



HAL
open science

Marcheurs, dualité onde-particule et Mémoire de chemin

Antonin Eddi

► **To cite this version:**

Antonin Eddi. Marcheurs, dualité onde-particule et Mémoire de chemin. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2011. Français. NNT : . tel-00575626

HAL Id: tel-00575626

<https://theses.hal.science/tel-00575626>

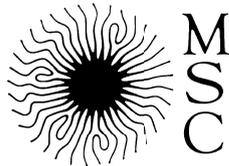
Submitted on 10 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS VII - U.F.R. DE PHYSIQUE

LABORATOIRE MATIÈRE ET SYSTÈMES COMPLEXES



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII

Spécialité : **PHYSIQUE**

présentée par

Antonin EDDI

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII

Sujet de la thèse :

**Marcheurs,
Dualité onde-particule et
Mémoire de chemin**

Soutenue le 2 février 2011 devant le jury composé de :

<i>Elisabeth Charlaix</i>	Rapporteur
<i>François Charru</i>	Examineur
<i>Christophe Clanet</i>	Rapporteur
<i>Yves Couder</i>	Directeur de thèse
<i>Emmanuel Fort</i>	Co-directeur de thèse
<i>Benoît Roman</i>	Examineur

Remerciements

Elisabeth Charlaix et Christophe Clanet ont accepté de rapporter mon travail. François Charru et Benoît Roman m'ont fait l'honneur d'être membres de mon jury. Je les remercie tous vivement.

Yves Couder a dirigé ce travail. Il m'a surtout fourni un cadre de travail exceptionnel. C'est une grande chance pour moi d'avoir bénéficié de ses conseils, aussi bien expérimentaux que scientifiques. Pendant ces quatre années au laboratoire, il a su s'investir au quotidien pour me permettre de progresser. Travailler sous sa direction a été à la fois un honneur et un plaisir.

Emmanuel Fort a su quant à lui donner du rythme à cette thèse, en débarquant toujours sur les chapeaux de roue, fourmillant d'idées toujours plus audacieuses. Les nombreuses conversations ont toujours aiguillonné ma curiosité scientifique et m'ont à chaque fois donné envie d'aller plus loin.

Je remercie le laboratoire MSC qui m'a accueilli pendant ma thèse, ses deux directeurs Jean Marc Di Meglio et Loïc Auvray ; Carole, Nadine, Danièle et Claudine pour leur assistance au quotidien ; merci à Matthieu, Arnaud et Laurent qui m'ont fourni une aide technique précieuse tout au long de cette thèse pour monter les manips.

Je remercie Arezki Boudaoud, Stéphane Dorbolo, Frédéric Moisy, Julien Moukhtar, Marc Rabaud, Maurice Rossi, Eric Sultan et Denis Terwagne avec qui les interactions scientifiques ont été nombreuses et constructives. Mon travail leur doit beaucoup.

Je remercie également mes collègues de la mezzanine 777A : Adrian, Alexis le plantologue, Aurélien, Chi-Tuong (et Tele2), Eric, Giuseppe, Komat', J.B., Julien Ju, Julien D., Julien M., Laurent, Luc, Mehdi, Nicolas, Paul, Stéphanie, Stéphane, Tadashi et tous ceux (y compris les jeux olympiques) qui ont partagé mon quotidien au laboratoire. La terrasse et tous les gens qui l'ont fréquentée pour des barbecues et/ou des cafés méritent mes plus vifs remerciements.

Plus personnellement, je tiens à remercier mes parents et beaux-parents pour leur soutien pendant toutes ces années. Mon frère, ma sœur, mes grands-parents et mes amis

m'ont également apporté beaucoup.

Enfin un immense merci à Mélanie qui m'a soutenu et supporté avec constance et confiance pendant toute ma thèse.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	i
1 Gouttes rebondissantes, instabilité de Faraday et marcheurs	1
1.1 Non-coalescence et lubrification	2
1.2 Gouttes rebondissantes	2
1.2.1 Rebond sur une surface en vibration et lubrification	3
1.2.2 Régimes de rebonds	5
1.2.3 Interactions via les ondes de surface	8
1.3 L'instabilité de Faraday	10
1.3.1 Une expérience simple	10
1.3.2 Approche théorique	11
1.3.3 Un outil pour la physique non linéaire	13
1.3.4 États localisés	14
1.4 Marcheurs	16
1.4.1 Mise en marche	16
1.4.2 Premier modèle : bifurcation de marche	19
1.4.3 Interaction à deux gouttes	20
1.5 Diffraction de marcheurs	21
1.5.1 Dualité onde-particule à l'échelle macroscopique	21
1.5.2 Résultats expérimentaux	22
2 Dispositif expérimental	25
2.1 Montage expérimental	26
2.2 Comment générer des gouttes ?	27
2.3 Mesure de la profondeur	30
2.4 Acquisition et traitement d'images	31

2.4.1	Visualisation d'ondes	32
2.4.2	Mesures de trajectoires	32
2.5	Reconstruction de surfaces	33
2.5.1	Optique	34
2.5.2	Corrélations d'images et traitements numériques	35
3	Transmission partielle de marcheurs : un « effet tunnel » macroscopique ?	37
3.1	Barrières immergées	37
3.1.1	Premières expériences	37
3.1.2	Effet de la profondeur sur les seuils de marche et de Faraday	39
3.1.3	Transmission d'ondes à travers une barrière	40
3.2	Géométries expérimentales	43
3.2.1	1 ^{re} géométrie : cavité double	43
3.2.2	2 ^{ème} géométrie : désintégration α	45
3.2.3	3 ^{ème} géométrie : effet tunnel unidimensionnel	49
3.3	Un « effet tunnel » macroscopique ?	52
3.3.1	Effet tunnel en mécanique quantique	52
3.3.2	« Effet tunnel » avec les marcheurs	55
3.3.3	Évanescence de la marche	56
3.3.4	Incertitude et trajectoires	56
4	Ondes d'un marcheur, sillage et mémoire de chemin	59
4.1	Évolution du champ d'onde	59
4.1.1	Visualisation par ombroscopie	59
4.1.2	Mesures d'ondes	60
4.2	Modèle phénoménologique	62
4.2.1	Modèle	62
4.2.2	Forme d'ondes	63
4.2.3	Mise en marche des gouttes	64
4.2.4	Apparition du sillage	65
4.3	Chocs uniques sur une surface en vibration	66
4.3.1	Approche expérimentale	66
4.3.2	Approche théorique et numérique	71
4.4	Ondes d'un marcheur : chocs répétés et entretenus	73
4.4.1	Deux types d'ondes et une mémoire temporelle	73
4.4.2	Ondes propagatives et effet Doppler	74

4.4.3	Ondes stationnaires. Stockage d'information	75
4.4.4	Sillage d'un marcheur	77
4.5	La mémoire de chemin	79
5	Quantification d'orbites macroscopiques	81
5.1	Analogie entre champ magnétique et vorticité	81
5.1.1	Force de Lorentz et force de Coriolis	81
5.1.2	Niveaux de Landau en mécanique quantique	82
5.1.3	Effet Aharonov-Bohm	84
5.2	Orbites sur un bain en rotation	86
5.2.1	Bain en rotation	86
5.2.2	Auto-orbites	88
5.2.3	Forces s'appliquant sur un marcheur	89
5.3	Mémoire de chemin et quantification	92
5.3.1	Faible mémoire	92
5.3.2	Longue mémoire	94
5.3.3	Quantification des niveaux	96
5.3.4	Évolution de la vitesse	98
5.3.5	Champs d'ondes	99
5.4	Simulations numériques	100
5.4.1	Principe	100
5.4.2	Faible mémoire	101
5.4.3	Longue mémoire	102
5.4.4	Champs d'ondes	102
5.5	Force de quantification générée par les ondes	102
5.5.1	Sources passées	103
5.5.2	Faible mémoire	104
5.5.3	Longue mémoire : supplément de force dû aux ondes	105
5.5.4	Force de quantification et marcheur virtuel	108
5.6	Conclusion	110
6	Bilan et Perspectives	113
6.1	Dualité onde-particule à l'échelle macroscopique en présence de mémoire de chemin	113
6.2	Question ouvertes	114
6.3	Marcheurs en cavité	115
6.3.1	Couplage entre ondes du marcheur et cavité	115

6.3.2	Cavité circulaire	115
6.3.3	Évolution des trajectoires avec la mémoire de chemin	116
6.3.4	Vers un chaos spatiotemporel?	117
6.4	Billards classiques et quantiques	120
A	Articles	121
B	Vibration de cristaux	133
B.1	Vibrations dans un agrégat unidimensionnel	133
B.2	Modélisation	135
B.3	Vibration à deux dimensions	137
C	Diffraction de Fresnel derrière un bord d'écran	141

Introduction

Le travail qui est présenté ici se situe dans le prolongement de travaux initiés en 2004 où il avait été montré qu'il est possible d'inhiber la coalescence d'une goutte dans un bain liquide à condition de maintenir le substrat en vibration [19]. La goutte peut alors rebondir indéfiniment sur la surface, en renouvelant à chaque rebond le film d'air qui la sépare du bain.

Cette première étude a été suivie par un stage de M2, puis une thèse. S. Protière a montré au cours de ces travaux que la goutte génère des ondes à chaque rebond [69]. La périodicité de ces ondes est la même que celle des rebonds de la goutte. Nous verrons qu'à faible excitation, ces ondes ont la fréquence du forçage, et sont fortement amorties. Ces ondes sont cependant suffisantes pour générer une interaction entre plusieurs gouttes présentes sur la même interface. On observe alors la formation d'agrégats.

Une partie de ce travail de thèse a été consacrée à divers aspects de la physique de ces agrégats. Nous avons d'abord caractérisé expérimentalement les propriétés de duos de gouttes [31]. Nous avons aussi étudié les assemblages cristallins obtenus avec un grand nombre de gouttes identiques [29]. Nous avons également montré que ces réseaux sont susceptibles de vibrer spontanément lorsque l'accélération de forçage dépasse un certain seuil. Tous ces résultats concernant les agrégats de gouttes statiques ne sont pas discutés dans le corps de ce manuscrit. Ils sont regroupés dans les annexes A et B, la première rassemblant les articles publiés, la seconde décrivant les propriétés vibratoires des réseaux de gouttes.

Le manuscrit est donc entièrement consacré à l'étude de ce qu'on appelle les *marcheurs*. Lorsque l'on augmente l'accélération du forçage, la période de rebond des gouttes double. Ceci se produit au voisinage mais en dessous du seuil de l'instabilité de Faraday où des ondes sous harmoniques croissent spontanément pour couvrir toute la surface du liquide. Les ondes générées par le rebond sous harmonique de la goutte sont donc des ondes de Faraday d'amplitude relativement forte et de faible amortissement. On assiste alors à un couplage entre la goutte et ses propres ondes donnant naissance à un marcheur — l'as-

sociation de la goutte et de ses ondes— auto-propulsé à la surface du bain. Le marcheur se déplace avec un mouvement rectiligne et uniforme sur la surface. Cette structure est très stable et présente des propriétés originales du fait qu'elle associe, à l'échelle macroscopique, une onde avec une particule.

Le comportement dual qui en résulte a été mis en évidence dès 2006 dans une série d'expériences de diffraction de marcheur unique [18]. Lorsque l'on diaphragme l'onde de manière à réduire son extension spatiale, elle est diffractée, et il en résulte, pour la particule, une déviation aléatoire pour une réalisation donnée, bien qu'on retrouve, à l'échelle statistique, une probabilité de distribution déterministe de diffraction. Ceci signifie que la tentative de localiser la position de la goutte conduit à une incertitude sur la direction de sa vitesse.

Pour prolonger les expériences de diffraction, nous pouvons nous demander quel est le comportement de la goutte localisée et discrète lorsque l'onde est partiellement transmise à travers une barrière. Un marcheur est envoyé sur une barrière complètement immergée provoquant une transmission partielle des ondes. Nous allons étudier la possibilité pour le marcheur de traverser cette barrière si celle-ci est peu épaisse. Nous montrerons que le résultat de chaque collision est aléatoire, mais qu'à l'échelle statistique on peut définir une probabilité de passage. Nous discuterons l'analogie qui existe entre cette expérience et l'effet tunnel en mécanique quantique.

Nous verrons que les deux résultats présentant une analogie quantique reposent sur une structure particulière des ondes du marcheur. Il s'est donc révélé nécessaire de mesurer quantitativement ce champ d'ondes. Nous avons pour cela utilisé une technique d'imagerie introduite récemment [62] qui permet une reconstruction très précise de la forme de la surface. L'analyse des résultats montre qu'il existe une figure d'interférence due à la superposition des ondes émises à chaque choc. Leur temps caractéristique d'amortissement dépend de l'écart au seuil de l'instabilité de Faraday ce qui est confirmé par une analyse théorique et numérique. Le faible amortissement des ondes génère une forme de mémoire temporelle qui conduit le marcheur à laisser dans l'espace réel une trace sur la surface : il s'agit de la *mémoire de chemin*. L'analyse des ondes existant à la surface montre l'influence de cette mémoire de chemin sur le sillage qui accompagne le marcheur et qui lui confère des propriétés spécifiques dans les expériences de diffraction et d'effet tunnel.

Une dernière série d'expériences a été menée pour analyser le rôle de la mémoire de chemin dans le cas où la trajectoire n'est plus rectiligne mais circulaire. Le dispositif expérimental a été adapté pour pouvoir appliquer au marcheur une force perpendicu-

laire au mouvement. Les trajectoires suivies sont alors circulaires et leur rayon dépend de l'intensité de la force appliquée. Le rôle de la mémoire de chemin dans cette dépendance est crucial, puisque les rayons sont quantifiés dans le cas où la mémoire est longue, c'est-à-dire lorsque le marcheur interagit avec son propre passé via les sources qui continuent à émettre des ondes sur la surface. On obtient alors un analogue aux niveaux de Landau de la mécanique quantique, la mémoire de chemin étant à l'origine de cette quantification spontanée.

L'organisation du manuscrit est la suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons les premières expériences réalisées avec les gouttes rebondissantes, en particulier les régimes où elles sont statiques. Nous présentons également l'instabilité de Faraday qui permet d'expliquer le couplage entre goutte et ondes à l'origine des marcheurs. Leurs propriétés sont discutées, en particulier dans le cas des expériences de diffraction. Dans un second chapitre, nous présentons le montage expérimental ainsi que l'ensemble des techniques de mesure utilisées. Le troisième chapitre est dédié à l'étude d'un analogue de l'effet tunnel pour les marcheurs. Le quatrième est consacré à l'étude des ondes de surface générées par un marcheur, en particulier le lien avec l'instabilité de Faraday à l'origine de la mémoire de chemin. Enfin, dans le chapitre cinq, nous analysons la nature des trajectoires circulaires d'un marcheur soumis à une force orthogonale au mouvement. L'influence de la mémoire de chemin sur la quantification des rayons est présentée en détail, pour comprendre comment cet analogue macroscopique des niveaux de Landau se met en place avec des marcheurs.

Chapitre 1

Gouttes rebondissantes, instabilité de Faraday et marcheurs

Un des projets expérimentaux de L3 à l'université Paris Diderot avait été consacré en 2004, à la non coalescence de gouttes. Le point de départ était un article de Sreenivas *et al.* [75], dans lequel ces auteurs montrent qu'une goutte liquide peut se maintenir en suspension à proximité d'un ressaut hydraulique. La goutte est maintenue par les forces de lubrification d'un film d'air entraîné par l'écoulement. Au cours de ce travail, Y. Couder, E. Fort et C. H. Gautier se sont aperçus qu'un effet du même genre existait pour une goutte déposée sur un substrat oscillant verticalement si l'amplitude de l'oscillation est suffisante. La goutte se met alors à rebondir sur la surface, renouvelant à chaque saut le film d'air qui la sépare du bain.

Nous verrons d'abord les différentes circonstances dans lesquelles un film gazeux peut assurer, par lubrification, le non-contact d'une goutte avec un substrat.

Nous rappellerons ensuite les conditions nécessaires pour assurer la non-coalescence d'une goutte sur un bain en vibration. Nous décrirons les différents régimes de rebond. Nous verrons que des ondes sont émises à chaque rebond sur la surface et nous présenterons l'interaction entre les gouttes qui en résulte.

Nous présenterons ensuite l'instabilité de Faraday, c'est-à-dire l'apparition d'ondes à la surface d'un liquide soumis à une accélération périodique verticale. Nous analyserons les propriétés de cette instabilité ainsi que leurs conséquences expérimentales sur les ondes susceptibles d'exister sur le bain.

Au cours de sa thèse, S. Protière a introduit les marcheurs, objets issus du couplage entre

la goutte et les ondes de surface au voisinage du seuil de l'instabilité de Faraday [69]. Les marcheurs se déplacent spontanément sur la surface avec un mouvement rectiligne uniforme, et nous rappellerons ici la nature de l'interaction entre les ondes et la goutte ainsi que les propriétés qui en découlent.

Nous décrirons enfin le couplage entre ondes et particule réalisé au sein des marcheurs, et nous présenterons les expériences de diffraction de marcheur unique réalisées par Y. Couder et E. Fort en 2006 [18].

1.1 Non-coalescence et lubrification

L'expérience de Leidenfrost [51] montre dès le XVIII^{ème} siècle que l'on peut utiliser les forces de lubrification pour empêcher le contact entre une goutte liquide et un substrat. Déposée sur un support chaud, une goutte se vaporise et génère un film de gaz. Lorsque son épaisseur est faible, l'écoulement dans le film devient visqueux et génère des forces verticales qui peuvent supporter le poids de la goutte. Le film d'air est renouvelé au fur et à mesure que la goutte s'évapore. Comme la goutte est isolée du substrat par sa propre vapeur, son évaporation est considérablement ralentie [4, 8]. Le même principe a été utilisé dans différentes expériences, faisant à chaque fois intervenir un film gazeux pour soutenir une goutte. Nous avons déjà mentionné le cas des gouttes placées dans un ressaut hydraulique. Un jet liquide vient frapper une surface plane et s'écoule ensuite radialement [87]. On observe une brutale élévation de la surface à une certaine distance du centre, associée à une chute de la vitesse radiale. Sreenivas *et al.* [75] ont montré que l'écoulement d'air entraîné par le liquide dans le ressaut suffit à maintenir le film d'air sous une goutte pendant plusieurs minutes. La goutte est alors bloquée au niveau de l'épaule du ressaut. On peut également utiliser un film de savon comme trampoline [38, 39] : il se tend lors de l'impact de la goutte et l'élasticité permet de renvoyer la goutte avant que la pellicule d'air entre la goutte et le film de savon ne se rompe (fig. 1.1). Enfin, l'expérience des gouttes rebondissantes sur un bain en vibration, à la base des travaux de cette thèse, utilise le même principe, le film d'air étant renouvelé à chaque rebond.

1.2 Gouttes rebondissantes

Considérons un récipient rempli de liquide, qui est fixé sur un haut-parleur et qui est ainsi mis en vibration. On applique une accélération verticale $\gamma(t) = \gamma_m \cos(\omega_0 t)$ à fréquence $f_0 = \omega_0/(2\pi)$. Une goutte déposée à la surface du liquide est susceptible de se

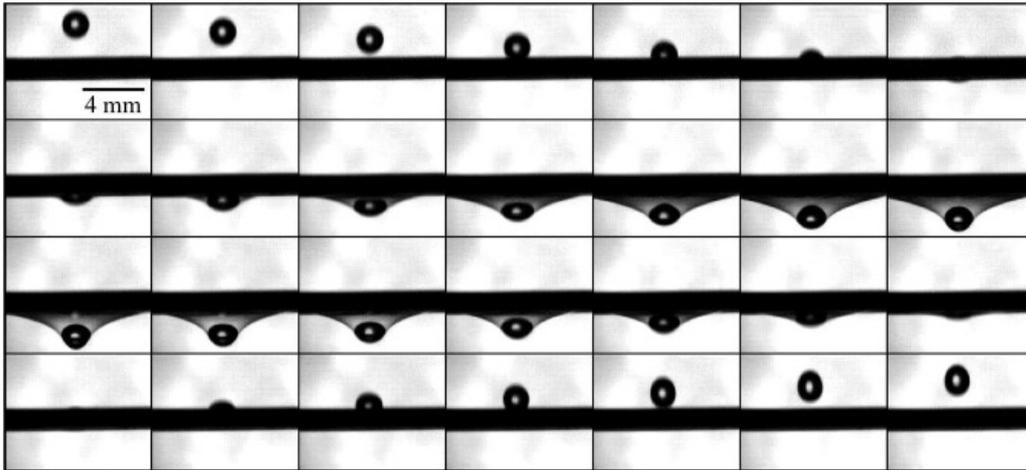


FIGURE 1.1 – Goutte rebondissant sur un film de savon. Il s’écoule 1 ms entre chaque image. *D’après [39].*

mettre à rebondir sur la surface (fig. 1.2). Pour cela, il faut réussir à entretenir le film d’air qui sépare la goutte de la surface du bain [19]. La vibration permet de renvoyer la goutte avant la rupture du film sous réserve que l’accélération imposée soit supérieure à la gravité et que la fréquence de vibration soit suffisamment élevée pour repousser la goutte à temps. Plusieurs paramètres physiques (μ_G la viscosité du gaz, μ la viscosité du liquide, D le diamètre de la goutte, f_0 la fréquence de forçage et γ_m l’amplitude du forçage) fixent les propriétés exactes du rebond observé.

1.2.1 Rebond sur une surface en vibration et lubrification

Nous souhaitons déterminer dans un premier temps les conditions à remplir pour que le film d’air puisse résister à la pression imposée par la goutte durant la phase de contact, mais aussi pour que le film soit renouvelé périodiquement, et donc que la goutte puisse décoller de la surface. Il faut donc considérer la dynamique de l’écoulement de l’air dans le film pour déterminer les conditions nécessaires au rebond [19].

Une goutte de liquide de rayon R_G est déposée sur un bain du même liquide (de viscosité μ et de masse volumique ρ). Le bain liquide est soumis à une accélération verticale sinusoïdale $\gamma = \gamma_m \cos(2\pi f_0 t)$ de fréquence f_0 et d’amplitude γ_m . La goutte est séparée du bain par un film d’air de viscosité μ_G , de densité ρ_G et d’épaisseur e supposée constante pour des rayons inférieurs à r_F (voir fig. 1.3). Nous supposons que $\mu_G \ll \mu$ pour que l’écoulement d’air n’induisse pas de mouvement du fluide au sein de la goutte. Lors de l’atterrissage, le film d’air résiste à la pression imposée par la goutte

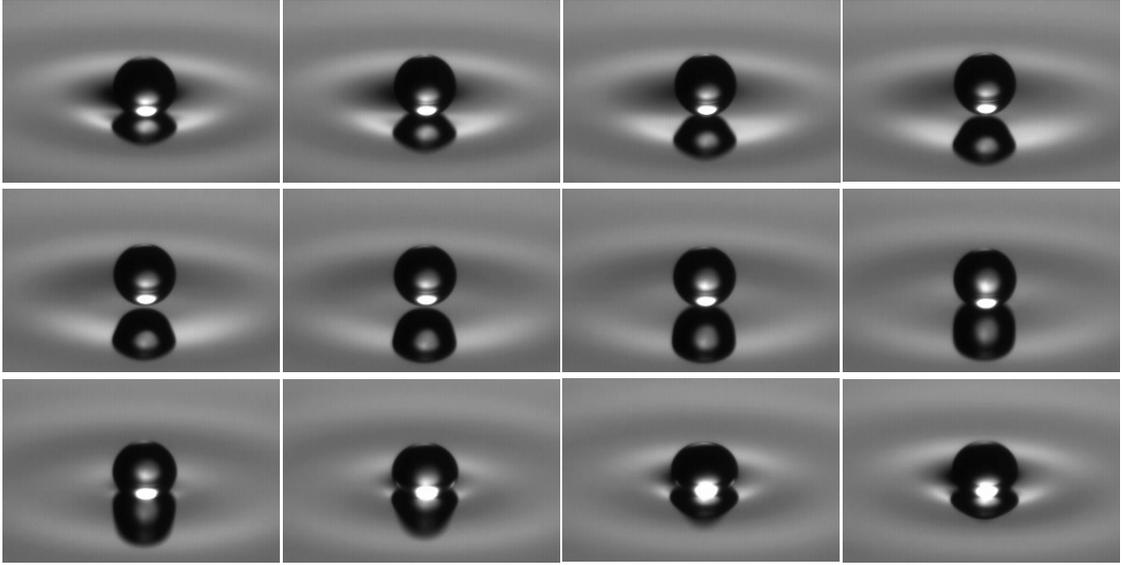


FIGURE 1.2 – Détail du rebond d’une goutte sur un bain en vibration. La goutte mesure $D \simeq 1.2$ mm de diamètre et les photographies sont prises toutes les millisecondes.

à condition que le régime de l’écoulement soit visqueux. Dans ce cas là, des forces de lubrification se développent et sont susceptibles de soutenir la goutte au-dessus du bain. L’épaisseur e du film décroît alors extrêmement lentement. Ce régime est atteint si le nombre de Reynolds (qui compare termes inertiels et visqueux dans l’écoulement) est suffisamment petit. On le définit par

$$Re = \frac{\rho_G L V}{\mu_G} \quad (1.1)$$

où L et V sont une taille et une vitesse caractéristiques de l’écoulement. On choisira $L = e$ et $V = e \omega_0$, la pulsation de la vibration imposée fournissant un temps caractéristique pour l’écoulement. Les forces de lubrification se manifestent si Re est plus petit qu’un nombre de Reynolds critique Re_c . On écrit donc :

$$\frac{\rho_G e^2 \omega_0}{\mu_G} < Re_c \quad (1.2)$$

Cette condition nous fournit une échelle caractéristique e_0 pour l’épaisseur du film d’air. L’approximation de lubrification permet d’estimer ensuite la force F qu’exerce le film pour s’opposer à la pression imposée par la goutte [44] :

$$F \sim \mu_G \frac{r_F^4 \omega}{e_0^2} \quad (1.3)$$

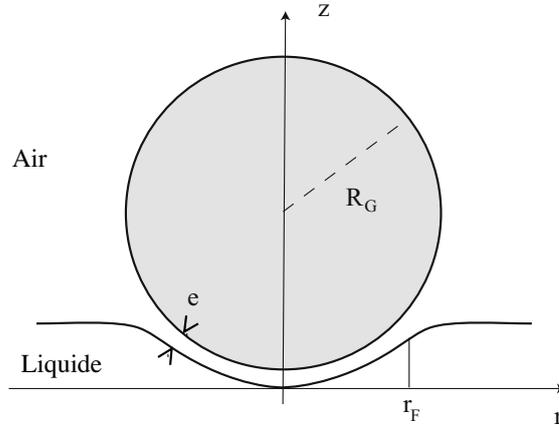


FIGURE 1.3 – Schéma de principe d'une goutte rebondissant sur un bain liquide. L'écoulement d'air entre la goutte et le bain est extrêmement confiné, ce qui provoque l'apparition de forces de lubrification suffisantes pour soutenir la goutte au-dessus de la surface.

En considérant la masse $m = \frac{4}{3}\pi R_G^3 \rho$ de la goutte et γ l'accélération qu'elle subit, on déduit du principe fondamental de la dynamique deux conditions (à l'atterrissage et au décollage) pour l'équilibre des forces. La plus restrictive (celle correspondant au décollage) nous permet de déterminer l'accélération critique γ_m^C nécessaire au rebond de la goutte :

$$\gamma_m^C = g + \frac{1}{Re_c} \frac{\rho_G}{\rho} l \omega^2 \quad \text{avec} \quad l = \frac{r_F^4}{r_G^3} \quad (1.4)$$

En conséquence, l'accélération nécessaire pour faire rebondir une goutte est plus importante lorsque la fréquence de vibration est plus élevée, mais aussi lorsque la goutte est plus grosse (l croît avec r_G si l'on considère que $r_F \propto r_G$). Cette expression confirme les résultats expérimentaux présentés dans [19].

1.2.2 Régimes de rebonds

Les travaux réalisés dans le cadre de la thèse de S. Protière ont montré qu'au-delà du modèle présenté ci-dessus le rebond des gouttes dépend a priori de cinq paramètres : μ_G la viscosité du gaz, μ la viscosité du liquide, D le diamètre de la goutte, f_0 la fréquence de forçage et γ_m l'amplitude du forçage. En fixant μ_G , μ et f_0 , il est possible d'établir le diagramme de phase du rebond des gouttes en fonction du diamètre D et de l'accélération imposée γ_m . La figure 1.4 résume les comportements observés pour de l'huile de viscosité $\mu = 50 \cdot 10^{-3}$ Pa.s avec une fréquence de forçage $f_0 = 50$ Hz.

La région du diagramme de phase où les gouttes peuvent rebondir est limitée par

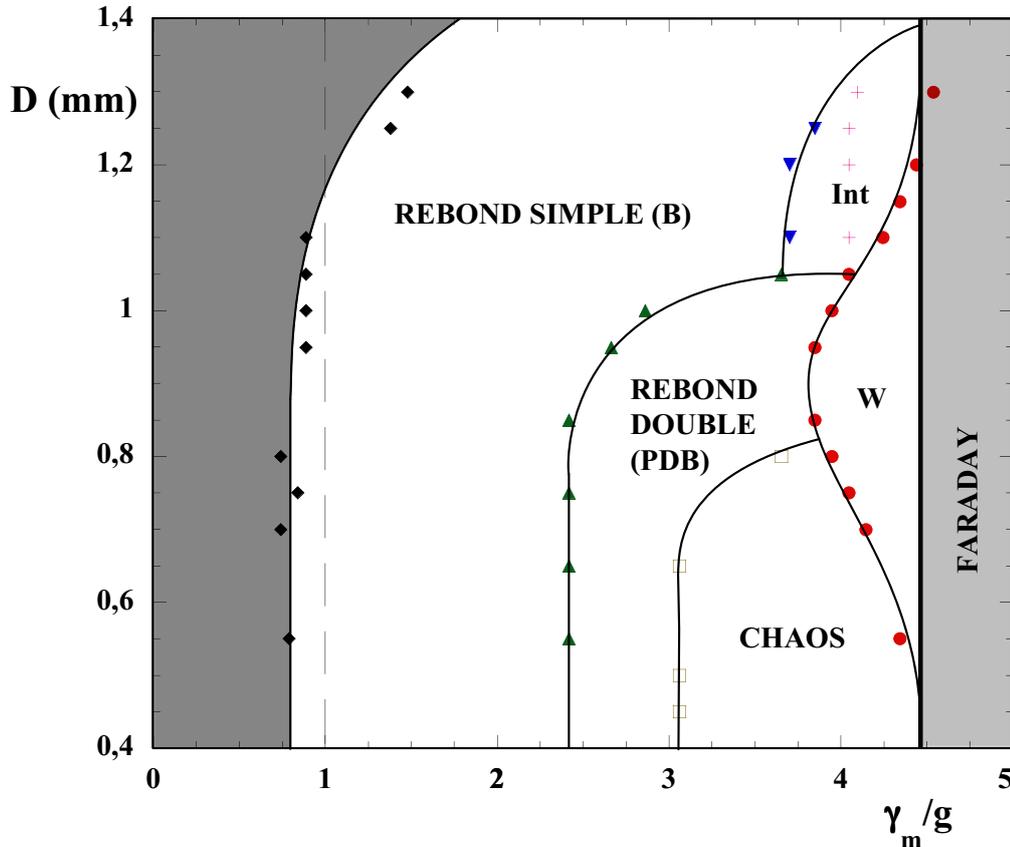


FIGURE 1.4 – Diagramme de phase montrant le comportement de gouttes de tailles différentes lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle γ_m . Trois régions sont à observer : région I $0.4 < D < 0.75\text{mm}$; région II $0.75 < D < 1.05\text{mm}$ et région III $1.05 < D < 1.4\text{mm}$. $f_0 = 50\text{Hz}$ et $\mu_L = 50 \cdot 10^{-3}\text{Pa.s}$. D'après [69].

deux phénomènes. Si l'accélération imposée est plus petite que γ_m^C , le film d'air qui maintient la goutte n'est pas renouvelé, et l'on observe une coalescence. D. Terwagne *et al.* [77] ont mené une étude approfondie de la transition entre rebond entretenu et coalescence au voisinage de cette frontière. L'autre limite est marquée par le déclenchement de l'instabilité de Faraday dans le bain. La goutte devient alors esclave des modes qui se développent sur la surface, son rebond devient chaotique, le film d'air n'est plus renouvelé correctement et elle finit par disparaître.

Entre ces deux frontières, la goutte rebondit sur la surface, et sa durée de vie est a priori infinie. Différentes régions existent dans cette zone. La goutte peut rebondir régulièrement à la même fréquence que le bain, on parle de rebond simple (voir 1.5 (a)). Pour des accélérations légèrement supérieures, elle présentera un doublement de

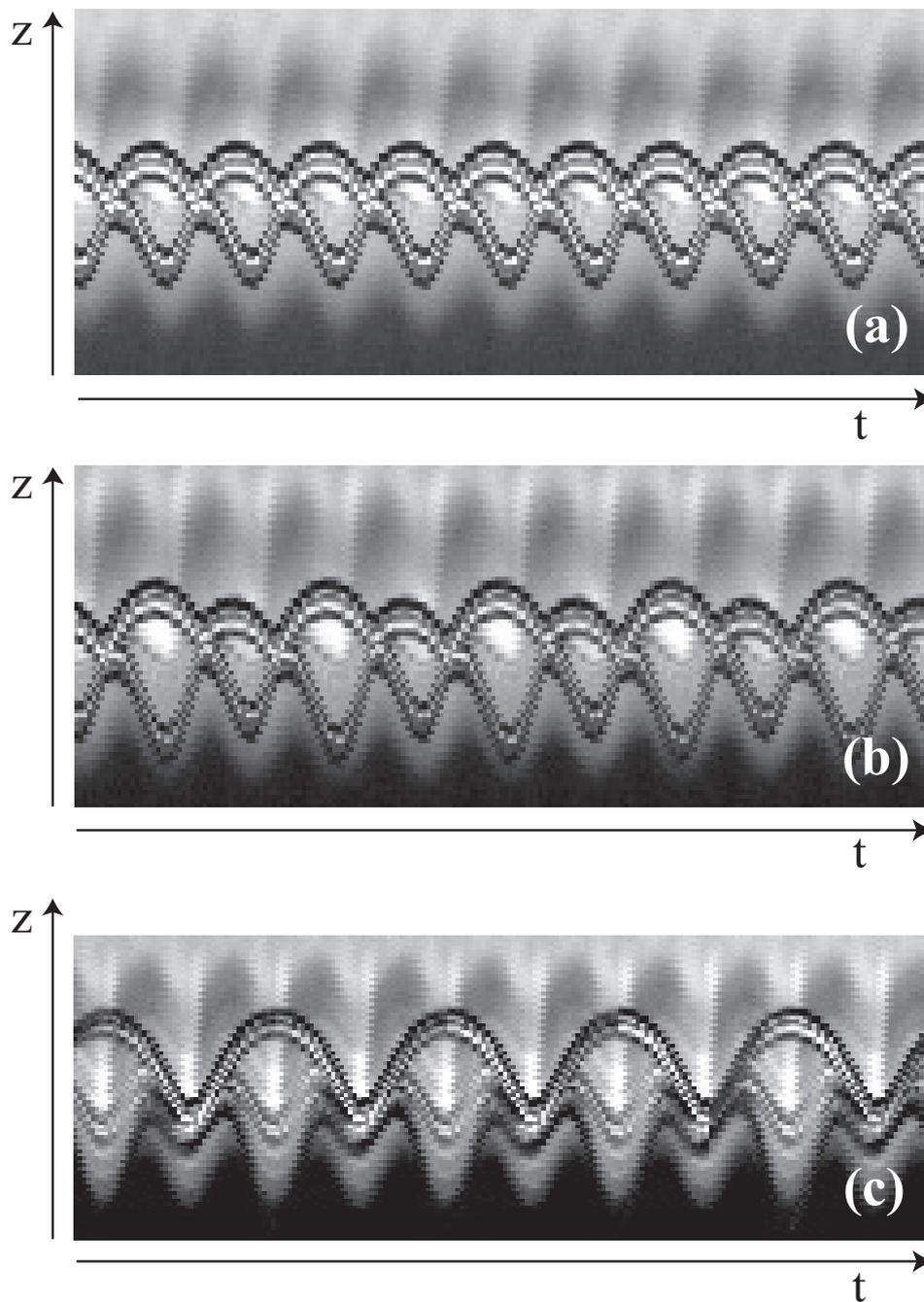


FIGURE 1.5 – Trois images spatio-temporelles montrant le comportement vertical d’une goutte dans le temps (temps écoulé : 0.2s). (a) Rebond simple $\gamma_m/g = 2.5$, $D = 1$ mm. (b) Doublement de période $\gamma_m/g = 3.5$, $D = 1$ mm, (c) Doublement complet de période $\gamma_m/g = 4.3$, $D = 1$ mm. $f_0 = 80$ Hz, $\mu_L = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. D’après [69].

période. Son rebond aura une période correspondant à deux cycles de vibration du bain, enchaînant successivement un saut court et un saut long (voir 1.5 (b)). La région chaotique du diagramme de phase (faibles diamètres et grandes accélérations) correspond à une succession de doublements de période du rebond. Il s'agit d'un schéma de transition vers le chaos bien connu : la cascade sous-harmonique [35] (ou cascade de Feigenbaum), où le système perd progressivement toute périodicité. Cette succession de doublements de période a été observée à plusieurs reprises dans un système voisin où l'on fait rebondir une bille (plus ou moins élastique) sur un plateau soumis à une vibration verticale [65, 66, 80, 79]. Un autre régime de rebond est observé pour les très grosses gouttes : il s'agit d'un régime intermittent pour lequel le rebond n'est pas régulier à cause des déformations importantes de la goutte qui modifient son comportement. Enfin, si le diamètre D de la goutte est tel que $0.75 < D < 1.15$ mm, il est possible d'observer un doublement complet de période en réglant γ_m au-delà d'un seuil $\gamma_W(D)$. Dans ces cas-là, la goutte effectue un rebond tous les deux cycles de vibration exactement (fig. 1.5 (c)). A cet instant, elle commence à se déplacer spontanément à la surface : c'est un marcheur. Dans la suite de cette thèse, nous reviendrons en détail sur ces gouttes marcheuses et sur leur propulsion par les ondes de surface. Nous pouvons enfin mentionner qu'un autre régime d'auto-propulsion a été observé pour des grosses gouttes [24]. Ces gouttes présentent des déformations très importantes : il est alors possible d'exciter spécifiquement certains modes de vibration de ces sphères. Le mouvement est généré par des oscillations dissymétriques de la goutte qui, brisant la symétrie de translation, la mettent en mouvement. Ces structures, contrairement aux marcheurs, sont peu stables car elles sont détruites au contact des bords de la cellule.

1.2.3 Interactions via les ondes de surface

Une goutte est sensible à la forme de l'interface sur laquelle elle rebondit. Si celle-ci est inclinée, la goutte recevra une impulsion au décollage et subira une interaction effective qui tendra à la déplacer dans le plan horizontal. Cette force sera proportionnelle à la pente sur laquelle la goutte rebondit. La présence d'ondes sur la surface peut donc servir à générer des forces sur les gouttes. Si nous observons de nouveau la figure 1.2, nous constatons que des ondes de surface sont émises par une goutte au cours de son rebond. Deux gouttes, placées au voisinage l'une de l'autre vont donc interagir. La figure 1.6 (a) montre qu'il existe des positions discrètes d'équilibre, espacées par des multiples de la longueur d'onde. Bien que ce ne soit pas le sujet principal de cette thèse, nous avons étudié un certain nombre de phénomènes liés à cette interaction entre gouttes. En particulier, lorsque l'on forme un duo de gouttes dont les diamètres sont différents,

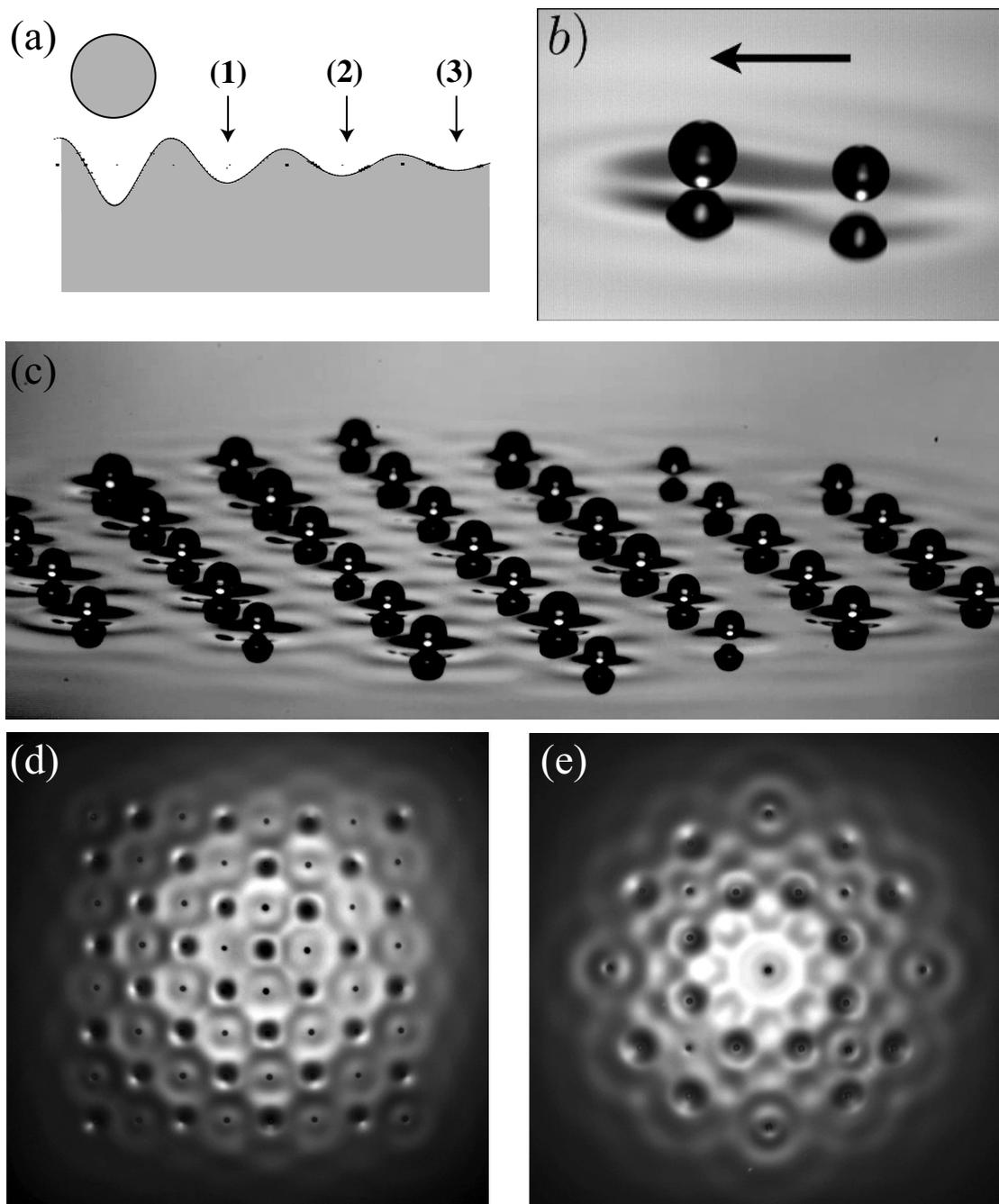


FIGURE 1.6 – (a) Positions d'équilibre pour une goutte placée dans le champ d'ondes créé par une autre goutte. (b) Duo asymétrique se déplaçant spontanément à la surface du bain. *D'après* [31]. (c) Vue de côté d'un réseau triangulaire de gouttes. (d) Vue de dessus d'un réseau carré. (e) Vue de dessus d'un réseau formé de carrés et d'octogones. *D'après* [29].

l'amplitude des ondes émises n'est plus la même dans toutes les directions et des effets de pression de radiation se font sentir : le duo se met spontanément en mouvement à la surface [31]. De la même manière, des auteurs ont mentionné à plusieurs reprises la possibilité d'utiliser cette interaction effective entre gouttes pour construire des agrégats cristallins à la surface du bain [71, 84, 53]. Nous avons montré que les gouttes peuvent s'organiser de manière stable selon différents motifs cristallins [29]. Il s'agit des réseaux archimédiens introduits initialement par Kepler [48]. Enfin, nous avons mis en évidence le fait qu'une fois formées, ces structures régulières sont susceptibles de présenter des propriétés dynamiques intéressantes. Au-delà d'une accélération seuil, une vibration collective est susceptible de se développer au sein de l'agrégat. Un modèle, proposé par Arezki Boudaoud, permet de rendre compte des observations expérimentales. Pour le lecteur qui serait intéressé, les annexes A, B et C reprennent ces différents aspects.

1.3 L'instabilité de Faraday

1.3.1 Une expérience simple

On applique une accélération verticale $\gamma(t) = \gamma_m \cos(\omega_0 t)$ à la fréquence $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ à un récipient rempli de liquide et placé sur un haut-parleur. En 1831, M. Faraday nota que, pour des accélérations γ_m supérieures à un seuil γ_F , la surface du liquide se déstabilise [34] et des ondes stationnaires apparaissent spontanément à l'interface liquide-gaz (fig. 1.7 (a)). La modulation de la gravité effective ressentie par le liquide provoque le forçage paramétrique d'ondes de surface. Ces dernières possèdent une fréquence (dite de Faraday) $f_F = f_0/2$ à la fréquence moitié de la fréquence de forçage. Leur longueur d'onde λ_F dépend de la fréquence imposée. En effet, nombre d'onde k et pulsation ω vérifient la relation de dispersion pour des ondes linéaires (*voir par exemple* [44]) :

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right) \tanh kh \quad (1.5)$$

où g correspond à la gravité, σ à la tension de surface, ρ à la densité et h à la profondeur de liquide. En injectant $\omega_F = 2\pi f_F$, on déduit la longueur d'onde sélectionnée $\lambda_F = 2\pi/k_F$. La figure 1.7 (b) représente λ_F en fonction de la fréquence de Faraday $f_F = f_0/2$. Nous constatons que la longueur d'onde diminue avec la fréquence. Nous pouvons également introduire grâce à la relation de dispersion la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$ et la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ des ondes qui se développent à la surface. Dans le régime d'ondes capillaires que nous considérons ici, nous avons $v_g \simeq 3/2v_\phi$. La valeur du seuil γ_F de l'instabilité de Faraday dépend de la fréquence d'excitation, mais également de la

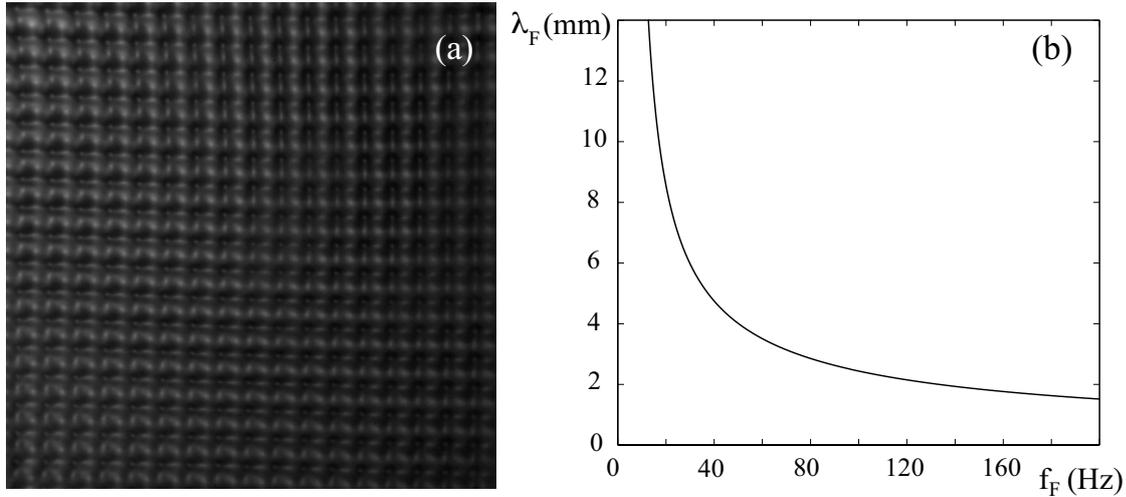


FIGURE 1.7 – (a) Ondes stationnaires de Faraday en régime développé dans un récipient carré. (b) Relation de dispersion en eau profonde pour de l'huile silicone entre la fréquence de Faraday f_F et la longueur d'onde de Faraday λ_F .

viscosité μ du liquide utilisé. Si la fréquence f_0 croît, la longueur d'onde sélectionnée λ_F diminue, ce qui a pour conséquence d'augmenter les effets de la dissipation visqueuse. Le seuil de l'instabilité γ_F augmente donc avec la fréquence de forçage f_0 . A fréquence de forçage fixée, plus la viscosité augmente, plus l'énergie dissipée est importante, et plus le seuil de l'instabilité est élevé. Il faut également noter que le motif des ondes à l'équilibre dépend de la forme du récipient. Ainsi un récipient carré sélectionne des ondes selon deux axes perpendiculaires tandis qu'un récipient circulaire va générer des ondes axisymétriques. De nombreuses expériences ont été menées pour étudier ces différents aspects expérimentaux [27, 25, 26, 13].

1.3.2 Approche théorique

Il existe un cadre théorique complet dans lequel s'inscrit la description de ce phénomène. Le modèle présenté ici a été proposé par Benjamin et Ursell [5]. Ceux-ci considèrent un fluide parfait (inviscible) et, partant des équations de l'hydrodynamique, ajoutent une modulation périodique de la gravité. En incluant les effets de tension de surface, on obtient une équation reliant le potentiel des vitesses dans le fluide Φ à la position de l'interface ζ au cours du temps :

$$\frac{\sigma}{\rho} \Delta \zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (g - \gamma_m \cos \omega_0 t) \zeta = 0 \quad (1.6)$$

En imposant les conditions cinématiques à la paroi et à l'interface libre, nous pouvons décomposer Φ , ζ et leurs dérivées selon une base de fonctions propres orthogonales $S_m(x, y)$ vérifiant

$$(\Delta + k_m^2) S_m(x, y) = 0 \quad (1.7)$$

où k_m va définir le nombre d'onde du mode considéré.

En réécrivant

$$\zeta(x, y, t) = \sum_0^{\infty} a_m(t) S_m(x, y) \quad (1.8)$$

avec $a_m(t)$ l'amplitude de chaque mode. En projetant sur chaque mode, il vient à l'ordre linéaire l'équation d'amplitude suivante :

$$\frac{d^2 a_m}{dt^2} + k_m \tanh k_m h \left(\frac{k_m^2 \sigma}{\rho} + g - \gamma_m \cos \omega_0 t \right) a_m = 0 \quad (1.9)$$

Enfin, en posant :

$$\begin{aligned} p &= 4 \frac{k_m}{\omega^2} \tanh k_m h \left(g + \frac{k_m^2 \sigma}{\rho} \right) \\ q &= 2 \frac{\gamma_m k_m}{\omega^2} \tanh k_m h \\ u &= \frac{1}{2} \omega t \end{aligned} \quad (1.10)$$

on peut réécrire l'équation 1.9 sous la forme d'une équation de Mathieu :

$$\frac{d^2 A}{du^2} + [p - 2q \cos 2u] A = 0 \quad (1.11)$$

Les solutions de cette équation ne sont pas analytiques, mais il est néanmoins possible de tirer parti de la périodicité du forçage en utilisant la théorie de Floquet [36]. Nous pouvons ainsi déterminer les modes résonnants ainsi que leur stabilité respective. Il ressort de cette analyse que le premier mode instable correspond à un doublement de période $f_F = f_0/2$. Cela signifie qu'il faut deux cycles complets de vibration du bain pour retrouver la structure initiale (voir fig. 1.8), exactement comme dans le cas d'un pendule forcé verticalement [52]. On retrouve également le nombre d'onde de Faraday k_F donné par la relation de dispersion (eq. 1.5). Enfin, on peut noter que l'instabilité décrite par cette équation d'amplitude est supercritique et ne présente pas d'hystérèse. Ce modèle néglige cependant la viscosité et il est impossible de prédire quantitativement le seuil de l'instabilité. Pour estimer l'amortissement, Kumar et Tuckerman [50] proposent un argument basé sur la dissipation énergétique et écrivent :

$$\frac{d^2 A}{du^2} + 2\eta \frac{dA}{du} + [p - 2q \cos 2u] A = 0 \quad (1.12)$$

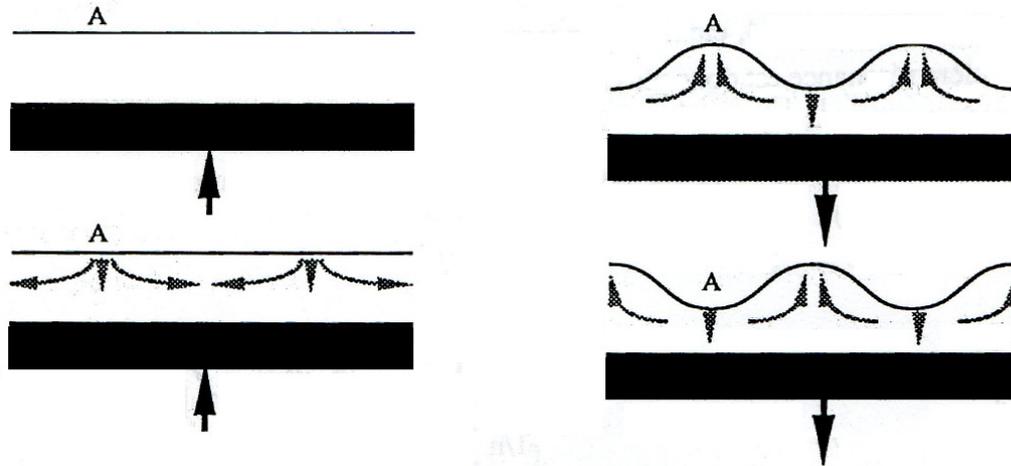


FIGURE 1.8 – Excitation des ondes de Faraday à la moitié de la fréquence de forçage dans un bain liquide. Lorsque le récipient descend, une déformation se met en place. Lorsqu’il remonte, la surface redevient plane. Au cycle suivant, le phénomène se répète, mais les creux deviennent des bosses et réciproquement : on assiste à un doublement de période. *D’après [25].*

avec $\eta = \mu k_m^2$, c’est à dire que le coefficient d’amortissement η dépend à la fois de la viscosité μ et du nombre d’onde k_m considéré. On retrouve ainsi la dépendance de γ_F en fonction de f_0 observée expérimentalement. Plus f_0 est important, plus le nombre d’onde sélectionné k_F augmente et plus la dissipation η devient grande : le seuil de l’instabilité γ_F croît bien avec f_0 .

1.3.3 Un outil pour la physique non linéaire

Lorsque le champ d’onde stationnaire se met en place, ce sont les conditions aux limites spatiales qui fixent a priori la symétrie de la solution sélectionnée. En géométrie carrée, les ondes s’adaptent aux bords et se développent selon deux axes orthogonaux. Ce motif est fortement affecté si l’on impose des conditions aux limites plus complexes. Kudrolli *et al.* [49] ont utilisé un récipient en forme de stade qui s’accorde difficilement avec une structure régulière des ondes. On peut néanmoins observer des modes propres de la cavité qui modulent l’amplitude des ondes stationnaires. Pour une accélération voisine du seuil de l’instabilité γ_F , ces modulations sont stables au cours du temps (fig. 1.9 (a)). En revanche, lorsque le forçage est augmenté, du chaos spatio-temporel se met en place. Les modulations liées à la forme de la cavité ne sont plus visibles aux temps courts et ce n’est qu’en moyenne, sur des temps longs, que les modes propres

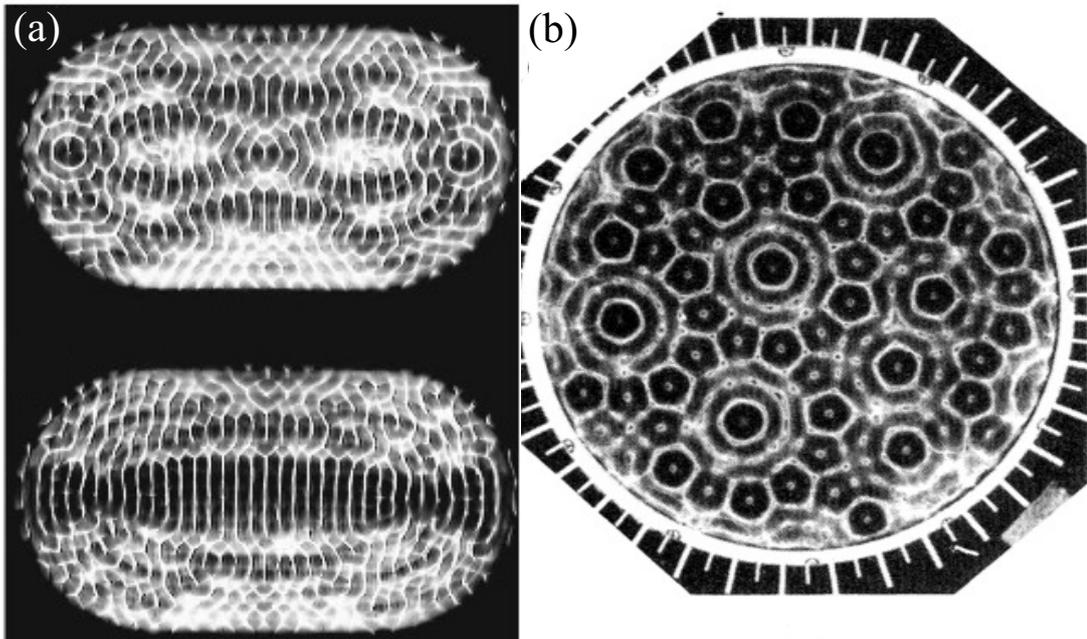


FIGURE 1.9 – (a) Instabilité de Faraday dans un domaine en forme de stade. Le motif est modulé par les modes propres de la cavité. Photographie tirée de [49]. (b) Excitation à deux fréquences et quasi-cristaux. Photographie tirée de [32].

de la cavité réapparaissent. Pour s’affranchir des conditions de bord, Edwards et Fauve [33, 32] ont montré qu’il suffisait d’exciter des ondes de surface avec deux fréquences f_1 et f_2 dans un rapport $f_1/f_2 = 4/5$. Le motif devient insensible à la forme de la cellule : une structure quasi-cristalline (fig. 1.9 (b)) croît et envahit toute la surface du bain. Ces différents exemples nous montrent que l’instabilité de Faraday peut servir de support pour illustrer des phénomènes de physique non linéaire variés, comme les mécanismes de transition vers le chaos [13, 3, 81, 41]. Il existe également des variantes, en particulier dans les milieux granulaires, qui permettent d’observer d’autres structures originales : les états localisés.

1.3.4 États localisés

Nous avons vu que l’instabilité de Faraday est supercritique dans les liquides ordinaires. Lorsque l’on augmente l’accélération verticale imposée (le paramètre de contrôle), les ondes apparaissent au delà d’un seuil bien déterminé et leur amplitude (le paramètre d’ordre) croît de manière monotone (fig. 1.10 (a)). L’instabilité ne présente alors aucune hystérèse. On trouve néanmoins quelques variantes fortement sous-critiques de l’insta-

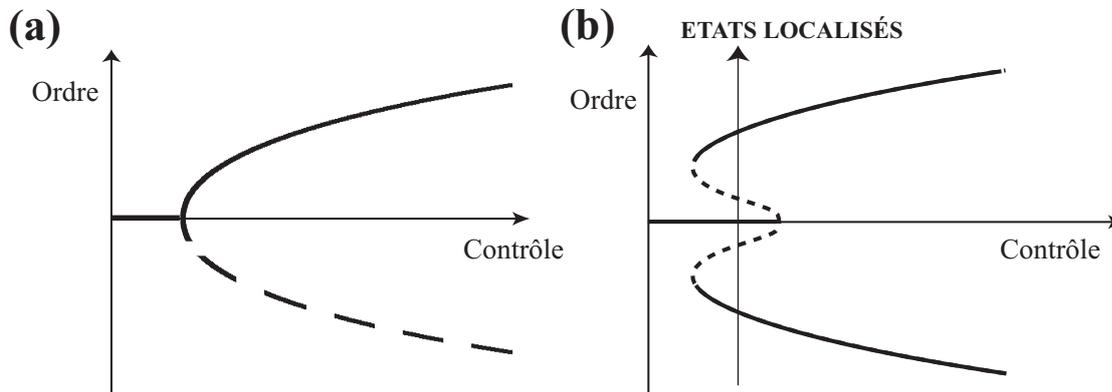


FIGURE 1.10 – (a) Paramètre d'ordre en fonction du paramètre de contrôle pour une instabilité supercritique. Le paramètre d'ordre croît au-delà d'un seuil bien défini, et aucune hystérèse n'est observée. (b) Paramètre d'ordre en fonction du paramètre de contrôle pour une instabilité sous-critique. Il existe une plage de valeur du paramètre de contrôle pour laquelle deux valeurs sont possibles. Il est alors possible d'obtenir des états localisés pour lesquels une région perturbée est entourée par une région qui reste au repos.

bilité. Dans ce cas de figure, il existe une plage de valeurs du paramètre de forçage pour lesquelles deux états sont possibles (fig. 1.10 (b)). Il est possible d'envisager l'existence de zones perturbées par des ondes tandis que le reste de la surface reste au repos. On fabrique alors un état localisé, sorte d'analogue à deux dimensions des solitons. Dans le cas de l'instabilité de Faraday, ces états présentent des oscillations périodiques (il s'agit d'une bifurcation de Hopf [58]) et l'on parle d'oscillons. Pour obtenir une sous-criticalité suffisamment marquée, Lioubashevski *et al.* [56, 55] ont choisi un liquide très visqueux et ont réduit fortement son épaisseur dans le récipient. Les structures complexes qui se développent sur la surface se propagent à vitesse constante en conservant leur forme et ne disparaissent qu'après une collision avec les parois du récipient. De la même manière, l'emploi d'un visco-élastique rhéo-épaississant comme la maizena permet d'obtenir des états localisés [59]. Il s'agit alors de trous dans la surface qui sont stabilisés par la vibration et qui sont susceptibles d'interagir entre eux. Enfin, Unbanhowar *et al.* ont montré qu'il était possible de créer des oscillons en étudiant l'instabilité de Faraday dans un milieu granulaire soumis à une oscillation verticale [82]. Ces états localisés exhibent des comportements complexes : attraction ou répulsion par paire ou encore structures périodiques qui s'organisent lorsque les oscillons sont suffisamment denses sur la surface. On retrouve des effets analogues en optique non linéaire [73] ou bien dans certains systèmes de réaction-diffusion [54]. Un important effort théorique a été fourni pour com-

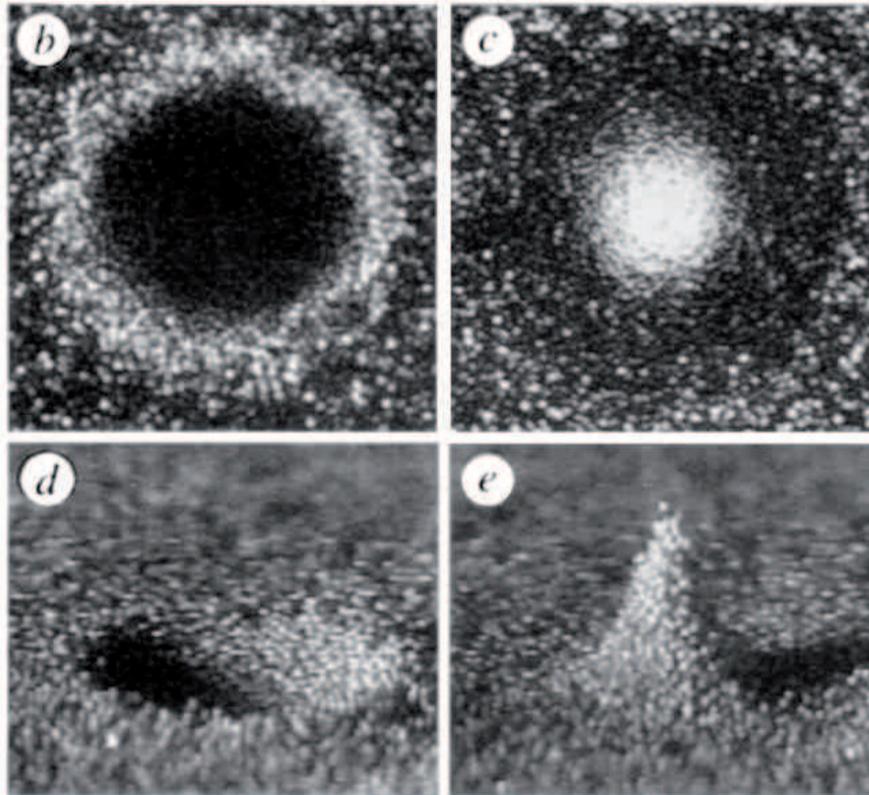


FIGURE 1.11 – Oscillons dans du sable. Phase "cratère" et phase "pic". *D'après [82].*

prendre les interactions entre ces objets [63], en particulier des simulations concernant la dynamique de ces objets. Nous verrons dans la suite que les gouttes rebondissantes présentent dans une certaine mesure des caractéristiques d'état localisé.

1.4 Marcheurs

Dans cette section, nous allons présenter les marcheurs, objets qui associent une goutte rebondissante avec ses propres ondes créées lors des chocs précédents. Les marcheurs seront à la base des expériences décrites dans la suite de cette thèse. Nous allons, dans ce chapitre introductif, détailler les propriétés des marcheurs qui ont été mises en évidence par S. Protière dans le cadre de sa thèse [69, 71, 20].

1.4.1 Mise en marche

Les gouttes dont le diamètre D est tel que $560\mu\text{m} < D < 820\mu\text{m}$, avec de l'huile de viscosité $\eta = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, se mettent en marche spontanément. Si l'accélération

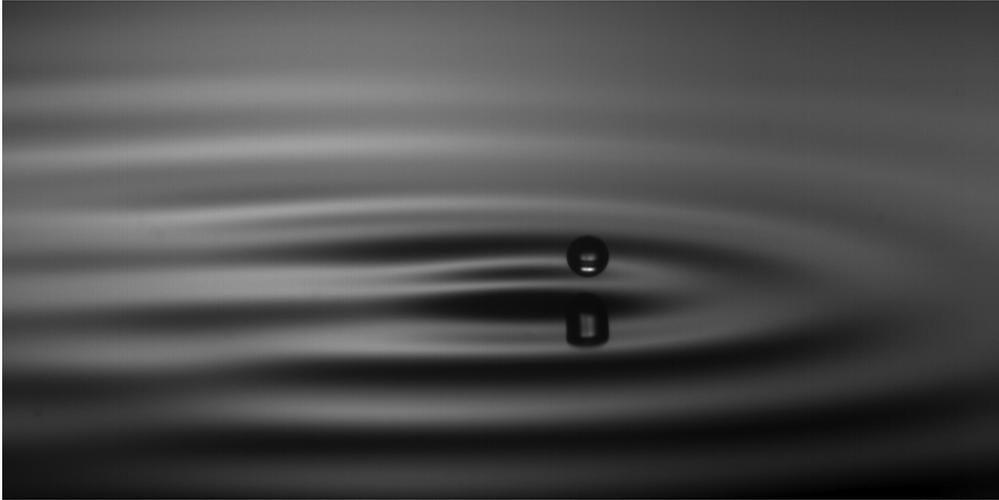


FIGURE 1.12 – Marcheur vu de côté. La goutte atterrit sur l’avant de la bosse formée par les ondes émises lors des rebonds précédents, recevant ainsi une impulsion à chaque contact avec le bain.

imposée γ_m dépasse une valeur seuil γ_W , la goutte se déplace sur la surface du bain. Son mouvement est alors rectiligne et uniforme à la vitesse V_W tant que le marcheur se trouve loin de toute paroi de la cellule.

Le marcheur se déplace parce que la goutte rebondit sur une surface inclinée. Le seuil de marche est atteint lorsque la goutte rebondit exactement une fois tous les deux cycles de vibration. Elle excite alors des ondes de Faraday sur la surface qui sont faiblement amorties. La situation où la goutte est au repos correspond à un équilibre instable et elle se met en mouvement spontanément. Elle rebondit alors sur la surface à l’avant d’une bosse formée par les ondes créées lors des chocs précédents de la goutte sur le bain (fig. 1.12). Lors du décollage, la goutte reçoit donc une impulsion horizontale, et elle se déplace en conséquence pendant son vol libre. Le même processus se répète à chaque rebond, et la goutte rejoint un régime stationnaire dans lequel son mouvement est uniforme à la surface du bain.

Nous voyons sur le diagramme de phase (fig. 1.4) que la région où les gouttes se mettent en marche se situe à des accélérations immédiatement inférieures à celle du seuil de l’instabilité de Faraday γ_F . Il existe un lien entre la mise en marche et l’existence de l’instabilité de Faraday dans un voisinage immédiat. Cet aspect a été vérifié en utilisant des huiles de viscosité variable. Pour toutes les viscosités étudiées, il existe une région de l’espace des phases dans laquelle des marcheurs sont observés. La figure 1.13 (a) présente cette région pour différentes huiles, en fonction de la fréquence d’excitation f_0

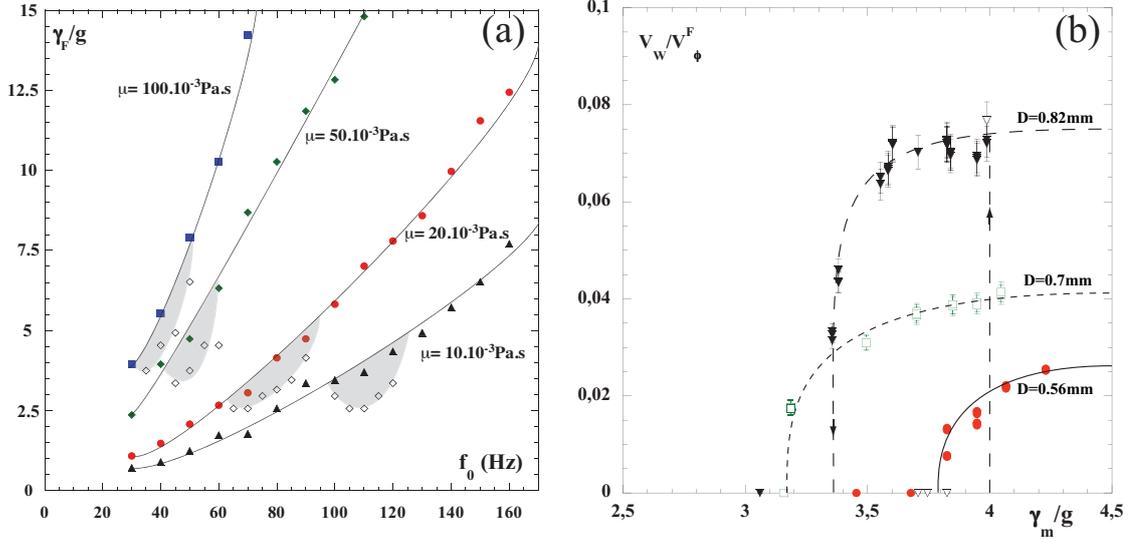


FIGURE 1.13 – (a) Seuil d'accélération γ_F pour l'instabilité de Faraday en fonction de la fréquence de forçage pour des huiles de différentes viscosités ($\mu = 10 \cdot 10^{-3}$, $20 \cdot 10^{-3}$, $50 \cdot 10^{-3}$ et $100 \cdot 10^{-3}$ Pa.s). Juste en dessous de ce seuil, les régions grisées correspondent aux zones où l'on observe des marcheurs. *D'après* [69]. (b) Vitesse horizontale adimensionnée V_W/V_F^ϕ pour trois tailles de marcheurs en fonction de l'accélération γ_m/g apportée au bain de liquide. Les flèches montrent le cycle d'hystérésis observé pour les grosses gouttes de diamètre $D = 0.82$ mm. La transition est alors dans ce cas sous critique. $f_0 = 80$ Hz et $\mu_L = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. *D'après* [69]

et de l'accélération imposée γ_m . Dans tous les cas, le régime de marche est atteint pour des valeurs de γ_m immédiatement voisines du seuil de l'instabilité de Faraday γ_F . Nous devons donc comprendre comment la présence de l'instabilité modifie le comportement de la goutte. La résonance entre le rebond de la goutte et les ondes de Faraday se manifeste ainsi : bien que l'on se place en dessous du seuil, les ondes sont influencées par le voisinage de l'instabilité et leur amortissement est beaucoup plus faible. L'amplitude des ondes créées par la goutte augmente en conséquence, ce qui suffit à rendre instable l'équilibre initial pour lequel la goutte est au repos.

La valeur du seuil de marche γ_W ainsi que la vitesse asymptotique du marcheur dépendent du diamètre D des gouttes. La figure 1.13 (b) présente la vitesse V_W du marcheur en fonction de l'accélération imposée γ_m pour trois gouttes différentes. L'instabilité est supercritique (sans hystérèse) pour les petites gouttes. La goutte est alors arrêtée pour $\gamma_m < \gamma_W$ et V_W croît comme la racine de l'écart au seuil de marche pour $\gamma_m > \gamma_W$, avant de saturer à cause des non-linéarités. Si la goutte est plus grosse, la mise

en marche devient sous-critique et présente une hystérèse relativement marquée. Il existe alors une gamme de valeur de γ_m pour laquelle la goutte reste au repos si elle n'est pas perturbée. Si, en revanche, on vient la déplacer (à l'aide d'un cure-dent par exemple), elle se mettra en mouvement et marchera jusqu'à ce qu'elle rencontre un obstacle (un bord de cellule par exemple).

1.4.2 Premier modèle : bifurcation de marche

Dans le cadre de la thèse de S. Protière, un modèle pour interpréter la mise en marche des gouttes a été développé par A. Boudaoud [71]. Il s'agit de prédire la bifurcation en se donnant une expression pour l'interaction entre la goutte et la surface. Le problème théorique posé par le rebond de la goutte sur une surface liquide couple différents phénomènes non linéaires. Il faut être capable de décrire précisément l'écoulement d'air au sein du film qui isole la goutte du bain, tout en tenant compte des déformations de l'interface et de la goutte induites par la collision. Ces différents aspects rendent quasiment impossible toute description analytique complète du problème, et il n'est pas envisageable de faire des simulations numériques directes de ce problème hydrodynamique, principalement à cause des nombreuses échelles mises en jeu. Le modèle que nous présentons ici simplifie à l'extrême la description du problème. Il permet tout de même de comprendre le mécanisme à l'origine de la bifurcation de marche.

Dans le régime de marche, la goutte se déplace à la fois verticalement et horizontalement. On peut néanmoins tenter de découpler ces deux mouvements. Les équations du mouvement horizontal sont établies en moyennant les forces subies par la goutte au cours d'un cycle de rebond. Deux forces sont finalement retenues :

- une force motrice F_1 qui correspond à l'impulsion reçue par la goutte lorsqu'elle retombe sur la pente de sa propre onde, formée au cours des rebonds précédents. En considérant que le mouvement est dans un plan (x,z) , nous écrivons :

$$F_1 = F^b \sin 2\pi \frac{\dot{x}}{V_\Phi} \quad (1.13)$$

La force F^b est proportionnelle à l'accélération verticale γ_m et à la pente de l'onde générée par la goutte.

- Une force de frottement F_2 qui correspond la dissipation intervenant pendant la durée du contact. Celle-ci est principalement le fait du cisaillement du film d'air séparant la goutte du bain.

$$F_2 = -f^v \dot{x} \quad (1.14)$$

L'amortissement effectif f^v est proportionnel à la viscosité de l'air μ_G , la surface de contact entre la goutte et le bain et l'épaisseur du film d'air.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la goutte, on écrit l'équation horizontale de la position de la goutte :

$$\ddot{x} = -f^v \dot{x} + F^b \sin 2\pi \frac{\dot{x}}{V_\Phi} \quad (1.15)$$

On cherche ensuite les états stationnaires pour la position de la goutte ; c'est-à-dire tels que $\ddot{x} = 0$. Dans la limite des petites vitesses, *i. e.* $\frac{\dot{x}}{V_\Phi} \ll 1$, on aboutit à :

$$\frac{V_W}{V_\Phi} \left[2\pi F^b - \frac{8\pi^3}{6} \left(\frac{V_W}{V_\Phi} \right)^2 F^b - f^v V_\Phi \right] = 0. \quad (1.16)$$

Pour les petites valeurs de F^b , seule la solution $\dot{x} = 0$ existe. La goutte reste donc immobile. Elle devient instable pour $F^b > F_c^b = f^v (V_\Phi / 2\pi)$. Dans ce cas précis, deux solutions d'équilibre stable existent. Elles correspondent à un mouvement à vitesse constante :

$$\frac{V_W}{V_\Phi} = \pm (\sqrt{6}/2\pi) \sqrt{(F^b - F_c^b)/F^b} \quad (1.17)$$

Ces deux solutions sont symétriques. Au-delà du seuil de marche, la vitesse varie comme la racine carrée de l'écart au seuil. La bifurcation est supercritique, ce qui correspond expérimentalement au cas des petites gouttes. En revanche le seuil prédit est indépendant de la taille des gouttes puisque l'on a complètement négligé les déformations de la goutte et de l'interface ainsi que les effets inélastiques dans le rebond de la goutte. Enfin, notons qu'il est possible d'étendre à deux dimensions ce modèle pour prévoir les trajectoires des marcheurs dans le plan horizontal.

1.4.3 Interaction à deux gouttes

Considérons maintenant la situation où deux marcheurs identiques sont créés sur le bain. Chacun se déplace à vitesse constante à la surface. Ils vont également présenter une interaction effective lorsqu'ils se placent dans le champ d'onde établi par l'autre marcheur. Si l'on envoie deux marcheurs l'un vers l'autre, deux régimes sont alors possibles : la collision peut-être répulsive, et chacun continue son chemin indépendamment de l'autre, ou bien attractive. Dans ce cas-là, un état lié apparaît sur le bain, les deux gouttes se mettent en orbite. La nature de la collision (attractive ou répulsive) dépend du paramètre d'impact lors de la collision des marcheurs. En effet, le champ d'onde créé par une goutte marcheuse va être périodique, la longueur d'onde correspondant à λ_F (la goutte rebondit à la fréquence de Faraday f_F). Pour certaines valeurs du paramètre

d'impact, la pente de l'onde créée par un marcheur sous son partenaire va induire une répulsion entre les gouttes, pour d'autres la force est attractive et peut compenser la force centrifuge pendant le mouvement de rotation. Les distances d'équilibre sont périodiques et fixées par la longueur d'onde sur le bain. On observe une succession discrète d'états liés, qui peuvent être indexés par l'ordre de la liaison qui s'établit entre les marcheurs : la distance d'équilibre entre les gouttes correspond à des multiples de la longueur d'onde et la trajectoire suivie par chaque marcheur est circulaire.

Dans le cas où le diamètre des deux gouttes est différent, la vitesse des deux marcheurs n'est pas la même. La trajectoire suivie par chacun n'est plus circulaire, mais épicycloïdale [70]. Il s'agit de la composition de deux cercles, les différents paramètres du mouvement étant déterminés par les propriétés des deux marcheurs utilisés. Dans ces orbites complexes, le seul paramètre simple conservé au cours du mouvement est la distance d'équilibre entre les deux gouttes qui prend une valeur entière de la longueur d'onde.

Enfin, il est possible d'étendre le modèle de marche présenté au paragraphe précédent en ajoutant la force effective d'un marcheur sur l'autre. Des simulations numériques permettent de retrouver collisions répulsives et attractives, les orbites étant circulaires pour des marcheurs identiques.

1.5 Diffraction de marcheurs

1.5.1 Dualité onde-particule à l'échelle macroscopique

Les marcheurs constituent des objets originaux qui associent, à l'échelle macroscopique, une particule (la goutte) à des ondes de surface. Cette association est complexe et difficile à modéliser mais elle présente des caractéristiques propres qui méritent d'être étudiées. En effet, on observe une sorte de symbiose entre la goutte et ses ondes : au sein d'un marcheur, les deux aspects (particule et ondes) ne peuvent être séparés. La goutte et ses ondes existent et se déplacent toujours ensemble sur le bain. Si l'on supprime la goutte, les ondes disparaissent au bout de quelques cycles de vibration (nous sommes toujours en dessous du seuil de l'instabilité de Faraday). Inversement, si l'on empêche les ondes de se développer sur la surface, en réduisant la profondeur d'huile par exemple, le marcheur disparaît : la goutte continue à rebondir, mais ne se déplace plus car ses ondes sont trop atténuées.

On observe spontanément une quantification du rayon de l'orbite de deux marcheurs. La dualité propre des marcheurs conduit naturellement à envisager un lien entre ce système expérimental macroscopique et certains aspects réputés typiquement quantiques.

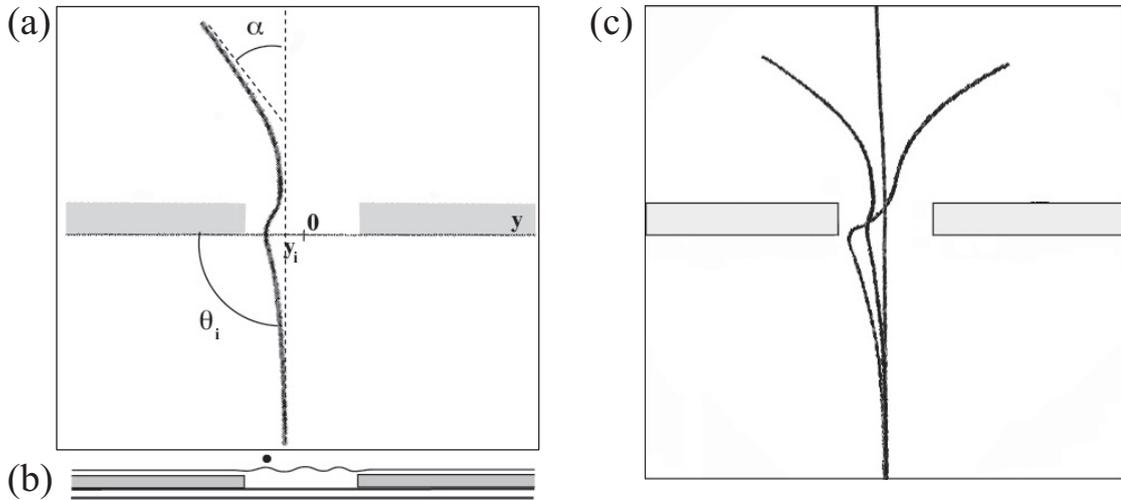


FIGURE 1.14 – (a) Schéma de principe de l'expérience de diffraction. (b) Vue de profil du marcheur dans la fente. (c) Trois exemples de trajectoires suivies par le marcheur au-delà de la fente. *D'après* [18].

Pour explorer la frontière entre mécanique classique et mécanique quantique à une échelle où les particules aussi bien que les ondes sont observables, Y. Couder et E. Fort ont proposé, avant le début de cette thèse, une première expérience de diffraction [18].

Pour réaliser une expérience classique de diffraction en optique, il est nécessaire de diaphragmer l'onde en la faisant passer à travers une fente [10]. La figure de diffraction est ensuite projetée sur un écran, généralement placé à l'infini. Pour les marcheurs, il faut également mettre en place une fente qui va agir sur les ondes. Cette fente est formée par l'espace vide laissé entre deux barrières sous-marines (fig. 1.14). Au-dessus des barrières, la profondeur d'huile est fortement réduite ce qui provoque un amortissement très marqué des ondes. À condition que les barrières soient suffisamment épaisses, seul l'espace central laisse passer les ondes de surface. De la même manière qu'en optique, les ondes sont alors diffractées au passage de la fente.

1.5.2 Résultats expérimentaux

Que se passe-t-il lorsqu'un marcheur est envoyé à travers une telle fente ? Pendant son passage à travers la fente, le marcheur est dévié (fig. 1.14(a-b)). On définit alors un angle d'émission α et un paramètre d'impact Y_i . En répétant l'expérience, on constate que la déviation du marcheur semble aléatoire (fig. 1.14(c)). Trois trajectoires avec les

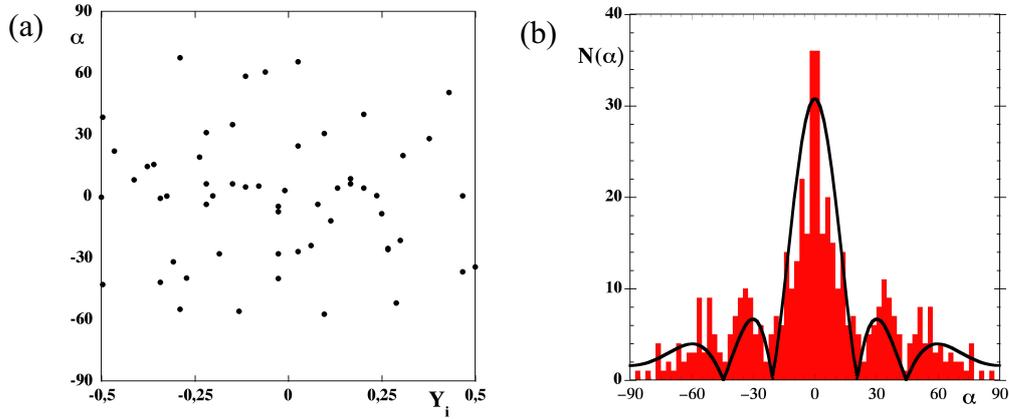


FIGURE 1.15 – (a) Angle de déviation α en fonction du paramètre d'impact Y_i . (b) Nombre de passages dans la direction α en fonction de l'angle α . En noir, la courbe prédite pour la diffraction d'une onde plane. D'après [18].

mêmes conditions initiales conduisent à des déviations finales très différentes. La figure 1.15 (a) présente α en fonction de Y_i . Aucune structure simple n'apparaît, et l'angle α semble indépendant de Y_i . Ce résultat confirme que le passage du marcheur à travers la fente est bien aléatoire. En revanche, si l'on trace l'histogramme sur un grand nombre de passages, on peut remarquer que la particule est déviée préférentiellement dans certaines directions et que certains angles ne sont pas explorés (fig.1.15 (b)).

L'allure de l'histogramme suggère que l'on est bien en présence d'un phénomène de diffraction. Pour pousser l'analogie, il suffit de comparer cet histogramme à la prédiction théorique de l'amplitude des ondes au-delà d'une fente donnée par la théorie de l'optique [10] et adaptée au cas des marcheurs :

$$f(\alpha) = A \left| \frac{\sin \pi L \sin \alpha / \lambda_F}{\pi L \sin \alpha / \lambda_F} \right| \quad (1.18)$$

où L est la largeur de la fente et A l'amplitude des ondes. Cette prédiction est tracée en noir sur la figure 1.15(b). L'accord avec les données expérimentales est correct.

Pour aller plus loin, une expérience d'interférences à deux fentes, analogue à celle des fentes d'Young, a été entreprise. Deux fentes sont placées côte à côte, et un marcheur est envoyé vers elles. L'accélération de forçage γ_m est réglée suffisamment proche du seuil de l'instabilité de Faraday γ_F pour que les ondes du marcheur passent à travers les deux fentes et interfèrent de l'autre côté de l'écran. De l'autre côté des fentes, la statistique des angles de déviation forme une figure d'interférences, et l'accord avec les prédictions de la théorie ondulatoire est encore une fois excellent.

Des simulations numériques, dont le principe sera détaillé au chapitre 4, ont été effectuées

pour évaluer l'effet des obstacles sur la trajectoire des marcheurs. La fente est formée par des points sources d'ondes secondaires placés de manière adéquate. Ils émettent des ondes circulaires en opposition de phase avec l'onde incidente du marcheur, de façon à maintenir nul le déplacement du liquide sur le point source. Un marcheur est envoyé vers cette fente. La trajectoire résultante au niveau de la fente est complexe (comme dans le cas expérimental). En définissant de la même manière α et Y_i , on constate que l'angle d'émission est indépendant du paramètre d'impact, et que la figure de diffraction est bien retrouvée pour un nombre suffisant de passages à travers la fente.

Ces résultats, aussi bien numériques qu'expérimentaux, montrent qu'il est possible de réaliser à l'échelle macroscopique des expériences reliées à la dualité onde-particule avec des particules uniques. Ces expériences peuvent être mises en regard de celles réalisées pour des photons [76] ou des électrons uniques [60, 61, 78].

Chapitre 2

Dispositif expérimental

Le but principal des expériences que nous allons présenter ici est d'explorer le couplage onde-particule au sein des marcheurs. Différentes difficultés expérimentales doivent être maîtrisée pour mener à bien cette étude :

- Il existe au moins quatre échelles de longueur différentes qui co-existent : le diamètre D de la goutte, la longueur d'onde de Faraday sur le bain λ_F , la taille caractéristique du champ d'ondes transporté par le marcheur et enfin la taille de la cellule de travail. Nous souhaitons que ces échelles soient aussi éloignées que possible ; en conséquence, une nouvelle expérience de plus grandes dimensions a été montée au début de cette thèse.
- Les expériences à mener sont longues. Il faut donc assurer des conditions stables au cours du temps pour éviter les dérives.
- Nous devons générer des gouttes de taille contrôlée. Pour cela, il faut mettre au point une méthode permettant d'obtenir de manière calibrée des gouttes d'un diamètre donné.
- La profondeur d'huile dans le bain sera un paramètre déterminant. Il faut donc mettre au point une méthode précise de mesure de cette profondeur.
- Nous devons réussir à visualiser les ondes sur la surface de manière simple et non invasive.
- Nous souhaitons également mesurer quantitativement les propriétés de ces ondes.

Nous présenterons ici le montage expérimental proprement dit, ainsi que différents instruments expérimentaux et numériques utilisés au cours de cette thèse pour palier les différents problèmes mentionnés.

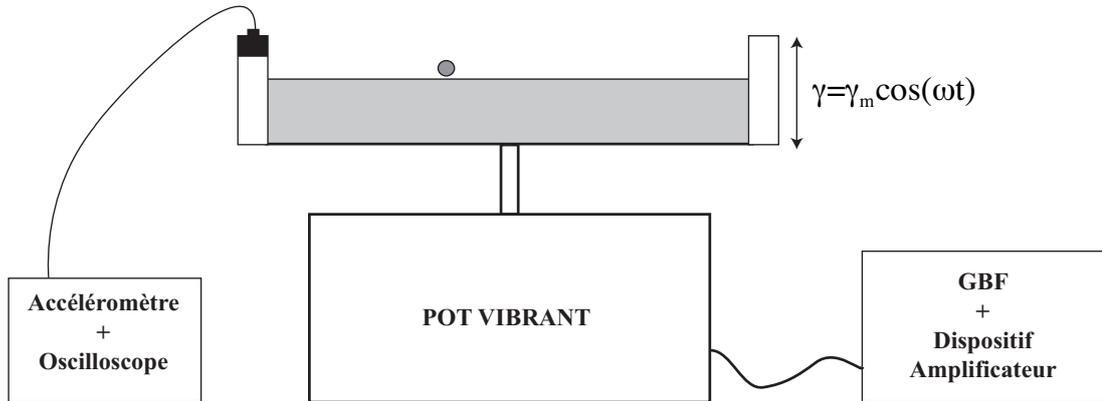


FIGURE 2.1 – Schéma de principe de l'expérience présentée dans cette thèse.

2.1 Montage expérimental

Pour faire rebondir des gouttes sur un bain en vibration, il convient de fixer une cellule (généralement carrée, en Dural et de 19 cm de côté) sur un pot vibrant et de la remplir avec un liquide visqueux (fig. 2.1). Le pot utilisé (Bruël et Kjaerr BK 4808) est capable d'appliquer des accélérations maximales de 10 g à une charge embarquée d'un kilogramme. Il est alimenté par un signal sinusoïdal basse fréquence de fréquence f_0 fourni par un GBF numérique. Ce signal passe par un montage potentiométrique puis par un amplificateur BK 2719. Ce dispositif permet de fournir la puissance nécessaire à des vibrations intenses grâce à l'amplificateur, tout en réglant finement le gain à l'aide d'un potentiomètre à 10 tours. Un accéléromètre Endevco 256HX-100 est fixé à la cellule expérimentale. Il fournit une tension proportionnelle à l'accélération avec un facteur de conversion valant 101.3 mV/g. Relié à un oscilloscope, il permet de mesurer précisément l'accélération imposée au bain $\gamma = \gamma_m \sin(2\pi f_0 t)$. Dans la suite des travaux présentés ici, γ_m a été utilisé comme paramètre de contrôle.

Nous avons utilisé des huiles silicones pour toutes les expériences. Elles présentent l'avantage d'avoir des propriétés physiques (viscosité, tension de surface et densité) stables au cours du temps. Elles sont peu sensibles aux surfactants et très faiblement volatiles, ce qui permet de conserver longtemps des gouttes sur le bain (jusqu'à plusieurs jours). Dans nos expériences, nous avons utilisé des huiles Rhodorsil 47V10, 47V20, 47V50 et 47V100. Elles ont toutes une masse volumique $\rho = 0.965 \text{ kg.L}^{-1}$ et une tension de surface $\sigma = 20.9 \text{ mN.m}^{-1}$. Leur viscosité μ vaut respectivement 10.10^{-3} , 20.10^{-3} , 50.10^{-3} et 0.1 Pa.s . Les expériences rapportées dans cette thèse ont presque toujours porté sur des marcheurs et nous avons donc, sauf mention contraire, adapté la fréquence d'exci-

μ (Pa.s)	f_0 (Hz)	γ_F (g)	λ_F (mm)	D (mm)
$10 \cdot 10^{-3}$	110	3.9	3.74	< 0.6
$20 \cdot 10^{-3}$	80	4.1	4.75	0.76
$50 \cdot 10^{-3}$	50	4.9	6.95	0.9
$100 \cdot 10^{-3}$	37	5.1	8.98	> 1.1

TABLE 2.1 – Tableau récapitulatif des valeurs typiques de la fréquence de forçage f_G , du seuil de l’instabilité de Faraday γ_F , de la longueur d’onde de Faraday λ_F et du diamètre D des gouttes pour lesquelles on observe de marche en fonction de la viscosité de l’huile utilisée.

tation f_0 à la viscosité μ de l’huile utilisée. Nous avons utilisé les valeurs optimales de f_0 déterminées au cours de la thèse de S. Protière (tab. 2.1). Le seuil de l’instabilité γ_F dépend à la fois de la viscosité et de la fréquence d’excitation. Le tableau 2.1 rassemble les valeurs mesurées pour γ_F ainsi que la longueur d’onde de Faraday λ_F fournie par la relation de dispersion. Dans ces conditions expérimentales, le diamètre D des gouttes marcheuses est toujours compris dans un intervalle étroit. Les valeurs typiques de D sont également présentées dans le tableau 2.1. Il faut enfin mentionner que l’expérience est extrêmement sensible aux courants d’air. Pour les éviter, nous avons placé le pot vibrant et la cellule de travail dans une boîte en plexiglas munie de portes.

2.2 Comment générer des gouttes ?

Un moyen classique pour générer des gouttes consiste à utiliser la méthode des gouttes pendantes. Il suffit, par exemple, de pousser du liquide dans une seringue. Le diamètre de la goutte qui se détache va typiquement être fixé par la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$. Avec les huiles silicones utilisées, cette longueur capillaire vaut $l_c = 2.2$ mm. Le diamètre D des marcheuses étant plus petit que l_c , il a fallu mettre au point une méthode expérimentale qui soit capable de produire des gouttes avec un diamètre d compris entre 0.5 et 2.2 mm, de manière contrôlée et reproductible. Cette technique a été développée en s’inspirant de travaux sur la fragmentation de filaments liquides réalisés par P. Marmottant et E. Villermaux [57], ainsi que sur les résultats empiriques qui avaient été obtenus par notre équipe au laboratoire. Pour fabriquer des gouttes de diamètre réduit, nous utilisons un cure-dent dont la pointe est immergée et que l’on retire rapidement hors du bain. Il se

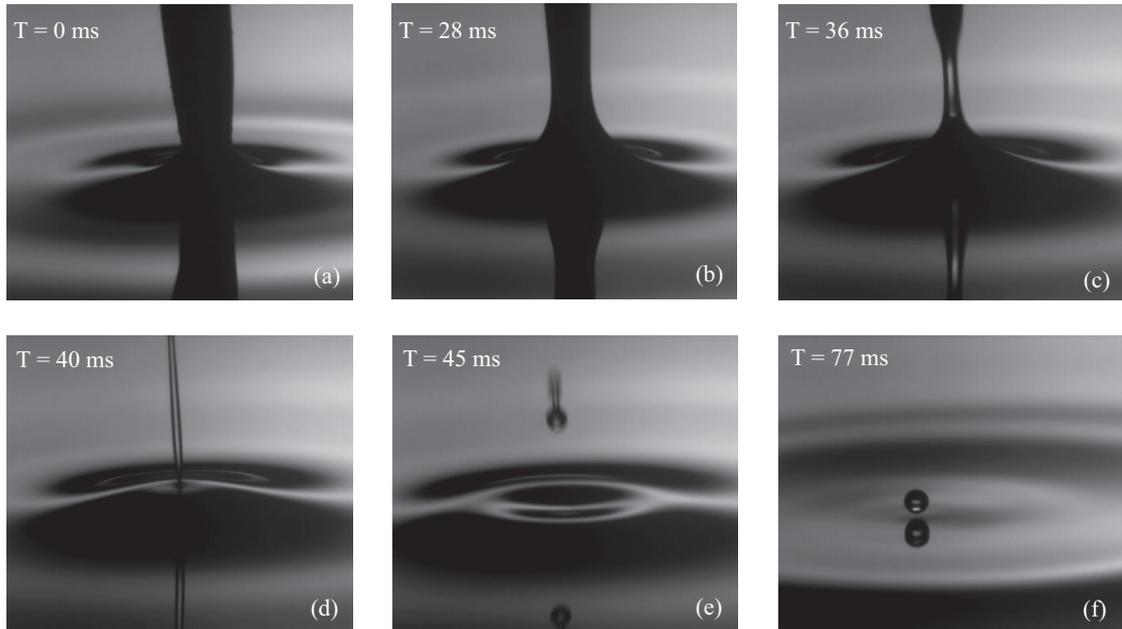


FIGURE 2.2 – (a)-(f) Photos réalisées avec une caméra rapide montrant l'extraction par un cure-dent d'une goutte d'huile avec viscosité $\mu = 20$ Pa.s.

forme un pont capillaire entre le bain et la pointe [23] qui se pince à ses deux extrémités et génère ainsi une goutte (fig. 2.2). Le diamètre D de la goutte obtenue par cette méthode est bien compris entre 0.5 et 1.5 mm, mais il est difficilement reproductible car il dépend fortement du geste de l'expérimentateur. Il est néanmoins assez simple d'associer à cette méthode un tri des gouttes fabriquées. On utilise alors une caméra dotée d'un objectif avec un fort grossissement. Il est alors possible de sélectionner avec une grande précision le diamètre de la goutte qui sera utilisée pour une expérience. Afin d'améliorer ce procédé, nous avons mis au point un petit dispositif qui automatise le geste de l'expérimentateur, pour améliorer la reproductibilité du processus de création des gouttes. On remplace le cure-dent par une pointe métallique fixée à un électroaimant. L'ensemble est lui même placé sur une platine de translation verticale dont on peut contrôler la position au centième de mm (fig. 2.3). La référence des altitudes est donnée par le contact de la pointe avec l'huile, et l'on peut ensuite régler la profondeur d'enfoncement h_e de la pointe dans l'huile avec précision (fig. 2.4 (a)). Lorsque l'on ferme un interrupteur, la pointe est extraite à haute vitesse du bain et génère une goutte de la même manière que le cure-dent. Un tel dispositif assure une meilleure reproductibilité du diamètre de la goutte extraite. Cet instrument a été calibré pour de l'huile de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s en utilisant une pointe conique de diamètre $e = 4$ mm et d'angle au sommet $\alpha_1 = 33^\circ$. Le

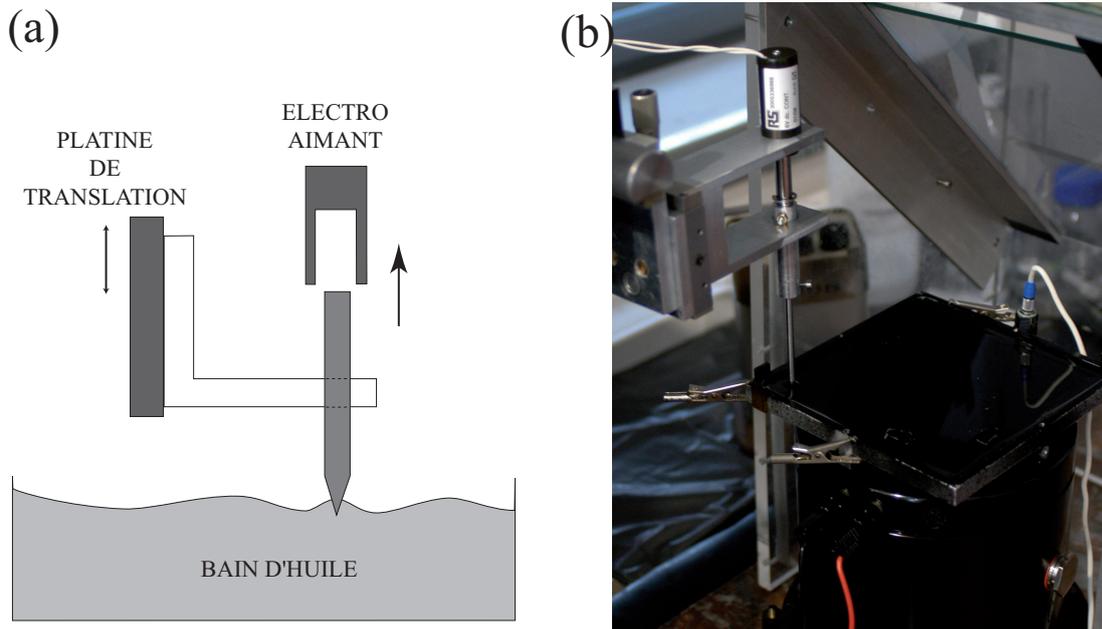


FIGURE 2.3 – (a) Schéma de principe du "tire-gouttes" automatique. La pointe métallique est relevée brusquement par l'électro-aimant et extrait une goutte du bain. La platine de translation permet de régler la profondeur d'enfoncement de la pointe conique dans l'huile. (b) Photographie du dispositif expérimental avec "tire-goutte" automatique.

diamètre des gouttes formées est mesuré en variant la profondeur d'enfoncement de la pointe. La figure 2.4 (b) montre la variation du diamètre D en fonction de la profondeur d'enfoncement h_e . Plus la pointe est enfoncée, plus le diamètre de la goutte extraite est important, la variation étant d'autant plus importante que l'angle d'ouverture du cône est important. On constate que la courbe est linéaire en enfoncement pour des valeurs telles que $h_e < 3$ mm. Si la pointe plonge d'avantage dans le bain, plusieurs gouttes sont formées à la fois, ce qui limite l'utilité de ce dispositif. La courbe expérimentale que nous obtenons suggère que le volume V_0 de liquide arraché au bain est proportionnel au cube de la profondeur h_e . Comme notre pointe est conique, la section S de la surface coupée au niveau de l'interface est proportionnelle à h_e^2 , à condition de négliger les effets de menisque. On aboutit à une loi telle que $V_0 \propto S^{3/2}$. Ce résultat peut être mis en regard des travaux réalisés par L. Vagharchakian *et al.* [83] pour des pointes sphériques et des vitesses de tirage bien plus faibles, mais qui présentent la même loi d'échelle.

Enfin, nous devons insister sur une limitation expérimentale importante. Lors de son utilisation, l'électroaimant chauffe, ce qui diminue ses performances. Il est donc nécessaire

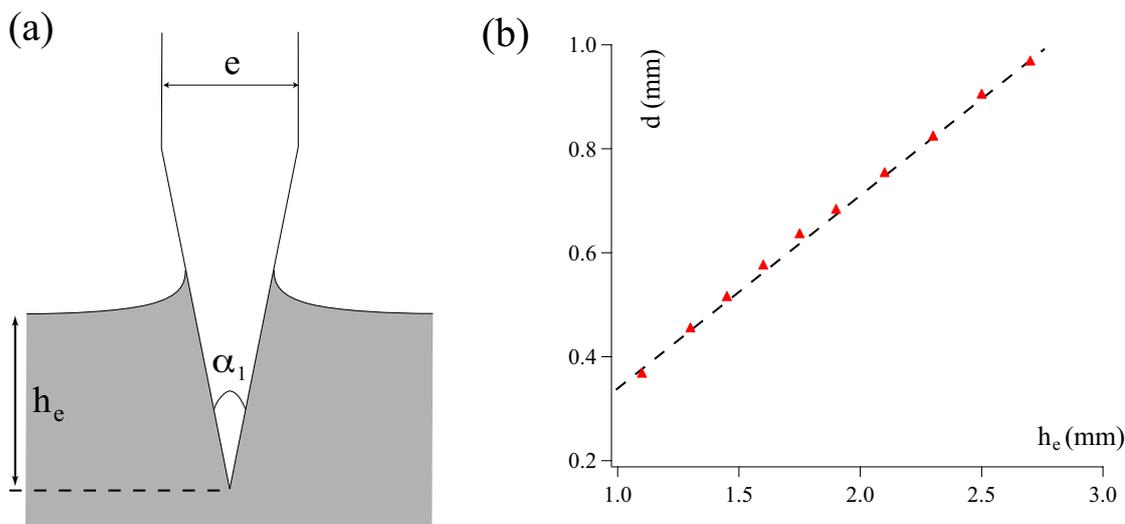


FIGURE 2.4 – (a) Vue schématique d’une pointe conique de diamètre e et d’angle au sommet α_1 enfouée d’une profondeur h_e dans le bain d’huile. (b) Diamètre de la goutte d’huile extraite en fonction de la profondeur d’enfoncement pour une pointe de diamètre $e = 4$ mm et d’angle $\alpha_1 = 33^\circ$. La droite en pointillé est un guide pour l’œil.

d’attendre environ une minute entre deux extractions successives. On conserve alors une bonne reproductibilité du mouvement de la pointe, et l’on obtient ainsi des gouttes de diamètre D calibré. Il reste toutefois difficile de fabriquer une assemblée de gouttes identiques avec le montage actuel qui peut donc encore être notablement amélioré.

2.3 Mesure de la profondeur

Dans un certain nombre d’expériences rapportées ici, la profondeur d’huile h au-dessus d’objets sous-marin a nécessité un réglage fin. Pour assurer une telle précision, nous avons fabriqué un petit instrument pour mesurer h (fig. 2.5). Une pointe est fixée sur une platine de translation verticale dont on peut régler la position à $10 \mu\text{m}$ près, le tout étant placé sur un support rigide et horizontal. Pour réaliser une mesure, on installe le dispositif en l’appuyant sur les bords de la cellule. On descend ensuite la pointe jusqu’à ce qu’elle touche la surface d’huile et cette altitude sert de référence. On continue ensuite à enfouir la pointe jusqu’au contact avec le fond. La vis débrayable placée au-dessus se déclenche dès que le couple augmente, ce qui permet de s’arrêter dès que le contact est atteint. Une seconde lecture du micromètre permet de calculer la hauteur h d’huile. La mesure peut être répétée plusieurs fois, la dispersion des résultats donnant un écart-type

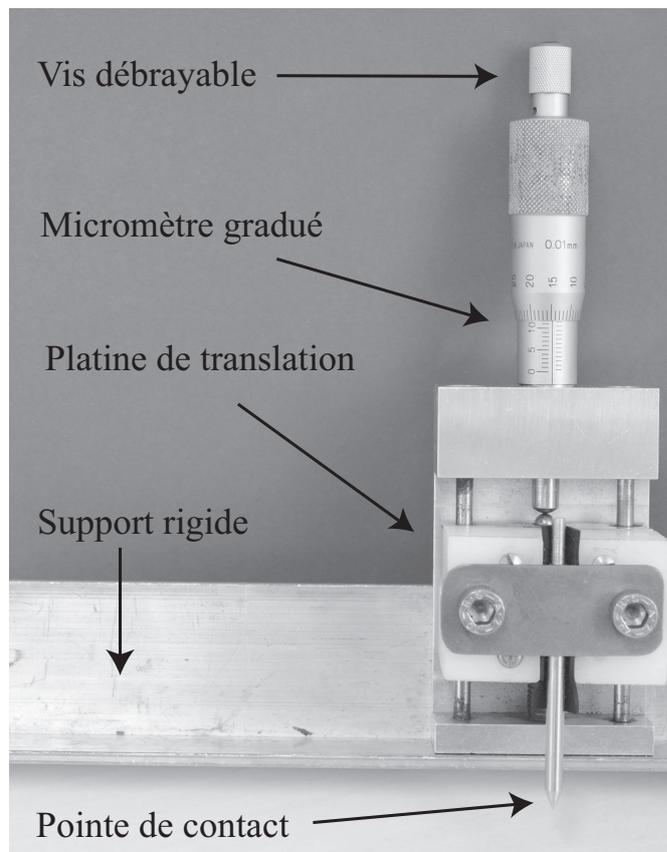


FIGURE 2.5 – Photographie de l'instrument pour mesurer la profondeur. La pointe est mobile verticalement et la lecture de l'altitude se fait à 0.01 mm près.

de 0.02 mm. On peut également noter que la pointe métallique est reliée à la masse, tout comme la cellule qui contient l'huile afin d'éviter l'accumulation de charges qui perturberaient la surface.

2.4 Acquisition et traitement d'images

Dans toutes nos expériences, nous avons effectué des prises d'image en vue de dessus afin d'enregistrer les trajectoires suivies par les gouttes ou bien pour observer les ondes qui existent sur le bain. Pour cela, plusieurs configurations ont pu être utilisées, en fonction de l'information recherchée. Nous avons utilisé des caméras numériques dont les capteurs font typiquement 1000×1000 pixels. Pour les mesures de trajectoires, la fréquence typique d'acquisition est de 10 Hz ; elle peut être adaptée en stroboscopant le déclenchement de façon à fixer la phase de la vibration du bain entre 2 images successives.

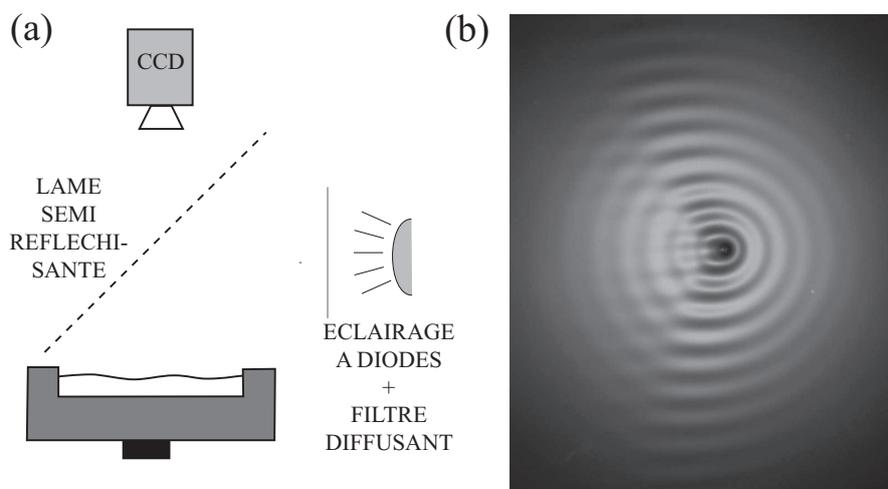


FIGURE 2.6 – (a) Schéma de principe du montage permettant de visualiser les ondes, en utilisant une lame semi-réfléchissante et un éclairage diffus. (b) Photographie d'un marcheur prise en utilisant cette méthode.

Nous avons également utilisé une caméra rapide, susceptible de fournir des images à 2000 Hz pour un capteur de 1 méga-pixel. Les méthodes présentées ci-dessous nécessitent de peindre la cellule de travail en noir pour éviter les reflets. De plus, la boîte contenant l'expérience est rendue opaque à l'aide de papier noir pour éviter la pollution des images par la lumière ambiante.

2.4.1 Visualisation d'ondes

Il a également été nécessaire, dans certaines expériences, de visualiser les ondes sur le bain, aussi bien celles qui se mettent en place à la surface du bain lors du déclenchement de l'instabilité de Faraday que celles créées par un marcheur. Nous avons placé une caméra à la verticale du bain, en intercalant une lame semi-réfléchissante (fig. 2.6 (a)). Nous utilisons un éclairage à diodes, intense et froid, pour éviter d'induire une élévation de température. Un calque intercalé sert de diffuseur. Ce type d'éclairage associé à la lame permet de visualiser la surface en ombroscopie et de distinguer ainsi la structure des ondes (fig. 2.6 (b)).

2.4.2 Mesures de trajectoires

Pour pouvoir obtenir la position de la goutte sur chaque image, nous utilisons un autre type d'éclairage. La caméra est laissée en place, nous retirons la lame semi-réfléchissante et la source lumineuse est placée à l'horizontale de façon à obtenir un éclairage ra-

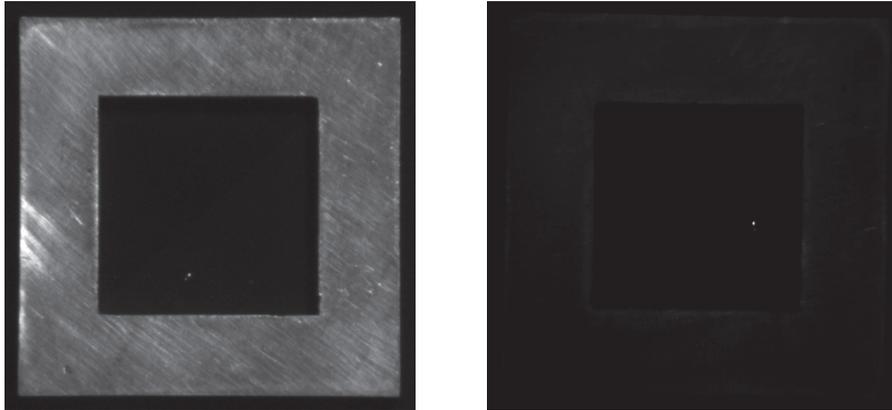


FIGURE 2.7 – Photographie d’une goutte placée dans un cadre. (a) avec un éclairage normal. (b) En éclairage rasant. Comme il subsiste un unique point lumineux, il est aisé de détecter la position de la goutte avec ce type d’éclairage.

sant. La figure 2.7 présente les images d’un marcheur obtenues en plaçant la source en éclairage direct et en éclairage rasant. Dans le second cas, le contraste est tel qu’il est aisé de détecter la goutte. Nous utilisons des fonctions implémentées dans Matlab pour effectuer cette opération. Nous faisons ”passer” sur l’image un disque gaussien dont le rayon caractéristique correspond à la taille de la goutte (en pixels) sur l’image, et nous détectons le maximum de corrélation. En général, cette détection précise au pixel nous suffit, puisqu’il est aisé de changer le grandissement optique de l’image pour augmenter la résolution spatiale. Ces trajectoires reconstituées sont ensuite analysées à l’aide de Matlab.

2.5 Reconstruction de surfaces

Cette méthode expérimentale pour reconstruire des surfaces fluides a été développée par F. Moisy et M. Rabaud [62], et ils nous ont apporté une aide précieuse pour l’adapter à notre dispositif expérimental. On peut tirer profit des lois de Descartes concernant la réfraction des rayons lumineux aux interfaces, en les associant aux méthodes modernes de corrélation d’images utilisées pour suivre des particules dans un écoulement fluide (Particle Imaging Velocimetry en anglais, PIV dans la suite), pour reconstruire l’interface entre deux fluides d’indices optiques différents. Les résultats obtenus à l’aide de cette technique présentent des détails qui nous permettent de faire des mesures quantitatives sur les ondes de surface des marcheurs.

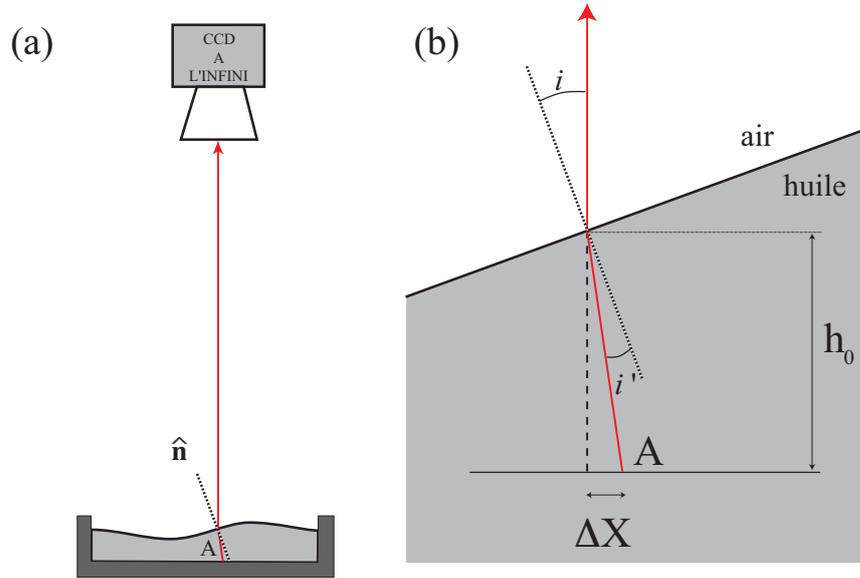


FIGURE 2.8 – (a) Schéma de principe. Une caméra, placée à l’infini, filme un objet A à travers l’interface Huile/Air. Les rayons sont déviés si l’interface n’est pas horizontale. (b) Tracé des rayons dans le cas idéal où la caméra est placée à l’infini, à la verticale du bain. Le déplacement apparent ΔX du point A nous permet de remonter à la pente locale si l’on connaît la hauteur de fluide.

2.5.1 Optique

Nous allons présenter ici les calculs d’optique dans un cas simplifié (image à l’infini). Le cas complet a été traité par F. Moisy *et al.* [62]. Les procédures de traitement que nous utilisons tiennent compte des corrections associées. Nous n’exposerons donc ici que le principe de la méthode, en nous limitant volontairement à ce cas particulier. On suppose qu’un objet A est placé au fond de la cellule, et qu’on filme depuis le dessus, en plaçant une caméra à l’infini. Si la surface est au repos, les rayons lumineux qui arrivent à la caméra sont ceux qui se propagent verticalement. Si maintenant la normale à la surface fait un angle i avec la verticale, le rayon qui part de A et qui, après avoir traversé la surface, se dirige selon la verticale vers la caméra doit satisfaire les lois de Descartes au niveau du dioptre que forme l’interface Huile/Air (figure 2.8 (a) et (b)). Ce rayon ressort avec un angle qui vaut i , et son angle d’incidence i' sera tel que

$$n_{air} \sin i = n_{huile} \sin i' \quad (2.1)$$

avec n_{air} et n_{huile} les indices optiques des deux fluides. Si l’on compare deux images, une où l’interface est plane, l’autre avec des déformations de la surface, le point A semble

s'être déplacé d'une distance $\Delta X = h_0 \tan(i - i')$. En mesurant ce déplacement apparent, on remonte à la pente locale de la surface. Il est également intéressant de noter qu'il est toujours possible d'augmenter ce déplacement apparent en faisant varier la hauteur de liquide h_0 et en profitant ainsi d'un bras de levier optique. On peut, de cette manière, améliorer la résolution verticale autant qu'on le souhaite. Il y a néanmoins une limitation fondamentale : si la courbure de l'interface devient trop importante, des caustiques sont susceptibles d'apparaître, et il existe alors deux images pour le même point, ce qui nous empêche de déterminer la pente. Pour effectuer nos expériences, nous utilisons une cellule en plexiglas transparent. Nous plaçons au fond de la cellule, au-dessous du plexiglas, un motif aléatoire de points noirs sur fond blanc. Après quelques essais expérimentaux, nous avons choisi de fixer la profondeur d'huile à quelques millimètres et d'ajouter du bras de levier optique en prenant une plaque de Plexiglas épaisse de deux centimètres. Comme les indices optiques de l'huile et du Plexiglas sont très voisins ($n_{Plexi} \simeq n_{huile} \simeq 1.5$), tout se passe comme si l'on avait juste augmenté h_0 .

2.5.2 Corrélations d'images et traitements numériques

Nous plaçons notre caméra numérique (en général une caméra rapide) à une distance $L = 1.3$ m, et nous fixons dessus un objectif de focale 200 mm. Dans ces conditions, le champ obtenu pour un capteur 1000×1000 pixels fait 45.8 mm de côté. Nous prenons des photographies du motif aléatoire de points lorsque l'interface est au repos (image de référence), puis lorsque la goutte est dans le champ (fig. 2.9). Les deux images diffèrent très peu, et le motif de point est toujours visible, excepté sous la goutte qui le masque. Nous avons apporté un soin particulier à la synchronisation des prises d'image pour pouvoir remonter au champ d'ondes pendant tout le cycle de vibration du bain.

Ces images sont ensuite exploitées à l'aide du logiciel de PIV Davis. Un certain nombre de contraintes sont à respecter pour garantir une bonne exploitation des données : la taille des points sur le motif aléatoire ne doit pas excéder quelques pixels, leur densité doit être comprise entre deux bornes bien déterminées et les déplacements apparents ne doivent pas dépasser quelques pixels. En effectuant une corrélation d'image, Davis est capable de déterminer le déplacement moyen pour des blocs carrés de 8 pixels de côté. Nos images mégapixels se transforment ainsi en un champ de déplacement de 125×125 points. Une série de programmes écrits sous Matlab, et mis à disposition par F. Moisy, permet ensuite de charger ces données et de remonter à la hauteur du fluide en tout point du bain. Le champ de déplacement fourni par l'algorithme de PIV correspond à la pente locale de la surface. En utilisant un opérateur d'inversion du gradient bidimensionnel, on procède à la reconstruction de l'interface Huile/Air. Comme il s'agit d'une opération

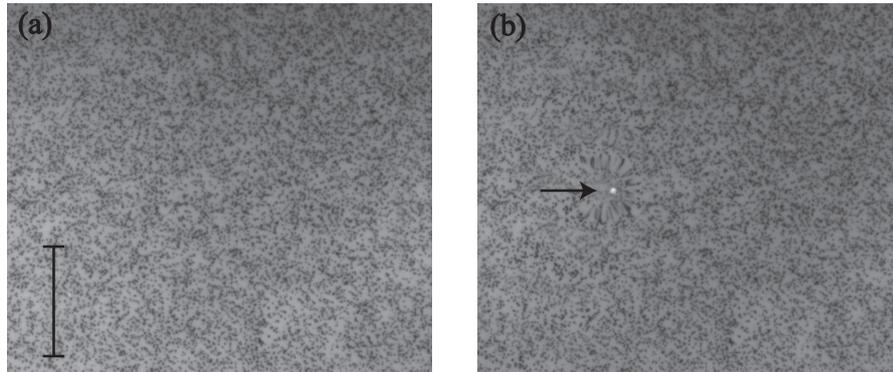


FIGURE 2.9 – (a) Photographie du fond aléatoire de points lorsque le bain est au repos. (b) Le même dispositif, avec un marcheur se propageant de la gauche vers la droite. Le segment noir représente 1 cm.

intégrale, les points aberrants qui sont situés sous la goutte perturbent la reconstruction en ajoutant du bruit. L'incertitude est alors élevée dans un voisinage de la goutte de l'ordre de 2 mm, mais relativement négligeable au-delà. On effectue ensuite une opération de filtrage pour retirer les basses fréquences dues aux distortions optiques et aux défauts d'alignement de la caméra, et l'on obtient ainsi une reconstruction fiable de la surface avec une excellente précision. La résolution dans le plan horizontal vaut 0.36 mm, et la sensibilité verticale obtenue dans nos conditions expérimentales est de l'ordre du demi-micron, sachant que l'amplitude maximale que l'on peut détecter est de l'ordre de 50 μm . Tous les résultats expérimentaux et quantitatifs concernant les ondes présentés dans cette thèse ont été obtenus en utilisant la méthode qui nous venons de décrire.

Chapitre 3

Transmission partielle de marcheurs : un « effet tunnel » macroscopique ?

Lorsque les ondes d'un marcheur sont localisées en passant à travers une fente, celui-ci est diffracté de manière aléatoire, une incertitude apparaissant sur la direction de sa vitesse. Le point de départ de cette thèse était d'étudier d'autres cas de figure dans lesquels les marcheurs pourraient présenter des comportements probabilistes. Nous avons choisi d'étudier dans un premier temps la situation dans laquelle les ondes sont divisées. Il s'agit de mettre en place sur le bain des barrières localisées à travers lesquelles la réflexion des ondes est partielle, une partie étant réfléchi, le reste étant transmis au-delà. Comment va réagir la goutte, discrète et indivisible, face à cette séparation des ondes qui lui sont associées ? Le marcheur, qui couple la particule aux ondes, va-t-il avoir des comportements aléatoires ?

3.1 Barrières immergées

3.1.1 Premières expériences

Pour obtenir une transmission partielle des ondes, nous utilisons des obstacles complètement immergés au-dessus desquels la profondeur d'huile est fortement réduite. Ce sont les mêmes barrières que celles utilisées dans les expériences de diffraction. Ces barrières, lorsqu'elles sont épaisses, sont des écrans pour les marcheurs. Le marcheur dévie de sa trajectoire rectiligne loin en amont de la barrière et il est réfléchi

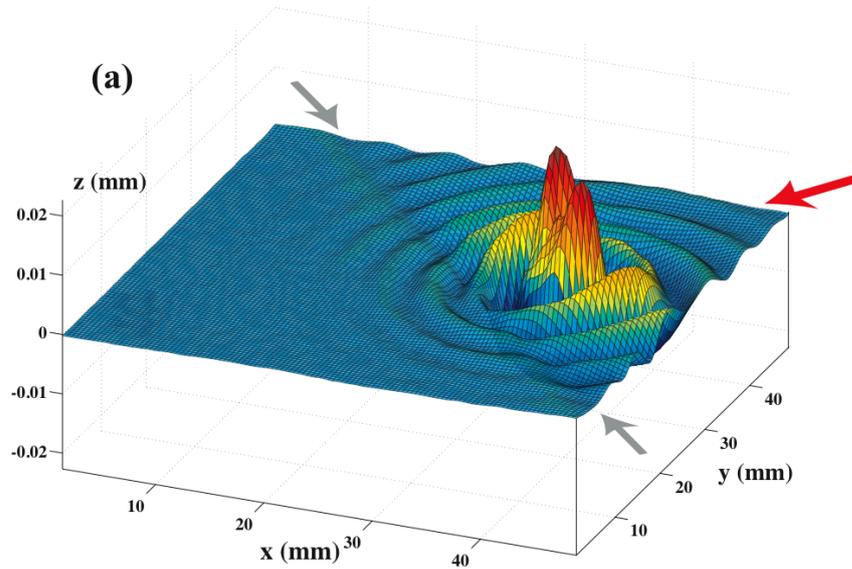


FIGURE 3.1 – Reconstruction tridimensionnelle des ondes autour d’un marcheur impactant sur une barrière de 2 mm d’épaisseur. La flèche rouge indique la direction dans laquelle se déplace le marcheur, les flèches grises indiquent la position de la barrière sous-marine.

bien avant que la goutte ne soit au-dessus de l’obstacle. De telles collisions conduisent systématiquement à une réflexion totale du marcheur.

Lorsque les barrières sont minces, avec une épaisseur faible, elles transmettent partiellement les ondes. La figure 3.1 montre la reconstruction tridimensionnelle du champ d’onde d’un marcheur avec une vitesse $V = 13.7$ mm/s et qui se déplace perpendiculairement à une barrière d’épaisseur $e = 2$ mm. On constate qu’une portion de l’onde du marcheur est transmise et que son amplitude est fortement diminuée de l’autre côté de la barrière. Un marcheur, placé au dessus d’une telle barrière, disparaît. La goutte et les ondes sont toujours présentes, mais le couplage qui les associe au sein d’un marcheur est détruit, et l’ensemble ne se déplace plus spontanément. Il ne s’agit pas d’une absorption du marcheur par la barrière. En effet, un tel phénomène ne se produit pas spontanément avec des barrières épaisses, puisqu’il est toujours repoussé loin en amont de la barrière. Il ne peut monter dessus que si son épaisseur est réduite, et dans ce cas-là, il finit toujours par retourner dans la partie profonde où la marche est restaurée. Le marcheur n’est donc jamais absorbé par de tels obstacles.

Pour comprendre les propriétés de ces barrières, nous devons analyser leur effet sur les ondes existant à la surface du bain, et voir leur conséquences sur la marche.

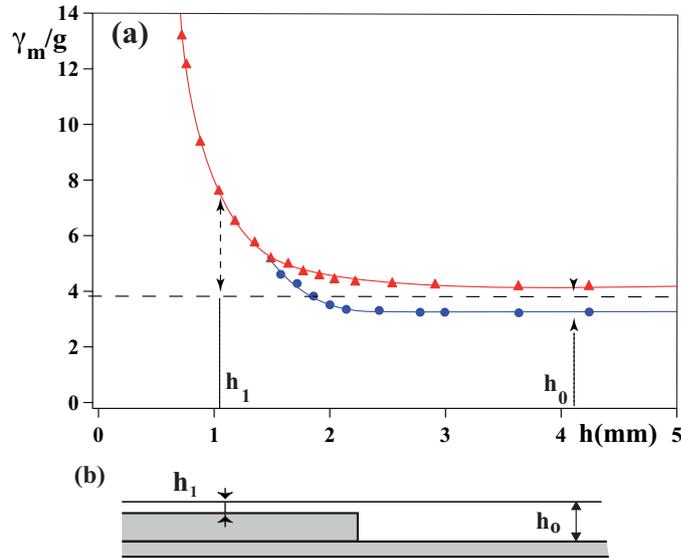


FIGURE 3.2 – (a) Dépendance du seuil de l’instabilité de Faraday γ_m^F (triangles rouges) et du seuil de marche pour des gouttes de diamètre $D = 760 \mu\text{m}$ (ronds bleus) en fonction de la profondeur d’huile. (b) Schéma représentant les deux régions avec $h_0 = 4.1$ mm et $h_1 = 1.1$ mm. Pour une excitation $\gamma_m = 3.75$ g, une goutte marchera dans la région de droite tandis qu’elle restera immobile à gauche.

3.1.2 Effet de la profondeur sur les seuils de marche et de Faraday

Les ondes d’un marcheur possèdent la longueur d’onde de Faraday λ_F puisqu’elles sont émises par la goutte qui rebondit à la fréquence de Faraday f_F . La théorie des instabilités prévoit que l’amortissement temporel de ces ondes est lié à l’écart au seuil de Faraday $\Gamma = (\gamma_F - \gamma_m)/\gamma_F$ [58].

Expérimentalement, on constate que le seuil de l’instabilité de Faraday évolue lorsque l’on réduit la profondeur d’huile dans la cellule (fig. 3.2 (a)). En effet, avec de l’huile de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, ce seuil est quasiment constant pour des profondeurs supérieures à 1.5 mm mais il augmente de façon brutale lorsque l’on réduit davantage la hauteur de liquide. De cette façon, on peut envisager de séparer le bain en deux zones de profondeur différentes $h_0 = 4.1$ mm et $h_1 = 1.1$ mm (fig. 3.2 (b)). Si l’on se place à une excitation $\gamma_m = 3.75$ g, l’écart au seuil dans la partie droite vaut $\gamma_m^F(h_0) - \gamma_m \simeq 0.45$ g, et les ondes sont faiblement amorties. Dans le même temps, dans la partie gauche, l’écart au seuil $\gamma_m^F(h_1) - \gamma_m \simeq 4$ g est beaucoup plus important et les ondes sont très fortement amorties.

Lorsque l'on modifie la profondeur de liquide dans le bain, on affecte également le seuil de marche des gouttes γ_m^W (fig. 3.2 (a)). Aux grandes profondeurs, et pour une goutte de diamètre $D = 760 \mu\text{m}$, on a $\gamma_m^W \simeq 3.25 \text{ g}$. Une telle goutte placée dans la zone de droite avec $h = h_0$ à une excitation $\gamma_m = 3.75 \text{ g}$ deviendra donc un marcheur et se déplacera spontanément. En revanche, dans la zone de faible profondeur, le seuil de marche $\gamma_m^W(h_1)$ est rejeté au-delà du seuil de Faraday $\gamma_m^F(h_1)$. La même goutte, placée dans cette région de l'espace avec la même excitation ne se déplacera plus. Il est donc possible, en plaçant un obstacle sous-marin, de modifier en même temps les propriétés des ondes et de rompre le couplage onde-particule pour transformer un marcheur en une goutte qui ne se déplace plus.

Dans la partie profonde, la théorie des instabilités [58] ainsi que l'expérience [69] nous assurent que la vitesse du marcheur V_W croît comme $(\gamma_m - \gamma_W)^{\frac{1}{2}}$. En revanche, au dessus de la barrière, V_W doit décroître avec un temps caractéristique $(\gamma_m - \gamma_W)^{-1}$. La marche est donc exponentiellement amortie, et devient d'une certaine manière évanescence au-dessus de la barrière. Cette évanescence peut être contrôlée en ajustant l'accélération de forçage γ_m .

3.1.3 Transmission d'ondes à travers une barrière

Une seconde série d'expériences a été menée pour déterminer les propriétés des barrières immergées, en utilisant la méthode de reconstruction de surface. Des barrières au-dessus desquelles la profondeur d'huile est réduite sont placées au fond de la cellule de travail. Ces barrières possèdent une épaisseur e (fig. 3.3) et la hauteur d'huile est réduite à $h_1 = 1.1 \text{ mm}$. Elles sont placées à l'extrémité d'un cadre épais, lui aussi complètement immergé, formant un angle aigu. Dans une telle configuration, un marcheur va avancer vers le sommet du cadre et repartir selon la médiatrice en étant guidé par les parois. Il vient alors impacter à angle droit sur la barrière que l'on souhaite étudier. La prise d'image est réglée de manière à pouvoir reconstruire la surface de l'autre côté de la barrière. Des coupes de la surface à l'avant du marcheur et parallèles à la trajectoire sont ensuite effectuées. De cette manière, l'onde transmise est mesurée et comparée à celle du même marcheur se propageant librement à la surface. La figure 3.4 présente deux profils d'onde obtenus de cette façon, l'un pour un marcheur libre et l'autre à travers une barrière d'épaisseur $e = 5 \text{ mm}$. Dans les deux cas, ces profils correspondent au produit d'une sinusoïde par une exponentielle décroissante. La longueur d'onde est légèrement inférieure à λ_F , et la longueur caractéristique d'atténuation vaut $\delta \simeq 1.6\lambda_F \simeq 7.6 \text{ mm}$. Nous reviendrons dans le chapitre suivant sur ces deux aspects. Nous constatons également que l'amplitude de cette onde au-delà de la barrière

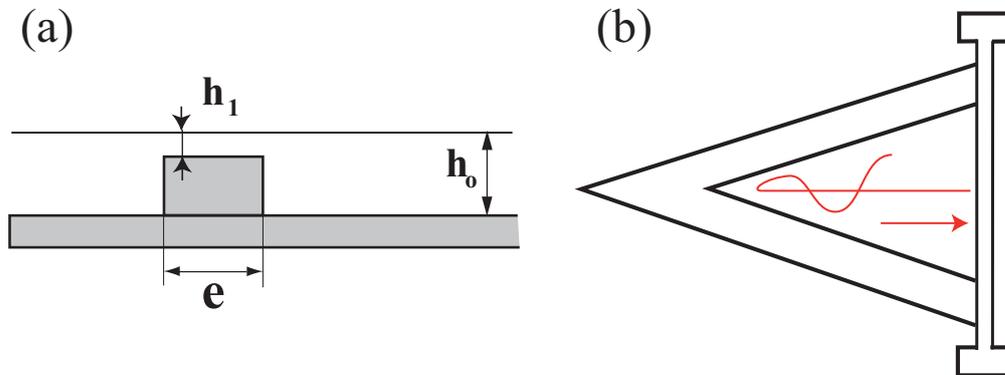


FIGURE 3.3 – (a) Barrière tunnel vue en coupe. La profondeur d’huile, qui vaut $h_0 = 4.1$ mm dans le bain, est réduite à $h_1 = 1.1$ mm au-dessus de la barrière d’épaisseur e . (b) La barrière est placée à l’extrémité d’un lanceur. La trajectoire du marcheur, guidé par le lanceur, est perpendiculaire à la barrière.

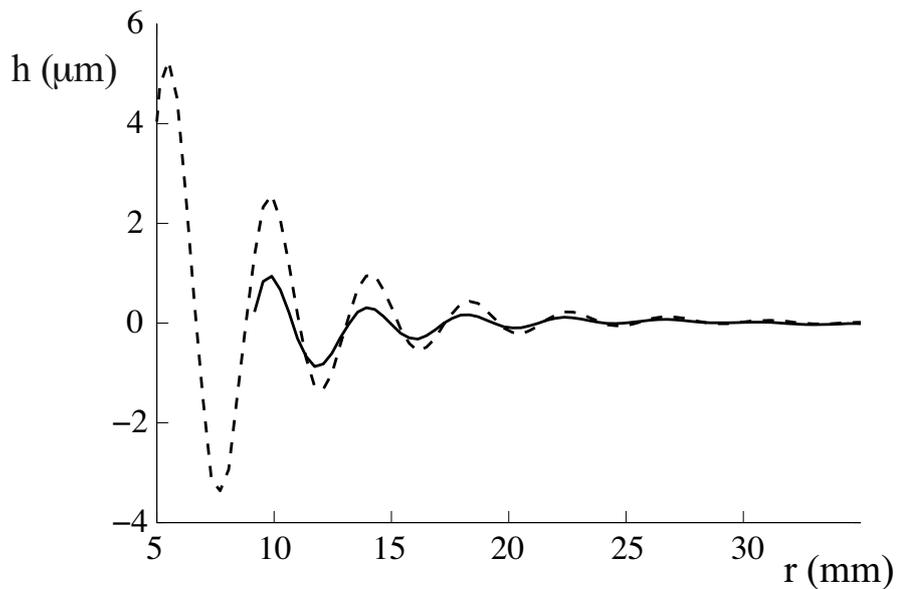


FIGURE 3.4 – Profils d’onde mesurés en avant d’un marcheur. La courbe en pointillés correspond au cas d’un marcheur libre, la courbe en plein à celui d’un marcheur impactant sur une barrière d’épaisseur $e = 5$ mm. Dans les deux cas, l’ajustement par le produit d’une sinusoïde et d’une exponentielle décroissante donne une longueur caractéristique d’amortissement $X_{amor} \simeq 7.6$ mm.

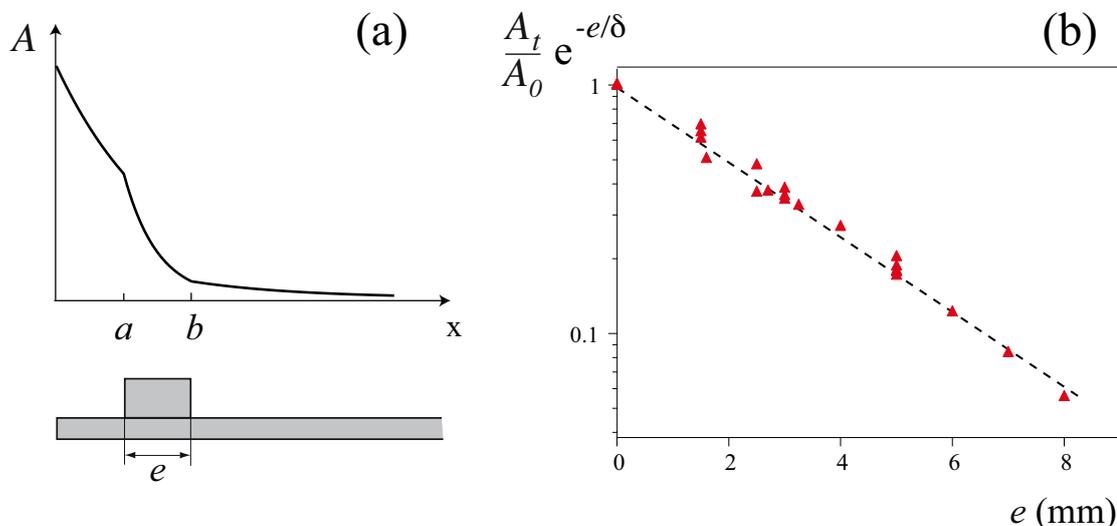


FIGURE 3.5 – (a) Enveloppe des ondes au-dessus d'une barrière. La longueur caractéristique d'amortissement change au-dessus de la barrière. (b) Coefficient de transmission des ondes pour différentes épaisseurs e de barrière. La courbe en pointillé correspond à l'ajustement par une exponentielle décroissante avec une longueur caractéristique $\delta_{\text{bar}} = 2.9 \pm .2$ mm.

est réduite par rapport à celle du marcheur libre. Peut-on, à partir de telles mesures, évaluer quantitativement la transmission des ondes à travers une barrière tunnel ?

Dans la partie profonde au-delà de la barrière, seule l'amplitude des ondes est modifiée. On suppose qu'un marcheur libre génère devant lui une onde dont l'enveloppe est donnée par $A = A_0 \exp -x/\delta$. En imposant que cette enveloppe soit continue, et que l'amortissement au-dessus de la barrière soit également exponentiel, mais avec une longueur caractéristique δ_{bar} différente de celle du bain profond, il est possible d'écrire une équation pour l'enveloppe des ondes. On place le marcheur à l'origine $x = 0$, une barrière d'épaisseur e se trouvant entre les points d'abscisses a et b (fig. 3.5(a)). Par continuité, l'enveloppe A va donc s'écrire, dans chacune des régions :

$$\begin{aligned}
 A &= A_0 \exp -\frac{x}{\delta} && \text{pour } x < a \\
 A &= A_0 \exp -a/\delta \exp -\frac{(x-a)}{\delta_{\text{bar}}} && \text{pour } a < x < b \\
 A &= A_0 \exp -a/\delta \exp -\frac{(b-a)}{\delta_{\text{bar}}} \exp -\frac{x-b}{\delta} && \text{pour } x > b
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

On en déduit, au-delà de la barrière d'épaisseur $e = b - a$, l'amplitude transmise A_t

$$A_t = A_0 \exp \frac{e}{\delta} \exp -\frac{e}{\delta_{\text{bar}}} \quad (3.2)$$

La figure 3.5(b) présente $A_t/A_0 \exp -e/\delta$ en fonction de e en échelle semi-logarithmique, pour des épaisseurs de barrière comprises entre 1.5 mm et 8 mm. La décroissance est bien exponentielle, et un ajustement de la courbe donne une longueur caractéristique d'amortissement $\delta_{\text{bar}} = 2.9 \pm .2$ mm.

Les barrières sous-marines introduites ici présentent bien les propriétés qui paraissent nécessaires pour réaliser un effet tunnel analogue à celui de la mécanique quantique. L'amortissement exponentiel des ondes au-dessus de ces barrières est bien supérieur à celui qu'ont ces mêmes ondes quand le bain est profond. Nous disposons donc d'un instrument qui permet d'imiter de façon intéressante les barrières de potentiel qui existent en mécanique quantique. L'amortissement des ondes y est exponentiel, et leur transmission n'est que partielle. Une amplitude non nulle peut être récupérée au-delà de la barrière si celle-ci est mince.

Nous allons maintenant regarder en détail le comportement de marcheurs placés au voisinage de barrières minces immergées, pour tester la possibilité d'un effet tunnel à l'échelle macroscopique. Ces mesures mettent en jeu des collisions uniques avec une barrière, avec une probabilité de traversée relativement faible à chaque choc. Les expériences sont donc relativement longues et nous avons cherché au maximum à automatiser l'expériences.

3.2 Géométries expérimentales

3.2.1 1^{re} géométrie : cavité double

Dans les premières expériences, nous avons utilisé une géométrie relativement simple : deux réservoirs carrés sont séparés par une barrière tunnel. Un grand cadre rectangulaire est fixé au fond du bain. Des encoches sur le cadre permettent d'y glisser une barrière amovible (fig. 3.6(a)). Cette barrière possède une épaisseur e variable entre 1.6 et 5 mm. La profondeur d'huile au-dessus est réglée pour avoir $h_1 = 1.1$ mm. Les parois de ce cadre sont épaisses (1 cm) et plus hautes que la barrière (tout en restant sous-marines) pour éviter toute sortie du piège. Les deux cavités ainsi formées sont carrées, et la paroi qui les sépare correspond à une barrière tunnel, les autres étant suffisamment épaisses pour que l'on considère qu'elles sont opaques aux ondes. Un marcheur de vitesse V_W , déposé dans une des deux cavités, est susceptible de traverser la barrière pour rejoindre l'autre, à condition que e soit suffisamment faible et que V_W soit assez grand. Après la traversée, le marcheur est piégé de l'autre côté et ne peut s'échapper que pour revenir

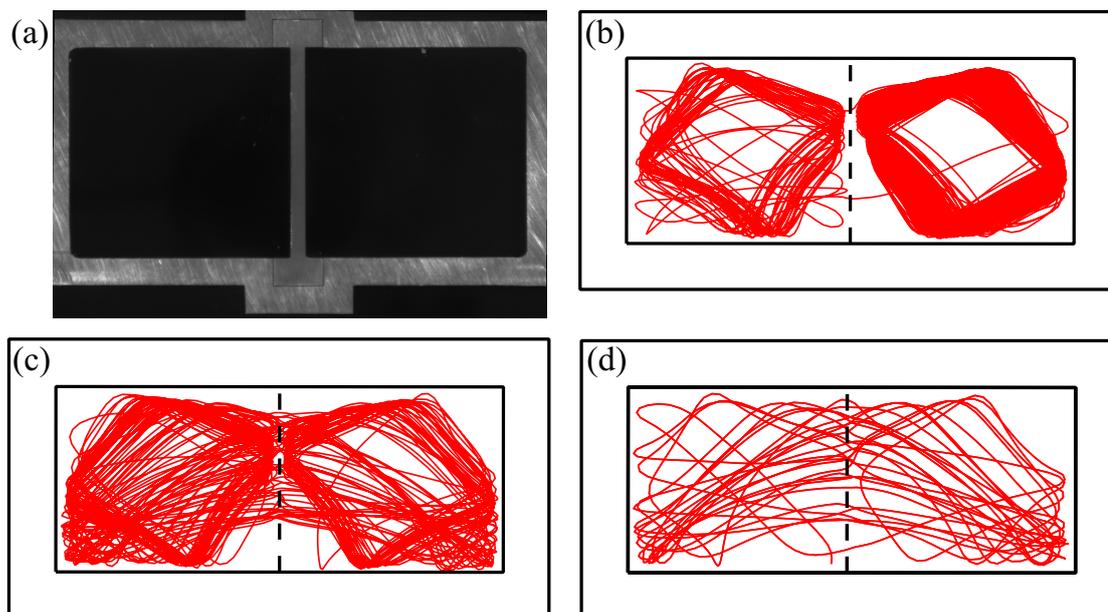


FIGURE 3.6 – (a) Vue de dessus de la double cavité. La barrière centrale est amovible. (b) Goutte lente et barrière d'épaisseur $e = 3$ mm. (c) Goutte rapide et barrière d'épaisseur $e = 3$ mm. (d) Goutte rapide et barrière d'épaisseur $e = 2$ mm.

dans la première cavité. Une fois le marcheur placé dans le piège, il suffit d'enregistrer sa trajectoire sur des temps longs pour étudier sa capacité à traverser par effet tunnel. Différents comportements expérimentaux peuvent être mis en évidence :

- Si la barrière est épaisse et la goutte lente (fig. 3.6(b)), le marcheur est piégé et n'a presque aucune chance de traverser la barrière. Il décrit un cycle limite dans chaque cavité carrée. Les rares déstabilisations de ce cycle conduisent à des traversées de la barrière.
- Si l'on place un marcheur rapide avec la même barrière (fig. 3.6(c)), le marcheur traverse de temps en temps la barrière. La trajectoire qui apparaît aux temps longs correspond à la superposition du cycle limite et de trajectoires selon les diagonales. Ce sont ces dernières qui conduisent le plus souvent à des traversées de la barrière.
- Enfin, si l'épaisseur de la barrière est réduite (fig. 3.6(d)), le cycle limite disparaît et les traversées deviennent quasiment systématiques. La probabilité de passage augmente alors sensiblement.

Les collisions qui conduisent à une traversée sont presque toujours celles qui sont quasi normales au moment de l'impact. L'incertitude sur le passage est donc liée à la nature

de la trajectoire dans le piège (cycle limite ou non). On retrouve alors des comportements typiques à l'échelle statistique, en fonction de deux paramètres simples : la vitesse V_W du marcheur et l'épaisseur e de la barrière.

Cette géométrie présente quelques limitations importantes qui nous ont empêchés d'obtenir des résultats quantitatifs :

- Les conditions de chaque impact ne sont pas contrôlées, ce qui nous empêche de nous prononcer sur le caractère aléatoire de chaque collision.
- Un certain nombre de défauts expérimentaux introduisent un biais dans la trajectoire suivie par le marcheur. Il s'agit probablement d'un mauvais équilibrage de la cellule de travail, l'horizontalité de la vibration n'étant pas correctement assurée. Pour y remédier, nous avons fait fabriquer une nouvelle cellule plus rigide à l'atelier.
- La présence de courants d'air asymétriques favorise le passage des barrières dans un sens plutôt que dans l'autre. Les deux cavités ne sont alors plus équivalentes, le marcheur passant plus de temps dans l'une que dans l'autre. De même, les cycles sont presque toujours parcourus dans le même sens. Pour éviter ces sources d'erreur systématique, nous avons ajouté la boîte en plexiglas afin de limiter les courants d'air, et nous avons retiré la lame semi-réfléchissante qui favorise les écoulements d'air dans un sens plutôt que l'autre, en perdant toutefois la possibilité de visualiser directement les ondes pendant des acquisitions longues.

Ces limitations nous ont conduit à réaliser deux expériences supplémentaires, qui ont été mises en place pour mesurer quantitativement les probabilités de passage en fonction des différents paramètres expérimentaux et pour déterminer le rôle de la trajectoire suivie dans le processus de traversée de la barrière.

3.2.2 2^{ème} géométrie : désintégration α

La seconde géométrie étudiée est inspirée du mécanisme avancé par G. Gamow [37] pour expliquer le principe de la désintégration nucléaire de type α . Une telle désintégration α correspond à l'émission d'un noyau d'hélium lors d'une réaction nucléaire de fission. Dans le modèle proposé, l'auteur suggère de considérer la désintégration comme l'échappement d'une particule α confinée dans une boîte en passant à travers une barrière de potentiel par effet tunnel. Dans notre expérience, cette boîte est formée par une simple cavité sous-marine carrée, dont le côté interne a une longueur $L = 55$ mm et dont l'épaisseur e est telle que $1.5 < e < 8$ mm.

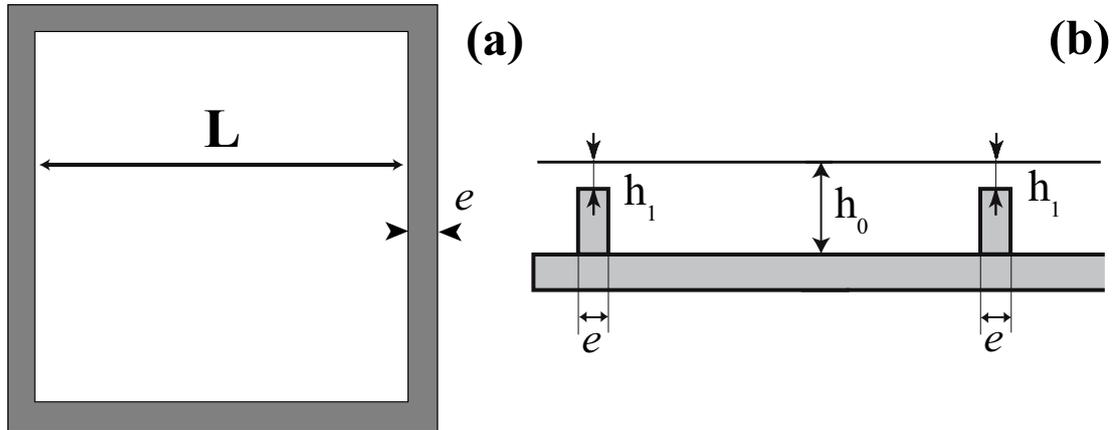


FIGURE 3.7 – (a) Schéma représentant un cadre de côté intérieur $L = 55$ mm et d'épaisseur e .
 (b) Le même cadre vu en coupe. La profondeur d'huile est réduite à $h_1 = 1.3$ mm au-dessus des barrières et vaut $h_0 = 4.1$ mm partout ailleurs.

Probabilité d'échappement

Le cadre est placé au fond de la cellule (fig. 3.7) ; on règle ensuite soigneusement la profondeur d'huile au-dessus du cadre de façon à avoir $h_1 = 1.3 \pm .02$ mm. Un marcheur, avec une vitesse V_W , est déposé à l'intérieur de cette cavité. Lorsque les parois sont épaisses, le marcheur reste confiné et ne s'échappe jamais. Pour des murs fins, on observe des échappements d'autant plus fréquents que e est faible. Le nombre N de collisions qu'un marcheur effectue contre les parois du cadre avant de s'échapper à l'extérieur du piège est mesuré. Comme les trajectoires sont relativement régulières à l'intérieur des cadres, compter le nombre N de collisions avec les parois revient à estimer la durée de vie τ de l'état piégé. En répétant l'expérience, on constate que N prend des valeurs très dispersées.

Chaque réalisation expérimentale semble avoir un résultat imprédictible. Il faut donc réaliser un grand nombre de fois l'expérience pour mesurer la probabilité $P = 1/\langle N \rangle$ d'échappement de la goutte. Cette probabilité P présente des dépendances relativement douces quand on varie la vitesse V_W du marcheur ou bien l'épaisseur e du cadre.

Pour vérifier cette observation expérimentale, nous effectuons ensuite un échantillonnage statistique en regroupant les marcheurs ayant une vitesse $V \pm \Delta V$ avec $\Delta V/V = 5\%$. La valeur de P en fonction de la vitesse V_W est déterminée aux faibles probabilités en utilisant plus de mille collisions pour chaque point. La figure 3.8 présente P en fonction de V_W pour 4 cadres différents ($e = 2.5, 3, 4$ et 5 mm). On constate que la probabilité d'échappement croît avec la vitesse du marcheur, et ce pour tous les cadres.

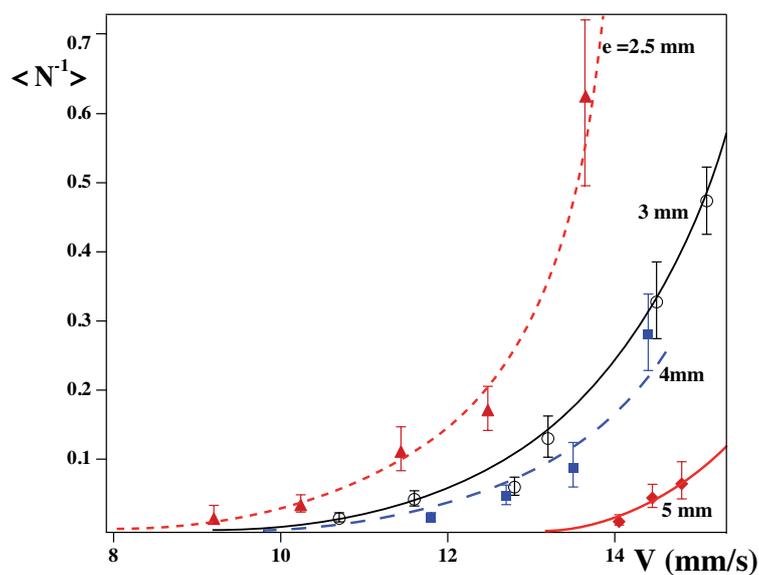


FIGURE 3.8 – Probabilité d’échappement $P = \langle N \rangle^{-1}$ d’une goutte en fonction de sa vitesse V_W pour quatre cadres d’épaisseur $e = 2.5, 3, 4$ et 5 mm. Les courbes continues sont un guide pour l’œil.

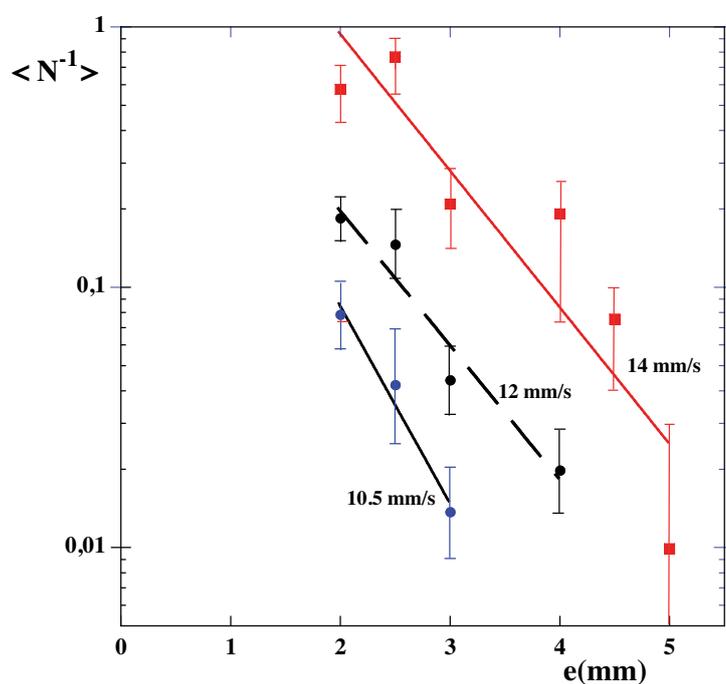


FIGURE 3.9 – Probabilité d’échappement $P = \langle N \rangle^{-1}$ d’une goutte en fonction de l’épaisseur e du cadre pour des vitesses $V = 10.5, 12$ et 14 mm/s. Les courbes continues correspondent à l’ajustement par des exponentielles dont les longueurs caractéristiques sont $\lambda_\tau = 0.65, 0.85$ et 0.8 mm respectivement.

Ces résultats montrent également que l'épaisseur du cadre joue un rôle puisque les probabilités sont toujours plus faibles pour des épaisseurs e plus importantes. Pour mesurer cette dépendance, la vitesse du marcheur est fixée, et la probabilité de sortie P est évaluée en variant l'épaisseur e . Les résultats pour trois vitesses différentes sont présentés sur la figure 3.9. On constate directement que la probabilité s'effondre lorsque l'épaisseur augmente. La représentation semi-logarithmique suggère que la diminution de la probabilité est exponentielle aux faibles probabilités. L'ajustement des courbes donne une longueur caractéristique d'amortissement $\lambda_\tau \simeq 0.85 \pm 0.1$ mm pour les faibles probabilités.

Trajectoires dans la cavité

Nous pouvons étudier un peu plus en détail le processus qui conduit à faire sortir la goutte du piège carré. Nous avons filmé la goutte au cours de son mouvement, et un traitement d'image approprié permet de reconstituer sa trajectoire au cours du temps. La figure 3.10 présente quelques exemples de trajectoires observées. Lorsque l'on place un marcheur avec une vitesse $V = 9.95$ mm/s dans un cadre d'épaisseur $e = 4.5$ mm, il rejoint, après un bref régime transitoire, un cycle limite formant un carré (fig. 3.10 (a)), semblable à ce que l'on observerait dans un billard. Ce carré est légèrement décalé car les angles d'entrée et de sortie ne sont pas égaux lors d'une réflexion sur une barrière. Lorsque l'épaisseur du cadre diminue ou que la vitesse du marcheur augmente, la trajectoire se déstabilise progressivement. Une dérive lente de la trajectoire apparaît qui conduit à de rares bouffées désordonnées (fig. 3.10 (b)-(c)). Au cours de ces événements intermittents, le sens de rotation du marcheur dans la cavité peut s'inverser. Ce phénomène devient de plus en plus fréquent quand on diminue l'épaisseur e ou quand on augmente V_W . Le nombre moyen de collision $\langle N \rangle$ avant l'échappement de la goutte diminue également significativement. En dernier ressort, la goutte quitte le piège rapidement et le cycle limite n'est jamais atteint (fig. 3.10 (d)). Il existe clairement un lien entre les trajectoires observées et la capacité du marcheur à sortir du cadre. Tant que la trajectoire reste régulière, le marcheur ne s'échappe pas. Lorsque la trajectoire devient désordonnée, les collisions sur les barrières présentent des angles plus variés et celles qui sont orthogonales conduisent parfois à une sortie.

Dans tous les cas, la trajectoire récemment suivie par le marcheur conditionne la nature de la collision. Lorsque le marcheur s'approche de la barrière, sa capacité à la franchir dépend de la pente sous la goutte, et donc de la contribution des ondes émises auparavant et qui sont réfléchies par les parois. Dans cette géométrie, la variété des angles d'impact semble être à l'origine de l'absence de déterminisme du système. Une déstabilisation des trajectoires paraît nécessaire pour pouvoir observer une sortie du

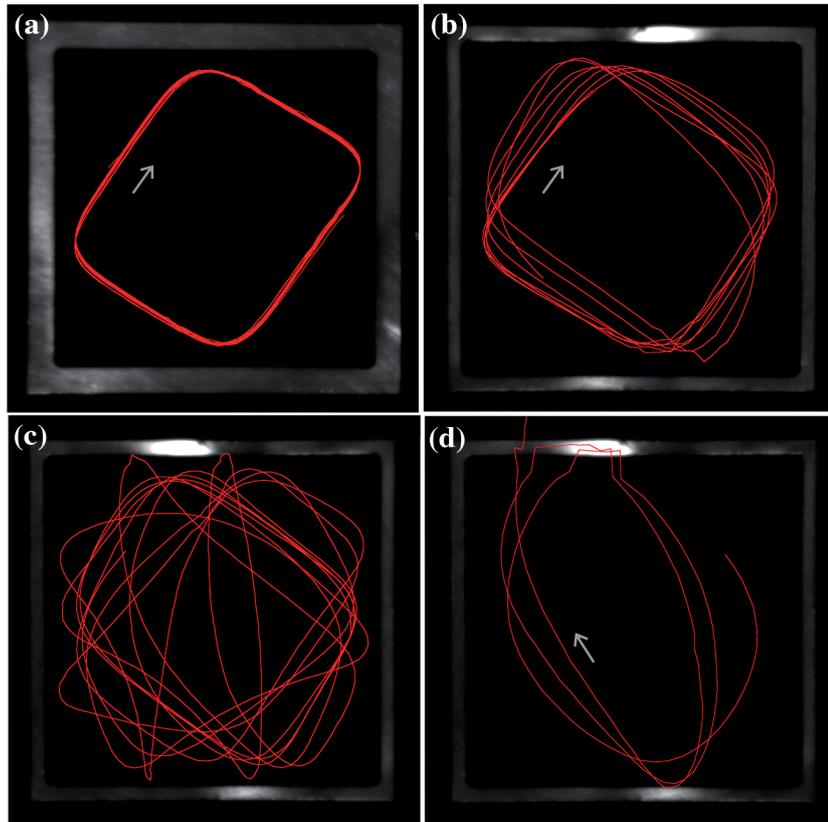


FIGURE 3.10 – Trajectoires enregistrées dans la cavité. (a) Pour un marcheur de vitesse $V_W = 9.95 \text{ mm.s}^{-1}$ et un cadre d'épaisseur $e = 4.5 \text{ mm}$. (b) Avec $V_W = 9 \text{ mm.s}^{-1}$ et $e = 2.5 \text{ mm}$. La probabilité d'échappement vaut $P \simeq 1\%$. (c) Avec $V_W = 11.8 \text{ mm.s}^{-1}$ et $e = 2.5 \text{ mm}$, on a $P \simeq 10\%$. (d) Avec $V_W = 13.2 \text{ mm.s}^{-1}$ et $e = 2.5 \text{ mm}$, on a $P \simeq 30\%$.

piège. Ce dispositif expérimental présente néanmoins une limitation importante, puisqu'à chaque échappement, l'état piégé est détruit, et il faut replacer le marcheur à l'intérieur du cadre pour réitérer l'expérience. Une dernière expérience a donc été mise au point, dans laquelle la trajectoire du marcheur est mieux contrôlée, pour vérifier le caractère aléatoire de chaque passage.

3.2.3 3^{ème} géométrie : effet tunnel unidimensionnel

Trajectoires dans une cavité en forme de losange

À la place d'un piège rectangulaire, on utilise une forme de losange (fig. 3.11). La profondeur d'huile est extrêmement réduite au-dessus de ce cadre de façon à constituer

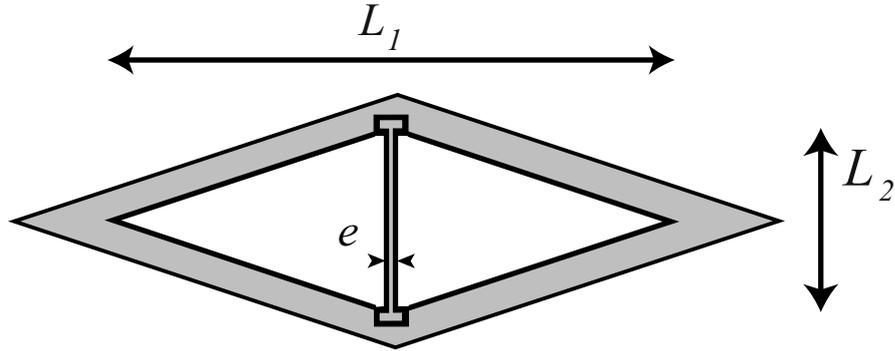


FIGURE 3.11 – Schéma de principe de la cavité en forme de losange.

une barrière infranchissable pour les marcheurs. L'intérieur ($L_1 = 120$ mm, $L_2 = 45$ mm) est séparé en deux cavités triangulaires par une barrière amovible au-dessus de laquelle la profondeur est réduite. Ces barrières sont interchangeables et possèdent des épaisseurs variant entre $e = 1.6$ mm et $e = 5$ mm.

Quel est l'intérêt de cette géométrie ? Lorsque l'on place un marcheur dans l'une des deux cavités, il oscille entre les deux côtés du cadre vers le sommet du losange, avant de repartir vers la barrière selon la médiatrice de l'angle formé par les deux côtés. De cette façon, la goutte arrive à angle droit avec la barrière. Avec cette géométrie, les conditions expérimentales sont telles que la collision est à angle droit avec la barrière et donc quasiment unidimensionnelle (fig. 3.3 (b)).

Probabilité de passage

Pour réaliser ces expériences, les profondeurs d'huile sont réglées avec soin à $h_0 = 4.1 \pm 0.02$ mm et $h_1 = 1.1 \pm 0.02$ mm (respectivement dans le bain et au-dessus de la barrière), tandis que l'excitation est choisie telle que $\gamma_m = 3.75$ g. Un marcheur est alors placé dans le piège. À l'aide d'un traitement d'images approprié, la trajectoire de la goutte au cours du temps est reconstituée. La figure 3.12 (a) nous montre une trajectoire suivie par une goutte de vitesse $V = 12$ mm/s effectuant 110 collisions avec une barrière d'épaisseur $e = 3$ mm. Au total, le marcheur réalise 14 passages au-dessus de la barrière. La figure 3.12 (b) est un détail de la précédente, qui présente huit collisions dont une seule est "passante". Comme dans le cas de cavités carrées, il est impossible de prédire si la goutte va traverser la barrière sous-marine. Chaque collision reste aléatoire, et il est nécessaire d'effectuer des statistiques pour pouvoir évaluer une probabilité de passage. Nous choisissons de mesurer sa vitesse en A et A', à une distance de 4 cm de la barrière, c'est-à-dire en amont de la zone où les trajectoires s'écartent de la normale. Les vitesses

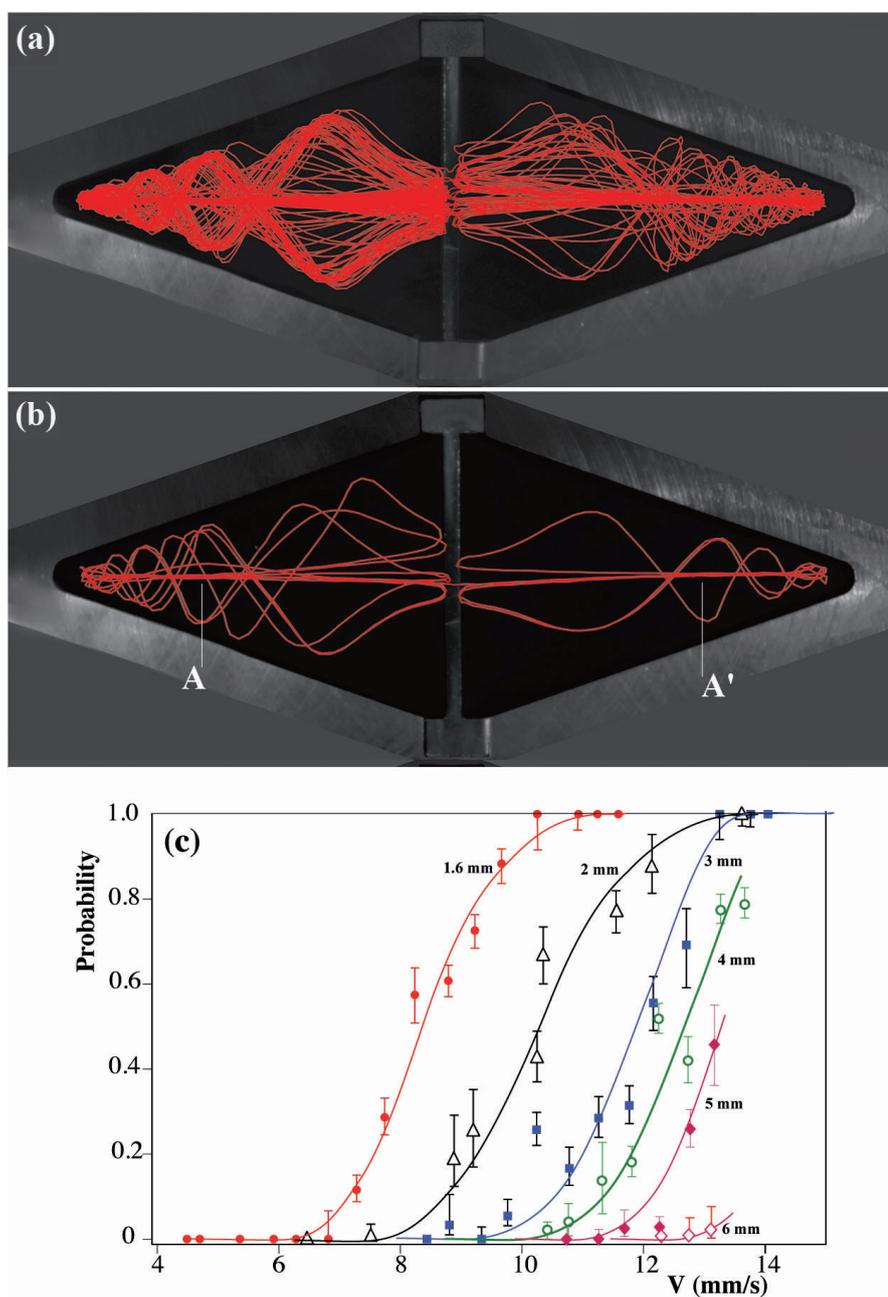


FIGURE 3.12 – (a) Trajectoire suivie par un marcheur de vitesse $V_W = 12$ mm/s effectuant 110 collisions avec une barrière d'épaisseur $e = 3$ mm. 14 collisions sont passantes. (b) Détail de la figure précédente montrant 8 collisions dont 1 seule conduit à une traversée tunnel. (c) Probabilité de passage en fonction de la vitesse du marcheur pour différentes barrières.

des marcheurs sont faiblement dispersées entre chocs successifs, mais les variations lentes de température ont tendance à augmenter légèrement V_W au cours du temps.

En regroupant les collisions pour lesquelles la vitesse du marcheur vaut $V \pm \Delta V$ avec $\frac{\Delta V}{V} = 5\%$, et en comptant le nombre N de collisions et le nombre n de passages, on peut évaluer la probabilité de passage $P_{\perp} = \frac{n}{N}$ pour le marcheur. La figure 3.12 (c) présente cette probabilité P_{\perp} en fonction de la vitesse pour six barrières différentes. On constate que la probabilité augmente avec la vitesse V , et diminue quand l'épaisseur e croît de la même manière que pour des cavités carrées.

Enfin, on remarque encore une fois qu'il existe un lien entre la trajectoire suivie par le marcheur et sa capacité à traverser la barrière. Les réflexions sont toujours associées à une déviation du marcheur qui s'éloigne de la normale à la barrière. Seules les trajectoires qui dévient peu de la normale conduisent à une traversée. La divergence des trajectoires au niveau du point d'impact semble responsable de la réponse aléatoire du système.

3.3 Un « effet tunnel » macroscopique ?

Les marcheurs se transmettent partiellement à travers des barrières complètement immergées. Leur passage est aléatoire, avec une probabilité croissante avec la vitesse, et décroissante de manière exponentielle avec l'épaisseur des barrières. Comment ces comportements se comparent-ils avec l'effet tunnel décrit par la mécanique quantique ?

3.3.1 Effet tunnel en mécanique quantique

L'effet tunnel appartient à ce groupe d'expériences de physique ondulatoire qui présentent des comportements surprenants car non classiques. Il se manifeste lorsque l'on envoie une onde d'énergie donnée sur une barrière de potentiel, c'est-à-dire lorsqu'il existe une région de l'espace où le potentiel est supérieur à l'énergie de l'onde. Contrairement à ce que suggère le cas classique, il est tout de même possible d'obtenir une transmission non nulle à travers une telle barrière. Son origine est reliée à la nature évanescence des ondes dans la barrière. Nous allons détailler ici le cas le plus simple, l'effet tunnel unidimensionnel [14].

Considérons un système composé d'une particule quantique (photon, électron...) à une dimension. Nous pouvons représenter l'état de cette particule par sa fonction d'onde $\psi(x, t)$. La dynamique de cette particule est régie par l'équation de Schrödinger. Dans le cas stationnaire, la fonction d'onde est solution de :

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi(x) = 0 \quad (3.3)$$

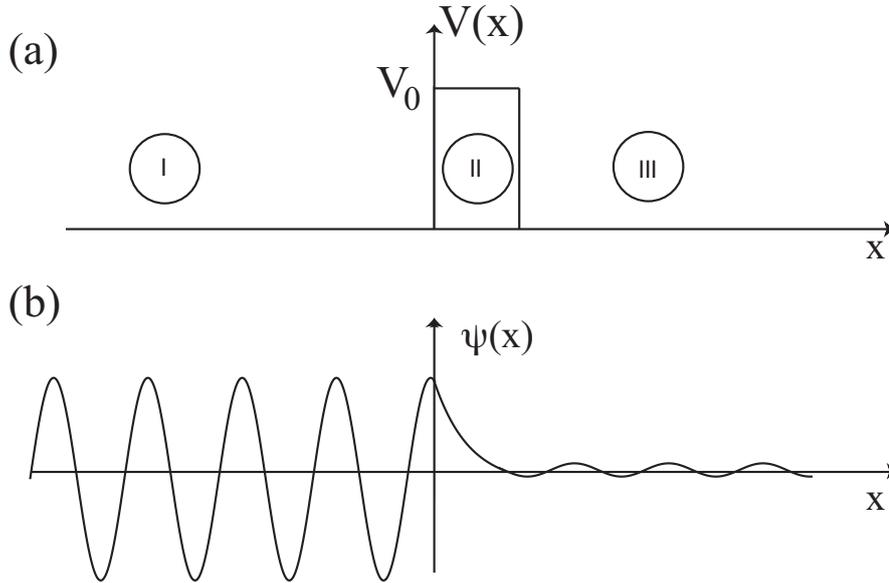


FIGURE 3.13 – (a) Barrière de potentiel rectangulaire avec $V = 0$ dans les régions I et III, et $V = V_0$ dans la région II. (b) Solution $\psi(x)$ pour une telle barrière.

Avec m et E la masse et l'énergie de la particule, \hbar la constante de Planck et $V(x)$ un potentiel extérieur ne dépendant que de l'espace. Nous allons nous placer dans le cas où le potentiel prend une forme de barrière rectangulaire. On suppose que $V(x) = 0$ en tout point de l'espace, excepté entre $x = 0$ et $x = a$, où il prend une valeur $V_0 > 0$ (fig. 3.13 (a)). On impose également $E < V_0$. Nous pouvons alors distinguer trois régions I ($x < 0$), II ($0 < x < a$) et III ($x > a$), dans lesquelles $\psi(x)$ sera de la forme :

$$\begin{aligned}
 \psi_I(x) &= A_1 e^{ik_1x} + A'_1 e^{-ik_1x} \\
 \psi_{II}(x) &= A_2 e^{\rho_2x} + A'_2 e^{-\rho_2x} \\
 \psi_{III}(x) &= A_3 e^{ik_1x} + A'_3 e^{-ik_1x}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\
 \rho_2 &= \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

En imposant des conditions de raccordement sur ψ aux interfaces I-II et II-III, et en supposant que la particule vient de $x = -\infty$, on écrit une relation entre A_1 et A_3 d'une

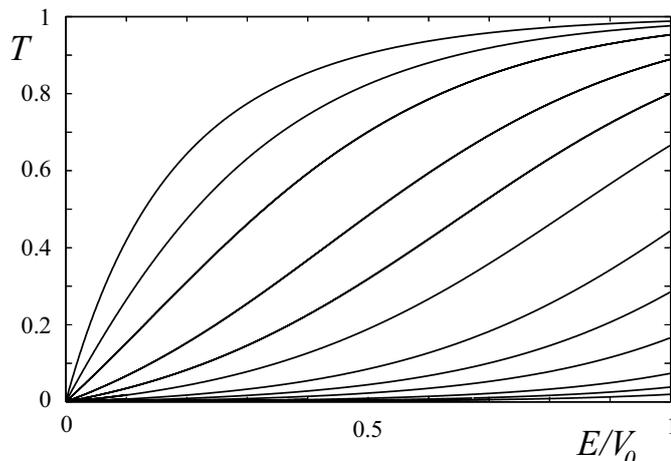


FIGURE 3.14 – (a) Transmission T en fonction de l'énergie de l'onde incidente E/V_0 pour différentes largeurs de barrières. La transmission est d'autant plus faible que la barrière est épaisse.

part et entre A'_1 et A_3 d'autre part. On obtient ainsi une solution complète $\psi(x)$ pour toutes les valeurs de x . Le coefficient de transmission T s'écrit alors :

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 \sqrt{2m(V_0 - E)}a/\hbar} \quad (3.6)$$

Lorsque les probabilités sont faibles, c'est-à-dire lorsque $\rho_2 l \gg 1$, on a :

$$T \simeq \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\rho_2 a} \quad (3.7)$$

Contrairement à ce que prédit la théorie classique¹, la particule a une probabilité non nulle de franchir la barrière de potentiel, bien que son énergie soit inférieure à celle de cette barrière : la fonction d'onde n'est pas nulle dans la région II, mais devient évanescente, avec une portée $1/\rho_2$. Lorsque la barrière est telle que $a \leq 1/\rho_2$, on a une probabilité importante de voir la particule traverser la barrière. La figure 3.14 présente

1. À l'échelle macroscopique, on n'observe habituellement pas d'effet tunnel. Classiquement, un corps ponctuel avec une énergie donnée E ne passera pas au-dessus d'une barrière de potentiel $V_0 > E$. L'effet tunnel au sens propre est donc impossible à réaliser, à moins d'utiliser un objet étendu et déformable [15]. Un cas étonnant tiré de la vie courante peut être mentionné : celui de l'athlète qui réalise un saut en hauteur en "Fosbury" (du nom du sportif américain Richard Douglas Fosbury ayant inventé cette technique). En effectuant un tel saut, il est en effet possible de passer au-dessus de la barre sans jamais placer son centre de gravité plus haut qu'elle. La flexion que l'athlète arrive à donner à son corps lui permet passer au-dessus de la barre tout en conservant une énergie inférieure au potentiel fixé par la hauteur de la barre.

la variation de T avec l'énergie de l'onde incidente E/V_0 pour différentes largeurs de barrière. On constate que la transmission augmente avec l'énergie et que, à énergie donnée, elle décroît avec l'épaisseur. Quand l'énergie dépasse V_0 , la barrière change de nature bien qu'elle conserve certaines spécificités liées à l'aspect ondulatoire.

3.3.2 « Effet tunnel » avec les marcheurs

Les résultats obtenus avec les marcheurs présentent un certain nombre de différences fondamentales avec la situation quantique que nous venons de présenter :

- Le système est fortement dissipatif, et entretenu par la vibration du bain. L'énergie d'un marcheur ne peut pas être définie simplement, ce qui empêche toute comparaison directe avec la mécanique quantique.
- Le système est macroscopique, la constante de Planck \hbar ne joue donc aucun rôle ici.
- Les ondes existent sur un milieu matériel, et sont distinctes de la particule. Même si le marcheur les associe intimement, ces deux aspects restent dissociés.

Ces différents points ne doivent pas nous empêcher de discuter en détail l'analogie entre les deux phénomènes.

Les résultats présentés jusqu'ici montrent qu'il est possible de diviser les ondes émises par un marcheur en une partie réfléchi et une partie transmise. On peut faire varier l'amplitude des ondes transmises en modifiant l'épaisseur des barrières (la profondeur d'huile au-dessus des barrières étant fixée). Sur la barrière, l'amortissement, tel qu'il est mesuré, est exponentiel avec une longueur caractéristique $\delta_{\text{bar}} = 2.9 \pm .2$ mm.

La transmission des ondes au-dessus des barrières est donc partielle. Cet effet est continu, et les résultats expérimentaux montrent qu'il modifie le comportement des gouttes. La division de l'onde par la barrière génère une transmission « partielle » du marcheur, qui présente donc une probabilité de passage à travers des barrières sous-marines peu épaisses. Cette probabilité est mesurée lors de collisions successives avec la barrière, au cours d'un processus aléatoire qui dépend de la trajectoire effectivement suivie par le marcheur.

Le marcheur n'est jamais « absorbé » par la barrière : il est soit réfléchi, soit transmis à travers la barrière. En revanche, le marcheur n'existe jamais au-dessus de la barrière : le mouvement de la goutte y est erratique car le couplage onde-particule est alors détruit. Ce n'est qu'au-delà de la barrière que l'on retrouve un marcheur.

La probabilité de passage, mesurée de manière statistique, diminue toujours lorsque l'épaisseur e des barrières augmente. La longueur caractéristique de transmission du marcheur $\lambda_\tau \simeq 0.85 \pm 0.1$ mm, obtenue avec des cadres carrés, est comparable à δ_{bar} .

Si l'on suit la prédiction théorique de l'effet tunnel en mécanique quantique, on devrait avoir $\delta_{\text{bar}} = 2 \lambda_{\tau}$. L'accord entre les deux valeurs expérimentales est qualitativement correct. De même le faisceau de courbes de la figure 3.12 (c) doit être mis en regard de celui prédit par la mécanique quantique dans le cas unidimensionnel (fig. 3.14). Les similarités entre les deux suggèrent que la vitesse V_W correspond, au moins qualitativement, à l'énergie E en mécanique quantique.

3.3.3 Évanescence de la marche

En mécanique quantique, l'effet tunnel est la conséquence d'une onde évanescence à travers une barrière. Existe-t-il une forme d'évanescence dans notre système ?

La vitesse V_W est un paramètre d'ordre du système contrôlé expérimentalement par l'écart au seuil de marche γ_W . Dans les régions de grande profondeur, la vitesse croît comme $V_W \propto (\gamma_m - \gamma_W)^{1/2}$. À l'opposé, dans les régions de faible profondeur où le seuil de marche n'est pas atteint, la théorie des instabilités prévoit qu'un marcheur s'arrête lorsqu'il entre dans une telle région, et que sa vitesse décroisse avec une échelle de temps caractéristique donnée par $(\gamma_m - \gamma_W)^{-1}$.

La marche elle-même est donc une propriété évanescence au-dessus des barrières et ce n'est que de l'autre côté de la barrière que le marcheur pourra être restauré sur le bain. Avec cette analyse, nous remarquons que la différence entre la valeur locale du seuil de marche γ_W pour la goutte et de l'excitation γ_m imposée par l'expérimentateur joue donc un rôle comparable à la différence entre l'énergie E de la particule incidente et le potentiel V_0 qui contrôle la probabilité d'un effet tunnel en mécanique quantique, bien que les échelles auxquelles ont lieu ces phénomènes soient complètement différentes.

3.3.4 Incertitude et trajectoires

L'observation au cours des expériences révèle un lien entre les trajectoires suivies et la capacité du marcheur à franchir les barrières. Dans les cavités carrées, on constate qu'une déstabilisation du cycle limite est nécessaire pour observer des échappements. Il est nécessaire d'avoir des trajectoires désordonnées avec une grande variété d'angles d'impacts. De même, dans la géométrie en forme de losange, on remarque qu'une collision individuelle est déterministe. Lorsque le marcheur est suffisamment proche de la barrière, on peut dire, avant la collision, s'il y aura passage ou non. Par contre l'observation loin de la barrière montre que le phénomène semble aléatoire.

La figure 3.15 présente en détail quelques collisions dans cette géométrie. Toutes présentent

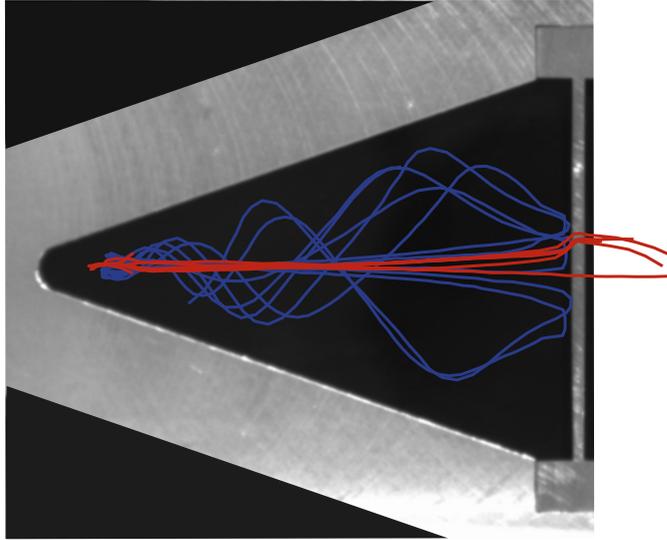


FIGURE 3.15 – (a) Détails de quelques impacts dans la cavité en forme de losange. En bleu, le marcheur est repoussé par la barrière, en rouge, il traverse et passe dans l'autre cavité.

les mêmes caractéristiques loin de la barrière, et l'on remarque que seules les trajectoires qui dévient très peu de la normale à la barrière sont susceptibles de conduire à une traversée. Les trajectoires qui dévient très tôt conduisent à une réflexion pendant laquelle le module de la vitesse varie peu et où seule la direction est changée. Ce comportement s'explique aisément en considérant les ondes qui sont réfléchies par la barrière et qui reviennent interagir avec le marcheur : leur structure circulaire génère une force défocalisante qui tend à écarter les gouttes. Tout se passe comme s'il existait une goutte virtuelle de l'autre côté de la barrière et dont l'intensité dépendrait de l'épaisseur e . Cet effet conduit à une ouverture en faisceau des trajectoires qui est bien visible sur les figures 3.12 (a) et (b).

En revanche, dans les cas où la goutte reste le long de la normale à la barrière, elle peut monter dessus et son mouvement devient erratique. En effet, sur la barrière, elle n'est plus propulsée par ses ondes récentes qui sont trop fortement amorties, le couplage entre ondes et particule est détruit et le marcheur n'existe plus. Ce sont les ondes émises par les points visités auparavant et situés dans la zone de grande profondeur qui peuvent lui donner l'impulsion nécessaire à la traversée. En fonction de la position des points visités auparavant, la pente résultante sous la goutte peut propulser la goutte de l'autre côté mais également la rappeler dans la cavité. Dans certains cas, la goutte longe le bord de la barrière pendant quelques instants avant de revenir dans la cavité.

La complexité de la trajectoire juste avant le choc ainsi que l'effet de sommation sur un grand nombre de sources passées assure l'aspect aléatoire du résultat de chaque collision. Ces différents résultats montrent que la dynamique d'un marcheur dépend de sa propre histoire, une propriété qui avait déjà été observée dans les expériences de diffraction [18]. La trajectoire suivie inscrit une information sous forme d'ondes de surface, et cette mémoire est lue par le marcheur à chaque rebond de la goutte sur la surface. L'incertitude est donc directement associée à la trajectoire qui génère une forme de non localité pour le marcheur. Les ondes sont au cœur de ce processus, et nous devons apporter un éclairage sur leur nature pour comprendre la spécificité du couplage onde-particule qui est réalisé à l'échelle macroscopique au sein d'un marcheur.

Chapitre 4

Ondes d'un marcheur, sillage et mémoire de chemin

La nature des ondes joue un rôle dans le couplage onde-particule mis en évidence précédemment puisque la trace laissée par le marcheur sur le bain commande sa dynamique. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux ondes d'un marcheur, en particulier au sillage qui se développe quand l'accélération de forçage approche du seuil de l'instabilité de Faraday. Nous détaillerons le lien entre les ondes émises à chaque choc et l'écart au seuil de Faraday, nous étudierons ensuite la nature du champ d'ondes autour du marcheur et nous introduirons la notion de *mémoire de chemin*.

4.1 Évolution du champ d'onde

4.1.1 Visualisation par ombroscopie

Un marcheur de diamètre $D = 760 \mu\text{m}$ est placé sur un bain d'huile silicone de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. La figure 4.1 présente le champ d'ondes de ce marcheur, visualisé par ombroscopie, pour trois valeurs distinctes de l'écart $\Gamma = (\gamma_F - \gamma_m)/\gamma_F$ au seuil de l'instabilité de Faraday. La cellule utilisée est suffisamment grande pour que le marcheur puisse toujours être considéré comme isolé, n'interagissant pas avec les bords. Pour une accélération $\gamma_m > \gamma_W$, mais éloignée du seuil de l'instabilité de Faraday ($\Gamma = 17\%$), le marcheur se déplace lentement, et le champ d'ondes qui lui est associé reste presque axisymétrique (fig. 4.1 (a)). Une légère modification de la longueur d'onde à l'avant et à l'arrière de la goutte peut toutefois être distinguée. Lorsque Γ diminue en dessous de quelques pourcent, nous voyons apparaître à l'arrière de la goutte un sillage plus complexe. Si l'excitation est voisine du seuil de l'instabilité de Faraday, ce

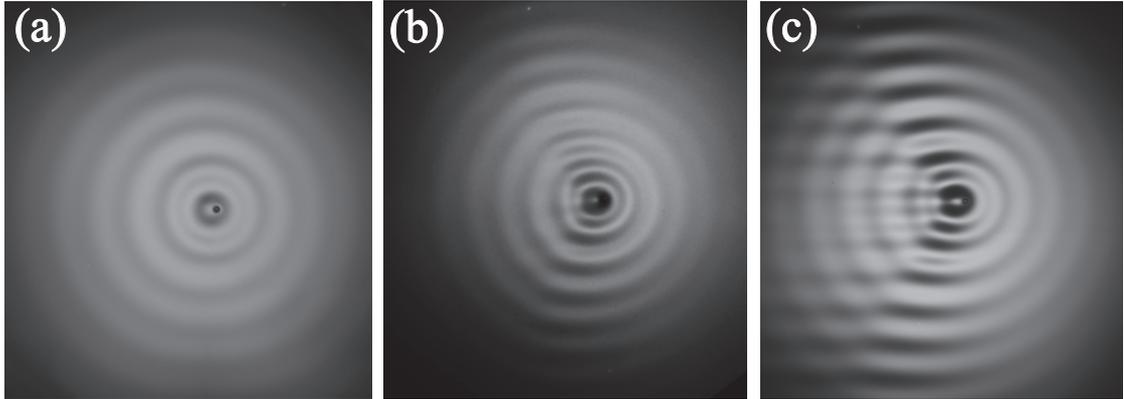


FIGURE 4.1 – Photographies des ondes générées par un marcheur de diamètre $D = 760 \mu\text{m}$ dans de l'huile de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s.}$ (a) L'écart au seuil $\Gamma = 17\%$ est important, le marcheur est lent et les ondes quasiment axisymétriques. (b) Pour $\Gamma = 7\%$, le champ d'ondes est distordu et un sillage se met en place à l'arrière du marcheur. (c) Pour $\Gamma = 1.8\%$, le sillage est très développé et présente une forme de fer à cheval

sillage prend une forme de fer à cheval très marquée et semble être la superposition d'ondes circulaires centrées sur la goutte et de front d'ondes plans et parallèles à la trajectoire suivie précédemment (fig. 4.1 (b) et (c)). L'objectif dans la suite de ce chapitre à comprendre l'origine et les propriétés de ce sillage, en insistant particulièrement sur le rôle que tient l'instabilité de Faraday dans ces phénomènes.

4.1.2 Mesures d'ondes

Pour déterminer précisément les différentes propriétés du sillage, le champ d'ondes créé par un marcheur est mesuré quantitativement en utilisant la technique de reconstruction de surface développée par F. Moisy et M. Rabaud [62] et introduite au chapitre 2. Pour cela, un marcheur de diamètre $D = 790 \mu\text{m}$ est placé dans une cellule en plexiglas, avant d'appliquer la procédure complète de reconstruction. Le résultat est présenté sur la figure 4.2 : deux champs d'ondes sont reconstruits, l'un pour une excitation éloignée du seuil de Faraday ($\Gamma = 21\%$), l'autre pour une excitation proche ($\Gamma = 5.8\%$). La taille finie de la cellule utilisée ne permet pas d'obtenir des valeurs de $\Gamma \leq 5\%$. En effet, le faible amortissement des ondes provoque alors une interaction avec les parois de cette cellule. Le marcheur n'est plus isolé et son champ d'ondes est contaminé. Les deux champs d'ondes reconstitués présentent la même différence qualitative que dans la figure 4.1. Dans le premier cas, le champ d'ondes autour de la goutte est quasiment

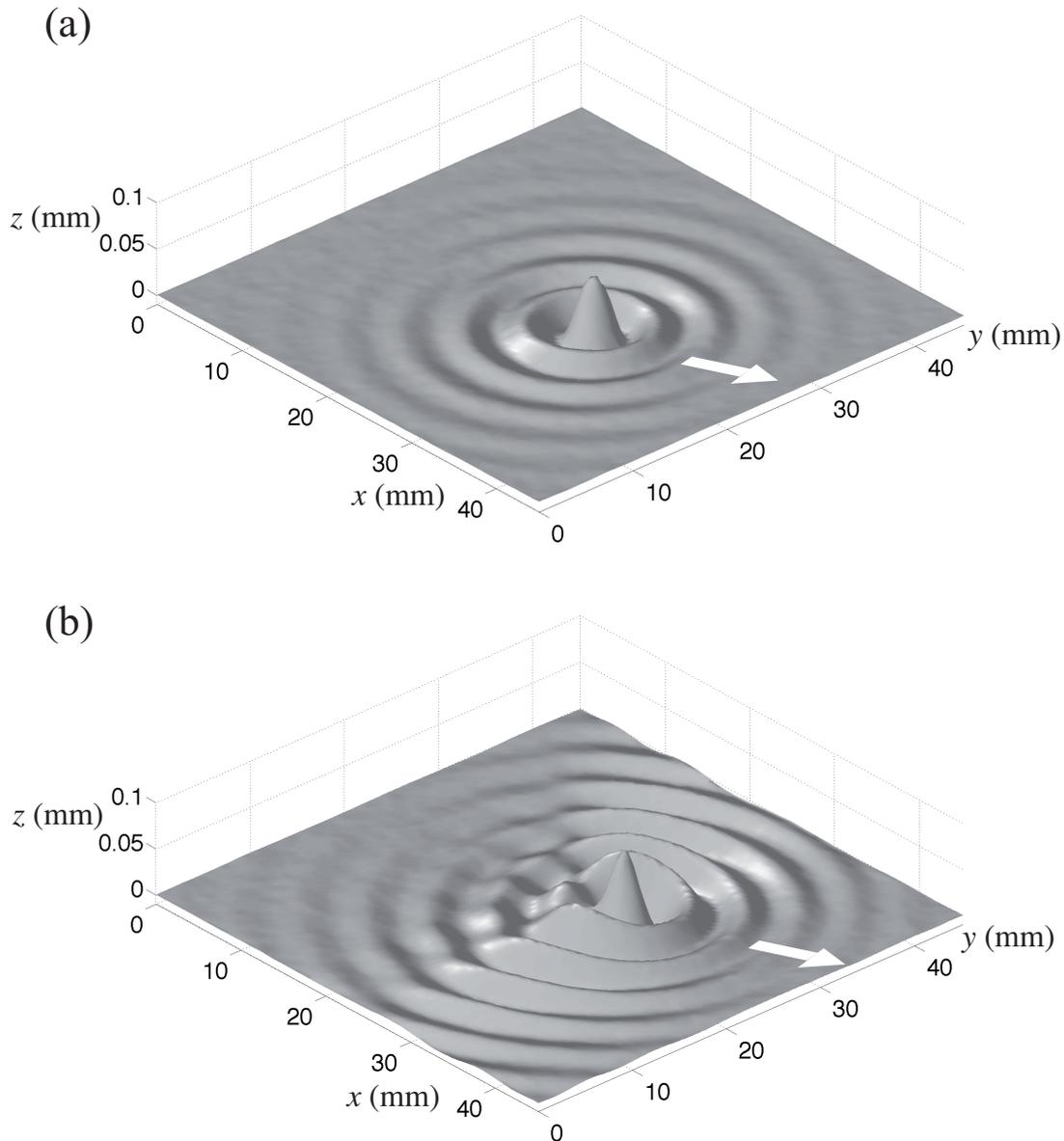


FIGURE 4.2 – Ondes créées par un marcheur de diamètre $D = 790 \mu\text{m}$ se déplaçant vers la droite. (a) L'excitation imposée vaut $\gamma_m = 3.25 \text{ g}$ ($\Gamma = 21\%$), le marcheur possède une vitesse $V_W = 7.53 \pm 0.05 \text{ mm/s}$. Le champ d'ondes est quasiment circulaire et très peu distordu. (b) L'excitation imposée vaut $\gamma_m = 3.75 \text{ g}$ ($\Gamma = 5.8\%$) et $V_W = 11.05 \pm 0.05 \text{ mm/s}$. On observe l'apparition d'un sillage à l'arrière du marcheur.

axisymétrique (fig. 4.2 (a)), tandis qu'à plus haute excitation, un sillage se met en place (fig. 4.2 (b)), faisant apparaître une structure d'interférences derrière la goutte.

L'apparition de ce sillage suggère qu'il existe une différence qualitative dans les ondes générées par la goutte au voisinage du seuil de l'instabilité. Pour analyser ce changement, deux aspects doivent être considérés : d'une part, l'influence du voisinage de l'instabilité de Faraday sur les ondes émises lors d'un choc lorsque Γ diminue et, d'autre part, les conséquences de l'accumulation de sources régulièrement espacées sur le bain.

4.2 Modèle phénoménologique

Nous présentons ici un modèle simple, développé par E. Fort et J. Moukhtar, qui tente d'intégrer l'écart Γ au seuil de Faraday dans la description des ondes émises à chaque choc. Il s'agit d'une version bidimensionnelle et plus élaborée du modèle du chapitre 1. Le couplage entre la goutte et la surface est ici aussi simplifié, et les ondes choisies sont extrêmement approximatives, mais elles intègrent un ingrédient essentiel : chaque choc possède une durée de vie τ sur le bain qui dépend directement de l'écart au seuil de Faraday $\tau \propto \Gamma^{-1}$. Ce temps caractéristique correspond à l'amortissement lent des modes de Faraday au voisinage du seuil [58].

4.2.1 Modèle

Le mouvement de la goutte est calculé de manière itérative à chacun des rebonds. La première hypothèse réside dans un découplage complet des mouvements horizontaux et verticaux de la goutte. Les instants de décollage et d'atterrissage sont uniquement déterminés par les oscillations du bain. A chaque rebond, la goutte reçoit un incrément d'impulsion via son choc inélastique avec la surface. Si la surface est horizontale au point d'impact, le rebond sera parfaitement vertical. En revanche, si la surface est inclinée, l'impulsion reçue possédera une composante horizontale. La goutte, après chaque rebond, réalise un vol libre parabolique avec une vitesse horizontale constante. La direction initiale de l'impulsion qu'elle reçoit va donc déterminer le déplacement horizontal élémentaire $\delta\vec{\mathbf{r}}_p$ au cours du vol libre suivant. Durant la collision suivante, la goutte va subir un frottement visqueux pour la composante horizontale de sa vitesse, à cause du cisaillement de la couche d'air entre la goutte et la surface du bain. Elle reçoit au même moment un nouvel incrément d'impulsion et sera déplacée d'une quantité $\delta\vec{\mathbf{r}}_{p+1}$ (fig. 4.3). Le point crucial dans cette simulation réside dans la détermination de ce petit incrément d'impulsion fourni par le bain, qui dépend de la pente de l'interface au point d'impact.

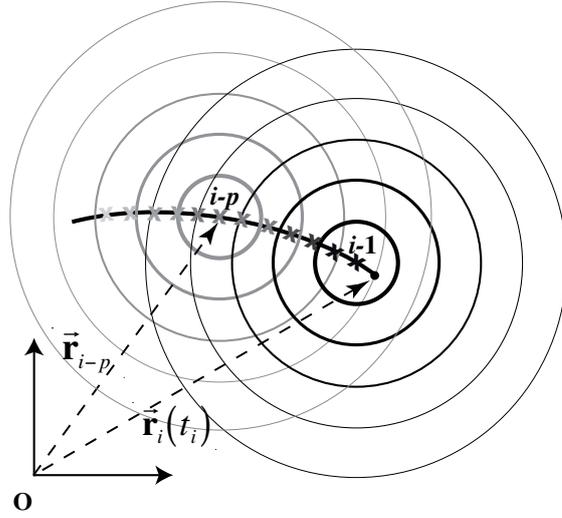


FIGURE 4.3 – Les derniers points visités contribuent au champ d’ondes généré par le marcheur et déterminent sa trajectoire. La goutte va rebondir au point de coordonnées \vec{r}_i à l’instant t_i . Les figure représente les ondes émises à t_{i-1} en \vec{r}_{i-1} et à t_{i-p} en \vec{r}_{i-p} .

Il est également nécessaire de calculer l’intégralité du champ d’ondes autour de la goutte afin de le comparer aux observations expérimentales présentées ci-dessus. Il faut donc déterminer la hauteur $h(\vec{r}, t_i)$ de l’interface au point de coordonnées \vec{r} à l’instant t_i qui résulte de la superposition d’ondes circulaires émises auparavant. Nous supposons ici qu’une onde propagative est émise à chaque choc. Son amortissement temporel est donné par un temps caractéristique $\tau \propto \Gamma^{-1}$. Le champ d’ondes résultant est la somme de contributions centrées sur les points \vec{r}_i visités précédemment par la goutte.

4.2.2 Forme d’ondes

En prenant en compte tous les chocs précédents, il est possible de calculer la hauteur $h(\vec{r}, t_i)$ de l’interface au point de coordonnées \vec{r} à l’instant t_i en additionnant chacune des contributions :

$$h(\vec{r}, t_i) = \sum_{p=i-1}^{-\infty} \frac{A}{|\vec{r} - \vec{r}_p|^{1/2}} \exp\left(-\frac{t_i - t_p}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}_p|}{\delta}\right) \cos\left(\frac{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_p|}{\lambda_F} + \phi\right) \quad (4.1)$$

Dans cette équation, les \vec{r}_p représentent les positions des chocs précédents ayant eu lieu à des instants $t_p = t_i - (i - p) \cdot \tau_F$.

La forme d’onde créée par un choc unique respecte trois contraintes.

- Cette onde étant axisymétrique, l’oscillation radiale est donnée par une fonction

J de Bessel. Par souci de simplicité, celle-ci est approximée par une sinusoïde, de longueur d'onde λ_F et de phase ϕ ajustable, normalisée par la racine de la distance parcourue par l'onde. La décroissance en $1/\sqrt{r}$ pour $r \rightarrow +\infty$ des fonctions de Bessel, liée à la symétrie circulaire, est ainsi respectée. La phase ϕ correspond au décalage temporel entre le contact de la goutte avec la surface et la vibration du bain qui régit l'évolution des ondes.

- On ajoute une décroissance spatiale, caractérisée par une longueur d'amortissement δ . Cet amortissement représente la dissipation visqueuse des ondes de surface, et il dominera a priori la décroissance en loi de puissance.
- La seconde dépendance exponentielle correspond à l'entretien des ondes par la vibration. On définit ainsi un temps caractéristique d'amortissement τ pour les ondes tel que $\tau \propto \Gamma^{-1}$. Les valeurs de τ sont telles que $\tau < 30\tau_F$ dans toutes les expériences numériques présentées dans la suite. Cet amortissement temporel lent introduit une mémoire pour le marcheur.

Avec cette formulation (eq. 4.1) pour la hauteur de la surface, une simple dérivation spatiale permet de déterminer la pente $\vec{S}(\vec{r}_i, t_i)$ sous la goutte lors du contact :

$$\vec{S}(\vec{r}_i, t_i) = \vec{\nabla}h(\vec{r}_i, t_i) \quad (4.2)$$

En ajustant l'amplitude A des ondes, on peut prédire leur interaction avec la goutte et déduire la force effective ressentie par la goutte au cours de la collision. En fixant la viscosité effective lors du contact $\nu_{contact}$, on calcule l'incrément d'impulsion reçu à chaque rebond. Au final, ce type de simulations numériques est régi par cinq paramètres ajustables séparément : τ , le temps caractéristique d'amortissement des ondes sur le bain ; $\nu_{contact}$, la viscosité effective liée à la dissipation visqueuse lors du contact ; δ , la longueur caractéristique d'amortissement visqueux des ondes ; A , l'amplitude des ondes et enfin la phase ϕ .

4.2.3 Mise en marche des gouttes

Ces simulations sont maintenant utilisées pour reproduire numériquement le comportement des marcheurs. Il faut donc vérifier dans un premier temps qu'elles correspondent aux observations expérimentales, en particulier en ce qui concerne la mise en marche des gouttes. La courbe 4.4 (a) représente la vitesse horizontale d'un marcheur de diamètre $D = 790 \mu\text{m}$ sur un bain d'huile de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$. En dessous d'une valeur $\gamma_W = 3.2 \text{ g}$, la goutte ne se déplace pas. Pour des forçages $\gamma_m > \gamma_W$, la vitesse V_W croît en racine de l'écart au seuil, avant de saturer à cause des non linéarités à une valeur d'environ 11.5 mm.s^{-1} . Pour les marcheurs numériques, la mémoire τ est utilisée comme

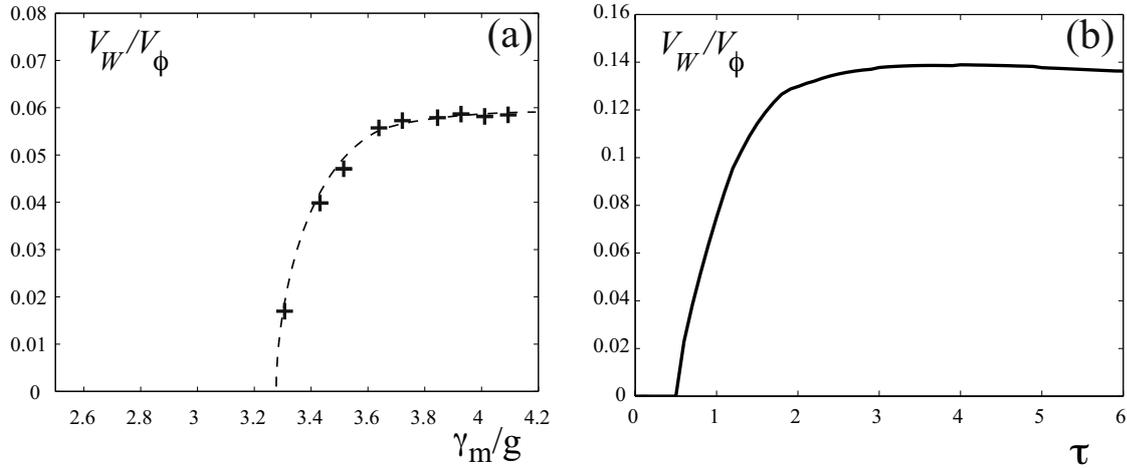


FIGURE 4.4 – Mise en marche des gouttes. (a) Vitesse d'un marcheur de diamètre $D = 790 \mu\text{m}$ en fonction de l'excitation γ_m pour de l'huile de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$. La courbe en pointillé est un guide pour l'œil. (b) Vitesse adimensionnée V/V_ϕ d'un marcheur en simulations numériques en fonction du temps caractéristique d'amortissement des ondes τ .

paramètre de contrôle. Une goutte est placée à l'origine, avec une vitesse initiale très faible et pour une valeur donnée de τ . La vitesse V_W atteinte aux temps longs (plus de 1000 rebonds sur la surface) est mesurée. V_W est normalisée par la vitesse de phase des ondes V_ϕ . La goutte reste immobile pour des valeurs faibles de τ , mais, au-delà d'une valeur seuil, les gouttes se mettent en marche (fig. 4.4 (b)). Il est possible de modifier cette valeur du seuil de marcheur ainsi que la vitesse limite atteinte en ajustant la viscosité de contact $\nu_{contact}$ et l'amplitude A des ondes. Les valeurs de $\nu_{contact}$ et A choisies donnent des valeurs en accord avec l'expérience. Néanmoins, les vitesses asymptotiques atteintes par le marcheur sont toujours supérieures à celles observées expérimentalement (elles sont généralement environ deux fois plus grandes). Ces résultats confirment l'importance de la mémoire τ dans notre système, en tant que paramètre de contrôle de la marche.

4.2.4 Apparition du sillage

Ces simulations numériques permettent également de visualiser le champ d'ondes généré par le marcheur et de le comparer à ceux obtenus expérimentalement (fig. 4.1). La figure 4.5 montre l'allure des champs d'onde qui propulsent le marcheur numérique dont on a tracé la vitesse asymptotique au paragraphe précédent. Au voisinage du seuil de

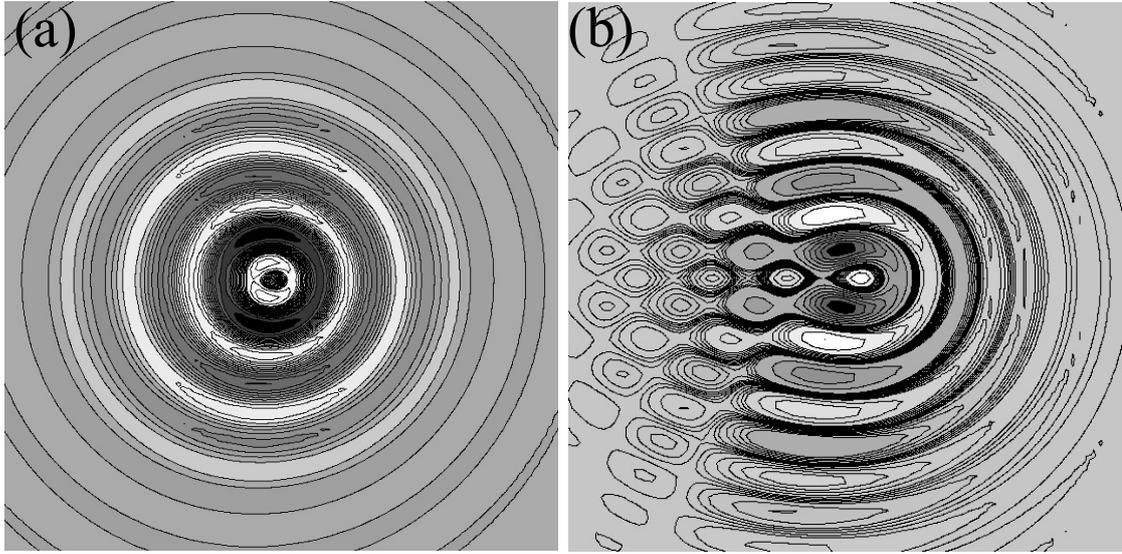


FIGURE 4.5 – Sillages numériques obtenus par les simulations numériques pour différentes valeurs de τ , avec $\delta = 1.6 \lambda_F$, $\nu_{contact} = 0.4\tau_F$ et $\phi = -\frac{2}{3}\pi$. (a) $\tau = 1$, La structure est quasiment axisymétrique. (b) $\tau = 30\tau_F$, Le sillage en forme de fer à cheval apparaît, l'arrière du champ d'ondes est dominé par la structure d'interférences.

mise en marche, pour $\tau = 1\tau_F$, nous observons une structure quasiment axisymétrique (fig. 4.5 (a)), faiblement corrigée par un décalage Doppler. Lorsque τ augmente (fig. 4.5 (b)), la structure se dissymétrise pour laisser place à un sillage marqué. La structure d'interférences décrite en détail ci-dessus apparaît derrière la goutte. La mémoire τ contrôle l'intensité de ce sillage. Plus τ augmente, plus les ondes s'amortissent lentement. Les points visités par la goutte restent actifs plus longtemps, et jouent un rôle important sur la nature de la structure observée, exactement de la même manière que dans l'expérience. La trajectoire du marcheur laisse donc toujours une *trace* sur la surface. Quel est le mécanisme exact de cette mise en mémoire? Il faut analyser l'évolution des ondes émises par la goutte à chaque choc lorsque Γ diminue pour comprendre le détail de cette mémoire.

4.3 Chocs uniques sur une surface en vibration

4.3.1 Approche expérimentale

Pour réaliser un choc unique sur la surface, des billes sphériques en acier, de diamètre $D = 2$ mm et de densité $\rho = XX \text{ g.cm}^3$, sont lâchées d'une hauteur $h = 3 \text{ cm}$ au-dessus d'un bain d'huile silicone de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$. La bille impacte sur la surface

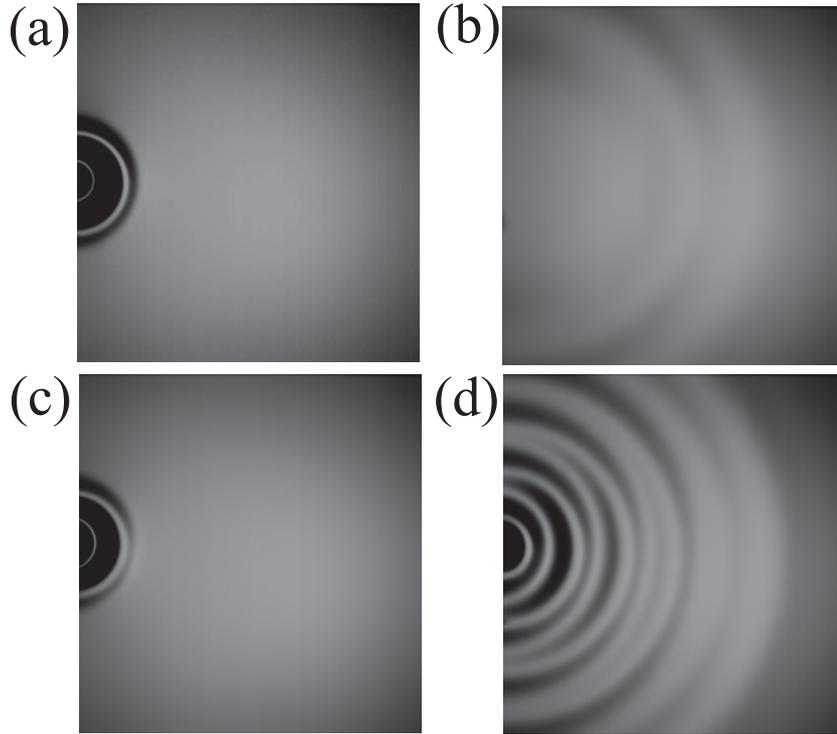


FIGURE 4.6 – Ondes créées par une bille d’acier impactant sur le bain. (a) et (b) Dans le cas où le bain est au repos, on observe uniquement une onde capillaire qui se propage radialement (photographies prises à $t = 51$ ms et $t = 173$ ms après l’impact. (c) et (d) Dans le cas où le bain est en vibration avec $\gamma_m < \gamma_F$ et $\Gamma \ll 1$, une structure stationnaire avec la longueur d’onde de Faraday se met en place sur le bain après le passage de l’onde capillaire.

et coule immédiatement au fond du bain, le film d’air ne pouvant être maintenu sous la bille à cause de la rugosité de sa surface. La surface n’est alors perturbée que par un seul choc et une simple visualisation par ombroscopie permet d’observer les ondes émises.

Si le bain n’est soumis à aucune vibration verticale, le paquet d’ondes généré est identique à celui créé par un caillou jeté dans l’eau. Lors de l’impact, la bille excite des modes dont la longueur d’onde vaut au maximum quelques fois sa taille. La figure 4.6 (a) et (b) montre les ondes créées par un tel impact à des instants $t_1 = 51$ ms et $t_2 = 173$ ms après le choc. Nous constatons que le paquet d’onde formé se propage radialement et s’amortit à cause de la viscosité du bain. Après 173 ms, l’endroit où la bille d’acier a frappé la surface est de nouveau au repos. Les figures fig. 4.6 (c) et (d) présentent le cas de figure où le bain est en vibration, soumis à une excitation voisine γ_m du seuil de l’instabilité de Faraday γ_F , avec $\Gamma \simeq 2\%$. Dans les premiers instants après l’impact, l’évolution de la

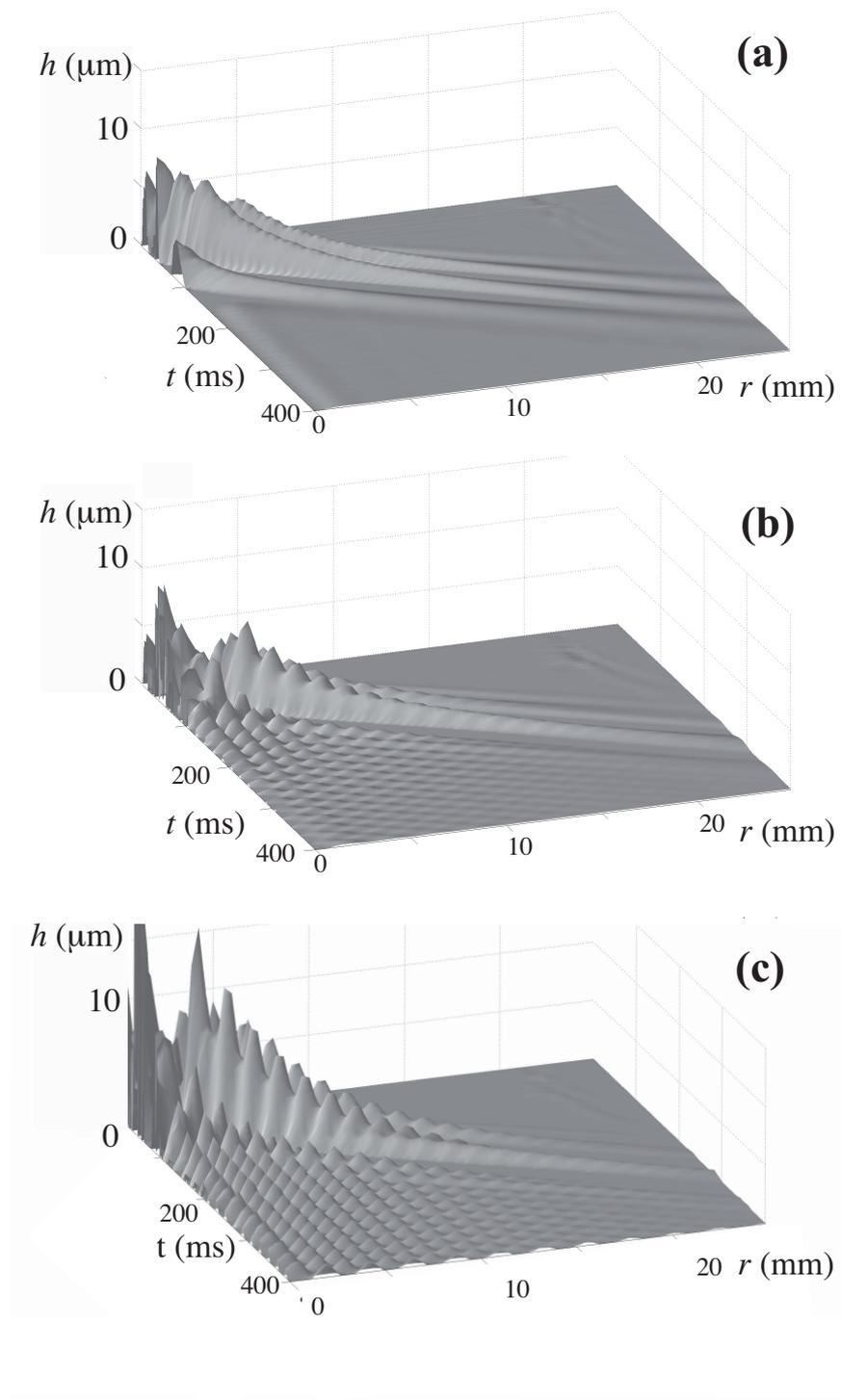


FIGURE 4.7 – Représentation spatio-temporelle des ondes créées par l'impact d'une bille d'acier de diamètre $D = 2$ mm sur un bain en vibration. (a),(b) et (c) Hauteur de fluide en fonction de la distance au point d'impact et du temps, pour des excitations $\gamma_m = 1$ g (a), 4 g (b) et 4.85 g (c).

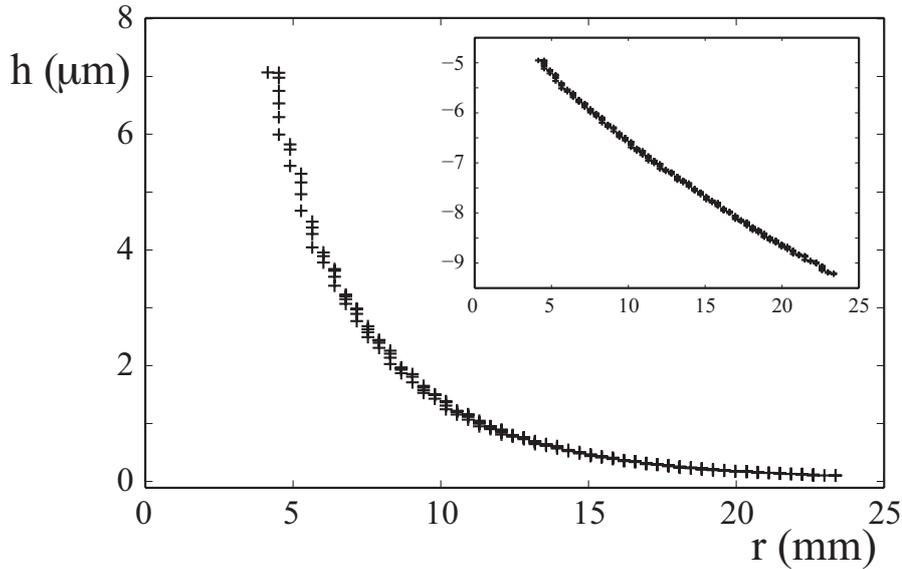


FIGURE 4.8 – Décroissance spatiale de la hauteur de la crête capillaire se propageant radialement. L’encart en échelle semi-logarithmique montre une décroissance exponentielle avec une longueur caractéristique $\delta = 1.6\lambda_F$.

surface est identique : une onde capillaire est excitée et se propage radialement. Cependant, la surface ne revient pas au repos après le passage de ce paquet d’ondes, et une onde stationnaire axisymétrique se met en place autour du point d’impact. L’amortissement de cette onde stationnaire est d’autant plus lent que l’on s’approche de γ_F .

Des mesures de reconstruction de surface ont été effectuées pour quantifier les propriétés de ces ondes. Le protocole utilisé est similaire à celui présenté ci-dessus, mais la fréquence de vibration sur le bain est fixée à $f_0 = 100$ Hz. En effet, pour réaliser les expériences de reconstruction de surface avec une caméra rapide, il est nécessaire de synchroniser la prise d’image avec la vibration du bain, aussi bien pour les images de référence que lors des impacts proprement dits. La caméra et le matériel dont nous disposons pour ces expériences nous ont contraints à changer de valeur pour f_0 . Dans ces conditions, la longueur d’onde de Faraday vaut $\lambda_F = 3.95$ mm, la vitesse de phase $v_\phi = 263 \text{ mm.s}^{-1}$ et la vitesse de groupe $v_g = 195 \text{ mm.s}^{-1}$. Le seuil de l’instabilité est atteint pour $\gamma_F = 4.9 g$. La figure 4.7 présente l’évolution temporelle du profil radial mesuré, pour différentes accélérations γ_m . Sur ces graphiques, on distingue dans tous les cas l’onde capillaire qui se propage radialement. Sa vitesse de propagation ne varie presque pas d’un cas à l’autre. La vitesse de phase, mesurée en suivant une crête, corres-

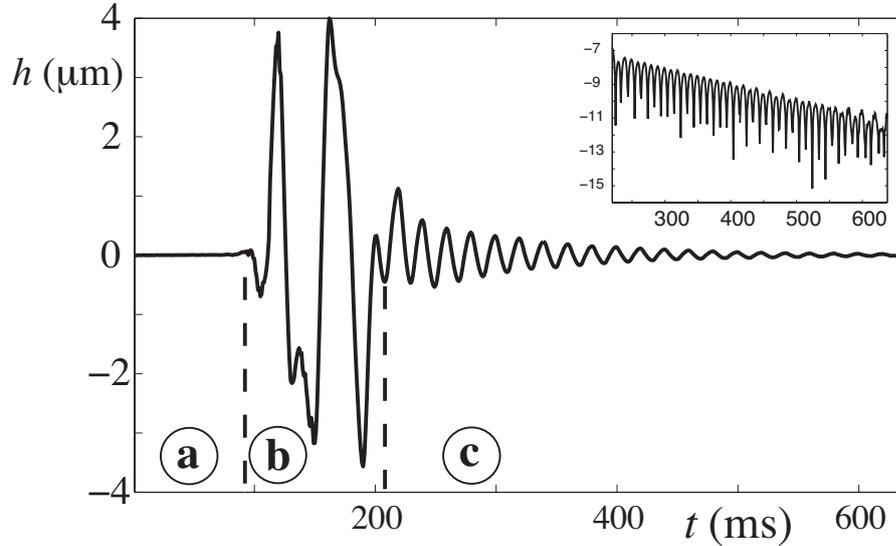


FIGURE 4.9 – Évolution temporelle de la hauteur de liquide à une distance $R = 5.3$ mm du point d'impact, pour un écart au seuil $\Gamma = 20\%$. On peut distinguer trois régions sur ce graphique. La région a correspond au temps de propagation de l'onde capillaire depuis le point d'impact jusqu'à une distance $r = 5.3$ mm pendant lequel la surface n'est pas perturbée. La région b coïncide avec le passage du train d'ondes capillaires. Après son passage (région c), on observe une onde avec la période de Faraday τ_F qui décroît lentement au cours du temps. L'encart en échelle semi-logarithmique correspond à la région 3. La décroissance de l'enveloppe est exponentielle avec un temps caractéristique valant $\tau = 110$ ms, soit $\tau = 6.25 \tau_F$.

pond approximativement à la vitesse de phase v_ϕ des ondes de Faraday et ce pour toutes les excitations. En suivant ce front capillaire au cours du temps, nous pouvons accéder à sa décroissance radiale (fig. 4.8). L'amortissement est exponentiel, avec une longueur caractéristique d'amortissement $\delta \simeq 1.6\lambda_F$. Cet amortissement se retrouve pour toutes les valeurs de Γ . Il est probablement dû à une dissipation des ondes liée à la viscosité de l'huile. (En effet, dans le cas inviscide, la décroissance radiale devrait suivre celle des fonctions de Bessel, c'est-à-dire se comporter en $1/\sqrt{r}$ pour des rayons suffisamment grands). Pour les valeur telles que $\Gamma < 20\%$ (fig. 4.7 (b) et (c)), une modulation des crêtes qui forment ce paquet d'ondes propagatif s'ajoute à cette décroissance. Elle est de plus en plus marquée lorsque Γ diminue.

Dans les cas où l'excitation γ_m est proche de γ_F , un champ d'ondes stationnaire qui s'amortit au cours du temps apparaît après le passage de la perturbation capillaire. Sa période vaut τ_F et sa longueur d'onde λ_F . Il décroît spatialement avec la même longueur

caractéristique δ que le front capillaire. En effet, son apparition est conditionnée par le passage de la crête capillaire. La hauteur du front capillaire va donc déterminer son amplitude.

Pour analyser son amortissement temporel, il suffit de se placer à une distance donnée du point d'impact et de regarder l'évolution de la hauteur en ce point au cours du temps (fig. 4.9). Une telle courbe présente trois régions bien distinctes. Dans un premier temps, la surface reste au repos. La durée de cette phase dépend de la distance entre le point considéré et le point d'impact et correspond au temps de propagation de l'onde capillaire. On assiste ensuite au passage de ce train d'ondes. Il laisse place aux temps longs à une onde stationnaire ayant la fréquence de Faraday f_F qui s'amortit lentement. L'encart de la figure 4.9 montre l'évolution de la hauteur au cours du temps de cette onde, en échelle logarithmique. Puisque l'enveloppe est donnée par une droite, l'amortissement des ondes est exponentiel. Un ajustement de cette partie de la courbe par une sinusoïde exponentiellement amortie nous donne une période d'oscillations valant $\tau_F = 20$ ms, et un temps caractéristique d'amortissement $\tau = 6.25 \pm 0.5 \tau_F$ pour $\Gamma \simeq 20\%$ et $\tau = 25 \pm 5 \tau_F$ pour $\Gamma \simeq 3.2\%$. Le temps caractéristique d'amortissement des ondes stationnaires augmente lorsque Γ tend vers 0. Ce résultat expérimental est en accord avec la théorie des instabilités qui prévoit que l'amortissement des ondes en dessous du seuil est exponentiel avec un temps caractéristique de décroissance τ proportionnel à l'inverse de l'écart au seuil $\tau \propto |\gamma_F - \gamma_m|^{-1}$ [58]. Ici, le temps caractéristique d'amortissement τ semble diverger au voisinage du seuil, en accord avec cette prédiction.

4.3.2 Approche théorique et numérique

E. Sultan et M. Rossi ont proposé une approche hydrodynamique complète qui décrit les ondes générées par un choc unique sur une surface en vibration [30]. Cette étude est réalisée en partant des équations de l'hydrodynamique et en effectuant des simulations numériques. En se basant sur l'approche théorique proposée par Kumar et Tuckerman [50], des simulations en dessous du seuil d'instabilité sont réalisées. La difficulté principale consiste à décrire d'une part l'interaction entre la goutte et la surface, d'autre part la déformation ainsi générée. Ce problème est non linéaire et couple la déformation de la goutte et du bain avec l'écoulement d'air dans le film qui les sépare. Les équations, même dans le cas où le bain est au repos, sont complexes à manipuler [43, 42]. Elles nécessitent des simulations numériques directes qui mettent en jeu des échelles spatiales et temporelles étendues. Différents modèles ont été proposés [85, 39, 38], mais les approximations effectuées sont éloignées de la réalité expérimentale (le bain est considéré comme indéformable ou, au contraire, la surface s'adapte instantanément à la déformation pro-

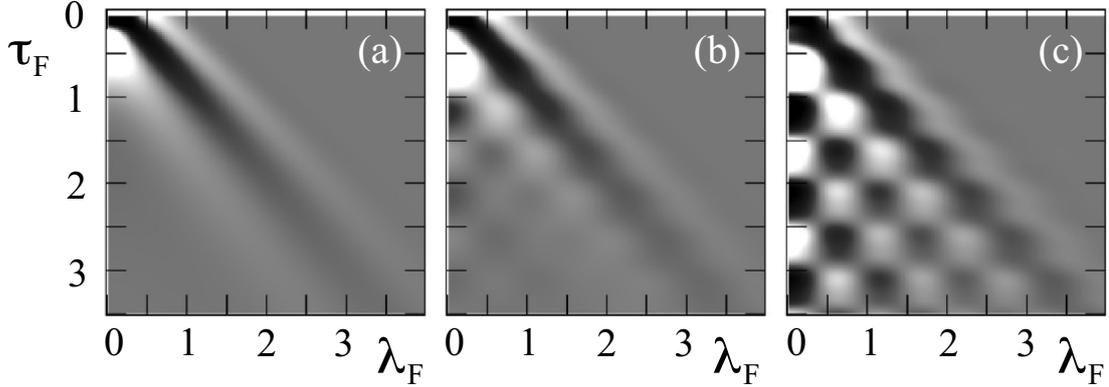


FIGURE 4.10 – Evolution $\Xi(R, T)/A_{\text{pert}}$ pour des temps t tels que $0 < t < 3.5\tau_F$ d'un cratère généré par un seul rebond à $t = 0$, pour une accélération de forçage $\gamma_m/g = 0$ (a) $\gamma_m/g = 1.52$ (b) et $\gamma_m/g = 4.05$ (c). Le diamètre de la goutte est choisi tel que $D = 1$ mm, et la fréquence de forçage est fixée à $f_0 = 80$ HZ. Le coefficient ν_{phen} est ajusté pour avoir $\gamma_F = 4.1 g$.

voquée par l'impact). Devant ces difficultés, il est plus simple de proposer une expression analytique pour la perturbation générée par la goutte et de la laisser évoluer spontanément en prenant en compte de la vibration du bain. C'est cette approche qui a été adoptée et qui sera succinctement décrite ici.

Une perturbation $\xi_{Bump}(r)$, localisée et axisymétrique, représente le résultat de cette interaction entre la goutte et le bain. Elle est choisie telle que

$$\xi_{Bump}(r) = A_{\text{pert}} \left[-\exp\left(-\frac{r^2}{A_1^2}\right) + \frac{A_1^2 r^2}{A_2^4} \exp\left(-\frac{r^2}{A_2^2}\right) \right] \quad (4.3)$$

pour correspondre approximativement à la forme attendue après un impact. Les trois paramètres A_{pert} , A_1 et A_2 sont proportionnels au diamètre D de la goutte, les coefficients étant choisis pour respecter les conditions de continuité de la pression sous la goutte. Cette forme arbitraire est ensuite décomposée sur une base axisymétrique de fonctions J_0 de Bessel :

$$\xi_{Bump}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) J_0\left(\frac{\alpha_m r}{r_c}\right) \quad (4.4)$$

Où les α_m correspondent aux zéros de la fonction J_0 de Bessel. Cette forme est ensuite utilisée comme condition initiale dans l'équation de Mathieu obtenue pour chacun de ces modes (voir éq. 1.12) :

$$\frac{d^2 a_m}{dt^2} + 2\nu_{phen} k_m^2 \frac{dA}{dt} + k_m \tanh k_m h \left(\frac{k_m^2 \sigma}{\rho} + g - \gamma_m \cos \omega_0 t \right) a_m = 0 \quad (4.5)$$

La viscosité phénoménologique ν_{phen} est enfin ajustée pour correspondre au seuil γ_F observé expérimentalement. Cette procédure permet de simuler le résultat d'un choc unique de la goutte sur le bain. La figure 4.10 présente l'évolution spatio-temporelle d'une perturbation générée par une goutte de diamètre $D = 1$ mm pour trois accélérations imposées différentes. Si le bain est au repos, seule une onde capillaire se propage radialement. Sa vitesse de phase correspond à celle des ondes de Faraday v_ϕ . Si l'accélération γ_m se rapproche de γ_F , un champ d'ondes stationnaires ayant une fréquence f_F et une longueur d'onde λ_F se met en place, en s'amortissant exponentiellement. Comme dans le cas expérimental, le temps caractéristique d'amortissement diverge quand $\Gamma \rightarrow 0$. Ces résultats numériques confirment en tout point les observations expérimentales et peuvent servir de base pour étudier les ondes générées par une goutte rebondissante.

4.4 Ondes d'un marcheur : chocs répétés et entretenus

4.4.1 Deux types d'ondes et une mémoire temporelle

A chaque rebond, la goutte excite des ondes de surface qui sont centrées sur le point d'impact. Les ondes créées par chaque choc peuvent être subdivisées en deux parties :

- Quelle que soit l'excitation, il existe toujours un train d'ondes qui se propage radialement, et que nous qualifierons de capillaire dans la suite par analogie avec celui créé par l'impact d'un caillou dans l'eau. Cette partie du champ d'ondes ne dépend pas de l'accélération imposée γ_m , et ses propriétés sont fixées par la nature de l'objet qui vient produire l'impact sur avec la surface. Ce front capillaire se propage avec une vitesse qui vaut approximativement la vitesse de phase des ondes de Faraday V_ϕ .
- La seconde partie du champ d'ondes créé par un choc unique correspond à une structure stationnaire d'ondes de Faraday qui sont presque entretenues par le forçage vertical. Le temps τ , caractéristique de l'amortissement de ces ondes, varie avec l'écart Γ au seuil de l'instabilité de Faraday selon $\tau \propto \Gamma^{-1}$. Bien que l'excitation γ_m soit réglée en dessous du seuil γ_F , les ondes ressentent la présence de l'instabilité de Faraday, et s'amortissent d'autant plus lentement que Γ est faible.

L'entretien des ondes par la vibration génère une mémoire temporelle pour notre système : le rebond d'une goutte va pouvoir influencer le champ d'ondes global pendant une durée typique valant quelques τ . Dans le cas d'un marcheur, cette mémoire temporelle est associée à un mouvement de l'objet, ce qui met en place une mémoire spatiale. Le champ d'ondes global d'un marcheur correspond à l'accumulation de telles ondes de

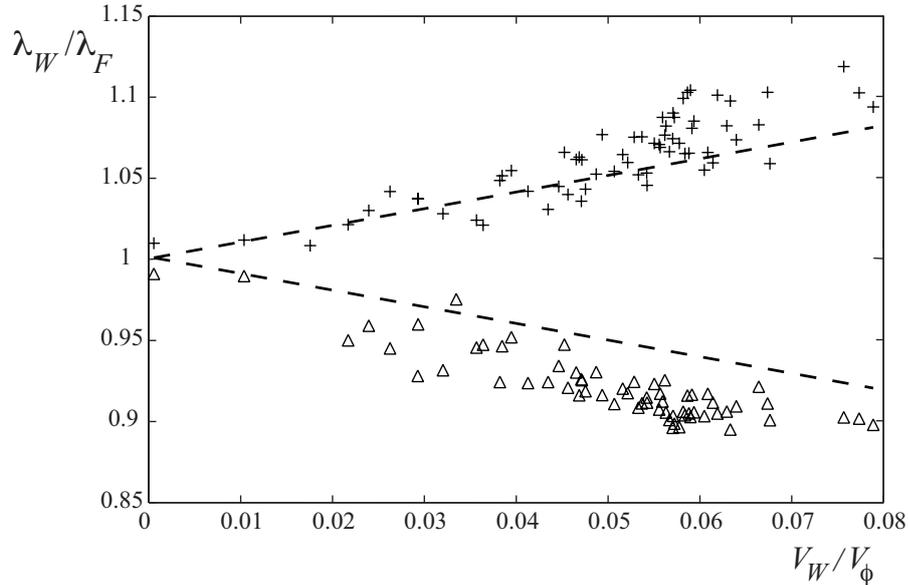


FIGURE 4.11 – Longueurs d’onde λ_W mesurées à l’avant (triangles) et à l’arrière (croix) de marcheurs en fonction de leur vitesse. Les courbes en pointillé correspondent au calcul du décalage Doppler théorique, pour une succession de sources émettant des ondes avec la longueur d’onde de Faraday λ_F , et séparées par une distance $\Delta = V_W \cdot \tau_F$.

surface centrées sur des points alignés et régulièrement espacés, son mouvement étant rectilinéaire. Nous allons examiner séparément la superposition des fronts propagatifs récemment émis ainsi que la structure d’interférences des ondes stationnaires synchronisées par le forçage avant d’analyser le cas du marcheur où les deux types d’ondes existent en même temps.

4.4.2 Ondes propagatives et effet Doppler

Les mesures du champ d’ondes généré par les gouttes montrent que la longueur d’onde n’est pas la même dans toutes les directions. Perpendiculairement à la direction de propagation, la longueur d’onde correspond exactement à celle des ondes de Faraday émises à la fréquence moitié de la fréquence de forçage. L’observation de la figure 4.1 montre que les ondes sont comprimées devant la goutte et dilatées derrière elle. La mesure des longueurs d’onde λ_W à l’avant et à l’arrière du marcheur en fonction de la vitesse du marcheur est présentée sur la figure 4.11, pour des marcheurs dont le diamètre D est compris entre $720 < D < 810 \mu\text{m}$ et pour des excitations telles que $5\% < \Gamma < 20\%$. Les variations de λ_W correspondent à un décalage Doppler. L’observation avec une caméra rapide montre qu’au voisinage de la goutte, les crêtes du champ d’ondes

peuvent être attribuées aux fronts propagatifs émis successivement à chaque rebond. Ces fronts voyagent avec une vitesse de phase V_ϕ et sont générés par un marcheur qui se déplace à vitesse constante (selon l'axe des abscisses). Chaque front est centré sur un point d'impact $x_n = n\Delta$, avec n un entier négatif et Δ la distance parcourue entre deux impacts. En regardant le champ d'ondes à l'instant $t_0 = 0$, les fronts ont parcouru une distance $|n \cdot \lambda_F|$. Les maxima de l'onde (x_{max}, y_{max}) se situent sur des cercles d'équation :

$$(x_{max} - x_n)^2 + y_{max}^2 = (n \cdot \lambda_F)^2 \quad \text{avec } n \leq 0 \quad (4.6)$$

On en déduit la longueur d'onde devant et derrière la goutte. L'équation 4.6 se simplifie en :

$$\lambda_{th} = \lambda_F \mp \frac{V_w}{f_F} \quad (4.7)$$

Nous avons tracé les courbes correspondantes sur la figure 4.11. Ce sont des droites dont la pente vaut $\tau_F = 25$ ms pour un bain en vibration à la fréquence $f_0 = 80$ Hz. L'accord de ce décalage Doppler avec les données expérimentales est correct. Cependant, un ajustement linéaire des nuages de points nous donne une pente $\tau_{carac} \simeq 35$ ms, qui est environ 30% plus importante que celle obtenue par le calcul théorique. L'origine de cet écart n'est pas connue, plusieurs hypothèses étant susceptibles de l'expliquer (fronts d'onde ne se propageant pas exactement à la vitesse V_ϕ , distorsion du paquet d'onde émis par la goutte lors du contact...). Des expériences complémentaires devraient être menées pour expliquer quantitativement cet écart.

4.4.3 Ondes stationnaires. Stockage d'information

En théorie, la durée de vie d'un marcheur est infinie. Sa disparition est généralement liée à la présence de poussières ou de défauts qui induisent la rupture du film d'air entre la goutte et le bain, et provoquent ainsi la coalescence de la goutte avec le substrat. Dans le cas où la goutte disparaît de la surface, les fronts capillaires sont rayonnés au loin et il ne reste que la partie stationnaire des ondes émises à chaque choc. Des observations attentives montrent que ces défauts sont en général formés par des micro bulles d'air qui sont piégées sous la surface : lorsque la goutte passe au-dessus d'un défaut, le film d'air se brise et la goutte coalesce dans le bain. En générant des micro bulles d'air sur l'interface, nous avons pu mettre en place un véritable champ de mines sur lequel le marcheur évolue. Le détail de la « désintégration » d'un marcheur peut être observé en détail à l'aide d'une caméra rapide. La figure 4.12 (a)-(d) montre quatre photographies extraites d'un tel film, avant, pendant et après la collision avec la micro bulle d'air. Nous constatons qu'après un temps $t = 15\tau_F$, il existe encore des ondes sur la surface, qui sont entretenues par

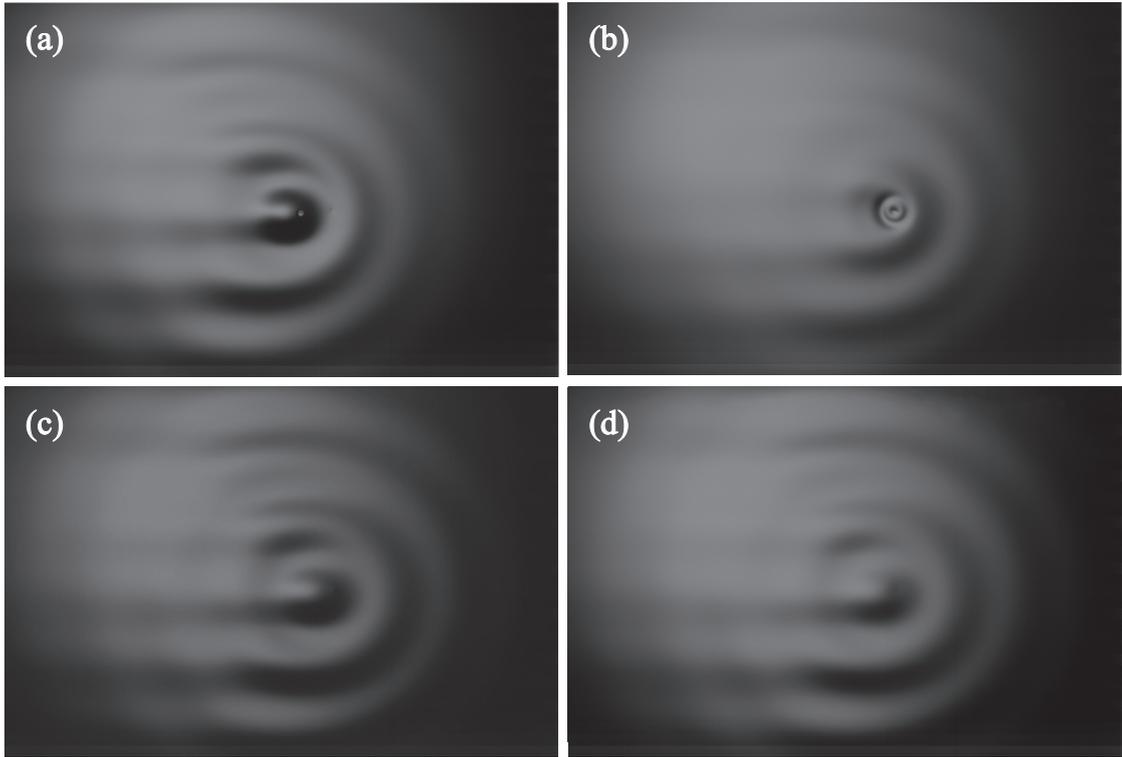


FIGURE 4.12 – Quatre photographies d’un marcheur extraites d’un film réalisé avec une caméra rapide. (a) Avant sa collision avec une micro bulle. (b) Pendant la coalescence provoquée par la présence de la bulle. (c) À l’instant $t = 5 \tau_F$ après la coalescence. (d) À l’instant $t = 15 \tau_F$ après la coalescence.

la vibration du bain pendant un temps caractéristique qui dépend de l’écart au seuil de l’instabilité de Faraday Γ . Les points visités par la goutte continuent donc à être des sources d’ondes stationnaires pendant quelques τ . Il est intéressant de noter que le champ d’ondes persistant après la destruction de la goutte est similaire à celui du marcheur (fig. 4.12 (a)). Néanmoins, il existe une différence importante. Tant que le marcheur existe, le champ d’ondes se déplace à vitesse constante V_W . À chaque rebond, le nouvel impact génère un front propagatif responsable de l’effet Doppler. Après la disparition de la goutte, les fronts capillaires sont rayonnés au loin et seules les ondes stationnaires restent sur le bain. Le champ d’ondes présente alors une figure d’interférence complexe et ne se déplace plus à la surface. L’effet Doppler disparaît et la longueur d’onde est maintenant égale à λ_F dans toutes les directions.

Dans la limite d’une longue mémoire ($\Gamma \ll 1$), le champ d’ondes correspond à la superposition d’ondes centrées sur des sources distribuées le long de la trajectoire. Puisque

le mouvement du marcheur est rectilinéaire, ces sources sont alignées le long d'une demi-droite s'arrêtant au point où la goutte a coalescé avec le bain. Ces sources discrètes sont proches ($\Delta \ll \lambda_F$), les ondes sont synchronisées par la vibration du bain et possèdent presque la même amplitude. Après la disparition du marcheur (fig. 4.12(c-d)), le champ d'ondes peut être compris en utilisant une analogie avec l'optique ondulatoire. Une application classique du principe de Huygens-Fresnel [47] est le calcul de la structure de diffraction qui apparaît lorsqu'une onde plane monochromatique est diaphragmée par un bord d'écran : il s'agit de la diffraction de Fresnel [10]. Derrière le bord, on calcule l'amplitude des ondes en remplaçant l'onde plane par des sources virtuelles. Ce sont des sources circulaires et en phase qui couvrent la partie non diaphragmée de l'onde plane (fig. 4.13). La somme de leur contribution est obtenue via une construction géométrique, la spirale de Cornu [16], ou bien par l'intermédiaire des intégrales tabulées de Fresnel. Le détail de ce calcul est présenté en annexe.

Expérimentalement, la distribution des sources est identique à celle des émetteurs virtuels en optique, l'écran correspondant aux points qui n'ont pas encore été visités par la goutte (fig. 4.13). La différence réside dans le fait que les sources sont ici bien réelles et génèrent des ondes stationnaires, contrairement aux ondes propagatives en optique. L'analogie évoquée permet une description analytique dans le cas où la mémoire est importante : après la mort du marcheur, le champ d'ondes correspond exactement à la structure d'interférence de la diffraction de Fresnel qui s'amortirait lentement. Au voisinage du dernier point d'impact, les nœuds et les ventres sont précisément prédits par la théorie. Plus loin derrière la goutte, les fronts d'onde sont plans. Dans le cas où la mémoire est plus faible, les sources passées génèrent des ondes dont l'amplitude décroît nettement. La structure d'interférence au voisinage du dernier rebond est maintenue mais, loin derrière la goutte, les fronts d'onde plans disparaissent.

4.4.4 Sillage d'un marcheur

La description de l'effet d'accumulation des sources sur les deux types d'ondes permet de revenir maintenant au cas du marcheur complet. Sur les photographies de la figure 4.1, le marcheur génère des ondes circulaires devant lui. Elles correspondent toujours aux fronts propagatifs émis par les derniers chocs, et présentent systématiquement un décalage Doppler. Si l'on augmente l'amplitude de l'excitation γ_m , Γ diminue et les ondes stationnaires autour des sources passées sont de plus en plus intenses. Comme nous venons de le décrire, ces ondes de Faraday implémentent derrière la goutte des fronts d'ondes plans et parallèles à la trajectoire. La visualisation de la figure 4.14 (a) les montre précisément. Les maxima de l'onde sont situés sur des lignes $y_{max} = m \cdot \lambda_F$ parallèles

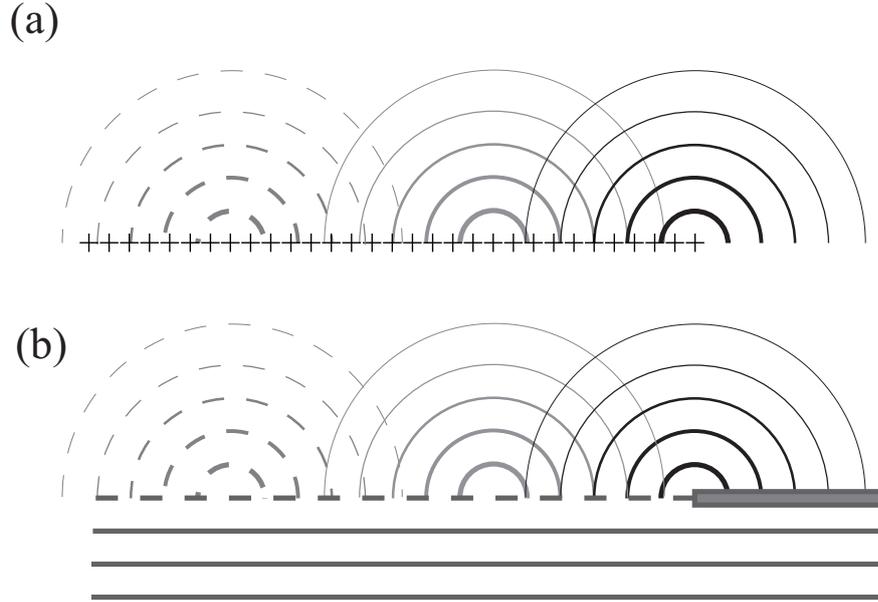


FIGURE 4.13 – (a) Fronts d'ondes circulaires émis par une ligne de points régulièrement espacés. (b) Onde plane incidente sur un bord d'écran. Par le principe de Huygens-Fresnel en optique, le champ d'ondes au-delà de l'obstacle en (b) est strictement équivalent à celui de la configuration (a).

à la trajectoire, avec m étant entier. Les deux types d'ondes (planes et circulaires) sont synchronisées par le forçage et sont susceptibles d'interférer pour donner naissance à une structure semblable à celle de la diffraction de Fresnel, mais qui présente encore un décalage Doppler. En calculant la phase spatiale de ces ondes, nous pouvons calculer la position des maxima (x_{max}, y_{max}) du champ d'ondes d'un marcheur à l'intersection des deux jeux de courbes.

$$Y_{max}^{m,n} = m \cdot \lambda_F \quad (4.8)$$

$$X_{max}^{m,n} = n \cdot \Delta - \sqrt{(n^2 - m^2)} \cdot \lambda_F \quad \text{avec } n < 0 \quad (4.9)$$

Nous pouvons également noter que $m < |n|$ puisque les ondes stationnaires se mettent en place après le passage de l'onde capillaire. Les extrema se trouvent donc le long de paraboles qui partent de la trajectoire. La figure 4.14 (b) présente cette construction géométrique. L'accord avec les données expérimentales dans le cas d'un faible amortissement est excellent.

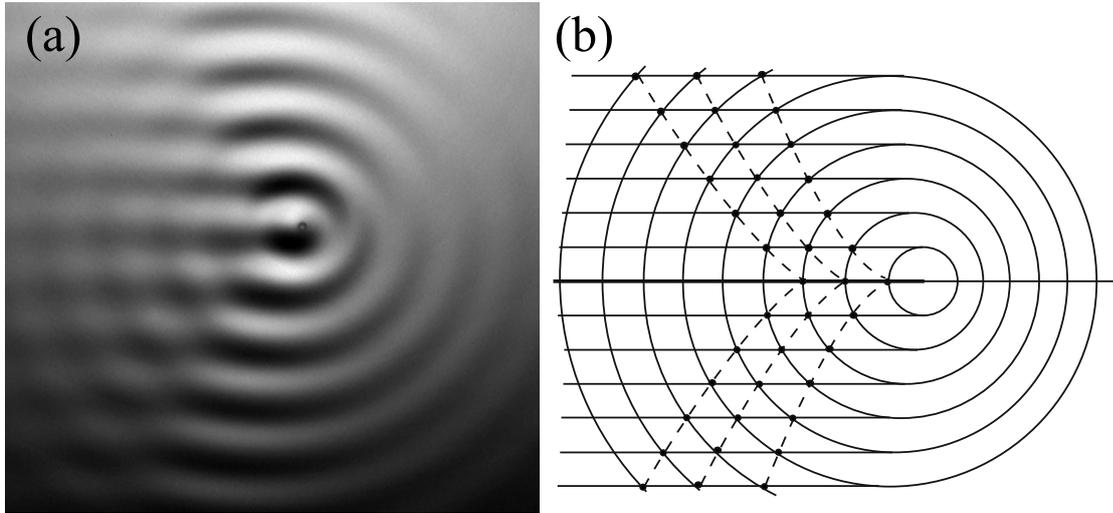


FIGURE 4.14 – (a) Photographie du champ d’ondes d’un marcheur avec $\Gamma \leq 1\%$. (b) Schéma de la structure d’interférence obtenue avec la construction géométrique donnant la position approchée des nœuds de l’onde.

4.5 La mémoire de chemin

Nous avons vu que chaque rebond de la goutte sur la surface crée une onde de Faraday qui s’amortit au bout d’un temps $\tau \propto (\gamma_F - \gamma_m)^{-1}$, proportionnel à l’écart au seuil de l’instabilité de Faraday. Pour des marcheurs, ce temps caractéristique τ prend des valeurs typiques telles que $5\tau_F < \tau < 30\tau_F$. Comme la goutte se déplace entre chaque rebond, le marcheur inscrit une trace sur la surface : c’est la *mémoire de chemin*. Cette trace apparaît comme la superposition linéaire des ondes produites par chaque choc et se traduit par une structure d’interférence semblable à celle de la diffraction de Fresnel en optique. La mémoire de chemin possède une longueur caractéristique $L_m = V_W \cdot \tau$ fixée à la fois par l’amortissement des ondes et la vitesse du marcheur. Elle correspond à la taille typique du champ d’ondes qui entoure la goutte.

A chaque rebond sur la surface, la goutte reçoit une impulsion proportionnelle à la pente de la surface sur laquelle elle rebondit. La goutte « lit » la mémoire de chemin qui est encodée dans les ondes. La force qui en résulte est déterministe. Cependant, la mémoire de chemin fournit les éléments nécessaires pour observer des comportements aléatoires. Plus elle est importante, plus le nombre de chocs qui contribuent à la force ressentie par la goutte est grand, et plus le marcheur possède une sensibilité à sa propre histoire. Dans les expériences d’effet tunnel, nous avons travaillé en réglant l’accélération verticale réduite $\Gamma = 6\%$. D’une manière plus générale, la mémoire de chemin va jouer un rôle

à partir du moment où L_m devient comparable aux longueurs caractéristiques imposées par la géométrie du problème étudié.

Chapitre 5

Quantification d'orbites macroscopiques

La mémoire de chemin a été étudiée pour des marcheurs isolés qui possèdent un mouvement rectiligne uniforme. Dans ce cas, le seul effet perceptible des ondes passées semble résider dans la saturation de la vitesse du marcheur. On peut se demander si, en présence d'une mémoire de chemin étendue, on peut placer un marcheur sur une orbite circulaire stable.

Pour y répondre, il faut créer les conditions nécessaires à l'apparition d'une telle orbite. Pour cela, on doit appliquer une force transverse au mouvement. Classiquement, deux forces sont susceptibles de remplir ce rôle : la force de Lorentz et la force de Coriolis.

5.1 Analogie entre champ magnétique et vorticité

5.1.1 Force de Lorentz et force de Coriolis

Considérons une particule de masse m et de charge q , lâchée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ au sein d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. Cette particule subit alors la force de Lorentz :

$$\vec{F}_L = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B} \quad (5.1)$$

Son mouvement est contenu dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) et circulaire. La période et le rayon sont données par la période de Larmor (ou période cyclotron) T_L et le rayon de Larmor R_L :

$$T_L = \frac{m}{eB_0} \quad \text{et} \quad R_L = \frac{mv_0}{eB_0} \quad (5.2)$$

De manière équivalente, on peut considérer le mouvement d'une particule de masse m , lâchée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ sur un disque en rotation avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. La particule subit les forces d'inertie d'entraînement \vec{F}_{ie} et de Coriolis \vec{F}_C . Cette dernière s'écrit

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v}_0 \wedge \vec{\Omega} \quad (5.3)$$

Le mouvement induit par cette force est circulaire. Le rayon R_C et la période T_C sont donnés par :

$$T_C = 1/2\Omega \quad \text{et} \quad R_C = \frac{v_0}{2\Omega} \quad (5.4)$$

Ces deux forces présentent des caractéristiques équivalentes. Il existe tout de même une différence importante entre elles puisque la première est une véritable force physique tandis que la seconde n'est qu'une pseudo-force d'inertie. Cette différence se manifeste dans l'apparition du rapport $\frac{e}{m}$ dans les expressions de T_L et R_L , tandis que les masses se simplifient dans le second cas.

On constate que le champ magnétique et la vorticité possèdent un rôle similaire dans les expressions des forces, périodes et rayons. Dans le cadre de l'hydrodynamique des ondes de surface, l'analogie peut être prolongée : le potentiel vecteur \vec{A} , qui définit le champ magnétique à une jauge près par :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (5.5)$$

est équivalent au champ de vitesse dans un fluide dont la vorticité $\vec{\Omega}$ est définie par :

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad (5.6)$$

Le tableau 5.1 récapitule les quantités pour lesquelles l'équivalence entre électromagnétisme (y compris en mécanique quantique) et hydrodynamique peut être formulée. On constate finalement qu'au delà des forces de Lorentz et de Coriolis, dont l'effet est transverse sur une particule, un certain nombre de quantités peuvent être mises en regard dans les deux contextes.

5.1.2 Niveaux de Landau en mécanique quantique

En mécanique quantique, une particule chargée placée dans un champ magnétique uniforme présente des orbites comme une particule classique, mais ces dernières sont quantifiées [14]. L'existence d'un potentiel vecteur \hat{A} conduit à une modification de l'impulsion, et les   tats stationnaires d'une particule de masse m et de charge q , placée

	Electromagnétisme	Hydrodynamique
Champ	\vec{B}	$\vec{\Omega}$
Potentiel	\vec{A}	\vec{v}
Force	$\vec{F}_L = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$	$\vec{F}_C = 2m\vec{v}_0 \wedge \vec{\Omega}$
Période	$T_L = m/eB_0$	$T_C = 1/2\Omega$
Rayon	$R_L = mv_0/eB_0$	$R_C = v_0/2\Omega$

TABLE 5.1 – Quantités équivalentes en électromagnétisme et en hydrodynamique. *D'après* [17]

dans un champ magnétique $\hat{B} = \hat{\nabla} \wedge \hat{A}$, sont donnés par les solutions de l'équation de Schrödinger avec le hamiltonien \hat{H} suivant :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p} - q\hat{A})^2 \quad (5.7)$$

où \hat{p} est l'opérateur impulsion. L'invariance de cette équation permet d'écrire, à un choix de jauge près :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ B\hat{x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Le hamiltonien peut se ré-écrire

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} - \frac{qB}{mc}\hat{x}\hat{p}_y + \frac{q^2B^2}{2m}\hat{x}^2 \quad (5.9)$$

L'opérateur \hat{p}_y commute avec ce hamiltonien puisque \hat{y} n'apparaît pas dans cette expression (grâce au choix de jauge). L'opérateur \hat{p}_y est alors remplacé par sa valeur propre $\hbar k_y$. En introduisant la pulsation cyclotron $\omega_L = 1/T_L$, on obtient :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + 1/2m\omega_L^2\left(\hat{x} - \frac{\hbar k_y}{m\omega_L}\right)^2 \quad (5.10)$$

Cette équation est exactement celle de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique, décalé de $x_0 = \frac{\hbar k_y}{m\omega_L}$ dans l'espace. L'utilisation des opérateurs création et annihilation permet de déterminer le spectre d'énergie E_n de l'équation 5.10.

$$E_n = \hbar\omega_L(n + 1/2) \quad (5.11)$$

Un jeu de niveaux, appelés niveaux de Landau, se met en place sous l'action du champ magnétique. On peut déterminer le rayon semi-classique de ces orbites. Elles sont décrites avec la période de Larmor T_L et une vitesse $v = p/m$. On écrit alors :

$$R = \frac{p}{m} \frac{T_L}{2\pi} \quad (5.12)$$

En calculant le carré de cette expression, et en utilisant l'expression de l'énergie E_n , on obtient les rayons R_n de chaque niveau :

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{(n + 1/2) \frac{h}{qB}} \quad (5.13)$$

Cette expression correspond à une quantification du flux magnétique à travers la boucle décrite par la particule.

5.1.3 Effet Aharonov-Bohm

L'analogie entre champ magnétique et vorticité que nous avons évoquée ci-dessus a  t e utilisée par M. Berry *et al.* [7] pour fournir une interprétation physique d'un effet typiquement quantique peu intuitif : l'effet Aharonov-Bohm. Consid rions une particule quantique chargée. Elle présente une interaction avec un champ électromagnétique même si elle se trouve dans une région où les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} sont nuls [1]. Il suffit par exemple que \vec{B} soit nul tout en ayant un potentiel vecteur \vec{A} non nul et tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Une telle structure du champ magnétique peut être obtenue à l'extérieur d'un sol no ide idéal, qui entoure un champ magnétique non nul mais n'en produit pas à l'extérieur. Une particule de charge q suivant un chemin P à travers une telle région va acquérir une phase φ donnée par :

$$\varphi = \frac{q}{\hbar} \int_P \vec{A} \cdot d\vec{x} \quad (5.14)$$

Si l'on envisage deux chemins distincts, de part et d'autre du sol no ide mais avec les mêmes extrémités C et D (fig 5.1(a)), la particule va présenter une différence de phase donnée par :

$$\Delta\varphi = \frac{q}{\hbar} \Phi \quad (5.15)$$

Φ étant le flux magnétique à travers la surface entre les deux chemins. Cette différence de phase est une phase géométrique, introduite d'abord par Pancharatnam [64] puis redécouverte par Berry en 1984 [6]. Cette dernière apparaît lorsque l'on suit une boucle adiabatique dans l'espace des paramètres physiques. Quand le circuit est fermé, l'état initial et l'état final diff rent d'une phase donnée à condition que le circuit englobe des valeurs singulières dans l'espace des paramètres.

Cet effet est peu intuitif puisque l'on observe un déphasage alors que la particule chargée a voyagé dans une région de l'espace où les champs \vec{E} et \vec{B} sont nuls. L'analogie hydrodynamique [7] fournit une compréhension plus physique de ce phénomène. Si l'on considère un écoulement défini par un champ de vitesse \vec{v} donné, la vorticité $\vec{\Omega}$ est définie par :

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (5.16)$$

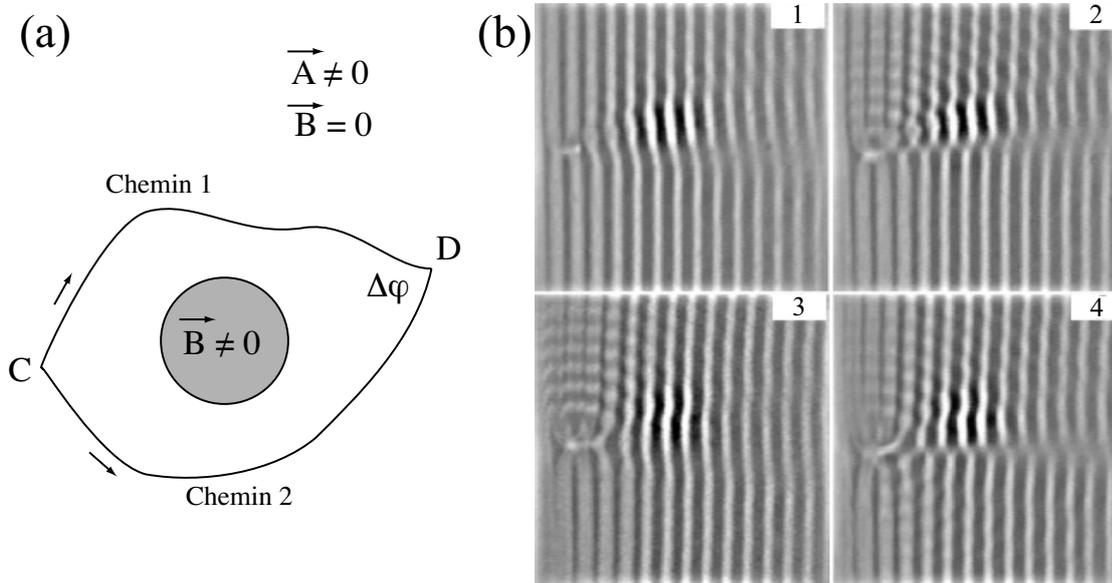


FIGURE 5.1 – (a). Schéma de principe pour l'effet Aharonov-Bohm. (b) Quatre champs d'ondes obtenus expérimentalement, pour une onde plane et au-delà d'un vortex de vortacité croissante. *Clichés tirés de [86].*

Formellement, le champ de vitesse \vec{v} est équivalent au potentiel vecteur \vec{A} , et la vortacité $\vec{\Omega}$ correspond au champ magnétique \vec{B} . On peut aisément construire un écoulement pour lequel \vec{v} et $\vec{\Omega}$ présentent la même géométrie que pour l'effet Aharonov-Bohm. Il suffit de placer à l'origine un vortex de Burgers, défini par

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= \vec{\Omega}_0 \quad \text{pour } r < a \\ \vec{\Omega} &= 0 \quad \text{pour } r \geq a\end{aligned}\tag{5.17}$$

La vortacité est nulle partout, à l'exception de l'intérieur d'un disque de rayon a . Le champ de vitesse, en revanche, est calculé en raccordant le cœur du vortex à l'extérieur. Il est non nul et décroît en $1/r$ pour $r \geq a$.

Une onde plane est envoyée dans un tel écoulement. Au-delà du vortex, le même saut de phase $\Delta\varphi$ apparaît. Dans le cas hydrodynamique, il se manifeste par une structure d'interférences au-delà du vortex correspondant à l'advection des fronts d'ondes de part et d'autre du vortex par la vitesse du fluide (fig. 5.1(b)). Cet effet a été illustré expérimentalement avec des ondes acoustiques [74] ainsi qu'avec des ondes de surface [86, 17].

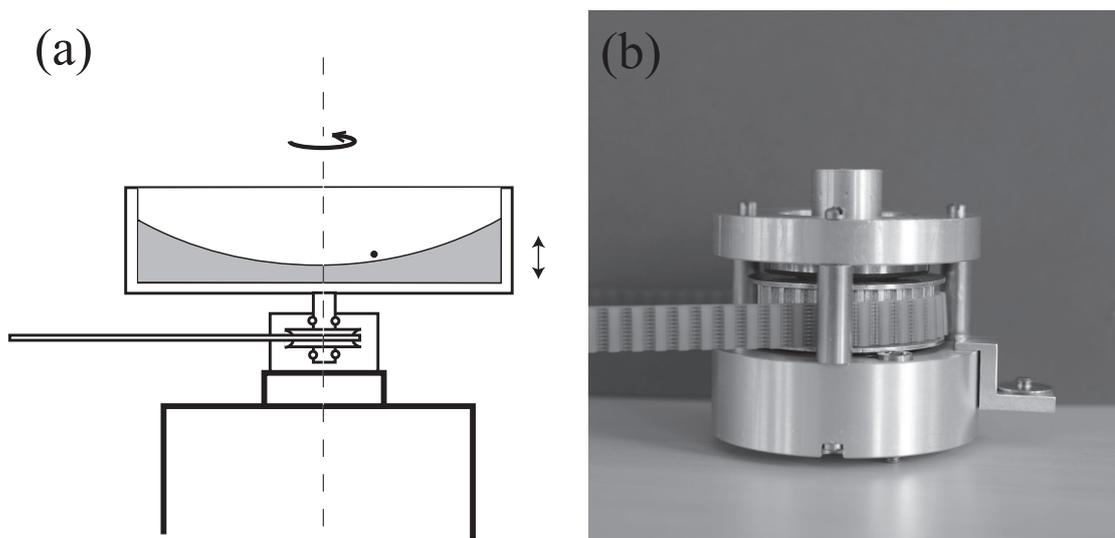


FIGURE 5.2 – (a) Schéma de principe de l'expérience en rotation. (b) Photographie du dispositif permettant la rotation de la cellule.

5.2 Orbites sur un bain en rotation

5.2.1 Bain en rotation

En se basant sur l'analogie entre champ magnétique et vorticité, une variante de l'expérience a été mise au point. La cellule de travail (circulaire) contenant l'huile silicone est mise en rotation autour d'un axe vertical colinéaire avec la direction de vibration (fig. 5.2(a)). Cet axe est tenu dans un bâti par des roulements à billes coniques, un dispositif de serrage permettant de les mettre en pression. Une courroie permet d'entraîner l'axe à l'aide d'un moteur et le bâti peut être fixé sur le pot vibrant. Un accéléromètre peut également être placé sur le côté du bâti (fig. 5.2(b)). Les différentes pièces ont été conçues et réalisées avec soin à l'atelier, et un ajustement précis a été effectué a posteriori. Des cales en caoutchouc ont également été ajoutées pour limiter les vibrations parasites. L'intérêt de ce dispositif est qu'il permet d'assurer le guidage vertical de la cellule qui est solidaire de la surface du pot vibrant tout en gardant la liberté de rotation. Pour entraîner la cellule, des petits moteurs électriques dont la vitesse de rotation peut être contrôlée en tension ont été utilisés. Un jeu de poulies permet d'ajuster le rapport de réduction et de régler avec finesse la vitesse de rotation de la cellule. La vitesse angulaire Ω peut être modulée entre 0 et $10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Que se passe-t-il lorsque la cellule est mise en rotation ?   cause des effets centrifuges, la surface se déforme. Après un transitoire de quelques secondes, la rotation devient solide,

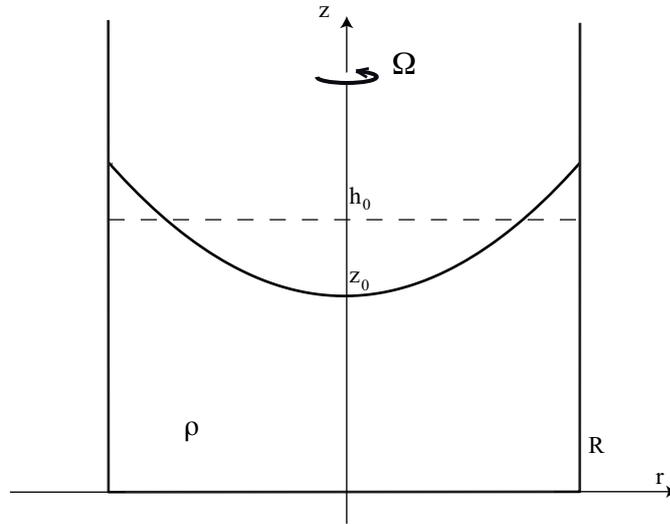


FIGURE 5.3 – (a) Bac en rotation contenant du liquide. La surface prend une forme de parabolöide de révolution.

c'est-à-dire que tout le liquide tourne en bloc avec la cellule. Supposons que du liquide de masse volumique ρ soit placé dans un bac cylindrique de rayon R et qu'il le remplisse jusqu'à une hauteur h_0 au repos. L'origine des altitudes est choisie au fond du récipient. Le bac est ensuite mis en rotation à une vitesse angulaire Ω . Pour déterminer la forme de la surface libre dans ces conditions, on effectue un bilan des forces s'appliquant sur une particule de fluide se trouvant à une distance r de l'axe de rotation. Il faut tenir compte des forces de pression et d'inertie d'entraînement ainsi que du poids ; on suppose également que l'équilibre est atteint. Dans le référentiel tournant, le fluide est au repos et la force de Coriolis est donc nulle. Nous pouvons alors écrire l'équation vectorielle suivante :

$$\vec{\nabla}P = \rho \vec{F}_{ie} + \rho \vec{g} \quad (5.18)$$

En projetant cette équation selon l'axe vertical et l'axe radial, on obtient deux équations :

$$\begin{aligned} \rho \Omega^2 r &= \frac{\partial P}{\partial r} \\ \rho g &= \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.19)$$

On en déduit la pression P dans le fluide à une constante K près.

$$P = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z + K \quad (5.20)$$

La surface libre est définie comme le lieu où la pression est égale à la pression atmosphérique P_0 . La surface libre sera donc un parabolöide de révolution, défini à une

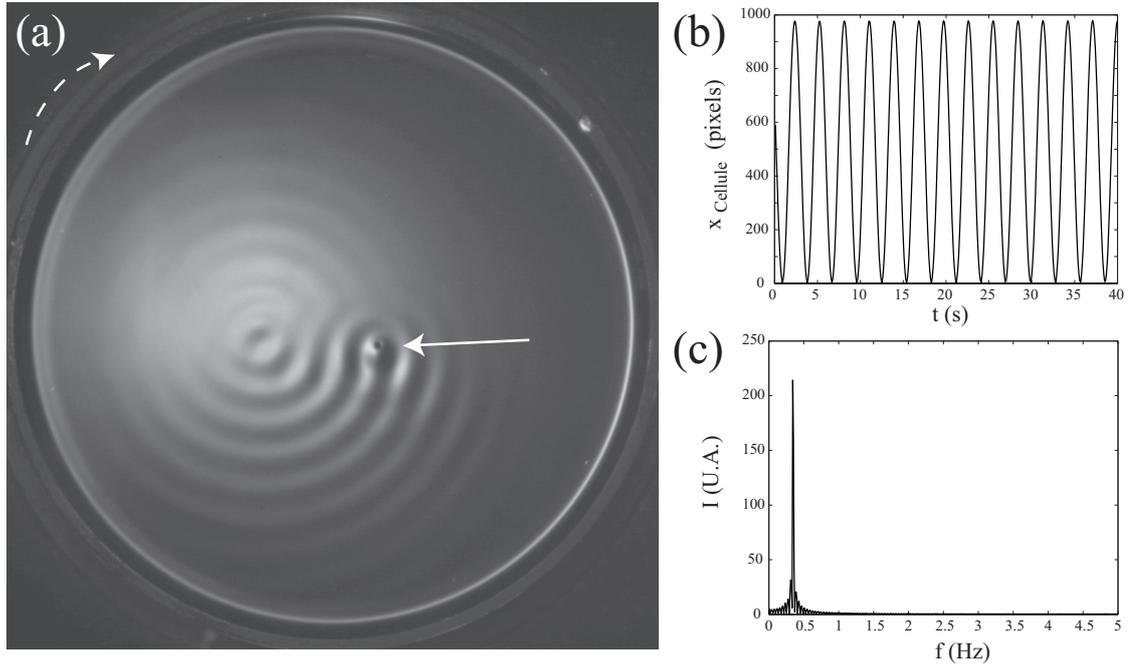


FIGURE 5.4 – (a) Photographie de la cellule en rotation. Le point blanc permet de détecter la position angulaire de la cellule. La goutte est indiquée par la flèche blanche. (b) Position détectée de la cellule selon l'axe des abscisses au cours du temps. (c) Transformée de Fourier (FFT) du signal précédent. Le pic nous permet de détecter la fréquence de rotation.

constante près (l'altitude de l'interface z_0 au niveau de l'axe).

$$z(r) = z_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g} \quad (5.21)$$

Pour déterminer la valeur de cette constante z_0 , il suffit d'utiliser la conservation du volume de liquide $V_0 = \pi R^2 h_0$. On en déduit :

$$z_0 = h_0 - \frac{\Omega^2 R}{3g} \quad (5.22)$$

5.2.2 Auto-orbites

La cellule circulaire est fixée sur le bâti et remplie d'huile silicone, de viscosité $\mu = 10, 20, 50$ ou $100 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. La hauteur de liquide h_0 dans la cellule est suffisante pour que le creusement de l'interface au centre n'ait pas de conséquence sur la marche des gouttes : la hauteur de liquide reste toujours supérieure à quelques millimètres. Un marcheur est créé sur le bain à l'aide d'un cure-dent. L'expérience est filmée du dessus avec une caméra

numérique à 10 im/s. La figure 5.4 (a) montre une image en ombroscopie d'un marcheur sur le bain. Une première acquisition est effectuée avec $\Omega = 0$, pour connaître la vitesse libre du marcheur, puis le bain est mis en rotation. Un point blanc sur le bord de la cellule permet de mesurer, à l'aide d'un traitement d'images approprié, sa position angulaire au cours du temps. La figure 5.4 (b) montre la composante selon x de la position de ce point au cours du temps. Le signal est sinusoïdal, comme le montre la transformée de Fourier (fig. 5.4 (c)). La fréquence de rotation de la cellule est détectée ainsi dans chaque expérience.

Avec un éclairage rasant, la goutte apparaît comme un point blanc sur fond noir. La trajectoire du marcheur est reconstituée dans le référentiel du laboratoire à l'aide d'un traitement d'images approprié (fig. 5.5 (a)). Dans ce référentiel, la trajectoire est épicycloïdale, c'est-à-dire qu'elle correspond à la composition de deux cercles avec des fréquences et des rayons différents. Une des deux fréquences correspond toujours à la rotation du bain. Connaissant la position de la cellule au cours du temps, le passage dans le référentiel tournant permet de tracer la trajectoire associée $(x_G(t), y_G(t))$. Cette trajectoire est circulaire (fig. 5.5 (b)). La goutte effectue donc des auto-orbites dans le référentiel tournant. Le rayon de ces orbites doit être déterminé avec précision. Pour cela, la transformée de Fourier des signaux $x_G(t)$ et $y_G(t)$ est calculée (fig. 5.6 (a) et (b)). La FFT présente toujours un pic extrêmement marqué à la fréquence f_{orb} avec parfois un petit pic secondaire correspondant à la fréquence de rotation du bain. Ce second pic provient certainement de l'incertitude sur la position du centre de la cellule (qui est détecté à quelques pixels près), et qui laisse une composante à la fréquence de rotation après le passage dans le référentiel tournant. Une fois connue la fréquence f_{orb} , le rayon de l'orbite R_{orb} est obtenu en mesurant la vitesse moyenne V_W de la goutte dans le référentiel tournant. En considérant que la goutte décrit un cercle à la vitesse V_W avec une période $T_{orb} = 1/f_{orb}$, on obtient :

$$R_{orb} = \frac{V_W}{2\pi f_{orb}} \quad (5.23)$$

Pour comprendre l'origine de ces orbites, il faut analyser les forces qui s'appliquent sur le marcheur quand le bain est en rotation.

5.2.3 Forces s'appliquant sur un marcheur

Un marcheur se trouve à une distance r du centre et se déplace avec une vitesse \vec{V}_W . Nous allons considérer que l'air qui se trouve au-dessus du bain est également en rotation solide, avec la même vitesse angulaire que le bain. Cette hypothèse est légitime dans la mesure où le régime est établi depuis un temps relativement important (plusieurs

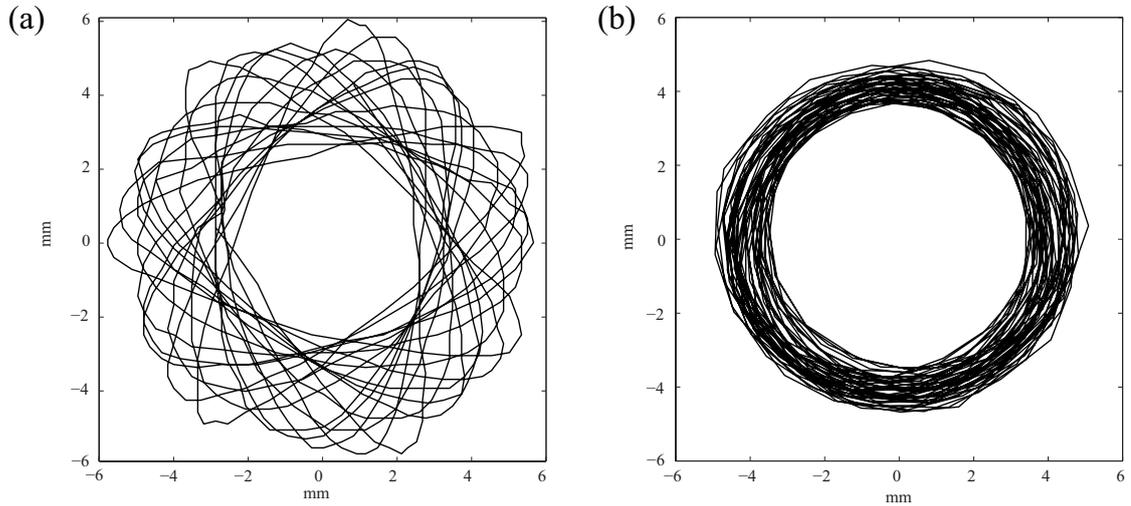


FIGURE 5.5 – (a) Trajectoire enregistrée dans le référentiel du laboratoire. (b) La même trajectoire, après passage dans le référentiel tournant.

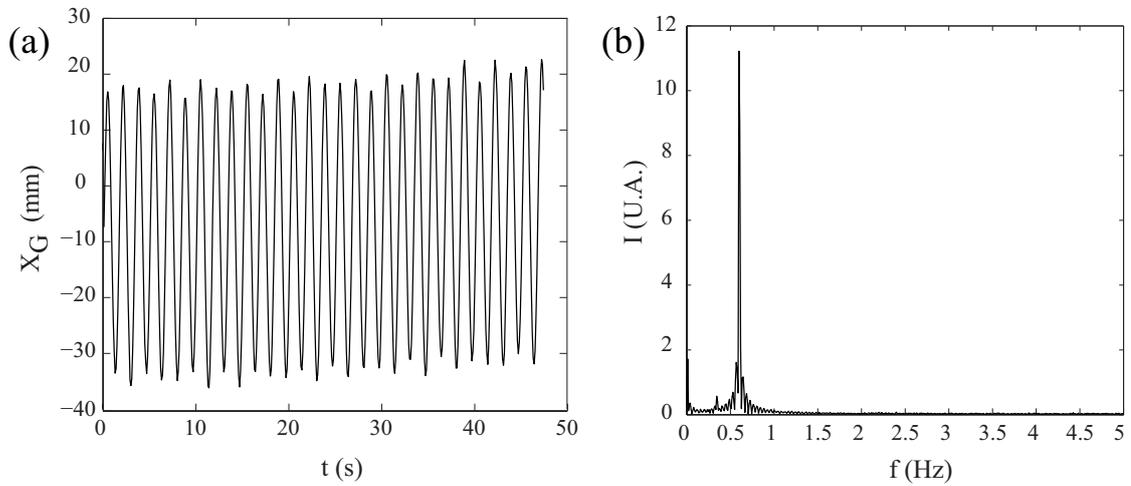


FIGURE 5.6 – (a) Position selon x d'une goutte dans le référentiel tournant. (b) Transformée de Fourier (FFT) de ce signal.

minutes). Dans le référentiel tournant, deux forces supplémentaires s'appliquent sur le marcheur :

- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 r \vec{e}_r$.
- la force de Coriolis $\vec{F}_C = 2m\vec{V}_W \wedge \vec{\Omega}$.

Pour examiner l'effet de la première force seule, considérons une goutte immobile sur le bain. La force d'inertie d'entraînement possède un effet centrifuge : la goutte a tendance à être éjectée vers le bord de la cellule. Néanmoins, si elle se rapproche du bord, elle doit suivre la pente imposée par l'interface parabolique et donc gagner de l'énergie potentielle. Puisque la goutte est constituée par le même liquide que le bain, les deux effets vont se compenser exactement. Cette prédiction est presque vérifiée expérimentalement : une goutte immobile placée à l'extérieur dérive très lentement vers le centre quand le bain est en rotation. Cet effet est probablement lié à un léger défaut d'entraînement de l'air au-dessus du bain. Dans ce cas-là, des contraintes visqueuses s'appliquent sur la goutte : elle a tendance à se dériver vers centre de la cellule. Néanmoins, ce phénomène est très lent (de l'ordre de plusieurs minutes), ce qui permet de travailler avec des gouttes en supposant que l'effet net de la rotation du bain sur une goutte immobile est nul.

Pour un marcheur, la force d'inertie d'entraînement est également parfaitement compensée par la déformation de la surface. Seule la force de Coriolis s'applique sur le marcheur, formé par une goutte et ses ondes associées.

Un paquet d'ondes axisymétrique est émis à chaque choc et se propage radialement. Au passage des ondes, les particules de fluide sont mises en mouvement et elles subissent une force de Coriolis. Cette force tend à faire tourner les particules orthoradialement (la vitesse initiale est radiale, et la vorticité orientée selon la verticale). Comme le paquet d'ondes émis est circulaire, il est invariant par rotation et l'effet net sur les ondes est nul dans le référentiel tournant : elles restent axisymétriques. Pour vérifier cette prédiction, une bille d'acier est lâchée dans le bain en rotation, créant une perturbation unique de la surface. La zone excitée est bien advectée par la rotation d'ensemble, mais une fois effectué le passage dans le référentiel tournant, nous constatons que les ondes sont les mêmes que pour $\Omega = 0$. L'effet net de la rotation d'ensemble sur les ondes est donc nul. La force de Coriolis s'applique également sur la goutte, provoquant une force orthogonale à sa vitesse et de norme constante. Les équations du mouvement s'intègrent aisément, et le marcheur va suivre une trajectoire circulaire dans le référentiel tournant. Le rayon R_C de cette orbite va dépendre de l'intensité de \vec{F}_C selon

$$R_C = \frac{V_W}{2\Omega} \quad (5.24)$$

avec une période de Coriolis $T_C = 1/2\Omega$. Les rayons observés R_C doivent donc décroître continûment quand Ω augmente. Dans le référentiel du laboratoire, la trajectoire est donc la composée de deux mouvements : un mouvement orbital lié à la force de Coriolis et un mouvement circulaire lié à l'entraînement par la cellule en rotation. Les trajectoires dans le référentiel du laboratoire doivent être épicycloïdales, formées par la composition de deux cercles, l'un avec un rayon R_C parcouru en une période T_C , et l'autre dont le rayon est donné par la distance moyenne entre la goutte et le centre de la cellule et dont la période est celle de rotation de la cellule $T_{rot} = 2\pi/\Omega$.

5.3 Mémoire de chemin et quantification

Nous allons maintenant détailler les résultats expérimentaux obtenus en fonction des différents paramètres qui ont été explorés ; nous discuterons en particulier l'influence de la mémoire de chemin sur la nature des auto-orbités observées.

5.3.1 Faible mémoire

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas où la mémoire est faible, le temps typique d'amortissement des ondes τ étant inférieur à quelques périodes de Faraday τ_F . Le marcheur est placé sur le bain et décrit une orbite épicycloïdale dans le référentiel du laboratoire. Sur la figure 5.7, le rayon R_C^{exp} des orbites mesurées dans le référentiel tournant est représenté en fonction du paramètre $2\Omega/V_W$. La courbe continue (en noir) correspond au rayon de Coriolis R_C correspondant. Les rayons expérimentaux R_C^{exp} présentent la même dépendance en $V_W/2\Omega$ que R_C , mais un ajustement montre que l'on peut écrire

$$R_C^{exp} = a \frac{V_W}{2\Omega} = a R_C \quad (5.25)$$

avec a qui dépend de la valeur exacte de la mémoire τ et qui est compris entre 1.2 et 1.5. Deux interprétations sont possibles quant à l'existence de ce préfacteur :

- Des expériences en caméra rapide ont montré que la vitesse horizontale de la goutte varie au cours de son cycle de rebond. Elle est maximale pendant le vol libre et diminue fortement pendant la collision avec le bain. Le cisaillement du film d'air entre la goutte et le bain freine la goutte, et sa vitesse est réduite à la moitié de celle du marcheur. Si l'on considère que le contact entre la goutte et le bain est complètement inélastique, la vitesse de la goutte s'annule pendant une fraction du cycle de rebond. La force de Coriolis ne s'exerce alors que pendant le vol libre de la goutte, ce qui permet d'introduire le préfacteur a .

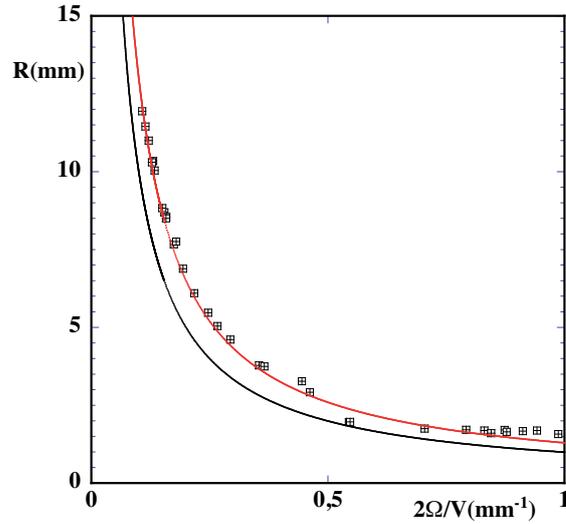


FIGURE 5.7 – Rayon R_C^{exp} des orbites en fonction du paramètre $2\Omega/V_W$ lorsque la mémoire est faible pour de l'huile de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. La courbe en noir correspond à la prédiction théorique $R_C = (2\Omega/V_W)^{-1}$, la courbe en rouge à l'ajustement des données expérimentales $R_C^{exp} = a(2\Omega/V_W)^{-1}$, avec $a = 1.2$.

- On peut également imaginer que les marcheurs possèdent une masse effective différente de la masse de la goutte, les ondes portant une fraction de l'inertie du système. En revanche, la force de Coriolis ne s'applique que sur la goutte et non pas sur les ondes (l'effet net de la force de Coriolis sur les ondes circulaires est nul). Le principe d'inertie doit donc être réécrit d'une manière légèrement différente, en distinguant la masse effective du marcheur m_{eff} et la masse de la goutte m_G :

$$\frac{m_{eff} V_W^2}{R_C^{exp}} = 2m_G \cdot V_W \cdot \Omega \quad (5.26)$$

On en déduit :

$$a = \frac{m_{eff}}{m_G} \quad (5.27)$$

C'est-à-dire que la masse effective du marcheur m_{eff} du marcheur serait de 20 à 50% supérieure à celle de la goutte à cause de la quantité de mouvement emportée par les ondes rayonnées par le marcheur. Cette hypothèse devrait tout de même être validée par des mesures complémentaires, dans lesquelles on soumettrait un marcheur à un échelon de force colinéaire à sa trajectoire pour étudier la relaxation et mesurer ainsi l'inertie effective du marcheur. La dépendance avec la mémoire de chemin, c'est-à-dire de la quantité d'onde associée à la goutte, devrait permettre

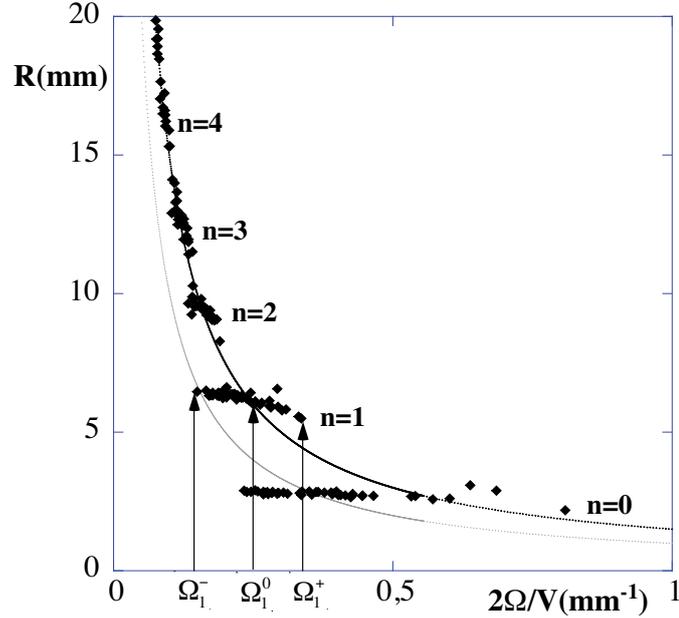


FIGURE 5.8 – Rayon R_C^{exp} des orbites en fonction du paramètre $2\Omega/V_W$ lorsque la mémoire est importante pour de l'huile de viscosité $\mu = 50 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. La courbe en noir correspond à la prédiction théorique $R_C = (2\Omega/V_W)^{-1}$, la courbe en rouge à l'ajustement des données expérimentales $R_C^{exp} = a(2\Omega/V_W)^{-1}$, avec $a = 1.2$. Les plateaux sont indexés par $n = 0, 1, 2, \dots$. Chaque plateau n croise la courbe rouge en Ω_n^0 et est limité par deux valeurs extrêmes Ω_n^+ et Ω_n^- .

d'établir cette distinction entre masse effective m_{eff} du marcheur et masse de la goutte m_G .

5.3.2 Longue mémoire

Que se passe-t-il lorsque l'on se rapproche du seuil de l'instabilité de Faraday et que l'on augmente de manière significative la mémoire du système? La figure 5.8 présente les rayons des orbites R_C^{exp} en fonction du paramètre $2\Omega/V_W$. Nous observons dans ce cas de figure la mise en place d'une série de plateaux distincts et légèrement inclinés, séparés par des zones qui semblent interdites. Ces plateaux sont indexés par un indice $n = 0, 1, 2, \dots$, le plateau $n = 0$ correspondant à l'orbite la plus serrée (obtenue pour des vitesses de rotation élevées). Chaque plateau se trouve de part et d'autre de la courbe classique donnée par $R_C^{exp} = aV_W/(2\Omega)$.

Cette courbe croise les plateaux pour des valeur Ω_n^0 . Lorsque l'on modifie la valeur de Ω à partir de Ω_n^0 , la goutte reste bloquée sur ce plateau jusqu'à une valeur Ω_n^+ (res-

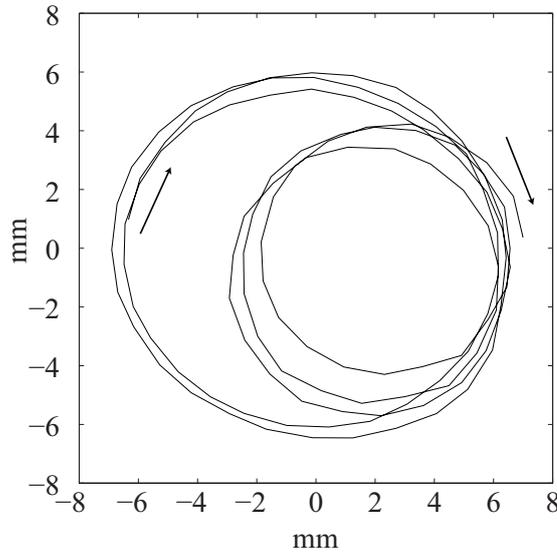


FIGURE 5.9 – Trajectoire du marcheur lors d’une transition entre les plateaux $n = 1$ et $n = 0$. La goutte passe instantanément d’un plateau à l’autre, sans décrire d’orbites de rayon intermédiaire.

pectivement Ω_n^-) pour laquelle la goutte décroche de l’orbite pour rejoindre la plateau immédiatement inférieur (respectivement supérieur). La transition d’un niveau à l’autre est rapide : il faut moins d’une orbite pour passer de l’un à l’autre. Ce phénomène est visible sur la figure 5.9. Une goutte est placée sur une orbite $n = 1$ et la vitesse de rotation du bain est réglée à une valeur Ω très légèrement supérieure à Ω_n^+ . Après deux tours d’orbites, celle-ci décroche pour venir se placer sur le plateau $n = 0$. La transition s’effectue instantanément, et le marcheur ne décrit pas d’orbites de rayons intermédiaires entre les deux.

La transition d’un plateau vers le plateau voisin présente également une hystérèse relativement marquée : il existe des plages de valeurs de Ω pour lesquelles le rayon est fixé sur un plateau ou sur celui immédiatement voisin, selon que l’on rejoint cette valeur de Ω en augmentant ou en diminuant la vitesse de rotation. L’existence des plateaux ainsi que des valeurs interdites du rayon des orbites suggère l’existence de niveaux discrets. Ces niveaux sont liés à la mémoire puisqu’ils disparaissent lorsque l’écart au seuil $\Gamma = \frac{\gamma_F - \gamma_m}{\gamma_F}$ augmente.

5.3.3 Quantification des niveaux

Comment pouvons nous comprendre cette quantification des niveaux ? Nous allons dans un premier temps essayer d'établir une analogie avec le cas des niveaux de Landau. On peut réécrire de manière alternative l'équation 5.13 en y introduisant la longueur d'onde de de Broglie associée à la particule $\lambda_{dB} = h/p$, avec h la constante de Planck et $p = mV$ son impulsion. Les rayons ρ_n satisfont alors :

$$\frac{\rho_n}{\lambda_{dB}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{m}{qB} \frac{V}{\lambda_{dB}}} \quad (5.28)$$

Les rayons de Landau obtenus ainsi coïncident avec les rayons de Larmor classiques ρ_L donnés par

$$\rho_L = mv/qB \quad (5.29)$$

lorsque $\rho_L = \rho_n$. On obtient

$$\rho_n = \frac{1}{\pi} \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda_{dB} \quad (5.30)$$

ce qui correspond aux rayons obtenus de manière heuristique en appliquant la condition de quantification de Bohr-Sommerfeld sur le périmètre des orbites décrites.

Nous souhaitons procéder par analogie avec le cas quantique. Il faut donc transformer l'équation 5.28 pour l'adapter au cas des marcheurs. Une première étape consiste à raisonner en profitant de l'équivalence entre champ magnétique et vorticité, et remplacer la période de Larmor $\tau_L = m/qB$ par son équivalent exact $1/2\Omega$. La seconde étape consiste à remplacer la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} par la seule longueur d'onde qui est susceptible d'exister sur le bain : λ_F . En associant ces deux points, nous pouvons réecrire :

$$\frac{\rho_n}{\lambda_F} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\Omega} \frac{V_W}{\lambda_F}} \quad (5.31)$$

De cette équation, on obtient tout d'abord un adimensionnement envisageable pour les mesures expérimentales. Pour tester celui-ci, des expériences dans différentes huiles de viscosité $\mu = 10 \cdot 10^{-3}$, $20 \cdot 10^{-3}$, $50 \cdot 10^{-3}$ et $100 \cdot 10^{-3}$ Pa.s ont été effectuées. La figure 5.10 (a) présente le rayon des orbites adimensionné par la longueur d'onde de Faraday λ_F en fonction de la période de rotation adimensionnée $(V_W/2\Omega\lambda_F)^{1/2}$ pour ces quatre huiles. Tous les points expérimentaux se placent sur les mêmes plateaux, ce qui confirme la validité de l'adimensionnement proposé ci-dessus. Pour aller plus loin, l'ajustement de ces plateaux par la formule 5.31 peut être testé. Nous constatons qu'il est possible de faire passer par tous les plateaux un jeu de courbes donné par l'equation :

$$\frac{\rho_n}{\lambda_F} = b \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\Omega} \frac{V_W}{\lambda_F}} \quad (5.32)$$

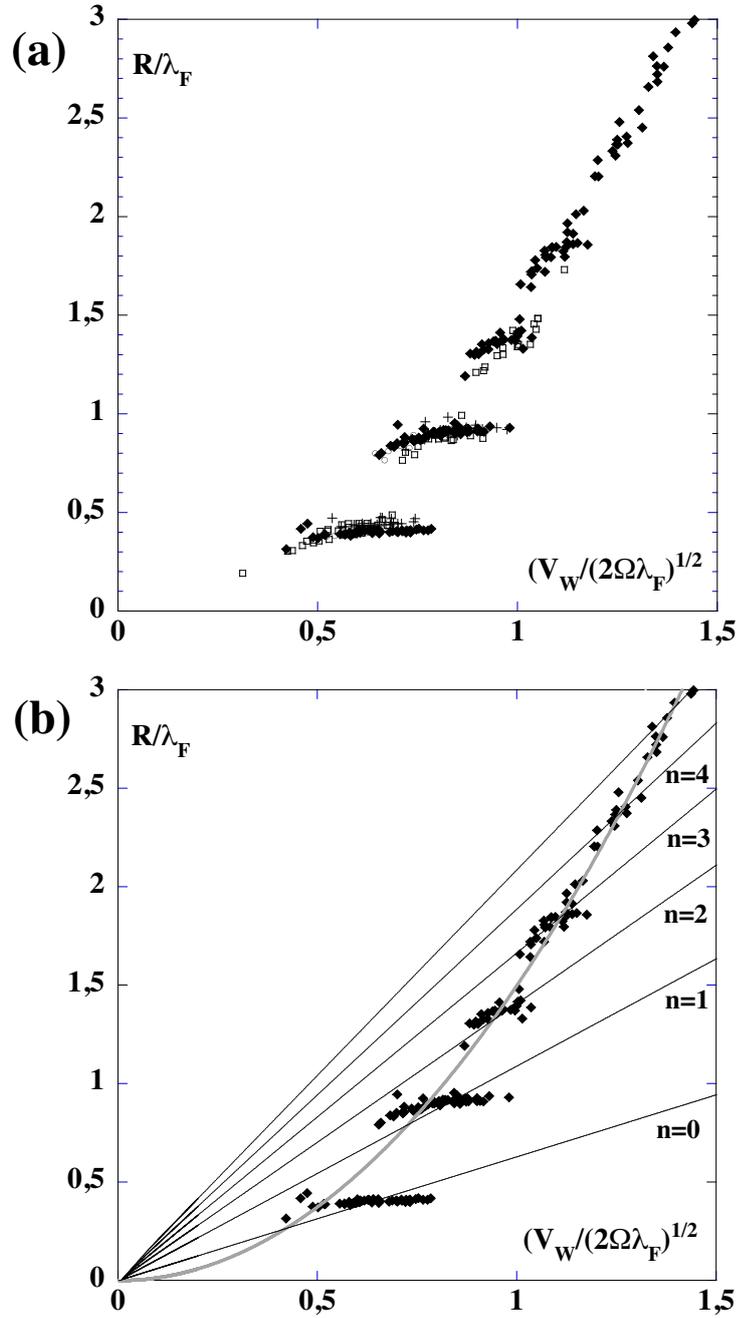


FIGURE 5.10 – (a) Rayons adimensionnés ρ_n/λ_F en fonction de la période de rotation adimensionnée $(V_W/2\Omega\lambda_F)^{1/2}$ pour quatre conditions expérimentales différentes. Croix : $\mu = 10 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, $\lambda_F = 3.75$ mm et $V_W = 8$ mm.s $^{-1}$, cercles blancs : $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, $\lambda_F = 4.75$ mm et $V_W = 8$ mm.s $^{-1}$, carrés blancs : $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, $\lambda_F = 4.75$ mm et $V_W = 12$ mm.s $^{-1}$, losanges noirs : $\mu = 50 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, $\lambda_F = 6.95$ mm et $V_W = 18$ mm.s $^{-1}$. (b) Rayons adimensionnés ρ_n/λ_F en fonction de la période de rotation adimensionnée $(V_W/2\Omega\lambda_F)^{1/2}$ pour de l'huile de viscosité $\mu = 50 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. La courbe en gris correspond à l'ajustement expérimental $R_C^{exp} = a (2\Omega/V_W)^{-1}$, avec $a = 1.2$, les droites en noir aux niveaux $n = 0, 1, 2, \dots$ obtenus avec l'équation 5.32 pour $b = 0.89$.

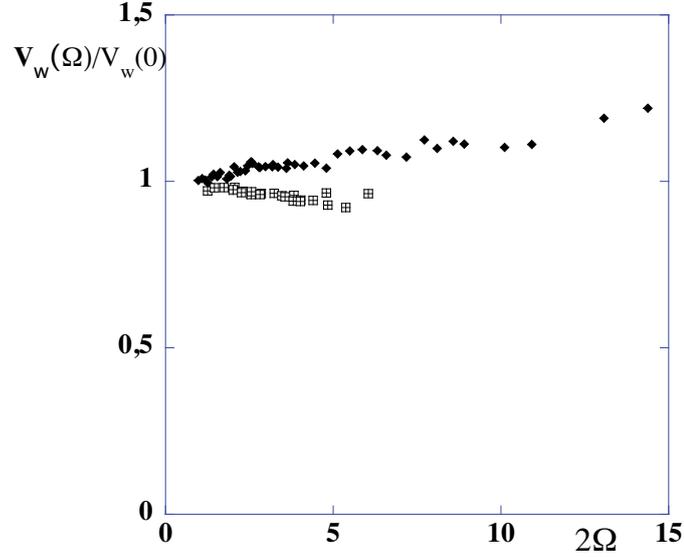


FIGURE 5.11 – Évolution de la vitesse d'un marcheur normalisée par sa vitesse sans rotation $V_w(\Omega)/V_w(0)$ avec la vorticité du bain 2Ω . Les symboles creux correspondent aux cas où la mémoire est faible, les symboles pleins aux cas où la mémoire est importante.

dans laquelle le coefficient $\sqrt{1/\pi} = 0.564$ a été remplacé par un préfacteur b . Pour une valeur $b = 0.89$, toutes les courbes passent par les plateaux expérimentaux (fig. 5.10 (b)). Le sens physique de ce préfacteur peut être interprété en cherchant une équation pour les R_n^0 où la courbe expérimentale continue correspondant à la basse mémoire croise les plateaux. En combinant les équations 5.25 et 5.32, nous obtenons :

$$R_n^0 = \frac{b^2}{a} \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda_F \quad (5.33)$$

En choisissant $b = 0.85$ et $a = 1.5$, en accord avec les résultats expérimentaux, nous trouvons $b^2/a = 0.528$. Ceci signifie que, dans ces expériences, c'est le diamètre des orbites qui est quantifié :

$$D_n^0 = 2R_n^0 \simeq (n + 1/2) \lambda_F \quad (5.34)$$

et non le périmètre comme dans le cas de la quantification heuristique de Bohr-Sommerfeld.

5.3.4 Évolution de la vitesse

Une dernière caractéristique expérimentale doit être mentionnée à ce stade. Lorsqu'un marcheur est placé sur le bain en rotation, sa vitesse dans le référentiel tournant

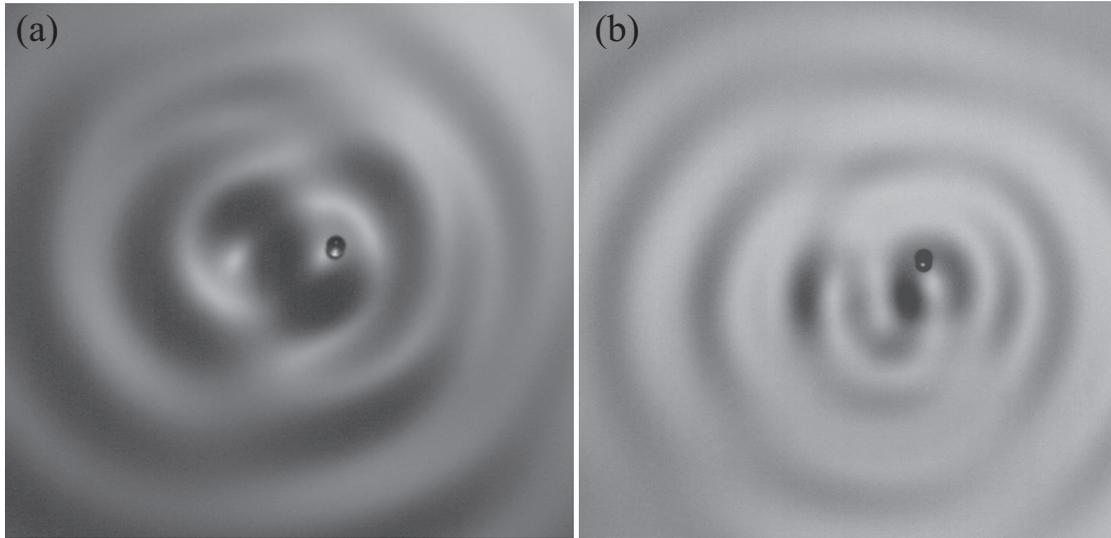


FIGURE 5.12 – Champs d’ondes générés par des marcheurs dans le cas où les orbites sont quantifiées pour de l’huile de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. (a) Marcheur piégé sur le niveau $n = 0$. (b) Marcheur piégé sur le niveau $n = 1$.

évolue avec Ω , mais également avec l’écart au seuil de l’instabilité de Faraday Γ , c’est-à-dire la mémoire du système (voir fig 5.11). Lorsque cette dernière est faible, et que les orbites sont continues, nous constatons que la vitesse du marcheur diminue légèrement lorsque Ω augmente, c’est-à-dire lorsque les orbites se resserrent. A l’inverse, si les ondes persistent longtemps sur le bain et que les orbites deviennent discrètes, nous constatons que la vitesse augmente avec Ω , en marquant des paliers à chaque changement de niveau. Lorsque le marcheur rejoint l’orbite la plus serrée ($n = 0$), la vitesse se met à croître continuellement avec Ω l’augmentation de V_W approche les 30%. Nous verrons dans la suite qu’il est possible d’interpréter cet effet en considérant les ondes qui propulsent la goutte dans les différents cas de figure.

5.3.5 Champs d’ondes

Les résultats présentés montrent l’apparition d’une quantification dans le cas où la mémoire du système augmente. La nature des ondes qui existent sur le bain dans ces conditions joue un rôle prédominant dans cette quantification. Il est donc intéressant de regarder la forme du champ d’ondes généré par un marcheur dont l’orbite est quantifiée. La structure étant liée à l’accumulation des ondes émises au cours du temps par la goutte le long de la trajectoire suivie, la structure suit la goutte au cours de son mouvement de rotation. Cette structure correspond à une sorte d’enroulement des ondes d’un marcheur

libre que nous avons étudié au chapitre 4 qui tournerait avec la goutte. La figure 5.12 montre le champ d'ondes généré par un marcheur piégé sur les orbites $n = 0$ et $n = 1$. Ces structures ressemblent à celles de deux gouttes en orbite l'une autour de l'autre (*voir* chapitre 1) : l'enroulement du champ d'ondes semble correspondre à la présence d'une goutte virtuelle diamétralement opposée au marcheur et qui suivrait la même orbite. Nous verrons dans la suite, à l'aide d'expériences numériques, que cette vision du problème peut être confirmée.

5.4 Simulations numériques

5.4.1 Principe

Pour réaliser des simulations numériques du mouvement d'un marcheur placé sur le bain en rotation, la méthode décrite au chapitre 4 est utilisée. Nous avons vu que l'effet de la rotation est nul sur les ondes et sur une goutte au repos. Pour un marcheur, seule la force de Coriolis doit être ajoutée pour connaître sa trajectoire dans le référentiel tournant. Pour les simulations, les mêmes formes d'ondes sont utilisées et la hauteur de la surface $h(\vec{\mathbf{r}}, t_i)$ en un point $\vec{\mathbf{r}}$ à l'instant t_i est donnée par :

$$h(\vec{\mathbf{r}}, t_i) = \sum_{p=i-1}^{-\infty} \operatorname{Re} \frac{A}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_p|}^{1/2} \exp - \left(\frac{t_i - t_p}{\tau} \right) \exp - \left(\frac{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_p|}{\delta} \right) \exp i \left(\frac{2\pi |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_p|}{\lambda_F} + \phi \right) \quad (5.35)$$

où $\vec{\mathbf{r}}_p$ est la position du point visité par la goutte à un instant $t_p = t_i - (i - p)\tau_F$. Nous avons discuté précédemment la nature des différentes décroissances. La force due à la pente sous la goutte est la même que précédemment, mais il faut maintenant ajouter à chaque cycle de rebond un petit incrément de vitesse $\delta\vec{v}_i = -2\Omega \times \vec{v}_i$ dû à la force de Coriolis qui s'applique sur le marcheur. Cet incrément est appliqué uniquement pendant une durée δt correspondant au vol libre de la goutte. En effet, dans les simulations, nous faisons l'hypothèse d'un contact parfaitement inélastique entre la goutte et le bain : la goutte s'arrête dès qu'elle touche le bain, et sa vitesse horizontale s'annule pendant le choc. Cette hypothèse permet artificiellement de retrouver le préfacteur a introduit pour interpréter les résultats expérimentaux. L'origine de a est ici liée à l'annulation de la vitesse pendant le choc, tandis que, dans les expériences, nous avons attribué son existence à la différence entre la masse de la goutte m_G et la masse effective m_{eff} du marcheur. Ces deux hypothèses ne s'excluent pas mutuellement et des expériences devraient être menées pour discriminer les deux effets.

Les simulations sont réalisées en fabriquant un marcheur numérique, qu'on laisse se

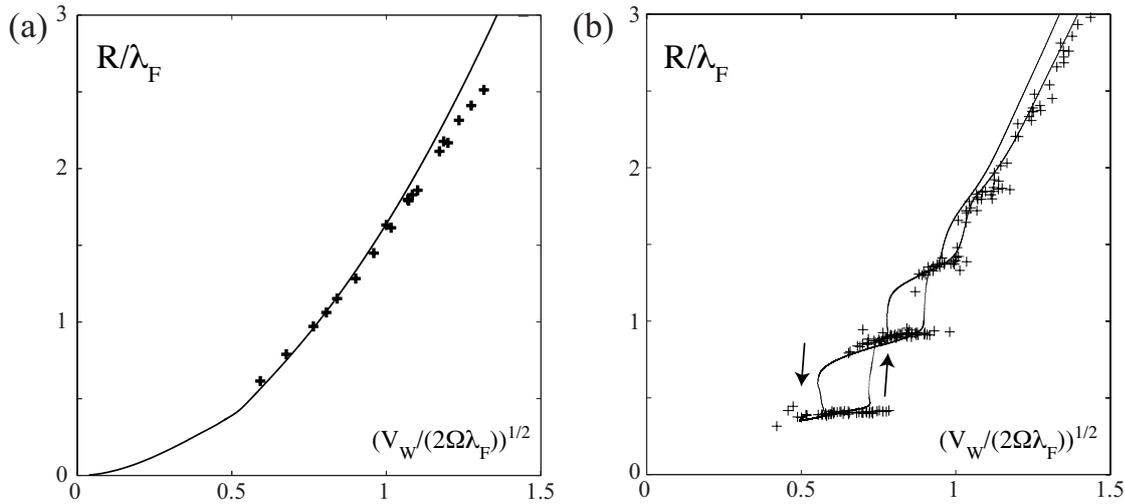


FIGURE 5.13 – (a) Rayons adimensionnés R/λ_F en fonction de $(V_W/2\Omega\lambda_F)^{1/2}$ obtenus par simulation dans le cas où la mémoire est faible ($\tau = 10\tau_F$ et $\delta = 1.6\lambda_F$). Les croix correspondent aux points expérimentaux avec une faible mémoire pour de l'huile de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. (b) Rayons adimensionnés R/λ_F en fonction de $(V_W/2\Omega\lambda_F)^{1/2}$ obtenus par simulation dans le cas où la mémoire est importante ($\tau = 30\tau_F$ et $\delta = 1.6\lambda_F$). Les croix correspondent aux points expérimentaux avec mémoire élevée pour des huiles de viscosité $\mu = 10 \cdot 10^{-3}$, $20 \cdot 10^{-3}$, $50 \cdot 10^{-3}$ et $100 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. Les flèches indiquent le sens de l'hystérèse.

mettre en route et atteindre sa vitesse limite V_W^0 . La force supplémentaire est ensuite ajoutée en augmentant progressivement la valeur de Ω . Des orbites stables sont obtenues avec cette méthode. La trajectoire suivie par le marcheur numérique est ensuite analysée pour étudier le rayon des orbites suivies.

5.4.2 Faible mémoire

Dans un premier temps, on étudie le cas où la mémoire est faible. L'atténuation temporelle est fixée à une valeur $\tau = 10\tau_F$, suffisante pour avoir des marcheurs sur le bain, mais assez faible pour que les ondes ne soient pas trop étendues. La figure 5.13 (a) présente le rayon adimensionné des orbites numériques obtenues en fonction du paramètre $(V_W/2\Omega\lambda_F)^{1/2}$, ainsi que les points expérimentaux à titre de comparaison. Les rayons varient continûment avec $(V_W/2\Omega\lambda_F)^{1/2}$. L'écart à la courbe classique des rayons de Coriolis donnée par $R_C = V/2\Omega$ donné par le préfacteur a est ici fixé par $a = \delta t/\tau_F$, c'est-à-dire par le ratio entre la durée du vol libre du marcheur numérique (pendant laquelle on applique la force de Coriolis) et la durée du cycle de rebond donnée

par τ_F . Ces simulations présentent un excellent accord avec les expériences présentées précédemment.

5.4.3 Longue mémoire

Lorsque l'on se place dans le régime de simulations pour lequel la mémoire est importante ($\tau = 30\tau_F$), les résultats obtenus diffèrent significativement. Un marcheur numérique est préparé, et la rotation du bain est augmentée progressivement jusqu'à la valeur $\Omega = 15 \text{ rad.s}^{-1}$. Elle est ensuite diminuée pour revenir au cas sans rotation. Dans ces expériences numériques, on observe la mise en place de niveaux discrets qui coïncident avec les résultats expérimentaux (fig. 5.13 (b)). Cette procédure permet également de mettre en évidence une hystérèse importante : le décrochement d'un niveau à l'autre ne se produit pas aux mêmes valeurs selon que Ω augmente ou diminue. Il est possible de distinguer les quatre premiers niveaux (lorsque la vitesse de rotation est suffisamment élevée). Si le bain tourne plus lentement, les rayons des orbites perdent leur caractère discret, et les rayons rejoignent la courbe continue obtenue dans le cas où la mémoire est faible ($\tau = 10\tau_F$).

5.4.4 Champs d'ondes

Ces simulations numériques permettent également de visualiser le champ d'ondes qui entoure les marcheurs. La figure 5.14 (a) et (b) montre l'allure de la surface autour d'un marcheur obtenue dans les simulations numériques et piégé sur les niveaux $n = 0$ (a) et $n = 1$ (b)), la trajectoire suivie par le marcheur étant représentée en blanc. Ces champs sont similaires à ceux observés expérimentalement (fig. 5.12), et le même enroulement des ondes le long de la trajectoire est mis en évidence. Comme dans les expériences, ces structures se déplacent en bloc avec la goutte au cours de son mouvement orbital, soulignant encore une fois le caractère indissociable de l'onde et de la particule dans notre expérience.

5.5 Force de quantification générée par les ondes

Les expériences présentées dans la première partie de ce chapitre, ainsi que les simulations numériques qui les confirment, montrent la mise en place d'une quantification à l'échelle macroscopique. Lorsque l'écart au seuil de l'instabilité de Faraday est faible, les ondes excitées à chaque rebond par la goutte persistent longtemps sur le bain. La présence de ces ondes, associée à la nature circulaire des trajectoires, doit suffire à ex-

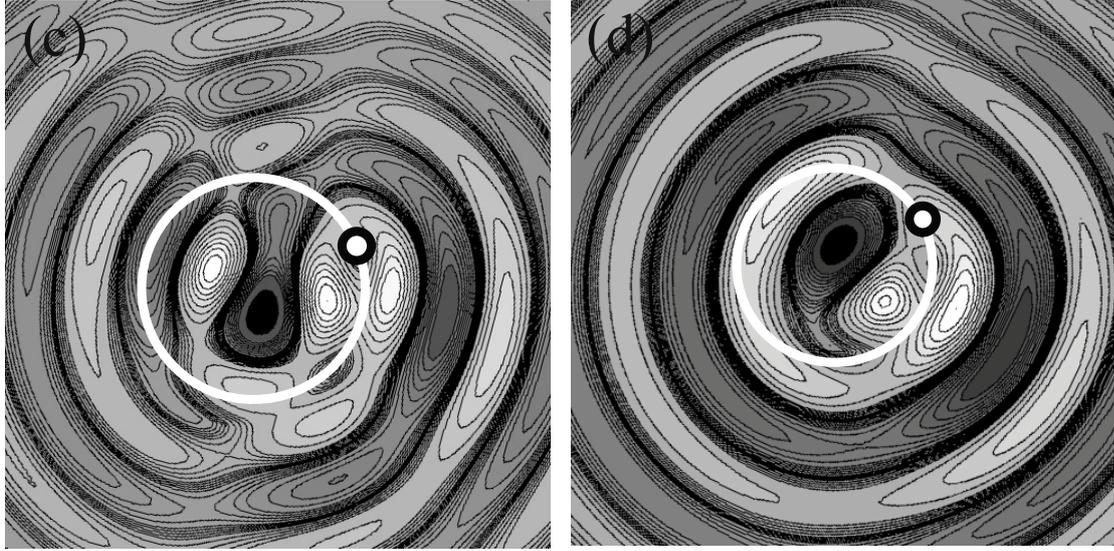


FIGURE 5.14 – Champs d’ondes générés par des marcheurs numériques dans le cas où les orbites sont quantifiées ($\tau = 30\tau_F$ et $\delta = 1.6\lambda_F$). La trajectoire suivie par la goutte est représentée en blanc. (a) Marcheur piégé sur le niveau $n = 0$. (b) Marcheur piégé sur le niveau $n = 1$.

plier l’apparition de niveaux discrets. Nous allons maintenant essayer d’interpréter ce phénomène en regardant en détail l’influence des ondes sur le mouvement de la goutte ; nous verrons également comment ces dernières sont capables de générer une force de quantification sur la surface.

5.5.1 Sources passées

Quelle que soit la mémoire de chemin, le marcheur décrit une trajectoire circulaire, que nous supposons centrée en O . A l’instant t_i , le marcheur se trouve au point \vec{r}_i , c’est-à-dire en D à $\theta = 0$. Nous associons un repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ pour projeter les vecteurs (fig. 5.15). La pente de la surface $\vec{S}(\vec{r}_i, t_i)$ sous la goutte en \vec{r}_i à l’instant t_i est définie comme le gradient de la hauteur dans le plan de l’interface. Elle est donnée par la dérivée spatiale de l’équation 5.35 :

$$\vec{S}(\vec{r}_i, t_i) = \vec{\nabla}h(\vec{r}_i, t_i) \quad (5.36)$$

Ce vecteur est la somme des contributions des sources passées, et il peut être réécrit :

$$\vec{S}(\vec{r}_i, t_i) = \sum_{p=i-1}^{-\infty} \vec{s}(\vec{r}_i - \vec{r}_p, t_i - t_p) \quad (5.37)$$

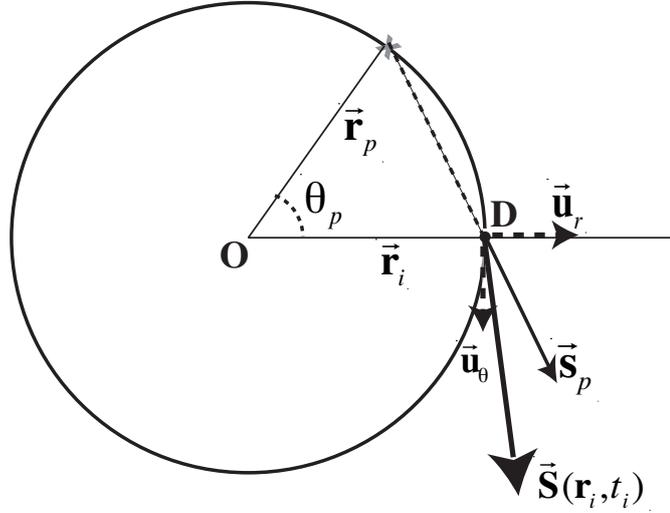


FIGURE 5.15 – Schéma de principe pour les orbites. La trajectoire est circulaire et centrée en O . La goutte se trouve en \vec{r}_i , c'est-à-dire en D à $\theta = 0$. Nous associons un repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ pour projeter les vecteurs. La source qui se trouve en \vec{r}_p est repérée par l'angle θ_p que font les vecteurs \vec{r}_i et \vec{r}_p . Elle génère une pente sous la goutte \vec{s}_p . La somme des contributions de toutes les sources est le vecteur $\vec{S}(\vec{r}_i, t_i)$.

Dans un souci de simplification des notations, nous écrirons $\vec{s} = \vec{s}(\vec{r}_i - \vec{r}_p, t_i - t_p)$ et $\vec{S} = \vec{S}(\vec{r}_i, t_i)$. Nous allons maintenant analyser la nature de \vec{S} en fonction de la mémoire, c'est-à-dire en fonction du nombre de sources qui contribuent à déterminer la force ressentie par la goutte lors de l'impact avec la surface.

5.5.2 Faible mémoire

Lorsque τ est faible, ou que la rayon R_C^{exp} de l'orbite décrite par la goutte est grand, les seules sources qui contribuent au mouvement du marcheur se trouvent sur un arc de cercle situé derrière la goutte (fig. 5.16). La pente résultante \vec{S} sous la goutte peut être projetée selon \vec{u}_r et \vec{u}_θ selon deux composantes $S_r = \vec{S} \cdot \vec{u}_r$ et $S_\theta = \vec{S} \cdot \vec{u}_\theta$. Il est possible de comparer S_r et S_θ à ceux d'une trajectoire rectiligne. Dans cette situation, seule S_θ est non nulle et sert à propulser la goutte. Ici, comme la trajectoire est circulaire, les sources ne sont plus alignées sur une droite et la pente possède une composante radiale S_r non nulle. À cause de la décroissance rapide des ondes au cours du temps, S_r n'a quasiment aucune influence sur le mouvement : ce dernier reste celui prédit lorsque l'on applique uniquement la force de Coriolis \vec{F}_{ic} à la goutte. On peut néanmoins voir une conséquence de la courbure de la trajectoire dans la chute de vitesse observée expérimentalement :

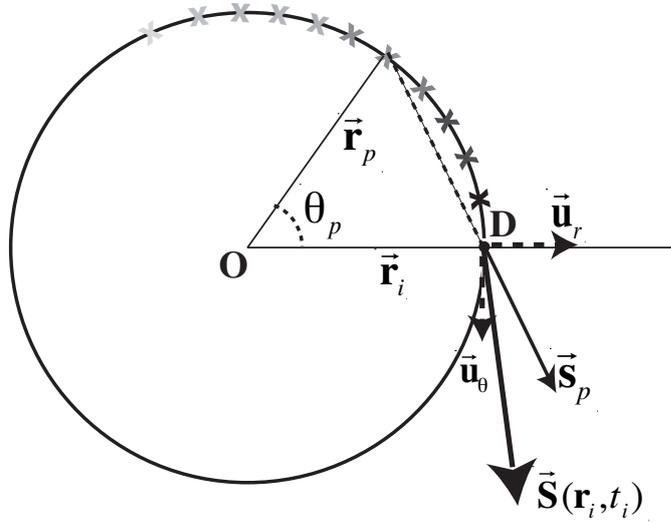


FIGURE 5.16 – Schéma de principe pour les orbites lorsque la mémoire est faible. Seules les sources situées sur la portion de cercle immédiatement derrière la goutte jouent un rôle. Le dégradé de gris représente la décroissance temporelle des sources.

lorsque l'orbite se met en place, S_θ diminue légèrement et la propulsion de la goutte se fait moins efficacement. Sa vitesse diminue en conséquence, d'autant plus que le rayon de l'orbite est faible, c'est-à-dire que la vitesse de rotation du bain Ω est importante.

5.5.3 Longue mémoire : supplément de force dû aux ondes

Lorsque la mémoire de chemin est importante, la situation est plus complexe. Les sources que nous devons prendre en compte sont distribuées tout le long du cercle (voir fig 5.17). Il est aisé de constater que la contribution $\vec{s}(p)$ d'une source passée située immédiatement derrière la goutte est opposée à la contribution d'une source située immédiatement à l'avant de la goutte, et ce pour des raisons purement géométriques. Le long d'un tour complet d'orbite, le vecteur $\vec{s}(p)$ a tourné d'un angle π . Ce saut de phase, dont l'origine est géométrique, a été introduit par Berry [6]. Nous pouvons discuter le rôle de cette phase géométrique sur la dynamique d'un marcheur contrôlé par sa mémoire de chemin. On définit $s_r(p)$ et $s_\theta(p)$ comme les contributions élémentaires d'une source située en θ_p aux composantes radiale et azimutale S_r and S_θ de la pente \vec{S} sous la goutte. Les figures 5.18 (a) et 5.18 (b) présentent $s_r(p)$ et $s_\theta(p)$ en fonction de θ_p le long d'un tour d'orbite. Ces deux contributions oscillent à cause des variations de phase spatiale $\phi_p = 2\pi|\vec{r}_i - \vec{r}_p|/\lambda_F$ le long de la trajectoire (fig. 5.17). Cette phase

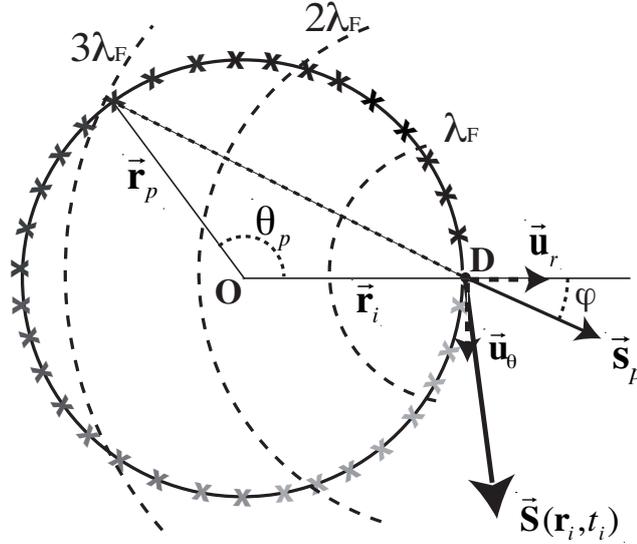


FIGURE 5.17 – Schéma de principe pour les orbites lorsque la mémoire est longue. Les sources (toutes synchronisées par la vibration) qui contribuent à la pente sous la goutte sont distribuées tout le long du cercle. La contribution de chacune des sources oscille avec la distance $|\vec{r}_p - \vec{r}_i|$. Les lignes pointillées, qui correspondent à des cercles centrés en D , mettent en évidence les sources qui contribuent en phase à la pente ressentie par la goutte en D .

augmente avec θ_p jusqu'à $\theta_p = \pi$ puis décroît symétriquement. L'effet additionnel des projections radiale et azimutale donnent des caractéristiques spécifiques à $s_r(p)$ et $s_\theta(p)$.

Composante orthoradiale, évolution de la vitesse

Si nous considérons $s_\theta(p)$ (fig. 5.18 (a)), nous constatons que son enveloppe est modulée par $\cos \theta_p/2$ à cause de la projection azimutale. Ainsi, alors que les sources situées sur l'orbite en $\theta_p = \pi - \theta$ ont la même phase spatiale ϕ_p que celles placées symétriquement en $\theta_p = \pi + \theta$, leurs contributions ont des signes opposés. En conséquence, leur effet s'annule partiellement, et la contribution restante ne dépend que de leur amortissement temporel relatif. Le paramètre τ/T_{orb} , qui correspond à la mémoire de chemin τ sur une période de rotation T_{orb} , contrôle l'intensité de cette contribution. Les résultats expérimentaux que nous avons présentés montrent que la vitesse V_W du marcheur augmente progressivement avec τ/T_{orb} . Cependant, les deux contributions $s_{\pi-\theta}$ et $s_{\pi+\theta}$ se compensent d'autant plus efficacement que τ/T_{orb} augmente, et la somme de ces contributions sur un tour d'orbite tend vers 0, ce qui signifie que la goutte ne devrait plus subir de force de propulsion. Ce paradoxe apparent peut être levé en considérant toutes

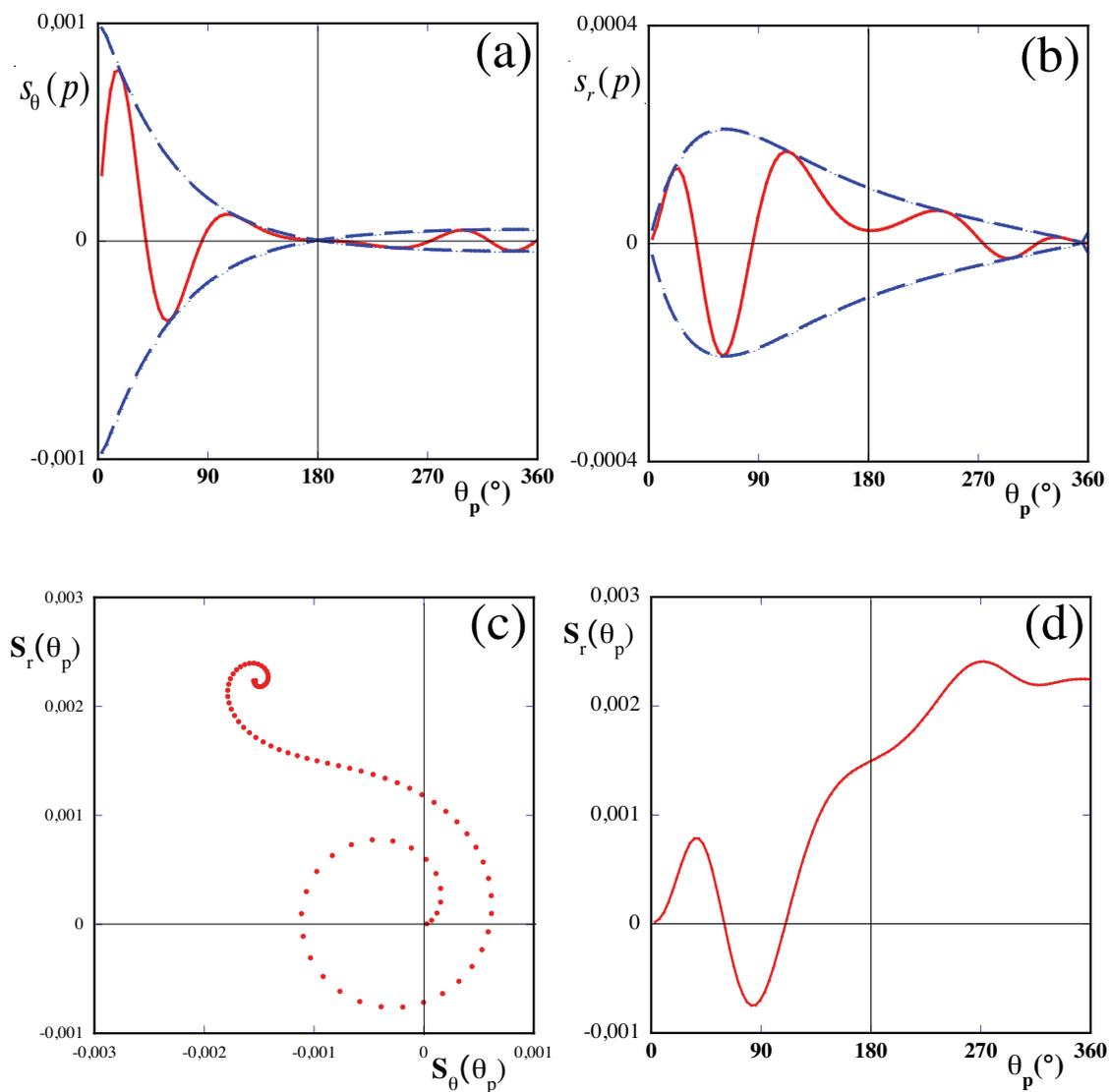


FIGURE 5.18 – a) Contributions à la pente radiale $s_r(p)$ des sources distribuées le long de l'orbite en fonction de leur position angulaire θ_p (variant de 0 à 2π derrière la goutte). (b) Le même graphique pour les contributions à la pente azimuthale $s_\theta(p)$. (c) Spirale analogue à la courbe de Cornu correspondant à l'addition dans le plan complexe des contributions $s_r(p)$ et $s_\theta(p)$ pour des valeurs de θ_p comprises entre $\theta_p = 0$ et $\theta_p = 2\pi$. (d) Variation résultante de la pente $S_r(\theta_p)$ en fonction de θ_p .

les sources passées, et non plus celles situées sur un seul tour. Lorsque τ/T_{orb} croît, le nombre de tours qu'il faut prendre en compte pour déterminer la pente sous la goutte augmente significativement, et l'intégration complète sur tous ces tours conduit à une résultante S_θ plus grande que celle d'un marcheur libre se déplaçant en ligne droite. Nous pouvons ainsi expliquer l'origine de l'augmentation de la vitesse avec la vitesse de rotation : lorsque Ω augmente, les orbites se resserrent et le paramètre τ/T_{orb} croît.

Composante radiale, force de quantification

Nous allons maintenant regarder en détail la composante radiale $s_r(p)$ pour comprendre la force transverse supplémentaire qui résulte de la mémoire de chemin et qui vient s'ajouter à la force de Coriolis pour générer la quantification des orbites (fig. 5.18 (b)). Son enveloppe est modulée par $\sin \theta_p/2$ à cause de la projection radiale. En conséquence, la contribution de sources symétriques avec la même phase spatiale ϕ_p situées en $\theta_p = \pi - \theta$ et $\theta_p = \pi + \theta$ s'ajoutent. Le signe associé à chaque couple de sources dépend uniquement de sa phase spatiale ϕ_p . Le long d'un tour d'orbite, ϕ_p croît jusqu'à un maximum pour $\theta_p = \pi$ puis décroît symétriquement (fig. 5.18 (b)). Il est possible de construire une représentation en terme de phaseur pour comprendre l'effet de ϕ_p . Les figures 5.18 (c) et (d) montrent la contribution cumulée à la force radiale $S_r(\theta_p)$ de sources sommées de 0 jusqu'à θ_p . La résultante $S_r(\theta_p)$ est représentée dans le plan complexe (fig. 5.18 (c)) à l'aide d'une construction similaire à celle proposée par Cornu pour interpréter la diffraction de Fresnel. Il s'agit d'une courbe spiralée en forme de S avec un point d'inflexion en $\theta_p = \pi$. Chaque tour de la spirale correspond à une variation de 2π de la phase spatiale ϕ_p sur un arc de cercle de l'orbite (fig. 5.17). La région du point d'inflexion correspond aux sources qui sont diamétralement opposées à la goutte. Leur contribution ne s'annule généralement pas (mis à part pour certains valeurs spécifiques du diamètre de l'orbite). La figure 5.18 (d) montre l'évolution de sa partie réelle en fonction de θ_p , en intégrant uniquement jusqu'à la fin du premier tour. Nous observons un saut de la résultante cumulée autour de $\theta_p = \pi$ qui donne une résultante non nulle à la pente radiale S_r sous la goutte, c'est-à-dire qu'il existe une force radiale supplémentaire sous la goutte. C'est cette force qui est responsable de la quantification.

5.5.4 Force de quantification et marcheur virtuel

Quelles sont les variations de cette force induite par les ondes en fonction du rayon de l'orbite suivie par la goutte ? Lorsque le rayon augmente, la spirale en forme de S tourne dans le plan complexe. Le point d'inflexion se déplace et conduit successivement à des

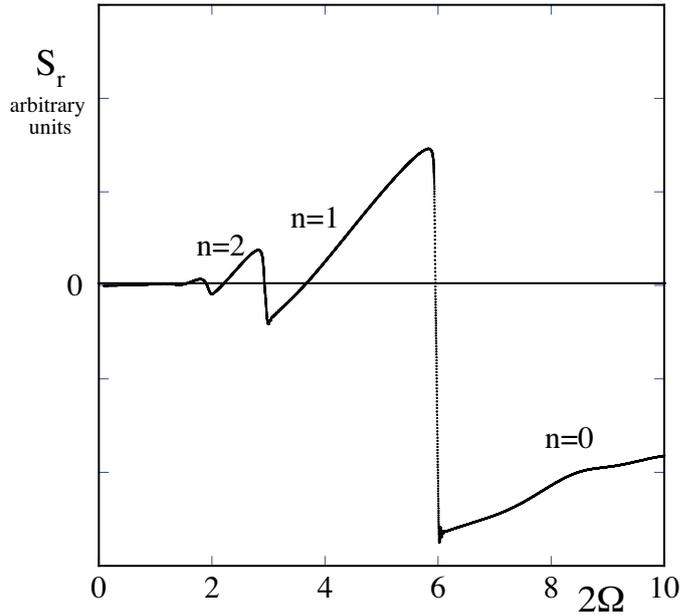


FIGURE 5.19 – Variation de la pente radiale liée aux sources de la dernière orbite $S_r(2\pi)$ en fonction de la vitesse de rotation 2Ω .

sauts négatifs puis positifs de S_r . Les oscillations qui en découlent possèdent la même périodicité que la phase spatiale de la zone diamétralement opposée de l'orbite. Nous obtenons ainsi une périodicité λ_F lorsque les rayons augmentent. La figure 5.19 présente S_r en fonction de 2Ω . Elle est caractérisée par une forme en toit d'usine. Pour les valeurs particulières $\Omega = \Omega_n^0$, $S_r = 0$, et l'on retrouve l'orbite obtenue pour une mémoire faible. Dans tous les autres cas, une force radiale supplémentaire, que nous qualifierons de force de quantification, s'exerce sur la goutte et modifie la valeur du rayon de l'orbite observée. Lorsque la vitesse angulaire Ω est plus petite qu'un des Ω_n^0 , mais proche de cette valeur, l'effet de la force de Coriolis devrait conduire à une orbite un peu plus large. Cependant, la pente S_r est négative : cela soumet la goutte à une force centripète supplémentaire qui s'oppose à l'augmentation du rayon. Réciproquement, lorsque $\Omega > \Omega_n^0$, la pente est positive et elle génère une force centrifuge qui tend à augmenter le rayon. Ces effets sont responsables de l'apparition des plateaux légèrement inclinés autour des Ω_n^0 . Une remarquable simplification ressort de l'analyse que nous venons de faire. Puisque la contribution radiale de la majeure partie des sources se compense et que seules les points situés sur la partie diamétralement opposée jouent un rôle sur la valeur de la pente sous la goutte, leur effet peut être entièrement pris en compte en les remplaçant par un marcheur virtuel situé en un point diamétralement opposé de l'orbite. Nous pouvons

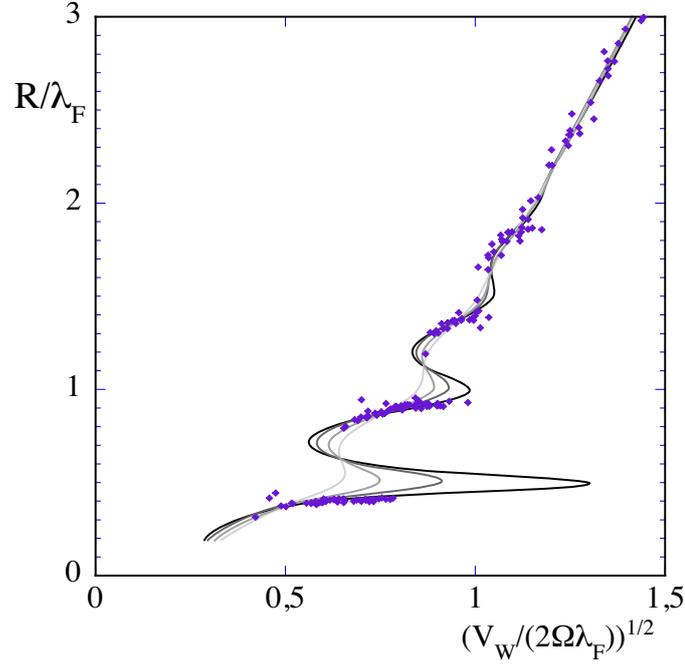


FIGURE 5.20 – Ajustement des résultats expérimentaux par un modèle simplifié (voir éq. 5.38)

alors réécrire la relation fondamentale de la dynamique dans la direction radiale sous la forme :

$$\frac{mV_W^2}{R} = -2\frac{m}{a}\Omega V_W + A \sin\left(2\pi\frac{2R}{\lambda_F} + \phi\right) \quad (5.38)$$

où m est la masse du marcheur, A et ϕ l'amplitude et la phase de l'onde due à la goutte virtuelle. Les simulations numériques montrent que A suit globalement les propriétés d'atténuation des sources situées autour de $\theta_p = \pi$, et ϕ est choisi constant égal à $\pi/2$. La figure 5.20 présente les résultats numériques de ce modèle à travers l'ajustement des données expérimentales (fig. 5.10) qu'il procure. L'effet de mémoire est entièrement inclus dans le coefficient d'amplitude A qui tend vers 0 pour les mémoires faibles. Nous pouvons également voir que notre modèle simplifié permet de retrouver la quantification observée du rayon des orbites et non pas de leur périmètre comme le prévoit la quantification heuristique de Bohr-Sommerfeld.

5.6 Conclusion

Un marcheur, lorsqu'il est soumis à une force transverse, se place sur une orbite circulaire. Dans les cas où la mémoire de chemin est étendue, un jeu de niveaux discrets

se met en place, analogue aux niveaux de Landau qui existent en mécanique quantique. Il existe tout de même une différence importante avec cette situation, puisque ce sont les diamètres des orbites qui sont quantifiés pour les marcheurs, et non leurs périmètres comme en mécanique quantique. On remarque également que ces niveaux discrets apparaissent progressivement quand on augmente la mémoire de chemin. Le niveau $n = 0$ existe (presque) toujours, quel que soit le marcheur. Les niveaux supérieurs apparaissent l'un après l'autre quand on augmente l'accélération de forçage γ_m pour se rapprocher du seuil de l'instabilité de Faraday γ_F .

On peut comprendre cette mise en place incrémentielle en considérant la longueur $L_m = V_W \cdot \tau$ de la mémoire de chemin. Pour que l'orbite soit quantifiée, il est nécessaire d'avoir une mémoire de chemin telle que L_m soit comparable au diamètre de l'orbite, afin d'avoir des sources passées actives. Comme la vitesse des marcheurs évolue faiblement avec l'excitation, c'est τ qui doit augmenter : il faut donc diminuer l'écart au seuil de l'instabilité de Faraday pour voir apparaître les niveaux successifs.

Chapitre 6

Bilan et Perspectives

6.1 Dualité onde-particule à l'échelle macroscopique en présence de mémoire de chemin

Un marcheur constitue une association onde-particule à l'échelle macroscopique. L'association entre ondes et particule au sein d'un marcheur est symbiotique. La goutte (la particule) est mise en mouvement par des ondes qu'elle a elle-même générées sur la surface. Si la goutte disparaît, les ondes s'amortissent après quelques cycles de vibration du bain. Réciproquement, si l'on empêche les ondes de se développer (par exemple en réduisant fortement la profondeur d'huile), on détruit le couplage entre la goutte et ses ondes, et le marcheur est détruit.

Les expériences d'effet tunnel (et de diffraction avant cette thèse) montrent qu'une action spécifique sur les ondes induit une modification du comportement du marcheur. Cette modification nécessite une rétroaction des ondes sur le mouvement de la goutte. Nous avons présenté ici deux expériences distinctes. Dans la première — « l'effet tunnel » macroscopique —, on obtient une réponse aléatoire du marcheur à chaque réalisation. Le comportement est probabiliste et ce n'est qu'à l'échelle statistique qu'on retrouve une forme de déterminisme. Dans la seconde — les niveaux de Landau macroscopiques — on observe une quantification spontanée des orbites suivies par la goutte. Dans les deux cas, ces comportements originaux ont été attribués aux ondes de surface.

La goutte est pilotée par les ondes qu'elle a elle-même créées. D'une certaine manière, les expériences rapportées ici paraissent être une implémentation à l'échelle macroscopique de la théorie de l'onde-pilote, proposée par L. de Broglie pour interpréter la mécanique quantique [22] et reprise plus tard par D. Bohm [9].

Dans notre expérience, il existe une mémoire temporelle pour les ondes, directement

proportionnelle à l'écart au seuil de l'instabilité de Faraday. Le mouvement du marcheur met en place une trace spatiale à la surface du bain. Celle-ci se manifeste au travers d'une superposition linéaire d'ondes de surface qui crée un sillage d'interférences autour du marcheur. Nous avons donc mis en évidence ici une caractéristique supplémentaire associée à l'onde qui pilote les ondes : c'est la mémoire de chemin. C'est cette dernière qui semble être responsable des comportements observés.

Cette mémoire de chemin, inscrite sur la surface, est lue à chaque rebond de la goutte sur la surface : la force ressentie par la goutte est proportionnelle à la pente de la surface lors du rebond. Le marcheur intègre son mouvement passé pour déterminer sa trajectoire future. Cette interaction du marcheur avec son propre passé conduit à des mouvements complexes quand il interagit avec des parois (ou des obstacles en général), ou à une quantification de ses orbites à condition que la mémoire de chemin soit assez étendue.

6.2 Question ouvertes

A ce stade de nos travaux sur les marcheurs, de nombreuses questions se posent encore concernant le lien entre ondes de surface et mouvement du marcheur.

- On peut s'interroger sur le rôle de la mémoire de chemin dans l'apparition de l'inertie des marcheurs. Toute perturbation qui viendrait modifier la trajectoire du marcheur doit se superposer à la résultante de la mémoire de chemin. Plus celle-ci est intense, plus il sera difficile de modifier la trajectoire du marcheur. Cet aspect semble se manifester dans les expériences en rotation, où nous avons mis en évidence une différence entre la masse de la goutte et celle qui doit être utilisée dans la force d'inertie de Coriolis.
- Les comportements « quantiques » apparaissent pour une mémoire de chemin étendue, au voisinage du seuil de l'instabilité de Faraday. Quel est le rôle effectif de la diminution de la dissipation ? Peut-on imaginer que le marcheur, lorsque ses ondes tendent à être conservatives, peut être décrit par un hamiltonien similaire à celui de la mécanique quantique ?
- L'absence de dissipation nécessite de se placer dans une cellule de taille infinie. Que va-t-il se passer si l'on augmente fortement la mémoire de chemin tout en maintenant le marcheur dans une cavité de taille finie ?

6.3 Marcheurs en cavité

6.3.1 Couplage entre ondes du marcheur et cavité

L'étude de la dynamique des marcheurs confinés dans des cavités a été initiée dans les expériences d'effet tunnel. Deux configurations distinctes ont été mises en place en utilisant des cavités de forme carrée ou triangulaire. Dans les deux cas, la trajectoire suivie par un marcheur montre une sensibilité à la mémoire de chemin. La présence de sources nombreuses à la surface conduit à une déstabilisation des trajectoires limites observées loin du seuil de l'instabilité de Faraday.

La forme de la cavité qui limite la trajectoire définit la forme du cycle limite décrit, le marcheur étant réfléchi par les parois quand celles-ci sont suffisamment épaisses. Les collisions successives conduisent à une trajectoire régulière du marcheur dans la cavité. Ces trajectoires typiques sont présentées sur la figure 6.1. Dans la géométrie carrée, la trajectoire est décalée par rapport à la cavité. Cet effet est à mettre à l'actif des propriétés spécifiques de la réflexion des marcheurs : les angles d'entrée et de sortie (par rapport à la normale) ne sont pas égaux.

Ces cycles se déstabilisent lorsque l'influence des ondes est plus importante. En effet, si la mémoire de chemin est importante, on peut observer une influence grandissante de la trajectoire passée, qui conduit, *in fine*, à des traversées tunnel des barrières de potentiel. Comment réagit un marcheur si le confinement est hermétique ? Il va subir l'influence des points visités dans le passé et il est possible que le système rejoigne un régime chaotique. Pour tester cette hypothèse, une première série d'expériences a été entreprise en choisissant une nouvelle géométrie, circulaire cette fois.

6.3.2 Cavité circulaire

Une cavité circulaire est placée dans le bain. Elle est formée par un cadre en laiton et déposé au fond de la cellule de travail. Le cadre, de diamètre intérieur D_c , est épais ; la profondeur d'huile est réduite à $h_1 = 0.5$ mm. Cette configuration permet d'assurer une étanchéité au niveau des ondes de surface entre l'intérieur et l'extérieur de la cavité : l'instabilité de Faraday peut être déclenchée à l'extérieur du cadre sans que la surface interne de la cavité ne soit perturbée.

Avec ce dispositif, un marcheur lâché de manière quelconque se place le long d'une trajectoire circulaire après quelques rebonds sur les bords de la cavité (fig. 6.2 (a)). Le rayon de cette orbite dépend à la fois du diamètre de la cavité D_c et de la vitesse du marcheur V_W . Ces trajectoires limites existent loin du seuil de l'instabilité de Faraday. Si la mémoire est importante, les ondes dans la cavité sont beaucoup plus complexes, et

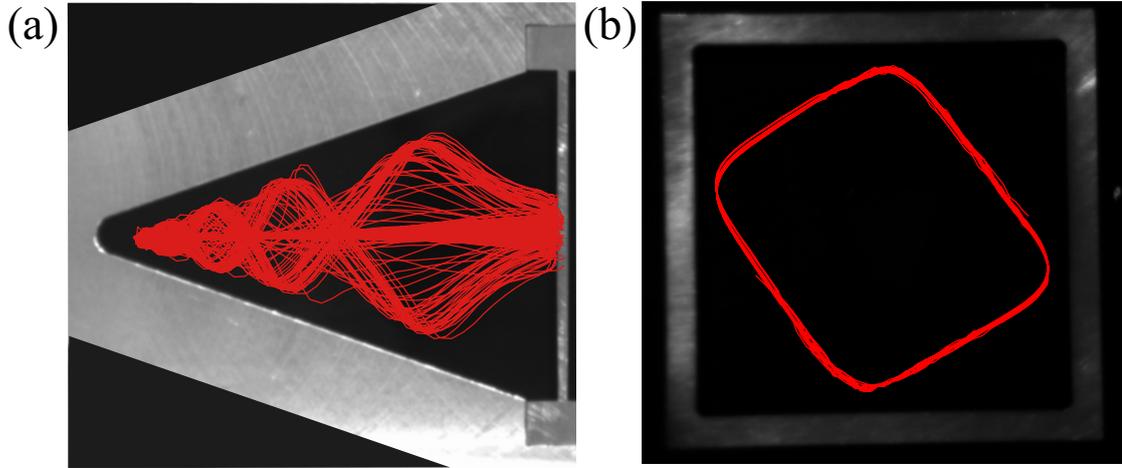


FIGURE 6.1 – (a) Mode propre d'une cavité en forme de triangle, observée au cours d'une expérience d'effet tunnel sans passage du marcheur au-dessus de la barrière. (b) Mode propre d'une cavité carrée.

la trajectoire semble être désordonnée (fig. 6.2 (b)).

Des expériences ont été menées avec deux huiles de viscosité $\mu = 10 \cdot 10^{-3}$ Pa.s et $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, les fréquences, accélérations de forçage et tailles de gouttes étant adaptées à l'huile utilisée. Le motif de l'instabilité de Faraday au seuil est circulaire, mais son axisymétrie est brisée (fig. 6.2 (b)). On peut le décrire comme la combinaison d'une fonction J_n de Bessel et d'une partie angulaire π -périodique. Le seuil de déclenchement de l'instabilité γ_F dépend du rayon R_c de la cavité et augmente lorsque R_c diminue en dessous de quelques λ_F . Un marcheur est déposé dans la cavité circulaire et sa trajectoire est enregistrée en fonction de l'accélération imposée γ_m . L'objectif est d'étudier l'évolution de la trajectoire du marcheur quand la mémoire de chemin augmente.

6.3.3 Évolution des trajectoires avec la mémoire de chemin

Les trajectoires observées dépendent à la fois des propriétés du marcheur et du rayon de la cavité.

- Si l'on utilise un marcheur rapide et une cavité relativement large, les trajectoires observées correspondent à celle des figures 6.3 (a-c). Le cycle limite circulaire existant loin du seuil de Faraday se déstabilise pour laisser place à une trajectoire épicycloïdale (formée par la superposition de deux cercles), qui correspond à l'apparition d'une deuxième fréquence dans le mouvement du marcheur. L'origine de cette deuxième fréquence n'est pas comprise, mais elle pourrait correspondre à celle

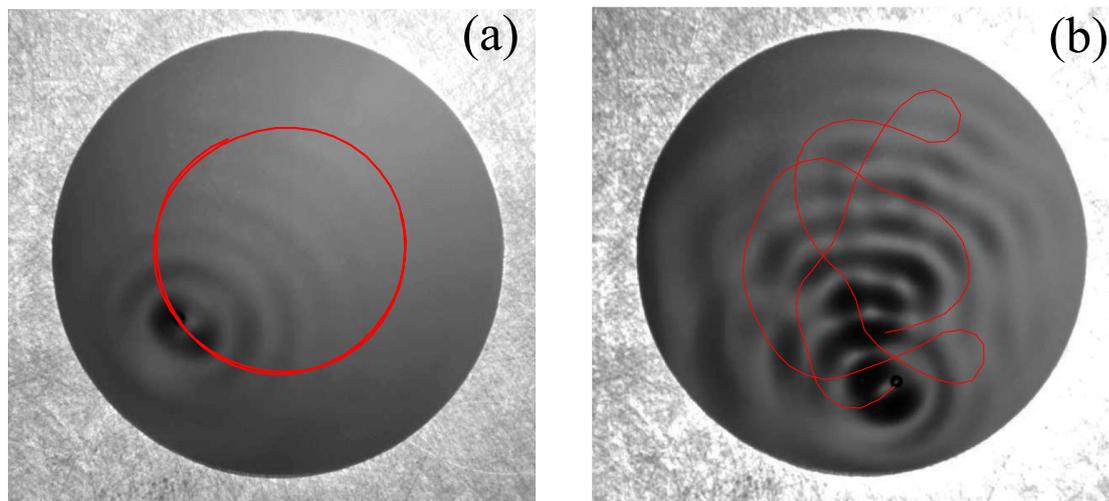


FIGURE 6.2 – (a) Marcheur disposé dans une cavité circulaire avec une mémoire de chemin faible. La trajectoire est circulaire, et les ondes associées sont centrées sur la goutte. (b) Marcheur disposé dans une cavité circulaire avec une mémoire de chemin importante. La trajectoire est désordonnée et les ondes sur la surface sont complexes.

qui existe dans les modes de promenades oscillantes et d'épicycles à deux gouttes mis en évidence par S. Protière dans sa thèse [69]. Ce comportement s'amplifie et finit par conduire à une trajectoire désordonnée lorsque l'on se place à des valeurs de $\Gamma = \frac{\gamma_F - \gamma_m}{\gamma_F} \ll 1$.

- Avec des marcheurs lents dans une cavité plus petite (fig. 6.3 (d-f)), on constate que la séquence observée est légèrement différente : la trajectoire initiale n'est pas circulaire, mais déjà épicycloïdale, et elle se déstabilise en une forme de huit, la seconde fréquence s'accordant dans un rapport $\frac{1}{2}$ avec celle de rotation du marcheur dans la cavité. Ce huit laisse place, au voisinage du seuil de l'instabilité de Faraday, à des trajectoires désordonnées semblables à celles observées pour des marcheurs rapides.

6.3.4 Vers un chaos spatiotemporel ?

Peut-on caractériser l'évolution observée ?

Les épicycles et les huit correspondent à l'apparition d'une seconde fréquence dans la trajectoire. On choisit de se placer en coordonnées polaires (R, θ) pour décrire la position du marcheur, et l'on trace R en fonction du temps pour les différents cas de figure expérimentaux (fig. 6.4). Dans le cas d'un marcheur rapide, la trajectoire circulaire

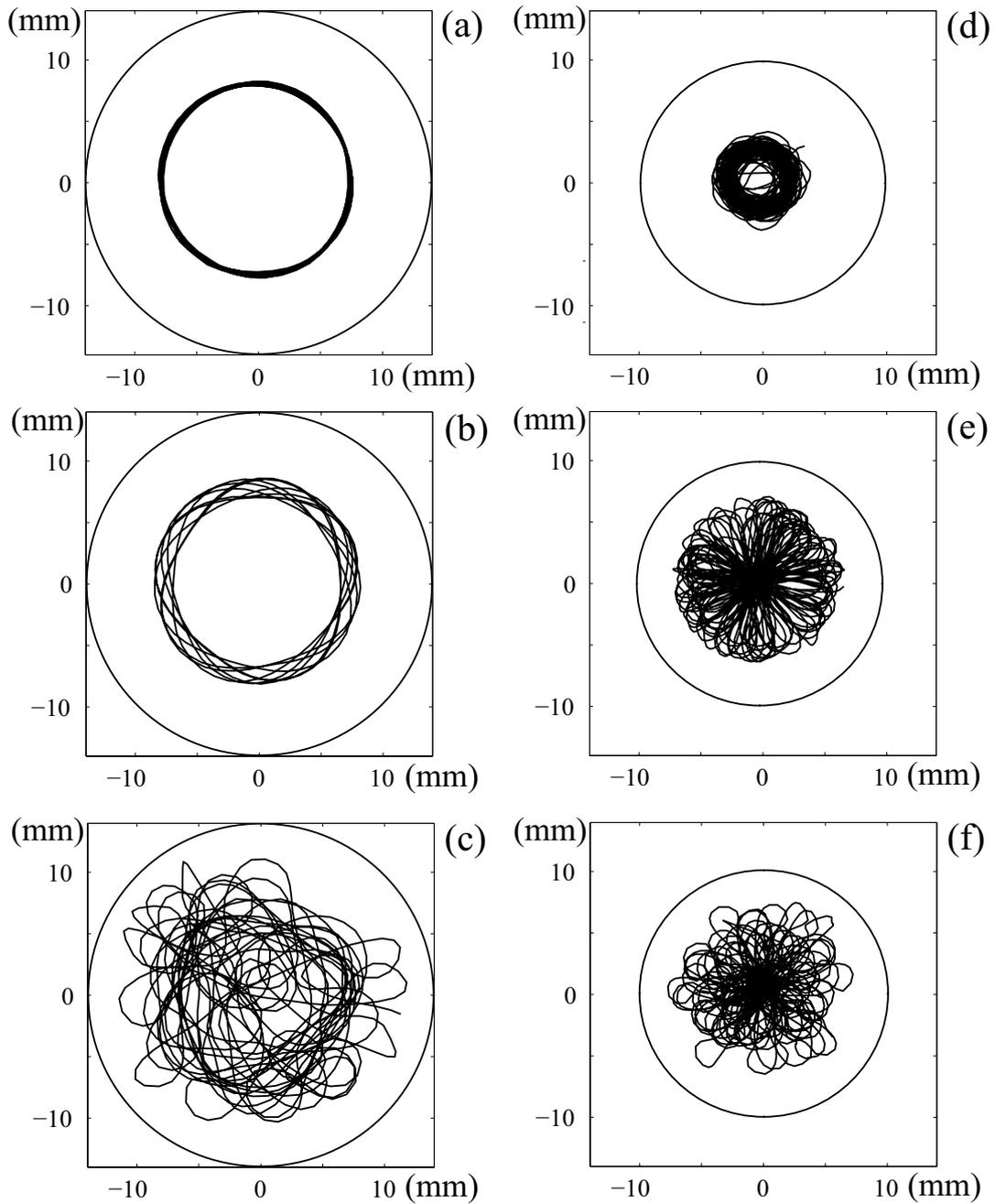


FIGURE 6.3 – Trajectoires enregistrées dans des cavités circulaires. (a-c) Avec une cavité de diamètre $D_c = 27.9$ mm et une huile de viscosité $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. (a) $\Gamma = 19\%$ et $V_W = 5.1 \pm 0.1$ mm/s (b) $\Gamma = 10\%$ et $V_W = 6.5 \pm 0.1$ mm/s (c) $\Gamma = 2\%$ et $V_W = 6.3 \pm 0.1$ mm/s. (d-f) Avec une cavité de diamètre $D_c = 19.85$ mm et une huile de viscosité $\mu = 10 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. (d) $\Gamma = 13\%$ et $V_W = 12 \pm 0.1$ mm/s (e) $\Gamma = 9\%$ et $V_W = 12$ mm/s (f) $\Gamma = 5\%$ et $V_W = 12.1 \pm 0.1$ mm/s.

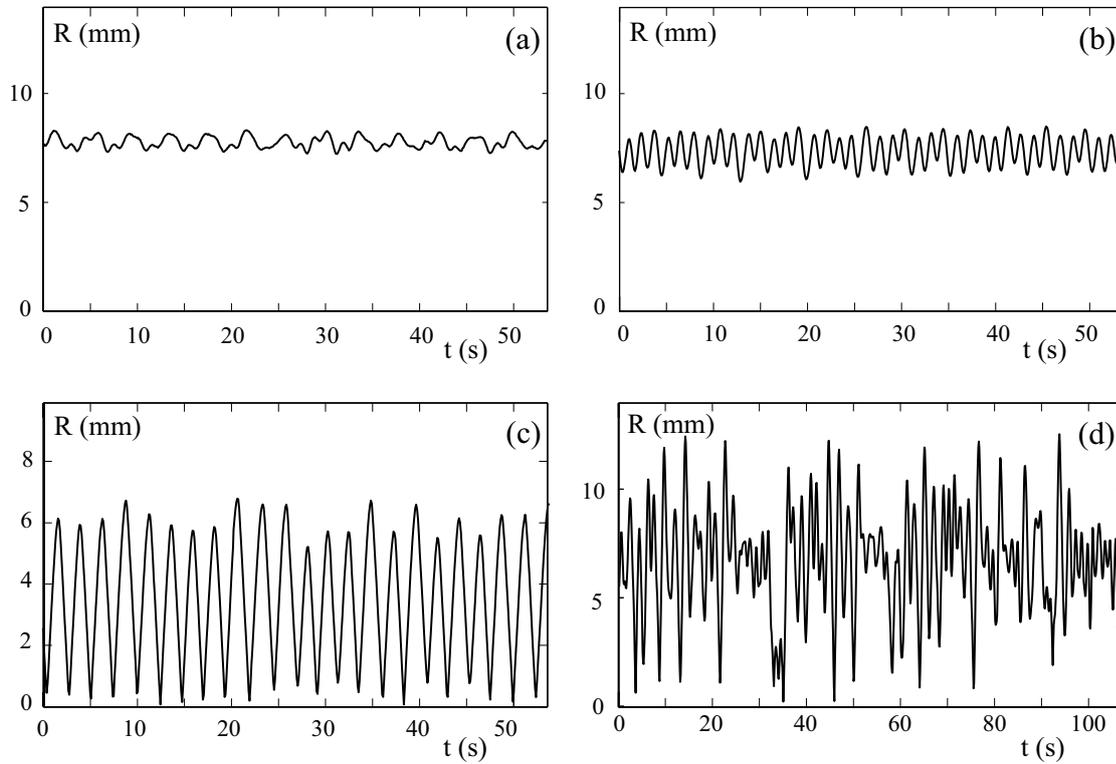


FIGURE 6.4 – Distance $R(t)$ entre le marcheur et le centre de la cavité en fonction du temps t . (a) $D_c = 27.9$ mm, $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, $\Gamma = 19\%$ et $V_W = 5.1 \pm 0.1$ mm/s (b) $D_c = 27.9$ mm, $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, $\Gamma = 10\%$ et $V_W = 6.5 \pm 0.1$ mm/s. (c) $D_c = 19.85$ mm, $\mu = 10 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, $\Gamma = 9\%$ et $V_W = 12$ mm/s. (d) $D_c = 27.9$ mm, $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, $\Gamma = 2\%$ et $V_W = 6.3 \pm 0.1$ mm/s.

correspond à un rayon $R(t)$ constant (fig. 6.4 (a)). L'apparition d'épicycles coïncide avec des oscillations de R à la seconde fréquence (fig. 6.4 (b)). Quand cette seconde fréquence résonne avec la fréquence de rotation avec un rapport $\frac{1}{2}$, le marcheur décrit des huit dans la cavité, et le rayon présente des oscillations d'amplitude importante (fig. 6.4 (c)). Enfin, dans le régime désordonné observé au voisinage immédiat du seuil, le rayon semble évoluer de manière aléatoire (fig. 6.4 (d)). Les bouffées régulières correspondent à une succession de boucles serrées, qui peuvent être fermées sur elles-mêmes. La taille typique de ces boucles semble être reliée à λ_F et pourrait correspondre aux auto-orbités obtenues dans les expériences en rotation.

Quelle est la nature du désordre que présente la trajectoire ? S'agit-il d'une transition vers un chaos spatio-temporel ?

6.4 Billards classiques et quantiques

Cette évolution peut être mise en regard des *billards* classiques et quantiques. Il s'agit alors d'étudier la trajectoire suivie par une particule (classique ou quantique) lancée dans une cavité de forme prédéterminée en se fixant des lois de réflexion sur les parois. Dans le cas classique, on peut montrer que certaines formes un peu complexes (stades...) conduisent à une forme de chaos dans la trajectoire des particules puisqu'elles présentent une sensibilité croissante aux conditions initiales. Dans le cas quantique, on étudie plutôt la résonance entre la forme de la cavité et les ondes qui sont susceptibles de s'y développer. Des zones d'amplitude plus importantes (les *scars* en anglais) peuvent apparaître [45], à la manière de ce qu'on observe quand on étudie l'instabilité de Faraday dans une géométrie en forme de stade [49]. Le lien avec les phénomènes de localisation de la fonction d'onde dans les billards quantiques sont établis [12], en particulier dans l'étude expérimentale de certaines cavités laser [46].

La mémoire de chemin nous permettrait d'effectuer un passage depuis le cas classique et déterministe vers des solutions chaotiques pour les trajectoires. Elle agirait alors comme une variable ajustable qui conférerait un poids de plus en plus important aux ondes dans la dynamique du marcheur, la résonance des ondes générées par la goutte avec la forme de la cavité sélectionnant les modes pouvant exister à la surface. Le rôle de la mémoire de chemin dans l'apparition de certains phénomènes quantiques pourrait être mieux compris par ces expériences et conduire à poser une analogie formelle avec les systèmes quantiques.

Annexe A

Articles

Dans cet appendice, nous présentons successivement deux articles consacrés aux propriétés des gouttes rebondissantes non marcheuses. Il s'agit dans les deux cas d'étudier la nature de l'interaction entre les gouttes qui est véhiculée par les ondes.

- Le premier article étudie l'interaction entre deux gouttes et la formation de duos de gouttes. Des duos asymétriques sont susceptibles de se déplacer sur la surface, le sens de déplacement étant donné par la taille respective de deux gouttes et le régime de rebond qu'elles ont au cours du temps.
- Le second article étudie la possibilité de construire des réseaux réguliers de gouttes sur la surface. En fonction du régime de rebond des gouttes, on peut sélectionner la distance d'équilibre entre deux gouttes, en la fixant sur des valeurs entières ou demi-entières de la longueur d'onde λ_F . On fabrique ainsi des structures périodiques qui correspondent aux réseaux archimédiens.

Wave propelled ratchets and drifting rafts

A. EDDI^{1(a)}, D. TERWAGNE², E. FORT³ and Y. COUDER¹

¹ *Matières et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot, CNRS - UMR 7057*

Bâtiment Condorcet, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet 75205 Paris cedex 13, France, EU

² *GRASP-Photopôle, Institut de Physique B5, Université de Liège - B-4000 Liège, Belgium, EU*

³ *Matériaux et Phénomènes Quantiques, Université Paris Diderot, CNRS - UMR 7162*

Bâtiment Condorcet, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet 75205 Paris cedex 13, France, EU

received 24 January 2008; accepted in final form 26 March 2008

published online 7 May 2008

PACS 47.55.D- – Drops and bubbles

PACS 05.65.+b – Self-organized systems

PACS 05.45.-a – Nonlinear dynamics and chaos

Abstract – Several droplets, bouncing on a vertically vibrated liquid bath, can form various types of bound states, their interaction being due to the waves emitted by their bouncing. Though they associate droplets which are individually motionless, we show that these bound states are self-propelled when the droplets are of uneven size. The driving force is linked to the asymmetry of the emitted surface waves. The direction of this ratchet-like displacement can be reversed, by varying the amplitude of forcing. This direction reversal occurs when the bouncing of one of the drops becomes sub-harmonic. As a generalization, a larger number of bouncing droplets form crystalline rafts which are also shown to drift or rotate when asymmetrical.

Copyright © EPLA, 2008

Introduction. – The self-propulsion of particles moving in a spatially periodic, asymmetrical potential has been widely studied recently. Several physical systems have been proposed, aimed at providing models for the motion of biomolecular motors in which the energy input is the Brownian motion [1,2]. In these model systems an asymmetry is needed which can have various origins. i) It can come from the substrate: it was shown, for instance, that Leidenfrost drops bouncing on an asymmetrically structured medium translate spontaneously [3]. ii) It can be introduced in the moving object as, *e.g.*, when it is formed of an asymmetrical assembly of two different structures [4]. iii) Finally, in non-linear systems the breaking of symmetry can be spontaneous and due to a bifurcation [5]. In a recent work [6,7], we showed that the latter phenomenon was responsible for the spontaneous horizontal displacement of a liquid drop on a vertically vibrated bath of the same fluid. In general the drop bounces at the forcing frequency and is otherwise motionless as described in [8–10]. Near the Faraday instability threshold, the bouncing becomes sub-harmonic and the drop becomes the source of a localized Faraday wave packet. By interaction with its own wave, the drop becomes a self-propelled “walker” moving on the surface at constant velocity [7]. In the present letter we

investigate, in the same type of experiment, the behaviour of self-assembled asymmetrical bound states. Each element is here individually motionless: the motion comes from the asymmetry of their assembly.

Experiment. – The experiments are performed on a liquid bath of thickness $h_0 = 3$ mm submitted to a vertical oscillating acceleration $\gamma = \gamma_m \cos(2\pi f_0 t)$. In the following the control parameter of the system will be the non-dimensional amplitude of the forcing acceleration: $\Gamma = \gamma_m/g$. The liquid is silicon oil with viscosity $\mu_1 = 20 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, surface tension $\sigma = 0.0209 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ and density $\rho = 0.965103 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. The forcing frequency $f_0 = 80 \text{ Hz}$ is fixed. The drops are created by swiftly removing a pin dipped in the oscillating bath. The breaking of the liquid bridge between the pin and the bath can generate drops with diameters $0.1 < D < 1.5$ mm. When the forcing amplitude is large enough, typically when γ_m becomes larger than g , the drop lifts off at each period. The air film, which separates the drop from the substrate, is renewed at each period so that the bouncing can be sustained indefinitely [8,10]. The detail of their bouncing can be observed and recorded using a fast video camera (1000 images/s).

Bound states. – When two drops are present on the interface they “condense” into a stable bound state, a distance d_{bd}^0 separating them. The non-local interaction between drops is provided by the damped capillary waves

^(a)E-mail: antonin.eddi@univ-paris-diderot.fr

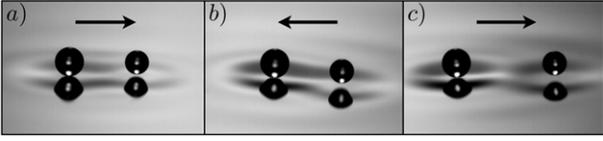


Fig. 1: Photographs of self-assembled bouncers forming self-propelled bound states. The two droplets have diameter of $D_1 = 0.73$ mm and $D_2 = 0.89$ mm, respectively. Γ is the vertical acceleration normalized by g . In case a) ($\Gamma = 2.6 < \Gamma_1$), the two droplets are simple bouncers and the ratchet is pushed by the larger droplet. In case b) ($\Gamma_1 < \Gamma = 3.3 < \Gamma_2$), the smaller droplet has a period-doubled bouncing and has become the pusher. In case c) ($\Gamma_2 < \Gamma = 3.6$), the motion has reversed again as both drops have become period-doubled bouncers. See also the supplementary multimedia material [Ratchet motion.mov](#).

they emit. When a drop hits the bath, the collision forms a small crater in the surface. When the drop lifts up, the wave created by the shock evolves freely, the edge of the crater forming the crest of a circular wave propagating radially. In a bound state, each drop falls on a surface disturbed by the circular wave emitted during previous periods by its neighbour. With two drops of identical size, the system self-organizes in such a way that, during its collision with the bath, the horizontal impulse given to each drop is zero. This equilibrium can be obtained at a distance between drops $d_{bd}^0 = \lambda_0 - \epsilon$, where λ_0 is the wavelength of the surface waves at the forcing frequency [7], and ϵ is an offset due to finite duration of the collision. With more than two drops the condensation leads to the formation of stable rafts with a crystalline lattice of the same periodicity d_{bd}^0 . With drops of identical size both the bound states and the clusters are motionless. When they are formed of drops of different sizes, they have a spontaneous drift motion.

We first focus on the association of two drops of diameter D_1 and D_2 (with $D_1 < D_2$). For low values of $\Gamma = \gamma_m/g$ the bound state they form is observed to translate, the large drop pushing the small one. This is the mode 1 shown in fig. 1a. In fig. 2, we have plotted the velocity of several bound states as a function of Γ ; mode 1 being associated to negative velocities. The bound state's velocity is a function of both diameters of the drops. Relatively fast translation motions are observed as, *e.g.*, $V = 3$ mm/s for drops with $D_1 = 1$ mm and $D_2 = 1.12$ mm.

When Γ is increased, the velocity of the pair becomes at first larger, then a reversal of the direction of motion is observed so that the small drop now pushes the large one (mode 2, fig. 1b). This transition, observed for all pairs of drops, occurs at a value Γ_1 which is a function of the diameter D_1 of the smaller drop (fig. 2).

When the two droplets have diameters in between $D = 0.5$ mm and 0.9 mm, a more complex sequence of behaviors is observed, characterized by two new thresholds, Γ_2 and Γ_3 . Over the value Γ_2 there is a second reversal in the direction of motion (transition to mode 3, fig. 1c). In this case the large drop pushes again the small one. One can

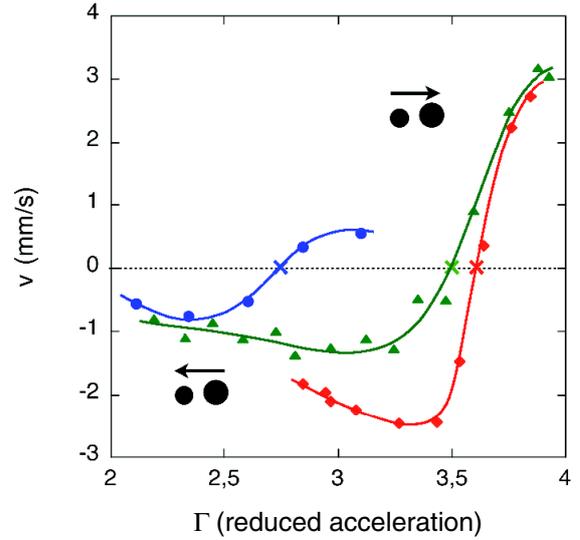


Fig. 2: The velocity of 3 couples of droplets as a function of Γ . The dots correspond to a couple of bound drops with $D_1 = 0.87$ mm and $D_2 = 0.96$ mm, the triangles to $D_1 = 1$ mm and $D_2 = 1.12$ mm and the rhombs to $D_1 = 1.03$ mm and $D_2 = 1.23$ mm. The continuous curves are simple interpolations. The crosses correspond to the reversal threshold Γ_1 .

note that, after this transition, the distance d_{bd} between the two drops becomes larger. Finally, the third threshold is reached at $\Gamma = \Gamma_3$, when the drops begin orbiting around each other.

Before giving an interpretation of these effects we must first characterize the bouncing of a single droplet. In our fixed experimental conditions (*i.e.* viscosity and forcing frequency being fixed) the types of observed bouncing are a function of the droplet diameter D and of the reduced acceleration Γ [7]. Figure 3a is a phase diagram which summarizes the behaviors observed for a single droplet. In the region B of this diagram, the drop bounces at the forcing frequency. When Γ is increased the successive jumps become alternatively large and small, so that the period of the motion doubles (in region PDB of fig. 3a). The transition to this period doubling strongly depends on the drop's size. Larger drops do not lift away so easily because their deformation increases the size of their zone of near contact. Both the simple bouncing and the period doubling occur for larger values of Γ . This is related to the deformation of the drop during its collision with the substrate. This deformation depends on the drop's size D since it is characterized by the Weber number: $We = (\rho V^2 D)/(2\sigma)$, the ratio of the kinetic energy of the drop to its surface energy. For drops of intermediate size, $0.5 < D < 0.9$ mm the period doubling can become complete so that the drop touches the surface once in two periods. Correlatively, it becomes a "walker" (in the region W in fig. 3a) moving at a constant velocity in the horizontal plane. The walkers were already investigated elsewhere [7].

We can now return to pairs of interacting drops. They form stable bound states at a well-determined distance

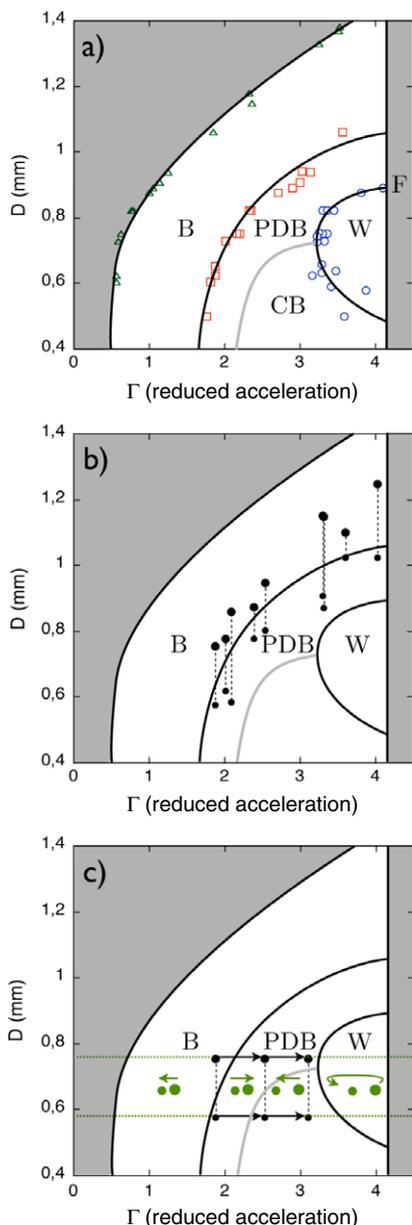


Fig. 3: a) Phase diagrams of the droplet's behaviour as a function of their diameter D and of the reduced acceleration Γ . The viscosity of the silicon oil used is $\mu = 20 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ and the forcing frequency $f_0 = 80 \text{ Hz}$. The various zones correspond to the different behaviors of a single droplet: in B it bounces at the forcing frequency, in PDB the bouncing has undergone a period doubling, in CB the bouncing has become chaotic through a period-doubling cascade. In region W the droplets become walkers with a spontaneous horizontal displacement at a constant velocity. Region F is the Faraday instability zone. Panel b) shows, on the same phase diagram, the transition value Γ_1 for nine bound states. Two droplets forming a bound state are linked by a vertical dashed line. Their diameters are given along the ordinate axis. The abscissa at which they are represented is the value of Γ_1 for each bound state. Panel c) shows, with the same principle, the three thresholds observed for one single pair of droplets with diameters $D_1 = 0.57 \text{ mm}$ and $D_2 = 0.75 \text{ mm}$.

d_{bd}^0 from each other. Their non-local interaction is due to the surface wave they emit by their bouncing. The observed drift motion of uneven drops signifies that the forces exerted by the droplets on one another are not symmetrical: action appears to be different from reaction. In order to understand this drift we can first consider the motion of each droplet, then we will return to a global description of the system.

Local behavior. – The fast camera at a large magnification (see fig. 1) reveals images of the drops forming the ratchet in the three different regimes. In mode 1 both drops oscillate at the same frequency. However, the drops being unequal, neither the lift-off, nor the collision after the free flight, are simultaneous. At each period, the small drop hits the interface later than the large one. Being close to it, the small drop falls on the outer slope of the ridge formed by the larger drop. It thus receives a forward kick. Correlatively, the crater of the large drop becomes assymetrical by the collision of the small drop. As a result, at lift-off, the large drop also moves forward. Both drops thus receive a kick in the same direction and propagate together.

Where does the reversal in the motion direction come from? Just over the transition the small drop has undergone period doubling so that its successive collisions become uneven. One out of two shocks is weak and ineffective. During the other collision, the small drop hits the interface before the large one and repels it (see fig. 1b). This is confirmed by direct observation with a fast video camera. In fig. 3b, we have used the previous phase diagram, fig. 3a, of the individual droplets to represent the threshold values of Γ_2 for pairs of droplets. Γ_2 is systematically slightly larger than the value of Γ for which the smaller drop has entered the region of period doubling.

Global considerations. – The two drops receive energy from the vibration generator but, as the imposed vibration is vertical, it does not directly provide a driving force. The motion is due to the initial asymmetry resulting from the different size of the droplets. This is natural: considered as a whole the two drops do not form an isolated system because they emit waves which propagate away. The waves are carrying away a flux of momentum which can be estimated. Observing the waves far from the bound state, one can assume that they are locally travelling plane sinusoidal waves with surface elevation $\zeta = a \cos(\omega t - kx)$, a being the wave's amplitude, ω its pulsation and k its wave number. Such waves possess an average momentum $1/2(\rho\omega a^2)$ per unit surface, with ρ the fluid density [11,12].

This action reaction effect between the droplets and the waves explains the ratchet motion. However, it should be recalled that there is no exact momentum conservation in our system, because of dissipation. Consequently, it is not possible to make this argument more quantitative. Besides dissipation is needed. The emitted waves are

damped by viscosity before reaching the boundaries so that no reflected wave returns to the ratchet. If dissipation vanished, waves would reflect on the borders and accumulate on the whole bath. The droplets would then have a chaotic motion on those waves. In a finite cell the breaking of time symmetry by dissipation thus appears necessary to propulsion. Note that in an infinite system dissipation should not be needed, causality being sufficient to give a direction to the wave propagation.

We can now consider the flux of momentum due to each of the droplets. At low forcing acceleration, observation with a fast camera shows that both drops oscillate at the forcing frequency f_0 . Because of the difference of their masses the waves emitted by the two drops have different amplitudes, the larger the mass, the larger the amplitude. The reaction, resulting from the emission of momentum by the waves, pushes the bound state, the large droplet being behind.

With the increase of Γ , the bouncing of the smaller drop undergoes a period-doubling transition while the larger drop continues bouncing at the forcing frequency.

After period doubling, the small drop begins to emit surface waves of frequency $f_0/2$. This is the Faraday frequency, which is the least damped by the system, because of the proximity of the Faraday instability threshold. Independent measurements enable us to measure the amplitude of the waves. In the typical situation shown in fig. 4, the amplitude of the wave emitted by the small droplet is approximately five times greater than the amplitude of the wave emitted by the larger drop. Thus, the asymmetry of the wave emission is reversed and the flux of momentum carried away by the emitted wave is larger on the side of the small drop. The resulting reaction pushes the bound state, the small drop being behind. Figure 3b confirms that Γ_1 corresponds to the value for the period doubling of the smaller drop.

When the two droplets have diameters in the narrow range between $D=0.5\text{mm}$ and 0.9mm , at a value Γ_2 the distance d_{bd} between the two droplets increases and correlatively the direction of motion changes again. The plot in fig. 3c confirms that Γ_2 corresponds to the value for the period doubling of the larger drop. In this case, both droplets emit waves at the Faraday frequency. The distance d_{bd} changes accordingly to reach $d_{bd}^1 = \lambda_F - \epsilon$, where λ_F is the wavelength of the surface waves at the Faraday frequency (see fig. 1c). Finally, the third threshold Γ_3 is reached where the drops begin orbiting. This corresponds to the situation when one of the drops achieves a complete period doubling and enters the W region of the phase diagram (see fig. 3c).

Drifting and rotating aggregates. – The existence of aggregates has been previously investigated [7,13,14]. However, we show here a new behaviour relying on the same physical effect as the spontaneous motion of a two-droplets bound state. When the drops forming the aggregate are of uneven size, a slow spontaneous

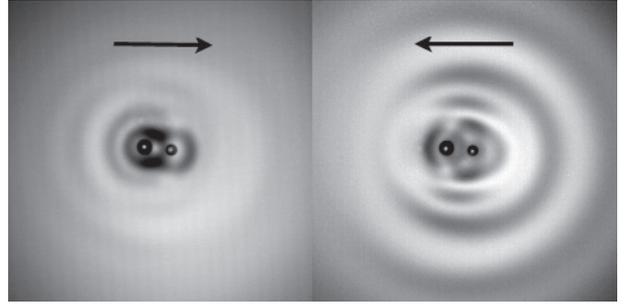


Fig. 4: Two top views of the same ratchet. Left: below Γ_1 the larger drop emits a wave of larger amplitude. Thus the bound state propagates to the right. Right: over Γ_1 , the smaller droplet has undergone a period doubling and emits a Faraday wave of larger amplitude: the bound state propagates to the left.

displacement of the whole cluster is observed. The nature of the motion depends on the symmetry of the system. The global shape of the small aggregates is dominated by the trend to form a triangular lattice. It is combined with a trend for an aggregate formed of a given number of particle to minimize its outer perimeter.

The simplest possibility is the case of three drops. This type of bound state, with either a small drop and two large ones or the reverse situation, present the same first reversal. If we consider larger aggregates, in first approximation, each drop located at the periphery emits a wave, which can only propagate in the free surface. The reaction to the emission of the wave by each droplet placed at the periphery will be perpendicular to the local facet or if it is located at a vertex, along the bisector of the wedge under which it “sees” the free surface. If the direction of emission passes through the center of mass of the aggregate, the reaction will generate a drift, if not it will create an angular momentum and the cluster will rotate. Figure 5 shows two rotating aggregates. For drops which have diameter D in between $D=0.5$ and 0.9mm , they are able to undergo a transition to a subharmonic bouncing. At the transition, the drops take various phases relatively to the forcing frequency. The mutual distance between two drops depends on whether they bounce in phase or with opposite phases. The aggregate thus becomes disordered before reorganizing in a more complex crystalline structure with two typical lengths that will be discussed elsewhere.

Conclusion. – In our experiment each bouncing drop is a mobile wave source. If isolated, it is either motionless or can move at a constant velocity by breaking of symmetry. When several wave emitters are present simultaneously on the surface they interact and form bound states and organized clusters. Here we have shown that these systems, when formed of uneven droplets, are spontaneously mobile by reaction to the waves they emit outwards. Such a mean of propulsion by reaction to the emission of surface waves was one of the mechanisms

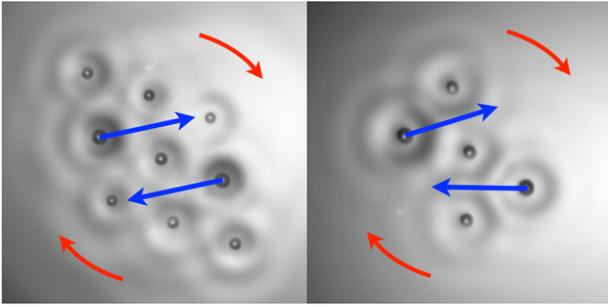


Fig. 5: (Top view) Two crystalline aggregates made of simple bouncers. In order to make the cluster asymmetric, all droplets are identical except two which have a larger diameter. In the two cases, the cluster rotates and the rotating period is around 90 s. The straight arrows represent the propulsion in reaction to the emission of surface waves.

proposed for the motion of water striders [15], even if more recent works [12] have shown that in this case the emission of vortices is the dominant effect. In our experiment, as the reaction depends on the frequency and the amplitude of the waves, bound states of uneven-size droplets present reversals in their motions when one of the drops undergoes subharmonic period doubling. For aggregates of uneven-size droplets, the asymmetry leads to spontaneous translation or rotation.

We are grateful to S. PROTIÈRE, S. BOHN, A. BOUDAUD, M. ROSSI, N. VANDEWALLE and S. DORBOLO for stimulating discussions. Exchanges between

laboratories have been financially helped by the COST action P21 and by the ANR 06-BLAN-0297-03.

REFERENCES

- [1] JULICHER F., ADJARI A. and PROST J., *Rev. Mod. Phys.*, **69** (1997) 1269.
- [2] JULICHER F. and PROST J., *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 2618.
- [3] LINKE H. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006) 154502.
- [4] KUDROLLI A., LUMAY G., VOLFSOON D. and TSMIRING L. S., *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2007) 058001.
- [5] BADOUAL M., JULICHER F. and PROST J., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **99** (2002) 6696.
- [6] COUDER Y., PROTIÈRE S., FORT E. and BOUDAUD A., *Nature*, **437** (2005) 208.
- [7] PROTIÈRE S., BOUDAUD A. and COUDER Y., *J. Fluid Mech.*, **554** (2006) 85.
- [8] TERWAGNE D., VANDEWALLE N. and DORBOLO S., *Phys. Rev. E*, **76** (2007) 056311.
- [9] GILET T., VANDEWALLE N. and DORBOLO S., *Phys. Rev. E*, **76** (2007) 035302(R).
- [10] COUDER Y., FORT E., GAUTIER C. H. and BOUDAUD A., *Phys. Rev. Lett.*, **94** (2005) 177801.
- [11] LIGHTHILL J., *Waves In Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge) 1978, pp. 279–280.
- [12] HU D. L., CHAN B. and BUSH J. W. M., *Nature*, **424** (2003) 663.
- [13] PROTIÈRE S., COUDER Y., FORT E. and BOUDAUD A., *J. Phys.: Condens. Matter*, **17** (2005) S3529.
- [14] LIEBER S. I., HENDERSHOTT M. C., PATTANAPORKKRATANA A. and MACLENNAN J. E., *Phys. Rev. E*, **75** (2007) 056308.
- [15] SUN S. M. and KELLER J. B., *Phys. Fluids*, **13** (2001) 2146.

Archimedean lattices in the bound states of wave interacting particles

A. EDDI^{1(a)}, A. DECELLE², E. FORT³ and Y. COUDER¹

¹ *Matières et Systèmes Complexes, Université Paris 7 Denis Diderot, CNRS, UMR 7057, Bâtiment Condorcet 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France, EU*

² *Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques Université Paris-Sud, CNRS, UMR 8626, Bâtiment 100 15 rue Georges Clémenceau, 91405 Orsay Cedex, France, EU*

³ *Institut Langevin, ESPCI ParisTech and Université Paris Diderot, CNRS, UMR 7587 - 10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France, EU*

received 12 June 2009; accepted in final form 20 August 2009
published online 18 September 2009

PACS 61.50.Ah – Theory of crystal structure, crystal symmetry; calculations and modeling
PACS 47.55.D- – Drops and bubbles
PACS 05.65.+b – Self-organized systems

Abstract – The possible periodic arrangements of droplets bouncing on the surface of a vibrated liquid are investigated. Because of the nature of the interaction through waves, the possible distance of binding of nearest neighbors is multi-valued. For large amplitude of the forcing, the bouncing becomes sub-harmonic and the droplets can have two different phases. This effect increases the possible distances of binding and the formation of various polygonal clusters is observed. From these elements it is possible to assemble crystalline structures related to the Archimedean tilings of the plane, the periodic tessellations which tile uniformly the 2D plane with convex polygons. Eight of the eleven possible configurations are observed. They are stabilized by the coupling of two sub-lattices of droplets of different phase, both contributing to sustain a common wave field.

Copyright © EPLA, 2009

Introduction. – Periodic structures can result from different ordering principles. During crystallization, the local condensation of atoms having a single distance of binding is responsible for the build-up of macroscopic crystals. In contrast the periodic patterns formed by standing waves result from global resonances of waves having a large coherence length. For this reason they depend on the large-scale shape of the domain in which they grow. These two types of organizations can be observed on a fluid interface, in the rafts formed by floating bubbles [1], and in the wave patterns due to the Faraday instability [2], respectively. Here, as will be shown, we investigate an intermediate case between these two extremes.

It was shown recently [3–5] that droplets bouncing on a vertically vibrated fluid interface could interact and form aggregates. The non-local interaction between drops is due to the damped surface wave they emit. In the self-organized stable arrangement, each drop is at

such a position that its successive collisions with the interface leave it motionless. For weak forcing, each drop bounces in the trough formed by the first antinode of the wave generated by its nearest neighbours. This is a Lennard-Jones type of interaction with short-range repulsion and long-range attraction, with a single distance of binding. This interaction leads to the spontaneous formation of crystalline aggregates with a triangular lattice (fig. 1).

However when the forcing is increased, because of the spatial periodicity of the waves, the interacting drops can be stable at several possible distances corresponding to successive antinodes. The experiment reveals the formation of a large variety of patterns involving different polygons. This led us to wonder if this system lent itself to the formation of crystalline arrangements related to the Archimedean tilings. The Archimedean tilings (shown in fig. 2) are the possible uniform tessellations of the two-dimensional Euclidian space with regular polygons. In these structures, first described systematically by Kepler [6], the polygons can be either identical or

^(a)E-mail: antonin.eddi@univ-paris-diderot.fr

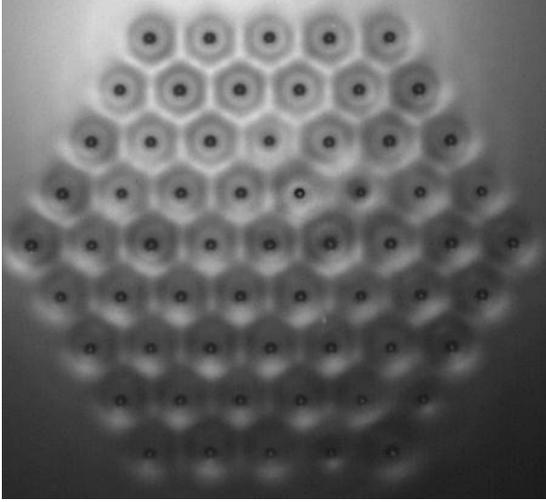


Fig. 1: The crystalline organization of a large number of droplets ($N = 61$) with a triangular lattice.

different. The tiling is said to be uniform because all the vertices are identical up to rotation. In the 2D plane, only eleven such tilings exist. Each of them is characterized by the structure of its vertex. The conventional notation in the Grünbaum-Shepard [7] classification gives the relative position of the regular n -sided polygons meeting at the vertex. For instance, in the structure noted $(3^2, 4, 3, 4)$, a vertex is surrounded by two neighbouring triangles, a square, a triangle and a square. The identity of all the links and all the vertices suggests that these tilings could form the structure of crystalline lattices. Such crystals would be of interest since it was theoretically shown that they can have complete photonic band gaps [8]. However, in reality only a few of them were observed [8–13]. Presumably this is due to the fact they do not correspond to dense packings. Some of the polygons being large (*e.g.* octagons or dodecagons) they form voids in the structure which tend to collapse in order to become more tightly packed.

Experimental set-up. – We study the aggregation of identical droplets bouncing on a vertically vibrated fluid interface. The experiments are performed on a liquid bath of thickness $h_0 = 4$ mm subjected to a vertical oscillating acceleration $\gamma = \gamma_v \cos(2\pi f_0 t)$. The liquid is silicon oil with viscosity $\mu_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ Pa \cdot s, surface tension $\sigma = 0.0209$ N/m and density $\rho = 0.965 \cdot 10^3$ kg/m³. The forcing frequency $f_0 = 80$ Hz is fixed. Similar results were obtained with an oil of viscosity $\mu_2 = 50 \cdot 10^{-3}$ Pa \cdot s and $f_0 = 50$ Hz. A necessary requirement is to be able to generate on the fluid surface a set of identical droplets of a size of the order of 0.7 mm. The drops are created by dipping a conical pin in the bath, then pulling it out swiftly at a well-defined velocity. Fast camera recordings show the formation of a liquid bridge between the pin and the bath. This bridge pinches off near the two menisci (and only there) and the liquid thread retracts to form a single droplet. The size of this droplet is determined by the depth at which the

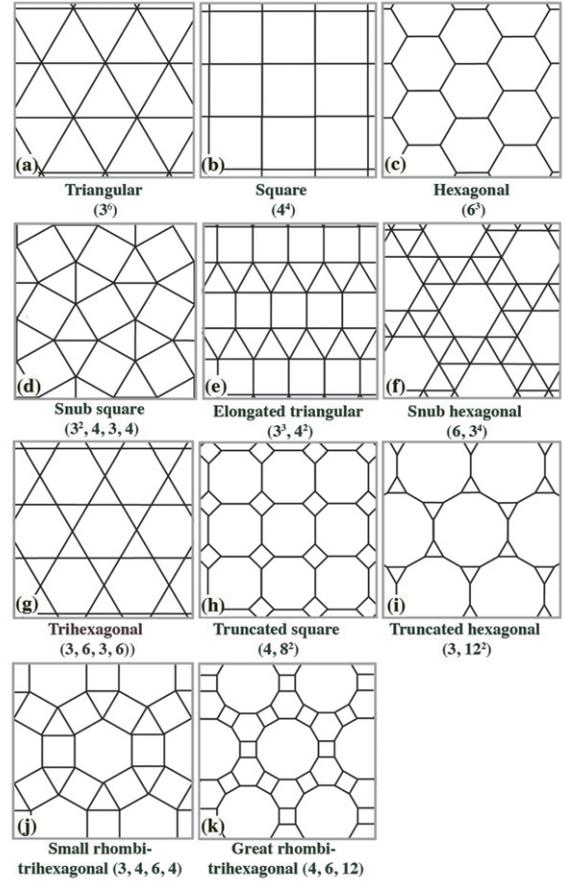


Fig. 2: The 11 Archimedean lattices, ordered by increasing complexity. Three are formed of one single type of polygons: (a) triangles, (b) squares and (c) hexagons. Six are formed of two types of polygons: (d) and (e) triangles and squares, (f) and (g) triangles and hexagons, (h) squares and octagons, (i) triangles and dodecagons. Two are formed of three types of polygons (j) triangles, squares and hexagons, (k) squares, hexagons and dodecagons.

cone had been plunged into the liquid. By choosing this depth, monodisperse droplets with diameters in the range $0.1 < D < 1.5$ mm could be reproducibly generated.

Binding of two droplets. – At low forcing amplitude, the drop motion is composed of a series of identical jumps and each drop emits a travelling wave of frequency f_0 . This wave has a small amplitude and its wavelength λ_0 corresponds to that predicted by the dispersion relation:

$$\omega^2 = [gk + (\sigma/\rho)k^3] \tanh(kh). \quad (1)$$

The non-local interaction between drops is due to these surface waves. When two drops interact they come to bounce at a fixed distance from each other. Several distances of equilibrium are possible. The measured values of d_m^0 form a discrete set linearly related to the wavelength λ_0 of the surface waves at the forcing frequency ($\lambda_0 = 2.85$ mm in our experimental conditions). They can all be

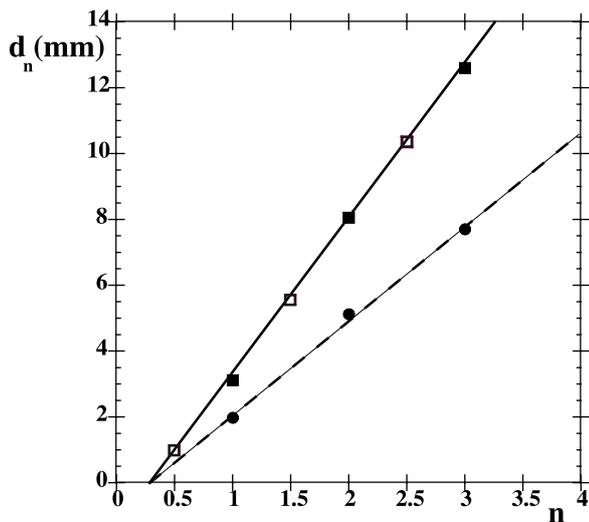


Fig. 3: The possible distances of binding of two drops as a function of the order of the bond linking them. Black dots: drops bouncing at the forcing frequency. With $f_0 = 80$ Hz and $\lambda_0 = 2.85$ mm, we find $d_1^0 = 1.98$ mm, $d_2^0 = 5.12$ mm, $d_3^0 = 7.70$ mm. The squares show the distances of binding of two drops having a period-doubled bouncing. With Faraday frequency $f_F = 40$ Hz and $\lambda_F = 4.73$ mm we find: black squares: $d_1^F = 3, 12$ mm, $d_2^F = 8.06$ mm, $d_3^F = 12.6$ mm. Open squares: drops bouncing with opposite phases. $d_{1/2}^F = 0.99$ mm, $d_{3/2}^F = 5.56$ mm, $d_{5/2}^F = 10.35$ mm.

written

$$d_m^0 = (m - \epsilon_0)\lambda_0, \quad (2)$$

where m , the order of the bound state, is one of the integers $m = 1, 2, 3, \dots$ (see fig. 3). These discrete values are all close to a multiple of the wavelength of the surface wave but shifted by an offset which is the same for all bound states [3]. The offset $\epsilon_0\lambda_0$ is due to the finite duration τ of the contact with the interface. The wave is emitted at lift-off and affects the other drop at its landing so that the shift can be estimated to be approximately half the distance travelled by the wave during the time τ of the collision. Writing $\epsilon_0\lambda_0 = V_\phi\tau/2$ (with $V_\phi = 189$ mm/s the phase velocity of the wave) gives $\tau = 810^{-3}$ s which is of the order of the collision duration.

When the forcing amplitude γ_v/g is increased, there is a threshold (see the phase diagram in [3]) at which the vertical motion of a droplet becomes sub-harmonically modulated. A droplet then undergoes a succession of large and small bounces. Above this threshold, two states are possible as the droplet can have its larger bounce either during one period of the forcing motion or during the next. This is a breaking of symmetry and we will call these distinct states (+) or (-), respectively. The droplet now emits a superposition of waves of frequencies f_0 and $f_0/2$. On a vibrating bath, the waves, parametrically forced by the Faraday instability, have a sub-harmonic frequency $f_F = f_0/2$. Though our experiment is done below the threshold of this instability, these waves are less damped

than the others and become dominant when γ_m/g is increased. For this reason, when two drops bind, their possible distances of equilibrium are now related to the wavelength λ_F at the frequency f_F ($\lambda_F = 4.73$ mm in our experimental conditions). They can be written

$$d_n^F = (n - \epsilon_F)\lambda_F, \quad (3)$$

where $\epsilon_F = 0.2$. In contrast with the result given by relation (2), the possible values of n in (3) form two subsets corresponding to drops bouncing in phase or with opposite phases. When in phase, their possible distances $d_n^F(+, +)$ or $d_n^F(-, -)$ satisfy relation (3), with n being one of the successive integers $n = 1, 2, 3, \dots$. When of opposite phases, $d_n^F(+, -)$ or $d_n^F(-, +)$ satisfy relation (3) with $n = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$. The values of these distances are plotted as a function of n in fig. 3. In the stable arrangements each drop is at such a position that its collisions with the interface do not lead to a horizontal displacement. In the following, we call n the order of the bond.

Aggregates. – We can now examine the situations in which many droplets are present simultaneously on the bath. Below the threshold of period doubling they are observed to bind to each other at one of the d_m^0 and form clusters with various 2D crystalline structures. Lattices with either square or rectangular structures are weakly unstable and relax slowly to the triangular patterns, the most stable having hexagonal symmetry. Structures of the type shown in fig. 1 can thus form spontaneously. When the forcing is increased the transition to a period-doubled bouncing generates an interesting phase transition. At the period doubling threshold, each elements of the periodic lattice undergoes a transition to either of two possible states (+) and (-). Because of the interaction of the droplets, this is a collective process, dominated by frustration effects, which leads continuously to new states with droplets having the two different phases. When the initial crystal is large, this is a solid-state transition. The crystalline structure is destroyed and replaced by a disordered structure which, however, include small organized regions. In the transition of clusters of medium size (twenty droplets), patterns with various polygons formed spontaneously.

In the period-doubled regime the structures obtained with a large number of droplets are generally complex but satisfy general principles of organisation. The observed clusters have two sub-lattices formed by the droplets of each phase. At one forcing period, the droplets of the sub-lattice (+) collide with the interface in troughs of the wave pattern. The swells then become troughs where the droplets (-) fall at the next forcing period. Both sub-lattices contribute to sustain a common, coherent wave field in which all droplets are stable. Of particular interest for the construction of periodic structures are the polygonal rings organized around a droplet of a given phase. These rings can be understood by considering the waves produced by a central drop.

Table 1: A list of some of the possible polygonal assemblies in our experimental conditions. The shape of the elementary triangle is determined by the order of the sides AB, AC and BC, It leads to isosceles (or equilateral) triangles where $\theta_n^{n'}$ is the angle at the main vertex.

AB, AC n	BC n'	$\theta_n^{n'}$	$N_n^{n'} = 360^\circ/\theta_n^{n'}$ polygonal rosettes	Could contribute in Archimedean lattices
1	1	60°	$N_1^1 = 6$	(3^6)
$3/2$	1	32.6°	$N_{3/2}^1 = 11$	$(3, 12^2)$
$3/2$	2	92.8°	$N_{3/2}^2 = 3.87 \simeq 4$	$(4^4), (3^2, 4, 3, 4), (3, 4, 6, 4)$
2	2	60°	$N_2^2 = 6$	$(3^6), (3, 6, 3, 6), (3^4, 6), (6^3)$
$5/2$	2	45.4°	$N_{5/2}^2 = 7.92 \simeq 8$	$(4, 8^2)$

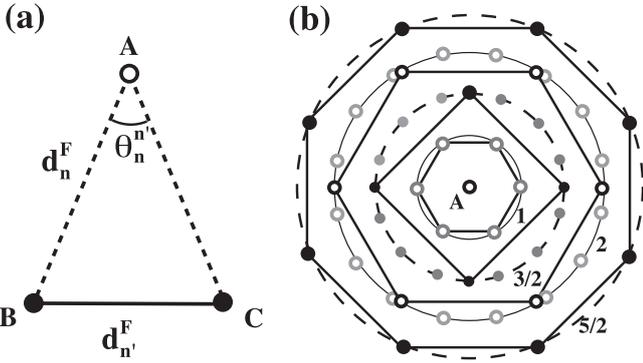


Fig. 4: (a) Sketch of the possible bound states of three drops in the period-doubled state. (b) The possible polygonal rosettes around a drop A of phase $(-)$. The circle of radius d_1^F is saturated when occupied by $N_1^F = 6$ droplets $(-)$ at a distance d_1^F from each other. The next circle $d_{3/2}^F$ can be saturated either by $N_{3/2}^1 = 11$ droplets $(+)$ bound at a distance $d_{3/2}^F$ or by $N_{3/2}^2 = 4$ droplets $(+)$ bound at a distance d_2^F . With the same principle the circle of radius $d_{5/2}^F$ can accommodate $n_{5/2}^2 = 8$ droplets $(+)$ bound at a distance d_2^F .

Let us consider a droplet of phase $(-)$ located at the point A generating concentric circular waves (fig. 4). The circular troughs of this wave are the loci where other droplets can be at rest. Droplets of phase $(-)$ will be stable in the troughs of radius $d_n^F(-, -)$, droplets of phase $(+)$ in those of radii $d_n^F(-, +)$. If several droplets of the same phase are located in the same circular trough they bind to each other at a distance which is necessarily one of the $d_n^F(+, +)$. They thus form, with A, a polygonal rosette formed of juxtaposed isosceles triangles. In the self-organization of small clusters, these rosettes appear spontaneously. We can consider the triangle formed by A and two neighbouring drops in B and C (fig. 4(a)). Calling n the order of the bounds to A and n' the order of the bound of B with C, the angle of the vertex in A will satisfy: $\sin(\theta_n^{n'}/2) = d_n^F/2d_n^F$. The triangle ABC is equilateral if $n' = n$, isosceles in the other cases. The possible values of $\theta_n^{n'}$, deduced from the values of d_n^F are given in table 1. For pairs of values of n and n' , the value of $\theta_n^{n'}$ gives the

limit number $N_n^{n'} = 2\pi/\theta_n^{n'}$ of droplets which saturates a given trough and the possible symmetry of the rosette.

As shown in table 1 and fig. 4(b), it is possible to assemble around A rings of droplets of the same phase, bound at d_n^F forming polygonal rosettes (fig. 3(b)). These rosettes are observed to form spontaneously in small aggregates and we wondered if they could be the building blocks of Archimedean tilings. We can now revisit the structures shown in fig. 2 and examine them by the types of polygons they contain to see if they can be obtained in our system.

The assembly in equilateral triangles is the simplest and most commonly observed clustering mode of droplets the same phase. The resulting triangular organisation (3^6) , being the most dense, self organizes spontaneously as shown in fig. 1. The next organization (4^4) is formed of squares. It is found to be unstable when constituted of droplets of only one phase but it can be obtained by the assembly of identical square rosettes of side d_2^F where four drops of one phase surround at a distance $d_{3/2}^F$ a droplet of the other phase. The assembly of such rosettes gives a “square centred” structure shown in fig. 5(b). It is formed of two identical sub-lattices of droplets $(+)$ and $(-)$ respectively, each formed of squares of side d_2^F and shifted diagonally by $d_{3/2}^F$. Crystallites having this organisation were observed in the spontaneous aggregation of small clusters. However to obtain large crystals we had to resort to an artificial assembly method. After forming a nucleus we keep adding droplets, each one being displaced and released near its predicted position of equilibrium to which it then moves spontaneously. Once formed it is a very stable structure. Two tilings, the snub square $(3^2, 4, 3, 4)$ (fig. 2(d)), and the elongated triangular tiling $(3^3, 4^2)$ (fig. 2(e)) are formed of triangles and squares. They can be obtained by the assembly of the same square rosettes separated by equilateral triangles of sides d_2^F . The resulting clusters are shown in fig. 5(d) and (e), respectively. In the snub square the stabilizing sub-lattice is square. In the elongated mode the stabilizing sub-lattice is parallelogramic. Both are very stable arrangements. It is worth mentioning that in these structures the density of droplets of each phase is not the same.

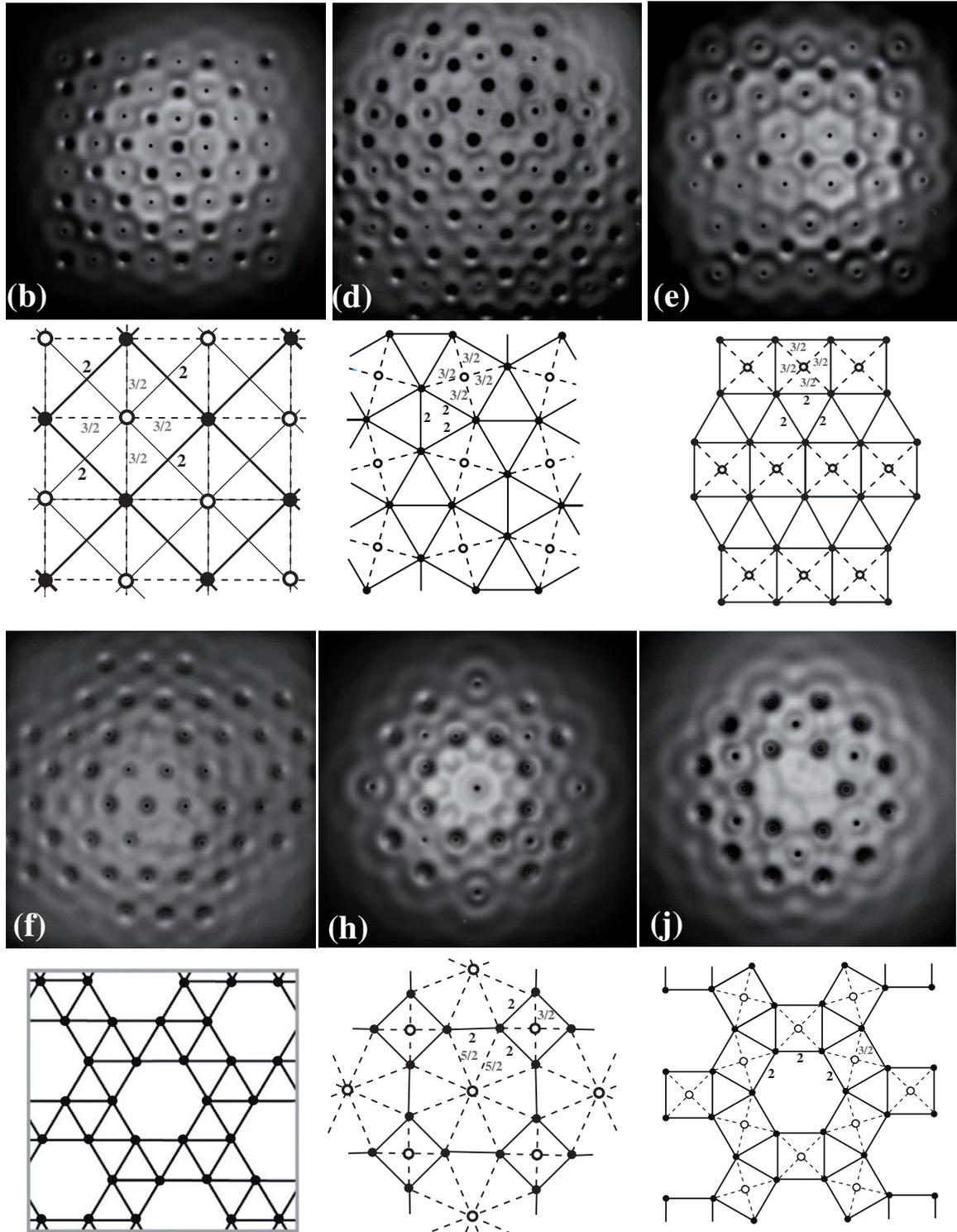


Fig. 5: The observed 2D periodic organizations of droplets of two different phases and their interpretation, labeled by reference to their order in fig. 2. A sketch of the relation between the two sub lattices is given below each photograph. (b) Two identical square sub-lattices (4^4) of side d_2^F . Each square is stabilized by a central drop of the other phase located at a distance $d_{3/2}^F$ of its vertices. Stoichiometry: $R = N_- / N_+ = 1$. See [squares.mov](#). (d) A snub square ($3^2, 4, 3, 4$) associated to a square sublattice. The polygons of the Archimedean sublattice have a side d_2^F . The other sub-lattice stabilizes the small squares, being located at a distance $d_{3/2}^F$ of their vertices. $R = 1/2$. (e) An elongated triangular lattice ($3^3, 4^2$) associated to a monoclinic sublattice. $R = 1/2$. (f) A snub hexagonal ($6, 3^4$) pattern obtained by creating voids in a triangular structure. (h) A truncated square ($4, 8^2$) associated to a square (4^4) sublattice. The polygons have a side d_2^F . The octagons are stabilized by central droplet (—) located at a distance $d_{5/2}^F$. $R = 1/2$. See [Truncated_square.mov](#). (j) A small rhombitrihexagonal ($3, 4, 6, 4$) lattice associated to a trihexagonal ($3, 6, 3, 6$) sublattice. $R = 3/7$.

Choosing $(-)$ to be the stabilizing sub-lattice with the smaller density of droplets, we define the stoichiometry of the system as $R = N_-/N_+$. In both these lattices $R = 1/2$.

We can now examine the lattices involving either only hexagons (6^3) (fig. 2(c)) or triangles and hexagons: the snub hexagonal tiling ($6, 3^4$) (fig. 2(f)) and the trihexagonal tiling ($3, 6, 3, 6$) (fig. 2(g)). They can be seen as lacunary triangular lattices. In order to observe them we assembled triangular crystals and removed droplets so as to generate periodic lacunae. The wave pattern, which is the same as in the triangular lattices, is sustained by a smaller density of droplets, so that these structures are less stable. The hexagonal and trihexagonal structures are unstable and their hexagonal voids tend to collapse. The snub hexagonal ($6, 3^4$) can be obtained and is shown in fig. 5(f). The structure ($3, 4, 6, 4$) shown in fig. 2(j) involves triangles, squares and hexagons. Using the same principles we were able to assemble a crystal which associates a small rhombi-trihexagonal ($3, 4, 6, 4$) sub-lattice with a stabilizing trihexagonal ($3, 6, 3, 6$) sub lattice. It is stable and shown in fig. 5(j). The stoichiometry is $R = 3/7$. As shown in table 1 and fig. 2(f) octagonal rosette of side d_2^F can form at a distance $d_{5/2}^F$ around a droplet of the other phase. Square and octagonal rosettes can be assembled into a truncated square ($4, 8^2$) sub-lattice associated with a square sub-lattice (fig. 5(g)). The stoichiometry is $R = 1/2$. As shown on table 1 approximations of dodecagonal rosettes can be obtained with $n = 3/2$ and $n = 1$. We were able to assemble small aggregates having the predicted organisation but they turned out to be unstable. As a result we were not able to obtain the truncated hexagonal tiling ($3, 12, 12$), nor the great rhombi-trihexagonal ($4, 6, 12$) tiling.

Conclusion. – The large-scale symmetry in this system results from two types of ordering. At a small scale, a limited number of droplets aggregate. Several stable structures are observed, forming small ordered domains: the rosettes. In these domains the droplets are located at the antinodes of the waves, but not necessarily at all of them. As in the Faraday instability (and unlike in a crystal) a resonant wave-field exists in each of these regions of finite spatial extent. It is sustained by the local forcing of the droplets. These rosettes can be assembled into large structures with the possibility of coexistence of various regular convex polygons. The periodicity results from the periodic arrangement of these domains. Since the wave amplitude decreases away from the sources, the interaction with second neighbours is weak so that the wave structure does not have necessarily the periodicity of a global standing wave. As in a crystal (but differing from Faraday waves), long-range order results here from the clustering of finite size

domains. We used this possibility to obtain Archimedean lattices.

These lattices have been obtained by artificial assembly in the period-doubled regime. A different approach would be to assemble a crystal in the simple-bouncing regime and observe result of the phase transition which occurs when the bouncing becomes sub-harmonic. As usual solid-state phase transitions it induces a complex reorganisation into various crystallites with no long-range order, reminiscent of complex structures obtained in the Faraday patterns forced with two frequencies [14]. Numerical simulations, using models in which the multivalued distances of binding are taken into account, could be useful to investigate it. In conclusion, several aspects of this system should trigger further developments. The above-described periodic structures are, once formed, very stable. When the forcing amplitude is strongly increased, they are affected by collective oscillations where all droplets vibrate around their equilibrium positions. These oscillatory modes, which are similar to the phonons of a solid crystal will be described elsewhere. Finally, when the period doubling is complete, the droplets become walkers [3]. The crystal is usually destroyed but small crystallites sometimes undergo a transition to global rotation.

We are grateful to S. PROTIÈRE, E. SULTAN, G. PUCCL, M. RECEVEUR and A. ROGER for stimulating discussions and technical assistance. This work has been financially helped by the ANR 06-BLAN-0297-03.

REFERENCES

- [1] BRAGG L. and NYE J. F., *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **190** (1947) 474.
- [2] DOUADY S., *J. Fluid Mech.*, **221** (1990) 383.
- [3] PROTIÈRE S., BOUDAUD A. and COUDER Y., *J. Fluid Mech.*, **554** (2006) 85.
- [4] VANDEWALLE N., TERWAGNE D., MULLENERS K., GILET T. and DORBOLO S., *Phys. Fluids*, **18** (2006) 091106.
- [5] LIEBER S. I. *et al.*, *Phys. Rev. E*, **75** (2007) 056308.
- [6] KEPLER J., *Harmonices Mundi* (Linz) 1619.
- [7] GRÜNBAUM B. and SHEPARD G. C., *Tilings and Patterns* (Freeman Co., New York) 1987.
- [8] UEDA K., DOTERA T. and GEMMA T., *Phys. Rev. B*, **75** (2007) 195122.
- [9] CHEN B. *et al.*, *Science*, **307** (2005) 96.
- [10] TAKANO A. *et al.*, *J. Polym. Sci.*, **43** (2005) 2427.
- [11] MIKHAEL J. *et al.*, *Nature*, **454** (2008) 501.
- [12] JOVANOVIĆ D., GAJIC R. and HINGERL K., *Opt. Express*, **16** (2008) 4048.
- [13] COUPIER G., SAINT JEAN M. and GUTHMANN C., *Phys. Rev. B*, **75** (2007) 224103.
- [14] EDWARDS W. S. and FAUVE S., *J. Fluid Mech.*, **278** (1994) 123.

Annexe B

Vibration de cristaux

Les cristaux archimédiens réalisés avec les gouttes rebondissantes sont stables pendant plusieurs heures sur le bain. À l'intérieur de l'agrégat, les gouttes sont des objets massifs qui interagissent. Elles forment des chaînes masse-ressort d'un type original. Nous présentons ici une instabilité oscillante de ces structures pour laquelle l'accélération imposée est le paramètre de contrôle.

B.1 Vibrations dans un agrégat unidimensionnel

Pour cette expérience, le bain d'huile possède une viscosité $\mu = 50.10^{-3}$ Pa.s; on choisit une fréquence de forçage $f_0 = 50$ Hz et des gouttes de diamètre $D = 1.2$ mm. (Les mêmes résultats ont été obtenus avec $\mu = 20.10^{-3}$ Pa.s, $D = 0.8$ mm et $f_0 = 80$ Hz). L'accélération de forçage est choisie telle que la période de rebond des gouttes soit doublée (zone PDB de la figure 1.4). Les agrégats étudiés sont hexagonaux, avec une distance d'équilibre entre deux voisins $L = 13.9$ mm correspondant à $2\lambda_F$, ou bien carrés (avec $L_1 = 10.4$ mm correspondant à $3/2\lambda_F$). Le rapport d'aspect de ces agrégats pour obtenir des objets quasi unidimensionnel. L'agrégat fait N gouttes de longueur (avec $N > 10$) et seulement trois de large (fig. B.1(a-b)). Un traitement d'image approprié permet de suivre chaque goutte au cours du temps.

Si l'on augmente l'accélération imposée γ_m , une vibration spontanée apparaît au-delà d'un seuil $\gamma_V = 3.5 g$. La figure B.1(c) présente la croissance de cette instabilité qui peut être observée en réglant γ_m juste au-dessus de γ_V à $t = 0$. Toutes les gouttes oscillent avec la même fréquence f_V et deux voisins oscillent en opposition de phase. L'amplitude de cette oscillation sature en régime stationnaire à une valeur qui vaut typiquement 10% de la distance inter goutte. Des mesures par FFT montrent que f_V ne varie presque pas

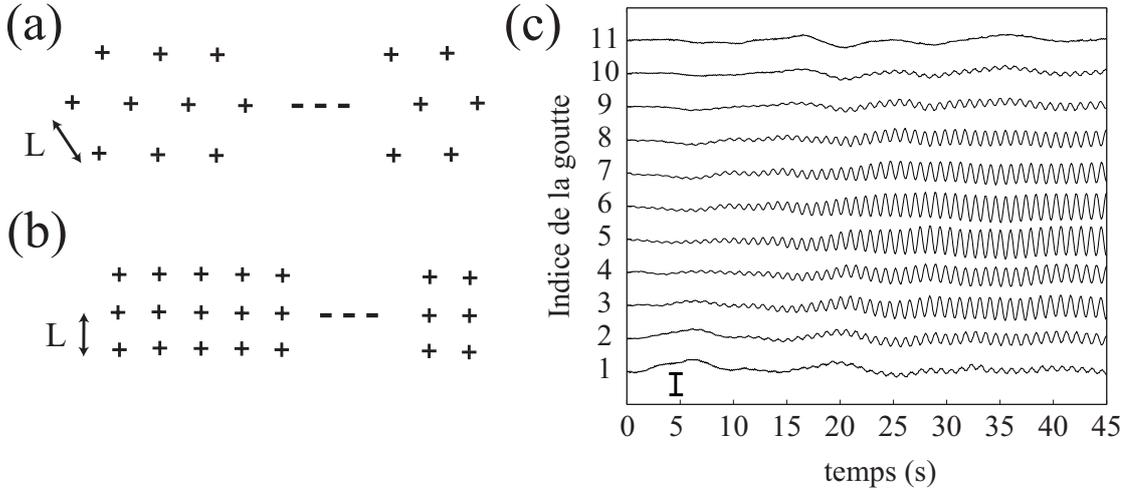


FIGURE B.1 – (a) et (b) Représentation schématique d’agrégats linéaires avec une maille (a) triangulaire ou (b) carrée. (c) Positions au cours du temps de gouttes au sein d’un agrégat linéaire avec $N = 11$ gouttes. Le segment noir correspond à $L/10$.

avec la longueur de l’agrégat. On obtient $f_V = 1.00 \pm 0.05$ Hz. Le seuil de l’instabilité et la fréquence de vibration dépendent à priori de la géométrie. En géométrie carrée, avec la même huile, l’instabilité se déclenche pour une accélération seuil légèrement plus faible $\gamma_V = XX g$. La fréquence est également modifiée à $f_V = 1.33$ Hz. On peut noter que dans tous les cas, $f_V \ll f_0$

Un ordre à grande distance apparaît puisque la vibration est cohérente tout le long de la structure. Puisque les seconds voisins d’une goutte ont des mouvements en phase, le mode sélectionné par l’instabilité possède un nombre d’onde $k_V = \pi/L$. Il s’agit du plus grand nombre d’onde possible. La croissance de l’instabilité a lieu au centre de l’agrégat, et dans le régime stationnaire, l’amplitude atteinte sur les bords est plus faible.

Si l’on diminue γ_m sous γ_V , toutes les gouttes reviennent à leur position d’équilibre originale. Au contraire, si γ_m est augmenté fortement, les oscillations au centre de la structure deviennent si grandes que la goutte est capable de quitter son puits de potentiel et coalesce avec l’une de ses voisines. La destruction a donc toujours lieu au centre, contrairement au processus habituel de fusion.

Les oscillations observées correspondent à une instabilité secondaire d’un *pattern* périodique. Ce type d’instabilité a été étudié théoriquement [21] : en fonction de la brisure de symétrie impliquée, 10 modes génériques peuvent apparaître. Un grand nombre de ces solutions ont été illustrées avec des expériences (écoulement de Taylor-Couette [2], convection de Rayleigh-Benard [28] ou encore digitation visqueuse dirigée [72]). La théorie prévoit que

la nature de l'instabilité est reliée au type de symétrie qui est brisée. Par exemple, les domaines dérivants (observés expérimentalement dans [11, 40]) sont associés avec une rupture de symétrie gauche-droite. La solution que nous observons expérimentalement rappelle le doublement de période temporel : l'instabilité secondaire possède une longueur d'onde double de celle de départ. Ce type de modes oscillants a été observé aussi bien dans des expériences de solidification [40] que pour de la digitation visqueuse [72] ou bien avec des colonnes liquides [11, 68].

B.2 Modélisation

A. Boudaoud a proposé un modèle basé sur les propriétés de l'interaction entre deux gouttes voisines. A chaque rebond, une goutte émet une onde de surface. La superposition de toutes les ondes crée une structure périodique sur le bain. Lorsqu'une goutte rebondit, elle est sensible à la pente de l'interface en dessous d'elle et reçoit une impulsion horizontale. Les positions d'équilibre sont donc situées dans les ventres du champ d'ondes. Lorsqu'elles sont déplacées de leur position d'équilibre, les gouttes y retournent progressivement en suivant la pente de la surface. La force qui s'exerce à chaque rebond est proportionnelle à la pente locale et dépend donc de l'amplitude de l'onde. En variant γ_m , l'amplitude des ondes change ce qui modifie la forme du puits de potentiel dans lequel la goutte évolue. La constante de ressort associée au puits va donc dépendre de γ_m . Il faut aussi prendre en compte les effets de propagation des ondes. Chaque goutte est sensible aux ondes émises par ses voisines lors du rebond précédent : les ondes mettent un temps $\tau = L/\lambda_F \tau_F$ pour se propager depuis la source jusqu'aux premiers voisins. En faisant l'hypothèse que les gouttes n'interagissent qu'avec leur premier voisin, nous pouvons écrire une équation du type masse-ressort qui prend en compte les différentes caractéristiques de l'interaction.

On appelle x_n le déplacement de la n-ième goutte autour de sa position d'équilibre, et m la masse d'une goutte. On écrit alors :

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = -\mu \frac{dx_n}{dt} + \tilde{A} f(x_n(t) - x_{n-1}(t - \tau)) + \tilde{A} f(x_{n+1}(t - \tau) - x_n(t)) \quad (\text{B.1})$$

Où μ est un coefficient d'amortissement, \tilde{A} l'amplitude de l'onde et f la force qui s'exerce entre deux voisines et qui ne dépend que de la position des gouttes. Le coefficient μ représente la dissipation visqueuse, mais aussi les pertes radiatives de la n-ième goutte. Cette expression peut être linéarisée pour des petits déplacements, en faisant l'hypothèse que la force est proportionnelle à la distance entre les gouttes. L'équation B.2 se simplifie

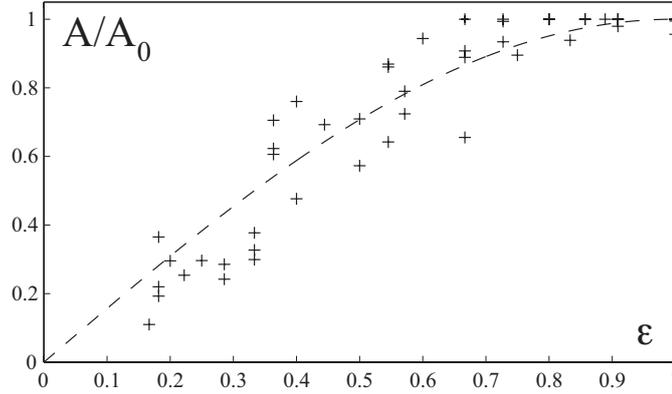


FIGURE B.2 – Variation de l’amplitude normalisée A/A_0 de la vibration en fonction de la distance au bord ε pour des agrégats de longueur $2 < N < 10$. La ligne pointillée correspond à la prédiction théorique.

en :

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = -\mu \frac{dx_n}{dt} + A(x_{n-1}(t - \tau) - 2x_n(t) + x_{n+1}(t - \tau)) \quad (\text{B.2})$$

Comme $\tau \sim \tau_F = 40$ ms est très petit par rapport la période de vibration $t_V = \frac{1}{f_V} \approx 1$ s, on peut développer le terme d’interaction, en supposant, comme le suggèrent les expériences, que le mouvement est lent devant le rebond à la fréquence f_F . On écrit :

$$x_n(t - \tau) \simeq x_n(t) - \tau \frac{dx_n}{dt} \quad (\text{B.3})$$

Et l’on obtient alors :

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = -\mu \frac{dx_n}{dt} - A \tau \left(\frac{dx_{n+1}}{dt} + \frac{dx_{n-1}}{dt} \right) + A (x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}) \quad (\text{B.4})$$

On effectue ensuite une analyse de stabilité linéaire. On injecte dans cette équation d’amplitude des solutions avec des périodicités spatiale et temporelle $x_n = X e^{i\omega t} e^{in\theta}$, θ correspondant à une phase spatiale, et l’on cherche le seuil d’instabilité :

$$m\omega^2 = 4A \sin^2 \theta / 2 \quad (\text{B.5})$$

$$\mu + 2A\tau \cos \theta = 0 \quad (\text{B.6})$$

En minimisant l’équation B.6 par rapport à θ pour obtenir le mode le plus instable, on obtient $\cos \theta = -1$ qui correspond à $\theta = \pi$. Le nombre d’onde associé $k_V = \frac{\pi}{L}$ est tel que deux voisins ont des mouvements en opposition de phase. L’équation B.6 montre que le seuil d’instabilité dépend du temps de propagation τ entre deux gouttes. Si une goutte se

déplace, sa voisine sera sensible avec un retard τ dû à la vitesse finie de propagation des ondes. Ce retard, même petit par rapport à τ_V , fournit la brisure de symétrie temporelle nécessaire pour que l'instabilité croisse.

En variant la longueur de l'agrégat, on peut explorer les effets de taille finie. La figure B.1(c) montre que l'amplitude est plus faible sur les bords. On définit la distance $\varepsilon = 1 - \frac{2|n-(N+1)/2|}{N+1}$ entre la n -ième goutte et le bord dans un agrégat de N gouttes de longueur. La figure B.2 présente la variation de l'amplitude normalisée A/A_0 de la vibration en fonction de ε pour des agrégats (carrés ou hexagonaux) de longueur $2 < N < 10$. Dans tous les cas, l'amplitude est plus grande au centre. On peut tenir compte de la taille finie dans le modèle : une goutte placée au bord n'interagit qu'avec un seul voisin. Ajouter cette condition dans les équations revient à écrire qu'il existe, pour un agrégat de longueur N , deux gouttes supplémentaires en 0 et $N + 1$ qui sont fixes. Du modèle précédent, on déduit que l'amplitude du mouvement de la n -ième goutte est proportionnelle à $\sin \varepsilon\pi/2$. La courbe correspondante est ajoutée sur la figure B.2 avec un excellent accord avec les expériences. Pour des agrégats de grande taille ($N > 10$), l'accord avec cette prédiction théorique est moins bon à cause des saturations non linéaires au centre de l'agrégat.

B.3 Vibration à deux dimensions

Le long d'une ligne de goutte, il est possible de séparer deux sous-populations de gouttes, indexées (+) et (-) selon qu'elles oscillent en phase ou en opposition de phase avec une goutte de référence. Ceci correspond à la mise en place de deux sous-réseaux ayant les mêmes propriétés vibrationnelles. Dans le cas des agrégats réellement bidimensionnels, la situation est plus complexe. Nous allons considérer des agrégats réguliers avec une symétrie hexagonale ou carrée. Ils possèdent deux directions principales, données par deux vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . L'angle entre \vec{e}_1 et \vec{e}_2 vaut $\pi/2$ dans les agrégats carrés et $\pi/3$ pour les hexagonaux (fig. B.3(a-b)). En prenant la norme de \vec{e}_1 et \vec{e}_2 égale à L , une goutte se trouve en $m\vec{e}_1 + n\vec{e}_2$, avec $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Les gouttes sont donc repérées par un couple d'indices (m, n) . En suivant les descriptions habituelles, la cellule unitaire d'un réseau est un parallélogramme avec des sommets en $(0, 0)$, $(\vec{e}_1, 0)$, $(0, \vec{e}_2)$ et (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Si l'on considère la vibration à l'intérieur de ces agrégats, le même doublement de période spatiale se produit selon chacun des axes propres du réseau. Le réseau sera alors invariant sous une translation d'un vecteur $2\vec{e}_1$ ou $2\vec{e}_2$, et la cellule unitaire sera quatre fois plus grande que celle du réseau de gouttes initial.

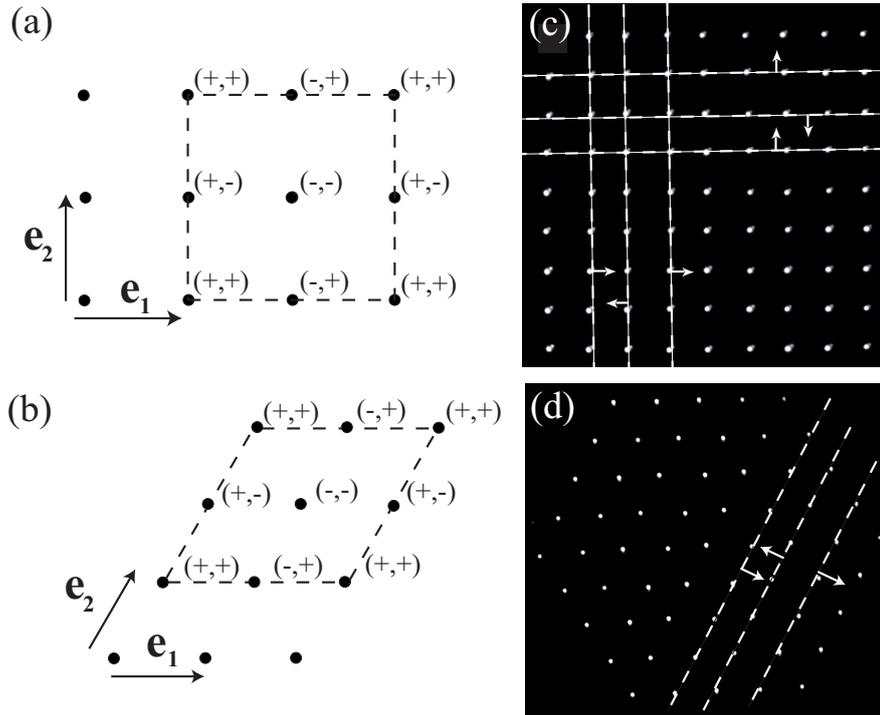


FIGURE B.3 – (a) Représentation schématique des quatre sous-populations $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$ et $(-, -)$ de gouttes en géométrie carrée. La cellule unitaire (en pointillés) contient une goutte de chaque sous-population. (b) Photographie montrant les oscillations le long des deux directions de vibration possible en géométrie carrée. (c) Représentation schématique des quatre sous-populations $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$ et $(-, -)$ de gouttes en géométrie hexagonale. La cellule unitaire (en pointillés) contient une goutte de chaque sous-population. (d) Photographie montrant un exemple de mode d'oscillations sélectionné en géométrie hexagonale.

Quelle que soit la géométrie, la cellule unitaire d'un agrégat en vibration contient quatre gouttes. Dans le cas de la symétrie carrée, les deux directions principales sont indépendantes (\vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont orthogonaux) et les deux vibrations ne sont pas corrélées. Une goutte oscillera donc indépendamment selon chacune des deux directions principales. Si l'on choisit comme étant $(+, +)$ l'état d'une goutte de référence, une goutte quelconque aura un mouvement correspondant à un état $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$ ou $(-, -)$ en fonction de sa distance à la goutte de référence. La répartition des différents types de gouttes est indiquée sur la figure B.3(c). On obtient ainsi 4 sous-réseaux ayant des mouvements en phase ou en opposition de phase. Par exemple, les mouvements des gouttes $(+, +)$ et $(+, -)$ sont en phase selon \vec{e}_1 et en opposition de phase selon \vec{e}_2 . La géométrie carrée conduit donc à des mouvements en ligne représentés sur la figure B.3(c). La longueur

d'onde λ_V est bien la même que dans le cas unidimensionnel, même si la phase φ entre les deux vibrations n'est pas imposée puisque les deux directions sont indépendantes à l'ordre linéaire.

Le cas des agrégats hexagonaux est plus complexe. En utilisant le même principe que dans le cas carré, on définit l'état d'une goutte quelconque $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$ ou $(-, -)$ par comparaison avec une goutte de référence $(+, +)$. Il y a encore une fois quatre gouttes dans une cellule unitaire, une de chaque sous-réseau. À cause de l'existence d'un troisième axe propre pour l'agrégat, il existe un couplage à l'ordre linéaire entre les vibrations selon \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . Cette contrainte géométrique implique une sélection parmi les différents modes. Une étude complète des modes bidimensionnels autorisés a été réalisée par C. Pirat *et al.* [67], mettant en évidence l'existence de vingt possibilités différentes. Dans cette expérience, une combinaison de certains d'entre eux est observée. La figure B.3(d) montre l'un d'entre eux (également observé dans [68]). Dans cet exemple, le mode sélectionné possède une longueur d'onde $\lambda_V = \sqrt{3}L$. La taille finie des agrégats et l'existence de bords doivent être pris en compte pour expliquer la sélection. L'amplitude de la vibration de chaque goutte dépend de sa position au sein de l'agrégat et l'analyse complète des effets va au-delà des travaux développés au cours de cette thèse.

Annexe C

Diffraction de Fresnel derrière un bord d'écran

Nous avons vu que dans le cas où la mémoire temporelle est importante, le marcheur est propulsé par la pente effective que la goutte ressent lorsqu'elle rebondit. Cette pente résulte de la superposition d'ondes créée par les ondes stationnaires qui se mettent en place autour des points précédemment visités. Nous allons donc considérer la succession de points visités comme des sources d'onde. Ces sources sont toutes en phase car elles sont synchronisées par la vibration du bain. Le champ d'ondes généré va donc être la somme de fronts circulaires centrés sur chacune des sources (fig. C.1 (a)).

Nous pouvons réinterpréter cette vision schématique du problème en utilisant le principe de Huygens-Fresnel concernant les problèmes de diffraction et d'interférences valable en optique ondulatoire, à condition de le transposer à deux dimensions : la ligne de points émetteurs va générer un champ d'ondes qui sera strictement équivalent à celui observé au-delà d'un bord d'écran lorsque l'on envoie une onde plane dessus (fig. C.1 (b)). Comme la vitesse du marcheur V_W est faible devant la vitesse de phase V_ϕ des ondes à la pulsation de Faraday ω_F , le déplacement de la goutte entre deux chocs successifs est petit devant la longueur d'onde sur le bain λ_F , ce qui nous assure de la validité du principe de Huygens-Fresnel.

Nous allons donc maintenant rappeler les résultats théoriques correspondant à cette situation physique en nous plaçant toutefois dans le cas où l'onde plane est diaphragmée par un bord d'écran sans décroissance exponentielle. Nous supposons donc qu'une source d'ondes planes S placée à l'infini émet en direction d'une fente située entre les points d'abscisse x_1 et x_2 (fig. C.2 (a)). On observe la figure de diffraction sur un écran placé à une distance $AO = p'$ derrière l'obstacle. On suppose également que les angles

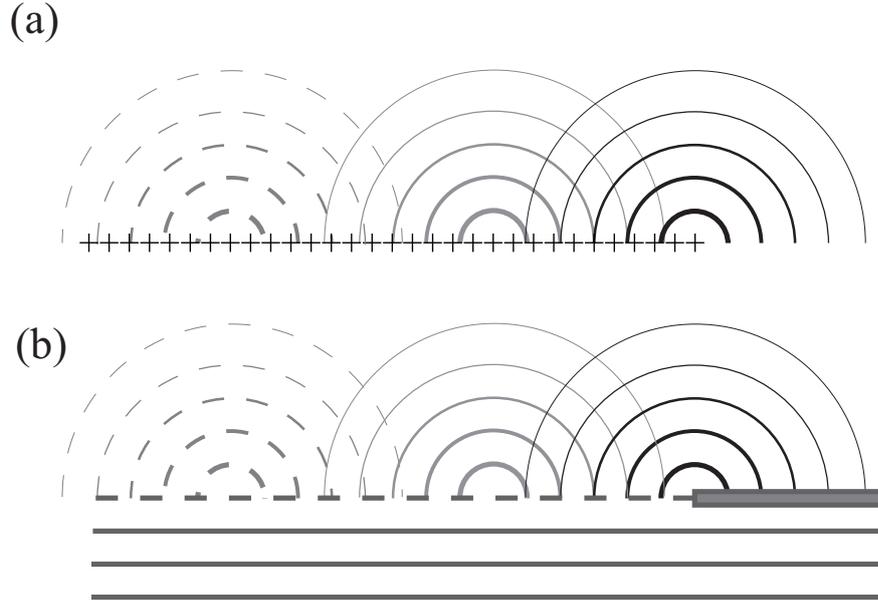


FIGURE C.1 – (a) Fronts d'onde circulaires émis par une ligne de points régulièrement espacés. (b) Onde plane incidente sur un bord d'écran. Conformément le principe de Huygens-Fresnel en optique, le champ d'ondes au-delà de l'obstacle en (b) est strictement équivalent à celui de la configuration (a).

sont petits.

En utilisant la formule de Kirchoff combinée avec le principe de Huygens-Fresnel, il est possible de calculer la vibration scalaire s au cours du temps en tout point de l'écran :

$$s = \int \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right] dx \quad (\text{C.1})$$

où λ correspond à la longueur d'onde et où les bornes de l'intégrale sont fixées par les bords de la fente. En posant $AM = x$, $OP = \xi$ et $AO = p'$, on obtient

$$r \simeq p' + \frac{(x - \xi)^2}{p'} \quad (\text{C.2})$$

L'intensité I de cette vibration est

$$I = M^2 + N^2 \quad (\text{C.3})$$

avec

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \cos \frac{\pi}{p'\lambda} (x - \xi)^2 \quad (\text{C.4})$$

$$N = \int_{x_1}^{x_2} \sin \frac{\pi}{p'\lambda} (x - \xi)^2 \quad (\text{C.5})$$

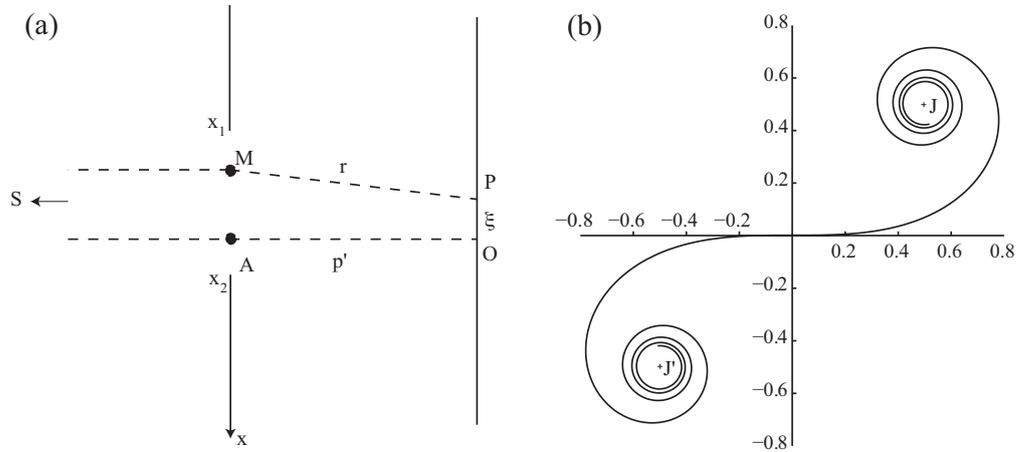


FIGURE C.2 – (a) Schéma de principe de la diffraction de Fresnel. (b) Spirale de Cornu.

x_1 et x_2 fixant les limites de l'ouverture. Depuis Fresnel, il est d'usage de faire le changement de variable

$$\nu^2 = \frac{2}{p'\lambda}(x - \xi)^2 \quad (\text{C.6})$$

et d'introduire les intégrales de Fresnel

$$C = \int_0^{\nu} \cos \frac{\pi \nu^2}{2} d\nu \quad (\text{C.7})$$

$$S = \int_0^{\nu} \sin \frac{\pi \nu^2}{2} d\nu \quad (\text{C.8})$$

Ces intégrales sont tabulées, et il est ainsi possible de calculer l'intensité lumineuse $I = M^2 + N^2$ au point P d'abscisse ξ .

Il est néanmoins possible, sans avoir recours aux calculs numériques, d'obtenir un grand nombre de renseignements graphiquement en utilisant la spirale de Cornu (ou clothoïde). Il s'agit d'une courbe paramétrique : les points appartenant à la spirale sont de coordonnées $(C(\nu), S(\nu))$, ν variant de $-\infty$ à $+\infty$. Sa représentation graphique est donnée sur la figure C.2 (b). La courbe est constituée de deux demi-spirales s'enroulant autour de deux points asymptotiques J (de coordonnées $(0.5, 0.5)$) et J' (de coordonnées $(-0.5, -0.5)$) qui correspondent respectivement à $\nu \rightarrow +\infty$ ou $\nu \rightarrow -\infty$. Pour une fente donnée, à chaque point P de l'écran d'observation correspond une valeur de ξ et nous pouvons lui associer un couple (ν_1, ν_2) . Ce couple permet de définir un couple de points (Q_1, Q_2) appartenant à la spirale de Cornu, et l'éclairement I au point P est donné par la longueur de la corde $|Q_1 Q_2|$. Si l'on se place maintenant dans le cas qui nous

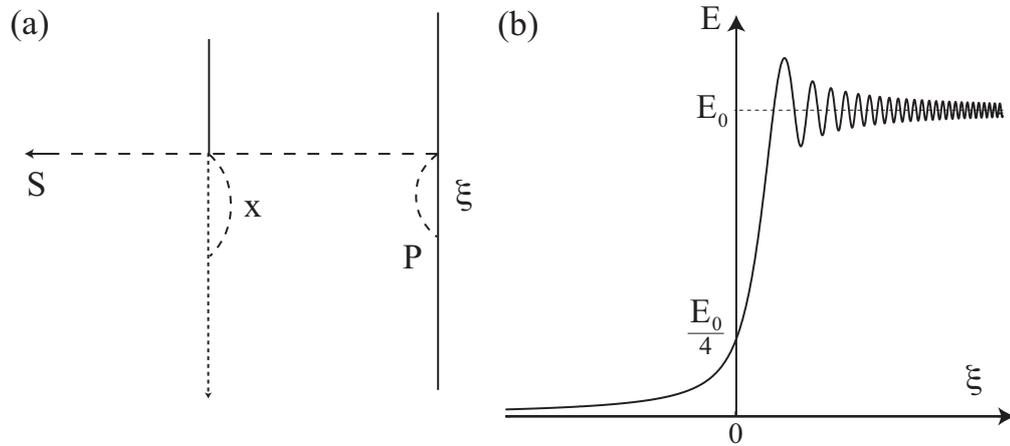


FIGURE C.3 – (a) Schéma de principe de la diffraction derrière un bord d'écran. (b) Variation de l'éclairement lors que P se déplace le long de l'écran.

intéresse, *i. e.* dans le cas où l'on considère un bord d'écran (voir fig C.3 (a)), nous avons $x_1 = 0$ et $x_2 = +\infty$. En utilisant le changement de variable proposé plus haut, on obtient $\nu_2 = +\infty$ et $\nu_1 = -\xi\sqrt{\frac{2}{p'\lambda}}$. Le point Q_2 se trouve donc au point J . Si P se déplace depuis $\xi = -\infty$ dans l'ombre jusqu'à $\xi = +\infty$ dans la lumière, le point Q_1 parcourt toute la spirale depuis J jusqu'à J' . La figure C.3 (b) présente les variations de l'éclairement qui en résultent. On constate que l'éclairement est nul dans l'ombre puis croît pour présenter des oscillations pour des valeurs positives de ξ . Il est important de noter que l'éclairement en $\xi = 0$ vaut le quart de l'éclairement obtenu en $\xi \rightarrow \infty$ et que les franges observées pour $\xi > 0$ ne sont pas équidistantes.

Bibliographie

- [1] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115(485), 1959.
- [2] A. Andereck, S. S. Liu, and H. L. Swinney. Flow regimes in a circular couette system with independently rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 174 :155–183, 1986.
- [3] H. Arbell and J. Fineberg. Pattern formation in two frequency forced parametric waves. *Phys. Rev. E*, 65(3), 2002.
- [4] P. Aussillous and D. Quere. Liquid marbles. *Nature (London)*, 411 :924, 2001.
- [5] T.B. Benjamin and F. Ursell. The stability of the plane free surface of liquid in vertical periodic motion. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 225(1163) :505–515, 1954.
- [6] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 392 :45–57, 1984.
- [7] M. V. Berry, R. G. Chambers, M. D. Large, C. Upstill, and J. C. Walmsley. Wavefront dislocations in the Aharonov-Bohm effect and its water wave analogue. *Eur. J. Phys.*, 1 :154–162, 1980.
- [8] A.L. Biance, C. Clanet, and D. Quere. Leidenfrost drops. *Phys. Fluids*, 15 :1632, 2003.
- [9] D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms on hidden variables. *Phys. Rev.*, 85 :166–179, 1952.
- [10] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 1959.
- [11] P. Brunet, J.M. Flesselles, and L. Limat. Dynamics of a circular array of liquid columns. *Eur. Phys. J. B*, 35(525), 2003.
- [12] Y. F. Chen, K. F. Huang, and Y. P. Lan. Localization of wave patterns on classical periodic orbits in a square billiard. *Phys. Rev. E*, 66(046215), 2002.
- [13] S. Ciliberto and J.P. Gollub. Pattern competition leads to chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 52(11) :922–926, 1984.

-
- [14] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Lalœ. *Mécanique Quantique*. Hermann, Paris, 1977.
- [15] A. Cohn and M. Rabinowitz. Classical tunneling. *Int. J. of Theor. Phys.*, 29 :215–223, 1990.
- [16] A. Cornu. Méthode nouvelle pour la discussion des problèmes de diffraction dans le cas d’une onde cylindrique. *J. de Phys*, 3 :44–52, 1874.
- [17] C. Coste, F. Lund, and M. Umeki. Scattering of dislocated wave fronts by vertical vorticity and the Aharonov-Bohm effect in shallow water. *Phys. Rev. E*, 60 :4908–4916, 1999.
- [18] Y. Couder and E. Fort. Single-particle diffraction and interference at macroscopic scale. *Phys. Rev. Lett.*, 97(154101) :1–4, 2006.
- [19] Y. Couder, E. Fort, C.H. Gautier, and A. Boudaoud. From bouncing to floating : non-coalescence of drops on a fluid bath. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :177801, 2005.
- [20] Y. Couder, S. Protiere, E. Fort, and A. Boudaoud. Walking and orbiting droplets. *Nature*, 437 :208, 2005.
- [21] P. Coulet and G. Ioos. Instabilities of one-dimensional cellular patterns. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8) :866–869, 1990.
- [22] L. de Broglie. *Ondes et mouvements*. Gautier Villars, Paris, 1926.
- [23] P.G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quere. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Echelles, Belin, 2002.
- [24] S. Dorbolo, D. Terwagne, N. Vandewalle, and T. Gilet. Resonant and rolling droplet. *New Journal of Physics*, 10(113021), 2008.
- [25] S. Douady. *Instabilité paramétrique d’ondes de surface*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure (Lyon), 1989.
- [26] S. Douady. Experimental study of the Faraday instability. *J. Fluid Mech.*, 221 :383–409, 1990.
- [27] S. Douady and S. Fauve. Pattern selection in Faraday instability. *Europhys. Lett.*, 6(3) :221–226, 1988.
- [28] M. Dubois, P. Berge R. Da Silva, F. Daviaud, and A. Petrov. Collective oscillating mode in a one-dimensional chain of convective rolls. *Europhys. Lett.*, 8(2) :135–139, 1989.
- [29] A. Eddi, A. Decelle, E. Fort, and Y. Couder. Archimedean lattices in the bound states of wave interacting particles. *Europhys. Lett.*, 87(56002), 2009.

-
- [30] A. Eddi, E. Sultan, J. Moukhtar, E. Fort, M. Rossi, and Y. Couder. Information stored in Faraday waves : the origin of a path memory. *Soumis in JFM*.
- [31] A. Eddi, D. Terwagne, E. Fort, and Y. Couder. Wave propelled ratchets and drifting rafts. *Europhys. Lett.*, 82(44001), 2008.
- [32] W. S. Edwards and S. Fauve. Parametrically excited quasicrystalline surface waves. *Phys. Rev. E*, 47(2), 1993.
- [33] W. S. Edwards and S. Fauve. Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment. *J. Fluid Mech.*, 278 :123–148, 1995.
- [34] M. Faraday. On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 52 :299–340, 1831.
- [35] M. J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 19 :25, 1978.
- [36] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Ann. École Norm. Sup.*, 12(47-88), 1883.
- [37] G. Gamow. Successive alpha-transformations. *Nature*, 123(606), 1929.
- [38] T. Gilet and J. W. M. Bush. Chaotic bouncing of a droplet on a soap film. *Phys. Rev. Lett.*, 102(1) :014501, 2009.
- [39] T. Gilet and J. W. M. Bush. The fluid trampoline : droplets bouncing on a soap film. *J. Fluid Mech.*, 625 :167–203, 2009.
- [40] M. Ginibre, S. Akamatsu, and G. Faivre. Experimental determination of the stability diagram of a lamellar eutectic growth front. *Phys. Rev. E*, 56(1) :780–796, 1997.
- [41] J. P. Gollub and C. W. Meyer. Symmetry-breaking instability on a fluid surface. *Physica D*, 6 :337–346, 1983.
- [42] A. Gopinath and D.L. Koch. Collision and rebound of small droplets in an incompressible continuum gas. *J. Fluid Mech.*, 454 :145–201, 2002.
- [43] A. Gopinath and D.L. Koch. Dynamics of droplet rebound from a weakly deformable gas/liquid interface. *Phys. of Fluids*, 13(3526), 2002.
- [44] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. Savoirs Actuels. CNRS Editions, 2001.
- [45] E. J. Heller. Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems : Scars of periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.*, 53(16) :1515–1518, 1984.

- [46] K. F. Huang, Y. F. Chen, H. C. Lai, and Y. P. Lan. Observation of the wave function of a quantum billiard from the transverse patterns of vertical cavity surface emitting lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 89(22) :224102, 2002.
- [47] Ch. Huygens. *Traité de la lumière*. Leiden, 1690.
- [48] J. Kepler. *Harmonices Mundi*. Linz, 1619.
- [49] A. Kudrolli, M.C. Abraham, and J.P. Gollub. Scarred patterns in surface waves. *Phys. Rev. E*, 63(026208), 2001.
- [50] K. Kumar and L.S. Tuckerman. Parametric instability of the interface between two fluids. *J. Fluid Mech.*, 279 :49–68, 1994.
- [51] J. G. Leidenfrost. De aquae communis nonnullis qualitatibus tractatus. *Duisburg on Rhine*, 1756.
- [52] V. Leroy, J-C Bacri, T. Hocquet, and M. Devaud. A hamiltonian approach to the parametric excitation. *Europhys. Lett.*, 27(3), 2006.
- [53] S.I Lieber, M.C. Herdershott, A. Pattanaporkrtana, and J.E. Maclennan. Self-organization of bouncing oil drops : Two-dimensional lattices and spinning clusters. *Phys. Rev. E*, 75(056308), 2007.
- [54] A.W. Liehr, A.S. Moskalenko, A. Astrov, M. Bode, and H.-G. Purwins. Rotating bound states of dissipative solitons in systems of reaction-diffusion type. *Eur. Phys. J. B*, 37(199-204), 2004.
- [55] O. Lioubashevski, H. Arbell, and J. Fineberg. Dissipative solitary states in driven surface waves. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :3959–3962, 1996.
- [56] O. Lioubashevski, Y. Hamiel, A. Agnon, Z. Reches, and J. Fineberg. Oscillons and propagating solitary waves in a vertically vibrated colloidal suspension. *Phys. Rev. Lett.*, 83(16), 1999.
- [57] P. Marmottant and E. Villermaux. Fragmentation of stretched liquid ligaments. *Phys. Fluids*, 16(8), 2004.
- [58] J.E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [59] F. S. Merkt, R. D. Deegan, D. I. Goldman, E.C. Rericha, and H. L. Swinney. Persistent holes in a fluid. *Phys. Rev. Lett.*, 92(18) :184501, 2004.
- [60] P. G. Merli, G. F. Missiroli, and G. Pozzi. On the statistical aspect of electron interference phenomena. *Am. J. Phys.*, 44(306), 1976.
- [61] P. G. Missiroli, G. Pozzi, and U. Valdré. Electron interferometry and interference electron microscopy. *J. Phys E*, 14(649), 1981.

- [62] F. Moisy, M. Rabaud, and K. Salsac. A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Exp. in Fluids*, Online, DOI 10.1007/s00348-008-0608-z, January 2009.
- [63] A. S. Moskalenko, A. W. Liehr, and H.-G. Purwins. Rotational bifurcation of localized dissipative structures. *Europhys. Lett.*, 63(3), 2003.
- [64] S. Pancharatnam. Generalized theory of interferences, and its applications. part I. coherent pencils. *Proc. Indian Acad. Sci. A*, 44(247-262), 1956.
- [65] P. Pieranski. Jumping particle model. period doubling cascade in an experimental system. *J. Phys. (Paris)*, 44 :573–578, 1983.
- [66] P. Pieranski and J. Malecki. Noisy precursors and resonant properties of the period-doubling modes in a nonlinear dynamical system. *Phys. Rev. A*, 34(1), 1986.
- [67] C. Pirat and L. Gil. Wave vectors selection at the threshold of a generic instability of a hexagonal stationary pattern. *Physica D*, 179 :92–104, 2003.
- [68] C. Pirat, C. Mathis, P. Maïssa, and L. Gil. Structures of a continuously fed two-dimensional viscous film under a destabilizing gravitational force. *Phys. Rev. Lett.*, 92(10) :104501, 2004.
- [69] S. Protière. *Gouttes rebondissantes : une association onde-particule à échelle macroscopique*. PhD thesis, Université Paris Diderot, 2007.
- [70] S. Protière, S. Bohn, and Y. Couder. Exotic orbits of two interacting wave sources. *Phys. Rev. E*, 78(036204), 2008.
- [71] S. Protière, A. Boudaoud, and Y. Couder. Particle wave association on a fluid interface. *J. Fluid Mech.*, 554 :85–108, 2006.
- [72] M. Rabaud, S. Michalland, and Y. Couder. Dynamical regimes of directional viscous fingering : Spatiotemporal chaos and wave propagation. *Phys. Rev. Lett.*, 64(2) :184–187, 1990.
- [73] P.L. Ramazza, E. Benkler, U. Bortolozzo, S. Boccaletti S., S. Ducci, and F.T. Arceri. Tailoring the profile and interactions of optical localized structures. *Phys. Rev. E.*, 65(066204), 2002.
- [74] P. Roux, J. de Rosny, M. Tanter, and M. Fink. The Aharonov-Bohm effect revisited by an acoustic time-reversal mirror. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :3170–3173, 1997.
- [75] K. R. Sreenivas, P. K. De, and J. H. Arakeri. Levitation of a drop over a film flow. *J. Fluid Mech.*, 380 :297–307, 1999.
- [76] G. I. Taylor. Interference fringes with feeble light. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 15(114), 1909.

-
- [77] D. Terwagne, N. Vandewalle, and S. Dorbolo. Lifetime of a bouncing droplet. *Phys. Rev. E*, 76(056311), 2007.
- [78] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, and H. Ezawa. Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern. *Am. J. Phys.*, 57(117), 1989.
- [79] N. B. Tuffillaro and A. M. Albano. Chaotic dynamics of a bouncing ball. *Am. J. Phys.*, 54 :939–944, 1986.
- [80] N. B. Tuffillaro, T.M. Mello, Y. M. Choi, and A. M. Albano. Period doubling boundaries of a bouncing ball. *J. Physique*, 47 :1477–1482, 1986.
- [81] N. B. Tuffillaro, R. Ramshankar, and J. P. Gollub. Order-disorder transition in capillary ripples. *Phys. Rev. Lett.*, 62(4), 1989.
- [82] P. B. Umbanhowar, F. Melo, and H. L. Swinney. Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, 382 :793–796, 1996.
- [83] L. Vagharchakian, F. Restagno, and L. Léger. Capillary bridge formation and breakage : A test to characterize antiadhesive surfaces. *The Journal of Physical Chemistry B*, 113(12) :3769–3775, 2009.
- [84] N. Vandewalle, D. Terwagne, K. Mulleners, T. Gilet, and S. Dorbolo. Dancing droplets onto liquid surfaces. *Phys. of Fluids*, 18(091106), 2006.
- [85] N. Vandewalle, D. Terwagne, K. Mulleners, T. Gilet, and S. Dorbolo. Dynamics of a bouncing droplet onto a vertically vibrated surface. *Phys. Rev. Lett.*, 100(167802), 2008.
- [86] F. Vivanco, F. Melo, C. Coste, and F. Lund. Surface wave scattering by a vertical vortex and the symmetry of the Aharonov-Bohm wave function. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :1966 – 1969, 1999.
- [87] E. J. Watson. The radial spread of a liquid over a horizontal plane. *J. Fluid Mech.*, 20 :481–499, 1964.