



HAL
open science

Etude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes : application aux pieds d'aubes de turbomachines

Loïc Salles

► **To cite this version:**

Loïc Salles. Etude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes : application aux pieds d'aubes de turbomachines. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Centrale de Lyon; Université Technique d'Etat Bauman de Moscou, 2010. Français. NNT : 2010ECDL0038 . tel-00600613

HAL Id: tel-00600613

<https://theses.hal.science/tel-00600613>

Submitted on 15 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉMOIRE DE THÈSE EN COTUTELLE

PRÉSENTÉ POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL/INSA/ECL)

PAR

Loïc SALLES

Ingénieur de l'École Centrale de Lyon

**ÉTUDE DE L'USURE PAR FRETTEMENT SOUS CHARGEMENTS
DYNAMIQUES DANS LES INTERFACES FROTTANTES**
Application aux pieds d'aubes de turbomachines

Soutenu le 7 décembre 2010 devant le jury d'examen :

E. FOLTÊTE, Professeur, ENSMM Besançon	Rapporteur
J.-C. GOLINVAL, Professeur, Université de Liège	Rapporteur
D. NÉLIAS, Professeur, INSA de Lyon	Examineur
P. JEAN, Ingénieur de recherche, SNECMA	Examineur
L. BLANC, Maître de conférence, École Centrale de Lyon	Examineur
A. M. GOUSKOV, Professeur, BMSTU, Moscou	Directeur de thèse
F. THOUVEREZ, Professeur, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse

Résumé

Les parties tournantes des turbomachines aéronautiques sont composées d'une succession de roues aubagées qui permettent le transfert de l'énergie entre l'air et le rotor. Ces roues aubagées constituent des pièces particulièrement sensibles car elles doivent répondre en termes de dimensionnement à des impératifs de performances aérodynamiques, d'aéroacoustique et de tenue mécanique à la rotation, à la température et à la charge aérodynamique. Le contact avec frottement existant au niveau des attaches aube-disque joue un rôle important sur les niveaux vibratoires.

Ce travail porte sur l'étude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes. En effet, les vibrations de l'aube peuvent produire des micro-glissements en pied d'aube qui peuvent entraîner un phénomène d'usure par fretting. Les connaissances sur le comportement de l'usure sous sollicitations dynamiques sont faibles. Seuls existent des outils numériques pour modéliser l'usure dans le cas de sollicitations quasi-statiques. Nous proposons dans cette thèse des méthodes pour calculer l'évolution de l'usure au cours des cycles de chargement dynamique basées sur une approche multi-échelle en temps. La réponse vibratoire de la structure est liée à une échelle de temps rapide qui est calculée par une méthode d'équilibrage harmonique, dans laquelle les déplacements et les efforts sont projetés sur la base de Fourier. Différentes approches temps-fréquence de calcul des coefficients de Fourier des forces de contact sont présentées. La cinétique d'usure est liée à une échelle lente et différentes méthodes sont proposées pour l'intégrer. La prise en compte des géométries usées dans le modèle éléments finis se fait par l'ajout d'un vecteur des profondeurs d'usure dans le terme de pénalité des lagrangiens dynamiques. Des exemples académiques valident et illustrent les méthodes proposées. Ces méthodes sont ensuite appliquées à l'étude de l'usure par fretting en pied d'aube de soufflante. L'étude numérique met en lumière le couplage entre vibration et usure par fretting aux interfaces de contact. La modification du comportement dynamique global de la roue aubagée est aussi observée.

Mots clés : dynamique des structures, roues aubagées, turbomachines, frottement, tribologie, fretting-wear, méthode multi-échelle en temps, analyse fréquentielle non-linéaire

Abstract

The rotating parts of aeronautical turbomachineries are made of bladed disks which enable the transfer of energy from the air to the rotor. These bladed disks are especially critical parts because their dimensioning has to meet strict requirements in terms of aerodynamical performance, aeroacoustics and mechanical resistance to rotation, temperature and aerodynamical loads. The frictional contact at the interface between blade and disk has an important influence on the vibratory levels.

This work deals with the study of fretting-wear in frictional interfaces under dynamical loading. Indeed, the blade's vibrations can produce micro-slidings in blade's root which may entail fretting-wear. Wear under dynamical loading is a badly known phenomenon. Numerical tools exist for quasic-static conditions only. Here, methods are proposed to quantify the evolution of wear along dynamical loading cycles based on a time-multiscale approach. The vibratory response of the structure is linked with a fast time scale which is calculated by a harmonic balance method : displacements and forces are expressed through Fourier series. Different frequency-time approaches are presented to compute the Fourier coefficients of contact forces. Wear kinetics is linked with a slow time scale and different methods are proposed to integrate it. Worn geometries are taken into account in the finite elements model by a wear depth vector included in the penalty term of dynamic lagrangians. Academic examples validate and illustrate the proposed methods. These methods are then used to study fretting-wear in a fan's blade root. The numerical results highlight the coupling between vibration and fretting-wear in frictional interfaces. The modification of the global dynamical behaviour of the bladed disk is also observed.

Keywords : structural dynamics, bladed disk, turbomachineries, friction, tribology, time multiscale method, nonlinear frequency analysis

Remerciements

Ces travaux de thèse ont été effectués au sein de l'équipe Dynamique des Systèmes et des Structures du laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'École Centrale de Lyon en collaboration avec le Département de Mécanique Appliquée de l'Université technique d'État Bauman à Moscou dans le cadre d'une cotutelle de thèse.

En premier lieu, je tiens à remercier le Professeur Fabrice Thouverez de m'avoir proposé ce travail et d'avoir accepté de monter une thèse en co-tutelle avec l'université Bauman.

Je remercie sincèrement le Professeur Alexandre Mikhailovitch Gousov d'avoir accepté d'encadrer ce travail et pour sa disponibilité durant mes périodes en Russie. Les conseils qu'il m'a fournis m'ont permis d'avoir un regard critique sur mon travail et de prendre du recul sur le sujet traité.

Je remercie vivement M. Daniel Nélias, professeur à l'INSA de Lyon, d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. J'en profite pour remercier tous les membres du groupe de travail sur le fretting de MAIA dont il faisait parti ainsi que Ludovic Gallego, Benjamin Fulleringer, Caroline Mary, Jean Mériaux, Siegfried Fouvry, Stéphane Deyber, Juan-antonio Ruiz ...

Je remercie également M. Jean-Claude Golinval, professeur à l'université de Liège et M. Emmanuel Foltête, professeur à l'université de Franche Comté pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'être rapporteurs de ce mémoire.

J'ai une infime reconnaissance à Laurent Blanc pour m'avoir aidé durant la thèse en tant que co-encadrant, pour avoir toujours été disponible pour répondre à mes questions, pour l'aide à la rédaction d'article et pour les bons moments passés ensemble.

Je remercie bien évidemment Snecma pour avoir financé cette étude et avoir accepté une thèse en co-tutelle sur un sujet sensible. Je remercie en premier lieu Roland Kraft pour avoir montré de l'intérêt sur le montage d'une thèse en co-tutelle avec la Russie. Je remercie aussi Stéphane Deyber pour avoir lancé l'étude et Pierrick Jean pour l'avoir suivi durant les trois ans de thèse. J'en profite pour remercier le personnel du service méthode de Snecma et en particuliers le service YHMM où j'ai passé de bons moments lors de mes séjours à Villaroche.

Je tiens particulièrement à remercier Madame Zucco, en charge des relations universitaires avec la Russie à l'École Centrale de Lyon. Je tiens à souligner tout le travail effectué durant des années pour la mise en place de collaboration avec l'Université Bauman. Cette collaboration s'est traduite pour moi par la possibilité de faire une partie de mes études d'ingénieur à Moscou et de continuer en thèse. L'existence de ces liens étroits entre l'École Centrale de Lyon et l'université Bauman a donné un nouveau virage à ma vie.

Enfin je remercie tous mes collègues chercheurs, techniciens et thésards de l'équipe D2S pour la bonne ambiance et les facilités de travail. Ce fut un véritable plaisir de travailler au sein de cette équipe.

Table des matières

Table des matières	viii
Table des figures	xi
Nomenclature	xiii
Introduction	1
1 Contact aube-disque : état de l'art	5
1.1 Présentation d'un turboréacteur	5
1.2 Problématique de la liaison aube/disque	7
1.2.1 Conception des liaisons aube/disque	7
1.2.2 Matériaux utilisés	10
1.2.3 Chargements subis par une attache	11
1.2.4 Amortissement des vibrations	19
1.3 Modes de défaillance de la liaison aube/disque	21
1.3.1 Fretting : phénoménologie	22
1.3.2 Fretting-fatigue - fissuration	25
1.3.3 Fretting-wear - usure	28
1.4 Modélisation : état de l'art	34
1.4.1 Besoins en modélisation et situation actuelle	34
1.4.2 Modélisation du contact usant	37
1.4.3 Aspect multi-échelle du contact	44
1.5 Conclusions	47
2 Formulation et résolution d'un problème de contact avec frottement et usure	49
2.1 Formulations continues locales	49
2.1.1 Premier et second principes thermodynamiques	50
2.2 Formulations discrétisées	55
2.2.1 Formulation variationnelle	55
2.2.2 Formulations équivalentes	59
2.2.3 Adaptation des lois de contact	59
2.2.4 Discrétisation par éléments finis	63
2.2.5 Discrétisation temporelle	69
2.3 Stratégies de résolution des problèmes de contact	71
2.3.1 Les multiplicateurs de Lagrange	71
2.3.2 Les méthodes par projection	71

2.3.3	Le problème complémentaire linéaire	72
2.3.4	Les lagrangiens augmentés et méthodes du point fixe	73
2.3.5	Les lagrangiens dynamiques	73
2.3.6	Méthode de Newton Généralisée	74
2.4	Exemple d'applications	76
2.5	Conclusions	80
3	Dynamique non-linéaire des structures en contact sans usure	81
3.1	Généralités sur les systèmes non-linéaires dynamiques	81
3.1.1	Système non-linéaire non-autonome	81
3.1.2	Méthodes de recherche de solutions périodiques	82
3.1.3	Solution périodique d'un système non-linéaire autonome	86
3.1.4	Réduction de la taille du modèle en fréquentiel	89
3.2	Résolution en fréquentiel du problème dynamique non-linéaire non-autonome	90
3.2.1	Traitement des forces non-linéaires de contact	90
3.2.2	Exemple d'application	96
3.3	Améliorations des méthodes d'équilibrage multi-harmonique	100
3.3.1	Expression analytique de la matrice jacobienne	100
3.3.2	Adaptation du nombre d'harmoniques	100
3.3.3	Méthode multidomaine avec non linéarités localisées	104
3.4	Conclusions	109
4	Calcul multi-échelle en temps de la cinétique d'usure	111
4.1	Aspect multi-échelle en temps de l'usure	111
4.1.1	Calcul rapide de systèmes ayant un comportement multi-échelle en temps	112
4.1.2	Recherche directe de l'état asymptotique	113
4.1.3	Homogénéisation temporelle du problème d'usure sous chargement dynamique	113
4.1.4	Résolution sur l'échelle rapide	115
4.2	Résolution du problème tribologique sur l'échelle lente	115
4.2.1	Méthode par saut de cycles	115
4.2.2	Intégration temporelle sur l'échelle lente	134
4.2.3	Méthodes de Ritz temporelles	137
4.3	Modes complexes non-linéaires et usure modale d'une aube de compresseur	141
4.4	Calcul de l'état stationnaire	144
4.4.1	Calcul par contrôle optimal ou méthode de tir	144
4.4.2	Calcul par minimisation sous contrainte du volume usé	145
4.5	Conclusions	147
5	Étude de l'usure sous chargement dynamique en pied d'aube de soufflante	149
5.1	Présentation de l'analyse dynamique d'une roue-aubagée	149
5.1.1	Présentation de la structure	149
5.1.2	Dynamique des solides déformables en rotation	150
5.1.3	Modélisation d'un secteur d'aube de soufflante	154
5.2	Résultats des simulations numériques	155
5.2.1	Équilibre statique avec frottement	157
5.2.2	Calcul dynamique non-linéaire du contact sans usure	158

5.2.3	Usure à la résonance du mode 3F	164
5.2.4	Comparaison entre usure calculée et usure observée	175
5.3	Conclusions	177
	Conclusions et perspectives	179
	Bibliographie	183
	Publications personnelles	197
	Annexes	199
A	Méthode de réduction de modèle	199
A.1	Condensation de Guyan	199
A.2	Méthodes de synthèse modale	200
A.2.1	Méthodes à interface fixe	200
A.2.2	Méthodes à interfaces libres	201
A.2.3	Méthode de Craig-Bampton dual	202
A.2.4	Méthodes à interfaces libres avec raideur d'interface	203
B	Calcul de la matrice jacobienne	205
C	Calcul des modes complexes non-linéaires	209
D	Résultats des simulations numériques	211

Table des figures

1.1	Turboréacteur civil double corps, double flux	5
1.2	Schéma simplifié d'un turboréacteur civil double corps, double flux. [32]	6
1.3	Architecture d'un compresseur axial	7
1.4	Différentes technologies de liaison aube-disque	8
1.5	Vues du disque de la soufflante du CFM56	9
1.6	Matériaux des aubes et du disque	10
1.7	Sollicitations en pieds d'aubes durant les différentes phases de vol	11
1.8	Courbe de Wöhler	15
1.9	Diagramme de Haigh	16
1.10	Diagramme de Campbell d'une aube	17
1.11	Modes de fretting	23
1.12	Cycle de fretting en glissement partiel	24
1.13	Représentation des cartes de fretting	25
1.14	Critère de transition entre RGP et RGT pour un contact cylindre/plan	26
1.15	Courbes de Wöhler avec fretting [183]	27
1.16	Évolution de la profondeur de fissuration en fonction de l'amplitude de débattement	27
1.17	Schéma de la fissuration d'une portée d'aube	28
1.18	Évolution du volume usé en fonction de l'énergie dissipée cumulée	31
1.19	Illustration de l'impact de la dimension de contact [183]	33
1.20	Illustration de la cinétique d'usure pour les phases GT1+GP1+GT2 [183]	33
1.21	Distribution de pression de contact entre le pied d'aube et l'alvéole de disque	35
1.22	Profil en queue d'aronde	35
1.23	Répartition de la pression de contact sur une portée	36
1.24	Schéma du contact pour différentes configurations du pion incliné	38
1.25	Pression de contact pour différentes inclinaison	38
1.26	Calcul de problème de contact par méthode EF classique (a) et (c) et par la méthode X-FEM (b) et (d) [115]	42
1.27	Utilisation d'un élément enrichi par une approche sans maillage	43
1.28	Topographie des surfaces d'un contact entre un pion et un plan	45
2.1	Description du problème de contact entre un solide et un bâti	50
2.2	Représentation du contact de Signorini étendu	55
2.3	Représentation du cône de Coulomb	56
2.4	Maillage à la surface de contact	63
2.5	Division de la zone de contact en sous-élément	64
2.6	Élément de contact nœud à nœud	65

2.7	Erreur sur les conditions de contact	66
2.8	Force de contact équivalente	67
2.9	Profil d'un pion en contact sur un plan et pression de contact	68
2.10	Modèle d'une poutre avec frotteur	76
2.11	Déplacement suivant y en bout de poutre	77
2.12	Déplacement tangentiel au nœud de contact 1	77
2.13	Déplacement normal au nœud de contact 1	78
2.14	Vitesse relative tangentielle au nœud de contact 1	79
2.15	Force de contact normale au nœud de contact 1	79
3.1	Technique AFT	85
3.2	Trajectoire d'un mode normal non-linéaire	87
3.3	Éléments de contact : (a) cas général et (b) avec raideur de contact	91
3.4	Cycle de frottement : (a) formulation DLFT et (b) formulation par pénalité	95
3.5	Organigramme de la procédure de calcul des forces de contact par DLFT	95
3.6	Modèle d'une poutre avec frotteur	96
3.7	Réponse fréquentielle autour du premier mode de flexion	97
3.8	Nombre d'itérations du solveur fsolve par fréquence pour différentes méthodes	97
3.9	Déplacement tangentiel (a) et normal (b) le long du frotteur à un instant de la période	98
3.10	Pression de contact le long du frotteur à un instant de la période	98
3.11	Oscillateur à deux degrés de liberté avec frotteur	101
3.12	Réponse en fréquence avec différentes méthodes d'adaptation du nombre d'harmoniques	102
3.13	Évolution du nombre d'harmoniques pour les différents critères d'erreur	102
3.14	Évolution de l'erreur en fonction de la fréquence pour les différents critères d'erreurs	103
3.15	Division de l'aube en domaines statiques et dynamiques	104
3.16	Séparation en domaines statiques et dynamiques de deux structures en contact	105
3.17	Modèle multidomaine d'une poutre avec frotteur	107
3.18	Réponse forcée en bout de poutre autour du premier mode	108
3.19	Amplitude des déplacements relatifs le long de l'interface de contact	108
3.20	Déplacement temporel du premier de nœud de l'interface	109
4.1	Modèle à deux degrés de liberté	117
4.2	Réponse fréquentielle en amplitude des déplacements la masse m_1	118
4.3	Réponse fréquentielle en amplitude des déplacements relatifs	118
4.4	Évolution de la profondeur d'usure pour différents ordres harmoniques	119
4.5	Déplacement de la masse m_1 pour $F_{ex} = 6N$	120
4.6	Usure de la masse m_1 pour $F_{ex} = 6N$	120
4.7	Déplacement de la masse m_1 pour $F_{ex} = 10N$	120
4.8	Usure de la masse m_1 pour $F_{ex} = 10N$	120
4.9	Déplacement de la masse m_1 pour $F_{ex} = 14N$	120
4.10	Usure de la masse m_1 pour $F_{ex} = 14N$	120
4.11	Réponse fréquentielle en amplitude des déplacements de la masse m_1 pour quatre situations	122
4.12	Géométrie et conditions aux limites d'une barre frottante	122
4.13	Évolution des profondeurs d'usure (chargement quasi-statique)	123
4.14	Profil d'usure pour 5 nombres particuliers de cycles	124

4.15	Évolution de l'usure dans la zone de glissement	125
4.16	Évolution de l'usure dans la zone intermédiaire	125
4.17	Évolution des pressions normales de contact	126
4.18	Distribution des pressions normales de contact pour 5 nombres de cycles particuliers	126
4.19	Évolution de l'amplitude des déplacements tangentiels à l'interface de contact	127
4.20	Coupe de la figure. 4.13 : amplitude des déplacements pour 5 nombres de cycles particuliers	127
4.21	Réponse fréquentielle des déplacements horizontaux du point P_e avec différentes conditions de contact	128
4.22	Réponse fréquentielle des déplacements horizontaux avec une interface frottante	129
4.23	Profil final usé à différentes fréquences	129
4.24	Déplacement et vitesse du point P_e à l'interface de contact en fonction de $\tau = \omega t$: $f_1 = 10kHz$ (a) et $f_4 = 10kHz$ (a).	130
4.25	Évolution des amplitudes de déplacements tangentiels à l'interface de contact (79kHz)	131
4.26	Coupe de la figure 4.25 : amplitudes des déplacements tangentiels pour 4 nombres de cycles particuliers	131
4.27	Distribution des pressions normales de contact pour 4 nombres de cycles particuliers (79kHz)	132
4.28	Évolution de la profondeur d'usure (79kHz)	132
4.29	Profil usé final (79kHz)	133
4.30	Évolution du volume usé total (79kHz)	133
4.31	Modèle éléments finis d'une aube (a) avec les nœuds retenus pour la construction du super-élément (b)	135
4.32	Profondeur d'usure pour les noeuds de l'interface de contact côté extradados (a) et intrados (b)	136
4.33	Évolution de la profondeur d'usure pour trois méthodes avec $F_{ex} = 10N$ à $f = 0.8Hz$	138
4.34	Évolution de l'usure avec l'approche polynomiale pour $F_{ex} = 10N$	139
4.35	Déplacements relatifs avec la méthode DLFT et intégration	140
4.36	Déplacements relatifs avec la méthode DLFT et polynôme	140
4.37	Résultats de l'analyse modale non-linéaire : fréquence naturelle et amortissement	142
4.38	Résultats de l'analyse modale non-linéaire : usure modale des portées	143
4.39	Cinétique d'usure pour différents nœuds de contact	144
4.40	Profondeurs d'usure obtenues par calcul par minimisation du volume usé	146
5.1	Solide déformable	150
5.2	Modèle de la soufflante et conditions aux limites	154
5.3	Numérotation des nœuds en contact	156
5.4	Vecteurs normaux aux nœuds en contact	157
5.5	Déplacements relatifs en mm à l'interface (a) et pressions de contact (b) en hbar obtenus par stratégie de précharge statique pour $\mu = 0.5$	159
5.6	Déplacements relatifs en mm à l'interface et pression de contact en hbar côté intrados (c), (d) et côté extradados (a), (b) obtenus sous ABAQUS	160
5.7	Soufflante : (a) modèle éléments-finis d'un secteur, (b) déformée propre du troisième mode de flexion (3F)	161
5.8	Répartition des contraintes de Von Mises pour le troisième mode de flexion (3F)	161
5.9	Réponse en fréquence au voisinage du mode 3F pour différents coefficients de frottement	162
5.10	Réponse du taux d'usure maximum en fréquence au voisinage du mode 3F pour différents coefficients de frottement	163

5.11 Influence du coefficient de frottement sur le taux d'usure maximum par cycle à la résonance de la réponse non-linéaire	163
5.12 Profil du taux d'usure à la résonance (mode 3F) pour $\mu = 0.5$	164
5.13 Cinétique d'usure en fonction du nombre de cycles : côté intrados (a) et côté extrados (b)	165
5.14 Évolution du taux de volume usé par cycle en fonction du nombre de cycles	166
5.15 Évolution du taux d'usure par cycle pour quelques nœuds usés	166
5.16 Géométrie usée de l'état asymptotique	168
5.17 Géométrie usée sans mise à jour de la géométrie durant les cycles de fretting	169
5.18 Pression de contact au niveau des interfaces de contact à l'état asymptotique	169
5.19 Évolution de l'amplitude en bout de pale à la résonance	170
5.20 Déplacement relatif normal du nœud 1 de la portée intrados pour différents cycles de fretting	171
5.21 Maximum de déplacement (sans composante statique) durant un cycle de fretting; premier cycle (a) et cycle final (b)	172
5.22 Maximum de déplacement (composante statique) durant un cycle de fretting; premier cycle (a) et cycle final (b)	173
5.23 Bûche de fretting (a) à la résonance pour le nœud 1 de l'intrados et trajectoire (b)	174
5.24 Usure à la résonance du mode 3F et usure causée par les phases de décollage et d'atterrissage calculée sous ABAQUS	176
5.25 Vitesse d'usure par cycle en fonction du temps de vol d'après [16]	177
D.1 Déplacements statiques pour $\mu = 0.1$	212
D.2 Déplacements statiques pour $\mu = 0.2$	212
D.3 Déplacements statiques pour $\mu = 0.3$	212
D.4 Déplacements statiques pour $\mu = 0.4$	212
D.5 Déplacements statiques pour $\mu = 0.5$	212
D.6 Déplacements statiques pour $\mu = 0.6$	212
D.7 Déplacements statiques pour $\mu = 0.7$	212
D.8 Déplacements statiques pour $\mu = 0.8$	212
D.9 Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.1$	213
D.10 Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.2$	213
D.11 Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.3$	213
D.12 Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.4$	213
D.13 Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.5$	213
D.14 Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.6$	213
D.15 Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.7$	213
D.16 Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.8$	213
D.17 Taux d'usure pour $\mu = 0.1$	214
D.18 Taux d'usure pour $\mu = 0.2$	214
D.19 Taux d'usure pour $\mu = 0.3$	214
D.20 Taux d'usure pour $\mu = 0.4$	214
D.21 Taux d'usure pour $\mu = 0.5$	214
D.22 Taux d'usure pour $\mu = 0.6$	214
D.23 Taux d'usure pour $\mu = 0.7$	214
D.24 Taux d'usure pour $\mu = 0.8$	214
D.25 Usure de l'état stationnaire; pour $\mu = 0.2$ (a) et $\mu = 0.7$ (b)	215

Nomenclature

Chapitre 1

Lettres latines

a	dimension du contact dans la direction de glissement
b	longueur de l'attache
e	rapport définissant la condition de fretting
E_d	énergie dissipée au cours du cycle
$\frac{F}{b}$	intensité de chargement centrifuge
h	séparation entre plan moyen
K_a	coefficient de la loi d'Archard
N	nombre de cycle
N_R	nombre de cycle à rupture
P, P_N	force normale de contact
p_s	limite d'écoulement élastique
Q^*	effort tangentiel de contact
s	distance de glissement
S_D	limite d'endurance à contrainte moyenne nulle
S_e	limite élastique
S_m	contrainte de rupture statique
t	temps
V, v	vitesse de glissement
w	profondeur d'usure
W	volume usé
$\frac{Z}{R}$	pas apparent entre deux alvéoles

Lettres grecques

δ	amplitude de glissement
δ_0	ouverture du cycle
ΔW	taux de volume usé
μ	coefficient de frottement de Coulomb
μ_e	coefficient de frottement énergétique
ξ	taux d'amortissement
$\sigma(N)$	contrainte appliquée
σ_a	amplitude de chargement
σ_e	limite élastique
σ_m	contrainte moyenne

Acronymes

BEM	Boundary Element Method (méthode des éléments de frontière)
BP	Basse Pression
DAM	Disque Aubagée Monobloc
FEM	Finite Element Method (méthode des éléments finis)
HP	Haute Pression
PUM	Partition of Unity Method (méthode de la partition de l'unité)
RGM	Régime de Glissement Mixte
RGP	Régime de Glissement Partiel
RGT	Régime de Glissement Total
SA	Semi-Analytique
XFEM	eXtended Finite Element Method (méthode des éléments finis étendus)

Chapitre 2

Lettres latines

a	travail des forces internes
\mathbf{C}	matrice d'amortissement
e	énergie interne spécifique
E	densité surfacique d'énergie interne sur Γ_c
S	densité surfacique d'entropie sur Γ_c
E_{ijkl}	composant de Hooke
\mathbf{f}	forces volumiques
g	jeu initial
\mathbf{K}	matrice de raideur
k_a	coefficient de la loi d'Archard
k_w	coefficient d'intensité d'usure
l	travail des forces extérieures
$\mathbf{L}_N, \mathbf{L}_T$	matrices de couplage entre déplacements et efforts de contact
\mathbf{M}	matrice de masse
\mathbf{n}	vecteur normale aux surfaces
\mathbf{n}_c	vecteur normale à la surface de contact
\mathbf{p}	contrainte de contact
p_N	pression normale de contact
p_s	limite d'écoulement élastique
\mathbf{p}_T	contrainte tangentielle de contact
\mathbf{q}	vecteur flux de chaleur
\mathbf{q}_c	vecteur flux de chaleur sur Γ_c
r	production interne de chaleur
$\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_T$	efforts de contact généralisés
s	entropie spécifique
T	température absolue
T_c	température de Ω sur Γ_c
\mathbf{t}_i	contraintes imposées
\mathbf{u}, \mathbf{v}	déplacements
\mathbf{u}_i	déplacements imposés
u_N	déplacement normal
u_T	déplacement tangentiel
w	profondeur d'usure

Lettres calligraphiques

\mathcal{D}	sous-domaine
\mathcal{E}	énergie interne
\mathcal{P}_{ex}	puissance des forces extérieures
\mathcal{Q}	chaleur apportée
\mathcal{S}	entropie
\mathcal{T}	température propre à Γ_c
\mathcal{W}	force contrôlant l'usure

Lettres grecques

Γ_c	interface de contact
Γ_t	surface externe de Ω avec efforts imposés
Γ_u	surface externe de Ω avec déplacements imposés
ϵ_N, ϵ_T	coefficients de pénalité
ϵ	tenseur des déformations
θ	différence de température entre Ω et Γ_c
λ	glissement tangentiel
$\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$	coefficient élastique de Lamé
μ	coefficient de frottement
ρ	masse volumique
σ	tenseur des efforts de Cauchy
σ_{ij}	composants du tenseur des efforts de Cauchy
σ_n	contraintes normales
σ_t	contraintes tangentielles
χ	réel positif des lagrangiens augmentés
ψ	énergie libre spécifique volumique
Ψ	énergie libre spécifique surfacique
Ω	solide déformable
$\partial\Omega$	frontière de Ω

Exposants et indices

\cdot_M	nœud M
\cdot_N	vecteur sur l'axe normal
\cdot_T	vecteur sur l'axe tangentiel
\mathbf{A}^t	transposée de la matrice \mathbf{A}

Ensembles

\mathcal{F}	espace convexe fermé lié au critère de frottement et d'usure
\mathcal{K}_N	espace convexe lié à la condition unilatérale de contact
\mathbb{R}	ensemble des réels
\mathcal{V}, x, X_N et X_T	espaces de Hilbert
X', X'_N et X'_T	espaces duaux des précédents

Symboles

div	opérateur de divergence
δ_{ij}	symbole de Kronecker
F	fonction quasi-convexe décrivant le critère de frottement et d'usure
I_K	fonction indicatrice de K
N_K	cône normal du convexe fermé K
\in	appartient à
$\partial\Psi$	sous différentielle de Ψ
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire
Proj_K	projection sur l'ensemble K

Acronymes

GCP	Gradient Conjugué Projeté
FETI	Finite Element Tearing and Interconnect

Chapitre 3

Lettres latines

F_{ex}	forces extérieures
F_{NL}	forces non-linéaires
\mathbf{J}	matrice jacobienne
k_n, k_t	raideur de contact
\mathbf{M}, \mathbf{K} et \mathbf{C}	matrice de masse, de raideur et d'amortissement
N_h	nombre d'harmoniques retenues
t	temps
t_k	pas de temps k durant une période
T	période
\mathbf{U}	vecteur des déplacements
u et \dot{u}	déplacement et vitesse en temporel
$\tilde{\mathbf{X}}_r$	déplacements relatifs corrigés
\mathbf{Z}	raideur dynamique

Lettres grecques

β	amortissement
ϵ_D, ϵ_F et ϵ_{Ed}	erreur de Fourier en déplacement, force et énergie dissipée
ϵ_N, ϵ_T	coefficients de pénalité
λ	multiplicateur de Lagrange des forces de contact
λ_u	forces de contact augmentées
μ	coefficient de frottement
σ	valeur propre complexe
ξ	taux d'amortissement modal
ω	pulsation

Exposants et indices

\cdot_N	vecteur sur l'axe normal
\cdot_T	vecteur sur l'axe tangentiel
\cdot_r	grandeur relative
\cdot_{red}	grandeur réduite sur les ddls non-linéaires
\mathbf{A}^t	transposée de la matrice \mathbf{A}
\cdot_{pre}	grandeur de prédiction
\cdot_x	grandeur corrigée
\cdot_c, \cdot_l	nœud en contact et de liaison
$\tilde{\cdot}$	vecteur multiharmonique

Acronymes

AFT	Alternating Frequency Time
DFT	Discrete Fourier Transform
DLFT	Dynamic Lagrangian Frequency-Time
HBM	Harmonic Balance Méthod
IHB	Incremental Balance Method
iDFT	inverse Discrete Fourier Transform
MNN	Mode Normal Non-linéaire

Chapitre 4

Lettres latines

a	pas de temps sur l'échelle lente
F_{ex}	forces extérieures
F_c	forces de contact
G_c	taux de restitution d'énergie
J	matrice jacobienne par rapport aux déplacements
J_w	matrice jacobienne par rapport aux profondeurs d'usure
g	fonction d'intensité d'usure
h	fonction d'intensité d'usure sur le temps long
k_n, k_t	raideur de contact
M, K et C	matrice de masse, de raideur et d'amortissement
N	nombre de cycles
ΔN	nombre de cycles sautés
N_h	nombre d'harmoniques retenues
t	temps
t_k	pas de temps k durant une période
T	période
W	vecteur des profondeurs d'usure
δW^*	profondeur d'usure maximum autorisée
Z	raideur dynamique

Lettres grecques

β	amortissement
ϵ_N, ϵ_T	coefficients de pénalité
η	temps long
μ	coefficient de frottement
σ	valeur propre complexe
τ	temps rapide
ξ	petit paramètre
ω	pulsation

Exposants et indices

$\cdot N$	vecteur sur l'axe normal
$\cdot T$	vecteur sur l'axe tangentiel
$\cdot r$	grandeur relative
$\cdot red$	grandeur réduite sur les ddls non-linéaires
A^t	transposée de la matrice A
$\tilde{\cdot}$	vecteur multiharmonique

Symboles

$\langle \cdot, \cdot \rangle_+$	opérateur partie positive
----------------------------------	---------------------------

Chapitre 5**Lettres Latines**

F_T	vecteur des efforts surfaciques
F_Ω	vecteur des forces centrifuges
G	matrice gyroscopique
K	matrice de raideur
K_c	matrice de raideur centrifuge
K_g	matrice de raideur géométrique
T_{cb}	matrice de passage dans la base de Craig et Bampton

Lettres calligraphiques

\mathcal{R}^0	repère inertiel
\mathcal{R}^1	repère tournant
\mathcal{T}	énergie cinétique
\mathcal{U}	énergie de déformation
\mathcal{W}	travail des forces extérieures

Lettres grecques

ε	vecteur des déformations
Θ	matrice de rotation
σ	tenseur des contraintes
Ω	matrice des vitesses de rotations

Exposants et indices

\cdot_{cb}	relatif à la base de Craig et Bampton
$\tilde{\cdot}$	vecteurs ou matrices réduites

Acronymes

BA	Bord d'Attaque
BF	Bord de Fuite

Introduction

Contexte industriel et scientifique

Les turboréacteurs constituent un des éléments les plus importants de l'avion. La conception de tels moteurs intègre à la fois des contraintes de performance, de sécurité, d'environnement, mais aussi de coûts de mise en œuvre et d'exploitation. Ils sont conçus en faisant appel à des technologies de pointe dans un contexte hautement concurrentiel. L'augmentation des performances des machines et l'optimisation des structures mécaniques pour la réduction des masses passent par des roues aubagées de plus en plus chargées, couplées à une diminution des marges de résistance mécanique et une complexification des phénomènes physiques. Les constructeurs ont besoin d'avoir des outils leur permettant de prédire au plus tôt dans la chaîne de conception le comportement durant toute la vie du moteur.

La prédiction de la durée de vie des composants du moteur est une étape importante. Pour une roue aubagée réalisée par assemblage, la liaison aube disque est un des éléments les plus importants du point de vue de la sécurité. L'usure par fretting, qui peut intervenir dans cette zone, peut entraîner la rupture prématurée d'une aube ou d'un disque, ce qui est un endommagement du moteur très grave comme ce fut le cas pour le vol Delta Flight 1288 le 6 juillet 1996 à Pensacola (Floride, USA) où une rupture de disque tua deux passagers [156]. L'inspection post-accident [156] de la soufflante montra qu'une fissure par fretting s'était initiée au niveau du trou de l'attache du disque avec l'arbre. Depuis, les procédures de dimensionnement des moteurs et des carters ont été modifiées afin d'éviter ce genre de problème mais le meilleur palliatif reste de comprendre au mieux les sollicitations auxquelles sont soumises les aubes afin de pouvoir réaliser des systèmes fiables, durables et économiques. Les constructeurs appliquent un lubrifiant solide dans les zones de contact pour augmenter la résistance au fretting, ce qui a pour effet de diminuer le coefficient de frottement. Lors des visites de maintenance le lubrifiant enlevé par usure peut-être remplacé par une nouvelle couche appliquée sous forme de spray. Si le titane de la zone de contact est attaqué par l'usure, cela nécessite un traitement de surface réparateur ou un changement de la pièce. Une usure élevée de la zone de contact augmente le risque d'amorçage de fissure.

Snecma a développé des méthodes pour étudier la cinétique d'usure lors des phases de décollage ou d'atterrissage. Lors de ces phases une hypothèse de chargement quasi-statique peut être faite. Les méthodes utilisées font appel aux éléments finis via le logiciel ABAQUS ou à des méthodes semi-analytiques [73]. Les modèles d'usure utilisés dans ces simulations ont été proposés à partir de résultats expérimentaux obtenus par l'équipe de S. Fouvry au LTDS. Malgré les progrès réalisés dans la modélisation les pièces sont surdimensionnées pour ne prendre aucun risque. Ce surdimensionnement garantit une marge de sécurité vis-à-vis des phénomènes dont les mécanismes ne sont pas parfaitement maîtrisés. L'usure vibratoire fait partie de ces phénomènes dont les physiques mises en jeu restent méconnues que ce soit d'un point de vue expérimental ou numérique. Ainsi les résultats des simulations

numériques pour des chargements quasi-statiques ne permettent pas d'expliquer les niveaux d'usure observés sur les moteurs des compagnies aériennes. En effet, les moteurs dont le temps de vol est plus important [16] ont un niveau d'usure plus élevé que des moteurs volant moins longtemps pour un nombre de décollages et d'atterrissages identique. Les modes vibratoires susceptibles d'être rencontrés durant le vol peuvent expliquer cette différence. De plus, certaines zones usées des portées observées sur la flotte ne se retrouvent pas dans les simulations numériques utilisées actuellement.

Un autre aspect important dans le dimensionnement des roues aubagées est lié à la maîtrise des vibrations des aubages. Les constructeurs cherchent à écarter tout risque d'instabilité de flottement, mais aussi à s'assurer que le niveau vibratoire ne produise pas de fatigue au niveau de la pale ou de la portée. Les propriétés d'amortissement par frottement dépendent des conditions de contact et donc du niveau d'usure au niveau des contacts. Afin de mieux prévenir ces risques, et pour éviter des reconceptions tardives, des efforts importants sont faits pour développer des outils numériques capables de prédire tôt dans le cycle de conception les amplitudes vibratoires des roues aubagées. La mise au point d'outils de dimensionnement tenant compte des problèmes vibratoires fait aussi appel à la simulation aérodynamique pour prédire les chargements stationnaires et instationnaires ainsi que les amortissements apportés par le fluide. Ces données sont très importantes pour le flottement. Côté structure, il faut pouvoir prendre en compte le désaccordage des aubages et l'introduction croissante des non-linéarités de contact avec frottement. Les calculs sont donc de plus en plus couplés fluide/structure pour une meilleure prédiction du flottement, de l'amortissement aérodynamique et plus globalement des niveaux vibratoires.

Enjeux de l'étude

L'objectif de la thèse est de proposer un modèle numérique qui permet de modéliser l'usure par fretting vibratoire. Cette étude permettra de mettre au point ce modèle et de le valider. Les simulations numériques doivent permettre de comprendre le couplage entre usure et vibration des aubes. Il sera possible d'observer le comportement de la structure dans la zone de contact. Les résultats obtenus pourront aussi servir aux expérimentateurs pour proposer des protocoles expérimentaux pour l'étude du fretting sous chargement dynamique. Nous chercherons aussi à connaître l'évolution du comportement vibratoire de l'aube suite aux modifications dans la zone de contact.

La modélisation du problème couplé tribologique et dynamique nécessite la mise au point d'outils spécifiques. En effet ce problème est à la fois multiphysique et multi-échelle. Le problème tribologique qui se produit dans la zone de contact nécessite une connaissance précise des grandeurs liées à la mécanique du contact (pression de contact, microglissement, propriétés matériaux du contact...). L'échelle nécessaire à une bonne modélisation du contact est donc petite comparée à l'échelle des déplacements en bout d'aube. Nous avons travaillé durant cette thèse sur des méthodes permettant d'être juste dans la zone de contact sans trop augmenter la taille des systèmes à résoudre. La méthode proposée par S. Nacivet dans sa thèse [171] et appliquée à des problèmes tridimensionnels par D. Charleux [32] permet de résoudre dans le domaine fréquentiel des problèmes de contact de grande taille. D. Charleux *et al.* [33] ont apporté une validation expérimentale de la méthode numérique fréquentielle à partir d'un banc d'essais en rotation et à partir d'une mesure de la répartition des pressions de contact. Elle permet de bien simuler les chargements à la fois statiques et dynamiques. L'approche fréquentielle rend les calculs rapides et donc adaptés au dimensionnement dans les bureaux d'étude de Snecma. Nous avons aussi cherché dans la littérature comment il était possible de prendre en compte les modifications liées à l'usure dans la zone de contact. Comme la méthode des éléments finis est uti-

lisée pour discrétiser le problème nous ne voulions pas avoir recours au remaillage qui est coûteux en temps. Nous avons travaillé sur une approche simple qui ne nécessite pas de remaillage.

Pour pouvoir modéliser le problème d'usure sous chargements dynamiques nous avons travaillé sur des méthodes qui permettent de découpler temporellement les problèmes dynamique et tribologique pour pouvoir utiliser les approches fréquentielles. Comme les échelles de temps des deux phénomènes sont très différentes les deux physiques peuvent être séparées.

Organisation du document

Le mémoire se répartit en cinq chapitres. Le chapitre 1 sert d'introduction à la problématique et fait un bilan des résultats existant sur le sujet. Après une présentation rapide du fonctionnement d'un turboréacteur, les conditions de fonctionnement des roues aubagées sont détaillées, ce qui permet de mieux comprendre les risques de fatigue vibratoire auxquels elles sont soumises. Une synthèse de la bibliographie sur l'usure et la fatigue par fretting au niveau du pied d'aube a été effectuée. Nous présentons différentes méthodes pour la modélisation du contact frottant en pied d'aube et les apports pour la modélisation de l'usure.

Dans le chapitre 2, une formulation continue du problème général de dynamique de contact avec frottement et usure est présentée. Nous sommes repartis des lois de la thermodynamique pour formuler le problème d'élastodynamique avec contact unilatéral avec frottement et usure en formulation forte. Une approche continue de prise en compte des contraintes liées au contact est retenue dans ce chapitre. Nous présentons dans ce chapitre comment considérer les profils usés lors de la résolution du problème de contact avec frottement par la méthode des éléments finis. Différentes stratégies de formulation du problème de contact avec frottement seront détaillées ainsi que leur résolution.

Le chapitre 3 présente les méthodes de résolution des problèmes dynamiques non-linéaires. Les méthodes par intégration temporelle et dérivées (méthode de tir par exemple) sont rapidement présentées puis nous abordons les méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel. Nous détaillons le traitement des forces de contact en fréquentiel par différentes approches. Quelques remarques sur l'erreur due à la troncature des séries de Fourier sont faites. Dans ce chapitre 3 une nouvelle méthode basée sur une séparation des domaines physiques est proposée. Elle permet de traiter séparément les domaines élastodynamiques et les domaines proches de la zone de contact. Cette approche ouvre de nouvelles perspectives aux méthodes fréquentielles. Enfin la méthode des modes non-linéaires complexes développée par D. Laxalde *et al.* [131, 132] est présentée. Elle permet de calculer les solutions périodiques d'un système non-linéaire autonome et non conservatif. Les méthodes présentées dans ce chapitre permettent d'obtenir les grandeurs dynamiques (déplacements, vitesses et forces de contact) qui vont agir sur la cinétique d'usure.

Le chapitre 4 aborde l'aspect multi-échelle en temps de l'usure sous chargements dynamiques. C'est cet aspect qui va conduire aux stratégies de résolution proposées. Nous présentons les méthodes qui permettent de calculer rapidement l'évolution d'un système ayant un comportement multi-échelle en temps et cyclique. La formulation du problème basée sur une séparation des échelles de temps est présentée et justifiée. Des exemples d'application illustrent les méthodes proposées. Différentes stratégies d'intégration temporelle sur l'échelle lente sont envisagées ainsi que l'application des modes complexes non-linéaires au calcul de l'usure modale au niveau des portées d'une aube. Pour répondre à un de nos objectifs, nous proposerons des méthodes permettant de calculer directement le profil usé

de l'état stationnaire permettant un calcul rapide de l'usure sous chargements dynamiques. Cette voie de recherche est partie du constat que des états stationnaires pouvaient exister, associés à des taux d'usure nuls.

Le mémoire se clôt sur le chapitre 5 par une application industrielle, consacrée à l'étude de l'usure par fretting en pied d'aube de soufflante. La soufflante est l'un des éléments les plus importants dans les moteurs actuels. Sa grande taille fait qu'elle subit à la fois statiquement et dynamiquement des chargement très importants. Les géométries des portées en pied d'aube sont complexes. Toutes ces caractéristiques font que la simulation numérique d'une telle structure est complexe. Dans ce chapitre les résultats des simulations numériques de l'usure sous chargements dynamiques en pied d'aube de soufflante sont présentés. Le modèle élément fini du disque et de l'aube ont été fourni par Snecma. Nous rappelons les équations de la dynamique des solides déformables en rotation, ce qui implique des modifications par rapport aux équations présentées au chapitre 2. Des simulations numériques de la réponse forcée de l'aube et du comportement vis-à-vis de l'usure dans les zones de contact ont été menées et les résultats obtenus sont résumés dans ce chapitre.

Chapitre 1

Contact aube-disque : état de l'art

Ce chapitre donne le contexte industriel de l'étude et présente une revue bibliographique de l'existant sur le sujet. Après un rappel du fonctionnement d'un turboréacteur, les problématiques liées aux attaches aube-disque sont présentées en détail ainsi que le chargement subi. Les contraintes subies par les attaches conduisent à des endommagements, qui peuvent être liés à des sollicitations par fretting de la liaison aube-disque. Cet aspect sera abordé dans la troisième section de ce chapitre. Le chapitre présente enfin les méthodes existantes d'analyse adaptées à la simulation du contact aube-disque avec usure.

1.1 Présentation d'un turboréacteur

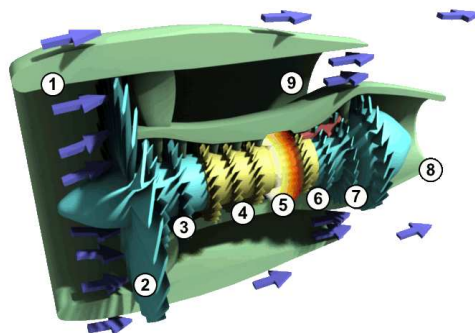


FIGURE 1.1. Vue tridimensionnelle simplifiée d'un turboréacteur civil double corps, double flux. [wikipedia]

Le turboréacteur est un système de propulsion essentiellement utilisé pour les avions. La poussée résulte du débit d'air dans le turboréacteur et de l'accélération de l'air entre l'entrée (manche à air) et la sortie (tuyère). Elle est obtenue par la combustion d'un carburant, généralement du kérosène, dans l'oxygène de l'air. Actuellement les constructeurs travaillent en amont sur l'utilisation de nouveaux carburants (gaz naturel, hydrogène, ...). Une partie de l'énergie produite est récupérée par une turbine et sert à comprimer, à l'entrée du réacteur, l'air, utilisé comme comburant. Le principe de fonctionnement pour un turbofan, l'un des turboréacteurs les plus utilisés, est le suivant : au début du cycle de fonctionnement, l'air entre à l'avant du moteur par la soufflante ②, aussi appelée fan. Le flux est ensuite séparé en deux : une partie, le flux primaire, va passer dans la partie interne du moteur et est destinée à participer à la combustion. Le reste passe par la tuyère de la soufflante et compose le flux

secondaire. Le flux primaire est comprimé successivement dans les étages du compresseur basse pression ③ et du compresseur haute pression ④. Le gaz, alors à sa pression maximale, est enflammé dans la chambre de combustion ⑤. Ceci s'accompagne d'une forte hausse de la température, qui atteint des valeurs supérieures à 1500 °C, et d'une légère diminution de pression. Le gaz est ensuite détendu dans les turbines. La turbine haute pression ⑥ entraîne le compresseur haute pression ④ et la turbine basse pression ⑦ entraîne la soufflante ② et le compresseur basse pression ③. Le flux primaire est enfin accéléré par la tuyère ⑧ et fournit une partie de la poussée du moteur, le reste de la poussée étant du au flux secondaire.

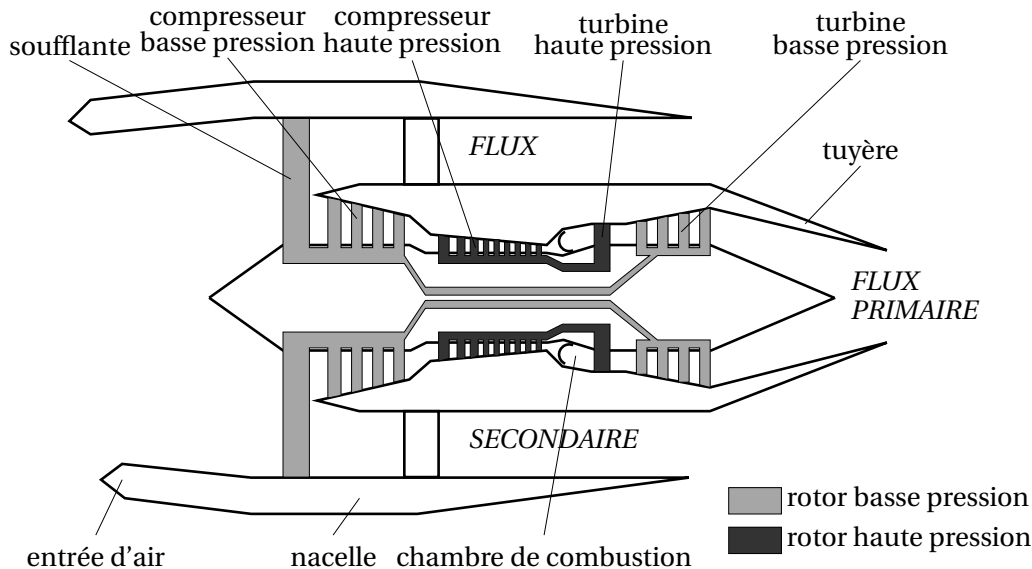


FIGURE 1.2. Schéma simplifié d'un turboréacteur civil double corps, double flux. [32]

Sur le schéma simplifié du moteur présenté sur la figure 1.2, deux rotors indépendants ("double corps") peuvent être distingués. On appelle *core* l'ensemble composé du compresseur, de la chambre de combustion et de la turbine. Les modules de compression sont parmi les plus importants du moteur. Des taux de compression qu'ils peuvent assurer dépendent les performances du turboréacteur. Le rendement d'un compresseur est dépendant de sa vitesse de rotation qui est technologiquement limitée pour des raisons aérodynamique(vitesse supersonique, onde de choc...). La solution consiste à diviser les étages de compression en différents *cores* et de les coupler avec les étages équivalents de la turbine via des arbres séparés. Le rotor(*core*) basse pression comprend la soufflante, le compresseur basse pression (BP) et la turbine basse pression. Le rotor(*core*) haute pression supporte le compresseur haute pression et la turbine haute pression. Cette architecture tend à se généraliser, même si certains moteurs militaires restent des monorotors. Des moteurs civils triple corps double flux sont apparus récemment.

Un compresseur axial résulte d'un empilage d'étages composés chacun d'un aubage mobile et d'un aubage fixe. La figure 1.3a montre l'exemple d'un compresseur axial à architecture étagé. Un étage est défini comme l'ensemble consécutif d'une roue mobile(rotor) et d'un redresseur(stator). L'aubage mobile est constitué d'un disque circulaire sur lequel sont fixées des aubes. Il tourne devant l'aubage fixe, circulaire, (ou grille fixe) qui est également constitué d'aubes, fixes celles-ci. La roue mobile procure une accélération aux particules d'air, en les déviant par rapport à l'axe du moteur. Le redresseur ralentit ces particules et transforme une partie de leur vitesse en pression. Il ramène l'écoulement de l'air, accéléré par l'aubage mobile, dans l'axe du moteur.

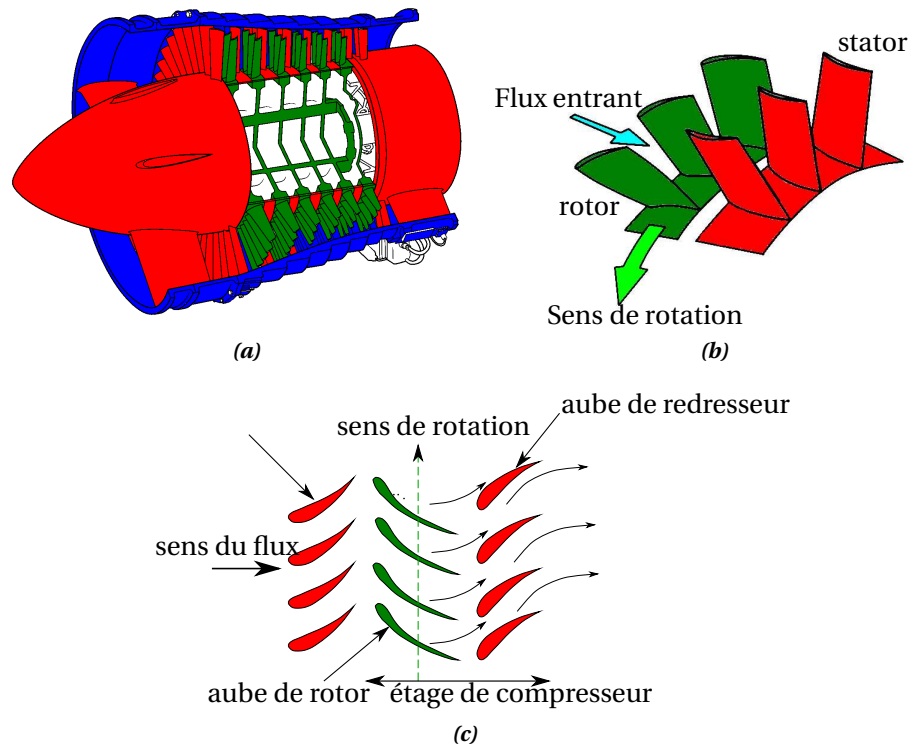


FIGURE 1.3. Architecture d'un compresseur axial : (a) exemple de compresseur axial du moteur Olympus, (b) et (c) étage d'un compresseur

1.2 Problématique de la liaison aube/disque

Dans un turboréacteur à flux axial, l'aube mobile est assemblée au disque par l'intermédiaire d'une attache. Celle-ci est composée du pied de l'aube ou bulbe, et d'un alvéole, servant de logement au pied d'aube, situé à la périphérie du disque. Une nouvelle conception, dénommée DAM (Disque Aubagé Monobloc), est depuis deux décennies mise en place sur les moteurs d'avion. Elle se compose d'une structure monobloc dans laquelle sont usinés les pales et le disque. Les principaux avantages de cette technologie sont : une réduction significative de la masse, une augmentation des performances aérodynamiques, une durée de vie en service accrue. Dans ce travail nous nous intéressons seulement aux roues aubagées assemblées. Nous allons présenter à présent les particularités de cette technologie.

1.2.1 Conception des liaisons aube/disque

Les attaches aube/disque ont pour fonction essentielle d'assurer la rétention radiale de l'aube et de transmettre les efforts tangentiels entre l'aube et le disque. Elles peuvent avoir pour rôle secondaire d'assurer l'étanchéité de veine en évitant les recirculations de flux parasites. L'attache est un élément mécanique critique des turboréacteurs. En cas de perte d'une aube, les autres aubes ne doivent pas sortir de leur logement. Le dimensionnement de l'attache aube-disque doit être parfaitement maîtrisé, c'est un élément vérifié lors de la certification du moteur. Les autorités demandent aux constructeurs de garantir le respect des critères d'intégrité et d'endurance de l'attache. Trois familles d'attache sont employées dans les turboréacteurs actuels :

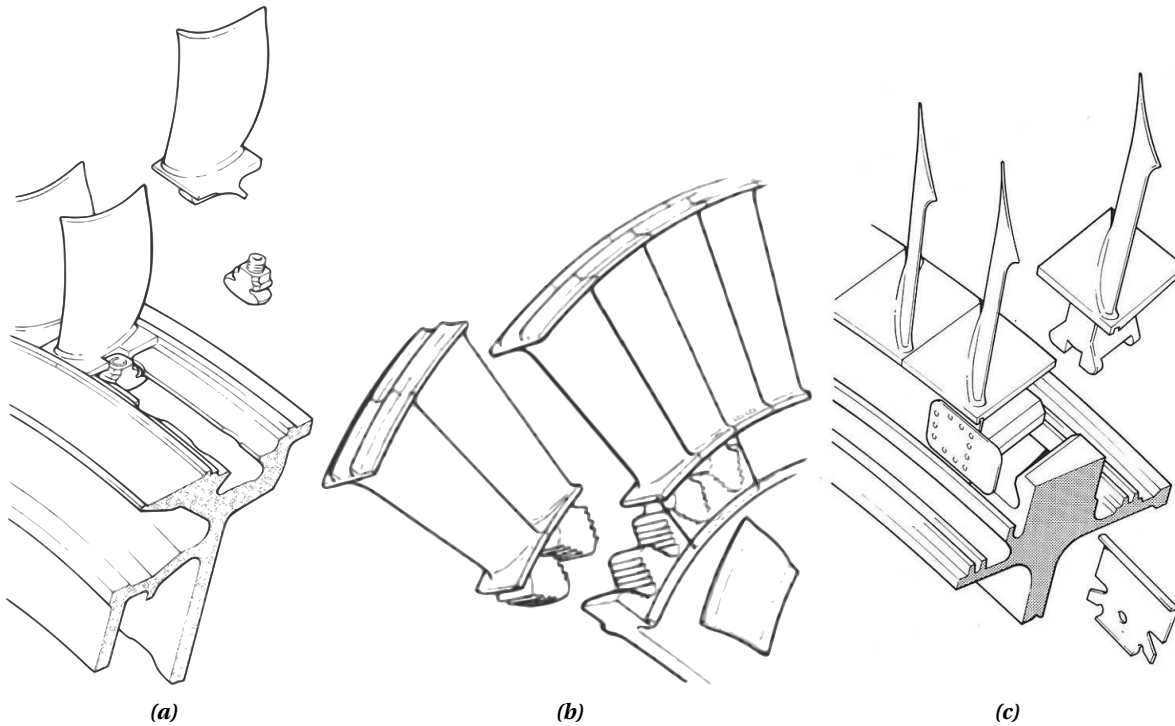


FIGURE 1.4. Différentes technologies de liaison aube-disque : (a) attache marteau, (b) attache sapin et (c) attache en forme de queue d'aronde [200]

1.2.1.1 Attache marteau (figure 1.4a)

Les attaches marteau se distinguent par un seul alvéole circonférentiel usiné au rayon extérieur du disque, Cette solution est apparue dans les années 50 sur les moteurs Snecma et dans les années 60 sur les moteurs GE. Ce système permet l'étanchéité frontale sous la plate-forme (profil inférieur de veine aérodynamique). Le choix de cette solution se justifie surtout pour les derniers étages de compresseur. Elle présente, en effet, l'inconvénient pour les chargements centrifuges moyens, de générer une masse d'étage plus importante. Le pied d'aube vu en coupe a la forme d'une queue d'aronde. Pour épouser la forme de l'alvéole, l'axe du pied est à génératrice rayonnante. L'usinage est réalisé soit par tournage soit par rectification circulaire de la roue complète.

L'alvéole du disque est défini par une rainure circonférentielle réalisée à la périphérie du disque. Les aubes sont introduites radialement par l'intermédiaire d'une encoche prévue à cet effet. L'usinage de l'alvéole est réalisé par opération de tournage, l'encoche d'introduction par fraisage.

1.2.1.2 Attache sapin (figure 1.4b)

Ce type d'attache a été employé dès le début des turboréacteurs. Aujourd'hui son utilisation se limite aux étages fortement chargés et à nombre d'aubes important. Ceci explique qu'on retrouve ce type d'attache surtout sur les roues mobiles des turbines HP. Le corps du pied d'aube est rectiligne. C'est l'échasse qui assure une bonne transition des forces entre profil aérodynamique et le pied d'aube. Vu en coupe le pied a une forme trapézoïdale avec plusieurs dents implantées de part et d'autre de l'axe de symétrie du pied. Ces dents assurent la rétention radiale de l'aube. Le pied d'aube est réalisé par brochage ou par usinage électro-érosion au fil. Les alvéoles du disque constituent des rainures rectilignes équidistantes situées à la périphérie du disque. L'angle de la rainure avec l'axe moteur est fonction de

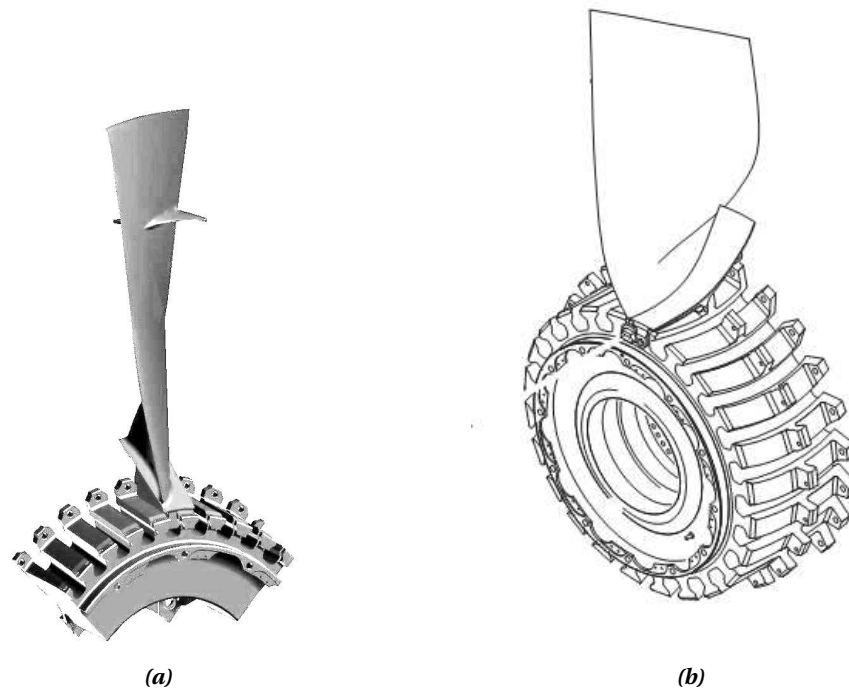


FIGURE 1.5. Vues du disque de la soufflante du CFM56-5 (a) et de la soufflante du CFM56-7(b)

la forme entre le profil et le pied d'aube. L'augmentation de l'angle permet d'augmenter la surface de contact et ainsi diminuer la pression.

1.2.1.3 Attache queue d'aronde (figure 1.4c)

Les attaches queue d'aronde sont surtout employées sur les compresseurs BP, les compresseurs HP, les turbines BP ainsi que pour la soufflante. Les principaux atouts de cette solution par rapport à l'attache sapin sont : sa moindre masse et par conséquent une moindre masse du disque et son coût d'usinage plus faible pour une même qualité d'usinage. Vu en coupe le pied ressemble à un bulbe. Les autres caractéristiques de cette attache sont les mêmes que l'attache sapin (rainure, angle).

Les attaches sapin et queue d'aronde peuvent être droites ou curvilignes. Une attache curviligne augmente la surface de contact. La figure 1.5a montre l'attache droite de la soufflante du CFM56-5 et la figure 1.5b montre l'attache curviligne de la soufflante du CFM56-7.

Les attaches queue d'aronde et sapin font partie des attaches que l'on dénomme *attaches brochées*, caractérisées par plusieurs alvéoles usinés suivant l'axe du moteur.

1.2.1.4 Choix technologiques

Pour les moteurs civils où on a le souci de pouvoir reconditionner les alvéoles (ré-usinage, traitement de surface) l'attache marteau permet de choisir la solution de roues accouplées par soudage. La version brochée (queue d'aronde ou sapin) impose que chaque disque comporte le même nombre d'alvéoles dans le cas d'un assemblage soudé, tandis que pour un assemblage boulonné le nombre d'alvéoles pour chaque disque est libre.

En bureau d'étude le type d'attache peut être choisi à partir du critère $\frac{Z F}{R b}$ avec $\frac{Z}{R}$ le pas appa-

rent entre deux alvéoles, $\frac{F}{b}$ l'intensité du chargement centrifuge et b la longueur de l'attache qui doit être avec l'angle de brochage le premier élément de définition de l'alvéole. Le choix entre les solutions brochées "queue d'aronde" et "sapin" est alors fixé par :

- si $\frac{Z F}{R b} < 550 \text{MPa}$ alors attache queue d'aronde,
- si $550 < \frac{Z F}{R b} < 800 \text{MPa}$ alors attache "sapin 2 dents",
- si $\frac{Z F}{R b} > 800 \text{MPa}$ alors attache "sapin 3 dents".

Un aspect important des liaisons aube-disque est le choix des matériaux qui sont présents dans la zone de contact. Ils vont définir le comportement mécanique de l'interface de contact.

1.2.2 Matériaux utilisés

Sur les moteurs CFM l'aube et le disque de la soufflante (fan) sont en alliage de titane Ti-6Al-4V. Le titane est intéressant pour ses propriétés de résistance à la corrosion et ses propriétés thermomécaniques élevées pour une masse volumique plus faible que l'acier. Le Ti-6Al-4V est l'alliage de titane le plus couramment utilisé. Il se compose d'une structure mixte $\alpha + \beta$, stabilisé par l'aluminium (6%), élément α - gène et le vanadium (4%), élément β - gène. L'aluminium durcit la phase α en améliorant la résistance mécanique et la tenue en fluage. Le vanadium améliore la ductilité mais diminue la tenue à l'oxydation. Durant la phase de fabrication on applique au matériau différents traitements thermiques : le détensionnement, le recuit, la mise en solution et vieillissement. Ces traitements modifient la micro-structure.

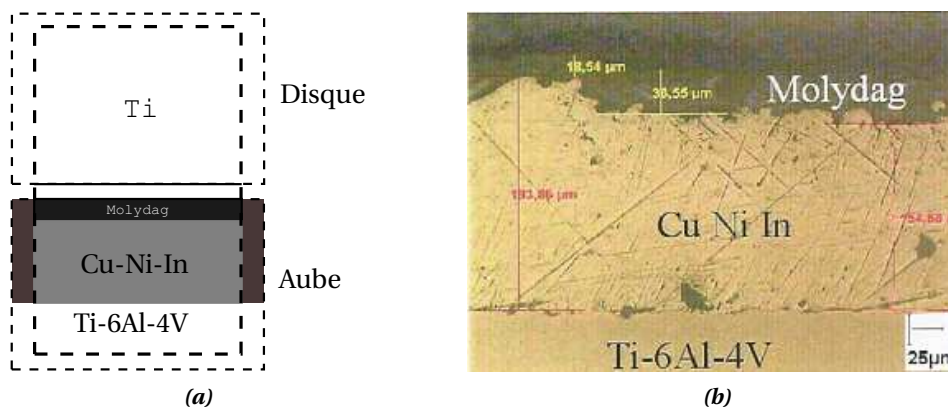


FIGURE 1.6. Matériaux des aubes et du disque [183]

Disque Le disque est constitué uniquement de l'alliage de titane (Ti-6Al-4V) forgé puis usiné. Les disques sont forgés à partir d'une billette de 250 mm pour obtenir une préforme. Ensuite, le disque est débouché et le forgeage final a lieu. Un traitement thermique est alors appliqué. Les disques sont ensuite pré-usinés, contrôlés aux ultrasons et au niveau de la micro-structure puis usinés. Enfin un grenailage de surface est systématiquement réalisé.

Aubes Les aubes sont forgées à partir de billettes de diamètres 60 mm. Le pied et la nageoire (s'il y en a une) sont ébauchés en deux chaudes¹. Ensuite on forge la forme finale de l'aube puis on effectue un

1. chauffés en métallurgie, consiste à étaler le métal chauffé en frappant sur le lopin

recuit de celle-ci suivi de l'usinage des pieds et des nageoires. On procède ensuite à un contrôle macrographique afin de s'assurer de la présence de la micro-structure recherchée. Un grenailage de surface des pieds est réalisé. Un dépôt plasma Cu-Ni-In est ensuite appliqué puis un vernis de lubrifiant à base de bisulfure de molybdène (Molydag). La figure 1.6 présente schématiquement la structure matériau de l'aube et du disque en contact. En résumé les matériaux de la couche de la zone de contact sont :

- du Ti-6Al-4V en profondeur,
- le revêtement Cu-Ni-In obtenu par projection à l'air libre (plasma atmosphérique). Entre 6 et 8 passes sont réalisées afin d'obtenir l'épaisseur nécessaire de dépôt (entre 120 et $180\mu m$). L'intérêt de ce dépôt est double : d'une part celui-ci a une dureté relativement faible qui permet l'accommodation des deux surfaces en contact et d'autre part la rugosité de ce dépôt facilite le maintien du lubrifiant dans le contact.
- le Molydag 254 qui est un vernis de glissement constitué d'une base de bisulfure de molybdène, de matériaux lubrifiants solides, d'une résine thermodurcissable phénolique et d'un solvant. Le Molydag est appliqué, à l'aide d'un pinceau ou d'un pistolet, sur la surface de Cu-Ni-In nettoyée à l'acétone. Après cuisson l'épaisseur est comprise entre $15\mu m$ et $35\mu m$. Sa propriété dominante reste celle d'un polymère. De ce fait son comportement est difficilement appréhendable dans les calculs des différents paramètres du contact revêtu et lubrifié.

Bilan Dans ce travail nous considérons le matériau homogène dans le disque et les aubes. Les lubrifiants solides ne sont pas modélisés finement, ils peuvent être pris en compte via des raideurs de contact (cf. 1.4.3) au niveau de l'interface aube-disque. Suivant la présence ou non de lubrifiant nous adapterons la valeur du coefficient de frottement.

1.2.3 Chargements subis par une attache

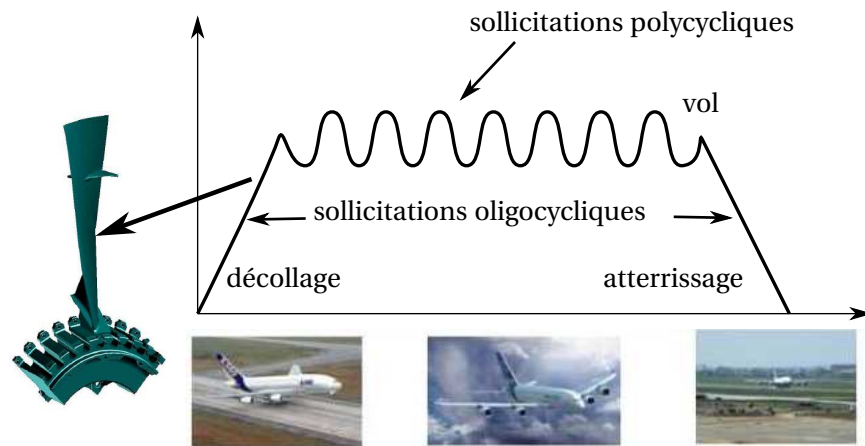


FIGURE 1.7. Sollicitations en pieds d'aubes durant les différentes phases de vol

La rotation du moteur durant la phase de décollage entraîne le déplacement radial des aubes qui viennent se plaquer contre le disque au niveau des interfaces de contact entre les aubes et le disque (cf fig. 1.7). Il résulte de l'effort centrifuge un chargement normal et tangentiel et des micro-déplacements relatifs des deux ensembles au niveau de la portée. Ces sollicitations sont dites oligocycliques, car caractérisées par de fortes intensités et de faibles fréquences. Elles sont associées aux phases de changements de régime moteur au cours du vol et sont souvent simplifiées à la prise en compte du démar-

rage et de l'arrêt du turboréacteur. Un cycle oligocyclique correspond à un vol. Les portées ne sont pas seulement soumises à des sollicitations oligocycliques mais également polycycliques. Ce sont des sollicitations de faibles intensités et de fortes fréquences. Ces sollicitations trouvent leurs origines dans les vibrations apparaissant au cours du vol. Les cycles de vibrations sont nombreux durant le vol. Les phases de décollage et d'atterrissage peuvent atteindre la dizaine de milliers durant la vie du moteur. Les phénomènes liés à l'usure et ceux liés aux vibrations ont des temps caractéristiques très différentes, l'usure par fretting sous chargement dynamique présente donc un caractère multiple en temps.

Nous listons ci-après les sollicitations d'origine statique et dynamique qui agissent sur la liaison aube/disque. Nous présenterons tous d'abord les chargements statiques puis nous détaillerons les excitations dynamiques.

1.2.3.1 Chargements statiques

Effort centrifuge et dévissage La rotation des aubes à forte vitesse crée une force centrifuge. Sur chaque section de pale s'exerce l'effort de traction provenant de la partie supérieure. L'effort est proportionnel au moment statique de cette partie et au carré de la vitesse de rotation. Au niveau du pied l'effort centrifuge provient de la pale, de la plate-forme, de l'échasse et éventuellement du talon ou des nageoires.

Soumise au champ centrifuge la pale se dévise. Du fait du vrillage des sections de pale, les efforts centrifuges élémentaires ne sont pas tous confondus avec l'axe radial du rotor. Des composantes tangentielles apparaissent et créent un moment de torsion souvent maximal dans le pied d'aube. Pour les aubes à talon ou à nageoire le moment de dévissage peut être atténué par la pré-torsion obtenue au montage sur les faces d'appui des nageoires ou du talon.

Efforts aérodynamiques La distribution des pressions aérodynamiques le long de la pale provoque des déformations de celle-ci. Au niveau du col de pied d'aube, zone se situant entre la pale et la partie du pied d'aube qui fait la liaison avec le disque, il en résulte des moments de flexion, de torsion et un effort tranchant. La valeur des efforts aérodynamiques est faible comparée à celle de l'effort centrifuge. Toutefois leurs effets ne doivent pas être négligés dans les calculs de durée de vie. Une méthode pour compenser les efforts aérodynamiques au col consiste à les compenser par les effets centrifuges. Malheureusement cette compensation n'est adaptée qu'à une seule vitesse de rotation. Pour les autres régimes on parle d'effet hors compensation.

1.2.3.2 Chargement dynamique

Les excitations dynamiques dépendent fortement de la position dans le moteur de l'étage étudié et ont des origines diverses. On peut citer entre autres :

- les balourds,
- les contacts aube-carter,

et tout ce qui peut conduire à un champ de pression non uniforme de l'écoulement :

- le sillage des aubages amont fixes et mobiles,
- le vent de travers (soufflante),
- les perturbations diverses de l'écoulement.

Les vibrations dans les roues aubagées sont dues à des phénomènes multiples et complexes. Dans cette section, les principaux phénomènes seront listés en commençant par les aspects aéroélastiques et ensuite par les vibrations d'origine mécanique.

Phénomènes aéroélastiques Dans le domaine de l'aéroélasticité des turbomachines, on distingue généralement deux problématiques principales : celle des réponses forcées et celles des réponses aux phénomènes auto-entretenus. Lors de la conception il est possible de prédire les phénomènes liés aux réponses forcées. Par contre les phénomènes auto-entretenus sont plus difficiles à prédire. Actuellement les outils existants sont très basiques. Or les réductions de masses et l'augmentations des charges aérodynamiques des aubes rendent les phénomènes auto-entretenus de plus en plus fréquents dans les turbomachines. Marshall et Imregun [152] font une synthèse des aspects aéroélastiques dans les turbomachines ; ils dressent une liste des méthodes numériques envisageables pour des études de flottement.

Dans cette section, nous présentons succinctement les principales problématiques de l'aéroélasticité appliquée aux turbomachines :

1. **Réponse forcée** Tout obstacle, perturbation ou hétérogénéité dans la veine induisent des distorsions de flux qui génèrent des excitations aérodynamiques. Ces perturbations peuvent être dues à un étage amont ou aval, un bras de carter, une distorsion dans la manche d'entrée (vol en incidence, vent de travers, manche asymétrique), des prélèvements d'air et toutes les dispersions des tolérances de fabrication ou d'usure. Du point de vue d'une aube mobile, ces excitations sont stationnaires dans le repère fixe et par conséquent, les fréquences d'excitation sont des multiples entiers de la fréquence de passage des aubes. On parle donc d'excitations synchrones de la vitesse de rotation du rotor. Les excitations forcées sont de nos jours généralement bien prédites soit théoriquement soit expérimentalement et posent donc moins de problèmes que les phénomènes asynchrones et auto-entretenus.
2. **Phénomènes auto-entretenus, asynchrones et flottement** Dans le cas des phénomènes auto-entretenus les forces aérodynamiques sont liées aux vibrations des aubes. Le fluide et l'aube vibrent ensemble à l'unisson. Les fréquences de vibrations ne sont généralement plus des multiples du régime de rotation : on parle ainsi de phénomènes asynchrones. Ces phénomènes sont assez variés, souvent mal maîtrisés et difficiles à prendre en compte dans les processus de conception. D'un point de vue numérique ils demandent un effort important. Actuellement les méthodes utilisées postulent un couplage faible entre le fluide et la structure. Les outils de prédimensionnement reposent sur des lois empiriques qui ne semblent plus être valables pour les nouvelles géométries de roues aubagées. Certains phénomènes asynchrones n'apparaissent que lors des phases d'essais et coûtent très cher en reconception.

Le phénomène de flottement est une instabilité dynamique d'origine aérodynamique qui apparaît au voisinage d'une fréquence propre de la roue aubagée. La vibration des aubes mobiles et les forces aérodynamiques instationnaires s'auto-entretiennent. D'un point de vue de la structure, le flottement se caractérise par un amortissement aérodynamique « négatif » supérieur (en valeur absolue) à l'amortissement structural de telle sorte que l'énergie apportée par le fluide est supérieure à celle dissipée dans la structure. Ce phénomène est très dangereux pour les structures puisque les niveaux vibratoires sont incontrôlables. Il nécessite de sortir de la zone d'instabilité en modifiant le point de fonctionnement du moteur. Ce phénomène fait l'objet de nombreuses recherches, principalement du point de vue aérodynamique [85]. D'ailleurs un symposium « Unsteady aerodynamics, aeroacoustics and aeroelasticity of turbomachines » est organisé sur le sujet tous les 3 ans depuis 1976.

D'autres phénomènes asynchrones de vibration, qui ne rentrent pas dans les catégories précédentes, peuvent apparaître, en particulier sur les premiers étages de compresseurs haute pression et parfois sur les soufflantes. Ces phénomènes, regroupés sous l'appellation « vibrations

asynchrones » possèdent quelques similitudes avec le flottement bien qu'aucune instabilité ne soit observée. On suppose généralement que la source de ces phénomènes n'est pas liée à la vibration des aubes. Ils sont encore mal compris et difficilement prévisibles mais font l'objet de nombreuses recherches [18, 117].

3. **Instabilité d'écoulement** La principale source d'instabilité d'écoulement tournant est le phénomène de décollement tournant. Le décollement tournant se produit à basse vitesse de rotation. C'est un phénomène expérimentalement bien connu mais difficile à prévoir par le calcul. Sur une grille d'aube soumise à un écoulement sous forte incidence positive, le décollement sur l'extrados d'un profil provoqué par une perturbation aléatoire entraîne l'obstruction partielle du canal contigu. La diminution locale du débit dans ce canal va provoquer une augmentation de l'incidence sur le profil adjacent, suivi d'un décollement, provoquant une obstruction du canal suivant, alors que le premier, du fait de la diminution de la vitesse, se soulage et retrouve un régime non décollé. Ainsi une perturbation de pression se propage d'un canal à l'autre, et du fait de la symétrie cyclique, ce phénomène s'assimile à une onde de pression tournante qui, par sa nature, va solliciter les aubages de façon périodique. Ces instabilités aérodynamiques tournantes peuvent parfois être à l'origine d'instabilités plus importantes comme le pompage.
4. **Le pompage** est un problème transitoire de « vibration pseudo auto-entretenu » suite à une instabilité aérodynamique. Une onde longitudinale, donc à zéro diamètre, prend naissance dans le système compresseur-chambre-turbine. Le phénomène vibratoire est à basse fréquence. Les profils sont dessinés pour un angle d'incidence optimal (point d'adaptation), et au fur et à mesure de l'augmentation de l'angle d'incidence, il se forme des décollements à l'extrados, qui engendrent des tourbillons. La section de passage des gaz diminue, le débit diminue, il arrive un moment où le profil décroche. Le taux de compression chute brutalement, le débit s'annule. La durée du phénomène est de l'ordre de quelques dixièmes de seconde. Pendant ce temps, le volume aval se vide dans le volume amont. La vitesse axiale est alors négative. Puis le compresseur se réamorce et revient sur un point de la ligne de fonctionnement à un régime inférieur.
5. **Instabilité aéroacoustique** Les phénomènes de résonances acoustiques engendrent des fluctuations de pression qui se propagent à la vitesse du son (dans le fluide) et peuvent générer des niveaux vibratoires importants dans les structures mécaniques. Il s'agit d'un phénomène aéroélastique assez méconnu bien qu'il soit communément admis que son origine est principalement aérodynamique. Dans les turbomachines, ces résonances acoustiques, aussi appelées modes de fluide, sont excitées par des décollements tourbillonnaires dans les aubages.

Excitations d'origine mécanique Bien que les interactions aéroélastiques soient les principales sources de vibration dans les turbomachines, il existe des sources d'origine mécanique. Deux des principaux critères de certification des turbomachines aéronautiques sont l'ingestion de corps étrangers de taille plus ou moins importante (oiseaux, glace, ...) lors des phases de décollage ou d'atterrissage principalement et la perte d'une aube mobile. Ces deux cas génèrent des phénomènes transitoires (chocs) très violents et le second génère en plus des balourds mécaniques de grande ampleur. D'autre part, les phénomènes de contact rotor-stator prennent une importance grandissante du fait de la réduction des jeux aubes-carter pour augmenter le rendement des compresseurs. L'utilisation d'un abrasable sur le carter rend le contact plus souple mais cet abrasable s'use pendant le service du moteur modifiant l'interaction rotor-stator. De nombreuses études portent sur les divers aspects de ce sujet comme l'interaction modale [17, 133], les phénomènes d'instabilités [136] mais aussi des caractérisations expérimentales [181].

1.2.3.3 Outils d'analyse dynamique

Comme nous venons de le voir les roues aubagées sont soumises à des vibrations qui, si elles deviennent excessives, entraînent de la fatigue vibratoire (ou fatigue polycyclique) des aubages. Les conséquences peuvent être l'amorçage de fissure au niveau de la pale ou du pied d'aube. Ce dernier aspect sera présenté dans la section 1.3 consacrée au fretting. La conséquence de la fatigue vibratoire peut être la perte d'aube. Les analyses en fatigue polycyclique sont principalement basées sur des outils empiriques :

Outils en fatigue vibratoire

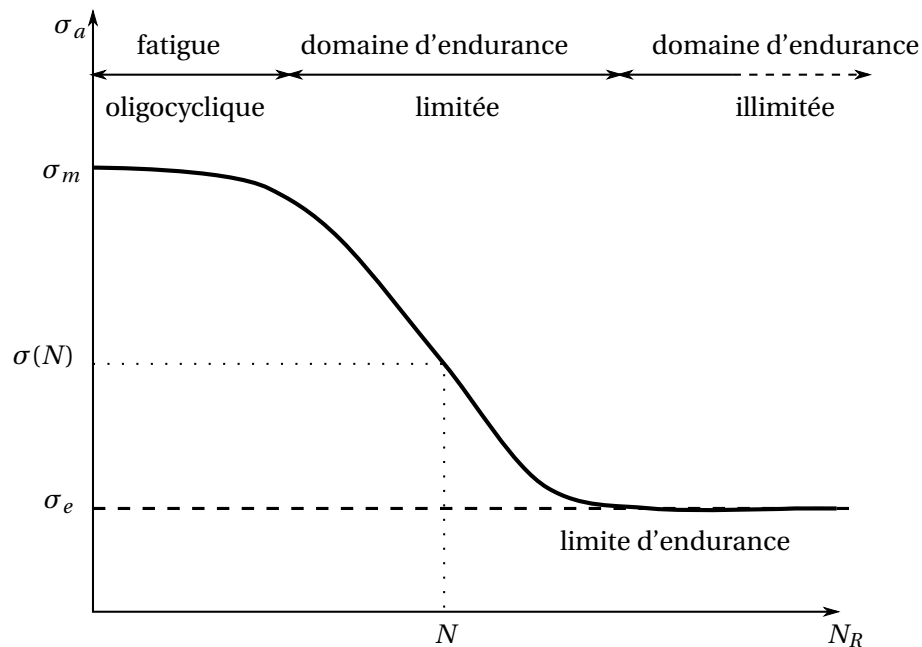


FIGURE 1.8. Courbe de Wöhler

Diagramme de Wöhler Le diagramme de Wöhler figure 1.8 est un outil important pour l'analyse de la fatigue. La courbe de Wöhler ou courbe σ - N (contraintes - nombre de cycles) est obtenue à partir d'essais. Elle définit une relation entre la contrainte appliquée σ et le nombre de cycles à la rupture N_R (en fait c'est le nombre de cycles pour lequel est observé P% de ruptures). Pour la tracer, sont généralement réalisés des essais simples qui consistent à soumettre chaque éprouvette à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude de chargement σ_a et à noter le nombre de cycles, noté N_R au bout duquel l'amorçage d'une fissure est observé ; ceci est fait pour plusieurs valeurs de l'amplitude alternée σ_a . Ainsi, à chaque structure essayée, correspond un point du plan (N_R, σ_a) et à partir d'un certain nombre d'essais la courbe de Wöhler est tracée. Certains matériaux possèdent une limite d'endurance en dessous de laquelle il n'y aura pas rupture quelque soit le nombre de cycles. Le titane possède une limite d'endurance et lors de la conception on cherche à rester en-dessous de cette limite. Les courbes de Wöhler sont tracées avec une contrainte moyenne nulle, alors que les aubages sont soumis à des contraintes statiques importantes dues aux efforts centrifuges et aux pressions aérodynamiques stationnaires. Il s'avère que la limite d'endurance σ_e obtenue pour une contrainte moyenne nulle n'est

plus valable dans ce cas. Pour cette raison le diagramme de Haigh, qui représente l'évolution de la limite d'endurance en fonction de la contrainte moyenne σ_m , est utilisé.

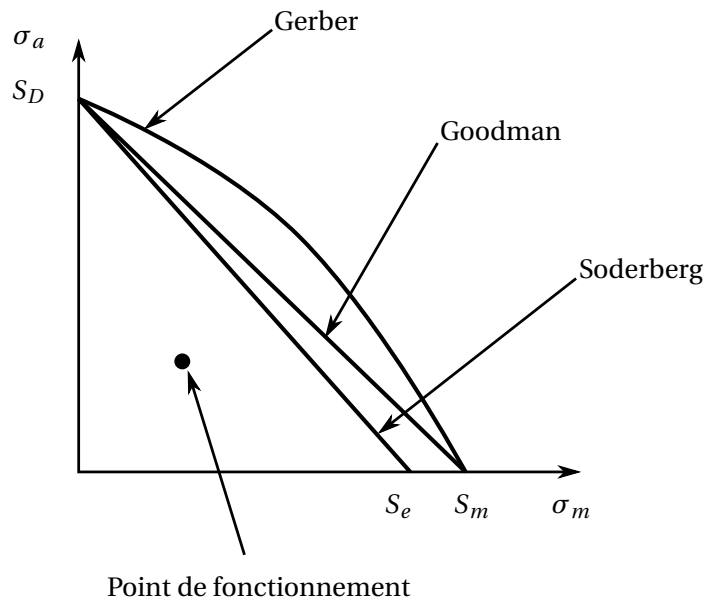


FIGURE 1.9. Diagramme de Haigh

Diagramme de Haigh Pour tracer un diagramme de Haigh complet, il faut en théorie construire une courbe de Wöhler pour chaque valeur de la contrainte moyenne, ce qui est très fastidieux. Pour contourner cette difficulté, des modélisations simplifiées (Goodman, Soderberg, Morrow, Gerber...) sont souvent utilisées et permettent de statuer rapidement sur le risque de fatigue (figure 1.9). La droite de Goodman est très utilisée. Elle relie S_D , limite d'endurance à contrainte moyenne nulle et S_m , contrainte de rupture statique. Les points de fonctionnement doivent se situer sous la droite pour éviter le risque de fatigue. La droite de Soderberg qui relie S_D et la limite élastique S_e offre une marge de sécurité plus grande. Le modèle de Gerber est une parabole. Un point de fonctionnement est acceptable lorsqu'il se situe sous la courbe du modèle considéré. En plus de ce critère un coefficient de sécurité est appliqué.

Situation modale

Diagramme fréquences/nombre de diamètres nodaux Les caractéristiques de la situation modale des roues aubagées sont liées à la participation modale du disque. C'est un élément important lors de la conception d'une roue aubagée. En effet, si par exemples des modes de pale de natures différentes (flexion, torsion) sont proches fréquentiellement cela peut avoir des conséquences graves. Le flottement peut se produire et l'aube oscillera entre deux modes avec une augmentation d'énergie importante qui mènera rapidement à la rupture de la pale.

Les modes de vibration du disque peuvent aussi apparaître dans la réponse vibratoire. Dans les turbomachines seules les modes tangentiels interviennent, les modes radiaux ne sont pas excités. Chaque mode de l'aube est impacté par le mode du disque excité. Ceci a pour effet de créer un déphasage entre chaque aube. Pour visualiser la situation modale on trace le diagramme des fréquences par rapport

aux nombres de diamètres nodaux. On définit une famille de modes de même nature que les modes de l'aube seule comme l'ensemble des modes à diamètres de la roue aubagée ayant les mêmes déformées au niveau de la pale. Le diagramme fréquences/nombre de diamètres nodaux permet de suivre l'évolution des fréquences propres en fonction du nombre de diamètres. L'influence du disque est plus manifeste pour les faibles nombres de diamètres. A fort nombre de diamètre la structure aube + secteur de disque se comporte comme si les frontières du secteur étaient fixées. Le calcul des fréquences propres se fait à nombre de diamètres fixé.

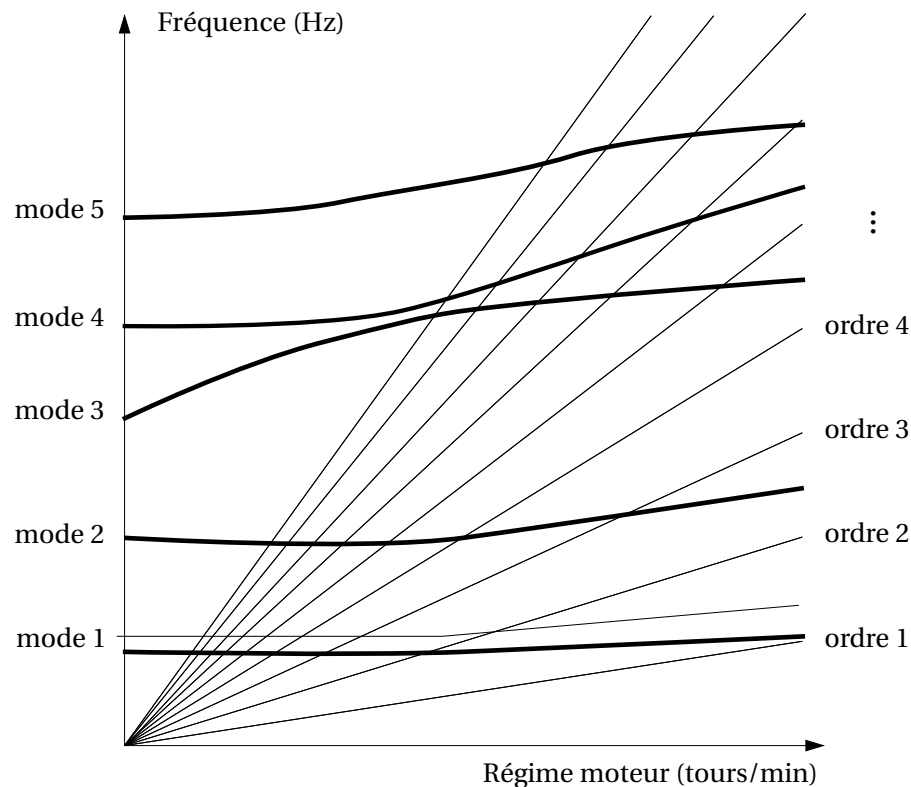


FIGURE 1.10. Diagramme de Campbell d'une aube

Diagramme de Campbell et dérivés Les aubages sont soumis à des contraintes alternées à fréquence élevée qui peuvent entraîner de la fatigue. Lors de la conception d'une roue aubagée on cherche à éviter les situations de résonance. Le diagramme dit de Campbell ou diagramme d'interférence est particulièrement adapté pour visualiser les risques de résonance. Les excitations sont périodiques et de fréquence multiple de la vitesse de rotation. Sur ce diagramme est reportée l'évolution des fréquences propres du disque aubagé en fonction de la vitesse de rotation. On n'obtient pas des droites horizontales car les fréquences varient avec la vitesse de rotation à cause des effets centrifuges et du raidissement géométrique lié à la précontrainte de la structure. L'intersection d'une fréquence propre et d'une fréquence d'excitation donne les zones de résonance, le mode propre de l'aubage étant en résonance avec cette source d'excitation. Cela signifie qu'il ne faut pas que le moteur fonctionne à la vitesse de rotation correspondante. Dans les faits on ne peut pas éviter toutes les résonances : il faut vérifier si elles sont dangereuses ou pas et surtout la durée pendant laquelle le moteur est au régime incriminé. Pendant les phases de croisière le moteur tourne à vitesse constante, si une résonance est possible à ce régime il faut vérifier qu'elle n'est pas dangereuse ou repenser la conception. Les expériences étant

chères et souvent peu représentatives des conditions réelles de fonctionnement du turboréacteur, les constructeurs cherchent à prévoir la réponse forcée des éléments du moteur par la simulation numérique. Le calcul non-linéaire de la réponse forcée vibratoire est un outil très important pour les situations de résonance. Si une résonance est jugée vraiment critique et qu'il n'est pas souhaitable de revoir la géométrie de l'aubage afin de déplacer la fréquence propre, il faut avoir recours à un dispositif d'amortissement pour réduire l'amplitude vibratoire.

Le diagramme *zig-zag* [130] permet d'établir la relation entre les diamètres nodaux du mode excité et l'ordre de l'excitation. La règle d'association correspond au repliement de spectre des harmoniques spatiales en nombre de diamètres équivalents. Pour une excitation d'ordre p les modes de nombres d'onde sont $d = |kN - p|$.

Il arrive parfois que les courbes de fréquences propres en fonction du régime semblent se croiser, et ce qui donne l'impression qu'aux points d'intersection on est en présence de modes à fréquences doubles. En fait les modes, dans la zone de croisement, ne sont plus indépendants. Ainsi, dans le cas de modes de disques aubagés, le mode d'aube sera affecté par le mode de disque, et réciproquement, le mode de disque est affecté par le mode d'aube. Les modes ne se croisent pas mais s'évitent. On peut avoir cette situation de *veering* dans deux cas :

- Modes couplés aube+disque. Les fréquences varient avec l'indice de déphasage. Les modes concernés sont un mode à dominance de pale se combinant avec un mode à dominance de disque.
- Modes dont les déplacements généralisés se couplent (par exemple flexion + torsion) : c'est le cas notamment des aubes à faible allongement, fortement vrillées, quand la fréquence du mode 1F, très sensible au raidissement centrifuge, se rapproche de celle du mode 1T, peu sensible.

Le *veering* n'est pas un problème en soi. Par contre toute situation dans laquelle une excitation coupe une zone de *veering* est à proscrire. En effet la réponse de la structure résultera de la superposition des réponses des modes couplés et les effets du désaccordage naturel seront amplifiés.

Analyse aéromécanique Les phénomènes vibratoires des roues aubagées sont dans la plupart des cas dûs à une interaction fluide-structure. Nous parlerons de phénomènes aéroélastiques. Les problèmes aéroélastiques ont été un problème au début de l'aviation. Beaucoup de méthodes utilisées jusqu'à présent ont été proposées dans les années 1950 et 1960. Pendant des années les méthodes existantes étaient suffisantes. Aujourd'hui les nouvelles conceptions des roues aubagées qui entraînent des structures de plus en plus légères et de plus en plus chargées aérodynamiquement font apparaître des phénomènes de flottement. Il faut être capable de prédire les risques de flottement très tôt dans le cycle de conception. De plus les non-linéarités au sein des structures sont de plus en plus présentes. Ainsi pour de futures architectures de type « open-rotor » (double soufflante non carénée) les non-linéarités géométriques doivent être prises en compte dans le calcul vibratoire [81].

Les phénomènes aéroélastiques sont clairement non-linéaires : non-linéarités aérodynamiques (termes d'advection, chocs, couches limites, turbulence, ...) et non-linéarités structurales (frottement dans les liaisons, grandes déformations, matériaux, amortissement non-linéaires, ...). Il existe deux classes de méthodes aéroélastiques : les méthodes avec couplage fluide-structure faible et les méthodes avec couplage fort.

Dans la première classe de méthodes, le problème couplé est divisé en deux analyses disjointes. L'effet de la structure sur le fluide est pris en compte via un mouvement de structure imposé. Les effets du fluide sur la structure sont vues comme un chargement extérieur indépendant. Dans le cas du flottement seul l'amortissement aérodynamique est pris en compte. S'il est négatif on regarde si l'amortissement structural le compense. Cette approche ne permet pas de calculer les cycles limites dans

les zones d'instabilité. Le calcul de l'usure sous chargement dynamique s'inscrit dans cette approche puisqu'il permet de connaître l'amortissement lié au frottement en pied d'aube et son évolution avec l'usure.

La deuxième classe de méthodes résout le problème couplé aéroélastique. Les non-linéarités des deux domaines (fluide et structure) sont prises en compte simultanément. Actuellement, les approches temporelles sont utilisées pour résoudre ce problème. Les méthodes fréquentielles commencent à faire leur apparition dans le calcul aérodynamique [217]. Il faut encore coupler les méthodes fréquentielles « structures » et les méthodes fréquentielles « fluide ». La méthode d'analyse modale non-linéaire proposée par D. Laxalde [132], à laquelle le calcul d'usure a pu être ajouté [131], peut permettre le couplage fluide-structure fort et la prédiction de cycle limite dans les domaines d'instabilités.

Bilan La prédiction des effets non-linéaires lors de la phase de conception est devenue indispensable que ce soit pour le calcul de la réponse forcée ou pour les système autonomes. Nous verrons dans ce mémoire que l'endommagement par fretting modifie les propriétés d'amortissement au niveau du pied d'aube et donc qu'il est nécessaire de le prendre en compte pour prédire le comportement vibratoire de la roue aubagée durant toute la vie du moteur. Intéressons-nous maintenant aux sources d'amortissement dans un moteur d'avion afin d'être à même d'estimer correctement les niveaux vibratoires.

1.2.4 Amortissement des vibrations

Lors de la conception d'un moteur il n'est pas possible d'éviter pour tout régime moteur toutes les résonances de toutes les roues aubagées. Dans ce contexte les constructeurs cherchent les meilleurs moyens d'amortir les résonances et autres sollicitations dynamiques rencontrées pendant le vol.

1.2.4.1 Amortissement intentionnel par frottement sec

C'est certainement la méthode d'amortissement la plus utilisée dans les moteurs d'avion. Souvent un frotteur est placé sous les plates-formes des aubes. Il existe de nombreuses géométries possibles pour ces frotteurs. Nous pouvons citer les frotteurs en coin, cylindrique, de type plaque, bonbon... Les frotteurs sont plaqués sous les plate-formes par la force centrifuge. Le déplacement relatif des deux aubes engendre une dissipation d'énergie à l'interface entre le frotteur et les plates-formes. La masse du frotteur détermine la force normale de contact (force centrifuge) et donc le niveau de dissipation pour chaque résonance. L'avantage des amortisseurs par frottement est que pour une vitesse de rotation donnée ils amortissent tous les modes plus ou moins fortement. Par contre leur niveau d'amortissement varie beaucoup avec la vitesse, ils ne sont donc réellement efficaces qu'à une vitesse donnée. De toute façon les résonances les plus gênantes sont celles vécues pendant la croisière, donc à un régime moteur donné. On pourrait envisager un système précontraint au départ dont la force normale de contact ne dépend pas de la vitesse de rotation mais avec l'usure ce frotteur perdrait sa capacité à amortir. D'un point de vue modélisation l'amortissement par frottement est étudié depuis une trentaine d'année, au début sur des modèles phénoménologiques [80, 192] et aujourd'hui sur des modèles tridimensionnels [38, 191, 212].

R. Elliot *et al* de Rolls-Royce ont étudié l'usure des frotteurs sous plateforme. Ils ont calculé la réponse vibratoire de la roue aubagée complète puis le taux d'usure pour chaque frotteur. A chaque calcul de cycle le frotteur qui s'use le plus est retiré. La perte du frotteur entraîne du désaccordage. Dans leur étude la pression est considérée comme constante, or il a été montré que la pression varie fortement [204] avec l'usure et que la dynamique est modifiée.

L'amortissement par frottement se retrouve aussi au niveau des nageoires et des talons des soufflantes et des turbines. L'amortissement par frottement dans les pieds d'aubes est un cas à part et nous reviendrons dessus un peu plus loin.

Les disques aubagés monobloc ne possèdent plus de jonctions dans lesquelles l'énergie pourrait être dissipée par frottement. Il n'est plus possible de placer des frotteurs sous les plateformes. Il a été proposé de placer un jonc de frottement sous la jante du disque [130]. Ce type de technologie existe déjà au niveau des labyrinthes d'étanchéité. D'autres brevets ont été déposés par les constructeurs pour amortir les vibrations dans les DAM. Boeing (Brevet US 6,375,428 B1) propose l'utilisation de doigts frottants sous la jante du disque.

Comme il sera vu tout au long du mémoire le contact avec frottement entraîne des phénomènes d'usure. La capacité à prédire l'usure dynamique peut être utile pour le dimensionnement de ce genre d'amortisseur par frottement.

1.2.4.2 Amortissement intentionnel par d'autres dispositifs

Les constructeurs cherchent des alternatives aux amortisseurs par frottement sec. Actuellement l'utilisation de matériaux visco-élastiques est une des priorités des études de recherche sur l'amortissement dans les turbomachines. Les technologies envisagées sont les suivantes : déposer sous forme de couche externe directement sous les aubes (Brevet US 3,357,850) ou au niveau de l'échasse ou bien encore appliquer une couche visco-élastique sur les portées des aubes (Brevet US 6,669,447) ou au niveau des nageoires ou talons. Pour les DAM on envisage plutôt d'appliquer la couche visco-élastique sous la jante.

L'implantation de dispositifs actifs ou semi-passifs est encore rare. Des travaux sont en cours sur l'utilisation de matériaux piézoélectriques sous forme semi-passive. On colle sur la roue aubagée des éléments piézoélectriques aux bornes desquels on place un circuit électrique passif, communément appelé « shunt ». Quant aux solutions actives elles ne sont encore qu'au stade de recherches académiques. Un brevet (Brevet US 5,490,759) propose un contrôle magnétique des vibrations d'aubes à l'aide d'électro-aimants localisés dans le carter. Des études amonts se font sur l'amortissement par pompage énergétique. L'idée est d'accoupler à la structure principale un petit dispositif passif fortement non-linéaire. Technologiquement l'absorbeur non-linéaire serait à base d'alliage à mémoire de forme [87].

Il est possible d'introduire directement de l'amortissement au niveau des pales. On introduit volontairement du désaccordage afin d'éviter l'apparition de phénomènes auto-entretenus [141]. Au niveau des aubages fixes, les redresseurs sont sectorisés afin de limiter les effets d'une coïncidence. L'utilisation d'amortisseurs par chocs est aussi envisagé. Des billes sont logées dans des aubes creuses et l'énergie est dissipée lorsque la vibration de l'aube génère des chocs (Brevet US 6,607,359,B2).

1.2.4.3 Amortissement lié au frottement dans les pieds d'aubes

Notre étude se focalise sur le contact avec frottement en pied d'aube. Nous avons dans la section 1.2.1 présenté le rôle des liaisons aube-disque. La présence d'une liaison aube-disque apporte une nouvelle source de dissipation, en effet le micro-glisserment qui a lieu à l'interface lors des vibrations introduit de la dissipation par frottement sec.

Études numériques La littérature sur les méthodes numériques permettant de calculer l'amortissement par frottement en pied d'aube est plus restreinte que celle sur les frotteurs. Il est vrai que si des

modèles phénoménologique sont suffisants dans le cas des frotteurs ce n'est plus la même chose pour le contact aube-disque. Les travaux d'E.P. Petrov sur le contact aube disque dans le cas d'une soufflante [190] sont très proches de ceux développés au LTDS et proposés dans ce mémoire La thèse de D. Charleux [32] a permis d'appliquer la méthode proposée par Nacivet [32] pour l'étude de la vibration d'une roue aubagée complète avec frottement en pied d'aube. De plus les méthodes proposées par D. Charleux ont été validées expérimentalement [33].

Il semble que certaines équipes rencontrent des difficultés à prendre en compte le chargement statique dû à la force centrifuge [8,37]. La méthode proposée par D. Charleux couplée au solveur SAMCEF permet de prendre en compte le chargement statique de façon naturelle. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 5.

1.2.4.4 Études expérimentales de l'amortissement par friction

L'effet de l'amortissement par frottement en pied d'aube a été testé par les équipes de l'institut Pisenko de Kiev dans les années 1970. Pour ce faire ils utilisent une cloche à vide pour annihiler les effets aérodynamiques lors de la rotation. Tokar *et al.* [227] ont observé lors de leur essais que l'amortissement diminue avec la vitesse de rotation, qu'elle augmente avec l'amplitude d'excitation et que l'amortissement est maximum avec un revêtement anti-friction à base de Molydag. Ils ont effectué deux types d'essais : en réponse forcée et en réponse libre. Les taux d'amortissement obtenus lors de leurs essais sont faibles : ξ est compris entre 0.02% et 0.1% [229]. Le LTDS a fabriqué un équipement similaire, ce qui a permis de quantifier l'amortissement dans les pieds d'aube [33] et avec frotteur [103]. De plus lors des essais sur le banc du LTDS des films Fuji ont été utilisés pour quantifier le chargement statique dans les pieds. Cette étude permet de recalibrer les modèles numériques. En effet, la connaissance des phénomènes au sein du pied sont très difficiles à obtenir expérimentalement.

D'autres études expérimentales ont été menées sur des modèles plus simples. Rao *et al.* [196] ont testé une poutre dont les extrémités représentent les pieds d'aube en forme de T. Nacivet [171] a utilisé un banc avec une poutre dont les extrémités étaient en queue d'aronde.

Il est très coûteux de trouver expérimentalement le taux d'amortissement par frottement en pied d'aube. De plus les phénomènes à l'échelle du pied sont difficilement observables expérimentalement. Pour ces raisons les études numériques sont indispensables.

Bilan

L'amortissement des vibrations par frottement dans les roues aubagées est étudié que ce soit expérimentalement ou numériquement depuis une trentaine d'années. L'aspect positif du frottement sur les vibrations est assez bien appréhendé. Malheureusement les micro-glissements, qui se produisent aux interfaces, conduisent à des phénomènes d'endommagement par fretting qui sont encore mal compris dans le cas de chargements dynamiques. Nous allons expliquer différents aspects des phénomènes d'endommagement par fretting pouvant se produire dans la zone de contact..

1.3 Modes de défaillance de la liaison aube/disque

Les défaillances de la liaison aube/disque vont surtout être dues aux phénomènes de fretting. Les chargements couplés dynamiques et statiques sont la source des modes de fretting rencontrés. Nous présentons dans cette section les notions importantes sur l'endommagement par fretting. Nous exposons la vision des tribologues sur le fretting et les résultats expérimentaux existants. Cette étude permet

de comprendre le lien entre l'endommagement du pied et les modes de vibrations de l'aube observés. De plus l'usure du pied joue un rôle important dans les modes de fretting subis.

1.3.1 Fretting : phénoménologie

1.3.1.1 Quelques définitions

Définitions Le terme de fretting est employé lorsque deux surfaces en contact sont soumises à des micro-déplacements tangentiels alternés. Suivant l'amplitude imposée de glissement, plusieurs types d'endommagement peuvent être rencontrés. Le fretting est souvent présenté comme l'une des avaries de surfaces les plus critiques des applications industrielles. Les exemples de fretting se retrouvent dans les systèmes suivants : les liaisons (cannelures, liaisons par axe, pieds d'aube de turbine...), les empilages multiples (arbres de transmissions), les assemblages rivetés (boulonnés), les câbles, les conduits flexibles... ; et concernent toutes les industries : constructions mécaniques, aéronautiques, biomédicales, industrie nucléaire, génie civil... On parle de *fretting-wear* (usure par fretting) lorsque les micro-glissements entraînent un enlèvement de matière au niveau des surfaces en contact. Si le déplacement est la conséquence de la déformation de l'une des deux structures en contact soumises à une sollicitation cyclique, il s'agit de *fretting-fatigue*. Le fretting-fatigue entraîne l'amorçage de fissure à partir de la zone de contact. Quand les produits de la dégradation sont le résultat d'une oxydation dans la zone de contact, on utilise le terme *fretting-corrosion*.

1.3.1.2 Nécessité d'essais normalisés

Les contacts réels sont généralement complexes et mal définis. Expérimentalement il est très difficile de travailler sur des configurations de contact réelles afin d'en déduire des lois générales. Pour modéliser les mécanismes de dégradation en fretting, les chercheurs ont rapidement choisi des géométries simplifiées et plus faciles à étudier, on trouve les trois configurations suivantes :

- le contact plan/plan,
- le contact cylindre/plan,
- le contact sphère/plan.

La configuration plan-plan permet de maintenir des aires de frottement constantes quelle que soit l'usure des interfaces. Cependant, l'analyse mécanique montre que la distribution de pression et surtout de cisaillement se caractérise par une discontinuité indéterminée en bordure de contact. L'analyse est alors complexe et il est difficile d'évaluer correctement le chargement qui est imposé au matériau. De plus, la mise en glissement engendre des mésalignements qui accentuent encore les effets de bords. À cette configuration, sont donc préférés les contacts cylindre-plan et sphère-plan. Tous deux sont décrits par l'analyse de Hertz [91]. Ces configurations peuvent dans le cas du contact aube-disque servir à représenter la zone de sortie de portée. Les distributions des contraintes dans le plan pour un contact cylindre-plan glissant sont données par McEwen [157] pour des conditions de déformation plane (analyse élastique). Les distributions des chargements élastiques dans le plan du contact sphère plan glissant sont introduites par Hamilton puis explicitées sous une forme plus simple par Hills [93]. Des informations plus complètes sur la mécanique des contacts peuvent être trouvées dans les ouvrages de références de Johnson [106] et de Hills [92, 93]. Des configurations pion-plan avec bords arrondis sont utilisées pour être plus proches du contact aube/disque [68, 183].

Trois modes de fretting ont été définis par Mohrbacher [167] puis étendus à quatre en ajoutant un mode de roulement. Cette dénomination est bien adaptée au cadre du contact sphère-plan. Ces quatre modes représentés sur la figure 1.11 sont :

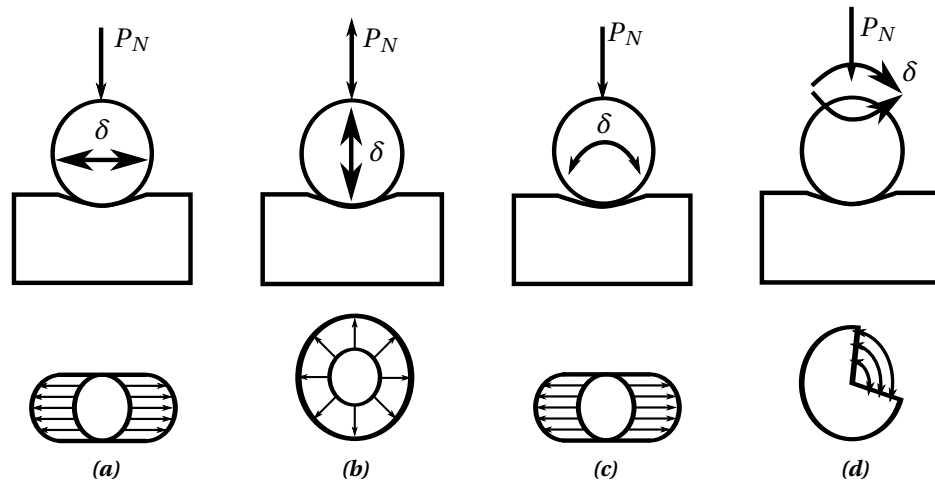


FIGURE 1.11. Modes de fretting

- le mode I : déplacement tangent,
- le mode II : déplacement radial,
- le mode III : roulement,
- le mode IV : déplacement circonférentiel.

1.3.1.3 Paramètres définissant un essai

Plus simple à mettre en œuvre et plus représentatif pour la plupart des situations industrielles, le mode I est le plus étudié, notamment par le biais de l'essai classique de fretting-wear. Le paramètre essentiel pour définir le fretting est le rapport e (1.1) entre l'amplitude de glissement δ^* et la dimension du contact a dans la direction de glissement.

$$e = \frac{\delta^*}{a} \quad (1.1)$$

Différents paramètres permettent de définir le cycle de fretting (cf. figure 1.12). L'étude de l'évolution de certains de ces paramètres au cours d'un essai nous renseigne sur la nature des surfaces en contact et des endommagements potentiels.

- *L'amplitude de débattement* δ (μm) est le paramètre qui est directement contrôlé dans les essais de fretting-wear. Cette amplitude est mesurée au plus près du contact.
- *L'effort tangentiel maximal* Q^* (N) est représentatif des sollicitations tangentielles imposées au niveau du contact. En RGP (régime de glissement partiel) à l'aide de calculs de mécanique du contact glissant, Q^* permet de déterminer les contraintes induites dans les matériaux en contact. En RGT (régime de glissement total) l'effort normal est trouvé via le coefficient de frottement μ .
- *La raideur tangentielle* du cycle est la pente $\frac{dQ}{d\delta}$ ($N/\mu\text{m}$) du chargement suivant le sens de débattement. Cette valeur prend en compte la rigidité du montage, des échantillons massifs et du contact.
- *L'ouverture du cycle* δ_0 (μm) est définie comme la valeur du débattement pour un effort tangentiel nul. Cette valeur est indépendante de la rigidité du montage.
- *L'énergie dissipée* au cours d'un cycle E_d (Joule) correspond à l'aire contenue à l'intérieur du cycle. La dissipation d'énergie se fait au travers de mécanismes tels que : création de débris, éléva-

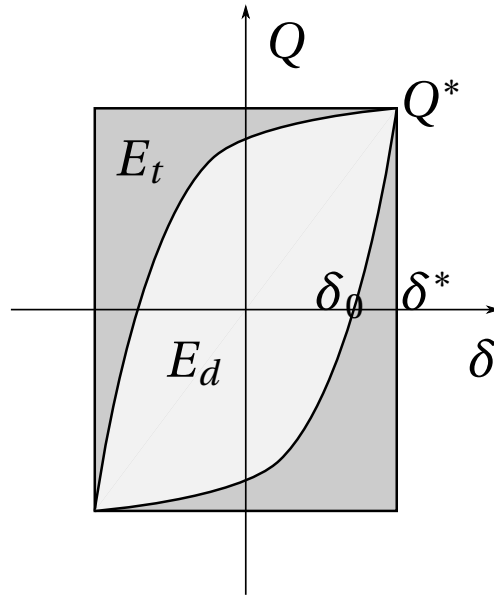


FIGURE 1.12. Cycle de fretting en glissement partiel

tion de température, fissuration, déformation plastique, transformation physicochimique. Pour un cycle rectangulaire on obtient $E_d = E_t = 4\delta_0 Q^*$.

- Le coefficient de frottement énergétique μ_e , $\mu_e = \frac{E_d}{4\delta_0 P}$

Dans tous les cas (sauf pour un cycle rectangulaire) le coefficient de frottement énergétique est inférieur au coefficient de frottement. Pour un cycle idéal en glissement total ils sont égaux. L'utilisation de μ_e permet de s'affranchir de la forme du cycle.

1.3.1.4 Cartes de fretting

Le concept de cartes de fretting a été introduit par Vingsbo [233] dans le cas d'un contact sphère/plan pour tracer la transition entre les conditions de glissement. L'équipe de L. Vincent [232] a introduit la notion de régime de glissement :

- *Le régime de glissement partiel* (RGP) correspond à une condition de glissement partiel observée durant tout l'essai. Il se caractérise par un cycle de fretting elliptique. Au niveau du contact, une zone collée est entourée d'une zone de glissement.
- *Le régime de glissement total* (RGT) correspond à une condition de glissement total observée durant tout l'essai. La zone collée disparaît et toute la zone de contact est en glissement. Le cycle de fretting est un parallélogramme.
- *Le régime de glissement mixte* (RGM) est obtenu lorsque des cycles en glissement partiel et des cycles en glissement total sont observés au cours du même essai.

Ces trois régimes peuvent être placés dans un plan en fonction de l'effort normal et du débattement dans ce qui s'appelle la carte de sollicitation locale. Une deuxième carte de fretting qui correspond à la carte de réponse du matériau peut être tracée. Elle définit les endommagements classiquement observés en fonction de ce même effort normal et de l'amplitude de débattement. Afin de formaliser la transition entre glissement partiel et glissement total, S. Fouvry [64] a proposé des critères quantitatifs calculés à partir de la théorie de Mindlin [165], permettant de déterminer si un cycle expérimental donné correspond à un glissement partiel ou à un glissement total. De nombreux travaux réalisés

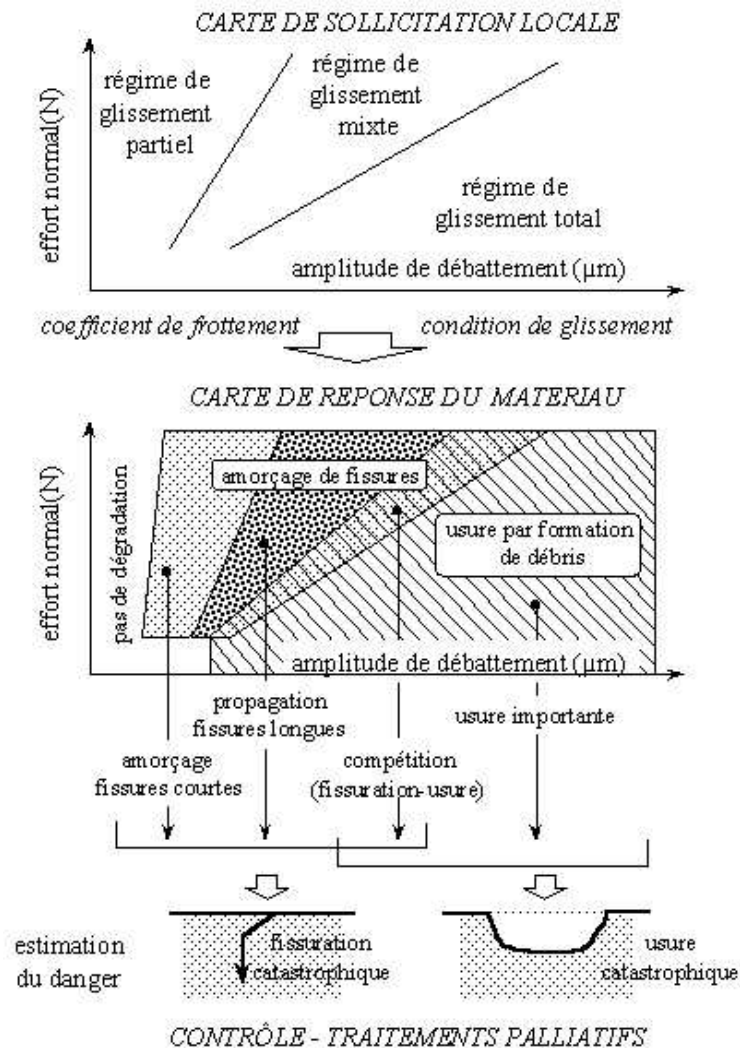


FIGURE 1.13. Représentation des cartes de fretting [183]

au LTDS ([64], [68], [183]) ont montré que la fissuration est la dégradation prépondérante en RGP et RGM et que l'usure par formation de débris est l'endommagement principal en RGT (figure 1.13). La figure 1.14 montre la transition entre les deux phénomènes. Nous allons présenter successivement le phénomène de fissuration et le phénomène d'usure par fretting.

1.3.2 Fretting-fatigue - fissuration

Un endommagement par fissuration est souvent attribué au caractère cyclique de la sollicitation en fretting (phénomène de fatigue). L'approche la plus utilisée pour caractériser la tenue d'un matériau est la réalisation de courbes d'endurance (courbes de Wöhler). Une approche physique du phénomène est plus à même de montrer les différents stades de fissuration. Le scénario se déroule en quatre phases :

- *phase d'accommodation* : les concentrations de contraintes créent des micro déformations plastiques cycliques qui peuvent mettre en jeu des mouvements de dislocations et des élévations de températures locales ;
- *phase d'amorçage* de microfissures : au cours de cette phase les défauts suivent des plans compris entre 10° et 60° par rapport à la direction de la contrainte principale ;

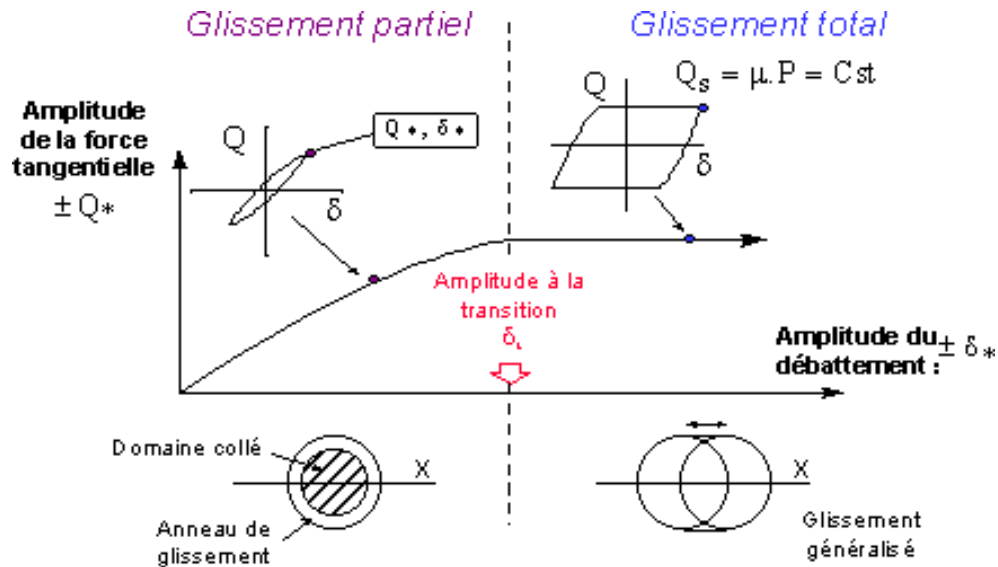


FIGURE 1.14. Critère de transition entre RGP et RGT pour un contact cylindre/plan [183]

- *phase de croissance* de microfissures : au cours de ce stade, les microfissures ont tendance à s'orienter perpendiculairement à la direction de la contrainte principale maximale. L'amorçage est parfois défini à partir de ce changement de direction ;
- *phase de progression* des macrofissures : il y a ouverture et glissement cyclique de la fissure. Il peut y avoir coalescence de plusieurs fissures. La fissure augmente jusqu'à une taille critique pour l'intégrité de la pièce.

Ce scénario fonctionne bien en fatigue mais en fatigue-fretting les fissures suivent des chemins plus complexes et moins systématiques. Durant l'essai de fretting-fatigue la fissuration apparaît toujours au niveau du contact, c'est le fretting qui contrôle l'amorçage. De par sa configuration, il permet de comparer l'influence du fretting sur la fissuration vis-à-vis de l'essai de fatigue classique. Il permet le tracé des courbes de Wöhler avec lesquelles il est d'usage de calculer des « coefficients d'abattement ». Cependant par ce montage il est très difficile de découpler le chargement du contact de la sollicitation externe. L'analyse de la fissuration est le plus souvent étudiée sur le contact cylindre-plan car il est le plus facile à modéliser en 2D par éléments finis. Le contact sphère-plan implique une description tridimensionnelle plus coûteuse possible dans les codes éléments finis ; un calcul analytique avec hypothèse de plan semi-infini est possible.

1.3.2.1 Essai de fretting fatigue

L'étude de la fissuration en fretting fatigue a conduit à l'établissement des courbes de Wöhler où l'influence de fretting est mesurée en termes d'abattement de la durée de vie et de la limite d'endurance (figure 1.15).

La plupart des auteurs montrent alors que la durée de vie diminue de façon monotone avec l'augmentation de la pression de contact. Il est montré que l'action conjointe du fretting et de la fatigue réduit de 2 à 5 fois la durée de vie.

Dans l'essai de fretting fatigue deux sortes de fissures sont rencontrées : courtes et longues. Les fissures courtes font un angle de 10 ° à 60 ° correspondant au maximum de contrainte de cisaillement. L'amorçage et la propagation des fissures courtes sont principalement contrôlés par le chargement et

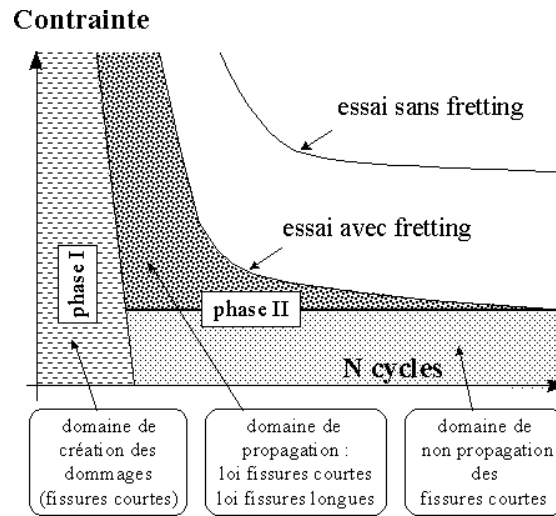


FIGURE 1.15. Courbes de Wöhler avec fretting [183]

les sollicitations de fretting. Certaines fissures courtes se propagent en fissures longues. Cette évolution en fissure longue est caractérisée par la contrainte uni-axiale de fatigue dans le matériau. L'existence de deux types de fissuration sous l'effet de la fatigue et du fretting conduit à l'étude de la transition entre ces deux chargements. Il existe un état dans lequel les fissures courtes ne se propagent pas en fissures longues et on voit apparaître un arrêt de fissuration. La durée de vie peut devenir infinie.

Dans les essais de fretting wear, la rupture des échantillons ne peut pas se produire. Le tracé de l'équivalent des courbes de Wöhler est donc irréalizable. Il est par contre possible de déterminer des cinétiques de fissuration. Cette approche est beaucoup plus précise pour l'étude de l'amorçage de la fissuration et des premiers stades de propagation.

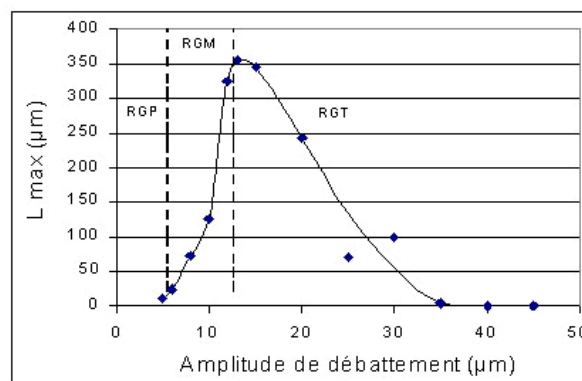


FIGURE 1.16. Évolution de la profondeur de fissuration en fonction de l'amplitude de débattement et relation avec les régimes de glissement [60]

Les résultats sont les suivants (figure 1.16) : l'évolution de la profondeur de fissuration maximale en fonction du débattement présente une forme de cloche. Elleuch [60] montre que pour une amplitude de débattement croissante, la longueur de fissure augmente puis décroît dès le régime de glissement total atteint. Le maximum est atteint en RGM. En RGT, l'importance de l'usure limite la profondeur de fissuration.

1.3.2.2 Retour d'expérience

Afin de mieux connaître l'endommagement lié aux sollicitations imposées au contact entre pied d'aube et alvéole de disque, une expertise sur pièce réelle a été réalisée. Une expertise a été effectuée

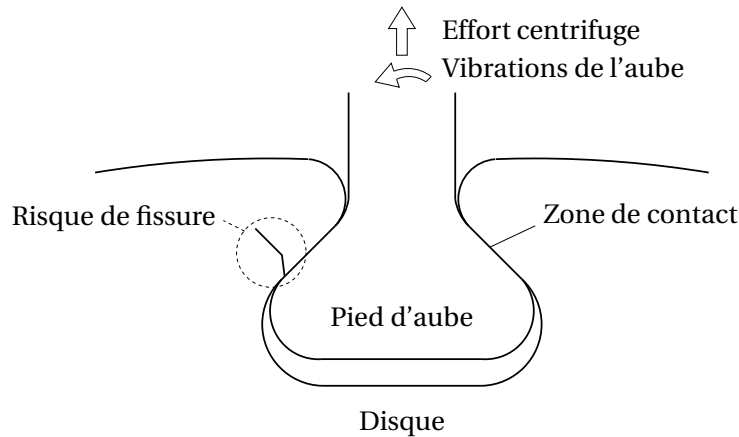


FIGURE 1.17. Schéma de la fissuration d'une portée d'aube

sur une portée d'aube de disque de soufflante fissurée. Le contact et la position de la fissuration sont schématisés sur la figure 1.17. L'amorçage de la fissuration dans l'alvéole se situe bien au niveau de la zone de contact aube/disque et confirme ainsi l'hypothèse d'endommagement par fretting. Plusieurs sites d'amorçage sont observés et la fissuration principale se situe en bordure de la zone de frottement du côté intérieur de l'alvéole, légèrement à l'intérieur de la zone de contact. Une étude approfondie montre différentes phases dans la cinématique de fissuration : amorçage, fissuration influencée par le chargement du contact et enfin une fissuration liée au chargement extérieur. Outre la fissuration, une usure de la portée d'environ $200\mu m$ est observée au cours des cycles de fonctionnement. Cette expertise montre que l'amorçage de fissuration au niveau du disque de soufflante est bien induit par une sollicitation de fretting. D'autre part elle montre qu'une usure au niveau du contact va progressivement éliminer les couches superficielles sur lesquelles un traitement de grenailage initial avait introduit des contraintes de compression susceptibles de bloquer la fissuration.

La fissuration ne sera pas pris en compte dans nos études mais à l'avenir le calcul d'amorçage de fissure dû aux chargements dynamiques peut être une voie à explorer. Les méthodes proposées pourraient être adaptées pour modéliser ce phénomène. Pour prédire la durée de vie d'une portée d'aube, il apparaît essentiel de quantifier le risque d'amorçage, les premiers stades de la propagation mais aussi la cinétique d'usure.

1.3.3 Fretting-wear - usure

L'usure par fretting peut se produire aux interfaces de contact des pieds d'aubes. Les études expérimentales de ce type d'endommagement sont importantes pour comprendre les mécanismes qui interviennent. Contrairement à l'aspect fissuration le phénomène d'usure sous sollicitations de fretting est moins bien formalisé car il doit prendre en compte des mécanismes plus difficiles à quantifier tels que :

- la modification des surfaces par un enlèvement de matière à l'interface,
- la présence d'un troisième corps actif à l'interface difficile à modéliser,
- le flux des débris à l'intérieur et hors de la trace de contact,

- les mécanismes de transfert,
- l'influence de l'environnement (O_2, H_2O, \dots),
- le couplage entre les aspects thermodynamiques, physico-chimiques, mécaniques.

La recherche de modèles et l'expérimentation de l'usure par fretting s'appuient sur le travail effectué sur l'usure des interfaces frottantes. Nous allons présenter les différents concepts et définitions liés à l'usure, les outils d'analyse de l'usure (modèle décrivant l'usure) et les résultats expérimentaux de l'usure par fretting pour des situations au plus proche des conditions du contact aube/disque.

1.3.3.1 Phénoménologie de l'usure

Usuellement on distingue quatre formes d'usure :

- *L'usure par transfert ou adhésion*. L'usure adhésive se rencontre lorsque deux surfaces de faible dureté glissent l'une sur l'autre. Des particules d'une des surfaces viennent adhérer à l'autre surface. Ensuite ces particules peuvent soit revenir sur l'autre surface soit être éjectées, on parle alors d'usure.
- *L'usure par abrasion*. L'usure abrasive apparaît lorsqu'une surface de dureté élevée vient glisser sur un matériau souple. Ce mécanisme de dégradation qui fait intervenir dans les premiers instants uniquement les corps antagonistes, devient rapidement une usure à trois corps.
- *L'usure par réactions tribochimiques*. L'usure corrosive se déroule en environnement corrosif. En absence de glissement le produit de la corrosion aurait formé un film sur les surfaces qui aurait eu tendance à arrêter la corrosion. Le glissement va permettre l'expulsion de ce film et la corrosion ne s'arrête plus, la surface va s'user. Parfois la couche mince formée par réaction chimique agit comme un film protecteur face aux mécanismes d'usure.
- *L'usure par fatigue*. L'usure par fatigue de surfaces est observée durant des glissements répétés. Les cycles de charge et décharge vont induire dans le matériau des craquements à la surface qui peuvent former de larges fragments qui se détachent. Dans le cas d'un contact sphère-plan, selon le coefficient de frottement, la théorie de Hertz permet de savoir si la fragmentation commencera à la surface ou en sous-couche.

Dans notre étude nous nous intéressons à l'usure par fretting qui le plus souvent est le produit d'une usure adhésive couplée à une usure abrasive dans le cas où il y a formation d'un oxyde beaucoup plus dur que le matériau originel. Afin de définir une cinétique d'usure Meng et Ludema [162] répertorient différents modèles d'usure. Ils passent en revue plus de 5000 articles, ils dénombrent près de 300 équations différentes proposées pour quantifier les phénomènes tribologiques; 182 d'entre elles ont trait à la quantification de l'usure sous différentes conditions. Cependant tous ces modèles décrivent des conditions tribologiques bien particulières et aucun ne fait office de référence. La démarche générale consiste en la comparaison de différents systèmes tribologiques (couches de revêtements, matériaux massifs, traitements de surfaces...) par la variation des paramètres macroscopiques de chargement (pression de contact, débattement, fréquence de sollicitation...). Cela implique l'utilisation de résultats d'expériences dans les cas industriels. Ils arrivent à un classement chronologique de ces lois en trois catégories : lois d'usure empiriques, lois d'usure basées sur la mécanique des contacts et lois d'usure basées sur la mécanique de la rupture. À ces approches s'ajoutent des stratégies nouvelles de modélisation de l'usure basées sur les lois de la thermodynamique [241–243].

1.3.3.2 Outils d'analyse de l'usure

Loi d'Archard et dérivées L'un des pionniers en matière de modélisation de l'usure est J. F. Archard [12] qui définit la cinétique d'usure suivante :

$$W = K_a \frac{Ps}{3p_s} \quad (1.2)$$

avec W le volume usé, s la distance de glissement, P le chargement normal, p_s la limite d'écoulement en terme de pression (approximativement équivalente à la dureté) du matériau le plus mou. K_a est une constante reliant la probabilité, lorsque deux aspérités se rencontrent, de créer une particule d'usure. K_a est mesuré expérimentalement. Cette loi n'est pas universelle et a ses limitations, ainsi pour un même couple de matériaux testé dans différentes conditions de charge et de vitesse, le coefficient d'usure K_a peut varier dans un rapport 100.

Il existe d'autres lois qui relient le volume usé au chargement P , à la vitesse de glissement V et au temps t . L'équation (1.3) est un exemple de ce type de loi.

$$\Delta W = KP^a V^b t \quad (1.3)$$

Récemment, Farris et Goryacheva [78] ont proposé de quantifier l'usure, sous fretting fatigue en glissement partiel, à partir d'une formulation locale de la loi d'Archard. L'évolution de l'usure est corrélée à la modification de la géométrie du contact. Cette dernière génère alors une redistribution des champs de contrainte et de déformation qui sera traduite en volume d'usure via une intégration sur tout le contact de la loi locale d'Archard. La loi d'usure dérivée locale d'Archard prend la forme suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k_w p^a v^b \quad (1.4)$$

avec en un point de la surface de contact w la profondeur d'usure, p la pression de contact, v la valeur absolue de la vitesse de glissement relative, k_w le coefficient d'intensité d'usure, a et b des coefficients réels.

Approche énergétique Actuellement l'approche quantitative basée sur l'énergie dissipée par frottement est largement développée, notamment par une équipe du LTDS [65–67] et ce dans le cas du fretting. L'énergie dissipée par frottement est considérée comme activateur principal des processus de dégradation des systèmes tribologiques. Les processus d'usure sont pilotés par les températures de contact, les transformations de films tribochimiques, le transfert de matière entre surfaces, les ruptures par contraintes mécaniques ou thermiques. Mohrbacher [167] est le premier à avoir introduit le concept d'énergie dissipée cumulée dans l'étude de l'usure en fretting. Une relation linéaire a été plusieurs fois constatée entre le volume usé et l'énergie dissipée [64, 67]. Cette approche permet de déterminer des coefficients énergétiques d'usure pour différents systèmes tribologiques. Cette démarche est également adoptée pour l'étude des couches dures avec la détermination de leur durée de vie. Le volume usé est comparé à la quantité cumulée d'énergie dissipée dans le contact (figure 1.18).

Approche thermodynamique Une analyse micromécanique des interfaces est réalisé à l'aide des lois de la thermodynamique des processus irréversibles. Dragon-Louiset *et al.* [57] considèrent l'usure comme un phénomène dissipatif et lié à un critère d'évolution du mécanisme de détachement des particules. Ils se placent dans le cas le plus général et ils appliquent les lois connues de la mécanique (conservation de la masse et de la quantité de mouvement, énergie cinétique, 1^{er} et 2nd principe de la thermodynamique) à un ensemble constitué de deux corps en contact et perdant de la matière, afin de

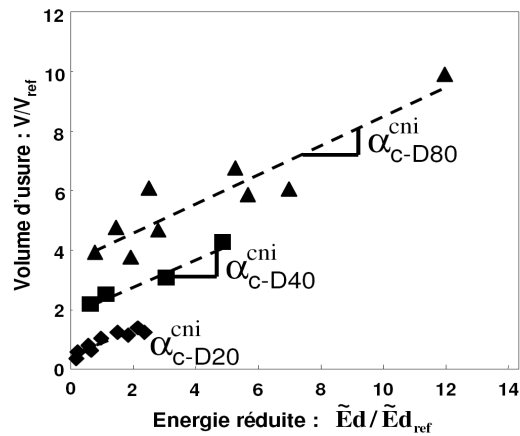


FIGURE 1.18. Évolution du volume usé en fonction de l'énergie dissipée cumulée

dégager un critère d'évolution de l'usure - critère associé à une frontière mobile, le front d'usure. L'analyse thermodynamique a permis à Dragon-Louiset [56] de définir un critère d'usure pour chaque solide prenant en compte le troisième corps. Ce critère d'usure est lié au taux de restitution d'énergie. Les premiers modèles d'usure présentés ne prennent pas en compte le troisième corps pourtant essentiel dans le transfert des chargements. L'approche thermodynamique modélise mésoscopiquement le troisième corps. La difficulté de cette approche réside dans le passage de l'aspect microscopique de l'usure (échelle du troisième corps) au modèle mésoscopique. Nous allons voir qu'une approche microscopique à l'échelle des débris permet d'expliquer les phénomènes observés à l'échelle macroscopique.

Approche par le troisième corps Dans les systèmes tribologiques il existe une interface entre les deux corps en contact. Cette interface est baptisée « troisième corps » par Godet [75]. Ce troisième corps dans le cas du contact sec est le produit de la réaction tribomécanochimique des débris issus des deux premiers corps en contact. Ce concept permet de réunir sous une seule et même approche les théories bien maîtrisées de la lubrification fluide et les problèmes de frottement et d'usure plus délicats à modéliser. L'analyse du troisième corps établit des relations entre les mécanismes microscopiques et les propriétés macroscopiques, telles que l'usure, le frottement et la capacité de portance des systèmes tribologiques. Le troisième corps participe à la transmission du chargement entre les deux solides en contact et peut donc indirectement diminuer la dégradation volumique des premiers corps. L'usure est déterminée par la quantité de débris éjectés qui est calculée à partir du flux de débris W soit pour un contact unidirectionnel :

$$W = l \int_0^{h_d} u(y) dy \quad (1.5)$$

où l est la longueur du contact, u la distribution du gradient de vitesse des débris éjectés, y la coordonnée représentant l'épaisseur de la couche de débris et W le volume usé.

Ce modèle décrit relativement bien les mécanismes réels mais reste difficile à formaliser et ne permet pas une comparaison simple de différents tribosystèmes. La modification d'un site ou d'un mécanisme de l'interface peut induire une évolution du coefficient de frottement et par conséquent modifier la condition de glissement du contact.

Dans le cadre de ce travail nous avons utilisé la loi d'Archard, pour laquelle les données issues de

résultats expérimentaux sont les plus faciles à trouver dans la littérature. La méthode proposée dans les chapitre suivants permettrait d'utiliser aussi une approche énergétique. Nous allons maintenant montrer les résultats expérimentaux de l'usure par fretting qui nous ont été utile pour définir le meilleur usage possible de la loi d'Archard dans nos modèles numériques.

1.3.3.3 Études expérimentales de l'usure pour le contact aube-disque

Nous allons rappeler les principaux résultats expérimentaux obtenus dans le cadre de la thèse de C. Paulin [183] sur les contacts entre solides dont les matériaux sont les mêmes que ceux d'un pied d'aube et d'un alvéole de disque. Il a étudié trois couples de matériaux en contact, suivant que le lubrifiant solide est présent ou non. Le modèle d'usure utilisé dans sa thèse est basé sur une approche énergétique. Ici nous nous plaçons dans le cas extrême où il n'y a plus de lubrifiant solide. En effet, nous allons modéliser dans ce travail le contact titane-titane, étant la situation la plus dangereuse qui peut se produire sur un moteur d'avion.

Approche énergétique globale Dans son travail C. Paulin montre que l'usure dépend de l'énergie totale dissipée Ed et du débattement δ^* suivant la loi (1.6). En cela il reprend les idées exposées dans des travaux précédents [64, 68].

$$\frac{V}{V_{ref}} = \alpha_{c-\delta}^{cni} \frac{\sum \tilde{E}d}{\sum \tilde{E}d_{ref}} \quad (1.6)$$

V_{ref} et $\sum \tilde{E}d_{ref}$ sont respectivement un volume d'usure et une énergie cumulée de référence, $\sum \tilde{E}d$ est l'énergie dissipée cumulée réduite définie par :

$$\sum \tilde{E}d = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_0(i)}{\delta_{0ref}} \cdot Ed(i) \quad (1.7)$$

Ed : énergie dissipée du cycle i , $\frac{\delta_0(i)}{\delta_{0ref}}$: amplitude de glissement réduite du cycle i , N : nombre de cycles d'essai, $\alpha_{c-\delta}^{cni}$: coefficient de proportionnalité dépendant du débattement, la valeur de α est environ de 0.5 ce qui donne une erreur de 10% avec les valeurs mesurées des différents débattements.

Cinétique d'usure du contact Ti-6Al-4V/Ti-6Al-4V Une fois le vernis de lubrifiant Molydag et le revêtement mou (Cu-Ni-In) éliminés, le contact aube/disque de soufflante est uniquement composé de Ti-6Al-4V. Ce contact se caractérise par un coefficient de frottement constant égal à 0.8. Les cycles de fretting présentent tous une unique forme parallépipédique. Comme précédemment si on étudie les surfaces on observe une présence de phénomènes marqués d'adhésion. On remarque que l'une des surfaces a subi de l'usure positive avec adhésion de matière au centre du contact. Ce phénomène oblige à parler d'usure totale et à traiter l'ensemble des surfaces via une approche énergétique. L'usure évolue linéairement en fonction de l'énergie dissipée réduite. La formule (1.6) est valable et le coefficient α vaut entre 0.6 et 1 suivant la géométrie de contact (figure 1.19). Cette étude a montré que le paramètre essentiel dans le cas d'un contact Ti-6Al-4V/Ti-6Al-4V est la taille du contact et que la configuration des profils de pression perturbe peu la stabilité du modèle. C. Paulin a effectué des essais pour mettre en évidence l'impact des amplitudes de sollicitations variables. Il combine glissements partiels et glissements totaux. Les résultats obtenus sont retranscrits sur la figure 1.20. De ces figures, on tire les conclusions suivantes. En glissement total l'approche énergétique retranscrit bien les phénomènes observés, en glissement partiel ce n'est pas le cas, on voit que l'usure est linéaire avec le nombre de cycles sur 2000 cycles et ensuite elle est constante. C. Paulin considère que l'énergie dissipée est nulle

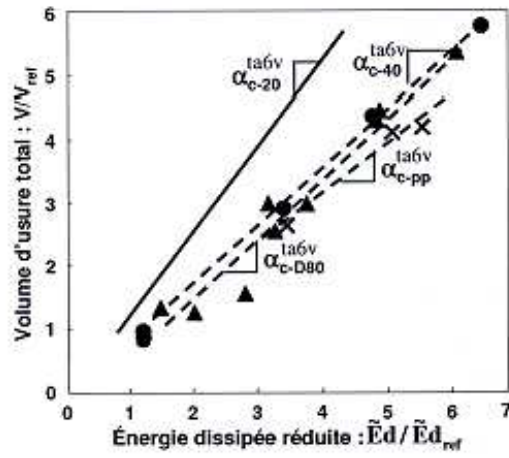


FIGURE 1.19. Illustration de l'impact de la dimension de contact [183]

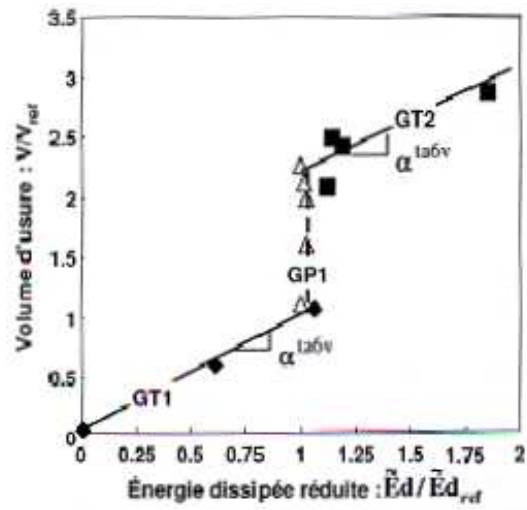


FIGURE 1.20. Illustration de la cinétique d'usure pour les phases GT1+GP1+GT2 [183]

en RGP. Les résultats obtenus expérimentalement ne reflètent pas la réalité des phénomènes observés sur les moteurs d'avion après des milliers de vols. Durant le vol des régimes de glissement partiel se produisent et conduisent à une usure de certaines zones de la portée aube-disque. De plus, les expériences menées ne prennent pas en compte l'ouverture du contact durant le cycle de chargement.

Bilan des études sur le fretting

L'étude bibliographique sur le phénomène de fretting nous a amené aux conclusions suivantes. C'est un phénomène complexe mettant en jeu différentes physiques. Dans le cas d'un contact aube-disque différentes échelles apparaissent puisque la zone de contact est multi-couches. Pour être complet un modèle d'usure doit prendre en compte l'anisotropie du matériau dans la zone de contact, les différentes couches minces, la nature des matériaux (polymère et métallique), les phénomènes de plasticité et les évolutions du coefficient de frottement. Nous nous limiterons dans cette étude à un contact titane-titane. Les résultats expérimentaux laisse penser que le coefficient de frottement peut-être choisi constant. Puisque dans le cas du contact Ti-6Al-4V/Ti-6Al-4V nous avons un coefficient de frottement constant il y a peu de différence entre la loi d'Archard et l'approche énergétique. Nous utiliserons la loi d'intensité d'usure d'Archard dans nos modèle.

Une des raisons du travail effectué au cours de cette thèse est d'observer numériquement l'explication de l'usure en régime de glissement partiel au niveau du contact aube/disque durant les phases de vol. En effet, les tentatives de reproduire ces conditions expérimentalement ne donnent pas des résultats concluants. La simulation numérique peut permettre d'observer les phénomènes d'usure en RGT et d'en tirer les conclusions quant aux paramètres oubliés lors des expériences.

Ayant introduit la physique de notre problème nous allons regarder les outils qui permettent de modéliser le contact et l'usure entre deux solides. Ces méthodes ont pour but de tendre vers une modélisation qui retranscrit la « réalité expérimentale ». Elles sont en plus un outil d'aide à la conception de plus en plus utilisé en bureau d'étude.

1.4 Modélisation : état de l'art

Nous divisons cette étude en deux parties. Nous présentons d'abord les besoins en modélisation des constructeurs de moteurs d'avion ainsi que les outils utilisés puis les outils existants de modélisation du contact avec ou sans usure. Cette étude permettra de choisir la stratégie de résolution la mieux adaptée à notre problématique.

1.4.1 Besoins en modélisation et situation actuelle

Les améliorations liées au contact aube-disque sur la conception des attaches ont été possibles grâce aux avancées sur les matériaux et sur les procédés de fabrication. Les besoins actuels se situent au niveau de la modélisation. Actuellement les phénomènes se produisant dans la zone de contact restent obscurs. Les constructeurs sont encore loin de posséder des outils permettant un calcul prédictif précis de la durée de vie des attaches. Les gradients de contraintes sont très marqués à cause de la géométrie des portées. Il est difficile de rendre compte numériquement de ces gradients. La variation est de l'ordre du MPa/ μm .

Les capacités de calcul 3D actuelles commence à permettre d'envisager l'utilisation de maillages assez fins pour visualiser les profils de pressions. Pourtant, sur les résultats de simulation représentées sur la figure 1.21, on observe à peine les pics de pression. Cependant, le calcul reste très coûteux et ne

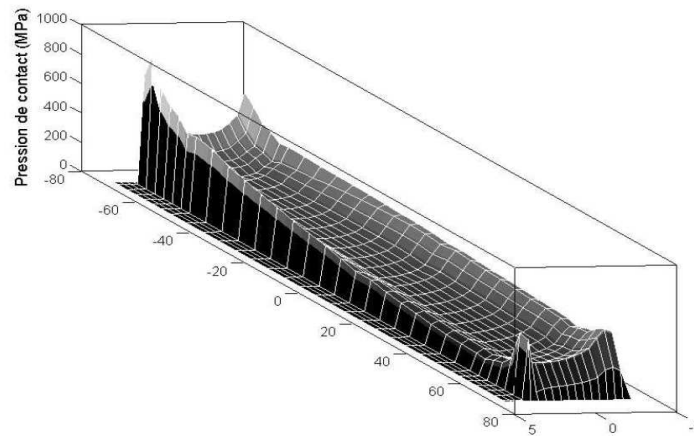


FIGURE 1.21. Distribution de pression de contact entre le pied d'aube et l'alvéole de disque obtenue par simulation numérique

peut pas être répété sur de nombreuses géométries lors de la conception. Pour isoler correctement le

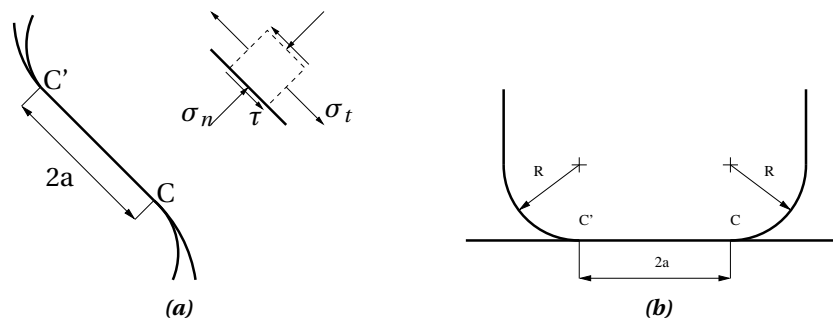


FIGURE 1.22. (a) Profil en queue d'aronde et (b) Modélisation par un poinçon plan sur un espace semi-infini

champ de pression, la géométrie du contact aube-disque peut être approximée par un contact 2D plan-plan avec des congés de raccordement (cf. 1.22). Des solutions analytiques développées par l'école Russe de la mécanique du contact (Galín [72], Alexandrov [5], Goryacheva [76]) sont utilisées. Un pic de pression (figure 1.23) apparaît au niveau des congés de raccordement comme sur la figure 1.22b. Celui-ci est d'autant plus étroit que les rayons sont faibles.

La méthode des éléments finis est largement utilisée dans la modélisation tridimensionnelle du contact aube-disque [159]. Une technique de zoom structural [219] peut être utilisée pour obtenir un maillage plus fin au niveau de la portée de l'aube. Le modèle fin est piloté à partir des déplacements relevés sur le modèle global. J.R. Beisheim [19] montre que les analyses 3D conduisent à des surcontraintes en zone de contact qui peuvent être significativement supérieures à celles prédites par les modèles bidimensionnels. Pour prendre en compte la micro-structure cristalline du matériau ou introduire la plasticité, la modélisation éléments finis est obligatoire [11, 90].

Du point de vue expérimental des mesures des contraintes dans les jonctions aube-disque ont été réalisées par photoélasticimétrie soit à l'arrêt [112], soit en rotation à des vitesses inférieures à 1000 tours par minute [158, 159, 182]. Dans ces études, les résultats ont été comparés avec ceux obtenus par éléments finis et confirment la présence de surcontraintes en bord de contact, et plus particulièrement

en bas du contact (point C sur la figure 1.22b). Papanikos *et al.* ont obtenu une répartition tridimensionnelle des contraintes en analysant les franges de plusieurs tranches découpées dans l'épaisseur du disque avec des variations importantes entre les franges, ce qui souligne la nécessité d'une modélisation tridimensionnelle pour de ce type de contact.

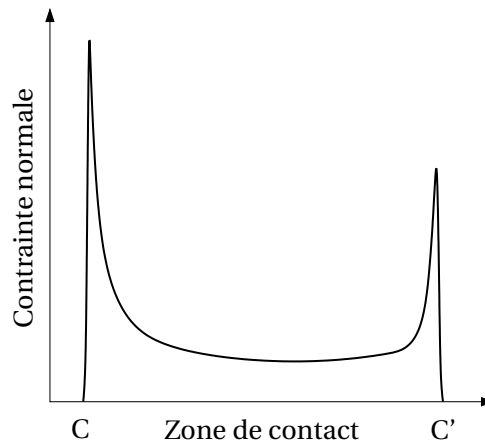


FIGURE 1.23. Répartition de la pression de contact sur une portée, d'après [19]

Une deuxième difficulté apparaît du fait de l'usure des surfaces. L'usure doit être prise en compte lors du calcul de la durée de vie. L'usure modifie les surfaces de telle sorte que les champs de pression sont plus « aplatis », les pics de pression sont moins importants. L'usure observée en flotte peut atteindre $200\mu m$ sur le disque, soit plus que la profondeur d'action du grenailage. L'usure ôte la couche superficielle du matériau, là où sont initiées les micro-fissures. Il faut, dès la phase de conception du moteur, pouvoir estimer la durée de vie du revêtement afin d'augmenter celle-ci pour réduire les opérations de maintenance sur les moteurs en flotte. Snecma a fait développer des outils qui lui permettent de calculer l'usure sous chargement quasi-statique : un outil basé sur un calcul éléments finis sous ABAQUS et un outil semi-analytique. Dans le calcul éléments finis de l'aube en contact avec le disque l'usure est prise en compte grâce à un remaillage dans la zone de contact. Le secteur de roue aubagée est chargé incrémentalement en augmentant la vitesse de rotation pour simuler le décollage jusqu'au point de fonctionnement puis elle est diminuée pour simuler l'atterrissage. Pendant le vol on considère qu'il n'y a pas d'évolution du système. Le chargement est cyclique en triangle. Pendant ce cycle la cinétique d'usure est par hypothèse nulle. Après avoir simulé un cycle, les variables de contraintes et de déplacements obtenues à l'interface permettent de calculer le taux d'usure via les lois d'usure développées par S. Fouvry *et al.* [184]. Une stratégie de saut de cycle est utilisée pour mettre à jour le maillage. Nous reviendrons sur ces aspects dans le chapitre 4.

D'autre part, dans le cas de calcul dynamiques les stratégies numériques actuelles utilisées en quasi-statique sont inapplicables, les moyens numériques ne permettent pas de résoudre de tels problèmes sur une structure 3D complète. Les méthodes de résolution dynamique non-linéaires nécessitent donc une réduction de modèle basée sur une synthèse modale. Cette stratégie est utilisée par Snecma dans ses chaînes de calcul. Les programmes développés durant cette thèse devront à terme s'incorporer à cette chaîne de calcul, ce qui va orienter nos choix dans les méthodes de calcul du contact avec prise en compte de l'usure.

1.4.2 Modélisation du contact usant

Les méthodes permettant de modéliser le contact ont été divisées en deux grandes familles : les méthodes analytiques et dérivées et les méthodes numériques. Les méthodes analytiques reposent sur la théorie des plans semi-infinis. Dans certains cas, une discrétisation numérique des intégrales est nécessaire et on parle de méthode semi-analytique (SA). Les méthodes numériques présentées ici utilisent la discrétisation de la structure par un maillage mais il existe des méthodes sans maillage. Deux approches sont envisageables les méthodes des éléments finis (FEM) et les méthodes des éléments de frontière (BEM).

1.4.2.1 Solutions analytiques

Contact hertzien Hertz a été le premier à travailler sur le contact entre les solides déformables. Son article « On the contact of elastic solids » [91] publié en 1882 peut-être considéré comme le début de la mécanique du contact qui est devenue une branche de la mécanique à part entière. Les surfaces des corps en contact sont de type paraboloïde elliptique et non-conforme. Le problème est sans frottement. Cette non-conformité indique que les surfaces non-déformées des deux corps ne sont superposables autrement qu'en un point (contact pseudo-ponctuel) ou une ligne (contact pseudo-linéique). Le contact aube-disque ne peut pas être représenté par la théorie de Hertz, en effet les géométries de contact sont conformes. La définition du frottement de Coulomb est utilisée dans la plupart des modèles analytiques existants. Une première solution est celle du contact hertzien en glissement. Les cisaillements en surface sont directement obtenus par l'application de la loi de Coulomb. La solution du champ de contraintes résultant de cette configuration est fournie pour le contact cylindrique par McEwen [157], pour le contact sphérique par Hamilton [86]. Ces solutions sont reprises et étendues aux contacts elliptiques par Sackfields et Hills [202].

Cattaneo [30] et Mindlin [165] fournissent les solutions du contact en glissement partiel. Le problème posé est celui du contact sphérique chargé normalement sur lequel un effort tangentiel, ne dépassant pas la limite fixée par la loi de Coulomb pour atteindre le glissement, est ensuite imposé. Le respect de la loi de Coulomb en tout point de la surface de contact crée une zone annulaire de glissement sur les bords du contact. Le problème de Cattaneo-Mindlin est étendu et généralisé à la fois par Ciavarella [35,36] et Jäger [101] dans le cas bi-dimensionnel pour des géométries quelconques.

Dans le cas d'un contact hertzien avec glissement total il est possible de trouver une solution analytique de l'évolution de l'usure et de la géométrie de contact. L'usure peut être prise en compte via une fondation de Winkler ajoutée à l'interface [193,226]. Dans le cas du glissement partiel, ce n'est plus possible, les pics de pression résultant de l'usure ne sont plus modélisés.

Géométries non-hertziennes Un nombre important de solutions existe lorsque les géométries en contact ne peuvent être assimilées à des ellipsoïdes, telles que les contacts conformes. Les solutions restent cependant basées sur les hypothèses des massifs semi-infinis. La plupart des solutions sont pour des problèmes bi-dimensionnels. Certaines configurations tridimensionnelles permettent une résolution analytique, en particulier des géométries présentant une axisymétrie. La méthode employée repose sur les solutions des « équations intégrales singulières ». Muskhelishvili [170] a été un des premiers à résoudre le problème du contact entre un pion et un espace semi-infini élastique. Shtaerman [216] a donné la solution du problème de contact entre un solide dont la forme est définie par un polynôme de degré supérieur à 2 avec un massif élastique. Plus de détails sur l'histoire de la mécanique du contact se trouvent dans les livres de Galin [69,71] réédités par Springer en anglais [72].

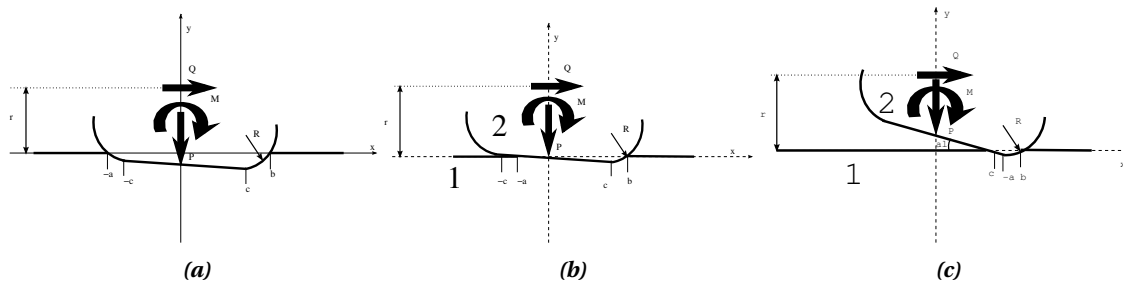


FIGURE 1.24. Schéma du contact pour différentes configurations du pion incliné [77]

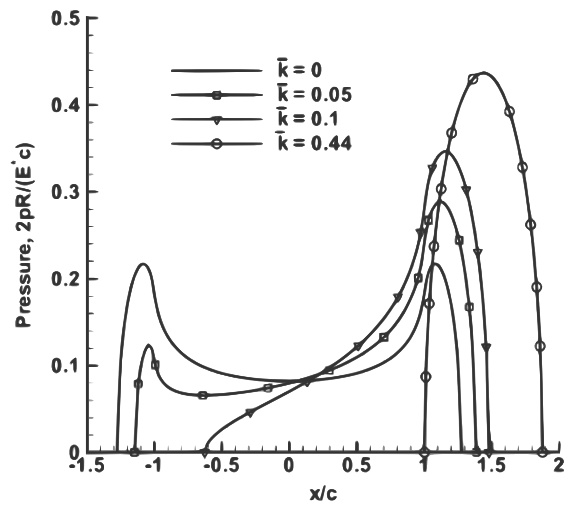


FIGURE 1.25. Pression de contact pour différentes inclinaison [77]

Concernant des contacts plus proches du contact aube-disque, il existe des solutions pour un contact entre un pion avec bords incurvés et un socle élastique. Alexandrov [5] propose une solution analytique entre deux solides élastiques ayant une géométrie de contact de type queue d'aronde. La solution est donnée pour un chargement au niveau de l'axe de symétrie du pion. En présence de frottement, Goryacheva a exprimé analytiquement la solution d'un pion avec bords incurvés en contact avec glissement partiel et chargement dissymétrique. Le problème est divisé en trois problèmes distincts suivant la situation et résumé sur les figures 1.24.

Il n'existe pas de solution analytique du problème tridimensionnel d'un pion avec bords incurvés avec massif élastique. Le problème s'écrit sous la forme d'équation intégrales dont il semble qu'il n'y ait pas de solution analytique simple. La résolution de ce problème nécessite l'utilisation soit de méthodes asymptotiques soit de méthodes SA. Ces approches permettent de prendre en compte la modification des géométries de contact, résultat de l'usure.

1.4.2.2 Méthodes asymptotiques

Le principe des méthodes asymptotique consistent à exprimer les variables du problème suivant un développement polynomial par rapport à un petit paramètre. Comme l'opérateur dans les équations intégrales de contact est continu, il existe un développement asymptotique [4] de celui-ci. On doit donc résoudre une série de problèmes plus simples que l'équation intégrale initiale. La convergence de la méthode dépend de l'ordre du développement asymptotique. Cette méthode peut être aussi utilisée dans le cas de contacts où l'hypothèse de semi-plan infini n'est plus valide. Les travaux actuels sur ce dernier point se limitent cependant à des géométries simples : contact entre un pion cylindrique et une base élastique cylindrique [14]. La vision asymptotique permet d'approximer par une fonction le comportement des pressions de contact au niveau de la frontière du contact. Cette approche peut être à la base de méthodes mixant méthodes numériques de type éléments finis et méthodes analytiques [44]. En particulier elle permet de donner des candidats pour des fonctions de formes dans le cas des méthodes de partition de l'unité [234].

Des solutions d'un contact usant peuvent être trouvées par développement asymptotique [56, 70]. Dans le cas du problème bidimensionnel de polygonalisation des roues de train par usure une solution analytique peut être trouvée [28], du moins du point de vue géométrique. En effet le problème temporel nécessite une méthode de perturbation. Pour déterminer les taux d'usure, la loi d'Archard est quasiment systématiquement utilisée.

1.4.2.3 Méthodes semi-analytiques

Lorsque les solutions analytiques n'existent pas, il est possible de discrétiser le problème et de le résoudre en sommant numériquement des solutions analytiques de problèmes élémentaires de Bousinesq [25]. L'un des précurseurs a été Kalker [111] dont l'algorithme CONTACT entre autre est utilisé dans l'industrie. Nowell étudie le fretting avec ces méthodes mais reste sur des modèles bi-dimensionnels [54, 174]. D'autres auteurs ont montré que l'utilisation de techniques multigrilles [26, 143] permet d'accélérer grandement la résolution de ces problèmes. Le calcul des opérateurs peut se faire via des transformées de Fourier rapides [110, 140, 194] augmentant encore plus l'efficacité de la méthode. L'utilisation d'un solveur de type gradient conjugué couplé à la méthode FFT est actuellement privilégiée [194]. La finesse des discrétisations rendue possible par ces méthodes les rendent incontournables dans l'étude des contacts rugueux [7], presque impossible à envisager avec d'autres méthodes numériques. Récemment les phénomènes d'élasto-plasticité et de thermo-élastoplasticité [9, 23, 100] ont été

ajoutés à ce type de méthodes. Le gros défaut de ces approches est qu'elles ne prennent pas en compte les effets de bord. Dans le cas d'un alvéole de disque l'hypothèse plan semi-infini est certainement fautive puisque le disque s'écarte sous l'effet des forces centrifuges.

Des simulations d'usure réalisées à partir de méthodes semi-analytiques existent. Johansson [105] simule l'usure du contact glissant en tenant compte de la chaleur générée par frottement. Il présente également des solutions pour l'usure en fretting [104]. Goryacheva simule l'usure de contact en glissement partiel [78]. D'ailleurs dans ce papier elle explique que la solution asymptotique pour un temps infini peut être trouvée analytiquement.

Gallego [73] a utilisé une stratégie multi-échelle pour calculer l'usure en pied d'aube sous chargement quasi-statique. Un premier calcul incrémental est effectué au niveau macroscopique par éléments finis sous ABAQUS. Les résultats obtenus permettent de calculer les torseurs d'efforts transmis localement dans le pied d'aube qui servent au calcul, par une approche semi-analytique des contraintes et des déplacements au niveau du contact. L'usure en est déduite et la géométrie est mise à jour par une technique de saut de cycles. Ensuite deux stratégies sont possibles soit un calcul EF est réeffectué avec la géométrie mise à jour pour calculer le nouveau torseur des efforts soit le torseur est considéré comme identique entre la géométrie saine et la géométrie usée en considérant que les effets d'usure microscopiques ont peu d'effets sur la structure complète.

1.4.2.4 Modèles numériques

Méthodes des éléments finis et dérivées

Méthodes des éléments finis Cette méthode (« finite element method », FEM) est certainement la plus utilisée en mécanique numérique. De nombreux logiciels commerciaux, avec des interfaces graphiques facilitant l'utilisation existent. La quantité de phénomènes physiques pouvant être pris en compte est importante (dynamique, thermique, plasticité, viscosité, champs magnétiques, etc.). La littérature sur la résolution du problème du contact par éléments finis est très riche, environ 20000 références sur sciencedirect. Les livres de Wriggers et Laursen [127, 237, 238] constituent des synthèses des aspects ayant trait aux éléments finis en mécanique du contact.

La modélisation de l'usure par éléments finis est largement employée. D'ailleurs son utilisation est assez ancienne [176]. La difficulté de la modélisation repose sur la prise en compte géométrique de l'usure. D'après la littérature différentes approches sont possibles :

- Un remaillage complet ou partiel des corps est effectué après usure. C'est la méthode la plus rigoureuse mais aussi la plus chère numériquement.
- La profondeur d'usure est prise en compte comme un jeu entre les structures. Ce jeu est inclus dans le terme de pénalisation d'une méthode de pénalité ou de lagrangien augmenté.
- L'usure peut être vue comme équivalente à de la plastification [134].
- L'usure vue comme une loi d'interface peut-être modélisée par des éléments joints [56].
- La zone usée peut être modélisée par une méthode différente des éléments finis : méthodes sans maillage [235] ou par éléments discrets [63, 208]

La stratégie de remaillage est la méthode employée par la plupart des expérimentateurs qui cherchent à modéliser numériquement un dispositif expérimental. McColl [155] étudie le fretting d'un cylindre sur un plan. Le problème de contact est résolu en quasi-statique par ABAQUS. Les résultats obtenus servent pour le calcul du taux d'usure sur le cycle de fretting. Une stratégie de saut de cycle est appliquée. Il est à noter que le niveau d'usure est considéré comme constant durant le cycle de fretting, la mise à jour se fait a posteriori. C. Paulin et C. Mary utilisent la loi d'usure énergétique [153, 185] dans

une simulation d'usure par éléments finis. Ils utilisent une stratégie nommée « wear-box » qui consiste à déplacer les nœuds du maillage EF dans une zone restreinte proche du contact. Ces approches éléments finis ont été développées pour l'étude de l'usure par glissement par Hegadekatte [88, 89], Pōdra, Molinari, etc. Il est possible de se contenter de ne déplacer que les nœuds en surface [178], mais le maillage doit être épais dans la profondeur ou les taux d'usure faibles pour éviter une trop grande distorsion des éléments. L'évolution majeure suivante consiste à considérer l'ensemble des endommagements possibles en fretting fatigue pour le cas de valeurs de glissement plus importantes. Ainsi Madge propose un modèle prenant en compte la fissuration (amorçage et propagation) et l'usure [147, 148]. L'usure est pilotée par une loi classique d'Archard.

Dans notre étude le niveau d'usure est très faible par rapport à la taille du maillage. On évite donc le coût du remaillage en considérant l'usure comme un jeu entre les structures [221], ainsi on travaille sur les matrices de masses et de raideurs de la géométrie saine. La solution a été trouvée dans l'article de Strömberg [221]. Cette stratégie permet en plus de réutiliser sans modification les chaînes de création de super-éléments dynamiques développées par Snecma.

Cette stratégie est aussi utilisée par Torkhani [228] et Lundvall [144]. Torkhani [228] propose aussi d'utiliser la méthode Arlequin pour modéliser l'usure. Jourdan [107, 109] utilise aussi cette méthode dans le cas de la simulation de l'usure sous chargement dynamique. C'est à notre connaissance l'une des rares tentatives de modélisation de l'usure dynamique par éléments finis. Cette méthode permettrait de calculer la cinétique d'usure en pied-d'aube mais le temps de calcul serait énorme. Nous verrons dans le chapitre 2 que l'intégration temporelle nécessite un pas de temps très fin et donc un temps de calcul élevé.

Partition de l'unité Un espace d'approximation composé de fonctions polynomiales comme, l'espace engendré par une base éléments finis classique, peut s'avérer inadaptée pour approcher certaines solutions non régulières, comme les déplacements et les pressions de contact dans un contact aube-disque. Une connaissance analytique ou numérique sur la nature de la solution, comme par exemple l'ensemble des solutions asymptotiques en bord de contact doit permettre en effet de construire des espaces d'approximation plus pertinents et/ou de régularité désirée. La prise en compte de cette connaissance dans un espace d'approximation peut se faire via la PUM (Partition of Unity Method [161]). La PUM a été adaptée au problème de fissuration via la méthode X-FEM [166]. La méthode utilise les fonctions level-set [166] pour modéliser la fissure à l'intérieur d'un maillage grossier. Actuellement, la méthode X-FEM permet de modéliser l'évolution de la fissure avec prise en compte du contact unilatéral avec frottement entre les lèvres de la fissure [198]. Khoei [116] a adapté la méthode X-FEM pour le problème de contact avec frottement. Les résultats obtenus par Khoei [115] sont présentés sur les figures 1.26. La méthode X-FEM pour le contact semble très prometteuse mais l'utilisation de cette méthode en l'état nécessite de repenser la chaîne de calcul dynamique. Une méthode basée sur une décomposition de domaine pourrait être utilisée pour coupler la stratégie X-FEM et les stratégies de dynamique non-linéaire. Concernant l'usure, la stratégie XFEM semble adaptée pour la prise en compte de l'usure via des fonctions level-set.

Enrichissement des éléments en contact Nous avons été intéressés par l'ajout d'une méthode sans maillage pour enrichir la zone de contact. De plus, dans l'optique de prise en compte de l'usure cela paraissait une approche intéressante puisque l'usure nécessite en théorie un remaillage. Toutefois, le couplage entre méthode éléments finis et méthode sans maillage n'est pas simple. Dans la littérature nous n'avons pas trouvé de méthodes satisfaisantes permettant l'échange d'information entre les

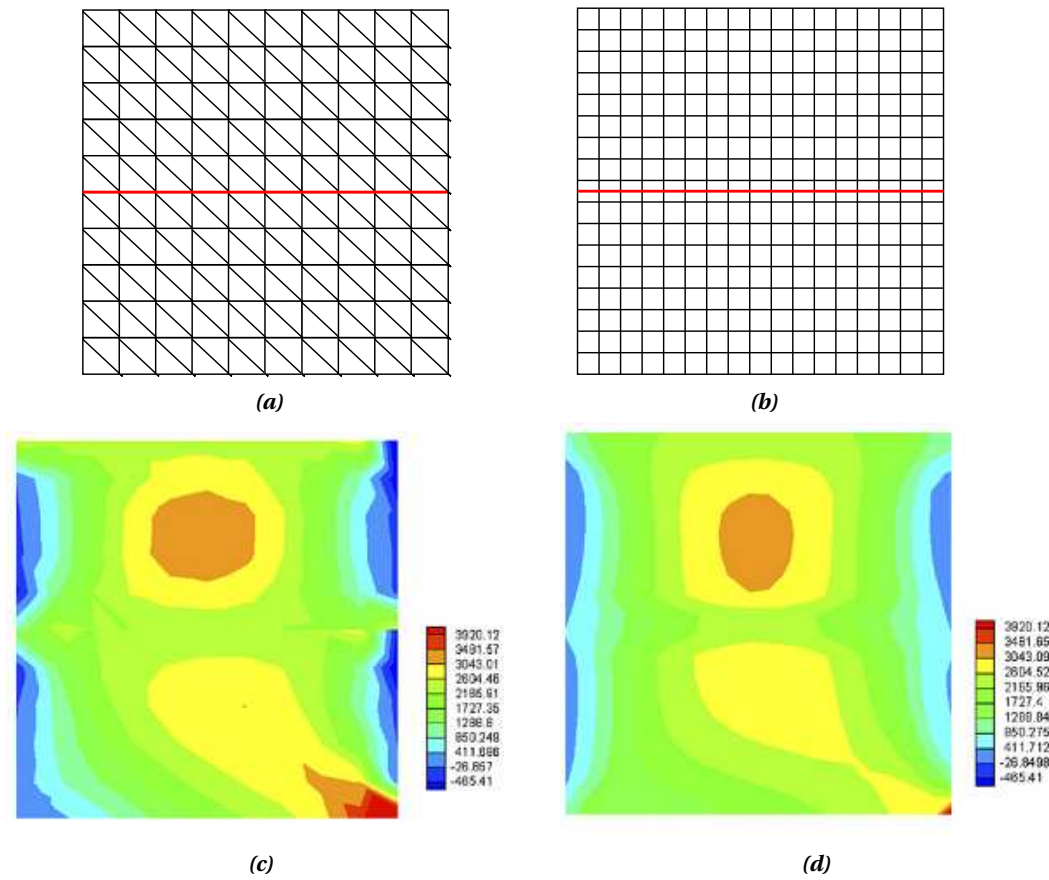


FIGURE 1.26. Calcul de problème de contact par méthode EF classique (a) et (c) et par la méthode X-FEM (b) et (d) [115]

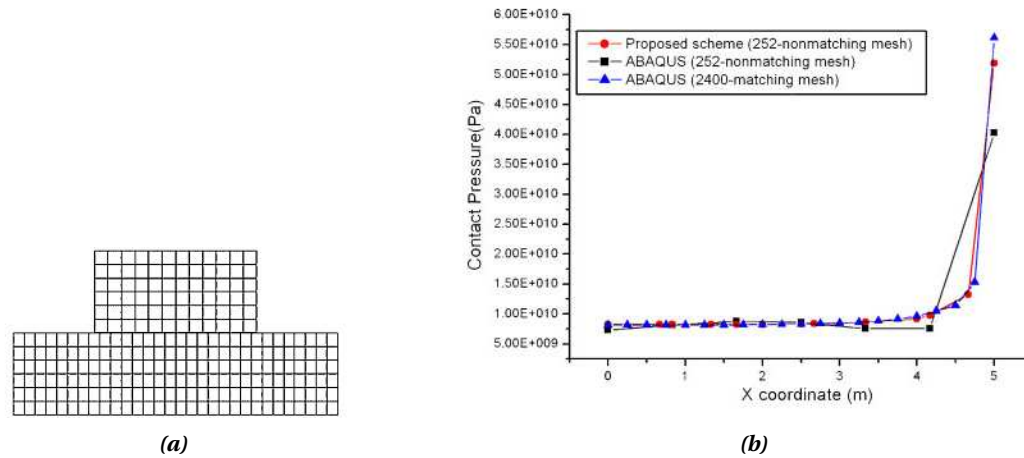


FIGURE 1.27. Utilisation d'un élément enrichi par une approche sans maillage (moving least-square based FEM) [119]

deux types de ddl (EF et sans maillages). Kim *et al.* [119] proposent une méthode intéressante pour le calcul du contact entre maillages incompatibles. Ils ajoutent des noeuds dans le maillage à l'interface de contact. Cette approche se nomme « MLS-based FEM » (moving least-square finite element method). Elle permet de transformer un contact nœud-surface en contact nœud à nœud. Kim *et al.* [119] trouvent de bons résultats sur un contact pion-plan. L'utilisation de la méthode est illustrée sur les figures 1.27. L'utilisation de cette méthode nécessiterait des modifications majeures dans la stratégie de réduction de modèle présentée au chapitre 3, qui est basée sur des méthodes de synthèse modale. Cela peut être une direction de recherche pour de futurs travaux. En effet, en bureaux d'études une méthode qui permet de gérer des maillages incompatibles en dynamique non-linéaire serait utile, le temps de création d'un maillage compatible étant important.

Méthodes d'éléments de frontières Une alternative proche de la méthode des éléments finis est la méthode des éléments frontières (« boundary element method », BEM). Cette méthode repose sur le seul maillage de la frontière de la structure. Le nombre de degrés de liberté est plus faible que dans le cas des méthodes éléments finis mais les matrices de raideurs et de masses sont pleines. Une méthode permet de palier à ce défaut, elle se nomme fast multipole method [21]. Le gros avantages des méthodes BEM est qu'elles donnent des solutions de même exactitude en déplacement et en contrainte. L'équation intégrale de frontière est discrétisée via un maillage de frontière équivalent à un maillage éléments finis possédant aussi des fonctions de formes polynomiales. Comme pour les méthodes éléments finis le problème lié au contact est traité comme une contrainte ajoutée au système. Les ouvrages de Man [150] et Aliabadi [6] donnent des explications sur les problèmes de contact résolus par la méthode des éléments frontières.

Certains auteurs ont proposés d'utiliser la méthodes des éléments de frontières pour la modélisation de l'usure. Un avantage notable des BEM dans la simulation de l'usure est que le coût de remaillage est moindre puisque seules les frontières sont maillées. L'autre avantage est que les deux grandeurs (contraintes et déplacements) pilotant généralement l'usure sont directement calculées avec les BEM et avec la même précision. Saïzonou [203] a utilisé les BEM pour l'usure au niveau des segments et de la chemise dans un moteur à combustion. Une des premières utilisations des BEM pour l'usure est due

à Serre *et al.* dans [211]. Sfantos *et al.* sont ceux qui ont proposé les méthodes basées sur les BEM les plus abouties pour le calcul de l'usure. Dans [214] ils étudient l'usure des prothèses de hanche. Ces mêmes auteurs ont proposé une méthode de calcul direct du profil usé [213] par une approche par optimisation avec les BEM pour résoudre le problème de contact.

La résolution du problème de contact avec frottement en dynamique par la méthode des éléments de frontières est compliquée [10], elle nécessite l'utilisation des méthodes incrémentales d'éléments frontières.

Compte tenu de l'environnement numérique dans lequel nos travaux s'insèrent, cette approche est peu adaptée en regard des avantages qu'elle procure.

Bilan Le tour d'horizon des méthodes analytiques, semi-analytiques et numériques de résolution du problème de contact usant montre que le choix est riche. Toutefois, toutes les méthodes ne sont pas adaptées à notre problématique et surtout à la stratégie de résolution basée sur une approche fréquentielle. Tous ses considérations nous ont fait rester dans une approche classique éléments finis. L'usure sera prise en compte via un jeu entre les nœuds en contact.

1.4.3 Aspect multi-échelle du contact

Nous avons recensé les méthodes permettant de modéliser le contact avec frottement et usure entre deux solides. Nous sommes restés dans une vision macroscopique du contact. Or, le problème de contact est un problème multi-échelle. Les lois de Signorini et de Coulomb qui sont le plus souvent utilisées pour définir le comportement du contact ne sont plus valides si on prend en compte l'échelle microscopique dans la zone de contact.

Contact normal En dépit des apparences macroscopiques et quel que soit le degré de finition ou le mode de fabrication, toutes les surfaces sont rugueuses. Imperceptible à l'échelle macroscopique, la rugosité d'une surface est significative à l'échelle microscopique. La zone de contact n'est pas continue mais fragmentée en une multitude de zones individuelles de contact. La rugosité joue donc un rôle essentiel dans la détermination de l'aire réelle de contact entre les surfaces. La caractérisation topographique des surfaces est nécessaire pour l'étude du contact avec frottement, adhésion ou usure. Une observation au microscope des surfaces de contact d'un pion et d'un plan montre que le relief est très accidenté. Différents modèles ont été proposés pour prendre en compte la rugosité des surfaces. Il n'est pas possible d'avoir un modèle qui retranscrit exactement la réalité. Tous les profils sont différents et il y a une grosse incertitude sur leurs formes. La plupart des modèles partent de considérations statistiques. Les modèles les plus célèbres sont ceux de Grennwod et Williamson [79], Cooper, Mikic et Yovanovich [43], Archard [13], Kragelsky [123]. Il existe une multitude de modèles. On peut les séparer en deux grandes familles : les modèles basés sur la description profilométrique avec la théorie des processus aléatoires et les modèles fractals. G. Zavarise et M. Paggi font une revue des méthodes les plus utilisées dans [238]. Greenwood et Williamson [79] modélisent les aspérités par des sphères en contact hertzien. Elles sont suffisamment éloignées pour se comporter de façon indépendante. Les hauteurs des aspérités suivent une loi de probabilité de distribution exponentielle ou gaussienne.

On montre qu'avec cette loi statistique la relation entre le chargement et la séparation est :

$$P = c_1 e^{-c_2 h} \quad (1.8)$$

où h est la séparation entre les plan moyens. c_1 et c_2 dépendent des propriétés du matériau et de la loi

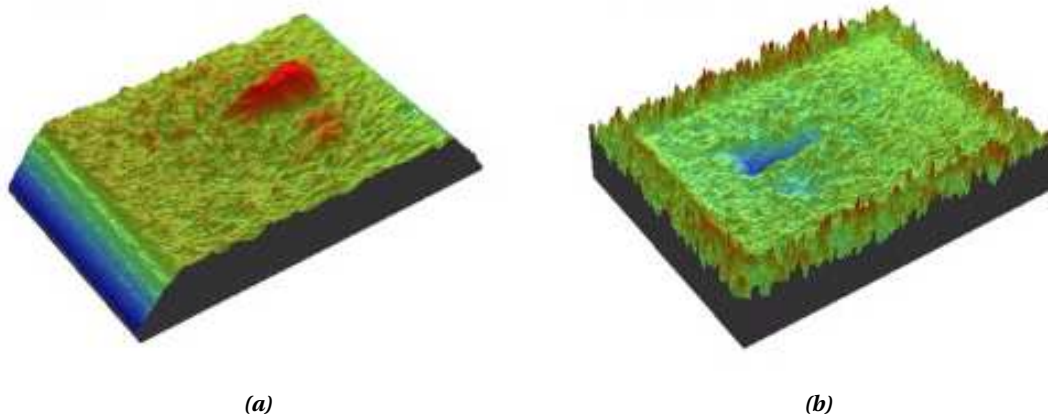


FIGURE 1.28. Topographie des surfaces d'un contact entre un pion (a) et un plan (b) [154]

stochastique utilisée. Cette loi a été modifiée par certains auteurs [237]

$$P = c_3 e^{-c_4 h^n} \quad (1.9)$$

où n est un entier naturel.

Une autre forme très commune [175, 237] de prise en compte de la rugosité est la suivante :

$$P = c_N \langle h \rangle_+^n \quad (1.10)$$

Les chercheurs soviétiques [52, 123, 138] ont travaillé sur l'identification des lois de contact. Une analyse couplée des résultats expérimentaux et de modélisations des aspérités, soit par des sphères avec contact de Hertz, soit par des poutres en contact les a conduits à la loi suivante [98] :

$$\frac{h}{Ra} = c_0 \varepsilon \left(\frac{p_N}{E} \right)^{0.5} \quad (1.11)$$

où $Ra = (Ra_1 + Ra_2) / 2$ est la moyenne arithmétique des écarts du profil. C'est un paramètre déjà beaucoup utilisé en conception et en fabrication. c_0 est un paramètre adimensionné qui dépend du mode de traitement de surface et des rainures à la surface laissées par l'usinage. E est le module d'élasticité. ε est le coefficient d'échelle par rapport aux essais expérimentaux.

Toutes ces lois nécessitent des essais expérimentaux pour identifier les paramètres. Les moyens de calcul devenant de plus en plus performants il est envisageable de créer numériquement des surfaces rugueuses par des fractales et de trouver par des expériences numériques les coefficients des lois mésoscopiques proposées.

Contact tangentiel Dans les problèmes de fretting les déplacements tangentiels sont très faibles et le plus souvent en glissement partiel. On parle de micro-glissement au niveau de l'interface. Le modèle de Coulomb est valide pour des surfaces parfaitement planes. Or comme nous l'avons vu les surfaces sont rugueuses et donc le modèle de Coulomb ne saurait être valide au niveau macroscopique. En effet à l'échelle des rugosités, ce modèle peut être valide mais le décollement successif des rugosités les unes par rapport aux autres s'observe au niveau macroscopique comme un déplacement élastique. De plus, l'aspérité a aussi une élasticité propre. Si on la modélise par une sphère sur un plan, on a le problème de Cattaneo-Mindlin [30, 165] avec une transition entre glissement partiel et glissement total. Pour un

effort tangentiel très important toutes les rugosités se décollent et cela donne le glissement au niveau macroscopique d'une surface par rapport à l'autre (ou d'une partie de la surface). Ce micro-glissement peut-être pris en compte par l'ajout d'une raideur de contact k_t . Cette raideur de contact augmente avec l'effort normal. Ferrero *et al.* [62] ont trouvé expérimentalement la relation $k_t = a\sqrt{P_N}$ où a est une constante.

Ivanov [98] propose une loi proche de celle de Ferrero mais découlant de considérations théoriques et expérimentales. Les contraintes tangentielles et le micro-déplacement sont liés par :

$$\tau = \frac{\sqrt{E p_N} \delta}{\frac{1}{2} R a c_0 \varepsilon} \quad (1.12)$$

Pendant le fretting une nouvelle couche se crée entre les surfaces. On parle souvent de troisième corps. Les raideurs de contact et le coefficient de frottement varient en fonction des propriétés physico-chimique de ce troisième corps.

Il existe une multitude de modèles pour prendre en compte l'effet des microglissements. Iwan [99] a proposé un modèle basé sur l'assemblage d'éléments ressorts avec frotteurs en parallèle. Sanliturk *et al.* [207] ont utilisé pour la modélisation du contact aube-bonbon un modèle de micro-glissement basé sur la courbe de premier chargement : $\tau = k_t(1 - e^{-a\delta})$. Cigeroglu [39] utilise un modèle continu de microglissement basé sur une barre qui repose sur un lit élasto-plastique.

Il existe des modèles plus adaptés pour la modélisation des chargements cycliques. Ils sont activement utilisés en automatique. Le lien entre déplacement et contrainte tangentielle est implicite via une équation différentielle. Les modèles les plus célèbres sont les modèles de Dahl [49], de LuGre [177] et de Bouc-Wen [22, 97, 236].

Le modèle de Dahl s'écrit :

$$\frac{\partial \tau}{\partial \delta} = k_t \left(1 - \frac{\tau}{\mu p_N} \text{sign}(\delta) \right)^\beta \quad (1.13)$$

Le modèle de Bouc-Wen est plus complexe mais plus polyvalent :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = A \frac{\partial \delta}{\partial t} - \nu \left(\beta \left\| \frac{\partial \delta}{\partial t} \right\| \|\tau\|^{n-1} \tau - \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t} \|\tau\|^n \right) \quad (1.14)$$

Les coefficients de ces deux lois doivent être identifiés expérimentalement. D. Laxalde [130] a utilisé un modèle de Dahl pour faire du recalage simulation-essais de modes non-linéaires.

Aspect anisotrope du frottement La rugosité des surfaces ainsi que le caractère composite à la surface implique que le coefficient de frottement dépend de la direction de glissement. Des travaux existent sur le sujet. En particulier, Zmitrowicz [244] a développé différents modèles mathématiques pour prendre en compte l'anisotrope du frottement ainsi que de l'usure. Une forme simple de frottement anisotrope est celle qui donne au cône de Coulomb une section elliptique. On peut l'obtenir en définissant le cône de frottement suivant [163] :

$$\Phi(p_{tx}, p_{ty}, p_n) = \|\mathbf{p}_t\|_\mu - p_n \leq 0 \quad (1.15)$$

$\|\cdot\|_\mu$ est la norme elliptique définie par :

$$\|\mathbf{p}_t\|_\mu = \sqrt{\left(\frac{p_{tx}}{\mu_x}\right)^2 + \left(\frac{p_{ty}}{\mu_y}\right)^2} = \|\mathbb{M}^{-1} \mathbf{p}_t\|, \quad \text{avec } \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Cette forme est l'une des plus simple. Il existe un autre modèle qui simplifie le problème qui consiste à découpler le frottement sur chaque direction avec un coefficient de frottement sur x et sur y et une loi de frottement du type :

$$|p_{tx}| \leq \mu_x p_n \text{ et } |p_{ty}| \leq \mu_y p_n \quad (1.17)$$

Cette forme est à notre avis loin de la réalité comparée au cône de Coulomb. La modélisation mathématique de l'anisotropie de frottement est un sujet ouvert. Il n'existe pas encore de modèle universel susceptible de retranscrire les phénomènes observés expérimentalement. Si on utilise la norme elliptique (1.16) la loi d'Archard (2.32) devient :

$$\dot{w} = \frac{k_w p_N \sqrt{(\alpha_x w_{Tx})^2 + (\alpha_y w_{Ty})^2}}{3p_s} \quad (1.18)$$

tel que :

$$\|p_t\|_\alpha = \sqrt{\left(\frac{p_{tx}}{\alpha_x}\right)^2 + \left(\frac{p_{ty}}{\alpha_y}\right)^2} \quad (1.19)$$

α_x et α_y sont les axes principaux de l'ellipse [48].

1.5 Conclusions

Ce chapitre introductif a permis de présenter la problématique de l'usure par fretting sous chargement dynamique dans les pieds d'aubes de turbomachines. Les différents aspects mécaniques de cette problématique ont été présentés. Nous avons présenté les phénomènes d'ordre vibratoire qui se produisent au niveau des roues aubagées. Nous avons ensuite présenté l'aspect tribologique du contact aube-disque. Un état de l'art des méthodes pouvant être utilisées pour modéliser le comportement mécanique et tribologique dans la zone de contact a été fait. Les résultats et les explications sur l'usure par fretting en pied d'aube et sur les vibrations des roues aubagées sont à l'origine de la stratégie développée dans cette thèse.

L'usure vibratoire est un problème multiphysique (tribologie, matériau, dynamique non-linéaire...). C'est un problème multi-échelle en espace. En effet, l'échelle des vibrations de l'aube (mm) est beaucoup plus grande que l'échelle de l'usure par fretting (μm). L'usure sous chargements dynamiques cycliques est aussi un problème multi-échelle en temps. La dynamique implique une échelle de temps proche du centième de seconde tandis que l'usure évolue à l'échelle de l'heure.

L'état de l'art sur la modélisation du contact a confirmé le choix d'utiliser la méthode des éléments finis pour résoudre ce problème. Le coté multi-échelle spatial est utilisé en considérant que l'usure n'est localisée qu'aux nœuds des interfaces de contact. L'usure sera considérée comme un jeu entre les nœuds en contact. Cette stratégie évite un remaillage coûteux.

L'aspect multi-échelle en temps sera traité par des méthodes dédiées pour chaque échelle de temps. Cette approche permettra d'utiliser des méthodes fréquentielles pour résoudre le problème dynamique à l'échelle d'un cycle de chargement. La cinétique d'usure et l'évolution de la dynamique de l'aube en fonction du nombre de cycles seront calculées par différentes méthodes d'intégration numérique. Au vu des résultats expérimentaux et numériques de la littérature la loi d'intensité d'usure sera la loi d'Archard. La liaison aube-disque aura un contact Titane-Titane. Le contact sera élastique et athermique.

D'un point de vue dynamique des calculs en réponse forcée et en réponse libre seront effectués. Ces deux points répondent aux problèmes rencontrés lors de la conception de roues aubagées. En particulier nous nous intéresserons à l'évolution de l'amortissement en pied d'aube en fonction des niveaux d'usure. Cet aspect est important dans le dimensionnement des roues aubagées vis-à-vis du flottement. Nous allons dans le chapitre 2 présenter la formulation du problème dynamique de contact avec usure et les méthodes qui permettent de résoudre le problème de contact.

Chapitre 2

Formulation et résolution d'un problème de contact avec frottement et usure

Ce chapitre a pour but de présenter la formulation éléments finis d'un problème élastodynamique de contact avec frottement et usure. La démarche est de partir des lois de la thermodynamique pour formuler le problème élastodynamique avec contact unilatéral, frottement et usure en formulation forte. Après avoir défini le problème en formulation forte, les différentes formulations faibles du problème seront présentées. Nous expliquerons ensuite la manière de discrétiser ce problème par éléments finis et temporellement afin de le résoudre. Différentes méthodes de résolution du système non-linéaire obtenu seront détaillées. Enfin un exemple illustrera les méthodes présentées.

La prise en compte du contact peut se voir selon deux approches : une approche discrète et une approche continue [20, 121, 129]. L'existence de deux approches est historique. L'approche discrète a été la première à être utilisée et implémentée dans des codes "commerciaux". Elle considère directement le problème de contact entre les modèles discrets obtenus par la méthode des éléments finis. La deuxième approche consiste à utiliser les principes de la mécanique des milieux continus et à injecter dans la formulation forte ou faible les champs mécaniques de contact avec les lois continues d'interfaces de contact. De cette formulation on retrouve après discrétisation par éléments finis, par exemple, le même système non-linéaire que dans la première approche mais avec toutes les connaissances nécessaires pour remonter aux champs mécaniques de contact. De plus, l'approche continue permet d'avoir un élément de contact plus riche [239]. Dans ce chapitre nous présenterons la deuxième approche.

2.1 Formulations continues locales

Nous considérons un solide déformable en contact avec frottement avec une fondation rigide. L'approche présentée peut s'étendre facilement à un contact multi-corps. Le solide (figure 2.1) occupe la région Ω avec pour frontière $\partial\Omega$, qui se divise en trois parties disjointes : Γ_t où sont appliqués les efforts, Γ_u où les déplacements sont imposés et Γ_c la frontière de contact avec le socle. On écrit les équations d'un problème d'usure par fretting dynamique à partir des équations proposées dans l'article de Stromberg [221]. Cet article s'appuie sur les travaux de Klarbring [120].

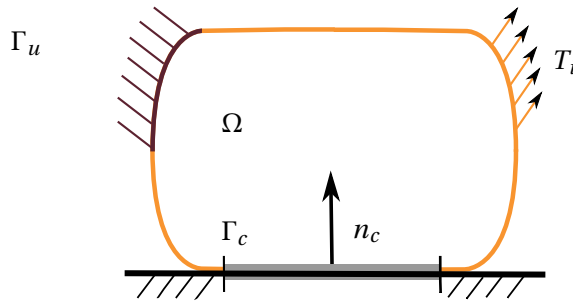


FIGURE 2.1. Description du problème de contact entre un solide et un bâti

Les équations du problèmes sont :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{t}_i & \text{sur } \Gamma_t, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_c &= -\mathbf{p} & \text{sur } \Gamma_c, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_i & \text{sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des efforts de Cauchy, \mathbf{f} sont les forces volumiques. \mathbf{n} et \mathbf{n}_c sont respectivement le vecteur normal aux surfaces Γ_t et Γ_c . \mathbf{t}_i et \mathbf{u}_i désignent les contraintes et les déplacements imposés et \mathbf{p} représente les contraintes de contact.

2.1.1 Premier et second principes thermodynamiques

Les inégalités de Clausius-Duhem pour le solide Ω et l'interface Γ_c sont dérivées du premier et second principe de la thermodynamique. Soit \mathcal{D} n'importe quel sous-domaine de Ω . Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_{ex} + \mathcal{Q} \quad \forall \mathcal{D} \quad (2.2)$$

où \mathcal{E} est l'énergie interne, \mathcal{P}_{ex} est la puissance des forces extérieures, \mathcal{Q} est la chaleur apportée au système par unité de temps. On note \mathcal{S} l'entropie ; le second principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\dot{\mathcal{S}} \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} dV - \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dA \quad \forall \mathcal{D}, \quad (2.3)$$

où r est la production interne de chaleur, \mathbf{q} le vecteur de flux de chaleur et T la température absolue dans \mathcal{D} .

L'énergie interne \mathcal{E} , l'entropie \mathcal{S} et la chaleur apportée au système par unité de temps \mathcal{Q} sont définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= \int_{\mathcal{D}} \rho e dV + \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} E dA, \\ \dot{\mathcal{S}} &= \int_{\mathcal{D}} \rho s dV - \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} S dA, \\ \dot{\mathcal{Q}} &= \int_{\mathcal{D}} r dV - \int_{\partial \mathcal{D} \cap \Gamma_c} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA, \end{aligned}$$

où e est l'énergie interne spécifique, s est l'entropie spécifique, E est la densité surfacique d'énergie interne sur Γ_c et S la densité surfacique d'entropie sur Γ_c .

Comme \mathcal{D} est choisi arbitrairement il est possible d'exprimer les lois précédentes sous forme locale. Sous forme locale le premier et deuxième principes de la thermodynamique prennent les formes :

$$\left. \begin{aligned} \rho \dot{e} &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + r - \text{div } \mathbf{q} \\ \rho \dot{s} &\geq \frac{r}{T} - \text{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega, \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= \mathbf{p} : \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_c \\ \dot{S} &\geq \frac{\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_c}{T_c} \end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_c, \quad (2.5)$$

q_c et T_c sont respectivement les limites de q et T sur la surface de contact.

Nous introduisons deux expressions de l'énergie libre : une volumique pour les solides $\psi = e - sT$ et une surfacique $\Psi = E - S\mathcal{T}$ pour les interfaces de contact, où \mathcal{T} est la température propre à Γ_c .

Sur Γ_c , on décompose le déplacement et les contraintes en composantes normales et tangentielles comme suit :

$$p_N = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_c, \quad \mathbf{p}_T = (\mathbf{I} - \mathbf{n}_c \otimes \mathbf{n}_c) \mathbf{p}, \quad (2.6)$$

$$u_N = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_c, \quad \mathbf{u}_T = (\mathbf{I} - \mathbf{n}_c \otimes \mathbf{n}_c) \mathbf{u}, \quad (2.7)$$

Les expressions des énergies libres sont injectées dans (2.4) et (2.5). Les inéquations de Clausius Duhem sont pour le solide Ω et l'interface Γ_c :

$$\rho \dot{\psi} \leq \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho s \dot{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.8)$$

$$\dot{\Psi} \leq p_N \dot{u}_N + \mathbf{p}_T \cdot \dot{\mathbf{u}}_T - S \dot{\mathcal{T}} + \frac{\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_c}{T_c} \theta \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (2.9)$$

$\theta = T_c - \mathcal{T}$ est la différence de température entre le solide Ω et l'interface de contact.

Potentiel dans le solide Nous considérons un problème en hypothèse de petite perturbation (HPP) et faisons l'hypothèse que l'état local est complètement déterminé par les variables d'état $\boldsymbol{\epsilon}$ (déformation) et T (température). Les contraintes de Cauchy et l'entropie sont données par les lois d'état suivantes [135] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad s = \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.10)$$

Ces lois assure le respect de l'inégalité (2.4). Le comportement du solide est isotropique élastique :

$$\psi = \frac{1}{2\rho} \{ \tilde{\lambda} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})^2 + 2\tilde{\mu} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon} \} \quad (2.11)$$

$\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ sont les coefficients élastiques de Lamé. Le tenseur des efforts est dérivé de l'équation d'état.

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad E_{ijkl} = \tilde{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \tilde{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.12)$$

où δ_{ij} sont les symboles de Kronecker.

Les expressions de σ_{ij} seront introduites dans la formulation variationnelle des équations d'équilibre (2.1) à la sous-section 2.2.1. Nous obtiendrons un problème formulé à l'intérieur du solide en déplacement.

2.1.1.1 Un modèle standard généralisé pour l'interface

Le modèle développé précédemment doit désormais être complété par des lois d'interface pour prendre en compte d'éventuels phénomènes discontinus comme le contact unilatéral ou le frottement. Moreau [168, 169] a montré qu'il est possible d'inclure les phénomènes discontinus comme la plasticité et le frottement dans la classe des matériaux standards généralisés en choisissant un potentiel de dissipation convexe mais pas nécessairement différentiable. Ces potentiels sont appelés pseudo-potentiels. Un modèle standard d'interface va être construit pour prendre en compte le contact avec frottement, l'usure et les effets thermiques qui affectent la zone de contact. Le modèle standard généralisé est construit à l'aide d'une classe d'énergie libre et d'une classe de pseudo-potentiels à partir desquels les lois d'état et les lois complémentaires sont définies. L'utilisation de cette approche permet de construire des lois représentant la mécanique de l'interface qui respectent les lois de la thermodynamique.

La modélisation du frottement et de l'usure est réalisée par l'utilisation de variables internes d'état. Nous introduisons deux variables d'état \mathbf{u}_T et w pour représenter le frottement et l'usure. Comme Strömberg [224], nous décomposons le déplacement tangentiel \mathbf{u}_T en deux entités : une représentant la partie réversible et l'autre la partie irréversible du déplacement. La partie réversible (liée à l'adhérence) est due aux déformations élastiques des aspérités et la partie irréversible (liée au glissement) est attribuée aux déformations plastiques des aspérités et surtout à la rupture des jonctions entre les aspérités. Dans notre étude nous considérons un modèle de frottement de type Coulomb. Dans ce modèle le déplacement relatif à l'interface est nul en l'absence de rupture des jonctions entre aspérités. La deuxième variable d'état est w et représente le niveau d'usure (profondeur d'usure à l'interface). Comme il a été vu dans le chapitre précédent, l'usure dépend de nombreux paramètres et peut prendre plusieurs formes au niveau de l'interface. Les mécanismes d'usure se produisent à l'échelle microscopique. À l'échelle macroscopique l'usure se caractérise par un détachement de débris et un profil de contact modifié. Dans notre modèle l'usure est donc identifiée comme une augmentation du jeu entre les solides. La variable d'état w s'interprète comme le jeu dans la direction normale à la surface de contact \mathbf{n}_c . Strömberg a introduit dans [223] une variable interne d'état pour chaque mécanisme d'usure intervenant à l'interface (usure adhésive, usure abrasive, usure par corrosion ...).

Dans ce travail nous faisons l'hypothèse qu'une seule variable d'état peut représenter l'usure par fretting qui se produit à l'interface. Ce qui signifie que nous simplifions le problème de l'usure par fretting en considérant qu'elle est représentable par un seul mécanisme d'usure.

L'énergie libre suivante est proposée pour représenter le comportement de l'interface :

$$\Psi = \Psi(u_N, \mathbf{u}_T, w, \mathcal{F}, \theta), \quad (2.13)$$

Nous définissons \mathcal{W} comme le dual de la variable d'état lié à l'usure w . La fonction Ψ a la propriété d'être convexe et différentiable par rapport à (\mathcal{F}, θ) . Elle possède un ensemble de sous-gradients par rapport à $(\hat{u}_N, \hat{\mathbf{u}}_T, w)$ Les lois d'état de l'interface sont :

$$(\hat{p}_N, \hat{\mathbf{p}}_T, -\hat{\mathcal{W}}) \in \partial\Psi(u_N, \mathbf{u}_T, w, \mathcal{F}, \theta) \quad (2.14)$$

et

$$\hat{S} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\mathcal{F}}, \quad \hat{\Theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \quad (2.15)$$

où $\partial\Psi$ est la sous-différentielle¹ de Ψ par rapport à (u_N, \mathbf{u}_T, w) pour (\mathcal{T}, θ) fixé. Les concepts propres à l'analyse convexe et à la sous-différentialité sont étudiés plus en détail dans les livres de Hiriart-Urruty [209] et Kusraev [125].

La définition de la sous-différentialité et les propriétés de convexité de Ψ permettent d'écrire l'expression suivante [224] :

$$\dot{\Psi} \geq \hat{p}_N \dot{u}_N + \hat{\mathbf{p}}_T \cdot \dot{\mathbf{u}}_T - \mathcal{W} \dot{w} - \hat{S} \dot{\mathcal{T}} - \hat{\Theta} \dot{\theta} \quad (2.16)$$

En introduisant (2.16) dans l'inégalité de Clausius-Duhem on obtient l'expression suivante :

$$(p_N - \hat{p}_N) \dot{u}_N + (\mathbf{p}_T - \hat{\mathbf{p}}_T) \cdot \dot{\mathbf{u}}_T - \mathcal{W} \dot{w} - (S - \hat{S}) \dot{\mathcal{T}} + \frac{\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}_c}{T_c} \theta + \hat{\Theta} \dot{\theta} \geq 0 \quad (2.17)$$

On fait l'hypothèse que p_N , \mathbf{p}_T et S sont des fonctions d'état et on sait que Θ ne dépend pas de θ . \dot{w}_N , $\dot{\mathbf{w}}_T$, $\dot{\mathcal{T}}$ et $\dot{\theta}$ peuvent prendre n'importe quelle valeur dans n'importe quel état et les variables d'état ne dépendent pas de ces valeurs. De ces considérations les expressions suivantes sont déduites :

$$p_N = \hat{p}_N, \quad \mathbf{p}_T = \hat{\mathbf{p}}_T, \quad S = \hat{S}, \quad (2.18)$$

$$\Theta = 0 \Rightarrow \Psi = \Psi(u_N, \mathbf{u}_T, w, \mathcal{T}), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{p}_T \cdot \dot{\mathbf{u}}_T + \mathcal{W} \dot{w} + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_c}{T} \theta \geq 0. \quad (2.20)$$

Les équations (2.14), (2.15) et (2.18) définissent les lois d'état. Le terme de gauche de l'équation (2.20) représente la dissipation à l'interface. La force \mathcal{W} est identifiée comme « la force » contrôlant l'usure.

Pour satisfaire l'inégalité de dissipation de l'équation (2.20) nous supposons qu'une famille de potentiels convexes semi-continus existent, $\Phi = \Phi(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}, \theta, \mathcal{P})$ paramétrée par $\mathcal{P} = (p_N, \mathbf{u}_T, w, \mathcal{T}, T)$. De ce potentiel nous définissons les lois complémentaires.

$$\left(\dot{\mathbf{u}}_T, \dot{w}, \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_c}{T} \right) \in \partial\Phi(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}, \theta, \mathcal{P}). \quad (2.21)$$

de telle façon que :

$$0 = \Phi(\mathbf{0}, 0, 0, \mathcal{P}), \quad (\mathbf{0}, 0, 0) \in \partial\Phi(\mathbf{0}, 0, 0, \mathcal{P}) \quad (2.22)$$

Dans la terminologie de Moreau [169] $\Phi(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}, \theta, \mathcal{P})$ est le dual, au sens de l'analyse convexe, d'un pseudo-potentiel. Le respect de l'équation (2.21) assure l'inégalité (2.20).

L'énergie libre Ψ dans l'équation (2.19) et le dual du pseudo-potentiel Φ constituent ensemble avec les lois d'état définis par les équations ((2.14), (2.15) et (2.18)) et la loi complémentaire (2.21) le modèle standard généralisé de l'interface. Le modèle présenté ici inclut le contact, le frottement, l'usure et les effets thermiques. La définition de lois d'interface devient implicite, il suffit d'écrire l'expression de l'énergie libre et du pseudo-potentiel pour obtenir les équations de l'interface. Celles-ci peuvent être incluses dans une formulation variationnelle du problème de dynamique avec interface de contact. Nous allons présenter une définition particulière de l'énergie libre du pseudo-potentiel, qui sera utilisée ultérieurement.

1. Une sous-différentielle à une fonction f en \mathbf{x}_0 est l'ensemble de tous les sous-gradients de f en \mathbf{x}_0 . La sous-différentielle est toujours un ensemble compact, non vide et convexe. Un sous-gradient est défini par :

Si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}$ est une fonction à valeurs réelles et convexe définie sur un convexe ouvert dans un espace euclidien \mathbf{R}^n , un vecteur \mathbf{v} dans cet espace est appelé sous-gradient au point \mathbf{x}_0 dans \mathcal{U} si pour tout \mathbf{x} dans \mathcal{U} on a :

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Définition d'une énergie libre Dans ce qui suit les effets thermiques sont négligés. Une expression de l'énergie libre correspondant à une extension des conditions de contact unilatérales de Signorini a été proposée par Strömberg [221] :

$$\Psi = I_{K_N}(u_N, w), \quad K_N = \{(u_N, w) : u_N - w - g \leq 0\}, \quad (2.23)$$

où I_{K_N} est la fonction indicatrice définie par :

$$I_{K_N} = \begin{cases} 0 & (u_N, w) \in K_N \\ +\infty & (u_N, w) \notin K_N \end{cases} \quad (2.24)$$

où g est le jeu initial entre les solides. Ici la contrainte unilatérale n'est pas seulement défini par u_N et g , mais aussi par la variable interne w qui représente l'usure. La sous-différentielle d'une fonction indicatrice d'un convexe fermé K_N est :

$$\partial I_{K_N}(u_N, w) = \begin{cases} N_{K_N}(u_N, w) & \text{si } (u_N, w) \in K_N \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.25)$$

avec N_{K_N} le cône normal du convexe fermé K_N défini par :

$$N_{K_N}(u_N, w) = \{p_N : \langle p_N, u'_N - u_N \rangle \leq 0 \quad \forall u'_N \in K_N\} \quad (2.26)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur \mathcal{R}^3 .

Un élément de K_N peut être exprimé par l'expression suivante :

$$\mathcal{W} = p_N \geq 0, \quad u_N - w - g \leq 0, \quad p_N(u_N - w - g) = 0 \quad (2.27)$$

On retrouve les expressions classiques utilisées pour définir la condition unilatérale de Signorini. Le choix de l'énergie libre définie dans l'équation (2.23) a pour effet que la force contrôlant l'usure est égale à la pression normale. La figure 2.2 représente l'extension de la condition unilatérale de Signorini avec prise en compte de l'usure.

Définition d'un pseudo-potentiel dual Nous définissons le pseudo-potentiel dual de la loi de Coulomb en présence d'usure comme suit :

$$\Phi = I_{\mathcal{F}(\mathcal{P})}(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}), \quad (2.28)$$

où

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}) = \{(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}) : F(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}; \mathcal{P}) \leq 0\}$$

$\mathcal{F}(\mathcal{P})$ est un convexe fermé, $F(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}; \mathcal{P})$ est une fonction quasi-convexe décrivant le critère de frottement et d'usure. Cette fonction définit aussi les règles de glissement et la loi d'usure. Les lois complémentaires de dissipation à l'interface s'expriment :

$$(\dot{\mathbf{u}}_T, \dot{w}) \in N_{F(\mathcal{P})}(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}), \quad (2.29)$$

où $N_{F(\mathcal{P})}$ représente le cône normal à $F(\mathcal{P})$. Si F est différentiable par rapport à \mathbf{p}_T et \mathcal{W} , nous obtenons à partir des propriétés du cône normal les expressions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}}_T = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}_T} \\ \dot{w} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathcal{W}} \end{array} \right\} \dot{\lambda} \geq 0, \quad F(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}; \mathcal{P}) \leq 0, \quad \dot{\lambda} F(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}; \mathcal{P}) = 0. \quad (2.30)$$

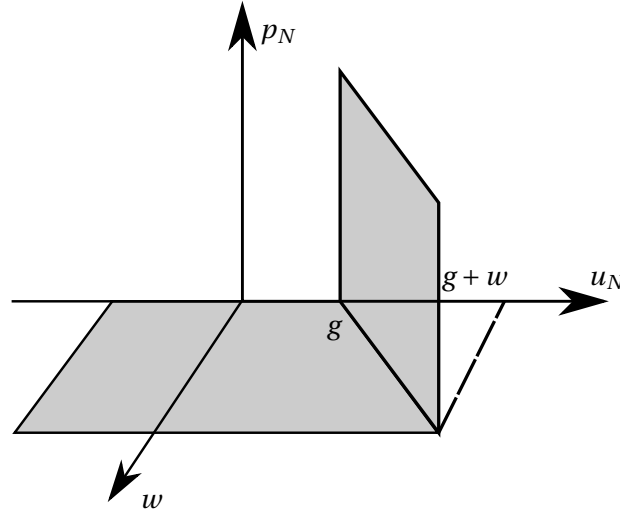


FIGURE 2.2. Représentation du contact de Signorini étendu, l'aire ombrée montre p_N comme une fonction de u_N et w

La définition de $F(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}; \mathcal{P})$ dépend du choix de la loi de contact (dissipation, usure) envisagée. Strömberg a étudié différentes possibilités pour prendre en compte le frottement de Coulomb et obtenir une loi d'usure proche de la loi d'Archard [12]. Dans ce travail nous reprenons la forme qu'il a proposée pour obtenir une loi de frottement de Coulomb et la loi d'usure d'Archard :

$$F(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}; \mathcal{P}) = \|\mathbf{p}_T\| - \mu p_N - \frac{k_a p_N^2}{3p_s} + \frac{k_a p_N \mathcal{W}}{3p_s}. \quad (2.31)$$

où μ est le coefficient de frottement, k_a le coefficient de la loi d'Archard et p_s la dureté ou contrainte d'écoulement. Avec cette expression on voit que $\mathcal{P} = p_N$. Sachant que $\mathcal{W} = p_N$ nous obtenons les lois complémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_T &= \dot{\lambda} \frac{\mathbf{p}_T}{\|\mathbf{p}_T\|}, & \dot{w} &= \dot{\lambda} \frac{k_a p_N}{3p_s}, \\ \dot{\lambda} &\geq 0, & \|\mathbf{p}_T\| - \mu p_N &\leq 0, & \dot{\lambda} (\|\mathbf{p}_T\| - \mu p_N) &\leq 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

On retrouve les lois de Coulomb et la loi d'Archard [12] de cinétique d'usure.

2.2 Formulations discrétisées

2.2.1 Formulation variationnelle

La résolution directe des équations locales est une tâche ardue pour un bon nombre de problèmes. On leur préfère les formulations faibles qui découlent du principe d'Hamilton.

On introduit les espaces de Hilbert suivant la manière de Duvaut et Lions [59].

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\}, \quad (2.33)$$

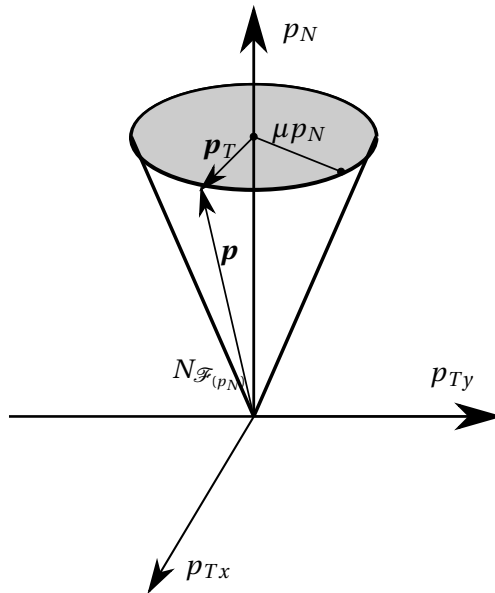


FIGURE 2.3. Représentation du cône de Coulomb, p_{Tx} et p_{Ty} sont les coordonnées de \mathbf{p}_T (contrainte tangentielle) dans le repère locale du contact

$$X = \{\mathbf{v}|_{\Gamma_c} : \mathbf{v} \in \mathcal{V}\} \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c; R^d), \quad (2.34)$$

$$X_N = \{\mathbf{v}_N|_{\Gamma_c} : \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}, \quad X_T = \{\mathbf{v}_T|_{\Gamma_c} : \mathbf{v} \in \mathcal{V}\} \quad (2.35)$$

où d vaut 2 ou 3 suivant que le problème est bi ou tridimensionnel. On associe à ces espaces primaires les espaces duaux suivants : \mathcal{V}' , X'_N et X'_T . Γ_C est supposé régulière de sorte que $X_N \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c; R)$, $X_T \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c; R^{d-1})$, $X'_N \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c; R)$ et $X'_T \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c; R^{d-1})$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ est l'espace des restrictions sur Γ_c des traces sur $\partial\Omega$ de $H^1(\Omega)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ est l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ qui est l'espace de restrictions sur Γ_c de fonctions $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ qui s'annule en dehors de Γ_C . Le livre de Kikuchi et Oden [118] donne plus de détails sur l'opérateur trace.

On rappelle les espaces duaux introduits précédemment.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_N &= \{p_N : p_N(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \Gamma_c\}, \\ \mathcal{F}(p_N) &= \{(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}) : F(p_N)(\mathbf{p}_T(\mathbf{x}), \mathcal{W}(\mathbf{x})) \leq 0, \mathbf{x} \in \Gamma_c\}, \end{aligned}$$

En suivant la démarche de Duvaut et Lions [59], on peut montrer que le problème élastodynamique de contact avec frottement est équivalent à :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}_t) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}_T) \geq l(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \end{array} \right. \quad (2.36)$$

où

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_c} \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| \|\mathbf{v}_T\| d\Gamma. \quad (2.37)$$

Cette inégalité variationnelle est similaire à celle exposée par Kikuchi et Oden [118] ou Simo et Laursen [218]. La résolution de ces problèmes semble délicate et sont plus difficiles à implémenter dans les codes éléments finis. En effet, il est plus difficile de résoudre un système d'inégalités qu'un système

d'égalités. Une revue détaillée de ces méthodes peut se trouver dans l'article de Mijar et Arora [164]. Nous préférons travailler sur une formulation en égalité variationnelle, équivalente au problème (2.36).

Nous allons présenter une formulation hybride équivalente du problème (2.36) sous forme d'égalité variationnelle. Cette stratégie s'appuie sur les travaux de Khenous [114].

Une formulation variationnelle à deux champs (\mathbf{u}, \mathbf{p}) du problème de contact précédemment introduit peut être formulée. Le problème élastodynamique de contact avec frottement prend la forme suivante :

$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V}, p_N \in \mathcal{X}_N \text{ et } \mathbf{p}_T \in \mathcal{F}(P_N) \text{ tel que} \\ & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) + \langle p_N, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{p}_T, \mathbf{v} \rangle, \\ & p_N \in N_{\mathcal{X}_N}(u_N, w) \quad \text{dans } X'_N, \\ & (\mathbf{p}_T, \mathcal{W}) \in \partial\Phi(\mathbf{u}_T, w, p_N) \quad \text{dans } X'_T. \end{aligned} \tag{2.38}$
--

où $(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ représente le travail virtuel des efforts d'inertie :

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}} d\Omega, \tag{2.39}$$

$a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ représente le travail virtuel des efforts intérieurs :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega, \tag{2.40}$$

$l(\mathbf{v})$ représente le travail virtuel des efforts extérieurs :

$$l(\mathbf{v}) = \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \right), \tag{2.41}$$

$\langle p_N, \mathbf{v} \rangle$ représente le travail virtuel des efforts de contact normaux :

$$\langle p_N, \mathbf{v} \rangle = - \int_{\Gamma_c} \sigma_n \mathbf{v}_N d\Gamma, \tag{2.42}$$

$\langle \mathbf{p}_T, \mathbf{v} \rangle$ représente le travail virtuel des efforts de contact tangentiels :

$$\langle \mathbf{p}_T, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \mathbf{v}_T d\Gamma. \tag{2.43}$$

On peut remarquer que le travail virtuel réel des efforts de contact normaux obtenu en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ est nul : $\langle p_N, \mathbf{u} \rangle = 0$.

On trouve dans la littérature [114] la preuve de l'équivalence entre la formulation (2.38) et l'inégalité variationnelle (2.36).

Dans une approche primale [32] p_N et \mathbf{p}_T sont remplacés par $\sigma_N(u)$ et $\boldsymbol{\sigma}_T(u)$.

Formulation faible hybride

Le problème (2.38) peut être réécrit de façon équivalente :

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V}, p_N \in \mathcal{K}_N \text{ et } \mathbf{p}_T \in \mathcal{F}(p_N) \text{ tel que} \\
 & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\rho \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) + \langle p_N, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{p}_T, \mathbf{v} \rangle \\
 & u_N \in N_{\mathcal{K}_N}(p_N, \mathcal{W}) \\
 & (u_T, w) \in N_{\mathcal{F}(p_N)}(p_N, \mathcal{W})
 \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

De la formulation hybride (2.44) découle le système équivalent (2.45) utilisé par Strömberg pour résoudre le problème de fretting-wear par éléments finis et Lagrangien augmenté. Le problème variationnel que nous cherchons à résoudre est défini comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Trouver } u : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{V}, \mathcal{W} = p_N : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{K}_N \text{ et } p_T : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{F}(p_N) \text{ tel que :} \\
 & (\rho \dot{u}, v) + a(u, v) = l(v) + \langle p_N, v_N \rangle + \langle p_T, v_T \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \\
 & \langle u_N - w - g, p'_N - p_N \rangle \leq 0 \quad \forall p'_N \in \mathcal{K}_N, \\
 & \langle \dot{u}_T, p'_T - p_T \rangle + \langle \dot{u}_T, \mathcal{W}' - \mathcal{W} \rangle \leq 0 \quad \forall (p'_T, \mathcal{W}') \in \mathcal{F}(p_N),
 \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

où,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= \{\mathbf{v} | \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_u\}, \\
 \mathcal{K}_N &= \{p_N | p_N(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \Gamma_c\}, \\
 \mathcal{F}(p_N) &= \{(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}) | (\mathbf{p}_T(\mathbf{x}), \mathcal{W}(\mathbf{x})) \in F(p_N), \mathbf{x} \in \Gamma_c\},
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } F(p_N)(\mathbf{p}_T, \mathcal{W}) = \|\mathbf{p}_T\| - \mu p_N - \frac{k_a p_N^2}{3 p_s} + \frac{k_a p_N \mathcal{W}}{3 p_s}.$$

La loi de comportement de l'usure est défini comme suit

$$\dot{w} = k_w |p_N| \|\dot{\mathbf{u}}_T\|, \quad (2.46)$$

Dans la formulation (2.44) le contact et le frottement sont couplé puisque $\mathcal{F}(p_N)$ dépend de p_N . De Saxcé [50] a proposé une formulation dans laquelle le contact et le frottement sont exprimés par une seule inclusion. Il définit un bipotentiel de la loi de frottement de Coulomb, qui est nommé dans la littérature bipotentiel de De Saxcé. De Saxcé [50] conclut que cette formulation permettrait de gagner un facteur deux en temps de calcul. Dans ce travail nous n'avons pas programmé cette approche, mais elle pourrait rentrer sans problème dans le cadre des algorithmes proposés. Cela fera certainement parti de développement futur du programme informatique proposé durant cette thèse.

Nous allons présenter une formulation équivalente aux contraintes de contact utilisées dans la formulation de problème dynamique avec contact, frottement et usure.

2.2.2 Formulations équivalentes

Les formulations définissant la condition de contact unilatérale et le frottement de Coulomb peuvent être réécrites de façon équivalente avec des opérateurs de projection.

La loi de contact normal unilatérale (2.27) peut s'écrire de façon équivalente avec un opérateur de projection :

$$p_N = \text{Proj}_{\mathbb{R}^+} (p_N + \chi (u_N - w - g)), \quad r > 0 \quad (2.47)$$

où χ est un réel « suffisamment grand » et $\text{Proj}_{\mathbb{R}^+}$ est défini par :

$$\text{Proj}_{\mathbb{R}^+} (x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

Nous proposons ci-dessous les trois situations possibles de contact pour montrer l'équivalence.

1. Si $(u_N - w - g) = 0$ alors $p_N = \text{Proj}_{\mathbb{R}^+} (p_N)$ donc $p_N > 0$.
2. Si $(u_N - w - g) < 0$ alors $\text{Proj}_{\mathbb{R}^+} (p_N + \chi (u_N - w - g)) = 0$ et $p_N = 0$.
3. Si $(u_N - w - g) > 0$ alors $p_N = p_N + \chi (u_N - w - g)$ donc $(u_N - w - g) = 0$. Il ne peut y avoir de pénétration.

Les lois locales de frottement (2.30) peuvent s'écrire de façon équivalente :

$$\mathbf{p}_T = \text{Proj}_{\mathcal{F}(P_N)} (\mathbf{p}_T + \chi \mathbf{u}_T), \quad r > 0 \quad (2.49)$$

où,

$$\text{Proj}_{\mathcal{F}(P_N)} (\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{si } \|\mathbf{x}\| < \mu p_N, \\ \mu p_N \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} & \text{si } \|\mathbf{x}\| \geq \mu p_N. \end{cases} \quad (2.50)$$

Comme dans le cas du problème normal de contact l'équivalence entre les deux formulations est évidente pour le problème tangentiel de contact.

Dans certains cas il peut être plus judicieux d'avoir une formulation des lois de contact sur les déplacements.

$$u_N - w - g = \text{Proj}_{\mathbb{R}^+} ((u_N - w - g) + \chi p_N), \quad r > 0 \quad (2.51)$$

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_T + \chi \mathbf{p}_T - \chi \text{Proj}_{\mathcal{F}(P_N)} \left(\frac{1}{r} \mathbf{u}_T + \mathbf{p}_T \right), \quad r > 0 \quad (2.52)$$

La résolution directe du problème (2.44) est délicate même en utilisant la formulation équivalente avec opérateurs de projection. Des méthodes de régularisation existent pour faciliter la résolution de ce problème.

2.2.3 Adaptation des lois de contact

La régularisation du problème élastodynamique de contact peut être envisagé de deux façon différentes : soit au niveau de la formulation continue soit après discrétisation par éléments finis du problème variationnel. La deuxième variante est la plus courante. Dans cette section nous nous placerons dans le cadre d'une approche continue.

La résolution exacte du problème élastodynamique de contact sera abordée dans la section 2.3. Par conséquence nous n'aborderons pas ici la méthode des multiplicateurs de Lagrange pure. Des multiplicateurs de Lagrange seront toutefois introduits dans certaines formulations.

Méthode de pénalité En optimisation, le but des méthodes de pénalisation est de transformer le problème de minimisation sous contraintes en un problème de minimisation sans contraintes. En reprenant (2.47) et (2.49) on obtient

$$p_N = Proj_{\mathbb{R}^+}(\epsilon_N(u_N - w - g)), \epsilon_N > 0 \quad (2.53)$$

Les lois locales de frottement peuvent s'écrire :

$$\mathbf{p}_T = Proj_{\mathcal{F}(P_N)}(\epsilon_T \mathbf{u}_T), \epsilon_T > 0 \quad (2.54)$$

où ϵ_N et ϵ_T sont les coefficients de pénalité.

Le problème revient à chercher le minimum de la fonctionnelle suivante.

$$\frac{1}{2}(\rho \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u}) - \int_{\Gamma_C} \frac{\epsilon_N}{2} Proj_{\mathbb{R}^+}^2(u_N - w - g) + \frac{\epsilon_T}{2} Proj_{\mathcal{F}(P_N)}^2(u_T) \quad (2.55)$$

Les forces normales de contact sont proportionnelles à l'interpénétration des nœuds en contact. Sur le problème tangentiel un déplacement élastique est autorisé pendant les phases d'adhérence. Le cas avec frottement est présenté dans les articles de Simo et Laursen [128, 218] et reprend les méthodes de prédiction-corrrection utilisées en plasticité. Quand ϵ_N et ϵ_T tendent vers l'infini les forces de contact trouvées tendent vers la solution exacte. Malheureusement, l'augmentation des coefficients de pénalité rend le système mal conditionné numériquement [218]. L'implémentation d'une telle méthode est très simple, en particulier dans des méthodes fréquentielles de résolution. La bonne démarche consiste à effectuer une première résolution avec un ϵ faible et d'augmenter au cours des itérations mais cette mise en œuvre est coûteuse. Une autre difficulté liée à la méthode de pénalité est l'irrégularité de l'expression de la force de contact due à la présence de la fonction « partie positive ». Plusieurs auteurs ont proposé de supprimer cette irrégularité en remplaçant cette fonction par une fonction régulière au niveau de la transition que ce soit pour la transition contact-perte de contact ou la transition adhérence-glisement (stick-slip).

Méthode de la barrière La méthode de la barrière peut être utilisée pour le problème normal de contact. La pression normale dérive du potentiel admissible suivant :

$$\mathcal{C}(u_N) = \epsilon_N \frac{1}{(u_N - w - g)^2}. \quad (2.56)$$

Ce potentiel est une régularisation du potentiel proposé dans (2.23). Dans une méthode de pénalité, la pénétration est possible, ce n'est plus le cas avec une méthode de la barrière. Cette approche a été utilisée pour résoudre un problème de contact unilatéral par la méthode asymptotique numérique [40]. La force de contact est exprimée par :

$$R_n = \kappa \frac{\delta - (u_N - w - g)}{(u_N - w - g)}.$$

W. Aggoune [1] a résolu un problème de poutre élastique en contact avec un obstacle plan. Un des défauts de la méthode de la barrière est que pour $u_N = 0$, l'effort de contact est infini, en conséquence cette méthode n'est pas adaptée pour des problèmes où il y a contact entre les solides au début du chargement. Comme dans le cas d'un contact aube-disque les deux structures sont en contact sur la plus grande partie de la portée la méthode de la barrière n'est pas envisageable. Pour le problème tangentiel de contact il est difficile de définir une barrière puisque les efforts tangentiels sont bornés entre deux limites.

Méthode de Nitsche Nitsche [173] a proposé une méthode pour assurer la contrainte liée au contact ; au lieu d'utiliser des multiplicateurs de Lagrange pour représenter les forces de contact, les vecteurs des efforts de contact sont calculés à partir du champ de contrainte dans les solides en contact. Dans le cas du contact unilatéral sans frottement entre deux solides 1 et 2 le travail des efforts de contact vaut :

$$\langle \mathbf{p}_N, u_N - w - g \rangle = - \int_{\Gamma_C} \frac{1}{2} (p_N^1 + p_N^2) (u_N - w - g) d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \epsilon_N (u_N - w - g)^2 d\Gamma \quad (2.57)$$

avec

$$p_N^i = \mathbf{n}^i \cdot \sigma(u^i) \mathbf{n}^i, \quad i = 1, 2$$

$\sigma(u^i) \mathbf{n}^i$ est calculé en utilisant l'équation (2.12). Cette formulation ne fait intervenir que des variables primales (déplacements). Toutefois, dans le cadre de notre étude, elle est peu adaptée puisque nous mettrons en place des méthodes de réduction de modèle qui font qu'il nous sera techniquement coûteux de remonter aux déformations.

Méthode des Lagrangiens augmentés La méthode des Lagrangiens augmentés peut être vue de deux façon : soit comme un moyen de résoudre un problème de minimisation sous contrainte soit comme une façon de formuler les lois de contact. Un peu plus haut nous avons introduit les lois de contact équivalentes (2.47) et (2.49) avec χ le paramètre d'augmentation. En injectant ces expressions dans (2.38) on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho \ddot{u}, v) + a(u, v) = l(v) + \langle p_N, v_N \rangle + \langle \mathbf{p}_T, v_T \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \\ p_N = \text{Proj}_{\mathbb{R}^+} (p_N + \epsilon_N (u_N - w - g)), \\ \mathbf{p}_T = \text{Proj}_{\mathcal{F}(p_N)} (\mathbf{p}_T + \epsilon_T \mathbf{u}_T). \end{array} \right. \quad (2.58)$$

Le système (2.58) peut être résolu par une méthode de point fixe ou par une méthode de Newton généralisé [3]. Dans le cas de la méthode de Newton généralisée le problème est mixte puisqu'à la fois les termes primaux et duaux sont présents. Cela augmente la taille du système à résoudre. Une autre approche consiste à découpler les deux sous systèmes d'équations et chercher un point fixe sur les efforts de contact. Nous reviendrons sur ce point dans la section 2.3.

Méthode des Lagrangiens perturbés Dans cette approche on reformule le problème non plus en déplacement mais en effort. Elle combine les méthodes de multiplicateur de Lagrange et de pénalité. À la différence d'une méthode de Lagrangien augmenté, la méthode des Lagrangiens perturbés n'est pas une méthode exacte. Le résultat dépend des termes de pénalité. Le travail lié à l'interface de contact vaut :

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle = \int_{\Gamma_C} p_N (u_N - w - g) - \frac{1}{2\epsilon_N} p_N^2 + \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{u}_T - \frac{1}{2\epsilon_T} \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{p}_T d\Gamma \quad (2.59)$$

Lagrangien stabilisé La formulation Lagrangien stabilisé a été proposée par Ben Dhia [20] et est détaillée par Zarroug dans [239]. L'intérêt de cette approche est qu'elle unifie les différentes approches présentées ci-dessus. Avec la formulation par Lagrangien stabilisé le principe des travaux virtuels donne :

$$\begin{aligned}
& (\rho \ddot{u}, v) + a(u, v) = l(v) + \langle S_u (\lambda - \kappa_n u_N), v_N \rangle + \\
& \quad \left\langle \mu S_u \lambda \left[S_f (\Lambda + \kappa_T \mathbf{V}_T) + (1 - S_f) \left[\frac{\Lambda + h_2 \mathbf{V}_T}{\|\Lambda + h_2 \mathbf{V}_T\|} \right] \right], v_T \right\rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\
& \frac{-1}{h_n} \int_{\Gamma_c} (\lambda - S_u (\lambda h_n d_n)) \lambda^* d\Gamma = 0, \\
& \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u \left(\frac{S_f}{h_1} + \frac{1 - S_f}{h_2} \right) * \\
& \quad \left[\Lambda - \left[S_f (\Lambda + h_1 \mathbf{V}_T) + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2 \mathbf{V}_T}{\|\Lambda + h_2 \mathbf{V}_T\|} \right] \right] \Lambda^* d\Gamma + \int_{\Gamma_c} (1 - S_u) \Lambda \Lambda^* d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.60}$$

avec

$$\begin{aligned}
S_u &= 1_{\mathbb{R}^+} (\lambda + \rho_n d_n) \\
S_f &= 1_{B(0,1)} (\Lambda + \rho_T \mathbf{V}_T)
\end{aligned}$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange des pressions de contact, Λ un semi-multiplicateur de frottement, $B(0, 1)$ la boule unité, P_K la projection orthogonale sur K , ρ_n un réel strictement positif, h_n un réel non nul, ρ_T un réel strictement positif, h_1 un réel non nul et h_2 un réel strictement positif.

Cette formulation permet suivant les paramètres choisis de retrouver les méthodes lagrangiennes pures, de pénalité ou de Lagrangien augmenté. Pour plus de détails sur cette formulation on pourra se reporter au travail de Torkhani [228] et à la notice de Code-Aster [41] puisque la méthode y a été implémentée.

Bilan

Nous avons donné un aperçu des méthodes de régularisation dans une approche continue du problème élastodynamique de contact. Ces formulations doivent être discrétisées pour pouvoir être résolues. Dans notre travail nous utiliserons les méthodes de pénalité et de Lagrangien augmenté. Ces méthodes se sont avérées les plus adaptées à notre problème et en particulier il a été assez facile de les utiliser dans des méthodes fréquentielles comme présentées au chapitre 3. Nous allons présenter dans la section suivante la discrétisation par éléments finis de ce problème, qui pose une difficulté au niveau des interfaces de contact.

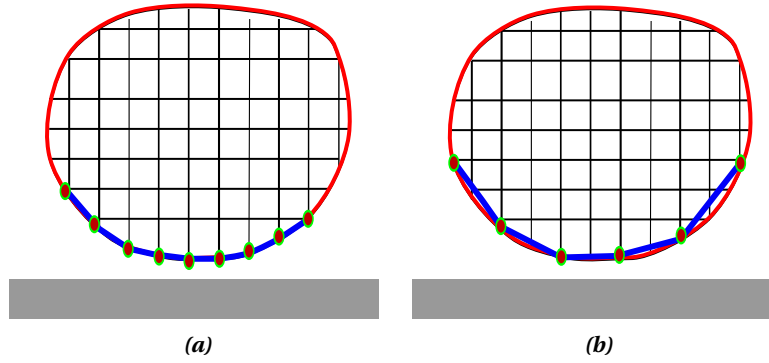


FIGURE 2.4. Maillage à la surface de contact

2.2.4 Discrétisation par éléments finis

Nous allons maintenant nous intéresser à la discrétisation spatiale, par la méthode des éléments finis, du problème continu étudié plus haut. Nous considérons à partir de maintenant le cas général de plusieurs solides en contact.

Les champs de déplacement et de multiplicateurs de contact sont recherchés dans des espaces éléments finis.

Les domaines Ω_i sont approchés par des domaines polygonaux ou polyédriques Ω_i^h . À chaque domaine Ω_i^h est associée une famille de triangulation \mathcal{T}^h avec τ_i^j ses éléments. h représente le rayon du plus large élément. Le domaine Ω_i^h est défini par :

$$\Omega_i^h = \bigcup_{j=1}^{N_i^e} \tau_i^j, \quad (2.61)$$

Le maillage de l'interface de contact Γ_c^h peut être obtenu de deux façons : soit par un maillage hérité de la trace géométrique de \mathcal{T}_i^h (figure 2.4a), soit par un maillage indépendant de \mathcal{T}_i^h ayant son propre pas (figure 2.4b). Ce domaine maillé est noté Γ_c^h .

Soit $\mathcal{V}^h \subset V$ une famille de sous espaces de dimension finie, indexés par h provenant de la discrétisation régulière par éléments finis du domaine Ω . On définit une approximation X^h, X_N^h, X_T^h sur Γ_c des espaces X, X_N, X_T . On note X'^h, X'_N, X'_T les discrétisations respectives de X', X'_N, X'_T . Du fait de la formulation hybride (cf. (2.45)) les discrétisations des champs primaux et duaux ne peuvent se faire indépendamment. La condition inf-sup discrète de Babuška-Brezzi [15, 27] doit être vérifiée :

$$\inf_{\mathbf{p}_N^h \in X_N'^h} \sup_{v^h \in \mathcal{V}^h} \frac{\langle \mathbf{p}_N^h, v_N^h \rangle}{\|v^h\|_{\mathcal{V}} \|\mathbf{p}_N^h\|_{X_N'^h}} \geq \gamma > 0, \quad (2.62)$$

$$\inf_{\mathbf{p}_T^h \in X_T'^h} \sup_{v^h \in \mathcal{V}^h} \frac{\langle \mathbf{p}_T^h, v_T^h \rangle}{\|v^h\|_{\mathcal{V}} \|\mathbf{p}_T^h\|_{X_T'^h}} \geq \gamma > 0, \quad (2.63)$$

avec γ indépendant de h .

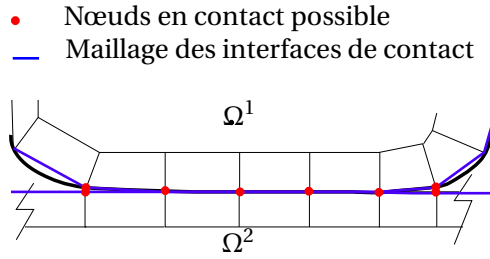


FIGURE 2.5. Division de la zone de contact en sous-élément

Le système à résoudre devient :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } u^h \in \mathcal{V}^h, p_N^h \in X_N^h \text{ et } \mathbf{p}_T^h \in X_T^h \text{ qui satisfont :} \\
 & (\rho \ddot{u}^h, v^h) + a(u^h, v^h) = l(v^h) + \langle p_N^h, v_N^h \rangle + \langle \mathbf{p}_T^h, v_T^h \rangle, \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h, \\
 & p_N^h = \text{Proj}_{\mathbb{R}^+} (p_N^h + \epsilon_N (u_N^h - w^h - g^h)), \\
 & \mathbf{p}_T^h = \text{Proj}_{\mathcal{F}(P_N)} (\mathbf{p}_T^h + \epsilon_T \mathbf{u}_T^h).
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

En respectant ces conditions, les approximations des champs de déplacement u_i (i indice des coordonnées) et des multiplicateurs s'écrivent sous les formes suivantes :

$$u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k_1} \phi^j(\mathbf{x}) U^j, \quad p_N^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k_2} \psi^j(\mathbf{x}) P_N^j, \quad \mathbf{p}_T^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k_3} \xi^j(\mathbf{x}) P_T^j, \tag{2.65}$$

où, ϕ^j, ψ^j, ξ^j sont les fonctions de forme de la méthode éléments finis utilisée, avec U^j, P_N^j, P_T^j les valeurs nodales respectives des déplacements, des pressions de contact et des contraintes tangentielles. On définit les vecteurs de l'ensemble des valeurs nodales par :

$$U = \{U^j\}_{j=1 \dots k_1}, \quad L_N = \{P_N^j\}_{j=1 \dots k_2}, \quad L_T = \{P_T^j\}_{j=1 \dots k_3}. \tag{2.66}$$

Le calcul des termes $(\rho \ddot{u}^h, v^h)$ et $a(u^h, v^h)$ ne pose pas de problème. Une méthode classique de quadrature numérique pour calculer ces termes est utilisée. La méthode la plus utilisée dans les logiciels éléments finis est une quadrature de Gauss [240]. Dans la stratégie employée dans cette thèse ce calcul est effectué dans le logiciel SAMCEF [206] pour calculer les matrices de masse et de raideur, définies comme suit :

$$\mathbf{M}_{ij} = (\rho \phi_i, \phi_j), \quad \mathbf{K}_{ij} = a(\phi_i, \phi_j). \tag{2.67}$$

Le terme le plus délicat à intégrer est le terme lié au travail des forces de contact :

$$\langle p_N^h, v_N^h \rangle + \langle \mathbf{p}_T^h, v_T^h \rangle = \int_{\Gamma_c} p_N v_N d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \mathbf{p}_T \cdot \mathbf{v}_T d\Gamma. \tag{2.68}$$

Une quadrature numérique est utilisée pour intégrer ces termes. La frontière de contact est sous-discrétisée pour intégrer les termes de l'équation (2.68). Cette discrétisation peut-être différente de celle de discrétisation par éléments finis [239]. Nous avons décidé d'utiliser une discrétisation d'intégration confondu avec la trace du maillage éléments finis sur la frontière Γ_c . Nous nous plaçons dans le cas où les

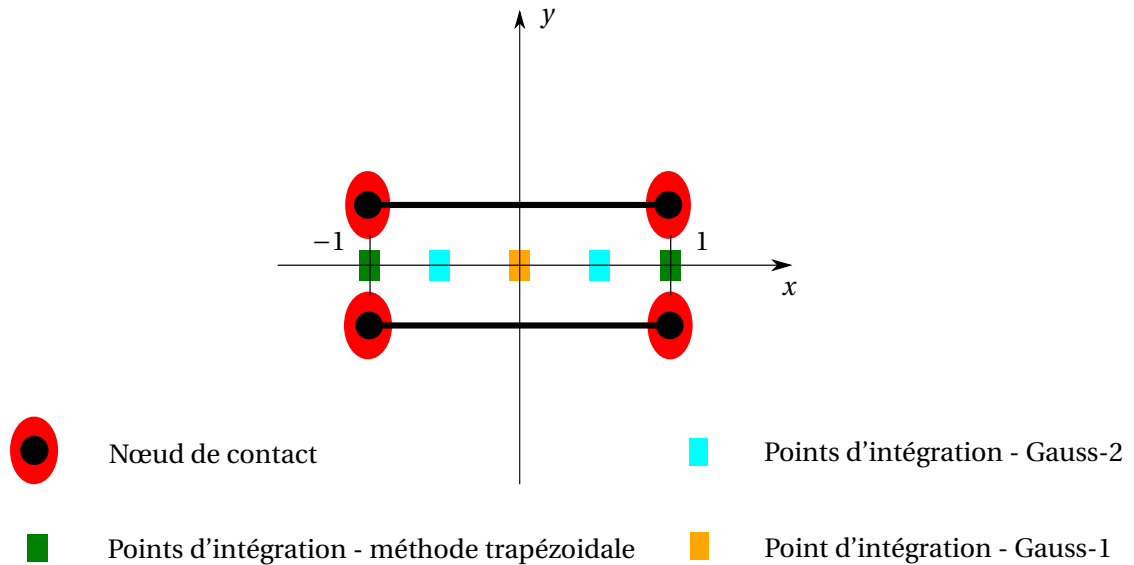


FIGURE 2.6. Élément de contact nœud à nœud

maillages entre solides en contact sont compatibles à l'interface de contact. Prenons comme exemple un contact 2D entre deux solides. La zone de contact est représentée sur la figure 2.5.

Nous travaillons sur des éléments de contact nœud-à-nœud. Chaque élément de contact se présente comme dans la figure 2.6. On peut envisager trois schémas d'intégration numérique : quadrature de Gauss avec un point, deux points ou schéma trapézoïdal avec points d'intégration confondus avec les nœuds éléments finis. Pour intégrer sur un élément fini on privilégie classiquement quadrature de Gauss et on évite le schéma trapézoïdal moins précis. Pour faciliter le calcul des expressions de contact nous allons néanmoins utiliser le schéma trapézoïdal avec point d'intégration confondus avec les nœuds éléments finis pour intégrer les travaux des forces de contact. Chaque élément est transformé en élément isoparamétrique, représenté sur la figure 2.6.

Nous allons expliquer pourquoi nous avons retenu un schéma d'intégration trapézoïdal. Pour cette explication nous nous intéressons seulement au respect de la condition normale de contact. La première raison qui nous fait choisir cette méthode est sa simplicité de mise en œuvre. De plus l'évaluation des conditions de contact aux points de Gauss peut donner des résultats erronés. La figure 2.7 résume le problème qui peut se produire. En effet, l'intégration aux points de Gauss conduirait à supposer que le modèle EF se décolle du socle gris avant que les conditions de contact ne soient désactivées. Pour cette raison nous préférons choisir cette approche qui assure une cohérence des conditions de contact ainsi qu'une mise en œuvre simplifiée.

L'introduction de (2.65) dans (2.64) fournit les matrices de couplage entre déplacements et efforts de contact :

$$(L_N)_{ij} = \int_{\Gamma_C} \psi_i \phi_j d\Gamma = \sum_{M \in \eta_C} \Delta^M \psi_i(\mathbf{x}^M) \phi_j(\mathbf{x}^M) \quad (2.69)$$

$$(L_T)_{ij} = \int_{\Gamma_C} \xi_i \phi_j d\Gamma = \sum_{M \in \eta_C} \Delta^M \xi_i(\mathbf{x}^M) \phi_j(\mathbf{x}^M) \quad (2.70)$$

- Nœud de contact
- Points d'intégration - Gauss-2

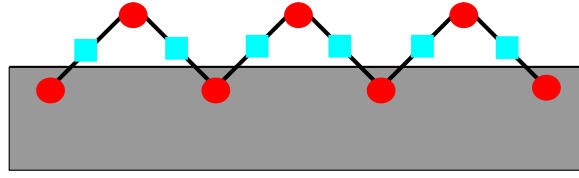


FIGURE 2.7. Erreur sur les conditions de contact

L'introduction de (2.65), (2.67) et (2.70) dans (2.64) donne le problème algébrique suivant :

$$\begin{cases}
 \text{Trouver } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^k, \mathbf{P}_N \text{ et } \mathbf{P}_T \text{ satisfaisant} \\
 \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_{ex} + {}^t\mathbf{L}_N\mathbf{P}_N + {}^t\mathbf{L}_T\mathbf{P}_T \\
 \mathbf{P}_N = \text{Proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{P}_N + \epsilon_N\mathbf{L}_N(\mathbf{U} - \mathbf{W} - \mathbf{G})), \\
 \mathbf{P}_T = \text{Proj}_{\mathcal{F}(\mathbf{P}_N)}(\mathbf{P}_T + \epsilon_T\mathbf{L}_T\mathbf{U}).
 \end{cases} \quad (2.71)$$

où \mathbf{U} est le vecteur des déplacements aux nœuds, \mathbf{W} le vecteur des profondeurs d'usure et \mathbf{G} le vecteur des distances initiales entre les solides en contact.

On peut travailler directement en forces généralisées :

$$\begin{cases}
 \text{Trouver } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^k, \mathbf{R}_N \text{ et } \mathbf{R}_T \text{ satisfaisant} \\
 \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_{ex} + \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T \\
 \mathbf{R}_N = \text{Proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_N + \epsilon_N(\mathbf{U}_N - \mathbf{W} - \mathbf{G})), \\
 \mathbf{R}_T = \text{Proj}_{\mathcal{F}(\mathbf{R}_N)}(\mathbf{R}_T + \epsilon_T\mathbf{U}).
 \end{cases} \quad (2.72)$$

avec $\mathbf{R}_N = {}^t\mathbf{L}_N\mathbf{P}_N$ et $\mathbf{R}_T = {}^t\mathbf{L}_T\mathbf{P}_T$ les forces de contact généralisées aux nœuds de contact. Le travail faisant intervenir directement les forces de contact généralisées, il se pose la question de savoir comment remonter aux pressions de contact, en particulier quand on ne peut pas extraire les matrices \mathbf{L}_N et \mathbf{L}_T , ce qui est le cas quand on crée un super-élément dans un code éléments finis commercial. L'idée, très simple, est de créer une zone d'influence autour de chaque nœud en contact et de calculer la pression de contact équivalente (en faisant l'hypothèse d'une pression constante) à la force de contact au nœud sur la surface d'influence. Cette approche est illustrée sur la figure 2.8 dans le cas d'un maillage avec élément quadrangle. Si le maillage est triangulaire on utilisera une zone d'influence triangulaire.

Exemple sur un contact pion-plan Pour illustrer les propos sur la discrétisation éléments finis nous proposons de traiter le contact entre un pion et un plan. Le pion est chargé verticalement par un chargement en pression équiréparti. Le profil du pion est symétrique avec une partie centrale plane et des

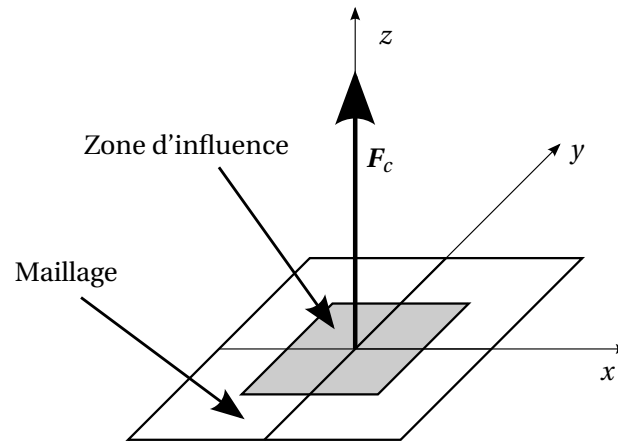
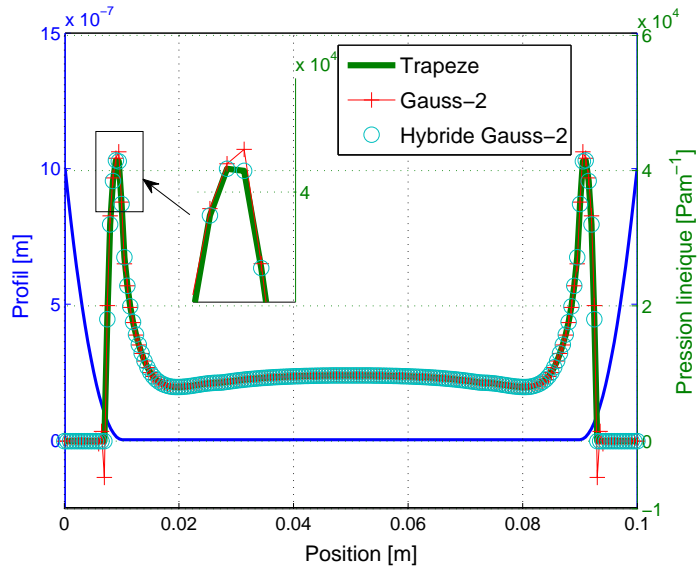


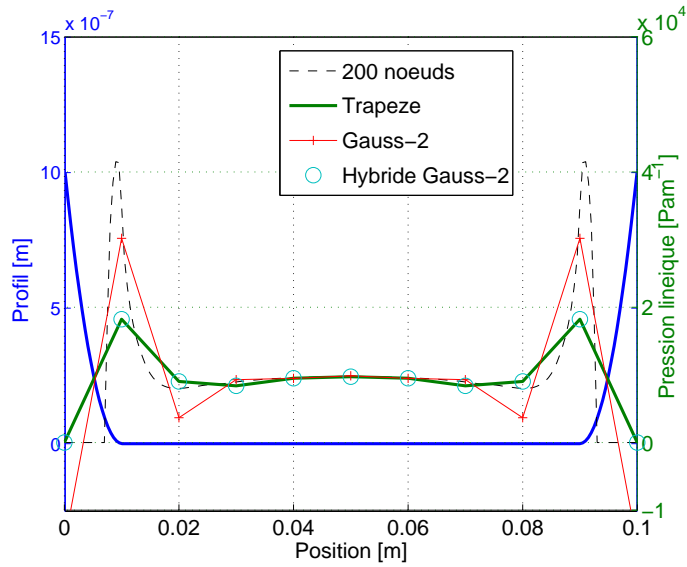
FIGURE 2.8. Force de contact équivalente

bords arrondis. Le pion est maillé par des éléments quadratiques avec 4 nœuds et 8 ddl sous l'hypothèse de contraintes planes. Le pion est d'abord dessiné comme un rectangle puis maillé. Le profil de contact est introduit dans le terme de pénalisation dans le vecteur \mathbf{G} (cf. (2.71)). Trois approches pour le calcul des pressions de contact sont étudiées : un calcul avec les forces généralisées (cf. (2.72)), un calcul a posteriori des pressions de contact avec les formes données dans (2.70) et un calcul hybride déplacements-pressions de contact couplés (cf. (2.71)).

Dans le cas du calcul avec forces généralisées les pressions de contact sont obtenues a posteriori via $\mathbf{P} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$. Comme nous l'avons dit cette égalité peut être calculée aux points de Gauss ou aux nœuds éléments finis. La deuxième approche consiste à résoudre le problème hybride (2.58). La matrice $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_T, \mathbf{L}_N]$ peut être calculée aux points de Gauss ou aux nœuds éléments finis. Les expériences numériques menées ont montré que le solveur non-linéaire convergerait beaucoup mieux avec un calcul de la matrice \mathbf{L} aux nœuds éléments finis. Nous avons deux séries de calculs sur un contact pion plan avec 10 et 200 éléments de contact. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 2.9. Il est clair que la bonne prédiction des pressions de contact nécessite un grand nombre de nœuds de contact. Le calcul a posteriori des pressions de contact avec \mathbf{L} calculé aux nœuds de Gauss crée des oscillations en bord de contact avec des pressions négatives (courbe en rouge sur les figures 2.9.). Cette étude a validé notre stratégie de calcul des pressions de contact a posteriori aux nœuds de contact du maillage éléments finis. Dans le cadre du calcul de l'usure il est important de bien prédire les pressions de contact. Nous avons constaté sur cet exemple qu'à nombre de nœuds de contact fixé une méthode a posteriori était suffisante pour avoir un bon profil des pressions de contact, ce qui nous conduit à choisir cette approche dans nos simulations numériques de la cinétique d'usure.



(a)



(b)

FIGURE 2.9. Profil d'un pion en contact sur un plan (courbe bleu) et pression de contact pour 200 nœuds (a) et 10 nœuds (b)

2.2.5 Discrétisation temporelle

L'équation de mouvement du système dynamique avec contact et frottement s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_{ex} + \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T \quad (2.73)$$

avec \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{C} la matrice d'amortissement, \mathbf{K} la matrice de raideur \mathbf{R}_N , \mathbf{R}_T les forces de contact et \mathbf{F}_{ex} les forces d'excitation extérieures.

La résolution de (2.73) passe par l'utilisation d'un schéma d'intégration numérique. Les méthodes d'intégration se classent en deux grandes familles : les méthodes explicites et les méthodes implicites. Pour les schémas explicites les inconnues au temps t_{n+1} dépendent seulement des inconnues au temps t_n . Pour les schémas implicites il y a relation implicite des inconnues au temps t_{n+1} :

$$y_{n+1} = y_n + \phi(t_n, y_n, y_{n+1}, h_n) \quad (2.74)$$

où ϕ dépend de la méthode utilisée. On classe ensuite les schémas d'intégration suivant l'ordre du développement de Taylor des déplacements et des vitesses. Par exemple les schémas de Newmark reposent sur un développement à l'ordre 2. En présence de contact avec frottement et usure, des impacts peuvent exister. Il y a une discontinuité des vitesses relatives normales. Comme il y a non-régularité, l'accélération ne peut plus être utilisée dans les approximations et un schéma d'ordre 1 s'impose. Les travaux de Khenous [114] sur la stabilité des schémas nous incite à utiliser la famille de schéma de la θ - méthode. Cette méthode est modifiée pour le contact et l'usure en suivant les travaux de Lorang [142] et Strömberg [222].

Nous proposons dans ce paragraphe un schéma d'intégration numérique basé sur le schéma de la θ - méthode pour intégrer (2.73) en temps.

On intègre (2.73) entre t_n et t_{n+1}

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}^{n+1} - \dot{\mathbf{U}}^n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{K}\mathbf{U} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}_{ex} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_N dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_T dt, \quad (2.75)$$

Une θ -méthode est utilisée pour approcher les intégrales sur $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt = h(\theta f^{n+1} + (1-\theta)f^n), \quad \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \quad (2.76)$$

On effectue une implication des efforts de contact au temps t_{n+1} :

$$\mathbf{R}_N^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_N dt, \quad \mathbf{R}_T^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_T dt. \quad (2.77)$$

On introduit (2.76) et (2.77) dans (2.75) ce qui donne la mise à jour des quantités cinématiques à t_{n+1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eq} \dot{\mathbf{U}}^{n+1} &= \mathbf{F}_{eq}(\mathbf{U}^n, \dot{\mathbf{U}}^n, \theta, h, \mathbf{F}_{ex}^{n+1}, \mathbf{F}_{ex}^n) + h\mathbf{R}_N^{n+1} + h\mathbf{R}_T^{n+1}, \\ \mathbf{R}_N^{n+1} &= \text{Proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_N^{n+1} + \epsilon_N(\mathbf{U}_N^{n+1} - \mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{G})), \\ \mathbf{R}_T^{n+1} &= \text{Proj}_{\mathcal{F}(\mathbf{R}_N^{n+1})}(\mathbf{R}_T^{n+1} + \epsilon_T \mathbf{U}^{n+1}), \end{aligned} \quad (2.78)$$

avec

$$\mathbf{K}_{eq} = \mathbf{M} + h^2\theta^2\mathbf{K} + h\theta\mathbf{C},$$

$$\mathbf{F}_{eq} = -h\mathbf{K}\mathbf{U}^n + (\mathbf{M} - h(1-\theta)(\mathbf{C} + h\theta\mathbf{K}))\dot{\mathbf{U}}^n + h(\theta\mathbf{F}_{ex}^{n+1} + (1-\theta)\mathbf{F}_{ex}^n).$$

Les déplacements sont mis à jour avec :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + h(\theta \dot{\mathbf{U}}^{n+1} + (1-\theta)\dot{\mathbf{U}}^n). \quad (2.79)$$

Nous avons formulé le problème en vitesse il aurait été possible de le formuler en déplacement en remplaçant $\dot{\mathbf{U}}^{n+1}$ par son expression par rapport à \mathbf{U}^{n+1} , \mathbf{U}^n et $\dot{\mathbf{U}}^n$. Le schéma d'intégration ainsi formulé est un schéma implicite. Khenous [114] a mené une étude sur la stabilité de ce schéma, il montre que le schéma est stable pour $\theta \geq \frac{1}{2}$. Malheureusement le schéma n'est pas conservatif et il peut être très dissipatif. Pour $\theta = \frac{1}{2}$ le schéma est conservatif. Mais si la résolution des forces normales de contact n'est pas exacte au moment de l'impact, l'énergie peut augmenter d'une façon brutale, le schéma devient instable pour $\theta = \frac{1}{2}$. Comme nous le verrons ce comportement peut se produire avec l'utilisation de la méthode des lagrangiens dynamiques pour la résolution de (2.78).

L'équation de la cinétique d'usure est intégrée de la façon suivante :

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^n + h\mathbf{K}_w \mathbf{R}_N^{n+1} \|\dot{\mathbf{U}}_T^{n+1}\| \quad (2.80)$$

avec $\mathbf{K}_w = k_w \Delta^{-1} \mathbf{L}_N^{-1}$ la matrice d'intensité d'usure aux nœuds de contact. Δ est la matrice des poids des nœuds de contact et dépend du maillage.

A chaque pas de temps il faut trouver les forces de contact, nous allons présenter les méthodes qui permettent de trouver ces forces de contact avec les méthodes de régularisation présentées dans la section précédente 2.2.3. À la section 2.4, un exemple illustrera l'utilisation du schéma présenté ici et les difficultés numériques rencontrées.

2.3 Stratégies de résolution des problèmes de contact

La résolution du problème (2.78) peut-être envisagée sous différents angles suivant la régularisation ou la formulation équivalente des conditions de contact employées. Nous divisons les stratégies de résolution en grandes familles : les méthodes des multiplicateurs de Lagrange, les méthodes par projection, la programmation linéaire complémentaire et les lagrangiens augmentés avec méthode de Newton, d'Uzawa ou de lagrangien dynamique. Une revue détaillée des stratégies de résolution est faite dans [24, 237]. Pour toutes les stratégies présentées ci-après la première étape consiste à condenser le système sur les nœuds de contact en calculant le complément de Schur. Cela permet de réduire la taille du système non-linéaire à résoudre.

2.3.1 Les multiplicateurs de Lagrange

Les méthodes des multiplicateurs de Lagrange rajoutent des inconnues qui sont les multiplicateurs liés aux forces de contact. Différentes stratégies sont envisageables. La méthode des contraintes actives [237] en fait partie. Dans le cas d'un problème de contact unilatéral sans frottement, la méthode consiste à définir les nœuds dont le multiplicateur de Lagrange est positif comme actifs. On résout alors un problème linéaire qui a la forme suivante [237] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_T(\mathbf{U}_m, \boldsymbol{\lambda}_m) & {}^t\mathbf{C}^c(\mathbf{U}_m) \\ \mathbf{C}^c(\mathbf{U}_m) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{U}_{m+1} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_{m+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G(\mathbf{U}_m, \boldsymbol{\lambda}_m) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

où m est le numéro de l'itération de définition du domaine actif, $\boldsymbol{\lambda}_m$ le multiplicateur de Lagrange, \mathbf{K}_T la raideur tangente, $G(\mathbf{U}_m, \boldsymbol{\lambda}_m)$ le vecteur résidu et $\mathbf{C}^c(\mathbf{U}_m)$ contient les contraintes actives.

Dans le cas courant de contact sans frottement, quelques itérations suffisent à atteindre la convergence. Dans le cas où la zone de contact est maillée grossièrement la méthode peut osciller entre décollement et contact à l'extrémité de la zone de contact. Il faut raffiner le maillage pour éviter cette oscillation. Pour les très gros systèmes la méthode peut devenir très coûteuse puisqu'il faut recalculer la matrice de raideur à chaque itération.

2.3.2 Les méthodes par projection

Pour la résolution du problème (2.78), problème de minimisation sous contrainte, on peut utiliser des méthodes de projection. Elles s'appliquent à toutes les méthodes itératives de résolution de système linéaire : Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation, gradient conjugué... La méthode itérative sur-relaxée entraîne un nombre très important d'itérations, mais chaque itération est très simple à calculer. Cette méthode converge assez lentement comparée à d'autres méthodes comme observé dans [31], par contre elle est facile à implémenter. Jourdan *et al.* [108] utilisent une variante basée sur une méthode itérative de type Gauss-Seidel. Raous [197] utilise aussi un algorithme de Gauss-seidel non-linéaire avec une procédure d'Aitken qui évite la détermination d'un paramètre optimal de relaxation.

Une approche consiste à formuler le problème de contact sous la forme d'un problème dual. On utilise la relation $\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} - {}^t\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda})$ Le problème (2.78) devient :

$$\text{Trouver } \boldsymbol{\lambda} \text{ tel que } \min_{\boldsymbol{\lambda} \geq 0} \mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}) \quad (2.82)$$

où :

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^t (\mathbf{G} - \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}) + \frac{1}{2} \mathbf{F}^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$$

\mathbf{B} est la matrice booléenne des nœuds susceptibles d'être en contact.

L'intérêt d'utiliser cette expression est que l'opérateur obtenu présente un meilleur conditionnement que son pendant primal. Pour résoudre ce problème on peut utiliser un algorithme de Gradient Conjugué Projecté (GCP) [225]. L'algorithme du GCP est issu du domaine de l'optimisation convexe où il est utilisé pour résoudre des problèmes de minimisation sous contraintes d'inégalités linéaires. Il se prête donc bien au cas du contact unilatéral. L'avantage de l'algorithme du GCP est qu'il manipule des grandeurs primales lors de la résolution bien que la formulation soit duale. Cela facilite son implémentation dans un code éléments finis, d'ailleurs la méthode est implémentée dans le code éléments finis Code-Aster [41]. Il permet de résoudre des problèmes de contact unilatéral avec des centaines de milliers de nœuds en contact. Les détails de l'algorithme se trouvent dans les travaux de Tardieu [225].

Des modifications de la méthode FETI [61] (Finite Element Tearing and Interconnect) permettent de résoudre les problèmes de contact avec frottement. La méthode FETI calcule des gros systèmes par résolution parallèle dans chaque sous domaine. Elles partent aussi d'une formulation duale mais diffèrent dans la stratégie de résolution par rapport au GCP. Dureisseix [58] a proposé une méthode nommée FETI-C pour résoudre les problèmes de contact unilatéral sans frottement. La résolution utilise un solveur de type gradient conjugué. Dostal [55] a proposé une méthode de type FETI pour la résolution des problèmes de contact avec frottement.

Les méthodes par projection restent complexes à mettre en œuvre et il existe peu de travaux sur le contact avec frottement. Dans le cadre d'une résolution en fréquentiel comme proposée au chapitre 3 il n'est pas possible d'utiliser des méthodes par projection.

2.3.3 Le problème complémentaire linéaire

Une autre méthode bien connue en optimisation avec conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker est basée sur la formulation du contact comme un problème complémentaire linéaire. Klarbring et Bjorkman [122] ont utilisé cette méthode pour résoudre un problème 3D de contact avec frottement. Dans le cas d'un contact 2D les conditions de Kuhn-Tucker liées au cône de Coulomb s'écrivent sous la forme suivante [31] :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_T \in C(\mathbf{R}_N) &= \{ \mathbf{P}_T, \phi_m(\mathbf{P}_T, \mathbf{R}_N) \geq 0, m = 1, 2 \}, \\
 \phi_1(\mathbf{P}_T, \mathbf{R}_N) &= -\mathbf{P}_T + \mu \mathbf{R}_N, \\
 \phi_2(\mathbf{P}_T, \mathbf{R}_N) &= \mathbf{P}_T + \mu \mathbf{R}_N, \\
 \lambda_m \geq 0, \phi_m &\geq 0, \lambda_m \phi_m = 0, \quad m = 1, 2.
 \end{aligned}
 \tag{2.83}$$

La méthode Lemke permet de résoudre le système (2.83). Les détails de cette méthode se trouvent dans [31]. Chabrand [31] a montré sur un test que cette méthode était très performante. Toutefois cette méthode est compliquée à implémenter car elle nécessite la condensation du problème. Elle est très rapide mais elle peut certaines fois présenter des difficultés de convergence quand le nombre de ddls devient élevé. Si le nombre de degrés de liberté est très important elle ne convergera pas.

Remarques Nous avons présenté quelques méthodes utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Ces méthodes n'ont pas été étudiées plus en détail puisqu'en effet elles sont inutilisables dans des approches fréquentielles. Elles font appel aux états de contact, or dans une approche fréquentielle l'état de contact est indéfini en fréquence et il faut repasser en temporel pour le connaître, où il varie durant la période.

Les méthodes utilisant des lagrangiens augmentés nous sont apparues plus adaptées. Quant aux méthodes par pénalisation ou y ressemblant elles ne posent pas de difficulté puisqu'elles nécessitent seulement un solveur non-linéaire de type Newton (Newton-Raphson, quasi-Newton, etc) mais ajoutent un paramètre supplémentaire impactant la solution.

2.3.4 Les lagrangiens augmentés et méthodes du point fixe

On reprend le problème (2.78) avec la projection des efforts de contact définie dans (2.72). On omet l'indice $n + 1$ lié au pas de temps. L'algorithme du point fixe sur les forces de contact peut être exprimé comme suit :

$$\begin{array}{l}
 (0) \quad R_N^0, R_T^0 \\
 (1) \quad \text{Calculer } \dot{\mathbf{U}}^k \text{ solution de} \\
 \mathbf{K}_{eq} \dot{\mathbf{U}}^k = \mathbf{F}_{eq} + \mathbf{R}_N^k + \mathbf{R}_T^k \\
 \mathbf{W}^k = \mathbf{G}_{eq} \\
 (2) \quad \text{Calculer } \mathbf{R}_N^{k+1} \text{ et } \mathbf{R}_T^{k+1} \text{ solution de} \\
 \mathbf{R}_N^{k+1} = \text{Proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_N^k + \epsilon_N(\mathbf{U}_N^k - \mathbf{W}^k - \mathbf{G})), \\
 \mathbf{R}_T^{k+1} = \text{Proj}_{\mathcal{F}(\mathbf{R}_N^k)}(\mathbf{R}_T^k + \epsilon_T \mathbf{U}_T^k). \\
 (3) \quad \text{Revenir à (1) jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit vérifié.}
 \end{array} \tag{2.84}$$

Une amélioration de cette méthode consiste à résoudre un problème non-linéaire en $\dot{\mathbf{U}}$ avec les forces de contact \mathbf{R}_c^k où k est l'itération du point fixe.

$$\begin{array}{l}
 (0) \quad R_N^0, R_T^0 \text{ données} \\
 \quad \quad k = 0 \\
 (1) \quad \text{Trouver } \dot{\mathbf{U}}^k \text{ solution de (Newton-Raphson)} \\
 \mathbf{K}_{eq} \dot{\mathbf{U}}^k = \mathbf{F}_{eq} + \text{Proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_N^k + \epsilon_N(\mathbf{U}_N^k - \mathbf{W}^k - \mathbf{G})) + \text{Proj}_{\mathcal{F}(\mathbf{R}_N^k)}(\mathbf{R}_T^k + \epsilon_T \mathbf{U}_T^k). \\
 \mathbf{W}^k = \mathbf{W}_n^k + \mathbf{K}_w \text{Proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_N^k + \epsilon_N(\mathbf{U}_N^k - \mathbf{W}^k - \mathbf{G})) \cdot \|\dot{\mathbf{U}}_T^k\| \\
 (2) \quad \text{Calculer } \mathbf{R}_N^{k+1} \text{ et } \mathbf{R}_T^{k+1} \text{ avec} \\
 \mathbf{R}_N^{k+1} = \text{Proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_N^k + \epsilon_N(\mathbf{U}_N^k - \mathbf{W}^k - \mathbf{G})), \\
 \mathbf{R}_T^{k+1} = \text{Proj}_{\mathcal{F}(\mathbf{R}_N^k)}(\mathbf{R}_T^k + \epsilon_T \mathbf{U}_T^k). \\
 (3) \quad \text{Revenir à (1) jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit vérifié.}
 \end{array} \tag{2.85}$$

L'algorithme (2.85) demande moins d'itérations que la méthode (2.84) mais chaque itération est plus coûteuse.

2.3.5 Les lagrangiens dynamiques

Nacivet [171] a proposé une adaptation de (2.85) pour étudier la dynamique d'un problème de contact avec frottement pour le modèle éléments finis d'une structure en fréquentiel. Cette méthode peut aussi être utilisée pour un problème quasi-statique en temporel lorsque des éléments de contact nœud-point sont utilisés. Dans ce cas, on utilise l'équation du mouvement associée au corps esclave pour définir les lagrangiens :

$$\mathbf{R}_c^k = \frac{1}{h} \left(\mathbf{F}_{eq} - \mathbf{K}_{eq} \dot{\mathbf{U}}_1^k + \epsilon \left(\mathbf{U}^k - \mathbf{W} - \mathbf{G} - \mathbf{X}_r^k \right) \right) \tag{2.86}$$

L'idée est de prédire les efforts de contact avec le terme :

$$\mathbf{R}_{pre}^k = \frac{1}{h} \left(\mathbf{F}_{eq_1} - \mathbf{K}_{eq} \dot{\mathbf{U}}_1^k + \epsilon \left(\mathbf{U}^k \right) \right) \quad (2.87)$$

et de trouver le terme de correction \mathbf{X}_r^k qui permet de respecter les conditions de contact. k fait référence au numéro de l'itération du solveur non-linéaire de type Newton. La méthode sera détaillée dans le chapitre 3.

2.3.6 Méthode de Newton Généralisée

La méthode de Newton Généralisée (semi-régulière) a été proposée par Alart et Curnier dans [3] pour traiter le problème de Coulomb. Des développements peuvent être trouvés dans [34]. Strömberg a utilisé cette méthode pour résoudre le problème d'usure par fretting [221]. Le système algébrique non-linéaire à résoudre s'écrit :

$$\mathcal{H}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{KU} - \mathbf{F} - \mathbf{L}_N \mathbf{P}_N - \mathbf{L}_T \mathbf{P}_T \\ \mathcal{H}_N \\ \mathcal{H}_T \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.88)$$

avec $\mathbf{X} = (\mathbf{U}, \mathbf{P}_N, \mathbf{P}_T)$ et

$$\mathcal{H}_N = \frac{1}{\epsilon_N} \left(\mathbf{P}_N - \text{Proj}_{\mathbb{R}^+} \left(\mathbf{P}_N + \epsilon_N \mathbf{L}_N (\mathbf{U}_N - \mathbf{W} - \mathbf{G}) \right) \right), \quad (2.89)$$

$$\mathcal{H}_T = \frac{1}{\epsilon_T} \left(\mathbf{P}_T - \text{Proj}_{\mathcal{F}(\mathbf{P}_N)} \left(\mathbf{P}_T + \epsilon_T \mathbf{L}_T \mathbf{U}_T \right) \right). \quad (2.90)$$

La fonction $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ est lipschitzienne et \mathcal{C}^1 par morceaux. L'algorithme de la méthode de Newton semi-régulière est présenté sur l'algorithme 1.

Il existe différentes manières de faire la recherche linéaire. Stromberg *et al.* [221] proposent une manière simple très proche de celle utilisée par Khenous [114]. Nous avons utilisé un solveur non-linéaire de type hybride Powell [195] qui utilise une méthode par région de confiance où l'ordre des étapes (2) et (3) est inversé.

L'expression de $\mathcal{H}(\mathbf{Z}^k)$ peut être modifiée pour avoir une variante plus symétrique. Cela est établi en utilisant la définition suivante :

$$\mathcal{H}(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{KU} - \mathbf{F} - \mathbf{P}_N - \text{Proj}_{\mathbb{R}^+} \left(\mathbf{P}_N + \epsilon_N \mathbf{B}_N (\mathbf{U}_N - \mathbf{W} - \mathbf{G}) \right) - \text{Proj}_{\mathcal{F}(\mathbf{P}_N)} \left(\mathbf{P}_T + \epsilon_T \mathbf{B}_T \mathbf{U} \right) \\ \mathcal{H}_N \\ \mathcal{H}_T \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

Khenous [114] a conclu que la symétrisation n'influe pas sur la convergence de la méthode de Newton généralisée. Une forme symétrique permet l'utilisation de certaines méthodes itératives (gradient conjugué par exemple) pour résoudre le problème linéaire dans le solveur de Newton. Ce qui peut être très intéressant pour les structures avec beaucoup de ddls.

Bilan

Nous avons présenté les stratégies de résolutions des problèmes de contact utilisant la méthode des lagrangiens augmentés. Cette méthode est facile à mettre en œuvre et assure une bonne convergence. S. Nacivet a montré dans sa thèse que la méthode des lagrangiens dynamiques convergeait plus

(1) \mathbf{X}^0 est donné

Pour k de 0 à Convergence **faire**

(2) Trouver la direction de recherche \mathbf{d} telle que :

$$\mathcal{H}(\mathbf{X}^k) + \mathcal{H}'(\mathbf{X}^k; \mathbf{d}) = 0$$

(3) Faire une recherche linéaire dans la direction \mathbf{d} pour trouver α ,

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \alpha \mathbf{d} \text{ tel que :}$$

$$\alpha = \arg \min \mathcal{H}(\mathbf{X}^k + \alpha \mathbf{d})$$

(4) **Si** ($\|\mathcal{H}(\mathbf{X}^{k+1})\| \leq \text{erreur}$) **Alors**

 | Arrêter

Sinon

 | Retourner à (2)

Fin Si

Fin Pour

Algorithme 1. Implémentation de la méthode de Newton généralisé (GNM)

vite que la méthode des lagrangiens augmentés avec algorithme de Uzawa ou solveur de Newton généralisé. Nous chercherons donc en priorité à utiliser cette méthode. Nous allons présenter dans la section suivante un exemple d'utilisation du schéma d'intégration temporelle présenté dans la section précédente couplé à la méthode des lagrangiens dynamiques sur un exemple de contact avec frottement 2D. Cette exemple sert à justifier le choix fait dans cette thèse d'utiliser des méthodes fréquentielles pour résoudre le problème de contact en dynamique.

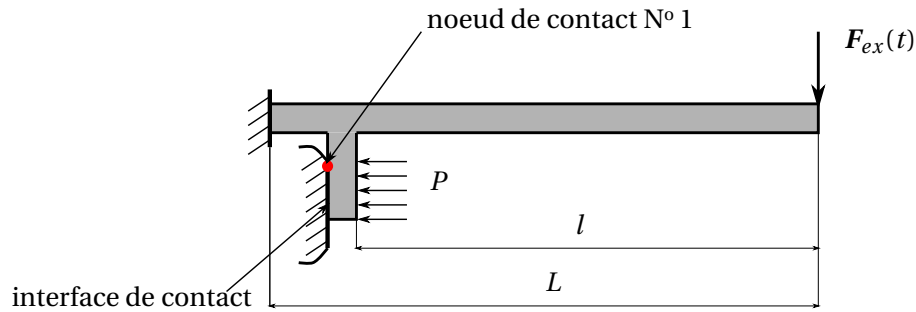


FIGURE 2.10. Modèle d'une poutre avec frotteur

Longueur de la poutre	: $L = 200$ mm	Nombre de nœuds en contact	: $n_c = 10$
Épaisseur de la poutre	: $a = 5$ mm	Coefficient de frottement	: $\mu = 0.1$
Profondeur de la poutre	: $b = 100$ mm	Facteur d'amortissement	: $\alpha = 0, \beta = 5$
Position du frotteur	: $l = 160$ mm	Niveau de l'excitation	: $F_{ex} = 100$ N
Longueur du frotteur	: $l_f = 5$ mm	Fréquence d'excitation	: 219 Hz

TABLE 2.1. Tableau des caractéristiques de la poutre avec frotteur

2.4 Exemple d'applications

Nous traitons ici un exemple simple de poutre avec frotteur. Le modèle est discrétisé par éléments finis quadrilatères à 8 ddl par élément. Le comportement du frotteur au niveau de l'interface de contact est bidimensionnel : contact normal et tangentiel. Le frotteur est constitué de 10 nœuds en contact. Le coefficient de frottement est $\mu = 0.1$. Dans cette exemple le frotteur ne s'use pas. La poutre est excitée à son extrémité à la fréquence $f = 219\text{Hz}$, valeur de la fréquence de résonance du premier mode de flexion.

Le problème est discrétisé en temporel en utilisant une θ -méthode. Les efforts de contact sont implicites au temps t_{n+1} . Le système non-linéaire obtenu à chaque pas de temps est résolu en utilisant la stratégie par lagrangien dynamique et un solveur de Newton-Raphson.

Nous allons montrer les résultats obtenus pour deux valeurs de θ : $\theta = 0.51$ et $\theta = 1$. Nous n'avons pas fixé $\theta = 0.5$, en effet lors de nos test le schéma devenait instable quand θ valait 0.5.

Pour chaque valeur de θ trois pas de temps de discrétisation temporelle sont étudiés, correspondant à 1024, 4096 et 16384 pas de temps par cycle.

Les figures 2.11 montrent le déplacement en bout de poutre. La figure 2.11b montre que le schéma d'intégration apporte de l'amortissement numérique quand $\theta = 1$. Il faut un pas de temps fin pour rester proche de la solution. Nous allons regarder le comportement au niveau de l'interface de contact. Les résultats obtenus pour chaque valeur de θ sont comparés. L'amortissement numérique a pour effet de modifier le comportement dans la zone de contact. Les figures 2.12 montrent que les déplacements tangentiels sont très différents suivant que le calcul est mené avec $\theta = 0.51$ ou $\theta = 1$ pour 1024 pas de temps par période. Il faut augmenter le pas de temps pour avoir un résultat convergé avec $\theta = 1$. Le décalage de la solution tangentielle pour $\theta = 1$ est du à une mauvaise prédiction des pertes de contact (cf. figure 2.13b). Les amplitudes des décollements diminuent de plus en plus.

Intéressons-nous maintenant aux vitesses relatives à l'interface. La figure 2.14b montre que le comportement de la vitesse est stable. Par contre le comportement de la vitesse représentée sur la figure 2.14a est très oscillant. Même en diminuant le pas de temps, les oscillations ne diminuent pas. La vitesse est

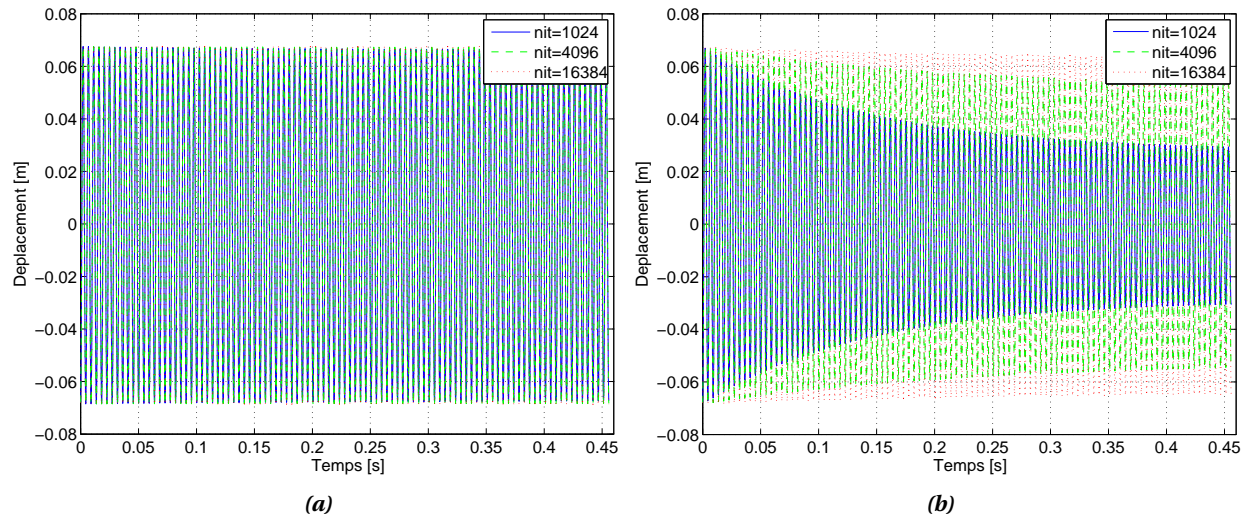


FIGURE 2.11. Déplacement suivant y en bout de poutre : (a) $\theta = 0.51$ et (b) $\theta = 1$

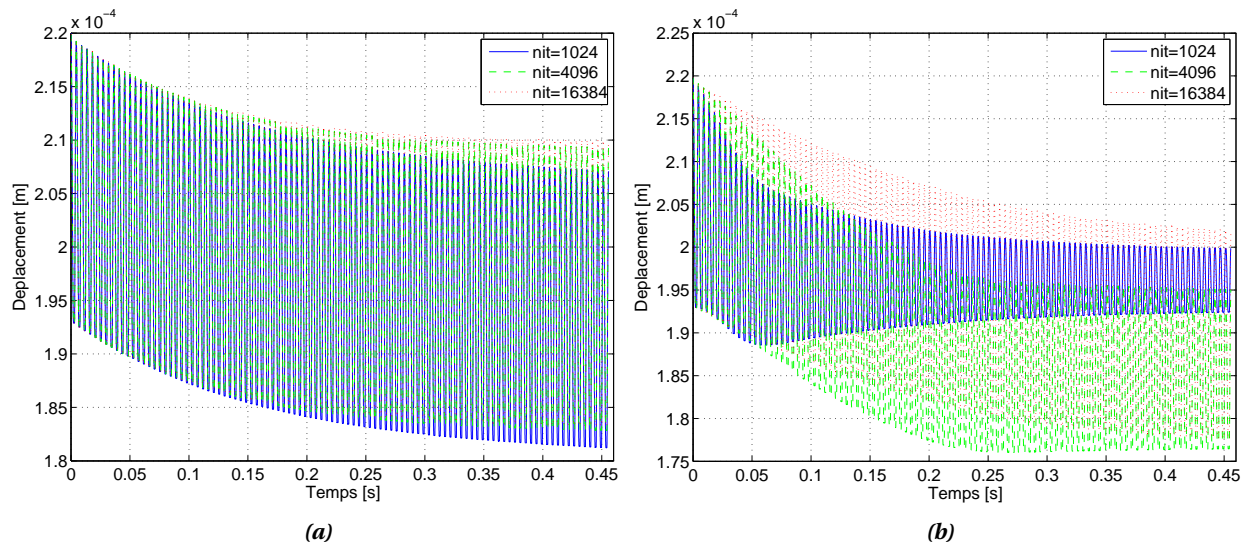


FIGURE 2.12. Déplacement tangentiel au nœud de contact 1 : (a) $\theta = 0.51$ et (b) $\theta = 1$

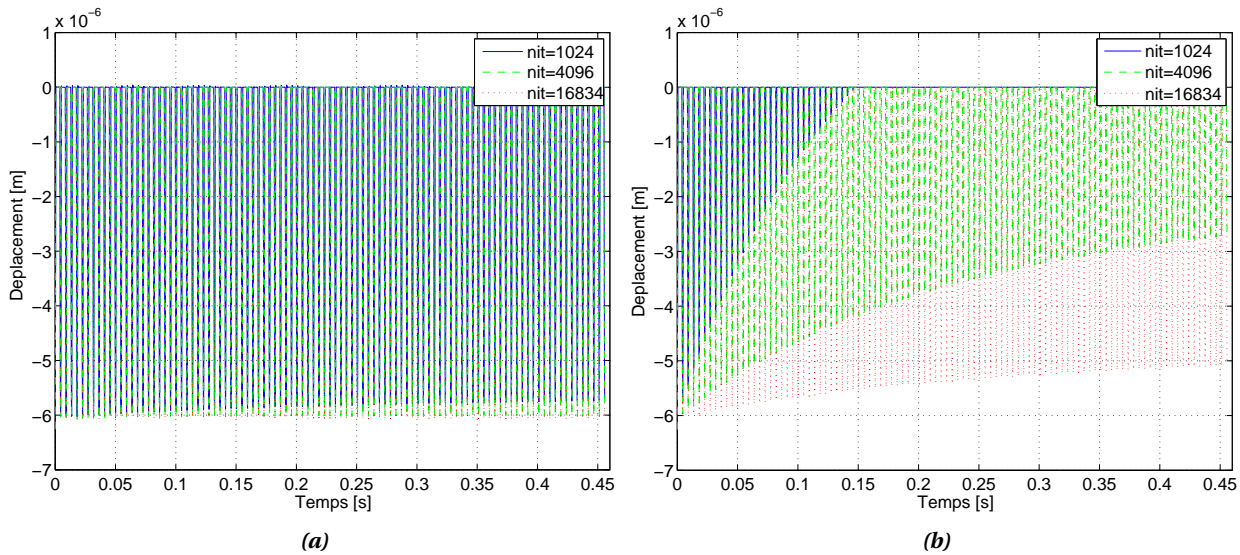


FIGURE 2.13. Déplacement normal au nœud de contact 1 : (a) $\theta = 0.51$ et (b) $\theta = 1$

une donnée importante pour le calcul du taux d'usure. Il sera difficile de bien prédire le taux d'usure avec un comportement de ce type. Sur les figures 2.15 nous avons tracé les forces de contact normales pendant les dix premières périodes. Nous avons des évolutions correctes avec les deux valeurs θ .

Ce petit exemple a montré l'application d'un schéma d'intégration temporel. Suivant les valeurs caractéristiques du schéma choisies les résultats diffèrent. Un des problèmes rencontrés dans l'intégration temporelle des systèmes avec contact et frottement est que soit le schéma oscille soit il est dissipatif, ce qui oblige à prendre un pas de temps très fin. Cela a pour effet de rendre le calcul long. Nous allons voir dans le chapitre 3 que les méthodes fréquentielle basée sur la résolution d'un système algébrique non-linéaire sont plus facile à mettre en œuvre et contournent ces difficultés.

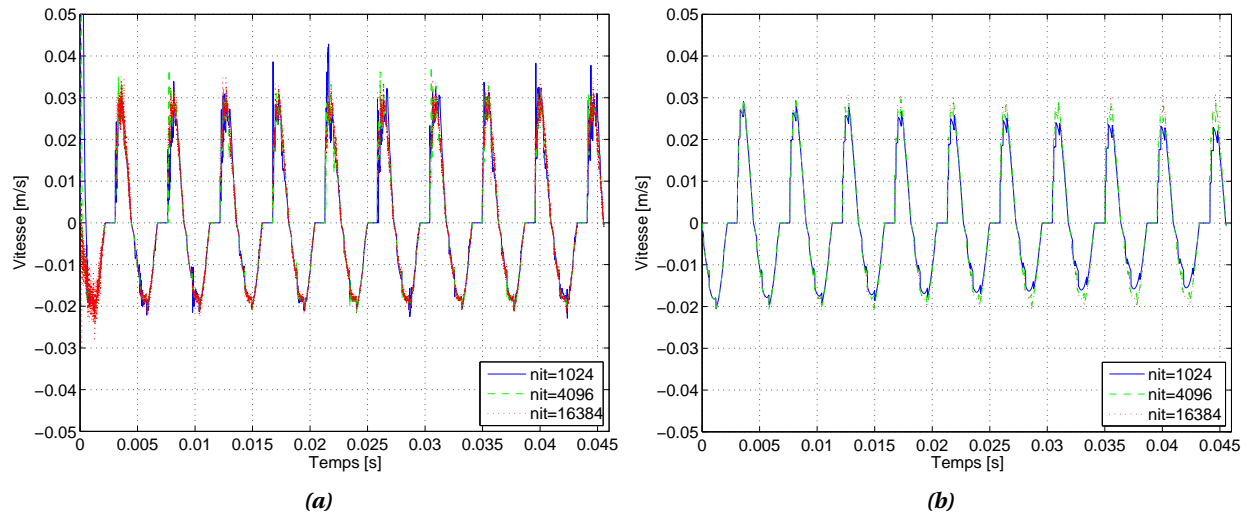


FIGURE 2.14. Vitesse relative tangentielle au nœud de contact 1 pendant les dix premières périodes : (a) $\theta = 0.51$ et (b) $\theta = 1$

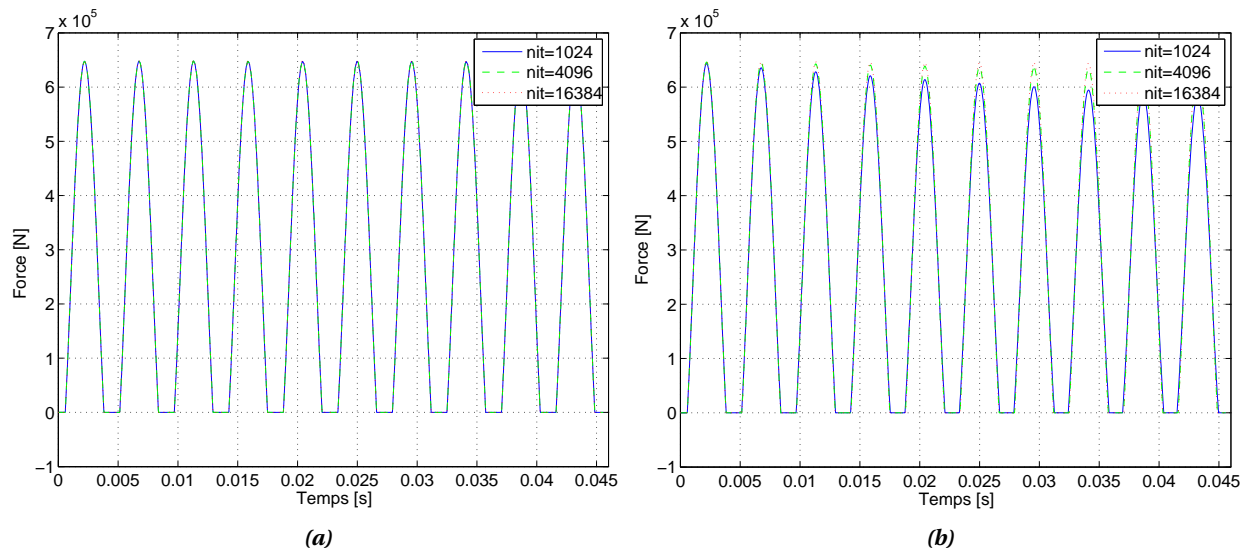


FIGURE 2.15. Force de contact normale au nœud de contact 1 pendant les dix premières périodes : (a) $\theta = 0.51$ et (b) $\theta = 1$

2.5 Conclusions

Ce chapitre a présenté la formulation d'un problème de contact avec frottement et usure. Le contact unilatéral suit la loi de Signorini et le frottement suit la loi de Coulomb. L'utilisation des principes de la thermodynamique permet d'inclure la loi d'Archard pour la modélisation de l'usure.

Le problème variationnel du contact en dynamique avec usure est discrétisé par éléments finis. L'interface de contact demande un traitement particulier. Nous avons présenté différentes approches pour traiter les forces de contact. La résolution du problème non-linéaire obtenu peut être faite par différentes méthodes. Nous avons donné un aperçu de ces méthodes. Certaines d'entre elles seront utilisées au chapitre 3 pour la résolution du problème de contact en fréquentiel.

Un exemple numérique a montré l'utilisation de schémas d'intégration numérique pour le contact. Ce type de stratégie est difficile à mettre en place, cette remarque nous a conduit à privilégier les méthodes fréquentielles pour traiter l'évolution de l'usure sous chargement dynamique.

Chapitre 3

Dynamique non-linéaire des structures en contact sans usure

Ce chapitre présente les méthodes qui permettent de trouver la réponse dynamique d'un système non-linéaire. Nous nous plaçons dans l'optique qu'une solution périodique existe et cherchons à trouver cette solution. La solution périodique trouvée nous permettra dans le cas du contact avec frottement de calculer le taux d'usure sur un cycle, ce qui sera le point de départ des méthodes de calcul de cinétique d'usure exposées au chapitre 4. Les méthodes proposées sont adaptées pour des systèmes de grande taille comme ceux rencontrés dans l'industrie. Dans une première partie nous rappelons des méthodes existantes et leurs domaines d'application lié à notre problème. Nous traitons les systèmes non-autonomes et autonomes. Pour traiter les systèmes autonomes, la méthode basée sur les modes non-linéaires complexes développée par D. Laxalde et al. [131, 132] est présentée. Elle sera utilisée dans le chapitre 4. Nous expliquons le choix fait pour la réduction de modèle en utilisant différentes méthodes de synthèse modale. La deuxième partie du chapitre présente les méthodes pour calculer les forces de contact en fréquentiel. Différentes formulations présentées dans le chapitre 2 sont reprises pour traiter les conditions de contact. Les stratégies proposées reposent sur la méthode DLFT (Dynamic Lagrangian Frequency-Time) basée sur une prédiction en fréquentiel corrigée en temporel. Enfin en troisième partie nous présentons les améliorations proposées pendant la thèse pour traiter des systèmes de taille de plus en plus grande tout en gardant des temps de calcul raisonnables. Des exemples numériques illustreront les méthodes proposées.

3.1 Généralités sur les systèmes non-linéaires dynamiques

Nous allons présenter dans cette section les principes de l'étude des systèmes dynamiques non-linéaire dans le cadre d'une recherche de solutions périodiques. La présentation est divisée en deux grandes parties avec tout d'abord un rappel des méthodes utilisables pour l'étude des systèmes non-autonomes et une deuxième partie sur l'étude des systèmes autonomes. Cette présentation permettra de comprendre pourquoi l'équilibrage harmonique nous est apparu comme la méthode la plus adaptée pour rechercher la réponse périodiques de système avec non-linéarité de contact et de frottement.

3.1.1 Système non-linéaire non-autonome

L'équation différentielle qui régit le système dynamique correspond à l'expression suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_{ex}(t) + \mathbf{F}_{NL}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t) \quad (3.1)$$

L'excitation $F_{ex}(t)$ est périodique en temps. Une solution $\mathbf{U}(t)$ de (3.1) est dite périodique s'il existe une constante T , appelé période telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{U}(t+T) = \mathbf{U}(t) \quad (3.2)$$

3.1.2 Méthodes de recherche de solutions périodiques

Nous avons expliqué au chapitre 1 que la cinétique d'usure sous chargement dynamique possédait deux échelles de temps bien distinctes. Nous considérons que les méthodes de solutions périodiques sont adaptées pour calculer la réponse dynamique sur un cycle. Nous allons donc présenter ces méthodes, selon les approches qu'elles utilisent : calculs dans le domaine temporel, approches par perturbation et calculs dans le domaine fréquentiel.

3.1.2.1 Méthodes dans le domaine temporel

Intégration directe Les méthodes temporelles ont déjà été entrevues au chapitre précédent. L'intégration temporelle constitue un outil d'analyse qui permet de traiter les équations différentielles directement. Les méthodes les plus répandues en dynamique des structures sont celles des différences finies centrées, de Newmark, de Wilson, ainsi que de Runge-Kutta [74]. L'avantage principal de l'approche par l'intégration directe réside dans le fait que peu d'hypothèses sont faites. Ces méthodes permettent d'obtenir les réponses transitoires des équations du mouvement. Utilisées pour déterminer les réponses stationnaires, elles peuvent s'avérer très coûteuses en temps de calcul. Comme nous ferons l'hypothèse de périodicité de la solution nous préférons nous tourner vers d'autres méthodes. Ces méthodes servent de référence pour valider les méthodes de calcul fréquentielles.

Méthode de tir En analyse numérique, la méthode de tir est une méthode pour résoudre les problèmes avec conditions aux limites (« boundary value problem ») en les réduisant à un problème aux conditions initiales [83]. En dynamique non-linéaire, on utilise une méthode d'intégration entre les deux limites qui sont $t = 0$ et $t = T$ avec T période de la réponse périodique. T peut-être une inconnue du système, cela rajoute une équation. En variable d'état le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y(T) = y_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec $y = [u, \dot{u}]$. La résolution se ramène à un problème algébrique non-linéaire souvent traitée par une méthode de type Newton. On cherche à annuler la fonction H défini par :

$$H(y_0) = y(T, 0, y_0) - y_0 \quad (3.4)$$

Pour calculer H il faut intégrer sur la période l'équation (3.3). La méthode de résolution de type Newton nécessite le calcul de la matrice jacobienne.

$$\frac{\partial H}{\partial y_0} = \frac{\partial y}{\partial y_0}(T, 0, y_0) - I \quad (3.5)$$

Celle-ci est obtenue grâce à une intégration temporelle entre $t = 0$ et $t = T$. En effet, on peut écrire une équation différentielle sur le terme $\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, 0, y_0)$ à chaque temps t tel que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t, t_0, y_0)) \frac{\partial y}{\partial y_0}(t, t_0, y_0) \quad (3.6)$$

La matrice jacobienne peut aussi être obtenue par différences finies mais cela nécessite d'intégrer n fois le système sur la période T , avec n la taille de y . L'obtention du régime stationnaire peut s'avérer très longue pour des systèmes faiblement amortis. Nous verrons dans le chapitre 4 que la méthode de tir peut être utilisée pour trouver l'état stationnaire d'un système avec fretting-wear en condition de glissement partiel. Toutefois les expériences menées sur les méthodes de tir dans le cadre de cette thèse ou par d'autres auteurs montrent que la méthode de tir devient très vite prohibitive en temps de calcul par rapport à des approches de type Galerkin. Il est possible d'étendre l'approche à une méthode de tir multiple [83] pour réduire les temps de calcul. Le principe de la méthode de tir multiple est de diviser la période en sous-domaines temporels et d'effectuer une méthode tir sur les sous-domaines temporels. La mise en place d'une telle approche est particulièrement adaptée dans le cas d'utilisation de supercalculateurs à architecture parallèle.

Méthode des éléments finis en temps La méthode des éléments finis [240] habituellement utilisée pour résoudre le problème spatial peut être étendue à la résolution du problème temporel. La formulation faible du principe d'Hamilton et l'introduction de fonctions adéquates permet de poser le problème dynamique en tant que problème d'éléments finis spatio-temporels. Le système d'équations différentielles ainsi obtenu est ramené à un problème algébrique non-linéaire de taille augmentée qui peut être résolu par une méthode de type Newton. Les forts gradients temporels liés au problème de contact unilatéral avec frottement font qu'il faut une discrétisation fine pour bien représenter l'évolution du système. La taille du système devient très vite importante et sa résolution beaucoup trop longue pour une application industrielle. Pour plus de détails le lecteur pourra se reporter aux travaux de thèse de Demailly [51]

3.1.2.2 Méthodes de perturbation

La plupart des méthodes de perturbation reposent sur l'hypothèse que les termes non-linéaires sont petits et proportionnels à un petit paramètre ϵ .

$$f_{NL} = \epsilon f(\dot{y}, y, t) \quad (3.7)$$

La solution est recherchée sous la forme d'un développement en série du terme ϵ :

$$y(t) = y_0(t) + \epsilon^0 y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + \epsilon^3 y_3(t) + \dots \quad (3.8)$$

avec $0 < \epsilon \ll 1$ et (3.8) injectée dans (3.1). L'équilibre des termes de puissances égales de ϵ donne un système d'équations qui sont résolues par récurrence. Ainsi, on dissocie le problème en une suite de problèmes correspondants aux puissances de plus en plus élevées du petit paramètre. Chaque sous problème est résolu de manière exacte (analytique) dans le cadre de petits systèmes. Pour les gros systèmes des approches numériques sont envisageables. La MAN [40] est une amélioration de ces méthodes. La mise en place de cette technique suppose que les termes non-linéaires puissent se décomposer en série suivant le paramètre ϵ . Dans le cas du contact par frottement la fonction non-linéaire est non continue et ne peut pas se décomposer en série suivant ϵ . L'utilisation des méthodes de perturbation est difficile à mettre en œuvre pour ce type de problème. Les méthodes de perturbation les plus utilisées sont [160] : la méthode de Lindstedt, la méthode de Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky, la méthode de la moyenne, la méthode des échelles multiples. Dans le cadre de cette thèse nous avons travaillé sur des approches basées sur la méthode des échelles multiples et la méthode de la moyenne pour traiter l'usure vibratoire. Notre approche est basée sur d'autres théories que celles des méthodes de perturbation.

3.1.2.3 Méthodes dans le domaine fréquentiel

Les méthodes dans le domaine fréquentiel consistent à transformer le problème temporel non-linéaire en problème algébrique non-linéaire dans le domaine fréquentiel. La plupart de ces méthodes appartiennent à la famille des méthodes de Ritz. Le principe des méthodes de Ritz repose sur l'approximation de la solution en série de fonctions dépendant du temps.

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{n=0}^N \boldsymbol{\alpha}_n y_n(t) \quad (3.9)$$

Les coefficients $\boldsymbol{\alpha}_n$ sont déterminés soit par une méthode basée sur la minimisation des résidus ou en utilisant l'orthogonalité entre les fonctions y_n dans le cas des méthodes de Galerkin. Différentes bases de fonctions sont envisageables : polynôme, exponentielle, fonctions trigonométriques. . .

Dans ce travail nous nous sommes concentrés sur les méthodes d'équilibrage harmonique, qui sont présentées dans le paragraphe suivant.

Méthode de l'équilibrage harmonique Les méthodes d'équilibrage harmonique (HBM) appartiennent à la famille des méthodes de Galerkin. La base de description est une série de Fourier :

$$U(t) = U^0 + \sum_{n=1}^{N_h} (U^{n,c} \cos(n\omega t) + U^{n,s} \sin(n\omega t)) \quad (3.10)$$

avec ω la pulsation de la réponse vibratoire. Une procédure de Galerkin est appliquée au système (3.1). On définit le vecteur des composantes fréquentielles de déplacement :

$$\tilde{\mathbf{U}} = [U^0, \dots, U^{n,c}, U^{n,s}, \dots, U^{N_h,s}]^T \quad (3.11)$$

On peut écrire l'équation (3.10) sous une forme plus compacte :

$$U(t) = \mathbf{T}(t)\tilde{\mathbf{U}} \quad (3.12)$$

L'opérateur de dérivation fréquentielle est introduit :

$$\nabla = \text{diag}(\mathbf{0}, \nabla_1, \dots, \nabla_{N_h}), \text{ avec } \nabla_n = n \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Les expressions des vitesses et des accélérations deviennent :

$$\dot{U} = \mathbf{T}(t)\nabla\tilde{\mathbf{U}}, \quad \ddot{U} = \mathbf{T}(t)\nabla^2\tilde{\mathbf{U}} \quad (3.14)$$

La procédure de Galerkin est appliquée au problème (3.1) :

$$\begin{aligned} \int_0^T (M\ddot{U} + C\dot{U} + KU + F_{NL} - F_{ex}) &= 0, \\ \int_0^T (M\ddot{U} + C\dot{U} + KU + F_{NL} - F_{ex}) \cos(n\omega t) dt &= 0, \\ \int_0^T (M\ddot{U} + C\dot{U} + KU + F_{NL} - F_{ex}) \sin(n\omega t) dt &= 0. \end{aligned}$$

On obtient le système algébrique suivant :

$$\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{F}_{NL}(\tilde{\mathbf{U}}) = \tilde{F}_{ex} \quad (3.15)$$

avec

$$\mathbf{Z} = \text{diag} \left(\mathbf{K}, \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & \omega \mathbf{C} \\ -\omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K} - (N_h \omega)^2 \mathbf{M} & N_h \omega \mathbf{C} \\ -N_h \omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - (N_h \omega)^2 \mathbf{M} \end{array} \right] \right) \quad (3.16)$$

La résolution du système (3.15) nécessite de connaître $\tilde{F}_{NL}(\tilde{\mathbf{U}})$. Différentes approches sont possibles suivant la forme de la non-linéarité.

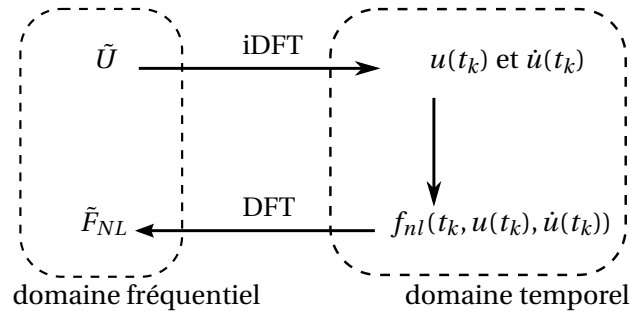


FIGURE 3.1. Technique AFT

- **L'approche analytique**, c'est l'approche la plus directe. Elle consiste à calculer directement les coefficients de Fourier des efforts non-linéaires, sachant que généralement on a leur expression explicite dans le domaine temporel en fonction du déplacement et de la vitesse. Une fois ces coefficients de Fourier déterminés, on connaît tous les termes qui interviennent dans l'équation (3.15). Elle donne alors une relation entre l'amplitude de chaque harmonique n et la pulsation d'excitation ω . La méthode est fastidieuse à mettre en œuvre et toute nouvelle non-linéarité nécessite un travail « manuel » préparatoire. Si on souhaite augmenter le nombre d'harmoniques il faut recalculer les relations entre l'amplitude de chaque harmonique n et la pulsation d'excitation ω .
- **L'équilibrage harmonique incrémental (IHB)** ou la méthode de Galerkin Newton Raphson (GNR). Ces méthodes réduisent une partie du travail analytique à réaliser. La résolution des équations de relation entre amplitude et pulsation se fait numériquement avec un algorithme itératif de Newton. Les intégrales sont évaluées numériquement.
- **L'approche temps-fréquence (Alternating Frequency Time)**. Pour pallier aux lacunes des méthodes précédentes, Ling [139] et Cameron [29] dérivent l'IHB pour en faire une méthode généralisable à tout type de non-linéarité ne nécessitant aucun développement analytique. Il s'agit de calculer les efforts non-linéaires dans le domaine temporel et ensuite de les transformer dans le domaine fréquentiel via une transformée de Fourier discrète. Urabe [230] est à notre connaissance le premier à avoir utilisé cette stratégie résumée sur le schéma 3.1. Dans cette formulation générale, l'équilibrage harmonique permet d'étudier tout type de non-linéarité sans avoir à effectuer des développements analytiques.

Dans le cadre de la thèse nous avons utilisé la méthode de l'équilibrage harmonique avec procédure temps-fréquence pour calculer les termes non-linéaires. On a donc un système d'équations algébriques non-linéaires que l'on résout par rapport à $\tilde{\mathbf{U}}$ par une méthode de type Newton. La procédure itérative de Newton s'écrit à chaque étape i :

$$\tilde{\mathbf{U}}^{i+1} = \tilde{\mathbf{U}}^i + \Delta \tilde{\mathbf{U}}^i \quad (3.17)$$

avec,

$$\Delta \tilde{\mathbf{U}}^i = - \frac{D\tilde{\mathbf{r}}^i}{D\tilde{\mathbf{U}}^i} \tilde{\mathbf{r}}^i \quad (3.18)$$

où $\tilde{\mathbf{r}}^i = \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{U}}^i + \tilde{\mathbf{F}}_{NL}(\tilde{\mathbf{U}}^i) - \tilde{\mathbf{F}}_{ex}$. $\frac{D\tilde{\mathbf{r}}^i}{D\tilde{\mathbf{U}}^i}$ peut être calculé numériquement par différence finie ou analytiquement. Si on a une expression analytique du gradient de f_{nl} (forces non-linéaires en temporel) par rapport à u ou \dot{u} (déplacement et vitesse en temporel) on utilise l'expression suivante pour calculer la matrice jacobienne :

$$\frac{D\tilde{\mathbf{F}}_{NL}^i}{D\tilde{\mathbf{U}}^i} = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \frac{\partial f_{nl}^i}{\partial \tilde{\mathbf{U}}^i} \mathbf{T} dt \quad (3.19)$$

Nous reviendrons sur le calcul de la matrice jacobienne des termes non-linéaires dans la section suivante dans le cas des forces non-linéaires de contact avec frottement. La mise en œuvre du calcul de (3.19) par DFT ou par collocation trigonométrique est expliquée en détail dans la thèse de M. Guskov [84].

Bilan

Nous avons présenté l'outil mathématique qui permet de trouver la réponse périodique d'un système dynamique non-linéaire. De nombreuses méthodes existent pour trouver la réponse périodique du système. La méthode d'équilibrage harmonique est la méthode qui est la plus facile à mettre en œuvre et qui converge le plus vite pour les systèmes rencontrés dans l'industrie. D'ailleurs ces systèmes peuvent comporter un grand nombre de degrés de liberté et il est souvent nécessaire de mettre en œuvre des stratégies de réduction de modèle. L'HBM se prête bien à la réduction de modèle. Nous allons voir que cette méthode peut aussi être utilisée pour traiter des systèmes non-linéaires autonomes.

3.1.3 Solution périodique d'un système non-linéaire autonome

Nous nous sommes intéressés dans les sections précédentes aux réponses périodiques des systèmes non-autonomes. Nous allons présenter maintenant une méthode qui permet de calculer la réponse des systèmes autonomes. L'équation qui décrit un système autonome a la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{F}_{NL}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}) = 0, \quad (3.20)$$

La période n'étant plus imposée, elle devient une nouvelle inconnue. Pour résoudre ce système nous allons faire appel au concept des modes non-linéaires.

3.1.3.1 Définition des modes normaux non-linéaires (MNN)

La notion de mode normal pour les systèmes non linéaires a été introduite par Rosenberg [201] dans les années 1960 pour une classe de systèmes dynamiques non-linéaires discrets. Dès la fin du XIX^{ème} siècle, Lyapunov [145] avait été un des précurseurs sur la résolution de systèmes non-linéaires autonomes.

Par rapport au cas linéaire le concept de modes non-linéaires perd certaines propriétés, en particulier le principe de superposition. La notion de mode normal a un intérêt particulier dans l'étude des réponses forcées. En effet il existe un lien étroit entre les propriétés des modes normaux (nombre, forme, relation entre amplitude et fréquence) et la forme des courbes de réponse forcée du système.

Plusieurs définitions des MNNs ont été proposées. Les plus populaires sont celles proposées par Rosenberg, Shaw et Pierre et l'approche par « forme normale ». Rosenberg définit le mode non-linéaire d'un système discret comme le régime des vibrations dans lesquelles toutes les masses atteignent leurs valeurs maximales au même instant et passent par leurs positions d'équilibre au même instant. On parle d'oscillation synchrone à l'unisson. Suivant cette définition, les mouvements de chaque dds peuvent s'exprimer en fonction du mouvement de l'un d'entre eux. Rosenberg a également donné une définition des lignes modales qui sont, dans l'espace de configuration, les trajectoires des modes normaux. Dans le cas où le rapport entre les déplacements des dds est constant, les MNNs sont appelés modes similaires et les lignes modales sont des droites. Un mode similaire ne dépend pas de l'amplitude de vibration. Dans le cas général, ce rapport n'est plus constant et les MNNs correspondants sont appelés modes non-similaires. Shaw et Pierre [215] ont proposé une définition des modes non-linéaires qui permet d'étudier les systèmes dissipatifs :

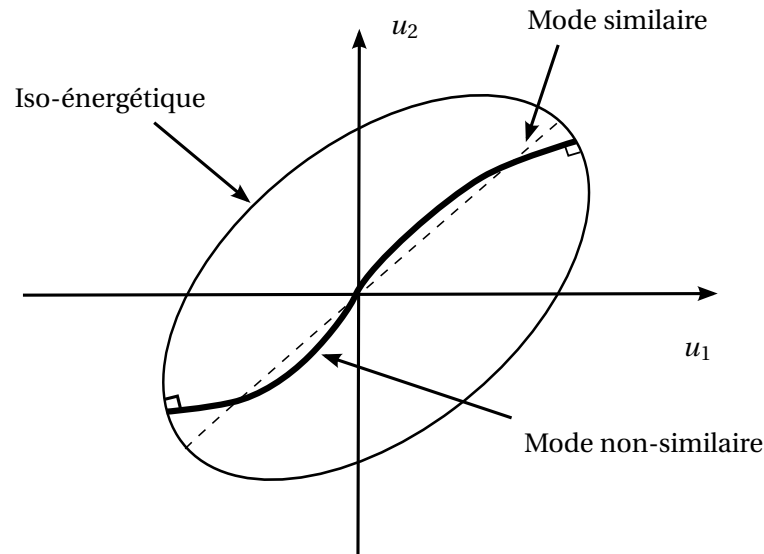


FIGURE 3.2. Trajectoire d'un mode normal non-linéaire

« Un mode normal de vibration d'un système non-linéaire autonome est une oscillation contenue dans une variété invariante bidimensionnelle de l'espace des phases du système et paramétrée par deux variables de déplacement et de vitesse ».

Dans leur approche, un couple déplacement-vitesse est choisi comme variable centrale du mode étudié. Les mouvements et les vitesses de tous les autres dds, appelés esclaves s'expriment en fonction du couple déplacement-vitesse maître. Les surfaces invariantes dans le cas non-linéaire sont tangentes, au point zéro, au plan invariant du mode linéaire associé. Pour calculer les modes non-linéaires, des variables esclaves sont approchées par des séries polynomiales en terme de variables du mode maître. Cette approche se rapproche des techniques de réduction de la variété centrale [220].

Enfin l'approche par « formes normales » consiste à faire le changement de variables de façon à éliminer, jusqu'à un ordre fixé à l'avance, le maximum de termes non linéaires. Par exemple, afin d'éliminer tous les termes quadratiques, les équations de la dynamique sont tronquées jusqu'à l'ordre 2 et les solutions asymptotiques sont donc recherchées sous forme de séries polynomiales d'ordre 2. La forme simplifiée de l'équation de la dynamique est appelée « forme normale ». Poincaré a été le premier à proposer cette méthode pour étudier des systèmes dynamiques non-linéaires. Les coordonnées obtenues après le changement de variables sont appelées coordonnées normales.

Les approches présentées sont plutôt adaptées pour des systèmes de taille faible et dont on a l'expression analytique de la réponse non-linéaire. Dans le cadre de notre étude les non-linéarités nécessitent un traitement numérique. Nous allons présenter une méthode numérique basé sur la HBM qui permet de traiter les systèmes non-linéaires autonomes dissipatifs de grande taille.

3.1.3.2 Méthodes de calcul des MNNs

Les méthodes de recherche de solutions périodiques qui sont utilisées pour l'étude des systèmes non-linéaires non-autonomes peuvent être adaptées au calcul des modes non-linéaires. Toutefois la non-connaissance de la période entraîne quelques modifications. Une revue de quelques méthodes se trouve dans l'article de G. Kerschen *et al* [113]. On pourra se référer à l'ouvrage de A.F. Vakakis *et al* [231] pour de plus amples explications. Dans notre travail, une approche originale développée dans le cadre

de la thèse de D. Laxalde [130] sera utilisée et adaptée au cas de l'usure.

3.1.3.3 Modes complexes non-linéaires

D. Laxalde *et al* [130, 132] ont proposé une généralisation des méthodes de Ritz-Galerkin pour l'étude des vibrations libres d'un système dynamique autonome dissipatif. Comme pour le mode complexe linéaire un déphasage entre les coordonnées peut exister. Ce déphasage a pour conséquence que l'unisson n'apparaît plus par rapport à la notion de modes normaux. Les trajectoires ne sont plus des courbes normales aux iso-énergétiques mais des courbes fermées (cycles fermés). Par analogie avec les modes complexes linéaires les valeurs propres du système sont complexes de la forme :

$$\sigma = -\beta + i\omega \quad (3.21)$$

avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$, la pulsation propre amortie, ω_0 la pulsation propre et $\xi = \frac{\beta}{\omega_0}$ le taux d'amortissement modal. Le système est périodique mais amorti. Une approche à échelle multiple en temps [172] est utilisée. Les déplacements sont représentés par :

$$x(t) = x(\eta, \tau) = Q^0 + \sum_{n=1}^{N_h} e^{-n\eta} (Q^{n,c} \cos(n\tau) + Q^{n,s} \sin(n\tau)), \quad (3.22)$$

où $\eta = \beta t$ et $\tau = \omega t$. Le nouveau produit scalaire lié à cette formulation et utilisé dans la procédure de Galerkin est :

$$\langle g, h \rangle = \int_0^\infty g(\eta, \tau) \bar{h}(\eta, \tau) d\eta d\tau, \quad (3.23)$$

Le nouveau système algébrique à résoudre aura la forme suivante :

$$\mathbf{Z}(\sigma)\mathbf{Q} + F_{NL}(\mathbf{Q}, \sigma) = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Le couple $\{\mathbf{Q}, \sigma\}$ contient les inconnues. La stratégie et la méthode de résolution sont présentées en annexe C.

L'exploitation de cette méthode sera faite dans le chapitre suivant. Nous verrons que les données caractéristiques du mode non-linéaire complexe (fréquence et amortissement) varient avec l'usure.

3.1.4 Réduction de la taille du modèle en fréquentiel

Si l'on cherche à déterminer le comportement vibratoire d'un système avec une grande précision, le modèle peut nécessiter un nombre très important de ddls. C'est généralement le cas dans les études de roues aubagées de moteur d'avion. Il est actuellement impossible de faire un calcul de dynamique non-linéaire avec un modèle possédant des centaines de milliers de ddls.

Différentes méthodes de réduction de modèle pour des structures linéaires existent. Une revue non exhaustive de ces méthodes est faite en annexe A. Les non-linéarités d'un système dynamique avec contact et frottement sont localisées aux interfaces. Le reste de la structure garde un comportement linéaire. Profitant de cet aspect nous utilisons des méthodes de réduction de modèles prévues à l'origine pour réduire des structures avec un comportement linéaire. Nous faisons en particulier l'hypothèse que les déplacements dans la structure peuvent être représentés par les premiers modes de la structure. Nous avons retenu la méthode de Craig-Bampton [45] pour réduire la taille du système.

3.1.4.1 Condensation sur les nœuds non linéaires

Puisque les forces non-linéaires sont nulles pour les nœuds linéaires, l'équation (3.15) peut être organisée en fonction des déplacements linéaires (indice **ln**) et non linéaires (indice **nl**) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{ln,ln} & \mathbf{Z}_{ln,nl} \\ \mathbf{Z}_{nl,ln} & \mathbf{Z}_{nl,nl} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_{ln} \\ \tilde{\mathbf{U}}_{nl} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{ex,ln} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{ex,nl} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

De plus $\tilde{\mathbf{F}}_{ln}$ est nulle et $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$ ne dépend que de $\tilde{\mathbf{U}}_{nl}$. L'équation (3.25) peut être réduite simplement sur les ddls non linéaires :

$$\mathbf{Z}_{red} \tilde{\mathbf{U}}_{nl} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl} = \tilde{\mathbf{F}}_{red} \quad (3.26)$$

où \mathbf{Z}_{red} et $\tilde{\mathbf{F}}_{red}$ sont respectivement la matrice de la raideur dynamique réduite et le vecteur des forces externes réduit :

$$\mathbf{Z}_{red} = \mathbf{Z}_{nl,nl} - \mathbf{Z}_{nl,ln} \mathbf{Z}_{ln,ln}^{-1} \mathbf{Z}_{ln,nl} \quad (3.27)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{red} = \tilde{\mathbf{F}}_{ex,nl} - \mathbf{Z}_{nl,ln} \mathbf{Z}_{ln,ln}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{ex,ln} \quad (3.28)$$

L'équation (3.26) est un ensemble de $N_{nl}(2N_h + 1)$ équations non linéaires, N_{nl} étant le nombre de ddls non-linéaires. Une fois que les déplacements des ddls non linéaires $\tilde{\mathbf{U}}_{nl}$ sont évalués, $\tilde{\mathbf{U}}_{ln}$ peut être résolu simplement comme suit :

$$\tilde{\mathbf{U}}_{ln} = \mathbf{Z}_{ln,ln}^{-1} (\tilde{\mathbf{F}}_{ex,ln} - \mathbf{Z}_{ln,nl} \tilde{\mathbf{U}}_{nl}) \quad (3.29)$$

3.1.4.2 Condensation sur les déplacement relatifs

Pour certains problèmes non-linéaires et le contact en particulier, il est possible d'obtenir une réduction d'un facteur 2 de la taille du système non-linéaire à résoudre en utilisant les déplacements relatifs comme inconnues. Prenons l'exemple où deux solides 1 et 2 sont en interaction non-linéaire et supposons que les maillages sont compatibles à l'interface d'interaction. Dans ce cas, le principe d'action-réaction permet d'écrire :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{nl} = \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^1 = -\tilde{\mathbf{F}}_{nl}^2. \quad (3.30)$$

Le vecteur des déplacements relatifs est :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_r &= \tilde{\mathbf{U}}_{nl}^1 - \tilde{\mathbf{U}}_{nl}^2 \\ &= (\mathbf{Z}_{red}^1)^{-1} (\tilde{\mathbf{F}}_{red}^1 - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}) - (\mathbf{Z}_{red}^2)^{-1} (\tilde{\mathbf{F}}_{red}^2 + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{nl}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

L'équation (3.31) peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{U}}_r + \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \tilde{\mathbf{F}}_r, \quad (3.32)$$

où \mathbf{Z}_r et $\tilde{\mathbf{F}}_r$ sont respectivement la matrice de raideur dynamique réduite et le vecteur réduit des forces extérieures, dont les expressions sont :

$$\mathbf{Z}_r = [(\mathbf{Z}_{red}^1)^{-1} + (\mathbf{Z}_{red}^2)^{-1}]^{-1}, \quad (3.33)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_r = \mathbf{Z}_r [(\mathbf{Z}_{red}^1)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{red}^1 - (\mathbf{Z}_{red}^2)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{red}^2]. \quad (3.34)$$

La résolution non-linéaire de (3.32) fournit les déplacements relatifs $\tilde{\mathbf{U}}_r$ et les efforts non-linéaire $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{nl}$. L'équation (3.26) fournit ensuite les déplacements sur chacune des surfaces d'interaction. Cette stratégie est parfaitement applicable au cas du contact.

3.2 Résolution en fréquentiel du problème dynamique non-linéaire non-autonome

Une fois le système réduit nous le résolvons en utilisant la stratégie présentée dans 3.1.2.3. Il reste, cependant, à calculer les efforts de contact en fréquentiel. Pour cela une procédure temps-fréquence est utilisée et les forces de contact sont calculées en temporel grâce aux approches présentées dans le paragraphe qui suit.

3.2.1 Traitement des forces non-linéaires de contact

Nous avons présenté dans le chapitre 2 les méthodes de régularisation (2.2.3) et de résolution (2.3) du problème de contact avec frottement en temporel. Ce qui a été présenté reste vrai, toutefois toutes les méthodes temporelles ne sont pas applicables à la procédure temps-fréquence. Durant la thèse nous avons travaillé sur les méthodes de pénalité, de lagrangiens augmentés et la méthode des lagrangiens dynamiques. La méthode de pénalité est la méthode la plus utilisée dans la littérature pour résoudre les problèmes dynamiques de contact avec frottement en fréquentiel. Nous proposons dans le cadre d'une approche temps-fréquence un formalisme global des différentes méthodes. Nous présenterons des résultats obtenus avec les différentes méthodes qui montrent que la méthode de pénalité amène des erreurs quant à la prédiction du comportement en zone de contact, ce qui est à éviter si on veut prédire correctement le niveau usé. Nous verrons que les trois stratégies sont proches. Dans le chapitre 1 d'autres approches ont été présentées pour prendre en compte la rugosité du contact et le micro-glissement tangentiel. Ces approches n'ont pas été étudiées en profondeur durant cette thèse mais ont déjà montré leur intérêt dans plusieurs travaux et en particulier dans l'étude de la dynamique non-linéaire des roues aubagées réalisée par D. Laxalde [130].

3.2.1.1 Adaptation au formalisme fréquentiel des lois de contact avec frottement

Nous allons étudier trois manières de modéliser les conditions de contact avec frottement. Ces trois approches sont les plus faciles à mettre en œuvre et ne nécessitent pas de modification du code éléments finis.

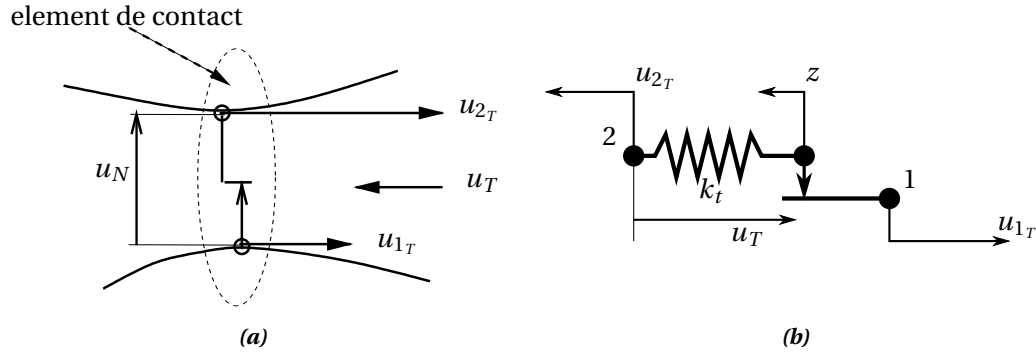


FIGURE 3.3. Éléments de contact : (a) cas général et (b) avec raideur de contact

Contact régularisé élastique La force normale est linéaire par morceaux et vaut à chaque pas de temps t_k :

$$f_N^k = \begin{cases} 0 & \text{si } u_N^k < 0 \\ k_n u_N^k & \text{si } u_N^k \geq 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

où u_N^k est la distance normale entre deux solides. Dans le plan tangentiel on introduit entre les deux solides en contact une raideur tangentielle k_t . Pour simplifier celle-ci sera indépendante de la direction de glissement. Cette raideur est ajoutée pour des raisons numériques. Toutefois d'un point de vue physique elle peut représenter le comportement élasto-plastique des aspérités de l'interface de contact [188] ou du lubrifiant solide. La force tangentielle, quand elle est inférieure à la force de Coulomb (μf_N), s'écrit :

$$\mathbf{f}_T = k_t (\mathbf{u}_T - \mathbf{z}) \quad (3.36)$$

où \mathbf{z} sont les déplacements relatifs tangentiels au point de contact lors des phases de glissement.

Dans la procédure AFT les déplacements relatifs entre les solides sont connus dans le domaine fréquentiel. Ce sont les vecteurs $\tilde{\mathbf{U}}_r = \tilde{\mathbf{U}}_2 - \tilde{\mathbf{U}}_1$. Ils sont transformés dans le domaine temporel par une transformée de Fourier inverse. À partir de ceux-ci, il est possible de calculer les forces de contact prédites dans le cas d'un contact adhérent. À chaque pas de temps t_{k+1} on a :

$$f_N^{pre,k+1} = k_n u_N^{k+1} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{f}_T^{pre,k+1} = k_t (\mathbf{u}_T^{k+1} - \mathbf{z}^k)$$

Une procédure de correction est appliquée pour respecter les conditions de contact unilatéral et de Coulomb. Nous verrons cette procédure dans la section présentant les lagrangiens dynamiques puisque c'est la même.

Multiplicateurs de Lagrange Dans le chapitre 2 nous avons vu que les lois de contact pouvait être écrites via une formulation Lagrangien augmenté. Nous reprenons la méthode de Newton généralisée (GNM) présentée dans la section 2.3.6 du chapitre 2. Le système algébrique non-linéaire à résoudre s'écrit :

$$\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\lambda}_N - \tilde{\lambda}_T \\ \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{N}} \\ \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.38)$$

avec $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_N, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_T)$ et

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{N}} = \frac{1}{\epsilon_N} [\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_N - \mathbf{T}_{T \rightarrow F} \text{Proj}_{\mathbb{R}_+} (\boldsymbol{\lambda}_N^k + \epsilon_N (\mathbf{U}_N^k - \mathbf{W} - \mathbf{G}))], \\ \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}} = \frac{1}{\epsilon_T} [\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_T - \mathbf{T}_{T \rightarrow F} \text{Proj}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda}_N^k)} (\boldsymbol{\lambda}_T^k + \epsilon_T \mathbf{U}_T^k)]. \end{cases} \quad (3.39)$$

où $\mathbf{T}_{T \rightarrow F}$ est l'opérateur de transformée de Fourier et k est l'indice temporel. Les opérateurs de projection $\text{Proj}_{\mathbb{R}_+}$ et $\text{Proj}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda}_N^k)}$ ont été définis au chapitre 2. $\boldsymbol{\lambda}_N^k$ et $\boldsymbol{\lambda}_T^k$ sont calculés par transformée de Fourier inverse de $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_N$ et $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_T$.

Lagrangiens dynamiques fréquentiels La méthode des lagrangiens dynamiques fréquentiels a été proposée par S. Nacivet [171]. L'équation d'équilibre en fréquentiel est utilisée pour prédire les efforts de contact. Dans le domaine fréquentiel les multiplicateurs de Lagrange $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ sont formulés comme une pénalisation des équations de mouvement dans les directions tangentielle et normale.

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T = \tilde{\mathbf{F}}_{ex}^T - (\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{U}})^T + \epsilon_T (\tilde{\mathbf{U}}_T - \tilde{\mathbf{X}}_T), \quad (3.40a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^N = \tilde{\mathbf{F}}_{ex}^N - (\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{U}})^N + \epsilon_N (\tilde{\mathbf{U}}_N - \tilde{\mathbf{X}}_N). \quad (3.40b)$$

ϵ_T et ϵ_N sont des coefficients de pénalité, $\tilde{\mathbf{X}}$ est un nouveau vecteur de déplacement relatif qui est calculé dans le domaine temporel. La paire $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{X}})$ est déterminée via une procédure AFT. L'équation (3.40) est reformulée de la façon suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{U}} + \epsilon (\tilde{\mathbf{U}}_r)}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_u} - \underbrace{\epsilon \tilde{\mathbf{X}}}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_x}, \quad (3.41)$$

La période est divisée en N pas de temps. $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_u$ et $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_x$ ont $\{\boldsymbol{\lambda}^k\}_{k=1..N}$, $\{\boldsymbol{\lambda}_u^k\}_{k=1..N}$ et $\{\boldsymbol{\lambda}_x^k\}_{k=1..N}$ comme équivalents temporels. À chaque pas de temps l'hypothèse est faite que les nœuds de contact sont en contact adhérent. Il n'y a pas de déplacement relatif donc : $\boldsymbol{\lambda}_x^{k,T} = \boldsymbol{\lambda}_x^{k-1,T}$ et $\boldsymbol{\lambda}_x^{k,N} = 0$. Les forces de contact prédites sont :

$$\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,T} = \boldsymbol{\lambda}_u^{k,T} - \boldsymbol{\lambda}_x^{k-1,T}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,N} = \boldsymbol{\lambda}_u^{k,N}. \quad (3.42)$$

Les forces de contact corrigées valent :

$$\boldsymbol{\lambda}^k = \boldsymbol{\lambda}_u^k - \boldsymbol{\lambda}_x^k, \quad (3.43)$$

Nous pouvons voir une équivalence entre la formulation par lagrangiens dynamiques fréquentiels et la formulation par pénalité. Si nous posons :

$$\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,T} = \underbrace{k_t \mathbf{u}_T^k}_{\boldsymbol{\lambda}_u^{k,T}} - \underbrace{k_t \mathbf{z}^{k-1}}_{\boldsymbol{\lambda}_x^{k-1}}, \quad (3.44a)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,N} = \underbrace{k_n \mathbf{u}_N^k}_{\boldsymbol{\lambda}_u^{k,N}}, \quad (3.44b)$$

nous pouvons appliquer la même stratégie de correction dans les deux approches. Le calcul des forces de contact pour les trois formulations proposées est la même, le calcul est séparé entre étape de prédiction et étape de correction. La différence se fait au niveau de la prédiction, l'étape de correction est le même pour les trois formulations. Les trois approches seront comparées sur un exemple numérique dans la section 3.2.2.

3.2.1.2 Processus de correction

Les efforts de contact prédits sont corrigés de telle sorte que les contraintes soient vérifiées. Trois états sont possibles : séparation, adhérence et glissement.

1. Séparation : $\lambda_{pre}^{k,N} \geq 0$, la force prédite est une force de traction, ce qui signifie que le contact est perdu au niveau de l'élément de contact. La force de contact doit donc être nulle, ce qui nécessite :

$$\boldsymbol{\lambda}_x^k = \boldsymbol{\lambda}_u^k. \quad (3.45)$$

2. Adhérence : $\lambda_{pre}^{k,N} < 0$ et $\|\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,T}\| < \mu|\lambda_{pre}^{k,N}|$, dans ce cas le déplacement normal est nul et le déplacement relatif tangentiel est constant. Ceci implique :

$$\begin{cases} \lambda_x^{k,N} = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}_x^{k,T} = \boldsymbol{\lambda}_x^{k-1,T} \end{cases} \quad (3.46)$$

3. Glissement : $\lambda_{pre}^{k,N} < 0$ et $\|\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,T}\| \geq \mu|\lambda_{pre}^{k,N}|$, à nouveau, le déplacement relatif normal est nul ce qui donne la composante normale de $\boldsymbol{\lambda}_x^k$:

$$\lambda_x^{k,N} = 0. \quad (3.47)$$

La force normale est donc donnée par :

$$\lambda^{k,N} = \lambda_{pre}^{k,N}. \quad (3.48)$$

La correction de la force de contact tangentielle s'appuie sur la connaissance de l'effort normal par (3.48) et sur l'hypothèse que la vitesse relative tangentielle est définie de manière implicite :

$$\mathbf{V}_r^{k,T} = \frac{\mathbf{X}_r^{k,T} - \mathbf{X}_r^{k-1,T}}{t_k - t_{k-1}}. \quad (3.49)$$

D'après les lois de frottement de Coulomb, la force de contact tangentielle doit avoir une norme égale à $\mu|\lambda_{pre}^{k,N}|$ et être colinéaire à $\mathbf{V}_r^{k,T}$ et de même sens ($\boldsymbol{\lambda}^k$ est défini comme l'opposé des forces de contact et agit donc dans le sens de la vitesse relative). Ces conditions sont résumées par :

$$\boldsymbol{\lambda}^{k,T} = \mu|\lambda_{pre}^{k,N}| \frac{\mathbf{V}_r^{k,T}}{\|\mathbf{V}_r^{k,T}\|}. \quad (3.50)$$

D'après (3.42) et (3.43) on peut écrire :

$$\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,T} - \boldsymbol{\lambda}^{k,T} = \boldsymbol{\lambda}_x^{k,T} - \boldsymbol{\lambda}_x^{k-1,T}. \quad (3.51)$$

Avec (3.49) et en rappelant que $\boldsymbol{\lambda}_x^{k,T} = \epsilon \mathbf{X}_r^{k,T}$ pour tout k , il vient :

$$\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,T} - \boldsymbol{\lambda}^{k,T} = \epsilon(t_k - t_{k-1}) \mathbf{V}_r^{k,T}. \quad (3.52)$$

En combinant (3.50) et (3.51) on trouve

$$\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,T} = \left(\frac{\mu|\lambda_{pre}^{k,N}|}{\|\mathbf{V}_r^{k,T}\|} + \epsilon(t_k - t_{k-1}) \right) \mathbf{V}_r^{k,T}, \quad (3.53)$$

ce qui montre que $\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,T}$ et $\mathbf{V}_r^{k,T}$ sont colinéaires et de même sens. Ainsi

$$\frac{\mathbf{V}_r^{k,T}}{\|\mathbf{V}_r^{k,T}\|} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,T}}{\|\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{k,T}\|}, \quad (3.54)$$

et donc

$$\lambda^{k,T} = \mu |\lambda_{pre}^{k,N}| \frac{\lambda_{pre}^{k,T}}{\|\lambda_{pre}^{k,T}\|}. \quad (3.55)$$

En reportant (3.55) dans (3.51), on trouve la relation qui permet de calculer $\lambda_x^{k,T}$:

$$\lambda_x^{k,T} = \lambda_x^{k-1,T} + \lambda_{pre}^{k,T} \left(1 - \mu \frac{|\lambda_{pre}^{k,N}|}{\|\lambda_{pre}^{k,T}\|} \right). \quad (3.56)$$

Une fois les forces de contact calculées en temporel l'étape finale consiste à transformer les lagrangiens dynamiques dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète (DFT). On introduit les efforts de contact corrigés dans $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{U}}_r + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_r - \tilde{\mathbf{F}}_r$. On obtient :

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{U}}_r) = \epsilon(\tilde{\mathbf{U}}_r - \tilde{\mathbf{X}}_r). \quad (3.57)$$

L'annulation de $\tilde{\mathbf{r}}$ donne bien $\tilde{\mathbf{U}}_r = \tilde{\mathbf{X}}_r$, ce qui assure que le couple $(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_r)$ vérifie les contraintes de contact et de frottement. Dans le cas du contact régularisé élastique nous n'avons pas cette vérification. La différence entre les deux approches est visible sur la figure 3.4. La figure 3.5 résume la stratégie de prédiction-correction de la méthode DLFT.

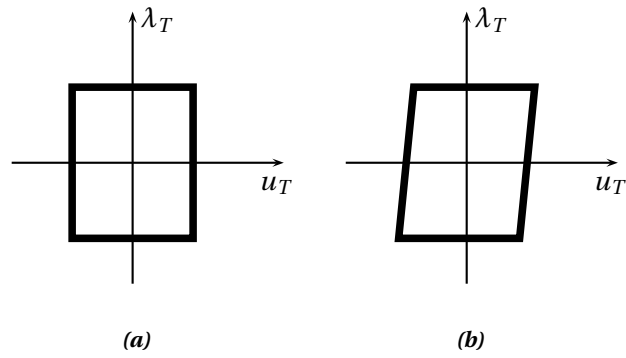


FIGURE 3.4. Cycle de frottement : (a) formulation DLFT et (b) formulation par pénalité

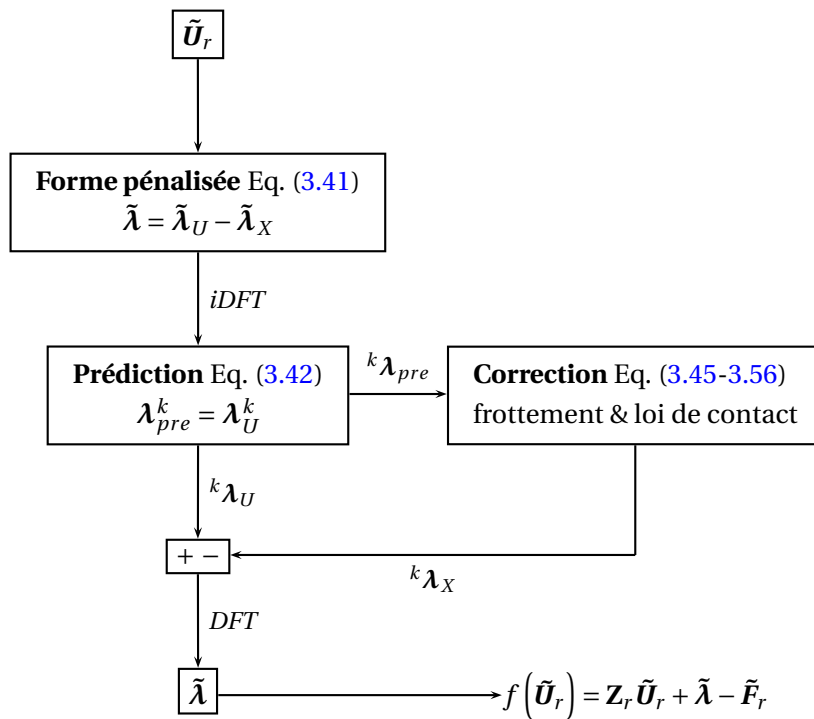


FIGURE 3.5. Organigramme de la procédure de calcul des forces de contact par DLFT

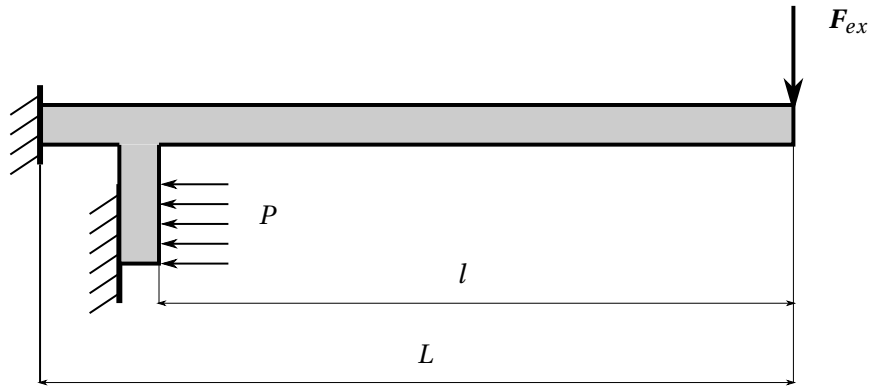


FIGURE 3.6. Modèle d'une poutre avec frotteur

Longueur de la poutre	: $L = 200$ mm	Coefficient de frottement	: $\mu = 0.1$
Épaisseur de la poutre	: $a = 5$ mm	Niveau de l'excitation	: $F_{ex} = 100$
Profondeur de la poutre	: $b = 100$ mm	Facteur d'amortissement	: $\alpha = 0, \beta = 5$
Position du frotteur	: $l = 160$ mm	Nombre d'harmoniques	: $N_h = 3$
Longueur du frotteur	: $l_f = 5$ mm	Coefficient de pénalité	: $\epsilon, k_t, k_n = 1e10$
Nombre de nœuds en contact	: $n_c = 50$	Nombre de pas de temps	: $N_{it} = 32$

TABLE 3.1. Tableau des caractéristiques de la poutre avec frotteur

3.2.2 Exemple d'application

Nous allons à présent appliquer les méthodes présentées dans les sections précédentes sur le modèle simple de la figure 3.6, déjà présenté au chapitre 2. Les valeurs numériques des paramètres du problème sont données dans le tableau 3.1

Nous étudions d'abord le comportement numérique des trois approches présentées pour traiter les forces de contact. La réponse fréquentielle autour du premier mode de flexion a été calculée dans les trois cas. Les résultats sont présentés sur la figure 3.7. Les amplitudes des déplacements tangentiels en bout de poutre sont tracées en fonction de la fréquence d'excitation. Sur cette figure on voit que la réponse en amplitude en bout de poutre est très proche pour les trois méthodes. D'ailleurs la différence entre l'approche hybride (multiplicateurs de Lagrange) et la méthodes DLFT est quasi nulle 1.10^{-13} . La différence entre la pénalité et les deux autres méthodes est d'environ 5 % d'erreur au maximum ce qui reste très faible.

Nous avons tracé sur la figure 3.8 le nombre d'itérations par fréquence suivant la méthode utilisée. La pénalité et la DLFT demande à peu près le même nombre d'itérations tandis que l'approche hybride (multiplicateurs de Lagrange) demande beaucoup plus d'itérations pour converger. Pour tracer une réponse forcée la méthode DLFT est préférable puisque pour un résultat identique elle est plus rapide.

Dans ce travail, nous nous intéressons au comportement local de la structure dans les zones de contact. Les résultats obtenus dans cette zone sont importants pour une bonne prédiction du niveau d'usure. Les données importantes vis à vis de l'usure sont les pressions de contact et les déplacements relatifs à l'interface. Sur les figures 3.9 nous avons tracé les déplacements tangentiels et normaux suivant la méthode utilisée.

On se rend compte que les résultats obtenus avec la pénalité sont bien différents des résultats ob-

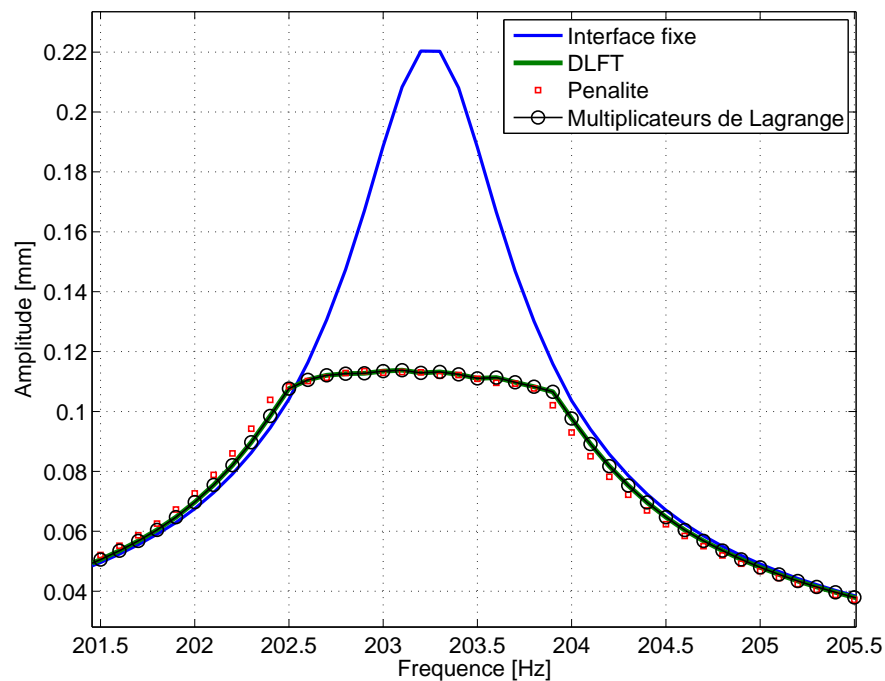


FIGURE 3.7. Réponse fréquentielle autour du premier mode de flexion pour différents traitements des forces de contact

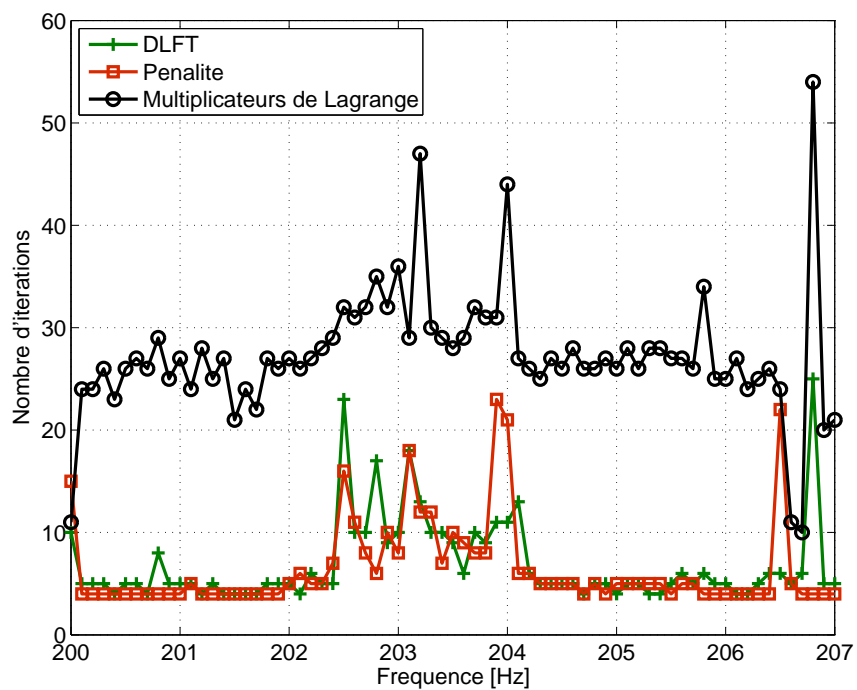


FIGURE 3.8. Nombre d'itérations du solveur fsolve par fréquence pour différentes méthodes

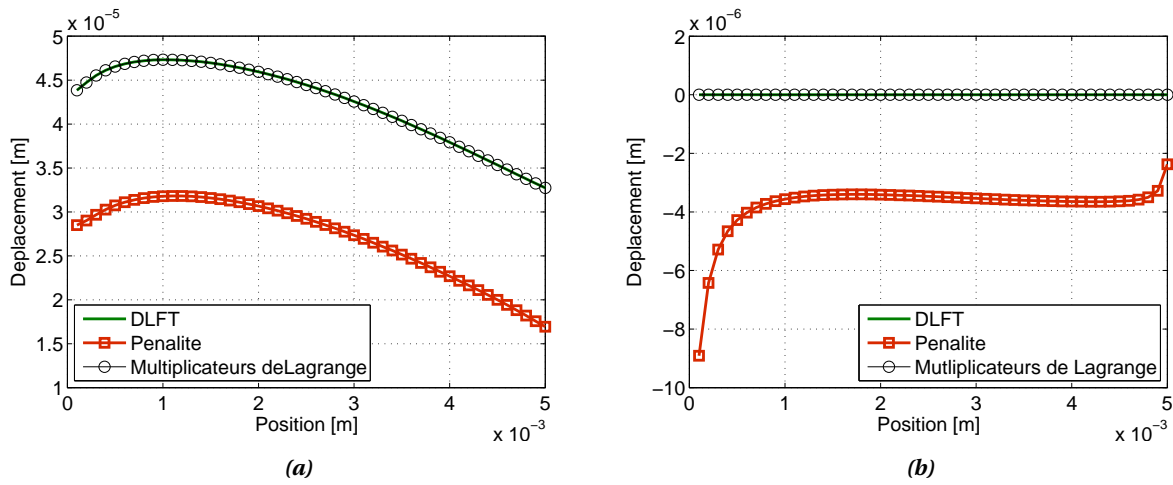


FIGURE 3.9. Déplacement tangentiel (a) et normal (b) le long du frotteur à un instant de la période

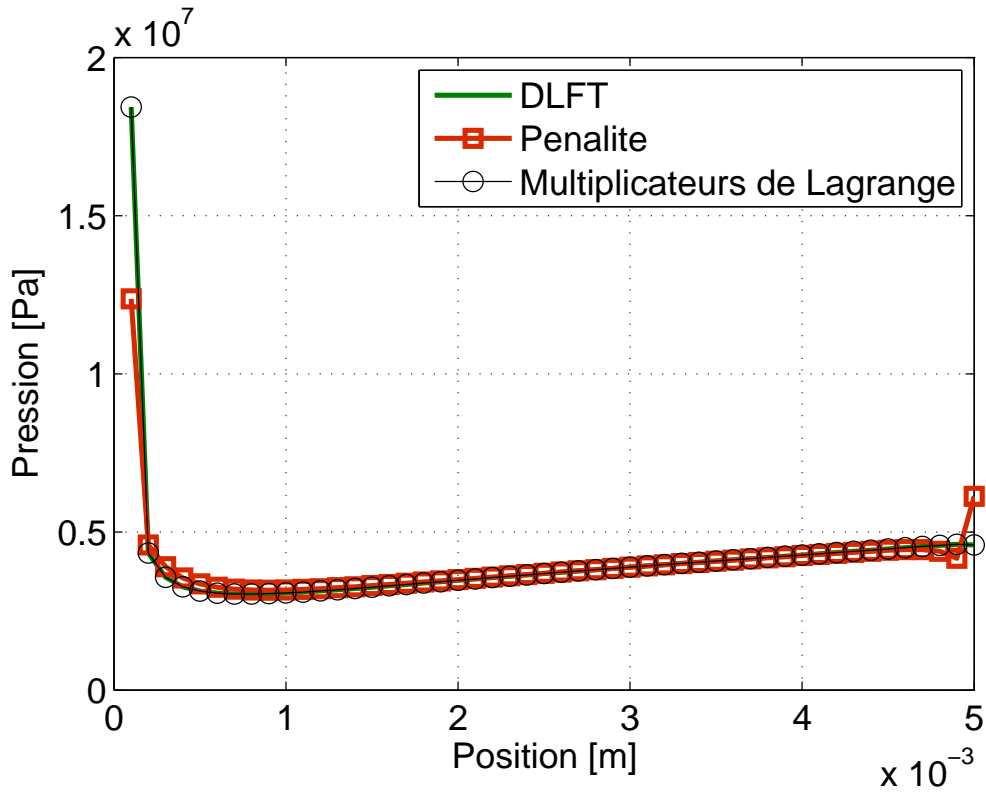


FIGURE 3.10. Pression de contact le long du frotteur à un instant de la période pour différentes méthodes

tenus par les deux autres méthodes. Ainsi bien que le comportement global soit correctement décrit avec une méthode de pénalité, le comportement local au niveau du contact est mal représenté ce qui entrainera une mauvaise représentation des états usés. La pénétration autorisée par la pénalité pose un problème vis-à-vis de la stratégie proposée de prise en compte de l'usure dans le terme de pénalité. Une valeur élevée de ce terme diminue la pénétration autorisée et assure donc une meilleure prise en compte de l'usure, mais le système devient mal conditionné et la convergence devient alors difficile. Les pressions de contact tracées sur la figure 3.10 sont aussi mal représentées par une méthode de pénalité. Par contre la DLFT est très précise sur les déplacements et les pressions de contact. La formulation hybride plus coûteuse en temps de calcul n'est donc pas justifiée.

Bilan

Les résultats obtenus nous confortent dans la stratégie de résolution du problème dynamique avec contact basée sur une formulation DLFT du contact. La DLFT permet une bonne prédiction à la fois de la réponse globale du système et du comportement local du système dans les zones de calcul. De plus les temps de calcul sont bons. Nous utiliserons cette méthode dans le chapitre 4 pour prédire les niveaux d'usure.

3.3 Améliorations des méthodes d'équilibrage multi-harmonique

Une bonne description du comportement dans la zone de contact nécessite de pouvoir augmenter le nombre de nœuds en contact. Nous avons travaillé sur des améliorations des méthodes d'équilibrage harmonique proposées dans la section précédente pour pouvoir augmenter la taille des systèmes à résoudre sans augmenter le temps de calcul. Les trois améliorations présentées dans cette section sont : l'utilisation de l'expression analytique de la matrice jacobienne dans la HBM, l'adaptation automatique du nombre d'harmonique et une méthode multidomaine avec nonlinéarités localisées.

3.3.1 Expression analytique de la matrice jacobienne

La première amélioration que nous avons proposée est de calculer la matrice jacobienne de façon analytique. Le système est résolu par une méthode Powell hybride [195]. Dans la méthode de S. Nacivet et D. Charleux [32] la matrice jacobienne nécessaire est calculée par différence finie. Or, il est possible de trouver une expression analytique de cette matrice. E. P. Petrov [189] a montré que l'on pouvait calculer analytiquement la matrice jacobienne dans le cas d'une formulation par pénalité du contact avec frottement. Le calcul analytique de la matrice jacobienne nécessite de travailler sur les expressions de correction en temporel. Durant la thèse nous avons développé une stratégie de calcul analytique de la matrice jacobienne pour la formulation DLFT de la loi de contact. L'expression de cette matrice est détaillée dans l'annexe B. Les expériences numériques [204] ont montré que la matrice jacobienne analytique permettait un gain de temps très intéressant.

Un des points fondamentaux des méthodes HBM est que le résultat est très dépendant du nombre d'harmoniques il est important de pouvoir choisir judicieusement ce nombre a priori.

3.3.2 Adaptation du nombre d'harmoniques

Les méthodes d'équilibrage harmonique basées sur l'utilisation des séries de Fourier posent le problème de savoir comment choisir le nombre d'harmoniques nécessaires pour assurer une prédiction correcte de la réponse. D. Laxalde [130] a proposé un critère basé sur une comparaison dans le domaine temporel de la force non-linéaire calculée en temporel avec la force non-linéaire temporelle obtenue à partir du vecteur multiharmonique des forces non-linéaires en fréquentiel. L'erreur calculée en temporel est appelé erreur de Fourier. Son expression est la suivante :

$$\epsilon_F(N_h) = \int_T \left(f_{NL}(t) - \sum_{n=0}^{N_h} F_{NL}^{n,c} \cos n\tau + F_{NL}^{n,s} \sin n\tau \right) d\tau. \quad (3.58)$$

La formulation DLFT permet de calculer d'autres critères d'erreur. Au-lieu d'exprimer l'erreur sur les forces de contact il est possible de l'exprimer sur les déplacements relatifs. En effet, la formulation DLFT donne les déplacements relatifs corrigés $x_r(t)$ en temporel. Le nouveau critère sur les déplacements relatifs s'écrit :

$$\epsilon_D(N_h) = \int_T \left(x_r(t) - \sum_{n=0}^{N_h} U_r^{n,c} \cos n\tau + U_r^{n,s} \sin n\tau \right) d\tau. \quad (3.59)$$

Souvent on préfère des critères d'erreur en énergie. Dans notre cas on peut travailler sur l'énergie dissipée par frottement, qui est définie par $E_d = \int_T \mathbf{f}_T \cdot \dot{\mathbf{u}}_T d\tau$. L'erreur en énergie s'écrit donc :

$$\epsilon_{E_d}(N_h) = \int_T \left(e_d(t) - \sum_{n=0}^{N_h} E_d^{n,c} \cos n\tau + E_d^{n,s} \sin n\tau \right) d\tau. \quad (3.60)$$

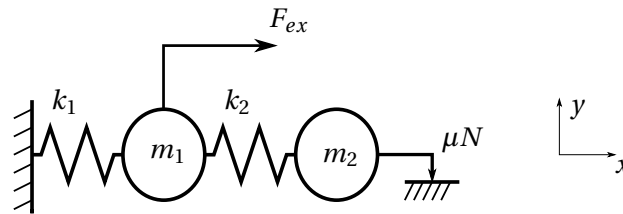


FIGURE 3.11. Oscillateur à deux degrés de liberté avec frotteur

m_1	k_1	m_2	k_2	F_{ex}	μN
1	650	0.02	40	1	5

TABLE 3.2. Tableau des caractéristiques du modèle deux masses-ressorts

Cet estimateur d'erreur doit être couplé à une méthode de continuation afin de mettre à jour le nombre d'harmoniques au bon moment. Les limites sur l'erreur de Fourier qui entraînent une augmentation ou une diminution du nombre d'harmoniques sont définies a priori. Dans le cas d'une continuation simple où à chaque nouveau pas fréquentiel on réutilise le résultat de la fréquence précédente le nombre d'harmoniques est mis à jour à chaque fréquence, suivant l'erreur calculée au pas précédent.

La méthode est illustrée sur un petit exemple à 2 ddl de masse-ressort dont l'une des deux masses frotte. Le modèle est représenté sur la figure 3.11. Nous avons fixé les limites sur l'ordre d'harmonique entre $N_h = 1$ et $N_h = 101$. Cela signifie que durant la résolution sur la plage fréquentielle N_h peut prendre la valeur entre 1 au minimum et 101 au maximum. Suivant si le critère d'erreur est respecté ou pas le nombre d'harmonique augmente au pas de fréquence suivant. Quand l'erreur est très faible et inférieure à un critère donné a priori le nombre d'harmoniques retenus est diminué. La valeur de ce critère est tracé sur la figure 3.13 en pointillé. Les trois critères d'erreur proposés sont comparés. La figure 3.12 nous montre que les trois méthodes d'adaptation donnent la même réponse de déplacement de la masse m_1 en fréquence. La figure 3.13 montre que le nombre d'harmoniques est bien différent pour les trois critères. Si seul le déplacement est intéressant le critère en déplacement est le plus approprié puisque le nombre d'harmoniques reste faible comparé aux deux autres critères. Un critère d'adaptation basé sur l'erreur en efforts non-linéaires sera le critère qui demandera le plus d'harmoniques sans pour autant augmenter significativement la précision de la réponse fréquentielle. Le nombre d'harmoniques n'excède jamais 37. On s'aperçoit sur la figure 3.14 que l'erreur reste faible pour les trois définitions de l'erreur.

Les critères en erreur proposés se base sur le comportement au niveau du contact. Or, pour une structure complexe comme une roue aubagée la zone de contact représente une zone limitée de la structure. Si on s'intéresse seulement au déplacement en bout d'aube un nombre d'harmoniques faible peut être suffisant. En effet, la partie linéaire de la structure va avoir pour effet d'atténuer le comportement non-linéaire de la zone de contact. Jaumouillé *et al.* [102] ont proposé un critère global basé sur une saturation de l'énergie de déformation approchée. L'expression de l'énergie de déformation est obtenue en utilisant le développement en série de Fourier du déplacement et en calculant sa valeur moyenne sur une période par :

$$\langle U_d \rangle = \left\langle \frac{1}{2} x^T(t) \mathbf{K} x(t) \right\rangle \quad (3.61)$$

Dans les méthodes présentées, le nombre d'harmoniques est défini pour toute la structure, or on se rend bien compte que suivant où on se situe dans la structure le nombre d'harmoniques nécessaire

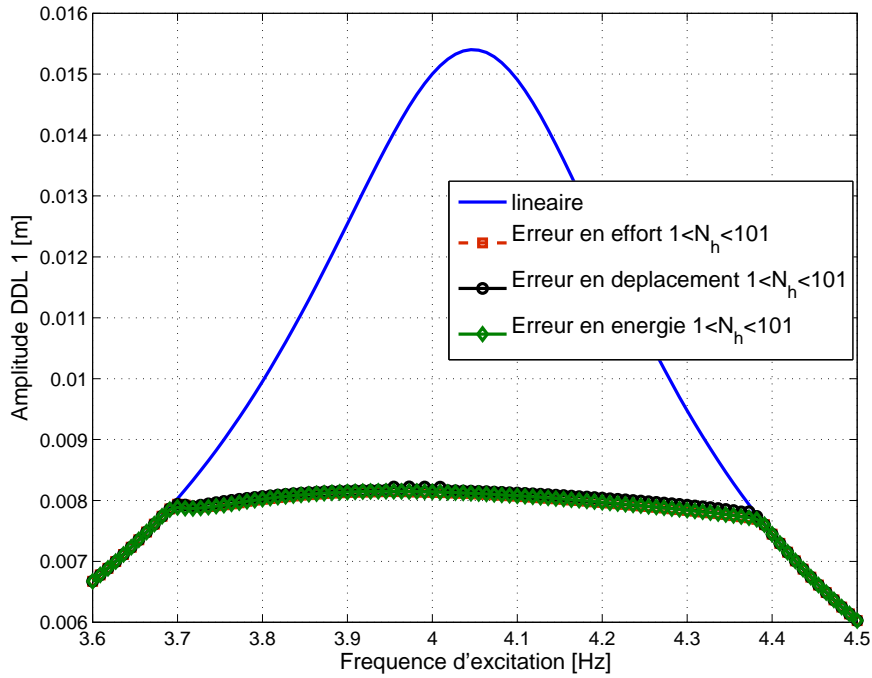


FIGURE 3.12. Réponse en fréquence avec différentes méthodes d'adaptation du nombre d'harmoniques

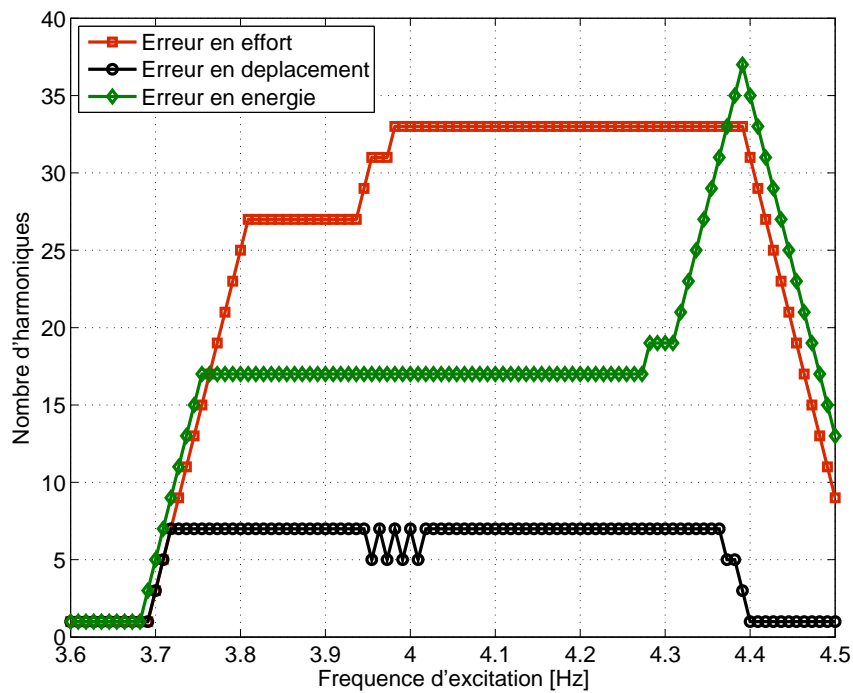


FIGURE 3.13. Évolution du nombre d'harmoniques pour les différents critères d'erreur

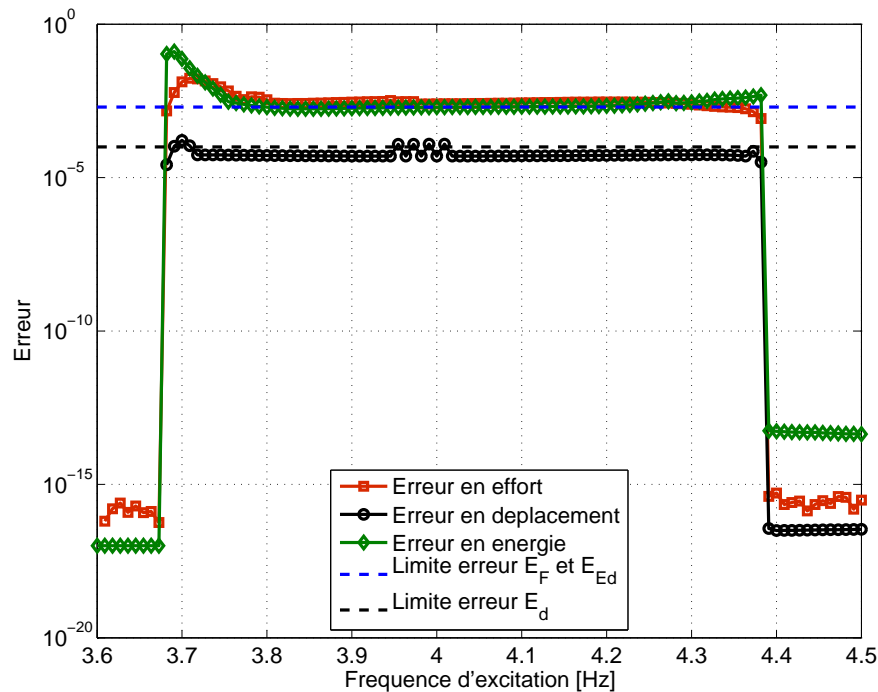


FIGURE 3.14. Évolution de l'erreur en fonction de la fréquence pour les différents critères d'erreurs

pourrait être différent. Des méthodes d'adaptation du nombre d'harmoniques pour chaque ddl de la structure ont été développées. A. Grolet et F. Thouverez [82] proposent d'utiliser un prédicteur tangent avec un nombre d'harmoniques important. Ce prédicteur est calculé à partir des efforts non-linéaires corrigés en temporel. Ils regardent pour chaque ddl l'importance relative de chaque harmonique suivant le critère choisi. Pour chaque ddl le nombre d'harmoniques nécessaire pour respecter la précision est retenu. Une correction par un solveur de Newton est effectuée avec le nombre d'harmoniques retenu à l'étape de prédiction.

Dans le cadre de cette thèse nous nous intéressons à l'usure par fretting, une erreur exprimée par la différence entre le taux d'usure pendant un cycle (calculé en utilisant les forces et les déplacements en temporel et leurs équivalents fréquentiels) semble être la plus appropriée.

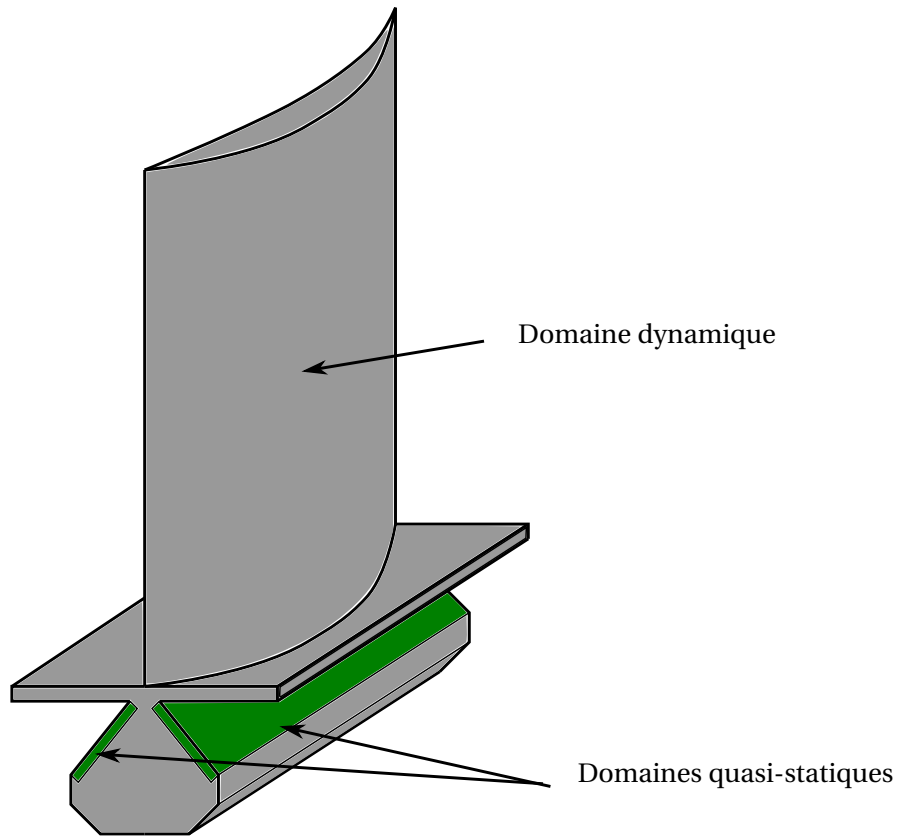


FIGURE 3.15. Division de l'aube en domaines statiques et dynamiques

3.3.3 Méthode multidomaine avec non linéarités localisées

Dans cette section nous présentons une nouvelle approche pour profiter de la spécificité des problèmes de contact avec frottement en dynamique avec application aux roues aubagées. Le principe de la méthode est simple. L'idée est de diviser la structure en différentes zones. Dans notre cas la roue aubagée est divisée en deux domaines (figure 3.15) ; un domaine possède des propriétés élastodynamiques tandis que l'autre domaine est supposé quasi-statique. Le domaine quasi-statique est localisé au niveau des zones de contact des portées. En effet, dans ces zones localisées, la dynamique intervient très peu. Les effets d'inertie sont surtout localisés au niveau de la pale et du disque. La Fig. 3.16 schématise l'approche proposée.

La liaison entre la zone dynamique et statique se fait via une interface de liaison. Les nœuds d'interface sont noté l qui sont différents des nœuds de contact notés c . Nous proposons pour l'instant d'utiliser un collage primal entre les deux domaines. Une autre solution consisterait à utiliser un collage dual et la méthode FETI, réputée pour sa rapidité de convergence.

3.3.3.1 Algorithme de résolution

On étudie une structure divisée en deux domaines. La structure est en contact avec un socle indéformable. On note (1) le domaine dynamique et (2) le domaine statique.

Le système dynamique est condensé sur les nœuds de liaison via une condensation en fréquentiel. Pour réduire la taille du système une méthode de Craig et Bampton peut-être utilisée dans le domaine élastodynamique avec comme nœuds d'interface retenus les nœuds de liaison. Dans le domaine sta-

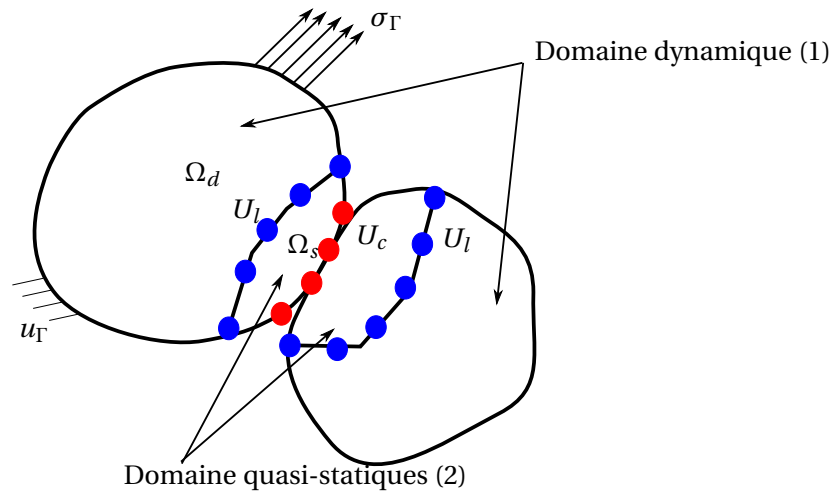


FIGURE 3.16. Séparation en domaines statiques et dynamiques de deux structures en contact

tique on condense le système sur les nœuds de liaison et les nœuds de contact. Le système à résoudre dans le domaine fréquentiel après réduction sur les noeuds de liaison et de contact est le suivant :

$$\mathbf{Z}_1 \tilde{\mathbf{U}}_{1l} + \mathbf{Z}_{21l} \tilde{\mathbf{U}}_{2l} + \mathbf{Z}_{21c} \tilde{\mathbf{U}}_{2c} = \tilde{\mathbf{F}}_1 + \tilde{\mathbf{F}}_{2l}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{Z}_{2cl} \tilde{\mathbf{U}}_{2l} + \mathbf{Z}_{2cc} \tilde{\mathbf{U}}_{2c} + \tilde{\mathbf{F}}_{NL}(\tilde{\mathbf{U}}_{2c}) = \tilde{\mathbf{F}}_{2c}. \quad (3.63)$$

L'idée est de séparer la résolution des équations (3.62) et (3.63). Cette séparation permet de résoudre le problème de contact (3.63) avec frottement en temporel. Comme les effets d'inertie sont négligés dans le domaine 2, la deuxième équation devient un problème quasi-statique. Plusieurs méthodes ont été testées pour résoudre ce problème.

Comme nous traitons le problème via une approche multidomaine la méthode FETI semblait une approche envisageable pour la résolution à l'interface du système. Malheureusement il parait difficile de traiter le problème non-linéaire du domaine (2) dans les étapes du solveur FETI. Il aurait fallu utiliser la raideur tangente $\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{2c}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}_l}$. La convergence de la méthode ne semblait pas assurée.

L'étude bibliographique des méthodes de résolution multidomaines non-linéaires nous a fait nous intéresser au solveur non-linéaire multidomaine avec relocalisation non-linéaire. Cette méthode est une modification des solveurs Newton-Krylov-Schur (NKS) [46]. Ces méthodes doivent leur nom à :

- la méthode de Newton pour la linéarisation et le schéma itératif-incrémental,
- la sous-structuration et la condensation de Schur pour l'écriture du problème aux interfaces,
- le solveur itératif parallèle de Krylov pour la résolution du problème linéaire condensé aux interfaces.

Dans les méthodes NKS le système linéaire est résolu en parallèle pour chaque sous-structure. Cresta *et al* [47] ont proposé d'ajouter la résolution du problème non-linéaire dans chaque sous-structure. Ce dernier point est équivalent à la stratégie qui est mise en place ici, en effet la résolution du problème non-linéaire dans le domaine (2) revient à faire de la relocalisation non-linéaire. Toutefois dans notre cas nous rajoutons le fait que cette résolution se fera dans le domaine temporel alors que le problème global est résolu dans le domaine fréquentiel. Nous cherchons à annuler la fonction suivante à l'interface :

$$f(\tilde{\mathbf{U}}_l) = (\mathbf{Z}_{1\text{red}} + \mathbf{Z}_{21l}) \tilde{\mathbf{U}}_l + \mathbf{Z}_{21c} \tilde{\mathbf{U}}_{2c} - \tilde{\mathbf{F}}_1 + \tilde{\mathbf{F}}_{2l} \quad (3.64)$$

Pour cela nous devons trouver les déplacements au niveau du contact. Nous rappelons que nous avons condensé le système du domaine (2) sur les interfaces de liaison et de contact. L'algorithme se décompose selon les étapes suivantes :

1. Le système (2) devient après application des déplacements $\tilde{\mathbf{U}}_l$ à l'interface de liaison en temporel :

$$\mathbf{K}_{2cc}\mathbf{u}_{2c}(t) + \mathbf{f}_{NL}(t, \mathbf{u}_{2c}) = \mathbf{f}_{2c}(t) - \mathbf{K}_{2cl}\mathbf{u}_l(t) \quad (3.65)$$

Ce système est résolu de façon quasi-statique, les effets d'inertie étant négligés.

2. Une fois $\mathbf{u}_{2c}(t)$ connu, on repasse en fréquentiel ce qui permet de calculer $f(\tilde{\mathbf{U}}_l)$.
3. Le solveur de Newton nécessite le calcul de la matrice jacobienne de f . Celle-ci s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{J} = (\mathbf{Z}_{1red} + \mathbf{Z}_{2ll}) + \mathbf{Z}_{2lc} \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{2c}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}_l} \quad (3.66)$$

Le terme $\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{2c}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}_l}$ est calculé analytiquement en temporel et repassé en fréquentiel.

4. À chaque étape i du solveur de Newton les déplacements de liaison sont mis à jour :

$$\tilde{\mathbf{U}}_l^{i+1} = \tilde{\mathbf{U}}_l^i - \mathbf{J}^{-1} f(\tilde{\mathbf{U}}_l^i) \quad (3.67)$$

Le sous-système (3.63) est résolu en utilisant la DLFT dans sa version quasi-statique. En fait n'importe quel programme résolvant des problèmes de contact peut être utilisé. Cette approche donne une grande souplesse dans la modélisation de la zone de contact. On peut envisager de prendre en compte des grands déplacements au niveau du contact et de la plasticité. Les méthodes de type « wearbox » [153] peuvent être utilisées.

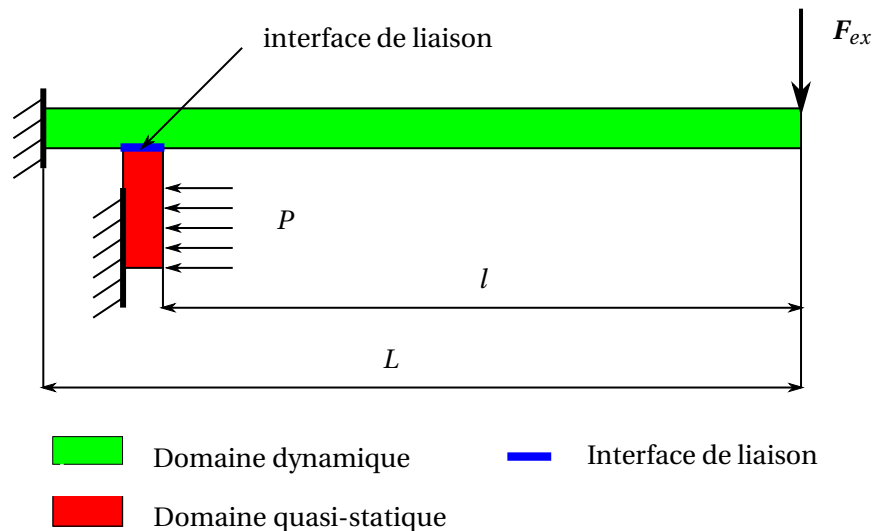


FIGURE 3.17. Modèle multidomaine d'une poutre avec frotteur

3.3.3.2 Exemple numérique

Nous reprenons le modèle de la poutre avec le frotteur vu a paragraphe 3.2.2. La poutre est un domaine élastodynamique tandis que le frotteur est un domaine elastostatique. Le nombre de nœuds de liaison est $n_l = 20$. Nous retenons 3 harmoniques. Nous avons utilisé les deux méthodes pour calculer la réponse forcée du système. Les paramètres de l'exemple sont les mêmes que dans le paragraphe 3.2.2. Sur la figure 3.18 est tracée la réponse forcée autour du premier mode. Les deux réponses sont très proche, cela tend à prouver que l'approche multidomaine est envisageable puisqu'elle donne des résultats pertinents. Dans notre travail, le comportement dans la zone de contact est très important. Nous allons donc comparer les résultats obtenus par les deux méthodes dans la zone de contact. Nous traçons l'amplitude des déplacements à la résonance le long de l'interface de contact du frotteur. Sur la figure 3.19 il y a une légère différence entre les deux méthodes. La forme est la même, il y a un écart entre les deux courbes. Toutefois l'erreur reste inférieure à 3%. Nous avons tracé l'évolution temporelle du premier point en contact (côté poutre) obtenue par les deux méthodes (figure 3.20). On s'aperçoit que la différence entre les deux méthodes est très faible. La différence observée sur la figure 3.19 est due au fait que d'un côté on a des résultats sur une base de séries de Fourier à l'ordre 3 et de l'autre des résultats en temporel.

La résultats obtenus avec cette méthodes sont bon. Les temps de calcul pour l'exemple traité sont en faveur de la méthode DLFT. En effet il faut 300 s par fréquence pour converger avec la méthode multidomaine alors que la méthode DLFT demande 30 s. Toutefois si on augmente beaucoup le nombre de nœuds de contact la DLFT demandera plus de temps en condensation et en résolution tandis que le temps de calcul de la méthode multidomaine variera peu puisque que le nombre de nœuds de liaison entre les deux domaines reste inchangé. De plus l'intérêt de l'approche multi-domaine est qu'il est possible de traiter chaque sous domaine parallèlement. Si on a beaucoup de zones de contact la méthode multidomaine en tirera avantage. Le fait de faire un traitement temporel quasi-statique de la zone de contact permet de pouvoir enrichir la physique (plasticité, comportement non-linéaire des matériaux en contact...) facilement. Au départ nous cherchions un solveur pour notre approche multidomaine/multiphysique, ceci nous a conduit à nous intéresser aux méthodes de résolution multidomaine parallélisables et en particulier aux méthodes NKS avec relocalisation non-linéaire. Les résultats obte-

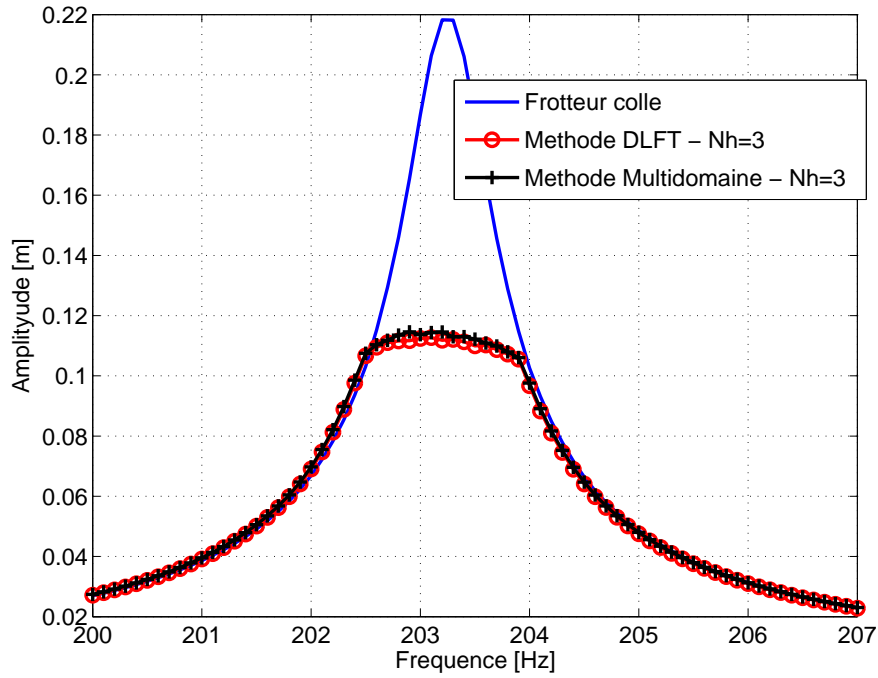


FIGURE 3.18. Réponse forcée en bout de poutre autour du premier mode avec la méthode DLFT et la méthode multidomaine

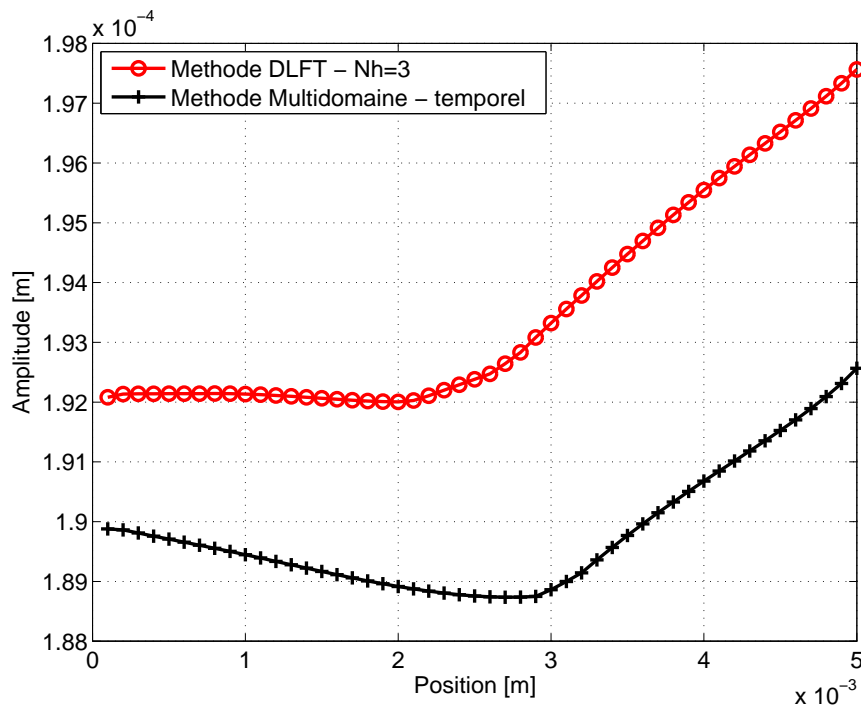


FIGURE 3.19. Amplitude des déplacements relatifs le long de l'interface de contact à la résonance ($f = 203.5$ Hz)

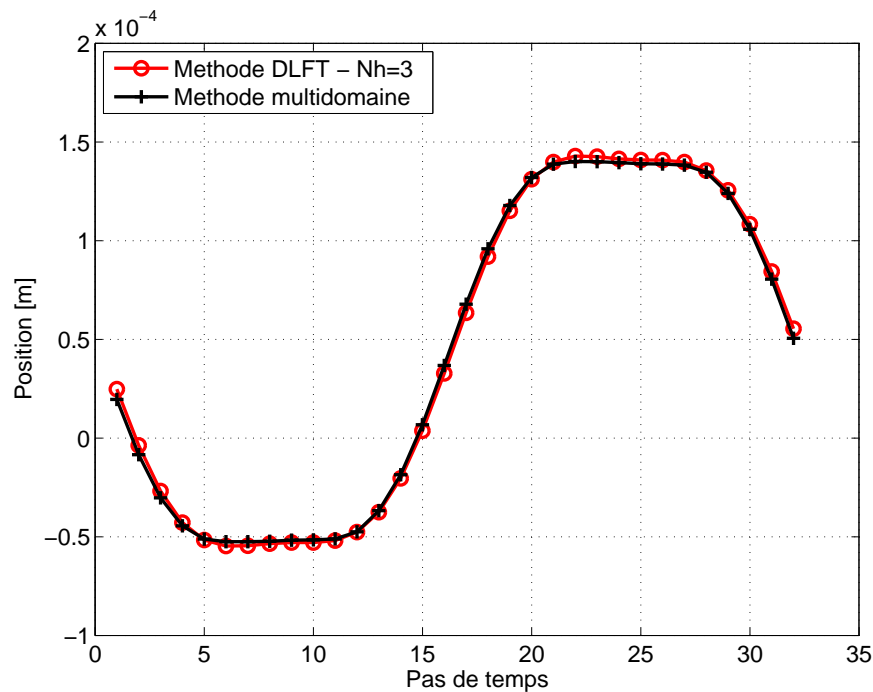


FIGURE 3.20. Déplacement temporel du premier de nœud de l'interface à la résonance ($f = 203.5$ Hz)

nus ouvrent la voie pour le développement de solveurs fréquentiels non-linéaires pour le traitement de gros systèmes avec beaucoup de degrés de libertés non-linéaires tout en restant dans une approche purement fréquentielle de type DLFT. Les problèmes pourront profiter de la puissance de calcul apportée par les clusters.

3.4 Conclusions

Dans ce chapitre les principaux outils nécessaires à l'analyse des systèmes dynamiques non-linéaires ont été présentés. Ces outils sont principalement fondés sur la méthode de l'équilibrage harmonique. Nous avons rappelé les différentes approches pour le calcul de réponse forcée. Comme notre étude se focalise sur les problèmes de contact avec frottement en dynamique nous avons présenté les différentes manières de traiter les non-linéarités de contact en fréquentiel. Nous avons montré que la méthode DLFT mise au point au LTDS était la plus adaptée à nos problématiques d'usure où une bonne connaissance du comportement dans la zone de contact est primordiale. La bonne prédiction des méthodes de l'équilibrage harmonique repose sur un choix judicieux du nombre d'harmoniques. Nous avons proposé différents critères d'erreur qui peuvent être utilisés pour choisir le nombre d'harmoniques. Cette approche peut encore être améliorée.

Nous avons ensuite présenté une méthode originale pour découpler le calcul entre domaines élastodynamiques linéaires et domaines élastostatiques non-linéaires. Cette approche peut permettre une prise en compte de comportement complexe dans certaines zones de la structure sans avoir à repenser tout le solveur non-linéaire. Les concepts de base ont été présentés mais demandent à être approfondis.

Enfin nous avons présenté le concept des modes non-linéaires complexe et en particulier une méthode de résolution qui avait été proposée par D. Laxalde [130] durant sa thèse. Cette méthode est adap-

tée aux problématiques industrielles rencontrées chez les constructeurs aéronautiques. Ce concept sera étendu avec la prise en compte de l'usure et l'introduction du concept d'usure modale dans le chapitre suivant.

Tous les résultats obtenus dans ce chapitre vont nous servir pour la stratégie multi-échelle en temps mise en place pour résoudre le problème d'usure par fretting sous chargement dynamique. Cette stratégie va être présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Calcul multi-échelle en temps de la cinétique d'usure

L'objet de ce chapitre est de proposer une méthode de traitement numérique des problèmes de contact avec usure sous chargement dynamique. Ce chapitre aborde dans une première partie l'aspect multi-échelle en temps de l'usure sous chargement dynamique. C'est cet aspect qui va conduire aux stratégies de résolution proposées. Dans la même section, nous présentons les méthodes qui permettent de calculer, de façon rapide, l'évolution d'un système ayant un comportement multi-échelle en temps et cyclique. Nous avons utilisé la théorie de l'homogénéisation qui a été proposée pour les structures quasi-périodiques spatialement mais qui peut être étendue à la quasi-périodicité en temps. Dans une deuxième partie nous présentons les méthodes utilisées pour la résolution des problèmes formulés sur l'échelle de temps lent. Des exemples illustrent les méthodes proposées et servent aussi d'exemples phénoménologiques afin de comprendre le couplage entre usure et dynamique. Une troisième partie présente l'application des modes complexes non-linéaires pour l'étude de l'usure modale à travers l'étude d'une aube de compresseur. Enfin, nous terminons ce chapitre en présentant des approches pour calculer directement le profil usé sans passer par le calcul de tous les cycles de chargement.

4.1 Aspect multi-échelle en temps de l'usure

Le problème d'usure par fretting sous chargement dynamique met en jeu des échelles de temps différentes. En effet, le chargement cyclique s'effectue à des fréquences élevées (entre 100 et 500 Hz) pendant des périodes longues à l'échelle des cycles d'excitations (3 heures de vol correspondent à 5,4 millions de cycles). Le phénomène d'usure est un processus lent qui correspond ici à l'accumulation de phénomènes rapides liés à la dynamique.

Cet aspect multi-échelle temporel sous chargement cyclique se retrouve dans d'autres problèmes mécaniques liés à la fatigue : plasticité, endommagement, thermique... Une particularité du problème d'usure sous chargement dynamique est qu'un état stationnaire peut exister si l'interface de contact est en glissement partiel [204]. Cet état stationnaire est caractérisé par un profil d'usure qui n'évolue plus. Ce phénomène ressemble à un état limite d'accommodation pour les problèmes de plasticité.

Différentes méthodes ont été développées pour traiter ces problèmes et peuvent être appliquées aux problèmes d'usure vibratoire.

4.1.1 Calcul rapide de systèmes ayant un comportement multi-échelle en temps

4.1.1.1 Simulation par saut de cycles

Lesne et Savalle [137], suivis de Kruch [124], proposent une méthode permettant de simuler un grand nombre de cycles de chargement. Ils l'ont utilisé pour modéliser des structures ayant un comportement plastique sous chargements cycliques. Contrairement à un calcul classique pas à pas où un premier cycle est simulé de manière incrémentale, puis un deuxième, un troisième et ainsi de suite jusqu'à la fin, la méthode des sauts de cycles permet de n'avoir à calculer la réponse que pour un nombre réduit de cycles judicieusement choisis, représentatifs des étapes clés de l'évolution du système (pour l'usure durant les périodes de rodage, d'usure normale et de dégradations sévères). Ainsi, dans le cas où un très grand nombre de cycles doivent être pris en compte, les temps de calcul s'en trouvent fortement réduits.

En plasticité, lorsque l'évolution des déformations irréversibles est suffisamment lente, l'algorithme permet de ne pas avoir à calculer la solution sur la totalité des cycles intermédiaires c'est-à-dire de pouvoir en sauter un certain nombre. Dans le cas de notre étude les déformations irréversibles sont remplacées par les profondeurs d'usure. En se plaçant à un instant particulier du cycle t^* , $t^* \in [0, T]$, l'évolution des grandeurs mécaniques internes peut être suivie en fonction du nombre N de cycles effectués. Ces grandeurs ne sont plus exprimées comme une fonction du temps mais uniquement comme une fonction de N , ce qui permet de décrire l'évolution de manière plus globale. Lors du $N^{\text{ème}}$ cycle, les variables mécaniques internes sont alors définies par $y(N) = y(t^*)$. Afin d'obtenir la meilleure extrapolation possible des variables y , l'instant t^* doit appartenir à une zone temporelle sans grandes variations. Le problème revient alors à déterminer, aux différents cycles de chargement, les valeurs $y(N)$ avec $N \in \{0, N_{final}\}$. Dans le cas de faibles variations, un développement de Taylor, au premier ou au second ordre peut être réalisé. Les valeurs $y(N)$, $y'(N)$ et $y''(N)$ permettent alors d'effectuer un saut de cycle. Une fois un saut effectué, il est nécessaire de simuler un nombre minimum de cycles avant de pouvoir effectuer un nouveau saut afin de stabiliser la solution déterminée précédemment et pouvoir obtenir à nouveau des valeurs correctes pour les dérivées premières et secondes. Öqvist [178] a utilisé une approche similaire en quasi-statique pour la modélisation numérique de l'usure.

4.1.1.2 Méthode à grand incrément de temps dans le cas de chargements cycliques

Dans le cas de chargements cycliques, Cognard et Ladevèze [42] adaptent la méthode à grand incrément de temps aux cas de chargements cycliques. Contrairement aux algorithmes classiques la méthode à grand incrément de temps n'est pas basée sur le schéma d'intégration pas à pas. L'ensemble du chargement est étudié en un seul incrément de temps en séparant les équations du problème en deux groupes. Plutôt que de simuler les N cycles directement dans un seul incrément, Cognard et Ladevèze [42] introduisent deux échelles de temps distinctes :

- un temps « long » défini sur l'intervalle $[0, t_{final}]$ décrivant l'évolution lente d'un cycle à l'autre,
- un temps « court » décrivant l'évolution rapide sur un cycle $[T_i, T_{i+1}]$.

Les grandeurs physiques sont considérées périodiques par rapport aux temps « courts » et de variations relativement lentes et régulières par rapport aux temps « longs ». Elles sont alors bien représentées sur l'intervalle entier $[0, t_{final}]$ par leurs valeurs en certains cycles particuliers $[T_i, T_{i+1}]$. Ces cycles là sont calculés à l'aide de la méthode à grand incrément de temps et entre ceux-ci des interpolations linéaires sont réalisées.

4.1.2 Recherche directe de l'état asymptotique

4.1.2.1 Approche par contrôle optimal

Peigney et Stolz [187] recherchent quant à eux directement l'état asymptotique de la structure comme solution d'un problème de contrôle optimal. Ils étudient l'état final d'une surface usée par un indenteur parfaitement rigide dont l'enfoncement est imposé. Le déplacement horizontal est aussi imposé. L'état asymptotique est déterminé par minimisation de l'énergie dissipée par usure sous la contrainte de respecter les conditions de contact. La fonctionnelle régularisée à minimiser est définie par :

$$J_\alpha(\mathbf{W}_0) = G_c \int_{\Gamma_c} W_0(x) d\Gamma + \frac{1}{\alpha} \int_{\Gamma_c} \int_0^T \langle G(W_0, (x, y), t) - G_c \rangle_+^2 dt d\Gamma \quad (4.1)$$

où W_0 est la profondeur d'usure en début de cycle, G_c le taux limite de restitution d'énergie entraînant l'usure, $G(W, (x, y), t)$ le taux de restitution d'énergie à l'instant t au point (x, y) . Le premier terme de la somme désigne l'énergie dissipée pendant le processus d'usure et α un coefficient de pénalité. À la convergence W_0 vaut le profil usé final. Le second terme est une pénalisation de la contrainte $G(W, (x, y), t) \leq G_c$ durant le cycle. Nous verrons plus loin que cette méthode peut-être écrite pour notre problème sous une forme proche des méthodes de tir présentées dans le chapitre précédent.

4.1.2.2 Méthode cyclique directe

La méthode cyclique directe proposée par Maitournam [149] recherche directement l'état asymptotique d'une structure soumise à un chargement périodique sans simuler tous les cycles de chargement. Initiée par Akel et Nguyen [2], elle se base sur la méthode à grand incrément de temps en recherchant une solution statiquement et cinématiquement admissible (SCA) sur la totalité du cycle de chargement. Lors de cette étape, une discrétisation temporelle est effectuée et autant d'équilibres que d'instantanés discrets sont résolus. Ensuite, à partir de la solution SCA, une solution plastiquement admissible (PA) est déterminée sur $[0, T]$. Un processus itératif est alors localement effectué jusqu'à obtention d'un champ de déformation plastique périodique. La recherche d'une solution SCA peut à nouveau être réalisée et ainsi de suite jusqu'à convergence. Maouche et al. [151] proposent ensuite d'imposer directement une condition de périodicité sur les déformations plastiques à la fin de l'étape locale. La recherche d'une solution plastiquement admissible est alors réalisée sans itération après l'obtention de la solution SCA. Enfin Maitournam et al. [149] résolvent l'équilibre global sur $[0, T]$ en projetant les différents champs sur une base de Fourier et en ne conservant que les coefficients les plus importants. Cette méthode a été implémentée dans le code de calcul Abaqus. Cette stratégie est très proche des méthodes d'équilibrage harmonique utilisées en vibration non-linéaire.

Nous avons présenté les méthodes qui peuvent être utilisées pour résoudre le problème d'usure sous chargement dynamique. Les formalismes de ces méthodes sont repris dans les paragraphes suivants qui présentent les méthodes mises au point pour résoudre les problèmes rencontrés dans notre travail. Nous allons maintenant présenter la formulation multi-échelle en temps du problème d'usure sous chargement dynamique.

4.1.3 Homogénéisation temporelle du problème d'usure sous chargement dynamique

Oskay et Fish [179, 180] ont proposé une méthode multi-échelle en temps avec homogénéisation asymptotique pour prédire la durée de vie à la fatigue de structures soumises à un chargement cyclique. Dans les méthodes d'homogénéisation asymptotique, le paramètre ϵ de développement en série est associé au rapport de taille entre les échelles. Leur formalisme s'inscrit dans une généralisation

de certaines méthodes exposées précédemment (saut de cycles, méthode à grand incrément de temps dans le cas de chargements cycliques). L'approche proposée dans ce travail est proche de la formulation écrite par Oskay.

Comme nous l'avons déjà dit le phénomène d'usure sous chargement dynamique est multi-échelle en temps. L'idée est de séparer le temps en un temps rapide et un temps lent. Le temps lent est lié aux phénomènes tribologiques tandis que le temps rapide est l'échelle des phénomènes de la dynamique. Comme le chargement est cyclique à l'échelle du temps rapide, le comportement est localement périodique. Ce sont les mêmes hypothèses qui ont servi de base à la théorie de l'homogénéisation spatiale des structures quasi-périodiques.

Le champ de réponse (déplacement, déformation, contrainte...) de la structure noté Φ s'écrit comme :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, \tau, \eta), \quad (4.2)$$

τ est le temps rapide, il est relié à t par $\tau = \omega t$ avec ω la pulsation de la réponse ; η est le temps lent, il est relié à t par $\eta = \xi t$ avec ξ un petit paramètre $\xi \ll \omega$.

La dérivée par rapport au temps de Φ donne :

$$\dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \quad (4.3)$$

La dérivée seconde donne :

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \omega^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \omega \xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau \partial \eta} + \xi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}, \quad (4.4)$$

Par la suite le terme en ξ^2 sera supposé négligeable.

Si cette stratégie est appliquée au problème d'usure en dynamique nous obtenons le système suivant pour les déplacements :

$$\mathbf{M} \left(\omega^2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \tau^2} + \omega \xi \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \tau \partial \eta} \right) + \mathbf{C} \left(\omega \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \xi \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} \right) + \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{F}_c(\mathbf{x}, \tau, \eta) = \mathbf{F}_{ex}(\mathbf{x}, \tau, \eta), \quad (4.5)$$

La particularité du processus d'usure est qu'il est bien plus lent que le phénomène vibratoire. Il est donc possible de négliger les termes en ξ dans l'équation (4.5),

$$\omega^2 \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \tau^2} + \omega \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{F}_c(\mathbf{x}, \tau, \eta) = \mathbf{F}_{ex}(\mathbf{x}, \tau, \eta), \quad (4.6)$$

où seul persiste $\mathbf{F}_c(\mathbf{x}, \tau, \eta)$, qui dépend de l'échelle lente. Ce terme crée le couplage entre usure et dynamique. La cinétique d'usure est régie par l'équation suivante :

$$\dot{w}(\mathbf{x}, t) = h(\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{F}_c(\mathbf{x}, t)), \quad (4.7)$$

elle se caractérise par une évolution lente qui permet d'écrire :

$$\dot{w}(\mathbf{x}, t) = \xi \frac{\partial w}{\partial \eta}, \text{ avec } \frac{\partial w}{\partial \eta} = g(\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{F}_c(\mathbf{x}, t)) \quad (4.8)$$

g est reliée à h par $g = \frac{1}{T} \int_{\eta}^{\eta+T} h(\mathbf{x}, \tau, \eta) d\tau$.

Lors du calcul de l'évolution de l'usure, l'intégration de l'équation (4.8) nécessitera la résolution de (4.6).

Nous allons maintenant présenter les stratégies de résolution sur chaque échelle de temps. L'écriture en deux échelles de temps bien distinctes nous permet d'écrire la solution du problème sous la forme :

$$U(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \Lambda_j(\eta) \Psi_n(\tau) \quad (4.9)$$

La plupart du temps les fonctions $\Lambda_j(\eta)$ et $\Psi_n(\tau)$ ne peuvent pas être exprimées analytiquement, une résolution numérique est nécessaire. Les hypothèses faites sur le comportement temporel de l'usure conduisent à l'écrire sous la forme :

$$W(t) = \sum_{j=1}^J \chi_j(\eta) \quad (4.10)$$

4.1.4 Résolution sur l'échelle rapide

Sur l'échelle rapide l'évolution est périodique par hypothèse. Il est donc possible d'utiliser une méthode de Galerkin. Les $\Psi_n(\tau)$ vont être représentées par les composantes de Fourier. Nous utilisons la méthode de l'équilibrage harmonique présentée dans le chapitre 3 pour résoudre le système (4.6). Les déplacements s'écrivent :

$$\mathbf{U}(\tau, \eta) = \tilde{\mathbf{U}}_0(\eta) + \sum_{n=1}^{N_h} (\tilde{\mathbf{U}}_{n,c}(\eta) \cos(n\tau) + \tilde{\mathbf{U}}_{n,s}(\eta) \sin(n\tau)) \quad (4.11)$$

Les forces de contact sont traitées par la méthode DLFT présentée au chapitre 3. Nous introduisons (4.11) dans le système (4.6) et une procédure de Galerkin, rendue possible grâce à la séparation des échelles de temps, donne le système algébrique non-linéaire suivant :

$$f(\tilde{\mathbf{U}}(\eta)) = \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{U}}(\eta) + \tilde{\mathbf{F}}_c(\eta) - \tilde{\mathbf{F}}_r = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

Le système (4.12) a été condensé sur les nœuds non-linéaires puis sur les déplacements relatifs. Ce système est résolu par un solveur non-linéaire de type Newton, de la même façon que ce qui avait été présenté dans le chapitre précédent. Une fois les vecteurs multiharmoniques des déplacements et des efforts (définis au chapitre 3) trouvés, la fonction g peut-être calculée, ce qui permet d'intégrer l'équation (4.8). Les forces de contact sont calculées en utilisant la procédure temps-fréquence présentée dans la section 3.2.1. Durant la résolution de (4.12), les profondeurs d'usure ne varient pas. L'équation d'intensité d'usure (4.8) est intégrée sur l'échelle lente.

Nous allons étudier dans la section suivante différentes manières d'intégrer cette équation.

4.2 Résolution du problème tribologique sur l'échelle lente

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour intégrer l'équation (4.8). Dans cette équation les variables \mathbf{F}_c et $\tilde{\mathbf{U}}$ sont définies implicitement par le système (4.12). Nous allons présenter trois approches qui ont été développées durant la thèse : une méthode par saut de cycle, une utilisation des schémas d'intégration numérique du premier ordre et une méthode de Ritz en temps.

4.2.1 Méthode par saut de cycles

Nous présentons dans cette section le principe de la méthode et deux exemples pour illustrer cette méthode. Les deux exemples ont aussi un côté phénoménologique, en permettant d'observer les conséquences du couplage entre usure et vibration. Cette méthode a été utilisée pour calculer les cinétiques d'usure en pieds d'aubes de compresseurs [204]. Un exemple d'étude de l'usure en pieds d'aubes de soufflante est présenté au chapitre 5.

4.2.1.1 Présentation de la méthode

Le calcul de g (4.8) donne le taux d'usure pendant un cycle. Il est possible d'utiliser ce taux d'usure pour prédire le niveau d'usure après un nombre de cycles donné ; Il s'agit d'une méthode par saut de cycle : pendant le nombre de cycles sautés le taux d'usure est considéré comme constant et nous faisons l'hypothèse que le système dynamique n'évolue pas. L'équation (4.8) peut s'écrire pour chaque nœud M en contact :

$$\delta W^M(\eta) = k_w \int_{\eta}^{\eta+T} P_N^M(\tau, \eta) \|\dot{U}_T^M(\tau, \eta)\| d\tau \quad (4.13)$$

où P_N est la pression de contact au nœud M , \dot{U}_T^M est la vitesse relative tangentielle au nœud M et k_w est le coefficient d'intensité d'usure de la loi d'Archard. P_N^M et \dot{U}_T^M sont obtenus par la résolution en fréquentiel du système (4.6).

Les niveaux d'usure sont calculés pour η en début de cycle, ils sont caractéristiques du cycle N . Les profondeurs d'usure sont mises à jour par l'équation suivante :

$$\delta W^M(N+1) = W^M(N) + dN \delta W^M(N) \quad (4.14)$$

où N est le numéro du cycle calculé.

Amélioration de la méthode

Calcul par incrément d'usure Pour diminuer le temps de calcul sur l'échelle lente la stratégie de saut de cycles peut être améliorée ; η est choisi égal à N , le nombre de cycles de fretting. Le principe de la méthode consiste à définir une profondeur maximale δW^* qui permettra de fixer le nombre de cycles, qui peut être « sauté », soit :

$$\Delta N(N) = \min_M \left(\frac{\delta W^*}{\delta W^M(\eta)} \right) \quad (4.15)$$

L'ensemble des profondeurs d'usure est mis à jour par :

$$W^M(N+1) = W(N) + \Delta N(N) \delta W^M \quad (4.16)$$

Une fois atteint le nombre maximum de cycles défini, le calcul s'arrête. Cette approche permet de décrire plus rapidement les phases où la cinétique d'usure est très lente.

Utilisation d'un prédicteur tangent L'utilisation de gradients par rapport à U_r et W est expliquée en annexe B, elle permet de prédire la réponse dynamique au cycle $N+1$ connaissant le comportement au cycle N . Cette approche permet de converger plus vite dans la résolution du problème non-linéaire algébrique.

La fonction f définie dans (4.12) est utilisée pour écrire le prédicteur. Un développement de Taylor à l'ordre 1 de f donne avec $U_r^{N+1} = U_r^N + \delta U_r$ et $W^{N+1} = W^N + \delta W$:

$$f(U^{N+1}, W^{N+1}) = f(U^N, W^N) + \mathbf{J} \delta U + \mathbf{J}_w \delta W \quad (4.17)$$

Nous faisons l'hypothèse que U^{N+1} annule f pour $W = W^{N+1}$. Nous obtenons alors une relation entre δU et δW :

$$\delta U = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_w \delta W. \quad (4.18)$$

La prédiction au cycle $N+1$ sera $U_r^{N+1} = U_r^N + \delta U_r$.

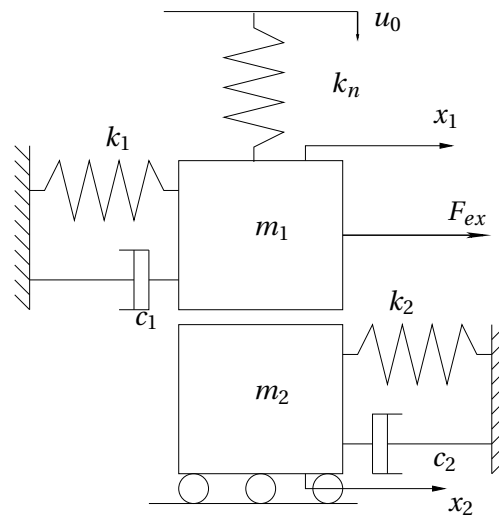


FIGURE 4.1. Modèle à deux degrés de liberté

m_1	k_1	ξ_1	m_2	k_2	ξ_2	k_n	u_0
1	π^2	0.1	1	$7\pi^2$	0.1	$1e4$	$1e-3$

TABLE 4.1. Tableau des caractéristiques du modèle deux masses-ressorts

4.2.1.2 Usure d'un système à deux degrés de libertés

Description La méthode multi-échelle en temps avec saut de cycle présentée précédemment va être appliquée sur un modèle simple comprenant deux masses m_1 et m_2 en contact. L'usure s'installe au contact des deux masses qui sont en glissement relatif. Un effort normal est appliqué via un ressort relié à la masse m_1 et dont l'autre extrémité est soumise à un déplacement u_0 imposé. L'usure va produire un relâchement de l'effort normal. Le modèle est représenté sur la figure 4.1. Les équations de ce système sont :

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + F_{nl} = F_0 \cos \omega t, \quad (4.19a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - F_{nl} = 0, \quad (4.19b)$$

$$\Delta w(nT) = K_w \int_{nT}^{(n+1)T} F_N \|\dot{x}_2 - \dot{x}_1\| dt, \quad (4.19c)$$

$$F_N = k_n \cdot (u_0 - w), \quad (4.19d)$$

où F_{nl} sont les forces tangentielles non-linéaires qui suivent la loi de Coulomb. Ce système a des fréquences propre à $1Hz$ pour la masse m_1 libre et $0.5Hz$ quand les deux masses sont collées. La première correspond au système adhérent et la seconde au système glissant. Nous imposons un déplacement normal initial tel que $F_N = 10N$ et le coefficient de friction est $\mu = 1$. La force d'excitation est en cosinus avec différentes amplitudes d'excitation.

Nous avons d'abord calculé les amplitudes de déplacement de la masse m_1 pour différents ratios $r = \left(\frac{F_{ex}}{\mu F_N}\right)$ et différentes fréquences. Les résultats sont reportés sur les figures 4.2 et 4.3. Le système peut connaître trois situations dynamiques dépendant du ratio r :

- la force d'excitation est trop faible et les masses restent collées,
- une situation de stick-slip avec des durées de « stick » supérieures aux durées de « slip »,

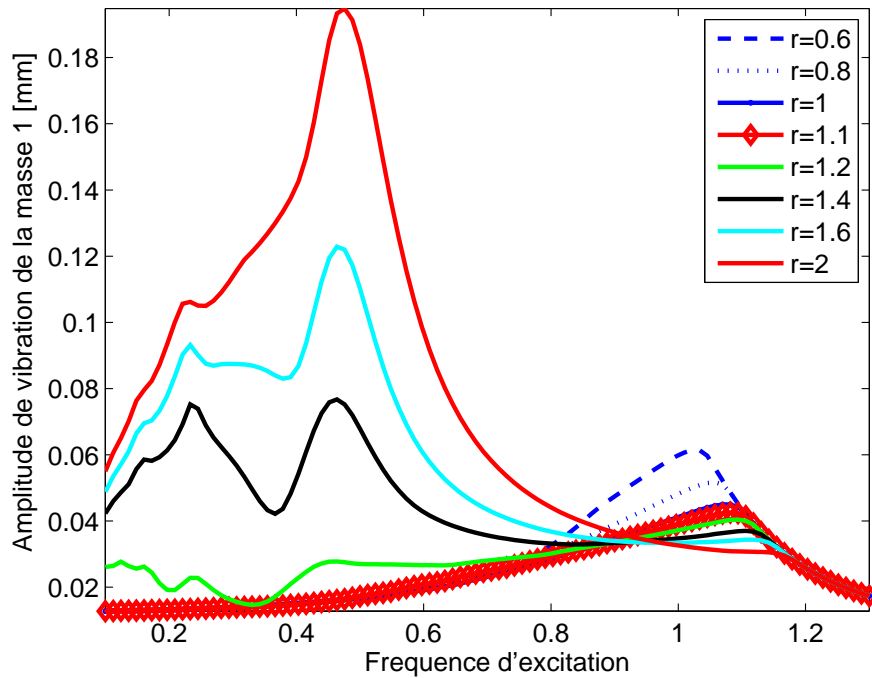


FIGURE 4.2. Réponse fréquentielle en amplitude des déplacements la masse m_1 pour différentes forces d'excitation $F_0 = [6, 8, 10, 11, 12, 14, 16, 20]$

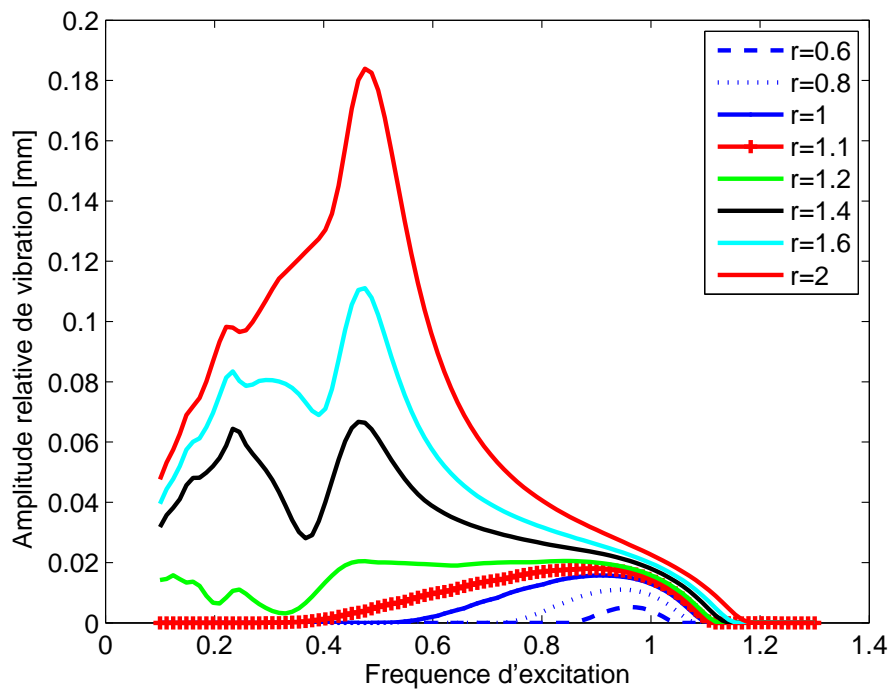


FIGURE 4.3. Réponse fréquentielle en amplitude des déplacements relatifs pour différentes forces d'excitation $F_0 = [6, 8, 10, 11, 12, 14, 16, 20]$

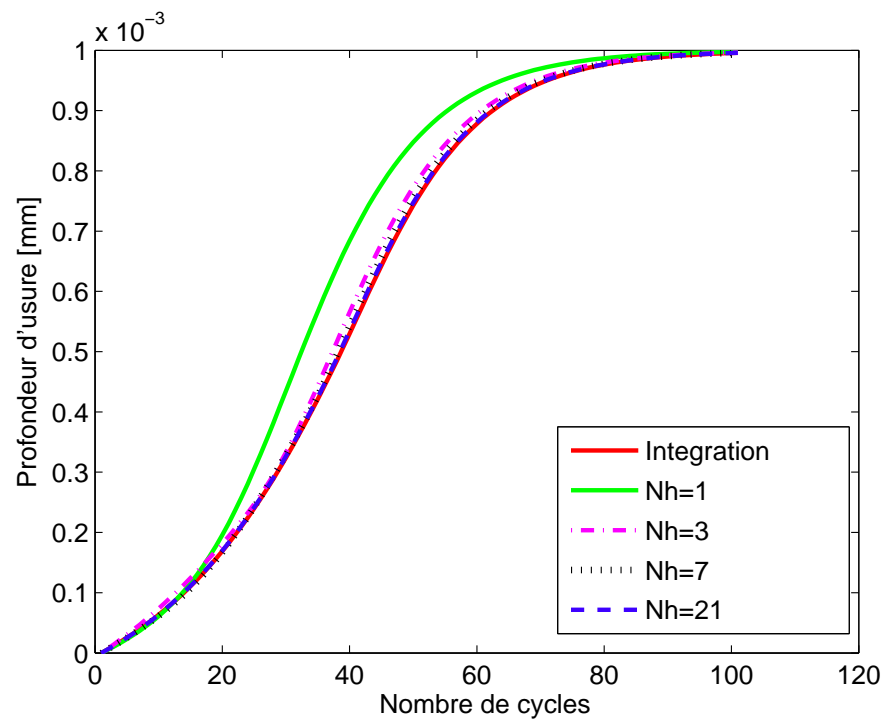


FIGURE 4.4. Évolution de la profondeur d'usure pour différents nombres harmoniques

– une situation de stick slip avec une durée de « slip » supérieure à la durée de « stick ».

Dans notre étude nous nous intéressons seulement aux deux derniers cas puisque le premier reste linéaire et il n'y a pas d'usure. Trois niveaux de forces seront envisagés : un premier cas où le système répondra à la fréquence de résonance du système adhérent ($6N$), un deuxième cas intermédiaire ($10N$) et un dernier cas à la fréquence de résonance du système glissant ($14N$).

Performance de l'algorithme Ce modèle simple nous a permis de valider la stratégie multi-échelle en temps. La figure 4.4 montre les cinétiques d'usure obtenues pour une excitation $F_0 = 10N$ à une fréquence $f = 0.7 Hz$ avec une intégration temporelle classique où l'usure évolue durant tous les cycles de fretting et avec la stratégie HBM multi-échelle en temps dans laquelle l'usure est constante durant chaque cycle de fretting. Les cinétiques d'usure obtenues sont semblables. Ce résultat permet de valider l'approche multi-échelle en temps.

La figure 4.4 montre aussi que la convergence augmente avec le nombre d'harmoniques.

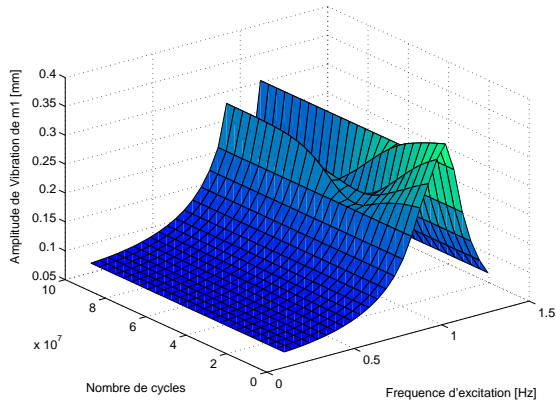


FIGURE 4.5. Déplacement de la masse m_1 pour $F_{ex} = 6N$

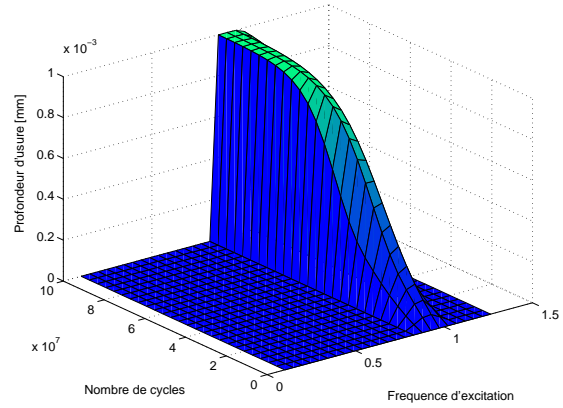


FIGURE 4.6. Usure de la masse m_1 pour $F_{ex} = 6N$

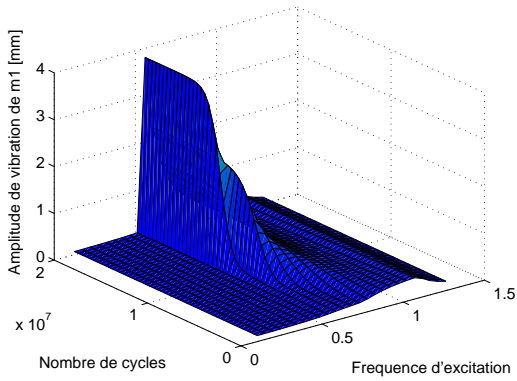


FIGURE 4.7. Déplacement de la masse m_1 pour $F_{ex} = 10N$

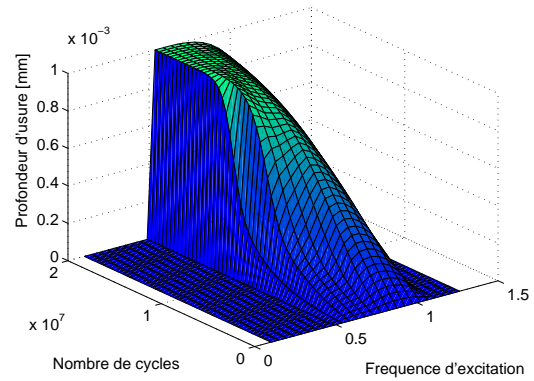


FIGURE 4.8. Usure de la masse m_1 pour $F_{ex} = 10N$

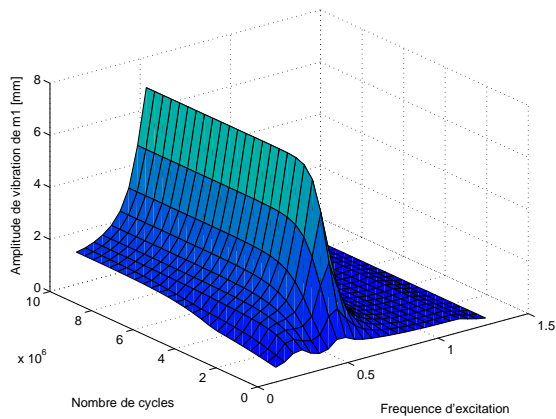


FIGURE 4.9. Déplacement de la masse m_1 pour $F_{ex} = 14N$

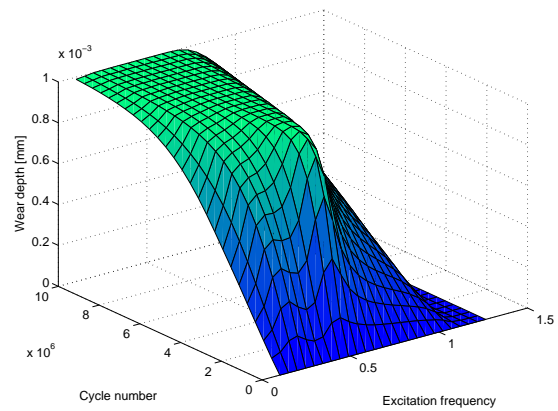


FIGURE 4.10. Usure de la masse m_1 pour $F_{ex} = 14N$

Interprétation phénoménologique

Excitation à 6N L'évolution de l'usure en fonction du nombre de cycles et de la fréquence est représentée sur la figure 4.6. Pour cette excitation l'usure ne se produit pas sur toute la plage fréquentielle mais près du mode adhérent. Après un certain nombre de cycles, l'usure s'arrête puisqu'avec un déplacement imposé plus les masses s'usent plus la force normale tend vers zéro. L'évolution de l'usure met en évidence trois étapes. D'abord l'usure est lente puis elle s'accélère jusqu'à un point d'inflexion après lequel elle ralentit pour atteindre un plateau. En outre, il n'y a pas de symétrie par rapport au point d'inflexion. La figure 4.5 illustre l'influence de l'usure sur la réponse dynamique. On constate qu'il y a une première gamme de fréquence $[0, 0.9]$ Hz sur laquelle il n'y aura pas d'usure, une deuxième $[0.9, 1.05]$ Hz qui atteindra un état parfaitement glissant et un dernier qui est, à nouveau, en état parfaitement adhérent. Le comportement vibratoire du système usé est illustré sur la figure 4.11. On voit sur cette figure que le système vient se caler sur le système collé ou glissant suivant que l'usure a eu lieu ou non.

Excitation à 10N Le système présente une résonance à $f = 1.1$ Hz (figure 4.7 et 4.8). Il répond près de la résonance du système où les deux masses sont collées. Durant les premiers cycles de fretting, le processus d'usure est plus important pour les fréquences proches de $f = 1$ Hz. Pour cette valeur de l'excitation la masse 1 est en mouvement par rapport à la masse 2 pour des fréquences dans le voisinage de $f = 0.5$ Hz. Or, cette fréquence correspond à la fréquence de résonance du système où m_1 est totalement glissante par rapport à m_2 . Au bout d'un certain nombre de cycle l'usure va s'accroître sur ces fréquences et va être plus rapide (en nombre de cycles) que pour les fréquences de résonance du système sain. Ainsi la fréquence de résonance d'un système sain n'est pas obligatoirement la fréquence où l'usure sera la plus importante. L'amplitude de vibration devient très importante à $f = 0.5$ Hz, alors qu'elle était faible pour le système sain. Ce phénomène a aussi été observé dans le cas d'une roue aubagée où les interfaces entre aube et disque s'usent [204].

Excitation à 14N Les figures 4.9 et 4.10 montrent respectivement l'amplitude du déplacement de la masse m_1 et l'évolution de l'usure. Pour cette valeur la zone usée couvre une plage fréquentielle beaucoup plus large. Pour certaines basses fréquences l'évolution de l'usure ne possède pas de point d'inflexion. Dans cette situation le taux d'usure est maximum au cycle initial. L'usure sera la plus rapide (en terme de nombre de cycles et non de temps) pour $f = 0.5$ Hz puisque le système répond sur le mode glissant. Le système sain montre la présence d'une résonance sur-harmonique à $f = 0.25$ Hz, qui disparaît avec l'usure. À cette fréquence le processus d'usure est plus rapide qu'aux autres fréquences, exception faite de la fréquence de résonance.

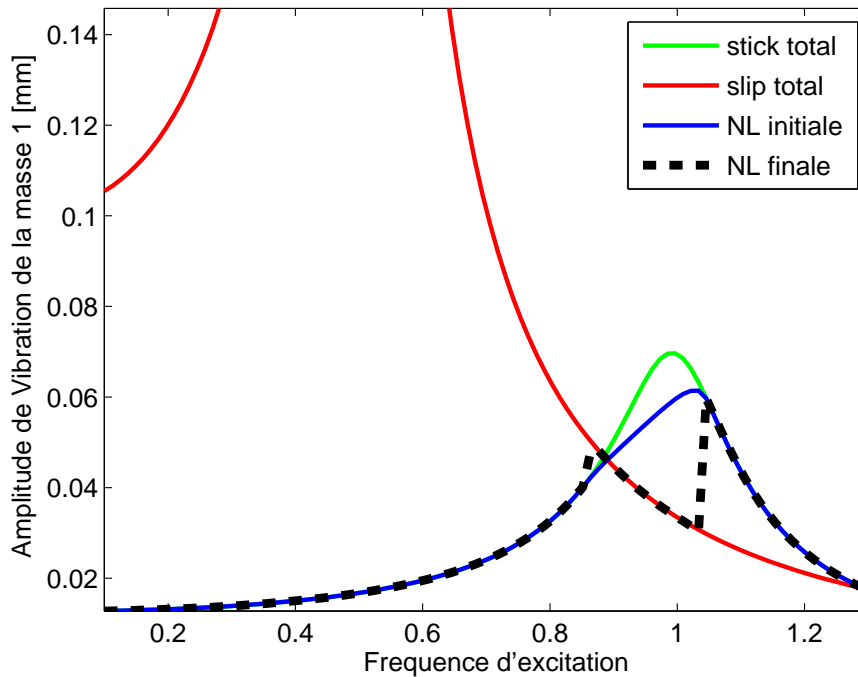


FIGURE 4.11. Réponse fréquentielle en amplitude des déplacements de la masse m_1 pour quatre situations

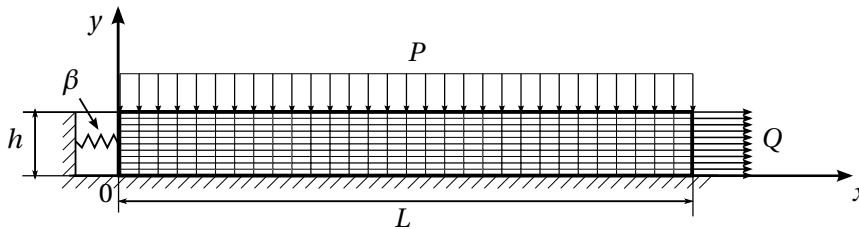


FIGURE 4.12. Géométrie et conditions aux limites d'une barre frottante

4.2.1.3 Usure d'un frotteur bidimensionnel

Description Dans ce paragraphe nous proposons de traiter l'exemple d'une usure répartie le long de la géométrie définie par la figure 4.12. Il s'agit d'une couche épaisse de longueur $L = 100$ mm, de hauteur $h = 10$ mm et d'épaisseur $l = 10$ mm, chargée transversalement avec une pression $P = 0.01$ MPa et soumise en son extrémité à un chargement sinusoïdal d'une amplitude $Q = 0.01$ MPa. Le solide est connecté à un socle par des ressorts de raideur $\beta = 0.01$ MN/m. Le coefficient de frottement sec est $\mu = 0.3$ et celui du taux d'usure est $k_w = 1.10^{-11} Pa^{-1}$. Le solide est modélisé par des éléments 2D rectangulaires en supposant une contrainte plane de la couche.

Performances numériques de la méthode L'algorithme utilisé dans cet exemple a été programmé dans l'environnement MATLAB R2009 sur un PC avec Intel Core i7 920 (2.66Ghz) tournant sous Linux. Quelques données sur le temps de calcul CPU sont fournies dans le tableau. 4.2.

Ayant utilisé une stratégie de saut de cycle le nombre de cycles d'usure calculés n'est pas le nombre de cycles réels. Le nombre de cycles présents dans le tableau est le nombre de cycles calculés.

Étude	it. New. / cycle	temps CPU / cycle	total it. New.	nb total de cycles	temps CPU total
quasi-statique	2.96	0.57 s	4474	1510	861 s
79 kHz	2.32	1.02 s	13977	6007	6127 s

TABLE 4.2. Statistiques des performances de la méthode DLFT avec usure

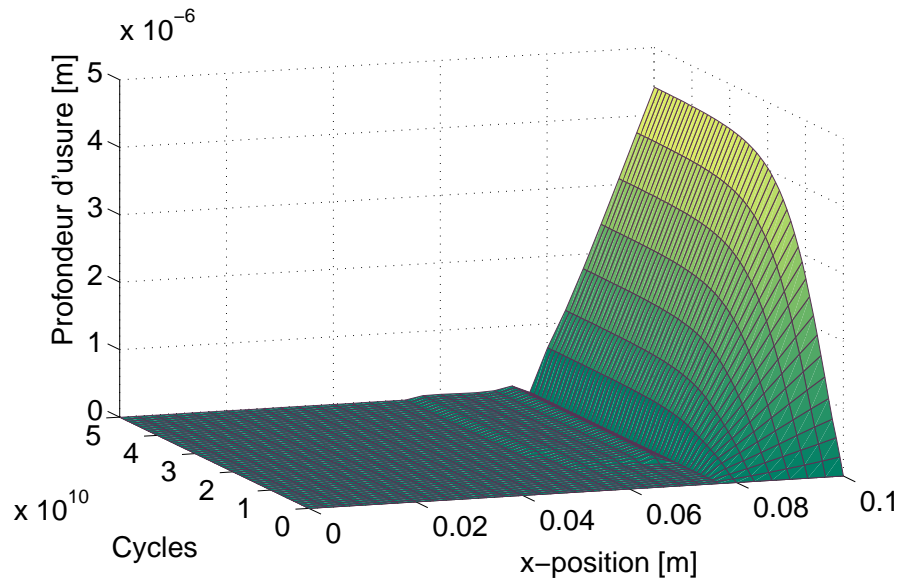


FIGURE 4.13. Évolution des profondeurs d'usure (chargement quasi-statique)

La seconde colonne du tableau donne le nombre moyen d'itérations nécessaire au solveur **fsolve** pour converger. Le nombre d'itérations est assez faible, des pics jusqu'à 15 itérations pour converger ont été observés pour certains cycles. La troisième colonne montre que les cycles à hautes fréquences demandent plus de temps pour converger. Ceci vient du fait qu'il faut calculer des cycles intermédiaires pour que le schéma d'intégration sur le temps long converge. La quatrième colonne confirme cette tendance. Les cinquième et sixième colonnes montrent que le calcul dynamique nécessite l'évaluation de plus de cycles de fretting, c'est la raison pour laquelle le temps CPU total est plus important. L'évaluation de l'usure par fretting en vibration demande plus de ressources informatiques qu'un calcul d'usure sous chargement quasi-statique.

Interprétations phénoménologiques

Chargement quasi-statique L'évolution de la profondeur d'usure est représentée sur les figures 4.13 et 4.14. Sur cette dernière le profil d'usure est dessiné pour le premier cycle, sur trois cycles intermédiaires et après un grand nombre de cycles, où un état stationnaire semble avoir été atteint. Trois comportements sont observés le long de l'interface de contact : aucune usure ne se produit, l'usure est maximum où est appliquée l'excitation et enfin une zone intermédiaire entre la zone d'adhérence et la zone de glissement s'use aussi. La dernière zone d'usure observée est due à un relâchement des pressions de contact dans cette zone et à un passage d'un état adhérent à un état glissant. Les résultats obtenus sont en accord avec les résultats obtenus par Strömberg [221].

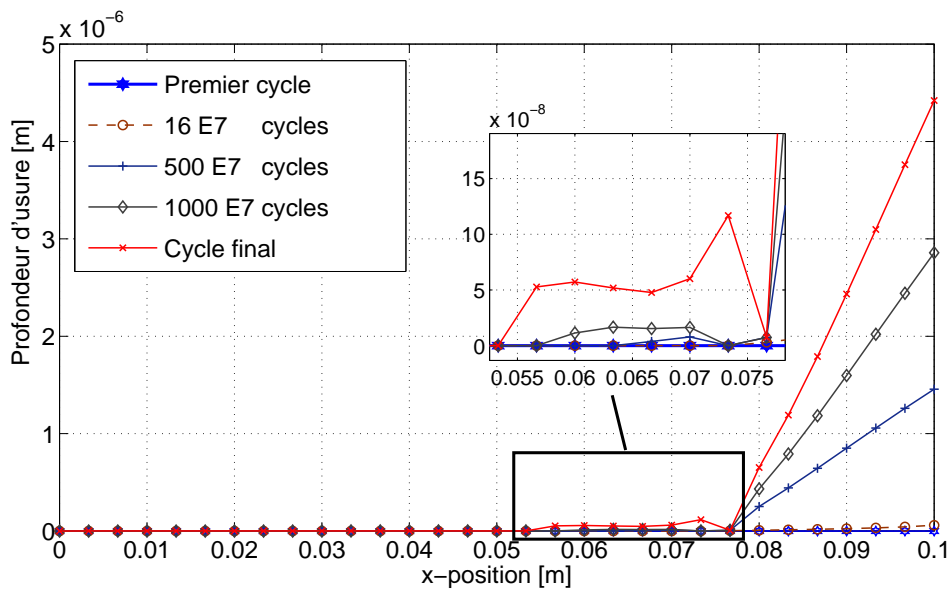


FIGURE 4.14. Coupe de la figure 4.13 : profil d'usure pour 5 nombres particuliers de cycles

Pour mieux comprendre le processus d'usure, l'évolution des profondeurs d'usure est tracée pour certains nœuds de contact qui appartiennent à la zone de glissement à droite du nœud « pivot » nœud bloqué $x = 0.077$ m, cf. figure 4.15) et à gauche de ce nœud (figure 4.16). Nous remarquons que la cinétique d'usure dans la zone de glissement principale est simple. L'intensité d'usure diminue avec le nombre de cycles puisque les pressions de contact se relâchent. Les profondeurs d'usure atteignent un plateau. La figure 4.16 révèle une cinétique d'usure plus complexe. À cause de l'usure dans la zone principale de glissement, la pression au niveau de la transition adhérent-glissant augmente. Les conditions d'équilibre produisent une diminution des pressions dans la zone d'adhérence près du pic de pressions. Ce relâchement des pressions rend la zone susceptible de glisser. Le glissement dans cette zone sous une pression qui n'est pas nulle entraîne l'usure de la zone. Ce phénomène de redistribution des pressions normales a pour effet que durant les cycles de fretting, l'usure s'arrête parfois et recommence après un certains nombre de cycles.

On remarque aussi que la zone adhérente est caractérisée par un glissement nul (figure 4.19 et figure 4.20) et un haut niveau des pressions normales (figure 4.18) qui n'ont jamais relâché durant l'usure. Cette zone joue le rôle de « pilier » qui est responsable du régime stationnaire caractérisé par un niveau d'usure nul. Cette première analyse de l'usure d'un frotteur bidimensionnel va servir de référence pour étudier le comportement de l'usure quand les effets d'inertie deviennent importants.

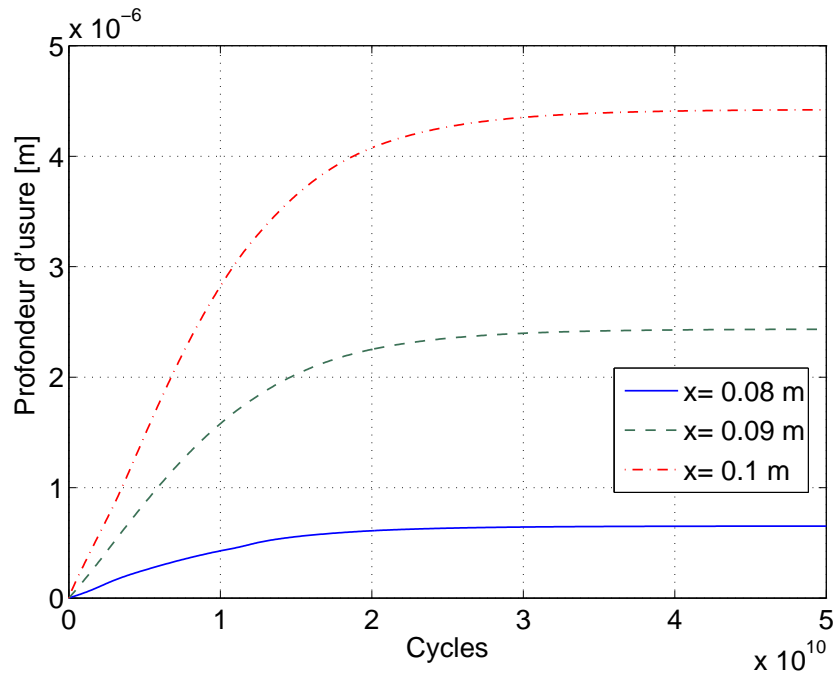


FIGURE 4.15. Coupe de la figure 4.13 : évolution de l'usure dans la zone de glissement

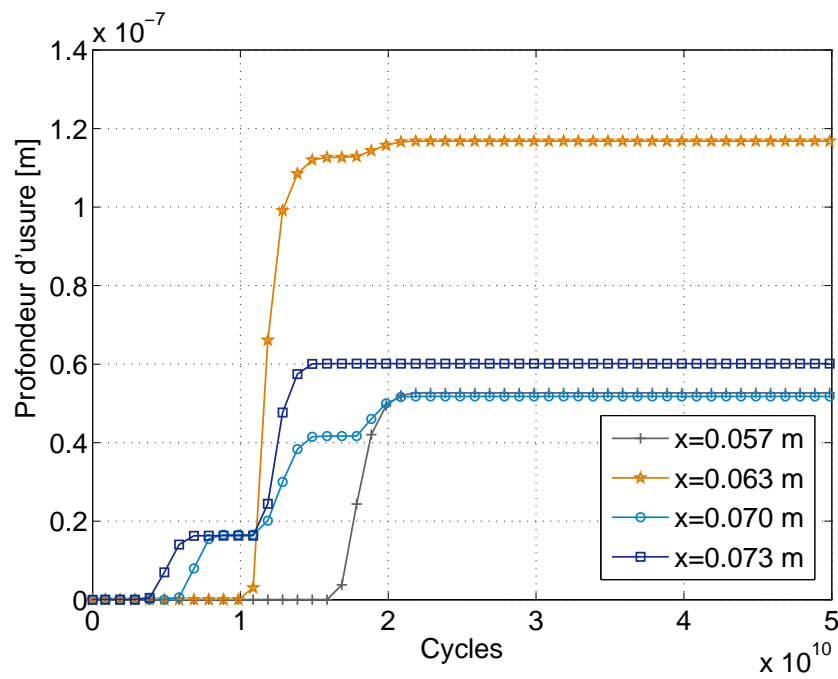


FIGURE 4.16. Coupe de la figure 4.13 : évolution de l'usure dans la zone intermédiaire

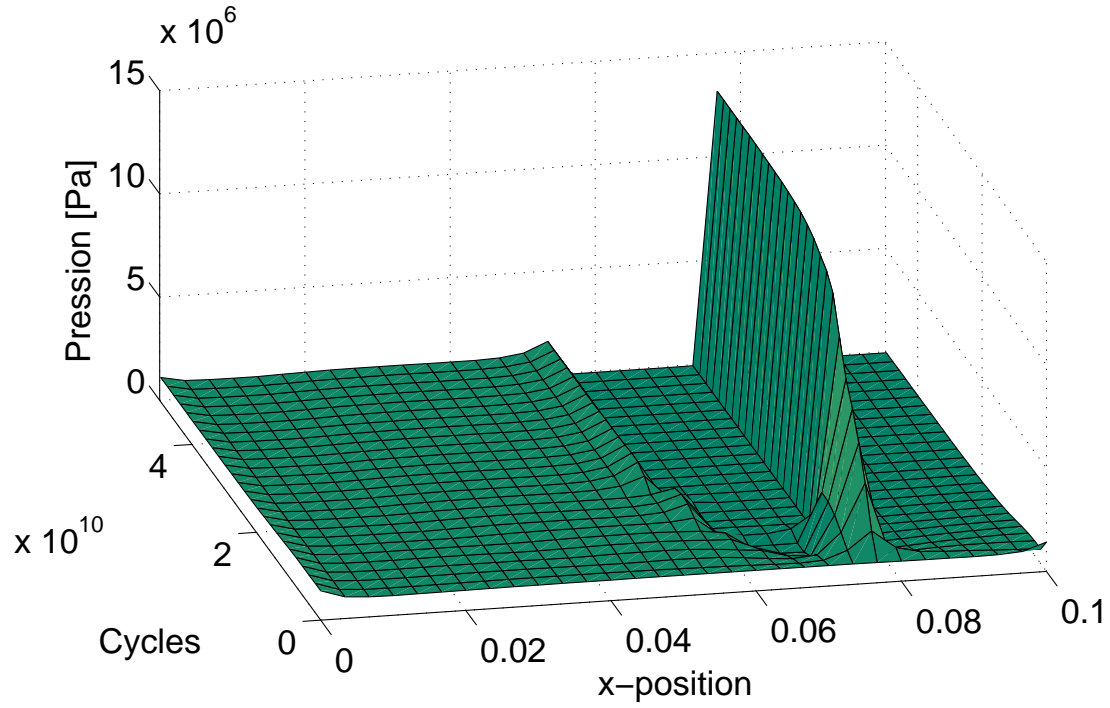


FIGURE 4.17. Évolution des pressions normales de contact

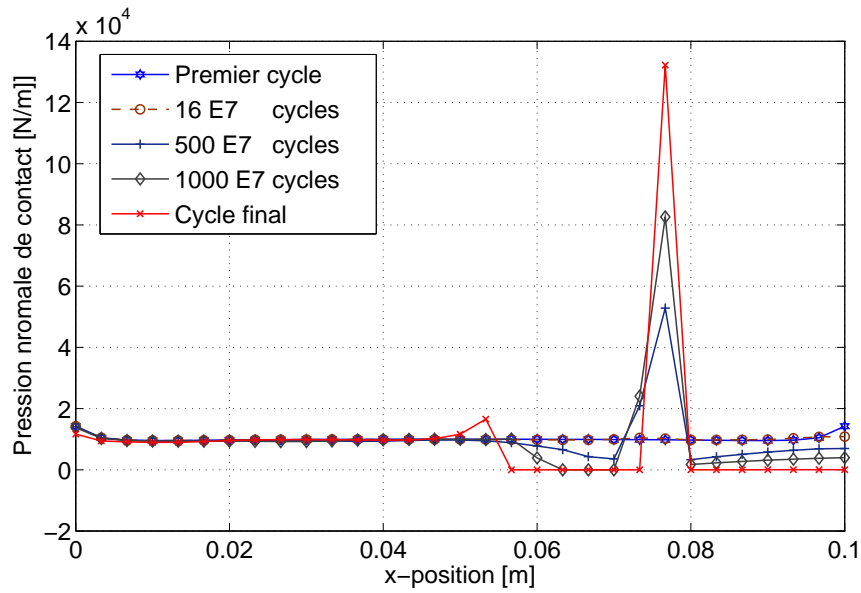


FIGURE 4.18. Distribution des pressions normales de contact pour 5 nombres de cycles particuliers

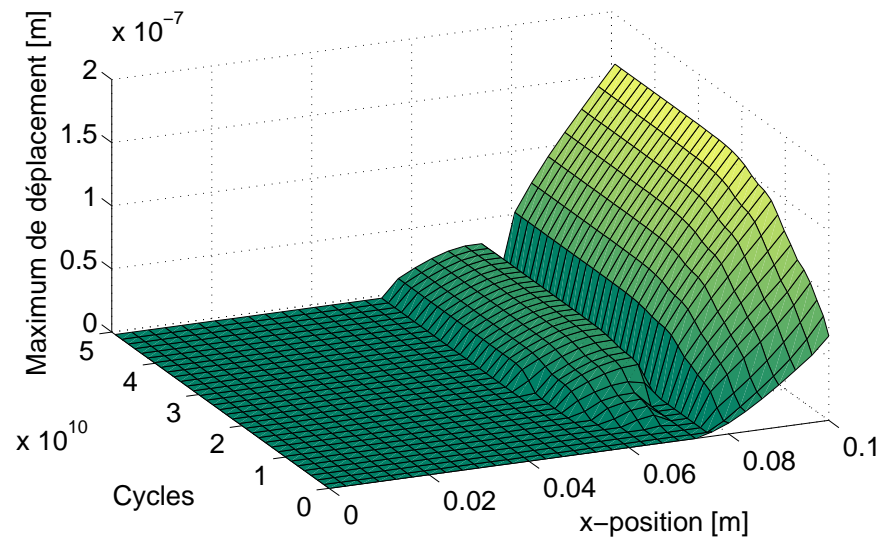


FIGURE 4.19. Évolution des amplitudes des déplacements tangentiels à l'interface de contact

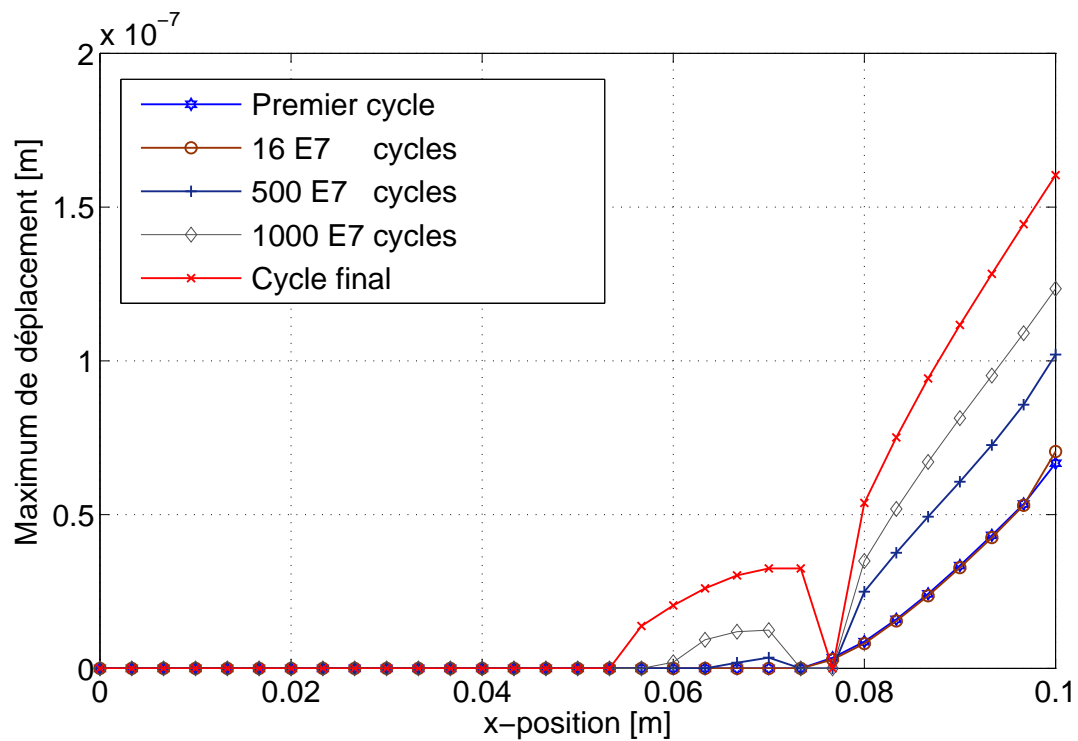


FIGURE 4.20. Coupe de la figure. 4.13 : amplitude des déplacements pour 5 nombres de cycles particuliers

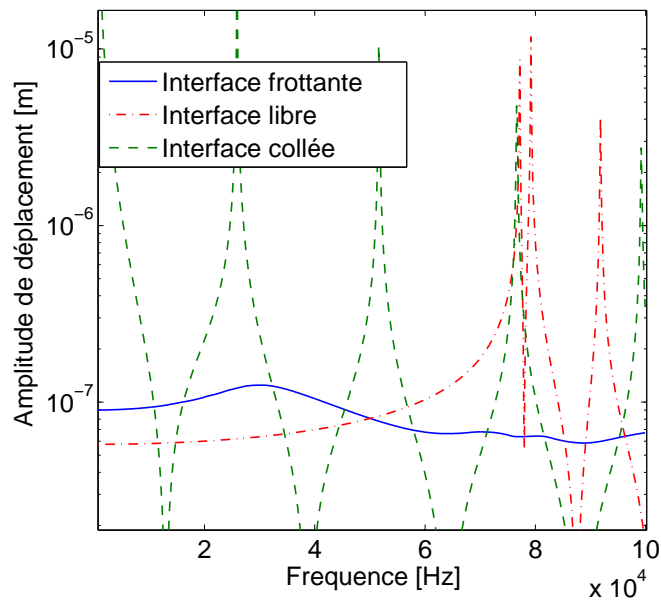


FIGURE 4.21. Réponse fréquentielle des déplacements horizontaux du point P_e avec différentes conditions de contact

Chargement dynamique Commençons par regarder le comportement du frotteur bidimensionnel quand il n'y a pas d'usure. Suivant la nature du contact, la réponse fréquentielle de l'amplitude au nœud P_e situé à l'extrémité du frotteur ($x = L$, $y = 0$) peut être tracée en utilisant l'algorithme de la DLFT. Les résultats sont reportés sur la figure 4.21. Sur la plage de fréquence étudiée (1 Hz à 100 kHz) quatre modes sont observés pour l'interface de contact libre sans frottement contre deux modes pour l'interface fixe. Le cas d'une interface de contact avec frottement donne un comportement intermédiaire, fortement amorti et une résonance non-linéaire autour de 30 kHz et deux plus petites à 70 kHz et 79 kHz (figure 4.22). Comparé au chargement quasi-statique, l'introduction des effets d'inertie conduit à un comportement dynamique beaucoup plus riche. Deux exemples à $f = 10$ kHz et $f = 79$ kHz (figure 4.24) illustrent cette richesse. Le nœud P_e (extrémité de la couche) s'arrête deux fois par période durant le cycle à $f = 10$ kHz et quatre fois par période à $f = 79$ kHz. De telles situations sont bien connues pour des oscillateurs avec frottement de Coulomb à 1 degré de liberté [94]. La figure 4.23 montre les profils usés obtenus pour quatre fréquences particulières.

Comme le comportement dynamique dépend de la fréquence, l'usure va aussi dépendre de la fréquence. Nous allons analyser le comportement en fretting du frotteur pour une fréquence d'excitation particulière $f = 79$ kHz, choisie pour son comportement dynamique très riche. Le calcul de la cinétique d'usure est effectué en utilisant un schéma d'Euler explicite sur l'échelle lente et la DLFT à l'intérieur des cycles.

Les déplacements le long de la zone de contact durant les cycles de fretting sont représentés sous forme de nappe sur la figure 4.25. Une coupe de la figure 4.25 à différents nombres de cycles afin de mettre en relief la modification du comportement vibratoire lié à l'usure est dessinée sur la figure 4.26. On constate que la plupart des nœuds de l'interface se mettent en mouvement.

Toutefois deux zones autour de $x = 0.005$ m et pour $x = [0.025, 0.040]$ m glissent de moins en moins. Elles sont accompagnées par une augmentation de la pression de contact comme l'illustre la figure 4.27

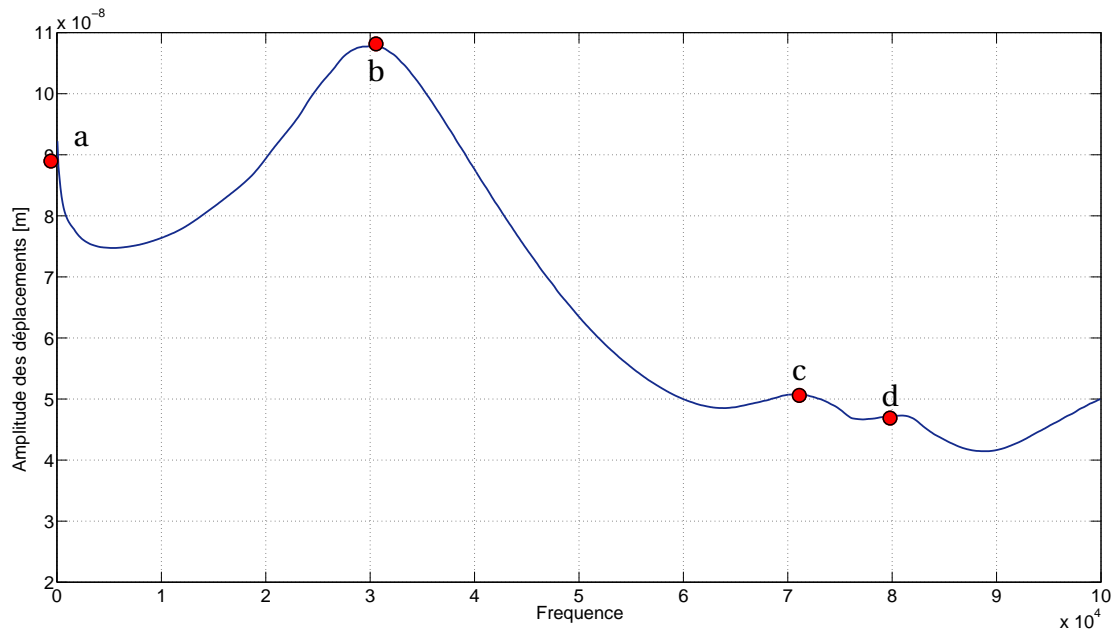


FIGURE 4.22. Réponse fréquentielle des déplacements horizontaux avec une interface frottante

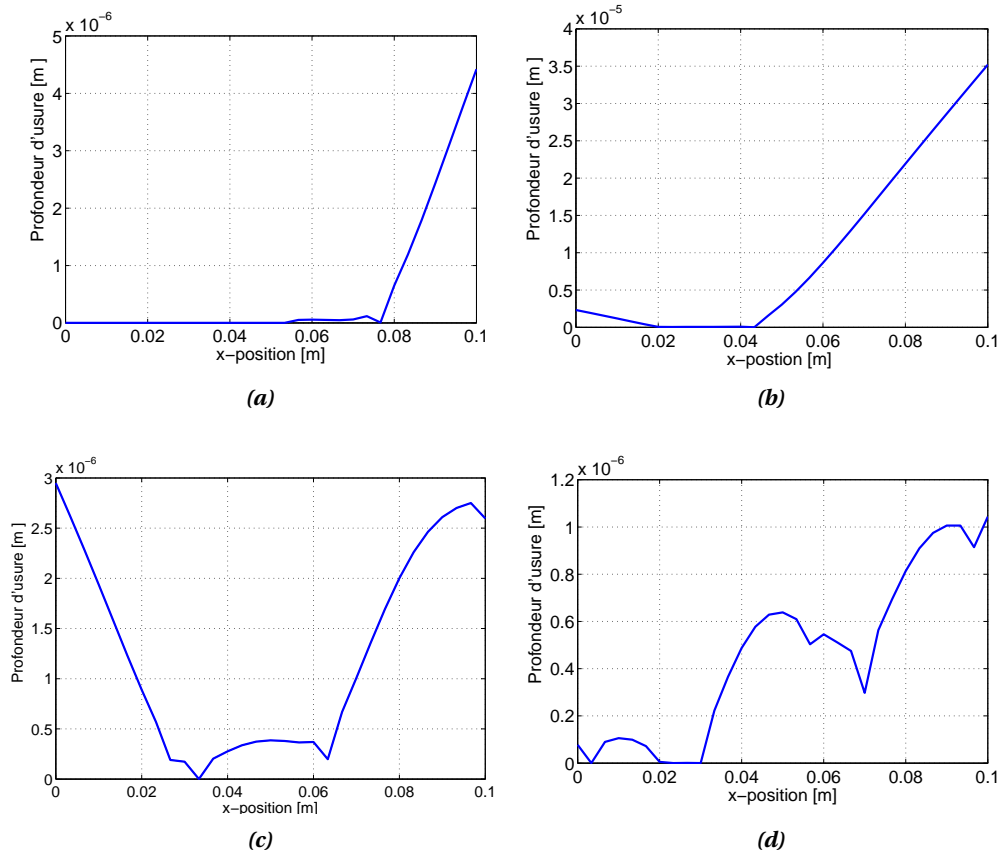


FIGURE 4.23. Profil final usé à différentes fréquences : (a) quasi-statique, (b) $f = 30\text{kHz}$, (c) $f = 70\text{kHz}$ et (d) $f = 79\text{kHz}$

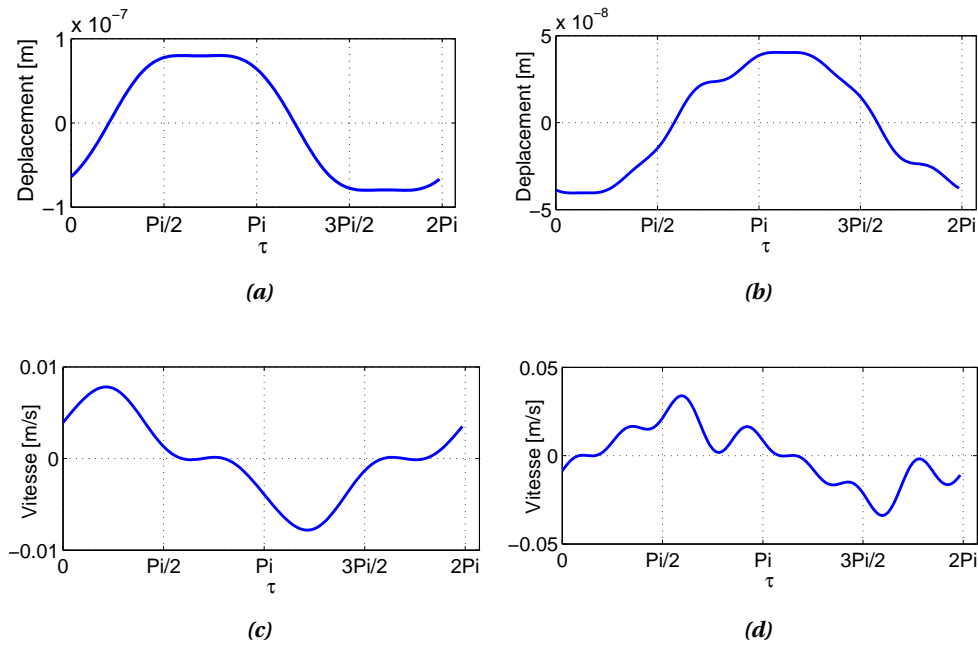


FIGURE 4.24. Déplacement et vitesse du point P_e à l'interface de contact en fonction de $\tau = \omega t$: $f_1 = 10kHz$ (a) et $f_4 = 10kHz$ (a).

et une usure nulle (figure 4.28 et figure 4.29). Ces nœuds correspondent à des nœuds de vibration. Ce phénomène est analogue à celui observé dans l'analyse quasi-statique. Ici la dynamique crée plusieurs points de blocage correspondant à des nœuds de vibration. La géométrie utilisée est par conséquent très différente de celle observée dans le cas quasi-statique. Elle peut être assimilée à une surface rugueuse (figure 4.29). Enfin l'évolution du volume usé total (figure 4.30) montre qu'un état stationnaire est atteint et que la cinétique d'usure de l'interface prise dans son ensemble est assez simple.

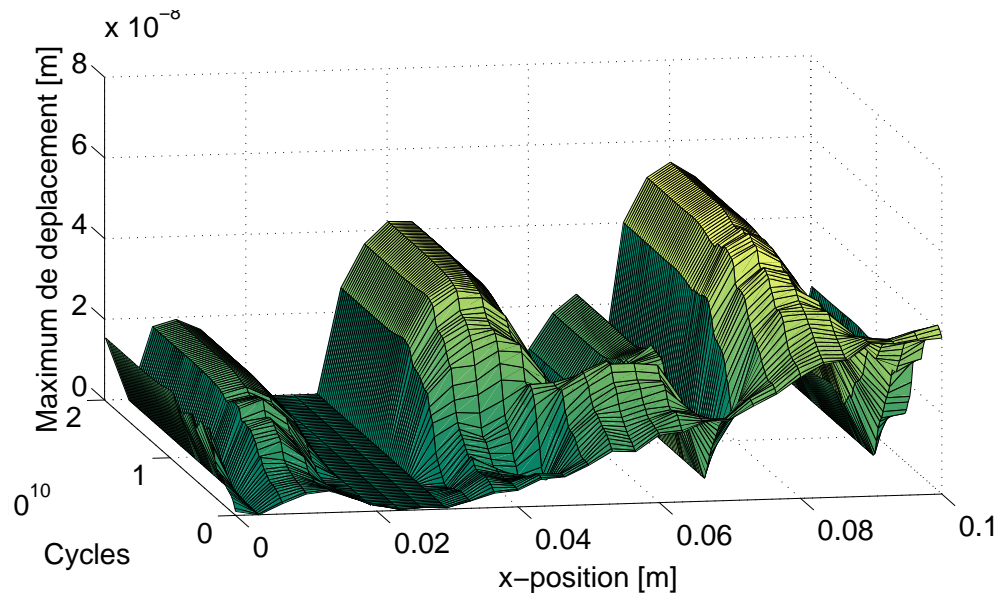


FIGURE 4.25. Évolution des amplitudes de déplacements tangentiels à l'interface de contact (79kHz)

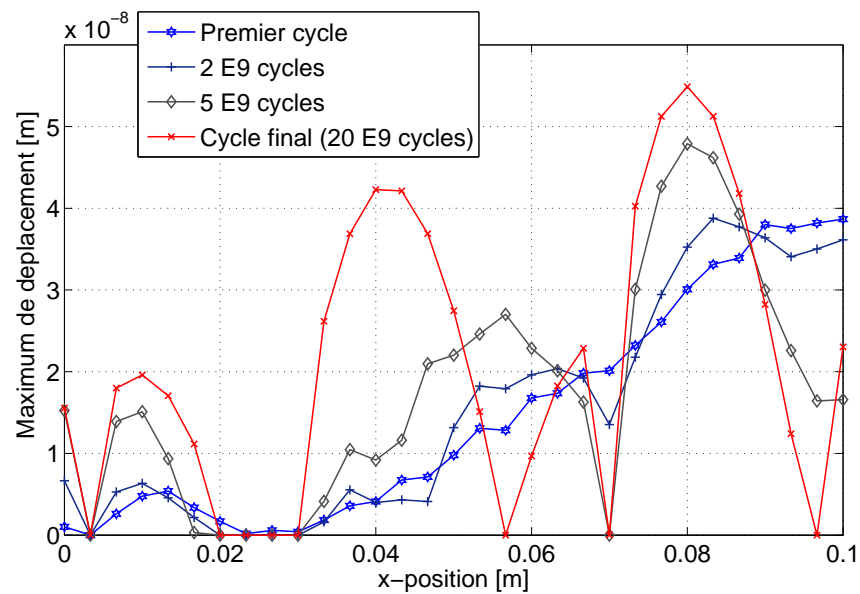


FIGURE 4.26. Coupe de la figure 4.25 : amplitudes des déplacements tangentiels pour 4 nombres de cycles particuliers

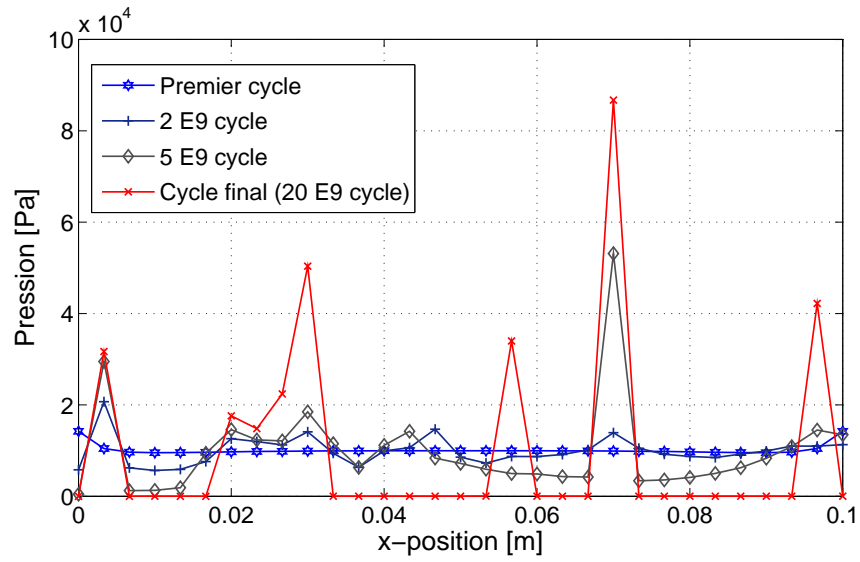


FIGURE 4.27. Distribution des pressions normales de contact pour 4 nombres de cycles particuliers (79kHz)

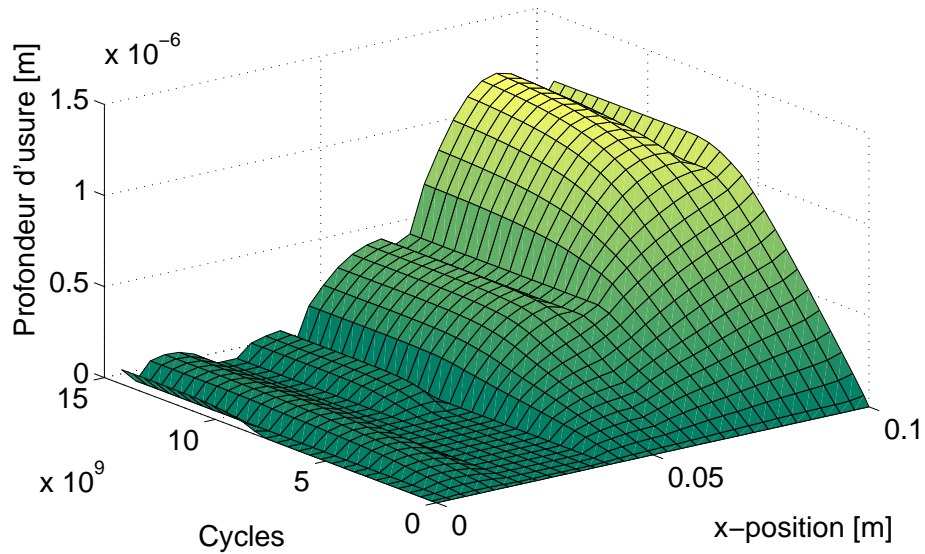


FIGURE 4.28. Évolution de la profondeur d'usure (79kHz)

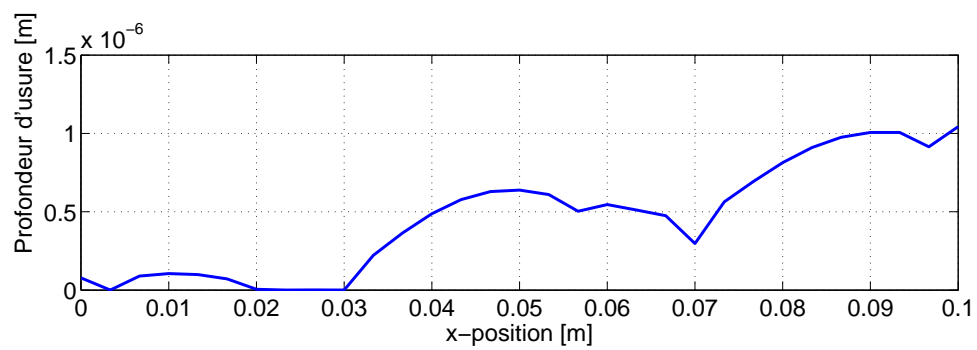


FIGURE 4.29. Profil usé final (79kHz)

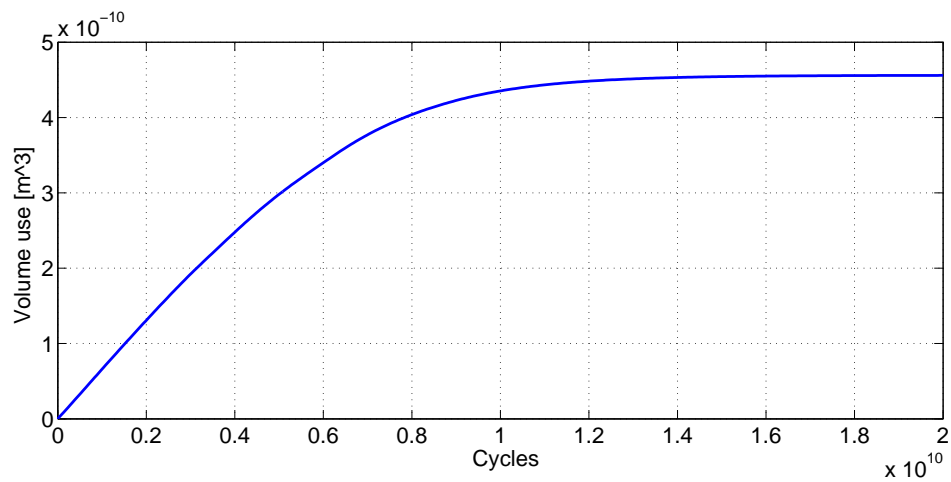


FIGURE 4.30. Évolution du volume usé total (79kHz)

4.2.2 Intégration temporelle sur l'échelle lente

4.2.2.1 Présentation des différents schémas

Comme nous l'avons vu précédemment le problème tribologique se traduit par une équation différentielle en temps. Il n'y a pas d'expression analytique des fonctions Λ_j et χ_j . Nous proposons d'intégrer l'équation différentielle avec des schémas d'intégration d'ordre 1 explicite ou implicite pour calculer $\Lambda_j(\eta)$ et $\chi_j(\eta)$. Le choix du schéma d'ordre 1 est lié au fait que les lois unilatérales de contact normal rendent difficile l'utilisation de schémas d'ordre supérieur. Ce problème avait déjà été soulevé dans le chapitre 2 (2.2.5) et dans les travaux de Khenous [114]. La fonction g est calculée à chaque pas de temps η_k en utilisant les vitesses relatives et les forces de contact sur un cycle.

Intégration explicite Commençons par présenter le schéma explicite. Nous utilisons un schéma d'Euler pour discrétiser Eq. (4.8).

$$W_{k+1}^M = W_k^M + ag(U_k^M, W_k^M) \quad (4.20)$$

où

$$g(U_k^M, W_k^M) = k_w \int_0^T P_N^M(\tau, W_k^M) \cdot \|U_T^M(\tau, W_k^M)\| d\tau. \quad (4.21)$$

a est le pas de temps sur l'échelle lente, W_k^M est la profondeur d'usure du nœud M au pas de temps η_k . La résolution se fait alors assez naturellement en estimant g avec les données du calcul dynamique à l'étape k , permettant le calcul du nouvel état usé W_{k+1} . Malheureusement, ce schéma peut demander un pas a très faible pour converger. Le calcul de l'évolution d'usure peut devenir très long. De plus, comme la plupart des schémas explicites celui-ci peut présenter des comportements instables rendant la résolution impossible.

Intégration implicite Nous utilisons un schéma d'Euler arrière (backward Euler) pour discrétiser Eq. (4.8).

$$W_{k+1}^M = W_k^M + ag(U_{k+1}^M, W_{k+1}^M) \quad (4.22)$$

où,

$$g(U_{k+1}^M, W_{k+1}^M) = k_w \int_0^T P_N^M(\tau, W_{k+1}^M) \cdot \|U_T^M(\tau, W_{k+1}^M)\| d\tau. \quad (4.23)$$

Le schéma étant implicite, à chaque pas de temps nous devons résoudre un problème non-linéaire plus important puisqu'il faut trouver le vecteur $\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{k+1} \\ \mathbf{W}_{k+1} \end{Bmatrix}$. Il faut résoudre à chaque pas de temps le problème suivant :

$$\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{U}}_{k+1} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (4.24)$$

$$W_{k+1} - a * g(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{k+1}, \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}, W_{k+1}) = W_k \quad (4.25)$$

Ce schéma permet de choisir un plus grand pas a . Nous verrons sur l'exemple (cas industriel) qui suit les avantages et les inconvénients de ces 2 types de schémas d'intégration.

4.2.2.2 Exemple numérique

Nous avons testé les deux schémas d'intégration sur le calcul de la cinétique d'usure en pied d'aube de compresseur près du mode 1F. Les résultats de cette étude ont été présentés dans un article à la conférence TurboExpo 2010 [205]. Le modèle éléments finis utilisé est le même que celui utilisé par D. Charleux lors de sa thèse [32].

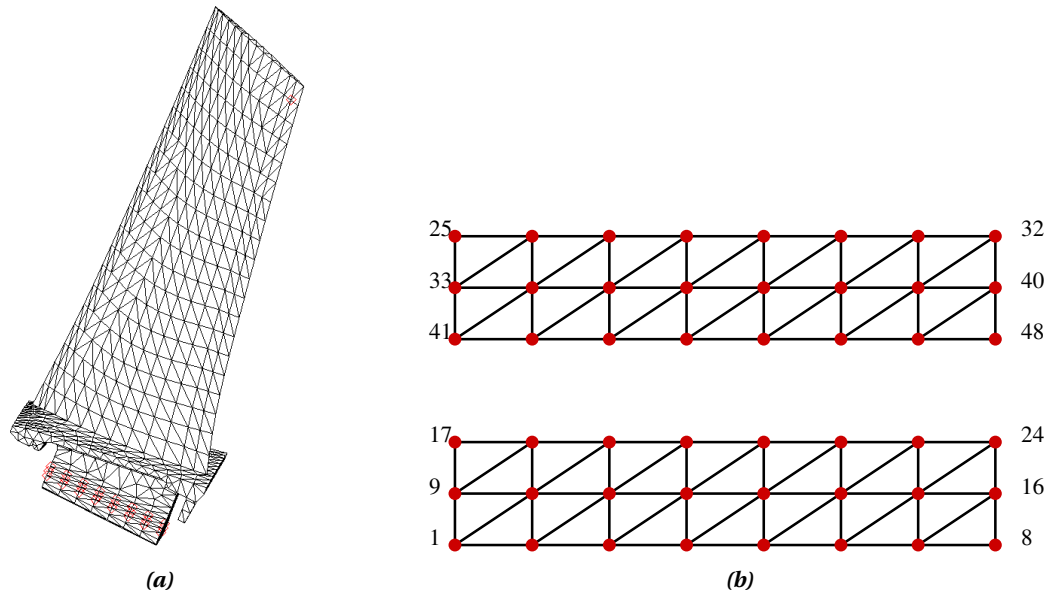
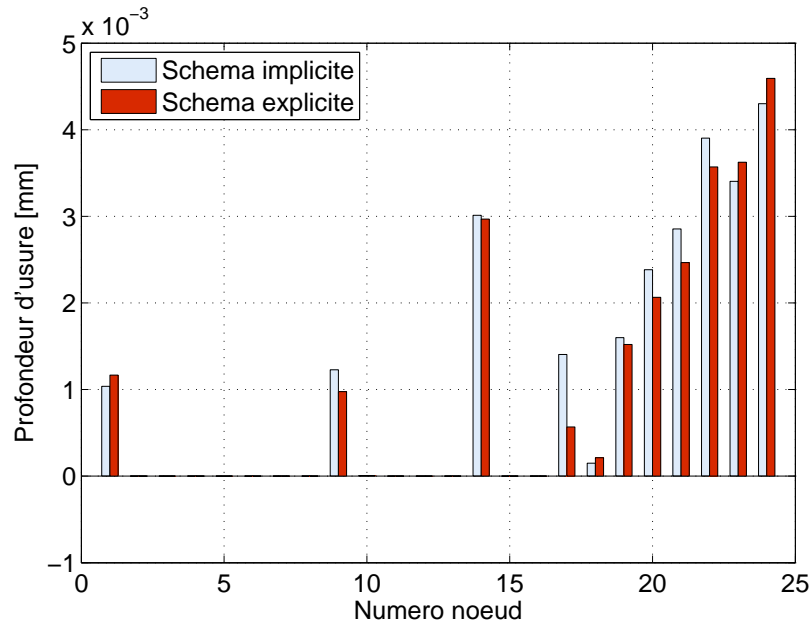


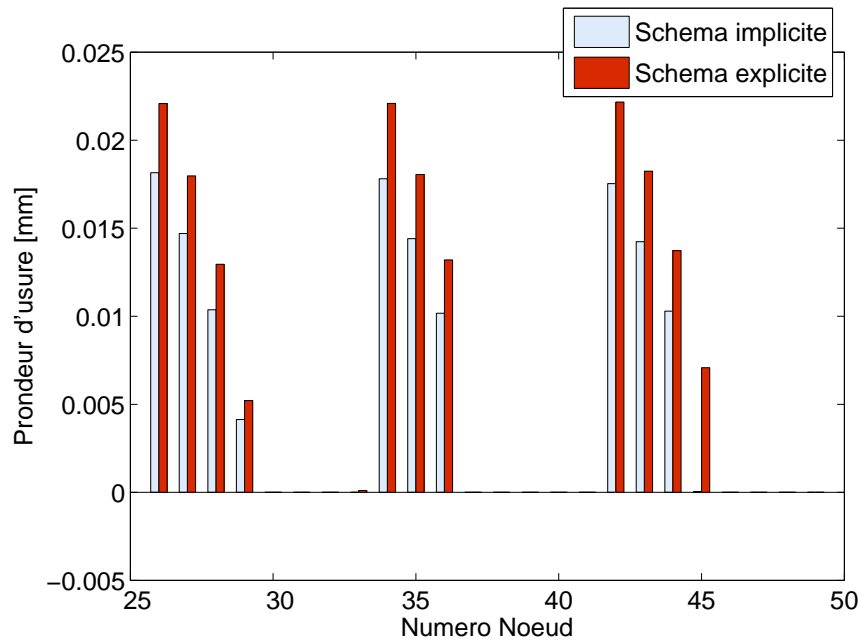
FIGURE 4.31. Modèle éléments finis d'une aube (a) avec les nœuds retenus pour la construction du super-élément (b)

L'étude porte sur l'usure par fretting au niveau des portées d'une aube de compresseur dont le modèle EF est représenté sur la figure 4.31. Ce modèle est réduit sur les nœuds de contact de la portée (2×24 nœuds) et sur un nœud d'observation situé en tête d'aube. Les nœuds 1 à 24 correspondent au côté extrados de l'aube et les nœuds 25 à 48 au côté intrados. La figure 4.31b montre la numérotation des nœuds de contact retenus.

Résultats comparés des deux schémas Nous avons calculé les profils d'usure de l'état stationnaire obtenus à la résonance en utilisant les deux schémas. Le pas de temps lent a été fixé à $h = 10^3$ cycles. Les résultats obtenus sont présentés sur les graphiques 4.32. Le schéma explicite s'écarte du résultat obtenu avec le schéma implicite. Une étude approfondie montrerait que si le pas de temps lent h est réduit le résultat du schéma explicite converge progressivement vers le résultat implicite. On préfère donc cette approche qui s'avère plus précise.



(a)



(b)

FIGURE 4.32. Profondeur d'usure pour les noeuds de l'interface de contact côté extrados (a) et intrados (b)

4.2.3 Méthodes de Ritz temporelles

Pour rendre le calcul de l'usure plus rapide nous cherchons à transformer le problème numérique lié à l'usure en un problème algébrique. Nous proposons d'écrire $\Lambda(\eta)$ et $\chi(\eta)$ sous la forme d'un polynôme. Dans le cadre d'un développement polynomial les fonctions de η deviennent :

$$W(\eta) = W_0 + W_1\eta + W_2\eta^2 + \dots \quad (4.26)$$

$$\tilde{\lambda}(\eta) = \tilde{\lambda}_0 + \tilde{\lambda}_1\eta + \tilde{\lambda}_2\eta^2 + \dots \quad (4.27)$$

$$\tilde{U}(\eta) = \tilde{U}_0 + \tilde{U}_1\eta + \tilde{U}_2\eta^2 + \dots \quad (4.28)$$

Nous introduisons l'opérateur \mathbf{P} et son inverse \mathbf{P}^{-1} , tels que $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{U}}_r$ est le vecteur des coefficients multiharmoniques polynomiaux. Sa taille est $(2N_h + 1) \times (m + 1)$, où m est le degré du polynôme.

$$\mathbf{P}\tilde{\mathbf{U}}_r = [\tilde{\mathbf{U}}_{0,0}, \dots, \tilde{\mathbf{U}}_{0,m}, \tilde{\mathbf{U}}_{1,0,c}, \tilde{\mathbf{U}}_{1,0,s}, \dots, \tilde{\mathbf{U}}_{N_h,m,s}]^T \quad (4.29)$$

Dans $\tilde{\mathbf{U}}_{n,m}$ le premier indice n est celui de l'harmonique et le second m correspond au degré du monôme. L'équation (4.12) devient :

$$\mathbf{Z}_r^{\mathbf{P}} \mathbf{P}\tilde{\mathbf{U}}_r + \mathbf{P}\tilde{\lambda} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{F}}_r \quad (4.30)$$

avec $\mathbf{Z}_r^{\mathbf{P}} = \text{diag}(\mathbf{Z}_r, \mathbf{Z}_r, \dots, \mathbf{Z}_r)$.

La procédure de prédiction/correction présentée dans le chapitre 3 pour calculer les forces de contact est conservée. Les forces de contact sont prédites sur chaque cycle de fretting, en utilisant les forces de contact issues du fréquentiel et la mise à jour de l'usure. Maintenant dans le domaine temporel nous avons une double discrétisation : une discrétisation sur chaque période et une liée à l'espace de temps lent. Chaque pas de temps de cette procédure est défini par la paire (τ^n, η^k) . Pour passer de l'espace fréquentiel polynomial vers un pas de temps (τ^n, η^k) il faut d'abord appliquer l'opérateur inverse \mathbf{P}^{-1} pour obtenir les fonctions de η des coefficients multiharmoniques en chaque η_k puis une iDFT est effectuée pour obtenir les pas de temps de chaque période liés à η_k . À chaque pas de temps (τ^n, η^k) les forces de contact sont corrigées pour satisfaire les conditions de contact et de friction. La boucle temporelle s'arrête quand $(n, k) = (N_{it}, N_{final})$. A chaque pas η_k on calcule l'usure, qui sera utilisée à l'étape $k + 1$. Ensuite il faut repasser dans l'espace fréquentiel polynomial via DFT et \mathbf{P} . Les valeurs des multiplicateurs de Lagrange dynamiques polynomiaux et l'usure corrigée sont introduites dans (4.30) pour vérifier la convergence.

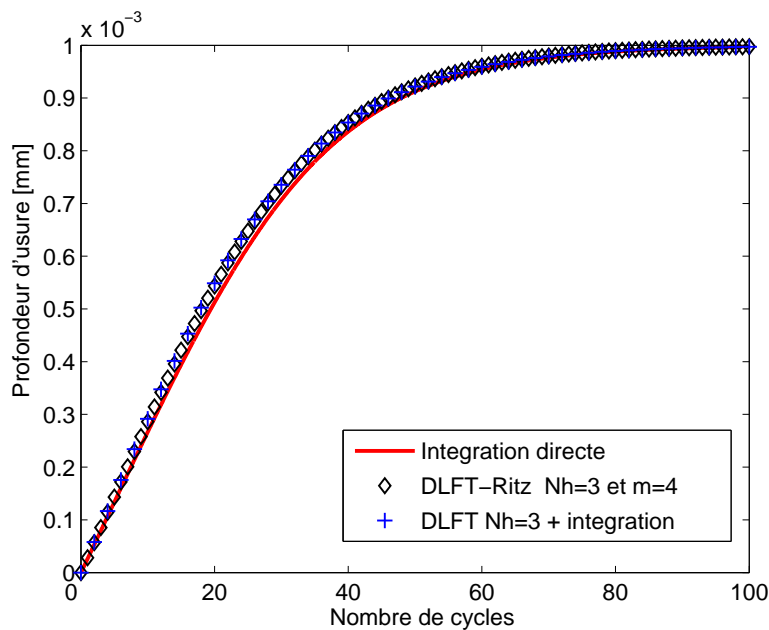


FIGURE 4.33. Évolution de la profondeur d'usure pour trois méthodes avec $F_{ex} = 10N$ à $f = 0.8\text{Hz}$

Exemples d'application Nous présentons des résultats obtenus sur le modèle à deux masses frottantes présenté au paragraphe 4.2.1.2 avec l'approximation polynomiale des fonctions en η et la résolution DLFT du problème dynamique. Nous avons sélectionné $N_h = 3$ et $m = 4$, la force d'excitation est $10N$. La figure 4.33 montre l'évolution de l'usure, les résultats sont très proches de ceux obtenus avec la DLFT et le saut de cycle. Dans l'ensemble (cf. figures 4.33, 4.34, 4.35 et 4.36) le comportement est bien prédit sur l'ensemble de la plage fréquentielle, même si sur certaines fréquences la convergence s'avère délicate. En effet, la figure 4.34 est bien en accord avec celle obtenue par DLFT (cf. figure 4.8) et la comparaison entre les déplacements relatifs (figures 4.35 et 4.36) montrent des similitudes de forme. L'utilisation de polynômes donne un comportement ondulatoire de l'évolution des déplacements relatifs après un grand nombre de cycles. Le défaut des polynômes est qu'ils tendent vers plus ou moins l'infini, alors qu'il nous faudrait des fonctions qui tendent vers une constante.

Cette approche n'a pas été développée sur des modèles plus gros. Les fonctions polynômes ne sont pas les plus adaptées pour représenter la cinétique d'usure. Comme pour un nombre infini de cycles l'évolution tend vers un état stationnaire il faudrait utiliser des fonctions que l'on peut faire tendre vers une constante quand η tend vers $+\infty$. Une évolution possible de la méthode serait donc l'utilisation d'une approche élément finis en temps ou de fonctions spline par morceaux pour représenter l'évolution des variables en fonction de l'usure. En effet, dans ces approches on pourrait appliquer une condition aux limites particulière de stationnarité pour un η grand.

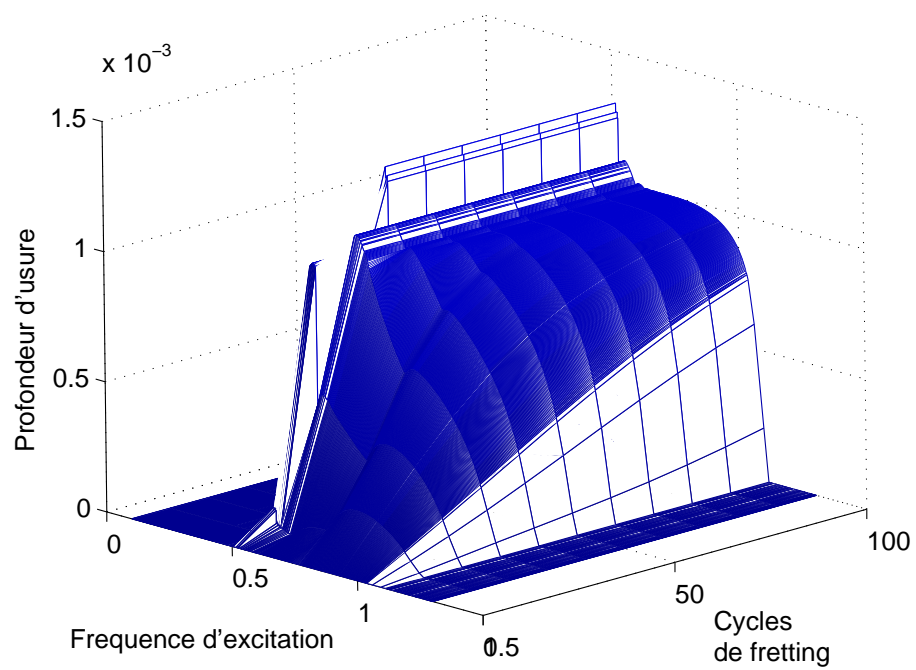


FIGURE 4.34. Évolution de l'usure avec l'approche polynomiale pour $F_{ex} = 10N$

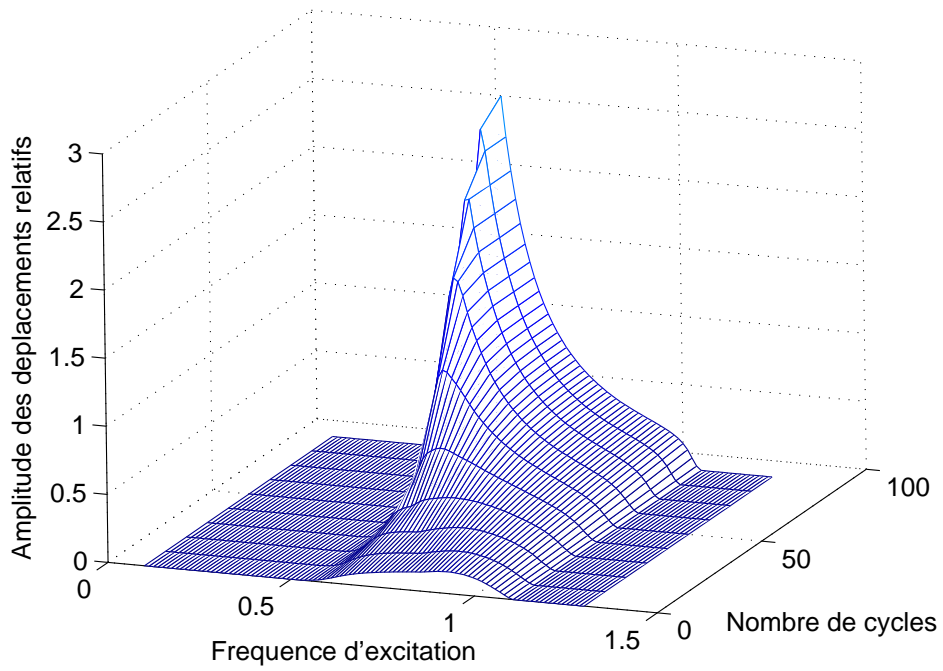


FIGURE 4.35. Déplacements relatifs avec la méthode DLFT et intégration

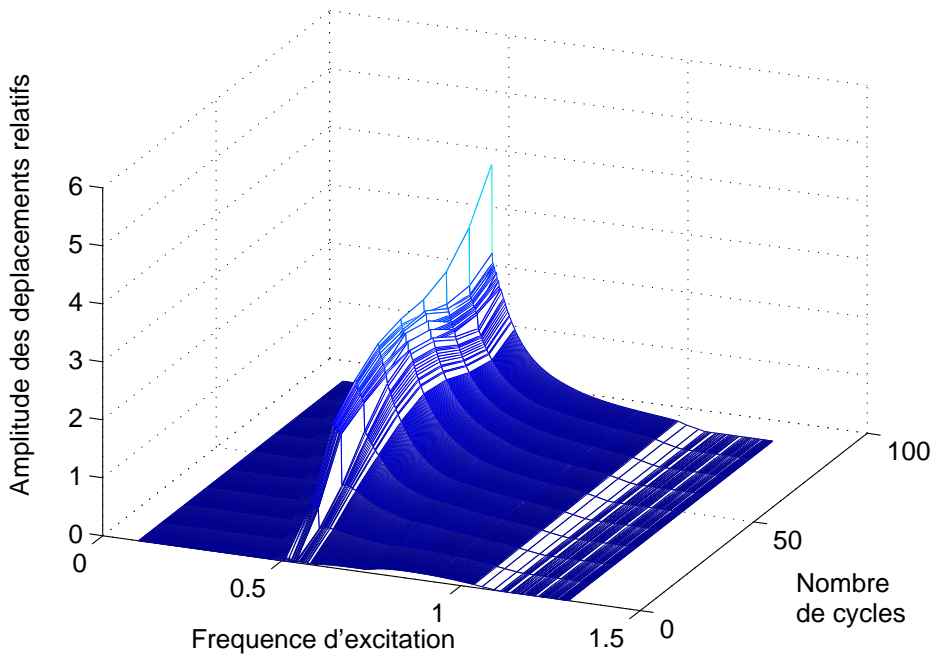


FIGURE 4.36. Déplacements relatifs avec la méthode DLFT et polynôme

4.3 Modes complexes non-linéaires et usure modale d'une aube de compresseur

Nous présentons dans cette section une application originale des modes non-linéaires complexe pour calculer « l'usure modale ». Un calcul de l'usure est introduit dans la méthode d'analyse non-linéaire modale présentée dans le chapitre 3. Le niveau d'usure est considéré comme un nouveau paramètre modal. L'étude porte sur l'usure par fretting au niveau des portées d'une aube de compresseur dont le modèle EF a été présenté à la section 4.2.2 sur les figures 4.31.

Le comportement autour du premier mode de flexion 1F est étudié. Les forces normales de contact dues au centrifuge sont approximées par une force de même intensité en chaque nœud.

La loi d'Archard [12] est utilisée pour modéliser la cinétique d'usure. Pour chaque nœud en contact M le taux d'usure vaut :

$$\dot{w}^M = k_w |P_N^M| \|\dot{U}_T^M\|, \quad (4.31)$$

où P_N^M est la force normale, \dot{U}_T^M est le vecteur des déplacements tangentiels et k_w est la constante de l'intensité d'usure. Le coefficient de frottement est constant et vaut $\mu = 0.5$ ce qui correspond à un contact entre une aube en titane et un disque en titane.

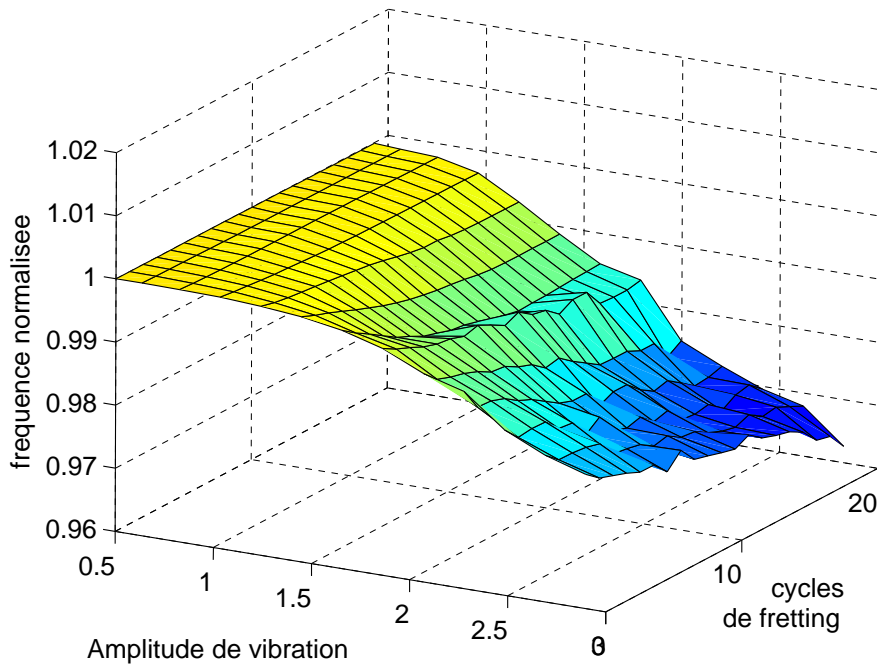
La stratégie multi-échelle en temps est appliquée. L'équation définissant le système autonome non-linéaire en fréquentiel devient :

$$\mathbf{Z}(\lambda(\eta))\mathbf{Q}(\eta) + \mathbf{F}_c(\mathbf{Q}(\eta), \lambda(\eta), \eta) = 0. \quad (4.32)$$

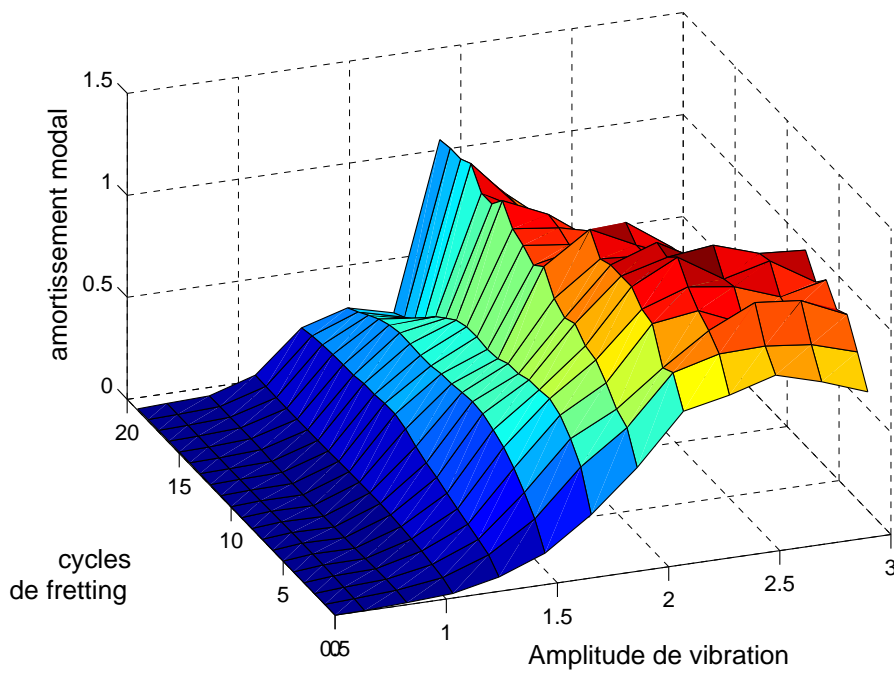
Un exemple de l'évolution des paramètres modaux avec l'usure est tracé sur la figure 4.37. Nous remarquons que l'amortissement augmente avec l'usure jusqu'à une certaine valeur puis diminue. Ceci vient du fait que l'usure va relâcher les pressions de contact et les zones en glissement vont pouvoir bouger de façon plus importante, ce qui augmente l'énergie dissipée par frottement jusqu'à ce que les contraintes de cisaillement deviennent trop faibles et inversent le processus. Les figures 4.38 montrent l'usure totale des nœuds pour les deux surfaces de la portée. On constate que les surfaces ne s'usent pas de la même manière, ce qui est un résultat déjà observé sur des aubes réelles.

La figure 4.39 montre différentes courbes d'évolution de l'usure suivant les nœuds de contact observés. Les valeurs de profondeur d'usure du nœud 29 ont été multipliées par 100 pour pouvoir être mises sur le même graphique. Certains nœuds ont leur cinétique d'usure qui s'arrête avec le nombre de cycles de fretting calculé. La forme des cinétiques d'usure est assez complexe.

Cet exemple a mis en lumière comment la notion de modes non-linéaires pouvait être utilisée efficacement dans l'analyse du comportement d'un système dynamique soumis à des effets de fretting. Ainsi l'amortissement par frottement qui est un paramètre important dans le dimensionnement des roues aubagées change durant la vie du moteur. Cette approche peut être un outil intéressant en bureau d'étude pour le dimensionnement des aubes. Elle permettrait un calcul direct des marges au flottement et de son évolution en rajoutant les matrices d'amortissement aérodynamique.



(a)



(b)

FIGURE 4.37. Résultats de l'analyse modale non-linéaire : évolution de la fréquence naturelle (a) et de l'amortissement modal (b) en fonction du niveau de vibration et des cycles de fretting

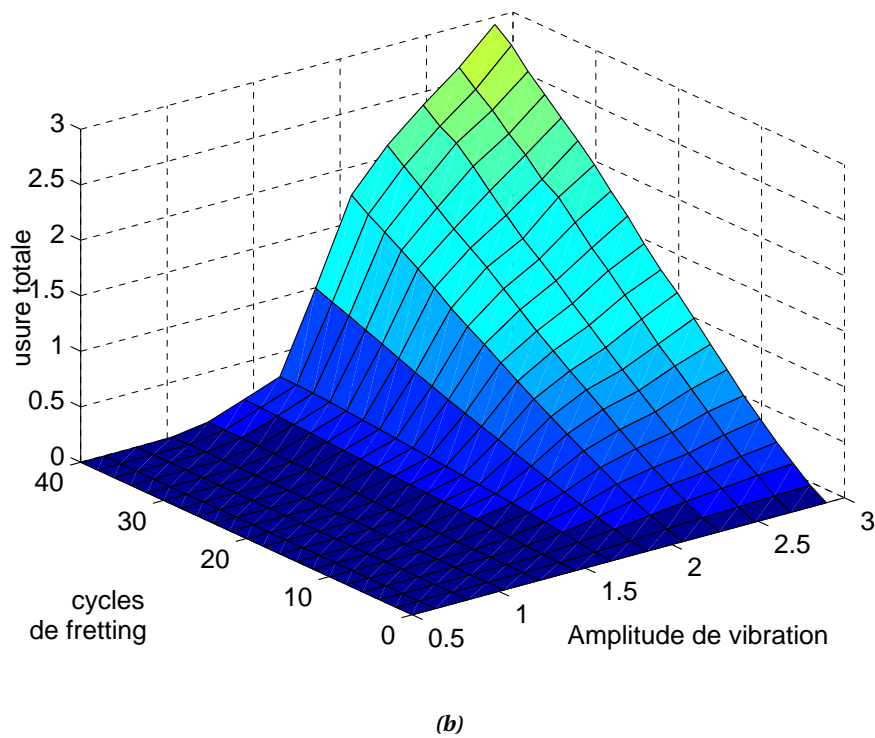
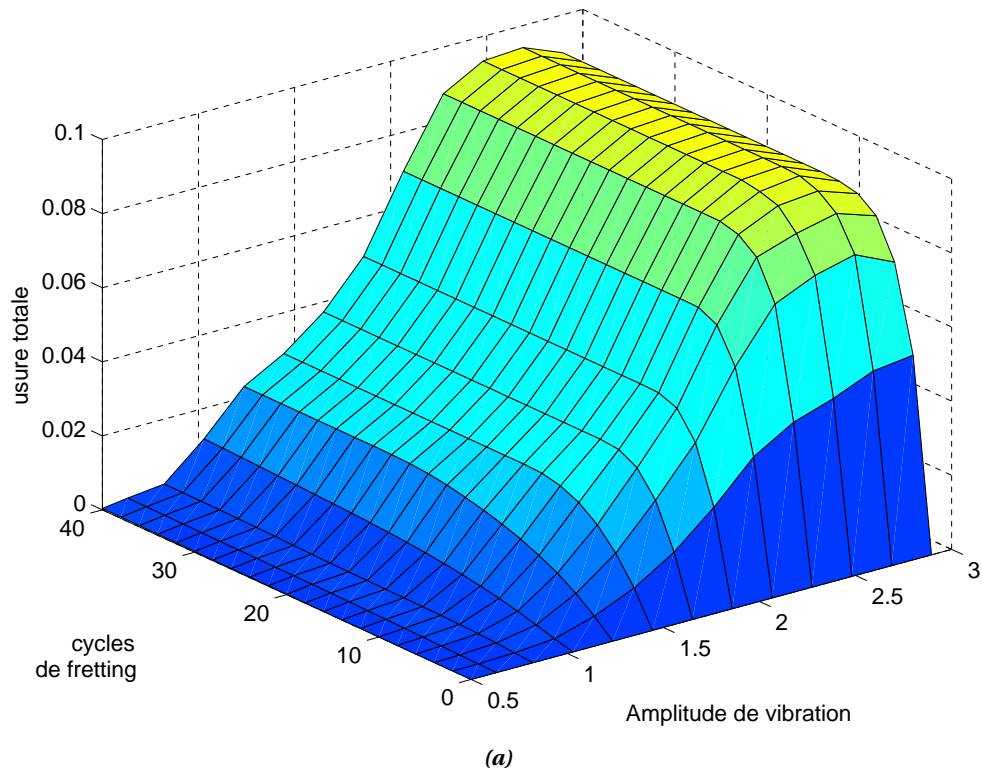


FIGURE 4.38. Résultats de l'analyse modale non-linéaire : évolution de l'usure totale sur la portée extrados (a) et sur la portée intrados (b) en fonction du niveau de vibration et des cycles de fretting

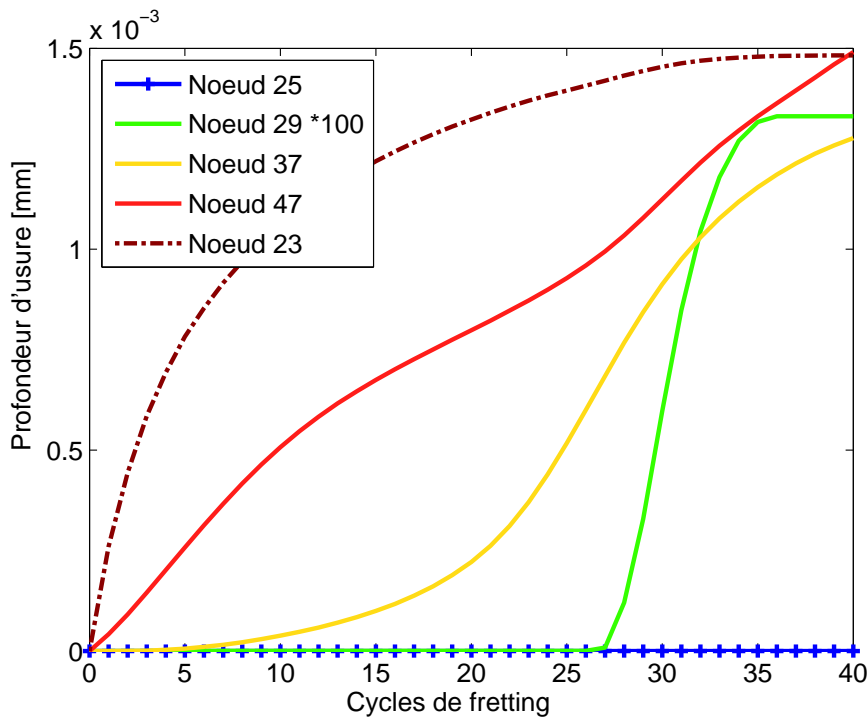


FIGURE 4.39. Cinétique d'usure pour différents nœuds de contact

4.4 Calcul de l'état stationnaire

Les différentes simulations numériques ont montré qu'un état stationnaire pouvait exister pour des interfaces de contact en condition de glissement partiel. Cet état se caractérise par un taux d'usure qui devient numériquement nul dans les zones de glissement. Nous chercherons donc à atteindre cet état de façon directe sans passer par l'ensemble des étapes intermédiaires d'usure. Ce type d'approches ne fonctionne pas. Il faut trouver un problème qui est équivalent quant au résultat final au problème où l'histoire du chargement est considérée. Deux stratégies sont proposées dans les paragraphes suivants.

4.4.1 Calcul par contrôle optimal ou méthode de tir

Peigney *et al* [187] ont proposé une méthode qui permet de calculer « directement » l'état asymptotique d'une structure soumise à un chargement cyclique. Nous avons voulu adapter leur approche pour calculer le profil usé par une méthode de contrôle optimal.

Se faisant nous nous sommes rendu compte que nous retrouvions une méthode de tir. En effet nous allons chercher les conditions initiales du cycle X_0 : déplacements et profondeurs d'usure de façon à retrouver ces valeurs en fin de cycle. Le problème s'écrit :

$$f(X_0) = X_T - X_0 = 0 \quad (4.33)$$

avec X_T valeur de $X(t)$ en $t = T$, T est connu et correspond à la période de l'excitation.

Chaque cycle calculé permet d'obtenir la fonction qui donne le lien entre l'état initial et l'état final.

$$\begin{pmatrix} U_T \\ W_T \end{pmatrix} = H(U_0, W_0) \begin{pmatrix} U_0 \\ W_0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

\mathbf{H} dépend du schéma d'intégration numérique utilisé sur le cycle. À chaque cycle la jacobienne de \mathbf{H} est calculée et utilisée pour trouver les nouveaux vecteurs \mathbf{U}_0 et \mathbf{W}_0 candidats en utilisant un algorithme de Newton-Raphson. A chaque itérations i du solveur de Newton-Raphson nous avons :

$$X_0^{i+1} = X_0^i - \left(\frac{D\mathbf{H}}{DX_0} - \mathbf{I} \right)^{-1} f(X_0^i) \quad (4.35)$$

avec $\frac{D\mathbf{H}}{DX_0} = \frac{DX_n}{DX_{n-1}} \frac{DX_{n-1}}{DX_{n-2}} \dots \frac{DX_1}{DX_0}$ Le terme $\frac{D\mathbf{H}}{DX_0}$ doit être calculé à partir d'une expression analytique. Si une différence finie est utilisée le temps de calcul devient lourd. Une autre approche est possible en utilisant un état adjoint [186]. Le calcul par rapport à cet état sur une période permet d'obtenir $\frac{D\mathbf{H}}{DX_0}$. Avec cette approche le temps pour calculer $\frac{D\mathbf{H}}{DX_0}$ est similaire à celui nécessaire pour l'évaluation de $f(X_0)$. Peigney [186] utilise cette méthode pour calculer la matrice jacobienne pour le calcul du cycle final dans le cadre de problèmes d'élastoviscoplasticité avec chargement cyclique.

La méthode de tir est la méthode la plus appropriée pour trouver « directement » l'état final mais on est confronté au problème de l'évaluation de $\mathbf{H}(\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0)$. En effet nous avons montré dans le chapitre 2 que l'intégration temporelle même sur un cycle est très longue et parfois converge difficilement. Durant des essais numériques la méthode basée sur la DLFT et une intégration numérique sur l'échelle lente s'est avérée plus rapide. Nous n'avons donc pas continué le développement de cette approche.

4.4.2 Calcul par minimisation sous contrainte du volume utilisé

Peigney a proposé de trouver le profil usé par minimisation du volume usé durant tout le cycle de fretting tout en respectant les conditions d'équilibre quasi-statique et les contraintes de contact. Le cas traité par les auteurs dans leur article [187] est assez simple. En effet, Peigney traite le cas d'un indenteur de forme quadratique enfoncé dans une surface élastique avec le déplacement tangentiel imposé. À chaque instant de la période la position horizontale est connue. Il suffit alors de calculer les forces de contact.

L'approche proposée par Peigney a été adaptée pour utiliser la robustesse et la rapidité des méthodes fréquentielles. Nous cherchons à minimiser le volume usé, ce qui revient à minimiser la fonctionnelle \mathcal{G}_w .

$$\min_{W \geq 0} \mathcal{G}_w, \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_w(\mathbf{W}) = \sum_{j=1}^{nc} W_j \quad (4.36)$$

avec nc le nombre de nœuds de contact.

Sous la contrainte égalitaire qui correspond bien à un taux d'usure nulle comme observé sur les simulations.

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = \mathbf{0} \quad (4.37)$$

Pour calculer (4.37) le problème non-linéaire (4.12) doit être résolu afin de trouver les déplacements et les pressions de contact durant le cycle. Nous n'avons pas écrit les expressions analytiques des matrices jacobiennes de la contrainte. Nous utilisons la fonction **fmincon** [96] de MATLAB pour résoudre ce problème. Cette fonction calcule les gradients par différence finie et donc pour calculer le gradient de la contrainte il faut résoudre le problème (4.12) autant de fois qu'il y a de nœuds en contact. Elle utilise une mise à jour des matrices hessiennes via une procédure BFGS [96]. Nous avons testé cette méthode sur l'exemple du secteur de disque RENATA (cf. 4.2.2). Le calcul est effectué à la résonance et initialisé par la solution de la fréquence précédente obtenue en utilisant la méthode de la DLFT avec une intégration numérique sur l'échelle lente. Les résultats obtenus sont retranscrits sur la figure 4.40. L'algorithme converge vers une solution différente de celle obtenue par intégration temporelle sur l'échelle

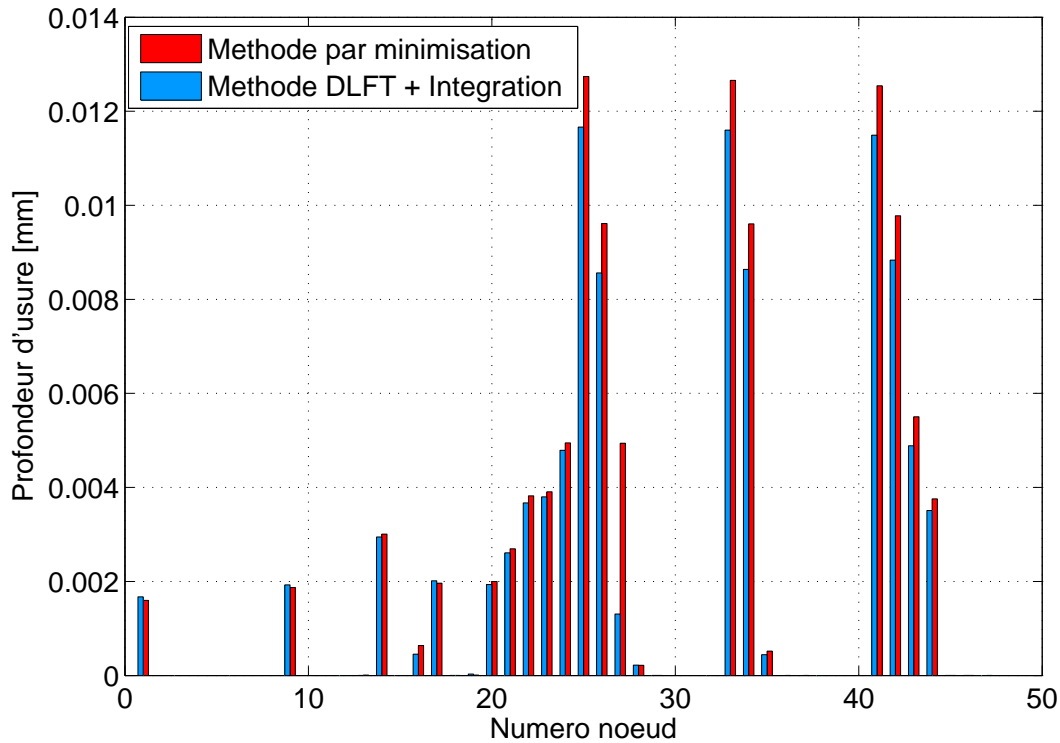


FIGURE 4.40. Profondeurs d'usure obtenues par calcul par minimisation du volume usé

lente. La différence peut s'expliquer par la difficulté de convergence de cette méthode. En effet, les différences d'ordres de grandeur entre le terme à minimiser et les équations de contraintes sont très importantes. Toutefois les zones usées sont assez bien décrites. Par ailleurs la résolution du problème est très longue. Actuellement la méthode DLFT avec intégration temporelle sur l'échelle lente est beaucoup plus rapide du fait en partie que nous avons une expression analytique de la matrice jacobienne du problème (4.12). L'approche par minimisation du volume usé sous contrainte permettrait d'utiliser une méthode de continuation vis-à-vis de l'usure en utilisant comme point de départ à chaque fréquence le profil usé obtenu à la fréquence précédente. Cette méthode nécessite des développements numériques pour la rendre plus performante.

Bilan

L'un des objectifs de la thèse était de proposer une méthode qui permet de calculer « directement » l'état stationnaire du système dynamique s'usant. Différentes directions de recherche ont été suivies. Malheureusement les méthodes mises au point ne permettent pas d'avoir la souplesse, l'efficacité et la robustesse de la méthode couplant DLFT et intégration temporelle sur l'échelle lente. Le problème d'usure sous chargement dynamique est complexe puisque le résultat obtenu dépend de l'état à l'instant initial et de l'historique du chargement

4.5 Conclusions

Ce chapitre a permis de présenter les méthodes mises au point durant la thèse pour traiter l'usure par fretting sous chargement dynamique. Deux voies de recherches ont été suivies : les méthodes multi-échelles en temps avec intégration numérique sur l'échelle lente et le calcul direct de la solution stationnaire quand celle-ci existe. La première approche repose sur la séparation du temps en deux échelles : une échelle rapide pour la dynamique et une échelle lente pour l'usure. La première voie a donné de bons résultats puisque des méthodes ont été mises au point et permettent de simuler la cinétique d'usure. La deuxième voie a donné moins de résultats, des méthodes ont été mises au point ou formalisées mais les résultats obtenus ne sont pas encore tout à fait concluants.

Du travail reste à faire sur la recherche de solutions stationnaires. Il semble que les méthodes qui fonctionnent en quasi-statique convergent beaucoup moins bien avec une approche fréquentielle.

Les résultats et les conclusions de ce chapitre vont servir pour l'étude d'une structure industrielle. Le chapitre suivant présente l'étude de l'usure par fretting sous chargement dynamique en pied d'aube d'une soufflante (fan).

Chapitre 5

Étude de l'usure sous chargement dynamique en pied d'aube de soufflante

Nous présentons dans ce chapitre les résultats des simulations numériques de l'usure sous chargements dynamiques en pied d'aube de soufflante. Ce chapitre est divisé en deux parties. La première correspond à la mise en équation d'un problème de roue aubagée dans le repère tournant. Nous verrons aussi comment une telle situation peut être réduite par sous-structuration et comment s'articule l'ensemble de la démarche au travers du code industriel SAMCEF. La deuxième partie sera quant à elle dédiée à l'analyse des résultats numériques obtenus à l'aide de l'algorithme DLFT adapté à l'usure.

5.1 Présentation de l'analyse dynamique d'une roue-aubagée

5.1.1 Présentation de la structure

La soufflante étudiée dans ce chapitre est représentative d'une soufflante de moteur moderne. Au début des années 1970, les soufflantes de moteurs de forte puissance P&W, GE et RR étaient équipées d'aubes à « nageoires ». En effet, plus le diamètre de la soufflante est grand plus l'aube est grande et par conséquent plus elle fléchit et devient donc fragile. La nageoire permet aux aubes de s'appuyer les unes sur les autres et donc de limiter la flexion. Ces nageoires provoquaient à la fois une obstruction partielle du flux secondaire ainsi que des pertes par les ondes de choc qu'elles déclenchaient. Les constructeurs ont pensé déplacer les nageoires du milieu au sommet de l'aube et donc du milieu de la veine à sa périphérie où elles forment alors un anneau continu. On a alors constaté des pertes importantes dans le labyrinthe périphérique ce qui a conduit à abandonner cette solution et à revenir à une solution classique. Sur les dernières générations, les nageoires ont été supprimées, il a fallu trouver une autre solution pour rendre moins flexibles les aubes de soufflantes. La corde de ces aubes a donc été augmentée. Corrélativement, le nombre d'aubes sur la soufflante a été réduit de manière à maintenir constant le rapport corde/espacement exigé par les lois de l'aérodynamique. Cette solution dite « aube à grande corde » a été bénéfique pour le rendement aérodynamique ; mais la contrepartie a été une augmentation de la masse de l'aube. L'augmentation de la masse induit de plus forts chargements centrifuges, il a donc fallu augmenter la surface de contact des portées. Les portées sont courbes ce qui permet une plus grande surface de contact. Actuellement les motoristes travaillent sur l'utilisation de matériaux composites pour réduire le poids de l'aube.

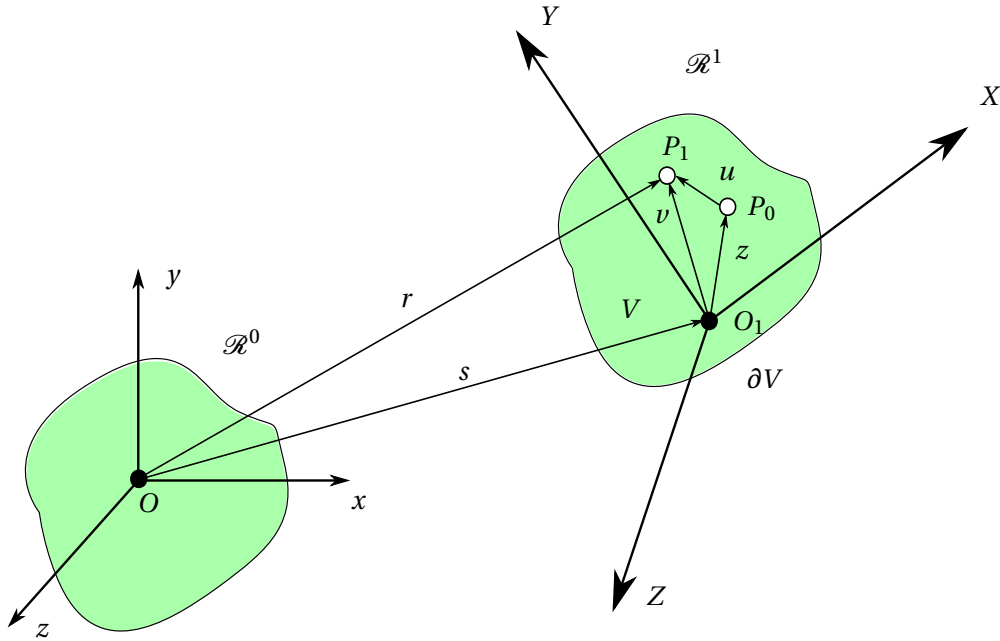


FIGURE 5.1. Solide déformable

5.1.2 Dynamique des solides déformables en rotation

Les roues aubagées sont des solides déformables en rotation. Nous allons rappeler les équations qui régissent le comportement dynamique de deux solides assemblés (disque et aube) en rotation.

Considérons un corps déformable occupant le volume de frontière ∂V dans sa configuration non déformée de référence (cf. figure 5.1). La description de la cinématique se fera de manière lagrangienne. Chaque point du solide est désigné par ses coordonnées $\mathbf{z} = [x_1; x_2; x_3]^T$ à l'état non-déformé du solide dans un repère inertiel orthonormé $\mathcal{R}^0(x; y; z)$. La position \mathbf{v} des points du solide dans le repère tournant \mathcal{R}^1 est :

$$\mathbf{v}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{z} + \mathbf{u}(\mathbf{z}, t) \quad (5.1)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$ est le vecteur déplacement à l'instant t résultant de la déformation dynamique du corps.

Le repère \mathcal{R}^1 lié au solide se déduit du repère inertiel par une translation $\mathbf{s}(t)$ et par une rotation Θ . La nouvelle position $\mathbf{r}(\mathbf{z}, t)$ dans le repère inertiel est donnée par :

$$\mathbf{r}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{s}(t) + \Theta \mathbf{v} \quad (5.2)$$

Les vitesses vont être nécessaires pour exprimer les équations de Lagrange. Les vitesses des points du solide s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{s}} + \dot{\Theta} \mathbf{v} + \Theta \dot{\mathbf{v}} \quad (5.3)$$

En introduisant le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^t$ du référentiel \mathcal{R}^1 par rapport à \mathcal{R}^0 , on peut alors écrire que $\dot{\Theta} = \Theta \boldsymbol{\Omega}$.

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Theta^t \Theta = \mathbb{1} \quad (5.4)$$

Ces expressions vont être utilisées pour exprimer les termes nécessaires dans les équations de Lagrange.

Les équations du mouvement sont formulées à partir du principe de Hamilton. Dans le cas discret on peut montrer que le principe d'Hamilton revient à écrire les équations de Lagrange associées à notre problème. Les équations de Lagrange s'écrivent comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial (\mathcal{T} - \mathcal{U})}{\partial q} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}}_{\delta \mathcal{W}} \quad (5.5)$$

avec l'énergie cinétique \mathcal{T} , l'énergie potentielle de déformation \mathcal{U} , \mathcal{W} le travail des forces généralisées non-conservatives et \mathcal{F} la fonction de dissipation.

Energie cinétique

L'énergie cinétique du solide est obtenue par intégration sur le volume V occupé dans la configuration de référence (non déformée) :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^t \dot{\mathbf{r}} dV, \quad (5.6)$$

où ρ désigne la masse volumique. On considère qu'il n'y a pas de translation $\mathbf{s}(t) = \mathbf{0}$. En utilisant la décomposition de la vitesse (5.3) et en notant que $\Omega^2 = -\Omega^t \Omega$, l'expression de l'énergie cinétique devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^t \Omega \mathbf{u} dV - \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{u}^t \Omega^2 \mathbf{u} dV \\ &\quad - \int_V \rho \mathbf{u}^t \Omega^2 \mathbf{x} dV - \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{x}^T \Omega^2 \mathbf{x} dV + \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^T \Omega \mathbf{x} dV. \end{aligned} \quad (5.7)$$

La solution du problème continu est approchée par la méthode des éléments finis. Le champ de déplacement \mathbf{u} peut alors s'exprimer en fonction du vecteur \mathbf{U} des déplacements nodaux par :

$$\mathbf{u}(x_i, t) = N(x_i) \mathbf{U}(t), \quad (5.8)$$

où N est une matrice de fonctions de forme de taille $3 \times n$. L'énergie cinétique exprimée en fonction des déplacement nodaux s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{U}}^T N^T N \dot{\mathbf{U}} dV + \int_V \rho \dot{\mathbf{U}}^T N^T \Omega N \mathbf{U} dV - \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{U}^T N^T \Omega^2 N \mathbf{U} dV \\ &\quad - \int_V \rho \mathbf{U}^T N^T \Omega^2 \mathbf{x} dV - \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{x}^T \Omega^2 \mathbf{x} dV + \int_V \rho \dot{\mathbf{U}}^T N^T \Omega \mathbf{x} dV. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Energie de déformation

Si l'on considère une hypothèse de petites perturbations alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (5.10)$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation qui a pour expression

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

On suppose que la relation contrainte-déformation est régie par une loi élastique linéaire qui suit la loi de Hooke généralisée.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.12)$$

avec \mathbf{E} la matrice d'élasticité, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}]$ le vecteur des contraintes et $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}]^t$ le vecteur des déformations. Pour cette loi de comportement, l'énergie potentielle de déformation s'écrit

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (5.13)$$

On note \mathbf{B} la matrice de taille $6 \times n$ liant les déformations aux degrés de liberté du système discrétisé :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_i, t) = \mathbf{B}(x_i) \mathbf{U}(t). \quad (5.14)$$

\mathbf{B} s'exprime facilement à partir des fonctions de forme par

$$\mathbf{B}(x_i) = \nabla N(x_i), \quad (5.15)$$

Avec l'équation (5.14), l'expression de l'énergie de déformation devient

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{U}^T \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{U} dV. \quad (5.16)$$

L'équation matricielle de la dynamique d'un solide déformable dans le repère mobile prend alors la forme :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_c) \mathbf{U} = \mathbf{F}_\Omega + \mathbf{F}_\Gamma \quad (5.17)$$

où \mathbf{M} est la matrice de masse, \mathbf{C} et \mathbf{G} respectivement la matrice d'amortissement et la matrice gyroscopique, \mathbf{K} et \mathbf{K}_c la matrice de raideur et la matrice de raideur centrifuge. \mathbf{F}_Ω et \mathbf{F}_Γ sont le vecteur des efforts centrifuge et le vecteur des forces surfaciques (forces aérodynamiques, forces de contact). Ces différents termes sont définis par :

- matrice de masse :

$$\mathbf{M} = \int_V \rho N^T N dV \quad (5.18)$$

- matrice gyroscopique :

$$\mathbf{G} = 2 \int_V \rho N^T \Omega N dV \quad (5.19)$$

- matrice de raideur :

$$\mathbf{K} = \int_V B^T \mathbf{E} B dV \quad (5.20)$$

- matrice de raideur centrifuge :

$$\mathbf{K}_c = - \int_V \rho N^T \Omega^2 N dV \quad (5.21)$$

- vecteur des efforts centrifuges :

$$\mathbf{F}_\Omega = - \int_V \rho N^T \Omega^2 \mathbf{x} dV \quad (5.22)$$

- vecteur des efforts surfaciques :

$$\mathbf{F}_\Gamma = \int_{\partial V} \mathbf{f}_\Gamma \mathbf{x} d\Gamma \quad (5.23)$$

Dans le cas d'un assemblage entre le disque et les aubes le terme \mathbf{F}_Ω permettra de calculer les efforts de liaison sur les portées aube-disque.

Le terme $-\mathbf{K}_c$ induit un assouplissement de la structure. Dans notre étude les équations sont exprimées dans le repère tournant autour de l'axe unique de rotation. Les caractéristiques de raideur dans la direction de l'axe de rotation ne sont donc pas modifiées [32, 126].

Prise en compte de la raideur géométrique

Les aubes sont des structures élancées. La rotation de la roue aubagée va entraîner une rigidification liée à la précontrainte de la structure par les efforts d'inertie. Celle-ci est d'autant plus importante que la vitesse de rotation est élevée.

Il faut donc considérer l'expression complète du tenseur de déformation de Green-Lagrange.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)},\end{aligned}\quad (5.24)$$

avec les termes linéaires

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.25)$$

et les termes quadratiques

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \quad (5.26)$$

Les équations du mouvement sont modifiées par l'adjonction d'une matrice de raideur géométrique \mathbf{K}_g dépendante de l'état de déformation de la structure. Si nous faisons l'hypothèse que le disque et l'aube sont collés au niveau des interfaces de contact, l'équilibre statique de la structure en rotation est défini par le système suivant :

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{K}^d - \mathbf{K}_c^d + \mathbf{K}_g^d(\mathbf{U}^d) \right) \mathbf{U}^d &= \mathbf{F}_\Omega^d + \mathbf{F}_\Gamma^d \\ \left(\mathbf{K}^a - \mathbf{K}_c^a + \mathbf{K}_g^a(\mathbf{U}^a) \right) \mathbf{U}^a &= \mathbf{F}_\Omega^a + \mathbf{F}_\Gamma^a \\ \mathbf{U}^a &= \mathbf{U}^d \quad \text{au niveau du contact}\end{aligned}\quad (5.27)$$

Les indices a et d désignent respectivement l'aube et le disque. Le système (5.27) est non-linéaire et nécessite l'utilisation d'une méthode type Newton-Raphson pour résoudre ce problème. La simulation de la mise en route du moteur et de l'accélération vers les pleins gaz nécessite une stratégie avec mise à jour. En effet, à chaque incrément de vitesse \mathbf{K}_c et \mathbf{K}_g , qui dépendent de \mathbf{U} , varient. Ce problème peut-être résolu par un solveur éléments finis non-linéaire. SAMCEF propose un tel solveur nommé MECANO. Une fois la solution statique obtenue, on part de ce point d'équilibre pour le problème dynamique. Cette stratégie conduit à une détermination de \mathbf{K}_g par une voie itérative qui peut s'avérer assez lourde.

Si on fait l'hypothèse que les déformations induites par la rotation restent faibles. Il est alors possible d'obtenir la matrice de raideur géométrique directement à partir des précontraintes.

La stratégie employée est la suivante : un calcul statique linéaire est réalisé sous SAMCEF pour une vitesse de rotation donnée. Ce calcul nous donne le champ de déplacement \mathbf{U}_0 , de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^0$. Les déplacements sont définis par $\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \mathbf{U}^*$. On va réécrire les équations sous forme actualisée en partant de la position d'équilibre statique. La matrice de raideur géométrique \mathbf{K}_g est alors donnée par :

$$(K_g)_{pq} = \int_V \sigma_{ij}^0 \frac{\partial N_{kp}}{\partial x_i} \frac{\partial N_{kq}}{\partial x_j} dV. \quad (5.28)$$

\mathbf{K}_g est ainsi une matrice symétrique qui représente les effets liés à la précontrainte.

Le système dynamique matriciel devient :

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^* + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{U}}^* + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_g)\mathbf{U}^* + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_c)\dot{\mathbf{U}}^0 = \mathbf{F}_\Omega + \mathbf{F}_\Gamma \quad (5.29)$$

De plus \mathbf{U}^0 vérifie :

$$(\mathbf{K} - \mathbf{K}_c)\dot{\mathbf{U}}^0 = \mathbf{F}_\Omega + \mathbf{F}_\Gamma \quad (5.30)$$

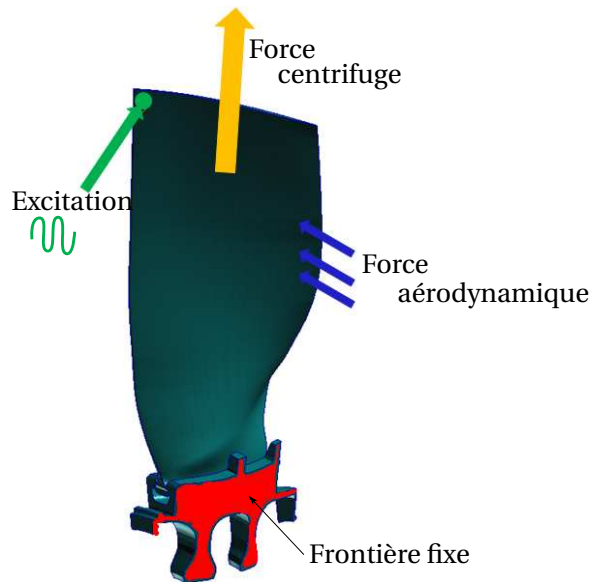


FIGURE 5.2. Modèle de la soufflante et conditions aux limites

5.1.3 Modélisation d'un secteur d'aube de soufflante

Présentation du modèle

Le modèle géométrique du secteur étudié est présenté sur la figure 5.2, celui-ci est discrétisée par éléments finis. Il est composé d'un secteur de disque et d'une aube liée par une portée queue d'aronde curviligne. Le maillage de l'aube est composé de 28837 éléments hexaèdres et celui du secteur de 36817 éléments. Des éléments du second degré sont utilisés. Le modèle de l'aube contient au total environ 390000 degrés de liberté et le disque en contient 466000. Un calcul fréquentiel non-linéaire sur ce modèle est impossible. C'est pour cela qu'une méthode de condensation de type Craig et Bampton [45] est utilisée pour réduire la taille du système à résoudre.

Dans cette étude nous avons bloqué les nœuds situés sur les deux flancs du secteur (cf. figure 5.2). Cette condition est remplacée par une condition de symétrie cyclique pour les études de modes à diamètre [32, 130]. L'aube est chargée statiquement par les pressions aérodynamiques stationnaires et les forces centrifuges dues à la rotation de l'étage.

Nous supposons que les effets gyroscopiques sont négligeables pour notre modèle, dans lequel le secteur de disque est rigidifié par les fixations et où la flexibilité de l'arbre n'est pas prise en compte.

Réduction du modèle

Le nombre de degrés de liberté pour chacune des deux sous-structures (secteur et aube) est réduit par condensation de Craig et Bampton [45]. La base réduite de l'aube comprend les degrés de liberté des nœuds impliqués dans le contact, un nœud en tête d'aube afin d'appliquer l'excitation, et 30 coordonnées modales. La base réduite du disque est formée des degrés de liberté de contact et de 30 coordonnées modales à interfaces fixes. On retient ici $5 \times 24 = 120$ nœuds sur chaque portée pour modéliser le contact (voir la figure 5.3). Le modèle initial éléments finis contient 980 nœuds de contact sur chaque portée.

Le calcul des matrices réduites prenant en compte les effets de la rotation est effectué à l'aide du

code éléments finis SAMCEF en deux étapes principales :

1. Calcul de l'équilibre statique de l'ensemble aube+disque soumis aux efforts centrifuges selon l'équation (5.30). C'est un calcul linéaire où l'on ne prend en compte aucun déplacement relatif au niveau de l'interface de contact : l'aube et le secteur sont supposés former un solide unique.
2. Formation des matrices réduites. Le champ de contrainte σ^0 issu du calcul statique permet la formation des matrices de raideur géométrique pour l'aube et le secteur. Les matrices sont réduites par la méthode de Craig et Bampton.

On récupère à l'issue de ces calculs pour chaque sous-structure l ($l = 1, 2$)

- la matrice de masse réduite :

$$\bar{\mathbf{M}}^l = \mathbf{T}_{cb}^T \mathbf{M}^l \mathbf{T}_{cb} \quad (5.31)$$

- la matrice de raideur tangente réduite :

$$\bar{\mathbf{K}}^l = \mathbf{T}_{cb}^T (\mathbf{K}^l - \mathbf{K}_c^l + \mathbf{K}_g^l(\sigma^0)) \mathbf{T}_{cb} \quad (5.32)$$

- le vecteur des efforts centrifuges réduit :

$$\bar{\mathbf{F}}_{\Omega}^l = \mathbf{T}_{cb}^T \mathbf{F}_{\Omega}^l \quad (5.33)$$

- le vecteur des efforts surfaciques réduit :

$$\bar{\mathbf{F}}_{\Gamma}^l = \mathbf{T}_{cb}^T \mathbf{F}_{\Gamma}^l \quad (5.34)$$

\mathbf{T}_{cb} désigne la matrice de transformation associée à la méthode de Craig et Bampton. Pour un calcul plus rigoureux il faudrait prendre en compte le contact avec frottement en pied d'aube lors du chargement centrifuge et utiliser la raideur tangente due au contact pour calculer la base de Craig et Bampton.

Le traitement des conditions de contact dans la méthode DLFT nécessite de se placer dans le repère défini par la normale à la surface de contact et deux axes tangentiels à la surface de contact. Comme les portées sont courbes il faut calculer les repères pour chaque nœud en contact. Cette approche diffère de celle de Charleux [32] qui utilisait un seul repère par portée. Les normales définissant les axes locaux utilisés sont montrées sur la figure 5.4, elles sont sortantes par rapport aux surfaces de contact côté disque et côté aube. Pour calculer ces normales on utilise le maillage fin de la portée (980 nœuds par interface). Le problème dynamique avec frottement peut alors être résolu par la DLFT présentée au chapitre 3. La figure 5.3 montre la numérotation des nœuds en contact du super-élément.

Le système dynamique réduit s'écrit pour chaque solide ($l = 1, 2$) :

$$\bar{\mathbf{M}}^l \ddot{\mathbf{U}}_{cb} + \bar{\mathbf{C}}^l \dot{\mathbf{U}}_{cb} + \bar{\mathbf{K}}^l \mathbf{U}_{cb} = \bar{\mathbf{F}}_{\Gamma}^l + \bar{\mathbf{F}}_{contact}^l \quad (5.35)$$

avec $\bar{\mathbf{F}}_{contact}^l$ les forces de contact.

5.2 Résultats des simulations numériques

Nous allons présenter dans ce qui suit les résultats de l'étude numérique de l'usure par fretting sous chargement dynamique autour du mode 3F pour une excitation à 6 fois l'ordre du moteur (6N). Le modèle a été créé en suivant la démarche présentée dans le paragraphe précédent. Avant de commencer une analyse fréquentielle, un calcul statique qui permet l'initialisation du calcul dynamique non-linéaire est réalisé. Cette démarche permet d'être plus près de la solution pour la première fréquence calculée. De plus les résultats obtenus par notre calcul statique vont être comparés avec les résultats obtenus sous ABAQUS dans le cadre d'un calcul complet incrémental en vitesse de rotation. Dans la deuxième partie de cette section nous montrerons les résultats de l'étude fréquentielle et les cinétiques d'usure obtenues.

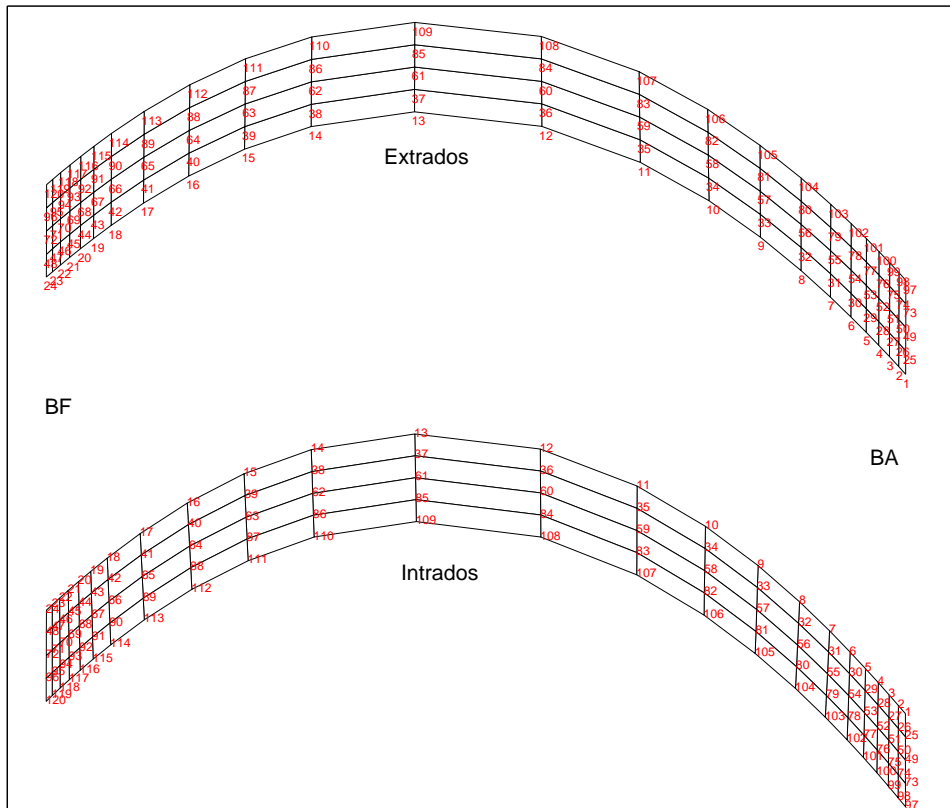


FIGURE 5.3. Numérotation des nœuds en contact

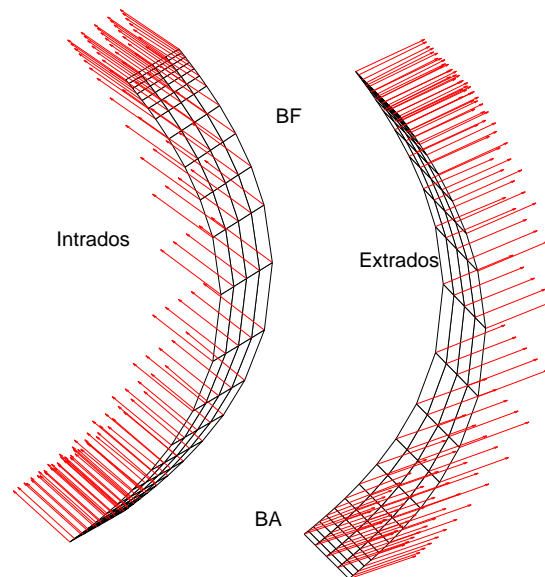


FIGURE 5.4. Vecteurs normaux aux nœuds en contact

5.2.1 Équilibre statique avec frottement

Le modèle a été mis en place pour une vitesse de rotation fixée. L'analyse statique que nous réalisons suppose que ce chargement est constant et que l'aube est en petites déformations.

L'équilibre statique est alors obtenu en résolvant l'équation (5.36) où le chargement statique est réalisé progressivement en faisant varier θ de 0 à 1.

$$\mathbf{K}_r \mathbf{U}_r^0 + \boldsymbol{\lambda}_r^0 + \theta \mathbf{F}_r^0 = \mathbf{0}, \quad \theta \in]0; 1] \quad (5.36)$$

Les résultats obtenus pour les déplacements et les pressions de contact sont présentés en annexe D pour différentes valeurs du coefficient de frottement. Dans l'étude qui nous intéresse le coefficient de frottement est fixé à $\mu = 0.5$, ceci correspond à un coefficient de frottement pour un contact TA6V/TA6V. Les déplacements relatifs et les pressions de contact sont respectivement présentés sur les figures 5.5a et 5.5b.

Dans cette section nous comparons les profils obtenus avec ceux d'un calcul ABAQUS mené par le département durée de vie de Snecma. Sous ABAQUS le problème de contact est résolu en grand déplacement avec des éléments de contact surface-surface et des Lagrangiens augmentés comme stratégie de résolution des non-linéarités de contact. Le calcul est effectué en augmentant la vitesse de rotation et en calculant la matrice de raideur à chaque pas de discrétisation du cycle de chargement (figures 5.6b et 5.6d).

Si on compare les résultats obtenus entre le calcul ABAQUS et le calcul simplifié proposé on constate que les niveaux de pression de contact ou de déplacement sont du même ordre de grandeur. Les zones de forts gradients de pressions sont aussi respectées. Cette vérification valide notre stratégie dans un

calcul élastique du contact. Elle peut être utilisée dans une première approche de dimensionnement pour prédire le comportement aux interfaces de contact.

5.2.2 Calcul dynamique non-linéaire du contact sans usure

Nous nous intéressons au comportement en régime périodique forcé du secteur de soufflante étudié. Le comportement observé dépend avant tout du mode linéaire étudié.

5.2.2.1 Mode linéaire étudié

Le mode qui nous intéresse en raison des conditions de fonctionnement de l'étage est le troisième mode de flexion (3F). Un calcul modal linéaire sous SAMCEF via le module DYNAM a été effectué. Un super-élément pour le disque et un super-élément pour l'aube ont été créés. Le modèle éléments finis et la déformée du mode 3F sont tracés sur les figure 5.7. Une condition de collage entre les nœuds retenus de la portée est imposée entre le disque et l'aube. On constate bien que les contraintes dans l'aube sont maximales au niveau de la portée.

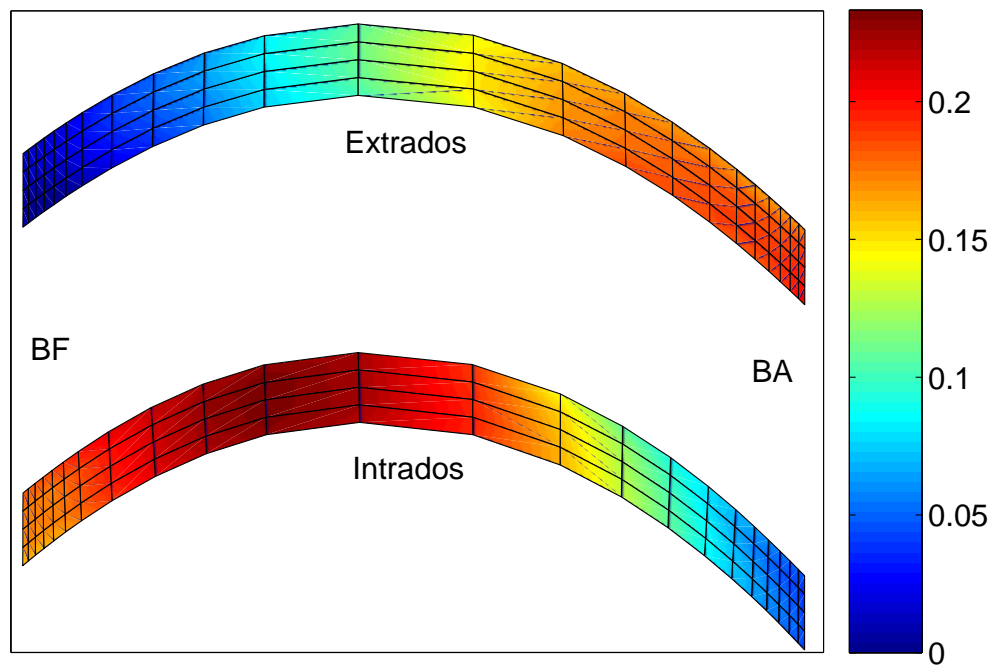
5.2.2.2 Comportement en réponse forcée, premier cycle de fretting

Nous étudions le comportement du secteur de la soufflante autour de la résonance du troisième mode de flexion. Les non-linéarités de contact avec frottement sont prises en compte. Une excitation de 50 N en haut de la pale est appliquée. Cette valeur a été choisie suite aux résultats obtenus lors des essais Onera sur une aube de soufflante et analysés dans le rapport de A. Sénéchal [210]. L'algorithme DLFT présenté au chapitre 3 est utilisé. La valeur du coefficient d'intensité d'usure de la loi d'Archard est fixé à $k_w = 1.10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$. Cette valeur sert à calculer le taux d'usure sur un cycle, nous verrons plus loin que cette valeur est assez arbitraire dans la stratégie de résolution puisque la mise à jour des niveaux d'usure se fait par pas d'usure ΔW . Il ne faut pas oublier que la cinétique d'usure (profondeur d'usure en fonction du nombre de cycles) dépend de k_w , qui doit être recalé par des expériences ou par rapport aux usures observées sur les moteurs en vol.

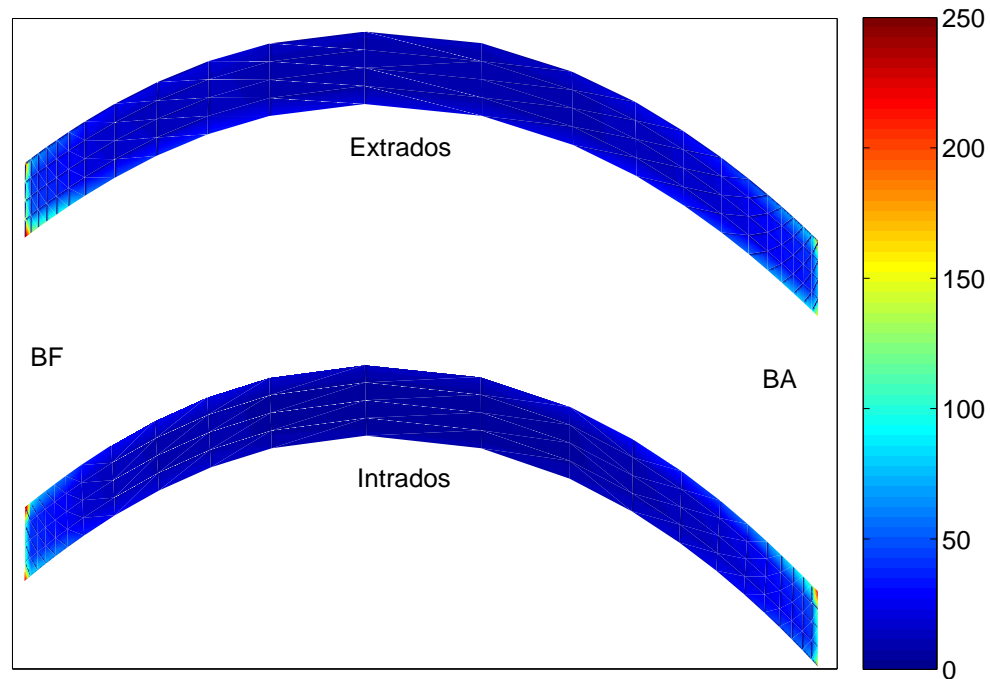
La figure 5.9 regroupe les courbes de réponse au voisinage du mode pour différentes valeurs de coefficient de frottement. Plus le coefficient de frottement augmente plus l'amplitude de la réponse à la résonance augmente. Le niveau peut doubler entre un coefficient $\mu = 0.2$ qui correspond à un contact avec lubrifiant solide MoS_2 et $\mu = 0.8$. Paulin [183] a observé lors de ses essais que le coefficient de frottement pouvait passer de 0.2 à 0.7 lors d'usure par fretting d'un contact revêtu. Pour chaque coefficient de frottement étudié la réponse statique a été recalculée.

Pour le coefficient d'intensité d'usure choisi, le taux maximum d'usure en un nœud de contact par cycle en fonction de la fréquence est tracé sur la figure 5.10 pour différentes valeurs de coefficient de frottement. L'usure se produit pour les fréquences où la courbe non-linéaire s'écarte de la courbe linéaire (figure 5.9). Le taux d'usure passe par un maximum par rapport au coefficient de frottement, ce qui est illustré par la figure 5.11.

Les profils de taux d'usure ont été tracés à la résonance pour des coefficients compris entre 0.1 et 0.8. Les graphiques se trouvent en annexe D (figure D.17 à figure D.24). Sur la figure 5.12 est représentée la répartition du taux d'usure à l'interface de la portée côté extrados et intrados. Cette figure montre que l'usure devrait se produire en bord d'attaque côté intrados. Suivant le mode (1F, 1T, 2F, 3F,...) étudié la répartition des zones susceptibles de s'user change. Pour un coefficient de frottement plus faible $\mu = 0.2$ une zone côté extrados en bord d'attaque est aussi susceptible de s'user.



(a)



(b)

FIGURE 5.5. Déplacements relatifs en mm à l'interface (a) et pressions de contact (b) en hbar obtenus par stratégie de précharge statique pour $\mu = 0.5$

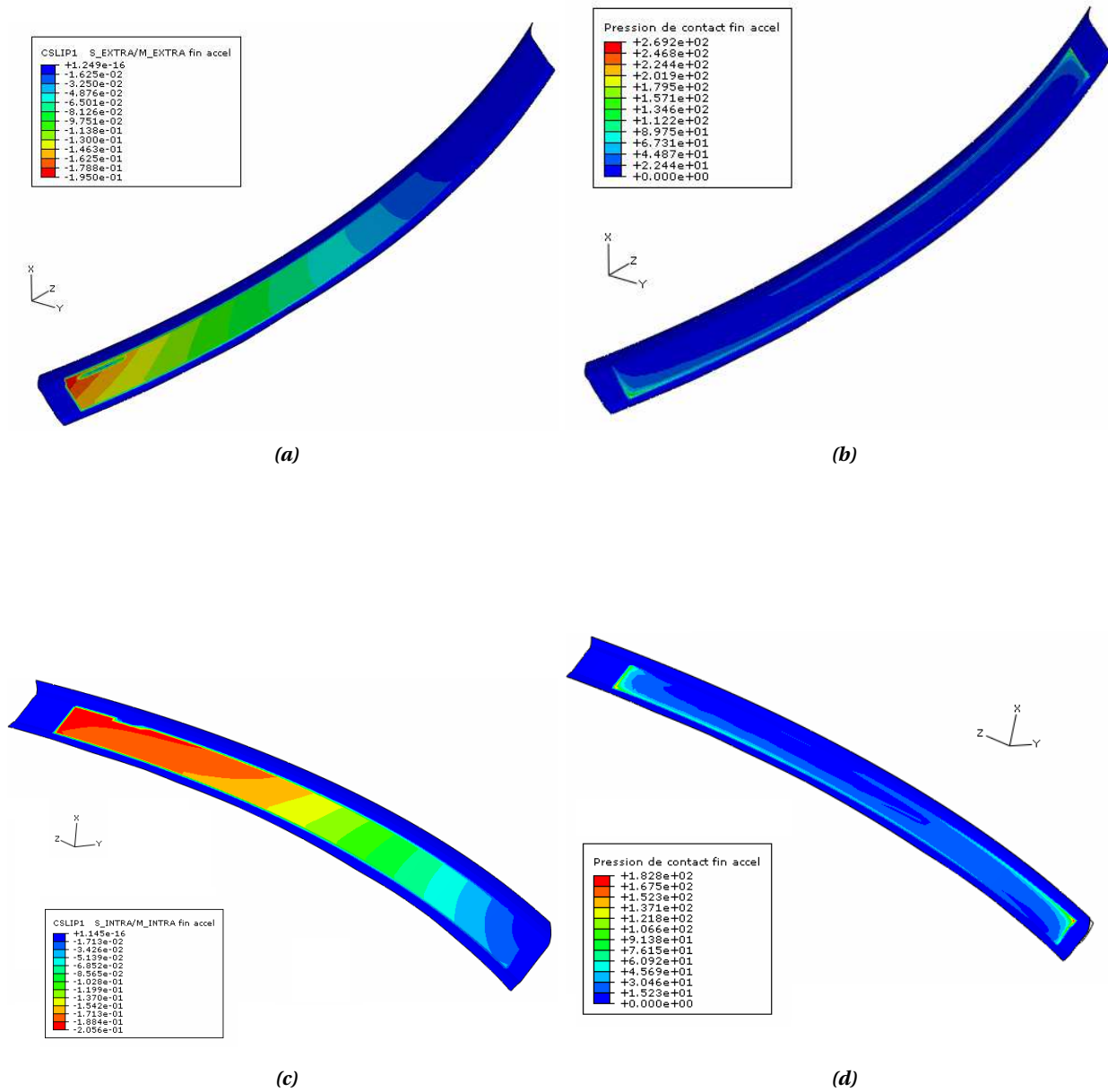


FIGURE 5.6. Déplacements relatifs en mm à l'interface et pression de contact en hbar côté intrados (c), (d) et côté extrados (a), (b) obtenus sous ABAQUS

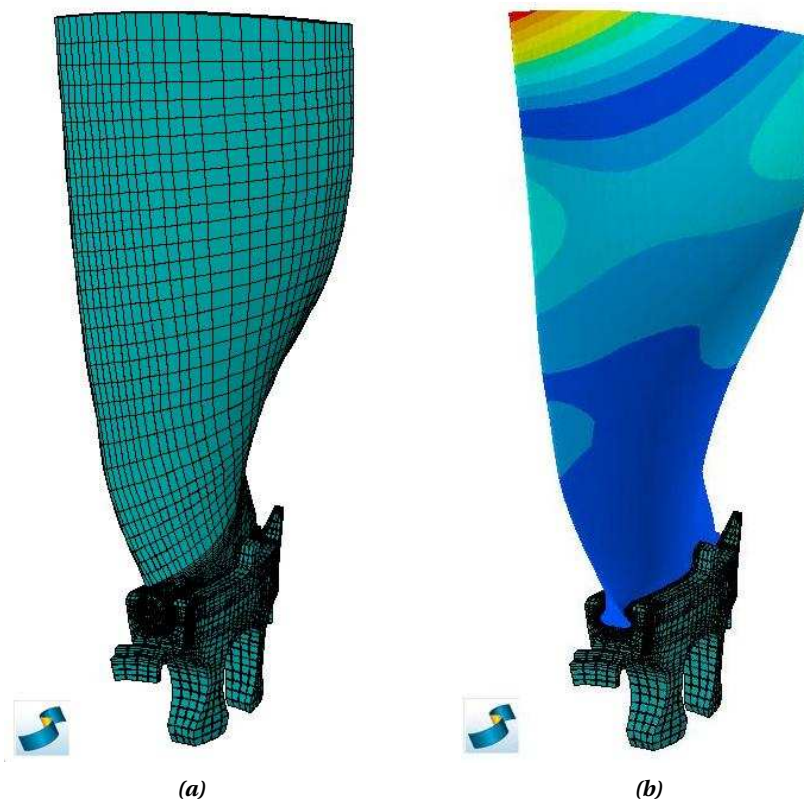


FIGURE 5.7. Soufflante : (a) modèle éléments-finis d'un secteur, (b) déformée propre du troisième mode de flexion (3F)

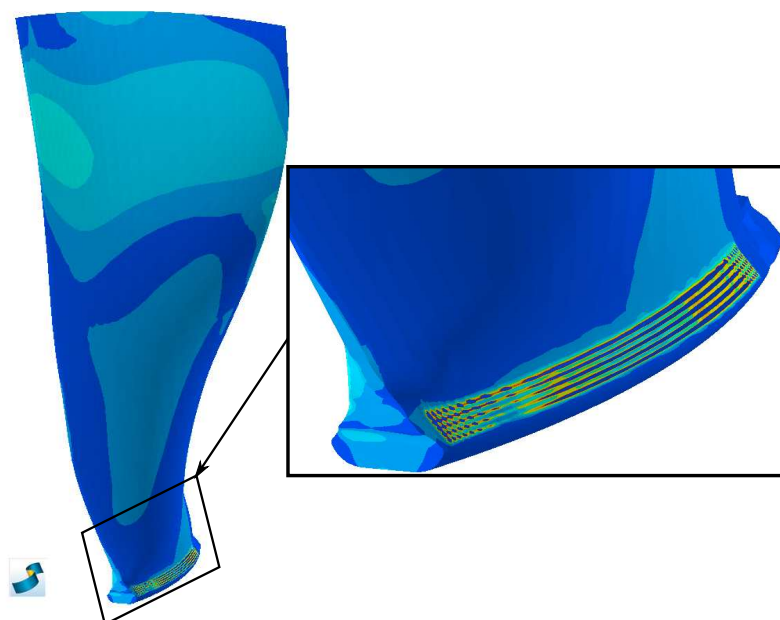


FIGURE 5.8. Répartition des contraintes de Von Mises pour le troisième mode de flexion (3F)

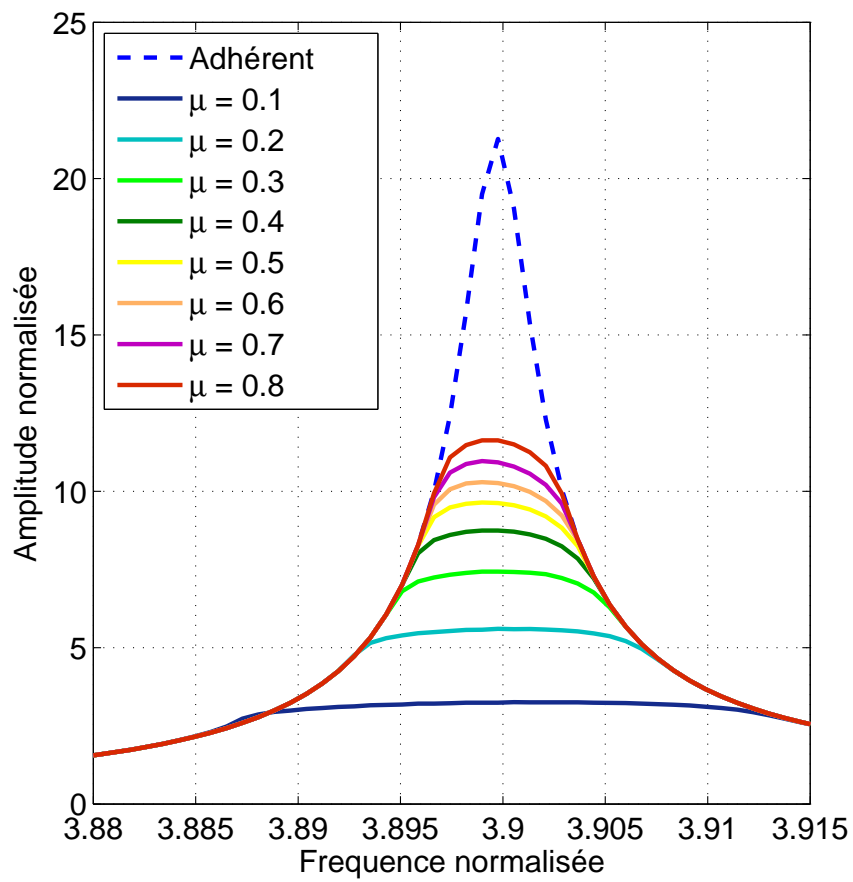


FIGURE 5.9. Réponse en fréquence au voisinage du mode 3F pour différents coefficients de frottement

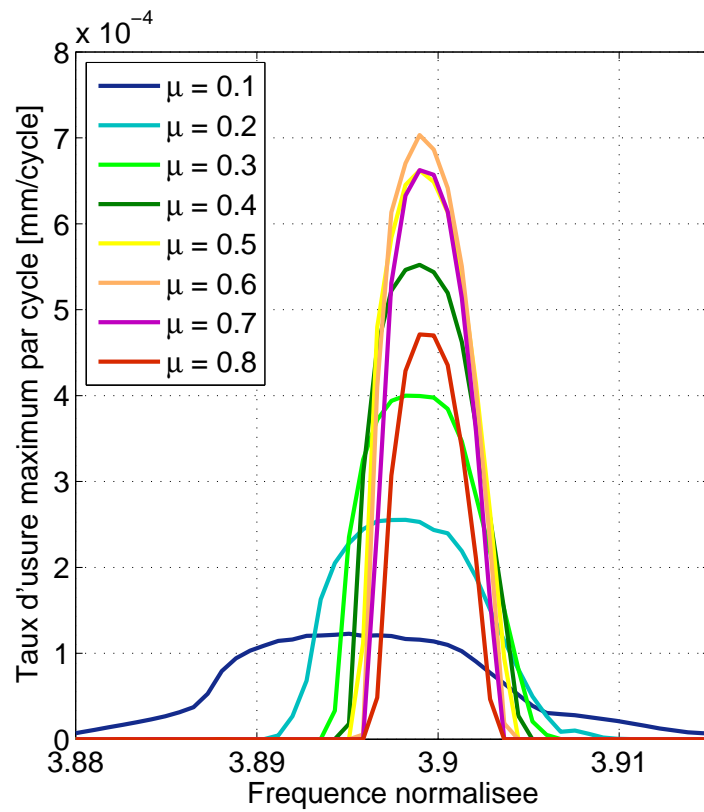


FIGURE 5.10. Réponse du taux d'usure maximum en fréquence au voisinage du mode 3F pour différents coefficients de frottement

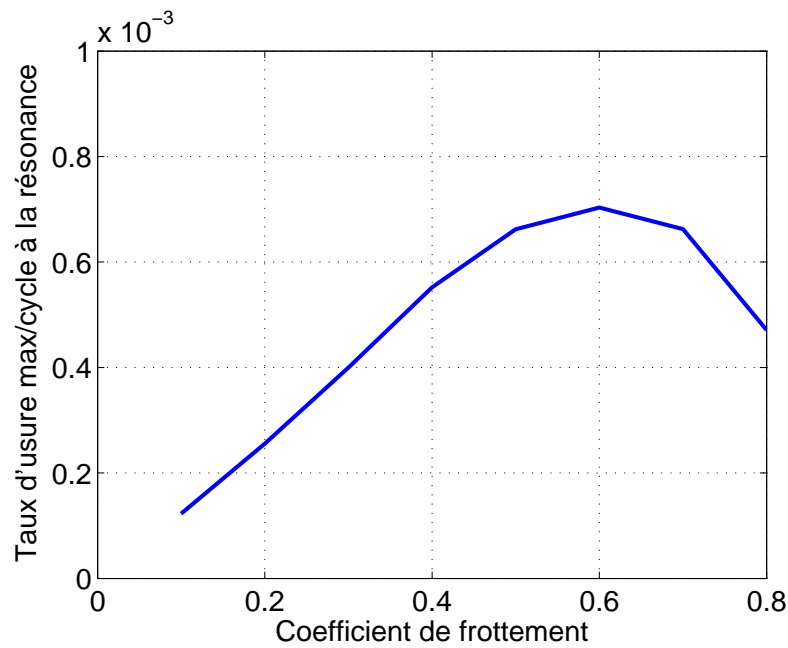


FIGURE 5.11. Influence du coefficient de frottement sur le taux d'usure maximum par cycle à la résonance de la réponse non-linéaire

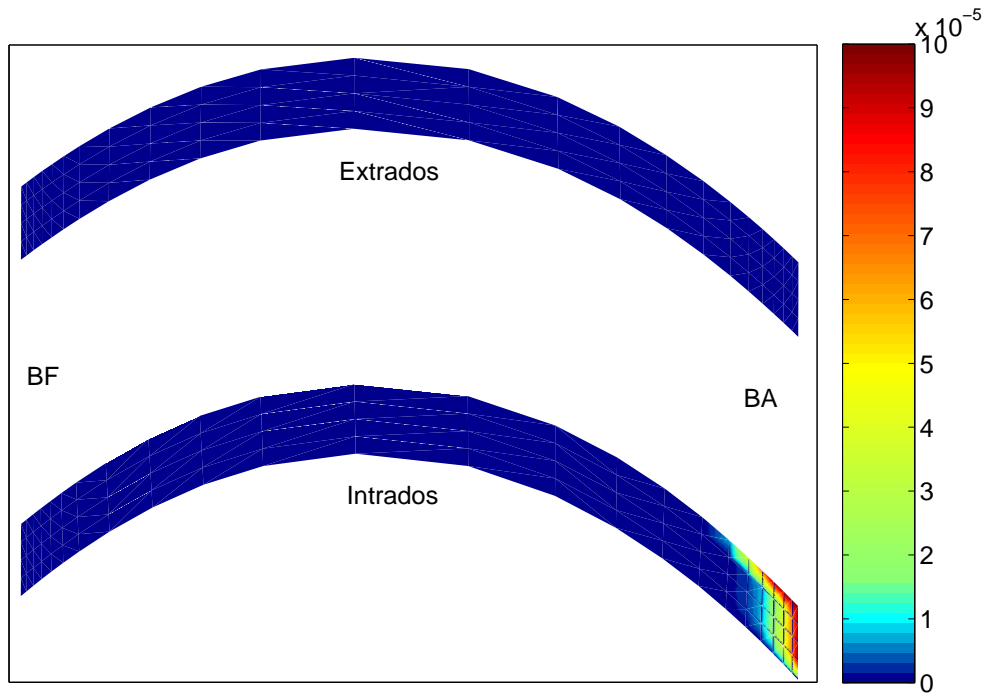


FIGURE 5.12. Profil du taux d'usure à la résonance (mode 3F) pour $\mu = 0.5$

Après avoir obtenu le comportement en réponse forcée un post-traitement à une fréquence donnée est effectué pour connaître l'évolution (ou cinétique) de l'usure en fonction du nombre de cycles. La fréquence reste fixe durant le chargement cyclique. Nous nous plaçons à la résonance non-linéaire du mode 3F avec une excitation sinusoïdale en bout d'aube de 50 N.

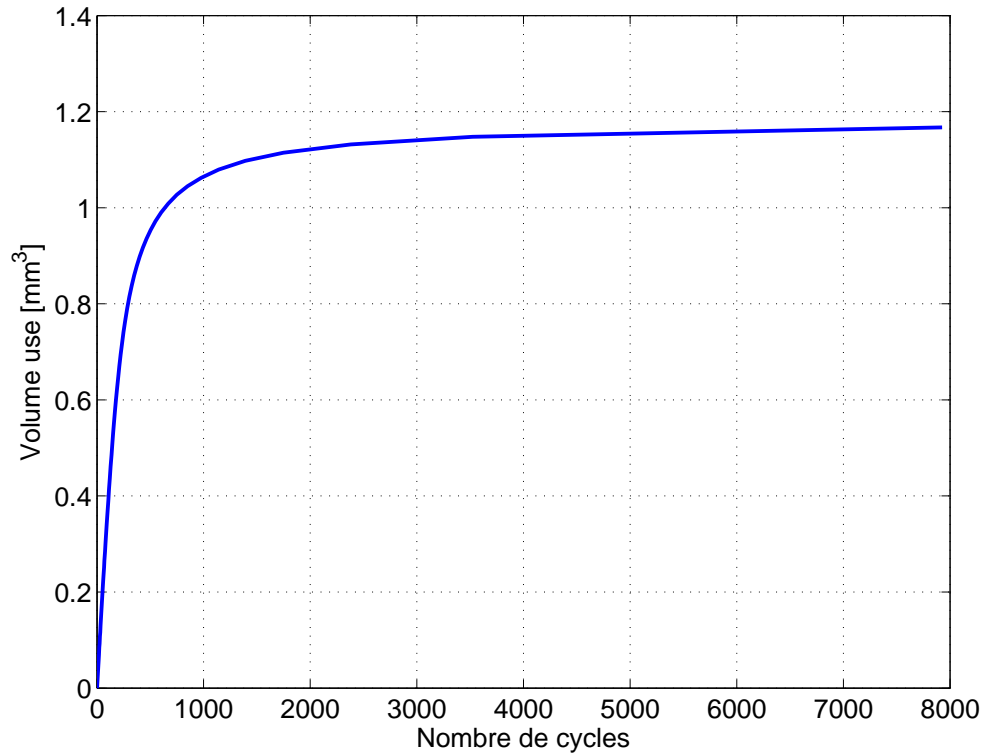
5.2.3 Usure à la résonance du mode 3F

Pour calculer la cinétique d'usure nous avons fixé le pas en usure à $\Delta W_{max} = 5 \mu\text{m}$. Le nombre d'incrémentations d'usure est fixé à 200. Ces valeurs autorisent une usure cumulée maximum de 1 mm.

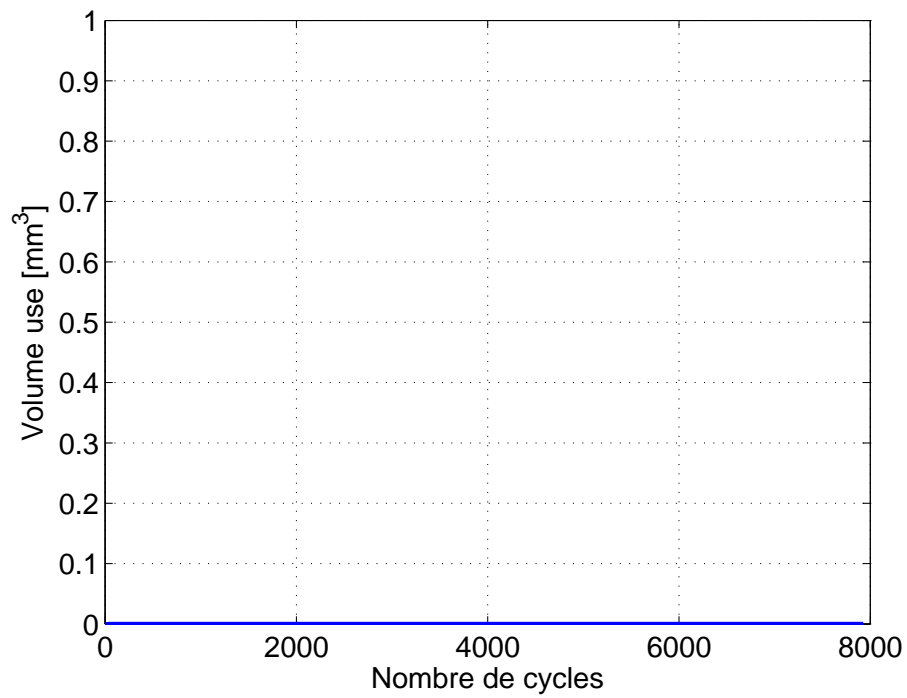
5.2.3.1 Cinétique d'usure

À chaque cycle calculé, le nombre de cycles N pour que ΔW_{max} soit atteint est calculé. On peut ainsi tracer l'évolution du volume usé en fonction du nombre de cycles sur chaque interface de contact. Bien entendu ce nombre de cycles dépend du coefficient k_w . Le volume usé par cycle est tracé pour le côté intrados sur la figure 5.13a et pour le côté extrados sur la figure 5.13b. On remarque sur ces figures que le côté intrados s'use plus que le côté extrados. L'usure de l'extrados est anecdotique et plutôt une conséquence de la tolérance numérique vis-à-vis de l'usure. Cette situation est vraie pour un coefficient de frottement $\mu = 0.5$ alors que pour un coefficient de frottement $\mu = 0.2$ un processus d'usure se produit en bord d'attaque (BA) côté extrados. Nous nous intéresserons donc dans la suite seulement au comportement côté intrados. Un plateau est observé comme ce fut le cas dans les différentes études du chapitre 4.

Il est intéressant de regarder l'évolution des taux d'usure en fonctions des cycles calculés. L'usure est très localisée. Nous avons tracé ces évolutions sous forme de courbe (figure 5.15) pour chaque nœud en contact qui s'use. Les courbes sont tracées pour le côté intrados. L'évolution du taux d'usure passe



(a)



(b)

FIGURE 5.13. Cinétique d'usure en fonction du nombre de cycles : côté intrados (a) et côté extrados (b)

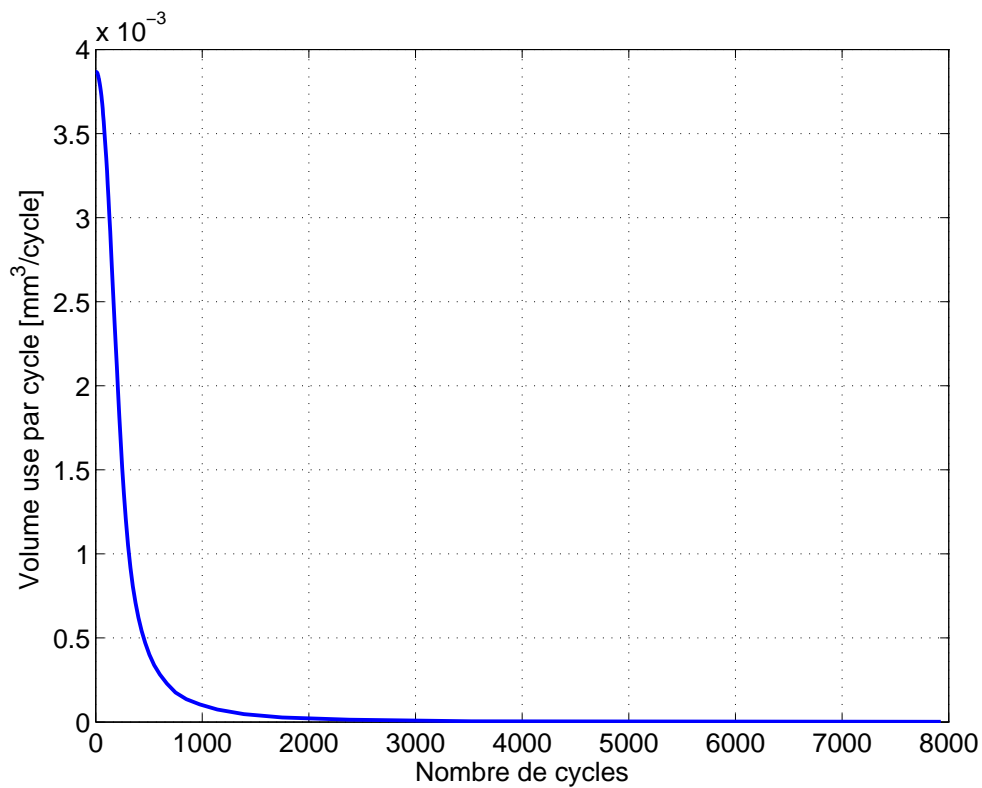


FIGURE 5.14. Évolution du taux de volume utilisé par cycle en fonction du nombre de cycles

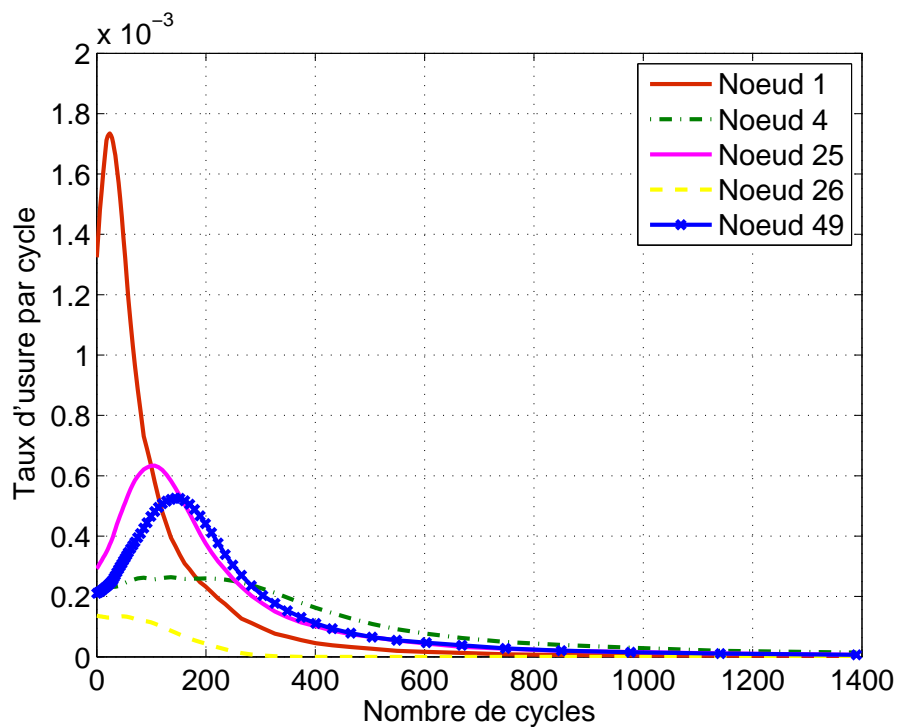


FIGURE 5.15. Évolution du taux d'usure par cycle pour quelques nœuds usés

par un maximum. Pour ce cas de chargement nous n'avons pas de nœud qui commence à s'user après un certain nombre de cycles. Le maximum d'intensité d'usure n'est pas toujours localisé sur le même nœud durant l'historique. En effet durant les premiers cycles de chargement le nœud 1 de l'intrados s'use plus que les autres nœuds. Après 50 cycles calculés l'intensité d'usure devient maximum sur le nœud 25. Après un certain nombre de cycles calculés le taux d'usure devient numériquement nul. La géométrie usée de l'état stationnaire est atteinte.

5.2.3.2 État stationnaire et géométrie usée

Le profil d'usure final est représenté sur la figure 5.16. On constate que l'usure est restée très localisée. Des zones qui s'usaient en début de chargement n'ont pas atteint un fort niveau d'usure.

En effet, si nous comparons ce résultat avec le profil d'usure obtenu en multipliant le taux d'usure calculé après le premier cycle par le nombre de cycles nécessaire pour obtenir l'état stationnaire nous constatons sur la figure 5.17 des niveaux d'usure très importants et une zone usée beaucoup plus large. Ce calcul montre bien l'influence de l'évolution de l'usure sur le résultat final.

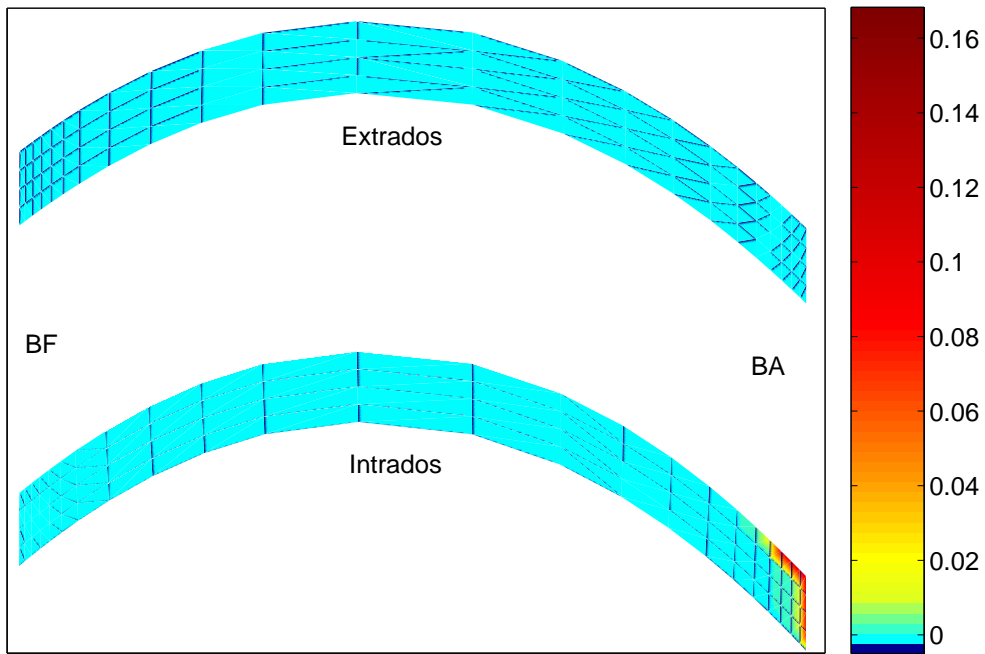


FIGURE 5.16. Géométrie usée de l'état asymptotique

Toujours sur cet exemple nous présentons en figure 5.18 le profil des pressions de contact de l'état asymptotique. La figure montre que les pressions deviennent nulles dans les zones usées. Cependant à la frontière entre la zone adhérente et la zone usée il y a une augmentation des pressions de contact. Si le maillage était assez fin on verrait un pic de pression au niveau de la frontière entre zone adhérente et zone usée.

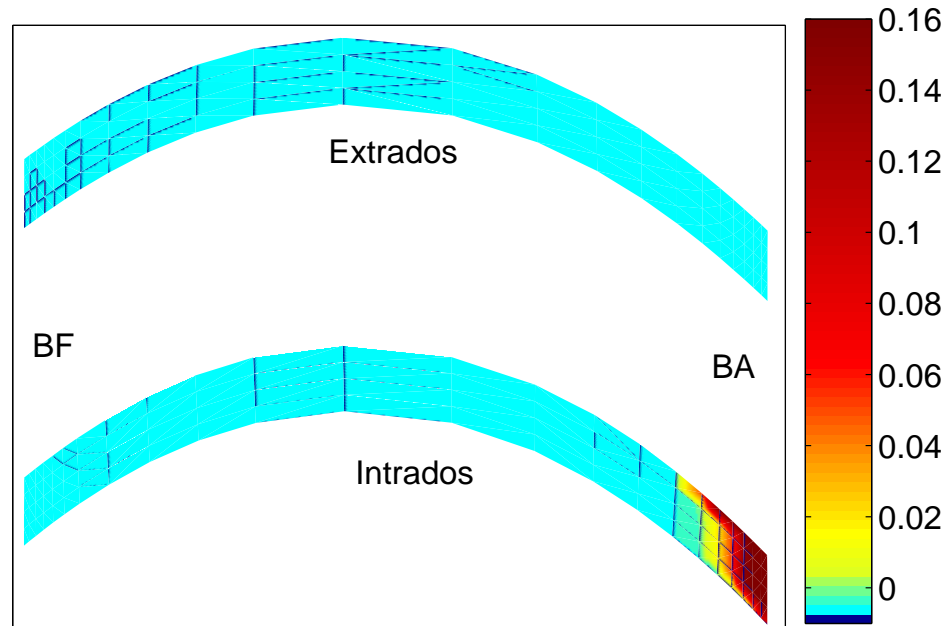


FIGURE 5.17. Géométrie usée sans mise à jour de la géométrie durant les cycles de fretting

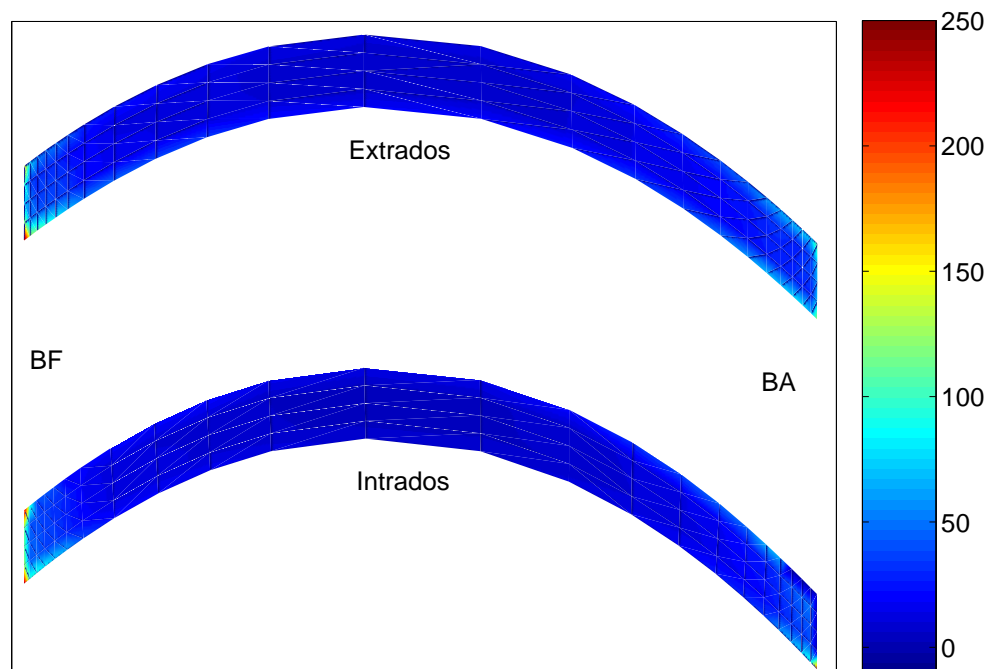


FIGURE 5.18. Pression de contact au niveau des interfaces de contact à l'état asymptotique

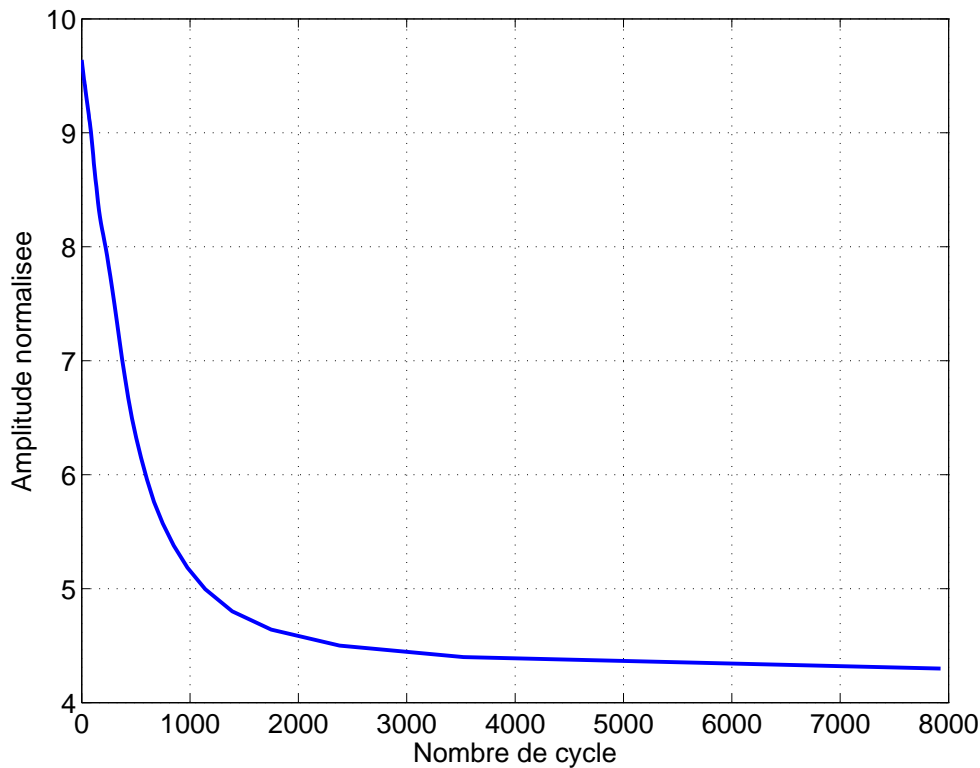


FIGURE 5.19. Évolution de l'amplitude en bout de pale à la résonance

5.2.3.3 Couplage entre dynamique et usure

La réponse dynamique va être modifiée par l'usure en pied d'aube. Si on suit l'amplitude de vibration au cours du temps on observe une forte diminution de celle-ci. Sur la figure 5.19 l'amplitude de vibration diminue de moitié à partir de 2000 cycles. L'usure semble avoir un effet positif sur le comportement vibratoire. Toutefois vis-à-vis des phénomènes aéroélastiques le paramètre le plus important est le taux d'amortissement de la structure. Nous avons montré au chapitre 4 que ce taux pouvait diminuer avec l'usure. Il est aussi intéressant de regarder si le comportement dans la zone de contact est modifié à cause de l'usure par fretting. La figure 5.20 montre que le contact s'ouvre durant le cycle à cause de l'usure. À l'état stationnaire le nœud n'est plus du tout en contact durant le cycle de fretting. Ce phénomène est particulièrement intéressant car il permet de supposer qu'il existe un mécanisme d'évacuation des débris d'usure qui devra être intégré lors d'une caractérisation expérimentale.

L'usure va entraîner une localisation plus forte des zones en glissement. Seule la zone qui s'use tout au long du chargement en fretting glisse. Certaines zones qui étaient en glissement au début du chargement s'arrêtent de glisser à cause d'une redistribution des pressions de contact. Ce phénomène est observable en comparant les figures 5.21 entre le niveau au premier cycle et celui obtenu sur les derniers cycles. Nous notons sur les figures 5.22 que durant le processus de fretting la portée subit un déplacement statique au niveau de son interface de contact. A peu près tous les nœuds subissent ce déplacement. Grâce aux données calculées nous pouvons tracer les bûches de fretting classiquement obtenues lors d'essais expérimentaux. La figure 5.23a montre la bûche de fretting pour le nœud 1 côté intrados. On observe la fermeture du cycle de fretting durant le chargement cyclique. L'amplitude des déplacements augmente et le centre de la courbe fermée se décale. Durant les cycles de fretting (cf. figure 5.23b) le nœud choisi dans la zone d'usure change de position sur la portée, il passe du cycle vert

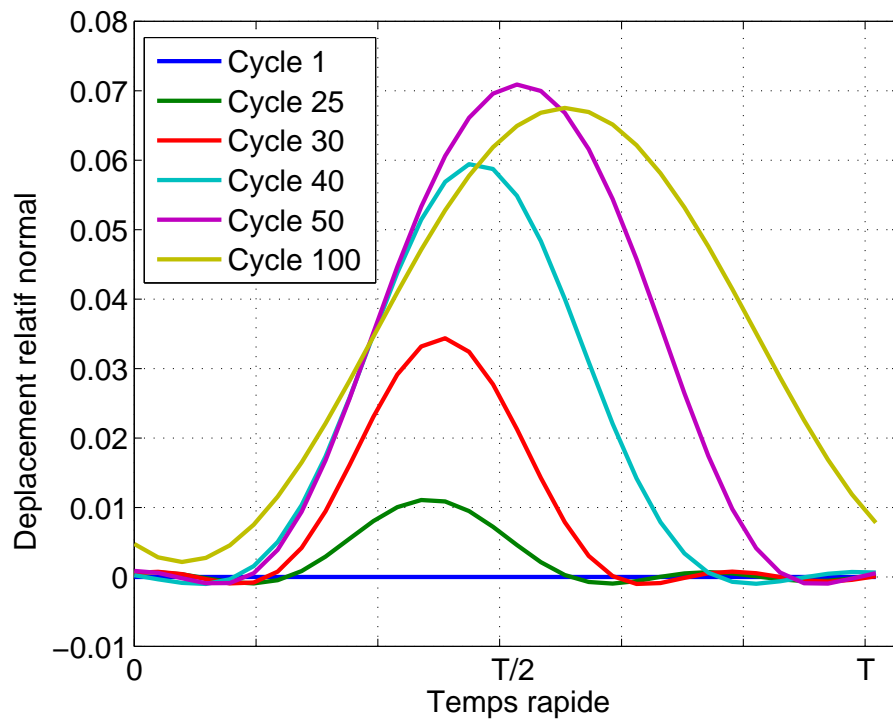


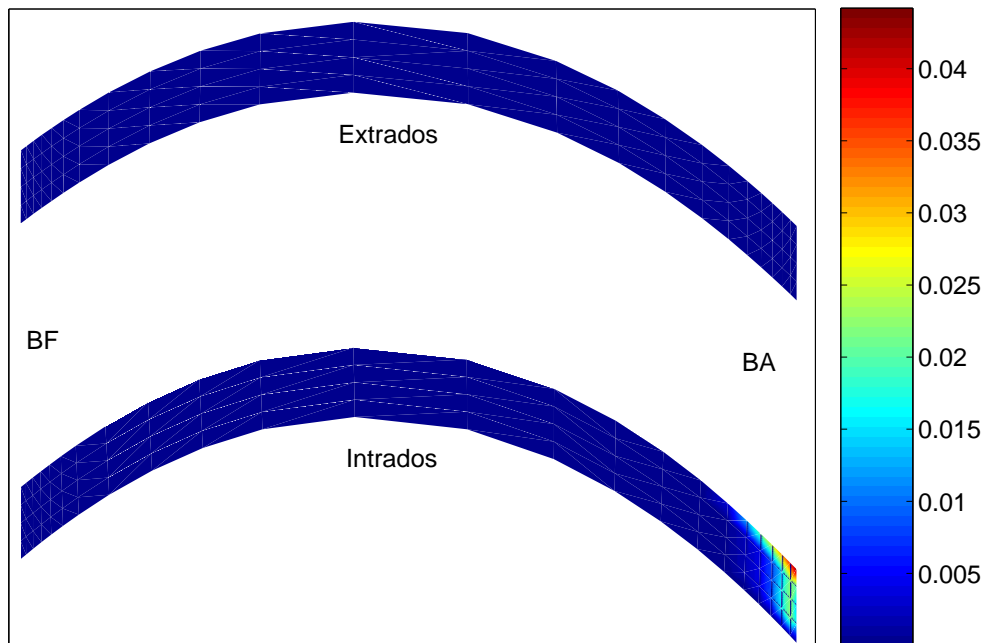
FIGURE 5.20. Déplacement relatif normal du nœud 1 de la portée intrados pour différents cycles de fretting

au cycle rouge.

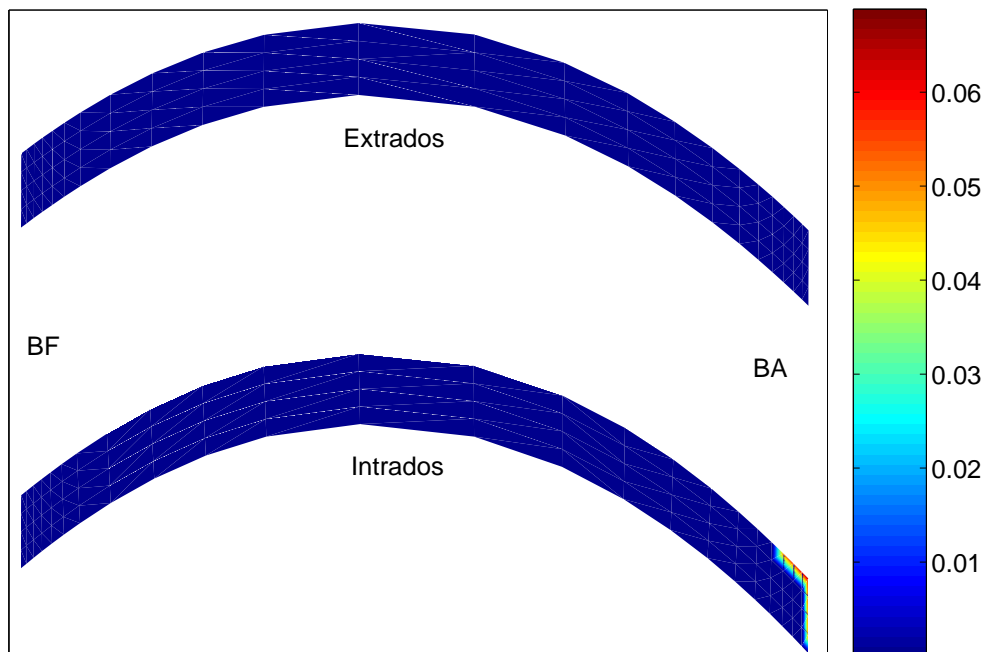
Bilan de l'étude

Dans cette partie nous avons montré que la méthode proposée au chapitre 4 basée sur une approche multi-échelle en temps pouvait être utilisée sur une structure industrielle pour prédire le niveau d'usure par fretting. Les résultats obtenus illustrent le couplage entre la dynamique de l'aube et la cinétique d'usure. L'usure produit un effet positif sur le niveau vibratoire. Le comportement complexe observé dans la zone de contact durant les simulations numériques peut amener à repenser certains protocoles expérimentaux.

D'un point de vue simulation la méthode proposée prend 16 heures pour calculer la réponse forcée (50 fréquences calculées). Ce temps de calcul est très peu dépendant du coefficient de frottement. Le calcul pour 200 incréments en usure à la résonance dure environ 22 heures. Il faut noter que chaque fréquence peut-être traité indépendamment. Les calculs ont été effectués sur une machine Dell avec 2 processeurs Intel Xeon X5570 8 cœurs cadencés à 2.93GHz.

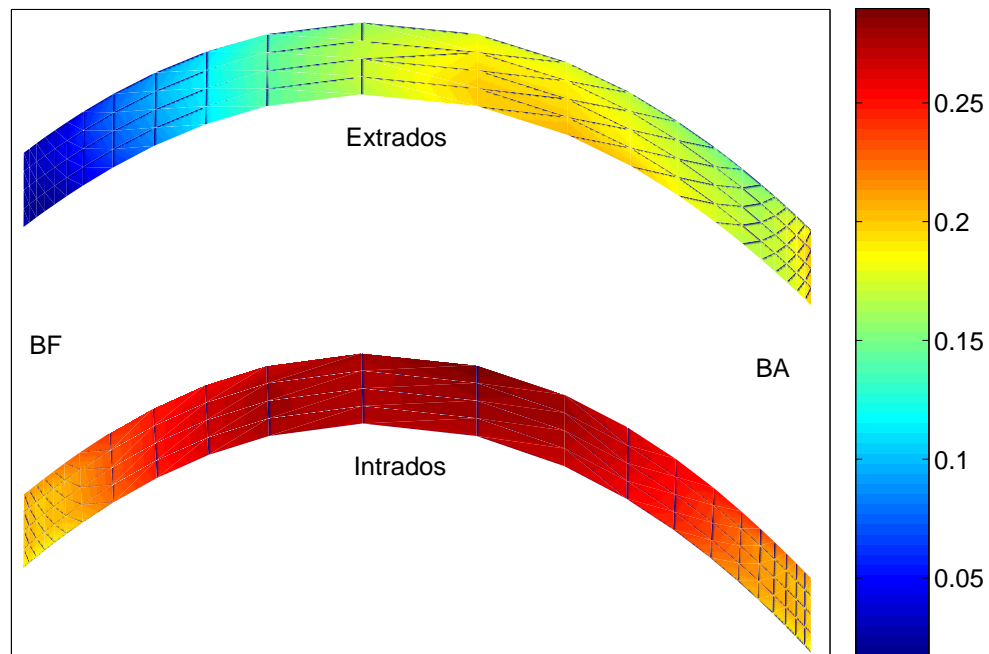


(a)

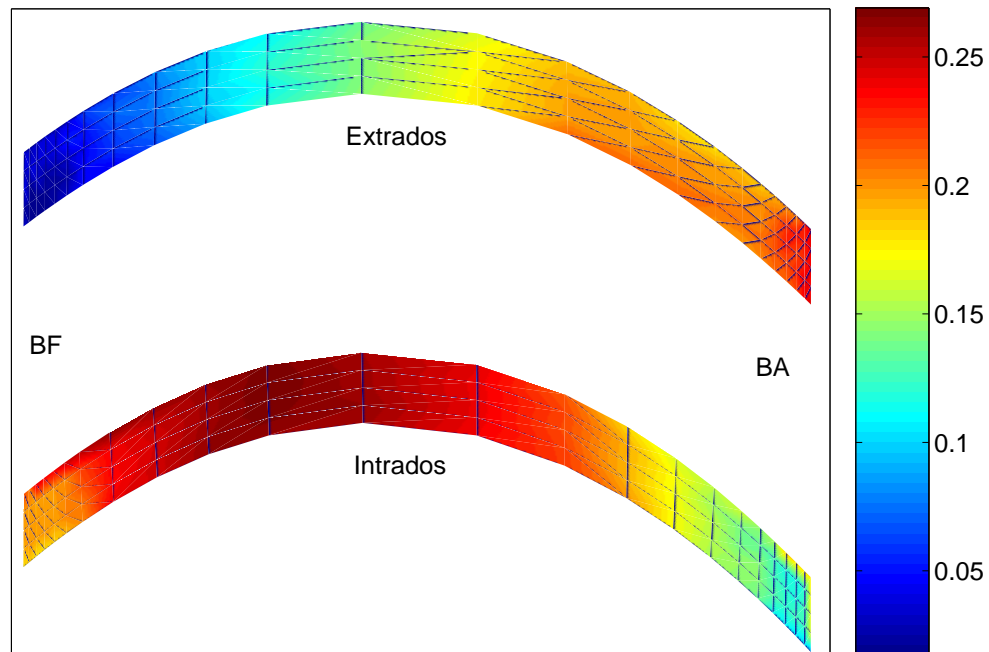


(b)

FIGURE 5.21. Maximum de déplacement (sans composante statique) durant un cycle de fretting; premier cycle (a) et cycle final (b)

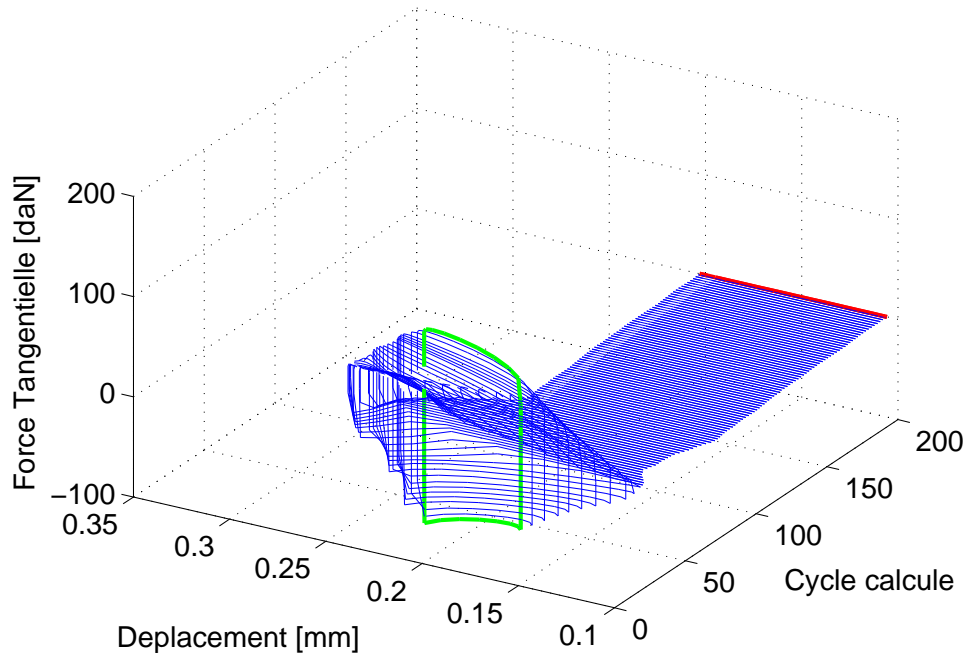


(a)

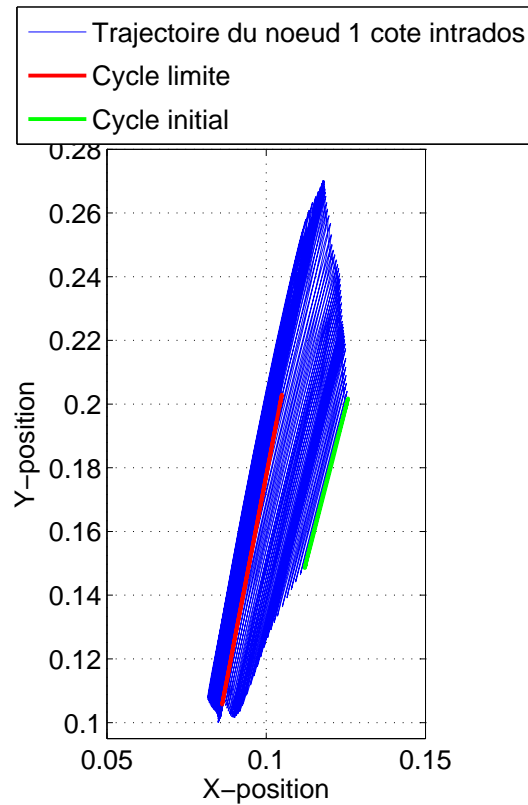


(b)

FIGURE 5.22. Maximum de déplacement (composante statique) durant un cycle de fretting; premier cycle (a) et cycle final (b)



(a)



(b)

FIGURE 5.23. Bûche de fretting (a) à la résonance pour le nœud 1 de l'intrados et trajectoire (b)

5.2.4 Comparaison entre usure calculée et usure observée

Un des objectifs de cette thèse était de comprendre les raisons pour lesquelles les niveaux d'usure observés sur le retour flotte étaient plus importants que celui observés numériquement sur les phases de décollage et d'atterrissage. De plus les zones usées observées sur les portées des soufflantes des moteurs différaient de celles calculées numériquement.

Comparaison entre l'usure calculée sous ABAQUS et celle calculée autour du mode 3F Commençons par comparer les profils d'usure calculés sous ABAQUS et ceux obtenus par notre méthode pour le troisième mode de flexion (3F). L'usure due aux décollages et atterrissages est beaucoup plus importante que l'usure liée à la dynamique du mode 3F. Par contre la zone usée par les micro-glissements à l'interface près du mode 3F est différente des zones usées par les macro-glissements des phases de décollage et d'atterrissage. Le mode 3F est rencontré pendant le vol, ce qui peut expliquer les usures observées en bord d'attaque côté intrados.

Usure observée Lors des opérations de maintenance l'usure a été mesurée sur des portées de moteurs. Les portées sont usées principalement au bord de fuite (BF) côté intrados et aux bord d'attaque (BA) côté extrados. Le bord d'attaque de l'intrados et le bord de fuite de l'extrados s'usent aussi mais de façon moins importante.

L'étude autour du mode 3F a montré que le bord d'attaque de l'intrados s'usait, ce qui semble expliquer l'usure observée sur les moteurs en service.

Snecma a remarqué que pour un même nombre de décollage et d'atterrissage les avions qui volaient plus longtemps subissaient une usure plus importante. L'usure dynamique étant rencontrée durant le vol, cela peut expliquer cet écart.

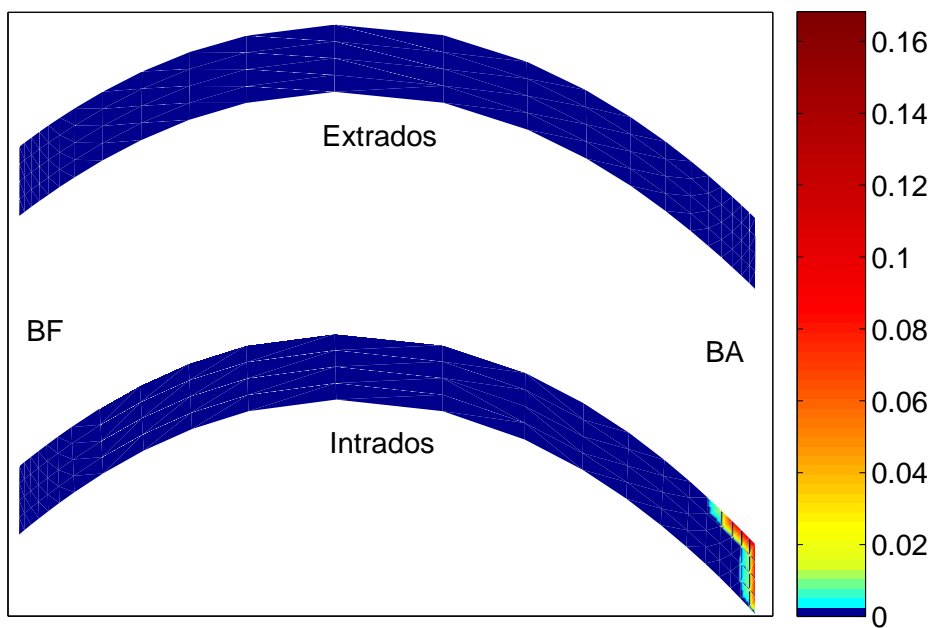
Il serait intéressant de recalibrer les usures observées sur les moteurs et nos simulations numériques. Cela permettrait de trouver une « valeur réaliste » de k_w (le coefficient d'intensité d'usure)

Les données sur le comportement en usure des retours de la flotte sont succinctes. Les constructeurs connaissent les profondeurs maxima d'usure en fonction du temps de vol. Ces données peuvent être reportées sur un graphique comme celui de la figure 5.25. Pour des raisons de confidentialité les valeurs du temps de vol et du taux d'usure maximum sont omises.

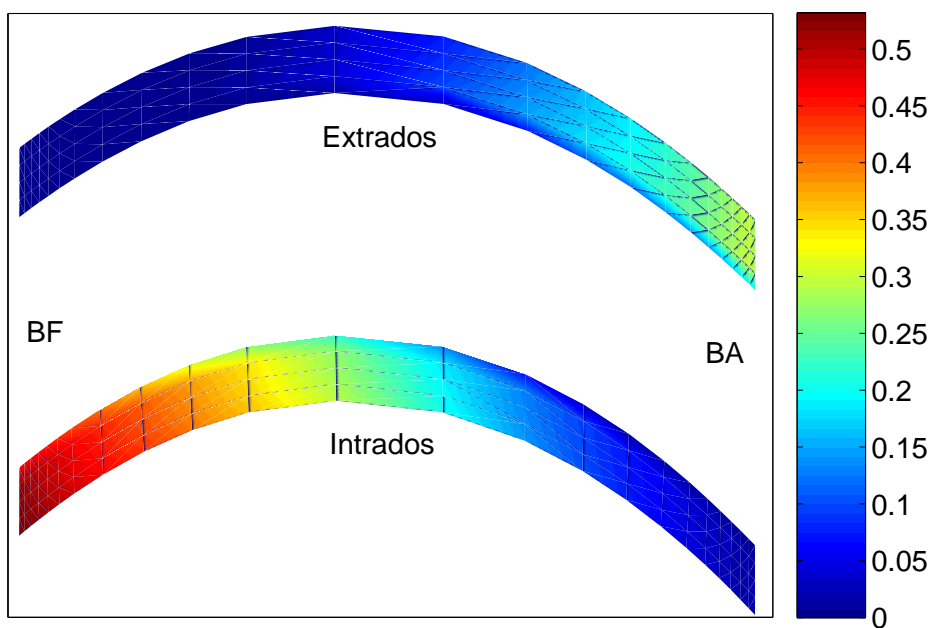
Ce graphique montre que les retours flotte sont très disparates. Toutefois on note une tendance vis-à-vis du temps de vol, l'usure est plus importante en moyenne pour des temps de vol plus longs. Suivant les compagnies l'usure diffère. Si on regarde la compagnie 3 qui a ses avions qui volent sur des trajets de durée A et B, l'usure est plus marquée pour les trajets B qui durent plus longtemps. Les résultats numériques, obtenus de nos simulations, ont montré que la cinétique d'usure n'était pas linéaire. Suivant dans quelle partie de la courbe (figure 5.13a) on se trouve, Le trajet A ou B de vol peuvent donner lieu à des vitesses d'usure très différentes.

Pour pouvoir recalibrer efficacement notre modèle il faudrait être capable de bien caractériser le chargement dynamique (positionnement par rapport au mode 3F) durant le vol qui conditionne fortement le niveau d'usure.

Compte tenu du nombre important d'incertitudes liées à cette problématique (chargement, coefficient d'usure et de frottement ...) une approche statistique devra être mise en place pour garantir une analyse pertinente des résultats numériques et expérimentaux. Cet aspect n'a pas été étudié dans ce travail de thèse, mais s'avère indispensable pour progresser dans les comparaisons essais/calculs.



(a)



(b)

FIGURE 5.24. Usure à la résonance du mode 3F et usure causée par les phases de décollage et d'atterrissage calculée sous ABAQUS

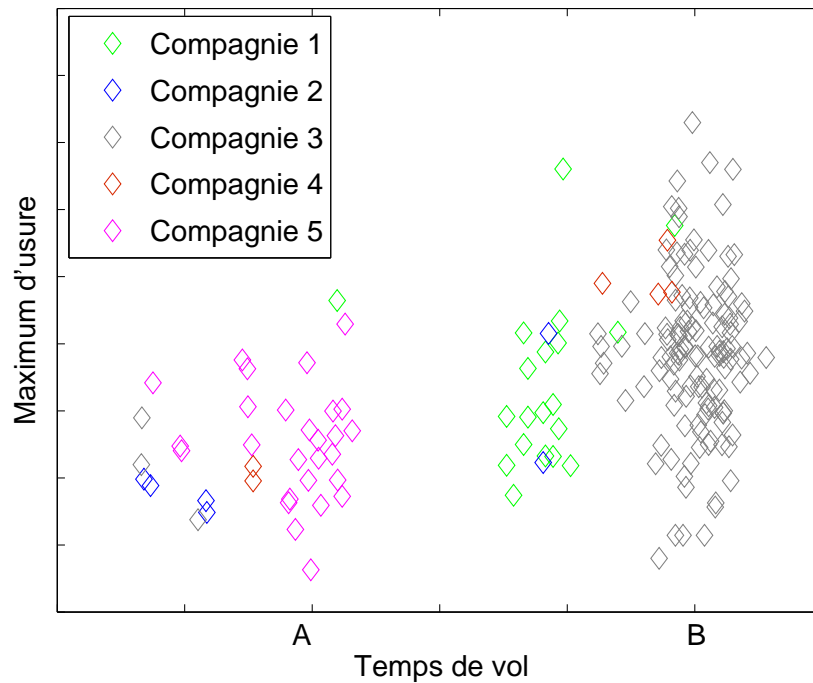


FIGURE 5.25. Vitesse d'usure par cycle en fonction du temps de vol d'après [16]

5.3 Conclusions

Ce chapitre a présenté la démarche pour étudier la cinétique d'usure autour d'un mode choisi à l'avance. Les différentes étapes de l'étude numérique ont été présentées : création du super-élément, chargement statique, réponse forcée, calcul de la cinématique d'usure. Les résultats obtenus pour le mode 3F sont intéressants puisque l'on montre une usure en bord d'attaque (BA) côté intrados qui n'était pas observé avec les simulations quasi-statiques effectuées sous ABAQUS. Nous avons aussi montré que la taille des zones usées était très dépendante du coefficient de frottement.

Le recalage par rapport aux retours flottes est délicate et nécessite des études approfondies en utilisant des méthodes statistiques.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Le travail présenté dans cette thèse apporte des éléments de réponse à la problématique industrielle du fretting des pieds d'aube de turbomachines. Pour répondre aux besoins du motoriste Snecma, un modèle d'étude de l'usure sous chargement dynamique a été développé. Les performances en calcul de la méthode DLFT proposée par Nacivet [171] nous ont amené à la choisir pour prédire le comportement dans la zone de contact. La méthode présentée dans ce mémoire de prédiction de la cinétique d'usure pour des sollicitations de type polycycliques a donc été construite autour de cette approche numérique.

L'étude de l'état de l'art sur les méthodes de modélisation du contact avec frottement et usure a constitué une part importante de la thèse. Une synthèse des travaux existant dans la littérature a été donnée dans le chapitre 1. Ceci nous a conduit à retenir le modèle de quantification d'usure d'Archard. La stratégie proposée peut utiliser d'autres modèles d'usure, ceci n'entraîne pas de développement supplémentaire. En effet, la méthode proposée est souple, la loi d'usure est une fonction définie dans le système d'équations, elle peut être entrée par l'utilisateur. Le traitement numérique de l'usure s'effectue à l'aide d'une méthode de pénalité, sans remaillage de la structure. Cette stratégie fait gagner un temps de calcul considérable, elle permet aussi d'utiliser les méthodes de réduction de modèle présentées au chapitre 3 et en annexe A sans développement complémentaire.

Nous avons proposé une méthode multi-échelle en temps pour calculer la cinétique d'usure et l'évolution de la dynamique due à l'usure. Cette méthode a été testée sur des exemples simples, ce qui a permis de valider la méthode par rapport à une intégration temporelle directe. Ces exemples avaient aussi valeur d'aide à l'analyse phénoménologique et particulièrement pour la compréhension du couplage entre dynamique et usure. En effet, sur l'exemple du frotteur bidimensionnel le comportement vibratoire est modifié durant le chargement à cause de l'usure qui entraîne une redistribution des pressions.

Le concept des modes complexes non-linéaires qui avait été utilisé par Laxalde [130] a été étendu au chapitre 4 avec la prise en compte de l'usure. Cette approche semble plus adaptée aux problématiques industrielles rencontrées chez les constructeurs aéronautiques. Couplée avec un calcul aérodynamique elle permettrait de prédire les régimes de flottement.

La plupart des interfaces de contact étudiées sont en condition de glissement partiel durant un chargement dynamique. Cette condition a pour conséquence l'existence d'un état stationnaire à l'infini vis-à-vis de l'usure, caractérisé par des vitesses d'usure nulles. Ayant observé ce phénomène nous avons essayé de développer une méthode permettant de calculer directement l'état asymptotique sans avoir à calculer la partie transitoire de la cinétique d'usure. Cette approche est à mettre en parallèle avec les méthodes d'équilibrage harmonique en dynamique qui permettent de trouver directement l'état

stationnaire périodique. Les développements réalisés ont donné des résultats intéressants sur des systèmes simples ou dans des cas particuliers. Par contre un travail important reste à faire afin qu'ils soient applicables en dynamique sur de systèmes industriels.

Enfin une étude numérique sur une aube de soufflante a été menée au chapitre 5. Cette étude a permis d'illustrer l'utilisation de la méthode dans un cadre industriel. Les résultats obtenus peuvent expliquer certains comportements en usure observés sur les pieds d'aube de soufflantes durant leur exploitation. Une conclusion importante est donc que les simulations de l'usure en dynamique doivent être considérées lors de l'étude de la cinétique d'usure au même titre que les effets quasi-statiques liés aux phases de décollage et d'atterrissage.

Les outils logiciels développés dans cette thèse sont désormais (ou vont être) intégrés dans une plateforme plus large (plateforme HARMONIE) permettant de faire interagir, de façon plus industrielle, les différents moyens numériques disponibles chez Snecma.

Perspectives

Une des premières suites à donner à ce travail est d'obtenir des données d'entrée du modèle numérique en les identifiant expérimentalement ou grâce au retour d'expérience Snecma. Ceci permettra de recalibrer le modèle numérique par rapport à l'expérience. Des études statistiques peuvent être menées sur les usures observées durant la vie des aubes de moteurs Snecma. Il serait intéressant de mener des expériences à la fois phénoméologiques et technologiques pour obtenir ces données manquantes. Les expériences phénoméologiques sur des petits modèles (pion-plan) soumis à un chargement dynamique caractéristique de la dynamique de l'aube permettrait d'identifier des lois d'usure. Les échantillons seraient soumis à un chargement à fréquences proches des fréquences observées dans le moteur et avec un double chargement normal et tangentiel afin de prendre en compte les pertes de contact durant le cycle de fretting. Un essai technologique pourrait être effectué sur une roue aubagée dans le vide (pour ne pas avoir d'effet aérodynamique) excité sur un mode pendant un temps assez long afin de suivre la cinétique d'usure. Les essais en dynamique peuvent donner lieu à un nouveau concept de carte de fretting avec la fréquence d'excitation comme paramètre.

D'un point de vue théorique l'étude menée durant cette thèse peut être poursuivie par l'étude de différents aspects du problème de contact en pied d'aube. Le pied d'aube est recouvert d'un lubrifiant solide. Ce lubrifiant a un comportement viscoplastique [90], il serait intéressant de voir comment cet aspect peut être pris en compte dans les méthodes développées. La prise en compte de la plasticité dans la zone de contact permettrait une meilleure prédiction des pressions de contact au niveau des interfaces. Les glissements et les niveaux d'usure dans les zones de contact sont très dépendants d'une bonne évaluation des pressions de contact. Dans une première approche le lubrifiant solide pourrait être pris en compte par l'ajout de raideurs de contact normales et tangentielles. Charleux [32] avait montré que les raideurs de contact pouvaient avoir un impact significatif sur les fréquences propres et sur la forme de la réponse fréquentielle.

Durant nos différentes simulations numériques le coefficient de frottement était constant, or celui-ci est en théorie fonction du chargement, des vitesses de glissement, de la température et d'autres paramètres. Une prise en compte de la variabilité du coefficient de frottement peut être une direction d'étude. Il faut également garder à l'esprit que le coefficient de frottement ainsi que les caractéristiques

des surfaces de contact évoluent en fonction des cycles de sollicitation et à mesure que l'usure progresse. Nous pourrions utiliser par exemple un coefficient de frottement qui varie avec la profondeur d'usure. Connaissant la profondeur d'usure les couples de matériaux en contact sont connus. Une modélisation équivalente à celle proposée par Dick [53] fondée sur les proportions de matériaux constitutifs du troisième corps pourrait être utilisée. Une autre idée serait d'utiliser l'approche de Dragon-Louiset [56] pour modéliser le troisième corps en utilisant des éléments joints dans le modèle éléments finis. Notre méthode peut servir à prédire les risques de fissuration par fretting sous chargement dynamique dans l'attache des aubes en utilisant des critères d'amorçage issus des expériences.

Dans toutes ces études, la précision est conditionnée par le nombre d'éléments de contact retenus. Des efforts sont encore à faire pour prédire fidèlement la répartition des contraintes de contact en dynamique. Ceci nécessite une modélisation plus fine de la zone de contact et donc un nombre de degrés de liberté plus important. Des travaux vont être menés dans le cadre d'une thèse en cours sur la parallélisation des méthodes d'équilibrage harmonique afin de pouvoir analyser en fréquentiel des structures ayant des milliers d'éléments de contact. Certaines approches proposées dans cette thèse peuvent être utilisées pour la mise au point d'un solveur parallèle.

Par ailleurs, de nombreux travaux ont mis en évidence les effets liés au désaccordage des disques aubagés, en particulier l'amplification, localisée sur certaines aubes, des niveaux vibratoires. Mais l'impact quantitatif du frottement en pied d'aube sur la réponse d'un disque désaccordé n'a pas été étudié pour le moment. Une étude couplée de l'usure avec le désaccordage permettrait d'étudier la dynamique de chaque aube et de voir si la localisation est amplifiée ou diminuée par le phénomène d'usure.

Bibliographie

- [1] W. Aggoune. *Nouveaux algorithmes asymptotiques numériques pour la résolution des problèmes de contact unilatéral*. Thèse de doctorat, Université de Metz, 2003. [60](#)
- [2] S. Akel and Q. S. Nguyen. Determination of the limit response in cyclic plasticity. In *Proceedings of 2nd International Conference on Computational Plasticity, Barcelone*, page 639–650, 1989. [113](#)
- [3] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computers methods in applied mechanical and engineering*, 92 :353–375, 1991. [61](#), [74](#)
- [4] V. M. Alexandrov. Asymptotic methods in contact mechanics. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4) :29–35, 1998. [39](#)
- [5] V. M. Alexandrov and B. L. Romalis. *Contact Problems in Mechanical Engineering*. Mashinostroenie, Moscow, 1986. [35](#), [39](#)
- [6] M. H. Aliabadi. *The boundary element method. Volume 2, Applications in solids and structures*. Wiley Chichester, 2002. [43](#)
- [7] J. Allwood. Survey and performance assessment of solution methods for elastic rough contact problems. *Journal of Tribology*, 127 :10, 2005. [39](#)
- [8] R. Alonso, F.J. Marquina, A. Coro, and A. Gutiérrez. Static normal stress influence in friction damping of blade attachments. In *Proceedings of ASME Turbo Expo, 2009*, pages 343–351. ASME, 2009. [21](#)
- [9] E. Antaluca, D. Nélias, and S. Cretu. A Three-Dimensional Friction Model for Elastic–Plastic Contact With Tangential Loading—Application to Dented Surfaces. In *Proceedings of the 2004 ASME/STLE International Joint Tribology Conference, TRIB2004-64331*, 2004. [39](#)
- [10] H. Antes, B. Steinfield, and G. Tröndle. Recent developments in dynamic stress analyses by time domain BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(4) :176–184, 1991. [44](#)
- [11] N. K. Arakere and E. Orozco. Analysis of low cycle fatigue properties of single crystal nickel-base turbine blade superalloys. *High-temperature materials and processes*, 20(5-6) :403–419, 2001. [35](#)
- [12] J. F. Archard. Contact and rubbing of flat surfaces. *Journal of Applied Physics*, 24(8) :981–988, 1953. [30](#), [55](#), [141](#)
- [13] J. F. Archard. Elastic deformation and the laws of friction. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 243(1233) :190–205, 1957. [44](#)
- [14] I. I. Argatov. The asymptotic solution of the contact problem for a three-dimensional elastic body of finite dimensions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 63(6) :937–942, 1999. [39](#)
- [15] I. Babuška. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3) :179–192, 1973. [63](#)

- [16] A. Bassot. Synthèse données usure disque fan. Rapport technique, Snecma, 2010. [2](#), [177](#)
- [17] A. Batailly. *Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes - ECN, 2008. [14](#)
- [18] M. Baumgartner, F. Kameier, and J. Hourmouziadis. Non-engine order blade vibration in a high pressure compressor. In *Proceedings of Twelfth ISABE, Melbourne, Australia*, 1995. [14](#)
- [19] J. R. Beisheim and G. B. Sinclair. On the three-dimensional finite element analysis of dovetail attachments. *Journal of Turbomachinery*, 125 :372, 2003. [35](#), [36](#)
- [20] H. Ben Dhia, I. Vautier, and M. Zarroug. Problèmes de contact frottant en grandes transformations : du continu au discret. *Revue europeenne des elements finis*, 9 :243–261, 2000. [49](#), [61](#)
- [21] M. Bonnet. *Equations intégrales et éléments de frontiere*. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, 1995. [43](#)
- [22] R. Bouc. Forced vibrations of mechanical systems with hysteresis. In *Proceedings of the 4th Conference on Non-linear Oscillation, Prague, Czechoslovakia*, 1981. [46](#)
- [23] V. Boucly, D. Nelias, S. Liu, Q. J. Wang, and L. M. Keer. Contact analyses for bodies with frictional heating and plastic behavior. *Journal of Tribology*, 127 :355, 2005. [39](#)
- [24] N. G. Bourago and V. N. Kukudzhyanov. A review of contact algorithms. *Mechanics of Solids*, 40(1) :35–71, 2005. [71](#)
- [25] J. Boussinesq. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques : principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur. 1885. [39](#)
- [26] A. Brandt and A. A. Lubrecht. Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. *Journal of Computational Physics*, 90(2) :348–370, 1990. [39](#)
- [27] F. Brezzi, W. W. Hager, and P. A. Raviart. Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. *Numerische Mathematik*, 31(1) :1–16, 1978. [63](#)
- [28] E. Brommundt. A simple mechanism for the polygonalization of railway wheels by wear. *Mechanics Research Communications*, 24(4) :435–442, 1997. [39](#)
- [29] T. M. Cameron and J. H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of applied mechanics*, 56 :149, 1989. [85](#)
- [30] C. Cattaneo. Sul contatto di due corpi elastici : distribuzione locale degli sforzi. *IRendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, 27 :342–348, 1938. [37](#), [45](#)
- [31] P. Chabrand, F. Dubois, and M. Raous. Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4) :97–108, 1998. [71](#), [72](#)
- [32] D. Charleux. *Étude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2006. [2](#), [6](#), [21](#), [57](#), [100](#), [135](#), [152](#), [154](#), [155](#), [180](#)
- [33] D. Charleux, C. Gibert, F. Thouverez, and J. Dupeux. Numerical and Experimental Study of Friction Damping Blade Attachments of Rotating Bladed Disks. *International Journal of Rotating Machinery*, 2006, 2006. [2](#), [21](#)
- [34] P. W. Christensen, A. Klarbring, J. S. Pang, and N. Strömberg. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(1) :145–173, 1998. [74](#)

- [35] M. Ciavarella. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I–theory. *International Journal of Solids and Structures*, 35(18) :2349 – 2362, 1998. [37](#)
- [36] M. Ciavarella. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II–Examples. *International journal of solids and Structures*, 35(18) :2363–2378, 1998. [37](#)
- [37] E. Cigeroglu, N. An, and C. H. Menq. A microslip friction model with normal load variation induced by normal motion. *Nonlinear Dynamics*, 50(3) :609–626, 2007. [21](#)
- [38] E. Cigeroglu, N. An, and C. H. Menq. Forced response prediction of constrained and unconstrained structures coupled through frictional contacts. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 131(2) :022505, 2009. [19](#), [203](#)
- [39] E. Cigeroglu, W. Lu, and C. H. Menq. One-dimensional dynamic microslip friction model. *Journal of Sound and Vibration*, 292(3-5) :881–898, 2006. [46](#)
- [40] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-ferry. *Méthode asymptotique numérique (Coll. Méthodes numériques)*. Lavoisier, 2007. [60](#), [83](#)
- [41] code aster.org. Manuel de référence code-aster. Manuel d’utilisation, EDF, 2010. [62](#), [72](#)
- [42] J. Y. Cognard and P. Ladevèze. A large time increment approach for cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 9(2) :141–157, 1993. [112](#)
- [43] M. G. Cooper, B. B. Mikic, and M. M. Yovanovich. Thermal contact conductance. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 12(3) :279–300, 1969. [44](#)
- [44] M. Costabel, M. Dauge, and M. Suri. Numerical approximation of a singularly perturbed contact problem". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157(3-4) :349 – 363, 1998. Papers presented at the Seventh Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics in Science and Engineering. [39](#)
- [45] R. R. Craig and M. C. C. Bampton. Coupling of substructures for Dynamic Analysis. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968. [89](#), [154](#), [200](#)
- [46] P. Cresta. *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures avec flambage local*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2008. [105](#)
- [47] P. Cresta, C. Allix, O. and Rey, and S. Guinard. Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8) :1436 – 1446, 2007. Domain Decomposition Methods : recent advances and new challenges in engineering. [105](#)
- [48] A. Curnier. A theory of friction. *International Journal of Solids and Structures*, 20(7) :637–647, 1984. [47](#)
- [49] P. R. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal*, 14 :1675–1682, 1976. [46](#)
- [50] G. De Saxcé and Z. Q. Feng. The bipotential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4) :225–245, 1998. [58](#)
- [51] D. Demaily. *Étude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Application à la dynamique rotor*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2002. [83](#)
- [52] N. B. Demkin. *Contact of rough surfaces*. Nauka, Moscow, 1970. [45](#)
- [53] T. Dick. *Multiscale fretting modeling of a blade-disc contact*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 2006. [181](#)

- [54] D. Dini and D. A. Hills. Bounded asymptotic solutions for incomplete contacts in partial slip. *International journal of solids and structures*, 41(24-25) :7049–7062, 2004. 39
- [55] Z. Dostál, D. Horák, R. Kucera, V. Vondrák, J. Haslinger, J. Dobiás, and S. Pták. FETI based algorithms for contact problems : scalability, large displacements and 3D Coulomb friction. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(2-5) :395–409, 2005. 72
- [56] M. Dragon-louiset. *Contribution gravea une approche théorique de la mécanique de l'usure*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2000. 31, 39, 40, 181
- [57] M. Dragon-Louiset. On a predictive macroscopic contact-sliding wear model based on micromechanical considerations. *International Journal of Solids and Structures*, 38(9) :1625–1639, 2001. 30
- [58] D. Dureisseix and C. Farhat. A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12) :2643–2666, 2001. 72
- [59] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris (France), 1972. 55, 56
- [60] K. Elleuch. *Comportement en fretting d'alliages d'aluminium : Effet de l'anodisation*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2002. 27
- [61] C. Farhat and F-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6) :1205–1227, 1991. 72
- [62] J. F. Ferrero, E. Yettou, J.J. Barrau, and S. Rivallant. Analysis of a dry friction problem under small displacements : application to a bolted joint. *Wear*, 256(11-12) :1135–1143, 2004. 46
- [63] N. Fillot, I. Iordanoff, and Y. Berthier. Modelling third body flows with a discrete element method—a tool for understanding wear with adhesive particles. *Tribology International*, 40(6) :973–981, 2007. 40
- [64] S. Fouvry. *Étude quantitative des dégradations en fretting*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1997. 24, 25, 30, 32
- [65] S. Fouvry, P. Kapsa, and L. Vincent. Quantification of fretting damage. *Wear*, 200(1-2) :186–205, 1996. 30
- [66] S. Fouvry, P. Kapsa, H. Zahouani, and L. Vincent. Wear analysis in fretting of hard coatings through a dissipated energy concept. *Wear*, 203 :393–403, 1997. 30
- [67] S. Fouvry, T. Liskiewicz, P. Kapsa, S. Hannel, and E. Sauger. An energy description of wear mechanisms and its applications to oscillating sliding contacts. *Wear*, 255(1-6) :287–298, 2003. 30
- [68] V. Fridrici. *Fretting d'un alliage de titane revê et lubrifié : application au contact aube/disque*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2002. 22, 25, 32
- [69] L. A. Galin. *Contact Problems of Elasticity Theory*. Gostekhizdat, Moscow, 1953. 37
- [70] L. A. Galin. Contact problems of the theory of elasticity in the presence of wear. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 40(6) :931–936, 1976. 39
- [71] L. A. Galin. *Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity*. Russian)" Nauka", Moscow, 1980. 37
- [72] L. A. Galin. *Contact problems : the legacy of LA Galin (Solid mechanics & its applications, Vol. 155)*. Springer, 2008. 35, 37

- [73] L. Gallego. *Fretting et usure des contacts mécaniques : modélisation numérique*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2007. [1](#), [40](#)
- [74] M. Geradin. *Theorie des vibrations*. Masson, 1993. [82](#)
- [75] M. Godet. The third-body approach : a mechanical view of wear. *Wear*, 100(1-3) :437–452, 1984. [31](#)
- [76] I. G. Goryacheva. *Contact mechanics in tribology*. Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 1998. [35](#)
- [77] I. G. Goryacheva, H. Murthy, and T. N. Farris. Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges. *International Journal of Fatigue*, 24(11) :1191–1201, 2002. [38](#)
- [78] I. G. Goryacheva, P. T. Rajeev, and T. N. Farris. Wear in partial slip contact. *Journal of Tribology*, 123 :848, 2001. [30](#), [40](#)
- [79] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pages 300–319, 1966. [44](#)
- [80] J. H. Griffin. Friction damping of resonant stresses in gas turbine engine airfoils. *Journal of Engineering for Power*, 102(329-333) :29, 1980. [19](#)
- [81] A. Grolet. Dynamique non linéaire des open rotors. Mémoire de master, Ecole Centrale de Lyon, 2009. [18](#)
- [82] A. Grolet and F. Thouverez. A new adaptative harmonic balance method. *soumis*, 2010. [103](#)
- [83] D. Guibert. *Analyse de méthodes de résolution parallèles d'EDO/EDA raides*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon I, 09 2009. [82](#), [83](#)
- [84] M. Guskov. *Dynamique non-linéaire des systèmes multirotors. Etudes numérique et expérimentale*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2007. [86](#)
- [85] K. C. Hall, R. E. Kielb, and J. P. Thomas. *Unsteady aerodynamics, aeroacoustics and aeroelasticity of turbomachines*. Kluwer Academic Pub, 2006. [13](#)
- [86] G. M. Hamilton. Yielding in contact stress problems. *AEI Research Laboratory : Aldermaston Court, Berks, England. Technical Report : A*, 1374, 1963. [37](#)
- [87] D. J. Hartl and D. C. Lagoudas. Aerospace applications of shape memory alloys. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, volume 221, pages 535–552. Prof Eng Publishing, 2007. [20](#)
- [88] V. Hegadekatte, N. Huber, and O. Kraft. Finite element based simulation of dry sliding wear. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 13 :57, 2005. [41](#)
- [89] V. Hegadekatte, S. Kurzenhäuser, N. Huber, and O. Kraft. A predictive modeling scheme for wear in tribometers. *Tribology International*, 41(11) :1020–1031, 2008. [41](#)
- [90] E. Heripre and G. Cailletaud. Étude de l'effet du revêtement sur le comportement en fretting. In *18ème Congrès Français de Mécanique (Grenoble 2007)*. AFM, 2007. [35](#), [180](#)
- [91] H. Hertz. Ueber die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1882(92) :156–171, 1882. [22](#), [37](#)
- [92] D. A. Hills, D. Nowell, and Sackfield A. *Mechanics of Elastic Contacts*. Butterworth-Heinemann, 1993. [22](#)
- [93] D. A. Hills and D. Nowell. *Mechanics of Fretting Fatigue*. Springer, 1994. [22](#)

- [94] H. K. Hong and C. S. Liu. Coulomb friction oscillator : modelling and responses to harmonic loads and base excitations. *Journal of Sound and vibration*, 229(5) :1171–1192, 2000. 128
- [95] J. F. Imbert. *Analyse des structures par la méthode des éléments finis*. Cepadues Edition, 1979. 200
- [96] The Math Works Inc. Optimization Toolbox for use with MATLAB, user's guide. User's guide, 2009. 145
- [97] M. Ismail, F. Ikhouane, and J. Rodellar. The hysteresis Bouc-Wen model, a survey. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(2) :161–188, 2009. 46
- [98] A. S. Ivanov. Normal, angular and tangential contact stiffnesses of flat joint. *Vestnik Mashinostroenie, Moscow*, 7 :34–37, 2007. 45, 46
- [99] W. D. Iwan. On a class of models for yielding behavior of continuous and composite systems. *Journal of Applied Mechanics*, 89 :612–617, 1967. 46
- [100] C. Jacq, D. Nélias, G. Lormand, and D. Girodin. Development of a three-dimensional semi-analytical elastic-plastic contact code. *Journal of Tribology*, 124 :653, 2002. 39
- [101] J. Jäger. A new principle in contact mechanics. *Journal of Tribology*, 120 :677, 1998. 37
- [102] V. Jaumouillé, J.-J. Sinou, and B. Petitjean. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems—Application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, 329(19) :4048 – 4067, 2010. 101
- [103] P. Jean, C. Gibert, C. Dupont, and J-P. Lombard. Test-model correlation of dry-friction damping phenomena in aero-engines. *ASME Conference Proceedings*, 2008(43154) :481–491, 2008. 21
- [104] L. Johansson. Numerical simulation of contact pressure evolution in fretting. *Journal of Tribology*, 116 :247, 1994. 40
- [105] L. Johansson and A. Klarbring. Thermoelastic frictional contact problems : modelling, finite element approximation and numerical realization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 105(2) :181–210, 1993. 40
- [106] K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge university press, Cambridge, 1985. 22
- [107] F. Jourdan. Numerical wear modeling in dynamics and large strains : Application to knee joint prostheses. *Wear*, 261(3-4) :283–292, 2006. 41
- [108] F. Jourdan, P. Alart, and M. Jean. A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 155(1-2) :31–47, 1998. 71
- [109] F. Jourdan and A. Samida. An implicit numerical method for wear modeling applied to a hip joint prosthesis problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(27-29) :2209–2217, 2009. 41
- [110] Y. Ju and T. N. Farris. Spectral analysis of two-dimensional contact problems. *Journal of Tribology*, 118 :320, 1996. 39
- [111] J. J. Kalker. *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*. Springer, 1990. 39
- [112] B. Kenny, E. A. Patterson, M. Said, and K. S. S. Aradhya. Contact stress distributions in a turbine disc dovetail type joint—a comparison of photoelastic and finite element results. *Strain*, 27(1) :21–24, 1991. 35
- [113] G. Kerschen, M. Peeters, J. C. Golinval, and A. F. Vakakis. Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :170–194, 2009. 87

- [114] H. B. Khenous. *Problèmes de contact unilatéral avec frottement de Coulomb en élastostatique et élastodynamique. Etude mathématique et résolution numérique*. Thèse de doctorat, INSA de Toulouse, 2005. [57](#), [69](#), [70](#), [74](#), [134](#)
- [115] A. R. Khoei and M. Nikbakht. Contact friction modeling with the extended finite element method (X-FEM). *Journal of Materials Processing Tech.*, 177(1-3) :58–62, 2006. [41](#), [42](#)
- [116] A. R. Khoei and M. Nikbakht. An enriched finite element algorithm for numerical computation of contact friction problems. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(2) :183–199, 2007. [41](#)
- [117] R. E. Kielb, J. W. Barter, J. P. Thomas, and K. C. Hall. Blade excitation by aerodynamic instabilities—a compressor blade study. In *Proceedings of ASME Turbo Expo, Atlanta, USA*, pages 16–19, 2003. [14](#)
- [118] N. Kikuchi and J. T. Oden. *Contact problems in elasticity*. siam Philadelphia, 1988. [56](#)
- [119] J. H. Kim, J. H. Lim, J. H. Lee, and S. Im. A new computational approach to contact mechanics using variable-node finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73 :1966–1988, 2008. [43](#)
- [120] A. Klarbring. Derivation and analysis of rate boundary-value problems of frictional contact. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 9(1) :53–85, 1990. [49](#)
- [121] A. Klarbring. Large displacement frictional contact : a continuum framework for finite element discretization. *European J. Mech. A Solids*, 14(2) :237–253, 1995. [49](#)
- [122] A. Klarbring and G. Björkman. A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface. *Computers & Structures*, 30(5) :1185–1198, 1988. [72](#)
- [123] I. V. Kragelsky, M. N. Dobychin, and V. S. Kombalov. *Friction and Wear : Calculation Methods*. Pergamon Press, 1982. [44](#), [45](#)
- [124] S. Kruch. Numerical analysis of an engine turbine disk loaded with a large number of thermo-mechanical cycles. In *Proceedings of 3rd International Conference on Computational Plasticity, Barcelone*, 1992. [112](#)
- [125] A. G. Kusraev and S. S. Kutateladze. *Subdifferentials : Theory and Applications*. Kluwer Academic Pub, 1995. [53](#)
- [126] R. M. Laurenson. Modal analysis of rotating flexible structures. *AIAA Journal*, 14(10) :1444–1450, 1976. [152](#)
- [127] T. A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics : Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer, 2002. [40](#)
- [128] T. A. Laursen and B. N. Maker. An augmented lagrangian quasi-newton solver for constrained nonlinear finite element applications. *International journal for numerical methods in engineering*, 38 :3571–3590, 1995. [60](#)
- [129] T. A. Laursen and J. C. Simo. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *International Journal for numerical methods in engineering*, 36 :3451–3485, 1993. [49](#)
- [130] D. Laxalde. *Étude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 12 2007. [18](#), [20](#), [46](#), [88](#), [90](#), [100](#), [109](#), [154](#), [179](#), [209](#)

- [131] D. Laxalde, L. Salles, L. Blanc, and F. Thouverez. Non-Linear Modal Analysis for Bladed Disks with Friction Contact Interfaces. In *Proceedings of ASME Turbo Expo, Berlin, Germany, 2008*. 3, 19, 81
- [132] D. Laxalde and F. Thouverez. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 322(4-5) :1009–1025, 2009. 3, 19, 81, 88
- [133] M. Legrand. *Modèles de prediction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2005. 14
- [134] M. Legrand and C. Pierre. Modélisation plastique bi-linéaire de l'usure de matériaux abrasables : application aux turbo-machines. In *Actes du 9e colloque national en calcul des structures 9e colloque national en calcul des structures*, page 696, Giens France, 06 2009. 40
- [135] J. Lemaître and J. L. Chaboche. *Mechanics of solid materials Mécanique des matériaux solides English*. Cambridge University Press, 1990. 51
- [136] N. Lesaffre. *Stabilité et analyse non linéaire du contact rotor-stator*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2007. 14
- [137] M. P. Lesne and S. Savalle. An Efficient Cycles Jump Technique for Viscoplastic Structure Calculations Involving Large Number of Cycles. In *Proceedings of 2nd International Conference on Computational Plasticity, Barcelone*, page 591–602, 1989. 112
- [138] Z. M. Levina and D. N. Reshetov. *Contact stiffness of machines*. Mashinostroyeniye, Moscow, 1971. 45
- [139] F. H. Ling and X. X. Wu. Fast Galerkin method and its application to determine periodic solutions of non-linear oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 22(2) :89–98, 1987. 85
- [140] S. Liu, Q. Wang, and G. Liu. A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses. *Wear*, 243(1-2) :101–111, 2000. 39
- [141] J. Lombard, J. Dupeux, C. Dupont, F. Garcin, and S. Baumhauer. Mistuning phenomena on bladed disk : Industrial methods and applications. In *Proceedings of ASME turbo expo, 2006*. 20
- [142] X. Lorang. *Instabilité vibratoire des structures en contact frottant. Application au crissement des freins de TGV*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2007. 69
- [143] A. A. Lubrecht and E. Ioannides. A fast solution of the dry contact problem and the associated sub-surface stress field, using multilevel techniques. *Journal of Tribology*, 113 :128, 1991. 39
- [144] O. Lundvall and A. Klarbring. Simulation of wear by use of a nonsmooth Newton method- a spur gear application. *Mechanics of Structures and Machines*, 29(2) :223–238, 2001. 41
- [145] A. M. Lyapunov. *The general problem of the stability of motion. Kharkov, 1892*. Princeton University Press, 1947. 86
- [146] R. H. MacNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4) :581–601, 1971. 201
- [147] J. J. Madge, S. B. Leen, I. R. McColl, and P. H. Shipway. Contact-evolution based prediction of fretting fatigue life : effect of slip amplitude. *Wear*, 262(9-10) :1159–1170, 2007. 41
- [148] J. J. Madge, S. B. Leen, and P. H. Shipway. The critical role of fretting wear in the analysis of fretting fatigue. *Wear*, 263(1-6) :542–551, 2007. 41
- [149] M. H. Maitournam, B. Pommier, and Thomas J-J. Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique sous chargement thermomécanique cyclique. *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la terre*, 330(10) :703–708, 2002. 113

- [150] K. W. Man. *Contact mechanics using boundary elements*. Boston : Computational Mechanics Publishing, 1994. [43](#)
- [151] N. Maouche, M. H. Maitournam, and K. Dang Van. On a new method of evaluation of the inelastic state due to moving contacts. *Wear*, 203 :139–147, 1997. [113](#)
- [152] J. G. Marshall and M. Imregun. A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications. *Journal of Fluids and Structures*, 10(3) :237–267, 1996. [13](#)
- [153] C. Mary and S. Fouvry. Numerical prediction of fretting contact durability using energy wear approach : Optimisation of finite-element model. *Wear*, 263 :444–450, 2007. [40](#), [106](#)
- [154] C. Mary, S. Fouvry, J-M. Martin, and B. Bonnet. High temperature fretting wear of a ti alloy/CuNiIn contact. *Surface and Coatings Technology*, 203(5-7) :691–698, 2008. [45](#)
- [155] I. R. McColl, J. Ding, and S. B. Leen. Finite element simulation and experimental validation of fretting wear. *Wear*, 256(11) :1114–1127, 2004. [40](#)
- [156] A. J. McEvily. Failures in inspection procedures : case studies. *Engineering failure analysis*, 11(2) :167–176, 2004. [1](#)
- [157] E. McEwen. Stresses in elastic cylinders in contact along a generatrix. *Philosophical Magazine*, 40 :454, 1949. [22](#), [37](#)
- [158] S. A. Meguid, P. S. Kanth, and A. Czekanski. Finite element analysis of fir-tree region in turbine discs. *Finite Elements in Analysis and Design*, 35(4) :305–317, 2000. [35](#)
- [159] S. A. Meguid, M. H. Refaat, and P. Papanikos. Theoretical and experimental studies of structural integrity of dovetail joints in aeroengine discs. *Journal of Materials Processing Technology*, 56(1) :668–677, 1996. [35](#)
- [160] L. Meirovitch. *Methods of Analytical Dynamics*. Dover Publications, 2004. [83](#)
- [161] J. M. Melenk and I. Babuka. The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139(1-4) :289–314, 1996. [41](#)
- [162] H. C. Meng and K. C. Ludema. Wear modelsz and predictive equations : their form and content. *Wear*, 181(2) :443–457, 1995. [29](#)
- [163] R. Michalowski and Z. Mroz. Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 30(3) :259–276, 1978. [46](#)
- [164] A. R. Mijar and J. S. Arora. Review of formulations for elastostatic frictional contact problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 20(3) :167–189, 2000. [57](#)
- [165] R. D. Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *J. Appl. Mech*, 16(3) :259, 1949. [24](#), [37](#), [45](#)
- [166] N. Moes, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150, 1999. [41](#)
- [167] H. Mohrbacher, B. Blanpain, J. P. Celis, J. R. Roos, L. Stals, and M. Van Stappen. Oxidational wear of TiN coatings on tool steel and nitrided tool steel in unlubricated fretting. *Wear*, 188(1-2) :130–137, 1995. [22](#), [30](#)
- [168] J-J. Moreau. Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité. *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la terre*, 271 :608–611, 1970. [52](#)
- [169] J. J. Moreau. *New Variational Techniques in Mathematical Physics*. CISM Course. Springer Berlin, 1974. [52](#), [53](#)

- [170] N. I. Muskhelishvili. *Some basic problems of mathematical elasticity theory*. Académie des Sciences URSS, Moscou-Leningrad, 1935. [37](#)
- [171] S. Nacivet. *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2002. [2](#), [21](#), [73](#), [92](#), [179](#)
- [172] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley-Interscience, 1979. [88](#)
- [173] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen in der Mathematik an der Universität Hamburg*, 15, 1970. [61](#)
- [174] D. Nowell and D. N. Dai. Analysis of surface tractions in complex fretting fatigue cycles using quadratic programming. *Journal of Tribology*, 120 :744, 1998. [39](#)
- [175] J. T. Oden and J. A. C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52(1-3) :527–634, 1985. [45](#)
- [176] N. Ohmae and T. Tsukizoe. Analysis of a wear process using the finite element method. *Wear*, 61(2) :333–339, 1980. [40](#)
- [177] H. Olsson, K. J. Åström, C. Canudas De Wit, M. Gäfvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, 4 :176–195, 1998. [46](#)
- [178] M. Öqvist. Numerical simulations of mild wear using updated geometry with different step size approaches. *Wear*, 249(1-2) :6–11, 2001. [41](#), [112](#)
- [179] C. Oskay and J. Fish. Fatigue life prediction using 2-scale temporal asymptotic homogenization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 :329–359, 2004. [113](#)
- [180] C. Oskay and J. Fish. Multiscale modeling of fatigue for ductile materials. *International Journal for Computational Multiscale Engineering*, 2, 2004. [113](#)
- [181] C. Padova, J. Barton, M. G. Dunn, S. Manwaring, G. Young, M. Adams, and M. Adams. Development of an experimental capability to produce controlled blade tip/shroud rubs at engine speed. *ASME Journal of Turbomachinery*, pages 726–735, 2005. [14](#)
- [182] P. Papanikos, S. A. Meguid, and Z. Stjepanovic. Three-dimensional nonlinear finite element analysis of dovetail joints in aeroengine discs. *Finite Elements in Analysis and Design*, 29(3-4) :173–186, 1998. [35](#)
- [183] C. Paulin. *Étude de l'endommagement du contact multicouche aube/disque sous chargement de fretting : impact des sollicitations variables et de la dimension du contact*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2006. [10](#), [22](#), [25](#), [26](#), [27](#), [32](#), [33](#), [158](#)
- [184] C. Paulin, S. Fouvry, and S. Deyber. Wear kinetics of Ti-6Al-4V under constant and variable fretting sliding conditions. *Wear*, 259(1-6) :292–299, 2005. [36](#)
- [185] C. Paulin, S. Fouvry, and C. Meunier. Finite element modelling of fretting wear surface evolution : application to a Ti-6Al-4V contact. *Wear*, 2007. [40](#)
- [186] M. Peigney. *Application du contrôle optimal pour étudier les états asymptotiques des structures élastoviscoplastiques en chargement cycliques*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2003. [145](#)
- [187] M. Peigney. Simulating wear under cyclic loading by a minimization approach. *International Journal of Solids and Structures*, 41(24-25) :6783–6799, 2004. [113](#), [144](#), [145](#)
- [188] E. P. Petrov and D. J. Ewins. Models of friction damping with variable normal load for time-domain analysis of vibrations. In *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA), Leuven, Belgium*, 2002. [91](#)

- [189] E. P. Petrov and D. J. Ewins. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks. *Journal of turbomachinery*, 125 :364, 2003. [100](#), [205](#)
- [190] E. P. Petrov and D. J. Ewins. Analysis of essentially non-linear vibration of large-scale models for bladed discs with variable contact and friction at root joints. *Vibrations in Rotating Machinery*, 623 :163, 2004. [21](#)
- [191] E. P. Petrov and D. J. Ewins. Advanced modeling of underplatform friction dampers for analysis of bladed disk vibration. *Journal of Turbomachinery*, 129 :143, 2007. [19](#)
- [192] C. Pierre, A. A. Ferri, and E. H. Dowell. Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method. *Journal of applied mechanics*, 52 :958, 1985. [19](#)
- [193] P. Pódra and S. Andersson. Simulating sliding wear with finite element method. *Tribology International*, 32(2) :71–81, 1999. [37](#)
- [194] I. A. Polonsky and L. M. Keer. A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Wear*, 231(2) :206–219, 1999. [39](#)
- [195] M. J. D. Powell. A hybrid method for nonlinear equations. *Numerical methods for nonlinear algebraic equations*, 7 :87–114, 1970. [74](#), [100](#)
- [196] J. S. Rao and A. Saldanha. Turbomachine blade damping. *Journal of Sound Vibration*, 262 :731–738, 2003. [21](#)
- [197] M. Raous. Quasistatic Signorini problem with Coulomb friction and coupling to adhesion. *New developments in contact problems*, pages 101–178, 1999. [71](#)
- [198] R. Ribeaucourt. *Gestion du contact avec frottement le long des faces de fissures dans le cadre de la méthode X-FEM. Application à la fatigue tribologique*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006. [41](#)
- [199] D. J. Rixen. A dual Craig-Bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and applied mathematics*, 168(1-2) :383–391, 2004. [202](#), [203](#)
- [200] Rolls-Royce. *The jet engine*. Rolls-Royce, Rolls-Royce Ltd, 1986. [8](#)
- [201] R. M. Rosenberg. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of applied Mechanics*, 29(7-14), 1962. [86](#)
- [202] A. Sackfield and D. A. Hills. Some useful results in the tangentially loaded Hertzian contact problem. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 18(2) :107–110, 1983. [37](#)
- [203] C. Saïzonou. *Usure et frottement entre le segment et la chemise dans un moteur à combustion : modélisation numérique par la méthode des éléments de frontière*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Lorraine, 2004. [43](#)
- [204] L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez, A. M. Gouskov, and P. Jean. Dynamic Analysis of a Bladed Disk with Friction and Fretting-Wear in Blade Attachements. In *Proceedings of ASME Turbo Expo, Orlando, USA*, 2009. [19](#), [100](#), [111](#), [115](#), [121](#)
- [205] L. Salles, A. M Gouskov, L. Blanc, F. Thouverez, and P. Jean. Dynamic Analysis of Fretting-Wear in Joint Interface by a Multiscale Harmonic Balance Method coupled with Explicit or Implicit Integration Schemes. In *Proceedings of ASME Turbo Expo, Glasgow, UK*, 2010. [135](#)
- [206] Samtech. Manuel d'utilisation samcef 12.1. Manuel d'utilisation, 2007. [64](#)
- [207] K. Y. Sanliturk, M. Imregun, and D. J. Ewins. Harmonic balance vibration analysis of turbine blades with friction dampers. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119 :96, 1997. [46](#)

- [208] A. Saulot. *Analyse tribologique du contact roue-rail : modélisation et expérimentations-Cas de l'usure ondulatoire*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2005. [40](#)
- [209] W. Schempp. *Nonsmooth analysis*. Springer, 2007. [53](#)
- [210] A. Sénéchal. Méthodes d'amortissement vibratoire de turbomachines par friction. Mémoire de master, Ecole Centrale de Paris, 2006. [158](#)
- [211] I. Serre, M. Bonnet, and R. M. Pradeilles-Duval. Modelling an abrasive wear experiment by the boundary element method. *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la terre*, 329(11) :803–808, 2001. [44](#)
- [212] W. Sextro. *Dynamical contact problems with friction : models, methods, experiments and applications*. Springer Verlag, 2007. [19](#)
- [213] G. K. Sfantos and M. H. Aliabadi. Application of BEM and optimization technique to wear problems. *International Journal of Solids and Structures*, 43(11-12) :3626–3642, 2006. [44](#)
- [214] G. K. Sfantos and M. H. Aliabadi. Total hip arthroplasty wear simulation using the boundary element method. *Journal of biomechanics*, 40(2) :378–389, 2007. [44](#)
- [215] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1) :85–124, 1993. [86](#), [209](#)
- [216] I. Shtaerman. On the hertz theory of local deformations resulting from the pressure of elastic solids. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 25, pages 360–362, 1939. [37](#)
- [217] F. Sicot. *Simulation efficace des  coulements instationnaires périodiques en turbomachines*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2009. [19](#)
- [218] J. C. Simo and T. A. Laursen. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 42(1) :97–116, 1992. [56](#), [60](#)
- [219] G. B. Sinclair, N. G. Cormier, J. H. Griffin, and G. Meda. Contact stresses in dovetail attachments : finite element modeling. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124 :182, 2002. [35](#)
- [220] J-J. Sinou. *Synthèse non-linéaire des systèmes vibrants. Application aux systèmes de freinage*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002. [87](#)
- [221] N. Strömberg. An augmented Lagrangian method for fretting problems. *European journal of mechanics. A. Solids*, 16(4) :573–593, 1997. [41](#), [49](#), [54](#), [74](#), [123](#)
- [222] N. Strömberg. A method for structural dynamic contact problems with friction and wear. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(15) :2371–2385, 2003. [69](#)
- [223] N. Strömberg, L. Johansson, and A. Klarbring. A generalised standard model for contact, friction and wear. *Contact mechanics*, page 327, 1995. [52](#)
- [224] N. Strömberg, L. Johansson, and A. Klarbring. Derivation and analysis of a generalized standard model for contact, friction and wear. *International Journal of Solids and Structures*, 33(13) :1817–1836, 1996. [52](#), [53](#)
- [225] N. Tardieu, F. Youbissi, and  . Chamberland. Un algorithme de gradient conjugué projet  préconditionné pour la résolution de problèmes unilatéraux. *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la terre*, 336(11-12) :840–845, 2008. [72](#)
- [226] T. Telliskivi. Simulation of wear in a rolling-sliding contact by a semi-Winkler model and the Archard's wear law. *Wear*, 256(7-8) :817–831, 2004. [37](#)

- [227] I. G. Tokar', A. P. Zinkovskii, and V. V. Matveev. On the Problem of Improvement of the Damping Ability of Rotor Blades of Contemporary Gas-Turbine Engines. *Strength of materials*, 35(4) :368–375, 2003. [21](#)
- [228] M. Torkhani. *Contribution au développement numérique d'éléments de contact et modélisation de l'usure des structures minces*. Thèse de doctorat, Ecole centrale des arts et manufactures, 2008. [41](#), [62](#)
- [229] V. T. Troshenko, V. V. Matveev, and B. A. Gryasnov. *Capacité en charge des aubes de moteurs d'avions sous chargements oscillants*. Naukova dumka, Kiev, 1981. [21](#)
- [230] M. Urabe. Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 20(2) :120–152, 1965. [85](#)
- [231] A. F. Vakakis. *Normal modes and localization in nonlinear systems*. Springer Netherlands, 2001. [87](#)
- [232] L. Vincent, Y. Berthier, and M. Godet. Testing methods in fretting fatigue : a critical appraisal. *Standardization of fretting fatigue test methods and equipment*, pages 33–48, 1992. [24](#)
- [233] O. Vingsbo and S. Soderberg. On Fretting Maps. *Wear*, 126(2) :131–147, 1988. [24](#)
- [234] Y. Volpert, T. Szabó, I. Páczelt, and B. Szabó. Application of the space enrichment method to problems of mechanical contact. *Finite Elements in Analysis and Design*, 24(3) :157–170, 1997. [39](#)
- [235] Y. F. Wang and Z. G. Yang. A coupled finite element and meshfree analysis of erosive wear. *Tribology International*, 42(2) :373–377, 2009. [40](#)
- [236] Y. Wen. Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 102(2) :249–263, 1976. [46](#)
- [237] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer, Berlin, 2006. [40](#), [45](#), [71](#)
- [238] P. Wriggers and T. A. Laursen. *Computational Contact Mechanics*. Springer, Berlin, 2008. [40](#), [44](#)
- [239] M. Zarroug. *Eléments mixtes de contact frottant en grandes transformations et applications*. Thèse de doctorat, Ecole centrale des arts et manufactures (Châtenay-Malabry, Hauts-de-Seine), 2002. [49](#), [61](#), [64](#)
- [240] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and R. L. Taylor. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2005. [64](#), [83](#)
- [241] A. Zmitrowicz. A thermodynamical model of contact, friction and wear : I. Governing equations. *Wear*, 114(2) :135–221, 1987. [29](#)
- [242] A. Zmitrowicz. A thermodynamical model of contact, friction and wear : II. Constitutive equations for materials and linearized théories. *Wear*, 114(2) :135–221, 1987. [29](#)
- [243] A. Zmitrowicz. A thermodynamical model of contact, friction and wear : III. Constitutive equations for friction, wear and frictional heat. *Wear*, 114(2) :135–221, 1987. [29](#)
- [244] A. Zmitrowicz. Constitutive equations for anisotropic wear. *International Journal of Engineering Science*, 31(3) :509–528, 1993. [46](#)

Publications personnelles

Reuves internationales avec comité de lecture

1. L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez and A. M. Gouskov, Dynamic Analysis of Fretting Wear in Friction Contact Interfaces, *Journal of Engineering for Gas turbine and Power*, 132(1),2010, 9 pages.
2. L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez and A. M. Gouskov, Dynamic Analysis of Fretting-wear in Friction Contact Interfaces, *International Journal of Solids and Structures*, soumis, 22 pages.

Reuves nationales avec comité de lecture

1. L. Salles, A. M. Gouskov, L. Blanc, F. Thouverez and P. Jean, Modelling of fretting-wear in bladed disk attachment on dynamical loading, *Vestnik Nauchno-Tekhnicheskovo razvitia*, 12, 2008, 6 pages (Article en Russe).
2. L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez, A. M. Gouskov et P. Jean, Analyses multi-échelles de l'usure par fretting sous chargement dynamique, *Mécanique et Industrie*, accepté, 8 pages.

Colloques internationaux avec actes publiés

1. D. Laxalde, L. Salles, L. Blanc and F. Thouverez, Non-Linear Modal Analysis for Bladed-Disks with Friction Contact Interfaces, *ASME TurboExpo 2008*, ID GT2008-50860, Berlin, Germany,2008, 11 pages
2. L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez and A. M. Gouskov, Dynamic Analysis of Fretting Wear in Friction Contact Interfaces, *ASME TurboExpo 2008*, ID GT2008-51112, Berlin, Germany, 2008, 9 pages. .
3. L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez, A. M. Gouskov, and P. Jean, Dynamic Analysis of a Bladed-Disk with Friction and Fretting-wear in Blade attachments,*ASME TurboExpo2009*, ID GT2009-60151, Orlando, USA, 2009, 11 pages.
4. L. Salles, A. M. Gouskov, L. Blanc, F. Thouverez and P. Jean, Dynamic Analysis of a Bladed-Disk with Friction and Fretting-wear in Blade-Disk Attachments, *International Conference on Mechanical Problems of Modern Machine*, Oulan Oude, Russia, 2009, 4 pages.
5. L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez, A. M. Gouskov, and P. Jean,, Dynamic Analysis of Fretting-Wear in joint Interface by a Multiscale Harmonic Balance Method coupled with Explicit and Implicit Integration Schemes, *ASME TurboExpo 2010*, ID GT2010-23264, Glasgow, UK, 2010, 10 pages

Colloques nationaux avec actes publiés

1. L. Salles, A. M. Gousskov, L. Blanc, F. Thouverez and P. Jean, Modelling of fretting-wear in bladed disk attachment on dynamical loading, *Problems in Science of Machine IMASH RAN*, Moscow, Russia, 2008, 6 pages.
2. L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez, A. M. Gousskov et P. Jean, Analyses multi-échelles de l'usure par fretting sous chargement dynamique, *Actes du 9^{ème} Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, France, 2009, 8 pages.

Annexe A

Méthode de réduction de modèle

Les méthodes de réduction de modèle envisageables dans le cadre de nos simulations numériques sont présentées dans cette annexe.

A.1 Condensation de Guyan

On considère la réponse libre d'une structure. La formulation matricielle de l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \text{ avec } \mathbf{F} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{U} \quad (\text{A.1})$$

La méthode de Guyan consiste à condenser les ddls qui ont peu d'influence sur la dynamique du système (A.1). Pour cela, on classe les ddls en deux catégories : les maîtres (indités \mathbf{m}) et les esclaves (indités \mathbf{e}). Les ddls maîtres doivent être choisis de telle sorte que les forces d'inertie correspondant aux ddls esclaves puissent être négligées. L'équation matricielle du système libre peut alors s'écrire sous cette forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{mm}} & \mathbf{K}_{\mathbf{me}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{em}} & \mathbf{K}_{\mathbf{ee}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\mathbf{m}} \\ \mathbf{U}_{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{m}} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{m}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Le vecteur des déplacements \mathbf{U} peut être exprimé à partir des ddls maîtres :

$$\mathbf{U} = \Psi\mathbf{U}_{\mathbf{m}} \quad (\text{A.3})$$

avec

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{\mathbf{ee}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathbf{em}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Chaque colonne de Ψ correspond à une déformée statique de la structure pour un déplacement unitaire sur l'un des ddls maîtres et nul sur les autres. Le choix des ddls maîtres va conditionner la précision des résultats. L'hypothèse principale à respecter est la suivante : les forces d'inertie des ddls esclaves doivent être négligeables par rapport à celles des ddls maîtres. Dans le cas du problème de contact entre sous-structure, les ddls maîtres retenus pour une sous-structure sont les ddls de frontière et certains ddls internes.

La condensation de Guyan est la méthode de condensation dynamique donnant les plus mauvais résultats pour nos applications, nous ne l'avons pas utilisée pendant la thèse.

A.2 Méthodes de synthèse modale

Ces techniques se basent sur une représentation par modes composants. Le terme « modes composants » désigne des vecteurs de Ritz utilisés comme base pour la description des déplacements des points d'une structure. Ces modes ont un sens physique : ils peuvent être des modes propres ou des modes statiques. Parmi les modes propres envisageables citons les modes à interfaces fixes, interfaces libres ou à interfaces chargées. Les modes statiques sont les modes de liaison (modes de déformation à déplacements d'interface imposés) et les modes d'attache (déformées statiques de la structure sous un chargement imposé). Imbert [95] fait une synthèse des différentes méthodes.

A.2.1 Méthodes à interface fixe

Ce type de méthode est le plus souvent appliqué sous la forme de la variante introduite par Craig et Bampton [45]. En effet, celle-ci ne nécessite pas une gestion particulière des modes rigides par rapport aux autres modes statiques.

Dans la structure, on distingue deux types de ddls : les ddls internes indicés i et les ddls de jonction indicés j . L'équation du mouvement de la structure peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{jj} & \mathbf{M}_{ji} \\ \mathbf{M}_{ij} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_j \\ \ddot{\mathbf{U}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{ji} \\ \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_j \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

On approche les déplacements internes de la structure par la base des formes propres à interface fixe Φ et des modes statiques de liaison Ψ :

$$\mathbf{U} = \Psi \mathbf{U}_j + \Phi \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Psi & \Phi \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U}_j \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \quad (\text{A.6})$$

Les modes normaux à interface fixe sont obtenus pour $\mathbf{U}_j = \mathbf{0}$. Pour les modes statiques de liaison, on utilise l'équation d'équilibre :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{ji} \\ \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_j \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

On en déduit :

$$\mathbf{U}_i = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{U}_j \quad (\text{A.8})$$

La position d'équilibre peut donc être exprimée à partir des ddls d'interface :

$$\mathbf{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} \end{bmatrix}}_{\Psi} \mathbf{U}_j \quad (\text{A.9})$$

On peut donc écrire l'équation (A.6) sous la forme :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} & \Phi_i \end{bmatrix} \mathbf{Q} \quad (\text{A.10})$$

A partir de la matrice de transformation définie dans l'équation (A.6), on définit les matrices de masse et de raideur dans la nouvelle base :

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{jj} - \mathbf{K}_{ji} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_i^T \mathbf{K}_{ii} \Phi_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{jj} & \bar{\mathbf{M}}_{jq} \\ \bar{\mathbf{M}}_{qj} & \Phi_i^T \mathbf{M}_{ii} \Phi_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

où l'indice q correspond aux ddls internes condensés sur la base modale tronquée.

On notera que les matrices $\Phi_1^T \mathbf{K}_{ii} \Phi_1$ et $\Phi_1^T \mathbf{M}_{ii} \Phi_1$ sont diagonales.

Les forces extérieures réduites dans la nouvelle base valent :

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \Psi^T \\ \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{F} \quad (\text{A.13})$$

L'utilisation de la méthode de Craig-Bampton pour prédire le comportement dynamique de solides en contact avec frottement donne de bons résultats. Elle est bien adaptée pour le contact puisque les déplacements à l'interface de contact sont directement accessibles. Cette méthode est souvent retenue pour l'étude du contact en dynamique que ce soit par intégration temporelle ou par HBM.

A.2.2 Méthodes à interfaces libres

La méthode de Mac Neal [146] est la plus simple et la plus utilisée des méthodes à interfaces libres. On notera qu'elle peut être étendue par l'utilisation de modes propres avec conditions hybrides.

Dans ces méthodes, on caractérise le mouvement de chaque sous-structure à partir de ses modes propres à interface libre. Le mouvement d'une sous-structure est approché par la base tronquée des modes propres à interface libre Φ :

$$\hat{\mathbf{U}} = \Phi \mathbf{q} \quad (\text{A.14})$$

avec Φ une matrice contenant la base tronquée des modes propres à interfaces libres pour la sous-structure.

La troncature de la base modale conduit à des erreurs sur le comportement dynamique de la structure. Aussi, Mac Neal propose de prendre en compte l'effet statique des modes supérieurs tronqués par une correction de flexibilité résiduelle. Définissons la matrice de flexibilité dynamique associée aux ddls d'interface pour un système possédant N modes libres :

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_k \Phi_k^T}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (\text{A.15})$$

Cette matrice est obtenue en cherchant une solution particulière à l'équation du mouvement. La réponse forcée peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{U}_0 = \Phi \mathbf{q}_0 + \mathbf{G}\mathbf{F} \quad (\text{A.16})$$

avec : $\Phi \mathbf{q}_0$ solution de l'équation homogène,

$\mathbf{G}\mathbf{F}$ solution particulière

Cette solution a un coût numérique très important, on va approcher la solution. La méthode de Ritz (équation (A.14)) nous donne une solution approchée de la réponse forcée :

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{q} \quad (\text{A.17})$$

La solution exacte (équation (A.16)) est décomposée en deux parties : l'une qui dépend des m premiers modes libres, l'autre qui est fonction des modes libres d'ordre supérieur.

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 \quad (\text{A.18})$$

avec : $\mathbf{U}_1 = \Phi_1 \mathbf{q}_1 + \mathbf{G}_1 \mathbf{F}$,

$\mathbf{U}_2 = \Phi_2 \mathbf{q}_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{F}$

Le premier terme de \mathbf{U}_1 correspond exactement à $\hat{\mathbf{U}}$ (équation (A.17)). On constate que la différence

entre la solution exacte et la solution approchée tient au terme \mathbf{U}_2 . La méthode de Mac Neal propose de prendre en compte l'effet statique de ce terme (approximation du 1^{er} ordre). De l'équation (A.15), on déduit la matrice de flexibilité statique :

$$\mathbf{G}_0 = \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_k \Phi_k^T}{\omega_k^2} \quad (\text{A.19})$$

Pour le terme \mathbf{U}_2 , la flexibilité résiduelle intervient. Elle s'obtient en réalisant la différence entre la flexibilité statique et la somme des flexibilités effectives pour les modes retenus :

$$\mathbf{G}_{\text{res}} = \mathbf{G}_0 - \sum_{k=1}^m \frac{\Phi_k \Phi_k^T}{\omega_k^2} \quad (\text{A.20})$$

La composante statique du terme \mathbf{U}_2 s'écrit sous la forme : $\mathbf{G}_{\text{res}}\mathbf{F}$. La relation de base pour chaque sous-structure a la forme suivante :

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{q} + \mathbf{G}_{\text{res}} \mathbf{F} \quad (\text{A.21})$$

avec $\Phi \mathbf{q}$ solution approchée de la réponse forcée sur la base des modes retenus,

$\mathbf{G}_{\text{res}}\mathbf{F}$ terme de correction

Pour l'assemblage de deux sous-structures, on utilise deux relations de couplage à l'interface :

- compatibilité des déplacements :

$$\mathbf{U}_j^1 = \mathbf{U}_j^2 \quad (\text{A.22})$$

- équilibre des forces :

$$\mathbf{F}_j^1 + \mathbf{F}_j^2 = 0 \quad (\text{A.23})$$

Les matrices de masses et raideur réduite sont :

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \Phi_1^T \mathbf{K}_1 \Phi_1 + \Phi_1^T \mathbf{K}_{\text{res}} \Phi_1 & \Phi_1^T \mathbf{K}_{\text{res}} \Phi_2 \\ \Phi_2^T \mathbf{K}_{\text{res}} \Phi_1 & \Phi_2^T \mathbf{K}_2 \Phi_2 + \Phi_2^T \mathbf{K}_{\text{res}} \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \Phi_1^T \mathbf{M}_1 \Phi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2^T \mathbf{M}_2 \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

avec, $\mathbf{K}_{\text{res}} = (G_{\text{res}}^1 + G_{\text{res}}^2)^{-1}$ $\bar{\mathbf{K}}$ et $\bar{\mathbf{M}}$ ont pour taille la somme du nombre de modes libres retenus pour les deux sous-structures.

Le défaut de la méthode de MacNeal est que le calcul de \mathbf{G}_{res} est très long puisqu'il nécessite l'inversion de \mathbf{K} . Par rapport à une méthode de Craig & Bampton le temps de création des matrices réduite est beaucoup plus long par contre la taille de ces matrices est plus faibles puisque les ddls d'interfaces disparaissent dans la formulation finale des matrices réduite.

A.2.3 Méthode de Craig-Bampton dual

Rixen [199] a repris l'approche de MacNeal pour exprimer les déplacements de chaque sous-structure. Au lieu d'utiliser les expressions de compatibilité des déplacements et d'équilibre des forces, il ne va utiliser que la compatibilité des déplacements et garder les efforts aux interfaces comme inconnus $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^1 = -\mathbf{F}_j^2$. L'équation dynamique devient :

$$\bar{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{F}}_j \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.26})$$

avec,

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \Phi_1^T \mathbf{K}_1 \Phi_1 & \mathbf{0} & \Phi_1^T \\ \mathbf{0} & \Phi_2^T \mathbf{K}_2 \Phi_2 & \Phi_2^T \\ \Phi_1 & \Phi_2 & -\mathbf{F}_{res} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \Phi_1^T \mathbf{M}_1 \Phi_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2^T \mathbf{M}_2 \Phi_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{res} \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

où, $\mathbf{F}_{res} = G_{res}^1 + G_{res}^2$ et $\mathbf{M}_{res} = G_{res}^1 \mathbf{M}_1 G_{res}^1 + G_{res}^2 \mathbf{M}_2 G_{res}^2$. Rixen conclut que cette formulation est le dual de la méthode de Craig & Bampton. De toutes les méthodes elle donne la plus faible erreur sur l'évaluation des modes propres par rapport à un calcul effectué sur la structure complète [199].

A.2.4 Méthodes à interfaces libres avec raideur d'interface

Cigeroglu [38] a proposé une méthode basée sur l'expression des déplacements au sein des sous-structures à partir de leurs modes propres à interface libre. Au lieu de prendre en compte l'effet statique des modes supérieurs tronqués par une correction de flexibilité résiduelle, Cigeroglu utilise des raideurs de contact. Celles-ci représentent le comportement haute-fréquence de la structure au niveau de l'interface. Dans chaque structure i :

$$\bar{U}_i = \Phi_i \theta_i, \quad (\text{A.29})$$

L'équilibre statique au niveau des noeuds de contact donnent pour les déplacements exactes :

$$\mathbf{U}_1^C = \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}, \quad (\text{A.30})$$

pour les déplacements exprimés dans la base des modes à interfaces libres :

$$\bar{\mathbf{U}}_1^C = \mathbf{B}_1 \Phi (\Phi^T \mathbf{K}_1^{-1} \Phi) \Phi^T \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}, \quad (\text{A.31})$$

Ceci permet d'exprimer la raideur de contact via l'expression suivante :

$$\mathbf{K}_1^C \Delta \mathbf{U}_1 = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}, \quad (\text{A.32})$$

avec $\Delta \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1^C - \bar{\mathbf{U}}_1^C$. Les équations précédentes sont exprimées dans le repère des surfaces en contact. La matrice \mathbf{K}_1^C a neuf inconnus par nœud de contact, alors que l'équation (A.32) ne donne que trois équations par nœud de contact. Cigeroglu fait l'hypothèse que \mathbf{K}_1^C est diagonale, ce qui permet de réduire à trois le nombre d'inconnus par nœud de contact et de pouvoir résoudre l'équation (A.32). $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ est calculé en faisant le calcul de l'équilibre statique dans le repère physique avec les deux structures collées.

Cette méthode semble avantageuse puisque le nombre d'équations à résoudre est proportionnel au nombre de modes à interfaces libres retenus. Bien que Cigeroglu semble enthousiaste de sa méthode, il est connu que les méthodes par troncature modal entraînent un déplacement de la fréquence de résonance. Les antirésonances sont mal prédites par cette approche. La méthode doit être programmée pour voir s'il est envisageable de l'utiliser pour l'étude de la dynamique de roue aubagée avec contact en pied d'aubes. Dans le cadre de l'étude de la réponse en fréquence de la roue aubagée avec frotteur, cette méthode peut être utilisée puisque la masse et la raideur du frotteur sont très faibles comparés à celles du secteur. Le comportement modal du secteur avec frotteur est proche du comportement modal du secteur seul.

Annexe B

Calcul de la matrice jacobienne

La plupart des méthodes basées sur l'équilibrage harmonique avec solveur de Newton-Raphson utilisent un calcul par différence finie de la matrice jacobienne. Or, il est possible de trouver une expression analytique de cette matrice. Nous allons détailler la démarche.

E. P. Petrov [189] a montré qu'il était possible de calculer analytiquement la matrice jacobienne dans le cas d'une formulation par pénalité du contact avec frottement. Nous proposons d'évaluer analytiquement la matrice jacobienne dans le cadre de la formulation DLFT. La dépendance de f par rapport à $\tilde{\mathbf{U}}_r$ et W est considérée avec l'introduction des matrices jacobiennes suivantes : \mathbf{J} et \mathbf{J}_w .

La matrice Jacobienne par rapport $\tilde{\mathbf{U}}_r$ est définie par :

$$\mathbf{J} = \frac{Df(\tilde{\mathbf{U}}_r)}{D\tilde{\mathbf{U}}_r}. \quad (\text{B.1})$$

f est constituée de deux termes, un linéaire et l'autre non-linéaire :

$$\mathbf{J} = \mathbf{Z}_r + \frac{D\tilde{\lambda}}{D\tilde{\mathbf{U}}_r} = \mathbf{Z}_r + \left(\frac{D\tilde{\lambda}_u}{D\tilde{\mathbf{U}}_r} - \frac{D\tilde{\lambda}_x}{D\tilde{\mathbf{U}}_r} \right). \quad (\text{B.2})$$

$\tilde{\lambda}_x$ est calculé sur la période vibratoire. Cette période est divisée en plusieurs intervalles suivant les états de contact. L'idée est la même que celle de E. P. Petrov [189]. Comme nous utiliserons une procédure DFT, nous n'aurons pas besoin de connaître les temps de transition. Nous allons toutefois formuler les matrices jacobienne avec un calcul exact des intégrales de la procédure de Galerkin pour montrer qu'elles ne dépendent pas de la dérivée des bornes des intégrales.

$$\tilde{\lambda}_x^{(0)} = \sum_{k=1}^m \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \lambda_x(\tau) d\tau, \quad (\text{B.3a})$$

$$\tilde{\lambda}_x^{(j,c)} = \sum_{k=1}^m \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \lambda_x(\tau) \cos(j\tau) d\tau, \quad (\text{B.3b})$$

$$\tilde{\lambda}_x^{(j,s)} = \sum_{k=1}^m \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \lambda_x(\tau) \sin(j\tau) d\tau, \quad (\text{B.3c})$$

où m est le nombre d'état de contact. $\tau = \tau_k$ et $\tau = \tau_{k+1}$ sont les différents moments de transition. En utilisant la règle de Leibniz, la dérivée de ces fonctions par rapport à \tilde{U}_i (i -ème composante du vecteur multiharmonique) sont, pour les termes en cosinus (les expressions des dérivées $\tilde{\lambda}_x^{(0)}$ et $\tilde{\lambda}_x^{(j,s)}$ sont similaire) :

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_x^{(j,c)}}{\partial \tilde{U}_i} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \tau_{k+1}}{\partial \tilde{U}_i} \lambda_x(\tau_{k+1}) \cos(j\tau_{k+1}) - \frac{\partial \tau_k}{\partial \tilde{U}_i} \lambda_x(\tau_k) \cos(j\tau_k) + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial \lambda_x(\tau)}{\partial \tilde{U}_i} \cos(j\tau) d\tau \right) \quad (\text{B.4})$$

Puisque λ_x est une fonction périodique et continue, proportionnelle au déplacement \mathbf{X}_r :

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \tau_{k+1}}{\partial \tilde{U}_i} \lambda_x(\tau_{k+1}) \cos(j\tau_{k+1}) - \frac{\partial \tau_k}{\partial \tilde{U}_i} \lambda_x(\tau_k) \cos(j\tau_k) \right) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Et finalement les dérivées sont :

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_x^{(j,0)}}{\partial \tilde{U}_i} = \sum_{k=1}^m \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial \lambda_x(\tau)}{\partial \tilde{U}_i} d\tau \quad (\text{B.6a})$$

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_x^{(j,c)}}{\partial \tilde{U}_i} = \sum_{k=1}^m \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial \lambda_x(\tau)}{\partial \tilde{U}_i} \cos(j\tau) d\tau \quad (\text{B.6b})$$

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_x^{(j,s)}}{\partial \tilde{U}_i} = \sum_{k=1}^m \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial \lambda_x(\tau)}{\partial \tilde{U}_i} \sin(j\tau) d\tau \quad (\text{B.6c})$$

Dans le domaine temporel, la dérivée de λ_x est calculée d'après les états de contact définis par Eqs. (3.45)-(3.56). Les trois composantes du vecteur λ_x^n sont $\lambda_x^{N,n}$ dans la direction normale et $\lambda_x^{T,n}$ dans la direction tangentielle (avec $\lambda_x^{x,n}$ et $\lambda_x^{y,n}$ dans le plan tangent à \mathbf{n}_c).

$$\frac{D\lambda_x^{N,n}}{D\tilde{U}_r} = \begin{cases} \frac{D\lambda_u^{N,n}}{D\tilde{U}_r} & (\text{séparation}) \\ 0 & (\text{contact}) \end{cases} \quad (\text{B.7a})$$

$$(\text{B.7b})$$

$$\frac{D\lambda_x^{x,n}}{D\tilde{U}_r} = \begin{cases} \frac{D\lambda_u^{x,n}}{D\tilde{U}_r} & (\text{séparation}) \\ \frac{D\lambda_x^{x,n-1}}{D\tilde{U}_r} & (\text{adhérence}) \\ \frac{D\lambda_x^{x,n-1}}{D\tilde{U}_r} + \frac{D\lambda_{pre}^{x,n}}{D\tilde{U}_r} \left(1 - \mu \frac{|\lambda_u^{N,n}|}{\|\lambda_{pre}^T\|} \right) + \\ \mu \frac{D\lambda_u^{N,n}}{D\tilde{U}_r} \frac{\lambda_{pre}^{x,n}}{\|\lambda_{pre}^T\|} + \lambda_{pre}^{x,n} \frac{\lambda_x^{x,n} \cdot \frac{D\lambda_x^{x,n}}{D\tilde{U}_r} + \lambda_x^{y,n} \cdot \frac{D\lambda_x^{y,n}}{D\tilde{U}_r}}{\|\lambda_{pre}^T\|^3} |\lambda_u^{N,n}| \end{cases} \quad (\text{B.7c})$$

(glissement)

$$(\text{B.7d})$$

$$\frac{D\lambda_x^{y,n}}{D\tilde{U}_r} = \begin{cases} \frac{D\lambda_u^{y,n}}{D\tilde{U}_r} & (\text{separation}) \\ \frac{D\lambda_x^{y,n-1}}{D\tilde{U}_r} & (\text{adhérence}) \\ \frac{D\lambda_x^{y,n-1}}{D\tilde{U}_r} + \frac{D\lambda_{pre}^{y,n}}{D\tilde{U}_r} \left(1 - \mu \frac{|\lambda_u^{N,n}|}{\|\lambda_{pre}^T\|} \right) + \\ \mu \frac{D\lambda_u^{N,n}}{D\tilde{U}_r} \frac{\lambda_{pre}^{y,n}}{\|\lambda_{pre}^T\|} + \lambda_{pre}^{x,n} \frac{\lambda_x^{x,n} \cdot \frac{D\lambda_x^{x,n}}{D\tilde{U}_r} + \lambda_x^{y,n} \cdot \frac{D\lambda_x^{y,n}}{D\tilde{U}_r}}{\|\lambda_{pre}^T\|^3} |\lambda_u^{N,n}| \end{cases} \quad (\text{B.7e})$$

(glissement)

avec

$$\frac{\partial \lambda_{pre}^{T,n}}{\partial \tilde{U}_r} = \frac{\partial \lambda_u^{T,n}}{\partial \tilde{U}_r} - \frac{\partial \lambda_x^{T,n-1}}{\partial \tilde{U}_r}. \quad (\text{B.8})$$

Une transformée de Fourier discrète de $\left\{ \frac{D\lambda_x^n}{D\tilde{U}_r} \right\}_{n=1..N}$ donne $\frac{D\tilde{\lambda}_x}{D\tilde{U}_r}$.

$\frac{D\lambda_u^n}{D\tilde{U}_r}$ est obtenues ainsi :

$$\frac{D\lambda_u^n}{D\tilde{U}_r} = iDFT(-\mathbf{Z}_r + \epsilon\mathbf{I}). \quad (\text{B.9})$$

où \mathbf{I} désigne la matrice identité.

Finalement l'introduction de cette expression dans (B.2), donne la matrice jacobienne de la fonction f :

$$\mathbf{J} = \mathbf{Z}_r + \left(\frac{D\tilde{\lambda}_u}{D\tilde{U}_r} - \frac{D\tilde{\lambda}_x}{D\tilde{U}_r} \right). \quad (\text{B.10})$$

De la même manière on peut écrire le gradient de f par rapport à W . Le gradient de f par rapport à W noté \mathbf{J}_w est :

$$\mathbf{J}_w = -\epsilon\mathbf{I}_{M_{max}} + \frac{\partial\tilde{\lambda}_x}{\partial W} \quad (\text{B.11})$$

Pour des analyses de sensibilité on peut avoir à écrire le gradient de f par rapport au paramètre étudié. La stratégie est la même que celle pour le calcul de la matrice Jacobienne. Les analyses de sensibilité pourraient porter sur le coefficient de frottement, les raideurs de contact, l'amplitude de la force d'excitation...

Annexe C

Calcul des modes complexes non-linéaires

La démarche présentée dans cette annexe sont un rappel de la méthode proposée par Laxalde dans sa thèse [130].

Nous cherchons à résoudre le système suivant :

$$\mathbf{Z}(\sigma)\mathbf{Q} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Q}, \sigma) = \mathbf{0} \quad (\text{C.1})$$

avec $\{\mathbf{Q}, \sigma\}$ le vecteur des inconnues.

Le système considéré (C.1) est autonome et non-conservatif. En suivant l'approche de Shaw et Pierre [215] son mouvement peut être paramétré par deux variables. Laxalde propose de fixer l'amplitude et la phase de k-ième harmonique d'une coordonnée de référence $\mathbf{Q}_d = [Q_d^{k,c}, Q_d^{k,s}]$. Une fois ces coordonnées fixées le nombre d'équation est le même que le nombre d'inconnues :

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \beta \\ \omega \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

À la différence du cas linéaire où une seule résolution du système (C.1) permet d'avoir l'ensemble des solutions pour n'importe quelles coordonnées de référence $\mathbf{Q}_d = [Q_d^{k,c}, Q_d^{k,s}]$, le cas non-linéaire implique de résoudre le système (C.1) pour chaque coordonnée de référence à l'aide d'une procédure incrémentale sur les coordonnées de contrôle. La continuation de la solution propre se fait en incrémentant l'amplitude des coordonnées de contrôle.

Les facteurs d'échelle importants entre les inconnues (fréquences, taux d'amortissement, déplacements, ...) peuvent rendre difficile la résolution numérique d système.

Pour pallier cette difficulté, Laxalde a proposé de décomposer le problème en deux sous-problèmes. Le vecteur multiharmonique des déplacements modaux sont décomposées suivant les degrés de liberté non-linéaires, linéaires de contrôle et linéaires autres.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}_c \mathbf{Q}_c + \mathbf{B}_i \mathbf{Q}_i + \mathbf{B}_d \mathbf{Q}_d \quad (\text{C.3})$$

Le problème (C.1) se réécrit :

$$\mathbf{Z}_{cc} \mathbf{Q}_c + \mathbf{Z}_{cd} \mathbf{Q}_d + \mathbf{Z}_{ci} \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{Q}, \sigma) = \mathbf{0} \quad (\text{C.4a})$$

$$\mathbf{Z}_{dc} \mathbf{Q}_c + \mathbf{Z}_{dd} \mathbf{Q}_d + \mathbf{Z}_{di} \mathbf{Q}_i = \mathbf{0} \quad (\text{C.4b})$$

$$\mathbf{Z}_{ic} \mathbf{Q}_c + \mathbf{Z}_{id} \mathbf{Q}_d + \mathbf{Z}_{ii} \mathbf{Q}_i = \mathbf{0} \quad (\text{C.4c})$$

L'équation (C.4c) permet d'éliminer \mathbf{Q}_i :

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{B}_c - \mathbf{B}_i \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{ic}) \mathbf{Q}_c + (\mathbf{B}_d - \mathbf{B}_i \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{id}) \mathbf{Q}_d \quad (\text{C.5})$$

L'équation (C.4b) fournit le premier sous-problème :

$$f(\sigma, \mathbf{Q}_c) = (\mathbf{Z}_{dc} - \mathbf{Z}_{di} \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{ic}) \mathbf{Q}_c + (\mathbf{Z}_{dd} - \mathbf{Z}_{di} \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{id}) \mathbf{Q}_d = \mathbf{0} \quad (\text{C.6})$$

Le deuxième sous-problème est donné par l'équation (C.4a)

$$g(\sigma, \mathbf{Q}_c) = (\mathbf{Z}_{cc} - \mathbf{Z}_{ci} \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{ic}) \mathbf{Q}_c + F_{NL}(\mathbf{Q}_c) + (\mathbf{Z}_{cd} - \mathbf{Z}_{di} \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{id}) \mathbf{Q}_d = \mathbf{0} \quad (\text{C.7})$$

Le premier sous-problème permet de trouver la valeur propre complexe. Le deuxième sous-problème est lié au problème de contact à l'interface.

Le calcul des modes non-linéaires complexe se fait par continuation sur le paramètre \mathbf{Q}_d . À l'étape n de cette continuation le mode non-linéaire complexe pour \mathbf{Q}_d^n est caractérisé par la valeur propre σ^n et le « vecteur propre » multiharmonique \mathbf{Q}^n composé entre autre de \mathbf{Q}_c^n . Laxalde propose de décomposer la résolution du problème modal non-linéaire défini par les équations (C.6) et (C.7) en deux étapes. À une étape $n + \frac{1}{2}$ ont résout l'équation (C.6) en utilisant \mathbf{Q}_c de l'étape n . On cherche $\sigma^{n+\frac{1}{2}}$ qui annule :

$$f(\sigma^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{Q}_c^n) = (\mathbf{Z}_{dc} - \mathbf{Z}_{di} \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{ic}) \mathbf{Q}_c^n + (\mathbf{Z}_{dd} - \mathbf{Z}_{di} \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{id}) \mathbf{Q}_d^{n+1} \quad (\text{C.8})$$

Une fois $\sigma^{n+\frac{1}{2}}$ trouvé on cherche $\mathbf{Q}_c^{n+\frac{1}{2}}$ solution de

$$g(\sigma^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{Q}_c^{n+\frac{1}{2}}) = (\mathbf{Z}_{cc} - \mathbf{Z}_{ci} \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{ic}) \mathbf{Q}_c^{n+\frac{1}{2}} + F_{NL}(\mathbf{Q}_c^{n+\frac{1}{2}}) + (\mathbf{Z}_{cd} - \mathbf{Z}_{di} \mathbf{Z}_{ii}^{-1} \mathbf{Z}_{id}) \mathbf{Q}_d^{n+1} = \mathbf{0} \quad (\text{C.9})$$

La solution obtenue à l'étape $n + \frac{1}{2}$ sert de point de départ pour résoudre le système complet défini par (C.6) et (C.7). $\{\sigma, \mathbf{Q}_c\}^{n+1}$ est solution du système (C.10) :

$$\begin{cases} f(\sigma^{n+1}, \mathbf{Q}_c^{n+1}) = \mathbf{0} \\ g(\sigma^{n+1}, \mathbf{Q}_c^{n+1}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Annexe D

Résultats des simulations numériques

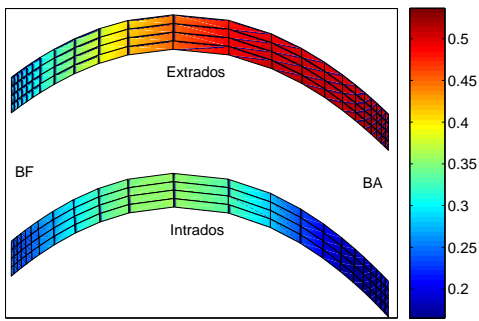


FIGURE D.1. Déplacements statiques pour $\mu = 0.1$

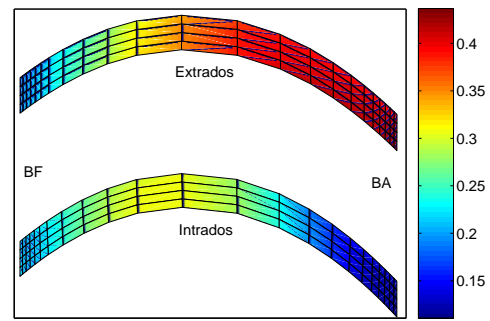


FIGURE D.2. Déplacements statiques pour $\mu = 0.2$

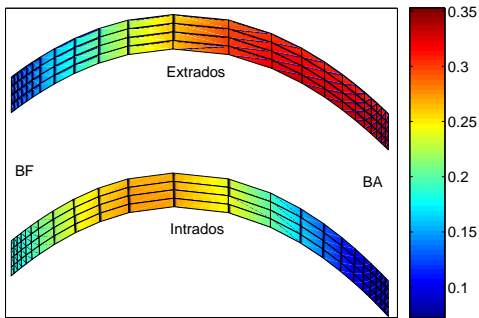


FIGURE D.3. Déplacements statiques pour $\mu = 0.3$

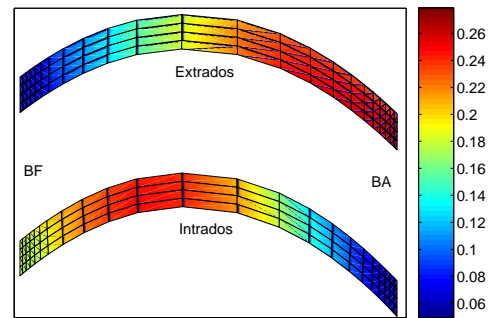


FIGURE D.4. Déplacements statiques pour $\mu = 0.4$

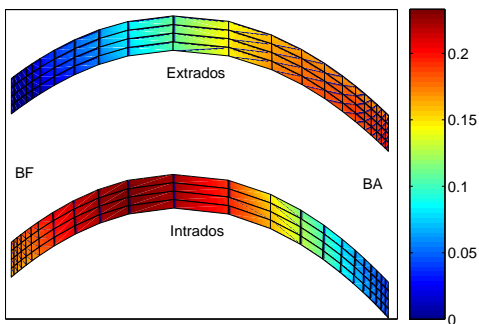


FIGURE D.5. Déplacements statiques pour $\mu = 0.5$

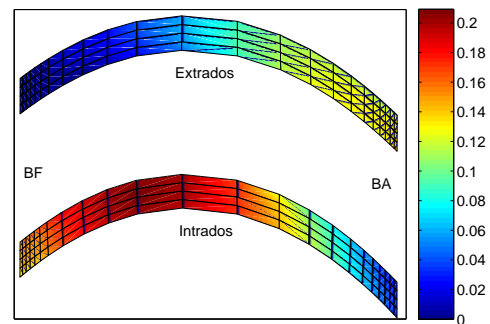


FIGURE D.6. Déplacements statiques pour $\mu = 0.6$

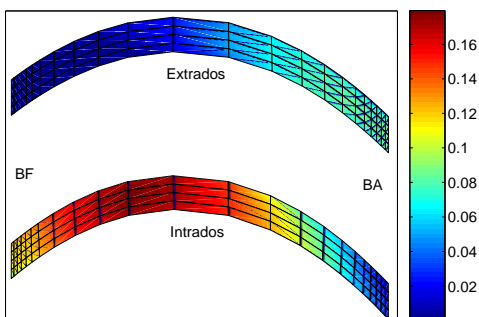


FIGURE D.7. Déplacements statiques pour $\mu = 0.7$

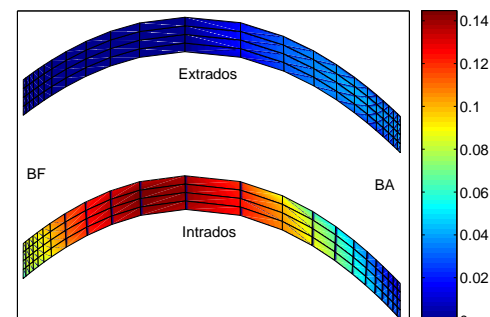


FIGURE D.8. Déplacements statiques pour $\mu = 0.8$

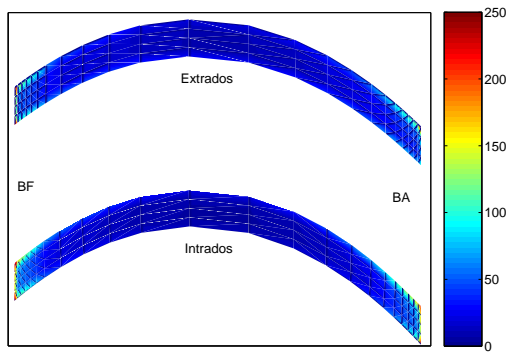


FIGURE D.9. Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.1$

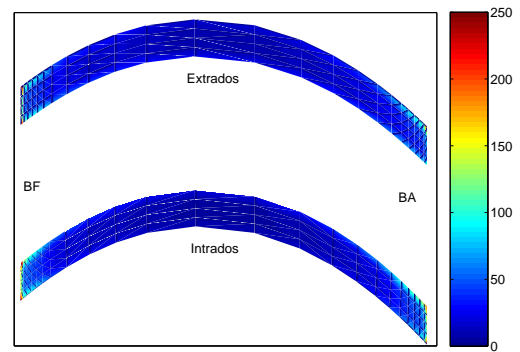


FIGURE D.10. Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.2$

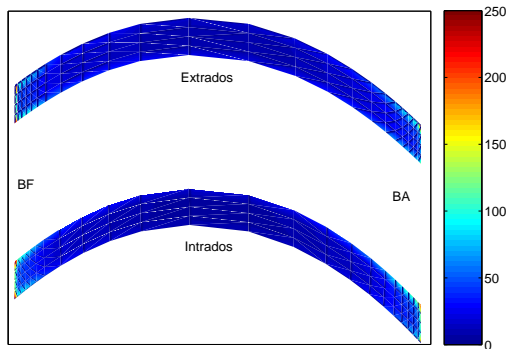


FIGURE D.11. Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.3$

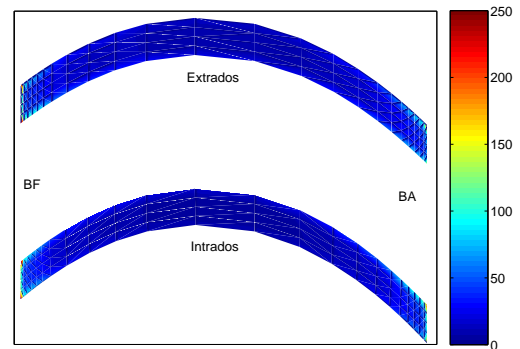


FIGURE D.12. Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.4$

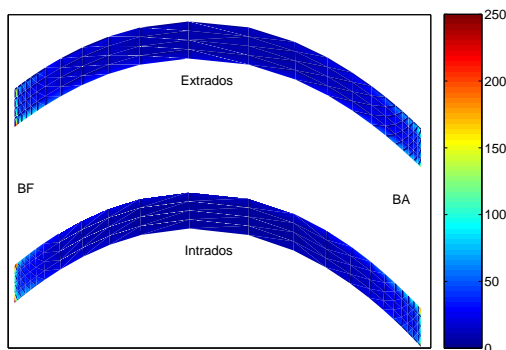


FIGURE D.13. Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.5$

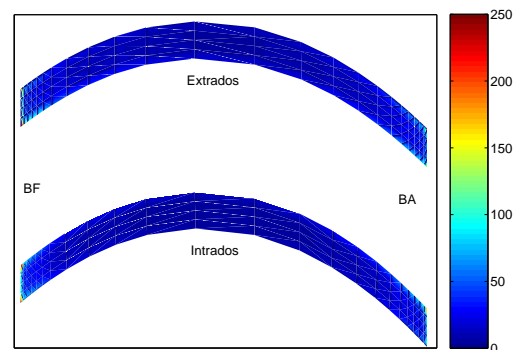


FIGURE D.14. Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.6$

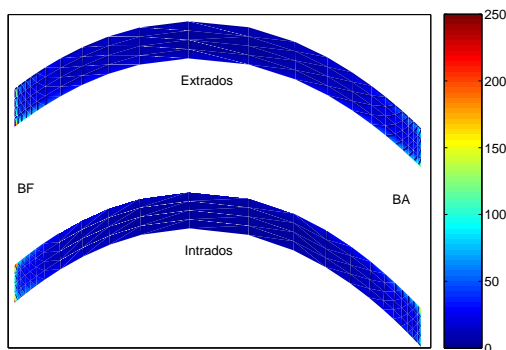


FIGURE D.15. Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.7$

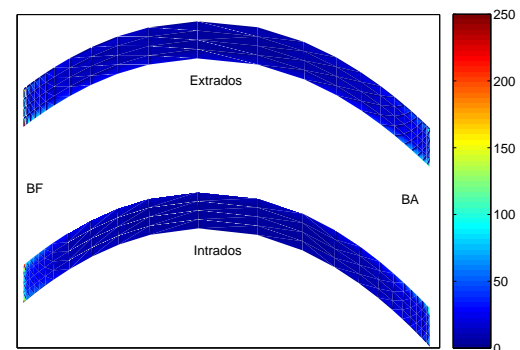
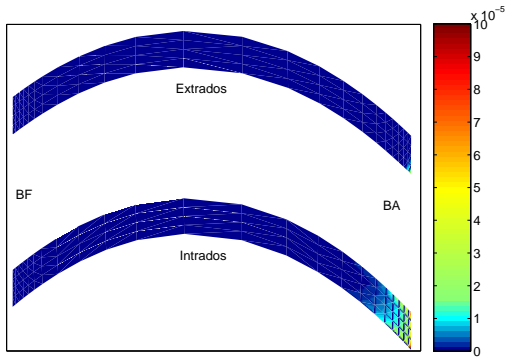
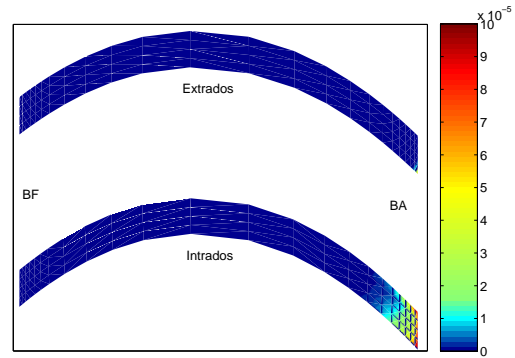
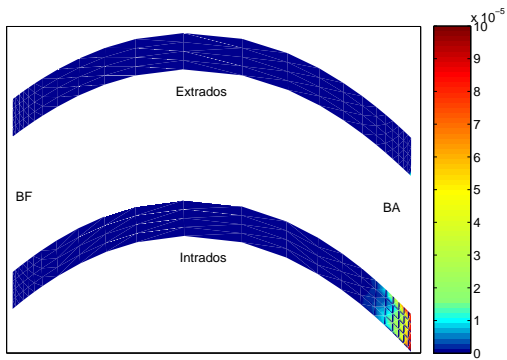
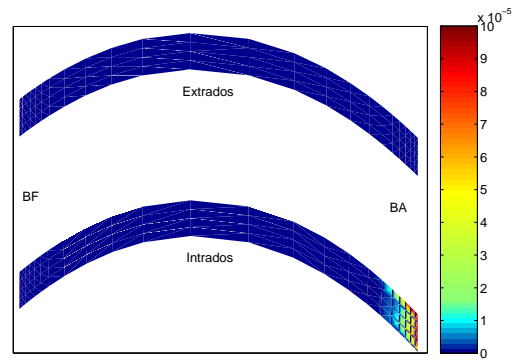
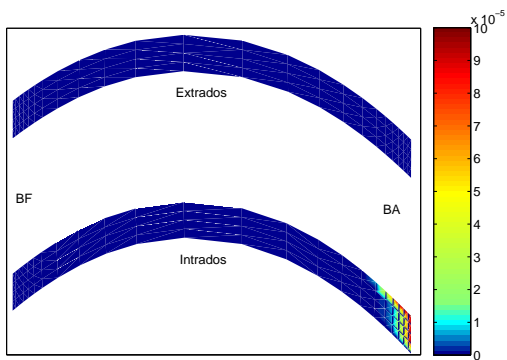
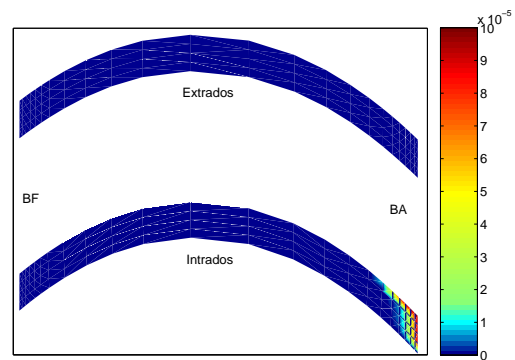
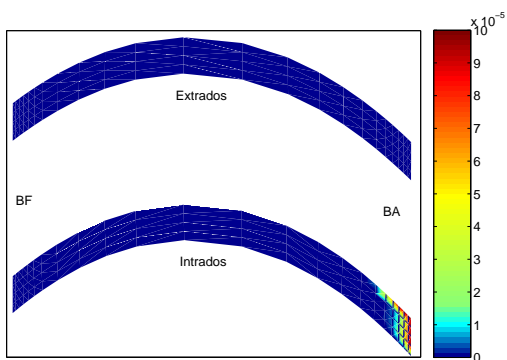
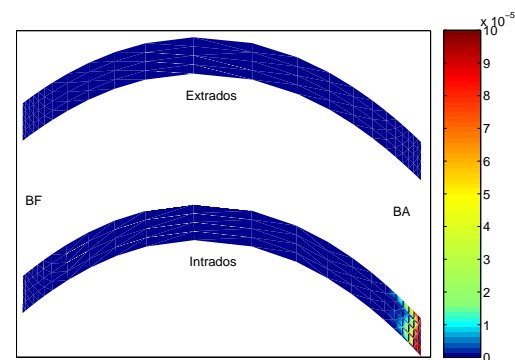
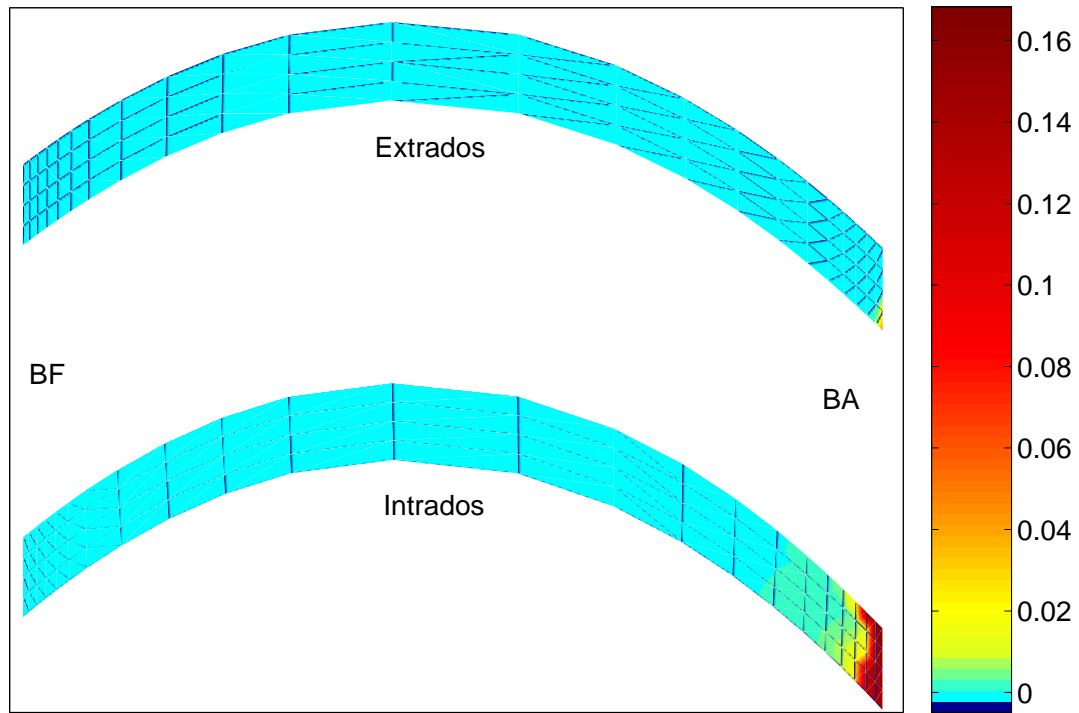
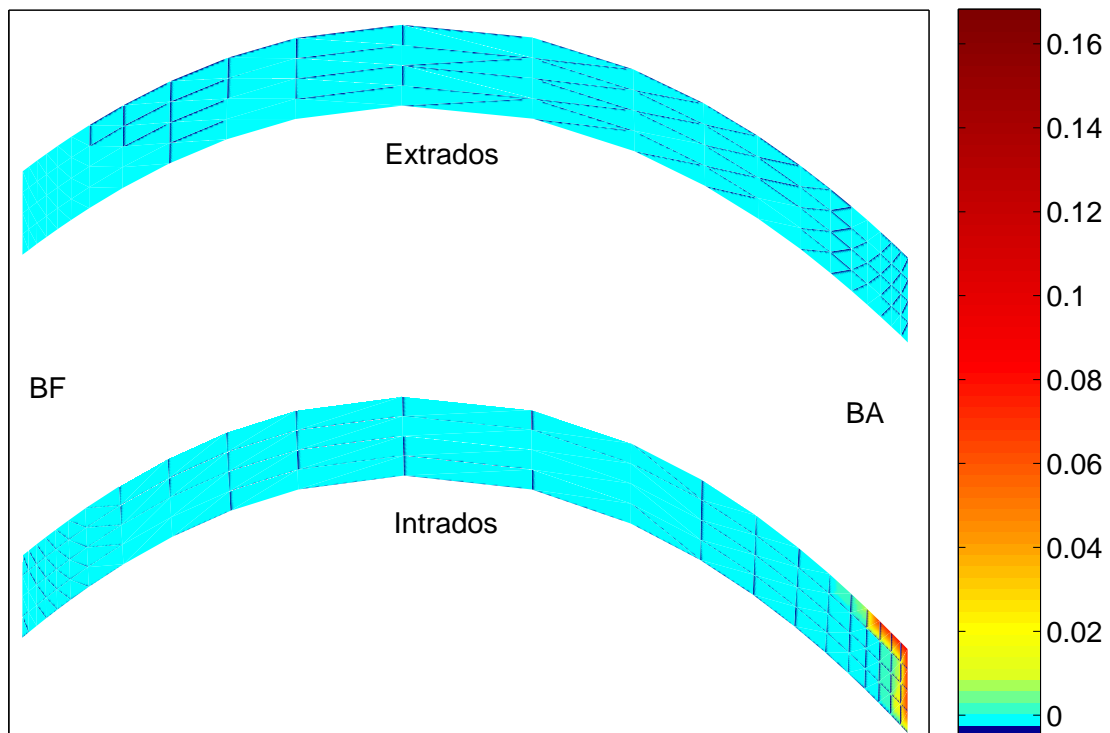


FIGURE D.16. Pressions de contact statiques pour $\mu = 0.8$

FIGURE D.17. Taux d'usure pour $\mu = 0.1$ FIGURE D.18. Taux d'usure pour $\mu = 0.2$ FIGURE D.19. Taux d'usure pour $\mu = 0.3$ FIGURE D.20. Taux d'usure pour $\mu = 0.4$ FIGURE D.21. Taux d'usure pour $\mu = 0.5$ FIGURE D.22. Taux d'usure pour $\mu = 0.6$ FIGURE D.23. Taux d'usure pour $\mu = 0.7$ FIGURE D.24. Taux d'usure pour $\mu = 0.8$



(a)



(b)

FIGURE D.25. Usure de l'état stationnaire; pour $\mu = 0.2$ (a) et $\mu = 0.7$ (b)