



**HAL**  
open science

# Reconstruction de surfaces d'objets courbes en vision par ordinateur

Edmond Boyer

► **To cite this version:**

Edmond Boyer. Reconstruction de surfaces d'objets courbes en vision par ordinateur. Interface homme-machine [cs.HC]. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 1996. Français. NNT : 1996INPL150N . tel-00584012

**HAL Id: tel-00584012**

**<https://theses.hal.science/tel-00584012>**

Submitted on 7 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Reconstruction de surfaces d'objets courbes en vision par ordinateur

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 11 décembre 1996

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine**  
(Spécialité Informatique)

par

Edmond BOYER

### Composition du jury

*Président :* Roger MOHR

*Rapporteurs :* Michel DHOME  
Jean-Laurent MALLET  
Jean PONCE

*Examineurs :* Marie-Odile BERGER  
Karl TOMBRE



## Résumé

De par les récents progrès de l'informatique dans le domaine de l'imagerie, il est dorénavant possible de manipuler des surfaces d'objets réels à partir des ordinateurs. Un des besoins qui en découle concerne l'acquisition de ces surfaces. Dans ce document, nous nous penchons sur le problème de la reconstruction de surfaces d'objets courbes à partir de séquences d'images. Les contours images de ce type d'objets, les contours occultants, constituent une riche source d'informations sur la géométrie de la surface de l'objet. Il est en particulier possible d'estimer les propriétés locales de la surface lorsqu'une séquence d'au moins trois contours est disponible. Nous présentons dans ce cadre une méthodologie de reconstruction de surfaces. Celle-ci permet de passer d'une séquence de contours occultants à une description de la partie de la surface observée correspondante, sous la forme de facettes triangulaires. Plusieurs aspects de la reconstruction liés aux contours occultants sont par ailleurs pris en compte pour améliorer les résultats : la correction des effets dûs au bruit présent dans l'ensemble du processus d'acquisition ainsi que la détection des parties non-visibles de la surface par les contours, les concavités par exemple. Les différentes étapes de la méthodologie sont illustrées tout au long du document par de nombreuses expérimentations sur des données réelles et synthétiques.

**Mots Clef:** reconstruction 3D, surfaces, contours occultants, correspondance épipolaire, lissage de surfaces polygonales, détection de concavité.

## Abstract

Recent progress in computer science makes it feasible to manipulate real object surfaces with computers. One of the resulting needs is the ability to build models of such surfaces. In this thesis, we address the problem of the reconstruction of curved object surfaces from image sequences. Planar image contours of such objects, the occluding contours, provide rich and robust geometric information about the surface shape. In particular, local shape reconstruction can be achieved when three or more occluding contours of the surface are available. In this context, we present a global method that builds surface descriptions, from occluding contours sequences, which are based on triangular meshes. In order to improve the reconstruction procedure, different important aspects are taken into account such as the correction of noise effects and the detection of surface concavities. A number of experimentations on simulated and real data are shown throughout this document to illustrate each step of the method.

**Keywords:** 3D surface reconstruction, occluding contours, epipolar correspondance, polygonal surface smoothing, concavity detection.



## Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements aux membres de mon jury pour avoir accepté de juger mon travail :

Roger Mohr, Professeur à l'ENSIMAG, pour son soutien et pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Jean Ponce, Professeur à l'Université de l'Illinois à Urbana-Champaign, Michel Dhome, Directeur de recherche au CNRS, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en acceptant de rapporter ce mémoire et Jean-Laurent Mallet, Professeur à l'ENSG, qui a bien voulu en être le rapporteur interne.

Marie-Odile Berger, chargé de recherche à l'INRIA, qui est à l'origine de ce travail de recherche et qui m'a apporté son aide durant ces trois années et Karl Tombre, chargé de recherche à l'INRIA, tous deux examinateurs de ma thèse.

J'adresse un merci tout particulier à Sylvain Petitjean pour l'intérêt sans faille qu'il a montré pour mon travail et pour les mille et un services désintéressés que seul un ami peut rendre.

Que Christian et Philippe trouvent ici l'expression de mon amicale reconnaissance pour leur relecture de ce document ainsi qu'Antoine pour sa bonne humeur communicative et Suzanne, tous deux partageant leur bureau avec moi. Je remercie par ailleurs sincèrement Jean Claude Paul et l'ensemble des membres du projet ISA ainsi que les membres du projet MOVI de Grenoble pour leur aide, notamment Pascal Brand pour de fastidieuses séances d'acquisitions d'images passées avec moi et pour ses programmes d'extraction de points.

Enfin ce travail n'existerait pas sans la confiance et le soutien de ma famille, qu'ils trouvent ici l'expression de ma plus profonde gratitude.



*À Valérie,*





# Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>1</b> |
| <b>1 Les contours occultants : propriétés et mises en correspondance</b>   | <b>7</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .   | 8        |
| 1.1.1 Quelques travaux . . . . .   | 8        |
| 1.1.2 Contenu du chapitre . . . . .  | 11       |
| 1.2 Définitions et propriétés statiques . . . . .                          | 11       |
| 1.2.1 Paramétrer la surface . . . . .                                      | 13       |
| 1.2.2 Propriétés différentielles . . . . .                                 | 15       |
| 1.2.3 Lien entre la courbure apparente et la courbure gaussienne . . . . . | 17       |
| 1.3 Paramétrage épipolaire . . . . .                                       | 21       |
| 1.3.1 Un paramétrage de la surface spatio-temporelle . . . . .             | 21       |
| 1.3.2 Le paramétrage épipolaire induit sur la surface . . . . .            | 23       |
| 1.4 Correspondance épipolaire . . . . .                                    | 24       |
| 1.4.1 Définitions . . . . .  | 24       |
| 1.4.2 Propriétés . . . . .   | 28       |
| 1.5 Mise en correspondance : applications . . . . .                        | 32       |
| 1.5.1 Extraction et suivi des contours occultants . . . . .                | 33       |
| 1.5.2 Représentation des contours occultants . . . . .                     | 34       |
| 1.5.3 Détermination de la position d'un correspondant épipolaire . . . . . | 34       |
| 1.5.4 Exemples : données synthétiques . . . . .                            | 37       |
| 1.5.5 Exemples : données réelles . . . . .                                 | 38       |
| 1.6 Résumé et discussion . . . . .   | 46       |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>2</b> | <b>Reconstruction d'un point appartenant à un contour d'occultation</b> | <b>51</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .  | 52        |
| 2.1.1    | Travaux existants . . . . .   | 52        |
| 2.1.2    | Notre approche . . . . .  | 54        |
| 2.2      | Le cas continu . . . . .  | 55        |
| 2.2.1    | La formule de profondeur . . . . .                                      | 55        |
| 2.2.2    | Le cas discret . . . . .  | 56        |
| 2.3      | Un modèle local de surface: le paraboloid osculateur . . . . .          | 58        |
| 2.3.1    | Définition . . . . .  | 58        |
| 2.3.2    | Le paraboloid osculateur en un point d'un contour d'occultation . .     | 61        |
| 2.3.3    | L'équation des courbes épipolaires . . . . .                            | 62        |
| 2.3.4    | Reconstruire le paraboloid osculateur . . . . .                         | 65        |
| 2.4      | Déterminer la profondeur $\lambda$ . . . . .                            | 68        |
| 2.4.1    | L'équation de la profondeur . . . . .                                   | 68        |
| 2.4.2    | Résolution pour 2 correspondants épipolaires . . . . .                  | 72        |
| 2.4.3    | Résolution pour $n$ correspondants épipolaires . . . . .                | 74        |
| 2.5      | Comparaison avec les méthodes du cercle osculateur . . . . .            | 77        |
| 2.5.1    | Les méthodes . . . . .  | 78        |
| 2.5.2    | Les différences avec l'approche du paraboloid osculateur . . . . .      | 79        |
| 2.6      | Résultats expérimentaux . . . . .                                       | 80        |
| 2.6.1    | Données synthétiques . . . . .  | 81        |
| 2.6.2    | Données réelles . . . . .   | 85        |
| 2.7      | Résumé et discussion . . . . .  | 88        |
| <b>3</b> | <b>Modélisation de la surface observée</b>                              | <b>95</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .  | 96        |
| 3.1.1    | Travaux existants . . . . .   | 96        |
| 3.1.2    | Notre approche . . . . .  | 97        |
| 3.2      | Une description paramétrique de la surface . . . . .                    | 98        |
| 3.2.1    | Triangler les points reconstruits . . . . .                             | 98        |
| 3.2.2    | Algorithme . . . . .  | 98        |
| 3.3      | Lisser la surface . . . . .   | 100       |
| 3.3.1    | Différentes méthodes . . . . .  | 102       |
| 3.3.2    | Énergie de régularisation . . . . .                                     | 104       |
| 3.3.3    | Énergies de rappel . . . . .  | 105       |
| 3.3.4    | Le coefficient de régularisation $\nu$ . . . . .                        | 107       |
| 3.3.5    | Résultats expérimentaux . . . . .                                       | 108       |

|                                   |  |            |
|-----------------------------------|--|------------|
| 3.4                               | Les régions non-visibles par les contours : étude et détection . . . . .       | 113        |
| 3.4.1                             | Le contexte . . . . .  | 113        |
| 3.4.2                             | Le cas d'observations continues . . . . .                                      | 114        |
| 3.4.3                             | Le cas d'observations discrètes . . . . .                                      | 116        |
| 3.4.4                             | Résultats expérimentaux . . . . .  | 118        |
| 3.5                               | Une évaluation qualitative : reprojction des modèles dans les images initiales | 118        |
| 3.6                               | Résumé et discussion . . . . .   | 121        |
| <b>Conclusion</b>                 |  | <b>127</b> |
| <b>Annexes</b>                    |  | <b>131</b> |
| <b>A Géométrie des caméras</b>    |  | <b>131</b> |
| A.1                               | Un modèle projectif pour la caméra . . . . .                                   | 131        |
| A.2                               | Calibrage d'une caméra . . . . .   | 136        |
| A.3                               | Calibrage du système composé de la caméra et de la table micro-métrique .      | 138        |
| <b>B Géométrie différentielle</b> |  | <b>141</b> |
| B.1                               | Les surfaces régulières . . . . .  | 141        |
| B.2                               | Les formes fondamentales . . . . .   | 142        |
| B.3                               | Les courbures . . . . .  | 144        |
| B.4                               | Les contacts d'une droite avec une surface . . . . .                           | 145        |
| <b>Bibliographie</b>              |  | <b>147</b> |
| <b>Table des figures</b>          |  | <b>157</b> |



# Introduction

L'étude des surfaces est un thème largement présent dans l'histoire des mathématiques, notamment au travers de la géométrie différentielle ou de la géométrie algébrique. Plus récemment, les informaticiens ont montré un intérêt grandissant pour ce domaine jusqu'alors réservé. Une des raisons de cet intérêt se situe dans les avancées technologiques qui permettent dorénavant de représenter des surfaces d'objets divers ; une autre réside dans le besoin de plus en plus important d'outils théoriques permettant de conceptualiser les processus de vision (humaine ou robotique) impliquant des surfaces [Koe 90].

L'imagerie par ordinateur constitue, à cet égard, un domaine exemplaire. Les surfaces y sont abondamment utilisées, en particulier pour décrire les objets tri-dimensionnels de notre quotidien. Les thèmes qui émergent dans ce contexte sont multiples. Il peut s'agir de reconstruire la surface d'un objet réel, en s'aidant pour cela de capteurs. Les nombreux systèmes, basés sur des capteurs lasers, qui existent actuellement en sont une illustration. Un autre aspect concerne la visualisation des surfaces, celles-ci pouvant représenter des objets réels ou purement virtuels. Cette visualisation se fait alors en générant des images artificielles dites de synthèse. Un troisième aspect concerne les problèmes de reconnaissance, il s'agit alors d'identifier une surface, sur la base d'un ensemble de modèles prédéfinis. Enfin, citons un point important en robotique : la détermination de la position et de l'orientation d'une surface dans le cadre, par exemple, de navigation ou de surveillance automatique.

Dans cette thèse, nous traitons du problème de la reconstruction de surfaces. Les problèmes de ce type se retrouvent dans les domaines de la vision par ordinateur, où l'on cherche à interpréter des images réelles, et de la C.A.O. (Conception Assistée par Ordinateur), où l'on cherche à produire des images de synthèse. Il s'agit de fait d'une étape préliminaire nécessaire aux tâches de représentation, de reconnaissance ou de localisation d'une surface réelle. Les données traitées peuvent être issues de différents capteurs, qui sont dits *actifs* lorsqu'ils sont couplés à une source d'émission particulière (laser, rayons X, ultra-sons, etc.) ou bien *passifs* lorsqu'ils utilisent une source d'émission indépendante, telle que la lumière par exemple. Nous considérons en particulier le cas des capteurs passifs CCD fournissant des images de réflectance, soit le cas de données sous la forme d'images à niveaux de gris. La reconstruction de surfaces consiste alors à interpréter le contenu d'images de projections planes pour en extraire une information 3D, et constitue en cela un problème de vision par ordinateur.

La reconstruction de surfaces (*shape from X*) se partitionne alors en un éventail de sous domaines en fonction du type de surface traitée et du type de primitive dans l'image qui est utilisée : la stéréo-vision, qui traite de la reconstruction à partir de positions de points dans plusieurs images (*shape from stereo*) [Aya 89], la reconstruction à partir de la fonction d'intensité dans une image (*shape from shading*) [Pen 90], la reconstruction à partir des contours dans une image (*shape from contours*) [Bra 84, Ulu 93], la reconstruction à partir du mouvement (*shape from motion*) [Ull 79, Fau 90b], la reconstruction par la texture (*shape from texture*) [Kan 89].

Dans ce document, nous considérons le cas de surfaces d'objets courbes. Les contours, qui correspondent aux discontinuités de la fonction d'intensité dans les images, représentent alors la source d'information la plus fiable concernant la surface de ces objets. Les valeurs de la fonction d'intensité sont en effet difficilement exploitables dans un contexte réel d'images bruitées. Parmi ces contours, les *contours occultants*, qui représentent la frontière dans l'image entre l'objet et le fond, constituent des primitives de première importance. Ils permettent, en effet, d'inférer un certain nombre de caractéristiques 3D sur la surface observée [Koe 84a]. Lorsque celle-ci appartient à certaines catégories de surfaces déterminées, il est même possible de localiser ou même reconstruire la surface à l'aide d'un seul contour occultant. C'est le cas, par exemple, de certains cylindres généralisés [Pon 89, Gla 92a, Ulu 95]. Dans un contexte plus général, sans heuristiques particulières sur le modèle de surface, une séquence de contours occultants permet d'estimer différentes propriétés de la surface : position, orientation et courbures.

## Position du problème

Cette thèse est consacrée à la reconstruction de surfaces d'objets courbes et rigides, à partir de séquences de contours occultants. Le principal objectif recherché est la modélisation automatique d'objets à partir d'images à niveaux de gris. Les modèles pouvant ensuite servir diverses tâches dont notamment la localisation ou la reconnaissance. Les séquences d'images traitées sont obtenues par des acquisitions successives à temps discrets, à l'aide d'une caméra effectuant un mouvement connu. Nous limitons la connaissance *a priori* requise sur les surfaces considérées à la simple hypothèse de dérivabilité de la normale. Cela ouvre l'accès à l'ensemble des surfaces au moins  $C^2$ , surfaces que nous regroupons par la suite sous la dénomination de *surfaces régulières*. Dans ce cadre, la reconstruction se décompose en sous-problèmes qui sont, dans un ordre chronologique naturel de traitement illustré par l'exemple de la figure I.1 :

- l'extraction des contours occultants dans les images ;
- la reconstruction des contours correspondants sur la surface ;
- la construction d'un modèle de la surface ou, plus exactement, de la partie qui en est accessible au travers de la séquence de contours considérée.

En réponse au premier problème, dit de *bas niveau* - par opposition à ceux concernant une phase ultérieure d'interprétation et dits de *haut niveau* -, un certain nombre de méthodes existent. Nous utilisons une méthode de suivi à base de contours actifs, qui a été

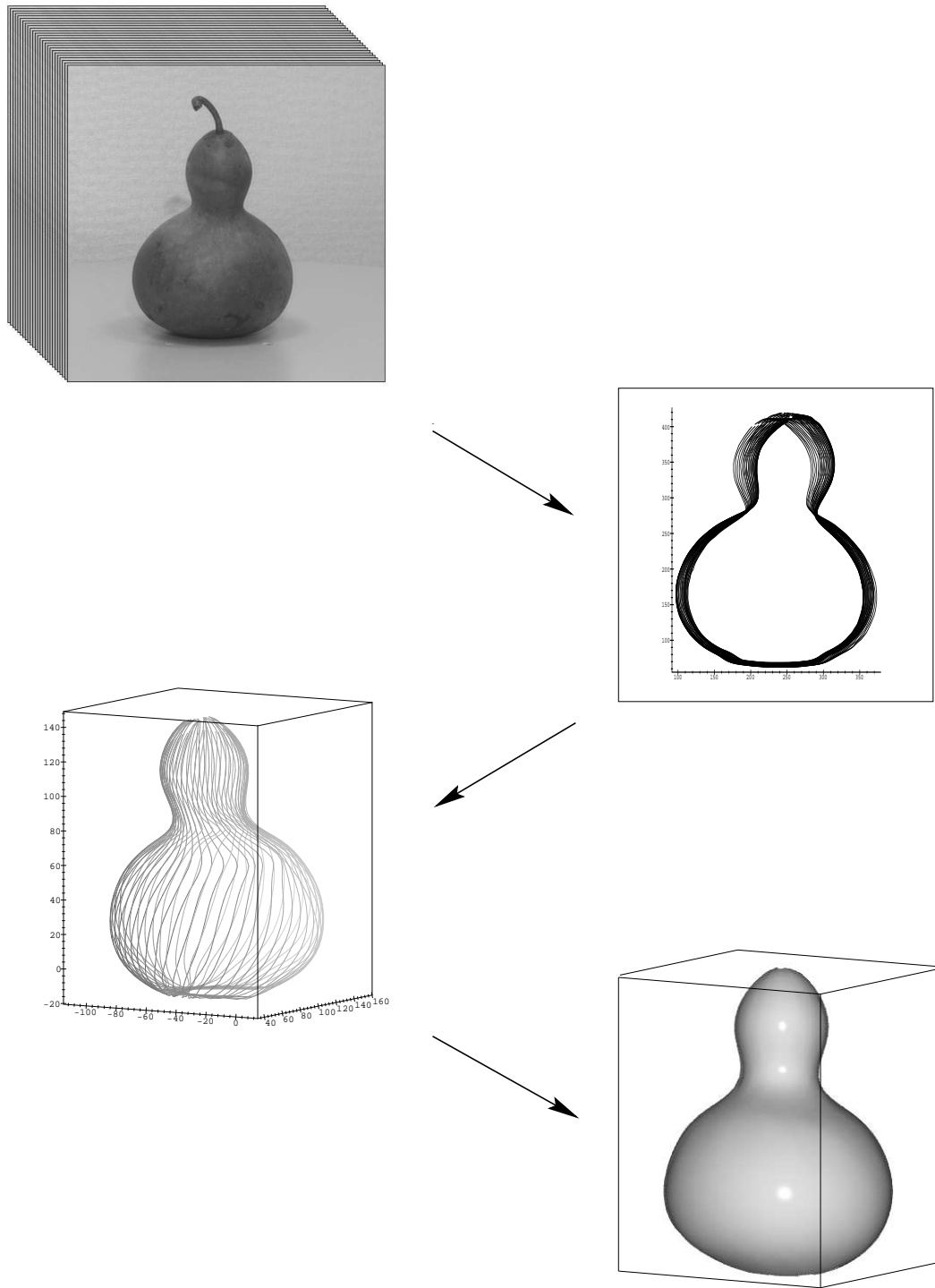


FIG. I.1 - *Le processus de reconstruction de surface à partir d'une séquence d'images.*



développée au cours de travaux antérieurs de notre équipe [Ber 91]. La fiabilité et la robustesse de cette approche, lorsqu'il s'agit de traiter des séquences d'images d'objets courbes, ont été démontrées [Ber 94].

Les deux autres problèmes ne possèdent, en l'état actuel, que des solutions partielles. Ces solutions imposent en effet des contraintes qui concernent soit la forme de la surface traitée, soit, de manière explicite ou implicite, le mouvement de la caméra. Nous nous efforçons donc, au travers de ce document, d'apporter de nouvelles solutions plus générales à ces problèmes.

## Contributions

Nous exposons, tout au long de cette thèse et dans le contexte énoncé, un ensemble d'éléments constituant une méthodologie de reconstruction. Celle-ci fait suite aux travaux de Cipolla [Cip 90] et Vaillant [Vai 90] sur les surfaces et permet de construire, à partir d'une séquence d'images d'un objet, un modèle de la partie observée de cet objet. L'ensemble de la méthode peut être décomposé en deux phases principales :

- une première phase concerne la reconstruction des points de contours. Nous faisons appel pour cela à un algorithme de reconstruction locale [Boy 95a, Boy 96c].
- Une deuxième phase concerne la construction d'un modèle. Dans ce but, les points reconstruits sont triangulés et la surface est alors décrite sous la forme d'un maillage polygonal [Boy 95b, Boy 96b, Boy 96a].

Ces deux phases reposent sur divers éléments dont certains constituent, en regard des travaux existants, des contributions majeures. Ce sont en particulier :

1. Un algorithme fiable de reconstruction des points de contours. Celui-ci repose sur une formulation exacte de la profondeur d'un point de contour dans le cas d'observations discrètes. Cette formulation donne une solution générale au problème de reconstruction, qui est définie pour tout mouvement de la caméra.
2. Une méthode originale de lissage des surfaces définies par des maillages polygonaux. Celle-ci est simple à mettre en œuvre et permet, en particulier, de contraindre l'orientation locale de la surface en fonction de directions données.
3. Un algorithme de détection des concavités de la surface dans la direction d'observation. L'approche proposée étend les résultats de Zheng [Zhe 94] au cas de projections perspectives et à tout mouvement de caméra.

## Contenu de la thèse

Ce document se scinde en trois parties principales. Celles-ci sont ordonnées suivant la chronologie des opérations à effectuer pour construire, à partir d'une séquence de contours occultants, une description complète d'une surface.

- Le premier chapitre traite des contours occultants. Leurs propriétés statiques sont précisées. La manipulation par séquences de ces contours requiert la définition d'une relation de correspondance entre contours. À cet effet, la correspondance épipolaire

est introduite ainsi que le paramétrage épipolaire dont elle découle. Ce paramétrage naturel dans le cadre d'une séquence d'images échoue aux limites de la région couverte par les contours sur la surface. Ces limites sont étudiées et explicitées en s'appuyant notamment sur les travaux de Giblin et Weiss [Gib 95]. Ce chapitre se termine par l'étude de la mise en œuvre pratique de la correspondance épipolaire.

- Le deuxième chapitre est consacré à la reconstruction des points de contours. Les différentes formules de profondeur en ces points sont établies dans le cas d'observations continues. L'algorithme qui est utilisé en pratique repose sur une approximation locale à l'ordre 2 de la surface : le *paraboloïde osculateur*. Cette approximation est présentée en lien avec la géométrie d'observation des contours occultants. Les relations qui en découlent sur les propriétés locales de la surface sont ensuite explicitées. Pour finir, de multiples expériences sur des données réelles viennent illustrer l'application de ces relations.
- Le troisième chapitre concerne la dernière étape du processus de reconstruction : la modélisation de la surface observée. Ce chapitre se décompose en trois parties qui sont : la triangulation, le lissage de la surface et la détection des concavités. Chacune de ces parties est illustrée par des expériences sur des données issues de séquences d'images réelles.

À cela s'ajoutent deux annexes. La première traite de la géométrie des caméras appliquée dans cet ouvrage. En particulier, le problème primordial du calibrage y est abordé. Le mouvement de la caméra est en effet supposé connu, et il est nécessaire d'effectuer une étape de calibrage pour le déterminer. La précision de cette opération revêt une grande importance, eu égard à l'instabilité notoire des processus de reconstruction. La deuxième annexe rappelle un certain nombre de notions de géométrie différentielle qui sont abondamment utilisées dans cette thèse (paramétrage, courbures, contact d'une droite avec une surface, etc.).



# Chapitre 1

## Les contours occultants : propriétés et mises en correspondance

Dans ce chapitre, nous introduisons la primitive qui sera utilisée par la suite pour la reconstruction : les contours occultants. Les différentes propriétés qui leur sont associées sont démontrées, en particulier le lien entre la courbure apparente du contour occultant et la courbure de la surface. Nous nous intéressons ensuite au problème de leurs mises en correspondance et nous étudions, dans un premier temps, le cas théorique d'observations continues au travers du paramétrage épipolaire. Les limitations de ce paramétrage sont ainsi mises en évidence. Nous étudions par la suite la relation de correspondance qui en découle dans le cas discret. Celle-ci présente plusieurs propriétés que nous démontrons, notamment de continuité et de différentiabilité. Enfin, nous explicitons la mise en œuvre pratique de la correspondance épipolaire et nous donnons plusieurs exemples pour des images synthétiques et réelles.

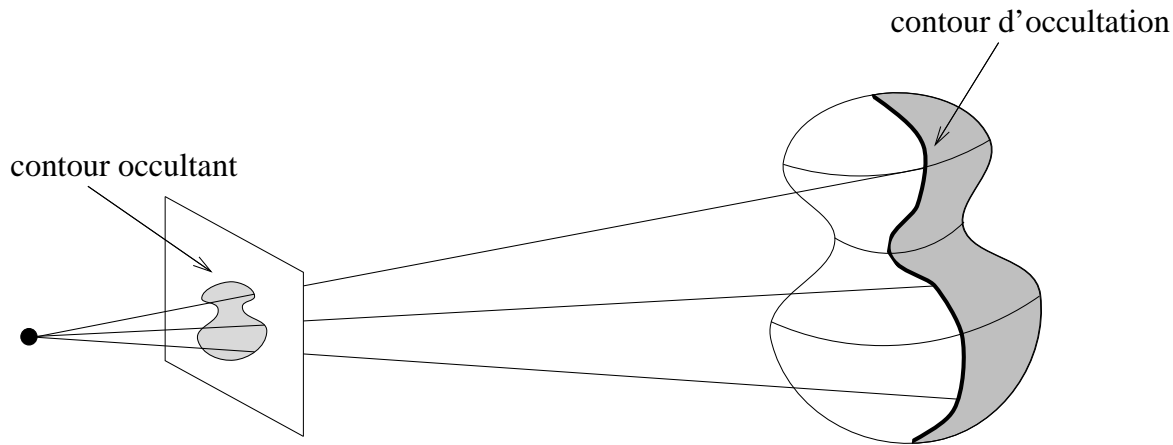


FIG. 1.1 – *Contour d'occultation et contour occultant.*

## 1.1 Introduction

Les contours constituent une source d'information importante lorsqu'il s'agit d'interpréter une scène au travers d'images. Ils correspondent à des discontinuités de la fonction d'intensité dans l'image et peuvent être de différents types [Nal 88] : les discontinuités de la fonction de réflectance (texture, ombre) et les discontinuités de profondeur (le bord de l'objet par exemple). Ce deuxième type de discontinuité caractérise les contours *extérieurs* ; ceux-ci sont présents dans une projection image, que la surface soit texturée ou non et quel que soit l'éclairage mis en œuvre. Ils représentent donc des primitives fiables dans les images.

Les contours extérieurs ainsi définis se regroupent ensuite suivant deux catégories, qui sont fonction de la forme de l'objet observé : polyédrique ou courbe. Les contours extérieurs issus de l'observation d'un objet polyédrique correspondent à des contours *fixes* de l'objet : les arêtes. À l'inverse, les contours extérieurs issus de l'observation d'un objet courbe ne correspondent pas à des contours fixes de l'objet ; ceux-ci dépendent en effet du point de vue. Lorsque celui-ci varie, le contour correspondant qui est observé évolue sur l'objet. Il s'agit d'un contour *d'occultation*, qui est constitué des points de la surface de l'objet pour lesquels la direction d'observation est tangente à la surface. Le contour extérieur qui correspond à la projection du contour d'occultation sur le plan rétinien (ou plan image) s'appelle alors le contour *occultant* (figures 1.1 et 1.2).

Les contours occultants possèdent des propriétés géométriques qui permettent d'inférer des caractéristiques 3D sur la surface observée. De plus, leur évolution dans une séquence issue d'un déplacement de la caméra permet de reconstruire la surface. Ce chapitre est dédié à l'étude de ces propriétés, ainsi qu'à l'étude de la relation de correspondance utilisée pour suivre l'évolution d'un contour à un autre.

### 1.1.1 Quelques travaux

De nombreux travaux traitent des contours occultants, en raison de l'intérêt qu'ils présentent pour la vision des objets courbes. Ces travaux concernent, pour certains, les propriétés des contours occultants, et pour d'autres, l'usage qui peut en être fait dans l'objectif d'une reconstruction 3D. Nous nous intéressons plus particulièrement dans ce

chapitre aux propriétés des contours occultants, le problème de reconstruction étant traité de manière spécifique dans le chapitre 2. Néanmoins, une dissociation des travaux existants suivant ces deux objectifs différents ne peut pas toujours être faite, et une redondance dans les citations effectuées existe donc entre les deux chapitres. Enfin, l'analyse bibliographique qui suit ne se veut pas exhaustive, mais cherche néanmoins à rester fidèle à l'évolution des travaux sur les contours occultants en vision par ordinateur.

Barrow et Tenenbaum [Bar 81] ont montré que l'orientation de la surface le long du contour d'occultation pouvait être déterminée à partir d'informations images. Marr [Mar 82] s'est intéressé à ce qui pouvait être déduit de la courbure du contour occultant sur la surface observée. Koenderink [Koe 82, Koe 84b] a par la suite apporté des résultats théoriques fondamentaux sur les contours occultants, dont notamment le lien entre la courbure du contour occultant et la courbure gaussienne de la surface au point observé. Dans ces travaux, le lien est démontré de manière explicite dans le cas d'un contour occultant provenant d'une projection orthographique. Ce résultat a été généralisé, ensuite, au cas d'une projection perspective sphérique par Cipolla [Cip 90] et à celui d'une projection perspective plane par Vaillant [Vai 90]. Le calcul de caractéristiques différentielles repose ici sur le fait que le contour occultant est non-singulier. Une étude complète des différentes situations possibles, pour le contour occultant ainsi que pour le contour d'occultation, a été réalisée par Koenderink [Koe 90]. Les singularités de ces contours sont en particulier explicitées.

L'ensemble de ces résultats concerne les propriétés statiques des contours occultants, et donc ce qui peut être déduit à partir d'une seule image. Les propriétés dynamiques de ces contours, au travers de séquences d'images, apportent des informations supplémentaires sur la géométrie de l'objet observé ainsi que sur le mouvement de la caméra par rapport à l'objet (ou inversement).

- Bolles et al. [Bol 87] se sont intéressés, dans le cas de contours fixes, à l'évolution temporelle de ceux-ci au travers d'une séquence dense d'images et à la description 3D de la scène qui peut en être extraite.
- Giblin et Weiss [Gib 87], dans le cas d'une projection orthographique, ont les premiers utilisé la déformation dans le temps du contour occultant d'une surface pour déterminer sa position et sa courbure. Leur approche s'appuie sur le fait que la surface est l'enveloppe de ses plans tangents et consiste à calculer celle-ci.
- Cipolla et Blake [Cip 90] ont étudié la structure spatio-temporelle générée par l'évolution dans le temps du contour occultant. Dans ce cadre, ils ont introduit un paramétrage naturel de cette structure, lié à la géométrie de l'observation : le *paramétrage épipolaire*. Ils ont de plus établi l'équation de la profondeur d'un point appartenant à un contour d'occultation, ceci dans le cas d'une projection perspective.
- Giblin et Weiss [Gib 95] ont par la suite étudié le lien entre cette structure et la surface observée, et en particulier le paramétrage épipolaire induit sur la surface. Les limitations de ce paramétrage induit sont ainsi mises en évidence.
- Cipolla et al. [Cip 95a] ont par ailleurs remarqué que la présence de singularités du type *point de rebroussement* sur le contour occultant n'était pas restrictive quant au calcul des caractéristiques différentielles de la surface. Le suivi temporel de ces

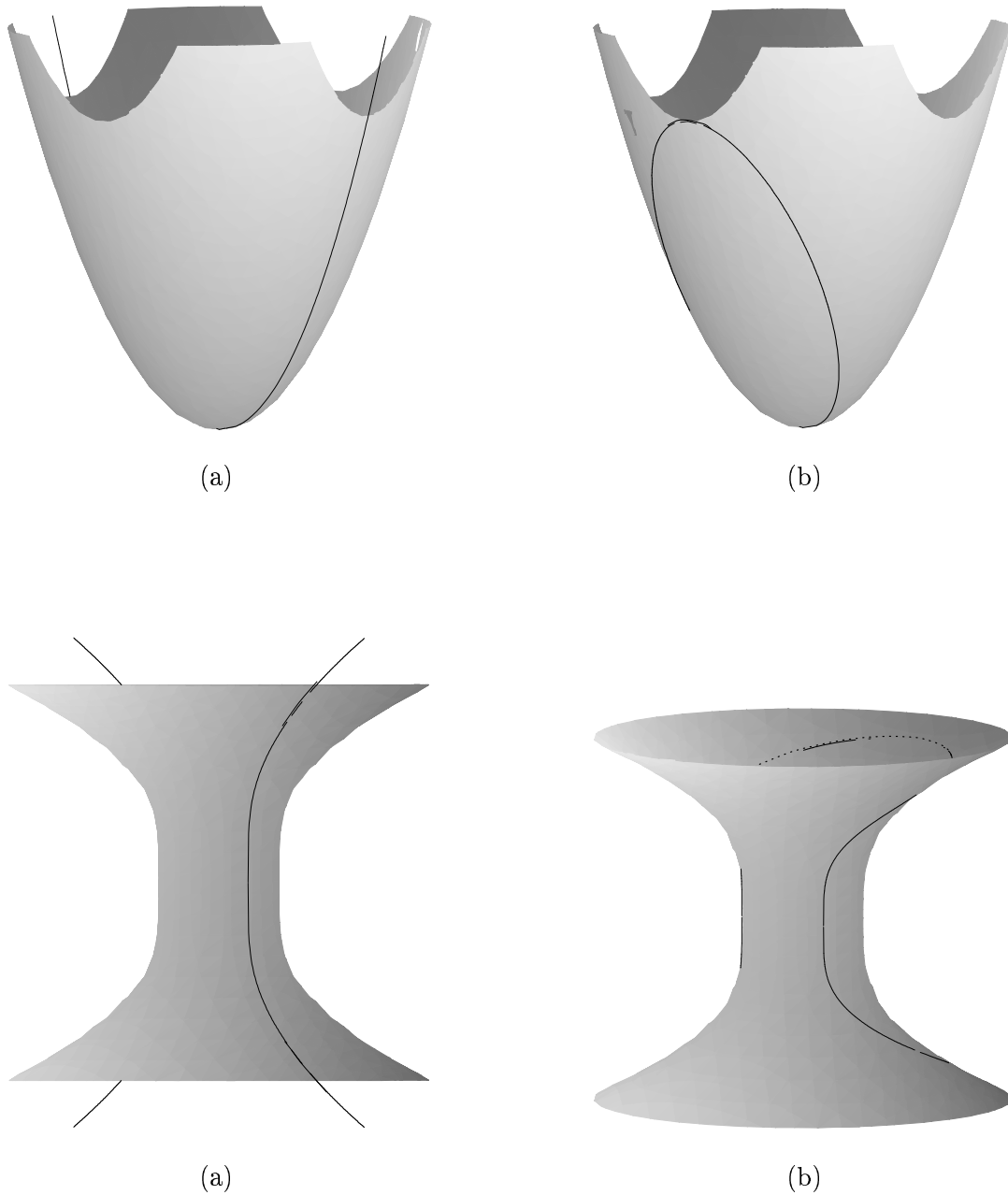


FIG. 1.2 – Exemples de contours d'occultations : (a) le cas d'une projection orthographique, (b) le cas d'une projection perspective. La partie du contour d'occultation en pointillé dans le dernier exemple ne peut être vue que si la surface est transparente.

singularités permet, en effet, de déterminer la courbure gaussienne et la position de la surface au point correspondant.

- Joshi et al. [Jos 95a] utilisent l'évolution dans le temps de certains points particuliers des contours occultants (les points d'inflexions et les points frontières) pour déterminer le mouvement de la surface.
- Enfin, Åström et al. [Åst 96] ont généralisé la notion de contrainte épipolaire, qui s'applique aux points et contours fixes, au cas des contours occultants. Ils en déduisent une méthode pour déterminer le mouvement de la caméra à l'aide de contours occultants.

Dans nos travaux, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la mise en correspondance des contours dans le cas de séquences discrètes. L'acquisition d'images dans un contexte réel ne peut se faire, en effet, qu'à des temps discrets. Dans ce cadre, nous avons étudié en détail la correspondance épipolaire et mis en évidence un certain nombre de propriétés. Celles-ci concernent notamment la continuité de cette relation lorsqu'elle est appliquée à deux contours occultants issus d'un même objet, et font apparaître des cas particuliers sur les contours d'occultations : les points multiples. Ces propriétés sont, bien sûr, fortement liées à celles de l'équivalent infinitésimal de la correspondance épipolaire, à savoir le paramétrage épipolaire. Dans ce chapitre, nous précisons les propriétés de l'un et l'autre.

### 1.1.2 Contenu du chapitre

La suite de ce chapitre commence par l'introduction des notations utilisées ainsi que le rappel des propriétés statiques des contours occultants. De nombreux problèmes, et en particulier la reconstruction, font intervenir des séquences de contours. La manipulation de ces ensembles de contours nécessite la définition d'une relation de correspondance. Nous introduisons par la suite le *paramétrage épipolaire* dans le cas théorique d'un ensemble continu de contours. La relation qui en découle, dans le cas réel de contours à temps discrets, est la *correspondance épipolaire*. Nous en précisons les propriétés, celles-ci justifiant notamment son choix dans l'objectif d'une reconstruction. Puis, nous étudions sa mise en œuvre au travers d'applications pratiques.

## 1.2 Définitions et propriétés statiques

Les contours occultants sont connus comme étant une riche source d'informations géométriques sur la surface observée. Dans ce paragraphe, nous introduisons en premier lieu les définitions nécessaires à leur étude puis nous rappelons les propriétés statiques liées à ces contours, en particulier les relations qui existent entre les courbures de la surface et celles du contour observé.

Soit  $\mathcal{S}$  la surface de l'objet observé. Nous appelons  $P$  un point de la surface et  $N$  la normale à la surface en  $P$ . Nous supposons que  $\mathcal{S}$  est régulière, c'est à dire que la normale  $N$  est dérivable sur l'ensemble de la surface  $\mathcal{S}$ .

**Définition 1.1.** *Pour une position donnée  $C$  de la caméra, il existe un ensemble de points  $P$  sur la surface observée pour lesquels la normale  $N$  est perpendiculaire à la direction  $T$  de*



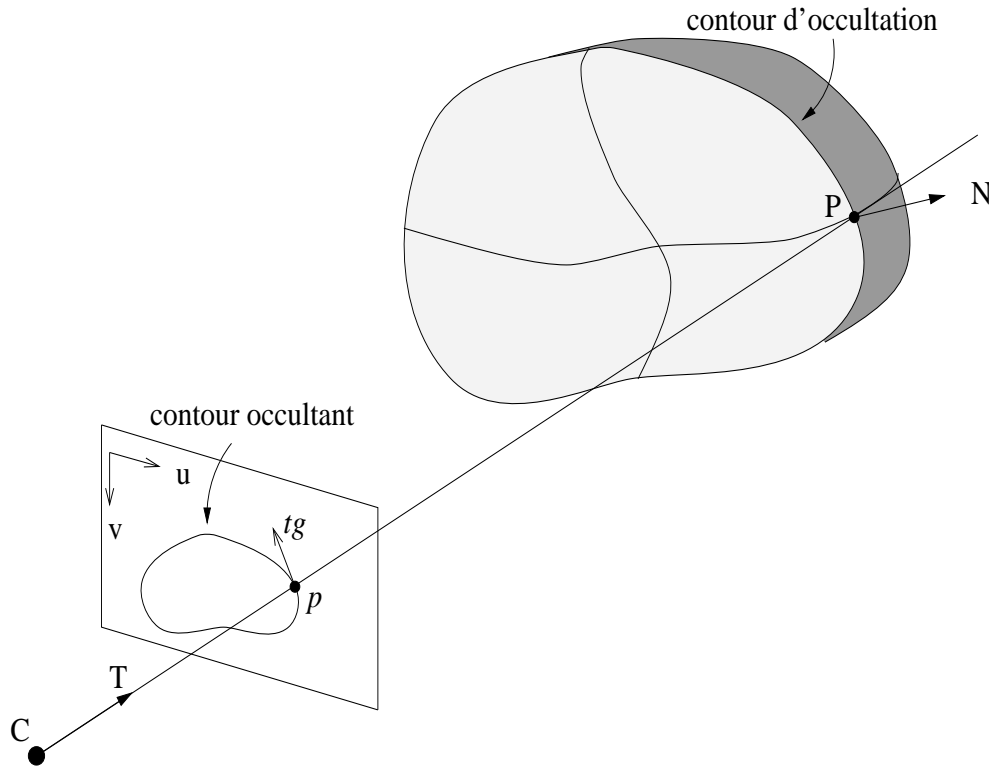


FIG. 1.3 – Géométrie de l'observation.

la ligne de vue correspondante. Cet ensemble de points forme le **contour d'occultation** de la surface (on parle aussi de silhouette de  $S$ ). La projection dans le plan image du contour d'occultation forme le **contour occultant** (on parle aussi de profil).

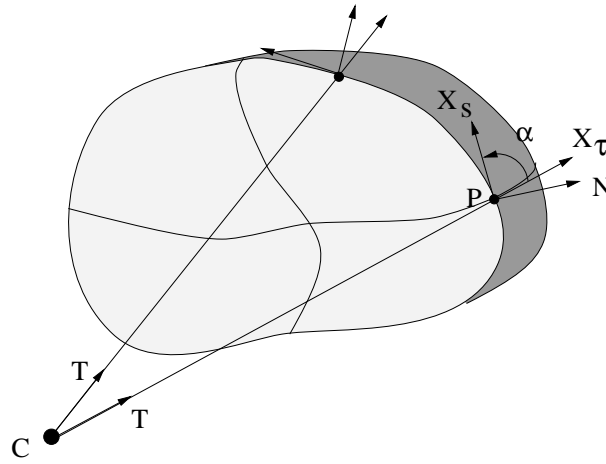
Une première propriété remarquable concernant ces contours est que la normale  $N$  à la surface est déterminable directement à partir du contour occultant [Bar 81]. En effet, par définition, la direction  $T$  de la ligne de vue est tangente à la surface et, si  $tg$  est la tangente au contour occultant, alors  $T$  et  $tg$  appartiennent au plan tangent à  $S$  en  $P$  et (figure 1.3) :

$$N = \frac{1}{|T \wedge tg|} T \wedge tg. \quad (1.1)$$

Nous supposons que la transformation optique effectuée par la caméra est modélisée par une transformation perspective (le modèle à sténopé est présenté en annexe A) caractérisée par un centre de projection  $C$ . Le modèle orthographique, qui correspond à une projection plane, peut alors être considéré comme un cas particulier pour lequel le centre de projection est rejeté à l'infini. Soit  $X$  le vecteur position de  $P$ , alors (figure 1.3) :

$$X = C + \lambda T, \quad (1.2)$$

où  $\lambda$  caractérise la profondeur du point  $P$  dans la direction  $T$  de la ligne de vue.

FIG. 1.4 – Un paramétrage  $X(s, \tau)$  de la surface.

### 1.2.1 Paramétrer la surface

Dans un premier temps, nous limitons notre étude des contours occultants à celle d'un seul contour pour mettre en évidence les liens qui existent entre ce dernier et la surface dont il est issu. Nous introduisons pour cela un paramétrage de  $\mathcal{S}$  qui va nous permettre de caractériser l'ensemble des propriétés statiques du contour occultant.

Dans le contexte des contours occultants, un choix naturel consiste à utiliser, pour paramétrer  $\mathcal{S}$ , un paramétrage existant du contour occultant. D'une manière plus formelle, l'idée est de considérer au voisinage d'un point  $P$  d'un contour d'occultation, une application  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $(s, \tau) \mapsto X(s, \tau)$  telle que :

- $s$  paramètre le contour occultant localement au point  $p$  où  $P$  se projette dans l'image  $P$ ,
- $\tau$  est un paramètre local de  $\mathcal{S}$  en  $P$  tel que le vecteur  $X_\tau = \partial X(s, \tau) / \partial \tau$  en  $P$  est dans la direction de la ligne de vue  $T$  en  $P$  (figure 1.4).

On a alors au point  $P$  (figure 1.4) :

$$X(s, \tau) = C(\tau) + \lambda(s, \tau) T(s, \tau), \quad (1.3)$$

avec  $X$  vérifiant la propriété suivante :

**Propriété 1.1.**  $X(s, \tau)$  est un paramétrage de  $\mathcal{S}$  en tout point  $P$  d'un contour d'occultation tel que le contour occultant à  $\mathcal{S}$  n'est pas singulier en  $p$  image de  $P$ .

*Démonstration:*  $\mathcal{S}$  est une surface régulière et  $\tau$  est un paramètre local de  $\mathcal{S}$  en  $P$ , donc  $X(s, \tau)$  est un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  si ([dC 76, page 64]) :

- $X$  est différentiable par rapport à  $s$  en  $P$ . C'est le cas lorsque le contour occultant n'est pas singulier en  $p$ .
- $X_s = \partial X(s, \tau) / \partial s$  et  $X_\tau$  sont linéairement indépendants en  $P$ , ce qui est vérifié tant que la ligne de vue  $T$  n'est pas tangente au contour d'occultation en  $P$ ; cas dans lequel  $T$  est une direction asymptotique de  $\mathcal{S}$  et où le contour occultant est singulier [Koe 82].

□

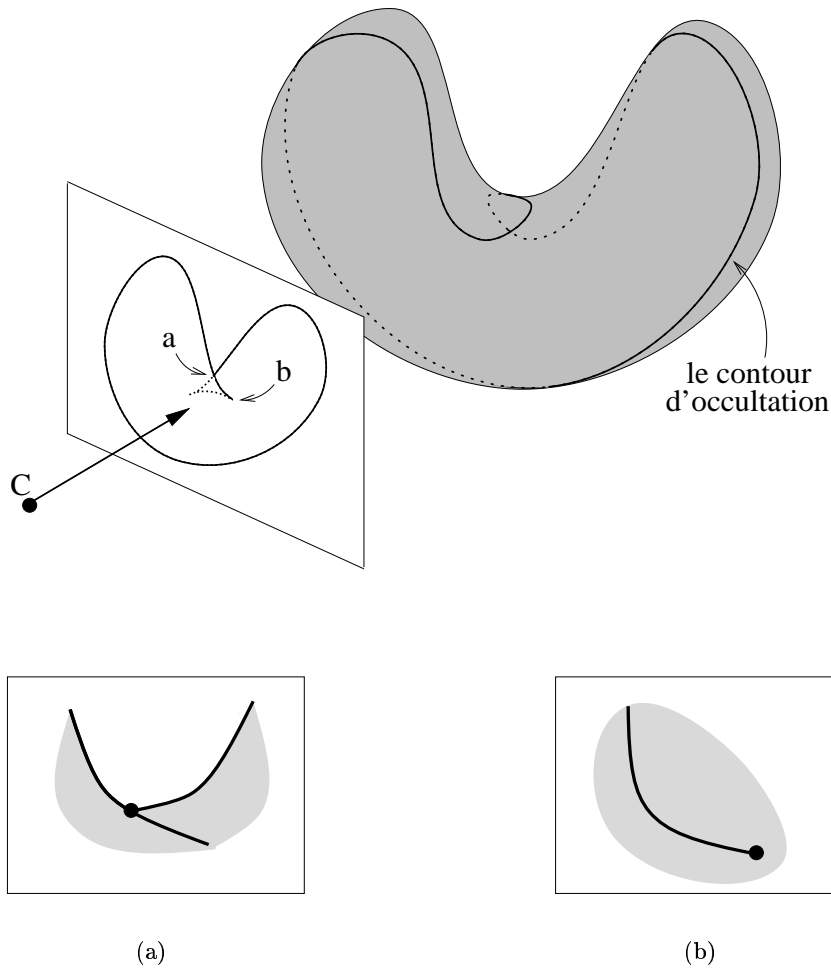


FIG. 1.5 – Les singularités typiques du contour occultant : (a) les jonctions en  $T$  où la ligne de vue est bi-tangente, (b) les points de rebroussements où la direction d'observation est asymptotique.

### Limitations du paramétrage $X(s, \tau)$

$X(s, \tau)$  est donc un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en tout point d'un contour d'occultation, à l'exception de ceux qui correspondent à une singularité du contour occultant. Différentes situations engendrent des singularités du contour occultant. En particulier :

- a. Les points correspondant à une jonction en  $T$ . La ligne de vue est alors bi-tangente à la surface. Cela se produit lorsqu'une partie de la surface observée occulte une autre partie de celle-ci (figure 1.5-a).
- b. les points qui apparaissent comme la limite visible du contour d'occultation et qui correspondent à des points de rebroussement du contour occultant [Koe 82]. La surface observée est alors localement hyperbolique et la direction d'observation est l'une des directions asymptotiques correspondantes (figure 1.5-b). La ligne de vue a alors un contact d'ordre 3 avec la surface (la notion de contact utilisée ici est définie en annexe B).

Les jonctions en T et les points de rebroussement correspondent à des situations qui sont *stables* vis-à-vis du point de vue dans le sens où elles ne sont pas, en général, modifiées par un déplacement infinitésimal du point de vue. Ces deux singularités représentent la majorité des cas qui peuvent se présenter. Néanmoins, à cela s'ajoute des situations isolées, et non stables, où la ligne de vue a des contacts d'ordre supérieur à 3 avec la surface. Parmi ces situations et dans un contexte réel où l'on considère des surfaces *génériques*<sup>1</sup>, seul les contacts d'ordre 4 peuvent se présenter. Un point de  $\mathcal{S}$  où cela se produit est soit un *un point flecnodal*, soit un point parabolique observé suivant une direction asymptotique. Dans le cas d'un point flecnodal, la direction d'observation est une direction asymptotique particulière de  $\mathcal{S}$ , et le contour occultant présente une singularité sous la forme d'un coin.

### Lien avec le paramétrage épipolaire de Cipolla et Blake

Cipolla et Blake [Cip 90] ont initialement introduit ce paramétrage avec  $\tau$  paramétrant la position  $C$  de la caméra. Celle-ci se déplaçant dans le temps,  $\tau$  faisait alors référence au temps  $t$ . Néanmoins, l'usage de  $t$  en tant que paramètre introduit des exceptions supplémentaires au paramétrage de la surface par  $X(s, \tau = t)$  qui n'ont pas lieu d'être dans le cadre d'une étude statique.

Ce paramétrage particulier est lié à l'étude dynamique des contours occultants et sera étudié ultérieurement dans ce chapitre (§ 1.3.1). Pour ce qui concerne l'étude statique des contours occultants, nous considérerons donc le cas plus général d'un paramétrage  $X(s, \tau)$  où  $\tau$  est bien un paramètre local de  $\mathcal{S}$ .

### 1.2.2 Propriétés différentielles

Un paramétrage local étant défini, nous pouvons maintenant considérer les propriétés différentielles de  $\mathcal{S}$ . Celles-ci sont caractérisées par les *formes quadratiques fondamentales*, dont nous précisons ici les expressions en lien avec le paramétrage  $X(s, \tau)$  introduit.

En un point  $P$  d'un contour d'occultation, le vecteur  $X_s$  est dirigé suivant la tangente à ce contour et le vecteur  $X_\tau$  est dirigé suivant la ligne de vue  $T$  (figure 1.4). Si ces deux directions ne sont pas en général orthogonales, elles sont par contre *conjuguées* [Koe 84b]:

$$X_{s\tau} \cdot N = \frac{\partial X}{\partial s \partial \tau} \cdot N = X_{\tau s} \cdot N = 0 \iff T_s \cdot N = T \cdot N_s = 0. \quad (1.4)$$

Cela traduit le fait que les variations de la normale le long du contour d'occultation,  $N_s$ , se font perpendiculairement à la direction d'observation. Le cas d'une projection orthographique constitue un exemple intuitif évident de ce principe [Cip 96]; dans ce cas, la direction d'observation est en effet constante pour un point de vue donné, et la normale à la surface pour le contour d'occultation correspondant évolue donc dans le plan tangent à cette direction d'observation.

Soit  $\alpha$  l'angle entre les directions  $X_s$  et  $X_\tau$ . Cet angle est donc en général différent de  $\frac{\pi}{2}$  et prend ses valeurs entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  en fonction de la surface observée et de la direction d'observation. Par exemple :

- $\alpha$  est nul lorsque  $P$  est observé suivant une direction asymptotique de  $\mathcal{S}$ .

---

1. Le terme "générique" signifie ici suffisamment général et sert à éliminer les cas particuliers théoriques: "*Toutes les surfaces réelles sont génériques.*" [Koe 86]

- $\alpha$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$  lorsque  $P$  appartient à une sphère, et ce quelle que soit la direction d'observation.

### Les formes fondamentales

Les première et deuxième formes quadratiques fondamentales caractérisent localement en  $P$  les propriétés du premier et deuxième ordre de  $\mathcal{S}$ . Elles sont représentées, dans la base  $\{X_s, X_\tau\}_P$  associée au paramétrage  $X(s, \tau)$ , par les matrices suivantes :

$$I_P = \begin{bmatrix} X_s \cdot X_s & X_s \cdot X_\tau \\ X_s \cdot X_\tau & X_\tau \cdot X_\tau \end{bmatrix} \quad II_P = \begin{bmatrix} X_{ss} \cdot N & X_{s\tau} \cdot N \\ X_{\tau s} \cdot N & X_{\tau\tau} \cdot N \end{bmatrix},$$

soit, en utilisant les courbures normales à la surface dans les directions de la base  $\{X_s, X_\tau\}_P$  :

$$I_P = \begin{bmatrix} |X_s|^2 & |X_s| |X_\tau| \cos \alpha \\ |X_s| |X_\tau| \cos \alpha & |X_\tau|^2 \end{bmatrix} \quad II_P = \begin{bmatrix} |X_s|^2 k_s & 0 \\ 0 & |X_\tau|^2 k_\tau \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

où  $k_s$  est la courbure normale à  $\mathcal{S}$  dans la direction du contour d'occultation et  $k_\tau$  la courbure normale à  $\mathcal{S}$  dans la direction de la ligne de vue. La matrice associée à la deuxième forme fondamentale est ici diagonale, ce qui traduit le fait que les directions  $X_s$  et  $X_\tau$  sont conjuguées. La courbure normale caractérise les variations de la normale à la surface suivant une direction précise du plan tangent et constitue une propriété *extrinsèque* de la surface (qui est fonction d'une direction).

### La courbure gaussienne

Si l'on considère maintenant la courbure gaussienne  $K$  définie par :

$$K = \det II_P / \det I_P,$$

où *det* représente le déterminant, la valeur de cette courbure est alors une propriété *intrinsèque* de la surface. Elle est indépendante de la base choisie et s'écrit, à l'aide de  $k_s$  et  $k_\tau$  :

$$K = \frac{k_s k_\tau}{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq 0. \quad (1.6)$$

Le signe de la courbure gaussienne reflète la forme locale de la surface. Ce signe dépend uniquement de la valeur de  $k_s$ , puisque  $k_\tau$  garde un signe constant. La surface est en effet toujours convexe dans la direction de la ligne de vue<sup>2</sup>. La forme locale de la surface est donc fonction de la courbure  $k_s$ , qui dépend elle-même de la forme locale du contour occultant. Nous précisons ce lien dans le paragraphe suivant.

---

2. Une concavité locale dans la direction de la ligne de vue ne pourrait pas être vue et  $k_\tau$  garde donc un signe constant, qui est fonction de l'orientation de la normale.

### 1.2.3 Lien entre la courbure apparente et la courbure gaussienne

Un résultat remarquable concernant un contour occultant est que ses convexités correspondent à des parties elliptiques de la surface, ses concavités à des parties hyperboliques et ses inflexions à des points paraboliques de la surface (où la courbure gaussienne  $K$  est nulle). La forme locale de la surface peut donc être déduite de la courbure du contour image. Cette propriété fondamentale a été énoncée et démontrée dans le cas d'une projection orthographique par Koenderink [Koe 84b], mettant ainsi Marr en défaut lorsque celui-ci affirme [Mar 82] que les inflexions du contour occultant ne reflètent aucune caractéristique particulière de la surface.

La relation qui découle de cette propriété lie la courbure gaussienne de la surface à la courbure *apparente* du contour occultant dans le plan de projection. Par la suite, Cipolla et Blake [Cip 90] ont établi une relation équivalente dans le cas d'une projection perspective sphérique, c'est-à-dire lorsque la projection se fait sur une sphère de rayon unité. Enfin, Vaillant [Vai 90] a généralisé ces résultats au cas d'une projection perspective plane. Nous explicitons et redémontrons ici ces différentes relations à l'aide du paramétrage  $X(s, \tau)$  introduit dans les paragraphes précédents.

Soit  $k_a$  la courbure apparente, qui correspond à la courbure du contour occultant au point image considéré.  $k_s$ ,  $k_\tau$  et  $K$  sont respectivement les courbures normales et gaussienne de la surface observée au point  $P$  correspondant. Nous avons alors en tout point  $P$  où  $X(s, \tau)$  est défini :

#### Propriété 1.2.

*Dans le cas d'une projection orthographique :*

$$k_a = \frac{k_s}{\sin^2 \alpha} \quad \text{et} \quad K = k_a k_\tau. \quad (1.7)$$

*Dans le cas d'une projection perspective sphérique :*

$$k_a = \frac{k_s}{\sin^2 \alpha} \lambda \quad \text{et} \quad K = \frac{k_a k_\tau}{\lambda}, \quad (1.8)$$

où  $k_a$  est ici la courbure géodésique<sup>3</sup> du contour occultant sur la sphère unité.

*Dans le cas d'une projection perspective plane :*

$$k_a = \frac{k_s}{\sin^2 \alpha} \frac{\lambda}{f} \frac{(T.T_o)^3}{(1 - N.T_o)^{3/2}} \quad \text{et} \quad K = \frac{k_a k_\tau}{\lambda} f \frac{(1 - N.T_o)^{3/2}}{(T.T_o)^3}, \quad (1.9)$$

---

3. Voir l'annexe B pour la définition de la courbure géodésique.

où  $f$  et  $T_o$  sont, respectivement, la distance focale et la direction de l'axe optique de la caméra.

Démonstration : le cas d'une projection orthographique découle de celui d'une projection perspective plane. Nous commençons donc par la projection perspective sphérique.

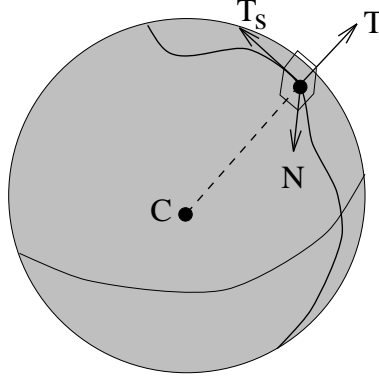


FIG. 1.6 – Le contour occultant sur la sphère unité de projection.

**Projection perspective sphérique** : soit  $\mathbf{x}$  le vecteur de position dans l'espace du point image  $p$  de  $P$  sur la sphère unité de centre  $C$  (figure 1.6) :

$$\mathbf{x}(s, \tau) = C(\tau) + T(s, \tau).$$

Par définition [dC 76], la courbure  $k$  du contour occultant vérifie :

$$k N_c = \frac{(T_{ss} \wedge T_s) \wedge T_s}{|T_s|^4},$$

où  $N_c$  est la normale dans l'espace au contour occultant. La courbure apparente est, dans le cas d'une projection sphérique, la courbure géodésique  $k_g$  du contour occultant. Celle-ci s'écrit :

$$k_a = k_g = k N_c \cdot N,$$

d'où :

$$k_a = \frac{T_{ss} \cdot N}{|T_s|^2}.$$

Or, la courbure normale  $k_s$  est, par définition :

$$k_s = \frac{X_{sss} \cdot N}{|X_s|^2} = \frac{\lambda T_{ss} \cdot N}{|X_s|^2},$$

donc en combinant les deux expressions précédentes :

$$k_a = \frac{k_s}{\lambda} \frac{|X_s|^2}{|T_s|^2}. \quad (1.10)$$

Et en utilisant l'angle  $\alpha$  entre les directions de  $X_s$  et  $T$ , on peut écrire :

$$X_s \cdot T_s = |X_s| \cdot |T_s| \sin \alpha,$$

et :

$$\mathbf{X}_s \cdot \mathbf{T}_s = (\lambda \mathbf{T}_s + \lambda_s \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T}_s = \lambda |\mathbf{T}_s|^2,$$

soit :

$$|\mathbf{X}_s| = \lambda |\mathbf{T}_s| \sin \alpha. \quad (1.11)$$

Finalement, (1.10) et (1.11) donnent :

$$k_a = \frac{\lambda k_s}{\sin^2 \alpha}, \quad (1.12)$$

et l'expression de la courbure gaussienne  $K$  s'obtient facilement à l'aide de (1.6).

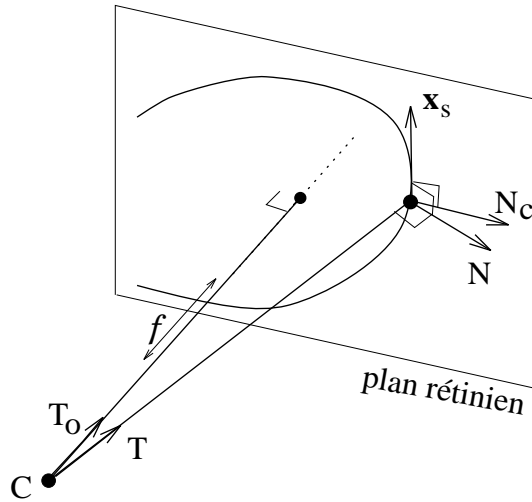


FIG. 1.7 – Le contour occultant dans le plan rétinien de projection.

**Projection perspective plane :** la démonstration suit ici la même démarche que dans le cas précédent. Soit  $\mathbf{x}$  le vecteur de position dans l'espace du point image  $p$  de  $P$  dans le plan rétinien. On a donc (figure 1.7) :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(s, \tau) = C(\tau) + \gamma(s, \tau) \mathbf{T}(s, \tau), \\ \gamma(s, \tau) = f / (\mathbf{T}(s, \tau) \cdot \mathbf{T}_0), \end{cases}$$

et en dérivant par rapport à  $s$  :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_s = \gamma \mathbf{T}_s + \gamma_s \mathbf{T}, \\ \mathbf{x}_{ss} = \gamma \mathbf{T}_{ss} + 2\gamma_s \mathbf{T}_s + \gamma_{ss} \mathbf{T}. \end{cases}$$

La courbure  $k_a$  du contour occultant vérifie, par définition :

$$k_a N_c = \frac{(\mathbf{x}_{ss} \wedge \mathbf{x}_s) \wedge \mathbf{x}_s}{|\mathbf{x}_s|^4},$$

où  $N_c$  est la normale au contour occultant et appartient donc au plan rétinien. L'expression précédente donne :

$$k_a N_c \cdot \mathbf{N} = \gamma \frac{\mathbf{T}_{ss} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{x}_s|^2}. \quad (1.13)$$



Or  $\mathbf{x}_s$  vérifie :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_s \wedge T_o = |\mathbf{x}_s| N_c, \\ \mathbf{x}_s \wedge T = \gamma |T_s| N, \end{cases}$$

soit :

$$|\mathbf{x}_s|^2 (T.T_o) = \gamma |T_s| |\mathbf{x}_s| N.N_c,$$

et :

$$|\mathbf{x}_s| = |T_s| (N.N_c) \frac{f}{(T.T_o)^2}. \quad (1.14)$$

En combinant (1.13) et (1.14), on obtient :

$$k_a = \frac{T_{ss} \cdot N}{|T_s|^2} \frac{(T.T_o)^3}{f (N.N_c)^3}.$$

La première partie de l'expression ci-dessus correspond à la courbure apparente dans le cas d'une projection sphérique qui a été précédemment déterminée (1.12).  $N$ ,  $N_c$  et  $T_o$  sont coplanaires, et  $N_c$  étant orthogonale à  $T_o$ , le produit scalaire  $N.N_c$  s'écrit :

$$N.N_c = (1 - (N.T_o)^2)^{1/2}.$$

Finalement :

$$k_a = \frac{k_s}{\sin^2 \alpha} \frac{\lambda}{f} \frac{(T.T_o)^3}{(1 - N.T_o)^{3/2}} \quad (1.15)$$

et l'expression de la courbure gaussienne  $K$  découle ici aussi de (1.6).

Dans le cas d'une **projection orthographique**, le centre de projection  $C$  est rejeté à l'infini. On a alors :

$$\frac{\lambda}{f} \rightarrow 1, \quad T.T_o \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad N.T_o \rightarrow 0,$$

et (1.15) devient :

$$k_a = \frac{k_s}{\sin^2 \alpha}, \quad (1.16)$$

ce qui correspond bien à l'expression (1.7).  $\square$

Les relations introduites dans les propriétés 1.2 font le lien entre la courbure apparente et la courbure du contour d'occultation observé. La forme locale de la surface (elliptique ou hyperbolique) est donc déterminable à partir du contour occultant. Ces relations mettent en évidence une différence fondamentale entre projection orthographique et perspective (sphérique ou plane) : la profondeur d'observation modifie la courbure apparente dans le cas perspectif. Ainsi, la perception de l'objet est fonction de sa distance d'observation, ce qui n'est pas le cas avec une projection orthographique.

Dans cette partie, nous avons introduit les différentes notions liées aux contours occultants. Les propriétés statiques de ces contours dans le cas d'un contour unique, ont été rappelées. Celles-ci sont vérifiées en tous points où le paramétrage  $X(s, t)$  introduit est défini, et caractérisent ce qui peut être déduit de la surface observée à partir d'un contour occultant. L'étude dynamique de ces contours, dans le cas où une séquence de contours obtenue par mouvements de la caméra est disponible, apporte une connaissance supplémentaire sur la surface observée, mais nécessite en premier lieu la définition d'une relation de correspondance entre contours. Ceci fait l'objet des parties suivantes.

## 1.3 Paramétrage épipolaire

Nous avons vu qu'il était possible, à partir d'un contour occultant, de déterminer des caractéristiques locales de la surface de l'objet. Dans certains cas particuliers pour lesquels il existe des contraintes géométriques fortes sur l'objet, soit par exemple certains cylindres généralisés, un seul contour occultant peut même être suffisant pour localiser ou reconstruire la surface de l'objet [Pon 89, Say 95, Ulu 95]. Néanmoins, dans le cas général d'un objet courbe quelconque, il est nécessaire de considérer différents contours occultants pour déterminer des caractéristiques de position. Ces contours sont alors obtenus en effectuant des acquisitions successives d'images à des positions différentes de la caméra. Dans le cas théorique d'une acquisition continue d'images, l'ensemble des contours observés constitue une surface dont la manipulation requiert un paramétrage.

### 1.3.1 Un paramétrage de la surface spatio-temporelle

Lorsque la caméra se déplace autour d'un objet, le contour d'occultation se déplace sur la surface de l'objet et le contour occultant décrit alors une surface appelée *surface spatio-temporelle* [Bol 87, Fau 90a, Gib 95] (figure 1.8). Celle-ci est définie dans l'espace des paramètres  $(u, v, t)$  où  $(u, v)$  paramètrent la position du point image et  $t$  paramètre la position de la caméra et fait, en général, référence au temps. Le problème de la correspondance entre contours occultants est, dans le cas d'observations continues, résolu par le choix d'un paramétrage de la surface spatio-temporelle. Celui-ci définit alors un maillage sur la surface.

Soit  $\bar{\mathcal{S}}$  la surface spatio-temporelle de  $\mathcal{S}$  pour un déplacement  $C(t)$  de la caméra. Un choix naturel pour le paramétrage de  $\bar{\mathcal{S}}$  est de considérer les paramètres  $(s, t)$  où  $s$  paramètre le contour occultant. Néanmoins, le paramétrage résultant n'est pas défini de manière unique [Cip 90]. En effet, dans le maillage correspondant, les courbes à  $t$  constant sont les contours occultants mais les courbes à  $s$  constant n'ont pas d'interprétation physique. Le paramétrage épipolaire, qui est dérivé de la géométrie épipolaire en stéréo-vision, considère alors comme courbes à  $s$  constant celles qui vérifient [Cip 90]:

$$T_t = \frac{1}{\lambda} (C_t \wedge T) \wedge T, \quad (1.17)$$

où  $T$  est la direction de la ligne de vue en un point image  $p$  et  $\lambda$  la profondeur du point correspondant sur la surface. Cette expression qui caractérise le fait que  $C_t$ ,  $T$  et  $T_t$  sont coplanaires, est en fait la généralisation au cas infinitésimal de la contrainte épipolaire [LH 81]. La direction de la ligne étant fonction des coordonnées images  $(u, v)$  et de  $t$ , nous avons la définition suivante [Cip 90]:

**Définition 1.2.** *Le paramétrage épipolaire  $\bar{X}(s, t)$  de la surface spatio-temporelle  $\bar{\mathcal{S}}$ , où  $s$  paramètre le contour occultant et  $t$  la position  $C$  de la caméra, est l'application  $\bar{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ ,  $(s, t) \mapsto \bar{X}(s, t) = (u(s, t), v(s, t), t)$ , telle que  $u(s, t)$  et  $v(s, t)$  vérifient :*

$$[T_t(u, v, t), T(u, v, t), C_t(t)] = 0,$$

où  $[, , ]$  représente le produit mixte et  $T(u, v, t)$  est la direction de la ligne de vue au point  $(u, v, t)$  de  $\bar{\mathcal{S}}$ .

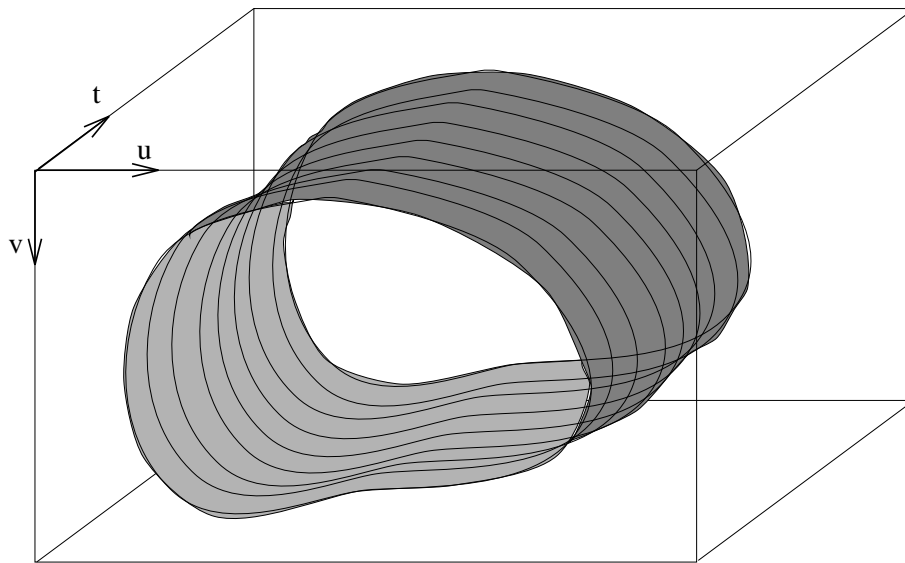


FIG. 1.8 – La surface spatio-temporelle  $\bar{S}$ .

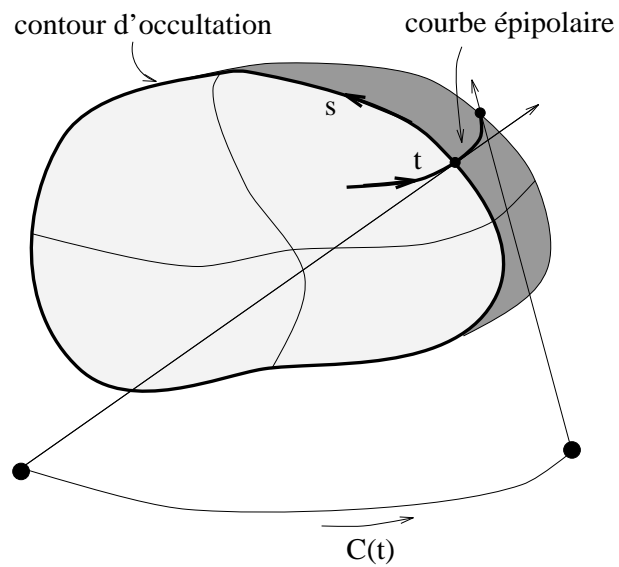


FIG. 1.9 – Le paramétrage épipolaire induit sur  $S$ .

### 1.3.2 Le paramétrage épipolaire induit sur la surface

Le paramétrage épipolaire de la surface spatio-temporelle  $\bar{\mathcal{S}}$  induit un paramétrage de la surface  $\mathcal{S}$ . Sur celle-ci, le maillage défini par les courbes à  $t$  constant et à  $s$  constant correspond dans une direction, au contour d'occultation ( $t$  constant), et dans l'autre direction à la courbe qui a la ligne de vue pour tangente ( $s$  constant) : la *courbe épipolaire* (figure 1.9). Néanmoins, le paramétrage induit  $X(s, t)$  de  $\mathcal{S}$  n'est pas toujours défini ; en effet,  $(s, t)$  ne constituent pas systématiquement des paramètres locaux de  $\mathcal{S}$ . Nous explicitons ici les différents cas.

#### $t$ comme paramètre local de $\mathcal{S}$

Au paragraphe 1.2.1, nous avons introduit un paramétrage général  $X(s, \tau)$  de la surface pour lequel nous supposons que  $\tau$  paramétrait localement la surface et que  $X_\tau$  était dans la direction de la ligne de vue. Dans le cas du paramétrage épipolaire,  $X_t$  est bien dans la direction de la ligne de vue mais  $t$  paramètre cette fois-ci la position de la caméra. Giblin et Weiss ([Gib 95, page 35]) ont montré que  $t$  constituait alors un paramètre local de  $\mathcal{S}$  en un point  $P$  d'un contour d'occultation, à l'exception des cas où :

- $P$  est un point parabolique ( $K = 0$ ) et, de plus, la ligne de vue est dans la direction asymptotique de  $\mathcal{S}$  en  $P$ . C'est le cas, par exemple, des singularités *lèvres* et *bec-à-bec* du contour apparent [Koe 90].
- Le vecteur  $C_t$  est dans le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $P$ . Dans ce cas  $P$  reste *stationnaire* lorsque  $t$  varie (au sens infinitésimal).

Pour une surface régulière quelconque, il faut ajouter aux cas cités celui où la ligne de vue est bi-tangente à  $\mathcal{S}$  et où le plan tangent est également bi-tangent. En effet, une petite variation du point de vue provoque un saut du point observé sur  $\mathcal{S}$  au dessus d'une partie qui est soit plane soit concave dans la direction de la ligne de vue (figure 1.10-d par exemple). La surface spatio-temporelle présente dans ce cas, une singularité (non-différentiabilité en  $t$ ) et  $t$  ne peut donc pas constituer un paramètre local de  $\mathcal{S}$ . Pour une étude plus détaillée de ce cas particulier, nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 de ce document.

**Remarque :** les exceptions citées pour le paramètre  $t$  ne concernent pas les points de rebroussement du contour occultant. Pour ces points,  $t$  constitue un paramètre local au point correspondant de  $\mathcal{S}$ . Cette propriété est utilisée par Cipolla et al. [Cip 95a] qui paramètrent la courbe génératrice des points de rebroussement sur  $\mathcal{S}$  par  $t$ . Ils montrent alors que malgré la présence d'une singularité, des caractéristiques différentielles de  $\mathcal{S}$  (position et courbure gaussienne) peuvent être déterminées en ces points.

#### Les cas où le paramétrage induit ne peut pas être utilisé

Le paragraphe précédent fixe le cadre dans lequel le paramètre  $t$  de la position de la caméra peut être utilisé comme paramètre local de  $\mathcal{S}$ . Or, celui où  $X(s, \tau)$  constitue un paramétrage local de  $\mathcal{S}$ , a été étudié au paragraphe 1.2.1. Nous pouvons donc énoncer :

**Propriété 1.3.** *Le paramétrage épipolaire induit  $X(s, t)$  de la surface  $\mathcal{S}$ , où  $s$  paramètre le contour occultant,  $t$  paramètre la position  $C$  de la caméra et qui est tel que  $X_t$  soit dans la direction de la ligne de vue, est défini en tout point  $P$  d'un contour d'occultation tel que :*

1. *le contour occultant n'est pas singulier en  $p$  image de  $P$ ,*

2. le plan tangent et la ligne de vue en  $P$  ne sont pas simultanément bi-tangents,
3. le vecteur  $C_t$  n'est pas dans le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $P$ .

La figure 1.10 illustre les différents cas possibles lorsqu'un tore est observé. Dans le premier exemple (a), le paramétrage épipolaire est localement défini aux points  $P$ . Les exemples (b), (c) et (d) concernent les singularités possibles du contour observé. En (e), la ligne de vue et le plan tangent en  $P$  sont bi-tangents à  $\mathcal{S}$ . La courbe épipolaire sur la surface est dans ce cas discontinue. L'exemple (f) montre le cas où  $C_t$  est dans le plan tangent en  $P$ , la courbe épipolaire sur la surface est alors singulière (point de rebroussement). Les points de ce type sont appelés *points frontières* par plusieurs auteurs [Gib 95, Cip 95b, Jos 95a]. Nous reviendrons par la suite sur leurs caractéristiques, en particulier dans le cas discret.

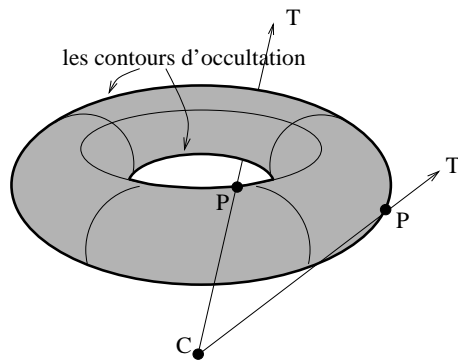
La propriété 1.3 met en évidence un des avantages du paramétrage épipolaire de  $\bar{\mathcal{S}}$  : celui-ci induit un paramétrage de la surface observée  $\mathcal{S}$  (avec les exceptions citées). Intuitivement, cela implique que pour tout point d'un contour occultant  $\mathcal{O}(t)$  vérifiant les conditions énoncées, il existe un correspondant épipolaire sur un contour occultant voisin  $\mathcal{O}(t + \delta t)$ . L'intérêt pratique apparaît clairement dans le cas discret lorsque l'on cherche à mettre en correspondance deux contours occultants successifs d'une séquence. Giblin et Weiss [Gib 95] ont par ailleurs mis en évidence une propriété supplémentaire du paramétrage épipolaire. Celle-ci concerne le paramétrage induit sur  $\mathcal{S}$  et caractérise le fait que les points les plus proches de deux lignes de vue de direction  $T(s, t)$  et  $T(s, t + \delta t)$  convergent vers le point de la surface  $X(s, t)$  lorsque  $\delta t$  tend vers 0. Ces propriétés justifient l'usage du paramétrage épipolaire pour la surface spatio-temporelle. Dans le cas réel d'observations discrètes, soit à temps discret, la relation de correspondance entre contours qui en découle est la correspondance épipolaire. Celle-ci est étudiée dans la partie suivante.

## 1.4 Correspondance épipolaire

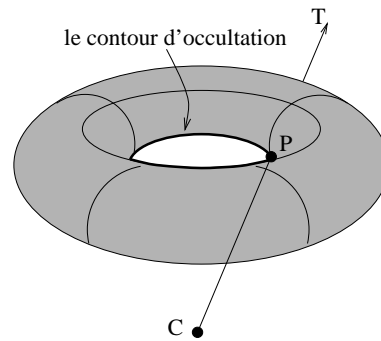
Le paramétrage épipolaire est dérivé de la géométrie épipolaire en stéréo-vision [LH 81]. Celle-ci contraint les positions des projections dans deux images d'un même point, à appartenir à un plan, *le plan épipolaire*, engendré par les deux centres de caméra et le point observé. La généralisation de la contrainte épipolaire à d'autres types de primitives [Åst 96] débouche, dans le cas des contours occultants, sur une relation de correspondance planaire : la correspondance épipolaire. Une des principales justifications du choix de cette relation de correspondance est qu'elle contraint le problème de reconstruction, qui devient une estimation linéaire (cf. chapitre 2). De plus, la correspondance épipolaire possède des propriétés de continuité et de différentiabilité que nous démontrons dans ce paragraphe. Nous verrons en particulier le cas des *points multiples* qui correspondent à des mouvements de caméra dans des plans tangents à la surface. Enfin, la correspondance épipolaire induit sur la surface une correspondance entre contours d'occultations. Les positions respectives de deux correspondants épipolaires sur deux contours d'occultations vérifient alors une contrainte que nous mettrons en évidence, celle-ci s'avérant utile pour l'estimation des caractéristiques locales de la surface.

### 1.4.1 Définitions

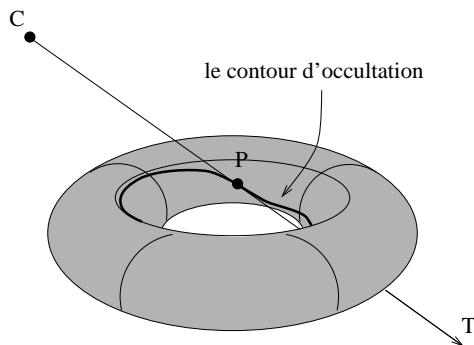
Nous introduisons tout d'abord différentes notions nécessaires à l'étude des propriétés de la correspondance épipolaire. Considérons deux contours occultants  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  de la



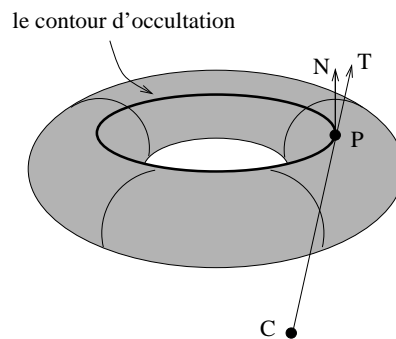
(a) Le paramétrage épipolaire est défini aux points  $P$ .



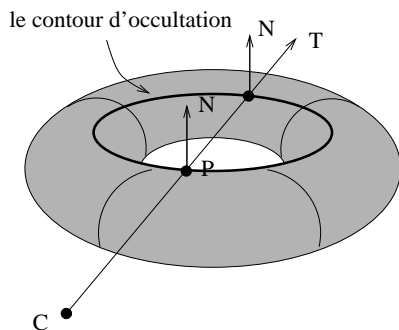
(b) La ligne de vue est bi-tangente. Le contour occultant est singulier et  $s$  ne constitue pas un paramètre local en  $P$ .



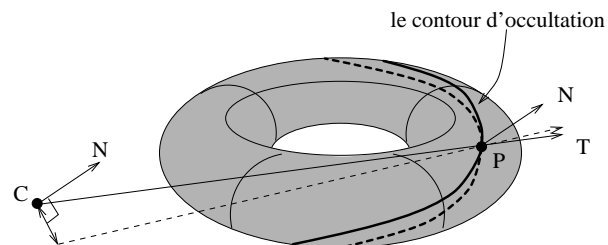
(c) La direction  $T$  est asymptotique ( $K < 0$ ).  $P$  est ici flecnodal. Le contour occultant est singulier et  $s$  ne constitue pas un paramètre local en  $P$ .



(d)  $P$  est parabolique ( $K = 0$ ) et la direction  $T$  est asymptotique. Le contour occultant est singulier et ni  $s$  ni  $t$  ne constituent des paramètres locaux en  $P$ .



(e) La ligne de vue et le plan tangent en  $P$  sont bi-tangents.  $t$  ne constitue pas un paramètre local en  $P$ .



(f) La caméra se déplace dans le plan tangent en  $P$  ( $C_t \cdot N = 0$ ).  $t$  ne constitue pas un paramètre local en  $P$ .

FIG. 1.10 – Les différents types de points qui peuvent être observés dans le cas d'un tore.

surface  $\mathcal{S}$  correspondant aux positions respectives  $C_1$  et  $C_2$  de la caméra. Soient  $p_1$  et  $p_2$  deux points images de  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  correspondant respectivement aux points  $P_1$  et  $P_2$  de  $\mathcal{S}$ . Soient  $T_1(s_1)$  la direction de la ligne de vue de  $p_1$  et  $T_2(s_2)$  la direction de la ligne de vue de  $p_2$  de  $\mathcal{O}_2$ , où  $s_1$  et  $s_2$  sont les paramètres de  $p_1$  et  $p_2$  sur  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ .

### Contrainte épipolaire

Les deux points images  $p_1$  et  $p_2$  vérifient la contrainte épipolaire s'ils appartiennent tous deux au plan épipolaire défini par  $C_1$ ,  $C_2$  et  $p_1$  ou  $p_2$  (figure 1.11). Donc :

**Définition 1.3.**  $p_1$  et  $p_2$  vérifient la contrainte épipolaire si :

$$F(s_1, s_2)|_{(p_1, p_2)} = 0, \quad (1.18)$$

où :

$$F(s_1, s_2) = [T_1(s_1), T_2(s_2), (C_1 - C_2)], \quad (1.19)$$

$[, ]$  représentant le produit mixte.

Cette contrainte est l'équivalente de celle donnée dans le cas continu par Cipolla et Blake [Cip 90] (voir § 1.17). Elle débouche sur la notion de correspondance épipolaire.

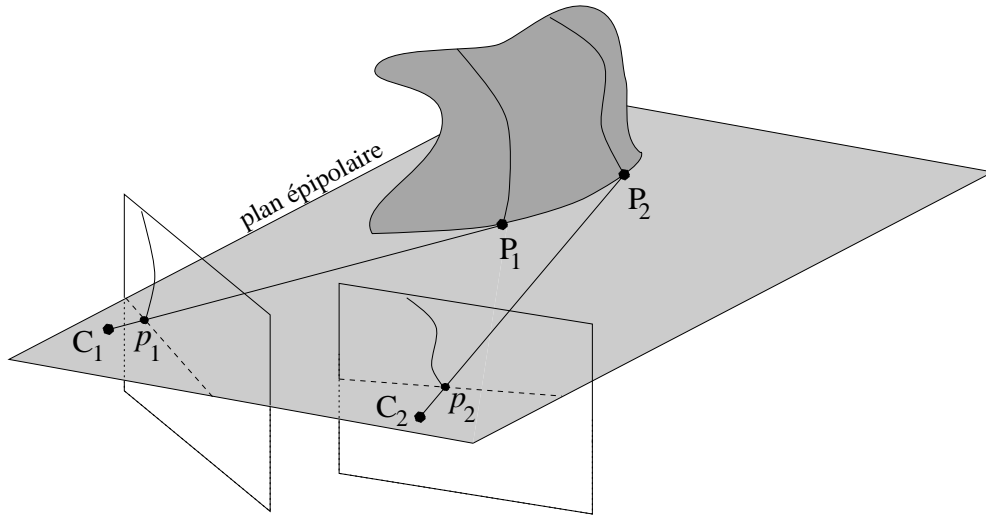


FIG. 1.11 – Deux correspondants épipolaires  $p_1$  et  $p_2$ .

### Correspondance épipolaire

La correspondance épipolaire que nous utilisons dans la suite du document découle du paramétrage épipolaire et diffère donc de la simple vérification de la contrainte épipolaire. Sa définition est :

**Définition 1.4.**  $p_1$  et  $p_2$  sont correspondants épipolaires si :

1. Ils vérifient la contrainte épipolaire.

2.  $P_2$  (respectivement  $P_1$ ) appartient à la courbe épipolaire engendrée depuis  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ) par le déplacement linéaire de la caméra<sup>4</sup> de  $C_1$  à  $C_2$  (respectivement de  $C_2$  à  $C_1$ ).

La deuxième condition sert ici à imposer que  $P_1$  et  $P_2$  appartiennent bien à un maillage épipolaire de la surface. En effet, la contrainte épipolaire peut être vérifiée par plusieurs points d'un même contour occultant. Cette condition permet alors d'isoler le point issu du paramétrage épipolaire.

### Les points multiples

Dans le cas général, deux correspondants épipolaires  $p_1$  et  $p_2$  sont les projections images de deux points  $P_1$  et  $P_2$  différents de  $\mathcal{S}$ . En effet, les contours d'occultation sont fonction du point de vue et donc différents pour  $C_1$  et  $C_2$ . Cette propriété de *non-stationarité* est d'ailleurs utilisée par Vaillant [Vai 90] ainsi que par Kutulakos et Dyer [Kut 94b] pour discriminer les contours occultants des contours *fixes*. Néanmoins, cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas particulier où le déplacement de la caméra ( $C_1 - C_2$ ) est dans le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $P_1$  ou  $P_2$ .  $p_1$  et  $p_2$  sont alors les projections d'un seul point  $P$  ( $P = P_1 = P_2$ ) et les contours d'occultations s'intersectent en  $P$ . Dans la suite de ce document, nous appelons ces points particuliers d'une séquence les *points multiples*.

**Définition 1.5.** Un point multiple  $P$  d'une séquence d'images de  $\mathcal{S}$  est un point de  $\mathcal{S}$  où  $n$  contours d'occultations de la séquence,  $n \geq 2$ , s'intersectent.

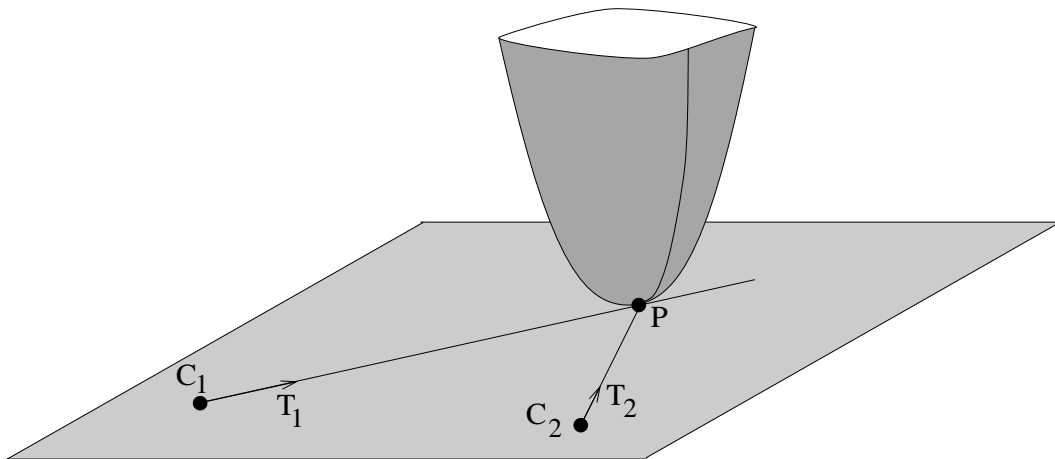


FIG. 1.12 – Un point multiple  $P$ .

En conséquence, si  $P$  est un point multiple d'une séquence d'images de  $\mathcal{S}$  alors le plan épipolaire en  $P$  est tangent à  $\mathcal{S}$ . De plus, si  $n$  positions de la caméra dans la séquence sont alignées, alors  $P$  est de multiplicité  $n$ .

Les points multiples sont des points isolés présents dans la plupart des séquences d'images d'objets réels. Par exemple, une séquence constituée de deux contours d'une

<sup>4</sup> L'expression "déplacement linéaire" signifie ici, ainsi que dans la suite du document, que le déplacement est rectiligne.



surface fermée contient au moins deux points doubles ou, de manière générique, un nombre pair supérieur à 2 de points doubles [Rie 86].

### Lien entre points frontières et points multiples

Giblin et Weiss [Gib 95] ont introduit dans le cas continu les *points frontières*. Ceux-ci correspondent à des points observés de  $\mathcal{S}$  où le vecteur vitesse de la caméra appartient au plan tangent à la surface :  $C_t.N = 0$ . Les courbes épipolaires sont alors singulières ; le paramétrage épipolaire n'est en effet pas défini en ces points (propriété 1.3). Cela se caractérise géométriquement par un rebroussement des courbes épipolaires au contact de la frontière : le lieu sur  $\mathcal{S}$  des points frontières (figure 1.24).

L'analogie entre les points multiples et les points frontières introduits par Giblin et Weiss [Gib 95] se fait en considérant, dans le cas discret, un mouvement de caméra linéaire entre deux positions successives de la caméra. Dans le cas d'un mouvement de caméra linéaire, la frontière est réduite à un seul point. Les contours occultants s'intersectent dans ce cas au même point. Donc, un point multiple  $P$  correspond à la frontière pour un mouvement de caméra linéaire interpolant les positions de la caméra pour lesquelles  $P$  est multiple. La propriété de *stationarité* des points multiples (frontières) est largement utilisée dans la littérature, notamment pour générer des points stationnaires [Kut 94b], ou pour obtenir des contraintes sur le mouvement de la caméra [Por 91] et pouvoir ainsi estimer celui-ci [Rie 86, Cip 95b, Jos 95a].

### Les courbes épipolaires dans le cas d'observations discrètes

Les courbes épipolaires ont été définies dans le cas continu, comme les courbes sur  $\mathcal{S}$  à  $s$  constant. Le lien avec le cas discret se fait donc en supposant, dans le cas discret, un mouvement de caméra linéaire entre deux positions de celle-ci. Les courbes épipolaires sont alors les courbes planes par morceaux, intersections de  $\mathcal{S}$  et des plans épipolaires engendrés par les deux positions de la caméra (figure 1.13).

#### 1.4.2 Propriétés

Nous avons vu au paragraphe 1.3 que le paramétrage épipolaire, dans le cas théorique d'observations continues, était défini en dehors de certaines exceptions mises en évidence par Giblin et Weiss [Gib 95]. Il est donc possible en général de mettre en correspondance un point d'un contour occultant avec un point d'un autre contour très proche. Nous considérons ici le cas discret et étudions les propriétés de la correspondance épipolaire. Nous nous intéressons tout d'abord à la continuité de cette relation entre deux contours occultants, puis aux contraintes de position qu'elle impose sur la surface.

Par la suite, nous considérons la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$$

qui associe à un point  $p_1$  du contour occultant  $\mathcal{O}_1$  son correspondant  $p_2$  appartenant à  $\mathcal{O}_2$  tel que  $p_1$  et  $p_2$  vérifient la contrainte épipolaire, soit :  $F(s_1, s_2)|_{p_1, p_2} = 0$ .

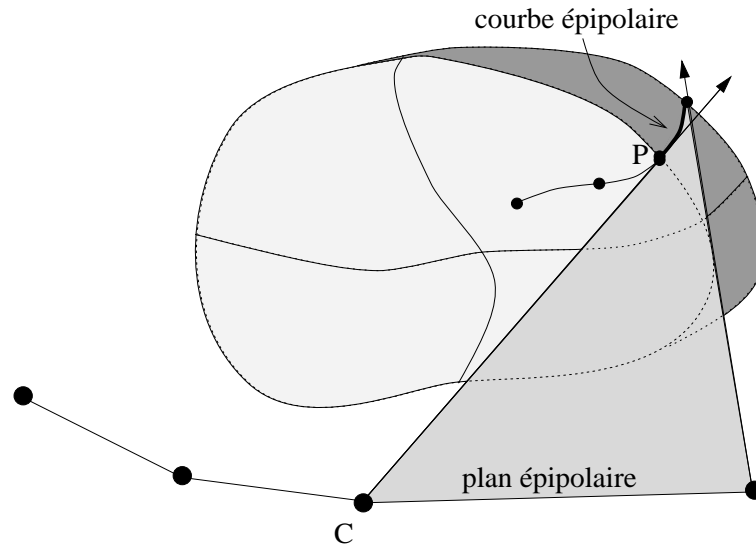


FIG. 1.13 – Dans le cas discret, la courbe épipolaire est constituée, par morceaux, des intersections des plans épipolaires avec la surface.

### $f$ est un difféomorphisme local

Soit  $(p_1, p_2)$  un couple de correspondants épipolaires tels que  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  sont réguliers (au moins  $C^2$ ) en  $p_1$  et  $p_2$  respectivement.  $f$  vérifie alors :

**Propriété 1.4.** *La correspondance épipolaire  $f$  est un difféomorphisme local en  $p_1$  si le point  $P_1$  de  $\mathcal{S}$ , qui a pour point image  $p_1$ , n'est pas un point multiple de la séquence considérée.*

*Démonstration:* cette proposition est une conséquence directe de l'application à la fonction  $F$  du théorème des fonctions implicites [Bru 84, page 68]. Soient  $s_{p_1}$  et  $s_{p_2}$  les paramètres de deux correspondants épipolaires  $p_1$  et  $p_2$ , donc  $F(s_{p_1}, s_{p_2}) = 0$ . Si les contours occultants sont réguliers, alors  $T_1(s_1)$ ,  $T_2(s_2)$  sont des fonctions régulières de  $s_1$  et  $s_2$ , et  $F(s_1, s_2)$  est régulière. Il existe donc une application continue  $f : s_1 \mapsto s_2$  qui est régulière au voisinage de  $s_{p_1}$  si  $\frac{\partial F}{\partial s_2}(s_{p_1}, s_{p_2}) \neq 0$ . De la même manière,  $s_1$  est une fonction régulière de  $s_2$  au voisinage de  $s_{p_2}$  si  $\frac{\partial F}{\partial s_1}(s_{p_1}, s_{p_2}) \neq 0$ . En dérivant 1.18, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial s_2}(s_{p_1}, s_{p_2}) = ((C_1 - C_2) \wedge T_1(s_{p_1})) \cdot \frac{\partial T_2}{\partial s_2}(s_{p_2}), \\ \frac{\partial F}{\partial s_1}(s_{p_1}, s_{p_2}) = ((C_2 - C_1) \wedge T_2(s_{p_2})) \cdot \frac{\partial T_1}{\partial s_1}(s_{p_1}). \end{cases}$$

Le plan épipolaire en  $p_2$  est engendré par  $T_2(s_{p_2})$  et  $(C_2 - C_1)$  ou, de manière équivalente, par  $T_1(s_{p_1})$  et  $(C_1 - C_2)$ . Donc  $\frac{\partial F}{\partial s_2}(s_{p_1}, s_{p_2}) = 0$  si  $\frac{\partial T_2}{\partial s_2}(s_{p_2})$  appartient au plan épipolaire en  $p_2$ . Comme  $T_2(s_{p_2})$  et  $\frac{\partial T_2}{\partial s_2}(s_{p_2})$  appartiennent tous deux au plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $P_2$ , cela se produit aux points  $p_1$  et  $p_2$  où le plan épipolaire est tangent à la surface. Dans ce cas,  $P_2$  est un point multiple et  $P_1 = P_2$ . De manière équivalente,  $\frac{\partial F}{\partial s_1}(s_{p_1}, s_{p_2}) = 0$  si le plan épipolaire est tangent à  $\mathcal{S}$  et donc si  $P_2 = P_1$ . L'application  $f : s_1 \mapsto s_2$  est donc un difféomorphisme local en  $s_{p_1}$  si  $p_1$  n'est pas la projection d'un point multiple.  $\square$

**Remarque :** pour un déplacement infinitésimal du point de vue, la propriété 1.4 est équivalente au fait que le paramétrage épipolaire est défini en dehors des points frontières (propriété 1.3).

### Continuité de la correspondance épipolaire entre $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$

La propriété 1.4 caractérise donc le fait qu'étant donnés deux correspondants épipolaires  $p_1$  et  $p_2$ , il existe des voisinages de  $p_1$  et  $p_2$  où la correspondance épipolaire est régulière et a une inverse régulière, à la condition que  $p_1$ , ou de manière équivalente  $p_2$ , ne soit pas la projection d'un point multiple. Maintenant, les projections  $p_1$  et  $p_2$  d'un point multiple sont aussi des correspondants épipolaires. La correspondance épipolaire est donc continue, et a une inverse continue au voisinage de tous couples de points qui ne sont pas singuliers. Si les contours  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  ne contiennent pas de singularités et s'ils sont *stables* : c'est-à-dire lorsque les positions  $C_1$  et  $C_2$  correspondantes de la caméra sont telles que le passage continu de  $C_1$  à  $C_2$  n'introduit pas de changement topologique du contour occultant [Rie 92], alors il est possible de mettre en correspondance de manière continue les deux contours dans leur totalité. La correspondance épipolaire constitue dans ce cas un homéomorphisme de  $\mathcal{O}_1$  dans  $\mathcal{O}_2$ .

Lorsque la topologie du contour observé change (apparition ou disparition d'une singularité), on parle d'*événements visuels*. Ceux-ci ont lieu pour des points de vue frontières correspondants aux limites de stabilité du contour occultant, et pour lesquels une ligne de vue a un contact d'ordre supérieur à 2 avec la surface. Le lecteur intéressé peut se référer à [Pet 92] pour une étude des événements visuels des surfaces  $C^\infty$ . En ce qui nous concerne, les singularités du contour occultant, les points de rebroussements et les jonctions en T, correspondent à des lignes de vue qui sont soit bi-tangentes à la surface, soit dans une direction asymptotique à la surface. La mise en correspondance ne peut pas se faire au voisinage de ces singularités.

### Contraintes sur la position d'un correspondant épipolaire

Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux points de vue tels que le contour occultant de  $\mathcal{S}$  reste stable. Nous considérons maintenant deux correspondants épipolaires  $p_1$  et  $p_2$  tels que  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  ne soient pas singuliers aux voisinages de  $p_1$  et  $p_2$ . Les points de la surface  $P_1$  et  $P_2$  qui ont pour images  $p_1$  et  $p_2$  appartiennent donc au plan épipolaire défini par les deux centres de projections  $C_1$ ,  $C_2$  et  $T_1$  ou  $T_2$ , les directions des lignes de vue en  $P_1$  et  $P_2$ . Les lignes de vue de  $P_1$  et  $P_2$  s'intersectent dans le plan épipolaire et nous appelons la distance de  $C_1$  à cette intersection  $d_1$  (figure 1.14). Sous l'hypothèse que la caméra reste à l'extérieur de l'enveloppe des plans tangents, c'est-à-dire que l'intersection des lignes de vue soit toujours située devant<sup>5</sup> les positions des caméras, alors la profondeur  $\lambda_1$  de  $P_1$  le long de la ligne de vue de direction  $T_1$  vérifie :

**Propriété 1.5.** *Si  $P_1$  et  $P_2$  sont deux correspondants épipolaires et si les positions  $C_1$  et*

---

5. Au sens des directions des lignes de vue.

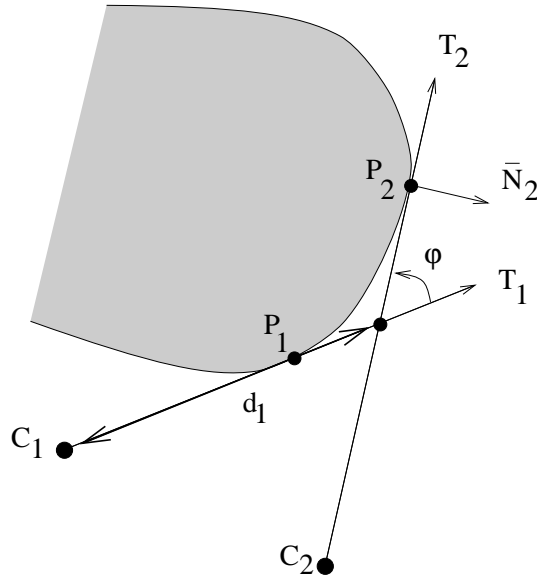


FIG. 1.14 – Les lignes de vue de deux correspondants épipolaires s'intersectent.

$C_2$  sont telles que l'intersection des lignes de vue de  $P_1$  et  $P_2$  est devant  $C_1$  et  $C_2$ , alors :

$$\lambda_1 < d_1 \quad \text{si } (C_2 - C_1) \cdot N_1 > 0,$$

$$\lambda_1 > d_1 \quad \text{si } (C_2 - C_1) \cdot N_1 < 0,$$

$$\lambda_1 = d_1 \quad \text{si } (C_2 - C_1) \cdot N_1 = 0,$$

où  $N_1$  est la normale à  $S$  en  $P_1$  (orientée vers l'extérieur de la surface), et  $d_1$  est la distance de  $C_1$  à l'intersection des lignes de vue en  $P_1$  et  $P_2$ .

Démonstration: soient  $X_1$  et  $X_2$  les vecteurs positions de  $P_1$  et  $P_2$  :

$$\begin{cases} X_1 = C_1 + \lambda_1 T_1, \\ X_2 = C_2 + \lambda_2 T_2, \end{cases}$$

alors :

$$\lambda_1 = \frac{(C_2 - C_1) \cdot \bar{N}_2}{T_1 \cdot \bar{N}_2} - \frac{(X_2 - X_1) \cdot \bar{N}_2}{T_1 \cdot \bar{N}_2}, \quad T_1 \cdot \bar{N}_2 \neq 0, \quad (1.20)$$

où  $\bar{N}_2$  est la projection dans le plan épipolaire de la normale  $N_2$  à  $S$  en  $P_2$ . La première partie de cette expression correspond à la distance  $d_1$  de  $C_1$  à l'intersection des lignes de vue :

$$\lambda_1 = d_1 - \frac{(X_2 - X_1) \cdot \bar{N}_2}{T_1 \cdot \bar{N}_2}, \quad T_1 \cdot \bar{N}_2 \neq 0.$$

Le fait que  $P_1$  et  $P_2$  soient visibles implique que tous deux appartiennent à l'enveloppe convexe de l'intersection du plan épipolaire et de la surface (contrainte de visibilité, voir par exemple [Fau 93]), et donc :

$$(X_2 - X_1) \cdot \bar{N}_2 \geq 0. \quad (1.21)$$

Soit  $\varphi$  l'angle orienté entre  $T_1$  et  $T_2$ , par définition de la correspondance épipolaire,  $\varphi$  est aussi l'angle entre les normales  $N_1$  et  $N_2$  et :

$$\sin \varphi = (T_1 \cdot \bar{N}_2) = -(T_2 \cdot \bar{N}_1). \quad (1.22)$$

Soit  $d_2$  la distance de  $C_2$  à l'intersection des lignes de vue :

$$d_2 = \frac{(C_1 - C_2) \cdot \bar{N}_1}{T_2 \cdot \bar{N}_1}.$$

L'intersection des lignes de vue étant par hypothèse devant les caméras,  $d_2 > 0$  et donc :

$$\text{signe}(T_2 \cdot \bar{N}_1) = \text{signe}((C_1 - C_2) \cdot \bar{N}_1),$$

d'où l'on tire à l'aide de (1.22) :

$$\text{signe}(T_1 \cdot \bar{N}_2) = \text{signe}((C_2 - C_1) \cdot \bar{N}_1) = \text{signe}((C_2 - C_1) \cdot N_1) \quad (1.23)$$

En combinant (1.20), (1.21) et (1.23) :

$$\begin{aligned} (C_2 - C_1) \cdot N_1 > 0 &\Leftrightarrow d_1 < \lambda_1, \\ (C_2 - C_1) \cdot N_1 < 0 &\Leftrightarrow d_1 > \lambda_1. \end{aligned}$$

Le cas  $T_1 \cdot \bar{N}_2 = 0$  correspond à un point multiple situé à l'intersection des lignes de vue,  $(C_2 - C_1)$  est alors dans le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $P_1, P_2$  et  $\lambda_1 = d_1$ . □

L'intérêt de cette propriété apparaît clairement lorsqu'il s'agit d'estimer la position d'un point de  $\mathcal{S}$ . Comme nous le verrons par la suite, l'estimation de la profondeur d'un point de la surface peut se faire par une approximation faisant intervenir les correspondants de ce point sur les contours d'occultation voisins. La propriété 1.5 montre que pour des déplacements de la caméra adéquats, la position du point le long de sa ligne de vue est alors délimitée par les intersections des plans tangents associés aux correspondants (figure 1.15). Nous reviendrons en détail sur cette estimation dans le chapitre 2.

Par ailleurs, cette propriété de la correspondance épipolaire est utilisée par Kutulakos et Dyer [Kut 94a] pour définir des règles de déplacement de la caméra dans le cadre d'un processus de reconstruction par vision active. Un point est alors reconstruit en effectuant deux déplacements de caméra tels que l'on soit dans la configuration de la figure 1.15.

## 1.5 Mise en correspondance : applications

Les paragraphes précédents livrent un ensemble de résultats théoriques sur les contours occultants et leurs mises en correspondance. Les propriétés qui en découlent justifient en particulier le choix de la correspondance épipolaire pour la mise en correspondance des contours. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la mise en œuvre pratique de cette correspondance entre contours. Une première étape concerne l'extraction et le suivi du contour occultant d'une surface. Il s'agit ensuite de déterminer, pour un point donné d'un contour occultant, son correspondant épipolaire sur un autre contour. Nous présentons les méthodes utilisées pour effectuer ces tâches, ainsi que des applications sur des séquences d'images synthétiques et réelles.

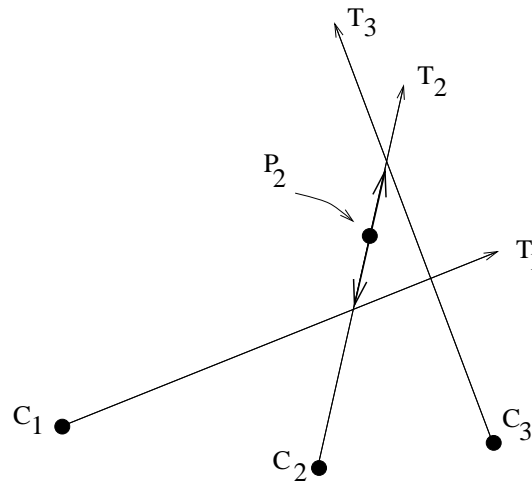


FIG. 1.15 – Exemple de contrainte sur la position de  $P_2$  lorsque les directions  $T_1$  et  $T_2$  vérifient la contrainte épipolaire pour les positions  $C_1$  et  $C_2$  de la caméra, ainsi que les directions  $T_2$  et  $T_3$  pour les positions  $C_2$  et  $C_3$ .

### 1.5.1 Extraction et suivi des contours occultants

La mise en correspondance des contours occultants d'une séquence d'images nécessite en premier lieu la localisation de ceux-ci dans les différentes images. Cette localisation consiste à détecter et extraire dans chaque image de la séquence, le contour de la surface à reconstruire. Pour cela, les contours occultants sont extraits et suivis dans une séquence à l'aide de la méthode développée par Berger [Ber 91, Ber 94]. Cette méthode se décompose en deux phases distinctes :

- La première phase concerne l'extraction des contours et est basée sur les *contours actifs* [Kas 88, Ter 88, Coh 92]. Ceux-ci correspondent, schématiquement, à des contours élastiques se collant de manière optimale aux contours images sous une contrainte de régularité. Une fonctionnelle prenant en compte une information image, le gradient d'intensité, et la régularité de la solution est donc associée à chaque contour actif. Cette phase consiste alors à faire converger le contour actif vers le contour de l'image en minimisant cette fonctionnelle.
- L'extraction d'un contour à l'aide d'un contour actif nécessite la donnée d'une solution initiale. La deuxième phase consiste donc à fournir des estimations initiales pour les différentes positions du contour occultant dans la séquence d'images. Le contour est tout d'abord initialisé manuellement dans la première image, fournissant ainsi une première estimation. Sa position dans chaque image suivante est ensuite estimée de manière récursive à l'aide d'une approximation du mouvement apparent entre les images, basée sur l'estimation du *flot optique* [Hor 81].

La combinaison de ces deux phases permet donc d'extraire et de suivre le contour occultant d'une surface au travers d'une séquence d'images de celle-ci. Les avantages de cette approche sont de conserver, grâce au contour actif, une cohérence globale du contour et d'éviter, par l'intermédiaire du suivi, une fastidieuse étape d'appariement des contours entre les différentes images.

### 1.5.2 Représentation des contours occultants

Le suivi de contour fournit pour chaque contour une liste ordonnée discrète de points images. La détermination d'un correspondant nécessite une représentation continue des contours occultants. Pour cela, la modélisation d'un contour occultant se fait à l'aide de courbes B-splines [dB 78, Lan 86]. Une courbe B-spline permet en effet de contrôler le compromis entre la qualité de l'approximation du contour image et la régularité de la courbe solution, régularité qui est nécessaire dans l'objectif d'un calcul robuste des propriétés différentielles du contour telle que la tangente.

Un contour occultant  $\mathcal{O}$  est donc approximé par la B-spline cubique  $p(s)$  qui minimise :

$$\sum_{i=1}^n |p(s_i) - p_i|^2 + \zeta \int_{s_1}^{s_n} \left| \frac{\partial^3 p(s)}{\partial s^3} \right|^2 ds,$$

où  $|\cdot|$  représente la norme euclidienne,  $\{p_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  étant la liste discrète des points images de  $\mathcal{O}$  et les  $s_i$  les paramètres associés, qui correspondent à la distance cumulée :

$$s_i = \sum_{k=1}^{i-1} |p_k - p_{k+1}|, \quad \text{pour } i > 1, \quad s_1 = 0,$$

et  $\zeta$  est le coefficient qui permet de contrôler la régularité de la courbe solution. Celle-ci est obtenue de manière linéaire par une méthode de moindres carrés régularisés [Lau 87].

### 1.5.3 Détermination de la position d'un correspondant épipolaire

Les contours occultants étant extraits de la séquence d'images, nous pouvons considérer deux contours  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  de la séquence. Soit  $p_1$  un point image appartenant à  $\mathcal{O}_1$ , le problème est alors de trouver le point  $p_2$  de  $\mathcal{O}_2$  correspondant épipolaire de  $p_1$ . Le couple  $(p_1, p_2)$  vérifiant la contrainte épipolaire,  $p_2$  est une des intersections de  $\mathcal{O}_2$  avec la droite intersection du plan épipolaire et du plan image contenant  $\mathcal{O}_2$ , la *droite épipolaire* de  $p_1$  dans ce plan image. L'identification précise de cette intersection est une fonction primordiale du processus de reconstruction. Notre approche utilise une représentation matricielle de l'équation d'intersection et se fonde sur une résolution numérique de cette équation.

#### La matrice fondamentale

Les contours occultants  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  sont représentés de manière continue par  $p_1(s_1)$  et  $p_2(s_2)$ . Soit  $d_{p_1}(s_1)$  la droite épipolaire de  $p_1(s_1)$  dans le deuxième plan image contenant  $\mathcal{O}_2$ . Le calcul des intersections de  $d_{p_1}(s_1)$  et  $\mathcal{O}_2$  fait appel à la géométrie épipolaire et s'appuie sur une représentation projective en coordonnées homogènes des droites épipolaires et des points du plan image [Fau 93] :

$$d_{p_1}(s_1) = \mathcal{F}_{12} \cdot p_1(s_1),$$

où  $\mathcal{F}_{12}$  est la *matrice fondamentale* qui contient l'ensemble des informations géométriques reliant les deux plans images [Luo 92]. L'intérêt de cette matrice, lorsqu'il s'agit de déterminer des correspondants épipolaires, est de permettre de vérifier la contrainte épipolaire directement à partir des coordonnées images, sans nécessiter de calculs intermédiaires (de la position  $C$  de la caméra ou du vecteur  $T$  associé à un point image).

$\mathcal{F}_{12}$  est donc fonction des positions et orientations des deux plans images considérés ainsi que des caractéristiques internes de la caméra. Dans notre cas, les caractéristiques internes et externes de la caméra sont connues au travers des matrices de calibrage. La matrice fondamentale  $\mathcal{F}_{12}$  est donc déterminée à partir des matrices de calibrage des plans images 1 et 2 (voir l'annexe A pour le calcul).

### Résolution

Le point  $p_2(s_2)$  intersection de  $d_{p_1}(s_1)$  avec  $\mathcal{O}_2$  vérifie donc :

$$p_2(s_2) \cdot d_{p_1}(s_1) = 0,$$

soit :

$$p_2(s_2) \cdot \mathcal{F}_{12} \cdot p_1(s_1) = 0. \quad (1.24)$$

Cette expression est une autre formulation de la contrainte épipolaire (1.18) énoncée précédemment.

$\mathcal{O}_2$  est représentée par une courbe B-spline cubique et la résolution directe de (1.24) revient donc à trouver les racines de plusieurs polynômes d'ordre 3 ; c'est une procédure coûteuse, qui en outre n'identifie pas de manière précise une seule solution. Notre approche est numérique et s'appuie sur la propriété de continuité de la correspondance épipolaire. Le principe est de rechercher, pour un point  $p_1$  de paramètre  $s_1$ , la valeur de  $s_2$  qui annule (1.24) à partir d'une solution précédente de la correspondance épipolaire entre  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ , ou de la valeur minimale de  $s_2$  lors de la première recherche (figure 1.16).

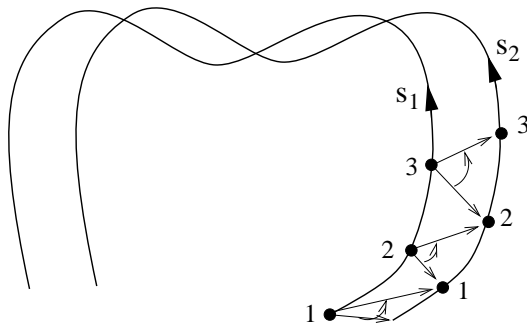


FIG. 1.16 – Recherche récursive des correspondants épipolaires : la recherche s'effectue à partir du correspondant précédent.

L'approche récursive présentée a l'avantage de réduire, dans le cas général, le nombre de correspondants potentiels lorsque plusieurs intersections entre la droite épipolaire et le contour occultant existent. Une recherche récursive impose, en effet, un ordre d'apparition commun des correspondants épipolaires le long des contours, ce qui peut éliminer certains choix. Le fait que les correspondants apparaissent dans le même ordre sur les deux contours mis en correspondance découle de la continuité de la correspondance épipolaire.

**Remarque :** Arbogast, dans [Arb 91], utilise aussi la propriété de continuité de la correspondance épipolaire et détermine la relation linéaire qui existe entre  $s_1$  et  $s_2$  à l'aide



de deux appariements réalisés aux extrémités des contours. La détermination des correspondants épipolaires se résume alors à l'application de cette relation aux valeurs  $s_1$  des points traités. Cependant, cette approche ne peut fonctionner que si les parties considérées des contours (celles comprises entre les points extrémité considérés) ne présentent pas de singularités. En effet, la relation de correspondance entre  $s_1$  et  $s_2$  n'est pas continue dans le cas de singularités du contour occultant. De plus, dans le cas d'images réelles, l'intersection entre le contour occultant et la droite épipolaire peut ne pas exister au voisinage d'un point multiple et la relation de correspondance épipolaire n'est alors plus linéaire. Cette approche ne fonctionne donc que sur les parties des contours occultants ne contenant ni singularités ni projections de points multiples.

### Contrainte d'ordre

Malgré l'usage d'une approche récursive, l'ambiguïté du choix peut subsister au voisinage d'un point multiple. La droite épipolaire intersecte, dans ce cas, le contour occultant en deux points proches (figure 1.17) et la contrainte précédemment utilisée n'est pas nécessairement suffisante pour déterminer le correspondant épipolaire.

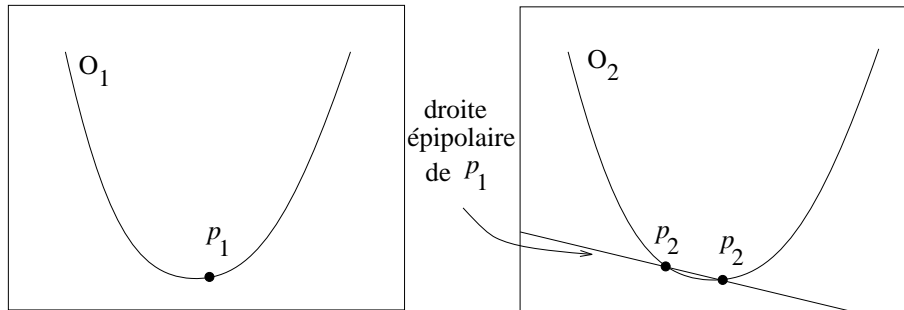


FIG. 1.17 – La correspondance épipolaire à proximité d'un point multiple :  $p_1$  a deux correspondants potentiels proches  $p_2$  vérifiant la contrainte épipolaire.

Le critère qui peut alors être utilisé pour résoudre l'ambiguïté est d'appliquer la contrainte d'ordre aux points  $p_1$ ,  $p_2$  considérés, ainsi qu'aux projections  $p_1^m$  et  $p_2^m$  du point multiple voisin :

- l'ordre dans lequel apparaissent  $(p_1, p_1^m)$  et  $(p_2, p_2^m)$  sur les contours doit être le même<sup>6</sup>.

Pour cela, il suffit de considérer le produit scalaire entre la direction de la droite épipolaire et la normale au contour occultant. Celui-ci ne s'annule qu'en un point multiple et permet donc de repérer la position de  $p_1$  et  $p_2$  par rapport à  $p_1^m$  et  $p_2^m$  (figure 1.18).

**Remarque :** la contrainte d'ordre utilisée ici est à mettre en parallèle avec celle existant en stéréo-vision [Aya 89]. Dans ce domaine, la contrainte d'ordre impose que l'ordre d'apparition des points images sur les droites épipolaires soit le même dans les deux images, ce qui est aussi le cas de la contrainte que nous utilisons. La différence réside dans le fait

6. Bien entendu, cet ordre est fonction de l'orientation donnée aux contours dans les plans images. Nous supposons ici que cette orientation est la même pour les contours occultants considérés, c'est-à-dire que les normales à la surface ont le même sens sur les contours d'occultations correspondants.

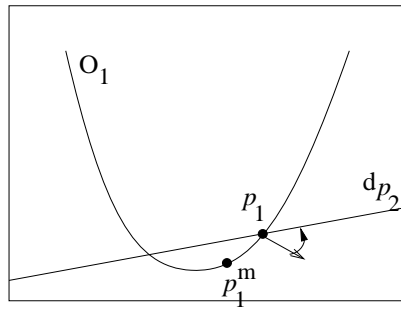


FIG. 1.18 – Le correspondant épipolaire  $p_2$  est celui pour lequel le produit scalaire entre la direction de la droite épipolaire et la normale au contour garde le même signe dans les deux images.

que la contrainte qui est définie ici détermine directement si une mise en correspondance est correcte sans nécessiter le calcul de l'autre intersection de la droite épipolaire avec le contour occultant.

Un dernier point concerne le cas d'images réelles. Il se peut alors qu'en raison du bruit, la droite épipolaire n'intersecte pas le contour occultant au voisinage d'un point multiple. Dans cette situation, l'équation d'intersection (1.24) n'a pas de solution et la correspondance épipolaire échoue.

#### 1.5.4 Exemples : données synthétiques

Nous présentons ici plusieurs exemples d'applications de la correspondance épipolaire sur des données synthétiques. Les expérimentations réalisées ont pour but de mettre en évidence les différents éléments qui caractérisent la correspondance épipolaire, ainsi que ses propriétés.

##### Rotation de la caméra autour d'une sphère

Nous considérons des données synthétiques sous la forme d'images successives d'une sphère. Nous supposons que l'axe optique de la caméra passe par le centre de la sphère, les contours occultants ainsi que les contours d'occultations sont alors des cercles (cf. § 2.6.1). Les figures 1.19 et 1.20 illustrent la mise en correspondance épipolaire pour une rotation de la caméra autour du centre de la sphère (figure 1.19-a). Dans ce cas, la surface spatio-temporelle  $\bar{\mathcal{S}}$  est un cylindre (figure 1.19-c). La figure 1.19-c montre les appariements réalisés entre les contours occultants sur  $\bar{\mathcal{S}}$  et les figures 1.20-ab montrent ceux induits entre les contours d'occultations sur la surface  $\mathcal{S}$ . On notera la présence, sur les figures 1.20-ab, de deux points multiples correspondant aux intersections des contours d'occultation.

##### Translation de la caméra vers une sphère

Les figures 1.21 et 1.22 reprennent la même démarche et illustrent la mise en correspondance épipolaire pour une translation de la caméra sur un axe passant par le centre de la sphère (figure 1.21-a). Dans ce cas, le contour occultant se déforme d'une image à une autre (figure 1.19-b). Par contre, le mouvement de la caméra n'est dans aucun plan tangent à la

surface et, de fait, aucun point multiple n'apparaît sur les contours d'occultation (figures 1.22-ab).

### Mises en correspondance successives

Les figures 1.23, 1.24 et 1.25 montrent ensuite l'évolution des mises en correspondance épipolaire lors d'une rotation continue de la caméra autour de la sphère (figure 1.23-a). Le *champ épipolaire* qui en découle sur la surface observée ou sur la surface spatio-temporelle, est composé de l'ensemble des courbes épipolaires. La figure 1.23-b montre trois de ces courbes sur la surface spatio-temporelle et les figures 1.24-ab les courbes épipolaires correspondantes sur la sphère. On remarquera les points de rebroussements des courbes épipolaires sur la surface aux points multiples.

La figure 1.25 met en évidence un des aspects de la correspondance épipolaire qui est une délocalisation des points sur les contours occultants lors de la propagation des appariements. En effet, la correspondance épipolaire n'est pas en général transitive. Si  $P_1$  et  $P_2$  sont correspondants, ainsi que  $P_2$  et  $P_3$ , alors  $P_1$  et  $P_3$  ne sont pas correspondants à l'exception des cas où :

1. les trois positions de la caméra sont alignées :  $P_1$  et  $P_3$  sont alors toujours correspondants épipolaires,
2. les trois positions de la caméra ne sont pas alignées :  $P_1$  et  $P_3$  sont correspondants épipolaires si et seulement si  $P_2$  (et donc  $P_1$  et  $P_3$ ) appartient au plan contenant les trois positions de la caméra<sup>7</sup>.

En conséquence, pour une caméra parcourant une courbe fermée dans l'espace, la plupart des courbes épipolaires sur la surface ne seront pas fermées, mais de forme hélicoïdales (figures 1.24-ab).

Une propagation des appariements ne permet donc pas d'avoir une répartition uniforme des points sur les surfaces  $\mathcal{S}$  et  $\bar{\mathcal{S}}$  (figure 1.25-bc). Dans l'objectif d'une reconstruction, nous ne propageons pas les correspondances déterminées. Ainsi, chaque contour occultant est échantillonné puis mis en correspondance avec le contour suivant.

### 1.5.5 Exemples : données réelles

Les figures présentées ici montrent les mises en correspondance réalisées sur des images réelles d'un vase et d'une calebasse (figures 1.26-a et 1.27-a). Les objets ont été déplacés à l'aide d'une table micro-métrique tournante, le calibrage étant réalisé suivant la procédure décrite en annexe A. Le mouvement de la caméra autour des objets est donc approximativement circulaire et les séquences admettent des points doubles situés sur le haut et le bas des objets. Les figures 1.26-b et 1.27-b montrent les contours extraits dans les séquences. La procédure de mise en correspondance est la suivante :

1. chaque contour occultant de la séquence d'images, à l'exception du dernier, est échantillonné en  $n$  points.

---

7. Il existe cependant un cas particulier pour lequel les correspondants  $P_1$  et  $P_3$  de  $P_2$  vérifient la contrainte épipolaire sans être correspondants épipolaires. Cela se produit lorsque les lignes de vue de  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  s'intersectent au même point. Nous reviendrons par la suite (cf. § 2.4.2) sur cette situation remarquable qui constitue un cas particulier pour la reconstruction (dégénérescence des solutions).

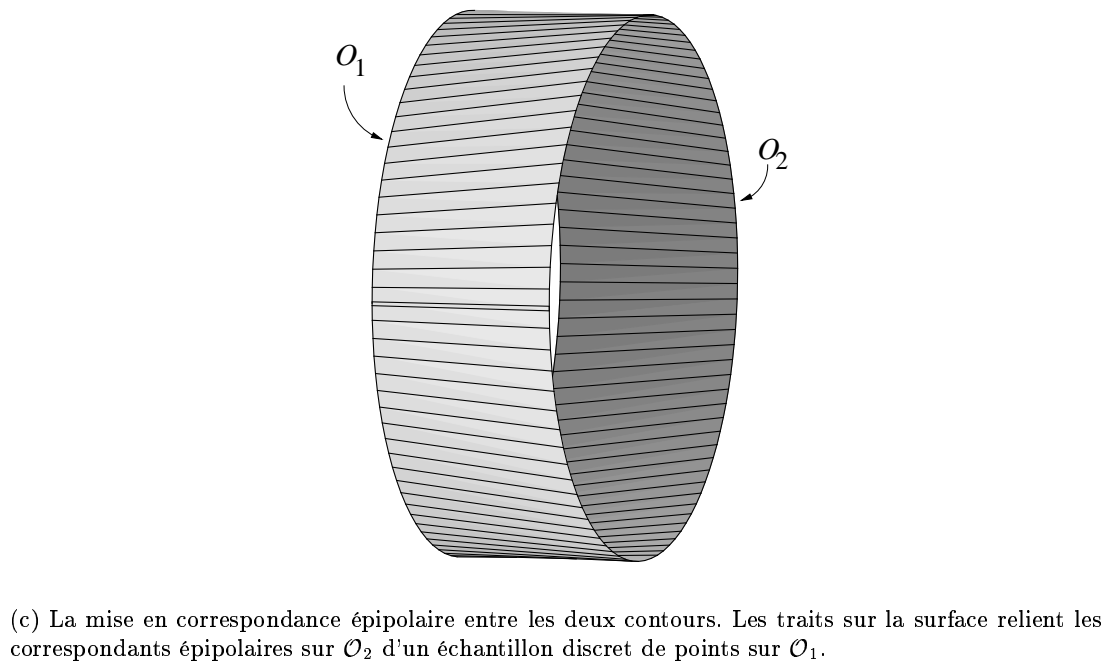
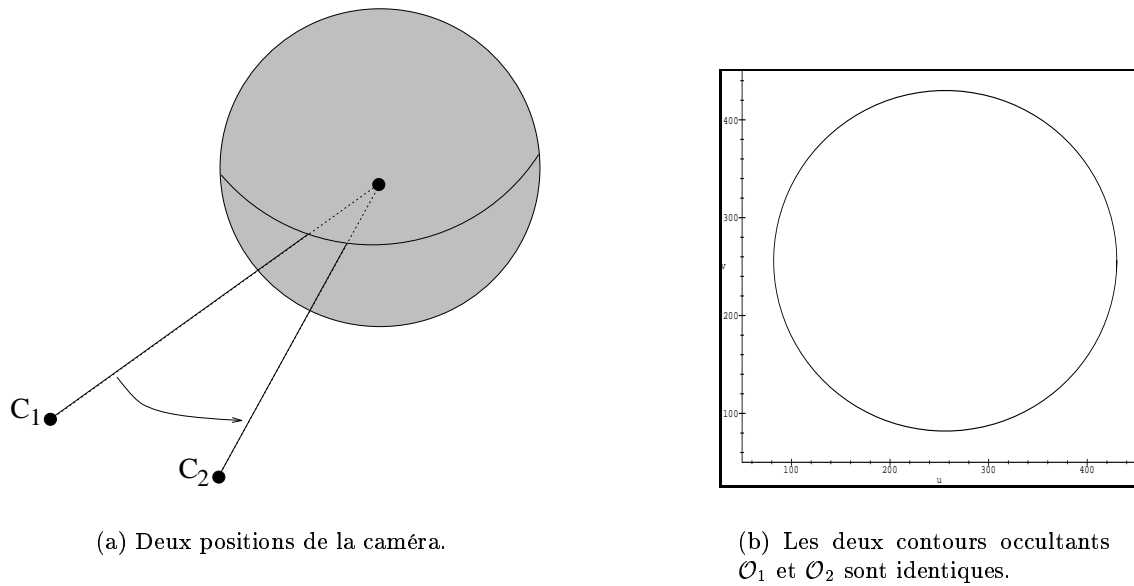
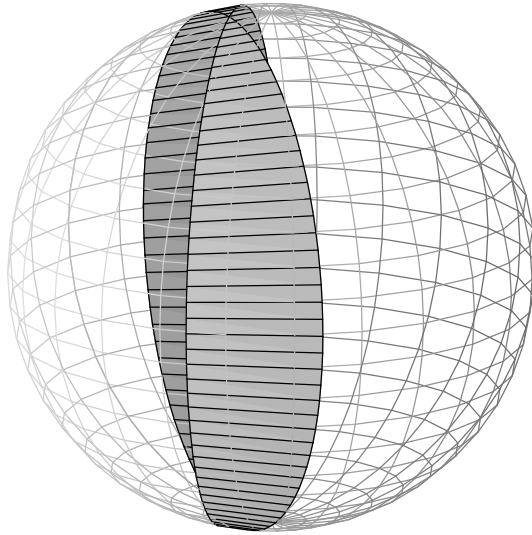
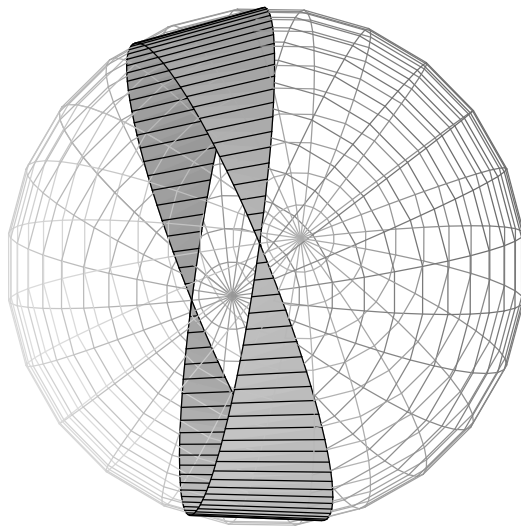


FIG. 1.19 – La caméra est en rotation autour du centre de la sphère.

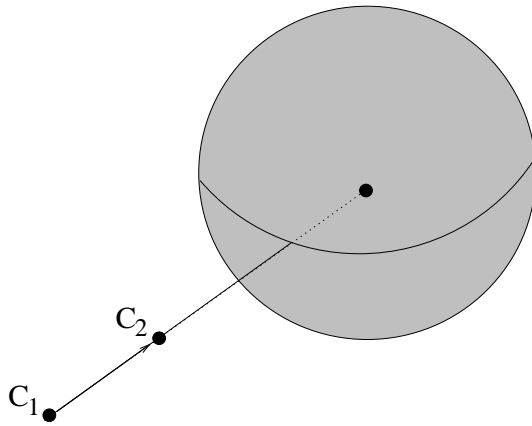


(a) Vue de côté.

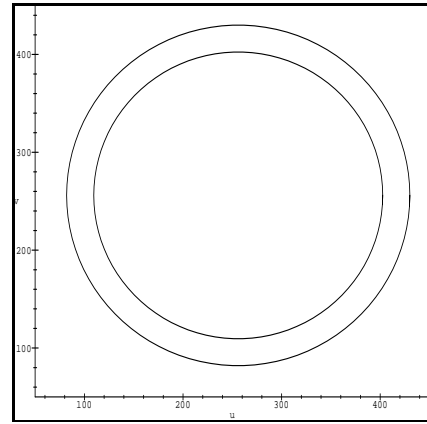
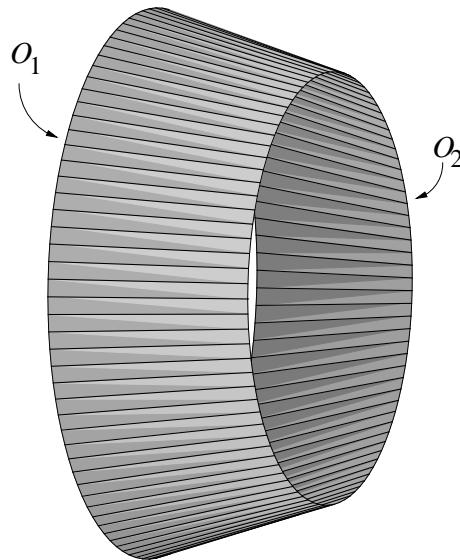


(b) Vue de dessus.

FIG. 1.20 – La caméra est en rotation autour du centre de la sphère : deux vue des contours d'occultation observés sur la sphère et des correspondances épipolaires induites.

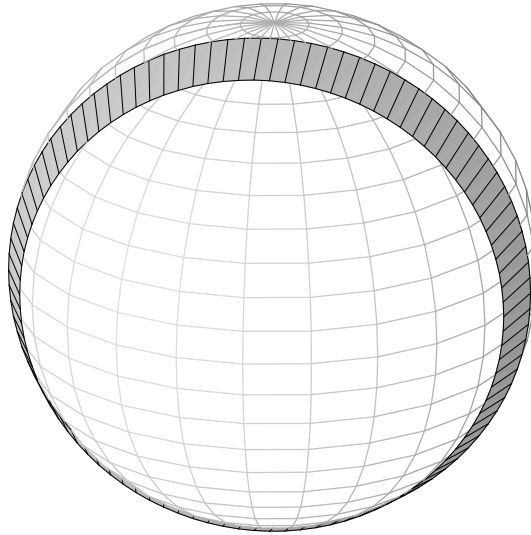


(a) Deux positions de la caméra.

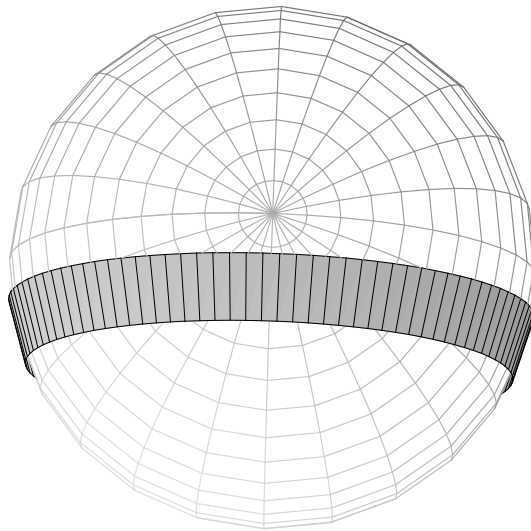
(b) Les deux contours occultants  $O_1$  et  $O_2$ .

(c) La mise en correspondance épipolaire entre les deux contours.

FIG. 1.21 – La caméra est en translation sur un axe passant par le centre de la sphère.

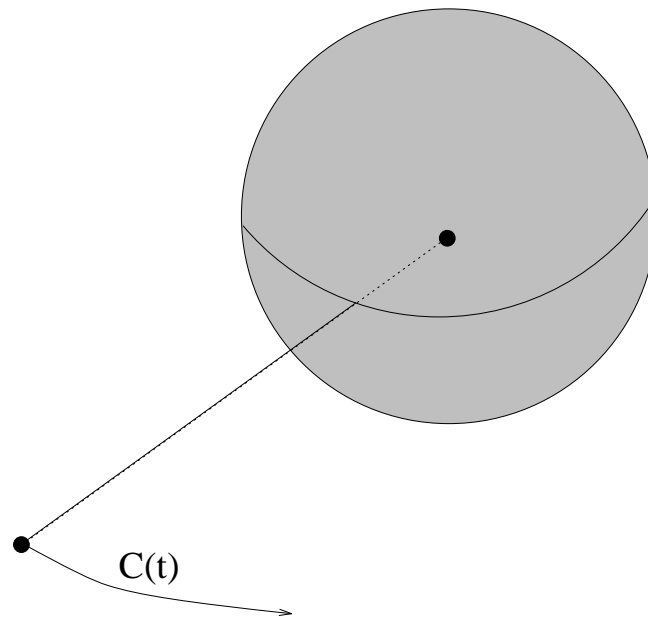


(a) Vue de face.

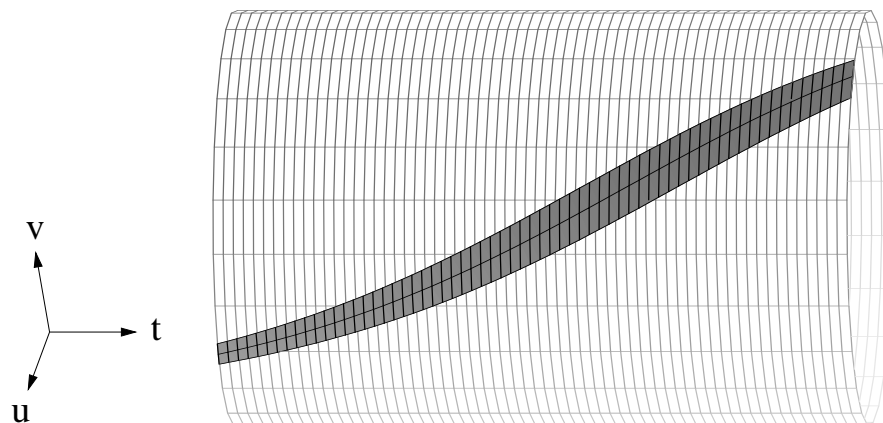


(b) Vue de dessus.

FIG. 1.22 – La caméra est en translation sur un axe passant par le centre de la sphère : deux vues des contours d'occultation observés sur la sphère et des correspondances épipolaires induites.



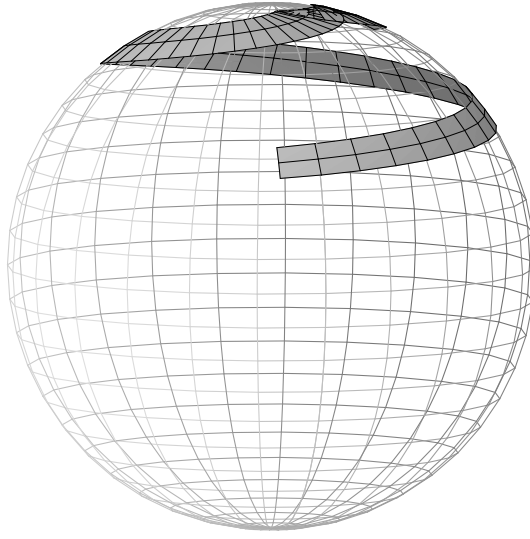
(a) Le mouvement de la caméra.



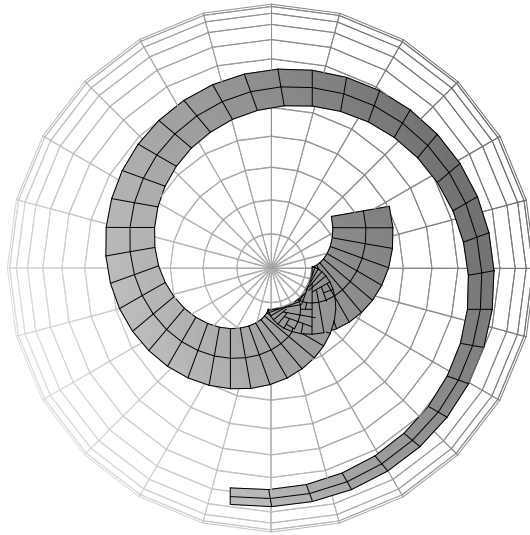
(b) Trois courbes épipolaires sur la surface spatio-temporelle. Les inflexions des courbes correspondent aux projections de points multiples (frontières) de la séquence.

FIG. 1.23 – La caméra est en rotation continue autour du centre de la sphère : suivi de la correspondance épipolaire de trois points images dans le temps.



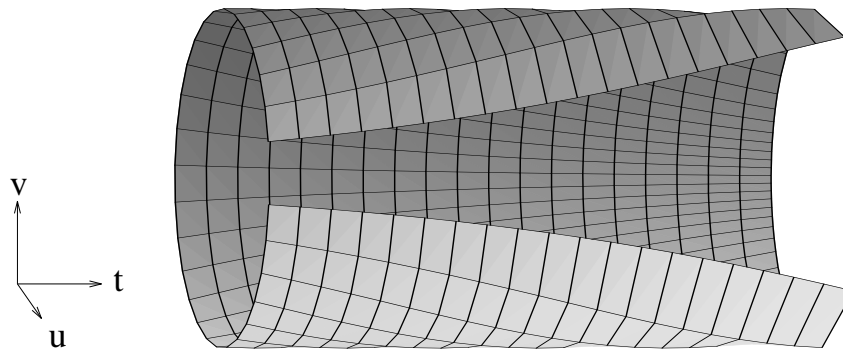


(a) Vue de face.

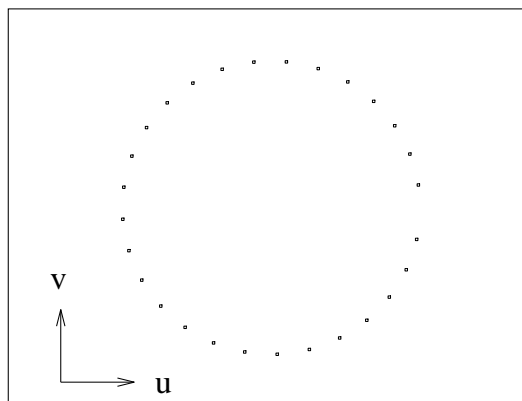


(b) Vue de dessus.

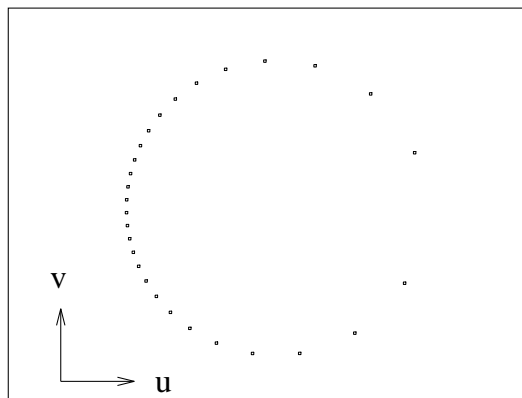
FIG. 1.24 – La caméra est en rotation continue : deux vues de trois courbes épipolaires sur la surface. Ces courbes sont singulières (points de rebroussements) aux points multiples .



(a) Le maillage épipolaire sur la surface spatio-temporelle.



(b) Les points du maillage sur le premier contour occultant de la séquence,



(c) Après un tour complet de la caméra autour de la sphère.

FIG. 1.25 – La caméra est en rotation continue : détails sur la répartition des points sur les contours occultants à la suite de mises en correspondance épipolaire successives.

2. Le correspondant épipolaire de chacun des  $n$  points d'un contour échantillonné est recherché sur le contour de l'image suivante.

### Séquence du vase

Les appariements réalisés sur le vase entre deux images sont présentés dans la figure 1.26-c. Les difficultés de mise en correspondance au voisinage des points multiples sont illustrées dans cette figure par le fait que plusieurs points du premier contour situés sur le haut du vase et proches de l'extrémité, sont reliés à un même point du deuxième contour. Cela se produit aux points où la mise en correspondance épipolaire échoue lorsque la droite épipolaire est presque tangente et n'intersecte pas le contour occultant.

### Séquence de la calèche

De la même manière, la figure 1.27-c montre les appariements réalisés entre plusieurs paires d'images successives d'une calèche. Dans ce cas, et ainsi que cela sera appliqué dans le processus de reconstruction (cf. chapitre 2), les mises en correspondance ne sont pas répercutées d'un contour à un autre ; chaque contour est échantillonné et ses correspondants sur le contour suivant de la séquence sont déterminés.

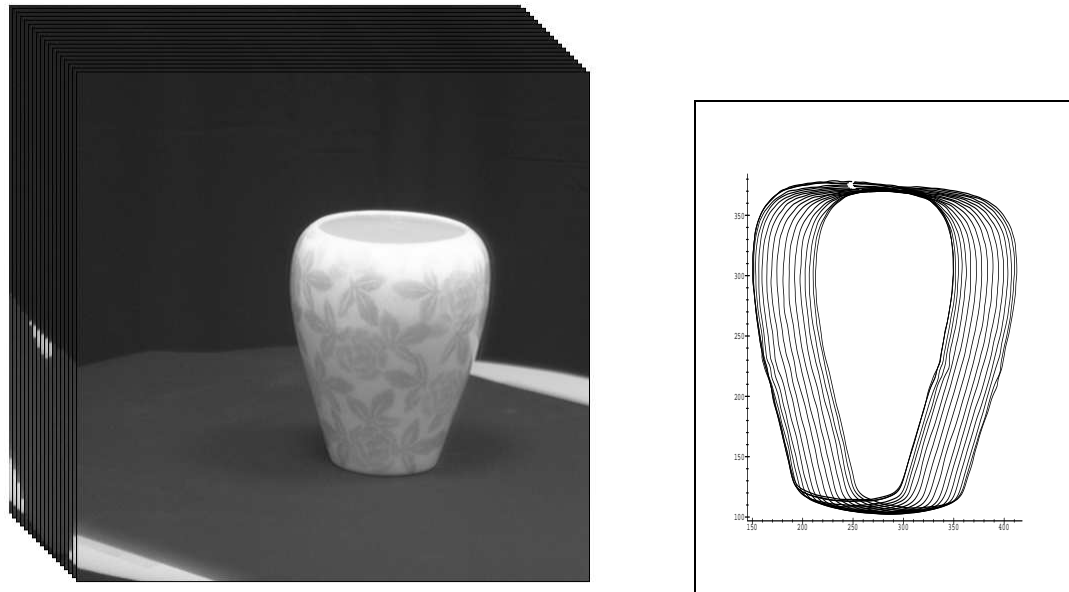
On remarquera par ailleurs que les mêmes difficultés que précédemment apparaissent au voisinage des points doubles de la séquence, situés sur le haut et le bas de la calèche.

## 1.6 Résumé et discussion

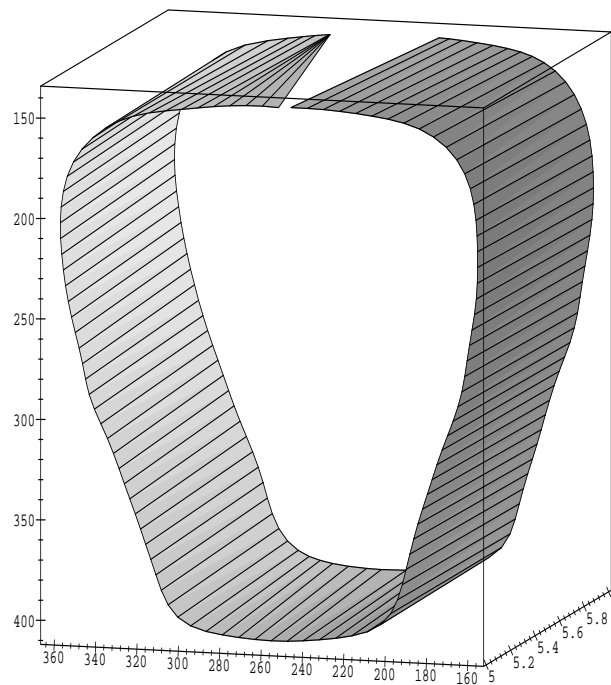
Nous avons introduit dans ce chapitre les contours occultants et leurs propriétés. Un premier aspect concerne les informations géométriques sur l'objet observé qui peuvent être déduites de l'étude statique de ces contours. La normale à la surface et la forme locale de la surface (elliptique ou hyperbolique) sont ainsi déterminables à partir d'un seul contour occultant. Nous avons ensuite précisé le lien exact entre la courbure apparente du contour occultant et celle du contour d'occultation correspondant dans les différents cas de projection.

Dans le but de reconstruire la surface d'un objet courbe quelconque, il est nécessaire de considérer plusieurs contours occultants. La manipulation de ces différents contours nécessite la mise en place d'une relation de correspondance entre contours. Notre choix s'est porté sur la correspondance épipolaire qui découle de la géométrie épipolaire. Cette correspondance naturelle présente en effet plusieurs propriétés qui justifient son choix dans notre contexte :

- Elle découle d'un paramétrage de la surface qui est défini en dehors des points introduisant une singularité du contour occultant (point de rebroussement et jonction en T) et des points multiples.
- La correspondance épipolaire entre deux contours occultants est une application continue en dehors des singularités du contour et différentiable en dehors des singularités et des points multiples.

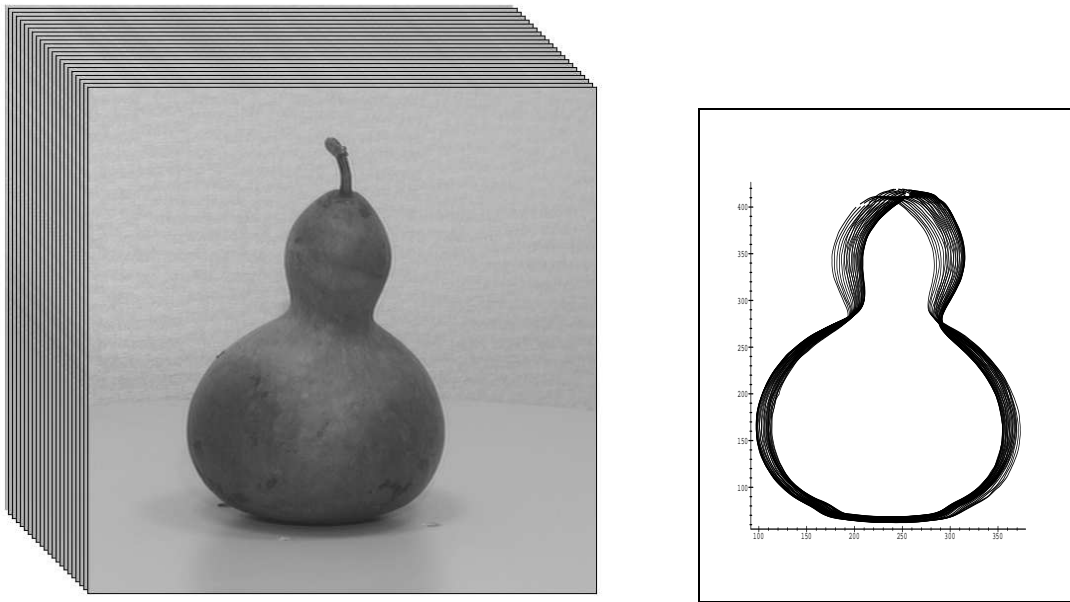


(a) La séquence et les contours occultants extraits.

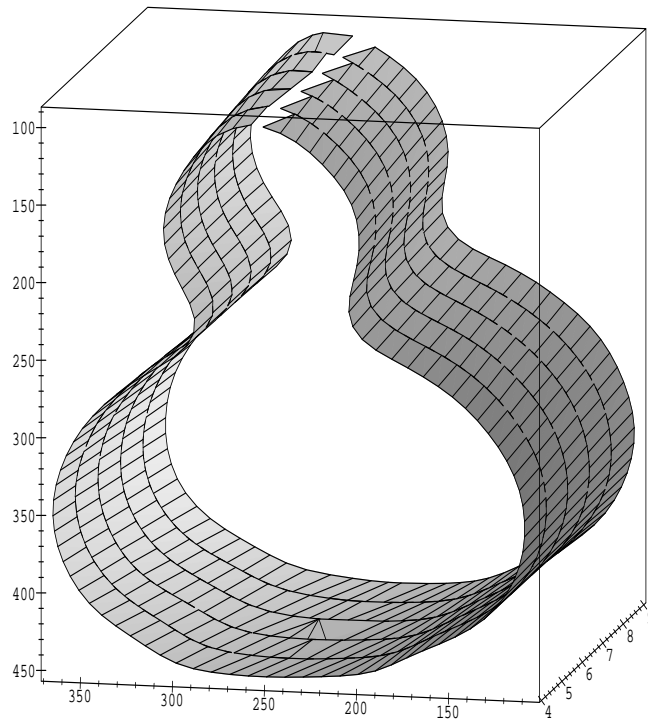


(b) Mise en correspondance épipolaire entre les images 5 et 6.

FIG. 1.26 – Mise en correspondance de deux images de la séquence du vase (18 images prises avec une rotation de la table micro-métrique de 10 degrés entre deux images).



(a) La séquence et les contours occultants extraits.



(b) Mise en correspondance épipolaire entre les couples d'images (4,5), (5,6), (6,7), (7,8) et (8,9).

FIG. 1.27 – Mise en correspondance de plusieurs images de la séquence de la calabasse (30 images prises avec une rotation de la table micro-métrique de 7 degrés entre deux images).

- Comme nous le verrons au chapitre 2, elle permet de contraindre, en fonction du mouvement de la caméra, la position d'un point de la surface le long de sa ligne de vue et débouche sur une estimation linéaire de cette position (cf. chapitre 2).

Ces différents points font de la correspondance épipolaire la meilleure candidate à ce jour pour apparier deux contours occultants. Cependant, rien ne vient affirmer, pour l'instant, qu'il n'existe pas d'autres relations de correspondance qui posséderaient des caractéristiques plus intéressantes. De plus, la correspondance épipolaire présente le désavantage de déplacer fortement les points lors de mises en correspondance successives. Mettre en correspondance de manière récursive des points au travers d'une séquence d'images présente donc peu d'intérêt.

Enfin, dans le cas d'images réelles, les droites épipolaires peuvent, en raison du bruit, ne pas intersecter les contours occultants au voisinage des points multiples. Cela est dû au fait que, dans le cas réel, les droites épipolaires ne sont pas nécessairement tangentes aux contours occultants aux points multiples. Une possibilité serait alors de contraindre, au moment de la modélisation par B-spline, les positions des courbes images représentant les contours occultants, de manière à imposer la tangence des droites épipolaires aux points multiples. Cela permettrait, dans le cas réel, d'assurer l'existence de correspondants épipolaires en tout point d'un contour occultant qui ne contient pas de singularités.



## Chapitre 2

# Reconstruction d'un point appartenant à un contour d'occultation

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de la reconstruction d'un point d'un contour d'occultation. Nous introduisons, tout d'abord, le cas théorique d'observations continues et les formules qui en découlent. Nous présentons ensuite notre approche dans le cas discret. Celle-ci est basée sur une approximation locale à l'ordre 2 de la surface: *le parabolöide osculateur*, que nous définissons. Nous montrons alors que les courbes épipolaires sont, à l'ordre 2, des paraboles des plans épipolaires et nous établissons l'équation de la profondeur qui peut en être déduite. Les solutions pour 3 contours occultants, ou plus, sont ensuite explicitées, ainsi que les différentes configurations des points sur les contours qui peuvent se présenter dans ce cadre. Une comparaison avec les principales méthodes existantes est par la suite réalisée, et des expérimentations sur des données synthétiques et réelles viennent enfin illustrer notre démarche.



## 2.1 Introduction

L'observation d'une scène à l'aide d'une caméra apporte un ensemble de projections images de cette scène. En raison de la projection, une seule image ne permet pas de déduire des caractéristiques 3D de la scène observée. La reconstruction consiste alors à déterminer, à partir de plusieurs projections, la position dans l'espace de primitives telles que des points ou des segments. Lorsque les caractéristiques de la caméra sont connues au travers d'une étape de calibrage ou d'auto-calibrage, il s'agit alors de déterminer la profondeur d'un point, ou de deux points dans le cas d'un segment, le long de sa ligne de vue. Dans le cas d'une scène constituée d'objets polyédriques, deux projections différentes d'un même point permettent de reconstruire ce point : il suffit pour cela de calculer l'intersection des lignes de vue. C'est le principe bien connu de la *triangulation* que le système de vision humaine utilise en permanence pour voir en profondeur [Gri 86]. En vision artificielle, de nombreux algorithmes de stéréo-vision basés sur ce principe existent [Gri 81, Bar 82, Fau 88, Hof 89].

Dans le cas d'un objet courbe et de points appartenant à des contours d'occultation de cet objet, la triangulation ne peut pas être utilisée. En effet, les contours d'occultation dépendant du point du vue, deux projections différentes du même point d'un contour d'occultation ne sont pas disponibles en général. La reconstruction d'un point appartenant à un contour d'occultation nécessite donc une autre approche ; ceci fait l'objet de ce chapitre.

### 2.1.1 Travaux existants

Les premiers travaux concernant la reconstruction des contours d'occultation sont ceux de Giblin et Weiss [Gib 87]. Leur approche se place dans le contexte d'observations continues et s'appuie sur le fait qu'une surface lisse sans concavités est l'enveloppe de ses plans tangents. En se restreignant à des mouvements de caméra plans et à des projections orthographiques, ils obtiennent des solutions théoriques pour la profondeur et les courbures gaussienne et moyenne en un point observé. Des expériences sur des données synthétiques représentant des courbes planes illustrent leur approche.

Par la suite et toujours pour des observations continues, plusieurs auteurs se sont intéressés au cas d'une projection perspective :

- Arbogast et Mohr [Arb 89, Arb 91] ont montré que la reconstruction était possible dans le cas perspectif et pour un mouvement quelconque de la caméra lorsque les paramètres du mouvement sont connus.
- Cipolla et Blake [Cip 90, Cip 96], en se basant sur un modèle de projection sphérique, ont trouvé une formulation très simple de la profondeur d'un point d'un contour d'occultation. Celle-ci fait intervenir les dérivées temporelles du mouvement de la caméra et de la direction de la ligne de vue. La surface spatio-temporelle est donc supposée connue de manière complète.
- Vaillant et Faugeras [Vai 90, Vai 92], à l'aide d'un paramétrage de la surface par les angles d'Euler, ont obtenu une formulation équivalente à celle de Cipolla et Blake. Les expressions qui en découlent sont, néanmoins, plus complexes.

- Zheng [Zhe 94] a repris l'approche de Giblin et Weiss [Gib 87] et généralisé celle-ci au cas perspectif. Cependant, les résultats obtenus sont basés sur une rotation plane de la caméra et restent liés, implicitement, à un modèle de projection orthographique.

Ces résultats se situent dans un contexte théorique d'observations continues dans le temps. Néanmoins, dans une situation réelle, seul un ensemble discret d'images est disponible. Il est alors nécessaire d'appliquer une approximation discrète pour estimer des caractéristiques 3D :

- Arbogast [Arb 91] estime les dérivées temporelles et spatiales en approximant la surface spatio-temporelle à l'aide de B-splines. La régularisation introduite par les B-splines permet de limiter les effets du bruit mais n'a pas d'interprétation physique quant à la surface reconstruite. Un lissage temporel produit en effet un lissage spatial non-uniforme de la surface reconstruite.
- Vaillant [Vai 90] et Cipolla [Cip 90] utilisent le modèle du *cercle osculateur* pour estimer la profondeur et la courbure dans la direction de la ligne de vue. Les lignes de vue de trois correspondants épipolaires permettent de déterminer le cercle osculateur à une courbe plane de la surface. Dans le cas général, les trois lignes de vue considérées ne sont pas coplanaires et un plan de projection est alors nécessaire. Vaillant utilise une tête tri-stéréo montée sur un robot et projette les lignes de vue dans le plan radial défini par la normale à la surface et la direction de la ligne de vue au point considéré. Cipolla travaille à partir de séquences monoculaires et projette les lignes de vue dans un des plans épipolaires au point considéré, estimant ainsi le cercle osculateur aux courbes épipolaires. Ces deux approches supposent, de manière implicite, que le mouvement de la caméra est linéaire. Elles n'offrent pas, de plus, de solution explicite au problème de reconstruction. Quatre cercles sont en effet solutions du problème du cercle osculateur et une étape discriminante est nécessaire.
- Szeliski et Weiss [Sze 93b] ont repris la méthode du cercle osculateur en la couplant avec un filtrage linéaire appliqué à des séquences d'images. Les techniques standards de la théorie de l'estimation (filtre de Kalman et lissage) permettent ainsi de faire un usage optimal des données images. Cette approche donne des résultats robustes, mais le modèle local du cercle osculateur reste inchangé et inexact en dehors des mouvements de caméra linéaires.
- Joshi, Ahuja et Ponce [Jos 95a, Jos 95b] modélisent localement la surface par un parabolôïde. Les caractéristiques locales de la surface sont alors déterminées à partir de trois images obtenues par une tête tri-stéréo. Cependant, l'estimation de la profondeur et de la courbure dans la direction de la ligne de vue se fait à l'aide de la méthode du cercle osculateur appliquée à la courbe épipolaire.

### Une autre voie

L'ensemble des travaux cités concernent la reconstruction locale d'un point d'un contour d'occultation et s'appuient sur des heuristiques faibles sur les surfaces considérées : régularité dans le cas continu et modèle d'ordre 2 dans le cas discret. Néanmoins, en marge de ces approches, la reconstruction globale de la surface ou de l'ensemble des contours observés constitue une voie intéressante explorée par plusieurs équipes. L'idée directrice est alors de partir d'un modèle *a priori* de surface et de faire correspondre celui-ci avec les contours

observés. Lorsque la contrainte sur la surface est suffisamment forte, une seule image peut même être suffisante pour reconstruire celle-ci. C'est le cas notamment de certains cylindres généralisés dont la reconnaissance et la localisation [Pon 89, Gla 92b, For 92] ainsi que la reconstruction [Zer 93, Say 95, Ulu 95] sont possibles à partir d'un seul contour occultant.

Dans un contexte plus général, Kriegman et Ponce [Kri 90] ont présenté une méthode pour la reconnaissance et la localisation, à partir d'un seul contour, de surfaces définies sous une forme paramétrique: les surfaces algébriques. À la suite de ces travaux, Zhao et Mohr [Zha 93, Zha 94] ont proposé une approche intéressante pour la reconstruction des surfaces régulières. Toujours en partant de séquences de contours, l'idée est de modéliser la surface traitée sous la forme d'une surface B-spline. Les équations de projections appliquées à un ensemble discret de points de contours débouchent alors sur un système non-linéaire d'équations avec les positions des points correspondant de la surface pour inconnues. La résolution de ce système par une méthode itérative permet une reconstruction globale de l'ensemble des points traités. Cette approche semi-globale, au sens où l'on reconstruit des parties de la surface, permet de traiter l'ensemble des surfaces régulières et présente l'avantage de reconstruire et lisser en une seule étape. Néanmoins, l'ajustement des paramètres des B-splines est un exercice extrêmement difficile sans connaissances *a priori* sur la surface. Or, un paramétrage de la surface est rarement disponible avant une reconstruction de celle-ci.

### 2.1.2 Notre approche

Nous nous plaçons directement dans le cas d'observations discrètes et considérons des séquences monoculaires prises en déplaçant les objets. Le calibrage complet des images est supposé connu: les problèmes de calibrage sont présentés et discutés en annexe A. Nous supposons que la surface observée est régulière et traitons le cas des points pour lesquels le contour occultant n'est pas singulier. Notre approche est basée sur une approximation locale à l'ordre 2 de la surface: *le paraboloïde osculateur*. Celle-ci peut être estimée à partir de trois points appartenant à trois images. Lorsque ces points sont correspondants épipolaires, nous montrons que l'approximation à l'ordre 2 débouche sur une estimation linéaire de la profondeur et de la courbure dans la direction de la ligne de vue. L'idée directrice est de déterminer les courbes intersections de la surface et des plans épipolaires issus de la mise en correspondance.

Les contributions majeures de notre approche sont, en regard des travaux existants:

1. de s'affranchir de toute contrainte sur le mouvement de la caméra ou sur la forme de la surface; la seule hypothèse qui est faite est de supposer la surface localement d'ordre 2;
2. de fournir une solution explicite au problème de reconstruction. Celle-ci est unique et ne nécessite aucune connaissance *a priori* sur la position de l'objet par rapport aux lignes de vue.

La suite de ce chapitre débute par l'étude du cas théorique d'observations continues et de la formule de profondeur qui en découle. Nous présentons ensuite le modèle local du paraboloïde osculateur sur lequel s'appuie notre approche. La solution de reconstruction qui est basée sur l'estimation des courbes intersections du paraboloïde osculateur local et des plans épipolaires est alors établie. Puis, nous comparons notre approche aux méthodes

du cercle osculateur, très largement utilisées dans la littérature. Enfin, des résultats sur des données synthétiques ainsi que réelles sont présentés et discutés.

## 2.2 Le cas continu

Avant de présenter notre approche pour la reconstruction, nous rappelons ici de précédents résultats théoriques dans le cas d'observations continues, c'est-à-dire lorsqu'une image est disponible à tout instant  $t$  de l'intervalle d'acquisition. Ces résultats concernent la profondeur d'un point d'un contour d'occultation le long de sa ligne de vue et mettent en évidence la nécessité d'une approximation dans le cas d'observations discrètes. Nous présentons dans un premier temps la formule de profondeur, puis nous étudions son application dans le cas discret.

### 2.2.1 La formule de profondeur

Comme cela a été fait au chapitre 1, nous utilisons ici la projection sphérique pour modéliser la formation d'une image. Ce modèle présente l'avantage de simplifier grandement les expressions manipulées et s'avère très utile dans les problèmes d'estimation de forme à partir du mouvement d'une caméra [Cip 96]. La position  $X$  d'un point observé vérifie l'expression (1.2), donc :

$$X = C + \lambda T,$$

et dans le cas d'un point d'un contour d'occultation :

$$X(s, t) = C(t) + \lambda T(s, t),$$

où  $t$  et  $s$  paramètrent respectivement le déplacement de la caméra et la position du point image sur le contour occultant. En dérivant l'expression précédente par rapport à  $t$ , et en prenant le produit scalaire avec la normale  $N$  à la surface au point  $P$ , on obtient :

$$\lambda = \frac{-\frac{\partial C}{\partial t} \cdot N}{\frac{\partial T}{\partial t} \cdot N} = \frac{-C_t \cdot N}{T_t \cdot N}. \quad (2.1)$$

C'est la formule de profondeur d'un point d'un contour d'occultation établie par Cipolla [Cip 90] à la suite des travaux de Bolles et al. [Bol 87]. Celle-ci est équivalente, au sens infinitésimal, à une formule de triangulation en stéréo-vision : le dénominateur correspondant à la disparité (la différence de position entre les deux projections d'un même point), et le numérateur correspondant à la translation de la caméra ("*baseline*", figure 2.1).

L'usage de l'expression (2.1) nécessite la détermination du vecteur  $T_t$ , ce qui requiert un paramétrage de la surface spatio-temporelle. Néanmoins, ainsi que l'a remarqué Arbogast [Arb 91], la formule (2.1) est indépendante du paramétrage choisi et s'applique en tout point tel que  $T_t \cdot N \neq 0$ . Dans le cas du paramétrage épipolaire, l'exception  $T_t \cdot N = 0$  caractérisent les points où le mouvement de la caméra est dans le plan tangent à la surface, en d'autres termes les points multiples. Néanmoins, la profondeur en un point multiple devrait être calculable si le mouvement de la caméra ne se fait pas dans la direction d'observation en ce point :  $T_t \neq \vec{0}$ . Maintenant, si l'on suppose qu'un paramétrage épipolaire de la surface

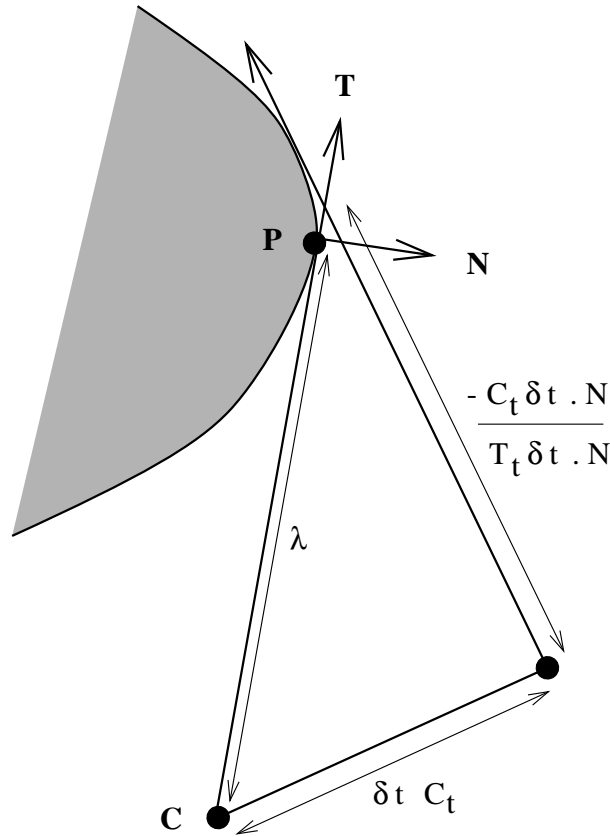


FIG. 2.1 – L'expression  $\frac{-C_t \delta t \cdot N}{T_t \delta t \cdot N}$  correspond à la distance entre  $(C + \delta t C_t)$  et l'intersection de la ligne de vue  $(T + \delta t T_t)$  avec le plan tangent en  $P$ . La valeur qui en découle tend vers la profondeur  $\lambda$  lorsque  $\delta t$  tend vers 0.

spatio-temporelle est disponible, alors en utilisant la contrainte liée à ce paramétrage, à savoir que les vecteurs  $X_t$  et  $T$  sont parallèles on obtient :

$$X_t \cdot T_t = 0,$$

d'où :

$$\lambda = \frac{-C_t \cdot T_t}{T_t \cdot T_t}. \quad (2.2)$$

C'est la formule de profondeur dans le cas d'un paramétrage épipolaire de la surface spatio-temporelle introduite par Giblin et Weiss [Gib 95]. Celle-ci est définie en tout point tel que  $T_t \neq \vec{0}$ , soit en tout point où la profondeur est déterminable. Giblin et Weiss notent par ailleurs que l'expression (2.2) correspond aussi à la profondeur d'un point appartenant à un contour d'occultation lorsqu'un paramétrage *normal* [Cip 92] est utilisé, paramétrage pour lequel  $T_t$  est parallèle à  $N$ .

### 2.2.2 Le cas discret

Dans le cas réel, les seules informations disponibles sont discrètes ; ce sont les contours occultants à temps discrets  $\{t_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$  pour  $m$  images. La détermination de  $T_t$  ne peut

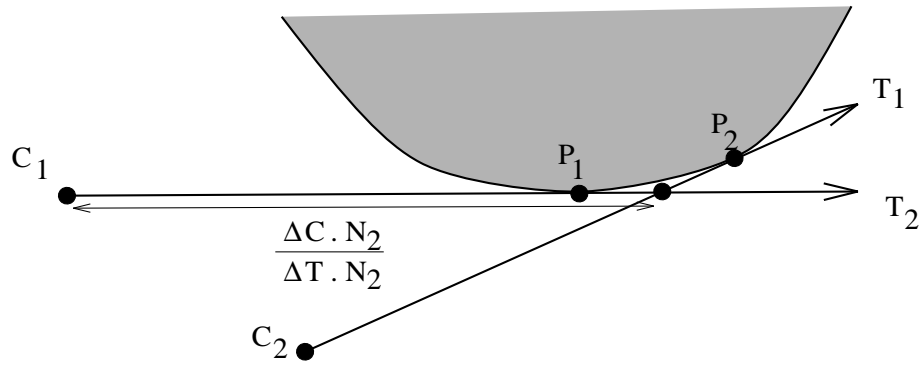


FIG. 2.2 – Intersection des lignes de vue dans le plan épipolaire.

alors se faire que par une approximation faisant intervenir plusieurs contours occultants.

Considérons deux contours occultants aux temps  $t_1$  et  $t_2$  et deux points  $P_1$  et  $P_2$  sur ces deux contours. Les positions  $X_1$  et  $X_2$  de ces points vérifient :

$$\begin{cases} X_1 = C_1 + \lambda_1 T_1, \\ X_2 = C_2 + \lambda_2 T_2. \end{cases}$$

En notant par  $\Delta x$  la différence  $x_1 - x_2$ , où  $x$  est soit  $X$ ,  $C$ ,  $\lambda$  ou  $T$ , on obtient :

$$\Delta X = \Delta C + \lambda_1 \Delta T + \Delta \lambda T_2,$$

et en prenant le produit scalaire avec la normale  $N_2$  à  $S$  en  $P_2$  :

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{-\Delta C \cdot N_2}{\Delta T \cdot N_2} + \frac{\Delta X \cdot N_2}{\Delta T \cdot N_2}} \quad (2.3)$$

La première partie de cette expression correspond à la distance entre la position  $C_1$  du centre optique de la caméra et l'intersection de la ligne de vue de direction  $T_1$  avec le plan tangent en  $P_2$ . Si les projections  $p_1$  de  $P_1$  et  $p_2$  de  $P_2$  sont des correspondants épipolaires, alors les lignes de vue de  $P_1$  et  $P_2$  sont coplanaires et  $\frac{-\Delta C \cdot N_2}{\Delta T \cdot N_2}$  représente la distance entre  $C_1$  et l'intersection des lignes de vue (figure 2.2). Cette valeur est donc la profondeur d'un point virtuel qui aurait pour projections  $p_1$  et  $p_2$  sur les contours occultants, et deux images sont alors suffisantes pour déterminer la profondeur de ce point.

La deuxième partie de l'expression (2.3) dépend du vecteur  $\Delta X$  du point  $P_1$  au point  $P_2$ . Sa valeur ne peut pas *a priori* être déterminée à partir de deux images. Une première approche consisterait à omettre ce terme dans l'expression (2.3). La profondeur d'un point d'un contour d'occultation pourrait alors être obtenue à partir de deux images seulement. Cette approche conduit néanmoins à une reconstruction stéréo et suppose, ainsi que le note Vaillant [Vai 90], que les contours d'occultation de la surface ne dépendent pas du point de vue ce qui, eu égard à la définition d'un contour d'occultation, est impossible. En fait, pour

deux points  $P_1$  et  $P_2$  appartenant à deux contours d'occultation d'une surface régulière, le terme  $\Delta X.N_2$  n'est jamais nul à l'exception des deux cas suivants :

1.  $\Delta X = \vec{0}$ ,  $P_1$  et  $P_2$  représentent le même point double, intersection des deux contours d'occultation.
2.  $\Delta X \neq \vec{0}$  et  $\Delta X.N_2 = 0$ ,  $\Delta X$  est alors dans une direction asymptotique de  $\mathcal{S}$  au point  $P_2$ . Ce cas ne peut pas, cependant, se présenter lorsque  $p_1$  et  $p_2$  sont correspondants épipolaires. En effet, si nous supposons que  $p_1$  et  $p_2$  sont correspondants épipolaires et que  $\Delta X.N_2 = 0$ , alors  $\Delta X$  et  $T_2$  appartiennent tous deux au plan épipolaire et au plan tangent en  $P_2$ . Cela ne peut se produire que si ces deux plans sont confondus, soit lorsque  $P_2$  est un point multiple et donc  $\Delta X = \vec{0}$ .

Le deuxième terme de (2.3) ne doit donc pas être omis dans l'objectif de reconstruire un point quelconque d'un contour d'occultation.

Une deuxième approche consiste à utiliser un modèle de surface localement au point à reconstruire. Cela permet d'exprimer  $\Delta X.N_2$  en fonction de propriétés locales de  $\mathcal{S}$ . Ainsi, en faisant correspondre le modèle local avec les données mesurées dans plusieurs images, nous pouvons estimer les propriétés locales de la surface, dont la profondeur au point considéré. Contrairement à une méthode basée sur l'estimation de  $T_t$  par différences finies [Arb 91], cette approche se justifie par le fait qu'elle débouche sur un modèle local de surface physiquement interprétable. Cette idée est développée dans les paragraphes qui suivent.

## 2.3 Un modèle local de surface : le paraboloïde osculateur

Notre approche consiste à traiter le problème de la reconstruction d'un point d'un contour d'occultation directement d'un point de vue discret. Cela nécessite une approximation basée sur plus de deux images. Nous considérons trois images et approximons localement la surface à l'aide d'un modèle d'ordre 2 : un paraboloïde. Il en existe un seul qui possède les mêmes caractéristiques à l'ordre 2 que  $\mathcal{S}$  en un point  $P$ . Celui-ci s'appelle le *paraboloïde osculateur* à  $\mathcal{S}$  en  $P$  et peut être déterminé à partir de 3 images.

Nous introduisons, dans un premier temps, le paraboloïde osculateur et nous établissons son équation dans le repère local lié à la géométrie de l'observation. Nous précisons ensuite l'expression qui peut en être déduite pour les courbes épipolaires ; cette expression nous intéresse au premier chef puisqu'elle débouche, comme cela sera vu par la suite, sur une estimation linéaire de la profondeur d'un point d'un contour d'occultation.

### 2.3.1 Définition

À l'image du cercle osculateur à une courbe dans le cas plan, le paraboloïde osculateur à une surface régulière  $\mathcal{S}$  regroupe l'ensemble des propriétés d'ordre inférieur ou égal à 2 de celle-ci en un de ces point  $P$  [Spi 70], soit la position de  $P$  et les première et deuxième formes fondamentales de  $\mathcal{S}$  en ce point. Dans ce paragraphe, nous cherchons à établir l'expression générale de ce paraboloïde ; l'idée directrice est de représenter localement la surface sous la forme du graphe d'une fonction différentiable  $z = h(x, y)$ , puis d'appliquer

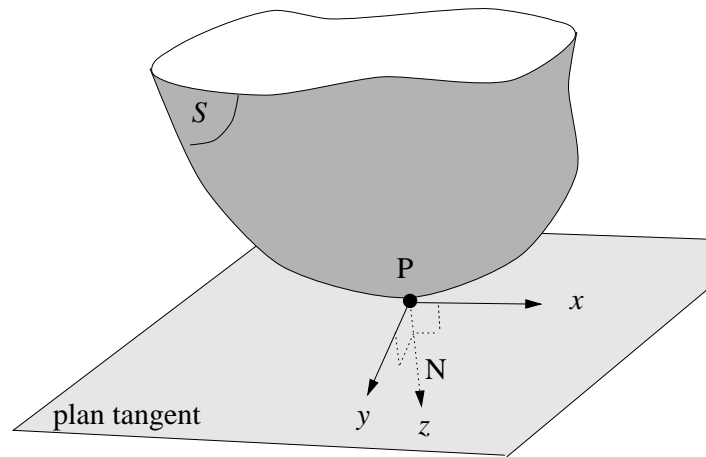


FIG. 2.3 – Le voisinage de  $P$  est représenté par  $z = h(x, y)$ , où le plan  $xy$  est le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $P$  et où l'axe des  $z$  est orienté suivant la normale  $N$  à  $\mathcal{S}$  en  $P$ .

la formule de Taylor.

La surface  $\mathcal{S}$  étant régulière, le voisinage d'un point  $P$  de  $\mathcal{S}$  peut être représenté sous la forme:  $z = h(x, y)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , où  $h$  est une fonction différentiable [dC 76]<sup>8</sup>. Si l'on place l'origine du repère  $(O, x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $P$  et si l'on suppose que (figure 2.3):

- l'axe des  $z$  est orienté suivant la normale  $N$  à  $\mathcal{S}$  en  $P$ ,
- l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$  sont dans le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $P$ ,

alors :

$$h(0, 0) = 0, \quad h_x(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad h_y(0, 0) = 0,$$

et le développement de Taylor donne :

$$h(x, y) = z = \frac{1}{2}(h_{xx}x^2 + 2h_{xy}xy + h_{yy}y^2) + R(x, y), \quad (2.4)$$

où les suffixes dénotent les dérivées:  $h_{xx} = \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $h_{xy} = \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x \partial y}$ ,  $h_{yy} = \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2}$  et où  $R(x, y)$  vérifie :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{R(x, y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Donc la surface :

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z), z = \frac{1}{2}(h_{xx}x^2 + 2h_{xy}xy + h_{yy}y^2)\},$$

approxime  $\mathcal{S}$  à l'ordre 2 au point  $P$ .

Or, la forme quadratique  $(h_{xx}x^2 + 2h_{xy}xy + h_{yy}y^2)$  correspond à la deuxième forme fondamentale de  $\mathcal{S}$  en  $P$ . En effet, si l'on paramètre la position  $X$  de  $P$  à l'aide de  $(x, y)$  alors :

$$X(x, y) = (x, y, h(x, y)),$$

---

8. Ce mode de représentation est connu sous le nom de *représentation de Monge*.



et, par définition [dC 76], la deuxième forme fondamentale est représentée par la matrice :

$$II_P = \begin{bmatrix} X_{xx} \cdot N & X_{xy} \cdot N \\ X_{xy} \cdot N & X_{yy} \cdot N \end{bmatrix},$$

soit :

$$II_P = \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{bmatrix}.$$

On remarquera que la matrice ci-dessus correspond au Hessien de la fonction  $h$  au point  $P$ . Nous avons donc la définition suivante :

**Définition 2.1.** *Le parabolôide osculateur à  $\mathcal{S}$  au point  $P$  est la quadrique  $\mathcal{P}$  définie par :*

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z), z = \frac{1}{2} (w^T II_P w)\}, \quad \text{avec } w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où :

- $P$  est l'origine du repère  $(O, x, y, z)$ ,
- l'axe  $Oz$  est orienté suivant  $N$ , les axes  $Ox$  et  $Oy$  forment une base du plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $P$ ,
- $II_P$  est exprimée dans le repère  $(O, x, y)$  du plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $P$ .

La surface  $\mathcal{P}$  approxime  $\mathcal{S}$  à l'ordre 2 au point  $P$  et est définie de manière unique au sens où un seul parabolôide possède les mêmes propriétés que  $\mathcal{S}$  à l'ordre 2 en  $P$ .  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}$  ont un contact d'ordre 2 au point  $P$ .

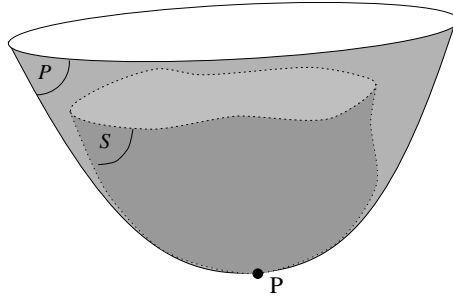


FIG. 2.4 – Le parabolôide osculateur  $\mathcal{P}$  à la surface  $\mathcal{S}$  au point  $P$ .

La forme du parabolôide osculateur à  $\mathcal{S}$  en  $P$  est fonction de la forme locale de  $\mathcal{S}$  en  $P$ , et donc de la courbure gaussienne  $K$  de  $\mathcal{S}$  en  $P$  ( $K = \det II_P / \det I_P$ ). Ainsi, le parabolôide osculateur sera :

- un parabolôide elliptique si  $K > 0$  ( $P$  est elliptique),
- un parabolôide hyperbolique si  $K < 0$  ( $P$  est hyperbolique),
- un cylindre parabolique si  $K = 0$  et si tous les termes de  $II_P$  ne sont pas nuls ( $P$  est parabolique),
- un plan si  $K = 0$  et tous les termes de  $II_P$  sont nuls ( $P$  est planaire).

### 2.3.2 Le parabolôïde osculateur en un point d'un contour d'occultation

Nous avons établi l'équation générale du parabolôïde osculateur ; celle-ci est fonction de la matrice représentant la deuxième forme fondamentale et dépend donc du repère choisi pour le plan tangent. Nous précisons ici cette équation lorsque le repère choisi est lié à la géométrie d'observation.

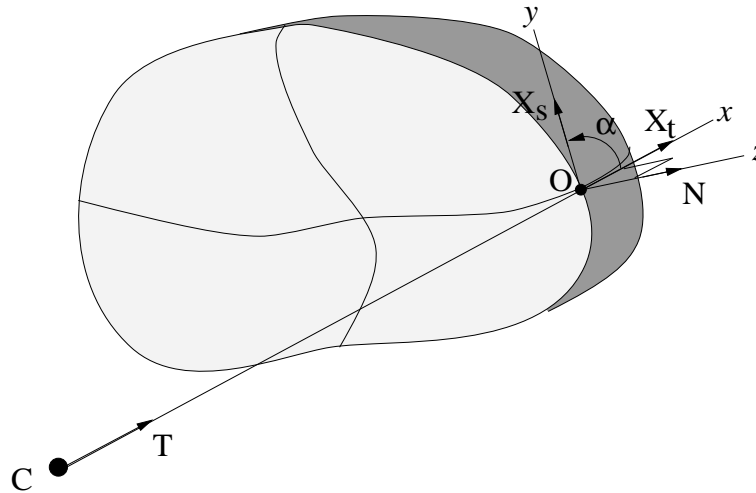


FIG. 2.5 – Le repère local  $(O, x, y, z)$  orienté suivant  $T$ ,  $X_s$  et  $N$ .

Soit  $P$  un point appartenant à un contour d'occultation de  $\mathcal{S}$ , alors la direction  $T$  de la ligne de vue en  $P$  et la tangente  $X_s$  au contour d'occultation en  $P$  forment une base du plan tangent. Nous supposons donc que les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont orientés suivant les directions  $T$  et  $X_s$  respectivement et sont normés (figure 2.5). Ces deux directions sont conjuguées (cf. § 1.2.2), donc les première et deuxième formes fondamentales sont représentées, dans le repère  $(O, x, y, z)$  et pour un paramétrage local de  $\mathcal{S}$  en  $(x, y)$ , par les matrices :

$$I_P = \begin{bmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad II_P = \begin{bmatrix} k_t & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix},$$

où  $\alpha$  est l'angle entre  $T$  et  $X_s$ ,  $k_t$  la courbure normale en  $P$  dans la direction  $T$  et  $k_s$  la courbure normale du contour d'occultation en  $P$ .

Le repère introduit n'est valide que si l'angle  $\alpha$  est non nul. Dans le cas contraire,  $T$  est une direction asymptotique de  $\mathcal{S}$  en  $P$ ,  $T$  et  $X_s$  ont alors même direction et ne définissent pas une base du plan tangent. Cela correspond à un point de rebroussement du contour occultant et n'entre donc pas dans le contexte considéré ici, soit un point  $P$  pour lequel le contour occultant n'est pas singulier<sup>9</sup>. Donc, en supposant  $\alpha \neq 0$ , le parabolôïde osculateur à  $\mathcal{S}$  en  $P$  est alors défini, dans le repère choisi, par :

9. Une reconstruction locale peut, néanmoins, être effectuée dans ce cas. Cipolla et al. [Cip 95b] ont en effet montré que le suivi temporel d'un point de rebroussement permet de déterminer la position et la courbure gaussienne de la surface au point correspondant.

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z), z = \frac{1}{2}(k_t x^2 + k_s y^2)\}. \quad (2.5)$$

**Remarque :** le terme croisé en  $xy$  disparaît de l'expression ci-dessus, ce qui traduit le fait que les directions  $T$  et  $X_s$  sont conjuguées, mais non le fait qu'elles soient principales (et alors orthogonales). Le cas où  $T$  et  $X_s$  sont les directions principales en  $P$  est caractérisé par des matrices  $I_P$  et  $II_P$  toutes deux diagonales.

Par contrainte de visibilité, la courbure  $k_t$  est de signe constant (fonction de l'orientation du contour) et l'expression (2.5) montre que la forme locale de  $\mathcal{S}$ , soit la forme de son paraboloidé osculateur, dépend du signe de  $k_s$  et donc du signe de la courbure du contour occultant. Cela correspond bien au résultat sur les courbures énoncé dans le chapitre 1 (cf. § 1.2.3).

### 2.3.3 L'équation des courbes épipolaires

Nous avons introduit une approximation à l'ordre deux de la surface et déterminé son expression dans le repère local lié à la géométrie d'observation. Cela va nous permettre, dans ce paragraphe, d'établir l'équation des courbes épipolaires dans ce même repère.

Les courbes épipolaires sont, dans le cas théorique d'un mouvement de caméra continu, les courbes sur  $\mathcal{S}$  paramétrées par  $t^{10}$  lorsque le paramétrage épipolaire est utilisé. Dans le cas discret, les courbes épipolaires sont constituées, par morceaux, des intersections des plans épipolaires avec la surface (cf. § 1.4.1). Dans ce cas, nous montrons que les courbes épipolaires sont, à l'ordre deux, des paraboles dans les plans épipolaires et nous établissons leur équation.

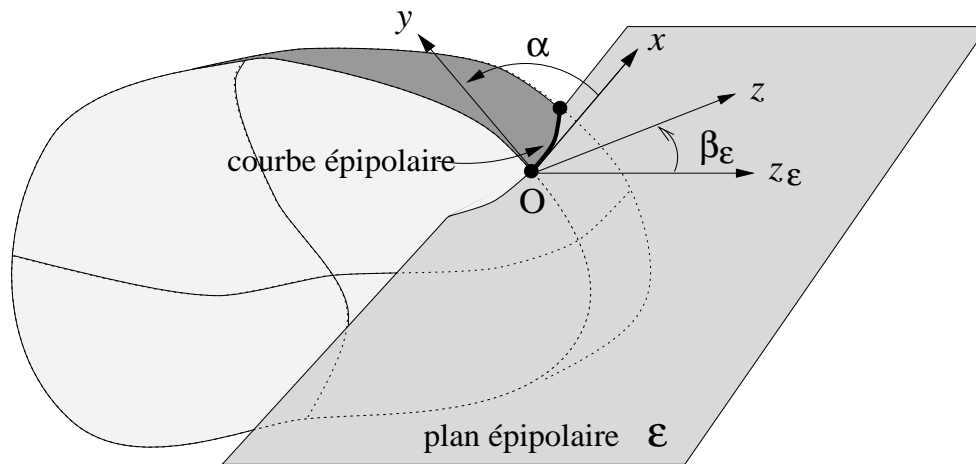
La courbe épipolaire entre deux correspondants épipolaires sur la surface est la courbe intersection du plan épipolaire associé aux deux points et de la surface (figure 2.6). Les courbes épipolaires ainsi définies vérifient :

**Propriété 2.1.** *Dans tout plan épipolaire  $\mathcal{E}$  au point  $P$ , la courbe épipolaire est, à l'ordre deux, le graphe de la fonction suivante :*

$$z_{\mathcal{E}} = g(x) = \frac{1}{2} \frac{k_t}{\cos \beta_{\mathcal{E}}} x^2, \quad (2.6)$$

où :

- l'axe des  $x$  est orienté suivant la direction  $T$  de la ligne de vue en  $P$ ,
- l'axe des  $z_{\mathcal{E}}$  est tel que  $(x, z_{\mathcal{E}})$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{E}$ ,
- $\beta_{\mathcal{E}}$  est l'angle entre la normale  $N$  à la surface au point  $P$  et le plan épipolaire  $\mathcal{E}$ .

FIG. 2.6 – La base  $(x, z_{\mathcal{E}})$  du plan épipolaire  $\mathcal{E}$ .

*Démonstration:* celle-ci repose sur le calcul de l'intersection, au point  $P$ , du plan épipolaire et du parabolôïde osculateur à  $\mathcal{S}$ . Au voisinage de  $P$ ,  $\mathcal{S}$  est représentée par :

$$z = \frac{1}{2}(k_t x^2 + k_s y^2) + R(x, y), \quad (2.7)$$

où  $(O, x, y, z)$  est le repère local introduit au paragraphe 2.3.2 et :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} R(x, y) / (x^2 + y^2) = 0.$$

Soit  $\mathcal{E}$  un plan épipolaire au point  $P$  et soit  $\beta_{\mathcal{E}}$  l'angle entre la normale  $N$  en  $P$  et  $\mathcal{E}$  (figure 2.6). L'équation de ce plan est :

$$z \sin \beta_{\mathcal{E}} = y \cos \beta_{\mathcal{E}} \sin \alpha, \quad (2.8)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre l'axe des  $x$  et celui des  $y$  (ou, de manière équivalente, entre  $T$  et  $X_s$ ). Si l'axe des  $z_{\mathcal{E}}$  est tel que  $(x, z_{\mathcal{E}})$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{E}$  alors :

$$z = z_{\mathcal{E}} \cos \beta_{\mathcal{E}}. \quad (2.9)$$

La courbe épipolaire est l'intersection de  $\mathcal{S}$  avec le plan épipolaire  $\mathcal{E}$ . Donc, en substituant (2.8) et (2.9) dans (2.7) et en négligeant les termes d'ordre 3 ou plus, on obtient :

$$z_{\mathcal{E}} \cos \beta_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(k_t x^2 + \frac{\sin^2 \beta_{\mathcal{E}}}{\sin^2 \alpha} k_s z_{\mathcal{E}}^2), \quad (2.10)$$

dont la solution au voisinage du point  $P$  s'écrit :

$$z_{\mathcal{E}} = \frac{\sin^2 \alpha \cos \beta_{\mathcal{E}}}{\sin^2 \beta_{\mathcal{E}} k_s} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta_{\mathcal{E}}}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta_{\mathcal{E}}} k_s k_t x^2} \right). \quad (2.11)$$

Le terme  $\frac{\sin^2 \beta_{\mathcal{E}}}{\sin^2 \alpha} k_s$  peut être considéré comme borné puisque :

1. le cas  $\sin \alpha = 0$  se présente uniquement lorsque  $T$  est une direction asymptotique de  $\mathcal{S}$  en  $P$ , ce qui correspond à un point de rebroussement du contour occultant.

---

10. Où  $t$  paramètre le mouvement de la caméra.

2. La courbure  $k_s$  est finie si l'on considère une surface régulière.

Donc, en dehors des points de rebroussement du contour occultant et pour  $x$  proche de 0 (voir la note 2 ci-dessous à ce sujet), nous avons à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} z_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \frac{k_t}{\cos \beta_{\mathcal{E}}} x^2 + R'(x), & \cos \beta_{\mathcal{E}} \neq 0, \\ z_{\mathcal{E}} = x = 0, & \cos \beta_{\mathcal{E}} = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

avec :  $\lim_{x \rightarrow 0} R'(x) / x^2 = 0$ . Cela montre que la courbe épipolaire est représentée, à l'ordre 2, par :

$$z_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \frac{k_t}{\cos \beta_{\mathcal{E}}} x^2, \quad \cos \beta_{\mathcal{E}} \neq 0.$$

Le cas particulier  $\cos \beta_{\mathcal{E}} = 0$  concerne les points multiples, la courbe épipolaire est alors restreinte au seul point  $P$ .  $\square$

### Notes sur l'approximation de la courbe épipolaire

1. **Lien avec le théorème de Meusnier [dC 76]** : d'après ce théorème, toutes les courbes de  $\mathcal{S}$  passant par le point  $P$  et ayant  $T$  pour tangente en ce point ont pour courbure en  $P$  :  $\frac{k_t}{\cos \beta_{\mathcal{E}}}$ . La propriété 2.1 énoncée n'est pas seulement une conséquence de ce théorème mais va plus loin puisque, en dehors de la courbure au point  $P$ , c'est un modèle local pour ces courbes qui est proposé.
2. **Approximation par un cercle** : il est en effet à noter qu'une approximation locale des courbes épipolaires par un cercle pourrait être mise en œuvre. Une telle approximation vérifie aussi le théorème de Meusnier. Les deux approximations, la parabole et le cercle, sont néanmoins équivalentes lorsque  $x$  est suffisamment proche de 0. La différence entre celles-ci est d'ordre qualitatif ; de fait, la parabole correspond à une approximation analytique liée à un système de coordonnées locales alors que le cercle correspond à une approximation géométrique basée sur la définition de la courbure.
3. **Validité de l'approximation** : l'équation (2.11) de la courbe épipolaire qui est solution de (2.10) au voisinage du point  $P$  ( $x = 0, z_{\mathcal{E}} = 0$ ) et celle d'une ellipse et s'écrit :

$$z_{\mathcal{E}} = \frac{\sin^2 \alpha \cos \beta_{\mathcal{E}}}{\sin^2 \beta_{\mathcal{E}} k_s} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta_{\mathcal{E}}}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta_{\mathcal{E}}} k_s k_t x^2} \right).$$

L'approximation de la courbe épipolaire, au voisinage de  $P$ , par la parabole donnée dans la propriété 2.1 est donc valide sous la contrainte :

$$\frac{\sin^2 \beta_{\mathcal{E}}}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta_{\mathcal{E}}} k_s k_t x^2 \ll 1,$$

soit :

$$\boxed{x \ll \frac{1}{\tan \beta_{\mathcal{E}} \sqrt{|K|}},} \quad (2.13)$$

où  $|\cdot|$  représente la valeur absolue et  $K$  est la courbure gaussienne de  $\mathcal{S}$  au point  $P$  (cf. § 1.2.2). L'expression (2.13) fixe donc la limite de validité de l'approximation de la courbe épipolaire. Dans le processus de reconstruction du point  $P$ , cette limite peut être utilisée pour contrôler, *a posteriori*, la qualité de l'approximation réalisée.

### 2.3.4 Reconstruire le parabolöide osculateur

Le parabolöide osculateur regroupe l'ensemble des propriétés à l'ordre 2 de la surface en un point. Sa reconstruction constitue donc un objectif majeur dans le but de caractériser la surface. Pour cela, nous faisons usage de la représentation introduite précédemment. Il faut alors déterminer :

1. La position du point  $P$  considéré, qui constitue l'origine du repère  $(O, x, y, z)$ . Il faut pour cela déterminer la profondeur  $\lambda$  au point  $P$ .
2. L'angle  $\alpha$  entre les directions  $T$  et  $X_s$  des axes  $Ox$  et  $Oy$  respectivement.
3. Les courbures normales  $k_t$  et  $k_s$ .

La courbure  $k_s$  est fonction de la courbure apparente du contour occultant, de la profondeur  $\lambda$  et de l'angle  $\alpha$  (cf. § 1.2.3). La courbure apparente peut être calculée directement à partir de l'image correspondante, il reste donc à déterminer  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $k_t$ . La direction  $X_s$  étant tangente au contour d'occultation en  $P$ , l'angle  $\alpha$  peut être estimé à partir d'une reconstruction locale de ce contour au voisinage de  $P$ . En ce qui concerne  $\lambda$  et  $k_t$ , une seule image n'est pas suffisante et nous utilisons trois images successives ainsi que l'approximation à l'ordre 2 des courbes épipolaires pour déterminer leurs valeurs. Le détail de ce calcul est présenté au paragraphe 2.4.

### Courbures et directions principales

Les valeurs citées, qui sont à déterminer pour reconstruire le parabolöide osculateur, concernent les propriétés de  $\mathcal{S}$  en  $P$  exprimées dans le repère  $(O, x, y, z)$ . La surface est alors représentée localement par :

$$z = \frac{1}{2}(k_t x^2 + k_s y^2),$$

où les directions des axes  $Ox$  et  $Oy$  du plan tangent ne sont pas en général orthogonales<sup>11</sup>. Cette représentation, liée à la géométrie d'observation, n'est cependant pas unique. Il existe en particulier une base orthonormée du plan tangent dans laquelle la surface est représentée par :

$$z = \frac{1}{2}(k_1 x'^2 + k_2 y'^2).$$

Les directions correspondantes des axes  $Ox'$  et  $Oy'$  sont dites *directions principales*. Les courbures  $k_1$  et  $k_2$  sont alors les courbures normales maximale et minimale de la surface au point  $P$  et sont dites *courbures principales*. La connaissance de ces directions et courbures principales est importante pour la caractérisation des propriétés à l'ordre 2 de la surface. Elle permet, en particulier, de déterminer facilement la courbure normale dans une direction donnée du plan tangent en  $P$ .

---

11. Elles le sont, par exemple, lorsque  $\mathcal{S}$  est une sphère.

Le lien entre les deux représentations citées est alors caractérisé par la propriété suivante :

**Propriété 2.2.** Les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  du paraboloïde osculateur au point  $P$  s'expriment, en fonction des courbures  $k_t$  et  $k_s$  en ce point, comme :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{k_t \sin^2(\theta + \alpha) + k_s \sin^2(\theta)}{\sin^2 \alpha}, \\ k_2 = \frac{k_t \cos^2(\theta + \alpha) + k_s \cos^2(\theta)}{\sin^2 \alpha}, \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\theta$  qui est l'angle entre le repère  $(O, x', y')$  des directions principales et le repère  $(O, x, y)$  des directions  $T$  et  $X_s$  (figure 2.7) vérifie :

$$\theta = -\frac{1}{2} \arctan \left( 2 \frac{k_t \sin \alpha \cos \alpha}{2 k_t \cos^2 \alpha - k_t + k_s} \right). \quad (2.15)$$

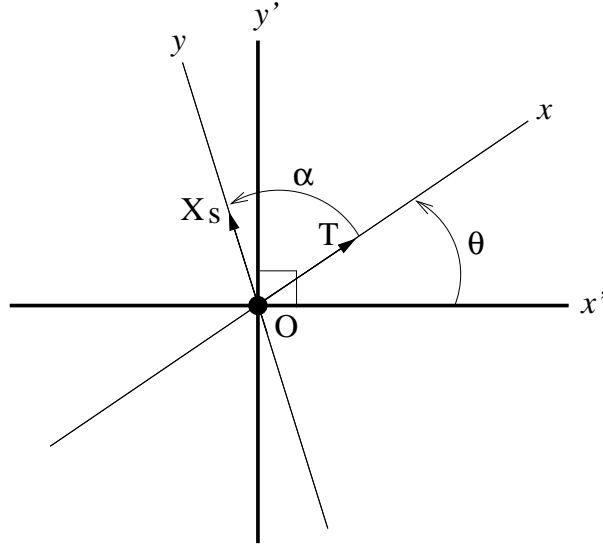


FIG. 2.7 – Le repère  $(Ox', y')$  du plan tangent orienté suivant les directions principales.

Démonstration. le passage de la première représentation à la deuxième consiste à effectuer un changement de repère dans le plan tangent. Soit  $M_P$  la matrice de passage du repère  $(O, x, y)$  au repère orthonormé  $(Ox', y')$  dans le plan tangent en  $P$ , alors :

$$M_P = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta + \alpha) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin \alpha} & -\frac{\cos(\theta + \alpha)}{\sin \alpha} \\ -\frac{\sin(\theta)}{\sin \alpha} & \frac{\cos(\theta)}{\sin \alpha} \end{bmatrix},$$

et donc :

$$II_P|_{\{Ox'y'\}} = (M_P^{-1})^T \begin{bmatrix} k_t & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} M_P^{-1},$$

soit :

$$II_P|_{\{Ox'y'\}} = \begin{bmatrix} \frac{\sin^2(\theta+\alpha) k_t + \sin^2(\theta) k_s}{\sin^2 \alpha} & -\frac{\cos(\theta+\alpha) \sin(\theta+\alpha) k_t + \cos(\theta) \sin(\theta) k_s}{\sin^2 \alpha} \\ -\frac{\cos(\theta+\alpha) \sin(\theta+\alpha) k_t + \cos(\theta) \sin(\theta) k_s}{\sin^2 \alpha} & \frac{\cos^2(\theta+\alpha) k_t + \cos^2(\theta) k_s}{\sin^2 \alpha} \end{bmatrix}.$$

Or, l'expression ci-dessus correspond à la matrice de la deuxième forme fondamentale au point  $P$  exprimée dans le repère des directions principales, c'est-à-dire :

$$II_P|_{\{Ox'y'\}} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix},$$

on en déduit :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{\sin^2(\theta + \alpha) k_t + \sin^2(\theta) k_s}{\sin^2 \alpha}, \\ k_2 = \frac{\cos^2(\theta + \alpha) k_t + \cos^2(\theta) k_s}{\sin^2 \alpha}, \\ 0 = -\frac{\cos(\theta + \alpha) \sin(\theta + \alpha) k_t + \cos(\theta) \sin(\theta) k_s}{\sin^2 \alpha}, \end{cases}$$

et finalement :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{\sin^2(\theta + \alpha) k_t + \sin^2(\theta) k_s}{\sin^2 \alpha}, \\ k_2 = \frac{\cos^2(\theta + \alpha) k_t + \cos^2(\theta) k_s}{\sin^2 \alpha}, \\ \theta = -\frac{1}{2} \arctan \left( 2 \frac{k_t \sin \alpha \cos \alpha}{2 k_t \cos^2 \alpha - k_t + k_s} \right). \end{cases}$$

□

**Remarque :** pour obtenir ce résultat, nous aurions pu utiliser la *formule d'Euler* [dC 76]. En effet, celle-ci donne l'expression de la courbure normale de  $\mathcal{S}$  en  $P$ , suivant la direction  $v$ , en fonction des courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  :

$$k_n = k_1 \cos^2 \gamma + k_2 \sin^2 \gamma,$$

où  $\gamma$  est l'angle entre  $v$  et l'axe  $Ox'$ . En appliquant cette formule aux courbures  $k_t$  et  $k_s$ , nous obtenons deux équations auxquelles s'ajoute une contrainte sur les angles  $\theta$  et  $\alpha$  du fait que les directions  $T$  et  $X_s$  sont conjuguées. Néanmoins, la résolution du système qui en découle n'est pas aisée, et l'obtention de solutions explicites par cette approche semble difficile. On pourra, par contre, contrôler que les solutions  $(k_1, k_2)$  de (2.14) vérifient bien la formule d'Euler, à savoir :

$$\begin{cases} k_t = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta, \\ k_s = k_1 \cos^2(\theta + \alpha) + k_2 \sin^2(\theta + \alpha). \end{cases}$$

Les équations précédentes permettent de calculer en un point  $P$ , les courbures et directions principales lorsque  $k_t$ ,  $k_s$  et  $\alpha$  sont connus. Le paragraphe suivant précise comment déterminer  $\lambda$  et  $k_t$ .



## 2.4 Déterminer la profondeur $\lambda$

La reconstruction d'un point observé consiste à déterminer sa profondeur le long de la ligne de vue et ceci lorsque les caractéristiques de la caméra sont connues. Dans le cas d'observations discrètes, il faut utiliser plusieurs images ainsi qu'une approximation locale de la surface pour pouvoir estimer la profondeur d'un point d'un contour d'occultation. Nous utilisons le modèle du paraboloïde osculateur au travers de l'équation à l'ordre 2 de la courbe épipolaire qui a été établie. Il en découle une équation discrète liant la profondeur  $\lambda$  et la courbure normale dans la direction de la ligne de vue  $k_t$  en un point  $P$ , ceci en fonction des caractéristiques images de  $P$  et d'un de ses correspondants épipolaires. Lorsqu'au moins deux correspondants épipolaires du point  $p$  image de  $P$  sont disponibles, cette équation permet d'estimer  $\lambda$  et  $k_t$  de manière linéaire au point  $P$ .

Nous établissons, dans un premier temps, l'équation discrète de la profondeur au point  $P$ . Puis nous explicitons les solutions pour la profondeur  $\lambda$  et la courbure  $k_t$  qui en découlent lorsque 2 correspondants épipolaires sont utilisés, et ensuite lorsque  $n$  correspondants épipolaires sont utilisés.

### 2.4.1 L'équation de la profondeur

Il a été montré qu'une courbe épipolaire pouvait être représentée, à l'ordre 2, par une parabole du plan épipolaire. Celle-ci dépend de la position du point  $P$  considéré, de la courbure  $k_t$  en ce point et du plan épipolaire. Les lignes de vue de deux correspondants du plan épipolaire déterminent deux tangentes à la courbe épipolaire. L'équation de la profondeur fournit alors une relation entre la profondeur  $\lambda$ , la courbure  $k_t$  et ces deux tangentes.

Soit  $P$  un point de  $\mathcal{S}$  de profondeur  $\lambda$  et de courbure normale  $k_t$ . Soit  $\mathcal{E}_i$  le plan épipolaire au point  $P$  pour les positions  $C$  et  $C_i$  de la caméra (figure 2.8). Soit  $\beta_i$  l'angle de la normale  $N$  à la surface au point  $P$  avec le plan  $\mathcal{E}_i$ . Soit  $P_i$  le correspondant épipolaire de  $P$  appartenant au contour d'occultation de  $\mathcal{S}$  observé depuis  $C_i$ . Nous avons alors :

**Propriété 2.3.** *La profondeur  $\lambda$  du point  $P$  vérifie, à l'ordre 2 :*

$$\lambda = d_i - \frac{\cos \beta_i}{2k_t} \frac{T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i}}{\sqrt{1 - (T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i})^2}}, \quad (2.16)$$

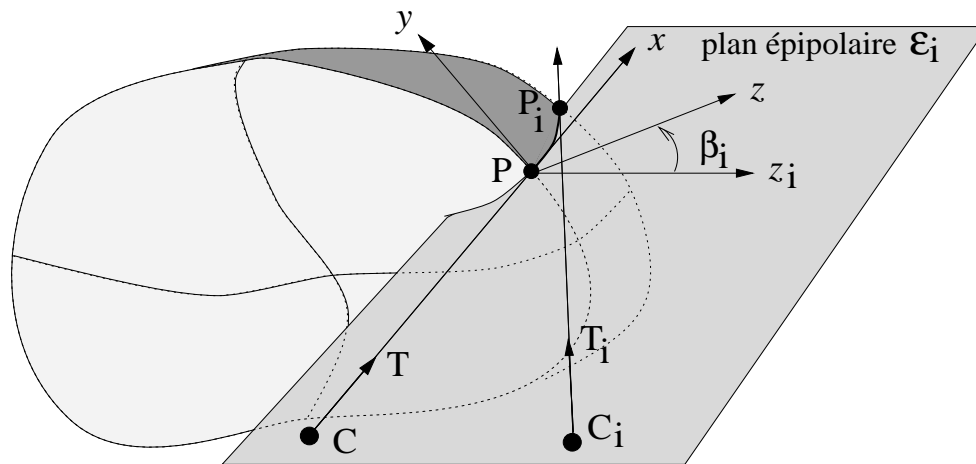
où  $d_i$  est la distance entre la position  $C$  du centre de la caméra et l'intersection des lignes de vue de  $P$  et  $P_i$ , et  $\bar{N}_{\mathcal{E}_i}$  est la direction de la projection de  $N$  dans  $\mathcal{E}_i$ .

**Démonstration :** d'après la propriété 2.1, la courbe épipolaire passant par  $P$  et  $P_i$  a pour équation, à l'ordre 2 :

$$z_i = \frac{1}{2}k_i x^2, \quad \text{avec } k_i = \frac{k_t}{\cos \beta_i},$$

où  $(x, z_i)$  forment une base orthonormée du plan  $\mathcal{E}_i$ . Cette parabole a pour tangentes les directions des lignes de vue  $T$  et  $T_i$ . Maintenant, nous nous plaçons dans le plan épipolaire  $\mathcal{E}_i$  (figure 2.9).  $\bar{N}_{\mathcal{E}_i}$  représente la direction de l'axe des  $z_i$ , donc :

$$N \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i} = \cos \beta_i,$$

FIG. 2.8 – Le plan épipolaire  $\mathcal{E}_i$  défini par  $C$ ,  $P$  et  $C_i$ .

et soit  $x_{P_i}$  l'abscisse du point  $P_i$  sur l'axe  $Ox$ . La tangente à la courbe épipolaire au point  $P_i$  a pour direction  $T_i$ . En utilisant l'équation de la courbe épipolaire,  $T_i$  a donc pour coordonnées dans la base  $(x, z_i)$  :

$$T_i = \frac{1}{\sqrt{1 + k_i^2 x_{P_i}^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ k_i x_{P_i} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

d'où :

$$T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i} = \frac{k_i x_{P_i}}{\sqrt{1 + k_i^2 x_{P_i}^2}},$$

soit :

$$x_{P_i} = \frac{1}{k_i} \frac{T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i}}{\sqrt{1 - (T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i})^2}}. \quad (2.18)$$

En utilisant le fait que  $k_t = k_i \cos \beta_i$ , l'expression précédente devient :

$$x_{P_i} = \frac{\cos \beta_i}{k_t} \frac{T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i}}{\sqrt{1 - (T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i})^2}}.$$

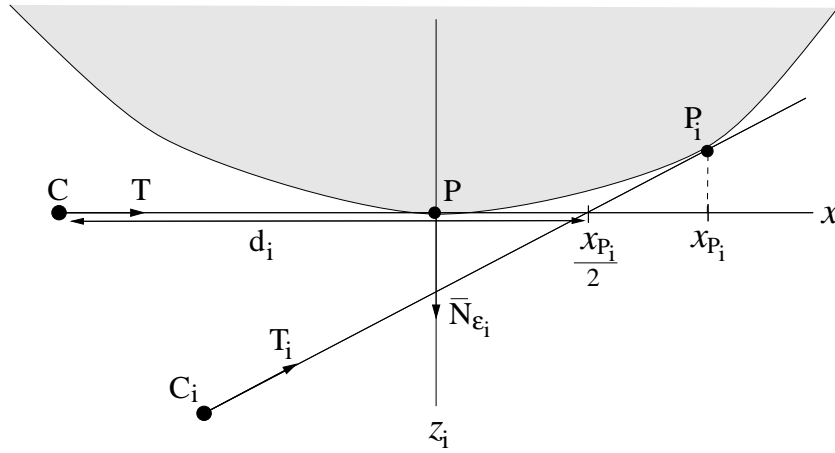
Cette équation caractérise la distance  $\frac{x_{P_i}}{2}$  entre le point  $P$  et l'intersection des lignes de vue, en fonction de  $T_i$ ,  $N$  et  $\cos \beta_i$ . Or,  $d_i$  représente la distance entre la position du centre de la caméra et l'intersection des lignes de vue de  $P$  et  $P_i$  (figure 2.9), donc :

$$\lambda = d_i - \frac{1}{2} x_{P_i},$$

et finalement :

$$\lambda = d_i - \frac{\cos \beta_i}{2 k_t} \frac{T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i}}{\sqrt{1 - (T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i})^2}}.$$

□

FIG. 2.9 – Coupe dans le plan épipolaire  $\mathcal{E}_i$ .

C'est la formule de profondeur dans le cas discret, celle-ci dépend de la courbure  $k_t$  ainsi que de quantités mesurables à partir des données (images et mouvement) :  $T_i$ ,  $N$ ,  $\cos \beta_i$  et  $d_i$ .

### Notes sur l'équation de profondeur

1. Cette équation repose sur l'hypothèse que les points  $P$  et  $P_i$  sont situés de part et d'autre de l'intersection de leurs lignes de vue. En effet, dans le cas contraire,  $P_i$  n'appartiendrait pas à la parabole considérée. Cette hypothèse est toujours vérifiée et découle de l'application de la propriété 1.5 de la correspondance épipolaire, aux points  $P$  et  $P_i$  (cf. § 1.4.2).
2. Cette équation est définie en tout point d'un contour d'occultation. Elle est aussi définie en tout point d'un contour qui est fixe. Il suffit alors de considérer  $k_t$  comme étant infini.
3. La surface, ou du moins l'enveloppe qui en est perçue par les contours occultants, est toujours convexe dans la direction de la ligne de vue (cf. § 1.2.2) ; le signe de la courbure  $k_t$  calculée reste donc constant. Par contre, ce signe dépend de l'orientation de la normale : intérieur ou extérieur à la surface<sup>12</sup>. Dans le cas de la figure 2.9 par exemple,  $N$  est orientée vers l'extérieur de la surface et  $k_t$  est alors négative.

### Lien avec la formule de profondeur

Au paragraphe 2.2.1, nous avons introduit la formule de profondeur dans le cas d'observations continues et montré que son application dans le cas discret nécessite une approximation. En effet, en considérant les points  $P$  et  $P_i$  de vecteurs positions  $X$  et  $X_i$ , nous avons :

$$\begin{cases} X = C + \lambda T, \\ X_i = C_i + \lambda_i T_i, \end{cases}$$

<sup>12</sup>. Cette orientation dépend elle-même de l'orientation donnée au contour occultant puisque :  $N = T \wedge tg / |T \wedge tg|$ , où  $tg$  est la tangente au contour occultant.

et donc, à l'aide des notations  $\Delta C = C - C_i$ ,  $\Delta T = T - T_i$  et  $\Delta X = X - X_i$ , la profondeur s'exprime sous la forme :

$$\lambda = \frac{-\Delta C \cdot N_i}{\Delta T \cdot N_i} + \frac{\Delta X \cdot N_i}{\Delta T \cdot N_i}, \quad (2.19)$$

dans laquelle le deuxième terme ne peut pas être déterminé directement.

Le lien entre cette expression et l'équation de la profondeur établie ici se fait facilement en remarquant que  $X - X_i$  s'écrit, à l'aide de la coordonnée  $x_{P_i}$  de  $P_i$  (voir la figure 2.9) :

$$X - X_i = -\frac{1}{2}x_{P_i}T - \sqrt{(k_i x_{P_i}^2/2)^2 + (x_{P_i}/2)^2} T_i.$$

Ainsi :

$$\Delta X \cdot N_i = -\frac{1}{2}x_{P_i} T \cdot N_i,$$

et donc, (2.19) devient :

$$\lambda = \frac{-\Delta C \cdot N_i}{\Delta T \cdot N_i} - \frac{1}{2}x_{P_i}.$$

L'expression ci-dessus correspond à l'équation (2.16) de la profondeur établie au paragraphe 2.2.2. Cela montre par ailleurs que dans le cadre de l'approximation locale de la surface à l'ordre 2, le deuxième terme de l'expression (2.16) dépend uniquement de la courbure  $k_i$ .

### Calcul pratique de la distance $d_i$

L'expression  $-\Delta C \cdot N_i / \Delta T \cdot N_i$  correspond à la distance  $d_i$  de la position  $C$  du centre de la caméra à l'intersection des lignes de vue de direction  $T$  et  $T_i$ . Cependant, une telle formulation n'est pas satisfaisante, puisqu'elle n'est pas définie pour un point multiple ( $T \cdot N_i = 0$ ). Le calcul pratique de  $d_i$  nécessite donc une formulation plus robuste.

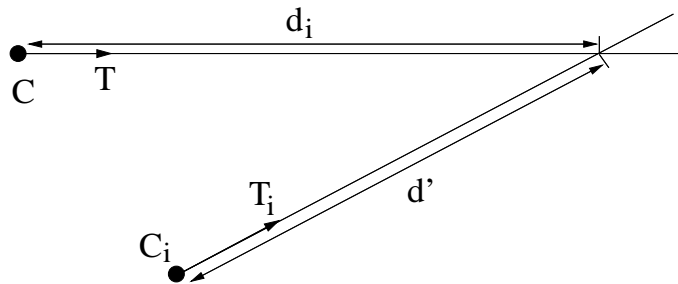


FIG. 2.10 – Calcul de  $d_i$ .

La distance  $d_i$  vérifie :

$$(C + d_i T - C_i - d' T_i) = 0,$$

où  $d'$  est la distance de  $C_i$  à l'intersection des tangentes (figure 2.10). En utilisant la direction du plan épipolaire orthogonale à  $T_i$ , à savoir :  $(T \wedge T_i) \wedge T_i$ , nous obtenons alors :

$$d_i = \frac{-(C - C_i) \cdot ((T \wedge T_i) \wedge T_i)}{T \cdot ((T \wedge T_i) \wedge T_i)}, \quad (T - T_i) \neq \vec{0}. \quad (2.20)$$

Cette expression de  $d_i$  est toujours définie, excepté lorsque le mouvement de la caméra se fait le long de la ligne de vue, cas dans lequel les lignes de vue de directions  $T$  et  $T_i$  sont confondues ( $T = T_i$ ).

### 2.4.2 Résolution pour 2 correspondants épipolaires

L'équation de la profondeur relie la profondeur  $\lambda$  en un point  $P$  à la courbure normale  $k_t$  en ce point. Lorsqu'un correspondant épipolaire de  $P$  est connu, nous disposons alors d'une équation linéaire d'inconnues  $\lambda$  et  $1/k_t$ . Pour déterminer ces valeurs, il faut donc disposer d'au moins 2 correspondants épipolaires du point image  $p$ . Nous explicitons ici les solutions directes qui en découlent lorsque 2 correspondants épipolaires sont utilisés. Celles-ci sont définies pour tout mouvement de caméra et nous en détaillons le comportement en fonction de la configuration de  $P$  et de ses correspondants épipolaires.

Soit  $p_i$  et  $p_j$  deux correspondants épipolaires de  $p$  pour les positions  $C_i$  et  $C_j$  de la caméra. L'équation de la profondeur appliquée en ces 2 points mène au système suivant :

$$\begin{cases} \lambda = d_i - \frac{\cos \beta_i}{2 k_t} \frac{T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i}}{\sqrt{1 - (T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i})^2}}, \\ \lambda = d_j - \frac{\cos \beta_j}{2 k_t} \frac{T_j \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_j}}{\sqrt{1 - (T_j \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_j})^2}}, \end{cases}$$

ou, de manière équivalente :

$$\begin{cases} \lambda + a_i \frac{1}{k_t} = d_i, \\ \lambda + a_j \frac{1}{k_t} = d_j, \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} a_i = x_i k_t = \frac{\cos \beta_i}{2} \frac{T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i}}{\sqrt{1 - (T_i \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_i})^2}}, \\ a_j = x_j k_t = \frac{\cos \beta_j}{2} \frac{T_j \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_j}}{\sqrt{1 - (T_j \cdot \bar{N}_{\mathcal{E}_j})^2}}. \end{cases} \quad (2.21)$$

La résolution de ce système donne :

- $a_i \neq a_j$  :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda = \frac{d_i a_j - d_j a_i}{a_j - a_i}, \\ k_t = \frac{a_i - a_j}{d_j - d_i}. \end{cases}} \quad (2.22)$$

- $a_i = a_j$  :

1.  $(a_i, a_j) = (0, 0)$  :

$$\boxed{\lambda = d_j = d_i,} \quad (2.23)$$

2.  $(a_i, a_j) \neq (0, 0)$  : pas de solutions.

Ces solutions permettent donc de déterminer la profondeur et la courbure normale dans la direction de la ligne de vue au point  $P$ , lorsque deux correspondants épipolaires du point image  $p$  sur deux contours occultants voisins de celui contenant  $p$  sont disponibles. Les cas particuliers sont :

- $a_i$  (ou  $a_j$ ) est nul, et donc  $x_i$  (ou  $x_j$ ) est nul. Il s'agit d'un **point double**,  $P$  est alors confondu avec  $P_i$  (ou  $P_j$ ). La profondeur  $\lambda$  et la courbure  $k_t$  peuvent être déterminées en ce point.
- $a_i$  et  $a_j$  sont nuls et donc  $x_i = x_j = 0$ . Il s'agit d'un **point triple**, les trois positions  $C_i$ ,  $C_j$  et  $C$  sont alors alignées et les trois contours d'occultation correspondants s'intersectent en  $P$ . Dans ce cas, seule la profondeur au point  $P$  peut être déterminée par ces solutions et non la courbure  $k_t$ .
- $a_i$  et  $a_j$  sont égaux mais non nuls. Il s'agit d'un point isolé dont la présence est liée à celle d'une paire de points doubles<sup>13</sup>. Dans ce cas, les équations de profondeur appliquées aux correspondants épipolaires de  $P$  sont équivalentes ( $d_i = d_j$ ,  $a_i = a_j$ ) et le système (2.21) possède une infinité de solutions. La détermination de la profondeur ainsi que de la courbure  $k_t$  nécessiterait alors l'usage d'une équation supplémentaire. Celle-ci peut être obtenue à l'aide d'un correspondant épipolaire supplémentaire fourni, soit par un quatrième contour occultant, soit en remarquant que, dans ce cas particulier, les points  $P_i$  et  $P_j$  vérifient la contrainte épipolaire pour les positions  $C_i$  et  $C_j$  de la caméra.

Dans le cas où le mouvement de la caméra est dans la direction  $T$ , les directions  $T$  et  $T_i$  (ou  $T_j$ ) des lignes de vue sont alors confondues et le système (2.21) n'est pas défini.

**Remarque :** la solution établie pour la profondeur est aussi définie lorsqu'elle est appliquée aux projections images d'un point *fixe* appartenant à un contour qui n'est pas d'occultation. Dans ce cas, la valeur de  $k_t$  déterminée sera infinie. Cela peut, par ailleurs, servir de critère pour différencier les contours d'occultation des contours fixes. En effet,  $d_i = d_j$  et  $a_i \neq a_j$  si et seulement si le point  $P$  appartient à un contour fixe.

### Les différentes configurations possibles de $P$ , $P_i$ et $P_j$ .

Dans le cadre de ces solutions, différentes configurations des points  $P$ ,  $P_i$  et  $P_j$  peuvent se présenter, en fonction des valeurs respectives des coordonnées  $x_i$  et  $x_j$  des points  $P_i$  et  $P_j$  sur l'axe de la ligne de vue au point  $P$ . À chaque configuration correspond une région des points  $P$  sur le contour d'occultation. Cette région peut être un intervalle sur le contour d'occultation ou bien un simple point comme c'est le cas lorsque  $P$  est un point double ou triple.

Un aspect important de ces configurations de points  $P$ ,  $P_i$  et  $P_j$  est que ceux-ci ne sont pas nécessairement ordonnés, sur l'axe des  $x$ , suivant l'ordre des positions  $C$ ,  $C_i$  et  $C_j$  de la caméra.

---

13. Les points doubles se présentent par paires et uniquement lorsque le mouvement de caméra est non linéaire.

Les figures 2.12 et 2.13 montrent ces configurations et la forme des courbes épipolaires qui en découle. La figure 2.11 montre, sur deux exemples, les régions des points  $P$  correspondants sur le contour d'occultation.

- Dans le cas d'un mouvement de caméra linéaire, et en dehors des singularités des contours occultants, seules trois configurations existent (voir les figures 2.11-a et 2.12).
- Dans le cas d'un mouvement non linéaire de la caméra et toujours en dehors des singularités, il existe alors sept configurations possibles (figure 2.11-b). La figure 2.13 montre celles-ci lorsque  $P$  évolue le long du contour d'occultation. On remarquera que, dans le cas où  $a_i = a_j \neq 0$  :
  1. les trois lignes de vue s'intersectent au même point (figure 2.13-d),
  2. les deux correspondants épipolaires  $p_i$  et  $p_j$  de  $p$  vérifient la contrainte pour les positions  $C_i$  et  $C_j$  de la caméra.

Cette configuration se présente lorsque  $P$  est situé, sur le contour d'occultation, entre les deux points doubles constituant une même paire.

Pour une surface fermée (le cas général), toutes les configurations possibles de points apparaissent lorsque l'on reconstruit un contour d'occultation dans son ensemble. En dehors des points où le mouvement de caméra s'effectue le long de la ligne de vue, le seul type de point où la reconstruction à l'aide des solutions (2.23) n'est pas directement possible est celui où  $a_i = a_j \neq 0$ .

### 2.4.3 Résolution pour $n$ correspondants épipolaires

Dans l'objectif de développer un processus robuste de détermination de la profondeur  $\lambda$ , il peut être avantageux d'utiliser plus de 2 correspondants épipolaires. L'équation de la profondeur (2.16) appliquée en ces points, mène alors à un système linéaire d'équations sur-déterminé de  $n$  équations à 2 inconnues. Il n'existe pas, dans le cas général, de solutions directes de ce système et une approche par les moindres carrés doit être utilisée. Nous en précisons ici le principe ainsi que les solutions.

Soit  $\{p_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  l'ensemble des correspondants épipolaires du point image  $p$ . L'équation de la profondeur appliquée en  $p$  et  $p_i$  s'écrit :

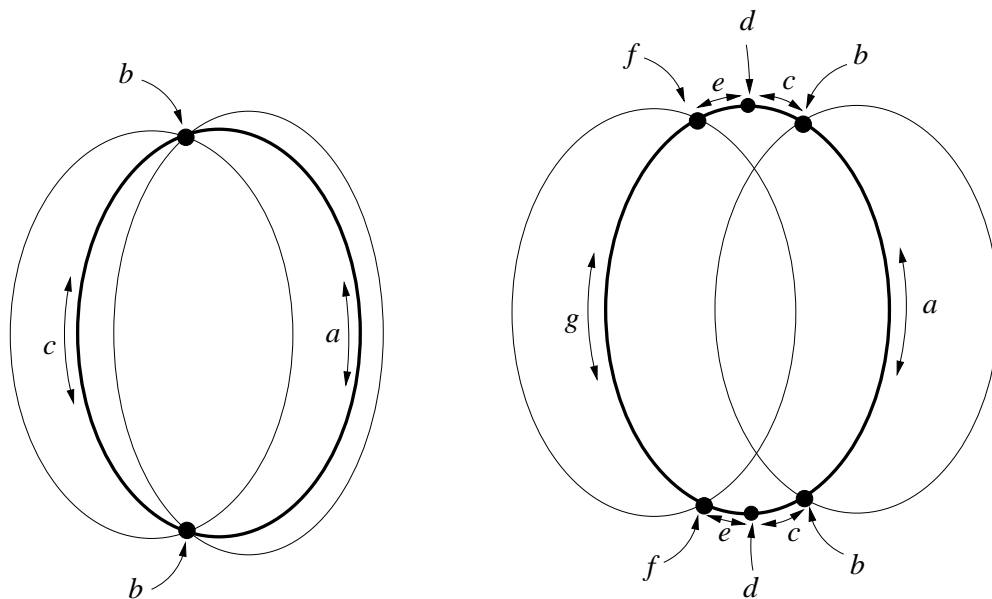
$$\lambda = d_i - \frac{\cos \beta_i}{2 k_t} \frac{T_i \cdot N}{\sqrt{\cos^2 \beta_i - (T_i \cdot N)^2}},$$

soit :

$$\lambda + a_i \frac{1}{k_t} = d_i.$$

Pour les  $n$  correspondants, cela donne :

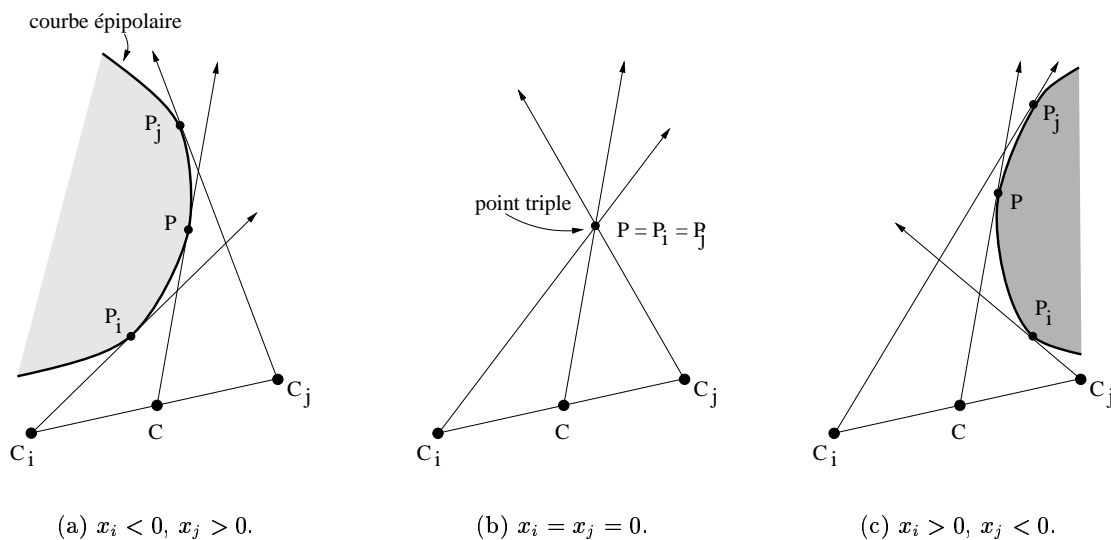
$$M \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{1}{k_t} \end{pmatrix} = D,$$



(a) Mouvement linéaire de la caméra.

(b) Mouvement non linéaire de la caméra.

FIG. 2.11 – Les trois contours d’occultation sur  $\mathcal{S}$  et les régions des points  $P$  sur le contour d’occultation à reconstruire, correspondant aux différentes configurations des points  $P$ ,  $P_i$  et  $P_j$ . L’indice  $a, b, c, \dots$  associé à une région est ici celui de la figure qui représente la configuration des points pour cette région (dans les figures 2.12 et 2.13 ci-après).



(a)  $x_i < 0, x_j > 0$ .

(b)  $x_i = x_j = 0$ .

(c)  $x_i > 0, x_j < 0$ .

FIG. 2.12 – Les différentes configurations possibles pour  $P$  et ses deux correspondants épipolaires  $P_i$  et  $P_j$  lorsque le mouvement de la caméra est linéaire.



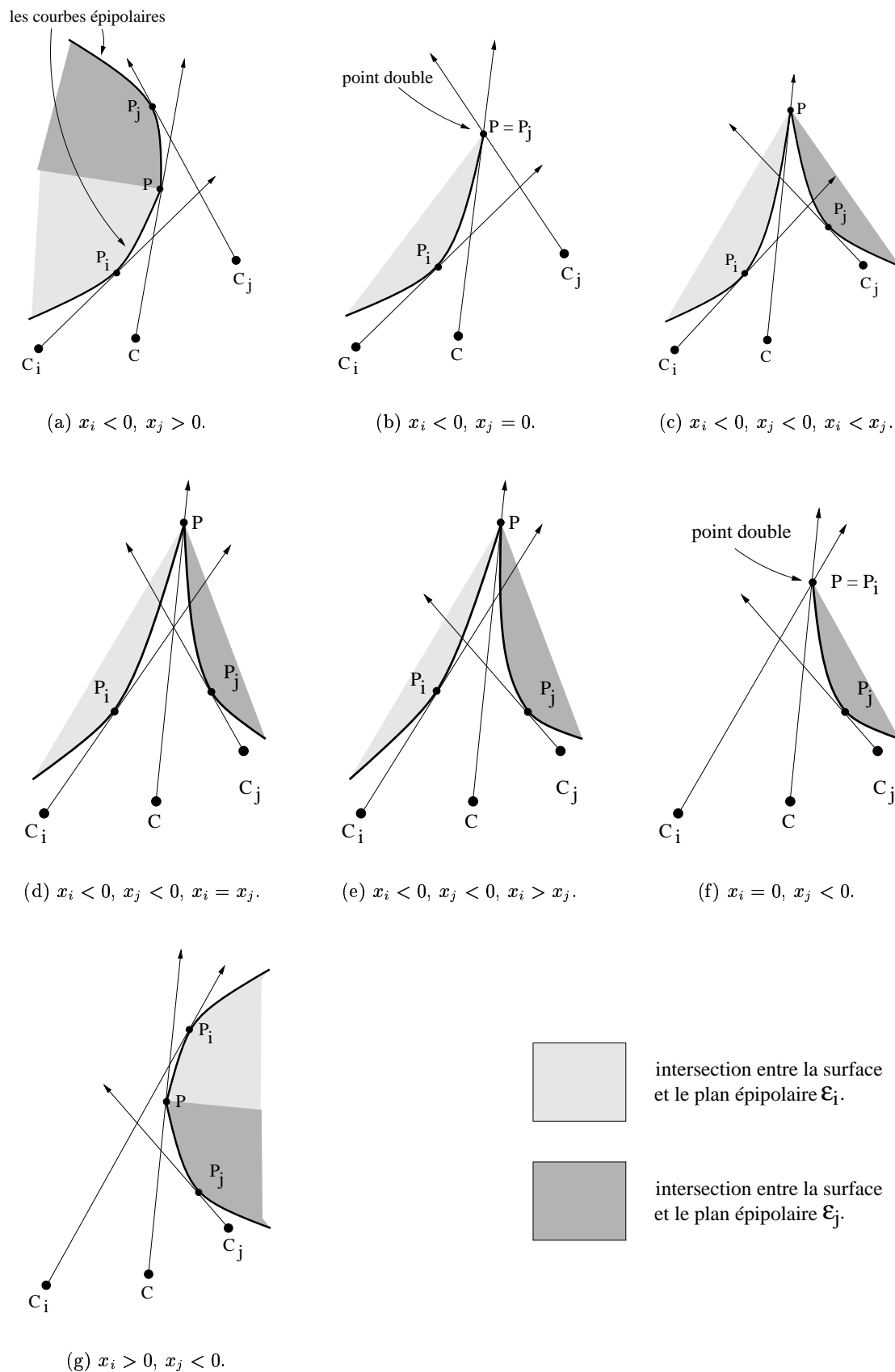


FIG. 2.13 – Les différentes configurations possibles pour  $P$  et ses deux correspondants épipolaires  $P_i$  et  $P_j$  lorsque le mouvement de la caméra est non linéaire.

avec :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

La méthode des moindres carrés consiste à rechercher les valeurs de  $\lambda$  et  $k_t$  qui minimisent

$$\chi^2 = \left| M \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{1}{k_t} \end{pmatrix} - D \right|^2,$$

où  $|\cdot|$  représente la norme Euclidienne. Par annulation du gradient de l'expression ci-dessus, on obtient facilement :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{1}{k_t} \end{pmatrix} = (M^T \cdot M)^{-1} \cdot M^T \cdot D.$$

Les solutions aux moindres carrés classiques utilisant la pseudo-inverse sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda = d_1 = \dots = d_n, & \text{si } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{1}{k_t} \end{pmatrix} = (M^T \cdot M)^{-1} \cdot M^T \cdot D, & \text{sinon.} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Pour  $n = 2$ , nous avons vu que le seul cas qui ne donne pas une solution unique est celui où  $a_i = a_j$ . Or, pour  $n > 2$ , les coefficients  $\{a_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  ne peuvent pas être tous simultanément égaux, à l'exception du cas où ils sont tous nuls et où  $P$  est de multiplicité  $n$ . Ainsi, pour plus de 2 correspondants épipolaires du point  $p$  et en supposant que les mouvements de caméra ne sont pas dans la direction  $T$  en ce point, il est alors toujours possible d'estimer la profondeur  $\lambda$  par les solutions (2.24) établies. Celles-ci permettent de plus d'estimer la courbure normale  $k_t$  en  $P$ , sauf lorsque  $P$  est de multiplicité  $n$ .

En revanche, dans le cas réel d'images bruitées, les solutions (2.24) peuvent être fortement biaisées en raison du mauvais conditionnement de la matrice  $M^T M$  lorsque les coefficients  $\{a_i\}$  ont des valeurs proches. Il est alors plus judicieux d'utiliser une méthode basée sur une *décomposition en valeurs singulières* [Sto 80, Pre 92] pour déterminer ces solutions.

## 2.5 Comparaison avec les méthodes du cercle osculateur

Une grande partie des travaux existants sur la reconstruction de surfaces à partir de séquences de contours occultants, font usage de méthodes dites du *cercle osculateur* [Cip 90, Vai 92, Sze 93b, Sea 95, Jos 95a]. Celles-ci sont aussi basées sur une approximation locale à l'ordre 2 et consistent à déterminer un cercle osculateur en  $P$  et 2 de ses

correspondants épipolaires sur des contours d'occultation voisins. Cependant, ces méthodes ne sont pas liées à un modèle local de surface et sont assujetties à des contraintes sur le mouvement de la caméra ou sur la forme locale de la surface.

Dans ce paragraphe, nous présentons ces méthodes et mettons en évidence les différences qui existent avec l'approche du paraboloïde osculateur ainsi que les avantages de cette dernière.

### 2.5.1 Les méthodes

Le principe des méthodes du cercle osculateur est d'utiliser les lignes de vue du point image  $p$  et de 2 de ses correspondants épipolaires  $p_i$  et  $p_j$ . Si l'on suppose que ces lignes sont coplanaires, il est possible d'estimer le cercle osculateur à la courbe intersection de  $\mathcal{S}$  et du plan contenant les trois lignes de vue. Il suffit pour cela de déterminer le cercle qui est tangent aux trois lignes de vue. Le point  $P$  reconstruit est alors le point du cercle où la tangente est  $T$  et la courbure normale  $k_t$  estimée est  $k_t = \cos \beta / r$ , où  $r$  est le rayon du cercle osculateur et  $\beta$  l'angle entre la normale  $N$  en  $P$  et le plan osculateur.

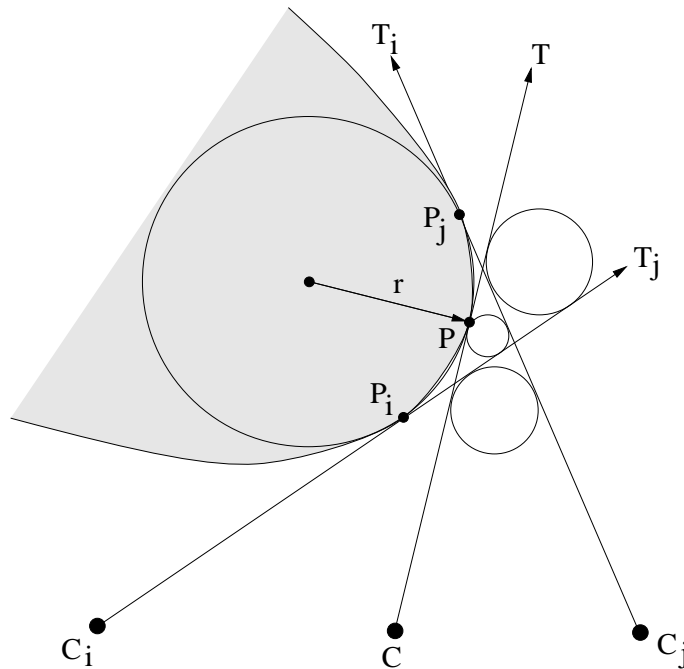


FIG. 2.14 – Le cercle osculateur dans le plan de projection des lignes de vue.

Pour trois positions non alignées  $C_i$ ,  $C$  et  $C_j$  de la caméra, les trois lignes de vue ne sont pas en général coplanaires. Il faut alors choisir un plan de référence dans lequel sont projetées ces dernières.

- Vaillant [Vai 92] et Seales [Sea 95] utilisent le plan radial défini, au point  $P$ , par la ligne de vue et la normale  $N$  à la surface.
- Cipolla [Cip 90], Szeliski [Sze 93b] et Joshi [Jos 95a] utilisent un des deux plans épipolaires au point  $P$ .

Lorsque le mouvement de caméra est linéaire, les trois lignes de vue appartiennent à l'unique plan épipolaire en  $P$ , et les projections dans ce plan n'entraînent aucune altération des données. Le cercle osculateur estimé dans le plan épipolaire constitue alors une approximation à l'ordre 2 de l'unique courbe épipolaire en  $P$ . En revanche, lorsque le plan radial est utilisé, le fait de projeter les lignes de vue introduit dans tous les cas un biais dans les caractéristiques perçues de la surface (tangentes, normales), à l'exception de certains points isolés du contour ou lorsque la surface est un cylindre.

En général, quatre cercles sont tangents, dans le plan osculateur, aux trois lignes de vue (voir la figure 2.14). La méthode employée pour extraire une seule solution est d'appliquer le critère selon lequel la surface est toujours située du même côté des trois lignes de vue.

### 2.5.2 Les différences avec l'approche du paraboloïde osculateur

Les méthodes présentées supposent de manière implicite que le mouvement de caméra est linéaire [Cip 90, Sze 93b, Jos 95a] ou que la surface est localement cylindrique [Vai 92, Sea 95]. Les projections des lignes de vue qui sont nécessaires dans le cas d'un mouvement de caméra non linéaire introduisent en effet un biais dans l'estimation de la profondeur  $\lambda$  et de la courbure normale  $k_t$ . L'approche du paraboloïde osculateur permet de s'affranchir de ces contraintes, puisqu'aucune hypothèse n'est faite sur le mouvement de la caméra ou sur la forme locale de la surface.

De plus, les méthodes du cercle osculateur ne permettent pas de traiter l'ensemble des configurations qui peuvent se présenter pour le point  $P$  et ses deux correspondants épipolaires, en particulier :

- Dans le cas d'un mouvement de caméra linéaire, le cercle osculateur ne peut pas être estimé lorsque  $P$  est un point triple (figure 2.12-b).
- Dans le cas d'un mouvement de caméra non linéaire, ces méthodes ne sont pas valides lorsque  $P$  est situé, sur le contour d'occultation, entre 2 points doubles d'une même paire. Cela correspond aux configurations  $b, c, d, e, f$  des figures 2.11 et 2.13. Dans ces situations, le point  $P$  et ses correspondants épipolaires  $P_i$  et  $P_j$  ne sont pas ordonnés de manière adéquate pour l'estimation du cercle osculateur. En effet, pour extraire un cercle des quatre qui sont solutions, ces méthodes supposent que la surface, et donc le cercle osculateur, sont du même côté des trois lignes de vue, ce qui n'est pas vérifié pour les configurations de points citées. La figure 2.15 en illustre un exemple.

Ceci montre que les deux courbes épipolaires impliquées dans la reconstruction de  $P$  à l'aide des correspondants épipolaires  $P_i$  et  $P_j$  doivent être estimées comme deux courbes différentes alors que le cercle osculateur ne considère qu'une seule et même courbe.

La méthode du paraboloïde osculateur offre une solution plus générale au problème de reconstruction. À l'exception des points où le mouvement de caméra est dans la direction de la ligne de vue, la profondeur peut être estimée en tout point et pour tout mouvement de caméra. De plus, la solution est alors unique. On remarquera néanmoins que dans le cas particulier d'un mouvement de caméra linéaire et pour un point  $P$  non triple, la méthode du cercle osculateur appliquée dans le plan épipolaire [Cip 90, Sze 93b, Jos 95a] et la méthode du paraboloïde osculateur sont équivalentes.

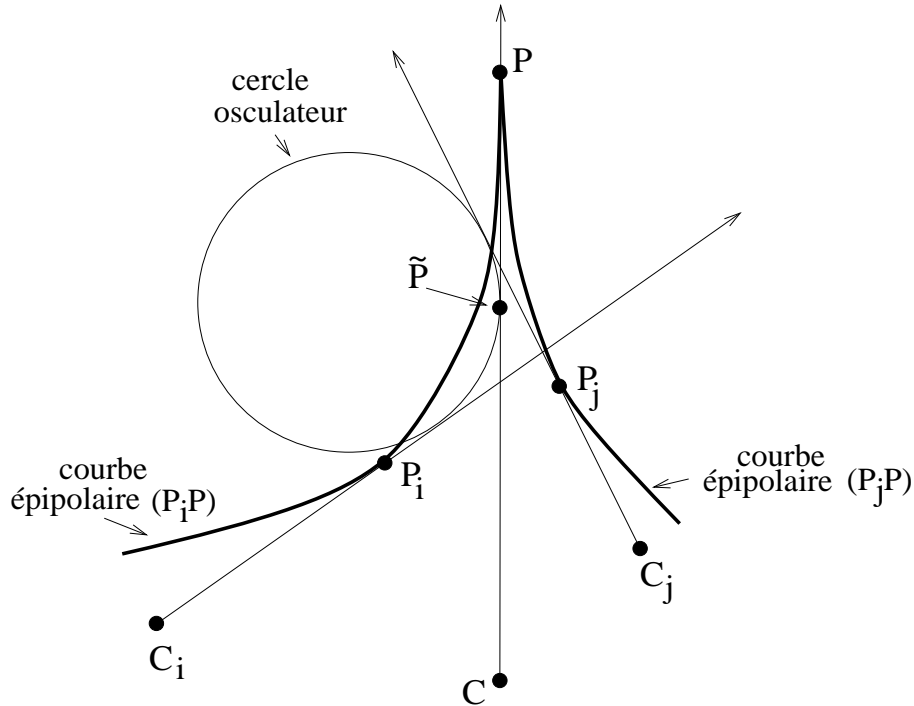


FIG. 2.15 – Une situation possible pour un mouvement de caméra non linéaire. Dans le plan osculateur, la position du point  $P$  de la surface qui est estimée par une méthode du cercle osculateur est celle du point virtuel  $\tilde{P}$ .

## 2.6 Résultats expérimentaux

Nous avons appliqué la méthode de reconstruction présentée à plusieurs séquences monoculaires d'images, synthétiques et réelles. Les données synthétiques (calibrage et images) permettent de mesurer de manière exacte les erreurs de reconstruction, ce qui est difficile à réaliser avec des données réelles. Ce type de données caractérise ainsi les performances de l'algorithme de reconstruction et met en évidence ses limitations.

La procédure de reconstruction qui a été suivie pour les deux types de données est la suivante :

- Chacun des  $n$  contours occultants de la séquence est modélisé à partir des points issus du suivi de contour et à l'aide d'une courbe B-spline. Chaque contour est ensuite échantillonné en  $m$  points, où  $m$  est un paramètre modifiable.
- Pour chacun des  $m$  points, les deux correspondants épipolaires sur les contours voisins (le précédent et le suivant) sont déterminés, puis la reconstruction est effectuée à l'aide des équations (2.22) et (2.23) établies dans ce chapitre.

Ainsi, pour une séquence de  $n$  contours occultants, la reconstruction produira  $n - 2$  contours d'occultation constitués de  $m$  points chacun.

Nous présentons dans un premier temps les résultats obtenus sur une sphère synthétique

puis, dans un contexte réel, ceux obtenus pour différents objets : un pot, une théière, un vase et une calabasse.

### 2.6.1 Données synthétiques

Nous supposons dans cette série d'expérimentations qu'une sphère de rayon  $R = 200 \text{ mm}$  est observée à partir d'une caméra en mouvement. Pour simuler une situation réelle, nous avons fixé les paramètres intrinsèques de la caméra comme étant ceux d'une caméra Sony ICX. Le modèle à sténopé de la caméra étant ici exact, les contours d'occultation sur la sphère sont des cercles. La profondeur des points observés est donc constante pour l'ensemble d'un contour d'occultation et uniquement fonction de la distance entre la position de la caméra et le centre de la sphère. La courbure normale  $k_t$  dans la direction de la ligne de vue est, quant à elle, égale à l'inverse du rayon de la sphère :  $k_t = 1/R$ .

Les contours occultants sont dans ce cas des ellipses. En particulier, si l'axe optique de la caméra passe par le centre de la sphère observée, les contours occultants sont alors des cercles (voir la figure 2.16). Nous nous plaçons par la suite dans ce cas.

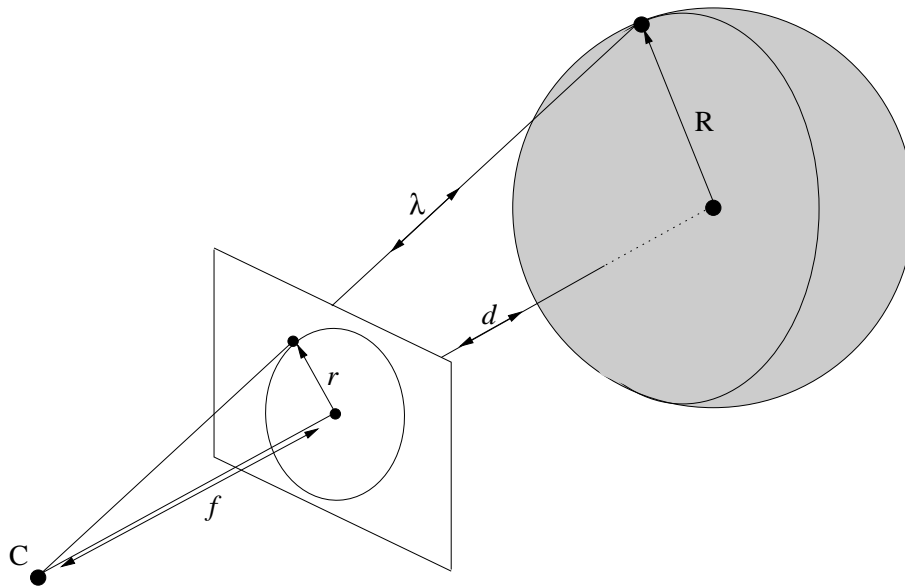


FIG. 2.16 – Observation d'une sphère : si  $f$  est la distance focale et  $d$  la distance entre la caméra et le centre de la sphère, alors la profondeur des points sur le contour d'occultation est :  $\lambda = \sqrt{d^2 - R^2}$ . Si l'axe optique de la caméra passe par le centre de la sphère, alors le contour occultant est un cercle de rayon :  $r = f \frac{R}{\lambda}$ .

Les résultats qui suivent ont été établis pour une caméra située à  $1300 \text{ mm}$  du centre de la sphère. Chaque coordonnée image des points des contours occultants a été bruitée par un bruit blanc Gaussien d'écart type  $0.5$  pixel. Les contours occultants sont constitués à l'origine d'environ  $100$  points. La position d'un point  $P$  sur le contour d'occultation est repérée en degré à partir de la position  $s = 0$ , comme cela est montré dans la figure 2.17. Une série de tests a été effectuée pour des rotations planes ainsi que non-planes de la caméra.

## Mouvement plan de la caméra

La première série de résultats qui est présentée concerne différentes rotations planes de la caméra autour de la sphère. La figure 2.17 montre les contours d'occultation observés et la figure 2.18 les erreurs de reconstruction en fonction de la position sur le contour, ceci pour un angle de rotation de  $10^\circ$  entre deux positions de la caméra. Les fortes erreurs de reconstruction sont localisées à proximité :

- des points doubles : la mise en correspondance épipolaire peut être fortement biaisée ou même échouer (cf. § 1.5.3) ;
- des points où  $a_i = a_j$  : le système d'équations résolu est alors mal conditionné.

Dans le cas d'une rotation plane de la caméra (proche d'un mouvement linéaire), ces deux voisinages se chevauchent et il est alors difficile de différencier les erreurs de reconstructions dues à l'un ou l'autre de ces voisinages.

Les erreurs ont ensuite été mesurées sur un échantillon de 90 points d'un contour occultant, ces points étant répartis de manière uniforme en dehors des voisinages cités où la reconstruction ne peut s'effectuer (voir la figure 2.19). Le tableau 2.1 regroupe les erreurs moyennes  $\bar{m}$  sur la profondeur, le rayon  $R = 1/k_t$  et la distance à la sphère, ainsi que les écarts types  $\sigma$  correspondants, ceci pour différentes valeurs de la rotation plane effectuée entre deux positions successives de la caméra. Ce tableau met en évidence plusieurs faits :

1. L'erreur relative sur la profondeur est très faible puisque cette dernière est ici  $\lambda = 1284.523 \text{ mm}$  en tout point. De même, la distance du point reconstruit à la surface est aussi très faible. Cela montre que la précision qui peut être espérée pour la position du point reconstruit est importante.
2. La courbure déterminée est beaucoup plus sensible au bruit que la profondeur. La courbure est en effet une propriété du deuxième ordre de la surface, alors que la profondeur dépend de propriétés du premier ordre.
3. Les erreurs moyennes augmentent lorsque l'angle de rotation entre deux positions de la caméra diminue. Cette sensibilité accrue au bruit pour les petits déplacements de caméra est due à une limitation naturelle de la reconstruction à partir d'images. En effet, une grande partie des algorithmes de reconstruction (dont ceux de stéréo-vision) sont basés sur la détermination d'intersections de lignes de vue. Or, ces intersections sont extrêmement sensibles au bruit lorsque les directions des lignes de vue sont proches. Une reconstruction robuste basée sur ce principe ne peut donc pas être envisagée pour des déplacements très faibles de la caméra, à moins d'effectuer un lissage important des données.

Ce dernier trait peut sembler, de prime abord, contradictoire avec le fait que la reconstruction repose sur une approximation locale, approximation dont la précision devrait augmenter à mesure que l'amplitude du mouvement de la caméra diminue. Néanmoins, il suffit de remarquer que la profondeur ainsi que la courbure dépendent toutes deux de caractéristiques différentielles de la surface spatio-temporelle ; le calcul de ces dernières n'ayant de sens que si les différences mesurées ont des valeurs suffisamment grandes par rapport à l'amplitude du bruit. Il en découle logiquement, et en dépit d'un modèle plus précis, une sensibilité au bruit croissante lorsque le mouvement de caméra diminue.

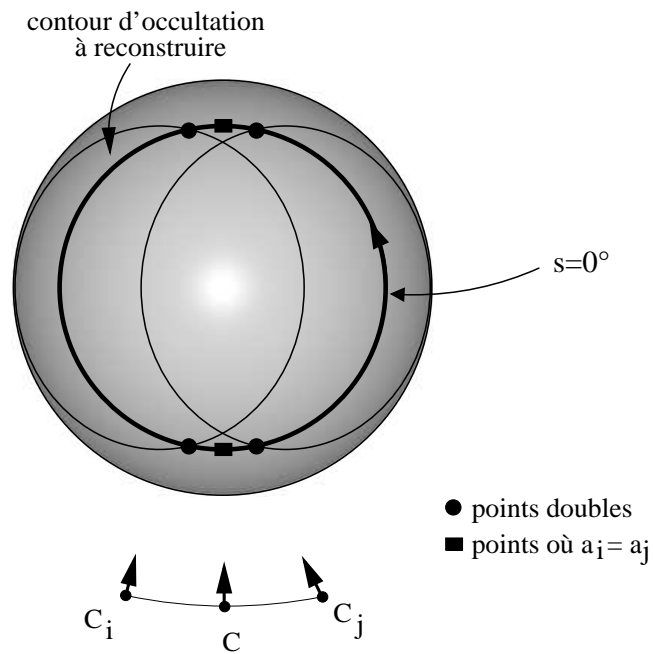


FIG. 2.17 – Les contours d'occultation pour deux rotations planes de la caméra autour de la sphère. La position d'un point, sur le contour d'occultation, est repérée en degré à partir de la position  $s = 0$  montrée.

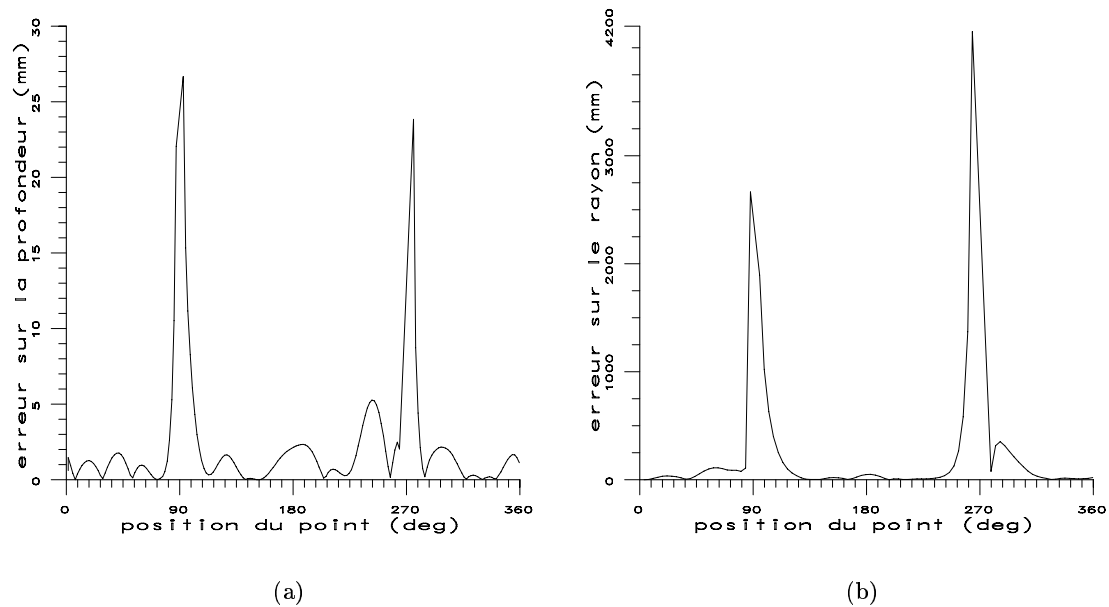


FIG. 2.18 – Répartition des erreurs en fonction de la position (en degré) sur le contour : (a) erreurs sur la profondeur  $\lambda$ , (b) erreurs sur le rayon  $R$ .



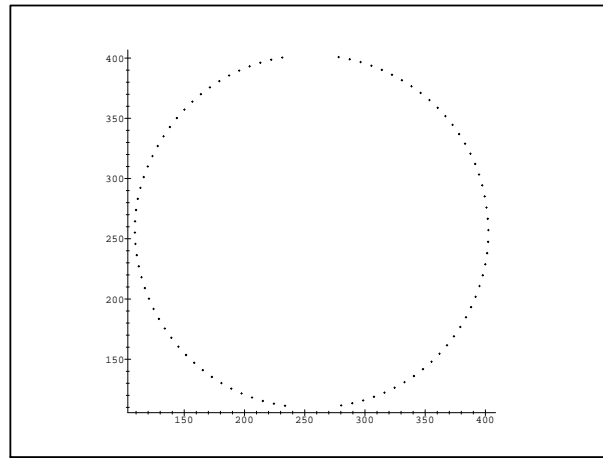


FIG. 2.19 – Un échantillon de 90 points tests sur le contour occultant pour des rotations planes de la caméra. Les régions sans points du contour, ici le haut et le bas du contour, sont les voisinages des points multiples (la correspondance épipolaire échoue) et les voisinages des points où  $a_i$  et  $a_j$  sont très proches (la reconstruction échoue).

| rotation de la caméra<br>entre deux positions | erreur sur $\lambda$<br>(mm) |          | erreur sur $1/k_t = R$<br>(mm) |          | distance à la<br>sphère (mm) |          |
|---|------------------------------|----------|--------------------------------|----------|------------------------------|----------|
|   | $\bar{m}$                    | $\sigma$ | $\bar{m}$                      | $\sigma$ | $\bar{m}$                    | $\sigma$ |
| $2^\circ$                                     | 10.126                       | 18.346   | 4991.58                        | 15321.7  | 0.353                        | 0.548    |
| $5^\circ$                                     | 3.958                        | 6.910    | 841.604                        | 2466.46  | 0.222                        | 0.178    |
| $10^\circ$                                    | 1.761                        | 3.243    | 187.885                        | 557.729  | 0.212                        | 0.171    |
| $20^\circ$                                    | 1.089                        | 2.367    | 54.20                          | 179.933  | 0.211                        | 0.170    |

TAB. 2.1 – Les erreurs pour l'échantillon de points :  $\lambda = 1284.523\text{mm}$ ,  $R = 200\text{mm}$ .

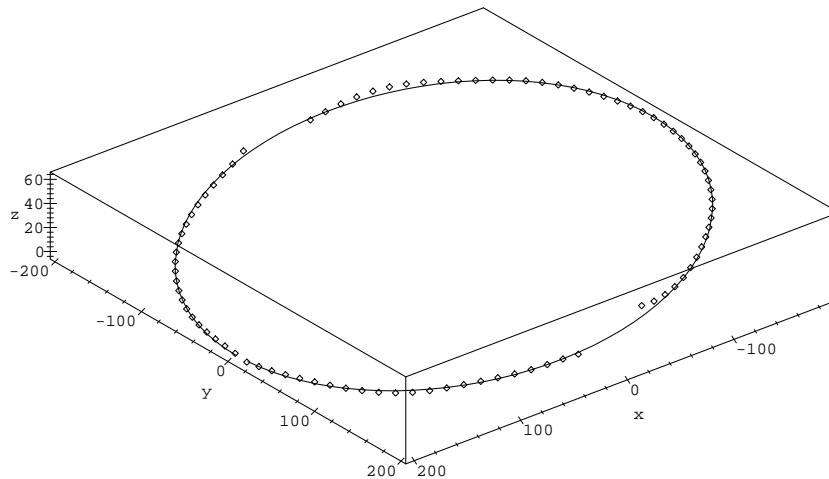


FIG. 2.20 – Les points de l'échantillon reconstruit pour une rotation de  $10^\circ$ . Le contour d'occultation original est en trait continu.

### Mouvement non-plan de la caméra

La deuxième série de tests concerne des mouvements non-plans de la caméra entre les trois positions  $C_i$ ,  $C$  et  $C_j$  considérées. Il s'agit en fait de deux rotations perpendiculaires de la caméra autour de la sphère (voir la figure 2.21). Les mesures réalisées sont les mêmes que celles du paragraphe précédent et viennent appuyer les remarques qui ont été faites. Par contre, ces résultats mettent en avant un certain nombre de différences majeures entre le mouvement plan et le mouvement non-plan de la caméra :

1. L'apparition, dans le cas non-plan, de pics d'erreurs supplémentaires pour l'ensemble des points d'un contour (voir les figures 2.18 et 2.22). Pour ces mouvements, les points doubles et ceux où  $a_i = a_j$  ne sont pas, en effet, situés dans les mêmes régions du contour, ce qui est le cas pour un mouvement plan (voir les figures 2.17 et 2.21). Le nombre de régions sensibles est donc supérieur dans le cas non-plan, ce qui explique les pics supplémentaires dans la figure 2.22.
2. Les erreurs moyennes sur la position du point reconstruit sont supérieures lorsque le mouvement de la caméra est non-plan. La reconstruction est donc moins précise pour ce type de mouvement. En revanche, on remarquera que l'erreur commise en moyenne sur la courbure est plus faible que pour un mouvement de caméra plan, ce qui nous semble ici lié à la géométrie particulière de la sphère.

### En résumé

Plusieurs points importants sur la reconstruction par correspondances épipolaires se dégagent de cette série d'expériences, nous les résumons ici :

1. Une reconstruction effectuée dans le voisinage des points doubles ainsi que celui des points où  $a_i = a_j$  est très sensible au bruit.
2. Une reconstruction pour des petits déplacements de la caméra entre deux positions successives ne peut pas être envisagée. Dans le cas réaliste traité, des rotations inférieures à  $2^\circ$  de la caméra autour du centre de la sphère sont inexploitable, à moins de ne considérer qu'une position de la caméra sur plusieurs.
3. Les mouvements de caméra qui donnent les meilleurs résultats (fiabilité et robustesse) sont les mouvements linéaires. En effet, les régions du contour où la reconstruction est très sensible sont pour ces mouvements limitées à des points multiples isolés (de multiplicité au moins égale à 3).

#### 2.6.2 Données réelles

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus pour plusieurs séquences monoculaires d'images réelles. De la même manière que pour les données synthétiques du paragraphe précédent, un point est ici reconstruit à partir de ses deux correspondants épipolaires sur les contours voisins de la séquence, et à l'aide des équations (2.22) et (2.23). Par contre, la reconstruction des points des contours d'occultation n'a pas été effectuée lorsque la correspondance épipolaire a échoué (voisinage des points multiples) ou lorsque les points sont proches, à un seuil près, des points où  $a_i = a_j$ . Dans le cas des séquences présentées, le mouvement de la caméra est, approximativement, une rotation autour de

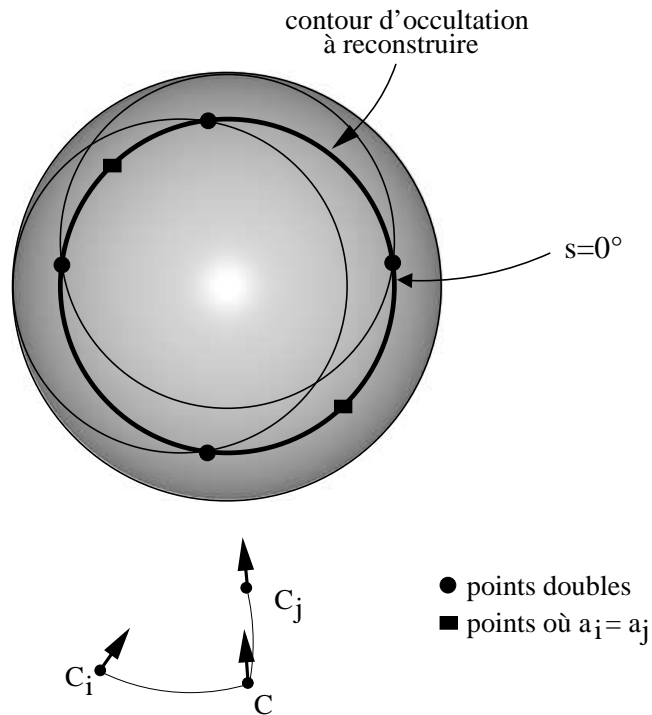


FIG. 2.21 – Les contours d'occultation pour deux rotations perpendiculaires de la caméra. La position d'un point, sur le contour d'occultation, est repérée en degré à partir de la position 0 montrée.

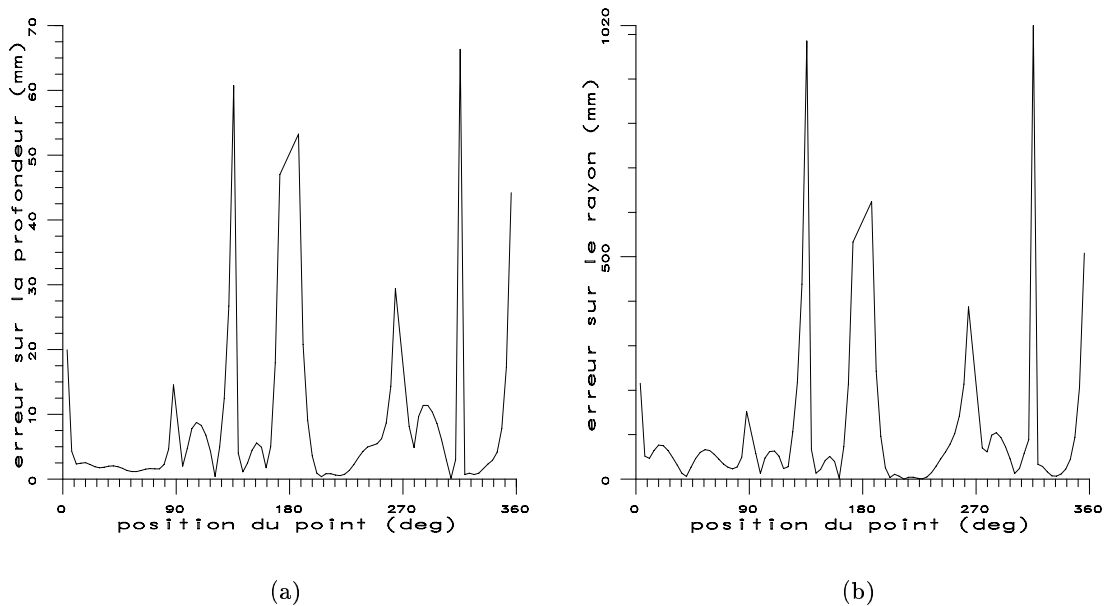


FIG. 2.22 – Répartition des erreurs en fonction de la position (en degré) sur le contour : (a) erreurs sur la profondeur  $\lambda$ , (b) erreurs sur le rayon  $R$ .

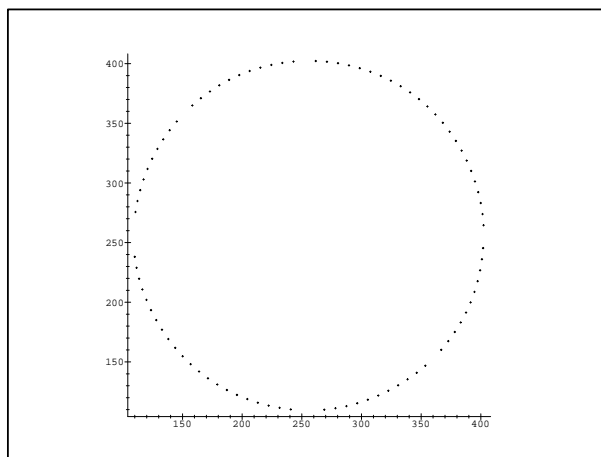


FIG. 2.23 – Un échantillon de 89 points tests sur le contour occultant pour des rotations non-planes de la caméra. Les régions sans points du contour sont les voisinages des points multiples (la correspondance épipolaire échoue) et les voisinages des points où  $a_i$  et  $a_j$  sont très proches (la reconstruction échoue).

| rotation de la caméra<br>entre deux positions | erreur sur $\lambda$<br>(mm) |          | erreur sur $R$<br>(mm) |          | distance à la<br>sphère (mm) |          |
|---|------------------------------|----------|------------------------|----------|------------------------------|----------|
|   | $\bar{m}$                    | $\sigma$ | $\bar{m}$              | $\sigma$ | $\bar{m}$                    | $\sigma$ |
| $2^\circ$                                     | 40.633                       | 68.276   | 2571.83                | 4383.23  | 10.020                       | 36.952   |
| $5^\circ$                                     | 15.264                       | 23.745   | 388.875                | 635.02   | 1.560                        | 5.183    |
| $10^\circ$                                    | 7.970                        | 12.652   | 102.758                | 177.365  | 0.457                        | 1.117    |
| $20^\circ$                                    | 3.884                        | 6.546    | 26.479                 | 45.349   | 0.251                        | 0.336    |

TAB. 2.2 – Les erreurs pour l'échantillon de points.

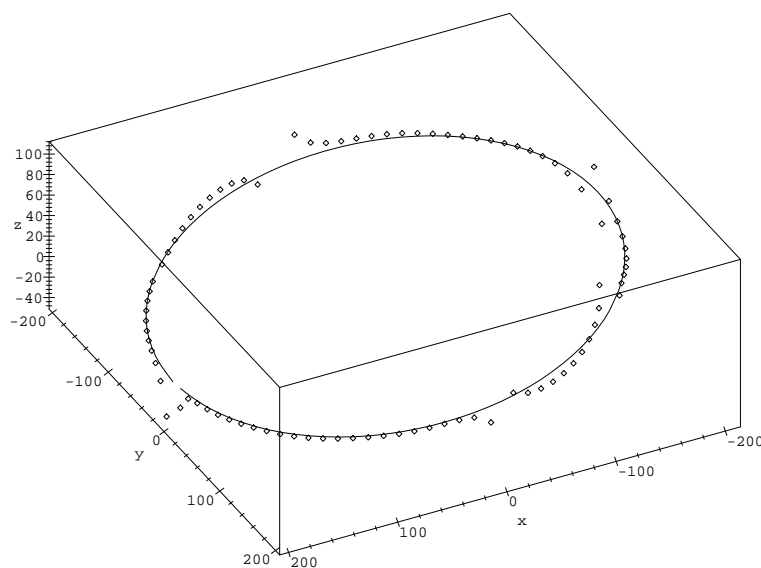


FIG. 2.24 – Les points de l'échantillon reconstruit pour une rotation de  $10^\circ$ . Le contour d'occultation original est en trait continu.

l'objet. Les parties des contours non reconstruites sont donc situées sur le haut et sur le bas des objets traités.

Les deux premières séquences du pot et de la théière ont été prises sans connaissances précises sur le mouvement de la caméra. Le calibrage a donc été réalisé, pour chaque image, à l'aide d'une mire de calibrage (voir l'annexe A) que l'on peut voir dans les figures 2.25-a et 2.26-a. Les résultats de reconstruction (figures 2.25-b et 2.26-b) sont qualitativement bons. On remarquera en particulier la régularité des contours d'occultation reconstruits. En revanche, l'utilisation d'une mire présente certains inconvénients qui sont mis en évidence par ces résultats.

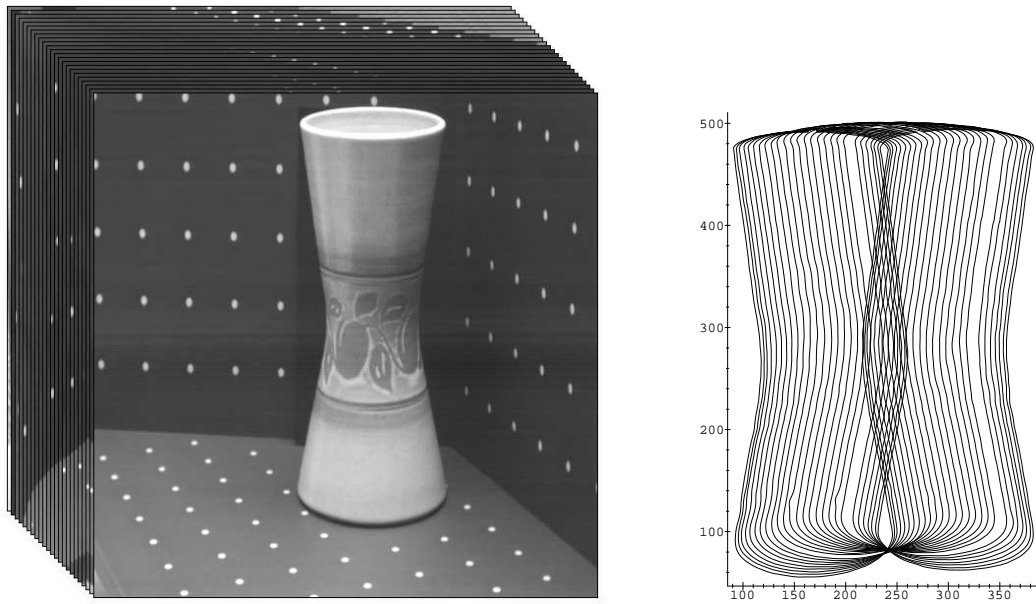
- Un premier inconvénient concerne l'extraction des contours ; les points de référence de la mire peuvent en effet modifier le contour extrait lorsque leur projection est située sur ce contour. Les images des contours du pot et en particulier de la théière, font apparaître des déformations locales des contours extraits qui sont dues à la présence de ces points de référence.
- Un deuxième inconvénient lié à la présence de la mire de calibrage concerne le déplacement total de l'objet qui peut être effectué. Cette mire est un trièdre dont les deux plans verticaux font un angle de  $120^\circ$ , des rotations de l'objet supérieures à cette valeur ne peuvent donc pas être envisagées. C'est une limitation sérieuse si l'on cherche à reconstruire l'ensemble de la surface de l'objet. Par exemple, le pot et la théière ne sont que partiellement reconstruits (figures 2.25-b et 2.26-b).

En raison de ces inconvénients, nous avons choisi une autre voie qui consiste à contrôler le déplacement que l'objet effectue. Si ce déplacement est connu de manière exacte, il n'est alors plus nécessaire de disposer de points de référence dans les images. A cet effet, les deux séquences suivantes du vase et de la calebasse ont été prises à l'aide d'une table micro-métrique de rotation sur laquelle l'objet à traiter est posé. Le mouvement de cet objet est donc ici connu, et la détermination du mouvement de la caméra par rapport à l'objet se fait en utilisant un calibrage préliminaire de l'ensemble table-caméra (cf. annexe A). La qualité des reconstructions (figures 2.27-b et 2.28-b) valide cette approche. Néanmoins, il faut remarquer qu'en dépit d'une bonne précision dans ce cas, celle obtenue avec une mire de calibrage – où chaque image est calibrée de manière indépendante et donc sans biais – reste meilleure (cf. § A.3).

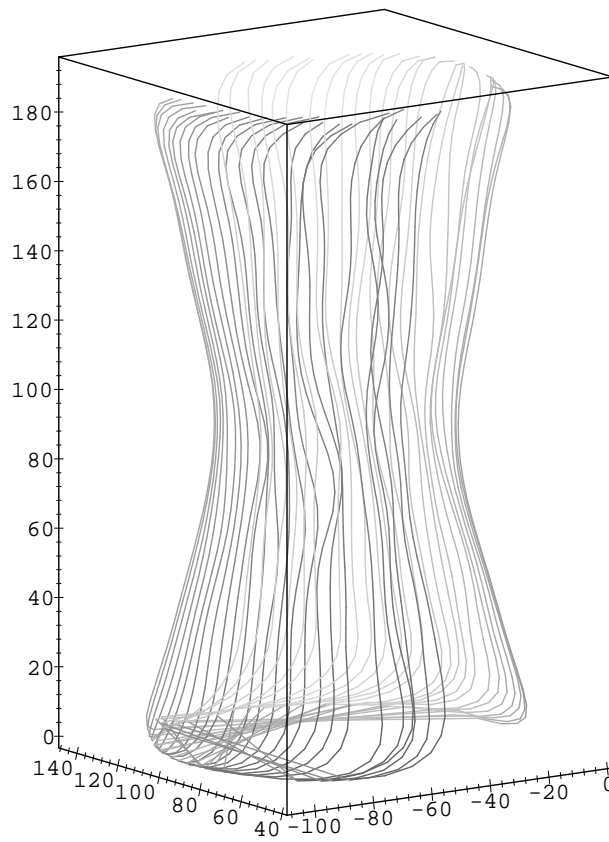
Enfin un aspect intéressant de la reconstruction mis en évidence par ces résultats concerne les régions dites sensibles (haut et bas des objets ici). Ces régions sont, malgré tout, correctement reconstruites (figures 2.25-b, 2.26-b, 2.27-b et 2.28-b). Ceci s'explique par le fait que si ces régions correspondent à des points sur un contour qui ne sont pas reconstruits pour cause d'instabilité, elles correspondent aussi à des points, sur un autre contour, pour lesquels la reconstruction s'effectue de manière stable.

## 2.7 Résumé et discussion

Dans ce chapitre, nous avons établi l'équation de la profondeur d'un point appartenant à un contour d'occultation dans le cas d'observations discrètes et lorsque la correspondance épipolaire est utilisée. Cette équation repose sur une approximation locale à l'ordre 2 de la surface en  $P$ , le paraboloïde osculateur, et fournit à partir d'un correspondant épipolaire

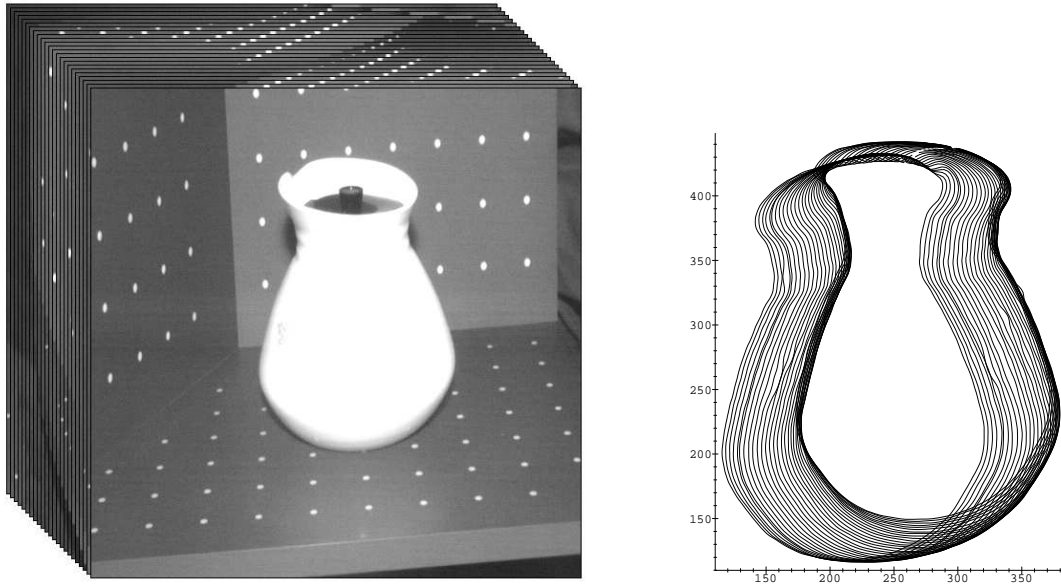


(a) La séquence et les contours occultants extraits.

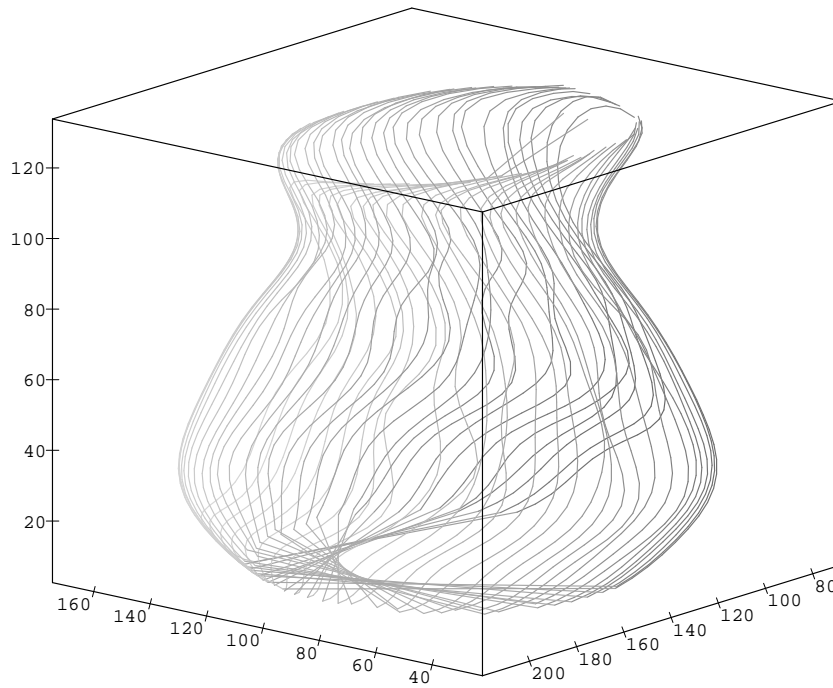


(b) Les points reconstruits (par contours).

FIG. 2.25 – *Reconstruction du pot (séquence de 29 images).*

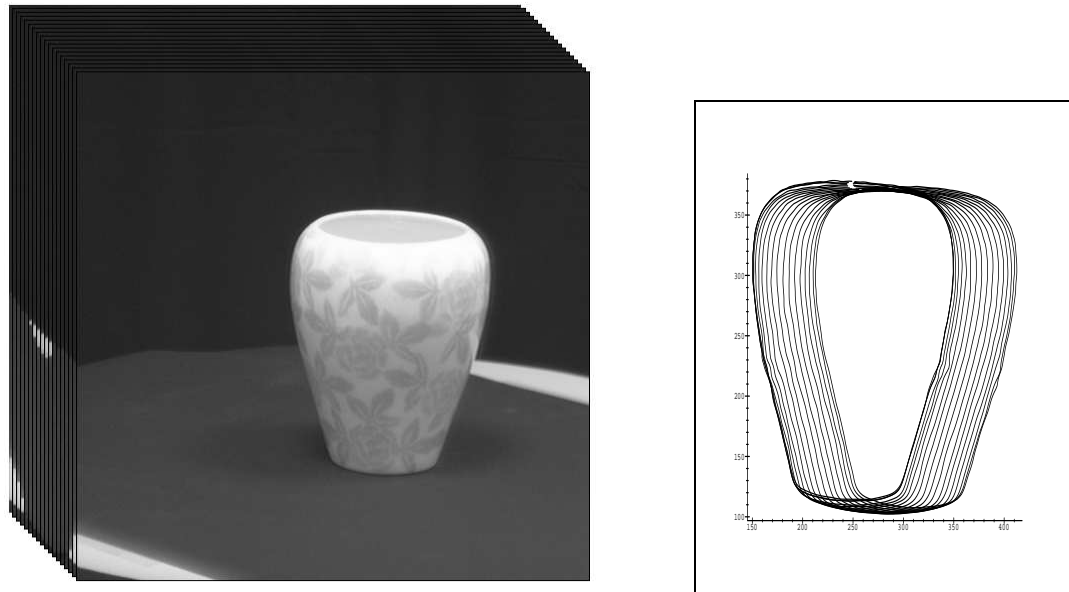


(a) La séquence et les contours occultants extraits.

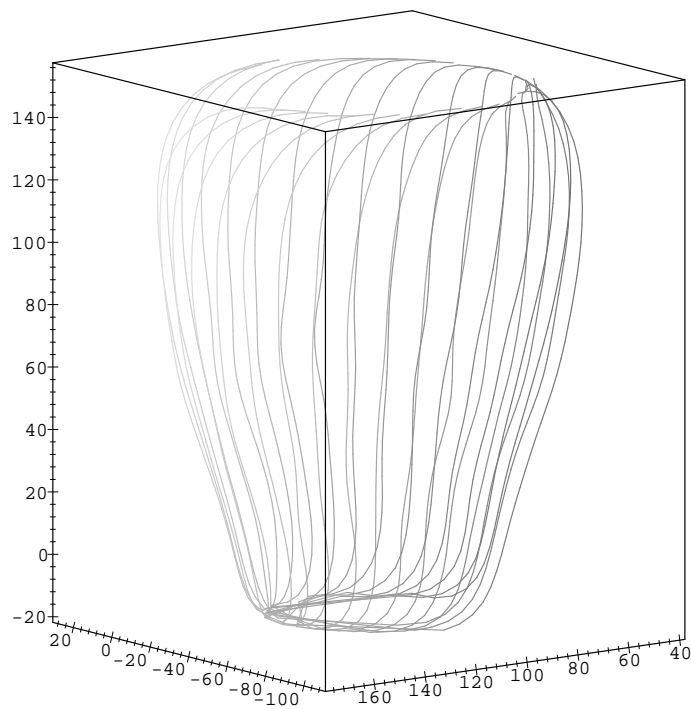


(b) Les points reconstruits (par contours).

FIG. 2.26 – Reconstruction de la théière (séquence de 33 images).



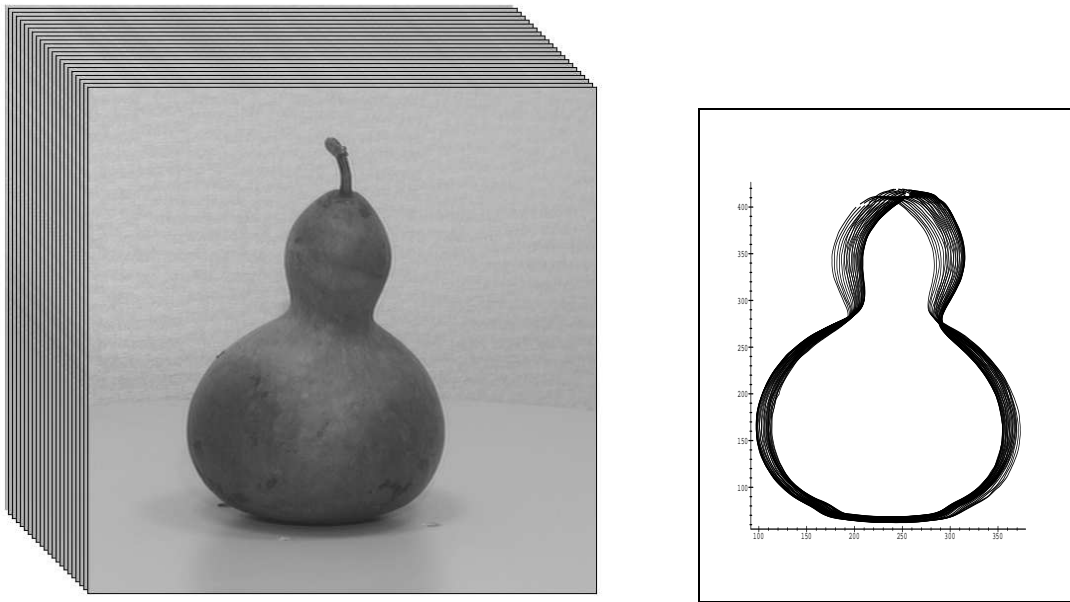
(a) La séquence et les contours occultants extraits.



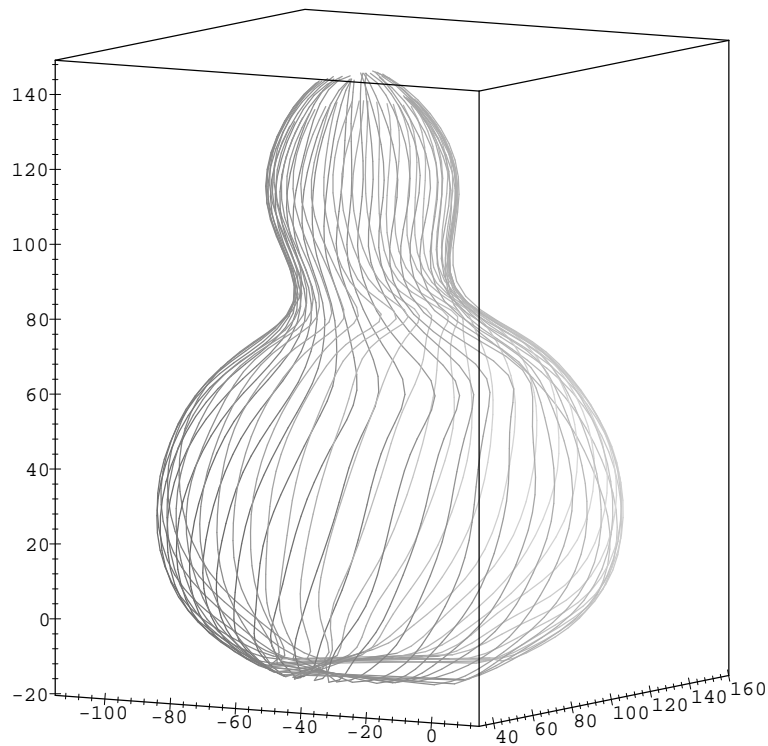
(b) Les points reconstruits (par contours).

FIG. 2.27 – Reconstruction du vase (séquence de 18 images prises avec une rotation de la table micro-métrique de 10 degrés entre deux images).





(a) La séquence et les contours occultants extraits.



(b) Les points reconstruits (par contours).

FIG. 2.28 – Reconstruction de la calabasse (séquence de 29 images prises avec une rotation de la table micro-métrique de 7 degrés entre deux images).

de  $p$ , une relation linéaire entre la profondeur  $\lambda$  et l'inverse de la courbure normale dans la direction de la ligne de vue  $1/k_t$  en  $P$ . Il est ainsi possible d'estimer l'ensemble des propriétés locales à l'ordre 2 de la surface à partir de 3 contours occultants. Notre approche se démarque des méthodes existantes à plusieurs titres :

- Elle apporte des solutions uniques et explicites pour la profondeur  $\lambda$  et la courbure normale  $k_t$ .
- Ces solutions sont définies pour tout mouvement de la caméra et en tout point du contour d'occultation à l'exception :
  1. Des points pour lesquels le mouvement de caméra est dans la direction de la ligne de vue.
  2. Des points pour lesquels  $a_i = a_j \neq 0$ . Ce cas se présente lorsque le mouvement de caméra est non-linéaire. Des solutions peuvent néanmoins être trouvées en faisant intervenir soit un correspondant épipolaire supplémentaire, soit le fait que les deux correspondants épipolaires  $P_i$  et  $P_j$  de  $P$  vérifient, dans ce cas, la contrainte épipolaire.
- $n$  ( $n > 2$ ) correspondants épipolaires appartenant à  $n$  contours occultants peuvent être utilisés, ce qui débouche sur des solutions aux moindres carrés pour la profondeur  $\lambda$  et la courbure normale  $k_t$ .

Les expériences réalisées montrent que les reconstructions, et donc les profondeurs  $\lambda$  déterminées par cette méthode, sont qualitativement bonnes. Il apparaît en revanche que l'estimation de la courbure  $k_t$  est beaucoup moins robuste. Enfin, les parties des contours d'occultation proches des points multiples sont plus difficiles à reconstruire, en raison de la difficulté de la mise en correspondance épipolaire et de la sensibilité des équations dans ces régions. Les mouvements de caméra non-linéaires multiplient, sur le contour, le nombre de ces parties sensibles. Cela met en évidence le fait qu'un mouvement de caméra linéaire permet une meilleure reconstruction des contours d'occultation. Néanmoins, pour percevoir concrètement l'ensemble d'un objet au travers de ces contours occultants, il est nécessaire d'effectuer une rotation autour de celui-ci. Les solutions robustes seraient donc :

- Dans le cas d'une séquence monoculaire, utiliser plus de 2 correspondants épipolaires pour la reconstruction ;
- dans le cas d'une séquence tri-stéréo, utiliser une tête tri-stéréo linéaire (où les trois caméras sont alignées).



# Chapitre 3

## Modélisation de la surface observée

Dans ce chapitre, nous décrivons le dernier module du processus de reconstruction. Celui-ci prend en entrée les points reconstruits, et fournit en sortie une représentation de la surface observée. Dans cet objectif, les points reconstruits sont triangulés de contour à contour. Les maillages résultants peuvent alors être régularisés pour corriger les effets du bruit présent dans l'ensemble du processus. Enfin, les concavités de la surface dans la direction de la ligne de vue qui correspondent soit à des concavités de la surface, soit à des parties occultées de celle-ci, sont détectées. Ceci car la reconstruction produit, dans ces régions, des points qui n'appartiennent pas à la surface. Des résultats expérimentaux pour des données synthétiques ainsi que réelles sont présentés à l'issue de chaque étape.

## 3.1 Introduction

Dans le chapitre 2 de ce document, nous avons présenté une méthode permettant la reconstruction de points appartenant à des contours d’occultation d’un objet. Lorsque celui-ci est observé au travers d’une séquence d’images, par rotations successives de la caméra par exemple, il est donc possible de reconstruire un ensemble de points de la surface de cet objet. Cet ensemble de points constitue une représentation discrète de la partie de la surface visible par les contours occultants. Une description globale, qui définit les liens entre les points reconstruits, est par la suite nécessaire pour représenter, manipuler et éventuellement lisser la surface reconstruite. Une dernière étape du processus de reconstruction décrit dans ce manuscrit, consiste alors à produire une description globale de la surface observée, à partir des points 3D reconstruits. Ce chapitre est consacré à cette étape de *modélisation*.

### 3.1.1 Travaux existants

Pour résoudre le problème de modélisation, deux types d’approches peuvent être mises en œuvre : les approches spécifiques aux données images que constituent les contours occultants, et les approches plus générales qui traitent un éventail plus large de données issues de différents capteurs.

#### Méthodes spécifiques aux contours occultants

En marge des méthodes globales qui s’appuient sur des modèles implicites de surface et qui produisent des surfaces fermées (cf. § 2.1), différentes approches, qui permettent de modéliser la partie observée de la surface, sont proposées dans la littérature :

- Zheng [Zhe 94] reconstruit des sections planes de la surface dans le cas d’une rotation pure de la caméra et sous l’hypothèse implicite d’une projection orthographique. La surface est alors représentée sous la forme de facettes triangulaires obtenues par triangulation des sections planes adjacentes. Par ailleurs, une étude des concavités est réalisée : celles-ci sont signalées par une discontinuité de la dérivée temporelle de la direction de la ligne de vue. Cette approche permet de modéliser des surfaces complexes, un visage est notamment montré en exemple, mais elle repose sur des hypothèses contraignantes sur le mouvement et sur le modèle de projection de la caméra.
- Zhao [Zha 94] construit une description globale de la surface, sous la forme de carreaux B-splines, directement à partir des contours occultants et sans utiliser de reconstruction locale. Comme nous l’avons noté au chapitre 2, cette approche permet de résoudre en une seule étape le problème de reconstruction et celui de régularisation, mais elle nécessite par contre un paramétrage *a priori* de la surface, ce qui est rarement disponible.
- Seales [Sea 95] utilise la méthode locale développée par Vaillant [Vai 92] et génère un maillage polygonal de la surface. Pour cela, des sections planes de la surface sont estimées en déterminant les intersections des contours d’occultation avec des plans parallèles. Dans chaque plan, les contours sont approximés à l’aide de courbes B-splines puis ré-échantillonnés. Les coupes planes sont ensuite triangulées deux-à-deux pour former un maillage polygonal. Cette approche présente l’intérêt de fournir une représentation simple de la surface ; néanmoins, en raison des approximations

successives qui sont nécessaires (contours d’occultation et sections planes), le biais introduit dans la représentation finale peut être important.

### Méthodes générales

Le problème plus général de reconstruction de surfaces à partir de données 3D éparses est très largement traité dans la littérature. Il s’agit alors de déterminer la surface  $\mathcal{S}'$  qui approxime la surface  $\mathcal{S}$  à partir d’un ensemble non organisé de points 3D de  $\mathcal{S}$ . Une étude des différentes approches existantes a été réalisée dans [Bol 91]. Celles-ci peuvent être regroupées en deux catégories principales, en fonction du type de représentation choisi pour la surface. Une première catégorie concerne les approches globales basées sur un modèle de surface ; le modèle étant déformé de manière à correspondre aux points 3D de données [Ter 87, Sol 90, Scl 91, Coh 93]. Une deuxième catégorie concerne les approches basées sur une représentation paramétrique des données, sous la forme d’un maillage des points 3D [Lor 87, Mal 89, Fau 90b, Hop 92, Sze 93a, Alg 95]. L’ensemble de ces méthodes s’appliquent à des données éparses issues, par exemple, de plusieurs capteurs lasers. Par contre, elles ne font pas usage d’une éventuelle organisation des points 3D, sous la forme de contours par exemple ; cela étant le cas des points issus du processus de reconstruction présenté au chapitre 2.

#### 3.1.2 Notre approche

Notre approche est spécifique au problème de reconstruction des contours d’occultation et s’attache à préserver l’organisation initiale des points de données dans la représentation finale. De plus, les contours d’occultation observés ne couvrent pas en général la totalité de la surface et nous cherchons donc à modéliser uniquement la partie observée. Dans cet objectif, la surface reconstruite est représentée par un maillage polygonal obtenu en triangulant les contours d’occultation successifs deux-à-deux. La triangulation présente deux intérêts qui sont, en premier lieu, de préserver la cohérence avec les données, puisqu’aucune fonction d’approximation introduisant un biais n’intervient et, en deuxième lieu, de ne pas nécessiter de connaissances *a priori* sur le paramétrage de la surface. Notre contribution dans ce cadre est double et concerne :

1. Le lissage de la surface : la reconstruction locale des points 3D étant un processus sensible au bruit, le maillage triangulaire réalisé peut être fortement perturbé. Nous proposons une méthode pour lisser la surface reconstruite basée sur la minimisation d’une fonctionnelle.
2. La détection des concavités : lorsque la surface est localement plane ou concave dans la direction d’observation, l’approximation à l’ordre 2 réalisée pour la reconstruction n’est plus valide. Les parties de la surface correspondantes ne sont pas visibles par les contours occultants et nous présentons une méthode pour les détecter. Celle-ci étend les résultats de Zheng [Zhe 94] à tout mouvement de caméra.

La suite de ce chapitre débute par la présentation de l’algorithme de triangulation. La méthode de lissage est ensuite explicitée. Puis nous étudions les régions de la surface qui ne sont pas visibles par les contours occultants, et les moyens de les détecter. Des résultats qualitatifs de l’ensemble de la méthode appliquée à des objets réels sont ensuite montrés.

## 3.2 Une description paramétrique de la surface

Le résultat obtenu par la reconstruction présentée au chapitre 2 est un ensemble de points 3D organisés en contours successifs. La représentation de cet ensemble de points sous forme de surface nécessite une description paramétrique, la construction d'une fonction d'approximation ou de modélisation de la surface de l'objet s'appuyant par la suite sur cette description. Celle-ci peut être soit un paramétrage explicite de la surface soit, plus simplement, une triangulation. Dans ce paragraphe, nous justifions le choix d'une triangulation dans notre contexte et présentons notre méthode.

### 3.2.1 Trianguler les points reconstruits

Lorsqu'un paramétrage de la surface est disponible, une approximation de la surface peut être déterminée à l'aide de surfaces splines [dB 78] par exemple. Néanmoins, pour une surface quelconque et sans connaissances *a priori* sur celle-ci, il peut être extrêmement difficile de déterminer un tel paramétrage. Une autre approche consiste à déterminer une triangulation des points reconstruits. La surface de l'objet est alors approximée sous la forme de facettes polygonales. L'intérêt majeur de cette approche est de ne pas nécessiter de paramétrage de la surface observée mais seulement une description en termes de voisinage, ce qui est plus simple à mettre en œuvre.

#### Choix d'une triangulation

Il existe en général, plusieurs triangulations possibles d'un ensemble de points [Sch 93]. Les algorithmes utilisés sont souvent fonction de l'application visée. Une triangulation *optimale* dans le cas 2D est la triangulation de Delaunay, celle-ci assure en effet des propriétés d'agencement idéal des facettes (voir [Pre 85] pour une revue des propriétés de la triangulation de Delaunay). La généralisation au cas 3D [Fau 90b, Boi 92] débouche sur la "tétraédrisation" de l'ensemble des points et donc sur un volume. Dans le cas nous concernant, il s'agit de trianguler un ensemble de points 3D appartenant à des contours successifs. Ces contours peuvent être en nombre restreint et ne décrire que partiellement l'objet ; une représentation sous la forme de tétraèdres qui caractérise un volume compact n'est donc pas adaptée. De plus, les points 3D sont organisés sous la forme de contours, la triangulation résultante devrait conserver cette information.

Ces considérations nous ont amenés à utiliser un algorithme de triangulation spécifique à la reconstruction à partir de contours. Une première règle en est le respect de l'adjacence des contours successifs :

- Deux points 3D qui n'appartiennent pas au même contour d'occultation, peuvent être reliés si et seulement s'ils appartiennent à deux contours adjacents.

Le problème de la triangulation de l'ensemble des points 3D se résume donc à la triangulation de chaque paire successive de contours d'occultation. Nous présentons par la suite la méthode que nous utilisons.

### 3.2.2 Algorithme

Soient  $P_1, \dots, P_n$  les points successifs d'un contour d'occultation et  $Q_1, \dots, Q_m$  ceux d'un contour d'occultation adjacent. Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des triangles

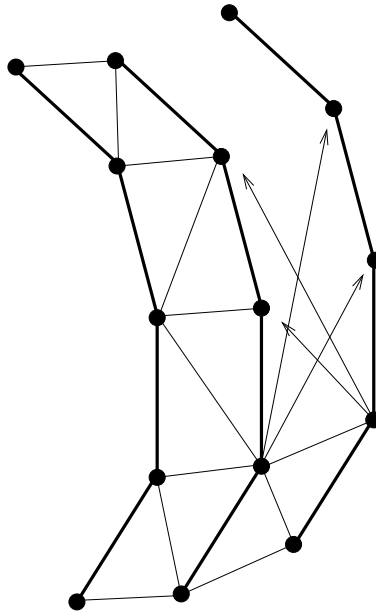


FIG. 3.1 – *Triangulation des points entre les contours d'occultation.*

de la forme  $\{P_i, P_{i+1}, Q_j\}$  et  $\{Q_j, Q_{j+1}, P_i\}$  reliant les contours  $P$  et  $Q$ . C'est un problème bien connu en CAO, qui concerne notamment les reconstructions de surfaces à partir de contours plans. Notre approche s'inspire de la méthode proposée par Fuchs et al. [Fuc 77] pour traiter ce problème.

Nous voulons que les facettes triangulaires reliant deux contours s'emboîtent de manière naturelle les unes dans les autres. Pour cela, ces facettes doivent vérifier les conditions suivantes :

- Une facette est définie par deux points successifs sur un contour et un point sur le contour adjacent.
- Deux facettes ayant un même point pour sommet ont alors un côté en commun en ce point.

Ces conditions ne sont cependant pas suffisantes pour définir une triangulation unique entre deux contours et un critère additionnel doit être introduit. Ce critère est basé sur la définition d'une fonction de coût associée aux différentes jonctions possibles entre les contours. La triangulation de deux contours d'occultation successifs revient alors à trouver le chemin de coût minimum dans un graphe ; graphe dans lequel les sommets correspondent à toutes les connexions possibles entre les points des deux contours (figure 3.2). En raison des contraintes imposées sur les facettes triangulaires et si nous supposons les deux contours ouverts, il s'agit alors d'un graphe planaire orienté<sup>14</sup>. Le nombre d'opérations nécessaires pour trouver le chemin de coût minimum correspond dans ce cas au nombre d'arcs dans le graphe, soit  $2nm + m + n$ .

Le critère additionnel peut être de différents types et faire intervenir les longueurs des jonctions, les surfaces des facettes ou les angles entre les jonctions. Plusieurs critères ont été

---

14. Dans le cas de deux contours fermés, il s'agit alors d'un graphe torique [Fuc 77].



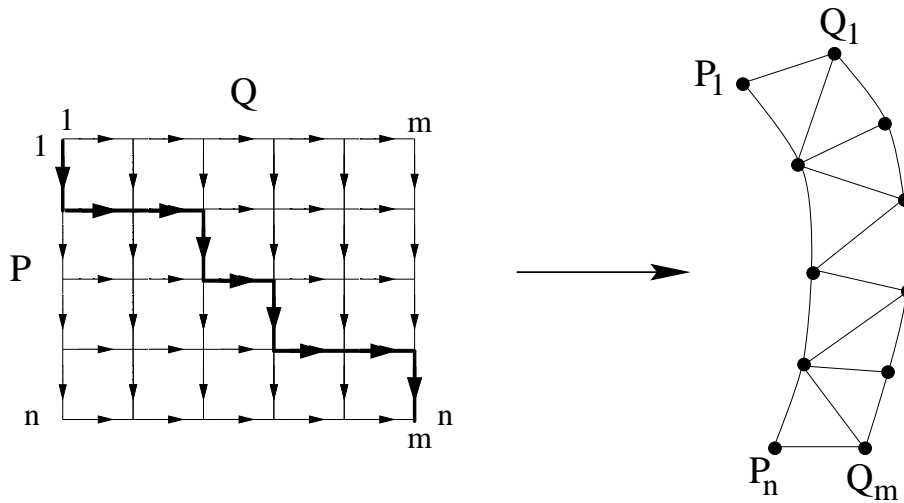


FIG. 3.2 – Le chemin de coût minimum détermine les jonctions entre les deux contours.

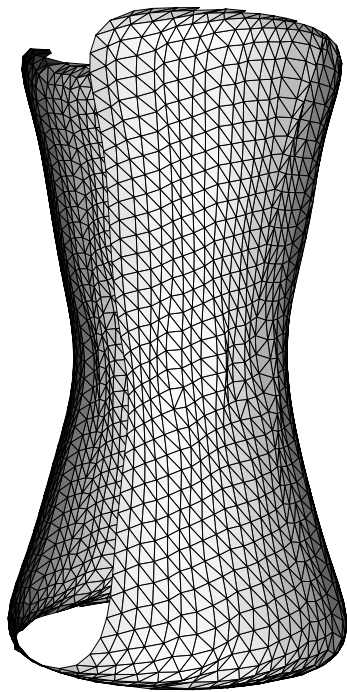
expérimentés dans ce sens sur des données réelles. Les résultats sont sensiblement équivalents dans tous les cas. Par la suite, nous avons choisi de minimiser la somme des longueurs des cotés. La figure 3.3 illustre sur plusieurs exemples le procédé de triangulation. Les points traités sont ceux obtenus par reconstruction des contours d'occultations de divers objets (cf. chapitre 2).

**Remarque :** cette méthode permet de déterminer une triangulation de l'ensemble des points reconstruits. Cependant, dans le contexte des contours d'occultation, une partie de la surface peut être balayée plusieurs fois par les contours, en fonction du mouvement de la caméra. C'est notamment le cas au voisinage des points doubles, lorsque le mouvement de la caméra est non-linéaire. La triangulation résultante peut alors contenir plusieurs facettes décrivant les mêmes zones de la surface. Néanmoins, en raison de l'instabilité de la reconstruction au voisinage des points multiples, ces parties des contours ne sont pas reconstruites. Par la suite, nous supposons donc, sans perte de généralités, que le mouvement de la caméra est tel que les triangulations réalisées ne se recouvrent pas. Maintenant, si le besoin de traiter ces problèmes se présentait, une étape de fusion des facettes pourrait être appliquée à la triangulation, dans le but d'éliminer les superpositions de facettes.

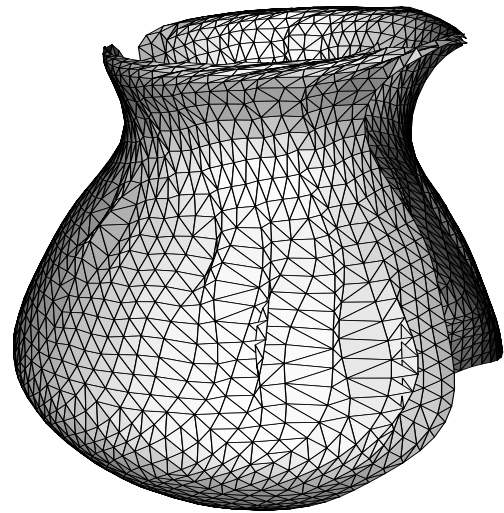
### 3.3 Lisser la surface

L'étape de triangulation des contours présentée au paragraphe précédent permet d'obtenir un maillage polygonal qui approxime la région de la surface balayée par les contours d'occultation. Cependant, la reconstruction des points est un processus fragile dans lequel s'introduisent différentes perturbations. Les causes sont multiples et font intervenir dans notre cas :

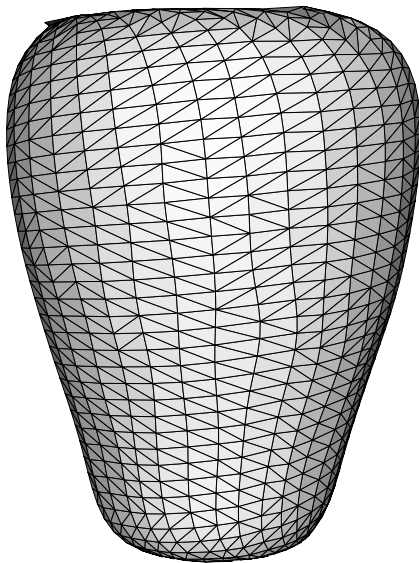
- le bruit présent dans le processus d'acquisition d'images (éclairage, objectif, numérisation, etc.) ;
- l'erreur de modèle dans le calibrage de la caméra ;
- les erreurs de suivi de contours ;



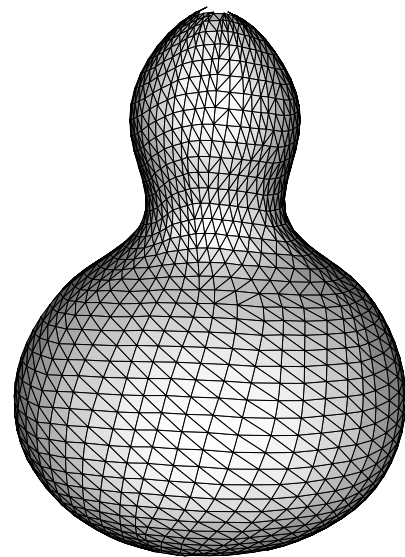
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 3.3 – Exemples de triangulation: (a) le pot (1962 points, 27 contours), (b) la théière (2191 points, 31 contours), (c) le vase (1272 points, 16 contours), (d) la calabasse (2381 points, 27 contours).

- les faibles déplacements de la caméra entre deux positions successives.

Il est difficile de détecter localement les points fortement sujets à ces perturbations. Les contours reconstruits peuvent, en conséquence, se chevaucher (figure 3.4) et la surface résultante se plier. Pour corriger ces défauts, il est alors nécessaire de *lisser* la surface reconstruite.

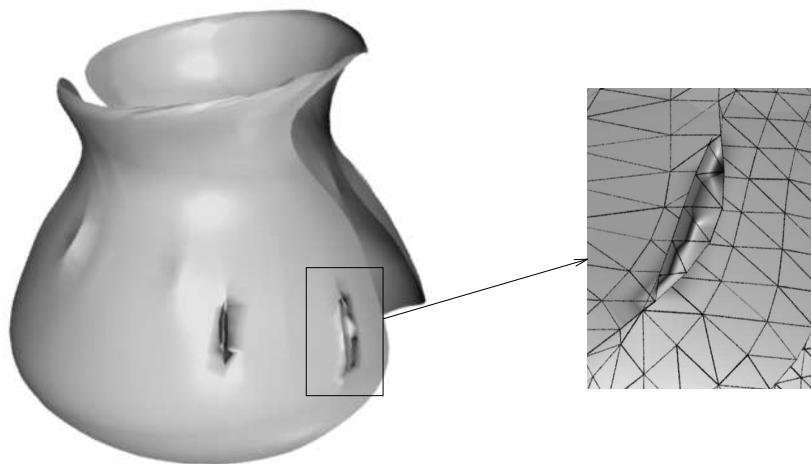


FIG. 3.4 – *En raison du bruit, la surface reconstruite peut présenter des plis. C'est le cas ici de la théière où un rendu réaliste (ombrage de Gouraud) les met en évidence.*

Dans ce contexte, nous proposons un algorithme de lissage des surfaces définies sous la forme de maillage polygonal. Celui-ci est basé sur la minimisation d'une fonctionnelle prenant en compte l'adéquation aux données et un critère de régularité de la surface. Les positions des sommets sont modifiées sans changer leurs connectivités. La surface est ainsi *lissée* tout en assurant la cohérence avec les données : les positions initiales des sommets. Plusieurs fonctions de rappel aux données peuvent être utilisées : les distances aux positions initiales ou les distances aux plans tangents, lorsque ceux-ci sont connus. Le critère de régularité intervenant dans le processus prend en compte la longueur des côtés des facettes constituant la surface. La simplicité de la mise en œuvre de ce critère permet de traiter des surfaces constituées d'un nombre important de sommets, ce qui peut-être le cas dans de nombreuses applications, dont la reconstruction à partir des contours occultants.

Nous étudions tout d'abord différentes méthodes existantes pour traiter le problème de lissage et précisons leurs avantages et leurs limites. Nous présentons ensuite notre approche, ses propriétés et sa mise en œuvre pratique. Nous montrons enfin différents résultats expérimentaux obtenus sur des données synthétiques ainsi que sur des données issues du processus de reconstruction.

### 3.3.1 Différentes méthodes

Les algorithmes existants pour traiter ce problème peuvent être classés, de manière grossière, en deux catégories : les méthodes de régularisation et les approches de type filtrage.

### Les méthodes de régularisation

La première catégorie regroupe les approches basées sur une méthode de régularisation standard [Pog 85], qui consiste à minimiser une fonctionnelle prenant en compte une contrainte physique sur les données, et un critère de régularité de la solution. Classiquement, le critère de régularité fait intervenir, dans le cas de la reconstruction de surfaces, les dérivées secondes ou les courbures [Gri 81]. Un tel critère concerne des modèles de surfaces continues et ne peut donc pas être appliqué directement sur un modèle polyédrique. Une approche consisterait à approximer de manière discrète les dérivées ou les courbures de la surface. Différents travaux proposent des solutions dans ce sens [Mal 89, Che 92, Mor 92, Wel 94, Tau 95b]. Néanmoins, les critères régularisants qui découlent de l'usage de ces approximations ne permettent pas toujours de pénaliser un angle aigu. En conséquence, un pli de la surface à régulariser ne serait pas nécessairement corrigé par ce type d'approche. Un autre inconvénient majeur qui apparaît dans certaines de ces approches est la complexité des calculs. Celle-ci rend les fonctionnelles difficiles à minimiser lorsque le nombre de sommets est important.

### Les approches signal

Une deuxième catégorie concerne les approches de type *filtrage*, qui consistent à utiliser une décomposition de la surface sous la forme de signaux élémentaires (séries de Fourier), et à éliminer les hautes fréquences de cette décomposition qui correspondent alors au bruit. Dans le cas continu, Oliensis [Oli 93] a proposé une méthode basée sur le filtre de Gauss, qui corrige le rétrécissement provoqué par ce type de filtre. Dans le cas de surfaces polyédriques, Taubin [Tau 95a, Tau 96] a récemment proposé un algorithme basé sur le principe de décomposition et dont la complexité en temps ainsi qu'en espace est linéaire. Le principe est de moyennner la position de chaque sommet avec celles de ses voisins directs et d'itérer ce processus. Une correction est effectuée à chaque itération pour éviter l'effet de rétrécissement provoqué par le filtrage. Un des inconvénients de cet algorithme est de ne pas assurer de manière précise la cohérence avec les données initiales. De plus, le filtre résultant du processus itératif peut amplifier de manière très importante les bruits qui correspondent à de très hautes fréquences de la décomposition. C'est le cas notamment lorsque deux sommets voisins sont très proches, ce qui se caractérise par un pic sur la surface résultat.

### Notre approche

Notre approche est basée sur une méthode de régularisation, ceci dans le but de contrôler la fiabilité de la surface résultat par rapport aux données initiales. Soit  $\mathcal{S}$  la surface à lisser, définie par l'ensemble  $P = \{P_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  des sommets et l'ensemble  $F = \{F_j\}_{j \in \{1, \dots, m\}}$  des facettes. Un sommet étant caractérisé par sa position dans l'espace et une facette par les indices des sommets qui la constituent. La régularisation de  $\mathcal{S} = (P, F)$  consiste alors à modifier la position des sommets intérieurs de  $\mathcal{S}$  de manière à minimiser une fonctionnelle  $E$ . Celle-ci est composée d'une énergie de rappel  $E_{rap}$ , qui prend en compte l'adéquation aux données, et d'une énergie  $E_{reg}$  qui prend en compte la régularité de la surface :

$$E(P, F) = E_{rap}(P) + \nu E_{reg}(P, F). \quad (3.1)$$

### 3.3.2 Énergie de régularisation

Notre approche fait intervenir un terme régularisant d'ordre 1. Il s'agit d'un critère global de la surface, basé sur la somme des longueurs des cotés de la surface. Intuitivement l'idée est ici de minimiser la taille totale du maillage de  $\mathcal{S}$  afin de corriger les défauts importants. Le fait d'utiliser un critère d'ordre 1 se justifie dans ce cadre, notamment pour les deux raisons suivantes :

- Ce critère est simple à mettre en œuvre ; les dérivées sont en particulier facilement déterminables.
- Notre but est de corriger les défauts de la surface, avant d'assurer à l'aide de fonctions d'interpolation et de critères de degrés plus élevés une continuité  $C^n$  de la surface solution.

De plus, le critère introduit permet de contraindre l'orientation locale de la surface solution, comme nous allons le voir.

Soit  $v_i$  l'ensemble des indices des sommets voisins directs du sommet  $P_i$ . Soit  $C_{ij}$  le vecteur associé au côté  $(P_i, P_j)$  :

$$C_{ij} = P_i - P_j,$$

l'énergie de régularisation de  $\mathcal{S}$  s'écrit alors :

$$E_{reg}(P, F) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in v_i} \alpha_{ij} |C_{ij}|, \quad (3.2)$$

où  $|\cdot|$  représente la norme Euclidienne et  $\alpha_{ij}$  est un coefficient associé au côté  $(P_i, P_j)$  ( $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ). Celui-ci peut être fixé à 1 lorsque les surfaces des facettes d'un voisinage sont approximativement équivalentes ou bien égal à la somme des surfaces des deux facettes entourant le côté  $(P_i, P_j)$  dans le cas contraire.

Soit  $N_i$  la normale discrète à  $\mathcal{S}$  au sommet  $P_i$ . La direction  $D_i$  de celle-ci peut être définie comme la somme pondérée des directions de chaque côté qui arrive au sommet  $P_i$  (figure 3.5) [Tau 95a] :

$$D_i = \sum_{j \in v_i} \alpha_{ij} \frac{C_{ij}}{|C_{ij}|}, \quad N_i = \frac{D_i}{|D_i|}.$$

Soit  $\mathcal{S}^* = (P^*, F)$  la surface solution constituée des sommets  $P^* = \{P_i^*\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  qui minimisent  $E$  :

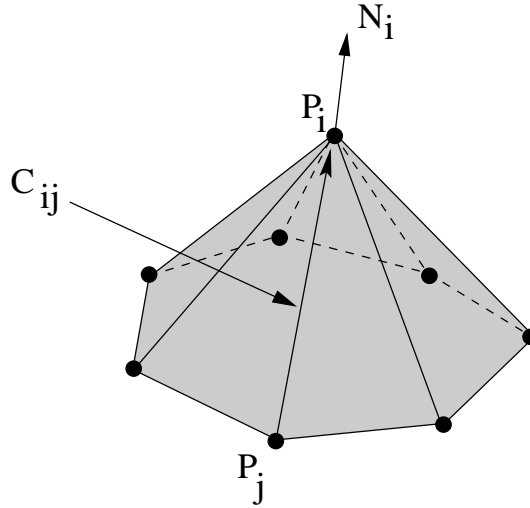
$$P^* = \min_P E(P, F),$$

alors, en chaque sommet intérieur de  $\mathcal{S}^*$  nous avons<sup>15</sup> :

**Propriété 3.1.** *La normale discrète  $N_i^*$  à  $\mathcal{S}^*$  au sommet intérieur  $P_i^*$  est orientée suivant le gradient de la force de rappel en ce point :*

$$N_i^* = \frac{-1}{2 \nu |D_i|} \nabla E_{rap}(P_i^*). \quad (3.3)$$

15. Les positions des sommets constituant les bords de  $\mathcal{S}$  ne sont pas optimisées.

FIG. 3.5 – Les côtés  $C_{ij}$  qui arrivent au sommet  $P_i$ .

Démonstration: les conditions d'optimalité à l'ordre 1 de la solution font que :

$$\nu \nabla E_{reg}(P^*) = -\nabla E_{rap}(P^*),$$

soit en chaque point optimisé :

$$\nu \nabla E_{reg}(P_i^*) = -\nabla E_{rap}(P_i^*). \quad (3.4)$$

Or, le gradient de l'énergie de régularisation au point  $P_i$  s'écrit :

$$\nabla E_{reg}(P_i) = \sum_{j \in v_i} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \frac{P_i - P_j}{|P_i - P_j|} = 2 |D_i| N_i. \quad (3.5)$$

En combinant les expressions (3.4) et (3.5), on obtient :

$$N_i^* = \frac{-1}{2 \nu |D_i|} \nabla E_{rap}(P_i^*).$$

□

Cette propriété explicite donc les contraintes locales de forme qui sont imposées à la surface  $\mathcal{S}^*$  qui minimise la fonctionnelle  $E$ . Ainsi, l'orientation locale de  $\mathcal{S}^*$  est déterminée par la fonction de rappel choisie.

### 3.3.3 Énergies de rappel

Ces énergies ont pour but de contraindre l'évolution des sommets de la surface de manière à rester conforme aux données. S'agissant de surfaces reconstruites à partir de contours occultants, les données sont les positions des sommets  $P_i$  ainsi que les normales à la surface en chacun de ces sommets. Il est donc possible de définir une fonction de rappel prenant en compte soit les distances entre les positions optimisées et initiales de chaque sommet, soit les distances aux plans tangents définis par les positions initiales et les normales. Nous précisons ici ces énergies et explicitons les orientations locales de la surface qui en découlent.

### Distances aux positions initiales

L'énergie de rappel aux données s'écrit dans ce cas :

$$E_{rap}(P) = \sum_{i=1..n} |P_i - P_i^o|^2, \quad (3.6)$$

où  $P_i^o$  représente la position initiale avant optimisation du sommet  $P_i$ . Le gradient au point  $P_i$  est :

$$\nabla E_{rap}(P_i) = 2(P_i - P_i^o),$$

et les normales discrètes à la surface  $\mathcal{S}^*$  vérifient alors :

$$N_i^* = \frac{-1}{\nu |D_i|} (P_i^* - P_i^o).$$

La surface  $\mathcal{S}^*$  sera donc orientée localement dans la direction des sommets initiaux (figure 3.6).

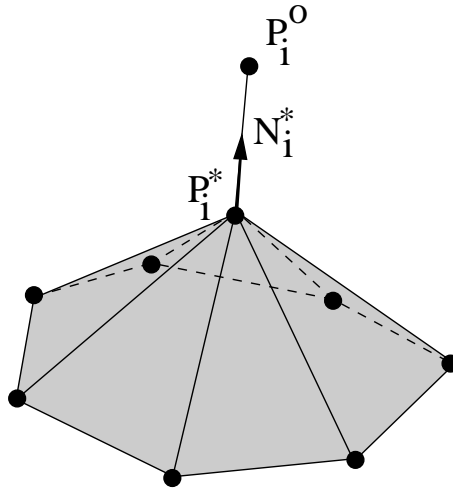


FIG. 3.6 – La normale discrète à la surface lorsque l'énergie de rappel est la distance à la position initiale.

### Distances aux plans tangents

Soient  $\{N_i^o\}_{i \in \{1..n\}}$  les normales données en chaque sommet. La fonction de rappel s'écrit alors :

$$E_{rap}(P) = \sum_{i=1..n} [(P_i^o - P_i) \cdot N_i^o]^2, \quad (3.7)$$

et dans ce cas, les normales discrètes à la surface  $\mathcal{S}^*$  vérifient :

$$N_i^* = \frac{-1}{\nu |D_i|} [(P_i^o - P_i) \cdot N_i^o] \cdot N_i^o.$$

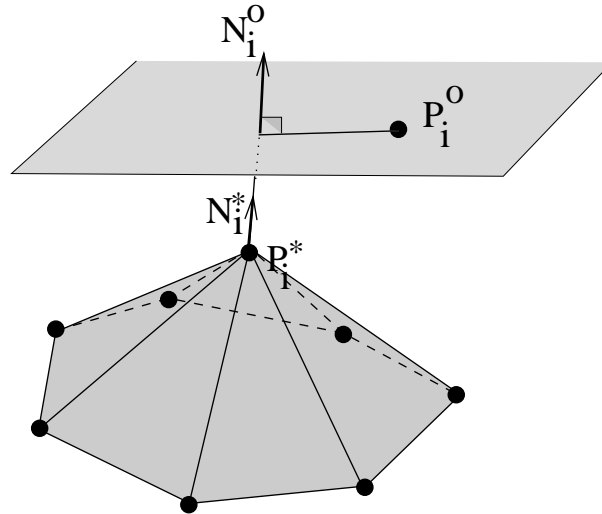


FIG. 3.7 – La normale discrète à la surface lorsque l'énergie de rappel est la distance au plan tangent.

La direction d'une normale discrète à  $\mathcal{S}^*$  sera donc celle de la normale initiale  $N_i^o$  (figure 3.7). Cette propriété est intéressante au sens où elle impose une contrainte forte à l'orientation locale de la surface solution.

### 3.3.4 Le coefficient de régularisation $\nu$

L'énergie totale  $E$  minimisée s'écrit :

$$E(P, F) = E_{rap}(P) + \nu E_{reg}(P, F),$$

où  $\nu$  est le coefficient de régularisation qui fixe le compromis entre la conformité aux données et la régularité de la surface solution. Le problème qui se pose est alors de fixer cette valeur en fonction du but recherché : conformité ou régularité. Dans le cas qui nous concerne, la régularisation d'une surface polyédrique, le but est de limiter les déplacements des sommets de manière à rester proche des données initiales. Ceci permet notamment d'éviter les problèmes de rétrécissement provoqués par les approches filtrages.

Dans cet objectif, le paramètre  $\nu$  peut être fixé de manière empirique pour un problème donné. Lorsque les problèmes traités sont similaires, cette approche est simple à mettre en œuvre et ne nécessite aucune connaissance *a priori*. Dans le cas contraire, la détermination du coefficient  $\nu$  optimal peut devenir fastidieuse. Une autre approche consiste à introduire une connaissance *a priori* sur le bruit, sous la forme d'une valeur moyenne imposée de l'énergie de rappel en chaque sommet,  $E_{rap}(P^*) = e_m$ . Pour cela, le problème de minimisation de  $E$  peut être reformulé sous la forme d'une minimisation sous contrainte.  $\mathcal{S}^* = (P^*, F)$  avec :

$$P^* = \min_P E_{reg}(P, F) \quad \text{sous la contrainte} \quad E_{rap}(P) = e_m,$$

où  $\nu$  est alors le lagrangien tel que la solution vérifie la contrainte d'optimalité au premier ordre :

$$\nabla E_{rap}(P^*) + \nu \nabla E_{reg}(P^*) = 0.$$



La résolution des problèmes de minimisation sous contrainte a fait l'objet d'un nombre important d'études en optimisation. Plusieurs méthodes existent dans ce cadre [Fle 87, Cul 94]. Nous avons en particulier utilisé une méthode de *pénalisation exacte*. Celle-ci consiste à minimiser la fonctionnelle :

$$F_c(P, F) = E_{reg}(P, F) + c |E_{rap}(P) - e_m|.$$

Cette fonctionnelle possède la propriété d'être minimale pour les positions  $P^*$  lorsque le coefficient  $c$  vérifie :

$$c \geq \frac{1}{\nu}.$$

L'intérêt de cette approche est de permettre un contrôle précis de la conformité aux données à l'aide de la valeur imposée  $e_m$ . Le problème de la détermination du coefficient  $c$  peut alors être résolu de manière itérative par un algorithme adapté [Fle 87].

### 3.3.5 Résultats expérimentaux

Plusieurs expérimentations de la méthode de lissage ont été menées, sur des données synthétiques et sur des données réelles provenant du processus de reconstruction et de triangulation à partir des contours occultants présenté précédemment. Les minimisations de la fonctionnelle  $E$  ont été réalisées à l'aide d'une méthode de gradient conjugué [Pre 92] et celles de la fonctionnelle  $F_c$  à l'aide d'une méthode de gradient à pas optimal. Nous présentons ici les résultats obtenus.

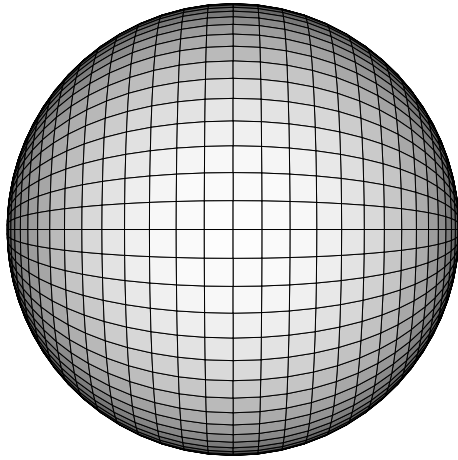
#### Données synthétiques

Il s'agit, en premier lieu, d'une approximation polyédrique d'une sphère : 2800 sommets  $P$  sont répartis de manière non uniforme sur une sphère de rayon 1 centrée à l'origine (figure 3.8-a). Chaque coordonnée des sommets de la surface a été bruitée (figure 3.8-b) avec un bruit blanc uniforme d'amplitude 0.1 (les bruits des différentes coordonnées sont décorrélés).

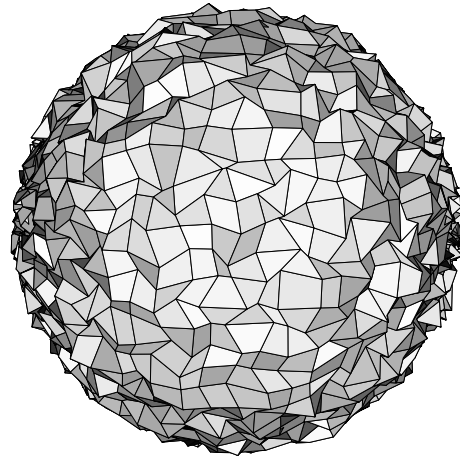
La figure 3.9 montre les résultats obtenus avec les distances aux positions initiales comme critère de fiabilité. La valeur moyenne du carré de ces distances a été fixée au travers de valeurs imposées de  $E_{rap} : E_{rap} = n \times 0.01^2$  (figure 3.9-a) et  $E_{rap} = n \times 0.05^2$  (figure 3.9-b), où  $n$  est le nombre de sommets. La distance moyenne  $\bar{d}$  des sommets au centre de la sphère initiale ainsi que son écart type  $\sigma_d$  sont indiqués au bas des figures. Les résultats montrés dans la figure 3.10 reprennent la même démarche avec les distances aux plans tangents initiaux comme critère de fiabilité. La valeur moyenne de l'énergie de rappel est dans ce cas aussi fixée à :  $E_{rap} = n \times 0.01^2$  (figure 3.9-a) et à :  $E_{rap} = n \times 0.05^2$  (figure 3.9-b).

L'ensemble de ces résultats montrent que, lorsque le déplacement des points est suffisant, la surface obtenue est effectivement lissée. Il apparaît de plus que l'information de la normale à la surface en chaque sommet améliore de manière importante la régularisation lorsqu'elle est utilisée. Enfin, on remarquera, au travers des distances moyennes des sommets au centre de la sphère initiale, l'effet de rétrécissement provoqué par la régularisation. Cet effet restant néanmoins minime.

Une deuxième expérimentation sur des données synthétiques a été menée sur un modèle de visage (figure 3.11-a). Les sommets, au nombre de 657, sont répartis de manière non



(a) Distance à l'origine :  $\bar{d} = 1.0$ ,  $\sigma_d = 0.0$ .



(b) Distance à l'origine :  $\bar{d} = 1.000917$ ,  $\sigma_d = 0.02873$ .

FIG. 3.8 – Approximation polyédrique d'une sphère : (a) la sphère (2800 sommets), (b) la sphère bruitée.

uniforme. Les facettes sont ici triangulaires. De la même manière que pour la sphère, chaque coordonnée de chaque sommet de la surface a été bruitée (figure 3.11-b). La surface bruitée a été ensuite régularisée (les sommets intérieurs uniquement) avec les distances aux positions initiales comme critère de fiabilité. L'aspect de la régularisation qui nous intéresse ici n'est pas quantitatif, à l'image de la série d'expériences sur la sphère, mais qualitatif et concerne les effets visuels produits par la régularisation. Les 3 figures montrées (figure 3.11-abc) sont à la même échelle et l'on peut voir que la régularisation effectuée ne produit pas de déformations importantes, ceci même lorsque les facettes sont de tailles très différentes d'une région à une autre. On remarquera de plus que la symétrie originale du visage réapparaît sur la surface régularisée.

### Données réelles

Nous avons expérimenté la méthode de régularisation sur les données de la théière : 2191 points appartenant à 31 contours d'occultation. Les normales à la surface en chaque point sont données par le processus de reconstruction. La surface triangulée initiale est montrée dans les figures 3.12-ab. Aucun ombrage n'est utilisé ici, ceci pour mettre en évidence l'aspect *réel* de la surface polygonale. On remarquera les nombreux chevauchements de contour sur cette surface (figure 3.12-a). Les figures 3.12-cd montrent la surface régularisée sous la contrainte d'une distance carré moyenne aux plans tangents de 1mm :  $E_{rap} = 2191 \times 1^2$  (la théière mesure 15 cm de haut approximativement). Ces figures illustrent la contrainte d'orientation locale de la surface régularisée. En effet, le changement d'orientation sur le bas de la théière est plus prononcé après régularisation, ceci car les directions des normales discrètes de la surface régularisée doivent alors correspondre avec celles issues du processus de reconstruction local.

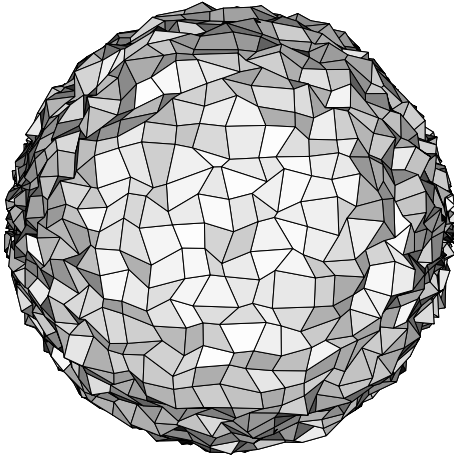
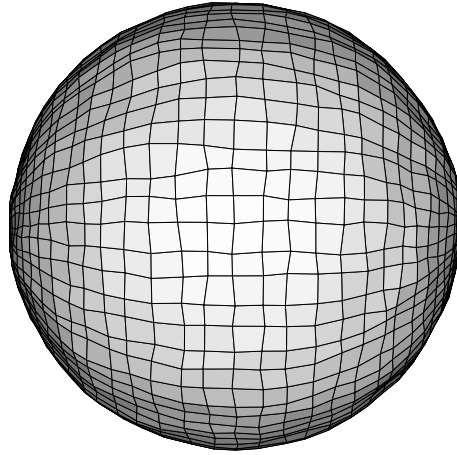
(a)  $\bar{d} = 1.000213$ ,  $\sigma_d = 0.0234$ .(b)  $\bar{d} = 0.9756$ ,  $\sigma_d = 0.00858$ .

FIG. 3.9 – *Sphère régularisée avec les distances aux positions initiales comme critère de fiabilité*: (a)  $E_{rap} = n \times 0.01^2$ , (b)  $E_{rap} = n \times 0.05^2$ .

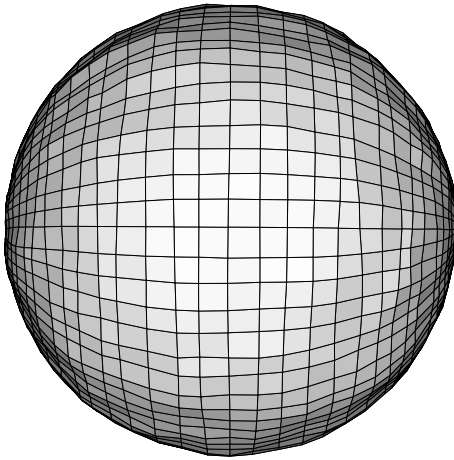
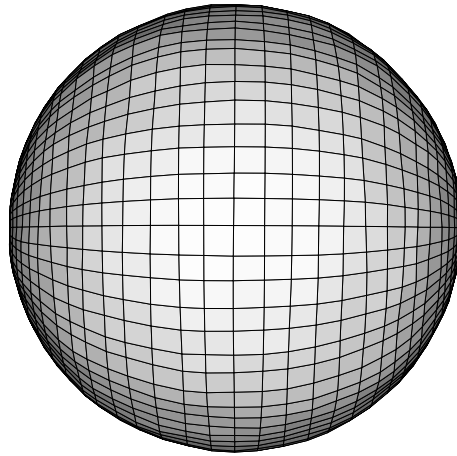
(a)  $\bar{d} = 0.9889$ ,  $\sigma_d = 0.010$ .(b)  $\bar{d} = 0.9608$ ,  $\sigma_d = 0.00869$ .

FIG. 3.10 – *Sphère régularisée avec les distances aux plans tangents initiaux comme critère de fiabilité*: (a)  $E_{rap} = n \times 0.01^2$ , (b)  $E_{rap} = n \times 0.05^2$ .

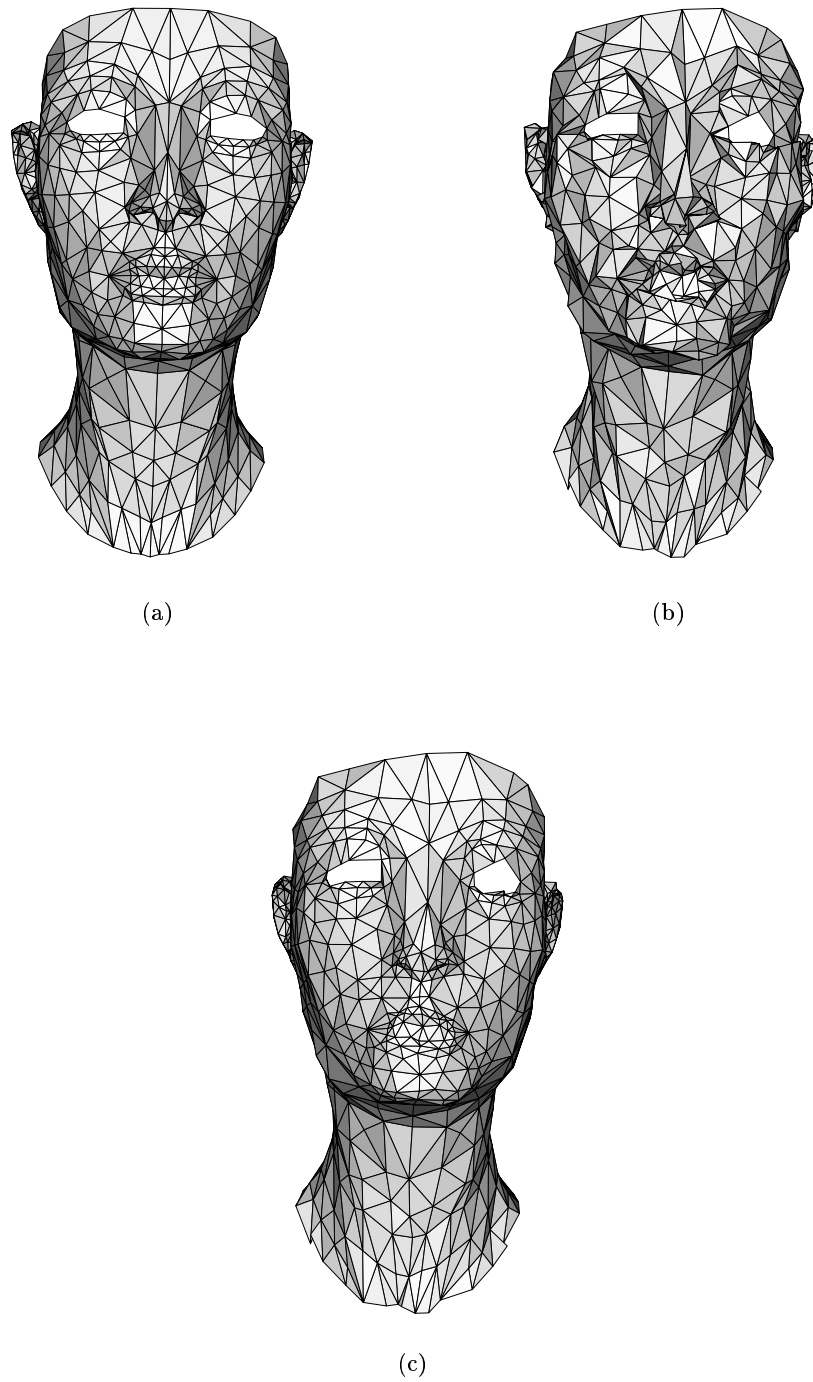


FIG. 3.11 – Un modèle de visage : (a) surface initiale (657 sommets), (b) surface bruitée, (c) surface régularisée.

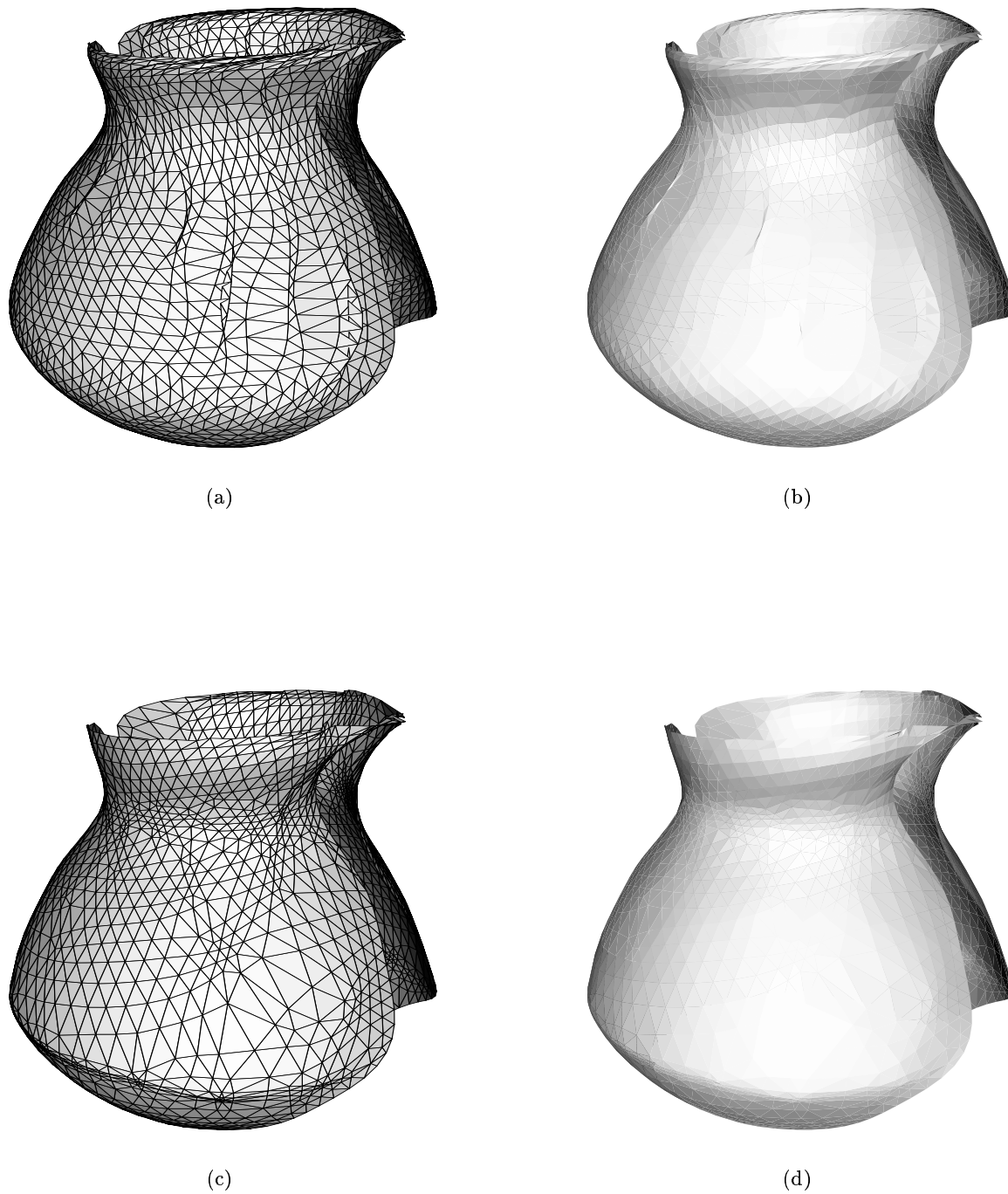


FIG. 3.12 – La théière reconstruite (2191 sommets, 31 contours d'occultation): (a-b) la surface triangulée, (c-d) la surface après la régularisation.

### 3.4 Les régions non-visibles par les contours : étude et détection

Dans le processus de reconstruction à partir des contours occultants, certaines parties de la surface peuvent ne pas être accessibles au travers des contours occultants. Ces régions *non-visibles* correspondent aux parties de la surface qui sont concaves, planes ou occultées par d'autres parties de la surface. Lorsque la caméra se déplace autour de la surface, le contour d'occultation observé ne balaye pas les parties concaves ou planes, et le contour occultant devient singulier (jonction en T) dans le cas où une partie de la surface est occultée. La surface spatio-temporelle devient dans les deux cas singulière. Le modèle local utilisé pour la reconstruction, qui repose sur l'hypothèse que la surface est convexe dans la direction d'observation, n'est alors plus valide. La surface reconstruite ne correspond donc pas dans ces régions, à la surface  $\mathcal{S}$  observée. Nous nous proposons ici de détecter ces régions de la surface lorsqu'elles se présentent, ceci afin d'identifier les parties reconstruites dans le modèle final qui ne coïncident pas avec  $\mathcal{S}$ .

Nous fixons dans un premier temps le contexte dans lequel nous cherchons à détecter ces régions et quelles parties de la surface cela concerne. Pour cela, nous introduisons la notion de *visibilité* d'un point. Nous étudions ensuite le cas d'observations continues et nous en déduisons un critère de détection dans le cas discret. Des expérimentations sur des données réelles illustrent le processus de détection.

#### 3.4.1 Le contexte

Nous supposons que la surface observée  $\mathcal{S}$  est opaque et que la caméra effectue un mouvement continu  $C(t)$  à l'extérieur de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{S}$  (ce qui élimine les positions de la caméra à l'intérieur des concavités). Nous considérons une séquence de contours occultants, associée aux positions  $C(t)$  de la caméra. Pour un déplacement continu de la caméra, cette séquence de contours définit une surface spatio-temporelle  $\bar{\mathcal{S}}$  de  $\mathcal{S}$  (cf. § 1.3.1). La partie de la surface qui est visible pour cette séquence regroupe l'ensemble des points  $P$  qui possèdent un point image  $p$  sur un contour de la séquence, ou de manière équivalente un point image sur la surface  $\bar{\mathcal{S}}$ . On vérifie alors aisément que pour un point visible :

- il existe une position  $C(t)$  de la caméra pour laquelle la droite  $(CP)$  est tangente à la surface ;
- si cette ligne intersecte  $\mathcal{S}$  en un autre point  $P'$ , alors soit la droite  $(CP)$  est aussi tangente à  $\mathcal{S}$  en  $P'$ , soit  $P'$  est situé derrière  $P$  (suivant la direction d'observation).

La partie de la surface qui est visible pour la séquence considérée est constituée de l'ensemble des points  $P$  disposant d'une image sur le surface spatio-temporelle. Aux limites de cette partie visible, se trouvent les points critiques suivants (figure 3.4.1) :

**Définition 3.1.** *Un point  $P$  de la surface  $\mathcal{S}$  est dit critique, pour la séquence de contours considérée, si :*

- $P$  est visible ;
- et une des 3 conditions suivantes est vérifiée :
  1. la ligne de vue en  $P$  est bi-tangente à  $\mathcal{S}$ ,

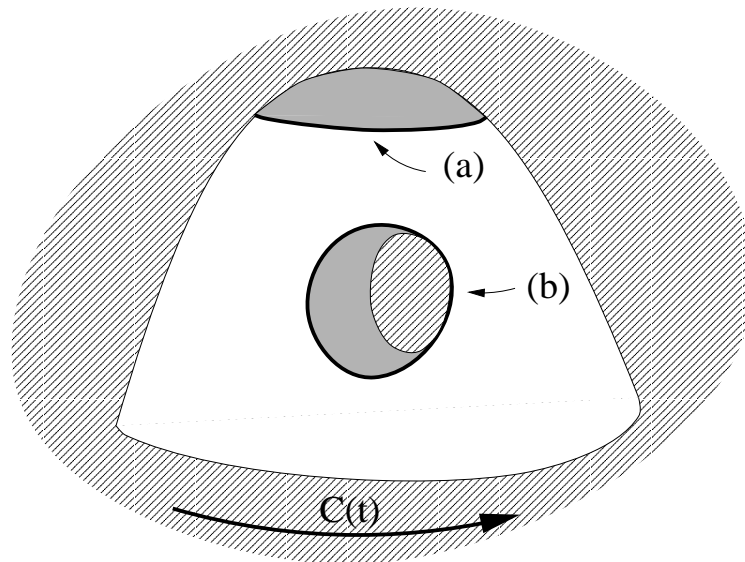


FIG. 3.13 – Exemple de points critiques sur la surface observée : (a) points frontières, (b) points de bi-tangence.

2. la ligne de vue en  $P$  est dans une direction asymptotique à  $\mathcal{S}$  (contact d'ordre supérieur à 2).
3.  $P$  est un point frontière ( $C_t \cdot N = 0$ ).

**Remarque :** si  $P$  est visible depuis plusieurs positions de la caméra, alors  $P$  est critique si chacune de ces lignes de vues vérifie au moins une des conditions énoncées.

Les points critiques introduits ici sont les points visibles de la surface où le paramétrage épipolaire sur  $\mathcal{S}$  n'est plus défini (propriété 1.3), et correspondent aux singularités de la surface spatio-temporelle. Ces singularités caractérisent :

- Les limites intérieures de la partie visible de la surface dans le premier cas (bi-tangence de la ligne de vue). Celles-ci correspondent au passage d'une région plane ou concave de la surface, ou à une occultation de la surface par elle-même, et elles entraînent des discontinuités des courbes épipolaires sur la surface.
- Les limites extérieures de la partie visible de la surface dans les deux cas suivants (points frontières et ligne de vue dans une direction asymptotique). Celles-ci entraînent des rebroussements des courbes épipolaires sur la surface.

Dans le contexte de la construction de modèle, nous cherchons à détecter les “trous” de la partie visible de la surface qui résultent du premier cas. Il s'agit alors de déterminer les discontinuités qui apparaissent, dans le processus de reconstruction, sur les courbes épipolaires.

### 3.4.2 Le cas d'observations continues

Le paramétrage épipolaire échoue aux limites de visibilité sur la surface. Cela se traduit par des singularités de la courbe épipolaire sur  $\mathcal{S}$  et, en particulier, par une discontinuité de cette dernière lorsque la ligne de vue est bi-tangente à la surface. Nous allons voir dans ce

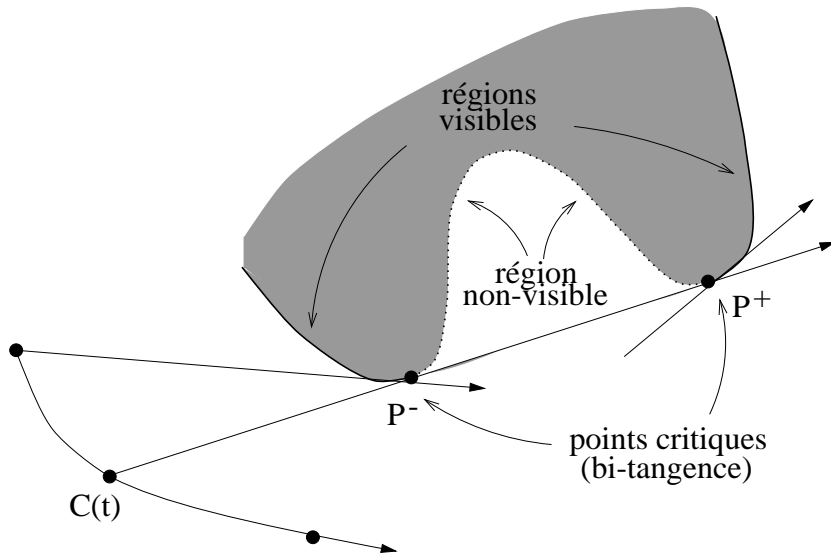


FIG. 3.14 – Le passage d'une région non-visible - coupe dans le plan épipolaire.

paragraphe que la détection de ces discontinuités peut se faire directement à partir des données images, soit à partir de la surface spatio-temporelle définie par la séquence de contours.

Lorsque la ligne de vue est bi-tangente, la courbe épipolaire sur  $\mathcal{S}$  passe d'un point de bi-tangence à un autre et une singularité apparaît sur la surface spatio-temporelle  $\bar{\mathcal{S}}$  sous la forme d'un point de rebroussement de la courbe épipolaire<sup>16</sup> sur  $\bar{\mathcal{S}}$ . Néanmoins, cette courbe de  $\bar{\mathcal{S}}$  reste continue ; de fait, lorsque le paramétrage épipolaire est utilisé, la position du point image ainsi que la direction de la ligne de vue sont des fonctions continues de  $t$  (par définition du paramétrage épipolaire), mais non la profondeur du point observé. Soient  $P^-$  et  $P^+$  deux points de  $\mathcal{S}$  pour lesquels la ligne de vue est bi-tangente (figure 3.14). Soient  $\lambda^-$  et  $\lambda^+$  leur profondeur le long de cette ligne de vue, alors la formule de profondeur (2.1) appliquée en  $P^-$  et  $P^+$  donne :

$$\lambda^- = \frac{C_t^- \cdot N^-}{T_t^- \cdot N^-}, \quad \lambda^+ = \frac{C_t^+ \cdot N^+}{T_t^+ \cdot N^+},$$

soit, dans le cas du paramétrage épipolaire (expression (2.2)) :

$$\lambda^- = \frac{C_t^- \cdot T_t^-}{T_t^- \cdot T_t^-}, \quad \lambda^+ = \frac{C_t^+ \cdot T_t^+}{T_t^+ \cdot T_t^+}.$$

Par hypothèse,  $t$  paramètre le déplacement de la caméra. Si l'on suppose, sans perte de généralités, que  $C(t)$  est une fonction régulière de  $t$ , alors  $C_t^- = C_t^+$  et :

$$\boxed{\lambda^- = \frac{C_t \cdot T_t^-}{T_t^- \cdot T_t^-}, \quad \lambda^+ = \frac{C_t \cdot T_t^+}{T_t^+ \cdot T_t^+}.} \quad (3.8)$$

16. Il est à noter, par contre, que le contour occultant n'est pas forcément singulier au point correspondant.



La direction  $T$  de la ligne de vue est donc une fonction continue de  $t$  aux points de bi-tangences mais n'est pas différentiable en ces points :  $T_t^- \neq T_t^+$ . Zheng [Zhe 92] utilise cette propriété pour détecter les concavités dans le cas d'une projection orthographique et d'une rotation pure de la caméra, ceci par différentiation et filtrage de la position du point image dans des coupes planes de la surface spatio-temporelle. Dans le cas plus général d'une projection perspective et d'un mouvement quelconque de la caméra, la solution pour détecter ces points de bi-tangence à partir de la surface spatio-temporelle serait alors de différentier et de filtrer les valeurs de  $T$  le long des courbes épipolaires.

### 3.4.3 Le cas d'observations discrètes

Dans le cas d'observations discrètes, la profondeur des points des contours d'occultation est déterminée à l'aide d'une approximation à l'ordre 2 de la surface. Comme cela est montré dans la figure 3.15, la reconstruction produit alors, dans les régions non-visibles de la surface, des points qui n'appartiennent pas à la surface observée mais à l'enveloppe qui en est perçue au travers des contours occultants. Celle-ci correspond à l'enveloppe des plans tangents associés aux contours d'occultation observés. Nous l'appelons *enveloppe visuelle*, par analogie avec l'enveloppe introduite par Laurentini [Lau 94, Lau 95] dans un contexte polyédrique<sup>17</sup>. Pour s'en faire une idée intuitive, il suffit de considérer un mouvement de caméra continu, l'enveloppe visuelle correspond alors à la partie visible de la surface dans laquelle les "trous" sont comblés par des segments de droite reliant les couples de points bi-tangents.

Dans le but de détecter les régions non-visibles, nous cherchons à éliminer les points reconstruits qui appartiennent à l'enveloppe visuelle et non à la surface. Il faut pour cela déterminer les discontinuités du vecteur  $T_t$  ou, de manière équivalente, celles de la profondeur  $\lambda$  le long des courbes épipolaires. La méthode de reconstruction présentée au chapitre 2 fait intervenir 3 correspondants épipolaires successifs. Notre approche consiste alors à estimer  $T_t^-$  et  $T_t^+$  au point reconstruit à l'aide de ses deux correspondants épipolaires. Ces valeurs devraient être proches pour un point appartenant à la surface, et nous calculons donc :

$$\sigma = | |T_t^-| - |T_t^+| |, \quad (3.9)$$

où  $|\cdot|$  représente la norme Euclidienne. L'estimation des valeurs  $T_t^-$  et  $T_t^+$  à l'aide de deux correspondants épipolaires se fait par une approximation à l'ordre 1. Soient  $C(t_1)$ ,  $C(t_2)$  et  $C(t_3)$  trois positions successives de la caméra au temps  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ , et soient  $T(t_1)$ ,  $T(t_2)$  et  $T(t_3)$  trois directions de lignes de vue qui vérifient la contrainte épipolaire :  $T(t_1)$  avec  $T(t_2)$ , et  $T(t_2)$  avec  $T(t_3)$ . Au point  $P(t_2)$  sur la ligne de vue définie par  $C(t_2)$  et  $T(t_2)$ , nous avons à l'ordre 1 :

$$T_t^- = \frac{(T(t_2) - T(t_1))}{(t_2 - t_1)}, \quad T_t^+ = \frac{(T(t_3) - T(t_2))}{(t_3 - t_2)},$$

et si nous supposons que  $|C_t|$  est constant entre les trois positions de la caméra, ce qui

---

17. Initialement, Laurentini définit l'enveloppe visuelle comme un **volume** englobant l'objet observé, et dépendant d'une région d'observation occupée par la caméra. L'enveloppe visuelle dont nous parlons possède des propriétés similaires, mais nous considérons dans notre cas une **surface** recouvrant la partie observée de  $\mathcal{S}$ .

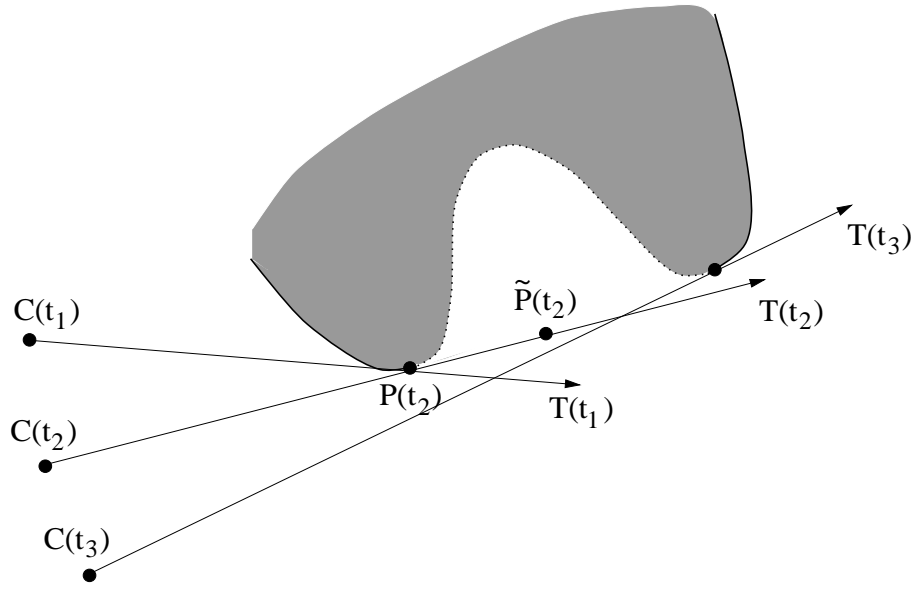


FIG. 3.15 – L’hypothèse de convexité de la surface dans la direction de la ligne de vue n’est plus vérifiée ; la position estimée de  $P(t_2)$  à l’aide d’une approximation à l’ordre 2 est alors  $\tilde{P}(t_2)$ .

n’est pas restrictif dans le cas discret, alors :

$$(t_2 - t_1) = \frac{|(C(t_2) - C(t_1))|}{|C_t|}, \quad (t_3 - t_2) = \frac{|(C(t_3) - C(t_2))|}{|C_t|},$$

et finalement :

$$\sigma = \left| \left( \frac{|(T(t_2) - T(t_1))|}{|(C(t_2) - C(t_1))|} - \frac{|(T(t_3) - T(t_2))|}{|(C(t_3) - C(t_2))|} \right) \right| |C_t|. \quad (3.10)$$

La détection des points n’appartenant pas à la surface se fait à l’aide d’un seuil. Ainsi, les points vérifiant :

$$\sigma < \text{seuil}, \quad (3.11)$$

seront considérés comme appartenant à la surface et, dans le cas contraire, comme des points de l’enveloppe visuelle occultant une partie concave de la surface dans la direction de la ligne de vue. Le choix du seuil fixe ici la résolution en deçà de laquelle les concavités dans la direction de la ligne de vue ne seront pas détectées. Ce choix repose donc sur un *a priori* concernant la surface et doit être fixé en fonction de l’application.

**Remarque :** une approche basée sur l’estimation à l’ordre 1 de  $\lambda^-$  et  $\lambda^+$  au point considéré serait équivalente puisque ces valeurs dépendent directement de celles de  $T_t^-$  et  $T_t^+$ .

L’approche qui est présentée ne nécessite que deux correspondants épipolaires d’un point pour déterminer son appartenance ou non à la surface. La détection peut donc se

faire directement à partir des données images utilisées pour la reconstruction d'un point. Maintenant, il peut être avantageux de faire intervenir un nombre plus important de points sur la courbe épipolaire, ceci pour rendre la détection plus robuste.

#### 3.4.4 Résultats expérimentaux

Nous présentons ici des résultats pour une séquence d'images d'une tasse et une séquence d'images d'une cruche. Les séquences ont été prises à l'aide d'une table micrométrique et les surfaces ont été reconstruites et triangulées à l'aide des méthodes présentées dans ce manuscrit. L'algorithme de détection présenté dans le cas discret a été appliqué aux points reconstruits. Les facettes contenant un point non-visible par les contours sont marquées en sombre sur les modèles construits (figures 3.16-cd et 3.17-cd).

Un aspect remarquable de la reconstruction apparaît sur le modèle de la cruche, figure 3.17-d. La fleur qui est présente sur la cruche (figure 3.17-a) a en effet été détectée comme une région non-visible par les contours. Ceci s'explique par le fait qu'au moment où la fleur disparaît du champ de vision, le contour d'occultation suivi dans la séquence passe d'un bord de la fleur à un autre; une singularité équivalente à celle d'une concavité apparaît alors sur la surface spatio-temporelle.

### 3.5 Une évaluation qualitative : reprojection des modèles dans les images initiales

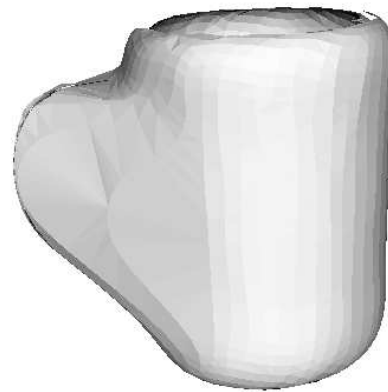
Il est difficile de juger de la qualité des modèles construits sans connaissances *a priori* sur ceux-ci. Dans notre cas, nous ne disposons d'aucune information 3D sur les objets réels qui ont été traités. Pour estimer néanmoins la précision de la reconstruction, nous effectuons un contrôle *a posteriori* de la surface reconstruite. Celui-ci consiste à projeter le modèle estimé dans une ou plusieurs des images de la séquence. La comparaison entre l'image du modèle projeté et l'image initiale donne alors une mesure qualitative de la reconstruction réalisée.

La procédure consiste donc à incruster un rendu réaliste des surfaces des modèles dans les images initiales. Nous utilisons pour cela le logiciel de rendu vort [Vort] qui est basé sur une méthode de lancer de rayon. Pour qu'une comparaison puisse s'effectuer, la projection image du modèle doit être équivalente à celle de l'objet initial. Le rendu est donc réalisé en prenant pour paramètres de caméra ceux déterminés durant l'étape préliminaire de calibration. Les images résultats de plusieurs des objets traités sont montrées dans les figures 3.18-3.19-3.20-3.21.

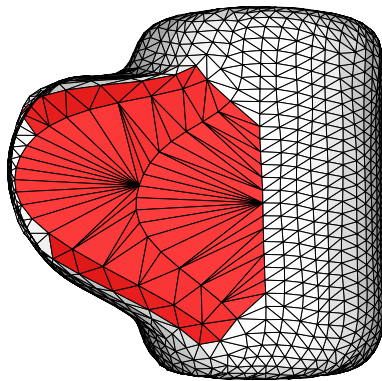
Ces figures mettent en évidence la cohérence entre les modèles construits et les surfaces observées. Un autre aspect intéressant qui apparaît ici est l'effet produit par le lissage 2D (B-splines) des contours occultants. Celui-ci est effectué lors du suivi dans la séquence et affecte en particulier les régions de la surface pour lesquelles le contour occultant présente une forte courbure: le haut de la théière 3.18-a ou de la cruche 3.17-a par exemple. Les figures 3.18-b et 3.17-bc montrent alors que ces régions sont celles où la correspondance modèle-surface initiale est la moins bonne.



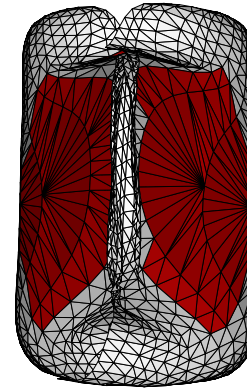
(a)



(b)



(c)

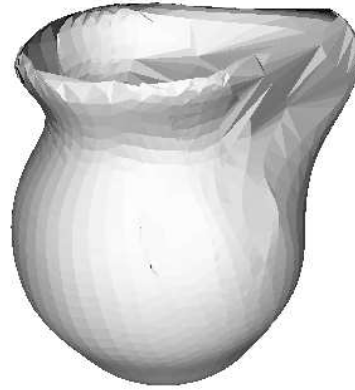


(d)

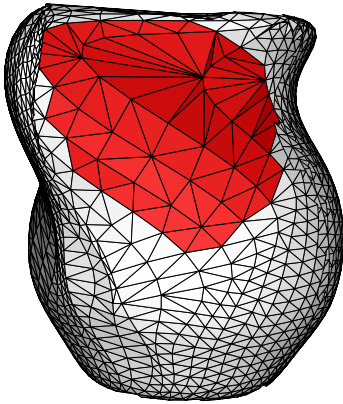
FIG. 3.16 – *Reconstruction d'une tasse: (a) une image de la séquence (30 images), (b) l'enveloppe visuelle, associée aux contours extérieurs de la tasse, qui est reconstruite, (c)-(d) les parties de la surface, non-visibles par les contours occultants, qui sont détectées par l'algorithme sont marquées en sombre.*



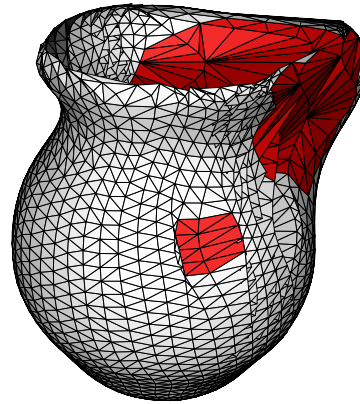
(a)



(b)



(c)



(d)

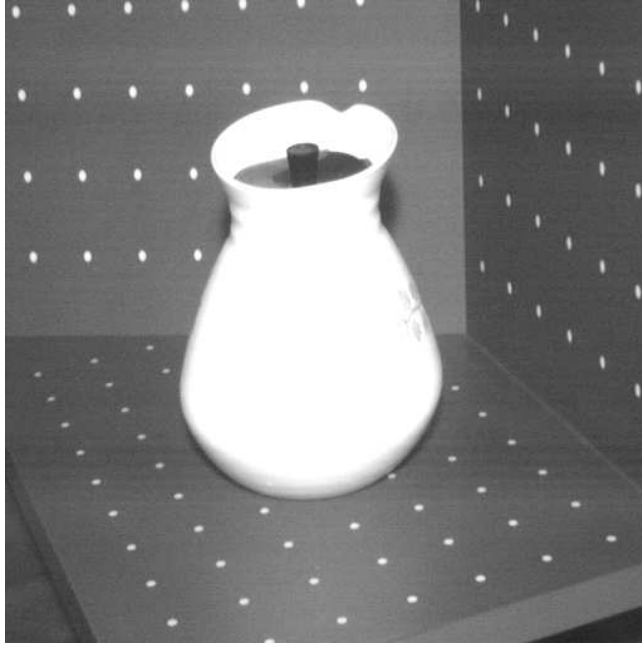
FIG. 3.17 – *Reconstruction d'une cruche : (a) une image de la séquence (32 images), (b) l'enveloppe visuelle, associée aux contours extérieurs de la cruche, qui est reconstruite, (c)-(d) les parties de la surface, non-visibles par les contours, qui sont détectées par l'algorithme sont marquées en sombre.*

## 3.6 Résumé et discussion

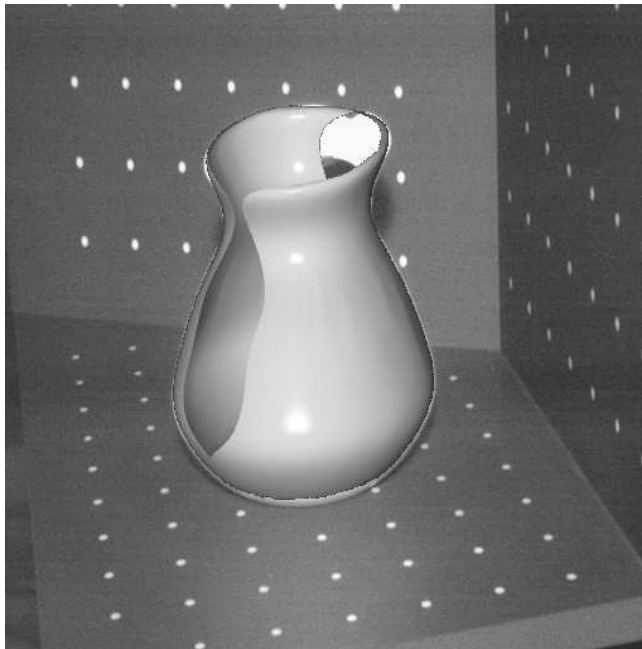
Nous avons décrit dans ce chapitre une approche pour construire une représentation de la partie observée de la surface à partir d'un ensemble de points 3D ; ceux-ci sont obtenus par des reconstructions locales des contours d'occultation de la surface. Cette approche s'appuie, en premier lieu, sur une description paramétrique de la surface sous la forme de facettes triangulaires. Pour cela, les points 3D reconstruits sont triangulés de contour à contour. Une représentation sous la forme de facettes polygonales est bien adaptée au problème de reconstruction à partir de contours puisqu'elle ne nécessite aucune information *a priori* sur la surface observée. De plus, elle autorise des reconstructions partielles ainsi que complètes de la surface. Par contre, certaines parties de la surface peuvent être balayées plusieurs fois par les contours d'occultation, une étape de fusion devrait alors être envisagée afin d'éliminer les facettes redondantes.

En raison de la sensibilité de la reconstruction locale, la surface triangulée peut présenter d'importants défauts, tels que des plis. Pour corriger ces derniers, nous avons proposé une méthode de lissage des surfaces représentées par des maillages polygonaux. Celle-ci est basée sur un terme régularisant faisant intervenir la somme des longueurs des côtés du maillage. Ce terme permet d'éliminer les plis de la surface et présente un double intérêt : une mise en œuvre simple et le contrôle de l'orientation locale de la surface régularisée au travers de la fonction de rappel aux données.

Nous avons ensuite étudié les régions non-visibles par les contours. Dans le cas d'observations discrètes, les reconstructions effectuées dans ces régions produisent des points qui n'appartiennent pas à la surface mais à l'enveloppe visuelle associée aux contours observés. Nous avons proposé un critère de détection de ces *faux* points. Néanmoins, un tel critère repose sur une connaissance *a priori* de la surface puisqu'une séquence discrète de contours d'occultation ne permet pas de statuer sur la nature des régions de la surface comprises entre ces contours. L'intérêt de détecter ces régions dans le processus de modélisation est aussi relié à une possible amélioration du processus. En effet, lorsque ces régions sont clairement identifiées sur la surface ainsi que dans les images, il est alors possible d'appliquer une autre méthode de reconstruction, à base de corrélation par exemple.

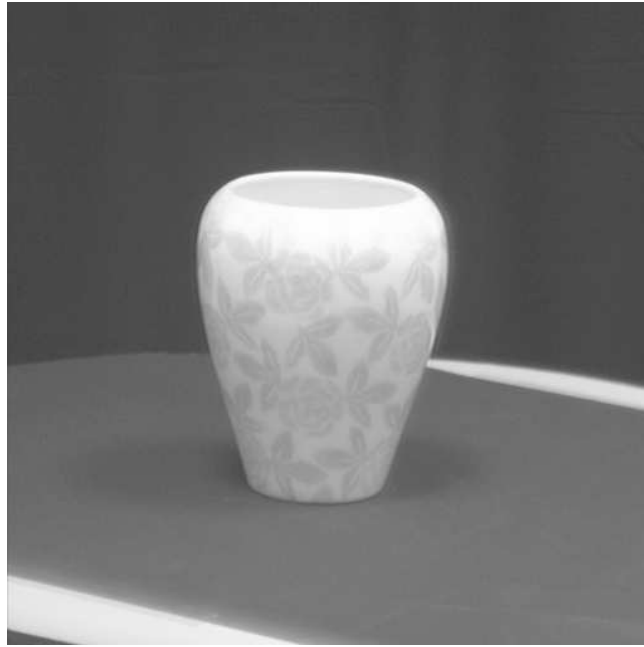


(a)

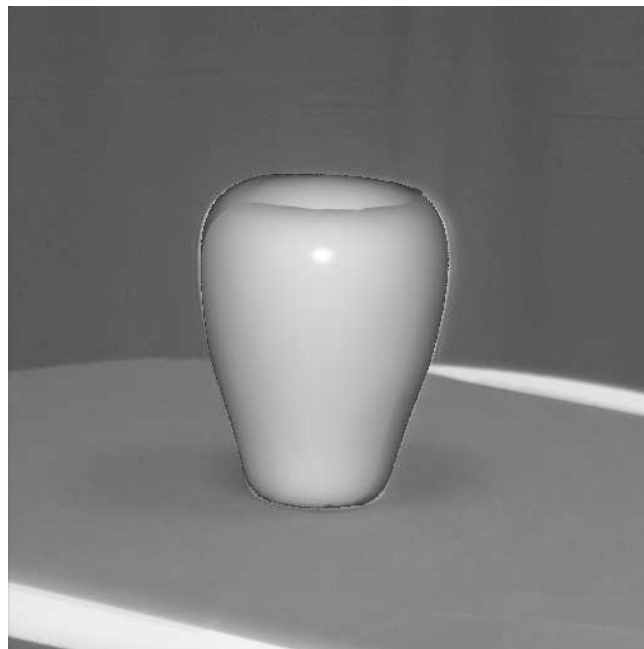


(b)

FIG. 3.18 – *La théière* : (a) une image de la séquence, (b) projection du modèle construit dans l'image initiale.



(a)



(b)

FIG. 3.19 – *Le vase : (a) une image de la séquence, (b) projection du modèle construit dans l'image initiale.*





(a)

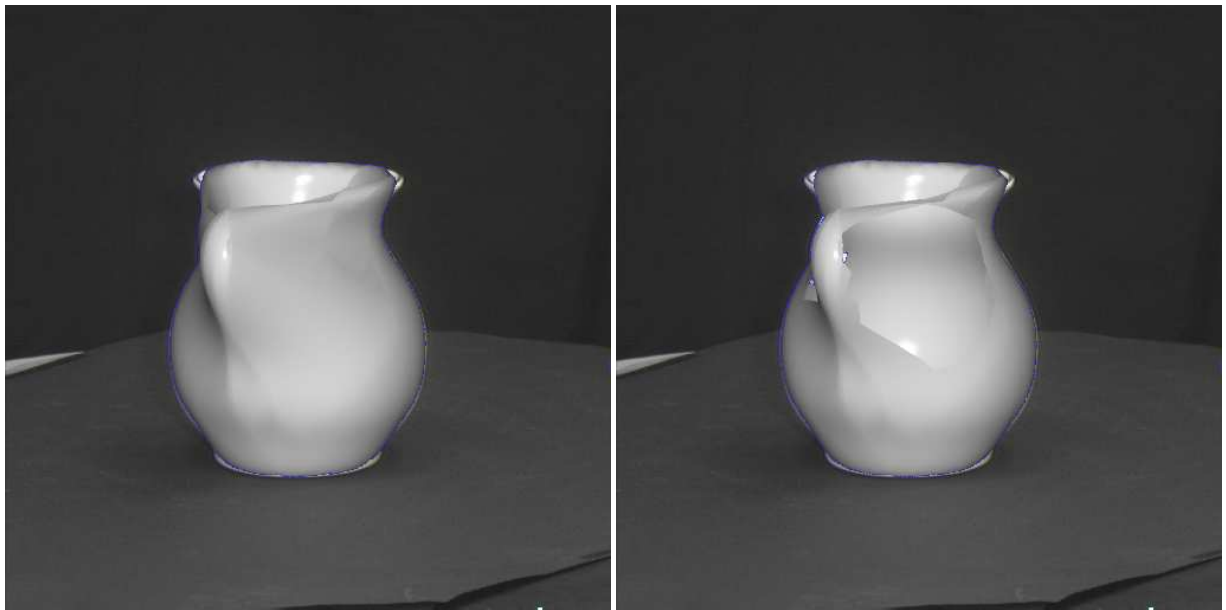


(b)

FIG. 3.20 – La calabasse : (a) une image de la séquence, (b) projection du modèle construit dans l'image initiale.



(a)



(b)

(c)

FIG. 3.21 – *La cruche* : (a) une image de la séquence, (b) projection du modèle construit complet (enveloppe visuelle) dans l'image initiale, (c) projection du modèle où les régions non-visibles par les contours ont été éliminées.



# Conclusion

Ce document traite du problème de la reconstruction de surfaces d'objets courbes à partir de séquences d'images. Les surfaces considérées appartiennent à la catégorie des surfaces régulières. Dans ce cadre, les contours occultants s'avèrent être les primitives images les plus fiables. La méthode que nous avons développée repose donc sur l'utilisation de ces contours et se décompose en trois grandes parties : la mise en correspondance des contours occultants, la reconstruction locale des points des contours d'occultation et la description globale de la surface observée.

Les différents chapitres de ce document étudient de manière spécifique chacun de ces points et mettent en évidence des résultats importants qui concernent :

- Les propriétés de la correspondance épipolaire. Celle-ci permet de décrire l'ensemble des contours observés. Elle débouche de plus, sur une estimation linéaire de la profondeur d'un point d'un contour d'occultation. Néanmoins, elle se révèle difficile à mettre en œuvre au voisinage des points multiples, lorsque les données sont bruitées.
- La profondeur d'un point appartenant à un contour d'occultation. Celle-ci peut être déterminée à l'aide d'une équation qui lie, dans le cas discret, les informations images en un point et un de ses correspondants épipolaires. Cette équation est basée sur une approximation locale à l'ordre 2 de la surface. Elle débouche, lorsqu'au moins deux correspondants épipolaires d'un point sont disponibles, sur une estimation linéaire de la profondeur ainsi que de la courbure normale dans la direction d'observation au point considéré. Il est ainsi possible de reconstruire un point appartenant à un contour quel que soit le mouvement de la caméra, à la condition de disposer d'au moins trois images. L'algorithme de reconstruction qui en découle permet d'unifier le traitement des contours dans une séquence, que ceux-ci soient d'occultation ou non.
- Le lissage des surfaces définies sous la forme de facettes polygonales. La reconstruction est, en effet, un processus sensible au bruit et la surface reconstruite peut donc être sujette à de fortes perturbations. Nous avons présenté une approche qui apporte une solution simple et efficace au problème du lissage de ces surfaces. Elle permet de plus, d'imposer les directions d'orientations de la surface lorsque ces dernières sont connues.

- La détection des parties de la surface qui ne sont pas visibles par les contours occultants. Les concavités dans la direction de la ligne de vue ne peuvent pas, en effet, être observées à partir des contours. La reconstruction, basée sur une hypothèse de continuité, produit alors des points qui n'appartiennent pas à la surface mais à son enveloppe visuelle. Nous avons donc proposé un critère de détection de ces points qui permet d'identifier les régions correspondantes sur la surface.

L'ensemble de ces résultats permet donc la construction de modèles d'objets simples à partir de séquences d'images. Les expériences menées sur des données synthétiques ainsi que réelles valident la méthode. Elles offrent une évaluation quantitative (au travers des données synthétiques) et qualitative (au travers des reprojections dans les images initiales) de la précision qui peut en être attendue.

Ces expériences ont par ailleurs montré que la reconstruction est plus robuste lorsque la caméra se déplace de manière linéaire. Une première approche robuste de reconstruction serait d'utiliser une tête tri-stéréo constituée de trois caméras alignées, et de déplacer celle-ci autour de l'objet à modéliser. Une deuxième approche dans le contexte de séquences monoculaires serait d'utiliser un nombre important de correspondants épipolaires pour la reconstruction d'un point. Cela nous amène à envisager, pour l'ensemble de la méthode, plusieurs améliorations potentielles :

- En ce qui concerne la modélisation des contours, il serait intéressant de prendre en compte la contrainte de tangence des droites épipolaires en chaque projection de point multiple. Cela résoudrait en effet, les problèmes de mises en correspondance erronées au voisinage des points multiples.
- Dans le cadre de la reconstruction, il n'est pas fait usage de l'ensemble des informations accessibles à partir des contours impliqués. La mise en œuvre de plusieurs mises en correspondance effectuées sur plusieurs contours occultants permettrait d'obtenir des reconstructions de points robustes. Cependant, avant de coupler les équations obtenues à partir de  $n$  contours et de  $m$  mises en correspondances, il faut tout d'abord mettre en place des outils qui permettent de statuer sur la pertinence d'une information pour une reconstruction donnée. Ce dernier aspect constitue d'ailleurs une direction de recherche qui est à exploiter.
- Le processus de triangulation qui est utilisé ne tient pas compte d'éventuels chevauchements des facettes. Cela peut se produire lorsque les voisinages proches des points doubles sont reconstruits. Afin de rendre l'ensemble de la méthode robuste, il serait donc utile de rajouter une étape de fusion des facettes redondantes.

En dehors de ces améliorations potentielles, plusieurs perspectives s'ouvrent à la suite des travaux présentés dans cette thèse. Celles-ci concernent notamment la construction automatique de modèles ainsi que l'exploitation qui peut en être faite. En particulier :

- Une première perspective concerne le couplage d'approches différentes pour la reconstruction d'une surface. Nos travaux permettent, en effet, de détecter les régions de la surface qui ne peuvent pas être reconstruites à partir des contours. L'application par la suite de méthodes de reconstruction dense [Pen 90, Dev 94] sur ces régions, lorsqu'elles sont clairement identifiées dans l'espace, ainsi que dans les images, peut être envisagée de manière à compléter le modèle construit. La classe des surfaces pouvant être intégralement reconstruites s'en trouverait agrandie de manière significative.

- Une deuxième perspective concerne la reconnaissance des objets modélisés. Dans cet objectif et ainsi que l'a remarqué Vaillant [Vai 90], l'enveloppe visuelle d'un objet obtenue par notre approche peut être suffisante, même si celle-ci est différente de la surface de l'objet. Un problème intéressant consiste alors à reconnaître un modèle construit dans une image et à localiser l'objet correspondant dans l'espace. Les données disponibles pour les modèles comprennent les normales à la surface, celles-ci peuvent donc naturellement être employées pour résoudre ce problème. Plusieurs travaux de reconnaissance, basés sur des représentations sphériques, [Del 93, Ike 95] semblent à ce titre intéressants. Une exploration plus poussée dans cette direction devrait apporter des résultats intéressants.

Pour clore ce document, signalons enfin la perspective de l'exploitation concrète de la méthode proposée. La reconstruction de surfaces à partir de séquences de contours constitue – les résultats présentés le prouvent – une méthode fiable de vision par ordinateur dont l'utilisation dans un contexte pratique serait, sans conteste, la meilleure des validations.



# Annexe A

## Géométrie des caméras

Nous présentons dans cette annexe l'ensemble des notions liées à la géométrie des caméras que nous utilisons. Cela concerne le modèle de la caméra qui est adopté ainsi que le calibrage de celle-ci, et enfin le calibrage de l'ensemble caméra et table micro-métrique qui est utilisé pour l'acquisition de séquences d'images.

### A.1 Un modèle projectif pour la caméra

Une caméra est principalement constituée d'un système optique concentrant les rayons lumineux, et d'un plan récepteur et photo-sensible où se forme l'image. Le modèle physique le plus répandu actuellement, en vision par ordinateur, pour caractériser les propriétés géométriques d'une caméra est le modèle à *sténopé*.

Les principaux éléments de ce modèle sont :

- le plan image ou plan rétinien  $R$  ;
- le centre de projection de la caméra  $C$  ;
- la distance focale  $f$  entre  $C$  et  $R$ .

La relation entre un point  $P$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère global et son projeté  $p$  de coordonnées  $(u, v)$  dans l'image s'écrit, en coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} \gamma u \\ \gamma v \\ \gamma \end{pmatrix} = A \cdot D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$



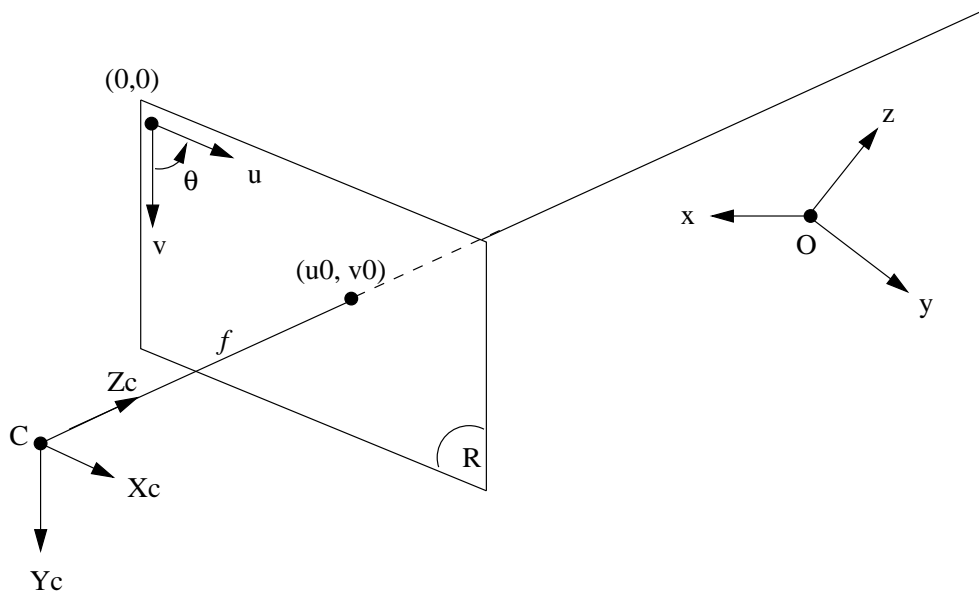


FIG. A.1 – Le modèle à sténopé

où  $A$  est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_u & -\alpha_u \cot \theta & u_0 \\ 0 & \frac{\alpha_v}{\sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui représente la transformation entre le repère de la caméra  $(CX_cY_cZ_c)$  et le repère image  $(uv)$ . Les paramètres définis dans cette matrice sont dits *intrinsèques* et sont indépendants de la position de la caméra :

- $\alpha_u$  et  $\alpha_v$  représentent les facteurs d'échelles selon les axes  $U$  et  $V$  :  $\alpha_u = k_u f$ ,  $\alpha_v = k_v f$ , où  $k_u$  et  $k_v$  dépendent des dimensions du capteur CCD et des fréquences d'échantillonnages (informations données par le constructeur).
- $u_0$  et  $v_0$  sont les coordonnées de l'intersection de l'axe optique avec le plan rétinien.
- $\theta$  est l'angle entre les deux axes du repère image (proche de  $\frac{\pi}{2}$ ). Nous supposons ici que l'axe  $CX_c$  et l'axe des  $u$  ont des directions parallèles (figure A.1).

$D$  est la matrice qui représente le déplacement rigide entre le repère global  $(O, x, y, z)$  et le repère de la caméra  $(C, X_c, Y_c, Z_c)$  :

$$D = \begin{pmatrix} R_1 & T_x \\ R_2 & T_y \\ R_3 & T_z \\ 0_3 & 1 \end{pmatrix},$$

avec :  $R_i = [R_{i1}, R_{i2}, R_{i3}]$ . Cette matrice dépend de 6 paramètres : 3 pour la rotation  $R$  et 3 pour la translation  $T$ , qui caractérisent la localisation de la caméra et sont dits paramètres *extrinsèques*.

La relation (A.1) est linéaire projective et peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \gamma u \\ \gamma v \\ \gamma \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$M = c \begin{pmatrix} \alpha_u R_1 - \alpha_u \cot \theta R_2 + u_0 R_3 & \alpha_u T_x - \alpha_u \cot \theta T_y + u_0 T_z \\ \frac{\alpha_v}{\sin \theta} R_2 + v_0 R_3 & \frac{\alpha_v}{\sin \theta} T_y + v_0 T_z \\ R_3 & T_z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

où  $M$  est la matrice de projection perspective associée à une image. Cette matrice est définie à un facteur multiplicatif  $c$  près. Une caméra est donc décrite par 11 paramètres, ce qui correspond au nombre de degrés de liberté du problème : 5 paramètres intrinsèques et 6 paramètres extrinsèques.

Ce modèle de caméra est théorique et ne correspond que partiellement à une caméra réelle. En effet, les objectifs de caméra utilisés sont rarement parfaits, et introduisent des distorsions optiques. Signalons à ce titre qu'il est possible d'améliorer le modèle à sténopé suivant deux approches. Une première approche consiste à ajouter des paramètres internes supplémentaires prenant en compte les distorsions radiales et tangencielles [Bey 92, Wen 92]. Une deuxième approche consiste à modéliser les distorsions sous la forme d'une transformation bi-linéaire [Peu 94, Bra 95].

## De la matrice de projection perspective aux paramètres de la caméra

Les équations établies dans la partie précédente permettent de caractériser, lorsque les paramètres de la caméra sont connus, la relation matricielle de projection des points dans l'image. Maintenant, il peut être nécessaire d'effectuer l'opération inverse, c'est-à-dire déterminer les paramètres de caméra correspondant à une matrice de projection donnée. Cela peut notamment être le cas dans un processus de calibrage (cf § A.2).

Soit  $M$  une matrice 3x4 de rang 3,  $M$  peut s'écrire sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & m_{14} \\ M_2 & m_{24} \\ M_3 & m_{34} \end{pmatrix},$$

avec  $M_i = [m_{i1}, m_{i2}, m_{i3}]$ . Faugeras [Fau 93] a montré qu'il existe alors 4 jeux de paramètres de caméra qui correspondent à la matrice  $M$  par la relation (A.3). Ces jeux diffèrent uniquement par les signes de certains paramètres :  $T_z$ ,  $\alpha_u$  et  $\alpha_v$ , ces signes étant fonctions des orientations respectives des différents repères impliqués. Dans notre cas, illustré par la figure A.1, les orientations choisies impliquent que :

$$T_z > 0, \quad \alpha_u > 0, \quad \alpha_v > 0.$$

Dans ce contexte, l'application sur les coefficients de la matrice  $M$  des règles d'orthonormalités liées aux matrices de rotation débouchent sur les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
c &= \text{signe}(m_{34}) \sqrt{M_3 \cdot M_3}, \\
\theta &= \arccos \frac{(M_1 \wedge M_3) \cdot (M_2 \wedge M_3)}{|M_1 \wedge M_3| |M_2 \wedge M_3|}, \\
u_0 &= \frac{M_1 \cdot M_3}{c^2}, \\
v_0 &= \frac{M_2 \cdot M_3}{c^2}, \\
\alpha_u &= \frac{\sin \theta}{c^2} |M_1 \wedge M_3|, \\
\alpha_v &= \frac{\sin \theta}{c^2} |M_2 \wedge M_3|, \\
T_x &= (m_{14} + (m_{24} - v_0 m_{34}) \frac{\alpha_u \cos \theta}{\alpha_v} - u_0 m_{34}) \frac{1}{c \alpha_u}, \\
T_y &= (m_{24} - v_0 m_{34}) \frac{\sin \theta}{c \alpha_v}, \\
T_z &= \frac{m_{34}}{c}, \\
R_1 &= (M_1 + (M_2 - u_0 M_3) \frac{\alpha_u \cos \theta}{\sin \theta} - u_0 M_3) \frac{1}{c \alpha_u}, \\
R_2 &= (M_2 - v_0 M_3) \frac{\sin \theta}{c \alpha_v}, \\
R_3 &= \frac{M_3}{c}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

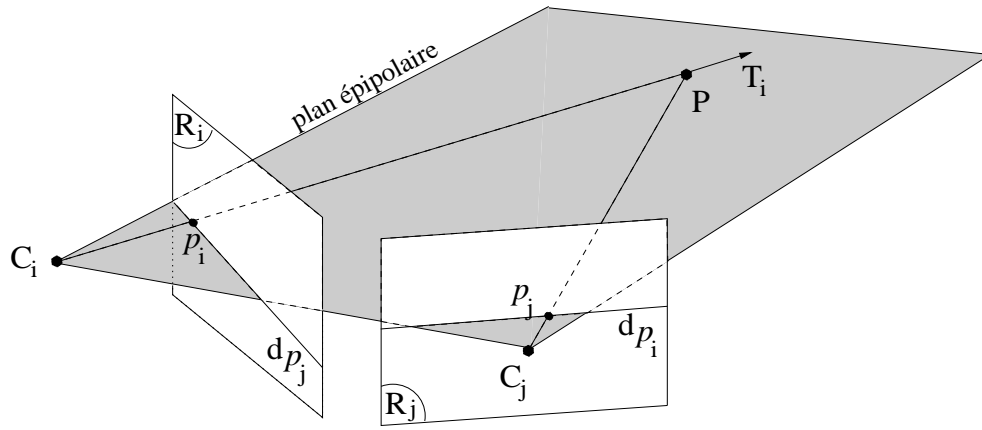
### Déterminer la matrice fondamentale associée à deux matrices de projection perspective

Soit  $R_i$  et  $R_j$  deux plans images obtenus à l'aide de deux caméras ou d'une caméra occupant successivement deux positions différentes. La contrainte épipolaire (cf. chapitre 1) exprime alors le fait qu'étant donné un point quelconque  $p_i$  du plan image  $R_i$ , ses correspondants possibles  $p_j$  dans le plan  $R_j$  se situent sur la droite épipolaire  $d_{p_i}$ , intersection du plan épipolaire  $(C_i, C_j, p_i)$  avec le plan image  $R_j$  (figure A.2). Cette contrainte se traduit sous la forme matricielle suivante (en coordonnées homogènes) :

$$p_j^T \cdot \mathcal{F}_{ij} \cdot p_i = p_j^T \cdot d_{p_i} = 0,$$

où  $\mathcal{F}_{ij}$  est la matrice fondamentale associée aux plans images  $R_i$  et  $R_j$  et  $\mathcal{F}_{ij} \cdot p_i$  est la représentation projective de  $d_{p_i}$ . Cette matrice est fonction des paramètres associés aux deux plans images  $R_i$  et  $R_j$  et peut donc être déterminée à partir des deux matrices de projection perspective  $M_i$  et  $M_j$  associées à ces plans images. Notre approche reprend la démarche de calcul introduite par Luong [Luo 92].

La droite épipolaire  $d_{p_i}$  de  $p_i$  dans  $R_j$  correspond à la projection de la droite  $C_i p_i$  de l'espace dans  $R_j$ . L'idée directrice pour déterminer  $\mathcal{F}_{ij}$  consiste donc à calculer la représentation projective de  $d_{p_i}$  en fonction de  $p_i$ . Les matrices  $M_i$  et  $M_j$  se décomposent chacune

FIG. A.2 – Les droites épipolaires  $d_{p_i}$  et  $d_{p_j}$ .

en une matrice  $3 \times 3$  et un vecteur  $3 \times 1$  :

$$M_i = [M_i^{3 \times 3} \quad m_i^{3 \times 1}], \quad M_j = [M_j^{3 \times 3} \quad m_j^{3 \times 1}].$$

Si l'on associe au centre  $C_i$  de la première image son vecteur de position dans l'espace:  $C_i = (x_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i})^T$ , alors  $C_i$  vérifie :

$$M_i \cdot \begin{pmatrix} C_i \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff M_i^{3 \times 3} \cdot C_i = -m_i^{3 \times 1},$$

et donc:

$$C_i = -(M_i^{3 \times 3})^{-1} \cdot m_i^{3 \times 1}. \quad (\text{A.5})$$

Soit  $p_i = (\gamma u, \gamma v, \gamma)^T$  un point du plan image  $R_i$  en coordonnées homogènes et  $T_i = (x_{T_i}, y_{T_i}, z_{T_i})^T$  la direction de sa ligne de vue. Celle-ci vérifie alors, quelle que soit la profondeur  $\lambda$  :

$$M_i \cdot \begin{pmatrix} C_i + \lambda T_i \\ 1 \end{pmatrix} = p_i,$$

d'où:

$$T_i = \frac{1}{|(M_i^{3 \times 3})^{-1} \cdot p_i|} (M_i^{3 \times 3})^{-1} \cdot p_i. \quad (\text{A.6})$$

La droite épipolaire  $d_{p_i}$  de  $p_i$  dans  $R_j$  est définie par la projection de  $C_i$  dans  $R_j$  (l'épipôle de  $R_i$  dans  $R_j$ ) et par la projection de la direction  $T_i$ . La représentation projective de cette droite peut donc s'écrire :

$$d_{p_i} = M_j \cdot \begin{pmatrix} -(M_i^{3 \times 3})^{-1} \cdot m_i^{3 \times 1} \\ 1 \end{pmatrix} \wedge M_j \cdot \begin{pmatrix} (M_i^{3 \times 3})^{-1} \cdot p_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

cette relation est linéaire en  $p_i$  et correspond à la formulation  $d_{p_i} = \mathcal{F}_{ij} \cdot p_i$ . Il est alors facile d'en déduire les coefficients de la matrice fondamentale  $\mathcal{F}_{ij}$ .

En inversant les rôles de  $i$  et  $j$  dans les calculs effectués, on obtient simplement la transposée de  $\mathcal{F}_{ij}$ , ce qui découle du fait que :

$$\begin{aligned} p_j^T \cdot \mathcal{F}_{ij} \cdot p_i = 0 & \iff p_i^T \cdot \mathcal{F}_{ji} \cdot p_j = 0, \\ & \iff \mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ji}^T. \end{aligned}$$

## A.2 Calibrage d'une caméra

Le calibrage d'une caméra consiste à déterminer l'ensemble de ses paramètres internes et externes. Cela revient, dans le cas du modèle projectif présenté, à calculer sa matrice de projection perspective. Par la suite, des coefficients prenant en compte les distorsions de la caméra peuvent être ajoutés afin d'améliorer la précision. Nous précisons ici brièvement ces points. Pour plus de détails sur les procédures de calibrage, le lecteur intéressé se référera aux articles [Fau 86, Tsa 87].

### Déterminer la matrice de projection perspective

La méthode consiste à utiliser des points de référence dont les positions 3D sont connues avec précision (voir la mire de référence, figure A.3). Soit  $M$  la matrice à déterminer :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & m_{14} \\ M_2 & m_{24} \\ M_3 & m_{34} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque point de référence  $P_i = (x_i, y_i, z_i)^T$  de projection image  $p_i = (u_i, v_i)^T$ , on peut écrire :

$$\begin{cases} M_3 \cdot P_i \cdot u - M_1 \cdot P_i - m_{14} - m_{34} u = 0 \\ M_3 \cdot P_i \cdot v - M_2 \cdot P_i - m_{24} - m_{34} v = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi un système linéaire d'équations à 12 inconnues  $m_{ij}$ . Chaque point fournit 2 équations, il faut donc au moins 6 points de références non coplanaires pour résoudre ce système. Une résolution directe est impossible (plusieurs solutions existent dont la solution nulle), il est en fait nécessaire d'introduire une contrainte. Nous avons implanté la méthode de Faugeras-Toscani [Fau 86] qui impose la contrainte  $|M_3| = 1$  (contrainte exprimant l'orthonormalité de la matrice de rotation qui est impliquée). Celle-ci débouche sur une solution aux moindres carrés linéaire qui peut être déterminée au moyen de méthodes standards [Pre 92].

### Approches non-linéaires

La méthode précédente consiste à résoudre, par minimisation sous contrainte, les équations de projection. L'existence d'une solution algébrique et donc la simplicité des opérations mises en œuvre sont les avantages majeurs de cette méthode. Par contre, le critère minimisé n'a pas d'interprétation physique simple. Une étape complémentaire pourrait alors être de minimiser un critère physiquement interprétable, soit un critère de distance :

$$C_d = \sum_{i=1}^n (u_i - u_{p_i})^2 + (v_i - v_{p_i})^2,$$

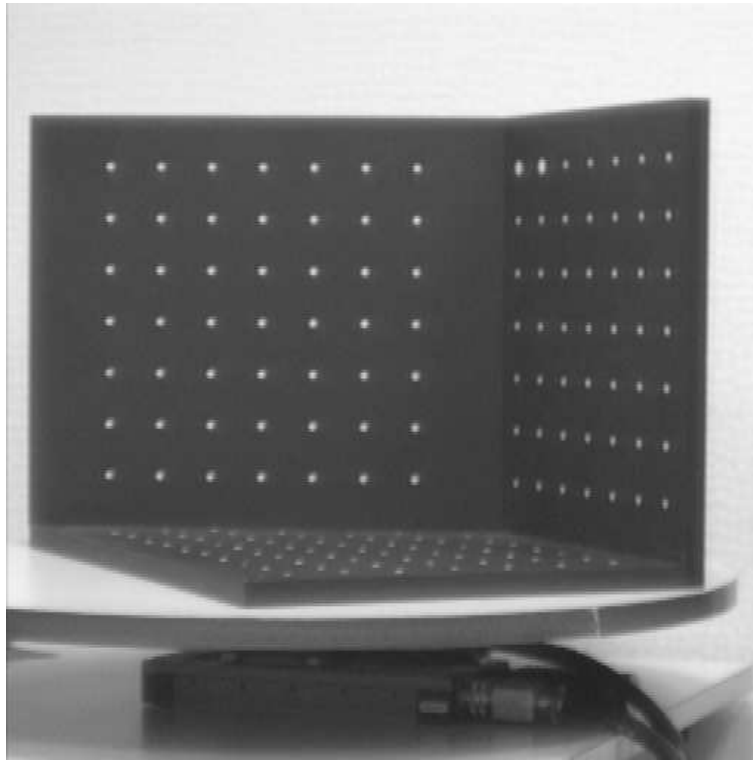


FIG. A.3 – La mire de calibrage.

où les  $(u_i, v_i)$  sont les points images mesurés et les  $(u_{p_i}, v_{p_i})$  sont les points images obtenus par projection suivant les paramètres de caméra  $(u_0, v_0, \alpha_u, \dots)$ . La minimisation de ce critère ne peut pas se faire de manière linéaire (pas de solution algébrique). Nous utilisons donc une méthode non linéaire, Levenberg-Marquard [Pre 92], pour optimiser les paramètres de caméra obtenus par la méthode linéaire précédente<sup>18</sup>.

Le jeu des paramètres intervenant dans le processus de minimisation peut alors être élargi d'un, ou plusieurs, paramètres prenant en compte les distorsions de la caméra. C'est d'ailleurs là que réside l'intérêt d'une approche non-linéaire. Les expériences que nous avons réalisées montrent en effet qu'une optimisation non-linéaire des 11 paramètres du modèle projectif ne diminue que très faiblement le critère  $C_d$  par rapport à la solution linéaire.

Nous avons donc ajouté un coefficient de distorsion radiale  $D_r$  à l'ensemble des paramètres optimisés. Soient  $(u'_{p_i}, v'_{p_i})$  les coordonnées images distordues d'un point  $P_i$  et  $(u_{p_i}, v_{p_i})$  les coordonnées obtenues à l'aide de (A.2), la relation entre  $(u'_{p_i}, v'_{p_i})$  et  $(u_{p_i}, v_{p_i})$  est :

$$\begin{cases} u'_{p_i} &= u_{p_i} + (u_{p_i} - u_0) D_r r^2, \\ v'_{p_i} &= v_{p_i} + (v_{p_i} - v_0) D_r r^2, \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

avec :

$$r^2 = \left( \frac{u_{p_i} - u_0}{\alpha_u} \right)^2 + \left( \frac{v_{p_i} - v_0}{\alpha_v} \right)^2.$$

---

18. Dans ce cadre, l'utilisation d'un calculateur symbolique tel que Maple [Maple] simplifie énormément le calcul des dérivées.

Les expériences menées sur la mire montrent qu'en fonction de l'objectif et de la caméra qui sont utilisés, la précision sur le modèle de caméra est effectivement améliorée par la prise en compte de paramètres supplémentaires. Néanmoins, la précision obtenue à l'aide du modèle linéaire peut, dans certains cas, être très bonne ou du moins suffisante pour une application donnée. Une des caméras que nous avons testées offre une précision (pour la reprojection) de l'ordre du 1/10 de pixel par la méthode linéaire, ce qui s'avère suffisant dans notre cadre.

Un autre aspect important du calibrage concerne les paramètres internes déterminés. Il apparaît en effet que ceux-ci varient, pour une caméra et un objectif donnés, en fonction des positions des points de référence utilisés. Cela souligne le caractère imparfait d'un modèle projectif de caméra. L'ajout de paramètres supplémentaires (distorsions) au modèle de caméra réduit ces variations mais ne les élimine pas. Ces variations des paramètres internes restent par contre relativement faibles. Pour se faire une intuition de l'influence de ces variations sur la reconstruction, il suffit de considérer l'équation simplifiée issue de l'expression (A.1) (où le paramètre  $\theta$ , qui varie relativement peu, est fixé à  $\pi/2$ ) :

$$x = \frac{(u - u_0) z}{\alpha_u},$$

où  $x$  est exprimé dans le repère de la caméra et d'où l'on tire facilement :

$$\frac{\Delta x}{x} \leq \frac{\Delta u_0}{u - u_0} + \frac{\Delta \alpha_u}{\alpha_u}. \quad (\text{A.8})$$

Dans le contexte expérimental qui est le notre, la variation relative  $\frac{\Delta \alpha_u}{\alpha_u}$  du paramètre  $\alpha_u$  (ou de manière équivalente du paramètre  $\alpha_v$ ) reste inférieure ou égale à 1% sur une séquence. Celle de  $u_0 : \frac{\Delta u_0}{u_0}$ , (ou de manière équivalente celle de  $v_0$ ) est plus importante, et peut atteindre les 10% ; néanmoins, l'impact de cette dernière est limité lorsque les dimensions dans l'image de la projection de l'objet traité sont importantes.

### A.3 Calibrage du système composé de la caméra et de la table micro-métrique

Pour acquérir des séquences d'images d'un objet, deux solutions sont possibles : déplacer la caméra autour de l'objet ou bien déplacer l'objet devant la caméra. La deuxième solution est techniquement la plus simple à mettre en œuvre et nous avons donc opté pour celle-ci ; c'est une table micro-métrique qui déplace l'objet devant la caméra. Le processus de reconstruction nécessite le calibrage complet des images, soit la donnée des matrices de projection perspective pour chaque image. À cet effet, il est nécessaire de calibrer le système composé de la caméra et de la table micro-métrique pour déterminer les positions respectives de l'une vis-à-vis de l'autre.

Les points objets s'expriment dorénavant dans le repère de la table micro-métrique. Les projections de ces points  $P_t$  dans un plan image s'écrivent :

$$p = A \cdot D_t^c \cdot P = M \cdot P_t,$$

où  $A$  est la matrice des paramètres internes de la caméra,  $D_t^c$  est la matrice de passage du repère de la table micro-métrique au repère caméra. Lorsque la table effectue un déplacement  $R$  (des rotations dans notre cas), la matrice de projection perspective des points objets devient (en supposant que la caméra reste fixe) :

$$M = A \cdot D_t^c \cdot R. \quad (\text{A.9})$$

Pour obtenir les matrices de calibrage  $M$  associées à une position donnée de la caméra, il faut déterminer  $D_t^c$ . Cette opération s'effectue à l'aide la mire de calibrage (figure A.3). La mire est disposée sur la table micro-métrique et  $n$  ( $n \geq 2$ ) images de celle-ci sont prises pour des mouvements  $\{R_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  connus de la table. Les points  $P_m$  de la mire se projettent alors dans les plans images suivant :

$$p_m = A \cdot D_t^c \cdot R_i \cdot D_m^t \cdot P_m,$$

où  $D_m^t$  est la matrice de passage du repère de la mire au repère de la table micro-métrique. Cette dernière est caractérisée par la position et l'orientation de l'axe de rotation de la table dans le repère mire, soit 4 paramètres : 2 angles et 2 coordonnées. L'ensemble du système comprend donc ici 15 paramètres : 11 pour la matrice de projection du repère caméra dans le repère de la table ( $A \cdot D_t^c$ ) et 4 pour la localisation de la mire ( $D_m^t$ ). Ces paramètres sont déterminés par une méthode non linéaire qui consiste à optimiser un jeu de solutions initiales obtenues en calibrant la première image (valeur initiale de  $A \cdot D_t^c$ ), et en fixant  $D_m^t$  égal à l'identité. Une fois ces paramètres déterminés, les matrices de projection perspective pour un déplacement  $R$  de la table micro-métrique s'obtiennent facilement à l'aide de l'expression (A.9).

**Remarque :** la solution présentée ici, qui consiste à déplacer l'objet, offre l'avantage indéniable d'une mise en œuvre facile pour des résultats qualitativement satisfaisants (cf. § 2.6.2). En revanche, cet aspect ne doit pas cacher le fait que cette approche est biaisée. En effet, le modèle de caméra n'est pas exact et l'erreur introduite dans la phase de calibrage, aussi minime soit-elle, se répercute et s'amplifie lorsque la caméra s'éloigne des positions de référence (celles ayant servies au calibrage).





# Annexe B

## Géométrie différentielle

Nous rappelons dans cette annexe différentes notions qui sont utilisées dans ce document et qui concernent les surfaces régulières : les formes fondamentales, les courbures et les contacts avec une droite.

### B.1 Les surfaces régulières

**Définition B.2.** *Un ensemble  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  est une surface régulière si, pour tout point  $P$  de  $\mathcal{S}$  il existe un voisinage  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  et une application  $X : U \rightarrow V \cap \mathcal{S}$  d'un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  dans  $V \cap \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  telle que :*

1.  *$X$  est différentiable ;*
2.  *$X$  est un homéomorphisme ;*
3. *pour tout  $q$  de  $U$ , la différentielle  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est injective.*

L'application  $X$  est alors appelée *paramétrage* ou *système de coordonnées locales* de  $\mathcal{S}$  au voisinage de  $P$ . Soit  $X(u, v)$  avec  $(u, v) \in U$  un paramétrage de  $\mathcal{S}$ , la condition 3 se traduit alors par le fait que  $\partial X / \partial u = X_u$  et  $\partial X / \partial v = X_v$  sont linéairement indépendants, en d'autres termes que :

$$X_u \wedge X_v \neq 0.$$

Les surfaces régulières possèdent un certain nombre de propriétés [dC 76] ; en particulier :

**Propriété B.2.** *Soit  $P$  un point d'une surface régulière  $\mathcal{S}$  et soit  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application telle que  $p \in X(U) \subset \mathcal{S}$  et vérifiant les conditions 1 et 3 de la définition B.2. Si l'on suppose que  $X$  est injective alors  $X^{-1}$  est continue.*

Cette propriété permet de vérifier qu'une application  $X$  est bien un paramétrage de  $\mathcal{S}$  sans avoir à contrôler que l'application inverse  $X^{-1}$  est continue. Une autre propriété dont il est fait usage dans ce document caractérise le fait que toute surface régulière est localement le graphe d'une fonction différentiable et s'énonce :

**Propriété B.3.** *Soit  $\mathcal{S}$  une surface régulière et  $P$  un point de  $\mathcal{S}$ . Il existe alors un voisinage  $V$  de  $P$  dans  $\mathcal{S}$  tel que  $V$  soit le graphe d'une fonction différentiable qui a une des 3 formes suivantes :  $z = f(x, y), y = g(x, z), x = h(y, z)$ .*

## B.2 Les formes fondamentales

Le produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$  peut être restreint à chacun des plans tangents  $\mathcal{T}_P$  d'une surface régulière  $\mathcal{S}$ . Il définit alors une forme bilinéaire symétrique de  $\mathcal{T}_P$  dans  $\mathbb{R}$  à laquelle est associée une forme quadratique.

**Définition B.3.** *La forme quadratique  $\Phi^1$  définie dans chacun des plans tangents  $\mathcal{T}_P$  de  $\mathcal{S}$  par :*

$$\Phi_P^1(T) = T \cdot T = |T|^2, \quad T \in \mathcal{T}_P, \quad (\text{B.1})$$

*est appelée première forme fondamentale de  $\mathcal{S}$  en  $P$ .*

La première forme fondamentale caractérise les propriétés métriques de la surface telles que la longueur d'un arc, ou la surface d'une région. Son expression dans la base  $\{X_u, X_v\}$  associée à un paramétrage  $X(u, v)$  de  $\mathcal{S}$  en  $P$  s'obtient facilement en considérant les coordonnées  $(u', v')$  d'un vecteur  $T$  du plan tangent dans cette base :

$$T = u' X_u + v' X_v.$$

En substituant dans (B.1) :

$$\Phi_P^1(T) = X_u \cdot X_u (u')^2 + X_u \cdot X_v u' v' + X_v \cdot X_v (v')^2,$$

soit :

$$\Phi_P^1(T) = E (u')^2 + 2F u' v' + G (v')^2,$$

avec :

$$E = X_u \cdot X_u, \quad F = X_u \cdot X_v, \quad G = X_v \cdot X_v,$$

où  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont les coefficients de la première forme fondamentale. La relation (B.1) peut alors s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\Phi_P^1(T) = (u', v') \cdot I_P \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

avec :

$$I_P = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

L'étude de la normale à une surface régulière  $\mathcal{S}$  permet de dégager plusieurs propriétés de  $\mathcal{S}$ . Cette étude se fait à l'aide de l'*application de Gauss* :  $N : \mathcal{S} \rightarrow S^2$  qui associe à toute normale  $N(P)$  de  $\mathcal{S}$  le point de la surface  $S^2$  de la sphère unité ayant la même normale

$N$ . L'application de Gauss est différentiable et la différentielle  $dN_P$  de  $N$  en  $P$  est une application linéaire du plan tangent  $\mathcal{T}_P$  dans lui-même. Intuitivement, l'application  $dN_P$  caractérise les variations de la normale à la surface dans le voisinage de  $P$ . On associe à la différentielle de l'application de Gauss une forme quadratique :

**Définition B.4.** La forme quadratique  $\Phi^2$  définie dans le plan tangent  $\mathcal{T}_P$  par :

$$\Phi_P^2(T) = -dN_P(T).T, \quad T \in \mathcal{T}_P, \quad (\text{B.2})$$

est appelée **deuxième forme fondamentale** de  $\mathcal{S}$  en  $P$ .

De la même manière que précédemment, la deuxième forme fondamentale peut s'exprimer dans la base  $\{X_u, X_v\}$  associée à un paramétrage  $X(u, v)$  de  $\mathcal{S}$  en  $P$ . Soient  $(u', v')$  les coordonnées d'un vecteur  $T$  du plan tangent dans cette base :

$$T = u' X_u + v' X_v.$$

Alors :

$$\Phi_P^2(T) = -(dN_u u' + dN_v v').(u' X_u + v' X_v),$$

où les suffixes dénotent les dérivées. On en tire :

$$\Phi_P^2(T) = e (u')^2 + 2f u'v' + g (v')^2,$$

avec :

$$e = -N_u.X_u, \quad f = -N_v.X_u = -N_u.X_v, \quad g = -N_v.X_v,$$

ou de manière équivalente :

$$e = N.X_{uu}, \quad f = N.X_{uv} = N.X_{vu}, \quad g = N.X_{vv},$$

où  $e$ ,  $f$  et  $g$  sont les coefficients de la deuxième forme fondamentale. Celle-ci s'exprime donc sous la forme matricielle :

$$\Phi_P^2(T) = (u', v') \cdot II_P \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

avec :

$$II_P = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

La différentielle de l'application de Gauss s'exprime alors dans la base  $\{X_u, X_v\}$  sous la forme :

$$dN(T) = dN(u' X_u + v' X_v) = -II_P \cdot I_P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

La différentielle  $dN$  caractérise les variations de la normale à la surface, soit les courbures. En particulier, ses valeurs propres sont les *courbures principales* de  $\mathcal{S}$  en  $P$  et représentent les courbures maximale et minimale en ce point. Les vecteurs propres qui leurs sont associés sont alors les *directions principales* dans le plan tangent. Une propriété remarquable des directions principales est que celles-ci sont orthogonales.

### B.3 Les courbures

Les courbures caractérisent les variations de la normale. Dans le cas d'une courbe de l'espace :

**Définition B.5.** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de  $\mathbb{R}^3$  paramétrée par  $X(s)$  où  $s$  est l'abscisse curviligne. La norme  $|X_{ss}|$  au point  $P$  de  $\mathcal{C}$  est alors appelée courbure  $k$  de  $\mathcal{C}$  en  $P$ .

Le vecteur  $X_{ss}$  est dans ce cas dirigé suivant la normale à  $\mathcal{C}$ . Lorsque  $\mathcal{C}$  est paramétrée de manière quelconque, on peut alors utiliser la propriété suivante :

**Propriété B.4.** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de  $\mathbb{R}^3$  paramétrée par  $X(s)$ . La courbure  $k$  de  $\mathcal{C}$  vérifie :

$$kN_{\mathcal{C}} = \frac{(X_{ss} \wedge X_s) \wedge X_s}{|X_s|^4}.$$

où  $N_{\mathcal{C}}$  est la normale à  $\mathcal{C}$ .

Dans le cas des surfaces, on définit la courbure normale d'une courbe  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{S}$  :

**Définition B.6.** La courbure normale  $k_n$  de la courbe  $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$  au point  $P$  est :

$$k_n = k \cos \theta, \quad (\text{B.3})$$

où  $k$  est la courbure de  $\mathcal{C}$  en  $P$  et  $\cos \theta = N \cdot N_{\mathcal{C}}$ ,  $N$  étant la normale à  $\mathcal{S}$  en  $P$  et  $N_{\mathcal{C}}$  la normale à  $\mathcal{C}$  en  $P$ .

Un résultat important concernant les courbures normales est énoncé par le théorème de Meusnier :

**Propriété B.5. (Théorème de Meusnier)**

Toutes les courbes de la surface  $\mathcal{S}$  ayant même tangente au point  $P$  ont, en ce point, la même courbure normale.

Cette propriété permet de parler de courbure normale de  $\mathcal{S}$  dans une direction donnée en  $P$ . La courbure normale correspond alors à celle de la courbe intersection de  $\mathcal{S}$  et du plan passant par  $P$  et contenant la direction  $T$  et la normale  $N$  en  $P$ , soit :

$$k_n(T) = \Phi_P^2(T).$$

La courbure  $k$  d'une courbe  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{S}$  tangente à  $T$  en  $P$  et la courbure normale  $k_n$  de  $\mathcal{S}$  dans la direction  $T$  sont reliées par la relation :

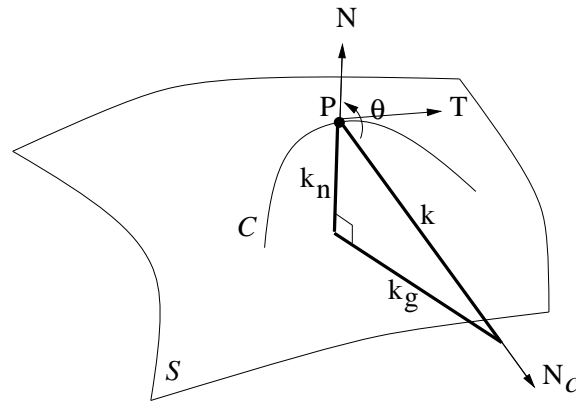
$$k^2 = k_n^2 + k_g^2,$$

où  $k_g$  est la courbure géodésique de  $\mathcal{C}$  (figure B.1). Donc :

$$\begin{cases} k_n = k \cos \theta, \\ k_g = k \sin \theta. \end{cases}$$

Une dernière définition concerne les courbures gaussienne et normale d'une surface régulière :

**Définition B.7.** Soit  $P$  un point de  $\mathcal{S}$  et  $dN_P$  la différentielle de l'application de Gauss en  $P$ . Le déterminant de  $dN_P$  est alors la **courbure gaussienne**  $K$  de  $\mathcal{S}$  en  $P$  et l'inverse de la trace de  $dN_P$  est la **courbure moyenne**  $H$  de  $\mathcal{S}$  en  $P$ .

FIG. B.1 – Courbure normale  $k_n$  et courbure géodésique  $k_g$  en un point de  $S$ .

Si  $k_1$  et  $k_2$  sont les courbures principales de  $S$ , on a alors :

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Ces courbures permettent de caractériser la forme locale d'une surface régulière suivant différentes catégories. Un point  $P$  de  $S$  est dit :

1. elliptique si  $K > 0$  ;
2. hyperbolique si  $K < 0$  ;
3. parabolique si  $K = 0$  et  $H \neq 0$  ;
4. plan si  $K = 0$  et  $H = 0$ .

## B.4 Les contacts d'une droite avec une surface

Deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^3$  (surfaces, courbes, etc.) ont un contact en un point lorsqu'elles possèdent des caractéristiques communes en ce point. Le *degré du contact* caractérise alors l'ordre des caractéristiques communes. Par exemple, deux surfaces ont un contact d'ordre  $q$  en un point  $P$  lorsque :

- l'ensemble de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $q - 1$ , avec  $q > 0$ , coïncident en  $P$  ;
- au moins une de leurs dérivées partielles d'ordre  $q$  ne coïncide pas.

Dans ce document, nous nous intéressons plus particulièrement aux contacts d'une droite avec une surface qui caractérise les différents types de lignes de vues. Ceux d'ordre supérieur à 2 entraînent notamment des singularités du contour occultant. Soit  $(x, y, f(x, y))$  une représentation locale de la surface en  $P = (0, 0, f(0, 0))$  où l'axe des  $x$  correspond à la ligne de vue et l'axe des  $z$  est orienté suivant la normale à la surface en  $P$ , les contacts de la ligne de vue avec la surface en  $P$  sont alors [Koe 86] :

- Contact d'ordre 0 ( $f(0, 0) \neq 0$ ) : pas de contact entre la ligne de vue et la surface.

- Contact d'ordre 1 ( $f(0, 0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \neq 0$ ) : la ligne de vue intersecte la surface mais elle n'est pas tangente à cette dernière.
- Contact d'ordre 2 ( $\frac{\partial^s f}{\partial x^s}(0, 0) = 0$  pour  $s \leq 1$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$ ) : la ligne de vue est tangente à la surface,  $P$  appartient à un contour d'occultation de la surface.
- Contact d'ordre 3 ( $\frac{\partial^s f}{\partial x^s}(0, 0) = 0$  pour  $s \leq 2$  et  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$ ) : la ligne de vue est tangente à la surface suivant une direction asymptotique. Il s'agit toujours d'un point d'un contour d'occultation sur la surface mais celui-ci correspond à un *point de rebroussement* du contour occultant.
- Contact d'ordre 4 ( $\frac{\partial^s f}{\partial x^s}(0, 0) = 0$  pour  $s \leq 3$  et  $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0, 0) \neq 0$ ) : la ligne de vue est tangente à la surface suivant une direction asymptotique particulière. Il s'agit alors soit d'un *point flecnodal* de la surface soit d'un point parabolique observé suivant une direction asymptotique.
- Contact d'ordre 5 ou plus : ce type de contact n'existe pas pour des surfaces génériques et dans un contexte réel [Koe 86] (pour des surfaces non-génériques, des contacts de ce type peuvent se présenter ; pour un plan, par exemple, les contact avec une droite sont d'ordre 0, 1 ou  $\infty$ ).

# Bibliographie

- [Alg 95] M.E. Algorri. *Génération et simplification de maillages pour la reconstruction de surfaces à partir de points non structurés*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, 1995. (Ref. citée page 97)
- [Arb 89] E. Arbogast and R. Mohr. Reconstruction de surfaces à partir des contours critiques dans un contexte multi-images. Rapport interne RR 94, LIFIA-IMAG, Grenoble, 1989. (Ref. citée page 52)
- [Arb 91] E. Arbogast. *Modélisation automatique d'objets non polyédriques par vision monoculaire*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1991. (Ref. citée pages 35, 52, 53, 55, 58)
- [Åst 96] K. Åström, R. Cipolla, and P.J. Giblin. Generalised Epipolar Constraints. In *Proceedings of Fourth European Conference on Computer Vision, Cambridge, (England)*, pages 97–108, April 1996. Lecture Notes in Computer Science, volume 1065. (Ref. citée pages 11, 24)
- [Aya 89] N. Ayache. *Vision stéréoscopique et perception multisensorielle. Applications à la robotique mobile*. InterEditions, 1989. (Ref. citée pages 2, 36)
- [Bar 81] H.G. Barrow and J.M. Tenenbaum. Interpreting Line Drawings as Three Dimensional Surfaces. *Artificial Intelligence*, 17(1–3): 75–116, 1981. (Ref. citée pages 9, 12)
- [Bar 82] S.T. Barnard and M.A. Fischler. Computational Stereo. *Computing Surveys*, 14(4): 553–572, 1982. (Ref. citée page 52)
- [Ber 91] M.O. Berger. *Les contours actifs : modélisation, comportement et convergence*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Vandœuvre-lès-Nancy, February 1991. (Ref. citée pages 4, 33)
- [Ber 94] M.O. Berger. How to Track Efficiently Piecewise Curved Contours with a View to Reconstructing 3D Objects. In *Proceedings of the 12th International Conference on Pattern Recognition, Jerusalem (Israel)*, volume 1, pages 32–36, 1994. (Ref. citée pages 4, 33)



- [Bey 92] H.A. Beyer. Accurate Calibration of CCD Cameras. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Urbana Champaign, (USA)*, pages 96–101, 1992. (Ref. citée page 133)
- [Boi 92] J.D. Boissonnat and B. Geiger. Three Dimensional Reconstruction of Complex Shapes Based on the Delaunay Triangulation. Rapport de Recherche 1697, INRIA, April 1992. (Ref. citée page 98)
- [Bol 87] R.C. Bolles, H.H. Baker, and D.H. Marimont. Epipolar-Plane Image Analysis: An Approach to Determining Structure from Motion. *International Journal of Computer Vision*, 1: 7–55, 1987. (Ref. citée pages 9, 21, 55)
- [Bol 91] R.M. Bolle and B.C. Vemuri. On Three-Dimensional Surface Reconstruction Methods. *IEEE Transactions on PAMI*, 13(1): 1–13, 1991. (Ref. citée page 97)
- [Boy 95a] E. Boyer and M.-O. Berger. 3D Surface Reconstruction Using Occluding Contours. In *Proceedings of 6th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns, Prague (Czech Republic)*, pages 198–205, September 1995. Lecture Notes in Computer Science, volume 970. (Ref. citée page 4)
- [Boy 95b] E. Boyer and M.-O. Berger. Smooth Surface Reconstruction From Image Sequences. In *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing, Whashington (USA)*, October 1995. (Ref. citée page 4)
- [Boy 96a] E. Boyer. Object Models from Contour Sequences. In *Proceedings of Fourth European Conference on Computer Vision, Cambridge, (England)*, pages 109–118, April 1996. Lecture Notes in Computer Science, volume 1065. (Ref. citée page 4)
- [Boy 96b] E. Boyer. Reconstruction et régularisation de la surface d'objets courbes. In *Actes 10<sup>ème</sup> Congrès AFCET Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Rennes*, pages 23–32, Janvier 1996. (Ref. citée page 4)
- [Boy 96c] E. Boyer and M.-O. Berger. 3D Surface Reconstruction Using Occluding Contours. *International Journal of Computer Vision*, 1996. Accepted for publication. (Ref. citée page 4)
- [Bra 84] M. Brady and A. Yuille. An Extremum Principle for Shape from Contour. *IEEE Transactions on PAMI*, 6(3): 288–301, 1984. (Ref. citée page 2)
- [Bra 95] P. Brand. *Reconstruction tridimensionnelle à partir d'une caméra en mouvement : de l'influence de la précision*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon, 1995. (Ref. citée page 133)
- [Bru 84] J.W. Bruce and P.J. Giblin. *Curves and Singularities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984. (Ref. citée page 29)
- [Che 92] X. Chen and F. Schmitt. Intrinsic Surface Properties from Surface Triangulation. In *Proceedings of Second European Conference on Computer Vision, Santa Margherita Ligure (Italy)*, pages 739–743, 1992. Lecture Notes in Computer Science, volume 588. (Ref. citée page 103)

- [Cip 90] R. Cipolla and A. Blake. The Dynamic Analysis of Apparent Contours. Technical Report OUEL 1828/90, University of Oxford, April 1990. (Ref. citée pages 4, 9, 15, 17, 21, 26, 52, 53, 55, 77, 78, 79)
- [Cip 92] R. Cipolla and A. Blake. Surface Shape from the Deformation of Apparent Contours. *International Journal of Computer Vision*, 9: 83–112, 1992. (Ref. citée page 56)
- [Cip 95a] R. Cipolla, G. Fletcher, and P.J. Giblin. Surface Geometry from Cusps of Apparent Contours. In *Proceedings of 5th International Conference on Computer Vision, Boston (USA)*, pages 858–863, June 1995. (Ref. citée pages 9, 23)
- [Cip 95b] R. Cipolla, K.E. Åström, and P.J. Giblin. Motion from the Frontier of Curved Surfaces. In *Proceedings of 5th International Conference on Computer Vision, Boston (USA)*, pages 269–275, June 1995. (Ref. citée pages 24, 28, 61)
- [Cip 96] R. Cipolla. *Active Visual Inference of Surface Shape*, volume 1016 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1996. (Ref. citée pages 15, 52, 55)
- [Coh 92] I. Cohen. *Modèles déformables 2D et 3D: application à la segmentation d'images médicales*. Thèse de doctorat, Université de Paris Dauphine, UER mathématiques de la décision, 1992. (Ref. citée page 33)
- [Coh 93] L.D. Cohen and I. Cohen. Finite-Element Methods for Active Contour Models and Balloons for 2-D and 3-D Images. *IEEE Transactions on PAMI*, 15(11): 1131–1147, 1993. (Ref. citée page 97)
- [Cul 94] J.C. Culioli. *Introduction À l'Optimisation*. Ellipses, 1994. (Ref. citée page 108)
- [dB 78] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978. (Ref. citée pages 34, 98)
- [dC 76] M.P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976. (Ref. citée pages 13, 18, 59, 60, 64, 67, 141)
- [Del 93] H. Delinguet, K. Herbert, and K. Ikeuchi. A Spherical Representation for the Recognition of Curved Objects. In *Proceedings of 4th International Conference on Computer Vision, Berlin (Germany)*, pages 103–112, 1993. (Ref. citée page 129)
- [Dev 94] F. Devernay and O.D. Faugeras. Computing Differential Properties of 3D Shapes from Stereoscopic Images Without 3D Models. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Seattle, (USA)*, pages 208–213, 1994. (Ref. citée page 128)
- [Fau 86] O.D. Faugeras and G. Toscani. The Calibration Problem for Stereo. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Miami, (USA)*, pages 15–20, 1986. (Ref. citée page 136)
- [Fau 88] O.D. Faugeras. Quelques pas vers la vision artificielle en trois dimensions. *Technique et Science Informatique*, 7(6): 547–590, 1988. (Ref. citée page 52)

- [Fau 90a] O.D. Faugeras. On the Motion of 3D Curves and its Relationship to Optical Flow. In *Proceedings of First European Conference on Computer Vision, Antibes (France)*, pages 107–117, April 1990. Lecture Notes in Computer Science, volume 427. (Ref. citée page 21)
- [Fau 90b] O.D. Faugeras, E. Lebras-Mehlman, and J.D. Boissonnat. Representing stereo data with the delaunay triangulation. *Artificial Intelligence Journal*, 44: 41–87, July 1990. (Ref. citée pages 2, 97, 98)
- [Fau 93] O. Faugeras. *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*. Artificial Intelligence. MIT Press, Cambridge, 1993. (Ref. citée pages 31, 34, 133)
- [Fle 87] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley & Sons, second edition, 1987. (Ref. citée page 108)
- [For 92] D.A. Forsyth, J.L. Mundy, A. Zisserman, and C.A. Rothwell. Recognising Rotationally Symmetric Surfaces from their Outlines. In *Proceedings of Second European Conference on Computer Vision, Santa Margherita Ligure (Italy)*, pages 639–647, May 1992. Lecture Notes in Computer Science, volume 588. (Ref. citée page 54)
- [Fuc 77] H. Fuchs, Z.M. Kedem, and S.P. Uselton. Optimal Surface Reconstruction from Planar Contours. *Communications of the ACM*, 20(10): 693–702, 1977. (Ref. citée page 99)
- [Gib 87] P.J. Giblin and R. Weiss. Reconstruction of Surfaces from Profiles. In *Proceedings of the First International Conference on Computer Vision, London*, pages 136–144, 1987. (Ref. citée pages 9, 52, 53)
- [Gib 95] P.J. Giblin and R.S. Weiss. Epipolar Curves on Surfaces. *Image and Vision Computing*, 13(1): 33–44, 1995. (Ref. citée pages 5, 9, 21, 23, 24, 28, 56)
- [Gla 92a] R. Glachet. *Modélisation géométrique par apprentissage de cylindres droits généralisés homogènes en vision monoculaire*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 1992. (Ref. citée page 2)
- [Gla 92b] R. Glachet, M. Dhome, and J.T. Lapresté. Finding the Pose of an Object of Revolution. In *Proceedings of Second European Conference on Computer Vision, Santa Margherita Ligure (Italy)*, pages 681–686, May 1992. Lecture Notes in Computer Science, volume 588. (Ref. citée page 54)
- [Gri 81] W.E.L. Grimson. *From Images to Surfaces. A Computational Study of the Human Early Visual System*. MIT Press, Cambridge, 1981. (Ref. citée pages 52, 103)
- [Gri 86] N.C. Griswold and C.P. Yeh. A Stereo Model Based on Mechanisms of Human Perception. In *Proceedings of 8th International Conference on Pattern Recognition, Paris (France)*, pages 644–647, 1986. (Ref. citée page 52)
- [Hof 89] W. Hoff and N. Ahuja. Surfaces from Stereo: Integrating Feature Matching, Disparity Estimation, and Contour Detection. *IEEE Transactions on PAMI*, 11(2): 121–136, 1989. (Ref. citée page 52)

- [Hop 92] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle. Surface Reconstruction from Unorganized Points. In *ACM Computer Graphics (Proceedings Siggraph)*, volume 26(2), pages 71–78, July 1992. (Ref. citée page 97)
- [Hor 81] B. Horn and B. Schunck. Determining Optical Flow. *Artificial Intelligence*, 17: 185–203, 1981. (Ref. citée page 33)
- [Ike 95] K. Ikeuchi and M. Herbert. Spherical Representations: from EGI to SAI. In *International Workshop on 3D Objects Representations in Computer Vision*, pages 327–345, 1995. Lecture Notes in Computer Science, volume 994. (Ref. citée page 129)
- [Jos 95a] T. Joshi, N. Ahuja, and J. Ponce. Structure and Motion Estimation from Dynamic Silhouettes under Perspective Projection. In *Proceedings of 5th International Conference on Computer Vision, Boston (USA)*, pages 290–295, June 1995. (Ref. citée pages 11, 24, 28, 53, 77, 78, 79)
- [Jos 95b] T.A. Joshi. *Structure and Motion Estimation and Object Recognition for Curved 3D Objects*. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1995. (Ref. citée page 53)
- [Kan 89] K. Kanatani and T. Chou. Shape from texture: General principal. *Artificial Intelligence*, 38: 1–48, 1989. (Ref. citée page 2)
- [Kas 88] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active Contour Models. *International Journal of Computer Vision*, 1: 321–331, 1988. (Ref. citée page 33)
- [Koe 82] J.J. Koenderink and A.J. van Doorn. The Shape of Smooth Objects and the Way Contours End. *Perception*, 11: 129–137, 1982. (Ref. citée pages 9, 13, 14)
- [Koe 84a] J.J. Koenderink. The Structure of Images. *Biological Cybernetics*, 50: 363–370, 1984. (Ref. citée page 2)
- [Koe 84b] J.J. Koenderink. What Does the Occluding Contour Tell us About Solid Shape? *Perception*, 13: 321–330, 1984. (Ref. citée pages 9, 15, 17)
- [Koe 86] J.J. Koenderink. An Internal Representation for Solid Shape Based on the Topological Properties of the Apparent Contour. In W. Richards and S. Ullman, editors, *Image Understanding: 1985-86*, chapter 9, pages 257–285. Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ, 1986. (Ref. citée pages 15, 145, 146)
- [Koe 90] J.J. Koenderink. *Solid Shape*. MIT Press, Cambridge, 1990. (Ref. citée pages 1, 9, 23)
- [Kri 90] D. Kriegman and J. Ponce. On Recognizing and Positioning Curved 3D objects from Image Contours. *IEEE Transactions on PAMI*, 12(12): 1127–1137, December 1990. (Ref. citée page 54)
- [Kut 94a] K.N. Kutulakos and C.R. Dyer. Global Surface Reconstruction by Purposive Control of Observer Motion. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Seattle, (USA)*, pages 331–338, 1994. (Ref. citée page 32)

- [Kut 94b] K.N. Kutulakos and C.R. Dyer. Occluding Contour Detection Using Affine Invariants and Purposive Viewpoint Control. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Seattle, (USA)*, pages 323–30, 1994. (Ref. citée pages 27, 28)
- [Lan 86] P. Lancaster and Kęstutis Šalkauskas. *Curve and Surface Fitting - An Introduction*. Academic Press, 1986. (Ref. citée page 34)
- [Lau 87] P.J. Laurent. Courbes ouvertes ou fermées par B-Splines régularisantes. Rapport de Recherche RR 652-M, IMAG, Grenoble, 1987. (Ref. citée page 34)
- [Lau 94] A. Laurentini. The Visual Hull Concept for Silhouette-Based Image Understanding. *IEEE Transactions on PAMI*, 16(2): 150–162, February 1994. (Ref. citée page 116)
- [Lau 95] A. Laurentini. How Far 3D Shapes Can Be Understood from 2D Silhouettes. *IEEE Transactions on PAMI*, 17(2): 188–195, February 1995. (Ref. citée page 116)
- [LH 81] H.C. Longuet-Higgins. A computer program for reconstructing a scene from two projections. *Nature*, 293: 133–135, September 1981. (Ref. citée pages 21, 24)
- [Lor 87] W.E. Lorensen and H.E. Cline. Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. In *ACM Computer Graphics (Proceedings Siggraph)*, volume 21(4), pages 163–169, July 1987. (Ref. citée page 97)
- [Luo 92] Q.T. Luong. *Matrice fondamentale et autocalibration en vision par ordinateur*. Thèse de doctorat, Université de Paris Sud, centre d’Orsay, 1992. (Ref. citée pages 34, 134)
- [Mal 89] J.L. Mallet. Discrete smooth interpolation. *ACM Transactions on Graphics*, 8(2): 121–144, 1989. (Ref. citée pages 97, 103)
- [Maple] *MAPLE V*. Copyright (c) 1981-1990 by the University of Waterloo. All rights reserved. MAPLE is a registered trademark of Waterloo Maple Software. (Ref. citée page 137)
- [Mar 82] D. Marr. *Vision*. W. H. Freeman, San Francisco, 1982. (Ref. citée pages 9, 17)
- [Mor 92] H.P. Moreton and C.H. Séquin. Functional Optimization for Fair Surface Design. In *ACM Computer Graphics (Proceedings Siggraph), Vol. 26(2)*, pages 167–176, July 1992. (Ref. citée page 103)
- [Nal 88] V.S. Nalwa. Line-Drawing Interpretation: A Mathematical Framework. *International Journal of Computer Vision*, 2(2): 103–124, 1988. (Ref. citée page 8)
- [Oli 93] J. Oliensis. Local Reproducible Smoothing without Shrinkage. *IEEE Transactions on PAMI*, 15(3): 307–312, 1993. (Ref. citée page 103)
- [Pen 90] A. P. Pentland. Linear Shape from Shading. *International Journal of Computer Vision*, 4: 153–162, 1990. (Ref. citée pages 2, 128)

- [Pet 92] S. Petitjean, J. Ponce, and D.J. Kriegman. Computing Exact Aspect Graphs of Curved Objects: Algebraic Surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 9(3): 231–255, 1992. (Ref. citée page 30)
- [Peu 94] B. Peuchot. Utilisation de détecteurs subpixels dans la modélisation d'une caméra. In *Actes 9<sup>ème</sup> Congrès AFCET Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Paris*, pages 691–695, 1994. (Ref. citée page 133)
- [Pog 85] T. Poggio, V. Torre, and C. Koch. Computational Vision and Regularization Theory. *Nature*, 317: 314–319, 1985. (Ref. citée page 103)
- [Pon 89] J. Ponce, D. Chelberg, and W.B. Mann. Invariant Properties of Straight Homogeneous Generalized Cylinders and their Contours. *IEEE Transactions on PAMI*, 11(9): 951–966, 1989. (Ref. citée pages 2, 21, 54)
- [Por 91] J. Porrill and S. Pollard. Curve Matching and Stereo Calibration. *Image and Vision Computing*, 9(1): 45–50, 1991. (Ref. citée page 28)
- [Pre 85] F. Preparata and M.I. Shamos. *Computational Geometry, an Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. (Ref. citée page 98)
- [Pre 92] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing, Second Edition*. Cambridge University Press, 1992. (Ref. citée pages 77, 108, 136, 137)
- [Rie 86] J.H. Rieger. Three-Dimensional Motion from Fixed Points of a Deforming Profile Curve. *Optics Letters*, 11: 123–125, 1986. (Ref. citée page 28)
- [Rie 92] J.H. Rieger. Global Bifurcation Sets and Stable Projections of Nonsingular Algebraic Surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 7(3): 171–194, 1992. (Ref. citée page 30)
- [Say 95] P. Sayd, M. Dhome, and J.M. Lavest. Reconstruction of Uniform Circular Generalized Cylinders Under Full Perspective Projection. In *Proceedings of 9th Scandinavian Conference on Image Analysis, Uppsala (Sweden)*, pages 707–714, 1995. (Ref. citée pages 21, 54)
- [Sch 93] L.L. Schumaker. Triangulations in CAGD. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 13(1): 47–52, January 1993. (Ref. citée page 98)
- [Scl 91] S. Sclaroff and A. Pentland. Generalized Implicit Functions for Computer Graphics. In *ACM Computer Graphics (Proceedings Siggraph)*, volume 25(4), pages 247–250, July 1991. (Ref. citée page 97)
- [Sea 95] W.B. Seales and O.D. Faugeras. Building Three-Dimensional Object Models From Image Sequences. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(3): 308–324, 1995. (Ref. citée pages 77, 78, 79, 96)
- [Sol 90] F. Solina and R. Bajcsy. Recovery of Parametric Models from Range Images: The Case for Superquadrics with Global Deformation. *IEEE Transactions on PAMI*, 12(2): 131–147, 1990. (Ref. citée page 97)

- [Spi 70] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume III. Brandeis University, 1970. (Ref. citée page 58)
- [Sto 80] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1980. (Ref. citée page 77)
- [Sze 93a] R. Szeliski, D. Tonnesen, and D. Terzopoulos. Modeling Surfaces of Arbitrary Topology with Dynamic Particles. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, New York (USA)*, pages 82–87, 1993. (Ref. citée page 97)
- [Sze 93b] R. Szeliski and R. Weiss. Robust Shape Recovery from Occluding Contours Using a Linear Smoother. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, New York (USA)*, pages 666–667, 1993. (Ref. citée pages 53, 77, 78, 79)
- [Tau 95a] G. Taubin. A Signal Processing Approach To Fair Surface Design. In *ACM Computer Graphics (Proceedings Siggraph)*, pages 351–358, July 1995. (Ref. citée pages 103, 104)
- [Tau 95b] G. Taubin. Estimating the Tensor of Curvature of a Surface from a Polyhedral Approximation. In *Proceedings of 5th International Conference on Computer Vision, Boston (USA)*, pages 902–907, June 1995. (Ref. citée page 103)
- [Tau 96] G. Taubin, T. Zhang, and G. Golub. Optimal Surface Smoothing as Filter Design. In *Proceedings of Fourth European Conference on Computer Vision, Cambridge, (England)*, pages 283–292, June 1996. Lecture Notes in Computer Science, volume 1065. (Ref. citée page 103)
- [Ter 87] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, and K. Fleischer. Elastically Deformable Models. In *ACM Computer Graphics (Proceedings Siggraph)*, volume 21(4), pages 205–214, July 1987. (Ref. citée page 97)
- [Ter 88] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass. Constraint on Deformable Models: Recovering 3D Shape and Nonrigid Motion. *Artificial Intelligence*, 36: 91–123, 1988. (Ref. citée page 33)
- [Tsa 87] R.Y. Tsai. A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-Shelf TV Cameras and Lenses. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA-3(4): 323–344, 1987. (Ref. citée page 136)
- [Ull 79] S. Ullman. *The interpretation of visual motion*. MIT Press, Cambridge, 1979. (Ref. citée page 2)
- [Ulu 93] F. Ulupinar and R. Nevatia. Perception of 3D Surfaces from 2D Contours. *IEEE Transactions on PAMI*, 15(1): 3–18, 1993. (Ref. citée page 2)
- [Ulu 95] F. Ulupinar and R. Nevatia. Shape from Contour: Straight Homogeneous Generalized Cylinders and Constant Cross Section Generalized Cylinders. *IEEE Transactions on PAMI*, 17(2): 120–135, 1995. (Ref. citée pages 2, 21, 54)

- [Vai 90] R. Vaillant. *Géométrie différentielle et vision par ordinateur: détection et reconstruction des contours d'occultation de la surface d'un objet non polyédrique*. Thèse de doctorat, Université de Paris Sud, centre d'Orsay, 1990. (Ref. citée pages 4, 9, 17, 27, 52, 53, 57, 129)
- [Vai 92] R. Vaillant and O. Faugeras. Using Extremal Boundaries for 3-D Object Modeling. *IEEE Transactions on PAMI*, 14(2): 157–173, February 1992. (Ref. citée pages 52, 77, 78, 79, 96)
- [Vort] *VORT - a very ordinary rendering tool-kit*. Public Domain Software. (Ref. citée page 118)
- [Wel 94] W. Welch and A. Witkin. Free-Form Shape Design Using Triangulated Surfaces. In *ACM Computer Graphics (Proceedings Siggraph)*, pages 247–256, July 1994. (Ref. citée page 103)
- [Wen 92] J. Weng, P. Cohen, and M. Herniou. Camera Calibration with Distorsion Models and Accurate Evaluation. *IEEE Transactions on PAMI*, 14(10): 965–980, 1992. (Ref. citée page 133)
- [Zer 93] M. Zerroug and R. Nevatia. Quasi-Invariant Properties and 3-D Shape Recovery of Non-Straight, Non-Constant Generalized Cylinders. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, New York (USA)*, pages 96–103, 1993. (Ref. citée page 54)
- [Zha 93] C. Zhao. *Reconstruction de surfaces tridimensionnelles en vision par ordinateur*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1993. (Ref. citée page 54)
- [Zha 94] C. Zhao and R. Mohr. Relative 3D Regularized B-Spline Surface Reconstruction Through Image Sequences. In *Proceedings of Third European Conference on Computer Vision, Stockholm, (Sweden)*, volume 2, pages 417–426, May 1994. *Lecture Notes in Computer Science*, volume 801. (Ref. citée pages 54, 96)
- [Zhe 92] J.Y. Zheng and F. Kishino. 3-d model from contours: Further identification of unexposed areas. In *Proceedings of 11th International Conference on Pattern Recognition, Den Haag (Netherlands)*, volume 1, pages 349–353, September 1992. (Ref. citée page 116)
- [Zhe 94] J.Y. Zheng. Acquiring 3-D Models from Sequences of Contours. *IEEE Transactions on PAMI*, 16(2): 163–178, 1994. (Ref. citée pages 4, 53, 96, 97)





# Table des figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Contour d'occultation et contour occultant. . . . .  | 8  |
| 1.2  | Exemples de contours d'occultations: (a) le cas d'une projection orthographique, (b) le cas d'une projection perspective. La partie du contour d'occultation en pointillé dans le dernier exemple ne peut être vue que si la surface est transparente. . . . . | 10 |
| 1.3  | Géométrie de l'observation. . . . .  | 12 |
| 1.4  | Un paramétrage $X(s, \tau)$ de la surface. . . . .   | 13 |
| 1.5  | Les singularités typiques du contour occultant: (a) les jonctions en T où la ligne de vue est bi-tangente, (b) les points de rebroussements où la direction d'observation est asymptotique. . . . .  | 14 |
| 1.6  | Le contour occultant sur la sphère unité de projection. . . . .  | 18 |
| 1.7  | Le contour occultant dans le plan rétinien de projection. . . . .  | 19 |
| 1.8  | La surface spatio-temporelle $\bar{\mathcal{S}}$ . . . . .   | 22 |
| 1.9  | Le paramétrage épipolaire induit sur $\mathcal{S}$ . . . . .   | 22 |
| 1.10 | Les différents types de points qui peuvent être observés dans le cas d'un tore. . . . .  | 25 |
| 1.11 | Deux correspondants épipolaires $p_1$ et $p_2$ . . . . .   | 26 |
| 1.12 | Un point multiple $P$ . . . . .  | 27 |
| 1.13 | Dans le cas discret, la courbe épipolaire est constituée, par morceaux, des intersections des plans épipolaires avec la surface. . . . .   | 29 |
| 1.14 | Les lignes de vue de deux correspondants épipolaires s'intersectent. . . . .   | 31 |
| 1.15 | Exemple de contrainte sur la position de $P_2$ lorsque les directions $T_1$ et $T_2$ vérifient la contrainte épipolaire pour les positions $C_1$ et $C_2$ de la caméra, ainsi que les directions $T_2$ et $T_3$ pour les positions $C_2$ et $C_3$ . . . . .    | 33 |
| 1.16 | Recherche récursive des correspondants épipolaires: la recherche s'effectue à partir du correspondant précédent. . . . .   | 35 |
| 1.17 | La correspondance épipolaire à proximité d'un point multiple: $p_1$ a deux correspondants potentiels proches $p_2$ vérifiant la contrainte épipolaire. . . . .   | 36 |
| 1.18 | Le correspondant épipolaire $p_2$ est celui pour lequel le produit scalaire entre la direction de la droite épipolaire et la normale au contour garde le même signe dans les deux images. . . . .  | 37 |
| 1.19 | La caméra est en rotation autour du centre de la sphère. . . . .   | 39 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.20 | La caméra est en rotation autour du centre de la sphère: deux vue des contours d'occultation observés sur la sphère et des correspondances épipolaires induites. . . . .  | 40 |
| 1.21 | La caméra est en translation sur un axe passant par le centre de la sphère. .   | 41 |
| 1.22 | La caméra est en translation sur un axe passant par le centre de la sphère: deux vues des contours d'occultation observés sur la sphère et des correspondances épipolaires induites. . . . .  | 42 |
| 1.23 | La caméra est en rotation continue autour du centre de la sphère: suivi de la correspondance épipolaire de trois points images dans le temps. . . . .   | 43 |
| 1.24 | La caméra est en rotation continue: deux vues de trois courbes épipolaires sur la surface. Ces courbes sont singulières (points de rebroussements) aux points multiples . . . . .   | 44 |
| 1.25 | La caméra est en rotation continue: détails sur la répartition des points sur les contours occultants à la suite de mises en correspondance épipolaire successives. . . . .   | 45 |
| 1.26 | Mise en correspondance de deux images de la séquence du vase (18 images prises avec une rotation de la table micro-métrique de 10 degrés entre deux images). . . . .  | 47 |
| 1.27 | Mise en correspondance de plusieurs images de la séquence de la Calebasse (30 images prises avec une rotation de la table micro-métrique de 7 degrés entre deux images). . . . .  | 48 |
| 2.1  | L'expression $\frac{-C_t \delta t \cdot N}{T_t \delta t \cdot N}$ correspond à la distance entre $(C + \delta t C_t)$ et l'intersection de la ligne de vue $(T + \delta t T_t)$ avec le plan tangent en $P$ . La valeur qui en découle tend vers la profondeur $\lambda$ lorsque $\delta t$ tend vers 0. . . . .  | 56 |
| 2.2  | Intersection des lignes de vue dans le plan épipolaire. . . . .   | 57 |
| 2.3  | Le voisinage de $P$ est représenté par $z = h(x, y)$ , où le plan $xy$ est le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $P$ et où l'axe des $z$ est orienté suivant la normale $N$ à $\mathcal{S}$ en $P$ . . . . .   | 59 |
| 2.4  | Le paraboloïde osculateur $\mathcal{P}$ à la surface $\mathcal{S}$ au point $P$ . . . . .   | 60 |
| 2.5  | Le repère local $(O, x, y, z)$ orienté suivant $T$ , $X_s$ et $N$ . . . . .   | 61 |
| 2.6  | La base $(x, z_{\mathcal{E}})$ du plan épipolaire $\mathcal{E}$ . . . . .   | 63 |
| 2.7  | Le repère $(Ox', y')$ du plan tangent orienté suivant les directions principales. . . . .   | 66 |
| 2.8  | Le plan épipolaire $\mathcal{E}_i$ défini par $C$ , $P$ et $C_i$ . . . . .  | 69 |
| 2.9  | Coupe dans le plan épipolaire $\mathcal{E}_i$ . . . . .   | 70 |
| 2.10 | Calcul de $d_i$ . . . . .   | 71 |
| 2.11 | Les trois contours d'occultation sur $\mathcal{S}$ et les régions des points $P$ sur le contour d'occultation à reconstruire, correspondant aux différentes configurations des points $P$ , $P_i$ et $P_j$ . L'indice $a, b, c, \dots$ associé à une région est ici celui de la figure qui représente la configuration des points pour cette région (dans les figures 2.12 et 2.13 ci-après). . . . . | 75 |
| 2.12 | Les différentes configurations possibles pour $P$ et ses deux correspondants épipolaires $P_i$ et $P_j$ lorsque le mouvement de la caméra est linéaire. . . . .   | 75 |
| 2.13 | Les différentes configurations possibles pour $P$ et ses deux correspondants épipolaires $P_i$ et $P_j$ lorsque le mouvement de la caméra est non linéaire. . . . .   | 76 |
| 2.14 | Le cercle osculateur dans le plan de projection des lignes de vue. . . . .  | 78 |
| 2.15 | Une situation possible pour un mouvement de caméra non linéaire. Dans le plan osculateur, la position du point $P$ de la surface qui est estimée par une méthode du cercle osculateur est celle du point virtuel $P$ . . . . .  | 80 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 2.16 | Observation d'une sphère : si $f$ est la distance focale et $d$ la distance entre la caméra et le centre de la sphère, alors la profondeur des points sur le contour d'occultation est : $\lambda = \sqrt{d^2 - R^2}$ . Si l'axe optique de la caméra passe par le centre de la sphère, alors le contour occultant est un cercle de rayon : $r = f \frac{R}{\lambda}$ . | 81  |
| 2.17 | Les contours d'occultation pour deux rotations planes de la caméra autour de la sphère. La position d'un point, sur le contour d'occultation, est repérée en degré à partir de la position $s = 0$ montrée.   | 83  |
| 2.18 | Répartition des erreurs en fonction de la position (en degré) sur le contour : (a) erreurs sur la profondeur $\lambda$ , (b) erreurs sur le rayon $R$ .   | 83  |
| 2.19 | Un échantillon de 90 points tests sur le contour occultant pour des rotations planes de la caméra. Les régions sans points du contour, ici le haut et le bas du contour, sont les voisinages des points multiples (la correspondance épipolaire échoue) et les voisinages des points où $a_i$ et $a_j$ sont très proches (la reconstruction échoue).                    | 84  |
| 2.20 | Les points de l'échantillon reconstruit pour une rotation de $10^\circ$ . Le contour d'occultation original est en trait continu.   | 84  |
| 2.21 | Les contours d'occultation pour deux rotations perpendiculaires de la caméra. La position d'un point, sur le contour d'occultation, est repérée en degré à partir de la position $0$ montrée.   | 86  |
| 2.22 | Répartition des erreurs en fonction de la position (en degré) sur le contour : (a) erreurs sur la profondeur $\lambda$ , (b) erreurs sur le rayon $R$ .   | 86  |
| 2.23 | Un échantillon de 89 points tests sur le contour occultant pour des rotations non-planes de la caméra. Les régions sans points du contour sont les voisinages des points multiples (la correspondance épipolaire échoue) et les voisinages des points où $a_i$ et $a_j$ sont très proches (la reconstruction échoue).   | 87  |
| 2.24 | Les points de l'échantillon reconstruit pour une rotation de $10^\circ$ . Le contour d'occultation original est en trait continu.   | 87  |
| 2.25 | Reconstruction du pot (séquence de 29 images).  | 89  |
| 2.26 | Reconstruction de la théière (séquence de 33 images).   | 90  |
| 2.27 | Reconstruction du vase (séquence de 18 images prises avec une rotation de la table micro-métrique de 10 degrés entre deux images).  | 91  |
| 2.28 | Reconstruction de laalebasse (séquence de 29 images prises avec une rotation de la table micro-métrique de 7 degrés entre deux images).   | 92  |
| 3.1  | Triangulation des points entre les contours d'occultation.  | 99  |
| 3.2  | Le chemin de coût minimum détermine les jonctions entre les deux contours.  | 100 |
| 3.3  | Exemples de triangulation : (a) le pot (1962 points, 27 contours), (b) la théière (2191 points, 31 contours), (c) le vase (1272 points, 16 contours), (d) laalebasse (2381 points, 27 contours).  | 101 |
| 3.4  | En raison du bruit, la surface reconstruite peut présenter des plis. C'est le cas ici de la théière où un rendu réaliste (ombrage de Gouraud) les met en évidence.  | 102 |
| 3.5  | Les côtés $C_{ij}$ qui arrivent au sommet $P_i$ .   | 105 |
| 3.6  | La normale discrète à la surface lorsque l'énergie de rappel est la distance à la position initiale.  | 106 |
| 3.7  | La normale discrète à la surface lorsque l'énergie de rappel est la distance au plan tangent.   | 107 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 3.8  | Approximation polyédrique d'une sphère: (a) la sphère (2800 sommets), (b) la sphère bruitée. . . . .  | 109 |
| 3.9  | Sphère régularisée avec les distances aux positions initiales comme critère de fiabilité: (a) $E_{rap} = n \times 0.01^2$ , (b) $E_{rap} = n \times 0.05^2$ . . . . .   | 110 |
| 3.10 | Sphère régularisée avec les distances aux plans tangents initiaux comme critère de fiabilité: (a) $E_{rap} = n \times 0.01^2$ , (b) $E_{rap} = n \times 0.05^2$ . . . . .   | 110 |
| 3.11 | Un modèle de visage: (a) surface initiale (657 sommets), (b) surface bruitée, (c) surface régularisée. . . . .  | 111 |
| 3.12 | La théière reconstruite (2191 sommets, 31 contours d'occultation): (a-b) la surface triangulée, (c-d) la surface après la régularisation. . . . .   | 112 |
| 3.13 | Exemple de points critiques sur la surface observée: (a) points frontières, (b) points de bi-tangence. . . . .  | 114 |
| 3.14 | Le passage d'une région non-visible - coupe dans le plan épipolaire. . . . .  | 115 |
| 3.15 | L'hypothèse de convexité de la surface dans la direction de la ligne de vue n'est plus vérifiée; la position estimée de $P(t_2)$ à l'aide d'une approximation à l'ordre 2 est alors $P(t_2)$ . . . . .  | 117 |
| 3.16 | Reconstruction d'une tasse: (a) une image de la séquence (30 images), (b) l'enveloppe visuelle, associée aux contours extérieurs de la tasse, qui est reconstruite, (c)-(d) les parties de la surface, non-visibles par les contours occultants, qui sont détectées par l'algorithme sont marquées en sombre. . . | 119 |
| 3.17 | Reconstruction d'une cruche: (a) une image de la séquence (32 images), (b) l'enveloppe visuelle, associée aux contours extérieurs de la cruche, qui est reconstruite, (c)-(d) les parties de la surface, non-visibles par les contours, qui sont détectées par l'algorithme sont marquées en sombre. . . . .      | 120 |
| 3.18 | La théière: (a) une image de la séquence, (b) projection du modèle construit dans l'image initiale. . . . .   | 122 |
| 3.19 | Le vase: (a) une image de la séquence, (b) projection du modèle construit dans l'image initiale. . . . .  | 123 |
| 3.20 | La calebasse: (a) une image de la séquence, (b) projection du modèle construit dans l'image initiale. . . . .   | 124 |
| 3.21 | La cruche: (a) une image de la séquence, (b) projection du modèle construit complet (enveloppe visuelle) dans l'image initiale, (c) projection du modèle où les régions non-visibles par les contours ont été éliminées. . . . .  | 125 |
| A.1  | Le modèle à sténopé . . . . .   | 132 |
| A.2  | Les droites épipolaires $d_{p_i}$ et $d_{p_j}$ . . . . .  | 135 |
| A.3  | La mire de calibrage. . . . .   | 137 |
| B.1  | Courbure normale $k_n$ et courbure géodésique $k_g$ en un point de $\mathcal{S}$ . . . . .  | 145 |



## Résumé

De par les récents progrès de l'informatique dans le domaine de l'imagerie, il est dorénavant possible de manipuler des surfaces d'objets réels à partir des ordinateurs. Un des besoins qui en découle concerne l'acquisition de ces surfaces. Dans ce document, nous nous penchons sur le problème de la reconstruction de surfaces d'objets courbes à partir de séquences d'images. Les contours images de ce type d'objets, les contours occultants, constituent une riche source d'informations sur la géométrie de la surface de l'objet. Il est en particulier possible d'estimer les propriétés locales de la surface lorsqu'une séquence d'au moins trois contours est disponible. Nous présentons dans ce cadre une méthodologie de reconstruction de surfaces. Celle-ci permet de passer d'une séquence de contours occultants à une description de la partie de la surface observée correspondante, sous la forme de facettes triangulaires. Plusieurs aspects de la reconstruction liés aux contours occultants sont par ailleurs pris en compte pour améliorer les résultats : la correction des effets dus au bruit présent dans l'ensemble du processus d'acquisition ainsi que la détection des parties non-visibles de la surface par les contours, les concavités par exemple. Les différentes étapes de la méthodologie sont illustrées tout au long du document par de nombreuses expérimentations sur des données réelles et synthétiques.

**Mots Clef:** reconstruction 3D, surfaces, contours occultants, correspondance épipolaire, lissage de surfaces polygonales, détection de concavité.

## Abstract

Recent progress in computer science makes it feasible to manipulate real object surfaces with computers. One of the resulting needs is the ability to build models of such surfaces. In this thesis, we address the problem of the reconstruction of curved object surfaces from image sequences. Planar image contours of such objects, the occluding contours, provide rich and robust geometric information about the surface shape. In particular, local shape reconstruction can be achieved when three or more occluding contours of the surface are available. In this context, we present a global method that builds surface descriptions, from occluding contours sequences, which are based on triangular meshes. In order to improve the reconstruction procedure, different important aspects are taken into account such as the correction of noise effects and the detection of surface concavities. A number of experimentations on simulated and real data are shown throughout this document to illustrate each step of the method.

**Keywords:** 3D surface reconstruction, occluding contours, epipolar correspondance, polygonal surface smoothing, concavity detection.