HAL
open science

Modélisation des couplages fluide/solide dans les procédés d'assemblage à haute température

Thomas Heuzé

To cite this version:

Thomas Heuzé. Modélisation des couplages fluide/solide dans les procédés d'assemblage à haute température. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT : . tel-00610711v2

HAL Id: tel-00610711

https://theses.hal.science/tel-00610711v2

Submitted on 7 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT de
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
Spécialité : Mécanique

École Doctorale SMAE

présentée par

Thomas Heuzé

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Modélisation des couplages fluide/solide dans les procédés d'assemblage à haute température

Soutenue le 20 mai 2011

devant le jury composé de :

Alain COMBESCURE	LAMCOS/INSA Lyon	Président du jury
Michel BELLET	CEMEF/Mines ParisTech	Rapporteur
Abdellatif IMAD	LML/Polytech Lille	Rapporteur
Philippe GILLES	AREVA NP	Examinateur
Dominique LEGUILLON	IJLRA/UPMC	Examinateur
Arnaud POITOU	GEM/ECN	Examinateur
Jean-Baptiste LEBLOND	IJLRA/UPMC	Directeur de thèse
Jean-Michel BERGHEAU	LTDS/ENISE	co-Directeur de thèse
Frédéric BOITOUT	ESI Group	Invité

Institut Jean Le Rond d'Alembert
Université Pierre et Marie Curie / Paris 6
4, place jussieu tour 55-65
75252 PARIS CEDEX 05

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé à l'Institut Jean Le Rond d'Alembert à l'Université Pierre et Marie Curie, en collaboration avec le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes basé à l'ENISE à Saint Étienne et avec ESI Group pour le développement dans le code SYSWELD®.

Je tiens d'abord à exprimer toute ma gratitude à M. Alain Combescure pour avoir accepté de présider mon jury de thèse. Je remercie tout particulièrement mes rapporteurs, Messieurs Michel Bellet et Abdellatif Imad, pour les commentaires avisés qu'ils ont pu formulé dans leurs rapports, ainsi que pour les échanges intéressants qui ont suivi ma présentation. Je tiens également à remercier Messieurs Arnaud Poitou, Philippe Gilles et Dominique Leguillon pour avoir examiné ce travail de thèse.

Je remercie mes directeurs de thèse Jean-Baptiste Leblond et Jean-Michel Bergheau que j'ai côtoyé durant ces années, aux côtés desquels j'ai beaucoup appris, pour m'avoir proposé ce sujet riche et intéressant faisant appel à un grand champ de connaissances et portant sur une problématique industrielle. Leur complémentarité a permis d'aborder des aspects aussi bien numériques qu'analytiques. Ils ont d'autre part su me laisser une grande liberté d'action pour développer ces travaux, notamment pour sa composante expérimentale.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes "extérieures" à mon encadrement direct, qui ont pu m'apporter quelque aide durant ces travaux, qu'elle soit d'ordre technique ou bien simplement quelques bonnes idées proposées. Je remercie Frédéric Boitout d'ESI Group pour son aide sur le logiciel SYSWELD®, mais aussi pour sa présence à ma soutenance. Je remercie aussi Luc Dischert (ex-ESI) qui a eu la patience de répondre à mes nombreuses questions d'ordre informatique sur la mise en oeuvre et le développement associés à ce logiciel. Merci aussi à Éric Feulvarch qui a aussi su me prodiguer quelques bons conseils sur le logiciel au début de ma thèse. Je remercie également toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser les expériences de Friction Stir Spot Welding au pôle productique de l'ENISE, Joël Rech pour ses bonnes idées, Florian Dumont pour le temps qu'il m'a accordé et pour son aide précieuse pour faire marcher la machine 5 axes, Luigi Mintrone et Patrick Polly pour la fabrication des montages, et de façon générale tous les autres membres du pôle pour les discussions intéressantes qu'on a pu avoir ainsi que pour leur bonne ambiance.

Enfin, j'aimerai remercier les autres personnes de l'Institut que j'ai pu côtoyer. Merci en particulier à Joël Frelat pour ses idées rafraîchissantes, son soutien moral, et ses conseils avisés ; merci aussi à Djimedo Kondo pour sa bonne humeur et ses bons conseils pour l'après-thèse. Enfin merci aux doctorants de l'Institut d'Alembert et de l'ENISE, qui sont malheureusement trop nombreux pour que je puisse les citer ici, mais qui m'ont accompagné pendant la thèse et avec qui j'ai pu passer du bon temps !

Enfin, mes derniers remerciements vont à ma famille pour son soutien moral constant durant ces années de thèse.

Table des matières

Remerciements **i**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Modélisation des procédés de soudage par friction et malaxage **5**
1.1 Introduction 6
1.2 Les procédés de soudage par friction et malaxage 7
1.2.1 Le Friction Stir Welding 7
1.2.2 Le Friction Stir Spot Welding 12
1.3 Modélisation numérique des procédés de soudage par friction et malaxage . 18
1.3.1 Les phénomènes physiques impliqués 18
1.3.2 La modélisation du Friction Stir Welding 19
1.3.3 La modélisation du Friction Stir Spot Welding 24
1.4 Modélisation proposée du procédé FSSW 26
1.4.1 Idée principale de la modélisation proposée 26
1.4.2 Approche euléro-lagrangienne 27
1.4.3 Modélisation du problème 29
1.4.4 Synthèse 36
1.5 Conclusions 36

2 Un élément fini mixte pour la modélisation de comportements incompressibles **39**
2.1 Introduction 41
2.2 L'élément P1+/P1 42
2.3 Élément fluide 44
2.3.1 Formulation faible 44
2.3.2 Formulation aux éléments finis 45
2.3.3 Condensation statique du noeud bulle 49
2.3.4 Résolution 52
2.3.5 Calcul du champ bulle 52
2.3.6 Commentaires 53
2.4 Élement solide 53
2.4.1 Formulation faible 54
2.4.2 Formulation aux éléments finis 55
2.4.3 Condensation statique du noeud bulle 58
2.4.4 Résolution 58

2.4.5 Conditions aux limites avec une formulation en vitesses en mécanique des solides . . . 59
2.5 Stratégie de calcul pour le couplage fluide/solide . . . 59
2.5.1 Le couplage fluide/solide . . . 60
2.5.2 Approche euléro-lagrangienne : mise en oeuvre numérique . . . 61
2.5.3 Actualisation de la géométrie . . . 63
2.5.4 Commentaires . . . 70
2.6 Conclusions . . . 71

3 Vérification de l'élément P1+/P1 en comportement fluide et solide 73
3.1 Introduction . . . 74
3.2 Le problème de Couette en comportement fluide . . . 74
3.2.1 Rappel de la solution mécanique pour un écoulement stationnaire, laminaire et incompressible . . . 74
3.2.2 Problème mécanique instationnaire . . . 77
3.2.3 Problème couplé (mécanique stationnaire) - (thermique instationnaire) 79
3.3 Comparaison des solutions analytique/numérique en mécanique des fluides 83
3.3.1 Mécanique instationnaire . . . 83
3.3.2 (Mécanique stationnaire) - (Thermique instationnaire) . . . 83
3.4 Le viscosimètre de Couette avec un matériau élastoplastique . . . 85
3.4.1 Matériau rigide, parfaitement plastique . . . 85
3.4.2 Matériau élastoplastique écrouissable . . . 86
3.4.3 Décharge . . . 94
3.4.4 Extension au cas des grandes transformations . . . 95
3.5 Comparaison des solutions analytique/numérique pour un solide . . . 98
3.5.1 Mise en données . . . 98
3.5.2 Résultats . . . 99
3.6 Conclusions . . . 101

4 Simulation du Friction Stir Spot Welding 103
4.1 Introduction . . . 104
4.2 Le viscosimètre de Couette . . . 104
4.2.1 Mise en données . . . 104
4.2.2 Résultats . . . 105
4.3 Simulation du Friction Stir Spot Welding . . . 109
4.3.1 Mise en données . . . 109
4.3.2 Résultats . . . 112
4.4 Difficultés et limites du modèle . . . 120
4.4.1 Régularité du résidu . . . 121
4.4.2 Le chargement thermomécanique généré par l'outil . . . 122
4.4.3 Instabilités numériques du champ de vitesse . . . 122
4.4.4 Formulation de l'élément solide . . . 123
4.5 Conclusions . . . 123

5 Conception de montages expérimentaux pour le Friction Stir Spot Welding 125
5.1 Introduction . . . 126
5.1.1 Validation de la simulation numérique du soudage . . . 126
5.1.2 Démarche proposée . . . 127

5.2 Cahier des Charges Fonctionnel 128
5.2.1 Analyse Fonctionnelle partielle du besoin 128
5.2.2 Analyse des contraintes de conception 129
5.2.3 Démarche de validation du procédé FSSW 134
5.3 Conception de deux montages spécifiques expérimentaux 136
5.3.1 Montage plan d'appui 136
5.3.2 Montage butée 141
5.4 Mise en oeuvre des essais 148
5.4.1 Stratégie expérimentale pour le FSSW 149
5.4.2 Résultats expérimentaux 152
5.5 Conclusions 161

Conclusion **163**

A Calcul des matrices tangentes **1**
A.1 Matrice fluide 1
A.2 Matrice tangente solide 4

B Modélisation du filetage d'un outil FSSW **7**
B.1 Cinématique imposée 7
B.2 Modélisation du filet 10
B.3 Comparaison des deux modèles 12

Bibliographie **xi**

Introduction

Les procédés de soudage restent encore aujourd'hui les moyens d'assemblage permanent de structures métalliques les plus couramment utilisés dans l'industrie. Ces procédés mettent généralement en jeu des phénomènes physiques complexes à haute température conduisant à des modifications de microstructure, à la génération de contraintes et distorsions résiduelles qui jouent un rôle prépondérant sur la tenue mécanique des assemblages. Des contraintes résiduelles élevées peuvent conduire à la fragilisation voire à une rupture prématurée du joint de soudure. Les distorsions résiduelles induites par le procédé génèrent quant à elles des défauts géométriques qu'il convient de maîtriser pour l'assemblage de grandes structures comportant de nombreuses séquences de soudage. Depuis maintenant quelques décennies, la simulation numérique des procédés de soudage s'est révélée être un outil important non seulement pour la compréhension des différents mécanismes physiques, mais aussi pour la mise au point des procédés, l'étude de la tenue en service des composants assemblés ou encore la vérification de la faisabilité d'une séquence de soudage.

Dans le cas des procédés de soudage impliquant la fusion de l'alliage métallique comme le soudage à l'arc, à l'électrode enrobée ou encore le soudage laser, on observe que deux phases sont générées. On distingue en effet le bain liquide dans lequel les mouvements de matière sont importants, et le reste de la structure se déformant à l'état solide. Du point de vue de la modélisation, deux approches ont été suivies suivant les communautés scientifiques. La première s'est intéressée à la modélisation du procédé lui-même en simulant les mouvements de matière au sein du bain (Gue10; DR09; MXF07; RM03; RBD98), la seconde privilégiant les conséquences induites par le procédé en termes de contraintes et distorsions résiduelles (LDD88; LPD+97; BVLJ04), considérant des chargements thermomécaniques équivalents sans véritablement modéliser le bain liquide. Cette dernière approche résolument « orientée solide », permet de simuler une séquence de soudage ou de valider la mise au point d'un procédé. Pourtant, les phénomènes physiques complexes mis en jeu dans le bain liquide lors du processus de soudage intéressent de plus en plus les industriels, notamment en vue d'une meilleure compréhension des mouvements de matière au sein du bain et donc de la microstructure générée dans la zone soudée. Il est alors tout à fait naturel de vouloir concilier les deux approches en une seule alliant la modélisation du bain à celle de la structure, permettant ainsi l'accès aux conséquences induites. C'est donc l'approche qui est effectuée dans cette thèse. L'objectif est de poser les bases d'une modélisation permettant de faire cohabiter deux phases, l'une se comportant comme un fluide qui s'écoule, l'autre restant solide et douée d'une mémoire fonction de l'histoire du chargement. Ceci nous amène à la notion de couplage fluide/solide, avec la particularité ici qu'une des deux phases (chauffage ou refroidissement) progresse au détriment de l'autre par changement de phase.

En parallèle des procédés de soudage par fusion, le procédé d'assemblage par friction et malaxage (le Friction Stir Welding, (TNS)) récemment introduit par l'Institut de Soudure britannique (TWI) permet de réaliser un assemblage à l'état solide sans apport de matière. Ce procédé permet d'assembler des alliages d'aluminium hautes performances mais aussi d'autres alliages métalliques, pourtant réputés peu soudables avec les procédés de soudage conventionnels. À partir de cette technologie, quelques dérivés sont apparus comme le Friction Stir Processing (FSP) (MM05; MMM+00) reprenant le principe du FSW mais à des fins de modification microstructurale des matériaux métalliques, ou encore le Friction Stir Spot Welding (FSSW) (SMY+01) introduit par le constructeur Mazda au début des années 2000. Ce procédé dérivé du soudage par friction et malaxage consiste à effectuer un joint de soudure « ponctuel » entre deux tôles superposées par pénétration d'un outil en rotation dans la matière. L'échauffement généré par le frottement ainsi que le mouvement de la matière entraînée au voisinage de l'outil permettent un mélange assurant la solidarité des parties à joindre après refroidissement. Le Friction Stir Spot Welding est en fait souvent comparé aux phases transitoires du Friction Stir Welding, avec cette différence que les tôles sont superposées dans le cas du FSSW. Le Friction Stir Spot Welding s'est vite avéré être un procédé très attractif notamment pour l'industrie automobile, venant directement concurrencer le procédé de soudage par résistance par point, en présentant la capacité de souder des alliages d'aluminium et des aciers haute résistance et en n'exigeant pas un apport d'énergie conséquent pour être mis en oeuvre.

Depuis maintenant une bonne quinzaine d'années, de nombreuses études numériques et expérimentales ont été menées sur les procédés de soudage par friction et malaxage. Du point de vue numérique, les études réalisées se sont principalement concentrées sur la modélisation de la phase « quasi-stationnaire » du Friction Stir Welding (Bas06a; KKRS06; CS05; Feu05; SH05; SZK05; CK03; SK03; Uly02), tirant profit des techniques classiques utilisant un référentiel lié à la source (ici à l'outil) en mouvement. Les études numériques concernant le Friction Stir Spot Welding ou les phases transitoires du Friction Stir Welding (AM10; MRE08; Gue07; AMFD05) sont quant à elles beaucoup plus rares. En effet, ce procédé est par définition transitoire et un modèle purement fluide n'est pas approprié. Il s'avère qu'en fait on observe quelques similarités entre le FSSW et les procédés de soudage par fusion. En effet, de la même manière qu'on identifie un bain liquide et la structure solide pour les procédés générant une fusion, on peut identifier en plus de la structure solide dans le cas du FSSW, une phase dite « pâteuse » au voisinage de l'outil, subissant de sévères déformations. Bien que cette dernière n'atteigne pas le point de fusion, les forts taux de déformation y régnant nous autorisent à considérer la matière pâteuse comme un fluide très visqueux. Une modélisation comprenant un couplage fluide/solide s'avère alors tout à fait intéressante dans le cas du Friction Stir Spot Welding.

Dans cette thèse, le couplage fluide/solide est développé sur la base du Friction Stir Spot Welding. La modélisation de ce procédé constitue en effet une première étape avant la simulation des procédés de soudage par fusion, pour lesquels des ingrédients supplémentaires doivent être introduits dans la modélisation (tension de surface, effet Marangoni, couplage électromécanique, etc.). Pour modéliser numériquement ce procédé, les approches purement lagrangienne et eulérienne ne sont pas appropriées, l'une nécessitant de fréquents remaillages dans le cas de grandes déformations et l'autre ne permettant pas de suivre les bords des tôles pendant le procédé. Une approche eulérienne lagrangienne arbitraire (ALE), dans laquelle le maillage suit la matière dans la phase solide mais pas dans la zone

pâteuse, permet de simuler de nombreux tours de l'outil dans la matière tout en suivant les bords des tôles. En plus du traitement numérique différent des deux zones, des modèles de comportement cohérents avec l'état de la matière sont utilisés dans chaque zone en y intégrant respectivement des descriptions de type fluide visqueux incompressible et solide. L'élément fini P1+/P1 introduit par Arnold & al. (ABF84) construit sur une formulation mixte, sert de base pour le développement du couplage des milieux solide et fluide.

Le premier chapitre commence par présenter les procédés de soudage par friction et malaxage. Leurs principes ainsi que la technologie associée sont décrits. Par la suite, une revue bibliographique orientée sur la modélisation de ce type de procédés est effectuée. Les modèles de la littérature incluent tout ou partie des différents phénomènes physiques impliqués : thermique, métallurgie et mécanique. Les quelques simulations du procédé Friction Stir Spot Welding développées dans la littérature sont présentées. Enfin, la modélisation proposée dans ce travail du procédé Friction Stir Spot Welding est décrite en détail et les équations du problème sont écrites de manière forte.

Dans le second chapitre, la construction du couplage fluide/solide est présentée. Le modèle numérique développé est basé sur l'élément fini P1+/P1, présenté dans la section 2.2. Ce dernier a déjà été implémenté dans le code SYSWELD® (Feu05; FGBB05; FBB07; SYS07) en mécanique des fluides avec une formulation température/vitesse/pression en quasi-stationnaire, et en solide avec une formulation déplacement/pression dans le cas des grandes transformations. Dans ce travail, cet élément est développé dans le cas d'un couplage thermomécanique fort. L'élément fluide est étendu au cas transitoire, le traitement des termes d'inertie s'appuie sur une approximation introduite portant sur l'accélération du champ bulle. D'autre part, l'élément solide développé dans le cadre des grandes transformations a été reformulé pour faire porter la résolution mécanique sur la vitesse, permettant d'homogénéiser la formulation des deux milieux en température/vitesse/pression en vue du couplage. Ce couplage est réalisé au sein d'une nouvelle option créée dans le code SYSWELD®, celle-ci inclut une approche euléro-lagrangienne développée pour ce modèle.

Le troisième chapitre est consacré à la vérification de l'implémentation des éléments à comportement fluide et solide. Des solutions analytiques sont construites sur la base d'un problème classique de mécanique des fluides : le viscosimètre de Couette. On s'intéresse dans un premier temps au comportement fluide. Deux solutions développées en mécanique instationnaire puis pour un couplage (mécanique stationnaire) - (thermique instationnaire) permettent de tester respectivement le comportement dynamique et le couplage thermomécanique de l'élément fluide. Des comparaisons entre solutions analytiques et numériques sont présentées. Par la suite, le même problème est conservé et particularisé au cas d'un matériau solide. Le cas rigide-parfaitement plastique est d'abord étudié, puis une solution est développée en élastoplasticité à la fois pour la charge et la décharge. D'abord développée sous l'hypothèse des petites pertubations, elle est étendue au cas des grandes transformations en négligeant les termes additionnels liés à la dérivée objective des contraintes. Enfin, une comparaison entre la solution analytique développée pour un matériau élastoplastique en grandes transformations et la solution numérique obtenue avec l'élément P1+/P1 à comportement solide est présentée.

Le quatrième chapitre est consacré à la simulation du procédé Friction Stir Spot Welding. Dans un premier temps, le bon comportement de la transition solide/fluide est vérifié

sur le problème du viscosimètre de Couette. Par la suite, une simulation simplifiée du Friction Stir Spot Welding est présentée. Cette simulation permet d'illustrer la progression de la phase fluide dans la structure au cours du chargement. Enfin, certaines limites de validité du modèle numérique construit ainsi que certaines difficultés rencontrées sont discutées.

En parallèle de ce travail numérique, des expériences d'investigation du procédé Friction Stir Spot Welding ont été menées au pôle productique de l'ENISE à Saint Étienne. Ce travail expérimental fait l'objet du cinquième chapitre. L'objectif de ces expériences est d'une part d'analyser et de mieux comprendre les mécanismes régissant ce procédé, d'autre part de permettre à terme de fournir les données expérimentales nécessaires à la calibration du modèle. La démarche proposée est centrée sur l'étude de l'influence de la mise et du maintien en position des tôles à souder, plus particulièrement sur les efforts générés durant le process. Dans le cadre d'une démarche de validation globale du procédé Friction Stir Spot Welding, deux montages spécifiques ont été conçus, fabriqués et implantés sur une machine à commande numérique. Ces dispositifs intègrent un capteur d'effort quatre composantes acquis pour l'occasion, permettant d'effectuer la mesure des efforts et couple générés pendant le procédé. Une partie du domaine de soudabilité est explorée et l'influence des conditions aux limites expérimentales est étudiée sur la base des courbes d'effort et de couple mesurées durant le process.

Chapitre 1

Modélisation des procédés de soudage par friction et malaxage

Dans ce premier chapitre, les procédés de soudage par friction et malaxage sont d'abord présentés, puis une revue bibliographique orientée sur la modélisation de ces types de procédé est effectuée. L'approche suivie dans ces travaux pour la modélisation du FSSW est alors décrite.

Sommaire

1.1 Introduction **6**
1.2 Les procédés de soudage par friction et malaxage **7**
1.2.1 Le Friction Stir Welding 7
1.2.2 Le Friction Stir Spot Welding 12
1.3 Modélisation numérique des procédés de soudage par friction et malaxage **18**
1.3.1 Les phénomènes physiques impliqués 18
1.3.2 La modélisation du Friction Stir Welding 19
1.3.3 La modélisation du Friction Stir Spot Welding 24
1.4 Modélisation proposée du procédé FSSW **26**
1.4.1 Idée principale de la modélisation proposée 26
1.4.2 Approche euléro-lagrangienne 27
1.4.3 Modélisation du problème 29
1.4.4 Synthèse 36
1.5 Conclusions **36**

1.1 Introduction

La simulation numérique du soudage a maintenant largement évolué des premiers travaux réalisés en laboratoire aux applications industrielles durant les trente dernières années. Si la simulation est du plus grand intérêt lorsqu'il s'agit d'étudier la tenue mécanique d'un joint soudé, la mise en oeuvre d'un modèle pose toujours la question des objectifs pour lesquels il est développé (Lin01a). Quels sont les ingrédients qui doivent y être intégrés, quelles techniques numériques cela implique-t-il d'employer et jusqu'à quel degré de finesse est-il pertinent de descendre sont les questions sous-jacentes à la définition des objectifs. La complexité, le raffinement du modèle en termes de phénomènes physiques modélisés sont généralement mis en regard d'un critère informations/coût calcul, ce dernier limitant la taille des modèles.

Si la simulation de ces procédés nécessite la modélisation d'interactions complexes pouvant conduire à des calculs relativement lourds, elle apparaît être un moyen d'accès privilégié aux contraintes et distorsions résiduelles (Ber), dont la connaissance est indispensable pour étudier la tenue mécanique d'un joint soudé, ou encore vérifier la faisabilité d'une séquence de soudage.

Dans le cas des procédés de soudage par friction et malaxage, différents domaines de la physique tels que la thermique, la métallurgique et la mécanique se combinent de façon complexe. En effet, le frottement de l'outil sur les pièces et les fortes déformations plastiques se produisant dans la matière augmentent la température dans la zone malaxée ainsi que dans son voisinage, générant des évolutions microstructurales importantes. Au cours du refroidissement, des contraintes et distorsions résiduelles se développent, et jouent un rôle primordial sur la réponse de la structure soudée en service. Une compréhension plus fine des intéractions, ainsi que des mécanismes se produisant au cours du process est nécessaire si on veut optimiser le procédé et mieux contrôler les propriétés du joint soudé. La qualité ainsi que la tenue du joint soudé obtenu par friction et malaxage dépendent notamment des paramètres process utilisés, parmi lesquels la vitesse de rotation de l'outil et la vitesse de soudage le long du trajet prédéfini, de la géométrie de l'outil et des pièces à souder ainsi que des matériaux composant ces pièces.

La simulation numérique est ici un outil précieux pouvant permettre d'analyser l'écoulement de matière dans la zone malaxée ou la génération de contraintes résiduelles, mais aussi d'optimiser le procédé en examinant différentes géométries d'outil, en explorant un domaine de soudabilité, ou encore en testant de nouveaux matériaux. Ce genre de simulation permet enfin de vérifier des séquences de soudage plus complexes, définissant un outil puissant intégré à la conception mécanique.

Ce premier chapitre s'organise en trois sections. La section 1.2 est consacrée à la présentation des procédés de soudage par friction et malaxage. Le Friction Stir Welding ainsi que son dérivé le Friction Stir Spot Welding sont décrits dans leur principe, mais aussi dans leur mise en oeuvre au travers des technologies utilisées lors des opérations de soudage. La section 1.3 est consacrée aux modélisations courantes des procédés de soudage par friction et malaxage. Ce bref état de l'art fait ressortir les principaux ingrédients de modélisation qu'il est important d'intégrer au modèle et décrit l'intérêt que représente la simulation du soudage mais aussi les principaux problèmes rencontrés. Enfin dans la section 1.4, la modélisation du procédé Friction Stir Spot Welding proposée dans cette thèse est présentée. Dans un premier temps, l'intérêt d'un couplage fluide/solide, noyau du modèle développé, est présenté. Par la suite, le problème est écrit de manière forte, incluant les différents phénomènes impliqués, couplages et conditions aux limites du problème.

1.2 Les procédés de soudage par friction et malaxage

Cette section est consacrée à la présentation des procédés de soudage par friction et malaxage. Le Friction Stir Welding est d'abord présenté, puis on s'intéresse par la suite plus particulièrement au Friction Stir Spot Welding, dérivé apparu au début des années 2000, auquel sont consacrés les travaux de cette thèse.

1.2.1 Le Friction Stir Welding

1.2.1.1 Le procédé

Le Friction Stir Welding (FSW) est un nouveau procédé de soudage (TNH+91), développé et breveté par l'Institut de Soudure britannique en 1991. Cette nouvelle technologie de soudage à l'état solide et sans apport de matière s'avère être un procédé particulièrement intéressant pour réaliser l'assemblage de métaux non-ferreux tels que les alliages d'aluminium ou de cuivre, réputés peu soudables avec les procédés classiques. Il a donc été en premier lieu mis en oeuvre dans les industries du transport qui ont recours à l'aluminium pour alléger les structures mécaniques.

Pendant le process, les pièces à assembler sont placées sur un support et rigidement maintenues en position. Le principe du procédé est alors de réaliser un cordon de soudure de proche en proche en malaxant la matière des deux pièces à assembler. Un outil cylindrique composé d'un pion et d'un épaulement, et tournant dans une gamme de vitesse de 500 à 2000 tr/mn, est enfoncé dans la matière jusqu'à ce que la surface de l'épaulement vienne en contact avec celle-ci, c'est la phase de *plongée*. Le frottement se produisant à l'interface outil/matière génère de la chaleur, entraînant un ramollissement de la matière qui facilite la pénétration progressive de l'outil. À mesure que l'outil s'enfonce, la matière est malaxée par le pion, la déformation plastique occasionnée génère aussi de la chaleur dans les pièces à assembler. L'outil est par la suite déplacé le long du trajet prédéfini sur les pièces à une vitesse de soudage donnée, c'est la phase de *soudage*.

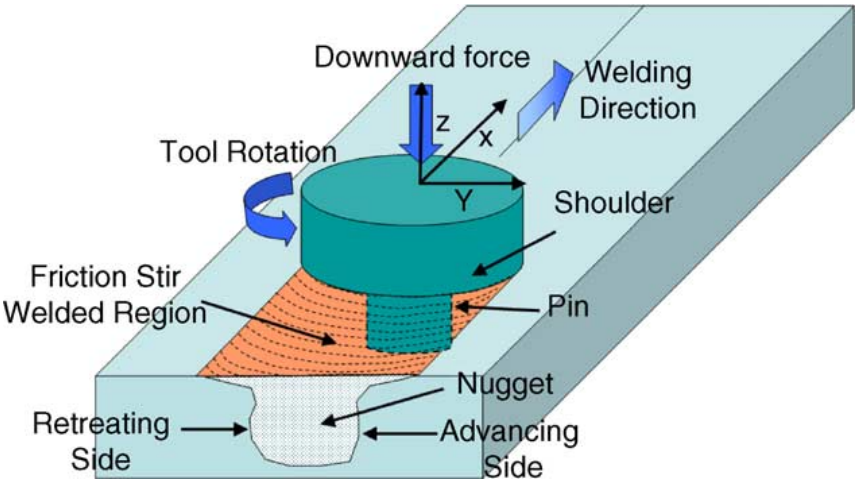


Figure 1.1 – Principe du soudage Friction Stir Welding (MM05)

Durant le process, bien que la matière soit fortement malaxée et donc pâteuse, elle n'atteint pas le point de fusion, le mélange de matière des tôles à assembler s'effectue donc à l'état solide. Ceci permet notamment d'éviter certains problèmes métallurgiques

rencontrés dans le soudage par fusion, notamment avec les alliages d'aluminium, comme la fissuration à chaud ou la formation de soufflures. Les fortes déformations plastiques subies à chaud par la matière conduisent à une fine recristallisation des grains, ce qui confère au joint de bonne propriétés mécaniques. On observe d'une manière générale que le Friction Stir Welding permet d'obtenir des soudures de grande qualité, et est relativement bon marché à mettre en oeuvre. Par rapport à d'autres procédés usuels, il présente en effet l'intérêt d'être moins gourmand en énergie et évite les inconvénients classiques de mise en oeuvre, c'est-à-dire environnement sous gaz inerte, métal d'apport, production de fumées, etc.

1.2.1.2 La formation du cordon de soudure

Les modifications métallurgiques intervenant lors du soudage par FSW affaiblissent les propriétés mécaniques de l'assemblage par rapport à celles du métal de base. Cependant, le soudage à l'état solide permet de limiter les modifications microstructurales, et permet donc de limiter la génération de contraintes résiduelles par rapport aux autres procédés, dans lesquels le cycle thermique est nettement plus sévère.

Le joint obtenu avec les procédés de soudage conventionnels présente généralement un noyau correspondant à une zone de fusion et une zone affectée thermiquement dans laquelle la microstructure a fortement évolué. Le soudage FSW présente la particularité de générer quatre zones identifiées par observation au microscope optique :

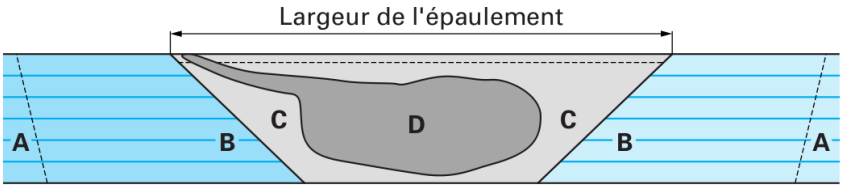


Figure 1.2 – Schéma d'une coupe transverse d'une soudure FSW

- ▷ **Zone A : le métal de base**, ses propriétés mécaniques globales ainsi que sa microstructure sont restées inchangées au cours du procédé.
- ▷ **Zone B : la zone affectée thermiquement** (ZAT). Dans cette zone, le métal a subi une élévation de température affectant la microstructure et les propriétés mécaniques, mais de façon relativement modérée. Les déformations y sont par contre quasi-inexistantes.
- ▷ **Zone C : la zone thermomécaniquement affectée** encadrant le noyau soudé a subi un cycle thermique et des déformations mécaniques. La température y a été suffisamment élévée pour entraîner des modifications microstructurales significatives.
- ▷ **Zone D : le noyau**, région dans laquelle la matière a été sévèrement déformée. Cette zone ayant subi une recristallisation dynamique, les grains quasi-équiaxes sont beaucoup plus fins que dans le métal de base. Il apparaît dans cette zone malaxée des structures allongées en bandes concentriques (« onion ring »), dont l'origine reste à confirmer.

On observe aussi (figure 1.1) que la rotation et le mouvement d'avance de l'outil créent une dissymétrie du joint de soudure par rapport à la ligne de soudage, se traduisant à

la fois sur le champ thermique et l'écoulement de matière pendant le procédé mais aussi sur les champs mécaniques et métallurgiques résiduels. On distingue les côtés « retreating side » et « advancing side ». Cette dénomination est tout à fait similaire à celle usuelle utilisée en fraisage : suivant la position de l'outil par rapport à la pièce à usiner et au mouvement de la table, la vitesse d'un point situé sur l'enveloppe de l'outil est dite soit « en concordance » (ou « en avalant ») soit « en opposition » par rapport à la vitesse de la pièce à usiner. Les efforts mis en jeu diffèrent alors de part et d'autre de la ligne de soudage, d'où le caractère asymétrique de la soudure.

1.2.1.3 Les outils

À l'origine, la géométrie de l'outil est assez simple. Généralement de révolution, il est composé d'un pion et d'un épaulement et a pour fonctions principales : (a) de chauffer les pièces à souder, (b) de générer le mouvement de matière pour la production du joint et (c) de contenir le flux de matière sous l'épaulement et autour du pion. Le chauffage des pièces à assembler est essentiellement effectué par friction au contact outil/matière et par déformation plastique. Les efforts mis en jeu lors du process sont relativement importants et peuvent conduire à une usure prématurée de celui-ci. Pour les applications industrielles, la durée de vie de l'outil doit être conséquente, autrement dit il doit être non consommable.

Durant les 15 dernières années, les géométries d'outil se sont progressivement complexifiées ajoutant un certain nombre de raffinements à la conception :

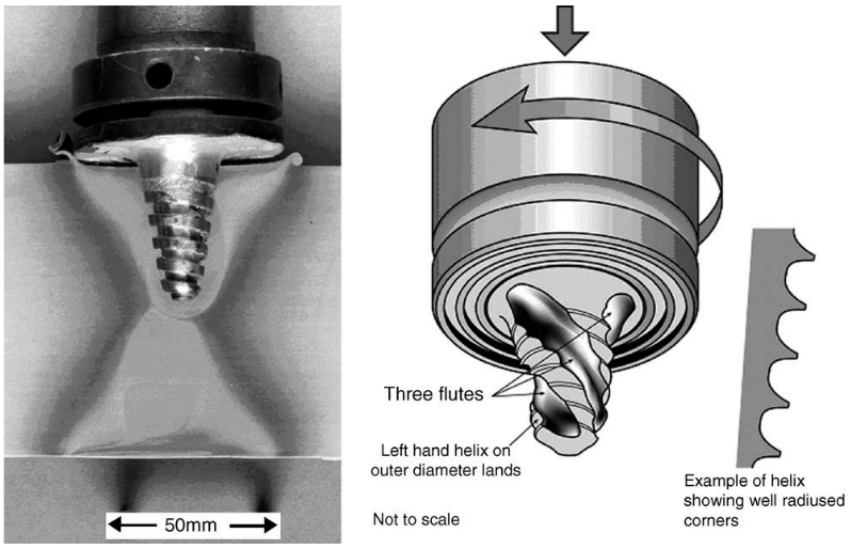


Figure 1.3 – Outils Worl™ et Triflute™ développé au Welding Institute (Copyright ©2001, TWI Ltd) (TNS)

- Pion cylindrique ou cônique.
- Présence éventuelle de gorges ou de filets. Cette technologie par obstacle permet d'augmenter le malaxage de la matière entraînant une dissipation plastique supérieure. On trouve des filetages à un ou plusieurs filets, la combinaison avec des gorges ou des rainures permet de se rapprocher des outils de coupe classiques utilisés pour les procédés par enlèvement de matière.

* Dans le même esprit, des spirales ou encore des formes en soufflante (SFC07) peuvent être dessinées sur la base de l'épaulement de l'outil.
* La géométrie de révolution du pion est parfois aussi abandonnée pour des prismes à base polygônale, c'est notamment le cas du *Trivex*™ (trois pans) conçu au TWI (The Welding Institute).
* Une dépouille est aussi parfois ajoutée sur l'épaulement, créant un volume de « réserve » de matière lors du process (GRP07).

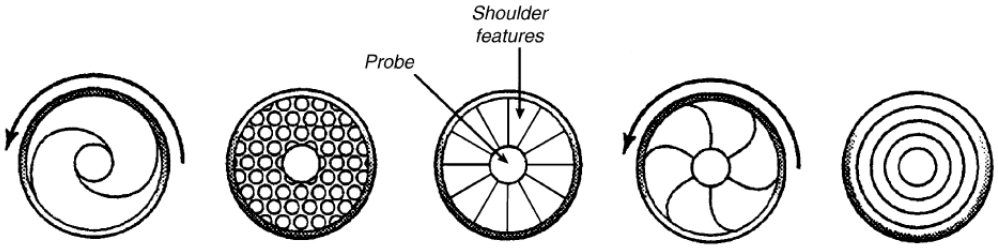


Figure 1.4 – Géométrie de l'épaulement (Copyright ©2001, TWI Ltd) (TNS)

Ces améliorations ont toutes pour but de générer un échauffement plus important dans les pièces par dissipation plastique, en effet on observe expérimentalement qu'un chauffage important est nécessaire pour créer un joint de bonne qualité.

Figure 1.5 – Outil Trivex™ (Copyright ©2001, TWI Ltd) (TNS)

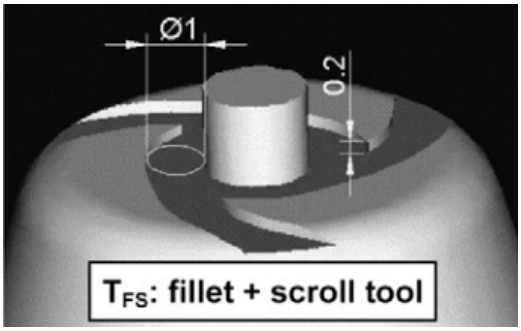


Figure 1.6 – Géométrie de l'épaulement en soufflante (SFC07)

Une fois la géométrie déterminée, le matériau constituant l'outil doit être choisi. Le choix dépend bien sûr du matériau constitutif des pièces à souder, de leur épaisseur mais aussi de la durée de vie de l'outil requise. Il doit enfin présenter quelques bonnes propriétés généralement requises pour les outils usuels (Mah07) : haute résistance mécanique et stabilité à haute température, bonne ténacité, résistance à l'abrasion, faible coefficient de dilatation thermique, bonne usinabilité, homogénéité et disponibilité. Bien que tous les critères précédemment cités ne soient pas toujours simultanément combinables, il convient de choisir un compromis en vue de l'application considérée.

Aussi on observe dans la littérature (Mah07) que les outils sont généralement choisis :

- ⋆ **en acier**, généralement pour le soudage de pièces en alliages d'aluminium. Des aciers alliés contenant du chrome et du molybdène, traités thermiquement (trempe à l'air et revenu) tels que AISI H13, ont montré de bons résultats sur des alliages d'aluminium.
- ⋆ **en carbure** de tungstène et autres composites à matrice métallique, ces derniers se comportent bien à haute température, présentent une bonne résistance mécanique et à l'abrasion.
- ⋆ **en nitrure de bore cubique** ; ces outils obtenus par métallurgie des poudres sont généralement utilisés lorsque les pièces à souder sont en acier à haute résistance. Ils présentent de très hautes performances à haute température et sont très résistants. Cependant, leur caractère fragile et leur prix les réserve à certaines applications bien particulières.
- ⋆ on trouve aussi quelques alliages à base de nickel ou cobalt ou certains métaux réfractaires.

1.2.1.4 Les paramètres process

De nombreux paramètres influencent la qualité finale du joint soudé par FSW. Les principaux paramètres de conduite sont les suivants :

- ⋆ la vitesse de rotation Ω de l'outil
- ⋆ la vitesse d'avance V_a de l'outil
- ⋆ certains ajoutent aussi un angle d'inclinaison de l'outil, ayant pour but de consolider la matière après le passage du pion
- ⋆ enfin, suivant le type de pilotage de la machine, on ajoute soit la position axiale de l'outil lors du soudage, soit l'effort axial appliqué par l'outil sur la matière.

Ce dernier paramètre nécessite plus de commentaires. En effet, deux modes usuels de pilotage de l'outil existent :

- *le contrôle en position*, c'est-à-dire que la position axiale de l'outil est pilotée, généralement maintenue constante, pendant le process. Ce type de positionnement est généralement effectué sur des fraiseuses modifiées. Ce sont en fait ces machines qui ont été utilisées en premier pour ce type de soudage, car elles étaient déjà bien répandues pour les opérations d'usinage classiques. Pour les machines à commande numérique, l'asservissement des axes est classiquement réalisé en position et combiné à une technologie électrique. En pratique, la charge axiale est limitée par le guidage en rotation de la tête de broche, ce type de machine ne permet donc de souder que des alliages d'aluminium et jusqu'à une certaine épaisseur.

- *le contrôle en effort*, la position de l'outil résulte de la rigidité des pièces à souder. Ce mode de pilotage permet de s'adapter aux défauts de mise en position des pièces à assembler, aux défauts de tolérance de fabrication des tôles. La position axiale de l'outil fluctuant au cours de la phase de soudage, des défauts tel qu'un manque de pénétration peuvent aussi être comblés. Ce mode de pilotage semble donc le plus pertinent pour le FSW. Dans la pratique, ce type de pilotage est le plus souvent implanté sur des machines spécifiques comme par exemple des robots à architecture

parallèle, structures rigides et robustes. Il est de plus généralement combiné avec une technologie hydraulique, plus robuste, permettant aisément de transmettre d'importants efforts. Bien sûr, ces machines moins standard nécessitent un investissement non négligeable.

Dans l'espace construit avec tous ces paramètres process, on peut construire une zone appelée « Domaine de Soudabilité Opératoire » (DSO) dans laquelle la combinaison de certaines valeurs des paramètres conduit à une qualité de soudure acceptable. Les frontières de cette zone dépendent de la nature des matériaux des pièces à souder, de leur géométrie ainsi que de celle de l'outil. Certaines études ont eu pour objet de qualifier et délimiter le DSO, parmi lesquelles (Oka00; KFT+06; Arb08; Zim09). La zone est généralement présentée dans un plan vitesse de rotation - vitesse d'avance de l'outil (Ω, V_a). En dehors de cette zone de soudabilité, différents types de défauts apparaissent (Zim09), et conduisent généralement à une qualité médiocre de la soudure.

1.2.2 Le Friction Stir Spot Welding

1.2.2.1 Le procédé

Sur la base de la technologie développée pour le Friction Stir Welding, d'autres dérivés ont pu voir le jour durant ces 15 dernières années. On peut notamment citer le Friction Stir Processing développé par (MMM+00) qui reprend les bases et la cinématique du FSW, mais est ici employé sur une structure monobloc à des fins de modifications microstructurales, et d'améliorations de propriétés spécifiques.

Un autre dérivé prenant actuellement de l'importance est le Friction Stir Spot Welding ou spot friction welding. Ce procédé récemment développé par le constructeur Mazda (SMY+01) a reçu beaucoup d'attention surtout dans l'industrie automobile. Cette variante de la version « linéaire » du Friction Stir Welding consiste à effectuer un joint de soudure « ponctuel » entre deux tôles superposées par pénétration d'un outil en rotation dans la matière. Le point de soudure s'effectue alors en trois étapes :

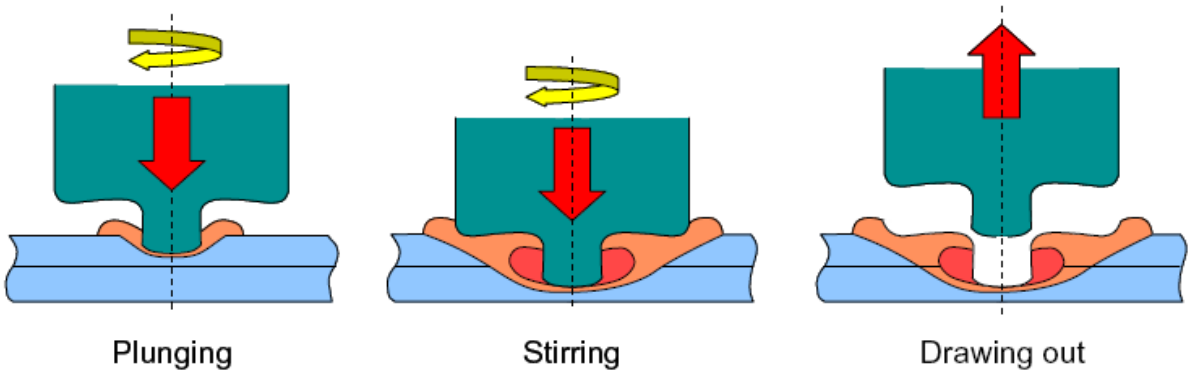


Figure 1.7 – Étapes du Friction Stir Spot Welding

⋆ L'outil pénétrant dans la matière, un échauffement est généré à la fois par friction au contact outil/matière mais aussi par déformation plastique dans la zone malaxée.

La matière voisine de l'outil s'échauffant, elle devient pâteuse, ceci permet à l'outil de pénétrer dans la matière jusque dans la seconde tôle à souder.
- ⋆ S'ensuit une phase de malaxage, l'outil continue de tourner et de malaxer la matière.
- ⋆ Enfin l'outil est retiré de la matière, on observe qu'un joint de soudure « ponctuel » a été créé entre les deux tôles à souder.

Le Friction Stir Spot Welding est devenu très vite attractif comme technique d'assemblage dans l'industrie automobile, venant directement concurrencer le procédé de soudage par résistance par point (Resistance Spot Welding), procédé le plus utilisé dans cette industrie pour l'assemblage de tôles. Bien que ce dernier soit habituellement utilisé pour les alliages d'aluminium, il peut devenir problématique dans le cas de nouveaux matériaux à haute performance, tels que certains nouveaux alliages d'aluminium ou aciers haute résistance. Le Friction Stir Spot Welding permet de souder des alliages d'aluminium, des aciers haute résistance, et n'exige de plus qu'un relativement faible apport d'énergie. Il est clair que la réduction des coûts, notamment sur les équipements, et un retour sur investissement quasi immédiat ont rapidement séduit les industriels.

Bien que la plupart des efforts de recherche et de développement aient porté sur les alliages d'aluminium, plus malléables et pâteux à plus basse température, un certain nombre d'études (FES+05; FSD+05; HSG07) ont examiné la faisabilité du FSSW sur des aciers à haute résistance. Ce type de soudage nécessite bien sûr quelques aménagements (rigidité de la machine, outil en PCBN).

1.2.2.2 Analyse et qualification du joint de soudure

De la même manière que pour le Friction Stir Welding, le FSSW produit des joints de soudure à l'état solide, la résistance du joint est donc comparable à celle du métal de base. L'examen optique d'une coupe transverse révèle aussi la présence de différentes zones dans lesquelles des évolutions microstructurales ont eu lieu. La figure 1.8 présente une coupe transverse d'un joint (WL07) et différentes micrographies effectuées dans chacune des zones identifiables, ces résultats sont donnés pour un alliage d'aluminium de base 6061-T6. On identifie les zones suivantes :

- ⋆ **Le métal de base** (BM) est resté inchangé durant le procédé.
- ⋆ **La zone affectée thermiquement** (HAZ, Zone I) a subi essentiellement un cycle thermique et donc des évolutions microstructurales, on y observe moins de gains grossiers.
- ⋆ **La zone affectée thermomécaniquement** (TMAZ, Zone II) a subi de fortes déformations en plus d'être thermiquement affectée. Les grains sont plus affinés et distordus.
- ⋆ **Une zone de cisaillement**, près de l'outil, aux abords du trou (SZ, zones III et IV), les déformations y ont été maximales, on observe des grains très fins, équiaxes, dûs au malaxage et à la recristallisation.

La qualité du joint de soudure est généralement évaluée au travers d'analyses métallurgiques et de tests mécaniques. Un certain combre d'auteurs (MRP+06; WL07; BHEB+10) ont étudié la microstructure du joint soudé dans chaque zone, que ce soit au travers de la taille des grains ou de séries de tests de microdureté. La figure 1.9 montre les profils de dureté dans les différentes zones affectées, sur quatre lignes dans l'épaisseur du joint.

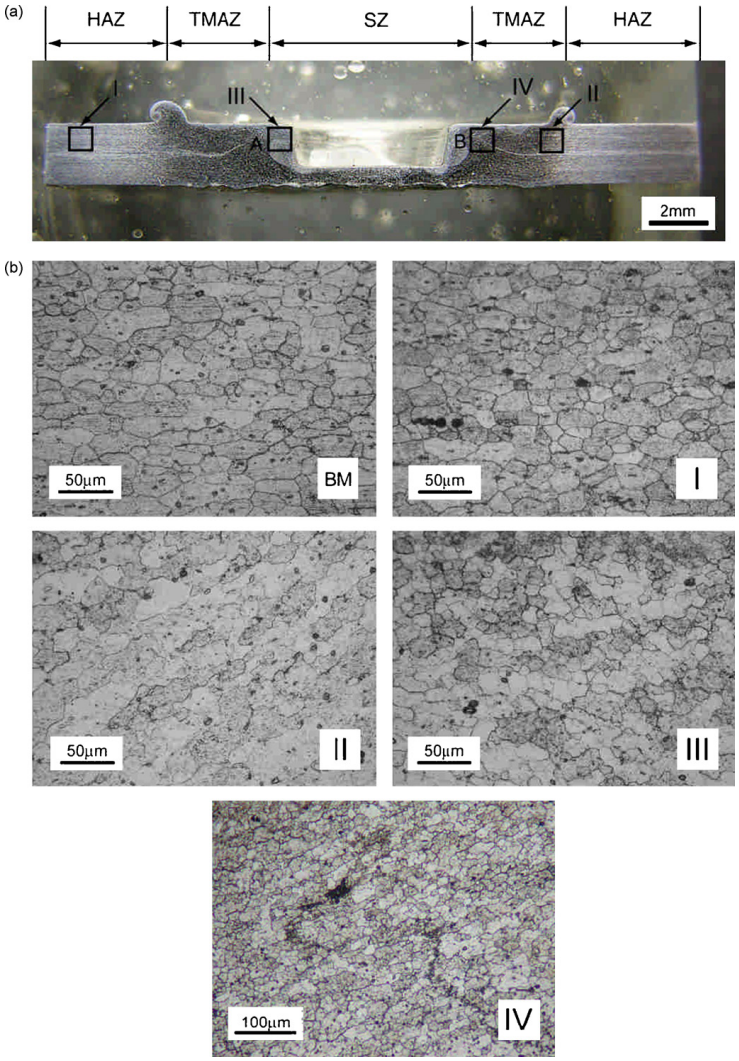


Figure 1.8 – (a) Coupe transverse d'une soudure FSSW ; (b) Zooms sur les régions I-IV (WL07)

Ces résultats (WL07) sont obtenus avec un alliage d'aluminium 6061-T6. On observe une chute brutale de dureté à l'interface des zones thermiquement et thermomécaniquement affectées, ceci est généralement corrélé avec l'observation d'une initiation de la rupture du joint à partir de cette zone notamment sur des tests de simple recouvrement (voir ci-dessous). À l'approche de la zone la plus sévèrement déformée, on observe un regain de dureté généralement expliqué par des mécanismes de recristallisation se produisant à mesure que la matière est plus malaxée.

Les mécanismes de rupture sont généralement analysés au travers de deux tests mécaniques :

- ⋆ *L'essai simple recouvrement ou single lap shear* (figure 1.10), traditionnellement utilisé pour qualifier les procédés d'assemblage (collage, rivetage, clinchage, etc). Cet essai « structure » est un moyen d'évaluer une charge à rupture de l'assemblage, on en trouve entre autres dans (LPCT06; WL07; TUT07; TPP09; BHEB+10).

- ⋆ *L'essai de traction en croix ou essai de déboutonnage* (figure 1.11) consiste à fléchir

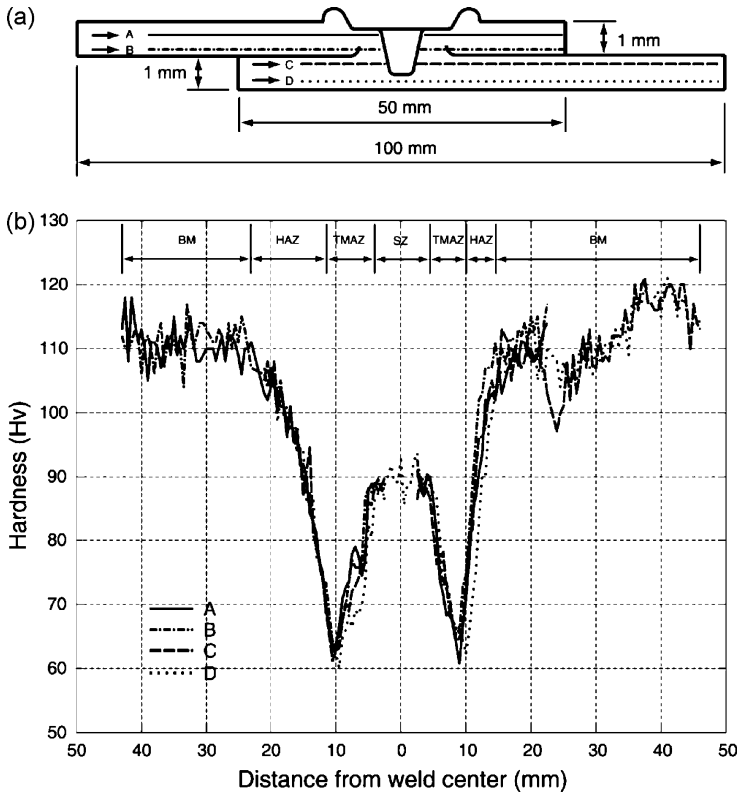


Figure 1.9 – Tests de microdureté sur un alliage 6061-T6 (WL07)

deux plaques positionnées en croix dans lesquelles on a préalablement effectué le joint dans la zone de recouvrement. (FSD+05; FES+05; TUT07; AMK+08)

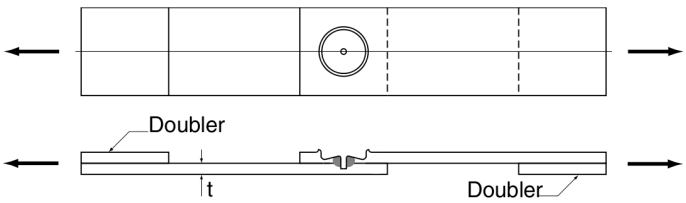


Figure 1.10 – Lap shear test

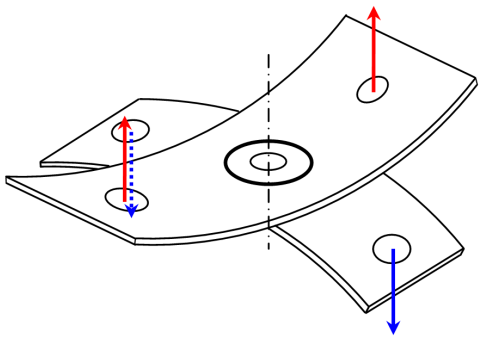


Figure 1.11 – Essai de traction en croix

1.2.2.3 Les dispositifs de soudage et paramètres process du FSSW

À l'origine, la mise en oeuvre du FSSW a été effectuée par implantation d'un dispositif intégré à un robot polyarticulé (SMY+01; SHR04), illustré sur les figures 1.12 et 1.13. Les mouvements de translation et de rotation de l'outil sont pilotés par des servomoteurs intégrés au dispositif. La présence d'une butée ponctuelle placée en opposition à l'outil permet de réaliser la soudure ponctuelle. Ce genre de dispositif a par la suite été utilisé sur la chaîne d'assemblage du modèle RX-8 de Mazda pour l'assemblage du capot, hayon ou encore des portières (figure 1.14).

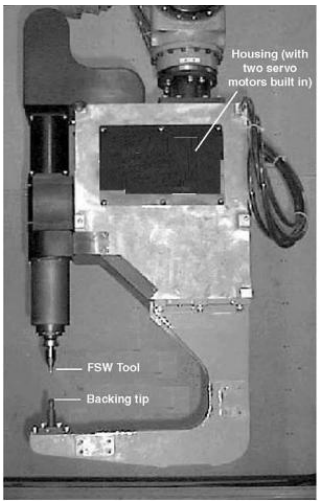


Figure 1.12 – Dispositif de soudage FSSW (SMY+01)

Figure 1.13 – Pince FSSW (SHR04)

Figure 1.14 – Soudage de capot de voiture (Mazda)

Il existe globalement deux modes opératoires pour le FSSW, le pilotage étant effectué soit en déplacement, soit en effort. Les deux types de pilotage peuvent être réalisés sur un robot polyarticulé. Dans le cas d'un pilotage en effort, la vitesse de pénétration de l'outil est donnée par la rigidité des pièces à assembler et la vitesse commandée de progression de l'effort normal. Une fois le seuil prescrit atteint, l'effort reste constant tandis que l'outil continue d'avancer dans la matière. Dès que le temps de maintien est écoulé, l'outil est retiré.

Dans le cas d'un pilotage en déplacement, l'outil tournant est enfoncé dans la matière à une vitesse donnée jusqu'à ce que la profondeur voulue soit atteinte, l'outil reste en position durant un temps de maintien donné, avant d'être retiré de la matière.

Les paramètres process influents sur la qualité du joint soudé sont donnés pour chaque type de pilotage dans le tableau 1.1 :

Déplacement	Effort
Vitesse de rotation Ω de l'outil	
Vitesse de plongée V_p Temps de maintien T Profondeur de plongée δ	Taux d'effort normal $\dot{F}_z$ Temps de maintien T Effort axial F_z

Tableau 1.1 – Paramètres process

Les outils utilisés pour le Friction Stir Spot Welding sont relativement similaires à ceux utilisés pour le Friction Stir Welding en termes de géométrie et de matériau. L'outil est toujours composé d'un pion et d'un épaulement, le pion peut être cônique et/ou fileté, et l'épaulement peut inclure une dépouille et/ou des spirales, etc.

1.2.2.4 Une question d'esthétique ... et de résistance mécanique

À la fin du procédé, on observe tout de même que l'outil laisse une trace (un trou) sur les pièces à souder. Ce trou n'existe que d'un seul côté de l'assemblage, contrairement au cas du soudage par résistance par point dans lequel les électrodes viennent exercer une forte pression de part et d'autre, laissant des traces des deux côtés de l'assemblage, avant le passage du courant électrique. Un des côtés étant resté (quasi-) vierge de toute trace, on comprend que l'avantage esthétique puisse séduire les industriels de l'automobile. Certains en profitent d'ailleurs pour imprimer un logo (PJW+) sur l'autre face de l'assemblage, en usinant au préalable une empreinte dans la butée positionnée à l'opposé de l'outil.

Plus important, ce trou peut générer des concentrations de contrainte significatives si la structure vient à être chargée, certains problèmes de corrosion ayant même été décelés. Certains proposent donc de reboucher ce trou (SdS04; KT01; UTT+08) [1] en concevant un outil à pion rétractable, dont le principe est illustré sur la figure 1.15. Ce dérivé du FSSW s'appelle le « refilling friction stir spot welding ».

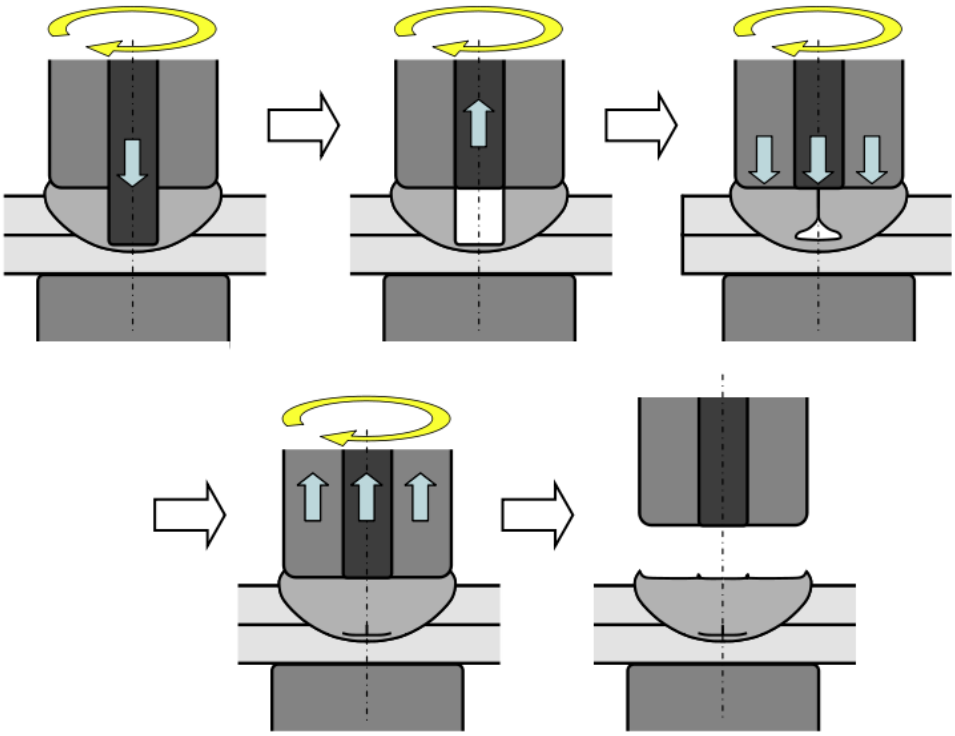


Figure 1.15 – Outil à pion rétractable (UTT+08)

Les auteurs montrent que cette technique permet d'améliorer nettement la charge à rupture des éprouvettes sur des tests de simple recouvrement. Cependant, le processus étant à présent plus complexe, la création d'un point de soudure est nettement plus longue, d'où une perte significative en terme de productivité.

1. D'autres références peuvent être trouvées dans (Pan)

1.3 Modélisation numérique des procédés de soudage par friction et malaxage

Parmi les outils et méthodes d'investigation d'un procédé de soudage, la simulation numérique est un moyen privilégié pour avoir accès aux champs mécaniques pendant et après le process. Bien que le développement d'une procédure de soudage soit en général basé sur les techniques expérimentales (Lin01a), les méthodes numériques permettent de compléter ces approches notamment par le biais de comparaisons des champs résiduels.

La simulation des procédés de soudage par friction et malaxage peut permettre de mieux comprendre certains mécanismes physiques intervenant durant le process et d'observer l'influence de chaque paramètre process sur le résultat obtenu. En effet, les mouvements de matière générés par le pion, les champs de température, de contraintes et de déformations sont plus facilement accessibles numériquement que par l'expérience. Un certain nombre de modèles numériques concernant les procédés par friction et malaxage ont vu le jour ces dernières années. On en présente dans cette section les principaux ingrédients, liés aux différents phénomènes physiques impliqués.

1.3.1 Les phénomènes physiques impliqués

Pendant le procédé, l'outil génère un intense échauffement et de fortes déformations plastiques au sein de la matière. L'échauffement produit pilote les cinétiques de transformation microstructurales se produisant dans le milieu, l'état microstructural influençant à son tour les propriétés mécaniques. Plusieurs phénomènes physiques sont donc couplés.

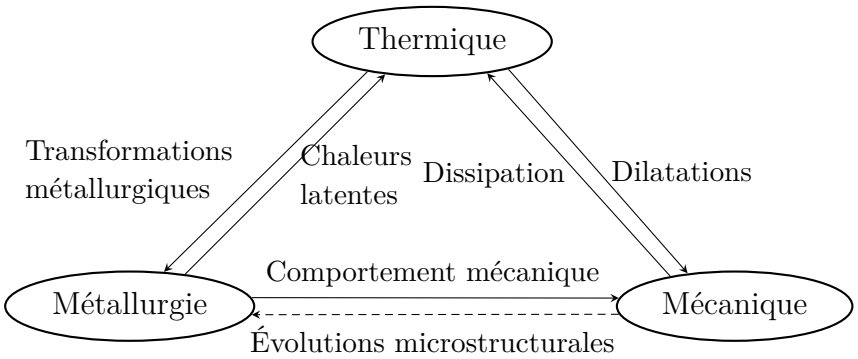


Figure 1.16 – Couplages multiphysiques

La figure 1.16 présente les différents phénomènes impliqués et leurs interactions. L'aspect thermique inclut l'apport de chaleur, les phénomènes de conduction et de convection dans le milieu. Le champ de température pilote les évolutions microstructurales et leurs cinétiques de transformation. En retour, ces transformations métallurgiques influent sur le champ de température par le biais des chaleurs latentes lorsqu'un changement d'état se produit. Les chaleurs latentes interviennent surtout dans les procédés de soudage par fusion, dans le cas du FSW le joint de soudure étant effectué à l'état solide, elles n'ont pas d'effets.

L'état mécanique est déterminé par le comportement mécanique de la matière et par les conditions aux limites du problème (chargements, blocages). Les états thermique et métallurgique du système modifient les propriétés mécaniques de la matière. La dépendance en fonction des phases des propriétés mécaniques, les dilatations thermiques et les

changements de volume se produisant au cours des transformations, la plasticité de transformation (LMD86a; LMD86b; LDD89a; LDD89b) ou sont des effets influant directement sur l'état mécanique du système.

L'état mécanique influe à son tour sur le champ de température au travers de la dissipation mécanique due aux déformations irréversibles. Ce couplage est souvent négligé dans le cas des procédés de soudage conventionnels qui ne mettent en jeu que de faibles vitesses de déformation. Dans le cas des procédés par friction et malaxage, les forts taux de déformation générés par le malaxage de l'outil donnent beaucoup plus d'importance à la dissipation mécanique et un couplage fort thermomécanique doit être pris en compte. Enfin l'état mécanique influe sur l'état métallurgique, les cinétiques de transformation dépendant aussi de l'état de contrainte. Un exemple classique est celui de la recristallisation dynamique se produisant dans la matière lorsque celle-ci est fortement malaxée. En fait, ce dernier couplage est souvent considéré comme étant du second ordre en terme d'ordre de grandeur et négligé.

1.3.2 La modélisation du Friction Stir Welding

1.3.2.1 La modélisation thermique

D'une manière générale, les modèles qu'on trouve dans la littérature sur le FSW incluent tout ou partie des phénomènes physiques impliqués. La partie thermique a été le phénomène le plus traité dans un premier temps. La prédiction du champ de température est cruciale dans un procédé de soudage, ce champ va par la suite piloter les évolutions microstructurales locales et donc influer sur les caractéristiques mécaniques locales de la matière. Cependant, comme dans tout procédé de soudage, une des grandes questions concerne la modélisation de l'apport de chaleur généré lors du procédé. Dans le cas du FSW, les deux mécanismes identifiés sont le frottement au contact outil/matière et les importantes déformations plastiques de la matière occasionnées par son malaxage.

Modèles des sources de chaleur

La première source de chaleur provenant du frottement au contact outil/matière peut être considérée dans un premier temps comme un flux surfacique de chaleur imposé au niveau de la zone de contact. Des travaux comme (KKRS06; SHW04) relient ce flux à la puissance totale fournie par l'outil. La pression de contact à l'interface étant supposée constante, ceci conduit à une répartition linéaire du flux surfacique avec le rayon du pion. Ces premiers modèles nécessitent de calculer l'intégrale de cette répartition sur la surface de contact, qui peut devenir plus complexe dans le cas de géométries particulières de l'outil. Ils nécessitent aussi d'être recalés sur l'expérience pour pouvoir être prédictifs, et se basent sur un choix a priori de la nature du contact outil/matière.

La nature du contact outil/matière est un point important pour la modélisation de la chaleur générée par l'outil. En effet, suivant la géométrie de l'outil et les matériaux en contact de l'outil et des pièces à souder, des conditions de collage, glissement ou mixtes au cours du procédé pourront être privilégiées (SHW04). L'étude de la nature du contact conduit alors à l'écriture du flux surfacique à partir de la chaleur dissipée par frottement. Ce genre d'approche nécessite donc d'effectuer un couplage avec un modèle mécanique afin d'avoir accès au champ de vitesse et à l'état de containte au niveau de la zone de contact.

Le flux imposé s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &\phi^d = \mathbf{F}_T \cdot [\![\mathbf{v}_T]\!] \\ &\text{avec } \mathbf{F} = F_N \mathbf{n} + \mathbf{F}_T \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $[\![\mathbf{v}_T]\!]$ représente le saut de la vitesse tangentielle à l'interface outil/matière, c'est-à-dire la vitesse de glissement, et $\mathbf{F}$ le vecteur contrainte décomposé sur une facette de normale $\mathbf{n}$. Cependant, la chaleur générée par frottement se propage dans les deux milieux en contact, c'est-à-dire l'outil et la matière. Un coefficient de partage est donc souvent introduit afin de quantifier la chaleur se propageant dans la matière. Ce dernier est généralement calculé à partir d'une loi des mélanges écrite à partir des effusivités de chacun des milieux en contact. L'effusivité d'un milieu est définie par la formule :

$$e = \sqrt{\rho C k} \tag{1.2}$$

où ρ, C, k dénotent respectivement la masse volumique, la chaleur spécifique et la conductivité thermique du milieu. Le flux imposé s'écrit alors :

$$\phi^d = \left(\frac{e_{\text{matière}}}{e_{\text{matière}} + e_{\text{outil}}} \right) \mathbf{F}_T \cdot [\![\mathbf{v}_T]\!] \tag{1.3}$$

Bien qu'on puisse établir la validité de ce type d'approche pour un problème unidimensionnel pour deux corps semi-infinis avec des propriétés thermiques constantes, son utilisation en 3D n'est que pure extrapolation.

La seconde source de chaleur provient de la dissipation plastique générée par le malaxagede la matière par l'outil. Cette source est généralement modélisée par un terme source dans l'équation de la chaleur, et est calculée à partir du taux de déformation plastique :

$$\mathcal{D}_{int} = \beta \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{1.4}$$

où β est connu sous le nom de coefficient de Quinney-Taylor. Il est généralement fixé à 0.9.

Le FSW est un cas typique de problème dans lequel un couplage fort thermomécanique doit être introduit dans le modèle. Bien qu'il soit d'usage dans les procédés conventionnels d'effectuer d'abord un calcul thermométallurgique couplé, suivi d'un calcul mécanique, la présence de forts taux de déformation nécessite pour le FSW la mise en place d'un calcul thermométallomécanique fortement couplé.

Interactions avec le milieu extérieur

Les interactions avec le milieu extérieur sont généralement modélisées par une condition d'échange, à la fois pour le contact avec l'air ambiant et avec le bâti. Cette condition s'écrit :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \mathbf{n} = h(T)(T - T_{\text{ext}}) \tag{1.5}$$

où le coefficient d'échange h varie en fonction de la température du bord du domaine considéré. Pour le contact pièces/support, le contact thermique est affecté par la pression de contact locale, l'outil n'appuyant que localement sur les structures à assembler, un faible jeu peut être créé dans certaines zones (SZK05).

Des conditions d'échange thermique par rayonnement peuvent aussi être incluses dans la modélisation (ZC04; Gue07; BF08) :

$$-k\boldsymbol{\nabla}T \cdot \mathbf{n} = \varepsilon\sigma(T^4 - T_{\text{ext}}^4) \tag{1.6}$$

où ε est l'émissivité des plaques d'aluminium et σ la constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$).

1.3.2.2 La modélisation métallurgique

Les modèles métallurgiques employés pour le Friction Stir Welding se restreignent généralement aux alliages d'aluminium, domaine d'application privilégié du procédé. Les transformations métallurgiques, lorsqu'elles sont modélisées, sont décrites de façon phénoménologique. Ces cinétiques de transformation sont modélisées par des équations différentielles. Les modèles les plus courants sont :

* *La cinétique isotherme de Johnson-Mehl-Avrami*, notamment utilisée dans (Feu05), exprime l'évolution de la proportion volumique de phase-fille en fonction du temps, à température constante :

$$x(t) = X\left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^n}\right) \tag{1.7}$$

  où τ et n sont des paramètres, $x(t)$ représente la proportion volumique de phase transformée et X la proportion maximale pouvant être transformée. Ce type de loi permet entre autres de décrire des cinétiques de recristallisation statique, notamment pour des alliages à durcissement par écrouissage.

* Un modèle *isotherme* de cinétique de *dissolution des précipités durcissants*, développé par Myhr et Grong (MG91), s'appliquant aux alliages à durcissement structural et utilisé notamment dans (Bas06a; FWDS07). On peut noter que ce modèle ne prend pas en compte l'influence des variables mécaniques sur le comportement métallurgique. Le phénomène de dissolution correspond à une instabilité des précipités lorsqu'ils sont portés à haute température. Ce modèle est fondé sur le mécanisme de diffusion des éléments de soluté dans la matrice. On note X_d la fraction de précipités dissous, t le temps du traitement isotherme et t^* un temps caractéristique. On a alors :

$$\begin{aligned} X_d = \left(\frac{t}{t^*}\right)^n \qquad & \text{où} \qquad t^* = t_r^* \exp\left[\frac{Q_{\text{eff}}}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_r}\right)\right] \\ & \text{et} \qquad Q_{\text{eff}} = Q_s + nQ_d \end{aligned} \tag{1.8}$$

  où R est la constante des gaz parfaits, n une constante positive (≤ 0.5) ; t_r^* représente le temps maximal pour dissoudre tous les précipités à la température T_r, Q_s correspond à l'enthalpie du solvus métastable et Q_d est l'énergie d'activation de diffusion.

  Dans le cas *anisotherme*, ce même modèle est modifié en divisant le cycle thermique anisotherme en une succession de paliers infinitésimaux isothermes (réaction isocinétique[2]) (GS02; LMDD85). On remplace dans l'équation (1.8) le terme $\frac{t}{t^*}$ par $\frac{\mathrm{d}t}{t^*}$,

2. Une réaction est qualifiée d'isocinétique si les incréments de transformation de pas de temps iso-

et on intègre sur le cycle global :

$$X_d = \left(\int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{t^*} \right)^n \tag{1.9}$$

La dureté en un point donné de la zone soudée est alors reliée à la fraction de précipités :

$$H_v = (1 - X_d)(H_{v_{\max}} - H_{v_{\min}}) + H_{v_{\min}} \tag{1.10}$$

où $H_{v_{\max}}$ et $H_{v_{\min}}$ sont les duretés respectives du métal de base et de l'alliage en l'absence de précipités.

1.3.2.3 La modélisation mécanique

D'une manière générale, les modèles mécaniques développés pour la simulation du FSW traitent essentiellement de la phase de soudage, identifiée comme stationnaire pour un observateur lié à la source mobile, la source de chaleur étant ici l'outil. Cette approche en repère mobile est bien commode, elle permet en effet de transformer un problème transitoire vue d'un repère lié au solide, en un problème stationnaire par changement de référentiel, moyennant l'introduction d'une vitesse convective dans les équations de bilan. Cette technique permet de réduire drastiquement le coût de calcul de la simulation.

Différents types de comportement mécanique

On peut identifier certains groupes de travaux au travers du comportement mécanique pris en compte. Les forts taux de déformation engendrés par le malaxage de l'outil rendent la matière pâteuse dans son voisinage, aussi la modélisation de l'écoulement de matière a été effectuée par un certain nombre d'auteurs (Uly02; CS05) en considérant des modèles de fluide visqueux ; le comportement est généralement décrit par une loi de fluide non-Newtonien de type Norton-Hoff (Feu05) ou Sellars-Tegart (CS05). Il est en effet particulièrement commode de ramener la simulation du Friction Stir Welding à un calcul d'écoulement fluide pour traiter correctement les zones à grandes déformations ; ceci permet d'éviter les problèmes numériques de remaillage liés à une approche traditionnelle solide, le maillage suivant la matière au cours de la déformation. (CS05) a en particulier étudié l'intérêt et les limites de ce type d'approche en utilisant un logiciel de Computational Fluid Dynamics (CFD). Avec une condition de contact collant outil/fluide (condition naturelle pour un fluide visqueux), il en ressort une surestimation de la taille de la zone malaxée et des valeurs des pics de températures et une forte sous-estimation des efforts lors du soudage.

Plus généralement, si cette approche permet de reproduire l'écoulement de la matière et les lignes de courant autour de l'outil pendant le procédé, ce type de relation de comportement instantanée ne permet pas d'avoir accès aux conséquences induites par la création du joint de soudure dans la structure. En effet, seules des lois incluant des effets d'histoire

thermes infinitésimaux sont additifs, ce qui correspond globalement à une règle de cumul linéaire. On peut l'écrire mathématiquement de façon générale par une équation différentielle dépendante de la température, à variables séparables :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{G(X)}{H(T)} \quad \rightarrow \quad \int_0^X \frac{\mathrm{d}X}{G(X)} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{H(T)}$$

Le terme de droite est dénommé la « force cinétique » du cycle thermique par rapport à l'évolution de la variable X.

peuvent permettre d'avoir accès aux champs résiduels, si importants en simulation numérique du soudage pour estimer la tenue en service de la structure.

Ces lois correspondent à des comportements de solide, et sont généralement couplées avec des approches numériques matérielles, c'est-à-dire que le maillage suit la matière dans son mouvement. Cependant comme on l'a dit, les forts taux de déformation se produisant dans le cas du FSW rendent particulièrement difficiles et coûteuses ce type d'approche. Des approches de type Lagrangienne-Eulérienne Arbitraire (ALE) permettent d'éviter une distorsion trop importante des éléments et de ne suivre que les bords du domaine d'intérêt, en introduisant une vitesse convective entre un point matériel et les noeuds du maillage. Ce type d'approche très intéressante n'élimine pourtant pas les procédures de replacement des noeuds ni les transferts de quantités par élément.

Les matériaux solides sont souvent considérés comme élasto(visco)plastiques. Parmi les modèles utilisés, on trouve la loi de Johnson-Cook, classiquement utilisée dans les problèmes de plasticité à forte vitesse de sollicitation tels que les chocs, impacts et mise en forme à haute vitesse de déformation. Cette loi s'écrit :

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) = \sigma_{eq} - \sigma_y(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, T) \leq 0 \\ &\sigma_y(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, T) = \left(A + B(\varepsilon^p_{eq})^n\right)\left(1 + C\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}^p_{eq}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{T - T_{\text{ref}}}{T_{\text{fus}} - T_{\text{ref}}}\right)^m\right) \end{aligned} \tag{1.11}$$

où σ_y est la contrainte d'écoulement, ε^p_{eq} la déformation plastique équivalente, $\dot{\varepsilon}^p_{eq}$ la vitesse de déformation plastique équivalente, $\dot{\varepsilon}_0$ la vitesse de déformation de référence, et $A, B, C, n, T_{\text{fus}}, T_{\text{ref}}$ et m des caractéristiques matériau.

Le contact outil/matière

La question de la nature du contact outil/matière est un point important non seulement pour la modélisation de la chaleur générée par l'outil, mais aussi pour la modélisation du chargement mécanique, c'est-à-dire de l'entraînement de la matière. En effet, suivant la géométrie de l'outil et les matériaux en contact de l'outil et des pièces à souder, des conditions de contact parfait, décollement et/ou glissement (avec/sans frottement) pourront être privilégiées (SHW04).

L'approche la plus simple consiste à considérer un contact parfait entre la matière et l'outil. Ceci revient à imposer une vitesse tangentielle égale à celle d'un point de l'enveloppe de l'outil. On peut aussi pondérer cette vitesse (Uly02), considérant alors un glissement à l'interface sans décollement possible.

Une autre approche consiste à imposer un cisaillement sur ce bord du domaine. Des lois de frottement sont alors utilisées pour établir une relation entre la vitesse de glissement et la containte tangentielle donnée en un point de la zone de contact. Les lois les plus utilisées sont généralement :

* **La loi de Coulomb**, pour laquelle deux états se présentent, considérant la décomposition (1.1) :
  - ▷ Adhérence :
  $$\text{si } \|\mathbf{F}_T\| < \mu|F_N| \quad \text{alors } [\![\mathbf{v}_T]\!] = 0 \tag{1.12}$$
  - ▷ Glissement :
  $$\text{si } \|\mathbf{F}_T\| = \mu|F_N| \quad \text{alors il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } [\![\mathbf{v}_T]\!] = -\lambda\mathbf{F}_t \tag{1.13}$$

où μ est le coefficient de frottement à l'interface et λ est déterminé par la résolution du problème mécanique aux limites. Ceci amène à la notion de cône de frottement : la résultante d'effort est située à l'intérieur du cône de frottement dans le cas de l'adhérence, ou sur le cône de frottement (et elle y reste) dans le cas du glissement. Dans la pratique, cette loi n'étant pas biunivoque est souvent régularisée pour des questions d'intégration numérique.

* **La loi de Norton-Hoff**, qui lie de façon biunivoque la contrainte tangentielle et la vitesse de glissement. Elle peut donc être facilement utilisée par des algorithmes d'intégration de relation de comportement :

$$\mathbf{F}_T = -\mu |F_N| \, \| [\![\mathbf{v}_T]\!] \|^{p-1} [\![\mathbf{v}_T]\!] \tag{1.14}$$

où les paramètres μ et p peuvent dépendre de la température.

En plus des conditions de frottement, peu de modèles prennent en compte des conditions de contact unilatéral. Bien que cette approche soit plus lourde à gérer numériquement, elle permet de simuler la formation de cavités, autrement dit de défauts, entre l'outil et la matière. Dans (SH05), Schmidt et al. prennent en compte ces conditions de contact au sein d'une approche ALE avec un matériau solide. Le contact est ici géré au travers d'un algorithme explicite de calcul (utilisation d'ABAQUS/EXPLICIT), ce qui permet d'alléger le modèle mais limite sévèrement la taille du pas de temps. Des techniques de « mass scaling » sont alors utilisées pour éviter que quelques éléments très petits ou trop rigides (dictant la taille du pas de temps du maillage complet) ne compromettent l'efficacité du calcul. On leur rajoute donc une petite masse, mais ceci n'est pas sans effet sur les forces de contact et donc la génération de chaleur par l'outil. Les auteurs indiquent tout de même que la simulation a necessité 14 jours de calcul pour atteindre un état stationnaire de soudage à partir de la phase de malaxage.

Le modèle développé par (Gue07) dans FORGE3 inclut aussi la prise en compte du contact unilatéral outil/matière. Le calcul est ici implicite, et une approche ALE avec un matériau élastoviscoplastique est effectuée de façon découplée, en incluant des étapes de remaillage basées sur des estimateurs d'erreur.

1.3.3 La modélisation du Friction Stir Spot Welding

Jusqu'ici peu de modèles ont été développés pour le Friction Stir Spot Welding. En effet, le procédé étant transitoire par essence, on ne peut tirer parti des approches eulériennes en repère mobile comme pour la phase de soudage dans le cas du Friction Stir Welding. L'aspect transitoire nécessite de pouvoir gérer de très grandes déformations du maillage, complexifiant singulièrement les techniques numériques à mettre en oeuvre. L'approche est donc ici nécessairement matérielle au sens où le maillage doit suivre les bords des pièces à souder, ainsi que le matériau solide.

Les seules publications sur le sujet sont pour l'instant celles de Awang et al. (AMFD05; AM10). Un calcul thermomécanique explicite est réalisé avec le logiciel ABAQUS / EXPLICIT. Des étapes de remaillage automatique sont intégrées au solveur explicite d'Abaqus en utilisant une approche ALE, ce qui permet de gérer les importantes distorsions du maillage. Ce type d'approche permet aussi d'éviter au maillage de devoir suivre le mouvement orthoradial des particules matérielles, ce qui serait quasi-impossible à réaliser.

L'utilisation d'un solveur explicite conduit souvent à utiliser une technique dite de « mass scaling » ; le calcul dure plus de deux semaines selon les auteurs (AM10).

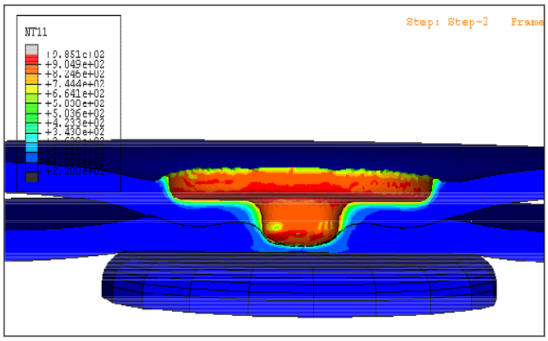


Figure 1.17 – Champ de température (AMFD05)

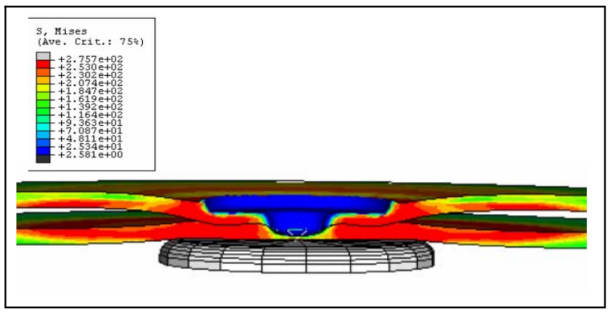


Figure 1.18 – Contrainte de von Mises (AMFD05)

Certaines approches ont été développées (BHSF06; Gue07; MRE08) pour la modélisation de la phase de plongée du Friction Stir Welding, proche du Friction Stir Spot Welding. La modélisation effectuée considère l'enfoncement de l'outil en rotation dans un massif en alliage d'aluminium. Les mêmes techniques numériques sont utilisées dans (MRE08). D'autres utilisent des solveurs implicites (FORGE3 dans (Gue07) et DEFORM3D dans (BHSF06)).

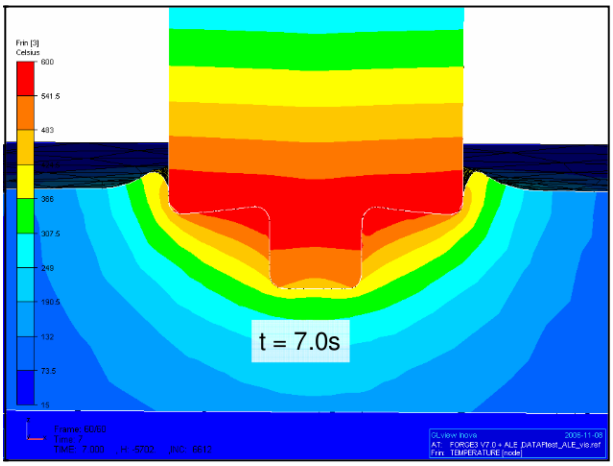


Figure 1.19 – Champ de température à la fin de la plongée (Gue07)

Résumé

* Dans la plupart des approches réalisées dans la littérature pour modéliser la phase de plongée du FSW ou le FSSW, les conditions de contact outil/matière ont été simulées en utilisant le solveur explicite d'Abaqus et son cadre ALE (SH05; MRE08; AM10) dans lequel une procédure automatique de remaillage a été intégrée. La loi de comportement choisie pour le matériau est généralement celle de Johnson-Cook.

* L'outil, quand il est modélisé, est considéré comme rigide. Il est parfois maillé pour une analyse thermique (BHSF06; Gue07). Le contact outil/matière est géré par pé-

nalité et une loi de frottement de type Coulomb, Tresca ou Norton est incluse pour modéliser le chargement mécanique.

* La géométrie de l'outil considérée est généralement la plus régulière possible pour alléger le calcul.

* Les conditions aux limites thermiques sont classiquement des conditions d'échange, le coefficient d'échange variant suivant la nature des milieux en contact. Les transferts radiatifs sont le plus souvent négligés.

1.4 Modélisation proposée du procédé FSSW

1.4.1 Idée principale de la modélisation proposée

Ce petit tour d'horizon des modèles existants dans la littérature nous a montré les principaux ingrédients utilisés jusqu'ici pour la modélisation numérique des procédés de soudage par friction et malaxage. Dans le cas du Friction Stir Spot Welding, procédé transitoire par essence, de fortes déformations sont générées au voisinage de l'outil, la matière est malaxée et rendue pâteuse. Lorsque l'outil est retiré après la création du joint ponctuel, cette matière fortement malaxée revient alors de cet état pâteux à l'état solide. Du point de vue de la modélisation, il est possible d'identifier au cours du process deux zones dans les pièces à souder correspondant à deux « phases », cette dénomination étant ici un peu détournée de son sens propre.

La première, fortement malaxée et proche de l'outil, est dans un état pâteux, elle se comporte comme un fluide très visqueux. La seconde, composant la structure de base, se déforme de façon classique comme un solide. Il se trouve qu'au cours du procédé, une zone va progresser au détriment de l'autre par chauffage (et malaxage) ou refroidissement.

Si l'on veut simuler numériquement ceci, les approches lagrangienne et eulérienne usuelles ne sont pas adaptées. En effet, dans une approche purement lagrangienne, le maillage suit la matière dans son mouvement, et les forts taux de déformation se produisant au voisinage de l'outil nécessiteraient alors d'effectuer de nombreux remaillages à mesure que celui-ci tourne, il serait particulièrement difficile de simuler de nombreux tours de l'outil dans la matière pour des questions de coût de calcul. D'autre part, une approche purement eulérienne ne permet pas de suivre les bords des pièces à souder durant le process. Une approche ALE dans laquelle le mouvement arbitraire du maillage est fixé de manière que cette grille suive le mouvement de la matière dans la « phase solide » mais pas dans la « phase pâteuse » peut permettre de simuler de nombreux tours de l'outil dans la matière tout en suivant les bords des tôles pendant le procédé de soudage.

En plus des différents traitements numériques (mouvement du maillage) de chaque zone, des relations de comportement cohérentes avec la nature et l'état de chaque zone sont utilisées dans le modèle. Aussi, on considérera la phase pâteuse comme un fluide très visqueux, la phase solide étant décrite par une relation prenant en compte les effets d'histoire durant le procédé. Ceci conduit à considérer que la zone soudée est représentée dans le modèle au travers d'un couplage fluide/solide. On observe que, dans le cas des procédés d'assemblage à haute température, ce couplage est un peu particulier car une phase peut progresser au détriment de l'autre par changement de phase.

Cette vision permet de concilier les approches usuelles en simulation numérique du soudage qui se focalisaient soit sur la modélisation du process lui-même (le bain fondu

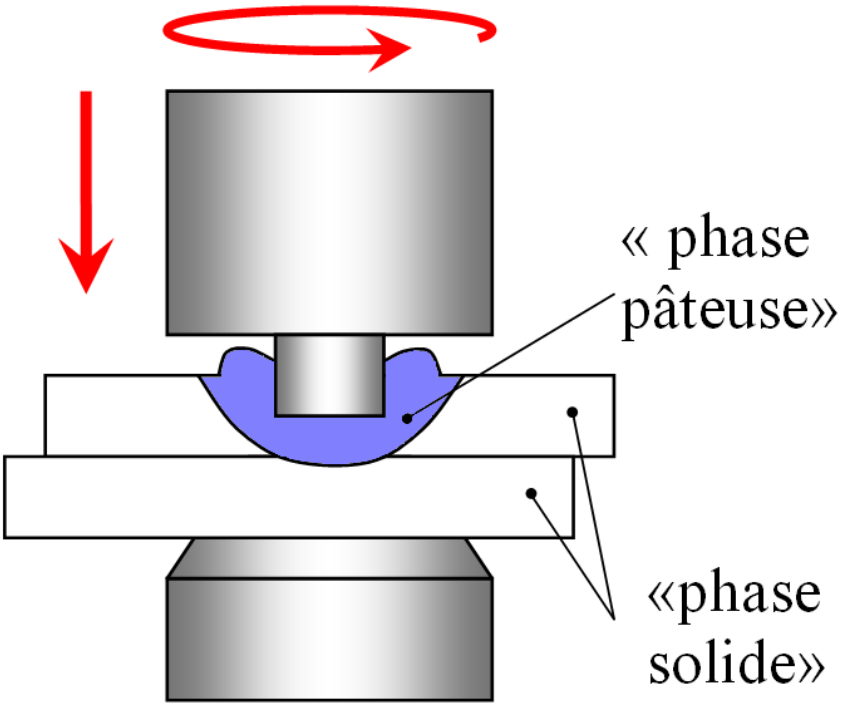


Figure 1.20 – Phases pâteuse et solide

dans le cas des procédés de soudage par fusion) soit sur les conséquences induites, c'est-à-dire les contraintes et distorsions résiduelles. Ce modèle allie donc des comportements instantané et dépendant de l'histoire dans des zones qui cohabitent, respectivement traitées en approche ALE (le maillage suit les bords mais pas la matière pâteuse) et lagrangienne (le maillage suit la matière dans son mouvement).

1.4.2 Approche euléro-lagrangienne

La simulation du Friction Stir Spot Welding implique de pouvoir traiter de très grandes déformations. On l'a dit, les traditionnelles approches lagrangiennes et eulériennes ne sont pas appropriées pour traiter ce type de problème. Les approches euléro-lagrangiennes arbitraires (ALE), introduites par Donea et al. (DGH82), représentent une alternative aux approches traditionnelles. L'idée principale d'une approche ALE est de dissocier les mouvements de la matière et du maillage. On introduit alors une configuration supplémentaire appelée configuration ALE (de référence), laquelle sert de support au maillage.

La combinaison des approches traditionnelles, comme l'indique le terme ALE, est arbitraire, et définie par l'utilisateur en spécifiant le mouvement du maillage. L'idée est donc d'effectuer un choix de mouvement du maillage qui soit tel que la distorsion des éléments au cours du process soit la plus faible possible tout en suivant les surfaces libres.

On introduit donc dans une approche euléro-lagrangienne les trois configurations suivantes :

* *La configuration actuelle* Ω, contenant les particules matérielles à l'instant t.
* *La configuration initialle* Ω_X, qui correspond à la configuration matérielle à l'instant initial $t = 0$.

* *La configuration ALE* Ω_χ ou de référence. Elle sert de support au maillage, dont le mouvement est dissocié de celui de la matière.

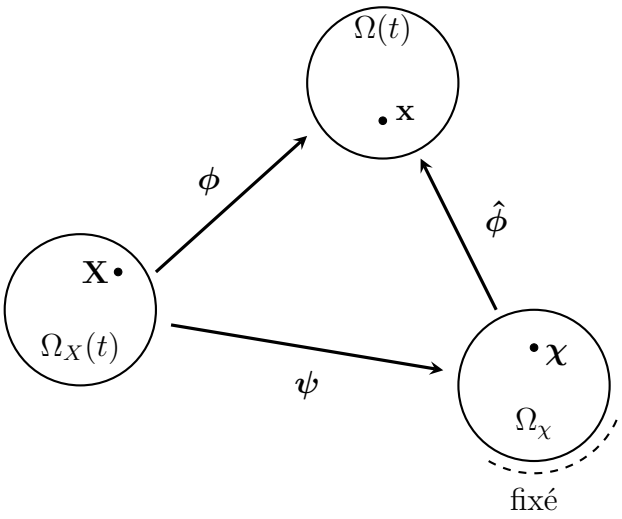


Figure 1.21 – Mapping entre les différents domaines dans une approche ALE

L'introduction de la configuration ALE conduit à définir les deux fonctions placement suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi} &= \boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{x} &= \hat{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\chi}, t) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Le mouvement des particules matérielles est donné par la fonction placement $\boldsymbol{\phi}$, il peut aussi être exprimé par une loi de composition du mouvement du maillage et du placement $\boldsymbol{\psi}$:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) = \hat{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}, t), t) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\phi} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \circ \boldsymbol{\psi} \tag{1.16}$$

On peut ensuite définir les vitesses relatives entre chacune de ces trois configurations, pour un observateur lié à un système de coordonnées donné :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) &= \left.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\chi}, t) &= \left.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{\chi}} \\ \mathbf{w}(\mathbf{X}, t) &= \left.\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} \end{aligned} \tag{1.17}$$

En dérivant la loi de composition (1.16) par rapport au temps, il vient la relation liant ces trois vitesses relatives :

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{X}, t) + \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\chi}, t) \tag{1.18}$$

On observe qu'en particularisant la définition de la configuration ALE, on retrouve les descriptions cinématiques classiques :

- ⋆ En identifiant les configurations initiale Ω_X et ALE Ω_χ (on identifie les coordonnées $\boldsymbol{\chi}$ aux coordonnées $\mathbf{X}$), les placements $\boldsymbol{\phi}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ s'identifient, la vitesse $\mathbf{w}$ s'annule et la vitesse d'une particule matérielle s'identifie à celle du maillage $\hat{\mathbf{v}}$, on retrouve alors la description lagrangienne matérielle.

- ⋆ En identifant la configuration ALE Ω_χ avec la configuration courante Ω (on identifie les coordonnées $\boldsymbol{\chi}$ aux coordonnées $\mathbf{x}$), les placements $\boldsymbol{\phi}$ et $\boldsymbol{\psi}$ s'identifient, la vitesse du maillage $\hat{\mathbf{v}}$ s'annule, on retrouve une approche eulérienne classique.

En description ALE, les champs mécaniques sont habituellement exprimés en fonction des coordonnées de référence $\boldsymbol{\chi}$. Il s'ensuit que les dérivées temporelles intervenant dans les équations de bilan sont aussi calculées au point $\boldsymbol{\chi}$. Considérons une fonction $f(\boldsymbol{\chi}, t)$, sa dérivée temporelle totale s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\chi}, t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \left.\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{w} \tag{1.19}$$

Considérant la loi de composition $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}}$, et définissant la vitesse convective $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$ comme la différence entre la vitesse matérielle et celle du maillage, il vient l'expression de la dérivée en injectant (1.18) dans (1.19) :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\chi}, t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{\chi}} + (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \tag{1.20}$$

La dérivée particulaire fait donc intervenir la vitesse convective, différence des vitesses matérielle et de celle du maillage. On retrouve bien ici aussi les descriptions cinématiques habituelles en imposant à la vitesse du maillage d'être soit nulle (approche eulérienne) soit égale à la vitesse matérielle (description lagrangienne).

D'un point de vue numérique, si l'approche ALE combine les avantages des traditionnelles descriptions lagrangienne et eulérienne, elle en combine aussi les inconvénients. Le traitement des termes convectifs, commun aux formulations eulériennes, et la mise en place de procédures de remaillage habituellement utilisées en description lagrangienne, représentent les deux principales difficultés à traiter avec ce type d'approche. La mise en oeuvre numérique d'une approche de ce type sera étudiée plus en détail dans le second chapitre.

1.4.3 Modélisation du problème

1.4.3.1 Hypothèses et ingrédients du modèle

L'objectif de ces travaux est de mettre en place une approche basée sur le couplage fluide/solide, et de vérifier sa faisabilité. Aussi, ce couplage représentant le « noyau dur » du modèle, d'autres ingrédients souvent intégrés et importants notamment pour la simulation numérique du soudage ne seront pas ici considérés pour simplifier la construction du modèle dans une première approche :

- ∗ **Le contact unilatéral** n'est pas inclus dans le modèle présenté dans ces travaux. Bien qu'important notamment pour la simulation de la création de défauts au cours du procédé, il reste un ingrédient annexe à la construction du couplage fluide/solide.

La conséquence de ce choix est que la simulation finale sera effectuée sur une structure monobloc, et non pas sur deux tôles superposées, configuration généralement adoptée pour le Friction Stir Spot Welding.

* **L'outil** n'est pas modélisé. Les interactions thermiques entre l'outil et le matériau sont négligées, on suppose que la forte pression exercée par l'outil conduit à un contact suffisamment bien établi pour que la différence de température soit très faible. Des conditions équivalentes pour la modélisation du frottement et de la génération de chaleur par l'outil sont incluses dans le modèle.

* **Le couplage avec la métallurgie** n'est pas non plus inclus dans le modèle. La mise en place de ce couplage fera partie d'une seconde approche. En effet, le modèle est développé dans le code éléments finis SYSWELD® (SYS07) distribué par ESI Group, ce code présente l'intérêt d'être capable de simuler de nombreuses cinétiques de transformations métallurgiques. La connexion, au sein du code, du modèle implémenté ici avec la métallurgie fera l'objet d'un travail ultérieur.

Le modèle proposé est alors composé d'un couplage thermomécanique fort, dans lequel la partie mécanique peut impliquer un comportement fluide ou solide. Ceci implique l'existence de « transformation de phase » devant être simulées.

1.4.3.2 Écriture forte du problème

Le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ est composé d'une structure monobloc, présentant deux phases cohabitantes Ω_f (fluide) et Ω_s (solide) telles que :

$$\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s, \qquad \Omega_f \cap \Omega_s = \emptyset \tag{1.21}$$

La frontière du domaine Ω se décompose de la façon suivante :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_v \cup \partial\Omega_F \qquad \emptyset = \partial\Omega_v \cap \partial\Omega_F \tag{1.22}$$

$$\partial\Omega = \partial\Omega_\theta \cup \partial\Omega_q \qquad \emptyset = \partial\Omega_\theta \cap \partial\Omega_q \tag{1.23}$$

où $\partial\Omega_v$ et $\partial\Omega_\theta$ sont respectivement les parties du bord sur lesquelles une vitesse et une température sont prescrites. Le flux surfacique de chaleur et des forces surfaciques sont de la même manière respectivement prescrits sur les parties $\partial\Omega_q$ et $\partial\Omega_F$ du bord. Le problème est alors défini comme suit :

Trouver le couple $(\mathbf{v}(\mathbf{x},t), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t))$ défini sur $\Omega \times [0,T]$ tel que :

⋆ **Partie fluide**

$$\begin{array}{ll}
\rho C \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r - \operatorname{div} \mathbf{q} & \text{(CE)}\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_f \\
\left.\begin{array}{l} \rho \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{s} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{array}\right\} & \text{(N-S)}\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_f \\
\left.\begin{array}{l} \mathbf{q} = -k^{(f)}(T) \boldsymbol{\nabla} T \\ \mathbf{s} = 2\mu(\mathbf{v}, T)\mathbf{D} \end{array}\right\} & \text{(RdC)}\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_f \\
\text{avec } \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{1}\ , \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v})^T) &
\end{array} \tag{1.24}$$

où r représente une source volumique de chaleur, $\mathbf{f}$ les forces de volume, ρ la masse volumique, C la chaleur spécifique, μ la viscosité dynamique du fluide, $k^{(f)}$ la conductivité thermique du fluide, $\mathbf{q}$ le flux surfacique de chaleur, p la pression hydrostatique, $\mathbf{s}$ le déviateur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, et $\mathbf{D}$ le tenseur des taux de déformation eulérien.

⋆ **Partie solide**

$$\begin{array}{ll} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \beta \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p + r - \text{div } \mathbf{q} & \text{(CE)} \ \forall \mathbf{x} \in \Omega_s \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 & \text{(PFS)} \ \forall \mathbf{x} \in \Omega_s \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{q} = -k^{(s)}(T) \boldsymbol{\nabla} T \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(T, \mathbf{D}(\mathbf{v}(\tau), \tau \leq t), \quad \forall t \in [0, T] \end{array}\right\} & \text{(RdC)} \ \forall \mathbf{x} \in \Omega_s \end{array} \tag{1.25}$$

où β est le coefficient de Quinney-Taylor déjà introduit dans la section précédente, $k^{(s)}$ la conductivité thermique du solide, et $\mathbf{D}^p$ la partie inélastique du taux de déformation eulérien. Ceci correspond à l'hypothèse d'une partition additive en grandes transformations du taux de déformation en parties élastique et inélastique :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \tag{1.26}$$

Enfin, $\mathcal{F}$ est une fonctionnelle décrivant la relation de comportement dépendant de l'histoire du solide, elle peut dépendre ou non de la vitesse de chargement.

⋆ **Conditions aux limites**

$$\begin{array}{ll} T = T^d & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\theta \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}^d & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_v \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \mathbf{n} = \phi^d & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_q \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_d & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F \\ T^{(s)} = T^{(f)} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mathbf{v}^{(s)} = \mathbf{v}^{(f)} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mathbf{q}^{(s)} \cdot \mathbf{n}^{(s)} + \mathbf{q}^{(f)} \cdot \mathbf{n}^{(f)} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \\ \boldsymbol{\sigma}^{(s)} \cdot \mathbf{n}^{(s)} + \boldsymbol{\sigma}^{(f)} \cdot \mathbf{n}^{(f)} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \end{array} \tag{1.27}$$

où Γ représente l'interface fluide/solide, sur laquelle on prescrit la continuité de la vitesse, de la température, du vecteur contrainte et du flux surfacique de chaleur.

⋆ **Conditions Initiales**

$$\begin{array}{ll} T(\mathbf{x}, t = 0) = T_0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{array} \tag{1.28}$$

Commentaires :

L'état thermomécanique est régi par la conservation de l'énergie et les équations de Navier-Stokes dans la partie fluide, l'écoulement étant considéré laminaire et incompressible. Dans la partie solide, les quantités d'accélération sont négligées car le process est ici quasi-statique. On écrit la conservation de l'énergie et l'équilibre local, la relation de comportement solide dépend de l'histoire et est de type visqueux ou non. Enfin, des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann sont prescrites sur le bord (on suppose aussi que $\text{mes}(\partial\Omega_v) \neq 0$ pour que le problème soit bien posé). La continuité de la vitesse, de la température, du flux de chaleur et des efforts est aussi assurée à l'interface fluide/solide. Enfin, des conditions initiales sont ajoutées pour clore la définition du problème.

1.4.3.3 Le comportement thermomécanique

Comportement fluide

Le comportement de la partie fluide peut être modélisé à partir de la loi de Norton-Hoff couramment mise en oeuvre pour la modélisation des procédés de mise en forme à chaud. Il s'agit d'un fluide dont la viscosité dépend à la fois de la vitesse et de la température. La relation de comportement est définie sur le déviateur des contraintes et fait intervenir un potentiel convexe ϕ (nul à l'origine) :

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{D}} \tag{1.29}$$

Le potentiel est défini comme suit :

$$\phi(T, \mathbf{v}) = \frac{K}{n+1} \left(\sqrt{3} D_{eq}\right)^{n+1} \tag{1.30}$$

où $D_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\mathbf{D} : \mathbf{D}}$ est le taux de déformation équivalent (second invariant de $\mathbf{D}$). Ce potentiel fait intervenir deux paramètres thermodépendants, K la « consistance » ainsi qu'une sensibilité n à la vitesse de déformation. La relation de comportement fluide s'écrivant traditionnellement :

$$\mathbf{s} = 2\mu(T, \mathbf{v})\mathbf{D} \tag{1.31}$$

l'identification de la viscosité dynamique vient alors immédiatement :

$$\mu(T, \mathbf{v}) = K \left(\sqrt{3} D_{eq}\right)^{n-1} \tag{1.32}$$

Comportement solide : définition d'un modèle élastoplastique

On se place dans le cadre de la thermodynamique à variables internes, où une série de variables dites « d'état » est censée définir complètement l'état et l'histoire du matériau, et ceci à chaque instant et en tout point de la structure. Traitant des métaux, nous nous restreignons ici au cadre des matériaux dits *standards généralisés*, pour lesquels il nous faut définir :

- Les variables d'état (observables et internes).
- Le potentiel thermodynamique, permettant de faire apparaître les lois d'état.
- Le pseudo-potentiel de dissipation, qui dans le cadre de la plasticité associée, se confond avec le critère. Ce potentiel nous donne accès aux lois d'écoulement ou d'évolution des variables internes.

On se place aussi dans le cadre des grandes transformations avec une formulation eulérienne. Le plus naturel dans ce cas est, comme cela a déjà été évoqué (2.46) et par analogie avec les petites perturbations, de postuler une partition additive du tenseur eulérien des taux déformation en parties élastique, inélastique et thermique :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p + \dot{\varepsilon}^{th}\mathbf{1} \tag{1.33}$$

En utilisant une telle partition, nous sommes conduit à utiliser une loi d'hypoélasticité pour modéliser la partie élastique du comportement du matériau. Évidemment ceci provient directement du choix de la mesure de déformation effectuée (i.e. $\mathbf{D}$). L'utilisation de cette mesure de déformation présente deux inconvénients :

* Premièrement, l'intégrale du tenseur des taux de déformation ne s'annule pas sur un cycle fermé de déformation (BLM00) ; ceci est donc incohérent avec la notion d'élasticité. Ceci dit, traitant des métaux, la partie élastique étant faible devant la partie plastique, on peut considérer ce défaut comme peu important.

* le second découle du premier ; la relation de comportement élastoplastique lie le taux de déformation élastique à un taux de contrainte, et doit faire intervenir une dérivée temporelle devant satisfaire au principe d'objectivité matérielle. Il faut donc effectuer un choix de dérivée objective.

Dans la suite, le formalisme thermodynamique n'est pas complètement développé, pour plus de détails on pourra consulter (LCBD09). Les équations constitutives peuvent être résumées comme suit :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p + \dot{\varepsilon}^{th}\mathbf{1} \\
&\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{K} : \mathbf{D}^e \\
&f_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) \leq 0 \\
&\mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
&\overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda}\frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{X}} \\
&\dot{p} = -\dot{\lambda}\frac{\partial f_p}{\partial R} \\
&\dot{\lambda} \geq 0,\ f_p \leq 0,\ \dot{\lambda} f_p = 0
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

Commentaires :

- Le critère f_p choisi est celui de Misès.
- La loi d'écoulement s'écrit ici avec la partie plastique du taux de déformation eulérien.
- Le formalisme associé permet, suivant la dérivée objective choisie, d'obtenir un module tangent symétrique, et donc une matrice tangente symétrique.
- Suivant la dérivée objective choisie, les modules d'élasticité $\mathbb{K}$ seront différents pour un même matériau identifié expérimentalement.
- L'écouissage cinématique fait aussi intervenir une dérivée objective.
- Un écrouissage isotrope de variable p est aussi introduit.
- Les conditions de Kuhn-Tucker restent inchangées par rapport au cas des petites perturbations.

Dans le code SYSWELD®, seules les dérivées de Jaumann et Green-Naghdi sont implémentées, elles sont de plus associées au critère de Misès. On peut alors particulariser

les équations (1.35) telles que :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p + \dot{\varepsilon}^{th}\mathbf{1} \\
&\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu\mathbf{D}^e + \lambda^e(\mathrm{tr}\mathbf{D}^e)\mathbf{1} \\
&f_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = \sigma_{eq} - R - \sigma_y \leq 0 \\
&\text{avec} \quad \sigma_{eq} = J_2(\mathbf{s} - \mathbf{X}) = \sqrt{3s_{II}} = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{X}) : (\mathbf{s} - \mathbf{X})} \\
&\mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\frac{3}{2}\frac{\mathbf{s} - \mathbf{X}}{\sigma_{eq}} \\
&\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda}\frac{3}{2}\frac{\mathbf{s} - \mathbf{X}}{\sigma_{eq}} = \mathbf{D}^p \\
&\dot{p} = \dot{\lambda} \\
&\mathbf{X} = \frac{2}{3}C\boldsymbol{\alpha} \\
&R = Qp \\
&\dot{\lambda} \geq 0, \ f_p \leq 0, \ \dot{\lambda}f_p = 0
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

Remarque :

Le cas de l'élastoplasticité peut aisément être étendu au cas de l'élastoviscoplasticité. Le multiplicateur n'est alors plus déterminé en maximisant la dissipation mais par le biais d'une loi de fluage, une contrainte visqueuse (« overstress ») est alors introduite. Pour plus de compléments sur la viscoplasticité et le passage à la limite pour la plasticité, on pourra consulter (LCBD09; BCCF01; FH98).

1.4.3.4 Critère fluide/solide

Durant le process, une partie peut progresser au détriment de l'autre par changement de phase. Ceci implique de spécifier les modalités de ce changement au travers de l'écriture d'un critère de transition fluide/solide. On peut proposer un critère portant :

* Sur la valeur de la température en un point matériel.
* Sur la valeur du taux de déformation équivalent D_{eq} en un point, traduisant l'intensité du malaxage que ce point subit.
* On peut enfin envisager d'effectuer une combinaison des propositions précédentes.

Un exemple de critère ainsi que son traitement sera présenté dans le second chapitre.

Remarque :

Comme indiqué plus haut, pour l'instant on ne considère pas de couplage avec la métallurgie. Ce type de couplage permettrait de faire porter le critère sur des changements de phase réels, en recalant notamment le modèle à partie de données expérimentales obtenues par exemple à partie de diagrammes Temps-Température-Transformation.

1.4.3.5 Les conditions aux limites

La géométrie considérée est présentée sur la figure 1.22. Des conditions aux limites thermiques et mécaniques sont prescrites sur différentes parties du bord :

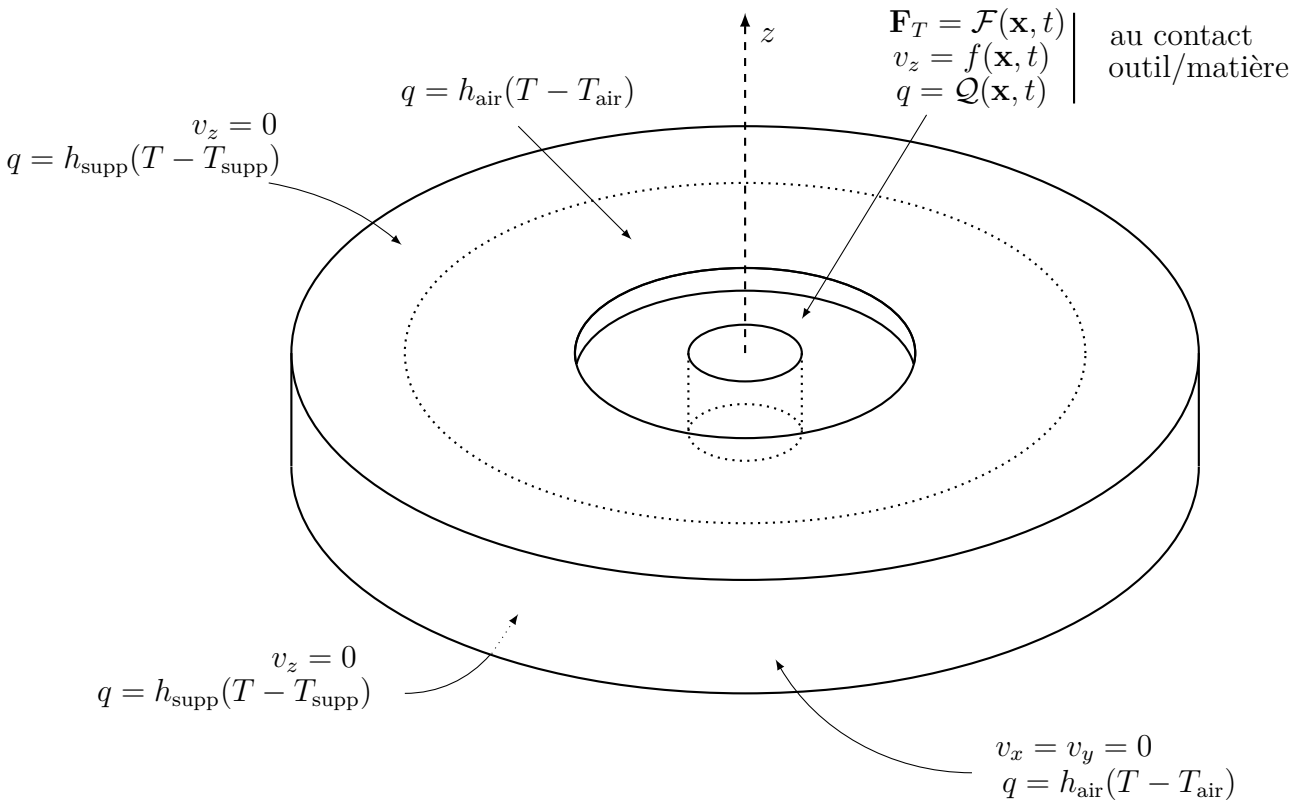


Figure 1.22 – Conditions aux limites thermiques et mécaniques

* *Les échanges thermiques* entre la tôle soudée et l'air environnant sont modélisés à partir d'un coefficient d'échange h_{air} :

$$-k\boldsymbol{\nabla}T \cdot \mathbf{n} = h_{\text{air}}(T - T_{\text{air}}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\text{air}} \tag{1.36}$$

où k est la conductivité thermique et T_{air} est la température du milieu environnant. De la même manière, le contact thermique entre la tôle soudée et le support de soudage est modélisé à partir d'un coefficient d'échange h_{supp} :

$$-k\boldsymbol{\nabla}T \cdot \mathbf{n} = h_{\text{supp}}(T - T_{\text{supp}}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\text{supp}} \tag{1.37}$$

* *Les conditions de blocage* de la tôle soudée sont schématisées en prescrivant une ou plusieurs composantes de vitesse nulles, au contact avec le support, sur une partie supérieure au contact avec les éléments de maintien en position mais aussi sur le côté du cylindre. Ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} v_z &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\text{MAP}} \\ v_z &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\text{supp}} \\ v_x = v_y &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\text{side}} \end{aligned} \tag{1.38}$$

∗ *Le chargement thermomécanique de l'outil.* La modélisation du contact outil/matière est une des parties les plus complexes de la modélisation du FSW. Le frottement est modélisé à partir du modèle de Norton présenté dans la section précédente :

$$\mathbf{F}_T = -K \, \|[\![\mathbf{v}_T]\!]\|^{p-1} [\![\mathbf{v}_T]\!] \tag{1.39}$$

où p et K sont des paramètres dépndants de la température. La dissipation surfacique à l'interface qui en résulte s'écrit :

$$\phi = \mathbf{F}_T \cdot [\![\mathbf{v}_T]\!] = -K \, \|[\![\mathbf{v}_T]\!]\|^{p+1} \tag{1.40}$$

Cette puissance dissipée est partagée entre l'outil et la matière, et répartie au moyen d'un coefficient de partage α compris entre 0 et 1, défini à partir des effusivités des deux milieux :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{e_{\text{matière}}}{e_{\text{matière}} + e_{\text{outil}}} \\ \text{avec} \quad e &= \sqrt{\rho C k} \end{aligned} \tag{1.41}$$

La part de puissance reçue par le matériau est alors donnée par :

$$-k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \mathbf{n} = \phi^d = -\alpha K \, \|[\![\mathbf{v}_T]\!]\|^{p+1} \tag{1.42}$$

Bien que cette modélisation simplifie la nature du contact thermique, elle représente une première approche qualitative.

1.4.4 Synthèse

En résumé, le modèle proposé pour la simulation numérique du Friction Stir Spot Welding est centré sur la mise en place d'un couplage fluide/solide, et s'articule autour des points suivants :

- ⋆ Traitement numérique différent des deux phases : approche ALE.
  - ▷ le maillage suit la matière dans la phase solide
  - ▷ il ne la suit pas dans la phase pâteuse
- ⋆ Relations de Comportement cohérentes avec les phases considérées
- ⋆ Couplage fort thermomécanique
- ⋆ Procédé instationnaire
- ⋆ Propagation de l'interface fluide/solide au cours du process

Un bref récapitulatif du modèle thermomécanique avec couplage fluide/solide est donné dans le tableau 1.2. Dans les accolades, le terme du haut est relatif au domaine fluide, celui du bas au domaine solide.

1.5 Conclusions

Dans ce chapitre, les procédés de soudage par friction et malaxage (resp. Friction Stir Welding et Friction Stir Spot Welding) ont d'abord été présentés. Leurs principes ainsi que la mise en oeuvre technologique associée (outils, matériaux, pilotage de la machine, paramètres process) ont aussi été décrits. Ces procédés de soudage relativement récents

Modélisation des transferts thermiques	
Bilan d'énergie	$\rho C \left\{ \begin{array}{c} \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right\|_{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\nabla}_x T \\ \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right\|_{\mathbf{X}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \\ \beta\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p \end{array} \right\} + r + \mathrm{div}(k\boldsymbol{\nabla}_x T)$
Conditions aux limites	$\left\{ \begin{array}{l} \phi^d = \alpha \mathbf{F}_T \cdot [\![\mathbf{v}_T]\!] \quad \text{au contact outil/matière} \\ \text{échanges convectifs sur les autres surfaces} \end{array} \right.$
Conditions initiales	$T(\mathbf{x}, t=0) = T_0(\mathbf{x})$, en fait répartition uniforme initiale
Modélisation de la mécanique	
Équations du mouvement	$\rho \left\{ \begin{array}{c} \left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right\|_{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\nabla}_x \mathbf{v} \\ 0 \end{array} \right\} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}$
Comportement mécanique	$\left\{ \begin{array}{l} \text{fluide : } \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu(T,\mathbf{v})\mathbf{D} \\ \mu(T,\mathbf{v}) = K\left(\sqrt{3}D_{eq}\right)^{n-1} \\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0 \end{array} \right. \\ \text{solide : } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p + \dot{\varepsilon}^{th}\mathbf{1} \\ \overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu^e\mathbf{D}^e + \lambda^e(\mathrm{tr}\mathbf{D}^e)\mathbf{1} \\ f_p = J_2(\mathbf{s}-\mathbf{X}) - R - \sigma_y \leq 0 \\ \mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}-\mathbf{X}}{\sigma_{eq}}\ , \quad \overset{\triangledown}{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda}\frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}-\mathbf{X}}{\sigma_{eq}} = \mathbf{D}^p \\ \dot{p} = \dot{\lambda}\ , \quad \mathbf{X} = \frac{2}{3}C\boldsymbol{\alpha}\ , \quad R = Qp \\ \dot{\lambda} \geq 0,\ f_p \leq 0,\ \dot{\lambda} f_p = 0 \end{array} \right. \\ \text{+critère fluide/solide} \end{array} \right.$
Conditions aux limites	$\left\{ \begin{array}{l} \text{- Plongée de l'outil } v_z = f(\mathbf{x},t) \\ \text{- Frottement de l'outil } \mathbf{F}_T = -K\ \|[\![\mathbf{v}_T]\!]\|^{p-1}[\![\mathbf{v}_T]\!] \\ \text{- Blocage surface inférieure } v_z = 0 \\ \ \text{et latérale } v_x = v_y = 0 \\ \text{- Continuité de la vitesse et du vecteur traction} \\ \ \text{à l'interface fluide/solide} \end{array} \right.$
Conditions initiales	$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t=0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$
Mouvement du maillage	$\hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\chi}, t)$ donné : suit la matière dans la partie solide mais pas dans la partie fluide, suit la surface libre

Tableau 1.2 – Récapitulatif du modèle thermomécanique avec couplage fluide/solide

présentent des avantages particulièrement attractifs pour le soudage en bout-à-bout ou ponctuel, mais nécessitent d'être mieux maîtrisés.

La simulation numérique de ces procédés peut permettre de compléter l'approche expérimentale tant sur le plan de sa compréhension que sur celui de sa maîtrise technologique. La modélisation est rendue particulièrement complexe notamment à cause des différents phénomènes physiques couplés intervenant. On trouve dans la littérature un certain nombre d'approches pour la simulation du Friction Stir Welding, tirant notamment parti d'une description en référentiel mobile. Le Friction Stir Spot Welding et la partie transitoire du FSW ont été beaucoup moins considérés, les principales difficultés proviennent des très grandes déformations générées associées à l'aspect transitoire.

L'idée, en fait inspirée des procédés de soudage par fusion, de faire cohabiter deux phases fluide et solide, pouvant chacune progresser au détriment de l'autre au cours du process, apparaît particulièrement intéressante pour la simulation du Friction Stir Spot Welding. Cette cohabitation couplée avec une description ALE permet d'éviter de suivre le mouvement orthoradial de la matière dû au malaxage de l'outil, de suivre les frontières libres, mais aussi d'éviter les transferts numériques de champs par élément dans la zone malaxée, du fait de l'utilisation d'une relation de comportement sans effets d'histoire pour le fluide. Enfin cette zone malaxée étant « supportée » par une zone solide, l'histoire vécue par la matière est prise en compte permettant l'accès aux champs résiduels à la fin du process.

Dans ce premier chapitre, le problème a été posé de manière forte en se centrant dans un premier temps sur l'aspect couplage. La discrétisation, l'implémentation et plus généralement la mise en oeuvre numérique pour la résolution de ce problème fait l'objet du second chapitre.

Chapitre 2

Un élément fini mixte pour la modélisation de comportements incompressibles

Dans ce second chapitre, on détaille la formulation de l'élément fini mixte P1+/P1 pour des comportements de fluide et de solide. Par la suite, la stratégie de couplage de ces deux éléments est présentée. Ce couplage est introduit dans une approche euléro-lagrangienne permettant de traiter de grandes déformations.

Sommaire

2.1 Introduction **41**
2.2 L'élément P1+/P1 . . . . . **42**
2.3 Élément fluide **44**
2.3.1 Formulation faible 44
2.3.2 Formulation aux éléments finis 45
2.3.3 Condensation statique du noeud bulle 49
2.3.4 Résolution 52
2.3.5 Calcul du champ bulle 52
2.3.6 Commentaires 53
2.4 Élement solide **53**
2.4.1 Formulation faible 54
2.4.2 Formulation aux éléments finis 55
2.4.3 Condensation statique du noeud bulle 58
2.4.4 Résolution 58

2.4.5 Conditions aux limites avec une formulation en vitesses en mécanique des solides 59
2.5 Stratégie de calcul pour le couplage fluide/solide 59
2.5.1 Le couplage fluide/solide 60
2.5.2 Approche euléro-lagrangienne : mise en oeuvre numérique 61
2.5.3 Actualisation de la géométrie 63
2.5.4 Commentaires 70
2.6 Conclusions 71

2.1 Introduction

On observe expérimentalement que beaucoup de matériaux se comportent d'une telle façon que leur déformation, ou une partie de leur déformation, peut être considérée comme incompressible. C'est le cas notamment des matériaux hyperélastiques ou élasto-(visco)-plastiques en grandes transformations. Des comportements similaires apparaissent aussi en mécanique des fluides lorsqu'on considère des écoulements laminaires incompressibles, régis par les équations de Navier-Stokes. La capacité à pouvoir traiter efficacement ce type de comportement est donc particulièrement importante en analyse non linéaire.

D'un point de vue numérique, la simulation de ce type de comportement avec des éléments finis isoparamétriques classiques, reposant sur les schémas d'intégration habituels, ne fonctionne pas bien. En effet, les éléments d'ordre peu élevé ont tendance à faire apparaître des phénomènes de verrouillage (BLM00). Pour éliminer ce phénomène, des approches numériques ont été développées, principalement sur la base de formulations mixtes ou de techniques de sous-intégration. La sous-intégration permet de réduire le nombre de contraintes introduites par élément, mais peut conduire selon le type d'élément à la présence de modes de déformation à énergie nulle, des traitements numériques supplémentaires sont donc nécessaires pour stabiliser le champ solution. Dans le cas des méthodes mixtes, une variable duale (souvent la pression) est introduite comme inconnue nodale et joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange. Suivant la construction de ces éléments mixtes, des instabilités du champ inconnu additionnel (SGLG81a; SGLG81b; BF91) peuvent se produire. Un moyen efficace de savoir si un élément mixte va échapper au verrouillage et aux modes de pression parasites est la condition de Brezzi-Babuska (CB93; Bat96; HB08).

Pour choisir un élément, un critère de choix important est la facilité avec laquelle la génération d'un maillage peut être réalisée avec cet élément. Sur ce point, les éléments triangulaires et tétrahédriques sont très attractifs en raison de l'existence de mailleurs performants en 2D et 3D, même si la qualité de ces éléments peut laisser à désirer. D'autre part dans les problèmes non linéaires en grandes transformations, la performance des éléments d'ordre élevé se dégrade très vite dès que les noeuds des milieux d'arête bougent. Les performances des éléments en analyse non linéaire étant de plus fortement sujettes à la régularité des données et de la relation de comportement, on observe que les éléments d'ordre peu élevé sont relativement indiqués et populaires pour ce type d'analyses.

Notre choix s'est porté sur l'élément fini mixte P1+/P1, aussi appelé élément MINI. Cet élément linéaire enrichi a déjà été utilisé en mécanique des fluides (GSE98; Bas06a), mais aussi pour la simulation des procédés de mise en forme (CB98; Jao98; Gao99; BF04). Il a d'autre part déjà été implémenté avec succès (Feu05; FGBB05; FBB07) en mécanique des fluides dans le code de calcul SYSWELD® dans une version stationnaire.

Cet élément sert ici de base pour le développement d'un couplage de milieux solide et fluide destiné à la simulation numérique des procédés de soudage par friction et malaxage. Ces travaux incluent le traitement des points originaux suivants dans la formulation de cet élément :

1. Cet élément est développé dans le cas d'un couplage thermomécanique fort, c'est-

à-dire avec une formulation température/vitesse/pression. Il est présenté dans la section 2.2.

2. Pour le comportement fluide, une extension au cas transitoire est présentée dans la section 2.3. Le traitement des termes d'inertie s'appuie sur une approximation introduite sur l'accélération du champ bulle, permettant de condenser les degrés de liberté internes en évitant la discrétisation temporelle du champ bulle, ce qui permet de préserver la structure du code. On montre d'autre part que la formulation faible écrite avec un mouvement de corps rigide se réduit exactement, même avec cette approximation, au Principe Fondamental de la Dynamique.
3. Pour le comportement solide, partant d'un élément similaire formulé en déplacement/pression, cet élément a été reformulé pour faire porter la résolution mécanique sur la vitesse. Cet élément solide est développé dans le cadre des grandes transformations et formulé en température/vitesse/pression de la même manière que pour le comportement fluide, afin de permettre le couplage ultérieur fluide/solide. Le développement de cet élément est présenté dans la section 2.4.
4. Enfin, les éléments à comportement fluide et solide intègrent un couplage fluide/solide, noyau du modèle développé pour la simulation du Friction Stir Spot Welding. Une nouvelle option au sein du code SYSWELD® a été créée pour accueillir ce couplage, basé sur une approche euléro-lagrangienne développée aussi pour l'occasion. Les techniques d'implémentation, la mise en place d'un critère de transition fluide/solide et la procédure de replacement des noeuds sont détaillées dans la section 2.5.
   L'approche suivie ici pour le couplage présente certaines similarités, *sans pour autant être identique*, avec celle développée par (Jao98) et (BF04) dans un autre contexte, et reprise par (Ham08) pour la modélisation du soudage à l'arc. Les similarités et différences des deux approches seront commentées au cours de ce chapitre.

2.2 L'élément P1+/P1

Cet élément mixte a été initialement proposé par Arnold, Brezzi et Fortin (ABF84), et s'inscrit dans le cadre des méthodes mixtes pour le traitement de liaisons internes.

Cet élément s'appuie sur le triangle à 3 noeuds ou le tétraèdre à 4 noeuds linéaires classiques et assure, dans le cas d'une formulation température/vitesse/pression la continuité des champs de température, vitesse et pression. Les champs sont interpolés linéairement sur l'élément. L'approximation du champ de vitesse est enrichie en intégrant un noeud interne supplémentaire, positionné au barycentre de l'élément, auquel est associée une « fonction bulle » (approximation P1+). Cet enrichissement permet de satisfaire à la fois les équations du mouvement et la liaison interne considérée. On montre aussi qu'il satisfait les conditions de Brezzi-Babuska.

Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'au tétraèdre. Les fonctions de forme sont définies dans l'élément de référence de la façon suivante :

$$\begin{aligned} N_1(\mathbf{a}) &= 1 - a_1 - a_2 - a_3 \\ N_2(\mathbf{a}) &= a_1 \\ N_3(\mathbf{a}) &= a_2 \\ N_4(\mathbf{a}) &= a_3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

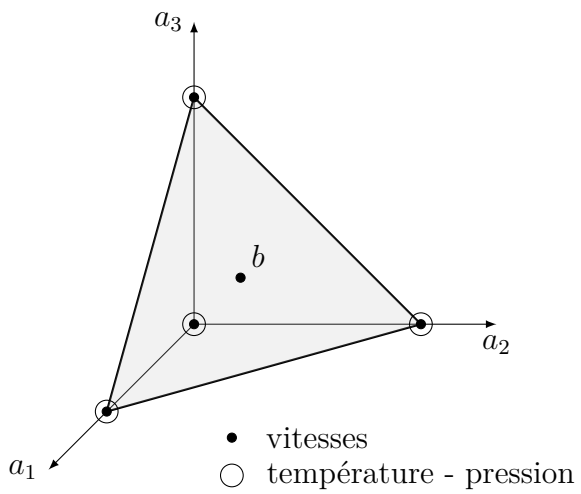


Figure 2.1 – Tétraèdre P1+/P1

et la fonction de forme associée au noeud bulle est définie par :

$$N_b(\mathbf{a}) = 4\,\mathrm{Min}(N_1(\mathbf{a}), N_2(\mathbf{a}), N_3(\mathbf{a}), N_4(\mathbf{a})) \tag{2.2}$$

Cette fonction bulle s'annule, par définition, sur tous les côtés de l'élément. On peut noter que (2.2) définit une bulle pyramidale, c'est-à-dire linéaire sur chaque sous-tétraèdre pouvant être construit avec le noeud bulle. Cette définition est généralement préférée pour des questions numériques à un polynôme d'ordre quatre pouvant être formé par multiplication des fonctions de forme des noeuds sommets.

La fonction bulle pyramidale associée au noeud interne n'est alors pas dérivable sur l'ensemble de l'élément. En conséquence, cet élément est associé à un schéma d'intégration à quatre points de Gauss, chacun étant positionné au barycentre des quatre sous-tétraèdres formés avec le noeud bulle.

Les vecteurs degrés de liberté nodaux sont composés de la façon suivante :

⋆ noeuds sommets : $\mathbf{q}^{(p)^T} = \{T^{(p)} \quad v_1^{(p)} \quad v_2^{(p)} \quad v_3^{(p)} \quad p^{(p)}\}, \quad p = 1, \ldots, 4$
⋆ noeud bulle : $\mathbf{q}^{(b)^T} = \{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3\}$

Les approximations des champs de température, vitesse et pression sont alors données par :

$$\begin{aligned} T_h(\mathbf{x}, t) &= N^{(p)}(\mathbf{a})T^{(p)}(t) \\ \mathbf{v}_h(\mathbf{x}, t) &= N^{(p)}(\mathbf{a})\mathbf{v}^{(p)}(t) + N^{(b)}(\mathbf{a})\boldsymbol{\lambda}(t) \\ p_h(\mathbf{x}, t) &= N^{(p)}(\mathbf{a})p^{(p)}(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $N^{(p)}$ représente la fonction de forme attachée au $p^{\text{ième}}$ noeud sommet de l'élément, la somme sur p étant implicite, et $N^{(b)}$ la fonction de forme associée au noeud bulle. On remarque que les même fonctions de forme sont choisies pour interpoler les champs de température, vitesse et pression. Les degrés de liberté $\boldsymbol{\lambda}$ attachés au noeud bulle n'interviennent que dans l'interpolation du champ de vitesse. On observe que λ_i ne s'interprète

pas comme la $i^{\text{ième}}$ composante de la vitesse au noeud bulle :

$$v_i(\mathbf{x}^{(b)}, t) = N^{(p)}(\mathbf{a}) v_i^{(p)}(t) + \lambda_i(t) \tag{2.4}$$

En effet, la fonction de forme d'un noeud sommet de l'élément ne s'annule pas au noeud bulle (qui est centré dans le tétraèdre) mais sur la face opposée de ce tétraèdre, ceci justifie leur dénomination $\boldsymbol{\lambda}$.

2.3 Élément fluide

On se place ici dans le cadre d'un écoulement de fluide laminaire incompressible, et on se propose dans un premier temps de formuler le problème sous forme faible en considérant un couplage thermomécanique fort. Par la suite, la discrétisation par éléments finis utilisant l'élément P1+/P1 est présentée. Les équations semi-discrètes sont alors linéarisées dans le cadre d'une procédure itérative de résolution.

2.3.1 Formulation faible

Le domaine fluide Ω, de frontière $\partial\Omega$ se décompose de la façon suivante :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_v \cup \partial\Omega_F \qquad \emptyset = \partial\Omega_v \cap \partial\Omega_F \tag{2.5}$$

$$\partial\Omega = \partial\Omega_\theta \cup \partial\Omega_q \qquad \emptyset = \partial\Omega_\theta \cap \partial\Omega_q \tag{2.6}$$

où $\partial\Omega_v$ et $\partial\Omega_F$ sont respectivement les parties du bord sur lesquelles la vitesse et les forces surfaciques sont prescrites, et $\partial\Omega_\theta$ et $\partial\Omega_q$ celles où la température et le flux surfacique de chaleur sont prescrits. Dans le cadre d'une formulation mixte, le problème est défini comme suit :

Étant donné les forces volumiques $\mathbf{f}_d$, la source de chaleur r, les tractions $\mathbf{F}_d$ sur $\partial\Omega_F$, et le flux thermique imposé ϕ^d sur $\partial\Omega_q$,

$$(W)\begin{cases} \text{Trouver } (T, \mathbf{v}, p) \in (\mathcal{T}_{ad} \times \mathcal{V}_{ad} \times \mathcal{P}_{ad}), \forall t \in [0, T], \text{tels que} \\ \forall (T^*, \mathbf{v}^*, p^*) \in (\mathcal{T}^0_{ad} \times \mathcal{V}^0_{ad} \times \mathcal{P}_{ad}), \\ \left| \begin{aligned} & -\int_\Omega k \boldsymbol{\nabla} T \cdot \boldsymbol{\nabla} T^* \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_q} \phi^d T^* \mathrm{d}S + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} T^* \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega r T^* \mathrm{d}\Omega \\ & \qquad = \int_\Omega \rho C \frac{\partial T}{\partial t} T^* \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \rho C (\boldsymbol{\nabla} T) \cdot \mathbf{v} T^* \mathrm{d}\Omega \\ & -\int_\Omega 2\mu(T, \mathbf{v}) \mathbf{D} : \mathbf{D}^* \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega p \mathrm{div}\ \mathbf{v}^* \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}^* \mathrm{d}S + \int_\Omega \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}^* \mathrm{d}\Omega \\ & \qquad = \int_\Omega \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}^* \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \rho (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* \mathrm{d}\Omega \\ & \int_\Omega p^* \mathrm{div}\ \mathbf{v} \mathrm{d}\Omega = 0 \end{aligned} \right. \\ T(\mathbf{x}, t = 0) = T_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{2.7}$$

où p représente la pression hydrostatique, μ la viscosité dynamique du fluide, k sa conductivité thermique, $\mathbf{D}$ le taux de déformation eulérien, ρ la masse volumique et C la capacité

calorifique du fluide. Dans une formulation mixte, la pression hydrostatique est déterminée indépendamment du champ de vitesse. Elle apparaît dans le Principe des Puissances Virtuelles (PPV) au travers de la relation de comportement fluide :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu(T,\mathbf{v})\mathbf{D} \\ &\text{avec } \mu(T,\mathbf{v}) = K\left(\sqrt{3}D_{eq}\right)^{n-1} \end{aligned} \tag{2.8}$$

En plus de l'écriture du PPV, la condition d'incompressibilité du fluide est résolue au sens faible. Dans (2.7), les champs test et solution sont définis dans les espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ad} &= \{\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \in [H^1(\Omega)]^3 | \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}^d(\mathbf{x},t) \text{ sur } \partial\Omega_v\} \\ \mathcal{V}_{ad}^0 &= \{\mathbf{v}^* \in [H^1(\Omega)]^3 | \mathbf{v}^* = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_v\} \\ \mathcal{T}_{ad} &= \{T(\mathbf{x},t) \in H^1(\Omega) | T(\mathbf{x},t) = T^d(\mathbf{x},t) \text{ sur } \partial\Omega_\theta\} \\ \mathcal{T}_{ad}^0 &= \{T^* \in H^1(\Omega) | T^* = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\theta\} \\ \mathcal{P}_{ad} &= \{p^* \in L^2(\Omega)\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

On note qu'une régularité plus forte est requise pour les champs de température et de vitesse que pour le champ de pression. Ce problème mixte doit satisfaire les conditions de Brezzi et Babuska pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution, ainsi que sa continuité vis-à-vis des données. On montre aussi que la solution de ce type de problème correspond à un point selle (BF91), la pression jouant le rôle d'un multiplicateur de Lagrange.

2.3.2 Formulation aux éléments finis

2.3.2.1 Équations semi-discrètes

La discrétisation par éléments finis de la forme faible (2.7) conduit à l'écriture du système non linéaire d'équations semi-discrètes suivant :

$$\boxed{\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}^{\text{conv}} + \mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^{\text{ext}}} \tag{2.10}$$

où $\mathbf{q}$ est le vecteur des degrés de liberté du système qui s'écrit de façon symbolique :

$$\mathbf{q}^T = \{\mathbf{T} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{p} \quad \boldsymbol{\lambda}\} \tag{2.11}$$

Les efforts internes $\mathbf{f}^{\text{int}}$, externes $\mathbf{f}^{\text{ext}}$, les efforts dûs aux termes de convection $\mathbf{f}^{\text{conv}}$ et la matrice de masse sont assemblés à partir des quantités élémentaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{M}^e \quad , \quad \mathbf{f}^{\text{conv}} = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} f_T^{\text{conv},(p)} \\ \mathbf{f}_v^{\text{conv},(p)} \\ 0 \end{array} \right\} \\ \mathbf{f}_b^{\text{conv}} \end{array} \right\}, \\ \mathbf{f}^{\text{int}} &= \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} f_T^{\text{int},(p)} \\ \mathbf{f}_v^{\text{int},(p)} \\ f_p^{\text{int},(p)} \end{array} \right\} \\ \mathbf{f}_b^{\text{int}} \end{array} \right\}, \quad \mathbf{f}^{\text{ext}} = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} f_T^{\text{ext},(p)} \\ \mathbf{f}_v^{\text{ext},(p)} \\ 0 \end{array} \right\} \\ \mathbf{f}_b^{\text{ext}} \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

où la notation $\sum_{e=1}^{N_e}$ dénote l'opération d'assemblage des quantités élémentaires. Les efforts comprennent des composantes relatives aux équations température, vitesse et pression

associées aux degrés de liberté des noeuds sommets de l'élément P1+/P1 (dont le numéro, de 1 à 4, est noté p), ainsi que des composantes relatives aux équations de « vitesse bulle » associées aux degrés de liberté du noeud bulle (noté symboliquement b). Les composantes associées au $p^{\text{ième}}$ noeud sommet ($p = 1$ à 4) et au noeud bulle (b) sont détaillées ci-après.

$$\begin{cases} f_T^{\text{conv},(p)} = \displaystyle\int_{\Omega_e} \rho C(\boldsymbol{\nabla} T) \cdot \mathbf{v} \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\ \mathbf{f}_v^{\text{conv},(p)} = \displaystyle\int_{\Omega_e} \rho(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\ \mathbf{f}_b^{\text{conv}} = \displaystyle\int_{\Omega_e} \rho(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

La fonction $\bar{N}^{(p)}$ sera commentée par la suite.

$$\begin{cases} f_T^{\text{int},(p)} = -\displaystyle\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \cdot \mathbf{q} \mathrm{d}\Omega \\ \mathbf{f}_v^{\text{int},(p)} = \displaystyle\int_{\Omega_e} 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}(N^{(p)} \mathbf{e}_i) \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_e} p \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\ \quad = \left| \begin{array}{l} \left[\left(\displaystyle\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) + \left(\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} \right] \cdot \mathbf{v}^{(q)} \\ + \left[\left(\displaystyle\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) + \left(\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} \right] \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ - \displaystyle\int_{\Omega_e} p \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \end{array} \right. \\ f_p^{\text{int},(p)} = -\displaystyle\int_{\Omega_e} N^{(p)} \text{div } \mathbf{v} \mathrm{d}\Omega \\ \mathbf{f}_b^{\text{int}} = \displaystyle\int_{\Omega_e} 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}(N^{(b)} \mathbf{e}_i) \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_e} p \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \\ \quad = \left| \begin{array}{l} \left[\left(\displaystyle\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \right) + \left(\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} \right] \cdot \mathbf{v}^{(q)} \\ + \left[\left(\displaystyle\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \right) + \left(\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} \right] \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ - \displaystyle\int_{\Omega_e} p \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \end{array} \right. \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} f_T^{\text{ext},(p)} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_q} \phi^d N^{(p)} \mathrm{d}S + \int_{\Omega_e} r \, \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}) \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\ \mathbf{f}_v^{\text{ext},(p)} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_F} \mathbf{F}_d N^{(p)} \mathrm{d}S + \int_{\Omega_e} \mathbf{f}_d \, N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\ \mathbf{f}_b^{\text{ext}} = \displaystyle\int_{\Omega_e} \mathbf{f}_d \, N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

On note que $\displaystyle\int_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_F} \mathbf{F}_d N^{(b)} \mathrm{d}S = 0$ puisque la fonction bulle s'annule sur le pourtour de l'élément.

Les efforts de convection et les efforts internes font apparaître des matrices convective $\mathbf{L}$ et de rigidité généralisée $\mathbf{K}$ telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{\text{conv}} &= \mathbf{L}\mathbf{q} \\ \mathbf{f}^{\text{int}} &= \mathbf{K}\mathbf{q} \end{aligned} \tag{2.16}$$

où le vecteur des degrés de liberté $\mathbf{q}$ est défini par (2.11). Le système d'équations semi-discrètes peut alors se mettre sous la forme plus explicite suivante, où apparaît le $q^{\text{ième}}$

noeud sommet ($q = 1, \ldots, 4$) et le noeud bulle d'un élément :

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left(\begin{bmatrix} M_T^{pq} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & M_v^{pq}\mathbf{1} & \mathbf{0} & M_v^{pb}\mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & M_b^{bq}\mathbf{1} & \mathbf{0} & M_b^{bb}\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}^{(q)} \\ \dot{\mathbf{v}}^{(q)} \\ \dot{p}^{(q)} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{Bmatrix} \right.$$
$$\left. + \begin{bmatrix} L_T^{pq} + K_T^{pq} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & L_v^{pq}\mathbf{1} + \mathbf{K}_v^{pq} & \mathbf{k}_v^{pq} & L_v^{pb}\mathbf{1} + \mathbf{K}_v^{pb} \\ 0 & (\mathbf{k}_p^{pq})^T & 0 & (\mathbf{k}_p^{pb})^T \\ \mathbf{0} & L_b^{bq}\mathbf{1} + \mathbf{K}_b^{bq} & \mathbf{k}_b^{bp} & L_b^{bb}\mathbf{1} + \mathbf{K}_b^{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T^{(q)} \\ \mathbf{v}^{(q)} \\ p^{(q)} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} \right) = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\begin{Bmatrix} f_T^{\text{ext},(p)} \\ \mathbf{f}_v^{\text{ext},(p)} \\ 0 \\ \mathbf{f}_b^{\text{ext}} \end{Bmatrix} \right) \tag{2.17}$$

où les termes ou sous-matrices $\square_z^{xy}$, tels que $\square = \{M, L, \mathbf{K}, \mathbf{k}\}$, sont définis relatifs aux équations $z = \{T, v, p, b\}$, avec des fonctions de forme associées au couple de noeuds $\{x, y\} = \{p, q, b\}$ ($1 \leq p, q \leq 4$), et $\mathbf{1}$ est la matrice identité de dimension 3.

Pour des questions de stabilité numérique, un traitement spécial est effectué sur les équations semi-discrètes relatives à la température. On montre en effet que la présence de termes convectifs dans l'équation de bilan peut entraîner des oscillations spatiales non physiques de la solution si on utilise une technique classique de Galerkin pour la discrétisation par éléments finis (BH82; BF08). En thermique, ce type de phénomène dépend du nombre de Péclet, exprimant le rapport des transferts de chaleur effectués par convection et par conduction. Une manière de remédier à cette instabilité du schéma numérique est d'utiliser la méthode de Petrov-Galerkin (ou SUPG) inspirée des techniques d'upwinding utilisées en différences finies. Cette méthode consiste à prendre pour fonction test, dans la formulation faible, une combinaison des fonctions de forme et de leurs gradients ; ce faisant on rétablit la stabilité du schéma en donnant plus de poids au terme elliptique (ce qui revient à ajouter de la conduction). La fonction de forme modifiée $\bar{N}^{(p)}$ attachée au noeud sommet p, fonction test de l'équation d'énergie, est choisie dans le cas d'un écoulement incompressible telle que :

$$\begin{aligned} &\bar{N}^{(p)} = N^{(p)} + H^{(p)} \\ &\text{avec} \quad H^{(p)} = \tau \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

τ étant un paramètre ajustable.

Le même type d'instabilité numérique peut aussi intervenir dans les équations liées à la vitesse. En mécanique, ce phénomène dépend du nombre de Reynolds. Dans le cas du Friction Stir Spot Welding, l'écoulement est pâteux et on s'attend à un faible nombre de Reynolds. Aussi, la méthode de Petrov-Galerkin n'est pas utilisée dans les équations mécaniques dans un premier temps.

La non-linéarité du problème traité ici provient :

- ⋆ de la relation de comportement fluide non-linéaire
- ⋆ du couplage thermomécanique fort provenant de la dissipation intervenant dans l'équation de bilan d'énergie interne
- ⋆ des termes convectifs intervenant dans les équations mécaniques et thermiques.

La résolution de ce type de problème passe par la mise en place d'une procédure itérative.

2.3.2.2 Linéarisation, procédure itérative

On considère une discrétisation temporelle par un algorithme aux différences finies de type Euler implicite. On écrit à présent le résidu du système d'équations (2.10) à l'instant $t + \Delta t$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{conv}} - \mathbf{f}^{\text{int}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \tag{2.19}$$

Dans le cas d'une méthode de Newton-Raphson, la linéarisation du système d'équations semi-discrètes est effectuée à une itération k du calcul :

$$\mathbf{r}^{(k+1)} \simeq \mathbf{r}^{(k)} + \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\right|^{(k)} \delta\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{0} \tag{2.20}$$

Définissons un résidu « statique », c'est-à-dire ne comprenant pas les termes d'inertie, tel que :

$$\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{conv}} - \mathbf{f}^{\text{int}} \tag{2.21}$$

On notera que $\mathbf{R}^{(k)}$ ne s'annule pas à la convergence des itérations. La linéarisation du système d'équations (2.10) conduit alors, en tenant compte de la discrétisation implicite et du résidu (2.21), à l'écriture du système suivant :

$$\boxed{\mathbf{M}^{(k)}\dot{\mathbf{q}}^{(k+1)} + \mathbf{K}^{(k)}\delta\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)}} \tag{2.22}$$

L'incrément entre deux itérations du vecteur degrés de liberté $\delta\mathbf{q}^{(k)}$ est défini comme $\delta\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}^{(k+1)} - \mathbf{q}^{(k)}$. Dans ce système, $\dot{\mathbf{q}}^{(k+1)}$ dépend de $\delta\mathbf{q}^{(k)}$, vecteur sur lequel la résolution est effectuée à chaque itération du calcul. Le vecteur $\dot{\mathbf{q}}^{(k+1)}$ s'écrit, dans le cas d'une discrétisation implicite :

$$\dot{\mathbf{q}}^{(k+1)} = \frac{\mathbf{q}^{(k+1)} - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{q}^{(k)} - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} + \frac{\delta\mathbf{q}^{(k)}}{\Delta t} \tag{2.23}$$

Cette présentation permet de faire apparaître les matrices (généralisées) de masse $\mathbf{M}^{(k)}$ et de rigidité tangente $\mathbf{K}^{(k)}$. On omet dans la matrice de rigidité la contribution de la matrice de masse due à la dépendance de la capacité thermique avec la température. La matrice de rigidité est définie comme suit :

$$\mathbf{K}^{(k)} = -\left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}}\right|^{(k)} \tag{2.24}$$

Elle est assemblée à partir des contributions des sous-matrices définies à partir des degrés de liberté température, vitesse et pression des noeuds sommets et des degrés de liberté associés au noeud bulle :

$$\mathbf{K}_{xy} = -\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \mathbf{y}}, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{T}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \tag{2.25}$$

Cette présentation est cohérente avec la structure du code : la routine élémentaire calcule les matrices de masse et de rigidité, et la discrétisation temporelle des termes d'inertie est effectuée par une autre routine dans la boucle sur les mailles.

Le système linéaire (2.22) peut être représenté sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{vv} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{vb} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{vb}^T & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{T}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{Bmatrix}^{(k+1)} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{K}_{Tv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{Tb} \\ \mathbf{K}_{vT} & \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{vp} & \mathbf{K}_{vb} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pb} \\ \mathbf{K}_{bT} & \mathbf{K}_{bv} & \mathbf{K}_{bp} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{T} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{p} \\ \delta\boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_T \\ \mathbf{R}_v \\ \mathbf{R}_p \\ \mathbf{R}_b \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{2.26}$$

Les expressions des diverses sous-matrices sont présentées dans l'annexe A.

2.3.3 Condensation statique du noeud bulle

Il est généralement d'usage de faire une condensation statique du noeud bulle. Cette opération consiste à exprimer les degrés de liberté attachés au noeud bulle en fonction de ceux des noeuds sommets du tétraèdre, puis à injecter ces expressions dans les équations relatives aux degrés de liberté des noeuds sommets, réduisant par là-même la taille du système d'équations à résoudre.

De par sa définition, le champ bulle est nul sur la frontière de l'élément. Les degrés de liberté bulles sont donc des degrés de liberté internes à chaque élément fini du maillage, pouvant être localement condensés. Cependant on observe que dans l'expression (2.26), c'est-à-dire dans le cas d'un calcul transitoire, il apparaît nécessaire d'effectuer la discrétisation temporelle du champ bulle *avant* de faire la condensation.

Afin de conserver la structure du code, c'est-à-dire de permettre que la discrétisation temporelle des termes d'inertie soit effectuée *après* le passage dans la routine élémentaire, par une autre routine, on introduit alors une approximation supplémentaire (HLBF10). On montre par la suite que cette approximation génère de toute façon une erreur plus faible que celle entraînée par une opération de concentration de la matrice de masse, effectuée par la suite.

2.3.3.1 Introduction d'une approximation supplémentaire

L'accélération au noeud bulle est donnée par :

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}^b, t) = \sum_{p=1}^{4} N^{(p)}(\mathbf{x}^b)\boldsymbol{\gamma}^{(p)}(t) + N^{(b)}(\mathbf{x}^b)\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \tag{2.27}$$

La relation $\sum_{p=1}^{4} N^{(p)} = 1$ et le fait que le noeud bulle soit placé au centre du tétraèdre nous permettent de simplifier l'expression (2.27) en notant que $N^{(p)}(\mathbf{x}^b) = \frac{1}{4}$. Considérant de plus que la fonction de forme associée au noeud bulle est normalisée ($N^{(b)}(\mathbf{x}^b) = 1$), l'accélération au noeud bulle peut être réécrite :

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}^b, t) = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{4} \boldsymbol{\gamma}^{(p)}(t) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \tag{2.28}$$

Nous introduisons à présent une approximation. On suppose que l'accélération au noeud bulle est à peu près égale à la moyenne de celles des noeuds sommets de l'élément. Ceci conduit à écrire :

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}^b, t) \simeq \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{4} \boldsymbol{\gamma}^{(p)}(t) \tag{2.29}$$

Cette hypothèse se justifie quand le champ d'accélération varie faiblement sur l'élément. Combinant les expressions (2.28) et (2.29), ceci nous conduit à annuler les vitesses des degrés de liberté attachés au noeud bulle :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} \simeq 0 \tag{2.30}$$

Du coup, la nécessité d'effectuer une discrétisation temporelle du champ bulle avant la condensation disparaît.

2.3.3.2 Concentration de la matrice de masse

En plus de l'approximation précédente, la matrice de masse est concentrée sur sa diagonale (Hug87; BLM00), ceci permet de minimiser le coût de calcul de son inversion. Ce type de procédure peut être justifiée de la manière suivante. Considérons le système linéaire suivant :

$$a_{ij}x_j = b_i \tag{2.31}$$

dans lequel la convention de somme implicite sur les indices répétés est respectée. Concentrer la matrice consiste à remplacer (2.31) par le système suivant :

$$\sum_j a_{ij}x_i = b_i \tag{2.32}$$

dans lequel la convention de somme implicite sur les indices répétés n'est plus respectée, et une somme sur l'indice j est ajoutée ; le terme diagonal est ainsi égalé à la somme de tous les termes présents sur la ligne correspondante, ces autres termes étant par la suite annulés. Cette approximation est licite si les valeurs des inconnues x_i et x_j sont proches pour tous les couples d'indices (i, j) tels que $a_{ij} \neq 0$.

2.3.3.3 Interprétations des deux approximations

D'un point de vue physique, et ne considérant qu'un seul degré de liberté par noeud, la technique de concentration revient à considérer que la valeur de l'inconnue au $j^{\text{ième}}$ noeud est égale à celle du $i^{\text{ième}}$ noeud. Appliquée à une matrice de masse, cette approximation conduit à considérer une accélération constante par élément.

Cette approximation est en réalité plus forte que celle qu'on effectue préalablement sur l'accélération du champ bulle (2.29). En effet, en supposant que l'accélération au noeud bulle est à peu près égale à la moyenne de celles des noeuds sommets de l'élément, on restreint seulement l'accélération à être linéaire sur l'élément. La concentration de la matrice de masse effectuée par la suite la suppose constante par élément.

2.3.3.4 Compatibilité de l'approximation avec un mouvement rigidifiant

L'approximation effectuée sur le champ bulle est compatible avec un mouvement de corps rigide, c'est-à-dire que la formulation faible écrite avec un tel mouvement se réduit exactement au Principe Fondamental de la Dynamique.

Le noeud bulle est par définition placé au barycentre de l'élément P1+/P1 :

$$\mathbf{x}^{(b)} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{4}\mathbf{x}^{(p)} \tag{2.33}$$

Dans tout mouvement rigidifiant, le noeud bulle reste au barycentre de l'élément. Aussi a-t-on :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}^{(b)}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{4}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}^{(p)}}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.34}$$

c'est-à-dire :

$$\gamma(\mathbf{x}^{(b)}) = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{4}\gamma^{(p)} \tag{2.35}$$

L'approximation (2.29) est donc parfaitement exacte dans tout mouvement rigidifiant.

2.3.3.5 Opération d'élimination du noeud bulle

Pour effectuer la condensation du champ bulle, on écrit à partir de (2.26) et considérant (2.30) :

$$\delta\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\left(\mathbf{R}^e_b - \left(\mathbf{M}^e_{bv}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}^e_{bT}\delta\mathbf{T} + \mathbf{K}^e_{bv}\delta\mathbf{v} + \mathbf{K}^e_{bp}\delta\mathbf{p}\right)\right) \tag{2.36}$$

la condensation étant effectuée à l'échelle élémentaire. En introduisant (2.36) dans (2.26), nous obtenons un système d'équations de la forme :

$$\bar{\mathbf{M}}^{(k)}\dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(k+1)} + \bar{\mathbf{K}}^{(k)}\delta\bar{\mathbf{q}}^{(k)} = \bar{\mathbf{R}}^{(k)} \tag{2.37}$$

où l'on note $\bar{\mathbf{q}}$ le vecteur des degrés de liberté du système réduit, défini par :

$$\bar{\mathbf{q}}^T = \{\mathbf{T} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{p}\} \tag{2.38}$$

Plus précisément, ce système réduit d'équations s'écrit en détaillant les composantes de température, vitesse et pression :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \bar{\mathbf{M}}_{Tv} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}}_{vv} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}}_{pv} & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{T}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}^{(k+1)} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{TT} & \bar{\mathbf{K}}_{Tv} & \bar{\mathbf{K}}_{Tp} \\ \bar{\mathbf{K}}_{vT} & \bar{\mathbf{K}}_{vv} & \bar{\mathbf{K}}_{vp} \\ \bar{\mathbf{K}}_{pT} & \bar{\mathbf{K}}_{pv} & \bar{\mathbf{K}}_{pp} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{T} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{p} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_T \\ \bar{\mathbf{R}}_v \\ \bar{\mathbf{R}}_p \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{2.39}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{M}}^e_{Tv} &= -\mathbf{K}^e_{Tb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}(\mathbf{M}^e_{vb})^T \\
\bar{\mathbf{M}}^e_{vv} &= \mathbf{M}^e_{vv} - \mathbf{K}^e_{vb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}(\mathbf{M}^e_{vb})^T \\
\bar{\mathbf{M}}^e_{pv} &= -\mathbf{K}^e_{pb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}(\mathbf{M}^e_{vb})^T \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{TT} &= \mathbf{K}^e_{TT} - \mathbf{K}^e_{Tb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bT} \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{Tv} &= \mathbf{K}^e_{Tv} - \mathbf{K}^e_{Tb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bv} \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{Tp} &= -\mathbf{K}^e_{Tb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bT} \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{vT} &= \mathbf{K}^e_{vT} - \mathbf{K}^e_{vb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bT} \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{vv} &= \mathbf{K}^e_{vv} - \mathbf{K}^e_{vb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bv}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{K}}^e_{vp} &= \mathbf{K}^e_{vp} - \mathbf{K}^e_{vb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bp} \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{pT} &= -\mathbf{K}^e_{pb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bT} \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{pv} &= \mathbf{K}^e_{pv} - \mathbf{K}^e_{pb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bv} \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{pp} &= -\mathbf{K}^e_{pb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bp} \\
\bar{\mathbf{R}}^e_{T} &= \mathbf{R}^e_{T} - \mathbf{K}^e_{Tb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{R}^e_{b} \\
\bar{\mathbf{R}}^e_{v} &= \mathbf{R}^e_{v} - \mathbf{K}^e_{vb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{R}^e_{b} \\
\bar{\mathbf{R}}^e_{p} &= \mathbf{R}^e_{p} - \mathbf{K}^e_{pb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{R}^e_{b}
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Commentaire

La matrice de masse généralisée formée après la condensation est devenue non symétrique. On observe de plus que les matrices $\bar{\mathbf{M}}_{Tv}$ et $\bar{\mathbf{M}}_{pv}$ couplent à présent différents types de degrés de liberté (température, vitesse et pression), et la matrice $\bar{\mathbf{M}}_{vv}$ couple les différentes composantes de vitesse. Or l'approximation générée par l'opération de concentration d'une matrice de masse n'est licite que lorsqu'elle est effectuée sur un même type de degrés de liberté. Ces couplages entre degrés de liberté au travers de la matrice de masse résultent d'une part de la construction de l'élément P1+/P1 (la matrice de masse dans l'expression (2.17) couple les degrés de liberté vitesse des noeuds sommets et du noeud bulle), d'autre part de la condensation des degrés de liberté du noeud bulle. Aussi pour la concentration, il est préférable d'omettre les corrections de la matrice de masse générées par l'opération de condensation. Il vient :

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{M}}^e_{Tv} &= \mathbf{0} \\
\bar{\mathbf{M}}^e_{vv} &= \mathbf{M}^e_{vv} \\
\bar{\mathbf{M}}^e_{pv} &= \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

2.3.4 Résolution

Une fois les matrices et vecteur élémentaires calculés, et les degrés de liberté du noeud bulle condensés, la discrétisation temporelle du système (2.37) est effectuée. Le système linéaire suivant est résolu à chaque itération du calcul :

$$
\mathbf{A}^{(k)}\delta\bar{\mathbf{q}}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} \tag{2.42}
$$

où la matrice et le résidu global sont définies par :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^{(k)} &= \left(\frac{\bar{\mathbf{M}}^{(k)}}{\Delta t} + \bar{\mathbf{K}}^{(k)}\right) \\
\mathbf{B}^{(k)} &= \bar{\mathbf{R}}^{(k)} - \bar{\mathbf{M}}^{(k)}\dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(k)}
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

2.3.5 Calcul du champ bulle

À chaque itération d'un pas de temps, le système linéaire (2.42) est résolu. Le champ bulle ayant été condensé, la résolution est effectuée sur les degrés de liberté des noeuds

sommets des éléments finis du maillage. L'actualisation du champ bulle doit donc être réalisée après cette résolution.

Plutôt que de refaire un passage dans la routine élémentaire pour chaque maille après résolution du système, l'actualisation du champ bulle est effectuée à l'itération suivante du calcul lors du passage dans cette même routine. Dans un premier passage, les matrice et second membre élémentaires de l'itération précédente sont reconstruits permettant l'actualisation du champ bulle. Lors du second passage, les quantités élémentaires propres à l'itération en cours sont calculées puis assemblées pour former à nouveau le système (2.42).

À l'itération 0 du calcul, seul un passage dans la routine pour chaque maille est effectué.

2.3.6 Commentaires

On trouve dans (Jao98) et (Bas06a) des formulations de l'élément P1+/P1 en mécanique des fluides proches de celle présentée ici. Cependant, les différences suivantes sont à noter :

1. Un couplage thermomécanique fort est ici pris en compte.
2. Le fluide modélisé au travers d'une relation de comportement viscoplastique est considéré comme incompressible, et donc thermiquement indilatable (Ger86), ce qui n'est pas le cas dans (Jao98).
3. Les termes de convection mécanique, omis dans (Jao98), sont ici intégrés à la formulation et résolus de manière implicite. Ils sont inclus dans (Bas06a) mais « linéarisés ».
4. Les termes d'inertie sont uniquement inclus dans (Jao98) dans les équations liées aux vitesses des noeuds sommets. Dans (Bas06a), une certaine approximation de la contribution du noeud bulle dans la matrice de masse est introduite, les couplages dans la matrice de masse entre les degrés de liberté vitesse des noeuds sommets et du noeud bulle étant directement omis. Dans la formulation présentée ici, un traitement cohérent des termes d'inertie est d'abord présenté, puis une approximation introduite sur l'accélération du champ bulle permet de condenser les degrés de liberté internes en évitant la discrétisation temporelle du champ bulle. Il est montré que cette approximation est plus faible que celle générée par une opération de concentration de la matrice de masse, et qu'elle est compatible avec tout mouvement rigidifiant. Il est enfin observé que, de par la construction de l'élément P1+/P1 puis de la condensation du champ bulle, la matrice de masse couple nécessairement différents types de degrés de liberté entre eux, rendant illicite l'opération de concentration de cette matrice.

2.4 Élement solide

Après avoir établi la formulation de l'élément P1+/P1 dans le cas d'un écoulement de fluide laminaire incompressible, cette section est consacrée à la formulation de cet élément en mécanique des solides. On considère ici un matériau élasto (visco) plastique en grandes transformations. La plasticité en grandes transformations s'écrivant naturellement dans un cadre eulérien, l'approche eulérienne est ici privilégiée. La résolution du problème discret est effectuée sur la configuration inconnue à l'instant $t + \Delta t$. Partant d'un élément similaire formulé en déplacement/pression déjà implémenté dans le code SYSWELD®, l'élément présenté intègre un couplage thermomécanique fort et la résolution mécanique

est effectuée sur le champ de vitesse, ceci en vue de l'établissement du couplage avec l'élément fluide.

D'autre part, on note que cet élément présente des similarités avec la formulation en mécanique des solides de l'élément P1+/P1 présentée dans (Jao98), à ceci près que, outre le couplage thermomécanique fort, un traitement en grandes transformations dans un cadre eulérien est ici retenu compte tenu des grandes rotations inhérentes aux applications de soudage. Il est en effet indispensable de préserver l'objectivité des grandeurs mécaniques calculées, réalisée dans un cadre eulérien au moyen d'une dérivée objective des contraintes dans la loi d'hypoélasticité. La formulation en lagrangien réactualisé proposée par (Jao98) n'assure pas cette objectivité matérielle, car elle n'utilise pas les mesures de déformation et contrainte cohérentes avec ce cadre, c'est-à-dire le tenseur de Green-Lagrange et le second tenseur de Piola-Kirchhoff définis sur la configuration à l'instant t.

Dans un premier temps, le problème est écrit sous forme faible en considérant un fort couplage thermomécanique. Par la suite, les équations semi-discrètes, obtenues après discrétisation par éléments finis, sont linéarisées pour la résolution de ce problème non linéaire. Une procédure itérative classique de Newton est mise en place. Enfin, on présente les particularités de la résolution sur le champ de vitesse pour un solide, l'utilisateur prescrivant des déplacements et non des vitesses dans la mise en données.

2.4.1 Formulation faible

Le problème qu'on projette de traiter étant fortement couplé thermomécaniquement, il nous faut résoudre à la fois les équations du mouvement et le bilan d'énergie tout en assurant le respect de la liaison interne. Du point du vue du problème faible, on résout :

- ⋆ la forme faible de l'équation d'énergie ;
- ⋆ le principe des puissances virtuelles (PPV) ;
- ⋆ la forme faible de la liaison interne. Dans notre cas, puisqu'on va considérer un matériau élasto(visco)plastique, on écrit la forme faible de l'incompressibilité *plastique* $\mathrm{tr}\ \mathbf{D}^p = 0$, où $\mathbf{D}^p$ représente le taux de déformation plastique.

Le problème faible s'écrit alors : étant donné les forces volumiques $\mathbf{f}_d$, la source de chaleur r, les tractions $\mathbf{F}_d$ sur $\partial\Omega_F$, et le flux thermique imposé ϕ^d sur $\partial\Omega_q$,

$$
(W)\begin{cases}
\text{Trouver } (T,\mathbf{v},p) \in (\mathcal{T}_{ad}\times\mathcal{V}_{ad}\times\mathcal{P}_{ad}), \forall t\in[0,T], \text{tels que} \\
\forall (T^*,\mathbf{v}^*,p^*) \in (\mathcal{T}^0_{ad}\times\mathcal{V}^0_{ad}\times\mathcal{P}_{ad}), \\
\left|\begin{array}{l}
-\displaystyle\int_\Omega k\boldsymbol{\nabla}T\cdot\boldsymbol{\nabla}T^*\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_q}\phi^d T^*\mathrm{d}S + \int_\Omega \mathcal{D}_{\mathrm{int}}T^*\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega r\,T^*\mathrm{d}\Omega \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \displaystyle\int_\Omega \rho C\frac{\partial T}{\partial t}T^*\mathrm{d}\Omega \\
-\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}^*\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_F}\mathbf{F}_d\cdot\mathbf{v}^*\mathrm{d}S + \int_\Omega \mathbf{f}_d\cdot\mathbf{v}^*\mathrm{d}\Omega = 0 \\
\displaystyle\int_\Omega p^*\mathrm{tr}\ \mathbf{D}^p\mathrm{d}\Omega = 0
\end{array}\right. \\
T(\mathbf{x},t=0) = T_0(\mathbf{x}) \\
\mathbf{v}(\mathbf{x},t=0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})
\end{cases}
\tag{2.44}
$$

les notations et les espaces fonctionnels étant identiques à ceux définis pour le comportement fluide. On observe que pour le comportement solide, les termes d'inertie mécaniques ont été négligés, le processus de déformation pouvant être considéré comme quasi-statique.

L'idée de la méthode mixte étant de déterminer le champ de pression indépendamment du champ de vitesse, on réécrit le tenseur des contraintes de Cauchy sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + \mathbf{s} \tag{2.45}$$

où $\mathbf{s}$ est le déviateur des contraintes de Cauchy, p la pression hydrostatique et $\mathbf{1}$ le tenseur identité du second ordre. Dans le cas du comportement solide, on peut faire deux commentaires :

* la pression hydrostatique n'est pas ici une inconnue déterminée par le problème aux limites comme en mécanique des fluides, mais est liée par la relation de comportement élastoplastique à la partie élastique du tenseur des taux de déformation eulérien $\mathbf{D}^e$.
* la pression n'est pas considérée ici positive dans un cas de compression hydrostatique comme en mécanique des fluides, mais négative.

Cette formulation s'applique aux matériaux élasto(visco)plastiques respectant un critère de Misès et pour lesquels, en grandes transformations, une loi d'additivité s'applique pour le taux de déformation eulérien :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p + \dot{\varepsilon}^{\mathrm{th}}\mathbf{1} \tag{2.46}$$

où $\dot{\varepsilon}^{th}$ représente le taux de déformation « thermométallurgique » provenant des dilatations thermiques et des changements de volume associés à la métallurgie (si celle-ci est prise en compte), $\mathbf{D}^p$ est la partie inélastique du taux de déformation eulérien et $\mathbf{D}^e$ sa partie élastique, reliée à la dérivée objective du tenseur des contraintes de Cauchy par la loi de Hooke :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{K} : \mathbf{D}^e \tag{2.47}$$

dans laquelle $\mathbb{K}$ représente le tenseur des modules d'élasticité. L'objectivité matérielle de cette loi hypoélastique imposant de considérer un comportement isotrope (BLM00), et en notant que $\dot{p} = \mathrm{tr}\ \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$, on peut écrire la relation suivante :

$$\mathrm{tr}\ \mathbf{D}^e = \frac{3(1-2\nu)}{E}\dot{p} = \frac{\dot{p}}{\kappa} \tag{2.48}$$

où κ est le coefficient de compressibilité élastique. En utilisant la partition (2.46) et la relation (2.48), on peut remplacer la condition d'incompressibilité plastique $\mathrm{tr}\ \mathbf{D}^p = 0$ écrite sous forme faible dans le problème (W) (2.44) par l'expression suivante :

$$\int_\Omega p^* \left(\mathrm{div}\ \mathbf{v} - \frac{\dot{p}}{\kappa} - 3\dot{\varepsilon}^{\mathrm{th}}\right) \mathrm{d}\Omega = 0, \quad \forall p^* \in \mathcal{P}_{ad} \tag{2.49}$$

2.4.2 Formulation aux éléments finis

2.4.2.1 Équations semi-discrètes

Une fois le problème écrit sous forme faible, on établit la formulation aux éléments finis. Cette discrétisation conduit à l'écriture du système non linéaire d'équations semi-

discrètes :

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \tag{2.50}$$

le vecteur degré de liberté $\mathbf{q}$ étant défini comme suit :

$$\mathbf{q}^T = \{\mathbf{T} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{p} \quad \boldsymbol{\lambda}\} \tag{2.51}$$

La matrice de masse généralisée $\mathbf{M}$ est en réalité uniquement composée de la matrice de capacité thermique, l'inertie mécanique ayant été négligée. Les efforts intérieurs $\mathbf{f}^{\text{int}}$ et extérieurs $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ sont respectivement définis comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{\text{int}} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f_T^{\text{int},(p)} = -\displaystyle\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \cdot \mathbf{q} \mathrm{d}\Omega \\ \mathbf{f}_v^{\text{int},(p)} = \displaystyle\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{s} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} p \mathrm{d}\Omega \\ f_p^{\text{int},(p)} = \displaystyle\int_{\Omega_e} N^{(p)} \left(\text{div } \mathbf{v} - \frac{\dot{p}}{\kappa} - 3\dot{\varepsilon}^{\text{th}} \right) \mathrm{d}\Omega \end{array} \right\}^{(p)} \\ \mathbf{f}_b^{\text{int}} = \displaystyle\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_b^T \mathbf{s} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} p \mathrm{d}\Omega \end{array} \right) \\
\mathbf{f}^{\text{ext}} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f_T^{\text{ext},(p)} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_q} \phi^d N^{(p)} \mathrm{d}S + \int_{\Omega_e} N^{(p)} r \mathrm{d}\Omega \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\Omega_e} \beta \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\ \mathbf{f}_v^{\text{ext},(p)} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_F} \mathbf{F}_d N^{(p)} \mathrm{d}S + \int_{\Omega_e} \mathbf{f}_d N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\ \emptyset \end{array} \right\}^{(p)} \\ \mathbf{f}_b^{\text{ext}} = \displaystyle\int_{\Omega_e} \mathbf{f}_d N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{2.52}$$

où le vecteur flux de chaleur $\mathbf{q}$ est relié au gradient de température par la loi de Fourier, et $\mathbf{B}_p$ est la matrice contenant les gradients de la fonction de forme associée au noeud p reliant les taux de déformation aux vitesses nodales du noeud p. On rappelle que $\int_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_F} \mathbf{F}_d N^{(b)} \mathrm{d}S = 0$ car la fonction bulle s'annule sur le pourtour de l'élément.

Dans les forces externes, la dissipation intrinsèque est exprimée comme $\mathcal{D}_{\text{int}} = \beta \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p$, où le coefficient β (déjà introduit au chapitre précédent) appelé « coefficient de Quinney-Taylor » est généralement prescrit à 0.9.

Remarque :

En mécanique des solides, le maillage suit le mouvement de la matière, l'approche est « matérielle », les forces convectives ont donc disparu par rapport à la formulation en mécanique des fluides. Dans l'approche euléro-lagrangienne suivi pour le couplage fluide/solide, des termes de convection réapparaîtront, mais avec une vitesse convective définie à partir du mouvement arbitraire du maillage.

2.4.2.2 Linéarisation, procédure itérative

On considère de la même façon que pour le comportement fluide une discrétisation temporelle par un algorithme aux différences finies de type Euler implicite. Le système

d'équations étant non linéaire, ce problème doit être résolu de façon itérative. On écrit, de la même manière que pour le comportement fluide, le résidu « statique » du système d'équations (2.50) à l'instant $t + \Delta t$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}} \tag{2.53}$$

La linéarisation du système d'équations est effectuée à une itération k du calcul avec une méthode de Newton-Raphson, conduisant à l'écriture du système suivant à chaque itération :

$$\boxed{\mathbf{M}^{(k)}\dot{\mathbf{q}}^{(k+1)} + \mathbf{K}^{(k)}\delta\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)}} \tag{2.54}$$

L'incrément entre deux itérations du vecteur degrés de liberté $\delta\mathbf{q}^{(k)}$ est défini comme $\delta\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}^{(k+1)} - \mathbf{q}^{(k)}$, et la matrice tangente est définie telle que :

$$\mathbf{K}^{(k)} = -\left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}}\right|^{(k)} \tag{2.55}$$

Cette matrice est assemblée à partir des contributions des sous-matrices définies à partir des degrés de liberté température, vitesse et pression des noeuds sommets et des degrés de liberté associés au noeud bulle :

$$\mathbf{K}_{xy} = -\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \mathbf{y}}, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{T}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \tag{2.56}$$

Le système linéaire (2.54) peut donc être représenté, la matrice de masse réduisant ici à la matrice de capacité thermique, sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{T}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{Bmatrix}^{(k+1)} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{K}_{Tv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{Tb} \\ \mathbf{K}_{vT} & \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{vp} & \mathbf{K}_{vb} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pv} & \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pb} \\ \mathbf{K}_{bT} & \mathbf{K}_{bv} & \mathbf{K}_{bp} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{T} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{p} \\ \delta\boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_T \\ \mathbf{R}_v \\ \mathbf{R}_p \\ \mathbf{R}_b \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{2.57}$$

Les expressions de ces sous-matrices sont présentées dans l'annexe A. Le résidu s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{R}^{(k)} = \sum_{e=1}^{N_e} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_T^{\text{ext},(p)} - f_T^{\text{int},(p)} \\ \mathbf{f}_v^{\text{ext},(p)} - \mathbf{f}_v^{\text{int},(p)} \\ -f_p^{\text{int},(p)} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{f}_b^{\text{ext}} - \mathbf{f}_b^{\text{int}} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{2.58}$$

Les équations du résidu liées aux degrés de liberté pression font apparaître explicitement le pas de temps au travers de la contribution de la partie élastique du comportement et de la vitesse de déformation thermométallurgique :

$$(R_p^{(p)})^{(k)} = -\int_{\Omega_e} N^{(p)} \left(\text{div } \mathbf{v} - \frac{1}{\kappa}\frac{\Delta p}{\Delta t} - 3\frac{\Delta \varepsilon^{\text{th}}}{\Delta t} \right) \mathrm{d}\Omega \tag{2.59}$$

2.4.3 Condensation statique du noeud bulle

On effectue aussi en mécanique des solides la condensation statique du noeud bulle. Les termes d'inertie mécaniques ayant été négligés, les degrés de liberté du noeud bulle s'expriment de façon explicite en fonction des degrés de liberté des noeuds sommets. Le noeud bulle étant interne à l'élément, ses degrés de liberté sont éliminés au niveau élémentaire :

$$\delta\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\left(\mathbf{R}^e_b - \left(\mathbf{K}^e_{bT}\delta\mathbf{T} + \mathbf{K}^e_{bv}\delta\mathbf{v} + \mathbf{K}^e_{bp}\delta\mathbf{p}\right)\right) \tag{2.60}$$

Ceci conduit à l'écriture du système linéaire condensé suivant :

$$\mathbf{C}^{(k)}\dot{\mathbf{T}}^{(k+1)} + \bar{\mathbf{K}}^{(k)}\delta\bar{\mathbf{q}}^{(k)} = \bar{\mathbf{R}}^{(k)} \tag{2.61}$$

où $\bar{\mathbf{q}}$ représente le vecteur degrés de liberté du système réduit :

$$\bar{\mathbf{q}}^T = \{\mathbf{T} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{p}\} \tag{2.62}$$

Le système condensé (2.61) s'écrit de façon schématique :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}}^{(k+1)} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{TT} & \bar{\mathbf{K}}_{Tv} & \bar{\mathbf{K}}_{Tp} \\ \bar{\mathbf{K}}_{vT} & \bar{\mathbf{K}}_{vv} & \bar{\mathbf{K}}_{vp} \\ \bar{\mathbf{K}}_{pT} & \bar{\mathbf{K}}_{pv} & \bar{\mathbf{K}}_{pp} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{T} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{p} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_T \\ \bar{\mathbf{R}}_v \\ \bar{\mathbf{R}}_p \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{2.63}$$

Les sous-matrices et second membres élémentaires sont condensés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{K}}^e_{TT} &= \mathbf{K}^e_{TT} - \mathbf{K}^e_{Tb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bT} & \bar{\mathbf{K}}^e_{pT} &= -\mathbf{K}^e_{pb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bT} \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{Tv} &= \mathbf{K}^e_{Tv} - \mathbf{K}^e_{Tb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bv} & \bar{\mathbf{K}}^e_{pv} &= \mathbf{K}^e_{pv} - \mathbf{K}^e_{pb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bv} \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{Tp} &= -\mathbf{K}^e_{Tb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bT} & \bar{\mathbf{K}}^e_{pp} &= \mathbf{K}^e_{pp} - \mathbf{K}^e_{pb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bp} \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{vT} &= \mathbf{K}^e_{vT} - \mathbf{K}^e_{vb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bT} & \bar{\mathbf{R}}^e_T &= \mathbf{R}^e_T - \mathbf{K}^e_{Tb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{R}^e_b \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{vv} &= \mathbf{K}^e_{vv} - \mathbf{K}^e_{vb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bv} & \bar{\mathbf{R}}^e_v &= \mathbf{R}^e_v - \mathbf{K}^e_{vb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{R}^e_b \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{vp} &= \mathbf{K}^e_{vp} - \mathbf{K}^e_{vb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{K}^e_{bp} & \bar{\mathbf{R}}^e_p &= \mathbf{R}^e_p - \mathbf{K}^e_{pb}(\mathbf{K}^e_{bb})^{-1}\mathbf{R}^e_b
\end{aligned} \tag{2.64}$$

L'actualisation du champ bulle est effectuée à l'itération suivante de la même manière que pour l'élément fluide.

2.4.4 Résolution

De la même manière que pour l'élément fluide, la discrétisation temporelle du système (2.61) est effectuée après calcul des quantités élémentaires et la condensation du champ bulle. Le système linéaire suivant est résolu à chaque itération du calcul :

$$\mathbf{A}^{(k)}\delta\bar{\mathbf{q}}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} \tag{2.65}$$

où la matrice et le résidu global sont définies par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{(k)} &= \left(\frac{\bar{\mathbf{M}}^{(k)}}{\Delta t} + \bar{\mathbf{K}}^{(k)}\right) \\
\mathbf{B}^{(k)} &= \bar{\mathbf{R}}^{(k)} - \bar{\mathbf{M}}^{(k)}\dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(k)}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

2.4.5 Conditions aux limites avec une formulation en vitesses en mécanique des solides

Traditionnellement, les formulations en mécanique des solides font intervenir les composantes du déplacement aux noeuds. L'écriture eulérienne du problème de mécanique des solides (2.44) est ici combinée à une formulation en vitesses. Or il est plus commode pour l'utilisateur du code d'imposer une position à chaque pas de temps aux noeuds du maillage appartenant à la partie $\partial\Omega_v$ du bord du domaine Ω, ou de la même manière, un déplacement comme dans les approches traditionnelles.

On souhaite alors combiner une mise en données du calcul spécifiant des déplacements avec une résolution effectuée sur les vitesses. L'idée est de construire des vitesses imposées à partir des déplacements spécifiés dans la mise en données par l'utilisateur :

$$\mathbf{v}(t+\Delta t) = \frac{\mathbf{u}^d(t+\Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \qquad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_v \tag{2.67}$$

où $\mathbf{u}(t)$ désigne le déplacement à l'instant t des noeuds du bord $\partial\Omega_v$. Ce déplacement est calculé à convergence au pas de temps précédent pour tous les noeuds du maillage, ou spécifié dans la mise en données par l'utilisateur comme condition initiale. Il est clair que cette technique conduit à devoir stocker à la fois les vitesses et les déplacements.

2.5 Stratégie de calcul pour le couplage fluide/solide

On présente dans cette section le couplage fluide/solide pour la simulation numérique du Friction Stir Spot Welding. Ce couplage est intégré dans une nouvelle option créée à cet effet dans le code SYSWELD®, et s'appuie sur les deux routines élémentaires, respectivement fluide et solide, développées séparément et présentées dans les deux sections précédentes. Il est intégré à une approche euléro-lagrangienne, permettant de gérer les très grandes déformations se produisant lors des procédés de soudage par friction et malaxage.

On note aussi qu'une approche de couplage entre deux milieux différents a été développée dans un autre contexte par (Jao98) et (BF04). Les similarités et différences entre leur approche et celle présentée ici sont commentées dans la section 2.5.4.

On présente dans un premier temps l'établissement du couplage en lui-même. Ceci s'effectue au travers de la mise en place d'un critère de transition fluide/solide.

Par la suite, la mise en oeuvre numérique de l'approche euléro-lagrangienne est détaillée en utilisant une méthode de résolution découplée. Une vitesse convective dépendant de la vitesse du maillage est introduite dans les termes convectifs de la routine fluide.

Enfin, la procédure d'actualisation de la géométrie nécessaire à cette approche euléro-lagrangienne est présentée. Cette procédure est effectuée en trois temps : identification des différentes zones dans lesquelles les noeuds du maillage se trouvent, actualisation de la géométrie de la surface libre et enfin replacement des noeuds à l'intérieur de la partie fluide.

2.5.1 Le couplage fluide/solide

2.5.1.1 Repérage de l'interface fluide/solide

D'un point de vue numérique, le couplage de deux milieux différents pouvant être amenés à se transformer l'un en l'autre pose la question de la méthode de suivi de front employée. De nombreuses techniques numériques ont déjà été développées à cet effet dans la littérature, pour les fluides afin de suivre une surface libre au cours du calcul (méthode des marqueurs (TDM96), méthode Volume of Fluid (HN81)), ou en mécanique des solides pour suivre par exemple le trajet de propagation d'une fissure (MDB99).

L'approche suivie ici est plus « rustique », mais aussi robuste. Il se trouve que les éléments fluide et solide ont été séparément développés en amont, avant d'établir ce couplage. L'idée la plus simple est alors de se cantonner à des éléments entièrement « solides » ou « fluides » pour l'établissement de ce couplage. Ce choix implique de faire passer l'interface fluide/solide entre les éléments du maillage. La surface de séparation des deux milieux n'est alors pas régulière, mais ceci est finalement de peu d'importance puisque l'identification de zones fluide et solide reste une vue de l'esprit. L'interface représente une discontinuité « faible », c'est-à-dire une discontinuité du gradient du champ de vitesse, il n'est pas besoin de la suivre aussi précisément qu'un trajet de fissuration dans un solide. Faire passer l'interface entre les éléments permet dans un premier temps d'éviter d'effectuer l'implémentation de méthodes de suivi de front, et aussi de conserver les routines fluide et solide séparées.

2.5.1.2 Critère de transition fluide/solide

Le repérage de l'interface étant effectué au niveau des faces entre éléments, le critère de transition fluide/solide est global sur l'élément, c'est-à-dire qu'il est défini comme une quantité moyenne dans l'élément.

Le critère le plus simple à mettre en place est un critère portant sur une température moyenne de l'élément. Dans la boucle sur les éléments, l'orientation vers les routines élémentaires est effectuée au moyen de ce test. Une température de transition de phase est spécifiée par l'utilisateur dans la mise en données du calcul. De plus, pour faciliter la convergence du calcul, le test est effectué de manière explicite. Le calcul du résidu à l'instant $t + \Delta t$ est donc fait sur la base d'un test effectué sur une température moyenne par élément calculée à l'instant t.

$$\text{à } t + \Delta t \left| \begin{array}{lll} T_{\text{moy}}^{(E)}(t) < T_{\text{ref}} & \rightarrow & \text{(E) solide} \\ T_{\text{moy}}^{(E)}(t) > T_{\text{ref}} & \rightarrow & \text{(E) fluide} \end{array} \right. \tag{2.68}$$

On observe que les éléments étant tous deux formulés en température/vitesse/pression, les quantités élémentaires sont automatiquement compatibles et s'assemblent de façon classique pour former la matrice premier membre et le résidu globaux. On voit ici tout l'intérêt d'avoir formulé l'élément solide en vitesses.

2.5.2 Approche euléro-lagrangienne : mise en oeuvre numérique

2.5.2.1 Méthode de résolution

L'approche euléro-lagrangienne consiste à introduire une nouvelle configuration dans la cinématique, permettant de découpler le mouvement de la matière du mouvement du maillage. Aussi sa mise en oeuvre numérique nécessite de spécifier ce mouvement du maillage, judicieusement choisi. L'approche générale consiste à régulariser le maillage de façon à obtenir des éléments les plus réguliers possibles, mais il est aussi possible d'adapter le maillage en raffinant ou déraffinant certaines zones en fonction des grandeurs mécaniques calculées.

Si l'approche euléro-lagrangienne combine les avantages des descriptions traditionnelles lagrangienne et eulérienne, elle en combine aussi les points délicats dans la résolution : présence d'une vitesse convective et d'une procédure de remaillage. En ce qui concerne le couplage fluide/solide développé ici, le mouvement du maillage est choisi arbitraire uniquement dans la partie fluide, les noeuds de la partie solide suivant la matière. Des termes de convection étant déjà présents dans le traitement de l'élément fluide, cette approche conduit uniquement à modifier ces termes convectifs en introduisant la vitesse du maillage.

La résolution du problème est effectuée de façon découplée, au sens où la procédure d'actualisation de la géométrie est réalisée à la convergence du calcul (Ben89). On note que les fluides présentent généralement un comportement instantané, aussi il n'est pas besoin d'effectuer de transports de quantités accompagnant la procédure de remaillage. C'est ici un intérêt tout particulier d'avoir choisi de représenter la zone malaxée comme un fluide. Les fluides présentent des comportements plus simples que les solides, on échappe alors grâce à cette technique de couplage aux traditionnelles projections de champs, et donc au coût de calcul et erreurs numériques associées.

Cette approche découplée conduit à effectuer la résolution à l'instant $t+\Delta t$ de la partie fluide sur la géométrie actualisée dans cette zone à l'instant t. La résolution des équations dans la partie solide, quant à elle, est effectuée sur la configuration à $t+\Delta t$. La résolution est donc effectuée sur une configuration connue dans la partie fluide (explicite) et sur une configuration inconnue dans la partie solide (implicite).

Bien qu'une partie du maillage se déforme au cours des itérations du calcul (mais pas l'autre), la continuité du maillage est assurée lors de l'assemblage des quantités élémentaires de façon tout à fait classique. En fait, ce décalage temporel d'actualisation du maillage n'influe que sur les champs calculés aux points de Gauss des éléments adjacents à l'interface, si ceux-ci viennent à être distordus au cours d'un pas de temps. Il convient alors de limiter la taille de celui-ci pour limiter les erreurs numériques et assurer la convergence du calcul.

2.5.2.2 Aménagements de l'élément fluide

L'intégration du couplage fluide/solide au sein d'une approche euléro-lagrangienne nécessite d'effectuer quelques aménagements dans la formulation de l'élément fluide.

Vitesse convective

Le premier changement concerne la définition des forces convectives. Les termes convec-

tifs intervenant dans la forme faible (2.7) s'écrivent à présent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega_\chi} \rho C(\boldsymbol{\nabla} T) \cdot \mathbf{c}\, T^* \mathrm{d}\Omega \\ \displaystyle\int_{\Omega_\chi} \rho(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}^* \mathrm{d}\Omega \end{array} \right. \tag{2.69}$$

où $\mathbf{c}$ représente la vitesse convective, définie dans une approche euléro-lagrangienne par $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ désignant la vitesse du maillage. D'autre part, les champs $\mathbf{v}^*$ et T^* sont des champs tests admissibles à zéro. Considérant les discrétisations propres à l'élément P1+/P1 :

$$\begin{aligned} T^* &= \bar{N}^{(p)} T^{(p)^*} \\ \mathbf{v}^* &= N^{(p)} \mathbf{v}^{(p)^*} + N^{(b)} \boldsymbol{\lambda}^* \end{aligned} \tag{2.70}$$

il vient immédiatement la définition des forces convectives en ALE :

$$\mathbf{f}^{\mathrm{conv}} = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} f_T^{\mathrm{conv},(p)} \\ \mathbf{f}_v^{\mathrm{conv},(p)} \\ 0 \end{array} \right\} \\ \mathbf{f}_b^{\mathrm{conv}} \end{array} \right\} \tag{2.71}$$

avec

$$\begin{aligned} f_T^{\mathrm{conv},(p)} &= \int_{\Omega_e} \rho C(\boldsymbol{\nabla} T) \cdot (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\ \mathbf{f}_v^{\mathrm{conv},(p)} &= \int_{\Omega_e} \rho(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\ \mathbf{f}_b^{\mathrm{conv}} &= \int_{\Omega_e} \rho(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{2.72}$$

D'autre part, le maillage de la partie fluide étant actualisé à l'instant t, les intégrales élémentaires définies à l'instant $t + \Delta t$ sont calculées sur la géométrie de l'élément à l'instant t. Aussi, au début de la routine fluide, la géométrie du maillage initial est actualisée du déplacement des noeuds de cette zone à l'instant t.

Définition de la pression hydrostatique

Le couplage et donc l'assemblage d'éléments fluides et solides nécessite une homogénéisation de la définition de la pression hydrostatique pour éviter une discontinuité non physique de celle-ci à l'interface. En effet dans chacun des milieux, elle a été définie précédemment comme suit :

$$\begin{aligned} \text{élément fluide} &\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{s} \\ \text{élément solide} &\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + \mathbf{s} \end{aligned} \tag{2.73}$$

où $\mathbf{s}$ est le déviateur des contraintes de Cauchy. Par la suite, le choix a été fait d'homogénéiser l'élément fluide sur l'élément solide. Les équations relatives aux degrés de liberté vitesses des efforts intérieurs élémentaires sont alors modifiées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_v^{\mathrm{int},(p)} &= \int_{\Omega_e} 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}(N^{(p)} \mathbf{e}_i) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_e} p \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\ &= \left| \begin{array}{l} \left[\left(\displaystyle\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) + \left(\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} \right] \cdot \mathbf{v}^{(q)} \\ + \left[\left(\displaystyle\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) + \left(\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} \right] \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ + \displaystyle\int_{\Omega_e} p \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \end{array} \right. \end{aligned} \tag{2.74}$$

2.5.3 Actualisation de la géométrie

L'approche découplée est ici suivie pour la résolution euléro-lagrangienne. La procédure d'actualisation du maillage de la partie fluide est donc effectuée à la convergence du calcul. Cette procédure est effectuée en trois temps :

* Les noeuds sont codés en fonction de la zone dans laquelle ils se trouvent.
* La position des noeuds de la surface libre est actualisée en fonction du champ de vitesse matérielle convergé.
* Enfin, les noeuds intérieurs de la zone fluide sont replacés de la façon la plus régulière possible par une technique de replacement barycentrique.

2.5.3.1 Codage en zones des noeuds

Au cours du calcul, l'orientation vers les routines des éléments fuide et solide est effectuée au travers d'un test portant sur une température moyenne de l'élément à l'instant précédent. Ainsi, la distribution d'éléments fluides et solides dans le maillage reste identique au cours des itérations.

Cette information sur la nature des éléments va nous permettre de qualifier de façon similaire les noeuds du maillage, non pas pour un calcul lié au comportement cette fois-ci, mais pour piloter leur replacement au cours de la procédure de remaillage, après convergence. Pour bien comprendre le codage effectué ci-après, il nous faut préciser la nature du mouvement du maillage au cours de la déformation :

* Le maillage suit la matière dans la partie solide, c'est pourquoi la procédure de remaillage ne porte que sur la partie fluide.
* À l'interface fluide/solide, la position des noeuds est régie par la partie solide.
* Au niveau de la surface libre, le maillage doit se déplacer suivant la vitesse normale de la matière (mais pas suivant la vitesse tangentielle).
* Enfin, à l'intérieur de la zone fluide, les noeuds ne suivent pas la matière, leur mouvement est tel que les éléments demeurent les plus réguliers possibles.

En fonction de la nature du mouvement du maillage souhaité, et en fonction de la nature des éléments adjacents à un noeud du maillage, on définit alors des zones dans lesquelles les noeuds sont classés. Ces zones sont :

* la partie solide
* l'interface fluide/solide
* l'intérieur de la zone fluide
* la surface libre

Pour remonter de la nature des éléments à la nature (et donc la position dans les zones) d'un noeud, il faut faire appel à une table de connectivité inverse. La table de connectivité classique d'un maillage donne les numéros des noeuds appartenant aux différentes mailles, tandis que la table de connectivité inverse donne les numéros des mailles contenant les différents noeuds. De manière plus précise, la première donne le numéro global p du noeud en fonction de l'élément E_e auquel il appartient et de sa numérotation locale k à l'intérieur de cet élément :

$$p = \mathrm{CONNEC}(k+1, e) \tag{2.75}$$

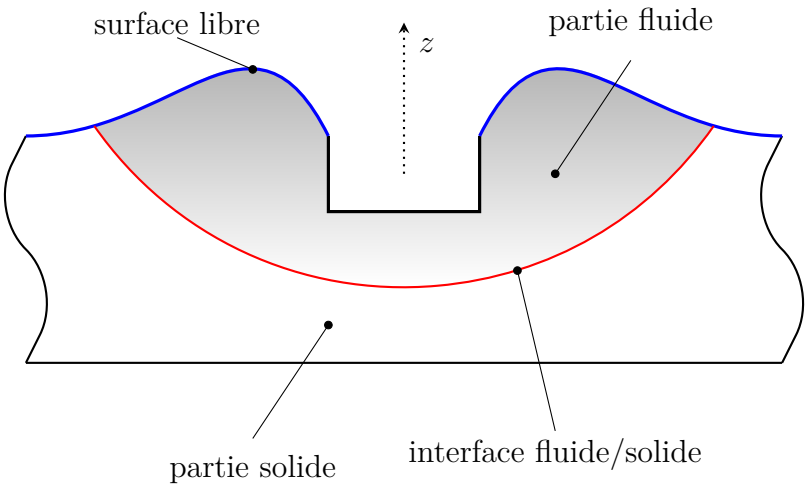


Figure 2.2 – Zones et surfaces

la première ligne de la table désignant le nombre de noeuds de l'élément E_e. La table de connectivité inverse donne, quant à elle, le numéro du $e^{\text{ième}}$ élément E_e contenant le noeud p :

$$E_e = \text{MCONN}(e+1, p) \tag{2.76}$$

la première ligne de la table désignant le nombre d'éléments contenant le noeud p. L'accès aux éléments contenant le noeud p permet de définir un « patch » d'éléments, sur lequel on peut tester la nature des éléments et donc définir la zone dans laquelle se trouve le noeud considéré.

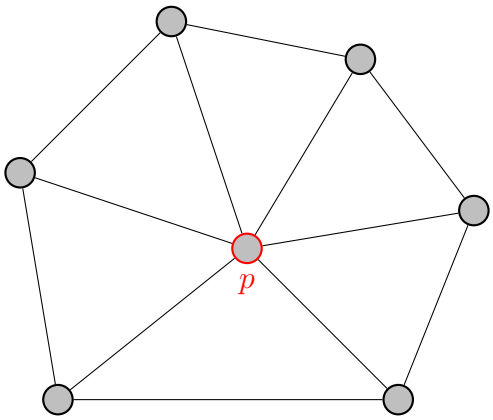


Figure 2.3 – Représentation 2D d'un patch d'éléments connectés au noeud p.

Ces tables sont définies en amont du calcul. Pour un noeud p,

* Si tous les éléments composant le patch sont solides, alors le noeud est situé dans la partie solide.
* S'il existe au moins un élément fluide et au moins un élément solide dans le patch, le noeud est sur l'interface fluide/solide.

* S'il n'y a que des éléments fluides, le noeud est soit dans la partie fluide soit sur la surface libre. Un moyen d'identifier les noeuds positionnés sur la surface libre est d'y prévoir au début du calcul des mailles de peau. Si un noeud est connecté à une maille de peau, alors il est positionné sur la surface libre, sinon il est situé à l'intérieur de la zone fluide.

Au final, on peut construire un tableau NZON(E) spécifiant la nature de chaque noeud à partir de son numéro global. Le processus de codage des noeuds est illustré dans l'algorithme 1.

Algorithm 1 Codage des noeuds

```
1:  for p = 1 to Nb noeuds N_max do
2:     (Nb mailles N_Ep contenant le noeud p) = MCONN(1, p)
3:     Initialisation à 0 des Nbs d'éléments fluides, solides et de peau
4:     for e = 1 to Nb éléments N_Ep contenant le noeud p do
5:        E_e = MCONN(e + 1, p)
6:        Accès aux caractéristiques de l'élément E_e
7:        if dim(E_e)>2 then
8:           if (E_e) est solide then
9:              Nb éléments solide = Nb éléments solide + 1
10:          else if (E_e) est fluide then
11:             Nb éléments fluide = Nb éléments fluide + 1
12:          end if
13:       else if dim(E_e)=2 then
14:          Nb mailles peau = Nb mailles peau + 1
15:       end if
16:    end for
17:    if Nb éléments fluide=0 then
18:       le noeud p est dans la zone solide
19:    else if Nb éléments solide≠0 then
20:       le noeud p est sur l'interface fluide/solide
21:    else if Nb mailles de peau=0 then
22:       le noeud p est dans la zone fluide
23:    else
24:       le noeud p est sur la surface libre
25:    end if
26: end for
```

2.5.3.2 Actualisation de la surface libre

Chaque noeud étant à présent codé en fonction de son appartenance à une zone ou une surface spécifiée, on peut à présent actualiser sa position.

Partie solide et interface fluide/solide

Dans la partie solide et au niveau de l'interface fluide/solide, le maillage suit le mouvement de la matière. Aussi, le déplacement des noeuds (ou déplacement de la matière)

appartenant à cette zone est calculé à partir de la vitesse matérielle convergée :

$$\mathbf{u}^{(p)}(t+\Delta t) = \mathbf{u}^{(p)}(t) + \mathbf{v}^{(p)}(t+\Delta t)\Delta t \tag{2.77}$$

Surface libre

Le mouvement du maillage est choisi de telle façon à ce que l'on suive la formation d'un bourrelet généré par la plongée de l'outil, mais pas le mouvement orthoradial de la matière généré par la rotation de l'outil. Une façon relativement simple d'atteindre cet objectif est d'actualiser la position des noeuds de cette interface à partir de la seule composante normale de la vitesse matérielle calculée en ces noeuds. Ceci pose la question de la définition de la normale en un noeud de cette surface libre.

De la même manière que la présence de mailles de peau sur la frontière libre nous permet d'identifier les noeuds qui s'y trouvent, ces mêmes mailles de peau vont nous permettre de calculer la normale en chacun de ces noeuds. Il est en effet aisé, pour un élément bidimensionnel plongé dans un milieu tridimensionnel, de définir son vecteur normal. La normale en un noeud est alors définie comme la moyenne des normales des mailles de peau contenant ce noeud :

$$\mathbf{n}^{(p)} = \frac{\displaystyle\sum_{e=1}^{N_{\mathrm{mp}}} \mathbf{n}_{E_e}}{\left\| \displaystyle\sum_{e=1}^{N_{\mathrm{mp}}} \mathbf{n}_{E_e} \right\|} \tag{2.78}$$

où N_{mp} dénote le nombre de mailles de peau contenant le noeud p.

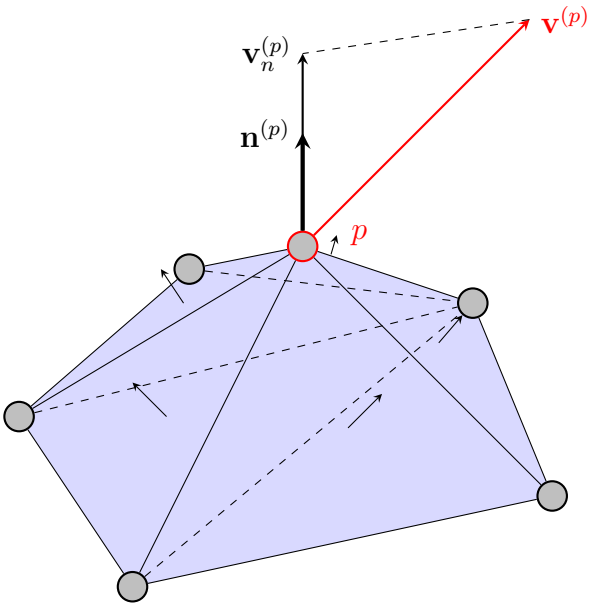


Figure 2.4 – Définition de la normale en un noeud et projection de la vitesse matérielle

La vitesse de ce noeud (vitesse du maillage) est alors calculée par projection de la vitesse matérielle sur cette normale :

$$\hat{\mathbf{v}}^{(p)} = \underbrace{(\mathbf{v}^{(p)} \cdot \mathbf{n}^{(p)})}_{v_n} \mathbf{n}^{(p)} = v_n \mathbf{n}^{(p)} \tag{2.79}$$

Pour le couplage fluide/solide, les conditions aux limites sont prescrites sur le déplacement matériel par l'utilisateur dans la mise en données, c'est-à-dire qu'on a privilégié l'approche solide (2.67) pour cette option. L'approche ALE dissociant les mouvements du maillage et de la matière dans la partie fluide, les conditions aux limites sont posées sur le déplacement matériel $\mathbf{u}$. Les vitesses imposées pour un noeud p s'écrivent :

$$(\mathbf{v}^{(p)})^d(t+\Delta t) = \frac{(\mathbf{u}^{(p)})^d(t+\Delta t) - \mathbf{u}^{(p)}(t)}{\Delta t} \tag{2.80}$$

D'autre part, les déplacements des noeuds du maillage permettent d'actualiser la géométrie, au cours des itérations, pour le calcul des quantités élémentaires. Il est alors nécessaire de calculer et de stocker, en plus des vitesses matérielles $\mathbf{v}$ et vitesse du maillage $\hat{\mathbf{v}}$, les déplacements matériels $\mathbf{u}$ et déplacements du maillage $\hat{\mathbf{u}}$. Pour un noeud p, ces déplacements sont actualisés à convergence comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(p)}(t+\Delta t) &= \mathbf{u}^{(p)}(t) + \mathbf{v}^{(p)}(t+\Delta t)\Delta t \\ \hat{\mathbf{u}}^{(p)}(t+\Delta t) &= \hat{\mathbf{u}}^{(p)}(t) + \hat{\mathbf{v}}^{(p)}(t+\Delta t)\Delta t \end{aligned} \tag{2.81}$$

Le déplacement matériel $\mathbf{u}$ est actualisé à partir de la vitesse matérielle $\mathbf{v}$ convergée. Le déplacement des noeuds du maillage est quant à lui actualisé à partir de la vitesse du maillage $\hat{\mathbf{v}}$ définie par (2.79).

Algorithm 2 Actualisation de la position des noeuds du maillage

1: **for** $p = 1$ **to** Nb noeuds $N_{\max}$ **do**
2: **if** le noeud p appartient à la partie solide ou à l'interface fluide/solide **then**
3: $\mathbf{u}^{(p)}(t+\Delta t) = \hat{\mathbf{u}}^{(p)}(t+\Delta t) = \mathbf{u}^{(p)}(t) + \mathbf{v}^{(p)}(t+\Delta t)\Delta t$
4: **else if** le noeud p appartient à la partie fluide **then**
5: Déplacement matériel : $\mathbf{u}^{(p)}(t+\Delta t) = \mathbf{u}^{(p)}(t) + \mathbf{v}^{(p)}(t+\Delta t)\Delta t$
6: Déplacement du maillage $\hat{\mathbf{u}}$: replacement barycentrique.
7: **else if** le noeud p appartient à la surface libre **then**
8: Nb mailles N_{E_p} contenant le noeud $p = \mathrm{MCONN}(1, p)$
9: **for** $e = 1$ **to** Nb éléments N_{E_p} contenant le noeud p **do**
10: $E_e = \mathrm{MCONN}(e+1, p)$
11: Accès aux caractéristiques de l'élément E_e
12: **if** dime(E_e)=2 **then**
13: (Nb mailles de peau N_{mp}) = (Nb mailles de peau N_{mp}) + 1
14: Extraction de la normale $\mathbf{n}_{E_e}$ de la maille de peau E_e
15: **end if**
16: **end for**
17: Calcul de la normale du noeud p : $\mathbf{n}^{(p)} = \frac{\sum_{e=1}^{N_{\mathrm{mp}}} \mathbf{n}_{E_e}}{\|\mathbf{n}^{(p)}\|}$
18: Vitesse du maillage : $\hat{\mathbf{v}}^{(p)} = (\mathbf{v}^{(p)} \cdot \mathbf{n}^{(p)})\mathbf{n}^{(p)}$
19: Déplacement du maillage : $\hat{\mathbf{u}}^{(p)}(t+\Delta t) = \hat{\mathbf{u}}^{(p)}(t) + \hat{\mathbf{v}}^{(p)}(t+\Delta t)\Delta t$
20: Déplacement matériel : $\mathbf{u}^{(p)}(t+\Delta t) = \mathbf{u}^{(p)}(t) + \mathbf{v}^{(p)}(t+\Delta t)\Delta t$
21: **end if**
22: **end for**

2.5.3.3 Replacement barycentrique des noeuds de la zone fluide

Le mouvement du maillage dans la partie fluide est choisi de telle façon à ce que les éléments soient les plus réguliers possibles. Il existe un certain nombre de méthodes connues

pour remailler de façon régulière (Méthode de type Laplacien (Win63; WB82), méthode des ressorts (Ham08), etc), nous avons choisi ici la méthode de replacement barycentrique. Cette méthode relativement simple consiste, comme son nom l'indique, à replacer un noeud du maillage au barycentre de ses voisins. Ce faisant les éléments gagnent en régularité.

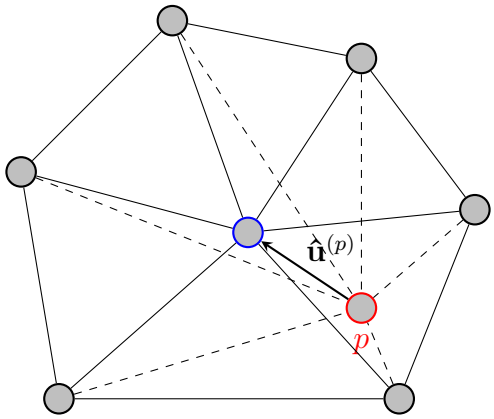


Figure 2.5 – Replacement d'un noeud au barycentre de ses voisins

Pour calculer la position barycentrique d'arrivée d'un noeud donné, il est nécessaire d'avoir accès aux coordonnées de ses noeuds voisins. Ceci est réalisé en se servant de la table de connectivité inverse, déjà utilisée pour le codage des noeuds. Cette table de connectivité inverse nous permet d'avoir accès au nombre et aux numéros des éléments contenant un noeud p. Il est alors possible de déterminer grâce à ces mailles adjacentes, les noeuds voisins du noeud p. On construit alors le tableau NVOIS qui, à partir du numéro global p d'un noeud, donne les numéros globaux q de ses noeuds voisins :

$$q = \mathrm{NVOIS}(n+1, p) \tag{2.82}$$

où q est le $n^{\text{ième}}$ noeud voisin du noeud p. La première ligne du tableau est réservée au nombre de noeuds voisins du noeud p. Ce tableau (algorithme 3) est défini en amont du calcul, juste après la définition de la table de connectivité inverse.

Le replacement barycentrique est une méthode itérative. À chaque itération, une nouvelle estimation de la position barycentrique d'un noeud p est calculée :

$$\mathbf{x}_p^{(\mathrm{it})} = \frac{\sum_{n=1}^{N_{\mathrm{vois}_p}} \mathbf{x}_n^{(\mathrm{it})}}{N_{\mathrm{vois}_p}} \tag{2.83}$$

où N_{vois_p} est le nombre de noeuds voisins du noeud p. La position $\mathbf{x}_n^{(\mathrm{it})}$ du $n^{\text{ième}}$ noeud voisin (dénommé q) du noeud p est déterminée à partir de sa position initiale, de son déplacement à l'instant t et des corrections incrémentales successives jusqu'à l'itération (it) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n^{(\mathrm{it})} &= \mathbf{X}_n + \hat{\mathbf{u}}_n(t) + \delta\hat{\mathbf{u}}_n^{(\mathrm{it})} \\ &= \mathbf{X}_n + \Delta\hat{\mathbf{u}}_n^{(\mathrm{it})} \end{aligned} \tag{2.84}$$

Algorithm 3 Noeuds voisins d'un noeud

```
1: for p = 1 to Nb noeuds N_max do
2:    Initialisation N_tot
3:    Nb mailles N_{E_p} contenant le noeud p = MCONN(1, p)
4:    for e = 1 to Nb éléments N_{E_p} contenant le noeud p do
5:       E_e = MCONN(e + 1, p)
6:       Accès aux caractéristiques de l'élément E_e
7:       for k = 1 to Nb noeud de l'élément E_e do
8:          q = CONNEC(k + 1, E_e)
9:          if q = p then
10:            Sortir de la boucle
11:         end if
12:         if (Nb noeuds voisins N_tot) ≠ 0 then
13:            for I = 1 to N_tot do
14:               if NVOIS(I + 1, p) = q then
15:                  Sortir de la boucle
16:               end if
17:            end for
18:         end if
19:         (Nb noeuds voisins N_tot) = (Nb noeuds voisins N_tot) + 1
20:         NVOIS(N_tot + 1, p)=q
21:      end for
22:   end for
23:   NVOIS(1,p) = N_tot
24: end for
```

Les itérations s'arrêtent lorsque les noeuds sont tous placés au barycentre de leurs voisins, le critère d'arrêt est posé sur un incrément de déplacement entre deux itérations, celui-ci devant être inférieur à une tolérance fixée, soit :

$$\begin{aligned} & \delta\hat{u}_{\max}^{(\mathrm{it})} \leq \epsilon \Delta X_{\max} \\ \text{avec} \quad & \left| \begin{array}{l} \delta\hat{u}_{\max}^{(\mathrm{it})} = \sup\limits_{i,p}(\delta\hat{u}_i^{(\mathrm{it})})_p \qquad i = 1,3 \quad p = 1, N_{\max} \\ \Delta X_{\max} = \sup\limits_{i,n}((X_i)_n - (X_i)_p) \quad p = 1, N_{\max} \quad n = 1, N_{\mathrm{vois}_p} \end{array} \right. \end{aligned} \tag{2.85}$$

où $\delta\hat{u}_{\max}^{(\mathrm{it})}$ est construit à partir de l'incrément de déplacement maximal parmi tous les noeuds du maillage, dans lequel la composante maximale est choisie. Cet incrément maximal doit être inférieur, à un facteur ϵ donné, à une distance projetée maximale entre deux noeuds du maillage. Le coefficient ϵ est fixé à 10^{-3}.

Le processus de replacement des noeuds est illustré par l'algorithme 4.

Algorithm 4 Positionnement barycentrique

1: **while** $\delta u_{\max}^{(\mathrm{it})} \leq \epsilon \Delta X_{\max}$ **do**
2: **for** $p = 1$ **to** Nb noeuds $N_{\max}$ **do**
3: $\mathbf{X}_p = \mathrm{COOR}(p)$
4: (Nb noeuds voisins N_{vois_p}) $= \mathrm{NVOIS}(1, p)$
5: **for** $n = 1$ **to** Nb noeuds voisins N_{vois_p} **do**
6: $q = \mathrm{NVOIS}(n + 1, p)$
7: $\mathbf{X}_q = \mathrm{COOR}(q)$
8: $\mathbf{x}_q^{(\mathrm{it})} = \mathbf{X}_q + \Delta\hat{\mathbf{u}}_q^{(\mathrm{it})}$
9: $\mathbf{x}_p^{(\mathrm{it})} = \mathbf{x}_p^{(\mathrm{it})} + \mathbf{x}_q^{(\mathrm{it})}$
10: **if** (it $= 0$) **then**
11: $\Delta X_{\max} = \sup\limits_{i,q}((X_i)_q - (X_i)_p)$
12: **end if**
13: **end for**
14: $\mathbf{x}_p^{(\mathrm{it})} = \frac{\mathbf{x}_p^{(\mathrm{it})}}{N_{\mathrm{vois}_p}}$
15: $\hat{\mathbf{u}}_p^{(\mathrm{it})} = \mathbf{x}_p^{(\mathrm{it})} - \mathbf{X}_p$
16: $\hat{\mathbf{v}}_p^{(\mathrm{it})} = \frac{\mathbf{x}_p^{(\mathrm{it})} - \mathbf{X}_p}{\Delta t}$
17: $\delta\hat{u}_{\max}^{(\mathrm{it})} = \sup\limits_{i,p}(\delta\hat{u}_i^{(\mathrm{it})})_p$
18: **end for**
19: it = it + 1
20: **end while**

2.5.4 Commentaires

Une approche de couplage entre deux milieux différents a déjà été développée dans un autre contexte par (Jao98) et (BF04). Ces auteurs envisagent en effet un couplage d'un milieu viscoplastique et d'un milieu élastoviscoplastique en vue d'améliorer la modélisation de la solidification d'une pièce de fonderie. Deux éléments finis respectivement viscoplastique et élastoviscoplastique sont couplés au sein d'une même résolution réalisée dans le cadre d'une approche euléro-lagrangienne, l'interface passant par les faces entre les éléments, et le test de transition est porté sur une température moyenne de l'élément.

Bien que suivant un raisonnement différent, lié entre autre au contexte de l'étude, il est remarquable de voir que nous arrivons aux mêmes idées que celles présentées par ces auteurs pour le traitement du couplage de deux milieux à comportements différents. Il semble que la solution envisagée pour le couplage soit bien la plus simple possible.

Cependant, outre les différences sur les formulations des éléments fluide et solide déjà mentionnées dans les sections précédentes, les différences suivantes entre l'approche proposée ici et le travail de (Jao98) et (BF04) sont à noter sur le traitement du couplage des deux milieux :

1. Ces auteurs proposent une résolution découplée de la thermique et de la mécanique. Ces deux physiques sont dans notre cas résolues de façon simultanée.
2. Leur approche euléro-lagrangienne est fondée sur un découplage du traitement des termes convectifs avec la résolution globale des équations de bilan. Ceci les conduit donc, après une résolution lagrangienne dans laquelle les noeuds du maillage suivent la matière dans chacune des deux phases, à traiter les termes convectifs a posteriori par une opération de transport des quantités nodales sur la géométrie actualisée à partir de la vitesse du maillage calculée au préalable. Ceci est la principale différence avec l'approche proposée ici, dans laquelle la résolution des équations intègre ces termes convectifs dans la partie fluide, seule la procédure de replacement des noeuds dans cette zone est rejetée à la convergence du calcul.

   On observe que ces deux approches ne sont pas équivalentes ; le traitement a posteriori des termes de convection est licite si on considère une discrétisation temporelle explicite des équations de bilan, or ces auteurs effectuent une résolution implicite. Si cette approche peut sembler pratique pour adapter un code lagrangien à une description euléro-lagrangienne, elle introduit des erreurs numériques supplémentaires dans la résolution.
3. Le contexte de la présente étude conduit à une identification des noeuds du maillage en zones particulières liées au procédé Friction Stir Spot Welding. On s'appuie sur la présence de mailles de peau sur le pourtour de la structure pour l'identification des noeuds appartenant à la surface libre, mais aussi pour le calcul d'une normale de calcul en ces noeuds, nécessaire pour l'actualisation de la position de ces noeuds au cours du calcul.
4. Enfin, le replacement des noeuds est effectué dans la zone fluide par un replacement barycentrique de la même manière que dans (BF04), à ceci près que la position des noeuds de la surface libre est effectuée directement noeud par noeud, et pas par pénalité.

2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, l'approche numérique développée pour la simulation du Friction Stir Spot Welding a été présentée. Cette approche consiste en un couplage fluide/solide, et permet de simuler le comportement d'un métal à haute température tout en intégrant les effets d'histoire subis par la matière. Ce couplage est d'autre part intégré au sein d'une approche euléro-lagrangienne pour pouvoir traiter les très grandes déformations qui se produisent dans les procédés de soudage par friction et malaxage.

La construction du modèle numérique est basée sur l'élément fini mixte P1+/P1. Cet élément linéaire enrichi assure la continuité des champs de température, vitesse et pression dans la version proposée. Le champ bulle ajouté dans l'interpolation de la vitesse permet

à cet élément de pouvoir traiter, au travers d'une formulation mixte, une liaison interne de type incompressibilité.

Dans un premier temps, cet élément a été développé en mécanique des fluides dans le cas d'un écoulement laminaire incompressible. L'élément précédemment développé avec une formulation mixte température/vitesse/pression est ici étendu au cas instationnaire. Le problème est formulé sous forme faible en tenant compte d'un fort couplage thermomécanique. La condition d'incompressibilité du fluide est écrite sous forme faible. Le problème est résolu implicitement au moyen d'une procédure itérative nécessitant la linéarisation du système d'équations semi-discrètes. Pour réduire le coût de calcul, les degrés de liberté du noeud bulle sont éliminés avant d'effectuer la résolution globale du système, en introduisant une approximation supplémentaire sur le champ d'accélération. Cette hypothèse permet d'éviter d'effectuer la discrétisation temporelle du champ bulle avant condensation de ce dernier, et donc de préserver la structure du code. On montre par la suite que cette approximation est plus faible que celle effectuée au travers de la concentration de la matrice de masse sur sa diagonale. D'autre part, cette approximation est parfaitement exacte dans tout mouvement rigidifiant.

Dans un second temps, cet élément est développé en considérant un comportement de solide en grandes transformations. Le problème est formulé en vitesses, et la résolution est effectuée sur la configuration inconnue à $t + \Delta t$. L'incompressibilité plastique est assurée par le biais de la formulation mixte. La discrétisation temporelle étant implicite, le système non-linéaire d'équations semi-discrètes est linéarisé puis résolu par une méthode de Newton. D'autre part, la résolution en vitesse est combinée avec la spécification par l'utilisateur de déplacements imposés dans la mise en données.

Enfin, la stratégie de calcul suivie pour le couplage fluide/solide est présentée. Ce couplage s'appuie sur les deux éléments développés précédemment. On définit un élément du maillage comme étant complètement « fluide » ou « solide », aussi l'interface entre les deux milieux est-elle située sur les faces communes à ces deux types d'éléments. Le critère de « transition de phase » est défini au moyen d'une température moyenne globale de la maille considérée, comparée à une valeur seuil définie par l'utilisateur. La résolution du système global est effectué sur les vitesses. Les éléments à comportement fluide et solide ayant été formulés d'une façon formellement similaire, ils s'assemblent de façon tout à fait classique. Par la suite, le traitement numérique de l'approche euléro-lagrangienne est précisé. L'approche est choisie découplée, c'est-à-dire que la procédure d'actualisation de la géométrie est effectuée à la convergence du calcul. Cette actualisation est effectuée en trois temps : (a) codage des noeuds du maillage à partir de la nature des éléments adjacents, (b) actualisation des noeuds appartenant à la surface libre à partir de la composante normale du champ de vitesse matérielle convergé et (c) remaillage régulier des noeuds appartenant à la partie fluide par une technique de replacement barycentrique.

Chapitre 3

Vérification de l'élément P1+/P1 en comportement fluide et solide

Dans ce troisième chapitre, la vérification de l'implémentation de l'élément P1+/P1 est effectuée pour les comportements fluide et solide, sur la base de solutions analytiques développées pour le problème du viscosimètre de Couette.

Sommaire

3.1 Introduction **74**

3.2 Le problème de Couette en comportement fluide **74**

3.2.1 Rappel de la solution mécanique pour un écoulement stationnaire, laminaire et incompressible 74

3.2.2 Problème mécanique instationnaire 77

3.2.3 Problème couplé (mécanique stationnaire) - (thermique instationnaire) 79

3.3 Comparaison des solutions analytique/numérique en mécanique des fluides **83**

3.3.1 Mécanique instationnaire 83

3.3.2 (Mécanique stationnaire) - (Thermique instationnaire) 83

3.4 Le viscosimètre de Couette avec un matériau élastoplastique . . **85**

3.4.1 Matériau rigide, parfaitement plastique 85

3.4.2 Matériau élastoplastique écrouissable 86

3.4.3 Décharge 94

3.4.4 Extension au cas des grandes transformations 95

3.5 Comparaison des solutions analytique/numérique pour un solide **98**

3.5.1 Mise en données 98

3.5.2 Résultats 99

3.6 Conclusions **101**

3.1 Introduction

Dans le cadre du développement et de l'implémentation de l'élément P1+/P1 dans le code de calcul SYSWELD®, une vérification du comportement de cet élément par rapport à des solutions de référence est nécessaire. Les solutions sont ici construites sans souci de leurs intérêts pratiques, aussi les conditions initiales et les conditions aux limites sont déterminées de manière à ce que l'écriture des solutions soit la plus simple possible.

On se propose dans un premier temps de développer des solutions analytiques de référence dans le cas d'un comportement fluide. Ces solutions s'appuient sur un problème classique de mécanique des fluides : le viscosimètre de Couette. Ce problème, traditionnellement présenté en quasi-statique, est développé dans la section 3.2 tout d'abord en mécanique instationnaire pure, puis pour un couplage (mécanique stationnaire) - (thermique instationnaire). Ces solutions ont pour objet de tester à la fois le comportement dynamique et le couplage thermomécanique intégrés dans la formulation de l'élément P1+/P1.

Dans la section 3.3, les comparaisons entre les deux solutions analytiques développées dans la section 3.2 et les solutions obtenues numériquement sont présentées.

Après avoir implémenté la version solide de l'élément P1+/P1, il est apparu naturel de conserver le même problème, particularisé à un matériau solide. La section 3.4 est consacrée à l'étude analytique du viscosimètre de Couette pour un matériau solide élastoplastique. Le cas rigide parfaitement plastique est d'abord étudié, puis une solution est développée en élastoplasticité à la fois pour la charge et la décharge. Une extension de ce problème au cas des grandes transformations est présentée, tout d'abord en considérant un comportement rigide plastique, puis en élastoplasticité en négligeant les termes additionnels liés à la dérivée objective. Ceci permet de conserver des expressions formellement similaires par rapport à la solution en petites perturbations.

Dans la section 3.5, une comparaison entre l'élément P1+/P1 solide et la solution analytique développée pour un matériau élastoplastique en grandes transformations est présentée.

3.2 Le problème de Couette en comportement fluide

Il existe plusieurs types de viscosimètres permettant de mesurer la viscosité d'un fluide. Parmi eux, celui de Couette présente ici un intérêt spécifique. En fait, l'objectif n'est pas pour nous rhéologique, mais de trouver un problème de mécanique des fluides pouvant être résolu analytiquement, et présentant une répartition du champ de vitesse non linéaire sur la géométrie considérée. On propose donc ici un cas intéressant pour pouvoir tester la robustesse de l'implémentation de notre élément fluide. Ce viscosimètre est constitué de deux cylindres coaxiaux (figure (3.1)), le rayon du cylindre intérieur est noté a, et le rayon du cylindre extérieur est noté b. Le problème est schématisé sur la figure (3.2).

3.2.1 Rappel de la solution mécanique pour un écoulement stationnaire, laminaire et incompressible

Avant de passer au développement des solutions instationnaires et thermomécaniques, on se propose ici de brièvement rappeler les hypothèses et la résolution du problème du viscosimètre de Couette en mécanique stationnaire.

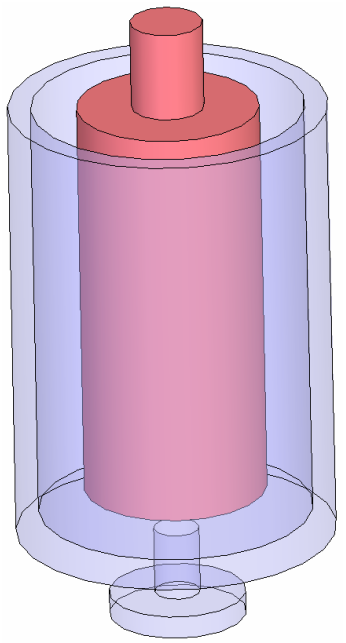


Figure 3.1 – Viscosimètre de Couette

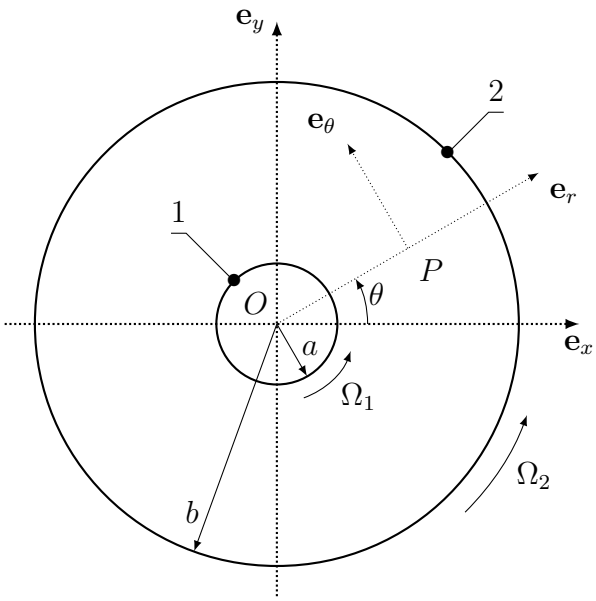


Figure 3.2 – Paramétrage du problème

Hypothèses du problème :

- Les cylindres respectivement notés 1 (intérieur) et 2 (extérieur) sont animés de vitesses de rotation respectivement notées Ω_1 et Ω_2.
- L'écoulement est stationnaire, incompressible et le fluide est non pesant.
- Le problème est axisymétrique, les cylindres sont supposés infinis suivant la coordonnée z, tous les champs mécaniques présentent une invariance par rapport à cette coordonnée.
- Le problème est isotherme et le fluide est considéré comme Newtonien, la viscosité dynamique est considérée comme constante.

Sous les hypothèses présentées, les équations de Navier-Stokes se simplifient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\rho \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \Delta \mathbf{v} \\ &\text{div } \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où ρ, p, μ dénotent respectivement la masse volumique du fluide, la pression hydrostatique et la viscosité dynamique du fluide. La condition d'incompressiblité du fluide permet de simplifier la forme du champ solution :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad v_r = \frac{\text{cste}}{r} \end{aligned} \tag{3.2}$$

La composante radiale du champ de vitesse est nulle ($v_r = 0$) en considérant la condition de rotation de l'un des deux cylindres. Le champ de vitesse s'écrit alors :

$$\mathbf{v}(r) = v_\theta(r)\mathbf{e}_\theta \tag{3.3}$$

Les équations d'équilibre radiale et tangentielle s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\rho v_\theta^2}{r} &= \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

L'équation radiale permet, combinée à des conditions aux limites appropriées, de déterminer le champ de pression. L'équation tangentielle permet, elle, de déterminer le champ de vitesse. Par intégration de cette équation, il vient :

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} \tag{3.5}$$

où A et B sont deux constantes déterminées à l'aide des deux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} v_\theta(r=a) &= \Omega_1 a \\ v_\theta(r=b) &= \Omega_2 b \end{aligned} \tag{3.6}$$

Le champ de vitesse solution s'écrit alors :

$$\boxed{v_\theta(r) = \frac{\Omega_2 b^2 - \Omega_1 a^2}{b^2 - a^2} r + \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{r}\frac{(ab)^2}{b^2 - a^2}} \tag{3.7}$$

Commentaires :

Lorsque les conditions aux limites ou la géométrie sont particularisées, on observe que certains écoulements particuliers peuvent être retrouvés :

- Si $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $v_\theta(r) = \Omega r$, il y a mouvement en bloc du fluide ou mouvement de corps rigide.
- Si $\Omega_2 = 0$ (cas qui va nous intéresser après), $v_\theta(r) = \frac{\Omega_1 a^2}{b^2 - a^2}\left(\frac{b^2}{r} - r\right)$.
- Si $\Omega_2 = 0$ et $b \to \infty$, alors $v_\theta(r) \to \frac{\Omega_1 a^2}{r}$, il y a écoulement tourbillonnaire irrotationnel.
- Et enfin si $a, b \to \infty$ avec $e = b - a = cste$, le problème se ramène au problème bien connu de Couette plan.

À partir du champ de vitesse, il est aisé d'en déduire le couple induit sur chaque cylindre. Le taux de déformation s'exprime comme :

$$\begin{aligned} &\mathbf{D} = D_{r\theta}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) \\ &\text{avec} \quad D_{r\theta} = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{r^2}\frac{(ab)^2}{a^2 - b^2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

On peut ici remarquer que le taux de déformation (et donc les contraintes) varie en $\frac{1}{r^2}$. Ce problème présente donc une répartition non linéaire du champ de contrainte sur

le rayon, ce qui est intéressant pour la vérification de l'élément implémenté. Le champ de contrainte est donné par :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{s} \quad \text{et} \quad \mathbf{s} = s_{r\theta}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) \\ &\text{avec} \quad s_{r\theta} = 2\mu \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{r^2} \frac{(ab)^2}{a^2 - b^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide (en Pa.s). Le couple généré par l'action du fluide sur un des cylindres est obtenu directement par intégration :

$$C_z^{(i)} = \mathbf{M}_{(O,\text{fluide}\to i)} \cdot \mathbf{z} = \left(\iint_{P\in(S)} \mathbf{OP} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathrm{d}S \right) \cdot \mathbf{z} \tag{3.10}$$

pour chaque cylindre $i = 1, 2$. Le couple par unité de profondeur sur chacun des cylindres s'exprime alors comme :

$$\begin{aligned} C_z^{(1)} &= -4\pi\mu(\Omega_1 - \Omega_2)\frac{a^2b^2}{a^2 - b^2} \\ C_z^{(2)} &= 4\pi\mu(\Omega_1 - \Omega_2)\frac{a^2b^2}{a^2 - b^2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2.2 Problème mécanique instationnaire

Il importe pour la vérification de l'élément P1+/P1 d'apporter une solution analytique instationnaire pour évaluer la précision du comportement transitoire de l'élément implémenté. On se propose donc de reprendre les hypothèses émises dans la précédente section en se plaçant à présent dans le cas transitoire.

Hypothèses du problème :

- ⋆ L'écoulement est instationnaire.
- ⋆ Le cylindre extérieur est bloqué, le cylindre intérieur est piloté en rotation.

Les équations du mouvement de ce problème s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\rho v_\theta^2}{r} &= \frac{\partial p}{\partial r} \\ \rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= \mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) \right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nous postulons un champ de vitesse à variables séparables, de la forme :

$$v_\theta(r, t) = f(r)g(t) \tag{3.13}$$

En introduisant (3.13) dans l'équation tangentielle du mouvement (3.12), il vient les équations différentielles :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = -\alpha \tag{3.14}$$

$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} = -\frac{\rho\alpha}{\mu} f(r) \tag{3.15}$$

où α est une constante indéterminée pour l'instant. L'équation différentielle temporelle se résoud de manière classique :

$$g(t) = K \exp(-\alpha t) \tag{3.16}$$

et K est une constante d'intégration donnée par la condition initiale. On reconnaît que l'équation différentielle spatiale peut s'identifier à une équation différentielle de Bessel (CJ59). Cette dernière s'écrit de manière plus générale sous la forme :

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0 \tag{3.17}$$

Dans le cas où ν est un entier ($= n$), celui-ci désigne l'*ordre* de l'équation. La solution de cette équation est alors une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première et seconde espèce :

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \tag{3.18}$$

Pour identifier cette équation de Bessel, on définit un changement de variable et de fonction :

$$x = \lambda r \ , \quad F(x) = f(r) \tag{3.19}$$

de manière que l'équation différentielle sur $F(x)$ soit une équation de Bessel. On réexprime l'équation spatiale avec ce changement :

$$\lambda^2 \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) + \frac{\lambda^2}{x}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) + F(x)\left[\left(\frac{\rho\alpha}{\mu}\right) - \frac{\lambda^2}{x^2}\right] = 0 \tag{3.20}$$

En multipliant (3.20) par $\frac{x^2}{\lambda^2}$, il vient :

$$x^2 \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) + x\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) + F(x)\left[\left(\frac{\rho\alpha}{\lambda^2\mu}\right) x^2 - 1\right] = 0 \tag{3.21}$$

On reconnaît une équation de Bessel d'ordre 1 en posant :

$$\frac{\rho\alpha}{\lambda^2\mu} = 1 \tag{3.22}$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$F(x) = f(r) = C_1 J_1(\lambda r) + C_2 Y_1(\lambda r) \tag{3.23}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites. Pour la résolution de ce problème, les conditions initiales et les conditions aux limites sont déterminées (sans souci de l'intérêt pratique de la solution) de manière à être compatibles avec l'hypothèse de variables séparables. Les conditions aux limites du problème s'écrivent :

$$\begin{aligned} v_\theta(r = a, t) &= \Omega(t) a \\ v_\theta(r = b, t) &= 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

et la condition initiale s'écrit :

$$v_\theta(r = a, t = 0) = \Omega_0 a \tag{3.25}$$

en posant $\Omega(t) = \Omega_0 \exp(-\alpha t)$, on en déduit les conditions :

$$\begin{aligned} F(\lambda a) &= \Omega_0 a \\ F(\lambda b) &= 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

ce qui nous donne les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} C_1 J_1(\lambda a) + C_2 Y_1(\lambda a) &= \Omega_0 a \\ C_1 J_1(\lambda b) + C_2 Y_1(\lambda b) &= 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

il vient le champ de vitesse transitoire :

$$\boxed{\begin{aligned} & v_\theta(r,t) = \Omega_0 a \left(\frac{J_1(\lambda r) Y_1(\lambda b) - J_1(\lambda b) Y_1(\lambda r)}{J_1(\lambda a) Y_1(\lambda b) - J_1(\lambda b) Y_1(\lambda a)} \right) \exp(-\alpha t) \\ & \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mu \lambda^2}{\rho} \qquad (\lambda \text{ paramètre arbitraire}) \end{aligned}} \tag{3.28}$$

3.2.3 Problème couplé (mécanique stationnaire) - (thermique instationnaire)

L'élément P1+/P1 a été implémenté avec un couplage thermomécanique fort, aussi il est intéressant pour tester cet aspect de développer une solution thermomécanique fortement couplée dans un contexte transitoire. On écrit donc à présent l'équation de la chaleur :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S(r,t) \tag{3.29}$$

où ρ, C et k dénotent respectivement la masse volumique, la capacité calorifique et la conductivité thermique du fluide. Pour cette étude, on suppose que les paramètres matériau thermiques et mécaniques sont indépendants de la température.

Dans cette équation, la dissipation apparaît comme un terme source $S(r,t)$. Il est commode pour la résolution de calculer ce terme en choisissant le problème de façon que la résolution mécanique soit indépendante de la solution thermique, et puisse donc être effectuée a priori. Dans notre cas, ce terme est calculé à partir de la solution mécanique stationnaire, précédemment présentée. Seule la partie thermique du problème est alors transitoire. Le terme source intervenant dans l'équation de la chaleur est indépendant du temps, et varie comme $S = S(r) = \frac{A}{r^4}$, A étant une constante donnée par $A = 4\mu\Omega_1^2 \frac{(ab)^4}{(a^2-b^2)^2}$.

Au moyen d'un changement de variable, il est possible de réduire le problème considéré à une équation aux dérivées partielles sans terme source. Posons :

$$\bar{T}(r,t) = T(r,t) + h(r) \tag{3.30}$$

En injectant cette décomposition dans (3.29), il est aisé d'identifier la fonction $h(r)$ de manière à se ramener à une équation sans terme source ; il vient à une constante près (posée nulle) :

$$h(r) = \frac{A}{4kr^2} \tag{3.31}$$

Le problème s'écrit alors pour la nouvelle inconnue $\bar{T}$:

$$\rho C \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) \tag{3.32}$$

On peut donc à présent utiliser la technique classique de séparation des variables pour trouver le champ $\bar{T}$, en posant :

$$\bar{T}(r,t) = f(r)g(t) \tag{3.33}$$

Il vient alors deux équations différentielles :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = -\alpha \tag{3.34}$$

$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} + \frac{\alpha}{\kappa} f(r) = 0 \tag{3.35}$$

où α est une constante et κ la diffusivité thermique telle que $\kappa = \frac{k}{\rho C}$ de dimension $[L^2T^{-1}]$. Pour définir complètement le problème, il nous faut définir les conditions aux limites de façon à ce que le problème soit soluble analytiquement et que la solution soit la plus simple possible. Le plus simple est d'imposer des conditions homogènes sur la variable transformée sur les faces intérieure et extérieure du viscosimètre :

$$\begin{aligned} \bar{T}(a,t) = 0 \quad &\Rightarrow \; f(a) = 0 \\ \bar{T}(b,t) = 0 \quad &\Rightarrow \; f(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Ces conditions se traduisent bien sûr par des valeurs non homogènes imposées sur la température, par changement inverse de variable :

$$\begin{aligned} T(a,t) &= -\frac{A}{4ka^2} \\ T(b,t) &= -\frac{A}{4kb^2} \end{aligned} \tag{3.37}$$

On applique ensuite le même changement de variable et de fonction à l'équation radiale (3.35) pour la résolution du problème posé sur la variable $\bar{T}$ que pour le problème mécanique dans la section 3.2.2 :

$$x = \lambda r \ , \quad F(x) = f(r) \tag{3.38}$$

et λ est un paramètre de dimension $[L^{-1}]$. L'équation spatiale s'exprime alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}x^2}(x) + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) + \frac{\alpha}{\kappa\lambda^2} F(x) = 0 \tag{3.39}$$

On observe qu'en posant $\frac{\alpha}{\kappa\lambda^2} = 1$, on obtient une équation de Bessel d'ordre 0. Celle-ci est fonction de la variable adimensionnée x. La solution s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première et seconde espèce et d'ordre 0 :

$$F(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) \tag{3.40}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes à déterminer avec les conditions aux limites du problème. Les conditions aux limites (3.36) se traduisent sur la fonction $F(x)$ par :

$$\begin{aligned} F(\lambda a) &= 0 \\ F(\lambda b) &= 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

En appliquant ces conditions, il vient alors :

$$\begin{pmatrix} J_0(\lambda a) & Y_0(\lambda a) \\ J_0(\lambda b) & Y_0(\lambda b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

L'annulation du déterminant permet d'obtenir l'équation donnant les conditions d'existence d'une solution non triviale :

$$z(\lambda) = J_0(\lambda a)Y_0(\lambda b) - J_0(\lambda b)Y_0(\lambda a) = 0 \tag{3.43}$$

À géométrie fixée (a, b fixés), on peut déterminer les λ_i solutions de cette équation. Pour aller plus loin dans la résolution, il nous faut donc particulariser la géométrie et trouver numériquement les λ_i solutions.

Par la suite, on prendra les valeurs des rayons intérieur et extérieur suivantes :
- ⋆ $a = 0.1\text{m}$
- ⋆ $b = 1\text{m}$

La géométrie étant fixée, on peut tracer numériquement la fonction $z(\lambda)$:

$$z(\lambda) = J_0(0.1\lambda)Y_0(\lambda) - J_0(\lambda)Y_0(0.1\lambda) \tag{3.44}$$

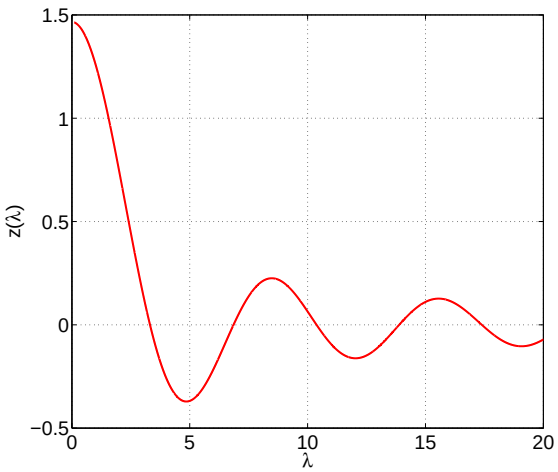


Figure 3.3 – Tracé de la fonction $z(\lambda)$

Les premières racines de l'équation $z(\lambda) = 0$ valent :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 3.31394\\ \lambda_2 &= 6.85758\\ \lambda_3 &= 10.3774\\ \lambda_4 &= 13.8864\\ \lambda_5 &= 17.3896\end{aligned}$$

En combinant (3.42) et (3.43), il vient le rapport :

$$\eta = \frac{C_1}{C_2} = -\frac{Y_0(\lambda_i a)}{J_0(\lambda_i a)} = -\frac{Y_0(\lambda_i b)}{J_0(\lambda_i b)} \tag{3.45}$$

Ainsi, en prenant la plus petite racine λ_1 de l'équation $z(\lambda) = 0$, et en choisissant la forme spatiale de la solution comme condition initiale, le problème transformé admet comme solution :

$$\begin{aligned}\bar{T}(r,t) &= K\left(J_0(\lambda_1 r) + \frac{Y_0(\lambda_1 r)}{\eta}\right)\exp(-\alpha t)\\ &\text{avec } \eta = -\frac{Y_0(\lambda_1 a)}{J_0(\lambda_1 a)}\\ &\text{et } \alpha = \kappa\lambda_1^2\end{aligned} \tag{3.46}$$

où K est une constante homogène à une température. On peut alors revenir au problème initial avec source volumique par changement inverse de variable. La solution instationnaire du champ de température avec des conditions de température prescrites sur les deux cylindres du viscosimètre s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{aligned}T(r,t) &= K\left(J_0(\lambda_1 r) + \frac{Y_0(\lambda_1 r)}{\eta}\right)\exp(-\alpha t) - \frac{A}{4kr^2}\\ &\text{avec } \eta = -\frac{Y_0(\lambda_1 a)}{J_0(\lambda_1 a)}\\ &\alpha = \kappa\lambda_1^2, \qquad \kappa = \frac{k}{\rho C}\\ &T(a,t) = -\frac{A}{4ka^2}\\ &T(b,t) = -\frac{A}{4kb^2}\\ &\text{et } A = 4\mu\Omega_1^2\frac{(ab)^4}{(a^2-b^2)^2}\\ &T(r,t=0) = T_0(r)\end{aligned}} \tag{3.47}$$

Remarque :

Il est aussi possible d'obtenir l'expression analytique de la solution thermique instationnaire avec des conditions aux limites de température sur le rayon intérieur, et des conditions aux limites de flux imposé sur le rayon extérieur. Il apparaît alors que la forme

de la solution analytique est toujours la même. Seule la valeur de λ dépend des conditions aux limites.

3.3 Comparaison des solutions analytique/numérique en mécanique des fluides

Dans cette section les comparaisons des solutions analytiques et numériques sont présentées. Le domaine fluide est discrétisé à l'aide d'éléments P1+/P1, le maillage utilisé est présenté sur la figure 3.4.

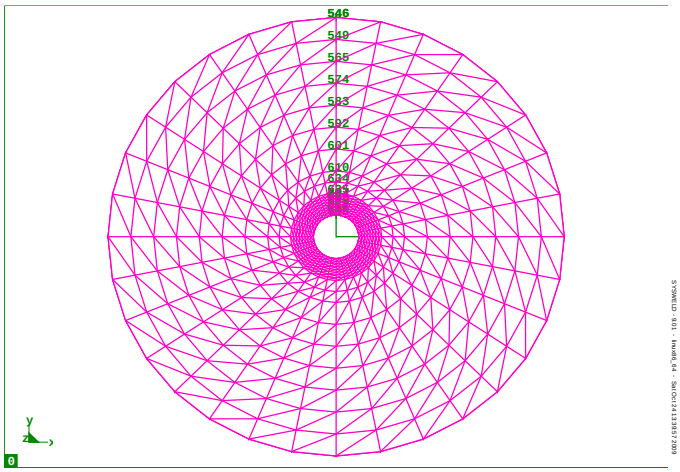


Figure 3.4 – Maillage du viscosimètre

Les valeurs des rayons intérieur et extérieur sont fixées à $a = 0.1$ m $b = 1$ m. Par commodité, les paramètres matériau du fluide sont tous pris égaux à l'unité.

3.3.1 Mécanique instationnaire

Les valeurs des conditions initiales extraites des solutions analytiques sont prescrites à chaque noeud du maillage, et la vitesse des noeuds du cylindre intérieur est imposée selon une exponentielle décroissante en temps. Les degrés de liberté température sont bloqués à zéro pour tous les noeuds du maillage. La figure 3.5 présente la comparaison entre les solutions analytique et numérique de ce problème pour lesquelles les valeurs à certains pas de temps sont tracées. La composante orthoradiale du champ de vitesse est tracée sur une ligne radiale, et les points apparents sur le tracé correspondent à la solution éléments finis extraite des noeuds du maillage positionnés sur cette ligne radiale, visible sur la figure 3.4. On observe une bonne corrélation entre les solutions numérique et analytique.

3.3.2 (Mécanique stationnaire) - (Thermique instationnaire)

Les conditions initiales mécaniques et thermiques issues de la solution analytique sont prescrites à chaque noeud du maillage. Par la suite, le mouvement du cylindre intérieur est piloté à vitesse de rotation constante, imposée à $\Omega_1 = 10$ rad/s, et les conditions en température (3.37) sont imposées sur les noeuds des cylindres intérieur et extérieur. La

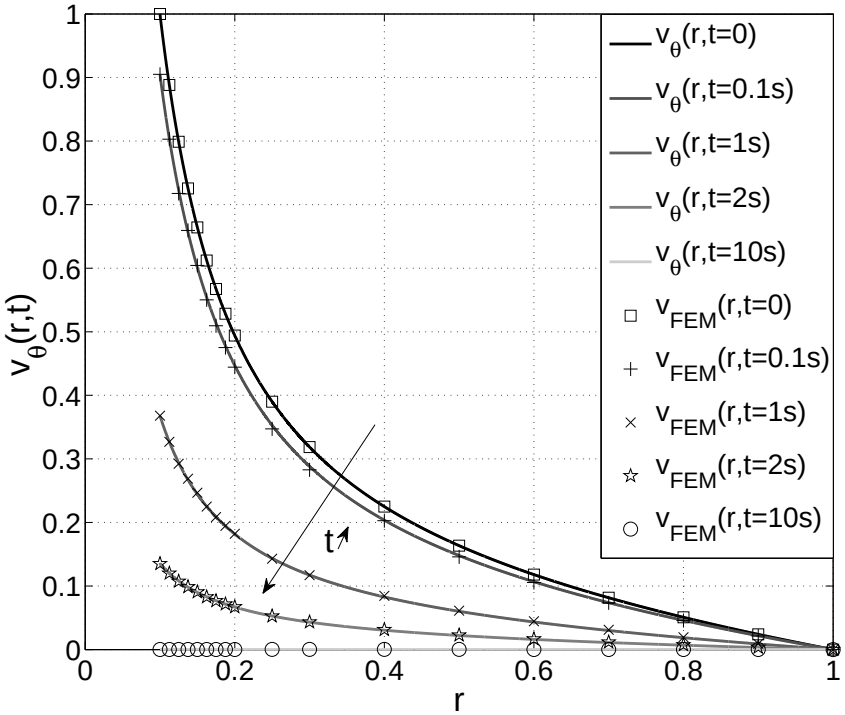


Figure 3.5 – Champ de vitesse instationnaire

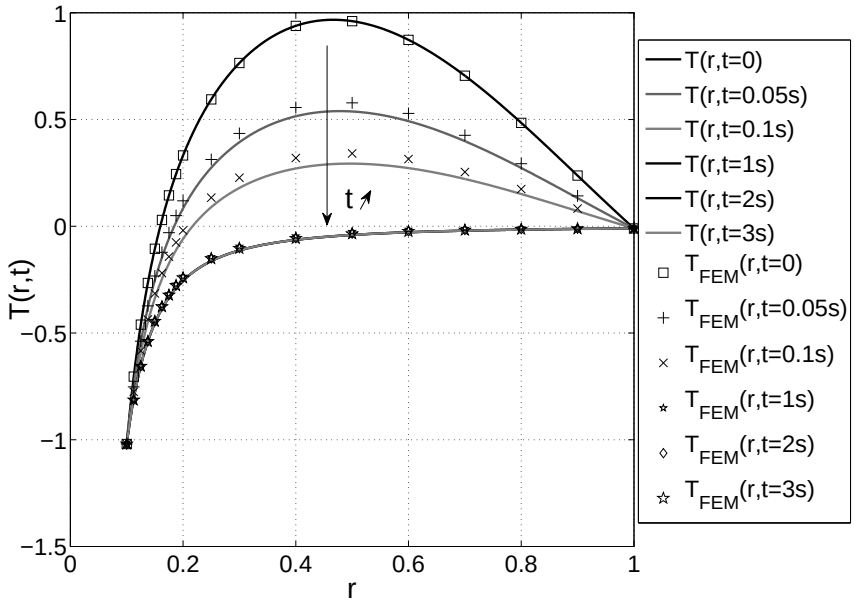


Figure 3.6 – Champ de température instationnaire

figure 3.6 présente la comparaison des solutions analytique et numérique pour le champ de température. Là aussi, on observe une bonne corrélation entre les deux solutions.

3.4 Le viscosimètre de Couette avec un matériau élastoplastique

L'élément P1+/P1 a aussi été implémenté dans le code SYSWELD® dans le cas d'un matériau solide. Aussi, il apparaît important de tester son comportement par rapport à une solution de référence pour ce type de comportement. Après avoir développé deux solutions analytiques pour le problème du viscosimètre de Couette en mécanique des fluides, il est apparu naturel de conserver le même problème pour un matériau solide.

Dans cette section, on commence par considérer le problème du viscosimètre de Couette constitué d'un matériau rigide, parfaitement plastique. On montre que le comportement parfaitement plastique conduit à un état limite du système dès que la charge de première plastification est atteinte.

Par la suite, une solution est développée en considérant un matériau élastoplastique avec un écrouissage positif. Une charge monotone suivie d'une décharge complète sont étudiées. Enfin, une extension au cadre des grandes transformations est présentée. On considère tout d'abord un comportement rigide plastique, puis un comportement élastoplastique en considérant comme négligeables les termes additionnels liés à la dérivée objective. Ces solutions conduisent à des expressions formellement similaires à celle obtenue en petites perturbations.

3.4.1 Matériau rigide, parfaitement plastique

Pour l'étude du problème du viscosimètre de Couette constitué d'un matériau solide, il est intéressant de commencer par le cas d'un matériau rigide parfaitement plastique de von Mises, et ceci pour au moins deux raisons. D'une part, l'absence d'élasticité permet de se concentrer sur la partie plastique du comportement, et simplifie les équations. D'autre part, l'hypothèse de la plasticité parfaite permet d'étudier les états-limites du système.

L'objet de l'analyse limite est la détermination des chargements limites sur un trajet de chargement donné (Sal02). Ces derniers résultent en fait uniquement de la nécessaire compatibilité entre l'équilibre du système et la condition de parfaite plasticité de son matériau constitutif. Il est possible de définir entièrement le domaine K des chargements potentiellement supportables par une structure, par un raisonnement de compatibilité équilibre-critère. On montre alors que, sous réserve du principe de Hill (loi de normalité), les chargements potentiellement supportables sont effectivement supportables. Les points limites de K sont alors appelés des chargements limites, et correspondent à des états d'écoulement libre. Les chargements situés à l'extérieur de K ne peuvent être atteints, ils ne satisfont plus la limite assignée aux efforts intérieurs dans le système pour lesquels l'équilibre du système est compatible avec la résistance du matériau, condition nécessaire de stabilité de la structure.

On considère ici le viscosimètre de Couette, et on se propose d'étudier l'état limite du système pour le chargement suivant :

- ⋆ le cylindre intérieur ($r = a$) est bloqué, le mouvement du cylindre extérieur ($r = b$) est piloté
- ⋆ on considère un chargement monotone croissant, partant d'un état initial naturel.

Le problème est ici traité dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Sous le chargement considéré et les hypothèses formulées, l'état de contrainte au sein de la structure est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) \tag{3.48}$$

Écrivons l'équation d'équilibre orthoradiale et le critère de von Misès, supposé atteint en au moins un point de la structureet particularisé à l'état de contrainte considéré :

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r} + \frac{2\tau}{r} = 0 \tag{3.49}$$

$$\sqrt{3}|\tau| = \sigma_0 \tag{3.50}$$

où σ_0 dénote la limite d'élasticité en traction du matériau. La résolution de l'équilibre donne :

$$\tau = \frac{A}{r^2} \tag{3.51}$$

où A est une constante. Cette expression montre que $|\tau|$ est strictement décroissante. Donc si le critère est atteint en un point r_0 tel que $r_0 > a$, il est nécessairement violé en $r < r_0$ $\left(\text{car } |\tau(r)| > |\tau(r_0)| = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\right)$. On conclut alors que le critère ne peut être atteint qu'en $r = a$. Donc une fois ce point plastifié, on ne peut plastifier davantage, la charge limite est atteinte.

Cet état limite peut en fait s'interpréter comme une localisation de la déformation, il se crée une bande de glissement en $r = a$, dans laquelle toute la déformation se localise, il y a alors écoulement libre.

Commentaire :

Un comportement parfaitement plastique ou plus généralement une saturation de l'écrouissage entraîne une limitation des contraintes en chaque point, et conduit in fine à l'existence d'un chargement limite du système. Un écrouissage non saturant permet aux contraintes de croître et évite ce phénomène de localisation, en particulier dans le cas du viscosimètre de Couette.

3.4.2 Matériau élastoplastique écrouissable

L'étude du cas rigide parfaitement plastique nous a renseignés sur le comportement limite du viscosimètre. Du point de vue de la vérification du comportement de l'élément P1+/P1 implémenté dans sa version solide, un tel cas test atteignant un état limite dès la charge de première plastification n'est pas intéressant. Aussi, on se propose d'étudier cette même structure avec un matériau élastoplastique avec un écrouissage positif et non saturant. Il est nécessaire d'ajouter la partie élastique pour des questions de comparaison analytique/numérique.

3.4.2.1 Paramétrage

Les contraintes pouvant à présent croître, la plasticité apparaissant à l'intérieur du viscosimètre va pouvoir s'étendre radialement jusqu'à ce que la structure soit totalement

plastifiée. Au cours du chargement, il est alors possible d'identifier trois phases par lesquelles passe le système :

- ⋆ la phase élastique : la structure se déforme élastiquement.
- ⋆ la phase élastoplastique : une couronne plastique apparaissant à l'intérieur du viscosimètre, cohabite avec une couronne élastique qui l'entoure.
- ⋆ la phase plastique : toute la structure est plastifiée.

L'existence de ces phases dans le cas d'un trajet de chargement monotone croissant provient de la relation de comportement élastoplastique utilisée. Un comportement à seuil du matériau implique généralement plusieurs phases dans le problème de structure.

Pour la suite des développements, on conserve les mêmes conditions aux limites, le cylindre intérieur est fixé et le chargement est piloté par la rotation du cylindre extérieur :

$$\begin{aligned} u_\theta(r=a) &= 0 \\ u_\theta(r=b) &= u_\theta(b) \end{aligned} \tag{3.52}$$

Si on considère une facette de normale $\mathbf{e}_r$ en un point de la structure (figure 3.7), l'action mécanique générée en ce point s'écrit :

$$\mathbf{F}(\mathbf{e}_r) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r = \tau \mathbf{e}_\theta \quad \text{avec } \tau > 0 \tag{3.53}$$

cet état de contrainte $\tau > 0$ est compatible avec $\Omega_1 = 0$ et $\Omega_2 > 0$.

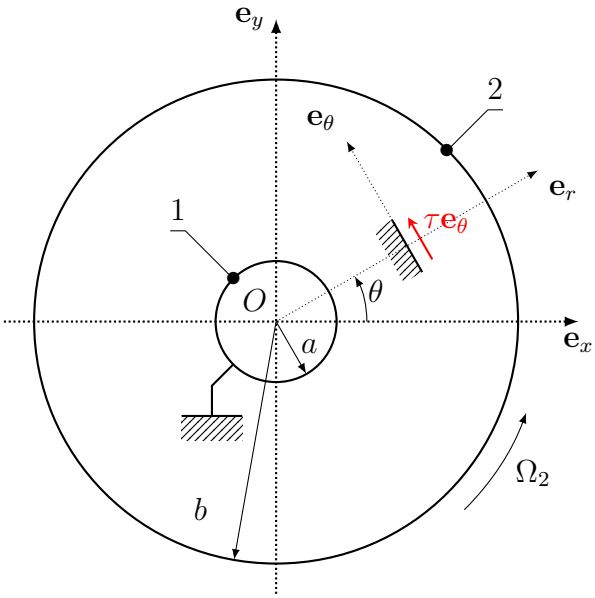


Figure 3.7 – Vecteur contrainte en un point de facette de normale $\mathbf{e}_r$

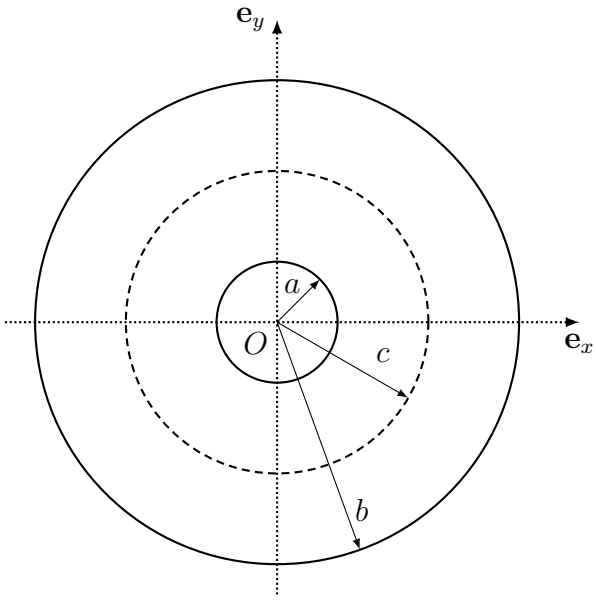


Figure 3.8 – Rayon de la couronne plastique c

3.4.2.2 Résolution

D'une façon générale, le rayon c de la couronne plastique (figure 3.8) intervenant lors de la phase élastoplastique du système, peut aussi être défini formellement quelle que soit

la phase dans laquelle se trouve la structure. On introduit alors ce rayon c tel que :

$$\tau(c) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = k \tag{3.54}$$

où k dénote la limite d'élasticité en cisaillement donnée par le critère de Mises. On observe alors que lorsque :

* $c < a$, le système est dans la phase élastique
* $a < c < b$, le système est élastoplastique
* $c > b$, le système est complètement plastique.

Dans tous les cas, le champ de contrainte est défini sur la structure par :

$$\tau = k\frac{c^2}{r^2} \tag{3.55}$$

Particularisons à présent la relation de comportement élastoplastique considérée, la contrainte tangentielle τ est une fonction bilinéaire du glissement $\gamma = 2\varepsilon_{r\theta}$, elle est représentée sur la figure suivante :

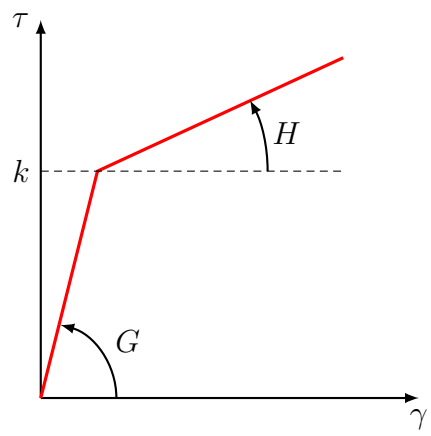


Figure 3.9 – Relation de comportement élastoplastique

Résumons à présent les équations du problème dans le cas de la charge monotone :

$$\begin{array}{ll} \tau = k\frac{c^2}{r^2} & \text{(équilibre)} \\ \tau = f(\gamma) & \text{(Relation de Comportement)} \\ \gamma = \frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}r}(r) - \frac{u_\theta(r)}{r} & \text{(compatibilité)} \end{array} \tag{3.56}$$

Le champ de contrainte étant déjà connu, il ne reste qu'à calculer le champ de déplacement. La combinaison de la relation de comportement et de l'équilibre permet d'exprimer le glissement en fonction d'un paramètre de chargement pertinent, qui peut être pris égal à c :

$$\gamma = f^{-1}\left(k\frac{c^2}{r^2}\right) = g\left(\frac{r}{c}\right) \tag{3.57}$$

où g est une fonction définie à partir de la fonction réciproque de f, c'est-à-dire la relation de comportement exprimée en contrainte. Pour obtenir le champ de déplacement, on

introduit alors l'équation de compatibilité :

$$\frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}r}(r) - \frac{u_\theta(r)}{r} = r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) = g\left(\frac{r}{c}\right) \tag{3.58}$$

le champ de déplacement est alors déterminé en intégrant cette relation de a à r :

$$\boxed{u_\theta(r) = r\int_a^r \frac{g(r'/c)}{r'}\mathrm{d}r'} \tag{3.59}$$

Le calcul de cette intégrale effectué sur tout le domaine permet de retrouver le paramètre pilotant $u_\theta(b)$:

$$u_\theta(b) = b\int_a^b \frac{g(r'/c)}{r'}\mathrm{d}r' \tag{3.60}$$

Le point de vue le plus simple est que le paramètre de chargement est c, le paramètre $u_\theta(b)$ s'exprimant de manière explicite en fonction de c.

3.4.2.3 Évolution du rayon c en fonction de $u_\theta(b)$

Il est intéressant de vérifier que le rayon c de la couronne plastique est bien une fonction monotone croissante du paramètre de chargement $u_\theta(b)$. Si tel est le cas, on doit avoir quelle que soit la phase dans laquelle le système se trouve :

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u_\theta(b)} > 0 \quad \forall c \in]0, +\infty[\tag{3.61}$$

En fait, il est plus commode de calculer $\frac{\mathrm{d}u_\theta(b)}{\mathrm{d}c}$, cette expression étant immédiate car donnée explicitement. On a en effet l'équivalence suivante :

$$\frac{\mathrm{d}u_\theta(b)}{\mathrm{d}c} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u_\theta(b)} > 0 \quad \forall c \in]0, +\infty[\tag{3.62}$$

Partant de (3.60), et dérivant par rapport à c, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}u_\theta(b)}{\mathrm{d}c} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\left(b\int_a^b \frac{g(r'/c)}{r'}\mathrm{d}r'\right) \tag{3.63}$$

Pour simplifier cette expression, définissons le paramètre $\lambda = \frac{r'}{c}$, il vient alors :

$$\frac{u_\theta(b)}{b} = \int_{a/c}^{b/c} \frac{g(\lambda)}{\lambda}\mathrm{d}\lambda \tag{3.64}$$

il est à présent aisé de calculer la dérivée de cette intégrale par rapport à c. Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(u_\theta(b)/b)}{\mathrm{d}c} &= \frac{1}{c}\left[g\left(\frac{a}{c}\right) - g\left(\frac{b}{c}\right)\right] \\ &= \frac{1}{c}\left[f^{-1}\underbrace{\left(k\frac{c^2}{a^2}\right)}_{\tau(a)} - f^{-1}\underbrace{\left(k\frac{c^2}{b^2}\right)}_{\tau(b)}\right]\end{aligned} \tag{3.65}$$

Sachant que $\tau(a) > \tau(b)$ et que f^{-1} est une fonction monotone croissante de τ, $\forall \tau \in [0, +\infty[$, on en déduit que :

$$f^{-1}(\tau(a)) > f^{-1}(\tau(b)) \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}(u_\theta(b)/b)}{\mathrm{d}c} > 0 \tag{3.66}$$

Ceci achève la démonstration.

3.4.2.4 Particularisation

Si la forme générale de la solution du problème élastoplastique est relativement concise, il est nécessaire pour son tracé de particulariser cette forme à chacune des phases que traverse le système. Dans cette section, on présente successivement les expressions particularisées des champs solutions pour chacune des phases.

1. **Phase élastique**

   La fonction g se particularise immédiatement au cas purement élastique, il vient :

$$g\left(\frac{r}{c}\right) = \gamma = \frac{\tau(r)}{G} = \frac{\tau(a)}{G}\frac{a^2}{r'^2} \tag{3.67}$$

   ce qui mène après calcul de l'intégrale (3.59) à :

$$u_\theta(r) = \frac{\tau(a)}{2G} r \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{3.68}$$

   Il reste alors à exprimer $\tau(a)$ en fonction du paramètre pilotant $u_\theta(b)$ en utilisant la relation (3.60). Il vient :

$$\tau(a) = \frac{2G}{b\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} u_\theta(b) \tag{3.69}$$

   En combinant les deux dernières expressions, la solution élastique se met sous la forme suivante :

$$u_\theta(r) = u_\theta(b)\frac{br}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{3.70}$$

   Le champ de contraintes s'exprime aussi aisément en fonction du paramètre pilotant $u_\theta(b)$:

$$\tau(r) = 2G\frac{a^2 b}{r^2(b^2 - a^2)} u_\theta(b) \tag{3.71}$$

2. **Phase élastoplastique**

   Dans la phase élastoplastique, une couronne intérieure du viscosimètre est plastifiée. Cette couronne s'étend radialement sur la couronne élastique qui l'entoure, à mesure que le chargement augmente. Le calcul de l'intégrale (3.59) est mené dans ces deux zones.

   (a) **Zone plastique**
   En considérant un état initial vierge et un chargement monotone croissant, la loi d'élasticité, le critère et la déformation plastique cumulée s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tau &= G(\gamma - \gamma^p) \\ \tau &= k + h\frac{\varepsilon_{eq}}{\sqrt{3}} \\ \varepsilon_{eq} &= \frac{\gamma^p}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{3.72}$$

   La combinaison des ces équations nous donne :

$$\gamma = \frac{h + 3G}{hG}\tau - \frac{3k}{h} \tag{3.73}$$

où k est la limite d'élasticité en cisaillement du matériau. En introduisant cette dernière relation dans (3.59), il vient le champ de déplacement solution dans la zone plastique :

$$u_\theta(r) = kr\left[\frac{h+3G}{hG}\frac{c^2(r^2-a^2)}{2a^2r^2} - \frac{3}{h}\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right] \tag{3.74}$$

Le champ de contrainte correspondant s'écrit bien sûr :

$$\tau(r) = k\frac{c^2}{r^2} \tag{3.75}$$

La combinaison des mêmes équations (3.72) permet d'exprimer la déformation plastique cumulée :

$$\varepsilon_{eq}(r) = \frac{\sqrt{3}(G\gamma(r)-k)}{h+3G} \tag{3.76}$$

(b) **Zone élastique**

La zone élastique intervenant dans la seconde couronne, il convient de séparer les intervalles d'intégration dans le calcul du champ de déplacement, pour tenir compte des zones élastique et plastique dans la structure. Cette décomposition s'écrit :

$$u_\theta(r) = r\left[\int_a^c \frac{g^p(r'/c)}{r'}\mathrm{d}r' + \int_c^r \frac{g^e(r'/c)}{r'}\mathrm{d}r'\right] \tag{3.77}$$

intégrales dans lesquelles, la fonction g prend les valeurs suivantes dans les différentes zones :

* $g^e(r'/c) = \tau(a)\frac{a^2}{r'^2}\frac{1}{G}$ dans la zone élastique $c \leq r' \leq r$
* $g^p(r'/c) = \frac{h+3G}{hG}\tau(r') - \frac{3k}{h}$, dans la zone plastique $a \leq r' \leq c$.

Le calcul effectué, le champ de déplacement solution de la zone élastique de la phase élastoplastique s'écrit :

$$u_\theta(r) = kr\left[\frac{h+3G}{hG}\frac{c^2-a^2}{2a^2} - \frac{3}{h}\ln\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{1}{2G}\left(1-\frac{c^2}{r^2}\right)\right] \tag{3.78}$$

le même calcul effectué à partir de (3.60) permet de relier explicitement le paramètre de chargement $u_\theta(b)$ au rayon de la couronne plastique c :

$$u_\theta(b) = kb\left[\frac{h+3G}{hG}\frac{c^2-a^2}{2a^2} - \frac{3}{h}\ln\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{1}{2G}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\right] \tag{3.79}$$

3. **Phase plastique**

Dans la phase plastique, toute la structure est plastifiée. Le calcul du champ de déplacement fait intervenir la fonction g^p précédemment explicitée. Son expression

est donc identique à celle obtenue pour la zone plastique dans la phase élastoplastique, la couronne plastique occupant à présent toute la structure et le rayon c étant maintenant supérieur à b, soit :

$$u_\theta(r) = kr\left[\frac{h+3G}{hG}\frac{c^2(r^2-a^2)}{2a^2r^2} - \frac{3}{h}\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right] \tag{3.80}$$

Le paramètre de chargement $u_\theta(b)$ est relié au paramètre c par :

$$u_\theta(b) = kb\left[\frac{h+3G}{hG}\frac{c^2}{2a^2}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right) - \frac{3}{h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] \tag{3.81}$$

relation qui donne ici explicitement c en fonction de $u_\theta(b)$. Le calcul de la déformation plastique cumulée s'effectue par la relation (3.76), en calculant $\gamma(r)$ par dérivation du champ de déplacement :

$$\gamma(r) = \frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}r}(r) - \frac{u_\theta}{r}(r) = \frac{2a^2b^2}{r^2(b^2-a^2)}\left(\frac{u_\theta(b)}{b} + \frac{3k}{h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) - \frac{3k}{h} \tag{3.82}$$

Il vient alors l'expression de la déformation plastique cumulée dans la phase plastique :

$$\varepsilon_{eq}(r) = \frac{2\sqrt{3}a^2b^2}{r^2(b^2-a^2)}\frac{G}{h+3G}\left(\frac{u_\theta(b)}{b} + \frac{3k}{h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) \tag{3.83}$$

3.4.2.5 Courbe de charge de la structure

Il est possible de définir des paramètres duaux généralisés effort-vitesse, tels que pour un système la puissance des efforts extérieurs s'écrive :

$$\mathcal{P}_{ext} = \mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{q}} \tag{3.84}$$

où $\mathbf{Q}$ représente le chargement et $\dot{\mathbf{q}}$ la vitesse des paramètres cinématiques duaux. Dans le cas du viscosimètre de Couette, et considérant le chargement imposé, la dualité énergétique permet d'identifier les paramètres d'effort et cinématique suivants :

$$\begin{aligned} Q &= C_z(b) \\ q &= \frac{u_\theta(b)}{b} \end{aligned} \tag{3.85}$$

Le couple généré $C_z(b)$, par unité de profondeur, s'écrit :

$$C_z(b) = \mathbf{M}(O)\cdot\mathbf{z} = \left[\int_{(r=b)} b\mathbf{e}_r \wedge (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_r)\mathrm{d}S\right]\cdot\mathbf{z} = 2\pi b^2\tau(b) \tag{3.86}$$

L'expression de ce couple peut être particularisée en fonction des phases que traverse la structure :

1. **Phase élastique**
   L'expression du couple dans cette phase vient immédiatement en combinant les relations (3.71) et (3.86) :

$$C_z(b) = \frac{4\pi Ga^2b^2}{b^2-a^2}\frac{u_\theta(b)}{b} \tag{3.87}$$

2. **Phase élastoplastique**
   De la même manière, on a dans la phase élastoplastique :

$$C_z(b) = 2\pi k c^2 \tag{3.88}$$

   le rayon c est ici une fonction implicite du paramètre de chargement $u_\theta(b)$ donné par la relation (3.79).

3. **Phase plastique**
   Le rayon c peut ici s'exprimer de façon explicite, le couple généré s'écrit alors :

$$C_z(b) = \frac{4\pi k a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{hG}{h + 3G} \left[\frac{1}{k} \frac{u_\theta(b)}{b} + \frac{3}{h} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] \tag{3.89}$$

   On remarque que son évolution est affine en fonction du paramètre de chargement dans cette phase.

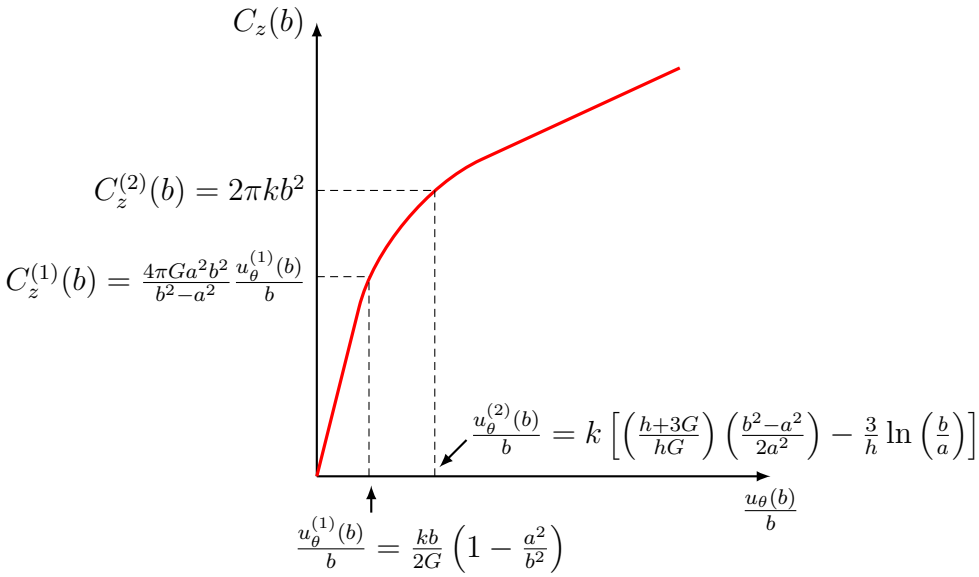


Figure 3.10 – Courbe de charge de la structure

Commentaires

⋆ L'écrouissage du système, visible sur la figure 3.10, résulte ici de l'écrouissage (isotrope) du matériau constitutif intervenant dans la relation de comportement élastoplastique. Il est montré dans la section suivante que pour ce problème, les déformations plastiques sont compatibles. Aussi un écrouissage « de structure » n'intervient pas ici.

⋆ L'ajout d'un écrouissage permet à la charge de croître. Ceci est dû au fait que les contraintes ne sont plus limitées dans leur croissance.

3.4.3 Décharge

Il est intéressant d'effectuer une décharge à partir de l'état totalement plastifié du système car ceci permet d'avoir accès aux contraintes et distorsions résiduelles. Une décharge consiste à annuler le paramètre d'effort identifié ($\mathbf{Q} = \mathbf{0}$), ceci se visualise bien sur la figure 3.11.

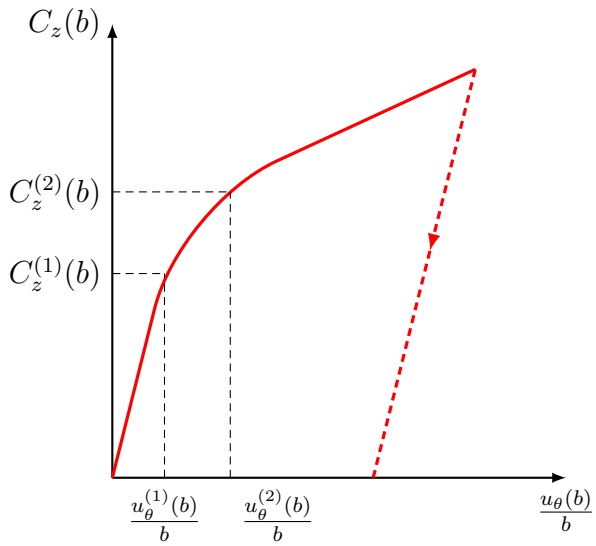


Figure 3.11 – Décharge de la structure

La décharge revient dans notre cas à annuler le couple généré sur le cylindre extérieur, c'est-à-dire la valeur de la contrainte en $r = b$. Il se trouve qu'on a précédemment montré qu'un champ de contrainte statiquement admissible varie toujours en $\frac{1}{r^2}$ sur la structure du viscosimètre de Couette. Par conséquent, la décharge impliquant que $\tau(b)$ soit nul, l'équilibre de la structure implique que la contrainte résiduelle à décharge soit nulle sur toute la structure.

Commentaires :

Ce problème est en effet tout à fait particulier à plus d'un titre :

- ⋆ L'équilibre implique que le champ de contrainte varie en $\frac{1}{r^2}$ sur la structure.
- ⋆ La déformation élastique, liée par la loi d'élasticité au champ de contrainte, varie elle aussi en $\frac{1}{r^2}$. Cette déformation est donc compatible, il est en effet aisé de vérifier qu'un champ variant ainsi vérifie les équations de compatibilité. Par conséquent, la déformation plastique est aussi compatible (car la déformation totale l'est toujours).
- ⋆ La contrainte résiduelle nulle provient du fait que la déformation plastique est compatible, bien que la transformation imposée dans ce problème ne soit pas homogène.

La valeur du déplacement d'un point du cylindre extérieur se calcule en superposant une décharge élastique à l'état chargé, ce déplacement devant être tel que le champ de contrainte résiduel soit nul.

$$\tau^{\text{res}} = \tau - \tau^{\text{el}} = 0 \tag{3.90}$$

où τ^{el} est la solution du problème élastique pur. Il vient alors l'expression suivante :

$$\tau^{\text{res}}(r) = \frac{2a^2b^2}{r^2(b^2-a^2)}\left[\left(\frac{hG}{h+3G}\right)\left(\frac{u_\theta(b)}{b}+\frac{3k}{h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)-G\frac{u_\theta^{(+)}(b)}{b}\right]=0 \tag{3.91}$$

où $u_\theta(b)$ est le chargement maximum imposé lors de la charge, $u_\theta^{(+)}(b)$ étant le déplacement d'un point du cylindre extérieur lors de la décharge, c'est-à-dire à partir de l'état chargé. Cette égalité devant être vérifiée, il vient cette valeur de déplacement à la décharge résultant à un champ de contrainte résiduel nul :

$$u_\theta^{(+)}(b) = \frac{hb}{h+3G}\left(\frac{u_\theta(b)}{b}+\frac{3k}{h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) \tag{3.92}$$

Le champ de déplacement résiduel est donné de la même manière en soustrayant la solution purement élastique (fonction de $u_\theta^{(+)}(b)$) à la solution totalement plastique :

$$u_\theta^{\text{res}}(r) = u_\theta(r) - u_\theta^{\text{el}}(r) \tag{3.93}$$

il vient alors :

$$u_\theta^{\text{res}}(r) = r\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(\frac{b^2}{b^2-a^2}\right)\left(\frac{3G}{h+3G}\right)\left(\frac{u_\theta(b)}{b}+\frac{3k}{h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)-\frac{3k}{h}\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right] \tag{3.94}$$

On observe que le champ de déplacement résiduel est fonction de l'amplitude de la charge initiale $u_\theta(b)$.

3.4.4 Extension au cas des grandes transformations

Le problème du viscosimètre constitué d'un matériau solide élastoplastique a jusqu'à présent été présenté dans le cadre des petites perturbations. Il est possible de montrer que pour ce cas particulier, l'extension au cadre des grandes transformations, en considérant un comportement rigide plastique, conduit à des résultats similaires, seule l'interprétation physique de certaines quantités est modifiée.

3.4.4.1 Écriture en grandes transformations

Le cadre naturel pour traiter la plasticité en grandes transformations est l'écriture eulérienne. La vitesse de déformation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ en petites perturbations est remplacé par le tenseur des taux de déformation eulérien $\mathbf{D}$. On écrit alors la partition additive du taux de déformation en une partie élastique et une partie plastique :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \tag{3.95}$$

Ce type de partition fait inévitablement intervenir une loi d'hypoélasticité pour la représentation de la partie élastique. Ce défaut de la modélisation est de peu d'importance pratique car si les déformations sont importantes, elles sont nécessairement essentiellement plastiques, la partie élastique de la déformation restant toujours très limitée.

Le taux de déformation élastique est donc relié à un taux de contrainte par la loi d'hypoélasticité :

$$\mathbf{D}^e = \frac{1+\nu}{E}\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\,\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{1} \tag{3.96}$$

où $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ représente une dérivée objective du tenseur des contraintes de Cauchy à choisir convenablement, et ν et E respectivement le coefficient de Poisson et le module d'Young. L'ensemble des équations de comportement s'écrivent :

$$\begin{array}{ll} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu\mathbf{D}^e + \lambda^e(\mathrm{tr}\mathbf{D}^e)\mathbf{1} & \text{(loi d'hypoélasticité)} \\ \mathbf{D}^p = \frac{3}{2}\dot{\lambda}\frac{\mathbf{s}}{\sigma_{eq}} & \text{(loi d'écoulement)} \\ \text{avec} \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{s}:\mathbf{s}} & \\ D_{eq} = \dot{\lambda} & \text{(déformation plastique cumulée)} \\ f = \sigma_{eq} - h\varepsilon_{eq} - \sigma_0 & \text{(critère)} \\ f \leq 0,\ \dot{\lambda} \geq 0,\ \dot{\lambda}f = 0 & \text{(conditions de Kuhn-Tucker)} \end{array} \tag{3.97}$$

où $\dot{\lambda}$ dénote le multiplicateur plastique, $\mathbf{s}$ le déviateur des contraintes de Cauchy, μ, et λ^e représentent les modules d'élasticité de Lamé, h le coefficient d'écrouissage (choisi isotrope ici), σ_0 la limite d'élasticité en traction et ε_{eq} la déformation plastique cumulée définie à partir du taux de déformation plastique cumulée par :

$$\varepsilon_{eq}(t) = \int_0^t D_{eq}(t')\mathrm{d}t' \quad \text{avec} \quad D_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\mathbf{D}^p:\mathbf{D}^p} \tag{3.98}$$

3.4.4.2 Le cas rigide plastique

Le comportement élastoplastique en grandes transformations fait intervenir plusieurs composantes de contraintes non nulles à cause de la dérivée objective intervenant dans la loi d'hypoélasticité, ce qui complique la résolution du problème. Un moyen de simplifier cette résolution est de considérer un comportement rigide plastique [1], cas plutôt réaliste à mesure que les déformations plastiques deviennent grandes. En effet, avec ces hypothèses, on peut montrer que seule la composante $\tau = \sigma_{r\theta}$ des contraintes est non nulle. L'écriture de l'équation d'équilibre radiale donne alors :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = 0 \tag{3.99}$$

Le problème étant axisymétrique, la pression hydrostatique est constante et indéterminée. L'écriture de l'équation d'équilibre tangentielle reste inchangée par rapport à la section précédente, elle donne la forme de la contrainte tangentielle :

$$\tau = k\frac{c^2}{r^2} \tag{3.100}$$

où c, rayon de la couronne plastique, est ici toujours supérieur au rayon du cylindre extérieur b, puisqu'on se place dans le régime plastique.

Dans le cadre eulérien, le raisonnement s'effectue sur les vitesses ; la relation de compatibilité s'écrit :

$$2D_{r\theta} = \dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r} - \frac{v_\theta}{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{l}}{\mathrm{d}r} - \frac{\dot{l}}{r} \tag{3.101}$$

où l représente la longueur d'arc curviligne décrit par une particule pendant la transformation. Par intégration, et considérant que le rayon courant est indépendant du temps, il vient la déformation :

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}r} - \frac{l}{r} \tag{3.102}$$

1. auquel est ajouté un écrouissage isotrope linéaire pour éviter le phénomène de charge limite.

Suivant la même démarche que pour le cas des petites perturbations, il est possible de lier cette déformation à la contrainte par une relation désormais affine :

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}r} - \frac{l}{r} = g(\tau(r)) \tag{3.103}$$

où g est une fonction construie à partir de la fonction réciproque de la relation de comportement, c'est-à-dire $\gamma = g(\tau)$. Cette dernière relation nous donne la longueur d'arc parcourue par un point situé à la distance r de l'origine par intégration :

$$\boxed{l(r) = r \int_a^r \frac{g(r')}{r'} \mathrm{d}r'} \tag{3.104}$$

La relation de comportement rigide plastique considérée, illustrée sur la figure 3.12, s'écrit comme une relation affine de la déformation. Reprenant (3.73) et faisant tendre le module de cisaillement G vers l'infini, il vient :

$$\tau = \frac{h}{3}\gamma + k \tag{3.105}$$

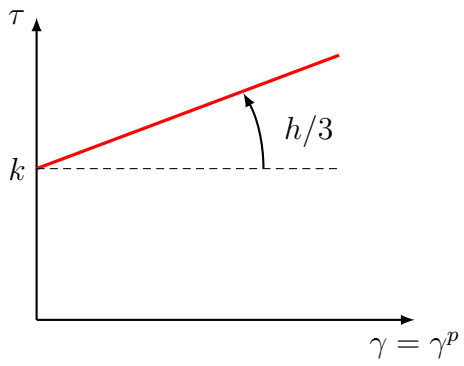


Figure 3.12 – Relation de comportement rigide plastique

En injectant la relation (3.105) dans la solution (3.104), l'intégration donne la longueur d'arc parcourue par un point matériel de coordonnée r :

$$l(r) = \frac{3kr}{h}\left[\frac{c^2}{2a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right] \tag{3.106}$$

Le rayon c peut être relié à la rotation θ^d d'ensemble imposée au cylindre extérieur du viscosimètre, par intégration sur le domaine complet :

$$l(b) = b\theta^d = b\int_a^b \frac{g(r')}{r'} \mathrm{d}r' \tag{3.107}$$

Le calcul donne :

$$c^2 = \frac{2a^2b^2}{b^2 - a^2}\left[\frac{h}{3k}\theta^d + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] \tag{3.108}$$

En combinant la solution (3.106) et l'expression du rayon c, on exprime la longueur d'arc parcourue en fonction de la rotation d'ensemble imposée au cylindre extérieur :

$$l(r) = \frac{3kr}{h}\left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\frac{b^2}{r^2}\left(\frac{h}{3k}\theta^d + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) - \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right] \tag{3.109}$$

On obtient de même l'expression de la contrainte :

$$\tau(r) = \frac{2ka^2b^2}{r^2(b^2-a^2)}\left[\frac{h}{3k}\theta^d + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] \tag{3.110}$$

3.4.4.3 Lien entre les formulations en petites et grandes transformations

Il est possible de montrer que la formulation en grandes transformations peut être obtenue à partir de celle développée en petites perturbations par un passage à la limite, le déplacement orthoradial devenant une longueur d'arc.

Il suffit pour cela de faire tendre le module de cisaillement G vers l'infini, le paramètre de chargement $u_\theta(b)$ devenant $l(b)$.

3.4.4.4 Modèle élastoplastique en grandes transformations

Le modèle rigide plastique en grandes transformations suppose pour son application que toute la structure soit plastifiée. Or, il se trouve que, suivant la géométrie et les valeurs de paramètres matériaux choisis, le domaine des petites perturbations peut être dépassé alors que toute la structure n'est pas encore plastifiée. Il est alors possible de développer un modèle élastoplastique en grandes transformations en faisant l'hypothèse que les termes additionnels liés à la dérivée objective sont négligeables. Cette hypothèse sera vérifiée numériquement par la suite. La solution est alors identique à celle du problème HPP, seul le paramètre de chargement $u_\theta(b)$ se transforme en $l(b) = \theta^d b$.

3.5 Comparaison des solutions analytique/numérique pour un solide

On se propose dans cette section d'effectuer une comparaison de la solution numérique obtenue avec l'élément P1+/P1 solide avec la solution analytique de ce même problème développée dans la section précédente. Cette comparaison est effectuée en prenant comme base la solution élastoplastique en grandes transformations, dans laquelle les termes additionnels liés à la dérivée objective sont négligés.

3.5.1 Mise en données

Le domaine solide est discrétisé à l'aide d'éléments P1+/P1, le maillage utilisé est le même que celui déjà présenté pour la vérification de l'élément fluide.

On rappelle que les rayons intérieur et extérieur sont respectivement fixés à $a = 0.1$ m $b = 1$ m. Les caractéristiques mécaniques retenues pour le matériau solide sont les suivantes :

* le module de cisaillement G est fixé à 80000 MPa.
* la limité d'élasticité en traction σ_0 est fixée à 650 MPa.
* le module d'écrouissage h est fixé à 50000 MPa.

Ceci correspond en terme d'ordre de grandeur à un acier allié, le coefficient d'écrouissage a été cependant augmenté pour faciliter la convergence du calcul. On rappelle que les

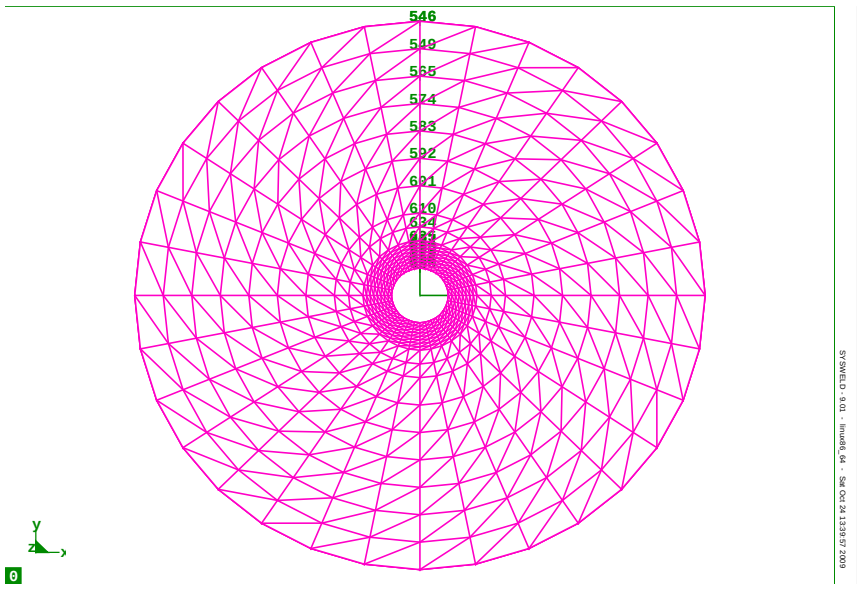


Figure 3.13 – Maillage du viscosimètre

conditions aux limites imposées sont du type suivant :

* Les déplacements des noeuds du cylindre intérieur sont bloqués.
* Les déplacements des noeuds du cylindre extérieur sont pilotés, une rotation d'ensemble est imposée.
* Le déplacement axial des noeuds appartenant aux bases du cylindre creux est bloqué.

Le calcul est de plus isotherme, tous les degrés de liberté température des noeuds du maillage sont bloqués à zéro.

3.5.2 Résultats

La figure 3.14 présente la comparaison analytique/numérique pour les champs de déplacement, de contraintes et de déformation plastique cumulée pour quatre chargements,correspondant respectivement à une rotation d'ensemble imposée de 0.3, 3, 9 et 15 degrés. Le pas de temps pour le calcul numérique est gardé constant et correspond à une rotation de 0.3 degrés. Tous les pas de temps au cours du calcul convergent en moyenne en quatre ou cinq itérations.

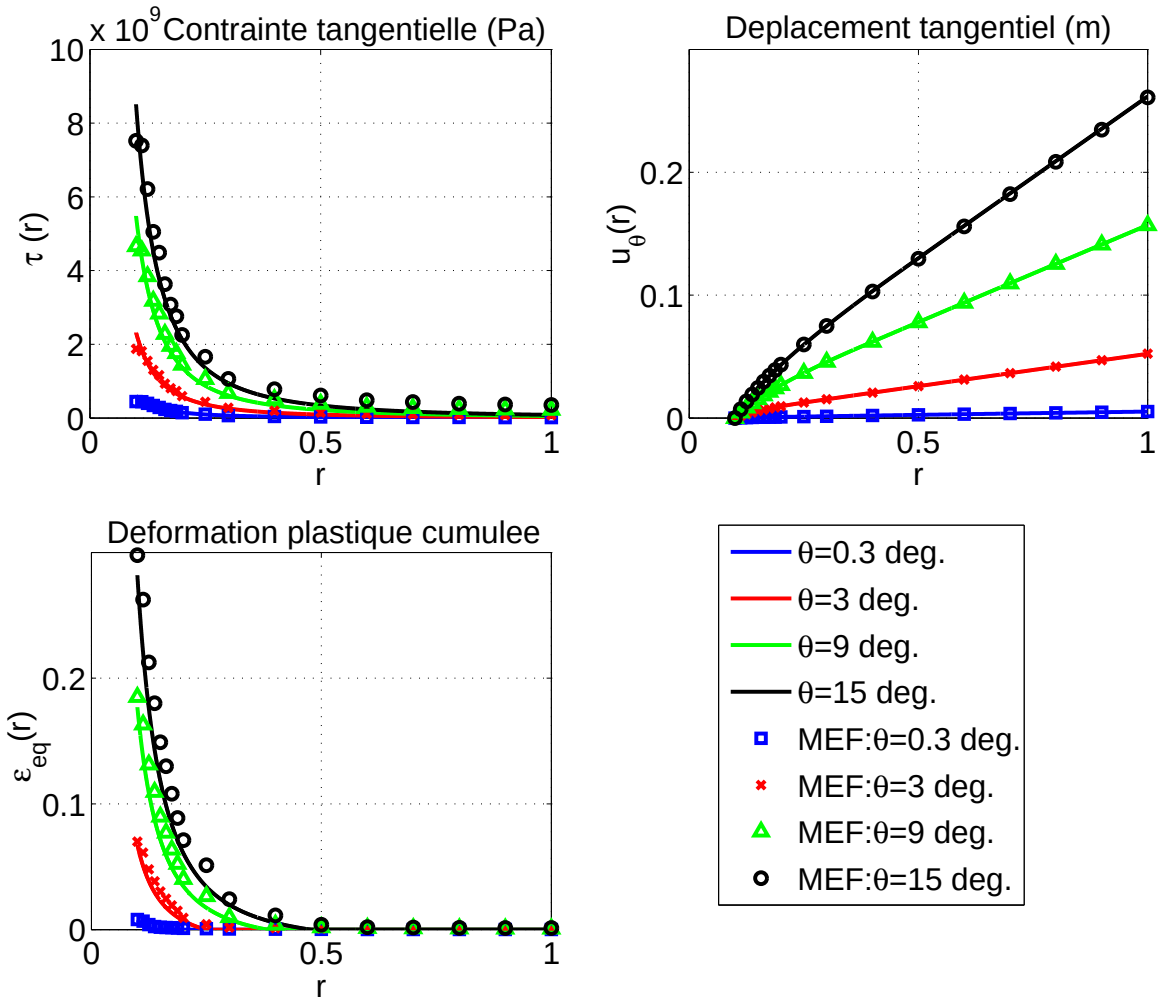


Figure 3.14 – Comparaison pour les champs de déplacement, contraintes et déformation plastique cumulée.

Commentaires :

- ⋆ On observe tout d'abord une relativement bonne corrélation entre les solutions numérique et analytique.
- ⋆ Les chargements présentés, combinés avec la géométrie et les paramètres matériau choisis, conduisent à ce qu'une partie de la structure plastifie, le système est dans la phase élastoplastique.
- ⋆ On observe sur le tracé de la déformation plastique cumulée l'évolution du rayon de la couronne plastique à mesure que le chargement augmente.
- ⋆ Le coefficient d'écrouissage relativement important prescrit dans la mise en données fait croître considérablement la contrainte entre le premier et le dernier pas de temps, d'un facteur huit environ.
- ⋆ Le bon accord numérique/analytique confirme que les termes liés à la dérivée objective sont bien négligeables ici.

3.6 Conclusions

Dans ce chapitre, des solutions analytiques en mécanique des fluides et des solides ont été présentées pour effectuer la vérification des éléments P1+/P1 implémentés dans le code SYSWELD® avec des comportements respectivement fluide et solide.

Ces développements ont été effectués sur la base du traditionnel problème du viscosimètre de Couette, à la fois pour les comportements fluide et solide. En premier lieu, un comportement fluide a été considéré et deux solutions respectivement en mécanique instationnaire et pour un couplage (mécanique stationnaire - thermique instationnaire) ont été présentées. Ces solutions avaient pour objet de tester à la fois le comportement dynamique et le couplage thermomécanique de l'élément implémenté. Un bon comportement de cet élément est observé, les comparaisons avec les solutions analytiques font apparaître une bonne corrélation analytique/numérique sur les instants intermédiaires, à la fois pour le champ de vitesse pour le problème en mécanique transitoire mais aussi pour le champ de température pour le problème couplé.

Dans un second temps, le viscosimètre de Couette a été considéré avec un matériau solide. Tout d'abord, l'étude préalable du cas rigide parfaitement plastique a permis d'observer que la charge limite intervient dès la première charge de plastification et correspond à une localisation de la déformation dans une couronne d'épaisseur infinitésimale. Par la suite, une solution avec un comportement élastoplastique avec écrouissage a été développée en considérant un chargement monotone croissant. L'écrouissage permet de faire croître les contraintes. La plasticité peut ainsi s'étendre radialement en évitant tout phénomène de localisation. Ce problème présente aussi ceci de particulier que de par la variation du champ de contrainte donnée par l'équilibre, la déformation élastique et par voie de conséquence la déformation plastique sont compatibles, d'où il en résulte un champ de contrainte résiduel nul après décharge. Enfin, on a montré qu'une extension de ce problème au cas des grandes transformations, en considérant cette fois un comportement rigide plastique, conduit à des résultats formellement similaires. La partie élastique pouvant être nécessaire en grandes transformations, une solution élastoplastique peut être écrite en négligeant les termes additionnels liés à la dérivée objective. Cette solution s'écrit formellement de la même manière qu'en petites perturbations, en remplaçant le déplacement orthoradial par la longueur d'arc parcourue par un point matériel. Cette solution est utilisée pour la comparaison analytique/numérique. Cette comparaison nous montre une très bonne corrélation entre les solutions numérique et analytique pour les champs de déplacement, contraintes et déformation plastique cumulée. L'élément P1+/P1 développé en mécanique des solides présente donc un bon comportement sur le problème du viscosimètre de Couette.

Chapitre 4

Simulation du Friction Stir Spot Welding

Dans ce quatrième chapitre, on présente tout d'abord une première illustration du couplage sur un cas test déjà utilisé : le problème du viscosimètre de Couette. Par la suite, une première simulation simplifiée du procédé Friction Stir Spot Welding est présentée.

Sommaire

4.1 Introduction **104**
4.2 Le viscosimètre de Couette **104**
4.2.1 Mise en données 104
4.2.2 Résultats 105
4.3 Simulation du Friction Stir Spot Welding **109**
4.3.1 Mise en données 109
4.3.2 Résultats 112
4.4 Difficultés et limites du modèle **120**
4.4.1 Régularité du résidu 121
4.4.2 Le chargement thermomécanique généré par l'outil 122
4.4.3 Instabilités numériques du champ de vitesse 122
4.4.4 Formulation de l'élément solide 123
4.5 Conclusions **123**

4.1 Introduction

On présente dans ce chapitre les premières simulations réalisées avec le modèle numérique construit et présenté dans le second chapitre.

Dans la section 4.2, on vérifie le bon comportement de la transition solide/fluide au cours d'un calcul. Une première simulation est effectuée sur le cas test du viscosimètre de Couette. Ce problème est traité ici uniquement de façon numérique. Les phénomènes liés à la transition solide/fluide et à la propagation de la phase fluide sont par la suite commentés.

Dans la section 4.3, on présente une première simulation simplifiée du procédé Friction Stir Spot Welding. Cette simulation, effectuée sur une structure monobloc, consiste en un essai d'enfoncement dans la matière d'un pion en rotation. L'objectif est d'illustrer la capacité du modèle développé à reproduire les phénomènes physiques associés à ce type de procédé. On présente les résultats associés à cette simulation ; on montre ainsi que l'apparition puis la progression de la phase fluide au cours du calcul se déroulent normalement, on montre aussi que le modèle numérique est capable de simuler de nombreux tours de l'outil dans la matière sans que le maillage ne suive le mouvement de rotation.

Enfin dans la section 4.4, certaines difficultés rencontrées lors du calcul sont discutées, et quelques voies d'amélioration sont proposées.

4.2 Le viscosimètre de Couette

Il est intéressant avant d'aborder la simulation du procédé Friction Stir Spot Welding, d'illustrer le bon comportement de la transition fluide/solide sur un cas test plus simple. Il est apparu naturel de conserver le problème du viscosimètre de Couette, ce dernier ayant déjà permis de vérifier le bon comportement des éléments fluide et solide implémentés dans le code SYSWELD®.

4.2.1 Mise en données

Une vue plane du maillage utilisé pour cette simulation est présenté sur la figure 4.1.

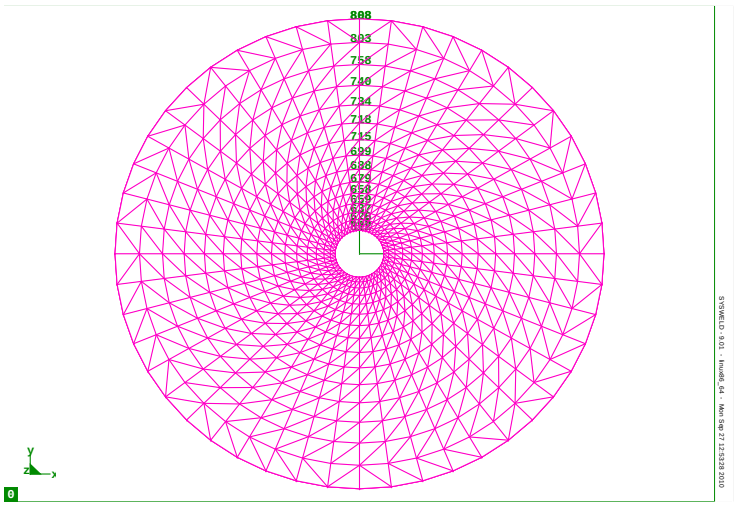


Figure 4.1 – Maillage du viscosimètre

Les rayons intérieur et extérieur sont respectivement fixés à $a = 0.1$mm et $b = 1$mm. Le calcul mené ici est thermomécanique, la température étant le paramètre pilotant la transition solide/fluide. Il est de plus transitoire, l'essai consiste à imposer une rotation du cylindre intérieur, le cylindre extérieur étant bloqué, le chargement est monotone et croît de façon linéaire avec le temps. Aussi, la vitesse de rotation imposée est constante et fixée à 5 tr/mn, soit 0.523 rad/s. Les caractéristiques physiques sont ici choisies sans relation véritable avec un matériau réel particulier, l'objectif est l'illustration du bon comportement de la transition de phase.

La partie solide est modélisée avec une relation de comportement élastoplastique à écrouissage isotrope linéaire. Les caractéristiques mécaniques retenues pour cette phase sont les suivantes :

* le module de cisaillement G est fixé à 80000 MPa.
* la limité d'élasticité en traction σ_0 est fixée à 650 MPa.
* le module d'écrouissage h est fixé à 50000 MPa.

Les caractéristiques du fluide sont les suivantes (voir la relation (1.32)) :

* la consistance K est fixée à 1 MPa.s.
* la sensibilité n est fixée à 1.

Les caractéristiques thermiques sont supposées identiques dans les deux phases : ces paramètres sont fixés de manière que la diffusivité thermique $\kappa = \frac{k}{\rho C}$ vaille 1 mm^2/s. Enfin, la température de transition solide/fluide est fixée à 100 °C. Les conditions aux limites imposées sont les suivantes :

1. *Conditions thermiques :* (imposées par le biais de mailles de peau)

   * Un flux de chaleur constant de 50000 W/mm^2 est imposé sur les mailles du cylindre intérieur.
   * Une condition d'échange est imposée sur les mailles du cylindre extérieur. Le coefficient d'échange est fixé à 50 W/(mm^2.K) et la température extérieure à 0°C.

2. *Conditions mécaniques :*

   * Les déplacements des noeuds du cylindre intérieur sont pilotés, une rotation d'ensemble est imposée.
   * Les déplacements des noeuds du cylindre extérieur sont bloqués.
   * Le déplacement axial des noeuds appartenant à une base du cylindre creux est bloqué.

À l'état initial, la température est homogène et fixée à 20°C et les déplacements sont nuls en tous les points.

4.2.2 Résultats

Les résultats présentés sont tracés sur une ligne de noeuds radiale (figure 4.1) du maillage. Pour plus de clarté, ces résultats sont présentés sur trois figures distinctes 4.2,

4.3 et 4.4, correspondant respectivement à une phase solide de toute la structure, l'apparition d'une phase fluide et la progression de la phase fluide.

La figure 4.2 présente les tracés des champs de température, vitesse et déplacement matériels aux deux premiers instants de calcul. Dans cette phase, toute la structure est solide. Le déplacement matériel imposé croît de façon linéaire avec le temps, donc la vitesse matérielle orthoradiale des points du cylindre intérieur est constante. On observe que la couronne plastique, repérée sur la figure 4.2 par la discontinuité du gradient de vitesse (ou du gradient de déplacement), apparue dès le premier pas de temps progresse et s'étend radialement au second. La température varie de façon logarithmique en fonction du rayon, et croît en fonction du temps. On observe qu'au second instant de calcul, la température excède la température de transition (fixée à 100 °C) sur une petite couronne intérieure, aussi le test de transition étant explicite, les mailles de cette couronne vont fluidifier au prochain instant de calcul.

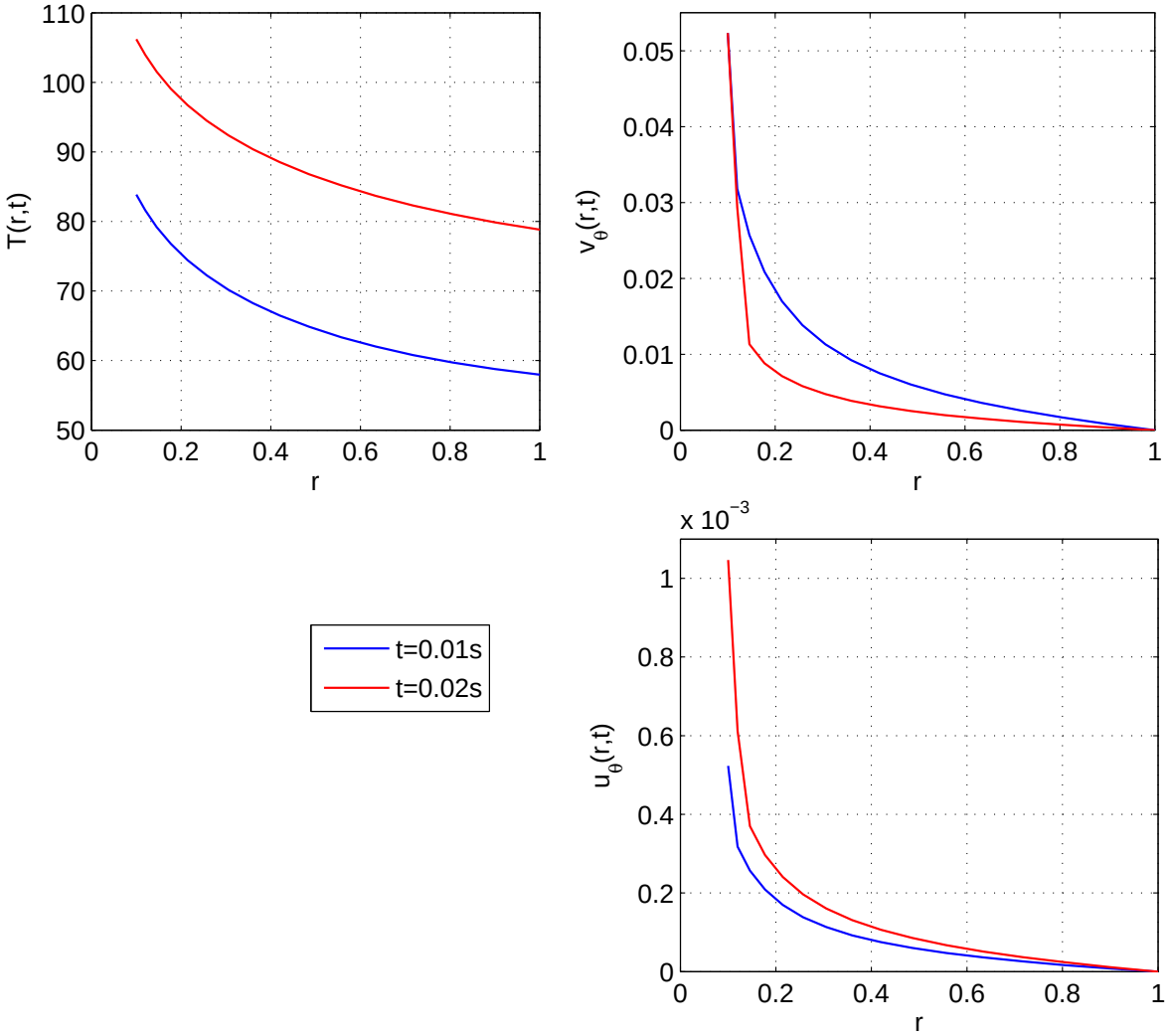


Figure 4.2 – Champs de température, vitesse et déplacement matériels, toute la structure étant encore solide.

La figure 4.3 présente les mêmes tracés, incluant à présent le troisième instant de calcul.

À ce dernier instant, une couronne fluide apparaît au niveau du cylindre intérieur, et sa taille est donnée par la zone dont la température est supérieure à 100 °C au second pas de calcul, c'est-à-dire à l'instant précédent.

On observe alors un retour élastique de la matière dans la partie solide, toute la déformation se concentre à présent dans la couronne fluidifiée. Ce retour élastique est caractérisé par l'évolution de la vitesse matérielle qui n'est plus monotone sur le rayon et devient négative dans la partie solide et sur une partie de la couronne fluide. Le déplacement matériel devient quant à lui nul dans la partie solide. L'interface fluide/solide est repérée par la discontinuité du gradient de vitesse (ou du gradient de déplacement), cette discontinuité traduit la différence de comportement de part et d'autre de l'interface. En effet le comportement du fluide est ici purement visqueux, alors que le solide présente un comportement instantané intégrant une partie élastique et dépendant des effets d'histoire.

On observe aussi que, la température augmentant, la couronne fluide va progresser au prochain instant de calcul jusqu'à $r = 0.4$mm environ.

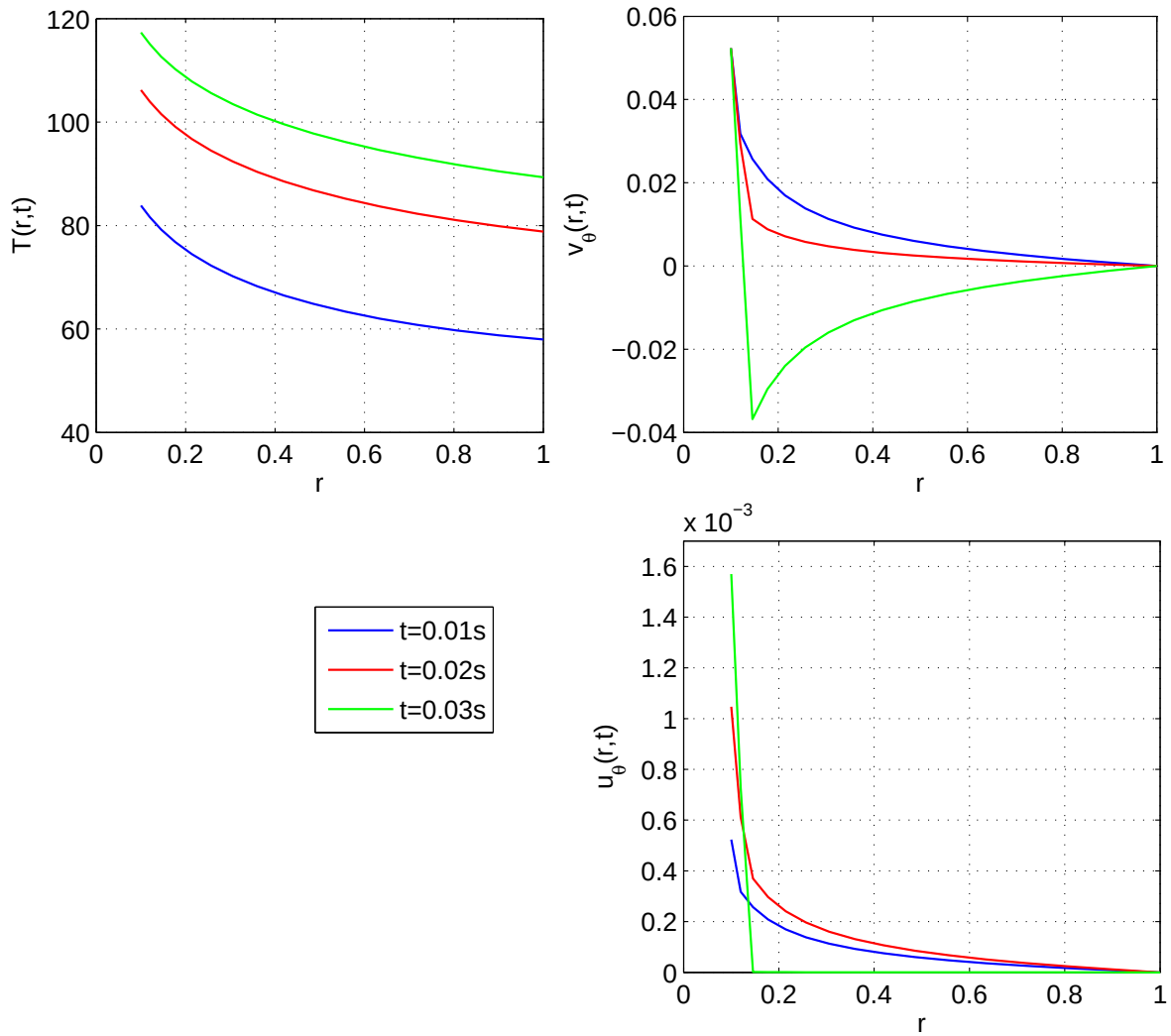


Figure 4.3 – Apparition d'une couronne fluide adjacente au cylindre intérieur.

Commentaire :

La discontinuité du gradient de vitesse à l'interface peut rendre plus difficile la convergence du calcul dès l'apparition d'une zone fluide dans une structure. Si la convergence devient vraiment difficile à obtenir, il peut être intéressant d'essayer de limiter l'amplitude de cette discontinuité en choisissant un comportement mécanique adéquat de part et d'autre de l'interface. S'il n'est pas envisageable de faire tendre le comportement du fluide vers celui d'un solide, il est par contre possible de faire tendre le comportement du solide vers celui du fluide, en ajoutant des effets visqueux et en limitant l'importance de la partie élastique. Un comportement élastoviscoplastique du solide, à partie élastique limitée, peut permettre de sérieusement limiter la discontinuité du gradient de vitesse à l'interface.

La figure 4.4 présente la progression de la phase fluide au cours du calcul. Au quatrième pas de temps, la zone fluide progresse jusqu'à $r = 0.4$mm environ, le champ de vitesse dans cette zone est déterminée par la condition imposée au rayon intérieur, la vitesse nulle à l'interface (et dans la partie solide) et l'évolution temporelle à partir du pas précédent.

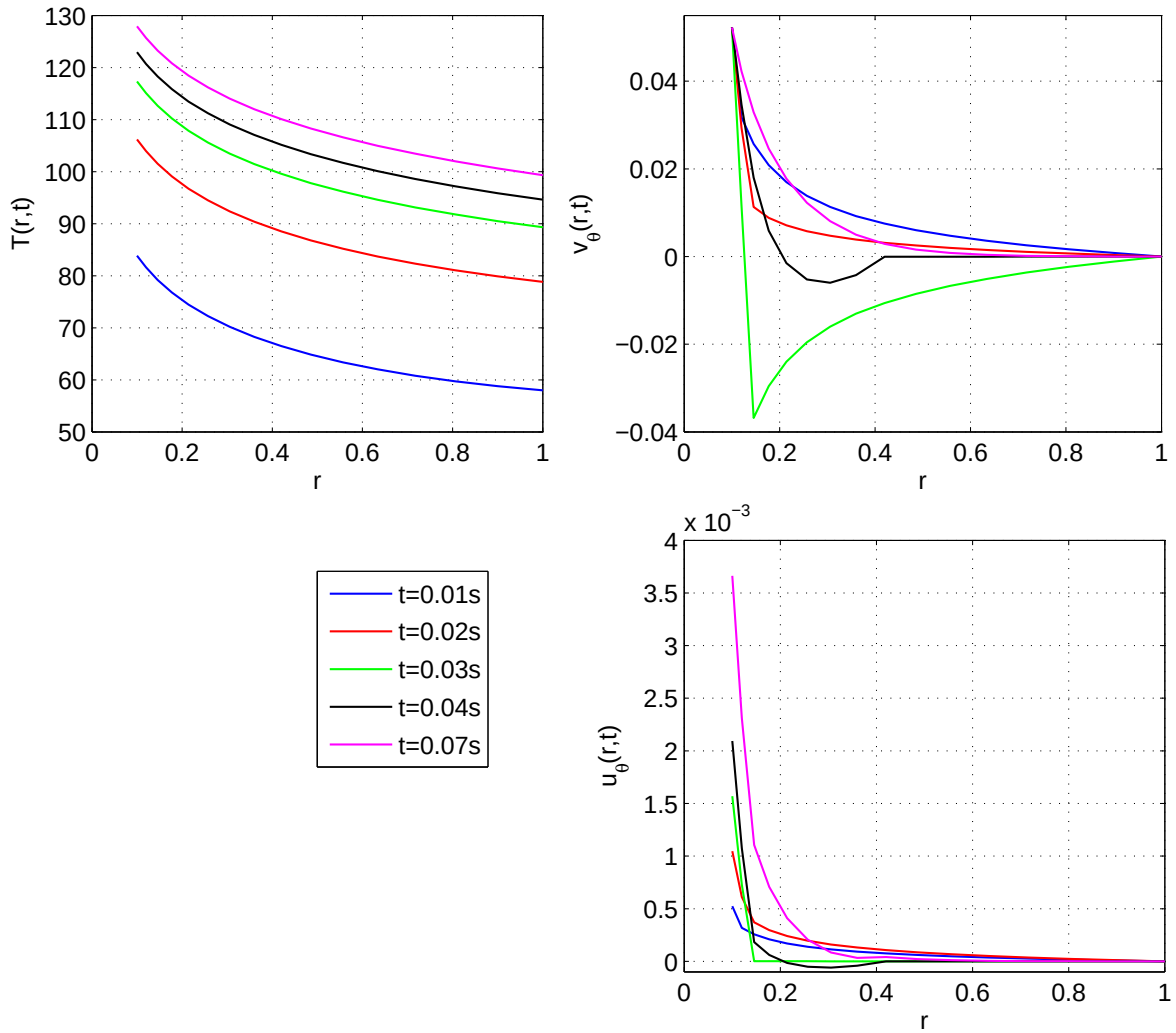


Figure 4.4 – Progression radiale de la couronne fluide.

Au bout d'un certain temps (t=0.07 s), la structure tend à devenir complètement fluide, le champ de vitesse à cet instant tend donc vers la solution stationnaire (relation (3.7)) d'un traditionnel écoulement de Couette entre deux cylindres.

4.3 Simulation du Friction Stir Spot Welding

On présente dans cette section une première simulation simplifiée du procédé Friction Stir Spot Welding. Le modèle développé dans le second chapitre n'incluant pas pour l'instant le contact unilatéral, la simulation est menée sur une structure monobloc. On suppose alors qu'on simule un essai d'enfoncement d'un pion en rotation dans un bloc de matière. Dans le mouvement de rotation de l'outil, du frottement ainsi qu'un échauffement associé sont générés au niveau de la surface de contact. Le modèle n'inclut pas pour l'instant de loi de frottement, aussi le contact frottant est-il modélisé dans une première approche par des tractions surfaciques tangentielles réparties uniformément an fonction du rayon et un flux de chaleur uniforme sur la surface de contact.

Dans un premier temps, la mise en données du calcul est détaillée. Par la suite, les résultats du calcul sont commentés, on s'intéresse notamment à la propagation de l'interface fluide/solide, aux champs de température, vitesse, contraintes et dissipation mécanique au cours du procédé. On montre ici les capacités du modèle à simuler ce type de procédé.

4.3.1 Mise en données

Le maillage utilisé pour cette simulation est présenté sur les figures 4.5 et 4.6. Les dimensions choisies sont identiques à celles des éprouvettes utilisées dans le chapitre 4, la structure a un rayon de 35 mm et une épaisseur de 4 mm (deux tôles jointes).

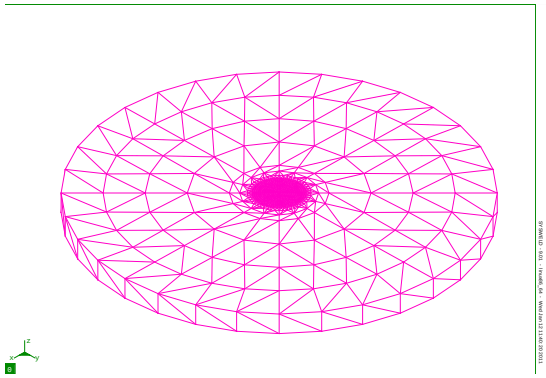


Figure 4.5 – Maillage du bloc de matière.

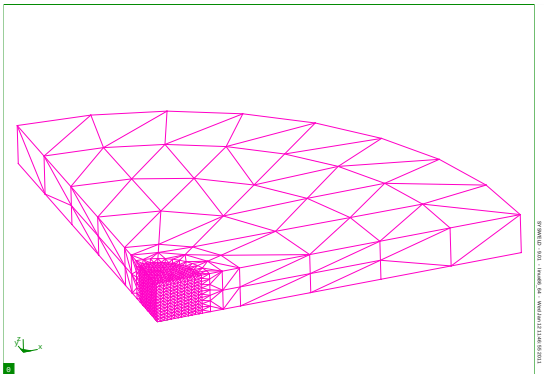


Figure 4.6 – Coupe au quart du maillage.

Les tôles étant supposées jointes, le maillage ne distingue pas chaque tôle, il est donc grossier au loin de la zone de travail, un seul élément dans l'épaisseur est nécessaire sur le pourtour de la structure. Le maillage est par contre raffiné dans une zone de 4 mm de rayon, englobant la zone de travail. Douze éléments sont répartis dans l'épaisseur à cet endroit. Le maillage comprend 28080 mailles tridimensionnelles et 3360 mailles bidimensionnelles réparties sur le bord de la structure pour l'application des conditions aux limites et la gestion de la procédure de replacement des noeuds. Le problème compte 29105 degrés de liberté.

4.3.1.1 Paramètres matériau

La phase solide est modélisée avec une relation de comportement élastoplastique à écrouissage isotrope linéaire. Les caractéristiques mécaniques retenues sont celles d'un alliage d'aluminium 2024, seul le coefficient d'écrouissage a été augmenté de façon arbitraire pour améliorer la convergence [1]. La loi unidimensionnelle associée est tracée sur la figure 4.7.

* le module d'Young E est fixé à 73000 MPa.
* le coefficient de Poisson est fixé à 0.34.
* la limité d'élasticité en traction σ_y varie en fonction de la température selon l'évolution présentée sur la figure 4.8 (SH05).
* le module d'écrouissage h est fixé à 12000 MPa.

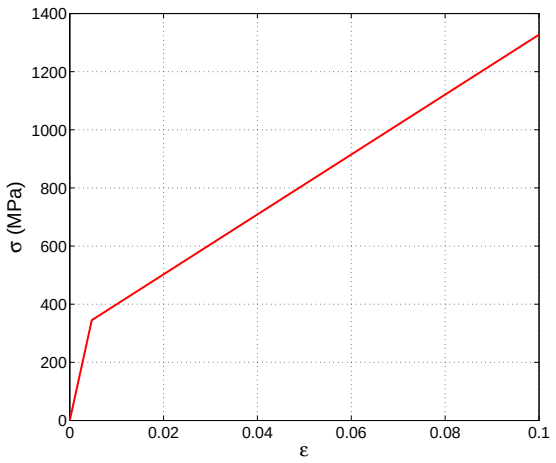


Figure 4.7 – Relation de comportement élastoplastique unidimensionnelle.

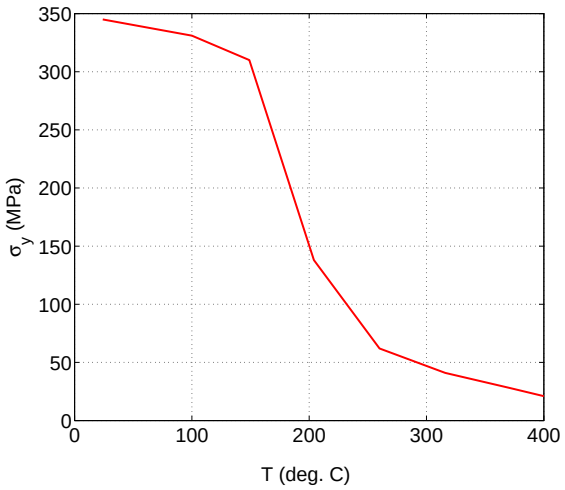


Figure 4.8 – Variation de la limite élastique en traction avec la température.

La température de transition solide/fluide est fixée arbitrairement à 100 °C. Les caractéristiques du fluide sont les suivantes :

* la consistance K varie en fonction de la température selon l'évolution présentée sur la figure 4.9.
* la sensibilité n est fixée à 1.

Les caractéristiques thermiques sont supposées identiques dans les deux phases :

* la conductivité thermique k est fixée à 121 W/(m.K).
* la masse volumique ρ est fixée à 2770 kg/m^3.
* la capacité calorifique C est fixée à 875 J/(kg.K).

1. Cet aspect sera commenté dans la section 4.4.4.

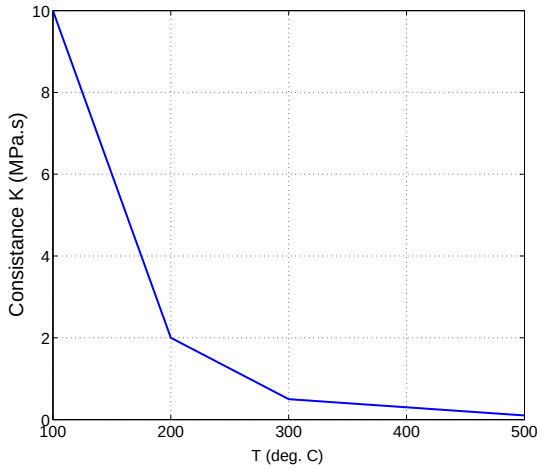


Figure 4.9 – Variation de la consistance du fluide avec la température.

4.3.1.2 Conditions aux limites

1. *Conditions thermiques :* le bord de la structure est divisé en zones associées aux contacts respectifs avec l'air et le montage. Ces zones sont identifiées sur les figures 4.10 et 4.11.

   * Des conditions d'échange sont imposées sur les mailles de peau de chaque zone du pourtour. Le coefficient d'échange avec l'air est fixé à 10 W/(m^2.K), pour le contact avec le montage (contact alu/acier) le coefficient est fixé à 350 W/(m^2.K). La température extérieure est de 20°C.

2. *Conditions mécaniques :*

   * Le déplacement axial des noeuds de la base inférieure est bloqué.
   * Les déplacements u_x et u_y des noeuds du bord latéral de la structure cylindrique sont bloqués.
   * Le déplacement axial des noeuds est bloqué au niveau de la zone de serrage.

4.3.1.3 Chargement

Le chargement généré par l'outil lors du procédé est complexe et théoriquement donné par des conditions de contact et de frottement à l'interface outil/matière. Ce chargement thermomécanique est ici simplifié et décomposé en parties thermique et mécanique. Les mailles de peau sur lesquelles il est appliqué sont repérées sur la figures 4.12.

* Un flux de chaleur constant de 6 W/mm^2 est imposé sur la zone de frottement.
* Enfin, des tractions surfaciques tangentielles sont imposées pour modéliser l'action de l'outil. La répartition de ces tractions est constante avec le rayon (figure 4.13), et leur intensité est fixée arbitrairement à 600 MPa.

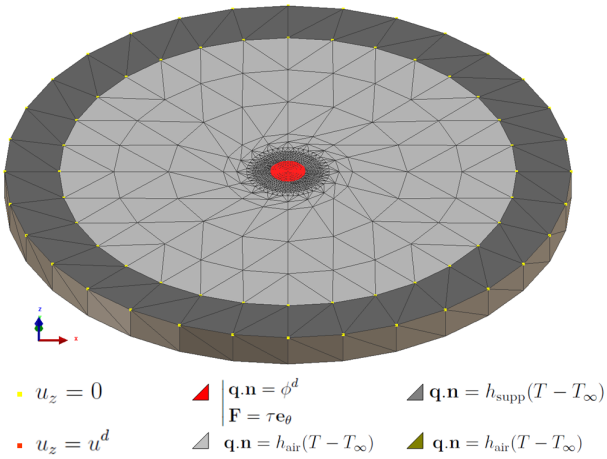


Figure 4.10 – Conditions aux limites de la face *supérieure* de la structure.

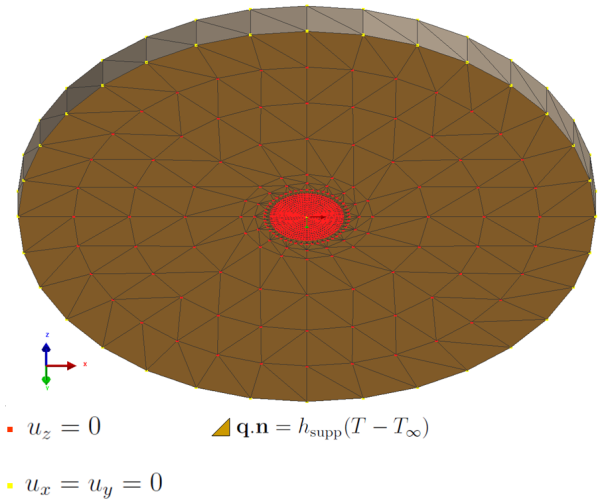


Figure 4.11 – Conditions aux limites de la face *inférieure* de la structure.

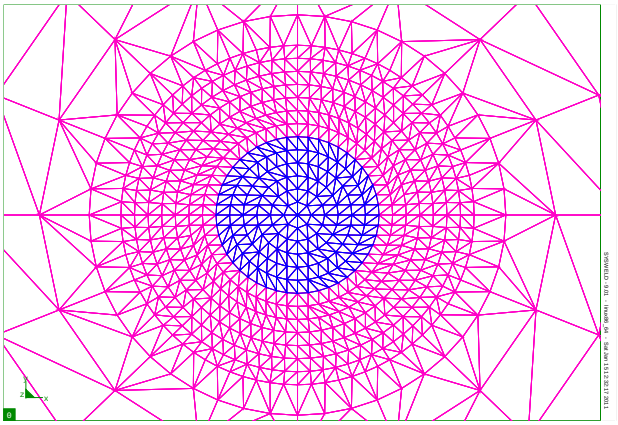


Figure 4.12 – Zone de frottement (en bleu).

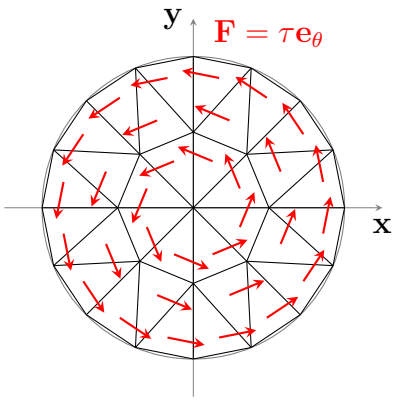


Figure 4.13 – Tractions imposées.

4.3.2 Résultats

On présente dans cette section les résultats de ce calcul. Seule la première partie du calcul est présentée ici (jusqu'à environ $t = 0.437s$) pour des raisons qui seront discutées dans la suite. On commente successivement l'évolution de l'interface fluide/solide, les champs de température, vitesse, contraintes et dissipation mécanique.

D'autre part, l'aspect qualitatif des résultats sera privilégié lors des commentaires, le modèle étant pour l'instant trop incomplet pour présenter un caractère réellement prédictif du point de vue quantitatif.

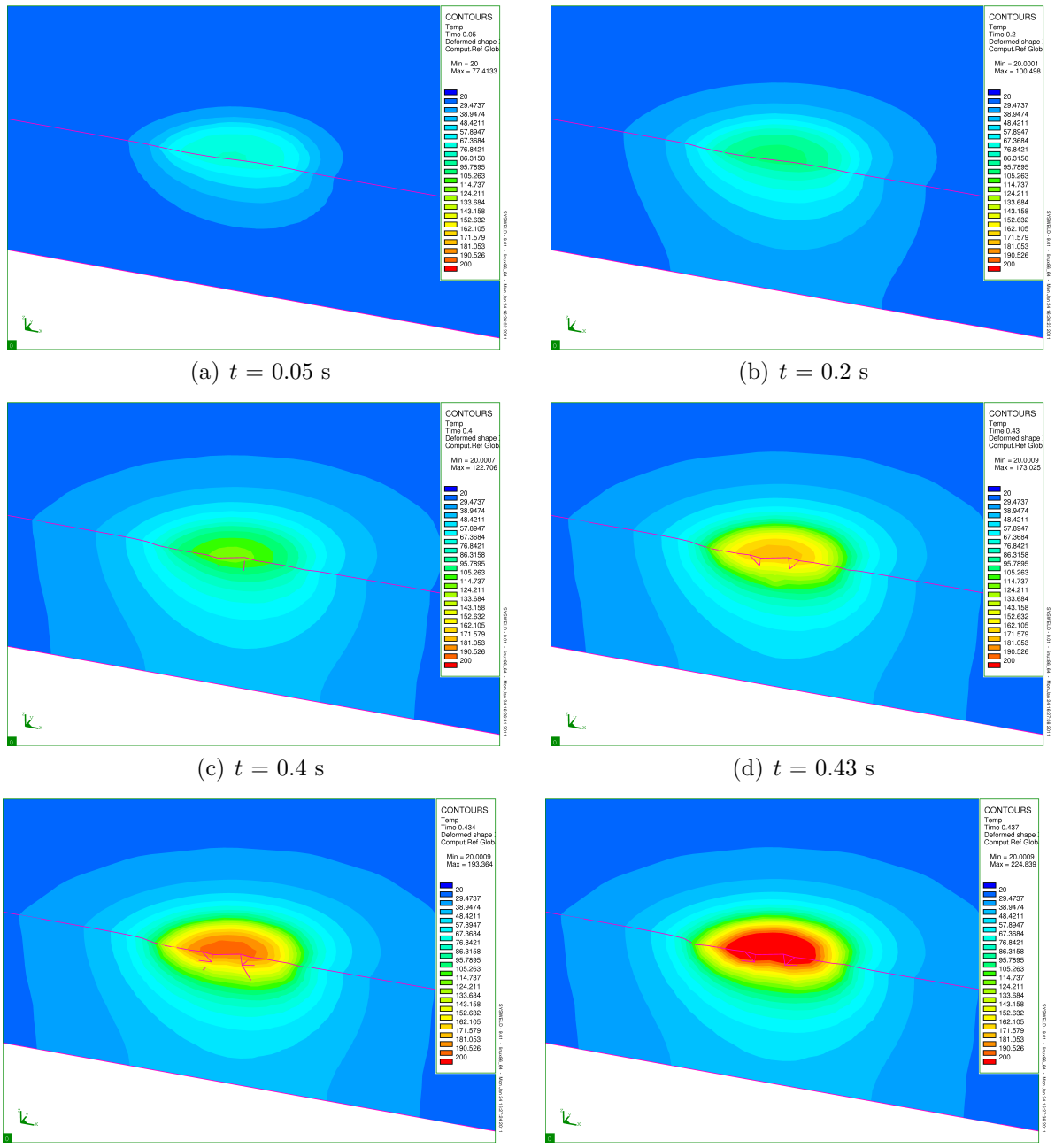
4.3.2.1 Temps de calcul et méthodes utilisées

La partie présentée de la simulation prend de l'ordre de trois heures de calcul sur un ordinateur portable classique avec 2Go de RAM. La matrice tangente est calculée à chaque itération et une méthode itérative non symmétrique (SYS07) est utilisée pour la résolution des systèmes linéaires à chaque itération du calcul. Le calcul converge en environ 10 itérations quand toute la structure est solide, et en 20 itérations voire plus quand deux

phases (fluide et solide) cohabitent au sein de la structure. Le calcul est supposé avoir convergé quand la composante maximale du résidu est inférieure à 10^{-3}.

4.3.2.2 Champ de température et propagation de l'interface fluide/solide

À l'instant initial de la simulation, la température est uniforme et fixée à 20°C. Aussi la structure est à cet instant complètement solide. Au cours du calcul, le chargement thermomécanique va contribuer à élever la température dans la structure, à la fois par dissipation mécanique (couplage thermomécanique fort) et au travers du flux surfacique imposé (simulation de la chaleur générée par friction au contact outil/matière), et plus particulièrement dans la zone de travail.



(a) $t = 0.05$ s (b) $t = 0.2$ s

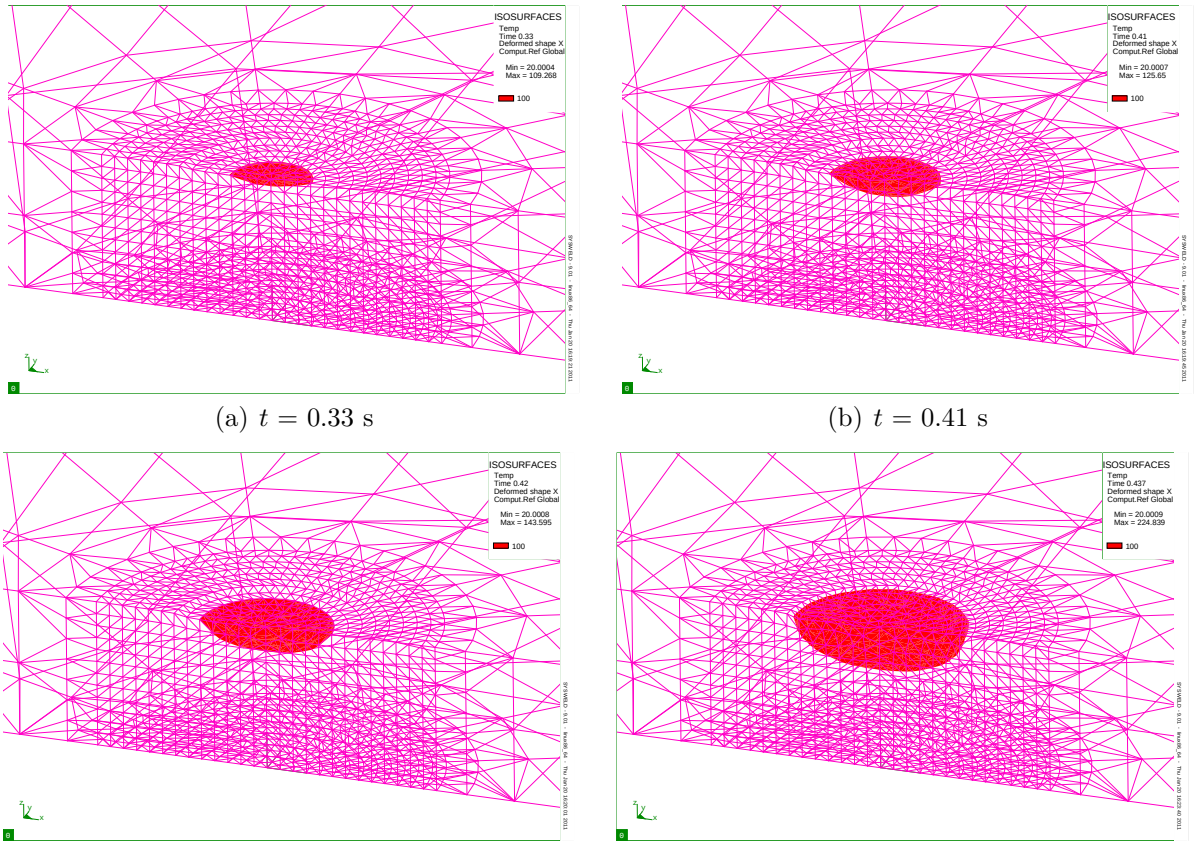
(c) $t = 0.4$ s (d) $t = 0.43$ s

(e) $t = 0.434$ s (f) $t = 0.437$ s

Figure 4.14 – Évolution du champ de température.

La figure 4.14 présente l'évolution du champ de température au cours du temps, dans un voisinage de la zone de contact outil/matière. On observe bien l'apparition d'une zone chaude sous l'outil, qui commence d'abord à se propager sous forme d'une coupole hémisphérique puis de façon radiale sur la structure. La température augmente au cours du temps pour atteindre plus de 200 °C sous l'outil.

Dans le modèle développé, la température est le paramètre pilotant l'apparition puis la propagation d'une zone fluide. Au cours du chauffage, cette zone fluide va apparaître d'abord sous l'outil puis s'étendre au cours du temps, aussi il est intéressant de visualiser le phénomène de propagation de l'interface fluide/solide. On présente sur la figure 4.15 l'évolution au cours du temps de la surface isotherme associée à la transition fluide/solide (T=100 °C). La zone fluide apparaît peu après le début de la simulation au voisinage de la zone de contact outil/matière et progresse de façon hémisphérique au cours du temps.



(a) $t = 0.33$ s (b) $t = 0.41$ s

(c) $t = 0.42$ s (d) $t = 0.437$ s

Figure 4.15 – Évolution de l'isotherme associée à l'interface fluide/solide.

Il est intéressant, en plus des isovaleurs, de tracer les évolutions de la température en fonction des coordonnées. Aussi, on définit trois lignes de noeuds : deux lignes radiales disposées respectivement sur les faces supérieure et inférieure de la structure, et une ligne de noeuds en position centrale orientée dans la profondeur. Ces lignes de noeuds sont illustrées sur la figure 4.16.

On présente d'abord les évolutions de la température au cours du temps tracées sur les lignes radiales supérieure et inférieure sur les figures 4.17 et 4.18. Sur les deux faces de la structure, on observe de manière globale que le champ de température évolue comme une gaussienne qui s'agrandit au cours du temps. La température croît fortement au niveau de la zone de travail conduisant à un fort gradient thermique localisé. Ce champ tend à

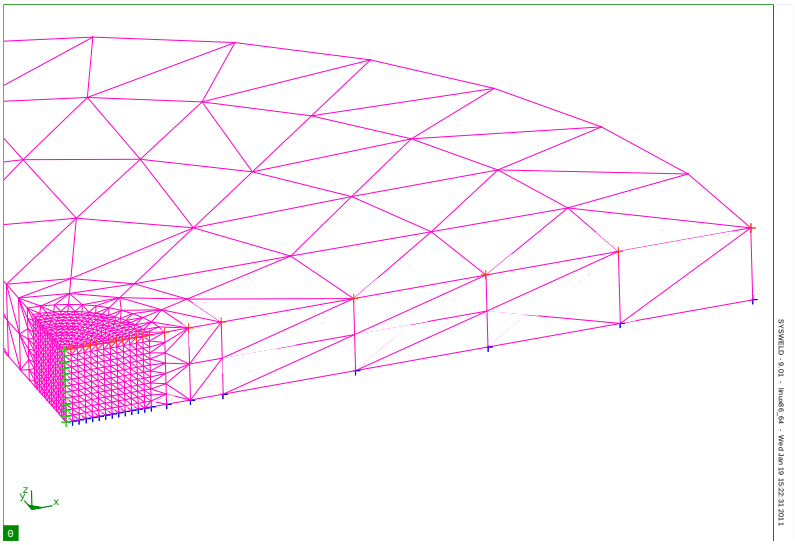


Figure 4.16 – Lignes de noeuds radiales supérieure (en rouge) et inférieure (en bleu), et dans la profondeur (en vert) servant au tracé des champs par point.

l'inverse à saturer au cours du temps sur la face inférieure.

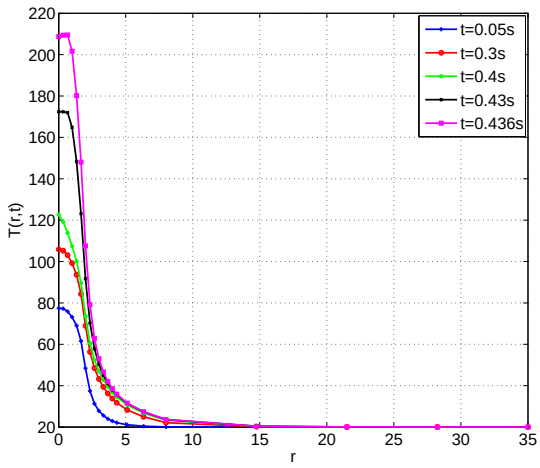


Figure 4.17 – Évolution du champ de température sur une ligne radiale de noeuds appartenant à la surface *supérieure* de la structure.

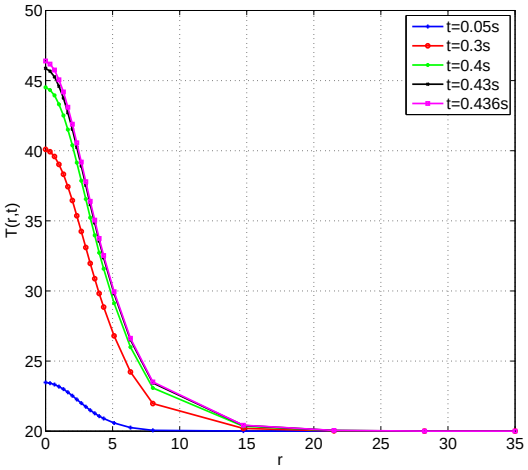


Figure 4.18 – Évolution du champ de température sur une ligne radiale de noeuds appartenant à la surface *inférieure* de la structure.

On trace ensuite l'évolution de la température dans la profondeur de la structure (figure 4.19). On observe ici une progression exponentielle de la température jusqu'à la zone de travail, avec quelques effets d'instabilité qui peuvent être attribués à la progression de la zone fluide et à la forte croissance de la vitesse matérielle dans cette zone, cette dernière est commentée dans la section 4.4.

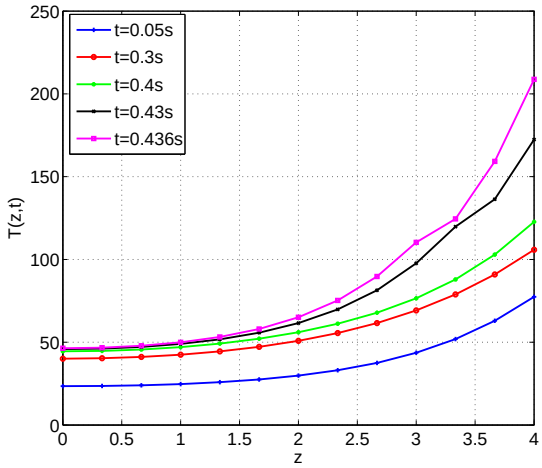
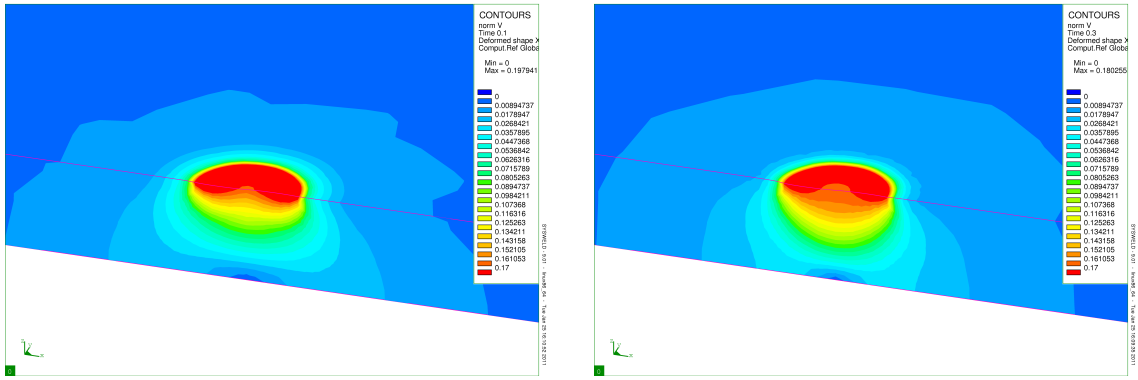


Figure 4.19 – Évolution du champ de température selon la profondeur de la structure.

4.3.2.3 Champ de vitesse

Sur la plage de temps de calcul présentée, l'intensité du champ de vitesse varie très fortement. Aussi, il est intéressant pour des raisons de clarté de présenter plusieurs échelles de valeur qu'on associera ici respectivement à la phase solide de toute la structure, l'apparition d'une phase fluide et à la progression de la phase fluide. On présente sur la figure 4.20 la norme du champ de vitesse à deux instants correspondant à une phase solide de toute la structure. Un mouvement orthoradial de la matière est généré par les tractions surfaciques tangentielles appliquées sur la zone de contact outil/matière, c'est pourquoi on observe que l'intensité de la vitesse augmente avec le rayon sur cette zone de contact. À ce mouvement d'entraînement se superpose l'enfoncement de l'outil, uniforme sur la section, généré ici par déplacement imposé. Le comportement étant solide, la vitesse est pour l'instant relativement faible, de l'ordre du dixième de mm/s.

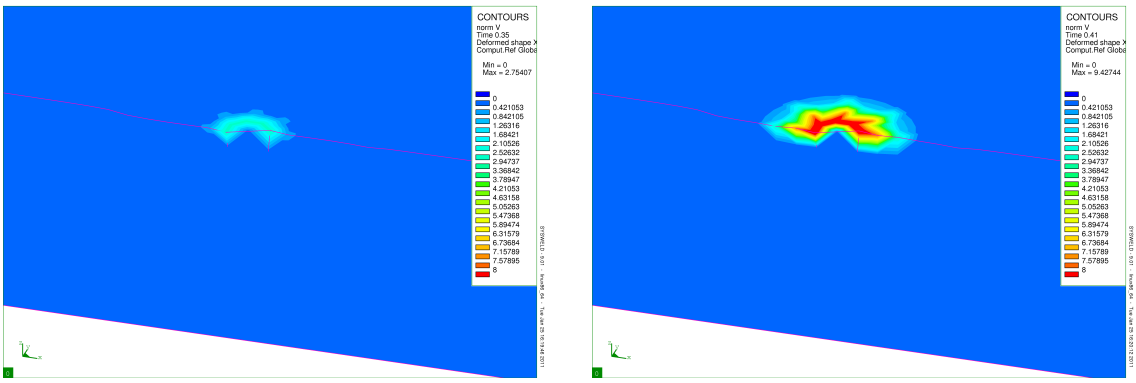


(a) $t = 0.1$ s (b) $t = 0.3$ s

Figure 4.20 – Norme du champ de vitesse en phase solide.

Mais très vite, le flux de chaleur imposé fait localement monter la température, une zone fluide apparaît (figure 4.21(a)) sous l'outil. Dès lors, toute la déformation de la structure se localise dans cette fine zone, la vitesse croît immédiatement jusqu'à environ 2.5 mm/s, tandis qu'on assiste à un retour élastique de la matière à l'état solide. La zone fluide

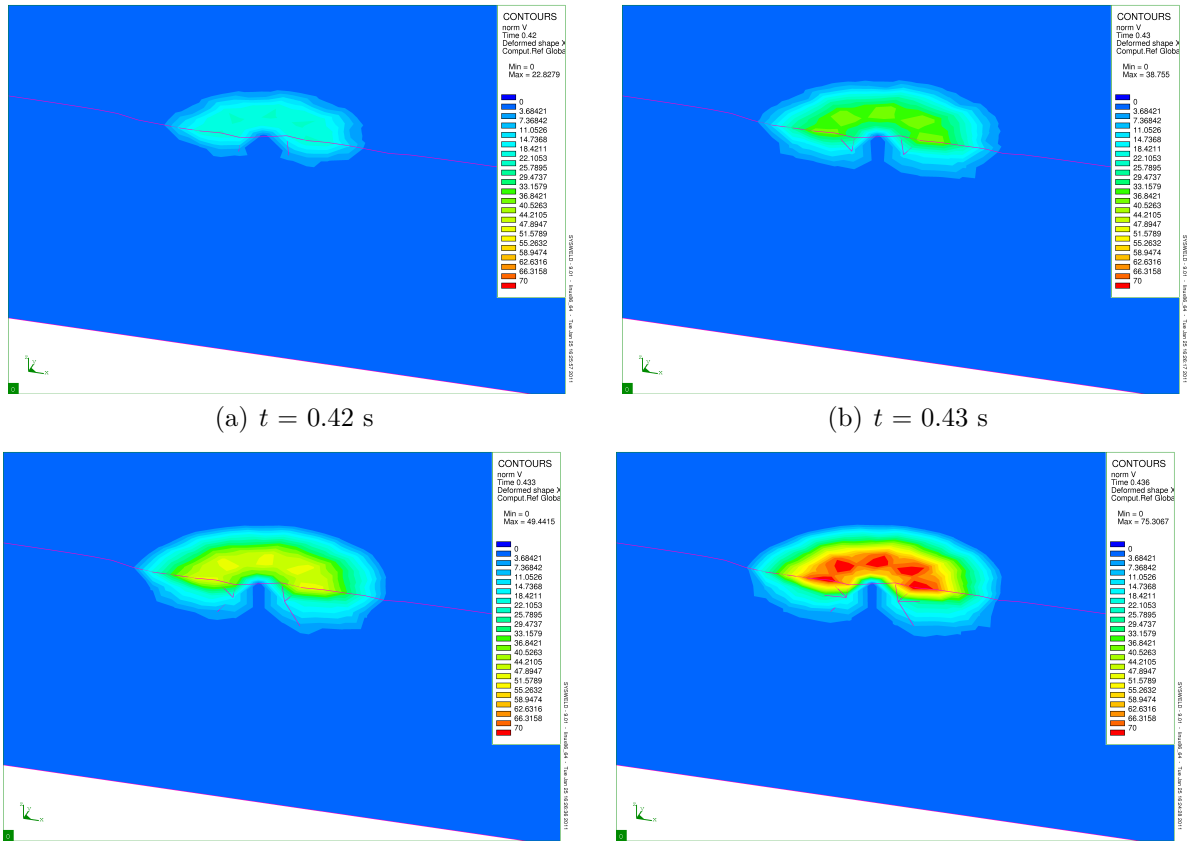
va alors commencer à s'étendre, tandis que la vitesse va commencer à croître fortement (9mm/s sur la figure 4.21(b)).



(a) $t = 0.035$ s (b) $t = 0.041$ s

Figure 4.21 – Norme du champ de vitesse, apparition et progression de la phase fluide.

Les isovaleurs du champ de vitesse présentées sont tracées sur la configuration déformée (sans facteur amplificateur du déplacement) de la structure. Il est intéressant d'observer que la formulation euléro-lagrangienne développée permet bien au maillage de ne pas suivre le mouvement d'entraînement orthoradial de l'outil, ceci est d'autant plus probant que la norme de la vitesse continue de croître ici de façon importante. Le modèle numérique



(a) $t = 0.42$ s (b) $t = 0.43$ s

(c) $t = 0.433$ s (d) $t = 0.436$ s

Figure 4.22 – Norme du champ de vitesse, extension de la phase fluide.

développé permet donc de simuler plusieurs tours de l'outil dans la matière au cours du

procédé. La figure 4.22 montre qu'on assiste ensuite à une phase de progression de la zone fluide, dans laquelle la vitesse de la matière augmente drastiquement en très peu de temps, jusqu'à atteindre plus de 70 mm/s sur la figure 4.22(d). On assiste alors à un effet d'emballement dû (i) au comportement fluide de la matière, dont la viscosité décroît en fonction de la température, et (ii) aux tractions surfaciques tangentielles imposées qui restent constantes au cours du temps, ce qui ne serait pas le cas avec une loi de frottement appropriée.

Cet emballement rend alors de plus en plus difficile la convergence du calcul, et conduit par la suite à des effets d'instabilité du champ de vitesse mettant très vite fin au calcul. Ce point sera commenté plus avant dans la section 4.4.

Les figures 4.23 et 4.24 présentent les tracés des évolutions des composantes respectivement orthoradiale et axiale de la vitesse matérielle sur une ligne radiale de noeuds de la face supérieure de la structure (figure 4.16). Sur la figure 4.23, un zoom est effectué dans la région centrale de la structure. On observe bien que (i) cette vitesse est nulle sur l'axe de rotation, (ii) la zone fluide est aisément identifiable et s'étend au cours du temps, (iii) cette composante croît ici de façon drastique sous l'action des tractions surfaciques tangentielles imposées constantes.

Sur la zone de contact outil/matière ($r \in [0, 2]$), un déplacement axial croissant de façon linéaire avec le temps est imposé, aussi la vitesse matérielle y est constante (et négative) (figure 4.24). Ce tracé permet aussi de mettre en évidence la formation d'un bourrelet de matière sur le pourtour de la zone de contact à mesure que l'outil s'enfonce. Ce bourrelet résulte de l'incompressibilité du fluide et de la déformation solide de la matière entourant la zone fluide. Dans l'approche euléro-lagrangienne développée, la procédure d'actualisation de la géométrie permet au maillage de suivre la matière au niveau de la surface libre et donc de simuler la formation d'un bourrelet de matière, la position des noeuds de cette surface est calculée à partir de la projection de la vitesse matérielle convergée sur une normale locale.

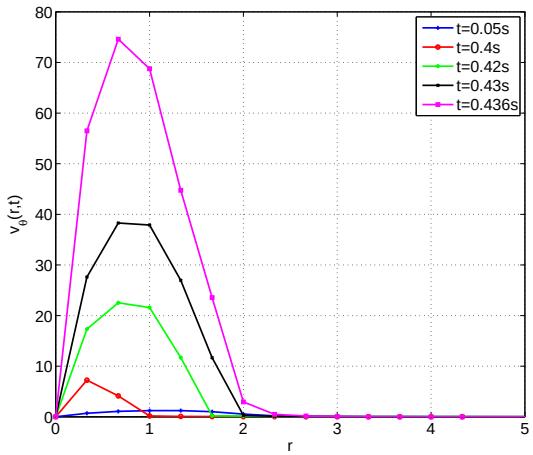


Figure 4.23 – Évolution de la composante *orthoradiale* de la vitesse matérielle sur une ligne radiale de noeuds appartenant à la surface *supérieure* de la structure. Zoom effectué sur la région $r \in [0, 5\text{mm}]$.

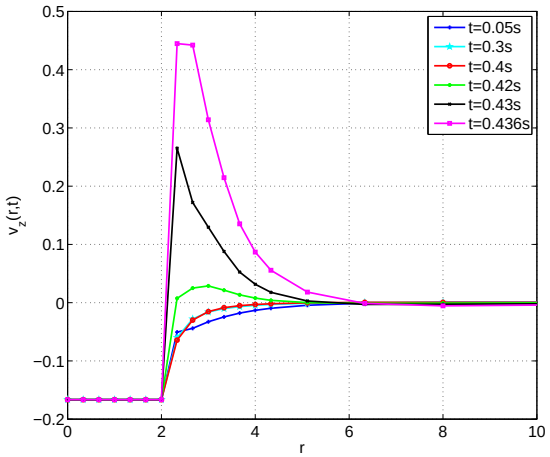
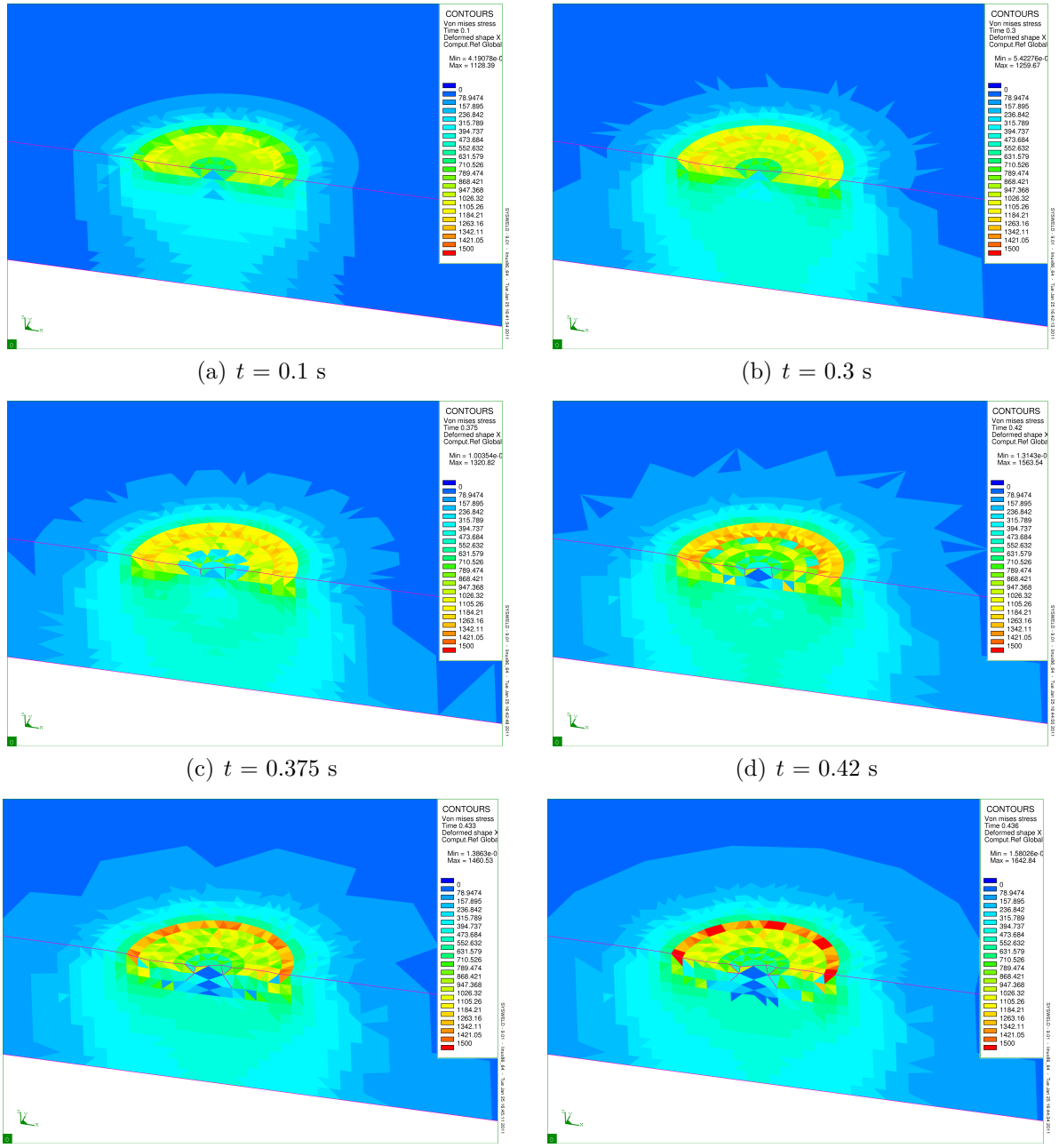


Figure 4.24 – Évolution de la composante *axiale* de la vitesse matérielle sur une ligne radiale de noeuds appartenant à la surface *supérieure* de la structure. Zoom effectué sur la région $r \in [0, 10\text{mm}]$.

4.3.2.4 Contraintes

La figure 4.27 présente l'évolution de la contrainte équivalente de von Mises dans la structure au cours du procédé. On observe qu'une large zone sous la surface de contact outil/matière est malaxée et subit les efforts générés par l'outil. Les valeurs de l'écrouissage et des paramètres de la phase fluide n'étant pas calibrées correctement, les valeurs calculées des contraintes sont excessives, aussi on ne regardera essentiellement ces contraintes que d'un point de vue qualitatif.



(a) $t = 0.1$ s (b) $t = 0.3$ s

(c) $t = 0.375$ s (d) $t = 0.42$ s

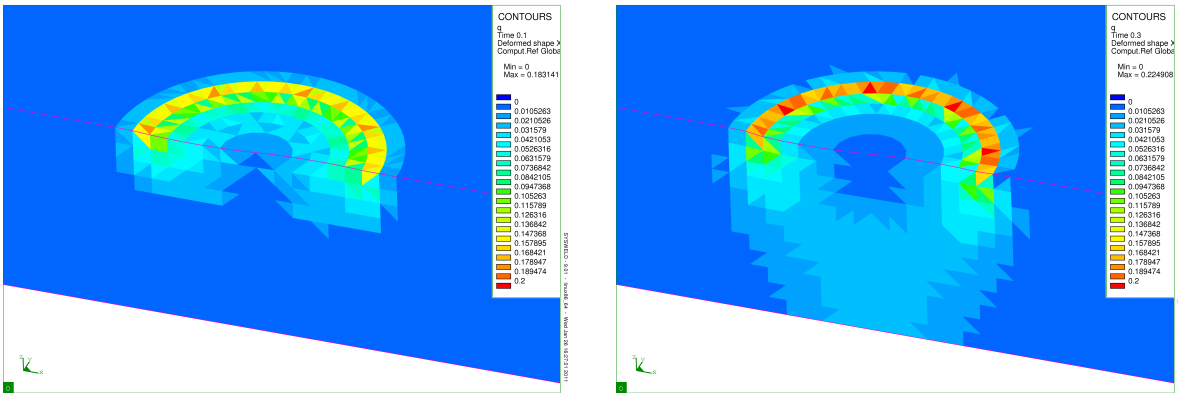
(e) $t = 0.433$ s (f) $t = 0.436$ s

Figure 4.25 – Évolution de la contrainte de von Mises.

L'outil créée des contraintes dans la zone où il appuie, mais ces contraintes chutent quand le solide devient fluide. Les contraintes sont donc maximales dans le solide au voisinage de l'interface fluide/solide.

4.3.2.5 Dissipation mécanique

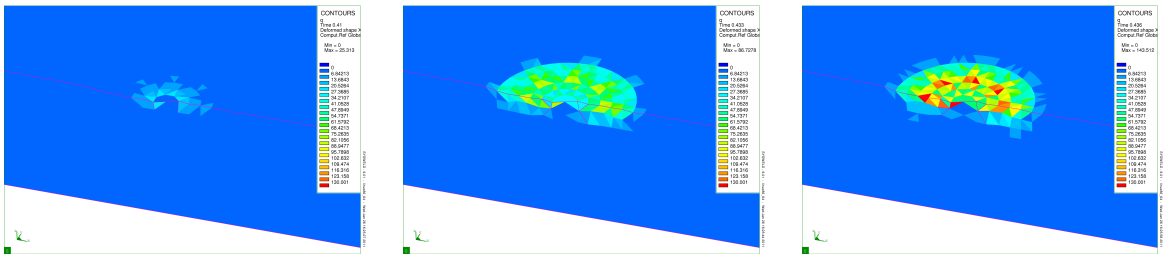
Il est intéressant d'observer les isovaleurs de la dissipation mécanique au cours du calcul. Lorsque toute la structure est solide (figure 4.26), celle-ci apparaît d'abord en sous-couche de la zone de contact puis se propage dans l'épaisseur de la structure, mais reste limitée à de relativement faibles valeurs, de l'ordre de 0.2 W/mm^3.



(a) $t = 0.1$ s (b) $t = 0.3$ s

Figure 4.26 – Dissipation mécanique en phase solide.

Dès que la zone fluide apparaît, la déformation et donc la dissipation se concentrent dans cette fine zone. À mesure que la vitesse matérielle dans la zone fluide croît, la dissipation augmente drastiquement pour atteindre une valeur maximale d'environ 130 W/mm^3. Bien que cette valeur semble plus importante que de raison, on peut tout de même observer que la chaleur générée par dissipation dans un élément de volume peut devenir bien supérieure à celle générée par friction (le flux surfacique imposé ici étant de 6 W/mm^2) sur un élément de surface.



(a) $t = 0.41$ s (b) $t = 0.433$ s (c) $t = 0.436$ s

Figure 4.27 – Dissipation mécanique, phases fluide et solide.

4.4 Difficultés et limites du modèle

Cette première simulation du procédé Friction Stir Spot Welding, même simplifiée, a permis de vérifier le bon fonctionnement du code mais aussi de montrer numériquement les limites de validité du modèle développé. Ces limites sont traduites par un certain nombre de phénomènes numériques caractéristiques mais aussi par des difficultés rencontrées lors du calcul. Dans cette section, on discute de ces deux points, on propose aussi des pistes d'amélioration en vue de compléter le modèle permettant de réaliser une simulation réellement prédictive du procédé Friction Stir Spot Welding.

4.4.1 Régularité du résidu

Une difficulté associée à la construction du modèle est le manque de régularité du résidu au cours du calcul. Ce manque de régularité s'explique par (i) la discontinuité du comportement à travers l'interface et (ii) les sauts discontinus de l'interface au cours du temps (l'interface passant entre les mailles).

Le premier point conduit à une discontinuité du gradient de vitesse à l'interface. Une convergence plus difficile était bien sûr attendue avec cette différence abrupte de comportement. On est alors tenté de vouloir limiter cette discontinuité. Une manière d'y parvenir, déjà évoquée en section 4.2, est de faire tendre le comportement solide vers le comportement fluide en y ajoutant des effets visqueux et en limitant l'importance de sa partie élastique. Néanmoins cette technique présente des limites en ceci que les performances des algorithmes d'intégration numérique des relations de comportement de type élastoviscoplastique diminuent très vite dès lors que la partie élastique devient faible. Une seconde approche possible pourrait s'appuyer sur le fait que les changements de phase dans les matériaux solides ne sont pas instantanés mais s'effectuent généralement sur une plage de température. Il est alors possible d'envisager une transition plus douce du comportement mécanique en introduisant une zone mixte, dont le comportement pourrait être calculé à partir d'une loi des mélanges appliquées aux comportements fluide et solide.

Le second point ajoute un comportement saccadé du résidu au cours du temps associé à la propagation spatiale du front. Ce comportement s'illustre de deux façons :

- ⋆ lors de l'apparition de la phase fluide : dès qu'une ou quelques mailles fluidifient, toute la déformation générée par l'outil se concentre dans ces mailles alors qu'on observe un retour élastique des mailles solides restant dans la structure. Suivant l'intensité du chargement, la zone fluide apparaissant peut être aussi fine que le maillage est raffiné dans la zone d'intérêt. Ceci conduit à une matrice mal conditionnée et rend plus difficile la convergence du calcul.

- ⋆ lors de la propagation de la phase fluide : quand la coupole fluide s'agrandit d'une « croûte » de mailles, un léger retour élastique est généré (par les mailles solides sous-jacentes) au moment où le front balaye la croute. Alors que le chargement continue de croître, ce retour élastique est comblé par la déformation de la partie solide supportant la partie fluide. On assiste alors à une suite de légères charges et décharges dans un mouvement de torsion de la zone supportant la coupole fluide, à mesure que cette dernière grossit. L'intensité de ce phénomène dépend de la taille et de la structure du maillage.

Aussi il est intéressant de lisser l'évolution spatiale de l'interface au cours du temps. On est donc conduit à envisager que l'interface puisse traverser les éléments, conduisant à des méthodes de « front tracking » déjà évoquées dans le chapitre 2. Bien que ces méthodes ne soient pas exemptes de problèmes numériques, elles constituent certainement une voie d'amélioration du modèle.

D'un point de vue pratique, l'apparition de la zone fluide nécessite une vraie diminution du pas de temps. Pour ce type d'analyse non linéaire, il est essentiel d'utiliser une technique d'ajustement automatique du pas de temps (SYS07) pour éviter de faire

d'incessantes reprises de calcul. De plus, de nombreuses techniques numériques d'accélération de convergence déjà implémentées dans le code SYSWELD® ont été testées : Line Search, méthodes de relaxation, méthodes quasi-Newton, etc. L'expérience montre que les meilleures performances sont obtenues avec une matrice tangente réactualisée à chaque itération du calcul.

4.4.2 Le chargement thermomécanique généré par l'outil

La modélisation de l'interaction outil/matière est une des parties les plus complexes de la modélisation des procédés de soudage par friction et malaxage. Le chargement générant un mouvement d'entraînement de la matière par l'outil a été représenté par des tractions surfaciques tangentielles, résultant du frottement entre l'outil et la matière, imposées de façon constante au cours du temps. Il a été observé que cette approximation quelque peu grossière conduit à un emballement de la vitesse matérielle dans la zone fluide et donc à une fin prématurée du calcul. Il est donc bien évident qu'une modélisation plus réaliste du chargement est indispensable si l'on souhaite mener le calcul à son terme pour au moins avoir une première tendance qualitative des phénomènes se produisant durant le procédé, aussi il est nécessaire d'implémenter une loi de frottement permettant d'évaluer plus justement la répartition et l'intensité de ces tractions, ainsi que la puissance dissipée par frottement de l'outil.

De façon plus précise, la nature du contact à l'interface outil/matière évolue fortement durant le procédé. L'observation des courbes expérimentales des effort et couple axiaux générés pendant le procédé (figures 5.38) nous renseigne sur l'évolution de la nature du contact. En effet durant les premiers instants de la plongée de l'outil, le couple et l'effort croissent à l'unisson, ce qui laisse penser que le frottement peut être assimilé à du frottement sec. On observe par la suite une brusque chute de l'effort alors que le couple continue de croître. On peut alors penser qu'il se produit une transition visqueuse, cette idée étant par ailleurs en remarquable adéquation avec l'idée d'une transition de comportement solide/fluide incluse dans le modèle développé, qu'il est aussi nécessaire de rendre compte au travers de la loi de frottement au contact outil/matière.

4.4.3 Instabilités numériques du champ de vitesse

D'un point de vue numérique, l'emballement du champ de vitesse conduit à l'observation d'un phénomène d'instabilité à mesure que le nombre de Reynolds croît. Ce phénomène résulte de la présence des termes de convection dans les équations de la mécanique des fluides, qui combinés avec un traitement classique par la méthode des éléments finis (Galerkin) conduisent à des oscillations spatiales non physiques du champ solution. Une manière d'éviter ces problèmes d'instabilités numériques est d'utiliser la méthode de Petrov-Galerkin (BH82) (ou SUPG) pour les équations mécaniques, cette technique étant par ailleurs déjà incluse dans le modèle pour les équations thermiques.

De façon plus générale, si les vitesses restent normalement limitées dans le cas du Friction Stir Spot Welding, des effets dynamiques importants voire des phénomènes de turbulence peuvent intervenir dans le bain fondu dans le cas des procédés de soudage impliquant la fusion du métal. La mise en oeuvre du couplage fluide/solide pour la modélisation de tels procédés nécessite alors d'ajouter des techniques de stabilisation de champ de vitesse et/ou l'implémentation d'un modèle de turbulence.

4.4.4 Formulation de l'élément solide

Il a été observé qu'un faible écrouissage diminue les propriétés de convergence de l'élément solide, aussi celui-ci a-t-il été augmenté de façon arbitraire dans la simulation présentée. Ceci s'explique au travers de l'approche eulérienne privilégiée pour la formulation de cet élément, la plasticité en grandes transformations s'écrivant naturellement avec des mesures de contraintes et déformations eulériennes. Cependant, l'écriture de la matrice tangente est souvent approximée en ne dérivant que la partie comportement par rapport aux degrés de liberté du système. Il en résulte qu'il est plus délicat de traiter des problèmes faisant intervenir de très grandes rotations. Dans ce dernier cas, une formulation lagrangienne actualisée peut sembler prometteuse, les termes géométriques étant plus aisément dérivables.

4.5 Conclusions

Dans ce chapitre, des premières simulations réalisées avec le modèle numérique construit dans cette thèse ont été présentées.

Dans un premier temps, le bon comportement de la transition fluide/solide a été testé avec succès sur le problème du viscosimètre de Couette. À cet effet, le calcul mené est nécessairement thermomécanique, la température étant le paramètre pilotant la transition. Le calcul est de plus transitoire, l'essai mené consiste à imposer une rotation du cylindre intérieur, croissant de façon linéaire avec le temps, le cylindre extérieur étant bloqué. Dès que la zone fluide apparaît sur une couronne intérieure, toute la déformation se concentre dans cette zone, alors qu'on assiste à un retour élastique de la partie solide. L'interface fluide/solide est marquée par une discontinuité du gradient de vitesse. Au bout d'un certain temps, la zone fluide s'étend jusqu'à ce que la structure soit devenue complètement fluide, la solution du champ de vitesse tend alors vers la solution stationnaire d'un traditionnel écoulement de Couette entre deux cylindres.

Dans un second temps, une première simulation simplifiée du Friction Stir Spot Welding a été présentée. Cette simulation est menée sur une structure monobloc. D'autre part le chargement thermomécanique est approximé par un flux surfacique et des tractions surfaciques tangentielles imposés au niveau de la zone de contact outil/matière. Cette simulation permet de bien illustrer l'apparition d'une zone fluide sous l'outil, progressant de façon hémisphérique au cours du temps. Lorsque toute la structure est solide, on observe bien que le champ de vitesse associé aux mouvements de matière résulte du frottement et de l'enfoncement de l'outil. Dès qu'une couche de mailles fluidifie, toute la déformation se concentre dans cette zone, tandis qu'on assiste à un retour élastique de la matière à l'état solide. Dès lors la vitesse dans cette zone croît de façon drastique sous l'action des tractions surfaciques tangentielles, imposées constantes dans le temps, conduisant à un emballement mettant très vite fin au calcul. Aussi une loi de frottement est nécessaire pour évaluer plus justement le chargement dû à l'outil. Cette simulation numérique permet aussi de montrer que l'approche euléro-lagrangienne développée est capable de rendre compte de la formation d'un bourrelet de matière sur le pourtour de la zone de contact, résultant de l'incompressibilité du fluide et de la déformation solide de la zone environnante. Il est aussi montré que cette approche permet au modèle de simuler plusieurs tours de l'outil dans la matière sans que le maillage ne suive son mouvement d'entraînement.

Enfin, cette simulation a permis d'identifier certaines bornes du domaine de validité du modèle développé ainsi que certaines difficultés associées à sa construction. Parmi ces

dernières, on note le manque de régularité du comportement du résidu au cours du calcul, s'expliquant à la fois par la transition abrupte du comportement (fluide/solide) et au repérage non régulier de l'interface entre les deux phases. D'autre part, l'emballement de la vitesse lors de la simulation présentée montre à la fois l'importance d'une loi de frottement, et plus généralement d'une modélisation plus fine de l'interaction outil/matière, mais aussi que l'élément fluide développé se borne pour l'instant aux écoulements laminaires.

Chapitre 5

Conception de montages expérimentaux pour le Friction Stir Spot Welding

Dans ce cinquième chapitre, une conception originale de deux montages spécifiques expérimentaux pour la mise en oeuvre du Friction Stir Spot Welding est présentée. Ces dispositifs intègrent une démarche de validation particulière de ce procédé. Des premiers résultats en termes d'efforts générés durant le process sont par la suite présentés.

Sommaire

5.1 Introduction 126
5.1.1 Validation de la simulation numérique du soudage 126
5.1.2 Démarche proposée 127
5.2 Cahier des Charges Fonctionnel 128
5.2.1 Analyse Fonctionnelle partielle du besoin 128
5.2.2 Analyse des contraintes de conception 129
5.2.3 Démarche de validation du procédé FSSW 134
5.3 Conception de deux montages spécifiques expérimentaux 136
5.3.1 Montage plan d'appui 136
5.3.2 Montage butée 141
5.4 Mise en oeuvre des essais 148
5.4.1 Stratégie expérimentale pour le FSSW 149
5.4.2 Résultats expérimentaux 152
5.5 Conclusions 161

5.1 Introduction

5.1.1 Validation de la simulation numérique du soudage

D'une manière générale, l'amélioration des capacités de calcul et des outils numériques permet d'aborder des problèmes de plus en plus complexes, et de réaliser des simulations de difficulté croissante. Mais pour s'inscrire dans une démarche de simulation prédictive, se pose la question de la validation de ces modèles numériques. En simulation numérique du soudage, le comportement non-linéaire des structures et le caractère multiphysique de ce type de procédé rendent particulièrement complexes la construction et la validation des modèles. La validation d'un modèle de soudage est effectuée à partir d'un accord entre les valeurs prédites par le calcul et celles mesurées par l'expérience. Ceci nécessite donc d'effectuer un choix de programme expérimental et numérique pour mener à bien cette validation.

Le développement d'un tel programme pose alors de nombreuses questions. Quels sont les points du modèle qu'on veut valider ? Quelles métriques utiliser pour définir l'accord expérience-calcul ? Quels soins doit-on prendre et jusqu'à quel degré de finesse doit-on descendre pour la conduite des expériences et des calculs ? Quelles technologies mettre en oeuvre pour ces besoins ? Il existe en effet nombre de techniques expérimentales permettant de qualifier chacun des pénomènes intervenant en soudage. Les champs de température, contraintes et distorsions résiduelles peuvent être mesurés par différentes approches, la microstructure peut être analysée par des micrographies, enfin des capteurs peuvent mesurer les efforts générés par l'opération de soudage. Ceci pose la question de l'adaptation du niveau d'instrumentation au modèle à valider et du coût temporel et financier.

La conception d'un banc expérimental doit être effectuée en cohérence avec les simulations menées. Des questions traitant des précautions à prendre pour éliminer les phénomènes parasites et accéder aux grandeurs physiques d'intérêt, de l'intégration de l'instumentation nécessaire mais aussi des modes de mise et maintien en position des pièces à souder, doivent être pensées dès le stade de la conception. Par la suite, la réalisation expérimentale des essais est généralement confrontée aux incertitudes des résultats. Quelle confiance peut-on alors accorder aux mesures extraites des essais ? Qu'en est-il de la répétabilité du process ? de sa reproductibilité ?

La qualité de cette conception est d'autant plus importante qu'elle conditionne la valeur, et la confiance qu'on pourra accorder à la calibration du modèle, le recalage dépendant en effet du moyen d'essai. Les paramètres du modèle sont déterminés par des méthodes d'identification inverse, ce recalage fixe en général les bornes du domaine de validité du modèle. Cependant pour définir un véritable outil prédictif d'aide à la conception, se pose la question des limites de ce domaine de validité. En effet, une fois la capacité de prédiction d'un modèle de soudage déterminée, comment s'étend cette capacité en dehors du domaine dans lequel le modèle a été validé, en d'autres termes, ce modèle de soudage peut-il être réutilisé pour d'autres configurations opératoires, ou bien faut-il le recalibrer pour assurer une bonne prédiction ?

Une véritable stratégie de validation doit donc être développée en amont pour assurer une cohérence entre la conception des essais et les simulations menées.

5.1.2 Démarche proposée

On s'intéresse ici au procédé Friction Stir Spot Welding. L'objectif est de réaliser un banc expérimental d'une part pour analyser et mieux comprendre ce procédé de soudage, d'autre part et surtout pour acquérir les données nécessaires à la validation du modèle développé.

Parmi la somme importante de questions que pose la conception d'une expérience, celle relative à la nécessité d'un montage spécifique pour mener l'investigation semble évidente. En fait, relativement peu de gens dans la littérature (Zim09) ont identifié le fait que « les conditions aux limites expérimentales », c'est-à-dire la mise et le maintien en position des tôles, doivent être maîtrisées. On peut apporter au moins quatre arguments pour le justifier :

* L'identification d'un « domaine de soudabilité opératoire » dépend fortement de ces conditions aux limites expérimentales, de la même manière que des paramètres process, de la géométrie et du matériau de l'outil et des éprouvettes.
* Les approches expérimentale et numérique doivent être cohérentes entre elles pour donner un sens physique aux paramètres identifiés.
* L'instrumentation nécessaire doit être intégrée au système, et non intrusive.
* Enfin, une conception rigoureuse doit être menée pour avoir une confiance suffisante dans les mesures et la répétabilité du procédé.

Dans la littérature, la mise en oeuvre expérimentale de ce procédé est généralement faite sur des fraiseuses ou des perceuses modifiées et instrumentées. Les pièces à souder sont positionnées dans un étau (MRE08) ou sur une surface plane avant serrage (LPCT06; WL07; GSN05), pour la réalisation des essais. Pourtant on observe que le FSSW est réalisé sur les chaînes d'assemblage industrielles avec des robots polyarticulés, sur lesquels un dispositif de soudage a été greffé. Ce dispositif intègre les servomoteurs nécessaires à la génération du mouvement de l'outil, mais aussi une contrepointe venant en opposition de l'outil pour la réalisation du joint. Les systèmes de positionnement et de fixation utilisés dans l'approche expérimentale sont très différents des conditions de réalisation industrielles d'un joint soudé. Aussi, on peut se demander quel est l'influence de ces conditions de mise en oeuvre sur le domaine de soudabilité opératoire ? Comment simuler expérimentalement au mieux ces conditions de mise en oeuvre industrielles ?

On propose dans ce chapitre une démarche s'appuyant sur des conceptions originales ayant pour but de simuler expérimentalement les conditions de positionnement industrielles. Au travers de cette démarche, l'objectif est de fournir des données expérimentales représentatives d'un « essai industriel » pour la calibration du modèle.

Dans la section 5.2, le Cahier des Charges retenu pour la conception du dispositif est présenté. La problématique de conception est affinée au travers des différentes contraintes liées au dimensionnement mécanique et à la mise en position requise. On présente alors de façon schématique le processus itératif suivi pour la conception. La stratégie de validation développée pour le Friction Stir Spot Welding s'appuie sur deux montages spécifiques expérimentaux conçus et réalisés pour cette expérience.

Une analyse technologique des solutions retenues pour chaque dispositif est présentée dans la section 5.3. Les montages diffèrent par la mise en position des tôles. L'objectif est de pouvoir par la suite présenter des conditions plus simples pour la calibration du modèle, et estimer la validité du modèle calibré dans d'autres configurations opératoires.

La mise en place de cette expérience a été réalisée au pôle productique de l'ENISE, les essais de soudage ont été menés sur une fraiseuse à commande numérique, sur laquelle les montages fabriqués ont été montés. Dans la section 5.4, la mise en oeuvre des essais de soudage est présentée. Le programme expérimental retenu et le protocole suivi pour les essais de soudage sont d'abord détaillés. L'objectif de cette première campagne expérimentale est d'étudier le procédé FSSW en termes d'efforts générés. Par la suite, l'influence des paramètres procédé et des conditions aux limites expérimentales est étudiée au travers des courbes d'effort mesurées.

5.2 Cahier des Charges Fonctionnel

5.2.1 Analyse Fonctionnelle partielle du besoin

Un extrait du Cahier des Charges est présenté ci-dessous. Celui-ci décrit les fonctions de service auquelles doit satisfaire la réalisation du montage adapté pour la mise en oeuvre du Friction Stir Spot Welding. On se situera par la suite dans la phase de vie de soudage. Les interactions du montage FSSW avec son environnement peuvent être modélisées par le graphe des interacteurs ci-dessous.

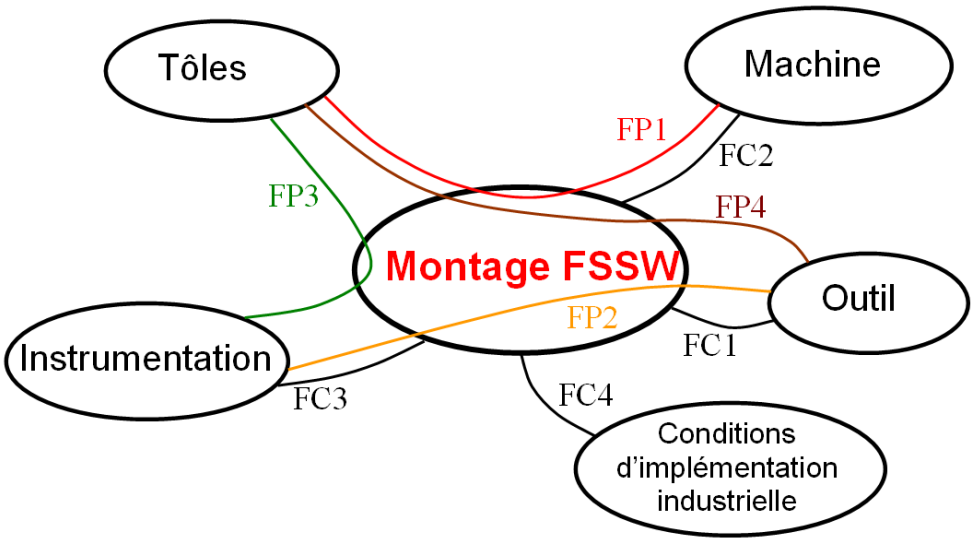


Figure 5.1 – Graphe des interacteurs

FP1 : Positionner et maintenir les tôles par rapport à la machine
FP2 : Mesurer les efforts générés par l'outil
FP3 : Mesurer le champ de température dans les tôles
FP4 : Permettre à l'outil de souder les tôles
FC1 : Supporter les efforts générés par l'outil
FC2 : Se monter sur la machine
FC3 : Intégrer l'instrumentation nécessaire
FC4 : Reproduire les conditions d'implémentation industrielles du procédé.

Ce graphe présente un certain nombre de fonctions principales (FP) que doit réaliser le montage, ainsi que des contraintes (FC) auquel il est soumis. Chaque fonction est décrite

avec des critères auquels sont associés des niveaux et des limites.

Fonctions	Critère	Niveau	Limite
FP1 : Positionner et maintenir les tôles/machine	Positionnement	isostatique	-
	Serrage	réparti	
FP2 : Mesurer les efforts générés par l'outil	Couple C_z	50Nm	maxi
	F_z	8.5 kN	maxi
FP3 : Mesurer le champ de température dans les tôles	$T_{\max}$	600°C	maxi
	Intrusivité du système	nulle	
FP4 : Permettre à l'outil de souder les tôles	Espace de travail alloué	50 × 50 mm	mini
	Nb points soudures	4	mini
FC1 : Supporter les efforts générés par l'outil	Rigidité axiale K_z	2 $\times 10^4$ N/mm	mini
	Rigidité en torsion J	1 $\times 10^5$ N/mm	mini
	$\varepsilon^p_{\max}$	nulles	maxi
	Temps de soudage	50 sec.	maxi
FC2 : Se monter sur la machine	Encombrement	200 × 200 mm	maxi
FC3 : Intégrer l'instrumentation nécessaire	Encombrement capteur de force	200×200 ×150 mm	maxi
	Interférences physiques	nulles	
FC4 : Reproduire les conditions industrielles	Butée circulaire	ØD+géométrie	voir cotation fonctionnelle
	Précontraintes dans les tôles après serrage	$\sigma_{eq}^{\text{Mises}}$ =50 MPa	maxi

Tableau 5.1 – Fonctions de service

Le procédé faisant intervenir un fort couplage thermomécanique, il est intéressant de valider à la fois les prédictions thermique et mécanique de la simulation avec des mesures de grandeurs physiques caractéristiques, aussi le cahier des charges du montage prévoit des mesures de température et d'efforts. Cependant dans une première phase de l'étude, il est nécessaire de maîtriser la partie mécanique avant de passer à la mesure thermique, aussi seule la mesure d'efforts est réalisée dans ce chapitre.

5.2.2 Analyse des contraintes de conception

La mise en oeuvre du procédé pose la question du choix du matériau des pièces à souder, de l'outil, de la machine, des grandeurs physiques à mesurer puis de l'instrumentation associée, des paramètres procédés, etc. En réalité dans la pratique, les moyens importants comme la machine et l'instrumentation sont fixés par le parc machine, les moyens financiers et le matériel à disposition. Se pose alors la question du choix d'une combinaison matériau - géométrie d'outil/d'éprouvettes - paramètres procédé telle que :

* Ces données conduisent à la création d'un joint soudé de qualité acceptable.

* Le process génère des efforts admissibles par la machine, le système de fixation et l'instrumentation.
* La complexité des phénomènes et du process soit acceptable pour permettre une validation du modèle sur l'expérience.

5.2.2.1 Efforts générés

Le Cahier des Charges fait état d'un certain nombre de contraintes à satisfaire pour la conception du montage. Parmi ces dernières, l'évaluation des efforts générés durant le process est une question délicate. En effet, le montage expérimental et l'instrumentation associée doivent supporter ces efforts durant le process, un ordre de grandeur est nécessaire pour le dimensionnement du dispositif. Une simulation numérique du Friction Stir Spot Welding pourrait être très utile, mais la conception d'un banc expérimental a précisément pour but de calibrer le modèle numérique.

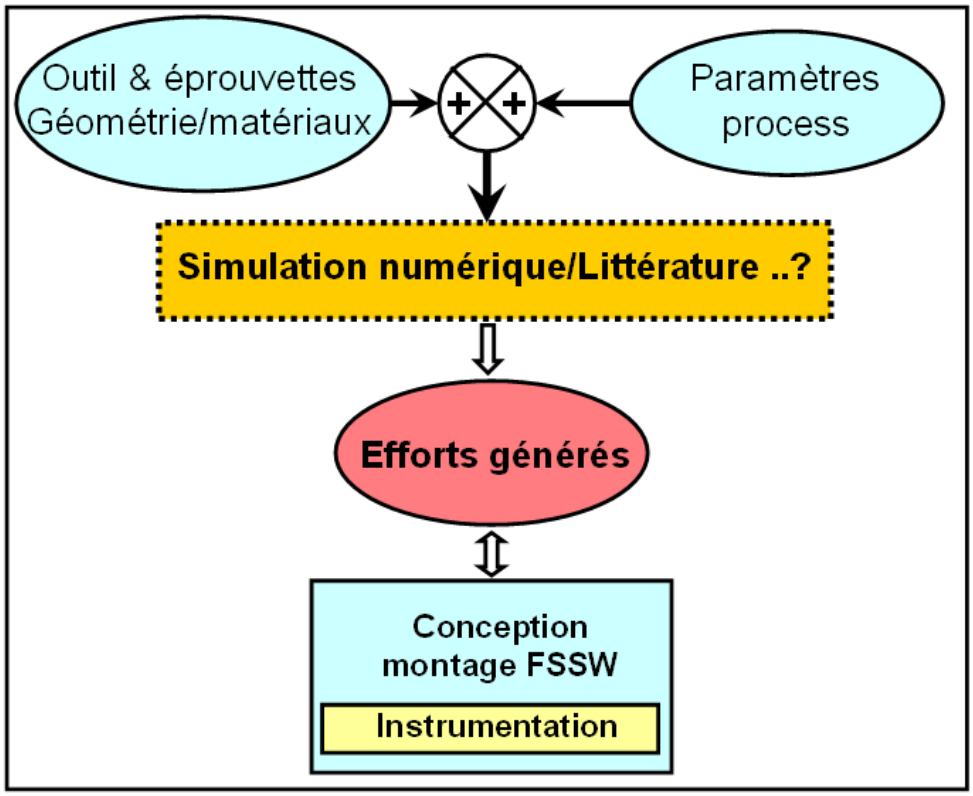


Figure 5.2 – Dimensionnement du montage

D'autre part et d'une manière générale, la littérature sur le Friction Stir Spot Welding est beaucoup moins abondante que celle disponible sur le Friction Stir Welding. Gerlich et al. (GSN05) a été l'un des premiers à mesurer les efforts générés lors de la pénétration de l'outil, et à identifier les différentes phases de leur évolution associées à la géométrie de l'outil sur ces courbes expérimentales. D'autres auteurs (SGA03; LPCT06; ZLLB09) ont étudié la phase de plongée de l'outil dans la matière dans le cas du FSW, et mesuré l'influence de certains paramètres process sur l'évolution des efforts. Mais il est encore relativement difficile d'extraire de la littérature une évaluation des efforts générés pour une combinaison matériau - géométrie d'outil/d'éprouvettes - paramètres procédé donnée.

5.2.2.2 Problématique de conception

On a vu que parmi les contraintes auxquelles la conception du montage doit satisfaire, l'estimation des efforts générés durant le procédé est délicate. Une autre contrainte de taille, justifiant la démarche suivie ici, est la simulation par le montage des conditions de positionnement industrielles. La « pince » montée sur le bras d'un robot industriel permet d'effectuer un point de soudure sur des tôles de grande taille positionnées entre elles par un système annexe. L'idée est ici d'identifier des « conditions aux limites expérimentales » équivalentes au voisinage du point de soudure pendant le procédé.

On observe en premier lieu sur un dispositif industriel la présence d'une butée « ponctuelle » positionnée en opposition du dispositif de soudage (figure 5.3), les conditions au loin étant données soit par le système annexe de positionnement soit par la présence d'autres points de soudure déjà effectués. La mise en position des tôles dans le montage expérimental doit simuler au mieux ces conditions, aussi les parties à définir par la conception sont illustrées sur la figure 5.3.

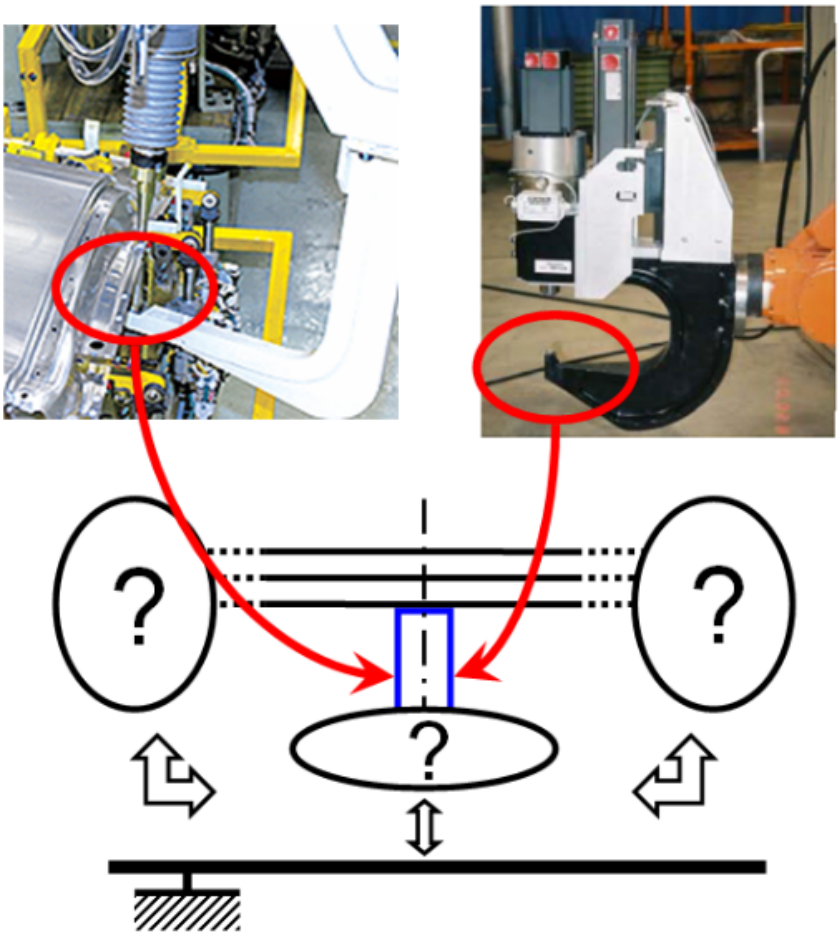


Figure 5.3 – Simulation des conditions industrielles

Cette contrainte de positionnement d'une butée en opposition de la zone de travail se révèle délicate à traiter ; en effet le contact ponctuel ne bloque qu'un seul degré de liberté, et son positionnement nécessite a priori de décaler deux autres points d'appui nécessaires à la réalisation d'une liaison appui plan. Aussi le positionnement du chargement par rapport aux appuis ne se trouve pas optimal. On verra par la suite comment remédier à ce problème.

Il est d'autre part souhaitable de réaliser une mise en position modélisable comme isostatique à la fois pour assurer un positionnement convenable des pièces à souder mais aussi pour éviter d'introduire des précontraintes additionnelles dans les tôles lors du serrage, ajoutant un biais supplémentaire aux résultats de l'expérience.

5.2.2.3 Analyse Structurelle des chaînes d'énergie et d'information

On peut représenter les chaînes d'énergie et d'information nécessaires à la mise en oeuvre du soudage Friction Stir Welding au travers du schéma d'analyse fonctionnelle et structurelle présenté sur la figure 5.4.

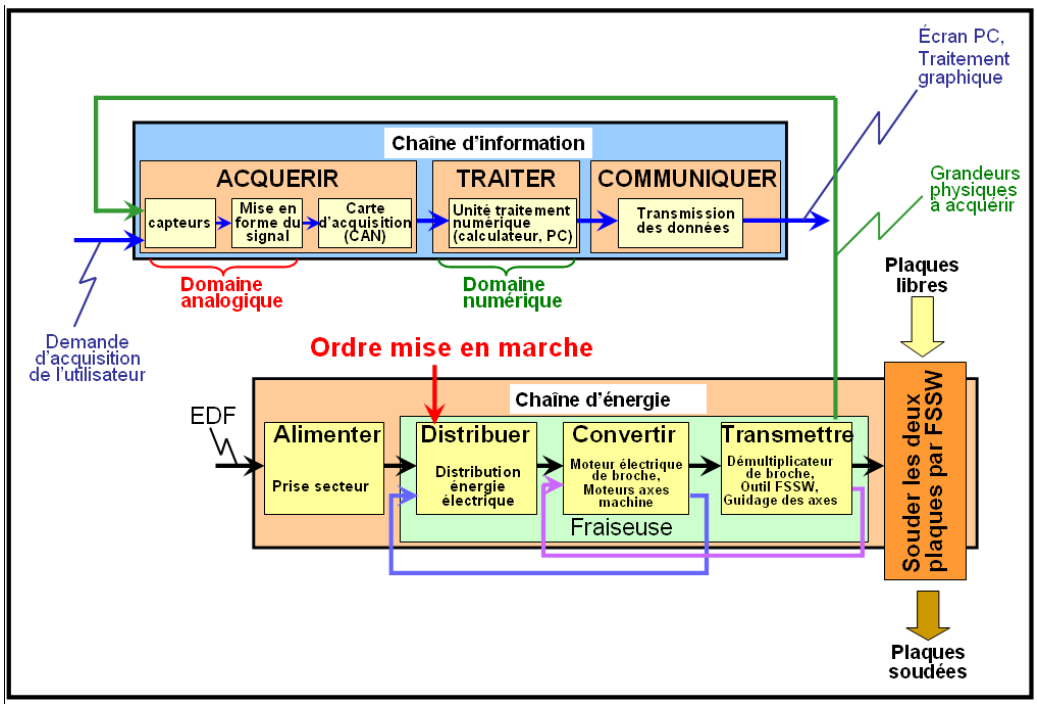


Figure 5.4 – Analyse structurelle du banc expérimental pour le FSSW

Les expériences ont été menées au pôle productique de l'ENISE de Saint Étienne. Une fraiseuse à commande numérique 5 axes (figure 5.5) a été choisie pour mener les essais ; non pas que 5 axes soient nécessaires pour le soudage par point, mais cette machine est la plus rigide du parc machine disponible au pôle. La charge axiale est généralement limitée sur ce type de machine par le guidage en rotation de la tête de broche, la charge admissible est ici de 8.5 kN. De la même manière que pour les fraiseuses à commande numérique usuelles, cette machine est pilotée en déplacement. Les paramètres du procédé à choisir sont donc :

* la vitesse de rotation de broche Ω,
* la vitesse de plongée de l'outil dans la matière V_p,
* la profondeur de plongée,
* et le temps de malaxage.

Aussi la chaîne d'énergie est déjà existante pour mener l'expérience de soudage.

Figure 5.5 – Fraiseuse à commande numérique 5 axes

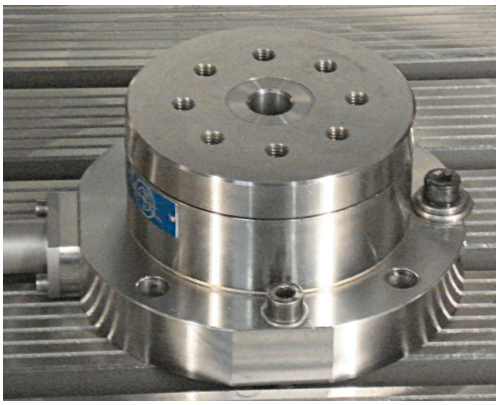


Figure 5.6 – Capteur d'efforts KISTLER 4 composantes

Par ailleurs, un capteur KISTLER 4 composantes d'effort (figure 5.10) a été récemment acquis au pôle. D'abord proposé pour le soudage ponctuel par friction et malaxage, il sert aussi pour d'autres expériences, notamment pour le perçage vibratoire. Ce capteur à technologie piézoélectrique distribué par la société KISTLER permet de mesurer les trois composantes d'effort et le couple axial. Il est d'autre part connecté à une chaîne d'acquisition déjà développée et disponible au pôle.

5.2.2.4 Démarche de conception

L'analyse fonctionnelle a permis dans un premier temps d'identifier les spécifications fonctionnelles que doit remplir le montage expérimental. Une fois le problème de conception analysé et l'équipement lourd choisi, la démarche de conception mécanique suivie a été la suivante :

* Une solution technologique est d'abord proposée.
* Une analyse des fonctions techniques remplies par cette solution est effectuée, les pré-dimensionnements et calculs de résistance nécessaires sont effectués, donnant accès aux spécifications des conditions de fonctionnement.
* Puis une analyse géométrique de la solution est réalisée (ACD+99; Ans07), ceci permet de mettre en évidence les exigences fonctionnelles associées aux boucles géométriques internes au système. Cette analyse est basée sur l'étude du positionnement relatif et de la nature des surfaces de contact entre les pièces du système. Cette analyse conduit à la formalisation, selon les normes en vigueur, des spécifications dimensionnelles et géométriques des pièces, associées aux exigences fonctionnelles. Cette analyse permet d'écrire les spécifications des conditions géométriques de fonctionnement.
* Enfin, on compare les prestations réalisées par la solution technologique proposée aux spécifications fonctionnelles imposées par le Cahier des Charges. Si l'adéquation n'est pas optimale, il est alors nécessaire d'itérer et de revoir tout ou partie de la solution proposée.

Cette démarche de conception est illustrée sur la figure 5.7.

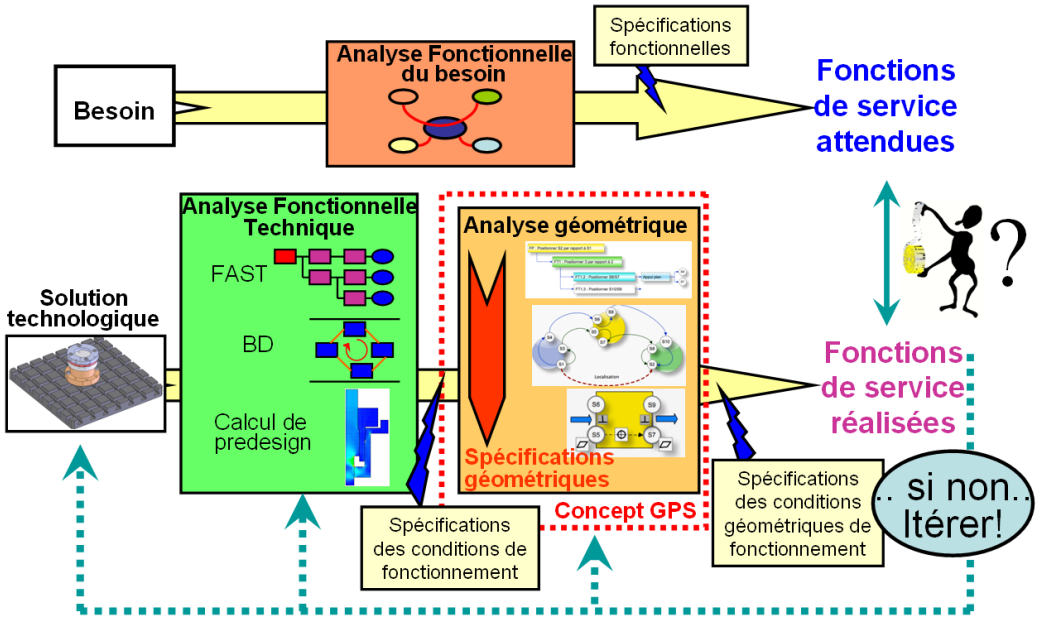


Figure 5.7 – Démarche de conception mécanique

5.2.3 Démarche de validation du procédé FSSW

La démarche proposée ici a pour but de construire un montage expérimental simulant au mieux les conditions de mise en oeuvre industrielles ; l'objectif étant par la suite de valider le modèle numérique sur les données expérimentales obtenues.

Deux montages spécifiques expérimentaux ont été conçus et fabriqués pour cette expérience. Ces dispositifs intègrent un schéma de validation ayant pour but de simplifier la calibration du modèle numérique, d'estimer l'influence des conditions de mise en oeuvre du procédé sur le domaine de soudabilité opératoire et d'évaluer la robustesse du modèle dans une autre configuration opératoire.

Le premier montage n'intègre pas la fonction contrainte de reproduction des conditions de mise en oeuvre industrielles du procédé. La conception, relativement simple, peut se contenter de positionner les tôles sur un plan d'appui. L'intérêt d'un tel dispositif est de présenter des conditions plus simples pour le recalage du modèle. En effet, le montage étant plus rigide, les tôles se déforment moins au loin du point soudé. Dans une première approche, une simulation numérique effectuée sur une structure monobloc et n'intégrant pas la gestion du contact unilatéral peut se révéler suffisante dans ces conditions.

Le second montage expérimental simule les conditions de positionnement industrielles. Sa mise en oeuvre a pour but d'estimer l'influence des conditions de positionnement sur la réalisation du joint soudé.

La démarche de validation du procédé Friction Stir Spot Welding est illustrée sur la figure 5.8. Cette démarche s'effectue en plusieurs étapes :

1. *Identification du domaine d'utilisation du produit concerné.* Cette étape s'apparente à l'isolement d'un certain domaine d'étude et débouche sur l'écriture du Cahier des Charges Fonctionnel.
2. *Premier modèle physique* : le montage FSSW avec plan d'appui. Ce dispositif appa-

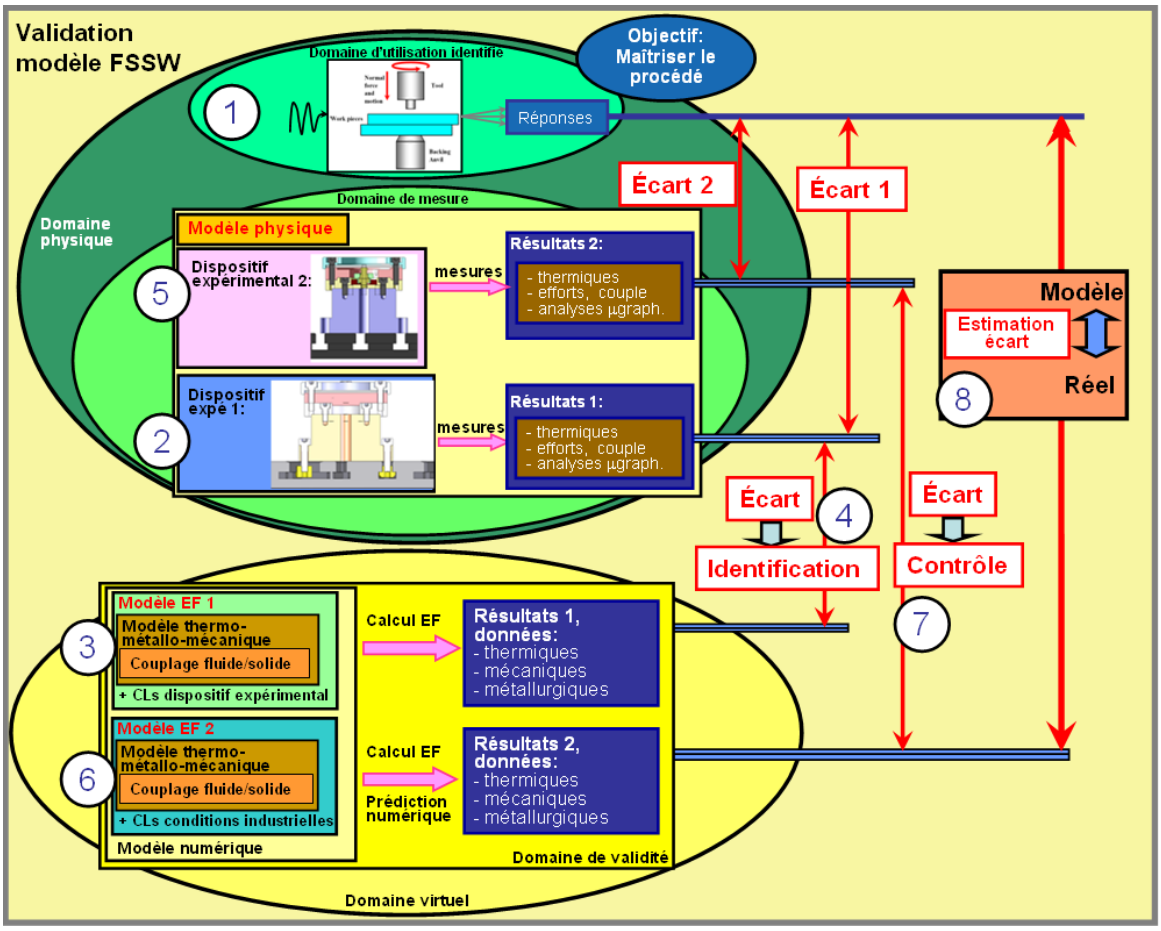


Figure 5.8 – Stratégie de validation du Friction Stir Spot Welding

raît comme une réalisation simplifiée des exigences précédemment formulées. Il sert dans un premier temps à étudier le procédé, et permet par la suite une calibration plus simple du modèle numérique.

3. *Modèle numérique Éléments Finis.* Le modèle implémenté dans le code SYSWELD® est basé sur un couplage fluide/solide. À terme, il intégrera d'autre part un comportement physique thermo-métallurgico-mécanique couplé. Une simulation numérique effectuée intégre des conditions aux limites proches de celle réalisées pour le montage avec plan d'appui.
4. *Calibration du modèle.* Ce recalage permet d'identifier les paramètres physiques intégrés au modèle.
5. *Second modèle physique* : le montage FSSW avec butée. Ce dispositif simule les conditions de mise en oeuvre industrielles. Les données obtenues permettent d'évaluer l'influence des conditions aux limites sur les grandeurs physiques d'intérêt.
6. *Second calcul Éléments Finis.* Le modèle reste ici le même, une seconde simulation intégrant les paramètres physiques recalés ainsi que les conditions aux limites industrielles est lancée.
7. *Confrontation expérience/calcul.* La prédiction numérique effectuée à la suite de la seconde simulation est confrontée aux données expérimentales obtenues avec le montage butée. Cette comparaison permet d'évaluer la robustesse et la précision du modèle dans une autre configuration opératoire.

5.3 Conception de deux montages spécifiques expérimentaux

On présente dans cette section la conception de deux montages spécifiques expérimentaux pour la mise en oeuvre du Friction Stir Spot Welding. Ces dispositifs sont développés pour simuler ou non les conditions de positionnement industrielles, c'est-à-dire la présence d'une butée ponctuelle en opposition de la zone de travail.

L'étude des solutions proposées est effectuée au travers d'une analyse technique, certains calculs de prédimensionnement permettant d'affiner les solutions technologiques retenues. D'autre part, on détaille aussi les procédés de fabrication des pièces et des éprouvettes.

5.3.1 Montage plan d'appui

5.3.1.1 Analyse Fonctionnelle Technique (partielle)

Le premier montage conçu positionne les tôles sur un plan d'appui (d'où son nom). Cette solution se greffe sur le capteur d'effort 4 composantes KISTLER présenté dans la section précédente. La géométrie de révolution du capteur est particulièrement intéressante, elle permet un positionnement efficace et précis du montage sur celui-ci. Ce type de géométrie est réutilisé pour tous les composants constituant le dispositif. Les positionnements relatifs des composants sont effectués par appui plan/centrage court. Le montage est relativement compact, et présente donc une bonne rigidité. La nomenclature 5.2 présente les composants et sous-ensembles du dispositif.

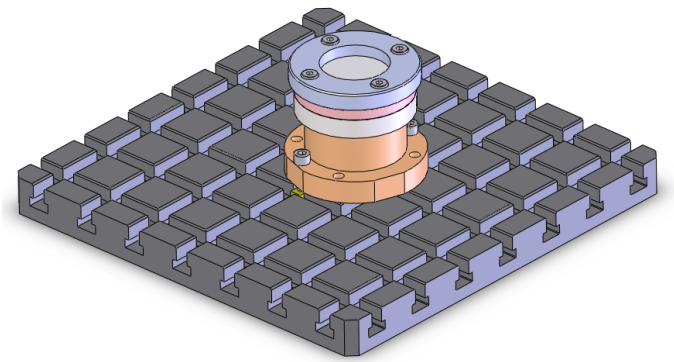


Figure 5.9 – Montage plan d'appui

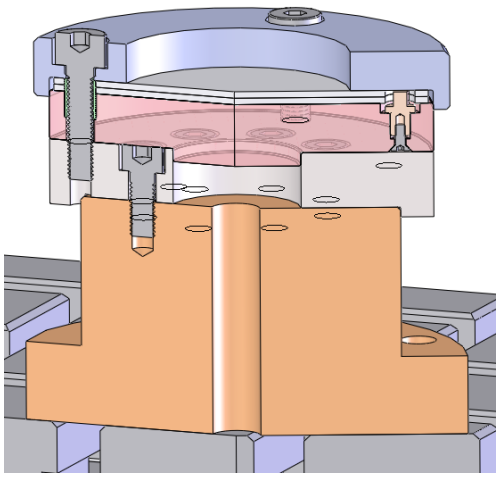


Figure 5.10 – Coupe du système

La MIse en Position (MIP) des tôles à souder dans le montage est effectuée de façon axiale (appui plan avec le backing support), radiale (douille de centrage élastique) mais aussi angulairement. Si un positionnement précis est intéressant pour avoir une certaine confiance dans les résultats, la MIP angulaire sera surtout intéressante pour la mesure thermique. Par la suite, cette mesure sera effectuée par thermocouple dans les deux tôles. Il est d'une part nécessaire de les décaler angulairement pour ne pas perturber le flux de chaleur provenant de la source, et d'autre part, une position angulaire relative donnée des tôles permet de ressortir les fils de connexions des thermocouples.

Le MAintien en Position (MAP) est réalisé par le système de bridage ; celui-ci utilise un chapeau permettant de répartir le serrage de façon homogène sur les tôles à souder. De plus, ce système permet d'aménager une zone de travail importante (Ø70 mm) autorisant plusieurs points de soudage sur la même éprouvette.
La structure de conception du dispositif est analysée au travers du bloc diagramme présenté sur la figure 5.12. Les interactions entre sous-ensembles sont modélisées par des fonctions techniques, détaillées avec leurs critères associés dans le tableau 4.3.

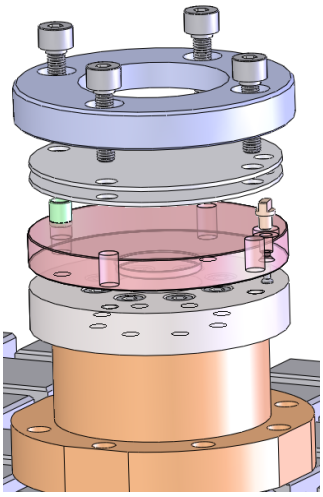


Figure 5.11 – Éclaté du système

Repère pièce	Nombre	Désignation	Sous-ensemble
1	1	Embase	Base
2	1	Capteur KISTLER 4 composantes	
3	8	Vis CHC M8×20	
4	1	Backing support	Support
5	1	Bague élastique DB100 M8-12 SPIROL	
6	1	Locating	
7	1	Vis FHC M3×8	
8	2	Tôles d'aluminium	Tôles
9	1	Chapeau	Système de bridage
10	4	Vis CHC M8×35	

Tableau 5.2 – Nomenclature du montage appui

Les boucles internes représentent des fonctions de conception traduisant la réalisation de fonctions de service par le système. Elles sont énoncées dans le tableau 4.4.

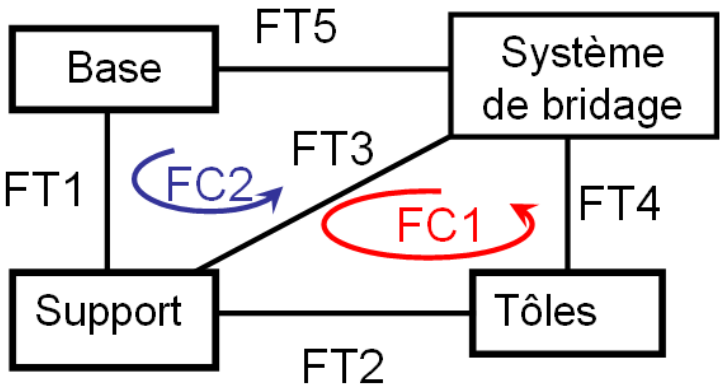


Figure 5.12 – Bloc diagramme du montage avec plan d'appui

Fonctions Techniques	Qualifications	Critères	Valeurs
FT1	Assurer la MIP axiale et radiale du support/embase	Planéité des plans	IT = 0.05 mm
		Ajustement centrage court	H7g6 (libre)
FT2	Assurer la MIP des tôles	Hyperstaticité du modèle associé	$h = 0$
		Type positionnement	centreur+ locating
FT3	Assurer la MIP radiale radiale du système de serrage/embase	Jeu de passage vis	1 mm
		Type positionnement	appui plan + centrage court
FT4	Assurer le MAP des tôles	Effort de serrage	à définir
		Répartition du serrage	homogène (géométrie de rév.)
FT5	Assurer le serrage	Longueur de prise des éléments filetés	12 mm

Tableau 5.3 – Tableau des Fonctions Techniques du montage plan d'appui

Fonctions de Conception	Qualifications
FC1	Réaliser le MAP des tôles/embase
FC2	Assurer le positionnement des composants du montage/bâti et le serrage

Tableau 5.4 – Tableau des Fonctions de Conception du montage plan d'appui

Le diagramme FAST [1] partiel présenté sur la figure 5.13 présente les solutions technologiques utilisées pour remplir une fonction principale du système.

5.3.1.2 Analyse Fonctionnelle Géométrique (partielle)

La bonne montabilité du système dépend directement du respect de certaines conditions géométriques lors de la réalisation. L'objet de cette analyse est d'établir une caractérisation géométrique des conditions de fonctionnement du système, débouchant sur un tolérancement spécifique des surfaces fonctionnelles. La démarche généralement suivie passe par une analyse de la mise en position relative des composants au travers de l'étude de leur jonction. Cette analyse permet d'identifier des boucles de positionnement associées à des exigences fonctionnelles. Les surfaces fonctionnelles des pièces influentes intervenant dans ces boucles font alors l'objet d'une cotation ISO. Il reste enfin à répartir les intervalles de tolérance.

On présente ici un extrait de l'analyse menée pour notre système. Il est commode d'illustrer l'analyse de la mise en position relative des composants et les boucles géométriques au moyen d'un graphe des surfaces. Ce type de graphe représente d'une façon symbolique les surfaces fonctionnelles appartenant à une pièce du système, et les liaisons

1. Function Analysis System Technic

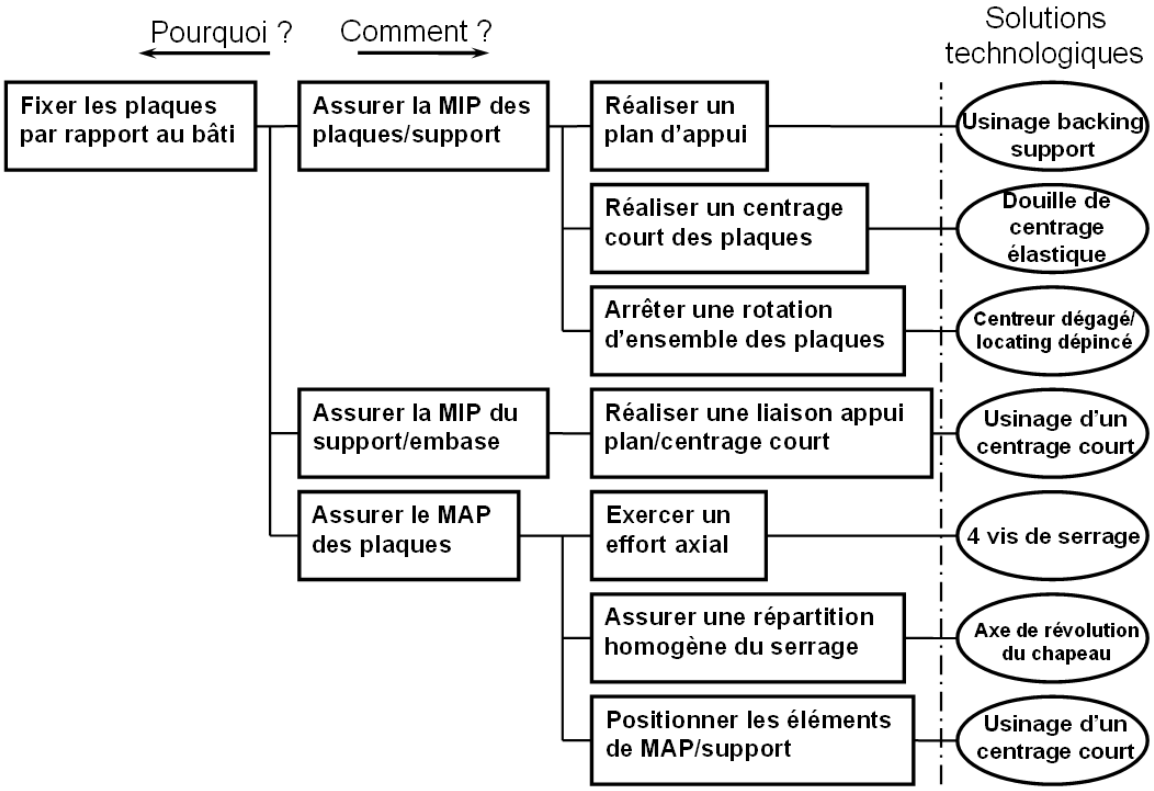


Figure 5.13 – FAST partiel du montage appui plan

joignant ces surfaces de manière à créer une chaîne de cotes associée à une Condition Fonctionnelle. Sur le graphe de la figure 5.14, seule la boucle géométrique relative à l'exigence fonctionnelle de mise en position radiale (CF1) du système par rapport au bâti a été représentée. Les surfaces fonctionnelles relatives à cette exigence sont identifiées sur la

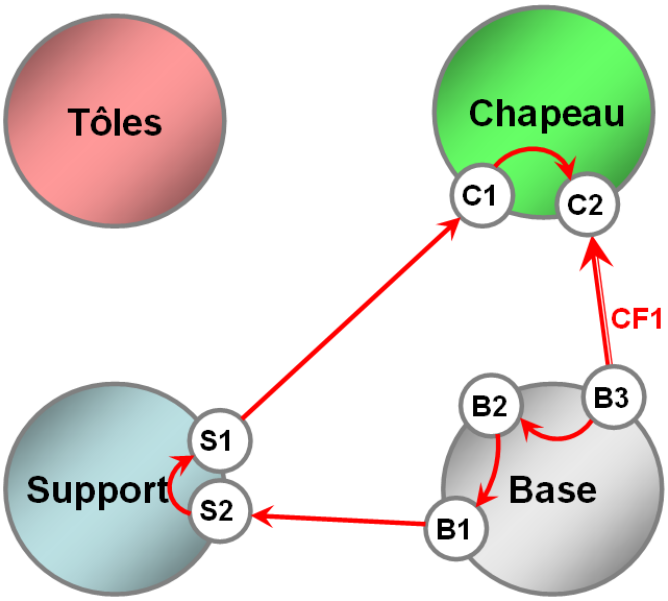


Figure 5.14 – Graphe des surfaces

figure 5.15.

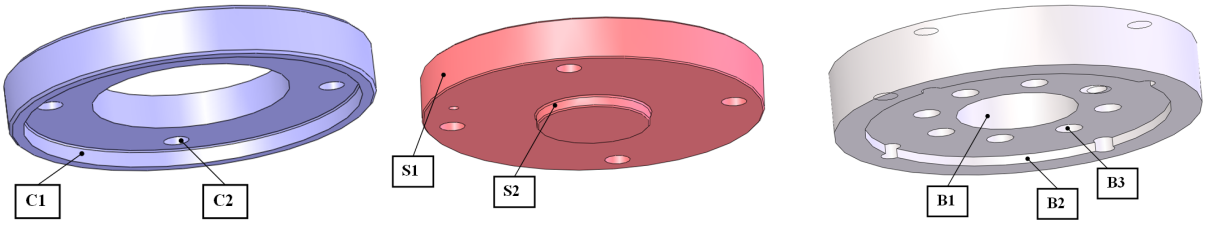


Figure 5.15 – Surfaces fonctionnelles relative à l'exigence CF1

D'une manière générale, on associe aux surfaces fonctionnelles un tolérancement de forme (planéité, cylindricité, etc) et un tolérancement d'orientation (perpendicularité, parallélisme, etc) ou de position (localisation, coaxialité, etc) aux liaisons entre surfaces d'une même pièce. Chaque pièce est alors cotée selon les normes en vigueur [2]. La figure 5.16 présente un exemple de cotation fonctionnelle de l'embase après prise en compte de toutes les exigences fonctionnelles ; cette pièce sert au positionnement du montage sur le capteur.

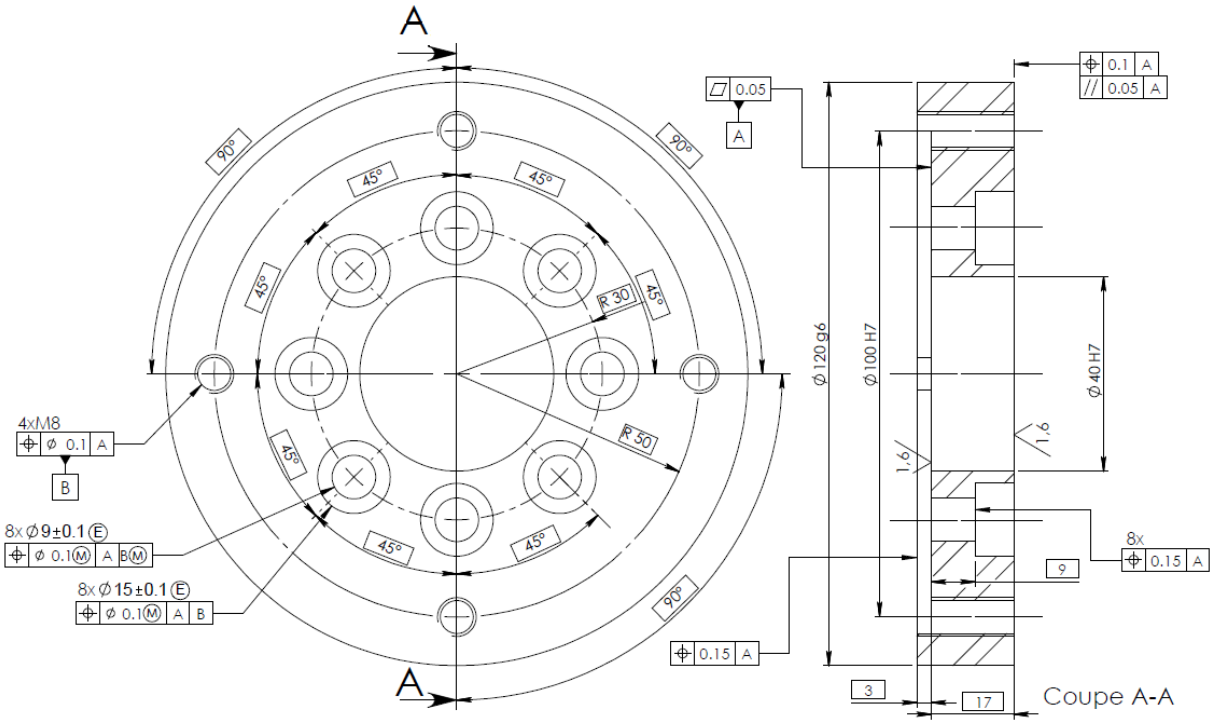


Figure 5.16 – Plan fonctionnel de l'embase

Un travail de même nature est réalisé pour tous les composants du système.

2. Normes ISO 1101, 5459, 8015, 2692, 5458 et 2692.

5.3.1.3 Fabrication du montage

Les composants du montage sont des pièces de tournage classique. Les surfaces fonctionnelles ont été rectifiées pour améliorer la précision des positionnements relatifs des pièces.

Pour l'éprouvette de soudage, des tôles de 2 mm d'épaisseur et constituées d'un alliage d'aluminium 2024 sont choisies. Les éprouvettes sont fabriquées en deux étapes : elles sont d'abord prédécoupées dans des feuilles d'aluminium par découpe jet d'eau.

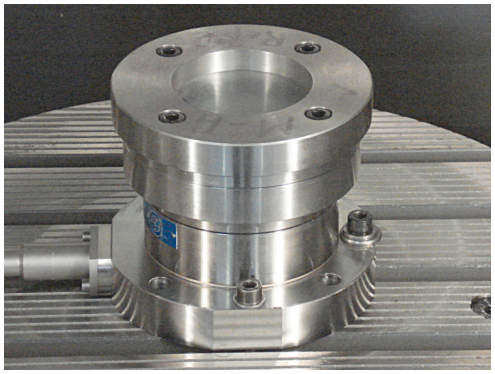


Figure 5.17 – Montage d'appui

La dépouille générée par ce type de procédé est ici de peu d'importance du fait de la faible épaisseur des tôles. Une finition à l'électroérosion par fil est réalisée sur les surfaces fonctionnelles servant à la mise en position dans le montage (figure 5.18).

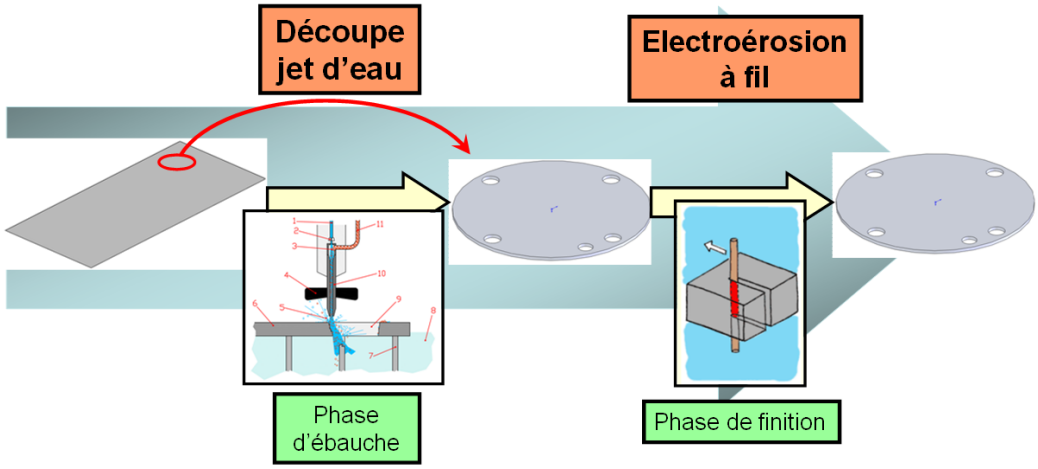


Figure 5.18 – Processus de fabrication des éprouvettes de soudage

5.3.2 Montage butée

5.3.2.1 Analyse Fonctionnelle Technique (partielle)

Le second montage conçu a pour but de simuler les conditions opératoires industrielles. À cet effet, il intègre d'une part un appui ponctuel supplémentaire (une butée) en opposition de la zone de soudage. D'autre part, l'usinage d'un dégagement est effectué dans le support et le chapeau ; ceci a pour but de rejeter le plus loin possible de la zone de soudage les conditions de mise en position des tôles.

D'une manière générale, cette solution conserve les avantages du premier montage, c'est-à-dire la compacité, le type de positionnement relatif entre éléments et la taille de la zone de travail. Elle conserve aussi la géométrie de révolution des composants du dispositif.

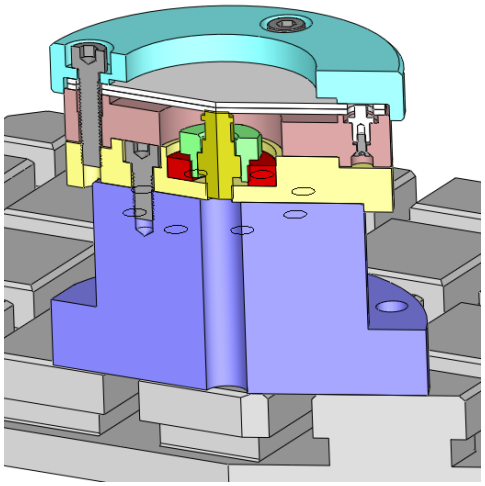


Figure 5.19 – Coupe brisée du montage butée

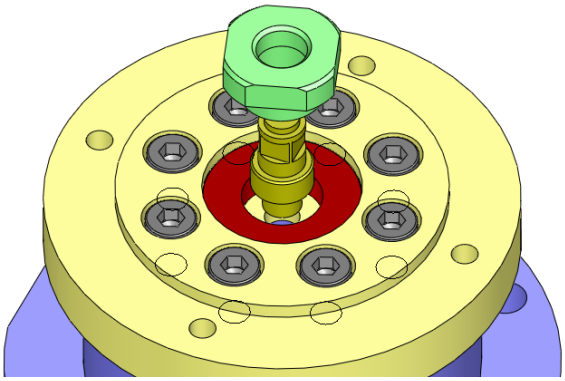


Figure 5.20 – Éclaté du système butée

Le positionnement des tôles est modélisable comme hyperstatique de degré 1. Pour lever ce degré supplémentaire, un système de réglage relativement simple de la position axiale de la butée est intégré au dispositif (figure 5.20). Celle-ci s'ajuste par le biais d'une liaison filetée, un contre-écrou vient par la suite assurer le maintien en position de la butée.

Repère pièce	Nombre	Désignation	Sous-ensemble
1	1	Embase	Base
2	1	Capteur KISTLER 4 composantes	
3	8	Vis CHC M8×20	
4	1	Backing support	Support
5	1	Bague élastique DB100 M8-12 SPIROL	
6	1	Locating	
7	1	Vis FHC M3×8	
8	2	Tôles d'aluminium	Tôles
9	1	Chapeau	Système de bridage
10	4	Vis CHC M8×35	
11	1	Insert taraudé	Positionnement axial de la butée
12	1	Butée	
13	1	Contre-écrou	

Tableau 5.5 – Nomenclature du montage butée

Ce système est implanté dans l'embase, pièce servant à positionner le montage sur le capteur. Quelques aménagements sont donc nécessaires dans les composants adjacents (support, embase) pour lui attribuer l'espace nécessaire. Un insert métallique est implanté dans l'embase et monté serré à la presse hydraulique ; cet insert permet de disposer d'un taraudage complet sur la longueur définie au préalable, en évitant le décalage généré par la zone d'entrée du taraud (de taille M22).

Ce second montage conserve l'architecture du montage plan d'appui et y ajoute le système de réglage. Ceci est notamment visible sur le bloc-diagramme présenté sur la figure 5.21.

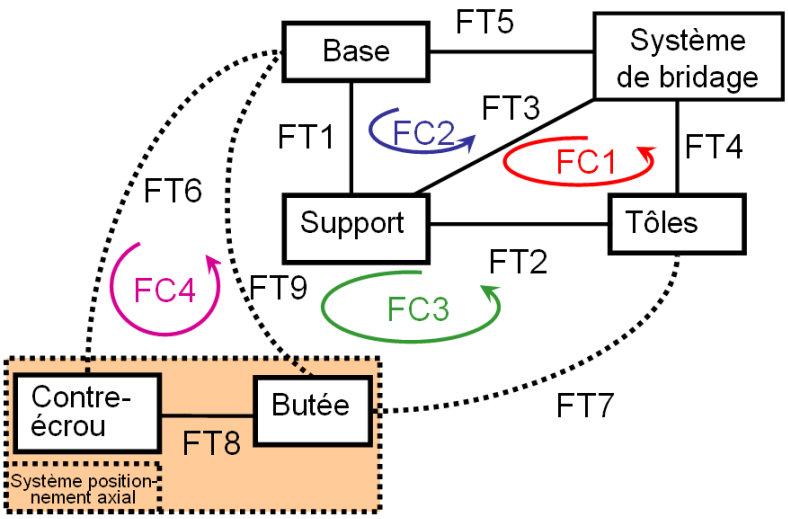


Figure 5.21 – Bloc diagramme du montage butée

Fonctions Techniques	Qualifications	Critères	Valeurs
FT6	Réaliser le MAP du système de réglage	Couple de serrage mini	$C_s \simeq 30$Nm
FT7	Réaliser un appui ponctuel supplémentaire	Diamètre de la zone de contact	9 mm
		Charge max avant flambement	50 kN mini
		Pression de contact <pression de matage	$p_{\text{mat}} = 500$ MPa
FT8	Serrer la butée	Précharge max	$F_0 = 7500$N
		Pression de contact contre-écrou/butée	$p_{\text{mat}} = 250$ MPa
FT9	Positionner axialement la butée	Pas	1mm/tr
		Charge d'épreuve de la liaison filetée	15 kN
		Longueur de prise	5 mm

Tableau 5.6 – Tableau des Fonctions Techniques supplémentaires pour le système butée

Les fonctions techniques supplémentaires et les critères associés sont détaillés dans le tableau 4.6. Les fonctions de conception introduites sont détaillées dans le tableau 4.7.

Fonctions de Conception	Qualifications
FC3	Réaliser un appui ponctuel supplémentaire
FC4	Réaliser le MIP et le MAP de la butée/embase

Tableau 5.7 – Tableau des Fonctions de Conception supplémentaires pour le système butée

Parmi les fonctions techniques supplémentaires, celle relative au positionnement axial de la butée peut être détaillée au travers d'un diagramme FAST. Ce dernier décompose

cette fonction et montre les solutions technologiques utilisées pour la remplir.

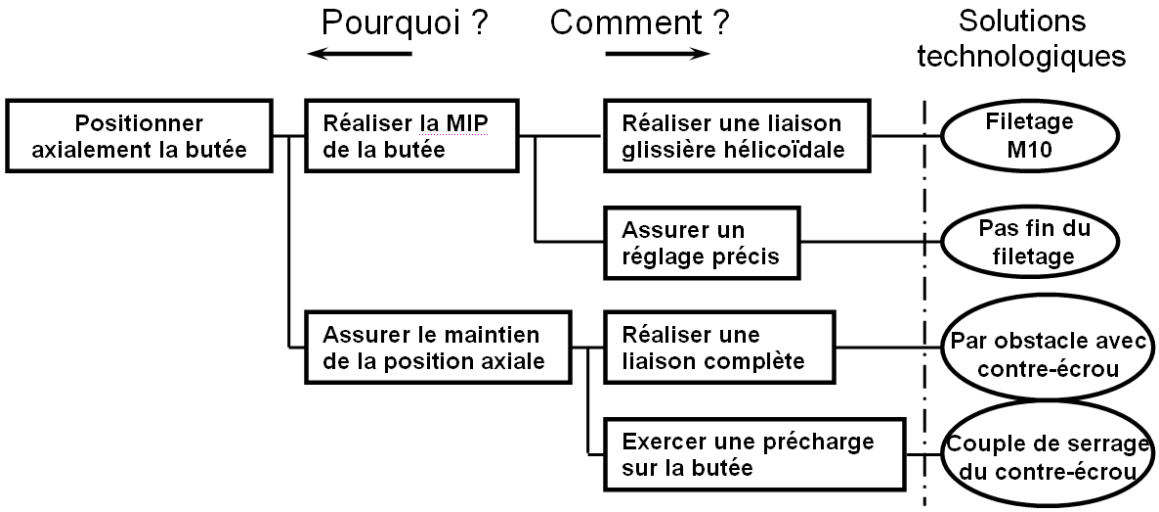


Figure 5.22 – FAST partiel du système butée.

Une analyse fonctionnelle géométrique conduisant à la spécification géométrique des composants est aussi réalisée pour ce montage ; elle n'est pas détaillée ici.
D'autre part, la fabrication est réalisée de façon similaire au montage précédent. La figure 5.23 ci-contre montre les éléments de mise en position des éprouvettes avec le montage butée.

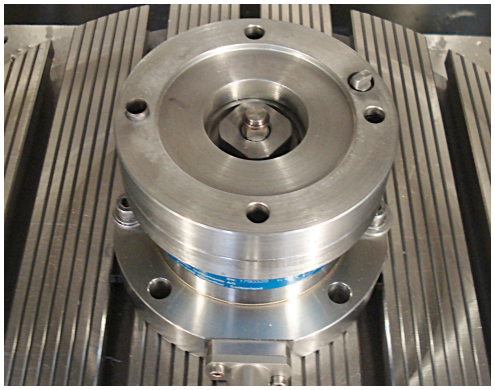


Figure 5.23 – Éléments de mise en position

5.3.2.2 Le système de positionnement axial de la butée

L'ajout d'un appui ponctuel en plus d'un plan d'appui présente un degré surabondant pour le positionnement des tôles. Pour éviter d'ajouter des contraintes mécaniques supplémentaires dans les éprouvettes à celles déjà existantes après leur fabrication, un réglage axial de la butée est effectué avant de lancer les essais. Il est en effet possible d'évaluer par simulation numérique qu'un défaut de positionnement d'un dixième peut générer localement des contraintes dans les tôles de l'ordre d'une cinquantaine de MPa.

Le système butée doit d'autre part supporter la charge générée par l'outil lors de l'opération de soudage. Le serrage du contre-écrou permet alors de rigidifier le mécanisme et d'éliminer le jeu axial potentiel. Cependant, la précharge introduite par le serrage modifie la position axiale préréglée de la face supérieure de la butée. Aussi, il est intéressant d'estimer à la fois une précharge assurant une bonne rigidité du système et d'en déduire le couple de serrage devant être appliqué, mais aussi le déplacement axial engendré par

l'introduction de cette précharge.

On peut à cet effet construire un modèle très simple inspiré des méthodes de dimensionnement des assemblages boulonnés classiques (ABB+04). La figure 5.24 présente une modélisation par ressorts du système butée. Les raideurs des éléments élastiques associés sont notés $K_b^{(1)}$ et $K_b^{(2)}$ pour les parties de la butée de part et d'autre du plan de joint, et K_a pour l'assemblage.

On applique d'abord une précharge F_0 au système, puis on charge en compression avec un effort extérieur F_{ext} (figure 5.25). On introduit la décomposition suivante des efforts dans la butée F_b et dans l'assemblage F_a :

$$\begin{aligned} F_b &= F_0 + \Delta F_b \\ F_a &= F_0 + \Delta F_a \end{aligned} \tag{5.1}$$

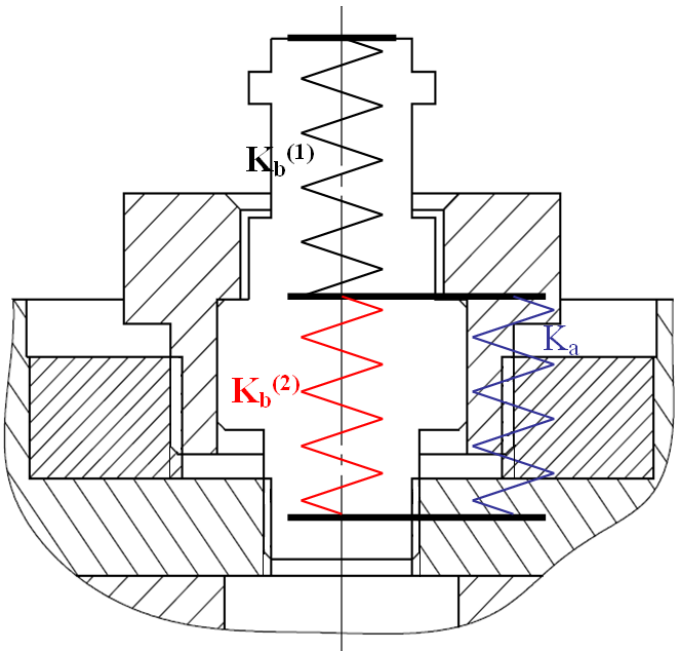


Figure 5.24 – Modélisation du système butée

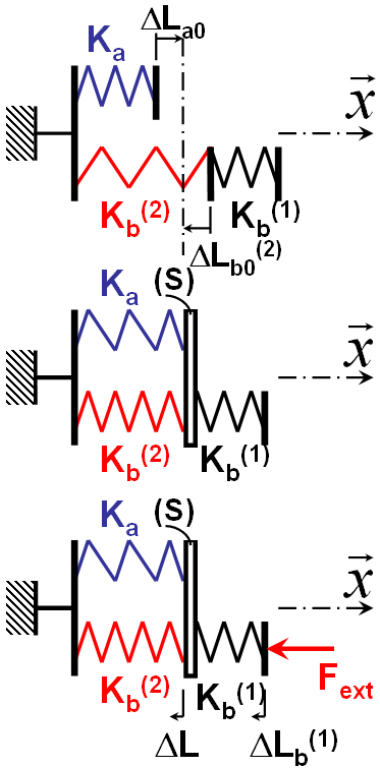


Figure 5.25 – Précharge et charge du système

L'équilibre du plan de joint s'écrit :

$$\Delta F_b = \Delta F_a + F_{\text{ext}} \tag{5.2}$$

On introduit en plus la *condition de non-décollement* (CND) suivante (figure 5.25) :

$$\begin{aligned} &\Delta L_b^{(2)} = \Delta L_a \equiv \Delta L \\ &\Leftrightarrow \frac{\Delta F_b}{K_b^{(2)}} = -\frac{\Delta F_a}{K_a} \end{aligned} \tag{5.3}$$

En combinant (5.2) et (5.3), il vient :

$$\Delta F_b = \underbrace{\frac{K_b^{(2)}}{K_a + K_b^{(2)}}}_{\lambda} F_{\text{ext}} \tag{5.4}$$

où λ est traditionnellement défini comme le facteur de charge. Quand l'effort dans l'assemblage est nul ($F_a = 0$), il y a décollement. La charge de décollement est donnée par :

$$F_{\text{decol}} = \frac{F_0}{1-\lambda} \tag{5.5}$$

Les évolutions des efforts dans la butée et l'assemblage sont alors données (avant décollement) par :

$$\begin{aligned} F_b &= F_0 + \lambda F_{\text{ext}} \\ F_a &= F_0 - (1-\lambda) F_{\text{ext}} \end{aligned} \tag{5.6}$$

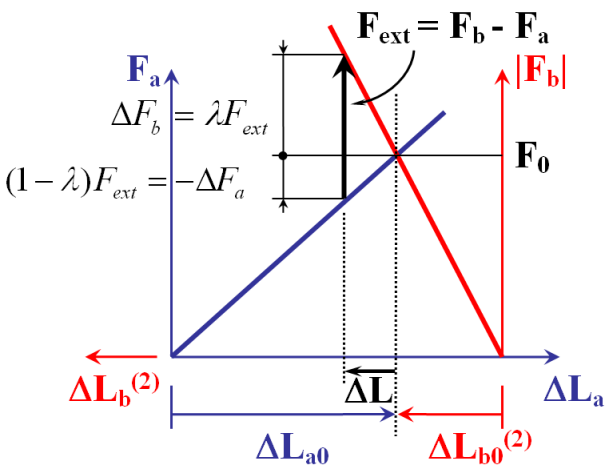


Figure 5.26 – Courbe de précharge du système

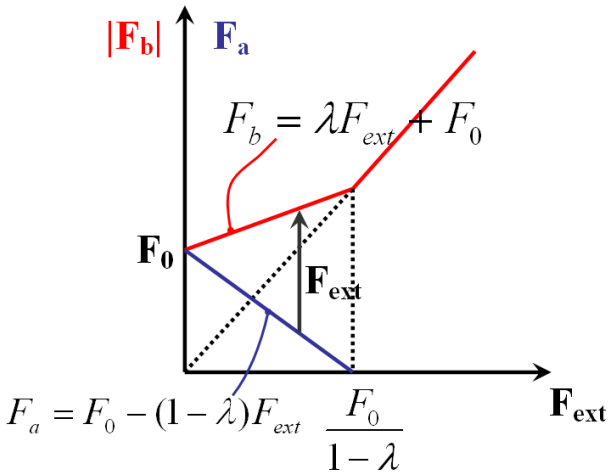


Figure 5.27 – Courbe de charge

Remarque :

L'introduction de cette précharge permet de rigidifier le système, mais est surtout traditionnellement utilisée pour réduire l'amplitude de la contrainte alternée (σ_a) dans le boulon dans le cas de sollicitations cycliques du système.

Dimensionnement du système

La démarche suivie pour évaluer le couple de serrage nécessaire et la précharge induite dans le système est la suivante :

* Évaluer les rigidités en traction des différents composants $K_a, K_b^{(1)}, K_b^{(2)}$, puis déterminer le facteur de charge associé λ avec l'équation (5.4).

* Choisir la force de décollement admissible pour la plage de sollicitation donnée du système, et en déduire la précharge associée avec (5.5). On choisit de prendre une charge de décollement F_{decol} =10 kN, c'est-à-dire un peu plus que la charge nominale acceptable par la tête de broche de la machine (8.5 kN), pour supporter des efforts de crête. Les composants du montage étant fabriqués en acier (E=210000 MPa), on évalue la précharge nécessaire à environ F_0 =7.5 kN. Cette précharge conduit à modifier la position axiale de la butée d'environ un centième de mm, ce qui est tout à fait négligeable.

* Calculer le couple nécessaire dans ces conditions, considérant une liaison filetée avec frottement :

$$\begin{aligned} C_s &= C_1 + C_2 \\ C_1 &= F_0 r_{\text{moy}} \tan(i+\phi) \quad \text{avec} \quad \tan\phi = \frac{f_1}{\cos\beta} \\ C_2 &= f_2 F_0 R_a \end{aligned} \tag{5.7}$$

où C_s représente le couple de serrage, C_1 l'action du contre-écrou sur l'assemblage et C_2 l'action de la butée sur le contre-écrou, R_a le rayon d'action, f_1 le coefficient de frottement entre le contre-écrou et l'assemblage, f_2 le coefficient de frottement entre la butée et le contre-écrou et β l'angle de filet mesuré dans le plan normal à l'hélice définie par r_{moy}. On définit l'angle d'hélice i tel que $\tan i = \frac{p}{2\pi r_{\text{moy}}}$ avec $r_{\text{moy}} \simeq \frac{d_2}{2}$, $d_2 = d - 0.6495p$ (norme filet ISO), d étant le diamètre nominal du filet et p le pas. Lorsque i et ϕ sont petits, on peut exprimer C_1 tel que :

$$C_1 = \left(\frac{p}{2\pi} + \frac{f_1 d_2}{2\cos\beta}\right) F_0 \tag{5.8}$$

En considérant le filetage standard de l'écrou de taille M22, de pas (fin) 2 mm et des coefficients de frottement (f_1 et f_2) estimés d'un contact sec acier/acier ($\simeq 0.2$), on évalue un couple de serrage d'environ $C_s \simeq$30 Nm.

* Vérifier la tenue de la liaison filetée butée/assemblage à la charge d'épreuve, charge pour laquelle il existe des déformations plastiques en fond de filet mais permettant tout de même le démontage.

$$F_p \simeq 0.9 A_{\text{eq}} R_e \tag{5.9}$$

où R_e est la résistance élastique du matériau et $A_{eq} = \frac{\pi d_{eq}^2}{4}$ avec $d_{eq} = \frac{d_2+d_3}{2}$, $d_2 = d - 0.6495p$, $d_3 = d - 1.2268p$ (norme filet ISO), p étant le pas du filet. Pour un acier de base, on peut estimer la résistance élastique à 250 MPa. Pour une liaison filetée de taille M10, la charge d'épreuve F_p est d'environ 14.5 kN, ce qui laisse une bonne marge de sécurité.

Une vérification de la butée au flambement est d'autre part effectuée, on montre que pour ce système cette charge est bien plus grande que la charge d'épreuve.

5.3.2.3 Réglage de la position axiale de la butée

Il est nécessaire d'effectuer le réglage de la position axiale de la butée avant de lancer les essais. Plusieurs approches sont possibles pour réaliser cette opération :

* Le réglage peut être effectué par rapport à la position de la surface supérieure du support. On définit alors une tolérance d'assemblage dans laquelle la face supérieure de la butée et la surface supérieure du support doivent être compris entre deux plans parfaits distants d'un intervalle donné. Ce réglage est effectué avec un comparateur.

* On peut aussi privilégier le contact entre la butée et l'éprouvette. En effet, au cours des étapes de fabrication, les tôles ont accumulé des contraintes résiduelles se libérant partiellement lors de la découpe du motif par jet d'eau. La planéité des tôles est donc susceptible d'évoluer d'une éprouvette à l'autre. On peut alors effectuer le réglage manuellement (« à la feuille à cigarette »), avec un chapeau et un support supplémentaires préalablement entaillés (figures 5.28 et 5.29) pour permettre un accès manuel. L'inconvénient de cette approche est qu'au cours du processus de réglage, les tôles sont démontées puis remontées. Une mise en position précise limite l'impact de ce démontage.

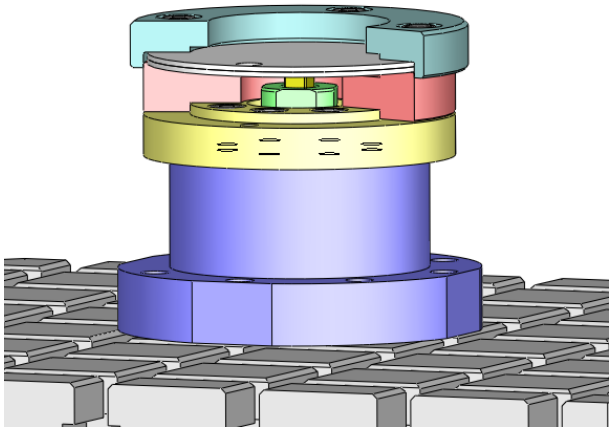


Figure 5.28 – Montage « réglage de la butée »

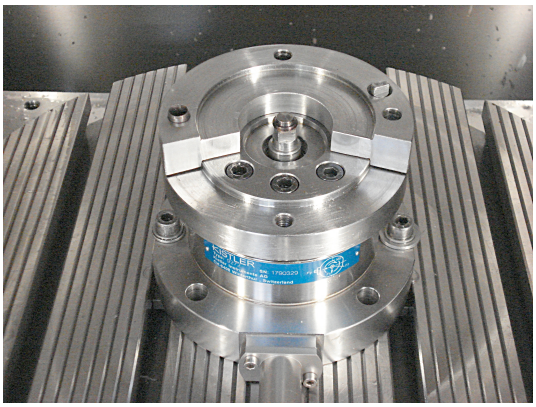


Figure 5.29 – Entaille

5.4 Mise en oeuvre des essais

On présente dans cette section la mise en oeuvre des essais de soudage par Friction Stir Spot Welding. Le principal objectif de cette première campagne expérimentale est d'étudier le procédé en terme d'efforts générés durant le process. La mesure thermique sera effectuée dans un travail ultérieur sur la base des résultats mécaniques et des analyses métallurgiques des éprouvettes.

On présente dans un premier temps l'outillage choisi pour les essais, puis le plan expérimental est détaillé au travers des paramètres procédé choisis et de la matrice d'expérience. Le protocole expérimental suivi pour les essais est ensuite présenté.

Les résultats des essais sont par la suite présentés puis analysés. L'influence des paramètres procédé sur les efforts mesurés est commentée. Pour ces essais les deux montages conçus ont été utilisés, aussi une comparaison des courbes d'efforts mesurées est effectuée pour évaluer l'influence des conditions de mise en position des éprouvettes lors du soudage.

5.4.1 Stratégie expérimentale pour le FSSW

5.4.1.1 Outillage

La géométrie de l'outil utilisée ici pour le soudage ponctuel par friction et malaxage est relativement simple. L'intérêt est d'éviter de trop complexifier les phénomènes mis en jeu pour la calibration du modèle développé. La géométrie retenue est de révolution, le pion est cônique et lisse. L'utilisation d'un pion fileté ne sera effectuée qu'ultérieurement. L'outil est fabriqué en carbure de tungstène, et fretté dans un porte-outil. Des porte-outils avec pince ou à serrage hydraulique ont montré lors d'essais de faisabilité que les efforts importants lors du soudage généraient un glissement relatif outil/porte-outil, modifiant par là-même la jauge outil.

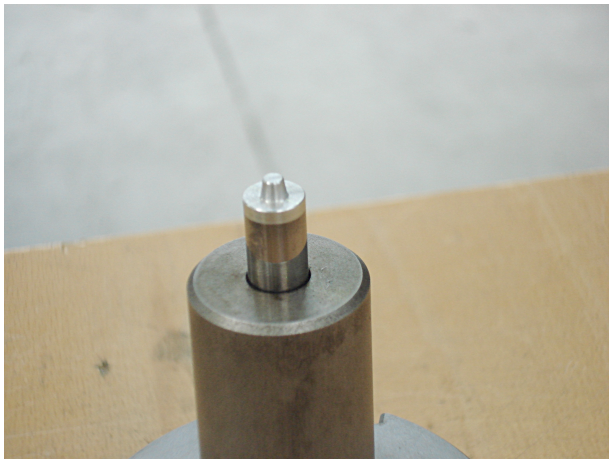


Figure 5.30 – Frettage de l'outil

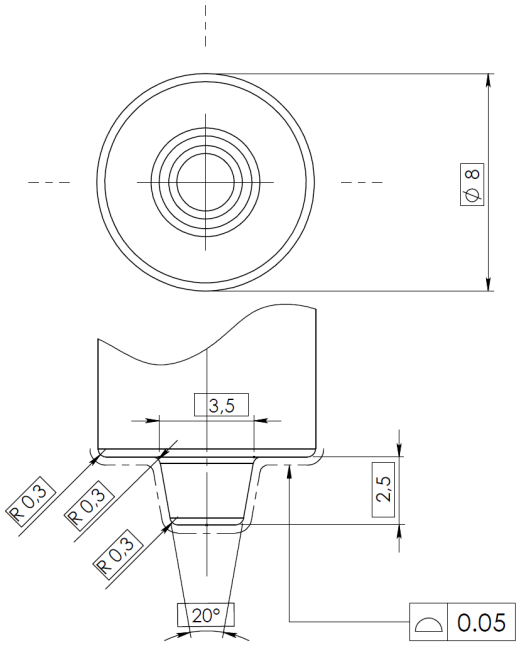


Figure 5.31 – Plan de définition de l'outil

Le diamètre de l'épaulement est fixé à 8 mm, des diamètres supérieurs ont généré des efforts de soudage trop importants pour la machine. Les tôles à souder sont constituées d'un alliage d'aluminium 2024 ; leur épaisseur est de 2 mm.

5.4.1.2 Mesures effectuées

L'objet de la série d'essais présentée est d'étudier le procédé en terme d'efforts générés. La seule mesure effectuée dans ce chapitre est une mesure d'efforts et du couple axial réalisé par le capteur 4 composantes KISTLER (figure 5.10) intégré aux dispositifs de soudage. Un extrait des caractéristiques du capteur d'effort est présenté dans le tableau 5.8. Pour plus d'informations, on pourra consulter la documentation sur le site du constructeur.

Ces caractéristiques sont largement suffisantes pour à la fois supporter les efforts générés et assurer une précision correcte de mesure. Ce capteur est d'autre part relié à une table d'acquisition déjà existante, les données étant directement enregistrées avec un logiciel spécifique. La fréquence d'acquisition pour les essais est fixée à 1kHz, ce qui lar-

Étendue de mesure	F_z	kN	$-5 \ldots 20$
	C_z	Nm	$-200 \ldots 200$
Sensibilité	F_z	pC/N	$\simeq -3.5$
	C_z	pC/N.m	$\simeq -160$
Seuil	F_z	N	< 0.02
	C_z	mN.m	< 0.2
Fréquences propres	$f_n(z)$	kHz	$\simeq 6.3$
	$f_n(C_z)$	kHz	$\simeq 4.2$
Domaine de linéarité	% de l'étendue de mesure		$\leq \pm 1$

Tableau 5.8 – Caractéristiques du Capteur 9272 KISTLER

gement suffisant vis-à-vis du théorème de Shannon compte tenu de la plage de fréquence de rotation de l'outil retenue.

5.4.1.3 Plan expérimental

Une fois l'outillage choisi et intégré, on détaille le plan expérimental. Les essais sont réalisés sur une fraiseuse à commande numérique (figure 5.9) au pôle productique de l'ENISE. Les axes de la machine étant asservis en déplacement, les paramètres procédés identifiables sont les suivants :

- ⋆ Ω : la vitesse de rotation de la broche.
- ⋆ la profondeur de plongée de l'outil dans la matière.
- ⋆ V_p : la vitesse de pénétration de l'outil dans la matière.
- ⋆ t_{malax} : le temps de malaxage.

Cependant, dans cette première série d'essais certaines simplifications sont effectuées. Aussi l'influence de tous ces paramètres ne sera pas étudiée sur la réponse du procédé en terme d'efforts :

- ▷ À cause des efforts importants générés durant le procédé, l'influence de la vitesse de plongée ne peut être étudiée avec cette machine et cet alliage d'aluminium. Pour la suite, cette vitesse est fixée à 10 mm/mn.

- ▷ Le temps de malaxage influence certainement la qualité du joint soudé, mais ce paramètre n'apparaît pas de première importance si on s'intéresse dans un premier temps aux courbes d'effort et de couple. Aussi pour la suite, ce temps est fixé à 4 secondes.

Aussi, l'étude expérimentale est menée avec deux paramètres procédé, la vitesse de rotation de l'outil et la profondeur de plongée. L'épaisseur des tôles étant (presque) les mêmes dans toute cette série, la profondeur de pénétration de l'outil est paramétrée avec le paramètre δ (> 0). La valeur de ce paramètre est calculée par la machine à commande numérique à partir de la prise d'origine mesure, prise sur la face supérieure du support. La paramétrisation est illustrée sur la figure 5.32.

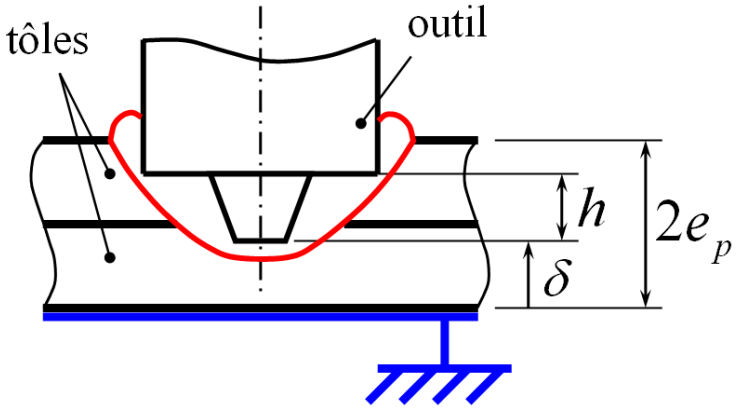


Figure 5.32 – Paramétrisation de la profondeur de pénétration de l'outil

Le plan expérimental peut alors être représenté dans un plan (Ω, δ), cette matrice d'expérience est illustrée sur la figure 5.33.

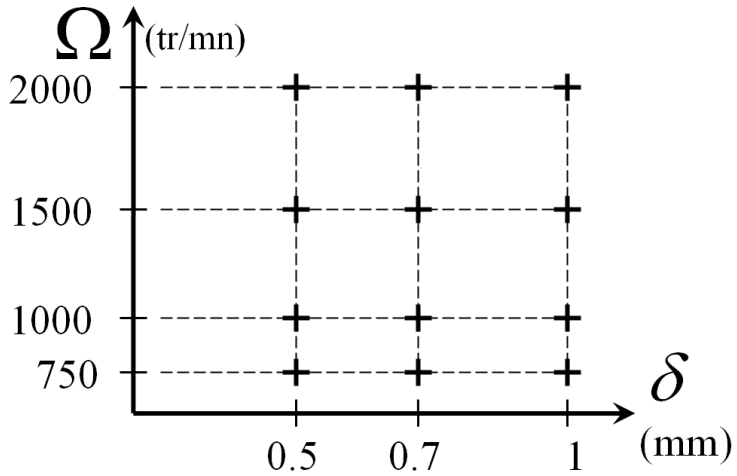


Figure 5.33 – Matrice d'expérience

Cette série d'essais est conduite pour les deux montages conçus précédemment. En tout, une quarantaine d'essais ont été réalisés, en comptant la mise au point et les tests de répétabilité.

5.4.1.4 Protocole expérimental

L'objet de la procédure suivie pour les essais est d'assurer leur bon déroulement mais aussi de faire quelques contrôles pour détecter tout dérèglement ou évolution des conditions expérimentales pouvant faire dévier les résultats au cours de la série. Dans un premier temps, une procédure d'*initialisation* est effectuée pour effectuer les différents montages, réglages et programmation. Cette initialisation est bien entendu refaite dès qu'un changement de montage expérimental est nécessaire.

- ⋆ Monter le dispositif expérimental sur la table de la machine.
- ⋆ Fretter l'outil dans son porte-outil et faire la jauge axiale.

- ⋆ Le programme implémenté dans la fraiseuse à commande numérique est paramétré avec les paramètres procédé choisis. Des tests de sécurité et un séquençage de validation propre au déroulement du test sont inclus au programme.
- ⋆ L'origine mesure est prise sur le support (ou la butée) avec un palpeur.
- ⋆ Le joint soudé est habituellement effectué au centre de la zone de travail, position calculée en palpant la surface nominalement cylindrique extérieure de la pièce support.

Par la suite, la série de tests est lancée en suivant un séquençage prédéterminé. La procédure d'essai suivie est alors la suivante :

- ⋆ Monter l'éprouvette dans le dispositif.
- ⋆ Lancer le programme numérique.
- ⋆ L'outil s'arrête 2 mm au-dessus de l'éprouvette pour vérifier la configuration du système d'acquisition et lancer l'acquisition. Le process est alors lancé.
- ⋆ Une fois le process terminé et le joint soudé effectué, l'acquisition est stoppée et l'éprouvette démontée.

Au cours des essais, il est nécessaire d'effectuer quelques contrôles pour vérifier le réglage, la bonne tenue des éléments et que les conditions de mise en oeuvre soient similaires pour chacune des éprouvettes. Les points suivants sont contrôlés :

- ⋆ La jauge axiale de l'outil est contrôlée dans les premiers tests après que l'outil vient d'être fretté pour s'assurer que les éléments ont bien refroidi.
- ⋆ La position de l'origine mesure est régulièrement contrôlée au palpeur pour s'assurer que le montage n'a pas subi de déformations irréversibles.
- ⋆ L'expérience montre que le dispositif monte relativement rapidement en température au cours des essais. Aussi, il est régulièrement refroidi pour limiter les erreurs dues aux variations de conditions aux limites thermiques.

5.4.2 Résultats expérimentaux

On présente dans cette section les résultats expérimentaux obtenus à la suite de cette série d'essais. Dans un premier temps, on montre quelques faciès de soudure, on s'intéresse par la suite aux courbes d'effort obtenues et à l'influence des paramètres procédé sur ces dernières. Enfin, une comparaison entre les résultats obtenus avec les deux montages est présentée.

5.4.2.1 Joint de soudure

Les figures 5.34 et 5.35 présentent la configuration expérimentale et l'opération de soudage en elle-même. Quelques tests de faisabilité ont d'abord été menés. Ces tests ont permis d'affiner la géométrie de l'outil et de définir les plages de variation des paramètres procédé.

La zone de travail assez large définie par la conception des montages expérimentaux permet de réaliser plusieurs points de soudure sur la même éprouvette. La figure 5.36 montre une photo d'une éprouvette dans laquelle cinq points de soudure ont été réalisés.

L'expérience montre cependant que les points de soudure excentrés génèrent un bruitage excessif de l'acquisition de l'effort axial, du fait de la position des différents quartz

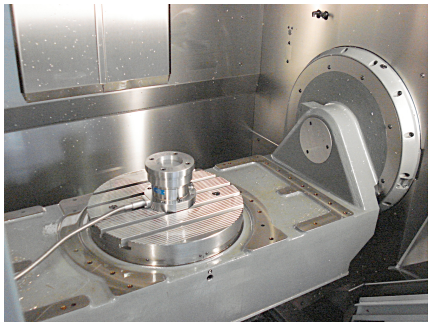


Figure 5.34 – Dispositif expérimental

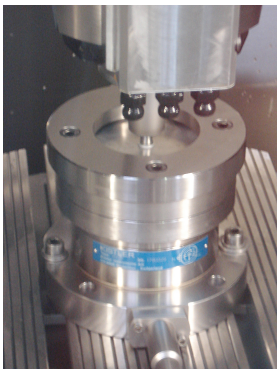


Figure 5.35 – Phase de soudage

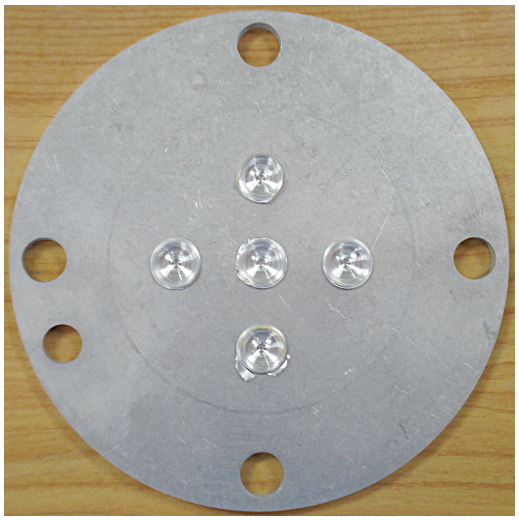


Figure 5.36 – Plusieurs points de soudure sur une même éprouvette

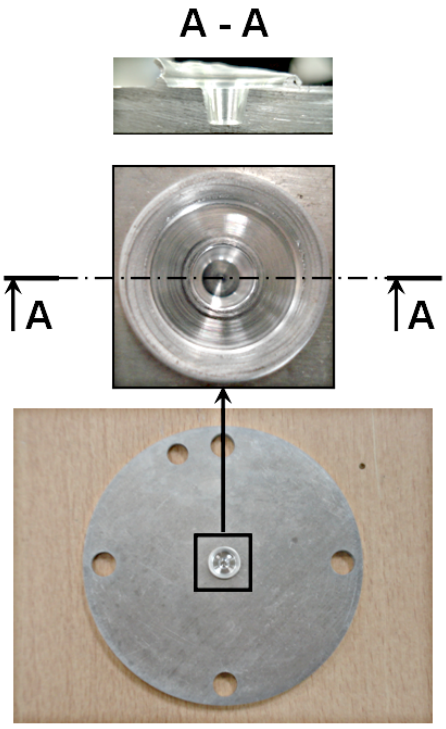


Figure 5.37 – Coupe transverse du joint soudé

au sein du dynamomètre. Aussi, d'une manière générale et pour la suite, un seul point de soudure est réalisé par éprouvette. La figure 5.37 montre une coupe transerve d'un joint soudé.

5.4.2.2 Influence des paramètres procédés sur les courbes d'effort

L'étude de l'influence des paramètres procédé sur les courbes d'effort est ici présentée à partir des résultats obtenus avec le montage appui plan. Les courbes de la figure 5.38 présentent les évolutions de l'effort et du couple axiaux en fonction du temps et de la vitesse de rotation de l'outil. Chaque sous-figure présente ces évolutions pour une profondeur de

pénétration de l'outil dans la matière fixée. Les efforts transverses, bien qu'enregistrés avec le capteur, ne sont donc pas présentés dans la suite ; ils oscillent autour de zéro pendant la phase de soudage.

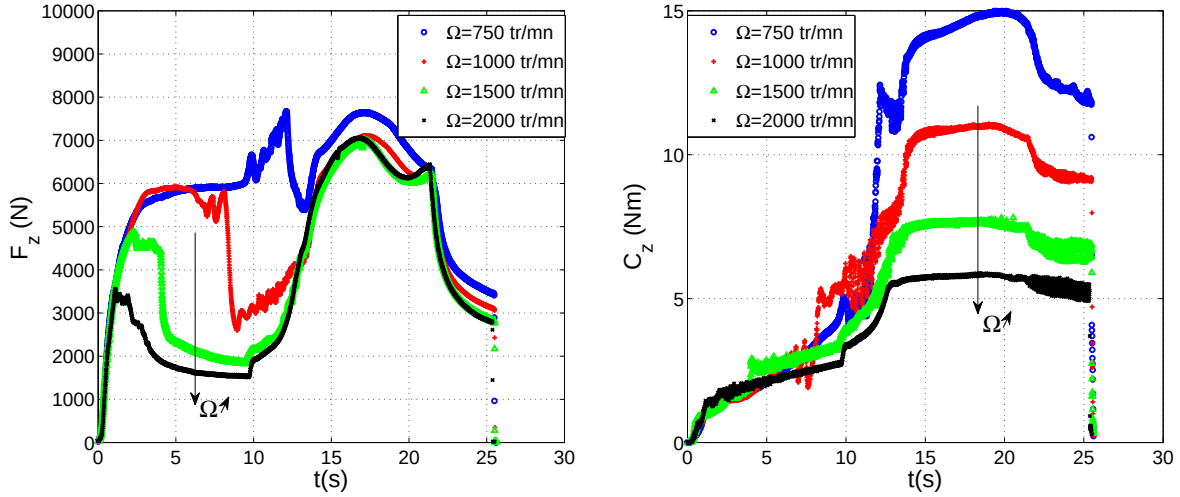
Observations

- ⋆ Tout d'abord, l'évolution de l'effort axial comprend globalement deux pics, bien que le premier soit moins prononcé à faible vitesse de rotation. Ce type d'évolution est lié à la géométrie de l'outil utilisé. En effet, le premier pic se produit dès que le pion de l'outil rentre en contact avec la matière. À mesure que celui-ci s'enfonce, l'échauffement généré par friction et malaxage rend la matière localement pâteuse, en conséquence l'effort diminue quelque peu pendant la plongée du pion. Lorsque l'épaulement vient en contact avec l'éprouvette, la surface de friction se trouve brusquement augmentée, aussi l'effort et le couple augmentent alors drastiquement. Une fois la profondeur de plongée programmée atteinte, l'outil reste en position pendant un temps de malaxage fixé dans cette série de tests à 4 secondes. Durant ce laps de temps, les forts taux de déformation et la chaleur générés par l'outil rendent encore plus pâteuse la matière, on observe alors que l'effort et le couple diminuent en portion de parabole.

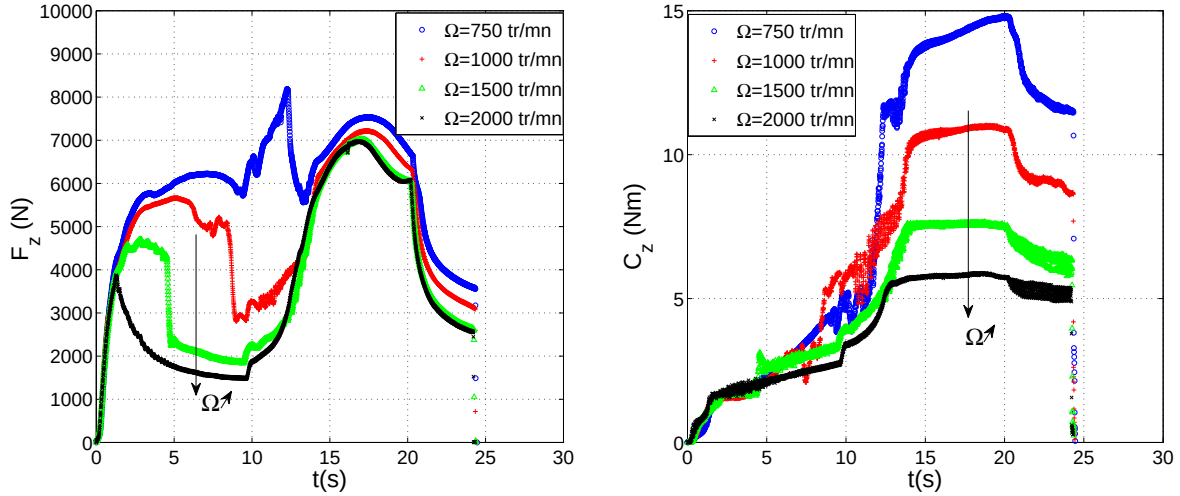
- ⋆ Le couple est fonction de la surface de contact entre l'outil et la matière, en conséquence, son évolution est strictement croissante jusqu'à ce que l'épaulement vienne en contact, on n'observe pas de premier pic comme pour l'effort.

- ⋆ L'effort et le couple générés évoluent de façon importante en fonction de la vitesse de rotation de l'outil. Bien que le second pic visible sur la courbe d'effort évolue peu, le premier pic caractérisant la rentrée du pion dans la matière diminue fortement à mesure que la vitesse rotation augmente. De la même façon, le maximum atteint sur la courbe du couple lorsque l'épaulement de l'outil pénètre l'éprouvette chute de façon quasi-linéaire avec l'augmentation de la vitesse de rotation de la broche.

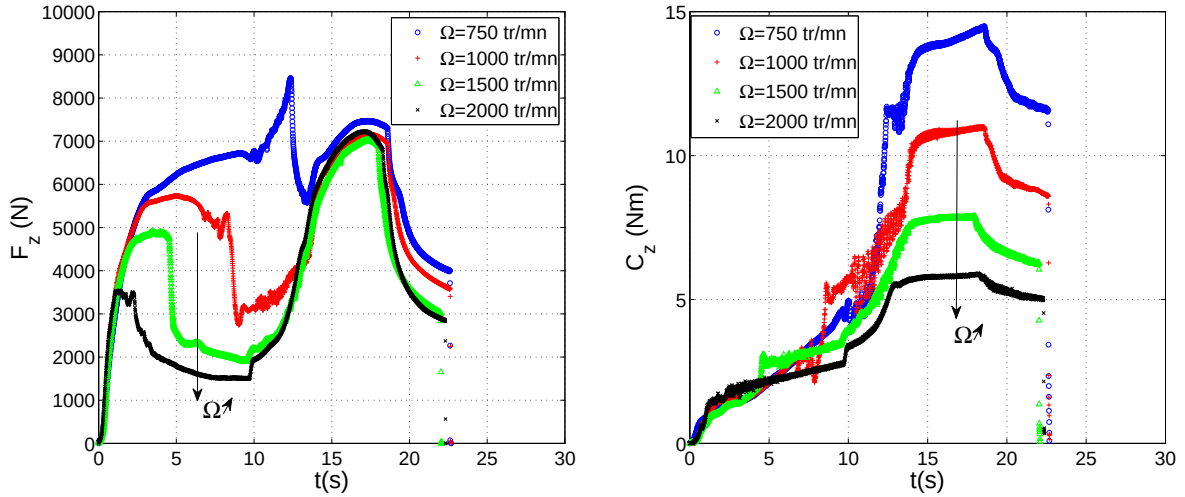
- ⋆ Les courbes d'effort et de couple semblent relativement insensibles à la profondeur de plongée de l'outil dans la matière, bien que ce paramètre influence certainement la qualité du joint soudé et l'effort à rupture sur des tests de simple recouvrement (PJW+; LPCT06). Ceci est notamment visible sur la figure 5.39, sur laquelle on présente une comparaison des effort et couple axiaux pour une vitesse de rotation de l'outil fixée.



(a) $\delta = 0.5$ mm

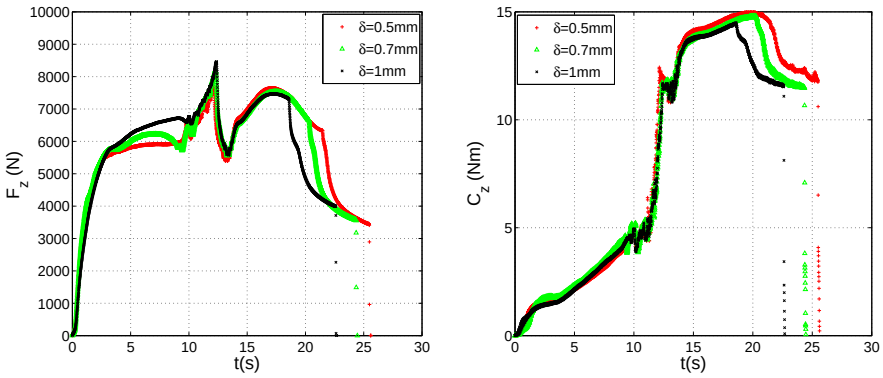


(b) $\delta = 0.7$ mm

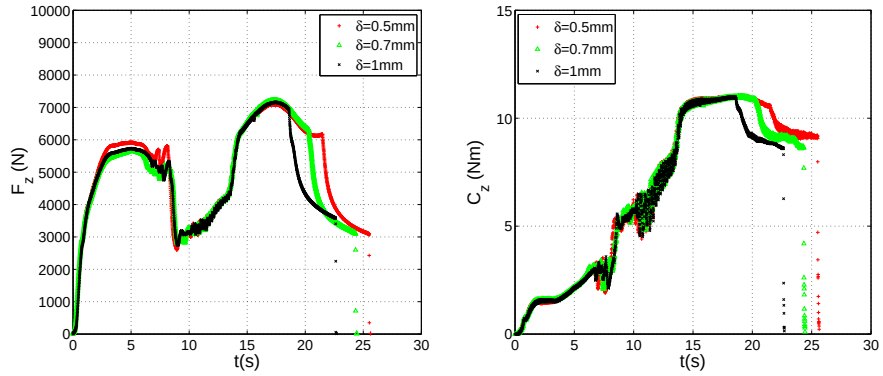


(c) $\delta = 1$ mm

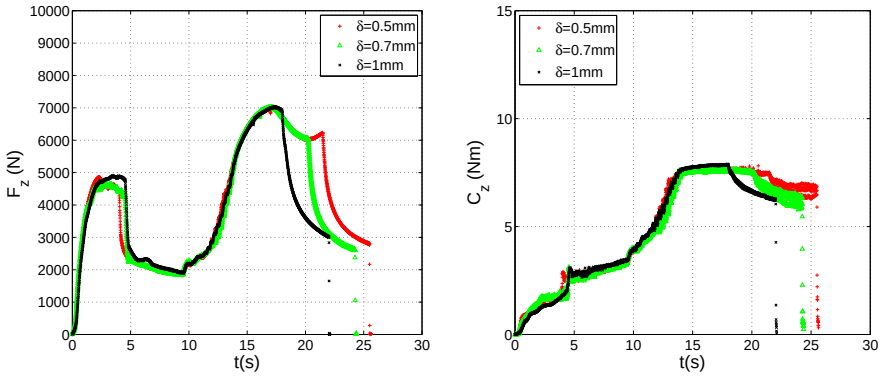
Figure 5.38 – Comparaison des effort et couple axiaux, à profondeur de pénétration de l'outil fixée, avec le montage appui plan



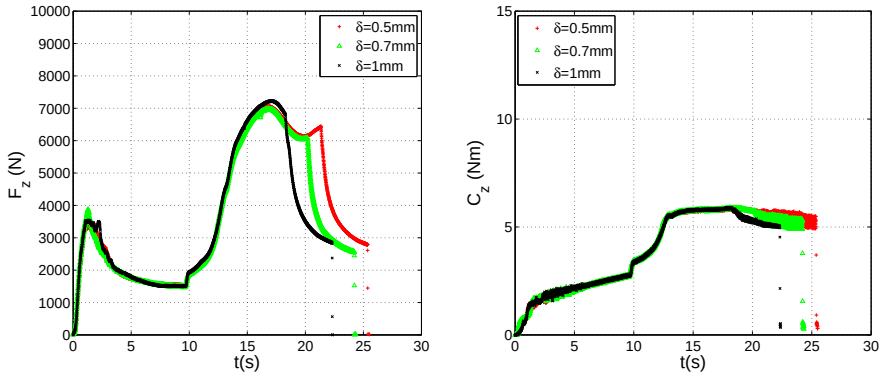
(a) $\Omega = 750$ tr/mn



(b) $\Omega = 1000$ tr/mn



(c) $\Omega = 1500$ tr/mn



(d) $\Omega = 2000$ tr/mn

Figure 5.39 – Comparaison des effort et couple axiaux, à vitesse de rotation de l'outil fixée, avec le montage appui plan

D'autre part, la position de l'outil étant pilotée en déplacement, les changements de profondeur de pénétration programmés se traduisent par une durée plus ou moins longue de la phase de soudage, visible sur les courbes de la figure 5.39.

⋆ On note aussi qu'aucune interaction entre les deux paramètres procédé ne semble apparaître sur les courbes d'effort et de couple.

D'autre part, quelques tests de répétabilité du procédé ont été effectués pour qualifier la stabilité de la réponse du procédé en terme d'efforts. La figure 5.40 présente un test de répétabilité comprenant cinq essais effectués avec les valeurs de paramètres suivantes : Ω =1500 tr/mn et δ =0.7 mm. La fréquence affichée des points d'acquisition a été considérablement réduite sur cette figure pour des questions de lisibilité du graphe. On observe que les étendues de dispersion sont relativement acceptables. Au maximum des courbes d'effort et de couple, les barres d'erreur sont de l'ordre de 300 N pour l'effort et d'environ 0.6 Nm pour le couple. Ces étendues rapportées au valeurs nominales des maxima des courbes donnent une erreur relative d'environ 4.3% pour l'effort et 8% pour le couple. L'importance de l'étendue de dispersion est un peu plus grande dans les phases liées à la plongée du pion (diminution de l'effort et légère augmentation du couple) et lorsque l'épaulement entre en contact avec la matière.

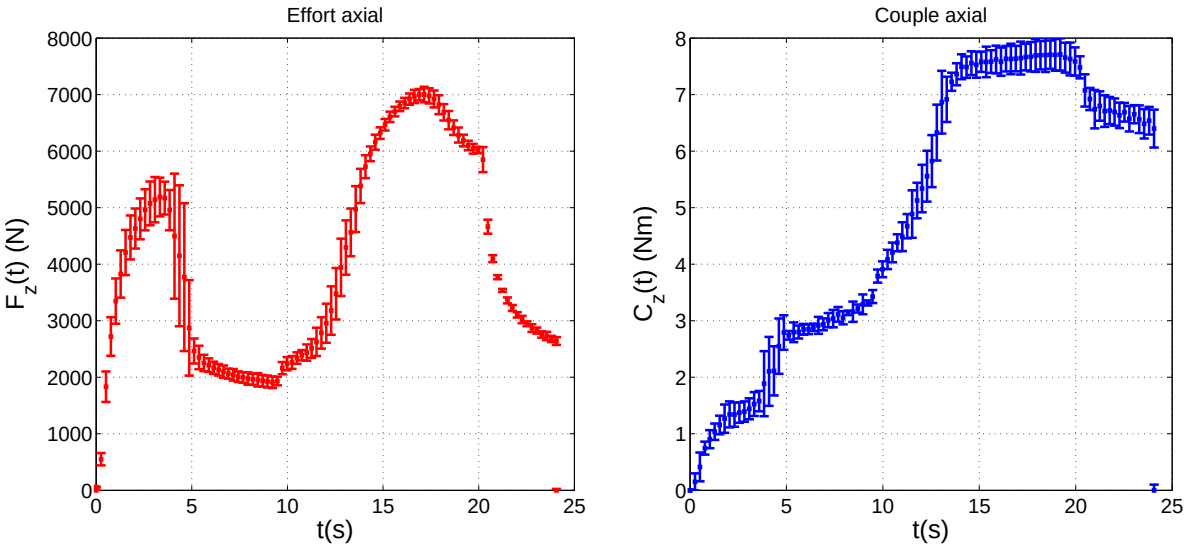
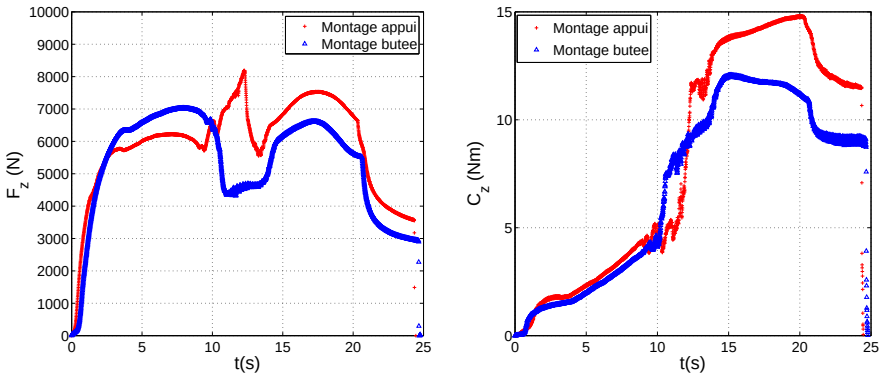


Figure 5.40 – Test de répétabilité avec le montage appui plan, Ω =1500 tr/mn, δ =0.7 mm

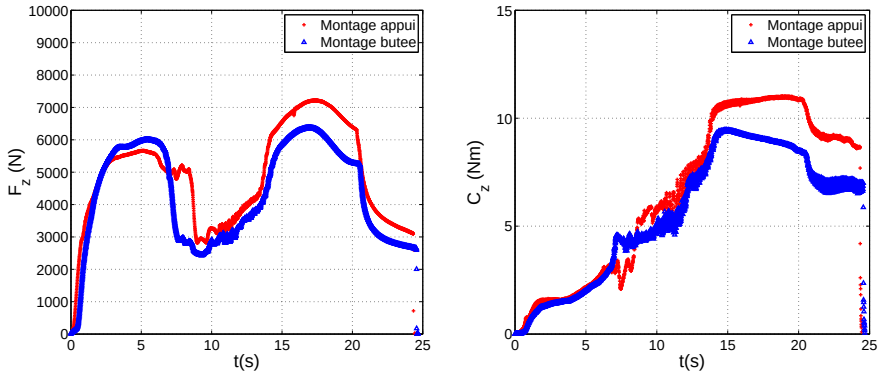
5.4.2.3 Influence des conditions aux limites

La démarche de validation du procédé Friction Stir Spot Welding présentée dans ce chapitre s'appuie sur la conception de deux dispositifs expérimentaux intégrant des conditions de mise en position différentes. Aussi, on étudie dans cette section l'influence de ces conditions expérimentales sur la réponse du procédé en termes d'effort et de couple.

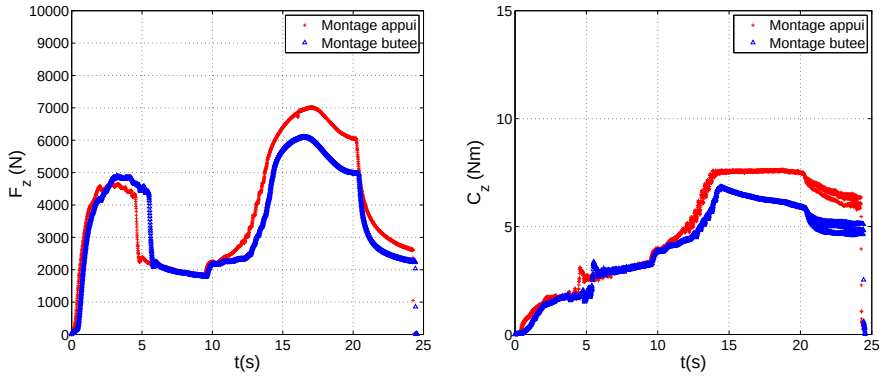
L'étude de l'influence des paramètres procédé sur les courbes d'effort et de couple présentée a été effectuée avec le montage appui. Une série de tests identique a été menée avec le montage butée.



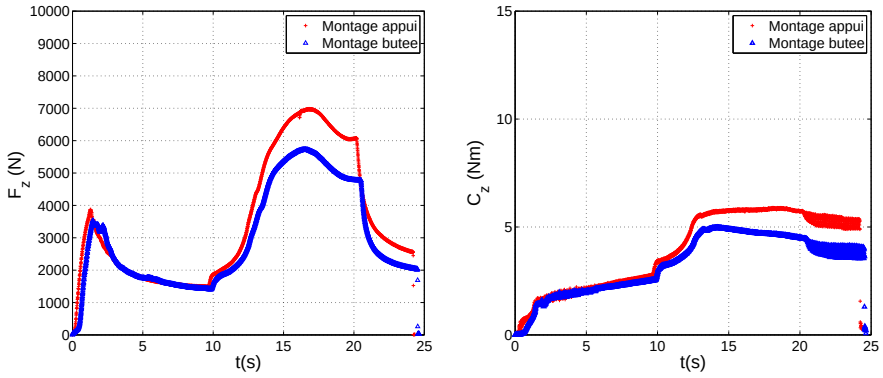
(a) $\Omega = 750$ tr/mn



(b) $\Omega = 1000$ tr/mn



(c) $\Omega = 1500$ tr/mn



(d) $\Omega = 2000$ tr/mn

Figure 5.41 – Comparaison des effort et couple axiaux obtenus avec les montages appui plan et butée, pour une profondeur de plongée de l'outil δ =0.7 mm

La figure 5.41 montre une comparaison entre les courbes d'effort et de couple obtenues avec les deux dispositifs mis en oeuvre. L'évolution des composantes est donnée en fonction de la vitesse de rotation de la broche pour une profondeur de pénétration de l'outil fixée à δ =0.7 mm.

Observations

- ⋆ On observe qu'une différence sur les maxima des courbes d'effort et de couple s'établit entre les résultats obtenus avec les deux dispositifs. Quelle que soit la vitesse de rotation de la broche, les effort et couple générés durant le process sont plus importants avec le montage appui. Cette observation paraît logique dans la mesure où les éprouvettes sont bridées de façon plus rigide avec ce montage. Cependant, ces différences ne sont pas si importantes, elle est d'environ 1 kN au niveau du maximum d'effort et varie de 1 à 3 Nm au maximum du couple suivant la vitesse de rotation de l'outil.

- ⋆ Ces différences de maxima d'effort et de couple sont supérieures aux variations respectives des valeurs trouvées lors des tests de répétabilité. En conséquence, cet effet ne peut être assimilé à une dispersion entre essais à même configuration opératoire.

On peut calculer l'erreur relative entre les courbes d'effort et de couple obtenues avec les deux dispositifs. Cette erreur normée est définie telle que :

$$\epsilon_X(t) = \frac{|(X_z)_{\text{appui}}(t) - (X_z)_{\text{butée}}(t)|}{(X_z)_{\text{appui}}(t)}, \qquad X = (F, C) \tag{5.10}$$

Le résultat est présenté sur la figure 5.42. On observe des évolutions particulièrement chaotiques durant la première partie du process, dans la seconde partie les valeurs d'erreur semblent tendre vers une valeur d'environ 20%, bien que ces évolutions soient particulièrement bruitées.

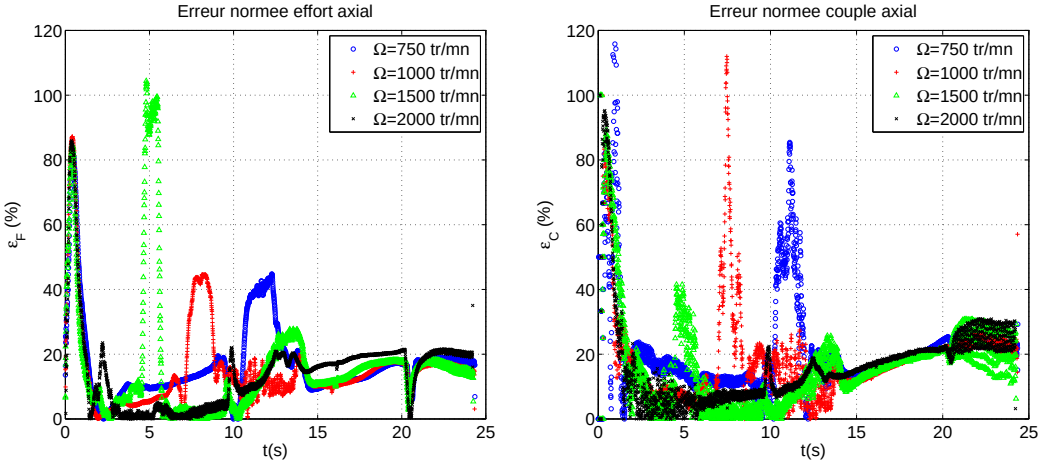


Figure 5.42 – Erreurs normées des effort et couple définies à partir des deux dispositifs, δ =0.7 mm

En fait, les évolutions des erreurs étant chaotiques, il est plus intéressant de se concentrer uniquement sur les valeurs de maxima des courbes. La figure 5.43 présente les évolu-

tions des maxima des courbes d'effort et de couple en fonction des paramètres procédé, pour les deux dispositifs expérimentaux. On retrouve le fait que ces maxima sont sensibles à la vitesse de rotation de l'outil, mais pas (ou très peu) à la profondeur de plongée de l'outil dans la matière.

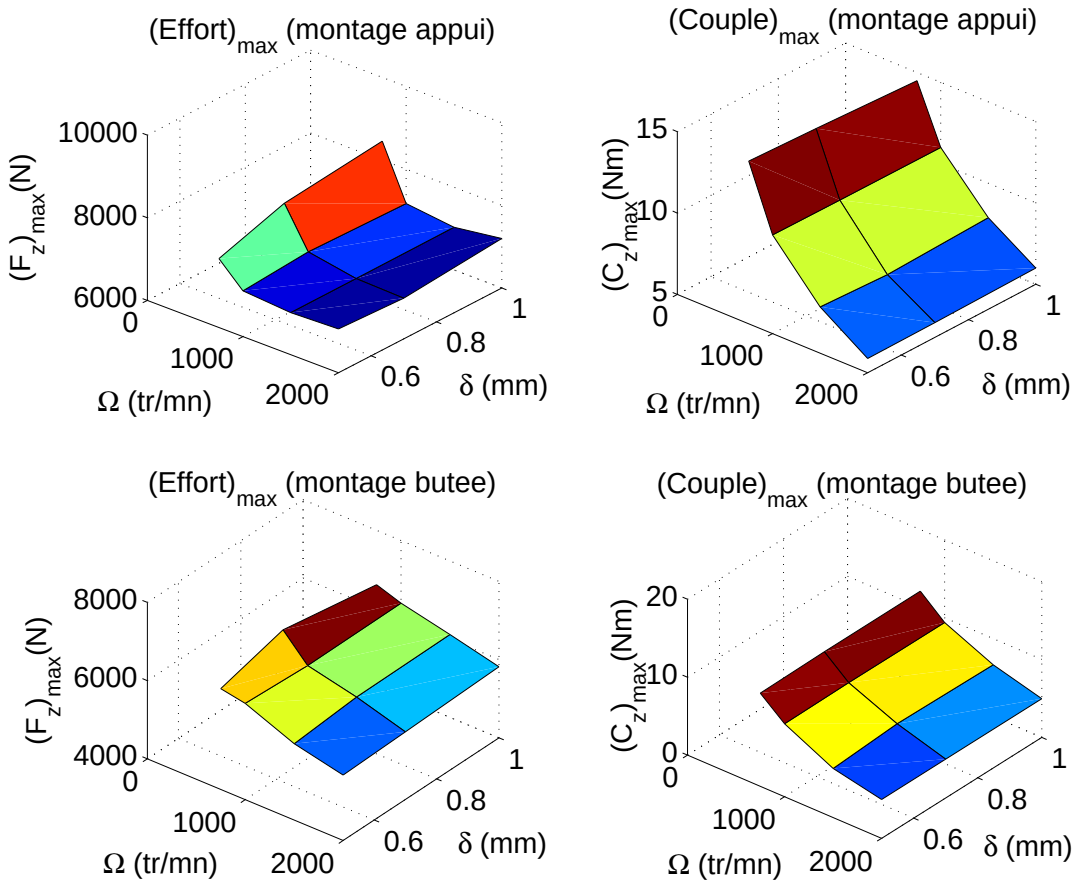


Figure 5.43 – Évolutions des maxima des courbes d'effort et de couple en fonction des paramètres procédé, pour les deux dispositifs expérimentaux

Afin d'estimer l'influence du type de conditions de mise en position, les erreurs relatives des maxima des courbes d'effort et de couple sont représentées sur la figure 5.44 en fonction des paramètres procédé, pour les deux dispositifs expérimentaux. On observe que les erreurs sur les maxima d'effort et de couple varient globalement entre 10 et 20%.

Commentaires

- ⋆ Les différentes conditions aux limites mécaniques réalisées par les deux dispositifs, c'est-à-dire les différentes surfaces de contact, conduisent à la fois à une déformée différente des éprouvettes et à un écart sur les maxima des effort et couple générés.

- ⋆ En réalité, si la géométrie des éléments de mise en position diffère d'un montage à l'autre, il en est de même pour leur rigidité axiale. Aussi, ces deux facteurs conduisent aux différences observées et il est alors difficile de distinguer la part de chacun d'eux.

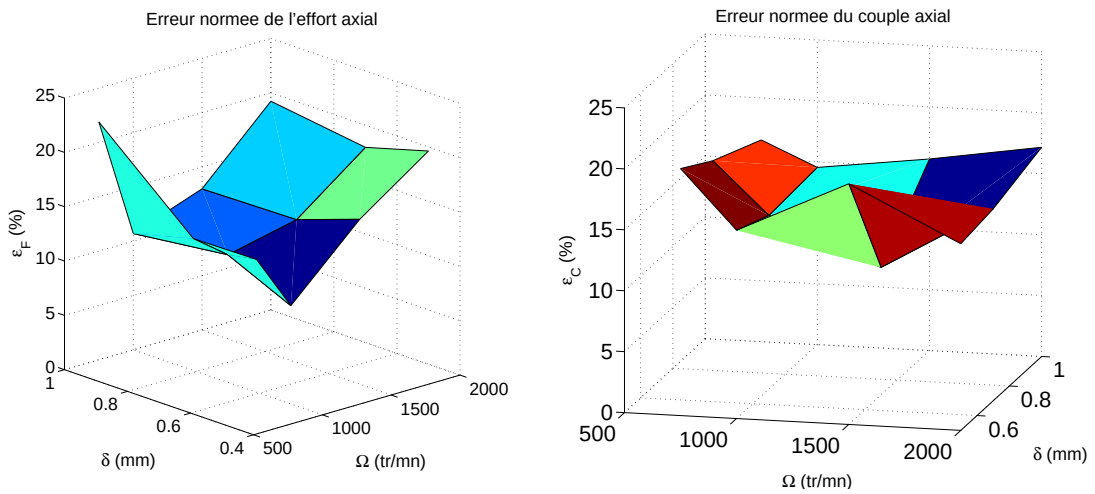


Figure 5.44 – Erreurs relatives -entre les deux dispositifs expérimentaux- des maxima des courbes d'effort et de couple en fonction des paramètres procédé

- ⋆ Les surfaces de contact étant différentes, les conditions d'échange thermique sont par là-même affectées, ajoutant des dispersions entre les résultats obtenus avec chaque dispositif à mesure que ceux-ci chauffent. D'autre part, on constate qu'il est difficile d'assurer des conditions thermiques identiques tout au long de la série de tests effectuée. Des refroidissements sont effectués de façon périodique pour limiter les erreurs introduites par ce phénomène.

5.5 Conclusions

Dans ce chapitre, une approche expérimentale du Friction Stir Spot Welding a été effectuée, l'objectif étant de réaliser un banc expérimental d'une part pour analyser et mieux comprendre les mécanismes régissant ce procédé, d'autre part pour permettre à terme de fournir les données expérimentales nécessaires à la calibration du modèle développé dans ces travaux. La démarche proposée ici a plus particulièrement pour but de construire un montage expérimental simulant au mieux les conditions de mise en oeuvre industrielles du Friction Stir Spot Welding. En effet, la maîtrise des conditions opératoires du procédé et notamment la mise et le maintien en position des éprouvettes est a priori un facteur influent sur les efforts générés et le domaine de soudabilité, au même titre que les paramètres procédé, la géométrie et le matériau de l'outil et des tôles à souder.

Dans un premier temps, un extrait du Cahier des Charges Fonctionnel relatif à la conception d'un montage spécifique expérimental pour le FSSW a été présenté. En plus d'intégrer des conditions proches de celles industrielles, ce cahier des charges doit intégrer l'instrumentation nécessaire et sa conception doit être suffisamment robuste et rigoureuse pour avoir une confiance suffisante dans les mesures effectuées. Par la suite, au travers de l'analyse de certaines contraintes du Cahier des Charges et du choix de la machine et de l'instrumentation, la problématique de conception est affinée. L'approche expérimentale effectuée ici s'appuie sur deux montages spécifiques expérimentaux conçus et fabriqués pour cette expérience, l'un simulant des conditions de positionnement industrielles, l'autre pas. Cette approche a pour objectif de (a) simplifier la calibration du modèle numérique, (b) estimer l'influence des conditions de mise en oeuvre du procédé sur le domaine de

soudabilité opératoire et (c) évaluer la robustesse du modèle dans une autre configuration opératoire.

Dans un second temps, les conceptions des deux montages expérimentaux ont été présentées et analysées. Une analyse technique du choix des solutions technologiques employées permet de préciser les conditions de fonctionnement des systèmes, ces conditions sont par la suite traduites de façon géométrique et conduisent à la spécification fonctionnelle des composants, et donc au passage à la fabrication des dispositifs. Le second montage intègre un système de positionnement axial d'une butée, simulant le dispositif traditionnellement monté sur un bras robot pour le FSSW. Un petit modèle de ce système permet de valider les choix de conception effectués et de s'assurer de la bonne tenue mécanique du dispositif.

Enfin, la mise en oeuvre des essais de soudage par Friction Stir Spot Welding a été présentée dans la section 5.4. L'objectif de cette première campagne d'essais a été focalisé sur l'étude de la réponse du procédé en terme d'efforts générés. L'étude est menée en ne considérant dans un premier temps que la vitesse de rotation de l'outil et la profondeur de pénétration de l'outil dans la matière comme paramètres procédé. La géométrie de l'outil est relativement simple pour commencer et on travaille sur des tôles d'aluminium 2024 de 2 mm d'épaisseur. Les résultats présentés au travers des courbes d'effort et de couple axiaux montrent une dépendance importante de ces évolutions vis-à-vis de la vitesse de rotation de la broche, notamment en ce qui concerne le premier pic d'effort et le couple maximum. Bien que la profondeur de pénétration de l'outil soit un facteur influençant la qualité et la résistance du joint soudé, ce paramètre n'influe pas sur les efforts générés durant le process. D'autre part, on montre que le procédé présente une relativement bonne répétabilité. Par la suite, on étudie l'influence des conditions expérimentales sur la réponse du procédé en termes d'effort et de couple. La même matrice d'essais est donc réalisée avec le montage butée. On observe une différence sur les maxima des courbes d'effort et de couple entre les résultats obtenus avec les deux dispositifs. On montre qu'il existe une erreur relative variant entre 10 et 20% sur les maxima de l'effort et du couple, suivant la combinaison des paramètres procédé.

Les mesures effectuées lors de cette première étude ont essentiellement été portées sur des grandeurs mécaniques. Ces mesures constituent un premier pas pour la constitution d'une base de données expérimentale. Il est cependant aussi nécessaire d'effectuer des analyses métallurgiques pour étudier la microstructure du joint soudé, et également des mesures thermiques qui permettront d'acquérir d'autres données nécessaires à la calibration du modèle.

Conclusion

Synthèse des résultats

Les procédés de soudage par friction et malaxage, présentés dans le premier chapitre, présentent cet intérêt de pouvoir souder des alliages réputés peu soudables comme les alliages d'aluminium. Nombre de tentatives de simulation du Friction Stir Welding ont déjà été réalisées, tirant notamment parti d'une description en référentiel mobile. Le Friction Stir Spot Welding a par contre été beaucoup moins considéré, les principales difficultés provenant des très grandes déformations générées associées à son aspect transitoire. Comme pour les procédés de soudage par fusion, il est possible d'identifier deux phases de la matière au cours de ce procédé : la structure solide et une phase pâteuse subissant de forts taux de déformation, qu'il est possible de modéliser comme un fluide très visqueux.

L'objectif de cette thèse a été de poser les bases d'une modélisation permettant de faire cohabiter deux phases, l'une se comportant comme un fluide qui s'écoule, l'autre restant solide et douée d'une mémoire fonction de l'histoire du chargement. La particularité de ce couplage réside dans le fait qu'une des deux phases progresse au détriment de l'autre par changement de phase. Le couplage fluide/solide a été développé dans ce travail sur la base du procédé Friction Stir Spot Welding.

Le modèle présenté, basé sur un couplage fluide/solide, permet donc une description correcte du comportement des parties fortement malaxée et solide de la structure. Une approche eulérienne lagrangienne arbitraire (ALE), dans laquelle le maillage suit la matière dans la phase solide mais pas dans la zone pâteuse, permet de simuler de nombreux tours de l'outil dans la matière tout en suivant les bords des tôles à souder pendant le procédé. D'autre part, l'histoire vécue par la matière est prise en compte dans la zone solide supportant la zone malaxée, permettant l'accès aux champs résiduels à la fin du procédé.

Le développement du couplage est basé sur l'élément fini P1+/P1, présenté dans le second chapitre. Cet élément linéaire enrichi comprend un noeud bulle, dont les degrés de liberté sont ajoutés dans l'interpolation de la vitesse, ceci permet à cet élément de pouvoir traiter, au travers d'une formulation mixte, une liaison interne de type incompressibilité. Cet élément a d'abord été développé en mécanique des fluides dans le cas d'un écoulement laminaire incompressible et d'un couplage thermomécanique fort. Il est étendu ici au cas instationnaire, le traitement des termes d'inertie s'appuie sur une approximation introduite sur l'accélération du champ bulle.

Cet élément est ensuite développé pour un comportement de solide en grandes transformations en considérant un couplage thermomécanique fort. Le problème est formulé en vitesse en vue de l'établissement du couplage, et la résolution est effectuée sur la configuration inconnue à l'instant $t+\Delta t$. L'incompressibilité plastique est assurée au travers de la formulation mixte. D'autre part, la résolution en vitesse est combinée avec la spécification

par l'utilisateur de déplacements imposés dans la mise en données.

Le couplage des éléments fluide et solide s'appuie sur leur formulation commune en température/vitesse/pression. L'interface entre les deux phases passe par les faces séparant les éléments, aussi un élément est défini comme étant complètement solide ou fluide. Le critère de « transition de phase » est défini au moyen d'une température moyenne globale de la maille considérée, calculée explicitement, et comparée à une valeur seuil définie par l'utilisateur. Les deux éléments intègrent une approche euléro-lagrangienne dans laquelle la procédure d'actualisation des noeuds de la zone fluide et de la surface libre est effectuée à la convergence du calcul. Cette procédure est effectuée en trois temps : (a) codage des noeuds du maillage à partir de la nature des éléments adjacents, (b) actualisation des noeuds appartenant à la surface libre à partir de la composante normale du champ de vitesse matérielle convergé et (c) remaillage régulier des noeuds appartenant à la partie fluide par une technique de replacement barycentrique.

Des solutions analytiques développées sur la base du problème du viscosimètre de Couette, présentées dans le troisième chapitre, ont permis de vérifier le bon comportement des éléments fluide et solide. Le comportement dynamique et le couplage thermo-mécanique de l'élément fluide ont notamment été testés avec succès au travers de deux solutions analytiques développées respectivement en mécanique instationnaire et pour un couplage (mécanique stationnaire) - (thermique instationnaire). L'élément solide a lui été vérifié pour un matériau élastoplastique en grandes transformations avec une solution développée négligeant les termes additionnels liés à la dérivée objective des contraintes. Le même support a par la suite été utilisé pour la vérification du bon comportement de la transition solide/fluide.

Une simulation du procédé Friction Stir Spot Welding, présentée dans le quatrième chapitre, a ensuite permis de tester plus en profondeur les capacités et limites du modèle numérique développé. Cette simulation, bien que simplifiée, a permis de montrer (i) la progression de la phase fluide au cours de temps, (ii) la capacité du modèle numérique à simuler plusieurs tours de l'outil et enfin (iii) la formation d'un bourrelet de matière au cours de la plongée de l'outil. Il a été constaté un effet d'emballement de la vitesse dû (i) aux fortes tractions imposées de façon constante au cours du temps et (ii) au comportement du fluide, dont la viscosité décroît en fonction de la température. Cet effet montre la nécessité d'une modélisation plus fine de l'interaction outil/matière, notamment au travers d'une loi de frottement.

En parallèle de ce travail numérique, des expériences d'investigation du procédé Friction Stir Spot Welding, menées au pôle productique de l'ENISE à Saint Étienne, ont été présentées au cours du cinquième chapitre. Les études menées ont été centrées sur l'analyse des efforts et couples générés au cours de ce procédé, et sur l'influence de la mise et du maintien en position des tôles à souder sur ceux-ci. À cet effet, deux montages spécifiques, intégrant une démarche de validation globale du procédé Friction Stir Spot Welding, ont été conçus, fabriqués et implantés sur une machine à commande numérique. Les expériences menées ont permis de montrer (i) que l'effort axial n'est pas monotone au cours du temps mais présente deux pics, (ii) une forte dépendance des effort et couple axiaux vis-à-vis de la vitesse de rotation de l'outil, (iii) une bonne répétabilité du procédé et (iv) une dépendance certaine vis-à-vis des « conditions aux limites expérimentales » des maxima des courbes d'effort et de couple au cours du procédé.

Perspectives

Le travail effectué sur le procédé Friction Stir Spot Welding ouvre des perspectives d'ordre numérique et expérimental. L'objectif final est de calibrer le modèle développé sur une base de données expérimentales, afin de valider la simulation numérique de ce procédé de soudage.

1. *Perspectives numériques :* le présent travail a été centré sur le développement du couplage fluide/solide, cependant il est nécessaire d'ajouter d'autres ingrédients pour réaliser une simulation réellement prédictive de ce procédé :
   - ⋆ La prise en compte du contact unilatéral devrait permettre de simuler la création de défaut à l'interface outil/matière mais aussi la répartition du contact entre les deux tôles à souder.
   - ⋆ L'implémentation d'une loi de frottement est nécessaire pour mieux caractériser le chargement dû à l'outil.
   - ⋆ Le couplage du modèle avec les aspects métallurgiques, dont de nombreuses lois sont déjà implémentées dans le code SYSWELD®, peut permettre de faire porter le test de transition sur des fractions volumiques de phases, recalées par la suite sur des diagrammes Temps-Température-Transformation.
   - ⋆ Pour améliorer la régularité du comportement du résidu au cours du calcul, il peut être intéressant d'une part de diminuer la discontinuité du gradient de vitesse à l'interface entre les deux phases, par exemple en introduisant une zone mixte bornée par des températures de solidus et liquidus, et d'autre part de lisser l'évolution spatiale de cette interface, une méthode de type Level Set peut alors présenter une voie d'amélioration.

2. *Perspectives expérimentales :* les premiers tests effectués sur un alliage d'aluminium 2024 avec les deux montages conçus ont pour l'instant été focalisés sur l'étude de ce procédé en termes d'efforts et de couple.
   - ⋆ Dans un premier temps, il est nécessaire de faire plus de tests pour bien maîtriser l'aspect mécanique. Il peut être intéressant d'utiliser un alliage d'aluminium de la série 6xxx, en effet les efforts générés avec cet alliage étant sensés être inférieurs (Zim09) à ceux obtenus avec une série 2xxx, des paramètres procédé supplémentaires comme la vitesse de plongée pourraient être étudiés. D'autre part, il serait intéressant de tester d'autres géométries d'outil ainsi que d'autres épaisseurs d'éprouvettes.
   - ⋆ Ensuite, il serait intéressant de caractériser mécaniquement les joints de soudure réalisés par un test à rupture. Un essai de simple recouvrement ou un essai en croix peuvent permettre d'étudier l'influence des paramètres procédé mais aussi l'influence des conditions de mise en position des tôles sur une charge critique.
   - ⋆ Dans un second temps, des études micrographiques (tests de microdureté, polissage, etc) pourraient permettre de compléter l'analyse mécanique effectuée mais aussi préparer l'analyse thermique suivante.
   - ⋆ Enfin, une fois la mécanique maîtrisée, des données thermiques sont indispensables pour la calibration ultérieure du modèle. À cet effet, une mesure thermique par thermocouples semble la plus indiquée. La position de ces thermocouples au sein de l'éprouvette doit s'appuyer sur les résultats de l'analyse micrographique, et plus précisément sur l'identification expérimentale de la taille de la zone forte-

ment malaxée. Plusieurs thermocouples peuvent être implantés dans l'épaisseur du spécimen, ainsi qu'à différents positions radiales en prenant soin de les décaler angulairement.

3. *Le calibrage du modèle* : l'opération de calibrage passe par la mise en oeuvre d'un problème inverse. Dans notre cas, les paramètres à identifier seraient ceux associés à la loi de frottement et au propriétés matériaux, plus particulièrement ceux associés au comportement fluide. La fonction coût établie pour le calibrage du modèle doit faire intervenir à la fois des quantités thermique et mécanique, l'identification peut alors soit être effectuée de façon directe, soit de manière découplée pour simplifier l'opération dans un premier temps. La procédure d'identification étant très coûteuse en temps de calcul, l'intégration de la nouvelle version parallèle du code SYSWELD® permettra de rendre possible cette identification. Une fois le modèle calibré, il sera intéressant de tester sa capacité de prédiction en dehors du domaine dans lequel il a été validé, l'utilisation de données expérimentales obtenues avec le montage butée permettra alors d'introduire une autre configuration opératoire pour ce test.

Aux perspectives précédemment citées, en continuité directe avec le travail présenté, on peut ajouter des perspectives d'ordre plus général émanant de ces travaux :

1. La simulation présentée du Friction Stir Spot Welding ainsi que les expériences menées ont été effectuées en considérant un contrôle de l'outil en position. Il s'avère d'une part que le parc machine à disposition utilisait ce type de contrôle, et d'autre part qu'il semble le plus naturel pour le FSSW (mais pas forcément pour le FSW). Cependant, certains auteurs (TPP08; TPP09) et constructeurs utilisent un contrôle de l'outil en effort, aussi la simulation du procédé avec ce type de pilotage représente un intérêt certain. Cependant, en observant les courbes expérimentales 5.38 présentées dans le cinquième chapitre, on observe que l'évolution de l'effort axial n'est pas monotone en fonction du temps (donc du déplacement, de par le pilotage de la machine). Du point de vue de la simulation numérique, ceci conduit à une instabilité de la réponse globale du système en effort (BLM00), cette réponse présentant plusieurs « turning points ». Aussi le modèle développé est insuffisant pour ce type de simulation, des méthodes de résolution à longueur d'arc ou méthodes de continuation doivent alors être envisagées.
2. Le couplage, développé dans ce travail sur la base du procédé Friction Stir Spot Welding, a été inspiré des problématiques liées à la simulation des procédés de soudage à l'arc, aussi ce travail ouvre des perspectives pour ce type de procédés. Parmi les phénomènes supplémentaires à prendre en compte, la simulation de l'effet Marangoni représente un point important, cet effet correspond à des mouvements de convection de matière observés au sein du bain fondu. Ces mouvements de matière sont générés par des gradients de tension de surface, eux-mêmes générés par des gradients de température. Aussi la simulation de cet effet nécessite l'implémentation d'un modèle de tension de surface au sein du couplage développé. D'autre part, les effets dynamiques peuvent devenir importants dans le bain fondu, aussi il peut devenir nécessaire d'ajouter des techniques de stabilisation du champ de vitesse et/ou l'implémentation d'un modèle de turbulence. Enfin, dans une vision à long terme, un couplage du modèle avec des effets électriques générés par l'arc lors du soudage

permettra de diminuer la part d'heuristique dans la modélisation du chargement associée à ce type de procédé.

Annexe A

Calcul des matrices tangentes

A.1 Matrice fluide

Le calcul de la matrice tangente fluide est ici détaillé. On rappelle que le système linéarisé d'équations semi-discrètes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{vv} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{vb} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{vb}^T & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{T}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{Bmatrix}^{(k+1)} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{K}_{Tv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{Tb} \\ \mathbf{K}_{vT} & \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{vp} & \mathbf{K}_{vb} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pb} \\ \mathbf{K}_{bT} & \mathbf{K}_{bv} & \mathbf{K}_{bp} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{T} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{p} \\ \delta\boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_T \\ \mathbf{R}_v \\ \mathbf{R}_p \\ \mathbf{R}_b \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{A.1}$$

le résidu « statique » est défini à partir des forces externes $(\mathbf{f}^{\text{ext}})^{(k)}$, convectives $(\mathbf{f}^{\text{conv}})^{(k)}$ et internes $(\mathbf{f}^{\text{int}})^{(k)}$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(k)} &= (\mathbf{f}^{\text{ext}})^{(k)} - (\mathbf{f}^{\text{conv}})^{(k)} - (\mathbf{f}^{\text{int}})^{(k)} \\ &= \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f_T^{\text{ext},(p)} - f_T^{\text{conv},(p)} - f_T^{\text{int},(p)} \\ \mathbf{f}_v^{\text{ext},(p)} - \mathbf{f}_v^{\text{conv},(p)} - \mathbf{f}_v^{\text{int},(p)} \\ -f_p^{\text{int},(p)} \end{array} \right\} \\ \mathbf{f}_b^{\text{ext}} - \mathbf{f}_b^{\text{conv}} - \mathbf{f}_b^{\text{int}} \end{array} \right\}^{(k)} \end{aligned} \tag{A.2}$$

La matrice $\mathbf{K}$ est composée à partir des contributions des sous-matrices :

$$\mathbf{K}_{xy} = -\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \mathbf{y}}, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{T}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \tag{A.3}$$

Les différents termes de la matrice de rigidité tangente sont calculés comme suit :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{TT} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} (K_{TT}^{pq}) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \Bigg(\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \left(\frac{\partial k}{\partial T^{(q)}} \boldsymbol{\nabla} T + k \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \right) \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega_e} \rho \frac{\partial C}{\partial T^{(q)}} (\boldsymbol{\nabla} T) \cdot \mathbf{v} \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega_e} \rho C (\boldsymbol{\nabla} N^{(q)}) \cdot \mathbf{v} \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega_e} 2 \frac{\partial \mu}{\partial T^{(q)}} \mathbf{D} : \mathbf{D} \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega \Bigg) \\
\mathbf{K}_{Tv} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} (\mathbf{K}_{Tv}^{pq}) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \Bigg(- \int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^{(q)}} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}) \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega_e} \rho C \boldsymbol{\nabla} T N^{(q)} \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega \Bigg) \\
\mathbf{K}_{Tb} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{Tb}^{pb} \right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \Bigg(- \int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}) \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega_e} \rho C \boldsymbol{\nabla} T N^{(b)} \bar{N}^{(p)} \mathrm{d}\Omega \Bigg) \\
\mathbf{K}_{vT} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} (\mathbf{K}_{vT}^{pq}) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} 2 \frac{\partial \mu}{\partial T^{(q)}} \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \cdot \mathbf{D} \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{vv} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} (\mathbf{K}_{vv}^{pq}) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \Bigg(\int_{\Omega_e} 2 \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{v}^{(q)}} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \cdot \mathbf{D} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \left(\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} + \int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega_e} \rho \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} N^{(q)} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega + \left(\int_{\Omega_e} \rho (\boldsymbol{\nabla} N^{(q)}) \cdot \mathbf{v} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} \Bigg) \\
\mathbf{K}_{vp} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{vp}^{pq} \right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(- \int_{\Omega_e} N^{(q)} \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{vb} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{vb}^{pb} \right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \Bigg(\int_{\Omega_e} 2 \frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \cdot \mathbf{D} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \left(\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} + \int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega_e} \rho \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} N^{(b)} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega + \left(\int_{\Omega_e} \rho (\boldsymbol{\nabla} N^{(b)}) \cdot \mathbf{v} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} \Bigg) \\
\mathbf{K}_{pv} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{pv}^{pq} \right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(- \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{pb} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{pb}^{pb} \right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(- \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{bT} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{bT}^{bq} \right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} 2 \frac{\partial \mu}{\partial T^{(q)}} \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \cdot \mathbf{D} \mathrm{d}\Omega \right)
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{bv} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{bv}^{bq}\right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \Bigg(\int_{\Omega_e} 2\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{v}^{(q)}} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \cdot \mathbf{D} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \left(\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} + \int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega_e} \rho \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} N^{(q)} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega + \left(\int_{\Omega_e} \rho (\boldsymbol{\nabla} N^{(q)}) \cdot \mathbf{v} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} \Bigg) \\
\mathbf{K}_{bp} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{bp}^{bq}\right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(- \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} N^{(q)} \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{bb} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{bb}^{bb}\right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \Bigg(\int_{\Omega_e} 2\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \cdot \mathbf{D} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \left(\int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} + \int_{\Omega_e} \mu \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \otimes \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega_e} \rho \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} N^{(b)} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega + \left(\int_{\Omega_e} \rho (\boldsymbol{\nabla} N^{(b)}) \cdot \mathbf{v} N^{(b)} \mathrm{d}\Omega \right) \mathbf{1} \Bigg)
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Remarques :

* Il est nécessaire de préciser les relations de comportement et les lois d'évolution des paramètres constitutifs pour affiner l'expression de certaines sous-matrices de rigidité.

* La formulation *mini*-élément dans le cas d'un comportement purement viscoplastique permet de simplifier l'expression des sous-matrices en tenant compte de la propriété d'orthogonalité du gradient du champ bulle à tout tenseur constant dans l'élément (Jao98; Feu05). L'interpolation du champ de vitesse étant linéaire, son gradient est constant dans l'élément :

$$
\int_{\Omega_e} N_{,i}^{(p)} N_{,j}^{(b)} \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{A.6}
$$

  ce qui permet de simplifier les sous-matrices $\mathbf{K}_{vb}$ et $\mathbf{K}_{bv}$.

* Dans la pratique, certains termes sont négligés dans la matrice tangente :

  ▷ La dérivée de la dissipation n'est pas prise en compte, ceci simplifie les sous-matrices $\mathbf{K}_{TT}, \mathbf{K}_{Tv}, \mathbf{K}_{Tb}$.
  ▷ L'évolution de la viscosité dynamique en fonction de la température est négligée, ce qui annule $\mathbf{K}_{vT}, \mathbf{K}_{bT}$.
  ▷ L'évolution des paramètres thermiques avec la température est aussi négligée, simplifiant la sous-matrice $\mathbf{K}_{TT}$.
  ▷ Si l'écoulement s'effectue à faible nombre de Reynolds, les termes convectifs mécaniques et la dérivée par rapport à la vitesse des termes convectifs thermiques peuvent être négligés dans la matrice dans un premier temps. Combinée avec les hypothèses précédentes, ceci annule les sous-matrices $\mathbf{K}_{Tv}, \mathbf{K}_{Tb}$ et simplifie $\mathbf{K}_{vv}, \mathbf{K}_{vb}, \mathbf{K}_{bv}, \mathbf{K}_{bb}$.

Ces simplifications ne sont portées que sur la matrice, le résidu est lui calculé de façon cohérente. La matrice tangente est alors de la forme :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{K}_{vp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pb} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bp} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

A.2 Matrice tangente solide

Le système linéarisé d'équations semi-discrètes obtenu pour un comportement solide s'écrit formellement de façon similaire à celui obtenu pour un comportement fluide, à ceci près que l'élasticité introduite génère une sous-matrice $\mathbf{K}_{pp}$. Le résidu « statique » s'écrit ici :

$$\mathbf{R}^{(k)} = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} f_T^{\text{ext},(p)} - f_T^{\text{int},(p)} \\ \mathbf{f}_v^{\text{ext},(p)} - \mathbf{f}_v^{\text{int},(p)} \\ - f_p^{\text{int},(p)} \end{array} \right\} \\ \mathbf{f}_b^{\text{ext}} - \mathbf{f}_b^{\text{int}} \end{array} \right\}^{(k)} \tag{A.8}$$

La matrice tangente $\mathbf{K}$ est composée à partir des contributions des sous-matrices :

$$\mathbf{K}_{xy} = -\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \mathbf{y}}, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{T}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \tag{A.9}$$

Les différents termes de la matrice de rigidité tangente peuvent être détaillés comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{TT} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} (K_{TT}^{pq}) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \left(\frac{\partial k}{\partial T^{(q)}} \boldsymbol{\nabla} T + k \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} \right) \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{Tv} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} (\mathbf{K}_{Tv}^{pq}) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(- \int_{\Omega_e} \beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}^{(q)}} \left(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p \right) N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{Tb} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{Tb}^{pb} \right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(- \int_{\Omega_e} \beta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \left(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p \right) N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{vT} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} (\mathbf{K}_{vT}^{pq}) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_p^T \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T^{(q)}} \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{vv} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} (\mathbf{K}_{vv}^{pq}) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_p^T \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{D}} \mathbf{B}_q \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{vp} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{vp}^{pq} \right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} N^{(q)} \boldsymbol{\nabla} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega \right) \\
\mathbf{K}_{vb} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{vb}^{pb} \right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_p^T \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{D}} \mathbf{B}_b \mathrm{d}\Omega \right)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{pv} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{pv}^{pq}\right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(q)} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega\right) \\
\mathbf{K}_{pp} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(K_{pp}^{pq}\right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(-\int_{\Omega_e} \frac{N^{(p)} N^{(q)}}{\kappa \Delta t} \mathrm{d}\Omega\right) \\
\mathbf{K}_{pb} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{pb}^{pb}\right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} N^{(p)} \mathrm{d}\Omega\right) \\
\mathbf{K}_{bT} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{bT}^{bq}\right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_b^T \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T^{(q)}} \mathrm{d}\Omega\right) \\
\mathbf{K}_{bv} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{bv}^{bq}\right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_b^T \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{D}} \mathbf{B}_q \mathrm{d}\Omega\right) \\
\mathbf{K}_{bp} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{bp}^{bq}\right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\nabla} N^{(b)} N^{(q)} \mathrm{d}\Omega\right) \\
\mathbf{K}_{bb} &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\mathbf{K}_{bb}^{bb}\right) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_b^T \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{D}} \mathbf{B}_b \mathrm{d}\Omega\right)
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

Remarques :

* La composante $\mathbf{K}_{pp}$ provenant de la contribution de la partie élastique du comportement du solide dépend explicitement du pas de temps.
* Dans la dérivée du résidu, seul le module tangent apparaît dans la matrice. On montre que des termes géométriques additionnels interviennent (BLM00) dans la matrice si on tient compte de la dérivée de la matrice $\mathbf{B}$ et de l'élément de volume. Dans la pratique, ces termes sont omis. Cette approximation est tolérable si les rotations restent modérées dans le problème traité.
* Dans la pratique, la prise en compte dans la matrice de l'évolution des paramètres matériau thermiques en fonction de la température est négligée.

Annexe B

Modélisation du filetage d'un outil FSSW

La conception des outils de Friction Stir Spot Welding inclut de plus en plus fréquemment la présence d'un filetage du pion. Le filetage et le sens de rotation de l'outil sont combinés de façon que les filets repoussent la matière vers le support de soudage. Cette technologie par obstacle permet d'augmenter le malaxage de la matière et entraîne une dissipation plastique plus importante. L'écoulement de matière est alors rendu plus complexe, la modélisation du filetage du pion est donc aussi importante que délicate à réaliser. On étudie dans cette annexe deux petits modèles permettant de simuler une cinématique hélicoïdale d'une particule matérielle autour de l'outil, ainsi que la représentation des efforts associés. En effet, si la cinématique est identique, une représentation des efforts cohérente avec la physique est nécessaire si l'on souhaite calibrer le modèle sur ce type de données expérimentales.

B.1 Cinématique imposée

Le modèle le plus simple consiste à imposer une cinématique hélicoïdale à une particule matérielle en contact avec l'outil *sans représenter la géométrie du filetage*. Cette technique paraît au premier abord intéressante puisque la représentation numérique d'un filetage est complexe et coûteuse en temps de calcul. On présente ici un formalisme analytique permettant d'étudier l'intérêt et les limites de ce type d'approche.

Hypothèses de calcul

* Le contact est frottant entre l'outil et la matière, le frottement étant modélisé par une loi de Coulomb.
* La perte de contact n'est pas envisagée.
* On se place dans un état stationnaire (vitesse axiale de l'outil nulle).
* On postule une cinématique sur le mouvement limite.
* La pression exercé par la matière sur l'outil est répartie uniformément.
* Le pas du filetage est supposé à droite.
* Le sens de rotation de la broche est tel que l'outil repousse la matière vers le bas.

Par la suite, on repère l'outil avec un indice (1), la matière avec un indice (2) et le bâti avec un indice (0). On écrit d'abord le distributeur de vitesses de l'outil par rapport à la

matière :

$$\mathcal{V}_{1/2} = \left\{ \begin{array}{c} \omega \mathbf{z} \\ v\mathbf{z} \end{array} \right\}_O \tag{B.1}$$

Le pas à droite implique que ω et v sont positifs. Le point O est un point de l'axe de rotation, et on désigne par M un point courant sur le rayon du pion. Sa vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{(M,1/2)} &= \mathbf{V}_{(O,1/2)} + \omega\mathbf{z} \wedge \mathbf{OM} \\ &= v\mathbf{z} + r\omega\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \tag{B.2}$$

La direction du mouvement relatif en ce point M peut donc être définie par le vecteur unitaire suivant :

$$\mathbf{t}_{(M)} = \frac{\mathbf{V}_{(M,1/2)}}{\|\mathbf{V}_{(M,1/2)}\|} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}}\mathbf{z} + \frac{r\omega}{\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}}\mathbf{e}_\theta \tag{B.3}$$

L'angle d'hélice i de la trajectoire hélicoïdale avec la direction $\mathbf{z}$ est donc tel que :

$$\begin{aligned} \cos i &= \frac{v}{\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}} \\ \sin i &= \frac{r\omega}{\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}} \end{aligned} \tag{B.4}$$

Cet angle d'hélice est représenté sur la figure (B.1).

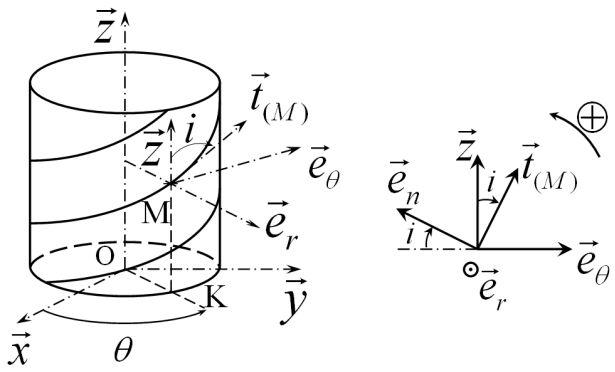


Figure B.1 – Premier modèle du pion fileté

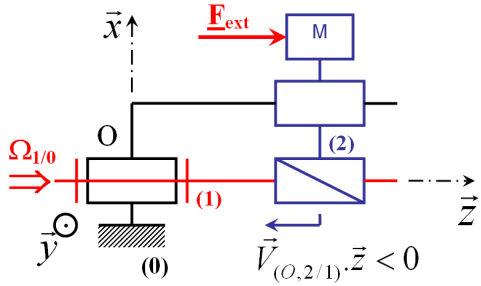


Figure B.2 – Fonctionnement « moteur » d'un système vis-écrou

On isole à présent l'outil, l'action élémentaire de la matière sur la face latérale du pion peut être représentée en un point M par un torseur élémentaire :

$$\mathrm{d}\mathcal{F}_{2\to1} = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{d}\mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_M \tag{B.5}$$

où $\mathrm{d}\mathbf{F} = -p\mathrm{d}S(\mathbf{e}_r + f\mathbf{t}_{(M)})$, f est le coefficient de frottement, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ la normale extérieure, p la pression de contact (supposée uniforme) et $\mathrm{d}S$ une surface élémentaire. Par analogie avec un système vis/écrou classique (figure B.2), on suppose le fonctionnement « moteur », c'est-à-dire que $\mathbf{F}_{(\mathrm{ext}\to2)}.\mathbf{V}_{(O,2/1)} < 0$. Les composantes de la vitesse de l'outil par rapport à la matière, et celles de l'action mécanique élémentaire de la matière sur l'outil sont représentées en un point M sur la figure B.3.

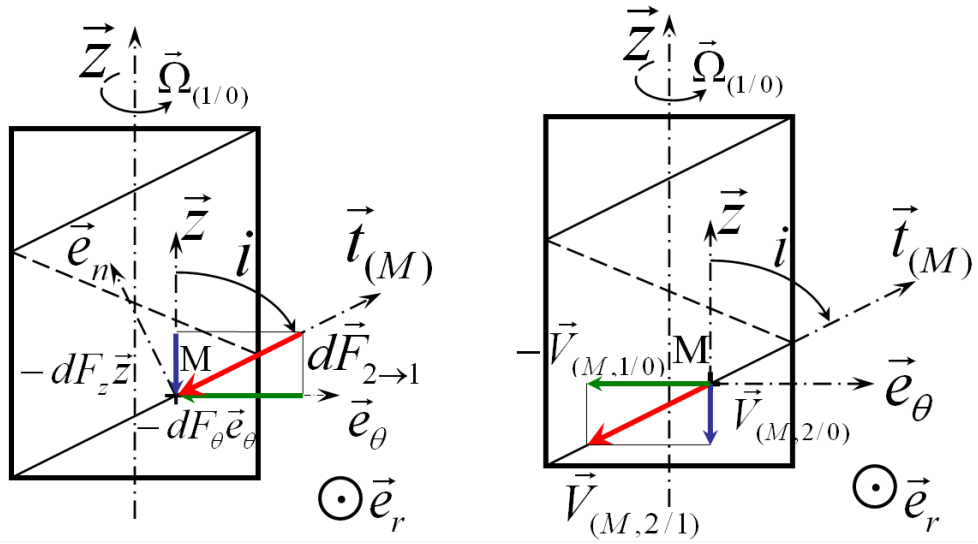


Figure B.3 – Vitesse relative outil/matière et action élémentaire matière/outil

L'effort et le couple axial générés par la matière sur l'outil se calculent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{2\to1}.\mathbf{z} = F_z &= \left(\iint_{(S)} \mathrm{d}\mathbf{F}\right).\mathbf{z}\\ \mathcal{M}_{(O,2\to1)}.\mathbf{z} = C_z &= \left(\iint_{(S)} \mathbf{OM}\wedge\mathrm{d}\mathbf{F}\right).\mathbf{z}\end{aligned} \tag{B.6}$$

On choisit d'utiliser la géométrie définie sur la figure B.4 pour le calcul.

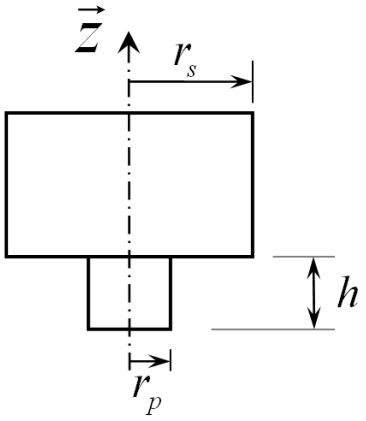


Figure B.4 – Géométrie de l'outil

Les expressions calculées de l'effort et du couple axial par intégration sur la surface de contact (extrémité du pion, surface latérale du pion et épaulement) s'écrivent :

$$\begin{aligned}F_z &= \pi p(r_s^2 - 2fr_p h\sin i)\\ \frac{C_z}{F_z} &= -\frac{2}{3}f\left(\frac{r_s^3 + 3r_p^2 h\sin i}{r_s^2 - 2fr_p h\cos i}\right)\end{aligned} \tag{B.7}$$

Commentaires

On observe que ce modèle prédit que le filetage fait diminuer l'effort axial généré par la matière sur l'outil. Pourtant, le filet ajouté au pion de l'outil repoussant la matière vers le bas au cours de sa rotation laisse penser que l'effort de la matière sur l'outil devrait donc être plus important, puisque ce même filet contribue à augmenter le malaxage de la matière. Il se trouve que ce modèle ne le prédit pas, précisément parce que la géométrie considérée du pion est purement cylindrique, la normale à la surface latérale est la direction radiale. Aussi, la cinématique hélicoïdale imposée génère une action élémentaire en chaque point, dont la composante axiale contribue à décharger la résultante d'effort axiale.

On peut donc en conclure que ce modèle est intéressant si on souhaite étudier l'écoulement de la matière au voisinage de l'outil, il devient par contre beaucoup moins pertinent si on souhaite corréler la résultante d'effort issue d'un calcul numérique avec des données expérimentales.

B.2 Modélisation du filet

Le modèle précédent nous a montré qu'une cinématique imposée sur une géométrie cylindrique ne suffit pas pour modéliser correctement le filetage du pion, il est nécessaire de considérer la géométrie du filet pour améliorer la modélisation de l'effort axial.

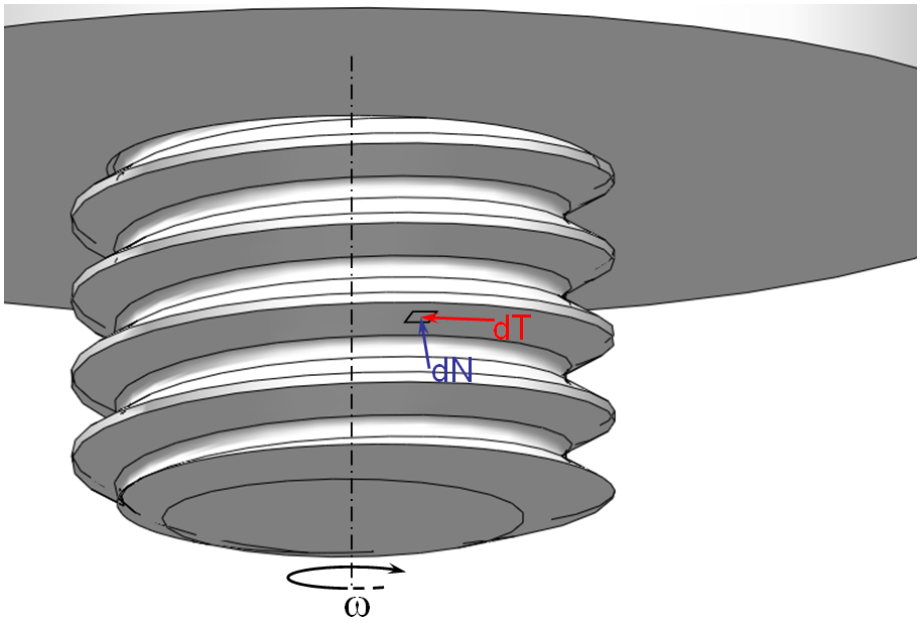


Figure B.5 – Action mécanique élémentaire de la matière sur un pan de filet

La figure B.5 montre l'action mécanique élémentaire générée par la matière sur une surface élémentaire positionnée sur un pan de filet. La normale au contact est telle que la composante normale contribue à faire croître l'effort axial.

Il est possible d'estimer l'effort axial et le couple généré, par analogie avec un système vis-écrou, en modélisant la géométrie du filet (ABB+04). *On commence par suivre cette*

approche en se plaçant dans le cas d'une liaison vis-écrou, qu'on particularise par la suite au cas de l'outil de Friction Stir Spot Welding.

Hypothèses de calcul : (liaison vis-écrou)

- ∗ L'outil est animé d'une vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}_{(1/2)} = -\Omega\mathbf{z}$ avec $\Omega > 0$, et l'effort de la matière sur l'outil $\mathbf{F}_{2\to1} = -F_z\mathbf{z}$, $F_z > 0$ de manière que $\mathbf{F}_{2\to1}.\mathbf{V}_{(O,1/2)} < 0$.
- ∗ Le coefficient de frottement f est supposé constant.
- ∗ Le contact entre la matière et le filet est réalisé sur une surface hélicoïdale de largeur e petite devant le rayon moyen du filetage.
- ∗ La répartition de la pression de contact est uniforme sur la largeur du filet, elle est notée p_{moy}.

La modélisation de la géométrie du filet est présentée sur la figure B.6

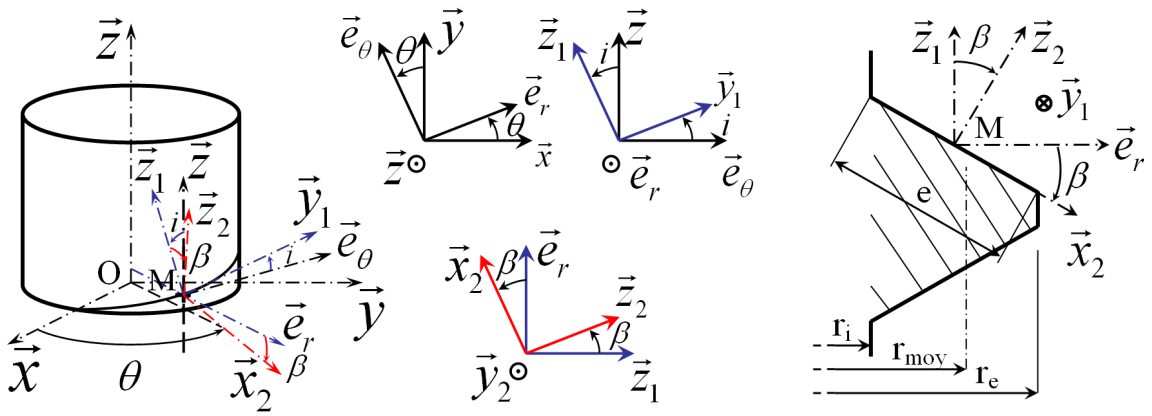


Figure B.6 – Modèle de filet

On définit l'angle d'hélice i, supposé positif, calculé sur le rayon moyen r_{moy} :

$$\tan i = \frac{p}{2\pi r_{\text{moy}}} \tag{B.8}$$

où p est le pas de l'hélice. L'action élémentaire en un point M de la matière sur l'outil s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_{2\to1} = -p\mathrm{d}S(\mathbf{z}_2 - f\mathbf{y}_1) \tag{B.9}$$

En intégrant sur la surface de contact (extrémité du pion, filet et épaulement), il vient les expressions des effort et couple axiaux suivantes :

$$\begin{aligned} F_z &= p_{\text{moy}}\left(\pi r_s^2 + \frac{he}{\tan i}\left(\cos\beta\cos i - f\sin i\right)\right) \\ \frac{C_z}{F_z} &= -\frac{2\pi}{3}\left(\frac{f r_s^3 + 3\frac{her_{\text{moy}}}{2\pi\tan i}\left(\cos\beta\sin i + f\cos i\right)}{\pi r_s^2 + \frac{he}{\tan i}\left(\cos\beta\cos i - f\sin i\right)}\right) \end{aligned} \tag{B.10}$$

Commentaires :

- ⋆ Dans le cas du Friction Stir Spot Welding, l'outil est animé d'une vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}_{(1/2)} = \Omega\mathbf{z}$ avec $\Omega > 0$, et l'effort de la matière sur l'outil est donné par

$\mathbf{F}_{2\to1} = F_z\mathbf{z}$, $F_z > 0$, on se retrouve alors dans la configuration de la figure B.5, le contact étant principalement établi sur la face inférieure du filet. Ce mode correspond aussi à un fonctionnement « moteur » ($\mathbf{F}_{2\to1}.\mathbf{V}_{(O,1/2)} < 0$). On montre que les expressions (B.10), obtenues pour une liaison vis-écrou à partir des hypothèses précédemment formulées, sont identiques dans le cas de l'outil Friction Stir Spot Welding dans la configuration présentée sur la figure B.5.

⋆ Dans l'expression de l'effort axial (B.10), on observe que dans les termes provenant de la contribution du filetage, le premier traduit la projection suivant l'axe de rotation de la somme des actions élémentaires *normales* au filet, le second représente cette même projection de la somme des composantes élémentaires *tangentielles*. Cette seconde contribution est plus faible que la première si la condition $|\cos\beta\cos i| \geq |f\sin i|$ est vérifiée, ce qui est toujours le cas si on considère des valeurs usuelles pour les dimensions du filet. On en déduit que la modélisation géométrique du filetage conduit à augmenter l'effort axial généré par la matière sur l'outil, ce qui est cohérent avec la physique.

B.3 Comparaison des deux modèles

On effectue ici la comparaison de l'estimation de l'effort axial donnée par les deux modèles présentés. On définit l'erreur relative suivante :

$$\varepsilon = \left|\frac{F_z^{\text{filet}} - F_z^{\text{imp}}}{F_z^{\text{filet}}}\right| \tag{B.11}$$

où F_z^{filet} est l'effort donné par la relation (B.10), et F_z^{imp} est donné par la relation (B.7). L'erreur ε est une fonction de la géométrie de l'outil, du coefficient de frottement et de la géométrie du filet. Pour la comparaison, la géométrie de l'outil et celle du filet sont fixées, et on étudie l'évolution de cette erreur en fonction du coefficient de frottement f. On montre que l'erreur calculée présente la forme algébrique suivante :

$$\varepsilon = \left|\frac{Af + B}{Cf + D}\right| \tag{B.12}$$

où les quantités A, B, C et D sont fonction de la géométrie de l'outil et de celle du filet :

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r_p - e \\ B &= e\frac{\cos\beta}{\tan i} \\ C &= -e \\ D &= e\frac{\cos\beta}{\tan i} + \frac{\pi r_s^2}{h\cos i} \end{aligned} \tag{B.13}$$

Pour affiner la comparaison, on effectue une application numérique en considérant les valeurs numériques des paramètres données dans le tableau B.1. Pour cette comparaison, le rayon r_{moy} défini pour la modélisation de la géométrie du filetage est assimilé à r_p, rayon nominal du pion défini dans le cadre du modèle à cinématique imposée.

Quantités	Valeurs	Quantités	Valeurs
r_p	2 mm	p (pas)	0.7 mm (M4)
r_s	5 mm	$\tan i = \frac{p}{2\pi r_p}$	$i \simeq 3.2°$
h	3 mm	$d_1 = d - 1.0825p$	$d_1 \simeq 3.24$ mm
-	-	$e = \frac{d-d_1}{2\cos\beta}$	$e = 0.437$mm

Tableau B.1 – Valeurs numériques des paramètres

L'erreur relative est un quotient de deux fonctions affines du coefficient de frottement, elle varie donc comme une fonction homographique de ce même coefficient. La figure B.7 présente son tracé pour les valeurs données.

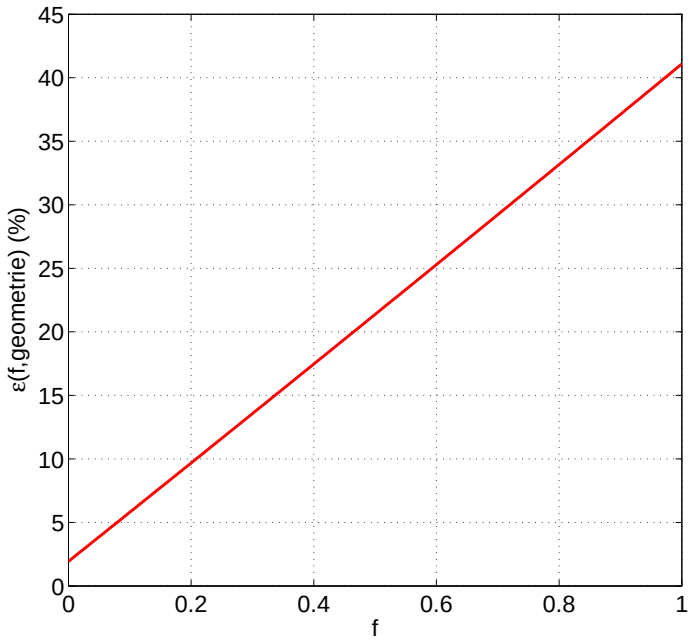


Figure B.7 – Erreur relative sur l'effort axial à géométrie fixée

Pour cette géométrie, si l'on considère un contact sec acier/acier avec un coefficient de frottement variant généralement entre 0.2 et 0.3, l'erreur relative de prédiction de l'effort axial entre les deux modèles varie de 10 à environ 15 %. Lors de la calibration d'un modèle numérique, cette différence peut conduire à des paramètres identifiés complètement différents.

Bibliographie

[ABB+04] M. Aublin, R. Boncompain, M. Boulaton, D. Caron, É. Jeay, B. Lacage et J. Réa : *Systèmes mécaniques : Théorie et dimensionnement*. Dunod, Paris, 2004.

[ABF84] D.N. Arnold, F. Brezzi et M. Fortin : A stable finite element for the Stoke equations. *Calcolo*, 21:337–344, 1984.

[ACD+99] M. Aublin, A. Charpantier, J.P. Delobel, B. Leroux, C. Muret et D. Taraud : *Exploitation du concept G.P.S. et de la normalisation pour la Spécification Géométrique des Produits*. CERPET, 1999. Disponible sur www.cnr-cmao.ens-cachan.fr.

[AFGN10] M. Assidi, L. Fourment, S. Guerdoux et T. Nelson : Friction model for friction stir welding process simulation : Calibrations from welding experiments. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2010.

[AM10] M. Awang et V.H. Mucino : Energy generation during Friction Stir Spot Welding (FSSW) of Al 6061-T6. *Materials and manufacturing Processes*, 25:167–174, 2010.

[AMFD05] M. Awang, V.H. Mucino, Z. Feng et S.A. David : Thermo-Mechanical Modeling of Friction Stir Spot Welding (FSSW) Process : Use of an Explicit Adaptative Meshing Scheme. *SAE International*, pages Paper Number : 2005–01–1251, 2005.

[AMK+08] S.G. Arul, S.F. Miller, G.H. Kruger, T.Y. Pan, P.K. Mallick et A.J. Shih : Experimental study of joint performance in spot friction welding of 6111-T4 aluminium alloy. *Science and Technology of Welding and Joining*, 13:629–637, 2008.

[Ans07] Bernard Anselmetti : *Cotation fonctionnelle*. Hermès, 2007. Volume 1,2 & 3.

[Arb08] W.J Arbegast : A flow-partitioned deformation zone model for defect formation during Friction Stir Welding. *Scripta Materiala*, 58:372–376, 2008.

[Bas06a] Olivier Basset : *Simulation numérique d'écoulements multi-fluides sur grille de calcul*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 2006.

[Bas06b] Arnaud Bastier : *Modélisation du soudage d'alliages d'aluminium par friction et malaxage*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2006.

[Bat96] K.J. Bathe : *Finite Element Procedures.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.

[BCCF01] J. Besson, G. Cailletaud, J.L. Chaboche et S. Forest : *Mécanique non linéaire des matériaux.* Hermès, 2001.

[BEB+08] S. Bozzi, A.L. Etter, T. Baudin, A. Robineau et J.C. Goussain : Mechanical Behaviour and Microstructure of Aluminum-Steel Sheets Joined by FSSW. *Hindawi Publishing Corporation*, 2008. 8 pages.

[Ben89] David J. Benson : An efficient, accurate, simple ALE method for nonlinear finite element programs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72:305–350, 1989.

[Ber] Jean-Michel Bergheau : Modélisation numérique des procédés de soudage. *Techniques de l'Ingénieur, BM 7 758.*

[BF91] F. Brezzi et M. Fortin : *Mixed and hybrid finite elements methods.* New York, Springer-Verlag, 1991. Springer series in computational mathematics 15.

[BF04] M. Bellet et V.D. Fachinotti : ALE method for solidification modelling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:4355–4381, 2004.

[BF08] Jean-Michel Bergheau et Roland Fortunier : *Finite element simulation of heat transfert.* Wiley, 2008.

[BH82] A.-N. Brooks et T.-J.-R. Hughes : Streamline UpWind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.

[BHEB+10] S. Bozzi, A.L. Helbret-Etter, T. Baudin, V. Closek, J.G. Kerbiguet et B. Criqui : Influence of FSSW parameters on fracture mechanisms of 5182 aluminium welds. *Journal of Materials Processing Technology*, 210:1429–1435, 2010.

[BHSF06] G. Buffa, J. Hua, R. Shivpuri et L. Fratini : A continuum based fem model for friction stir welding - model development. *Materials Science and Engineering A*, 419:389–396, 2006.

[BLM00] T. Belytschko, W.-K. Liu et B. Moran : *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures.* Wiley, 2000.

[BVLJ04] J.M. Bergheau, Y. Vincent, J.B. Leblond et J.F. Jullien : Viscoplastic behaviour of steels during welding. *Science and Technology of Welding and Joining*, 9:323–330, 2004.

[Caz] Roland Cazes : Soudage par friction-malaxage. *Techniques de l'Ingénieur, BM 7 746.*

[CB93] D. Chapelle et K.J. Bathe : The Inf-Sup test. *Computers & Structures*, 47:537–545, 1993.

[CB98] J.L. Chenot et F. Bay : An overview of numerical modelling techniques. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81:8–15, 1998.

[CFM02] J.-L. Chenot, L. Fourment et K. Mocellin : Numerical treatment of contact and friction in FE simulation of forming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 125-126:45–52, 2002.

[CJ59] H.-S. Carslaw et J.-C. Jaeger : *Conduction of heat in solids*. Oxford, Clarendon press – cop., 1959. Second edition.

[CK03] C.M. Chen et R. Kovacevic : Finite element modeling of friction stir welding - thermal and thermomechanical analysis. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 43:1319–1326, 2003.

[CS05] P.A. Colegrove et H.R. Shercliff : 3-Dimensional CFD modelling of flow round a threaded friction stir welding tool profile. *Journal of Materials Processing Technology*, 169:320–327, 2005.

[DGH82] J. Donea, S. Giuliani et J.P. Halleux : An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33:689–723, 1982.

[DR09] J.A. Dantzig et M. Rappaz : *Solidification*. EPFL Press, Lausanne, 2009.

[EB07] K. Elangovan et V. Balasubramanian : Influences of pin profile and rotational speed of the tool on the formation of friction stir processing zone in AA2219 aluminium alloy. *Materials Science and Engineering A*, 459:7–18, 2007.

[EB08] K. Elangovan et V. Balasubramanian : Influences of tool pin profile and tool shoulder diameter on the formation of friction stir processing zone in AA6061 aluminium alloy. *Materials & Design*, 29:362–373, 2008.

[ESGB82] M.S. Engelman, R.L. Sani, P.M. Gresho et M. Bercovier : Consistent vs. Reduced integration penalty methods for incompressible media using several old and new elements. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2:25–42, 1982.

[FBB07] É. Feulvarch, F. Boitout et J.-M. Bergheau : Friction Stir Welding : modélisation de l'écoulement de la matière pendant la phase de soudage. *European Journal of Computational Mechanics*, 16:865–887, 2007. Spécial « Mécanique des fluides ».

[FES+05] Z. Feng, J.J. Eberhardt, P.S. Sklad, M.L. Santella, T. Pan, R.J. Steel, S.M. Packer, Degen, Cassandra, M. Kuo et R.S. Bhatnagar : Friction Stir Welding and Processing of Advanced Materials. *FY Progress*, pages Paper Number : 2005–01–1248, 2005.

[Feu05] Éric Feulvarch : *Modélisation numérique du soudage par friction-malaxage (Friction Stir Welding).* Thèse de doctorat, Université Jean Monnet de Saint Étienne, 2005.

[FGBB05] É. Feulvarch, Y. Gooroochurn, F. Boitout et J.-M. Bergheau : 3D Modelling of Thermofluid Flow in Friction Stir Welding. *In 7th Int. Conf. On Trends in Welding Research*, Pine Mountain, Georgia, USA, 16–20 May 2005. S.A. David, T. DebRoy, J.C. Lippold, H.B. Smartt, J.M. Vitek editors, p. 261–266.

[FH98] Robert M. Ferencz et Thomas J.R. Hughes : *Iterative Finite Element Solutions in Nonlinear Solid Mechanics.* Elsevier Science, 1998. Handbook of numerical analysis, Vol. VI.

[FMS+05] É. Feulvarch, N. Moulin, P. Saillard, T. Lornage et J.-M. Bergheau : 3D simulation of glass forming process. *Journal of Materials Processing Technology*, 164-165:1197–1203, 2005.

[FSD+05] Z. Feng, M.L. Santella, S.A. David, R.J. Steel, S.M. Packer, T. Pan, M. Kuo et R.S. Bhatnagar : Friction Stir Spot Welding of Advanced High-Strength Steels - A feasibility Study. *SAE International*, pages Paper Number : 2005–01–1248, 2005.

[FWDS07] Z. Feng, X.L. Wang, S.A. David et P.S. Sklad : Modelling of residual stresses and property distributions in friction stir welds of aluminium alloy 6061-T6. *Science and Technology of Welding and joining*, 12:348–356, 2007.

[Gao99] D.M. Gao : A Three-Dimensional hybrid Finite Element - volume tracking model for mould filling in casting processes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29:877–895, 1999.

[Ger86] P. Germain : *Mécanique X.* Ellipses. École Polytechnique, 1986.

[GK91] S. Ghosh et N. Kikuchi : An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for large deformation analysis of elastic-viscoplastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 86: 127–188, 1991.

[GR86a] V. Girault et P.-A. Raviart : *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations.* Berlin New York, Springer-Verlag, 1986. Collection lecture notes in mathematics.

[GR86b] V. Girault et P.-A. Raviart : *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms.* Berlin New York, Springer-Verlag, 1986. Springer series in computational mathematics 5.

[GRP07] F. Gratecap, G. Racineux et A. Poitou : Choix et optimisation de l'outil et des paramètres de soudage en Friction Stir Welding. *In 18eme Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, 27-31 août 2007.

[GS02] O. Grong et H.R. Shercliff : Microstructural modelling in metals processing. *Progress in Materials Science*, 47:163–282, 2002.

[GSE98] P.-M. Gresho, R.-L. Sani et M.-S. Engelman : *Incompressible flow and the finite element method : advection-diffusion and isothermal laminar flow.* Chichester New York, Wiley, 1998.

[GSN05] A. Gerlich, P. Su et T.H. North : Tool penetration during friction stir spot welding of Al and Mg alloys. *Journal of Materials Science*, 40:6473–6481, 2005.

[Gue07] Simon Guerdoux : *Numerical simulation of the Friction Stir Welding Process.* Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 2007.

[Gue10] Émilie Le Guen : *Étude du procédé de soudage hybride laser/MAG : Caractérisation de la géométrie et de l'hydrodynamique du bain de fusion et développement d'un modèle 3D thermique.* Thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud, 2010.

[Hab84] Robert B. Haber : A mixed eulerian-lagrangian displacement model for large-deformation analysis in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 43:277–292, 1984.

[Ham08] Makhlouf Hamide : *Modélisation numérique du soudage à l'arc des aciers.* Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 2008.

[HB08] Thomas J.R. Hughes et Ted Belytschko : *NonLinear Finite Element Analysis.* Paris, 8–12 Dec 2008.

[Hil67] Rodney Hill : *The mathematical theory of plasticity.* Oxford , Clarendon Press, 1967.

[HJD+06] P. Heurtier, M.J. Jones, C. Desrayaud, J.H. Driver, F. Montheillet et D. Allehaux : Mechanical and thermal modelling of friction stir welding. *Journal of Materials Processing Technology*, 171:348–357, 2006.

[HLBF09] T. Heuzé, J.-B. Leblond, J.-M. Bergheau et É. Feulvarch : Formulation instationnaire d'un élément P1+/P1 pour la modélisation des couplages fluide/solide dans les procédés d'assemblage à haute température. *In Actes du 9e Colloque National en Calcul des Structures*, volume 1, Giens, 25–29 May 2009. Éditions Hermès, Paris.

[HLBF10] T. Heuzé, J.-B. Leblond, J.-M. Bergheau et É. Feulvarch : A finite element for laminar flow of incompressible fluids with inertia effects and thermomechanical coupling. *European Journal of Computational Mechanics*, 19:293–304, 2010.

[HLZ81] T.J.R. Hughes, W.K. Liu et T.K. Zimmerman : Lagrangian-Eulerian Finite Element formulation for incompressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29:329–349, 1981.

[HN81] C.W. Hirt et B.D. Nichols : Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39:201–225, 1981.

[HO80] E. Hinton et D.-R.-J. Owen : *Finite elements in Plasticity : theory and practice*. Swansea, U.K. , Pineridge Press, 1980.

[HSG07] Y. Hovanski, M.L. Santella et G.J. Grant : Friction stir spot welding of hot-stamped boron steel. *Scripta Materiala*, 57:873–876, 2007.

[Hug87] Thomas J.R. Hughes : *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover, 1987.

[Jao98] Olivier Jaouen : *Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces coulées*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 1998.

[KFT+06] Y.G. Kim, H. Fujii, T. Tsumura, T. Tomazaki et K. Nakata : Three defect types in friction stir welding of aluminum die casting alloy. *Materials Science and Engineereing A*, 415:250–254, 2006.

[KKRS06] M.Z.H Kandkar, J.A. Khan, A.P. Reynolds et M.A. Sutton : Predicting residual thermal stresses in friction stir welded metals. *Journal of Materials Processing Technology*, 174:195–203, 2006.

[KT01] M. Kumagai et S. Tanaka : Method of Spot Joining for Aluminum Alloy. Japan patent 259863, 25 Septembre 2001.

[LBC86] W.K. Liu, T. Belytschko et H. Chang : An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for path-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:227–245, 1986.

[LCBD09] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, A. Benallal et R. Desmorat : *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 2009. 3e édition.

[LCSB88] W.K. Liu, H. Chang, J.S. Shen et T. Belytschko : Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68:259–310, 1988.

[LD84] J.B. Leblond et J. Devaux : A new kinetic model for anisothermal metallurgical transformations in steels including effect of austenite grain size. *Acta Metallurgica*, 1:137–146, 1984.

[LDD88] J.B. Leblond, J. Devaux et J.C. Devaux : Simulation numérique de l'essai d'implant. *Soudage et techniques connexes*, 42:312–324, 1988.

[LDD89a] J.B. Leblond, J. Devaux et J.C. Devaux : Mathematical modelling of transformation plasticity in steels I : case of ideal-plastic phases. *International Journal of Plasticity*, 5:551–572, 1989.

[LDD89b] J.B. Leblond, J. Devaux et J.C. Devaux : Mathematical modelling of transformation plasticity in steels Ii : coupling with strain hardening phenomena. *International Journal of Plasticity*, 5:573–591, 1989.

[Lin01a] Lars-Erik Lindgren : Finite Element modeling and simulation of welding. PART 1 : Increased complexity. *Journal of thermal stresses*, 24:141–192, 2001.

[Lin01b] Lars-Erik Lindgren : Finite Element modeling and simulation of welding. PART 2 : Improved material modeling. *Journal of thermal stresses*, 24:195–231, 2001.

[Lin01c] Lars-Erik Lindgren : Finite Element modeling and simulation of welding. PART 3 : Efficiency and integration. *Journal of thermal stresses*, 24:305–334, 2001.

[Lin06] L.-E. Lindgren : Numerical modelling of welding. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:6710–6736, 2006.

[LMD86a] J.B. Leblond, G. Mottet et J.C. Devaux : A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations - I. Derivation of general relations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34:395–409, 1986.

[LMD86b] J.B. Leblond, G. Mottet et J.C. Devaux : A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations - II. Study of classical plasticity for ideal-plastic phases. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34:411–432, 1986.

[LMDD85] J.B. Leblond, G. Mottet, J. Devaux et J.C. Devaux : Mathematical models of anisothermal phase transformations in steels, and predicted plastic behaviour. *Material Science and Technology*, 1:815–822, 1985.

[LMW02] H.P. Langtangen, K.A. Mardal et R. Winther : Numerical methods for incompressible flow. *Advances in Water Resources*, 25:1125–1146, 2002.

[LPCT06] S. Lathabai, M.J. Painter, G.M.D. Cantin et V.K. Tyagi : Friction spot joining of an extruded Al-Mg-Si alloy. *Scripta Materiala*, 55:899–902, 2006.

[LPD+97] J.B. Leblond, D. Pont, J. Devaux, D. Bru et J.M. Bergheau : *Metallurgical and Mechanical Consequences of Phase Transformations in Numerical Simulations of Welding Processes*, volume 42, chapitre 4, pages 61–89. ASM International, 1997. ISBN 0-87170-616-4.

[LSJ+03] T.J. Lienert, W.L. Stellwag, J.R., B.B. Grimmett et R.W. Warke : Friction Stir Welding Studies on Mild Steel. *Welding research*, 2003. Supplement to the welding journal.

[Mah07] R.S. Mishra & M.W. Mahoney, éditeur. *Friction Stir Welding and Processing*. ASM International, 2007.

[MDB99] N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko : A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Enginering*, 46:131–150, 1999.

[MG91] O.R. Myhr et O. Grong : Process modeling applied to 6082-t6 aluminum weldments. part 1 : Reaction kinetics. part 2 : Applications of model. *Acta Metallurgica*, 39(11):2693–2708, 1991.

[MJ99] M. Médale et M. Jaeger : A finite element thermal analysis of flows with free and moving boundaries. *International Journal of Thermal Sciences*, 38:267–276, 1999.

[MM05] R.S. Mishra et Z.Y. Ma : Friction Stir Welding and Processing. *Material Science and Engineering*, 50:1–78, 2005.

[MMM+00] R.S. Mishra, M.W. Mahoney, S.X. McFadden, N.A. Mara et A.K. Mukherjee : High strain rate superplasticity in a Friction Stir Processed 7075 Al alloy. *Scripta Materiala*, 42:163–168, 2000.

[MRE08] S. Mandal, J. Rice et A.A. Elmustafa : Experimental and numerical investigation of the plunge stage in friction stir welding. *Journal of Materials Processing Technology*, 203:411–419, 2008.

[MRP+06] D. Mitlin, V. Radmilovic, T. Pan, J. Chen, Z. Feng et M.L. Santella : Structure-properties relations in spot friction welded (also known as friction stir spot welded) 6111 aluminum. *Materials Science and Engineering A*, 441:79–96, 2006.

[MXF07] M. Médale, C. Xhaarda et R. Fabbroc : Un modèle numérique thermo-hydraulique pour l'étude du soudage laser impulsionnel. *Comptes Rendus Mécanique*, 335:280–286, 2007.

[NGF02] D. N'Dri, A. Garon et A. Fortin : Incompressible Navier-Stokes computations with stable and stabilized space-time formulations : a comparative study. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 18:495–512, 2002.

[Oka00] H. Okamura : Visualization of material flow in an autogeneous Friction Stir Weld. *In J. Japan Weld. Soc.*, volume 69(7), pages 565–571, Japan, 2000.

[Pan] T. Pan : Friction stir spot welding (FSSW) - A literature review. *In SAE Technical paper no. 2007-01-1702*, Warrendale. PA : Society of Automotive Engineers.

[Pir88] Olivier Pironneau : *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. Collection Recherches en Mathématiques Appliqués, 1988.

[PJW+] T.Y. Pan, A. Joaquin, D.E. Wilkosz, L. Reatherford, J.M. Nicholson, Z. Feng et M.L. Santella : Spot friction welding for sheet aluminum joining. vu le 08/07/10 sur www.ornl.gov/ webworks/cppr/y2001/pres/120980.pdf.

[RBD98] Michel Rappaz, Michel Bellet et Michel Deville : *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*. Presses Polytechniques et universitaires romandes, 1998. Traité des matériaux, volume 10.

[Red82] J.-N. Reddy : On the penalty function methods in the finite element analysis of flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2:151–171, 1982.

[RM03] S. Rabier et M. Médale : Computation of free surface flows with a projection FEM in a moving mesh framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:4703–4721, 2003.

[Sal02] Jean Salençon : *De l'élastoplasticité au calcul à la rupture*. École Polytechnique, 2002.

[SdS04] C. Schilling et J. dos Santos : Method and device for joining at least two adjoining work pieces by Friction Welding. US patent 6,722,556, 20 Avril 2004.

[SFC07] A. Scialpi, L.A.C. De Filipis et P. Cavaliere : Influence of shoulder geometry on microstructure and mechanical properties of friction stir welded 6082 aluminium alloy. *Materials & Design*, 28:1124–1129, 2007.

[SGA03] M. Santella, G. Grant et W. Arbegast : Plunge testing to evaluate tool materials for friction stir welding of 6061+20wt%Al2O3 composite. *In Proceedings of the 4th International Symposium on Friction Stir Welding*, Part City, USA, 2003.

[SGLG81a] R.-L. Sani, P.-M. Gresho, R.-L. Lee et D.-F. Griffiths : The cause and the cure (!) of the spurious pressures generated by certain FEM solutions of the incompressible Navier-Stokes equations : part 1. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1:17–43, 1981.

[SGLG81b] R.-L. Sani, P.-M. Gresho, R.-L. Lee et D.-F. Griffiths : The cause and the cure (!) of the spurious pressures generated by certain FEM solutions of the incompressible Navier-Stokes equations : part 2. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1:171–204, 1981.

[SH05] H. Schmidt et J. Hattel : A local model for the thermomechanical conditions in friction stir welding. *Modelling and simulation in materials science and engineering*, 13:77–93, 2005.

[SHR04] C.B. Smith, J.F. Hinrichs et P.C. Ruehl : Friction Stir and Friction Stir Spot Welding - Lean, Mean and Green. *In Detroit American Welding Society Sheet Metal Conference*, 25 Mai 2004.

[SHW04] H. Schmidt, J. Hattel et J. Wert : An analytical model for the heat generation in friction stir welding. *Modelling and simulation in materials science and engineering*, 12:143–157, 2004.

[SK03] M. Song et R. Kovacevic : Thermal modeling of friction stir wlding in a moving coordinate system and its validation. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 43:605–615, 2003.

[SMY+01] R. Sakano, K. Murakami, K. Yamashita, T. Hyoe, M. Fujimoto, M. Inuzuka, U. Nagao et H. Kashiki : Development of spot FSW

robot system for automobile body members. *In Third International Symposium of Friction Stir Welding*, Kobe, Japan, 2001.

[SSL+08] Q.Y. Shi, J. Silvanus, Y. Liu, D.Y. Yan et H.K. Li : Experimental study on distortion of al-6013 plate after friction stir welding. *Science and Technology of Welding and Joining*, 13:472–478, 2008.

[SYS07] SYSWELD® : *ESI Group*, 2007. User's Manual.

[SZK05] V. Soundararajan, S. Zekovic et R. Kovacevic : Thermo-mechanical model with adaptative boundary conditions for friction stir welding of Al 6061. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 45:1577–1587, 2005.

[TDM96] M.F. Tome, B. Duffy et S. Mckee : A numerical technique for solving unsteady non newtonian free surface flows. *Journal of non newtonian fluid mechanics*, 62:9–34, 1996.

[Tho81] François Thomasset : *Implementation of finite element methods for Navier-Stokes equations.* New York, Springer-Verlag, 1981.

[TNH+91] W.-M. Thomas, E.-D. Nicholas, J.-C. Nedd Ham, M.-G. Murch, P. Templesmith et C.-J. Dawes : Friction stir butt welding. International patent application no. PCT/GB92/02203 and GBpatent application no. 9125978.8, 6 Dec 1991.

[TNS] W.M. Thomas, E.D. Nicholas et S.D. Smith. *In* T.J. Lienert (Eds.) Aluminum 2001 S.K. Das, J.G. Kaufman, éditeur : *Proceedings of the TMS 2001 Aluminum Automotive and Joining Sessions, TMS.*

[TPP08] V.X. Tran, J. Pan et T. Pan : Fatigue behavior of aluminum 5754-O and 6111-T4 spot friction welds in lap-shear spcimens. *International Journal of Fatigue*, 30:2175–2190, 2008.

[TPP09] V.X. Tran, J. Pan et T. Pan : Effects of processing time on strengths and failure modes of dissimilar spot friction welds betwen aluminum 5754-O and 7075-T6 sheets. *Journal of Materials Processing Technology*, 209:3724–3739, 2009.

[TUT07] Y. Tozaki, Y. Uematsu et K. Tokaji : Effect of tool geometry on microstructure and static strength in friction stir spot welded aluminium alloys. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 47:2230–2236, 2007.

[Uly02] P. Ulysse : Three-dimensional modeling of the friction stir-welding process. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 42: 1549–1557, 2002.

[UTT+08] Y. Uematsu, K. Tokaji, Y. Tozaki, T. Kurita et S. Murata : Effect of re-filling probe hole on tensile failure and fatigue behaviour of friction stir spot welded joints in Al-Mg-Si alloy. *International Journal of Fatigue*, 30:1956–1966, 2008.

[WB82] A.M. Winslow et R.D Barton : *Rescaling of equipotential smoothing*. Lawrence Radiation Laboratory, Livermore (CA), 1982. UCI-19486.

[Win63] A.M. Winslow : *Equipotential zoning of two dimensional meshes*. Lawrence Radiation Laboratory Report, 1963. University of California, UCRL-7312.

[WL07] D.-A. Wang et S.-C. Lee : Microstructures and failure mechanisms of friction stir spot welds of aluminium 6061-T6 sheets. *Journal of materials Processing Technology*, 186:291–297, 2007.

[ZC04] X.K. Zhu et Y.J. Chao : Numerical simulation of transient temperature and residual stresses in friction stir welding of 304L stainless steel. *Journal of Materials Processing Technology*, 146:263–272, 2004.

[Zim09] Sandra Zimmer : *Contribution à l'industrialisation du soudage par friction et malaxage*. Thèse de doctorat, ENSAM de Metz, 2009.

[ZLLB09] S. Zimmer, L. Langlois, J. Laye et R. Bigot : Experimental investigation of the influence of the FSW plunge processing parameters on the maximum generated force and torque. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 47:201–216, 2009.

[ZT00] O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor : *The finite element method*. BH, 2000. Volume 1 & 2, Solid Mechanics, fifth edition.

[ZZ07a] Z. Zhang et H.W. Zhang : A fully coupled thermo-mechanical model of friction stir welding. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 37:279–293, 2007.

[ZZ07b] Z. Zhang et H.W. Zhang : Numerical studies on effect of the axial pressure in friction stir welding. *Science and Technology of Welding and Joining*, 12:226–248, 2007.

[ZZC07] H.W. Zhang, Z. Zhang et J.T. Chen : 3D modeling of material flow in friction stir welding under different process parameters. *Journal of Materials Processing Technology*, 183:62–70, 2007.

Modélisation des couplages fluide/solide dans les procédés d'assemblage à haute température

Thomas Heuzé

Institut Jean Le Rond d'Alembert
Université Pierre et Marie Curie / Paris 6
4, place jussieu tour 55-65
75252 PARIS CEDEX 05

Résumé — On développe dans ces travaux un outil numérique permettant de simuler le procédé de soudage ponctuel par friction et malaxage (Friction Stir Spot Welding). Le modèle est basé sur un couplage fluide/solide, et permet donc une description correcte des parties fortement malaxée et solide de la structure. Ce couplage est d'autre part associé à une approche euléro-lagrangienne, permettant de découpler les mouvements du maillage de celui de la matière dans la partie fluide. Aussi la simulation de plusieurs tours de l'outil dans la matière est rendue possible, tout en suivant les bords des tôles soudées durant le procédé. Ce modèle numérique s'appuie sur l'élément fini mixte P1+/P1. Ce dernier a été développé avec une formulation température/vitesse/pression en mécanique des fluides (dans le cas d'un écoulement laminaire incompressible et transitoire) et en mécanique des solides dans le cadre des grandes transformations. Ce couplage a été intégré au sein d'une nouvelle option du code SYSWELD®.

On présente d'autre part une approche expérimentale permettant de qualifier par des essais représentatifs le procédé Friction Stir Spot Welding. Aussi, deux montages spécifiques sont proposés ; ces deux dispositifs intègrent une démarche de validation globale visant à calibrer la modélisation proposée du procédé. Des mesures des effort et couple axiaux sont réalisées au cours d'essais menés sur un alliage d'aluminium de série 2xxx.

Mots clés — Élément fini P1+/P1, Friction Stir Spot Welding, Couplage fluide/solide, Approche euléro-lagrangienne, Montages expérimentaux, Mesure d'effort et de couple

Abstract — The aim of this work is to develop a numerical tool to simulate the Friction Stir Spot Welding process. The model developed is based on a fluid/solid coupling in order to correctly describe stirred and solid areas. An Arbitrary Eulerian Lagrangian approach is used and enables to decouple the mesh and materials motions. Hence, this enables to simulate many rotations of the tool into the material while following the boundaries of the sheets during the process. The numerical model includes the P1+/P1 finite element. This mixed element has been developed with a temperature/velocity/pressure formulation in fluid mechanics (for an incompressible and laminar transient flow) and in solid mechanics in the framework of large strains. This coupling has been implemented in a new option of the finite element code SYSWELD®.

Second, an experimental approach has been developed in order to qualify through representative tests the Friction Stir Spot Welding process. Hence, two special experimental setups have been designed ; these two special assemblies incorporate a special validation scheme designed to calibrate the proposed modeling of this process. Force and torque measurements are performed through tests carried out with a AA 2xxx aluminium alloy.

Keywords — P1+/P1 finite element, Friction Stir Spot Welding, Fluid/Solid coupling. ALE approach, Experimental setups, Force and torque measurements