne  $P$  est strictement positive. C'est la raison pour laquelle, on considère dans la suite que l'assemblage granulaire est sollicité à partir d'un état de contrainte isotrope non nul. A cet état initial, l'hypothèse de type Voigt est utilisée pour localiser les variables cinématiques des tétraèdres :  $\forall T, \dot{\epsilon}^T = \dot{\mathbf{E}}, \omega'^T = 0$ .

### Description de la géométrie mésoscopique

Pour compléter la procédure d'homogénéisation, il est nécessaire de caractériser géométriquement la partition  $\mathcal{T}_V$ . La géométrie de chaque tétraèdre est décrite par : son volume  $V^T$ , l'ensemble des branches et la nature réelle ou fictive de ces branches. Dans un modèle simple, l'on néglige l'effet de la dispersion des longueurs des branches. Alors, la description de la géométrie de chaque tétraèdre ne porte que sur l'orientation et sur la nature réelle ou fictive de ses branches.

En pratique, l'orientation  $O$  d'un tétraèdre est décrite par les trois angles d'Euler,  $O = (\theta, \psi, \phi) \in \mathcal{E} = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  qui servent à repérer, par rapport à une base de référence, les vecteurs d'une base attachée au tétraèdre. L'ensemble  $\mathcal{E}$  est muni d'une mesure de probabilité  $p_{\mathcal{E}}$ . Dans cette approche, l'on suppose que *la distribution de l'orientation des tétraèdres est isotrope*. La probabilité  $p_{\mathcal{E}}$  est donc uniforme pour tous les tétraèdres.

La nature réelle ou fictive des six branches d'un tétraèdre est décrite par un élément  $(i_1, \dots, i_6) \in \{0, 1\}^6$  avec  $i_k = 1$  si la  $k^{\text{ème}}$  branche est réelle. La probabilité  $p$  d'avoir  $i_k = 1$  sur  $k^{\text{ème}}$  branche est supposée indépendante de la probabilité des autres branches. La probabilité  $p$  peut être estimée à partir du nombre de coordination d'un assemblage granulaire.

La géométrie de la partition  $\mathcal{T}_V$  est alors caractérisée par un ensemble,  $\mathcal{A} = \{O, i_1, \dots, i_6\}$ , muni d'une mesure de probabilité,  $d\mathbb{P}$ , qui peut être déterminée à partir des probabilités  $p_{\mathcal{E}}$  et  $p$ .

Grâce à cette description géométrique, une moyenne volumique sur  $V$  peut être transformée en une sommation sur l'ensemble  $\mathcal{A}$ . Par exemple,

$$\dot{E}_{ij} = \langle \dot{\epsilon}_{ij}^T \rangle = \frac{1}{V} \sum_{T \in \mathcal{T}_V} V^T \dot{\epsilon}_{ij}^T = \sum_{a \in \mathcal{A}} \dot{\epsilon}_{ij}(a) d\mathbb{P}. \quad (2.79)$$

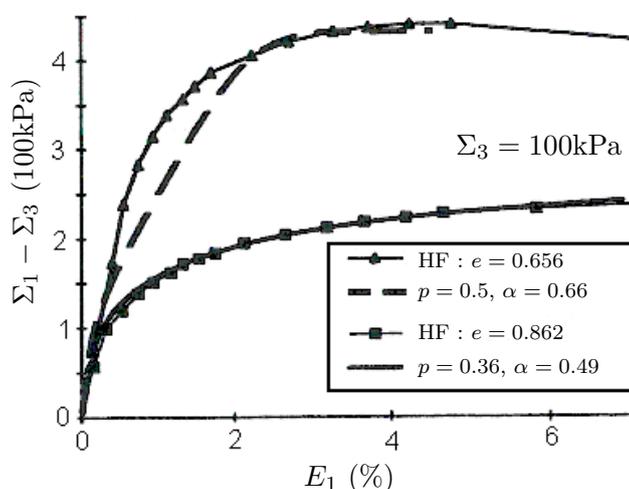
### Résolution

Le bouclage du schéma d'homogénéisation se fait de manière itérative selon les étapes suivants :

- étape 1** : on calcule les variables  $\dot{\sigma}(a), \dot{\tau}(a)$  par l'équation (2.76), à partir de la connaissance des variables  $\dot{\epsilon}(a), \omega'(a)$  à un état donné ;
- étape 2** : on calcule les variables  $\dot{\Sigma}, \dot{\mathbf{E}}, \dot{\Omega}$  par les équations (2.70), (2.72), (2.73), puis l'on évalue l'écart entre les deux termes de la loi de localisation (2.77) ;
- étape 3** : les variables  $\dot{\epsilon}(a), \omega'(a)$  sont convenablement modifiées en fonction de cet écart et la procédure est répétée jusqu'à la convergence.

## Résultats

Le figure 2.25 présente la comparaison entre les résultats obtenus avec cette approche et ceux obtenus pour des essais triaxiaux réalisés par Canou (1989) sur un sable d'Hostun fin avec deux densités initiales différentes. Les paramètres choisis sont  $k_T/\bar{l} = 451\text{kPa}$ ,  $k_T/k_N = 1.0$ ,  $\tan\phi_\mu = 0.32$ . Le paramètre  $p$  est identifié en utilisant la relation entre l'indice de vides et le nombre de coordination proposée par Oda (1977). La valeur de  $\alpha$  est ajustée en fonction de  $p$ . Le paramètre  $\beta$  égal à 0, ce qui revient à négliger l'effet des rotations relatives. Cette figure montre que le modèle proposé par Sab (1997) peut prédire le comportement du sable d'Hostun, particulièrement le comportement à la rupture. Il est intéressant de noter que cette approche peut être appliquée dans le domaine élastique et même dans le domaine plastique du comportement des matériaux granulaires.



**FIGURE 2.25** – Résultat de l'homogénéisation de Sab (1997), comparé avec celui observé expérimentalement dans des essais triaxiaux sur le sable d'Hostun fin (HF) pour deux densités différentes (Sab, 1997).

## Remarques

Bien que l'approche proposée par Sab (1997) donne de bons résultats, il présente également les limitations suivantes :

- La définition de la contrainte dans chaque tétraèdre par un partage des forces de contact sur les tétraèdres voisins ne semble pas pertinente en mécanique des milieux granulaires.
- La négligence des rotations relatives des particules sur chaque tétraèdre ne conduit vraisemblablement pas à une bonne estimation de la déformation macroscopique, en particulier pour les milieux composés de particules circulaires (voir l'analyse effectuée dans la section 2.3.4.1).
- La structure d'un milieu granulaire est très différente de celle d'un milieu polycristallin. En raison de cette différence, une loi de localisation initialement proposée pour un milieu cristallin ne semble pas appropriée pour un milieu granulaire.

- L'hypothèse sur l'isotropie de la distribution de l'orientation de tétraèdres est très forte dans les milieux granulaires pour lesquels l'anisotropie se développe fortement lors d'une sollicitation déviatoire.

Cependant, cette approche montre qu'il est possible de considérer, à l'exception des contacts entre particules, d'autres constituants élémentaires dans les techniques de changement d'échelles pour les matériaux granulaires.

Deuxième partie

Echelle mésoscopique en 2D



# Chapitre 3

## Simulation numérique des milieux granulaires 2D

### Introduction

L'analyse proposée dans le cadre de ce travail nécessite d'avoir accès aux informations locales (forces de contact, déplacements des particules, orientations de contacts, etc.) dans les assemblages granulaires. Ces informations locales sont techniquement difficiles à obtenir lors d'essais sur des matériaux granulaires réels. La *méthode des éléments discrets* (MED), qui a été largement développée ces dernières années, constitue un outil pour étudier le comportement des matériaux granulaires à l'échelle globale ainsi qu'à l'échelle locale. Nous utilisons ici cette méthode pour simuler des essais numériques pour lesquels les informations locales dans les assemblages étudiés peuvent être exploitées.

Nous décrivons d'abord le code de calcul utilisé. La simulation d'un essai biaxial sur un échantillon de disques, servant de base pour toute analyse dans la suite, est ensuite présentée. Enfin, les comportements global et local de l'échantillon au cours de l'essai sont analysés.

### 3.1 Méthode des Éléments Discrets

La méthode des éléments discrets a été introduite par P.A.Cundall (1971) pour étudier des problèmes de mécanique des roches, puis appliquée à des problèmes de mécanique des sols par Cundall et Strack (1979). Le logiciel PFC<sup>2D</sup> (Particle Flow Code), basé sur la MED, est développé et distribué par la société ITasca et largement utilisé pour modéliser le mouvement et l'interaction de particules circulaires. Nous utilisons ce logiciel par la suite pour simuler des essais sur les matériaux granulaires. Ce logiciel est brièvement présenté dans les sections suivantes.

#### 3.1.1 Hypothèses

- Le logiciel PFC<sup>2D</sup> utilise la méthode de type *smooth MED*. Cette méthode consiste à supposer que les particules sont des corps rigides mais elle autorise un recouvrement faible entre deux particules en contact pour calculer la force d'interaction entre deux particules. Cette hypothèse peut être acceptable si

ce recouvrement est négligeable par rapport à la taille des particules. Cette hypothèse constitue une différence entre les méthodes *smooth MED* et *non smooth MED*. En effet, la méthode *non smooth MED* (Jean, 1999) considère les particules comme des corps parfaitement rigides sans recouvrement entre deux particules en contact. La force d'interaction entre deux particules rigides est calculée à partir d'une loi de choc avec coefficient de restitution.

- Dans le logiciel PFC<sup>2D</sup>, la force d'interaction entre deux particules en contact est liée au recouvrement au point de contact *via* une loi force-déplacement.
- Les particules sont circulaires (cylindrique ou sphérique).

### 3.1.2 Schéma de calcul de la MED

Le calcul effectué dans le logiciel PFC<sup>2D</sup> alterne l'application d'une loi force-déplacement aux contacts et de la loi de déplacement des particules (figure 3.1). Chaque cycle de calcul se décompose en 3 étapes :

1. A l'instant  $t$ , les positions des particules et des parois sont connues.
2. Les forces de contact sont déduites des positions des particules et des parois par la loi force-déplacement.
3. Les déplacements et rotations sont calculés pour chaque particule à partir de l'équation du mouvement et on réactualise les positions des particules à l'instant  $t + \Delta t$ . Les positions des parois sont également mises à jour à cet instant.

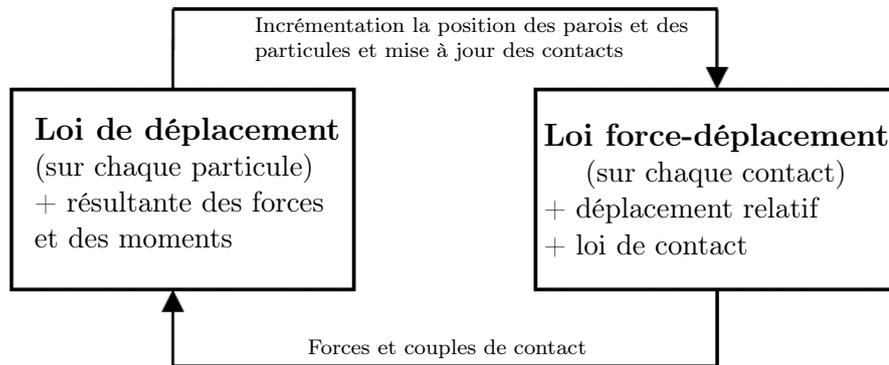


FIGURE 3.1 – Schéma du cycle de calcul de la MED dans PFC<sup>2D</sup>

La résolution de l'équation du mouvement dans PFC<sup>2D</sup> se fait de manière explicite :

1. L'accélération de chaque particule est calculée par l'équation de mouvement :

$$\ddot{x}_i^p(t) = \frac{f_i^p}{m^p} + g_i, \quad (3.1)$$

$$\ddot{\theta}_3^p(t) = \frac{M_3^p}{I^p}, \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{f}^p$  est la force résultante appliquée sur la particule  $p$  de masse  $m^p$ ,  $\mathbf{g}$  est la gravité et  $\mathbf{M}^p$  est le moment résultant appliqué sur la particule de moment d'inertie angulaire  $I^p$ .

2. La vitesse de chaque particule est calculée à partir de l'accélération par un schéma explicite par semi-intervalles :

$$\dot{x}_i^p(t + \Delta t/2) = \dot{x}_i^p(t - \Delta t/2) + \ddot{x}_i^p(t)\Delta t, \quad (3.3)$$

$$\dot{\theta}_3^p(t + \Delta t/2) = \dot{\theta}_3^p(t - \Delta t/2) + \ddot{\theta}_3^p(t)\Delta t. \quad (3.4)$$

3. La nouvelle position à l'instant  $t + \Delta t$  est ensuite exprimée suivant le même schéma :

$$x_i^p(t + \Delta t) = x_i^p(t) + \dot{x}_i^p(t + \Delta t/2)\Delta t, \quad (3.5)$$

$$\theta_3^p(t + \Delta t) = \theta_3^p(t) + \dot{\theta}_3^p(t + \Delta t/2)\Delta t. \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Loi de contact

Les lois de contact dans le logiciel PFC<sup>2D</sup> sont de type élastique (linéaire ou non linéaire) avec frottement. Dans notre simulation numérique, la loi de contact est une loi élastique linéaire avec frottement dont les paramètres sont les rigidités normale  $k_N$  et tangentielle  $k_T$ , et l'angle de frottement intergranulaire  $\phi_\mu$ . Cette loi a été présentée dans la section 2.3.1.

### 3.1.4 Amortissement numérique

La méthode de MED est purement fondée sur les équations de la dynamique. Si les interactions entre deux particules en contact sont purement élastiques, il n'y a aucune dissipation d'énergie et un état d'équilibre du système granulaire n'est jamais atteint. Même si le frottement est activé aux contacts, il n'est pas suffisant pour atteindre l'état d'équilibre en un nombre raisonnable de cycles. Il est donc nécessaire d'accélérer la dissipation d'énergie du système.

La méthode d'accélération de la dissipation d'énergie utilisée dans PFC<sup>2D</sup> est similaire à celle décrite dans P.A.Cundall (1987). Une force d'amortissement proportionnelle à l'accélération de chaque particule (ou à la résultante des forces appliquées sur chaque particule), comme l'exprime les équations (3.7) et (3.8), est ajoutée à l'équation du mouvement. Une telle force n'a aucun sens physique mais présente l'avantage de ne pas avoir d'influence sur le régime permanent.

$$\hat{f}_i^p = -\lambda |f_i^p| \text{sign}(\dot{x}_i^p), \quad (3.7)$$

$$\hat{M}_3^p = -\lambda |M_3^p| \text{sign}(\dot{\theta}_3^p), \quad (3.8)$$

où  $\hat{f}^p$  et  $\hat{M}^p$  sont respectivement la force d'amortissement et le moment d'amortissement ajoutés à la particule  $p$ ,  $\lambda$  est un coefficient, appelé *coefficient d'amortissement numérique*, variant de 0.0 à 1.0 et  $\text{sign}(y)$  donne le signe de la quantité  $y$ .

Le choix de la valeur du coefficient d'amortissement numérique  $\lambda$  doit être basé sur le régime du système granulaire. Pour un régime quasi-statique, la valeur de  $\lambda$  n'a pas d'influence significative sur la réponse du système granulaire. Pour notre simulation numérique avec le régime quasi-statique, on choisit une valeur  $\lambda = 0.3$ . Cependant, ce n'est pas le cas pour un régime dynamique. Pour ce régime, la valeur de  $\lambda$  doit être petite et conformément à la recommandation de la société Itasca, une valeur de  $\lambda$  égale à 0.15 paraît raisonnable.

### 3.1.5 Pas de temps

Pour que les calculs de la méthode MED convergent vers la solution, le pas de temps doit être suffisamment petit. Le pas de temps doit être inférieur à la plus petite période propre de vibration du système pour permettre la propagation d'une onde de choc dans le système. Cette condition conduit à l'inégalité :

$$\Delta t < \alpha \min \left\{ \sqrt{\frac{m}{k}} \right\}, \quad (3.9)$$

où  $\alpha$  est une constante inférieure à 1.0. En théorie,  $\alpha = 1.0$  permet d'obtenir la convergence, mais en pratique on utilise une valeur égale à 0.1 pour éviter tout problème numérique lié à la valeur de  $\Delta t$ .

### 3.1.6 Conditions aux limites

Les conditions aux limites dans PFC<sup>2D</sup> sont le plus souvent définies par rapport à des parois, qui sont considérées comme des plaques élastiques avec des rigidités normale et tangentielle et un frottement. On ne peut appliquer, sur une paroi, qu'une condition aux limites en vitesse ou en déplacement. Cependant, il est également possible d'imposer une contrainte constante sur une paroi, en utilisant une procédure de *servo-contrôle*. Cette procédure consiste à déplacer les parois de manière à atteindre un état de contrainte aussi proche que possible de l'état de contrainte souhaité. Le principe est le suivant :

On souhaite obtenir une contrainte  $\Sigma_0$  sur une paroi sur laquelle est actuellement appliquée une contrainte  $\Sigma$ . On doit déplacer la paroi d'une distance  $\Delta u$  pour que l'incrément de contrainte généré  $\Delta \Sigma$  soit égal à  $\Sigma_0 - \Sigma$ . On a :

$$\Delta \Sigma = \frac{\sum_c k_N \Delta u}{l} = \Sigma_0 - \Sigma, \quad (3.10)$$

où la sommation se fait sur l'ensemble des contacts entre billes et paroi,  $k_N$  est la rigidité normale aux contacts bille-paroi et  $l$  est la longueur de la paroi.

On peut alors trouver la vitesse à imposer à la paroi :

$$v = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \kappa \frac{l}{\Delta t \sum_c k_N} (\Sigma_0 - \Sigma), \quad (3.11)$$

où  $\kappa$  est un coefficient qui prend une valeur de l'ordre de 0.8 pour rendre la procédure plus efficace. En fait, cette procédure est relativement lourde car elle nécessite de parcourir tous les contacts pour détecter les contacts bille-paroi. Il est donc conseillé d'effectuer cette procédure à intervalles réguliers d'une centaine de cycles environ.

## 3.2 Simulation de l'essai biaxial

L'étude du comportement à l'échelle mésoscopique des matériaux granulaires présentée dans les chapitres suivants est basée sur la simulation d'un essai biaxial de compression sur un assemblage composé de disques. La mise en place d'un tel essai comporte trois étapes : la première étape consiste à générer un échantillon avec une granulométrie donnée, l'échantillon est ensuite compacté pour obtenir une

Paramètres	Valeur
Densité de masse	3 000 kg/m <sup>2</sup>
Rigidité normale des particules $k_N$	$5 \times 10^7$ N/m
Rigidité tangentielle des particules $k_T$	$5 \times 10^7$ N/m
Amortissement numérique	0.3
Rigidité normale des parois	$5 \times 10^7$ N/m
Rigidité tangentielle des parois	$5 \times 10^7$ N/m
Angle de frottement des parois	0°
Angle de frottement intergranulaire	30°

**TABLE 3.1** – Paramètres locaux utilisés dans la simulation numérique.

densité souhaitée dans la deuxième étape, et la sollicitation est finalement appliquée à l'échantillon dans la troisième étape.

### 3.2.1 Génération de l'échantillon

L'assemblage granulaire choisi est composé de 25 000 disques. Le diamètre des disques est distribué de façon uniforme entre le diamètre minimal,  $D_{\min} = 4.0$  mm, et le diamètre maximal,  $D_{\max} = 8.0$  mm. Ce choix de granulométrie est satisfaisant pour deux raisons : d'une part, elle n'est pas trop serrée afin d'éviter des assemblages réguliers et, d'autre part, elle n'est pas trop étalée afin d'éviter certaines difficultés dans la triangulation de l'assemblage qui seront exposées dans le chapitre 4.

Les particules sont générées avec cette granulométrie de façon aléatoire dans une boîte rectangulaire de hauteur 1.35 m et une largeur 0.9 m aux quatre parois rigides. A cette étape, le matériau est très lâche. La gravité n'est pas prise en compte dans les simulations numériques, afin d'éviter une anisotropie initiale de la distribution des orientations de contacts lors de la chute des particules sous gravité et un gradient de contrainte le long de la direction de gravité. Les paramètres locaux utilisés dans la simulation numérique sont présentés dans le tableau 3.1.

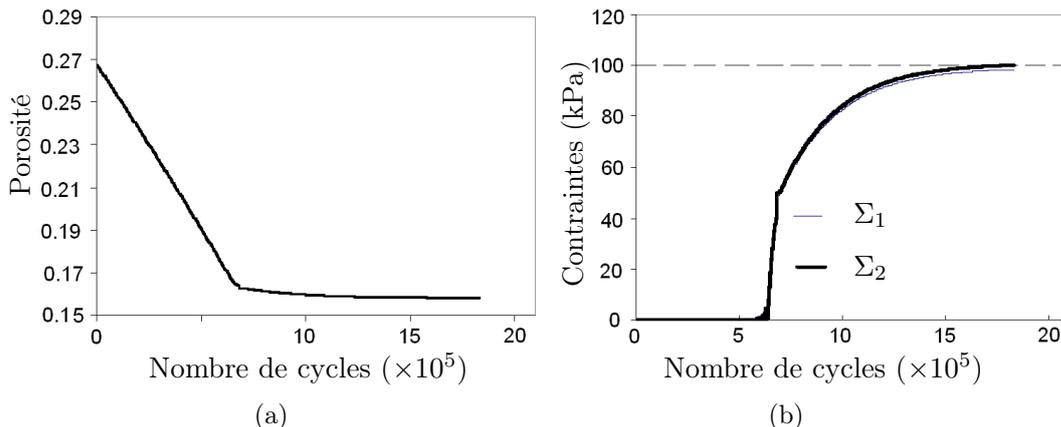
### 3.2.2 Compactage de l'échantillon

Pour compacter l'assemblage généré à la précédente étape, on fait croître progressivement les particules tout en fixant les parois jusqu'à obtenir l'état de contrainte souhaité. Ce mode de compactage consiste en la répétition de la procédure suivante :

1. les diamètres de tous les disques sont multipliés par un facteur suffisamment petit ;
2. un nombre de cycles suffisamment grand est appliqué pour stabiliser le système granulaire.

Au cours du compactage, le facteur multiplicatif est ajusté en fonction de l'état de contrainte pour permettre d'atteindre l'état de contrainte souhaité. La figure 3.2. représente les évolutions de la porosité et de l'état de contrainte dans l'échantillon, en fonction du nombre de cycles appliqués.

Bien que ce mode de compactage n'existe pas dans la réalité, il présente certains intérêts. Premièrement, l'échantillon est compacté de façon homogène. Deuxièmement, la gravité pouvant être supprimée durant le compactage, l'échantillon après



**FIGURE 3.2** – Evolutions (a) de la porosité et (b) de l'état de contrainte au cours du compactage.

compactage est isotrope. Cependant, ce mode de compactage présente également un inconvénient : la taille des particules change par rapport à la taille initiale. Cependant, en l'absence de gravité, ce changement n'a pas d'influence sur le comportement de l'assemblage granulaire car la forme de la courbe granulométrique est conservée (la courbe granulométrique n'est pas déformée, elle est juste déplacée).

Pour favoriser un réarrangement des particules qui peut permettre d'obtenir un état assez dense de l'échantillon, le frottement intergranulaire est supprimée au cours du compactage. Afin d'éviter des forces de contact purement normales, ce qui peut produire un comportement très *raide* de l'échantillon au début de l'essai, la valeur du frottement intergranulaire utilisée dans l'essai biaxial est réactualisée lorsque l'on atteint environ 90% de l'état de contrainte souhaité.

La figure 3.3 représente l'échantillon obtenu à la fin du compactage. On obtient une porosité égale à 0.16 et un nombre de coordination égal à 3.77. On constate que, malgré l'efficacité du mode de compactage, il y a encore 5.3% de particules qui sont isolées dans l'échantillon (particules n'ayant aucun contact). Cependant, on ne peut pas supprimer définitivement les particules isolées de l'échantillon car ces particules peuvent être réactivées lorsque le matériau est sollicité. Le tableau 3.2 présente les caractéristiques de l'échantillon à la fin du compactage.

Diamètre minimal, $D_{\min}$	4.7 mm
Diamètre maximal, $D_{\max}$	9.4 mm
Porosité sans particules isolées, $P$	0.19
Porosité avec particules isolées, $\tilde{P}$	0.16
Nombre de coordination sans particules isolées	3.98
Nombre de coordination avec particules isolées	3.77
Pourcentage de particules isolées	5.3 %
Contrainte $\Sigma_1$	$\approx 100$ kPa
Contrainte $\Sigma_2$	$\approx 100$ kPa

**TABLE 3.2** – Caractéristiques de l'échantillon à la fin du compactage.

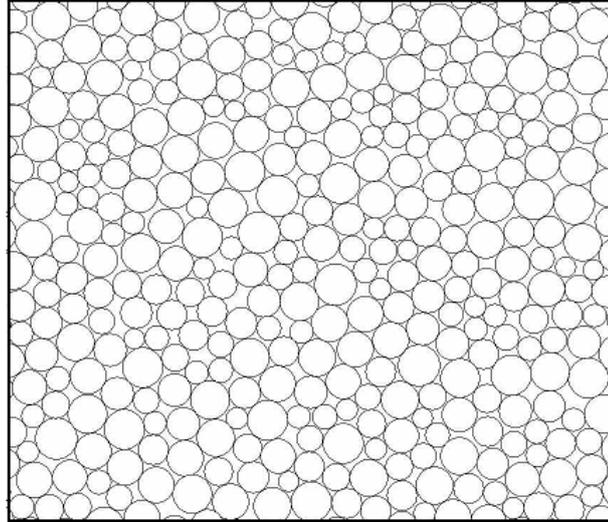


FIGURE 3.3 – Une partie de l'échantillon à la fin du compactage.

### 3.2.3 Réalisation de l'essai biaxial

Dans cette étape, on procède à la réalisation d'un essai biaxial de compression en *quasi-statique* sur l'échantillon compacté. Cet essai consiste à compresser l'échantillon dans sa direction longitudinale tout en maintenant une contrainte constante égale à 100 kPa dans sa direction latérale. La compression de l'assemblage se fait en imposant une vitesse  $V$  égale à 0.006 m/s aux parois supérieure et inférieure et l'application de la pression latérale constante est effectuée en utilisant la procédure de servo-control décrite dans la section 3.1.6. La figure 3.4 illustre cette condition aux limites.

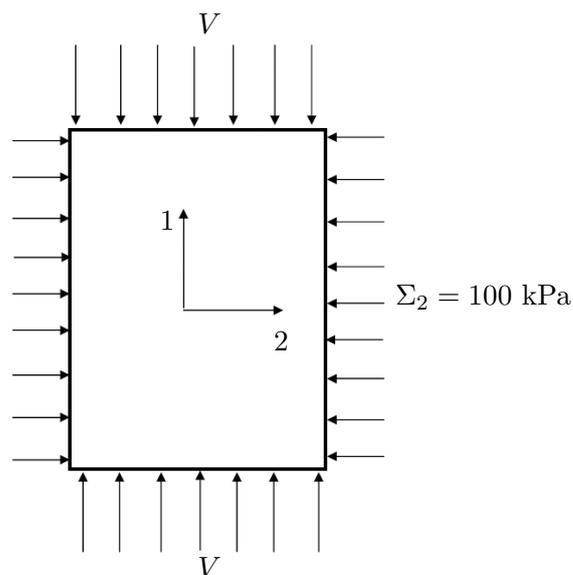


FIGURE 3.4 – Conditions aux limites pour l'essai biaxial.

Le régime quasi-statique de l'essai est vérifié par le nombre d'inertie défini par :

$$I = \dot{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{P}}, \quad (3.12)$$

où  $\dot{\epsilon}$  est le taux de déformation imposée,  $m$  est la masse des particules et  $P$  est la pression de confinement (Roux et Chevoir, 2005). D'après Sibille (2006), le nombre d'inertie limite pour un chargement quasi-statique semble de l'ordre de  $10^{-2}$ . Le nombre d'inertie  $I$  dans notre essai prend une valeur égale à  $10^{-5}$ , ce qui s'avère acceptable.

Pour faciliter la lecture dans la suite, on abrège les termes "directions principales majeure et mineure de sollicitation" en "*directions majeure et mineure macroscopiques*" respectivement.

## 3.3 Comportement de l'échantillon

### 3.3.1 Comportement macroscopique

La figure 3.5 représente le comportement macroscopique de l'échantillon au cours de l'essai biaxial. L'angle de frottement interne mobilisé  $\Phi$  (voir la définition dans l'annexe B.2) et la déformation volumique  $E_v$  sont tracés en fonction de la déformation axiale  $E_1$ . On trouve, sur cette figure, un comportement typique des matériaux granulaires à l'état assez dense. L'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  augmente d'abord et atteint ensuite le pic pour une déformation axiale  $E_1 = 2.0\%$ . Après ce pic, une phase de radoucissement bien marquée se produit. L'échantillon se contracte d'abord jusqu'à une déformation axiale  $E_1 = 1.0\%$ , puis se dilate fortement. L'angle de frottement interne mobilisé à l'état caractéristique  $\Phi_o$  est égal à  $22.07^\circ$ . Au pic de la courbe contrainte - déformation, l'angle de frottement interne  $\Phi$  prend une valeur maximale égale à  $24.0^\circ$  et l'angle de dilatance  $\Psi$  (voir la définition dans l'annexe B.1) prend une valeur maximale égale à  $8.2^\circ$ .

### 3.3.2 Comportement microscopique

#### 3.3.2.1 Particules isolées

Au cours de l'essai biaxial, une particule qui a été active peut devenir isolée et une particule qui a été isolée peut devenir active. La figure 3.6 présente l'évolution du pourcentage  $P_N$  de particules isolées au cours de l'essai, comparée avec les évolutions des porosités sans particules isolées  $P$  et avec particules isolées  $\hat{P}$  de l'échantillon. On constate une proportion importante de particules isolées dans l'échantillon. De plus, lorsque l'échantillon se contracte, le pourcentage de particules isolées diminue, puis il augmente significativement dans la phase de dilatance. A la fin de l'essai, il y a environ 6.7% de particules isolées dans l'échantillon. Cette proportion importante de particules isolées dans l'échantillon explique pourquoi la porosité sans particule isolées  $P$  est beaucoup plus importante que la porosité avec particules isolées  $\hat{P}$ .

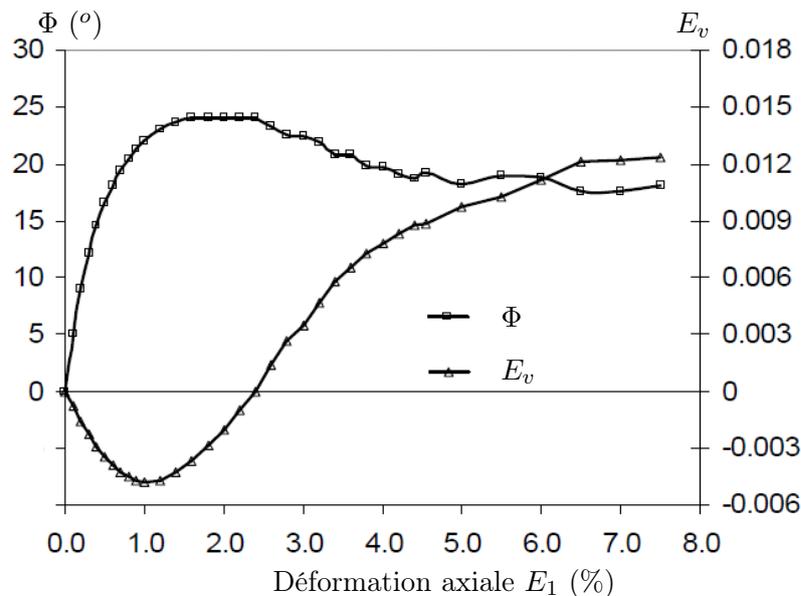


FIGURE 3.5 – Comportement de l'assemblage au cours de l'essai biaxial : évolutions de l'angle de frottement interne mobilisé  $\Phi$  et de la déformation volumique  $E_v$ .

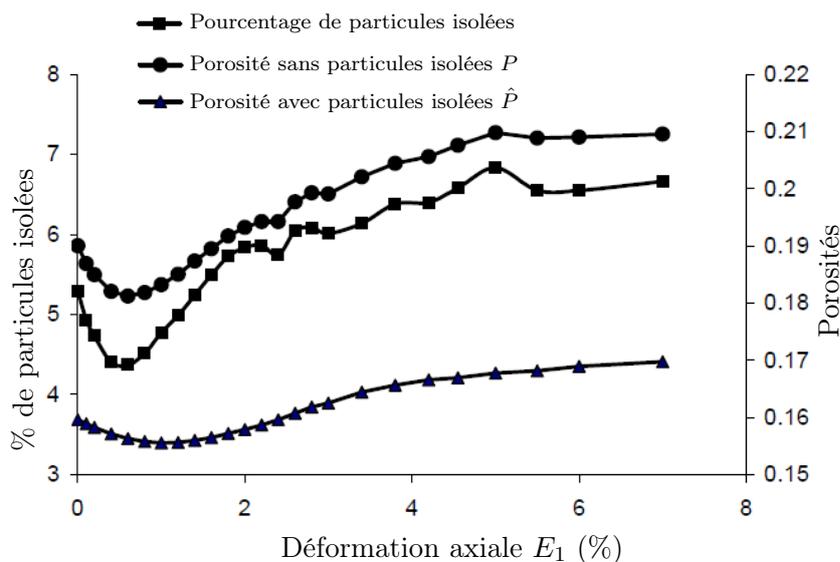


FIGURE 3.6 – Evolutions du pourcentage de particules isolées, des porosités sans et avec particules isolées au cours de l'essai.

### 3.3.2.2 Nombre de coordination

Avec ou sans les particules isolées, on peut calculer le nombre de coordination  $\bar{N}$  de l'échantillon. Bien entendu, le nombre de coordination sans particules isolées est plus important que celui avec particules isolées, comme le montre la figure 3.7. On retrouve les évolutions classiques du nombre de coordination pour les milieux granulaires assez denses. On remarque également sur cette figure que la déformation volumique semble faiblement corrélée avec le nombre de coordination dans la phase de contractance de l'échantillon : la perte de contacts se produit, même si l'échantillon se contracte.

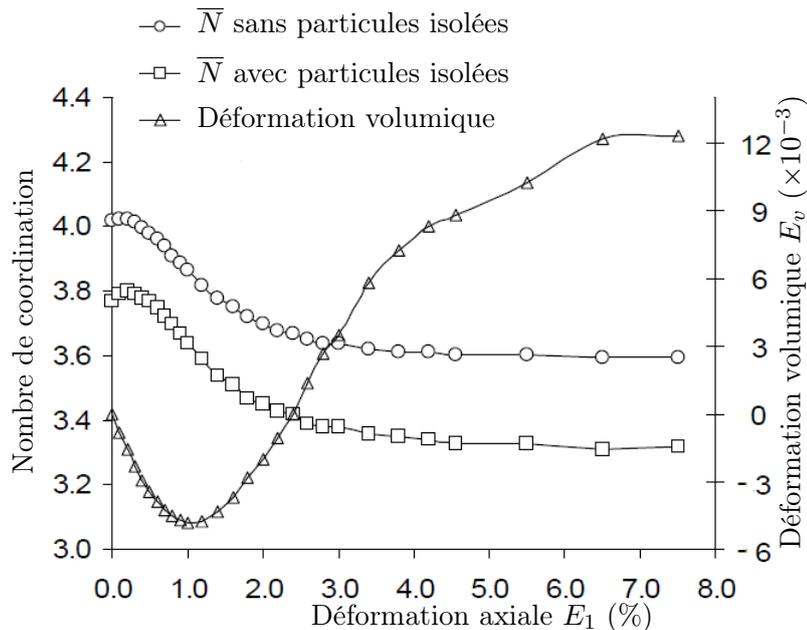


FIGURE 3.7 – Evolutions des nombres de coordination sans et avec particules isolées au cours de l'essai biaxial, comparées avec l'évolution de la déformation volumique.

### 3.3.2.3 Anisotropie

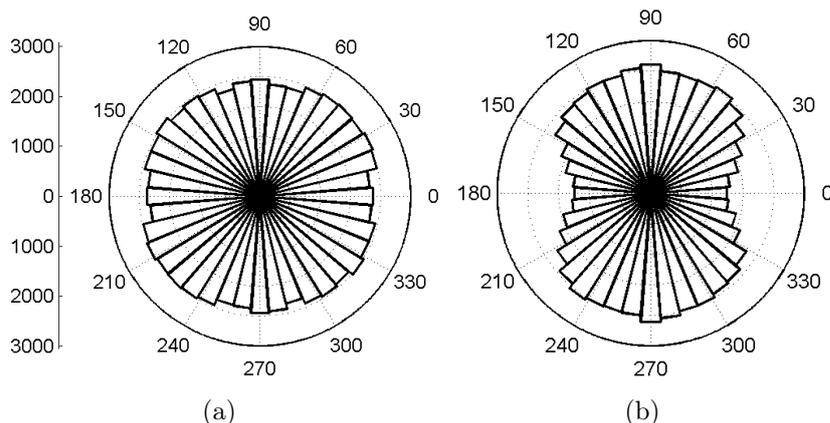
La figure 3.8 présente les distributions des orientations de contacts dans l'échantillon à l'état initial et au pic de la courbe contrainte - déformation. L'isotropie de l'échantillon à l'état initial se traduit par une distribution uniforme des orientations de contacts. Au pic de la courbe contrainte - déformation, l'échantillon est très anisotrope, ce qui se traduit par une distribution préférentielle des orientations de contacts dans la direction majeure macroscopique.

L'anisotropie de l'échantillon peut être décrite par le tenseur de texture de contact  $\mathbf{H}$ , défini par (2.9), et le degré d'anisotropie peut être quantifié par  $H_d = H_1 - H_2$  où  $H_1$  et  $H_2$  sont respectivement les valeurs principales majeure et mineure du tenseur  $\mathbf{H}$ . La figure 3.9 présente l'évolution du degré d'anisotropie  $H_d$  au cours de l'essai. On obtient une évolution classique du degré d'anisotropie pour les milieux granulaires assez denses. Il est intéressant de noter ici que le pic d'anisotropie est atteint pour une déformation axiale plus importante que celle pour laquelle le pic de contrainte est atteint :  $E_1 = 3\%$  contre  $E_1 = 2\%$ .

### 3.3.2.4 Transmission des forces de contact

La figure 3.10 montre la façon dont le chargement appliqué à l'échantillon est supporté par des chaînes de forces. Ces chaînes de forces sont très hétérogènes. De plus, ces chaînes de forces s'orientent de façon isotrope à l'état initial mais de façon très anisotrope au pic de la courbe contrainte - déformation, avec une orientation préférentielle dans la direction majeure macroscopique. Ce résultat est en bon accord avec celui obtenu par plusieurs auteurs, en particulier par Radjai et Wolf (1998).

La figure 3.11 présente des distributions classiques de forces de contact dans l'échantillon : une distribution de forme *haricot* pour les forces normales aux contacts



**FIGURE 3.8** – Distributions des orientations de contacts (a) à l'état initial et (b) au pic de la courbe contrainte - déformation.

et une distribution de forme *trèfle à quatre feuilles* pour les forces tangentielles aux contacts. Il est à noter ici que les forces normales aux contacts sont beaucoup plus importantes que les forces tangentielles aux contacts. Les forces normales aux contacts présentent ainsi une contribution majeure à la contrainte macroscopique (Kruyt et Antony, 2007).

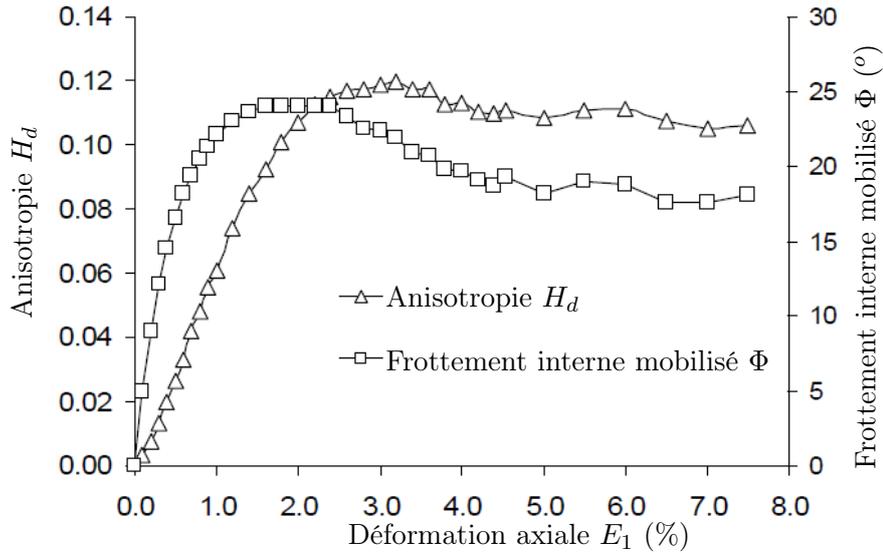
### 3.3.2.5 Déplacement des particules

Dans cette section, nous analysons l'hétérogénéité du champ de déplacements des centres des particules. La figure 3.13 présente les distributions des déplacements relatifs normaux et tangentiels entre les centres de particules en contact. Sur cette figure, la ligne pointillée correspond à des valeurs négatives. On observe que les déplacements relatifs normaux sont importants pour les contacts orientés dans la direction majeure macroscopique tandis que les déplacements relatifs tangentiels sont importants pour les contacts orientés obliquement. De plus, les particules en contacts orientés dans la direction majeure macroscopique ont tendance à se rapprocher tandis que les particules en contacts orientés dans la direction mineure macroscopique ont tendance à s'éloigner. Cependant, les rapprochements sont significativement plus importants que les éloignements. Il peut être noté que les déplacements relatifs tangentiels sont beaucoup plus importants que les rapprochements et les éloignements entre centres de particules.

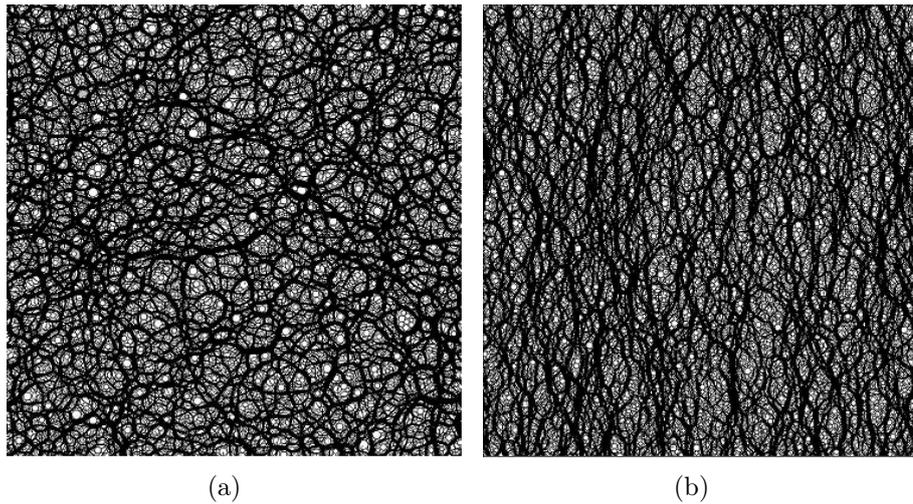
Afin d'analyser la fluctuation du champ de déplacement des centres de particules, on définit une quantité  $\widetilde{\delta\mathbf{u}}^p$ , appelée *le degré de fluctuation*, du déplacement du centre de chaque particule par rapport au déplacement du point correspondant dans un milieu continu équivalent :

$$\widetilde{\delta\mathbf{u}}^p = \frac{|\delta\mathbf{u}^p - \delta\boldsymbol{\zeta}^p|}{|\delta\boldsymbol{\zeta}|_{\max}}, \quad (3.13)$$

où le symbole  $|\cdot|$  désigne la norme d'un vecteur (voir l'annexe A),  $\delta\mathbf{u}^p$ ,  $\delta\boldsymbol{\zeta}^p$  sont respectivement les vecteurs de déplacement du centre de la particule  $p$  et de son point correspondant dans le milieu continu équivalent et  $|\delta\boldsymbol{\zeta}|_{\max}$  est la norme maximale du champ de déplacement continu.

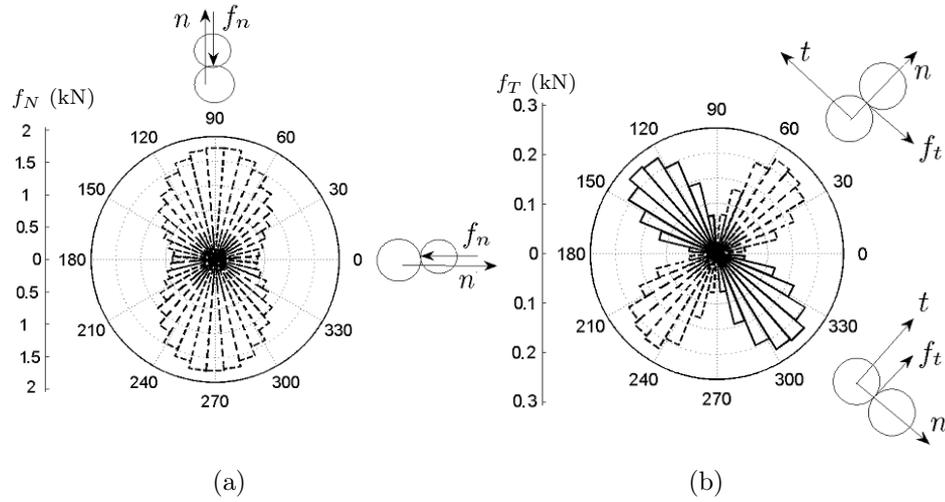


**FIGURE 3.9** – Evolution du degré d’anisotropie  $H_d$  au cours de l’essai biaxial, comparée avec l’évolution de l’angle de frottement interne mobilisé  $\Phi$ .

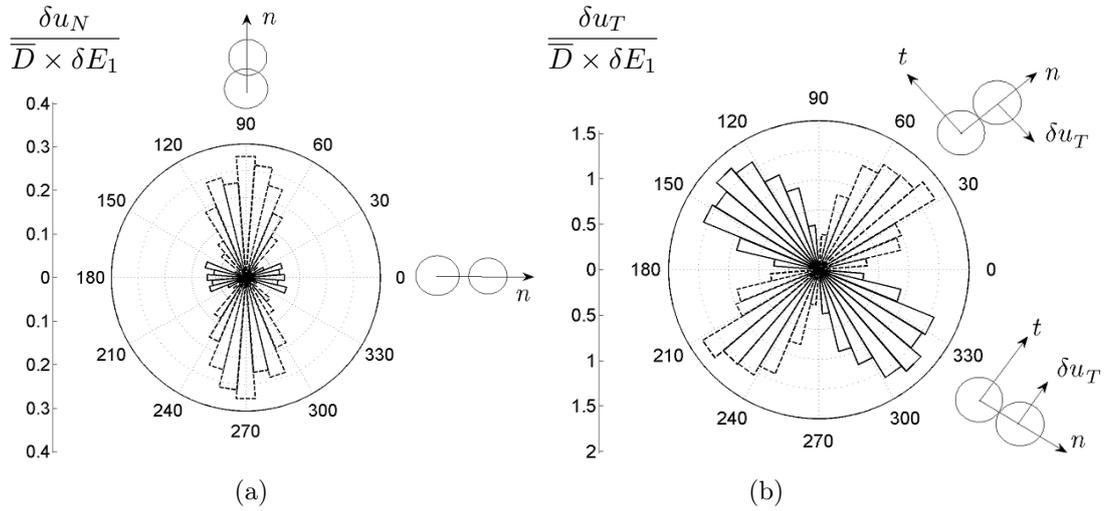


**FIGURE 3.10** – Transmissions de forces de contact dans l’échantillon (a) à l’état initial et (b) au pic de la courbe contrainte - déformation. L’épaisseur des lignes est proportionnel à l’amplitude des forces normales aux contacts.

Un degré de fluctuation  $\widetilde{\delta \mathbf{u}}^p$  nul pour une particule signifie que le centre de cette particule subit un déplacement coïncidant avec celui d’un milieu continu équivalent et plus la valeur de  $\widetilde{\delta \mathbf{u}}^p$  est importante, plus le déplacement du centre de cette particule est différent de celui du point correspondant dans un milieu continu équivalent. La figure 3.13 présente les distributions spatiales du degré de fluctuation  $\widetilde{\delta \mathbf{u}}^p$  pour toutes les particules dans l’assemblage à différents niveaux de déformation macroscopique : (a)  $E_1 = 0.2\%$  et (b)  $E_1 = 1.2\%$  avant le pic, (c)  $E_1 = 2.0\%$  et (d)  $E_1 = 3.0\%$  après le pic de la courbe contrainte - déformation. Le niveau de gris de chaque particule est proportionnel à la valeur du degré de fluctuation  $\widetilde{\delta \mathbf{u}}^p$ . On



**FIGURE 3.11** – Distributions des forces de contact au pic de la courbe contrainte - déformation (a) pour les forces normales aux contacts et (b) pour les forces tangentielles aux contacts.



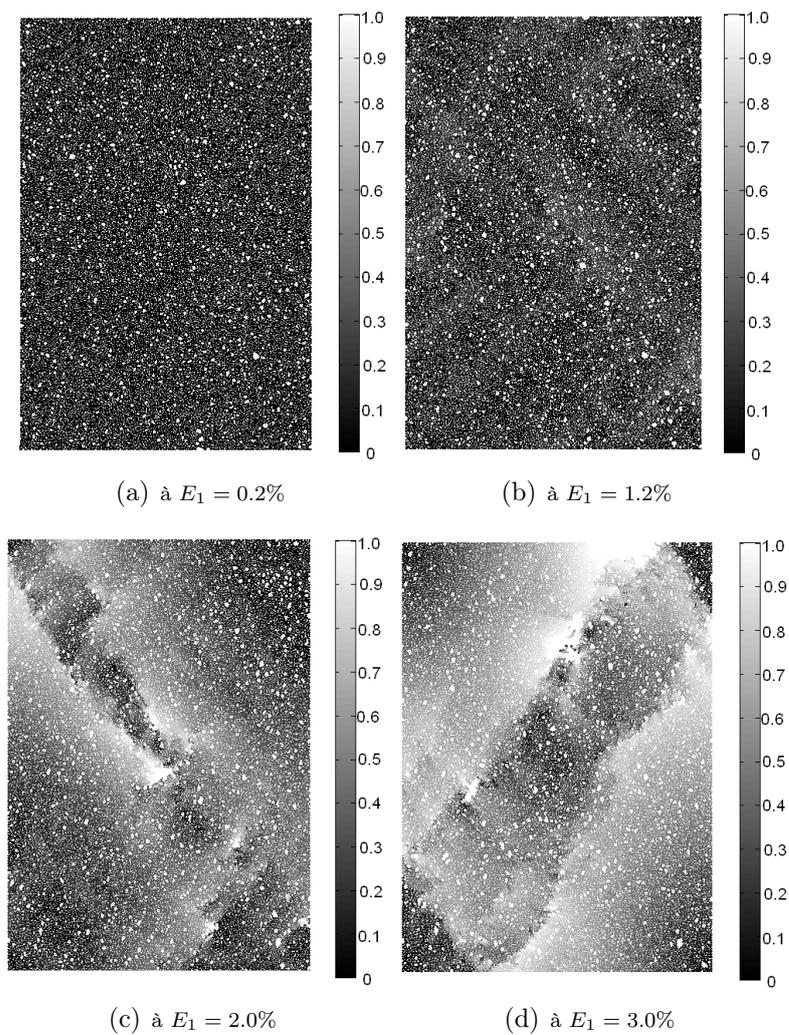
**FIGURE 3.12** – Distributions des déplacements relatifs entre les centres de particules en contact à une déformation axiale  $E_1 = 1.2\%$  : (a) pour les déplacements relatifs normaux et (b) pour les déplacements relatifs tangentiels.

s'aperçoit que le champ de déplacement discret est assez *homogène* pour le niveau de déformation (a) et devient plus *fluctuant* par rapport au champ de déplacement d'un milieu continu équivalent pour le niveau de déformation (b). Pour ces deux niveaux de déformation, le champ de déplacement discret n'est pas très fluctuant dans l'assemblage. Cependant, le champ de déplacement discret est très hétérogène pour les niveaux de déformation (c) et (d). On voit clairement des zones où les déplacements des centres de particules sont fortement fluctuants. Ces zones forment des bandes : une bande pour le niveau de déformation (c) et deux bandes pour le niveau de déformation (d). Dans la littérature, ces bandes sont appelées *bandes de cisaillement* et ont fait l'objet de nombreuses études (Yoshida *et al.*, 1994; Oda, 1997; Oda et Kazama, 1998).

Ce résultat permet donc de conclure que :

- le champ de déplacement des centres de particules apparaît assez *homogène* pour des niveaux de déformation macroscopique bien avant le pic de la courbe contrainte - déformation ;
- autour du pic et après le pic, le champ de déplacement des centres des particules devient très hétérogène. Des bandes de cisaillement apparaissent dans l'assemblage.

Compte tenu de ces constatations, nous allons donc nous concentrer, par la suite, sur des analyses de la déformation locale de l'assemblage granulaire dans la zone de comportement pré-pic de la courbe contrainte - déformation, particulièrement pour deux niveaux de déformation axiale macroscopique (a)  $E_1 = 0.2\%$  et (b)  $E_1 = 1.2\%$ .



**FIGURE 3.13** – Distributions spatiales du degré de fluctuation des déplacements des centres de particules  $\tilde{\delta\mathbf{u}}_p$  pour différents niveaux de déformation macroscopique : (a)  $E_1 = 0.2\%$ , (b)  $E_1 = 1.2\%$ , (c)  $E_1 = 2.0\%$ , (d)  $E_1 = 3.0\%$ .



# Chapitre 4

## Définition de l'échelle mésoscopique

### Introduction

La définition d'une échelle mésoscopique appropriée dans l'étude du comportement local des matériaux granulaires fait l'objet de ce chapitre. Une telle échelle sera définie en se basant sur des représentations géométriques des matériaux granulaires. Nous présentons d'abord quelques représentations géométriques proposées dans la littérature. Nous choisissons ensuite une représentation géométrique appropriée pour l'objectif de ce travail et définissons une échelle mésoscopique pour les milieux granulaires grâce à la représentation géométrique choisie. La structure à l'échelle mésoscopique est ensuite décrite. Enfin, nous étudions l'hétérogénéité structurale des assemblages granulaires à l'échelle mésoscopique.

### 4.1 Etat de l'art

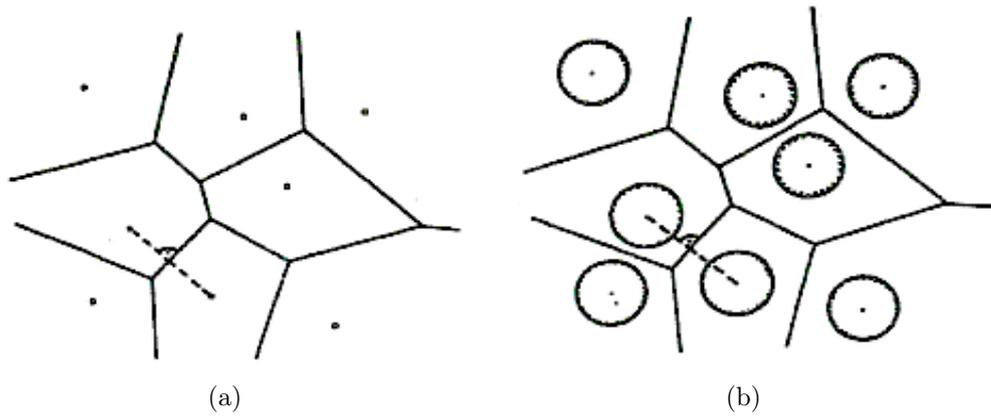
Un assemblage granulaire peut être décrit par des systèmes géométriques qui ont pour objectif principal de permettre la description de la structure interne de ces milieux. Ces systèmes géométriques ont fait l'objet de nombreuses études dans la littérature (Satake, 1978, 1992; Bagi, 1996a; Satake, 2002, 2004; Kuhn, 1997, 1999). Dans cette section, quelques systèmes géométriques proposés dans la littérature pour les milieux granulaires sont présentés.

#### 4.1.1 Systèmes de Voronoi, de Dirichlet et de Delaunay

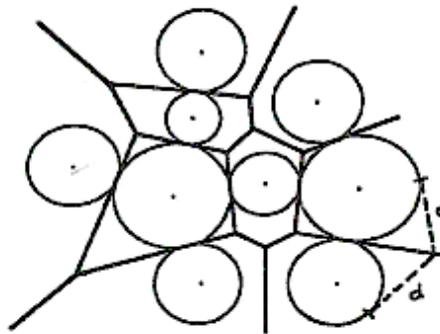
##### 4.1.1.1 Systèmes de Voronoi

Le système géométrique de Voronoi a été initialement proposé pour un ensemble des points discrets donné (Voronoi, 1908). En 2D, le plan contenant ces points est subdivisé en sous-domaines polygonaux, chaque sous-domaine contient exactement un point. Les côtés de chaque sous-domaine sont les lignes médianes des segments droits joignant deux points voisins (figure 4.1(a)). Le système de Voronoi en 3D est similaire : le domaine contenant des points est subdivisé en polyèdres dont les faces sont les plans médians entre deux points voisins.

Le système de Voronoi est ensuite généralisé à des assemblages mono-disperses de disques ou de sphères. Pour des assemblages de disques de même taille, le plan



**FIGURE 4.1** – Systèmes géométriques de Voronoi a) pour un ensemble de points et b) pour un assemblage mono-disperse de disques (Oda et Iwashita, 1999).

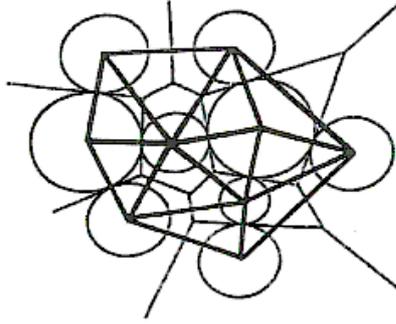


**FIGURE 4.2** – Système géométrique de Dirichlet pour un assemblage de disques polydisperses (Oda et Iwashita, 1999).

est subdivisé en polygones dont les côtés sont les lignes médianes joignant les deux centres de disques voisins (figure 4.1(b)). Chaque polygone contient exactement un disque. La même partition est appliquée en 3D.

#### 4.1.1.2 Système de Dirichlet

Dirichlet (1850) a proposé un système géométrique pour des assemblages dans lesquels les particules ne sont pas nécessairement de même taille. Considérons un assemblage de disques en 2D ou de sphères en 3D pour lequel les particules ne s'interpénètrent pas. A chaque particule est associé un sous-domaine qui contient les points ayant une tangente à cette particule plus courte qu'à n'importe quelle autre particule. Les sous-domaines dans ce système sont des polygones. La figure 4.2 présente le système géométrique de Dirichlet pour un assemblage de disques polydisperses, sur lequel les lignes droites en gras sont les frontières communes entre les sous-domaines polygonaux. On peut noter que pour un assemblage mono-disperse de disques ou de sphères, les systèmes de Voronoi et de Dirichlet sont équivalents.



**FIGURE 4.3** – Système géométrique de Delaunay (ligne en gras) construit à partir du système de Dirichlet (Oda et Iwashita, 1999).

#### 4.1.1.3 Système de Delaunay

Le système de Delaunay subdivise un milieu granulaire en triangles en 2D ou en tétraèdres en 3D, dont les sommets sont les centres de particules. Le système de Delaunay peut être obtenu par la méthode de *triangulation de Delaunay* (Lee et Schachter, 1980; Guibas *et al.*, 1990). Cette méthode consiste d'abord à connecter les centres de particules en contact par des segments de droite, un milieu granulaire 2D est donc subdivisé en polygones. Chaque polygone est ensuite subdivisé en triangles. La partition d'un milieu granulaire 3D en tétraèdres est similaire. Il est à noter que cette méthode de triangulation ne mène pas à une solution unique car plusieurs discrétisations en triangles sont possibles pour un même polygone. Il existe également une autre méthode de triangulation qui construit un système de Delaunay à partir du système de Dirichlet. Ce système peut être obtenu en joignant deux centres de particules qui sont contenues dans les deux cellules de Dirichlet ayant un côté commun, comme illustré sur la figure 4.3.

#### 4.1.1.4 Construction du système de Dirichlet à partir du système de Delaunay

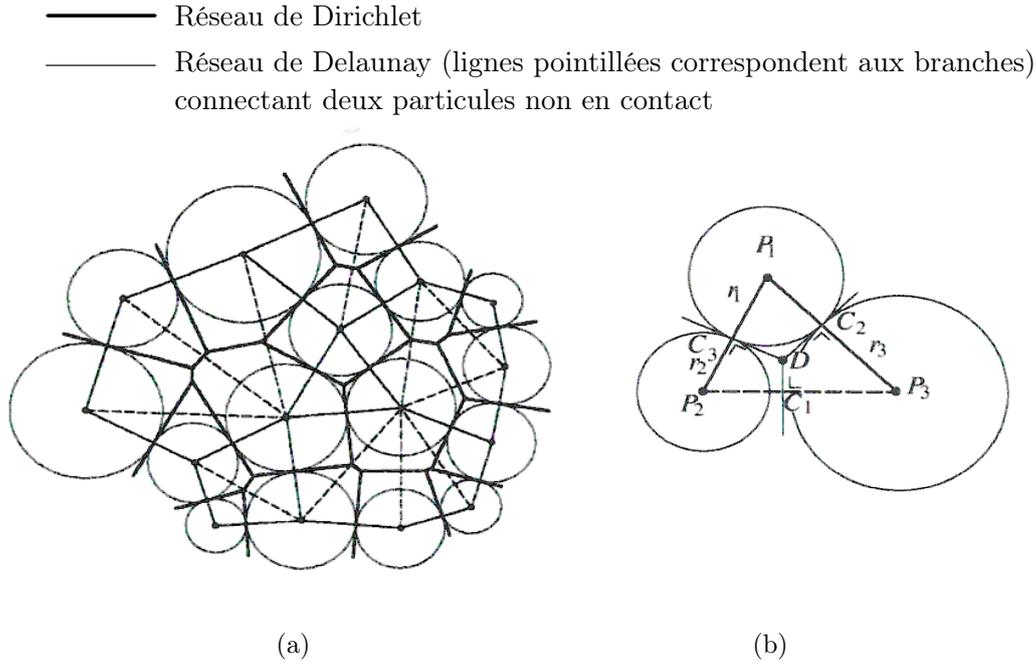
Il est également possible d'obtenir le système géométrique de Dirichlet à partir du système de Delaunay. Cette méthode est décrite dans Satake (2002, 2004) pour des assemblages de disques ou de sphères. Dans la suite, nous présenterons la méthode utilisée pour des assemblages de disques.

Pour chaque cellule de Delaunay, on définit d'abord un *centre de Dirichlet*. En effet, les trois lignes dans le système de Dirichlet, qui sont perpendiculaires aux trois côtés d'un triangle dans le système de Delaunay, passent par un point commun, comme le montre la figure 4.4. Ce point commun est défini comme le centre de Dirichlet du triangle considéré. Le vecteur position du centre de Dirichlet,  $\mathbf{x}^D$ , pour un triangle  $T$ , est calculé d'après :

$$x_i^D = \frac{1}{2S_T} \sum_{p=1}^3 c^p \hat{l}_i^p, \quad (4.1)$$

où :

- un côté du triangle est numéroté  $p$  s'il ne contient pas le sommet  $p$  ;



**FIGURE 4.4** – (a) Réseaux de Dirichlet et de Delaunay et (b) centre de Dirichlet d'un triangle (Satake, 2004).

- $\hat{\boldsymbol{l}}^p$  est le vecteur dont la norme est égale à la longueur du côté  $p$  et la direction est la normale extérieure au côté  $p$  ;
- $S_T$  est l'aire du triangle  $T$  ;
- $c^p$  est défini par (4.2) :

$$c^p = \frac{1}{2}(r_p^2 - \boldsymbol{x}_k^p \cdot \boldsymbol{x}_k^p), \quad (4.2)$$

où  $r_p$  est le rayon de la particule  $p$  et  $\boldsymbol{x}^p$  est le vecteur position du sommet  $p$ .

A chaque particule est associée une cellule de Dirichlet dont les sommets sont les centres de Dirichlet de toutes les cellules de Delaunay dont le centre de cette particule est un de leurs sommets.

### 4.1.2 Deux systèmes géométriques duals de Bagi

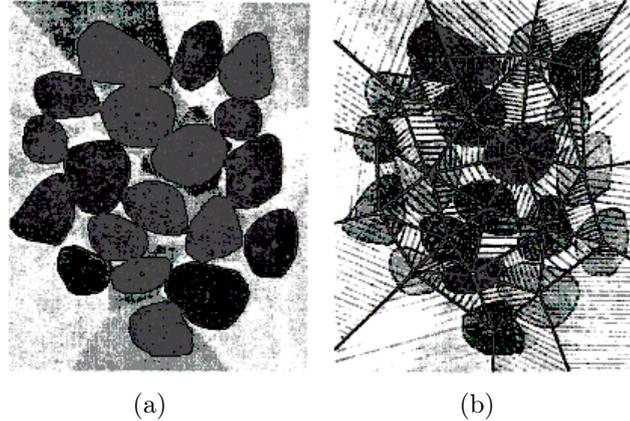
Les deux systèmes géométriques, appelés le *système de cellules matérielles* et le *système de cellules spatiales*, ont été proposés par Bagi (1996a). Ils sont définis pour des assemblages 2D ou 3D de particules de forme convexe arbitraire.

#### Le système de cellules matérielles

Si chaque point dans l'espace est assigné à la particule la plus proche (voir la définition dans Bagi (1996a)), l'ensemble de points assignés à une même particule constitue une cellule matérielle. La figure 4.5(a) illustre un système de cellules matérielles 2D, chaque cellule contient une seule particule.

### Le système de cellules spatiales

Ce système est construit à partir du premier système en joignant les centres des particules contenues dans les deux cellules matérielles qui partagent un côté commun. Les cellules spatiales sont donc des triangles en 2D et des tétraèdres en 3D. La figure 4.5(b) présente le système de cellules spatiales associé avec le système de cellules matérielles.



**FIGURE 4.5** – Deux systèmes géométriques duals de Bagi pour un assemblage de particules convexes a) système de cellules matérielles b) système de cellules spatiales (Bagi, 1996a).

### 4.1.3 Graphe de particules et graphe de vides

Les *graphes de particules* et les *graphes de vides* ont été initialement proposés par Satake (1978, 1992) pour décrire la structure interne des milieux granulaires bidimensionnels.

#### Graphe de particules

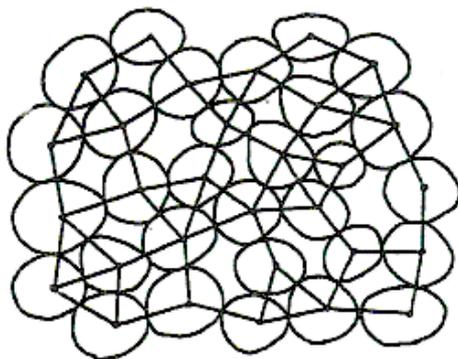
Le graphe de particules pour un assemblage granulaire 2D peut être obtenu en joignant les centres de particules en contact par des segments de droite, appelés *branches*. Le milieu est donc subdivisé en polygones, appelés *boucles*. Chaque boucle est alors composée par des branches connectant deux centres de particules en contact (figure 4.6). Les boucles dans le graphe de particules ne sont pas seulement des triangles mais aussi des quadrangles, pentagones, etc.

Pour chaque graphe de particules, on a la relation suivante, appelée *formule d'Euler*, entre le nombre de particules,  $N_p$ , le nombre de contacts,  $N_c$ , et le nombre de boucles,  $N_b$  :

$$N_p - N_c + N_b = 1. \quad (4.3)$$

On introduit un *nombre de redondance*, noté  $\hat{r}^h$ , pour chaque boucle :  $\hat{r}^h = r^h - 3$ , où  $r^h$  est le nombre de côtés de chaque boucle. Un nombre moyen de redondance d'un graphe de particules est défini par :

$$R = \frac{1}{N_b} \sum_{h=1}^{N_b} \hat{r}^h. \quad (4.4)$$

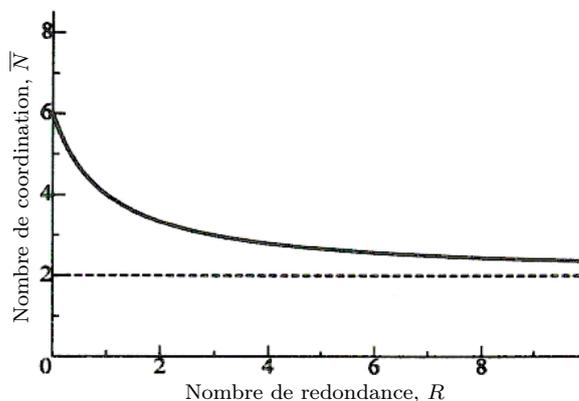


**FIGURE 4.6** – Graphe de particules pour un assemblage granulaire 2D (Oda et Iwashita, 1999).

Pour un assemblage composé d'un nombre de particules suffisamment grand, on montre que :

$$R \approx \frac{6 - \bar{N}}{\bar{N} - 2}, \quad (4.5)$$

où  $\bar{N}$  est le nombre de coordination. La figure 4.7 illustre cette relation. On peut constater que  $R$  augmente quand le nombre de coordination  $\bar{N}$  diminue, et  $R$  peut donc être considéré comme une mesure de la densité d'un assemblage granulaire.



**FIGURE 4.7** – Relation entre le nombre de redondance  $R$  et le nombre de coordination  $\bar{N}$  (Oda et Iwashita, 1999).

### Graphe de vides

Un assemblage granulaire est composé de particules solides et de pores. Les pores en 2D sont également en contact aux points de contact entre les particules solides (figure 4.8(a)). On peut donc imaginer une particule duale, appelée *particule de vide*, pour chaque pore. Un graphe peut alors être construit pour l'assemblage de particules de vide de façon similaire à la construction du graphe de particules. Ce graphe est appelé *graphe de vides* (figure 4.8(b)).

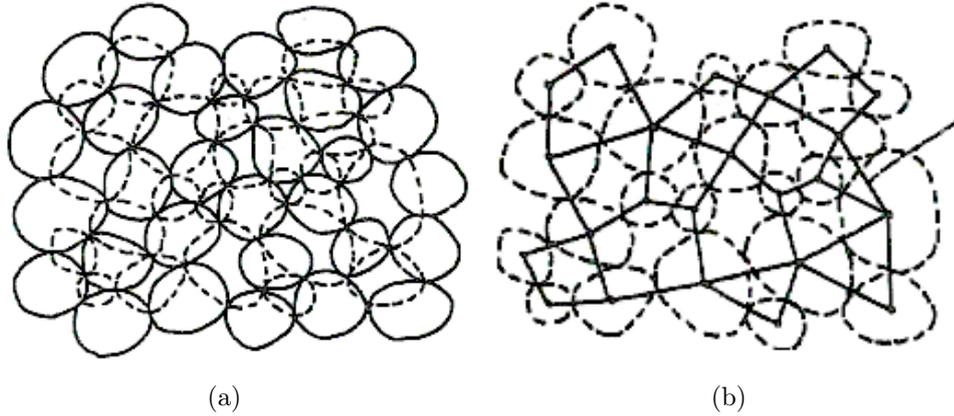


FIGURE 4.8 – (a) Particules de vide et (b) graphe de vides. Lignes pointillées correspondent aux particules de vide (Oda et Iwashita, 1999)..

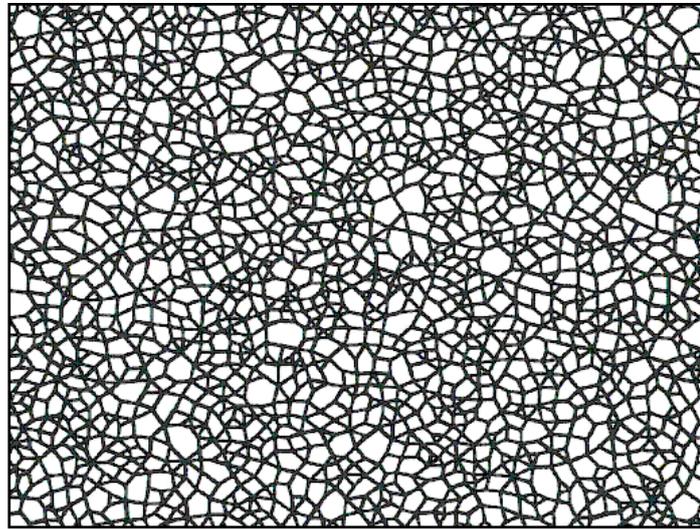


FIGURE 4.9 – Graphe de particules modifié (Kuhn, 1999).

### Graphe de particules modifié par Kuhn

Kuhn (1997, 1999) a repris le graphe de particules de Satake, mais l'a modifié de manière à inclure seulement les particules participant au support de la charge appliquée au matériau. Ceci consiste à éliminer toutes les particules *isolées* (particules qui ne sont pas en contact avec d'autres particules) de la configuration prise pour construire le graphe de particules. Les boucles dans ce graphe sont appelées *cellules de vides* puisqu'elles délimitent les espaces de vides dans les assemblages granulaires.

#### 4.1.4 Choix d'une représentation géométrique appropriée

Par la suite, on choisit le graphe de particules proposé par Satake (1978, 1992) et modifié par Kuhn (1997, 1999) pour l'analyse dans le cadre de ce travail. Ce choix est dû aux raisons principales suivantes :

- Ce graphe permet de bien décrire la structure d'un assemblage granulaire. En

effet, ce graphe subdivise un assemblage granulaire en cellules de vides, et chacune contient tous les constituants élémentaires du matériau : particules, contacts, vides interstitiels.

- Chaque cellule de vides peut être considérée comme une microstructure fermée dans le sens où elle est composée de particules en contact (figure 4.10(a)). Cette microstructure fermée permet à chaque cellule de vides de supporter instantanément la charge qui lui est appliquée par l'extérieur. Ceci n'est pas le cas pour une microstructure ouverte (figure 4.10(b)).

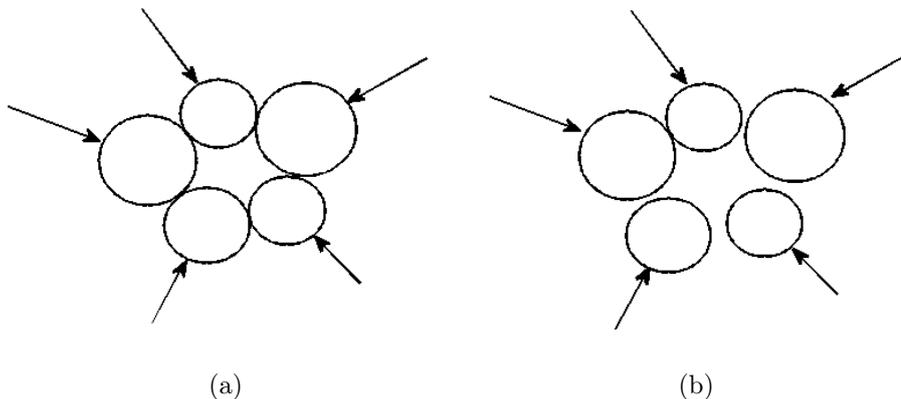


FIGURE 4.10 – (a) Microstructure fermée et (b) microstructure ouverte.

## 4.2 Construction du graphe de particules

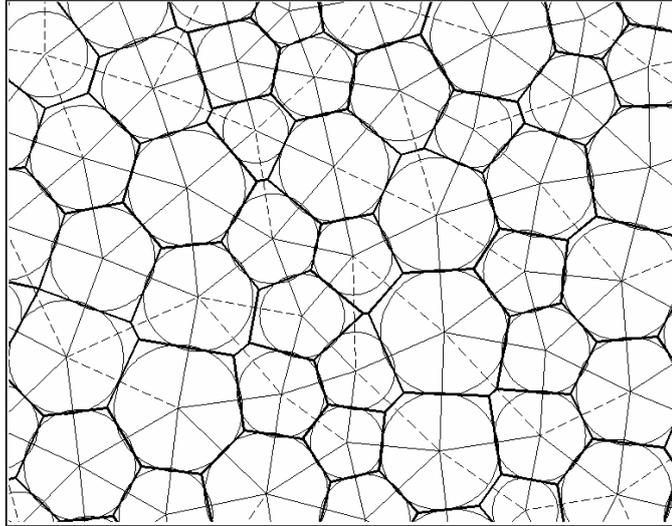
Dans cette section, nous présenterons d'abord la technique pour construire le graphe de particules pour des assemblages de disques. Les caractéristiques du graphe de particules construit pour l'assemblage de 25 000 disques, présenté dans le chapitre 3, sont ensuite analysées.

### 4.2.1 Procédure de construction

La construction du graphe de particules pour l'assemblage de disques comprend les étapes suivantes :

**Etape de nettoyage de l'assemblage :** les particules isolées dans l'assemblage doivent toutes être temporairement éliminées de la configuration prise pour la construction du graphe. En fait, une particule peut être isolée à un moment donné mais elle peut être réactivée et participer à supporter la sollicitation appliquée ultérieurement au cours de la déformation de l'assemblage. Il est donc important de remettre ces particules isolées pour les configurations suivantes si elles sont activées.

**Etape de triangulation de Delaunay :** l'assemblage est ensuite subdivisé en triangles avec la méthode de triangulation (voir la section 4.1.1.3). A partir du système de Delaunay obtenu, on peut construire le système de Dirichlet avec la méthode présentée dans la section 4.1.1.4. La figure 4.11 illustre une partie des systèmes de



**FIGURE 4.11** – Une partie des systèmes de Delaunay et de Dirichlet obtenus pour l’assemblage de disques utilisé dans la présente analyse. Lignes en gras correspondent aux cellules de Dirichlet. Lignes continues et pointillées correspondent respectivement aux branches fermées et ouvertes.

Delaunay et Dirichlet construits. Une branche dans le système de Delaunay peut être définie comme une *branche de contact* (branche fermée) si elle joint deux centres de particules en contact ou une *branche ouverte* dans le cas contraire.

**Etape d’association des triangles :** si chaque couple de triangles adjacents partagent une branche ouverte, ils sont associés. L’ensemble de triangles associés forme un sous-domaine polygonal (figure 4.12(a)). Chaque sous-domaine est alors délimité par les branches de contact. L’ensemble des sous-domaines constitue le graphe de particules pour l’assemblage, comme illustré sur la figure 4.12(b).

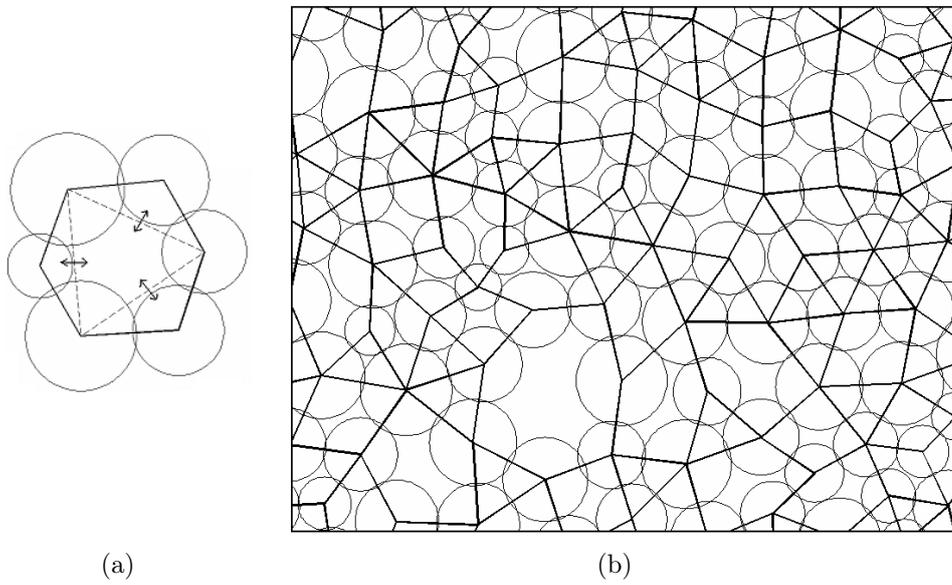
La position des centres de particules dans un assemblage granulaire change au cours de la sollicitation, il est donc crucial de mettre à jour le graphe de particules, c’est-à-dire d’appliquer la procédure de construction présentée ci-dessus à tout moment du processus de la sollicitation. Une telle mise à jour coûte très cher en terme de temps de calcul. Nous mettons donc à jour le graphe tous les incréments  $\delta E_1 = 0.1\%$  de déformation axiale.

Afin d’éviter l’effet provoqué par les parois, tous les sous-domaines, qui contiennent au moins une particule proche du bord de l’échantillon, sont éliminés du graphe de particules. La figure 4.13 présente le graphe de particules après avoir éliminé les sous-domaines proches du bord de l’échantillon.

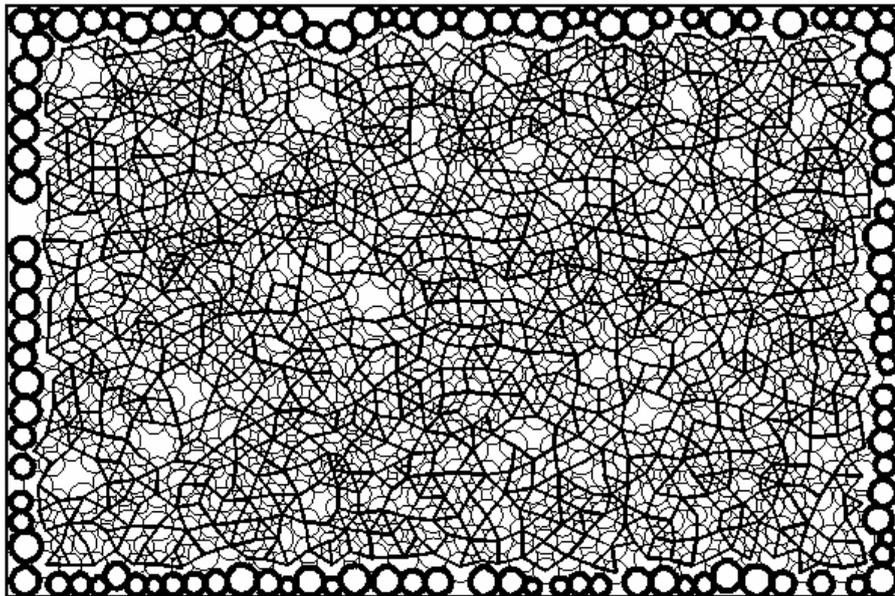
## 4.2.2 Caractéristiques du graphe des particules

Les caractéristiques importantes pour un graphe de particules sont :

- le volume couvert par le graphe  $\hat{V}$  (qui est différent du volume total  $V$  de l’échantillon) ;
- le nombre de particules dans dans le graphe  $\hat{N}_p$  ;
- le nombre de branches de contact  $\hat{N}_c$  ;



**FIGURE 4.12** – (a) Association des triangles voisins en cas de branches ouvertes (lignes pointillées) pour obtenir un sous-domaine et (b) une partie du graphe de particules obtenu avec l’assemblage utilisé dans la présente analyse.



**FIGURE 4.13** – Exemple du graphe de particules pour un assemblage de disques après avoir éliminé les particules proches du bord (ligne en gras).

## 4.2 Construction du graphe de particules

- le nombre de sous-domaines dans le graphe  $N_b$  ;
- le nombre de coordination  $\overline{N}'$  pour la partie de l'assemblage comprise dans le graphe  $\overline{N}' = 2\hat{N}_c/\hat{N}_p$  ;
- le nombre moyen de redondance  $R$  ;

Le tableau 4.1 présente ces caractéristiques du graphe de particules pour l'assemblage de 25 000 disques utilisé dans la présente analyse à l'état initial et à l'état correspondant à une déformation axiale  $E_1 = 5\%$ . Il est alors facile de vérifier, pour ce graphe, les relations suivantes :

$$\hat{N}_p - \hat{N}_c + N_b = 1 \quad (4.6)$$

$$R \approx \frac{6 - \overline{N}'}{\overline{N}' - 2} \quad (4.7)$$

Caractéristiques	Déformation axiale $E_1$	
	$E_1 = 0.0 \%$	$E_1 = 5.0 \%$
$\hat{N}_p$	230 56	22 634
$\hat{N}_c$	45 855	40 315
$\overline{N}'$	3.98	3.56
$N_b$	22 800	17 688
$R$	0.99	1.51

**TABLE 4.1** – Caractéristiques du graphe de particules pour l'état initial et pour une déformation axiale  $E_1 = 5 \%$ .

L'évolution de l'assemblage granulaire au cours de l'essai biaxial conduit à une évolution du graphe de particules. Les figures 4.14 et 4.15 présentent respectivement le rapport entre le nombre de sous-domaines  $N_b$  et le nombre de particules  $\hat{N}_p$  comprises dans le graphe des particules, et le nombre moyen de redondance  $R$ , en fonction de la déformation axiale  $E_1$ . On constate une diminution du rapport  $N_b/\hat{N}_p$  et une augmentation du nombre moyen de redondance  $R$  avec la déformation de l'assemblage. Ces phénomènes sont certainement résultent de la perte de contacts au cours de la déformation de l'assemblage. L'augmentation du nombre moyen de redondance signifie que *les sous-domaines dans le graphe s'agrandissent, en moyenne, en terme de nombre de côtés par sous-domaine au cours de la déformation de l'assemblage.*

Les compositions du graphe, en termes de pourcentages en nombre  $P_N$  et en volume  $P_V$  des sous-domaines en fonction du nombre de côtés par sous-domaine,  $r^h$ , à l'état initial et à l'état correspondant à une déformation axiale  $E_1 = 5\%$ , sont présentées sur la figure 4.16. On trouve que les triangles, les quadrilatères, les pentagones sont les plus présents dans le graphe (ils occupent plus de 90% en nombre) à l'état initial. Cependant, la proportion de ces types de sous-domaines diminue au cours de la déformation de l'assemblage, alors que la proportion des sous-domaines ayant un nombre de côtés plus élevé, comme les hexagones, les hexagones, les octogones, etc., augmente. Il est à noter que les triangles occupent un pourcentage en nombre important à l'état initial (38% environ) mais ils occupent un pourcentage

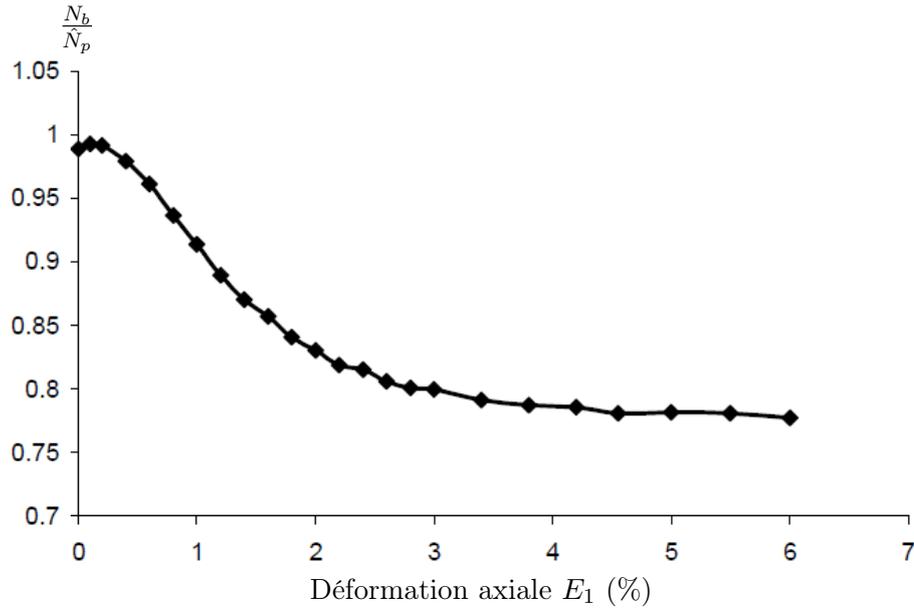


FIGURE 4.14 – Evolution du rapport entre le nombre de sous-domaines  $N_b$  et le nombre de particules  $\hat{N}_p$  au cours de l’essai biaxial.

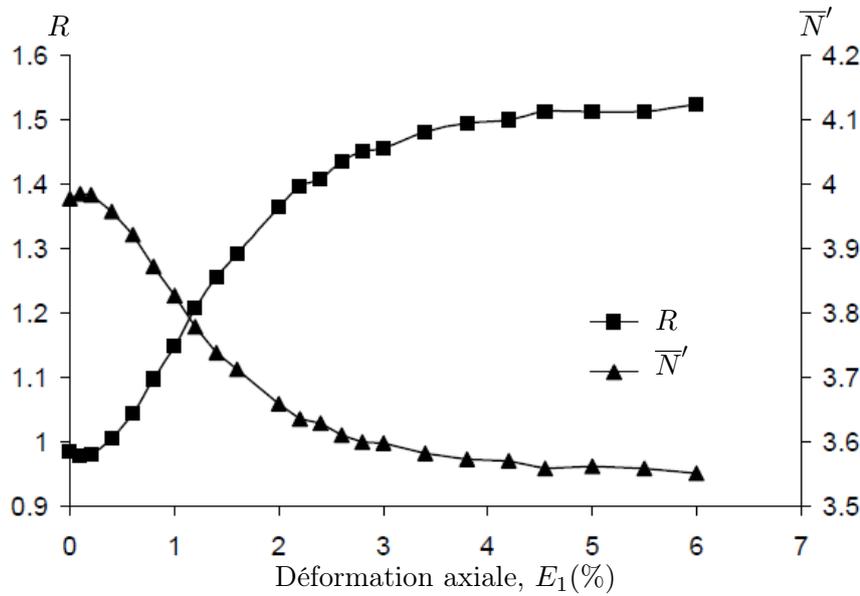
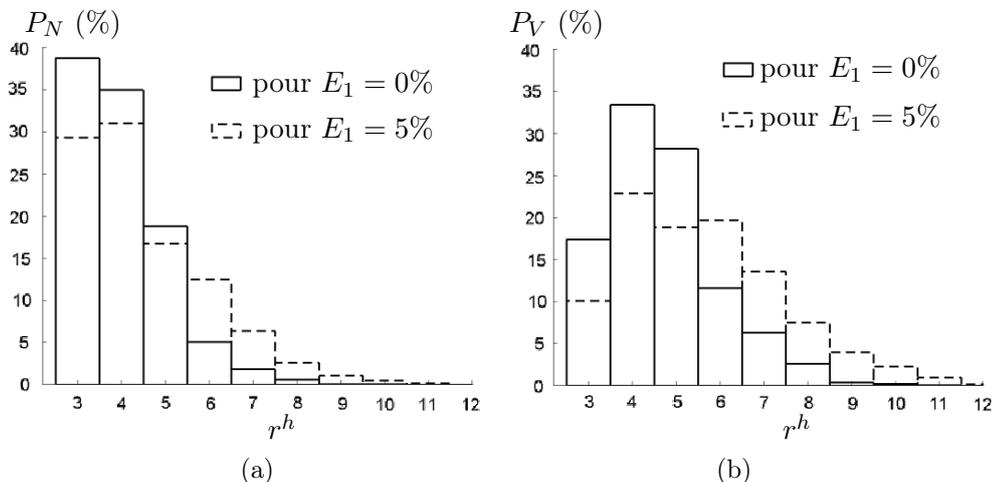


FIGURE 4.15 – Evolution du nombre moyen de redondance  $R$  et du nombre de coordination  $\bar{N}'$  au cours de l’essai biaxial.

en volume beaucoup moins important (17% environ). Ceci est dû au fait que les triangles présentent, en général, un volume plus petit parmi les sous-domaines dans le graphe de particules.

### 4.2.3 Définition de l’échelle mésoscopique

Grâce au graphe de particules défini ci-dessus, on peut définir *une échelle mésoscopique, pour les milieux granulaires 2D, qui se situe au niveau des sous-domaines dans le graphe de particules*. La structure locale des milieux granulaires à cette échelle est décrite et analysée dans les sections suivantes.



**FIGURE 4.16** – Compositions du graphe de particules en termes de pourcentages en nombre  $P_N$  en volume  $P_V$  des sous-domaines en fonction du nombre de côtés  $r^h$  par sous-domaine (a) pourcentage en nombre  $P_N$  et (b) pourcentage en volume  $P_V$ .

## 4.3 Description géométrique à l'échelle mésoscopique

Chaque sous-domaine dans le graphe de particules contient des particules, des vides et des branches de contact. La description géométrique d'un sous-domaine consiste donc à décrire le volume, la densité et la texture de l'arrangement de ses particules.

### 4.3.1 Volume des sous-domaines

Le volume d'un sous-domaine,  $V^h$ , (l'aire en 2D) est défini comme le volume de la région délimitée par les branches de contact du sous-domaine. Les distributions du volume des sous-domaines  $V^h$  à l'état initial et à l'état correspondant à une déformation axiale  $E_1 = 5\%$  sont présentées sur la figure 4.17. On peut constater que le volume des sous-domaines  $V^h$  n'est pas uniforme, il varie très largement. De plus, les sous-domaines ont tendance à s'agrandir au cours de la dilatace de l'échantillon.

Afin d'analyser statistiquement la distribution du volume des sous-domaines ainsi que d'autres variables à l'échelle mésoscopique, on calcule la valeur moyenne  $\langle V^h \rangle$  et l'écart-type  $S[V^h]$  pour la distribution du volume  $V^h$  des sous-domaines (voir la définition de ces mesures dans l'annexe C.1). Les évolutions de la valeur moyenne  $\langle V^h \rangle$  et de l'écart-type  $S[V^h]$ , au cours de l'essai, sont présentées sur la figure 4.18. Une augmentation de la valeur moyenne  $\langle V^h \rangle$  confirme la tendance à l'agrandissement des sous-domaines au cours de la dilatace. De plus, la distribution du volume  $V^h$  des sous-domaines devient de plus en plus hétérogène, ce qui se traduit par une augmentation de la valeur de l'écart-type  $S[V^h]$ .

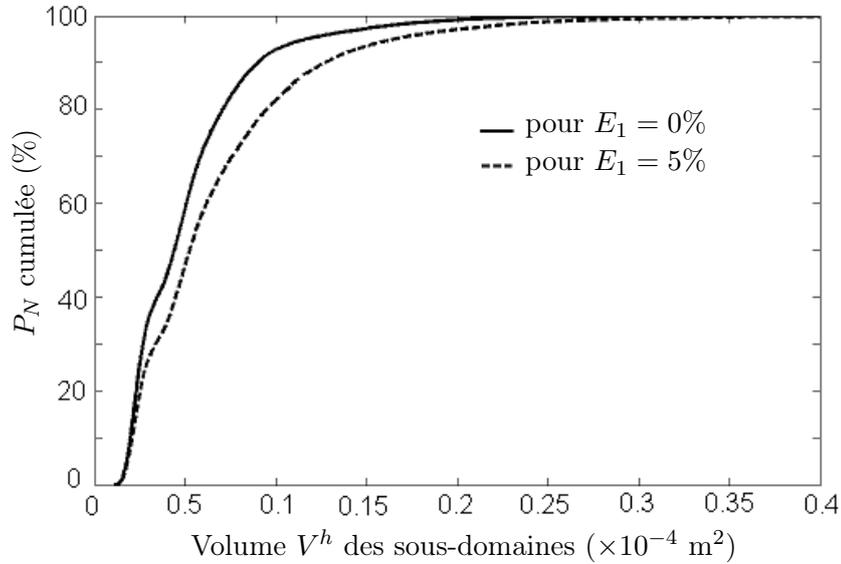


FIGURE 4.17 – Distributions du volume des sous-domaines  $V^h$  à l'état initial et à l'état correspondant à une déformation axiale  $E_1 = 5\%$ .

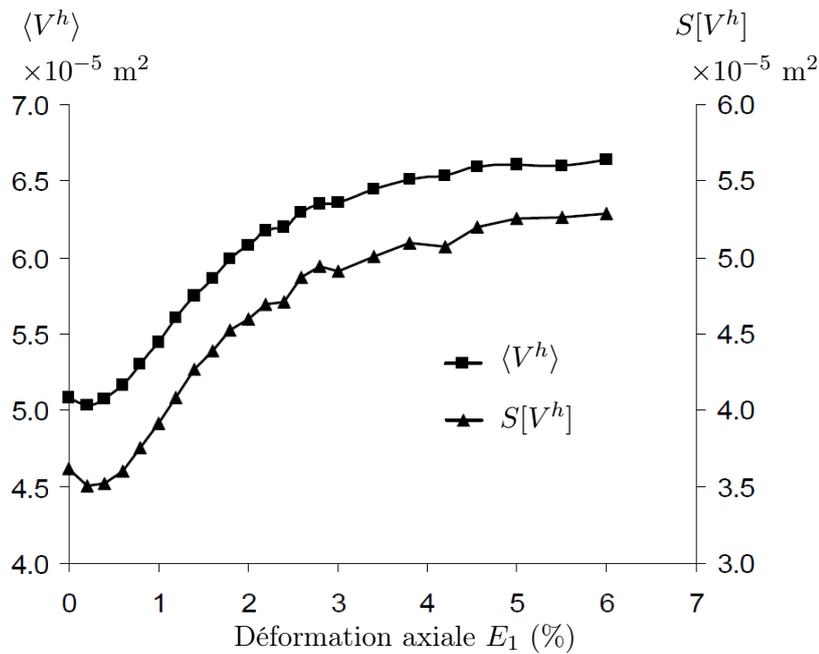
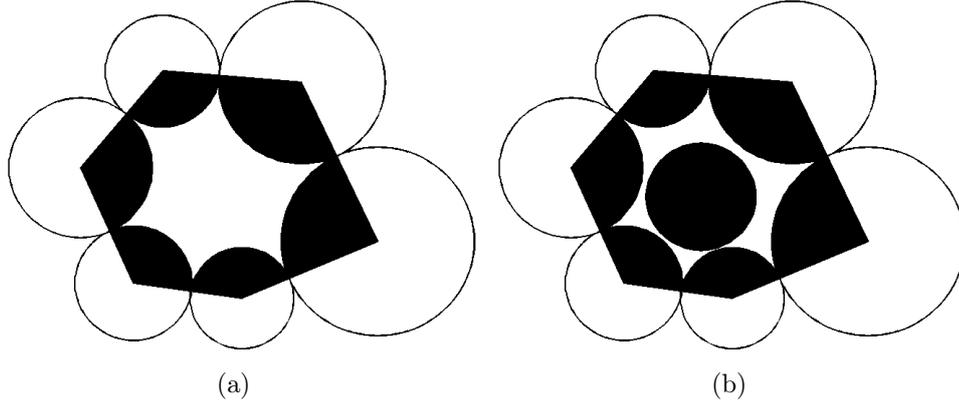


FIGURE 4.18 – Evolution de la valeur moyenne  $\langle V^h \rangle$  et de l'écart-type  $S[V^h]$  pour la distribution du volume des sous-domaines au cours de l'essai.

### 4.3.2 Densité des sous-domaines

La densité de l'arrangement des particules sur chaque sous-domaine est décrite par deux variables scalaires : la porosité  $\rho^h$  et la valence  $r^h$ . La première concerne les vides et la dernière concerne les contacts dans chaque sous-domaine.



**FIGURE 4.19** – (a) Sous-domaine sans particules isolées et (b) avec particules isolées.

### a) Porosité

On distingue deux types de porosité pour un sous-domaine :  $\rho^h$ , la porosité sans particules isolées à l'intérieur du sous-domaine et  $\hat{\rho}^h$ , la porosité avec particules isolées. Les porosités  $\rho^h$ ,  $\hat{\rho}^h$  pour un sous-domaine  $h$  sont définies par :

$$\rho^h = \frac{V_v^h}{V^h}, \quad (4.8)$$

$$\hat{\rho}^h = \frac{\hat{V}_v^h}{V^h}, \quad (4.9)$$

où :

- $V^h$  est le volume du sous-domaine  $h$ .
- $V_v^h$ ,  $\hat{V}_v^h$  sont respectivement les volumes de vides à l'intérieur du sous-domaine  $h$  sans particules isolées et avec particules isolées (figure 4.19).

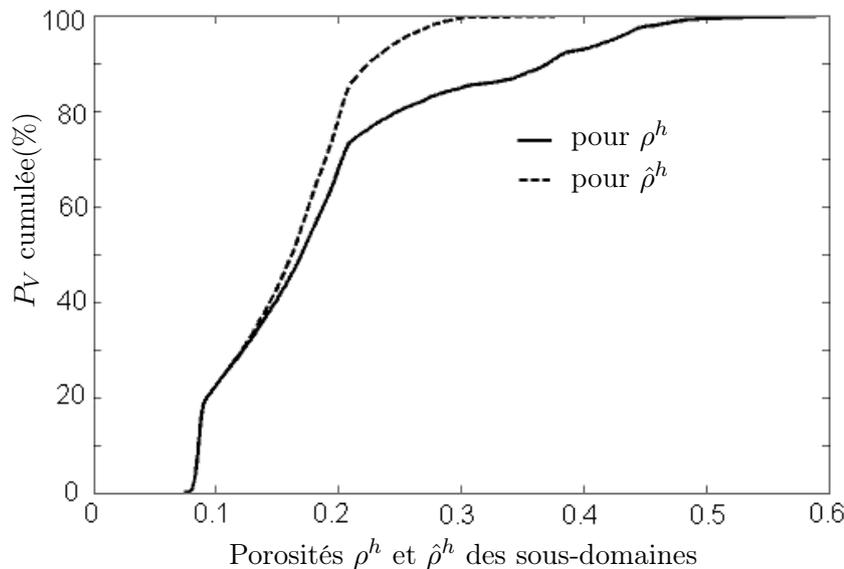
Bien évidemment, la porosité sans particules isolées  $\rho^h$  est toujours supérieure ou égale à la porosité avec particules isolées  $\hat{\rho}^h$ . De plus, on peut retrouver les porosités sans particules isolées  $P$  et avec particules isolées  $\hat{P}$  de l'échantillon en faisant la moyenne des porosités correspondantes  $\rho^h$  et  $\hat{\rho}^h$  sur l'ensemble de sous-domaines dans le graphe :

$$P = \frac{1}{\hat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \rho^h V^h, \quad (4.10)$$

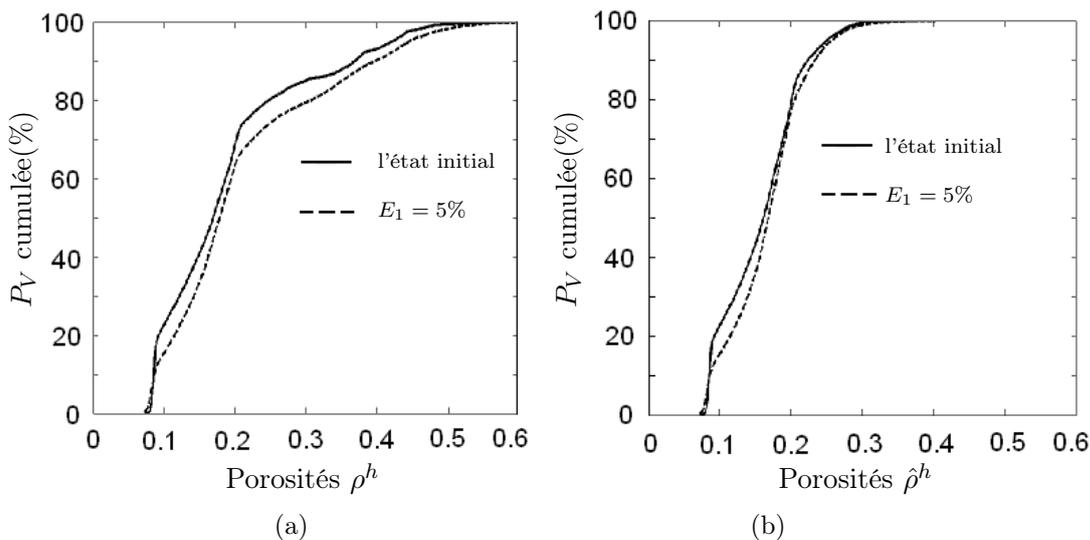
$$\hat{P} = \frac{1}{\hat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \hat{\rho}^h V^h, \quad (4.11)$$

où  $\hat{V}$  est le volume total du graphe de particules.

La figure 4.20 représente les distributions des porosités  $\rho^h$  et  $\hat{\rho}^h$ . On constate que les porosités  $\rho^h$  et  $\hat{\rho}^h$  sont fortement hétérogènes à l'échelle mésoscopique. Les distributions des porosités  $\rho^h$  et  $\hat{\rho}^h$  coïncident pour de faibles valeurs de porosités mais diffèrent pour des valeurs plus importantes. La porosité  $\rho^h$  varie jusqu'à 0.5, tandis que la porosité  $\hat{\rho}^h$  ne varie que jusqu'à 0.3.



**FIGURE 4.20** – Distribution des porosités sans particules isolées  $\rho^h$  et avec particules isolées  $\hat{\rho}^h$  des sous-domaines à l'état initial.

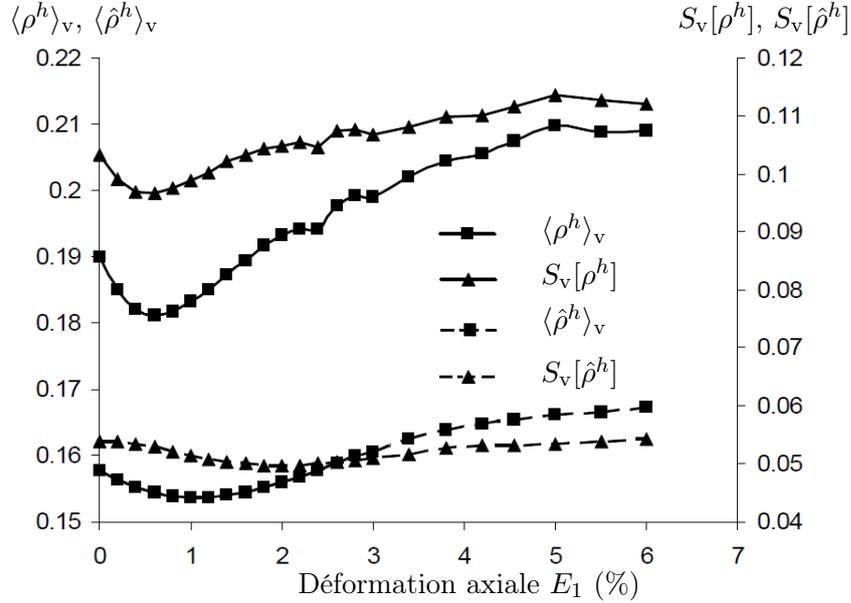


**FIGURE 4.21** – Distributions des porosités des sous-domaines pour l'état initial et pour une déformation  $E_1 = 5\%$  (a) porosité sans particules isolées  $\rho^h$ , et (b) porosité avec particules isolées  $\hat{\rho}^h$ .

La figure 4.21 présente les distributions des porosités  $\rho^h$  et  $\hat{\rho}^h$  pour l'état initial et pour une déformation axiale  $E_1 = 5\%$ . On trouve alors que les porosités  $\rho^h$  et  $\hat{\rho}^h$  des sous-domaines ont tendance à augmenter, ce qui résulte de la dilatace de l'échantillon au cours de l'essai.

Les évolutions des valeurs moyennes  $\langle \rho^h \rangle_v$ ,  $\langle \hat{\rho}^h \rangle_v$ , et des écart-types  $S_v[\rho^h]$ ,  $S_v[\hat{\rho}^h]$  (l'indice v signifie une moyenne volumique), au cours de l'essai, sont présentées sur la figure 4.22. Cette figure montre que les porosités  $\rho^h$  et  $\hat{\rho}^h$  des sous-domaines ont

tendance à augmenter avec la dilatace de l'échantillon et deviennent de plus en plus hétérogènes. De plus, l'écart-type  $S_v[\rho^h]$  prend des valeurs plus importantes et évolue plus fortement que l'écart-type  $S_v[\hat{\rho}^h]$ . Cela signifie que la porosité sans particules isolées  $\rho^h$  est plus hétérogène à l'échelle mésoscopique que la porosité avec particules isolées  $\hat{\rho}^h$ , et que l'hétérogénéité de la première évolue plus fortement que l'hétérogénéité de la dernière au cours de la dilatace de l'échantillon.



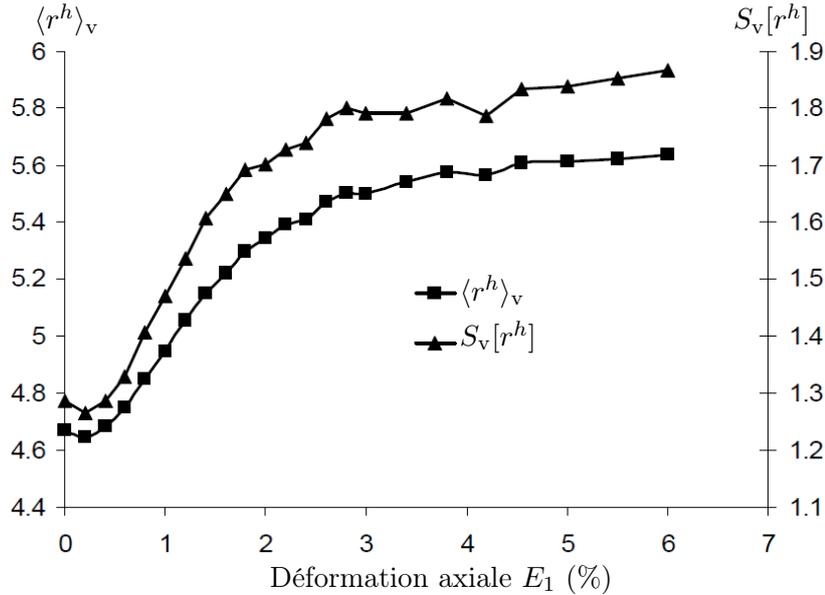
**FIGURE 4.22** – Evolutions des valeurs moyennes  $\langle \rho^h \rangle_v$ ,  $\langle \hat{\rho}^h \rangle_v$  et des écarts-types  $S_v[\rho^h]$ ,  $S_v[\hat{\rho}^h]$  pour les distributions des porosités sans particules isolées  $\rho^h$  et avec particules isolées  $\hat{\rho}^h$  des sous-domaines au cours de l'essai.

## b) Valence

La valence d'un sous-domaine est définie comme le nombre de côtés  $r^h$  du sous-domaine. En fait, chaque côté du sous-domaine connecte deux particules en contact, la valence  $r^h$  est donc également le nombre de contacts d'un sous-domaine. On peut trouver la relation suivante entre la valence moyenne  $\langle r^h \rangle$  sur l'ensemble des sous-domaines et le nombre de coordination  $\overline{N}'$  de la partie de l'assemblage comprise dans le graphe à partir des relations (4.4) et (4.5).

$$\langle r^h \rangle = \frac{1}{N_b} \sum_{h=1}^{N_b} r^h = R - 3 \approx \frac{2\overline{N}'}{\overline{N}' - 2}. \quad (4.12)$$

La valence  $r^h$  des sous-domaines dans le graphe de particules varie très largement (voir la figure 4.16). Les évolutions de sa moyenne volumique  $\langle r^h \rangle_v$  et de son écart-type  $S_v[r^h]$  sont présentées sur la figure 4.23. La moyenne  $\langle r^h \rangle_v$  augmente, similairement au nombre moyen de redondance  $R$ , avec la déformation de l'assemblage. De plus, l'écart-type  $S_v[r^h]$  augmente fortement au cours de l'essai, ce qui montre que le graphe de particules devient de plus en plus hétérogène en terme de valence  $r^h$  des sous-domaines.



**FIGURE 4.23** – Evolutions de la valeur moyenne  $\langle r^h \rangle_v$  et de l'écart-type  $S_v[r^h]$  pour la distribution de la valence  $r^h$  des sous-domaines au cours de l'essai.

### c) Corrélation entre les porosités $\rho^h$ , $\hat{\rho}^h$ et la valence $r^h$ à l'échelle mésoscopique

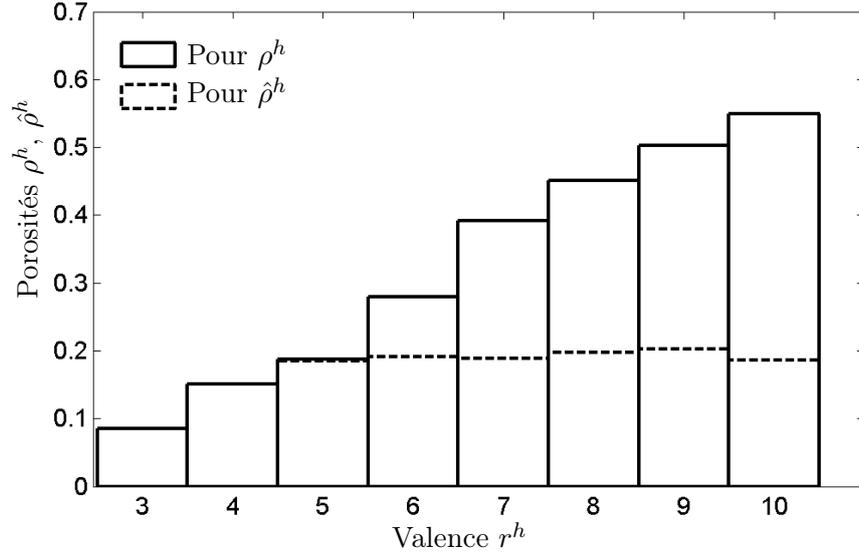
La figure 4.24 représente les porosités moyennes, sans particules isolées et avec particules isolées, sur chaque ensemble de sous-domaines ayant une même valence (représenté par chaque barre) en fonction de la valence  $r^h$  pour l'état initial. On trouve une corrélation très significative entre la porosité sans particules isolées  $\rho^h$  et la valence  $r^h$  : les sous-domaines ayant une petite valence (triangles, quadrilatères, pentagones) ont tendance à occuper les zones denses, tandis que les sous-domaines ayant une valence plus élevée ont tendance à occuper les zones lâches de l'échantillon. Cependant, ce n'est pas le cas pour la porosité avec particules isolées  $\hat{\rho}^h$  qui est faiblement corrélée avec la valence  $r^h$ . Ces corrélations sont également retrouvées pour d'autres états de l'assemblage. Ce résultat permet de conclure que *la suppression des particules isolées du graphe de particules est appropriée pour la description de la densité d'un assemblage granulaire à l'échelle mésoscopique*. Par la suite, on ne considéra que le graphe de particules avec la suppression des particules isolées.

## 4.3.3 Texture des sous-domaines

### 4.3.3.1 Description de la texture des sous-domaines

Afin de décrire la texture d'un sous-domaine, Tsuchikura et Satake (1998, 2001) ont proposé un tenseur  $\Gamma^h$ , appelé *loop tensor* (en anglais, *loop* signifie *boucle* dans le graphe de particules), défini par :

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r^h} l_i^k l_j^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r^h} l^k l^k n_i^k n_j^k, \quad (4.13)$$



**FIGURE 4.24** – Corrélations entre la valence  $r^h$  et les porosités sans particules isolées  $\rho^h$  et avec particules isolées  $\hat{\rho}^h$  des sous-domaines pour l'état initial.

où  $\mathbf{l}^k = l^k \mathbf{n}^k$  est un vecteur branche dont la norme est égale à la longueur  $l^k$  de la branche  $k$  et la direction est définie par la normale de contact  $\mathbf{n}^k$ .

On modifie ce tenseur de telle manière que sa trace donne le périmètre du sous-domaine considéré. Le tenseur ainsi obtenu, appelé *tenseur de boucle*, s'écrit sous la forme suivante :

$$L_{ij}^h = \sum_{k=1}^{r^h} l^k n_i^k n_j^k. \quad (4.14)$$

Il est facile de vérifier que le périmètre d'un sous-domaine,  $\alpha^h$ , est égal à la trace du tenseur  $\mathbf{L}^h$  :

$$\alpha^h = \text{trace}(\mathbf{L}^h) = \sum_{k=1}^{r^h} l^k. \quad (4.15)$$

La moyenne des tenseurs  $\mathbf{L}^h$  sur tous les sous-domaines dans le graphe donne

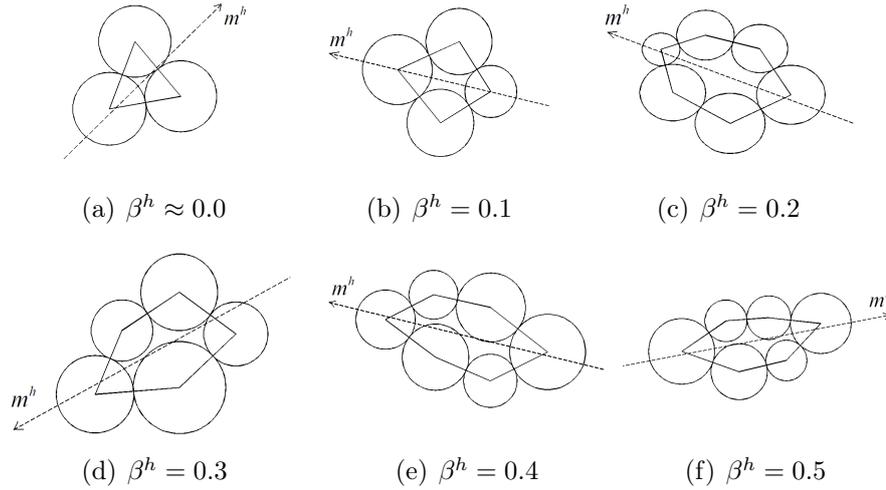
$$\bar{L}_{ij} = \frac{\sum_{h=1}^{N_b} L_{ij}^h}{\sum_{h=1}^{N_b} \alpha^h} = \frac{\sum_{k=1}^{N_c} l^k n_i^k n_j^k}{\sum_{k=1}^{N_c} l^k}, \quad (4.16)$$

constitue une mesure de la texture globale d'un assemblage granulaire (Nemat-Nasser et Mehrabadi, 1983).

Le tenseur de boucle  $\mathbf{L}^h$  est ensuite décomposé en une partie isotrope et une partie déviatoire  $\mathbf{D}^h$  :

$$L_{ij}^h = \frac{\alpha^h}{2} \delta_{ij} + D_{ij}^h. \quad (4.17)$$

On peut définir qu'un sous-domaine est isotrope si la partie déviatoire  $\mathbf{D}^h$  est nulle et anisotrope dans le cas contraire. Les sous-domaines de forme régulière, pour lesquels  $\mathbf{D}^h = \mathbf{0}$ , sont donc les sous-domaines isotropes. L'anisotropie d'un sous-domaine peut être décrite par les deux quantités déduites de  $\mathbf{D}^h$  :



**FIGURE 4.25** – Sous-domaines avec différents degrés d’allongement  $\beta^h$  et différentes directions d’allongement  $\mathbf{m}^h$ .

(1) Le degré d’allongement  $\beta^h$  est le nombre défini par :

$$\beta^h = \frac{\sqrt{D_{ij}^h D_{ij}^h}}{\alpha^h} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2}}, \quad (4.18)$$

où  $L_1$ ,  $L_2$  sont respectivement les valeurs principales majeure et mineure du tenseur  $\mathbf{L}^h$ .

(2) La direction d’allongement  $\mathbf{m}^h$  est la direction principale majeure du tenseur  $\mathbf{L}^h$ . On peut alors choisir de définir l’orientation d’un sous-domaine comme celle de sa direction d’allongement  $\mathbf{m}^h$  avec l’angle d’orientation  $\theta^h$  par rapport à la direction mineure macroscopique ( $\mathbf{m}^h = (\cos \theta^h, \sin \theta^h)$ ).

La figure 4.25 présente six sous-domaines différents dans le graphe de particules avec six valeurs croissantes du degré d’allongement  $\beta^h$  et avec différentes directions d’allongement  $\mathbf{m}^h$ . Il peut être noté que pour un polygone régulier  $\beta^h = 0$  et il n’y a pas de direction d’allongement dans ce cas. Dans le présent graphe de particules, il n’y a pas de sous-domaines parfaitement réguliers, il existe donc toujours une direction d’allongement pour n’importe quel sous-domaine. Cependant, l’importance de la direction d’allongement  $\mathbf{m}^h$  d’un sous-domaine doit être analysée en fonction du degré d’allongement  $\beta^h$ .

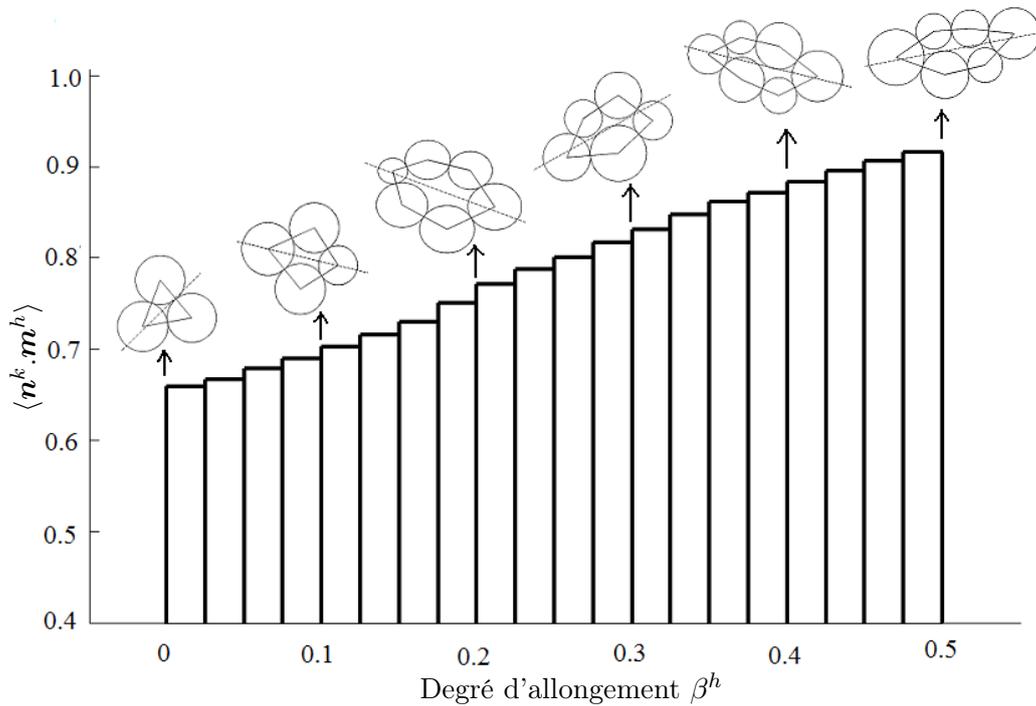
### Orientation des contacts dans chaque sous-domaine

Le degré d’allongement  $\beta^h$  d’un sous-domaine a une corrélation avec l’orientation des contacts dans le sous-domaine. Pour montrer cette corrélation, il suffit de calculer la quantité  $\langle \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{m}^h \rangle$  définie par :

$$\langle \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{m}^h \rangle = \frac{1}{r^h} \sum_{k=1}^{r^h} n_i^k m_i^h. \quad (4.19)$$

Plus la valeur de  $\langle \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{m}^h \rangle$  d’un sous-domaine est proche de 1, plus les contacts dans ce sous-domaine s’orientent préférentiellement dans sa direction d’allongement  $\mathbf{m}^h$ .

La figure 4.26 présente les valeurs de  $\langle \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{m}^h \rangle$  en fonction du degré d'allongement  $\beta^h$  des sous-domaines, sous la forme d'un diagramme en barres. Les sous-domaines présentés sur la figure 4.25 sont également présentés sur cette figure, et leur position correspond à leurs valeurs de  $\langle \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{m}^h \rangle$  et de  $\beta^h$ . On peut constater que des valeurs de  $\beta^h$  proches de 0.0 correspondent à des valeurs de  $\langle \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{m}^h \rangle$  proches de 0.65, et pour cette gamme de valeurs de  $\langle \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{m}^h \rangle$ , les contacts dans les sous-domaines correspondants s'orientent peu préférentiellement dans la direction d'allongement  $\mathbf{m}^h$ . La valeur de  $\langle \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{m}^h \rangle$  augmente avec la valeur de  $\beta^h$ , ce qui signifie que la tendance à l'orientation préférentielle des contacts dans chaque sous-domaine, selon sa direction d'allongement, augmente avec son degré d'allongement. Le sous-domaine (f) sur la figure 4.25, qui correspond à  $\beta^h = 0.5$  et  $\langle \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{m}^h \rangle = 0.92$ , présente une forte orientation préférentielle des contacts dans la direction d'allongement.



**FIGURE 4.26** – Corrélation entre la quantité  $\langle \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{m}^h \rangle$  et le degré d'allongement  $\beta^h$  des sous-domaines.

#### 4.3.3.2 Distribution du degré d'allongement des sous-domaines

La figure 4.27 présente les distributions de la valeur du degré d'allongement  $\beta^h$  des sous-domaines pour l'état initial et pour une déformation axiale à  $E_1 = 5\%$ . On trouve une forte hétérogénéité en terme de degré d'allongement  $\beta^h$  des sous-domaines avec une plage de variation de  $\beta^h$  de 0.0 à 0.5. De plus, les sous-domaines ont tendance à s'allonger faiblement au cours de la déformation de l'assemblage. Cette tendance faible à l'allongement des sous-domaines avec la déformation peut être confirmée par une augmentation légère de la valeur moyenne  $\langle \beta^h \rangle_v$  jusqu'à une déformation axiale  $E_1 = 2.5\%$  (figure 4.28). Après ce niveau de déformation, la valeur moyenne  $\langle \beta^h \rangle_v$  reste à peu près constante. On trouve la même tendance pour l'écart-type  $S_v[\beta^h]$ . Ceci signifie que l'hétérogénéité du degré d'allongement

$\beta^h$  des sous-domaines augmente faiblement au cours de l'essai. Lorsque le niveau de déformation de l'assemblage est important, les sous-domaines dans le graphe ne s'allongent plus et l'hétérogénéité du degré d'allongement des sous-domaines n'évolue plus.

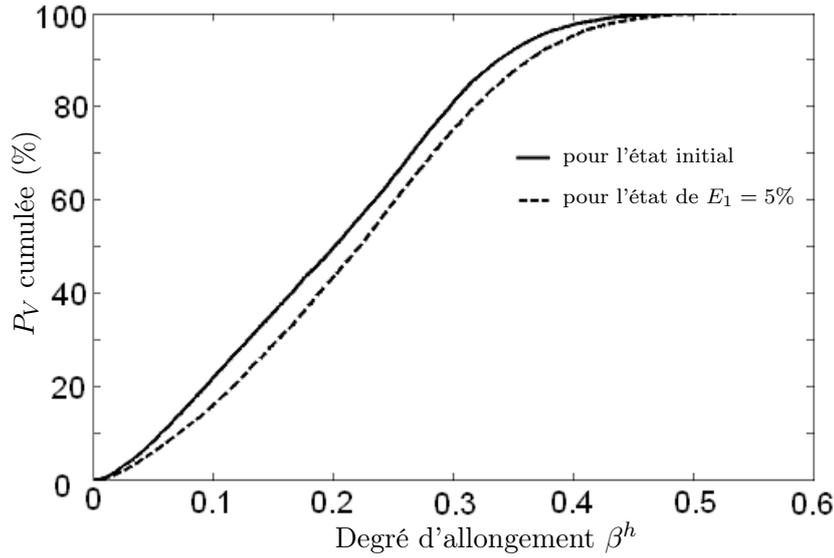


FIGURE 4.27 – Distribution des valeurs du degré d'allongement  $\beta^h$  des sous-domaines pour l'état initial et pour l'état de  $E_1 = 5\%$ .

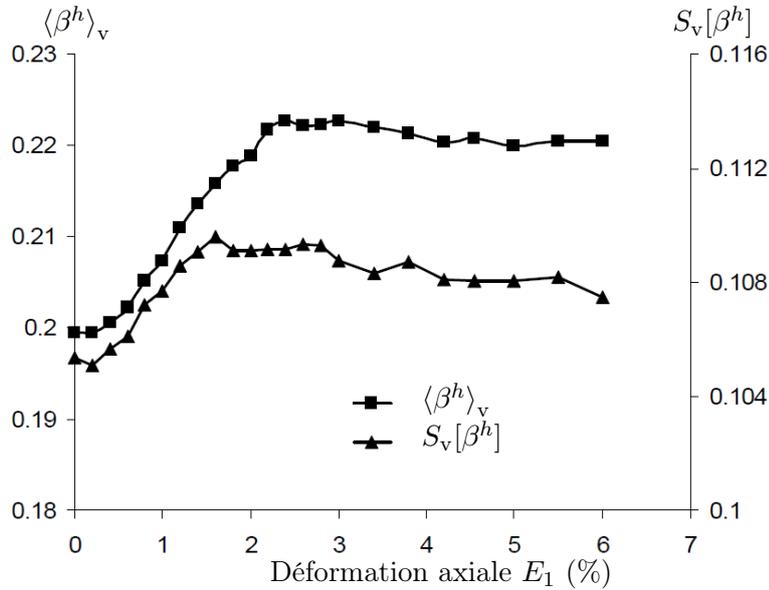
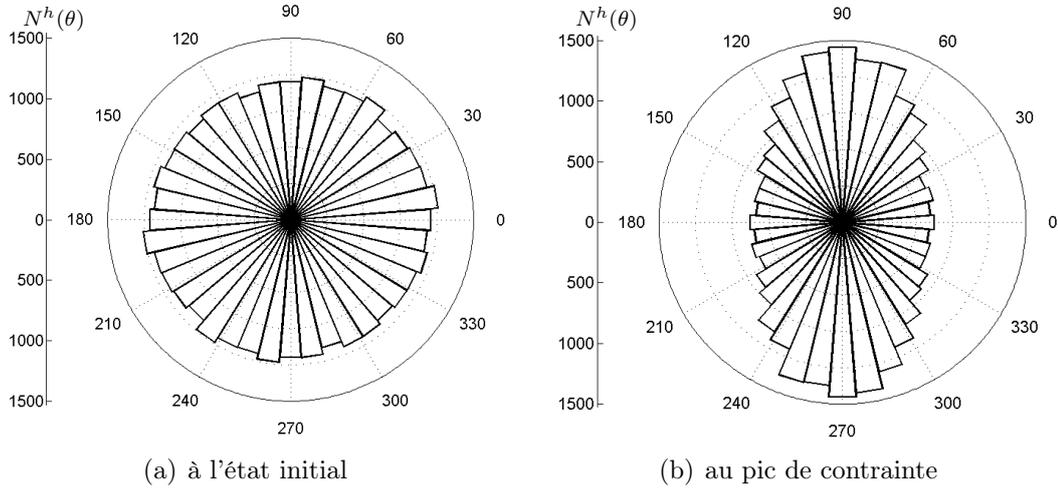


FIGURE 4.28 – Evolutions de la valeur moyenne  $\langle \beta^h \rangle_v$  et de l'écart-type  $S_v[\beta^h]$  pour la distribution du degré d'allongement  $\beta^h$  des sous-domaines au cours de l'essai.

### 4.3.3.3 Distribution de l'orientation des sous-domaines

Comme mentionné précédemment, les sous-domaines dans le graphe de particules sont orientés et leur orientation correspond à l'orientation de leur direction d'allongement. Au cours de l'essai biaxial, la distribution de l'orientation des contacts dans l'échantillon évolue, ce qui entraîne inévitablement une évolution de la distribution de l'orientation des sous-domaines, comme le montre qualitativement la figure 4.29. Ces diagrammes polaires représentent le nombre de sous-domaines dont l'angle d'orientation  $\theta^h$  appartient à un intervalle d'angle polaire donné  $[\theta, \theta + \Delta\theta]$ . On choisit de diviser, dans ces diagrammes, la plage  $[0, 2\pi]$  en 40 intervalles. On constate que *les sous-domaines s'orientent de façons isotrope à l'état initial mais de façon fortement anisotrope au pic de la courbe contrainte-déformation avec une orientation préférentielle dans la direction principale majeure de sollicitation*. Il est intéressant de noter que cette distribution de l'orientation des sous-domaines est très similaire à celle pour les contacts dans l'échantillon (Nguyen *et al.*, 2009).



**FIGURE 4.29** – Distributions de l'orientation des sous-domaines (a) à l'état initial et (b) au pic de la courbe contrainte-déformation.

### Tenseurs de méso-texture

Afin de quantifier la distribution des orientations des sous-domaines, on introduit des tenseurs, intitulés *tenseurs de méso-texture*, définis par :

$$Q_{ij} = \frac{1}{N_b} \sum_{h=1}^{N_b} m_i^h m_j^h, \quad (4.20)$$

$$\hat{Q}_{ij} = \frac{\sum_{h=1}^{N_b} \beta^h m_i^h m_j^h}{\sum_{h=1}^{N_b} \beta^h}. \quad (4.21)$$

Le tenseur  $\hat{Q}$  est proposé pour prendre en compte la dispersion du degré d'allongement  $\beta^h$  des sous-domaines. La trace des deux tenseurs  $Q$  et  $\hat{Q}$  est égale à 1 (par

définition). La figure 4.30 présente les évolutions des composantes des parties déviatoires  $\text{Dev}\mathbf{Q}$  et  $\text{Dev}\hat{\mathbf{Q}}$  des tenseurs  $\mathbf{Q}$  et  $\hat{\mathbf{Q}}$  respectivement. Ces évolutions sont comparées avec les évolutions des composantes de la partie déviatoire  $\text{Dev}\mathbf{H}$  du tenseur de micro-texture  $\mathbf{H}$  défini par (2.9). On constate d'abord que les composantes  $Q_{12}$  et  $\hat{Q}_{12}$  sont très petites par rapport aux composantes  $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$ ,  $\hat{Q}_{11}$  et  $\hat{Q}_{22}$ . Cela signifie donc que les directions principales de la distribution de l'orientation des sous-domaines coïncident avec celles de la sollicitation déviatoire appliquée à l'échantillon. Les deux tenseurs  $\mathbf{Q}$  et  $\hat{\mathbf{Q}}$  sont à peu près isotropes à l'état initial mais deviennent de plus en plus anisotropes au cours de l'essai avec une augmentation progressive des composantes  $\text{Dev}Q_{11}$  et  $\text{Dev}\hat{Q}_{11}$  et une diminution progressive des composantes  $\text{Dev}Q_{22}$  et  $\text{Dev}\hat{Q}_{22}$ . Ce résultat met en évidence ce qui a été présenté sur la figure 4.29. De plus, on trouve une similarité entre les évolutions des tenseurs de méso-texture ( $\mathbf{Q}$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}$ ) et l'évolution du tenseur de micro-texture  $\mathbf{H}$ , ce qui montre qu'il y a un lien étroit entre la distribution de l'orientation des sous-domaines et la distribution de l'orientation des contacts.

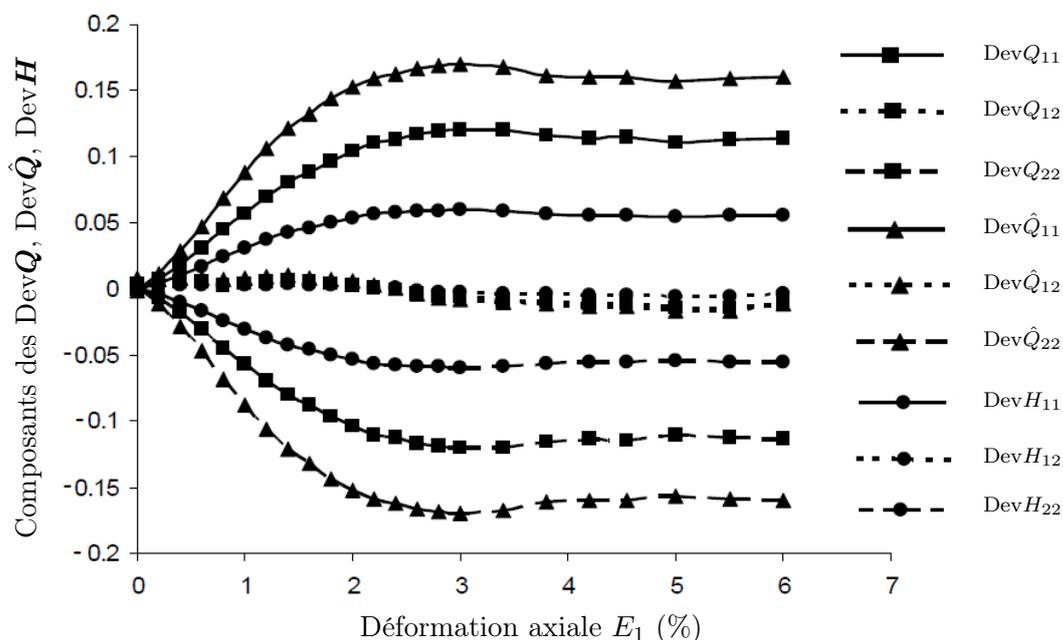
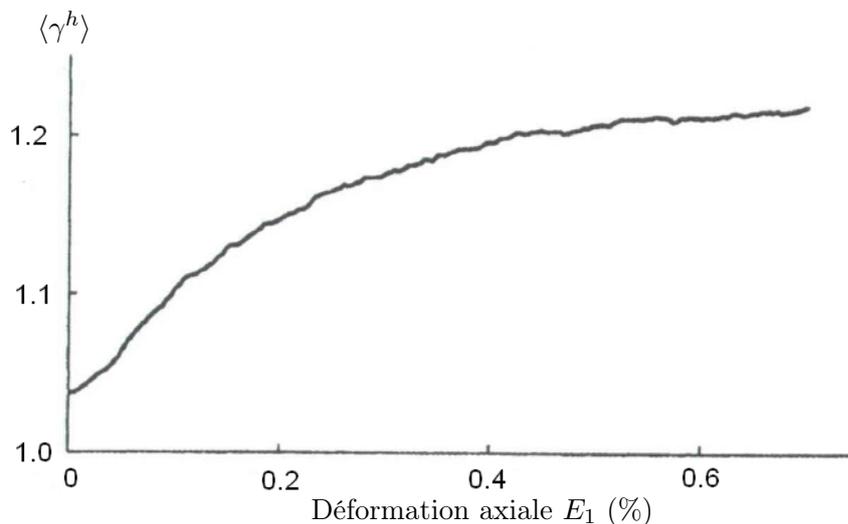


FIGURE 4.30 – Evolutions des composantes des parties déviatoires des tenseurs de méso-texture  $\mathbf{Q}$  et  $\hat{\mathbf{Q}}$  et du tenseur de micro-texture  $\mathbf{H}$  au cours de l'essai biaxial.

On peut aussi remarquer que l'anisotropie en terme de distribution de l'orientation des sous-domaines est beaucoup plus forte que celle en terme de distribution de l'orientation des contacts. De plus, la prise en compte du degré d'allongement dans le tenseur de méso-texture  $\hat{\mathbf{Q}}$  donne une anisotropie plus forte que celle déduite du tenseur  $\mathbf{Q}$ . Ceci suggère que les sous-domaines avec différents degrés d'allongement  $\beta^h$  s'orientent différemment. Cette différence sera analysée dans la section 4.3.4.

Les résultats montrés ci-dessus permettent donc de conclure que *les sous-domaines dans le graphe de particules ont tendance à s'orienter préférentiellement dans la direction principale majeure de sollicitation déviatoire appliquée à l'assemblage.*

La distribution préférentielle de l'orientation des sous-domaines dans la direction principale majeure de sollicitation a aussi été montrée par Kuhn (1999); Tsuchikura



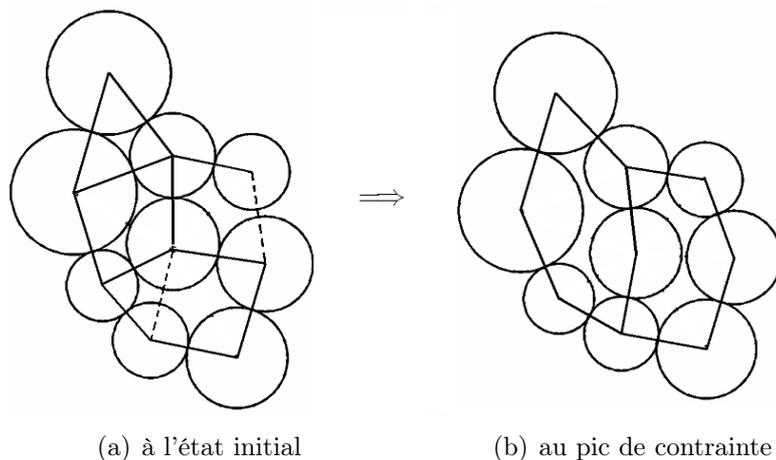
**FIGURE 4.31** – Evolution du rapport moyen hauteur sur largeur  $\langle \gamma^h \rangle$  sur l'ensemble de sous-domaines au cours d'un essai biaxial de compression (Kuhn, 1999).

et Satake (2001). Pour décrire le degré d'allongement d'un sous-domaine dans la direction principale majeure de sollicitation, Kuhn (1999) a défini le rapport *hauteur sur largeur* suivant :

$$\gamma^h = \sqrt{\Gamma_{11}^h / \Gamma_{22}^h}, \quad (4.22)$$

où  $\Gamma_{11}^h$  et  $\Gamma_{22}^h$  sont respectivement les composantes du tenseur de boucle  $\mathbf{\Gamma}^h$  défini par (4.13) dans les directions principales majeure et mineure de sollicitation. Une valeur de  $\gamma^h$  supérieure à 1 signifie que le sous-domaine considéré s'oriente dans la direction majeure, et le contraire pour une valeur de  $\gamma^h$  inférieure à 1. La figure 4.31 illustre l'évolution du rapport moyen  $\langle \gamma^h \rangle$  calculé sur l'ensemble des sous-domaines, en fonction de la déformation axiale  $E_1$  dans un essai biaxial de compression. Une valeur de  $\langle \gamma^h \rangle$  égale approximativement à 1.0 à l'état initial de l'essai signifie que les sous-domaines s'orientent de façon isotrope, ce qui résulte certainement de l'isotropie du matériau. Cependant, le rapport moyen  $\langle \gamma^h \rangle$  augmente fortement et peut atteindre une valeur égale à 1.21 à la fin de l'essai, ce qui montre une distribution anisotrope des orientations des sous-domaines dans la direction majeure de sollicitation. Ce résultat est en très bon accord avec celui obtenu précédemment.

La distribution anisotrope de l'orientation des sous-domaines résulte certainement de la distribution anisotrope de l'orientation des contacts. En effet, au cours d'une sollicitation déviatoire, les contacts créés s'orientent essentiellement dans la direction majeure macroscopique, tandis que les contacts perdus s'orientent dans la direction principale mineure macroscopique. Ceci conduit à la création de sous-domaines orientés dans la direction majeure et à la perte de sous-domaines orientés dans la direction mineure (Nguyen *et al.*, 2009). Ce processus de création et de perte de sous-domaines est illustré sur la figure 4.32.



**FIGURE 4.32** – Illustration du processus de création et de perte de sous-domaines orientés respectivement dans les directions principales majeure et mineure de sollicitation (les lignes pointillées correspondent aux contacts créés dans la configuration suivante).

### 4.3.4 Classification des sous-domaines

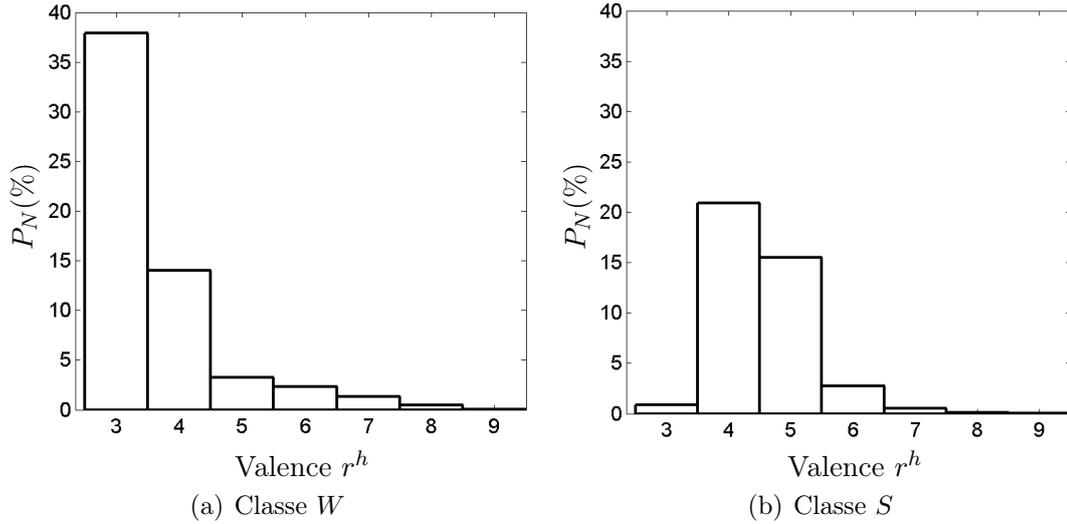
#### 4.3.4.1 Définition de deux classes de sous-domaines

Afin d'analyser le rôle du degré d'allongement  $\beta^h$  dans le comportement des sous-domaines, ces derniers sont répartis en plusieurs classes en fonction de leur valeur  $\beta^h$ . Pour simplifier l'analyse, on choisit de classer les sous-domaines en deux classes  $W$  et  $S$ , avec un seuil  $\beta_o$ . Dans cette analyse, on choisit  $\beta_o$  égal à la valeur moyenne  $\langle \beta^h \rangle_v$  des degrés d'allongement sur l'ensemble des sous-domaines pour le graphe construit à l'état initial (donc,  $\beta_o = 0.2$ ). La classe  $W$  ( $W$  : *weakly*) contient les sous-domaines *faiblement allongés* dont le degré d'allongement  $\beta^h$  est inférieur ou égal à  $\beta_o$  et la classe  $S$  ( $S$  : *strongly*) contient les sous-domaines *fortement allongés* dont le degré d'allongement  $\beta^h$  est supérieur à  $\beta_o$ . Les sous-domaines (a), (b) et (c), présentés sur la figure 4.25, font alors partie de la classe  $W$  et les sous-domaines (d), (e) et (f) font partie de la classe  $S$ .

La figure 4.33 présente la composition des classes  $W$  et  $S$  en terme de pourcentage en nombre des sous-domaines en fonction de leur valence  $r^h$ . On trouve que la classe  $W$  contient une proportion importante de triangles, tandis que la classe  $S$  contient une proportion importante de quadrilatères et de pentagones. La plupart des triangles dans le graphe font donc partie de sous-domaines faiblement allongés. Comme les dimensions des particules sont relativement proches cela paraît normal.

La figure 4.34 représente les distributions de l'orientation des sous-domaines appartenant aux classes  $W$  et  $S$  à l'état initial et au pic de la courbe contrainte - déformation à l'aide des diagrammes polaires. A l'état initial, les sous-domaines s'orientent de façon isotrope quel que soit leur degré d'allongement  $\beta^h$ . Au pic de la courbe contrainte - déformation, la distribution de l'orientation des sous-domaines dépend fortement de leur degré d'allongement  $\beta^h$  : *les sous-domaines fortement allongés  $S$  s'orientent de façon beaucoup plus anisotrope que les sous-domaines faiblement allongés  $W$*  (Nguyen *et al.*, 2009).

Afin de quantifier la distribution de l'orientation des sous-domaines appartenant



**FIGURE 4.33** – Composition des classes  $W$  et  $S$  en terme de pourcentage en nombre  $P_N$  des sous-domaines en fonction de leur valence  $r^h$ .

à chaque classe, deux tenseurs de méso-texture  $\mathbf{Q}^W$  et  $\mathbf{Q}^S$ , similaires au tenseur  $\mathbf{Q}$ , sont définis pour les deux classes  $W$  et  $S$  :

$$Q_{ij}^W = \frac{1}{N_b^W} \sum_{h=1}^{N_b^W} m_i^h m_j^h, \quad (4.23)$$

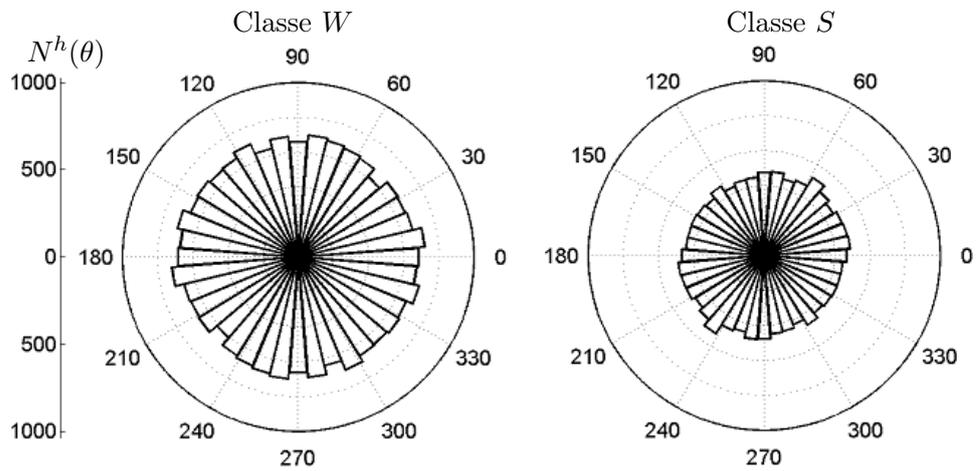
$$Q_{ij}^S = \frac{1}{N_b^S} \sum_{h=1}^{N_b^S} m_i^h m_j^h, \quad (4.24)$$

où  $N_b^W$  et  $N_b^S$  sont respectivement le nombre de sous-domaines dans les classes  $W$  et  $S$ .

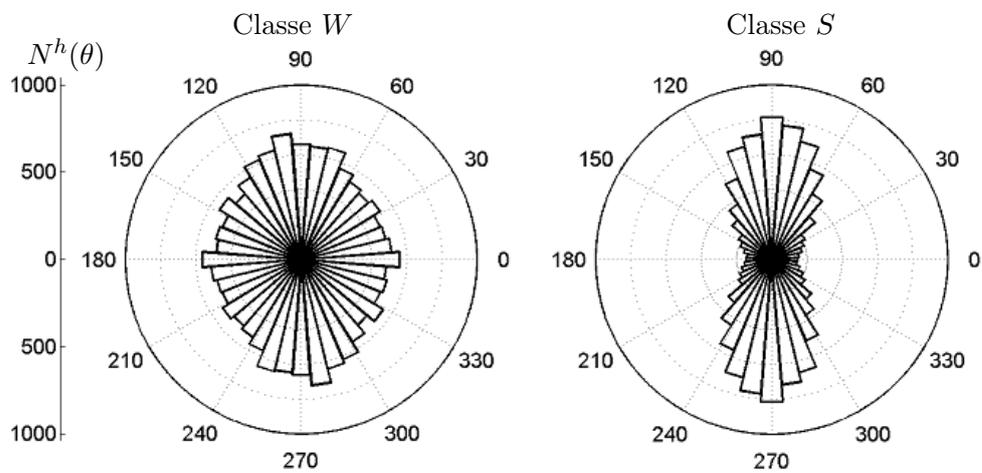
Les évolutions des composantes des parties déviatoires  $\text{Dev}\mathbf{Q}^S$ ,  $\text{Dev}\mathbf{Q}^W$ ,  $\text{Dev}\mathbf{Q}$  des tenseurs respectifs  $\mathbf{Q}^S$ ,  $\mathbf{Q}^W$  et  $\mathbf{Q}$  sont présentées sur la figure 4.35. On remarque que les tenseurs  $\mathbf{Q}^S$ ,  $\mathbf{Q}^W$  évoluent différemment : l'évolution de  $\mathbf{Q}^S$  est beaucoup plus forte que celle de  $\mathbf{Q}^W$ , ce qui confirme le résultat des diagrammes polaires présentés sur la figure 4.34 (Nguyen *et al.*, 2009). L'évolution du tenseur  $\mathbf{Q}$  est intermédiaire. De plus, les écarts entre ces évolutions augmentent jusqu'à une déformation axiale  $E_1 = 3\%$  et puis restent constants. Ce résultat montre la nécessité de la prise en compte du degré d'allongement  $\beta^h$  dans le tenseur de méso-structure  $\hat{\mathbf{Q}}$  pour la description de la distribution de l'orientation des sous-domaines.

#### 4.3.4.2 Définition de six types de sous-domaines

Afin d'analyser le rôle de l'orientation des sous-domaines  $\theta^h$ , qui doit être associé avec le degré d'allongement  $\beta^h$ , dans le comportement des sous-domaines, les sous-domaines sont classés, en fonction de leur angle d'orientation  $\theta^h$ , en trois sous-classes des sous-domaines  $V$ ,  $O$  et  $H$  ( $V$  : *vertical*,  $O$  : *oblique*,  $H$  : *horizontal*). Les sous-domaines appartenant aux sous-classes  $V$ ,  $O$ ,  $H$  s'orientent respectivement dans les directions *majeure*, *oblique* et *mineure* macroscopiques. La figure 4.36 illustre

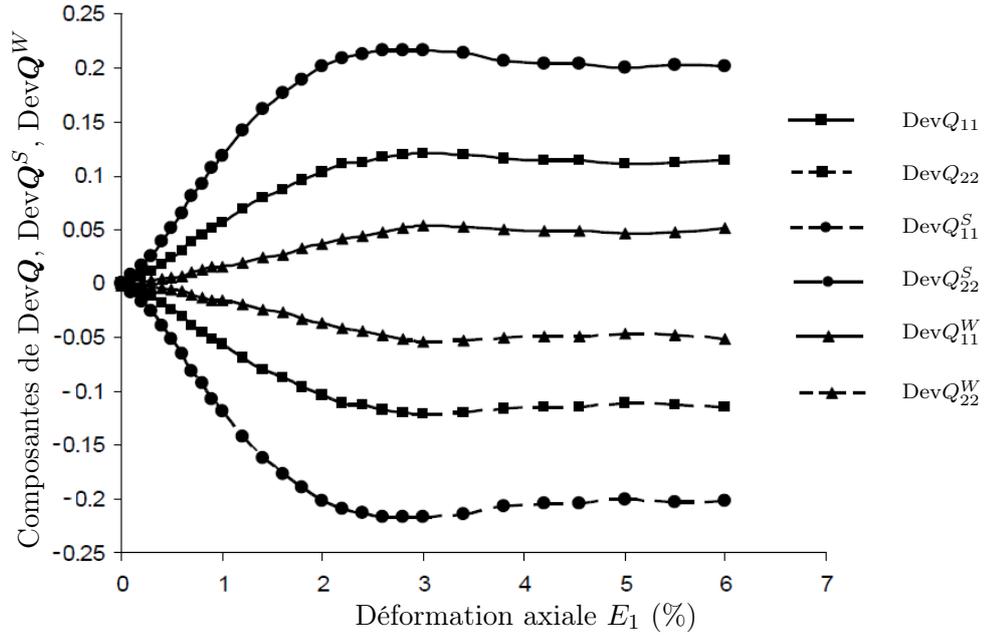


(a) à l'état initial



(b) au pic de contrainte

**FIGURE 4.34** – Distributions de l'orientation des sous-domaines pour les classes *W* et *S* à l'état initial et au pic de la courbe contrainte - déformation.



**FIGURE 4.35** – Evolutions des composantes des parties déviatoires des tenseurs de méso-texture  $Q$ ,  $Q^S$  et  $Q^W$  au cours de l'essai biaxial.

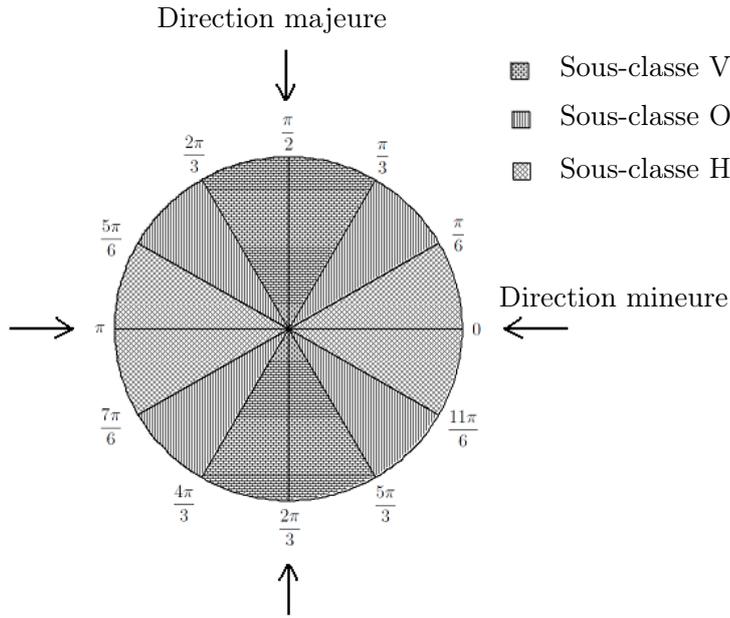
cette classification. Par conséquent, l'ensemble des sous-domaines dans le graphe est finalement classé en six types de sous-domaines  $WV$ ,  $WO$ ,  $WH$ ,  $SV$ ,  $SO$ ,  $SH$ , comme résumé dans le tableau 4.2.

Type de sous-domaines	Texture des sous-domaines	
	Degré d'allongement	Orientation
$WV$	faible	majeure
$WO$	faible	oblique
$WH$	faible	mineure
$SV$	fort	majeure
$SO$	fort	oblique
$SH$	fort	mineure

**TABLE 4.2** – Classification des sous-domaines en six types  $WV$ ,  $WO$ ,  $WH$ ,  $SV$ ,  $SO$ ,  $SH$  en fonction du degré d'allongement et de l'orientation.

Les caractéristiques de ces types de sous-domaines telles que le pourcentage en nombre  $P_N$ , le pourcentage en volume  $P_V$ , le degré d'allongement moyen  $\langle \beta^h \rangle_v$ , la valence moyenne  $\langle r^h \rangle_v$ , la porosité moyenne sans particules isolées  $\langle \rho^h \rangle_v$  à l'état initial et au pic de la courbe contrainte - déformation, sont présentées dans le tableau 4.3. On trouve une indépendance de ces caractéristiques des six types de sous-domaines vis-à-vis de leur orientation à l'état initial. La valence moyenne  $\langle r^h \rangle_v$  pour les types  $SV$ ,  $SO$ ,  $SH$  est plus grande que celle pour les types  $WV$ ,  $WO$ ,  $WH$ . En outre, on peut également constater que les types  $SV$ ,  $SO$ ,  $SH$  ont une porosité plus faible que les types  $WV$ ,  $WO$ ,  $WH$ .

Au pic de la courbe contrainte - déformation où l'échantillon est fortement aniso-



**FIGURE 4.36** – Illustration de la classification des sous-domaines en trois sous-classes  $V$ ,  $O$ ,  $H$ .

(a)

Caractéristiques	Types de sous-domaines					
	$WV$	$WO$	$WH$	$SV$	$SO$	$SH$
$P_N$ (%)	19.9	19.2	20.1	13.5	13.6	13.7
$P_V$ (%)	16.4	16.0	17.0	16.7	17.2	16.7
$\langle \beta^h \rangle_v$	0.11	0.11	0.11	0.29	0.29	0.29
$\langle r^h \rangle_v$	4.4	4.5	4.6	4.9	4.8	4.8
$\langle \rho_1^h \rangle_v$	0.21	0.21	0.22	0.17	0.16	0.17

(b)

Caractéristiques	Types de sous-domaines					
	$WV$	$WO$	$WH$	$SV$	$SO$	$SH$
$P_N$ (%)	22.0	19.0	18.5	22.3	11.7	6.5
$P_V$ (%)	21.3	15.5	13.0	29.7	13.7	6.8
$\langle \beta^h \rangle_v$	0.13	0.12	0.11	0.31	0.30	0.29
$\langle r^h \rangle_v$	5.3	4.9	4.3	5.8	5.2	4.7
$\langle \rho_1^h \rangle_v$	0.23	0.20	0.18	0.18	0.16	0.16

**TABLE 4.3** – Caractéristiques de six types de sous-domaines (a) à l'état initial et (b) au pic de la courbe contrainte - déformation.

trope, ces caractéristiques dépendent significativement de l'orientation de ces types de sous-domaines. Une faible différence entre les valeurs moyennes de  $\langle \beta^h \rangle_v$  pour les types  $WV$ ,  $WO$ ,  $WH$  et pour les types  $SV$ ,  $SO$ ,  $SH$  permet de conclure que le degré d'allongement  $\beta^h$  dépend faiblement de l'orientation  $\theta^h$  des sous-domaines. Par

contre, la valence moyenne  $\langle r^h \rangle_v$  et la porosité moyenne  $\langle \rho^h \rangle_v$  dépendent significativement de l'orientation des types de sous-domaines : les types  $WV$  et  $SV$  ont une porosité et une valence plus importantes que les types  $WH$  et  $SH$ , respectivement. Ce résultat permet donc de conclure que *la valence  $r^h$  et la porosité sans particules isolées  $\rho^h$  pour les sous-domaines allongés dans la direction majeure macroscopique tendent à augmenter, tandis que celles pour les sous-domaines allongés dans la direction mineure macroscopique tendent à diminuer au cours de la déformation de l'assemblage.*

### Conclusions

Nous avons montré dans ce chapitre que le graphe des particules constitue une bonne représentation géométrique des milieux granulaires 2D. Pour ce type de milieux, l'échelle mésoscopique est définie au niveau des sous-domaines dans le graphe des particules. Les structures mésoscopiques sont fermées, ce qui leur permet de supporter une charge appliquée par l'extérieur. Elles peuvent donc être considérées comme des structures représentatives du comportement local.

La structure à l'échelle mésoscopique est décrite par deux types de variables : l'une décrivant la densité et l'autre la texture de l'arrangement des particules. Les variables décrivant la densité mésoscopique : la porosité sans particules isolées et la valence, sont fortement corrélées. La texture de l'arrangement mésoscopique est décrite par sa direction d'allongement et son degré d'allongement. Ces deux mesures sont fortement corrélées avec l'orientation moyenne des contacts dans chaque structure mésoscopique considérée. L'introduction de l'échelle mésoscopique permet donc de décrire de façon plus précise la structure interne des milieux granulaires.

La densité et la texture des matériaux granulaires sont fortement hétérogènes à l'échelle mésoscopique. Ces hétérogénéités augmentent avec le niveau de sollicitation déviatoire appliqué. L'isotropie du milieu se traduit par une distribution isotrope de l'orientation des structures mésoscopiques et l'anisotropie du milieu se traduit par une distribution anisotrope de l'orientation des structures mésoscopiques. De plus, cette distribution dépend du degré d'allongement des structures mésoscopiques : les structures fortement allongées s'orientent de façon beaucoup plus anisotrope que les structures faiblement allongées.

La structure du milieu à l'échelle mésoscopique présente un lien étroit avec celle définie à l'échelle microscopique. Une diminution du nombre de coordination au cours de la dilatace du milieu conduit à une augmentation de la valence des structures mésoscopiques. De même, une distribution anisotrope des orientations de contacts dans la direction majeure macroscopique conduit à une distribution anisotrope des orientations des structures mésoscopiques dans cette même direction.

# Chapitre 5

## Déformation à l'échelle mésoscopique

### Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la déformation à l'échelle mésoscopique pour les milieux granulaires 2D. Cette étude est centrée sur trois aspects principaux : la définition de la déformation mésoscopique, l'hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique, et la nature de cette hétérogénéité.

### 5.1 Etat de l'art

Dans le but de relier les déplacements et les rotations au niveau des particules à la déformation macroscopique d'un milieu granulaire, plusieurs approches de type "*déformation de milieux continus équivalents*" ont été proposées dans la littérature (Bagi, 1996b; Kruyt et Rothenburg, 1996; Kuhn, 1997; Cambou *et al.*, 2000). Ces approches consistent à remplacer le milieu granulaire par un milieu continu équivalent assigné d'un champ de déplacement continu tel que les déplacements des points caractéristiques du milieu continu équivalent soient égaux aux déplacements des centres des particules du milieu discret. La différence entre ces approches réside principalement dans la définition du milieu continu équivalent. Nous nous limitons à présenter les approches utilisées pour les milieux granulaires bidimensionnels :

- les approches de Bagi (1996b) et Cambou *et al.* (2000), pour lesquelles le milieu continu est composé de triangles ;
- les approches de Kruyt et Rothenburg (1996) et Kuhn (1997), pour lesquelles le milieu continu est composé de sous-domaines polygonaux.

#### 5.1.1 Déformation des sous-domaines triangulaires

##### 5.1.1.1 Définition proposée par Bagi (1996b)

Bagi (1996b) a proposé une expression de la déformation d'un milieu granulaire basée sur la discrétisation du milieu en cellules spatiales. Cette méthode, présentée dans la section 4.1.2, discrétise un assemblage granulaire bidimensionnel en triangles, chaque triangle connecte trois centres de particules.

Un milieu granulaire bidimensionnel est donc remplacé par un milieu continu discrétisé dont les noeuds correspondent aux centres des particules. Un champ de

déplacement continu  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$  (déplacement du point ayant le vecteur position  $\mathbf{x}$ ) est assigné à ce milieu continu de la façon suivante : le déplacement des noeuds du réseau triangulaire est égal à celui des centres des particules correspondantes et le déplacement des points à l'intérieur de chaque triangle est interpolé linéairement à partir du déplacement des trois noeuds de ce triangle. La déformation locale est donc constante sur chaque triangle.

Pour chaque triangle, le tenseur gradient de déplacement moyen est défini par :

$$\delta a_{ij}^L = \frac{1}{V^L} \int_{V^L} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV, \quad (5.1)$$

où  $V^L$  est l'aire du triangle  $L$ .

En utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski, l'intégrale volumique de l'équation (5.1) peut être transformée en l'intégrale surfacique suivante :

$$\delta a_{ij}^L = \frac{1}{V^L} \int_{\partial V^L} \delta u_i n_j dS, \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal extérieur du bord  $\partial V^L$  du triangle  $L$ .

Compte tenu du champ de déplacement assigné au milieu continu équivalent, le déplacement est linéaire le long des côtés d'un triangle et l'équation (5.2) peut s'écrire sous la forme discrète suivante :

$$\delta a_{ij}^L = \frac{1}{V^L} \sum_{p=1}^3 \delta u_i^p a_j^p, \quad (5.3)$$

où  $\mathbf{a}^p$ , associé au côté  $p$  ne contenant pas la particule  $p$ , est défini par :

$$a_j^p = -\frac{1}{2} b_j^p, \quad (5.4)$$

et  $\mathbf{b}^p$  est la normale extérieure au côté  $p$ , de norme égale à la longueur du côté  $p$ . Après un développement technique de la relation (5.3), le tenseur gradient de déplacement  $\delta\mathbf{a}^L$  peut être exprimé à partir du déplacement relatif  $\delta\mathbf{u}^{mn}$  entre les centres de deux particules  $m$  et  $n$  appartenant au côté  $k$  ( $\delta\mathbf{u}^{mn} = \delta\mathbf{u}^m - \delta\mathbf{u}^n$ ).

$$\delta a_{ij}^L = \frac{1}{3} \frac{1}{V^L} \sum_{m<n} \delta u_i^{mn} (a_j^m - a_j^n). \quad (5.5)$$

Le tenseur de déformation d'un triangle,  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^L$ , est ensuite obtenu comme la partie symétrique du tenseur gradient de déplacement  $\delta\mathbf{a}^L$  :

$$\delta \varepsilon_{ij}^L = \frac{1}{2V^L} \sum_{m<n} [\delta u_i^{mn} (a_j^m - a_j^n) + \delta u_j^{mn} (a_i^m - a_i^n)]. \quad (5.6)$$

Le tenseur gradient du déplacement moyen d'un milieu granulaire bidimensionnel,  $\overline{\delta\mathbf{a}}$ , peut être calculé en faisant la moyenne des tenseurs gradient de déplacement,  $\delta\mathbf{a}^L$ , de tous les triangles dans le système des cellules spatiales de Bagi :

$$\overline{\delta a}_{ij} = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{L=1}^{N_L} \delta a_{ij}^L V^L = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{k=1}^{N_k} \delta u_i^k d_j^k, \quad (5.7)$$

où :

- $\hat{V}$  est le volume couvert par l'ensemble des triangles,
- $N_L$  est le nombre total de triangles,
- $\delta \mathbf{u}^k$  remplace  $\delta \mathbf{u}^{mn}$ ,
- $\mathbf{d}^k$  est appelé "*vecteur de côté complémentaire*" caractérisant la géométrie locale au voisinage de la branche  $k$  contenant deux particules  $m$  et  $n$  ( $m < n$ ) défini par :

$$d_j^k = \frac{1}{3} \sum_{L^k=1}^2 (a_j^{m,L^k} - a_j^{n,L^k}), \quad (5.8)$$

et  $L^k$  désigne les deux triangles de branche  $m$  commune.

Le tenseur de déformation moyen  $\overline{\delta \varepsilon}$  d'un milieu granulaire bidimensionnel est ensuite donné par :

$$\overline{\delta \varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\hat{V}} \sum_{L=1}^{N_L} \delta \varepsilon_{ij}^L V^L = \frac{1}{2\hat{V}} \sum_{k=1}^{N_k} [\delta u_i^k d_j^k + \delta u_j^k d_i^k]. \quad (5.9)$$

### 5.1.1.2 Définition proposée par Cambou *et al.* (2000)

La définition de déformation proposée par Cambou *et al.* (2000) est basée sur la triangulation de Delaunay et consiste également à subdiviser un milieu granulaire bidimensionnel en éléments triangulaires. La déformation locale est supposée constante sur chaque élément. Le champ de déplacement est donc affine dans chaque élément :

$$\delta u_i^L(x_j) = \delta a_{ij}^L x_j + u_{0i}^L, \quad (5.10)$$

où  $\delta \mathbf{a}^L$  est le tenseur gradient de déplacement d'un élément  $L$  et  $\mathbf{u}_0^L$  est un vecteur constant correspondant au déplacement de corps rigide.

Pour chaque triangle, les sommets sont numérotés 0, 1 et 2. Le sommet 0 est aléatoirement choisi comme étant la référence et ce choix n'a aucune influence sur le calcul proposé. Le déplacement relatif entre deux sommets 0 - 1 et 0 - 2 peut s'écrire :

$$\delta u_i^{v0} = \delta u_i^v - \delta u_i^0, \quad (5.11)$$

où l'indice  $v$  prend une valeur égale à 1 ou 2.

Un champ de déplacement affine dans chaque triangle implique :

$$\delta u_i^{v0} = \delta a_{ij} \Delta x_j^{v0}, \quad (5.12)$$

avec :

$$\Delta x_j^{v0} = x_j^v - x_j^0. \quad (5.13)$$

Le système d'équations (5.12) a quatre équations indépendantes et quatre inconnues. La résolution de ce système d'équations conduit au tenseur gradient déplacement  $\delta \mathbf{a}^L$  du triangle  $L$  :

$$\delta a_{ij}^L = \sum_{v=1}^2 \delta u_i^{v0} \Delta y_j^{v0}, \quad (5.14)$$

où  $\Delta \mathbf{y}^{v0}$  est défini par :

$$\sum_{v=1}^2 \Delta x_i^{v0} \Delta y_j^{v0} = \delta_{ij}. \quad (5.15)$$

Afin de faire intervenir tous les côtés de chaque triangle dans la formulation du tenseur gradient de déplacement  $\delta \mathbf{a}^L$ , il suffit de prendre alternativement chaque sommet comme étant référence 0. Dans ce cas, la relation (5.14) peut être écrite sous la forme :

$$\delta a_{ij}^L = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \delta u_i^k \Delta y_j^k, \quad (5.16)$$

où l'indice  $k$  désigne les côtés du triangle  $L$ ,  $\delta \mathbf{u}^k = \pm \delta \mathbf{u}^{v0}$  et  $\Delta \mathbf{y}^k = \pm \Delta \mathbf{y}^{v0}$ . Le tenseur de déformation d'un triangle,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^L$ , est la partie symétrique du tenseur gradient de déplacement  $\delta \mathbf{a}^L$  :

$$\delta \varepsilon_{ij}^L = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 [\delta u_i^k \Delta y_j^k + \delta u_j^k \Delta y_i^k] \quad (5.17)$$

et le tenseur de déformation moyen,  $\overline{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}$ , d'un milieu granulaire bidimensionnel peut finalement s'écrire :

$$\overline{\delta \varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{L=1}^{N_L} \delta \varepsilon_{ij}^L V^L = \frac{1}{6\widehat{V}} \sum_{L=1}^{N_L} \sum_{k \in L} [\delta u_i^k \Delta y_j^k + \delta u_j^k \Delta y_i^k] V^L. \quad (5.18)$$

## 5.1.2 Déformation des sous-domaines polygonaux

### 5.1.2.1 Définition proposée par Kruyt et Rothenburg (1996)

Comme analysé dans le chapitre 4, un milieu granulaire bidimensionnel peut être remplacé par un graphe de particules composé de sous-domaines polygonaux dont les côtés connectent des couples de particules en contact. Grâce à ce graphe, les auteurs ont défini un champ de déformation locale au niveau des sous-domaines polygonaux. Pour cela, un champ continu de déplacement,  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ , est défini sur chaque sous-domaine polygonal dont les sommets sont occupés par les centres des particules tel que le déplacement des sommets soit égal à celui des centres des particules correspondantes et le déplacement est linéaire le long des côtés de chaque sous-domaine. Cette façon de définir le champ de déplacement est un peu différente de celle proposée par Bagi (1996b) ou par Cambou *et al.* (2000) : le champ de déplacement n'est pas défini à l'intérieur de chaque polygone, seule l'existence d'un champ continu est supposée.

Le tenseur gradient de déplacement,  $\delta \mathbf{a}^h$ , sur un sous-domaine  $h$  est défini par la relation suivante, similaire à la relation (5.2) :

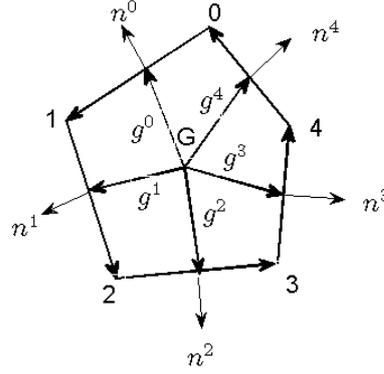
$$\delta a_{ij}^h = \frac{1}{V^h} \int_{\partial V^h} \delta u_i n_j dS, \quad (5.19)$$

où  $V^h$  est le volume du sous-domaine polygonal  $h$ .

En utilisant l'abscisse curviligne  $s$  sur la frontière  $\partial V^h$  dirigée suivant le sens trigonométrique, la relation (5.19) peut être écrite :

$$\delta a_{ij}^h = \frac{1}{V^h} \int \int_{\partial V^h} \delta u_i (-e_{jm} t_m) dS = -\frac{1}{V^h} e_{jm} \int \int_{\partial V^h} \delta u_i \frac{dx_m}{ds} ds, \quad (5.20)$$

où  $\delta \mathbf{u}(s)$ ,  $\mathbf{x}(s)$  étant linéaires par morceaux en  $s$ .



**FIGURE 5.1** – Vecteurs  $\mathbf{g}^k$ , joignant le centre  $G$  d'un sous-domaine polygonal et les centres de côtés, intervenant dans la formulation du tenseur de déformation du sous-domaine  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$  (5.24).

On peut alors montrer que :

$$\delta a_{ij}^h = -\frac{1}{V^h} e_{jkm} \int \int_{\partial V^h} \delta u_i \frac{dx_m}{ds} ds = -\frac{1}{V^h} e_{jkm} \int \int_{\partial V^h} \frac{d(\delta u_i)}{ds} x_m ds, \quad (5.21)$$

où  $e_{jkm}$  est le symbole de permutation en 2D (voir l'annexe A). Le développement de la relation (5.21) conduit à :

$$\delta a_{ij}^h = -\frac{1}{V^h} e_{jkm} \sum_{k=0}^{r^h-1} \delta u_i^k x_m^k, \quad (5.22)$$

où  $\mathbf{x}^k$  est le vecteur position du centre du côté  $k$ .

On peut facilement montrer que la relation (5.22) est indépendante de l'origine  $O$  du repère. On choisit donc le centre du polygone  $G$  comme origine  $O$ . En introduisant les vecteurs  $\mathbf{g}^k$  joignant le centre du polygone  $G$  et les centres des côtés de ce polygone (figure 5.1), on obtient :

$$\delta a_{ij}^h = -\frac{1}{V^h} e_{jkm} \sum_{k=0}^{r^h-1} \delta u_i^k g_m^k = \frac{1}{V^h} \sum_{k=0}^{r^h-1} \delta u_i^k h_j^k, \quad (5.23)$$

où  $\mathbf{h}^k$  est le vecteur obtenu par une rotation de  $-\frac{\pi}{2}$  du vecteur  $\mathbf{g}^k$ .

Le tenseur de déformation d'un sous-domaine polygonal,  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$ , est la partie symétrique du tenseur gradient déplacement  $\delta\mathbf{a}^h$  :

$$\delta\varepsilon_{ij}^h = \frac{1}{2V^h} \sum_{k=0}^{r^h-1} [\delta u_i^k h_j^k + \delta u_j^k h_i^k], \quad (5.24)$$

Dans la relation (5.24), l'arrangement local des particules dans chaque sous-domaine est pris en compte dans le tenseur de déformation par l'intermédiaire de l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{h}^k$ .

Le tenseur de déformation moyen,  $\overline{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}$ , d'un milieu granulaire est finalement obtenu par moyenne des tenseurs  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$  sur l'ensemble des sous-domaines :

$$\overline{\delta\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \delta\varepsilon_{ij}^h V^h = \frac{1}{2\widehat{V}} \sum_{k=1}^{N_k} [\delta u_i^k h_j^k + \delta u_j^k h_i^k]. \quad (5.25)$$

où :

- la sommation se fait sur l'ensemble des côtés dans le graphe de particules ;
- le vecteur  $\mathbf{g}^k$  pour un côté  $k$  à l'intérieur du graphe joint les centres de deux polygones ayant le côté  $k$  en commun et pour un côté  $k$  au bord du graphe joint le centre du polygone contenant ce côté et le centre de ce côté.

### 5.1.2.2 Définition proposée par Kuhn (1997)

Cette définition est basée sur la remarque suivante : un sous-domaine polygonal ayant un nombre de côté égal à  $r^h$  (valence) peut être toujours discrétisé en  $r^h - 2$  triangles ; le tenseur gradient de déplacement du sous-domaine,  $\delta \mathbf{a}^h$ , peut donc être défini par moyenne des tenseurs gradient de déplacement  $\delta \mathbf{a}^L$  (5.6) définis pour les triangles obtenus par discrétisation :

$$\delta a_{ij}^h = \frac{1}{V^h} \sum_{L=1}^{r^h-2} \delta a_{ij}^L V^L. \quad (5.26)$$

Bien qu'il existe différentes solutions pour discrétiser un sous-domaine polygonal en triangles, le tenseur gradient de déplacement  $\delta \mathbf{a}^h$  défini par (5.26) est indépendant de la solution choisie.

Pour chaque polygone, les sommets et les côtés sont numérotés de 0 à  $r^h - 1$ , dans le sens anti-trigonométrique (figure 5.2). Un côté  $k$  connecte deux sommets  $p_1 = k$  et  $p_2 = k + 1$ . L'addition et la soustraction des indices des sommets ou des côtés se font modulo  $r^h$ , par exemple  $k_1 + k_2 \mapsto k_1 + k_2 \bmod(r^h)$ .

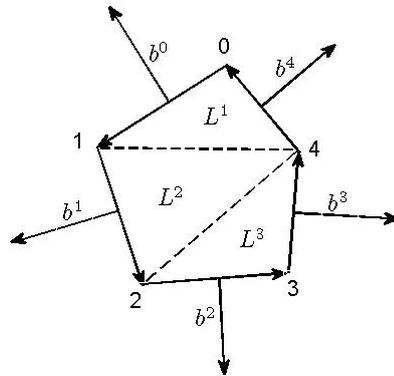


FIGURE 5.2 – Discrétisation d'un polygone en triangles (Kuhn, 1997).

La relation (5.6) proposée par Bagi (1996b) peut être réécrite, avec cette nouvelle notation, sous la forme suivante :

$$\delta a_{ij}^L = \frac{1}{6V^L} \sum_{k_1, k_2 \in \{0,1,2\}} Q_{k_1, k_2}^3 \delta u_i^{k_1} b_j^{k_2}, \quad (5.27)$$

où :

- $\delta \mathbf{u}^{k_1}$  est le déplacement relatif entre deux centres des particules sur le côté  $k_1$  ;
- $\mathbf{b}^{k_2}$  est la normale extérieure du côté  $k_2$ , de norme égale à la longueur de ce côté ;

- $\mathbf{Q}^3$  est une matrice carrée, de dimension  $3 \times 3$ , anti-symétrique et circulaire, de forme :

$$\mathbf{Q}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Il est facile de montrer les identités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{r^h-1} b_j^k = 0, \quad \sum_{k=0}^{r^h-1} \delta u_i^k = 0. \quad (5.29)$$

La combinaison des relations (5.26), (5.27) et (5.29) donne l'expression suivante du tenseur gradient de déplacement  $\delta \mathbf{a}^h$  pour un sous-domaine polygonal :

$$\delta a_{ij}^h = \frac{1}{6V^h} \sum_{k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, r^h-1\}} Q_{k_1, k_2}^{r^h} \delta u_i^{k_1} b_j^{k_2}, \quad (5.30)$$

où  $\mathbf{Q}^{r^h}$  est une matrice de dimension  $r^h \times r^h$ , déduite récursivement par la relation

$$Q_{pq}^{m+1} = \begin{cases} 0, & \text{si } q - p = 0 \\ \frac{1}{m+1} (mQ_{pq}^m + 3), & \text{si } q - p = 1 \\ \frac{1}{m+1} [((m+1) - \langle q-p \rangle) Q_{pq}^m + \langle q-p \rangle Q_{p, q-1}^m], & \text{si } q - p \neq 0, 1, m \\ \frac{1}{m+1} (mQ_{pq}^m - 3), & \text{si } q - p = m \end{cases} \quad (5.31)$$

avec les quantités  $\langle q-p \rangle$ ,  $q-1$  et  $p-q$  calculées modulo  $m$ . Le tableau 5.1 présente la première ligne de la matrice  $\mathbf{Q}^{r^h}$  en fonction de la valence  $r^h$  du sous-domaine. Puisque cette matrice est circulaire, les autres lignes peuvent être déduites de la relation  $Q_{p,q}^{r^h} = Q_{p-1, q-1}^{r^h}$  avec des indices calculés modulo  $r^h$ .

Valence $r^h$	$p - q \pmod{m}$					
	0	1	2	3	4	5
3	0	1	-1			
4	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$		
5	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	
6	0	2	1	0	-1	-2

**TABLE 5.1** – Première ligne de la matrice  $\mathbf{Q}^{r^h}$ .

Le tenseur de déformation d'un sous-domaine polygonal,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^h$ , est obtenu en prenant la partie symétrique du tenseur gradient de déplacement  $\delta \mathbf{a}^h$  :

$$\delta \varepsilon_{ij}^h = \frac{1}{12V^h} \sum_{k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, r^h-1\}} Q_{k_1, k_2}^{r^h} [\delta u_i^{k_1} b_j^{k_2} + \delta u_j^{k_1} b_i^{k_2}]. \quad (5.32)$$

Dans la formulation (5.32), l'arrangement local des particules dans chaque sous-domaine est pris en compte dans le tenseur de déformation par l'intermédiaire de l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{b}^k$ .

Le tenseur de déformation moyen,  $\overline{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}$ , d'un milieu granulaire est finalement obtenu par moyenne volumique des tenseurs de déformation  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$  sur l'ensemble de sous-domaines :

$$\overline{\delta\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \delta\varepsilon_{ij}^h V^h = \frac{1}{12\widehat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \sum_{k_1, k_2 \in h} Q_{k_1, k_2}^{r^h} [\delta u_i^{k_1} b_j^{k_2} + \delta u_j^{k_1} b_i^{k_2}]. \quad (5.33)$$

### 5.1.3 Comparaison entre les différentes définitions de la déformation proposées

Le tenseur de déformation défini pour chaque triangle défini par (5.6) avec la méthode de Cambou *et al.* (2000) coïncide avec celui défini par (5.17) avec la méthode de Bagi (1996b). Ceci peut être expliqué par le fait que les deux méthodes proposées utilisent la même hypothèse de linéarité du champ de déplacement dans chaque triangle.

Le champ de déplacement dans chaque sous-domaine polygonal supposé par Kruyt et Rothenburg (1996) est similaire à celui supposé par Kuhn (1997). Par conséquent, le tenseur de déformation d'un sous-domaine polygonal défini par (5.24) coïncide avec celui défini par (5.32).

Si l'on discrétise un sous-domaine polygonal en triangles, la moyenne des tenseurs de déformation définis sur l'ensemble de triangles obtenus, d'après les méthodes de Bagi (1996b) et de Cambou *et al.* (2000) est égale aux tenseurs de déformation définis par (5.24) et par (5.32) avec les méthodes de Kruyt et Rothenburg (1996) et de Kuhn (1997).

De plus, si les bords des graphes utilisés dans les méthodes de ces différentes méthodes coïncident, les tenseurs de déformation moyens  $\overline{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}$  définis par (5.9), (5.18), (5.25) et (5.33) sont égaux (Bagi, 2006).

## 5.2 Estimation de la déformation macroscopique

La déformation  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$  à l'échelle mésoscopique, échelle des sous-domaines polygonaux, est définie par (5.24) avec la méthode de Kruyt et Rothenburg (1996) et par (5.32) avec la méthode de Kuhn (1997). L'avantage de ces définitions est qu'elles expriment clairement le lien de la déformation d'un sous-domaine, d'une part avec le déplacement relatif des centres des particules en contact dans le sous-domaine et avec l'arrangement local des particules du sous-domaine, d'autre part. On peut déduire du tenseur de déformation de chaque sous-domaine les variables suivantes :

- la déformation mésoscopique dans la direction majeure macroscopique,  $\delta\varepsilon_{11}^h$  ;
- la déformation mésoscopique dans la direction mineure macroscopique,  $\delta\varepsilon_{22}^h$  ;
- la déformation mésoscopique de cisaillement,  $\delta\varepsilon_{12}^h$  ;
- la déformation volumique mésoscopique,  $\delta\varepsilon_v^h$  ;
- la déformation déviatoire mésoscopique,  $\boldsymbol{\varepsilon}^h$ , qui est étudiée *via* son 2<sup>ème</sup> invariant  $\delta\varepsilon_d^h$  ;
- l'angle de dilatance mésoscopique,  $\psi^h$  ;

avec les variables  $\delta\epsilon_v^h$ ,  $\epsilon^h$ ,  $\delta\epsilon_d^h$  et  $\psi^h$  sont définies dans l'annexe B.1.

La déformation d'un milieu granulaire est estimée, comme étant la moyenne  $\overline{\delta\epsilon}$  des déformations  $\delta\epsilon^h$  sur l'ensemble des sous-domaines, par les relations (5.25) et (5.33). Dans notre analyse, la déformation des sous-domaines ainsi que de l'assemblage granulaire sont calculées pour des incréments de déformation axiale macroscopique,  $\delta E_1$ , approximativement égaux à 0.02%. Les tenseurs  $\delta\epsilon^h$  et  $\overline{\delta\epsilon}$  obtenus dépendent du choix de la configuration où le graphe de particules est construit. Cependant, cette dépendance est très faible si la valeur de l'incrément de déformation  $\delta E_1$  est suffisamment petite. Le tableau 5.2 montre que le tenseur de déformation moyen  $\overline{\delta\epsilon}$  calculé pour l'incrément de déformation à  $E_1 = 1.0\%$  (incrément de déformation axiale  $E_1$  de 1.0% à 1.02%) dépend faiblement du choix de la configuration pour la construction du graphe.

Par la suite, les calculs des différents tenseurs de déformation sont effectués sur la base d'un graphe de particules construit dans la configuration initiale de chaque incrément de déformation macroscopique. D'autre part, les tenseurs de déformation obtenus sont normalisés par la valeur de l'incrément de déformation axiale macroscopique  $\delta E_1 = 0.02\%$ .

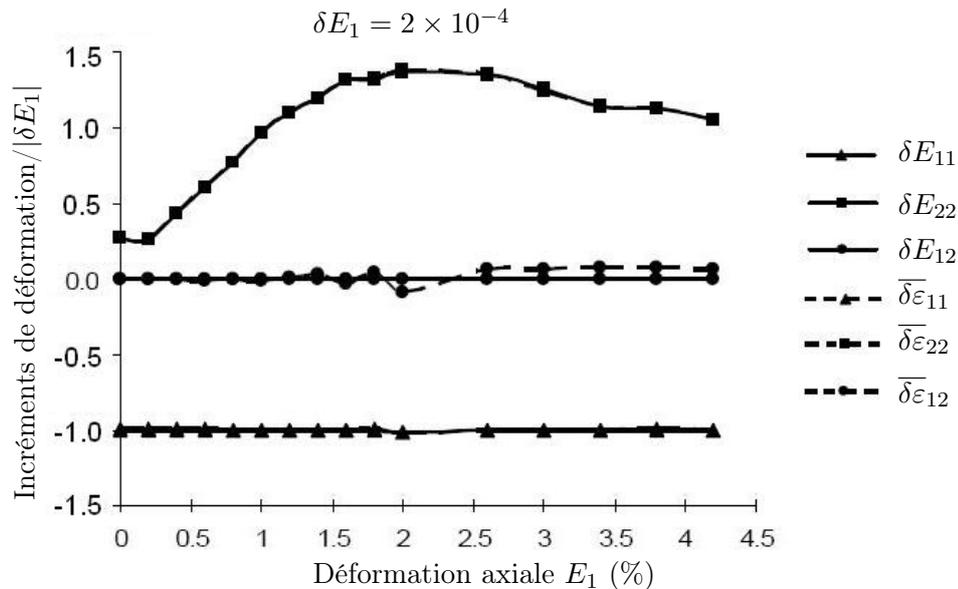
Configuration choisie	
Configuration initiale ( $E_1 = 1.0\%$ )	Configuration finale ( $E_1 = 1.02\%$ )
$\overline{\delta\epsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} 1.92492 & -0.01770 \\ -0.01770 & -1.99402 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$	$\overline{\delta\epsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} 1.92601 & -0.01661 \\ -0.01661 & -1.99603 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$

**TABLE 5.2** – Tenseur de déformation moyen  $\overline{\delta\epsilon}$  calculé pour l'incrément de déformation axiale  $E_1 = [1.0\%, 1.02\%]$  avec le graphe de particules construit dans la configuration initiale et dans la configuration finale.

La figure 5.3 présente la comparaison entre la déformation moyenne  $\overline{\delta\epsilon}$  et la déformation  $\delta\mathbf{E}$  mesurée aux limites de l'échantillon granulaire considéré. On voit que la déformation moyenne  $\overline{\delta\epsilon}$  coïncide quasiment avec la déformation mesurée aux conditions limites  $\delta\mathbf{E}$ . Le très faible écart entre  $\overline{\delta\epsilon}$  et  $\delta\mathbf{E}$  provient certainement du fait que les sous-domaines proches des parois de l'échantillon (voir la section 4.2.1) ne sont pas pris en compte dans le calcul de la déformation moyenne  $\overline{\delta\epsilon}$ . Ce résultat a été également confirmé par Bagi (2006).

### Décomposition de la déformation en deux parties relatives aux déplacements relatifs normaux et tangentiels

On peut décomposer le tenseur de déformation d'un sous-domaine  $\delta\epsilon^h$  en deux parties  $(\delta\epsilon^h)^N$  et  $(\delta\epsilon^h)^T$  relatives, respectivement, aux déplacements relatifs normaux  $(\delta\mathbf{u}^k)^N$  et tangentiels  $(\delta\mathbf{u}^k)^T$  des centre des particules en contact dans le sous-domaine. On obtient les expressions suivantes pour  $(\delta\epsilon^h)^N$  et  $(\delta\epsilon^h)^T$  avec la



**FIGURE 5.3** – Comparaison entre le tenseur de déformation moyen  $\overline{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}$  estimé par (5.25) et (5.33) et le tenseur de déformation  $\delta\boldsymbol{E}$  mesurée aux limites de l'échantillon.

définition de la déformation de Kuhn (1997) :

$$\delta\varepsilon_{ij}^h = (\delta\varepsilon_{ij}^h)^N + (\delta\varepsilon_{ij}^h)^T, \quad (5.34)$$

$$(\delta\varepsilon_{ij}^h)^N = \frac{1}{12V^h} \sum_{k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, r^h - 1\}} Q_{k_1, k_2}^{r^h} [(\delta u_i^{k_1})^N b_j^{k_2} + (\delta u_j^{k_1})^N b_i^{k_2}], \quad (5.35)$$

$$(\delta\varepsilon_{ij}^h)^T = \frac{1}{12V^h} \sum_{k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, r^h - 1\}} Q_{k_1, k_2}^{r^h} [(\delta u_i^{k_1})^T b_j^{k_2} + (\delta u_j^{k_1})^T b_i^{k_2}]. \quad (5.36)$$

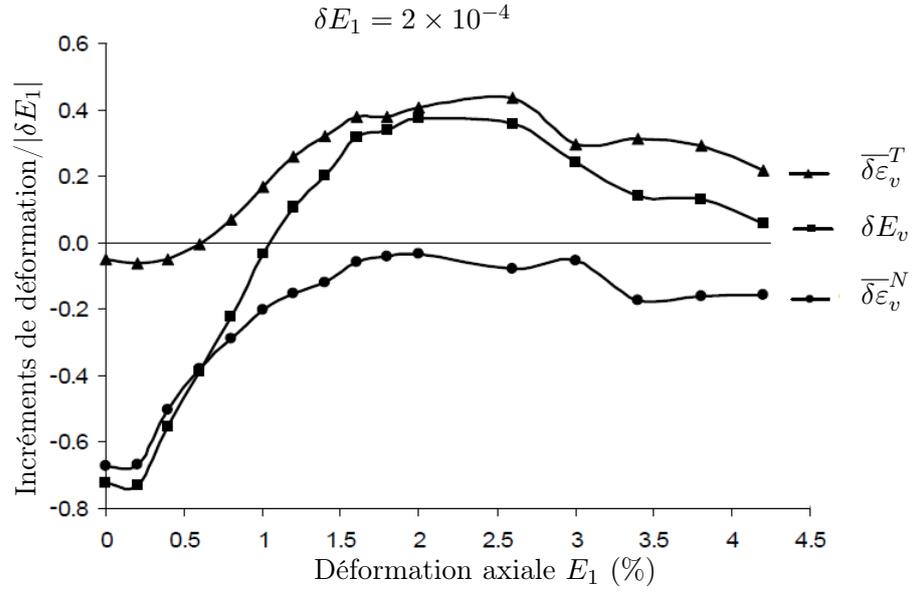
On peut alors obtenir la décomposition du tenseur de déformation moyen  $\overline{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}$  en deux tenseurs  $\overline{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}^N$  et  $\overline{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}^T$  relatifs respectivement aux déplacements relatifs normaux et tangentiels des centres des particules en contact, pour tous les contacts dans le graphe.

$$\overline{\delta\varepsilon}_{ij} = \overline{\delta\varepsilon}_{ij}^N + \overline{\delta\varepsilon}_{ij}^T, \quad (5.37)$$

$$\overline{\delta\varepsilon}_{ij}^N = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} (\delta\varepsilon_{ij}^h)^N V^h \quad \text{et} \quad \overline{\delta\varepsilon}_{ij}^T = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} (\delta\varepsilon_{ij}^h)^T V^h. \quad (5.38)$$

A partir des tenseurs  $\overline{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}^N$  et  $\overline{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}^T$  on peut calculer les composantes  $\overline{\delta\varepsilon}_v^N$  et  $\overline{\delta\varepsilon}_v^T$  pour la déformation volumique et les composantes  $\overline{\delta\varepsilon}_d^N$  et  $\overline{\delta\varepsilon}_d^T$  pour le 2<sup>ème</sup> invariant de la déformation déviatoire, dues respectivement aux déplacements relatifs normaux et tangentiels des centres des particules en contact.

Les figures 5.4 et 5.5 présentent respectivement les évolutions des  $\overline{\delta\varepsilon}_v^N$ ,  $\overline{\delta\varepsilon}_v^T$ , et des  $\overline{\delta\varepsilon}_d^N$ ,  $\overline{\delta\varepsilon}_d^T$ , comparées avec les variables macroscopiques de déformation  $\delta E_v$  et  $\delta E_d$ . On constate qu'au début de l'essai, la contractance de l'assemblage est essentiellement due aux déplacements relatifs normaux des centres des particules en contact



**FIGURE 5.4** – Evolutions des composantes  $\overline{\delta\varepsilon}_v^N$  et  $\overline{\delta\varepsilon}_v^T$  pour la déformation volumique, relatives respectivement aux déplacements relatifs normaux et tangentiels des centres des particules en contact au cours de l'essai.

dont une partie importante est la déformation élastique au niveau des contacts. Au cours de la déformation de l'assemblage, les déplacements relatifs tangentiels des centres de particules en contact deviennent importants et contribuent essentiellement à la dilatance de l'assemblage. Une même tendance est observée pour la déformation déviatoire avec une contribution importante des déplacements relatifs normaux des centres de particules en contact au début de l'essai et une contribution de plus en plus importante des déplacements relatifs tangentiels avec la déformation de l'assemblage. Ce résultat est en bon accord avec celui de Kruyt et Antony (2007).

### Décomposition de la déformation en deux parties relatives aux glissement et roulement au contact

A partir de la relation (1.2), on peut obtenir la relation suivante pour le déplacement relatif  $\delta\mathbf{u}^k$  des centres des particules  $m$  et  $n$  en contact :

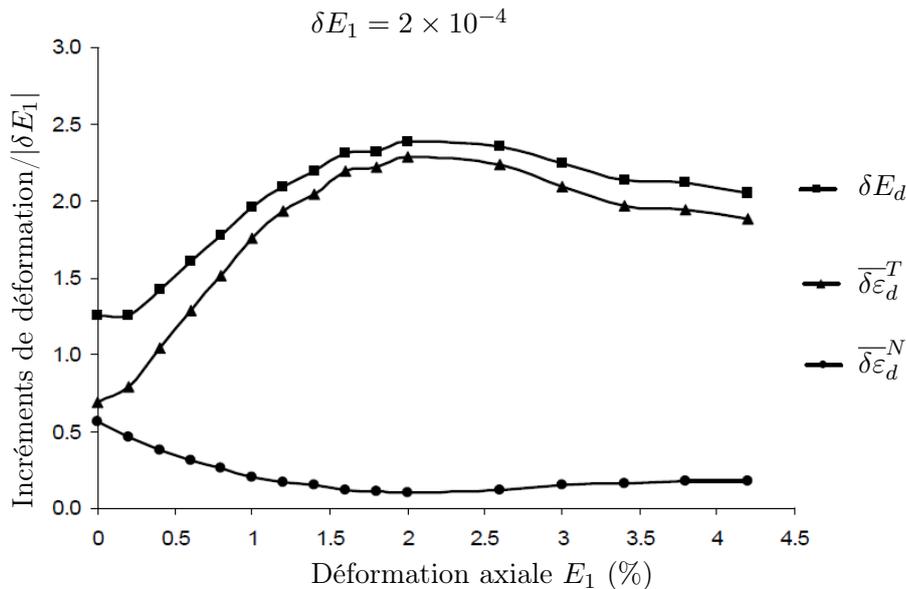
$$\delta u_i^k = \delta u_i^m - \delta u_i^n = \delta c_i^k + \delta \omega_i^k, \quad (5.39)$$

$$\delta \omega_i^k = (r^m \delta \omega^m + r^n \omega^n) t_i^k \quad (5.40)$$

où :

- $\delta\mathbf{c}^k$  est le déplacement relatif au contact, essentiellement gouverné par le glissement au contact, et pour une plus petite part par la déformation élastique au contact ;
- $\delta\boldsymbol{\omega}^k$  est le roulement au contact (cette cinématique a été analysée dans la section 1.2.2).

En combinant les relations (5.32) et (5.39), on peut décomposer le tenseur de déformation  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$  d'un sous-domaine en deux parties  $(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h)^S$  et  $(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h)^R$ , relatives respec-



**FIGURE 5.5** – Evolutions des composantes  $\overline{\delta \varepsilon}_d^N$  et  $\overline{\delta \varepsilon}_d^T$  pour le 2<sup>ème</sup> invariant de la déformation déviatoire, relatives respectivement aux déplacements relatifs normaux et tangentiels des centres des particules en contact au cours de l'essai.

tivement au glissement  $\delta \mathbf{c}^k$  et au roulement  $\delta \boldsymbol{\omega}^k$  aux contacts dans le sous-domaine :

$$\delta \varepsilon_{ij}^h = (\delta \varepsilon_{ij}^h)^S + (\delta \varepsilon_{ij}^h)^R, \quad (5.41)$$

$$(\delta \varepsilon_{ij}^h)^S = \frac{1}{12V^h} \sum_{k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, r^h - 1\}} Q_{k_1, k_2}^{r^h} [\delta c_i^{k_1} b_j^{k_2} + \delta c_j^{k_1} b_i^{k_2}], \quad (5.42)$$

$$(\delta \varepsilon_{ij}^h)^R = \frac{1}{12V^h} \sum_{k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, r^h - 1\}} Q_{k_1, k_2}^{r^h} [\delta \omega_i^{k_1} b_j^{k_2} + \delta \omega_j^{k_1} b_i^{k_2}]. \quad (5.43)$$

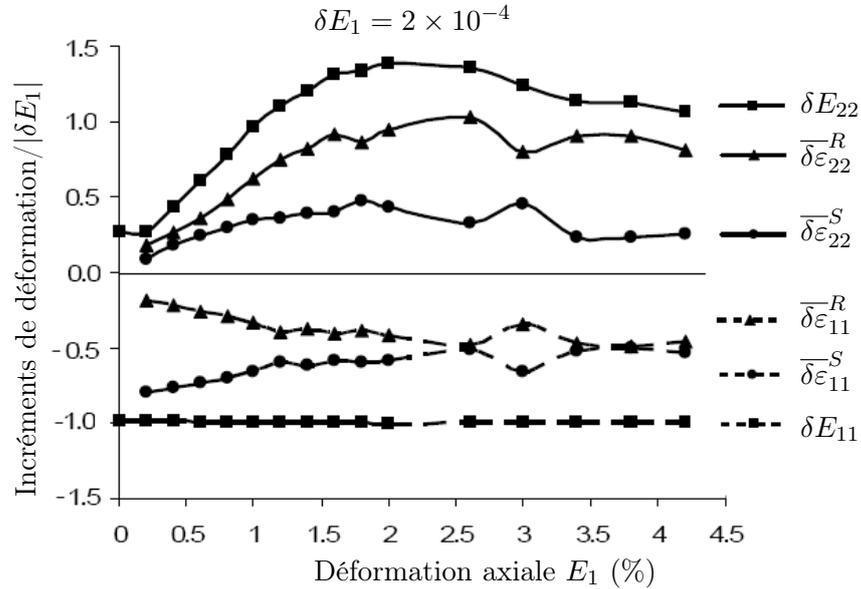
Par conséquent, le tenseur de déformation moyen d'un milieu granulaire  $\overline{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}$  peut être décomposé en deux parties  $\overline{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}^S$  et  $\overline{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}^R$ , relatives respectivement au glissement et au roulement aux contacts :

$$\overline{\delta \varepsilon}_{ij} = \overline{\delta \varepsilon}_{ij}^S + \overline{\delta \varepsilon}_{ij}^R, \quad (5.44)$$

$$\overline{\delta \varepsilon}_{ij}^S = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} (\delta \varepsilon_{ij}^h)^S V^h \quad \text{et} \quad \overline{\delta \varepsilon}_{ij}^R = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} (\delta \varepsilon_{ij}^h)^R V^h. \quad (5.45)$$

La figure 5.6 présente les évolutions des composantes de trois tenseurs  $\delta \mathbf{E}$ ,  $\overline{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}^S$ ,  $\overline{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}^R$  en fonction de la déformation axiale  $E_1$ . On constate qu'au début de l'essai, la déformation de l'assemblage est essentiellement gouvernée par le déplacement relatif aux contacts, qui est dû principalement à la déformation élastique aux contacts. Dans la zone au pic et post-pic de la courbe contrainte - déformation, la part de la déformation  $\overline{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}^R$  devient importante, ce qui résulte de l'importance de la rotation des particules dans cette zone. En particulier, on remarque une différence entre les contributions du glissement aux contacts et du roulement aux contacts aux déformations macroscopiques de compression  $\delta E_{11}$  et d'extension  $\delta E_{22}$  : les composantes  $\overline{\delta \varepsilon}_{11}^S$

$\overline{\delta\varepsilon}_{11}^R$  sont de même ordre de grandeur dans la zone post-pic tandis que la composante  $\overline{\delta\varepsilon}_{22}^R$  est beaucoup plus importante que la composante  $\overline{\delta\varepsilon}_{22}^S$ .

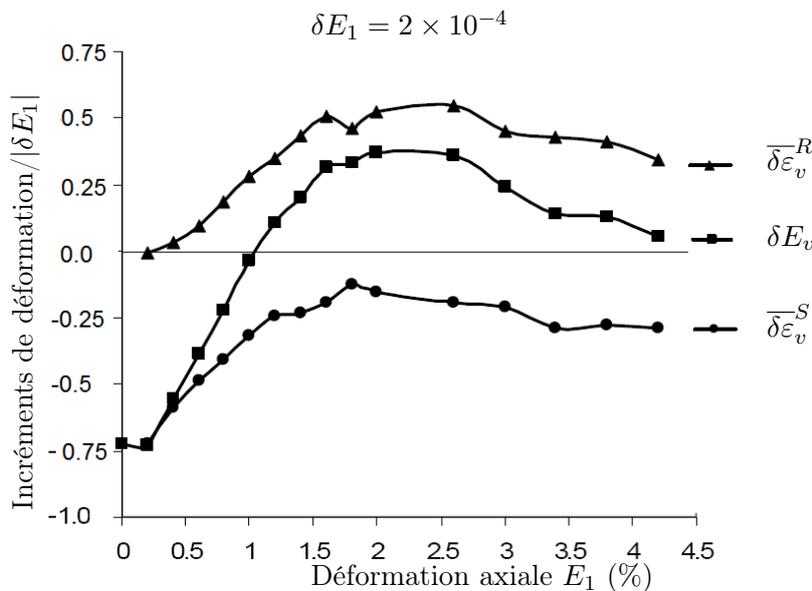


**FIGURE 5.6** – Comparaison des parties  $\overline{\delta\varepsilon}^S$  et  $\overline{\delta\varepsilon}^R$  relatives, respectivement, au glissement et au roulement aux contacts avec la déformation macroscopique.

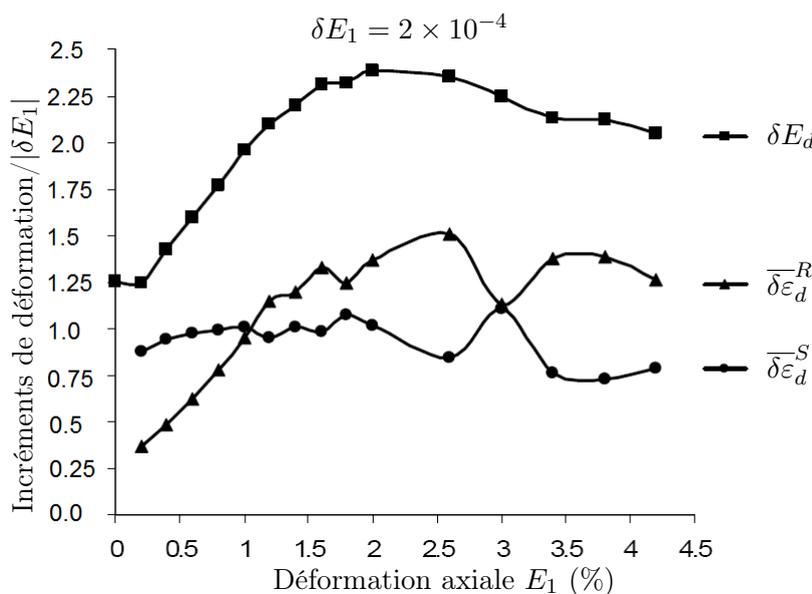
Les évolutions de la déformation volumique  $\delta E_v$  de l'assemblage et de ses décompositions  $\overline{\delta\varepsilon}_v^S$  et  $\overline{\delta\varepsilon}_v^R$ , relatives respectivement au glissement et au roulement aux contacts, sont tracées sur la figure 5.7. On peut constater que le glissement et le roulement aux contacts ne contribuent pas de la même façon à la déformation volumique : dans la plage de déformation étudiée, *la contractance est due principalement au glissement aux contacts tandis que la dilatance est due principalement au roulement aux contacts*.

Les évolutions du 2<sup>ème</sup> invariant de la déformation déviatoire macroscopique  $\delta E_d$  et de ses décompositions  $\overline{\delta\varepsilon}_d^S$  et  $\overline{\delta\varepsilon}_d^R$  relatives respectivement au glissement et au roulement aux contacts, sont tracées sur la figure 5.8. Au début de l'essai, le glissement aux contacts contribue significativement à la déformation déviatoire macroscopique. Cependant, la contribution du roulement aux contacts augmente avec la déformation de l'assemblage et devient du même ordre de grandeur que la contribution du glissement aux contacts.

*La prise en compte du déplacement relatif aux contacts conduit donc à sous-estimer la déformation globale de l'assemblage granulaire.* Ce résultat est également confirmé par Cambou *et al.* (2000) et Bagi (2006). Cependant, pour un matériau granulaire réel, composé de particules non-circulaires, le roulement aux contacts est certainement plus faible et le glissement aux contacts peut donc jouer un rôle important dans la déformation.



**FIGURE 5.7** – Evolutions des composantes  $\overline{\delta \varepsilon}_v^S$  et  $\overline{\delta \varepsilon}_v^R$  pour la déformation volumique, relatives respectivement au glissement et au roulement aux contacts, au cours de l'essai.



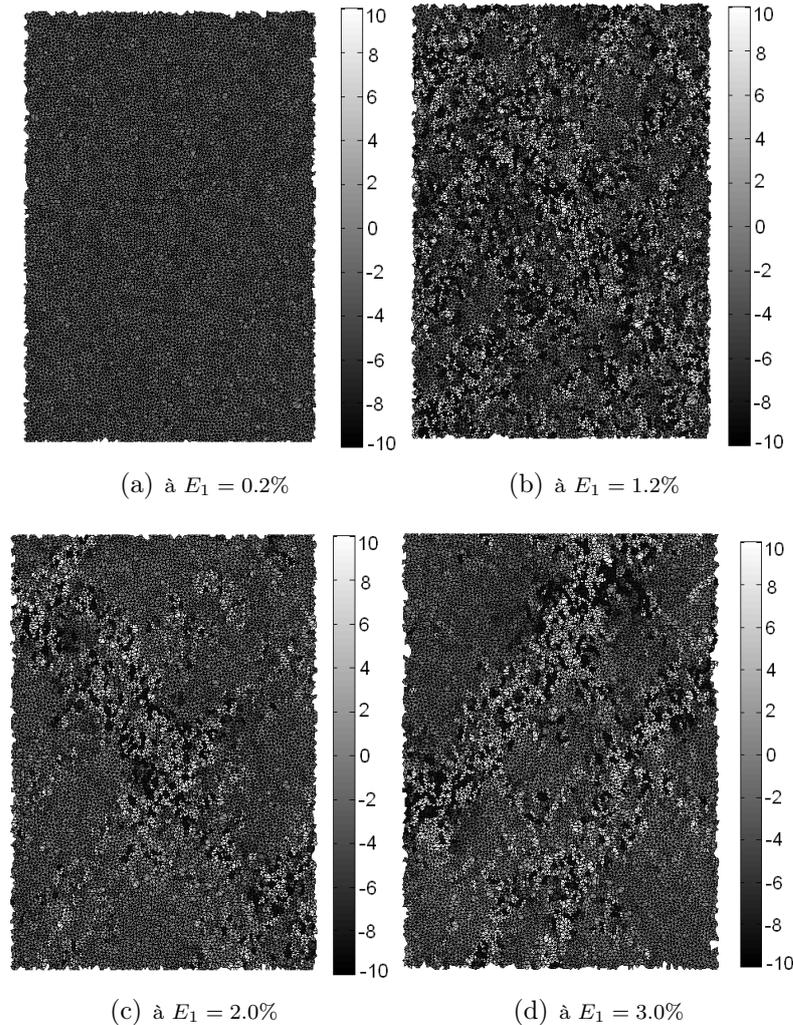
**FIGURE 5.8** – Evolutions des composantes  $\overline{\delta \varepsilon}_d^S$  et  $\overline{\delta \varepsilon}_d^R$  pour le 2<sup>ème</sup> invariant de la déformation déviatoire, relatives respectivement au glissement et au roulement aux contacts, au cours de l'essai.

### 5.3 Hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique

L'analyse effectuée dans la section 3.3.2.5 montre que le champ de déplacement discret des centres des particules dans l'assemblage granulaire dévie significativement du champ de déplacement du milieu continu équivalent soumis à la même déformation macroscopique, d'autant plus quand le niveau de déformation de l'assemblage granulaire est important. Cette déviation du champ de déplacement discret

conduit à une hétérogénéité de la déformation mésoscopique par rapport à la déformation macroscopique. Cette hétérogénéité fait l'objet de l'analyse proposée dans cette section.

### 5.3.1 Distribution spatiale de la déformation à l'échelle mésoscopique



**FIGURE 5.9** – Distributions spatiales de la déformation volumique mésoscopique  $\delta\varepsilon_v^h$  pour quatre incréments de déformation à : (a)  $E_1 = 0.2\%$ , (b)  $E_1 = 1.2\%$ , (c)  $E_1 = 2.0\%$ , (d)  $E_1 = 3.0\%$ .

Les figures 5.9 et 5.10 présentent les distributions spatiales de la déformation volumique mésoscopique  $\delta\varepsilon_v^h$  et du 2<sup>ème</sup> invariant  $\delta\varepsilon_d^h$  de la déformation déviatoire pour quatre incréments de déformation à différents niveaux de déformation axiale : (a)  $E_1 = 0.2\%$  et (b)  $E_1 = 1.2\%$  avant le pic, (c)  $E_1 = 2.0\%$  et (d)  $E_1 = 3.0\%$  après le pic de la courbe contrainte - déformation. Ces figures tracent tous les sous-domaines dans le graphe de particules avec un niveau de gris proportionnel à la valeur des rapports  $\delta\varepsilon_v^h/\delta E_v$  et  $\delta\varepsilon_d^h/\delta E_d$ . Ces figures montrent que :

- pour l'incrément (a), la déformations mésoscopique est assez homogène et elle est très proche de la déformation macroscopique ;
- pour l'incrément (b), la déformation mésoscopique est significativement hétérogène. Cependant il n'y a pas de zones remarquables de localisation de la déformation au sein du milieu ;
- pour les incréments (c) et (d), on distingue clairement des zones remarquables de localisation de la déformation : une bande de cisaillement est observée pour l'incrément (c), et se scinde en deux bandes pour l'incrément (d).

On remarque que l'hétérogénéité de la déformation mésoscopique est très similaire à l'hétérogénéité du champ de déplacement de centres de particules, analysé dans la section 3.3.2.5.

En conclusion, *la déformation mésoscopique est assez homogène au début de l'essai et devient de plus en plus hétérogène au cours de la déformation de l'assemblage granulaire. La déformation est localisée en bandes de cisaillement dans les zones au pic et post-pic de la courbe contrainte - déformation.* Ces bandes de cisaillement ont été observées, lors d'essais de laboratoire ou numériques par de nombreux auteurs, en particulier par Calvetti *et al.* (1997), Dedecker (1999), Lanier et Jean (2000).

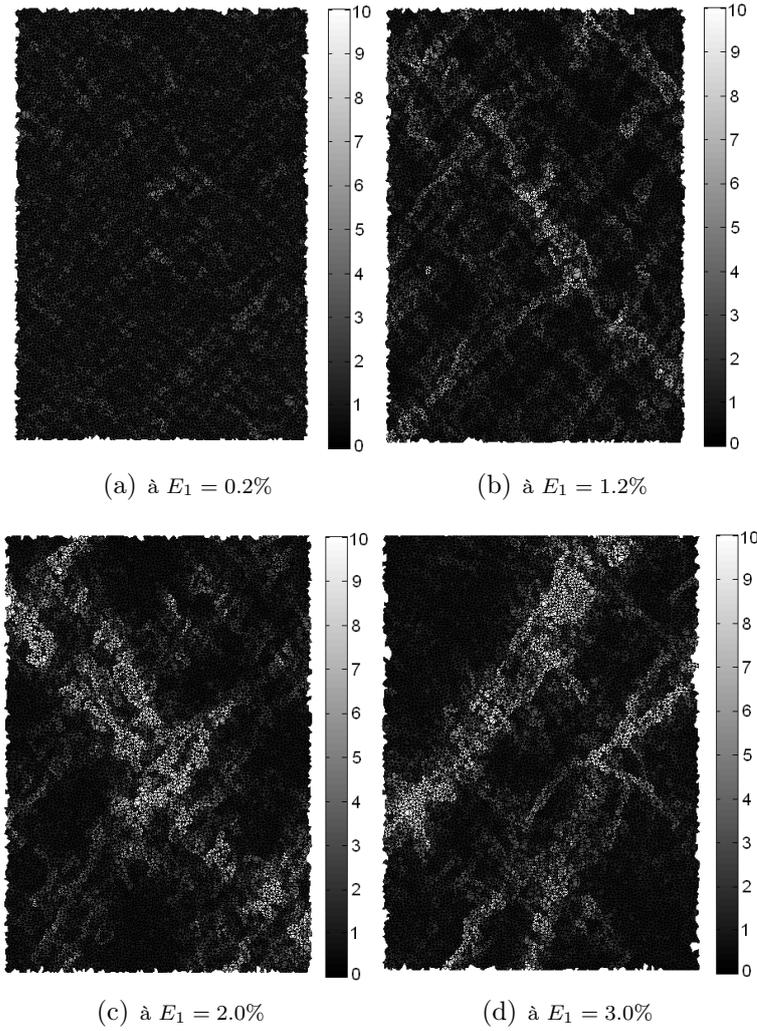
### 5.3.2 Analyse statistique de l'hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique

Pour étudier de façon plus précise l'hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique, une approche statistique est utilisée. On trace les distributions des différentes variables de déformation  $\delta\varepsilon_{11}^h$ ,  $\delta\varepsilon_{22}^h$ ,  $\delta\varepsilon_{12}^h$ ,  $\delta\varepsilon_v^h$  et  $\delta\varepsilon_d^h$  définies dans la section 5.2. Les degrés d'hétérogénéité  $\tilde{\delta}\varepsilon_{11}$ ,  $\tilde{\delta}\varepsilon_{22}$ ,  $\tilde{\delta}\varepsilon_{12}$ ,  $\tilde{\delta}\varepsilon_v$  et  $\tilde{\delta}\varepsilon_d$  des distributions de ces variables mésoscopiques par rapport aux variables macroscopiques correspondantes ( $\delta E_{11}$ ,  $\delta E_{22}$ ,  $\delta E_{12}$ ,  $\delta E_v$  et  $\delta E_d$ ) sont calculés (voir la définition du degré d'hétérogénéité dans l'annexe C.2).

La figure 5.11 présente les distributions de la déformation mésoscopique pour l'incrément de déformation à  $E_1 = 1.2\%$ . On constate une forte hétérogénéité de la déformation mésoscopique. La déformation mésoscopique varie très largement et se distribue sur une plage significative autour de la valeur de la déformation macroscopique. Ce résultat confirme ceux des figures 5.9 et 5.10.

On remarque que la plupart des sous-domaines se déforment de façon similaire à l'assemblage en ce sens que les sous-domaines se raccourcissent dans la direction majeure macroscopique ( $\delta\varepsilon_{11}^h < 0$ ) et s'allongent dans la direction mineure macroscopique ( $\delta\varepsilon_{22}^h > 0$ ). Cependant, il y a une part significative de sous-domaines qui ne suit pas la déformation macroscopique :  $\delta\varepsilon_{11}^h > 0$  pour environ 17% des sous-domaines et  $\delta\varepsilon_{11}^h < 0$  pour environ 32% des sous-domaines. De plus, la déformation volumique des sous-domaines  $\delta\varepsilon_v^h$  est très différente de celle de l'assemblage : tandis que l'assemblage se dilate, une part très importante des sous-domaines se contracte (62%). Pour la déformation de cisaillement  $\delta\varepsilon_{12}^h$  des sous-domaines, elle n'est pas nulle mais se distribue principalement autour de la valeur nulle de la déformation de cisaillement macroscopique  $\delta E_{12}$ .

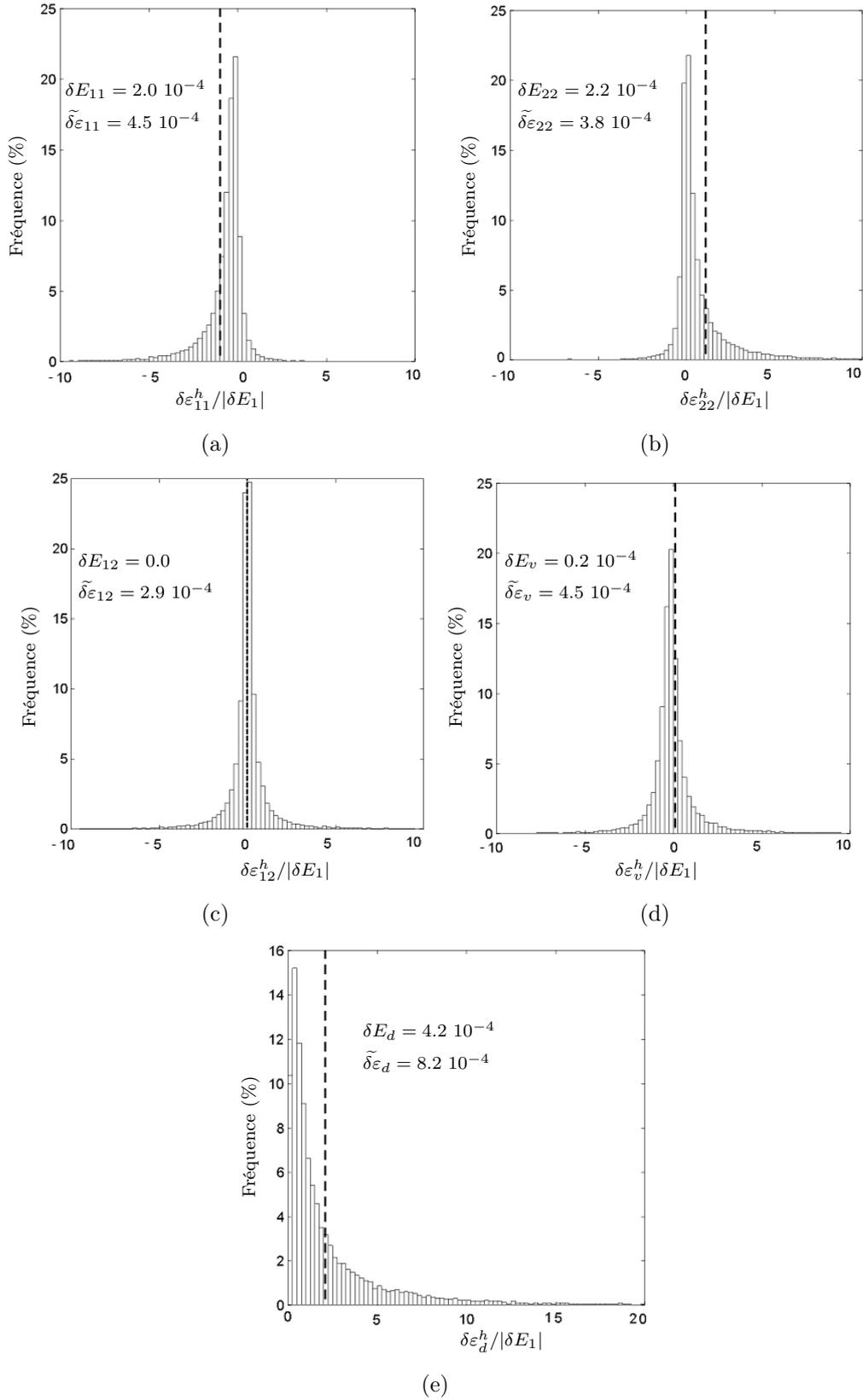
Le pourcentage des sous-domaines dilatants, en fonction de la déformation axiale  $E_1$ , est tracé sur la figure 5.12. On peut voir qu'au début de l'essai, presque tous les sous-domaines se contractent, puis une part de plus en plus importante des



**FIGURE 5.10** – Distributions spatiales du 2<sup>ème</sup> invariant  $\delta\varepsilon_d^h$  de la déformation déviatoire mésoscopique pour quatre incréments de déformation à : (a)  $E_1 = 0.2\%$ , (b)  $E_1 = 1.2\%$ , (c)  $E_1 = 2.0\%$ , (d)  $E_1 = 3.0\%$ .

sous-domaines ont tendance à se dilater au cours de l'essai, même dans la zone de contractance de l'assemblage. Au pic de la courbe contrainte - déformation, environ 43% des sous-domaines se dilatent, et après le pic, ce pourcentage diminue.

La figure 5.13 montre les évolutions des degrés d'hétérogénéité  $\tilde{\delta\varepsilon}_{11}$ ,  $\tilde{\delta\varepsilon}_{22}$ ,  $\tilde{\delta\varepsilon}_{12}$ ,  $\tilde{\delta\varepsilon}_v$  et  $\tilde{\delta\varepsilon}_d$  en fonction de la déformation axiale  $E_1$ . Leurs faibles valeurs au début de l'essai signifient que la déformation mésoscopique est assez homogène dans cette zone. Cependant, dans la zone près du pic de la courbe contrainte - déformation, les degrés d'hétérogénéité prennent des valeurs importantes, ce qui montre une forte hétérogénéité de la déformation mésoscopique dans cette zone. Après le pic, ces courbes fluctuent fortement, ce qui résulte vraisemblablement de la présence de bandes de cisaillement au sein de l'assemblage, apparaissant et disparaissant dans cette zone post-pic, comme mis en évidence sur les figure 5.9 et 5.10.



**FIGURE 5.11** – Distributions de la déformation mésoscopique pour l'incrément de déformation à  $E_1 = 1.2\%$  : a)  $\delta \varepsilon_{11}^h$ , b)  $\delta \varepsilon_{22}^h$ , c)  $\delta \varepsilon_{12}^h$ , d)  $\delta \varepsilon_v^h$ , e)  $\delta \varepsilon_d^h$ . Lignes pointillées correspondent à la déformation macroscopique.

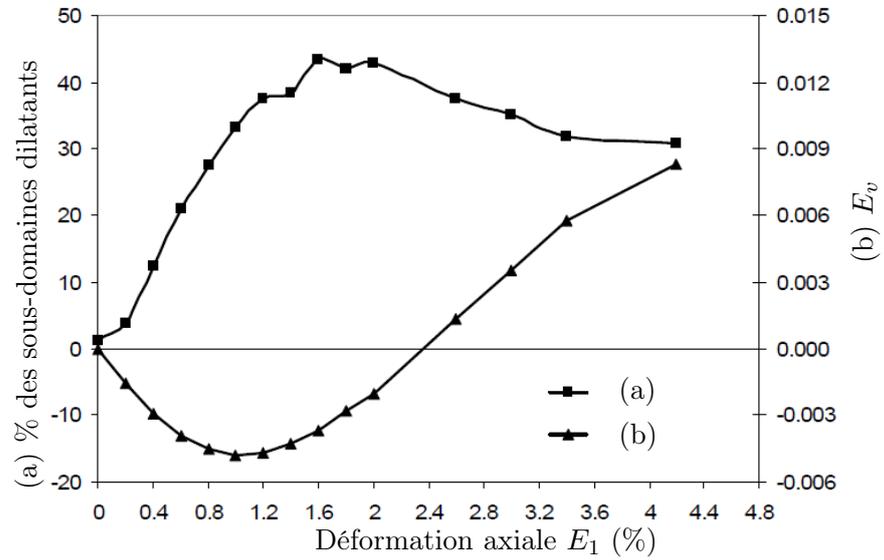


FIGURE 5.12 – Evolutions du pourcentage des sous-domaines dilatants et de la déformation volumique de l'assemblage au cours de l'essai.

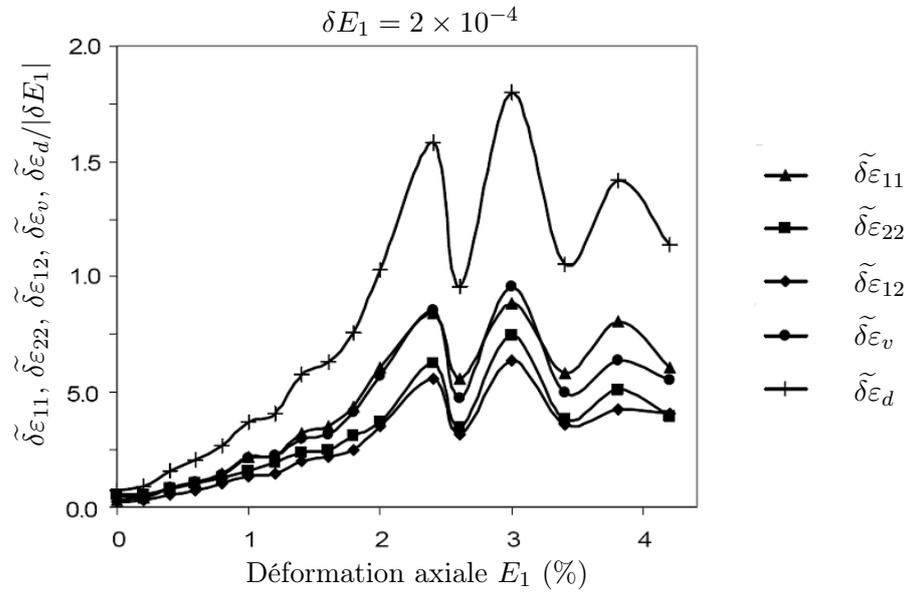


FIGURE 5.13 – Evolutions des degrés d'hétérogénéité  $\tilde{\delta}\varepsilon_{11}$ ,  $\tilde{\delta}\varepsilon_{22}$ ,  $\tilde{\delta}\varepsilon_{12}$ ,  $\tilde{\delta}\varepsilon_v$  et  $\tilde{\delta}\varepsilon_d$  des différentes variables de déformation mésoscopique au cours de l'essai.

### 5.3.3 Mesures complémentaires de l'hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique

On utilise ici la méthode proposée par Kuhn (2003) pour analyser l'hétérogénéité du champ de déformations  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$  à l'échelle mésoscopique (voir l'annexe C.3). Pour cela, on calcule les mesures suivantes :

- la *participation*  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\boldsymbol{E}$ ,
- la *non-conformité*  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta\boldsymbol{E}$  et
- l'*alignement*  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta\boldsymbol{E}$

de la déformation de chaque sous-domaine par rapport à la déformation macroscopique  $\delta\boldsymbol{E}$ . Les valeurs moyennes  $\langle \cdot \rangle_v$  et les écart-types  $S_v[\cdot]$  sont ensuite déterminés pour les distribution de ces mesures sur l'ensemble de sous-domaines (l'indice  $v$  signifie que le volume des sous-domaines est considéré comme poids).

On note que la valeur moyenne  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\boldsymbol{E} \rangle_v$  de la distribution de la mesure  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\boldsymbol{E}$  est égale à 1 (voir la relation (C.18)). On s'intéresse ici à l'écart-type  $S_v[\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\boldsymbol{E}]$  de la distribution de la mesure  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\boldsymbol{E}$  et aux valeurs moyennes  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta\boldsymbol{E} \rangle_v$  et  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta\boldsymbol{E} \rangle_v$  respectivement des distributions des mesures  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta\boldsymbol{E}$  et  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta\boldsymbol{E}$ . Pour un milieu homogène pour lequel le champ de déformation locale est homogène et aligné à la déformation macroscopique, l'on obtient les valeurs suivantes :  $S_v[\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\boldsymbol{E}] = 0$ ,  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta\boldsymbol{E} \rangle_v = 0$ ,  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta\boldsymbol{E} \rangle_v = 1$  (voir le tableau C.3). Par la suite, l'écart-type  $S_v[\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\boldsymbol{E}]$  et les valeurs moyennes  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta\boldsymbol{E} \rangle_v$ ,  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta\boldsymbol{E} \rangle_v$  se référeront aux valeurs correspondantes pour un champ uniforme et aligné.

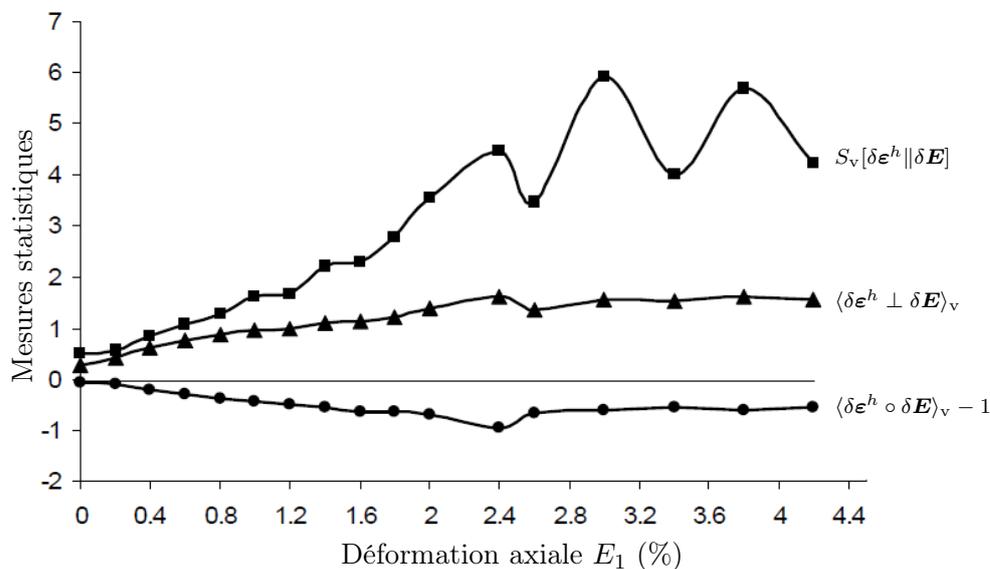
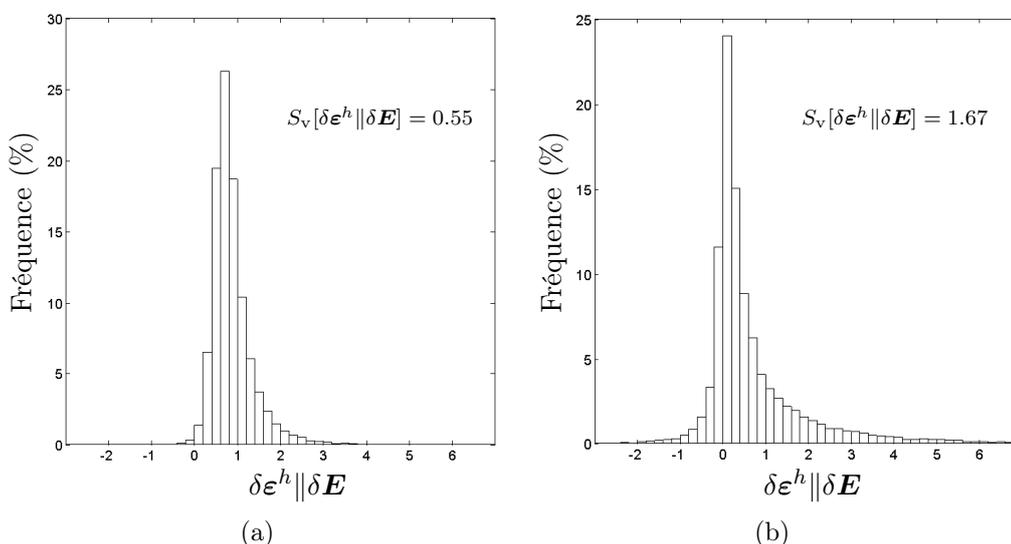


FIGURE 5.14 – Evolutions de  $S_v[\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\boldsymbol{E}]$ ,  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta\boldsymbol{E} \rangle_v$  et  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta\boldsymbol{E} \rangle_v$  au cours de l'essai.

La figure 5.14 présente les évolutions de  $S_v[\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\boldsymbol{E}]$ ,  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta\boldsymbol{E} \rangle_v$  et  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta\boldsymbol{E} \rangle_v$  en fonction de la déformation axiale  $E_1$ . Au début de l'essai, la déformation des sous-domaines suit plus ou moins la déformation macroscopique, ce qui est montré par des valeurs  $S_v[\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\boldsymbol{E}] \approx 0.52$ ,  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta\boldsymbol{E} \rangle_v \approx 0.29$ ,  $\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta\boldsymbol{E} \rangle_v \approx 0.95$  qui sont assez proches du cas d'un milieu homogène. Cependant, ces quantités augmentent significativement avec la déformation de l'assemblage. Au pic de la courbe contrainte

- déformation, les sous-domaines se déforment de manière très différente de l'assemblage : le champ  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$  n'est plus aligné à  $\delta\boldsymbol{E}$ , la non-conformité du champ  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$  par rapport à  $\delta\boldsymbol{E}$  devient très importante ( $\langle\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta\boldsymbol{E}\rangle_v \approx 1.61$ ) ainsi que la dispersion des participations  $S_v[\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h\|\delta\boldsymbol{E}]$  ( $S_v[\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h\|\delta\boldsymbol{E}] \approx 4.46$ ), environ quatre fois plus grande que la valeur moyenne  $\langle\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h\|\delta\boldsymbol{E}\rangle_v$ .

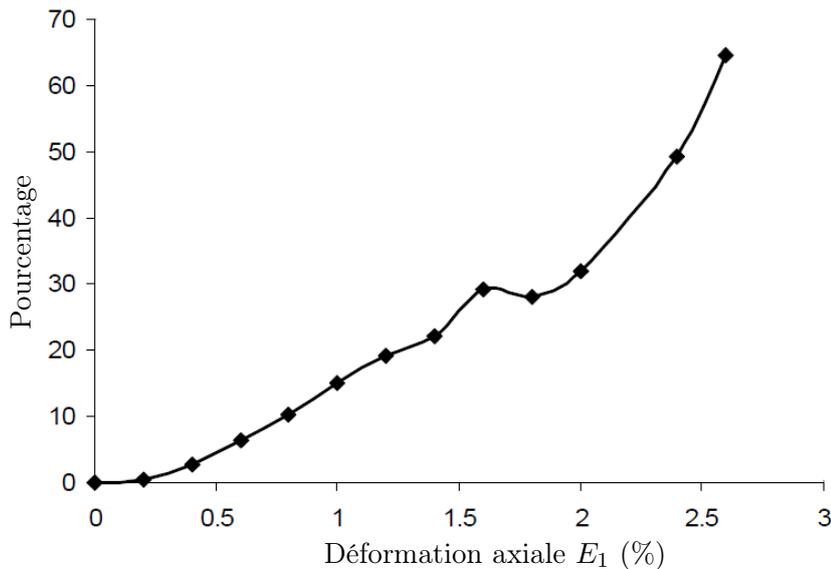
La figure 5.15, qui présente les distributions de la participation  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h\|\delta\boldsymbol{E}$  pour deux incréments de déformation à (a)  $E_1 = 0.2\%$  et (b)  $E_1 = 1.2\%$ , confirme l'hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique. Pour l'incrément (a), la participation  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h\|\delta\boldsymbol{E}$  se distribuent sur une plage significative autour de 1.0. Ce n'est pas le cas pour l'incrément (b) où la plage de variations de  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h\|\delta\boldsymbol{E}$  est beaucoup plus large, de  $-2.0$  à  $6.0$ . En particulier, on peut constater que pour l'incrément (b), environ 20% des sous-domaines ont des *participations négatives* ( $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h\|\delta\boldsymbol{E} < 0.0$ ), c'est-à-dire qu'ils se déforment dans des directions très différentes des directions de la déformation macroscopique. Ces résultats confirment ce qui a été trouvé par Kuhn (2003).



**FIGURE 5.15** – Distributions des valeurs de la mesure de participation  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h\|\delta\boldsymbol{E}$  à deux incréments de déformation à (a)  $E_1 = 0.2\%$  et (b)  $E_1 = 1.2\%$ .

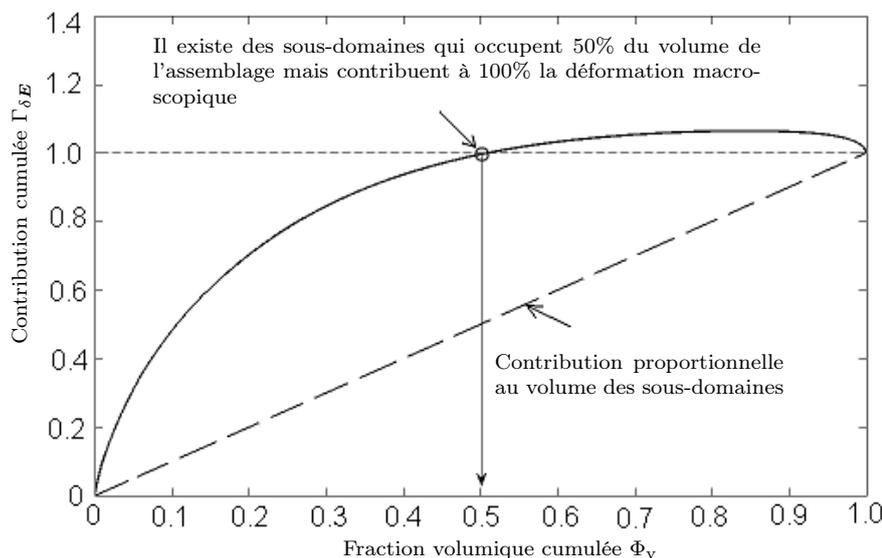
La figure 5.16 présente l'évolution du pourcentage des sous-domaines ayant des participations négatives. On trouve une augmentation significative de ces sous-domaines au cours de la déformation de l'assemblage. Après le pic de la courbe contrainte - déformation, plus de 50% des sous-domaines ont des participations négatives à la déformation macroscopique. Ceci est certainement lié à la présence des bandes de cisaillement dans l'assemblage.

Enfin, la contribution des sous-domaines à la déformation macroscopique est étudiée dans ce paragraphe. Pour cela, on utilise deux quantités : la contribution cumulée  $\Gamma_{\delta\boldsymbol{E}}$  des sous-domaines à la déformation macroscopique et leur fraction volumique cumulée  $\Phi_v$ , définies dans l'annexe C.3.2. La figure 5.17 présente la contribution cumulée  $\Gamma_{\delta\boldsymbol{E}}$  en fonction de la fraction volumique cumulée  $\Phi_v$  des sous-domaines pour l'incrément de déformation à  $E_1 = 1.2\%$ , comparé avec une contribution proportionnelle au volume des sous-domaines (ligne pointillée). Cette figure met en évidence



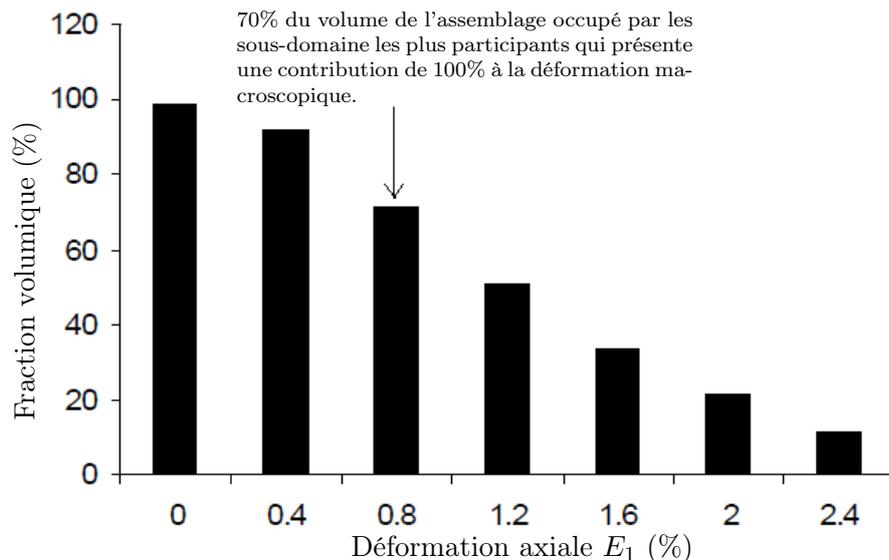
**FIGURE 5.16** – Pourcentage des sous-domaines ayant une participation négative à la déformation macroscopique en fonction de la déformation axiale  $E_1$ .

une contribution très hétérogène des sous-domaines à la déformation macroscopique : *il existe des sous-domaines qui occupent seulement 50% du volume de l'assemblage mais qui contribuent à 100% de la déformation macroscopique*. Ces sous-domaines sont appelés *les sous-domaines les plus participants* à la déformation macroscopique. D'autres sous-domaines ont des contributions faibles ou négatives.



**FIGURE 5.17** – Contribution cumulée  $\Gamma_{\delta E}$  des sous-domaines à la déformation macroscopique en fonction de leur fraction volumique cumulée  $\Phi_v$  pour l'incrément de déformation à  $E_1 = 1.2\%$ .

L'évolution du volume des sous-domaines dits les plus participants à la déformation macroscopique au cours de l'essai est présentée sur la figure 5.18. On constate qu'au début de l'essai où la déformation est assez homogène, presque tous les sous-



**FIGURE 5.18** – Evolution de la fraction volumique des sous-domaines dits les plus participants au cours de l'essai.

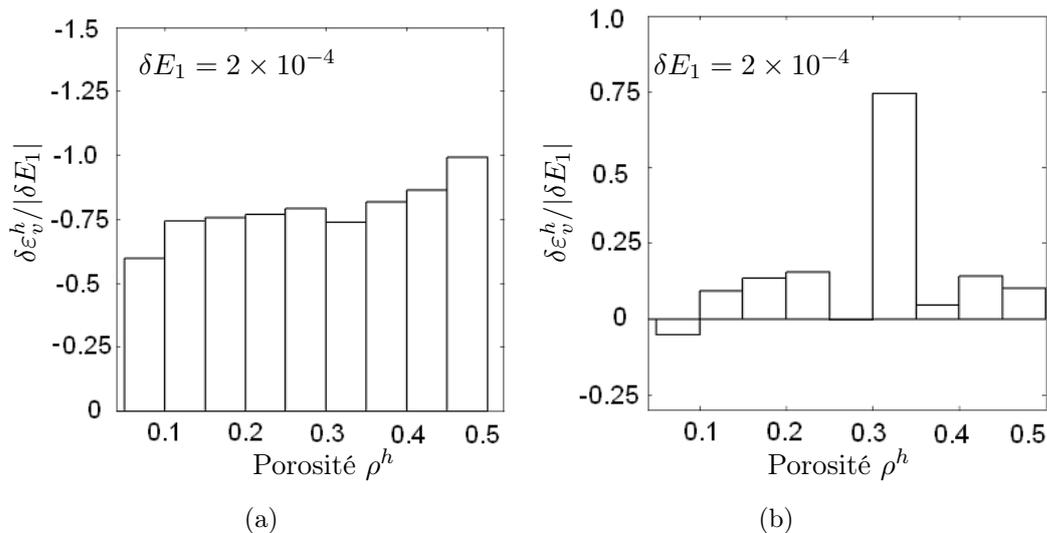
domaines participent à la déformation macroscopique. Néanmoins, ce volume diminue significativement au cours de l'essai. Au pic de la courbe contrainte - déformation, les sous-domaines dits les plus participants occupent seul 12% du volume de l'assemblage, ce qui est certainement dû à la concentration de la déformation dans les bandes de cisaillement, comme présenté sur les figures 5.9 et 5.10.

## 5.4 Nature structurée de la déformation à l'échelle mésoscopique

L'analyse effectuée dans la section précédente a mis en évidence une forte hétérogénéité de la déformation du milieu granulaire à l'échelle mésoscopique. Kuhn (1999, 2003) a montré que *la déformation locale est hétérogène mais structurée*, c'est-à-dire que la déformation locale dépend de la structure locale du milieu granulaire. Dans cette section, nous analysons de façon approfondie cette nature structurée de la déformation à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire que l'on met en évidence les relations entre la déformation, la densité et la texture (décrites au chapitre 4) à l'échelle mésoscopique.

### 5.4.1 Relation entre la déformation et la densité à l'échelle mésoscopique

La densité à l'échelle mésoscopique peut être mesurée par la porosité  $\rho^h$ , comme analysé dans la section 4.3.2. La relation entre la déformation et la porosité à l'échelle mésoscopique est étudiée statistiquement : la déformation moyenne en volume est déterminée sur un ensemble des sous-domaines de porosité similaire (la porosité  $\rho^h$  varie dans un intervalle d'amplitude  $\delta\rho$ ). Sur la figure 5.19, chaque barre correspond donc à un ensemble de sous-domaines de porosité similaire. Cette figure présente



**FIGURE 5.19** – Déformation volumique  $\delta \varepsilon_v^h$  en fonction de la porosité  $\rho^h$  des sous-domaines à deux niveaux de déformation axiale : a)  $E_1 = 0.2\%$  et b)  $E_1 = 1.2\%$ .

la relation entre la déformation volumique et la porosité à l'échelle mésoscopique pour deux incréments de déformation à (a)  $E_1 = 0.2\%$  et (b)  $E_1 = 1.2\%$ . On s'aperçoit que pour l'incrément (a) où la plupart des sous-domaines se contractent, la déformation volumique  $\delta \varepsilon_v^h$  dépend faiblement de la porosité des sous-domaines : les sous-domaines de faible porosité se contractent moins que les sous-domaines de forte porosité. Pour l'incrément (b), la déformation volumique apparaît non-corrélée avec la densité à l'échelle mésoscopique.

A l'échelle macroscopique, il est connu qu'un assemblage granulaire lâche se contracte plus et se dilate moins qu'un assemblage dense. Une telle relation n'est pas toujours retrouvée à l'échelle mésoscopique. La densité ne joue vraisemblablement pas un rôle important dans la déformation à l'échelle mésoscopique. Dans la littérature, on trouve des constats similaires, par exemple celui de P.A.Cundall et O.D.L.Strack (1983). Ces auteurs ont étudié le comportement de deux assemblages de disques avec différentes densités. Ils ont trouvé un résultat étonnant : l'assemblage le moins dense présente une résistance plus importante que celui le plus dense. Ils ont alors postulé que la texture des matériaux granulaires (l'arrangement des particules) joue un rôle sur leur résistance beaucoup plus significatif que celui de la densité. Ce résultat nous conduit à analyser les relations entre la déformation et la texture à l'échelle mésoscopique dans les sections suivantes.

### 5.4.2 Relation entre la déformation et la texture à l'échelle mésoscopique

Comme présenté dans la section 4.3.3, la texture d'un sous-domaine est décrite par deux mesures : le degré d'allongement  $\beta^h$  et l'angle d'orientation  $\theta^h$ . En fait, la déformation des sous-domaines est très variable d'un sous-domaine à l'autre, même pour les sous-domaines ayant la même texture. Une description exacte de la déformation pour une texture donnée de sous-domaines paraît très complexe, et seule une

description statistique est possible dans ce cas. Pour cela, la déformation moyenne est déterminée sur un ensemble de sous-domaines de texture similaire (le degré d'allongement  $\beta^h$  varie dans un intervalle d'amplitude  $\delta\beta$  et l'angle d'orientation  $\theta^h$  varie dans un intervalle d'amplitude  $\delta\theta$ ) :

$$\delta\varepsilon_{ij}(\beta, \theta) = \frac{1}{V(\beta, \theta)} \sum_{\substack{\beta^h \in [\beta, \beta + \delta\beta], \\ \theta^h \in [\theta, \theta + \delta\theta]}} \delta\varepsilon_{ij}^h V^h, \quad (5.46)$$

$$V(\beta, \theta) = \sum_{\substack{\beta^h \in [\beta, \beta + \delta\beta], \\ \theta^h \in [\theta, \theta + \delta\theta]}} V^h. \quad (5.47)$$

A partir du tenseur  $\delta\varepsilon(\beta, \theta)$  on peut également déduire les variables de déformation  $\delta\varepsilon_{11}(\beta, \theta)$ ,  $\delta\varepsilon_{22}(\beta, \theta)$ ,  $\delta\varepsilon_{12}(\beta, \theta)$ ,  $\delta\varepsilon_v(\beta, \theta)$ ,  $\delta\varepsilon_d(\beta, \theta)$  et  $\psi(\beta, \theta)$  pour des sous-domaines de texture similaire.

Afin de simplifier l'analyse, le rôle du degré d'allongement  $\beta^h$  est analysé en classant les sous-domaines selon les deux classes  $W$  et  $S$ , correspondant à des sous-domaines respectivement faiblement et fortement allongés (voir la section 4.3.4.1). La plage de variation  $[0, 2\pi]$  de l'angle  $\theta^h$  est subdivisée en 40 secteurs de  $\delta\theta = \pi/20$ . Par la suite, les relations entre la déformation et la texture à l'échelle mésoscopique sont représentées par des diagrammes polaires :

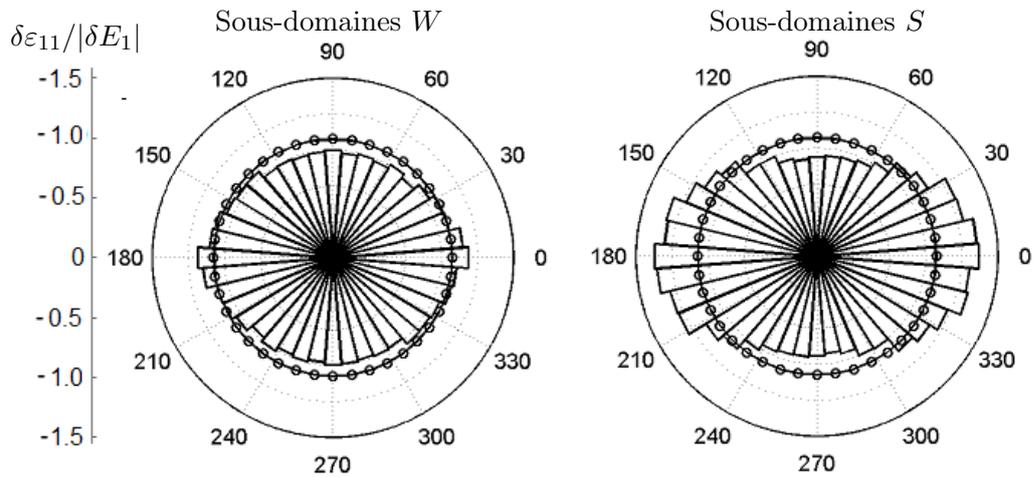
- chacun d'eux correspond à une classe de sous-domaines ;
- chaque élément polaire correspond à un secteur de l'angle  $\theta$ , et son rayon correspond à la valeur de la variable analysée ;
- les cercles correspondent à la déformation macroscopique.

Ces relations sont particulièrement analysées pour deux incréments de déformation à (a)  $E_1 = 0.2\%$  et (b)  $E_1 = 1.2\%$ , respectivement dans les zones de contractance et de dilatance de l'assemblage.

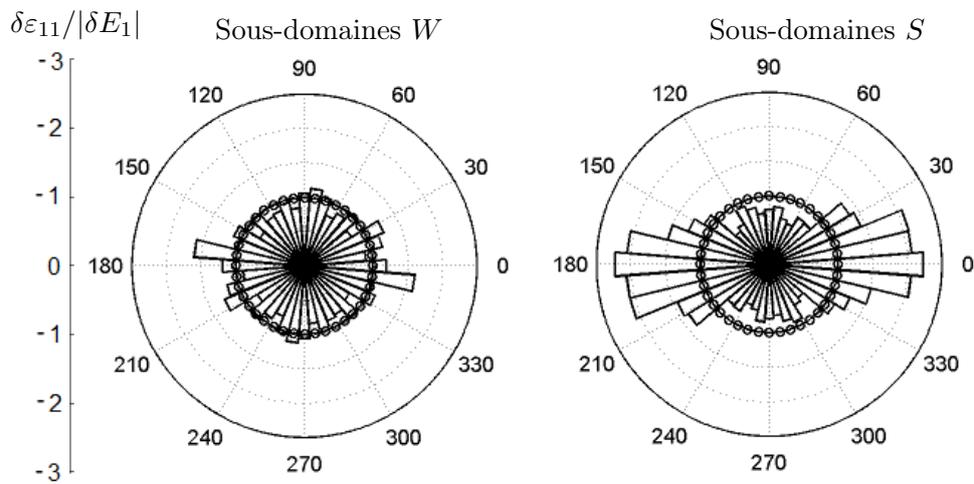
#### 5.4.2.1 Déformation mésoscopique $\delta\varepsilon_{11}$ dans la direction majeure macroscopique

Les diagrammes de la figure 5.20 présentent la déformation  $\delta\varepsilon_{11}$  en fonction de l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes  $W$  et  $S$  et pour deux incréments (a) et (b). On peut constater que la déformation  $\delta\varepsilon_{11}$  est hétérogène et qu'elle dépend significativement de l'orientation  $\theta$  et du degré d'allongement  $\beta$  des sous-domaines, particulièrement pour les sous-domaines fortement allongés (classe  $S$ ). Parmi les sous-domaines fortement allongés, ceux orientés dans la direction mineure macroscopique ont une valeur  $\delta\varepsilon_{11}$  plus importante que ceux orientés dans la direction majeure macroscopique. De plus, les premiers se déforment plus que l'assemblage dans la direction majeure macroscopique ( $\delta\varepsilon_{11} > \delta E_{11}$ ) tandis que les derniers se déforment moins que l'assemblage ( $\delta\varepsilon_{11} < \delta E_{11}$ ). Cette dépendance est beaucoup moins marquée pour les sous-domaines faiblement allongés (classe  $W$ ). On note également que cette dépendance augmente, en particulier pour les sous-domaines fortement allongés, avec le niveau de déformation de l'assemblage.

Pour mesurer la concentration de la déformation  $\delta\varepsilon_{11}^h$  dans un sous-domaine, on



(a) à  $E_1 = 0.2\%$



(b) à  $E_1 = 1.2\%$

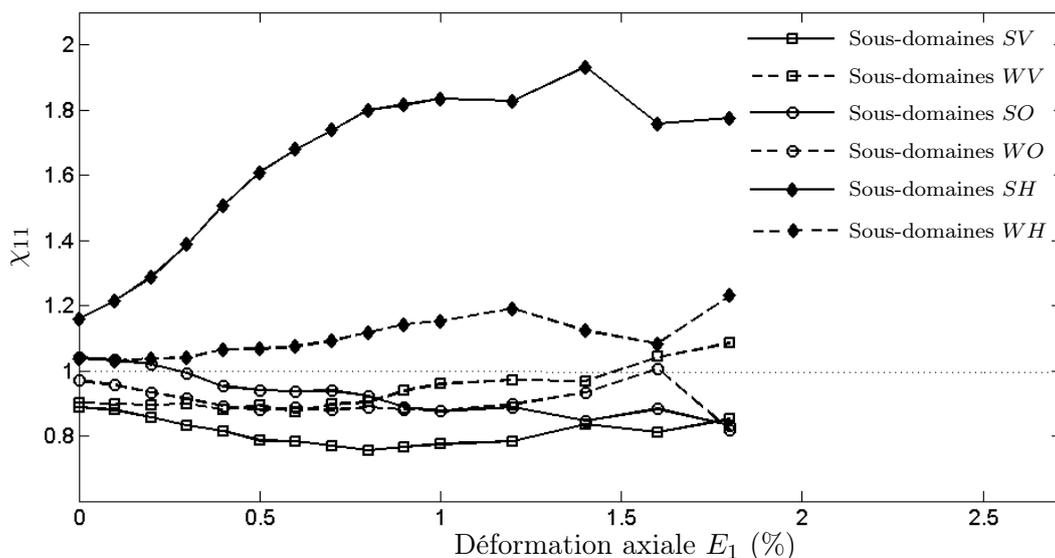
**FIGURE 5.20** – Relations entre la déformation  $\delta\varepsilon_{11}$  dans la direction majeure macroscopique et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$ .

définit un facteur de concentration :

$$\chi_{11}^h = \frac{\delta \varepsilon_{11}^h}{\delta E_{11}}, \quad (5.48)$$

une valeur de  $\chi_{11}^h$  égale à 1.0 signifie que le sous-domaine se déforme conformément à l'assemblage dans la direction majeure macroscopique. Un facteur de concentration moyen en volume,  $\chi_{11} = \langle \chi_{11}^h \rangle_v$ , est calculé pour les six types de sous-domaines  $WV$ ,  $WO$ ,  $WH$ ,  $SV$ ,  $SO$ ,  $SH$ , définis dans la section 4.3.4.2. On rappelle que les lettres  $V$ ,  $O$ ,  $H$  représentent l'orientation des sous-domaines : vertical, oblique, et horizontal. Les valeurs de  $\chi_{11}$  pour les six types de sous-domaines, en fonction de la déformation axiale  $E_1$ , sont tracées sur la figure 5.21.

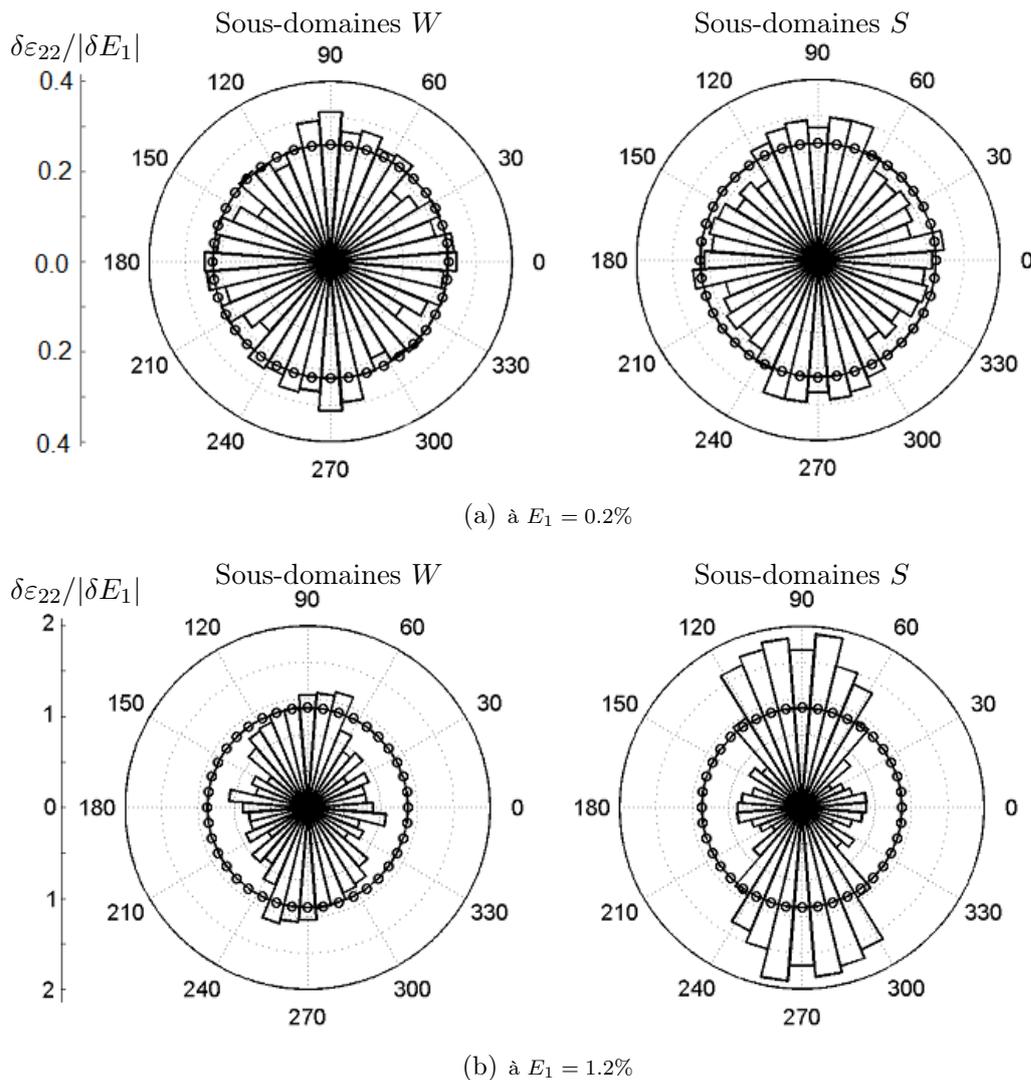
On constate que le facteur  $\chi_{11}$  prend des valeurs supérieures à 1.0 pour les sous-domaines  $SH$  et  $WH$ , tandis qu'il prend des valeurs inférieures à 1.0 pour les sous-domaines  $SV$  et  $WV$ . Le facteur  $\chi_{11}$  pour les sous-domaines  $SH$  augmente significativement avec le niveau de déformation de l'assemblage et peut atteindre une valeur importante (1.9, environ), tandis qu'il prend de faibles valeurs pour les autres types de sous-domaines. On peut alors conclure que *les sous-domaines fortement allongés et orientés dans la direction mineure macroscopique jouent un rôle prédominant dans la déformation du milieu granulaire dans la direction majeure macroscopique* (Nguyen et al., 2009).



**FIGURE 5.21** – Evolution du facteur de concentration  $\chi_{11}$  de la déformation dans la direction majeure macroscopique pour les six types de sous-domaines au cours de l'essai.

#### 5.4.2.2 Déformation mésoscopique $\delta \varepsilon_{22}$ dans la direction mineure macroscopique

Les relations entre la déformation  $\delta \varepsilon_{22}$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines, pour les deux classes  $W$  et  $S$  et pour les deux incréments de déformation (a) et (b), sont représentées sur la figure 5.22. Contrairement à la déformation  $\delta \varepsilon_{11}$ , la déformation  $\delta \varepsilon_{22}$  est plus importante pour les sous-domaines orientés dans la direction majeure



**FIGURE 5.22** – Relations entre la déformation  $\delta\varepsilon_{22}$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$ .

macroscopique que pour ceux orientés dans la direction mineure macroscopique, en particulier pour les sous-domaines fortement allongés. Cette dépendance augmente significativement avec le niveau de déformation macroscopique.

Un facteur de concentration de la déformation  $\delta\varepsilon_{22}^h$  dans un sous-domaines est défini par :

$$\chi_{22}^h = \frac{\delta\varepsilon_{22}^h}{\delta E_{22}}. \quad (5.49)$$

Une valeur moyenne  $\chi_{22} = \langle \chi_{22}^h \rangle_v$  est calculée pour les différents types de sous-domaines. La figure 5.23 trace l'évolution de  $\chi_{22}$  pour les six types de sous-domaines en fonction de la déformation axiale  $E_1$ . Contrairement au facteur  $\chi_{11}$ , le facteur  $\chi_{22}$  prend des valeurs supérieures à 1.0 pour les sous-domaines  $SV$  et  $WV$ , tandis qu'il prend des valeurs inférieures à 1.0 pour les sous-domaines  $SH$  et  $WH$ . De plus, le facteur  $\chi_{22}$  augmente significativement avec le niveau de déformation  $E_1$  pour les sous-domaines  $SV$  et peut atteindre une valeur importante (1.6, environ), tandis qu'il prend de faibles valeurs et a tendance à diminuer pour les autres types de sous-

domaines. En conclusion, *les sous-domaines fortement allongés et orientés dans la direction majeure macroscopique jouent un rôle prédominant dans la déformation du milieu granulaire dans la direction mineure macroscopique* (Nguyen *et al.*, 2009).

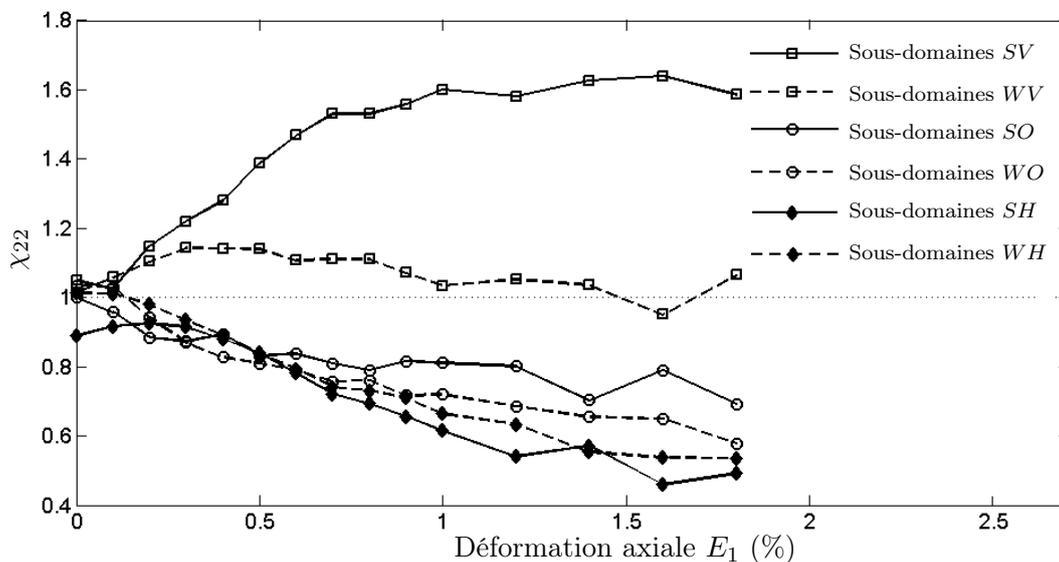


FIGURE 5.23 – Evolution du facteur de concentration  $\chi_{22}$  pour les six types de sous-domaines au cours de l'essai

#### 5.4.2.3 Récapitulatif sur la concentration des déformations $\delta\varepsilon_{11}$ et $\delta\varepsilon_{22}$ dans les sous-domaines

La figure 5.24 résume les valeurs des facteurs de concentration  $\chi_{11}$  et  $\chi_{22}$  pour les six types de sous-domaines pour l'incrément de déformation à  $E_1 = 1.2\%$ . Les résultats confirment le rôle important de la texture des sous-domaines dans leurs déformations : pour chaque classe de sous-domaines,  $\chi_{11}$  a tendance à augmenter suivant l'ordre  $V$ ,  $O$ ,  $H$  tandis que  $\chi_{22}$  a tendance à diminuer suivant le même ordre. De plus, les déformations  $\delta\varepsilon_{11}$  et  $\delta\varepsilon_{22}$  sont significativement concentrées dans les sous-domaines fortement allongés et orientés respectivement dans les directions principales mineure et majeure de sollicitation. Cette conclusion est illustrée sur la figure 5.25.

#### 5.4.2.4 Déformation mésoscopique de cisaillement $\delta\varepsilon_{12}$

Bien que la déformation de cisaillement macroscopique  $\delta E_{12}$  soit nulle, la déformation mésoscopique de cisaillement  $\delta\varepsilon_{12}^h$  dans les sous-domaines ne l'est pas, comme analysé dans la section 5.3.2. Pour estimer l'ordre de grandeur de  $\delta\varepsilon_{12}^h$ , on calcule la moyenne  $\langle |\delta\varepsilon_{12}^h| \rangle_v$  des valeurs absolues de  $\delta\varepsilon_{12}^h$ . La figure 5.26 représente l'évolution de  $\langle |\delta\varepsilon_{12}^h| \rangle_v$  en fonction de la déformation axiale  $E_1$ . On constate qu'au début de l'essai, l'ordre de grandeur de  $\delta\varepsilon_{12}^h$  est petit par rapport à celui de  $|\delta E_1|$ , cependant il augmente significativement avec la déformation de l'assemblage. Au pic de la courbe contrainte - déformation, la valeur de  $\langle |\delta\varepsilon_{12}^h| \rangle_v$  est comparable avec celle de  $|\delta E_1|$ .

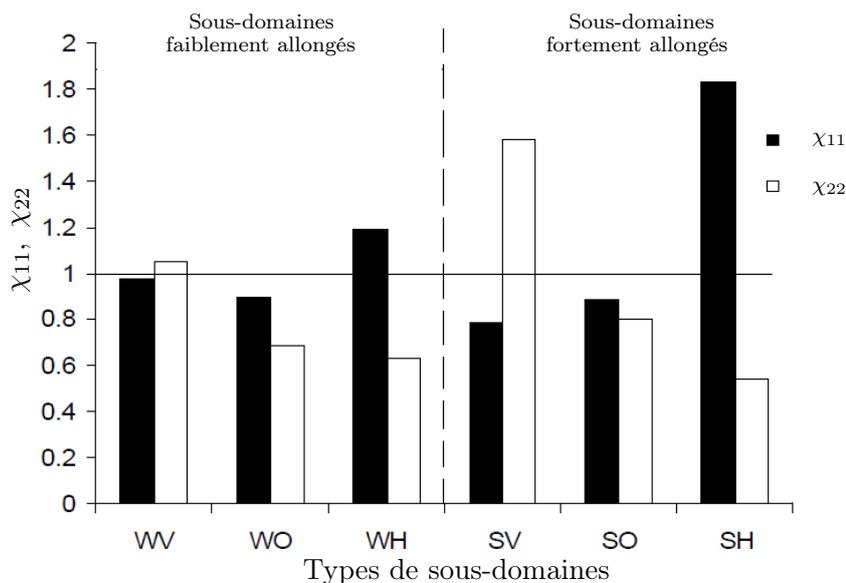
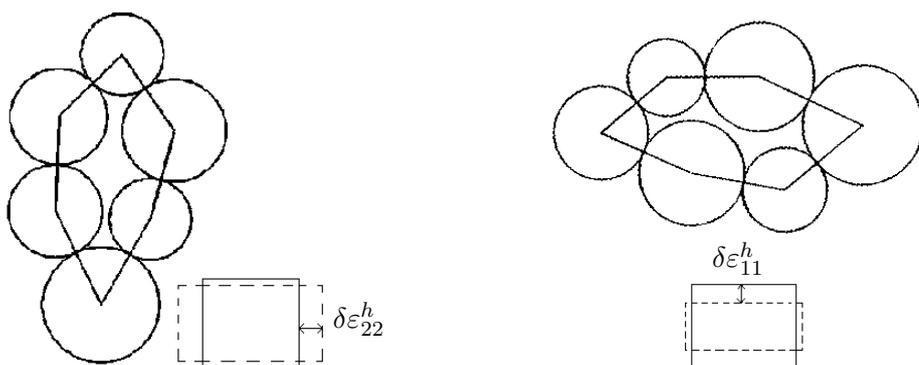


FIGURE 5.24 – Facteurs de concentration  $\chi_{11}$ ,  $\chi_{22}$  dans les six types de sous-domaines pour l'incrément de déformation à  $E_1 = 1.2\%$ .



(a) Déformation  $\delta\varepsilon_{22}^h$  prédominante dans les sous-domaines  $SV$

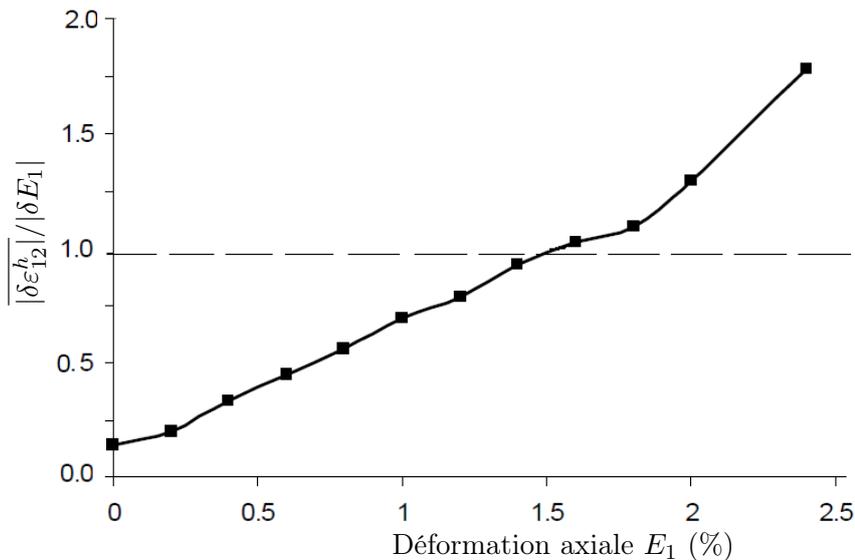
(b) Déformation  $\delta\varepsilon_{11}^h$  prédominante dans les sous-domaines  $SH$

FIGURE 5.25 – Illustration de la concentration des déformations  $\delta\varepsilon_{11}^h$  et  $\delta\varepsilon_{22}^h$  dans les sous-domaines  $SV$  et  $SH$ .

L'analyse sur la nature structurée de la déformation mésoscopique de cisaillement  $\delta\varepsilon_{12}^h$  semble difficile car  $\delta\varepsilon_{12}^h$  étant très variable, elle peut prendre des valeurs positives ou négatives même pour des sous-domaines de texture similaire. La moyenne de  $\langle \delta\varepsilon_{12}^h \rangle_v$  sur des sous-domaines de texture similaire donne une valeur très faible par rapport à celle de  $|\delta E_1|$ .

#### 5.4.2.5 Déformation déviatoire mésoscopique $\delta\varepsilon$

Les relations entre le 2<sup>ème</sup> invariant  $\delta\varepsilon_d$  de la déformation déviatoire  $\delta\varepsilon$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines, pour les deux classes des sous-domaines, sont présentées sur la figure 5.27. Les évolutions de  $\delta\varepsilon_d$  pour les six types de sous-domaines sont tracées sur la figure 5.28. Ces deux figures soulignent le rôle prédominant des sous-domaines fortement allongés, et orientés dans les directions majeure et mineure macroscopiques dans la déformation déviatoire du milieu granulaire.



**FIGURE 5.26** – Grandeur de la déformation de cisaillement  $\delta\epsilon_{12}^h$  à l'échelle mésoscopique.

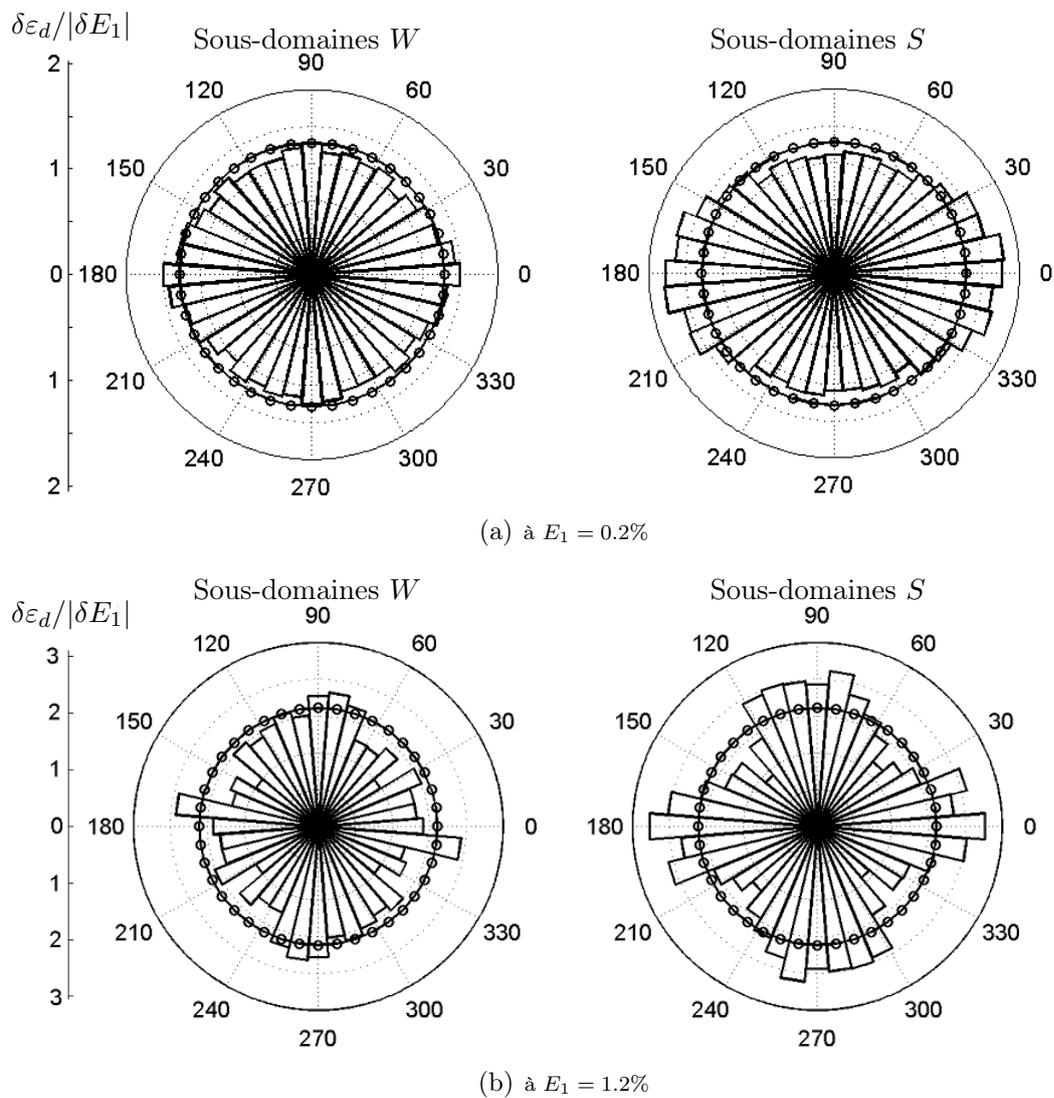
#### 5.4.2.6 Comportement volumique mésoscopique

Le comportement volumique des sous-domaines dans le milieu granulaire fait l'objet de cette section. Ce comportement volumique est décrit par trois variables suivantes : la déformation volumique  $\delta\epsilon_v^h$ , la variation volumique  $\Delta V^h$  ( $\Delta V^h = \epsilon_v^h V^h$ ) et l'angle de dilatance  $\psi^h$ . Dans la suite, ces trois variables sont étudiées.

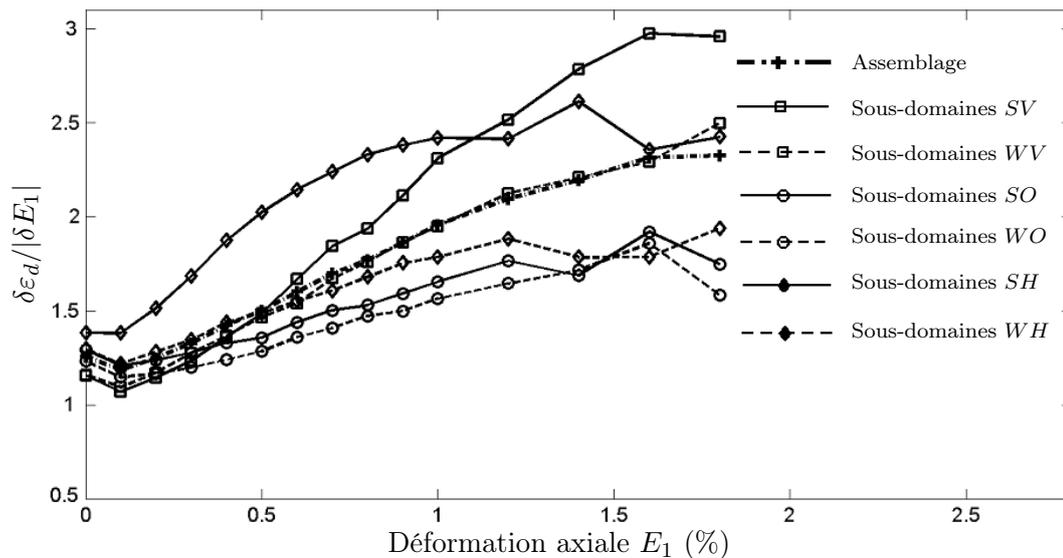
##### a) Déformation volumique $\delta\epsilon_v$

La figure 5.29 représente les relations entre la déformation volumique  $\delta\epsilon_v$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines, pour les deux classes des sous-domaines. Pour l'incrément (a) où l'assemblage se contracte, les sous-domaines se contractent également. Cependant ils se contractent différemment, en particulier les sous-domaines fortement allongés : ceux orientés dans la direction mineure macroscopique se contractent plus que ceux orientés dans la direction majeure macroscopique. Pour l'incrément (b) où l'assemblage granulaire se dilate, les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique se dilatent, tandis que ceux orientés dans la direction mineure macroscopique se contractent. Les sous-domaines faiblement allongés présentent une déformation volumique beaucoup plus faible que les sous-domaines fortement allongés.

Les évolutions de la déformation volumique  $\delta\epsilon_v$  des six types de sous-domaines, comparées avec l'évolution de la déformation volumique  $\delta E_v$  de l'assemblage, sont tracées sur la figure 5.30. On constate sur cette figure que les évolutions de  $\delta\epsilon_v$  pour les sous-domaines  $SV$ ,  $SH$  sont très différentes de celle de l'assemblage : les sous-domaines  $SV$  se contractent faiblement au début de l'essai et puis se dilatent fortement tandis que les sous-domaines  $SH$  se contractent tout au long de l'essai. Il est à noter que la dilatance se produit dans les sous-domaines  $SV$  bien avant la dilatance de l'assemblage. Les sous-domaines  $SO$  présentent une déformation volumique intermédiaire entre celle des sous-domaines  $SV$  et  $SH$ , et assez similaire à



**FIGURE 5.27** – Relations entre le 2<sup>ème</sup> invariant  $\delta\varepsilon_d$  de la déformation déviatoire  $\delta\varepsilon$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$ .



**FIGURE 5.28** – Evolution du 2<sup>ème</sup> invariant  $\delta\varepsilon_d$  de la déformation déviatoire  $\delta\varepsilon$  pour les six types de sous-domaines au cours de l'essai, comparée avec celle de l'assemblage.

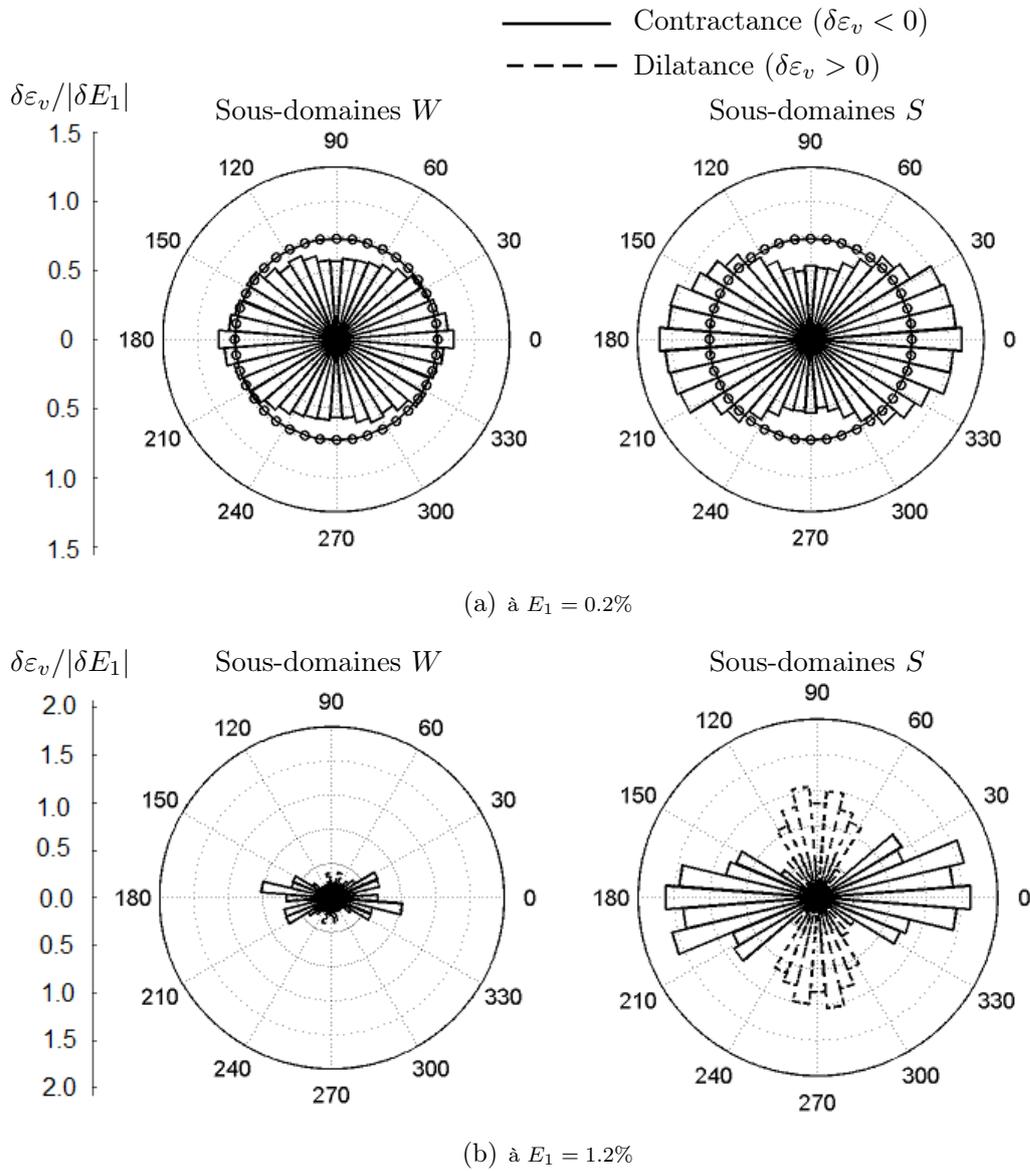
celle de l'assemblage. La déformation volumique des sous-domaines faiblement allongés *WV*, *WO* et *WH* est beaucoup moins marquée que celle des sous-domaines *SV* et *SH*. On peut donc conclure que *les sous-domaines fortement allongés jouent un rôle prédominant dans la déformation volumique du milieu granulaire : ceux orientés dans la direction majeure macroscopique contribuent à la dilatance, tandis que ceux orientés dans la direction mineure macroscopique contribuent à la contractance du milieu granulaire* (Nguyen *et al.*, 2009).

### *Résultat de Kuhn (1999)*

La nature structurée de la déformation volumique à l'échelle mésoscopique a également fait l'objet de l'étude de Kuhn (1999). L'auteur a trouvé la corrélation, illustrée sur la figure 5.31, entre la déformation volumique  $\delta\varepsilon_v$  et le rapport *hauteur sur largeur*  $\gamma$  défini par (4.22) des sous-domaines pour un assemblage granulaire qui se dilate. On trouve que les sous-domaines correspondant à la zone  $\gamma \geq 1.0$  (sous-domaines allongés dans la direction majeure macroscopique) se dilatent tandis que ceux correspondant à la zone  $\gamma \leq 1.0$  (sous-domaines allongés dans la direction mineure macroscopique) se contractent. De plus, plus la valeur de  $\gamma$  est importante, plus les sous-domaines se dilatent. Ce résultat confirme ce qui a été trouvé dans notre analyse.

### *Etat caractéristique à l'échelle masoscopique*

L'état caractéristique est une notion importante dans l'étude du comportement des matériaux granulaires. C'est un état de transition entre le comportement de contractance et le comportement de dilatance. On s'intéresse ici à l'état caractéristique des sous-domaines. Le tableau 5.3 présente les valeurs de la déformation axiale  $E_1$  de l'assemblage auxquelles l'état caractéristique des différents types de



**FIGURE 5.29** – Relations entre la déformation volumique  $\delta\varepsilon_v$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes de sous-domaines  $W$  et  $S$ .

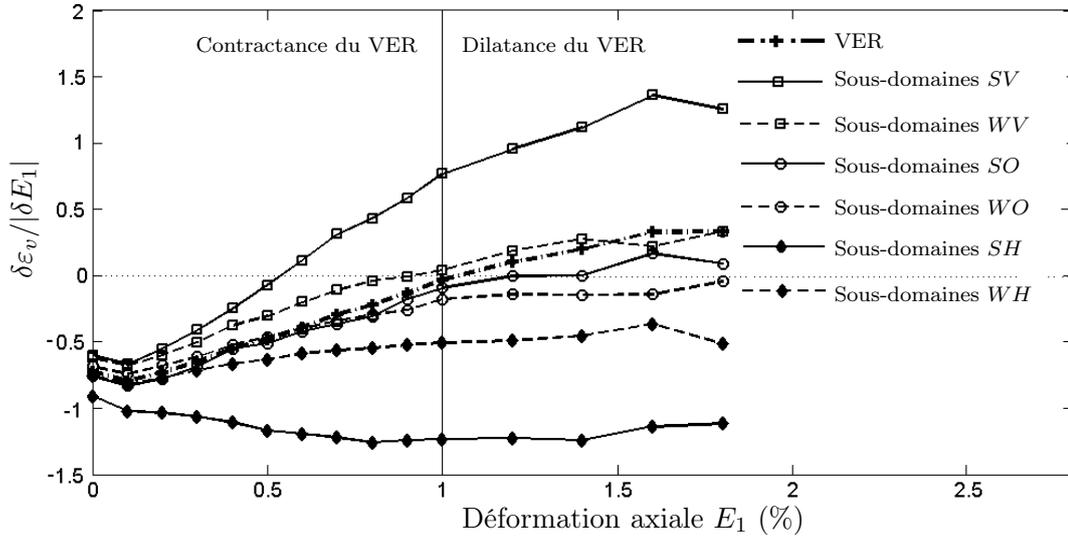


FIGURE 5.30 – Evolution de la déformation volumique  $\delta\varepsilon_v^h$  dans les six types de sous-domaines au cours de l'essai, comparée avec celle de l'assemblage.

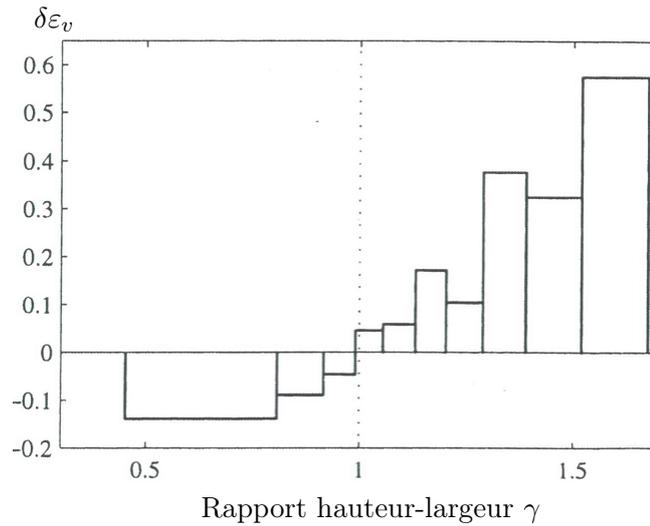


FIGURE 5.31 – Corrélation entre la déformation volumique  $\delta\varepsilon_v$  et le rapport hauteur sur largeur  $\gamma$  des sous-domaines (Kuhn, 1999).

sous-domaines se produit, et ces valeurs sont comparées avec celle de l'état caractéristique de l'assemblage. Le symbole  $\infty$  signifie que l'état caractéristique correspondant n'est pas encore atteint dans la plage de déformation étudiée. On peut constater que l'état caractéristique des six différents types de sous-domaines ne se produit pas au même niveau de déformation macroscopique, il dépend de la texture des sous-domaines. En effet, l'état caractéristique des sous-domaines *WV* et *SV* se produit avant celui de l'assemblage, tandis que l'état caractéristique des sous-domaines *WO* et *SO* se produit après celui de l'assemblage. En particulier, l'état caractéristique des sous-domaines *WH* et *SH* n'est pas encore atteint dans la plage de déformation étudiée. Par conséquent, on peut considérer que, dans le même assemblage, *les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique se comportent comme des matériaux denses, les sous-domaines orientés dans la direction mineure macroscopique se comportent comme des matériaux lâches, tandis que les sous-domaines orientés obliquement se comportent comme des matériaux à densité intermédiaire.*

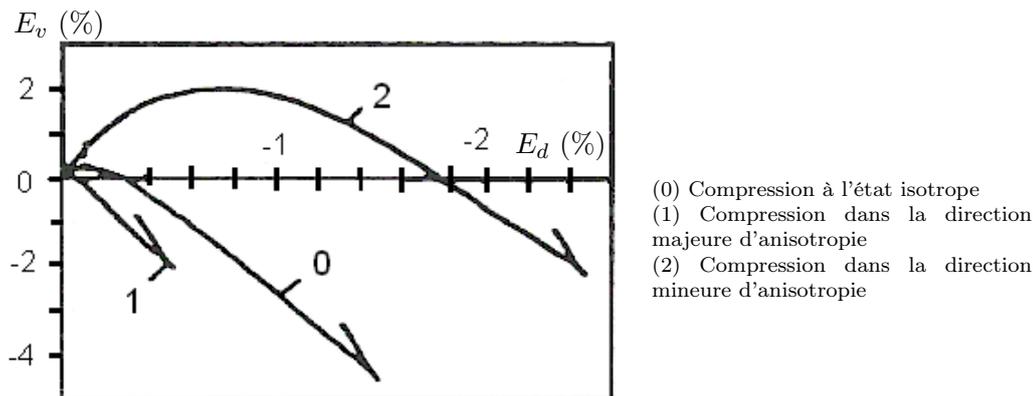
Types de sous-domaines	Assemblage	<i>WV</i>	<i>WO</i>	<i>WH</i>	<i>SV</i>	<i>SO</i>	<i>SH</i>
$E_1$ aux états caractéristiques	1.0%	0.9%	1.8%	$\infty$	0.5%	1.4%	$\infty$

**TABLE 5.3** – Valeurs de la déformation axiale macroscopique  $E_1$  correspondant à l'état caractéristique des six différents types de sous-domaines.

### *Lien entre la déformation volumique à l'échelle mésoscopique et à l'échelle macroscopique*

Il est bien connu dans la littérature qu'à l'échelle macroscopique, l'anisotropie des matériaux granulaires a un effet important sur leur déformation volumique. Oda (1972a) et Konishi *et al.* (1982) ont fait des essais expérimentaux sur des sables et sur des assemblages des disques plastiques pour étudier l'effet de l'anisotropie initiale sur la dilatance de ces matériaux. Il ont trouvé que plus l'anisotropie initiale est importante, plus la dilatance est intense lorsqu'on comprime ces matériaux dans la direction majeure d'anisotropie. De même, Cambou et Lanier (1988) ont constaté que la dilatance d'un matériau granulaire subissant une anisotropie induite est plus intense si ce matériau est comprimé dans la direction majeure d'anisotropie que s'il est comprimé dans la direction mineure d'anisotropie (figure 5.32). Grâce aux résultats montrés précédemment pour la déformation volumique à l'échelle mésoscopique, on peut expliquer ces phénomènes.

En effet, les sous-domaines dans un matériau anisotrope s'orientent préférentiellement dans la direction majeure d'anisotropie (voir la section 4.3.3.1). Si l'on comprime un matériau anisotrope dans la direction majeure d'anisotropie, les sous-domaines orientés dans la direction majeure d'anisotropie se dilatent, ce qui conduit à une forte dilatance du matériau. Par contre, si l'on comprime un matériau anisotrope dans la direction mineure d'anisotropie, les sous-domaines orientés dans la direction d'anisotropie se contractent, ce qui conduit à une contractance du matériau.



**FIGURE 5.32** – Dépendance de la déformation volumique d'un matériau anisotrope vis-à-vis de la direction de compression (Cambou et Lanier, 1988).

#### 5.4.2.7 a) Variation volumique $\Delta V^h$

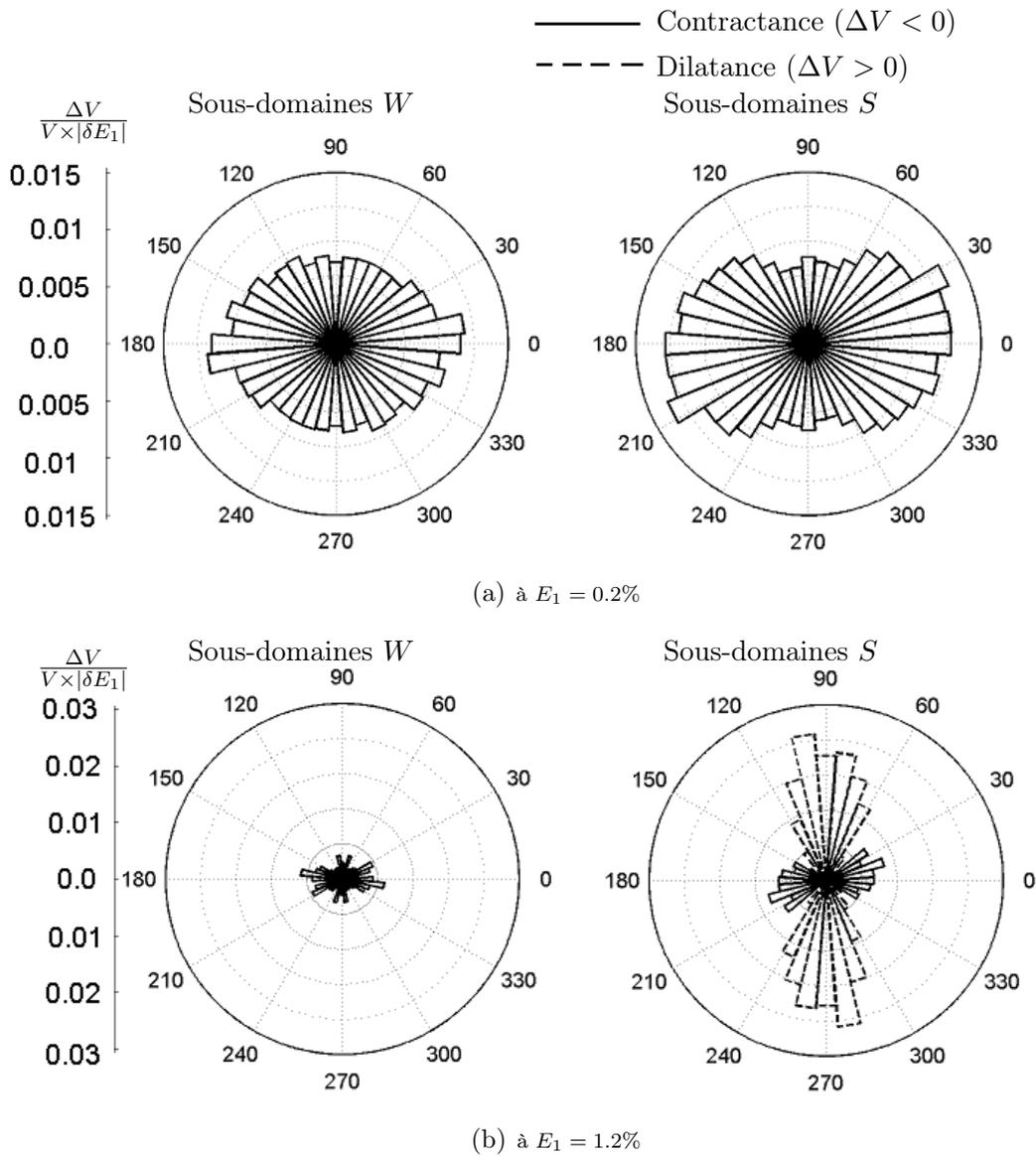
La variation volumique totale  $\Delta V(\beta, \theta)$  des sous-domaines de texture similaire est définie par :

$$\Delta V(\beta, \theta) = \sum_{\substack{\beta^h \in [\beta, \beta + \delta\beta], \\ \theta^h \in [\theta, \theta + \delta\theta]}} \Delta V^h \quad (5.50)$$

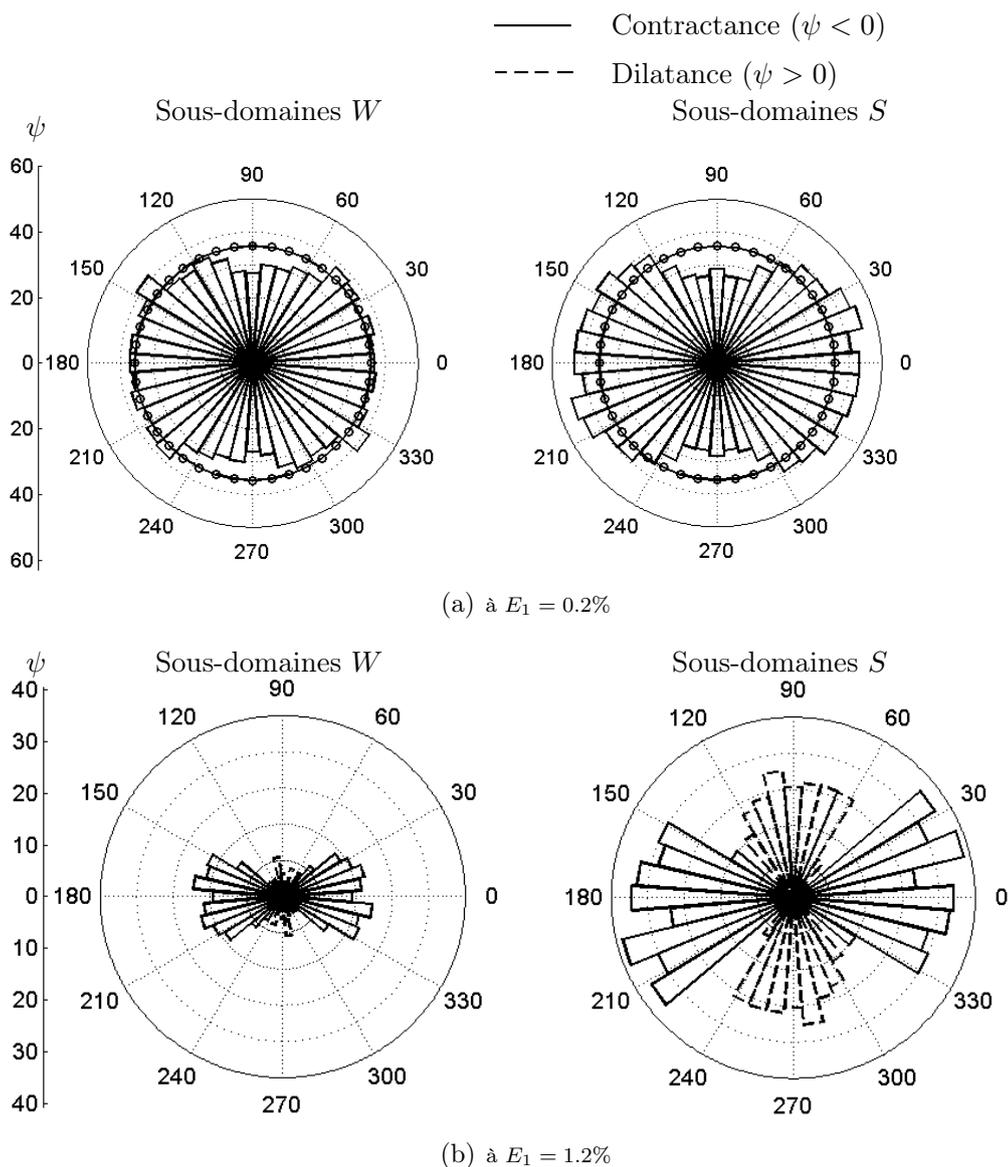
La figure 5.33 présente les relations entre la variation volumique totale  $\Delta V$  des sous-domaines correspondant à chaque élément polaire et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines, pour les deux classes de sous-domaines  $W$  et  $S$ . Pour l'incrément (a), les relations  $\Delta V - \theta$  sont similaires à les relations  $\delta\varepsilon_v - \theta$  présentées sur la figure 5.29, ce qui est dû à une distribution isotrope de l'orientation des sous-domaines au début de l'essai. Cependant, pour l'incrément (b), on trouve une augmentation de volume très importante des sous-domaines fortement allongés et orientés dans la direction majeure macroscopique. Ceci peut être expliqué par le fait que, d'une part, les sous-domaines ont tendance à s'orienter préférentiellement dans la direction majeure macroscopique (les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique occupent donc une proportion importante), et d'autre part, les sous-domaines fortement allongés et orientés dans la direction majeure macroscopique sont ceux se dilatant le plus fortement. *La dilatance de l'assemblage est donc due essentiellement à l'augmentation de volume des sous-domaines fortement allongés et orientés dans la direction majeure macroscopique* (Nguyen et al., 2009).

#### a) Angle de dilatance mésoscopique $\psi$

L'angle de dilatance caractérise la capacité d'un matériau granulaire à se dilater pour résister à la sollicitation déviatoire qui lui est imposée. L'angle de dilatance est donc strictement relié à la résistance des matériaux granulaires. L'angle de dilatance,  $\psi^h$ , est défini pour les sous-domaines dans le milieu granulaire. Une valeur négative de  $\psi^h$  correspond à une contractance et une valeur positive correspond à une dilatance. Les relations entre l'angle de dilatance  $\psi$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines, pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$ , sont présentées sur la



**FIGURE 5.33** – Relations entre la variation volumique  $\Delta V$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$ .



**FIGURE 5.34** – Relations entre l'angle de dilatance  $\psi$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$ .

figure 5.34. Les évolutions de  $\psi$  en fonction de la déformation axiale  $E_1$ , pour les six types de sous-domaines, sont tracées sur la figure 5.35. On peut constater que ces relations sont similaires à celles pour la déformation volumique, présentées sur les figures 5.29 et 5.30.

Le tableau 5.4 présente l'angle de dilatance des six différents types de sous-domaines au pic de la courbe contrainte - déformation. On s'aperçoit que l'angle de dilatance  $\psi$  est très différent pour les différents types de sous-domaines :  $\psi$  prend une valeur égale à  $25.2^\circ$  pour les sous-domaines  $SV$ , beaucoup plus élevée que la valeur de  $\Psi = 8.2^\circ$  de l'assemblage, tandis que  $\psi$  prend une valeur négative égale à  $-27.4^\circ$  pour les sous-domaines  $SH$ . En conclusion, *les sous-domaines fortement allongés et orientés dans la direction majeure macroscopique possèdent une capacité à se dilater la plus forte dans la structure granulaire.*

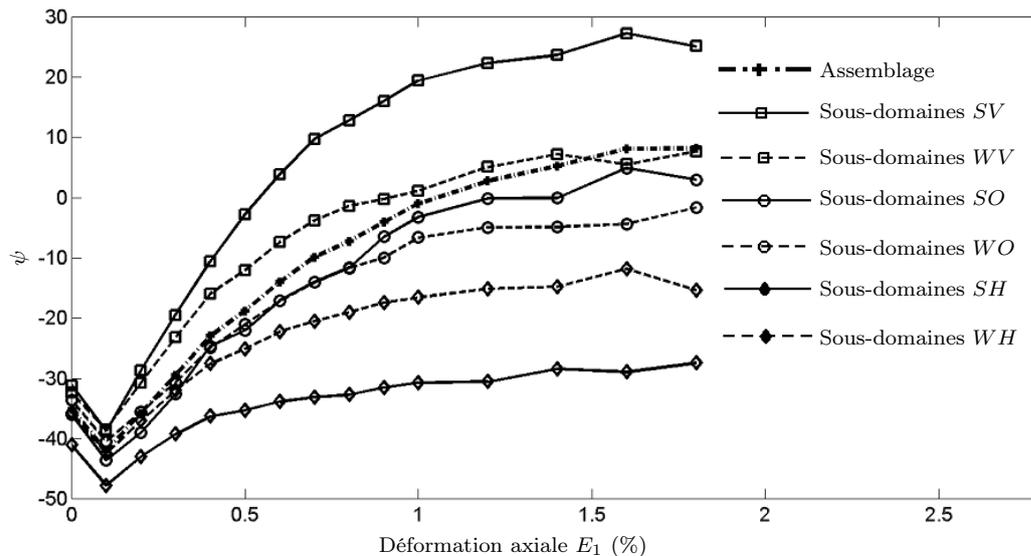


FIGURE 5.35 – Evolution de l'angle de dilatance  $\psi$  des six types de sous-domaines au cours de l'essai, comparée avec celle de l'assemblage.

	Assemblage	Types de sous-domaines					
		<i>WV</i>	<i>WO</i>	<i>WH</i>	<i>SV</i>	<i>SO</i>	<i>SH</i>
$\psi$ ( $^{\circ}$ )	8.2	7.7	-15.4	-1.65	25.2	2.9	-27.4

TABLE 5.4 – Angle de dilatance  $\psi$  au pic de la courbe contrainte - déformation pour différents types de sous-domaines et pour le l'assemblage.

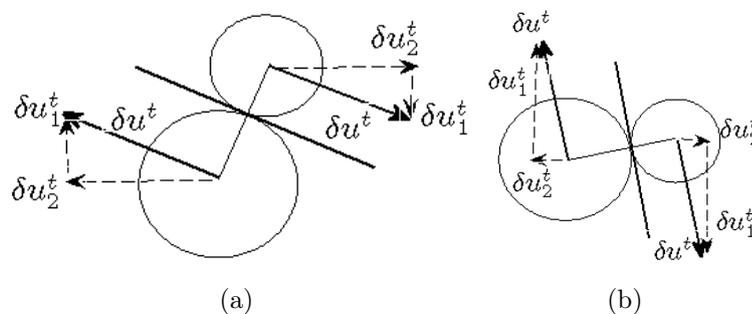
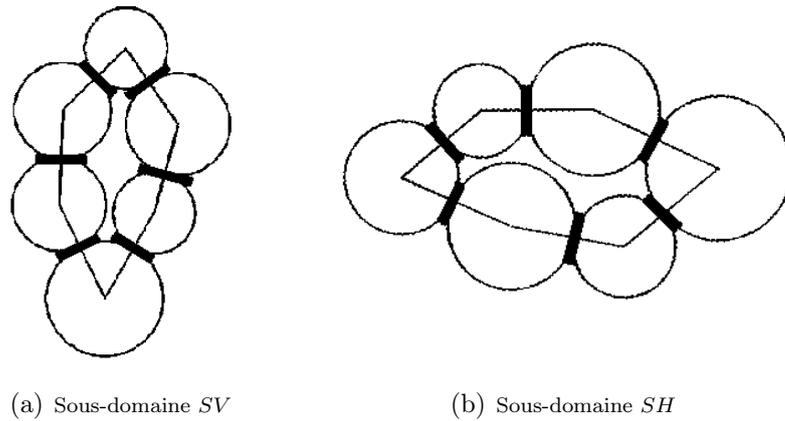


FIGURE 5.36 – Déplacement relatif tangentiel des centres de deux particules en contact (a) pour un contact orientés dans les directions majeure macroscopique et (b) pour un contact orienté dans la direction mineure macroscopique.

#### 5.4.2.8 Analyse au niveau des contact de la corrélation déformation-texture à l'échelle mésoscopique

Comme analysé dans la section 5.2, la déformation de l'assemblage granulaire ainsi que celle des sous-domaines sont dues essentiellement au déplacement relatif tangentiel des centres des particules en contact, particulièrement pour des niveaux de déformation importants. Ce déplacement se produit le long des plans de contact et il dépend donc de l'orientation des contacts : le déplacement relatif tangentiel

de centres de deux particules en contact pour un contact orienté selon la direction majeure macroscopique se produit dans la direction mineure macroscopique et *vice versa* (figure 5.36). En effet, les contacts dans un sous-domaine allongé ont tendance à s'orienter dans sa direction d'allongement, ce qui a été analysé dans la section 4.3.3.1 (figure 5.37). Pour un sous-domaine allongé dans la direction majeure macroscopique, ses contacts s'orientent donc préférentiellement dans la même direction, ce qui entraîne une déformation importante du sous-domaine dans la direction mineure macroscopique. De même, un sous-domaine allongé dans la direction mineure macroscopique se déforme de façon importante dans la direction majeure macroscopique.



**FIGURE 5.37** – Orientation des plans de contact dans les sous-domaines *SV* et *SH*.

## Conclusions

L'analyse effectuée dans ce chapitre permet de montrer la pertinence de la définition choisie pour la déformation à l'échelle mésoscopique. En particulier, la définition de la déformation macroscopique par une opération de moyenne de la déformation définie à l'échelle mésoscopique permet de décomposer la déformation macroscopique en différentes composantes relatives à différentes cinématiques locales. Cette décomposition montre que le déplacement relatif tangentiel des centres de particules en contact joue un rôle prédominant dans la déformation des milieux granulaires. De plus, nous avons montré que la rotation des particules est une cinématique importante qui ne peut pas être négligée dans la déformation des milieux granulaires, particulièrement pour les milieux composés de particules circulaires. De plus :

- La déformation présente une forte hétérogénéité à l'échelle mésoscopique qui augmente avec la déformation macroscopique. Après le pic de la courbe contrainte - déformation, la déformation est fortement concentrée en bandes de cisaillement.
- Certaines structures mésoscopiques présentent des comportements très différents du comportement mesuré à l'échelle du volume élémentaire représentatif.
- L'hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique n'est pas aléatoire mais structurée. La déformation des sous-domaines dépend significativement de leur texture, particulièrement pour les sous-domaines fortement allongés.
- La déformation mésoscopique dans la direction majeure macroscopique est beaucoup plus importante pour les sous-domaines allongés dans la direction mineure macroscopique, tandis que la déformation dans la direction mineure macroscopique est beaucoup plus importante pour les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique. De même, les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique ont tendance à se dilater beaucoup plus fortement que le VER, alors que ceux orientés dans la direction mineure macroscopique ont tendance à se contracter continûment au cours de l'essai biaxial.

# Chapitre 6

## Contrainte à l'échelle mésoscopique

### Introduction

Dans ce chapitre, la contrainte, variable duale de la déformation, est définie à l'échelle mésoscopique. Plusieurs définitions sont d'abord présentées et discutées afin de choisir une définition appropriée pour notre étude. Une fois définie, l'hétérogénéité de la contrainte à l'échelle mésoscopique et la nature de cette hétérogénéité sont analysées.

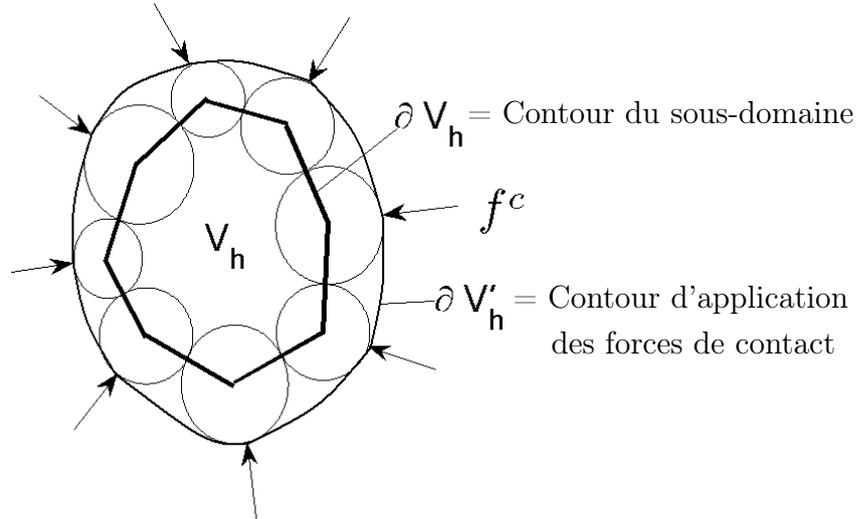
### 6.1 Définition de la contrainte

La définition de la contrainte à l'échelle mésoscopique s'avère plus difficile que celle de la déformation. Cette difficulté réside dans le fait que le volume  $V^h$  d'un sous-domaine est délimité par un bord  $\partial V^h$  composé par des branches passant par les centres des particules, tandis que les forces de contact exercées sur les particules du même sous-domaine sont appliquées sur les bords des particules (figure 6.1). Le contour sur lequel les forces de contact appliquées de l'extérieur sur un sous-domaine est alors différent du bord du sous-domaine précédemment défini, alors que le tenseur de contrainte dans un sous-domaine est défini, selon la mécanique des milieux continus, à partir des forces appliquées sur ses limites.

Dans la littérature, très peu de travaux traitant du problème de la définition de la contrainte à l'échelle mésoscopique. La contrainte est définie le plus souvent au niveau des particules et non au niveau des sous-domaines. On va tout d'abord présenter quelques définitions du tenseur de contrainte dans les sous-domaines. La pertinence de chaque définition sera ensuite analysée et discutée.

#### 6.1.1 Première définition : contrainte dans un volume continu équivalent

Pour cette définition, un milieu granulaire est remplacé par un milieu continu équivalent entièrement rempli par les cellules de Dirichlet (voir la section 4.1.1.2). Ce milieu est illustré sur la figure 6.2(a). Un champ de contrainte locale est assigné à ce milieu tel que la contrainte soit constante sur chaque cellule de Dirichlet. La définition de la contrainte dans une cellule de Dirichlet, à partir des forces exercées de l'extérieur sur la particule contenue dans la cellule, a été communément adoptée



**FIGURE 6.1** – Illustration de la différence, pour un sous-domaine donné, entre le contour du sous-domaine et le contour sur lequel s'exercent les forces de contact au sous-domaine.

dans la littérature (Auvinet, 1992; Bacconnet et Gourves, 1992; Bagi, 1996b; Kuhn, 2003). On peut trouver la formulation suivante pour le tenseur de contrainte dans chaque cellule de Dirichlet  $d$  contenant une particule en équilibre (figure 6.2(b)) :

$$\sigma_{ij}^d = \frac{1}{V^d} \sum_{c \in \partial V^d} f_i^c x_j^c = \frac{r^d}{V^d} \sum_{c \in \partial V^d} f_i^c n_j^c \quad (6.1)$$

où :

- $V^d$  est le volume de la cellule  $d$  de bord  $\partial V^d$  ;
- $\mathbf{x}^c$  est le vecteur position du point de contact  $c$  sur le bord  $\partial V^d$  ;
- $\mathbf{f}^c$  est la force de contact au contact  $c$  ;
- $r^d$  est le rayon de la particule contenue dans la cellule  $d$  ;
- $\mathbf{n}^c$  est le vecteur normal unitaire sortant au contact  $c$ .

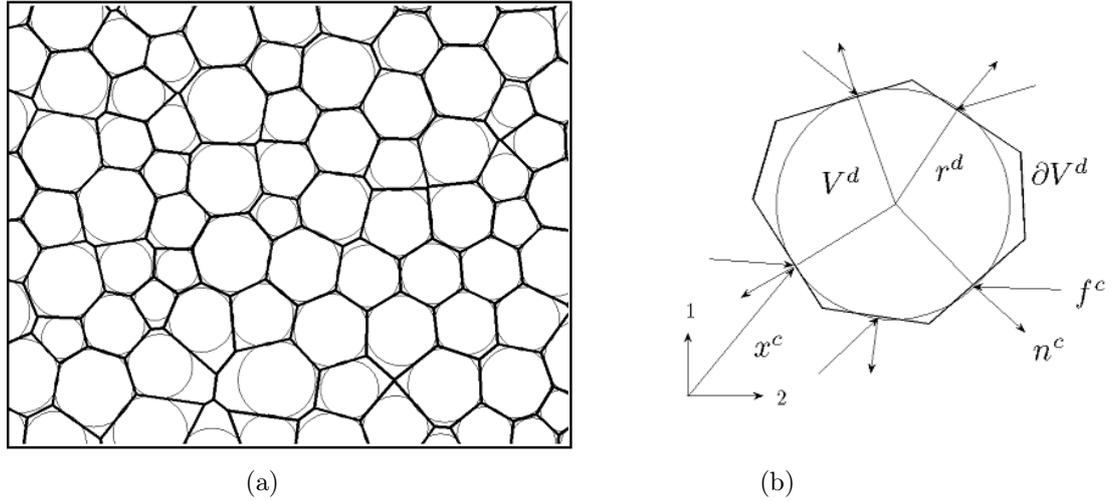
La moyenne volumique des tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}^d$  sur l'ensemble des cellules de Dirichlet du graphe le tenseur de contrainte macroscopique :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{\bar{V}} \sum_{d=1}^{N_d} \sigma_{ij}^d V^d = \frac{1}{\bar{V}} \sum_{k \in K_{\bar{V}}} f_i^k l_j^k \quad (6.2)$$

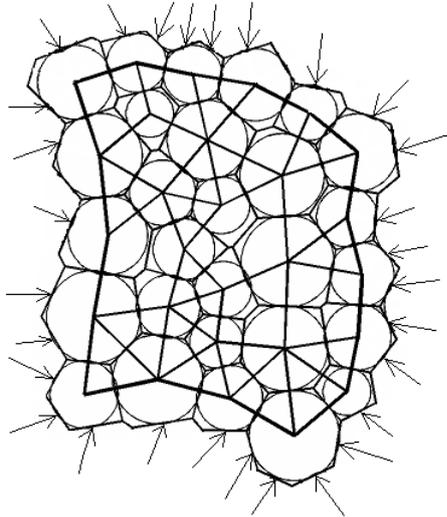
où :

- $N_d$  est le nombre de cellules de Dirichlet dans le graphe ;
- $\bar{V}$  est le volume de la partie de l'échantillon affectée par le système de Dirichlet (figure 6.3) ;
- $\mathbf{f}^k, \mathbf{l}^k$  sont respectivement la force de contact et le vecteur branche au contact  $k$  ;
- $K_{\bar{V}}$  est l'ensemble des contacts internes et externes dans le volume  $\bar{V}$ .

Le tenseur de contrainte défini par (6.2) est différent de celui mesuré aux limites de l'échantillon. Cette différence résulte de l'élimination de la partie de l'échantillon proche des parois (voir la section 4.2.1). Le tableau 6.1 compare les tenseurs de



**FIGURE 6.2** – (a) Une partie du milieu continu équivalent composé de cellules de Dirichlet et (b) une cellule de Dirichlet.

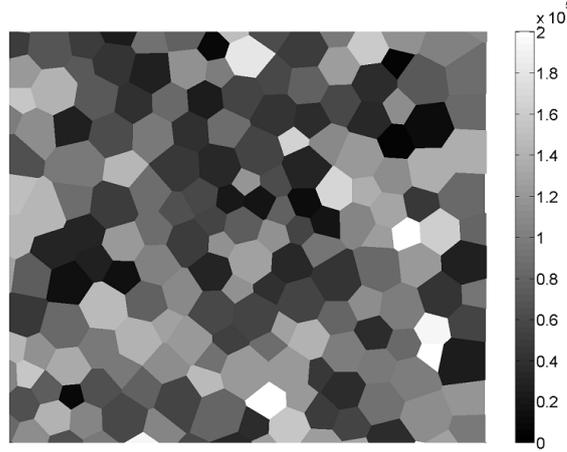


**FIGURE 6.3** – Partie de l'échantillon affectée par le système de Dirichlet.

contrainte définis par l'équation (6.2) et par la condition aux limites de l'échantillon. On trouve que ces deux tenseurs de contrainte sont très proches. Il est à noter ici que la composante  $\Sigma_{12}$  définie par (6.2) n'est pas nulle bien que  $\Sigma_{12}$  mesurée aux limites soit nulle. Cependant, la composante  $\Sigma_{12}$  est très petite par rapport aux composantes  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$  dans le tenseur défini par (6.2).

Tenseurs de contrainte définis par	
la condition aux limites	l'équation (6.2)
$\Sigma = \begin{bmatrix} -1.00015 & 0.0 \\ 0.0 & -2.37355 \end{bmatrix} \times 10^5 \text{ Pa}$	$\Sigma = \begin{bmatrix} -1.00002 & -0.01661 \\ -0.01661 & -2.37294 \end{bmatrix} \times 10^5 \text{ Pa}$

**TABLE 6.1** – Tenseurs de contrainte définis par la condition aux limites et par l'équation (6.2).



**FIGURE 6.4** – Distribution spatiale du 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d^d$  de la contrainte déviatoire des cellules de Dirichlet pour une partie de l'échantillon à l'état initial.

La figure 6.4 présente la distribution spatiale du 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d^d$  de la contrainte déviatoire dans chaque cellule de Dirichlet, pour une partie de l'échantillon à l'état initial, avec un niveau de gris par cellule proportionnel à la valeur de  $\sigma_d^d$ . On trouve alors une forte hétérogénéité du champ de contrainte  $\sigma^d$  à l'échelle des cellules de Dirichlet, ce qui a également été confirmé par Kuhn (2003).

Grâce au champ de contrainte défini dans les cellules de Dirichlet, on peut définir un tenseur de contrainte dans chaque sous-domaine en faisant la moyenne la contrainte dans les volumes locaux internes à chaque sous-domaine. En effet, chaque sous-domaine est constitué par la réunion d'portions polygonales appartenant chacune à une cellule de Dirichlet. Le tenseur de contrainte  $\sigma^h$  dans un sous-domaine est alors la moyenne des tenseurs de contrainte dans les portions polygonales des cellules de Dirichlet, internes au sous-domaine (figure 6.5).

$$\sigma_{ij}^h = \frac{1}{V^h} \sum_{d=1}^{r^h} \sigma_{ij}^d \Delta V^d \quad (6.3)$$

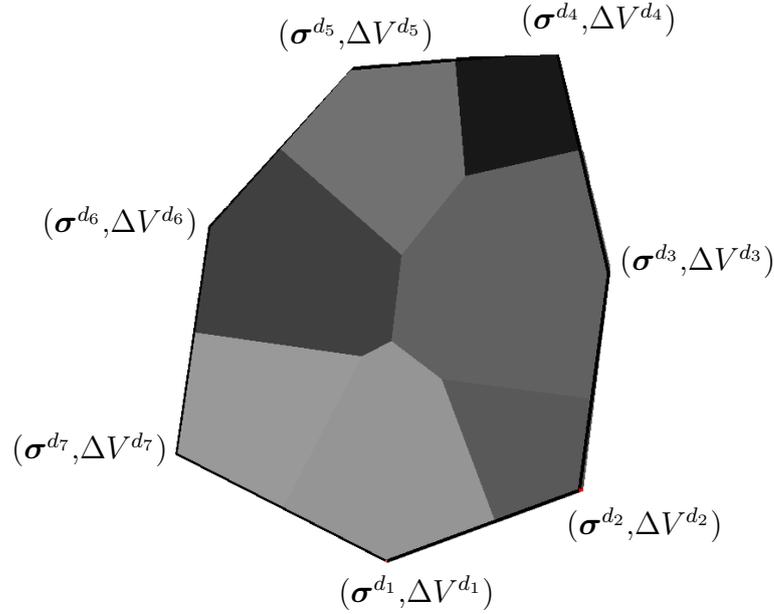
où :

- $\sigma^d$  est le tenseur de contrainte de la cellule  $d$  sur le sous-domaine ;
- $\Delta V^d$  est le volume de la portion polygonale de la cellule  $d$  interne au sous-domaine.

Il peut être noté ici que les forces de contact ne s'expriment pas explicitement dans cette formulation du tenseur de contrainte dans chaque sous-domaine.

La moyenne volumique des tenseurs de contrainte  $\sigma_{ij}^h$  sur l'ensemble des sous-domaines dans l'échantillon donne :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{\hat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \sigma_{ij}^h V^h = \frac{1}{\hat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \left\{ \frac{1}{V^h} \sum_{d=1}^{r^h} \sigma_{ij}^d \Delta V^d \right\} V^h \\ &= \frac{1}{\hat{V}} \left\{ \sum_{d \in D_{\text{int}}} \sigma_{ij}^d V^d + \sum_{d \in D_{\text{bor}}} \sigma_{ij}^d \Delta V^d \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$



**FIGURE 6.5** – Volume  $\Delta V^d$  et tenseur de contrainte  $\sigma^d$  dans les portions polygonales des cellules de Dirichlet internes à un sous-domaine.

où  $D_{\text{int}}$  et  $D_{\text{bor}}$  sont respectivement les ensembles de cellules de Dirichlet à l'intérieur et au bord du graphe de particules. La différence entre le tenseur de contrainte moyen  $\bar{\sigma}$  défini par (6.4) et le tenseur de contrainte macroscopique  $\Sigma$  défini par (6.2) réside alors dans la différence entre le volume  $\bar{V}$  sur lequel l'on définit la contrainte macroscopique et le volume  $\hat{V}$  couvert par le graphe de particules (figure 6.3). Si le volume de l'échantillon est suffisamment grand, cette différence peut devenir négligeable.

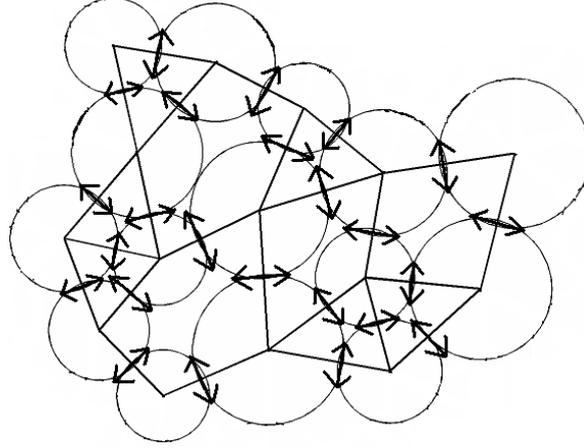
### 6.1.2 Deuxième définition : contrainte définie sur la base d'un partage de forces de contact

Cette définition de la contrainte dans les sous-domaines vient de l'idée que l'on peut assigner, à chaque contact dans un milieu granulaire, un volume d'influence dans un milieu continu équivalent. Le volume d'influence d'un contact peut être défini comme le volume occupé par l'ensemble des sous-domaines au voisinage de ce contact (sous-domaines ayant ce contact en commun). La force de contact est ensuite partagée sur tous les sous-domaines voisins avec un poids à définir (figure 6.6).

Le tenseur de contrainte macroscopique défini par (6.2) peut s'exprimer en ne prenant en compte que les contacts du graphe de particules (une symétrisation est alors nécessaire). Cette approche est acceptable si le nombre de contacts du graphe de particules est suffisamment grand par rapport au nombre de contacts externes. Le tenseur de contrainte macroscopique devient alors :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{\hat{V}} \sum_{k=1}^{N_c} \frac{f_i^k l_j^k + f_j^k l_i^k}{2} \quad (6.5)$$

On peut ensuite développer l'équation (6.5) en partageant les forces de contact sur les sous-domaines voisins :



**FIGURE 6.6** – Illustration du partage de forces de contact sur les sous-domaines adjacents dans la définition de la contrainte mésoscopique. Chaque couple de flèches représente le partage de chaque force de contact sur deux sous-domaines adjacents.

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{h \in \mathcal{C}^k} \alpha^{kh} \frac{f_i^k l_j^k + f_j^k l_i^k}{2} = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \sum_{k=1}^{r^h} \alpha^{kh} \frac{f_i^k l_j^k + f_j^k l_i^k}{2} \quad (6.6)$$

où :

- $\mathcal{C}^k$  est l'ensemble de sous-domaines au voisinage du contact  $k$  ;
- $\alpha^{kh}$  est un poids de partage de la force de contact au contact  $k$  sur le sous-domaine  $h$  à définir tel que :

$$\sum_{h \in \mathcal{C}^k} \alpha^{kh} = 1. \quad (6.7)$$

Le tenseur de contrainte  $\sigma^h$  défini dans les sous-domaines doit satisfaire l'opérateur d'homogénéisation de la contrainte suivant :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{\widehat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \sigma_{ij}^h V^h \quad (6.8)$$

A partir de l'équation (6.6) on peut trouver la solution suivante pour  $\sigma^h$  satisfaisant la condition (6.8) :

$$\sigma_{ij}^h = \frac{1}{V^h} \sum_{k=1}^{N_b} \alpha^{kh} \left\{ \frac{f_i^k l_j^k + f_j^k l_i^k}{2} \right\} \quad (6.9)$$

La valeur du poids de partage  $\alpha^{kh}$  est à choisir de façon raisonnable mais ne peut être évaluée de façon rigoureuse. On peut partager chaque force de contact sur les sous-domaines adjacents de façon uniforme ou en fonction du volume de ces sous-domaines :

- Sab (1997) a proposé de partager chaque force de contact en fonction du volume des sous-domaines au voisinage du contact. Le facteur  $\alpha^{kh}$  s'écrit alors :

$$\alpha^{kh} = \frac{V^h}{\sum_{g \in \mathcal{C}^k} V^g}. \quad (6.10)$$

Pour un contact du bord du graphe de particules, on ne peut pas calculer le volume total des sous-domaines au voisinage de ce contact, la valeur de  $\alpha^{kh}$  peut alors être supposée égal à  $1/2$  dans le cas 2D.

- Chaque force de contact peut être partagée de façon uniforme sur les sous-domaines adjacents. Pour les milieux bidimensionnels, deux sous-domaines étant adjacents à un contact, la valeur du poids de partage  $\alpha^{kh}$  est :

$$\alpha^{kh} = \frac{1}{2} \quad (6.11)$$

quel que soit le sous-domaine considéré.

Il est à noter que, quelle que soit la méthode de partage de force de contact, le tenseur de contrainte moyen sur l'ensemble des sous-domaines est le même :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\hat{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \sigma_{ij}^h V^h = \frac{1}{\hat{V}} \left\{ \sum_{k \in K_{\text{int}}} \frac{f_i^k l_j^k + f_j^k l_i^k}{2} + \sum_{k \in K_{\text{bor}}} \frac{1}{2} \frac{f_i^k l_j^k + f_j^k l_i^k}{2} \right\} \quad (6.12)$$

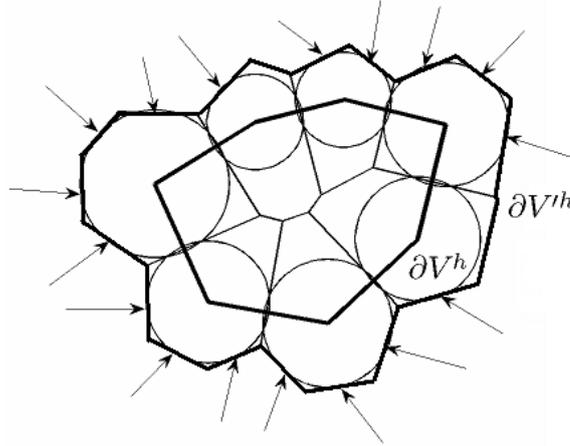
où  $K_{\text{int}}$  et  $K_{\text{bor}}$  sont respectivement l'ensemble de contacts internes et au bord du graphe de particules. La seule différence entre le tenseur de contrainte moyen  $\bar{\sigma}$  défini par (6.12) et le tenseur de contrainte macroscopique approché par (6.5) réside dans l'ensemble de contacts  $K_{\text{bor}}$  au bord du graphe. Si le nombre de contacts au bord est petit devant le nombre de contacts internes, cette différence peut devenir négligeable.

Cette définition présente l'avantage que les forces de contact s'expriment explicitement dans le tenseur de contrainte  $\sigma^h$ . De plus, on trouve une similarité entre la contrainte et la déformation à l'échelle mésoscopique : le tenseur de déformation d'un sous-domaine défini par (5.24) et (5.32) s'écrit à partir des déplacements relatifs des centres de particules en contacts du sous-domaine et le tenseur de contrainte défini par (6.9) s'écrit à partir des forces de contact aux contacts du sous-domaine.

### 6.1.3 Troisième définition : contrainte à partir des forces de contact appliquées à l'extérieur des sous-domaines

La déformation d'un sous-domaine est due, comme analysé dans le chapitre 5, au déplacement des centres des particules qui constituent sa frontière. Ces déplacements sont certainement la conséquence des efforts exercés par l'extérieur sur ces particules frontières. Le tenseur de contrainte décrit l'action appliquée sur le sous-domaine et le tenseur de déformation décrit la conséquence de l'action. En raison d'une telle dualité entre les tenseurs de déformation et de contrainte, il est alors raisonnable de définir un tenseur de contrainte dans chaque sous-domaine à partir des forces de contact appliquées par l'extérieur sur les particules frontières.

Comme discuté précédemment, les forces de contact extérieures exercées sur les particules frontières d'un sous-domaine s'appliquent sur un contour qui est à l'extérieur du sous-domaine. Ce contour définit un volume, noté  $V^h$ , qui inclut le volume  $V^h$  du sous-domaine, sur lequel l'on peut définir, sans ambiguïté, un tenseur de contrainte à partir des forces de contact exercées par l'extérieur. On choisit ici de définir le volume  $V^h$  d'un sous-domaine de frontière  $\partial V^h$  comme la réunion des cellules de Dirichlet attachées à toutes ses particules frontières (figure 6.7).



**FIGURE 6.7** – Ensemble des cellules de Dirichlet sur un sous-domaine formant un volume sur lequel un tenseur de contrainte peut être défini.

Sur le volume  $V^h$  d'un sous-domaine, on peut facilement définir un tenseur de contrainte  $\sigma^{lh}$  d'après la formulation classique suivante :

$$\sigma_{ij}^{lh} = \frac{1}{V^{lh}} \sum_{k \in K_{\text{ext}}^h} f_i^k x_j^k \quad (6.13)$$

où  $K_{\text{ext}}^h$  est l'ensemble des contacts entre les particules du sous-domaine  $h$  et les particules extérieures par l'intermédiaire de la frontière  $\partial V^h$ . Il peut être noté que le tenseur de contrainte  $\sigma^{lh}$  est symétrique si les particules sont en équilibre. Le tenseur  $\sigma^{lh}$  défini par (6.13) peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij}^{lh} = \frac{1}{V^{lh}} \sum_{d=1}^{r^h} \sigma_{ij}^d V^d \quad (6.14)$$

On suppose que le tenseur de contrainte dans un sous-domaine  $\sigma^h$  est le même que celui  $\sigma^{lh}$  défini sur le volume  $V^h$  comprenant le volume  $V^h$  du sous-domaine. Cette hypothèse est à peu près similaire à l'hypothèse d'homogénéité de l'état de contrainte dans le volume  $V^h$ . Le tenseur de contrainte  $\sigma^h$  s'écrit alors :

$$\sigma_{ij}^h = \frac{1}{V^h} \sum_{k \in K_{\text{ext}}^h} f_i^k x_j^k = \frac{\eta^h}{V^h} \sum_{k \in K_{\text{ext}}^h} f_i^k x_j^k = \frac{\eta^h}{V^h} \sum_{d=1}^{r^h} \sigma_{ij}^d V^d \quad (6.15)$$

où  $\eta^h$  est un coefficient défini par  $\eta^h = \frac{V^h}{V^{lh}}$ .

Maeda *et al.* (2001) ont défini le même tenseur de contrainte que celui défini par (6.15) dans les micro-structures fermées qu'ils ont définies de façon significativement différente des structures mésoscopiques définies dans cette analyse.

Le tenseur de contrainte moyen sur l'ensemble des sous-domaines est obtenu par :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\bar{V}} \sum_{h=1}^{N_b} \sigma_{ij}^h V^h = \frac{1}{\bar{V}} \sum_{d=1}^{N_d} \sigma_{ij}^d V^d \left\{ \sum_{h \in \mathcal{C}^d} \eta^h \right\} \quad (6.16)$$

où  $\mathcal{C}^d$  est l'ensemble des sous-domaines qui prennent la cellule de Dirichlet  $d$  en commun.

On retient que la différence entre le tenseur de contrainte moyen défini par (6.16) et le tenseur de contrainte macroscopique défini par (6.2) réside principalement dans la somme  $\sum_{h \in \mathcal{C}^d} \eta^h$  qui n'est pas nécessairement égale à 1 car plusieurs sous-domaines prennent une même cellule de Dirichlet. En effet, pour une partition du milieu pour laquelle chaque cellule de Dirichlet appartient à un seul sous-domaine, le tenseur de contrainte moyen défini par (6.16) est égal au tenseur de contrainte macroscopique défini par (6.2). Cependant, la partition utilisée dans ce travail ne l'est pas.

### 6.1.4 Discussion sur les différentes définitions

Dans cette section, on discute de la pertinence des trois définitions proposées ci-dessus pour la contrainte dans les sous-domaines afin de choisir une définition appropriée. Ces trois définitions sont d'abord comparées au niveau de chaque sous-domaine et ensuite sur l'ensemble des sous-domaines sous la forme des tenseurs de contrainte moyens.

#### Comparaison des trois définitions au niveau de chaque sous-domaine

Pour comparer deux tenseurs de contrainte définis pour un sous-domaine, noté  $[\sigma^h]^a$  et  $[\sigma^h]^b$ , on calcule leur écart en norme relativement à l'ordre de grandeur du tenseur de contrainte macroscopique  $\Sigma$  d'après :

$$[\sigma^h]^a \leftrightarrow [\sigma^h]^b = \frac{|[\sigma^h]^a - [\sigma^h]^b|}{|\Sigma|} 100 \quad (6.17)$$

où  $|\cdot|$  signifie la norme d'une matrice (voir l'annexe A).

On désigne ici les quatre tenseurs de contrainte dans chaque sous-domaine définis par les différentes méthodes comme suit :  $[\sigma^h]^{\text{def1}}$  défini par (6.3),  $[\sigma^h]^{\text{def2}^v}$  défini par (6.9) avec le poids de partage défini par (6.10),  $[\sigma^h]^{\text{def2}^e}$  défini par (6.9) avec le poids de partage défini par (6.11) et enfin  $[\sigma^h]^{\text{def3}}$  défini par (6.15).

La figure 6.8 présente les distributions des écarts  $[\sigma^h]^{\text{def2}^v} \leftrightarrow [\sigma^h]^{\text{def1}}$ ,  $[\sigma^h]^{\text{def3}} \leftrightarrow [\sigma^h]^{\text{def1}}$ ,  $[\sigma^h]^{\text{def2}^e} \leftrightarrow [\sigma^h]^{\text{def2}^v}$  calculés pour l'ensemble des sous-domaines. On trouve que les tenseurs de contrainte  $\sigma^h$  donnés par les première et troisième définitions sont assez proches avec un écart moyen égal à 6% environ. Par contre, la deuxième définition donne des tenseurs de contrainte  $\sigma^h$  très différents de la première définition. De plus, pour la deuxième définition, les tenseurs de contrainte  $\sigma^h$  dépendent significativement de la façon de partager les forces de contact.

Pour comparer plus précisément ces trois définitions de la contrainte, on tire aléatoirement 100 sous-domaines dans le graphe puis l'on compare, pour chaque sous-domaine, les composantes  $\sigma_{11}^h$ ,  $\sigma_{22}^h$  calculées par les trois définitions. Pour cela, on classe d'abord les sous-domaines tirés dans l'ordre décroissant des valeurs  $[\sigma_{11}^h]^{\text{def1}}$  (*resp.*  $[\sigma_{22}^h]^{\text{def1}}$ ) puis l'on trace, sur la figure 6.9, les composantes  $[\sigma_{11}^h]^{\text{def2}^e}$  et  $[\sigma_{11}^h]^{\text{def3}}$  (*resp.*  $[\sigma_{22}^h]^{\text{def2}^e}$  et  $[\sigma_{22}^h]^{\text{def3}}$ ) dans les sous-domaines classés. On utilise la même méthode pour tracer, sur la figure 6.10, les composantes  $[\sigma_{11}^h]^{\text{def2}^e}$  et  $[\sigma_{11}^h]^{\text{def2}^v}$  (*resp.*  $[\sigma_{22}^h]^{\text{def2}^e}$ ,  $[\sigma_{22}^h]^{\text{def2}^v}$ ) pour les sous-domaines considérés. Ces figures confirment ce qui a été constaté précédemment. Un faible écart entre les tenseurs de contrainte  $\sigma^h$

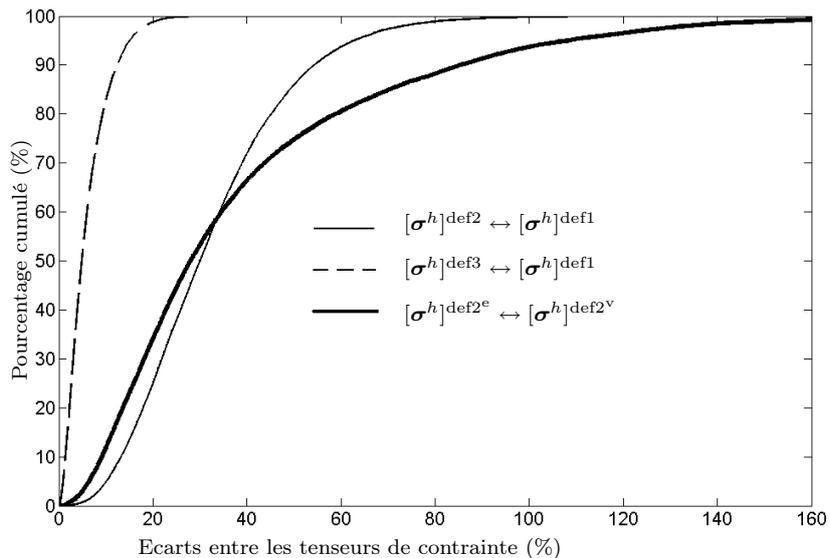


FIGURE 6.8 – Distribution des écarts,  $[\sigma^h]^{def2^v} \leftrightarrow [\sigma^h]^{def1}$ ,  $[\sigma^h]^{def3} \leftrightarrow [\sigma^h]^{def1}$ ,  $[\sigma^h]^{def2^e} \leftrightarrow [\sigma^h]^{def2^v}$  entre les tenseurs de contrainte dans les sous-domaines à l'état du pic de la courbe contrainte - déformation.

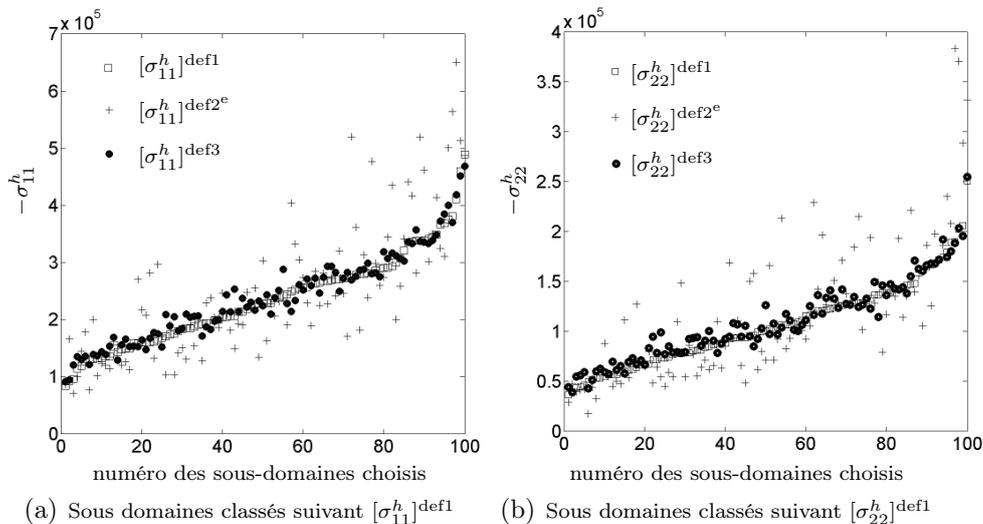
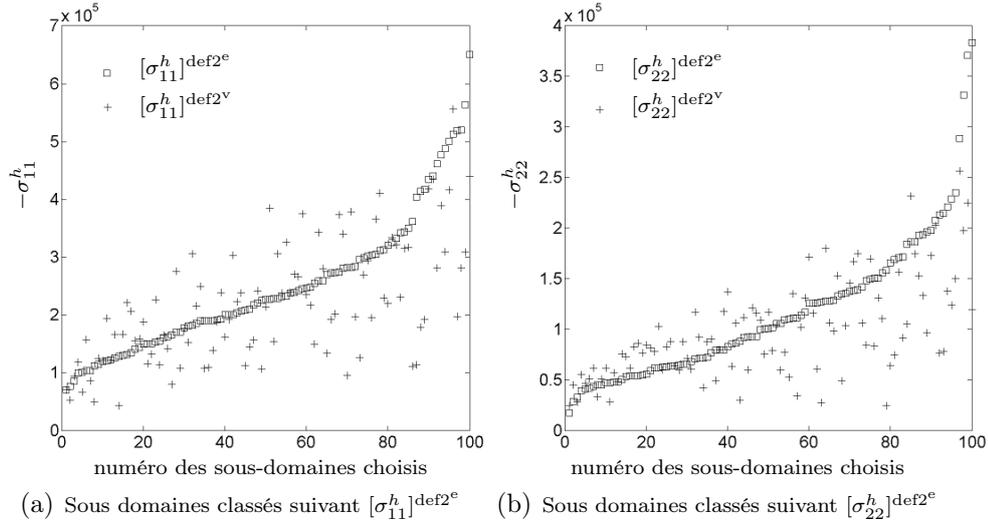


FIGURE 6.9 – Comparaison des contraintes (a)  $\sigma_{11}^h$  et (b)  $\sigma_{22}^h$  calculées par les trois définitions différentes.

donnés par les première et troisième définitions peut s'expliquer par le fait que  $\sigma^h$  d'un sous-domaine donné par la première définition (6.3) est une moyenne volumique de la contrainte sur les portions polygonales des cellules de Dirichlet internes au sous-domaine et que  $\sigma^h$  donné par la troisième définition (6.15) est une moyenne volumique sur les volumes totaux des cellules de Dirichlet du sous-domaine.



**FIGURE 6.10** – Comparaison des contraintes (a)  $\sigma_{11}^h$  et (b)  $\sigma_{22}^h$  calculées par la deuxième définition avec deux méthodes de partage des forces de contact : partage en fonction du volume des sous-domaines adjacents ( $\text{def2}^v$ ) et partage uniforme sur chaque sous-domaine adjacent ( $\text{def2}^e$ ).

### Comparaison des tenseurs de contrainte moyens donnés par les trois définitions.

Les tenseurs de contrainte moyens  $\bar{\sigma}$  sur l'ensemble de sous-domaines, correspondant aux trois définitions présentées précédemment, sont calculés par les équations (6.4), (6.12), (6.16). La figure 6.11 compare les composantes de ces trois tenseurs de contrainte moyens avec la contrainte macroscopique  $\Sigma$  définie par (6.2). On trouve de bonnes estimations de la contrainte macroscopique à partir des contraintes mésoscopiques avec les première et deuxième définitions. La troisième définition surestime significativement la contrainte macroscopique, particulièrement au pic et post-pic de la courbe contrainte - déformation (un écart égal à 6% environ au pic). Cependant, on peut remarquer, sur la figure 6.12, que la variable habituellement utilisée pour analyser le comportement d'un milieu granulaire  $\Sigma_d/\Sigma_m$  (le rapport entre le 2<sup>ème</sup> invariant  $\Sigma_d$  de la contrainte déviatoire et la contrainte moyenne  $\Sigma_m$ , (voir l'annexe B.2)) est bien représentée par la variable moyenne  $\bar{\sigma}_d/\bar{\sigma}_m$  obtenue par la troisième définition.

Les avantages et les inconvénients des trois définitions proposées sont analysés dans le tableau 6.2. Dans la suite, nous choisissons la troisième définition pour calculer la contrainte à l'échelle mésoscopique.

## 6.2 Hétérogénéité de la contrainte à l'échelle mésoscopique

L'hétérogénéité de la contrainte à l'échelle mésoscopique fait l'objet de l'étude dans cette section. On étudie la contrainte mésoscopique *via* les variables suivantes :

- la contrainte mésoscopique dans la direction majeure macroscopique,  $\sigma_{11}^h$  ;

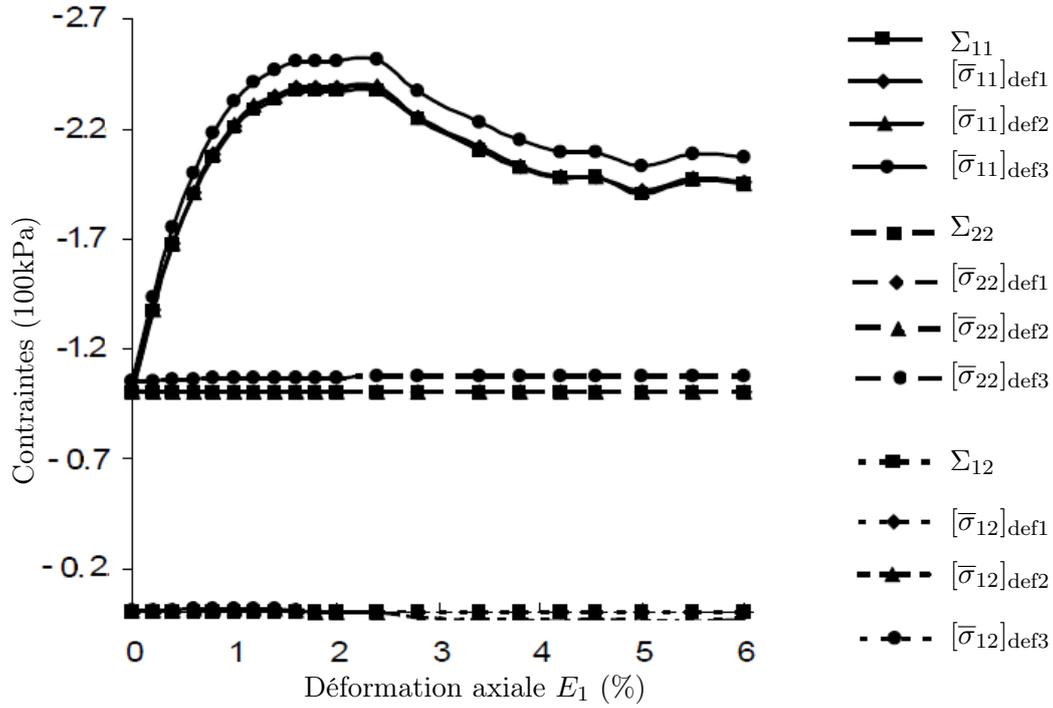


FIGURE 6.11 – Estimations de la contrainte macroscopique à partir des contraintes mésoscopique avec les trois différentes définitions.

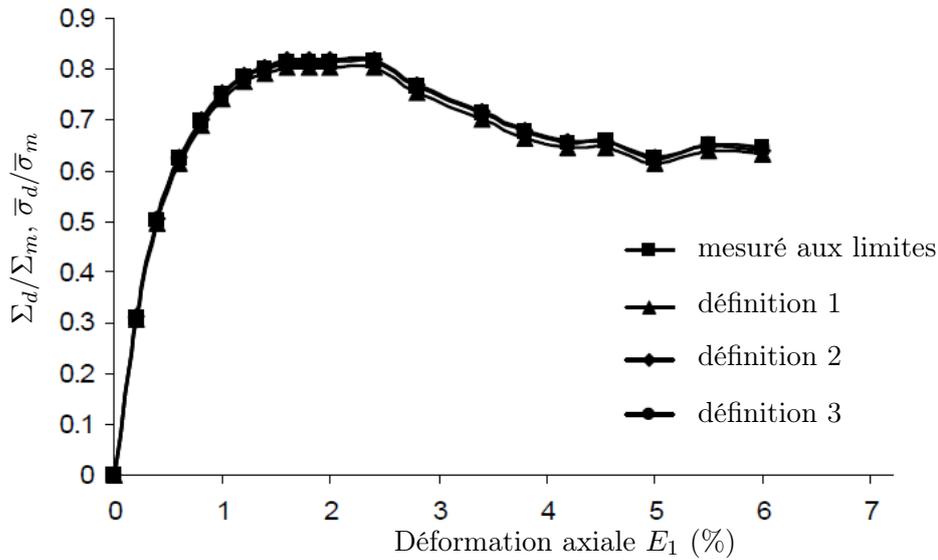


FIGURE 6.12 – Comparaison entre le rapport  $\bar{\sigma}_d/\bar{\sigma}_m$  obtenu avec les trois différentes définitions et le rapport  $\Sigma_d/\Sigma_m$  mesuré aux limites.

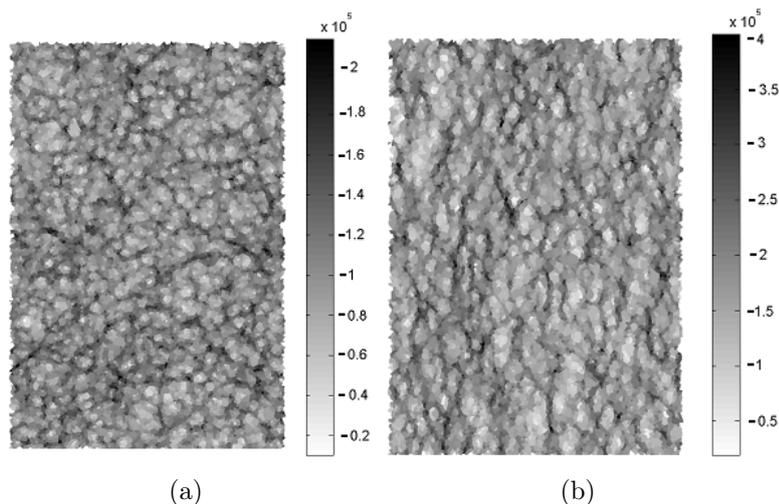
- la contrainte mésoscopique dans la direction mineure macroscopique,  $\sigma_{22}^h$  ;
  - la contrainte mésoscopique de cisaillement,  $\sigma_{12}^h$  ;
  - la contrainte mésoscopique moyenne  $\sigma_m^h$  ;
  - la contrainte mésoscopique déviatoire,  $\mathbf{s}^h$ , qui est étudiée *via* son le 2<sup>ème</sup> invariant,  $\sigma_d^h$  ;
  - l'angle de frottement interne mobilisé mésoscopique,  $\varphi^h$ .
- où  $\sigma_m^h$ ,  $\mathbf{s}^h$ ,  $\sigma_d^h$  et  $\varphi^h$  sont définis dans l'annexe B.2.

Définition	Avantages	Inconvénients
Première définition	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Le sens physique est clair par rapport à la mécanique des milieux continus.</li> <li>- Elle donne une bonne estimation de la contrainte macroscopique.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Les forces de contact ne s'expriment pas explicitement dans le tenseur de contrainte</li> <li>- La moyenne des contraintes sur des portions polygonales de cellules de Dirichlet ne semble pas appropriée pour les milieux granulaires.</li> </ul>
Deuxième définition	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Il existe une similarité entre la contrainte et la déformation à l'échelle mésoscopique.</li> <li>- Elle donne une bonne estimation de la contrainte macroscopique.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Le partage des forces de contact sur les sous-domaines voisins n'a pas mécaniquement de sens. Le choix d'un poids de partage des forces de contact n'est pas évalué de façon rigoureuse.</li> </ul>
Troisième définition	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Le sens physique est clair par rapport à la mécanique des milieux continus ainsi qu'à la mécanique des milieux granulaires.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Le volume sur lequel la contrainte est définie est différent de celui des sous-domaines.</li> <li>- Elle surestime significativement la contrainte macroscopique. Cependant, la variable <math>\Sigma_d/\Sigma_m</math> macroscopique est bien représentée par la variable moyenne <math>\bar{\sigma}_d/\bar{\sigma}_m</math> obtenue par cette définition.</li> </ul>

**TABLE 6.2** – Avantages et inconvénients des trois définitions proposées pour la contrainte à l'échelle mésoscopique.

### 6.2.1 Distribution spatiale de la contrainte à l'échelle mésoscopique

Similairement à l'analyse de l'hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique, pour visualiser la distribution spatiale de la contrainte à l'échelle mésoscopique (la contrainte moyenne  $\sigma_m^h$  et le 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d^h$  de la contrainte déviatoire sont choisies pour cette analyse), on trace, sur les figures 6.13 et 6.14, chaque sous-domaine du graphe de particules, avec un niveau de gris proportionnel aux valeurs de  $\sigma_m^h$  et  $\sigma_d^h$ . On trouve que la transmission de la contrainte au sein du milieu granulaire se fait de manière très hétérogène : les variables  $\sigma_m^h$  et  $\sigma_d^h$  sont fortement concentrées, de façon similaire à la transmission des forces de contact, dans les chaînes dites *chaînes de contrainte*, tandis que les sous-domaines entre ces chaînes sont beaucoup moins sollicités. De plus, ces chaînes de contrainte s'orientent de façon isotrope à l'état initial mais de façon préférentielle dans la direction majeure macroscopique au pic de la courbe contrainte - déformation. Il peut être noté, sur la figure 6.14, que le 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d^h$  de la contrainte déviatoire dans les sous-domaines n'est pas nul à l'état initial bien que celui de l'assemblage  $\Sigma_d$  le soit. Cependant, l'ordre de grandeur de  $\sigma_d^h$  à l'état initial ( $10^4$  Pa) est petit par rapport à celui de la contrainte moyenne  $\sigma_m^h$  ( $10^5$  Pa).



**FIGURE 6.13** – Distributions spatiales de la contrainte moyenne mésoscopique  $\sigma_m^h$  (a) à l'état initial et (b) au pic de la courbe contrainte - déformation.

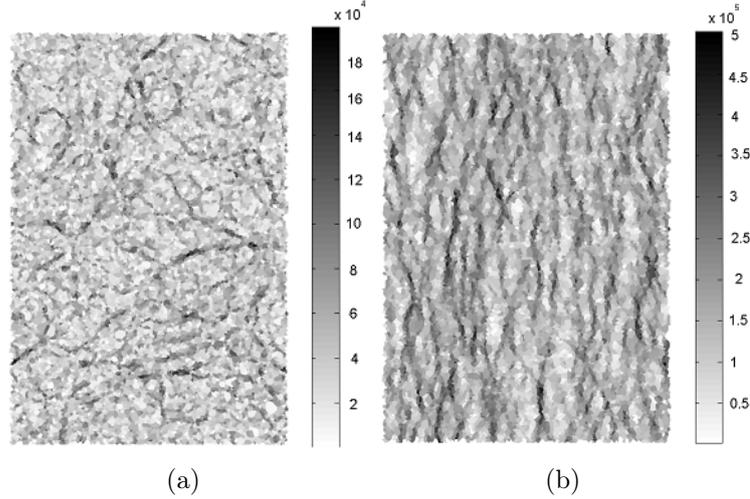
### 6.2.2 Analyse statistique de l'hétérogénéité de la contrainte

Afin d'analyser quantitativement l'hétérogénéité de la contrainte à l'échelle mésoscopique, on calcule les degrés d'hétérogénéité  $\tilde{\sigma}_{11}$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}$ ,  $\tilde{\sigma}_{12}$ ,  $\tilde{\sigma}_m$ ,  $\tilde{\sigma}_d$  et  $\tilde{\varphi}$  pour les variables de contrainte précédemment définies par rapport aux variables macroscopiques correspondantes  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$ ,  $\Sigma_{12}$ ,  $\Sigma_m$ ,  $\Sigma_d$  et  $\Phi$  (voir l'annexe C.2).

La figure 6.15 présente les distributions des variables  $\sigma_{11}^h$ ,  $\sigma_{22}^h$ ,  $\sigma_{12}^h$ ,  $\sigma_m^h$ ,  $\sigma_d^h$  et  $\varphi^h$  au pic de la courbe contrainte - déformation. Cette figure montre que :

- les distributions de ces variables sont hétérogènes. Ces distributions présentent des tendances centrales bien marquées autour des variables macroscopiques correspondantes. Cependant, cette hétérogénéité reste modérée, ce qui se traduit par de faibles valeurs des degrés d'hétérogénéité ( $\tilde{\sigma}_{11} = 8.3 \times 10^4$  Pa,  $\tilde{\sigma}_{22} = 3.8 \times 10^4$  Pa,  $\tilde{\sigma}_{12} = 3.49 \times 10^4$  Pa,  $\tilde{\sigma}_m = 5.2 \times 10^4$  Pa,  $\tilde{\sigma}_d = 7.7 \times 10^4$  Pa,  $\tilde{\varphi} = 9.6^\circ$ ) par rapport à l'ordre de grandeur des variables macroscopiques ( $\Sigma_1 = 2.37 \times 10^5$  Pa et  $\Phi = 24^\circ$ );
- la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}^h$  n'est pas nulle dans les sous-domaines malgré une valeur nulle de  $\Sigma_{12}$ . Cependant, il apparaît que les valeurs de  $\sigma_{12}^h$  sont très faibles devant l'ordre de grandeur de la contrainte macroscopique (figure 6.16).

Les évolutions des degrés d'hétérogénéité  $\tilde{\sigma}_{11}$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}$ ,  $\tilde{\sigma}_{12}$ ,  $\tilde{\sigma}_m$ ,  $\tilde{\sigma}_d$  et  $\tilde{\varphi}$ , en fonction de la déformation axiale  $E_1$ , sont tracées sur la figure 6.17. On trouve une augmentation de ces degrés d'hétérogénéité avec la déformation de l'assemblage jusqu'au pic de la courbe contrainte - déformation, suivie par une légère diminution dans la phase de radoucissement de l'assemblage. Pour l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi^h$  des sous-domaines, mise à part une perturbation dans une zone proche de l'état initial, son degré d'hétérogénéité augmente significativement avec la déformation de l'assemblage.



**FIGURE 6.14** – Distributions spatiales du 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d^h$  de la contrainte déviatoire mésoscopique (a) à l'état initial et (b) au pic de la courbe contrainte - déformation.

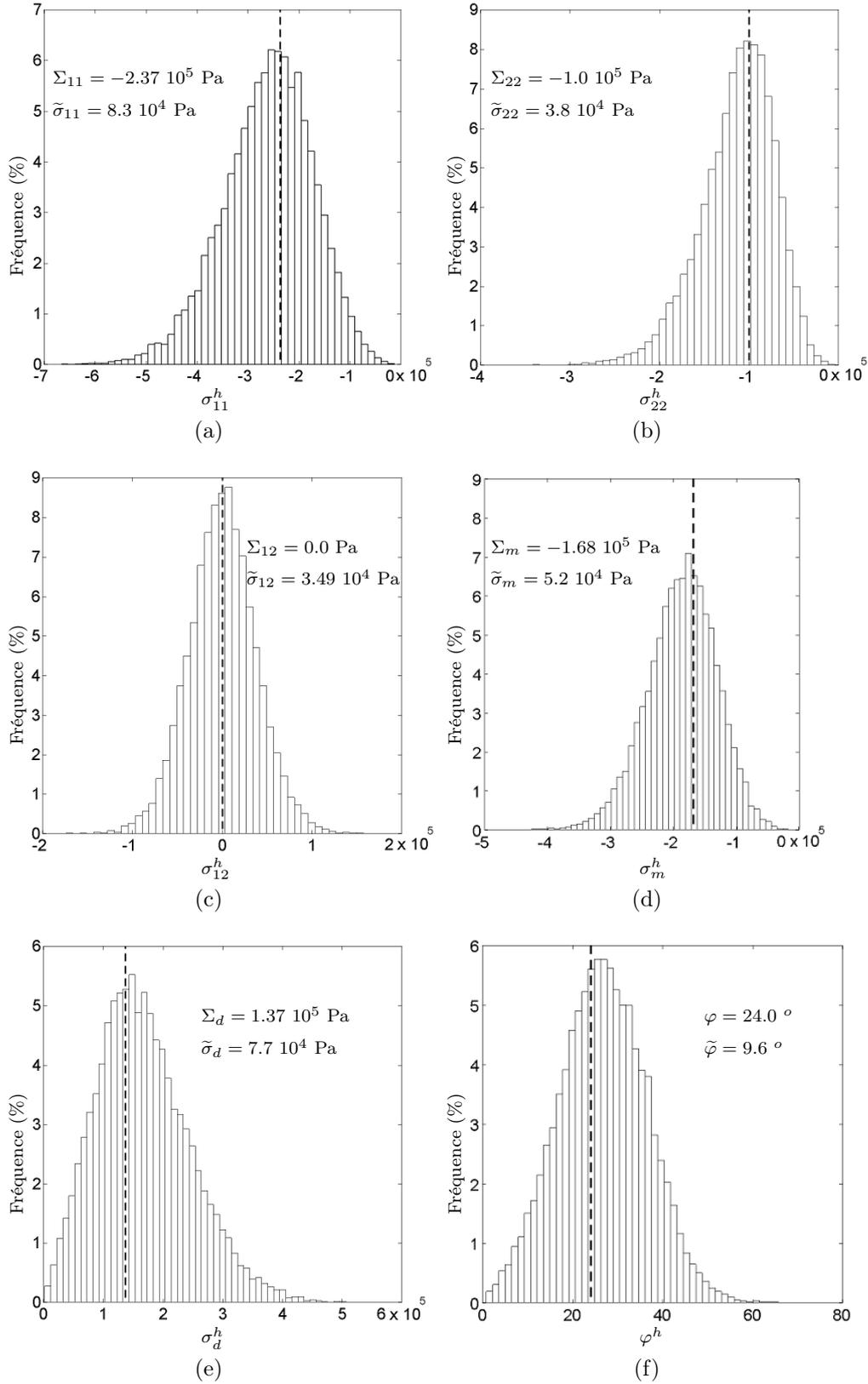
### 6.2.3 Mesures complémentaires de l'hétérogénéité de la contrainte

Pour analyser plus profondément l'hétérogénéité de la contrainte à l'échelle mésoscopique, on utilise également les mesures scalaires adimensionnelles proposées par Kuhn (2003) : la *participation*  $\sigma^h \parallel \Sigma$ , la *non-conformité*  $\sigma^h \perp \Sigma$ , et l'*alignement*  $\sigma^h \circ \Sigma$  de la contrainte  $\sigma^h$  dans chaque sous-domaine par rapport à la contrainte macroscopique  $\Sigma$  (voir l'annexe C.3).

On s'intéresse à l'écart-type  $S_v[\sigma^h \parallel \Sigma]$  de la distribution de la participation de  $\sigma^h \parallel \Sigma$  et aux valeurs moyennes volumiques  $\langle \sigma^h \perp \Sigma \rangle_v$  et  $\langle \sigma^h \circ \Sigma \rangle_v$  des distributions respectivement de la non-conformité  $\sigma^h \perp \Sigma$  et de l'alignement  $\sigma^h \circ \Sigma$ . Pour un milieu homogène (champ  $\sigma^h$  uniforme et aligné), on obtient les valeurs suivantes :  $S_v[\sigma^h \parallel \Sigma] = 0$ ,  $\langle \sigma^h \perp \Sigma \rangle_v = 0$  et  $\langle \sigma^h \circ \Sigma \rangle_v = 1$  (voir le tableau C.3). Dans la suite, les valeurs de  $S_v[\sigma^h \parallel \Sigma]$ ,  $\langle \sigma^h \perp \Sigma \rangle_v$  et  $\langle \sigma^h \circ \Sigma \rangle_v$  se référeront aux valeurs correspondantes pour un champ uniforme et aligné.

La figure 6.18 présente les évolutions de ces mesures statistiques au cours de l'essai. L'écart-type  $S_v[\sigma^h \parallel \Sigma]$  prend une valeur de 0.25 au début de l'essai, puis augmente légèrement pour atteindre une valeur de 0.33 à la fin de l'essai. Les valeurs de  $\langle \sigma^h \perp \Sigma \rangle_v$  sont autour de 0.2 et les valeurs de  $\langle \sigma^h \circ \Sigma \rangle_v$  sont proches de 1. Ces faibles valeurs de  $S_v[\sigma^h \parallel \Sigma]$ ,  $\langle \sigma^h \perp \Sigma \rangle_v$  et  $\langle \sigma^h \circ \Sigma \rangle_v$  confirment que *l'hétérogénéité de la contrainte à l'échelle mésoscopique est modérée et que les directions principale majeure et mineure de contrainte mésoscopique coïncident approximativement avec celles de la contrainte macroscopique.*

La figure 6.19 présente la contribution cumulée  $\Gamma_\Sigma$  des sous-domaines à la contrainte macroscopique en fonction de leur fraction volumique cumulée  $\Phi_v$  (voir l'annexe C.3) au pic de la courbe contrainte-déformation. Cette figure confirme également l'hétérogénéité modérée de la contrainte à l'échelle mésoscopique.



**FIGURE 6.15** – Distributions des variables de contrainte à l'échelle mésoscopique au pic de la courbe contrainte - déformation : (a)  $\sigma_{11}^h$ , (b)  $\sigma_{22}^h$ , (c)  $\sigma_{12}^h$ , (d)  $\sigma_m^h$ , (e)  $\sigma_d^h$  et (f)  $\varphi^h$ . Ligne pointillée correspond aux variables macroscopiques correspondantes.

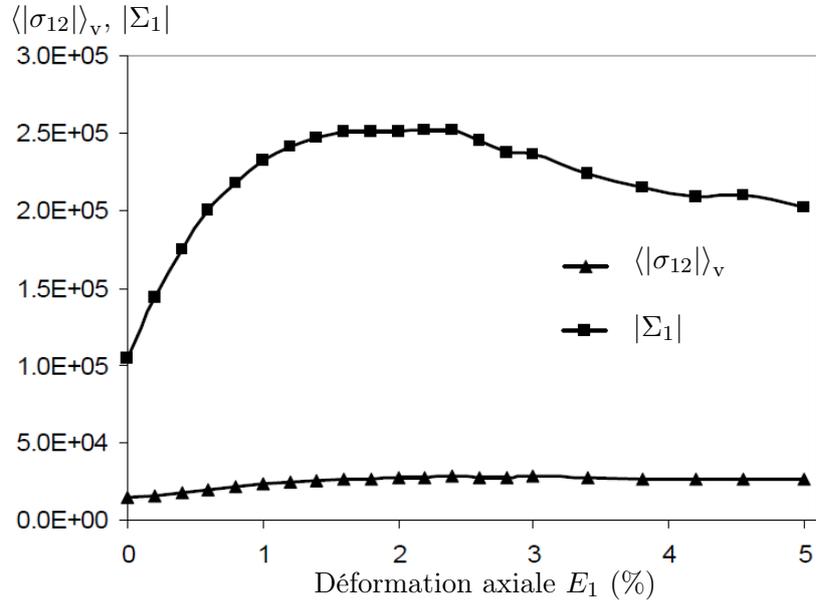


FIGURE 6.16 – Comparaison entre la moyenne  $\langle |\sigma_{12}| \rangle_v$  des valeurs absolues de la contrainte de cisaillement dans les sous-domaines et la valeur absolue  $|\Sigma_1|$  de la contrainte majeure macroscopique au cours de l'essai biaxial.

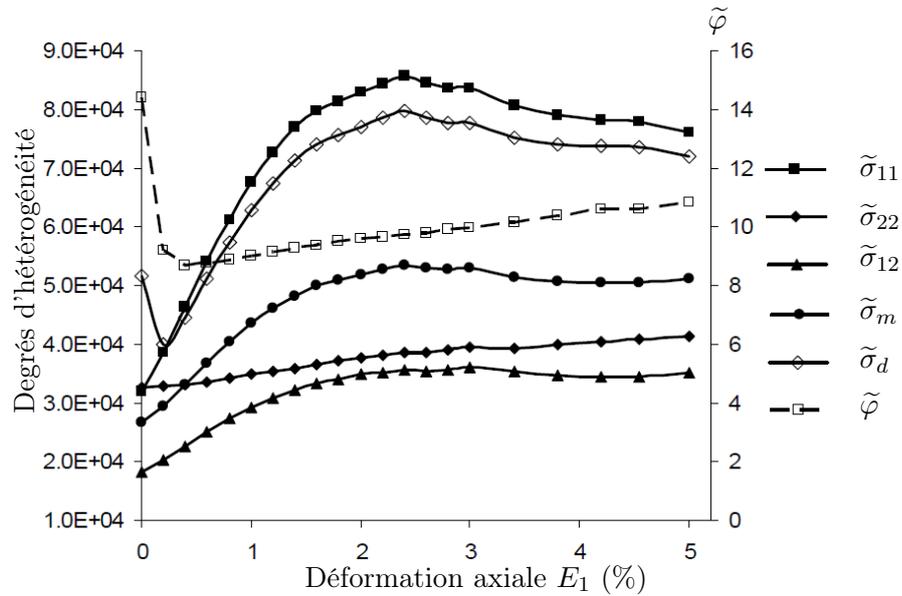


FIGURE 6.17 – Evolutions des degrés d'hétérogénéité  $\tilde{\sigma}_{11}$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}$ ,  $\tilde{\sigma}_{12}$ ,  $\tilde{\sigma}_m$ ,  $\tilde{\sigma}_d$ ,  $\tilde{\varphi}$  au cours de l'essai biaxial.

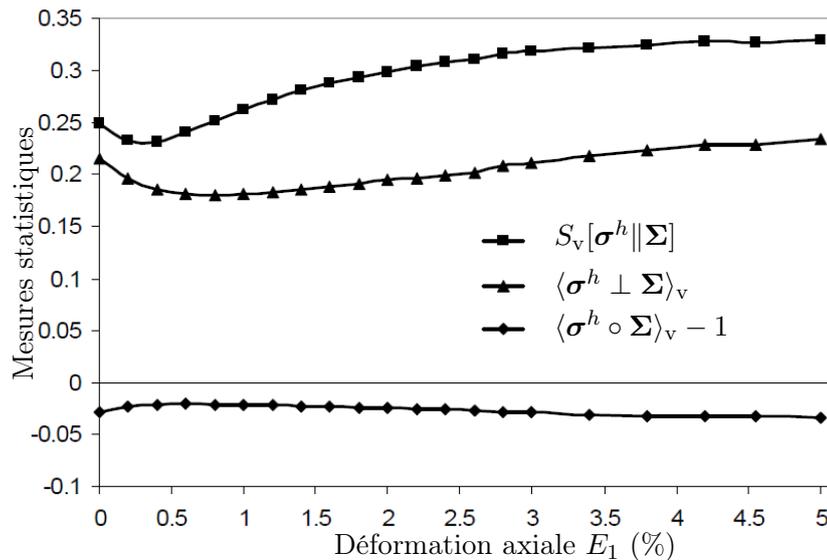


FIGURE 6.18 – Evolutions de l'écart-type  $S_V[\sigma^h \parallel \Sigma]$  et des valeurs moyennes  $\langle \sigma^h \perp \Sigma \rangle_V$  et  $\langle \sigma^h \circ \Sigma \rangle_V$  au cours de l'essai biaxial.

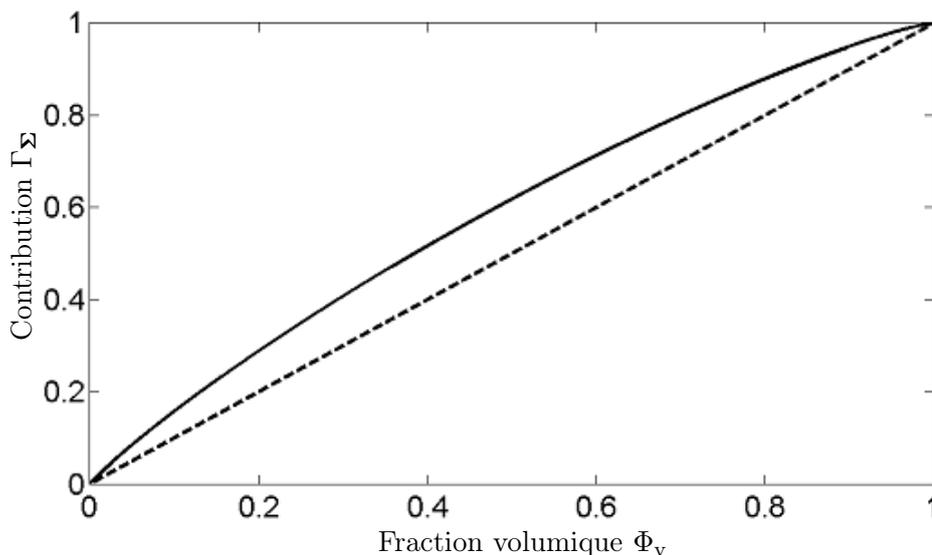


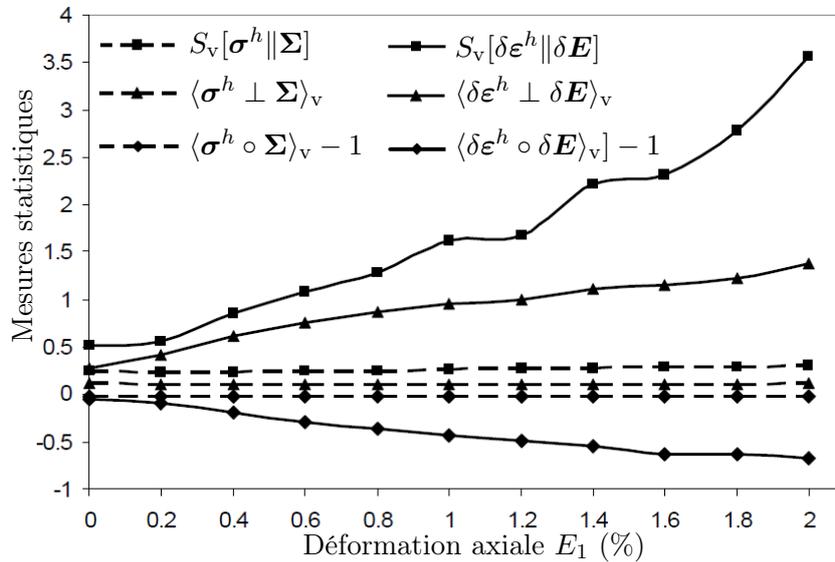
FIGURE 6.19 – Contribution cumulée  $\Gamma_\Sigma$  des sous-domaines à la contrainte macroscopique en fonction de la fraction volumique cumulée  $\Phi_V$  au pic de la courbe contrainte - déformation. Ligne pointillée correspond à une contribution proportionnelle au volume des sous-domaines correspond.

#### 6.2.4 Comparaison entre les hétérogénéités de la déformation et de la contrainte

Grâce aux mesures scalaires adimensionnelles de participation, de non-conformité et d'alignement d'un champ local par rapport à un champ global, il est possible de comparer les hétérogénéités de la déformation et de la contrainte à l'échelle mésoscopique. Pour cela, on trace, sur la figure 6.20, les évolutions des écart-types  $S_V[\delta \varepsilon^h \parallel \delta \mathbf{E}]$  et  $S_V[\sigma \parallel \Sigma]$  de la mesure de participation, des valeurs moyennes volu-

miques  $\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta \boldsymbol{E} \rangle_v$  et  $\langle \boldsymbol{\sigma}^h \perp \boldsymbol{\Sigma} \rangle_v$  de la mesure de non-conformité, et  $\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta \boldsymbol{E} \rangle_v$  et  $\langle \boldsymbol{\sigma}^h \circ \boldsymbol{\Sigma} \rangle_v$  de la mesure d'alignement respectivement pour les champs de déformation  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^h$  et de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^h$  à l'échelle mésoscopique dans la zone pré-pic de la courbe contrainte - déformation.

Cette figure met en évidence une différence significative entre les hétérogénéités de la déformation et de la contrainte à l'échelle mésoscopique, d'autant plus quand le niveau de déformation macroscopique est important. L'hétérogénéité de la déformation mésoscopique se développe fortement avec la déformation de l'assemblage, tandis que celle de la contrainte mésoscopique évolue peu. Au pic de la courbe contrainte - déformation, on obtient des valeurs très différentes :  $S_v[\delta \boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta \boldsymbol{E}] = 3.6$  contre  $S_v[\boldsymbol{\sigma}^h \parallel \boldsymbol{\Sigma}] = 0.3$ ,  $\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta \boldsymbol{E} \rangle_v = 1.38$  contre  $\langle \boldsymbol{\sigma}^h \perp \boldsymbol{\Sigma} \rangle_v = 0.2$  et  $\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta \boldsymbol{E} \rangle_v = 0.32$  contre  $\langle \boldsymbol{\sigma}^h \circ \boldsymbol{\Sigma} \rangle_v = 0.97$ . D'ailleurs, les sous-domaines contribuent de façon très hétérogène à la déformation macroscopique (50% en volume des sous-domaines génère entièrement à la déformation macroscopique pour  $E_1 = 1.2\%$ ), tandis que tous les sous-domaines contribuent de façon plus ou moins importante à la contrainte macroscopique (la contrainte macroscopique est due à la contribution de 100% en volume des sous-domaines). Par conséquent, on peut conclure que *la déformation est fortement hétérogène à l'échelle mésoscopique tandis que la contrainte reste modérément hétérogène à cette échelle*. Cela est certainement lié à la condition d'équilibre statique qui doit exister quelle que soit l'échelle considérée alors que ce type de condition n'existe pas en déformation.



**FIGURE 6.20** – Comparaison des hétérogénéités de la déformation et de la contrainte à l'échelle mésoscopique : évolutions de  $S_v[\delta \boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta \boldsymbol{E}]$ ,  $S_v[\boldsymbol{\sigma}^h \parallel \boldsymbol{\Sigma}]$ ,  $\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta \boldsymbol{E} \rangle_v$ ,  $\langle \boldsymbol{\sigma}^h \perp \boldsymbol{\Sigma} \rangle_v$ ,  $\langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta \boldsymbol{E} \rangle_v$  et  $\langle \boldsymbol{\sigma}^h \circ \boldsymbol{\Sigma} \rangle_v$  dans la zone pré-pic de la courbe contrainte - déformation.

## 6.3 Nature structurée de la contrainte à l'échelle mésoscopique

L'analyse précédente montre que la contrainte sont hétérogènes à l'échelle mésoscopique. Cette section est consacrée à l'étude de la nature aléatoire ou structurée de cette hétérogénéité. On cherche en particulier s'il existe des corrélations entre la contrainte et la texture à l'échelle mésoscopique. Compte tenue de la variation significative de la contrainte mésoscopique, il n'est possible que de donner une description statistique de cette variable. Pour cela, un tenseur de contrainte moyen  $\sigma(\beta, \theta)$  est déterminé sur un ensemble de sous-domaines de texture similaire pour des intervalles du degré d'allongement  $\beta^h \in [\beta, \beta + \delta\beta]$  et de l'angle d'orientation  $\theta^h \in [\theta, \theta + \delta\theta]$  :

$$\sigma_{ij}(\beta, \theta) = \frac{\sum_{\beta^h \in [\beta, \beta + \delta\beta], \theta^h \in [\theta, \theta + \delta\theta]} \sigma_{ij}^h V^h}{V(\beta, \theta)} \quad (6.18)$$

$$V(\beta, \theta) = \sum_{\beta^h \in [\beta, \beta + \delta\beta], \theta^h \in [\theta, \theta + \delta\theta]} V^h \quad (6.19)$$

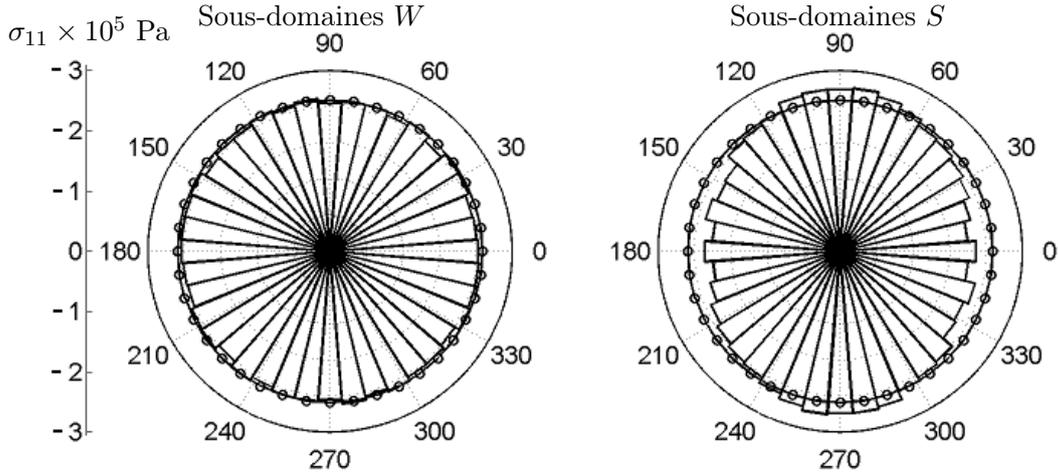
Les ensembles de sous-domaines de texture similaire sont définis de façon identique à celle utilisée pour l'analyse de la déformation mésoscopique. A partir du tenseur  $\sigma(\beta, \theta)$ , on peut également calculer les variables de contrainte précédemment définies pour un ensemble de sous-domaines de texture similaire :  $\sigma_{11}(\beta, \theta)$ ,  $\sigma_{22}(\beta, \theta)$ ,  $\sigma_{12}(\beta, \theta)$ ,  $\sigma_m(\beta, \theta)$ ,  $\mathbf{s}(\beta, \theta)$ ,  $\sigma_d(\beta, \theta)$  et  $\varphi(\beta, \theta)$ . On analyse, dans la suite, les relations entre ces variables, le degré d'allongement  $\beta$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines.

### 6.3.1 Contraintes $\sigma_{11}$ et $\sigma_{22}$ dans les directions principales majeure et mineure macroscopiques

Les relations entre les contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines sont respectivement présentées sur les figures 6.21 et 6.22 pour les deux classes de sous-domaines faiblement allongés (classe  $W$ ) et fortement allongés (classe  $S$ ) au pic de la courbe contrainte - déformation. On constate une dépendance significative des contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  vis-à-vis de l'orientation  $\theta$ , particulièrement pour les sous-domaines fortement allongés. Les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique supportent mieux la contrainte dans la direction majeure macroscopique, mais moins bien la contrainte dans la direction mineure macroscopique, que ceux orientés dans la direction mineure macroscopique. Cette dépendance peut également être retrouvée à tout état de l'assemblage au cours de l'essai.

### 6.3.2 Contrainte moyenne $\sigma_m$

La figure 6.23 présente la contrainte moyenne  $\sigma_m$  en fonction de l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes  $W$  et  $S$  au pic de la courbe contrainte - déformation. On s'aperçoit une dépendance très faible de la contrainte moyenne



**FIGURE 6.21** – Relation entre la contrainte  $\sigma_{11}$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$  au pic de la courbe contrainte - déformation.

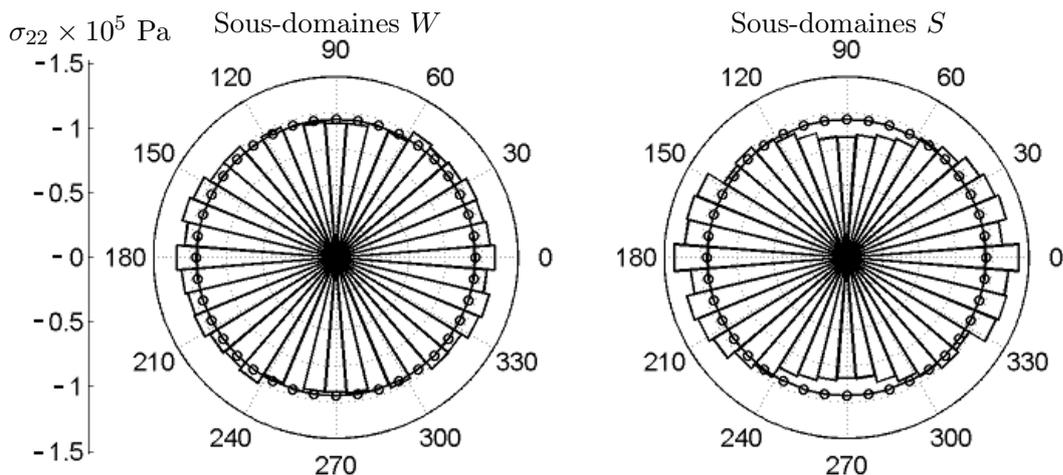
$\sigma_m$  vis-à-vis de l'orientation  $\theta$  des sous-domaines. Les évolutions de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  des six différents types de sous-domaines sont tracées sur la figure 6.24 en fonction de la déformation axiale  $E_1$ . Cette figure permet de conclure que *la contrainte moyenne  $\sigma_m$  dans les sous-domaines suit approximativement la contrainte moyenne macroscopique  $\Sigma_m$ .*

### 6.3.3 Contrainte déviatoire $s$ et angle de frottement interne mobilisé $\varphi$

#### 6.3.3.1 Contrainte déviatoire $s$

Au début de l'essai, quand la contrainte déviatoire macroscopique est faible, la contrainte déviatoire  $s$  dans les sous-domaines est également faible. Lorsque la contrainte déviatoire macroscopique est importante, la contrainte déviatoire mésoscopique  $s$  devient importante et présente une dépendance significative vis-à-vis de l'orientation  $\theta$  des sous-domaines, ce qui se traduit par une relation bien marquée entre son 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d$  et l'orientation  $\theta$ , comme présenté sur la figure 6.25, en particulier pour les sous-domaines fortement allongés. Les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique supportent beaucoup plus la contrainte déviatoire que ceux orientés dans la direction mineure macroscopique.

Les évolutions du 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d$  de la contrainte déviatoire dans les six types de sous-domaines au cours de l'essai sont tracées sur la figure 6.26, et comparées avec l'évolution du 2<sup>ème</sup> invariant  $\Sigma_d$  de la contrainte déviatoire macroscopique. Cette figure met en évidence *le rôle significatif de la texture des sous-domaines dans la distribution de la contrainte déviatoire, surtout pour les sous-domaines fortement allongés.* La contrainte déviatoire dans les sous-domaines  $SV$  évolue beaucoup plus fortement que celle de l'assemblage, tandis que la contrainte déviatoire dans les sous-domaines  $SH$  évolue beaucoup plus faiblement et la contrainte déviatoire dans les sous-domaines  $SO$  présente une évolution intermédiaire et assez proche de celle de l'assemblage. De plus, ces évolutions sont similaires à l'évolution de la contrainte



**FIGURE 6.22** – Relation entre la contrainte  $\sigma_{22}$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$  au pic de la courbe contrainte - déformation.

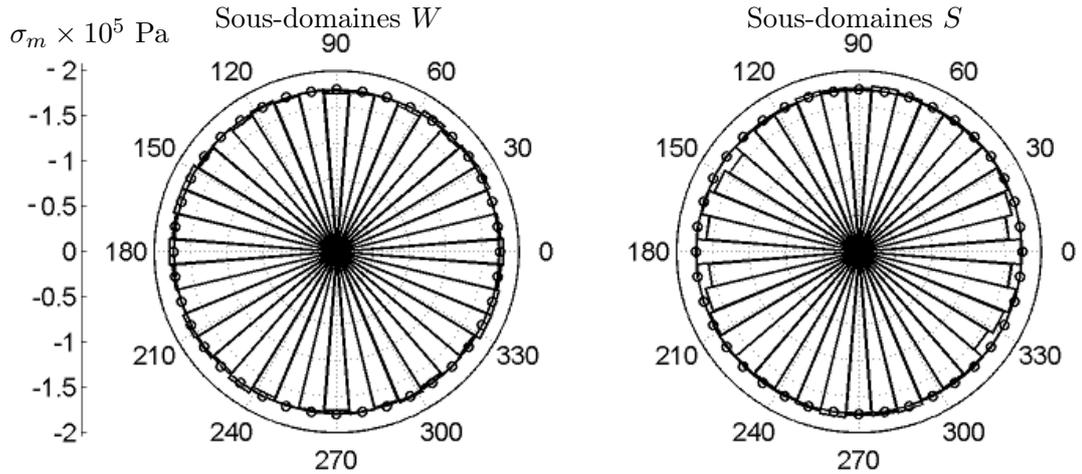
déviatoire macroscopique : les pics et les paliers de la contrainte déviatoire de ces types de sous-domaines et de l'assemblage sont atteints pour les mêmes niveaux de déformation macroscopique.

### 6.3.3.2 Angle de frottement interne mobilisé $\varphi$

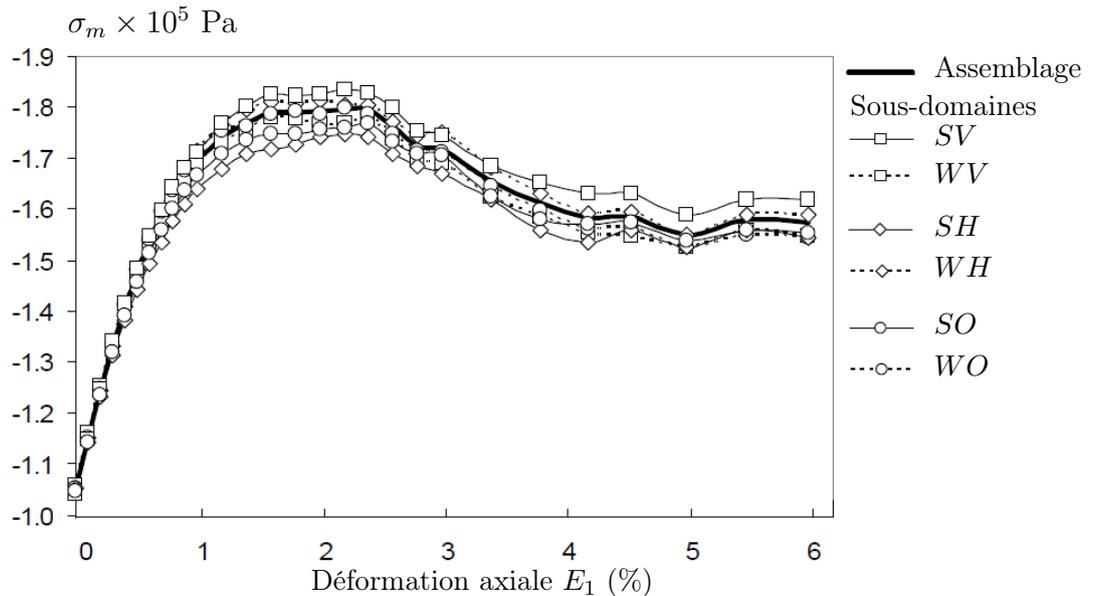
L'angle de frottement interne mobilisé est le plus souvent utilisé pour caractériser la résistance d'un matériau granulaire. Dans le cadre de ce travail, on définit également l'angle de frottement interne mobilisé pour les sous-domaines pour étudier leur résistance. Pour un ensemble de sous-domaines de texture similaire, l'angle de frottement interne mobilisé moyen  $\varphi(\beta, \theta)$  est défini *via* le tenseur de contrainte moyen  $\sigma(\beta, \theta)$  (6.18).

Au début de l'essai, la contrainte déviatoire étant faible dans les sous-domaines, l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  l'est également. Au cours de l'essai,  $\varphi$  devient de plus en plus important et présente une forte dépendance vis-à-vis de l'orientation  $\theta$  des sous-domaines, surtout pour les sous-domaines fortement allongés, comme illustré sur la figure 6.27. Cette relation est très similaire à la relation entre le 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d$  de la contrainte déviatoire et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines, analysée précédemment (figure 6.25). Les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique possèdent les valeurs de  $\varphi$  les plus importantes tandis que ceux orientés dans la direction mineure macroscopique possèdent les valeurs les plus faibles. Il peut être également noté que les sous-domaines fortement allongés et orientés dans la direction majeure macroscopique possèdent des valeurs de  $\varphi$  significativement plus importantes que l'angle de frottement interne mobilisé  $\Phi$  de l'assemblage tandis que ceux orientés dans la direction mineure macroscopique ont des valeurs de  $\varphi$  beaucoup plus faibles que  $\Phi$ .

Les évolutions de l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  dans les six types de sous-domaines, en fonction de la déformation axiale  $E_1$ , sont tracées sur figure 6.28. Ces évolutions sont similaires aux évolutions du 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d$  de la contrainte déviatoire de six types de sous-domaines, analysées précédemment (figure 6.26). Le



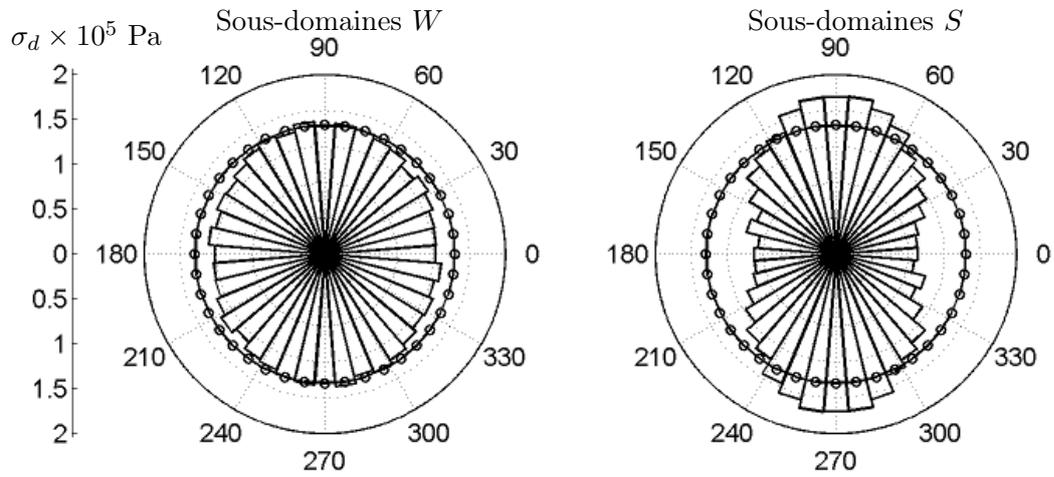
**FIGURE 6.23** – Relation entre la contrainte moyenne  $\sigma_m$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$  au pic de la courbe contrainte - déformation.



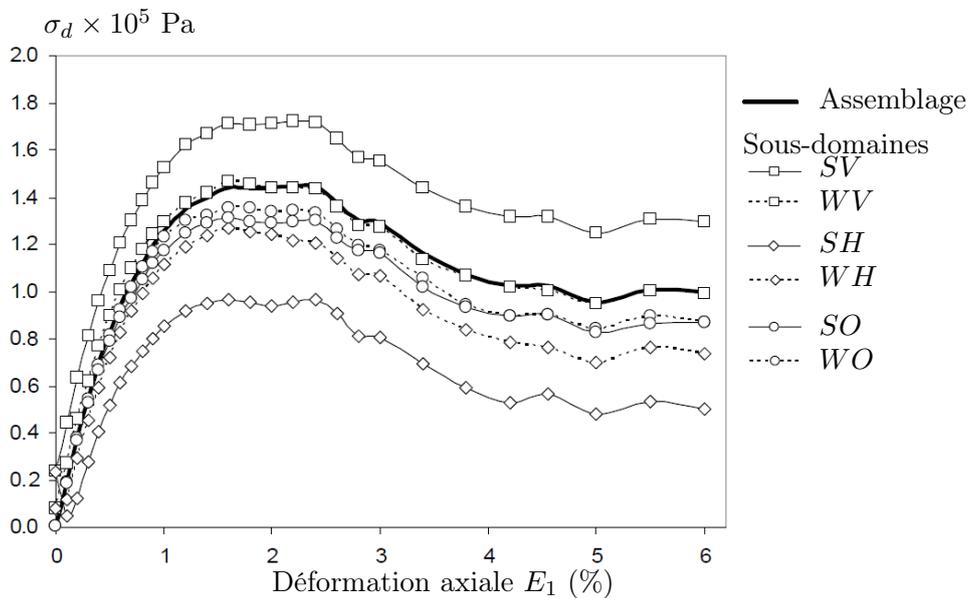
**FIGURE 6.24** – Evolutions de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  dans les six types de sous-domaines.

tableau 6.3 présente les valeurs de  $\varphi$  pour les six différents types de sous-domaines au pic et au palier de la courbe contrainte - déformation. Ce tableau met en évidence *la résistance importante des structures mésoscopiques allongées dans la direction majeure macroscopique, qui leur permettent d'assurer la stabilité de l'assemblage granulaire.*

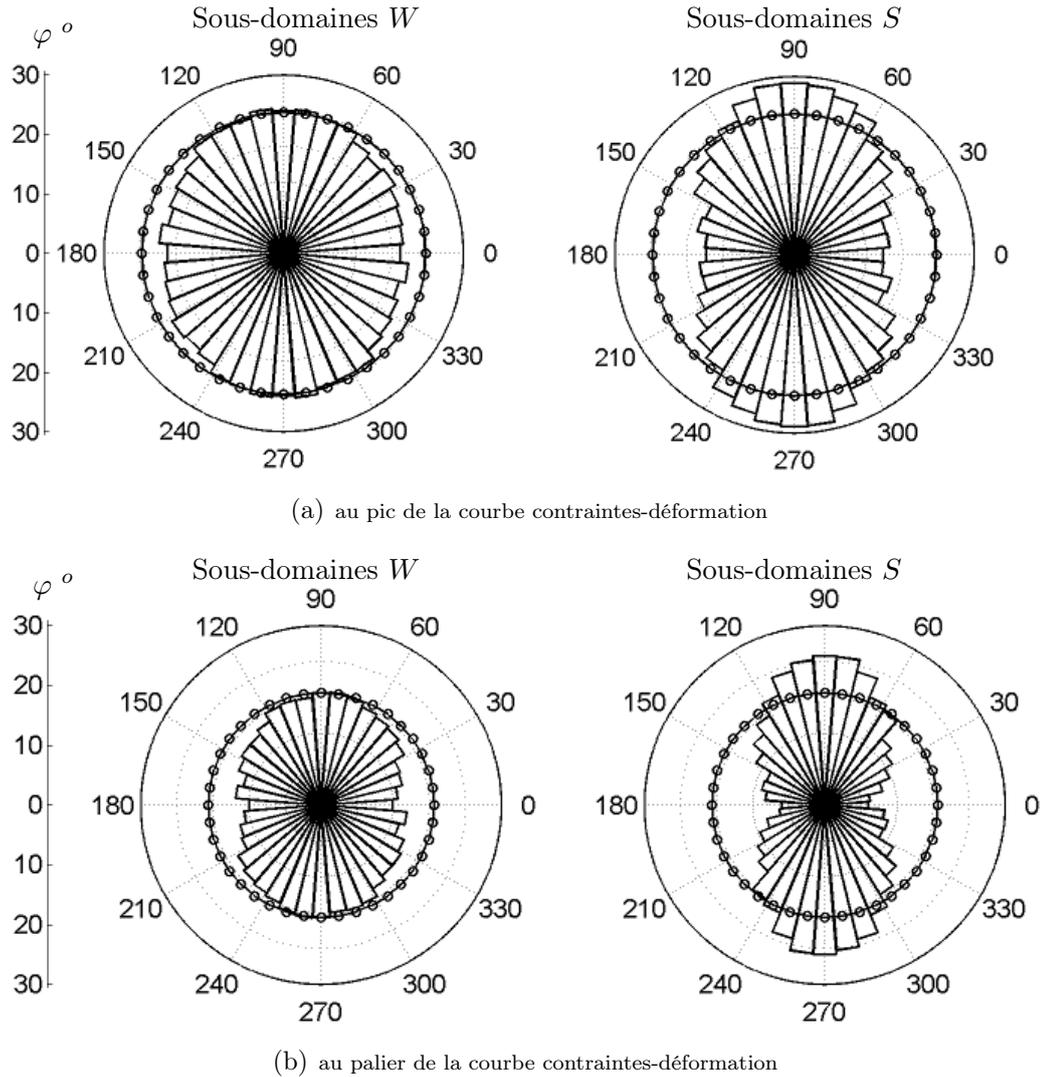
Si l'on normalise, pour chaque type de sous-domaines, l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  par la valeur maximale  $\varphi_{\max}$  (au pic de la courbe contrainte - déformation), on obtient les courbes présentées sur la figure 6.29. Les courbes pour



**FIGURE 6.25** – Relation entre le 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d$  de la contrainte déviatoire et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$  au pic de la courbe contrainte - déformation.



**FIGURE 6.26** – Evolution du 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d$  de la contrainte déviatoire dans les six types de sous-domaines.



**FIGURE 6.27** – Relation entre l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes des sous-domaines  $W$  et  $S$  (a) au pic et (b) au palier de la courbe contrainte - déformation.

les six types de sous-domaines coïncident avec celle pour l'assemblage dans la zone pré-pic de la courbe contrainte - déformation. Ce résultat montre que l'évolution de l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  pour les structures mésoscopiques prend la même forme que celle macroscopique avec un seul paramètre d'ajustement qui est la valeur maximale de l'angle de frottement interne mobilisé qui dépend de la texture des structures mésoscopiques.

### *Rôle de l'orientation de contacts dans la résistance des structures mésoscopiques*

Une résistance importante des sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique, et une résistance faible de ceux orientés dans la direction mineure macroscopique, peuvent être expliquées par l'orientation des contacts dans ces sous-

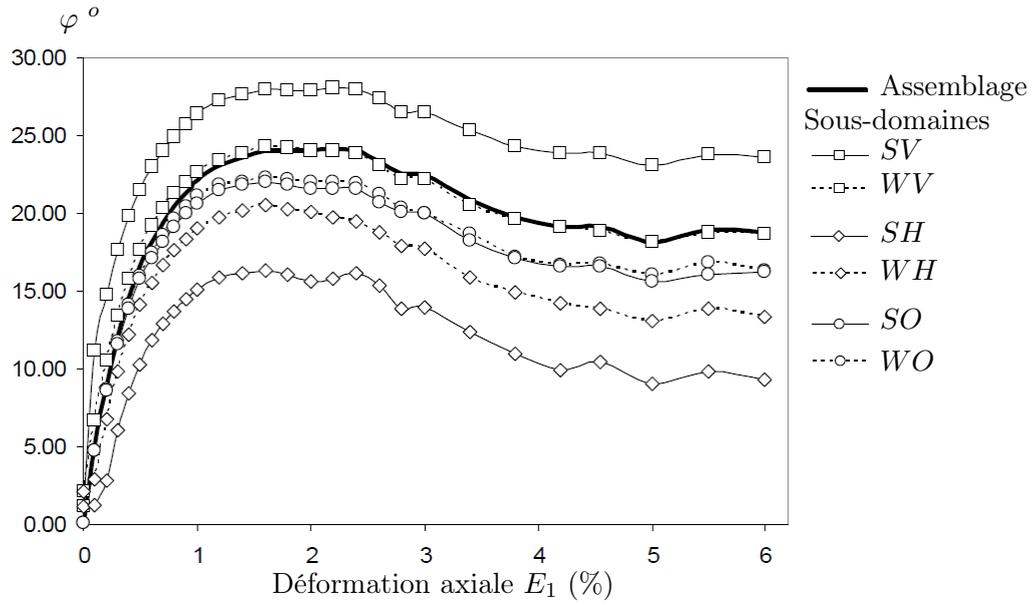


FIGURE 6.28 – Evolution de l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  dans les six types de sous-domaines au cours de l'essai.

$\varphi$ (°)	VER	Sous-domaines					
		WV	WO	WH	SV	SO	SH
Au pic	24.0	24.0	22.1	20.1	28.0	21.6	15.6
Au palier	18.8	18.7	16.3	13.4	27.1	16.2	9.3

TABLE 6.3 – Angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  au pic et au palier pour les différents types de sous-domaines et pour l'assemblage.

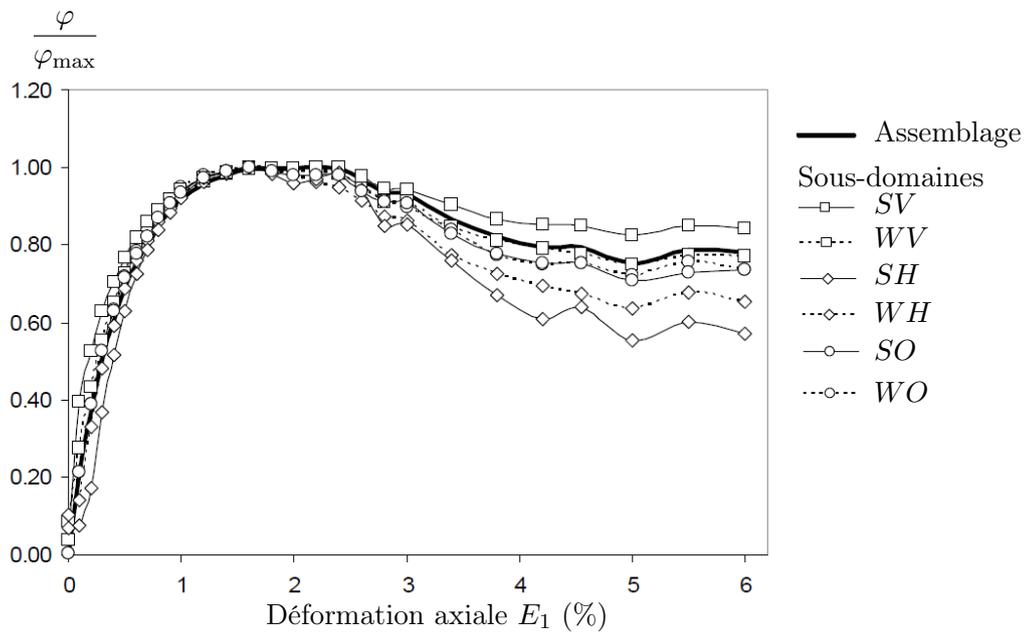
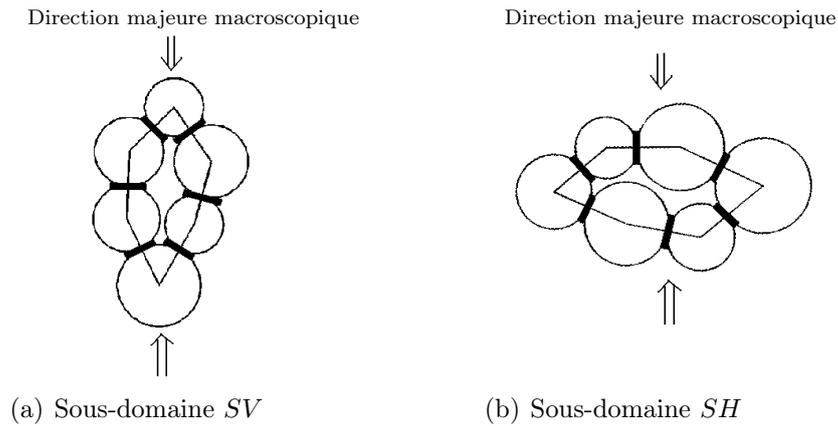


FIGURE 6.29 – Evolutions du rapport entre l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et la valeur maximale  $\varphi_{\max}$  pour les six types de sous-domaines au cours de l'essai.



**FIGURE 6.30** – Orientation de contacts pour les structures *SV* et *SH*.

domaines. En effet, un contact orienté dans la direction majeure macroscopique est plus apte à supporter le chargement déviatoire qu'un contact orienté dans la direction mineure macroscopique. Les contacts dans un sous-domaine orienté dans la direction majeure macroscopique s'orientent préférentiellement dans cette direction, ce qui confère à ce sous-domaine une résistance importante. Par contre, pour un sous-domaine orienté dans la direction mineure macroscopique, les contacts s'orientent préférentiellement dans cette direction, ce qui affaiblit la résistance de ce sous-domaine. Les explications ci-dessus sont illustrées sur la figure 6.30.

### *Lien entre la résistance des structures mésoscopiques et la résistance macroscopique*

La dépendance de la résistance des structures mésoscopiques vis-à-vis de leur texture est similaire aux résultats obtenus par Cambou et Lanier (1988) sur la résistance d'un matériau granulaire anisotrope en fonction de la direction de compression. Les auteurs ont montré que la résistance du matériau est beaucoup plus importante lors d'une compression dans la direction majeure d'anisotropie que lors d'une compression dans la direction mineure d'anisotropie (figure 6.31). On peut trouver ici un lien fort entre la résistance globale d'un matériau granulaire et la résistance des structures mésoscopiques. En effet, dans un matériau anisotrope, les structures mésoscopiques s'orientent préférentiellement dans la direction majeure d'anisotropie du matériau. Si l'on comprime le matériau dans la direction majeure d'anisotropie, les structures mésoscopiques, avec une orientation préférentielle dans la direction de compression, contribuent à renforcer la structure du matériau contre la compression. Le contraire se produit si l'on comprime le matériau dans la direction mineure d'anisotropie et on obtient alors une déformation irréversible beaucoup plus importante.

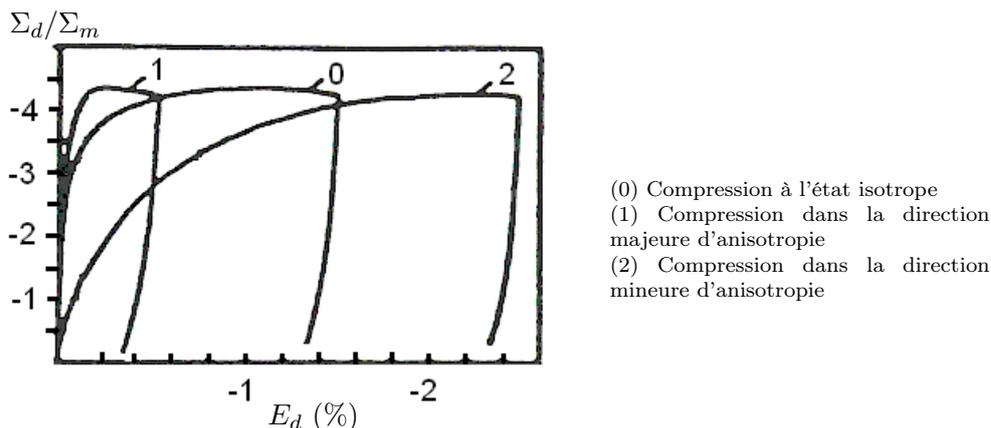


FIGURE 6.31 – Dépendance de la résistance d'un matériau anisotrope vis-à-vis de la direction de compression (Cambou et Lanier, 1988).

### 6.3.4 Liens entre la contrainte dans les structures mésoscopiques et les mécanismes au niveau des contacts

Lorsqu'on applique une sollicitation déviatoire à un matériau granulaire non-cohésif, le frottement aux contacts est mobilisé pour résister à cette sollicitation. Le degré de mobilisation d'un contact est décrit par l'angle de frottement local mobilisé  $\phi_c$ , défini comme suit :

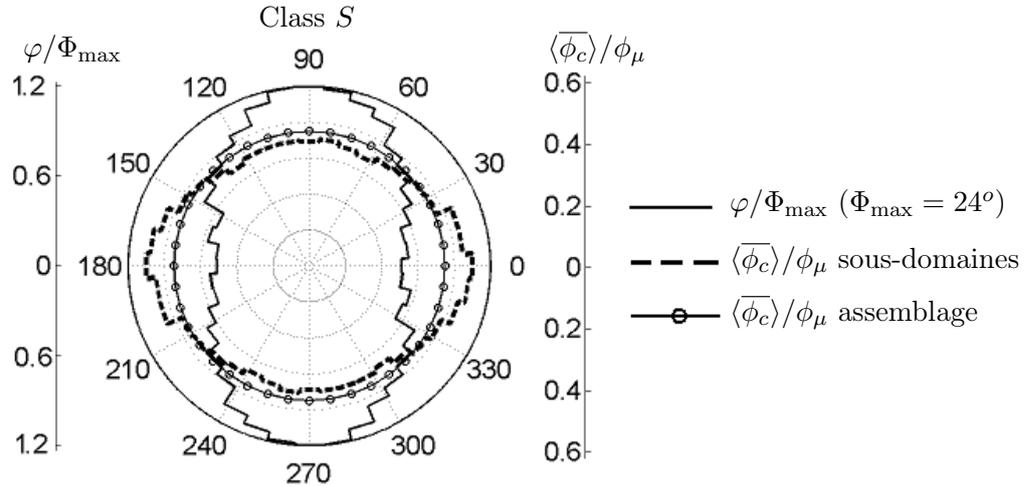
$$\tan(\phi_c) = \frac{f_t^c}{f_n^c}, \quad (6.20)$$

où  $f_n^c$  et  $f_t^c$  sont respectivement les composantes normale et tangentielle de la force de contact. La limite de la mobilisation d'un contact est atteinte lorsque  $\phi_c = \phi_\mu$  où  $\phi_\mu$  est l'angle de frottement intergranulaire. Un contact, qui atteint la limite de la mobilisation, est appelé *contact glissant*. Le glissement se produit aux contacts glissants, ce qui affaiblit la résistance du matériau granulaire.

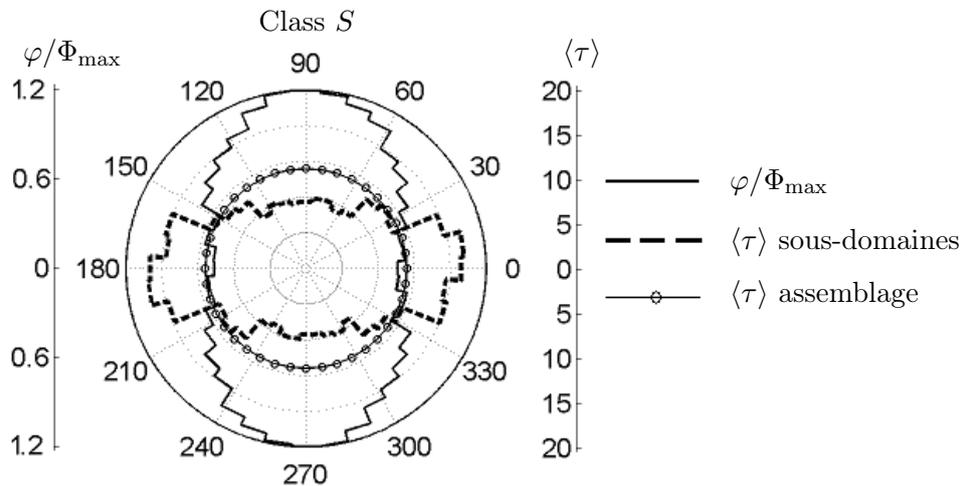
On s'intéresse ici à analyser les liens entre la résistance des structures mésoscopiques mesurée par l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et les mécanismes se produisant au niveau des contacts dans ces structures mésoscopiques : l'angle de frottement local mobilisé  $\phi_c$  et les glissements aux contacts dans chaque structure mésoscopique. Pour cela, on détermine d'abord, pour chaque contact, l'angle de frottement local mobilisé  $\phi_c$ , puis la moyenne  $\overline{\phi_c^h}$  de  $\phi_c$  sur l'ensemble de contacts, et enfin la fraction de contacts glissants  $\tau^h$  dans chaque sous-domaine. Les deux quantités  $\overline{\phi_c^h}$  et  $\tau^h$  sont ensuite moyennées sur chaque ensemble des sous-domaines de texture similaire (ces moyennes sont notées  $\langle \overline{\phi_c} \rangle$  et  $\langle \tau \rangle$ ). On notera ici que nous présentons deux variables : l'une  $\varphi$  définie dans les structures mésoscopiques dans une *approche de milieu continu* et l'autre  $\langle \overline{\phi_c} \rangle$  définie à la même échelle mais dans une *approche de milieu discret*.

On superpose, sur la figure 6.32, deux relations  $\varphi - \theta$  et  $\langle \overline{\phi_c} \rangle - \theta$  pour les sous-domaines fortement allongés  $S$ . On peut constater que *le frottement interne mobilisé est plus élevé, les frottements locaux aux contacts sont moins mobilisés*. Les frottements aux contacts dans les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique, qui possèdent des valeurs de  $\varphi$  importantes, sont moins mobilisés que les frottements aux contacts dans les sous-domaines orientés dans la direction mineure

macroscopique, qui possèdent des valeurs de  $\varphi$  plus faibles. Ceci peut s'expliquer par le fait que les sous-domaines orientés dans la direction mineure macroscopique ont une structure plus faible que celle des sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique, et doivent donc mobiliser plus les frottements à leurs contacts. On voit bien ici le rôle fondamental de la texture qui va permettre à un certain nombre de structures mésoscopiques de supporter des contraintes déviatoires importantes sans mobiliser de façon importante le frottement au niveau des contacts.



**FIGURE 6.32** – Relation entre l'angle moyen de frottement local mobilisé  $\langle \overline{\phi_c} \rangle$  aux contacts dans les sous-domaines fortement allongés et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines, superposée avec la relation  $\varphi - \theta$  au pic de la courbe contrainte - déformation.



**FIGURE 6.33** – Relation entre la fraction moyenne des contacts glissants  $\langle \tau \rangle$  dans les sous-domaines fortement allongés et l'orientation  $\theta$  des sous-domaines, superposée avec la relation  $\varphi - \theta$  au pic de la courbe contrainte - déformation.

La fraction moyenne de contacts glissants  $\langle \tau \rangle$  dans les sous-domaines fortement allongés  $S$  est tracée sur la figure 6.33 en fonction de l'orientation  $\theta$  de ces sous-domaines et superposée avec la relation  $\varphi - \theta$ . On s'aperçoit que la fraction de

contacts glissants dans les sous-domaines orientés dans la direction mineure macroscopique (17% environ) est beaucoup plus importante que celle dans les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique (7% environ). Ce résultat renforce l'analyse présentée ci-dessus et illustre à nouveau l'effet de la texture qui permet de limiter les glissements dans un certain nombre de structures mésoscopiques qui assurent la stabilité de l'arrangement de l'assemblage.

Ces résultats sont très importants et permettent de reanalyser certains résultats numériques qui montrent qu'il était difficile de relier l'angle de frottement mobilisé aux contacts et l'angle de frottement interne mobilisé dans l'arrangement. En fait, les résultats présentés ici montrent qu'il est important d'analyser le frottement local dans le cadre de chaque structure mésoscopique et non au niveau d'un contact isolé. Si l'on se place à l'échelle mésoscopique, il est alors possible de relier la variable continue : angle de frottement interne mobilisé aux deux variables discrètes : le frottement local moyen mobilisé et la variable de texture.

## Conclusions

L'analyse présentée dans ce chapitre a permis de montrer que la définition de la contrainte à l'échelle mésoscopique est un problème complexe. Parmi les différentes définitions proposées, nous avons choisi de travailler avec celle basée sur une analyse physique simple. La contrainte macroscopique évaluée à partir de la moyenne de cette contrainte mésoscopique surestime légèrement la valeur mesurée aux limites du VER. Cependant, le rapport des contraintes macroscopiques  $\Sigma_d/\Sigma_m$ , habituellement utilisé pour modéliser le comportement des matériaux granulaires, est bien estimé par cette définition.

Nous avons mis en évidence une hétérogénéité significative de la contrainte mésoscopique, augmentant avec le niveau de sollicitation déviatoire appliquée. De plus, les simulations montrent également l'existence de chaînes de contraintes s'orientant préférentiellement dans la direction majeure macroscopique.

Enfin, nous avons noté que l'hétérogénéité de la contrainte mésoscopique restait modérée par rapport à celle observée pour la déformation mésoscopique. Ce phénomène est probablement lié à la nécessité d'une condition d'équilibre statique satisfaite à toutes les échelles, nécessité sans équivalent en termes de déformation.

Par contre, contrainte et déformation ont en commun une hétérogénéité structurée à l'échelle mésoscopique. Ainsi, l'angle de frottement interne mobilisé dans les structures mésoscopiques présente une dépendance significative vis-à-vis de leur texture, particulièrement pour les structures fortement allongées. De même, parmi les structures mésoscopiques, celles allongées dans la direction majeure macroscopique jouent un rôle prépondérant pour assurer la stabilité de l'arrangement granulaire. D'ailleurs, si l'on normalise les courbes contrainte - déformation pour chaque structure mésoscopique par la valeur maximale observée, on obtient en première approximation une courbe identique.

Nous avons également montré que l'angle de frottement interne mobilisé présente un lien étroit avec l'angle de frottement local mobilisé aux contacts, ainsi qu'avec le pourcentage de contacts glissants dans chaque structure mésoscopique. Ainsi, les mécanismes se produisant au niveau des contacts d'une structure mésoscopique dépendent fortement de la texture de cette dernière. Cette analyse menée à l'échelle mésoscopique, prenant en compte la texture, a donc permis de relier l'angle de frottement interne mobilisé, variable considérée dans une approche de type milieu continu, à l'angle de frottement local mobilisé au contact, variable considérée dans une approche de type milieu discret.



# Chapitre 7

## Relation contrainte-déformation à l'échelle mésoscopique

### Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la relation entre la contrainte et la déformation à l'échelle mésoscopique. L'état caractéristique à l'échelle mésoscopique est d'abord analysé afin de déterminer la valeur caractéristique qui limite les comportements contractant et dilatant des structures mésoscopiques. La relation contrainte - déformation à l'échelle mésoscopique est ensuite présentée sous la forme d'une relation contrainte-dilatance.

### 7.1 Etat de l'art

Le comportement plastique d'un matériau peut être décrit par un critère de plasticité et un potentiel plastique. Pour une plasticité associée, le critère de plasticité et le potentiel plastique coïncident. Les matériaux granulaires sont considérés le plus souvent comme des matériaux ayant une plasticité non associée. Le *critère de plasticité de Mohr-Coulomb* est largement accepté, dans la littérature, comme critère de plasticité pour les matériaux granulaires et le potentiel plastique est le plus souvent exprimé sous la forme d'une *relation contrainte - dilatance*, par exemple la loi de Rowe (Rowe, 1962).

#### 7.1.1 Critère de plasticité de Mohr-Coulomb

Le critère de plasticité de Mohr-Coulomb s'écrit sous la forme suivante pour un matériau granulaire non cohésif :

$$\tau = \sigma_n \tan \varphi, \quad (7.1)$$

où  $\tau$  est la contrainte tangentielle,  $\sigma_n$  la contrainte normale et  $\varphi$  l'angle de frottement interne mobilisé du matériau.

En termes de contraintes principales majeure  $\sigma_1$  et mineure  $\sigma_3$  ce critère s'écrit :

$$f(\sigma_1, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi = 0. \quad (7.2)$$

On remarque que la contrainte intermédiaire  $\sigma_2$  n'intervient pas dans ce critère.

Les matériaux granulaires présentent également un phénomène d'écroûissage : l'écroûissage isotrope provenant de l'évolution de la densité (indice des vides  $e$ , nombre de coordination  $\bar{N}$ , etc.) et l'écroûissage cinématique provenant de l'anisotropie en terme d'orientation des normales de contact (tenseur d'anisotropie  $\mathbf{H}$ , etc.). Ce critère évolue donc en fonction de ces paramètres :  $f(\sigma_1, \sigma_3, \mathbf{H}, e, \bar{N}) = 0$ .

### 7.1.2 Relation contrainte-dilatance

Il est communément connu dans la littérature qu'un matériau granulaire dense se dilate, et qu'un matériau lâche se contracte, au cours d'un cisaillement. Le premier a donc une résistance plus importante que le dernier. Ceci signifie que le frottement interne mobilisé  $\varphi$  dépend significativement de la capacité de dilatance des matériaux granulaires (Casagrande, 1940; Taylor, 1948; Bishop, 1954).

La contractance et la dilatance d'un matériau granulaire dense au cours d'une sollicitation déviatoire sont expliquées d'un point de vue micromécanique par Luong (1980) : l'application de la sollicitation déviatoire à partir d'un état de contrainte isotrope provoque initialement un *serrage* de la structure du matériau, puis le *désenchevêtrement* au sein du milieu lorsque le niveau de la sollicitation atteint une valeur caractéristique, ce qui génère le phénomène de dilatance.

Basée sur la condition d'équilibre statique, Rowe (1962) a obtenu la relation suivante entre contrainte et dilatance :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\phi_\mu\right)\left(1 + \frac{\delta\varepsilon_v}{\delta\varepsilon_1}\right). \quad (7.3)$$

Cette relation a été l'objet de nombreuses discussions : elle est soutenue en particulier par Horne (1965) mais critiquée en particulier par Roscoe et Schofield (1964).

La relation (7.3) peut également être écrite :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)_{\text{crit}} \left(1 + \frac{\delta\varepsilon_v}{\delta\varepsilon_1}\right), \quad (7.4)$$

où  $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)_{\text{crit}}$  est le rapport des contraintes à l'état critique (c'est-à-dire à  $\delta\varepsilon_v = 0$ ).

Bolton (1986) a montré que la relation de Rowe donne une relation presque linéaire entre l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et l'angle de dilatance  $\psi$  (cf. figure 7.1) :

$$\varphi = \varphi_{\text{crit}} + 0.8\psi. \quad (7.5)$$

Le potentiel plastique est défini par :

$$g = \sigma_1 - \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} \sigma_2. \quad (7.6)$$

## 7.2 Relations entre la contrainte et la déformation à l'échelle mésoscopique

On étudie ici le comportement des matériaux granulaires à l'échelle mésoscopique. La notion, l'état caractéristique à cette échelle est analysée dans la pre-

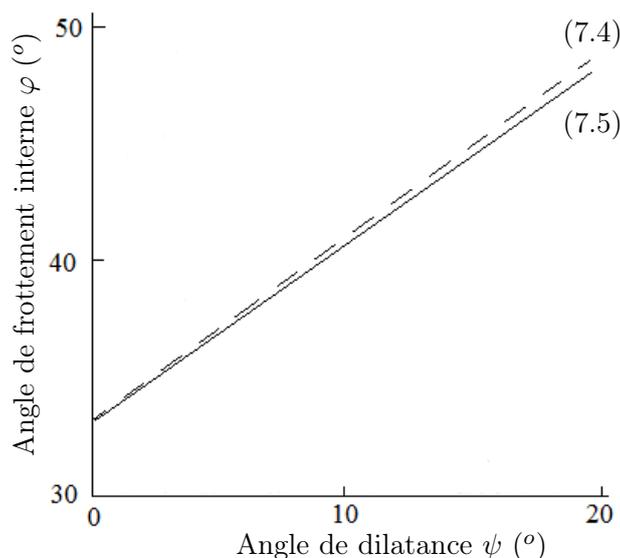


FIGURE 7.1 – Relations contrainte-dilatance (Bolton, 1986)

mière section. La deuxième section est consacrée la présentation des liens entre la contrainte et la déformation à l'échelle mésoscopique.

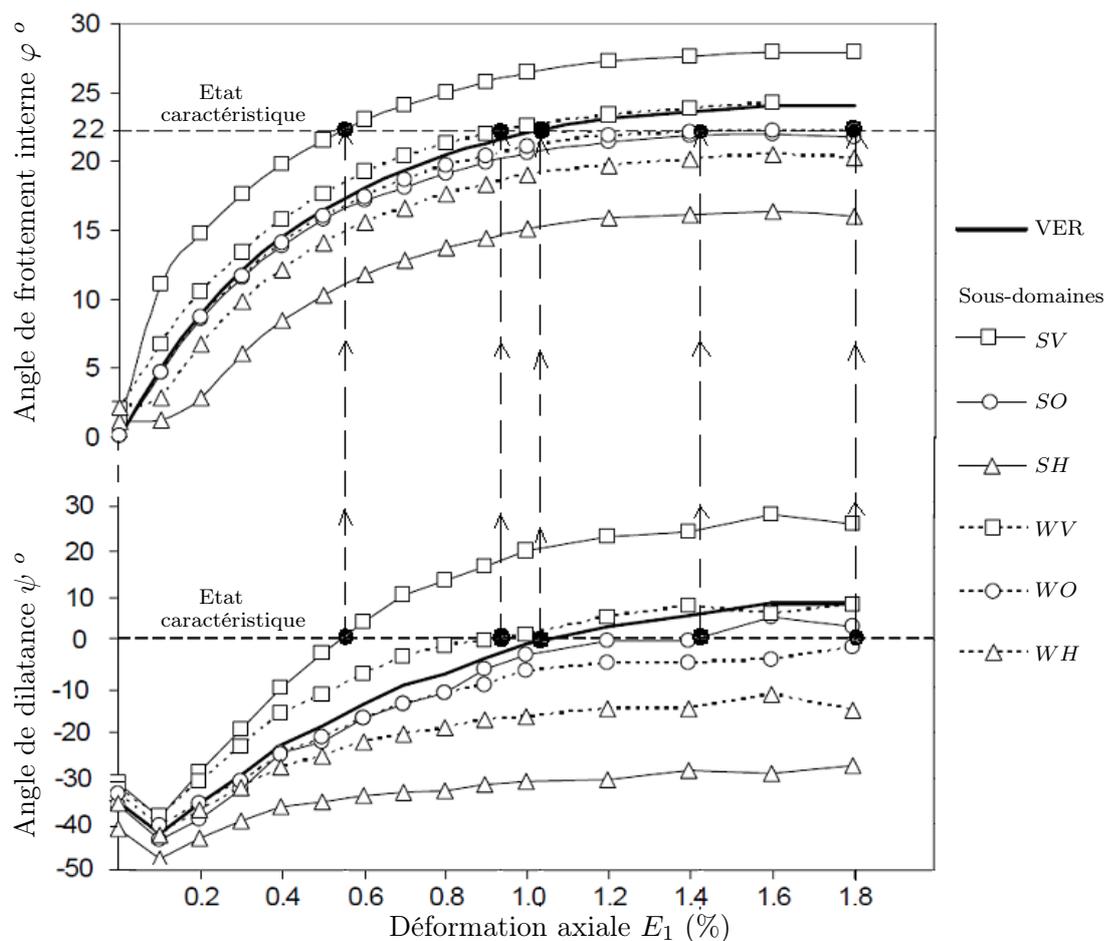
### 7.2.1 Etat caractéristique à l'échelle mésoscopique

Un matériau dense soumis à une sollicitation déviatoire se contracte d'abord, et lorsque le niveau de la sollicitation atteint une valeur caractéristique, le matériau se dilate. L'état de transition entre la phase de contractance et la phase de dilatance est l'état caractéristique. L'angle de frottement interne mobilisé du matériau à l'état caractéristique est nommé *angle de frottement interne caractéristique*, noté  $\Phi_o$ . Comme analysé dans la section 5.4.2.6, les structures mésoscopiques atteignent l'état caractéristique différemment suivant leur texture (le degré d'allongement et l'orientation) : les structures allongées dans la direction majeure macroscopique atteignent l'état caractéristique avant l'assemblage, tandis que les structures allongées dans la direction mineure n'atteignent même pas l'état caractéristique dans la plage de déformation étudiée. Pour analyser ce phénomène, on trace les évolutions de l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et de l'angle de dilatance  $\psi$ , en fonction de la déformation axiale  $E_1$ , pour les six types de sous-domaines sur la même figure 7.2. L'état caractéristique correspond à la ligne  $\psi = 0$ . Les angles de frottement interne caractéristique  $\varphi_o$  pour les sous-domaines  $SV$ ,  $SO$ ,  $WV$ ,  $WO$ , et  $\Phi_o$  pour l'assemblage, sont marqués par des points sur la figure 7.2, et sont également présentés dans le tableau 7.2. Sur cette figure, les sous-domaines  $SH$ ,  $WH$  n'atteignent pas encore l'état caractéristique. On trouve alors que les sous-domaines  $SV$ ,  $SO$ ,  $WV$ ,  $WO$  ont des angles de frottement interne caractéristique  $\varphi_o$  qui sont très proches quels que soit leur degré d'allongement et leur orientation, et qui sont également très proches de l'angle de frottement interne caractéristique  $\Phi_o$  de l'assemblage. L'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  pour les sous-domaines  $SH$ ,  $WH$  n'atteint pas la ligne  $\varphi = \Phi_o$ , ces sous-domaines continuent donc à se contracter tout au long de la sollicitation. Il semble que *les structures mésoscopiques atteignent l'état caractéris-*

	Assemblage	Types des sous-domaines					
		$WV$	$WO$	$WH$	$SV$	$SO$	$SH$
$E_1$ caractéristique	1.0%	0.9%	1.8%	$\infty$	0.5%	1.4%	$\infty$
$\phi_o$ caractéristique	22.07	22.01	22.18	$\infty$	22.21	21.81	$\infty$

**TABLE 7.1** – Niveaux de déformation axiale  $E_1$  caractéristique et angle de frottement interne caractéristique  $\psi_o$  pour les six types de sous-domaines.

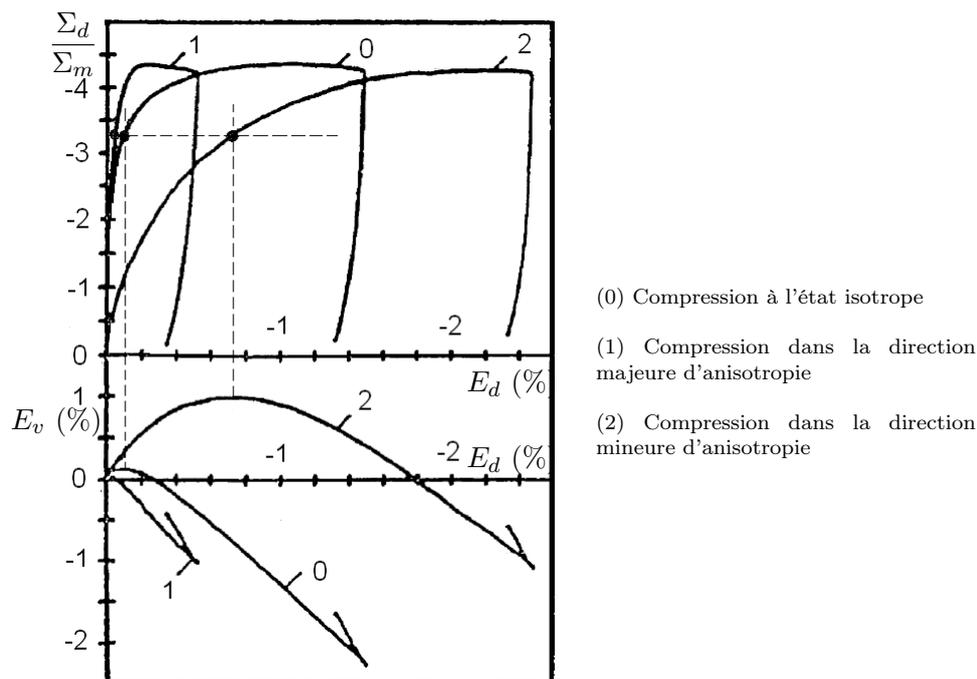
tique, indépendamment de leur texture, et approximativement pour la même valeur caractéristique de la sollicitation déviatoire qui est leur appliquée.



**FIGURE 7.2** – Evolutions de l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et de l'angle de dilataance  $\psi$  en fonction de la déformation axiale  $E_1$ .

Il semble que l'indépendance de la valeur caractéristique vis-à-vis de l'état interne, surtout de l'anisotropie des matériaux granulaires à l'échelle macroscopique, peut être observée dans la campagne d'essais de compressions successives sur un matériau granulaire à différents états, réalisée par Cambou et Lanier (1988) et mentionnée précédemment. On peut constater (figure 7.3) que le matériau pour les trois compressions atteint l'état caractéristique pour des niveaux de déformation différents, mais approximativement pour le même rapport de contraintes  $\Sigma_d/\Sigma_m$ .

Il est intéressant de noter que les structures mésoscopiques allongées dans les directions majeure et mineure macroscopiques se comportent d'une façon similaire à



**FIGURE 7.3** – Rapports des contraintes  $\Sigma_d/\Sigma_m$  caractéristique pour différentes compressions d'un matériau granulaire à l'état isotrope et à un état anisotrope (Cambou et Lanier, 1988).

des matériaux anisotropes sollicités respectivement dans la direction majeure d'anisotropie et dans la direction mineure d'anisotropie. La différence entre les structures mésoscopiques et les structures globales des matériaux granulaires est que les structures globales sont beaucoup plus stables que les structures mésoscopiques : les structures globales peuvent évoluer fortement lorsqu'elles supportent la sollicitation ; la perte de quelques contacts ne conduit pas à un effondrement de ces structures ; ce n'est pas le cas pour les structures mésoscopiques pour lesquelles la perte d'un contact peut provoquer un effondrement.

### 7.2.2 Relation entre l'angle de frottement interne mobilisé et l'angle de dilatance à l'échelle mésoscopique

Pour étudier la relation entre l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et l'angle de dilatance  $\psi$  pour des sous-domaines, on superpose les courbes représentant les relations  $\varphi - \theta$  et  $\psi - \theta$  sur les mêmes diagrammes polaires de la figure 7.4 pour deux niveaux de déformation (a)  $E_1 = 0.6\%$  et (b)  $E_1 = 1.2\%$ , respectivement dans les zones de contractance et de dilatance. Les cercles sur la figure correspondent à l'angle de frottement interne caractéristique  $\Phi_o$  de l'assemblage. Cette figure montre une relation significative entre l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et l'angle de dilatance  $\psi$ , particulièrement pour les sous-domaines fortement allongés  $S$  :

- pour une déformation axiale  $E_1 = 0.6\%$ ,  $\varphi$  est inférieur à la valeur caractéristique  $\Phi_o$  pour la plupart des sous-domaines : la plupart des sous-domaines se contractent. Cependant,  $\varphi$  est beaucoup plus important pour les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique que  $\varphi$  pour les sous-domaines

orientés dans la direction mineure macroscopique : les sous-domaines orientés dans la direction majeure macroscopique se contractent alors beaucoup moins que ceux orientés dans la direction mineure macroscopique. Il peut également être noté que  $\varphi$  pour les sous-domaines  $S$  orientés dans la direction majeure macroscopique atteint juste la valeur caractéristique  $\Phi_o$  : ces sous-domaines commencent donc à se dilater ;

- pour une déformation axiale  $E_1 = 1.2\%$ ,  $\varphi$  dépasse largement  $\Phi_o$  pour les sous-domaines  $S$  orientés dans la direction majeure macroscopique : ces sous-domaines se dilatent donc fortement, alors que  $\varphi$  reste toujours inférieur à  $\Phi_o$  pour les sous-domaines  $S$  orientés dans la direction mineure macroscopique : ces sous-domaines continuent donc à se contracter.

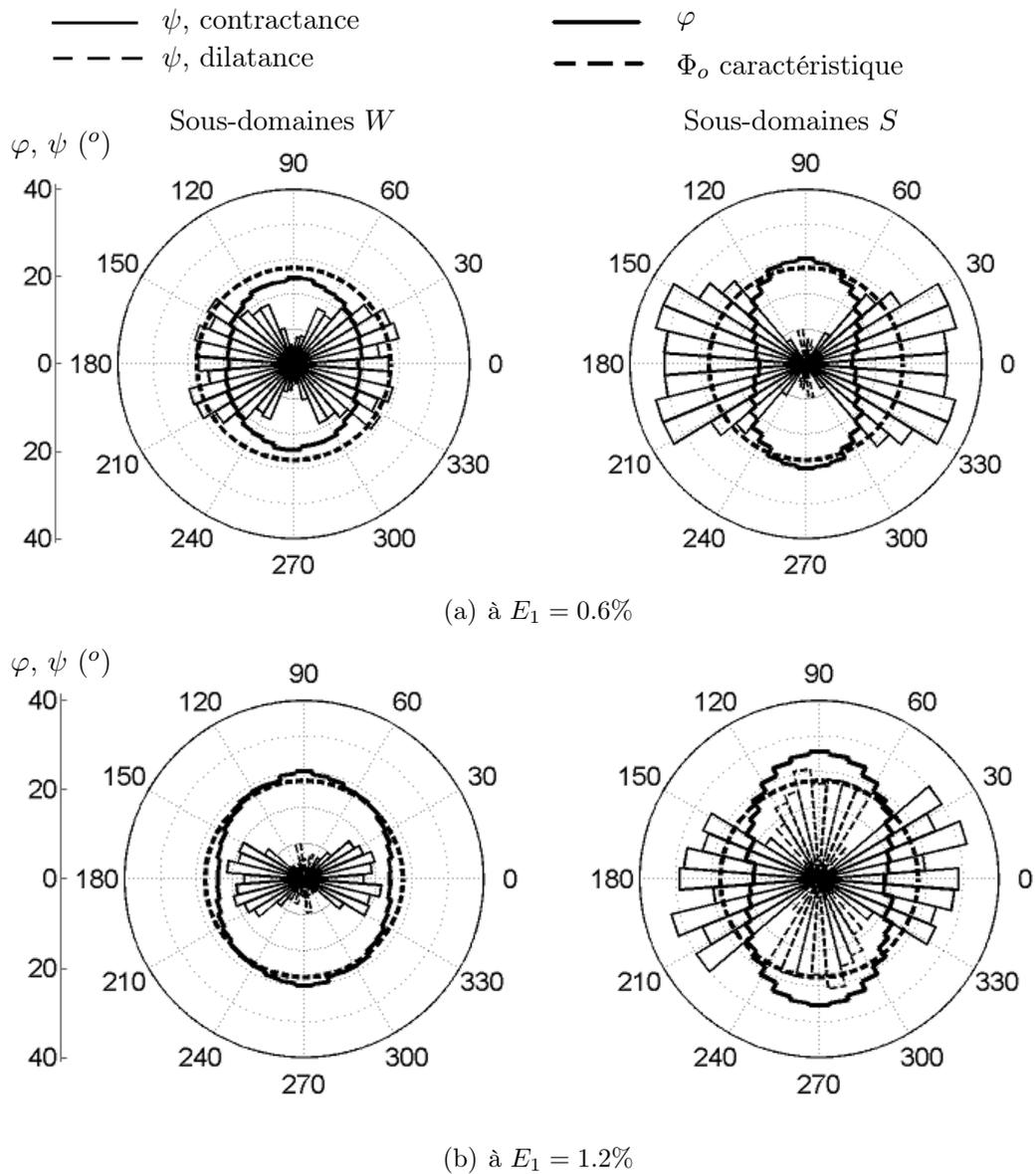
Afin d'étudier plus précisément la relation entre l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et l'angle de dilataance  $\psi$ , on trace les couples de valeurs  $(\varphi, \psi)$  des sous-domaines correspondants à chaque élément polaire et à chaque classe de sous-domaines pour différents niveaux de déformation de l'assemblage :  $E_1 = 0.3\%$ ,  $0.6\%$ ,  $0.8\%$ ,  $1.0\%$ ,  $1.2\%$ ,  $1.4\%$  et  $1.6\%$  (figure 7.5). Cette figure montre la relation significative entre l'angle de frottement interne  $\varphi$  et l'angle de dilataance  $\psi$  à l'échelle mésoscopique. On peut constater que dans la plage de variation de l'angle de dilataance  $\psi \geq -20^\circ$ , l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  des sous-domaines présente une tendance à l'évolution linéaire avec l'angle de dilataance  $\psi$  pour les sous-domaines fortement allongés  $S$  ainsi que pour les sous-domaines faiblement allongés  $W$ . Pour la plage  $\psi < -20^\circ$ , cette tendance est beaucoup moins marquée. Il peut être noté que les points particuliers sur cette figure, qui ne suivent pas la tendance constatée, viennent essentiellement de l'état de  $E_1 = 0.3\%$  qui est proche de l'état de contrainte isotrope de l'assemblage. L'analyse de l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  des sous-domaines aux états proches de l'état de contrainte isotrope s'avère difficile car les valeurs de  $\varphi$  sont très dispersées.

On utilise la méthode de regression linéaire pour définir la tendance à l'évolution linéaire de  $\varphi$  en fonction de  $\psi$  pour les deux classes des sous-domaines. Les régressions linéaires pour la classe  $W$  et pour la classe  $S$  donnent respectivement les relations suivantes :

$$\varphi = 22.56^\circ + 0.236\psi, \quad \text{pour la classe } W, \quad (7.7)$$

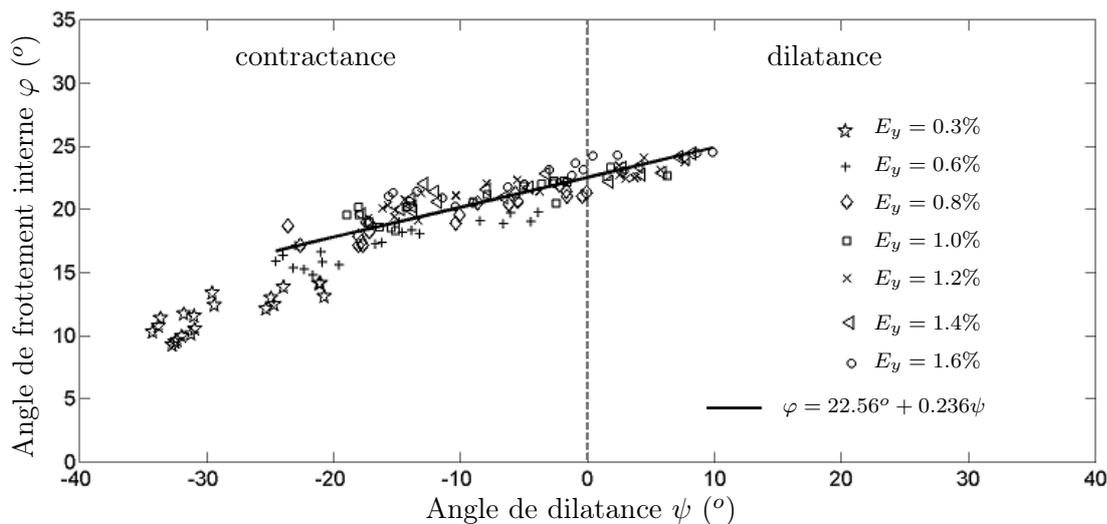
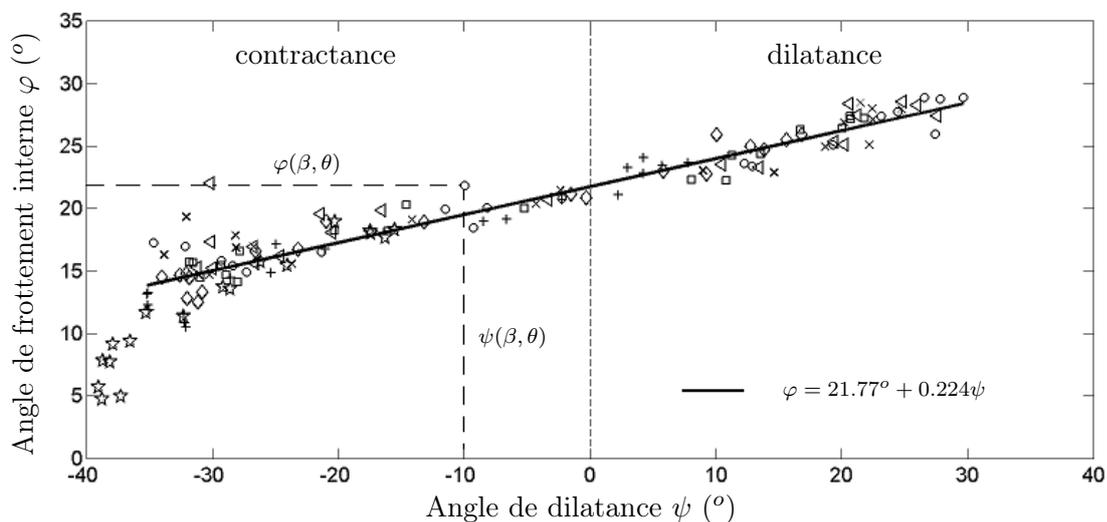
$$\varphi = 21.77^\circ + 0.224\psi, \quad \text{pour la classe } S, \quad (7.8)$$

comme représenté sur la figure 7.5. On trouve que ces deux relations sont assez similaires, ce qui montre que la relation entre l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et l'angle de dilataance  $\psi$  des sous-domaines est indépendante du degré d'allongement  $\beta$  ainsi que de l'orientation  $\theta$  des sous-domaines. De plus, les constantes dans ces deux relations ( $22.56^\circ$  pour la classe  $W$  et  $21.77^\circ$  pour la classe  $S$ ) sont très proches de l'angle de frottement interne caractéristique  $\Phi_o = 22.07^\circ$  de l'assemblage, ce qui confirme que  $\Phi_o$  est approximativement une valeur limite entre le comportement de contractance et le comportement de dilataance à l'échelle mésoscopique. Il est à noter qu'une relation linéaire entre l'angle de frottement interne mobilisé et l'angle de dilataance, en particulier au pic de la courbe contrainte - déformation (relation  $\Phi_{\max} - \Psi_{\max}$ ), à l'échelle du VER des matériaux granulaires, a été proposée par de nombreux auteurs, en particulier, par Bolton (1986) et Saïm (1997). Cependant, les pentes des relations  $\Phi_{\max} - \Psi_{\max}$  définies (0.8 d'après Bolton (1986)



**FIGURE 7.4** – Superposition des courbes de l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$ , et de l'angle de dilatance  $\psi$ , en fonction de l'orientation  $\theta$  des sous-domaines pour les deux classes  $W$  et  $S$  pour deux niveaux de déformation (a)  $E_1 = 0.6\%$  et (b)  $E_1 = 1.2\%$ .

et 0.6 d'après Saïm (1997)) sont significativement plus importantes que celles des relations constatées à l'échelle mésoscopique de notre analyse (0.236 pour la classe  $W$  et 0.224 pour la classe  $S$ ), ce qui résulte certainement de la forme circulaire des particules et de la nature bidimensionnelle du matériau utilisé ici. Les analyses ci-dessus permettent de conclure que *les structures mésoscopiques présentent une relation linéaire entre l'angle de frottement interne mobilisé et l'angle de dilataance, indépendamment de leur texture, et qu'elles prennent approximativement la valeur de l'angle de frottement interne caractéristique macroscopique comme une limite entre leurs comportements contractant et dilatant.*

(a) Pour les sous-domaines faiblement allongés  $W$ (b) Pour les sous-domaines fortement allongés  $S$ 

**FIGURE 7.5** – Relation entre l'angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  et l'angle de dilataance  $\psi$  pour les deux classes  $W$  et  $S$  de sous-domaines.

## Conclusions

L'analyse menée dans ce chapitre a permis de montrer que déformation et contrainte, à l'échelle mésoscopique, sont significativement reliées par des lois de comportement locales faisant intervenir la texture des structures mésoscopiques.

Les différentes structures mésoscopiques atteignent l'état caractéristique pour des niveaux de déformation macroscopique différents mais pour des angles de frottement interne mobilisé caractéristique sont proches de celui à l'échelle macroscopique. De plus, retrouve la relation linéaire de Rowe entre l'angle de dilatance et l'angle de frottement interne mobilisé à l'échelle mésoscopique, indépendamment de la texture mésoscopique. Pour confirmer ces résultats, il est nécessaire de vérifier leur validité pour des échantillons de différentes densités ainsi que pour différents niveaux de sollicitations, ce qui constitue un travail actuellement en cours.



Troisième partie  
Echelle mésoscopique en 3D



# Chapitre 8

## Partition des milieux granulaires 3D

### 8.1 Introduction

Les analyses précédentes permettent de montrer qu'il existe une échelle intermédiaire entre les échelles macroscopique et microscopique pour les milieux granulaires bidimensionnel, à laquelle la déformation et les contraintes présentent des hétérogénéités structurées. De plus, il existe également une relation entre ces deux variables à cette échelle. La définition d'une échelle mésoscopique dans le cas d'un milieu granulaire 2D est évidente ce qui n'est pas le cas pour un milieu tridimensionnel.

Ce chapitre est centré sur l'analyse d'un milieu tridimensionnel. Nous présentons en particulier une voie permettant de définir les structures mésoscopiques dans ce type de milieu, ce qui constitue un problème largement ouvert.

### 8.2 Description du milieu granulaire 3D étudié

L'assemblage utilisé dans cette analyse est composé de 6 000 particules sphériques générées de façon aléatoire dans une boîte parallélépipédique de hauteur égale à 2.25 m et de surface de base égale à  $1.5 \times 1.5$  m. Les diamètres des particules sont distribués uniformément de 2.14 mm à 4.28 mm. L'assemblage est dans un état assez dense avec un indice des vides égal à 0.72 et un nombre de coordination égal à 3.6. Bien que l'assemblage soit compacté, il existe environ 7% de particules isolées. Ces particules isolées sont temporairement éliminées lorsque l'on construit un graphe de particules pour cet assemblage. La figure 8.1 représente l'assemblage utilisé.

### 8.3 Représentation géométrique de l'assemblage granulaire 3D

#### 8.3.1 Représentation par un système de Delaunay

Comme mentionné dans la section 4.1.1.3, un assemblage granulaire tridimensionnel peut être représenté par un système de Delaunay. Ce système est composé de cellules de Delaunay qui sont des tétraèdres dont les quatre sommets sont occupés par quatre centres de particules. Chaque cellule de Delaunay a alors 4 sommets, 6

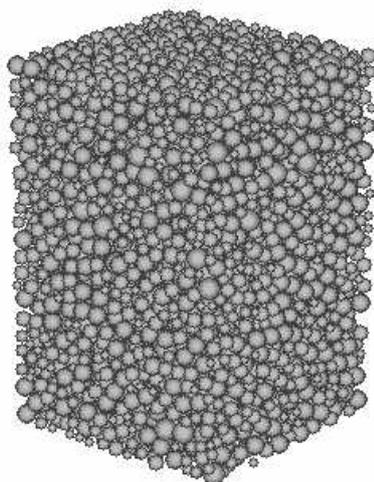


FIGURE 8.1 – Assemblage de sphères utilisé.

côtés et 4 faces (figure 8.2). On note également que deux cellules de Delaunay ont une face triangulaire commune.

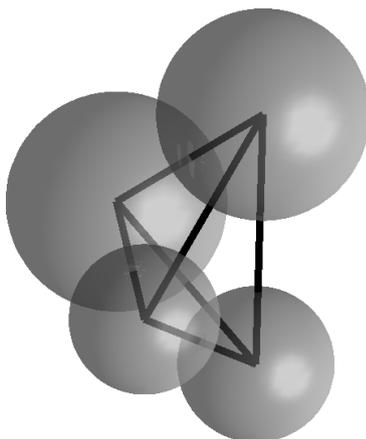


FIGURE 8.2 – Cellule de Delaunay.

Les structures mésoscopiques définies pour les milieux granulaires 2D sont des structures fermées de particules en contact, elles présentent donc une certaine capacité de résistance mécanique aux chargements imposés. Le problème de base dans toute tentative d'extrapolation du cas 2D au cas 3D est que les tétraèdres définis par la tessellation de Delaunay en 3D ne constituent pas des structures fermées de particules en contact. Il s'agit donc d'essayer de définir, par association de tétraèdres, des structures locales représentatives d'un comportement mécanique local.

La technique d'association que nous proposons est basée sur la remarque suivante : deux tétraèdres adjacents sont associés l'un avec l'autre si ils sont considérés *corrélés* et un sous-domaine est défini comme un ensemble de tétraèdres voisins associés. Il est donc important, dans cette association, de définir ce qui est entendu par *corrélation* de deux tétraèdres adjacents. En 2D, deux triangles adjacents sont considérés corrélés si deux particules sur leur côté commun ne sont pas en contact.

Cependant, la définition d'une corrélation de deux cellules de Delaunay n'est pas aisée en 3D et fait l'objet de la section suivante.

## 8.3.2 Critères d'association des tétraèdres

### 8.3.2.1 Critère basé sur les contacts entre particules

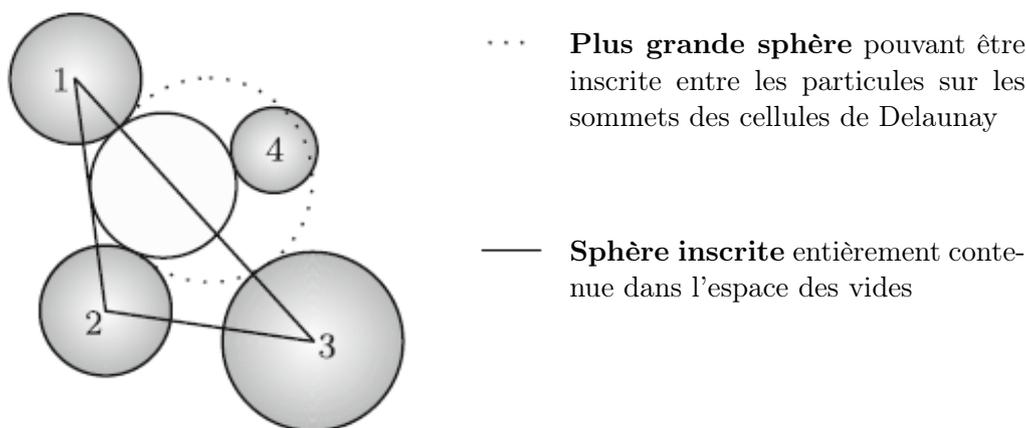
En s'inspirant de la partition des milieux granulaires bidimensionnels, on considère que deux tétraèdres adjacents sont corrélés s'il y a, au moins, deux particules sur leur face commune qui ne sont pas en contact. L'association des tétraèdres se fait tant qu'il existe des tétraèdres corrélés dans le système de Delaunay. Pour l'assemblage étudié dans cette analyse, l'association des 29 807 tétraèdres dans le système de Delaunay donne 4 206 sous-domaines, parmi lesquels un sous-domaine occupe 74 % du volume total de l'assemblage. La partition du milieu, selon cette définition de la corrélation de tétraèdres, ne donne donc pas un résultat satisfaisant en terme de distribution du volume des sous-domaines dans le graphe obtenu. Il apparaît alors que la partition d'un milieu granulaire tridimensionnel, basée sur les contacts entre particules, est très difficile. Pour contourner cette difficulté, il faut définir d'autres critères d'association. Dans la suite, on présente des critères d'association qui se basent sur la distribution des vides dans les milieux granulaires.

### 8.3.2.2 Critères basés sur les vides dans les milieux granulaires

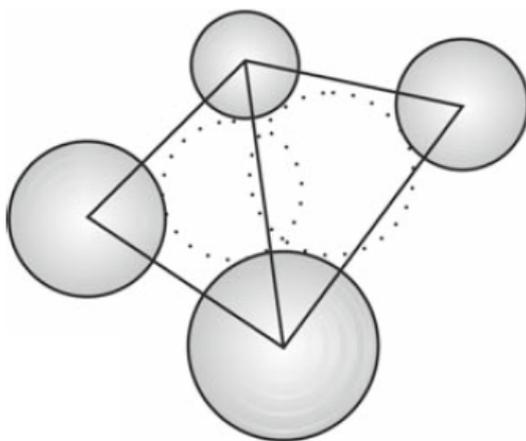
#### a) Critères basés sur la plus grande sphère contenue dans chaque tétraèdre (Critère I)

Pour étudier la distribution des pores dans les milieux poreux, Al-Raoush *et al.* (2003) ont suggéré d'associer les tétraèdres voisins pour obtenir des pores qui sont plus réalistes que les pores localisés dans les tétraèdres individuels. Cette association se fait par un critère d'association défini à partir du concept de *la plus grande sphère entièrement contenue dans l'espace des vides à l'intérieur d'un tétraèdre*. Il s'agit donc d'une sphère qui peut être inscrite entre les quatre particules localisées aux sommets du tétraèdre. L'identification de cette sphère se fait par un processus d'optimisation numérique, détaillé dans Al-Raoush *et al.* (2003). La sphère attachée à un tétraèdre n'est pas nécessairement entièrement inscrite à l'intérieur du tétraèdre (figure 8.3) et deux sphères attachées à deux tétraèdres adjacents peuvent se chevaucher (figure 8.4). Ce chevauchement est utilisé comme critère d'association de deux tétraèdres adjacents.

Reboul *et al.* (2008a) et Reboul (2008b) ont utilisé cette technique d'association des tétraèdres afin d'étudier le problème de transport de particules dans les milieux granulaires. Les auteurs ont élargi le niveau d'association en considérant que, pour un tétraèdre donné, il peut être associé, non seulement, avec les quatre tétraèdres adjacents (niveau 1), mais aussi avec les trois autres tétraèdres contigus à chacun des quatre tétraèdres adjacents (niveau 2). De plus, les auteurs ont également proposé un niveau d'association intermédiaire (niveau 1 bis). Pour ce niveau, un tétraèdre peut être associé avec les tétraèdres adjacents si les deux conditions suivantes sont satisfaites : il y a un chevauchement entre les sphères inscrites qui leur sont attachées et le diamètre de la sphère inscrite du tétraèdre adjacent est inférieur à celui de la sphère inscrite du tétraèdre considéré.



**FIGURE 8.3** – Représentation 2D du problème de la sphère inscrite dans un triangle de Delaunay défini à partir des particules 1, 2, et 3.



**FIGURE 8.4** – Deux cellules de Delaunay peuvent être associées si les deux sphères attachées se chevauchent.

La figure 8.5 présente différentes distributions du volume des vides à l'intérieur d'un assemblage de sphères avec une granulométrie serrée, obtenues avec 4 niveaux d'association. On trouve que l'association des tétraèdres voisins basée sur cette technique donne des distributions du volume des vides beaucoup plus étalées que celle correspondant à la non association. Cette technique apparaît donc appropriée à l'analyse de la distribution des vides dans les matériaux granulaires. Cependant, l'identification de la plus grande sphère contenue dans un tétraèdre étant basée sur un processus d'optimisation, cette méthode semble lourde à utiliser. De plus, la partition en sous-domaines nécessite le choix d'un point de départ et ne conduit donc pas à une solution unique. En parallèle de cette technique d'association, nous proposons donc d'autres critères d'association qui semblent plus simples à mettre en œuvre.

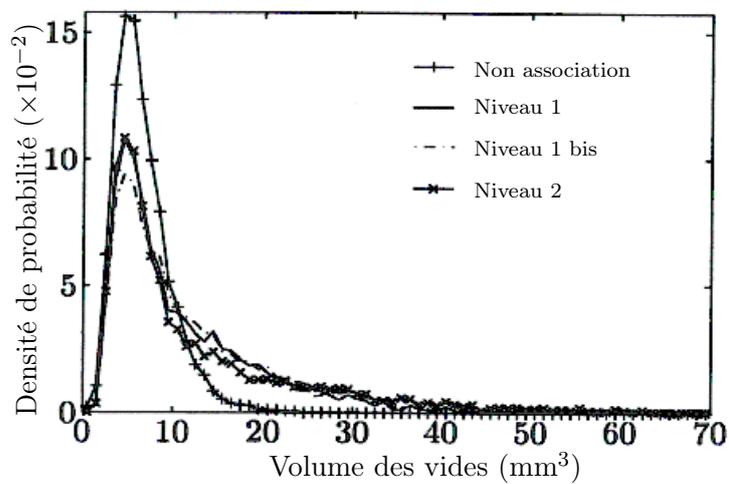


FIGURE 8.5 – Densité de probabilité du volume des vides pour 4 niveaux d'association.

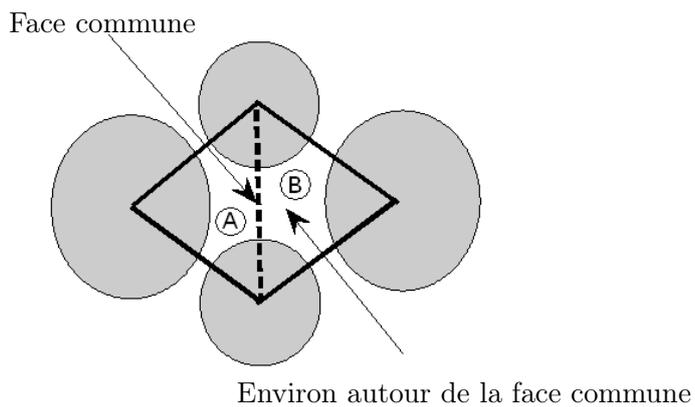
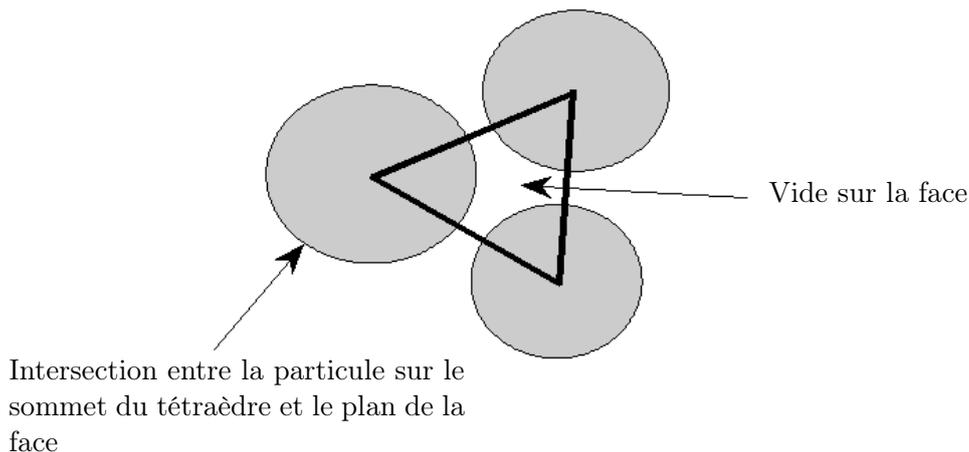


FIGURE 8.6 – Représentation 2D de deux cellules de Delaunay adjacentes (A) et (B) autour d'une face triangulaire commune.



**FIGURE 8.7** – Représentation d'une face triangulaire dans le réseau de Delaunay et de l'espace de vide sur la face.

#### b) Critère basé sur la porosité des faces (critère II)

Comme précisé précédemment, deux cellules adjacentes de Delaunay ont une face commune (figure 8.6). La corrélation de deux cellules adjacentes peut donc être définie *via* la face commune. En 2D, deux triangles adjacents sont associés l'un avec l'autre si leur côté commun est *ouvert*. En 3D, on peut définir également que deux tétraèdres adjacents sont corrélés si leur face commune est définie comme *ouverte*. En effet, il existe un espace des vides sur chaque face dans le système de Delaunay. Cet espace des vides, appelé *constriction*, est illustré sur la figure 8.7. La porosité de chaque face  $\delta$  peut être définie comme le rapport entre la taille de la constriction et la taille de la face. On peut définir qu'une face est ouverte si sa porosité  $\delta$  dépasse une valeur limite  $\delta_o$ . Le choix de la valeur limite  $\delta_o$  est fait de façon arbitraire, en se basant sur la distribution de la porosité de toutes les faces dans le système de Delaunay, comme illustré sur la figure 8.8. La valeur limite  $\delta_o$  obtenue dépend de la valeur  $p$  choisie ( $p$  signifie la proportion des faces ayant  $\delta \leq \delta_o$ ). L'association de tétraèdres a lieu tant qu'il y a des tétraèdres adjacents corrélés.

La figure 8.8 présente quatre distributions du volume des sous-domaines dans les graphes obtenus avec ce critère d'association et différentes valeurs de  $p$  ( $p = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ ), comparées avec la distribution obtenue sans association. On trouve que l'association des tétraèdres avec ce critère n'est pas efficace dans le sens où la distribution du volume des sous-domaines ne change pas significativement, en fonction de  $p$ , par rapport à la distribution dans le cas sans association. De plus, cette association engendre des sous-domaines qui ont un volume extrêmement important par rapport au volume moyen des sous-domaines. Ce critère d'association n'est donc pas approprié pour réaliser une partition des milieux granulaires tridimensionnels. Ce critère est modifié dans la section suivante.

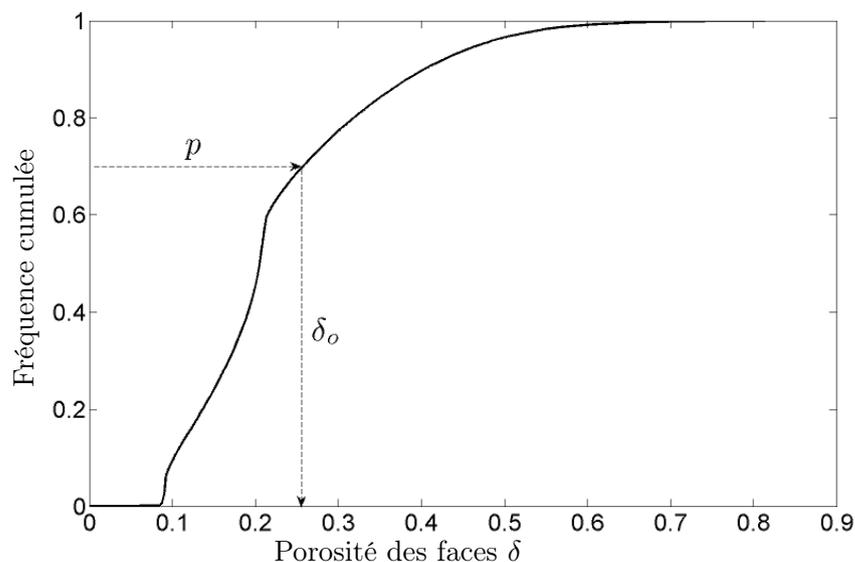


FIGURE 8.8 – Détermination du seuil d'association  $\delta_o$  grâce à la distribution des porosités des faces  $\delta$  dans le système de Delaunay.

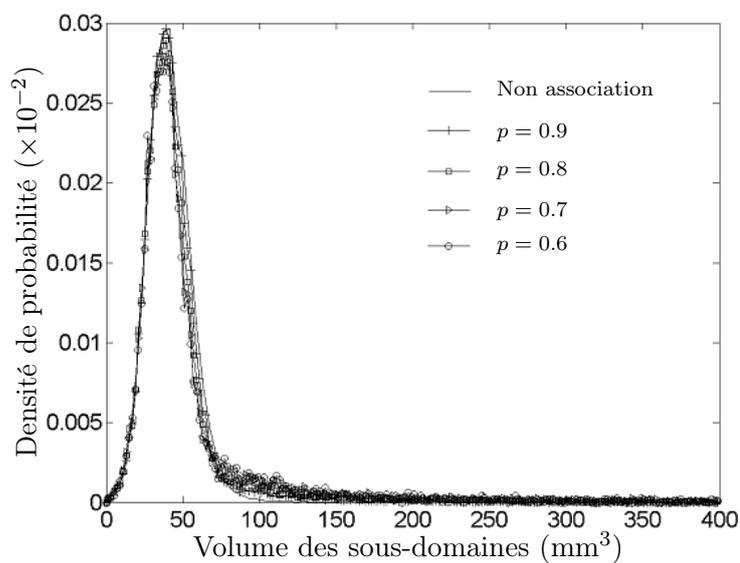
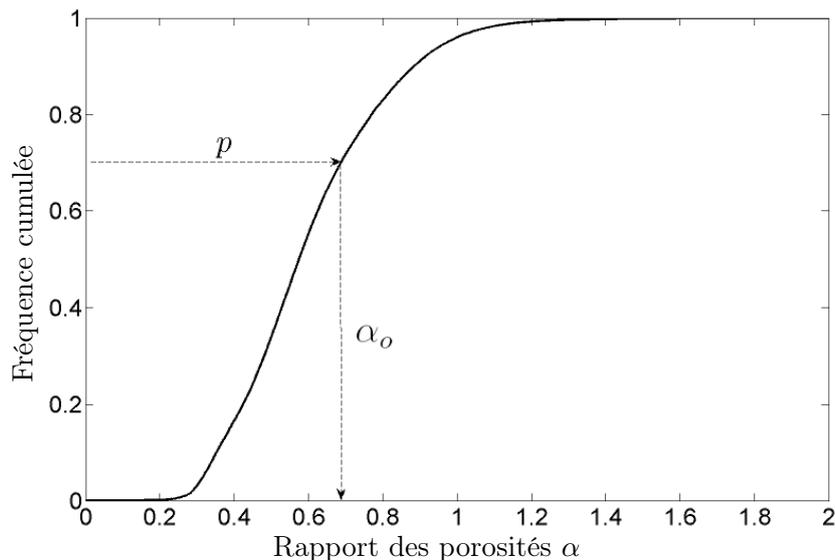


FIGURE 8.9 – Densité de probabilité du volume des sous-domaines dans les graphes construits avec le critère II et pour différentes valeurs de  $p$ .



**FIGURE 8.10** – Détermination du seuil d'association  $\alpha_o$  grâce à la distribution du rapport  $\alpha$  entre la porosité des faces  $\delta$  et la porosité moyenne  $\bar{\rho}$  des tétraèdres adjacents.

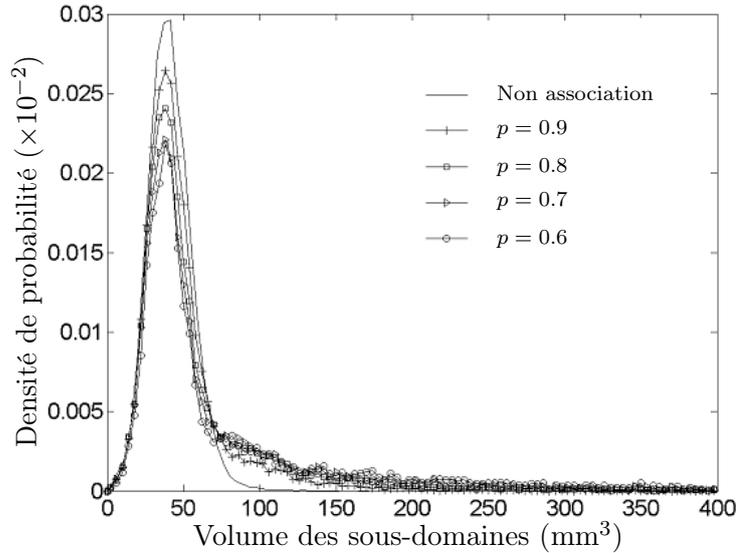
### c) Critère basé sur le rapport entre la porosité des faces et la porosité autour des faces (critère III)

La définition d'une face ouverte ou fermée doit se référer à l'environnement autour de cette face. Par exemple, une face est ouverte dans un environnement dense (porosité faible) mais elle peut être fermée dans un environnement lâche (porosité forte). L'environnement d'une face dans le système de Delaunay peut être défini comme l'espace occupé par deux tétraèdres adjacents (figure 8.6). Le niveau d'ouverture d'une face est proportionnel au rapport  $\alpha$  entre la porosité de la face  $\delta$  et la porosité de son environnement  $\bar{\rho}$ .

$$\alpha = \frac{\delta}{\bar{\rho}} = \frac{\delta}{\frac{V_A \rho_A + V_B \rho_B}{V_A + V_B}}, \quad (8.1)$$

où  $(V_A, \rho_A)$ ,  $(V_B, \rho_B)$  sont les couples porosité/volume des tétraèdres adjacents. Une face est définie comme ouverte si le rapport  $\alpha$  dépasse une valeur limite  $\alpha_o$ . Le choix de cette valeur limite est fait de façon arbitraire, en se basant sur la distribution de  $\alpha$  de toutes les faces dans le système de Delaunay, comme illustré sur la figure 8.10. La valeur limite  $\alpha_o$  définie dépend de la valeur  $p$  choisie ( $p$  représente la proportion des faces ayant  $\alpha \leq \alpha_o$ ). L'association des tétraèdres a lieu tant qu'il y a des tétraèdres adjacents corrélés.

La figure 8.11 présente les distributions du volume des sous-domaines dans les graphes construits avec ce critère d'association (critère III) et pour différentes valeurs de  $p$  ( $p = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ ), comparées avec la distribution du cas sans association. On trouve que l'association des tétraèdres avec ce critère donne des distributions significativement différentes de celle du cas sans association. La distribution du volume des sous-domaines s'atténue remarquablement lorsque l'on associe les tétraèdres corrélés et lorsque la valeur  $p$  diminue. Cela montre qu'une part significative



**FIGURE 8.11** – Densité de probabilité du volume des sous-domaines dans les graphes construits avec le critère III et pour différentes valeurs de  $p$ .

de tétraèdres devient corrélée d'après ce critère et le nombre de tétraèdres corrélés augmente quand  $p$  diminue. De plus, les distributions correspondant à des valeurs de  $p = 0.6$  et  $0.7$  sont assez similaires, ce qui signifie que la distribution du volume des sous-domaines obtenus par association évolue peu lorsque la valeur de  $p$  choisie est inférieure à  $0.7$ . En particulier, la valeur modale de ces distributions reste très proche de celle observée dans le cas sans association, ce qui résulte du fait que les sous-domaines tétraédriques sont prédominants dans les graphes obtenus comme montré sur les figures 8.12 et 8.13. Ce résultat est similaire à celui obtenu avec la technique d'association dans Reboul *et al.* (2008a) et Reboul (2008b).

Parmi un nombre  $N_T$  de tétraèdres dans le réseau de Delaunay, il existe un nombre  $N_T^1$  de tétraèdres non associés qui ne se trouvent pas corrélés avec d'autres tétraèdres et un nombre  $N_T^2$  de tétraèdres associés. Les tétraèdres associés forment un nombre de  $N_h$  de sous-domaines *non-tétraédriques*. La figure 8.14 présente les rapports  $N_T^1/N_T$  et  $N_T^2/N_h$  pour les graphes construits avec le critère III et pour différentes valeurs de  $p$ . Le nombre de tétraèdres non-associés diminue lorsque  $p$  diminue : il existe 67% de tétraèdres non associés dans le graphe correspondant à  $p = 0.9$  (10% des faces ouvertes dans le graphe), tandis que seuls 9% des tétraèdres se trouvent non associés lorsque  $p = 0.6$  (40% des faces ouvertes dans le graphe). Le rapport  $N_T^2/N_h$  représente le nombre de tétraèdres associés par sous-domaine non-tétraédrique. Le rapport  $N_T^2/N_h$  augmente lorsque  $p$  diminue. En moyenne, il y a environ 14 tétraèdres par sous-domaine non-tétraédrique lorsque  $p = 0.5$ , tandis que ce nombre est égal à 2 environ lors de  $p = 0.9$ . Ce résultat montre que *l'augmentation du nombre de tétraèdres associés lors d'une diminution de  $p$  ne conduit pas à une augmentation du nombre de sous-domaines non-tétraédriques, mais contribue à agrandir la taille des sous-domaines non-tétraédriques.*

On s'intéresse ici à la relation entre la porosité des sous-domaines et le nombre de tétraèdres par sous-domaine. Pour cela, on détermine la porosité moyenne des sous-domaines formés d'un nombre donné de tétraèdres. La figure 8.15 illustre cette

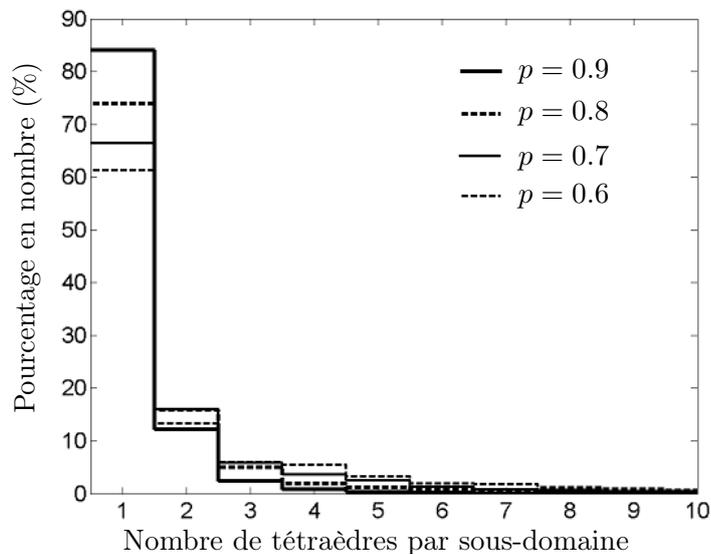


FIGURE 8.12 – Pourcentage en nombre de sous-domaines en fonction du nombre de tétraèdres par sous-domaine. Association des tétraèdres avec le critère III et pour différentes valeurs de  $p$ .

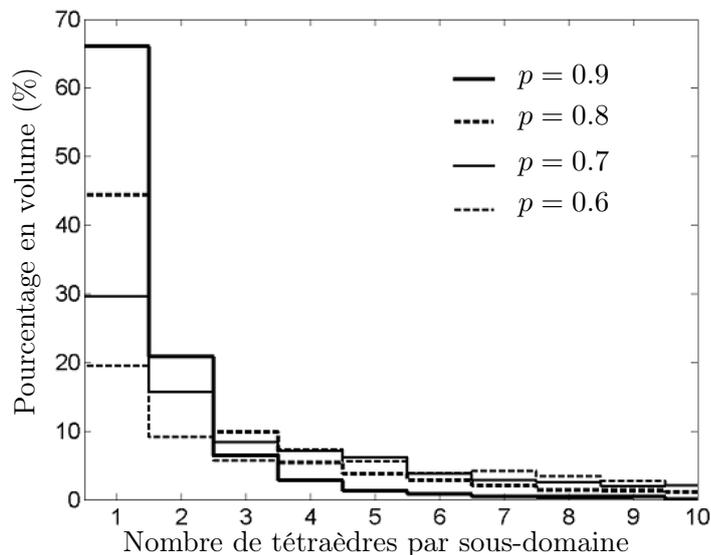
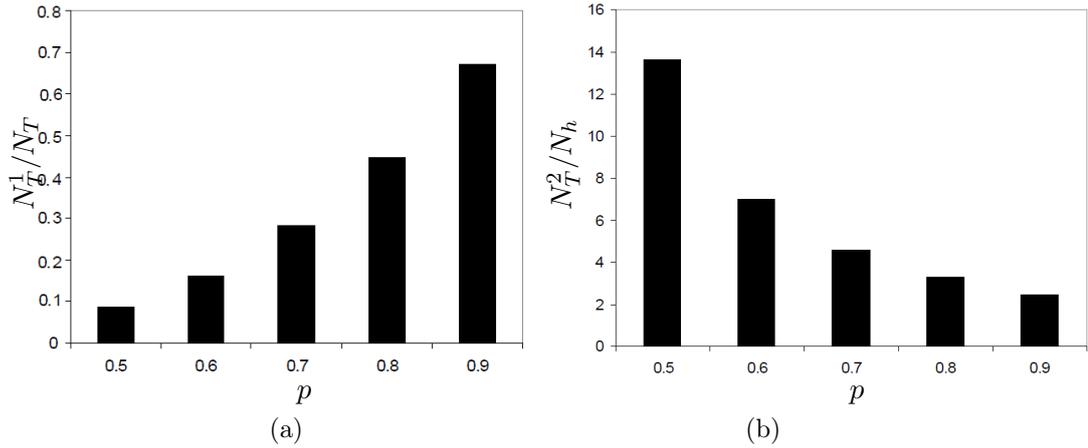


FIGURE 8.13 – Pourcentage en volume de sous-domaines en fonction du nombre de tétraèdres par sous-domaine. Association des tétraèdres avec le critère III et pour différentes valeurs de  $p$ .



**FIGURE 8.14** – (a) Nombre de tétraèdres non associés  $N_T^1$  sur nombre total de tétraèdres  $N_T$  dans le système de Delaunay, et (b) nombre de tétraèdres associés  $N_T^2$  sur nombre de sous-domaines non tétraédriques  $N_h$ . Association des tétraèdres avec le critère III et pour différentes valeurs de  $p$ .

relation pour les graphes construits avec le critère III et pour différentes valeurs de  $p$ . On remarque que le nombre de tétraèdres par sous-domaine est corrélé avec la porosité des sous-domaines : les sous-domaines tétraédriques occupent des zones denses dans le milieu tandis que les sous-domaines formés d'un nombre plus important de tétraèdres occupent des zones plus lâches. Cette relation est bien marquée pour  $p = 0.9$  et s'atténue lorsque  $p$  diminue. On peut voir également que la porosité des sous-domaines formés d'un même nombre de tétraèdres a tendance à diminuer lorsque  $p$  diminue : par exemple, les sous-domaines formés de 4 tétraèdres ont une porosité égale à 0.46 pour  $p = 0.9$ , tandis qu'ils ont une porosité égale à 0.34 pour  $p = 0.6$ .

Les résultats ci-dessus montrent que la méthode de partition d'un milieu granulaire 3D avec la prise en compte de la porosité de chaque face du réseau de Delaunay, relative à la porosité dans l'environnement de chaque face, et avec un choix raisonnable du paramètre  $p$  peut donner des résultats satisfaisants en terme de distribution du volume des sous-domaines. De plus, cette méthode permet de localiser les zones lâches et denses au sein du milieu, ce qui se traduit par une corrélation entre la porosité des sous-domaines et le nombre de tétraèdres par sous-domaines. Il est important, dans cette méthode de partition, de définir la valeur du paramètre  $p$  utilisé. Une faible valeur de  $p$  conduit à la génération de sous-domaines de volume très important dans la partition, alors qu'une valeur importante de  $p$  conduit à une partition peu différente du cas sans association des tétraèdres. Parmi les valeurs de  $p$  choisies dans cette analyse, il semble qu'une valeur de  $p = 0.7$  donne une bonne partition du milieu granulaire 3D.

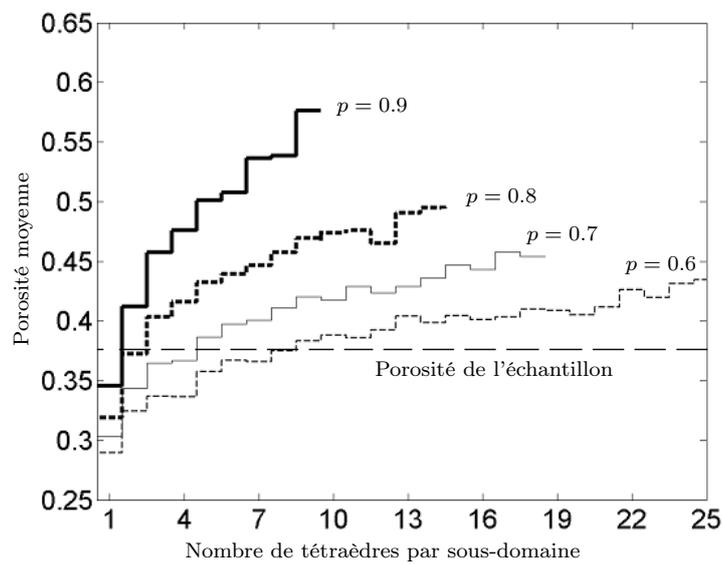


FIGURE 8.15 – Porosité moyenne des sous-domaines en fonction du nombre de tétraèdres associés pour les graphes construits avec le critère III et différentes valeurs de  $p$ .

### Conclusions

L'analyse effectuée dans ce chapitre met en lumière la difficulté de définition d'une l'échelle mésoscopique dans le cas des milieux granulaires 3D. En effet, la représentation géométrique utilisée pour définir l'échelle mésoscopique dans le cas des milieux granulaires 2D n'existant pas en 3D, la première étape de définition des sous-domaines s'en trouve complexifiée. En vue de définir ces sous-domaines 3D, nous avons donc proposé une méthode d'association des tétraèdres du système de Delaunay 3D, basée sur le rapport entre la porosité de chaque face de tétraèdre et la porosité dans l'environnement autour de chaque face ; cette méthode donne des résultats satisfaisants en terme de distribution volumique des sous-domaines. Cependant, il est clair que le verrou essentiel, pour étendre les résultats obtenus en 2D au cas 3D, se situe dans une définition correcte des sous-domaines ; la piste que nous avons proposée en ce sens devrait permettre de développer les différentes analyses définies pour les milieux 2D au cas des milieux 3D.



# Conclusion générale

L'ensemble de ce travail a pour l'objectif d'améliorer les techniques de changement d'échelles pour la modélisation du comportement des matériaux granulaires. Nous introduisons une échelle mésoscopique, entre les échelles microscopique et macroscopique, afin de pallier aux difficultés rencontrées dans l'utilisation des techniques de changement d'échelles micro-macro. La structure, les variables statique et cinématique ainsi que le comportement des matériaux granulaires à cette échelle ont été analysés, sur la base d'un échantillon granulaire numérique simulé avec la méthode des éléments discrets.

Dans un premier temps, nous nous sommes concentrés sur la définition d'une telle échelle mésoscopique pour les matériaux granulaires 2D. Cette échelle se situe au niveau des sous-structures fermées dont les frontières sont constituées de branches de contact entre particules. La structure à l'échelle mésoscopique est décrite par deux variables : l'une décrivant la densité et l'autre décrivant la texture de l'arrangement des particules. La description de la structure à l'échelle mésoscopique permet de décrire de façon plus précise la structure interne des matériaux granulaires. En particulier, on montre une forte hétérogénéité de la structure du milieu à l'échelle mésoscopique. De plus, il existe un lien étroit entre les descriptions du milieu aux échelles mésoscopique et microscopique : la valence des structures mésoscopiques évolue avec le nombre de coordination et la distribution de l'orientation des structures mésoscopiques évolue avec la distribution de l'orientation des contacts du milieu.

Dans un deuxième temps, nous avons mené une étude de la déformation à l'échelle mésoscopique proposée. La considération de l'échelle mésoscopique permet de définir la déformation macroscopique à partir de la déformation mésoscopique par une moyenne volumique. En particulier, l'on peut décomposer la déformation à l'échelle mésoscopique, ainsi qu'à l'échelle macroscopique, en plusieurs composantes relatives à différentes cinématiques dans le milieu (déplacements relatifs normal et tangentiel, glissement, roulement). Cette décomposition montre que le roulement aux contacts joue un rôle important, et ne peut donc pas être négligé, dans la déformation des matériaux granulaires composés de particules circulaires. D'autre part, la déformation à l'échelle mésoscopique présente une forte hétérogénéité, présentant la particularité d'être fortement structurée. Les structures mésoscopiques jouent des rôles différents dans la déformation, en particulier en fonction de leur orientation : la dilatance résulte essentiellement de la déformation des structures mésoscopiques allongées dans la direction majeure macroscopique alors que la contractance résulte essentiellement de la déformation des structures mésoscopiques allongées dans la direction mineure macroscopique.

Par la suite, nous avons proposé une définition de la contrainte à cette échelle

mésoscopique. La contrainte proposée est définie sur une base physique claire mais conduit à une estimation de la contrainte macroscopique légèrement surestimée. Cependant, la variable macroscopique  $\Sigma_d/\Sigma_m$  est bien représentée par la variable correspondante estimée à l'échelle mésoscopique. L'hétérogénéité de la contrainte observée à l'échelle mésoscopique est beaucoup moins forte que l'hétérogénéité de la déformation. Par contre, la contrainte présente également une nature structurée à cette échelle. On peut noter le rôle prépondérant des structures mésoscopiques allongées selon la direction majeure macroscopique dans la résistance de l'arrangement granulaire. Il a de plus été montré qu'il est possible de relier le frottement interne mobilisé dans une structure mésoscopique au frottement local mobilisé aux contacts. Sous condition de prise en compte de l'orientation des structures mésoscopiques, nous avons également montré qu'il était possible de définir localement le comportement des structures mésoscopique. Ainsi, l'angle de frottement interne de ces structures mésoscopiques peut être facilement décrit en fonction de cette orientation. Il a également été montré que ces structures mésoscopiques présentaient un angle de frottement caractéristique unique, égal à la valeur macroscopique quelle que soient leur orientation. Enfin, nous avons montré que l'angle de frottement interne mobilisé et l'angle de dilataance à l'échelle mésoscopique sont significativement corrélés par la relation linéaire contrainte-dilatance de Rowe, indépendamment de la texture mésoscopique.

En vue d'une extension de ce travail au cas 3D, le dernier chapitre propose une définition d'une échelle mésoscopique pour les milieux granulaires 3D. Cette étude montre que l'échelle mésoscopique, telle que définie pour les milieux granulaires 2D, n'existe pas pour les milieux 3D : l'association des tétraèdres voisins pour former des structures mésoscopiques doit alors pendre en compte la distribution des vides au sein du milieu. La méthode d'association proposée, basée sur le rapport entre la porosité des faces et la porosité dans l'environnement des faces, donne une distribution du volume des sous-domaines satisfaisante. Il s'agit de la première étape d'une étude 3D, qui pourrait reprendre l'essentiel des développements réalisés en 2D.

# Perspectives

L'essentiel des résultats présentés dans ce mémoire découlant de l'analyse d'un seul échantillon de matériau 2D, il est évidemment nécessaire de confirmer ces résultats sur d'autres types d'échantillon : cela est en cours et devrait être finalisé dans les semaines qui viennent.

D'autre part, les résultats obtenus montrent qu'il est possible d'écrire, au niveau local, une loi de comportement paramétrée par la texture du milieu ; il paraît donc possible de boucler un modèle par changement d'échelle en considérant une procédure de localisation simple, par exemple sur les déformations à l'échelle locale.

Enfin, il est évident que le travail réalisé en 2D devra être étendu au cas à des milieux 3D ; la difficulté essentielle consistant en la définition d'une structure mésoscopique a semble-t-il été surmontée, mais il faudrait s'en assurer en conduisant une étude complète 3D.



# Bibliographie

- R. AL-RAOUSH, K. THOMPSON et C.S. WILLSON : Comparison of network generation techniques for unconsolidated porous media. *Soil Sci. Am. J.*, 67:1687–1700, 2003.
- G. AUVINET : Stress transfer within granular geomaterials. *In Proc. of Engineering Mechanics*, pages 159–162, New York, 1992. ASCE.
- C. BACCONNET et R. GOURVES : Random aspect of the stress inside granular media. *In Proc. of Engineering Mechanics*, pages 163–166, New York, 1992. ASCE.
- K. BAGI : Geometrical modelling of granular assemblies. *Acta Technica Acad. Sci. Hung.*, 107(1-2):1–16, 1996a.
- K. BAGI : Stress and strain in granular assemblies. *Mechanics of Materials*, 22:165–177, 1996b.
- K. BAGI : Analysis of microstructural strain tensors for granular assemblies. *International Journal of Solids and Structures*, 43:3166–3184, 2006.
- J. P. BARDET : Observations on the effects of particles rotations on the failure of idealized granular materials. *Mechanics of Materials*, 18:159–182, 1994.
- R. J. BATHURST et L. ROTHENBURG : Observations on stress-force-fabric relationships in idealized granular materials. *Mechanics of Materials*, 9:65–80, 1990.
- J. BIAREZ : *Contribution a l'Etude des Propriétés Mécaniques des Sols et des Matériaux Pulvérulents*, 1962.
- J. BIAREZ et K. WIENDIECK : La comparaison qualitative entre l'anisotropie mécanique et l'anisotropie de milieux pulvérulents. *CR Acad.Sci*, 256:1217–1220, 1963.
- A.W. BISHOP : Correspondence on shear characteristics of a saturated silt measured in triaxial compression. *Géotechnique*, 4(1):43–45, 1954.
- M.D. BOLTON : The strength and dilatancy of sands. *Géotechnique*, 36(1):65–78, 1986.
- D. CAILLERIE : Evolution quasi statique d'un milieu granulaire, loi incrémentale par homogénéisation. *In Des géomatériaux aux ouvrages*, pages 53–80, Paris, 1995. Hermès.

- F. CALVETTI, G. COMBE et J. LANIER : Experimental micromechanical analysis of a 2d granular material : Relation between structure evolution and loading path. *Mech Cohesive Frict Mater*, 2:121–163, 1997.
- B. CAMBOU : A micromechanical analysis of the behaviour of granular materials. *Geomaterials : constitutive equations and modelling*, pages 263–282, 1990.
- B. CAMBOU : From global to local variables in granular materials. In THORNTON, éditeur : *Powders and Grains*, pages 73–86, Rotterdam, 1993. Balkema.
- B. CAMBOU, M. CHAZE et F. DEDECKER : Change of scale in granular materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 19:999–1014, 2000.
- B. CAMBOU et P. DUBUJET : Difficulties and limitation of statistical homogenization in granular materials. In P.A. VERMEER, S. DIEBELS, W.EHLERS, H.J.HERRMANN, S. LUDING et E. RAMM, éditeurs : *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials*, Lecture Notes in Physics, pages 205–214. Springer, 2001.
- B. CAMBOU, P. DUBUJET, F. EMERIAULT et F. SIDOROFF : Homogenization for granular materials. *European journal of mechanics.A.Solids*, 14(2):255–276, 1995.
- B. CAMBOU et M. JEAN : *Micromécanique des matériaux granulaires*. Hermes Science Publications, 2001.
- B. CAMBOU et J. LANIER : Induced anisotropy in cohesionless soil : experiments and modelling. *Computers and Geotechnics*, 6:299–311, 1988.
- B. CAMBOU et F. SIDOROFF : Distributions orientées dans un milieu granulaire et leurs représentation. In *Journées de Mécanique Aléatoire*, pages 13–15, 1984.
- B. CAMBOU et F. SIDOROFF : Description of the state of a granular material in terms of static internal variables on the basis of a discrete approach. *J Mec Theor Appl*, 4(2):223–242, 1985.
- J. CANOU : *Contribution à l'étude et à l'évaluation des propriétés de liquéfaction d'un sable*. Thèse de doctorat, E.N.P.C, Paris, 1989.
- A. CASAGRANDE : Characteristics of cohesionless soils affecting the stability of slopes and earth fills. Contribution to Soil Mechanics. *Boston Society of Civil Engineering*, pages 1925–1940, 1940.
- A. CASAGRANDE et N. CARILLO : Shear failure of anisotropic materials. In *Boston Society of Civil Engineering*, numéro 31, pages 74–87, 1944.
- C. S. CHANG : Micromechanical modeling of deformation and failure for granulates with frictional contacts. *Mech. Mater.*, 16(1-2):13–24, 1993.
- C. S. CHANG, S. J. CHAO et Y. CHANG : Estimates of elastic moduli for granular material with anisotropic random packing structure. *International Journal of Solids and Structures*, 32(14):1989–2008, 1995.

- C. S. CHANG et C. L. LIAO : Estimates of elastic modulus for media of randomly packed granules. *Applied Mechanics Review*, 47(1 part 2):197–206, 1994.
- C. S. CHANG et A. MISRA : Application of uniform strain theory to heterogeneous granular solids. *J. Eng. Mech.*, 116(10):2310–2328, 1990.
- C. S. CHANG, A. MISRA et S. S. SUNDARAM : Micromechanical modelling of cemented sands under low amplitude oscillations. *Geotechnique*, 40(2):251–263, 1990.
- P. CHAPUIS : *De la structure géométrique des milieux granulaires en relation avec leur comportement mécanique*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada, 1976.
- B. CHAREYRE : *Modélisation du comportement d'ouvrages composites sol-geosynthétique par éléments discrets - Application aux ancrages en tranchées en tête de talus*. Thèse de doctorat, L'université Grenoble I - Joseph Fourier, France, 2003.
- J. CHRISTOPHERSEN, M. M. MEHRABADI et S. NEMAT-NASSER : A micromechanical description of granular material behavior. *J. of Applied Mechanics*, 48(2):339–344, 1981.
- G. COMBE : *Origines géométriques du comportement quasi-statique des assemblages granulaires denses : étude par simulations numériques*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2001.
- P. A. CUNDALL et O. D. L. STRACK : A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 24:47–65, 1979.
- P. DANTU : Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents. *In 4ème congrès Int. de Mécanique des sols et des fondations*, pages 144–148, Londres, 1957.
- G. DE JOSSELIN DE JONG et A. VERRUIJT : Etude photo-élastique d'un empilement de disques. *Cahier Grpe FR. Etud. Rhéol.*, 2:73–86, 1969.
- F. DEDECKER : *Changements d'échelle dans les milieux granulaires à interactions complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France, 1999.
- F. DEDECKER, M. CHAZE, P. DUBUJET et B. CAMBOU : Specific features of strain in granular materials. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 5:173–193, 2000.
- R. DELUZARCHE : *Modélisation discrète des enrochements - Application aux barrages*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, 2004.
- F. DELYON, D. DUFRESNE et Y. E. LEVY : Physique et génie civil ; deux illustrations simples. *In Annales des Ponts et Chaussées*, Mécanique des milieux granulaires, pages 53–60, 1990.
- G. L. DIRICHLET : Über die Reduktion der positiven Quadratischen Formen mit drei anbestimmten ganzen Zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 40:209–227, 1850.

- A. DRESCHER et G. De Josselin De JONG : Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. *J. Mech. Phys. Solids*, 20:337–351, 1972.
- F. EMERIAULT : *Modélisation du comportement mécanique des matériaux granulaires : vers une homogénéisation statistique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, France, 1995.
- F. EMERIAULT et B. CAMBOU : Micromechanical modelling of anisotropic non-linear elasticity of granular medium. *Int.J.Solids Struct.*, 33(18):2591–2607, 1996.
- F. EMERIAULT, B. CAMBOU et A. MAHBOUBI : Homogenization for granular materials : non reversible behaviour. *Mech Cohesive Frict Mater*, 1(2):199–218, 1996.
- F. EMERIAULT et C. S. CHANG : Interparticle forces and displacements in granular materials. *Computers and Geotechnics*, 20(3/4):223–244, 1997.
- W. G. FIELD : Towards the statistical definition of a granular mass. *In Proceedings of 4th Austria-New Zealand conf. on soil mechanics and found. eng.*, pages 143–148, 1963.
- B. J. GELLATLY et J. L. FINNEY : Characterisation of multicomponent amorphous metals : the radical alternative to the Voronoi polyhedron. *J. of Non-Crystalline Solids*, 50:313–329, 1982.
- L. J. GUIBAS, D. E. KNUTH et M. SHARIR : Randomized incremental construction of delaunay and voronoï diagrams. *Lecture of Notes in Computer Science*, 443:414–431, 1990.
- Y. HICHER : Gréco-géomatériaux. 1993.
- M. R. HORNE : The behavior of an assembly of rotund rigid cohesionless particles. *In Roy. Soc. A286*, pages 62–78, 1965.
- M. EL HOSRI : *Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des matériaux*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, France, 1984.
- ISSMFE : Technical committee on mechanics of granular material. *In SATAKE*, éditeur : *Mechanics of granular materials*, 1989.
- M. JEAN : The non-smooth contact dynamics method. *Computer methods in applied mechanics engineering*, 177:235–257, 1999.
- J. T. JENKINS : Anisotropic elasticity for random arrays of identical spheres. *In J. WU*, éditeur : *Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications*, pages 368–377, Philadelphia, 1991. SIAM.
- K. KANATANI : A theory of contact force distribution in granular materials. *Powder Technology*, 28(2):167–172, 1981.
- M. A. KOENDERS : The incremental stiffness of an assembly of particles. *Acta Mechanica*, 70(1):31–49, 1987.

- J. KONISHI : A microscopic study of granular materials during shearing processes. *J. Civil Eng., Shinshu University*, 34:179–194, 1973.
- J. KONISHI : Microscopic studies of the mechanical behavior of granular materials. *In US-Japan seminar*, pages 27–45, 1978.
- J. KONISHI, M. ODA et S. NEMAT-NASSER : Inherent anisotropy and shear strength of assembly of oval cross-sectional rods. *In P. VERMEER et H. LUGER, éditeurs : Deformation and Failure of Granular materials*, pages 403–412. A.A. Balkema, 1982.
- N. P. KRUYT et L. ROTHENBURG : Micromechanical Definition of the Strain tensor for Granular Materials. *Journal of Applied Mechanics ASME*, 118:706–711, 1996.
- N. P. KRUYT et L. ROTHENBURG : Probability density functions of contact forces for cohesionless frictional granular materials. *Int.J.Solids Struct.*, 39(3):571–583, 2002.
- N. P. KRUYT et L. ROTHENBURG : Kinematic and static assumptions for homogenization in micromechanics of granular materials. *Mech Mater*, 36(12):1157–1173, 2004.
- N.P. KRUYT et S.J. ANTONY : Force, relative-displacement, and work networks in granular materials subjected to quasi-static deformation. *Physical Review E75*, 051308:1–8, 2007.
- M. R. KUHN : Deformation measures for granular materials. *In C. S. CHANG, A. MISRA, R. Y. LIANG et M. BABIC, éditeurs : Mechanics of Deformation and Flows of Particulate Materials*, pages 91–104, New York, 1997. ASCE.
- M. R. KUHN : Structured deformation in granular materials. *Mechanics of Materials*, 31:407–429, 1999.
- M.R. KUHN : Heterogeneity and patterning in the quasi-static behavior of granular materials of granular materials. *Granular Matter*, 4:155–166, 2003.
- P. V. LADE et J. M. DUNCAN : Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 101(10):1037–1053, 1975.
- J. LANIER et M. JEAN : Experiments and numerical simulations with 2d disks assembly. *Powder Technology*, 2000.
- D. T. LEE et B. J. SCHACHTER : Two algorithms for constructing the delaunay triangulation. *Int. J. of Computer and Information Science*, 9(3):219–242, 1980.
- C. L. LIAO, T. P. CHANG, D. H. YOUNG et C. S. CHANG : Stress-strain relationships for granular materials based on the hypothesis of best fit. *Int. J. Solids and Structures*, 34:4087–4100, 1997.
- A. E. H. LOVE : A treatise on the mathematical theory of elasticity. *First American printing of the 1927 fourth edition, Dover Publication, note B*, page 617, 1944.

- M.P. LUONG : Phénomènes cycliques dans les sols pulvérulents. *Revue français de géotechnique*, 10:39–53, 1980.
- K. MAEDA, N. KUWABARA et H. MATSUOKA : Micromechanical Analysis on Formation Process of Microstructure in Granular Material during Compression and Shear. In KISHINO, éditeur : *Powders and Grains 2001*, pages 223–226. Swets & Zeitlinger, 2001.
- H. MAGOARIEC, A. DANESCU et B. CAMBOU : Nonlocal orientational distribution of contact forces in granular samples containing elongated particles. *Acta Geotech.*, 3(1):49–60, 2008.
- A. MAHBOUBI : *Contribution à l'étude micromécanique du comportement des matériaux granulaires par homogénéisation et approche numérique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, France, 1995.
- R. D. MINDLIN et H. DERESIEWICZ : Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *Journal of Applied Mechanics*, 20:327–344, 1953.
- J. J. MOREAU : Numerical investigation of shear zones in granular materials. In P. GRASSBERGER et D.E. WOLFS, éditeurs : *Friction, Arching, Contact Dynamics*, Editions World Scientific, pages 233–247, Singapour, 1997.
- S. NEMAT-NASSER et M. MEHRABADI : Stress and fabric in granular masses. In J. T. JENKINS et M. SATAKE, éditeurs : *Mechanics of Granular Materials : New Models and Constitutive Relations*, pages 1–8, Amsterdam, 1983. Elsevier Science.
- S. NGUYEN, H. MAGOARIEC, B. CAMBOU et A. DANESCU : Analysis of structure and strain at the meso-scale in 2D granular materials. *Int. J. Solids Struct.*, 46(17):3257–3271, 2009.
- C. NOUGUIER-LEHON, B. CAMBOU et E. VINCENS : Influence of particle shape and angularity on the behaviour of granular materials : A numerical analysis. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 27(14):1207–1226, 2003.
- C. NOUGUIER-LEHON, E. VINCENS et B. CAMBOU : Structural changes in granular materials : the case of irregular polygonal particles. *Int. J. Solids Struct.*, 42:6356–6375, 2005.
- M. ODA : Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular materials. *Soils and Found.*, 12(1):17–36, 1972a.
- M. ODA : The mechanism of fabric change during compressional deformation of sands. *Soils and Foundations*, 12(2):1–18, 1972b.
- M. ODA : Coordination number and its relation to shear strength of granular material. *Soils and Foundations*, 17(2):29–42, 1977.
- M. ODA : A micro-model for dilatancy of granular materials. In C.S. CHANG, A. MISRA, R.Y. LIANG et M. BABIC, éditeurs : *Mechanics of Deformation and Flow of Particulate Materials*, pages 24–37. ASCE, 1997.

- M. ODA et K. IWASHITA : *An Introduction Mechanics of Granular Materials*. A. A. Balkema, 1999.
- M. ODA, K. IWASHITA et T. KAKIUCHI : Importance of particle rotation in the mechanics of granular materials. *In* Behringer & JENKINS, éditeur : *Powders and Grains*, pages 207–210, Rotterdam, 1997. Balkema.
- M. ODA et H. KAZAMA : Microstructure of shear band and its relation to the mechanisms of dilatancy and failure of dense granular soils. *Géotechnique*, 48 (1):1–17, 1998.
- M. ODA, J. KONISHI et S. NEMAT NASSER : Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials : effect of particle rolling. *Mechanics of materials*, 1:269–283, 1982.
- M. ODA, S. NEMAT-NASSER et J. KONISHI : Stress-induced anisotropy in granular masses. *Soils and foundations*, 25(3):85–97, 1985.
- H. OUADFEL et L. ROTHENBURG : 'Stress-force-fabric' relationship for assemblies of ellipsoids. *Mechanics of Materials*, 33:201–221, 1999.
- P.A.CUNDALL : A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems. *In* *Symposium of the International Society of Rock Mechanics*, volume 1, Nancy, 1971.
- P.A.CUNDALL : Distinct element models of rock and soil structure. *In* E.T.BROWN, éditeur : *Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics*, Ch. 4, pages 129–163, London, 1987. Allen & Unwin.
- P.A.CUNDALL et O.D.L.STRACK : Modeling of microscopic mechanisms in granular material. *In* J.T.JENKINS et M.SATAKE, éditeurs : *New Models and Constitutive Relations*, pages 137–149. Elsevier Science Publishers B.V., 1983.
- F. RADJAI et D. E. WOLF : Features of static pressure in dense granular media. *Granular Matter*, 1(1):3–8, 1998.
- F. RADJAI, D. E. WOLF, M. JEAN et J. J MOREAU : Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys Rev Lett*, 80(1):61–64, 1998.
- F. RADJAI, D. E. WOLF, M. Jean S. ROUX et J. J. MOREAU : Force networks in dense granular media. *In* Behringer & JENKINS, éditeur : *Powders and Grains*, pages 211–214, Rotterdam, 1997. Balkema.
- N. REBOUL : *Transport de particules dans les milieux granulaires - Application à l'érosion interne*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, 2008b.
- N. REBOUL, E. VINCENS et B. CAMBOU : A statistical analysis of void size distribution in a simulated narrowly graded packing of spheres. *Granular Matter*, 10:457–468, 2008a.
- K.H. ROSCOE et A.N. SCHOFIELD : Discussion on stress-dilatancy, earth pressure, and slopes. *J. Soil Mech. Found. Div.*, 90(SM1):136–150, 1964.

- L. ROTHENBURG et R. J. BATHURST : Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials. *Geotechnique*, 4(39):601–614, 1989.
- J.N. ROUX et F. CHEVOIR : Simulation numérique discrète et comportement mécanique des matériaux granulaires. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 254:109–138, 2005.
- P.W. ROWE : The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *In Proc. of Roy. Soc., A* 269, pages 500–527, London, 1962.
- K. SAB : Déformations microscopiques et macroscopiques dans un assemblage dense de particules rigides. *In C. R. Acad. Sci.*, t.322, Série Iib, pages 715–721, Paris, 1996. Paris Elsevier.
- K. SAB : Une nouvelle approche de l’homogénéisation des milieux granulaires. *In Saint-Venant Symposium : Analysis multiéchelle et systèmes physiques couplés*, pages 597–603, Paris, 1997. Presses de l’Ecole nationale des ponts et chaussées.
- R. SAÏM : *Des comportements repères des grains sans colle à un exemple de sol réel*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, Paris, 1997.
- M. SATAKE : Constitution of Mechanics of Granular Materials through Graph Representation. *In Theor. Appl. Mech.* 26, pages 257–266, Tokyo, 1978. University of Tokyo Press.
- M. SATAKE : Fabric tensor in granular materials. *In IUTAM conference on deformation and failure of granular materials, Delft*, pages 63–68, 1982.
- M. SATAKE : A discrete-mechanical approach to granular materials. *Int. J. Engrg. Sci.*, 30(10):1525–1533, 1992.
- M. SATAKE : Micro-mechanical definition of strain tensor for granular assemblies. *In CD rom of 15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, 2002.
- M. SATAKE : Tensorial form definitions of discrete-mechanical quantities for granular assemblies. *Int. J. Solids and Structures*, 41:5775–5791, 2004.
- L. SIBILLE : *Modélisation discrètes de la rupture dans les milieux granulaires*. Thèse de doctorat, INP Grenoble, Grenoble, 2006.
- F. SIDOROFF, B. CAMBOU et A. MAHBOUBI : Contact force distribution in granular media. *Mechanics of Materials*, 16(1-2):83–89, 1993.
- A. J. M. SPENCER : Isotropic polynomial invariants and tensor functions. *In J. P. BOEHLER, éditeur : Applications of Tensor Functions in Solids Mechanics*, pages 141–169, New York, 1987. Springer Verlag.
- D.W. TAYLOR : *Fundamentals of Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, 1948.
- T. TSUCHIKURA et M. SATAKE : Statistical measure tensors and their application to computer simulation analysis of biaxial compression test. *In H. MURAKAMI et J. E. LUCO, éditeurs : Engineering Mechanics : A Force for 21st Century*, pages 1732–1735, ASCE, Reston, VA, 1998.

- T. TSUCHIKURA et M. SATAKE : A consideration on the statistical analysis of particle packing using loop tensors. *In* Y. KISHINO, éditeur : *Powders and Grains 2001*, pages 29–32, Sendai, Japan, 2001. A.A.Balkema.
- G. VORONOI : Recherches sur les paralleloedres Primitives. *J. Reine. Angew. Math.*, 134:198–287, 1908.
- K. WALTON : The effective moduli of a random packing of spheres. *J. Mech. Phys. Solids*, 3(35):213–226, 1987.
- J. WEBER : Recherche concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents. *In Bulletin de liaison des ponts et chaussées*, numéro 20, pages 1–20, Paris, 1966.
- Y. YAMADA et K. ISHIHARA : Anisotropic deformation characteristics of sand under three dimensional stress conditions. *Soils and Foundations*, 19(2):79–94, 1979.
- T. YOSHIDA, F. TATSUOKA, M.S.A. SIDDIQUEE, Y. KAMEGAI et C.S. PARK : Shear banding in sands observed in plane strain compression. *In* R. CHAMBON, J. DESRUES et I. VARDOULAKIS, éditeurs : *Symp. on Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, pages 165–179. Balkema, 1994.
- A. ZAOUÏ : Plastic behavior of polycrystals. *In* J. GITTUS et J. ZARKA, éditeurs : *Modelling small deformation of polycrystals*, London & NewYork, 1986. Elsevier Applied Science.



# Annexes



# Annexe A

## Opérations mathématiques

- Produit scalaire entre deux vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et deux tenseurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

- Norme d'un vecteur  $\mathbf{a}$  et d'un tenseur  $\mathbf{A}$  :

$$|\mathbf{a}| = a_i a_i; \quad (\text{A.3})$$

$$|\mathbf{A}| = A_{ij} A_{ij}. \quad (\text{A.4})$$

- Symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

- Symbole de permutation  $e_{ijk}$  :

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{si deux indices égaux} \\ +1, & \text{si permutation paire} \\ -1, & \text{si permutation impaire.} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

En 2D,  $e_{ij} = e_{ij3}$ .



# Annexe B

## Variables de déformation et de contrainte

### B.1 Variables de déformation $\epsilon$ en 2D

- Déformation volumique  $\epsilon_v$  :

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad (\text{B.1})$$

où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont respectivement les valeurs principales majeure et mineure du tenseur de déformation  $\epsilon$ .

- Déformation déviatoire  $\epsilon$  :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{2}\epsilon_{kk}\delta_{ij}. \quad (\text{B.2})$$

- Deuxième invariant  $\epsilon_d$  de la déformation déviatoire :

$$\epsilon_d = \sqrt{2\epsilon_{ij}\epsilon_{ij}} = \epsilon_1 - \epsilon_2. \quad (\text{B.3})$$

- Angle de dilatance  $\psi$  :

$$\sin \psi = \frac{\epsilon_v}{\epsilon_d}. \quad (\text{B.4})$$

### B.2 Variables de contrainte $\sigma$ en 2D

- Contrainte moyenne  $\sigma_m$  :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad (\text{B.5})$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont respectivement les valeurs principales majeure et mineure du tenseur  $\sigma$ .

- Contrainte déviatoire  $s$  :

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{2}\sigma_{kk}\delta_{ij}. \quad (\text{B.6})$$

- 2<sup>ème</sup> invariant  $\sigma_d$  de la contrainte déviatoire :

$$\sigma_d = \sqrt{2s_{ij}s_{ij}} = \sigma_1 - \sigma_2. \quad (\text{B.7})$$

- Angle de frottement interne mobilisé  $\varphi$  :

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (\text{B.8})$$



# Annexe C

## Analyse de l'hétérogénéité d'un champ de variable locale

### C.1 Mesures statistiques

#### C.1.1 Pour un champ de variable locale $a^h$ non pondérée

- Valeur moyenne :

$$\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^N a_h, \quad (\text{C.1})$$

où  $N$  est le nombre total d'individus dans le champ de variable locale.

- Ecart-type :

$$S[a] = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{h=1}^N (a_h - \langle a \rangle)^2}. \quad (\text{C.2})$$

#### C.1.2 Pour un champ de variable locale $a^h$ pondérée par un poids $p^h$

- Valeur moyenne :

$$\langle a \rangle_p = \sum_{h=1}^N a_h p_h, \quad (\text{C.3})$$

où  $p_h$  est le poids du l'individu  $h$  (à condition que  $\sum_{h=1}^N p_h = 1$ ).

- Ecart-type :

$$S_p[a] = \sqrt{\sum_{h=1}^N (a_h - \langle a \rangle_p)^2 p_h}. \quad (\text{C.4})$$

### C.2 Degré d'hétérogénéité

Pour étudier l'hétérogénéité d'un champ de variable locale scalaire  $a^h$  pondérée par un poids  $p^h$ , par rapport à la variable globale correspondante  $A$ , l'on définit un degré d'hétérogénéité, noté  $\tilde{a}$ , pour ce champ de variable locale, comme suit :

$$\tilde{a} = \sqrt{\sum_{h=1}^N p^h (a^h - A)^2}, \quad (\text{C.5})$$

où :

- $N$  est le nombre total de individus dans le champ ;
- $p^h$  est le poids associé à chaque individu  $h$  ( $\sum_{h=1}^N p_h = 1$ ).

Plus la valeur du degré d'hétérogénéité  $\tilde{a}$  est importante, plus le champ de variable locale  $a^h$  est hétérogène et différent de la variable globale correspondante.

## Application pour les champs de déformation et de contrainte mésoscopiques

Pour les champs de déformation  $\delta\varepsilon^h$  et de contrainte  $\sigma^h$  à l'échelle mésoscopique, le poids considéré est le volume des sous-domaines  $p^h = V^h/\hat{V}$ . Les tableaux C.1 et C.2 présentent les degrés d'hétérogénéité définis pour analyser l'hétérogénéité des champs de déformation et de contrainte à l'échelle mésoscopique par rapport à la déformation macroscopique  $\delta\mathbf{E}$  et à la contrainte macroscopique  $\Sigma$ .

Degrés d'hétérogénéité	Variable locale	Variable globale
$\tilde{\delta\varepsilon}_{11}$	$\delta\varepsilon_{11}^h$	$\delta E_{11}$
$\tilde{\delta\varepsilon}_{22}$	$\delta\varepsilon_{22}^h$	$\delta E_{22}$
$\tilde{\delta\varepsilon}_{12}$	$\delta\varepsilon_{12}^h$	$\delta E_{12}$
$\tilde{\delta\varepsilon}_v$	$\delta\varepsilon_v^h$	$\delta E_v$
$\tilde{\delta\varepsilon}_d$	$\delta\varepsilon_d^h$	$\delta E_d$

**TABLE C.1** – Degrés d'hétérogénéité définis pour analyser l'hétérogénéité de la déformation à l'échelle mésoscopique.

Degrés d'hétérogénéité	Variable locale	Variable globale
$\tilde{\sigma}_{11}$	$\sigma_{11}^h$	$\Sigma_{11}$
$\tilde{\sigma}_{22}$	$\sigma_{22}^h$	$\Sigma_{22}$
$\tilde{\sigma}_{12}$	$\sigma_{12}^h$	$\Sigma_{12}$
$\tilde{\sigma}_m$	$\sigma_m^h$	$\Sigma_m$
$\tilde{\sigma}_d$	$\sigma_d^h$	$\Sigma_d$
$\tilde{\varphi}$	$\varphi^h$	$\Phi$

**TABLE C.2** – Degrés d'hétérogénéité définis pour analyser l'hétérogénéité de la contrainte à l'échelle mésoscopique.

## C.3 Mesures d'hétérogénéité

### C.3.1 Participation, non-conformité et alignement

Pour analyser l'hétérogénéité d'un champ de variable locale  $\mathbf{a}^h$ , pondérée par un poids  $p^h$ , par rapport à la variable globale correspondante  $\mathbf{A}$  (les variables peuvent être tensorielles ou vectorielles), Kuhn (2003) a proposé la méthode suivante :

- les mesures
  - *participation*, notée  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$ ;
  - *non-conformité*, notée  $\mathbf{a}^h \perp \mathbf{A}$ ;
  - *alignement*, notée  $\mathbf{a}^h \circ \mathbf{A}$ ;

de chaque individu  $\mathbf{a}^h$  par rapport à la variable globale  $\mathbf{A}$  sont définies comme suit :

$$\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{A}|^2} (\mathbf{a}^h \cdot \mathbf{A}), \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{a}^h \perp \mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} |\mathbf{a}^h - (\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}) \mathbf{A}|, \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{a}^h \circ \mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}|} (\mathbf{a}^h \cdot \mathbf{A}), \quad (\text{C.8})$$

où  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$  et  $|\mathbf{X}|$  signifient, respectivement, le produit scalaire entre  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  et la norme de  $\mathbf{X}$  (voir l'annexe A).

- les distributions des mesures  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{a}^h \perp \mathbf{A}$  et  $\mathbf{a}^h \circ \mathbf{A}$  pour l'ensemble de variables locales sont ensuite analysées par la méthode statistique. Il s'agit alors de calculer les valeurs moyennes  $\langle \mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A} \rangle_p$ ,  $\langle \mathbf{a}^h \perp \mathbf{A} \rangle_p$  et  $\langle \mathbf{a}^h \circ \mathbf{A} \rangle_p$  ainsi que les écart-types  $S_p[\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}]$ ,  $S[\mathbf{a}^h \perp \mathbf{A}]$  et  $S_p[\mathbf{a}^h \circ \mathbf{A}]$ , respectivement pour les distributions des mesures  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{a}^h \perp \mathbf{A}$  et  $\mathbf{a}^h \circ \mathbf{A}$  pondérées par  $p^h$  ( voir l'annexe C.1).

Pour des variables vectorielles, les variables locale  $\mathbf{a}^h$  et globale  $\mathbf{A}$  sont représentées par deux vecteurs  $\vec{OJ}$  et  $\vec{OI}$  (figure C.1). Sur cette représentation,  $\vec{OH}$  et  $\vec{HJ}$  sont respectivement les projections parallèle et perpendiculaire de  $\vec{OJ}$  sur  $\vec{OI}$ . On peut montrer facilement que :

$$\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A} = \frac{OJ \cdot OI \cdot \cos \alpha}{OI^2} = \frac{OI \cdot OH}{OI^2} = \frac{OH}{OI}, \quad (\text{C.9})$$

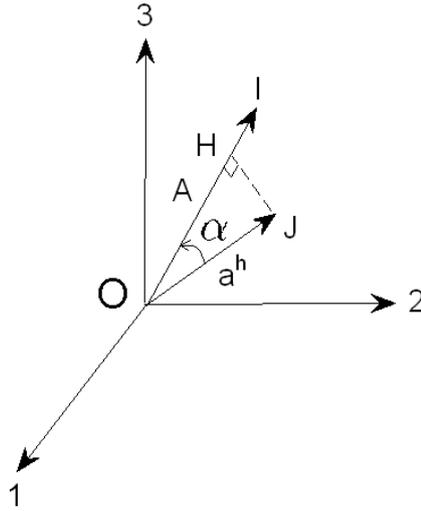
$$\mathbf{a}^h \perp \mathbf{A} = \frac{\vec{OJ} - \frac{OH}{OI} \vec{OI}}{OI} = \frac{HB}{OI}, \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{a}^h \circ \mathbf{A} = \cos \alpha. \quad (\text{C.11})$$

Les tenseurs du 2<sup>e</sup> ordre, symétriques en 2D, admettent une représentation par des vecteurs en 3D :

$$\mathbf{a}^h = \begin{bmatrix} a_{11}^h & a_{12}^h \\ a_{12}^h & a_{22}^h \end{bmatrix} = \vec{a}^h = [a_{11}^h, a_{22}^h, \sqrt{2}a_{12}^h], \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \vec{A} = [A_{11}, A_{22}, \sqrt{2}A_{12}]. \quad (\text{C.13})$$



**FIGURE C.1** – Représentation des variables vectorielles  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{A}$  dans un système de coordonnées.

Cette représentation permet de définir :

- le produit scalaire de deux tenseurs par celui des deux vecteurs correspondants et la norme d'un tenseur comme celle du vecteur correspondant :

$$\mathbf{a}^h \cdot \mathbf{A} = a_{11}^h A_{11} + a_{22}^h A_{22} + 2a_{12}^h A_{12} = \vec{a}^h \cdot \vec{A}, \quad (\text{C.14})$$

$$|\mathbf{a}^h| = \sqrt{(a_{11}^h)^2 + (a_{22}^h)^2 + 2(a_{12}^h)^2} = |\vec{a}^h|, \quad (\text{C.15})$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_{11}^2 + A_{22}^2 + 2A_{12}^2} = |\vec{A}|. \quad (\text{C.16})$$

- les mesures  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{a}^h \perp \mathbf{A}$  et  $\mathbf{a}^h \circ \mathbf{A}$  pour des variables tensorielles deviennent respectivement  $\vec{a}^h \parallel \vec{A}$ ,  $\vec{a}^h \perp \vec{A}$  et  $\vec{a}^h \circ \vec{A}$  pour les variables vectorielles correspondantes.

A partir des relations (C.9), (C.10) et (C.11), on peut donner la signification physique des trois mesures de la participation  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$ , de la non-conformité  $\mathbf{a}^h \perp \mathbf{A}$  et de l'alignement  $\mathbf{a}^h \circ \mathbf{A}$  comme suit :

- la participation  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$  et la non-conformité  $\mathbf{a}^h \perp \mathbf{A}$  sont respectivement les rapports entre la norme des projections parallèle et perpendiculaire de la variable locale  $\mathbf{a}^h$  sur la variable globale  $\mathbf{A}$  et la norme de la variable globale  $\mathbf{A}$  ;
- l'alignement  $\mathbf{a}^h \circ \mathbf{A}$  est le cosinus de l'angle séparant les deux variables  $\mathbf{a}^h$  et  $\mathbf{A}$ .

Il est facile de montrer les résultats présentés dans le tableau C.3 pour deux champs de variable locale  $\mathbf{a}^h$  pris comme deux cas de référence : un champ uniforme et aligné à  $\mathbf{A}$  et un champ aléatoire.

Pour un champ de variable locale  $\mathbf{a}^h$ , pondérée par un poids  $p^h$ , vérifiant les conditions suivantes :

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{a}^h \rangle = \sum_{h=1}^N \mathbf{a}^h p^h, \quad \sum_{h=1}^N p^h = 1. \quad (\text{C.17})$$

On a la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A} \rangle &= \sum_{h=1}^N (\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}) p^h = \sum_{h=1}^N \frac{\mathbf{a}^h \cdot \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^2} p^h, \\
 &= \frac{1}{|\mathbf{A}|^2} \mathbf{A} \cdot \left\{ \sum_{h=1}^N \mathbf{a}^h p^h \right\} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^2} = 1.
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

Mesures	Champ de $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$	
	Uniform et aligné	Aléatoire
$\langle \mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A} \rangle$	1	0
$S[\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}]$	0	1/2
$\langle \mathbf{a}^h \perp \mathbf{A} \rangle$	0	$2/\pi$
$\langle \mathbf{a}^h \circ \mathbf{A} \rangle$	1	0

**TABLE C.3** – Valeurs moyennes et écart-types des distributions des mesures  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{a}^h \perp \mathbf{A}$  et  $\mathbf{a}^h \circ \mathbf{A}$  pour un champ de variable locale  $\mathbf{a}^h$  uniforme et aligné à  $\mathbf{A}$  et pour un champ de variable locale  $\mathbf{a}^h$  aléatoire.

### C.3.2 Contribution cumulée et poids cumulé

Grâce à la mesure de la participation  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$ , on peut définir la contribution de chaque individu  $h$  dans un champ de variable locale  $\mathbf{a}^h$ , pondérée par le poids  $p^h$ , à la variable globale correspondante  $\mathbf{A}$  par  $(\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A})p^h$ .

On classe ensuite les individus dans le champ local en fonction de la valeur de la participation  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$  dans l'ordre décroissant. On peut donc définir la contribution cumulée  $\Gamma_{\mathbf{A}}$  et le poids cumulé  $\Phi_p$  des individus classés, à la variable globale  $\mathbf{A}$ , comme suit :

$$\Gamma_{\mathbf{A}}(\kappa) = \sum_{\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A} \geq \kappa} (\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}) p^h, \tag{C.19}$$

$$\Phi_p(\kappa) = \sum_{\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A} \geq \kappa} p^h, \tag{C.20}$$

où  $\kappa$  est une valeur de  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$  variant de façon décroissante de la valeur maximale à la valeur minimale de  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$ . Lorsque  $\kappa$  prend la valeur minimale de  $\mathbf{a}^h \parallel \mathbf{A}$ , tous les sous-domaines se présentent dans les sommations en C.19 et C.20, alors la contribution totale  $\Gamma_{\delta\mathbf{E}}$  est égale à 1 (voir l'équation C.18) et le poids total  $\Phi_p$  est égal à 1.

### Application pour les champs de déformation et de contrainte mésoscopiques

Pour les variables locales : déformation  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$  et contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^h$  à l'échelle mésoscopique, le poids considéré est le volume des sous-domaines  $p^h = V^h / \hat{V}$  et les variables

globales correspondantes sont, respectivement, la déformation macroscopique  $\delta\mathbf{E}$  et la contrainte macroscopique  $\Sigma$ . Le tableau C.4 résume les mesures utilisées pour analyser l'hétérogénéité des champs de déformation et de contrainte à l'échelle mésoscopique.

Mesures	Champ de déformation $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h$	Champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^h$
Participation (C.6)	$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\mathbf{E}$	$\boldsymbol{\sigma}^h \parallel \Sigma$
Non-conformité (C.7)	$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \perp \delta\mathbf{E}$	$\boldsymbol{\sigma}^h \perp \Sigma$
Alignement (C.8)	$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta\mathbf{E}$	$\boldsymbol{\sigma}^h \circ \Sigma$
Ecart-type pour la participation (C.4)	$S_v[\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\mathbf{E}]$	$S_v[\boldsymbol{\sigma}^h \parallel \Sigma]$
Moyenne pour la non-conformité (C.3)	$\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \parallel \delta\mathbf{E} \rangle_v$	$\langle \boldsymbol{\sigma}^h \perp \Sigma \rangle_v$
Moyenne pour l'alignement (C.3)	$\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \circ \delta\mathbf{E} \rangle_v$	$\langle \boldsymbol{\sigma}^h \circ \Sigma \rangle_v$
Contribution cumulée (C.19)	$\Gamma_{\delta\mathbf{E}}$	$\Gamma_{\Sigma}$
Fraction volumique cumulée (C.20)	$\Phi_v$	$\Phi_v$

**TABLE C.4** – Mesures pour analyser l'hétérogénéité des champs de déformation et de contrainte à l'échelle mésoscopique.

## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur A. DANESCU

et les rapports de

Monsieur P-Y. HICHER  
Professeur - Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique - Ecole Centrale de Nantes  
1, rue de la Noë - BP 92101 - 44320 NANTES cedex 3

Et de

Monsieur S. BONELLI  
Chargé de Recherche - CEMAGREF - Unité de Recherche Ouvrages Hydrauliques et Hydrologie  
3275 route de Cézanne - CS 40061 - 13182 AIX-EN-PROVENCE cedex 5

**Monsieur NGUYEN Ngoc Son**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)**

Fait à Ecully, le 1er décembre 2009

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
La Directrice des Etudes





## RÉSUMÉ

La technique de changement d'échelles a été largement développée dans la littérature pour décrire le comportement global des milieux granulaires en prenant en compte leurs propriétés locales. Cette technique considère classiquement deux échelles : l'échelle macroscopique du volume élémentaire représentatif et l'échelle microscopique du contact entre particules. Le défi majeur de ce changement d'échelles "micro-macro" réside dans la définition de la déformation macroscopique : en effet, si la contrainte macroscopique peut être clairement définie à partir des forces de contact, il a été montré qu'il n'était pas approprié de déduire la déformation macroscopique à partir de la cinématique aux contacts.

Dans ce cadre, ce travail propose d'introduire une troisième échelle dite mésoscopique. Cette échelle, à laquelle peuvent être définies à la fois contrainte et déformation, est intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique et permet de palier au défi majeur mentionné ci-dessus. Elle est définie au niveau d'arrangements locaux de particules, appelés sous-domaines, et sa pertinence est étudiée sur la base d'échantillons numériques composés de particules circulaires puis sphériques, simulés par la méthode des éléments discrets.

Les milieux bidimensionnels sont géométriquement représentés par un graphe de particules composé de sous-domaines fermés, encore appelés cellules de vide, dont la frontière est constituée de branches connectant les centres de particules en contact : l'échelle mésoscopique est donc définie au niveau de ces cellules de vide fermées. À cette échelle locale, on décrit tout d'abord la structure du milieu en termes de densité et de texture puis l'on définit les variables statique et cinématique locales du milieu en termes de contrainte et déformation. De fortes hétérogénéités des milieux granulaires en termes de structure, déformation et contrainte sont mises en évidence à l'échelle mésoscopique, avec de plus une structuration des hétérogénéités de contraintes et de déformations et une forte corrélation entre ces deux quantités.

Concernant les milieux tridimensionnels, une partition en cellules de vide fermées est impossible du fait de la complexité de la structure 3D de ces milieux. On propose donc une méthode de partition du milieu basée sur la distribution des vides en son sein. La méthode consiste en premier lieu en une subdivision du milieu en tétraèdres, par une partition de Delaunay, puis en une association de tétraèdres voisins selon un critère prédéfini en vue de la création de sous-domaines, non fermés, mais au rôle analogue aux sous-domaines fermés de l'étude 2D. Le critère d'association proposé est basé sur le rapport entre la taille des constriction (vide sur chaque face des tétraèdres) et la taille des pores au voisinage de chaque constriction. Cette méthode d'association constitue donc l'étape préliminaire à l'extension au cas tridimensionnel des résultats obtenus dans le cas bidimensionnel.

**Mots-clés** : Matériau granulaire, méthode des éléments discrets, changement d'échelles, échelle mésoscopique, graphe de particules, sous-domaines.

## ABSTRACT

The technique of change of scales has been extensively developed in the literature to describe the global behaviour of granular materials taking into account their local properties. This method usually considers two scales : the macroscopic scale at the level of representative elementary volume and the microscopic scale at the level of contact between particles. The major difficulty of this "micro-macro" change of scales lies in the definition of the macroscopic strain : indeed, the macroscopic stress is clearly defined from contact forces while it is not appropriate to derive the macroscopic strain from the kinematics at contacts.

In this framework, this work proposes to introduce a third scale called mesoscopic scale. This scale, at which both stress and strain can be defined, is intermediate between macroscopic and microscopic scales and allows to overcome the major difficulty mentioned above. The mesoscopic scale is defined at the level of local arrangements of particles, called sub-domains, and its relevance is studied on numerical 2D and 3D materials composed of circular then spherical particles, simulated with the discrete element method.

Bidimensional media are geometrically represented by a particle graph composed of closed sub-domains, also called void cells, whose border is constituted by the branches joining the centers of particles in contact : the mesoscopic scale is thus defined at the level of these closed void cells. At this local scale, we first describe the structure of the medium in terms of density and fabric ; we define then the static and kinematic variables in terms of stress and of strain. Strong heterogeneities of granular media in terms of structure, stress and strain are highlighted at this scale, with a structuration of heterogeneities of stress and strain and a significant correlation between these two quantities.

Concerning tridimensional media, a partition into closed void cells is impossible, because of the complexity of the 3D structure of these media. We propose a partition method based on the distribution of voids inside the medium. This method consists first in subdividing the medium into tetrahedrons by a Delaunay partition and then in associating neighbouring tetrahedrons, according to a criterion to be defined. This allows us to form sub-domains which are not closed but which play a role analogous to the role of closed sub-domains in the 2D study. The proposed association criterion is based on the ratio between the size of constriction (void on each face of tetrahedrons) and the size of pores around each constriction. This partition method constitutes a preliminary step for an extension of the results obtained in the bidimensional case to the tridimensional case.

**Keywords** : Granular materials, discret element method, change of scales, mesoscopic scale, particle graph, sub-domains.