



**HAL**  
open science

## Approche à la Onsager en systèmes intégrables

Pascal Baseilhac

► **To cite this version:**

Pascal Baseilhac. Approche à la Onsager en systèmes intégrables. Physique mathématique [math-ph].  
Université François Rabelais - Tours, 2010. tel-00612887

**HAL Id: tel-00612887**

**<https://theses.hal.science/tel-00612887>**

Submitted on 1 Aug 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS DE TOURS

# Habilitation à diriger des recherches

Discipline : Physique théorique

## *Approche à la Onsager en systèmes intégrables*

présenté et soutenu publiquement par

**Pascal Baseilhac**

Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique  
Fédération Denis Poisson

le 13 Décembre 2010

devant le jury composé de

<b>Monsieur Olivier BABELON</b>	Directeur de recherche	CNRS, Paris
<b>Monsieur Peter FORGACS</b>	Professeur des Universités	Université de Tours
<b>Monsieur Cédric LECOUEY</b>	Professeur des Universités	Université de Tours
<b>Monsieur Jean-Michel MAILLET</b>	Directeur de recherche	CNRS, Lyon
<b>Madame Valentina PETKOVA</b>	Professeur	IRNRE, Sophia
<b>Monsieur Paul TERWILLIGER</b>	Professeur	Université de Wisconsin

## Résumé

Une nouvelle approche non-perturbative à la *Onsager* en systèmes intégrables quantiques est développée, dont les idées maîtresses prennent leurs racines dans l'article de L. Onsager (1944) portant sur la solution exacte du modèle d'Ising en deux dimensions. L'intérêt de cette approche repose sur le fait qu'elle est applicable de façon systématique dans le cas où d'autres méthodes usuelles échouent. Celle-ci repose sur l'étude de quatre éléments capitaux: (i) L'identification de l'algèbre non-Abélienne de dimension infinie généralisant l'algèbre de Onsager et représentant la condition d'intégrabilité du modèle; (ii) La construction d'une hiérarchie de quantités en involution formant une sous-algèbre Abélienne; (iii) L'étude des réalisations et représentations de dimension finie et infinie de cette algèbre; (iv) La résolution du modèle à l'aide de ces données. Pour un modèle de référence - la chaîne de spin XXZ de taille finie avec conditions aux bords intégrables - la nouvelle approche basée sur l'algèbre  $q$ -Onsager introduite par P. Terwilliger est utilisée pour résoudre le problème spectral (spectre en énergie et états propres) dans le régime de paramètres génériques où l'ansatz de Bethe est inapplicable. Certaines étapes essentielles à l'obtention des fonctions de corrélations dans la limite thermodynamique du modèle sont aussi franchies, s'inspirant de la méthode de M. Jimbo *et al.*. La généralisation associée à toute algèbre de Lie affine de l'algèbre  $q$ -Onsager est proposée, et permet de classifier toutes les conditions d'intégrabilité dans les théories de Toda affines avec bord. Diverses perspectives sont enfin présentées.

## Abstract

A new non-perturbative approach à la *Onsager* for quantum integrable systems on the lattice is developed, which main ideas take their roots in the original article of L. Onsager (1944) on the exact solution of the two-dimensional Ising model. The interest of this approach relies on the fact that it can be systematically applied in cases for which other standard methods fail. It is based on the study of four essential elements: (i) The identification of the non-Abelian algebra generalizing the Onsager algebra that ensures the integrability of the model; (ii) The construction of a hierarchy of quantities in involution generating an Abelian subalgebra; (iii) The study of realizations and finite or infinite dimensional representations of this algebra; (iv) The solution of the model using these data. For a basic model such as the finite size XXZ open spin chain with integrable boundary conditions, the new approach based on the  $q$ -Onsager algebra introduced by P. Terwilliger is used to solve the spectral problem (energy spectrum and eigenstates) in the regime of parameters where the Bethe ansatz approach doesn't apply. Some essential steps paving the way to correlation functions in the thermodynamic limit of the model are also passed, inspired by the method of M. Jimbo *et al.*. To each affine Lie algebra, a generalization of the  $q$ -Onsager algebra is proposed, and allows to classify all possible integrable boundary conditions in boundary affine Toda field theories. Various perspectives are finally presented.

## REMERCIEMENTS

Cette thèse d'habilitation présente les idées, objectifs, développements et résultats d'un programme de recherche amorcé à mon retour du Japon fin 2003. Fruit d'interactions de toutes sortes, je voudrais tout d'abord exprimer mes remerciements à mes proches collaborateurs: Kozo Koizumi, puis Keiichi Shigechi et Samuel Belliard plus récemment.

Mes remerciements vont ensuite à ceux qui - de façon directe ou indirecte - ont eu un impact important sur l'évolution de ce programme, par leurs observations, leurs suggestions, leurs questions et leurs critiques qui ont permis de faire évoluer ses objectifs et son contenu. Je les adresse donc à tous les membres du jury, ainsi qu'à Michio Jimbo, Jacques Perk et Vladimir Rittenberg.

Toute progression étant possible grâce à une remise en question des concepts, je tiens à remercier ceux qui sont restés sceptiques - voir hermétiques - quant à l'intérêt de ce programme de recherche comparativement à d'autres "dans la norme". A cet égard, je me suis régulièrement remémoré l'attitude de Vladimir Fateev qui fut mon directeur de thèse entre 1995 et 1998. En effet, j'ai tenté de constamment garder à l'esprit l'importance de créer une recherche originale, ambitieuse et efficace - ne se réduisant pas à la maîtrise d'une toute relative technicité ou dépendante d'un phénomène de mode -, objectif dont il m'avait démontré l'importance.

Il est important de noter que ce programme de recherche a bénéficié du soutien d'un projet ANR dont je fus le responsable entre 2005 et 2008, et des diverses discussions avec mes collègues Nikolai Kitane, Geneviève Rollet et Véronique Terras que je remercie.

Durant ces années, j'ai profité de nombreuses discussions au sein du Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique de Tours, où la qualité de l'atmosphère a toujours facilité les échanges. Je remercie donc tous mes collègues du laboratoire.

*Qu'est ce, en effet, que l'invention mathématique? (...) Inventer, cela consiste précisément à ne pas construire les combinaisons inutiles et à construire celles qui sont utiles et qui ne sont qu'une infime minorité. (...) Les combinaisons stériles ne se présenteront même pas à l'esprit de l'inventeur. Dans le champ de sa conscience n'apparaîtront jamais que les combinaisons réellement utiles, et quelques-unes qu'il rejettera, mais qui participent un peu des caractères des combinaisons utiles. Tout se passe comme si l'inventeur était un examinateur du deuxième degré qui n'aurait plus à interroger que les candidats déclarés admissibles après une première épreuve.*

H. Poincaré, 'L'invention mathématique'<sup>1</sup>

Et à ce sujet, je remercie donc très chaleureusement celles et ceux, des plus grands aux plus petits, pour leurs précieux enseignements concernant l'intelligence instinctive qui, peu à peu, ont contribué à éduquer mon 'observateur du premier degré' à s'intéresser aux racines plutôt qu'aux conséquences et apparences<sup>2</sup>. Et parmi celles-ci, à la démarche initiée par Lars Onsager, souvent totalement méconnue de ma génération.

---

<sup>1</sup>*Science et méthode*, Paris, Flammarion, 1908, p. 49-50.

<sup>2</sup>Contrairement aux racines, elles ne sont que la surface.

# Chapitre I - Introduction

## 1. THÈME DE RECHERCHE ET PROBLÉMATIQUES

Le domaine de recherche des systèmes intégrables s'est développé intensément depuis plus de soixante-dix ans, démontrant son importance et utilité dans des champs de recherche autres que la physique tels que les mathématiques. Les modèles quantiques intégrables possèdent ainsi des applications directes en physique [1], par exemple en matière condensée, en optique quantique ou dans les théories des cordes, et constituent des exemples uniques permettant de rendre compte d'un grand nombre de phénomènes non-perturbatifs. Par ailleurs, l'étude et le développement de structures algébriques abstraites spécifiques aux modèles intégrables - telles que les groupes quantiques - ont ouvert de nouvelles perspectives en mathématiques. D'une manière générale, l'intérêt majeur de ces modèles réside dans l'existence d'un ensemble complet et suffisant (au regard du nombre de degrés de liberté du système, fini ou infini suivant le modèle considéré) d'intégrales du mouvement en involution, propriété caractéristique de tous les systèmes intégrables classiques ou quantiques. En correspondance avec l'existence de telles quantités, la dynamique du système est déterminée: calculer exactement un nombre important de quantités décrivant l'évolution d'observables physiques devient alors possible.

Résoudre un modèle intégrable quantique, c'est avoir pour objectif final le calcul explicite de quantités caractérisant de manière univoque certaines observables physiques: le spectre et les vecteurs propres du Hamiltonien caractérisant les niveaux d'énergie du système, la matrice  $S$  permettant de décrire les processus de diffusion des particules, ou encore les fonctions de corrélations permettant de caractériser l'ordre du système. Ces quantités sont fondamentales, à la fois essentielles pour étendre les champs d'application en mécanique statistique ou en matière condensée, mais aussi pour mieux comprendre les propriétés physiques sous-jacentes du système (dualité, symétries). Cependant, bien que de nombreux modèles soient connus pour être intégrables, obtenir des expressions analytiques pour ces quantités demeure souvent un défi. Différentes approches et méthodes ont cependant été élaborées dans ce but. La plupart d'entre elles ont leurs origines dans l'article de 1931 de H. Bethe [2] sur la solution du problème spectral de la chaîne de Heisenberg isotrope (utilisant l'ansatz de Bethe), et dans l'article de 1944 de L. Onsager [3] sur la solution du modèle d'Ising sur un réseau rectangulaire avec conditions périodiques (sur le tore). Notamment, l'article de Onsager introduit:

- (i) une approche par la matrice de transfert des modèles intégrables bidimensionnels et les relations star-triangle (équations de Yang-Baxter);
- (ii) une approche basée sur l'existence d'une algèbre non-Abélienne de dimension infinie (algèbre de Onsager) responsable de l'intégrabilité du système.

Plus tard, une combinaison de [2] et (i) fut utilisée pour produire des résultats plus généraux (parmi lesquels citons les travaux de Baxter [67] et Faddeev-Sklyanin-Takhtadjan [5]) et enfin aboutir à une approche systématique en modèles intégrables dans le continu ou sur le réseau appelée 'Méthode de diffusion inverse quantique' (quantum inverse scattering method, QISM). D'un point de vue mathématique, la mise en place de cette approche a conjointement accompagné le développement de la théorie des groupes quantiques [7] (quantum universal enveloping algebras de Drinfeld [9] et Jimbo [10]), cette dernière permettant de décrire les symétries sous-jacentes de l'équation de Yang-Baxter. En comparaison, bien qu'une approche du type (ii) ait joué un rôle crucial dans la solution originale de Onsager pour le modèle d'Ising, celle-ci n'attira pas autant l'attention que les relations star-triangle comme approche potentielle à la solution de modèles intégrables sur le réseau. Cependant, certaines idées de Onsager apparaissent implicitement dans le contexte de la théorie des champs conforme. En effet, diverses observations sur le comportement critique de systèmes de physique statistique ont permis de mettre en évidence le phénomène d'invariance conforme dans les années 80: dans la limite thermodynamique de plusieurs systèmes sur le réseau, une transition de phase peut avoir lieu, associée à l'émergence d'une symétrie cachée générée par l'algèbre de Virasoro de dimension infinie. Cette découverte a eu un énorme impact sur l'analyse non-perturbative de systèmes en basse dimension [1], car l'étude de la théorie des représentations de l'algèbre de Virasoro (et plus généralement de ses extensions possibles) est suffisante pour déterminer exactement et complètement toutes les quantités intéressantes du point de vue physique, et ce pour une large classe

de modèles intégrables quantiques [11]. Bien qu'étendre les idées la théorie de champs conforme à l'étude du voisinage du point critique ou aux modèles sur le réseau ait été le sujet de nombreuses tentatives (algèbre  $q$ -Virasoro, algèbre de Virasoro sur le réseau, voir par exemple [12]), classifier et étudier les systèmes intégrables non-conformes en utilisant l'existence d'une symétrie cachée de dimension infinie reste un enjeu conceptuel et technique majeur. A ce sujet, il faut remarquer que pour les modèles sur réseau une approche de ce type - celle de Onsager notamment [3] - est restée exclusivement restreinte à quelques systèmes possédant la même structure algébrique sous-jacente (l'algèbre de Onsager): le modèle XY [13], ses généralisations [14] et le modèle de Potts self-dual par exemple [15]. Selon l'approche choisie, depuis les articles originaux de Bethe [2] et Onsager [3] les principales méthodes développées et utilisées pour résoudre un modèle intégrable sont:

**Modèles intégrables sur le réseau:**

- a. Ansatz de Bethe algébrique (et de coordonnées) [2, 5, 6];
- b. Ansatz de Bethe fonctionnel: relations T-Q de Baxter et séparation de variables [67, 16];
- c. Opérateurs de vertex [17];
- d. Algèbre de Onsager [3, 39].

**Modèles intégrables dans le continu:**

- e. Théorie de champs conforme [11, 18];
- f. Perturbation intégrable de la théorie de champs conforme [18];
- g. Théorie de la matrice  $S$  et facteurs de formes [6, 28].

Comme il a été précédemment mentionné, du point de vue mathématique le développement de ces différentes méthodes s'est systématiquement accompagné de la découverte de nouvelles algèbres et de l'étude de la théorie des représentations qui leur est associée. Citons par exemple les groupes quantiques [7] qui ont de ce fait fourni les outils (algèbres de courant, représentations par opérateurs de vertex,...) permettant de résoudre les modèles considérés, et dont les champs d'applications dépassent le seul domaine des systèmes intégrables. Les groupes quantiques jouent en effet un rôle majeur dans la caractérisation et la construction systématique de fonctions spéciales [8], ou dans la construction d'invariants de noeuds sur des variétés à trois dimensions par exemple [7].

Selon la méthode utilisée pour résoudre un modèle spécifique, les résultats obtenus prennent donc diverses formes. Avec l'ansatz de Bethe algébrique ou de coordonnées [2, 6] par exemple, le spectre en énergie et les états propres du modèle sont exprimés en termes de solutions d'équations hautement transcendentes (les équations de Bethe). Dans la méthode de l'ansatz de Bethe fonctionnel par séparation de variables [16], le spectre en énergie s'obtient à partir des solutions d'une équation aux  $q$ -différences discrètes du second ordre, qui n'est autre qu'une spécialisation des équations T-Q de Baxter dont les solutions s'expriment là encore en termes des solutions des équations de Bethe. Par contre, par l'approche de Onsager [3, 15] le spectre et les états propres sont écrits en termes des racines d'un certain polynôme caractéristique. Dans l'approche par opérateurs de vertex ou par l'ansatz de Bethe algébrique, les fonctions de corrélations [17, 6, 21] s'expriment comme des intégrales multiples sur le plan complexe. Dans la théorie conforme [11], les résultats sont obtenus grâce à l'étude de la théorie des représentations de l'algèbre de Virasoro et de ses éventuelles extensions: les fonctions de corrélations sont alors exprimées en termes de fonctions hypergéométriques. Dans les théories conformes perturbées [18] ou les théories intégrables massives, les fonctions de corrélations sont exprimées sous la forme d'un développement en facteurs de formes [28]: ceux-ci s'obtiennent à partir des matrices  $S$ , fonctions méromorphes des rapidités (déterminant les moments des particules) qui sont solutions des équations de Yang-Baxter [19] ou d'équations associées à l'existence de symétries cachées du système générées par des charges non-locales [20].

Concernant les champs d'application de ces diverses méthodes, il est important de remarquer qu'hormis l'approche par l'algèbre de Onsager et celle par opérateurs de vertex qui sont applicables à quelques modèles (Ising [3], XY [13] et généralisations [14], Potts self-dual [15] pour la première, et la chaîne de spin XXZ infinie [17] pour la seconde), jusqu'à la fin des années 80 les autres approches s'avaient être suffisamment générales et efficaces quant à l'étude de la plupart des modèles intégrables quantiques considérés jusqu'alors. De plus, les résultats obtenus par l'approche par opérateurs de vertex (fonctions de corrélations par exemple) ont été par la suite reformulés à partir de l'approche par l'ansatz de Bethe

algébrique [21]. Pour ces raisons probablement, la majeure partie de la communauté scientifique a focalisé son attention sur le développement et les applications de l'approche par la théorie conforme (et perturbations intégrables possibles) ou par l'ansatz de Bethe algébrique. En particulier, il est important de mentionner que l'approche par la théorie conforme - bien que restreinte aux modèles invariants conformes ou à certains modèles de physique statistique à leur point critique - est de loin la plus puissante, et de ce fait la plus efficace quant à son aptitude descriptive et prédictive. Comparativement, la situation demeurerait très différente pour l'approche par l'algèbre de Onsager qui était parfois considérée comme trop spécifique<sup>3</sup>, pour laquelle certaines applications importantes restaient encore limitées (niveaux d'énergie du système) et dont les potentialités demeuraient très largement inexplorés<sup>4</sup>.

Il apparaît que l'étude ces vingt dernières années de modèles plus réalistes tels que les modèles intégrables définis sur un réseau bidimensionnel avec conditions aux bords non-périodiques ou les théories quantiques de champs intégrables restreintes au demi-plan a mis en exergue certaines limites des méthodes standards connues précitées. En effet, bien que les modèles considérés restent intégrables et possèdent des structures algébriques sous-jacentes telles que les équations de réflexion [22] - qui étendent les équations de Yang-Baxter -, la particularité des conditions aux bords pose des problèmes essentiels concernant l'applicabilité de ces mêmes méthodes. En l'occurrence, concernant les modèles intégrables sur le réseau l'existence d'un pseudo-vide est systématiquement le point de départ de l'approche par ansatz de Bethe algébrique. Cependant, pour des conditions aux bords génériques dans ces modèles un tel état n'existe pas. D'autres problèmes essentiels apparaissent de manière analogue dans d'autres approches. Par exemple, une approche par opérateur de vertex requiert la connaissance préalable de la symétrie cachée sous-jacente de la chaîne de spin XXZ semi-infinie avec conditions aux bords génériques<sup>5</sup>. De même, dans les théories quantiques de champs intégrables avec bords, exceptés dans quelques cas simples la connaissance de la symétrie cachée est nécessaire à l'obtention systématique des matrices de réflexion ou à la classification des conditions aux bords préservant l'intégrabilité. Comme conséquence, ces vingt dernières années plusieurs modèles de référence insolubles par certaines des approches standards ont attiré l'attention. De manière habituelle en physique, les exemples les plus simples ont été tout d'abord considérés: les généralisations sont souvent techniquement plus compliquées à aborder mais conceptuellement l'analyse est en général similaire. En particulier, l'attention s'est portée sur la chaîne de spin ouverte XXZ avec conditions aux bords intégrables générales, le modèle sine-Gordon et les théories de Toda affine (sa généralisation) avec un bord. En dépit de l'activité de recherche de plusieurs équipes à travers le monde, seuls certains résultats partiels étaient obtenus en 2006. Tous ces résultats reposaient sur l'utilisation des méthodes les plus usuelles et de ce fait, étaient associés à des choix de conditions aux bords particuliers [23]. Pour les théories de champs intégrables avec bord, certains résultats exacts importants étaient obtenus [24, 25, 26] bien que la classification complète des conditions au bord demeurerait un problème ouvert.

Développer un programme de recherche visant à classifier et étudier une large classe de modèles intégrables quantiques non-conformes sur le réseau ou dans le continu en s'appuyant sur l'existence d'une algèbre non-Abélienne de dimension infinie (s'inspirant des idées de Onsager) semblait donc constituer un projet opportun. Afin d'amorcer ce programme de recherche, un des points important consistait à remarquer que - contrairement aux modèles invariants conformes pour lesquels l'invariance d'échelle<sup>6</sup> implique l'existence d'une symétrie cachée *locale* associée à l'algèbre de Virasoro et ses généralisations éventuelles - dans les modèles non-conformes la finitude de la longueur de corrélation (masse) implique que toute symétrie cachée potentielle doit dépendre de façon essentielle d'informations portant sur le comportement en régime infrarouge du modèle. Comme conséquence, cette symétrie cachée serait associée à une algèbre non-Abélienne de dimension infinie réalisée en terme d'opérateurs *non-locaux*. Etant donné l'algèbre non-Abélienne de dimension infinie identifiée, les modèles appartenant à la même classe d'universalité correspondraient à des choix de représentations finies ou infinies spécifiques de cette algèbre. En 2005,

<sup>3</sup>L'amalgame occasionnel entre algèbre de Onsager et théorie de fermions libres est peut être à l'origine de cette situation, bien que le modèle de Potts chiral superintégré soit un exemple allant à l'encontre de cette croyance éronnée.

<sup>4</sup>Cependant, des progrès récents importants concernant le modèle chiral Potts superintégré s'appuient sur cette approche. Voir [57] par exemple.

<sup>5</sup>Problème ici résolu.

<sup>6</sup>L'invariance d'échelle est associée à une longueur de corrélation infinie. Le comportement du modèle dans le régime ultraviolet (à courte distance) ou infrarouge (longue distance) est alors identique.

un tel programme de recherche traitant ainsi sur un même pied d'égalité divers modèles intégrables non-conformes sur le réseau et dans le continu restait à être proposé.

Insatisfait par cette situation et convaincu que tout changement de point de vue apporte toujours une compréhension nouvelle, j'ai décidé en 2006 de débiter un programme de recherche original de ce type: celui-ci consiste à construire une nouvelle approche prenant essentiellement ses racines dans les idées de Onsager mais combinant certains éléments et principes essentiels de l'ansatz de Bethe algébrique et des théories de champs conformes. Du à mon expérience précédente concernant l'étude des théories conformes et certaines de leurs perturbations intégrables, j'avais à l'esprit qu'une approche *à la Onsager* fournirait une base solide à l'étude de modèles intégrables non-conformes sur le réseau et dans le continu utilisant uniquement la théorie des représentations de l'algèbre non-Abélienne de dimension infinie responsable de l'intégrabilité du modèle.

## 2. OBJECTIFS INITIAUX

En physique mathématique, proposer une représentation (un modèle) permettant de décrire efficacement le comportement d'un certain nombre de quantités physiques observables caractérisant un phénomène est un premier problème principal. Proposer une approche permettant d'identifier certaines caractéristiques (propriétés de dualité, symétries) et obtenir certaines prédictions (spectre en énergie, états, amplitudes de diffusion et fonctions de corrélations) à partir d'une analyse basée sur une structure abstraite (algèbre, représentations) est le second problème principal. Enfin, un problème additionnel est que, dans certaines situations, même la structure abstraite reste à être découverte et étudiée en détails. Le programme de recherche sur lequel est basée cette thèse d'habilitation était initialement motivé par les problèmes suivants, ouverts en 2005:

### Condition d'intégrabilité et algèbre non-Abélienne de dimension infinie

Dans les modèles intégrables invariants conformes, la propriété d'intégrabilité est assurée par l'existence d'une symétrie cachée associée à une algèbre non-Abélienne de dimension infinie connue sous le nom d'algèbre de Virasoro. Dans ces modèles, l'invariance conforme se traduit par un comportement particulier des observables sous les transformations spatiales et temporelles [11]. Toutes les quantités conservées peuvent être exprimées en termes des générateurs de l'algèbre de Virasoro [27] et l'étude de la théorie des représentations de cette algèbre permet notamment de déduire toutes les caractéristiques dynamiques du modèle (les fonctions de corrélations par exemple). Dans les modèles quantiques intégrables non-conformes, la propriété d'intégrabilité est par contre souvent associée à des structures algébriques auxiliaires (équations de Yang-Baxter et de réflexion) - dont les solutions possèdent un paramètre n'ayant pas de signification physique (appelé paramètre spectral) -, ou à l'existence de quantités conservées *locales* (théories quantiques de champs). En effet, hormis quelques rares modèles dont la condition d'intégrabilité est directement<sup>7</sup> associée à l'existence d'une algèbre non-Abélienne de dimension infinie - l'algèbre de Onsager (voir [39]) -, il n'y avait pas d'autres exemples connus de ce type en 2005. Le premier objectif du projet était donc de reconsidérer l'origine de l'intégrabilité d'une classe de modèles intégrables sur le réseau et dans le continu afin d'en extraire l'algèbre non-Abélienne de dimension infinie associée.

### Solution de la chaîne de spin ouverte XXZ et généralisations

La chaîne de spin ouverte XXZ est un des modèles intégrables les plus simples défini sur le réseau, mais aussi un des plus étudié depuis son introduction par Sklyanin en 1988. Initialement, les conditions aux bords préservant l'intégrabilité de ce modèle ont ainsi été classifiées selon les solutions des équations de réflexion. Pour des paramètres de bords génériques, diverses solutions existent et sont explicitement connues. Cependant, pendant de nombreuses années dû à des problèmes essentiels d'applicabilité des approches standards (ansatz de Bethe algébrique, séparation de variables) ou à l'ignorance de la symétrie cachée du modèle dans la limite thermodynamique, aucun résultat n'était obtenu pour des paramètres de bords génériques<sup>8</sup>. Bien que la matrice de transfert soit parfaitement définie pour des conditions aux bords générales, il faut attendre 2002-2003 et les travaux de Nepomechie puis Cao et Yang *et al.* [23] pour qu'une solution exacte du spectre en énergie soit proposée pour certaines relations spécifiques entre

<sup>7</sup>Ce qui n'est pas le cas de la chaîne de spin XXZ infinie où la symétrie  $U_q(\widehat{sl}_2)$  est *conjecturée* et non observée comme conséquence de principes premiers.

<sup>8</sup>Pour des paramètres de bords diagonaux, l'approche par ansatz de Bethe algébrique est en grande partie applicable par analogie avec le cas du bulk [58].

les paramètres de bords. Par conséquent, pour des paramètres de bords génériques même les quantités les plus simples demeuraient inaccessibles en 2005. Par ailleurs, dans la limite thermodynamique du modèle (la chaîne semi-infinie), Jimbo-Kedem-Kojima-Konno-Miwa ont réussi en 1995 [33] à appliquer l'approche par opérateurs de vertex pour des conditions au bord particulières (diagonales) - résultats confirmés plus récemment par l'approche de l'ansatz de Bethe algébrique [58]. Par conséquent, trouver une approche originale permettant de résoudre la chaîne de spin XXZ ouverte pour des conditions aux bords génériques et dans la limite thermodynamique restait un défi et constituait de ce fait un des autres objectifs du projet.

### Algèbre de courant de l'équation de réflexion et approche par opérateurs de vertex

Le succès de l'approche par opérateurs de vertex pour la chaîne de spin XXZ infinie ou semi-infinie avec bord diagonal repose sur la connaissance préalable de l'algèbre de courant associée à l'algèbre  $U_q(\widehat{sl_2})$ . Grâce aux travaux de Drinfeld [9], une telle algèbre de courant était en réalité déjà connue lorsque Jimbo *et al.* ont amorcé leur approche par opérateurs de vertex. En 2005, le fait que l'algèbre  $q$ -Onsager - cas particulier de l'algèbre tridiagonale introduite pour la première fois par Terwilliger dans [40] (voir aussi [41, 42]) - soit la symétrie cachée de la chaîne de spin XXZ semi-infinie avec bord générique nous était déjà connu. Néanmoins, résoudre ce modèle impliquait de connaître l'algèbre de courant associée à l'algèbre  $q$ -Onsager [40], étape nécessaire à toute approche éventuelle par opérateurs de vertex. En effet, sans la connaissance explicite de cette algèbre de courant, la construction d'une réalisation bosonique des opérateurs de vertex - qui sont à la base du calcul des fonctions de corrélations d'opérateurs locaux - est inaccessible. Au-delà de son utilité pratique en physique, l'algèbre de courant associée à l'algèbre  $q$ -Onsager [40] présente un intérêt certain en mathématiques. En effet, les groupes quantiques sont habituellement présentés de trois façon différentes: la présentation de Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan [34] (associé à l'équation de Yang-Baxter); celle de Jimbo [10] et enfin celle de Drinfeld [9]. L'isomorphisme entre ces trois présentations est connu depuis les travaux de Ding-Frenkel (1993) [36] où les éléments - nommés opérateurs de Lax  $L$  - de l'algèbre de Yang-Baxter sont écrits en termes des générateurs de l'algèbre de courant. Par analogie, il apparaissait donc intéressant à plusieurs égards de construire une algèbre de courant isomorphe à l'équation de réflexion associée à la matrice  $R$  de  $U_q(\widehat{sl_2})$  offrant de ce fait une nouvelle présentation du coïdéal de  $U_q(\widehat{sl_2})$ . Pour ces diverses raisons, un autre objectif du projet était de découvrir l'algèbre de courant associée à l'algèbre de réflexion [22] et l'algèbre  $q$ -Onsager [40].

### Classification de modèles intégrables massifs avec bords

Dans le domaine de la matière condensée (concernant l'étude des fils quantiques par exemple), le comportement du système étudié est notamment caractérisé par un ensemble fini de paramètres physiques dont un sous-ensemble est éventuellement associé à une source externe. Pour obtenir des résultats exacts dans le régime de paramètres où les méthodes perturbatives usuelles échouent il est important de relier le modèle - si possible - à un système intégrable quantique avec bord. Divers systèmes intégrables quantiques avec conditions aux bords génériques ont été introduit à cette fin. Avant 1999, le modèle de Kondo [30] ainsi qu'une généralisation proposée par Bazhanov-Hibbert-Khoroshkin [31] étaient les seuls modèles quantiques intégrables connus possédant une source externe dynamique (au bord). Ces modèles étant cependant massless, des exemples de modèles intégrables quantiques massifs avec bords restaient à être découverts. En attendant, tous les systèmes physiques avec des conditions aux bords dynamiques échappaient potentiellement à une analyse non-perturbative rigoureuse. Après avoir proposé (en collaboration avec G. Delius [32] et K. Koizumi [25]) et étudié entre 2001 et 2003 le premier exemple de théorie quantique de champs intégrable massive avec un bord dynamique - le modèle sine-Gordon avec bord dynamique - modéliser des systèmes massifs avec des symétries plus riches couplés à une source dynamique demeurait un défi en 2005. Même dans le cas des théories de Toda affines, les conditions aux bords scalaires avaient été obtenues [26] mais leur classification à partir de principes premiers (les propriétés de symétrie notamment) restait un problème ouvert. Par conséquent, un des autres objectifs du projet était d'arriver à construire des exemples plus généraux de théories de champs intégrables massives dont les conditions au bord (scalaires ou dynamiques) seraient classifiées en utilisant un argument basé sur l'existence d'une symétrie cachée du système responsable de l'intégrabilité.

Bien que mon objectif initial fut de considérer en détails ces différents problèmes *a priori* relativement décorrés, la solution à chacun d'eux contribue à divers niveaux du développement d'une approche nouvelle et systématique des modèles quantiques intégrables non-conformes sur le réseau et dans le continu, dont les racines et les principales étapes sont à présent décrites.

### 3. FONDEMENTS DU PROGRAMME DE RECHERCHE

Depuis les travaux initiaux de Onsager en 1944 [3], divers modèles intégrables se sont avérés posséder la même condition d'intégrabilité, présentée sous la forme des relations de Dolan-Grady [39], structure algébrique isomorphe à l'algèbre de Onsager. Dans les années 90, les travaux de Davies [39] permettent d'unifier les résultats spécifiques aux modèles: tout modèle dont la condition d'intégrabilité est associée à l'algèbre de Onsager est soluble en utilisant la théorie des représentation de cette algèbre. Par la suite, nous considérons la famille de modèles intégrables dont la condition d'intégrabilité est l'algèbre  $q$ -Onsager [40]. Les idées de Onsager et Davies étant à la racine de l'approche ici présentée, rappelons tout d'abord certains des aspects des plus importants de leurs travaux.

**3.1. Bref historique sur l'algèbre de Onsager.** L'algèbre de Onsager apparaît pour la première fois dans l'article de L. Onsager (1944) sur la solution du modèle d'Ising en deux dimensions et champ magnétique nul avec conditions aux bords périodiques [3]. Soit  $T$  la température du système,  $k$  la constante de Boltzmann,  $J$  et  $J'$  les couplages entres spins dans les deux directions du réseau. Pour un modèle d'Ising à  $L$  sites dans une de ces deux directions, le calcul de la fonction de partition repose sur la solution du problème spectral associé à une matrice de transfert qui peut s'écrire sous la forme simple:

$$\mathcal{T} = Const. \times \exp(a_0 A_0) \exp(a_1 A_1)$$

avec

$$A_1 = \sum_{i=1}^{L-1} \sigma_3^i \sigma_3^{i+1} \pm \sigma_3^L \sigma_3^1 \quad \text{et} \quad A_0 = - \sum_{i=1}^L \sigma_1^i .$$

Ici,  $a_0 = -J^*/kT$ ,  $a_1 = J'/kT$ ,  $\tanh(J^*/kT) = \exp(-2J/kT)$  et  $\sigma_\alpha^i$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  sont les matrices de Pauli usuelles au site  $i$ . Remarquablement, ces deux opérateurs satisfont les relations de commutations suivantes, appelées habituellement les *relations de Dolan-Grady* [39]:

$$(1) \quad [A_0, [A_0, [A_0, A_1]]] = 16[A_0, A_1] , \quad [A_1, [A_1, [A_1, A_0]]] = 16[A_1, A_0] .$$

Cherchant la solution du problème spectral pour  $\mathcal{T}$ , L. Onsager construit une famille d'éléments caractéristiques  $A_n, G_m$   $n, m \in \mathbb{Z}$ , exprimés comme combinaisons non-locales de matrices de Pauli agissant sur différents sites non-nécessairement proches voisins. Remarquablement, ces éléments forment l'algèbre de Lie de dimension infinie nommée *algèbre de Onsager*

$$(2) \quad [A_n, A_m] = 4G_{n-m}, \quad [G_m, A_n] = 2A_{n+m} - 2A_{n-m}, \quad [G_n, G_m] = 0 .$$

Grâce à cette présentation et en utilisant la théorie des représentations, L. Onsager développe la matrice de transfert sur un ensemble fini d'éléments de la sous-algèbre Abélienne de (2) ce qui lui permet de résoudre le problème spectral pour  $\mathcal{T}$ . En particulier, le premier élément de cette hiérarchie coïncide avec le Hamiltonien du modèle et prend la forme simple:

$$(3) \quad H_{Ising} = \coth(2a_1)A_0 + \coth(2a_0)A_1 - G_1 .$$

Probablement en raison de la technicité de son article relativement au contexte de l'époque, les simplifications proposées par la suite utilisant les algèbres de Clifford et des techniques fermioniques [70] - qui se dispensent de l'utilisation de l'algèbre de Onsager - succitèrent plus d'intérêt. Cependant, dans les années 80, Dolan et Grady [39] observent que les conditions (1) sont suffisantes à assurer l'intégrabilité d'un modèle dont le Hamiltonien a une forme du type (3). Plus généralement, lorsque les conditions (1) sont satisfaites une infinité de quantités conservées existent qui peuvent s'écrire sous la forme:

$$(4) \quad I_{2n+1} = \kappa(A_n + A_{-n}) + \kappa^*(A_{n+1} + A_{-n+1}) + \kappa_+ G_{n+1} \quad \Rightarrow \quad [I_{2k+1}, I_{2l+1}] = 0 .$$

Bien que Dolan et Grady ne donnent comme exemple que le modèle d'Ising auquel cas  $I_1 \equiv H_{Ising}$  pour un choix de paramètres  $\kappa, \kappa^*, \kappa_+$  approprié, von-Gehlen et Rittenberg [15] identifient par la suite un autre exemple: dans un régime spécifique de paramètres, diverses analyses numériques concernant la structure du spectre du modèle de Potts chiral permettent de conclure à l'existence d'une hiérarchie du

type (4) assurant l'intégrabilité. Dans le cas présent, pour un modèle à  $L$  possédant la symétrie  $\mathbb{Z}_N$  le Hamiltonien s'écrit:

$$H_{chiralPotts} = A_0 + kA_1$$

où les éléments  $A_0, A_1$  sont à présent réalisés de la façon suivante:

$$A_1 = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{N-1} (1 - e^{-2i\pi m/N})^{-1} Z_l^m Z_{l+1}^{N-m} \quad \text{et} \quad A_0 = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{N-1} (1 - e^{-2i\pi m/N})^{-1} X_l^m .$$

Ici, les opérateurs  $X_l$  et  $Z_l$  satisfont  $X_l^N = \mathbb{I}_l$ ,  $Z_l^N = \mathbb{I}_l$  et  $Z_l X_l = \omega X_l Z_l$  avec la racine de l'unité  $\omega = \exp(2i\pi/N)$ . Remarquablement, l'analyse des représentations associée à cette réalisation permet de conclure à une structure de spectre analogue à celle propre au modèle d'Ising.

De manière générale, l'algèbre de Onsager a ainsi été mise en évidence dans plusieurs modèles intégrables sur le réseau. En considérant d'autres type de combinaisons linéaires d'opérateurs  $A_n, G_m$ , il est par exemple possible d'obtenir des représentations Hamiltonienne de systèmes intégrables tels que le modèle XY ou certaines généralisations du modèle d'Ising. Pour tous ces exemples, notons que la structure du spectre découle de la théorie des représentations<sup>9</sup> de (1), intimement liée à celle de l'algèbre de boucle de  $\widehat{sl}_2$  (voir ci-dessous). De ce fait, il est aussi naturel de s'attendre à l'existence d'une algèbre de Onsager généralisée associée à l'algèbre de boucle de  $\widehat{sl}_n$ . Une telle généralisation a été proposée dans [48]. Pour résumer, les travaux initiaux dans lesquels l'algèbre de Onsager émerge sont les suivants:

- *Ising: Onsager (1944)*;
- *XY: Suzuki (1971); Barouch-Fuchssteiner (1985); Araki (1990)*;
- *Generalizations de XY: Ahn-Shigemoto (1991)*;
- *Chiral Potts: von Gehlen-Rittenberg (1985)*;
- *Davies (1991); Roan (1991); Date-Roan (2000)*.
- *Algèbre de Onsager  $sl_n$ : Uglov-Ivanov (1996)*.

Plus récemment, notons que l'algèbre de Onsager est de nouveau apparue comme moyen d'étudier le modèle de Potts chiral, aussi bien par le biais de la construction d'opérateurs  $Q$  que concernant le calcul des fonctions de corrélations élémentaires. Citons à ce sujet les travaux importants de Roan [68], Deguchi [69], Baxter [67] et von-Gehlen-Iorgov-Pakuliak [57], où une algèbre de Onsager étendue est notamment proposée.

**3.2. Solution générique du problème spectral et algèbre  $\widehat{sl}_2$ .** Dans cette partie, nous présentons une façon élégante due à Davies [39] de résoudre le problème spectral associé à un modèle dont la condition d'intégrabilité est (1). La solution proposée s'appuie sur l'étude des représentations de dimension finie de l'algèbre de Onsager (2) en exploitant une de ses réalisations possibles en terme de l'algèbre de boucle de  $\widehat{sl}_2$ . Pour une représentation de dimension finie  $V$  sur lequel agissent  $A_0, A_1$ , l'ensemble des  $A_n, G_n$  génère un sous-espace de l'algèbre (1) de dimension fini. Par conséquent, ceci implique qu'il existe un entier  $M$  tel que les éléments  $A_n$  satisfont des relations de récurrence linéaires à  $2M + 1$  termes de la forme:

$$(5) \quad \sum_{n=-M}^M \alpha_n A_{n-M} = 0, \quad \sum_{n=-M}^M \alpha_n G_{n-M} = 0$$

où les coefficients  $\alpha_n$  dépendent du choix spécifique de la représentation, mais sont aussi contraints par la structure des relations (2). A savoir, ces coefficients sont soit symétriques soit anti-symétriques:  $\alpha_n = \pm \alpha_{-n}$ . Considérons alors le polynôme caractéristique

$$f(z) = \sum_{n=-M}^M \alpha_n z^{n+M} .$$

<sup>9</sup>A ce sujet, notons que l'isomorphisme entre (1) et (2) est rigoureusement établi par Davies et Roan dans [39, 68]. En effet, bien que (2) implique (1), la preuve de la réciproque n'est pas directe.

Si les zéros  $z_j$  de ce polynôme (où  $j \in \{1, \dots, n\}$  avec  $z_{-j} = 1/z_j$ ) sont tous distincts et différents de  $\pm 1$ , alors il est possible de démontrer [39] que les générateurs de l'algèbre de Onsager admettent une réalisation en termes de  $M$  copies de l'algèbre de  $sl_2$ :

$$A_n = 2 \sum_{j=1}^M (z_j^n E_j^+ + z_j^{-n} E_j^-), \quad G_m = 2 \sum_{j=1}^M (z_j^m - z_j^{-m}) H_j$$

avec

$$[E_j^+, E_k^-] = \delta_{jk} H_k, \quad [H_j, E_k^\pm] = \pm 2 \delta_{jk} E_k^\pm.$$

Pour les modèles intégrables dont la condition d'intégrabilité est donnée par (1), considérons alors un Hamiltonien de la forme  $H = A_0 + kA_1$ . En utilisant les représentations irréductibles de spin  $s_j$  de l'algèbre  $sl_2$ , le spectre du Hamiltonien s'obtient alors en terme des racines du polynôme caractéristique  $f(z)$  précédemment défini:

$$(6) \quad E = \alpha + k\beta + \sum_{j=1}^L 4m_j \sqrt{1 + k^2 + k(z_j + z_j^{-1})}, \quad m_j \in -s_j, \dots, s_j.$$

Notons que les paramètres  $\alpha, \beta, s_j$  dépendent des spécificités du modèle. Pour les modèles d'Ising et de Potts chiral en particulier, il est obtenu  $s_j = 1/2$  pour tout  $j$ . La détermination des racines  $z_j$  est cependant un problème plus délicat: pour le modèle d'Ising, la solution de Onsager [3] permet de les obtenir directement. Pour le modèle de Potts chiral, les représentations irréductibles de l'algèbre de Onsager sont classifiées par les nombres quantiques  $P, Q$ , associés aux valeurs propres des opérateurs de translation spatiale et de spin qui commutent avec  $A_0, A_1$ . Les racines  $z_j$  s'obtiennent alors à partir des racines  $\zeta_j$  du polynôme spécifique (inversion d'identité) déterminé par Baxter [67]

$$(7) \quad P(\zeta^N) = \zeta^{-Q} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{(Q+L)k} \left( \frac{\zeta^N - 1}{\zeta^N - \omega^k} \right)^L$$

avec la variable  $\zeta^{N/2} = (1-z)/(1+z)$ , ou en utilisant un algorithme basé sur des techniques perturbatives (Albertini *et al.*) [71].

#### 4. PRÉSENTATION DE L'APPROCHE *à la* ONSAGER

La nouvelle approche ici proposée repose sur l'étude d'une algèbre non-Abélienne de dimension infinie (et de certaines de ses propriétés) et son utilisation pratique dans la solution de divers systèmes intégrables quantiques. Pour tous les modèles ici considérés (le modèle sine-Gordon avec bord scalaire ou dynamique [24, 25], la chaîne de spin ouverte XXZ finie ou semi-infinie [22], le modèle Azbel-Hofstadter [38],...), l'ingrédient de base à la nouvelle approche est une  $q$ -déformation de l'algèbre Onsager. Cependant, la procédure suivie ne dépend pas de cette algèbre spécifique: la nouvelle approche pourrait être considérée de manière analogue en s'appuyant sur d'autres algèbres non-Abélienne de dimension infinie. Pour ces raisons, la nouvelle approche ici proposée a été nommée 'approche *à la* Onsager' celle-ci étant inspirée essentiellement des idées de Onsager [3] suivies des développements de Dolan-Grady et Davies [39]. Les principales étapes de l'approche peuvent être résumées de la façon suivante:

##### **Etape 1: Condition d'intégrabilité et algèbre non-Abélienne de dimension infinie**

La condition d'intégrabilité d'une grande majorité des modèles intégrables non-conformes actuellement étudiés est associée aux équations de Yang-Baxter et/ou de réflexion avec paramètre spectral. Ces structures algébriques fournissent un mode de représentation adéquat dans l'étude de différents phénomènes physiques et permettent ainsi de déterminer nombres de propriétés du modèle (propriétés de symétries, structure des processus de diffusion,...). Dans la plupart des approches ci-dessus mentionnées, la construction explicite de solutions à ces équations et leur étude jouent un rôle crucial dans l'analyse du modèle. Pour un modèle défini sur le réseau, ces solutions permettent par exemple de construire une fonctionnelle génératrice - la matrice de transfert - de l'ensemble des quantités conservées, notamment le Hamiltonien, dont le problème spectral peut ainsi se ramener au problème spectral de la fonctionnelle génératrice. Pour un modèle dans le continu, les solutions décrivent les processus de diffusion des particules notamment. De manière générale, ces deux structures algébriques et leurs solutions sont utilisées systématiquement pour déterminer des quantités physiques telles que le spectre en énergie, les états ou les fonctions de

corrélations d'opérateurs locaux (par le biais des facteurs de formes [28]). Les approches a, b, c, g sont ainsi basées sur la connaissance des solutions  $R$  et  $K$  des équations de Yang-Baxter et de réflexion.

Bien que ces structures apparaissent chez la grande majorité des modèles intégrables quantiques<sup>10</sup>, certaines symétries cachées de dimension infinie (invariance conforme ou symétrie de groupe quantique) ont parfois été mises en évidence dans ces mêmes modèles. Dans ces situations, l'étude peut alors directement s'appuyer sur la théorie de représentations associée à l'algèbre de symétrie et sur son utilisation pratique. Pour certains modèles, ce type d'approche s'avère même être nécessaire en raison de difficultés à appliquer les approches a, b, g par exemple. Telle est l'idée suivie dans les approches c, f où la symétrie cachée est en générale conjecturée sur la base de la structure Hamiltonienne (approche c) ou de la structure Lagrangienne (charges non locales conservées [20] dans l'approche f). Excepté dans le cas des théories conformes (approche e) ou les modèles associés à l'algèbre de Onsager (approche d dans Ising, chiral Potts superintégréable,...), de manière générale démontrer l'équivalence explicite entre les conditions d'intégrabilité d'un modèle (équations de Yang-Baxter et de réflexion) et les relations de définition d'une algèbre non-Abélienne de dimension infinie - pouvant éventuellement être une symétrie cachée du Hamiltonien - est un problème délicat.

La première étape avait donc pour objectif de reformuler la condition d'intégrabilité associée aux équations de Yang-Baxter et de réflexion (dans le cas le plus simple) uniquement en terme d'une algèbre non-Abélienne de dimension infinie. Pour la classe de modèles intégrables considérée, une étude approfondie de la structure des éléments de la matrice de monodromie double (appelé opérateur de Sklyanin) solution de ces équations a été menée à cette fin. Celle-ci nous a permis de mettre en évidence tous les générateurs d'une  $q$ -déformation de l'algèbre de Onsager et de reformuler la condition d'intégrabilité en ces termes.

### Étape 2: De l'algèbre non-Abélienne à la hiérarchie de quantités commutantes

Par définition, les modèles intégrables quantiques possèdent un nombre suffisant de quantités conservées en involution. Pour une classe donnée de modèles intégrables quantiques ne possédant pas de symétrie cachée non-Abélienne, si la condition d'intégrabilité est équivalente à l'existence d'une algèbre non-Abélienne de dimension infinie alors toute quantité conservée doit admettre une écriture en terme des éléments d'une sous-algèbre Abélienne formant une hiérarchie de quantités commutantes. C'est le cas pour les théories conformes [27] (approche e), tout comme dans l'approche d de Onsager des modèles d'Ising et Potts chiral superintégréable. Pour ces derniers modèles intégrables définis sur le réseau, une telle hiérarchie est connue<sup>11</sup> sous le nom de 'hiérarchie de Dolan-Grady' [39].

La deuxième étape consistait donc à trouver une procédure constructive permettant d'obtenir un analogue de la hiérarchie de Dolan-Grady [39] à partir des générateurs de l'algèbre non-Abélienne. Dans notre cas, cette procédure a été basée dans un premier temps sur l'utilisation de la matrice de transfert génératrice de quantités conservées, et plus récemment sur une formule récursive permettant de s'affranchir totalement du formalisme de la matrice de transfert. Nous avons appelé la nouvelle structure intégrable la 'hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady', celle-ci formant une sous-algèbre Abélienne de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] (voir aussi [62]). Pour tout modèle intégrable dont la condition d'intégrabilité est associée à l'algèbre  $q$ -Onsager - sans que cette dernière soit une symétrie du Hamiltonien -, la hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady génère toutes les intégrales du mouvement.

### Étape 3: Etude de la théorie des représentations de l'algèbre non-Abélienne

S'inspirant de l'expérience des théories conformes, une fois l'algèbre non-Abélienne de dimension infinie identifiée l'étape suivante consiste à étudier les diverses représentations possibles de cette algèbre. En effet, supposons que la condition d'intégrabilité d'une large classe de modèles intégrables soit écrite comme les relations de définition de l'algèbre non-Abélienne de dimension infinie - dans le cas présent l'algèbre  $q$ -Onsager [40]. Spécifier un modèle signifie spécifier une représentation sur laquelle les éléments de l'algèbre agissent. Pour un système de taille finie comme la chaîne de spin ouverte XXZ avec deux bords,

<sup>10</sup>Divers objets ou structures apparaissant typiquement dans les modèles intégrables sur réseau - telles que les équations de Yang-Baxter ou la matrice de monodromie - sont aussi mises en évidence dans le cas des théories conformes. Voir par exemple [29].

<sup>11</sup>Diverses généralisations ont été proposées dans [14, 48]

cette représentation sera de dimension finie. Pour un système comme la chaîne de spin semi-infinie XXZ ou une théorie quantique de champs avec bord, la représentation sera de dimension infinie.

La troisième étape consistait donc à construire et étudier en détails certaines représentations requises dans l'étude de modèles spécifiques. En particulier, nous avons étudié des produits tensoriels de représentations de dimensions finies adaptés à l'étude de la chaîne de spin ouverte XXZ avec conditions aux bords génériques, certaines représentations de dimension infinie associées à l'ansatz de Bethe, ou encore plus récemment des représentations  $q$ -bosoniques de dimension infinie. Cependant, il est à noter qu'une classification systématique et générale des représentations de dimensions finies de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] a été récemment achevée par Terwilliger *et al.* [65]. Dans un futur proche, ces résultats importants seront à la base de la classification d'une large classe de modèles intégrables non-conformes sur le réseau et dans le continu.

#### **Etape 4: Solution d'un modèle à partir de l'algèbre non-Abélienne et de ses représentations**

D'un point de vue général, une algèbre non-Abélienne de dimension infinie peut être soit une algèbre génératrice de spectre (auquel cas ses éléments ne commutent pas avec le Hamiltonien du système), soit une algèbre de symétrie (ses éléments commutent alors avec le Hamiltonien). Pour illustrer ces deux cas de figure, considérons tout d'abord les modèles d'Ising [3] et Potts chiral superintégrable [15]. L'algèbre de Onsager est dans ces cas là une algèbre génératrice de spectre: la matrice de transfert s'écrit en terme des éléments de sa sous-algèbre Abélienne, et les états propres associés à ces éléments diagonalisent de ce fait la matrice de transfert. Considérons par contre la chaîne de spin XXZ infinie. L'algèbre non-Abélienne  $U_q(\widehat{sl_2})$  constitue alors une algèbre de symétrie en vertu du fait que ses éléments commutent avec le Hamiltonien. L'existence d'une symétrie non-Abélienne révèle dans le cas présent des dégénérescences spectrales dans le Hamiltonien. La théorie des représentations de  $U_q(\widehat{sl_2})$  est alors exploitée pour construire l'espace des états et obtenir diverses fonctions de corrélations en introduisant une réalisation bosonique des opérateurs locaux [33].

Pour la classe de modèles dont la condition d'intégrabilité est associée à l'algèbre  $q$ -Onsager [40], il est possible de procéder de manière analogue. Par exemple, considérant la chaîne de spin finie XXZ avec conditions aux bords intégrables génériques, il n'y a pas de symétrie cachée du Hamiltonien. Cependant, la matrice de transfert pouvant s'écrire en termes de combinaisons d'éléments de l'algèbre  $q$ -Onsager [40], le problème spectral pour la matrice de transfert se réduit alors à celui associé aux éléments de sa sous-algèbre Abélienne. Remarquablement, dans la limite thermodynamique du modèle (chaîne de spin XXZ semi-infinie avec conditions au bord génériques) l'algèbre  $q$ -Onsager [40] devient une symétrie cachée non-Abélienne du Hamiltonien. La théorie des représentations de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] doit alors pouvoir être utilisée pour obtenir des quantités intéressantes (matrice de réflexion, fonctions de corrélations) en complète analogie avec l'approche c.

La quatrième étape avait donc pour objectif de formuler différents objets (matrice de transfert, Hamiltonien, espace des états, conditions aux bords, opérateurs locaux) caractérisant un modèle intégrable en termes de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] et de ses représentations, et si possible d'obtenir une solution exacte à ce modèle. Pour la chaîne de spin XXZ avec conditions aux bords intégrables génériques, le spectre et les états propres ont été obtenus. Dans le régime particulier de paramètres où l'approche a est applicable, les résultats obtenus par la nouvelle approche ont été comparés. Notons cependant qu'il doit exister une autre façon probablement plus élégante de résoudre ce modèle - dans l'esprit du travail de Davies [39] -, possibilité qui n'a cependant pas encore été explorée (voir les commentaires dans la dernière partie). Pour la chaîne de spin XXZ semi-infinie dont la symétrie cachée est identifiée à l'algèbre  $q$ -Onsager [40], des étapes essentielles telles que la construction explicite de l'algèbre de courant et sa réalisation bosonique sont franchies.

## 5. DESCRIPTION DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

L'élaboration d'une approche à la Onsager en systèmes intégrables quantiques repose sur l'acquisition progressive de certains résultats clés, dont la plupart possèdent cependant un intérêt propre et indépendant de la logique inhérente au programme de recherche précédemment décrit. La présentation des résultats ci-dessous ne respecte donc pas l'ordre chronologique, mais plutôt la logique de progression dans les étapes importantes de ce programme de recherche.

- **Algèbre  $q$ -Onsager: condition d'intégrabilité de modèles intégrables quantiques**

Pour une large classe de modèles intégrables quantiques sur le réseau et dans le continu, la condition d'intégrabilité - associée pour la plupart à l'existence de solution des équations de Yang-Baxter et de réflexion - est démontrée comme étant systématiquement équivalente à l'algèbre  $q$ -Onsager [40] aux relations de définition suivantes:

$$(8) \quad [A_0, [A_0, [A_0, A_1]_q]_{q^{-1}}] = \rho[A_0, A_1] , \quad [A_1, [A_1, [A_1, A_0]_q]_{q^{-1}}] = \rho[A_1, A_0] .$$

Selon le modèle considéré, les générateurs standards  $A_0, A_1$  sont associés à des opérateurs non-locaux agissant sur le réseau ou dans le continu. Dans certains modèles, ils génèrent une symétrie cachée du Hamiltonien tandis que dans d'autres, seule une hiérarchie infinie de combinaisons spécifiques de ces générateurs commutent avec celui-ci. Dans tous les cas, le paramètre de déformation  $q$  et le paramètre  $\rho$  sont alors exprimés en termes de paramètres de couplage physique du modèle. Les détails sont donnés dans les références 1 et 2. Les modèles dont la condition d'intégrabilité se ramènent systématiquement aux relations (8) sont les suivants: Ising 2D [3], XY [13] et généralisations [14], Potts chiral super-intégrable [15] pour  $q = 1$ ; chaîne de spin ouverte XXZ avec bords non-diagonaux, chaîne de spin semi-infinie XXZ avec bord non-diagonal, modèle Azbel-Hofstadter [38], modèle sine-Gordon avec bord scalaire ou dynamique pour  $q \neq 1$  [24, 25]. Cette liste est non-exhaustive, seuls les exemples étudiés sont en effet mentionnés.

- **Algèbre  $q$ -Onsager: nouvelles réalisations**

Une nouvelle réalisation de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] (8) pour  $\rho \neq 0$  en termes d'éléments de  $U_q(\widehat{sl_2})$  est proposée dans la référence 2 (voir aussi les références 1 et 5). Cette réalisation est plus générale que celle proposée par Ito *et al.* [45] pour  $\rho = 0$  ou celle proposée dans [46] pour  $\rho \neq 0$  qui est restreinte à l'algèbre de boucle de  $U_q(\widehat{sl_2})$ . Celle-ci permet de définir un homomorphisme de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] vers un coïdéal de l'algèbre  $U_q(\widehat{sl_2})$ . De manière plus générale, il est démontré que le formalisme de Sklyanin - voir la Section 3 du Chapitre II - fournit une procédure systématique de construction de nouvelles réalisations de l'algèbre  $q$ -Onsager [40].

- **Algèbre  $q$ -Onsager: algèbre de courant  $O_q(\widehat{sl_2})$  et équation de réflexion**

Le tout premier exemple d'algèbre de courant notée  $O_q(\widehat{sl_2})$  associée à l'algèbre  $q$ -Onsager [40] et à l'équation de réflexion pour la matrice  $R$  de  $U_q(\widehat{sl_2})$  est proposé. L'isomorphisme entre l'équation de réflexion, l'algèbre de courant et l'algèbre  $q$ -Onsager [40] est établi dans la référence 9. Les relations de définition de l'algèbre non-Abélienne de dimension infinie satisfaites par les générateurs des courants  $\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{G}_{k+1}, \bar{\mathcal{G}}_{k+1}$  pour  $k \in \mathbb{N}$  sont ainsi obtenues directement à partir des équations de réflexion, confirmant la structure algébrique précédemment conjecturée dans la référence 3. Par ailleurs, en utilisant la nouvelle réalisation obtenue dans la référence 2 (voir aussi la référence 5), ce résultat fournit un schéma de présentation pour le coïdéal de  $U_q(\widehat{sl_2})$ , schéma potentiellement généralisable à toute autre algèbre de Lie affine (voir la référence 10). Du point de vue de la solution de systèmes intégrables quantiques dont la condition d'intégrabilité est associée à (8), la connaissance de cette algèbre de courant est une étape majeure et nécessaire au calcul des fonctions de corrélations (par exemple pour la chaîne de spin XXZ semi-infinie avec bord non-diagonal) selon la méthode de Jimbo *et al.*.

- **Hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady: matrice de transfert et formule récursive**

Pour la classe de modèles intégrables quantiques dont la condition d'intégrabilité se ramène à l'algèbre  $q$ -Onsager [40] - sous-réserve que cette dernière ne constitue cependant pas une symétrie cachée non-Abélienne du modèle -, l'ensemble des quantités conservées doit pouvoir s'écrire comme la spécialisation dans une réalisation donnée d'une hiérarchie de quantités en involution (formant une sous-algèbre Abélienne). Pour  $q = 1$ , cette hiérarchie s'appelle la hiérarchie de Dolan-Grady [39] bien que celle-ci ait été initialement mise en évidence de manière implicite dans l'article de Onsager de 1944. Pour  $q \neq 1$ , nous avons proposé une procédure constructive systématique de la hiérarchie dite ' $q$ -Dolan-Grady'. Dans un premier temps, cette procédure s'est appuyée sur le formalisme de la matrice de transfert: lorsque la condition d'intégrabilité peut aussi s'écrire comme les équations de Yang-Baxter et de réflexion, la hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady est générée à partir du développement de la matrice de transfert (voir les références 2, 3 pour les détails de la procédure). Cependant, afin de s'affranchir de la dépendance à ce formalisme - certains modèles intégrables ne sont pas nécessairement formulés à partir des équations de Yang-Baxter

et de réflexion - ou d'un choix particulier de représentation, nous avons plus récemment (voir la référence 11) construit cette hiérarchie directement à partir des propriétés de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] (8) et de l'algèbre de courant associée. La hiérarchie est alors définie à un niveau algébrique strict, et sa formulation ne dépend donc plus d'une représentation (le nombre de degré de liberté ou la dimension du système par exemple) spécifiquement associée au modèle intégrable considéré. Les premiers éléments mutuellement commutant en vertu de (8) sont par exemple:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \kappa \mathbf{A}_0 + \kappa^* \mathbf{A}_1 + \kappa_+ [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0]_q + \kappa_- [\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1]_q, \\ \mathcal{I}_3 &= \kappa \left( \frac{1}{\rho} [\mathbf{A}_0, [\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1]_q]_q + \mathbf{A}_1 \right) + \kappa^* \left( \frac{1}{\rho} [[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0]_q, \mathbf{A}_1]_q + \mathbf{A}_0 \right) \\ &\quad + \kappa_+ (U_1 \mathbf{A}_0^2 \mathbf{A}_1^2 + U_2 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_0^2 + U_3 (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^2 \mathbf{A}_1) + U_5 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 + U_6 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0 + U_7 (\mathbf{A}_0^2 + \mathbf{A}_1^2)) \\ &\quad + \kappa_- (U_2 \mathbf{A}_0^2 \mathbf{A}_1^2 + U_1 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_0^2 + U_3 (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0^2 \mathbf{A}_1) + U_6 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 + U_5 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0 + U_7 (\mathbf{A}_0^2 + \mathbf{A}_1^2)), \end{aligned}$$

avec  $U_1 = q^{-3/2} + q^{-1/2}$ ;  $U_2 = -q^{3/2} - q^{1/2}$ ;  $U_3 = q^{-3/2} - q^{3/2}$ ;  $U_5 = -q^{-5/2} - q^{-3/2} - 2q^{-1/2}$ ;  $U_6 = q^{5/2} + q^{3/2} + 2q^{1/2}$ ;  $U_7 = \rho(q^{1/2} - q^{-1/2})$ . Pour  $q = 1$  et  $\kappa_{\pm} = 0$ , nous retrouvons les quantités construites par Dolan et Grady [39].

• **Opérateurs aux  $q$ -différences associés à l'algèbre  $q$ -Onsager et ansatz de Bethe**

Les deux générateurs standards  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$  de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] sont réalisés en termes d'opérateurs aux  $q$ -différences du second ordre agissant sur un espace de fonctions symétriques à une variable, étendant certaines idées antérieures de Wiegmann-Zabrodin [51]. Dans certaines situations, cette représentation permet de formuler le problème spectral de la hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady en termes d'équations de Bethe. Fixant certains paramètres, le système obtenu coïncide exactement avec celui précédemment construit pour la chaîne de spin XXZ ouverte par Cao *et al.* [23] pour les mêmes relations entre les paramètres de bords. Dans le cas général, la solution du problème spectral pour la hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady se réduit à une équation aux  $q$ -différences du second ordre avec solutions non-polynômiales. L'importance de ce résultat tient au fait que les équations de l'ansatz de Bethe sont directement obtenues à partir d'une seule équation aux  $q$ -différences associée à l'élément le plus simple de la sous-algèbre Abélienne de l'algèbre  $q$ -Onsager [40]. Aucune référence à la matrice de monodromie ou au formalisme de la matrice de transfert n'est donc requis. Les détails sont présentés dans la référence 6.

• **Solution de la chaîne de spin XXZ avec bords génériques**

Pour la chaîne de spin ouverte XXZ à  $N$  sites et conditions aux bords non-diagonales génériques, la nouvelle approche à la Onsager est appliquée dans le but d'obtenir le spectre et les états propres du Hamiltonien. Tout d'abord, il est montré dans la référence 4 que la matrice de transfert de ce modèle peut s'écrire en termes des éléments de la hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady:

$$t_{XXZ}(u) = \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{F}_{2l+1}(u) \mathcal{I}_{2l+1} + \mathcal{F}_0(u) \mathbb{I} \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}_{2l+1} = \kappa \mathcal{W}_{-l} + \kappa^* \mathcal{W}_{l+1} + \frac{\kappa_+}{k_+} \tilde{\mathcal{G}}_{l+1} + \frac{\kappa_-}{k_-} \tilde{\mathcal{G}}_{l+1}$$

où les  $\mathcal{F}_{2l+1}(u), \mathcal{F}_0(u)$  sont des fonctions rationnelles explicitement calculées. Ayant ainsi démontré que l'algèbre  $q$ -Onsager [40] est génératrice de spectre, certaines représentations de dimension finie (sous la forme de produits tensoriels) de cette algèbre nécessaire à la résolution du modèle ont ensuite été construites explicitement dans la référence 5. Sachant que le problème spectral de la hiérarchie se réduit à celui de la première quantité conservée  $\mathcal{I}_1$ :

$$\mathcal{I}_1 |\Psi(\Lambda_1)\rangle = \Lambda_1 |\Psi(\Lambda_1)\rangle,$$

les représentations précédemment obtenues permettent d'écrire un système fini d'équations de récurrence couplées (généralisations des équations de récurrence à trois termes déterminant les polynômes d'Askey-Wilson définis sur un support discret). Les solutions de ces équations sont des fonctions rationnelles à une variable prenant des valeurs discrètes: ces dernières sont les racines d'un polynôme caractéristique de degré  $d$ . Pour des conditions aux bords génériques,  $d = 2^N$ . Pour certaines relations particulières entre les paramètres de bords,  $d < 2^N$ . Remarquablement, ces dernières relations possèdent une interprétation simple en termes de la théorie des représentations de l'algèbre  $q$ -Onsager [40]: elles sont associées à la situation où les représentations de la sous-algèbre Abélienne deviennent réductibles. De ce fait, dans ce régime de paramètres nous avons établi un lien explicite entre les états de Bethe et les états

propres de la sous-algèbre Abélienne de  $q$ -Onsager [40]. Ainsi, nos résultats confirment indépendamment ceux de Nepomechie et Cao *et al.* (2003) [23]. Cependant, dans notre cas la solution du problème spectral est exprimé en termes des racines d'un polynôme caractéristique au lieu d'équations hautement transcendentales (équations de Bethe). Pour les détails complets, voir la référence 7. Les principales étapes de la solution - la première du genre pour des paramètres génériques - sont résumées dans la référence 8. Depuis, une autre forme de solution a été proposée par Galleas dans [49].

- **Généralisations de l'algèbre  $q$ -Onsager et coidéaux de  $U_q(\widehat{g})$**

Pour chaque algèbre de Lie affine  $\widehat{g}$ , le premier exemple d'algèbre  $q$ -Onsager généralisée est proposé dans la référence 10. Alors que pour  $g = sl_2$  les relations sont données par (8), pour  $g = sl_n$  les relations obtenues sont une  $q$ -déformation de celles proposées en 1996 par Uglov-Ivanov [48]:

$$(9) \quad [A_i, [A_i, A_j]_q]_{q^{-1}} = \rho_{ij}^0 A_j, \quad \text{et} \quad [A_i, A_j] = 0 \quad \text{if} \quad |i - j| > 1$$

où  $\rho_{ij}^0$  est un scalaire. Soit  $\widehat{g}$  donné, une réalisation en termes d'éléments du co idéal d'algèbre quantique enveloppante associé est aussi donné dans la référence 10. En utilisant cette réalisation, certaines représentations de dimension finie utiles à l'étude de modèles intégrables quantiques dont la condition d'intégrabilité est associée à (31) peuvent être construites. Concernant l'étude des polynômes  $q$ -orthogonaux à plusieurs variables, il est attendu que ces généralisations de l'algèbre  $q$ -Onsager offrent un schéma de classification algébrique de ces fonctions spéciales.

- **Théorie de champs de Toda avec bord: symétrie cachée et classification des conditions aux bords**

Pour la première fois, les symétries cachées des théories de Toda affines avec bord intégrables sont systématiquement identifiées. Pour tout algèbre de Lie affine, l'algèbre non-Abélienne associée à cette symétrie correspond à une généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager (8). Comme conséquence de cette symétrie, les conditions au bord préservant l'intégrabilité sont systématiquement classifiées - qu'elles soient scalaires ou dynamiques - dans la référence 10. Les résultats précédemment conjecturés (Corrigan *et al.*, Delius-McKay, Delius-George [26]) sont ainsi confirmés. De plus, le premier exemple de familles de théorie de champs intégrables massives avec bord dynamique généralisant le modèle sine-Gordon dynamique [25] et les cas massless de Kondo [30] et généralisations (Bazhanov-Hibbert-Khoroshkin [31]) est obtenu dans la référence 10.

## 6. ORGANISATION DU MÉMOIRE

Ce mémoire a pour objectif de présenter certains aspects, résultats ou points techniques particuliers ayant un rôle clef dans l'élaboration d'une approche à la Onsager en modèles intégrables sur le réseau ou dans le continu. Au Chapitre II, nous présenterons plusieurs résultats mathématiques essentiels à la mise en place de la nouvelle approche. Les trois présentations possibles de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] seront ainsi décrites: algèbre tridiagonale, algèbre de réflexion et algèbre de courant. En particulier, la méthodologie suivie ainsi que la technique exploitée permettant d'extraire l'algèbre  $q$ -Onsager [40] et ses réalisations possibles - paires tridiagonales par exemple - des équations de réflexion sera détaillée<sup>12</sup>. Une généralisation possible de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] à toute algèbre de Lie affine sera ensuite présentée. Dans le Chapitre III, deux contributions importantes au domaine des systèmes intégrables quantiques seront détaillées. D'une part, la chaîne de spin XXZ ouverte sera considérée par le biais de la nouvelle approche. Après un bref rappel sur le cas de taille finie dont la méthodologie est amplement détaillée dans la référence 8, la limite semi-infinie du modèle sera discutée. En particulier, certains résultats importants non publiés seront présentés, justifiant la mise en place de la méthode des opérateurs de vertex basée sur la symétrie de  $q$ -Onsager [40] du modèle dans cette limite. D'autre part, la classification des théories de Toda affines avec bord sera présentée, obtenue en utilisant les seules propriétés de symétries des modèles. Dans le Chapitre IV, une vue d'ensemble du programme de recherche sera donnée: les étapes franchies à ce jour, les points non résolus et diverses perspectives d'exploration future seront discutés. Indépendamment, à la fin de certaines Sections divers travaux de recherche concrets sont suggérés. En dernière partie, trois des principaux articles de recherches (références 7,9 et 10 de la liste ci-dessous) sont

<sup>12</sup>En effet, le champs d'application de la nouvelle approche n'est pas réductible aux modèles avec bords, comme le prouve l'étude du cas  $q = 1$  (algèbre de Onsager) pour les modèles d'Ising et Potts chiral par exemple. De plus, il n'est pas exclu que la technique présentée soit applicable de manière analogue aux seules équations de Yang-Baxter.

inclus. En Annexe, mon travail d'encadrement de la recherche et de diffusion du savoir ces cinq dernières années est brièvement présenté.

### Publications 2005-2010

Cette thèse d'habilitation à diriger des recherches s'appuie en grande partie sur les résultats publiés dans des revues à comité de lecture (excepté la référence 8, rapport de conférence) suivantes:

1. *Deformed Dolan-Grady relations in quantum integrable models* ; hep-th/0404149, Nucl.Phys. B709 (2005) 491-521 ; P. Baseilhac
2. *An integrable structure related with tridiagonal algebras* ; math-ph/0408025, Nucl.Phys. B705 (2005) 605-619 ; P.Baseilhac
3. *A new (in)finite dimensional algebra for quantum integrable models* ; math-ph/0503036, Nucl.Phys. B720 (2005) 325-347 ; P. Baseilhac et K. Koizumi
4. *A deformed analogue of Onsager's symmetry in the XXZ open spin chain* ; hep-th/0507053, J.Stat.Mech. 0510 (2005) P005 ; P. Baseilhac et K. Koizumi
5. *A family of tridiagonal pairs and related symmetric functions*; math-ph/0604035, J. Phys. A39 (2006) 11773-11791; P. Baseilhac
6. *The q-deformed analogue of the Onsager algebra: beyond the Bethe ansatz approach* ; math-ph/0604036, Nucl. Phys. B. 754 (2006) 309-328. ; P. Baseilhac
7. *Exact spectrum of the XXZ open spin chain from the q-Onsager algebra representation theory* ; hep-th/0703106, J.Stat.Mech. (2007) P09006. ; P. Baseilhac et K. Koizumi
8. *New results in the XXZ open spin chain*, Proceedings "Recent Advances in Quantum Integrable Systems" Annecy - France (2007); arXiv:0712.0452; P. Baseilhac
9. *A new current algebra and the reflection equation*; arXiv:0906.1482, Lett. Math. Phys. **92** (2010) 4765; P. Baseilhac et K. Shigechi
10. *Generalized q-Onsager algebras and boundary affine Toda field theories*; arXiv:0906.1215, Lett. Math. Phys. **93** (2010) 213228; P. Baseilhac et S. Belliard
11. *A note on the  $O_q(\widehat{sl}_2)$  algebra*; Avril 2010; P. Baseilhac et S. Belliard.

## Chapitre II - Structures algébriques

Supposant que la condition d'intégrabilité d'un modèle intégrable soit associée à une structure algébrique généralisant l'algèbre de Onsager de la forme (8), la mise en place d'une solution par l'approche à la Onsager repose sur la connaissance détaillée des propriétés de cette structure et de ses différentes présentations possibles. L'objectif de ce Chapitre est donc, tout d'abord, de décrire trois présentations isomorphes possibles - voir la figure 1 ci-dessous - de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] dénotée  $O_q(\widehat{sl_2})$ . Le lecteur notera l'analogie avec les trois présentations possibles de l'algèbre  $U_q(\widehat{sl_2})$  connues à ce jour: de Reshetikhin-Semenov-Tian-Shansky [35] (équations 'RTT'); de Drinfeld-Jimbo [9, 10] (base de Chevalley); de Drinfeld [9] (courants). Comme nous le verrons dans le Chapitre suivant, chacune de ces présentations offre un outil d'analyse des modèles intégrables considérés. De manière schématique, nous avons:

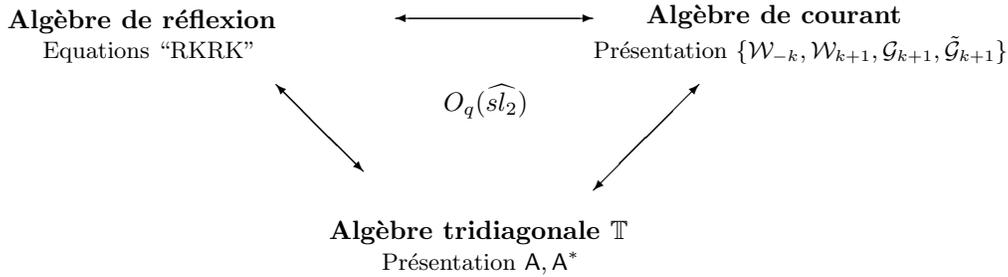


Figure 1: Différentes facettes de l'algèbre  $q$ -Onsager

En deuxième partie de ce Chapitre, nous décrirons comment la connaissance de solutions explicites aux équations de réflexion permet de construire des représentations (sous la forme de produits tensoriels) de dimension finie de l'algèbre  $q$ -Onsager [40], qui seront utiles à la solution des modèles intégrables correspondants. Enfin, nous présenterons une généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] (ou de manière équivalente de l'algèbre tridiagonale) notée  $O_q(\widehat{\mathfrak{g}})$  et ceci pour toute algèbre de Lie affine. Certaines de ses propriétés - notamment l'existence d'un coproduit assurant une structure de Hopf - seront explicitées.

1. ALGÈBRE TRIDIAGONALE ET ALGÈBRE  $q$ -ONISAGER

Ces dernières années, une nouvelle famille de structures algébriques introduite par Terwilliger dans [40] (voir aussi [41, 42]) connues sous le nom d'*algèbre tridiagonale* est apparue en lien avec le problème de la classification de fonctions spéciales, comme par exemple les polynômes orthogonaux,  $q$ -orthogonaux et fonctions  $q$ -hypergéométriques associées. L'objectif de cette Section est de présenter brièvement cette algèbre à plusieurs paramètres, son implication dans le cadre du schéma d'Askey, certaines des propriétés de ses représentations de dimensions finies importantes pour la suite, et enfin le lien avec l'algèbre  $q$ -Onsager.

Notons que l'une des deux relations de définitions concernant l'algèbre tridiagonale (voir ci-dessous (13)) apparaissent dans d'autres travaux. Par exemple, on la trouve dans les travaux de Grünbaum-Haine [74] concernant les relations fondamentales de définition des polynômes orthogonaux et  $q$ -orthogonaux à une variable. Dans leur article, ils généralisent un théorème de Bochner [75]: soit l'argument  $x$  tel que  $x \equiv s(y) = (y + y^{-1})/2$  ou  $x \equiv s(y) = y$ . Pour la famille de fonctions  $p_n(x)$  à une variable satisfaisant:

$$(10) \quad \begin{aligned} xp_n &= b_n p_{n+1} + a_n p_n + c_n p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \\ a(y)(p_n(s(qy)) - p_n(s(y))) + b(y)(p_n(s(q^{-1}y)) - p_n(s(y))) &= \theta_n p_n(s(y)) \quad \text{pour } n \geq 0 \end{aligned}$$

où  $p_0 \equiv 1$ ,  $c_0 \equiv 0$  et  $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}$ , les seules solutions de ces équations sont données par les polynômes d'Askey-Wilson ou big  $q$ -Jacobi selon la définition de  $s(y)$ , respectivement. L'expérience passée concernant les matrices de Jacobi<sup>13</sup> montre que le problème spectral peut être écrit sous la forme

$$(11) \quad Jp_n(x) = xp_n(x) \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} a_0 & c_1 & & & 0 \\ b_0 & a_1 & c_2 & & \\ & b_1 & a_2 & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, il convient donc de reconsidérer les relations (10) comme un problème spectral associé à deux opérateurs - appelons les  $A$  et  $A^*$  - agissant sur un espace de dimension infinie ou finie<sup>14</sup>. L'idée est alors de classifier les solutions des relations (10) en termes de la théorie des représentations associée aux opérateurs  $A$  et  $A^*$ . A ce sujet, notons l'existence d'un théorème de Leonard [44] permettant de caractériser les polynômes  $q$ -orthogonaux du schéma d'Askey. Afin de donner une classification algébrique, la notion de paire de Leonard est alors introduite dans [42] (voir aussi [43]). Par définition, une paire de Leonard  $A, A^*$  agissant sur une représentation de dimension finie  $V$  est telle que [42]:

- (1)  $A, A^*$  sont diagonalisable sur  $V$ .
- (2) la matrice représentant  $A^*$  est irréductible tridiagonale dans la base qui diagonalise  $A$ .
- (3) la matrice représentant  $A$  est irréductible tridiagonale dans la base qui diagonalise  $A^*$ .

Considérons par exemple les deux matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d & & & 0 \\ 1 & 0 & d-1 & & \\ & 2 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & & & & d & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^* = \text{diag}(d, d-2, d-4, \dots, -d+2, -d).$$

Celles-ci forment une paire de Leonard. En effet, soit la matrice  $P$  aux entrées  $0 \geq i, j \leq d$  telle que:

$$P_{ij} = \binom{d}{j}_2 F_1 \left( \begin{matrix} -i, -j \\ -d \end{matrix}; 2 \mid x \right)$$

<sup>13</sup>Les matrices de Jacobi interviennent dans de nombreux domaines de recherche et d'applications: analyse numérique, fractions continues, étude d'analogues discrets des équations de type Schrödinger sur la demi-ligne, systèmes intégrables et théorie des matrices aléatoires.

<sup>14</sup>Pour le cas d'une représentation de dimension finie  $N$ , cela revient à considérer un polynôme défini sur un support discret  $x \in \{x_1, x_2, \dots\}$ , où les  $x_i$  sont les solutions de  $p_{N+1}(x) = 0$ .

où nous utilisons la notation standard  ${}_2F_1$  des fonctions hypergéométriques. En remarquant que  $P^2 = 2^d I$  et  $AP = PA^*$ , il est possible de démontrer que  $P^{-1}A^*P$  est irréductible tridiagonale.

De manière générale, les paires de Léonard ont été classifiées en utilisant l'algèbre tridiagonale [42]. D'autre part, il est montré dans [47] que toute paire de Léonard satisfait une algèbre appelée *algèbre d'Askey-Wilson* (voir aussi [56, 76]). En effet, étant donné une paire de Léonard  $A, A^*$ , il existe une séquence de scalaires  $\beta, \gamma, \gamma^*, \varrho, \varrho^*, \omega, \eta, \eta^*$  dans un champ arbitraire  $\mathbb{K}$  telle que [76]

$$(12) \quad \begin{aligned} A^2 A^* - \beta A A^* A + A^* A^2 - \gamma (A A^* + A^* A) - \varrho A^* &= \gamma^* A^2 + \omega A + \eta I, \\ A^{*2} A - \beta A^* A A^* + A A^{*2} - \gamma^* (A^* A + A A^*) - \varrho^* A &= \gamma A^{*2} + \omega A^* + \eta^* I. \end{aligned}$$

Notons que cette séquence est déterminée de façon unique pourvu que la dimension de  $V$  soit au minimum 4. Ces équations sont aussi appelées les *relations d'Askey-Wilson* (voir aussi [56]). Pour le cas ci-dessus en particulier, nous avons:  $\beta = 2, \gamma = \gamma^* = \eta = \eta^* = 0, \omega = \omega^* = 4$ . Remarquablement, tous les exemples connus de paires de Léonard pour  $\beta = q + q^{-1}$  et  $q \neq -1$  sont associées aux polynômes  $q$ -orthogonaux du schéma d'Askey [76] dans le sens suivant: les entrées de la matrice de transition reliant les deux bases 'duales' qui diagonalisent  $A, A^*$ , respectivement, peuvent être exprimées en termes d'un des polynômes  $q$ -orthogonaux suivant (fonctions  $q$ -hypergéométriques): Racah ( ${}_4F_3$ ), Hahn and dual Hahn ( ${}_3F_2$ ), Krawtchouk ( ${}_2F_1$ ),  $q$ -Racah ( ${}_4\Phi_3$ ),  $q$ -Hahn et dual  $q$ -Hahn ( ${}_3\Phi_2$ ),  $q$ -Krawtchouk - classique, affine, quantique, dual - ( ${}_2\Phi_1$ ).

Etant donné la remarquable connexion entre la classification des paires de Léonard et des polynômes du schéma d'Askey solutions des équations (10), la notion de *paires tridiagonales* fut par la suite introduite [41] dans le but d'explorer une possible généralisation de cette classification à des polynômes à plusieurs variables par exemple, ou à d'autres types de fonctions spéciales symétriques. Par définition, une paire tridiagonale  $A, A^*$  est telle que [41]:

- (1)  $A$  et  $A^*$  sont diagonalisables sur  $V$ .
- (2) Il existe un ordre  $V_0, V_1, \dots, V_d$  des espaces propres de  $A$  tel que

$$A^* V_n \subseteq V_{n-1} + V_n + V_{n+1} \quad (0 \leq n \leq d),$$

où  $V_{-1} = 0, V_{d+1} = 0$ .

- (3) Il existe un ordre  $V_0^*, V_1^*, \dots, V_\delta^*$  des espaces propres de  $A^*$  tel que

$$A V_s^* \subseteq V_{s-1}^* + V_s^* + V_{s+1}^* \quad (0 \leq s \leq \delta),$$

où  $V_{-1}^* = 0, V_{\delta+1}^* = 0$ .

- (4) Il n'y a aucun sous-espace  $W$  de  $V$  tel que  $AW \subseteq W$  et  $A^*W \subseteq W$ , autrement que pour  $W = 0$  et  $W = V$ .

Dans la littérature, il est possible de trouver divers exemples de paires tridiagonales. Afin d'obtenir une classification complète des paires tridiagonales et par analogie avec le cas des paires de Léonard, une paire de relations généralisant les relations de Dolan-Grady [39] et les relations  $q$ -Serre a été proposée. Celle-ci forme les relations de définitions de l'*algèbre tridiagonale*, caractérisée par la séquence de paramètres  $\beta, \gamma, \gamma^*, \varrho, \varrho^*, \omega, \rho, \rho^*$  (voir [62]):

$$(13) \quad \begin{aligned} [A, A^2 A^* - \beta A A A^* A + A^* A^2 - \gamma (A A^* + A^* A) - \varrho A^*] &= 0, \\ [A^*, A^{*2} A - \beta A^* A A^* + A A^{*2} - \gamma^* (A^* A + A A^*) - \varrho^* A] &= 0. \end{aligned}$$

La classification des paires tridiagonales (théorie des représentations, propriétés spectrales par exemple) est l'objet de nombreuses investigations ces dernières années (travaux de Terwilliger *et al.*). Citons notamment la classification des représentations de dimensions finies, récemment achevée dans [65] sous réserve que  $A, A^*$  soient diagonalisables et  $q$  non racine de l'unité<sup>15</sup>.

Dans le cadre des modèles intégrables définis sur le réseau ou le continu, nous avons mentionné dans le précédent Chapitre comment de tels objets apparaissent pour certaines séquences de paramètres spécifiques. Dans les Chapitres suivants, nous considérerons en particulier la séquence de paramètres

<sup>15</sup>Auquel cas une généralisation cyclique de la paire tridiagonale pourrait être considérée.

$\beta = q + q^{-1}, \gamma = \gamma^* = 0, \rho = \rho^*$ . L'algèbre tridiagonale correspondante sera systématiquement nommée *algèbre  $q$ -Onsager* [40], dont les relations de définitions s'écrivent<sup>16</sup>:

$$(14) \quad [A, [A, [A, A^*]_q]_{q^{-1}}] = \rho[A, A^*], \quad [A^*, [A^*, [A^*, A]_q]_{q^{-1}}] = \rho[A^*, A].$$

↪ Suggestion 1: Généraliser la notion de paire de Leonard à la généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager proposée dans la référence 10. Obtenir une classification.

↪ Suggestion 2: Généraliser la notion de paire tridiagonale à la généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager proposée dans la référence 10. Obtenir une classification.

---

<sup>16</sup>Notons que l'on retrouve l'algèbre tridiagonale en faisant la substitution  $A \rightarrow aA + bI, A^* \rightarrow a^*A^* + b^*I$  avec un choix approprié des scalaires  $a, a^*, b, b^*$ .

## 2. ALGÈBRE DE COURANT

Parmi les sujets de recherches ayant contribué de façon majeure à la compréhension de modèles de physique fondamentale ou de structures mathématiques, l'étude des algèbres de courant occupe une place de premier plan. Diverses algèbres de courant sont ainsi apparues au fil des années et ont joué un rôle central aussi bien dans l'approche et la solution de nombreux systèmes intégrables que dans l'étude et la classification des groupes quantiques notamment. Dans les exemples tirés de la physique fondamentale, citons tout d'abord la famille des modèles intégrables dans le continu possédant la symétrie conforme, générée par le tenseur énergie-impulsion  $T(u)$  pour  $u \in \mathbb{C}$  ou plus généralement les courants associés à d'autres types de symétries non-Abélienne (supersymétrie ou algèbres de Lie) éventuellement. Dans ces cas là, la formulation de ces courants en termes de modes fondamentaux participe de façon essentielle à la construction et l'étude d'un espace de représentation physique du modèle, étape cruciale vers la solution. Pour les théories conformes, la formulation

$$(15) \quad T(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n u^{-n-2}$$

mène à l'algèbre de Virasoro

$$(16) \quad [L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} ,$$

pour  $n, m \in \mathbb{N}$  et  $c \in \mathbb{R}$  la charge centrale - et plus généralement aux algèbres super-Virasoro et algèbres  $W$  - qui sont les structures algébriques fondamentales responsables de l'intégrabilité de ces modèles du continu. De cette formulation et de l'étude des représentations associées découlent de nombreux résultats exacts non-perturbatifs. En particulier, pour les théories conformes les plus simples la construction des vecteurs nuls résultant de certaines combinaisons non-linéaires des  $L_n$  est le point de départ à l'obtention des fonctions de corrélations élémentaires (à trois et quatre points) comme solutions d'équations différentielles hypergéométriques.

Pour la famille des modèles intégrables sur le réseau, un exemple célèbre d'utilisation pratique d'une algèbre de courant nous est donné par la méthode de Jimbo *et al.* pour la solution exacte de la chaîne de spin XXZ dans la limite thermodynamique. Dans ce cas là, l'identification de l'algèbre  $U_q(\widehat{sl_2})$  comme symétrie non-Abélienne de dimension infinie du modèle demeure être cruciale mais difficilement exploitable si présentée uniquement sous la forme de la base de Chevalley - composée de six générateurs. Par contre, la présentation de cette algèbre sous la forme de courants  $X^\pm(u), \psi(u), \varphi(u)$  pour  $u \in \mathbb{C}$

$$(17) \quad \begin{aligned} X^\pm(u) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^\pm u^{-n-1} , \\ \psi(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n u^{-n} = K \exp\left((q - q^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^{-n}\right) , \\ \varphi(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{-n} u^n = K^{-1} \exp\left(- (q - q^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} u^n\right) , \end{aligned}$$

où  $x_n^\pm, K^{\pm 1}, a_n, \gamma^{\pm 1/2}$  sont les générateurs de  $U_q(\widehat{sl_2})$  dans la présentation de Drinfeld aux relations fondamentales

$$(18) \quad \begin{aligned} [a_k, a_l] &= \delta_{k+l,0} \frac{[2k]}{k} \frac{\gamma^k - \gamma^{-k}}{q - q^{-1}} , \\ K a_k K^{-1} &= a_k , \quad K x_k^\pm K^{-1} = q^{\pm 2} x_k^\pm , \\ [a_k, x_l^\pm] &= \pm \frac{[2k]}{k} \gamma^{\mp |k|/2} x_{k+l}^\pm , \\ x_{k+1}^\pm x_l^\pm - q^{\pm 2} x_l^\pm x_{k+1}^\pm &= q^{\pm 2} x_k^\pm x_{l+1}^\pm - x_{l+1}^\pm x_k^\pm , \\ [x_k^+, x_l^-] &= \frac{\gamma^{(k-l)/2} \psi_{k+l} - \gamma^{-(k-l)/2} \varphi_{k+l}}{q - q^{-1}} , \end{aligned}$$

est une étape cruciale à la construction d'une représentation de type bosonique des opérateurs fondamentaux. En effet, grâce à la formulation en termes des courants (17), la construction d'opérateurs de vertex, leur bosonisation puis le calcul des fonctions de corrélations sous forme d'intégrales multiples devient possible.

Concernant le domaine des mathématiques, les algèbres de courant jouent un rôle central dans l'étude des groupes quantiques par exemple. Pour l'ensemble des  $q$ -déformations des algèbres de Lie affines universelles enveloppantes  $U_q(\widehat{g})$ , la formulation de Drinfeld généralisant (18) en termes de courants vient ainsi non seulement compléter les présentations précédemment obtenues par Drinfeld et Jimbo de  $U_q(\widehat{g})$ , mais aussi permettre d'établir un lien explicite entre équations de Yang-Baxter et groupes quantiques. En effet, pour toute algèbre de Lie affine  $\widehat{g}$ ,  $U_q(\widehat{g})$  admet différentes présentations: la présentation dans la base de Chevalley  $\{E_i, F_i, H_i\}$  - comportant six générateurs pour le cas le plus simple de  $\widehat{g} \equiv \widehat{sl}_2$  - introduite indépendamment par Jimbo et Drinfeld [9, 10], la présentation de Drinfeld [9] - comportant une infinité de générateurs et correspondant à (18) pour le cas le plus simple  $\widehat{g} \equiv \widehat{sl}_2$  - et enfin la présentation de Reshetikhin-Semenov-Tian-Shansky [35] - à l'aide des solutions aux équations de Yang-Baxter. L'isomorphisme entre ces différentes présentations a été le sujet de plusieurs travaux. D'une part, le premier exemple d'isomorphisme explicite entre la présentation de Drinfeld-Jimbo dans la base de Chevalley  $\{E_i, F_i, H_i\}$  et celle de Drinfeld (18) est dû à I. Damiani [59] dans le cas de  $g = sl_2$  puis J. Beck [60] pour tout  $g$ . La preuve repose sur l'utilisation de la théorie des groupes de tresses de G. Lusztig [50]. Depuis ces travaux d'autres preuves ont suivi, comme celle donnée par Levendorskii-Soibelman-Stukopin [72] et Tolstoy-Koroshkin [73] qui repose notamment sur la construction explicite d'une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (aussi appelée base de Cartan-Weyl). Dans ce dernier exemple, l'idée est d'écrire chaque élément  $x_n^\pm, K^{\pm 1}, \psi_n, \varphi_{-n}, \gamma^{\pm 1/2}$  comme combinaison non-linéaire des éléments de la base de Chevalley. D'autre part, le premier exemple d'isomorphisme explicite entre la présentation de Drinfeld et celle de Reshetikhin-Semenov-Tian-Shansky [35] associée aux équations de Yang-Baxter est due à Ding-Frenkel [36], s'appuyant sur l'expérience du cas des algèbres de Lie de dimension finie de Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan [34]. Dans leur article, considérant le cas  $g = sl_n$  ils expriment les solutions  $L^\pm(u)$  des équations de Yang-Baxter

$$(19) \quad \begin{aligned} R_{12}(u/w)L_1^\pm(u)L_2^\pm(w) &= L_2^\pm(w)L_1^\pm(u)R_{21}(u/w) \\ R_{12}(u_+/w_-)L_1^+(u)L_2^-(w) &= L_2^-(w)L_1^+(u)R_{21}(u_-/w_+) \end{aligned}$$

- où la notation  $u_\pm = uq^{\pm c/2}$  avec  $c \in \mathbb{C}$  est introduite - en termes de courants  $e^\pm(u), f^\pm(u), k_{1,2}^\pm(u)$  pour  $u \in \mathbb{C}$ . Ils démontrent que l'écriture est unique grâce à une décomposition de Gauss. Dans le cas le plus simple de  $g = sl_2$ , ils obtiennent en particulier:

$$(20) \quad L^\pm(u) = \begin{pmatrix} k_1^\pm(u) & k_1^\pm(u)f^\pm(u) \\ e^\pm(u)k_1^\pm(u) & k_2^\pm(u) + e^\pm(u)k_1^\pm(u)f^\pm(u) \end{pmatrix}.$$

L'identification suivante entre courants:

$$(21) \quad \begin{aligned} X^-(u) &= (q - q^{-1})(f^+(u_+) - f^-(u_-)), \\ X^+(u) &= (q - q^{-1})(e^+(u_-) - e^-(u_+)) \\ \text{et } \psi(u) &= k_2^-(qu)(k_1^-(qu))^{-1}, \quad \varphi(u) = k_2^+(qu)(k_1^+(qu))^{-1} \end{aligned}$$

permet ainsi d'établir l'isomorphisme explicite entre la présentation de Drinfeld (17) avec (18) et la présentation de Reshetikhin-Semenov-Tian-Shansky associée aux équations de Yang-Baxter (19).

Au travers des différents exemples ci-dessus cités, nous constatons donc l'importance - en général - des algèbres de courants. Dans la situation particulière qui concerne aussi bien les systèmes intégrables avec conditions aux bords génériques que l'étude des coideaux d'algèbres quantiques de Lie affines, obtenir une algèbre de courant présente par conséquent trois intérêts majeurs:

- Pour la chaîne de spin XXZ semi-infinie avec un bord non-diagonal, de façon remarquable l'algèbre  $q$ -Onsager [40] (tridiagonale) devient dans cette limite la symétrie non-Abélienne de dimension infinie du modèle - ce point sera décrit en détails dans le Chapitre III. Construire l'algèbre de courant associée est une étape clef du développement d'une approche par opérateurs de vertex du type de celle de Jimbo *et al.* pour le calcul des fonctions de corrélations sous la forme d'intégrales multiples.

• Aucun exemple d'algèbre de courant associée aux équations de réflexion - même dans le cas le plus simple de la matrice  $R$  associée à  $U_q(\widehat{sl_2})$  - n'a été jusqu'alors identifié. Le problème majeur reposait en effet sur la difficulté de construire un  $K$ -opérateur solution des équations de réflexion

$$(22) \quad R_{12}(u/v) (K(u) \otimes \mathbb{I}) R_{12}(uv) (\mathbb{I} \otimes K(v)) = (\mathbb{I} \otimes K(v)) R_{12}(uv) (K(u) \otimes \mathbb{I}) R_{12}(u/v),$$

écrit en terme d'une nouvelle algèbre de courant encore inconnue. Comparativement, la situation était beaucoup plus simple dans le cas des solutions (20) des équations de Yang-Baxter (19), la présentation de Drinfeld (17) étant déjà connue.

• Obtenir une classification analogue au schéma associé à  $U_q(\widehat{g})$  pour les coideaux d'algèbre quantiques de Lie affines était un problème ouvert, même dans le cas le plus simple de  $g \equiv sl_2$ . La difficulté principale était que les relations de définitions fondamentales (analogue des relations dans la base de Chevalley  $U_q(\widehat{g})$ ) restaient elles-mêmes inconnues.

Bien que ces problèmes soient restés irrésolus pendant de nombreuses années, plusieurs résultats issus de la référence 3 nous ont permis de construire une telle algèbre de courant dans la référence 9:

• **Résultat 1:** Le premier exemple d'algèbre de courant associée aux équations de réflexion et nommée  $O_q(\widehat{sl_2})$  est construit explicitement. Toute solution des équations de réflexion (22) admet une écriture sous la forme

$$(23) \quad K(u) = \begin{pmatrix} uq\mathcal{W}_+(u) - u^{-1}q^{-1}\mathcal{W}_-(u) & \frac{1}{k_-(q+q^{-1})}\mathcal{G}_+(u) + \frac{k_+(q+q^{-1})}{(q-q^{-1})} \\ \frac{1}{k_+(q+q^{-1})}\mathcal{G}_-(u) + \frac{k_-(q+q^{-1})}{(q-q^{-1})} & uq\mathcal{W}_-(u) - u^{-1}q^{-1}\mathcal{W}_+(u) \end{pmatrix}$$

où  $k_{\pm} \in \mathbb{C}$ . Soit les courants  $\mathcal{W}_{\pm}(u)$ ,  $\mathcal{G}_{\pm}(u)$  définis par

$$(24) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}_+(u) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{W}_{-k} U^{-k-1}, & \mathcal{W}_-(u) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{W}_{k+1} U^{-k-1}, \\ \mathcal{G}_+(u) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{G}_{k+1} U^{-k-1}, & \mathcal{G}_-(u) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} U^{-k-1} \end{aligned}$$

avec  $U = (qu^2 + q^{-1}u^{-2})/(q + q^{-1})$ , les modes  $\{\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} | k \in \mathbb{Z}_+\}$  génèrent la déformation de l'algèbre de Onsager (Définition 3.1 de la référence 9).

En effet, comme il a été observé dans les Sections précédentes pour le cas de représentations de dimensions finies, les  $K$ -opérateurs solutions des équations de réflexion admettent systématiquement une décomposition très particulière en termes de modes  $\{\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} | k \in \mathbb{Z}_+\}$ . Intuitivement et par analogie avec (20), nous nous attendions donc à pouvoir obtenir une solution des équations de réflexion de la forme (23) et une écriture commune à tous les courants (24). Obtenir l'algèbre de courant proprement dite procède par une analyse minutieuse des équations de réflexion, et leur réduction sous la forme donnée en Définition 2.2 de la référence 9. Lors de cette analyse, le paramètre spectral 'pertinent' apparaît être  $U$  tel que défini ci-dessus, justifiant ainsi la décomposition (24). Suivant cette paramétrisation symétrique en  $u$ , les courants prennent alors une forme simple en termes des modes  $\{\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} | k \in \mathbb{Z}_+\}$ . Remarquablement, selon cette décomposition naturelle ces modes satisfont l'algèbre de dimension infinie conjecturée auparavant dans la référence 3.

Ayant écrit toute solution des équations de réflexion en termes des courants  $\mathcal{W}_{\pm}(u)$ ,  $\mathcal{G}_{\pm}(u)$  satisfaisant la nouvelle algèbre appelée  $O_q(\widehat{sl_2})$ , proposer un schéma analogue à celui de la Figure 1 au moins dans le cas de  $g \equiv sl_2$  requiert d'établir l'isomorphisme entre  $O_q(\widehat{sl_2})$  et l'algèbre  $q$ -Onsager [40] (tridiagonale). Pour ce faire, nous avons poursuivi une stratégie indirecte. Celle-ci s'inspire des travaux de Jimbo [17] sur la construction de solutions aux équations de Yang-Baxter à partir de la seule connaissance des générateurs de la base de Chevalley de  $U_q(\widehat{g})$ , et des travaux de Delius-McKay et Delius-George [26] sur la construction de solutions aux équations de réflexion à partir d'un nombre fini de quantités conservées non-locales dans certaines théories de champs. Les détails de la procédure se trouvent dans la référence 9. Au final, nous obtenons:

• **Résultat 2:** L'algèbre de courant  $O_q(\widehat{sl_2})$  [Définition 2.2, Définition 3.1 de la référence 9], l'algèbre de réflexion (22) pour la matrice  $R$  associée à  $U_q(\widehat{sl_2})$  et l'algèbre tridiagonale ( $q$ -Onsager [40])  $\mathbb{T}$  (8) pour  $q \rightarrow q^2$  sont isomorphes.

Bien que cette procédure indirecte établisse rigoureusement l'isomorphisme entre l'algèbre  $q$ -Onsager [40] et l'algèbre de courant  $O_q(\widehat{sl_2})$ , obtenir l'homomorphisme explicite, c'est à dire écrire chaque mode  $\{\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} | k \in \mathbb{Z}_+\}$  de  $O_q(\widehat{sl_2})$  en terme de combinaisons non-linéaires des seuls éléments  $A, A^*$  de  $\mathbb{T}$  est un problème difficile<sup>17</sup>. Pour les premiers modes, résoudre ce problème est élémentaire. Il est ainsi facile d'obtenir l'homomorphisme:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 &\equiv A, & \mathcal{W}_1 &\equiv A^*, \\ \mathcal{G}_1 &\equiv [A^*, A]_q + \alpha_1, & \tilde{\mathcal{G}}_1 &\equiv [A, A^*]_q + \alpha_1 \quad \forall \alpha_1 \in \mathbb{C}, \\ \mathcal{W}_{-1} &\equiv \frac{1}{\rho} [A, [A^*, A]_q]_q + A^* + \frac{\alpha_1(q - q^{-1})}{\rho} A, \\ \mathcal{W}_2 &\equiv \frac{1}{\rho} [[A^*, A]_q, A^*]_q + A + \frac{\alpha_1(q - q^{-1})}{\rho} A^* \end{aligned}$$

pour tout  $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ . Pour  $k \geq 1$ , la difficulté<sup>18</sup> réside dans le fait que les modes  $\mathcal{G}_{k+1}$  et  $\tilde{\mathcal{G}}_{k+1}$  apparaissent dans certaines des relations algébriques fondamentales sous forme d'une différence, et non indépendamment. La construction explicite des modes  $\mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}$  pour  $k = 2, 3, 4, 5$  en termes de  $A, A^*$  nous a cependant permis de déterminer la solution générique pour tout  $k$  dans la référence 11:

- **Résultat 3:** Un homomorphisme explicite est obtenu entre  $O_q(\widehat{sl_2})$  et  $\mathbb{T}$ .

Pour conclure, mentionnons que l'obtention de l'algèbre de courant  $O_q(\widehat{sl_2})$  et le résultat 3 ouvre la voie à la solution de divers problèmes intéressants aussi bien en mathématiques qu'en physique. Citons notamment la mise en place d'une approche à la Jimbo *et al.* pour la chaîne de spin XXZ ouverte avec bords non-diagonaux discutée au prochain Chapitre.

- ↪ Suggestion 1: Construire une base de Poincaré-Birkhoff-Witt pour l'algèbre  $q$ -Onsager  $\mathbb{T}$ .  
Construire la matrice  $K$  universelle.
- ↪ Suggestion 2: Construire les relations d'Askey-Wilson généralisées et étudier les propriétés des paires tridiagonales associées.
- ↪ Suggestion 3: Construire la matrice  $K$  solution des équations de réflexion associées à la matrice  $R$  elliptique. Identifier la généralisation elliptique de  $O_q(\widehat{sl_2})$ .

<sup>17</sup>Il n'est pas inutile de rappeler à ce sujet qu'il faut attendre les travaux de I. Damiani [59] pour que l'isomorphisme entre la présentation de Drinfeld et celle de Jimbo-Drinfeld [9, 10] soit obtenu explicitement pour la première fois, bien que l'isomorphisme ait été conjecturé précédemment par Drinfeld.

<sup>18</sup>Dans le cas de l'algèbre de Onsager, la connaissance des  $A_n$  suffit à déterminer  $G_m$  de manière univoque, comme l'atteste les relations (2).

### 3. OPÉRATEUR DE SKLYANIN ET REPRÉSENTATIONS DE DIMENSION FINIE

L'objectif de cette Section est de présenter une méthode de construction systématique de paires tridiagonales sous la forme d'éléments agissant sur un produit tensoriel de représentations de dimensions finies, et ce à partir de l'étude des solutions des équations de réflexion - appelées aussi opérateurs de Sklyanin. Par ce biais, certaines propriétés essentielles des descendants des paires tridiagonales sont identifiées. Les détails de la technique se trouvent dans la référence 2 (voir aussi les références 3 et 4).

Considérons les équations de Yang-Baxter et de réflexion

$$(25) \quad \begin{aligned} R(u/v)(L(u) \otimes L(v)) &= (L(v) \otimes L(u))R(u/v) , \\ R(u/v) (K^{(N)}(u) \otimes \mathbb{I}) R(uv) (\mathbb{I} \otimes K^{(N)}(v)) &= (\mathbb{I} \otimes K^{(N)}(v)) R(uv) (K^{(N)}(u) \otimes \mathbb{I}) R(u/v) \end{aligned}$$

pour la matrice  $R$  de  $U_{q^{1/2}}(\widehat{sl_2})$  (voir référence 3). Partant d'une solution initiale  $K^{(0)}(u)$ , une famille de solutions à ces équations peuvent être générées. En effet, comme le démontre E. Sklyanin dans [22] les éléments génériques

$$K^{(N)}(u) \equiv L_{\mathbb{N}}(uv_{\mathbb{N}}) \cdots L_1(uv_1) K^{(0)}(u) L_1(uv_1^{-1}) \cdots L_{\mathbb{N}}(uv_{\mathbb{N}}^{-1})$$

sont solutions de l'algèbre de réflexion (26) pour les paramètres arbitraires  $v_1, \dots, v_{\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ . En particulier, partant de la solution à paramètres scalaires  $\epsilon_{\pm}^{(0)}, k_{\pm}$  de la forme la plus générale [24]

$$K^{(0)}(u) = \begin{pmatrix} u\epsilon_+^{(0)} + u^{-1}\epsilon_-^{(0)} & k_+(u^2 - u^{-2})/(q^{1/2} - q^{-1/2}) \\ k_-(u^2 - u^{-2})/(q^{1/2} - q^{-1/2}) & u\epsilon_-^{(0)} + u^{-1}\epsilon_+^{(0)} \end{pmatrix} ,$$

il est possible de démontrer par récurrence (voir les détails de la procédure dans la référence 2) que les entrées de l'opérateur de Sklyanin  $K^{(N)}(u)$  prennent la forme simple (23) pour  $q \rightarrow q^{1/2}$  où les éléments  $\mathcal{W}_{\pm}(u), \mathcal{G}_{\pm}(u)$  sont déterminés explicitement par récurrence. De ce développement décrit dans les références 2, 3 et 4 nous avons déduits en particulier:

• **Résultat 1:** Un homomorphisme explicite  $\mathbb{T} \rightarrow \otimes_1^N U_q^{1/2}(sl_2)$  est obtenu. En particulier, les éléments

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0^{(N)} &= \left( k_+ v_{\mathbb{N}} q^{1/4} S_+ q^{s_3/2} + k_- v_{\mathbb{N}}^{-1} q^{-1/4} S_- q^{s_3/2} \right) \otimes \mathbb{I}^{(N-1)} + q^{s_3} \otimes \mathcal{W}_0^{(N-1)} , \\ \mathcal{W}_1^{(N)} &= \left( k_+ v_{\mathbb{N}}^{-1} q^{-1/4} S_+ q^{-s_3/2} + k_- v_{\mathbb{N}} q^{1/4} S_- q^{-s_3/2} \right) \otimes \mathbb{I}^{(N-1)} + q^{-s_3} \otimes \mathcal{W}_1^{(N-1)} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{W}_0^{(0)} \equiv \epsilon_+^{(0)}, \mathcal{W}_1^{(0)} \equiv \epsilon_-^{(0)}$  satisfont (14) avec  $\mathbf{A} \rightarrow \mathcal{W}_0^{(N)}, \mathbf{A}^* \rightarrow \mathcal{W}_1^{(N)}$  pour  $\rho = (q^{1/2} + q^{-1/2})^2 k_+ k_-$ .

Plus généralement, l'expression développée de l'opérateur de Sklyanin  $K^{(N)}(u)$  offre une réalisation explicite des descendants  $\{ \mathcal{W}_{-k}^{(N)}, \mathcal{W}_{k+1}^{(N)}, \mathcal{G}_{k+1}^{(N)}, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}^{(N)} | k \in \mathbb{Z}_+ \}$  générateurs de l'algèbre de courant de  $q$ -Onsager [40], dont les expressions se trouvent dans la référence 4. Remarquablement, la construction précédente permet de démontrer l'existence de relations linéaires entre descendants (références 3, 4):

• **Résultat 2:** Les descendants  $\{ \mathcal{W}_{-k}^{(N)}, \mathcal{W}_{k+1}^{(N)}, \mathcal{G}_{k+1}^{(N)}, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}^{(N)} | k, l \in \mathbb{Z}_+ \}$  satisfont une généralisation des relations de Davies (5):

$$(26) \quad \begin{aligned} -\frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})}{k_+ k_-} \omega_0^{(N)} \mathcal{W}_0^{(N)} + \sum_{k=1}^N C_{-k+1}^{(N)} \mathcal{W}_{-k}^{(N)} + \epsilon_+^{(N)} \mathbb{I}^{(N)} &= 0 , \\ -\frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})}{k_+ k_-} \omega_0^{(N)} \mathcal{W}_1^{(N)} + \sum_{k=1}^N C_{-k+1}^{(N)} \mathcal{W}_{k+1}^{(N)} + \epsilon_-^{(N)} \mathbb{I}^{(N)} &= 0 , \\ -\frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})}{k_+ k_-} \omega_0^{(N)} \mathcal{G}_1^{(N)} + \sum_{k=1}^N C_{-k+1}^{(N)} \mathcal{G}_{k+1}^{(N)} &= 0 , \\ -\frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})}{k_+ k_-} \omega_0^{(N)} \tilde{\mathcal{G}}_1^{(N)} + \sum_{k=1}^N C_{-k+1}^{(N)} \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}^{(N)} &= 0 . \end{aligned}$$

Les éléments  $\mathcal{W}_0^{(N)}, \mathcal{W}_1^{(N)}$  satisfaisant les relations tridiagonales (14) associées à l'algèbre  $q$ -Onsager [40] et agissant sur une représentation de dimension finie, ils forment potentiellement une paire tridiagonale. Dans la référence 5, le cas de produit tensoriel  $V \otimes_{j=1}^N |\pm\rangle_j$  des représentations bidimensionnelles de  $U_{q^{1/2}}(sl_2)$  est considéré en détails auquel cas les éléments  $S_{\pm}, 2s_3$  sont les matrices de Pauli  $\sigma_{\pm}, \sigma_3$ . La paire tridiagonale correspondante est alors notée  $\mathcal{W}_0^{(N)}, \mathcal{W}_1^{(N)}$ , et agit sur un espace  $V$  de dimension  $2^N$ . Il est démontré:

• **Résultat 3:** Pour des valeurs génériques des paramètres  $k_{\pm}, \epsilon_{\pm}^{(0)}$ , les éléments  $\mathcal{W}_0^{(N)}, \mathcal{W}_1^{(N)}$  forment une paire tridiagonale. Deux bases duales  $\{\psi_{n[i]}^{(N)}\}$  et  $\{\varphi_{s[k]}^{(N)}\}$  diagonalisant respectivement ces deux éléments existent et sont construites explicitement. Dans ces deux bases, les éléments  $\mathcal{W}_0^{(N)}, \mathcal{W}_1^{(N)}$  possèdent une structure bloc tridiagonale, dont les coefficients sont obtenus explicitement.

Dans le Chapitre suivant, nous verrons que cette représentation est à la base de la solution de la chaîne de spin XXZ avec bords non-diagonaux proposée dans la référence 7.

- ↔ Suggestion 1: Construire les représentations de l'algèbre  $q$ -Onsager associées aux produits tensoriels de représentations de spin  $-j$  de  $U_{q^{1/2}}(sl_2)$ . Obtenir les éléments de la matrice de transition et les identifier en termes de fonctions spéciales généralisant les fonctions  $q$ -hypergéométriques connues.
- ↔ Suggestion 2: Développer systématiquement  $L_N(uv_N) \cdots L_1(uv_1)$  et isoler la dépendance dans le paramètre spectral  $u$  par analogie avec (23). Identifier les réalisations des générateurs de courants de Drinfeld par récurrence. Obtenir l'analogie des relations de Davies.
- ↔ Suggestion 3: Considérer la procédure ci-dessus dans le cas de la matrice  $R$  elliptique et des opérateurs  $L$  en termes de l'algèbre de Sklyanin.

## 4. GÉNÉRALISATIONS

Dans les Sections précédentes, diverses présentations de l'algèbre  $q$ -Onsager ont été présentées. Notamment, nous avons successivement mis en évidence un lien remarquable entre l'algèbre tridiagonale et l'algèbre de réflexion pour la matrice  $R$  associée à  $U_q(\widehat{sl}_2)$  et obtenu une nouvelle algèbre de courant - premier exemple du genre - associée à ces mêmes algèbres. Rappelons que l'algèbre  $q$ -Onsager [40]<sup>19</sup> aux générateurs fondamentaux  $A_0, A_1$  définie pour les scalaires  $\rho_0, \rho_1$  par

$$(27) \quad [A_0, [A_0, [A_0, A_1]_{q^2}]_{q^{-2}}] = \rho_0 [A_0, A_1], \quad [A_1, [A_1, [A_1, A_0]_{q^2}]_{q^{-2}}] = \rho_1 [A_1, A_0]$$

et la théorie des représentations associée s'avère être une structure algébrique forte intéressante à plusieurs égards. D'une part dans le cadre des mathématiques, nous avons vu précédemment comment la théorie des représentations de cette algèbre permet d'offrir un moyen direct de généraliser le schéma d'Askey - les polynômes  $q$ -orthogonaux d'Askey-Wilson fournissent une représentation des plus simples. D'autre part, dans le cadre de la physique fondamentale l'algèbre  $q$ -Onsager [40] possède diverses applications. Par exemple - et comme il sera expliqué dans le Chapitre suivant - elle constitue le socle de base de la nouvelle approche non-perturbative à la Onsager ici introduite, visant à obtenir la solution exacte de certains systèmes intégrables sur le réseau - au-delà du cas  $q = 1$  ayant eu un rôle majeur dans la solution originale de L. Onsager ou du modèle chiral Potts superintégréable. De plus, cette algèbre apparaît aussi comme symétrie non-Abélienne de modèles dans le continu, ce qui permet d'étudier non-perturbativement leur dynamique. Pour le modèle sine-Gordon avec bord par exemple, elle permet non seulement de classifier de façon univoque les conditions ou opérateurs au bord préservant l'intégrabilité<sup>20</sup>, mais aussi d'obtenir les amplitudes de diffusion exactes des particules sur le bord.

Obtenir une généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager [40] (27) pour toute algèbre de Lie affine  $\widehat{g}$  autre que  $\widehat{sl}_2$  paraît donc non seulement être un problème intéressant du point de vue des mathématiques, mais aussi du point de vue de l'étude des systèmes intégrables possédant des symétries étendues. En effet, du point de vue des mathématiques:

- La généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager pour toute algèbre de Lie affine  $\widehat{g}$  serait le point de départ d'une généralisation du schéma de classification d'Askey des polynômes  $q$ -orthogonaux. Pour les représentations les plus simples, des polynômes  $q$ -orthogonaux à plusieurs variables sont attendus. Leur lien potentiel avec des polynômes tels que ceux du type Mac-Donald-Koornwinder ou autres de ce type est un problème ouvert.

- Les algèbres affines quantiques universelles  $U_q(\widehat{g})$  admettent différentes présentations: présentation de Reshetikhin-Semenov-Tian-Shansky [35] par le biais des équations de Yang-Baxter, présentation de Jimbo et Drinfeld (première et deuxième présentations). Dans le cas de  $\widehat{sl}_2$ , les résultats de la référence 9 offrent un schéma de présentation unifié pour le coïdal de  $U_q(\widehat{sl}_2)$ . La généralisation à tous les coïdeaux de  $U_q(\widehat{g})$  est donc l'étape suivante<sup>21</sup>.

Du point de vue physique, nombre de modèles de chaînes de spin ou de théories de champs quantiques possèdent comme base des symétries plus riches que  $U_q(\widehat{sl}_2)$  ou son coïdal. L'expérience passée pour les modèles dans la limite thermodynamique (Jimbo *et al.*), ou de théories de champs dans le bulk (théories conformes ou perturbées) démontre l'importance de connaître de telles symétries non-Abéliennes sous-jacentes responsables de l'intégrabilité des modèles. Ayant connaissance du fait que la symétrie cachée pour la chaîne de spin XXZ semi-infinie avec bord générique ou le modèle sine-Gordon avec bord générique est associée à (8) (voir le Chapitre suivant pour les détails), il s'ensuit:

- Qu'une généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager à toute algèbre de Lie affine serait l'élément de base à toute approche 'à la Jimbo et al.' pour le calcul du spectre et des fonctions de corrélations dans des

<sup>19</sup>Le lecteur notera le changement de définition du paramètre de déformation  $q$  et de normalisation  $\rho \rightarrow \rho_0, \rho_1$  comparativement aux pages précédentes, par souci de commodité.

<sup>20</sup>Dans l'article de Ghoshal-Zamolodchikov [24], le fait que les conditions au bord préservent l'intégrabilité est constaté *a posteriori*, conséquence de l'existence et de la forme des solutions aux équations de réflexion. Cependant, les obtenir comme conséquence de l'existence d'une symétrie cachée du Hamiltonien identifiée comme (8) dans la référence 1 est le résultat de Delius-McKay dans [26], ou [25] pour le cas avec bord dynamique.

<sup>21</sup>Notons à ce sujet le lien potentiel avec les algèbres  $q$ -twistées [78].

chaînes de spins semi-infinies avec bord (limite thermodynamique) à symétries étendues. Pour le cas de  $\widehat{sl}_2$ , cette approche est en cours (voir Chapitre suivant).

- Qu'une généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager à toute algèbre de Lie affine fournirait une base algébrique pour l'étude des théories de Toda affines avec bord. Exploiter la structure de cette algèbre - responsable de l'intégrabilité des modèles - constitue un nouvel outil dans la classification systématique des conditions aux bords - non clarifiées<sup>22</sup> en 2008 -, ainsi que dans l'obtention de diverses quantités non-perturbatives (amplitudes de diffusion des particules sur le bord, espace des états au bord).

L'intérêt d'obtenir une généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager à toute algèbre de Lie affine ayant été ci-dessus motivé, plusieurs indices participent intuitivement à l'élaboration de la structure précise des relations algébriques, et certaines de ses caractéristiques telles que diverses réalisations de cette hypothétique algèbre. Tout d'abord, pour  $q = 1$  Uglov et Ivanov ont proposé en 1995 [48] une algèbre de Onsager généralisée associée à  $sl_n$  pour  $n > 2$ . Dans ce cas, les relations algébriques pour les générateurs fondamentaux sont simplement données par:

$$(28) \quad [A_i, [A_i, A_j]] = \rho_i A_j, \quad \text{et} \quad [A_i, A_j] = 0 \quad \text{si} \quad |i - j| > 1$$

où  $\{i, j\} \in \{1, \dots, n\}$  pour les scalaires  $\rho_i$ . Deuxième indice, l'obtention explicite de quantités conservées non-locales générant une symétrie cachée des théories de Toda affines avec paramètres (scalaires) au bord  $\widehat{e}_j$  montre que celles-ci prennent une forme simple<sup>23</sup> généralisant les quantités conservées du modèle sine-Gordon avec bord (voir les résultats de Delius-McKay et Delius-George dans [26]):

$$(29) \quad \widehat{Q}_j = Q_j + \overline{Q}_j + \widehat{e}_j q^{T_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n \ .$$

Dés lors que les deux quantités conservées non-locales  $\widehat{Q}_0, \widehat{Q}_1$  pour le modèle sine-Gordon avec bords forment une des réalisations possibles de l'algèbre (8), intuitivement il semble naturel de s'attendre à ce que les charges non-locales (29) ferment sur certaines relations algébriques généralisant (8),  $q$ -déformation de (28), et constituent alors une réalisation de l'algèbre hypothétique. Dernier indice, par analogie avec le fait que le membre de gauche des relations (8) et les relations de  $q$ -Serre de  $U_q(\widehat{sl}_2)$  soit d'ordre quatre en termes des générateurs fondamentaux, ici les relations (28) sont d'ordre trois, tout comme les relations de Serre de  $\widehat{sl}_n$ . Intuitivement encore, il est donc naturel de s'attendre à une généralisation des relations de Uglov-Ivanov pour  $q \neq 1$  et tout algèbre de Lie affine  $\widehat{g}$  faisant intervenir les relations de Serre  $q$ -déformées associées à  $U_q(\widehat{g})$  dans le membre de gauche des hypothétiques relations.

Ayant justifié les motivations à construire pour tout algèbre de Lie affine  $\widehat{g}$  et tout paramètre de déformation  $q$  une généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager dénoté  $O_q(\widehat{g})$ , les indices précédents nous ont permis - en collaboration avec Samuel Belliard - d'obtenir les résultats mathématiques suivants (voir la référence 10):

- **Résultat 1:** Les relations de définitions pour l'algèbre  $q$ -Onsager généralisée  $O_q(\widehat{g})$  pour tout algèbre de Lie affine simplement ou non simplement lacée  $\widehat{g}$  sont proposées:

**Définition:** Soit  $\{a_{ij}\}$  la matrice de Cartan étendue de l'algèbre de Lie affine  $\widehat{g}$ . Soit les entiers copremiers  $d_i$  tels que  $d_i a_{ij}$  est symétrique. L'algèbre  $q$ -Onsager généralisée  $O_q(\widehat{g})$  est l'algèbre associative munie de l'unité 1, des éléments  $A_i$  et scalaires  $\rho_{ij}^k, \gamma_{ij}^{kl} \in \mathbb{C}$  avec  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, [-\frac{a_{ij}}{2}] - 1\}$ <sup>24</sup> et  $l \in \{0, 1, \dots, -a_{ij} - 1 - 2k\}$  ( $k$  et  $l$  sont des entiers positifs). Les relations de définition sont:

$$(30) \quad \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} A_i^{1-a_{ij}-r} A_j A_i^r = \sum_{k=0}^{[-\frac{a_{ij}}{2}]-1} \rho_{ij}^k \sum_{l=0}^{-2k-a_{ij}-1} (-1)^l \gamma_{ij}^{kl} A_i^{-2k-a_{ij}-1-l} A_j A_i^l,$$

où l'expression explicite des constantes  $\gamma_{ij}^{kl}$  se trouvent dans la référence 10.

<sup>22</sup>Seuls des arguments basés sur des calculs classiques ou certains rares cas quantiques permettaient jusqu'en 2008 d'en connaître certains exemples.

<sup>23</sup>Les charges non-locales sont réalisées en termes d'opérateurs de vertex  $Q_j, \overline{Q}_j$  des champs holomorphes et antiholomorphes, et  $T_j$  est identique à la charge topologique du modèle dans le bulk mais restreint à la demi-ligne.

<sup>24</sup> $[a]$  est l'entier le plus proche de  $a$ .

A titre d'exemple, dans le cas le plus simple i.e. où  $g \equiv sl_n$ , alors les relations de définitions se réduisent à la  $q$ -déformation de l'algèbre proposée par Uglov et Ivanov. En effet, il suit:

$$(31) \quad [A_i, [A_i, A_j]_q]_{q^{-1}} = \rho_{ij}^0 A_j, \quad \text{et} \quad [A_i, A_j] = 0 \quad \text{if} \quad |i - j| > 1 .$$

Pour d'autres algèbre de Lie, les valeurs explicites des éléments de la matrice de Cartan sont reportés dans la référence 10. Il est à noter que le membre de gauche de l'équation ci-dessus est de la même forme que les relations de  $q$ -Serre pour l'algèbre concernée.

• **Résultat 2:** L'existence d'une telle algèbre se justifie par l'obtention d'une réalisation non triviale. Pour cela, l'expérience avec l'algèbre (8) suggère une écriture possible des éléments  $A_i$  en termes de combinaisons d'éléments de  $U_q(\hat{g})$ . Combinant les éléments de Borel et de Cartan de façon analogue au cas de  $sl_2$  et de telle sorte que nous obtenions des coidéaux de sous-algèbre de  $U_q(\hat{g})$  - invariant par action du coproduit de  $U_q(\hat{g})$  -, nous obtenons alors:

**Proposition:** Soit  $\{c_i, \bar{c}_i\} \in \mathbb{C}$ ,  $\{w_i\} \in \mathbb{C}^*$  et  $\{e_i, f_i, h_i\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , les générateurs de  $U_q(\hat{g})$ . Il existe un homomorphisme d'algèbre  $O_q(\hat{g}) \rightarrow U_q(\hat{g})$  tel que:

$$(32) \quad A_i = c_i e_i q_i^{\frac{h_i}{2}} + \bar{c}_i f_i q_i^{\frac{h_i}{2}} + w_i q_i^{h_i}$$

si et seulement si les paramètres  $w_i$  sont contraints par les relations reportées dans la référence 10.

La vérification des relations algébriques (30) se fait par substitution directe, déterminant les constantes  $\rho_{ij}^k$  et diverses contraintes sur les paramètres  $w_i$  - contrairement au cas de  $sl_2$  où  $w_0, w_1$  restent arbitraires.

• **Résultat 3:** Au même titre que pour les algèbres de Hopf - par exemple  $U_q(\hat{g})$  -, construire une coaction préservant la structure algébrique (30) est un élément remarquablement utile lors de la construction systématique de représentations telles que décrites dans la référence 5. En l'occurrence, nous obtenons:

**Proposition:** Soit  $c_i, \bar{c}_i \in \mathbb{C}$ . L'algèbre  $q$ -Onsager généralisée  $O_q(\hat{g})$  est un  $U_q(\hat{g})$ -comodule gauche dont la coaction est donnée par  $\delta : O_q(\hat{g}) \rightarrow U_q(\hat{g}) \otimes O_q(\hat{g})$  telle que:

$$(33) \quad \delta(A_i) = (c_i e_i q_i^{\frac{h_i}{2}} + \bar{c}_i f_i q_i^{\frac{h_i}{2}}) \otimes \mathbb{I} + q_i^{h_i} \otimes A_i .$$

La vérification des axiomes définissant la coaction se fait directement (pour la liste des axiomes, cf. [7]). Ensuite, en utilisant les relations de définitions de  $U_q(\hat{g})$  les relations (30) sont vérifiées par substitution  $A_i \rightarrow \delta(A_i)$ . Dans le cas où la réalisation (32) est choisie, la coaction est identifiée au coproduit de  $U_q(\hat{g})$ .

↪ Suggestion 1: Par analogie avec la référence 9, construire l'algèbre de courant associée à  $O_q(\hat{g})$  définie par (30). Identifier les relations algébriques satisfaites par les générateurs des courants. Par analogie avec la référence 11, construire l'homomorphisme explicite entre ces générateurs et les éléments  $A_i$  de  $O_q(\hat{g})$ . Généraliser le schéma de la Figure 1.

↪ Suggestion 2: Construire la version supersymétrique de l'algèbre  $q$ -Onsager (8) et de ses généralisations (30). Etudier les représentations de dimensions finies, identifier les modèles intégrables dont la condition d'intégrabilité est associée à ce type de généralisation.

↪ Suggestion 3: Construire la représentation polynômiale à plusieurs variables la plus simple de  $O_q(\hat{g})$ . Déterminer les relations d'orthogonalité. Etudier la relation avec d'autres polynômes à plusieurs variables du type Mac-Donald-Koornwinder.

## Chapitre III - Applications aux modèles intégrables

Ce Chapitre a pour objectif de présenter plusieurs résultats exacts concernant deux exemples types de systèmes intégrables - l'un sur le réseau et l'autre dans le continu -, résultats obtenus grâce à la connaissance de l'algèbre non-Abélienne fondamentale responsable de l'intégrabilité du modèle.

Le premier exemple est la chaîne de spin XXZ ouverte introduite par E. Sklyanin [22]. Pour le cas de taille finie et bords non-diagonaux, nous présenterons les principaux résultats en mettant en valeur leur originalité comparativement aux résultats antérieurs - les détails méthodologiques et calculatoires étant amplement détaillés dans les références 4, 7 et 8. Pour le cas de la limite semi-infinie de ce modèle, certaines étapes essentielles à une solution par la méthode des opérateurs de vertex seront détaillées<sup>25</sup>.

Pour deuxième exemple, les théories quantiques de champs de Toda affines avec bord [26] seront considérées. La symétrie cachée de ces modèles est systématiquement identifiée, et correspond en l'occurrence à une généralisation possible de l'algèbre  $q$ -Onsager présentée dans le Chapitre précédent. Pour la première fois, toutes les conditions aux bords de type scalaire ou dynamique préservant l'intégrabilité sont classifiées. Pour plus de détails, voir la référence 10.

### 1. LA CHAÎNE DE SPIN XXZ OUVERTE

**1.1. La chaîne de spin XXZ de taille finie avec bords non-diagonaux.** Parmi les modèles intégrables avec bords définis sur le réseau, un des modèles de référence est la chaîne de spin XXZ ouverte avec conditions aux bords génériques dont le Hamiltonien s'écrit:

$$\begin{aligned}
 H_{XXZ} &= \sum_{k=1}^{N-1} \left( \sigma_1^k \sigma_1^{k+1} + \sigma_2^k \sigma_2^{k+1} + \Delta \sigma_3^k \sigma_3^{k+1} \right) \\
 &+ \frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})}{(\epsilon_+^{(0)} + \epsilon_-^{(0)})} \left( \frac{(\epsilon_+^{(0)} - \epsilon_-^{(0)})}{2} \sigma_3^1 + \frac{2}{(q^{1/2} - q^{-1/2})} (k_+ \sigma_+^1 + k_- \sigma_-^1) \right) \\
 (34) \quad &+ \frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})}{(\kappa + \kappa^*)} \left( \frac{(\kappa - \kappa^*)}{2} \sigma_3^N + 2(q^{1/2} + q^{-1/2})(\kappa_+ \sigma_+^N + \kappa_- \sigma_-^N) \right).
 \end{aligned}$$

A chaque extrémité de la chaîne, les opérateurs de spin sont couplés à des paramètres scalaires: à gauche  $\epsilon_+^{(0)} = (\epsilon_-^{(0)})^\dagger$ ,  $k_+ = (k_-)^\dagger$  avec  $|k_\pm|$  fixé, à droite  $\kappa = (\kappa^*)^\dagger$ ,  $\kappa_+ = -(\kappa_-)^\dagger$  avec  $|\kappa_\pm|$  fixé. Comme pour la chaîne avec conditions aux bords périodiques,  $\Delta = (q^{1/2} + q^{-1/2})/2$  désigne le paramètre d'anisotropie. Dans la suite, nous portons notre attention sur le régime dit 'massless' du modèle pour lequel  $-1 \leq \Delta \leq 1$  i.e.  $q = \exp(\phi)$  avec  $\phi$  imaginaire pur. Par commodité, une paramétrisation différente pour les conditions aux bords peut être choisie avec  $\theta, \tilde{\theta} \in \mathbb{R}$  et  $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}
 (35) \quad \epsilon_+^{(0)} &= (\epsilon_-^{(0)})^\dagger = \cosh \alpha, & k_+ &= (k_-)^\dagger = -(q^{1/2} - q^{-1/2})e^{i\theta}/2 & \text{(gauche)}, \\
 \kappa^* &= (\kappa)^\dagger = -\cosh \tilde{\alpha}, & \kappa_+ &= -(\kappa_-)^\dagger = -e^{i\tilde{\theta}}/(2(q^{1/2} + q^{-1/2})) & \text{(droite)}.
 \end{aligned}$$

L'étude détaillée de ce modèle débute avec l'article de E. Sklyanin [22], dans lequel la solution au problème spectral est obtenu par le formalisme de l'ansatz de Bethe algébrique dans le cas particulier de conditions aux bords diagonales  $\kappa_\pm = k_\pm = 0$ . Notons que ces résultats ont été très récemment complétés par le calcul des fonctions de corrélations pour ces mêmes conditions aux bords [58].

La solution de ce modèle dans le cas de conditions aux bords non diagonales  $\kappa_\pm \neq 0, k_\pm \neq 0$  demeure un problème difficile. En effet, l'ansatz de Bethe - algébrique ou fonctionnel sous la forme des équations T-Q - ne s'applique que pour des conditions aux bords non périodiques particulières ou pour un paramètre de déformation  $q$  racine de l'unité (travaux de Nepomechie, Murgan, Cao et al. [23] entre 2001 et 2005). D'autre part, la méthode de séparation de variables n'est pas développée dans ce cas, et présente des difficultés techniques structurelles.

<sup>25</sup>Ces résultats ne sont pas publiés à ce jour.

Dans les articles 4 et 7 nous avons développé une solution de la chaîne de spin XXZ (34) basée sur la théorie de représentations de l'algèbre  $q$ -Onsager [40]. Les trois résultats importants sont les suivants:

- *Conditions d'intégrabilité et algèbre  $q$ -Onsager:*

Par analogie avec les modèles d'Ising [3] ou chiral Potts superintégrable [15, 39], la condition d'intégrabilité du modèle (34) est isomorphe aux relations de définitions de l'algèbre  $q$ -Onsager (8) - la présence du paramètre spectral étant éliminée du problème. Dans le cas présent, les entrées des solutions (opérateurs de Sklyanin) des équations de réflexion s'expriment systématiquement comme combinaisons linéaires des  $4N$  éléments  $\mathcal{W}_{-k}^{(N)}, \mathcal{W}_{k+1}^{(N)}, \mathcal{G}_{k+1}^{(N)}, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1}^{(N)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , eux-mêmes combinaisons non-linéaires des deux opérateurs non-locaux fondamentaux:

$$(36) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}_0^{(N)} &= (k_+ \sigma_+ + k_- \sigma_-) \otimes \mathbb{I}^{(N-1)} + q^{\sigma_3/2} \otimes \mathcal{W}_0^{(N-1)}, \\ \mathcal{W}_1^{(N)} &= (k_+ \sigma_+ + k_- \sigma_-) \otimes \mathbb{I}^{(N-1)} + q^{-\sigma_3/2} \otimes \mathcal{W}_1^{(N-1)} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{W}_0^{(0)} \equiv \epsilon_+^{(0)}$ ,  $\mathcal{W}_1^{(0)} \equiv \epsilon_-^{(0)}$ . L'homomorphisme est donné par  $\mathbf{A} \rightarrow \mathcal{W}_0^{(N)}$ ,  $\mathbf{A}^* \rightarrow \mathcal{W}_1^{(N)}$  avec  $\rho = (q^{1/2} + q^{-1/2})^2 k_+ k_-$  dans (8). Dans la référence 4, il est prouvé que toute quantité conservée du modèle commute avec les éléments  $\mathcal{I}_{2k+1}$  formant la hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady - voir aussi la référence 11 -, notamment le Hamiltonien (34):

$$(37) \quad [H_{XXZ}, \mathcal{I}_{2k+1}] = 0 \quad \text{avec} \quad [\mathcal{I}_{2k+1}, \mathcal{I}_{2l+1}] = 0$$

pour tout  $k, l$  où

$$(38) \quad \mathcal{I}_{2l+1} = \kappa \mathcal{W}_{-l}^{(N)} + \kappa^* \mathcal{W}_{l+1}^{(N)} + \frac{\kappa_+}{k_+} \mathcal{G}_{l+1}^{(N)} + \frac{\kappa_-}{k_-} \tilde{\mathcal{G}}_{l+1}^{(N)}.$$

Dans le cas de conditions aux bords diagonales  $\kappa_{\pm} = k_{\pm} = 0$ , nous retrouvons la conservation du spin total dans la direction  $z$  qui permet de construire une représentation de plus haut poids, où d'appliquer la techniques de l'ansatz de Bethe algébrique. Tel n'est pas le cas pour des conditions aux bords non-diagonales, où les représentations de dimension finie associées à (8) doivent être considérées en détails. La solution proposée dans la référence 7 s'appuie sur cette construction.

- *Spectre et états propres à partir des représentations irréductibles de l'algèbre  $q$ -Onsager:*

Ayant développé explicitement le Hamiltonien en terme des quantités  $\mathcal{I}_{2l+1}$  (voir la référence 4), pour des conditions aux bords génériques le problème spectral se réduit à

$$(39) \quad \mathcal{I}_{2l+1} |\Psi(\Lambda_1)\rangle = \Lambda_{2l+1} |\Psi(\Lambda_1)\rangle$$

où  $|\Psi(\Lambda_1)\rangle$  désigne le vecteur propre associé à la valeur propre  $\Lambda_1$ . Rappelons alors que les éléments  $\mathcal{W}_0^{(N)}, \mathcal{W}_1^{(N)}$  forment une paire tridiagonale (voir le Chapitre II). Par conséquent, il existe une base de vecteurs  $\{\psi_{n[j]}^{(N)}\}$  (resp.  $\{\varphi_{s[k]}^{(N)}\}$ ) diagonalisant  $\mathcal{W}_0^{(N)}$  (resp.  $\mathcal{W}_1^{(N)}$ ) dans laquelle  $\mathcal{W}_1^{(N)}$  (resp.  $\mathcal{W}_0^{(N)}$ ) est une matrice bloc tridiagonale. Dans la référence 5, ces deux bases duales sont construites explicitement. La solution du problème spectral pour les quantités  $\mathcal{I}_{2l+1}$  est donc le suivant: l'ensemble complet des vecteurs propres admet deux écritures possibles:

$$(40) \quad \Psi(\Lambda_1) = \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^{\binom{N}{n}} f_{n[j]}^{(+)}(\Lambda_1) \psi_{n[j]}^{(N)} \quad \text{or} \quad \Psi(\Lambda_1) = \sum_{s=0}^N \sum_{k=1}^{\binom{N}{s}} f_{s[k]}^{(-)}(\Lambda_1) \varphi_{s[k]}^{(N)},$$

Pour des paramètres de bords génériques, cette représentation est irréductible et les valeurs propres  $\mathcal{I}_{2l+1}$  sont non dégénérées. Les poids  $f_{n[j]}^{(+)}(\Lambda_1)$  (ou resp.  $f_{s[k]}^{(-)}(\Lambda_1)$ ) sont obtenus comme solutions d'un système d'équations de récurrence couplées (voir eqs. (13), (14) de la référence 8). Les valeurs propres  $\Lambda_{2l+1}$  admettent alors deux écritures alternatives strictement équivalentes (cf. eqs.(16), (17) de la référence 8) par transformation entre les deux bases duales. Notons que les coefficients de cette transformation ne sont autres que des généralisations des polynômes d'Askey-Wilson évaluées pour des paramètres spécifiques.

- *Critère de réductibilité et régime de l'ansatz de Bethe algébrique:*

Les conditions sous lesquelles les deux représentations possibles (40) qui diagonalisent les quantités  $\mathcal{I}_{2l+1}$

sont réductibles sont identifiées: Pour tout  $p$  entier fixé:

$$(41) \quad \alpha \pm \tilde{\alpha} = -i(\tilde{\theta} - \theta) - (N - 2p - 1)\phi/2 \quad \text{mod}(2i\pi) ;$$

$$(42) \quad \alpha \pm \tilde{\alpha} = i(\tilde{\theta} - \theta) - (N - 2p - 1)\phi/2 \quad \text{mod}(2i\pi) .$$

Soit une de ces conditions satisfaite, l'ensemble complet des vecteurs propres s'obtient alors par troncation des deux expressions (40). Une analyse de la dimension des sous-espaces irréductibles démontre que la solution est complète (voir eqs. (20)-(21) de la référence 8). Notons que le critère ici établi relève de la théorie des représentations de l'algèbre d'opérateurs  $\mathcal{L}_{2l+1}$ . Il donne une interprétation mathématique rigoureuse aux relations (41), (42) auparavant constatées dans le cadre du régime de l'ansatz de Bethe algébrique ou fonctionnel [23], qui peut donc se généraliser à tout autre représentation sans difficultés.

Les résultats précédents étant décrits en détails dans les références 4,7 et 8, nous renvoyons le lecteur à ces articles pour de plus amples informations. Deux remarques peuvent cependant être formulées, qui permettent de mettre en lumière l'intérêt de la solution ici présentée et certaines directions de recherches en cours d'étude.

**Remarque 1: Ansatz de Bethe de coordonnées et ondes de spins**

Dans le cas limite de bords diagonaux, les opérateurs (36) se réduisent à  $q^{\pm S_z/2}$ , où  $S_z$  est l'opérateur de spin total dans la direction  $z$ , les vecteurs duaux  $\{\psi_{n[j]}^{(N)}\}$  et  $\{\varphi_{s[k]}^{(N)}\}$  formant alors une base de vecteurs propres. L'espace de Hilbert du système peut alors être classifié en différents secteurs par le nombre total de spins en haut (ou alternativement en bas). Dans le formalisme de l'ansatz de Bethe de coordonnées, les vecteurs propres du Hamiltonien sont des superpositions d'ondes de spins de ce type, dont les coefficients caractérisent les processus de diffusion entre ondes de différents moments. Certaines conditions<sup>26</sup> permettent alors de déterminer ces coefficients par le biais d'équations de Bethe. Par analogie, les bases duales  $\{\psi_{n[j]}^{(N)}\}$  et  $\{\varphi_{s[k]}^{(N)}\}$  constituent une déformation de ces ondes de spins, mixant cependant différents secteurs. Tout vecteur propre (40) du Hamiltonien est alors interprété comme une combinaison de ces ondes de spins. Comme le régime de paramètres (41) (ou (42)) induit des relations de périodicité, il est naturel que les coefficients dans le développement (40) possèdent une interprétation en termes d'équations de Bethe, comme il est démontré dans la référence 6.

**Remarque 2: Fonctions spéciales orthogonales de Askey-Wilson généralisées**

Considérons le problème spectral associé aux opérateurs  $A$  et  $A^*$ , respectivement. En vertu des propriétés des représentations de dimension finie de l'algèbre  $q$ -Onsager (8), l'action de ces opérateurs peut être représentée en termes d'opérateurs de  $q$ -différences agissant sur un espace de fonctions symétriques définies sur un support discret  $z \in \{z_1, \dots, z_p\}$ :

$$(43) \quad A : a(N, z)\eta + \bar{a}(N, z)\eta^{-1} + d(N, z, z^{-1})I, \quad A^* : z + z^{-1}$$

où  $\eta^{\pm 1}(z) = q^{\pm 1}z$ . Soit la fonction propre  $\{\psi_n^{(N)}(z)\}$  de l'opérateur  $A$ . Le problème spectral peut alors s'écrire:

$$(44) \quad A\psi_n^{(N)}(z) = \lambda_n^{(N)}\psi_n^{(N)}(z)$$

En remplaçant (43) dans (8), des contraintes sur les fonctions  $a(N, z)$ ,  $\bar{a}(N, z)$  et  $d(N, z, z^{-1})$  sont obtenues (voir la référence 6, eqs. (10) et (11)). Soit  $N = 1$  un paramètre associé à la solution la plus simple à ces équations. L'équation ci-dessus coïncide alors exactement avec celle définissant les polynômes d'Askey-Wilson à une variable. Pour des valeurs de  $N$  génériques, ces équations définissent donc des fonctions spéciales symétriques à une variable généralisant les polynômes d'Askey-Wilson.

<sup>26</sup>Analogues des conditions de périodicité dans la chaîne de spin avec conditions aux bords périodiques.

- ↔ Suggestion 1: Construire les fonctions spéciales  $q$ -orthogonales généralisant les polynômes d'Askey-Wilson (fonctions  $q$ -hypergéométriques  ${}_4\Phi_3$  associées à (8)). Exprimer les états propres de la chaîne de spin XXZ (34) en termes de ces fonctions évaluées sur un support discret. Utiliser les relations d'orthogonalité pour calculer le produit scalaire entre états propres.
- ↔ Suggestion 2: Etudier la limite  $N \gg 1$  des matrices blocs tridiagonales associées aux  $\mathcal{I}_{2l+1}$ . Etudier l'émergence de l'algèbre  $q$ -Onsager comme symétrie non-Abélienne du Hamiltonien.
- ↔ Suggestion 3: Etudier les représentations de l'algèbre  $q$ -Onsager pour  $q$  racine de l'unité. Résoudre le problème spectral dans ce régime de paramètre.

**1.2. La chaîne de spin XXZ semi-infinie avec bord non-diagonal.** Dans la limite thermodynamique du modèle (34), un analogue de la méthode développée par Jimbo *et al.* [17, 33] pour le calcul du spectre et des fonctions de corrélations est envisageable. Dans cette limite, considérons le Hamiltonien<sup>27</sup> avec conditions au bord non-diagonale et  $\Delta = (q + q^{-1})/2$ :

$$H_{\frac{1}{2}XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sigma_1^k \sigma_1^{k+1} + \sigma_2^k \sigma_2^{k+1} + \Delta \sigma_3^k \sigma_3^{k+1} \right) - \frac{(q - q^{-1})(\epsilon_+ - \epsilon_-)}{4(\epsilon_+ + \epsilon_-)} \sigma_3^1 - \frac{1}{(\epsilon_+ + \epsilon_-)} (k_+ \sigma_+^1 + k_- \sigma_-^1) .$$

La mise en oeuvre de la méthode de Jimbo *et al.* repose sur certaines étapes essentielles à franchir: (i) Identification de la symétrie cachée non Abélienne (algèbre infinie) du modèle; (ii) Expression de la matrice de transfert; (iii) Identification de l'algèbre de courant ; (iv) Bosonisation des courants et construction des opérateurs de vertex; (v) Calcul du spectre et fonctions de corrélations. Ci-dessous, nous présentons les résultats obtenus - non publiés - concernant les points (i), (ii), (iii) et partiellement (iv).

• *Symétrie non-Abélienne: algèbre  $q$ -Onsager:*

La première étape consiste à mettre en évidence la symétrie cachée du Hamiltonien dans la limite de taille infinie du modèle. Considérons les deux opérateurs non-locaux suivants, obtenus comme limite thermodynamique de (36):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0^{(\infty)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I} \otimes \underbrace{(k_+ \sigma_+ + k_- \sigma_-)}_{\text{site } j} \otimes q^{\sigma_3} \otimes \dots + \epsilon_+ q^{\sigma_3} \otimes \dots, \\ \mathcal{W}_1^{(\infty)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I} \otimes \underbrace{(k_+ \sigma_+ + k_- \sigma_-)}_{\text{site } j} \otimes q^{-\sigma_3} \otimes \dots + \epsilon_- q^{-\sigma_3} \otimes \dots \end{aligned}$$

Par calcul direct, il est possible de démontrer que l'algèbre  $q$ -Onsager émerge comme symétrie à la limite semi-infinie du modèle: de ce fait, ses éléments échangent les vecteurs propres du Hamiltonien possédant la même valeur propre, révélant la présence de dégénérescences dans le spectre. En effet, comme il fut anticipé dans la référence 2 nous observons:

$$[H_{\frac{1}{2}XXZ}, a] = 0 \quad \forall a \in \{\mathcal{W}_0^{(\infty)}, \mathcal{W}_1^{(\infty)}\} .$$

• *Opérateur de Sklyanin et matrice de transfert:*

La deuxième étape consiste à obtenir la matrice de transfert associée au modèle (45) à partir de solutions des équations de réflexion (22) agissant sur une représentation de dimension infinie. Pour ce faire, nous nous sommes inspirés des relations (19) en considérant une généralisation analogue des équations de

<sup>27</sup>Le signe global a été changé, afin de retrouver les résultats de [33] pour  $k_{\pm} = 0$ . Notons aussi la différence de notation pour  $q$  comparativement à la Section précédente. Le paramètre  $r$  dans [33] est alors identifié à  $r = \epsilon_+/\epsilon_-$ .

réflexion. Dans le cas particulier qui correspond au modèle (45), il est possible de montrer que les opérateurs de Sklyanin ont la forme générique pour  $\beta$  arbitraire:

$$K(u) = \begin{pmatrix} -\Phi^{(1)}(q^{1/2}u)\Phi^{(2)}(q^{-1/2}u^{-1}) & \beta \Phi^{(1)}(q^{1/2}u)\Phi^{(1)}(q^{-1/2}u^{-1}) \\ -\beta^{-1}\Phi^{(2)}(q^{1/2}u)\Phi^{(2)}(q^{-1/2}u^{-1}) & \Phi^{(2)}(q^{1/2}u)\Phi^{(1)}(q^{-1/2}u^{-1}) \end{pmatrix}$$

où les entrées sont réalisées en termes d'opérateurs générant l'algèbre de Faddeev-Zamolodchikov pour la matrice  $R$  de  $U_q(\widehat{sl_2})$  dans la représentation de spin 1/2:

$$\Phi_2(v)\Phi_1(u) = r^+(u/v)R_{12}(u/v)\Phi_1(u)\Phi_2(v),$$

où  $r_+(u)$  est une fonction scalaire connue. Par analogie avec le cas de taille finie [22], toute solution aux équations de réflexion permet de générer une infinité de quantités mutuellement commutantes. Dans le cas présent, la solution  $K(u)$  ci-dessus permet de construire la matrice de transfert de la chaîne de spin semi-infinie (45) donnée par:

$$t_{\frac{1}{2}XXZ}(u) = gtr_0 \left[ K_-(u)K(u) \right],$$

où  $K_-(u)$  est une solution non-diagonale des équations de réflexion (voir [24]) qui dépend des paramètres de bords  $k_{\pm}, \epsilon_{\pm}$  et  $g$  est une constante de normalisation appropriée telle que:

$$\frac{d}{du} t_{\frac{1}{2}XXZ}(u)|_{u=1} = \frac{4q}{(1-q^2)} H_{\frac{1}{2}XXZ}.$$

Notons que dans la formulation ci-dessus la matrice de transfert est obtenue directement à partir des solutions des équations de réflexion généralisées, et s'exprime comme une combinaison linéaires d'opérateurs de la forme  $\Phi^{(i)}(q^{1/2}u)\Phi^{(i)}(q^{-1/2}u^{-1})$  dont les coefficients sont déterminés par les conditions aux bords. Cette expression coïncide exactement avec la forme conjecturée dans [33] pour le cas d'un bord diagonal.

- *Algèbre de courant et contraintes sur les opérateurs de vertex:*

La symétrie du Hamiltonien (45) étant donnée par l'algèbre  $q$ -Onsager, l'étape suivante consiste à déterminer les équations satisfaites par les opérateurs de vertex qui seront à la base du calcul des fonctions de corrélations. Par analogie avec les travaux [33], les opérateurs de vertex du modèle (45) peuvent être construits de la manière suivante: soit  $V_u$  la représentation d'évaluation à deux dimensions de  $U_q(\widehat{sl_2})$  et  $\mathcal{W}^\infty$  une représentation de dimension infinie de l'algèbre  $q$ -Onsager. Considérons par exemple l'opérateur de vertex  $\chi_u$  tel que:

$$\chi_u : \quad \mathcal{W}^\infty \rightarrow V_u \otimes \mathcal{W}^\infty \subset \mathcal{W}^\infty$$

Les équations de Yang-Baxter et de réflexion peuvent être alors déduites des relations suivantes, reflétant les relations d'échanges entre représentations de l'algèbre  $q$ -Onsager:

$$\begin{aligned} \chi_u \chi_w &= R(u/w) \chi_w \chi_u \\ \chi_{u^{-1}} &= K_-(u) \chi_u \end{aligned}$$

où les matrices  $R$  et  $K_-$  ont été précédemment définies. Afin de déterminer explicitement les opérateurs de vertex, l'idée est d'utiliser les contraintes liées à l'existence de la symétrie associée à l'algèbre  $q$ -Onsager par analogie avec [17]. La connaissance de la structure de Hopf de l'algèbre  $q$ -Onsager joue alors un rôle crucial: nous avons montré dans la référence 2 (voir aussi la référence 9) qu'il existe une structure de coproduit préservant les relations (8) avec la substitution  $A, A^* \rightarrow \mathcal{W}_0^{(\infty)}, \mathcal{W}_1^{(\infty)}$  et  $q \rightarrow q^2$ . Celle-ci est telle que, en particulier,

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{W}_0^{(\infty)}) &= (k_+ E_1 q^{H_1/2} + k_- F_1 q^{H_1/2}) \otimes 1 + q^{H_1} \otimes \mathcal{W}_0^{(\infty)}, \\ \Delta(\mathcal{W}_1^{(\infty)}) &= (k_- E_0 q^{H_0/2} + k_+ F_0 q^{H_0/2}) \otimes 1 + q^{H_0} \otimes \mathcal{W}_1^{(\infty)} \end{aligned}$$

où l'endomorphisme d'évaluation  $\pi_u : U_q(\widehat{sl_2}) \mapsto \text{End}(\mathcal{V}_u)$  dans la représentation homogène est choisi tel que  $\mathcal{V} \equiv \mathbb{C}^2$ . Ecrivant l'opérateur de vertex  $\chi_u$  sous la forme:

$$\chi_u = |+\rangle \otimes \chi_+(u) + |-\rangle \otimes \chi_-(u),$$

nous obtenons les contraintes suivantes:

$$(45) \quad \mathcal{W}_0^{(\infty)} \chi_+(u) = q^{-1} \chi_+(u) \mathcal{W}_0^{(\infty)} - k_+ u q^{-1} \chi_-(u) ,$$

$$(46) \quad \mathcal{W}_0^{(\infty)} \chi_-(u) = q \chi_-(u) \mathcal{W}_0^{(\infty)} - k_- u^{-1} q \chi_+(u) ,$$

$$(47) \quad \mathcal{W}_1^{(\infty)} \chi_+(u) = q \chi_+(u) \mathcal{W}_1^{(\infty)} - k_+ u^{-1} q \chi_-(u) ,$$

$$(48) \quad \mathcal{W}_1^{(\infty)} \chi_-(u) = q^{-1} \chi_-(u) \mathcal{W}_1^{(\infty)} - k_- u q^{-1} \chi_+(u) .$$

Par analogie avec [33], la solution à ces équations requiert tout d'abord la connaissance de l'algèbre de courant associée à l'algèbre  $q$ -Onsager. Grâce aux résultats de la référence 9, celle-ci est explicitement identifiée (voir le Chapitre précédent). Il s'agit alors d'obtenir une réalisation bosonique de cette algèbre. Nous avons récemment résolu ce problème en utilisant la réalisation des opérateurs de Faddeev-Zamolodchikov en termes de  $q$ -oscillateurs. De ce fait, il reste à en déduire les opérateurs  $\chi_{\pm}(u)$  dans cette réalisation, problème que nous étudions actuellement. Une fois ce dernier point résolu, le calcul des fonctions de corrélations suivra une procédure analogue à celle du cas avec bord diagonal [33]. A ce sujet, la compréhension de la structure du vide dans la limite  $q \rightarrow 0$  - où le modèle (45) se réduit à une perturbation du modèle d'Ising - joue un rôle important. Ces différents points sont actuellement étudiés en détails en collaboration avec S. Belliard et K. Shigechi.

## 2. CLASSIFICATION DES THÉORIES DE TODA AFFINES AVEC BORDS

Comme exemple d'application concrète des résultats du Chapitre III au domaine des systèmes intégrables, nous avons reconsidéré les problèmes importants restés ouverts et non résolus en 2008 de la symétrie cachée et de la classification systématique des conditions au bord dans les théories de Toda affines définies sur le demi-plan<sup>28</sup>. Par 'théories de Toda affines avec bord' nous entendons une action de type<sup>29</sup>:

$$(49) \quad S = \frac{1}{4\pi} \int_{x < 0} d^2 z \left( \partial \phi \bar{\partial} \phi + \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{j=0}^n n_j \exp \left( -i \hat{\beta} \frac{1}{|\alpha_j|^2} \alpha_j \cdot \phi \right) \right) + \frac{\lambda_b}{2\pi} \int dt \sum_{j=0}^n \epsilon_j \exp \left( -i \frac{\hat{\beta}}{2} \alpha_j \cdot \phi(0, t) \right) ,$$

où  $\phi(x, t)$  est un champ bosonique à  $n$  composantes en deux dimensions,  $\{\alpha_j\}$  et  $\{n_j\}$  sont les racines simples et labels de Kac, respectivement, de  $\hat{g}$ ,  $\lambda, \lambda_b$  définissent l'échelle de masse,  $\hat{\beta}$  est la constante de couplage. Dans le cas présent, notre objectif était donc de classifier les familles de paramètres scalaires ou opérateurs au bord  $\{\epsilon_j\}$  tels que la théorie (49) soit intégrable, conséquence de l'existence d'une symétrie cachée non-Abélienne. Les éléments  $\{\epsilon_j\}$  sont donc *a priori* non contraints. Successivement, les résultats suivants sont obtenus:

• **Résultat 1:** La théorie de Toda affine avec bord (49) possède une symétrie cachée identifiée à l'algèbre  $q$ -Onsager généralisée  $O_q(\hat{g})$  qui détermine les éléments  $\epsilon_i$  assurant l'intégrabilité.

En effet, au même titre que pour les théories de Toda affines dans le bulk des charges non-locales conservées génèrent la symétrie cachée non-Abélienne  $U_q(\hat{g})$  (voir Bernard-Leclair, [20]), dans le cas présent une situation analogue existe. Initiée par Nepomechie et Mezinscescu [24] pour le modèle sine-Gordon et ensuite par Delius-McKay et Delius-George [26] pour les théories associées à  $g \equiv a_n, d_n$ , l'existence de charges non-locales conservées de la forme (29) du Chapitre II avec

$$(50) \quad \hat{\epsilon}_j = \frac{\lambda_b}{2\pi c} \frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2} \epsilon_j$$

est connue. Celles-ci sont aisément obtenues pour tout autre  $g$ . Remarquant le fait que  $Q_i, \bar{Q}_i$  et  $T_i$  ne sont autres que les générateurs de  $U_q(\hat{g})$ , il est immédiat de constater que de telles charges non-locales coïncident exactement avec les éléments (32) du Chapitre II sous réserve de l'identification  $c_i = \bar{c}_i \equiv$

<sup>28</sup>Dans le bulk, il est inutile de rappeler l'impact majeur de la connaissance de la symétrie cachée  $U_q(\hat{g})$  dans les théories de Toda affines. Comme seule application, rappelons que l'obtention des amplitudes de diffusions devient alors un problème linéaire (résolu entre 1991 et 2000 pour chaque  $g$ ), contrairement à la solution directe des équations de Yang-Baxter qui restait un problème non-linéaire techniquement difficilement soluble.

<sup>29</sup>En effet, récemment une autre forme d'action a été introduite [63], dont les propriétés de diffusion des particules sur le bord sont différentes. Le type d'action ici considérée (49) fait référence à la famille de théories intégrables avec bord initiée par Corrigan *et al.* en 1994 [26], puis étudiées en détails par la suite dans d'autres contextes.

1,  $w_i \equiv \widehat{\epsilon}_i$ . Pour le cas le plus simple  $g \equiv sl_2$  il fallut cependant attendre les résultats de la référence 2 pour que la symétrie générée soit identifiée à  $O_q(\widehat{sl_2})$  i.e. (8), et ceci pour tous paramètres de bords. Pour le cas général (49), il est cependant important de souligner que la conservation des charges non-locales n'implique en soi *aucune contrainte*<sup>30</sup> sur les  $\epsilon_i$ . Par contre, le fait que ces quantités forme une algèbre implique l'existence de contraintes sur les  $\epsilon_i$ .

Grâce à la connaissance des relations algébriques fondamentales (30) du Chapitre III - et contrairement aux travaux antérieurs - la classification des conditions au bord dans ces théories ne nécessite alors quasiment aucun calcul. Les résultats sont les suivants:

• **Résultat 2:** Pour tout algèbre de Lie affine  $\widehat{g}$ , les conditions aux bords *scalaires* intégrables  $\epsilon_i$  sont classifiées par les relations données en sous-section 3.1 de la référence 10.

Une analyse au cas par cas des contraintes issues de (32) du Chapitre II permet en effet de déterminer tous les choix possibles de  $\epsilon_i$  compatible avec l'intégrabilité. Outre la confirmation des conditions pour  $a_n, d_n$  au regard des résultats de Delius-McKay et Delius-George dans [26], dans la limite  $q \rightarrow$  nous retrouvons les conditions au bord classiques de Corrigan *et al.* excepté pour les cas exceptionnels  $g_2^{(1)}, d_4^{(3)}$ . Cependant, nos résultats sont consistants avec ceux obtenus par ailleurs par V. Fateev<sup>31</sup> dans un autre contexte [26].

Un deuxième possibilité consiste à envisager les éléments  $\epsilon_i$  comme des opérateurs, dans le but de généraliser à toute algèbre de Lie  $g$  la situation du modèle sine-Gordon avec bord dynamique [32, 25]. A ce sujet, seule la limite *massless* avait été auparavant considérée en détails par Bazhanov *et al.* dans [31]. Ces auteurs montrent en effet que l'intégrabilité de la théorie de Toda affine *massless* associée à  $\widehat{sl_3}$ :

$$(51) \quad S = \frac{1}{4\pi} \int_{x<0} d^2z \partial\phi\bar{\partial}\phi + \frac{\lambda_b}{2\pi} \int dt \sum_{j=0}^2 y_j \exp\left(-i\frac{\hat{\beta}}{2}\alpha_j \cdot \phi(0,t)\right)$$

est assurée pour des opérateurs de bords  $y_i$  satisfaisant les relations de type  $q$ -Serre suivantes:

$$(52) \quad y_i^2 y_j - (q + q^{-1}) y_i y_j y_i + y_j y_i^2 = 0 \quad \text{avec } i = 0, 1, 2 .$$

Dans le cas massif (49), supposons donc que les  $\epsilon_i$  soient des opérateurs agissant sur un espace différent de celui des champs de Toda. Alors, les quantités conservées agissent sur deux espaces séparables et prennent la forme suivante:

$$(53) \quad \hat{Q}_j = (Q_j + \bar{Q}_j) \otimes \mathbb{I} + q_j^{T_j} \otimes \widehat{\epsilon}_j, \quad j = 0, 1, \dots, n .$$

Sans difficultés, des résultats du Chapitre II nous déduisons donc:

• **Résultat 3:** Pour toute algèbre de Lie affine  $\widehat{g}$ , l'intégrabilité des théories de Toda affines avec bord (49) est préservée si et seulement si les opérateurs au bord  $\{\epsilon_i\}$  constituent, respectivement, des réalisations des éléments fondamentaux  $\{A_i\}$  de l'algèbre  $q$ -Onsager généralisée  $O_q(\widehat{g})$ .

Pour le cas de  $g \equiv sl_2$  i.e. le modèle sine-Gordon avec bord dynamique, une réalisation simple de (8) en terme d'un  $q$ -oscillateur fut proposée dans [25]. Pour  $g \equiv sl_n$  et dans la limite *massless* des relations (30), les relations de  $q$ -Serre sont obtenues en accord avec les résultats de Bazhanov *et al.* [31], pour lequel des réalisations en termes de  $q$ -oscillateurs sont proposées.

<sup>30</sup>Delius et McKay ont obtenus les contraintes uniquement en étudiant la consistance des charges avec les matrices  $K$  (amplitudes de diffusion), solutions des équations de réflexion.

<sup>31</sup>Communication personnelle.

- ↔ Suggestion 1: Pour le cas massif (49) ici considéré et tout  $g$ , construire des réalisations des  $\epsilon_i$  en termes de  $q$ -oscillateurs. Identifier les systèmes physiques pouvant être décrits par ces modèles, par analogie avec le modèle de Kondo [30].
- ↔ Suggestion 2: Construire et classifier toutes les solutions scalaires (matrice  $K$ ) aux équations de réflexion associée à la matrice  $R$  de  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ . Utiliser la symétrie cachée  $O_q(\widehat{\mathfrak{g}})$  par analogie avec les travaux de Delius-McKay et Delius-George. En déduire les amplitudes de diffusion sur le bord des particules fondamentales et états liés.
- ↔ Suggestion 3: Par continuation analytique  $\beta \rightarrow ib$  dans (49), étudier les propriétés de dualité  $b \rightarrow 1/b$  de la théorie dans le régime de couplage faible/fort. Généraliser les résultats obtenus pour le modèle sinh-Gordon avec bord dynamique [25].

# Chapitre IV - Perspectives

## 1. BILAN ACTUEL DU PROGRAMME DE RECHERCHE

Le programme de recherche ici présenté a pour ambition de développer et étendre les idées originales de L. Onsager à la résolution systématique de modèles intégrables non-conformes sur le réseau ou dans le continu, en exploitant la théorie des représentations de l'algèbre non-Abélienne de dimension infinie responsable de l'intégrabilité du modèle considéré. De manière analogue à l'algèbre de Virasoro sur laquelle s'est initialement appuyé le programme des théories de champs conformes, l'algèbre  $q$ -Onsager est l'exemple le plus simple de structure algébrique fondamentale à avoir été considéré à ce jour dans le cadre de ce programme. Les progrès accomplis lors de son élaboration sont les suivants:

1. L'algèbre non-Abélienne de dimension infinie  $q$ -Onsager est la structure algébrique la plus fondamentale responsable de l'intégrabilité d'une large classe de modèles intégrables quantiques non-conformes sur le réseau (Ising 2D, chiral Potts superintégréable, XY et généralisations, modèle d'Azbel-Hofstadter, chaîne de spin XXZ finie ou semi-infinie) ou dans le continu (modèle sine-Gordon avec bord scalaire ou dynamique). Cette algèbre est soit génératrice de spectre (Ising 2D, chiral Potts superintégréable, XY et généralisations, modèle d'Azbel-Hofstadter, chaîne de spin XXZ finie), soit mieux encore une symétrie non-Abélienne du modèle (chaîne de spin XXZ semi-infinie et modèle sine-Gordon avec bord scalaire ou dynamique). Voir les références 1,2,3.

2. Selon le modèle considéré, les générateurs de l'algèbre  $q$ -Onsager sont réalisés en termes d'opérateurs non-locaux agissant sur une représentation de dimension finie ou infinie. Les paramètres physiques (taille et structure du réseau ou de l'espace-temps, conditions aux bords, constantes de couplage) déterminent les caractéristiques de l'espace de représentation (paramètre de déformation, dimension, dégénérescences). Différents modèles pouvant être étudiés en utilisant une même représentation appartiennent à la même classe d'universalité. Voir les références 2,3,4,7.

3. Pour les modèles dans lesquels l'algèbre  $q$ -Onsager est génératrice de spectre, toutes les quantités conservées mutuellement commutantes (i.e. y compris le Hamiltonien) peuvent être exprimées en termes des éléments de la sous-algèbre de l'algèbre  $q$ -Onsager appelée hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady. Dans le cas des modèles intégrables pouvant être traités grâce au formalisme de Sklyanin, une réalisation de cette hiérarchie peut être explicitement obtenue à partir du développement de la matrice de transfert. Voir les références 2,3,4. Plus généralement, les éléments de cette hiérarchie peuvent cependant être obtenus de manière recursive sans avoir à spécifier un espace de représentation. Voir la référence 11.

4. La chaîne de spin XXZ ouverte avec conditions aux bords non-diagonales est étudiée par la nouvelle approche. Les représentations de dimensions finies (produits tensoriels) appropriées sont construites explicitement (voir la référence 5) à partir desquelles le spectre et les états propres sont obtenus en termes des valeurs propres d'une matrice bloc tridiagonale unique (référence 7). Un critère de réductibilité est obtenu, déterminant le domaine de paramètres où l'ansatz de Bethe demeure applicable (voir les références 6,7). Les relations entre paramètres caractérisant ce régime sont explicitement identifiées, offrant une confirmation indépendante des résultats connus [23] ainsi qu'une description alternative du modèle.

5. La chaîne de spin XXZ semi-infinie avec conditions au bord non-diagonales est étudiée par la nouvelle approche. Dans cette limite, le Hamiltonien commute avec les éléments de l'algèbre  $q$ -Onsager (point (i) précédemment mentionné). En d'autres termes, l'algèbre  $q$ -Onsager devient une symétrie du modèle, traduisant la présence de dégénérescences dans le spectre (non publié). Par analogie avec la méthode de résolution par opérateurs de vertex, l'analyse du modèle requiert alors: (ii) l'expression de la matrice de transfert; (iii) l'identification de l'algèbre de courant; (iv) la bosonisation des courants et la construction des opérateurs de vertex; (v) le calcul du spectre et des fonctions de corrélations. Jusqu'à maintenant, les étapes (ii) et (iii) sont résolues, et l'étape (iv) est actuellement considérée en détails.

6. Les deux générateurs standards de l'algèbre  $q$ -Onsager (8) admettent une réalisation en termes d'opérateurs aux  $q$ -différences agissant sur un espace de fonctions symétriques à une variable. Des équations de Bethe de forme standard sont obtenues comme conséquence du problème spectral de la hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady pour certaines relations entre paramètres caractérisant la représentation choisie. Voir la référence 6.

7. De la même manière que l'algèbre de Virasoro peut être étendue en considérant des algèbres de Lie de plus haut rang (menant aux algèbres  $W$ ) ou l'introduction de supersymétries (algèbre super-Virasoro), nous avons montré que l'algèbre  $q$ -Onsager peut être étendue en considérant des algèbres de Lie de plus haut rang. Les algèbres  $q$ -Onsager généralisées introduites génèrent une symétrie non-Abélienne des théories de champs de Toda avec bord dont les conditions au bord sont complètement classifiées pour la première fois. Voir la référence 10.

## 2. CRITIQUES ET SOLUTIONS POTENTIELLES

Bien que la structure du programme de recherche soit à présent relativement claire et plusieurs résultats importants acquis, certains points doivent à présent être éclaircis ou approfondis en vue de confirmer l'intérêt de l'approche et d'améliorer son efficacité à obtenir la solution exacte de modèles intégrables non-conformes. L'observation des résultats obtenus à ce jour permet notamment de formuler deux critiques:

**Critique 1:** Rappelons que l'approche ici présentée est applicable au cas de la chaîne de spin XXZ de taille  $N$  avec bords non-diagonaux génériques. Ayant alors choisi d'utiliser *exclusivement* les propriétés des générateurs standards de l'algèbre  $q$ -Onsager dans une représentation de dimension finie particulière, nous avons montré que le problème spectral de la matrice de transfert se réduit à la seule diagonalisation d'une matrice bloc tridiagonale dont la signification est remarquablement élégante du point de vue algébrique<sup>32</sup>. Cependant, malgré l'existence de diverses techniques d'analyse numérique permettant de simplifier le temps de calcul pour des matrices de ce type, cette procédure de diagonalisation demeure peu économique. La première critique concerne donc la méthode même de diagonalisation de la matrice de transfert qui, à ce jour, ne s'appuie sur aucune autre des propriétés importantes des représentations de dimension finie de l'algèbre  $q$ -Onsager.

**Critique 2:** Il a été montré que l'algèbre  $q$ -Onsager devient une symétrie non-Abélienne de dimension infinie du Hamiltonien de la chaîne de spin XXZ dans la limite semi-infinie ( $N \rightarrow \infty$ ), permettant de développer un analogue de la méthode de résolution par opérateurs de vertex de Jimbo *et al.* dont les premières étapes ont été franchies avec succès. Cependant, il est bien connu que cette dernière approche précédemment appliquée à la chaîne de spin XXZ infinie demeure - par construction - restreinte au régime  $q < 1$  [17], contrairement à l'approche par ansatz de Bethe algébrique qui demeure applicable pour tout  $q$  [21]. Par conséquent, même muni d'une approche par opérateurs de vertex basée sur l'algèbre  $q$ -Onsager, une solution complète - i.e. pour tout  $q$  - à la chaîne de spin XXZ semi-infinie reste un problème ouvert.

Concernant la première critique, rappelons qu'aussitôt que l'algèbre non-Abélienne de dimension infinie responsable de l'intégrabilité du modèle est identifiée, trouver une solution exacte au problème spectral Hamiltonien - par exemple - peut suivre différentes stratégies. Comme il a été mentionné ci-dessus, la seule stratégie pour le moment suivie concernant la diagonalisation de la matrice de transfert de la chaîne de spin XXZ avec bords non-diagonaux génériques repose sur les propriétés des paires tridiagonales associées à  $A_0, A_1$  satisfaisant (8). Une autre piste de recherche possible mais non explorée à ce jour peut cependant s'appuyer sur une stratégie différente, analogue à celle suivie par Davies dans [39] concernant la solution exacte des modèles d'Ising et Potts chiral superintégrable. En effet, suite à la solution de Onsager du modèle d'Ising, Davies proposa une solution plus simple, élégante et plus générale en utilisant certaines propriétés des représentations de l'algèbre de Onsager. A savoir, pour le cas de représentations de dimension finie - choix approprié dans le traitement des modèles sur réseau de taille finie - Davies postula tout d'abord l'existence de relations linéaires entre générateurs fondamentaux  $A_n, G_m$  de la forme

<sup>32</sup>L'objet en question - noté  $\mathcal{I}_1$  dans le texte - est le premier élément de la hiérarchie  $q$ -Dolan-Grady, correspondant à une  $q$ -déformation de la quantité réalisant le Hamiltonien du modèle d'Ising [39]. De plus, les fonctions propres de cet objet ne sont autres que des combinaisons de fonctions spéciales à une variable généralisant les polynômes d'Askey-Wilson (fonctions hypergéométriques  ${}_3\phi_4$ ).

(5) (voir Chapitre I). Il remarqua alors que tout générateur de l’algèbre de Onsager peut être réalisé en termes des éléments de l’algèbre de boucle de  $sl_2$ . Combinant ces deux caractéristiques, Davies pu montrer que le spectre en énergie d’un modèle dont la condition d’intégrabilité est l’algèbre de Onsager peut être *systématiquement* exprimé en terme des racines d’un polynôme caractéristiques dont les coefficients sont déterminés par les relations linéaires initialement postulées. Il s’avère que la stratégie suivie par Davies doit pouvoir être appliquée de manière analogue à la solution exacte de modèles intégrables sur réseau associés à (8). En effet, dans la référence 4 les relations linéaires (26) du type de celles de Davies sont obtenues. Considérant la simplicité du résultat de Davies, un problème intéressant serait donc de reconsidérer la diagonalisation de la matrice de transfert de la chaîne de spin XXZ ouverte en suivant la stratégie de Davies. A ce sujet, il n’est pas exclu que les questions soulevées par la deuxième critique puisse trouver certaines réponses.

Concernant la deuxième critique et sa solution potentielle, plusieurs remarques peuvent être formulées. Rappelons tout d’abord qu’un calcul direct montre que les générateurs des algèbres  $U_q(\widehat{sl_2})$  [17] et  $q$ -Onsager (voir le Chapitre III) exprimés dans une réalisation appropriée commutent avec les Hamiltoniens des chaînes de spin XXZ infinie et semi-infinie avec bord non-diagonal, respectivement. L’étude ici menée de la chaîne de spin XXZ de taille finie a cependant révélé la sous-algèbre de l’algèbre  $q$ -Onsager comme génératrice de la matrice de transfert du modèle. Un phénomène remarquable se manifeste donc: lors de la transition de  $N$  fini à la limite  $N \rightarrow \infty$ , l’algèbre  $q$ -Onsager passe du statut d’algèbre génératrice de spectre à celui d’algèbre de symétrie du Hamiltonien. A ce sujet, remarquons qu’un phénomène analogue est attendu<sup>33</sup> lors du passage de la chaîne de spin XXZ périodique de taille  $N$  à la chaîne de spin XXZ infinie faisant ainsi émerger l’algèbre  $U_q(\widehat{sl_2})$  comme symétrie non-Abélienne du Hamiltonien. Par conséquent, l’étude détaillée de cette transition au sein de la structure même de la matrice de monodromie formulée en termes des générateurs de l’algèbre non-Abélienne responsable de l’intégrabilité nous semblerait être opportun au regard du problème soulevé ci-dessus. Cela apporterait un regard nouveau sur le formalisme de l’ansatz de Bethe algébrique, permettant de formuler chacune de ses étapes en termes de la théorie des représentations de l’algèbre non-Abélienne fondamentale. A ce jour, notons que cette piste de recherche n’a pas encore été explorée à notre connaissance, concernant notamment la chaîne de spin XXZ tant dans le cas périodique que des bords non-diagonaux.

### 3. PERSPECTIVES

Au delà des critiques précédemment soulevées et des réponses possibles pouvant être apportées, le programme de recherche ici décrit ainsi que les résultats accumulés offrent un regard nouveau sur les approches non-perturbatives possibles en systèmes intégrables. En particulier, il ressort de cette étude que l’approche initiée par L. Onsager recèle un potentiel encore relativement peu exploré ou exploité. De multiples facettes et champs d’applications de cette approche *à la* Onsager restent encore à être découverts. Pour que ce programme de recherche puisse atteindre un degré de performance comparable à celui caractérisant le formalisme propre à l’approche des théories invariantes conformes, plusieurs projets de recherches sont à présent envisageables. Ci-dessous, nous choisissons d’en présenter trois d’entre eux:

#### **Projet 1. Algèbre de Onsager et équations de Painlevé**

Le modèle d’Ising en deux dimensions est un des modèles intégrables les plus étudiés. Selon l’approche non-perturbative utilisée, divers résultats exacts ont été obtenus. Parmi les plus célèbres, citons les équations différentielles non-linéaires déterminant les fonctions de corrélations élémentaires. Il est en effet connu depuis les travaux de Wu-McCoy [52] que les fonctions de corrélations élémentaires satisfont des équations discrètes. Dans la limite thermodynamique du modèle, celles-ci s’expriment en termes de solutions aux équations de Painlevé. Jusqu’à récemment, une observation attentive de la littérature sur le sujet montre que l’obtention de ce résultat repose sur les techniques de fermions libres. Ces dernières années cependant, les travaux de Fonseca-Zamolodchikov [53] et Fonseca-Doyon [54] apportent un regard nouveau sur le sujet. En effet, exploitant l’existence de certaines quantités conservées [55] dans le modèle d’Ising, des contraintes en termes d’opérateurs différentiels peuvent être obtenues sur les fonctions de corrélations élémentaires ou facteurs de formes du modèle. Par exemple, les fonctions de corrélations à

<sup>33</sup>A notre connaissance, la technique présentée au Chapitre II, Section 3, n’a cependant pas été considérée dans le cas du formalisme RTT.

deux points des opérateurs de spin et de désordre peuvent être exprimées en termes des transcendants  $w$  des équations différentielles de Painlevé VI pour certaines valeurs des paramètres  $\lambda, \tilde{\lambda}, \gamma$ :

$$(54) \quad \begin{aligned} w'' - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-s} \right) (w')^2 + \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{w-s} \right) w' \\ = \frac{w(w-1)(w-s)}{s^2(1-s)^2} \left( \frac{(1-4r^2)s(s-1)}{2(w-s)^2} - \frac{(\tilde{\lambda}-1)^2 s}{2w^2} + \frac{\gamma(s-1)}{(w-1)^2} + \frac{\lambda^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Obtenir ces équations à partir de la théorie des représentations de l'algèbre de Onsager et de l'existence de la hiérarchie de Dolan-Grady demeure un problème ouvert. Différents arguments motivent l'intérêt pour ce sujet: si les équations de Painlevé peuvent être obtenus à partir des propriétés d'action des générateurs de l'algèbre de Onsager sur certains opérateurs locaux, ce résultat pourrait trouver une extension directe dans le cas des modèles intégrables quantiques associés à l'algèbre  $q$ -Onsager. De plus, sachant que les fonctions de corrélations obtenus dans le cadre de l'approche par opérateurs de vertex satisfont les équations  $q$ -Knizhnik-Zamolodchikov, établir une relation entre ces équations et une  $q$ -déformation des équations de Painlevé serait particulièrement intéressant.

### Projet 2. Relations d'Askey-Wilson généralisées et fonctions spéciales

Comme il a été mentionné dans le Chapitre II, l'étude de la théorie des représentations de l'algèbre  $q$ -Onsager fournit potentiellement un schéma de classification algébrique de fonctions spéciales symétriques à une variable, pour certaines déjà connues. Parmi les réalisations les plus simples de l'algèbre tridiagonale (13) associées aux paires de Leonard (voir Chapitre II), on trouve l'algèbre d'Askey-Wilson aux relations de définitions [56]:

$$(55) \quad [H_0, H_1]_q = H_2; \quad [H_0, H_2]_{q^{-1}} = \rho H_0 + \omega H_1; \quad [H_2, H_1]_{q^{-1}} = \rho H_1 + \omega H_0.$$

Identifiant  $A \equiv H_0, A^* \equiv H_1$ , les relations ci-dessus peuvent s'écrire sous la forme (12) pour un choix de paramètres approprié. Notons que ces relations impliquent automatiquement les relations (8), offrant ainsi une des réalisations les plus simples de l'algèbre  $q$ -Onsager. Remarquablement, l'étude du problème spectral associé aux éléments  $A, A^*$  de cette algèbre permet de construire et d'identifier les polynômes d'Askey-Wilson de la forme la plus générale - pour des valeurs arbitraires des paramètres  $a, b, c, d$  tels que aucune des combinaisons  $ab, ac, ad, bc, bd, cf, abcd$  ne soit une puissance entière de  $q$  -:

$$(56) \quad p_n(x; a, b, c, d) = {}_4\Phi_3 \left[ \begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, ay, ay^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q \mid q \right]$$

où les définitions suivantes de la fonction  $q$ -hypergéométrique et du  $q$ -symbole Pochhammer sont introduites:

$${}_4\Phi_3 \left[ \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix}; q \mid x \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[a_1]_k [a_2]_k [a_3]_k [a_4]_k}{[b_1]_k [b_2]_k [b_3]_k} x^k, \quad [a]_k = (1-q^a)(1-q^{a+1}) \dots (1-q^{a+k-1}).$$

En effet, ces polynômes ne sont autres que les éléments de la matrice de transition entre les deux bases duales diagonalisant respectivement les éléments  $A, A^*$  (voir le Chapitre II). Comme il a été mentionné dans la référence 3, les relations ci-dessus peuvent en réalité être interprétés comme la version la plus simple de la  $q$ -déformation des relations de Davies [39] grâce à l'isomorphisme entre l'algèbre  $q$ -Onsager et l'algèbre de courant  $O_q(\widehat{sl}_2)$  (voir les références 9,11). En utilisant les résultats décrits au Chapitre II, les relations de Askey-Wilson (12) pour  $\beta = q + q^{-1}$  et  $\gamma = \gamma^* = \eta = \eta^*$  peuvent être formulées comme l'action des générateurs de l'algèbre de courant de  $q$ -Onsager sur une représentation de dimension infinie telle que:

$$(57) \quad W_{-1} + \alpha W_0 = 0 \quad \text{et} \quad W_2 + \alpha' W_1 = 0.$$

L'algèbre de Askey-Wilson définie par (57) permettant de générer la famille des polynômes symétriques  $q$ -orthogonaux d'Askey-Wilson [56], une étude systématique des fonctions spéciales symétriques associées aux relations d'Askey-Wilson généralisées d'ordre  $N$ :

$$(58) \quad \sum_{k=0}^N \alpha_k^{(N)} W_{-k} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^N \alpha_k^{(N)} W_{k+1} = 0$$

où les  $\alpha_k^{(N)}$  représentent les constantes de structure de l'algèbre représente un second projet de recherche intéressant. Dans la référence 6 et 11, divers résultats importants permettent de poursuivre l'étude, et constituent ainsi un axe de recherche aux retombées intéressantes aussi bien du point de vue mathématiques que de ces applications potentielles en physique.

### Projet 3. Théorie des représentations de l'algèbre $q$ -Onsager et matrice $K$ universelle

La nouvelle approche ici introduite présente clairement des caractéristiques rappelant le formalisme des théories invariantes conformes, à savoir l'étude détaillée d'une algèbre non-Abélienne de dimension infinie responsable de l'intégrabilité d'un modèle comme point de départ à sa solution exacte. Considérant l'importance pratique de la théorie des représentations<sup>34</sup> de l'algèbre de Virasoro (et de ses généralisations connues) dans l'analyse d'un modèle possédant la symétrie conforme, de manière analogue il apparaît plus que nécessaire d'approfondir la théorie des représentations de l'algèbre  $q$ -Onsager.

Concernant l'analyse des modèles sur réseau de taille finie, la classification des représentations de dimension finie de l'algèbre  $q$ -Onsager récemment achevée dans [46] devrait ainsi trouver une place centrale dans les développements futurs. En particulier, le fait que des relations de la forme (58) existent systématiquement dans ces cas là devrait fournir le point de départ à un formalisme analogue à celui de Davies pour le calcul du spectre du modèle, et éventuellement le calcul des fonctions de corrélations élémentaires exprimées en termes de fonctions spéciales. Sur ce dernier point, le projet 1 trouve toute sa place comme précurseur d'une analyse systématique.

Concernant l'analyse des modèles sur réseau de taille semi-infinie ou de théorie de champs, l'étude systématique des représentations de dimension infinie devrait jouer un rôle central. Pour le moment, seules certaines représentations associées à des réalisations de (8) en termes de  $q$ -bosons (en préparation), ou les plus simples associées aux polynômes d'Askey-Wilson [62] ont été considérées. Divers arguments s'inspirant de résultats obtenus dans [64] et [66] permettent de penser qu'une analyse générale des représentations de dimension infinie est cependant possible. Par analogie avec le cas de l'algèbre  $U_q(\widehat{sl_2})$ , plusieurs étapes importantes sont à franchir:

- *Base de type Poincaré-Birkhoff-Witt*

La première étape porte sur la construction de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt de l'algèbre  $q$ -Onsager, qui permettra d'ordonner les combinaisons indépendantes d'éléments de  $O_q(\widehat{sl_2})$ . De cette manière, une représentation irréductible de dimension infinie (ou finie) de l'algèbre  $q$ -Onsager s'obtient en spécialisant l'espace vectoriel sur lequel agissent les éléments  $A, A^*$ . Pour comprendre la marche à suivre, le cas de l'algèbre  $U_q(\widehat{sl_2})$  est instructif. Considérons le cas spécifique  $\rho = 0$  dans (14). Soit  $\mathcal{A}$  l'algèbre associative avec identité générée par les éléments  $A, A^*$  satisfaisant les relations dites de  $q$ -Serre

$$[A, [A, [A, A^*]_q]_{q^{-1}}] = 0, \quad [A^*, [A^*, [A^*, A]_q]_{q^{-1}}] = 0.$$

Soit l'entier  $r \in \mathbb{Z}_+$ . D'après les travaux de Lutzig [[50], Proposition 7.1.5], les relations de  $q$ -Serre généralisées suivantes sont alors automatiquement satisfaites<sup>35</sup> dans  $\mathcal{A}$ :

$$\sum_{i=0}^{2r+1} (-1)^i \begin{bmatrix} 2r+1 \\ i \end{bmatrix}_q A^i A^{*r} A^{2r+1-i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{2r+1} (-1)^i \begin{bmatrix} 2r+1 \\ i \end{bmatrix}_q A^{*i} A^r A^{*2r+1-i} = 0.$$

Ce résultat important permet en particulier [64] de déterminer l'ensemble de combinaisons d'éléments irréductibles de  $\mathcal{A}$ , i.e. une base de type Poincaré-Birkhoff-Witt de  $\mathcal{A}$ , qui n'est autre que l'algèbre  $q$ -Onsager dans le cas particulier  $\rho = 0$ . Par analogie, comme il est suggéré dans [64] un problème

<sup>34</sup>Notamment la construction de représentations unitaires [66] et l'existence de vecteurs 'nuls' au rôle central dans le calcul des fonctions de corrélations [11].

<sup>35</sup>Les notations sont:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_q = \frac{[a]_q!}{[b]_q! [a-b]_q!}, \quad [a]_q! = [a]_q [a-1]_q \dots [1]_q, \quad [a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}, \quad [0]_q = 1.$$

intéressant consiste à construire les relations  $q$ -Dolan Grady généralisées. Celles-ci prennent la forme <sup>36</sup>:

$$\sum_{p=0}^r \sum_{j=0}^{2(r-p)+1} (-1)^j c_j^{[r,p]} A^{2(r-p)+1-j} A^{*r} A^j = 0, \quad \sum_{p=0}^r \sum_{j=0}^{2(r-p)+1} (-1)^j c_j^{[r,p]} A^{*2(r-p)+1-j} A^r A^{*j} = 0,$$

où les coefficients  $c_j^{[r,0]} = \left[ \begin{matrix} 2r+1 \\ j \end{matrix} \right]_q$  et  $c_j^{[r,p]}$  possèdent la propriété de symétrie  $c_j^{[r,p]} = c_{2(r-p)+1-j}^{[r,p]}$ .

Grâce à leur forme explicite, il devient alors possible de construire une base Poincaré-Birkhoff-Witt de l'algèbre  $q$ -Onsager (8) pour  $\rho$  générique. Ce problème est en cours d'étude.

- *Unitarité et réductibilité des représentations*

La deuxième étape consiste à identifier les conditions sous lesquelles la représentation peut être unitaire et réductible. En effet, dans le cadre des théories conformes associées à la charge centrale  $c$ , rappelons que les représentations unitaires de l'algèbre de Virasoro

$$(59) \quad [L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}cn(n^2-1)\delta_{n+m,0}$$

sont construites de la manière suivante. Partant d'une représentation de plus haut poids telle que  $L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle$  et  $L_n|\Delta\rangle = 0$  pour  $n > 0$ , l'ensemble infini de vecteurs secondaires

$$(60) \quad L_{-n_k} \dots L_{-n_2} L_{-n_1} |\Delta\rangle \quad \text{pour } k \text{ entier,}$$

forme le module de Verma de l'algèbre de Virasoro, où l'entier  $n = n_1 + n_2 \dots n_k$  est appelé le niveau du vecteur. Tous ces vecteurs secondaires ont pour valeurs propres  $\Delta + n_1 + \dots + n_k$ . Pour des valeurs génériques de  $\Delta$ , ce module est irréductible. Cependant, pour certaines valeurs particulières de  $\Delta$ , certaines combinaisons d'éléments de la forme (60) - appelés vecteurs nuls satisfaisant les conditions  $L_0|\chi\rangle = (\Delta + K)|\chi\rangle$  avec  $K$  entier et  $L_n|\chi\rangle = 0$  pour  $n > 0$  - sont présentes. Le module de Verma associé à  $\Delta$  devient dans ce cas réductible, contenant lui-même le module de Verma associé à  $|\chi\rangle$ . Construire une représentation irréductible consiste alors à soustraire de la représentation initiale celle associée à  $|\chi\rangle$  et à tout autre vecteur nul. Pour  $c < 1$ , les conditions d'unitarité de la représentation et les critères de réductibilité sont déterminés par la formule de Kac [66].

Par analogie, dans le cas de l'algèbre  $q$ -Onsager présentée sous la forme des générateurs  $\{\mathcal{W}_{-k}, \mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{G}_{k+1}, \tilde{\mathcal{G}}_{k+1} | k \in \mathbb{Z}_+\}$  de l'algèbre de courant (voir le Chapitre II), il conviendrait de considérer en détails l'ensemble infini d'éléments de la forme

$$(61) \quad \mathbf{G}_{-n_l} \dots \mathbf{G}_{-n_2} \mathbf{G}_{-n_1} \mathbf{W}_{-n_k} \dots \mathbf{W}_{-n_2} \mathbf{W}_{-n_1} \quad \text{pour } k, l \text{ entiers,}$$

leur action sur une représentation donnée et les conditions sous lesquelles certaines de leurs combinaisons agissant dans cette représentation forment un analogue des vecteurs nuls précités.

- *Matrice  $K$  universelle*

Dans le cas de l'algèbre  $U_q(\widehat{sl_2})$ , la matrice  $R$  universelle satisfaisant les équations de Yang-Baxter s'obtient comme un développement de la forme  $\sum a \otimes b$  où  $a$  et  $b$  sont exprimés dans la base de type Poincaré-Birkhoff-Witt de l'algèbre  $U_q(\widehat{sl_2})$  [72, 77, 73]. Par analogie, obtenir la solution des équations de réflexion universelles est un problème ouvert. En utilisant la forme de la matrice  $R$  universelle de  $U_q(\widehat{sl_2})$ , il est cependant possible de montrer en considérant la représentation d'évaluation de  $U_q(\widehat{sl_2})$  à petit paramètre spectral que la matrice  $K$  universelle est de la forme  $\sum a \otimes t$  où  $a \in U_q(\widehat{sl_2})$  et  $t \in O_q(\widehat{sl_2})$ . Notons que le problème de la construction de la matrice  $K$  universelle est directement lié à la construction de la base de type Poincaré-Birkhoff-Witt de l'algèbre  $O_q(\widehat{sl_2})$ . Nous avons l'intention de considérer en détails ce problème prochainement.

<sup>36</sup>P. Baseilhac et S. Belliard, non publié.

## Chapitre IV - Articles sélectionnés

—→ *Exact spectrum of the XXZ open spin chain from the  $q$ -Onsager algebra representation theory* ;  
 hep-th/0703106, J.Stat.Mech. (2007) P09006 ; P. Baseilhac et K. Koizumi

Cet article propose une solution exacte de la chaîne de spin XXZ avec bords non-diagonaux, premier exemple de solution pour des paramètres génériques. Il repose sur les résultats obtenus dans les références 2, 3 et 4 ainsi que sur l'étude de certaines représentations de l'algèbre  $q$ -Onsager construites dans la référence 5. Dans le régime de paramètres où l'ansatz de Bethe algébrique est applicable, les résultats sont comparés en s'inspirant de la référence 6.

—→ *A new current algebra and the reflection equation* ;  
 arXiv:0906.1482, Lett. Math. Phys. **92** (2010) 4765; P. Baseilhac et K. Shigechi

Le premier exemple d'algèbre de courant associé aux équations de réflexion est proposé. L'isomorphisme entre algèbre tridiagonale, équations de réflexion et algèbre de courant est établi pour la famille de matrice  $R$  associée à  $U_q(\widehat{sl}_2)$ . Cette algèbre de courant est centrale dans la mise en place d'une solution par la méthode des opérateurs de vertex pour la chaîne de spin semi-infinie avec bord non-diagonal.

—→ *Generalized  $q$ -Onsager algebras and boundary affine Toda field theories* ;  
 arXiv:0906.1215, Lett. Math. Phys. **93** (2010) 213228; P. Baseilhac et S. Belliard

La généralisation de l'algèbre  $q$ -Onsager à toute algèbre de Lie affine est proposée. Dans la limite  $q = 1$  et  $sl_n$ , l'algèbre de Onsager  $sl_n$  de Uglov-Ivanov est obtenue. Comme application aux systèmes intégrables, les conditions aux bords de type scalaires ou dynamiques sont complètement classifiées dans les théories de Toda affine avec bord. Le premier exemple de modèles intégrables massifs avec bord dynamique à symétrie étendue est de ce fait obtenu, généralisant le cas du modèle sine-Gordon.

## - Annexe -

### Encadrement de la recherche et diffusion des connaissances

Entre 2001 et 2004, j'ai participé à l'encadrement de la thèse de K. Koizumi en cotutelle au Japon. Ensuite, j'ai encadré trois postdocs entre 2004 et 2008, dont un dans le cadre du projet ANR entre 2005-2008 "Systèmes intégrables avec bords: structures algébriques et fonctions de corrélations" (Tours, Cergy-Pontoise, ENS Lyon) dont j'ai été le responsable. Les deux autres postdocs ont été obtenus grâce à un financement du Ministère de l'Education Nationale et de la Recherche pour l'un, et à un financement du CNRS pour l'autre. Suite à leurs séjours au LMPT de Tours, ces trois postdocs ont obtenus pour deux des postes permanents d'enseignants chercheurs (K. Koizumi, T. Bhattacharyya), et pour un autre un postdoc aux Pays-Bas (K. Shigechi).

Dans le cadre du stage de Master de Physique Non-Linéaire de Tours, j'ai proposé des sujets de mémoire. Les étudiants n'ayant pas reçu de formation leur permettant de poursuivre une thèse dans le domaine des systèmes intégrables, le but était de leur faire découvrir des approches non perturbatives (Bethe ansatz, algèbre de Onsager) permettant d'étudier et de décrire les propriétés de certains systèmes physiques (chaîne de Ising, modèle XXZ) de façon exacte, là où les points de vue du 'tout-numérique' et du 'tout-perturbatif' si ancrés dans les esprits échouent.

Afin d'établir des points de contact entre diverses problématiques en systèmes intégrables, en 2007 avec N. Kitanine nous avons organisé un workshop à Tours réunissant des chercheurs travaillant activement sur le modèle de Potts chiral, le calcul des fonctions de corrélations et certaines structures algébriques récentes.

Enfin, pour le grand public j'ai participé au cycle d'exposés de vulgarisation lors de l'année 2005, où je suis intervenu sur le thème de la physique quantique. Plus récemment, j'ai été invité à donner un exposé dans le cadre d'un cycle de conférence organisé par l'Université de Montpellier III (Lettres) concernant le rôle, l'impact et l'utilisation pratique des croyances - de tout ordre - sur les activités de recherches aussi bien en Sciences que dans certaines pratiques d'origine martiale quasi-inconnues du monde Occidental.

#### **Encadrement de stagiaires de M2/M1 Phénomènes non linéaires de Tours:**

- R. Perriot (actuel. thèse Pampa Univ., US), 2005 : "Algèbre de Onsager et systèmes intégrables";
- S. Charafi, 2005 : "Méthode de scattering inverse et ansatz de Bethe";
- D. Beaujouan (actuel. thèse CEA Le Ripault), 2007 : "Le modèle d'Ising".

#### **Encadrement de thèse :**

- 2001-2004, codirection de Thèse de Doctorat de K. Koizumi, Kyoto, Japon "q-oscillator et systèmes intégrables avec bords", soutenue en Avril 2004.

#### **Encadrement de postdocs :**

- K. Koizumi, 2004-2006 (actuellement enseignant chercheur Kyoto Sangyo Univ.);
- T. Bhattacharyya 2006-2007 (actuellement enseignant chercheur Kolcatta Univ.);
- K. Shigechi 2007-2008 (actuel. postdoc Amsterdam Univ.).

#### **Organisation de workshops :**

- Workshop international à Tours du 07 au 10 Novembre 2007 : "Integrable models and related mathematical structures"

<http://www.lmpt.univ-tours.fr/conferences/IMRMS/>

#### **Partage de connaissances:**

- 2005, cycle de conférences "Relativité et Physique quantique", Tours;
- 2009, cycle de conférences "Les croyances", "Croyances et recherches", Univ. Montpellier III.

## REFERENCES

- [1] M. Henkel, *Conformal invariance and critical phenomena*, Texts and Monographs in Physics, Springer.
- [2] H. Bethe, Z. Phys. **71** (1931) 205.
- [3] L. Onsager, Phys. Rev. **65** (1944) 117.
- [4] R.J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic press, London - New York, 1982.
- [5] L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin and L.A. Takhtadjan, Theor. Math. Phys. **40** (1980) 688.
- [6] V. Korepin, N. Bogoliubov and A. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Monographs in Mathematical Physics.
- [7] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [8] A. Klimyk and K. Schmudgen, *Quantum groups and their representations*, Springer, 1997.
- [9] V. G. Drinfeld, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Sov. Math. Doklady **32** (1985) 254-258;  
V. G. Drinfeld, *A new realization of Yangians and quantum affine algebras*, Sov. Math. Doklady **36** (1988) 212-216.
- [10] M. Jimbo, *A  $q$ -difference analogue of  $U(g)$  and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985) 63-69;  
M. Jimbo, *A  $q$ -analogue of  $U(gl(N+1))$ , Hecke algebra and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986) 247-252.
- [11] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B 241** (1984)333;  
V.G. Knizhnik and A.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B 247** (1984) 83;  
Ph. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer.
- [12] S. Odake, *Beyond CFT : Deformed Virasoro and Elliptic Algebras*, arXiv:hep-th/9910226;  
L. Faddeev and A.Yu. Volkov, *Abelian Current Algebra and the Virasoro Algebra on the Lattice*, arXiv:hep-th/9307048v1.
- [13] H. Araki, Commun. Math. Phys. **132** (1990) 155-176.
- [14] C. Ahn and K. Shigemoto, Mod. Phys. Lett. **A 6** (1991) 3509.
- [15] G. von Gehlen and V. Rittenberg, Nucl. Phys. **B 257** [FS14] (1985) 351.
- [16] E.K. Sklyanin, *Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics*, arXiv:hep-th/9211111.
- [17] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa and A. Nakayashiki, Phys Lett. A **168** (1992) 256;  
B. Davies, O. Foda, M. Jimbo, T. Miwa and A. Nakayashiki, Commun. Math. Phys. **151** (1993) 89;  
M. Jimbo, T. Miwa, J. Phys. A **29** (1996) 2923.
- [18] Claude Itzykson, H. Saleur and J. B. Zuber, *Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics*, by World Scientific Publishing Company.
- [19] A.B. Zamolodchikov and Al.B. Zamolodchikov, Ann. Phys. **120** (1979) 253.
- [20] M. Luscher, *Quantum Nonlocal Charges And Absence Of Particle Production In The Two-Dimensional Nonlinear Sigma Model*, Nucl. Phys. **B135** (1978) 1-19,1978;  
E. Corrigan and C.K. Zachos, *Nonlocal charged for the supersymmetric sigma model*, Phys. Lett. **B 88** (1979) 273;  
Y.Y. Goldschmidt and E. Witten, *Conservation Laws In Some Two-Dimensional Models*, Phys. Lett. **B91** (1980) 392;  
T.L. Curtright and C.K. Zachos, *Nonlocal Currents For Supersymmetric Nonlinear Models*, Phys. Rev. **D 21** (1980) 411;  
H.J. de Vega, H. Eichenherr and J.M. Maillet, *Classical and quantum algebras of nonlocal charges in sigma models*, Commun. Math. Phys. **92** (1984) 507;  
D. Bernard and A. LeClair, Commun. Math. Phys. **142** (1991) 99;  
C. Gomez, M. Ruiz-Altabaand G. Sierra, *Quantum groups i two-dimensional physics*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [21] N. Kitanine, J.M. Maillet, V. Terras, Nucl. Phys. **B554** (1999) 647 ;  
J.M. Maillet, V. Terras Nucl.Phys. **B575** (2000) 627.
- [22] I.V. Cherednik, Teor. Mat. Fiz. **61** (1984) 55;  
E.K. Sklyanin, J. Phys. **A 21** (1988) 2375.
- [23] R.I. Nepomechie, Nucl. Phys. **B 622** (2002) 615;  
R.I. Nepomechie and F. Ravanini, J. Phys. **A 36** (2003) 11391; Addendum: J. Phys. **A 37** (2004) 1945;  
R. Murgan and R.I. Nepomechie, JSTAT **0505** (2005) 007;  
J. Cao, H-Q. Lin, K-J. Shi and Y. Wang, Nucl. Phys. **B 663** (2003) 487;  
W-L. Yang and Y-Z. Zhang, JHEP **04** (2007) 044;  
R. Murgan, R.I. Nepomechie and C. Shi, JSTAT **0608** (2006) 006. A. Nichols, V. Rittenberg and J. de Gier, JSTAT **0503** (2005) P003;  
J. de Gier, A. Nichols, P. Pyatov and V. Rittenberg, Nucl. Phys. **B 729** (2005) 387;  
A. Nichols, JSTAT **0602** (2006) L004.
- [24] H.J. de Vega and A. González-Ruiz, J. Phys. **A 27** (1994) 6129;  
S. Ghoshal and A.B. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. **A 9** (1994) 3841;  
L. Mezincescu and R.I. Nepomechie, *Fractional-Spin Integrals of Motion for the Boundary Sine-Gordon Model at the Free Fermion Point* Int. J. Mod. Phys. **A 13** (1998) 2747-2764, arXiv:hep-th/9709078;  
J.-S. Caux, H. Saleur and F. Siano, Nucl. Phys. **B 672** (2003) 411-461.
- [25] P. Baseilhac and K. Koizumi, *Sine-Gordon quantum field theory on the half-line with quantum boundary degrees of freedom*, Nucl. Phys. **B 649** (2003) 491-510, arXiv:hep-th/0208005.
- [26] A. Fring and R.Köberle, *Boundary Bound States in Affine Toda Field Theory*, Int. J. Mod. Phys. **A 10** (1995) 739-752, arXiv:hep-th/9404188;

- A. Fring and R. Köberle, *Affine Toda Field Theory in the Presence of Reflecting Boundaries*, Nucl. Phys. **B 419** (1994) 647-664, [arXiv:hep-th/9309142](#);
- E. Corrigan, P.E. Dorey, R.H. Rietdijk and R. Sasaki, *Affine Toda field theory on a half line*, Phys. Lett. **B 333** (1994) 83-91, [arXiv:hep-th/9404108](#);
- P. Bowcock, E. Corrigan, P.E. Dorey and R.H. Rietdijk, *Classically integrable boundary conditions for affine Toda field theories*, Nucl. Phys. **B 445** (1995) 469-500, [hep-th/9501098](#);
- G.M. Gandenberger, *On  $a_2^{(1)}$  reflection matrices and affine Toda theories*, Nucl.Phys. **B 542** (1999) 659-693, [arXiv:hep-th/9806003](#);
- G.M. Gandenberger, *New non-diagonal solutions to the  $a_n^{(1)}$  boundary Yang-Baxter equation*, [arXiv:hep-th/9911178](#);
- S. Penati, A. Refolli and D. Zanon, *Classical Versus Quantum Symmetries for Toda Theories with a Nontrivial Boundary Perturbation*, Nucl. Phys. **B 470** (1996) 396-418, [arXiv:hep-th/9512174](#);
- V. A. Fateev and E. Onofri, *Boundary One-Point Functions, Scattering Theory and Vacuum Solutions in Integrable Systems*, Nucl.Phys. **B 634** (2002) 546-570, [arXiv:hep-th/0203131](#);
- G.W. Delius, *Soliton-preserving boundary condition in affine Toda field theories*, Phys.Lett. **B 444** (1998) 217, [arXiv:hep-th/9809140v2](#);
- G.W. Delius and A. George, *Quantum affine reflection algebras of type  $d_n^{(1)}$  and reflection matrices*, Lett.Math.Phys. **62** (2002) 211-217, [arXiv:math/0208043](#);
- G.W. Delius and G.M. Gandenberger, *Particle reflection amplitudes in  $a_n^{(1)}$  Toda Field Theories*, Nucl.Phys. **B 554** (1999) 325-364, [arXiv:hep-th/9904002](#);
- G.W. Delius and N.J. MacKay, *Quantum group symmetry in sine-Gordon and affine Toda field theories on the half-line*, Commun. Math. Phys. **233** (2003) 173-190, [arXiv:hep-th/0112023](#).
- [27] J-L. Gervais, *Infinite Family of Polynomial Functions of the Virasoro Generators with Vanishing Poisson Brackets*, Phys. Lett. **B 160** (1985) 277;
- R. Sasaki and I. Yamanaka, *Virasoro algebra, Vertex operators, quantum Sine-Gordon and solvable quantum field theories*, Adv. Stud. Pure Math. **16** (1988) 271-296.
- [28] F.A. Smirnov, *Form-factors in completely integrable models of quantum field theory*, Adv. Ser. Math. Phys. **14** (1992) 1-208.
- [29] V.V. Bazhanov, S.L. Lukyanov and A.B. Zamolodchikov, *Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz*, Comm. Math. Phys. **177** (1996)381-398;
- V.V. Bazhanov, S.L. Lukyanov and A.B. Zamolodchikov, *Integrable structure of conformal field theory. 2. Q operator and DDV equation*, Comm. Math. Phys. **190** (1997) 247-278;
- V.V. Bazhanov, S.L. Lukyanov and A.B. Zamolodchikov, *Integrable structure of conformal field theory. 3. The Yang-Baxter relation*, Commun.Math.Phys. **200** (1999) 297-324.
- [30] P. Fendley, F. Lesage and H. Saleur, J. Stat. Phys. **85** (1996) 211;
- P. Fendley and H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4492.
- [31] V.V. Bazhanov, A.N. Hibberd and S.M. Khoroshkin, *Integrable structure of  $W_3$  Conformal Field Theory, Quantum Boussinesq Theory and Boundary Affine Toda Theory*, Nucl. Phys. **B 622** (2002) 475-547, [arXiv:hep-th/0105177v3](#).
- [32] P. Baseilhac and G.W. Delius, J. Phys. **A 34** (2001) 8259.
- [33] M. Jimbo, R. Kedem, T. Kojima, H. Konno and T. Miwa, Nucl. Phys. B 441 (1995) 437-470;
- M. Jimbo, R. Kedem, H. Konno, T. Miwa and R. Weston, Nucl. Phys. B 448 (1995) 429-456.
- [34] L.D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin and L.A. Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras, Yang-Baxter equation and quantum integrable systems*, Advanced Series in Mathematical Physics, Vol. **10**, Singapore, World Scientific, (1989) 299-309.
- [35] N.Yu. Reshetikhin and M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Central extensions of quantum current groups*, Lett. Math. Phys. **19** (1990) 133-142.
- [36] J. Ding and I.B. Frenkel, *Isomorphism of two realizations of quantum affine algebra  $U_q(\widehat{gl(n)})$* , Commun. Math. Phys. **156** (1993) 277-300.
- [37] G. Lezter, "Coideal subalgebras and quantum symmetric pairs", in New directions in Hopf algebras, Math, Sci. Res. Inst. Publ. **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002), 117.
- [38] Ya. Azbel, JETP **19** (1964) 634; Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 1954;
- D.R. Hofstadter, Phys. Rev. **B 14** (1976) 2239;
- P.B. Wiegmann and A.V. Zabrodin, Nucl. Phys. **B 422** (1994) 495.
- [39] L. Dolan and M. Grady, Phys. Rev. **D 25** (1982) 1587;
- B. Davies, J. Phys. **A 23** (1990) 2245;
- B. Davies, J. Math. Phys. **32** (1991) 2945.
- [40] P. Terwilliger, *The subconstituent algebra of an association scheme III*, J. Algebraic Combin. **2** (1993) 177-210.
- [41] T. Ito, K. Tanabe and P. Terwilliger, *Some algebra related to P- and Q-polynomial association schemes*, Codes and Associations schems (Piscataway, NJ, 1999); Amer. Math. Soc., Providence RI, 2001, 167-192, [arXiv:math.CO0406556](#).
- [42] P. Terwilliger, *Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other*, Linear Algebra Appl. **330** (2001) 149-203, [arXiv:math.RA/0406555](#).
- [43] P. Terwilliger, *The subconstituent algebra of an association scheme I*, J. Algebraic Combin. **1** (1992) 363-388.
- [44] D. Leonard, *Orthogonal polynomials, duality, and association schemes*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982) 656-663.
- [45] T. Ito and P. Terwilliger, "Tridiagonal pairs and the quantum affine algebra  $U_q(\widehat{sl_2})$ ", [math.QA/0310042](#).
- [46] T. Ito, P. Terwilliger, *Tridiagonal pairs of q-Racah type*, [arXiv:0807.0271](#).

- [47] P. Terwilliger and R. Vidunas, *Leonard pairs and the Askey-Wilson relations*, J. Algebra Appl. **3** (2004) 411-426, [arXiv:math.QA/0305356](#).
- [48] D. Uglov and L. Ivanov, J. Stat. Phys. **82** (1996) 87.
- [49] W. Galleas, *Functional relations from the Yang-Baxter algebra: Eigenvalues of the XXZ model with non-diagonal twisted and open boundary conditions*, [arXiv:0708.0009](#).
- [50] G. Lusztig, *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. Math. **70** (1988) 237-249; G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics 110, Birkhauser, Boston, 1993.
- [51] A.V.Zabrodin, *Quantum transfer matrices for discrete and continuous quasi-exactly solvable problems*, Theor. Math. Phys. **104** (1996) 762-776; Teor.Mat.Fiz. **104N1** (1995) 8-24 [arXiv:hep-th/9412116](#); P.B. Wiegmann and A.V. Zabrodin, Nucl. Phys. **B 422** (1994) 495; P.B. Wiegmann and A.V. Zabrodin, Nucl. Phys. **B 451** (1995) 699.
- [52] T.T. Wu, B.M. McCoy, C.A. Tracy and E. Barouch, *Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: exact theory in the scaling region*, Phys. Rev. **B 13** (1973) 316-374.
- [53] P. Fonseca and A. Zamolodchikov, *Ward Identities and Integrable Differential Equations in the Ising Field Theory*, [arXiv:hep-th/0309228](#).
- [54] B. Doyon and P. Fonseca, *Ising Field Theory on a Pseudosphere*, J.Stat.Mech. 0407 (2004) P002, [arXiv:hep-th/0404136](#).
- [55] A. LeClair, *Spectrum Generating Affine Lie Algebras in Massive Field Theory*, Nucl.Phys. B415 (1994) 734-780, [arXiv:hep-th/9305110](#).
- [56] A.S. Zhedanov, *Hidden symmetry of Askey-Wilson polynomials*, Teoret. Mat. Fiz. **89** (1991) 190-204.
- [57] N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura, Yu. Tykhyy and G. von Gehlen *Spin operator matrix elements in the superintegrable chiral Potts quantum chain*, [arXiv:0912.5027](#).
- [58] N. Kitanine, K.K. Kozłowski, J.M. Maillet, G. Niccoli, N.A. Slavnov and V. Terras, *Correlation functions of the open XXZ chain I*, JSTAT 0710 (2007) P10009; [arXiv:0707.1995](#); N. Kitanine, K. Kozłowski, J. M. Maillet, G. Niccoli, N. A. Slavnov and V. Terras, *Correlation functions of the open XXZ chain II*, JSTAT **07** (2008) P07010; [arXiv:0803.3305](#).
- [59] I. Damiani, *A basis of type Poincaré-Birkhoff-Witt for the quantum algebra of  $\widehat{sl}_2$* , J. Algebra **161** (1993) 291-310.
- [60] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Commun. Math. Phys. **165** (1994) 555-568.
- [61] G. Letzter, *Coideal Subalgebras and Quantum Symmetric Pairs*, MSRI volume 1999, Hopf Algebra Workshop, [arXiv:math/0103228](#).
- [62] P. Terwilliger, *Two relations that generalize the  $q$ -Serre relations and the Dolan-Grady relations*, Proceedings of the Nagoya 1999 International workshop on physics and combinatorics. Editors A. N. Kirillov, A. Tsuchiya, H. Umemura. pp 377-398, [math.QA/0307016](#).
- [63] A. Doikou,  $A_n^{(1)}$  affine Toda field theories with integrable boundary conditions revisited, JHEP **0805** (2008) 091, [arXiv:0803.0943](#).
- [64] T. Ito and P. Terwilliger, *The shape of a tridiagonal pair*, [arXiv:math/0304244v1](#).
- [65] T. Ito, K. Nomura and P. Terwilliger, *A classification of sharp tridiagonal pairs*, [arXiv:1001.1812](#).
- [66] V.G. Kac, *Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras*, Lecture Notes. in Phys. **94** (1979) 441-445; B.L. Feigin and D.B. Fuks, *Invariant skew symmetric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra*, Funct. Anal. and Appl. **16** (1982) 114-126; B.L. Feigin and D.B. Fuks, *Verma modules over the Virasoro algebra*, Funct. Anal. and Appl. **17** (1983) 241-242; A. Rocha-Caridi, *Vacuum vector representations of the Virasoro algebra*, in Vertex Operators in Mathematics and Physics, MQSRI Publications 3 (Springer, Heidelberg, 1984) 451-473; P. Goddard, A. Kent and D. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras*, Comm. Math. Phys. **103** (1986) 105-119.
- [67] R.J. Baxter, *Proof of the determinantal form of the spontaneous magnetization of the superintegrable chiral Potts model*, [arXiv:1001.0281](#); R.J. Baxter, *Some remarks on a generalization of the superintegrable chiral Potts model*, [arXiv:0906.3551](#).
- [68] S-s. Roan, *Eigenvectors of an Arbitrary Onsager Sector in Superintegrable  $\tau^{(2)}$ -model and Chiral Potts Model*, [arXiv:1003.3621](#); S-s. Roan, *Duality and Symmetry in Chiral Potts Model*, J. Stat. Mech. **0908** (2009) P08012, [arXiv:0905.1924](#); S-s. Roan, *The Onsager Algebra Symmetry of  $\tau^{(j)}$ -matrices in the Superintegrable Chiral Potts Model*, J. Stat. Mech. **0509** (2005) P007, [arXiv:cond-mat/0505698](#).
- [69] A. Nishino, T. Deguchi, *The  $L(sl_2)$  symmetry of the Bazhanov-Stroganov model associated with the superintegrable chiral Potts model*, Phys. Lett. **A 356** (2006) 366-370, [arXiv:cond-mat/0605551](#).
- [70] B. Kaufman, Phys. Rev. **76** (1949) 1232; B. Kaufman and L. Onsager Phys. Rev. **76** (1949) 1244.
- [71] G. Albertini, B.M. McCoy, J.H.H. Perk and S. Tang, Nucl. Phys. **B 314** (1989) 741.
- [72] S. Levendorskii, Y. Soibelman and V. Stukopin, *The quantum Weyl group and the universal quantum  $R$ -matrix for affine Lie algebra  $A_1^{(1)}$* , Lett. Math. Phys. **27** (1993) 253-264.
- [73] S.M. Khoroshkin and V.N. Tolstoy, *The Cartan-Weyl basis and the universal  $R$ -matrix for quantum Kac-Moody algebras and superalgebras. Proc. Second Wygner Symposium, Gostar, Germany*, Lecture Notes in Physics (1992);

- S.M. Khoroshkin and V.N. Tolstoy, *The universal R-matrix or quantum untwisted affine Lie algebras*, Funktsional Anal. i Prilozhen **26** (1992) 85-88.
- [74] F. A. Grunbaum and Luc Haine, *The q-version of a theorem of Bochner*, Journal of Computational and Applied Mathematics **68** (1996) 103-114.
- [75] S. Bochner, *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme* Math. Z. **29** (1929) 730-736.
- [76] P. Terwilliger, *Leonard pairs from 24 points of view*, Rocky Mountain J. Math. **32** (2002), 827-888, [arXiv:math/0406577](#);  
P. Terwilliger, *Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other; an algebraic approach to the Askey scheme of orthogonal polynomials*, Lecture notes for the summer school on orthogonal polynomials and special functions, Universidad Carlos III de Madrid, Leganes, Spain. July 8–July 18, 2004; [arXiv:math/0408390](#).
- [77] A. Kirillov and N. Reshetikhin, *q-Weyl groups and R-matrices*, Comm. Math. Phys. **134** (1990) 42-431.
- [78] A. Molev, M. Nazarov et G. Olshanskii, *Yangians and Classical Lie Algebras*, Russ. Math. Surveys **51** (1996) 205;  
L. Gow and A. Molev, *Representations of twisted q-Yangians*, [arXiv:0909.4905](#).