



HAL
open science

Débruitage et interpolation par analyse de la régularité Hölderienne. Application à la modélisation du frottement pneumatique-chaussée.

Pierrick Legrand

► **To cite this version:**

Pierrick Legrand. Débruitage et interpolation par analyse de la régularité Hölderienne. Application à la modélisation du frottement pneumatique-chaussée.. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2004. Français. NNT : . tel-00643450

HAL Id: tel-00643450

<https://theses.hal.science/tel-00643450>

Submitted on 22 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2004

Thèse de Doctorat de L'École Centrale de Nantes et de
L'Université de Nantes

Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE APPLIQUÉE

Pierrick LEGRAND

TITRE

DEBRUITAGE ET INTERPOLATION
PAR ANALYSE DE LA REGULARITE HÖLDERIENNE.
APPLICATION A LA MODELISATION DU FROTTEMENT PNEUMATIQUE-CHAUSSEE.
09 décembre 2004

JURY

Rapporteurs	J.M. LINA	<i>Professeur - Centre de Recherches Mathématiques, Univ. de Montréal</i>
	C. TRICOT	<i>Professeur - Laboratoire de Mathématiques Pures, université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand</i>
Examineurs	M.T. DO	<i>ingénieur TPE, LCPC de Nantes</i>
	J. LEVY-VEHEL	<i>Directeur de recherche - INRIA</i>
	D. PICARD	<i>Professeur - Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, Université Paris VII</i>

A mes parents...

Remerciements

Mes premiers remerciements seront adressés à mon directeur de recherche, Jacques Lévy-Véhel. Celà fait maintenant quelques années que nous travaillons ensemble et ce travail commun a été un enrichissement permanent pour moi. Jacques m'a beaucoup apporté, j'ai apprécié ses qualités humaines et scientifiques ainsi que sa grande disponibilité (même à des horaires impossibles !!!). Merci Jacques pour l'intérêt que vous avez toujours porté à mon travail. Je suis très fier que notre travail commun ait abouti sur cette thèse.

Ma seconde pensée va à Minh-Tan Do, mon co-encadrant au LCPC de Nantes, qui, grâce à son esprit de synthèse et ses qualités rédactionnelles m'a toujours bien conseillé pour diffuser mes travaux. Tan m'a initié au domaine de la recherche expérimentale et je l'en remercie. C'est aussi quelqu'un qui présente de grandes qualités humaines, ce qui a rendu le travail en sa compagnie très agréable.

Je suis très honoré que Dominique Picard, dont les travaux constituent pour moi une référence, ait accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je suis aussi très heureux et fier que Claude Tricot et Jean-Marc Lina, pour lesquels j'ai une grande estime, aient accepté d'être rapporteurs. Je les remercie pour leur analyse précise de ce manuscrit et leurs commentaires judicieux sur mon travail. Une bonne thèse passe nécessairement par un jury de qualité, alors merci infiniment.

Je veux remercier sincèrement Michel Guglielmi, qui a beaucoup contribué à mon arrivée en thèse à l'IRCCyN. Je n'oublie pas les autres membres de l'équipe Fractales de Nantes, Ina Taralova, Antoine Echelard et Olivier Barrière sur qui j'ai toujours pu compter. Je suis fier de cette équipe, fier d'en avoir fait partie et fier de la voir se développer.

En ce qui concerne l'IRCCyN, j'ai apprécié les conditions de travail dans lesquelles j'ai réalisé cette thèse. Je remercie mes collègues et amis thésards, Jean-François Lafay, les permanents, nos gentilles secrétaires, l'astucieux Bob et le personnel technique pour l'ambiance que j'ai trouvée ici. C'est agréable de croiser des personnes de bonne composition sur son lieu de travail. C'est ainsi que j'en arrive à remercier chaleureusement Frederic Desobry, mon collègue de bureau et ami qui a réussi à me supporter pendant ces années de doctorat.

Je me trouvais physiquement à l'IRCCyN pour la majeure partie de ma thèse toutefois j'ai rencontré au LCPC des personnes attachantes notamment Paul Marsac, Patrick Maisonneuve, Yves Delanne et Odile que je souhaite remercier ici. Puisque je parlais précédemment de recherche expérimentale je vais ajouter que Paul et Patrick ont aussi largement participé à ma formation en m'enseignant comment utiliser les capteurs de haute précision du site du LCPC de Nantes. Je salue également mes collègues thésards du LCPC.

Je remercie chaleureusement mes parents qui m'ont toujours laissé libre de mes choix. Je suis sûr qu'ils ne regrettent pas de m'avoir donné cette éducation et qu'ils sont fiers de moi aujourd'hui.

Enfin, je remercie mes amis les plus chers, dans le désordre, Doudou, la famille Costa, la famille Fonteneau, la famille Mandon, Yvon et Céline, Pierre-Yves, Stéphane, Stéphanie, "Les Taverniers", Philippe et Kristell, Yorky, Benj, Yannou, les "Roumaines" et tous les autres...

Table des matières

Introduction	10
I Régularité Hölderienne et application au débruitage et à l'interpolation	15
1 Estimation de la régularité	17
1.1 Rappels sur la régularité Hölderienne	18
1.1.1 Exposant de Hölder ponctuel	18
1.1.2 Exposant de Hölder local	20
1.1.3 Fonctions de Hölder	21
1.2 Estimation de la régularité locale	22
1.2.1 Oscillations	22
1.2.2 Régression des coefficients d'ondelette dans le cône d'influence (<i>RCO</i>)	23
1.2.3 Régression des Wavelet Leaders	26
1.2.4 Régressions de type limite inférieure et limite supérieure	32
1.2.5 Comparaison des méthodes d'estimation sur des signaux usuels	39
1.3 Conclusion	48
2 Interpolation	63
2.1 Introduction	64
2.2 Méthode	65
2.3 Construction des coefficients extrapolés	66
2.3.1 Coordonnées du point ajouté	66
2.3.2 Choix algorithmiques	68
2.4 Régularité et propriétés asymptotiques	68
2.5 Résultats numériques	71
2.5.1 Résultats en une dimension	71
2.5.2 Interpolation d'images	71
2.6 Conclusion	72
3 Débruitage	77
3.1 Introduction	78
3.1.1 Risque Minimax, taux de convergence optimal et adaptativité	78
3.1.2 Quelques méthodes de débruitage par ondelettes	80
3.1.3 Structure du chapitre	82
3.2 Action du bruit sur la régularité Höldérienne d'un signal	84

3.2.1	Estimation de la régularité d'un signal bruité en un point	84
3.2.2	Signal en $2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$	92
3.2.3	Signal nul	93
3.2.4	Conclusion	94
3.3	Débruitage automatique	98
3.3.1	Méthode	98
3.3.2	Applications	98
3.3.3	Conclusion	99
3.4	Multifractal Pumping	102
3.4.1	Introduction	102
3.4.2	Expression des contraintes de régularité	102
3.4.3	Méthode	103
3.4.4	Aspect minimax de la méthode	104
3.4.5	Augmentation de la régularité	112
3.4.6	Conclusion	113
3.5	Contraintes sur les multiplicateurs certifiant l'aspect minimax de la méthode.	114
3.5.1	Position du problème	114
3.5.2	Risque	114
3.5.3	Première contrainte	114
3.5.4	Seconde contrainte	115
3.5.5	Troisième contrainte	115
3.5.6	Bilan	117
3.5.7	Application :	118
3.6	Débruitage Multifractal	119
3.6.1	Introduction	119
3.6.2	Contrainte de régularité	119
3.6.3	Méthode de régularisation	119
3.6.4	Risque sans contrainte	120
3.6.5	Risque sous contraintes	124
3.6.6	Résultats numériques	126
3.6.7	Conclusion	126
3.7	Non-Linear Wavelet Coefficients Pumping	128
3.7.1	Introduction	128
3.7.2	Rappels sur le Hard Thresholding (HT)	128
3.7.3	Considérations sur la régularité après Hard Thresholding	129
3.7.4	Méthode du Non-Linear Pumping (NLP)	146
3.7.5	Aspect minimax de la méthode	147
3.7.6	Augmentation de la régularité	150
3.7.7	Comparaison de notre méthode avec le Hard Thresholding	156
3.7.8	Approche stochastique	158
3.7.9	Conclusion	159
3.8	Débruitage multifractal Bayésien	164
3.8.1	Introduction	164
3.8.2	Rappels sur l'analyse multifractale	165
3.8.3	Les classes paramétrées $\mathcal{S}(g, \psi)$	166

3.8.4	Débruitage Bayésien dans $\mathcal{S}(g, \psi)$	166
3.8.5	Loi de décision et fonction de coût	167
3.8.6	Risque fréquentiste	168
3.8.7	Risque Bayésien et convergence	170
3.8.8	Simulations	173
II Etude fractale de profils routiers et application à l'adhérence		177
4	Etat de l'art	179
4.1	Position du problème	180
4.2	Les principes de l'adhérence	180
4.2.1	La gomme	180
4.2.2	Le frottement gomme/sol	181
4.2.3	Le revêtement routier	182
4.2.4	Taux de glissement et frottement longitudinal	182
4.2.5	La mesure de frottement d'un couple gomme/sol	184
4.3	La méthode d'indenteurs	184
4.3.1	Profils d'étude et capteur utilisé	184
4.3.2	Paramètres descripteurs	184
4.3.3	Modèle de contact de Stéfani	185
4.3.4	Combinaison des descripteurs de microtexture et du modèle de contact	186
4.3.5	Conclusion	187
5	Caractérisation fractale des profils	189
5.1	Fractalité : Etat de l'art	190
5.2	Comportement fractal	190
5.2.1	Energie et CWT	190
5.2.2	Loi d'échelle globale	191
5.2.3	Dimension de régularisation	193
5.3	Conclusion	194
6	Séparation des profils	197
6.1	Introduction	198
6.1.1	Mesures tactiles	198
6.1.2	Mesures laser	198
6.2	Echec des caractérisations globales	198
6.3	Fonction de Hölder	200
6.4	Combinaison de la dimension de régularisation et de la médiane de la fonction de Hölder	200
6.5	Histogrammes des fonctions de Hölder	201
6.6	Conclusion	201
7	Utilisation de la régularité Hölderienne pour améliorer les corrélations avec le frottement	205
7.1	Interpolation de profils routiers	206
7.1.1	Méthode :	206
7.1.2	Application au calcul de frottement	206

7.1.3	Conclusion	208
7.2	Débruitage	214
7.2.1	Position du problème	214
7.2.2	Application au calcul du frottement	215
7.2.3	Conclusion	216
7.3	Corrélations Multi-échelle	224
7.3.1	Précision sur les corrélations de référence	224
7.3.2	Position du problème	224
7.3.3	Application au frottements	227
8	Conclusions et Perspectives	231
8.1	Résultats obtenus	232
8.2	Perspectives	232
8.2.1	Raffinement du modèle de frottement	232
8.2.2	Combinaison avec le modèle multi-échelle	233
8.2.3	Synthèse de profils routiers	234
	Références bibliographiques	237

Introduction

Le traitement du signal contemporain doit s'intéresser de plus en plus à des signaux irréguliers et non stationnaires. L'utilisation d'ondelettes et d'outils d'analyse fractale est appropriée à l'analyse de tels signaux. Plus précisément, de nombreuses applications montrent que la caractérisation de la régularité locale obtenue via ces techniques est pertinente pour leur description et leur traitement.

En particulier, dans le cadre de l'application qui nous intéresse, la modélisation du frottement entre un pneumatique et une chaussée, il semble intuitif que la notion de régularité est liée à la capacité d'un profil routier à générer un frottement lors du contact avec un pneumatique. On montrera dans la deuxième partie de la thèse que cette intuition se vérifie numériquement. C'est pour cette raison que la notion de régularité constitue un des axes principaux de cette thèse.

Bien que l'étude de la régularité soit une problématique relativement récente en traitement du signal, une branche de l'analyse fractale, l'analyse de la régularité Hölderienne, offre des outils mathématiques permettant de caractériser la régularité d'un signal. Nous concentrerons nos travaux sur l'un de ces outils autour duquel plusieurs développements seront proposés dans ce document, à savoir l'exposant de Hölder.

La première partie de cette thèse porte sur la régularité Hölderienne et son application au débruitage et à l'interpolation. Dans le premier chapitre, nous commencerons par effectuer quelques rappels sur l'analyse Hölderienne (section 1.1) et l'exposant de Hölder, qui constituera la base essentielle de la suite du travail présenté ici. Ce chapitre se poursuit par la présentation de plusieurs techniques classiques d'estimation de l'exposant de Hölder (section 1.2). Ces techniques sont ensuite comparées sur un large panel d'exemples numériques afin de déterminer leurs qualités et leurs limites.

A partir des techniques d'estimation de la régularité, nous présentons dans le chapitre 2 une méthode d'interpolation de points basée sur la conservation de la régularité Hölderienne. Cette technique a été élaborée afin de compenser une éventuelle limite d'un capteur lors de la mesure de la micro-texture d'un échantillon de chaussée. Les propriétés théoriques de convergence de cette méthode sont démontrées et une section est consacrée aux applications sur des signaux 1D ou 2D permettant ainsi de comparer notre méthode à une méthode classique d'interpolation.

Nous poursuivons la partie sur l'analyse Hölderienne en exposant de nouvelles méthodes de débruitage avec contrôle de la régularité dans le chapitre 3. Les méthodes de débruitage désormais classiques fondées sur le seuillage de coefficients d'ondelettes, telles que le Hard Thresholding, remplacent les petits coefficients d'ondelette du signal bruité par des zéros. Ces méthodes ont dans de nombreux cas des performances théoriques et pratiques excellentes. Cependant, elles ne permettent pas de contrôler la régularité du signal débruité. Elles ne sont alors pas adaptées au traitement des profils routiers, pour lesquels il est crucial qu'un débruitage ne lisse ni trop ni trop peu les signaux, faute de quoi les modèles de calcul de frottement perdent leur pertinence. Or, lors des mesures de micro-texture, les signaux acquis sont souvent entachés de bruit. Nous proposons donc quatre méthodes de débruitage à base d'ondelette qui autorisent un contrôle précis de la régularité après débruitage. Ces méthodes présentent dans certains cas des taux de convergence similaires à ceux du Hard Thresholding. Nous commençons ce chapitre par une étude préliminaire déterminant l'impact du bruit sur la régularité d'un signal (section 3.2). La première méthode de débruitage proposée est le **Wavelet Pumping** (section 3.4) qui consiste à multiplier tous les coefficients d'ondelette d'une échelle j par un même coefficient $B_j = 2^{-j(\Delta\alpha)}$ qui assure une augmentation contrôlée de la régularité. On propose ensuite une extension de cette technique, le **débruitage multifractal** (section 3.6). Pour cette seconde méthode, la forme du coefficient multiplicateur n'est plus prescrite. Ce coefficient est obtenu par minimisation du risque sous la contrainte d'obtenir en sortie la bonne régularité. Il s'agit d'une méthode très complexe présentant certains inconvénients. Ces deux méthodes de débruitage par ondelette sont linéaires, et donc pas toujours minimax selon l'espace de Besov dans lequel on se trouve (e.g. si $p < 2$). De plus elles sont non-adaptatives. On propose alors de marier dans la section suivante l'une de nos méthodes évoquée plus haut, le multifractal pumping, avec une méthode non-linéaire adaptative et simple, le Hard Thresholding. La méthode proposée, sous le nom de **Wavelet Non-Linear coefficients Pumping** (section 3.7), aura ainsi l'avantage d'être adaptative en plus de contrôler la régularité du signal débruité. Pour conclure ce chapitre sur le débruitage, on présente

une méthode de **débruitage multifractal Bayésien** (section 3.8). Cette technique repose sur la connaissance de la régularité locale minimale du signal. Cette hypothèse se traduit sous la forme de contraintes sur le spectre multifractal du signal. Ces contraintes sont ensuite utilisées dans un cadre Bayésien pour estimer les coefficients d'ondelette du signal original à partir de ceux du signal perturbé par du bruit. Cette méthode est bien adaptée au traitement des signaux irréguliers tels que les signaux (multi-)fractals et peut être utile pour le traitement de données de turbulences, bio-médicales, sismiques ou de profils routiers comme nous le montrons par la suite.

Les divers outils développés dans cette première partie peuvent être appliqués aux signaux 1D ainsi qu'aux images. Dans le cadre de cette thèse, ils seront plus particulièrement utilisés pour analyser des profils routiers dans le but de mieux modéliser le frottement entre un pneumatique et une chaussée, ce qui va constituer la deuxième partie de la thèse.

La deuxième partie de ce travail porte sur la compréhension des mécanismes d'adhérence. L'adhérence d'une chaussée correspond à sa capacité à mobiliser des forces de frottement entre le pneumatique d'un véhicule et la surface du revêtement de la chaussée sous l'effet des sollicitations engendrées par la conduite : accélérations, freinages, changements de direction, etc. Elle permet : - de conserver à tout moment la trajectoire désirée, notamment en virage ; - de réduire les distances de freinage et d'arrêt d'urgence ; - de faciliter les manoeuvres d'évitement ou de récupération de trajectoire.

Le développement des forces de frottement dépend de la charge normale instantanée, de diverses propriétés des pneumatiques, des caractéristiques géométriques de la route et des conditions de contact (sec, présence de polluants et d'eau). La complexité des phénomènes mis en jeu explique l'absence de modèle physique complet de calcul des forces de frottement d'un pneumatique sur une chaussée à partir de paramètres liés à la route et au pneumatique.

Dans le cadre du programme de recherche "Infrastructure et sécurité routière" du Laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC), la section Surface des Chaussées et Dynamique des Véhicules a proposé d'aborder le problème d'adhérence par une approche locale visant à mieux comprendre et quantifier les phénomènes au niveau du contact entre un pavé de gomme et des aspérités de la chaussée. Le travail présenté ici s'appuie sur des connaissances acquises dans le cadre d'un thème de recherche du LCPC, "Contribution de diverses échelles de texture routière à l'adhérence des chaussées" (CH12), et a pour objectif de mieux comprendre et de quantifier le rôle des aspérités de dimensions micrométrique à centimétrique, formant la texture des surfaces de chaussée, dans la génération du frottement pneumatique/chaussée. Les recherches sur le thème CH12 ont apporté plusieurs contributions à l'état des connaissances actuelles sur le frottement que l'on peut résumer ici.

- la répartition des indenteurs, aspérités déformant les pavés de gomme du pneumatique, et la forme locale des indenteurs influent sur le frottement à basse vitesse ;
- deux paramètres angulaires permettent d'expliquer l'influence de la texture de surface sur le frottement : la forme, représentée par la cotangente du demi-angle des sommets d'indenteurs, et le relief, représenté par la pente locale du profil enveloppe reliant tous les sommets d'indenteurs ;
- il existe au moins deux échelles de texture contribuant à la génération du frottement à basse vitesse : l'échelle " rugosité " formée par des indenteurs dont la taille est de l'ordre de 10 microns et l'échelle " ondulation " formée par des indenteurs dont la taille est de l'ordre de 100 microns ;
- la génération du frottement à basse vitesse peut être modélisée simplement par le contact de roulement entre un solide de Kelvin, simulant le comportement viscoélastique de la gomme, et un "motif" de la surface de chaussée, représentant la répartition des indenteurs.

Le thème CH12 a ainsi permis de jeter une première base de travail vers un modèle multi-échelles permettant de quantifier la contribution de diverses échelles de la texture des surfaces de chaussée au frottement pneumatique/chaussée. On justifie ainsi le bien fondée d'une campagne d'étude utilisant des outils d'analyse fractale. De plus, la validation de différentes approches dans le cadre du thème CH12 a été limitée par des difficultés d'ordre métrologique. Premièrement, la technologie actuelle des capteurs

de distance ne permet pas de mesurer des profils de texture suffisamment longs incluant des informations sur toutes les échelles de texture. Il a donc été nécessaire de réfléchir à des méthodes permettant de "construire" des profils complets à partir de données partielles livrées par les capteurs. La technique d'interpolation détaillée dans le chapitre 2 de la première partie trouve ici un parfait domaine d'application dont les résultats sont présentés dans la section 7.1. D'autre part, lorsque l'on atteint les limites de résolution du capteur, les profils obtenus sont détériorés et entaché de bruit. Le pré-traitement proposé dans la seconde partie de la thèse (7.2) est l'application d'une méthode de débruitage que nous avons élaborée (voir la section 3.8).

Cette partie commence par une partie bibliographique (chapitre 4) donnant en premier lieu un rappel des principes de l'adhérence (section 4.2). Dans cette section sont détaillés les mécanismes d'adhésion et d'indentation qui interviennent dans le phénomène d'adhérence et quelques notions relatives à la modélisation d'un pneumatique par un solide de Kelvin. On justifie ici la confrontation de nos résultats au frottement SRT car cette mesure est intimement liée au taux de glissement longitudinal. Puis nous présentons dans ce même chapitre un exposé des travaux menés au préalable sur le site du LCPC sur la technique d'indenteur et sa combinaison au modèle de frottement de Stefani (section 4.3). Les résultats préliminaires sur les indenteurs, obtenus par Minh-Tan Do, publiés en 2001 [DZ01], et montrant la pertinence des paramètres géométriques extraits des profils routiers pour décrire le frottement sont présentés.

On s'attache dans le chapitre suivant à confirmer la fractalité des profils routiers (chapitre 5). Plusieurs auteurs ont déjà montré que la plupart des profils routiers étaient fractals sur un certain nombre d'échelles. On peut citer à ce sujet les travaux de Rado [Rad94], Heinrich [Hei97], Guglielmi et Levy-Vehel [GV98a]. D'autre part il a aussi été montré que la fractalité avait des conséquences sur le frottement ce qui est explicité dans [Rad94] et dans les travaux de Klüppel et Heinrich [KH00].

La fractalité des signaux nous conduit ensuite à tenter de trouver des paramètres fractals descripteurs du frottement (chapitre 6) permettant ainsi de classifier les échantillons. Les meilleurs résultats étant obtenus par une utilisation de l'exposant de Hölder, il est naturel d'utiliser les outils de régularité Hölderienne pour compenser les limites du capteur (chapitre 7). La première technique appliquée est l'interpolation Hölderienne (section 7.1) destinée à s'affranchir au mieux des limites de résolution du capteur. La seconde, le débruitage multifractal Bayésien (section 7.2), permet de supprimer le bruit d'acquisition sur des signaux très finement échantillonnés. Ces deux pré-traitements des profils routiers permettent d'obtenir une meilleure corrélation entre le frottement calculé par la technique d'indenteur et le frottement SRT mesuré. Pour conclure cette partie, on montre dans le chapitre 7.3 qu'un calcul indépendant du frottement sur chacune des échelles de décomposition et une pondération des frottements obtenus peut améliorer la corrélation avec le frottement SRT.

Première partie

Régularité Hölderienne et application au débruitage et à l'interpolation

Chapitre 1

Estimation de la régularité

La régularité d'un signal et son estimation constituent une problématique assez récente dans le domaine du traitement du signal. Pourtant il s'agit d'une des caractéristique fondamentale d'un signal même s'il existe une infinité de signaux présentant la même régularité en chaque point.

Pour l'application à laquelle nous nous intéressons, c'est à dire la modélisation du frottement d'un pneumatique et d'une chaussée, on comprend intuitivement que la régularité de la chaussée sera une composante importante dans les mécanismes du frottement. De plus, dans la partie consacrée à la modélisation du frottement, on montre que l'irrégularité et l'aptitude d'un profil routier à générer du frottement sont effectivement liés. C'est pour cette raison que la problématique de cette thèse est axée autour de la notion de régularité. Ce concept est omniprésent, que ce soit dans le chapitre sur l'interpolation ou dans celui sur le débruitage. En effet, on propose dans les chapitres suivants une technique d'interpolation de points avec conservation de la régularité ainsi que des méthodes de débruitage avec contrôle de la régularité afin de les appliquer aux profils routiers.

On doit donc s'intéresser aux outils théoriques décrivant la régularité, ce qui constituera la première partie de ce chapitre. L'analyse Hölderienne, par le biais de l'exposant de Hölder, offre des objets mathématiques caractérisant la régularité d'un signal. Notamment, l'exposant de Hölder correspond bien à l'impression visuelle [Veh98] et auditive [VD96] de régularité.

Dans un deuxième temps, nous allons présenter trois méthodes d'estimation de l'exposant de Hölder. La construction de ces estimateurs sera décrite en détail et leur implementation nous permettra de comparer numériquement les trois méthodes sur des signaux usuels.

1.1 Rappels sur la régularité Hölderienne

Nous allons commencer ce chapitre par quelques rappels sur la régularité Hölderienne. Pour des exposés plus complets sur ce sujet, se référer à [JM96], [Mey97],[Jafar], [Tri95] ou [VS04].

1.1.1 Exposant de Hölder ponctuel

L'exposant de Hölder ponctuel est l'outil le plus couramment utilisé pour mesurer la régularité d'un signal en un point donné. On rappelle ici quelques définitions concernant cet exposant.

Définition 1.1.1 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $s > 0$, $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f \in C^s(x_0)$ si et seulement si il existe un réel $\eta > 0$, un polynôme P de degré plus petit que s et une constante c telle que

$$\forall x \in B(x_0, \eta), \quad |f(x) - P(x - x_0)| \leq c|x - x_0|^s \quad (1.1)$$

Par définition, l'exposant ponctuel de f en x_0 , noté $\alpha_p(x_0)$ est le supremum des s tels que $f \in C^s(x_0)$.

On peut donner une définition équivalente à la précédente sans faire apparaître directement l'espace C^s .

Définition 1.1.2

$$\alpha_p(x_0) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\log |f(x_0 + h) - f(x_0)|}{\log |h|} \quad (1.2)$$

Cette définition est valable si f est non dérivable en x_0 , sinon il faut lui enlever sa partie régulière, c'est à dire son développement de Taylor en x_0 (voir [Jaf97]).

Géométriquement, l'équation 1.2 signifie que le graphe de la fonction f autour de x_0 s'inscrit dans une enveloppe que l'on appellera l'enveloppe Hölderienne (voir figure 1.1). Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage de x_0 tel que le graphe de f dans ce voisinage soit tout entier inclus dans l'espace défini par les deux courbes qui associent à x respectivement $f(x_0) + c|x - x_0|^{\alpha_p(x_0) - \epsilon}$ et $f(x_0) - c|x - x_0|^{\alpha_p(x_0) - \epsilon}$ et tel que cette propriété ne soit plus vraie pour l'espace défini par les courbes qui associent à x respectivement

$f(x_0) + c|x - x_0|^{\alpha_p(x_0) + \epsilon}$ et $f(x_0) - c|x - x_0|^{\alpha_p(x_0) + \epsilon}$. On voit que plus $\alpha_p(x_0)$ est grand, plus le signal est lisse et inversement que plus $\alpha_p(x_0)$ est petit plus le signal est irrégulier en x_0 . Par exemple, f continue en zero implique $\alpha_p \geq 0$ et f derivable implique $\alpha_p \geq 1$.

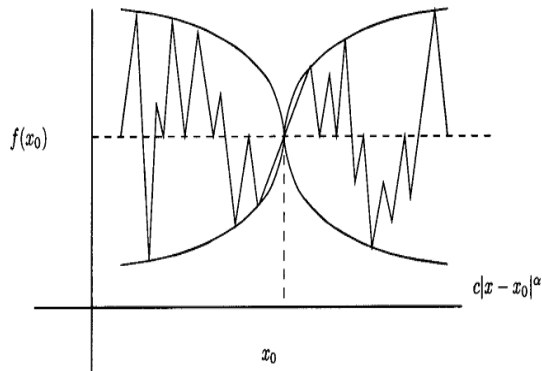


FIG. 1.1: Enveloppe Hölderienne d'un signal au point x_0 .

On dispose d'un coefficient donnant une mesure de l'irrégularité, toujours défini et calculable. De plus sa définition s'étend sans difficulté dans les dimensions supérieures. Toutefois, l'exposant de Hölder ponctuel n'est pas stable par opérateurs pseudo-différentiels.

Proposition 1.1.1

Soit α l'exposant de Hölder ponctuel de la fonction f en x_0 alors l'exposant de Hölder ponctuel de f' en x_0 est inférieur ou égal à $\alpha - 1$.

L'égalité n'est vérifiée que dans certains cas, par exemple :

- Considérons $f(x) = x + |x|^{\frac{5}{2}}$
On enlève la partie régulière (en soustrayant à f son polynôme de Taylor) ce qui nous donne $\alpha(0) = 5/2$. Maintenant regardons la dérivée, $f'(x) = 1 + \frac{5}{2}|x|^{\frac{3}{2}}$.
L'exposant de Hölder ponctuel de f' en zéro est donc $\frac{3}{2}$ c'est à dire $\frac{5}{2} - 1$.
- Par contre, si $f(x) = |x|^\lambda \sin \frac{1}{|x|^\beta}$ alors $\alpha(0) = \lambda$. Lorsque l'on dérive f , on obtient :

$$f'(x) = \lambda|x|^{\lambda-1} \sin \frac{1}{|x|^\beta} - \beta|x|^{\lambda-\beta-1} \cos \frac{1}{|x|^\beta}$$

L'exposant de Hölder ponctuel de f' en zero est donc

$$\lambda - \beta - 1 < \lambda - 1$$

On profite de ces rappels sur l'exposant de Hölder ponctuel pour rappeler la définition de l'espace $C_{\log}^\alpha(x_0)$ qui nous servira dans la proposition 1.2.3 section 1.2.3.

Définition 1.1.3 [Jafar] La fonction $f \in C_{\log}^\alpha(x_0)$ s'il existe $c > 0$, $\delta > 0$ et un polynôme P de degré plus petit que α tel que :

$$\text{Si } |x - x_0| \leq \delta, \quad |f(x) - P(x - x_0)| \leq c|x - x_0|^\alpha \log \left(\frac{1}{|x - x_0|} \right) \quad (1.3)$$

1.1.2 Exposant de Hölder local

Il est parfois nécessaire d'avoir des renseignements sur la régularité d'un signal non pas en un point mais au voisinage de ce point, et c'est dans le but d'intégrer ces informations dans un exposant que l'on introduit l'exposant de Hölder local α_l . L'exposant ponctuel s'attachait surtout à l'enveloppe du graphe de la fonction, l'exposant local que nous allons définir dans ce paragraphe tient aussi compte des oscillations. Plusieurs raisons motivent l'utilisation dans certains cas de l'exposant local [VL01]. Premièrement l'exposant ponctuel ne suffit pas toujours à donner une parfaite description de la régularité d'une fonction. On peut citer comme exemple les fonctions cusp et chirp :

$$\text{cusp} : x \mapsto |x|^\gamma \text{ avec } \gamma \text{ un réel positif} \quad (1.4)$$

$$\text{chirp} : x \mapsto |x|^\gamma \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right) \text{ avec } \gamma \text{ et } \beta \text{ des réels positifs} \quad (1.5)$$

Ces deux fonctions ont le même exposant ponctuel en zéro (γ), mais pourtant leur comportement est très différent au voisinage de zéro comme on peut le constater figure 1.2. L'exposant local va tenir compte des oscillations.

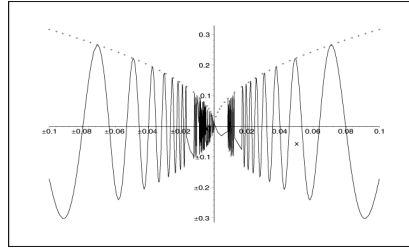


FIG. 1.2: Fonctions cusp en pointillés et chirp en traits pleins. Ces deux fonctions possèdent un exposant ponctuel identique en zéro mais présentent des comportements foncièrement différents.

D'autre part, nous avons vu que l'exposant ponctuel n'était pas stable par opérateurs pseudo-différentiels. L'exposant local n'a pas cette mauvaise propriété comme nous le verrons dans la proposition 1.1.2. Rappelons la définition de la régularité Hölderienne globale.

Définition 1.1.4 Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, avec Ω un ouvert de \mathbb{R} . On dit que $f \in C^s(\Omega)$, avec $0 < s < 1$ s'il existe une constante c telle que pour tout couple x, y dans Ω ,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^s \quad (1.6)$$

Si $m < s < m + 1$ (avec $m \in \mathbb{N}$), alors $f \in C^s(\Omega)$ signifie qu'il existe une constante c telle que pour tout couple x, y dans Ω ,

$$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leq c|x - y|^{s-m} \quad (1.7)$$

Rappelons aussi qu'une fonction f est uniformément Hölderienne s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R})$. Pour définir l'exposant de Hölder local de f en x_0 , nous allons simplement "localiser" la définition 1.1.4 autour de x_0 .

Définition 1.1.5 On définit

$$\alpha_f(\Omega) = \sup\{s : f \in C^s(\Omega)\} \quad (1.8)$$

Lemme 1.1.1 Soit $\{\Theta_i\}_{i \in I}$ une suite décroissante d'ouverts tels que

$$\bigcap_i \Theta_i = \{x_0\} \quad (1.9)$$

Alors $\sup \alpha_f(\Theta_i), i \in I$ est indépendant de la famille $\{\Theta_i\}_{i \in I}$ choisie.

Nous pouvons donc définir l'exposant de Hölder local en x_0 en utilisant une suite d'intervalles quelconque contenant x_0 puisque celui-ci sera indépendant de la famille choisie.

Définition 1.1.6 Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 . Soit $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'intervalles ouverts convergeant vers x_0 . L'exposant de Hölder local de la fonction f en x_0 est :

$$\alpha_l(x_0) = \sup_{n \in \mathbb{N}} [\alpha_f(I_n)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_f(I_n) \quad (1.10)$$

Définition 1.1.7 (définition équivalente)

Si $\alpha_l < 1$, alors α_l est le supremum des α tels que l'inégalité ci-dessous soit vérifiée :

$$\exists c \text{ et } \rho_0 > 0 \text{ tels que } \forall \rho < \rho_0 \quad \sup_{x, y \in B(x_0, \rho)} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq c \quad (1.11)$$

Proposition 1.1.2

α_l est stable par l'action d'opérateurs integro-différentiels. Plus précisément, si f a pour exposant local α_l en x_0 alors f' a pour exposant local $\alpha_l - 1$ et $\int_0^t f(x)dx$ a pour exposant local $\alpha_l + 1$.

Proposition 1.1.3 [GV98b]

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I un intervalle de \mathbb{R} . Alors $\forall x \in I$,

$$\alpha_l \leq \min \left(\alpha_p, \liminf_{t \rightarrow x} (\alpha_p(t)) \right) \quad (1.12)$$

Exemple :

Considérons de nouveau la fonction chirp qui à x associe $|x|^\gamma \sin \frac{1}{|x|^\beta}$ avec $0 < \gamma < \min(1, \beta)$. Alors :

$$\alpha_p(0) = \gamma \quad (1.13)$$

$$\alpha_l(0) = \frac{\gamma}{1 + \beta} \quad (1.14)$$

1.1.3 Fonctions de Hölder

L'exposant de Hölder étant défini en tout point, on peut associer au signal sa fonction de Hölder. Cette construction est possible aussi bien pour l'exposant local que pour l'exposant ponctuel ([SV02]).

On peut ainsi définir les fonctions de Hölder ponctuelle et locale. (Voir [DVM98] et [GV98b]).

Définition 1.1.8 Soit f une fonction continue. Les fonctions de Hölder respectivement ponctuelle et locale de f , α_p^f et α_l^f sont les fonctions qui à tout x associe l'exposant de Hölder ponctuel et local de f en x .

Théorème 1.1.1

Soit g une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- g est la limite inférieure d'une suite de fonctions continues.
- Il existe une fonction continue f telle que la fonction de Hölder ponctuelle α_p^f de f vérifie $\alpha_p^f(x) = g(x), \forall x$.

Théorème 1.1.2

Soit g une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- g est une fonction semi-continue inférieurement.
- Il existe une fonction continue f telle que la fonction de Hölder locale α_l^f de f vérifie $\alpha_l^f(x) = g(x), \forall x$.

Dans certains cas, il est possible de construire très simplement une fonction qui ait la fonction de Hölder souhaitée.

Théorème 1.1.3

Soit h une fonction C^1 à valeurs dans $[0, 1]$. Soit la fonction de Weierstrass généralisée :

$$Wg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n \cdot h(x)} \sin(\lambda^n x) \text{ avec } \lambda \geq 2 \quad (1.15)$$

Alors on a $\forall x$:

$$\alpha_l^{Wg}(x) = \alpha_p^{Wg}(x) = h(x) \quad (1.16)$$

1.2 Estimation de la régularité locale

Après avoir rappelé diverses notions sur l'exposant de Hölder et l'analyse Hölderienne en général, nous allons maintenant présenter des méthodes classiques d'estimation de la régularité. Plusieurs méthodes sont envisageables pour estimer l'exposant de Hölder. La plus naturelle, car elle suit la définition de l'exposant, et qui consiste à étudier les oscillations autour du point considéré, sera présentée dans la sous-section 1.2.1.

Nous poursuivrons cette section en détaillant deux techniques d'estimation à base d'ondelettes discrètes (pour des rappels généraux sur les ondelettes, voir [Dau92] et [Mey90]). Ces techniques, qui découlent de deux théorèmes de Stéphane Jaffard, seront privilégiées dans la suite de notre travail car elles permettent un contrôle aisé de la régularité.

Notre contribution dans cette section sur le domaine de l'estimation de la régularité consiste en la comparaison intensive dans la section 1.2.5 des trois méthodes présentées afin de mettre en évidence leurs qualités et leurs limites.

1.2.1 Oscillations

L'estimation de la régularité par la technique d'oscillation est la plus naturelle puisqu'elle consiste en l'application directe de la définition de l'exposant de Hölder (voir définition 1.1.7). Cette méthode donne de bons résultats mais ne permet pas de manipuler la régularité du signal comme nous serons amenés à le faire dans la suite de ce document dans les chapitres consacrés à l'interpolation et au débruitage. On présente maintenant brièvement l'estimation de la régularité par oscillation (voir [Tri95]).

On rappelle qu'une fonction $f(t)$ est Hölderienne d'exposant $\alpha \in]0, 1[$ en t s'il existe une constante c telle que pour tout t' dans un voisinage de t ,

$$|f(t) - f(t')| \leq c|t - t'|^\alpha \quad (1.17)$$

En terme d'oscillations, cette condition peut s'écrire : Une fonction $f(t)$ est Hölderienne d'exposant α en t , avec $0 < \alpha < 1$ s'il existe une constante c telle que pour tout τ ,

$$\text{osc}_\tau(t) \leq c\tau^\alpha \quad (1.18)$$

avec

$$\text{osc}_\tau(t) = \sup_{|t-t'|\leq\tau} f(t') - \inf_{|t-t'|\leq\tau} f(t') = \sup_{t',t''\in[t-\tau,t+\tau]} |f(t') - f(t'')| \quad (1.19)$$

En effet, $\text{osc}_\tau(t) \leq c\tau^\alpha$ implique directement $|f(t) - f(t')| \leq c|t - t'|^\alpha$. Réciproquement, supposons que $|f(t) - f(t')| \leq c|t - t'|^\alpha$ pour tout t' . Soit t_1 tel que $|t - t_1| \leq \tau$ et $f(t_1) = \sup_{|t-t'|\leq\tau} f(t')$. De même,

soit t_2 tel que $|t - t_2| \leq \tau$ et $f(t_2) = \inf_{|t-t'|\leq\tau} f(t')$. Alors on a :

$$\text{osc}_\tau(t) = f(t_1) - f(t_2) = f(t_1) - f(t) + f(t) - f(t_2) \leq 2c\tau^\alpha \quad (1.20)$$

L'estimateur de la régularité sera construit en chaque point comme étant la pente de la régression du logarithme de l'oscillation en fonction de la dimension de la boule dans laquelle on calcule l'oscillation. Du point de vue algorithmique, on montre qu'il est préférable de ne pas utiliser toutes les tailles de boule entre deux valeurs $rmin$ et $rmax$: de la même manière que pour la transformée en ondelettes discrète qui ne considère que les échelles dyadiques, on ne va calculer l'oscillation au point t que sur des intervalles de la forme $[t - base^r : t + base^r]$. On régresse ensuite le logarithme de l'oscillation selon r qui prend toutes les valeurs entières comprises entre $rmin$ et $rmax$.

La méthode d'estimation par oscillation va donner de bons résultats sous trois conditions :

- **P1** : $\alpha < 1$ (sinon il faut remplacer l'oscillation par des modules de continuité d'ordre supérieur).
- **P2** : La régression converge.
- **P3** : La régression converge vers la bonne valeur.

1.2.2 Régression des coefficients d'ondelette dans le cône d'influence (RCO)

On présente maintenant une méthode d'estimation à partir des coefficients d'ondelette. Pour cette méthode d'estimation de la régularité, nous allons nous servir d'un théorème de Stéphane Jaffard. Celui-ci montre comment on peut estimer la régularité d'un signal en un point à partir des coefficients d'ondelette (lorsque les ondelettes utilisées vérifient certaines conditions de régularité [Jafar]). Soit Ψ une ondelette telle que l'ensemble $\{\Psi_{j,k}\}_{j,k}$ forme une base orthonormée de L^2 . On note $c_{j,k}$ les coefficients d'ondelette de f avec j correspondant aux échelles et k correspondant à la location temporelle.

Théorème 1.2.1 (*S. Jaffard*)

Soit f une fonction uniformément Höldérienne et soit α l'exposant de Hölder ponctuel de f en t_0 alors il existe une constante $c > 0$ telle que les coefficients d'ondelette vérifient :

$$|c_{j,k}| \leq c2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}(1 + |2^j t_0 - k|)^\alpha \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}^2 \quad (1.21)$$

Réciproquement ;

$$\text{Si } \forall j, k \in \mathbb{Z}^2 \text{ on a } |c_{j,k}| \leq c2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}(1 + |2^j t_0 - k|)^{\alpha'} \quad (1.22)$$

pour un $\alpha' < \alpha$ alors l'exposant de Hölder de f en t_0 est α .

La condition 1.22 a été introduite par J.M. Bony et est notée $f \in C^{\alpha, -\alpha'}(t_0)$.

Que nous apporte ce théorème ? L'interprétation est la suivante ; les coefficients d'ondelette sont majorés en valeur absolue par une quantité dépendant de l'exposant de Hölder et de plus il en existe une partie qui est de l'ordre de cette quantité.

A partir de ce théorème, un estimateur classique de la régularité en un point est obtenu en se restreignant au "cône d'influence" : pour le point t_0 , on ne s'intéresse qu'aux indices j, k tels que $|k - 2^j t_0| < cste$. Donc on fait l'hypothèse qu'il existe dans le cône d'influence des coefficients de l'ordre de $2^{-j(\alpha + \frac{1}{2})}$. Cette hypothèse simplificatrice est vérifiée si et seulement si l'exposant local est égal à l'exposant ponctuel en t_0 [VS04].

Sous cette hypothèse, un estimateur de l'exposant de Hölder est obtenu simplement via la pente p de la droite de régression de $\log_2 |C_{j,k}|$ en fonction de j (voir figure 1.3) : $\alpha(n, t_0) = -p - \frac{1}{2}$ avec n le nombre de niveaux de décomposition.

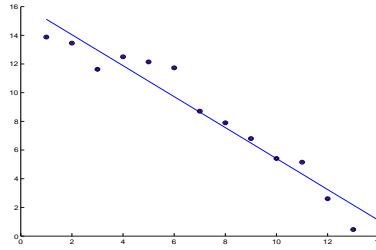


FIG. 1.3: Régression au-dessus d'un point du signal. L'axe des abscisses porte les échelles. Les ronds correspondent chacun au \log_2 d'un coefficient d'ondelette situé "au-dessus" du point considéré t_0 (c'est à dire $k = \lfloor \frac{t_0+1}{2^{n-j+1}} \rfloor$).

Définition 1.2.1 En chaque point t_0 du signal, on estime la régularité par :

$$\alpha(n, t_0) = -p - \frac{1}{2} \quad (1.23)$$

avec p la pente de la régression linéaire aux moindres carrés des logarithmes des coefficients d'ondelette "au-dessus" de ce point (c'est à dire $k = \lfloor \frac{t_0+1}{2^{n-j+1}} \rfloor$) en fonction des échelles.

Proposition 1.2.1

En chaque point t_0 du signal décomposé sur n échelles, on estime la régularité par la formule suivante :

$$\alpha(n, t_0) = -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j \log_2 |c_{j,k}| \quad (1.24)$$

avec $K_n = \frac{12}{n(n-1)(n+1)}$ et $s_j = j - \frac{n+1}{2}$. Les $c_{j,k}$ sont les coefficients d'ondelette situés "au-dessus" de t_0 .

Dans la proposition précédente, on écrit k par abus de notation mais en réalité la valeur de k est $\lfloor \frac{t_0+1}{2^{n-j+1}} \rfloor$. Pour une raison de simplicité d'écriture, cet abus de notation sera utilisé dans la suite de ce document.

Lorsque l'on considère des signaux de dimension supérieure à 1, le principe d'estimation de la régularité est le même selon toutes les directions de la transformée en ondelettes séparables et identique à celui décrit ci-dessus.

Preuve

La pente p de la droite de régression est donnée par :

$$p = \frac{\text{cov}(L_{t_0}, S)}{\text{var}(S)}$$

avec $S = [1..n]$ et $L_{t_0} = [\log_2 |c_{1,k}| .. \log_2 |c_{n,k}|]$ les logarithmes des coefficients d'ondelette situés "au-dessus" de t_0 .

$$E[S] = \frac{n+1}{2} \text{ et } \text{var}(S) = \sum_{j=1}^n \left[j - \frac{n+1}{2} \right]^2 = \frac{n(n+1)}{12}.$$

De plus $\text{cov}(L_{t_0}, S) = \frac{1}{n-1} \langle (L_{t_0} - \bar{L}_{t_0})(S - \bar{S}) \rangle$ avec \bar{L}_{t_0} la moyenne de L_{t_0} et \bar{S} la moyenne de S .
Donc

$$\text{cov}(L_{t_0}, S) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\log_2 |c_{j,k}| - \frac{\sum_{i=1}^n \log_2 |c_{i,k}|}{n} \right) \left(j - \frac{n+1}{2} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \log_2 |c_{j,k}| \left(j - \frac{n+1}{2} \right)$$

Par conséquent

$$p = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{j=1}^n \log_2 |c_{j,k}| \left(j - \frac{n+1}{2} \right)$$

On a $\alpha(n, t_0) = -p - \frac{1}{2}$ ce qui nous permet de conclure. ■

Remarque 1.2.1 Si l'estimateur présenté ci-dessus converge vers $\alpha_p = \alpha_l$, alors il estime aussi un exposant nommé l'exposant de Weak Scaling (voir [Mey97]) et noté β_w .

Définition 1.2.2 L'exposant de weak scaling du signal X en t_0 est défini par :

$$\beta_w(t_0) = \sup \{s : \exists l, X^{(-l)} \in C^{s+n}(t_0)\} \quad (1.25)$$

où $X^{(-l)}$ représente une primitive d'ordre l de X et $C^s(t_0)$ l'espace de Hölder ponctuel en t_0 .

On reviendra sur cet exposant dans le chapitre 2. En effet nous allons utiliser le fait que notre estimateur, s'il converge, tend vers β_w . Nous avons aussi la proposition suivante (voir [VS04]) :

Proposition 1.2.2

Si l'exposant ponctuel et l'exposant local coïncident, alors :

$$\alpha_l = \alpha_p = \beta_w \quad (1.26)$$

C'est précisément dans cette configuration que l'estimateur présenté ici est susceptible de donner de bons résultats. Il faut avoir à l'esprit que l'on a fait l'hypothèse qu'il existait de gros coefficients dans le cône d'influence au dessus du point considéré, par conséquent, la faiblesse de cet estimateur réside dans les signaux tels que les gros coefficients ne sont pas dans ce cône.

Pour la suite de ce document, lorsque l'on fera référence à cet estimateur, on parlera d'estimation de type *RCO*.

Domaine de validité de la méthode

La méthode d'estimation décrite ci-dessus va donner de bons résultats sous trois conditions :

- **H1** : Dans le cône d'influence il existe des coefficients de l'ordre de $2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$.
- **H2** : La régression converge.
- **H3** : La régression converge vers la bonne valeur.

Nous allons présenter maintenant un cas favorable puis des cas défavorables afin de montrer les limites de la méthode.

Cas favorable

Si on dispose d'un nombre suffisant d'échelles pour effectuer la régression alors on peut estimer correctement l'exposant de Hölder dans des cas simples. Prenons l'exemple de la fonction de Weierstrass, pour cette illustration nous choisissons $\alpha = 0.5$ et un point t_0 au hasard dans le signal de 4096 points. On applique l'estimateur sur cette fonction (figure 1.4) et on obtient 0.51789.

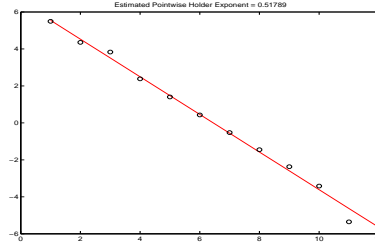


FIG. 1.4: Estimation de l'exposant de Hölder en un point d'une fonction de Weierstrass de 4096 points et de régularité 0.5. L'estimateur nous renvoie la valeur 0.51789.

Cas défavorable

Pour illustrer les cas défavorables, nous reprenons une par une les conditions qui devraient être vérifiées et exhibons des exemples pour lesquels elles ne le sont pas.

H1 : Tous les gros coefficients sont à l'extérieur du cône d'influence.

On peut prendre l'exemple du chirp, d'équation $|x|^\gamma \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$, représenté sur les figures 1.5 et 1.6 pour des paramètres β différents. Plus β augmente et plus les gros coefficients d'ondelette sont éloignés du cône d'influence au-dessus de zéro. C'est pour cette raison que l'estimation est moins bonne pour $\beta = 2.9$ (estimation à 0.137 pour 0.3) que pour $\beta = 0.9$ (estimation à 0.21 pour 0.3).

Notons que puisqu'il n'y a que de petits coefficients dans le cône d'influence, on s'attendait à estimer un exposant de Hölder plus grand que γ . Le fait que l'on obtienne des valeurs plus faibles est dû au mauvais alignement des logarithmes des coefficients d'ondelette comme on peut le constater sur les figures 1.5 et 1.6 en bas à gauche. La pente de la droite de régression n'a pas de sens ici.

H2 : La régression ne converge pas.

On peut construire un signal tel que la régression ne converge pas. Par exemple, prenons un signal pour lequel les coefficients d'ondelette vérifient n_1 échelles en $2^{-j(\alpha_1 + \frac{1}{2})}$ puis $2n_1$ échelles en $2^{-j(\alpha_2 + \frac{1}{2})}$ puis $4n_1$ échelles en $2^{-j(\alpha_1 + \frac{1}{2})}$, etc... Dans ces conditions, la pente de la régression ne converge pas avec n et l'exposant estimé va osciller entre α_1 et α_2 . Cet exemple est illustré sur la figure 1.7.

H3 : La régression converge mais pas vers la bonne valeur.

Pour présenter ce cas, on construit un signal tel que ses échelles impaires vérifient $|C_{j,k}| = 2^{-j(\alpha_1 + \frac{1}{2})}$ et les paires $|C_{j,k}| = cte \cdot 2^{-j(\alpha_2 + \frac{1}{2})}$. On illustre le résultat obtenu avec $\alpha_1 = 0.2$ et $\alpha_2 = 0.7$ sur la figure 1.8.

On note que pour ces trois exemples, la méthode d'oscillation donne de meilleurs résultats.

On décrit dans les sections 1.2.3 et 1.2.4 le moyen d'améliorer les résultats lorsque les conditions **H1**, **H2** et **H3** ne sont pas vérifiées.

1.2.3 Régression des Wavelet Leaders

On présente maintenant une autre technique d'estimation très similaire à la précédente et basée sur les Wavelet leaders [Jafar]. Cette méthode permet théoriquement de bien estimer la régularité même lorsque la condition **H1** n'est pas vérifiée. On va comparer ce raffinement à la méthode décrite précédemment

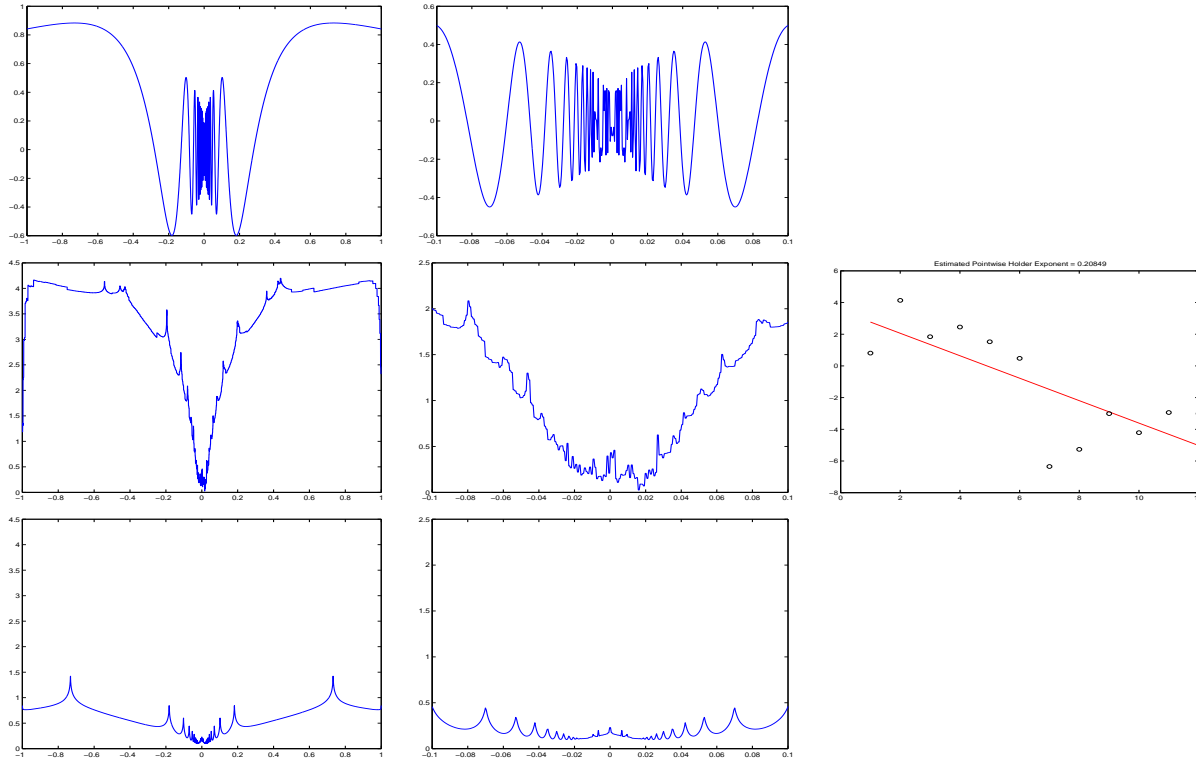


FIG. 1.5: Estimation de la régularité d'un Chirp, d'équation $|x|^\gamma \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ avec ici $\gamma = 0.3$ et $\beta = 0.9$ (un signal de 4096 points). En haut à gauche Chirp, et à droite un zoom autour de zéro. Deuxième ligne à gauche, estimation de la fonction de Hölder obtenue par une estimation de l'exposant en chaque point par la méthode RCO. Deuxième ligne au milieu, zoom autour de zero. Deuxième ligne à droite, estimation de la régularité en zero, en abscisse les échelles et en ordonnée les logarithmes à base deux des coefficients d'ondelette (méthode RCO). L'exposant de Hölder ponctuel est estimé à 0.21 alors que la valeur théorique est de 0.3. Troisième ligne, estimation de la fonction de Hölder obtenue par une estimation de l'exposant en chaque point par la méthode d'oscillation. En zero, avec une base de 2.1, $r_{min} = 1$ et $r_{max} = 12$, l'exposant de Hölder est estimé à 0.2290.

en terme de construction ainsi que dans plusieurs applications numériques. Nous montrerons ainsi que cette technique permet en pratique d'améliorer les résultats lorsque les conditions **H2** et **H3** ne sont pas vérifiées.

Un cube dyadique de l'échelle j est un cube de la forme :

$$\lambda = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right] \quad (1.27)$$

En d dimensions, cet intervalle est étendu en un cube dans \mathbb{R}^d .

Dans cette section, pour plus de lisibilité, on note $c_\lambda = c_{j,k}$.

Définition 1.2.3 Les Wavelet Leaders sont

$$d_\lambda = \sup_{\lambda' \subset \lambda} |c_{\lambda'}| \quad (1.28)$$

On note $\lambda_j(t_0)$ le cube dyadique de l'échelle j contenant le point t_0 de côté 2^{-j} .

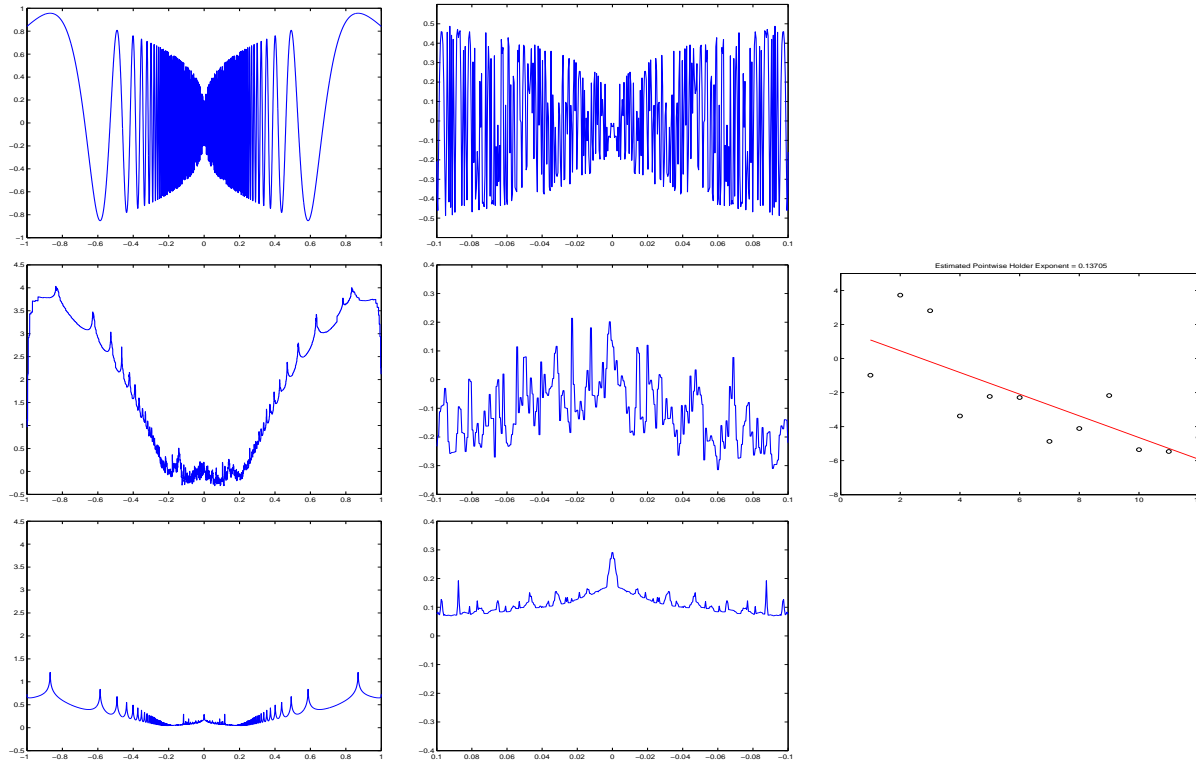


FIG. 1.6: Estimation de la régularité d'un Chirp, d'équation $|x|^\gamma \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ avec ici $\gamma = 0.3$ et $\beta = 2.9$ (un signal de 4096 points). En haut à gauche Chirp, et à droite un zoom autour de zéro. Deuxième ligne à gauche, estimation de la fonction de Hölder obtenue par une estimation de l'exposant en chaque point par la méthode RCO. Deuxième ligne au milieu, zoom autour de zero. Deuxième ligne à droite, estimation de la régularité en zero par la méthode RCO, en abscisse les échelles et en ordonnée les logarithmes à base deux des coefficients d'ondelette. L'exposant de Hölder ponctuel est estimé à 0.137 alors que la valeur théorique est de 0.3. Troisième ligne, estimation de la fonction de Hölder obtenue par une estimation de l'exposant en chaque point par la méthode d'oscillation. En zero, avec une base de 2.1, $rmin = 1$ et $rmax = 12$, l'exposant de Hölder est estimé à 0.2907.

Définition 1.2.4 Deux cubes dyadiques λ_1 et λ_2 sont dit adjacents si ils sont à la même échelle et si $dist(\lambda_1, \lambda_2) = 0$. On notera qu'un cube dyadique est adjacent à lui-même. On note $adj(\lambda_1)$ l'ensemble des cubes dyadiques adjacents à λ_1 .

Soit

$$d_j(t_0) = \sup_{\lambda' \in adj(\lambda_j(t_0))} |c_{\lambda'}| \quad (1.29)$$

On notera que le fait de prendre les cubes adjacents est un choix qui conditionne la largeur du cône d'influence, dans l'exemple qui suit, pour le processus de construction, on utilisera simplement le cube dyadique à la place des 3 cubes adjacents dans un souci de simplicité.

Le théorème suivant permet de caractériser la régularité ponctuelle par une condition sur la décroissance de $d_j(t_0)$ avec j .

Proposition 1.2.3 (S. Jaffard)

Si $f \in C^\alpha(t_0)$, alors

$$\exists c > 0, \forall j \geq 0, \quad d_j(t_0) \leq c 2^{-(\alpha + \frac{1}{2})j} \quad (1.30)$$

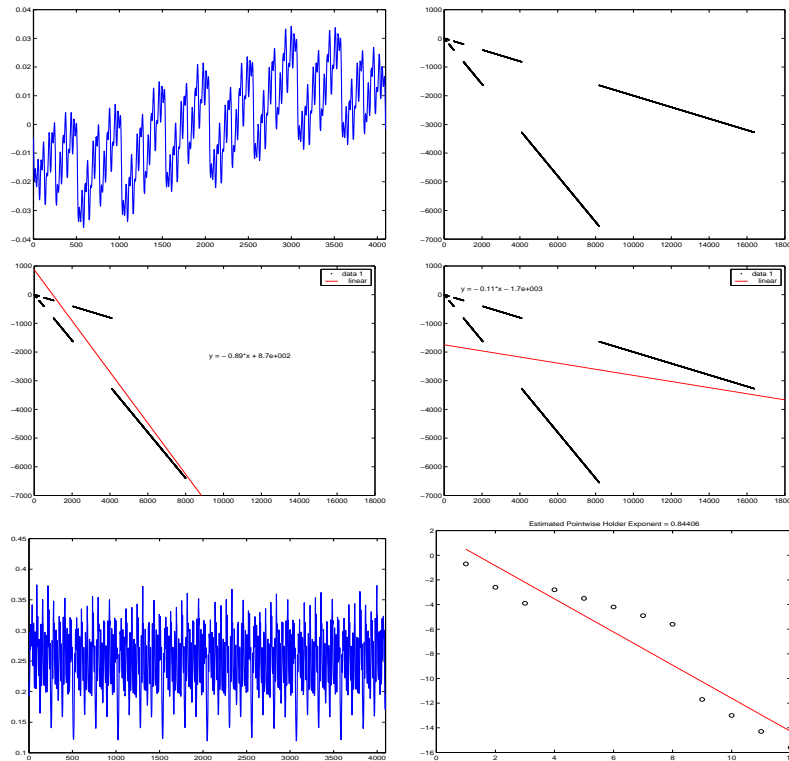


FIG. 1.7: Signal pour lequel la régression ne converge pas avec le nombre n de niveaux de décomposition. A gauche en haut, signal de 4096 points. A droite en haut, logarithme des coefficients d'ondelette en fonction de l'échelle pour un signal du même type mais de 16000 points. Au milieu, la régularité estimée va osciller selon n entre les deux valeurs α_1 et α_2 . Ici, $\alpha_1 = 0.2$ et $\alpha_2 = 0.8$. On applique l'estimation sur le signal de 4096 points, ce qui nous donne avec la méthode d'oscillation une moyenne de 0.2419 pour la fonction de Hölder (en bas à gauche) et pour la méthode RCO la valeur 0.844 en chaque point (en bas à droite). On rappelle que la valeur théorique est 0.2.

Réciproquement, si l'équation 1.30 est vérifié, et si f est uniformément Hölderienne, alors f appartient à $C_{\log}^{\alpha}(t_0)$.

On adapte maintenant l'estimateur de la section précédente en remplaçant dans la régression les coefficients d'ondelette au dessus de t_0 par les Wavelet Leaders.

Construction :

Les coefficients qui vont compter dans la régression ne vont par conséquent pas être les mêmes que précédemment. Un exemple est donné sur la figure 1.9. Une grille dyadique est schématisée. Cette grille contient les coefficients d'ondelette du signal considéré. Le coefficient des basses fréquences est en haut et ceux des hautes fréquences sont juste "au-dessus" du signal. Considérons le point du signal encadré, l'exemple décrit ici va porter sur l'analyse de la régularité en ce point.

- Estimation de type RCO :

Les coefficients d'ondelette concernant ce point sont noté A , B , C et D . Chacun de ces coefficient nous donne une information sur le contenu fréquentiel en ce point. A représente les basses fréquences et D les hautes. L'estimateur de la régularité va être obtenu en régressant le logarithme à base 2 de la valeur absolue de ces coefficients en fonction de l'échelle.

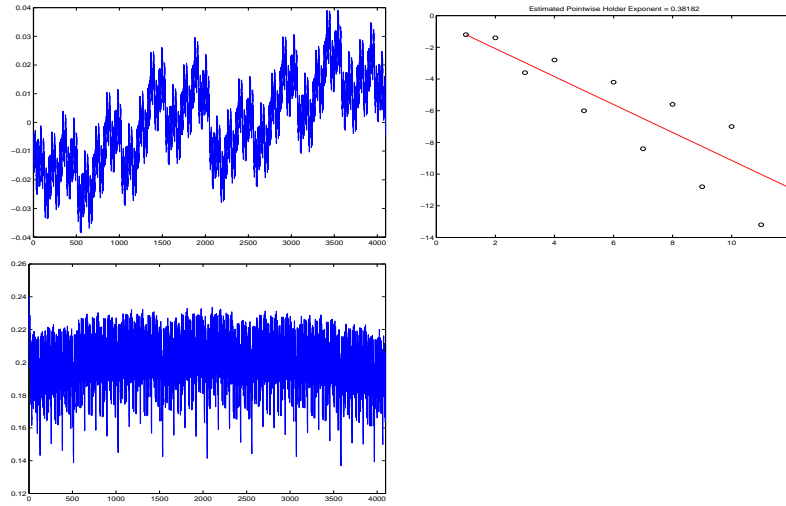


FIG. 1.8: Estimation de l'exposant de Hölder en un point d'un signal de 4096 points et de régularité 0.2 pour les échelles impaires et 0.7 pour les échelles paires. La valeur théorique de l'exposant de Hölder ponctuel est 0.2. A gauche en haut, signal. A droite, l'estimateur effectue une moyenne malencontreuse et nous renvoie la valeur 0.38 en chaque point. En bas, fonction de Hölder obtenue par oscillations dont la moyenne vaut 0.199.

- Estimation de type Wavelet Leader :

Pour effectuer une estimation de type Wavelet Leader, le cheminement est différent. On part du point du signal et on regarde successivement les cubes dyadiques le concernant. D'abord le cube contenant le coefficient D . Ce coefficient est l'unique coefficient du cube dyadique de ce niveau, donc on le conserve. On remonte ensuite d'une échelle pour considérer maintenant le cube dyadique contenant C (ce cube contient évidemment D et un autre coefficient. A ce niveau on conserve le max parmi les 3 coefficients de ce cube. Supposons que le max soit le coefficient C , c'est donc lui que l'on conserve pour la régression. On remonte à nouveau dans les échelles afin de prendre en compte le cube dyadique contenant B , C et D . On regarde quel est le max des coefficients de ce cube. Supposons que ce max soit représenté par E , alors c'est E qui va "remplacer" B dans la régression. Ce remplacement est illustré figure 1.10.

Modification pour les Wavelets leaders

Lemme 1.2.1

En chaque point t_0 du signal X décomposé sur n niveaux, par les Wavelet Leaders, on estime la régularité grâce à la formule suivante :

$$\alpha_{WL}^X(n, t_0) = -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j \log_2 \left[\max_{\lambda' \subset \lambda} (|x_{\lambda'}|) \right] \quad (1.31)$$

Définition 1.2.5

$$\text{Soit } f : \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d) \quad (1.32)$$

$$X \longmapsto Y$$

On dit que f est croissante sur les coefficients d'ondelette si pour tout couple de coefficients d'ondelette $(x_{j,k}, x_{j',k'})$ de X tel que $x_{j,k} \leq x_{j',k'}$ alors $y_{j,k} \leq y_{j',k'}$.

Lemme 1.2.2 (P. Legrand) (Conservation des lieux des "Wavelet Leaders")

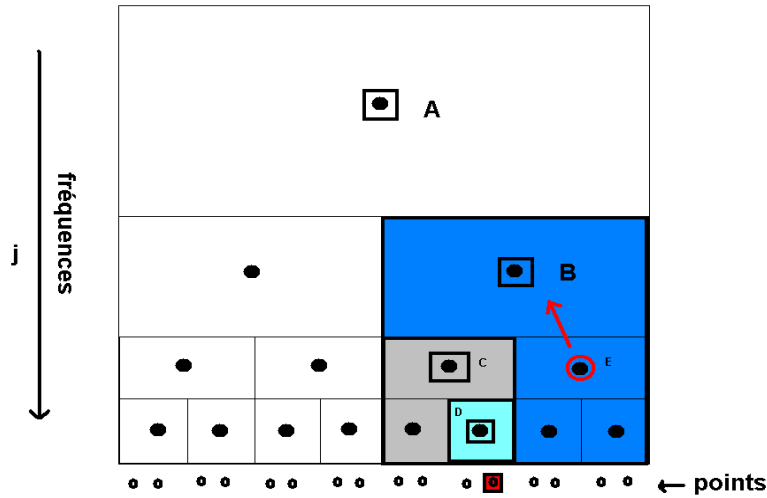


FIG. 1.9: Arbre dyadique contenant les coefficients d'ondelette du signal considéré. Illustration de la technique de "Wavelet Leaders" pour l'estimation de la régularité.

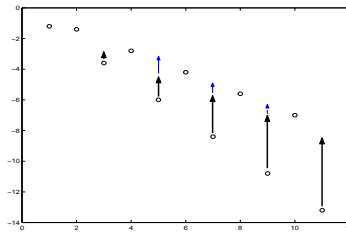


FIG. 1.10: Régression au-dessus d'un point du signal. L'axe des abscisses porte les échelles. Les ronds correspondent chacun au \log_2 d'un coefficient d'ondelette situé au-dessus du point considéré. La technique de Wavelet Leader remplace dans la régression le coefficient situé au-dessus du point par son "leader". On notera que le logarithme de la valeur absolue du coefficient remonte au moins aussi haut que ceux des coefficients des plus hautes fréquences (flèches noires). Les flèches claires indiquent que les coefficients peuvent remonter un peu plus haut selon les valeurs des autres coefficients du cube dyadique.

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} L^\infty(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{R}^d) \\ X & \longmapsto & Y \end{array} \quad (1.33)$$

Si f est "croissante sur les coefficients d'ondelette" alors

$$\boxed{\forall t_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall j \in [1..n], \quad \underset{(j,k), y_{j,k} \in \lambda_j(t_0)}{\operatorname{argmax}} |y_{j,k}| = \underset{(j,k), x_{j,k} \in \lambda_j(t_0)}{\operatorname{argmax}} |x_{j,k}|} \quad (1.34)$$

Preuve
Trivial. ■

Corollaire 1.2.1 Si f est croissante sur les coefficients d'ondelette alors :

$$\alpha_{WL}^{f(X)}(n, t_0) = -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j \log_2 \left[\max_{\lambda' < \lambda} (|y_{\lambda'}|) \right] \quad (1.35)$$

Remarque : Par conséquent des techniques de débruitage telles que le Hard Thresholding conservent les lieux des wavelets leaders. Bien que l'ensemble des calculs sur la variation de régularité effectués dans la partie portant sur le débruitage utilisent une estimation de de type *RCO*, le lemme 1.2.2 nous permet d'obtenir immédiatement les résultats équivalents avec la technique d'estimation par "Wavelet Leaders".

Applications

La précédente méthode d'estimation fonctionnait bien lorsque les trois propriétés **H1**, **H2** et **H3** étaient vérifiées. L'apport des Wavelet Leaders permet de s'affranchir de **H1** d'un point de vue théorique puisque la considération de l'ensemble des coefficients du cube dyadique et des cubes dyadiques adjacents permet de récupérer certains gros coefficients d'ondelette. On illustre cet apport en reprenant l'exemple du chirp. On rappelle sur les figures 1.11 à 1.14 les résultats obtenus sur ce signal avec les méthodes *RCO* et par oscillation. Ces résultats sont désormais complétés par ceux obtenus par l'estimation par régression des Wavelet Leaders. Cette méthode permet d'améliorer la simple régression *RCO* sur ce signal bien qu'ici on ne prenne que le cube dyadique et pas les cubes adjacents. On constate les bons alignements des logarithmes des coefficients intervenant dans la régression sur les figures 1.12 et 1.14 ce qui indique que la régression à un sens ici.

On applique ensuite ce raffinement de la méthode aux autres signaux pour lesquels l'estimation de type *RCO* ne donnait pas de bons résultats. On commence par un signal pour lequel la régression ne converge pas. Pour illustrer ceci, on reprend le signal que l'on a présenté précédemment qui ne vérifie pas **H2** (figures 1.7 et 1.15). Le raffinement grâce au Wavelet Leaders permet d'améliorer l'estimation de la régularité dans certains cas mais pas toujours.

De la même manière, la méthode de Wavelet Leader peut améliorer l'estimation lorsque la régression ne converge pas vers la bonne valeur (la condition **H3** n'est pas vérifiée). La méthode de Wavelet Leader améliore l'estimation (figures 1.8 et 1.16) puisqu'on passe d'une régularité estimée à 0.38 par la méthode *RCO* à une régularité estimée à 0.19 (rappelons que la valeur théorique est 0.2 pour ce signal en chaque point).

1.2.4 Régressions de type limite inférieure et limite supérieure

La définition de l'exposant de Hölder ponctuel comporte une limite inférieure plutôt qu'une limite, ce qui permet à cet exposant d'être toujours défini même si la limite n'existe pas. C'est pour cette raison que nous proposons maintenant un type de régression qui sous certaines conditions nous permet d'atteindre la limite inférieure ou la limite supérieure. Cette technique nous permet de résoudre certains problèmes rencontrés par notre estimateur sur des signaux du type décrit dans la section 1.2.2.

Principes des méthodes de régression limite inférieure et limite supérieure

Soit $(l_j)_{j \geq 1}$ une suite arbitraire de nombres réels, et on note $u_j = \frac{l_j}{j}$. On définit, $\forall n \geq 1$:

$$E_n^0 = \{1, \dots, n\} \quad (1.36)$$

$$L_n^0 = \{l_1, \dots, l_n\} \quad (1.37)$$

Soient (a_n^0, b_n^0) les paramètres de la régression linéaire classique (moindres carrés) de L_n^0 en fonction de E_n^0 , c'est à dire les réels qui minimisent $\sum_{j=1}^n (l_j - a_j - b)^2$ sur tous les couples (a, b) . On note :

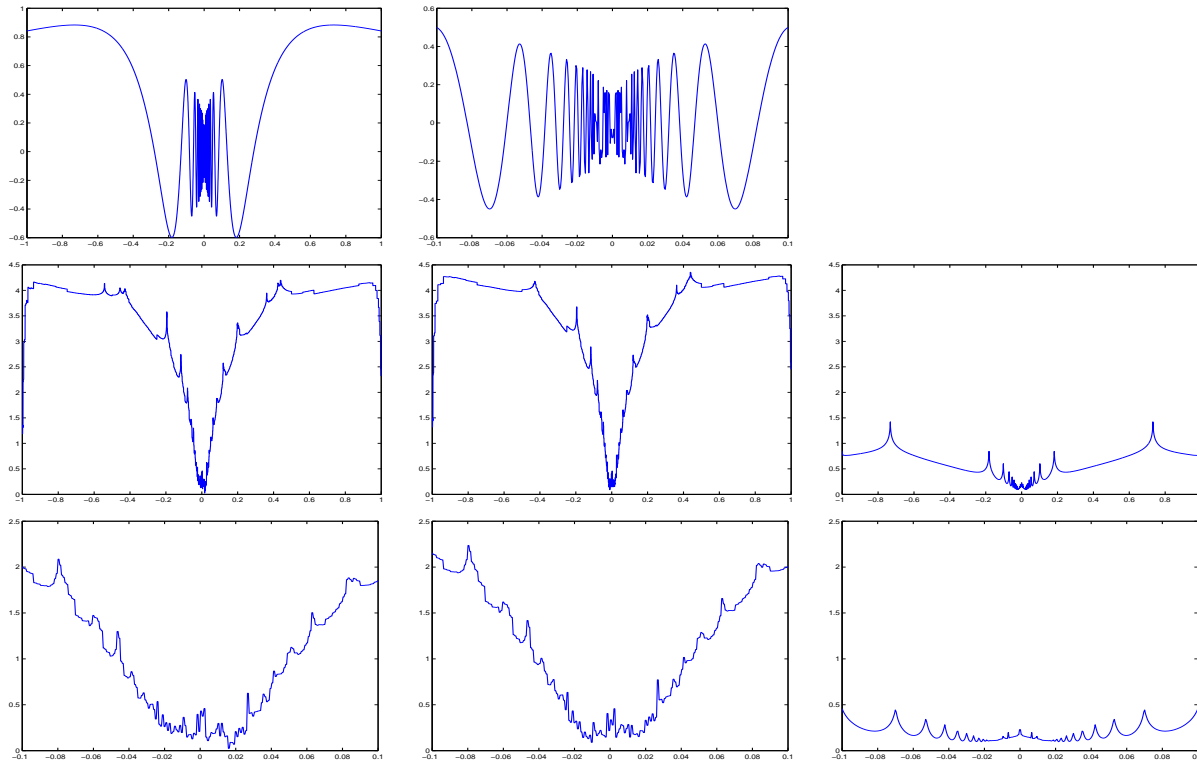


FIG. 1.11: Estimation de la régularité d'un Chirp, d'équation $|x|^\gamma \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ avec ici $\gamma = 0.3$ et $\beta = 0.9$ (un signal de 4096 points). Rappel des résultats obtenus et ajout de l'estimation par Wavelet Leaders. En haut à gauche Chirp, et à droite un zoom autour de zéro. Deuxième ligne, estimation de la fonction de Hölder obtenue par une estimation de l'exposant en chaque point respectivement par les méthodes RCO, Wavelet leaders et oscillation. Troisième ligne, zoom autour de zéro. En zéro, les estimations de l'exposant de Hölder sont 0.21 par RCO, 0.2177 par Wavelet Leaders et 0.2290 par oscillation alors que la valeur théorique est de 0.3.

$$(a_n^0, b_n^0) = \text{Reg}(E_n^0, L_n^0) \quad (1.38)$$

Soit :

$$E_n^1 = \{j \in E_n^0, l_j \geq a_n^0 j + b_n^0\} \quad (1.39)$$

$$L_n^1 = \{l_j, j \in E_n^1\} \quad (1.40)$$

$$(a_n^1, b_n^1) = \text{Reg}(E_n^1, L_n^1) \quad (1.41)$$

Récursivement on obtient pour tout $i = 2, \dots, N_n$ (avec N_n le premier index tel que $\#E_n^{N_n+1} < 2$) :

$$E_n^i = \{j \in E_n^{i-1}, l_j \geq a_n^{i-1} j + b_n^{i-1}\} \quad (1.42)$$

$$L_n^i = \{l_j, j \in E_n^i\} \quad (1.43)$$

$$(a_n^i, b_n^i) = \text{Reg}(E_n^i, L_n^i) \quad (1.44)$$

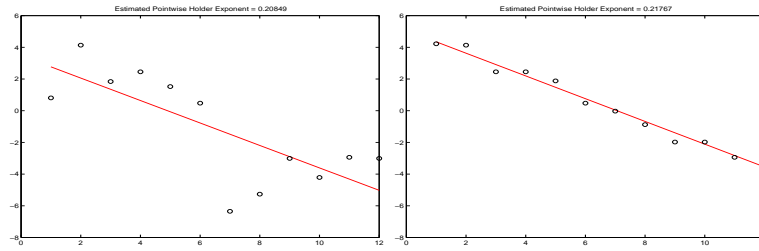


FIG. 1.12: Estimation de la régularité en zero d'un chirp d'équation $|x|^\gamma \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ avec ici $\gamma = 0.3$ et $\beta = 0.9$. Régression des logarithmes des coefficients d'ondelette en fonction de l'échelle "au dessus" de zero à gauche. Régression des Wavelets Leaders à droite. La régression des Wavelet Leader a un sens car ils vérifient un bon alignement. Les estimations obtenues sont 0.21 par RCO et 0.2177 par Wavelet Leaders.

L'interprétation géométrique de la série (a_n^i, b_n^i) est simple. A la première étape, on conserve pour obtenir (E_n^1, L_n^1) tous les points qui sont situés au-dessus de la droite de régression de L_n^0 en fonction de E_n^0 . On construit ensuite la régression de L_n^1 en fonction de E_n^1 pour obtenir (a_n^1, b_n^1) et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un point au-dessus de la droite de régression.

La pente de la régression limite inférieure est alors donnée par $a_n^{N_n}$. La méthode est similaire pour la limite supérieure à ceci près qu'on conserve les points situés au-dessous de la droite de régression. Le domaine de validité de cette méthode est en cours d'étude.

Applications

On applique cette nouvelle méthode de régression aux signaux qui mettaient en échec l'estimateur de la régularité de type RCO dans la section 1.2.2. On reprend tout d'abord l'exemple du Chirp. On rappelle que pour ce signal **H1** n'est pas vérifiée. La régression de type limite inférieure n'améliore pas nécessairement l'estimation de la régularité en zero (voir figures 1.17 et 1.18).

On montre sur la figure 1.19 comment cette méthode permet de résoudre le problème rencontré lorsque la condition **H2** n'est pas vérifiée. De la même manière, cette technique compense les difficultés d'une régression ne convergeant pas, c'est à dire lorsque la condition **H3** n'est pas vérifiée (voir figure 1.20).

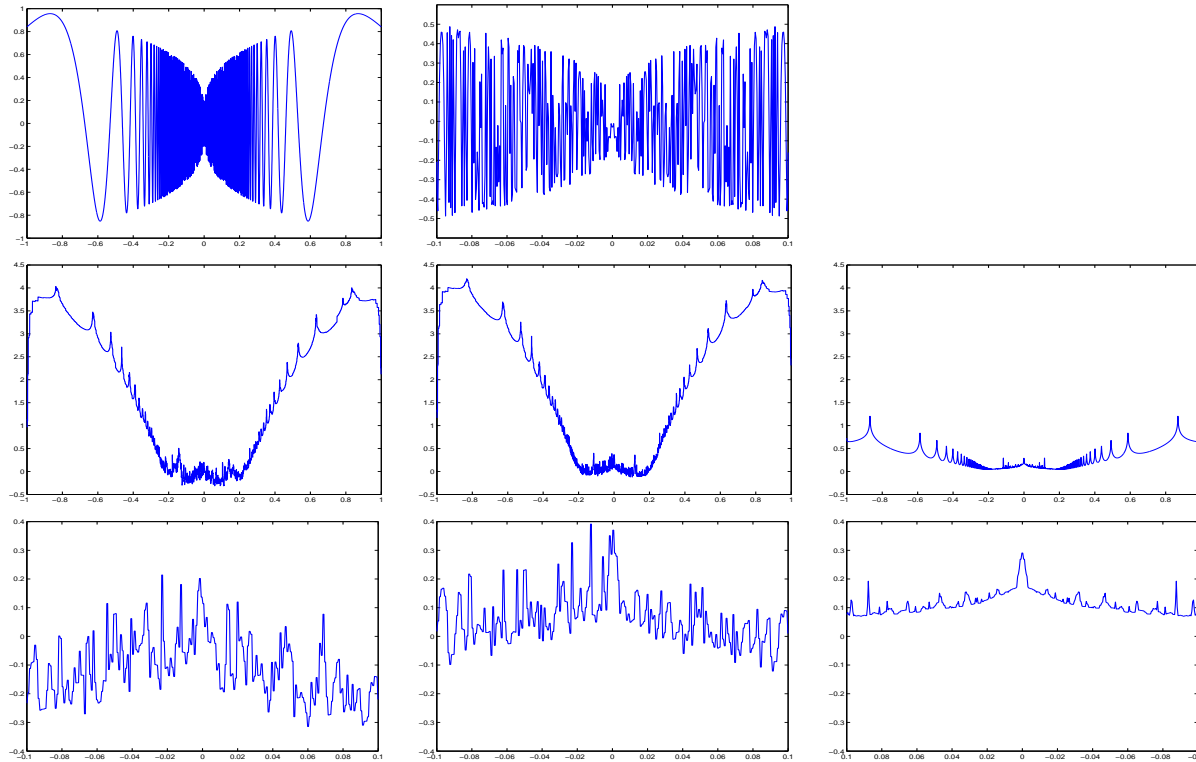


FIG. 1.13: Estimation de la régularité d'un Chirp, d'équation $|x|^\gamma \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ avec ici $\gamma = 0.3$ et $\beta = 2.9$ (un signal de 4096 points). Rappel des résultats obtenus et ajout de l'estimation par Wavelet Leaders. En haut à gauche Chirp, et à droite un zoom autour de zéro. Deuxième ligne, estimation de la fonction de Hölder obtenue par une estimation de l'exposant en chaque point respectivement par les méthodes RCO, Wavelet leaders et oscillation. Troisième ligne, zoom autour de zéro. En zéro, les estimations de l'exposant de Hölder sont 0.137 par RCO, 0.286 par Wavelet Leaders et 0.2907 par oscillation alors que la valeur théorique est de 0.3.

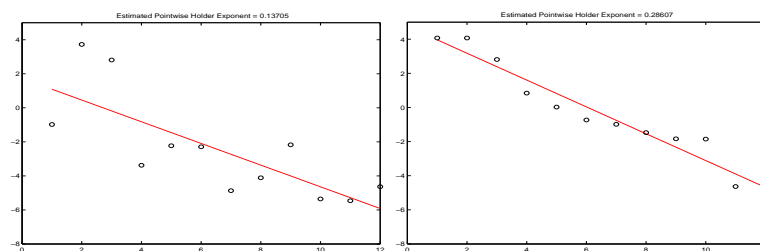


FIG. 1.14: Estimation de la régularité en zéro d'un chirp d'équation $|x|^\gamma \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ avec ici $\gamma = 0.3$ et $\beta = 2.9$. Régression des logarithmes des coefficients d'ondelette en fonction de l'échelle "au dessus" de zéro à gauche. Régression des Wavelets Leaders à droite. La régression des Wavelet Leader a un sens car ils vérifient un bon alignement. Les estimations obtenues sont 0.137 par RCO et 0.286 par Wavelet Leaders.

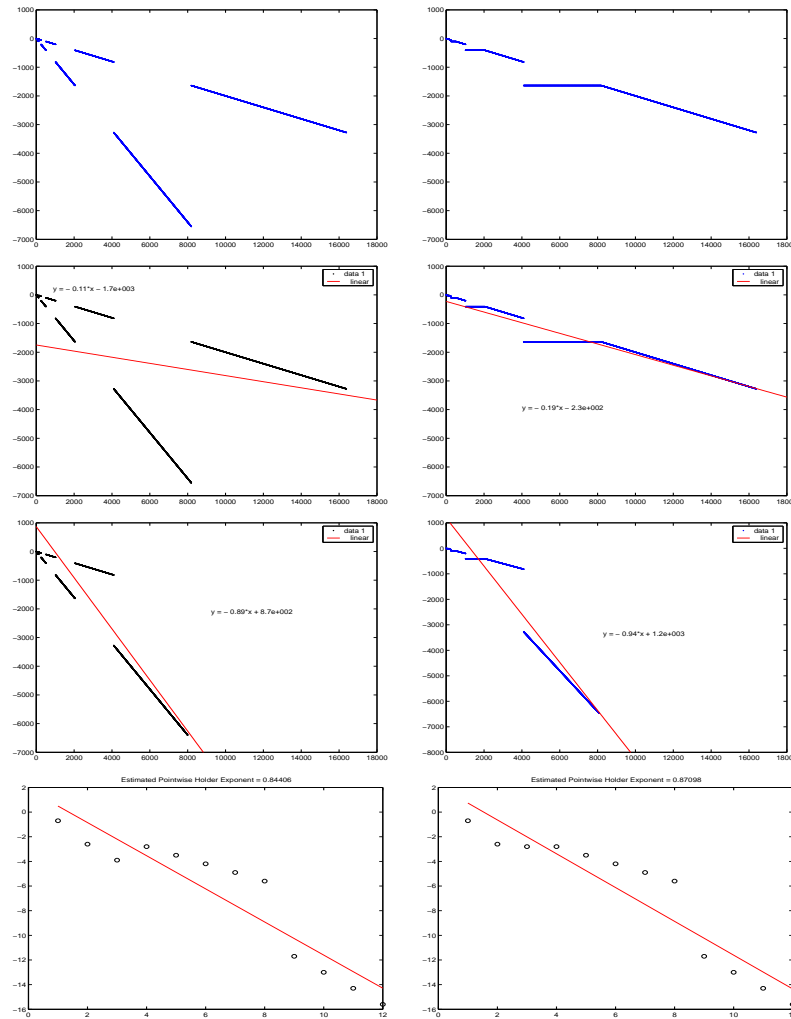


FIG. 1.15: Estimation de la régularité d'un signal dont la régression ne converge pas. En haut à gauche, logarithme des coefficients d'ondelette en fonction de l'échelle au-dessus d'un point. En haut à droite, avec l'estimation de type Wavelet Leader, tout va se passer comme si les coefficients avaient cette forme. A gauche 2eme ligne : régression de type RCO, estimation à 0.11 au lieu de 0.2. A droite 2eme ligne : régression de type Wavelet leader, estimation à 0.19 au lieu de 0.2. A gauche 3eme ligne, illustration de la non-convergence avec la méthode de RCO en enlevant une partie des échelles. A droite 3eme ligne, illustration de la non-convergence également avec la méthode de Wavelet Leaders. Nous avons effectué la régression comme si nous ne disposions plus d'autant d'échelles afin de montrer que la pente de la régression ne tend pas vers une valeur limite. 4eme ligne, estimation en un point (l'estimation est identique en chaque autre point) du signal de 4096 points par les méthodes RCO et Wavelet Leaders. Les régularités estimées sont respectivement 0.844 et 0.871 au lieu de 0.2.

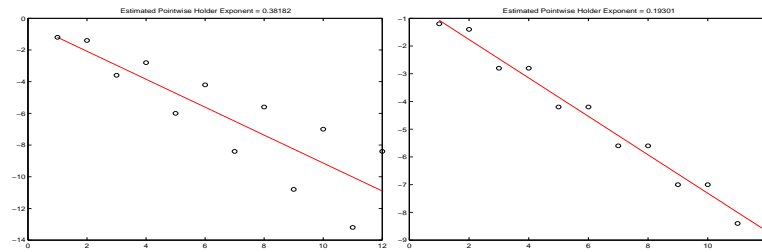


FIG. 1.16: Estimation de la régularité d'un signal ayant "deux régularités". La valeur théorique de l'exposant pour ce signal est de 0.2. A gauche : régression de type RCO estimant la régularité à 0.38. A droite : régression de type Wavelet leader. Comme on peut le constater, les coefficients comptant dans la régression ne sont plus les mêmes ce qui nous donne un estimateur à 0.193 et améliore ainsi l'estimation. On rappelle que par oscillations, on obtient en moyenne 0.199.

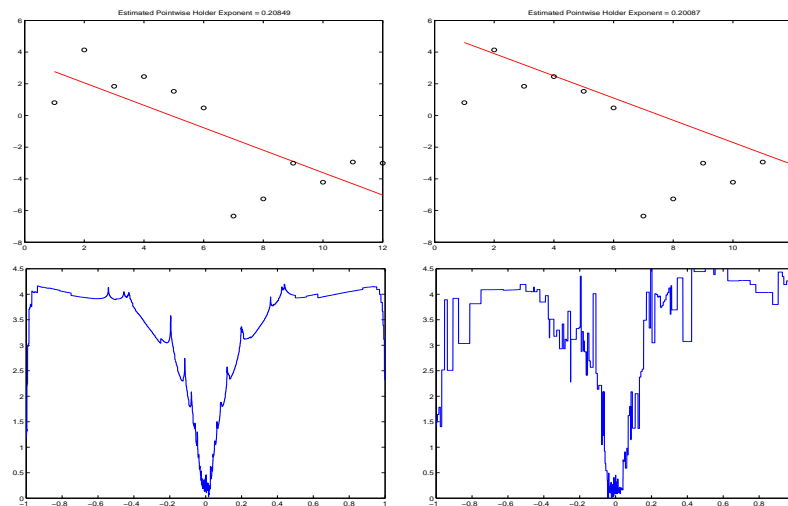


FIG. 1.17: Estimation de la régularité en zero d'un chirp d'équation $|x|^\gamma \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ avec ici $\gamma = 0.3$ et $\beta = 0.9$. En haut à gauche : estimation par la méthode RCO au point zero. A droite : estimation par la méthode RCO avec une régression de type limite inférieure au point zero. L'exposant de Hölder est estimé à 0.20 alors que l'on obtenait 0.21 par la régression linéaire aux moindres carrés. Rappelons que la valeur théorique est 0.3. En bas, les fonctions de Hölder obtenues, par régression linéaire au moindres carrés à gauche et par régression de type limite inférieure à droite.

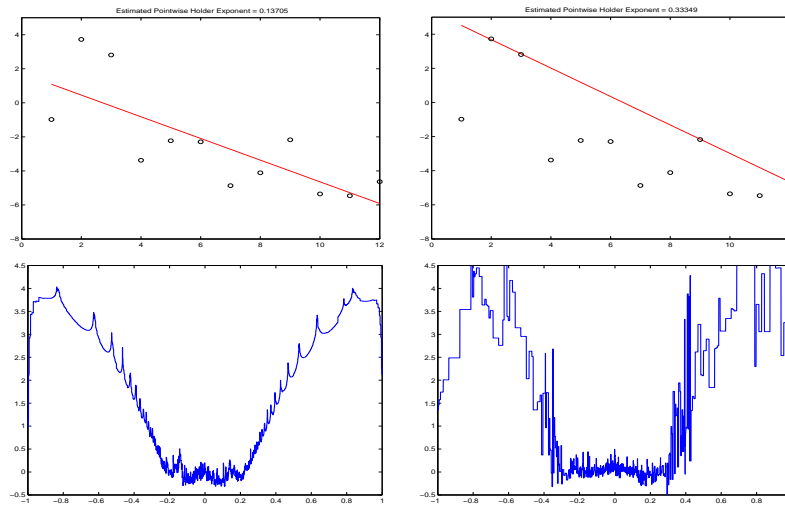


FIG. 1.18: Estimation de la régularité en zéro d'un chirp d'équation $|x|^\gamma \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ avec ici $\gamma = 0.3$ et $\beta = 2.9$. En haut à gauche : estimation par la méthode RCO au point zéro. A droite : estimation par la méthode RCO avec une régression de type limite inférieure au point zéro. L'exposant de Hölder est estimé à 0.33 alors que l'on obtenait 0.137 par la régression linéaire aux moindres carrés. Rappelons que la valeur théorique est 0.3. En bas, les fonctions de Hölder obtenues, par régression linéaire au moindres carrés à gauche et par régression de type limite inférieure à droite.

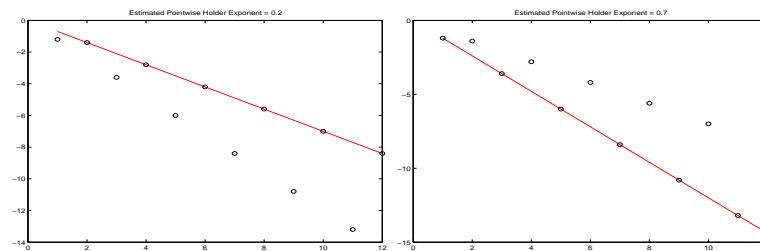


FIG. 1.19: Estimation de la régularité d'un signal ayant "deux régularités". A gauche : régression de type limite inférieure. A droite : régression de type limite supérieure. L'exposant de Hölder est estimé à 0.2 qui est la valeur théorique.

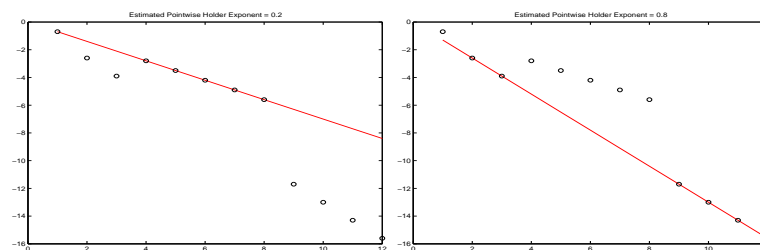


FIG. 1.20: Estimation de la régularité d'un signal dont la régression ne converge pas. A gauche : régression de type limite inférieure. A droite : régression de type limite supérieure. Quelque soit le nombre d'échelle dont on dispose, la régression de type limite inférieure estime parfaitement l'exposant de Hölder à sa valeur théorique de 0.2.

1.2.5 Comparaison des méthodes d'estimation sur des signaux usuels

Dans cette section, nous allons comparer de manière intensive les méthodes d'estimation *RCO*, "Wavelet leaders" et par oscillation sur des signaux déterministes et stochastiques. Les signaux que nous utilisons sont des *fonctions de Weierstrass généralisées*, des *fbm*, des *mbm* et des *gifs*.

Signaux déterministes

Avant de commencer notre étude intensive, on montre juste quelques exemples sur une fonction de Weierstrass déterministe de régularité 0.5 et sur deux fonctions de Weierstrass généralisées déterministes (voir théorème 1.1.3).

Fonction de Weierstrass

On construit une fonction de Weierstrass déterministe pour laquelle on prescrit un exposant de Hölder de 0.5 (figure 1.21). On estime ensuite la régularité par les méthodes de type *RCO* et Wavelet Leaders (WL).

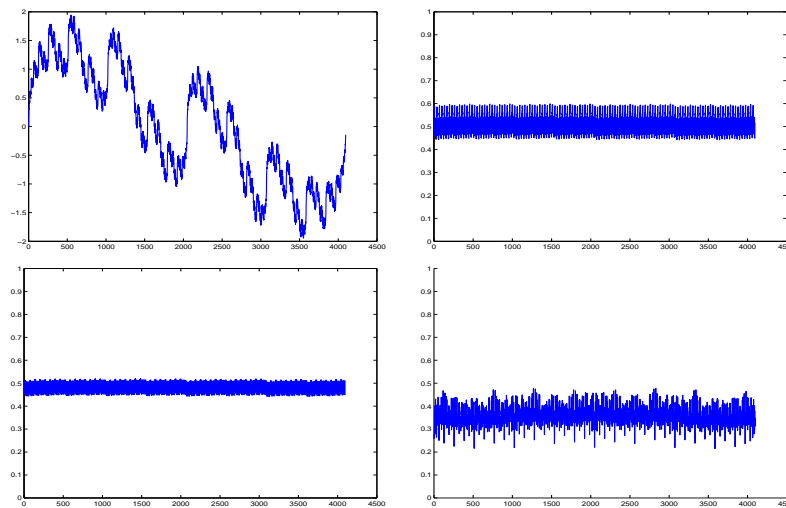


FIG. 1.21: A gauche en haut : Fonction de Weierstrass de 4096 points et de régularité 0.5. A droite en haut : Estimation de la régularité d'une fonction de Weierstrass de 4096 points et de régularité 0.5 par la technique *RCO*. A gauche en bas : Estimation de la régularité d'une fonction de Weierstrass de 4096 points et de régularité 0.5 par la technique de "Wavelet Leaders". A droite en bas, méthode d'oscillation.

La technique de Wavelet leaders donne un meilleur résultat en terme de variance sur cet exemple mais présente un biais supérieur à l'autre méthode.

Fonction de Weierstrass généralisée

On génère une fonction de Weierstrass déterministe de 4096 points telle que l'exposant de Hölder soit de 0.2 sur la première moitié des points et 0.8 sur l'autre moitié (figure 1.22).

La technique de Wavelet leaders donne ici encore un meilleur résultat en terme de variance sur cet exemple. Le biais est plus faible que pour l'autre méthode lorsque l'exposant estimé est petit et est supérieur lorsque l'exposant est grand.

On construit maintenant une fonction de Weierstrass avec une régularité évoluant linéairement en fonction du temps (figure 1.23). Les conclusions sur la variance sont les mêmes pour cet exemple.

Generalized Iterated Function System (GIFS)

On construit des signaux déterministes : GIFS (Generalized Iterated Function System) ayant les régularités prescrites (et constantes) $H=[0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9]$. On représente sur la figure 1.24

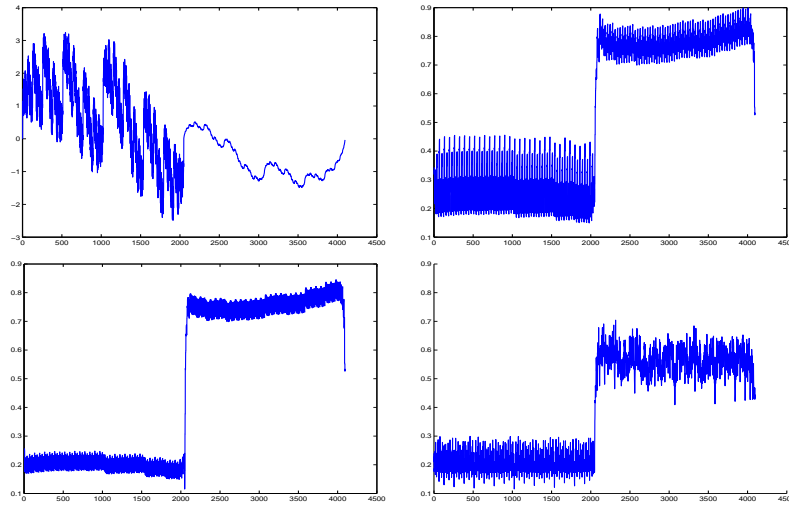


FIG. 1.22: A gauche en haut : Fonction de Weierstrass généralisée de 4096 points, de régularité 0.2 et 0.8 par morceaux. A droite en haut : Estimation de la régularité d'une fonction de Weierstrass généralisée de 4096 points, de régularité 0.2 et 0.8 par morceaux, par la technique RCO. En bas à gauche : Estimation de la régularité d'une fonction de Weierstrass généralisée de 4096 points, de régularité 0.2 et 0.8 par morceaux, par la technique de "Wavelet Leaders". En bas à droite estimation par oscillations.

quatre signaux GIFS ayant respectivement pour régularité 0.1, 0.4, 0.7 et 0.9. Voir [VD96] et [DVM98] pour plus de renseignements sur les GIFS.

On applique à tous ces signaux les 3 méthodes d'estimation de la régularité présentées dans ce chapitre, RCO, "Wavelet Leaders" (WL) et par oscillations (OSC). On obtient pour chacune des régularités prescrites trois fonctions de Hölder. On a regroupé dans les tableaux 1.1 et 1.2 les moyennes de ces fonctions de Hölder ainsi que leur écart type pour les méthodes RCO, WL et OSC après une optimisation des paramètres des méthodes d'estimation. Rappelons que les paramètres des méthodes d'estimation sont l'échelle de début et l'échelle de fin pour les méthodes RCO et WL et l'évolution de la dimension des boules de calcul de l'oscillation pour la méthode OSC. On aurait pu aussi effectuer une optimisation sur l'ondelette de décomposition pour les méthodes RCO et WL mais ce travail n'a pas été effectué ici. Notons simplement que l'ondelette utilisée est une ondelette de Daubechies 10. Le premier tableau (1.1) correspond à une minimisation du biais $\|H - \hat{H}\|^2$ avec \hat{H} l'estimation de la régularité prescrite (voir figure 1.25) alors que le second (1.2) correspond à une minimisation du risque $\|H - \hat{H}\|^2 + \|std(\hat{H})\|^2$ (voir figure 1.26). Comme on peut le constater, pour la méthode RCO, les paramètres minimisant le biais sont aussi ceux qui minimisent le risque, ce qui explique que les courbes de gauche pour la figure 1.25 et la figure 1.26 soient identiques ainsi que les 2 premières colonnes des tables 1.1 et 1.2.

On construit ensuite un GIFS dont la régularité augmente linéairement avec le temps et un dont la régularité évolue sinusoidalement (voir figure 1.27).

Comme précédemment, on optimise les paramètres des méthodes d'estimation afin d'obtenir le biais le plus faible possible. Les résultats sont regroupés dans le tableau 1.3 et illustrés sur les figures 1.28 et 1.29.

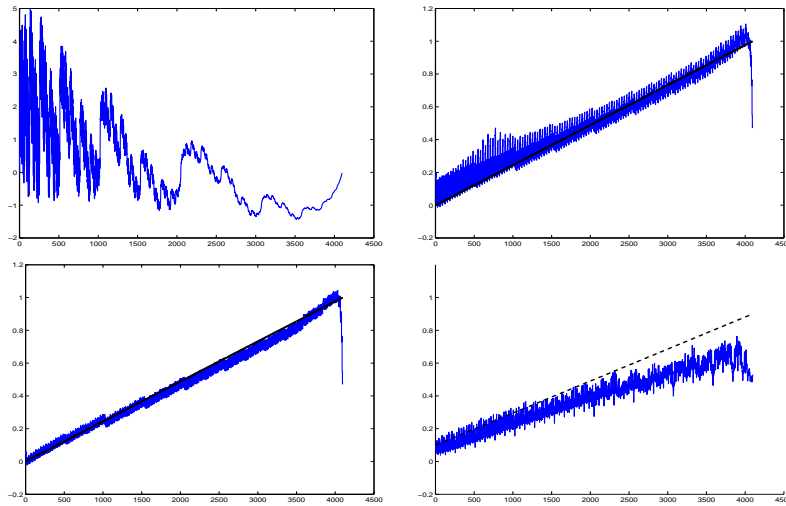


FIG. 1.23: A gauche en haut : Fonction de Weierstrass généralisée de 4096 points, de régularité $h(t) = t$. En haut à droite : Estimation de la régularité d'une fonction de Weierstrass généralisée de 4096 points, de régularité $h(t) = t$, par la technique RCO. En bas à gauche : Estimation de la régularité d'une fonction de Weierstrass généralisée de 4096 points, de régularité $h(t) = t$, par la technique de "Wavelet Leaders". En bas à droite, estimation par oscillation.

GIFS	BIAIS					
H	RCO		W L		Osc	
	mean H	std H	mean H	std H	mean H	std H
0.1	0.12282	0.061597	0.10115	0.11156	0.18158	0.12013
0.2	0.12576	0.028903	0.21194	0.13156	0.25476	0.1696
0.3	0.19943	0.018422	0.31637	0.14888	0.3334	0.22517
0.4	0.3697	0.035326	0.37873	0.14319	0.41577	0.27186
0.5	0.52539	0.091539	0.45433	0.10708	0.50782	0.30788
0.6	0.62531	0.0829	0.5778	0.11573	0.60125	0.33662
0.7	0.7251	0.094101	0.70151	0.1924	0.68937	0.35407
0.8	0.81019	0.089174	0.78691	0.25948	0.76652	0.35602
0.9	0.88856	0.097333	0.88373	0.28979	0.83487	0.36149

TAB. 1.1: Signaux déterministes : GIFS avec une régularité constante. On a généré 9 GIFS présentant des régularité de 0.1 à 0.9. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ce tableau donne les valeurs des moyennes et des écarts type de ces fonctions de Hölder en fonction de la régularité et de la méthode d'estimation choisie. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le biais $\|H - \hat{H}\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 1 à 10 (biais=0.1386, risque=0.3571). Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 4 à 7 (biais=0.0623, risque=0.5967). Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 3 et les "rayons" 4 à 5 (biais=0.1287, risque=0.9997). Ce tableau correspond à la figure 1.25.

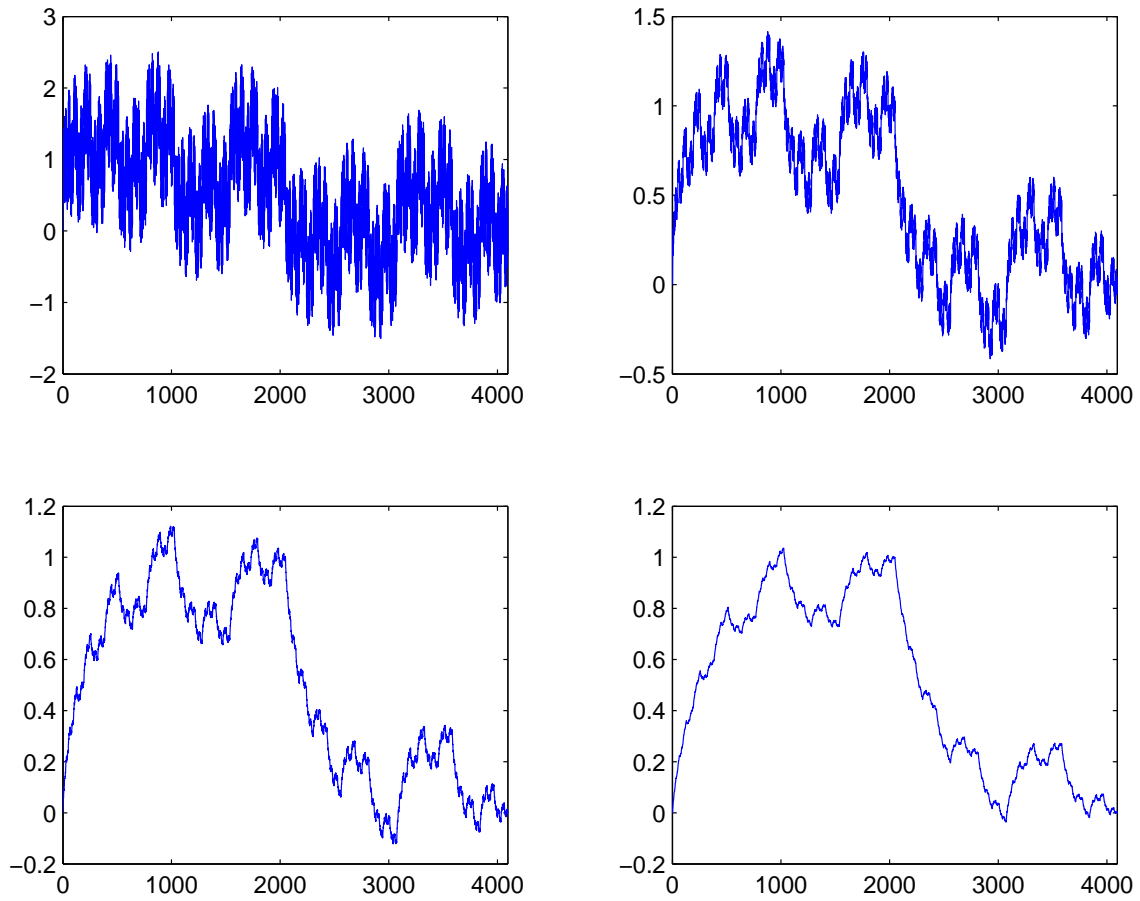


FIG. 1.24: Exemples de signaux déterministes : GIFS avec une régularité constante. En haut à gauche : signal de régularité 0.1. En haut à droite : signal de régularité 0.4. En bas à gauche : signal de régularité 0.7. En bas à droite : signal de régularité 0.9.

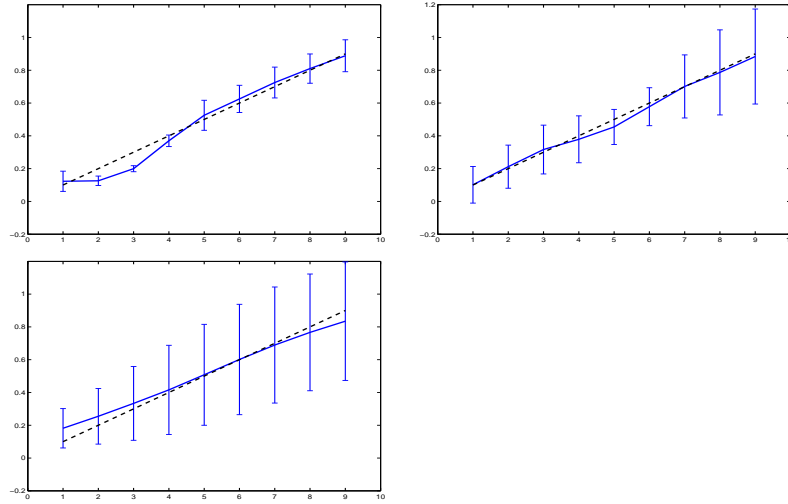


FIG. 1.25: Signaux déterministes : GIFS avec une régularité constante. On a généré 9 GIFS présentant des régularité de 0.1 à 0.9. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 10. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 4 à 7. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 3 et les "rayons" 4 à 5. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas méthode OSC.

GIFS	RISQUE					
H	RCO		WL		Osc	
	mean H	std H	mean H	std H	mean H	std H
0.1	0.12282	0.061597	0.11353	0.014085	0.20751	0.022935
0.2	0.12576	0.028903	0.22044	0.016068	0.27147	0.028353
0.3	0.19943	0.018422	0.31823	0.015539	0.34573	0.034769
0.4	0.3697	0.035326	0.016228	0.016228	0.4259	0.042194
0.5	0.52539	0.091539	0.4819	0.021329	0.50737	0.051604
0.6	0.62531	0.0829	0.56695	0.031718	0.59124	0.062522
0.7	0.7251	0.094101	0.66768	0.040941	0.67269	0.074123
0.8	0.81019	0.089174	0.75792	0.049951	0.74858	0.086958
0.9	0.88856	0.097333	0.84085	0.058072	0.81618	0.10236

TAB. 1.2: Signaux déterministes : GIFS avec une régularité constante. On a généré 9 GIFS présentant des régularité de 0.1 à 0.9. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ce tableau donne les valeurs des moyennes et des écarts type de ces fonctions de Hölder en fonction de la régularité et de la méthode d'estimation choisie. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **risque** $\|H - \hat{H}\|^2 + \|std(\hat{H})\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 1 à 10 (biais=0.1386, risque=0.3571, identique au précédent tableau puisque on retrouve les mêmes paramètres d'estimation par optimisation). Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 10 (biais=0.0931, risque=0.1929). Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 3 et les "rayons" 1 à 7 (biais=0.1731, risque=0.3587). Ce tableau correspond à la figure 1.26.

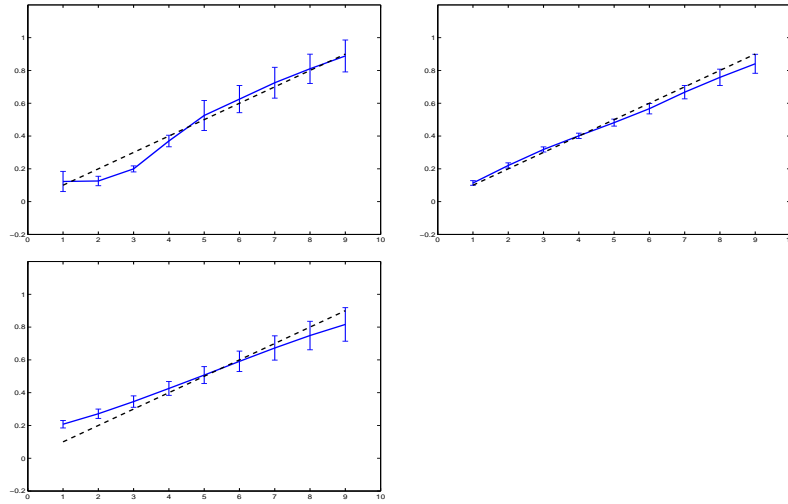


FIG. 1.26: Signaux déterministes : GIFS avec une régularité constante. On a généré 9 GIFS présentant des régularité de 0.1 à 0.9. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **risque** $\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 1 à 10 (résultat identique à celui obtenu lors de la minimisation du biais). Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 10. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 3 et les "rayons" 1 à 7. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas méthode OSC.

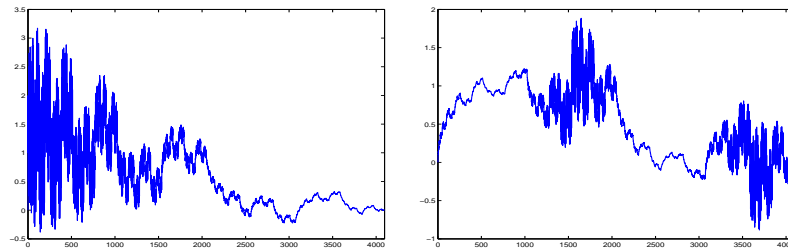


FIG. 1.27: Exemples de signaux déterministes : GIFS avec une régularité augmentant linéairement avec le temps et une régularité évoluant sinusoidalement.

GIFS			
H	RCO	W L	Osc
	Biais	Biais	Biais
$H(t) = t$	8.1182	5.2321	5.0616
$H(t) = 0.9 \sin(4\pi t)/2 + .5$	8.2133	7.1607	7.7064

TAB. 1.3: Signaux déterministes : GIFS avec une régularité évoluant de manière linéaire ou sinusoidale au cours du temps. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ce tableau donne les valeurs du biais et du risque en fonction de la méthode d'estimation choisie. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. **GIFS linéaires** : Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 10. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 10. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les "rayons" 5 à 8. **GIFS sinusoidaux** : Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les "rayons" 0 à 7. Ce tableau correspond aux figures 1.28 et 1.29.

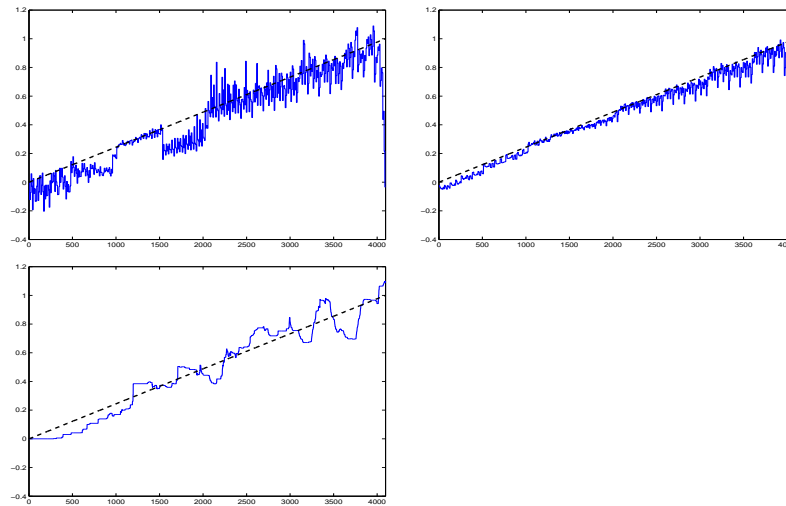


FIG. 1.28: Signaux déterministes : GIFS avec une régularité évoluant de manière linéaire. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour le signal trois fonctions de Hölder. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 10. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 10. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les "rayons" 5 à 8. En abscisse, les points du signal. En ordonnée, la régularité estimée. En pointillés, la régularité théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas méthode OSC.

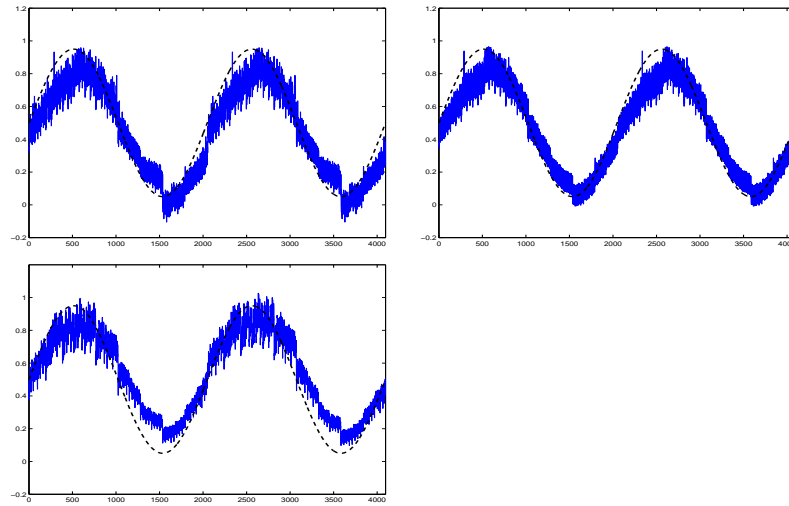


FIG. 1.29: Signaux déterministes : GIFS avec une régularité évoluant de manière sinusoïdale. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour le signal trois fonctions de Hölder. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les "rayons" 0 à 7. En abscisse, les points du signal. En ordonnée, la régularité estimée. En pointillés, la régularité théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas méthode OSC.

Signaux stochastiques

Mouvement Brownien Fractionnaire

Le mouvement Brownien Fractionnaire (FBM) a été introduit par Kolmogorov en 1940 dans un cadre Hilbertien [Kol40]. Ce sont B. Mandelbrot et J. Van Ness qui ont popularisé le FBM en montrant sa pertinence pour la modélisation de phénomènes naturels tels que la finance ou l'hydrologie [MN68]. Pour des travaux plus récents, voir le livre de Samorodnitsky et Taqqu [ST94] et celui de J. Beran [Ber94]. Nous avons généré 10 réalisations de mouvements Browniens fractionnaires pour des régularités prescrites (et constantes) allant de 0.1 à 0.9 soit 90 signaux. (On a représenté sur la figure 1.30 un FBM de régularité 0.2 et un FBM de régularité 0.5).

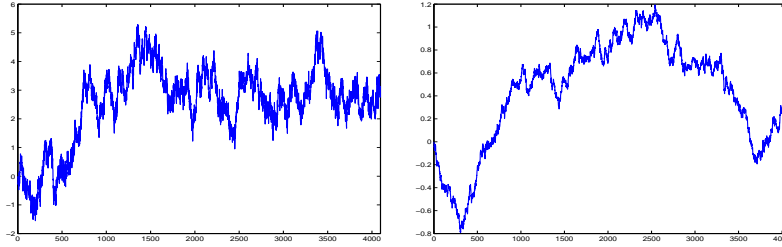


FIG. 1.30: Signaux stochastiques : FBM avec une régularité constante. A gauche, signal de régularité 0.2. A droite, signal de régularité 0.5.

On applique ensuite les 3 méthodes d'estimation de la régularité puis on concatène les fonctions de Hölder estimées des signaux ayant la même régularité, ce qui nous renvoie pour chacune des régularités prescrites trois fonctions de Hölder. On a regroupé dans les tableaux 1.4 et 1.5 les moyennes de ces fonctions de Hölder ainsi que leur écart type pour les méthodes RCO, WL et OSC après une optimisation des paramètres des méthodes d'estimation. Le premier tableau correspond à une minimisation du biais $\|H - \hat{H}\|^2$ avec $H = [.1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9]$ la régularité prescrite et \hat{H} son estimation (voir figure 1.31) alors que le second correspond à une minimisation du risque $\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$ (voir figure 1.32).

Mouvement Brownien multifractionnaire (MBM) et fonctions de Weierstrass généralisées stochastiques (GWEI)

Nous poursuivons notre étude sur des mouvements Browniens multifractionnaires (MBM) et sur des fonctions de Weierstrass généralisées (GWEI). Pour les fonctions de Weierstrass généralisées, voir le théorème 1.1.3 dans la première partie de ce chapitre. Le mouvement Brownien Multifractionnaire est une extension du mouvement Brownien Fractionnaire de paramètre H au cas où H n'est plus une constante mais une fonction de l'index de temps du processus. On peut ainsi modéliser des processus continus non stationnaires. De plus $H(t)$ et $2 - H(t)$ sont, pour tout t , presque sûrement, l'exposant de Hölder et les dimensions de boîtes et de Hausdorff locales au point t . Des travaux récents fournissent une large étude de ces signaux (voir [PV95], [AV99], [AV00] et [Aya02]). Du point de vue de l'estimation de la régularité, il existe des méthodes d'estimation paramétrique spécialement adaptées au FBM et au MBM (voir [AV04], [BBCI00], [BCI98], [Coe00], [GL89] et [IL97]).

On a représenté sur la figure 1.33 quatre réalisations différentes d'un MBM avec une régularité prescrite sinusoïdale et sur la figure 1.34 quatre réalisations d'une fonction de Weierstrass généralisée avec la même régularité prescrite sinusoïdale.

On effectue dix réalisations de MBM dont la régularité augmente linéairement au cours du temps et dix autres dont la régularité évolue sinusoïdalement. De la même manière, on construit dix fonctions de Weierstrass généralisées dont la régularité augmente linéairement au cours du temps et dix autres dont la régularité évolue sinusoïdalement. On applique sur ces signaux les trois méthodes d'estimation de la régularité. Grâce au processus d'optimisation sur les échelles décrit précédemment, on obtient les

FBM	BIAIS					
H	RCO		WL		OSC	
	mean H	std H	mean H	std H	mean H	std H
0.1	0.020379	0.25589	0.10863	0.22468	0.19456	0.050368
0.2	0.18611	0.22843	0.14664	0.30863	0.26518	0.060929
0.3	0.29255	0.25527	0.31473	0.32432	0.35343	0.073864
0.4	0.36586	0.27786	0.38112	0.38797	0.40611	0.089018
0.5	0.52057	0.25886	0.50989	0.35614	0.52788	0.11197
0.6	0.62581	0.275	0.65518	0.35092	0.61354	0.12212
0.7	0.77971	0.28991	0.73151	0.40398	0.70659	0.16377
0.8	0.88899	0.31565	0.84864	0.45299	0.8058	0.17344
0.9	1.002	0.30953	0.9229	0.52544	0.85666	0.17877

TAB. 1.4: Signaux stochastiques : FBM avec une régularité constante. On a généré 10 réalisations de 9 FBM présentant des régularité de 0.1 à 0.9. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité puis on concatène les fonctions de Hölder estimées, ce qui nous renvoie pour chacune des régularités prescrites trois fonctions de Hölder. Ce tableau donne les valeurs des moyennes et des écarts type de ces fonctions de Hölder en fonction de la régularité et de la méthode d'estimation choisie. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 4 à 11 (biais=0.1831, risque=1.009). Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 4 (biais=0.1026, risque=1.2409). Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les "rayons" 3 à 7 (biais=0.1378, risque=0.5065). Ce tableau correspond à la figure 1.31.

résultats des tableaux 1.6 et 1.7 respectivement pour la minimisation du biais et la minimisation du risque. Ces résultats sont illustrés sur les figures 1.35 à 1.42.

1.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un outil mathématique d'analyse fractale, l'exposant de Hölder. Autour de cet objet s'est développée une branche récente de l'analyse de la régularité des signaux, l'analyse de la régularité Hölderienne. C'est dans ce cadre que nous avons détaillé trois méthodes d'estimation de la régularité. la première, notée OSC consiste en un calcul d'oscillations autour du point considéré, les deux suivantes, notées RCO et WL et découlant de deux théorèmes de Stéphane Jaffard, sont très similaires et à base de régression de coefficients d'ondelettes.

L'implémentation des trois méthodes présentées et une étude numérique qualitative ont montré le bon comportement de ces méthodes en général sur l'ensemble des signaux traités. Plus précisément, l'estimation par le biais des wavelet Leaders supplante l'autre méthode à base d'ondelette dans la plupart des cas. Ces méthodes donnent de meilleurs résultats que l'oscillation sur les fonctions de Weierstrass et les GIFS. Ce résultat peut s'expliquer par la structure de ces objets, en effet, les fonctions de Weierstrass sont pratiquement définies par leurs coefficients d'ondelette et les GIFS par des rapports de coefficients d'ondelette. Si on considère le reste des signaux, la méthode d'oscillation fournit les meilleurs résultats. Il est bon de noter que ces signaux, les FBM et les MBM, sont de plus en plus utilisés pour modéliser des phénomènes naturels ([Man97b], [Ber94], [Man97a] en finances et [VR97] pour la modélisation du trafic) et notamment dans le cadre de l'application qui nous intéresse, à savoir le frottement entre un pneumatique et une chaussée [KH00].

Ces résultats nous inviteraient donc à utiliser la méthode d'oscillation pour la suite de notre étude

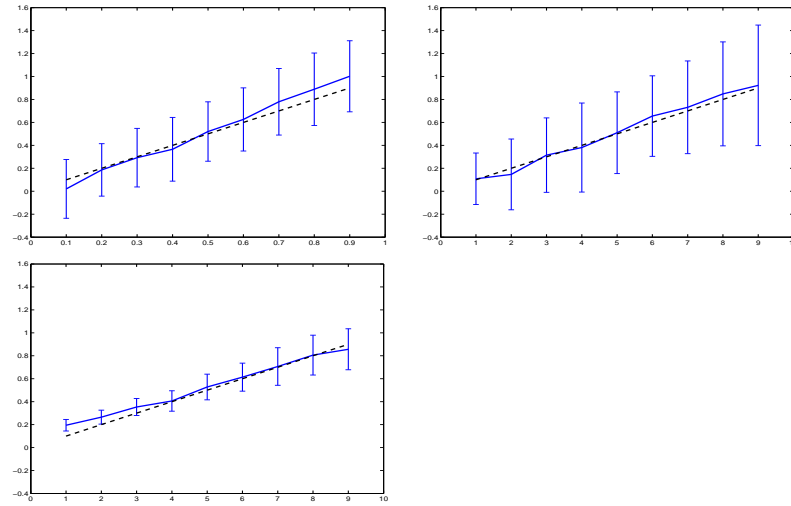


FIG. 1.31: Signaux stochastiques : FBM avec une régularité constante. On a généré 10 réalisations de 9 FBM présentant des régularités de 0.1 à 0.9. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité puis on concatène les fonctions de Hölder estimées, ce qui nous renvoie pour chacune des régularités prescrites trois fonctions de Hölder. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 4 à 11. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 4. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les "rayons" 3 à 7. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas méthode OSC.

puisqu'elle semble adaptée à l'analyse des profils routiers de part ses bons résultats sur les FBM, mais cette technique présente un point négatif : la difficulté de modifier la régularité d'un signal en utilisant ce schéma d'estimation. Dans la suite de ce document, plus précisément dans le chapitre consacré au débruitage, nous allons nous attacher à modifier la régularité des signaux bruités. C'est pour cette raison que nous allons estimer la régularité à partir des coefficients d'ondelette. Dans un souci de clarté de l'exposé, on préférera utiliser la régression RCO dans les chapitres consacrés à l'interpolation et au débruitage. On gardera à l'esprit que les résultats que nous donnerons sur la régularité et sur les convergences dans le chapitre sur le débruitage sont valides avec l'estimation raffinée par les "Wavelet Leaders" d'après le lemme 1.2.2.

On peut ajouter que l'étude des régressions des logarithmes des coefficients d'ondelette et le souci de raffiner les méthodes d'estimation nous ont permis de commencer à développer une nouvelle technique générale de régression qui, sous certaines conditions, nous permet d'atteindre la limite inférieure (ou la limite supérieure) d'un nuage de points.

FBM	RISQUE					
H	RCO		W L		Osc	
	mean H	std H	mean H	std H	mean H	std H
0.1	0.020251	0.13171	0.019328	0.070383	0.19335	0.038272
0.2	0.14698	0.14306	0.16339	0.071761	0.26193	0.045673
0.3	0.31158	0.12569	0.29894	0.074412	0.34769	0.052647
0.4	0.37487	0.13536	0.37531	0.088823	0.39742	0.063024
0.5	0.52906	0.13739	0.5282	0.095763	0.50823	0.077101
0.6	0.64144	0.12156	0.64043	0.084312	0.58743	0.080335
0.7	0.78331	0.13205	0.77699	0.10727	0.6926	0.10053
0.8	0.8863	0.16325	0.89636	0.12587	0.77411	0.12066
0.9	0.98946	0.15184	0.98189	0.12962	0.82644	0.12871

TAB. 1.5: Signaux stochastiques : FBM avec une régularité constante. On a généré 10 réalisations de 9 FBM présentant des régularités de 0.1 à 0.9. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité puis on concatène les fonctions de Hölder estimées, ce qui nous renvoie pour chacune des régularités prescrites trois fonctions de Hölder. Ce tableau donne les valeurs des moyennes et des écarts type de ces fonctions de Hölder en fonction de la régularité et de la méthode d'estimation choisie. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **risque** $\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$. Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12 (biais=0.1868, risque=0.6024). Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 11 (biais=0.1811, risque=0.4709). Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les "rayons" 2 à 8 (biais=0.1456, risque=0.3984). Ce tableau correspond à la figure 1.32.

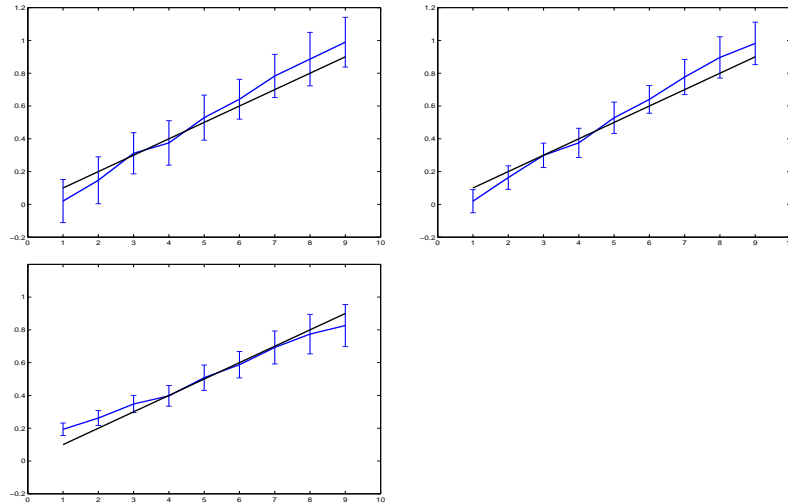


FIG. 1.32: Signaux stochastiques : FBM avec une régularité constante. On a généré 10 réalisations de 9 FBM présentant des régularité de 0.1 à 0.9. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité puis on concatène les fonctions de Hölder estimées, ce qui nous renvoie pour chacune des régularités prescrites trois fonctions de Hölder. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **risque** $\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$. Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les "rayons" 2 à 8. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas méthode OSC. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique.

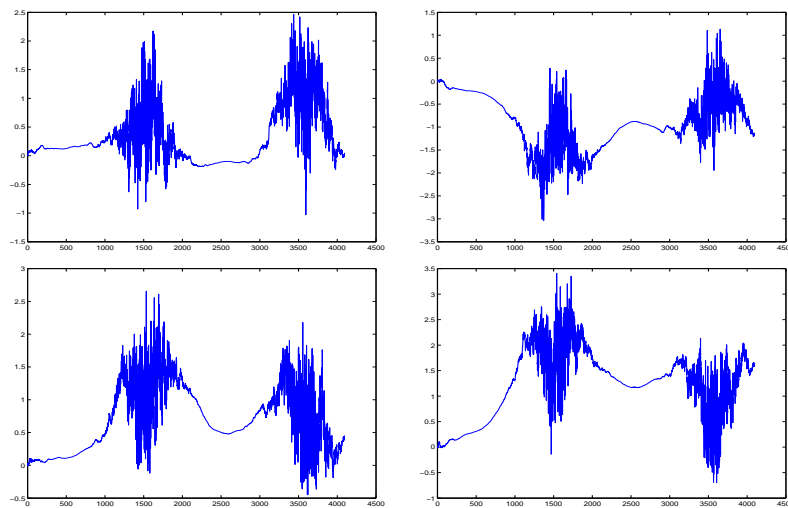


FIG. 1.33: Signaux stochastiques : MBM avec une régularité évoluant sinusoidalement. Quatre réalisations différentes.

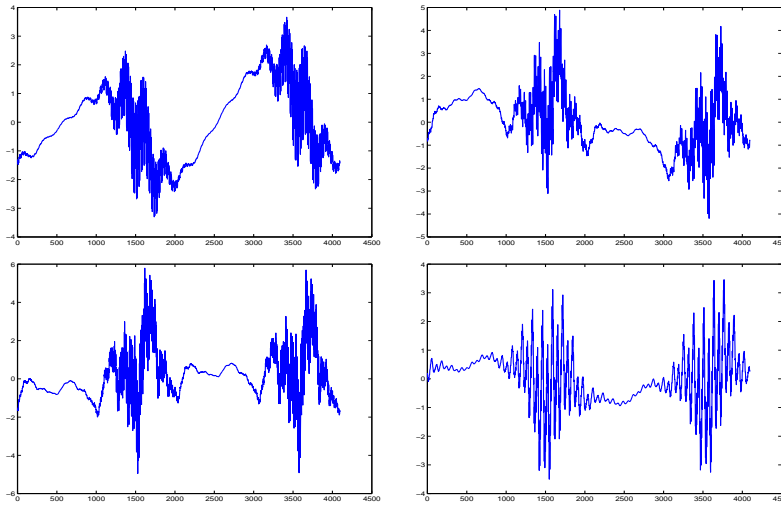


FIG. 1.34: Signaux stochastiques : fonction de Weierstrass Généralisée avec une régularité évoluant sinusoidalement. Quatre réalisations différentes.

MBM	BIAIS					
H	RCO		W L		Osc	
	Biais	Risque	Biais	Risque	Biais	Risque
$H(t) = t$	18.6598	41.9594	16.3121	33.9622	5.1866	12.0468
$H(t) = 0.9 \sin(4\pi t)/2 + .5$	7.7671	17.6551	8.3865	23.1346	2.29	7.1266
GWEI Stochastique						
H	W S		W L		Osc	
	Biais	Risque	Biais	Risque	Biais	Risque
$H(t) = t$	2.7331	10.1174	4.6011	9.9301	4.9404	12.1542
$H(t) = 0.9 \sin(4\pi t)/2 + .5$	2.7615	12.0380	1.4883	6.3786	2.6172	8.3072

TAB. 1.6: Signaux stochastiques : MBM et Weierstrass généralisées avec une régularité évoluant linéairement ou sinusoidalement au cours du temps. On a généré 10 MBM de chaque type. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ces fonctions sont ensuite moyennées selon les 10 réalisations. Ce tableau donne les valeurs du biais ($\|H - \hat{H}\|^2$) et du risque ($\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$) en fonction de la méthode d'estimation choisie. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. **MBM LINEAIRES** : Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 7 à 11. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 7 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.2 et les échelles 2 à 5. **MBM SINUSOÏDAUX** : Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 6 à 12. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.1 et les rayons 4 à 11. **GWEI LINEAIRES** : Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les rayons 5 à 8. **GWEI SINUSOÏDALES** : Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 2 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.4 et les rayons 5 à 9. Ce tableau correspond aux figures 1.35 à 1.38.

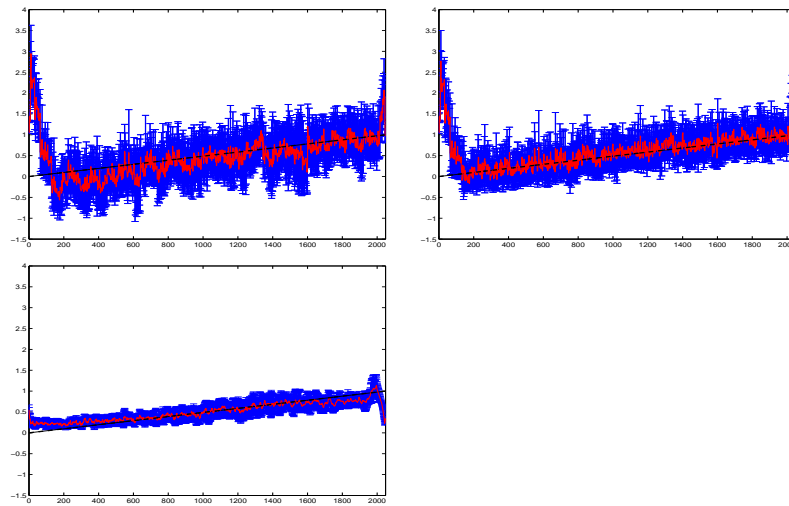


FIG. 1.35: Signaux stochastiques : MBM avec une régularité évoluant linéairement. On a généré 10 MBM. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ces fonctions sont ensuite moyennées selon les 10 réalisations. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 7 à 11. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 7 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.2 et les rayons 2 à 5. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas, méthode OSC.

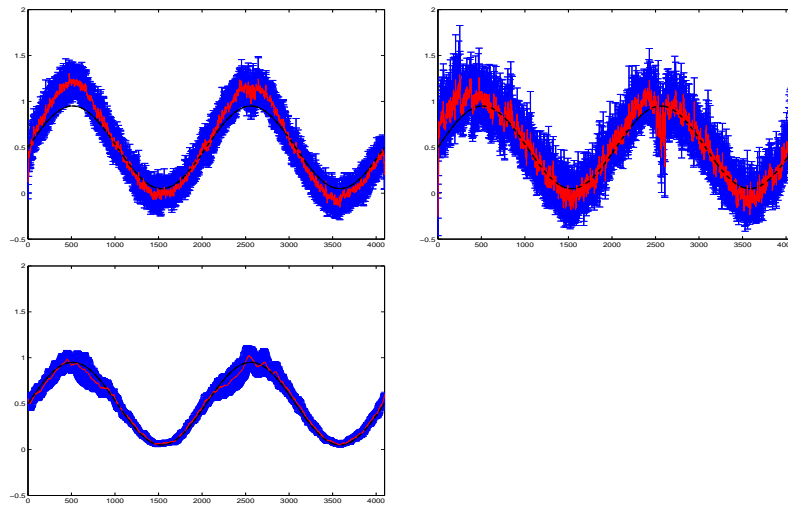


FIG. 1.36: Signaux stochastiques : MBM avec une régularité évoluant sinusoidalement. On a généré 10 MBM. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ces fonctions sont ensuite moyennées selon les 10 réalisations. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 6 à 12. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.1 et les rayons 4 à 11. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas, méthode OSC.

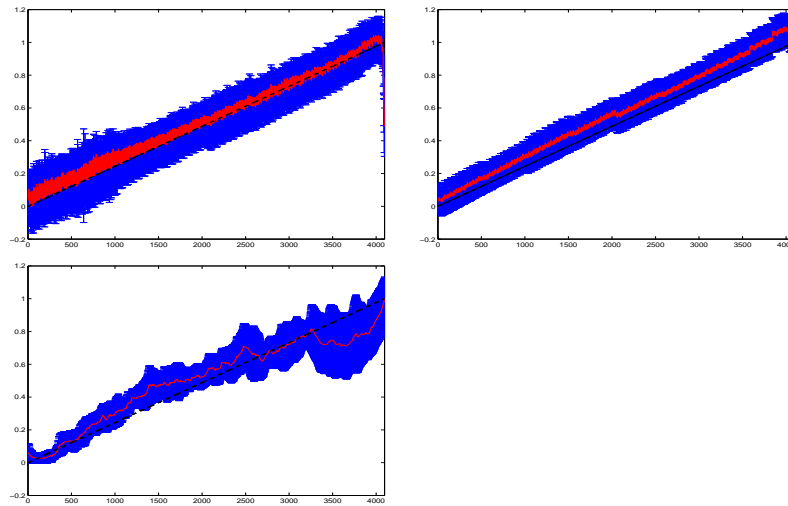


FIG. 1.37: Signaux stochastiques : Weierstrass généralisée avec une régularité évoluant linéairement. On a généré 10 signaux. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ces fonctions sont ensuite moyennées selon les 10 réalisations. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les rayons 5 à 8. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas, méthode OSC.

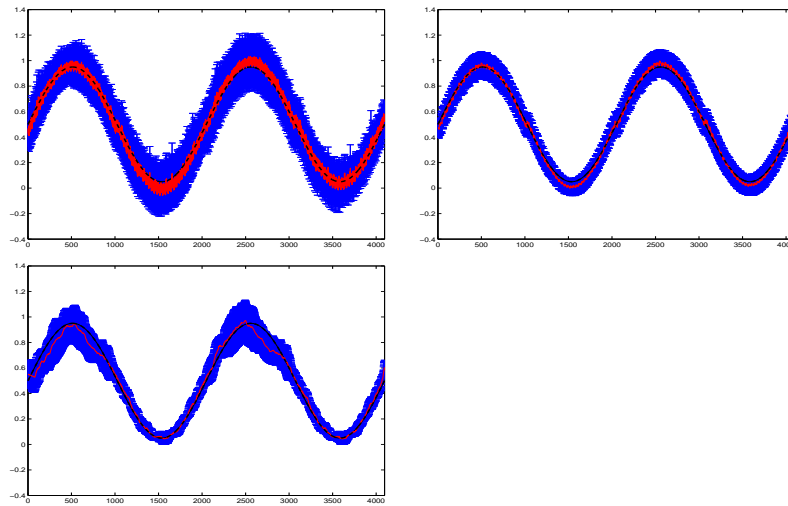


FIG. 1.38: Signaux stochastiques : Weierstrass généralisée avec une régularité évoluant sinusoidalement. On a généré 10 signaux. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ces fonctions sont ensuite moyennées selon les 10 réalisations. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **biais** $\|H - \hat{H}\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 2 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.4 et les rayons 5 à 9. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas, méthode OSC.

MBM		RISQUE					
H		RCO		W L		Osc	
		Biais	Risque	Biais	Risque	Biais	Risque
$H(t) = t$		22.2299	30.2447	19.4629	30.4854	5.5482	10.4190
$H(t) = 0.9 \sin(4\pi t)/2 + .5$		7.7671	17.6551	10.5043	17.6931	2.7091	7.0012
GWEI							
H		W S		W L		Osc	
		Biais	Risque	Biais	Risque	Biais	Risque
$H(t) = t$		2.7331	10.1174	4.6011	9.9301	5.7668	11.0797
$H(t) = 0.9 \sin(4\pi t)/2 + .5$		2.7615	12.0380	1.4883	6.3786	3.2751	8.2378

TAB. 1.7: Signaux stochastiques : MBM et Weierstrass généralisées avec une régularité évoluant linéairement ou sinusoidalement au cours du temps. On a généré 10 MBM de chaque type. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ces fonctions sont ensuite moyennées selon les 10 réalisations. Ce tableau donne les valeurs du biais ($\|H - \hat{H}\|^2$) et du risque ($\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$) en fonction de la méthode d'estimation choisie. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **risque** $\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$. **MBM LINEAIRES** : Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 2 à 11. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 5 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.1 et les rayons 1 à 7. **MBM SINUSOÏDAUX** : Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.1 et les rayons 3 à 11. **GWEI LINEAIRES** : Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les rayons 3 à 8. **GWEI SINUSOÏDALES** : Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 2 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.5 et les rayons 4 à 9. Ce tableau correspond aux figures 1.39 à 1.42.

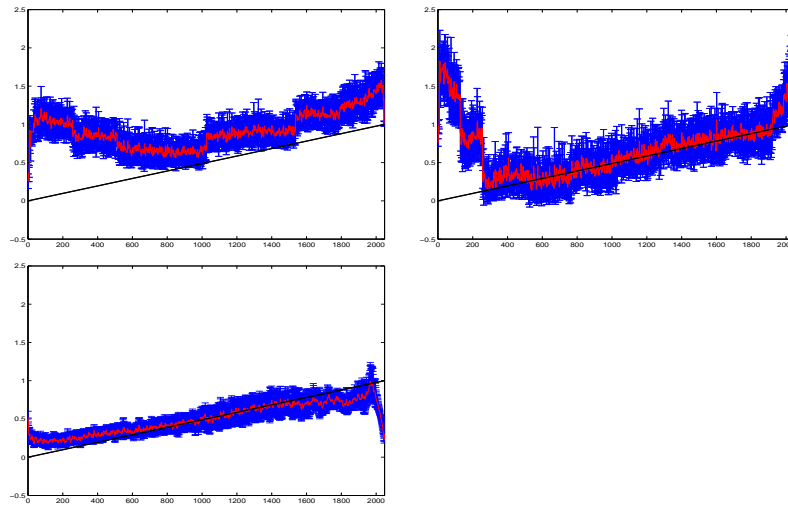


FIG. 1.39: Signaux stochastiques : MBM avec une régularité évoluant linéairement. On a généré 10 MBM. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ces fonctions sont ensuite moyennées selon les 10 réalisations. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **risque** $\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 2 à 11. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 5 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.1 et les rayons 1 à 7. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas, méthode OSC.

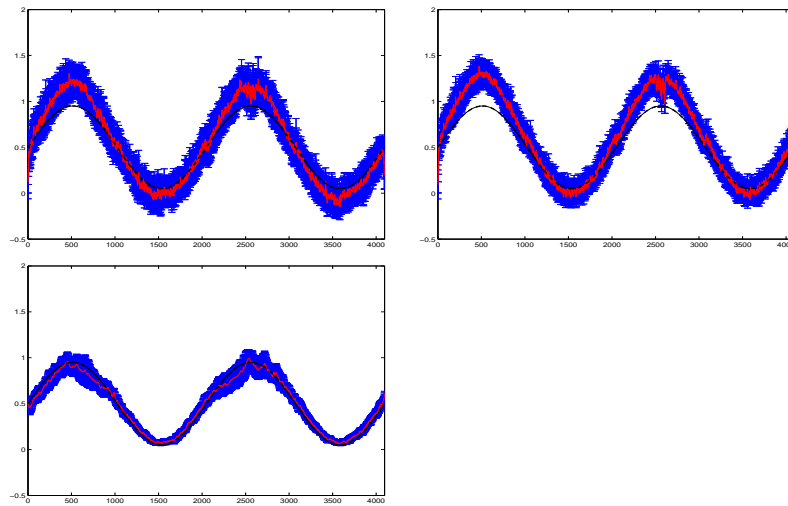


FIG. 1.40: Signaux stochastiques : MBM avec une régularité évoluant sinusoidalement. On a généré 10 MBM. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ces fonctions sont ensuite moyennées selon les 10 réalisations. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **risque** $\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$. Pour la méthode de RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.1 et les rayons 3 à 11. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas, méthode OSC.

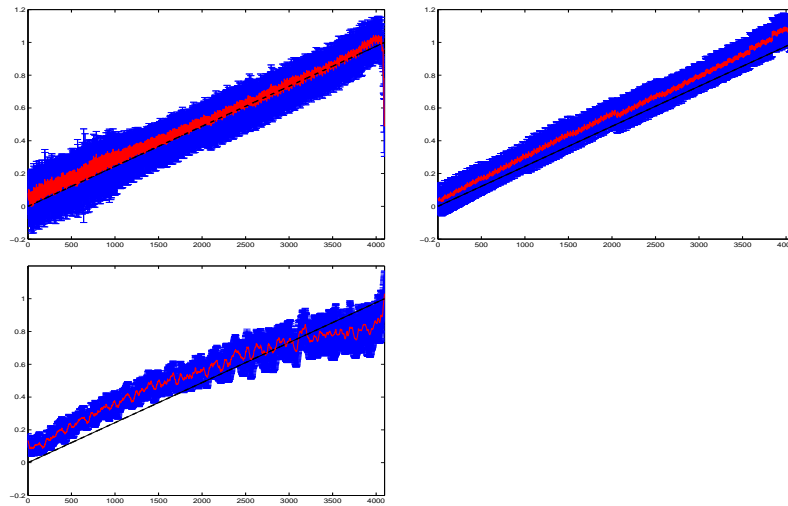


FIG. 1.41: Signaux stochastiques : Weierstrass généralisée avec une régularité évoluant linéairement. On a généré 10 signaux. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ces fonctions sont ensuite moyennées selon les 10 réalisations. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **risque** $\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 1 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.8 et les rayons 3 à 8. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas, méthode OSC.

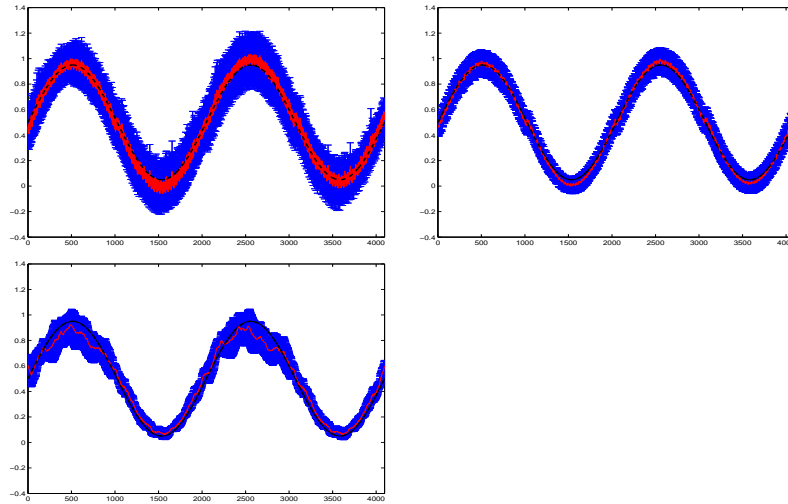


FIG. 1.42: Signaux stochastiques : Weierstrass généralisée avec une régularité évoluant sinusoidalement. On a généré 10 signaux. On applique les 3 méthodes d'estimation de la régularité, ce qui nous renvoie pour chacun des signaux trois fonctions de Hölder. Ces fonctions sont ensuite moyennées selon les 10 réalisations. On a optimisé le nombre d'échelles sur lesquelles on effectue l'estimation afin de minimiser le **risque** $\|H - \hat{H}\|^2 + \|\text{std}(\hat{H})\|^2$. Pour la méthode RCO, on a utilisé les échelles 2 à 12. Pour la méthode "Wavelet Leaders" (WL), on a utilisé les échelles 1 à 11. Pour la méthode d'estimation par oscillations, on a utilisé une base de 2.5 et les rayons 4 à 9. En abscisse, régularité du signal en tout point, en ordonnée estimation de la régularité avec les barres d'erreur. En pointillé, le résultat théorique. En haut à gauche, méthode RCO. En haut à droite méthode WL. En bas, méthode OSC.

Chapitre 2

Interpolation

On considère le problème de l'interpolation d'un signal dans \mathbb{R}^d connu à une certaine résolution. On suppose que le signal appartient à une classe de signaux caractérisée par des contraintes sur la régularité locale, qui peuvent être traduites par un certain comportement inter-échelles des coefficients d'ondelette. Ces contraintes permettent de prédire les coefficients de l'échelle $n + 1$ à partir de ceux des échelles précédentes. Nous donnons quelques propriétés de cette technique d'interpolation, concernant en particulier la régularité Höldérienne du signal raffiné et son comportement asymptotique. Les résultats théoriques et numériques montrent que notre méthode permet d'obtenir des signaux ou des images interpolés de bonne qualité. En particulier, l'aspect visuel de régularité ou d'irrégularité est respecté après interpolation.

Ce chapitre a fait l'objet de deux publications en congrès internationaux avec comité de lecture et actes :

- [LV03a] P. Legrand, J. Lévy Véhel, "local regularity-based interpolation", WAVELET X, Part of SPIE's Symposium on Optical Science and Technology, San Diego, CA, August 3-8, 2003, proceedings of SPIE Vol. 5207.
- [LV03c] P. Legrand, J. Lévy Véhel, "Interpolation de signaux par conservation de la régularité Hölderienne", GRETSI03, 19 th GRETSI Symposium on Signal and Image Processing, Paris, September 8-11, 2003.

2.1 Introduction

Une préoccupation courante en traitement du signal et des images est l'obtention de données échantillonnées avec la meilleure résolution possible. A l'étape d'acquisition, la résolution est limitée par divers facteurs, tels que les propriétés physiques du capteur ou le coût. Il est donc utile de mettre au point des méthodes permettant d'améliorer la résolution après l'acquisition. Un cas favorable est celui où l'on dispose de plusieurs signaux de faible résolution se recouvrant partiellement. L'interpolation (aussi appelée *super-résolution* dans ce contexte) consiste alors à combiner ces multiples signaux basse résolution afin de former un signal haute résolution.

Dans le cas général, cependant, on ne dispose que d'un signal pour l'interpolation. Une approche naturelle consiste alors à compléter les informations issues du signal basse résolution par des connaissances *a priori*.

Diverses approches ont été proposées dans ce cadre. On peut grossièrement les séparer en deux types. Dans le premier, on suppose que le signal appartient à une certaine classe fonctionnelle. Par exemple, on admet que le signal original est à bande limitée, ou bien à support compact, . . . Ces hypothèses imposent des contraintes sur l'interpolation qui, en pratique, est souvent obtenue en minimisant une fonction de coût composée de deux termes : le premier assure le fait que le signal reconstruit à haute résolution est compatible avec les données observées à basse résolution. Le second terme correspond à l'information *a priori* d'appartenance à la classe considérée. Parmi les très nombreux travaux qui suivent cette approche, citons [DS89, Fer94, Pap75, SS82, SP61, YW82].

Le deuxième type d'approche constitue un nouveau paradigme, que l'on pourrait qualifier de *contextuel*. Il a été proposé récemment dans des travaux provenant de communautés diverses (vision par ordinateur, informatique graphique, IA)[CP99, BK01, FJP01]. Il découle de l'observation du fait que la plupart des méthodes classiques ont tendance à trop lisser les signaux dès que l'on atteint de fort taux d'interpolation (i.e. plus grand que 4). Les méthodes contextuelles essaient de remédier à ce problème en utilisant une technique "d'apprentissage local" : le système commence par créer une base de données en "apprenant" les caractéristiques locales de signaux pris dans une classe donnée, à laquelle on suppose que le signal à interpoler appartient aussi. Il utilise ensuite cette information pour calculer l'interpolation, en comparant les caractéristiques locales du signal à celle de la base de données. L'hypothèse sous-jacente est que des voisinages, dans les signaux de la même classe, qui se ressemblent à la résolution n , devraient se ressembler à la résolution $n + 1$.

La plupart des techniques développées jusqu'à maintenant souffrent d'un certain nombre de problèmes communs : le signal interpolé est souvent trop lisse, mais il arrive aussi parfois que trop de détails soient ajoutés, en particulier dans des régions régulières. De plus, la création de détails n'est pas bien contrôlée, et on ne peut en général prévoir quel sera l'aspect du signal haute résolution. Enfin, les propriétés théoriques de la méthode sont rarement connues.

Nous proposons une nouvelle méthode d'interpolation dont la caractéristique principale est de conserver l'aspect visuel aussi bien des régions lisses que des régions irrégulières (e.g. ruptures ou textures). Notre outil principal est l'analyse de la régularité locale : nous commençons par définir une mesure de cette régularité locale qui rend raisonnablement compte de l'aspect visuel tout en étant aisément manipulable mathématiquement. Cette mesure correspond, à quelques restrictions techniques près, à la notion d'exposant de Hölder. Il a été montré que les exposants de Hölder correspondent à une notion intuitive de la régularité pour les images et les signaux 1D [Veh95].

Afin de contrôler l'interpolation et d'obtenir une implementation simple, nous avons besoin de supposer que le signal appartient à une certaine classe de signaux, qui est assez générale. Cette hypothèse permet d'estimer facilement l'exposant de Hölder à partir des coefficients d'ondelette, et assure de plus que cet exposant permet de prédire de façon pertinente les coefficients des échelles plus fines.

Notre méthode permet alors de contrôler à la fois la régularité du signal interpolé et l'erreur de reconstruction. Ces deux propriétés sont importantes en pratique : la régularité détermine l'apparence visuelle de l'information ajoutée (c'est à dire le contenu hautes fréquences), et la convergence de l'interpolation signifie que l'information ajoutée n'est pas trop différente de la réalité.

Nous expliquons maintenant heuristiquement le principe de notre méthode. Soit X le signal d'entrée et $x_{j,k}$ ses coefficients d'ondelette, où j correspond aux échelles et k à la position. Si un signal a la régularité α au point t , alors ses coefficients d'ondelette $x_{j,k(j,t)}$ "au-dessus" de t sont bornés par $c2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$ où c est une constante (voir chapitre 1) :

$$\forall j = 1 \dots n, |x_{j,k(j,t)}| \leq c2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$$

On rappelle que l'exposant α mesure la régularité dans le sens suivant : $\alpha > 1$ traduit un signal lisse, tandis que $\alpha \in]0, 1[$ signifie que le signal est continu et non différentiable en t . Si le signal est discontinu en t mais borné, alors $\alpha = 0$.

Ainsi, si nous souhaitons préserver la régularité, nous devons imposer le coefficient d'ondelette au dessus de t à l'échelle super-résolue $n + 1$ de telle sorte que $|x_{n+1,k(n+1,t)}| \leq C2^{-(n+1)(\alpha+\frac{1}{2})}$.

2.2 Méthode

Soit X le signal original, et $X_n = (x_1^n, \dots, x_{2^n}^n)$ son échantillonnage sur les 2^n points $(t_1^n, \dots, t_{2^n}^n)$. Soit ψ une ondelette telle que la famille $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ forme une base orthonormale de L^2 . Soient $x_{j,k}$ les coefficients d'ondelette de X . Pour $k = 1 \dots 2^n$, on considère le point $t = t_k^n$ et $x_{j,k(j,t)}$ les coefficients d'ondelette situés "au-dessus" de lui, i.e.

$$k(j,t) = \lfloor (t+1)2^{j+1-n} \rfloor$$

Soit $\alpha_n(t) + \frac{1}{2}$ la pente de la régression de type limite inférieure du vecteur $(\log(x_{1,k(1,t)}, \dots, x_{n,k(n,t)}))$ selon $(-1, \dots, -n)$ (voir [VL04] et le chapitre 1.2 section 1.2.4 sur l'estimation pour les régressions de type limite inférieure). Lorsque n tend vers l'infini, $\alpha_n(t) + \frac{1}{2}$ tend vers la limite inférieure de $\frac{\log d_{n,k(n,t)}}{-n}$. Ce nombre $\alpha_n(t)$ a été considéré dans la littérature [Mey97] sous le nom d'exposant de *weak scaling*, et noté β_w . Il s'agit d'une mesure de la régularité locale comme nous l'avons exposé dans le chapitre 1 définition 1.2.2.

On rappelle que lorsque les exposants de Hölder local α_l et ponctuel α_p de X en t coïncident¹, alors β_w

¹Rappelons que $\alpha_l^X(t) = \inf\{\alpha : \exists \delta > 0, X \in C^\alpha([t-\delta, t+\delta])\}$ et que $\alpha_p^X(t) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\log |X(t+h) - P_t(h)|}{\log |h|}$, où P_t est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\lfloor \alpha_p^X(t) \rfloor$

est aussi égal à leur valeur commune (voir [VS04]). Dans la suite nous supposons que nous sommes dans cette configuration.

En d'autres termes, on considère que notre signal appartient à la classe \mathcal{S} définie de la manière suivante :

$$\mathcal{S} = \{X \in L^2(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \alpha_p(t) = \alpha_l(t)\}$$

La classe \mathcal{S} contient de nombreux signaux et images "usuels", comme par exemple :

- Les signaux infiniment lisses (i.e. dans C^∞)
- Les signaux à irrégularités isolées du type $\sum_{n \in \mathbb{N}} |t - t_n|^{\gamma_n}$, avec $t_n \in \mathbb{R}, \gamma_n \in \mathbb{R}^+$.
- Un grand nombre de signaux partout irréguliers, tels que la fonction de Weierstrass

$$W(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-nh} \sin(2^n t), \quad h \in (0, 1) \quad (2.1)$$

Par contre, les signaux de type "chirp", de la forme $|t|^\gamma \sin(1/|t|^\beta)$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$ ne sont pas dans \mathcal{S} .

Si $X \in \mathcal{S}$, alors en chaque point t , les "plus gros" coefficients d'ondelette sont situés au-dessus de t dans le sens suivant. Considérons une suite $x_{j,k}$ de coefficients telle que $k2^{-j}$ tend vers t . Alors, si X appartient à \mathcal{S} ,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |x_{j,k}|}{-j} \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |x_{j,k(j,t)}|}{-j} \quad (2.2)$$

Pour réaliser l'interpolation, on effectue au-dessus de chaque point t la régression des coefficients d'ondelette en fonction de l'échelle. Les paramètres de cette régression permettent de construire le coefficient extrapolé. Après reconstruction, on obtient ainsi le signal "super-résolu". Dans un souci de simplicité pour la suite de l'exposé, on effectue une régression simple (de type "RCO") telle qu'elle est décrite dans le chapitre 1 section 1.2.2 sans faire appel au raffinement présenté dans la section 1.2.4 pour obtenir la limite inférieure.

2.3 Construction des coefficients extrapolés

Comme nous venons de l'évoquer, on procède en plusieurs étapes ; tout d'abord on effectue une transformée en ondelette discrètes du signal que l'on souhaite étendre, puis on regarde comment se comportent les différents coefficients concernant chacun des points du signal. En effet, on sait que pour estimer la régularité d'un signal en un point, on effectue la régression des logarithmes des valeurs absolues des coefficients situés au-dessus de ce point en fonction de l'échelle (voir chapitre 1). La pente de cette régression nous donne alors l'information souhaitée sur la régularité (voir figure 2.1). Ensuite on construit un nouveau coefficient d'ondelette tel que le logarithme de sa valeur absolue soit situé sur la droite de régression (ainsi on conserve la régularité en ce point). Enfin on reconstruit le signal ainsi modifié. On peut ensuite réitérer la méthode pour créer le nombre souhaité de niveaux.

2.3.1 Coordonnées du point ajouté

Lemme 2.3.1

A la position $n + 1$, le point de la droite de régression linéaire de $L_i = [y_1, \dots, y_n]$ en fonction de $V = [1, \dots, n]$ a pour ordonnée :

$$y_{n+1} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n y_j (3j - n - 2) \quad (2.3)$$

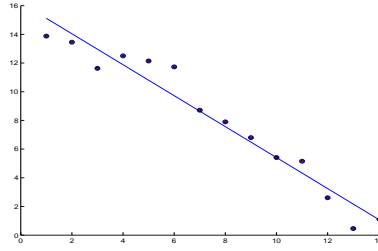


FIG. 2.1: Régression au-dessus d'un point du signal. L'axe des abscisses porte les échelles. Les ronds correspondent chacun au \log_2 d'un coefficient d'ondelette situé au-dessus du point considéré. Le point de droite est celui qui a été extrapolé.

Preuve

Soient $V = [1, \dots, n]$ et $L_i = [y_1, \dots, y_n]$, la pente de la régression linéaire de L_i selon V est donnée par la formule suivante :

$$\text{pente} = \frac{\text{cov}(L_i, V)}{\text{var}(V)}$$

Or

$$\text{var}(V) = \frac{n(n+1)}{12}$$

et

$$\text{cov}(L_i, V) = \frac{1}{n-1} \langle (L_i - \bar{L}_i)(V - \bar{V}) \rangle = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(j - \frac{n+1}{2} \right) y_j$$

avec \bar{L}_i la moyenne de L_i et \bar{V} la moyenne de V .

Par conséquent, la pente de cette régression est donnée par

$$\text{pente} = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{j=1}^n \left(j - \frac{n+1}{2} \right) y_j$$

Notre méthode consiste à ajouter un point sur la droite de régression, donc on ne change pas la pente de cette dernière. En ajoutant y_{n+1} la pente est conservée donc :

$$\frac{\text{cov}(L_i, V)}{\text{var}(V)} = \frac{\text{cov}(\underline{L}_i, \underline{V})}{\text{var}(\underline{V})}$$

avec $\underline{V} = [1, \dots, n+1]$ et $\underline{L}_i = [y_1, \dots, y_{n+1}]$

D'où

$$\frac{12}{n(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^{n+1} \left(j - \frac{n+2}{2} \right) y_j = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{j=1}^n \left(j - \frac{n+1}{2} \right) y_j \quad (2.4)$$

Par conséquent,

$$y_{n+1} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n y_j (3j - n - 2)$$

■

Corollaire 2.3.1

Par le processus d'interpolation proposé, le coefficient d'ondelette ajouté au dessus du point x_0 à l'échelle $n+1$ vérifie :

$$\log_2 |\tilde{x}_{n+1,k}| = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \log_2 |x_{j,k}| (3j - n - 2) \quad (2.5)$$

Preuve

On applique simplement le théorème précédent aux logarithmes des coefficients d'ondelette au dessus du point considéré. ■

On a donc ajouté un coefficient d'ondelette à l'échelle $n + 1$ dont le logarithme de la valeur absolue est sur la droite de régression. Par conséquent, on peut écrire :

$$|\tilde{x}_{n+1,k}| = \tilde{K}_{n+1,k} 2^{-(n+1)\tilde{\beta}_{n,k}} \quad (2.6)$$

avec $\tilde{\beta}_{n,k}$ la pente de la régression linéaire et $\log_2(\tilde{K}_{n+1,k})$ l'ordonnée à l'origine.

D'après 2.5 et 2.6, on obtient l'expression de $\tilde{K}_{n+1,k}$:

$$\tilde{K}_{n+1,k} = 2^{\frac{2}{n(n-1)} \left[\sum_{j=1}^n \log_2 |x_{j,k}| (3j - n - 2) \right] + (n+1)\tilde{\beta}_{n,k}} \quad (2.7)$$

Proposition 2.3.1

L'ordonnée à l'origine de la pente de régression n évolue pas avec le nombre de niveaux ajouté.

$$\tilde{K}_{n+m,k} = \tilde{K}_{n+1,k} \quad \forall m \geq 1 \quad (2.8)$$

Preuve Puisque l'on ajoute des points sur la droite de régression, on ne modifie ni sa pente ni son ordonnée à l'origine. ■

2.3.2 Choix algorithmiques

La contrainte de régularité vérifiée par le coefficient d'ondelette ajouté ne s'applique qu'à sa valeur absolue, ce qui laisse une indétermination de signe pour $\tilde{x}_{n+1,k}$. On a donc le choix lors de la construction des échelles supplémentaires. Une étude qualitative nous a amené à attribuer le signe du coefficient père. Le choix de l'ondelette est relativement important. On peut choisir des ondelettes interpolatrices même si elles donnent en général un moins bon résultat à l'estimation. Pour les résultats 1D que nous présentons en fin de chapitre, nous avons choisi ce type d'ondelette qui nous permet de mieux visualiser les mécanismes de la méthode puisque les points ajoutés viennent s'intégrer exactement entre les points d'origine. En ce qui concerne l'expérimentation sur les images, on choisit des ondelettes de Daubechies qui nous donnent un résultat plus esthétique.

2.4 Régularité et propriétés asymptotiques

Nous donnons maintenant quelques propriétés théoriques de notre méthode d'interpolation.

On note C^η l'espace de Hölder d'exposant η , et $B_{p,q}^s$ l'espace de Besov d'exposants (s, p, q) . Nous ferons souvent référence aux espaces de Besov car ces espaces donnent une description de la régularité des fonctions qui leur appartiennent. De plus, les espaces de Besov admettent une caractérisation par les coefficients d'ondelette. Avant de donner les résultats théoriques de notre méthode d'interpolation, on rappelle la définition et quelques propriétés des espaces de Besov. Pour un exposé plus complet sur les espaces de Besov, voir [Nik75], [Pee75], [VP88] ou [VL93]. Pour définir les espace de Besov, on doit rappeler le r-module de régularité.

Définition 2.4.1 Soit X une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Soit $\Delta_h^{(r)} X = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k X(t + kh)$.

Le r -module de régularité de X dans $L^p[0, 1]$ est

$$w_{r,p}(X; h) = \|\Delta_h^{(r)} X\|_{L^p[0,1- rh]} \quad (2.9)$$

Définition 2.4.2 La semi-norme de Besov d'index (s, p, q) est définie pour $r > s$ par

$$|X|_{B_{p,q}^s} = \left(\int_0^1 \left(\frac{w_{r,p}(X; h)}{h^s} \right)^q \frac{dh}{h} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{si } q < \infty \quad (2.10)$$

$$\text{et par } |X|_{B_{p,q}^s} = \sup_{0 < h < 1} \frac{w_{r,p}(X; h)}{h^s} \quad \text{si } q = \infty \quad (2.11)$$

Définition 2.4.3 $X \in B_{p,q}^s$ si $X \in L^p[0, 1]$ et si $|X|_{B_{p,q}^s}$ est finie.

Nous allons utiliser une définition à partir des coefficients d'ondelette qui est équivalente à la précédente sous certaines conditions sur la régularité de l'ondelette (voir chapitres 8 et 9 de [HKPT98]).

Définition 2.4.4

$$X \in B_{p,q}^s \quad \text{si} \quad \left(\sum_k \binom{2^{j-1}}{k} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\sum_k \binom{2^{j-1}}{k} |x_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \quad \text{est finie} \quad (2.12)$$

avec $\alpha_k = \int X(t) \overline{\phi_k(t)} dt$ et $x_{j,k} = \int X(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt$. ϕ et ψ étant respectivement l'ondelette "père" et l'ondelette "mère" et $\phi_k(t) = \phi(t - k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k)$.

Proposition 2.4.1 (Inclusions d'espaces de Besov)

Soient $s > 0$, $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ et $1 \leq q \leq q' \leq \infty$, alors :

- $B_{p,q}^s \subset B_{p,q'}^s$
- $B_{p,1}^k \subset B_{p,\infty}^k$ pour tout k entier positif.
- $B_{p,q}^s \subset B_{p',q}^{s'}$ si $s' - \frac{1}{p'} \leq s - \frac{1}{p}$.
- $B_{p,q}^s \subset C(\mathbb{R})$ si $s > \frac{1}{p}$.

Nous allons maintenant donner les propriétés théoriques de notre méthode d'interpolation. Pour un signal X , on note X_n le signal échantillonné sur 2^n points, \tilde{X}_{n+m} le signal interpolé sur m niveaux et $\tilde{X}_{n+\infty}$ sur une infinité de niveaux.

Théorème 2.4.1 Si $X \in C^\alpha$ alors

$$\|X - \tilde{X}_{n+m}\|_2^2 \leq \left(\frac{c^2}{2} \right) \frac{1}{2^{2\alpha} - 1} 2^{-2\alpha n} + \frac{\hat{K}_n}{2^{2\hat{\beta}_n} - 1} 2^{-2\hat{\beta}_n n} - \frac{\hat{K}_n}{2^{2\hat{\beta}_n} - 1} 2^{-2\hat{\beta}_n(n+m)} \quad (2.13)$$

avec $(\hat{K}_{n+1}, \hat{\beta}_n)$ le couple tel que :

$$\hat{K}_{n+1} 2^{-2j(\hat{\beta}_n + \frac{1}{2})} = \max_{(\tilde{K}_{n+1,k}, \tilde{\beta}_{n,k})} \left[\tilde{K}_{n+1,k} 2^{-2j(\tilde{\beta}_{n,k} + \frac{1}{2})} \right] \quad (2.14)$$

Preuve

Par inégalité triangulaire, on a :

$$\|X - \tilde{X}_{n+m}\|_2^2 \leq \|X - X_n\|_2^2 + \|X_n - \tilde{X}_{n+m}\|_2^2 \quad (2.15)$$

Première étape :

$$\|X - X_n\|_2^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} x_{j,k}^2 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} c^2 \cdot 2^{-2j(\alpha+\frac{1}{2})} \quad (2.16)$$

$$\|X - X_n\|_2^2 \leq \frac{c^2}{2} \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-2j\alpha} \quad (2.17)$$

$$\|X - X_n\|_2^2 \leq \frac{c^2}{2} \frac{2^{-2\alpha n}}{2^{2\alpha} - 1} \quad (2.18)$$

Seconde étape :

$$\|X_n - \tilde{X}_{n+m}\|_2^2 = \sum_{j=n+1}^{n+m} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \tilde{x}_{j,k}^2 = \sum_{j=n+1}^{n+m} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \tilde{K}_{n+1,k} 2^{-2j(\tilde{\beta}_{n,k}+\frac{1}{2})} \quad (2.19)$$

Soit $(\hat{K}_{n+1}, \hat{\beta}_n)$ le couple tel que :

$$\hat{K}_{n+1} 2^{-2j(\hat{\beta}_n+\frac{1}{2})} = \max_{(\tilde{K}_{n+1,k}, \tilde{\beta}_{n,k})} \left[\tilde{K}_{n+1,k} 2^{-2j(\tilde{\beta}_{n,k}+\frac{1}{2})} \right] \quad (2.20)$$

Par conséquent on a :

$$\|X_n - \tilde{X}_{n+m}\|_2^2 \leq \hat{K}_{n+1} \sum_{j=n+1}^{n+m} 2^{-2j\hat{\beta}_n} \quad (2.21)$$

D'où

$$\|X_n - \tilde{X}_{n+m}\|_2^2 \leq \hat{K}_n \frac{2^{-2\hat{\beta}_n n} - 2^{-\hat{\beta}_n(n+m)}}{2^{2\hat{\beta}_n} - 1} \quad (2.22)$$

Troisième étape :

$$\|X - \tilde{X}_{n+m}\|_2^2 \leq \left(\frac{c^2}{2}\right) \frac{1}{2^{2\alpha} - 1} 2^{-2\alpha n} + \frac{\hat{K}_n}{2^{2\hat{\beta}_n} - 1} 2^{-2\hat{\beta}_n n} - \frac{\hat{K}_n}{2^{2\hat{\beta}_n} - 1} 2^{-2\hat{\beta}_n(n+m)} \quad (2.23)$$

■

Corollaire 2.4.1 Si $X \in C^\alpha$ alors, quelque soit le nombre d'échelles m ajoutées :

$$\|X - \tilde{X}_{n+m}\|_2^2 \leq \left(\frac{c^2}{2}\right) \frac{1}{2^{2\alpha} - 1} 2^{-2\alpha n} + \frac{\hat{K}_n}{2^{2\hat{\beta}_n} - 1} 2^{-2\hat{\beta}_n n} \quad (2.24)$$

Corollaire 2.4.2 Si $X \in C^\alpha$ alors :

$$\|X - \tilde{X}_{n+\infty}\|_2^2 \leq \left(\frac{c^2}{2}\right) \frac{1}{2^{2\alpha} - 1} 2^{-2\alpha n} + \frac{\hat{K}_n}{2^{2\hat{\beta}_n} - 1} 2^{-2\hat{\beta}_n n} \quad (2.25)$$

Lemme 2.4.1 Soit $t \in [t_{2p+1}^n, t_{2p+2}^n]$ et $X \in C^\alpha$, alors

$$\alpha^{\tilde{X}_{n+m}}(t) = \tilde{\beta}_n(t_{2p+1}^n) \quad (2.26)$$

Preuve

Tous les points t situés dans cet intervalle ont au-dessus d'eux les mêmes coefficients d'ondelettes à partir de l'échelle n . ■

Proposition 2.4.2 Soit X un signal de C^η pour un $\eta > 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n > N$, tout p et tout $t \in (t_p^n, t_{p+1}^n)$, $\alpha_p^{\tilde{X}_n}(t) = \alpha_l^{\tilde{X}_n}(t) \in [\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$, où $\beta = \min(\beta_w(t_l^n), \beta_w(t_{l+1}^n))$.

Ainsi, l'interpolation conserve la régularité locale du signal : une zone lisse (resp. irrégulière) reste lisse (resp. irrégulière) après sur-échantillonnage. D'autre part, l'erreur entre le signal interpolé et le "vrai" signal tend vers 0 à une vitesse qui dépend de la régularité globale de X .

2.5 Résultats numériques

2.5.1 Résultats en une dimension

On a construit sur la figure 2.2 un signal tel que, à une échelle j , les coefficients d'ondelette vérifient $x_{j,k} = \varepsilon_{j,k} \cdot 2^{-j\alpha}$ avec ici $\alpha = 0.8$ avec les $\varepsilon_{j,k}$ uniformément distribués dans $-1, 1$. On a ensuite appliqué l'algorithme sur le signal ce qui nous a permis d'obtenir la figure centrale après avoir effectué un zoom. Après avoir itéré 5 fois la méthode, on a obtenu la figure de droite.

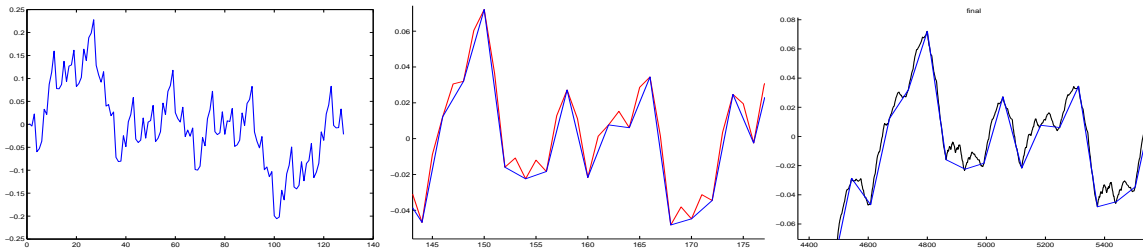


FIG. 2.2: A gauche : On a construit un signal tel que, à une échelle j , les coefficients $x_{j,k} = \varepsilon_{j,k} \cdot 2^{-j\alpha}$. Ici $\alpha = 0.8$. Au milieu : Zoom : Signal original en bleu, signal extrapolé en rouge (une itération). A droite : Zoom : Signal original en bleu, signal extrapolé en noir (5 itérations).

On présente maintenant les résultats obtenus sur un step (figure 2.3) puis sur une fonction de Weierstrass généralisée (figure 2.4). Cette dernière a la particularité de voir sa régularité augmenter avec le temps. L'utilisation de ce signal synthétique va nous servir à montrer le bon comportement de notre algorithme. En effet la figure 2.4 illustre parfaitement la conservation locale de la régularité.

Enfin, pour conclure nos résultats sur les signaux en une dimension, on applique la méthode sur un signal réel en l'occurrence un profil routier (voir chapitre 7).

2.5.2 Interpolation d'images

La méthode que nous proposons donne aussi de bon résultats en deux dimensions. On présente l'interpolation d'un détail de l'image de Lena sur la figure 2.6.

Le dernier exemple est une image représentant une porte japonaise, dont un détail est zoomé par un facteur 8. Notre méthode est comparée à une interpolation bicubique (figures 2.7, 2.8, 2.9 et 2.10). On peut remarquer que, par rapport à notre méthode, l'interpolation bicubique induit plus de perturbations le long des contours, tout en lissant trop l'image dans certaines zones.

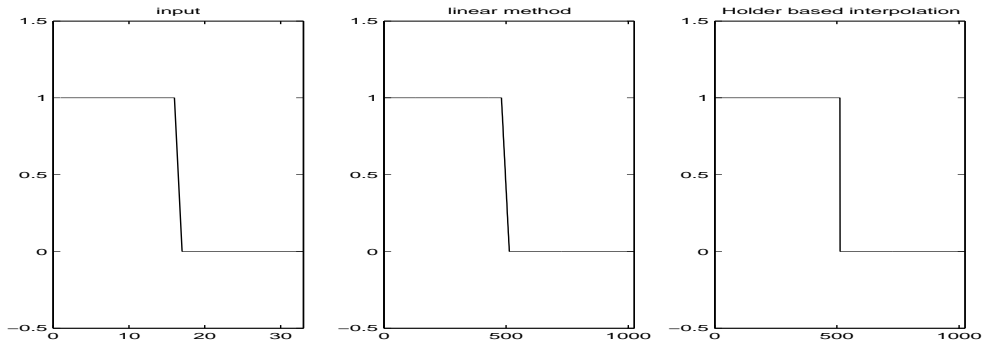


FIG. 2.3: *Interpolation d'une marche (de 32 points à 1024 points). A gauche : signal d'entrée. Au milieu, interpolation linéaire. A droite : interpolation Hölderienne. Notons que la marche n'est pas modifiée par notre technique d'interpolation.*

2.6 Conclusion

Nous avons élaboré une méthode d'interpolation pour les signaux 1D et pour les images qui permet de conserver la régularité Hölderienne en chaque point. On a montré que l'on pouvait majorer l'erreur entre le signal interpolé sur un nombre m de niveaux et le "vrai" signal continu par une quantité qui tend vers zero avec n (le logarithme à base 2 du nombre de points du signal discret de départ) et que l'on conservait bien la régularité.

Cette méthode, à base d'ondelettes, est très simple à mettre en oeuvre d'un point de vue algorithmique. Les résultats obtenus au cours des applications numériques illustrent bien la propriété de conservation de la régularité. En particulier, le traitement sur les images, même avec un grand nombre d'interpolations donne un résultat esthétique très convenable et supérieur aux techniques usuelles et classiques d'interpolation (bicubique).

Nous appliquerons cette technique dans la partie consacrée à l'étude fractale de profils routiers et à l'adhérence pour compenser les limites d'acquisition d'un capteur. Nous montrerons ainsi l'intérêt de cette méthode pour le traitement de signaux 1D réels.

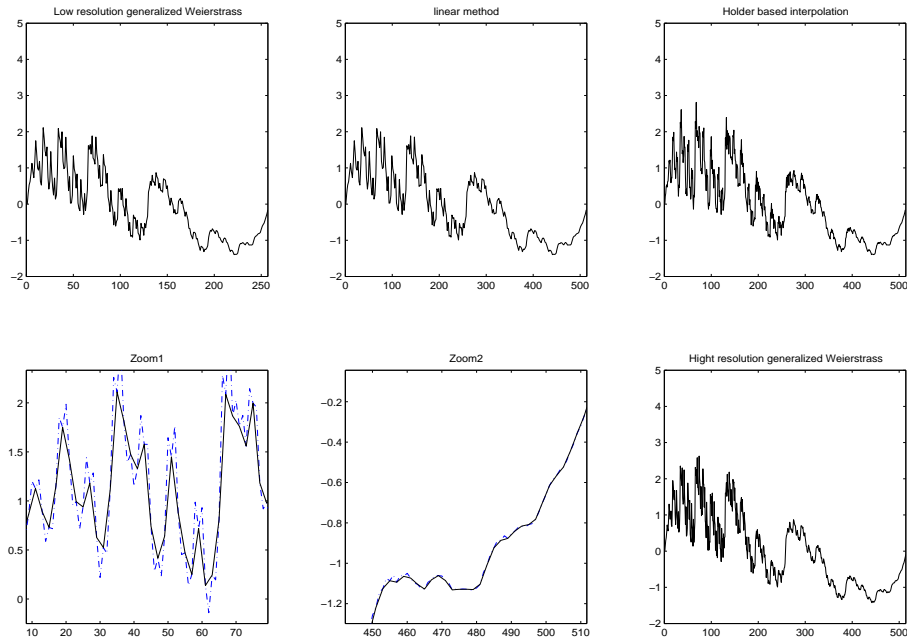


FIG. 2.4: Haut-gauche : fonction de Weierstrass généralisée de régularité $h(t) = t$, basse résolution. Haut-milieu : interpolation linéaire. Haut-droite : interpolation Hölderienne. Bas-gauche : Zoom d'une partie irrégulière, interpolation en pointillés. Bas-milieu : Zoom d'une partie régulière, interpolation en pointillés. Bas-droite : fonction de Weierstrass généralisée haute résolution. La régularité a été conservée.

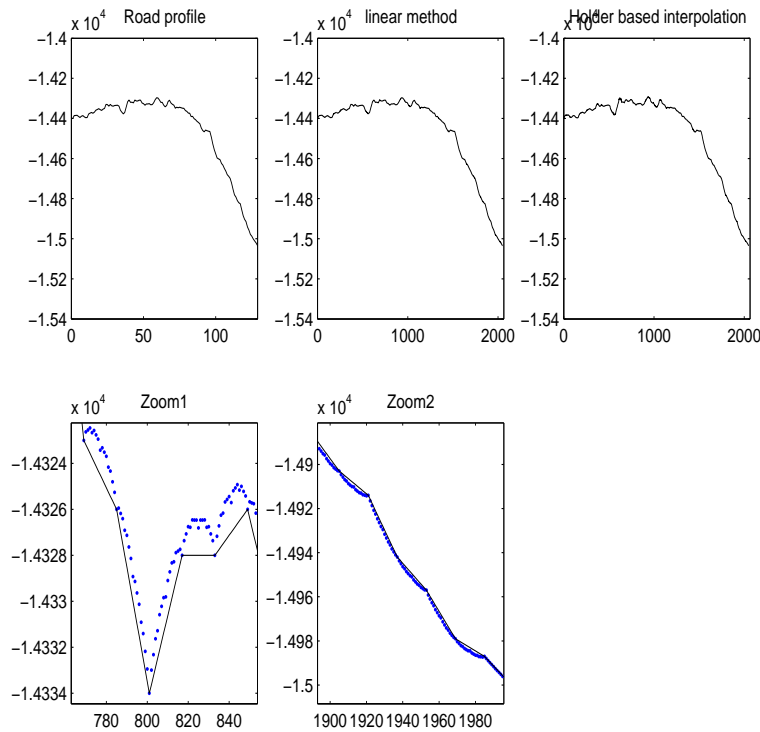


FIG. 2.5: Expérimentation sur un profil routier. Encore une fois, la régularité a été préservée.



FIG. 2.6: 4 interpolations d'un détail de Lena : interpolation bicubique (Photoshop) (haut), interpolation Hölderienne (bas)

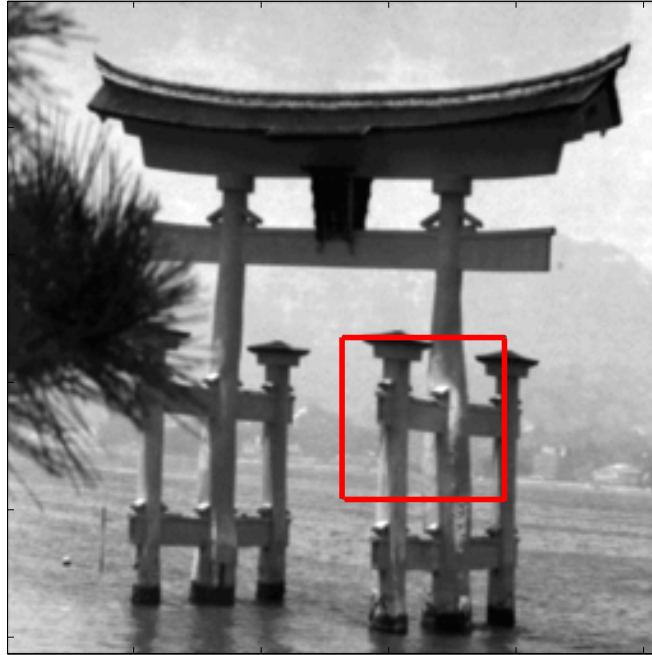


FIG. 2.7: Image de porte japonaise. On a encadré en rouge la zone de l'image sur laquelle nous allons travailler par la suite.

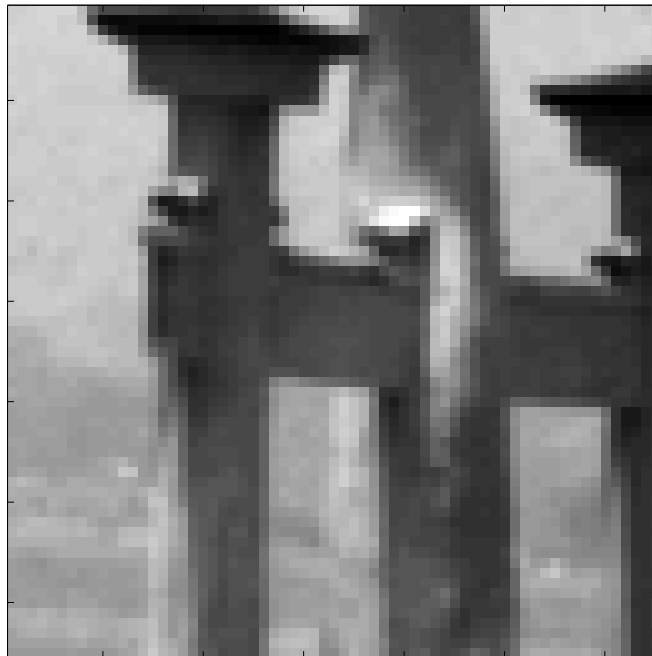


FIG. 2.8: Détail de l'image qui va être sur-échantillonné.



FIG. 2.9: Zoom d'un facteur 8 par interpolation bicubique.



FIG. 2.10: Zoom d'un facteur 8 par conservation de la régularité Hölderienne.

Chapitre 3

Débruitage

3.1 Introduction

Le débruitage est une préoccupation classique en traitement du signal. Le bruit peut provenir d'une faiblesse lors de l'acquisition des données (capteur...), de la détérioration d'un support (disque vinyl, cassette...) ou d'autres facteurs (pertes lors de transmissions...). Dans le cadre de l'analyse des profils routiers et de la modélisation du frottement, nous avons été amené à utiliser un capteur laser afin de mesurer la micro-texture d'un échantillon de chaussée. Lors de ces campagnes d'acquisition de profils, effectuées au Laboratoire Central des Ponts et chaussées de Nantes, nous avons effectué des mesures avec un pas d'échantillonnage de 10 microns et d'autres, plus fines, avec un pas de 2.5 microns. Une analyse préliminaire des signaux échantillonnés à 2.5 microns nous a montré qu'ils étaient bruités. Le bruit perturbant ces signaux provient certainement du fait que l'on atteint les limites de fonctionnement du capteur. Ces mesures constituent cependant les informations les plus fines dont on dispose, par conséquent il serait dommage de ne pas les utiliser. Nous avons donc élaboré des méthodes de débruitage afin de compenser les limites du capteur en essayant d'estimer les profils de chaussée réels à cet échantillonnage à partir des données bruitées dont on dispose.

Un grand nombre de techniques a déjà été proposé pour le débruitage de signaux. Le problème se pose de la manière suivante. On observe un signal Y qui est la combinaison $F(X, B)$ du signal original X et d'un bruit B . En faisant des hypothèses sur le bruit, la structure de X et la fonction F , on essaie de mettre en place une méthode pour obtenir un estimateur \hat{X} du signal original X qui soit optimal dans un certain sens. La plupart du temps, B est supposé indépendant de X , et, dans le cas le plus simple, est choisi blanc, Gaussien et centré. Les hypothèses sur X sont presque toujours liées à sa régularité, par exemple, X peut être C^n par morceau, pour un $n > 1$, ou alors X peut appartenir à un espace de Besov $B_{p,q}^s$. Durant les dix dernières années, les approches à base d'ondelettes [DL92, Don94, AB] ont eu un grand succès dans le domaine du débruitage, à la fois du point de vue théorique et du point de vue appliqué. Sous des hypothèses classiques, il est possible de prouver que des techniques de seuillage simple sont asymptotiquement minimax (voir suite) dans certaines situations. Les expérimentations sur des données réelles donnent de bons résultats dans de nombreux cas. Toutefois ces méthodes ne permettent pas de contrôler la régularité du signal débruité.

Pour notre étude, il est important de préserver la régularité du signal original. En effet, puisque les profils routiers que nous étudions sont destinés à modéliser le frottement, il est fondamental de ne pas trop les lisser, ni trop peu. En effet, le frottement, comme nous le montrons par la suite, dépend de la régularité du signal et les modèles de frottement proposés relèvent aussi d'une certaine notion de la régularité. Pour cette raison, les méthodes que nous proposons d'appliquer à l'étude du frottement offrent un contrôle sur la régularité du signal débruité.

On développe dans ce chapitre un ensemble de techniques de débruitage basées sur la conservation de la régularité locale. Ces techniques sont adaptées à un signal X ayant les caractéristiques suivantes :

- X est partout irrégulier
- La régularité de X peut varier très rapidement
- La fonction de Hölder de X contient une information importante

Dans l'ensemble des travaux présentés ici, on suppose que le bruit est blanc additif, centré et Gaussien. De plus, on admet que l'écart type du bruit σ est connu. Dans le cas contraire, on peut estimer cette quantité par la médiane des coefficients d'ondelettes du signal bruité au dernier niveau de décomposition divisée par 0.6745 (voir [DJ94]).

3.1.1 Risque Minimax, taux de convergence optimal et adaptativité

Les rappels effectués dans ce paragraphe sont inspirés de l'ouvrage [HKPT98]. Une grande partie du travail pour ce chapitre sur le débruitage a été consacré à l'étude du risque engendré par les méthodes proposées. On rappelle donc la définition du risque avec une norme L^p :

Définition 3.1.1 Soit X_n un échantillonnage de X sur 2^n points $[t_1, \dots, t_{2^n}]$. Le risque L^p d'un estimateur \hat{X}_n de X basé sur l'échantillonnage $[t_1, \dots, t_{2^n}]$ est défini par

$$E\|\hat{X}_n - X\|_p^p \text{ pour } 1 \leq p < \infty \quad (3.1)$$

Nous calculons ensuite le risque minimax, c'est à dire le risque généré par le "meilleur" estimateur appartenant à une classe \mathcal{E} que peut fournir une méthode sur le "pire" des signaux d'une classe de fonction V fixée (typiquement une boule d'un espace fonctionnel) (voir [BH79, Sto82],...). Selon que la méthode soit linéaire ou non, on appelle ce risque le risque linéaire minimax ou simplement le risque minimax.

Définition 3.1.2 (Risque minimax)

Le risque minimax dans L^p est donné par :

$$R_n(V, p) = \inf_{\hat{X}_n \in \mathcal{E}} \sup_{X \in V} E\|\hat{X}_n - X\|_p^p \quad (3.2)$$

On décide que \mathcal{E} est l'ensemble des estimateurs mesurables. Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ l'ensemble des estimateurs linéaires.

Définition 3.1.3 (Risque linéaire minimax)

Le risque linéaire minimax dans L^p est donné par :

$$R_n^{lin}(V, p) = \inf_{\hat{X}_n^{lin} \in \mathcal{L}} \sup_{X \in V} E\|\hat{X}_n^{lin} - X\|_p^p \quad (3.3)$$

Nécessairement, le risque minimax linéaire est supérieur au risque minimax sur l'ensemble des estimateurs.

$$R_n^{lin}(V, p) \geq R_n(V, p) \quad (3.4)$$

Définition 3.1.4 (Taux optimal de convergence) La séquence $r_n \simeq R_n(V, p)^{\frac{1}{p}}$ est appelée *taux optimal de convergence* ou *taux minimax de convergence* sur la classe V pour le risque L^p . On dit qu'un estimateur \hat{X}_n de X atteint le *taux optimal de convergence* si

$$\sup_{X \in V} E\|\hat{X}_n - X\|_p^p \simeq R_n(V, p) \quad (3.5)$$

Cette quantité est définie à un facteur constant ou borné près.

Lorsqu'on calcule le risque minimax sur une classe de signaux, ce risque varie en fonction de la norme L^p utilisée. Supposons que l'on se place dans la classe des espaces de Besov $B_{r,q}^s$ et que l'on calcule le risque minimax $R_n(V, p)$ (c'est à dire avec la norme L^p), alors selon les valeurs de r , le risque minimax évolue (voir [DJKP96] pour les preuves et [HKPT98]).

- Si $r \geq p$ (zone homogène) le taux optimal est

$$2^{-\frac{sn}{2s+1}} \quad (3.6)$$

et les estimateurs linéaires atteignent ce taux optimal.

- Si $\frac{p}{2s+1} \leq r \leq p$ (zone intermédiaire) le taux optimal est encore

$$2^{-\frac{sn}{2s+1}} \quad (3.7)$$

et les estimateurs linéaires n'atteignent pas ce taux optimal mais atteignent

$$2^{-\frac{(s-\frac{1}{r}+\frac{1}{p})n}{2(s-\frac{1}{r}+\frac{1}{p})+1}} \quad (3.8)$$

- Si $r \leq \frac{p}{2s+1}$ (zone sparse), le taux optimal est :

$$(n2^{-n})^{\frac{(s-\frac{1}{r}+\frac{1}{p})}{2(s-\frac{1}{r}+\frac{1}{p})+1}} \quad (3.9)$$

ce taux est plus faible que celui des deux précédents cas et dépend de p et de r . Les estimateurs linéaires n'atteignent pas le taux optimal.

Remarque 3.1.1 Dans ce document, par abus de langage, lorsqu'un estimateur atteint le taux de convergence optimal, on dit de lui qu'il est minimax.

Nous avons restreint notre travail au cas $p = 2$. Par conséquent il n'existe pas de zone sparse dans notre étude puisque $s > \frac{1}{r}$ (pour $B_{p,r}^s \subset C(\mathcal{R})$) implique $r > \frac{2}{2s+1}$. Nous nous situons donc dans la zone homogène si $r \geq 2$ et dans la zone intermédiaire si $r < 2$. Les taux optimaux de convergence auxquels on doit se référer pour les estimateurs linéaires sont donc :

$$R_n(V, 2)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{sn}{2s+1}} \quad (3.10)$$

$$R_n^{lin}(V, 2)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{sn}{2s+1}} \quad \text{si } r \geq 2 \quad (3.11)$$

$$R_n^{lin}(V, 2)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{(s-\frac{1}{r}+\frac{1}{2})n}{2(s-\frac{1}{r}+\frac{1}{2})+1}} \quad \text{si } r < 2 \quad (3.12)$$

Pour certain estimateurs, la possibilité d'atteindre le taux optimal de convergence nécessite la connaissance d'une information à priori sur le signal (en l'occurrence la régularité pour nous). Cette contrainte constitue un inconvénient pour ces estimateurs. Dans le cas contraire on parle d'estimateur adaptatif. Pour des résultats généraux sur l'adaptativité, voir entre autres les travaux de Lepskii ([Lep90], [Lep91], [Lep92]...) et de Birgé et Massart ([BM97]). Plus précisément, soit F_α une classe de fonction indexée par un paramètre α appartenant à un espace A donné. On note $R_n(\alpha, p) = \inf_{\hat{X}} \sup_{X \in F_\alpha} E \|\hat{X} - X\|_p^p$ le risque minimax sur F_α pour le coût L_p .

Définition 3.1.5 estimateur adaptatif

L'estimateur X^* est appelé estimateur adaptatif pour le coût L_p et la classe $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ si pour tout $\alpha \in A$ il existe une constante $c_\alpha > 0$ telle que :

$$\sup_{X \in F_\alpha} E_X \|X^* - X\|_p^p \leq c_\alpha R_n(\alpha, p) \quad (3.13)$$

3.1.2 Quelques méthodes de débruitage par ondelettes

Après avoir rappelé la théorie générale, on va s'intéresser aux méthodes de débruitage par ondelettes. Les techniques de débruitage par ondelettes sont très populaires et les méthodes que nous avons développées et que nous allons présenter dans la suite de la thèse sont elles aussi à base d'ondelettes. L'idée de base du débruitage par ondelettes est la suivante. Pour un signal "structuré", X , il existe "peu" de "gros" coefficients $x_{j,k}$ et "beaucoup" de "petits" coefficients. Inversement, pour un bruit blanc B , les coefficients d'ondelettes sont uniformément distribués par définition (à condition d'utiliser une base orthonormale d'ondelettes). Si on observe $Y = X + B$, alors la plupart des coefficients $y_{j,k} = x_{j,k} + b_{j,k}$ sont faibles et quelques uns sont grands. Une idée naturelle pour débruiter et obtenir un estimateur $\hat{x}_{j,k}$ de chacun des coefficients $x_{j,k}$ est donc de mettre les petits coefficients à zéro et de conserver les gros (ou les diminuer éventuellement). Nous expliquons rapidement quelques implémentations de cette idée dans ce paragraphe inspiré de [AB] et [HKPT98].

Il existe trois grandes classes de seuillage. Tout d'abord le seuillage local : chaque coefficient est sujet à un seuillage indépendamment des autres coefficients. Les deux seuillages les plus connus de cette catégorie sont le Hard et le Soft Thresholding dont on rappelle les règles de décision.

$$HT : \hat{x} = y \cdot 1_{|y| \geq \lambda} \quad (3.14)$$

$$ST : \hat{x} = \text{sign}(y)(|y| - \lambda)_+ \quad (3.15)$$

De nombreuses variantes de ces seuillages existent. Plusieurs seuils sont envisageables (voir [AB] pour un exposé plus complet). Si le seuil est identique pour tous les coefficients, alors on parle d'estimateur avec seuil fixe, sinon on parle de seuillage local avec seuil variable. On donne les seuils les plus courants et qui garantissent l'aspect minimax de ces estimateurs à un facteur n prêt.

- Le seuil minimax λ^M

$$\lambda^M = \hat{\sigma} \lambda_n^*$$

avec

$$\lambda_n^* = \inf_{\lambda} \sup_x \left\{ \frac{R_{\lambda}(x)}{2^{-n} + R_{\text{oracle}}(x)} \right\}$$

avec $\hat{\sigma}$ l'écart type du bruit estimé, $R_{\lambda}(x) = E(\hat{x}_{\lambda}(y) - x)^2$ et $R_{\text{oracle}}(x)$ le risque idéal obtenu grâce à un oracle. Les deux oracles les plus courants sont le DLP (diagonal linear projection) qui nous indique si on doit conserver ou non un coefficient et le DLS (diagonal linear shrinker) qui nous indique de combien on doit atténuer chaque coefficient. Les risques obtenus pour ces oracles sont :

$$R_{\text{oracle}}^{DLP}(x) = \min(x^2, 1)$$

$$R_{\text{oracle}}^{DLS}(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

On ne peut utiliser le seuil minimax sous cette forme, ce seuil a été calculé (voir [DJ94]) et ses valeurs selon le nombre de points du signal ont été regroupées dans des tables (voir [AB]).

- Le seuil universel $\lambda^U = \hat{\sigma} 2^{-\frac{n}{2}} \sqrt{2n}$

Le seuil universel est plus grand que le seuil minimax ce qui rend l'estimateur du signal original plus lisse. Par contre ce seuil assure avec une haute probabilité que le signal nul perturbé par du bruit sera correctement estimé à zéro. Ce résultat découle de la propriété suivante :

Si X_1, \dots, X_n sont i.i.d. et $N(0, 1)$ alors,

$$P \left(\max_{1 \leq j \leq n} |X_j| \sqrt{2 \log(n)} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \log(n)}} \quad \text{qd } n \rightarrow \infty$$

- Le seuil SURE

Le seuil SURE (Stein's Unbiased Risk) est le seuil minimisant la quantité SURE :

$$SURE(\lambda, X) = S - 2 \cdot \#\{i, |X_i| \leq \lambda\} + [\min(|X_i|, \lambda)]^2$$

avec $X_i = \frac{y_{j,k}}{\hat{\sigma}}$ et $S = 2^{j-1}$.

$$\lambda_j^S = \underset{0 \leq \lambda \leq \lambda_j^U}{\text{argmin}} \left[SURE \left(\lambda, \frac{y_{j,k}}{\hat{\sigma}} \right) \right] \quad \text{avec } \lambda_j^U = \hat{\sigma} \sqrt{2 \log(2^j)}$$

D'autres seuils existent, notamment, certains sont obtenus par des techniques Bayésiennes (voir section 3.8.4).

Il existe une autre catégorie de seuillage, le seuillage global. Dans ce cas, un niveau entier de coefficient subit le même traitement (c'est à dire est conservé ou non). Dans ce cadre, G. Kerkycharian, D. Picard et K. Tribouley ont proposé les deux seuillages suivant de forme similaire au Hard et au Soft Thresholding respectivement :

$$GHT : \hat{x} = y \cdot 1_{S_j(p) > 2^{j-\frac{np}{2}}} \quad (3.16)$$

$$GST : \hat{x} = y \cdot \left(\frac{S_j(p) - 2^{j-\frac{np}{2}}}{S_j(p)} \right)_+ \quad (3.17)$$

avec $p \geq 1$ un paramètre et $S(p)$ une certaine statistique décrite dans [KPT96].

Enfin il existe des seuillages par blocs. Il s'agit d'une procédure intermédiaire entre le seuillage local et le seuillage global introduite par D. Picard, G. Kerkycharian et P. Hall. La technique consiste à diviser les entiers en blocs ne se recouvrant pas et de longueur l . On définit le bloc k par :

$$B_k = \{m, (k-1)l + 1 \leq m \leq kl\}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.18)$$

On considère

$$b_{j,k} = \frac{1}{l} \sum_{m \in B_k} x_{j,m}^2$$

On estime $b_{j,k}$ par

$$\hat{b}_{j,k} = \frac{1}{l} \sum_{m \in B_k} \hat{x}_{j,m}^2$$

On effectue ensuite un seuillage sur ce coefficient pour traiter le bloc avec un seuil de $c2^{-n}$ (avec c une constante paramétrant le seuil). La plupart du temps un seuillage par bloc donne de meilleurs résultats asymptotiques qu'un seuillage local car il permet de s'affranchir du facteur n additionnel dans le taux de convergence.

3.1.3 Structure du chapitre

Nous commençons ce chapitre par une étude préliminaire déterminant l'impact du bruit sur la régularité d'un signal (section 3.2). La première méthode de débruitage proposée est le **Wavelet Pumping** (section 3.4) qui consiste à multiplier tous les coefficients d'ondelette d'une échelle j par un même coefficient $B_j = 2^{-j(\Delta\alpha)}$ qui assure une augmentation contrôlée de la régularité. On propose ensuite une extension de cette technique, le **débruitage multifractal** (section 3.6). Pour cette seconde méthode, la forme du coefficient multiplicateur n'est plus prescrite. Ce coefficient est obtenue par minimisation du risque sous la contrainte d'obtenir en sortie la bonne régularité. Il s'agit d'une méthode très complexe présentant certains inconvénients. Ces deux méthodes de débruitage par ondelette sont linéaires, et donc pas toujours minimax selon l'espace de Besov $B_{p,q}^s$ dans lequel on se trouve (e.g. si $p < 2$). De plus elles sont non-adaptatives. On propose alors de marier dans la section suivante l'une de nos méthodes évoquée plus haut, le multifractal pumping, avec une méthode non-linéaire adaptative et simple, le Hard Thresholding. La méthode proposée, sous le nom de **Wavelet Non-Linear coefficients Pumping** (section 3.7), aura ainsi l'avantage d'être adaptative en plus de contrôler la régularité du signal débruité. Pour conclure ce chapitre sur le débruitage, on présente une méthode de **débruitage multifractal Bayésien** (section 3.8). Cette technique repose sur la connaissance de la régularité locale minimale du signal. Cette

hypothèse se traduit sous la forme de contraintes sur le spectre multifractal du signal. Ces contraintes sont ensuite utilisées dans un cadre Bayésien pour estimer les coefficients d'ondelette du signal original à partir de ceux du signal perturbé par du bruit. Cette méthode est bien adaptée au traitement des signaux irréguliers tels que les signaux (multi-)fractals et peut être utile pour le traitement de données de turbulences, bio-médicales, sismiques ou de profils routiers comme nous le montrons par la suite.

Ce chapitre a fait l'objet de deux publications en congrès internationaux avec comité de lecture et actes :

- [LV03b] P. Legrand, J. Lévy Véhel, "Local regularity-based image denoising", ICIP03, Barcelona, Spain, IEEE International Conference on Image Processing, September 14-17, 2003.
- [VL03] J. Lévy Véhel, P. Legrand, "Bayesian multifractal signal denoising", ICASSP03, Hong Kong, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing.

*La plupart des méthodes de débruitage proposées dans ce document ont été implémentées dans la boîte à outils **FracLab**.*

3.2 Action du bruit sur la régularité Höldérienne d'un signal

Nous avons présenté trois estimateurs de la régularité Höldérienne dans le chapitre 1. Dans ce chapitre, nous manipulons l'un d'entre eux (*RCO*) afin de remonter la régularité des signaux bruités. On considère que le débruitage est équivalent à une augmentation de la régularité du signal observé. En effet, il est généralement vrai que la régularité locale des observations bruitées est inférieure à celle du signal original. C'est dans ce cadre que nous proposons une étude préliminaire dans cette section afin d'évaluer le comportement de notre estimateur lors de l'ajout de bruit sur un signal. On espère ainsi pouvoir adapter les paramètres de nos méthodes de débruitage pour retrouver la régularité du signal original.

Dans cette section, on motive aussi l'utilisation de cet estimateur. En théorie, la régularité d'un signal bruité par un bruit blanc additif Gaussien vaut $-\frac{1}{2}$ en chaque point. Pourtant, lorsqu'on considère un signal bruité par deux bruits de variances différentes, à résolution finie, il existe visuellement une différence de régularité (voir figure 3.1). L'estimateur que nous utilisons tient compte de cette différence et estime deux régularités différentes pour ces signaux. D'autre part, si on ajoute un même bruit à deux signaux de régularités différentes (voir figure 3.2), il existe là aussi visuellement une différence et l'estimateur parvient à dissocier les régularités comme nous allons le montrer dans cette section. On peut noter que comme on le voit sur la figure 3.2, l'évolution de la régularité du signal bruité n'est pas linéaire en fonction de la régularité de départ mais nous reviendrons sur ce point.

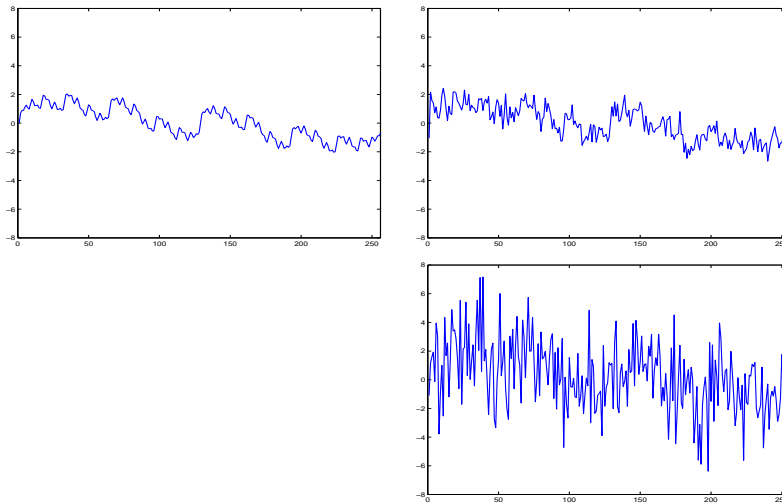


FIG. 3.1: Fonction de Weierstrass de régularité prescrite 0.4 (en haut à gauche) perturbée par un bruit Gaussien additif d'écart type 0.5 (en haut à droite) et 2 (en bas à droite). Visuellement ces signaux sont assez différents au point de vue de la régularité. L'estimateur de régularité *RCO* donne respectivement les valeurs 0.4279 pour le signal original, 0.3371 pour le premier signal bruité et 0.0269 pour le dernier signal.

3.2.1 Estimation de la régularité d'un signal bruité en un point

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, on peut estimer la régularité α_b en chacun des points du signal bruité par la formule suivante, avec $y_{j,k}$ les coefficients d'ondelette du signal bruité Y obtenus par une transformée en ondelettes discrète sur n échelles, $K_n = \frac{12}{(n-1)n(n+1)}$ et $s_j = j - \frac{n+1}{2}$.

$$\alpha_b(n, x_0) = -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j \log_2 |y_{j,k}| \quad (3.19)$$

On rappelle que l'on écrit l'indice k pour simplifier les notations et qu'en réalité les coefficients d'onde-

lette au dessus de x_0 vérifiant $k = \lfloor \frac{x_0+1}{2^{n-j+1}} \rfloor$.

On rappelle que le modèle de bruit utilisé est un bruit blanc gaussien additif de variance σ^2 . Ce qui se traduit de la manière suivante pour les coefficients d'ondelette (on utilise des bases orthonormées d'ondelettes).

$$y_{j,k} = x_{j,k} + \frac{\sigma}{\sqrt{2^n}} z_{j,k} \quad (3.20)$$

avec $x_{j,k}$ les coefficients d'ondelette du signal non perturbé, $y_{j,k}$ les coefficients d'ondelette du signal bruité. Les coefficients de bruit $z_{j,k}$ sont *iid* et $N(0, 1)$.

Dans cette section nous allons regarder l'espérance de la régularité au point x_0 du signal bruité.

$$E[\log_2 |y_{j,k}|] = \log_2 |x_{j,k}| + E \left[\log_2 \left(\left| 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2^n}} \frac{z_{j,k}}{x_{j,k}} \right| \right) \right] \quad (3.21)$$

Par conséquent, on peut faire ressortir la régularité estimée α du signal X en x_0 :

$$E[\alpha_b(n, x_0)] = -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j \log_2 |x_{j,k}| - K_n \sum_{j=1}^n s_j E \left[\log_2 \left(\left| 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2^n}} \frac{z_{j,k}}{x_{j,k}} \right| \right) \right] \quad (3.22)$$

$$E[\alpha_b(n, x_0)] = \alpha(n, x_0) - K_n \sum_{j=1}^n s_j E \left[\log_2 \left(\left| 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2^n}} \frac{z_{j,k}}{x_{j,k}} \right| \right) \right] \quad (3.23)$$

Tout le travail repose sur l'évaluation de la quantité $E \left[\log_2 \left(\left| 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2^n}} \frac{z_{j,k}}{x_{j,k}} \right| \right) \right]$.

Pour estimer cette quantité, nous allons utiliser le lemme 3.2.1.

Lemme 3.2.1

$$E[\log_2 |1 + a.z|] \sim -\frac{a^2}{2 \ln(2)} \text{ lorsque } a \rightarrow 0 \quad (3.24)$$

$$E[\log_2 |1 + a.z|] \sim \log_2 |a| \text{ lorsque } a \rightarrow \infty \quad (3.25)$$

Preuve

Lorsque a tend vers zero :

On s'intéresse à la quantité

$$I = \frac{1}{a^2 \ln(2)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(|1 + az|) e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a^2}{2} \right] \quad (3.26)$$

$$I = \frac{1}{a^2 \ln(2)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(|1 + az|) e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] \quad (3.27)$$

Car $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$.

$$I = \frac{1}{a^2 \ln(2)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(|1 + az|) e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] \quad (3.28)$$

Car $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$.

$$I = \frac{1}{a^2 \ln(2)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln(|1+az|) + \frac{a^2}{2} z^2 - az \right] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] \quad (3.29)$$

On procède à une intégration par parties.

$$I = \frac{1}{a^2 \ln(2) \sqrt{2\pi}} \left[\left[-ze^{-\frac{z^2}{2}} \left[\frac{(1+az) \ln|1+az|}{a} - z - \frac{az^2}{2} + \frac{a^2 z^3}{6} \right] \right]_{-\infty}^{+\infty} \right. \\ \left. + \frac{1}{a^2 \ln(2) \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(1+az) \ln|1+az|}{a} - z - \frac{az^2}{2} + \frac{a^2 z^3}{6} \right] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] \quad (3.30)$$

$$I = \frac{1}{a^2 \ln(2) \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(1+az) \ln|1+az|}{a} - z - \frac{az^2}{2} + \frac{a^2 z^3}{6} \right] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.31)$$

On pose $u = az$.

$$I = \frac{1}{a^2 \ln(2) \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(1+u) \ln|1+u|}{a} - \frac{u}{a} - \frac{u^2}{2a} + \frac{u^3}{6a} \right] \frac{u}{a} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \frac{du}{a} \quad (3.32)$$

On pose $b = \frac{1}{a^2}$.

$$I = \frac{1}{\ln(2) \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1+u) \ln|1+u| - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right] ub^2 \sqrt{b} e^{-\frac{u^2 b}{2}} du \quad (3.33)$$

On pose $g(b, u) = b^2 \sqrt{b} e^{-\frac{u^2 b}{2}}$.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} g(b, u) = 0 \quad (3.34)$$

On va majorer $|g(b, u)|$ pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée.

$$\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{u^2 b}{2}} + b^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{u^2 b}{2}} \quad (3.35)$$

Cette dérivée s'annule en $b = \frac{5}{u^2}$. La fonction $g(b, u)$ est positive pour $b \in]0, \infty[$ avec un seul extremum et

$$\lim_{b \rightarrow 0} g(b, u) = \lim_{b \rightarrow \infty} g(b, u) = 0$$

Par conséquent cet extremum est un maximum. Donc,

$$|g(b, u)| \leq g\left(\frac{5}{u^2}\right) = \frac{25\sqrt{5}}{|u|^5} e^{-\frac{5}{2}}$$

On note

$$h(u, b) = g(u, b) \left[(1+u) \ln|1+u| - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right] u \quad (3.36)$$

la quantité sous l'intégrale 3.33.

$$\text{On a : } \lim_{b \rightarrow \infty} h(b, u) = 0 \quad (3.37)$$

Et d'après ce qui précède,

$$|h(b, u)| \leq \frac{25\sqrt{5}}{|u|^5} e^{-\frac{5}{2}} \left| (1+u) \ln|1+u| - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right| \cdot |u| \quad (3.38)$$

Ce majorant de $|h(b, u)|$ n'est pas intégrable en l'infini et non-défini en zéro. On ne peut donc pas appliquer directement le théorème de convergence dominée.

Dans un premier temps, on prolonge cette fonction par continuité en $u = 0$. En effet,

$$(1 + u) \ln |1 + u| = u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{12} + o(u^5) \text{ au voisinage de zéro} \quad (3.39)$$

Ce qui entraîne le prolongement en zéro par $\frac{25\sqrt{5}}{12}e^{-\frac{5}{2}}$.

Dans un second temps, nous allons nous affranchir du problème à l'infini.

Nous sommes dans le cas où a tend vers zéro alors on peut supposer que $a < 1$ ce qui implique $b > 1$. Le maximum de $g(b, u)$ est atteint en $b = \frac{5}{u^2}$, qui sera supérieur à 1 si $|u| < \sqrt{5}$ et inférieur à 1 dans le cas contraire. Donc, si $|u| > \sqrt{5}$, pour $b \in]1, \infty[$, le maximum est atteint pour $b = 1$.

Par conséquent,

$$|h(b, u)| \leq \frac{25\sqrt{5}}{|u|^5} e^{-\frac{5}{2}} \left[(1 + u) \ln |1 + u| - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right] u \text{ si } |u| \leq \sqrt{5} \quad (3.40)$$

$$\leq e^{-\frac{u^2}{2}} \left[(1 + u) \ln |1 + u| - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right] u \text{ si } |u| > \sqrt{5} \quad (3.41)$$

Par conséquent, $|h(u, b)|$ est majorée par une fonction continue par morceau pour $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cette fonction est prolongeable par continuité en $u = 0$ et intégrable. On peut par conséquent appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui nous donne :

$$\lim_{a \rightarrow 0} I(a) = 0 \quad (3.42)$$

D'où

$$E[\log_2 |1 + az|] \sim -\frac{a^2}{2 \ln(2)} \text{ lorsque } a \text{ tend vers zéro} \quad (3.43)$$

Lorsque a tend vers l'infini :

On considère l'intégrale suivante,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln(2)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |1 + az| e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{\ln(a)}{\ln(2)} \quad (3.44)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln(2)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left| \frac{1}{a} + z \right| e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.45)$$

On effectue une intégration par parties, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln(2)} \left[\left[\left(z + \frac{1}{a} \right) \left(\ln \left| \frac{1}{a} + z \right| - 1 \right) e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln(2)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(z + \frac{1}{a} \right) \left(\ln \left| \frac{1}{a} + z \right| - 1 \right) z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln(2)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(z + \frac{1}{a} \right) \left(\ln \left| \frac{1}{a} + z \right| - 1 \right) z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] \quad (3.47)$$

On note $f(a, z) = \left(z + \frac{1}{a} \right) \left(\ln \left| \frac{1}{a} + z \right| - 1 \right)$. On a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f(a, z) = z(\ln |z| - 1) \quad (3.48)$$

Nous allons maintenant majorer $f(a, z)$ pour appliquer le théorème de convergence dominée. Nous nous intéressons au cas où a tend vers l'infini donc on peut limiter l'analyse de $f(a, z)$ sur $a \in [1, \infty[$.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{1}{a^2} \ln \left| z + \frac{1}{a} \right| \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{1-z} \text{ ou } a = -\frac{1}{1+z} \quad (3.50)$$

$$f\left(\frac{1}{1-z}, z\right) = -1 \quad (3.51)$$

$$f\left(-\frac{1}{1+z}, z\right) = 1 \quad (3.52)$$

$$f(1, z) = (z+1)(\ln |z+1| - 1) \quad (3.53)$$

Par conséquent, à z fixé, pour $a > 1$,

$$|f(a, z)| \leq \max(|z(\ln |z| - 1)|, 1, |z+1| \cdot |\ln |z+1| - 1|) \quad (3.54)$$

On pose $t(a, z) = \left(z + \frac{1}{a}\right) (\ln \left|\frac{1}{a} + z\right| - 1) z e^{-\frac{z^2}{2}}$ la quantité sous l'intégrale 3.47. D'après la limite de f lorsque a tend vers l'infini, on a :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} t(a, z) = z^2 (\ln |z| - 1) e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (3.55)$$

Et $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln(2)} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 (\ln |z| - 1) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = c_1$ (environ -0.916).

$$|t(a, z)| \leq \left| z + \frac{1}{a} \right| \left| \ln \left| \frac{1}{a} + z \right| - 1 \right| |z| e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (3.56)$$

D'où, pour $a > 1$,

$$|t(a, z)| \leq \max(|z(\ln |z| - 1)|, 1, |z+1| \cdot |\ln |z+1| - 1|) |z| e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (3.57)$$

Par conséquent, on majore $|t(a, z)|$ par une fonction intégrable, ce qui nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée. Ce qui nous donne :

$$V \xrightarrow{a \rightarrow \infty} c_1 \quad (3.58)$$

D'où

$$E[\log_2 |1 + az|] \sim \log_2 |a| \text{ lorsque } a \rightarrow \infty \quad (3.59)$$

■

Revenons maintenant au calcul de l'estimation de la régularité du signal bruité. On utilise le lemme 3.2.1 avec $a = a_{j,k} = \frac{\sigma}{\sqrt{2^n x_{j,k}}}$.

Pour simplifier les notations, on ne mentionne pas l'indice k de $a_{j,k}$.

On note $Q(a_j) = E[\log_2(|1 + a_j z_{j,k}|)]$. Q est paire, on peut donc supposer que a_j est positif sans perdre de généralité.

Soit une fonction τ de \mathbb{N} sur \mathbb{R} qui tend vers l'infini avec n .

$$E[\alpha_b(n, x_0)] = \alpha(n, x_0) - K_n \left[\sum_{\substack{j=1 \\ a_j \leq \frac{\sigma}{\tau(n)}}}^n s_j Q(a_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ \frac{\sigma}{\tau(n)} \leq a_j \leq \sigma \tau(n)}}^n s_j Q(a_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \tau(n)}}^n s_j Q(a_j) \right] \quad (3.60)$$

Nous allons maintenant calculer la limite de $E[\alpha_b(n, x_0)]$ lorsque n tend vers l'infini.

Proposition 1 (Legrand, Lévy-Véhel)

Soit une fonction τ de \mathbb{N} sur \mathbb{R} qui tend vers l'infini avec n et telle que $\log_2(\tau(n))$ tend moins vite que n vers l'infini. Si la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \tau(n)}}^n s_j Q(a_j) \right]$$

existe et si l'estimateur de la régularité appliqué au signal original $\alpha(n, x_0)$ converge vers α , alors :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_b(n, x_0)] = \alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \tau(n)}}^n s_j Q(a_j) \right]} \quad \text{avec } a_j = \frac{\sigma}{\sqrt{2^n} x_{j,k}} \quad (3.61)$$

Preuve

On considère

$$(1) = K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \leq \frac{\sigma}{\tau(n)}}}^n s_j Q(a_j) \quad (3.62)$$

$$|(1)| \leq K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \leq \frac{\sigma}{\tau(n)}}}^n |s_j| \cdot |Q(a_j)| \sim K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \leq \frac{\sigma}{\tau(n)}}}^n |s_j| \left| \frac{a_j^2}{2 \ln(2)} \right| \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (3.63)$$

Or,

$$K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \leq \frac{\sigma}{\tau(n)}}}^n |s_j| \left| \frac{a_j^2}{2 \ln(2)} \right| \leq \frac{\sigma^2 K_n}{2 \ln(2) (\tau(n))^2} \sum_{j=1}^n |s_j| \sim \frac{\sigma^2}{8 \ln(2) n (\tau(n))^2} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (3.64)$$

Par conséquent $|(1)|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On s'intéresse maintenant à :

$$(2) = K_n \sum_{\substack{j=1 \\ \frac{\sigma}{\tau(n)} \leq a_j \leq \sigma \cdot \tau(n)}}^n s_j Q(a_j) \quad (3.65)$$

On considère la fonction $\frac{Q(a_j)}{\log_2(a_j)}$. Cette fonction tend vers zero lorsque a_j tend vers zero puisque $Q(a_j)$ est équivalent à $-\frac{a^2}{2\ln(2)}$ en zero. De plus, cette fonction tend vers une constante lorsque a_j tend vers l'infini car $Q(a_j)$ est équivalent à $\log_2(a_j)$ en l'infini. $Q(a_j)$ est continue sur \mathbb{R}^* et prolongeable par continuité par zero en zero. Donc $\frac{Q(a_j)}{\log_2(a_j)}$ est bornée sur \mathbb{R}^* . Il en est de même pour $\left| \frac{Q(a_j)}{\log_2(a_j)} \right|$. Par conséquent, il existe une constante positive c_j telle que $|Q(a_j)| \leq c_j |\log_2(a_j)|$. On note $c = \max(c_j)$. On se sert de ce résultat pour majorer $|(2)|$.

$$|(2)| \leq K_n \sum_{\substack{j=1 \\ \frac{\sigma}{\tau(n)} \leq a_j \leq \sigma \cdot \tau(n)}}^n |s_j| |Q(a_j)| \leq K_n \sum_{\substack{j=1 \\ \frac{\sigma}{\tau(n)} \leq a_j \leq \sigma \cdot \tau(n)}}^n |s_j| \cdot c \cdot |\log_2(a_j)| \quad (3.66)$$

$$|(2)| \leq K_n \cdot c \cdot \log_2(\tau(n)) \sum_{\substack{j=1 \\ \frac{\sigma}{\tau(n)} \leq a_j \leq \sigma \cdot \tau(n)}}^n |s_j| \leq K_n \cdot c \cdot \log_2(\tau(n)) \sum_{j=1}^n |s_j| \quad (3.67)$$

Or,

$$K_n \log_2(\tau(n)) \sum_{j=1}^n |s_j| \sim \frac{\log_2(\tau(n))}{4n} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \quad (3.68)$$

Par conséquent, si $\log_2(\tau(n))$ tend vers l'infini moins vite que n , alors $|(2)|$ tend vers zero lorsque n tend vers l'infini.

Ces résultats nous permettent de dire que (1) et (2) ne comptent pas dans le comportement asymptotique de $E[\alpha_b]$ à condition que (3) = $K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \cdot \tau(n)}}^n s_j Q(a_j)$ ne tende pas vers zero. Dans ce cas, on a :

$$E[\alpha_b(n, x_0)] \sim \alpha(n, x_0) - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \cdot \tau(n)}}^n s_j Q(a_j) \quad (3.69)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_b] = \alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \cdot \tau(n)}}^n s_j Q(a_j) \quad (3.70)$$

■

Remarque 3.2.1 Dans le cas où (3) tend vers 0, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_b] = \alpha \quad (3.71)$$

Corollaire 3.2.1 (Legrand, Lévy-Véhel)

Soit $\tau(n)$ une fonction qui tend vers l'infini et telle que $\log_2(\tau(n))$ tend moins vite que n vers l'infini. Si

deux des limites suivantes existent

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma.\tau(n)}}^n s_j \log_2(a_j) \right] \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma.\tau(n)}}^n j \log_2(a_j) \right] \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma.\tau(n)}}^n \frac{n+1}{2} \log_2(a_j) \right] \end{aligned}$$

et si l'estimateur de la régularité appliqué au signal original $\alpha(n, x_0)$ converge vers α , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_b(n, x_0)] = \alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma.\tau(n)}}^n s_j \log_2(a_j) \right] \quad (3.72)$$

avec $a_j = \frac{\sigma}{\sqrt{2^n} x_{j,k}}$.

Preuve Si deux des limites suivantes existent

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma.\tau(n)}}^n j \log_2(a_j) \right] \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma.\tau(n)}}^n \frac{n+1}{2} \log_2(a_j) \right] \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma.\tau(n)}}^n s_j \log_2(a_j) \right] \end{aligned}$$

alors on peut écrire que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma.\tau(n)}}^n s_j \log_2(a_j) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma.\tau(n)}}^n j \log_2(a_j) \right] \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma.\tau(n)}}^n \frac{n+1}{2} \log_2(a_j) \right] \end{aligned}$$

Lorsque (a_j) tend vers l'infini, $Q(a_j)$ est équivalent à $\log_2(a_j)$. Les termes sous les deux sommes de droite sont positifs donc on a l'existence des deux limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \cdot \tau(n)}}^n j Q(a_j) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \cdot \tau(n)}}^n \frac{n+1}{2} Q(a_j) \right]$$

et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \cdot \tau(n)}}^n s_j \log_2(a_j) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \cdot \tau(n)}}^n j Q(a_j) \right] \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \cdot \tau(n)}}^n \frac{n+1}{2} Q(a_j) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \geq \sigma \cdot \tau(n)}}^n s_j Q(a_j) \right] \end{aligned}$$

On se sert de la proposition 1 pour conclure. ■

3.2.2 Signal en $2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$

On applique les résultats précédents sur un signal dont les coefficients sont en $2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$. Cette classe de signaux, saturant l'espace de Hölder C^α et que l'on notera $PART(\alpha)$, est définie maintenant.

Définition 3.2.1

$$PART(\alpha) := \left\{ X, W(X) = \{\varepsilon_{j,k} \cdot 2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}\}, \varepsilon_{j,k} \text{ iid dans } \{-1, 1\} \right\} \quad (3.73)$$

Proposition 3.2.1 (Legrand, Lévy-Véhel)

Pour un signal $X \in PART(\alpha)$,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_b(n)] = \frac{\alpha - 2\alpha^2}{(1 + 2\alpha)^2}} \quad (3.74)$$

Preuve

Soit $X \in PART(\alpha)$, alors $a_j > \sigma \cdot \tau(n)$ si et seulement si $j > j_1 = \lfloor \frac{\log_2(\tau(n))}{\alpha + \frac{1}{2}} + \frac{n}{2\alpha + 1} \rfloor$. On rappelle que $\log_2(\tau)$ croît vers l'infini moins vite que n mais peut croître aussi lentement que l'on souhaite. Par conséquent, $a_j > \sigma \cdot \tau(n)$ si et seulement si $j > \lfloor \frac{n(1+\varepsilon)}{2\alpha+1} \rfloor$ pour tout ε . Donc on considère dans notre somme les termes pour les j supérieurs à $j_0 = \lfloor \frac{n}{2\alpha+1} \rfloor$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_b] = \alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(a_j) \quad (3.75)$$

Or pour un signal dans cette classe, on a $\log_2(a_j) = \left[\log_2(\sigma) - \frac{n}{2} + j \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right]$. Par conséquent, les limites $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{j=j_0+1}^n j \log_2(a_j) \right]$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{j=j_0+1}^n \frac{n+1}{2} \log_2(a_j) \right]$ existent et leur différence vaut

$$\frac{2(2\alpha^2 + 3\alpha)\alpha}{(1 + 2\alpha)^2} \quad (3.76)$$

Ce qui nous permet de conclure,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_b(n, x_0)] = \frac{\alpha - 2\alpha^2}{(1 + 2\alpha)^2} \quad (3.77)$$

■

Remarque 3.2.2 *On constate que σ , l'écart type du bruit ne compte pas asymptotiquement. En effet, dans le $\log_2(a_j)$, le terme en σ est négligeable face à celui en $\frac{n}{2}$. Quelque soit la puissance du bruit ajouté au signal, l'estimateur de la régularité du signal bruité converge vers $\frac{\alpha - 2\alpha^2}{(1 + 2\alpha)^2}$ lorsque n tend vers l'infini. Ce résultat est illustré figure 3.4.*

Lorsqu'on regarde l'évolution de $E[\alpha_b]$ avec α on constate que lorsque α tend vers zero, $E[\alpha_b]$ tend vers zero et lorsque α tend vers l'infini, $E[\alpha_b]$ tend vers $-\frac{1}{2}$.

Simulations

On illustre nos résultats théoriques en construisant des signaux appartenant à $PART(\alpha)$ avec des régularité de départ différentes et en les dégradant par un bruit additif Gaussien. On estime ensuite la régularité obtenue par une moyenne sur 100 réalisations de bruit. La simulation suit très bien la courbe théorique (voir figure 3.5). On a mentionné précédemment le fait que la régularité du signal bruité n'évoluait pas linéairement en fonction de la régularité du signal original. Cette figure illustre parfaitement ce propos. En effet, à partir d'une certaine valeur de la régularité du signal original, la régularité du signal bruité décroît vers $-\frac{1}{2}$. Donc à partir d'une certaine valeur de la régularité, plus un signal est régulier, plus le signal bruité est irrégulier et inversement. Il existe cependant une zone, pour des régularité très basses, sur laquelle la régularité du signal bruité croît avec celle du signal original.

3.2.3 Signal nul

On peut aussi appliquer notre estimateur au signal nul perturbé par un bruit.

Proposition 3.2.2 (Legrand, Lévy-Véhel)

Pour le signal nul, on a

$$\boxed{E[\alpha_b(n, x_0)] = -\frac{1}{2}} \quad (3.78)$$

Preuve

Pour le signal nul

$$E[\alpha_b(n, x_0)] = -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j E[\log_2 |\sigma 2^{-\frac{n}{2}} z_{j,k}|]$$

$$E[\alpha_b(n, x_0)] = -\frac{1}{2} - K_n \left[\log_2(\sigma) - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e \ln(2)} \right) \right] \sum_{j=1}^n s_j = -\frac{1}{2}$$

■

3.2.4 Conclusion

Suivant la classe de signaux considérés et le modèle de bruit, on peut donc estimer l'action du bruit sur notre estimateur de la régularité du signal. Ce résultat va nous permettre par la suite d'adapter au mieux nos paramètres de débruitage notamment lorsqu'on connaît la valeur de la régularité à obtenir.

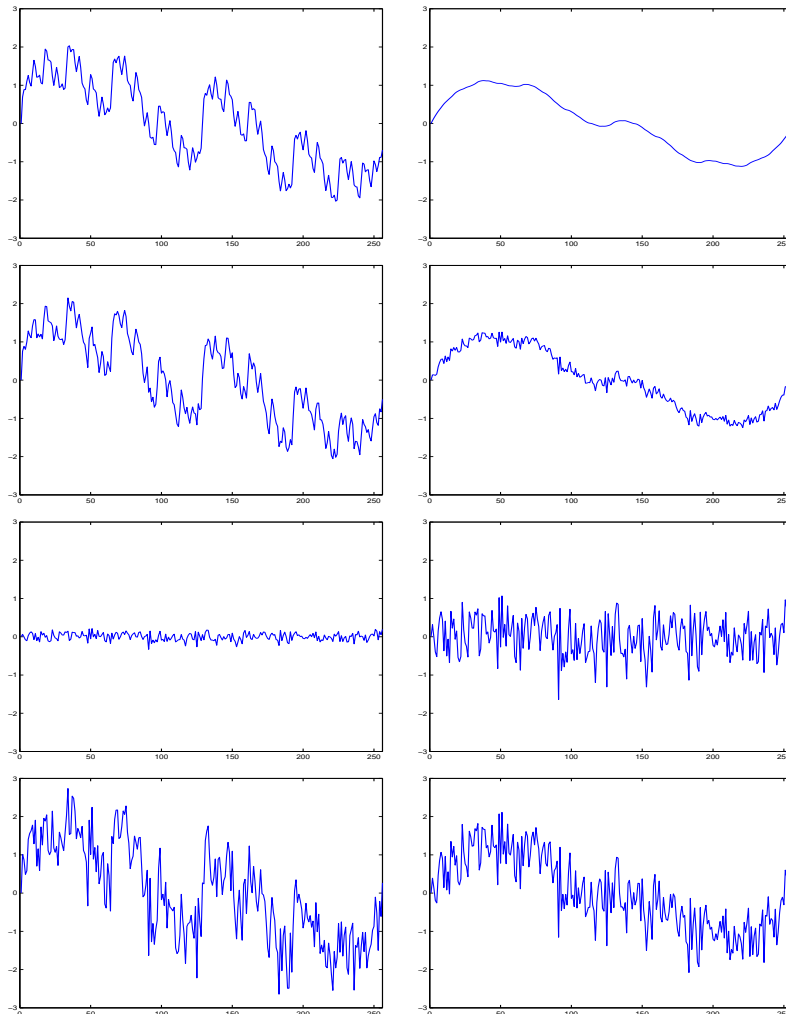


FIG. 3.2: Fonction de Weierstrass de régularité prescrite 0.4 (en haut à gauche). Fonction de Weierstrass de régularité prescrite 1.5 (en haut à droite). Deuxième ligne ces mêmes fonctions perturbées par un bruit gaussien additif d'écart type 0.1. Troisième ligne à gauche le bruit qui a été ajouté. Les deux signaux bruités ont visuellement une régularité différente. L'estimateur RCO nous donne respectivement pour les deux signaux bruités 0.49 et 0.59. On ajoute ensuite un bruit d'écart type 0.5 représenté à la 3eme ligne à droite. Quatrième ligne : les deux signaux bruités. A nouveau l'estimateur RCO rend compte de la différence visuelle de régularité et nous renvoie les valeurs 0.37 et 0.27.

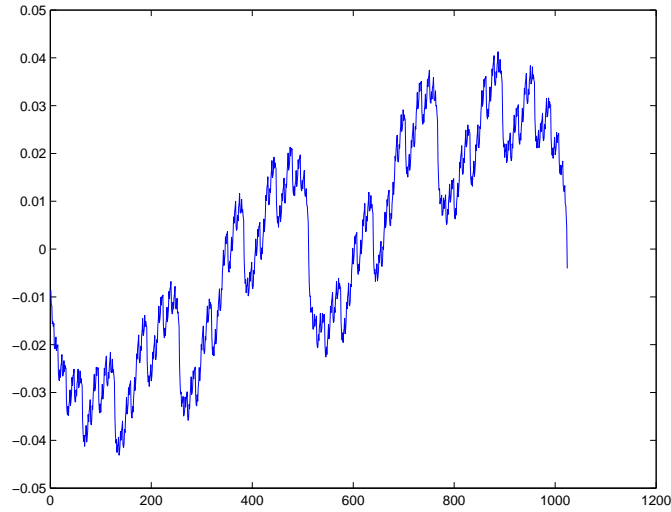


FIG. 3.3: Signal de 1024 points dont les coefficients d'ondelette sont $\varepsilon_{j,k} 2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$ à l'échelle j . Ici $\alpha = 0.5$.

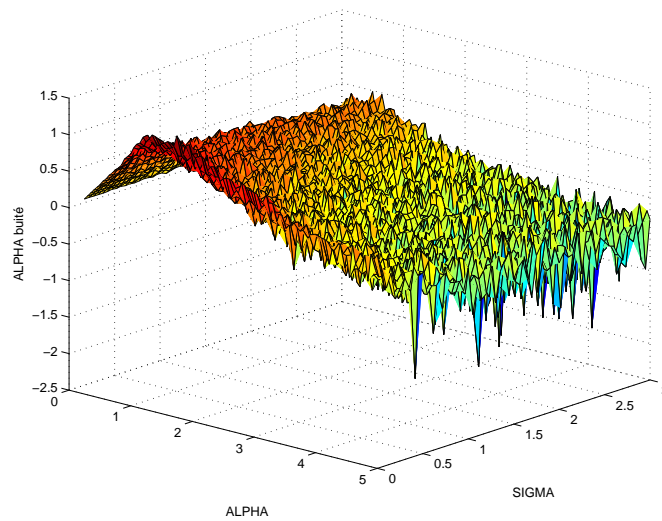


FIG. 3.4: Abscisse : régularité de départ, Ordonnée : écart type du bruit ajouté, Hauteur : régularité après bruitage. Pour des signaux dont les coefficients sont de la forme $x_{j,k} = 50 * 2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$, on a représenté l'estimation de la régularité de leur version bruité en fonction de α et de σ l'écart type du bruit ajouté (moyenne de 64 réalisations). Les résultats dépendent très peu de l'écart type du bruit.

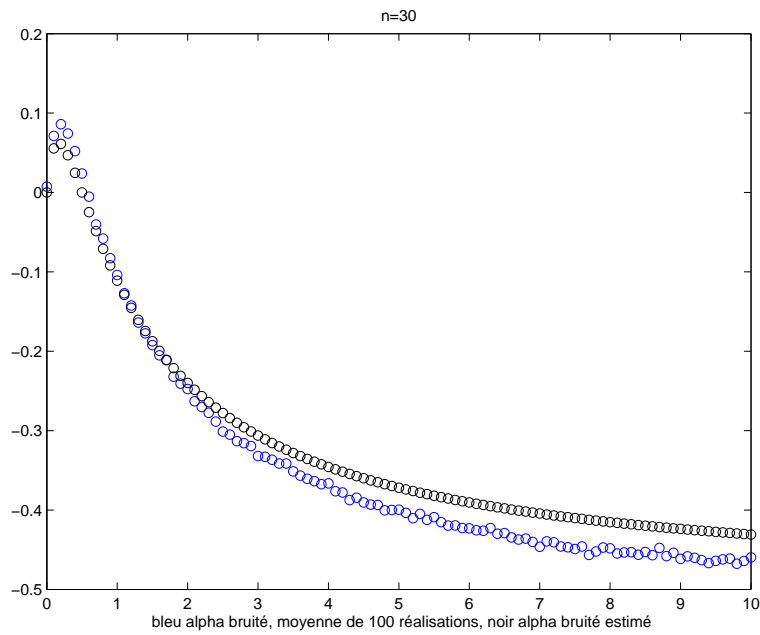


FIG. 3.5: Abscisse : régularité de départ, Ordonnée : régularité après bruitage. On représente l'évolution de la régularité de signaux perturbés par du bruit en fonction de la régularité de départ. Courbe théorique et simulation (moyenne de 100 réalisations).

3.3 Débruitage automatique

Nous venons de voir comment le bruit influait sur notre estimateur de la régularité. Avant de rentrer dans le vif du sujet des techniques de débruitage, on présente rapidement une méthode de débruitage automatique simple et basée sur l'augmentation de la régularité. Cette étude est destinée à se familiariser avec les mécanismes de modification de la régularité dans un objectif de débruitage.

3.3.1 Méthode

La plupart du temps, la perturbation d'un signal par un bruit se retransmet sur les hautes fréquences par l'apparition d'un comportement classique des coefficients d'ondelette lors de la représentation du logarithme de leur valeur absolue. En effet, d'une manière générale, les coefficients d'ondelette du bruit sont du même ordre à toutes les échelles alors que pour un autre signal, les coefficients ont tendance à décroître avec les échelles. Par conséquent, à partir d'une certaine échelle, les coefficients du signal original deviennent négligeables face à ceux du bruit. Cet artefact se traduit par l'apparition d'un plateau dans la représentation du logarithme des coefficients d'ondelette en fonction de l'échelle (voir figure 3.6).

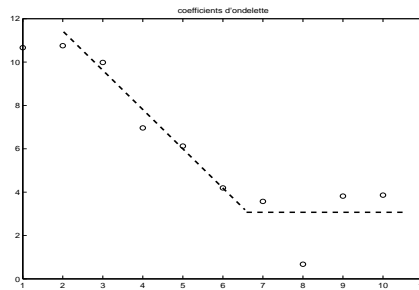


FIG. 3.6: *Logarithmes des coefficients d'ondelette d'un signal au dessus d'un point en fonction de l'échelle. En pointillés, les regressions des logarithmes des coefficients d'ondelette selon les échelles considérées. La régression sur les hautes fréquences donne une droite horizontale, caractéristique de la présence de bruit.*

Puisque ce plateau apparaît au niveau où le bruit commence à dominer les coefficients d'ondelette originaux, on peut supposer que les échelles précédentes, représentant les basses fréquences ont été peu affectées par le bruit. Ainsi l'estimation de la régularité du signal original peut se faire en effectuant une régression seulement sur ces échelles.

En ce qui concerne le niveau à partir duquel il faut remplacer les coefficients, il dépend évidemment des caractéristiques du signal original. Pour un signal $X \in B_{p,q}^s$, le bruit domine les coefficients d'ondelette à partir du niveau $\frac{n}{2s+1}$, donc pour s'affranchir au maximum du bruit, on régresse sur les échelles 1 à $\lfloor \frac{n}{2s+1} \rfloor$. En particulier, si s est plus petit que 1, la régression des logarithme des coefficients du premier tiers des échelles donne un bon estimateur de l'exposant de Hölder ponctuel du signal original.

On souhaite débruiter en retrouvant la régularité du signal original donc la technique naturelle est de remplacer les coefficients des hautes échelles par des coefficients situés sur la droite de régression. Voir figure 3.7.

3.3.2 Applications

Nous présentons les résultats sur deux fonctions de Weierstrass. L'une est irrégulière (exposant de Hölder égal à 0.5 en chaque point, figure 3.8) et l'autre au contraire est très régulière (exposant de Hölder égal à 1 en chaque point, figure 3.9). Cette méthode simpliste fonctionne bien sur les signaux présentant de bons alignements des logarithmes des coefficients d'ondelette.

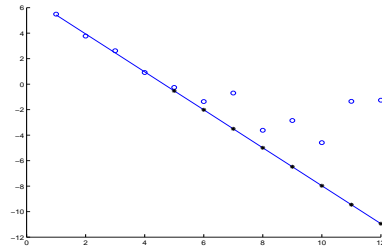


FIG. 3.7: *Débruitage automatique : Principe de la méthode. En chaque point du signal, on effectue une régression du premier tiers des logarithmes des coefficients d'ondelettes en fonction de l'échelle. Ensuite on reconstruit des coefficients sur cette droite de régression.*

3.3.3 Conclusion

On dispose d'une méthode simple de débruitage ne nécessitant aucun ajustement de paramètre si ce n'est le niveau de départ j_0 . Cette méthode est équivalente à une interpolation (telle que nous l'avons décrite dans le chapitre 2) du signal échantillonné sur 2_0^j points vers un signal à 2^n points. Cette remarque nous permet d'étendre les résultats théoriques de l'interpolation à cette méthode.

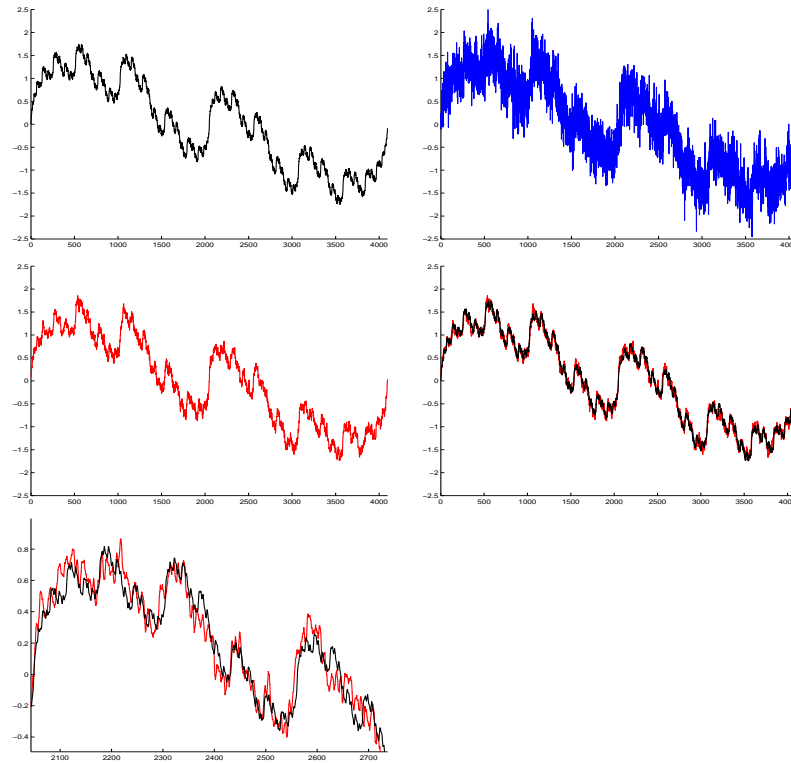


FIG. 3.8: Débruitage automatique d'une fonction de Weierstrass irrégulière. En haut à gauche signal original, en haut à droite signal bruité. Deuxième ligne à gauche version débruitée automatiquement, à droite superposition du signal original et du signal débruité (pointillés clairs). En bas superposition du signal original et du signal débruité (pointillés clairs), zoom.

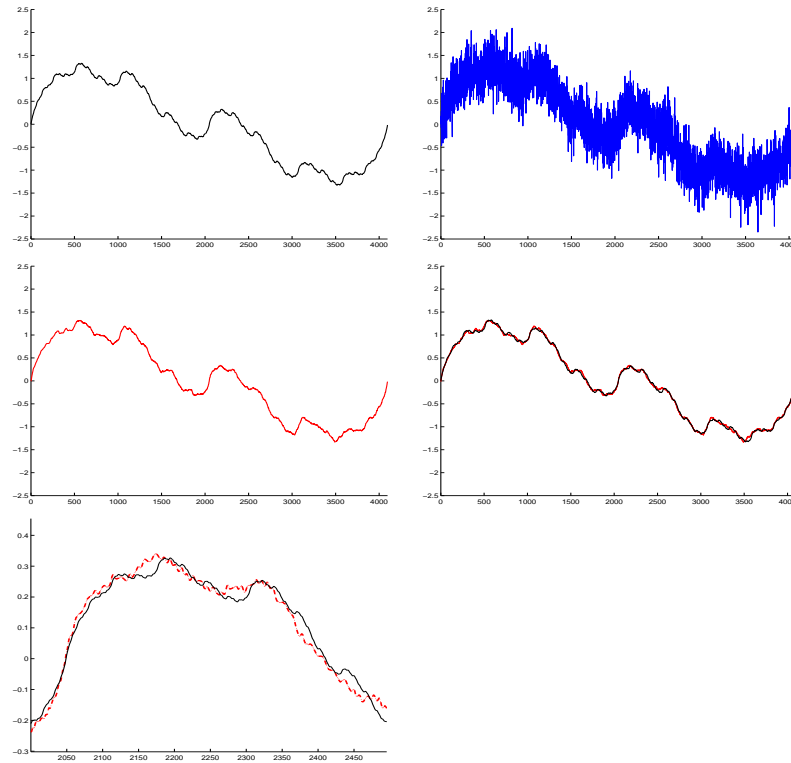


FIG. 3.9: Débruitage automatique d'une fonction de Weierstrass régulière. En haut à gauche signal original, en haut à droite signal bruité. Deuxième ligne à gauche version débruitée automatiquement, à droite superposition du signal original et du signal débruité (pointillés clairs). En bas superposition du signal original et du signal débruité (pointillés clairs), zoom.

3.4 Multifractal Pumping

3.4.1 Introduction

On considère que le débruitage est équivalent à une augmentation de la fonction de Hölder α_Y du signal observé. En effet, il est généralement vrai que la régularité locale des observations bruitées est inférieure à celle du signal original. Alors, $\alpha_{\hat{X}}$ devrait être supérieur à α_Y . Si la fonction de Hölder de X est connue, alors elle sera l'objectif à atteindre pour l'algorithme. Si ce n'est pas le cas, elle peut être estimée à partir de Y si on dispose de suffisamment d'informations sur le bruit. On présente ici la méthode linéaire de débruitage la plus simple pour augmenter la régularité d'un signal. La méthode de pumping a été conçue afin de faire remonter la régularité d'un signal donné d'une quantité $\delta = \Delta\alpha$. Le principe est de modifier la pente de la régression des coefficients d'ondelette en multipliant chacun de ceux-ci par un terme ne dépendant que de l'échelle, que l'on notera B_j dans ce chapitre (voir figure 3.10). On considère un signal original X échantillonné sur 2^n points et dont les coefficients d'ondelette sont symbolisés par $x_{j,k}$.

3.4.2 Expression des contraintes de régularité

Comme nous l'avons vu dans le chapitre portant sur l'estimation de la régularité, on estime l'exposant de Hölder en effectuant la régression des coefficients d'ondelette en fonction de l'échelle au dessus de chaque point du signal. On dispose des coefficients $y_{j,k}$ du signal perturbé Y par un bruit que l'on suppose Gaussien. Au dessus du point x_0 , pour le signal bruité, on a les coefficients $y_{j, \lfloor \frac{i-1}{2^{n-j+1}} \rfloor}$ pour j allant de 1 à n . Encore une fois, par abus de notation, on notera ces coefficients $y_{j,k}$. Notre estimateur de la régularité nous donne :

$$\forall x_0 \in [1 : 2^n],$$

$$\alpha_Y(x_0) = -\frac{1}{2} - \frac{12}{(n-1)n(n+1)} \sum_{j=1}^n \left(j - \frac{n+1}{2} \right) [\log_2 |y_{j,k}|] \quad (3.79)$$

Si on décide d'augmenter la régularité de $\Delta\alpha$, en chaque point du signal, alors le signal de sortie \hat{X} de notre algorithme de débruitage devra vérifier :

$$\forall x_0 \in [1 : 2^n],$$

$$\alpha_{\hat{X}}(x_0) = \alpha_Y(x_0) + \Delta\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{12}{(n-1)n(n+1)} \sum_{j=1}^n \left(j - \frac{n+1}{2} \right) [\log_2 |\hat{x}_{j,k}|] \quad (3.80)$$

Or nous proposons une méthode qui multiplie les coefficients de l'échelle j par un réel B_j compris entre 0 et 1. Par conséquent,

$$\forall x_0 \in [1 : 2^n],$$

$$\alpha_{\hat{X}}(x_0) = \alpha_Y(x_0) + \Delta\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{12}{(n-1)n(n+1)} \sum_{j=1}^n \left(j - \frac{n+1}{2} \right) [\log_2 |y_{j,k} B_j|] \quad (3.81)$$

En combinant les deux équations 3.79 et 3.81, on obtient la contrainte de régularité qui devra être vérifiée par nos coefficients multiplicateurs si l'on veut augmenter la régularité de $\Delta\alpha$.

$$\Delta\alpha + \frac{12}{(n-1)n(n+1)} \sum_{j=1}^n \left(j - \frac{n+1}{2} \right) [\log_2(B_j)] = 0 \quad (3.82)$$

Remarque 3.4.1 En prenant des coefficients multiplicateurs de la forme B_j , on va évidemment produire une augmentation de la régularité similaire sur l'ensemble des points du signal. Une modification de la régularité adaptée à chaque point du signal n'est possible que si on utilise des coefficients $B_{j,k}$. Cette technique est très compliquée à mettre en oeuvre de par le fait que certains coefficients d'ondelette, notamment ceux des basses fréquences, sont au-dessus de plusieurs points du signal. Ainsi, la méthode proposée ici consiste en un travail par bande de fréquences donc elle ressemble plus en un sens à un filtrage de Fourier qu'à une technique de débruitage par ondelette. Toutefois les ondelettes nous sont nécessaires pour l'estimation de la régularité et son contrôle.

En reprenant les notations du chapitre sur l'estimation, on a :

$$\Delta\alpha + K_n \sum_{j=1}^n s_j [\log_2 B_j] = 0 \quad (3.83)$$

3.4.3 Méthode

L'équation 3.110 présente une racine évidente, et c'est cette racine évidente qui va nous donner les coefficients multiplicateurs pour la méthode de Multifractal Pumping. Il suffit de prendre $B_j = 2^{-j(\Delta\alpha)}$ pour chaque échelle j .

Définition 3.4.1 Soit Y_n un échantillonnage de 2^n points de Y . L'estimateur de X par la méthode du Multifractal wavelet Pumping, \hat{X}^{MP} est donné par :

$$\begin{aligned} MP : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ Y_n &\longmapsto \hat{X}^{MP} \text{ avec } W(\hat{X}^{MP}) = \{y_{j,k} \cdot 2^{-j\Delta\alpha}\} \end{aligned} \quad (3.84)$$

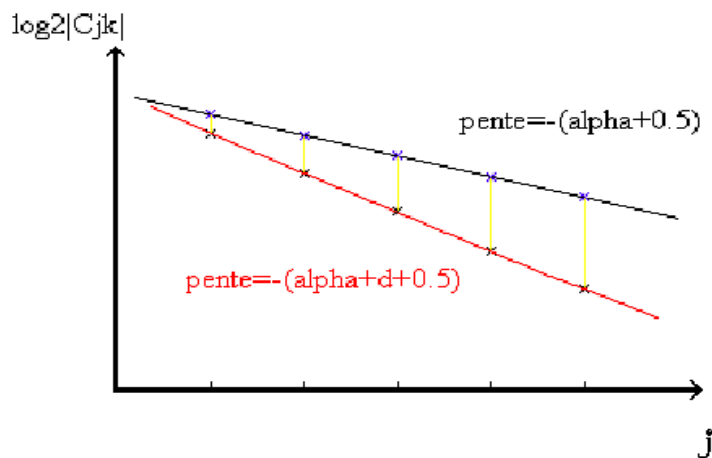


FIG. 3.10: Méthode de multifractal Pumping : Racine évidente de la contrainte de régularité. En abscisses les échelles et en ordonnée les logarithmes des coefficients d'ondelette situés "au-dessus" du point considéré. La multiplication des coefficients d'ondelette d'un signal ayant pour régularité α par les coefficients multiplicateurs du multifractal pumping fait passer de la droite du haut à celle du bas les logarithmes des coefficients d'ondelette. Il s'agit ici d'une illustration simplifiée, les coefficients ont été alignés pour une meilleure lecture.

3.4.4 Aspect minimax de la méthode

On souhaite maintenant donner les propriétés asymptotiques de notre méthode. On espère atteindre le taux de convergence obtenu par les techniques classiques de Thresholding en choisissant d'appliquer la méthode qu'à partir d'un certain niveau, que l'on notera j_0 . La technique de Multifractal Pumping sera donc modifiée de la manière suivante :

Définition 3.4.2 Soit Y_n un échantillonnage de 2^n points de Y . L'estimateur de X par la méthode du Multifractal wavelet Pumping, \hat{X}^{MP} est donné par :

$$\begin{aligned} MP : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ Y_n &\longmapsto \hat{X}^{MP} \text{ avec } W(\hat{X}^{MP}) = \{y_{j,k} \cdot 1_{j \leq j_0} + 2^{-j\delta} y_{j,k} \cdot 1_{j > j_0}\} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Le niveau j_0 sera déterminé en minimisant le risque.

Définition 3.4.3 Le risque R^{MP} est donné par la quantité suivante :

$$\boxed{R^{MP} := E[(X - \hat{X}^{MP})^2]} \quad (3.86)$$

Risque dans un espace de Hölder

On montre dans cette partie les bonnes propriétés asymptotiques de notre méthode puisqu'elle présente un taux de convergence optimal. On effectue cette étude pour un signal $X \in B_{\infty, \infty}^s = C^s$.

Théorème 3.4.1 (Légrand, Lévy-véhel)

Soit $X \in B_{\infty, \infty}^s$.

- Si $\frac{s}{2s+1} \leq \Delta\alpha$, alors

$$\boxed{\text{Si } j_0 = \frac{n}{2s+1}, \quad R^{MP} \leq \left(\sigma^2 + \frac{2^{-2s-1}}{1-2^{-2s}} \right) 2^{-\frac{2ns}{2s+1}} \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty} \quad (3.87)$$

- Si $\frac{s}{2s+1} > \Delta\alpha$, alors

$$\boxed{\text{Si } j_0 = \frac{n}{2s+1}, \quad R^{MP} \leq \sigma^2 \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{-2\Delta\alpha} - 1} 2^{-2n\Delta\alpha} \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty} \quad (3.88)$$

Par conséquent, notre estimateur est minimax. On pourrait penser que la méthode est adaptative dès que $\Delta\alpha \geq \frac{1}{2}$ (On n'a pas besoin de connaître la régularité du signal original pour avoir un taux de convergence optimal) mais en fait la régularité est cachée dans le niveau optimal j_0 .

Preuve

On suppose que le bruit est Gaussien, centré et de variance σ^2 . Les coefficients d'ondelette du signal bruité vérifient, de part l'orthogonalité des bases d'ondelettes,

$$y_{j,k} = x_{j,k} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z_{j,k} \text{ avec les } z_{j,k} \text{ iid et } N(0, 1)$$

$$\begin{aligned}
R^{MP} &= E \left(\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} (x_{j,k} - y_{j,k})^2 \right) + E \left(\sum_{j=j_0+1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} (x_{j,k} - y_{j,k} 2^{-j\Delta\alpha})^2 \right) \\
&= E \left(\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} (\sigma z_{j,k} 2^{-\frac{n}{2}})^2 \right) + E \left(\sum_{j=j_0+1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} (x_{j,k}(1 - 2^{-j\Delta\alpha}) + 2^{-j\Delta\alpha} \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z_{j,k})^2 \right) \\
&= \sigma^2 2^{-n-1} \sum_{j=1}^{j_0} 2^j + \sum_{j=j_0+1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} x_{j,k}^2 (2^{-j\Delta\alpha} - 1)^2 + \sum_{j=j_0+1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} 2^{-2j\Delta\alpha-n} \sigma^2 \\
&= \sigma^2 2^{-n} (2^{j_0} - 1) + \sum_{j=j_0+1}^n e_j^2 (2^{-j\Delta\alpha} - 1)^2 + \sigma^2 \sum_{j=j_0+1}^n 2^{(1-2\Delta\alpha)j-n-1}
\end{aligned}$$

avec e_j^2 l'énergie du signal X à l'échelle j .

$$e_j^2 = \sum_{k=1}^{2^{j-1}} x_{j,k}^2$$

Le risque est constitué d'un premier terme correspondant à la variance pour les échelles entre 1 et j_0 . Pour ces échelles il n'y a pas de terme de biais car on n'effectue aucune transformation, ce qui se paye en contrepartie en variance puisqu'on laisse le bruit sur ces échelles. Le deuxième terme est le terme de biais pour les échelles $j_0 + 1$ à n . Enfin le troisième terme représente la variance pour les échelles $j_0 + 1$ à n .

On se place dans l'espace de Besov $B_{\infty, \infty}^s$, s étant un réel positif. Donc il existe une constante c telle que : $\forall j, k \quad |x_{j,k}| \leq c 2^{-j(s+\frac{1}{2})}$

Par conséquent, on a

$$e_j^2 \leq c^2 2^{-2sj-1}$$

On peut donc majorer R^{MP} par la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
R^{MP} &\leq \sigma^2 (2^{j_0-n} - 2^{-n}) + \sum_{j=j_0+1}^n 2^{-2sj-1} (2^{-j\Delta\alpha} - 1)^2 + \sigma^2 \sum_{j=j_0+1}^n 2^{(1-2\Delta\alpha)j-n-1} \\
&\leq \sigma^2 (2^{j_0-n} - 2^{-n}) + \sum_{j=j_0+1}^n 2^{-2sj-1} + \sigma^2 \sum_{j=j_0+1}^n 2^{(1-2\Delta\alpha)j-n-1} \\
&\leq \sigma^2 2^{j_0-n} + \frac{2^{-2s-1}}{2^{-2s} - 1} (2^{-2sn} - 2^{-2sj_0}) + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} (2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0})
\end{aligned}$$

Si $\Delta\alpha \geq \frac{1}{2}$:

Alors on a

$$R^{MP} \leq \sigma^2 2^{j_0-n} + \frac{2^{-2s-1}}{2^{-2s} - 1} (2^{-2sn} - 2^{-2sj_0}) + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{1 - 2^{1-2\Delta\alpha}} 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0}$$

On constate que asymptotiquement c'est le premier terme de variance qui domine le dernier. Et le seul et unique terme de biais est de l'ordre de $\frac{2^{-2s-1}}{1-2^{-2s}} (2^{-2sj_0})$. D'où :

$$R^{MP} \leq \sigma^2 2^{j_0-n} + \frac{2^{-2s-1}}{1 - 2^{-2s}} 2^{-2sj_0} \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers l'infini}$$

Le risque est minimum lorsque le biais est égal à la variance (en effet, le biais est ici une fonction décroissante de j_0 alors que la variance est une fonction croissante de j_0). Le j_0 "idéal" est donc donné par la résolution de l'équation suivante :

$$\sigma^2 2^{j_0-n} = 2^{-2s(j_0+1)} \quad (3.89)$$

On obtient par conséquent :

$$\boxed{j_0 = \frac{n}{2s+1}} \quad (3.90)$$

Le risque se comporte alors asymptotiquement de la manière suivante :

$$R^{MP} \leq \left(\sigma^2 + \frac{2^{-2s-1}}{1-2^{-2s}} \right) 2^{-\frac{2ns}{2s+1}} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \quad (3.91)$$

Si $\Delta\alpha < \frac{1}{2}$:

Alors asymptotiquement,

$$R^{MP} \leq \sigma^2 2^{j_0-n} + \frac{2^{-2s-1}}{2^{-2s}-1} (2^{-2sn} - 2^{-2sj_0}) + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha}-1} 2^{(1-2\Delta\alpha)n}$$

Le dernier terme de variance, n'est alors plus une fonction croissante de j_0 , mais une constante dépendant des variables σ , n et $\Delta\alpha$. Par conséquent le j_0 optimal n'influe pas sur ce terme. Donc le j_0 idéal est le même que précédemment c'est à dire $j_0 = \frac{n}{2s+1}$. Le risque se comporte alors asymptotiquement en

$$R^{MP} \leq \text{MAX} \left(\left(\sigma^2 + \frac{2^{-2s-1}}{1-2^{-2s}} \right) 2^{-\frac{2ns}{2s+1}}, \sigma^2 \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{-2\Delta\alpha}-1} 2^{-2\Delta\alpha n} \right) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Conclusion :

- Si $\frac{s}{2s+1} \leq \Delta\alpha$, alors

$$R^{MP} \leq \left(\sigma^2 + \frac{2^{-2s-1}}{1-2^{-2s}} \right) 2^{-\frac{2ns}{2s+1}} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

- Si $\frac{s}{2s+1} > \Delta\alpha$, alors

$$R^{MP} \leq \sigma^2 \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{-2\Delta\alpha}-1} 2^{-2\Delta\alpha n} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Par conséquent, puisque $\frac{s}{2s+1} < \frac{1}{2}$ il suffit de prendre $\Delta\alpha > \frac{1}{2}$ pour être sûr d'obtenir la vitesse de convergence souhaitée. ■

Remarque 3.4.2 On détermine un j_0 qui minimise un majorant asymptotique du risque mais cela nous suffit, en effet, comme on obtient pour ce majorant le taux optimum de convergence asymptotique, ce j_0 minimise aussi le risque asymptotique.

Risque dans un espace de Besov

On rappelle brièvement la définition des espaces de Besov (voir la section dans le chapitre consacré à l'interpolation).

Définition 3.4.4 Espaces de Besov (rappel)

Le signal X de coefficients d'ondelette $x_{j,k}$ appartient à $B_{p,q}^s$ si et seulement si il existe une constante C telle que

$$\left(\sum_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\sum_k |x_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} < C \quad (3.92)$$

Cette définition implique que si $X \in B_{p,q}^s$, alors nécessairement on a $2^{j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\sum_{k=1}^{2^{j-1}} |x_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent il existe une suite $\{d_j\}_j$ dans l_q telle que

$$\sum_{k=1}^{2^{j-1}} |x_{j,k}|^p \leq d_j^p 2^{-j(ps+\frac{p}{2}-1)} \quad \forall j \quad \text{avec} \quad d_j^p \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.93)$$

Pour montrer l'aspect minimax de la méthode, on va déterminer quel signal, dans l'espace de Besov $B_{p,q}^s$, maximise le risque. On résout le Lagrangien L suivant, qui consiste en la maximisation du terme $\sum_{j=j_0+1}^n (2^{-j\delta} - 1)^2 \sum_{k=1}^{2^{j-1}} c_{j,k}^2$ sous la contrainte $\sum_{k=1}^{2^{j-1}} |c_{j,k}|^p \leq d_j^p 2^{-j(ps+\frac{p}{2}-1)}$. Le signal n'intervient que dans le terme de biais du risque, c'est pour cette raison que l'on ne tient pas compte de la variance pour cette maximisation, et que le Lagrangien a cette forme.

$$L = \sum_{j=j_0+1}^n (2^{-j\delta} - 1)^2 \sum_{k=1}^{2^{j-1}} x_{j,k}^2 + \lambda \left[|x_{j,k}|^p - d_j^p 2^{-j(ps+\frac{p}{2}-1)} \right] \quad (3.94)$$

On suppose pour la suite des calculs que les $x_{j,k}$ sont positifs car cela ne change rien au raisonnement et simplifie les calculs.

On dérive le Lagrangien par rapport à $x_{j,k}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{j,k}} = 2x_{j,k}(2^{-j\delta} - 1)^2 + p\lambda x_{j,k}^{p-1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{j,k}} = 0 \iff \hat{x}_{j,k} = \left(-\frac{2(2^{-j\delta} - 1)^2}{p\lambda} \right)^{\frac{1}{p-2}}$$

On peut remarquer ici que si $\frac{1}{p-2}$ n'est pas un nombre entier, alors λ est nécessairement négatif car $\hat{x}_{j,k}$ est un nombre réel.

On place $\hat{x}_{j,k}$ dans la contrainte ce qui nous donne

$$\left(\frac{1}{\hat{\lambda}} \right)^{\frac{1}{p-2}} = \frac{d_j 2^{-j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} P_{p-2}^{\frac{1}{p-2}}}{2^{\frac{j-1}{p}} (-2(2^{-j\delta} - 1)^2)^{\frac{1}{p-2}}}$$

Ce $\hat{\lambda}$ est ensuite inséré dans le $\hat{x}_{j,k}$ et on obtient

$$\hat{x}_{j,k} = d_j 2^{-j(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{p}}$$

Le Lagrangien présente un extremum lorsque $\hat{x}_{j,k} = d_j 2^{-j(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{p}}$ mais rappelons que l'on cherche un maximum. Or dans le cas où $p < 2$, on peut montrer que le lieu d'annulation de la dérivée du Lagrangien est un minimum et non pas un maximum. Du coup le minimum se situe sur "le bord". En effet, si on prend un signal X^{sparse} tel que ses coefficients d'ondelette sont nuls sauf un par échelle et vérifiant la contrainte, on montre que le biais (noté $BIAIS^{sparse}$) est alors supérieur à celui engendré par des $\hat{x}_{j,k} = d_j 2^{-j(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{p}}$ (noté $BIAIS^{dense}$) et ce signal maximise le Lagrangien pour $p < 2$. Les coefficients d'ondelette de X^{sparse} , $x_{j,k}^{sparse}$ vérifient pour toute échelle j :

$$\begin{cases} \#\{x_{j,k}^{sparse}, x_{j,k}^{sparse} = 0\} = 2^{j-1} - 1 \\ \#\{x_{j,k}^{sparse}, x_{j,k}^{sparse} = d_j 2^{-j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\} = 1 \end{cases}$$

Comparaison des biais :

$$BIAIS^{sparse} = \sum_{j=j_0+1}^n (2^{-j\delta} - 1)^2 d_j^2 2^{-j(2s+1-\frac{2}{p})} \quad (3.95)$$

$$BIAIS^{dense} = \sum_{j=j_0+1}^n (2^{-j\delta} - 1)^2 d_j^2 2^{-2js-1+\frac{2}{p}} \quad (3.96)$$

Or $BIAIS^{sparse} > BIAIS^{dense}$ équivaut à $2^{-j(2s+1-\frac{2}{p})} > 2^{-2js-1+\frac{2}{p}}$ c'est à dire $p > 2$.

Par conséquent on va traiter les deux sous-cas, $p < 2$ et $p \geq 2$.

$B_{p,q}^s$ avec $p < 2$

Théorème 3.4.2 (Légrand, Levy-vehel)

Soit $X \in B_{p,q}^s$ avec $p < 2$, alors

★ Si $\Delta\alpha \geq \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}} \frac{1}{2}$, alors

$$\text{Si } j_0 = \frac{n}{2+2s-\frac{2}{p}}, \quad R^{MP} \leq \left(\sigma^2 + d_0^2 \frac{2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}}{1-2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}} \right) 2^{-n \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}}} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

★ Si $\Delta\alpha < \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}} \frac{1}{2}$, alors

$$\text{Si } j_0 = \frac{n}{2+2s-\frac{2}{p}}, \quad R^{MP} \leq \sigma^2 \frac{2^{-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha}-1} (2^{-2\Delta\alpha n}) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Preuve

On reprend l'écriture du risque donnée plus haut pour les espaces de Hölder.

$$R^{MP} = \sigma^2 2^{-n} (2^{j_0} - 1) + \sum_{j=j_0+1}^n e_j^2 (2^{-j\Delta\alpha} - 1)^2 + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha}-1} \left(2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0} \right)$$

Dans le cas $p < 2$, on a vu que le risque était maximum lorsque un coefficient de l'échelle j vaut $d_j 2^{-j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$ et les autres 0. Donc :

$$\begin{aligned}
R^{MP} &\leq R_{sparse}^{MP} = \sigma^2 2^{-n} (2^{j_0} - 1) + \sum_{j=j_0+1}^n d_j^2 2^{-2j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} (2^{-j\Delta\alpha} - 1)^2 \\
&\quad + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} \left(2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0} \right) \\
R_{sparse}^{MP} &\sim \sigma^2 2^{j_0-n} + \sum_{j=j_0+1}^n d_j^2 2^{-2j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} (2^{-j\Delta\alpha} - 1)^2 \\
&\quad + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} \left(2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0} \right) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty \\
R_{sparse}^{MP} &\leq \sigma^2 2^{j_0-n} + d_0^2 \frac{2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}}{2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}-1} \left(2^{-n(2s+1-\frac{2}{p})} - 2^{-j_0(2s+1-\frac{2}{p})} \right) \\
&\quad + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} \left(2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0} \right) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

Or pour les espaces de Besov, $s > \frac{1}{p}$, par conséquent l'inéquation $2s + 1 > \frac{2}{p}$ est toujours vérifiée, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}
R_{sparse}^{MP} &\leq \sigma^2 2^{j_0-n} + d_0^2 \frac{2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}}{1 - 2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}} 2^{-j_0(2s+1-\frac{2}{p})} \\
&\quad + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} \left(2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0} \right) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

- Si $\Delta\alpha \geq \frac{1}{2}$, le premier terme de variance domine le dernier (comme on l'a vu précédemment). Donc le j_0 optimal sera obtenu en résolvant l'équation suivante qui symbolise l'équilibre entre le biais et la variance :

$$j_0 - n = -j_0(2s + 1 - \frac{2}{p}) \Leftrightarrow \boxed{j_0 = \frac{n}{2 + 2s - \frac{2}{p}}}$$

Ce qui nous donne un comportement asymptotique pour le risque en :

$$R^{MP} \leq \left(\sigma^2 + d_0^2 \frac{2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}}{1 - 2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}} \right) 2^{-n \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}}} \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty$$

- Si $\Delta\alpha < \frac{1}{2}$, alors le dernier terme de variance ne dépend plus de j_0 asymptotiquement, il est de l'ordre de

$$\sigma^2 \frac{2^{-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} (2^{-2\Delta\alpha n}) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty$$

Comme pour le risque dans les espaces de Hölder, ce terme ne va pas servir pour déterminer le j_0 optimal mais il va compter dans l'ordre du risque. Ainsi, le j_0 optimal est les même que précédemment c'est à dire : $j_0 = \frac{n}{2+2s-\frac{2}{p}}$. Ce qui entraîne pour le risque :

$$R^{MP} \leq \max \left(\left(\sigma^2 + d_0^2 \frac{2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}}{1 - 2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}} \right) 2^{-n \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}}}, \sigma^2 \frac{2^{-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} (2^{-2\Delta\alpha n}) \right) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty$$

Or

$$2^{-n \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}}} \geq 2^{-2\Delta\alpha n} \Leftrightarrow \Delta\alpha \geq \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}} \frac{1}{2}$$

• Conclusion :

★ Si $\Delta\alpha \geq \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}} \frac{1}{2}$, alors

$$\text{Si } j_0 = \frac{n}{2+2s-\frac{2}{p}}, \quad R^{MP} \leq \left(\sigma^2 + d_0^2 \frac{2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}}{1-2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}} \right) 2^{-n \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}}} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

★ Si $\Delta\alpha < \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}} \frac{1}{2}$, alors

$$\text{Si } j_0 = \frac{n}{2+2s-\frac{2}{p}}, \quad R^{MP} \leq \sigma^2 \frac{2^{-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha}-1} (2^{-2\Delta\alpha n}) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

■

$B_{p,q}^s$ avec $p \geq 2$

Théorème 3.4.3 (Legrand, Levy-Vehel)

Soit $X \in B_{p,q}^s$ avec $p \geq 2$, alors

★ Si $\Delta\alpha \geq \frac{s}{1+2s}$, alors

$$\text{Si } j_0 = \frac{n}{1+2s}, \quad R^{MP} \leq \left(\sigma^2 + d_0^2 2^{\frac{2}{p}-1} \frac{2^{-2s}}{1-2^{-2s}} \right) 2^{-n \frac{2s}{2s+1}} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \quad (3.97)$$

★ Si $\Delta\alpha < \frac{s}{1+2s}$, alors

$$\text{Si } j_0 = \frac{n}{1+2s}, \quad R^{MP} \leq \sigma^2 \frac{2^{-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha}-1} (2^{-2\Delta\alpha n}) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \quad (3.98)$$

Preuve

$$R^{MP} = \sigma^2 2^{-n} (2^{j_0} - 1) + \sum_{j=j_0+1}^n e_j^2 (2^{-j\Delta\alpha} - 1)^2 + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha}-1} \left(2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0} \right)$$

Nous avons vu que les coefficients d'ondelette qui maximisent ce risque sont de la forme

$$x_{j,k} = d_j 2^{-j(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{p}}$$

L'énergie au niveau j vaut donc pour ce signal

$$e_j^2 = \sum_{k=1}^{2^{j-1}} d_j^2 2^{-j(2s+1)+\frac{2}{p}} \leq d_0^2 2^{\frac{2}{p}-1} 2^{-2sj}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
R^{MP} &\leq R_{dense}^{MP} \leq \sigma^2 2^{-n} (2^{j_0} - 1) + \sum_{j=j_0+1}^n d_0^2 2^{\frac{2}{p}-1} 2^{-2sj} (2^{-j\Delta\alpha} - 1)^2 \\
&\quad + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} \left(2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0} \right) \\
R^{MP} &\leq \sigma^2 2^{j_0-n} + \sum_{j=j_0+1}^n d_0^2 2^{\frac{2}{p}-1} 2^{-2sj} (2^{-j\Delta\alpha} - 1)^2 \\
&\quad + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} \left(2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0} \right) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty \\
R^{MP} &\leq \sigma^2 2^{j_0-n} + d_0^2 2^{\frac{2}{p}-1} \frac{2^{-2s}}{2^{-2s} - 1} (2^{-2sn} - 2^{-2sj_0}) \\
&\quad + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} \left(2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0} \right) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty \\
R^{MP} &\leq \sigma^2 2^{j_0-n} + d_0^2 2^{\frac{2}{p}-1} \frac{2^{-2s}}{1 - 2^{-2s}} 2^{-2sj_0} \\
&\quad + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} \left(2^{(1-2\Delta\alpha)n} - 2^{(1-2\Delta\alpha)j_0} \right) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

- Si $\Delta\alpha \geq \frac{1}{2}$, le premier terme de variance domine le dernier. Donc le j_0 optimal sera obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$j_0 - n = -j_0(2s) \Leftrightarrow \boxed{j_0 = \frac{n}{1+2s}} \quad (3.99)$$

Remarque 3.4.3 On constate que la forme de j_0 varie selon selon la valeur de l'indice p de l'espace de Besov considéré. Si $p \geq 2$, alors $j_0 = \frac{n}{1+2s}$, sinon $j_0 = \frac{n}{2+2s-\frac{2}{p}}$.

Ce qui nous donne un comportement asymptotique pour le risque en :

$$R^{MP} \leq \left(\sigma^2 + d_0^2 2^{\frac{2}{p}-1} \frac{2^{-2s}}{1 - 2^{-2s}} \right) 2^{-n \frac{2s}{2s+1}} \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty$$

- Si $\Delta\alpha < \frac{1}{2}$, alors le dernier terme de variance ne dépend plus de j_0 asymptotiquement, il est de l'ordre de

$$\sigma^2 \frac{2^{-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} (2^{-2\Delta\alpha n}) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty$$

Comme pour le risque dans les espaces de Hölder, ce terme ne va pas servir pour déterminer le j_0 optimal mais il va compter dans l'ordre du risque. Ainsi, le j_0 optimal est les même que précédemment c'est à dire : $j_0 = \frac{n}{1+2s}$. Ce qui entraîne pour le risque :

$$R^{MP} \leq \text{MAX} \left(\left(\sigma^2 + d_0^2 2^{\frac{2}{p}-1} \frac{2^{-2s}}{1 - 2^{-2s}} \right) 2^{-n \frac{2s}{2s+1}}, \sigma^2 \frac{2^{-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} (2^{-2\Delta\alpha n}) \right) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty$$

Or

$$2^{-n \frac{2s}{2s+1}} \geq 2^{-2\Delta\alpha n} \Leftrightarrow \Delta\alpha \geq \frac{s}{1+2s}$$

- Conclusion :

★ Si $\Delta\alpha \geq \frac{s}{1+2s}$, alors

$$\boxed{\text{Si } j_0 = \frac{n}{1+2s}, R^{MP} \leq \left(\sigma^2 + d_0^2 2^{\frac{2}{p}-1} \frac{2^{-2s}}{1-2^{-2s}} \right) 2^{-n \frac{2s}{2s+1}} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty} \quad (3.100)$$

★ Si $\Delta\alpha < \frac{s}{1+2s}$, alors

$$\boxed{\text{Si } j_0 = \frac{n}{1+2s}, R^{MP} \leq \sigma^2 \frac{2^{-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha} - 1} (2^{-2\Delta\alpha n}) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty} \quad (3.101)$$

■

3.4.5 Augmentation de la régularité

Nous avons vu dans les sections 3.4.2 et 3.4.3 que l'on augmentait la régularité de $\Delta\alpha$ si on multipliait **tous** les niveaux par la quantité $B_j = 2^{-j\Delta\alpha}$. Mais dans l'optique d'obtenir un processus atteignant le taux de convergence optimal, on a choisi de prendre $B_j = 1$ pour $j \leq j_0$. Bien évidemment si on modifie seulement les échelles supérieures au niveau j_0 , alors il faut bien avoir à l'esprit que les B_j ne doivent plus être en $2^{-j\Delta\alpha}$ pour que la contrainte soit vérifiée. En effet, la pente ne serait pas augmentée de $\Delta\alpha$ dans ce cas.

On peut calculer les coefficients multiplicateurs vérifiant la contrainte :

$$\sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(2^{-jx}) = -\frac{\Delta\alpha}{K_n}$$

La résolution de la contrainte nous donne

$$x = \Delta\alpha \left(1 - \frac{j_0(j_0+1)(j_0-1)}{n(n-1)(n+1)} \right)$$

Si on prend $j_0 = \frac{n}{2s+1}$ alors on obtient

$$\boxed{x = \Delta\alpha \left(1 - \frac{(n-1-2s)(n+1+2s)}{(1+2s)^3(n-1)(n+1)} \right)} \quad (3.102)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x) = \Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{(1+2s)^3} \right)$$

Si on prend $j_0 = \frac{n}{2+2s-\frac{2}{p}}$ alors on obtient

$$\boxed{x = \Delta\alpha \left(1 - \frac{\left(n - 2 - 2s + \frac{2}{p} \right) \left(n + 2 + 2s - \frac{2}{p} \right)}{\left(2 + 2s - \frac{2}{p} \right)^3 (n-1)(n+1)} \right)} \quad (3.103)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x) = \Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{\left(2 + 2s - \frac{2}{p} \right)^3} \right)$$

Conclusion : Si on multiplie les coefficients d'un signal par 2^{-jx} à partir du niveau $j_0 = \frac{n}{2s+1}$, alors notre estimateur de la régularité augmente de $\Delta\alpha$. Ceci ne modifie en rien tous les résultats sur le risque. Il suffit juste de considérer x à la place de $\Delta\alpha$.

3.4.6 Conclusion

Le multifractal pumping est une méthode de débruitage linéaire par augmentation de la régularité Hölderienne, simple, et atteignant le taux de convergence optimal. Toutefois, l'inconvénient de cette méthode est une modification de toutes les échelles selon un même schéma. Une application numérique sur une image SAR (voir 3.6.6 pour des précisions sur les images SAR) d'un fleuve est représentée figure 3.11.

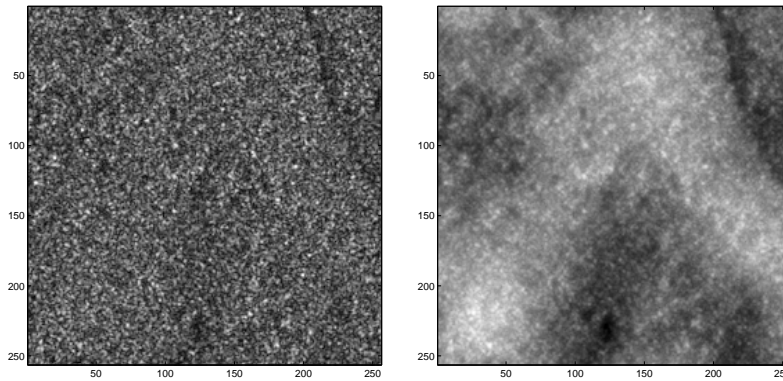


FIG. 3.11: Débruitage d'une image SAR d'un fleuve par la méthode de Multifractal Pumping (paramètre de débruitage égal à 0.7). Image originale à gauche, image débruitée à droite.

3.5 Contraintes sur les multiplicateurs certifiant l'aspect minimax de la méthode.

3.5.1 Position du problème

L'objectif de cette section est de fournir un résultat général sur la convergence asymptotique du risque pour les méthodes linéaires de débruitage par ondelette. On considère les méthodes consistant en la multiplication des coefficients d'ondelette de l'échelle j par un réel B_j compris entre 0 et 1 (ainsi un signal reste dans le même espace de Besov). Nous donnons les contraintes que doivent vérifier ces coefficients multiplicateurs pour assurer l'aspect minimax de la méthode de débruitage proposée.

3.5.2 Risque

On suppose que l'on multiplie les coefficients d'ondelette de chaque échelle par B_j une quantité stochastique (ou non).

Le risque est alors donné par

$$R = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \left(x_{j,k} - B_j \left(x_{j,k} + \frac{\sigma}{2^{\frac{n}{2}}} z_{j,k} \right) \right)^2 \quad (3.104)$$

En développant cette quantité on fait ressortir trois termes.

$$R = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \left[x_{j,k}^2 E[(1 - B_j)^2] + \sigma^2 2^{-n} E[B_j^2 z_{j,k}^2] + 2\sigma x_{j,k} 2^{-\frac{n}{2}} E[B_j(1 - B_j)z_{j,k}] \right] \quad (3.105)$$

On raffine le calcul de telle sorte que l'on ne touche qu'aux échelles supérieures à j_0 (quelconque dans un premier temps). On va maintenant imposer des contraintes sur les B_j pour que R soit minimax.

3.5.3 Première contrainte

On va étudier chaque somme indépendamment puisqu'il s'agit de termes positifs. Si chacune de ces sommes se comporte comme nous le souhaitons, cela équivaudra à l'aspect minimax de la méthode.

$$(1) = \sum_{j=j_0+1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} x_{j,k}^2 E[(1 - B_j)^2] = \sum_{j=j_0+1}^n e_j^2 E[(1 - B_j)^2] \quad (3.106)$$

On pose $\Delta_j = (1 - B_j)$. On suppose qu'il existe un réel a tel que $|E[\Delta_j^2]| < 2^{aj}$. On se place dans un espace de Besov $B_{\infty, \infty}^\alpha$ donc on peut majorer e_j^2 par $c2^{-2j\alpha}$.

Proposition 3.5.1

Dès que $|E[\Delta_j^2]| < 2^{aj}$ avec $a \leq \frac{2\alpha(j_0 - \frac{n}{2\alpha+1})}{j_0}$ alors (1) atteint le taux de convergence optimal.

Preuve

$$|(1)| \leq \sum_{j=j_0+1}^n 2^{(a-2\alpha)j} = \frac{2^{(a-2\alpha)n} - 2^{(a-2\alpha)j_0}}{1 - 2^{2\alpha-a}}$$

Si on veut que $|(1)| \leq 2^{-\frac{2\alpha n}{2\alpha+1}}$ alors il suffit que

$$\sum_{j=j_0+1}^n 2^{(a-2\alpha)j} = \frac{2^{(a-2\alpha)n} - 2^{(a-2\alpha)j_0}}{1 - 2^{2\alpha-a}} \leq 2^{-\frac{2\alpha n}{2\alpha+1}}$$

- Si $a > 2\alpha$
Alors $a \leq \frac{4\alpha^2}{2\alpha+1}$. Ce qui est impossible. En effet on ne peut avoir à la fois $2\alpha < a \leq \frac{4\alpha^2}{2\alpha+1}$.
- Si $a < 2\alpha$
Alors c'est le terme en $\frac{2^{(a-2\alpha)j_0}}{1-2^{2\alpha-a}}$ qui domine. Alors $a \leq \frac{2\alpha(j_0 - \frac{n}{2\alpha+1})}{j_0}$. On voit bien que cette quantité est plus petite que 2α .

Bilan : Par conséquent, dès que $a \leq \frac{2\alpha(j_0 - \frac{n}{2\alpha+1})}{j_0}$ alors (1) est minimax. ■

Remarque : Si $j_0 = \frac{n}{2\alpha+1}$ alors on obtient la condition $a \leq 0$.

3.5.4 Seconde contrainte

$$(2) = \sum_{j=j_0+1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \sigma^2 2^{-n} E[B_j^2 z_{j,k}^2] \quad (3.107)$$

On regarde le comportement de $E[B_j^2 z_{j,k}^2]$. Pour cela on utilise la formule de Cauchy-Schwartz.

$$E[B_j^2 z_{j,k}^2] \leq \sqrt{E[B_j^4]} * Constante$$

Proposition 3.5.2

Supposons qu'il existe a_1 tel que $\sqrt{E[B_j^4]} \leq 2^{ja_1}$, alors pour que (2) atteigne le taux de convergence optimal, il suffit que $a_1 \leq -\frac{2\alpha}{2\alpha+1}$.

Preuve

$$\begin{aligned} |(2)| &\leq \sigma^2 2^{-n-1} \sum_{j=j_0+1}^n 2^{j(1+a)} \\ |(2)| &\leq \sigma^2 2^{-n-1} \frac{2^{a_1+1} \left((2^{a_1+1})^n - (2^{a_1+1})^{j_0} \right)}{2^{a_1+1} - 1} \end{aligned}$$

- Si $a_1 > -1$
Alors pour que (2) soit minimax il suffit que $a_1 \leq -\frac{2\alpha}{2\alpha+1}$. Donc si $-1 < a_1 \leq -\frac{2\alpha}{2\alpha+1}$ alors (2) est minimax.
Remarque : $-1 \leq -\frac{2\alpha}{2\alpha+1}$ est toujours vrai donc on ne rencontre pas de problème d'existence d'intervalle.
- Si $a_1 < -1$
Alors $|(2)| \leq \sigma^2 2^{-n-1} \frac{-2^{a_1+1} (2^{a_1+1})^{j_0}}{2^{a_1+1} - 1}$. Par conséquent, (2) est minimax dès que $a_1 \leq \frac{2\alpha}{j_0(2\alpha+1)} - 1$ ce qui est vrai dès que $a_1 < -1$.

Bilan : Pour que (2) soit minimax, il suffit que $a_1 \leq -\frac{2\alpha}{2\alpha+1}$. ■

3.5.5 Troisième contrainte

$$(3) = 2\sigma^2 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=j_0}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} x_{j,k} E[B_j(1-B_j)z_{j,k}] \quad (3.108)$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$E[B_j z_{j,k}] \leq \sqrt{E(B_j^2)} \sqrt{E(z_{j,k}^2)} = \sqrt{E(B_j^2)}$$

et on a aussi

$$E[B_j^2 z_{j,k}] \leq \sqrt{E(B_j^4)}$$

Par conséquent

$$|E[B_j(1 - B_j)z_{j,k}]| \leq 2\sqrt{E(B_j^2)}$$

En effet

$$|E[B_j(1 - B_j)z_{j,k}]| \leq |E[B_j z_{j,k}]| + |E[B_j^2 z_{j,k}]| \leq \sqrt{E(B_j^2)} + \sqrt{E(B_j^4)} \text{ et } 0 < B_j \leq 1$$

On fait ici pour la première fois la supposition que les B_j sont compris entre 0 et 1.

Si de plus on se place dans un espace de Besov $B_{\infty, \infty}^\alpha$, alors on obtient la majoration suivante de |(3)|.

$$|(3)| \leq 4\sigma 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=j_0+1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} 2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})} \sqrt{E(B_j^2)} = \sigma 2^{-\frac{n}{2}+1} \sum_{j=j_0+1}^n 2^{j(\frac{1}{2}-\alpha)} \sqrt{E(B_j^2)}$$

Proposition 3.5.3

Supposons qu'il existe a_2 tel que $\sqrt{E(B_j^2)} \leq 2^{(a_2 j)}$.

Si $a_2 \leq \frac{1}{2} \min\left(\frac{4\alpha^2-2\alpha}{2\alpha+1}, (1-2\alpha)\left(\frac{n}{j_0(2\alpha+1)} - 1\right)\right)$ alors (3) atteint le taux de convergence optimal.

Preuve

$$|(3)| \leq \sigma 2^{-\frac{n}{2}+1} \frac{2^{n(a_2+\frac{1}{2}-\alpha)} - 2^{j_0(a_2+\frac{1}{2}-\alpha)}}{2^{\alpha-a_2} - 2^{\frac{1}{2}}}$$

- Si $a_2 > \alpha - \frac{1}{2}$

$$\text{Alors } |(3)| \leq 2 \frac{\sigma}{2^{\alpha-a_2} - 2^{\frac{1}{2}}} 2^{(a_2-\alpha)n}$$

Pour que (3) soit minimax, il suffit donc que $a_2 \leq \frac{2\alpha^2-\alpha}{2\alpha+1}$. Donc si $\alpha - \frac{1}{2} < a_2 < \frac{2\alpha^2-\alpha}{2\alpha+1}$ alors (3) est minimax. Attention cet intervalle n'est défini que si $\alpha < \frac{1}{2}$.

- Si $a_2 < \alpha - \frac{1}{2}$

$$\text{Alors } |(3)| \leq 2 \frac{\sigma 2^{-\frac{n}{2}} 2^{j_0(a_2+\frac{1}{2}-\alpha)}}{-2^{\alpha-a_2} + 2^{\frac{1}{2}}}$$

Pour que (3) soit minimax, il suffit que $a_2 \leq \frac{n}{j_0(2\alpha+1)} \frac{1-2\alpha}{2} - \frac{1-2\alpha}{2}$

Par conséquent si $a_2 < \alpha - \frac{1}{2}$ et $a_2 \leq \frac{n}{j_0(2\alpha+1)} \frac{1-2\alpha}{2} - \frac{1-2\alpha}{2}$ alors (3) est minimax.

- Si $\alpha - \frac{1}{2} < a_2 < \frac{2\alpha^2-\alpha}{2\alpha+1}$ alors (3) est minimax. (Attention cet intervalle n'est défini que si $\alpha < \frac{1}{2}$.)
- Si $a_2 < \min\left(\alpha - \frac{1}{2}, \frac{n}{j_0(2\alpha+1)} \frac{1-2\alpha}{2} - \frac{1-2\alpha}{2}\right)$ alors (3) est minimax.

Par conséquent, pour que (3) soit minimax, il suffit que

$$a_2 \in]-\infty, \min(\alpha - \frac{1}{2}, x1)] \cup [\alpha - \frac{1}{2}, \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}]$$

$$\text{avec } x1 = \frac{n}{j_0(2\alpha+1)} \frac{1-2\alpha}{2} - \frac{1-2\alpha}{2} = (\alpha - \frac{1}{2}) \left(1 - \frac{n}{j_0(2\alpha+1)}\right).$$

Note : On a $(\alpha - \frac{1}{2}) - x1 = (\alpha - \frac{1}{2}) \frac{n}{j_0(2\alpha+1)}$.

Par conséquent

$$x1 < \alpha - \frac{1}{2} \text{ si } \alpha > \frac{1}{2} \text{ (idem si } \alpha < -\frac{1}{2}\text{)}$$

$$\text{et } x1 > \alpha - \frac{1}{2} \text{ si } -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}.$$

De la même manière,

$$x1 - \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1} = (\alpha - \frac{1}{2}) \left(1 - \frac{n}{j_0(2\alpha + 1) - \frac{2\alpha}{2\alpha + 1}} \right) = (\alpha - \frac{1}{2}) \frac{1}{2\alpha + 1} \frac{j_0 - n}{j_0}$$

Par conséquent $x1 < \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}$ si $\alpha > \frac{1}{2}$ (idem si $\alpha < -\frac{1}{2}$)

et $x1 > \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}$ si $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$.

$$a_2 \in \left(] - \infty, \alpha - \frac{1}{2}] \cap] - \infty, x1] \right) \cup \left[\alpha - \frac{1}{2}, \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1} \right]$$

D'où :

- Si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors $x1 < \alpha - \frac{1}{2}$ et

$$a_2 \in \left(] - \infty, \alpha - \frac{1}{2}] \cap] - \infty, x1] \right)$$

c'est à dire

$$a_2 \leq x1$$

- Si $\alpha < \frac{1}{2}$ alors $x1 > \alpha - \frac{1}{2}$ et

$$a_2 \in] - \infty, \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}] \cap \left(] - \infty, x1] \cup \left[\alpha - \frac{1}{2}, \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1} \right] \right)$$

Alors comme on a aussi $x1 > \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}$, on obtient :

$$a_2 \in] - \infty, \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}] \cap] - \infty, x1] =] - \infty, \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}]$$

Pour conclure, dans tous les cas, si $a_2 \leq \min(\frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}, x1)$ alors (3) est minimax. ■

3.5.6 Bilan

- Si $E[(1 - B_j)^2] \leq 2^j \frac{2\alpha(j_0 - \frac{n}{2\alpha + 1})}{j_0}$ alors (1) est minimax
- Si $\sqrt{E[B_j^4]} \leq 2^{-j} \frac{2\alpha}{2\alpha + 1}$ alors (2) est minimax
- Si $E[B_j^2] \leq 2^{2j} \min(\frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}, x1)$ alors (3) est minimax.

Ces trois conditions peuvent s'écrire de la manière suivante :

- Si $E[(1 - B_j)^2] \leq 2^j \frac{2\alpha(j_0 - \frac{n}{2\alpha + 1})}{j_0}$ alors (1) est minimax
- Si $E[B_j^4] \leq 2^{-j} \frac{4\alpha}{2\alpha + 1}$ alors (2) est minimax
- Si $E[B_j^2] \leq 2^j \min(\frac{4\alpha^2 - 2\alpha}{2\alpha + 1}, 2x1)$ alors (3) est minimax.

Maintenant on regarde sous quelles conditions sur α la seconde contrainte engendre directement la troisième. On utilise pour cela l'inégalité de Jensen.

Inégalité de Jensen : Lorsque ϕ est convexe, on a $\phi(E[x]) \leq E[\phi(x)]$. Lorsque ψ est concave, on a $\psi(E[x]) \geq E[\psi(x)]$.

La fonction racine carrée est concave par conséquent :

$$E[B_j^2] \leq \sqrt{E[B_j^4]}$$

Donc si on montre que $2^{2j \min(\frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}, x_1)} < 2^{-j \frac{2\alpha}{2\alpha + 1}}$ alors la troisième contrainte sera implicite dès que la seconde sera vérifiée.

Or

$$\min\left(\frac{4\alpha^2 - 2\alpha}{2\alpha + 1}, 2x_1\right) = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha}{2\alpha + 1} \text{ si } \alpha < \frac{1}{2} \text{ et } 2x_1 \text{ sinon}$$

On voit aisément du coup que

$$2^{2j \min(\frac{2\alpha^2 - \alpha}{2\alpha + 1}, x_1)} < 2^{-j \frac{2\alpha}{2\alpha + 1}}$$

Ceci implique que l'on peut supprimer la troisième contrainte qui est inutile.

- Si $E[(1 - B_j)^2] \leq 2^j \frac{2\alpha(j_0 - \frac{n}{2\alpha + 1})}{j_0}$ alors (1) est minimax. Cette condition indique que B_j doit être proche de 1.
- Si $E[B_j^4] \leq 2^{-2j \frac{2\alpha}{2\alpha + 1}}$ alors (2) est minimax. Cette condition indique que B_j doit être proche de 0.

Pour que ces deux conditions soient vérifiées, il faut que l'une des deux soit une condition vide. En l'occurrence, la première contrainte peut être vide si j_0 vérifie $j_0 = \frac{n}{2\alpha + 1}$. Il en découle la proposition suivante.

Proposition 3.5.4 (Legrand)

Pour qu'une technique de débruitage par multiplication de l'échelle j par un coefficient B_j compris entre 0 et 1 atteigne le taux de convergence optimal, il faut et il suffit que :

- Le niveau de départ $j_0 = \frac{n}{2\alpha + 1}$.
- $E[B_j^4] \leq 2^{-2j \frac{2\alpha}{2\alpha + 1}}$

3.5.7 Application :

Nous avons fourni un résultat général pour les estimateurs linéaires obtenus à partir de la multiplication des coefficients d'ondelette bruité par un coefficient constant par échelle (déterministe ou non). Pour ce type d'estimateur, il suffit d'appliquer la proposition 3.5.4 pour savoir si la méthode atteint le taux de convergence optimal.

On applique la proposition au Multifractal Pumping et à sa version stochastique (c'est à dire que l'on suppose que les coefficients multiplicateurs B_j sont stochastiques). On retrouve les résultats de la section 3.10 dans le cas déterministe. Dans le cas stochastique, on obtient la condition $E[2^{-j(4x)}] \leq 2^{-j \frac{4\alpha}{2\alpha + 1}}$ à partir du niveau j_0 .

3.6 Débruitage Multifractal

3.6.1 Introduction

Nous avons proposé dans la section 3.10 une méthode simple de débruitage par augmentation contrôlée de la régularité Hölderienne, le multifractal pumping. Le principe était de multiplier les coefficients d'ondelette à partir d'un certain niveau par un coefficient multiplicateur dépendant uniquement du niveau et de la forme $B_j = 2^{-j^\delta}$. Cette méthode modifie toutes les échelles selon le même schéma ce qui constitue une faiblesse de la technique. Nous allons proposer dans cette section un raffinement de la méthode de multifractal pumping. Comme pour la méthode de pumping, on multiplie les coefficients d'ondelette du niveaux j par un réel B_j compris entre 0 et 1 mais cette fois les B_j pourraient s'écrire $B_j = 2^{-j^\delta(j)}$. Ces nouveaux coefficients multiplicateurs n'ont pas de forme à priori. De plus on va imposer au signal de sortie d'être le plus proche possible du signal original non perturbé.

Avant de plonger dans le coeur du problème, et après avoir rappelé les contraintes sur la régularité (sous-section 3.6.2), on présente une méthode de régularisation (sous-section 3.6.3) basée sur le même principe à la seule différence qu'on demande au signal de sortie d'être le plus proche possible du signal observé. Cette étude préliminaire nous permettra d'appréhender la complexité du problème abordé. Nous nous intéresserons ensuite, sous-section 3.6.4 à la version simplifiée de la méthode de débruitage où l'on ne requiert pas de conditions sur la variation de la régularité. Cette section se poursuivra par l'étude du problème complet de minimisation du risque sous contrainte sous-section 3.6.5. Enfin, des résultats numériques seront présentés sous-section 3.6.6.

3.6.2 Contrainte de régularité

On rappelle (voir section 3.4.2) la contrainte de régularité qui devra être vérifiée par nos coefficients multiplicateurs si l'on veut augmenter la régularité de $\Delta\alpha$.

$$\Delta\alpha + \frac{12}{(n-1)n(n+1)} \sum_{j=1}^n \left(j - \frac{n+1}{2} \right) [\log_2(B_j)] = 0 \quad (3.109)$$

En reprenant les notations du chapitre sur l'estimation, on a :

$$\Delta\alpha + K_n \sum_{j=1}^n s_j [\log_2(B_j)] = 0 \quad (3.110)$$

On peut réécrire cette contrainte sous la forme :

$$\prod_{j=1}^n B_j^{s_j} = 2^{-\frac{\Delta\alpha}{K_n}} =: \Gamma \quad (3.111)$$

3.6.3 Méthode de régularisation

On propose maintenant une méthode destinée à augmenter la régularité du signal en multipliant les coefficients d'ondelette de chaque échelle j du signal observé Y par un coefficient B_j^{reg} compris entre 0 et 1. Cette méthode peut toutefois être considérée comme une méthode de débruitage puisque le bruit diminue la régularité.

Le principe consiste à déterminer le signal le plus proche en norme $L2$ du signal d'entrée ayant la régularité souhaitée. La contrainte de régularité est celle décrite dans l'équation 3.110. Le problème se formalise de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimisation de } A = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} y_{j,k}^2 (1 - B_j)^2 = \sum_{j=1}^n e_j^2 (B_j - 1)^2 \\ \text{Sous la contrainte } \sum_{j=1}^n s_j [\log_2(B_j)] = -\frac{\Delta\alpha}{K_n} \end{array} \right. \quad (3.112)$$

Le coefficients multiplicateurs B_j^{reg} sont obtenus par minimisation du Lagrangien.

$$L = \sum_{j=1}^n e_j^2 (B_j - 1)^2 + \mu \left[\sum_{j=1}^n s_j [\log_2(B_j)] + \frac{\Delta\alpha}{K_n} \right] \quad (3.113)$$

On pose $\lambda = \frac{\mu}{\ln(2)}$.

Ce problème est complexe à résoudre analytiquement, le détails des résultats intermédiaires ne sera pas présenté dans ce document. Une résolution numérique est utilisée pour le moment.

3.6.4 Risque sans contrainte

On présente maintenant la méthode de débruitage mais pour l'instant sans contrainte sur l'augmentation de la régularité. On travaille avec l'hypothèse d'un oracle qui nous donne l'énergie du signal original à chaque échelle.

On suppose que l'on dispose d'un signal bruité, Y , par un bruit blanc Gaussien. On va essayer de déterminer par quels coefficients B_j on doit multiplier l'échelle j pour obtenir le risque minimum lors de l'estimation du signal original X .

Lemme 3.6.1

Le débruitage d'un signal bruité par un bruit blanc Gaussien par multiplication par un coefficient B_j déterministe à partir du niveau j_0 engendre le risque :

$$R_{j_0} = \sum_{j=j_0+1}^n e_j^2 (B_j - 1)^2 + \sigma^2 2^{-n-1} \sum_{j=j_0+1}^n B_j^2 2^j + \sigma^2 (2^{j_0-n} - 2^{-n}) \quad (3.114)$$

avec e_j^2 l'énergie du signal original au niveau j .

Preuve

Si on décide d'appliquer la méthode à partir du premier niveau, c'est à dire que l'on touche aux basses fréquences, alors le risque est donné par :

$$\begin{aligned} R_{all} &= E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} (x_{j,k} - B_j y_{j,k})^2 \right] \\ R_{all} &= E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \left(x_{j,k} - B_j \left(x_{j,k} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z_{j,k} \right) \right)^2 \right] \\ R_{all} &= \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} x_{j,k}^2 (B_j - 1)^2 + B_j^2 \sigma^2 2^{-n} \right] \end{aligned}$$

$$R_{all} = \sum_{j=1}^n e_j^2 (B_j - 1)^2 + \sigma^2 2^{-n-1} \sum_{j=1}^n B_j^2 2^j \quad (3.115)$$

avec $e_j^2 = \sum_{k=1}^{2^{j-1}} x_{j,k}^2$, l'énergie à l'échelle j du signal original.

Si on choisit de n'attaquer les coefficients d'ondelette qu'à partir du niveau $j_0 + 1$, alors le risque vaut :

$$R_{j_0} = \sum_{j=j_0+1}^n e_j^2 (B_j - 1)^2 + \sigma^2 2^{-n-1} \sum_{j=j_0+1}^n B_j^2 2^j + \sigma^2 (2^{j_0-n} - 2^{-n})$$

Le biais diminue alors que la variance se trouve augmentée. ■

Minimisation du risque sans contraintes

On calcule maintenant les B_j^* minimisant le risque présenté plus haut. Le résultat suivant présente une forme classique pour les travaux de débruitage avec oracle.

Proposition 3.6.1 (Legrand, Lévy-Véhel)

Les B_j minimisant le risque sont donnés par :

$$B_j^* = \frac{2e_j^2}{2e_j^2 + \sigma^2 2^{j-n}} \quad (3.116)$$

Preuve

$$\frac{\partial R_{all}}{\partial B_j} = 2e_j^2 (B_j - 1) + \sigma^2 2^{j-n} B_j$$

$$\frac{\partial R_{all}}{\partial B_j} = 0 \Leftrightarrow B_j^* = \frac{2e_j^2}{2e_j^2 + \sigma^2 2^{j-n}}$$

Ces B_j^* sont des minimums puisque $\frac{\partial^2 R_{all}}{\partial B_j^2} = 2e_j^2 + \sigma^2 2^{j-n} \geq 0$. De plus ce sont aussi des minimums du risque R_{j_0} . ■

Comportement asymptotique du risque sans contraintes

On note

$$R_{j_0}^* = R_{j_0}(B_j^*)$$

Nécessairement $j_0 = \frac{n}{2\alpha+1}$ pour que l'estimateur atteigne le taux de convergence optimal. (voir proposition 3.5.4).

Proposition 3.6.2 (Legrand, Lévy-Véhel)

Le risque obtenu en multipliant les coefficients d'ondelette à partir du niveau $j_0 + 1 = \frac{n}{2\alpha+1} + 1$ par B_j^* est minimax dans tout espace de Hölder C^α .

$$R_{j_0}^* \leq \left[\frac{c^2}{2} \frac{1}{2^{2\alpha} - 1} + \frac{c^4}{\sigma^2} \frac{1}{2^{(4\alpha+1)} - 1} + \sigma^2 \right] 2^{-\frac{2\alpha n}{2\alpha+1}} \quad (3.117)$$

Preuve

$$R_{j_0}^* = \sum_{j=j_0+1}^n e_j^2 \left(\frac{2e_j^2}{2e_j^2 + \sigma^2 2^{j-n}} - 1 \right)^2 + \sigma^2 2^{-n-1} \sum_{j=j_0+1}^n \left(\frac{2e_j^2}{2e_j^2 + \sigma^2 2^{j-n}} \right)^2 2^j + \sigma^2 (2^{j_0-n} - 2^{-n})$$

$$R_{j_0}^* \leq \sum_{j=j_0+1}^n e_j^2 + \sigma^2 2^{-n-1} \sum_{j=j_0+1}^n \left(\frac{2e_j^2}{2e_j^2 + \sigma^2 2^{j-n}} \right)^2 2^j + \sigma^2 (2^{j_0-n} - 2^{-n})$$

On suppose que $X \in C^\alpha$. Par conséquent il existe une constante c telle que $x_{j,k} \leq c 2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}$. Donc $e_j^2 \leq \frac{c^2}{2} 2^{-2j\alpha}$.

$$R_{j_0}^* \leq \frac{c^2}{2} \frac{1}{2^{2\alpha} - 1} (2^{-2\alpha j_0} - 2^{-2\alpha n}) + \sigma^2 2^{-n-1} \sum_{j=j_0+1}^n \left(\frac{2e_j^2}{2e_j^2 + \sigma^2 2^{j-n}} \right)^2 2^j + \sigma^2 (2^{j_0-n} - 2^{-n})$$

Or $\left(\frac{2e_j^2}{2e_j^2 + \sigma^2 2^{j-n}} \right)$ est une fonction croissante de e_j^2 . Ce qui nous permet d'écrire :

$$R_{j_0}^* \leq \frac{c^2}{2} \frac{1}{2^{2\alpha} - 1} (2^{-2\alpha j_0} - 2^{-2\alpha n}) + \sigma^2 2^{-n-1} \sum_{j=j_0+1}^n \left(\frac{c^2 \cdot 2^{-2j\alpha}}{c^2 \cdot 2^{-2j\alpha} + \sigma^2 2^{j-n}} \right)^2 2^j + \sigma^2 (2^{j_0-n} - 2^{-n})$$

Considérons la quantité

$$Q = \sum_{j=j_0+1}^n \left(\frac{c^2 \cdot 2^{-2j\alpha}}{c^2 \cdot 2^{-2j\alpha} + \sigma^2 2^{j-n}} \right)^2 2^j \leq \sum_{j=j_0+1}^n \left(\frac{c^2}{\sigma^2} \cdot 2^{-2j\alpha-j+n} \right)^2 2^j$$

Donc

$$Q \leq \frac{c^4}{\sigma^4} 2^{2n} \frac{2^{-j_0(4\alpha+1)} - 2^{-n(4\alpha+1)}}{2^{(4\alpha+1)} - 1}$$

$$Q \leq \frac{c^4}{\sigma^4} 2^{2n} \frac{2^{-j_0(4\alpha+1)}}{2^{(4\alpha+1)} - 1}$$

D'où

$$R_{j_0}^* \leq \frac{c^2}{2} \frac{1}{2^{2\alpha} - 1} (2^{-2\alpha j_0} - 2^{-2\alpha n}) + \sigma^2 2^{-n-1} \frac{c^4}{\sigma^4} 2^{2n} \frac{2^{-j_0(4\alpha+1)}}{2^{(4\alpha+1)} - 1} + \sigma^2 (2^{j_0-n} - 2^{-n})$$

$$R_{j_0}^* \leq \frac{c^2}{2} \frac{1}{2^{2\alpha} - 1} \left(2^{-\frac{2\alpha n}{2\alpha+1}} \right) + \frac{c^4}{\sigma^2} \frac{1}{2^{(4\alpha+1)} - 1} 2^{-\frac{2\alpha n}{2\alpha+1}} + \sigma^2 2^{-\frac{2\alpha n}{2\alpha+1}}$$

$$R_{j_0}^* \leq \left[\frac{c^2}{2} \frac{1}{2^{2\alpha} - 1} + \frac{c^4}{\sigma^2} \frac{1}{2^{(4\alpha+1)} - 1} + \sigma^2 \right] 2^{-\frac{2\alpha n}{2\alpha+1}}$$

■

On obtient donc le taux de convergence optimal.

Augmentation de la régularité par B_j^*

L'utilisation de ces coefficients multiplicateurs ne permet pas de contrôler la régularité du signal de sortie. On rappelle que $\Delta\alpha$ est la différence entre la régularité du signal de sortie et celle du signal bruité en chaque point.

Proposition 3.6.3 (Legrand, Lévy-Véhel)

Si $X \in PART(\alpha)$, la limite de l'augmentation de régularité obtenue en multipliant les coefficients d'ondelette du signal bruité à partir du niveau $j_0 + 1 = \frac{n}{2\alpha+1} + 1$ par B_j^* lorsque $n \rightarrow \infty$ est :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta\alpha = \frac{(2\alpha + 1)(4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha - 1)}{4(\alpha + 1)^3} \quad (3.118)$$

Preuve

Nous avons vu dans la partie consacrée au multifractal pumping que l'augmentation de la régularité $\Delta\alpha$ vérifiait :

$$\sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(B_j^*) = -\frac{\Delta\alpha}{K_n}$$

Par conséquent,

$$\Delta\alpha = -K_n \sum_{j=j_0+1}^n \left(j - \frac{n+1}{2} \right) \log_2 \left(\frac{2e_j^2}{2e_j^2 + \sigma^2 2^{j-n}} \right)$$

Si $X \in PART(\alpha)$ alors $e_j^2 = c^2 \cdot 2^{-2j\alpha}$. D'où :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(2e_j^2) + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(2e_j^2 + \sigma^2 2^{j-n}) \\ &= -K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(2) - K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(e_j^2) \\ &\quad + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(\sigma^2 2^{j-n}) + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2 \left(1 + \frac{2e_j^2}{\sigma^2 2^{j-n}} \right) \\ &= -K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j - K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(c^2 \cdot 2^{-2j\alpha}) \\ &\quad + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(\sigma^2) + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j(j-n) + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2 \left(1 + \frac{2c^2 \cdot 2^{-2j\alpha}}{\sigma^2 2^{j-n}} \right) \\ &= -K_n(1 + \log_2(c^2)) \sum_{j=j_0+1}^n s_j + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j(2j\alpha) \\ &\quad + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2(\sigma^2) + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j(j-n) + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2 \left(1 + \frac{2c^2 \cdot 2^{-2j\alpha}}{\sigma^2 2^{j-n}} \right) \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n(-1 - \log_2(c^2) + \log_2(\sigma^2)) \sum_{j=j_0+1}^n s_j \right] = 0$$

et lorsque $j > j_0 + 1$ il existe une constante c_1 telle que

$$0 = \log_2(1) < \log_2 \left(1 + \frac{2c^2 \cdot 2^{-2j\alpha}}{\sigma^2 2^{j-n}} \right) < \log_2(1 + c_1)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j \log_2 \left(1 + \frac{2c^2 \cdot 2^{-2j\alpha}}{\sigma^2 2^{j-n}} \right) \right] = 0$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta\alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j (2j\alpha) + K_n \sum_{j=j_0+1}^n s_j (j-n) \right] \\ &= \frac{(2\alpha + 1)(4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha - 1)}{4(\alpha + 1)^3} \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.6.1 (Legrand, Lévy-Véhel)

Si $X \in PART(\alpha)$, la limite de la régularité de l'estimateur obtenu en multipliant les coefficients d'ondelette du signal bruité à partir du niveau $j_0 + 1 = \frac{n}{2\alpha+1} + 1$ par B_j^* lorsque $n \rightarrow \infty$ est :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\alpha_{oracle}^{(n)} \right] = \frac{(4\alpha^2 + 3\alpha + 1)(8\alpha^4 + 28\alpha^3 + 32\alpha^2 + 10\alpha - 1)}{4(\alpha + 1)^3(2\alpha + 1)^2}} \quad (3.119)$$

Preuve

Nous avons vu dans la section 3.2 proposition 3.2.1 que après l'ajout d'un bruit Gaussien, $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_b(n)] = \frac{\alpha - 2\alpha^2}{(1+2\alpha)^2}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\alpha_{oracle}^{(n)} \right] &= \frac{(2\alpha + 1)(4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha - 1)}{4(\alpha + 1)^3} + \frac{\alpha - 2\alpha^2}{(1 + 2\alpha)^2} \\ &= \frac{(4\alpha^2 + 3\alpha + 1)(8\alpha^4 + 28\alpha^3 + 32\alpha^2 + 10\alpha - 1)}{4(\alpha + 1)^3(2\alpha + 1)^2} \end{aligned}$$

■

On ne retrouve donc pas la régularité du signal original mais une régularité proche du double de celle attendue comme le confirme la figure 3.12.

3.6.5 Risque sous contraintes

Minimisation du risque sous contraintes

On s'intéresse maintenant à la vérification de la contrainte de régularité. On résout le Lagrangien.

$$L_{j_0} = \left[\sum_{j=j_0+1}^n e_j^2 (B_j - 1)^2 + \frac{\sigma^2}{2} B_j^2 2^{j-n} \right] + \sigma^2 (2^{j_0-n} - 2^{-n}) + \mu \left[\frac{\Delta\alpha}{K_n} + \sum_{j=1}^n s_j [\log_2(B_j)] \right]$$

On pose $\lambda = \frac{\mu}{\ln(2)}$.

Pour les mêmes raisons que celles évoquées lors de la résolution du problème de régularisation, une solution numérique est utilisée.

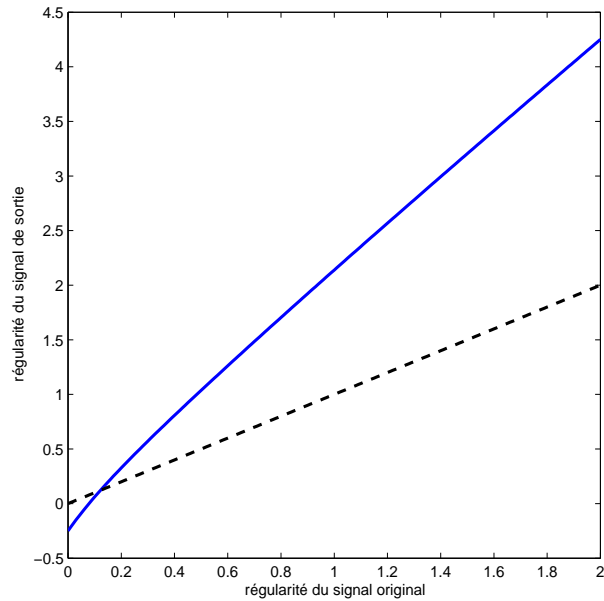


FIG. 3.12: Evolution de la régularité de l'estimateur en fonction de celle du signal original pour un signal dans $PART(\alpha)$. En pointillé la première bissectrice. La courbe se comporte très rapidement en 2α donc on ne retrouve pas la régularité α souhaitée.

Comportement asymptotique du risque sous contrainte

Nous cherchons à évaluer le comportement asymptotique du risque sous contrainte de régularité.

$$R^{den} = R_{j_0}(B_j^{den})$$

Théorème 3.6.1 (Legrand, Lévy-véhel)

Soit $X \in B_{\infty, \infty}^s$.

- Si $\frac{s}{2s+1} \leq \Delta\alpha$, alors

$$\boxed{\text{Si } j_0 = \frac{n}{2s+1}, \quad R^{den} \leq \left(\sigma^2 + \frac{2^{-2s-1}}{1-2^{-2s}} \right) 2^{-\frac{2ns}{2s+1}} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty} \quad (3.120)$$

- Si $\frac{s}{2s+1} > \Delta\alpha$, alors

$$\boxed{\text{Si } j_0 = \frac{n}{2s+1}, \quad R^{den} \leq \sigma^2 \frac{2^{1-2\Delta\alpha}}{2^{-2\Delta\alpha} - 1} 2^{-2n\Delta\alpha} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty} \quad (3.121)$$

Théorème 3.6.2 (Legrand, Lévy-véhel)

Soit $X \in B_{p,q}^s$ avec $p < 2$.

- ★ Si $\Delta\alpha \geq \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}} \frac{1}{2}$, alors

$$\boxed{\text{Si } j_0 = \frac{n}{2+2s-\frac{2}{p}}, \quad R^{den} \leq \left(\sigma^2 + d_0^2 \frac{2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}}{1-2^{-(2s+1-\frac{2}{p})}} \right) 2^{-n \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}}} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty}$$

★ Si $\Delta\alpha < \frac{1+2s-\frac{2}{p}}{2+2s-\frac{2}{p}}$, alors

$$Si \ j_0 = \frac{n}{2+2s-\frac{2}{p}}, \ R^{den} \leq \sigma^2 \frac{2^{-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha}-1} (2^{-2\Delta\alpha n}) \ \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

Théorème 3.6.3 (Legrand, Lévy-véhel)

Soit $X \in B_{p,q}^s$ avec $p \geq 2$.

★ Si $\Delta\alpha \geq \frac{s}{1+2s}$, alors

$$Si \ j_0 = \frac{n}{1+2s}, \ R^{den} \leq \left(\sigma^2 + d_0^2 2^{\frac{2}{p}-1} \frac{2^{-2s}}{1-2^{-2s}} \right) 2^{-n \frac{2s}{2s+1}} \ \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (3.122)$$

★ Si $\Delta\alpha < \frac{s}{1+2s}$, alors

$$Si \ j_0 = \frac{n}{1+2s}, \ R^{den} \leq \sigma^2 \frac{2^{-2\Delta\alpha}}{2^{1-2\Delta\alpha}-1} (2^{-2\Delta\alpha n}) \ \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (3.123)$$

On démontre très facilement ces 3 théorèmes en utilisant les résultats du chapitre sur le multifractal pumping.

Preuve

Nous avons vu dans le chapitre sur le multifractal pumping que le risque généré par les coefficients multiplicateurs du pumping R^{MP} était minimax. Or ces coefficients ne minimisaient pas le risque, par conséquent :

$$R^{den} \leq R^{MP}$$

■

3.6.6 Résultats numériques

On présente des résultats sur des images de type synthetic aperture radar (SAR). Une large littérature décrit la difficulté de débruiter ces images, où le bruit, appelé speckle, est non Gaussien, corrélé et multiplicatif. Une analyse fine du speckle suggère qu'il suit une K-distribution [Oli91]. Les techniques classiques appliquées aux images de type SAR sont souvent le filtrage géométrique et le filtrage Kuan. Il est à noter que des méthodes de wavelet shrinkage ont aussi été adaptées pour ces images [GS96].

Le traitement des images de type SAR de paysages naturels fournit un très bon test pour notre méthode puisque le signal original est très irrégulier. Bien que le bruit ne soit pas additif, il est intéressant de voir comment notre technique de débruitage se comporte sur ce type de données. On représente sur la figure 3.13 l'image de référence sur laquelle va être effectué le débruitage par a) Kuan Filtering b) Hard Thresholding c) L'algorithme décrit dans ce chapitre. La figure 3.14 montre l'application de notre méthode sur une autre image de type SAR.

3.6.7 Conclusion

On a présenté dans cette section une méthode de débruitage atteignant le taux de convergence optimal des estimateurs linéaires. Cette méthode présente cependant des inconvénients, elle est très complexe, et assez lourde algorithmiquement. On propose donc maintenant une autre méthode, simple, non linéaire et adaptative provenant d'un métissage entre le Multifractal Pumping que nous avons développé dans la section 3.4 et une célèbre méthode non-linéaire, le Hard Thresholding.

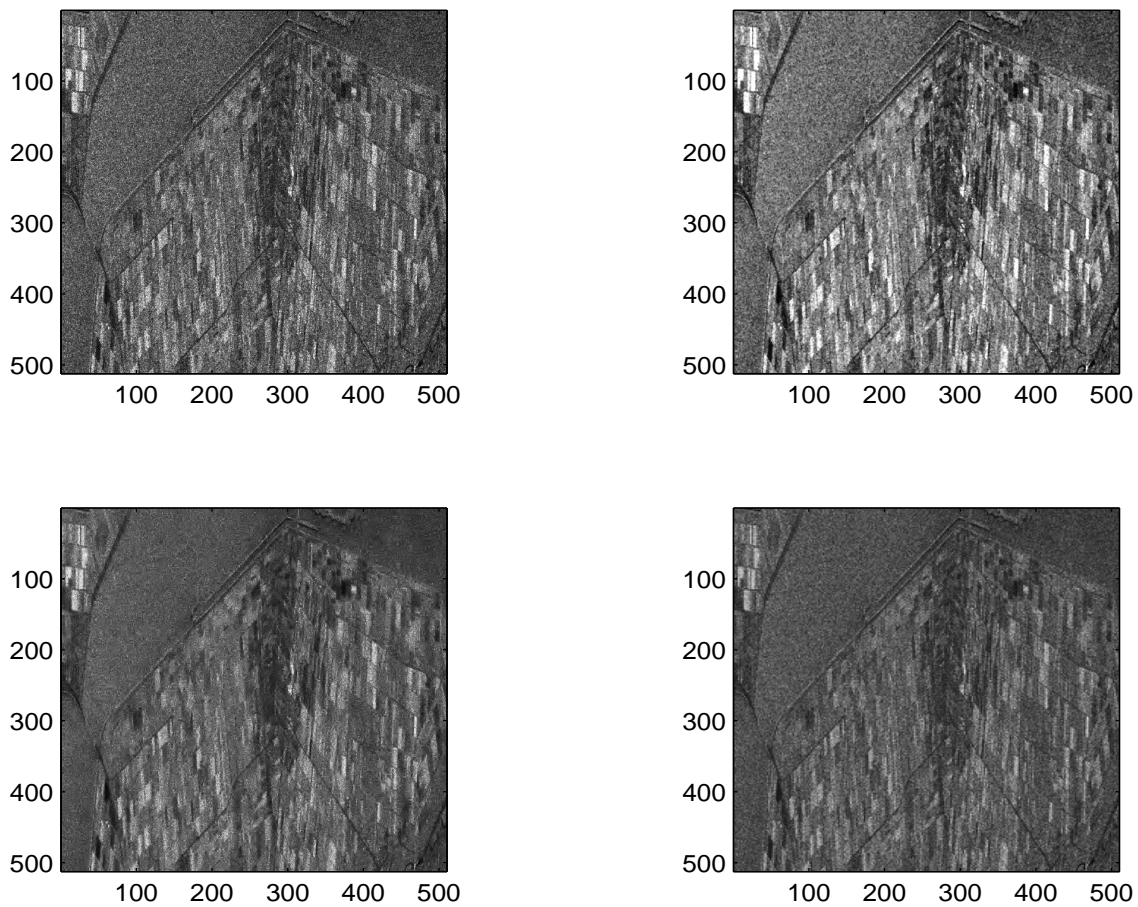


FIG. 3.13: Image SAR originale (haut gauche), Kuan median filtering (haut droite), wavelet shrinkage (bas gauche), notre méthode (bas droite). Remarquons que les régions texturées (mer et parcelles de terre) ont été lissées tandis que les contours sont préservés dans l'image de bas à droite.

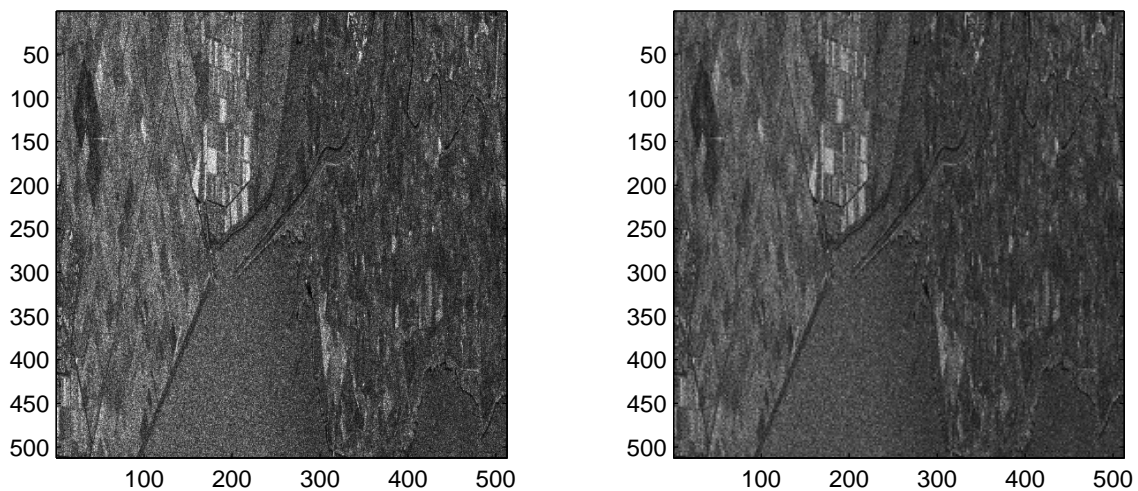


FIG. 3.14: Image SAR originale (left), débruitage par notre méthode (droite).

3.7 Non-Linear Wavelet Coefficients Pumping

3.7.1 Introduction

Nous avons présenté dans ce chapitre des méthodes de débruitage par ondelette, linéaires, donc pas toujours minimax selon l'espace de Besov dans lequel on se trouve ($p < 2$) et non-adaptatives. Par conséquent on se propose de marier dans cette section l'une de nos méthodes, le multifractal pumping, avec une méthode non-linéaire adaptative et simple, le Hard Thresholding. La méthode proposée, sous le nom de Wavelet Non-Linear coefficients Pumping, aura ainsi l'avantage d'être adaptative et de contrôler la régularité du signal débruité. Il est bien connu que le Hard Thresholding surlisse les signaux irréguliers (voir section 3.7.3). En effet, le Hard Thresholding supprime tous les petits coefficients d'ondelette. Le raffinement se situe sur ce point, plus précisément, on suggère de réduire ces coefficients plutôt que de les supprimer.

La procédure que nous proposons dépend du paramètre global de débruitage de la méthode $\delta \in R^+$ et d'un seuil $\lambda \in R^+$.

3.7.2 Rappels sur le Hard Thresholding (HT)

On rappelle dans cette section quelques propriétés du Hard Thresholding.

Le Hard Thresholding a été proposé par D. Donoho et I. Johnstone au début des années 90 dans un cadre de débruitage et par D. Picard et G. Kerkyacharian dans le cadre d'estimation de densité. Il s'agit d'une méthode de débruitage à base d'ondelette les plus utilisées. Le principe découle d'une constatation sur les coefficients d'ondelette des signaux réguliers. Ces signaux présentent beaucoup de coefficients d'ondelette nuls et quelques gros coefficients, à l'inverse des coefficients du bruit qui sont tous petits et répartis partout. La séparation se fait donc de manière naturelle par un seuillage des coefficients d'ondelette.

On note $W(X)$ la transformée en ondelette discrète du signal X . On note respectivement $x_{j,k}$, les coefficients d'ondelette du signal original X , $y_{j,k}$ ceux du signal bruité Y et $\hat{x}_{j,k}$ ceux de \hat{X} , l'estimateur de X , obtenu par débruitage.

Définition 3.7.1 Soit Y_n un échantillonnage de 2^n points de Y . L'estimateur de X par la méthode du Hard Thresholding, \hat{X}_n^{HT} est donné par :

$$\begin{aligned} HT(n, \lambda) : \mathbb{R}^{2^n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2^n} \\ Y_n &\longmapsto \hat{X}_n^{HT} \quad \text{avec} \quad W(\hat{X}_n^{HT}) = \{y_{j,k} \cdot 1_{|y_{j,k}| \geq \lambda_n}\} \end{aligned} \quad (3.124)$$

Cette loi de décision est illustrée figure 3.15.

Plusieurs extensions du Hard Thresholding ont été proposées dans la littérature avec des seuils divers et variés (seuil sure, seuil minimax, seuils obtenus par méthodes Bayésiennes...). Pour le reste de ce document et pour un souci de simplicité, nous allons utiliser le seuil universel $\lambda_n = \sigma 2^{-\frac{n}{2}} \sqrt{2n}$. Comme nous l'avons rappelé, la transformée en ondelette des signaux réguliers est très "sparse" et contient majoritairement des zéros. Après la perturbation par du bruit, les coefficients sont tous non nuls. Le Hard Thresholding avec le "seuil universel" garantit le retour de ces coefficients à zéro.

La méthode de Hard Thresholding est adaptative et est "near-minimax" (voir théorème 3.7.1), c'est à dire qu'elle atteint le taux de convergence optimal à un facteur n près (avec 2^n le nombre de points). En raffinant cette méthode en effectuant un seuillage par blocs, P. Hall, G. Kerkyacharian et D. Picard ont montré qu'il était possible de rendre la procédure minimax [HKPT98].

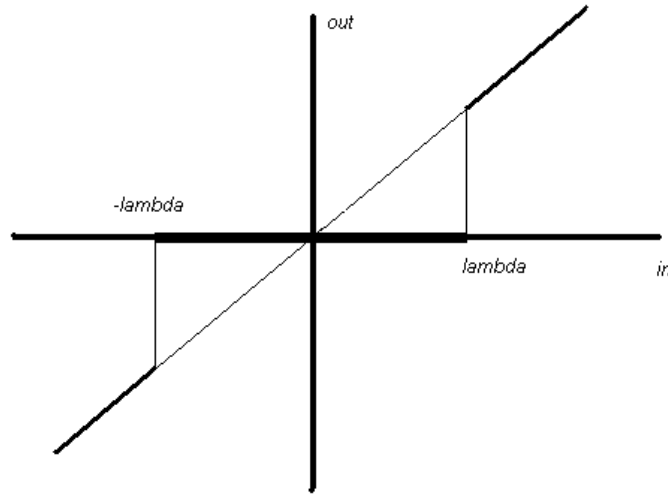


FIG. 3.15: Représentation de la loi de décision du Hard Thresholding.

Théorème 3.7.1 (D. Donoho)

Soit $X \in B_{p,q}^s$. Il existe une constante C telle que :

$$R^{HT} := \|X - \hat{X}_n^{HT}\|^2 \leq C.n.2^{-\frac{2sn}{2s+1}} \quad (3.125)$$

3.7.3 Considérations sur la régularité après Hard Thresholding

On étudie dans cette partie la modification de la régularité engendrée par l'application du Hard Thresholding sur un signal dans $PART(\alpha)$ et perturbé par un bruit blanc gaussien. On montre en utilisant l'estimateur de la régularité présenté dans le chapitre 1 que le Hard Thresholding surlisse le signal de sortie.

On sait que l'algorithme de Hard Thresholding va remplacer certains coefficients d'ondelette par zero ce qui risque de nous poser des problèmes pour estimer la régularité puisqu'on va obtenir des régularités infinies. Cependant, on peut rappeler que lorsqu'on utilise une ondelette avec p_1 moments d'ordre nuls, on ne peut estimer une régularité supérieure à p_1 . Par conséquent, il semble naturel de remplacer les coefficients rendus nuls par 2^{-jp} avec $p = p_1 + \frac{1}{2}$. On peut prendre une ondelette avec un nombre arbitrairement élevé de moments nuls et donc rendre ces coefficients aussi proche de zero que l'on souhaite. Après ces considérations, on modifie en conséquence l'algorithme de Hard Thresholding afin de fournir directement à notre estimateur des coefficients non-nuls.

Définition 3.7.2 Soit X_n un échantillon de 2^n points, soit Y_n ce même échantillon perturbé par du bruit, $\{x_{j,k}\} = W(X_n)$ et $\{y_{j,k}\} = W(Y_n)$. L'estimateur de X par la méthode du Hard Thresholding, \hat{X}_P^{HT} est donné par :

$$HT_P(n, \lambda, p) : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{2^n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2^n} \\ Y \longmapsto \hat{X}_n^{HT} \end{array} \text{ avec } W(\hat{X}_n^{HT}) = \{y_{j,k} \cdot 1_{|y_{j,k}| \geq \lambda_n} + 2^{-jp} \cdot 1_{|y_{j,k}| < \lambda_n}\} \quad (3.126)$$

On estime la régularité de cet estimateur par la méthode RCO et on évalue son espérance.

$$\begin{aligned}
E[\alpha_{x_{HT}}^{(n)}] &= -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j E[\log_2 |x^{HT}|] \\
&= -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j E[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n}] - K_n \sum_{j=1}^n s_j E[\log_2 |2^{-jp}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| < \lambda_n}] \\
&= -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j E[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n}] + K_n \sum_{j=1}^n s_j j p \cdot P(|y_{j,k}^{(n)}| < \lambda_n)
\end{aligned}$$

On s'abstient de noter les indices k . D'autre part on a mentionné la dépendance des coefficients d'ondelette à l'échantillonnage utilisé à travers l'indice (n) dans cette section. Enfin le coefficient d'ondelette $x_j^{(n)}$ sera pris positif sans perdre de généralité.

Définition 3.7.3 Soit g une fonction positive qui tend vers l'infini avec n et majorée par $\sqrt{2n}$. Soit $x_j^{(n)}$ une suite de nombre réels positifs. On définit les ensembles suivants :

$$I_n := \left\{ j, x_j^{(n)} < 2^{-\frac{n}{2}} \sigma(\sqrt{2n} - g(n)) \right\}$$

$$L_n := \left\{ j, x_j^{(n)} > 2^{-\frac{n}{2}} \sigma(\sqrt{2n} + g(n)) \right\}$$

$$S_n := \left\{ j, 2^{-\frac{n}{2}} \sigma(\sqrt{2n} - g(n)) \leq x_j^{(n)} \leq 2^{-\frac{n}{2}} \sigma(\sqrt{2n} + g(n)) \right\}$$

Dans la suite du document, on note $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Théorème 3.7.2 (Legrand, Lévy-Véhel)

Si g est telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)} \right) = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(E[\alpha_{x_{HT}}^{(n)}] + \frac{1}{2} + K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j \log_2 |x_j^{(n)}| - p \cdot K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j \cdot s_j \right. \\
- \frac{n}{2} K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j \cdot \rho(x_j^{(n)}) \\
\left. - p \cdot K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n j \cdot s_j (1 - \rho(x_j^{(n)})) \right) = 0
\end{aligned}$$

avec

$$\rho(x) = 1 - \frac{1}{2} \left[erf\left(\frac{\sqrt{2n} + \frac{2^{\frac{n}{2}} x}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) + erf\left(\frac{\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}} x}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \right] = P(|y| \geq \lambda_n)$$

Preuve

La preuve découle des lemmes suivants et son examen montre que le résultat ne dépend pas de g dès que les conditions suivantes sont vérifiées.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)} \right) = 0$,
- g une fonction positive qui tend vers l'infini avec n
- $g(n)$ majorée par $\sqrt{2n}$

■

1ere étape : Travail sur le terme $K_n \sum_{j=1}^n s_j j p.P(|y_j^{(n)}| < \lambda_n)$

Lemme 3.7.1

1. $\forall j \in I_n, P(|y_j^{(n)}| < \lambda_n) > \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}(\sqrt{n}) + \operatorname{erf}\left(\frac{g(n)}{\sqrt{2}}\right) \right]$
2. $\forall j \in L_n, P(|y_j^{(n)}| < \lambda_n) < \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{g(n)}{\sqrt{2}}\right) \right]$

Preuve

$$P(|y_j^{(n)}| < \lambda_n) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{2^{\frac{n}{2}}(x_j^{(n)} + \lambda_n)}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{2^{\frac{n}{2}}(-x_j^{(n)} + \lambda_n)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] \quad (3.127)$$

1. $\forall j \in I_n,$

$$\operatorname{erf}\left(\frac{2^{\frac{n}{2}}(x_j^{(n)} + \lambda_n)}{\sqrt{2}\sigma}\right) > \operatorname{erf}(\sqrt{n})$$

$$\operatorname{erf}\left(\frac{2^{\frac{n}{2}}(-x_j^{(n)} + \lambda_n)}{\sqrt{2}\sigma}\right) > \operatorname{erf}\left(\frac{g(n)}{\sqrt{2}}\right)$$

2. $\forall j \in L_n,$

$$\operatorname{erf}\left(\frac{2^{\frac{n}{2}}(x_j^{(n)} + \lambda_n)}{\sqrt{2}\sigma}\right) < 1$$

$$\operatorname{erf}\left(\frac{2^{\frac{n}{2}}(-x_j^{(n)} + \lambda_n)}{\sqrt{2}\sigma}\right) < \operatorname{erf}\left(-\frac{g(n)}{\sqrt{2}}\right) = -\operatorname{erf}\left(\frac{g(n)}{\sqrt{2}}\right)$$

■

Corollaire 3.7.1

1. $\forall j \in I_n, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|y_j^n| < \lambda_n) = 1$
2. $\forall j \in L_n, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|y_j^n| < \lambda_n) = 0$

Lemme 3.7.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{j=1}^n s_j j.P(|y_{j,k}| < \lambda_n) - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j s_j - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j j.P(|y_{j,k}| < \lambda_n) \right] = 0$$

Preuve

On considère la grandeur

$$A = K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j s_j - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n s_j j \cdot P(|y_{j,k}| < \lambda_n)$$

$$A = K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n s_j j \cdot (1 - P(|y_{j,k}| < \lambda_n))$$

On peut majorer $|A|$ par

$$|A| \leq \sup_{j \in I_n} [1 - P(|y_{j,k}| < \lambda_n)] \cdot K_n \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j \cdot |s_j|$$

Or $K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j \cdot |s_j| = O(1)$ et en utilisant conjointement le lemme 3.7.1, il existe une constante c_1 telle que :

$$|A| \leq c_1 \left[1 - \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}(\sqrt{n}) + \operatorname{erf}\left(\frac{g(n)}{\sqrt{2}}\right) \right] \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On veut déterminer la limite de B avec

$$B = K_n \sum_{j=1}^n s_j j \cdot P(|y_{j,k}| < \lambda_n) - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j s_j - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j j \cdot P(|y_{j,k}| < \lambda_n)$$

$$B = K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j j \cdot P(|y_{j,k}| < \lambda_n) - A$$

D'où,

$$|B| \leq |A| + \left| K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j j \cdot P(|y_{j,k}| < \lambda_n) \right|$$

or

$$\left| K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j j \cdot P(|y_{j,k}| < \lambda_n) \right| \leq \sup_{j \in L_n} [P(|y_{j,k}| < \lambda_n)] \cdot K_n \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n j \cdot |s_j|$$

D'après le lemme 1, pour tout $j \in L_n$, $P(|y_{j,k}| < \lambda_n) \leq \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{g(n)}{\sqrt{2}}\right) \right]$.

De plus $K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n j \cdot |s_j| = O(1)$, donc il existe une constante c_2 telle que

$$\left| K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j j \cdot P(|y_{j,k}| < \lambda_n) \right| \leq c_2 \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{g(n)}{\sqrt{2}} \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Par conséquent B tend vers zero lorsque n tend vers l'infini. ■

Deuxième étape : Travail sur le terme $K_n \sum_{j=1}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right]$

Lemme 3.7.3

Pour tout $j \in I_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] \right] = 0$ dès que $\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)}$ tend vers zero qd $n \rightarrow \infty$

Preuve

$$\begin{aligned} I = E[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n}] &= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\lambda_n} \log |u| e^{-\frac{2^n (u-x_{j,k}^{(n)})^2}{2\sigma^2}} du \\ &\quad + \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_n}^{\infty} \log |u| e^{-\frac{2^n (u-x_{j,k}^{(n)})^2}{2\sigma^2}} du \end{aligned}$$

I est une fonction paire de $x_{j,k}$ donc on peut prendre $x_{j,k}$ positif sans perdre de généralité. De plus, pour simplifier les notations, on ne précisera plus l'indice k .

On effectue un changement de variable : On pose $z = \frac{(u-x_j^{(n)})}{\sigma} 2^{\frac{n}{2}}$, ce qui nous donne $du = \sigma 2^{-\frac{n}{2}} dz$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}}}^{\infty} [\log_2 |x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}}} [\log_2 |x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= (1) + (2) \end{aligned}$$

Traitement de (1) :

Nous allons commencer par minorer (1) par une quantité qui tend vers zero lorsque n tend vers l'infini. Les bornes d'intégration nous donnent $z > \sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}$ ce qui implique que $x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z_j > \sigma 2^{-\frac{n}{2}} \sqrt{2n}$ donc cette quantité est positive et on peut enlever la valeur absolue sous l'intégrale. Comme le logarithme est une fonction strictement croissante sur \mathbb{R}^+ ,

$$\log_2 \left(x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z_j \right) e^{-\frac{z^2}{2}} > \left[\log_2(\sigma) - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \log_2(2n) \right] e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Par conséquent,

$$(1) > \left[\log_2(\sigma) - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \log_2(2n) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{(\lambda_n - x_j^{(n)})}{\sigma} 2^{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =: T$$

Nous montrons que T tend vers zero lorsque n tend vers l'infini.

On travaille sur l'ensemble des $j \in I_n$ donc $x_j^{(n)} < 2^{-\frac{n}{2}} \sigma (\sqrt{2n} - g(n))$. Cette propriété implique $\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} > g(n)$. Par conséquent,

$$|T| \leq \left| \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \log_2(2n) + \log_2(\sigma) \right| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{g(n)}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Donc

$$|T| \leq \left| \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \log_2(2n) + \log_2(\sigma) \right| \left[\frac{e^{-g^2(n)}}{g(n)\sqrt{\pi}} \right] \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini}$$

Par conséquent, dès que $\frac{n}{g(n)}e^{-g^2(n)}$ tend vers zéro, alors T tend vers zéro. Nous venons de minorer (1) par une quantité qui tend vers zéro, maintenant nous montrons qu'on peut majorer (1) par une autre quantité qui tend vers zéro.

$j \in I_n$ et $x_j^{(n)}$ est positif donc

$$0 \leq x_j^{(n)} < 2^{-\frac{n}{2}} \sigma (\sqrt{2n} - g(n))$$

$$0 < \sigma 2^{-\frac{n}{2}} g(n) \leq \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z \leq x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z < \sigma 2^{-\frac{n}{2}} (z + \sqrt{2n} - g(n))$$

D'où :

$$|x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}}| \leq \sigma 2^{-\frac{n}{2}} (z + \sqrt{2n} - g(n)) \quad (3.128)$$

Le logarithme est une fonction croissante donc

$$(1) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\sqrt{2n} - \frac{2\frac{n}{\sigma} x_j^{(n)}}}{\infty} [\log_2 |z + \sqrt{2n} - g(n)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \left(\log_2(\sigma) - \frac{n}{2} \right) \int_{\sqrt{2n} - \frac{2\frac{n}{\sigma} x_j^{(n)}}}{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right]$$

On montre que ce terme tend lui vers zéro. On a vu précédemment (dans la minoration de (1)) que

$$\left(\log_2(\sigma) - \frac{n}{2} \right) \int_{\sqrt{2n} - \frac{2\frac{n}{\sigma} x_j^{(n)}}}{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ dès que } \frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)} \text{ tend vers zero}$$

Il reste à étudier la quantité suivante :

$$(3) := \int_{\sqrt{2n} - \frac{2\frac{n}{\sigma} x_j^{(n)}}}{\infty} [\log_2(z + \sqrt{2n} - g(n))] e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Soit $h(n, z) = \log_2(z + \sqrt{2n} - g(n)) e^{-\frac{z^2}{4}}$. Cette fonction est dérivable et continue sur l'intervalle $[\sqrt{2n} - \frac{2\frac{n}{\sigma} x_j^{(n)}}{, +\infty[$. De plus $\lim_{z \rightarrow \infty} |h(n, z)| = 0$ à n fixé.

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{z + \sqrt{2n} - g(n)} e^{-\frac{z^2}{4}} - \frac{z}{2} \log_2 |z + \sqrt{2n} - g(n)| e^{-\frac{z^2}{4}} \quad (3.129)$$

S'il existe sur $[\sqrt{2n} - \frac{2\frac{n}{\sigma} x_j^{(n)}}{, +\infty[$ des z tels que la dérivée $\frac{\partial h}{\partial z}$ s'annule, alors ces z vérifient

$$\ln(z + \sqrt{2n} - g(n)) = \frac{2}{z(z + \sqrt{2n} - g(n))} \quad (3.130)$$

Soit \tilde{z} l'argument maximisant $|h(n, z)|$ sur l'ensemble des z vérifiant l'équation 3.130. On a :

$$|h(n, z)| \leq \max \left(|h(n, \tilde{z})|, \left| h \left(n, \sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} \right) \right| \right) \quad (3.131)$$

sur $[\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}, +\infty[$.

$$|h(n, \tilde{z})| = \frac{2}{\tilde{z}(\tilde{z} + \sqrt{2n} - g(n)) \ln(2)} e^{-\frac{\tilde{z}^2}{4}} \quad (3.132)$$

Si \tilde{z} existe dans le domaine d'intégration, il est nécessairement supérieur à $\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}$ qui est lui-même supérieur à $g(n)$ car $j \in I_n$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} |h(n, \tilde{z})| = 0$.

$$\left| h \left(n, \sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} \right) \right| = \log_2 \left(-\frac{2^{\frac{n}{2}} x_j^{(n)}}{\sigma} - g(n) + 2\sqrt{2n} \right) e^{-\frac{(\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)})^2}{4}}$$

Or pour $j \in I_n$, on a $\frac{2^{\frac{n}{2}} x_j^{(n)}}{\sigma} < \sqrt{2n} - g(n)$, donc,

$$\sqrt{2n} \leq -\frac{2^{\frac{n}{2}} x_j^{(n)}}{\sigma} - g(n) + 2\sqrt{2n} \leq 2\sqrt{2n}$$

et

$$\left| h \left(n, \sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} \right) \right| \leq \log_2(2\sqrt{2n}) e^{-\frac{g^2(n)}{4}} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} |(3)| &\leq \max \left(|h(n, \tilde{z})|, \left| h \left(n, \sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} \right) \right| \right) \int_{\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}} dz \\ &\leq \max \left(\frac{2}{\tilde{z}(\tilde{z} + \sqrt{2n} - g(n)) \ln(2)} e^{-\frac{\tilde{z}^2}{4}}, \log_2(2\sqrt{2n}) e^{-\frac{g^2(n)}{4}} \right) \int_{\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}} dz \end{aligned}$$

Le seul terme qui risque de ne pas tendre vers zero est

$$(4) := \log_2(2\sqrt{2n}) e^{-\frac{g^2(n)}{4}} \int_{\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}} dz > 0 \quad (3.134)$$

Or on peut majorer ce terme par

$$\begin{aligned} (4) &\leq \log_2(2\sqrt{2n}) e^{-\frac{g^2(n)}{4}} \int_{g(n)}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}} dz \\ &\leq \log_2(2\sqrt{2n}) e^{-\frac{g^2(n)}{4}} \left(\frac{2e^{-\frac{g^2(n)}{4}}}{g(n)} \right) \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini} \\ &\leq \log_2(2\sqrt{2n}) \left(\frac{2e^{-\frac{g^2(n)}{2}}}{g(n)} \right) \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini} \end{aligned}$$

Cette quantité tend vers zéro lorsque $g(n)$ vérifie une condition plus faible que " $\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)}$ tend vers zero". Par conséquent (4) tend vers zero lorsque n tend vers l'infini, ce qui entraîne le même résultat

pour (3). On a donc majoré (1) par une quantité qui tend vers zero. Ce qui nous permet de conclure pour (1).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n - \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}}}^{\infty} [\log_2 |x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 \quad (3.135)$$

Traitement de (2) :

$$(2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n - \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}}} [\log_2 |x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z_j|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

On commence par minorer (2) par une quantité qui tend vers zero. Les bornes d'intégration nous donnent $z < -\sqrt{2n} - \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}$ ce qui implique $|x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z_j| > \sigma \sqrt{2n} 2^{-\frac{n}{2}}$ donc

$$(2) \geq \left[-\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \log_2(2n) + \log_2(\sigma) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n - \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz := T_2$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n - \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n + \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &< \frac{e^{-n}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini} \end{aligned}$$

Donc $|T_2| \leq \left[-\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \log_2(2n) + \log_2(\sigma) \right] \frac{e^{-n}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini. On a donc minoré (2) lorsque n tend vers l'infini par une quantité qui tend vers zéro.

On majore (2) par une quantité qui tend elle aussi vers zero. Le calcul est similaire à celui de la majoration de (1).

$$(2) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \max \left[\int_{\sqrt{2n + \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}}}^{\infty} [\log_2 |z|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \int_{\infty}^{-\sqrt{2n - \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}}} [\log_2 |z + \sqrt{2n} - g(n)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \left(\log_2(\sigma) - \frac{n}{2} \right) \int_{\sqrt{2n + \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right]$$

Le premier élément dans le max tend vers zero lorsque n tend vers l'infini. On montre que le second tend lui aussi vers zéro. On a vu précédemment (dans la minoration de (2)) que

$$\left(\log_2(\sigma) - \frac{n}{2} \right) \int_{\sqrt{2n + \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Il reste à étudier la quantité suivante :

$$(3)^{bis} := \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n - \frac{2\frac{n}{\sigma}}x_j^{(n)}}} [\log_2 |z + \sqrt{2n} - g(n)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Soit $h(n, z) = \log_2 |z + \sqrt{2n} - g(n)| e^{-\frac{z^2}{4}}$. Cette fonction est derivable et continue sur l'intervalle $] -\infty, -\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}[$. De plus $\lim_{z \rightarrow \infty} |h(n, z)| = 0$ à n fixé.

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{z + \sqrt{2n} - g(n)} e^{-\frac{z^2}{4}} - \frac{z}{2} \log_2 |z + \sqrt{2n} - g(n)| e^{-\frac{z^2}{4}} \quad (3.136)$$

S'il existe sur $] -\infty, -\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}[$ des z tels que la dérivée $\frac{\partial h}{\partial z}$ s'annule, alors ces z vérifient

$$\ln |z + \sqrt{2n} - g(n)| = \frac{2}{z(z + \sqrt{2n} - g(n))} \quad (3.137)$$

Soit \tilde{z} l'argument maximisant $|h(n, z)|$ sur l'ensemble des z vérifiant l'équation 3.137. On a :

$$|h(n, z)| \leq \max \left(|h(n, \tilde{z})|, \left| h \left(n, \sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} \right) \right| \right) \quad (3.138)$$

sur $] -\infty, -\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}[$.

$$|h(n, \tilde{z})| = \left| \frac{2}{\tilde{z}(\tilde{z} + \sqrt{2n} - g(n)) \ln(2)} \right| e^{-\frac{\tilde{z}^2}{4}} \quad (3.139)$$

Si \tilde{z} existe dans le domaine d'intégration, il est nécessairement inférieur à $-\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}$ qui est lui-même inférieur à $-\sqrt{2n}$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} |h(n, \tilde{z})| = 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left| h \left(n, -\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} \right) \right| &= \log_2 \left| -\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} - g(n) \right| e^{-\frac{\left(\sqrt{2n} + \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} \right)^2}{4}} \\ \left| h \left(n, -\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} \right) \right| &\leq \log_2 \left(\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} + g(n) \right) e^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Or pour $j \in I_n$, on a $\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} < \sqrt{2n} - g(n)$, donc,

$$\left| h \left(n, -\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} \right) \right| \leq \log_2(\sqrt{2n}) e^{-\frac{n}{2}} \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned} |(3)^{bis}| &\leq \max \left(|h(n, \tilde{z})|, \left| h \left(n, -\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)} \right) \right| \right) \int_{\sqrt{2n} + \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}} dz \\ &\leq \max \left(\left| \frac{2}{\tilde{z}(\tilde{z} + \sqrt{2n} - g(n)) \ln(2)} \right| e^{-\frac{\tilde{z}^2}{4}}, \log_2(\sqrt{2n}) e^{-\frac{n}{2}} \right) \int_{\sqrt{2n} + \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}} dz \end{aligned}$$

Cette quantité tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent (3)^{bis} tend vers zero lorsque n tend vers l'infini. On a donc majoré (2) par une quantité qui tend vers zero. Ce qui nous permet de conclure pour (2).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma} x_j^{(n)}} [\log_2 |x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 \quad (3.141)$$

■

Lemme 3.7.4

Pour tout $j \in L_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] - \log_2 |x_j^{(n)}| \right] = 0$ dès que $\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)}$ tend vers zero.

Preuve

$$\begin{aligned} I &= E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n} - \frac{2\frac{n}{\sigma}}{\sigma} x_j^{(n)}}^{\infty} [\log_2 |x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (1) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n} - \frac{2\frac{n}{\sigma}}{\sigma} x_j^{(n)}} [\log_2 |x_j^{(n)} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z_j|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (2) \end{aligned}$$

On pose $a = \frac{\sigma 2^{-\frac{n}{2}}}{x_{j,k}} > 0$. Donc on peut écrire

$$I = I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22}$$

avec

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n} - \frac{1}{a}}^{\infty} \log_2 |x_j^{(n)}| e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ I_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n} - \frac{1}{a}}^{\infty} \log_2 |1 + az| e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ I_{21} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n} - \frac{1}{a}} \log_2 |x_j^{(n)}| e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ I_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\sqrt{2n} - \frac{1}{a}} \log_2 |1 + az| \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \end{aligned}$$

On a

$$\left| I - \log_2 |x_j^{(n)}| \right| \leq |I - I_{11} - I_{21}| + |I_{11} + I_{21} - \log_2 |x_j^{(n)}|| \quad (3.142)$$

1) On montre que $|I - I_{11} - I_{21}|$ tend vers zero lorsque n tend vers l'infini.

$$I - I_{11} - I_{21} = I_{12} + I_{22} \quad (3.143)$$

Lorsque a tend vers zero, c'est à dire $j \in L_n$, on cherche la limite de I_{12} et I_{22} . On utilise la même technique que dans la preuve du lemme 3.2.1.

Soit

$$X = \frac{a}{\ln(2)\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n} - \frac{1}{a}}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{a^2}{2\ln(2)\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n} - \frac{1}{a}}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Nous allons étudier

$$V = \frac{[I_{12} - X]}{a^2}$$

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{a^2 \sqrt{2\pi} \ln(2)} \int_{\sqrt{2n-\frac{1}{a}}}^{\infty} \log |1+az| e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{a}{a^2 \ln(2) \sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n-\frac{1}{a}}}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&+ \frac{a^2}{2a^2 \ln(2) \sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n-\frac{1}{a}}}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \frac{1}{a^2 \sqrt{2\pi} \ln(2)} \int_{\sqrt{2n-\frac{1}{a}}}^{\infty} \left[\log |1+az| - az + \frac{a^2 z^2}{2} \right] e^{-\frac{z^2}{2}} dz
\end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{a^2 \sqrt{2\pi} \ln(2)} \left[\left[-z e^{-\frac{z^2}{2}} \left(\frac{(1+az) \ln |1+az|}{a} - z - \frac{az^2}{2} + \frac{a^2 z^3}{6} \right) \right]_{\sqrt{2n-\frac{1}{a}}}^{\infty} \right] \\
&+ \frac{1}{a^2 \sqrt{2\pi} \ln(2)} \left[\int_{\sqrt{2n-\frac{1}{a}}}^{\infty} \left[\frac{(1+az) \ln |1+az|}{a} - z - \frac{az^2}{2} + \frac{a^2 z^3}{6} \right] z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right]
\end{aligned}$$

On note

$$A = \left[-z e^{-\frac{z^2}{2}} \left(\frac{(1+az) \ln |1+az|}{a} - z - \frac{az^2}{2} + \frac{a^2 z^3}{6} \right) \right]_{\sqrt{2n-\frac{1}{a}}}^{\infty}$$

$\forall a$ fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} A = 0$ et pour tout n fixé, $\lim_{a \rightarrow 0} A = 0$.

Par conséquent, on peut se contenter d'étudier la quantité suivante :

$$V1 = \frac{1}{a^2 \ln(2) \sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n-\frac{1}{a}}}^{\infty} \left[\frac{(1+az) \ln |1+az|}{a} - z - \frac{az^2}{2} + \frac{a^2 z^3}{6} \right] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.144)$$

On pose $u = az$ et $b = \frac{1}{a^2}$.

$$V1 = \frac{1}{\ln(2) \sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{b}}-1}^{\infty} \left[(1+u) \ln |1+u| - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right] u b^2 \sqrt{b} e^{-\frac{u^2 b}{2}} du \quad (3.145)$$

On pose $g(b, u) = b^2 \sqrt{b} e^{-\frac{u^2 b}{2}} \cdot 1_{u > \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{b}}-1}$.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} g(b, u) = 0 \quad (3.146)$$

On va majorer $|g(b, u)|$ pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée.

$$\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{u^2 b}{2}} + b^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{u^2 b}{2}} \quad \text{si } u > \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{b}} - 1 \quad (3.147)$$

$$= 0 \quad \text{sinon} \quad (3.148)$$

Si $u > \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{b}} - 1$, cette dérivée s'annule en $b = \frac{5}{u^2}$. La fonction $g(b, u)$ est positive pour $b \in]0, \infty[$ avec un seul extremum et

$$\lim_{b \rightarrow 0} g(b, u) = \lim_{b \rightarrow \infty} g(b, u) = 0$$

Par conséquent cet extremum est un maximum. Donc,

$$|g(b, u)| \leq g\left(\frac{5}{u^2}\right) = \frac{25\sqrt{5}}{|u|^5} e^{-\frac{5}{2}} \cdot 1_{u > \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{b}}-1} \leq \frac{25\sqrt{5}}{|u|^5} e^{-\frac{5}{2}}$$

On note

$$h(u, b) = g(u, b) \left[(1 + u) \ln |1 + u| - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right] u \quad (3.149)$$

la quantité sous l'intégrale 3.145.

$$\text{On a : } \lim_{b \rightarrow \infty} h(b, u) = 0 \quad (3.150)$$

Et d'après ce qui précède,

$$|h(b, u)| \leq \frac{25\sqrt{5}}{|u|^5} e^{-\frac{5}{2}} \left| (1 + u) \ln |1 + u| - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right| \cdot |u| \quad (3.151)$$

Ce majorant de $|h(b, u)|$ n'est pas intégrable en l'infini et non-défini en zéro. On ne peut donc pas appliquer directement le théorème de convergence dominée.

Dans un premier temps, on prolonge cette fonction par continuité en $u = 0$. En effet,

$$(1 + u) \ln |1 + u| = u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{12} + o(u^5) \text{ au voisinage de zéro} \quad (3.152)$$

Ce qui entraîne le prolongement en zéro par $\frac{25\sqrt{5}}{12} e^{-\frac{5}{2}}$.

Dans un second temps, nous allons nous affranchir du problème à l'infini.

Nous sommes dans le cas où a tend vers zéro alors on peut supposer que $a < 1$ ce qui implique $b > 1$. Le maximum de $g(b, u)$ est atteint en $b = \frac{5}{u^2}$, qui sera supérieur à 1 si $|u| < \sqrt{5}$ et inférieur à 1 dans le cas contraire. Donc, si $|u| > \sqrt{5}$, pour $b \in]1, \infty[$, le maximum est atteint pour $b = 1$.

Par conséquent,

$$|h(b, u)| \leq \frac{25\sqrt{5}}{|u|^5} e^{-\frac{5}{2}} \left[(1 + u) \ln |1 + u| - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right] u \text{ si } |u| \leq \sqrt{5} \quad (3.153)$$

$$\leq e^{-\frac{u^2}{2}} \left[(1 + u) \ln |1 + u| - u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} \right] u \text{ si } |u| > \sqrt{5} \quad (3.154)$$

Par conséquent, $|h(u, b)|$ est majorée par une fonction continue par morceau pour $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cette fonction est prolongeable par continuité en $u = 0$ et est intégrable. On peut par conséquent appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui nous donne :

$$\lim_{a \rightarrow 0} V = \lim_{a \rightarrow 0} V1 = 0 \quad (3.155)$$

Par conséquent, pour tout $j \in L_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[I_{12} - \frac{a}{\ln(2)\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n-\frac{1}{a}}}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a^2}{2\ln(2)\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n-\frac{1}{a}}}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = 0 \quad (3.156)$$

Maintenant on effectue le même travail sur I_{22} , ce qui nous donne pour tout $j \in L_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[I_{22} - \frac{a}{\ln(2)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n-\frac{1}{a}}} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a^2}{2\ln(2)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n-\frac{1}{a}}} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = 0 \quad (3.157)$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I - I_{11} - I_{21}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |I_{12} + I_{22}| = 0, \quad \forall j \in L_n \quad (3.158)$$

2) On montre que $\left| I_{11} + I_{21} - \log_2 |x_j^{(n)}| \right|$ tend vers zero lorsque n tend vers l'infini si $\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)}$ tend vers zero.

Les quantités I_{11} et I_{21} se calculent aisément quelque soit la valeur de a :

$$I_{11} = \frac{1}{2} \log_2 |x_j^{(n)}| \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n} - \frac{1}{a}}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$I_{21} = \frac{1}{2} \log_2 |x_j^{(n)}| \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n} + \frac{1}{a}}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

Donc

$$\begin{aligned} I_{11} + I_{21} - \log_2 |x_j^{(n)}| &= -\frac{1}{2} \log_2 |x_j^{(n)}| \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n} - \frac{1}{a}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n} + \frac{1}{a}}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= -\log_2 |x_j^{(n)}| \cdot P(|y_j^{(n)}| < \lambda_n) \end{aligned}$$

Nous sommes dans le cas où $j \in n$ et on a vu dans le lemme 3.7.1 que dans ce cas

$$P(|y_j^{(n)}| < \lambda_n) \leq \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{g(n)}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

D'autre part, lorsque n tend vers l'infini,

$$\frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{g(n)}{\sqrt{2}} \right) \right] \sim \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-g^2(n)}}{g(n)} \right]$$

d'où

$$\left| I_{11} + I_{21} - \log_2 |x_j^{(n)}| \right| < \left| \log_2 |x_j^{(n)}| \right| \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-g^2(n)}}{g(n)} \right] \quad (3.159)$$

Le signal X est dans L^2 et nous sommes dans le cas où $j \in L_n$ donc il existe une constante c telle que :

$$c > x_j^{(n)} > 2^{-\frac{n}{2}} \sigma(\sqrt{2n} + g(n))$$

Le logarithme est une fonction croissante donc

$$-\frac{n}{2} + \log_2(\sigma) + \log_2 \sqrt{2n} + g(n) < \log_2(x_j^{(n)}) < \log_2(c)$$

$$|\log_2(x_j^{(n)})| < \max \left(\left| -\frac{n}{2} + \log_2(\sigma) + \log_2 \sqrt{2n} + g(n) \right|, \log_2(c) \right)$$

Par conséquent, $\left| I_{11} + I_{21} - \log_2 |x_j^{(n)}| \right|$ est majoré par une quantité qui tend vers zero dès que $\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)}$ tend vers zero. ■

Lemme 3.7.5

Si g est telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)} \right) = 0$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{j=1}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j \log_2 |x_j^{(n)}| \right. \\ \left. - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] \right] = 0$$

Preuve

Soit

$$A := K_n \sum_{j=1}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j \log_2 |x_j^{(n)}| - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right]$$

$$A_1 := K_n \sum_{j=1}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right]$$

$$A_2 := K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j \log_2 |x_j^{(n)}|$$

$$A = \left(A_1 - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n \cup S_n}}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] \right) \quad (B_1)$$

$$+ \left(K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] - A_2 \right) \quad (B_2)$$

Donc $|A| \leq |B_1| + |B_2|$.

D'après le lemme 3.7.3, on montre que B_1 tend vers zéro si g est telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)} \right) = 0$.

$$B_1 = \left(K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] - A_2 \right)$$

$$|B_1| \leq \sup_{j \in I_n} \left(E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] \right) K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n |s_j|$$

Or $K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n |s_j| = o(1)$ et $\sup_{j \in I_n} \left(E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] \right)$ tend vers zéro d'après le lemme 3.7.3.

Donc B_1 tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

On montre grace au lemme 3.7.4 que B_2 tend vers zéro si g est telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)} \right) = 0$.

$$|B_2| \leq \sup_{j \in L_n} \left(E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] - \log_2(x_j^{(n)}) \right) K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n |s_j|$$

Or $K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n |s_j| = o(1)$ et $\sup_{j \in L_n} \left(E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] - \log_2(x_j^{(n)}) \right)$ tend vers zéro d'après le

lemme 3.7.4. Donc B_1 tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. ■

3eme étape : Traitement du cas $j \in S_n$

Lemme 3.7.6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] + \frac{n}{2} K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j \rho \left(x_j^{(n)} \right) \right] = 0 \quad (3.160)$$

$$\text{avec } \rho(x) = 1 - \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n} + \frac{2^{\frac{n}{2}} x}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}} x}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

Preuve

On pose $V_j = \frac{2^{\frac{n}{2}} x_j^{(n)}}{\sigma}$.

$$\begin{aligned} I &= E \left[\log_2 |y_j^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} [\log_2 |\sigma 2^{-\frac{n}{2}}(z + V_j)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n}-V_j} [\log_2 |\sigma 2^{-\frac{n}{2}}(z + V_j)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n}-V_j} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} [\log_2 |\sigma(z + V_j)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n}-V_j} [\log_2 |\sigma(z + V_j)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= -\frac{n}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n} + \frac{2^{\frac{n}{2}} x_j^{(n)}}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}} x_j^{(n)}}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) \right] \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} [\log_2 |\sigma(z + V_j)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n}-V_j} [\log_2 |\sigma(z + V_j)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

On considère l'intégrale

$$J_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} [\log_2 |\sigma(z + V_j)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Selon les bornes d'intégration, $z > \sqrt{2n} - V_j$ donc $\sigma(V_j + z) > \sigma\sqrt{2n} > 1$ (à partir d'un certain n pour σ non nul) ce qui entraîne $0 < \log_2 |\sigma(V_j + z)| = \log_2(\sigma(V_j + z)) = \log_2(\sigma) + \log_2(V_j + z) \leq \log_2(\sigma) + (V_j + z)$. Par conséquent

$$0 \leq J_1 \leq \frac{\log_2(\sigma)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{V_j}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Il existe donc une constante c telle que

$$0 \leq J_1 \leq \frac{V_j}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + c \leq V_j + c$$

Or pour tout $j \in S_n$, on a :

$$V_j \leq \sqrt{2n} + g(n) \leq 2\sqrt{2n}$$

donc,

$$0 \leq J_1 \leq 2\sqrt{2n} + c$$

On considère maintenant

$$J_2 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2n}-V_j x_j^{(n)}} [\log_2 |\sigma(z + V_j)|] e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Selon les bornes d'intégration, $z < -\sqrt{2n} - V_j$, donc $\sigma(V_j + z) < -\sigma\sqrt{2n} < -1$ (à partir d'un certain n pour σ non nul) ce qui entraîne $0 < \log_2 |\sigma(V_j + z)| = \log_2(\sigma) + \log_2(-V_j - z) \leq -V_j - z + \log_2(\sigma) \leq V_j - z + \log_2(\sigma)$ et par conséquent

$$0 \leq J_2 \leq \frac{\log_2(\sigma)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{V_j}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Il existe donc une constante c_2 telle que

$$0 \leq J_2 \leq \frac{V_j}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2n}-V_j}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + c_2 \leq V_j + c_2 \leq 2\sqrt{2n} + c_2$$

Soit

$$W = K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j E \left[\log_2 |y_{j,k}^{(n)}| \cdot 1_{|y_{j,k}^{(n)}| \geq \lambda_n} \right] - \frac{n}{2} K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j \rho(x_j^{(n)})$$

$$W = K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j (J_1 + J_2)$$

$$\begin{aligned}
|W| &\leq K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n |s_j| |(J_1 + J_2)| \\
&\leq (4\sqrt{2n} + c + c_2) K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n |s_j| = O(n^{-\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

Par conséquent W tend vers zero lorsque n tend vers l'infini. ■

Corollaire 3.7.2 (Corollaire du théorème 3.7.2) (Legrand, Lévy-Véhel)

Si $\#S_n = o(n)$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(E[\alpha_{x_{HT}}^{(n)}] + \frac{1}{2} + K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j \log_2 |x_j^{(n)}| - p \cdot K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j \cdot s_j \right) = 0 \quad (3.161)$$

Preuve

On suppose que $\#S_n = o(n)$,

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2} K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j \cdot \rho(x_j^{(n)}) &\leq \frac{n}{2} K_n \rho(x_j^{(n)}) \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n |s_j| \\
&\leq \frac{n}{2} K_n (\#S_n) s_n \leq \frac{n^2}{2} K_n (\#S_n) = o(1)
\end{aligned}$$

De la même manière,

$$K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n j \cdot s_j \left(1 - \rho(x_j^{(n)})\right) \leq K_n n^2 (\#S_n) = o(1)$$

On applique ce corollaire aux signaux de $PART(\alpha)$. ■

Proposition 3.7.1 (Legrand, Lévy-Véhel)

Pour un signal X dans $PART(\alpha)$, alors :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_{x_{HT}}^{(n)}] = -\frac{1}{2} - \frac{6\alpha + 1}{2(2\alpha + 1)^2} + \frac{8\alpha^3 + 12\alpha^2 + 12\alpha}{(2\alpha + 1)^3} p} \quad (3.162)$$

Preuve

On montre que pour les signaux de cette classe le cardinal de S_n est en $o(n)$. On rappelle que si $j \in S_n$ alors :

$$2^{-\frac{n}{2}} \sigma(\sqrt{2n} - g(n)) \leq x_j^{(n)} \leq 2^{-\frac{n}{2}} \sigma(\sqrt{2n} + g(n))$$

Ici, $x_j = \varepsilon_j 2^{-j(\alpha + \frac{1}{2})}$, par conséquent, les échelles concernées sont celles qui vérifient :

$$\frac{1}{\alpha + \frac{1}{2}} \left[\frac{n}{2} - \log_2(\sigma) - \log_2(\sqrt{2n} + g(n)) + \log_2(\varepsilon_j) \right] \leq j \leq \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2}} \left[\frac{n}{2} - \log_2(\sigma) - \log_2(\sqrt{2n} - g(n)) + \log_2(\varepsilon_j) \right]$$

Soit $D_{S_n} = \sup\{j \in S_n\} - \inf\{j \in S_n\}$ le diamètre de S_n .

$$D_{S_n} \leq \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2}} \left[\log_2(\sqrt{2n} + g(n)) - \log_2(\sqrt{2n} - g(n)) \right] = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2}} \log_2 \left(\frac{\sqrt{2n} + g(n)}{\sqrt{2n} - g(n)} \right)$$

On pose $g(n) = \frac{\sqrt{2n}}{2}$. On vérifie que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\frac{\sqrt{2n}}{2}} e^{-\frac{n}{4}} \right) = 0$. On obtient alors :

$$D_{S_n} \leq \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2}} \log_2(3) < 2$$

Par conséquent le cardinal de S_n est 1.

On a donc exhibé une fonction positive $g(n) < \sqrt{2n}$ qui vérifie la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{g(n)} e^{-g^2(n)} \right) = 0$ et telle que le cardinal de S_n est en $o(n)$ sur un signal de cette classe donc on peut appliquer le corollaire 3.7.2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(E[\alpha_{x_{HT}}^{(n)}] + \frac{1}{2} + K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in L_n}}^n s_j \log_2 |x_j^{(n)}| - p \cdot K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j \cdot s_j \right) = 0 \quad (3.163)$$

L'ensemble des $j \in I_n$ pour un signal de la classe $PART(\alpha)$ est l'ensemble des j supérieurs à $\left\lfloor \frac{n}{2\alpha+1} \right\rfloor + 1$ et l'ensemble des $j \in L_n$ est l'ensemble des j inférieurs à $\left\lfloor \frac{n}{2\alpha+1} \right\rfloor - 1$. On pose $j_0 = \left\lfloor \frac{n}{2\alpha+1} \right\rfloor$ ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^{j_0-1} s_j \log_2 |x_j^{(n)}| + p \cdot K_n \sum_{j=j_0+1}^n j \cdot s_j &= -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^{j_0} s_j \left(-j\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right) + K_n p \sum_{j=j_0+1}^n j s_j \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{6\alpha + 1}{2(2\alpha + 1)^2} + \frac{8\alpha^3 + 12\alpha^2 + 12\alpha}{(2\alpha + 1)^3} p \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_{x_{HT}}^{(n)}] = -\frac{1}{2} - \frac{6\alpha + 1}{2(2\alpha + 1)^2} + \frac{8\alpha^3 + 12\alpha^2 + 12\alpha}{(2\alpha + 1)^3} p \quad (3.164)$$

■

Simulations

Les figures 3.16 et 3.17 nous montrent l'évolution de la régularité d'un signal dans $PART(\alpha)$ perturbé par du bruit après débruitage par Hard Thresholding en fonction de la régularité de départ α .

3.7.4 Méthode du Non-Linear Pumping (NLP)

Comme nous l'avons déjà précisé, la méthode que nous proposons est un raffinement du Hard Thresholding dont l'intérêt réside dans le contrôle de la régularité Hölderienne du signal de sortie. Cette maîtrise

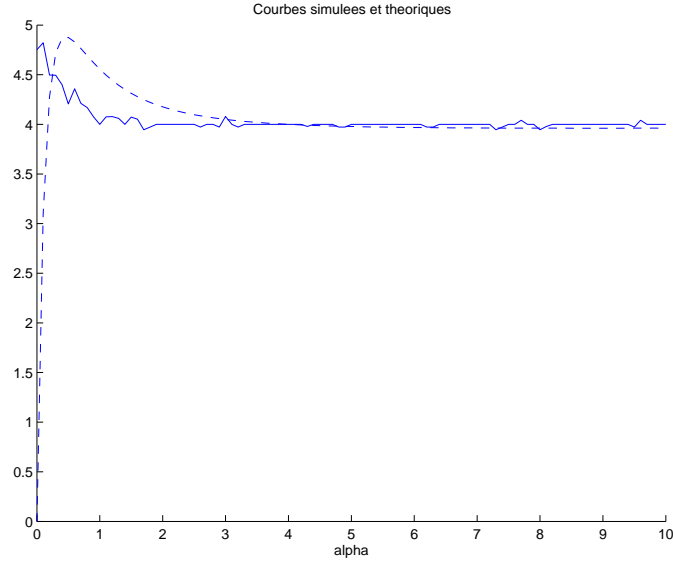


FIG. 3.16: Evolution de la régularité après débruitage par Hard Thresholding en fonction de la régularité de départ d'un signal dans $PART(\alpha)$. Courbe théorique en pointillés. Simulation en trait plein (moyenne de 10 réalisations). L'ondelette d'analyse est ici une "Daubechies 10", par conséquent, $p_1 = 5$.

de la régularité s'effectue grâce au paramètre δ . Nous allons ainsi disposer d'une méthode ayant les avantages du Hard Thresholding et ceux du Multifractal Pumping.

Définition 3.7.4 Soit Y_n un échantillonnage de 2^n points de Y . L'estimateur de X par la méthode du Non Linear wavelet Pumping, \hat{X}_n^{NLP} est donné par :

$$\begin{aligned} NLP : \mathbb{R}^{2^n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2^n} \\ Y_n &\longmapsto \hat{X}_n^{NLP} \quad \text{avec } W(\hat{X}_n^{NLP}) = \{y_{j,k} \cdot 1_{|y_{j,k}| \geq \lambda_n} + 2^{-j\delta} y_{j,k} \cdot 1_{|y_{j,k}| < \lambda_n}\} \end{aligned} \quad (3.165)$$

Comme pour le Hard Thresholding, le seuil λ peut être choisi parmi les seuils classiques de débruitage : seuil universel, sure, Bayésien, minimax, etc... On rappelle que pour le reste de ce document et dans un souci de simplicité, nous allons utiliser le seuil universel $\lambda = \sigma 2^{-\frac{n}{2}} \sqrt{2n}$. De plus, on va considérer que δ le paramètre d'entrée est déterministe (le cas stochastique sera rapidement abordé section 3.7.8).

La loi de décision est représentée sur la figure 3.8.5 pour une échelle j fixée. La partie centrale bascule avec l'échelle considérée et avec le paramètre de débruitage : lorsque δ ou (et/ou) j tendent vers l'infini alors cette partie se confond avec l'axe des abscisses (Hard Thresholding). Quand un coefficient bruité est inférieur à λ , plus la gamme de fréquence à laquelle il appartient est haute, plus il va être réduit par notre méthode.

Nous montrons que cette méthode est near-minimax dans la section 3.7.5, et nous exhibons numériquement des classes de signaux pour lesquelles notre méthode donne de meilleurs résultats que le Hard Thresholding (section 3.7.7). Les résultats théoriques seront illustrés par des simulations effectuées sous Matlab[®].

3.7.5 Aspect minimax de la méthode

On souhaite montrer l'aspect near-minimax de notre méthode. On étudie donc dans cette section le risque de notre estimateur.

$$R^{NLP} := E[(X - \hat{X}_n^{NLP})^2] \quad (3.166)$$

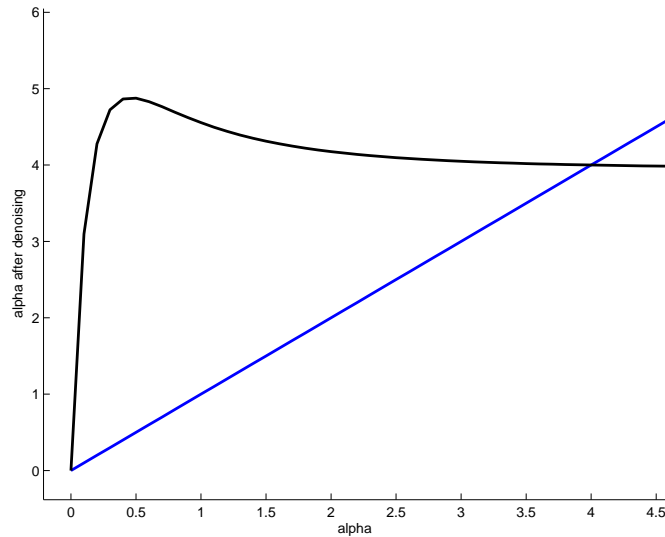


FIG. 3.17: Evolution de la régularité après débruitage par Hard Thresholding en fonction de la régularité de départ d'un signal dans $PART(\alpha)$, courbe théorique. La droite représente la régularité du signal original. Cette figure illustre le surlissage généré par le Hard Thresholding. L'ondelette d'analyse est ici une "Daubechies 10", par conséquent, $p_1 = 5$.

Puisque

$$R^{NLP} \leq E[(X - \hat{X}^{HT})^2] + E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2] = R^{HT} + E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2]$$

et que R^{HT} est near-minimax, il suffit de montrer que $E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2]$ est négligeable devant (ou du même ordre que) R^{HT} .

Théorème 3.7.3 (Legrand, Lévy-Véhel)

Soit $X \in B_{p,q}^s$.

$$\boxed{\text{Si } \delta > \frac{s}{2s+1}, \text{ alors } R^{NLP} \leq R^{HT} + O(R^{HT})} \quad (3.167)$$

Par conséquent, l'estimateur NLP est near-minimax.

De plus,

$$\boxed{\text{Si } \delta > \frac{1}{2} \text{ l'estimateur est adaptatif.}} \quad (3.168)$$

Preuve

$$\begin{aligned} E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2] &= E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} (x_{j,k}^{HT} - \tilde{x}_{j,k})^2 \right] \\ E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2] &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} 2^{-2j\delta} E[(y_{j,k})^2 1_{|y_{j,k}| < \lambda}] \\ E[(y_{j,k})^2 1_{|y_{j,k}| < \lambda}] &= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} u^2 e^{-\frac{(x_{j,k}-u)^2 2^n}{2\sigma^2}} du \end{aligned}$$

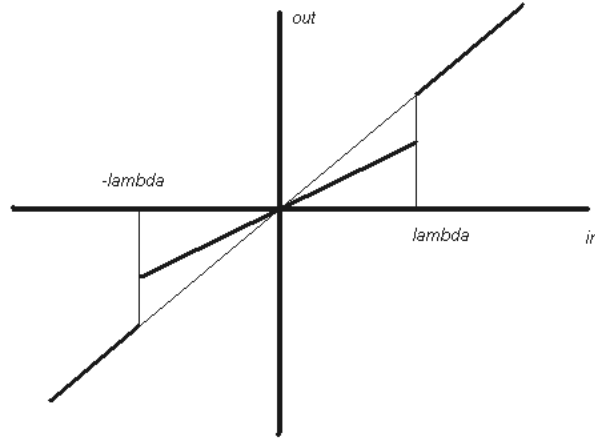


FIG. 3.18: Loi de décision pour la méthode NLP. En abscisse la valeur du coefficient d'entrée, en ordonnée la valeur du coefficient de sortie.

$$E[(y_{j,k})^2 1_{|y_{j,k}| < \lambda}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}} x_{j,k}}{\sigma}}^{\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}} x_{j,k}}{\sigma}} \left(x_{j,k} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z \right)^2 e^{-\frac{z^2}{2}} du \quad (3.169)$$

D'après les bornes l'intégrale, on considère les z tels que :

$$-\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}} x_{j,k}}{\sigma} \leq z \leq \sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}} x_{j,k}}{\sigma}$$

D'où

$$-\sigma 2^{-\frac{n}{2}} \sqrt{2n} \leq \left(x_{j,k} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z \right) \leq \sigma 2^{-\frac{n}{2}} \sqrt{2n}$$

Par conséquent

$$\left(x_{j,k} + \sigma 2^{-\frac{n}{2}} z \right)^2 \leq \sigma^2 2^{-n} 2n$$

Donc

$$E[(y_{j,k})^2 1_{|y_{j,k}| < \lambda}] \leq \sigma^2 2^{-n} 2n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}} x_{j,k}}{\sigma}}^{\sqrt{2n} - \frac{2^{\frac{n}{2}} x_{j,k}}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} du \leq \sigma^2 2^{-n} 2n \quad (3.170)$$

Par conséquent

$$E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2] \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} 2^{-2j\delta} n 2^{-n} 2\sigma^2 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

$$E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2] \leq 2\sigma^2 n 2^{-n} \sum_{j=1}^n 2^{j(1-2\delta)-1}$$

$$E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2] \leq 2\sigma^2 n 2^{-n} \frac{1}{2} \frac{2^{(n+1)(1-2\delta)} - 2^{1-2\delta}}{2^{1-2\delta} - 1}$$

- Si $\delta > \frac{1}{2}$, alors :

$$E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2] \leq n2^{-n} \frac{2^{1-2\delta}}{1 - 2^{1-2\delta}}$$

Or pour tout s réel, $2^{-n} < 2^{-\frac{2sn}{2s+1}}$. Par conséquent, pour tout Besov notre méthode a le taux de convergence souhaité dès que $\delta > \frac{1}{2}$. La méthode du Non Linear Pumping est near-minimax et adaptative dès que $\delta > \frac{1}{2}$. C'est à dire que l'on a pas besoin de connaître la régularité du signal original pour être near-minimax.

- Sinon,

$$E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2] \leq n2^{-n} \frac{1}{2} \frac{2^{(n+1)(1-2\delta)}}{2^{1-2\delta} - 1}$$

$$E[(\hat{X}^{HT} - \hat{X}^{NLP})^2] \leq n2^{-2\delta n} \frac{2^{(-2\delta)}}{2^{(1-2\delta)} - 1}$$

Supposons que $X \in B_{p,q}^s$, alors pour que l'on soit near-minimax, il suffit que $2^{-2\delta n} < 2^{-\frac{2sn}{2s+1}}$. Ce qui correspond à $\delta > \frac{s}{2s+1}$. Bien évidemment, dans ce cas la méthode n'est pas adaptative puisqu'il faut connaître la régularité du signal pour être sûr d'être near-minimax. ■

On pourrait probablement rendre notre méthode minimax en effectuant le même raffinement par blocs que celui appliqué au Hard Thresholding par P. Hall, G. Kerkycharian et D. Picard. Cette piste fera l'objet d'un travail futur.

3.7.6 Augmentation de la régularité

On propose une méthode permettant le contrôle de la régularité, on va dans cette section étudier l'impact de la méthode NLP sur la régularité d'un signal.

Augmentation de la régularité en espérance

Cas général

Pour estimer la régularité du signal débruité, on utilise la formule suivante au-dessus de chaque point. Voir section 1.2.

$$\alpha_{\hat{X}^{NLP}}^{(n)} = -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j \log_2 |\hat{x}_{j,k}^{NLP}| \text{ avec } K_n = \frac{12}{n(n-1)(n+1)} \text{ et } s_j = j - \frac{n+1}{2}$$

On a pour le signal bruité Y une équation similaire.

Proposition 3.7.2 (Legrand, Lévy-Véhel)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E[\alpha_{\hat{X}^{NLP}}^{(n)}] - E[\alpha_Y^{(n)}] - \delta K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j s_j - \delta K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j j \cdot \left(1 - \rho(x_{j,k}^{(n)})\right) \right] = 0$$

$$\text{avec } \rho(x) = 1 - \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n + \frac{2}{\sigma} x}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n - \frac{2}{\sigma} x}}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

La méthode NLP augmente la régularité Hölderienne proportionnellement au paramètre δ .

Preuve

$$\alpha_{\hat{X}^{NLP}}^{(n)} = -\frac{1}{2} - K_n \sum_{j=1}^n s_j \log_2 |\hat{x}_{j,k}^{NLP}|$$

Or

$$\sum_{j=1}^n s_j \log_2 |\hat{x}_{j,k}^{NLP}| = \sum_{\substack{j=1 \\ |y_{j,k}^{(n)}| > \lambda_n}}^n s_j \log_2 |y_{j,k}^{(n)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ |y_{j,k}^{(n)}| < \lambda_n}}^n s_j \log_2 |2^{-j\delta} y_{j,k}^{(n)}|$$

D'où

$$\sum_{j=1}^n s_j \log_2 |\hat{x}_{j,k}^{NLP}| = \sum_{j=1}^n s_j \log_2 |y_{j,k}^{(n)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ |y_{j,k}^{(n)}| < \lambda_n}}^n s_j \log_2 |2^{-j\delta}|$$

Par conséquent, au dessus d'un point, on a :

$$\alpha_{\hat{X}^{NLP}}^{(n)} = \alpha_Y^{(n)} + K_n \delta \sum_{\substack{j=1 \\ |y_{j,k}^{(n)}| < \lambda_n}}^n j s_j$$

Soit $\tau = K_n \delta \sum_{\substack{j=1 \\ |y_{j,k}^{(n)}| < \lambda_n}}^n j s_j$ l'augmentation de la régularité (pour cette branche).

On rappelle que δ est déterministe. La quantité τ est aléatoire.

On a $\Delta := E[\tau] = K_n \delta \sum_{j=1}^n j s_j P(|y_{j,k}^{(n)}| < \lambda_n)$.

$$E[\alpha_{\hat{X}^{NLP}}^{(n)}] = E[\alpha_Y^{(n)}] + K_n \delta \sum_{j=1}^n j s_j E[1_{|y_{j,k}^{(n)}| < \lambda_n}]$$

d'où

$$E[\alpha_{\hat{X}^{NLP}}^{(n)}] = E[\alpha_Y^{(n)}] + K_n \delta \sum_{j=1}^n j s_j P(|y_{j,k}^{(n)}| < \lambda_n)$$

On a vu précédemment (voir le lemme 3.7.2 et le lemme 3.7.6) que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \sum_{j=1}^n s_j j \cdot P(|y_{j,k}^{(n)}| < \lambda_n) - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j s_j - K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j j \cdot (1 - \rho(x_{j,k}^{(n)})) \right] = 0$$

$$\text{avec } \rho(x) = 1 - \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n + \frac{2}{\sigma} x}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2n - \frac{2}{\sigma} x}}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E[\alpha_{\hat{X}^{NLP}}^{(n)}] - E[\alpha_Y^{(n)}] - \delta K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j s_j - \delta K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_n}}^n s_j j \cdot (1 - \rho(x_{j,k}^{(n)})) \right] = 0$$

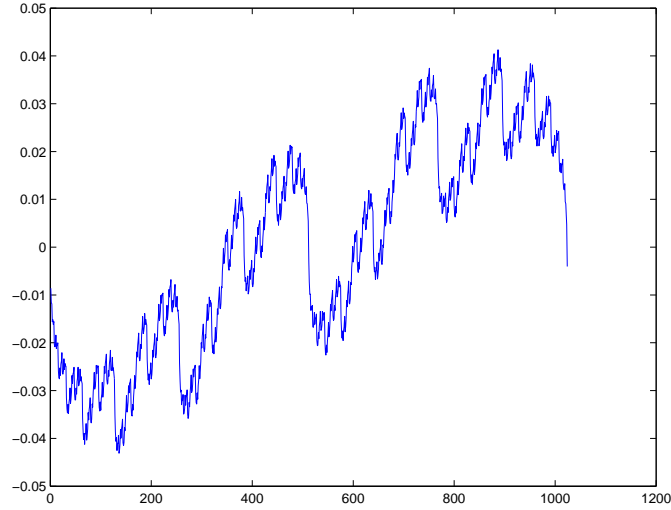


FIG. 3.19: Signal de 1024 points dont les coefficients d'ondelette sont $\varepsilon_{j,k}2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$ à l'échelle j . Ici $\alpha = 0.5$.

Signal X tel que $W(X) = \varepsilon_{j,k}2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$ (voir figure 3.19). ■

On calcule l'augmentation de la régularité engendrée par notre méthode lorsque on l'applique à un signal de $PART(\alpha)$ bruité. On rappelle la définition de $PART(\alpha)$.

$$PART(\alpha) := \left\{ X, W(X) = \{\varepsilon_{j,k} \cdot 2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}\}, \varepsilon_{j,k} \text{ iid dans } \{-1, 1\} \right\} \quad (3.171)$$

Proposition 3.7.3 (Legrand, Lévy-Véhel)

Pour un signal X appartenant à $PART(\alpha)$ on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E[\alpha_{\hat{X}^{NLP}}^{(n)}] - E[\alpha_Y^{(n)}] \right] = \delta \left[1 + \frac{(6\alpha - 1)}{(2\alpha + 1)^3} \right] \quad (3.172)$$

c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E[\alpha_{\hat{X}^{NLP}}^{(n)}] \right] = \frac{\alpha - 2\alpha^2}{(1 + 2\alpha)^2} + \delta \left[1 + \frac{(6\alpha - 1)}{(2\alpha + 1)^3} \right] \quad (3.173)$$

Preuve

On rappelle que pour un signal de ce type, la zone S_n n'intervient pas (voir preuve de la proposition 3.7.1). On applique le théorème 3.7.2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E[\alpha_{\hat{X}^{NLP}}^{(n)}] - E[\alpha_Y^{(n)}] - \delta K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j s_j \right] = 0$$

Or pour ce signal, on a vu que $j \in I_n \Leftrightarrow j \geq \lfloor \frac{n}{2\alpha+1} \rfloor + 1 = j_0 + 1$ donc

$$K_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I_n}}^n j s_j = K_n \sum_{j=j_0+1}^n j \cdot s_j = 1 + \frac{(6\alpha - 1)}{(2\alpha + 1)^3}$$

On sait que pour un signal de $PART(\alpha)$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_Y^{(n)}] = \frac{\alpha - 2\alpha^2}{(1 + 2\alpha)^2}$ (voir chapitre 3.2). ■

On vient donc de montrer que lorsqu'on applique notre méthode sur ce signal, on peut déterminer, en fonction de δ , la régularité après traitement. L'objectif final étant d'atteindre la régularité du signal original non perturbé, on calcule le paramètre de débruitage idéal δ_{ideal} .

Proposition 3.7.4 (Legrand, Lévy-Véhel)

Pour un signal X appartenant à $PART(\alpha)$, le paramètre de débruitage idéal est

$$\delta_{ideal} = \frac{\alpha(1 + 2\alpha)(2\alpha + 3)}{2(2\alpha^2 + 3\alpha + 3)} \quad (3.174)$$

Preuve

Pour un signal X appartenant à $PART(\alpha)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [E[\alpha_{\tilde{X}^{NLP}}^{(n)}]] = \frac{\alpha - 2\alpha^2}{(1 + 2\alpha)^2} + \delta \left[1 + \frac{(6\alpha - 1)}{(2\alpha + 1)^3} \right]$$

Nous aimerions obtenir $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\alpha_{\tilde{X}}^{(n)}] = \alpha$. Pour cela il suffit donc de prendre

$$\delta_{ideal}(\alpha) = \frac{\alpha(1 + 2\alpha)(2\alpha + 3)}{2(2\alpha^2 + 3\alpha + 3)} \quad (3.175)$$

Une simulation est représentée sur la figure 3.7.6. On utilise δ_{ideal} sur les signaux générés avec des régularité de base allant de $\alpha = 0$ à $\alpha = 10$ puis bruités (10 réalisations pour cette figure) et on montre que l'on retrouve quasiment la régularité de départ (courbe $f(\alpha) = \alpha$ en pointillés).

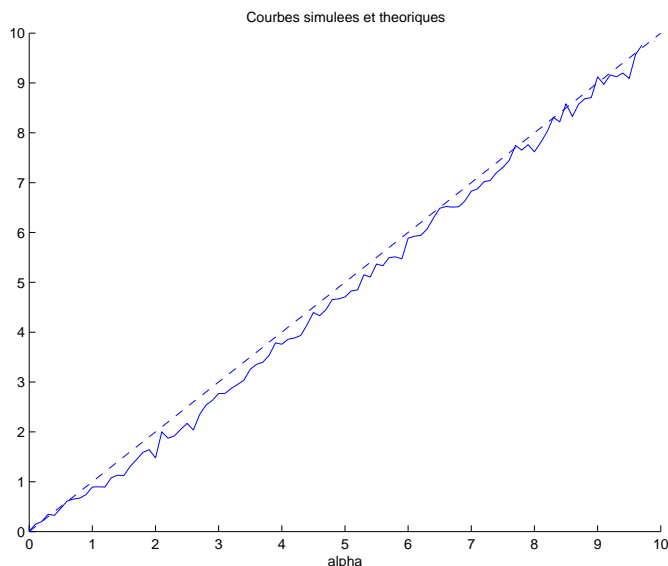


FIG. 3.20: Evolution de la régularité après débruitage par la méthode du pont basculant en fonction de la régularité de départ. Simulation en trait plein, courbe théorique en pointillés.

Signal nul

on peut effectuer le même type de travail sur le signal nul.

$$\Delta = K_n \delta \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right) \sum_{j=1}^n j s_j$$

En effet, $P(|z_{j,k}| < \lambda) = \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)$

Par conséquent

$$\Delta = \delta \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)$$

Donc dans le cas du signal nul, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E[\alpha_X^{(n)}] - E[\alpha_Y^{(n)}] \right] = \delta$$

La régularité du signal nul étant infinie, on doit prendre $\delta = \infty$ pour obtenir la bonne régularité, ce qui revient à effectuer un Hard Thresholding.

Signe de la variation de régularité

On montre qu'en moyenne la méthode proposée augmente la régularité.

Proposition 3.7.5 (Legrand, Lévy-Véhel)

Soit $X \in C^\alpha$, et soit $M_n = K_n \delta \sum_{j=1}^n j s_j$ l'augmentation de la régularité en espérance, alors

$$\bullet \text{ Si } \alpha \geq \frac{1}{2} : \quad \underline{\lim}(M_n) \geq 0 \quad (3.176)$$

$$\bullet \text{ Si } \alpha < \frac{1}{2} \text{ et si } \#S_n = o(n) : \quad \underline{\lim}(M_n) \geq 0 \quad (3.177)$$

Preuve

On commence par traiter le cas $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} M_n &= \delta K_n \sum_{j=1}^n j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) \\ &= \delta K_n \sum_{j \leq \frac{n}{2}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) + \delta K_n \sum_{j > \frac{n}{2}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) \end{aligned}$$

La première somme est négative et la seconde est positive.

$$K_n \delta \sum_{j \leq \frac{n}{2}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) = K_n \delta \sum_{j > \frac{n}{2}} (j - n - 1) s_j P(|y_{n-j+1,k}| < \lambda) \quad \text{car } s_j = -s_{n-j+1}$$

Cette quantité est négative donc,

$$K_n \delta \sum_{j > \frac{n}{2}} (j - n - 1) s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) \geq K_n \delta \sum_{j > \frac{n}{2}} (j - n - 1) s_j$$

Par conséquent,

$$M_n \geq K_n \delta \sum_{j > \frac{n}{2}} (j - n - 1 + jP(|y_{j,k}| < \lambda)) s_j \quad (3.178)$$

Or $j.P(|y_{j,k}| < \lambda) = j + j(P(|y_{j,k}| < \lambda) - 1)$. D'où,

$$M_n \geq K_n \delta \sum_{j > \frac{n}{2}} (2j - n - 1) s_j + K_n \delta \sum_{j > \frac{n}{2}} (P(|y_{j,k}| < \lambda) - 1) j s_j$$

$X \in C^\alpha$ donc dès que $\frac{n}{2\alpha+1} < \frac{n}{2}$ alors la deuxième somme ne concerne que des j dans I_n . Donc si $\alpha > \frac{1}{2}$, la deuxième somme tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Donc dans ce cas,

$$\underline{\lim} M_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \delta \sum_{j > \frac{n}{2}} (2j - n - 1) s_j \right] = \delta$$

Si $\alpha < \frac{1}{2}$, on a besoin d'utiliser le cardinal de l'ensemble S_n .

$$\begin{aligned} M_n &= K_n \delta \sum_{j=1}^n j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) \\ &= K_n \delta \sum_{j \leq \frac{n}{2}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) + K_n \delta \sum_{j > \frac{n}{2}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} K_n \delta \sum_{j \leq \frac{n}{2}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) &= K_n \delta \sum_{\substack{j \leq \frac{n}{2} \\ j \in I_n}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) \\ &\quad + K_n \delta \sum_{\substack{j \leq \frac{n}{2} \\ j \in L_n}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) \\ &\quad + K_n \delta \sum_{\substack{j \leq \frac{n}{2} \\ j \in S_n}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) \end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 3.7.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \delta \sum_{\substack{j \leq \frac{n}{2} \\ j \in L_n}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) \right] = 0$$

et d'après l'hypothèse sur le cardinal de S_n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[K_n \delta \sum_{\substack{j \leq \frac{n}{2} \\ j \in S_n}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) \right] = 0$$

Donc la limite de M_n (si elle existe) est la même que celle de :

$$K_n \delta \sum_{\substack{j \leq \frac{n}{2} \\ j \in I_n}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda) + K_n \delta \sum_{j > \frac{n}{2}} j s_j P(|y_{j,k}| < \lambda)$$

La première somme est négative et la deuxième est positive. La quantité au total est positive de part le plus grand nombre d'éléments dans la deuxième somme et le j qui est en facteur du terme s_j (qui est plus élevé dans la somme de droite).

Donc, lorsque n tend vers l'infini,

$$\underline{\lim}(M_n) \geq 0$$

■

3.7.7 Comparaison de notre méthode avec le Hard Thresholding

Cas général

Afin de justifier l'intérêt de la méthode, on aimerait dans un travail futur déterminer un critère qui permet de savoir si notre méthode est meilleure (au sens du risque) que le Hard Thresholding. Le critère sera fonction de l'écart type du bruit, du paramètre de débruitage ainsi que des coefficients d'ondelette du signal original. Il faut mettre en évidence les cas pour lesquels le risque engendré par le Hard Thresholding (R^{HT}) est supérieur au notre (R^{NLP}).

$$R^{HT} \geq R^{NLP} \quad (3.179)$$

Or,

$$R^{HT} = E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \left[(y_{j,k} - x_{j,k})^2 \cdot 1_{|y_{j,k}| > \lambda} + x_{j,k}^2 \cdot 1_{|y_{j,k}| < \lambda} \right] \right]$$

$$R^{NLP} = E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \left[(y_{j,k} - x_{j,k})^2 \cdot 1_{|y_{j,k}| > \lambda} + (x_{j,k} - 2^{-j\delta} y_{j,k})^2 \cdot 1_{|y_{j,k}| < \lambda} \right] \right]$$

$$(3.179) \Leftrightarrow E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \left[x_{j,k}^2 \cdot 1_{|y_{j,k}| < \lambda} \right] \right] \geq E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \left[(x_{j,k}^2 - 2^{-j\delta} 2x_{j,k}y_{j,k} + 2^{-2j\delta} y_{j,k}^2) \cdot 1_{|y_{j,k}| < \lambda} \right] \right]$$

$$(3.179) \Leftrightarrow 0 \geq E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \left[(-2^{-j\delta} 2x_{j,k}y_{j,k} + 2^{-2j\delta} y_{j,k}^2) \cdot 1_{|y_{j,k}| < \lambda} \right] \right]$$

Ce qui nous amène à étudier le signe de la quantité suivante :

$$Q_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} 2^{-2j\delta} E[y_{j,k}^2 \cdot 1_{|y_{j,k}| < \lambda}] - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} 2^{-j\delta} 2x_{j,k} E[y_{j,k} \cdot 1_{|y_{j,k}| < \lambda}] \quad (3.180)$$

Notre méthode est la meilleure lorsque Q_1 est négatif.

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[2^{-2j\delta-n}\sigma^2 + x_{j,k}^2(2^{-2j\delta} - 2^{-j\delta+1}) \right] \left[\operatorname{erf} \left(\frac{2^{\frac{n}{2}}(x_{j,k} + \lambda)}{\sigma\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{2^{\frac{n}{2}}(x_{j,k} - \lambda)}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \left[\frac{2^{-\frac{n}{2}}\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[x_{j,k}(2^{-2j\delta} - 2^{-j\delta+1}) - \lambda 2^{-2j\delta} \right] \right] \exp \left(-\frac{2^n(x_{j,k} + \lambda)^2}{2\sigma^2} \right) \\
&- \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \left[\frac{2^{-\frac{n}{2}}\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[x_{j,k}(2^{-2j\delta} - 2^{-j\delta+1}) + \lambda 2^{-2j\delta} \right] \right] \exp \left(-\frac{2^n(x_{j,k} - \lambda)^2}{2\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

L'équation $Q_1 \leq 0$ n'est pas très explicite. Nous allons donc dans la suite voir à quoi cette équation correspond pour des signaux classiques. Nous allons considérer des séries lacunaires, puis des signaux dont les coefficients d'ondelette sont distribués de manière uniforme par échelle.

Séries lacunaires

Définition 3.7.5 [Jaf00]

Soit $0 < \gamma < 1$, et $\alpha > 0$. Une série lacunaire est un processus aléatoire F défini à travers ses coefficients de la manière suivante : Indépendamment à chaque échelle j , on prend aléatoirement $2^{j\gamma-1}$ coefficients parmi les 2^{j-1} de cette échelle, selon une distribution uniforme. On attribue à ces coefficients la valeur $2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$. Les coefficients restant sont mis à zero. On note $L(\alpha, \gamma)$ cette classe de signaux avec α la régularité et γ la lacunarité.

Simulations

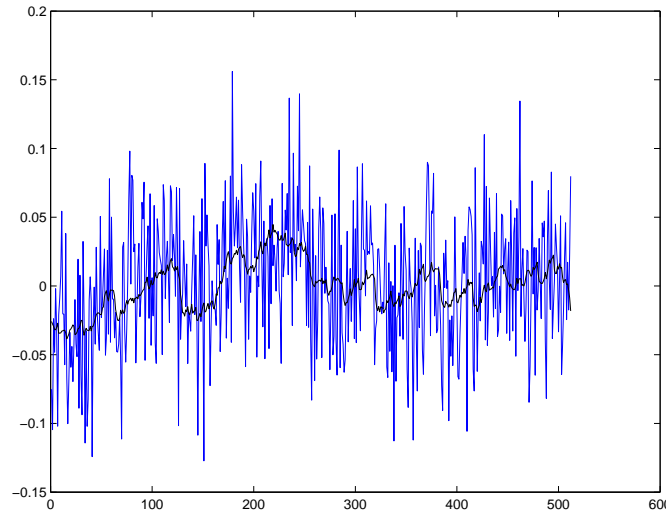


FIG. 3.21: Série lacunaire et sa version bruitée. Lacunarité : 0.9, régularité : 0.5.

On génère une série lacunaire de régularité 0.5 et de lacunarité 0.9 (figure 3.21). Puis on représente le terme d'erreur relatif à notre méthode moins celui du Hard Thresholding (trait plein sur les figures 3.22 et 3.23) en fonction du paramètre de débruitage δ après une moyenne sur 10 réalisations de bruit.

On vérifie bien sur ces 2 figures que les deux courbes, en pointillés Q_1 et en trait plein la différence des erreurs, coupent l'axe des abscisses en un même point.

La suite du processus expérimental consiste en la construction de séries lacunaires avec des paramètres de lacunarité variant de 0 à 1 et des régularités α diverses. Ces séries lacunaires sont ensuite bruitées

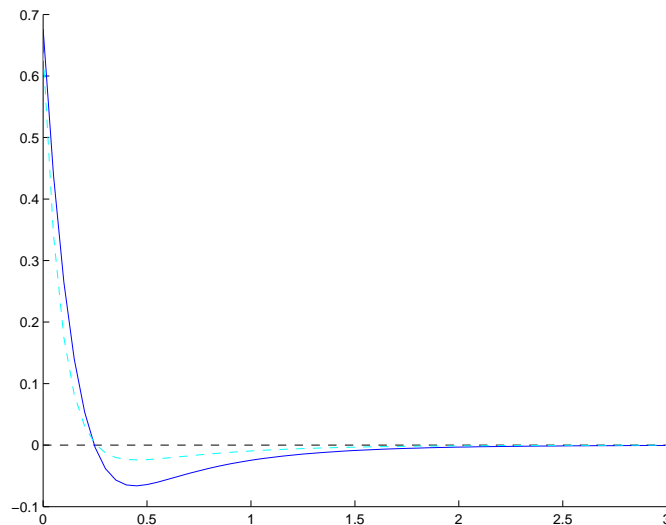


FIG. 3.22: Représentation de l'évolution de la quantité $R^{PB} - R^{HT}$ en trait plein, et de QI en pointillés en fonction de δ . Série lacunaire bruitée, moyenne de 10 réalisations.

selon 10 réalisations de bruit. On applique sur ces signaux les deux techniques de débruitage. On représente ensuite l'évolution des quantités R^{PB} et R^{HT} en fonction de paramètre de débruitage δ . Bien évidemment R^{HT} est une constante. La figure 3.24 donne le résultat pour $\alpha = 0.4$ et $\gamma = 0.9$.

On représente sur les figures 3.25 et 3.26 deux séries lacunaires avec des régularités différentes (0.2 et 0.9) très bruitées puis débruitées par notre méthode.

Distributions uniformes

On souhaite maintenant comparer les deux méthodes sur une autre classe de signaux que l'on notera $UW(\alpha)$. On va considérer dans cette partie des signaux tels que leurs coefficients d'ondelette suivent une distribution uniforme sur le support $[-2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}, 2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}]$ à l'échelle j . Ces signaux sont dans l'espace de Hölder C^α .

Simulations

On génère des coefficients d'ondelette uniformément distribués sur le support $[-2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}, 2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}]$ puis on construit le signal correspondant que l'on bruit avec un bruit blanc gaussien. On débruite ensuite le signal par notre méthode et par le Hard Thresholding (pour la figure 3.27, $\alpha = 1$ et pour la figure 3.28, $\alpha = 0.7$). On représente aussi pour 10 réalisations du bruit les quantités R^{PB} et R^{HT} évoluant, pour R^{PB} , avec le paramètre de débruitage δ sur la figure 3.29. Et une moyenne sur l'ensemble des réalisations est tracée figure 3.30.

3.7.8 Approche stochastique

Dans ce chapitre, on a toujours considéré que δ était une quantité déterministe ce qui provoquait une augmentation de régularité stochastique. Il est nécessaire de préciser que l'on peut avoir une toute autre approche qui serait de fixer de manière déterministe l'augmentation de régularité souhaitée. Dans cette approche, on fait en sorte que pour une réalisation ω du bruit, $\delta(\omega)$ soit tel que

$$\gamma = K_n \delta \sum_{\substack{j=1 \\ |y_{j,k}| < \lambda}}^n j s_j$$

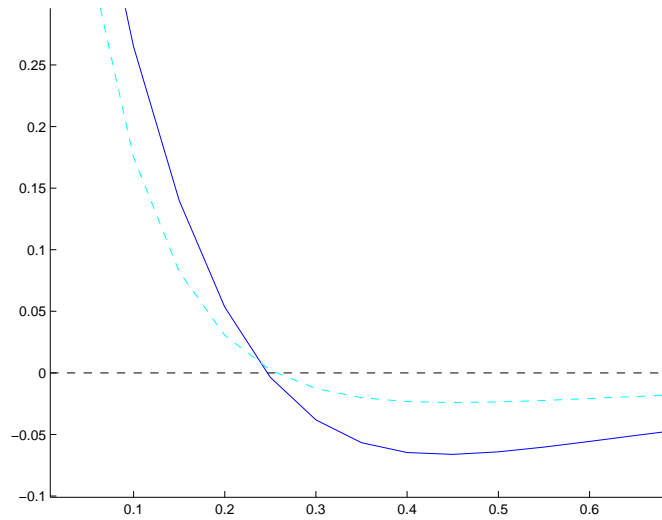


FIG. 3.23: Représentation de l'évolution de la quantité $R^{PB} - R^{HT}$ en trait plein, et de QI en pointillés en fonction de δ . Série lacunaire bruitée, moyenne de 10 réalisations. Zoom.

soit une augmentation déterministe de la régularité. On obtient une formulation explicite de δ pour chacun des points du signal.

$$\delta = \frac{\gamma}{K_n \sum_{\substack{j=1 \\ |y_{j,k}| < \lambda}}^n j s_j}$$

Toutefois il est impossible de trouver un δ vérifiant ceci au dessus de chacun des points d'un signal (le point est caché dans le k) donc on doit faire un choix. Les possibilités sont multiples, on peut décider d'augmenter la régularité en prenant δ comme étant la moyenne des δ obtenus pour chacun des points du signal, on peut aussi décider d'augmenter la régularité au minimum (ou au maximum) de γ , alors on prend δ comme étant le maximum (respectivement le minimum) des δ obtenus pour chacun des points du signal.

Cette approche stochastique est en cours d'investigation.

3.7.9 Conclusion

On a proposé dans cette section une nouvelle méthode de débruitage non-linéaire, à base d'ondelettes, qui constitue une extension du Hard Thresholding et du Multifractal pumping. L'estimateur proposé atteint le même taux de convergence que le Hard Thresholding et la méthode est adaptative. De plus, cette méthode simple permet le contrôle de la régularité du signal débruité.

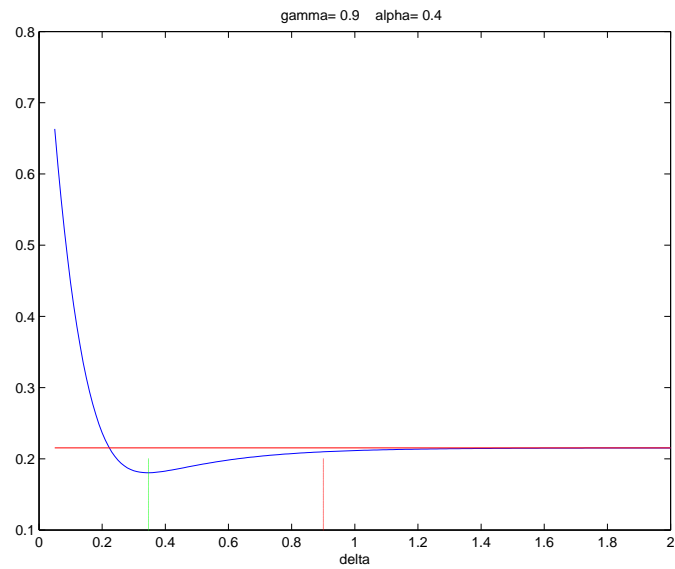


FIG. 3.24: Evolution des quantités R^{PB} et R^{HT} en fonction de paramètre de débruitage δ .

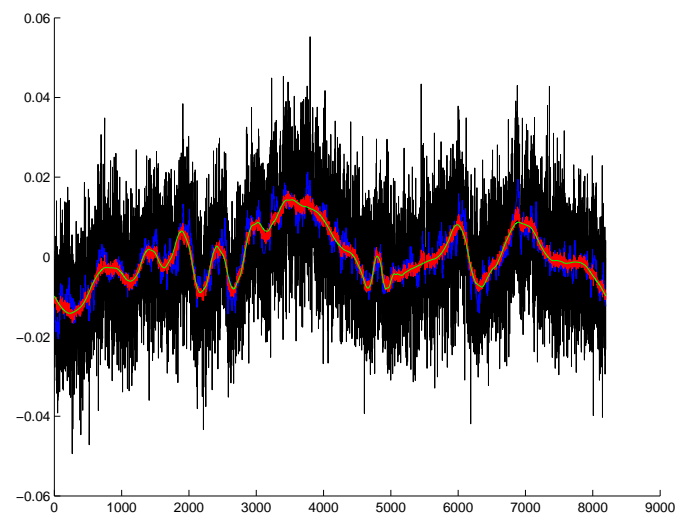


FIG. 3.25: Exemple de série lacunaire (en bleu) bruitée (en noir) puis débruitée, par notre méthode (en rouge), par Hard Thresholding (en vert). Régularité : 0.2, lacunarité : 0.7.

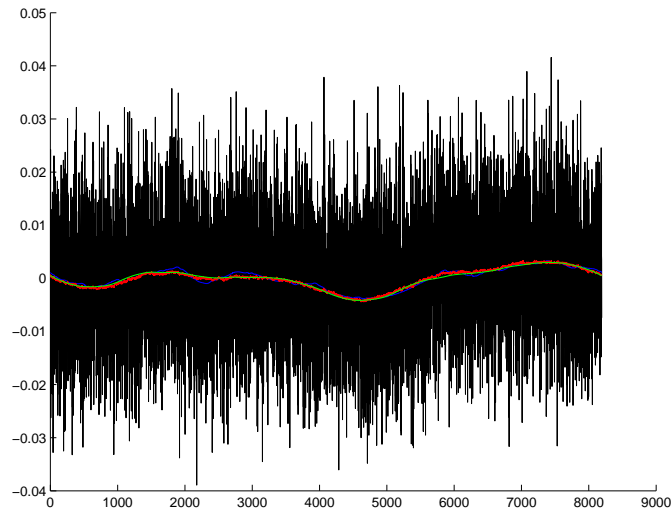


FIG. 3.26: Exemple de série lacunaire (en bleu) bruitée (en noir) puis débruitée, par notre méthode (en rouge), par Hard Thresholding (en vert). Régularité : 0.9, lacunarité : 0.7.

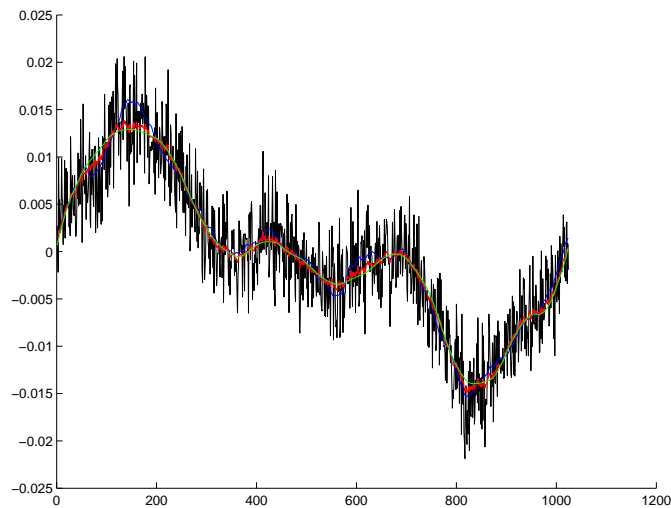


FIG. 3.27: Distribution uniforme des coefficients d'ondelette sur le support $[-2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}, 2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}]$ avec $\alpha = 1$. Signal original en bleu, bruité en noir, débruité par notre méthode en rouge et par le Hard Thresholding en vert.

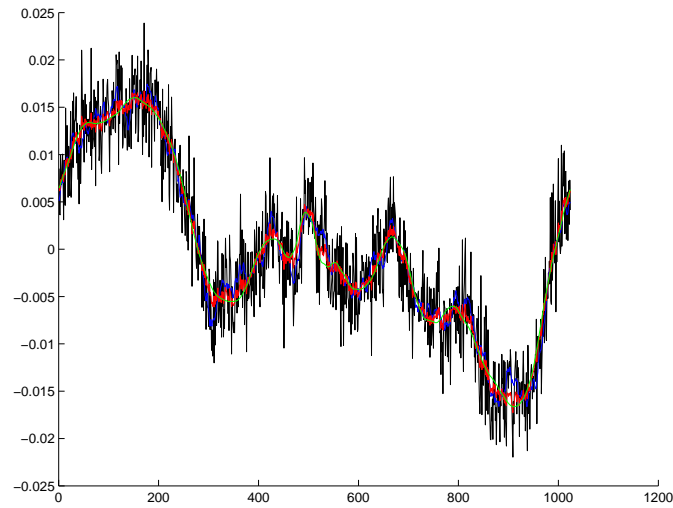


FIG. 3.28: Distribution uniforme des coefficients d'ondelette sur le support $[-2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}, 2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}]$ avec $\alpha = 0.7$. Signal original en bleu, bruité en noir, débruité par notre méthode en rouge et par le Hard Thresholding en vert.

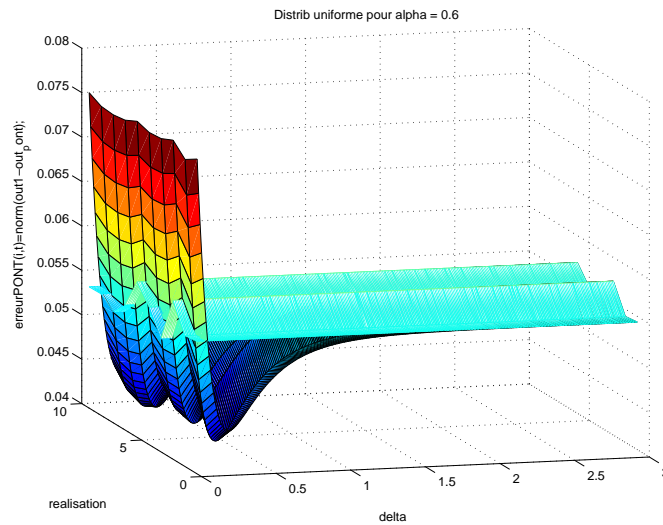


FIG. 3.29: Distribution uniforme des coefficients d'ondelette sur le support $[-2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}, 2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}]$ avec $\alpha = 0.6$. Représentation des risques R^{HT} et R^{PB} après débruitage en fonction du paramètre δ et de la réalisation.

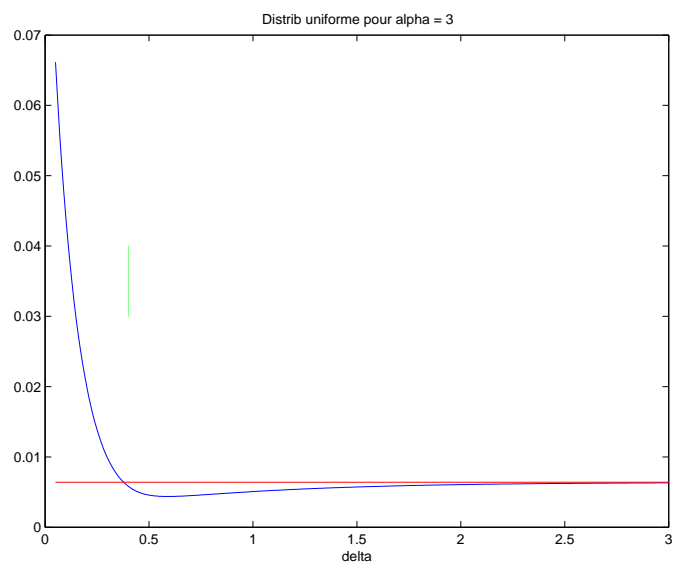


FIG. 3.30: *Distribution uniforme des coefficients d'ondelette sur le support $[-2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}, 2^{j(\alpha+\frac{1}{2})}]$ avec $\alpha = 3$. Représentation des risques R^{HT} et R^{PB} après débruitage en fonction du paramètre δ . Il s'agit d'une moyenne sur 10 réalisations de bruit.*

3.8 Débruitage multifractal Bayésien

Cette section présente une nouvelle méthode pour le débruitage de signaux et d'image. Le modèle repose seulement sur la régularité locale minimale. Cette hypothèse se traduit en tant que contraintes sur le spectre multifractal du signal. Ces contraintes sont ensuite utilisées dans un cadre Bayésien pour estimer les coefficients d'ondelette du signal original à partir de ceux du signal perturbé par du bruit. Cette méthode est bien adaptée au traitement des signaux irréguliers tels que les signaux (multi-)fractals et peut être utile pour le traitement de données de turbulences, bio-médicales, ou sismiques.

3.8.1 Introduction

À la suite des travaux initiaux de D. Donoho, D. Picard, et d'autres sur le débruitage par seuillage des coefficients d'ondelette, des méthodes de débruitage à base d'ondelette utilisant des techniques Bayésiennes ont été proposés, permettant de prendre en compte des connaissances *a priori* sur les signaux traités. Lorsque de telles connaissances *a priori* sont disponibles, ces techniques de débruitage semblent être les plus efficaces. Les travaux de B. Vidakovic (voir [VR01, RV99]) qui ont initié cette approche, supposent par exemple que les coefficients du signal original sont distribués à chaque échelle j suivant la loi *a priori* :

$$x_{j,k} \sim \pi_j \xi(x_{j,k}) + (1 - \pi_j) \delta(0), \quad k = 1..2^{j-1}$$

avec $\delta(0)$ le point de masse en zéro et ξ décrivant le comportement asymptotique de $x_{j,k}$ lorsqu'il est non nul, ce qui arrive avec la probabilité π_j . Cette loi permet de tester l'hypothèse $H_0 : x_{j,k} = 0$ face à $H_1 : x_{j,k} \neq 0$. De nombreux autres priors ont été testés (voir [AB] et [AS99]).

Dans cette section, on développe un estimateur sous l'hypothèse que le signal original appartient à une certaine classe de signaux \mathcal{S} décrite un peu plus loin. Les fonctions appartenant à cette classe ont une régularité locale minimale mais peuvent avoir des exposants de Hölder ponctuels variant très rapidement. On interprète l'hypothèse de régularité locale minimale comme une contrainte sur le spectre multifractal. Cette contrainte, ajoutée éventuellement à d'autres conditions, fournit une forme paramétrique pour la distribution *a priori* des coefficients d'ondelette de X . On obtient des estimateurs de ces coefficients en utilisant une technique de *maximum a posteriori* classique. Par conséquent, notre estimateur est défini comme étant le signal le plus proche des observations avec le spectre multifractal désiré (ou une version dégénérée de celui-ci, voir plus loin). Puisque le spectre multifractal regroupe toute l'information sur l'exposant de Hölder ponctuel, cette procédure est naturellement adaptée aux signaux présentant de soudains changements de régularité. De la même manière, une telle technique est appropriée lorsque l'on essaie de restaurer des signaux très irréguliers et pour lesquels il est important que la procédure renvoie la bonne structure de régularité (c'est à dire préserve l'évolution temporelle de la régularité). Par exemple, on peut être confronté à cette situation lorsque le débruitage est suivi par une procédure de segmentation basée sur l'information texturale : supposons que l'on souhaite distinguer deux zones très texturées (apparaissant par exemple en MR ou en imagerie radar) sur une image bruitée. L'application d'une technique de débruitage qui suppose que le signal est, par exemple, C^1 , va engendrer la perte de l'information qui justement serait nécessaire à la segmentation. En effet, l'image débruitée ne contiendra plus beaucoup de texture. On rencontre le même genre de difficulté dans d'autres situations telles que la détection de changement à partir d'images aériennes bruitées, l'analyse de données de turbulence, ou la caractérisation des parties non voisées d'un enregistrement vocal. Dans tous ces cas, le critère de décision est souvent basé sur la variation de l'irrégularité dans certaines régions, et par conséquent on doit préserver cette information. Nous allons illustrer ce point dans la deuxième partie de la thèse lors de l'analyse des profils routiers et des mécanismes du frottement.

Comme nous le montrons par la suite, la technique présentée dans cette section est simple à mettre en oeuvre d'un point de vue algorithmique et donne de bons résultats sur plusieurs types de signaux/images. La suite de cette section sera organisée de la manière suivante : tout d'abord la section 3.8.2 rappelle

quelques notions d'analyse multifractale qui seront, avec la régularité Hölderienne, les bases de notre approche. Notre modèle sera décrit dans la section 3.8.3. La méthode de débruitage sera détaillée dans la section 3.8.4 ainsi que les résultats théoriques de convergence. Tout au long de ce chapitre, les coefficients d'ondelette du signal X seront notés $x_{j,k}$ avec j l'échelle et k la localisation temporelle. Une ondelette orthogonale avec suffisamment de moments nuls est utilisée pour effectuer cette décomposition.

3.8.2 Rappels sur l'analyse multifractale

On rappelle brièvement dans cette section quelques éléments basiques d'analyse multifractale. L'analyse multifractale consiste en l'étude de la structure de la régularité des processus, à la fois d'un point de vue local et global. Plus précisément, on commence par mesurer la régularité ponctuelle, habituellement par un exposant de Hölder. La seconde étape consiste à donner une description globale de cette régularité, ce qui peut être fait de manière géométrique en utilisant la dimension de Hausdorff ou de manière statistique par une analyse des grandes déviations. Dans ce document, nous allons considérer l'approche statistique et utiliser le *spectre multifractal de grande déviation*. On définit ce spectre de la manière suivante.

Soit $X(t)$, $t \in T \subset \mathbf{R}$ un processus stochastique sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour simplifier les notations, on suppose que $T = [0, 1]$.

Soit

$$N_n^\varepsilon(\alpha) = \#\{k : \alpha - \varepsilon \leq \alpha_n^k \leq \alpha + \varepsilon\} \quad (3.181)$$

où α_n^k est l'exposant de grain correspondant à l'intervalle dyadique $I_n^k = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$, c'est à dire :

$$\alpha_n^k = \frac{\log |Y_n^k|}{-n} \quad (3.182)$$

Ici, Y_n^k est une quantité qui mesure la variation de X sur l'intervalle I_n^k .

Le choix $Y_n^k := X((k+1)2^{-n}) - X(k2^{-n})$ permet de mener simplement les calculs analytiques. Une autre possibilité, qui sera celle utilisée ici, est de prendre pour Y_n^k les coefficients d'ondelette $x_{n,k}$ de X à l'échelle n et à la localisation k . Cette définition est pratique. Cependant, elle a aussi un désavantage, en effet, le spectre multifractal ainsi obtenu va dépendre de l'ondelette choisie ψ . Alors, si on prend $Y_n^k := x_{n,k}$, il n'y a aucun sens à parler du spectre de X sans faire référence à l'ondelette d'analyse choisie.

Définition 3.8.1 On définit le spectre de grande déviation $f_g(\alpha)$ de la manière suivante :

$$f_g(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N_n^\varepsilon(\alpha)}{n} \quad (3.183)$$

On note que quelque soit le choix de Y_n^k , f_g est toujours à valeurs dans $\mathbf{R}^+ \cup \{-\infty\}$. La valeur $-\infty$ correspond aux valeurs de l'exposant de grain qui ne sont pas observées à toutes les échelles suffisamment petites.

Le sens intuitif de f_g est le suivant. Pour n assez grand, on a approximativement :

$$\mathbb{P}_n(\alpha_n^k \simeq \alpha) \simeq 2^{-n(1-f_g(\alpha))} \quad (3.184)$$

avec \mathbb{P}_n la distribution uniforme sur $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. Alors, pour tout α tel que $f_g(\alpha) < 1$, $1 - f_g(\alpha)$ mesure le taux de décroissance exponentielle de la probabilité de rencontrer un intervalle I_n^k avec un exposant de grain égal à α lorsque n tend vers l'infini.

On considère la version déterministe de f_g :

$$F_g(\alpha) = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \pi_n^\varepsilon(\alpha)}{\log(n)}. \quad (3.185)$$

où $\pi_n^\varepsilon(\alpha) := \mathbb{P} \times \mathbb{P}_n[\alpha_n^k \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)]$

3.8.3 Les classes paramétrées $\mathcal{S}(g, \psi)$

Soit \mathcal{F} la classe des fonctions semi-continues de \mathbb{R}^+ sur $\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$. On considère la classe des fonctions aléatoires $X(t), t \in [0, 1]$, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et décrite par la définition 3.8.2 ci-dessous. Chaque classe $\mathcal{S}(g, \psi)$ est caractérisée par le paramètre fonctionnel $g \in \mathcal{F}$ et une ondelette ψ telle que l'ensemble $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ forme une base de L^2 . Soit K une constante positive et

$$\mathbb{P}_j^\varepsilon(\alpha, K) = \mathbb{P} \times \mathbb{P}_j(\alpha - \varepsilon < \frac{\log_2(K|x_{j,k}|)}{-j} < \alpha + \varepsilon) \quad (3.186)$$

Définition 3.8.2

$$\mathcal{S}(g, \psi) = \{X : \exists K > 0, j_0 \in \mathbb{Z} : \forall j > j_0, x_{j,k} \text{ et } x_{j,k'}\}$$

sont identiquement distribués pour $(k, k') \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}$ et $\frac{\log_2 \mathbb{P}_j^\varepsilon(\alpha, K)}{j} = g(\alpha) + R_{n,\varepsilon}(\alpha)$ où $R_{n,\varepsilon}(\alpha)$ est tel que : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,\varepsilon}(\alpha) = 0$ uniformément en α .

Le fait que, pour j assez grand, les coefficients $(x_{j,k})_k$ à l'échelle j soient identiquement distribués entraîne que :

$$\pi_j^\varepsilon(\alpha, K) := \mathbb{P} \times \mathbb{P}_j(\alpha - \varepsilon < \frac{\log_2(K|x_{j,k}|)}{-j} < \alpha + \varepsilon) \quad (3.187)$$

$$= \mathbb{P}(\alpha - \varepsilon < \frac{\log_2(K|x_{j,k}|)}{-j} < \alpha + \varepsilon) \quad (3.188)$$

Par conséquent, la définition 3.8.2 a une interprétation simple en terme d'analyse multifractale : pour une ondelette donnée ψ , on considère les signaux aléatoires tels que le signal normalisé KX a un spectre multifractal déterministe $F_g(\alpha)$ (en fonction de ψ) égal à $1 + g$, avec la condition suivante : F_g est obtenu comme une limite en j plutôt que comme une lim sup, cette limite est atteinte uniformément en α . Cette condition assure que pour j assez grand, les statistiques renormalisées des $\alpha_{j,k}$ sont assez proches de leurs limites et permettent ainsi une inference significative.

Les classes $\mathcal{S}(g, \psi)$ englobent une grande variété de signaux. La plupart des modèles de processus (multi-)fractals et certains autres processus plus "classiques" appartiennent à de telles classes. Elles comprennent les IFS, les cascades multiplicatives, les mouvements Brownien fractionnaires et les processus stables. De tels processus ont été utilisés pour la modélisation du trafic sur internet, des cours de la bourse, de signaux de parole, d'images médicales, ...

3.8.4 Débruitage Bayésien dans $\mathcal{S}(g, \psi)$

On rappelle ici les étapes principales de l'approche du *Maximum a Posteriori* (MAP) dans un contexte Bayésien. On observe un signal bruité Y , et on suppose que $Y = X + B$, où B est un bruit indépendant du signal original X et de loi connue. Alors on a : $y_{j,k} = x_{j,k} + b_{j,k}$. L'estimateur MAP $\hat{x}_{j,k}$ de $x_{j,k}$ obtenu à partir des observations $y_{j,k}$ est défini comme un argument qui maximise $\mathbb{P}(x_{j,k}/y_{j,k})$. D'après la loi de Bayes, et comme $\mathbb{P}(y_{j,k})$ ne dépend pas de $x_{j,k}$, maximiser $\mathbb{P}(x_{j,k}/y_{j,k})$ revient à maximiser le produit $\mathbb{P}(y_{j,k}/x_{j,k})\mathbb{P}(x_{j,k})$. L'estimateur MAP est alors : $\hat{x}_{j,k} = \operatorname{argmax}_x [\mathbb{P}(y_{j,k}/x)\mathbb{P}(x)]$.

Le terme $\mathbb{P}(y_{j,k}/x)$ est facilement calculé d'après la loi de B si on suppose que B est un bruit blanc car les $b_{j,k}$ ont la même loi que B (on rappelle que l'on utilise des ondelettes orthonormales). La loi *a priori* $\mathbb{P}(x_{j,k})$ est déduite en utilisant l'appartenance de X à $\mathcal{S}(g, \psi)$. Pour $x > 0$, soit $\alpha_j(x) = \frac{\log_2(Kx)}{-j}$.

$$\mathbb{P}(|x_{j,k}| = x) = \mathbb{P}\left(\frac{\log_2(K|x_{j,k}|)}{-j} = \alpha_j(x)\right) \simeq 2^{j(g(\alpha_j(x))-1)}$$

Ceci nous conduit à définir un estimateur MAP Bayésien *approximé* par :

$$\hat{x}_{j,k} = \operatorname{argmax}_{x>0} \left[jg \left(\frac{\log_2(\hat{K}x)}{-j} \right) + \log_2(\mathbb{P}(y_{j,k}/x)) \right] \operatorname{sgn}(y_{j,k}) \quad (3.189)$$

où $\operatorname{sgn}(y)$ est le signe de y et $\hat{K} = (\sup_{j>j_0} \sup_k(x_{j,k}))^{-1}$. On peut justifier de manière heuristique l'estimateur pris pour K : écrire $\frac{\log_2(K|x_{j,k}|)}{-j} \simeq \alpha$ avec $\alpha > 0$ implique que $K|x_{j,k}| < 1$ pour chaque couple (j, k) . \hat{K} est choisi comme le plus grand facteur de normalisation vérifiant la dernière inégalité.

A partir de maintenant nous supposons que le bruit est centré, Gaussien et de variance σ^2 . L'estimation MAP donne alors :

$$\hat{x}_{j,k} = \operatorname{argmax}_{x>0} \left[jg \left(\frac{\log_2(\hat{K}x)}{-j} \right) - \frac{(y_{j,k} - x)^2}{2\sigma^2} \right] \operatorname{sgn}(y_{j,k}) \quad (3.190)$$

Bien que (3.189) donne une formule explicite pour débruiter Y , son utilisation est peu pratique. En effet, la plupart du temps, on ne connaît pas le spectre multifractal de X et sans l'évaluation de g , il n'est pas possible d'utiliser (3.189) pour obtenir $\hat{x}_{j,k}$. On rappelle de plus que F_g dépend en général de l'ondelette d'analyse.

On va utiliser une version dégénérée de (3.190) qui nécessite un seul paramètre en entrée à la place du spectre en entier. Soit α_0 la plus petite régularité observé dans le signal. Bien que les spectres F_g obtenus avec différentes ondelettes d'analyse dépendent de l'ondelette, leur support est toujours inclus dans $[\alpha_0, \infty)$. Le spectre "plat" $\mathbf{1}_{[\alpha_0, \infty)}$ contient alors l'information intrinsèque. Il ne dépend que du réel positif α_0 . On résout (3.190) avec un spectre plat, ce qui nous donne la loi de décision utilisée dans le paragraphe suivant :

$$\hat{x}_{j,k} = y_{j,k} \text{ si } K|y_{j,k}| < 2^{-j\alpha_0} \quad (3.191)$$

$$= \operatorname{sign}(y_{j,k}) \cdot 2^{-j\alpha_0} \text{ sinon} \quad (3.192)$$

C'est ce cas qui va être traité dans la section suivante.

Bien que α_0 soit une information *a priori*, cette valeur peut être estimée à partir des observations bruitées (voir section 3.3.1). On peut ainsi la comparer au seuil utilisé dans les méthode de Hard et de Soft Thresholding. Dans la suite, nous allons considérer α_0 comme un paramètre de la méthode de débruitage.

3.8.5 Loi de décision et fonction de coût

On note δ la loi de décision que l'on applique aux coefficients d'ondelette $y_{j,k}$ du signal bruité. Pour simplifier les notations, on ne précisera plus les indices j, k . On considère donc un coefficient y d'un certain niveau j . On pose $m = m(j) = 2^{-j\alpha_0}$. De plus, on suppose que les coefficients d'ondelette sont normalisés par le réel \hat{K} décrit dans la section précédente. Nous allons étudier la méthode de débruitage Bayésien découlant de la loi de décision suivante.

Définition 3.8.3 *La loi de décision est donnée par :*

$$\begin{cases} \delta_m(y) = y & \text{si } |y| \leq m \\ \delta_m(y) = \operatorname{sign}(y) * m & \text{si } |y| > m \end{cases} \quad (3.193)$$

D'après cette loi de décision, on peut calculer la fonction de coût $L(y, \delta_m)$.

Définition 3.8.4 La fonction de coût est donnée par :

$$\begin{cases} L(y, \delta_m) = (y - x)^2 & \text{si } |y| \leq m \\ = (\text{sign}(y) * m - x)^2 & \text{si } |y| > m \end{cases} \quad (3.194)$$

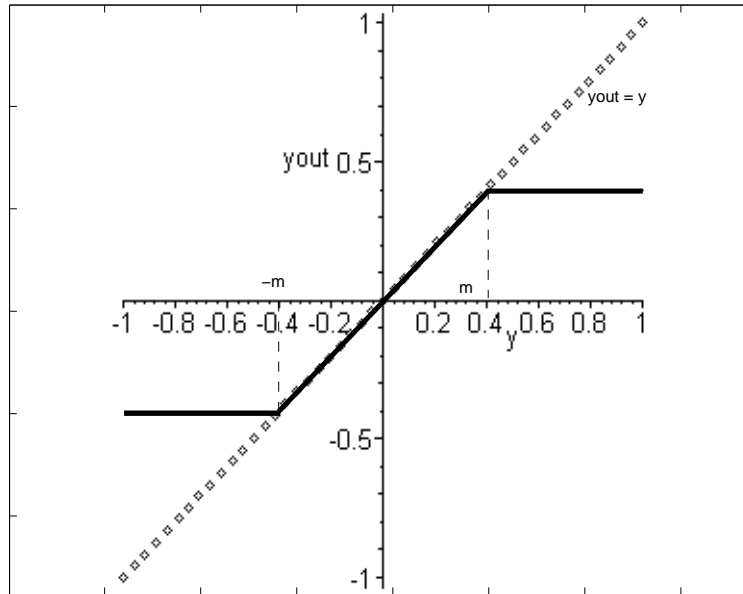


FIG. 3.31: Représentation de la loi de décision. En abscisse, on a le coefficient d'entrée y et en ordonnée les valeurs correspondantes du coefficient de sortie de la loi de décision (noté ici y_{out}). Il est important de préciser ici que le paramètre m dépend du niveau j auquel se trouve le coefficient y .

Nous verrons dans la partie consacrée au risque Bayésien que nous pouvons prendre comme loi à priori de x une distribution uniforme sur l'intervalle $[-m, m]$. Ainsi, nous pouvons étudier les conséquences de la loi de décision représentée figure 3.31. Si il n'y a pas de bruit, selon le modèle de X , les coefficients sont tous sur l'intervalle $[-m, m]$ donc on ne fait rien. Au contraire, plus il y a de bruit, plus les coefficients d'entrée sont éloignés de la plage $[-m, m]$, plus ils sont éloignés des coefficients de sortie.

3.8.6 Risque fréquentiste

Définition 3.8.5 Le risque fréquentiste $R(x, \delta_m)$ est calculé de la manière suivante :

$$R(x, \delta_m) = \int_{-\infty}^{\infty} L(y, \delta_m) f(y/x) dy \quad (3.195)$$

On suppose que le bruit est centré et suit une loi Gaussienne d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{2^n}}$. La distribution conditionnelle $f(y/x)$ est

$$f(y/x) = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2 2^n}{2\sigma^2}}$$

Proposition 3.8.1 Le risque fréquentiste sous la loi de décision δ vaut :

$$R(x, \delta_m) = (x^2 + m^2) \left[1 - \int_{-m-x}^{m-x} f(z) dz \right] + 2mx \int_{m+x}^{m-x} f(z) dz + \int_{-m-x}^{m-x} z^2 f(z) dz \quad (3.196)$$

Preuve

$$\begin{aligned}
R(x, \delta_m) &= \int_{-\infty}^{\infty} L(y, \delta_m) f(y/x) dy \\
&= \int_{-\infty}^{-m} (m+x)^2 f(y/x) dy + \int_{-m}^m (y-x)^2 f(y/x) dy + \int_m^{\infty} (m-x)^2 f(y/x) dy \\
&= \int_{-\infty}^{-m-x} (m+x)^2 f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} + \int_{-m-x}^{m-x} \mathbf{z}^2 f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} + \int_{m-x}^{\infty} (m-x)^2 f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\
&= \int_{-m-x}^{m-x} \mathbf{z}^2 f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} + (x^2 + m^2) \left(1 - \int_{-m-x}^{m-x} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}\right) + 2mx \int_{m-x}^{\infty} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}
\end{aligned}$$

■

D'après la forme du risque fréquentiste, on voit les valeurs obtenues lorsque l'on prend des valeurs particulières de m . En effet, lorsque $m = 0$, on a $R(x, \delta_m) = x^2$, ceci peut s'interpréter très facilement d'après la loi de décision. Si $m = 0$ alors nécessairement $\delta_m(y) = 0$, c'est à dire que l'on estime le coefficient inconnu x par la valeur 0, bien évidemment le risque est x^2 . De même, lorsque $m = \infty$ (d'après la forme de m donnée au début de la section 3.8.5, ce nombre est compris entre 0 et 1 dans notre exposé mais on peut imaginer un problème plus général), on a $R(x, \delta_m) = \frac{\sigma^2}{2^n}$, ceci peut s'interpréter aussi très facilement : d'après la loi de décision, si $m = \infty$, alors on estime x par y , le risque correspond alors à la variance du bruit contenu dans y . On retrouve ces informations sur la figure 3.32.

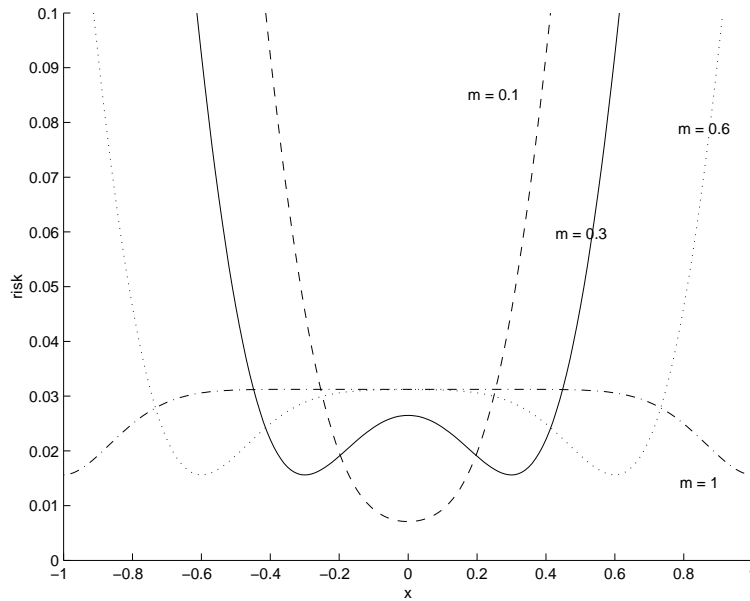


FIG. 3.32: Evolution du risque fréquentiste en fonction du coefficient non perturbé x . Les différentes courbes sont obtenues en faisant varier le paramètre m , pour des valeurs fixes de n et σ (en l'occurrence $n = 5$ et $\sigma = 1$).

Parité du risque fréquentiste

Proposition 3.8.2 *Le risque fréquentiste de notre méthode de débruitage est pair.*

Preuve

$$R(x, \delta_m) = (x^2 + m^2) \left[1 - \int_{-m-x}^{m-x} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}\right] + 2mx \int_{m-x}^{m-x} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} + \int_{-m-x}^{m-x} \mathbf{z}^2 f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

$$R(-x, \delta_m) = (x^2 + m^2) \left[1 - \int_{-m+x}^{m+x} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right] - 2mx \int_{m-x}^{m+x} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} + \int_{-m+x}^{m+x} \mathbf{z}^2 f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

Or

$$\int_{-m+x}^{m+x} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{-m-x}^{m-x} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

$$-2mx \int_{m-x}^{m+x} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{m+x}^{m-x} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

Et

$$\int_{-m+x}^{m+x} \mathbf{z}^2 f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{-m-x}^{m-x} \mathbf{z}^2 f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

Par conséquent

$$R(-x, \delta_m) = R(x, \delta_m) \tag{3.197}$$

■

3.8.7 Risque Bayésien et convergence

Définition 3.8.6 Le risque Bayésien $r(\pi, \delta_m)$ sur un coefficient est donné par :

$$r(\pi, \delta_m) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, \delta_m) \pi(x) dx \tag{3.198}$$

avec $\pi(x)$ la loi à priori de la distribution de x .

Définition 3.8.7 Le risque Bayésien total est donné par :

$$Br(\alpha_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} r(\pi, \delta_{2^{-j}\alpha_0})$$

On peut montrer que si on prend comme loi *a priori* de x une distribution uniforme sur l'intervalle $[-m, m]$, c'est à dire $\pi(x) = \frac{1}{2m} I_{[-m, m]}$, alors le risque Bayésien total converge en $c \cdot 2^{-n \frac{2\alpha_0 - 1}{2\alpha_0}}$ si $\alpha_0 \geq \frac{1}{2}$ (signal dans L_2). On peut montrer également que ce résultat reste vrai pour une distribution *a priori* telle que le signal original soit une série lacunaire (voir 3.7.7). On rappelle que la règle de décision utilisée ici découle de l'information *a priori* que le spectre est plat (c'est le modèle qui a le moins d'hyper-paramètres : 1, la régularité minimale). Si les coefficients sont effectivement distribués de manière uniforme, le taux de convergence atteint est optimal et s'ils sont distribués très différemment (séries lacunaires) ce taux est atteint tout de même. Le corollaire 3.8.2 montre que ce résultat est généralisable à l'ensemble des distributions *a priori* à support dans $[-m, m]$ et aussi à d'autres règles de décision.

Proposition 3.8.3 Soit X un signal dont les coefficients au niveau j ont pour support $[-m(j), m(j)]$. Soit \hat{X} un estimateur de X tel que pour tout couple d'indice (j, k) on ait :

- $|x_{j,k}| \leq m(j)$
- $2x_{j,k} - y_{j,k} \leq \hat{x}_{j,k} \leq y_{j,k}$ si $x_{j,k} \leq y_{j,k}$
- $y_{j,k} \leq \hat{x}_{j,k} \leq 2x_{j,k} - y_{j,k}$ sinon

alors $L(y, \delta_m) \leq \min(4m^2, (y_{j,k} - x_{j,k})^2)$.

Remarque 3.8.1 *En général, on ne peut pas vérifier les deux dernières hypothèses de la proposition 3.8.3 sans un oracle.*

Preuve

On ne notera pas les indices j, k .

$$1) L(y, \delta_m) = (\hat{x} - x)^2 \leq (\hat{x} - m)^2 + (m - x)^2 \leq 4m^2$$

$$2) L(y, \delta_m) \leq (y - x)^2 \Leftrightarrow (\hat{x} - x)^2 \leq (y - x)^2 \Leftrightarrow \hat{x}^2 - 2x\hat{x} + (2xy - y^2) \leq 0$$

Ce qui équivaut à $\hat{x} \in [2x - y, y]$ si $x < y$ et $\hat{x} \in [y, 2x - y]$ sinon. ■

Corollaire 3.8.1 *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.8.3, le risque fréquentiste vérifie*

$$R(x, \delta_m) \leq \min(4m^2, (y - x)^2)$$

Preuve

$$\begin{aligned} R(x, \delta_m) &= \int_{-\infty}^{\infty} L(y, \delta_m) f(y/x) dy \\ &\leq \min \left[\int_{-\infty}^{\infty} 4m^2 f(y/x) dy, \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 f(y/x) dy \right] \\ &\leq \min \left[\int_{-\infty}^{\infty} 4m^2 f(z) dz, \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z) dz \right] \\ &\leq \min [4m^2, \sigma^2 2^{-n}] \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.8.2 *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.8.3 et si $m = 2^{-j\alpha_0}$, Le risque Bayésien total vérifie*

$$Br(\alpha_0) \leq \left[\sigma^2 + \frac{4}{2^{\alpha_0} - 2} \right] 2^{-n \left(\frac{2\alpha_0 - 1}{2\alpha_0} \right)} \quad \text{si } \alpha_0 \geq \frac{1}{2} \quad (3.199)$$

pour toute loi a priori à support dans $[-m, m]$.

Preuve

Le risque Bayésien sur un coefficient est majoré par

$$\begin{aligned} r(\pi, \delta_m) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x, \delta_m) \pi(x) dx \\ &\leq \min(4m^2, (y - x)^2) \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x) dx = \min(4m^2, (y - x)^2) \end{aligned}$$

Le risque Bayésien total est donc majoré par

$$Br(\alpha_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} r(\pi, \delta_{2^{-j\alpha_0}}) \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \min(4m^2, (y - x)^2)$$

Par conséquent,

$$Br(\alpha_0) \leq \sum_{j=1}^{\frac{n}{2\alpha_0}} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \sigma^2 2^{-n} + \sum_{j=\frac{n}{2\alpha_0}+1}^n \sum_{k=1}^{2^{j-1}} 4m^2 \quad (3.200)$$

$$Br(\alpha_0) \leq \sigma^2 2^{-n-1} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2\alpha_0}} 2^j + 2 \sum_{j=\frac{n}{2\alpha_0}+1}^n 2^{j(1-2\alpha_0)}$$

$$Br(\alpha_0) \leq \sigma^2 2^{-n-1} \left[2^{\frac{n+2\alpha_0}{2\alpha_0}} - 2 \right] + 2 \frac{2^{n\left(\frac{1-2\alpha_0}{2\alpha_0}\right)+1} - 2^{n(1-2\alpha_0)+1}}{2^{2\alpha_0} - 2}$$

Donc,

$$Br(\alpha_0) \leq \left[\sigma^2 + \frac{4}{2^{\alpha_0}-2} \right] 2^{-n\left(\frac{2\alpha_0-1}{2\alpha_0}\right)} \quad \text{si } \alpha_0 \geq \frac{1}{2} \quad (3.201)$$

■

Remarque 3.8.2 Si $X \in C^{\alpha_0}$ et est tel que $\|X\|_2 < K$, alors on a le taux de convergence optimal. L'information a priori est simplement l'appartenance du signal à une boule dans un espace de Hölder ce qui implique que la méthode de débruitage proposée est "minimax". Toutefois elle est non adaptative car elle dépend de α_0 (à travers le paramètre m) et de K (le coefficient de renormalisation des coefficients d'ondelette). Ce résultat donne l'impression que l'on a besoin d'un oracle mais on va voir que ce n'est pas toujours nécessaire.

Applications

On montre aisément que la loi de décision donnée dans la section 3.8.5 vérifie bien les hypothèses de la proposition 3.8.3. La méthode de débruitage ainsi définie atteint le taux de convergence optimale d'après le corollaire 3.8.2. On obtient donc le corollaire suivant.

Corollaire 3.8.3 Pour toute loi a priori $\pi(x)$ à support dans $[-m, m]$ avec $m = 2^{-j\alpha_0}$ et pour la loi de décision

$$\begin{cases} \delta_m(y) = y & \text{si } |y| \leq m \\ \delta_m(y) = \text{sign}(y) * m & \text{si } |y| > m \end{cases} \quad (3.202)$$

le risque Bayésien total vérifie

$$Br(\alpha_0) \leq \left[\sigma^2 + \frac{4}{2^{\alpha_0}-2} \right] 2^{-n\left(\frac{2\alpha_0-1}{2\alpha_0}\right)} \quad \text{si } \alpha_0 \geq \frac{1}{2} \quad (3.203)$$

On peut construire une infinité de lois de décision vérifiant les hypothèses de la proposition 3.8.3. Par exemple,

$$\begin{cases} \delta_m(y) = y & \text{si } |y| \leq m \\ \delta_m(y) = \text{sign}(y) * m & \text{si } m < |y| \leq 2m \\ \delta_m(y) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.204)$$

Plus généralement, toutes les lois de la forme

$$\begin{cases} \delta_m(y) = y & \text{si } |y| \leq m \\ \delta_m(y) = \text{sign}(y) * m & \text{si } m < |y| \leq 2m \\ \delta_m(y) \in [0, m] & \text{si } y > 2m \\ \delta_m(y) \in [-m, 0] & \text{si } y < -2m \end{cases} \quad (3.205)$$

engendrent un risque Bayésien convergeant avec le taux optimal.

3.8.8 Simulations

Risque fréquentiste

Nous allons maintenant illustrer dans un cas réel les résultats théoriques obtenus. Pour cela, nous prenons des coefficients x sur $[-1, +1]$. Puis nous construisons cent réalisations différentes des coefficients y en sommant les x à cent bruits indépendants d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{2^n}}$. La loi de décision est ensuite appliquée à ces y , afin d'obtenir un estimateur de x . On effectue ensuite une moyenne des 100 résultats obtenus. Les résultats sont représentés sur la figure 3.33.

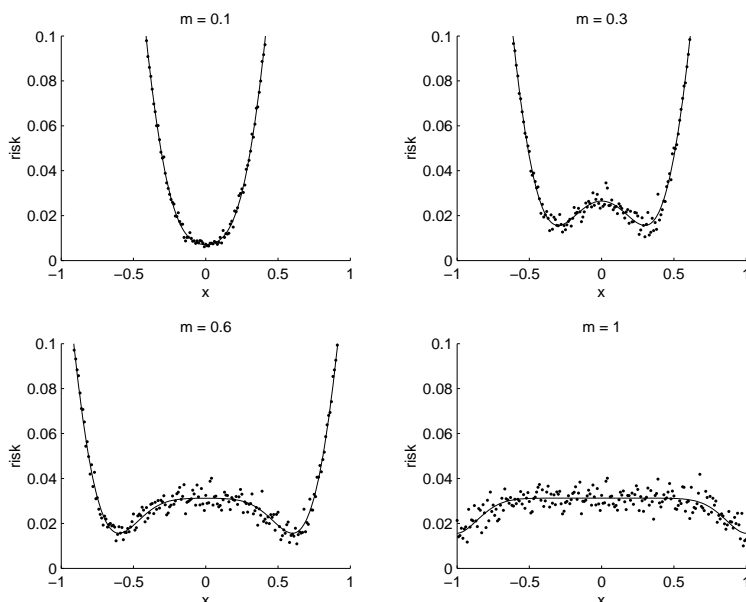


FIG. 3.33: Simulation du risque fréquentiste en fonction du coefficient non perturbé x . Les résultats théoriques sont en traits pleins et les résultats expérimentaux sont en pointillés. Les différentes courbes sont obtenues en faisant varier le paramètre m , pour des valeurs fixées de n et σ (en l'occurrence $n = 5$ et $\sigma = 1$).

Résultats numériques

On donne quelques résultats sur des signaux synthétiques. Les signaux originaux sont perturbés par un bruit blanc Gaussien additif. On montre compare dans chacun des cas notre méthode avec le Hard Thresholding. Pour chaque procédure, on choisit manuellement les paramètres donnant les meilleurs résultats. On peut tirer de ces applications numériques les conclusions suivantes. Premièrement, pour les signaux irréguliers considérés ici appartenant à $\mathcal{S}(g, \psi)$, on voit que la méthode Bayésienne donne de meilleurs résultats que le Thresholding. *En particulier, cette méthode préserve la régularité, tandis que le seuillage renvoie un signal présentant à la fois des régions trop lisses et des régions trop irrégulières.* Deuxièmement, il apparaît que l'utilisation de l'information dégénérée fournie par le spectre "plat" ne dégrade pas la qualité du débruitage.

Un type général de signaux dans $\mathcal{S}(g, \psi)$

On considère les signaux suivant :

$$\mathcal{S} = \{X : |x_{j,k}| = K \epsilon_{j,k} 2^{-j\gamma}\} \quad (3.206)$$

Où K et γ sont des constantes positives et chaque $\epsilon_{j,k}$ est une variable aléatoire à support dans $[0, 1]$. Les $\epsilon_{j,k}$ sont indépendants et sont distribués identiquement par échelle, c'est à dire que $\epsilon_{j,k}$ et $\epsilon_{j,k'}$ sont

distribués identiquement avec la distribution de probabilité p_j pour tout j, k, k' . De plus, on suppose que $p_j(0) < 1$ pour un grand nombre de j .

En terme de régularité, le comportement des fonctions dans \mathcal{S} peut être très variable en fonction de la loi p_j . Ici nous allons considérer en particulier des signaux avec des coefficients d'ondelette distribués uniformément. Plus précisément, pour tout j , on prend p_j la loi uniforme sur $[0, 1]$, c'est à dire que les $\epsilon_{j,k}$ sont iid et uniformément distribués sur $[0, 1]$. Il est aisé de voir que, pour tout t , presque sûrement $\alpha(t) = \gamma - 1/2$. De plus, $F_g(\alpha) = 1$ pour $\alpha = \gamma - 1/2$ et $F_g(\alpha) = -\infty$ sinon.

Les résultats sur ces types de signaux sont présentés figure 3.34.

Mouvement Brownien fractionnaire

Nous allons maintenant appliquer notre méthode sur l'un des processus stochastique fractal les plus simples, le mouvement Brownien fractionnaire (fBm). Le fBm est le processus Gaussien de moyenne nulle $X(t)$ ayant pour fonction de covariance $R(t, s) = \frac{\sigma^2}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H})$, où H est un nombre réel dans $[0, 1]$ et σ est un réel. Le fBm présente en tout point presque sûrement l'exposant de Hölder H . Comme on l'a dit précédemment, le spectre de grande déviation dépend de la définition de Y_n^k : Si on considère les incréments, alors, presque sûrement, pour tout α :

$$f_g(\alpha) = \begin{cases} -\infty & \text{if } \alpha < H \\ H + 1 - \alpha & \text{if } H \leq \alpha \leq H + 1 \\ -\infty & \text{if } \alpha > H + 1 \end{cases}$$

En outre, bien que l'on calcule le spectre en utilisant les incréments des coefficients d'ondelette, $f_g(\alpha)$ est donné par une limite en j plutôt que comme une limite supérieur. Ce qui entraîne avec les propriétés des coefficients d'ondelette l'appartenance du Fbm à la classe $\mathcal{S}(g, \psi)$. Si on définit les Y_n^k comme étant les coefficients d'ondelette, le spectre va dépendre de l'ondelette d'analyse ψ . Tout spectre présentant comme enveloppe supérieure la fonction caractéristique de $[H, \infty)$ peut être obtenu avec un choix adéquat de ψ . Le résultat de notre débruitage doit alors être en principe dépendant de l'ondelette. L'influence de l'ondelette est contrôlée grâce au choix du prior, c'est à dire le spectre multifractal parmi tous les admissibles. En pratique, on observe quelques variations si l'on utilise une ondelette de Daubechies de longueur comprise entre 2 et 20, et un spectre non-croissant de support $[H, \infty)$ avec $f_g(H) = 1$. En particulier, prendre f_g comme spectre théorique obtenu par incréments, ou prendre $f_g(\alpha) = 1$ pour $\alpha \geq H$ et $-\infty$ sinon (le spectre plat), conduit à des résultats comparables (voir figure 3.35).

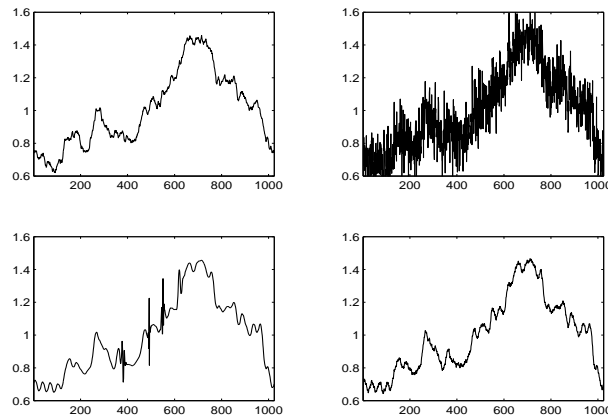


FIG. 3.34: Première ligne : signal avec des $\epsilon_{j,k}$ uniformément distribués, $K = 32$ et $\gamma = 1.3$ (gauche), version bruitée avec un bruit Gaussien additif (droite). Seconde ligne : Débruitage par Hard Thresholding (gauche), Débruitage Bayésien (droite).

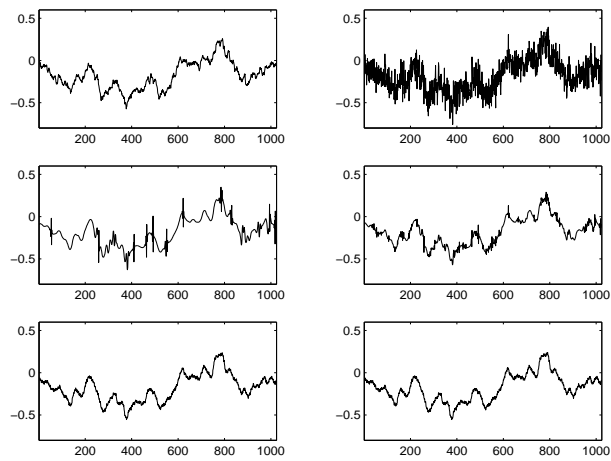


FIG. 3.35: Première ligne : fBm avec $H = 0.6$ (gauche) et version bruitée avec un bruit Gaussien (droite). Seconde ligne : Débruitage par seuillage classique ; *Hard Thresholding* (gauche), *Soft Thresholding* (droite). Troisième ligne : Débruitage Bayésien avec le spectre par incréments (gauche), avec le spectre plat (droite).

Deuxième partie

Etude fractale de profils routiers et application à l'adhérence

Chapitre 4

Etat de l'art

4.1 Position du problème

L'adhérence d'une chaussée correspond à sa capacité à mobiliser des forces de frottement entre le pneumatique d'un véhicule et la surface du revêtement de la chaussée sous l'effet des sollicitations engendrées par la conduite : accélérations, freinages, changements de direction, etc. Elle permet :

- de conserver à tout moment la trajectoire désirée, notamment en virage ;
- de réduire les distances de freinage et d'arrêt d'urgence ;
- de faciliter les manoeuvres d'évitement ou de récupération de trajectoire.

Le développement des forces de frottement dépend de la charge normale instantanée, de diverses propriétés des pneumatiques, des caractéristiques géométriques de la route et des conditions de contact (sec, présence de polluants et d'eau). La complexité des phénomènes mis en jeu explique l'absence de modèle physique complet de calcul des forces de frottement d'un pneumatique sur une chaussée à partir de paramètres liés à la route et au pneumatique.

Dans le cadre du programme de recherche "Infrastructure et sécurité routière" du LCPC, la section Surface des Chaussées et Dynamique des Véhicules a proposé d'aborder le problème d'adhérence par une approche locale visant à mieux comprendre et quantifier les phénomènes au niveau du contact entre un pavé de gomme et des aspérités de la chaussée.

Le travail présenté ici a pour objectif de mieux comprendre et de quantifier le rôle des aspérités de dimensions micrométrique à centimétrique, formant la texture des surfaces de chaussée, dans la génération du frottement pneumatique/chaussée.

Cette partie commencera par une section bibliographique donnant un bref rappel des principes de l'adhérence. Puis nous présenterons un exposé détaillé des travaux menés aux LCPC [DZ01] sur la technique d'indenteur et sa combinaison au modèle de frottement de Stefani. Ensuite on montrera la fractalité des profils routiers puis l'apport des techniques d'interpolation Hölderienne et de débruitage multifractal sur le calcul du frottement. Enfin un nouveau modèle de frottement, provenant d'un raffinement du modèle Do/Stefani, sera explicité.

4.2 Les principes de l'adhérence

On rappelle dans cette section les principes du mécanisme d'adhérence entre un pneumatique et une chaussée.

4.2.1 La gomme

La gomme qui constitue les pneumatiques est un élastomère vulcanisé, c'est à dire un ensemble de polymères mélangé à la cuisson avec une quantité de soufre. Les propriétés moléculaire de cet objet ainsi constitué lui confère un comportement visco-élastique. On rappelle qu'un matériau visco-élastique est un matériau déformable dont le comportement est intermédiaire entre celui d'un solide élastique et d'un liquide visqueux. En particulier, lorsqu'on déforme un corps visco-élastique, il reprend sa forme initiale (phénomène de relaxation) mais seulement au bout d'un certain temps, c'est le phénomène d'hystérèse, ce retard s'accompagne d'une déperdition d'énergie sous forme de chaleur. Dans la littérature, il a été montré que le phénomène d'hystérèse est à l'origine des mécanismes d'adhérence du pneumatique ([Mic01],[Heg69],[SWL70]). Le pneumatique, en tant que matériau visco-élastique, peut donc être modélisé par un couple ressort + piston, appelé solide de Kelvin. C'est sous cette forme que le pneu est symbolisé dans le modèle décrit par la suite (section 4.3).

Lorsque le pneumatique heurte des aspérités de la route, il est sollicité. La fréquence de ces sollicitations va jouer sur le caractère du matériau. Pour les basses fréquences, le matériau se comportera de manière élastique (comportement caoutchoutique) et présentera une hystérèse faible. Par contre, pour

les hautes fréquences, le matériau se comporte de manière visco-élastique. Dans ce cas, l'hystérèse sera maximale et donc on se situera dans les conditions les plus favorables à l'adhérence. toutefois, si la fréquence augmente de trop, on peut passer à un comportement vitreux, c'est à dire que le matériau devient quasiment indéformable.

De la même manière, la température influe sur la consistance du pneumatique. Pour une température faible le matériau est rigide et pour une température élevée, le matériau est élastique. Il existe donc une température intermédiaire autour de laquelle le pneumatique a le comportement idéal garantissant une hystérèse élevée. On appelle cette température la température de transition vitreuse.

4.2.2 Le frottement gomme/sol

Comme le détaille une littérature abondante ([Mic01],[Heg69],[SWL70],[Dij74], ...), deux mécanismes de sollicitations de la gomme interviennent dans le phénomène d'adhérence, l'indentation et l'adhésion.

L'indentation

L'indentation est la déformation de la gomme par glissement sur les aspérités du sol dont la taille varie du centimètre (macrorugosité) au micron (microrugosité). La souplesse de la gomme va lui permettre d'épouser les aspérités du revêtement routier. Le matériau va venir heurter une aspérité et se déformer, toutefois, par le phénomène d'hystérèse, il ne va pas recouvrir immédiatement l'autre coté de l'aspérité sur la même surface. Ce recouvrement dissymétrique de l'aspérité va générer une force de réaction qui s'oppose au glissement comme on peut le voir sur la figure 4.1. Pour que l'indentation entre en jeu dans les mécanismes de frottement, le revêtement routier doit nécessairement présenter des aspérités de dimension comprises entre quelques microns et quelques millimètres.

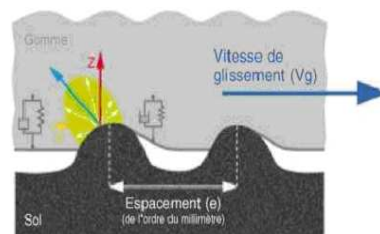


FIG. 4.1: Modélisation de l'indentation par un ensemble ressort-amortisseur qui subit un cycle de compression-détente à déformation imposée. Dans l'amortisseur, la déformation génère de l'hystérèse (donc une perte d'énergie) à chaque cycle. La déformation dissymétrique du pain de gomme autour de l'aspérité génère un champ de forces, dont la composante tangentielle X s'oppose au glissement. (Source Michelin)

L'adhésion

L'adhésion est un phénomène résultant d'interactions moléculaires, les liaisons de Van Der Waals. Ces liaisons se forment, s'étirent puis se coupent (voir figure 4.2). Pour que le phénomène d'adhésion se produise, il est nécessaire que la distance entre le sol et la gomme soit inférieure à $10^{-6}mm$, ce qui exclut les sols mouillés et sales.

Pour ces deux mécanismes, on peut remarquer que si la gomme ne glissait pas sur le sol, les forces de réaction à la déformation et l'adhésion ne seraient pas tangentielles mais seulement verticales. La génération des forces s'opposant au glissement est dépendante d'un début de glissement. On peut dire que l'adhérence met en jeu des phénomènes de microglissement s'opposant au macroglissement du véhicule. C'est pour cette raison que l'on va s'intéresser au taux de glissement dans la section 4.2.4.

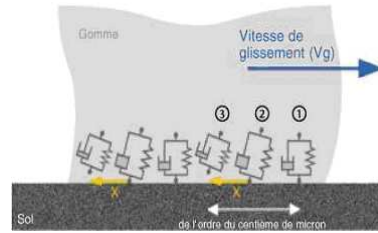


FIG. 4.2: Mécanisme D'adhésion. 1-la liaison se crée. 2-la chaîne moléculaire est étirée : son caractère visqueux (représenté par le piston) résiste à la déformation, générant une force de frottement X qui s'oppose au glissement. 3-La liaison se rompt, pour se reformer plus loin. (Source Michelin)

4.2.3 Le revêtement routier

Pour qu'il y ait adhérence, le pneumatique doit entrer en contact avec le revêtement de chaussée. Le mécanisme d'indentation requiert la présence d'indenteurs (aspérités qui vont s'enfoncer dans la gomme) et le mécanisme d'adhésion nécessite un contact direct avec le pneumatique. Par conséquent, le phénomène d'adhérence passe par la géométrie de la surface de chaussée, notamment la macrorugosité et la microrugosité. La macrorugosité est une caractéristique liée à la dimension des granulats entrant dans la composition de la chaussée. Cette composante concerne des objets de dimension comprise entre 100 microns et 10 millimètres et participe au drainage et à l'indentation. La microrugosité, qui concerne les petites aspérités de la route (entre 1 et 100 microns) est la composante principale du phénomène d'indentation.

En présence d'eau, l'adhérence est diminuée car la composante d'adhésion sera inexistante. Toutefois le mécanisme d'indentation sera toujours actif, notamment grâce aux micro-indenteurs qui vont rompre la pellicule d'eau. Cependant, si la hauteur d'eau est trop importante, les micro-indenteurs peuvent être recouverts mais les macro-indenteurs continuent à assurer leur rôle dans l'indentation. D'une manière générale, puisque l'eau réduit l'adhérence, le revêtement doit la drainer au maximum pour que la zone de contact soit la plus sèche possible.

4.2.4 Taux de glissement et frottement longitudinal

En condition normales d'utilisation, lorsqu'un véhicule avance, ses roues progressent uniquement par roulement. Par contre, lors d'un freinage, la vitesse de roulement des roues diminue et donc, pour pouvoir suivre l'avancée du véhicule, au roulement s'ajoute un glissement sur le sol. On définit alors le taux de glissement G .

$$G = \frac{\text{vitesse de glissement pneu/sol}}{\text{vitesse du véhicule}} \quad (4.1)$$

Le glissement engendre alors une force de frottement X provenant des mécanismes d'adhésion et d'indentation et qui est proportionnelle au poids Z du véhicule. C'est ce coefficient de proportionnalité μ qu'on appelle le coefficient de frottement longitudinal.

$$\mu = \frac{X}{Z} \quad (4.2)$$

Remarque 4.2.1 On remarque que μ peut être rattaché à une grandeur peut-être plus explicite que la force de frottement, l'accélération du véhicule a . En effet, en appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient $\mu = \frac{a}{g}$.

Le coefficient μ va dépendre de la nature du sol, de la gomme, de la présence de polluants ou d'eau, etc... Il a été montré que μ varie très peu en fonction de la charge Z mais varie beaucoup en fonction du glissement G . On a représenté sur la figure 4.3 l'évolution du coefficient de frottement du couple gomme/sol en fonction du taux de glissement à une certaine vitesse V . Cette courbe a deux comportements typiques : Tout d'abord, la montée vers un coefficients de frottement maximal μ_{max} atteint pour un taux de glissement voisin de 0.1. A ce moment il y a une décroissance du frottement qui va jusqu'à une valeur $\mu_{bloqué}$ correspondant au blocage des roues (0.2 secondes). La pente à l'origine semble être une caractéristique intrinsèque à la gomme.

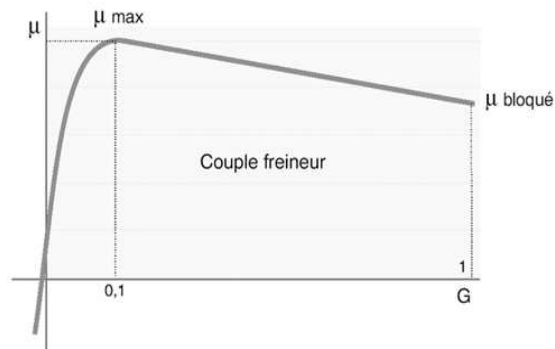


FIG. 4.3: Coefficient de frottement du couple gomme/sol en fonction du taux de glissement G à la vitesse V . (Source Michelin).

On propose de s'intéresser à $\mu_{bloqué}$ dont l'évolution est représenté en fonction de la vitesse V sur la figure 4.4. Ce coefficient peut être modélisé de la manière suivante :

$$\mu_{bloqué} = \mu_0 \exp \left[- \left(\frac{V}{S_0} \right)^\alpha \right] + \gamma V \quad (4.3)$$

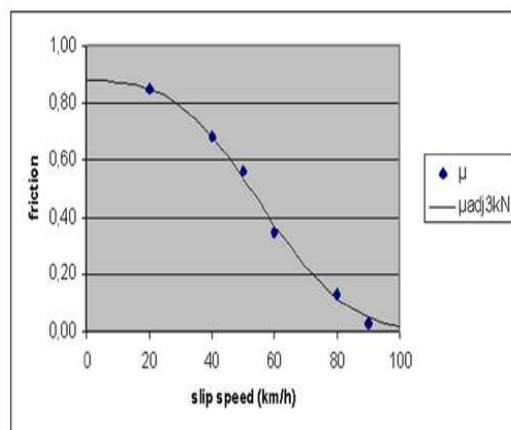


FIG. 4.4: Evolution de $\mu_{bloqué}$ avec la vitesse V . (Source Do)

Le terme μ_0 est représentatif de la microtexture de la chaussée et est très corrélé avec le frottement SRT décrit ci-dessous.

4.2.5 La mesure de frottement d'un couple gomme/sol

Les mesures de frottement sont effectuées à l'aide d'un pendule SRT (Skid Resistance Testeur) (voir [GSC64]). Il s'agit d'un pendule portant à son extrémité un patin de gomme et oscillant à partir d'une hauteur fixe. Le pendule est lâché sans élan et le patin en caoutchouc vient frotter contre la surface de chaussée à analyser que l'on aura préalablement mouillée. La vitesse de glissement est de l'ordre de $3m/s$. La hauteur de remontée du pendule, qui dépend de l'énergie absorbée lors du frottement, donne une mesure de la qualité d'adhérence du couple gomme/chaussée. On peut ajouter que l'estimation du frottement par cette méthode donne des valeurs bien corrélées avec celles de distance d'arrêt nécessaire à un véhicule freinant à 50 km/h.

Le frottement SRT, de part sa forte corrélation avec la valeur μ_0 , va être la valeur de référence pour toute la suite du travail. L'objectif va être de déterminer des paramètres explicatifs de la chaussée qui soient aussi explicatifs du frottement. La pertinence des paramètres proposés sera décrite par la corrélation au frottement SRT. La section suivante présente de tels paramètres explicatifs sur lesquels nous allons nous appuyer pour la suite des travaux.

4.3 La méthode d'indenteurs

On présente maintenant les résultats d'un travail effectué en collaboration par Minh-Tan Do au LCPC de Nantes et Hassan Zahouni au LTDS de Lyon [DZ01] sur la détermination de descripteurs pertinents permettant d'étudier l'influence de la microtexture des revêtements routiers sur le frottement. Ces descripteurs sont ensuite introduits dans un modèle de contact, le modèle de Stéfani afin d'estimer le frottement à partir des informations issues du revêtement routier.

4.3.1 Profils d'étude et capteur utilisé

Les échantillons utilisés sont des plaquettes dont la surface est constituée de gravillons fixés par de la résine. Le principe de fabrication de ses plaquettes est détaillé dans [Del92]. Les gravillons, de taille variable, proviennent de carrières diverses. On dispose ainsi de plusieurs surfaces de test présentant des microtextures très différentes. La microtexture sera ensuite mesurée par un capteur tactile du LTDS fournissant des profils échantillonnés à 4 microns et de longueur variant entre 12 et 25 mm.

4.3.2 Paramètres descripteurs

Les auteurs de [DZ01] ont déterminé les zones du profil susceptibles d'entrer en contact avec le pneumatique. Il s'agit des indenteurs. Un indenteur rompt l'éventuel film d'eau et déforme la gomme du pneumatique pour générer le frottement. Bien évidemment, la magnitude de ces deux propriétés, dépend de la forme des indenteurs ([TY81] et [GT58]), mais aussi de leur densité et du relief créé par leurs positions relatives.

On représente sur la figure 4.5 un indenteur. Un indenteur est défini comme le triangle formé par un sommet et les deux vallées voisines. La forme de l'indenteur est caractérisée par la cotangente du demi-angle (α) au sommet. Le relief est quant à lui représenté par l'angle θ .

Les formules de calcul de θ et α sont les suivantes :

- $\theta = \tan^{-1} \left| \frac{Z_{s+1} - Z_s}{X_{s+1} - X_s} \right|$ avec Z_s, X_s : hauteur et abscisse du S^{ieme} sommet.
- $\alpha = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \left| \frac{X_e - X_{e-1}}{Z_e - Z_{e-1}} \right| + \tan^{-1} \left| \frac{X_{e+1} - X_e}{Z_{e+1} - Z_e} \right| \right]$ avec Z_e, X_e : hauteur et abscisse du e^{ieme} extremum.

Les valeurs moyennes de $\cotan(\alpha)$ et θ sont ensuite corrélées aux valeurs de frottement SRT. Comme on peut le voir sur la figure 4.6, les descripteurs de forme et de reliefs sont très corrélés au frottement

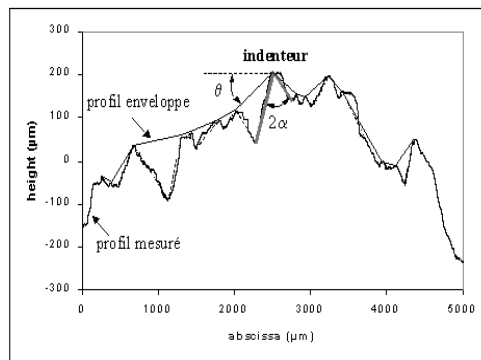


FIG. 4.5: Définition des paramètres de forme et relief. (Source Do)

SRT.

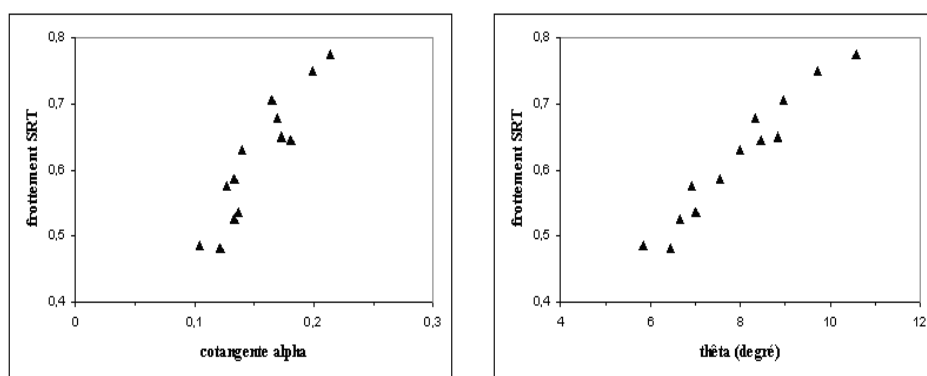


FIG. 4.6: Relation entre la forme des indenteurs et le frottement (à gauche) et relation entre le relief créé par les indenteurs et le frottement (à droite). (Source Do).

4.3.3 Modèle de contact de Stéfani

Le modèle de Stéfani décrit le contact entre un solide de Kelvin (on a vu section 4.2.1 que le solide de Kelvin modélisait bien un pneumatique) et un motif de profil de chaussée. De part sa simplicité, ce modèle va permettre aisément de prendre en paramètre d'entrée les paramètres descripteurs de la microtexture définis ci-dessus.

Un motif est constitué de deux sommets séparés par une vallée. Les paramètres déterminant le motif sont α_1 , α_2 , les largeurs l_1, l_2 et $\theta_{1,2}$ (voir figure 4.7 à gauche).

On suppose que le solide se déplace à la vitesse V . Le modèle suppose que le frottement provient uniquement de la déformation du solide. C'est une hypothèse réaliste en cas de présence d'eau sur la chaussée, en effet comme nous l'avons vu dans la section 4.2.2, en présence d'eau sur la chaussée, les liaisons moléculaires sont inexistantes ainsi que la composante d'adhésion.

En étudiant la cinématique du contact, on peut calculer les efforts et le coefficient de frottement. L'effort vertical et l'effort horizontal sont donnés respectivement par les expressions suivantes (Stéfani et [DZ01]) :

$$f_v = \frac{1}{T} \left(\int_0^{t_1} \frac{E}{\tan(\alpha_1)} [h_0 \tan(\alpha_1) + l_1 - V(t + \tau)] dt \right) + \frac{1}{T} \left(\int_0^{t_2} \frac{E}{\tan(\alpha_2)} [h_0 \tan(\alpha_2) + l_2 - V(t - \tau)] dt \right)$$

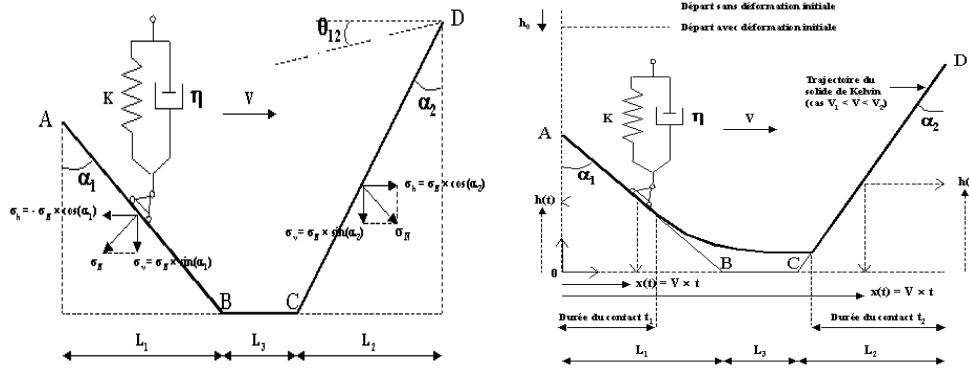


FIG. 4.7: Gauche : Géométrie de base du modèle de Stéfani. Droite : Cinématique du contact solide de Kelvin - " motif ". (Source Do)

$$f_h = \frac{1}{T} \left(\int_0^{t_1} -\frac{E}{[\tan(\alpha_1)]^2} [h_0 \tan(\alpha_1) + l1 - V(t + \tau)] dt \right) + \frac{1}{T} \left(\int_0^{t_2} \frac{E}{[\tan(\alpha_2)]^2} [h_0 \tan(\alpha_2) + l2 - V(t - \tau)] dt \right)$$

$$\mu = \frac{f_h}{f_v} \quad (4.4)$$

avec T : durée globale du passage du solide de Kelvin sur le motif, soit $T = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{V}$ (voir figure 4.7). Avec h_0 , la hauteur de départ du solide et E le module de la gomme (le module caractérise la rigidité du matériau, le module est faible pour un matériau mou et élevé pour un matériau dur) et enfin τ le temps de relaxation de la gomme.

4.3.4 Combinaison des descripteurs de microtexture et du modèle de contact

Pour chaque échantillon de route, un motif moyen est défini caractérisant la texture de cette surface. Puis les paramètres de ce motif sont introduits dans le modèle de Stéfani. Ce qui nous permet de calculer l'effort vertical et l'effort horizontal. Après quelques hypothèses simplificatrices ($h_0 = 0$, $l1 = l2$ et $l3 = 0$), on obtient :

$$f_v = \frac{VE}{2L} \left[\frac{Lt_1}{\tan(\alpha_1)} + \frac{Lt_2}{\tan(\alpha_2)} - \frac{V}{2} \left(\frac{t_1^2}{\tan(\alpha_1)} + \frac{t_2^2}{\tan(\alpha_2)} \right) - V\tau \left(\frac{t_1}{\tan(\alpha_1)} - \frac{t_2}{\tan(\alpha_2)} \right) \right]$$

et

$$f_h = \frac{VE}{2L} \left[\frac{Lt_2}{(\tan(\alpha_2))^2} - \frac{Lt_1}{(\tan(\alpha_1))^2} - \frac{V}{2} \left(\frac{t_2^2}{(\tan(\alpha_2))^2} - \frac{t_1^2}{(\tan(\alpha_1))^2} \right) + V\tau \left(\frac{t_1}{(\tan(\alpha_1))^2} + \frac{t_2}{(\tan(\alpha_2))^2} \right) \right]$$

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.8. Il existe une forte corrélation entre le frottement SRT et le frottement estimé par le calcul (points noirs). Le calcul en ne prenant en compte que l'échelle de rugosité (celle du profil mesuré) sous-estime la valeur de frottement. En considérant aussi l'échelle d'ondulation (échelle du profil enveloppe de tous les sommets d'indenteurs), on améliore grandement le résultat. Le frottement calculé à partir du motif moyen de l'échelle d'ondulation est ajouté à celui obtenu sur le motif moyen de l'échelle de rugosité (points gris). On retrouve donc dans [DZ01] les mêmes conclusions que celles proposées dans [YS94]. En effet, Yandell, dans sa théorie sur le frottement

d'hystérésis, suppose que le frottement est la somme de frottements élémentaires générés par le contact entre la gomme et diverses échelles de texture.

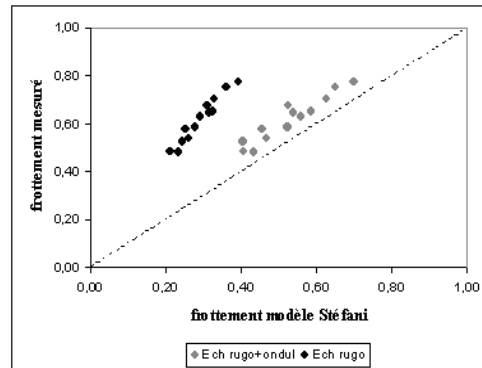


FIG. 4.8: Validation du modèle de Stéfani. Source Do.

4.3.5 Conclusion

On a rappelé dans cette section le modèle du frottement généré par le glissement d'un pain de gomme sur une chaussée mouillée tel qu'il est proposé par Minh-Tan Do et Hassan Zahouani. Le résultat primordial est la confirmation d'une contribution multi-échelle de la texture au frottement. Cette constatation nous amène naturellement à utiliser des techniques fractales pour analyser les profils routiers et les mécanismes du frottement.

Cette méthode a totalement été ré-implémentée sous Matlab. Une extraction automatique de l'échelle d'ondulation fait partie des fonctions disponibles. Les dernières acquisitions de profils ont ainsi pu être exploitées pour nous donner ce que nous allons appeler les valeurs de références de corrélation.

Chapitre 5

Caractérisation fractale des profils

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication en congrès international avec comité de lecture et actes :

- [LVD04] P. Legrand, J. Lévy Véhel and M.-T. Do, "Fractal Properties and Characterization of Road Profiles", FRACTAL04, Complexity and Fractals in Nature 8th International Multidisciplinary Conference 4 - 7 April 2004, Vancouver.

Les expérimentations avaient alors été menées sur une autre gamme de données.

5.1 Fractalité : Etat de l'art

De nombreux auteurs ont montré que la plupart des profils routiers étaient fractals sur un certain nombre d'échelles ([Rad94], [Hei97], [GV98a]). Une telle propriété a des conséquences sur la friction. Quelques unes de ces conséquence sont étudiées dans [Rad94] et [KH00]. L'idée principale est de dire qu'en présence de revêtements fractals, toutes les échelles d'irrégularité contribuent à la friction.

Dans ce chapitre, nous vérifions que les profils routiers dont on dispose sont fractals. Plus précisément, on montre que leur énergie suit une certaine loi d'évolution dans les échelles et qu'ils présentent des exposants de corrélation et des dimensions de régularisation bien définis sur une grande gamme d'échelles.

Plusieurs campagnes d'acquisition de profils ont été effectuées pendant la durée de cette thèse. Nous avons pu ainsi disposer d'un large éventail d'objets d'analyse. Ces campagnes diffèrent par la provenance des échantillons et par le capteur utilisé (tactile ou laser).

La majeure partie des résultats présentés ici porte sur la dernière campagne de mesure de micro-rugosité. Nous avons utilisé un capteur laser (imagine optic) sur des échantillons de chaussée circulée. Deux passages du capteur sont effectués, un premier avec un échantillonnage à 10 microns et un second avec un échantillonnage à 2.5 microns. Cette double mesure nous sera très utile par la suite, notamment dans le chapitre portant sur l'interpolation de profils routiers (7.1).

5.2 Comportement fractal

Dans cette section, on donne un bref descriptif d'une méthode de quantification de l'énergie d'un signal et de deux outils d'analyse fractale, l'exposant d'échelle et la dimension de régularisation. Ces trois objets sont ensuite utilisés pour montrer la fractalité des profils routiers.

5.2.1 Energie et CWT

Cette partie est consacrée à l'étude de la répartition de l'énergie selon les fréquences (ou les échelles). L'objectif est de vérifier si les signaux présentent une structure quant à l'évolution de l'énergie dans les échelles.

L'énergie du signal à une échelle donnée peut être obtenue à partir de la transformée en ondelettes continue du signal (CWT), plus précisément, on obtient l'énergie de l'échelle a en sommant les carré des coefficients d'ondelette de la transformation continue à cette échelle :

$$E_a^2 = \int [CWT(a, b)]^2 db \quad \text{où } E_a^2 \text{ est l'énergie à l'échelle } a \quad (5.1)$$

Rappels sur la transformation en ondelettes continue

Définition 5.2.1 *La transformée en ondelettes continue d'un signal f est donnée par :*

$$CWT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (5.2)$$

Dans cette expression, ψ est une fonction de moyenne nulle, l'ondelette mère, a est le facteur d'échelle et b est le paramètre de translation (décalage temporel). La variable a joue le rôle de l'inverse de la fréquence ; plus a est petit, moins l'ondelette (la fonction analysante) est étendue temporellement.

Par conséquent, on peut voir cette expression comme la projection du signal sur une famille de fonctions analysantes

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right)$$

construites par dilatation et translation à partir de l'ondelette mère ψ .

Remarque 5.2.1 La norme est conservée lors du changement d'échelles : En effet,

$$\| \psi_{a,b} \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \times \left| \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \right|^2 dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 a dx = \| \psi \|^2 \quad (5.3)$$

Calcul de l'énergie

On applique aux signaux une transformée en ondelettes continue à l'aide du logiciel FracLab. On représente sur la figure 5.1 les CWT d'un même profil acquis à deux échantillonnages différents. On retrouve sur l'axe des abscisses la localisation temporelle et sur l'axe des ordonnées les fréquences (128 niveaux différents).

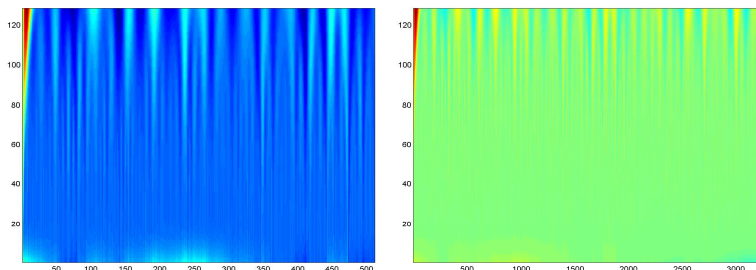


FIG. 5.1: CWT d'un profil de l'échantillon 03-0035 acquis à la résolution 10 microns (à gauche) et à la résolution 2.5 microns (à droite).

Une relation du type $E_a^2 \sim a^\gamma$ pour un γ et pour a dans une gamme de fréquence donnée indique une décroissance de l'énergie en loi de puissance dans les échelles et par la même occasion un comportement fractal fort.

Le figure 5.2 montre qu'une telle relation est approximativement vérifiée pour la plupart des profils pour une grande gamme d'échelles. On a représenté ici deux échantillons différents et les résultats pour l'échantillonnage à 10 microns et celui à 2.5 microns. Les résultats sur les autres échantillons sont similaires. On a isolé sur la figure 5.3 l'énergie du 5ème profil de l'échantillon 03-0035 acquis à la résolution 10 microns qui présente un bel alignement.

5.2.2 Loi d'échelle globale

La fractalité peut aussi être montrée en essayant de détecter une loi d'échelle globale. On s'intéresse pour un signal $X(t)$ à la quantité

$$C(t,l) = E[X(t)X(t+l)] \quad (5.4)$$

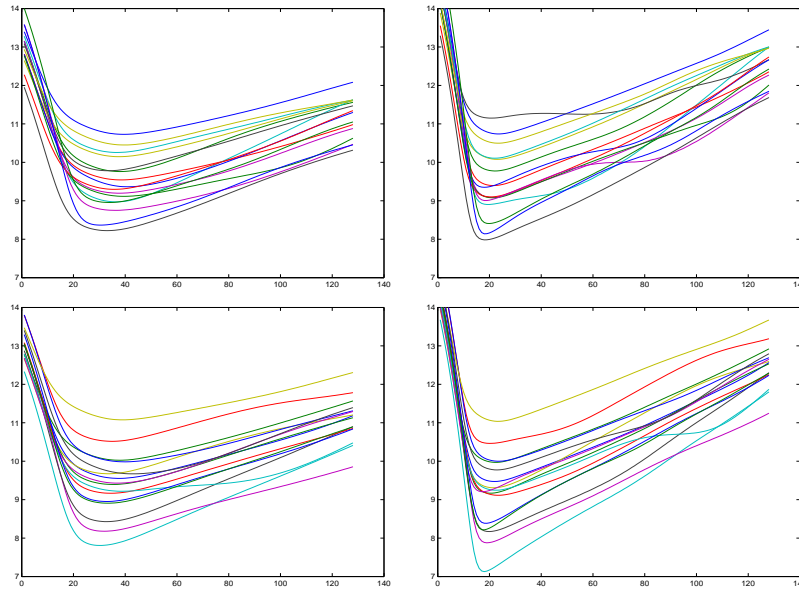


FIG. 5.2: Représentation de l'énergie du signal en fonction des échelles considérées. En haut à gauche : profils de l'échantillon 03-0024, acquis à la résolution 10 microns. En haut à droite : profils de l'échantillon 03-0024, acquis à la résolution 2.5 microns. En bas à gauche : profils de l'échantillon 03-0035, acquis à la résolution 10 microns. En bas à droite : profils de l'échantillon 03-0035, acquis à la résolution 2.5 microns.

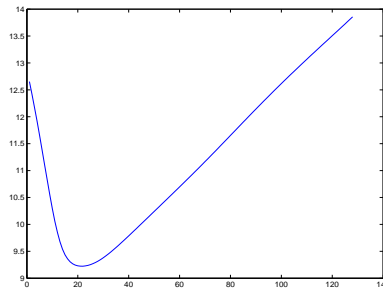


FIG. 5.3: Evolution de l'énergie d'un profil de l'échantillon 03-0035 acquis à la résolution 10 microns.

Si X est stationnaire, $C(t, l)$ ne dépend que de l et si de plus, on suppose que X est ergodique, alors on peut approximer $C(l)$ par

$$\hat{C}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{t=1}^{N-l} X(t)X(t+l)$$

Dans beaucoup de situations classiques $\hat{C}(l)$ décroît de manière exponentielle vers zero.

Définition 5.2.2

On dit dit qu'un signal suit une loi d'échelle globale si

$$\hat{C}(l) \sim l^{-\beta} \text{ pour } l \text{ dans une certaine plage de valeurs} \quad (5.5)$$

et β positif.

L'exposant β est appelé exposant d'échelle.

Les résultats précédents sur l'énergie sont confirmés par ceux obtenus lors des calculs des exposants de corrélation. La figure 5.4 montre que pour les profils d'étude, le logarithme de la corrélation $C(l)$ de retard l se comporte de manière linéaire en fonction de $\log(l)$ sur presque toutes les valeurs possibles de l . Encore une fois, le même type de résultat est obtenu sur l'ensemble des échantillons sauf sur quelques profils. Nous avons encore exhibé un comportement fractal pour l'ensemble des profils.

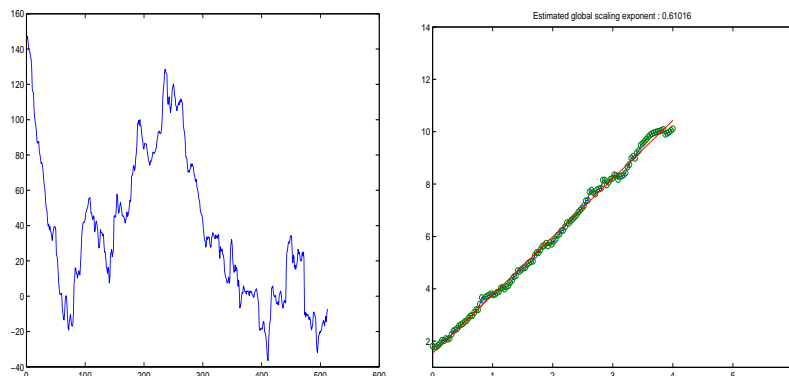


FIG. 5.4: A gauche : 5^{eme} profil de l'échantillon 0035 échantillonné à 10 microns. A droite : log-correlation en fonction du logarithme du retard pour ce profil.

Par contre, les valeurs des exposants d'échelle mesurés sur les divers profils varient beaucoup (voir figure 5.5) dans un même échantillon. Pour quelques profils les valeurs sont négatives, ce qui montre que le logarithme de $C(l)$ ne se comporte pas de manière linéaire en fonction de $\log(l)$ pour ces profils.

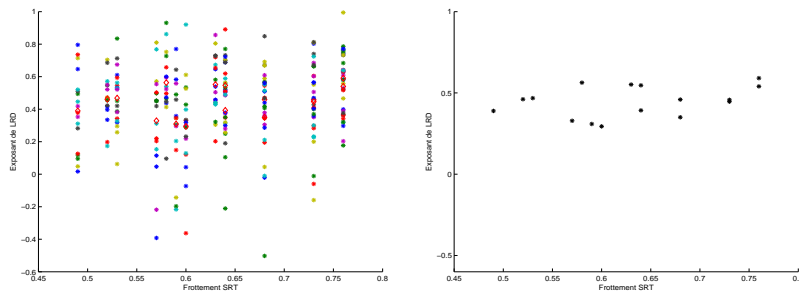


FIG. 5.5: Exposants d'échelle des profils échantillonnés à 10 microns en fonction du frottement SRT. A droite, moyenne sur les échantillons (corrélation avec SRT = 0.3589).

5.2.3 Dimension de régularisation

Enfin le dernier outil que nous allons utiliser pour faire ressortir la fractalité des profils routiers est la dimension de régularisation [RV98]. Nous utilisons cette dimension car elle conduit à des estimations plus précises que la dimension de boîte (voir [Tri95] et [Fal90] pour d'autres dimensions fractales).

Cette dimension est définie de la manière suivante : on construit des versions de plus en plus lisses du signal étudié par une simple convolution par un noyau (voir figure 5.6). Si le signal original est "fractal", son graphe a une longueur infinie alors que ses versions lissées auront une longueur finie. Lorsque le paramètre de lissage tend vers zéro, la version lissée tend vers le signal original (au sens des distributions) et sa longueur tend donc vers l'infini. La dimension de régularisation mesure la vitesse à laquelle la convergence vers l'infini se produit.

Plus précisément, soit Γ le graphe d'une fonction bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de support K compact. Soit $\chi(t)$ une fonction dans la classe de Schwartz et $\chi_a(t) = \frac{1}{a}\chi(\frac{t}{a})$ la version dilatée de χ à l'échelle a . Soit

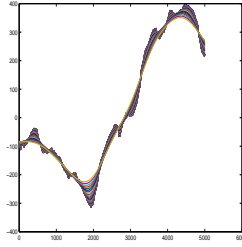


FIG. 5.6: Lissages successifs d'une fonction de Weierstrass afin de calculer sa dimension de régularisation

$f_a = f * \chi_a$. La longueur de son graphe Γ_a sur K est donnée par

$$L_a = \int_K \sqrt{1 + (f'_a(t))^2} dt$$

Définition 5.2.3 La dimension de régularisation du graphe de f est

$$DimR(\Gamma) = 1 + \limsup_{a \rightarrow 0} \frac{\log(L_a)}{-\log(a)} \quad (5.6)$$

Proposition 5.2.1

Si f est continue, alors on a

$$1 \leq DimR(\Gamma) \leq 2 \quad (5.7)$$

La figure 5.7 illustre le comportement typique de la dimension de régularisation sur les échantillons dont on dispose. Comme on peut le voir, le graphe de $\log(L_a)$ en fonction de $\log(a)$ est linéaire, aussi bien pour une faible régularisation (c'est à dire les hautes fréquences) que pour un grand lissage (les basses fréquences).

On note que la dimension de régularisation varie entre 1.1 et 1.7 sur nos profils. Ce résultat indique que ces profils sont situés entre presque lisse et moyennement irrégulier.

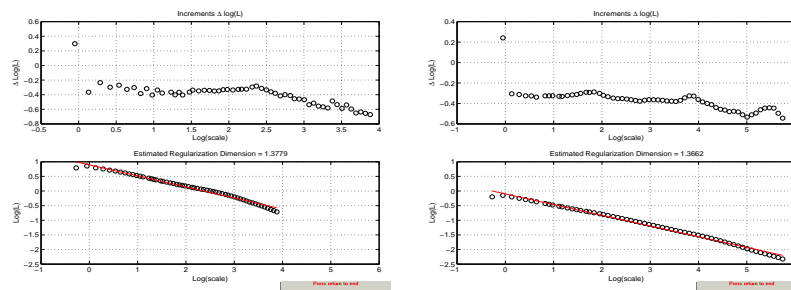


FIG. 5.7: Evolution du logarithme des longueurs des versions lissées pour un profil de l'échantillon 03-0035 acquis à 10 microns (à gauche) à 2.5 microns (à droite) en fonction du paramètre de lissage.

5.3 Conclusion

Les résultats exposés dans ce chapitre nous ont permis de faire ressortir les caractères fractals des profils routiers dont on dispose. Les outils utilisés nous donnent des caractérisations globales des profils.

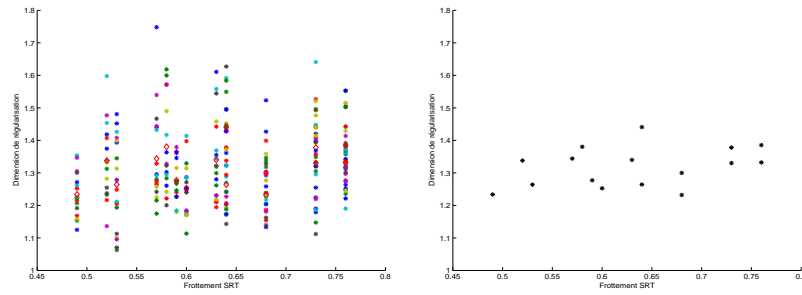


FIG. 5.8: Dimension de régularisation des profils acquis à 10 microns en fonction du frottement SRT. Moyenne par échantillon à droite (corrélation avec le frottement SRT = 0.3495).

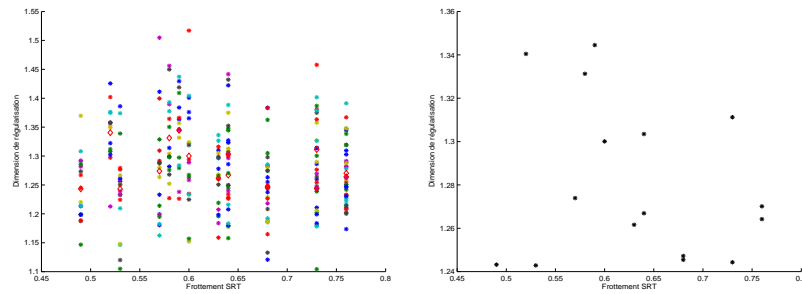


FIG. 5.9: Dimension de régularisation des profils acquis à 2.5 microns en fonction du frottement SRT. Moyenne par échantillon à droite (corrélation avec le frottement SRT = -0.2218).

La prochaine étape consiste à réussir à séparer les profils selon leur frottement SRT. Nous verrons que les caractérisations globales ne permettent pas de séparer directement les échantillons.

Chapitre 6

Séparation des profils

6.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les profils routiers présentent un caractère fractal prononcé. Cet argument justifie l'utilisation d'outils d'analyse fractale pour l'étude de ces profils. On espère ainsi exhiber des paramètres fractals discriminants permettant de classer les profils selon le frottement, ce qui fera l'objet de ce chapitre. Les illustrations de ce chapitre portent principalement sur une ancienne campagne d'acquisition de la micro-texture même si des résultats comparables sur la dernière campagne (imagine optic) sont aussi présentés. Les échantillons utilisés lors de cette précédente mesure de micro-texture sont des plaques de laboratoire construites selon le cheminement détaillé dans [Del92]. Il s'agit de plaquettes rectangulaires de $100 \times 150 \text{ mm}^2$ dont la surface est constituée de gravillons fixés dans une matrice de résine. Ces gravillons proviennent de carrières différentes et leur taille varie entre 6 et 10 mm.

On dispose de mesures tactiles et de mesures laser de la micro-texture sur ces plaquettes.

6.1.1 Mesures tactiles

Les mesures de microtexture sont faites à l'aide d'un capteur tactile du LTDS. Le rayon de la pointe de contact est de $2 \mu\text{m}$. La profondeur de champ du capteur est de 6 mm . Pour éviter un blocage éventuel de la pointe de contact lors de son déplacement sur les surfaces à tester, l'espace entre les gravillons est rempli avec une résine. Sur chaque plaquette, 15 profils sont mesurés dans une zone correspondant à l'aire de frottement du pendule SRT soit environ $75 \times 125 \text{ mm}$. La longueur des profils varie entre 12 et 25 mm en fonction de la nature des surfaces à mesurer, cumulant une longueur totale d'environ 300 mm. Le pas d'échantillonnage est de $4 \mu\text{m}$ (voir figure 6.1).

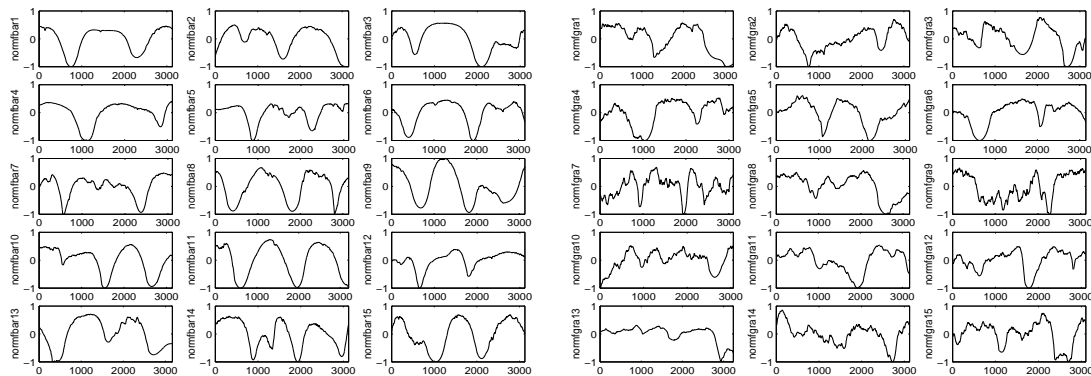


FIG. 6.1: Profils tactiles normalisés de l'échantillon BAR et Profils tactiles normalisés de l'échantillon GRA.

6.1.2 Mesures laser

On dispose aussi de mesures effectuées grâce à un laser avec un échantillonnage de $1 \mu\text{m}$; 24 échantillons sur lesquels on effectue 15 mesures de profil soit 360 signaux de 5001 points (voir figure 6.2).

6.2 Echec des caractérisations globales

Bien que les profils manifestent un comportement fractal, nous avons remarqué que ni l'exposant d'échelle ni la dimension de régularisation n'étaient capables de caractériser une classe donnée de profils.

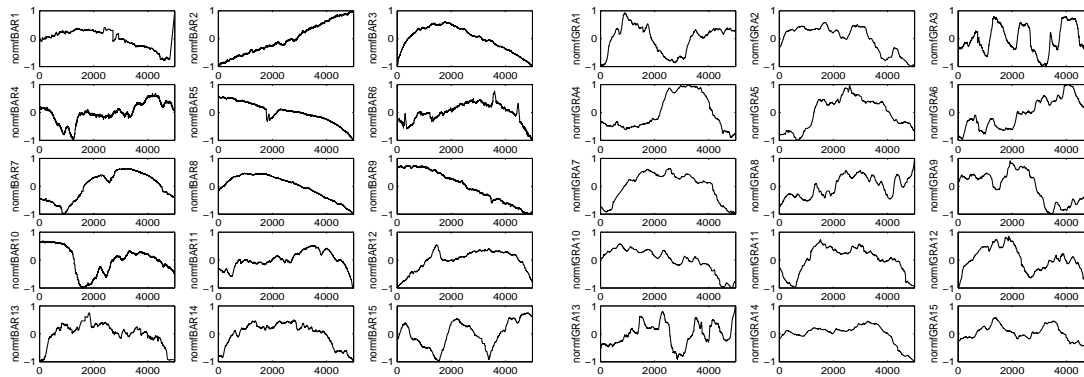


FIG. 6.2: Profils laser normalisés de l'échantillon BAR et de l'échantillon GRA

Par conséquent, ces paramètres ne sont pas indiqués pour expliquer les différences de friction des divers profils avec un pneumatique. Ceci est montré de manière qualitative sur la figure 6.3 à gauche. Les exposants de d'échelle sont représentés pour tous les profils tactiles de l'échantillon BOU. Bien que les profils présentent un excellent comportement linéaire, les pentes varient beaucoup. Ainsi, il n'y a pas un exposant pouvant caractériser un échantillon tout entier. De plus, une analyse quantitative montre que les valeurs des divers échantillons se chevauchent (voir figure 6.3 à droite). Il est donc impossible de séparer les échantillons à partir des informations fournies par l'exposant d'échelle. Il en est de même pour la dimension de régularisation (en bas de la figure 6.3).

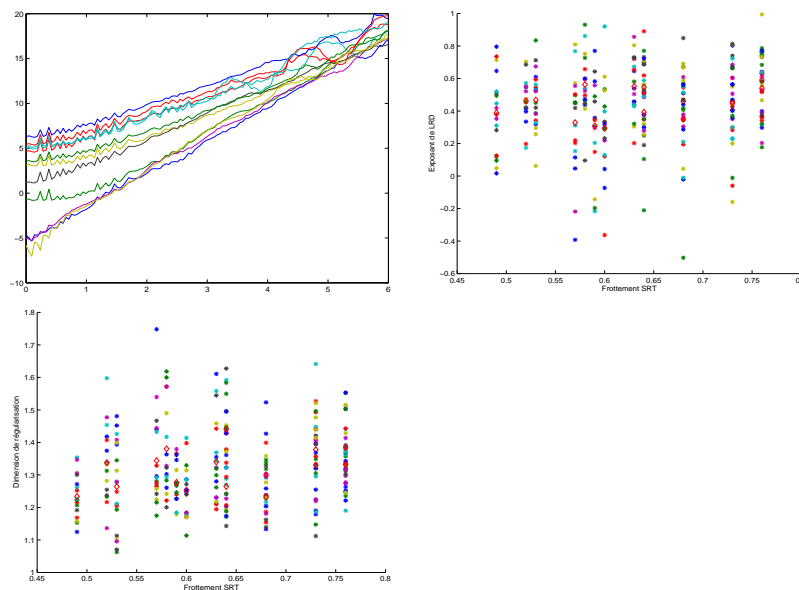


FIG. 6.3: Haut gauche : pentes donnant l'exposant d'échelle des 15 profils BOU tactiles. Haut droite : exposants d'échelle des profils échantillonnés à 10 microns en fonction du frottement SRT. Bas : dimension de régularisation des profils image optique acquis à 10 microns en fonction du frottement SRT.

Ceci nous amène à la conclusion suivante : Si la fractalité des profils est liée au frottement, alors les informations pertinentes sont probablement situées dans des caractérisations locales plus que dans les globales. Cette proposition est justifiée par le fait que le frottement est principalement un phénomène local. Par conséquent, des mesures globales de l'irrégularité telles que la dimension de régularisation ou l'exposant d'échelle ne seront que très peu corrélées au coefficient de friction. Par contre, des mesures

locales de la régularité telles que l'exposant de Hölder devraient l'être fortement.

6.3 Fonction de Hölder

Sur la figure 6.4 sont représentées les fonctions de Hölder d'un profil de l'échantillon *BOU* tactile et d'un profil de l'échantillon *LRA* tactile. Les estimations des fonctions de Hölder sont effectuées en utilisant l'estimateur *RCO* du chapitre 1.

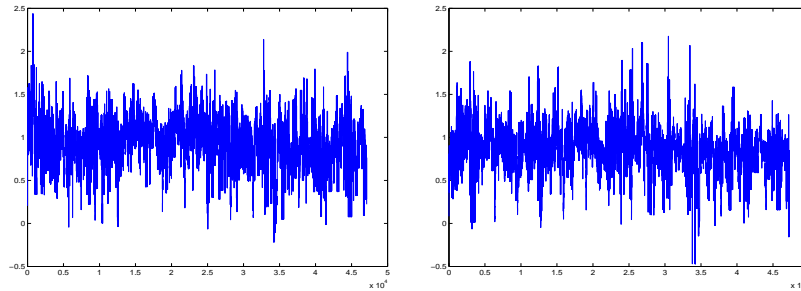


FIG. 6.4: Fonctions de Hölder d'un profil de l'échantillon *BOU* tactile et d'un profil de l'échantillon *LRA* tactile.

La fonction de Hölder fournit de trop riches informations pour notre étude. Nous allons commencer par examiner la pertinence de l'utilisation de sa médiane pour caractériser les profils. Bien que la médiane de la fonction de Hölder nous donne une information sur le signal tout entier, il s'agit toujours d'un paramètre local. L'utilisation de la médiane (ou de la moyenne) de la fonction de Hölder est compatible avec le fait que le frottement résulte de la somme de nombreuses interactions locales.

6.4 Combinaison de la dimension de régularisation et de la médiane de la fonction de Hölder

Puisque la classification des échantillons avec un seul paramètre fractal ne donne pas de bons résultats, on essaie maintenant de combiner deux paramètres. Nous commençons par calculer les fonctions de Hölder pour tous les profils de chacun des échantillons. On extrait ensuite leur médiane. La figure 6.6 représente une tentative de classification de deux échantillons basée sur la médiane de la fonction de Hölder combinée à la dimension de régularisation. Il est difficile de séparer les échantillons si leur nombre est supérieur à 2.

Remarque 6.4.1 *Pour des signaux très simples d'un point de vue fractal (monofractals) comme par exemple une fonction de Weierstrass, on a approximativement $H = 2 - D$, avec H l'exposant de Hölder et D la dimension de régularisation. On retrouve ce comportement pour les profils de chaussée étudiés (voir figure 6.5).*

Bien que cette procédure donne de bon résultats pour les profils laser en mode pas à pas asservi et les profils imagine optic, elle n'est pas satisfaisante pour certains autres modes d'acquisition de profils.

C'est pour cette raison que nous présentons maintenant une technique qui fait une utilisation plus complète des informations fournies par la fonction de Hölder.

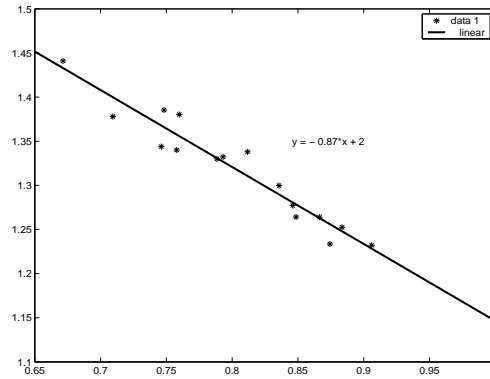


FIG. 6.5: Moyenne par échantillons des dimensions de régularisation en fonction des moyennes des médianes des fonctions de Hölder pour les profils de type laser image optic.

6.5 Histogrammes des fonctions de Hölder

Nous étudions maintenant les histogrammes des fonctions de Hölder. Plus précisément, pour chaque échantillon E , on calcule dix histogrammes $H_E(\alpha)$ des fonctions de Hölder évaluées pour dix profils "test" choisis aléatoirement parmi les quinze profils de l'échantillon E . On effectue ce travail sur deux échantillons laser mode pas à pas BOU et CLE , et pour trois échantillons laser sans asservissement BOU , CLE et QB . Voir figure 6.7.

La seconde étape est de modéliser ces histogrammes comme des distributions Gaussiennes. En d'autres termes, pour chaque échantillon donné et pour chaque valeur de α , on calcule la moyenne $M_P(H_E(\alpha))$ et la variance $V_P(H_E(\alpha))$ de $H_E(\alpha)$ évaluées sur les dix profils test de cet échantillon. Soit

$$G_E(H_E(\alpha)) = \mathcal{N}(M_E(H_E(\alpha)), V_E(H_E(\alpha))) \quad (6.1)$$

la distribution gaussienne obtenue pour l'histogramme de l'échantillon E à la valeur de l'exposant α . Pour vérifier si un nouveau, inconnu, profil appartient à l'échantillon E , on calcule d'abord l'histogramme $h(\alpha)$ de sa fonction de Hölder. Si l'échantillon appartient à E , $G_E(h(\alpha))$ sera "grand". La quantité suivante mesure si le profil est "près" de l'échantillon E :

$$T_E(h) = \int_{\mathbb{R}} G_E(h(\alpha)) d\alpha \quad (6.2)$$

Un profil inconnu est alors attribué à l'échantillon E qui maximise $T_E(h)$.

Cette méthode classe avec succès 100% des profils restants. Si la médiane de la fonction de Hölder ne suffit pas à caractériser les échantillons, la distribution complète nous fournit l'information suffisante pour les séparer.

6.6 Conclusion

Nous avons confirmé que les profils routiers présentent bien des comportements fractals ce qui justifie l'utilisation de techniques d'analyse fractale pour les étudier. Toutefois, des mesures fractales globales telles que l'exposant d'échelle et la dimension de régularisation ne permettent pas de caractériser les profils en terme de frottement. Par contre les informations fournies par la fonction de Hölder permettent de classer les profils par une procédure statistique simple.

Nous avons confirmé l'intuition selon laquelle la régularité d'un profil était liée à sa capacité à générer du frottement lors du contact avec un pneumatique. L'analyse Hölderienne peut donc nous aider à

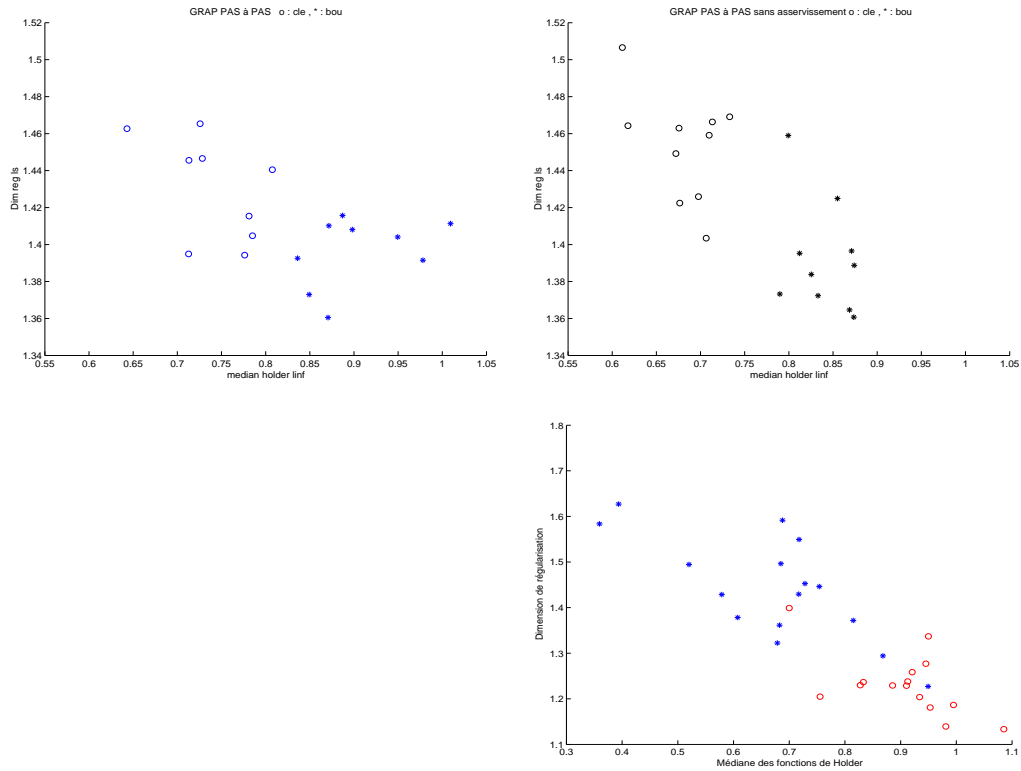


FIG. 6.6: Classification des échantillons par combinaison de la médiane de la fonction de Hölder (abscisses) avec la dimension de régularisation (ordonnées). En haut à gauche les échantillons laser pas à pas asservis CLE (cercles) et BOU (étoiles). En haut à droite CLE (cercles) et BOU (étoiles) en mode laser pas à pas sans asservissement. En bas à droite, séparation des échantillons 03-0024 et 03-0032 de type laser imagine optic.

comprendre les mécanismes de l'adhérence. Par conséquent, il est naturel d'appliquer les techniques développées dans la première partie (interpolation et débruitage) pour améliorer la compréhension des mécanismes de frottements.

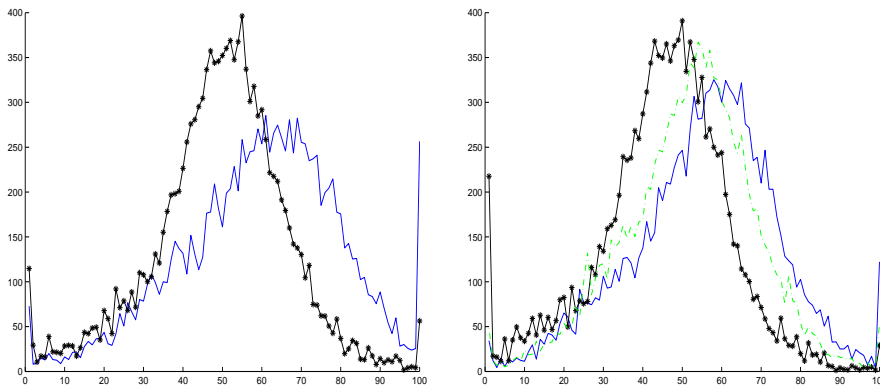


FIG. 6.7: Gauche : moyenne des histogrammes des fonctions de Hölder pour les profils de type BOU (trait plein) et CLE (étoiles) mode laser pas à pas asservi. Droite : profils BOU (trait plein), CLE (étoiles) et QB (pointillés) mode pas à pas sans asservissement.

Chapitre 7

Utilisation de la régularité Hölderienne pour améliorer les corrélations avec le frottement

7.1 Interpolation de profils routiers

Nous disposons de plusieurs campagnes d'acquisition de profils sur lesquelles nous avons pu appliquer la méthode d'indenteur en vue d'estimer le frottement. Cependant, la technique d'indenteur ne fournit pas de bon résultats sur tous les profils, selon la technique d'acquisition. Nous avons supposé que le problème venait de l'échantillonnage. Le capteur ne nous fournit pas assez d'informations pour appliquer la méthode d'indenteur. Nous avons donc proposé une méthode d'extrapolation pour générer les points manquants à partir de l'information fournie par les profils échantillonnés à 10 microns. Cette méthode est détaillée dans le chapitre 2.

Vu les résultats encourageants et les nouvelles perspectives offertes par cette méthode, une nouvelle campagne d'acquisition de profils a été menée sur les mêmes plaques que précédemment. L'originalité de cette campagne consiste en deux passages successifs du capteur sur chacune des zones sélectionnées (de longueur variable). Un passage avec un échantillonnage à 10 microns et un passage avec un échantillonnage à 2.5 microns, la plage du capteur est de 350μ . Cette technique nous permet de comparer de manière précise tout résultat obtenu sur les profils à 10 microns extrapolés deux fois avec le résultat correspondant sur les profils à 2.5 microns.

7.1.1 Méthode :

Nous avons montré que la régularité locale joue un grand rôle dans la séparation des profils entre échantillons distincts. Par conséquent, nous nous proposons d'augmenter le nombre de points du profil tout en conservant la régularité locale selon la méthode décrite dans le chapitre sur l'interpolation Hölderienne 2.

Pour illustrer la technique utilisée, nous prenons comme exemple un profil échantillonné à 10 microns et provenant de l'échantillon **03-0035-10**. Sur cet échantillon, on a mesuré grâce au capteur laser 16 profils. Le profil présenté ici est le 5ème réalisé. On extrapole 2 fois ce profil pour générer un pseudo-profil échantillonné à 2.5 microns. Puisque nous disposons d'un profil réel échantillonné à 2.5 microns, on se propose de comparer visuellement (voir figure 7.1) et en terme de régularité Hölderienne le profil réel et le synthétique provenant de l'interpolation de celui à 10 microns.

Visuellement, le signal interpolé est très proche du signal original échantillonné à 2.5 microns ce qui signifie que l'information ajoutée est sensée, toutefois le signal original semble présenter des zones plus irrégulières. Cette propriété est confirmée par l'analyse de la régularité Hölderienne, on constate que le signal original est plus irrégulier (voir figure 7.2 sur laquelle la fonction de Hölder du signal original est légèrement plus faible que celle du signal interpolé). Nous reviendrons sur ce phénomène dans la section 7.2 consacrée au débruitage des profils.

On représente sur la figure 7.3 la construction telle qu'elle s'effectue au niveau local pour un point du profil routier. Cette figure représente les logarithmes des coefficients d'ondelette au dessus d'un point du signal (ici il s'agit du 256ème point) en fonction de l'échelle, ainsi que la droite de régression correspondante (voir chapitre 1). Dans un souhait de clarté de l'exposé, on n'a représenté qu'une seule interpolation sur la figure 7.3, c'est à dire seulement la synthèse de la 10ème échelle correspondant à des micro-rugosités de l'ordre de 5 microns. Le niveau suivant est construit selon le même schéma.

7.1.2 Application au calcul de frottement

Avant d'appliquer la technique à l'ensemble des échantillons dont nous disposons, on présente le cheminement suivi sur le profil qui nous sert d'exemple. On illustre sur la figure 7.4, le mécanisme d'acquisition des indenteurs et par la même occasion des paramètres d'entrée du modèle de Stéfani afin de calculer un frottement estimé sur ce profil. L'échelle d'ondulation est définie par la courbe reliant les sommets des indenteurs.

On rentre ensuite les paramètres angulaires obtenus dans le modèle de Stéfani. On peut ainsi comparer

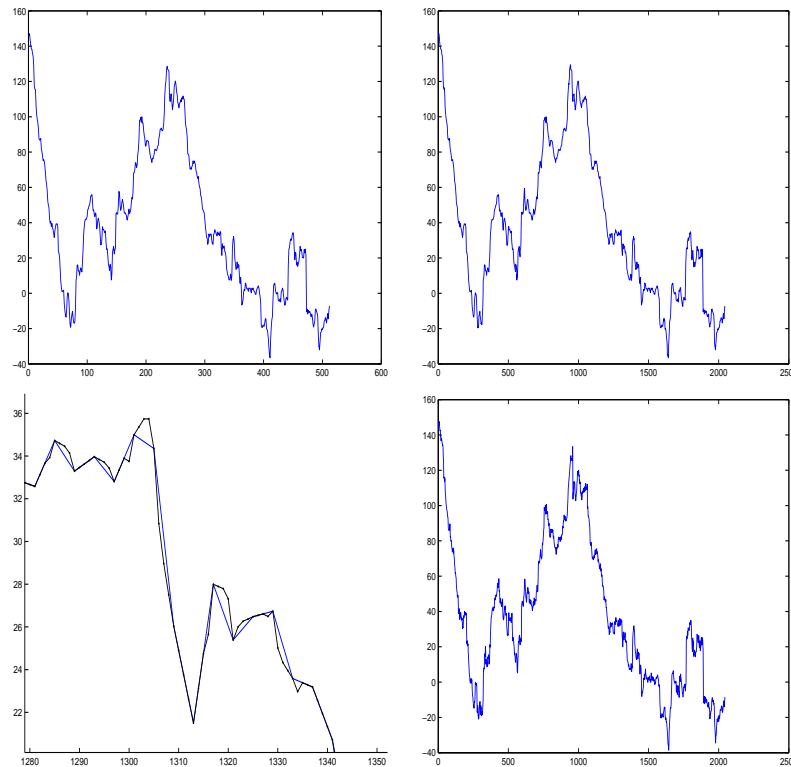


FIG. 7.1: *Extrapolation Hölderienne d'un profil routier échantillonné à 10 microns vers un profil à 2.5 micron. Haut gauche : profil original à 10 microns. Haut droite : profil interpolé. Bas gauche : superposition du profil original et de sa version interpolée, zoom. Bas droite : profil original à 2.5 microns.*

les estimations de frottement obtenues sur l'échelle de rugosité (on néglige l'échelle d'ondulation pour le moment).

- Profil à 10 microns : $\mu = 0.3417$
- Profil à 2.5 microns : $\mu = 0.62955$
- Profil interpolé : $\mu = 0.4258$

Pour cet échantillon (**03-0035**), le frottement SRT est de 0.76. On rappelle que, pour deux raisons, on ne cherche pas à retrouver la valeur du frottement SRT par le calcul. La première c'est qu'on ne considère que l'échelle de rugosité donc le frottement calculé sera inférieur au frottement réel puisqu'il nous manque les contributions des autres échelles ([YS94], [DZ01]). La seconde, c'est que l'objectif principal est de corréler le frottement calculé avec le frottement SRT ce qui suffira à prédire le comportement d'un type de chaussée et à la classer par rapport aux autres.

Après avoir détaillé le processus expérimental sur un profil, on effectue le travail sur l'ensemble des profils, le frottement calculé est alors moyenné par échantillon. Le vecteur de frottement calculé ainsi obtenu est ensuite corrélé avec le frottement SRT mesuré sur chacune des plaques constituant un échantillon. Le tableau 7.1 regroupe les valeurs de frottement SRT mesuré sur l'ensemble des échantillons.

On applique aux signaux échantillonnés à 10 microns une extrapolation sur 2 échelles ce qui nous fournit des signaux avec un échantillonnage (virtuel) de 2.5 microns. Ensuite on estime le frottement à partir de la méthode d'indenteurs et on corréle ces résultats avec le frottement SRT mesuré. Les résultats de frottement estimé sont illustrés sur la figure 7.5 et représentés en fonction du frottement mesuré. Il s'agit d'une moyenne par échantillon. Les détails pour chacun des profils des échantillons sont regroupés dans

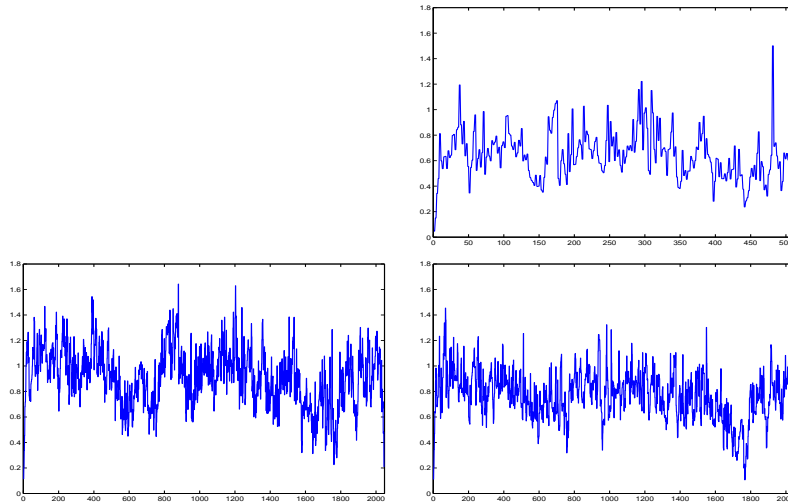


FIG. 7.2: Extrapolation Hölderienne d'un profil routier échantillonné à 10 microns vers un profil à 2.5 micron. Haut : Fonction de Hölder du profil original à 10 microns. Bas Gauche : Fonction de Hölder du profil interpolé. Bas Droite : Fonction de Hölder du profil original à 2.5 microns.

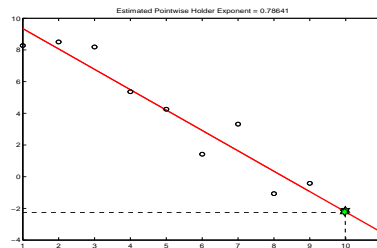


FIG. 7.3: Extrapolation Hölderienne d'un profil routier échantillonné à 10 microns vers un profil à 5 micron. Détail du mécanisme au-dessus d'un point du profil routier. Logarithmes des coefficients d'ondelette au-dessus du point considéré en fonction de l'échelle et droite de régression correspondante. Le coefficient d'ondelette synthétisé représentant la 10ème échelle est symbolisé par l'étoile. On note qu'au dessus de ce point la régularité Hölderienne est estimée à 0.79.

les tables 7.6, 7.7 et 7.8. Les corrélations sont présentées dans le tableau 7.2.

On a une bonne corrélation de base avec les signaux à 10 microns (ce qui s'explique par le fait que l'on prenne que le sommet des graviers, l'information intéressante se trouve dans les 350μ supérieurs) et mauvaise avec ceux à 2.5 microns. L'extrapolation des signaux à 10 microns pour les faire passer à 2.5 microns améliore la corrélation.

Remarque 7.1.1 *Il est important de remarquer qu'une interpolation linéaire d'un profil routier ne modifie pas le frottement estimé par la méthode d'indenteurs. En effet, une interpolation linéaire conserve les indenteurs présents et n'en crée pas de nouveaux. Il est nécessaire dans de futurs travaux de faire des essais avec d'autres méthodes d'interpolation afin de justifier l'intérêt de la notre.*

7.1.3 Conclusion

L'interpolation par conservation de la régularité Hölderienne nous permet de créer deux échelles (ou plus) de micro-texture. L'information ajoutée est visuellement très proche du profil original. En

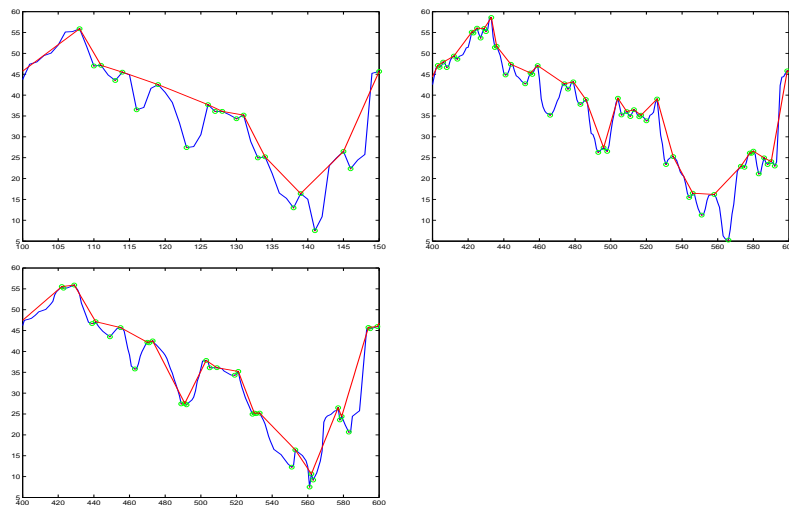


FIG. 7.4: *Detection des indenteurs et de l'échelle d'ondulation. En haut à gauche : signal original à 10 microns. En haut à droite : signal original à 2.5 microns. En bas signal interpolé. Courbe bleu : profil routier, courbe rouge : échelle d'ondulation, ronds verts : extrema locaux, points noirs : maxima locaux, points rouges : minima locaux. indenteur est défini comme le triangle formé par un sommet (point noir) et les deux vallées voisines (points rouges).*

TAB. 7.1: *Valeurs des frottements sur les échantillons*

Echantillons	03-0007	03-0009	03-0011	03-0013	03-0015	03-0017	03-0020	03-0021
Frottements	0.57	0.73	0.53	0.73	0.64	0.76	0.58	0.68
Echantillons	03-0022	03-0024	03-0027	03-0028	03-0030	03-0032	03-0033	03-0035
Frottements	0.52	0.64	0.49	0.63	0.60	0.68	0.59	0.76

terme de frottement, l'ajout de ces nouvelles échelles améliore la corrélation entre le frottement SRT et le frottement estimé par le calcul selon le modèle de Stéfani. On a constaté que les signaux à 2.5μ donnaient de très mauvais résultats. Mais il serait dommage de ne plus s'en servir alors qu'il s'agit des mesures les plus fines dont on dispose. C'est pour cette raison qu'on propose de les pré-traiter dans le chapitre suivant.

signaux échantillonnés à 10 microns	0.7770
signaux échantillonnés à 2.5 microns	0.47171
signaux à 10 microns extrapolés à 2.5 microns	0.7900

TAB. 7.2: *Ensuite on estime le frottement à partir de la méthode d'indenteurs et on corrèle ces résultats avec le frottement SRT mesuré. Les corrélations sont présentées dans ce tableau.*

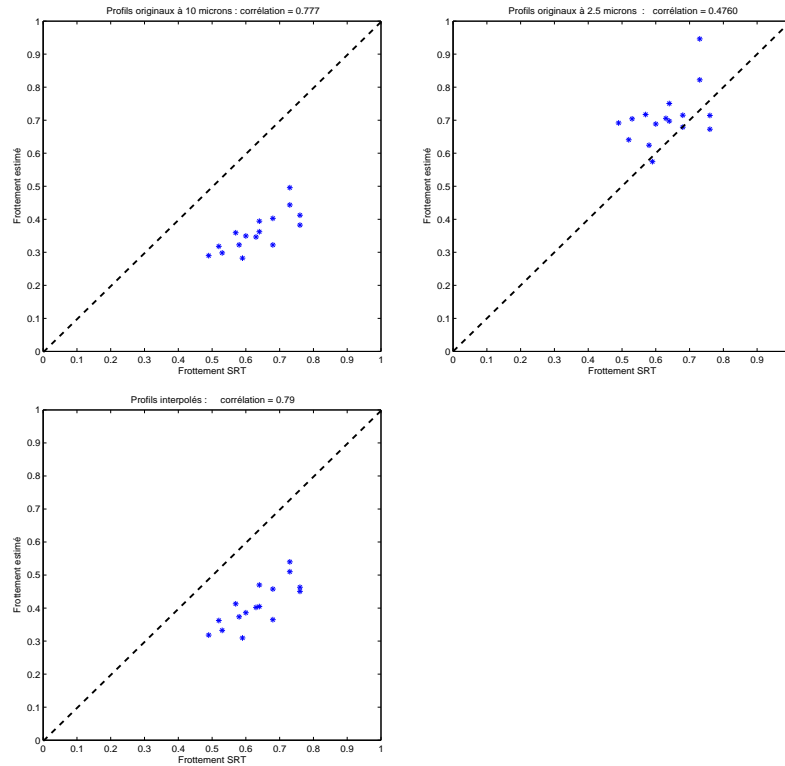


FIG. 7.5: Frottement calculé en fonction du frottement SRT. Chaque étoile représente un échantillon. Le calcul est effectué pour chacun des profils puis moyenné pour obtenir la valeur de l'échantillon. En haut à gauche, profils originaux échantillonnés à 10 microns. En haut à droite : profils originaux échantillonnés à 2.5 microns. En bas à gauche : profils échantillonnés à 10 microns puis interpolés à 2.5 microns. Même si les signaux à 2.5 donnent des résultats proches de la première bissectrice, c'est la famille de profils qui donne la plus faible corrélation avec 0.47171. Pour les signaux originaux à 10 microns, la corrélation est de 0.7770. Et enfin pour les signaux interpolés, on obtient 0.79.

Echantillon	03-0007	03-0009	03-0011	03-0013	03-0015	03-0017	03-0020	03-0021	03-0022	03-0024	03-0027	03-0028	03-0030	03-0032	03-0033	03-0035
SRT	0,57	0,73	0,53	0,73	0,64	0,76	0,58	0,68	0,52	0,64	0,49	0,63	0,6	0,68	0,59	0,76
Moyenne	0,3592	0,4958	0,2983	0,4434	0,3623	0,4122	0,3225	0,4027	0,3182	0,3944	0,29	0,3464	0,3495	0,3224	0,2824	0,3824
Détails	0,3811	0,5615	0,376	0,346	0,4949	0,5362	0,3578	0,5861	0,3381	0,3682	0,3214	0,4288	0,4626	0,2706	0,2779	0,3151
	0,3716	0,3073	0,3022	0,4563	0,3119	0,3938	0,3414	0,399	0,3125	0,3407	0,3209	0,5564	0,333	0,2606	0,317	0,3652
	0,3313	0,4173	0,2505	0,4467	0,313	0,4703	0,34	0,3712	0,2204	0,4794	0,2165	0,4858	0,3082	0,2367	0,3381	0,4343
	0,4794	1,0547	0,4247	0,2736	0,4648	0,3733	0,2842	0,439	0,2657	0,4722	0,2747	0,3557	0,2942	0,281	0,22	0,4207
	0,5454	0,7177	0,2668	0,2969	0,43	0,4159	0,2525	0,3582	0,3875	0,3907	0,2566	0,359	0,4274	0,5454	0,2813	0,3417
	0,3105	0,4028	0,4941	0,301	0,3438	0,3652	0,4056	0,4073	0,3604	0,3487	0,3984	0,2663	0,4097	0,2571	0,2968	0,3209
	0,3997	0,3988	0,2523	0,4396	0,4496	0,4117	0,2773	0,3788	0,3092	0,3782	0,249	0,3636	0,2956	0,2413	0,259	0,4043
	0,233	0,6707	0,2397	0,4445	0,3567	0,3826	0,2744	0,3229	0,3816	0,3735	0,366	0,3065	0,2608	0,4872	0,24	0,3383
	0,2324	0,5336	0,3268	0,5237	0,325	0,5013	0,4472	0,4789	0,357	0,3339	0,2345	0,3943	0,2683	0,3234	0,2763	0,357
	0,2694	0,4228	0,2861	0,4661	0,4839	0,4794	0,2797	0,3679	0,2695	0,3847	0,231	0,3063	0,415	0,2781	0,3346	0,3661
	0,5639	0,4088	0,29	0,6661	0,2855	0,2181	0,3233	0,4143	0,3811	0,4337	0,254	0,2844	0,2941	0,3078	0,3022	0,4136
	0,1721	0,411	0,2554	0,4935	0,1816	0,3168	0,2785	0,3858	0,3425	0,5003	0,3172	0,3154	0,305	0,4083	0,2327	0,5538
	0,2833	0,4201	0,2413	0,3846	0,4465	0,3515	0,3509	0,4774	0,2392	0,3293	0,3071	0,3471	0,3868	0,375	0,4033	0,327
	0,4097	0,561	0,2615	0,4521	0,2831	0,4341	0,2976	0,2506	0,2485	0,3967	0,2725	0,3133	0,3364	0,2513	0,2616	0,4264
	0,3218	0,2998	0,2601	0,3865	0,3516	0,3558	0,3132		0,3595	0,349	0,282	0,3283	0,4347	0,2875	0,2132	0,3081
	0,3385	0,3761	0,2494	0,6023	0,2742	0,3407	0,3363		0,4307	0,2257	0,2257	0,2793	0,3529	0,3476	0,2642	0,4265
	0,4137	0,5344	0,3146	0,5567		0,5342					0,4244	0,3204	0,3373			
	0,4088	0,6038	0,3417			0,3166					0,2928	0,2447	0,3683			
		0,491	0,2131			0,4472					0,265	0,3251				
		0,5336	0,3201			0,4491										
		0,3727				0,5795										
		0,4878				0,3946										
		0,3511														
		0,4687														
		0,5237														
		0,5976														
		0,5861														
		0,3688														

FIG. 7.6: Estimation du frottement par la méthode d'indenteur sur les profils originaux échantillonnés à 10 microns.

Echantillon	03-0007	03-0009	03-0011	03-0013	03-0015	03-0017	03-0020	03-0021	03-0022	03-0024	03-0027	03-0028	03-0030	03-0032	03-0033	03-0035
SRT	0,57	0,73	0,53	0,73	0,64	0,76	0,58	0,68	0,52	0,64	0,49	0,63	0,6	0,68	0,59	0,76
Moyenne	0,7172	0,9461	0,7042	0,8223	0,6973	0,7143	0,6241	0,6788	0,6409	0,7505	0,6916	0,7056	0,6886	0,7151	0,5745	0,6727
Détails	0,5296	1,1296	0,946	0,792	0,8643	0,826	0,6362	0,9518	0,7518	0,6892	0,6881	0,8472	0,8542	0,6006	0,5206	0,6564
	0,7798	0,653	0,5718	0,8361	0,7853	0,6676	0,6101	0,7157	0,6131	0,7464	0,5301	0,917	0,6642	0,6144	0,6348	0,6413
	0,5392	1,0216	0,5095	0,7314	0,5603	0,7771	0,6553	0,7629	0,5363	0,7389	0,6193	0,6662	0,646	0,5891	0,6449	0,7906
	0,6555	1,3613	0,8387	0,4881	0,738	0,6536	0,5938	0,7123	0,622	0,864	0,7499	0,5024	0,6182	0,5809	0,484	0,683
	0,7881	0,8835	0,6532	0,5622	0,8151	0,7232	0,5911	0,5977	0,654	0,7729	0,6363	0,8451	0,7149	2,1669	0,5924	0,6296
	0,6109	0,8297	0,8061	0,75	0,6058	0,6026	0,6895	0,6537	0,6838	0,7025	0,9204	0,6975	0,695	0,5631	0,5778	0,6536
	0,7091	0,9121	0,6566	1,0088	0,7994	0,7364	0,5718	0,6489	0,6558	0,9215	0,6569	0,8536	0,5738	0,4534	0,5292	0,7076
	0,4917	1,3367	0,6791	0,9063	0,7575	0,7631	0,5144	0,5916	0,8126	0,8009	0,8256	0,5158	0,6104	0,7765	0,5014	0,6037
	0,4668	1,0399	0,7326	0,7907	0,6594	0,8167	0,711	0,7111	0,5735	0,5717	0,4847	0,8211	0,5821	0,5516	0,532	0,6282
	0,6739	0,5473	0,7561	0,6667	0,7554	0,7784	0,565	0,6402	0,5568	0,7568	0,4159	0,4959	0,7469	0,5707	0,6435	0,6663
	0,743	0,869	0,7787	1,1141	0,5203	0,5464	0,6957	0,6113	0,816	0,7772	0,6185	0,6892	0,6275	0,6746	0,5689	0,7356
	0,7294	0,8999	0,646	0,9294	0,4374	0,6126	0,602	0,6352	0,6468	0,8696	0,8316	0,7558	0,6785	0,6518	0,5642	0,8191
	0,7752	0,8532	0,7148	0,8876	0,9166	0,592	0,6655	0,7271	0,5059	0,6706	0,7642	0,5807	0,7178	0,7405	0,7165	0,6007
	0,9949	1,1064	0,6648	0,939	0,6358	0,7327	0,6712	0,5435	0,5551	0,666	0,6825	0,5402	0,7179	0,6226	0,6267	0,6259
	0,8474	0,511	0,7644	0,8691	0,7151	0,697	0,5836		0,6293	0,69	0,703	0,758	0,8335	0,5539	0,5022	0,5864
	0,8077	0,8316	0,732	0,9762	0,5908	0,5317	0,6296			0,7594	0,6493	0,6448	0,6684	0,7305	0,5531	0,7346
	0,8743	1,0641	0,7358	0,7304		0,8886					0,9255	0,729	0,7248			
	0,8924	1,2147	0,7667			0,6659					0,7314	0,7511	0,7205			
		1,06	0,5889			0,7932					0,6981	0,7953				
		0,857	0,5416			0,7688										
		0,6234				0,8354										
		1,0678				0,7049										
		0,8681														
		0,9754														
		1,0324														
		1,1462														
		1,2189														
		0,5765														

FIG. 7.7: Estimation du frottement par la méthode d'indenteur sur les profils originaux échantillonnés à 2.5 microns.

Echantillon	03-0007	03-0009	03-0011	03-0013	03-0015	03-0017	03-0020	03-0021	03-0022	03-0024	03-0027	03-0028	03-0030	03-0032	03-0033	03-0035
SRT	0,57	0,73	0,53	0,73	0,64	0,76	0,58	0,68	0,52	0,64	0,49	0,63	0,6	0,68	0,59	0,76
Moyenne	0,4129	0,54	0,3325	0,5101	0,4048	0,4632	0,3737	0,4576	0,3624	0,4699	0,3184	0,402	0,386	0,365	0,3095	0,4506
Détails	0,4421	0,5615	0,5189	0,3858	0,5398	0,5814	0,4209	0,6406	0,3718	0,44	0,3362	0,4485	0,4895	0,3041	0,3137	0,4122
	0,4113	0,3073	0,3094	0,4913	0,3551	0,4432	0,3709	0,3887	0,3627	0,4877	0,3255	0,5964	0,3717	0,2926	0,3357	0,3834
	0,3588	0,4173	0,2774	0,5543	0,3456	0,5147	0,4447	0,438	0,267	0,5961	0,2187	0,5392	0,3574	0,228	0,3852	0,5402
	0,4876	1,0547	0,4168	0,3089	0,4998	0,3973	0,3208	0,5535	0,3104	0,4725	0,3151	0,4224	0,3186	0,3317	0,2505	0,5326
	0,6131	0,7177	0,3225	0,3735	0,4701	0,4971	0,3027	0,4042	0,3756	0,4541	0,2897	0,401	0,4377	0,6131	0,3323	0,4258
	0,3743	0,4028	0,5885	0,3772	0,348	0,4637	0,4267	0,4893	0,3687	0,4523	0,41	0,3701	0,4263	0,2826	0,3119	0,4409
	0,4819	0,3988	0,255	0,5412	0,4763	0,4654	0,3328	0,3922	0,3578	0,5112	0,2682	0,4498	0,3385	0,2616	0,2845	0,5068
	0,2655	0,6707	0,2895	0,5231	0,4434	0,4438	0,3212	0,3596	0,4809	0,4051	0,3636	0,3525	0,3216	0,5404	0,2564	0,3568
	0,2821	0,5336	0,3416	0,6495	0,3683	0,5548	0,5187	0,5347	0,3923	0,4061	0,2461	0,4498	0,3192	0,3876	0,2935	0,434
	0,3095	0,4228	0,3298	0,4941	0,5263	0,5347	0,2968	0,3781	0,3121	0,5125	0,2534	0,3342	0,4381	0,3414	0,3816	0,412
	0,7042	0,4088	0,3142	0,6262	0,319	0,3154	0,4051	0,5253	0,4682	0,509	0,2815	0,369	0,3479	0,3681	0,331	0,4945
	0,2259	0,411	0,2906	0,5555	0,2072	0,3369	0,3265	0,4627	0,392	0,5401	0,3697	0,354	0,3329	0,3964	0,2428	0,5754
	0,343	0,4201	0,2349	0,4317	0,5323	0,381	0,3945	0,5262	0,2707	0,417	0,3416	0,3616	0,4095	0,4482	0,4458	0,4021
	0,4597	0,561	0,2453	0,5222	0,3183	0,4379	0,3534	0,3138	0,3299	0,3886	0,3053	0,3788	0,3736	0,3241	0,2704	0,463
	0,4336	0,2998	0,2839	0,4405	0,4153	0,4439	0,3272		0,3752	0,4423	0,3522	0,3848	0,488	0,3046	0,2409	0,3832
	0,3554	0,3761	0,2952	0,7486	0,3113	0,4097	0,4154			0,4842	0,2402	0,3071	0,3778	0,415	0,2752	0,4471
	0,4559	0,5344	0,3702	0,6487		0,5803				0,4637	0,397	0,3836				
	0,4276	0,6038	0,4005			0,4254				0,3183	0,3323	0,4164				
		0,491	0,2222			0,4613				0,351	0,3891					
		0,5336	0,3438			0,4545										
		0,3727				0,5896										
		0,4878				0,4583										
		0,3511														
		0,4687														
		0,5237														
		0,5976														
		0,5861														
		0,3688														

FIG. 7.8: Estimation du frottement par la méthode d'indenteur sur les profils à 10 microns après interpolation vers 2.5 microns.

7.2 Débruitage

7.2.1 Position du problème

On dispose de profils routiers échantillonnés à 2.5 microns. L'estimation du frottement sur ces profils par la méthode d'indenteur conduit à une corrélation médiocre avec le frottement SRT. Toutefois il s'agit des mesures les plus fines dont on dispose puisqu'on atteint les limites de résolution du capteur. Pour que ces données soient utilisables, il est nécessaire d'envisager une technique de pré-traitement avant d'utiliser le modèle de frottement.

En observant les coefficients d'ondelette de ces signaux, on détecte un comportement caractéristique des signaux bruités. En effet, d'une manière générale, les coefficients d'ondelette du bruit sont du même ordre à toutes les échelles alors que pour un autre signal, les coefficients ont tendance à décroître avec les échelles. Par conséquent, à partir d'une certaine échelle, les coefficients du signal original deviennent négligeables face à ceux du bruit. Cet artefact se traduit par l'apparition d'un plateau dans la représentation du logarithme des coefficients d'ondelette en fonction de l'échelle. Les coefficients d'ondelette des signaux à 2.5 microns dont on dispose présentent ce comportement caractéristique (voir figure 7.9).

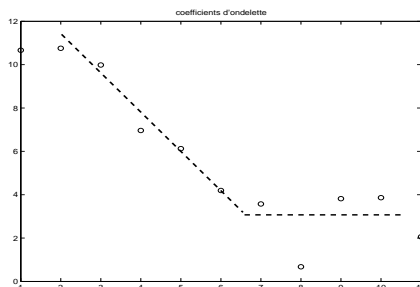


FIG. 7.9: Logarithmes des coefficients d'ondelette d'un signal échantillonné à 2,5 microns au dessus d'un point en fonction de l'échelle. En pointillés, les régressions des logarithmes des coefficients d'ondelette selon les échelles considérées. La régression sur les hautes fréquences donne une droite horizontale, caractéristique de la présence de bruit.

On peut donc espérer que des techniques de débruitage vont pouvoir améliorer les résultats de corrélation entre les frottements SRT et le calcul de frottement par la technique d'indenteurs. Les signaux "brut" donnent une corrélation de 0.476 ce qui est une corrélation très médiocre.

Plusieurs techniques de débruitage présentées dans le chapitre 3 ont été essayées : le Multifractal Pumping, Le débruitage Multifractal et le débruitage multifractal Bayésien. La technique classique de Hard Thresholding a aussi été utilisée. Les meilleurs résultats en terme de corrélation avec le frottement SRT sont obtenus grâce à une technique développée dans ce document, le débruitage multifractal Bayésien (3.8.4 et [VL03]). La technique classique de Hard Thresholding donne tout de même de bons résultats (voir figure 7.14 à droite).

A l'encontre de la méthode d'interpolation présentée précédemment, les méthodes de débruitage nécessitent en général un paramètre, le paramètre de débruitage. Ce paramètre doit être optimisé ce qui sera présenté dans la section 7.2.2.

Nous reprenons le profil qui nous avait servi d'exemple dans la section 7.1.1. Pour illustrer la méthode, on applique sur ce profil un débruitage Bayésien avec un paramètre de débruitage égal à 1. Le profil est très lissé comme on peut le voir sur les figures 7.10 et 7.11. La régularité du profil est fortement augmentée. Les fonctions de Hölder confirment ce résultat (voir figure 7.12).

On applique maintenant à ce profil le calcul du frottement par la méthode d'indenteur. Puisque le profil a été très lissé par le débruitage, de nombreux indenteurs inventés par le bruit ont été supprimé.

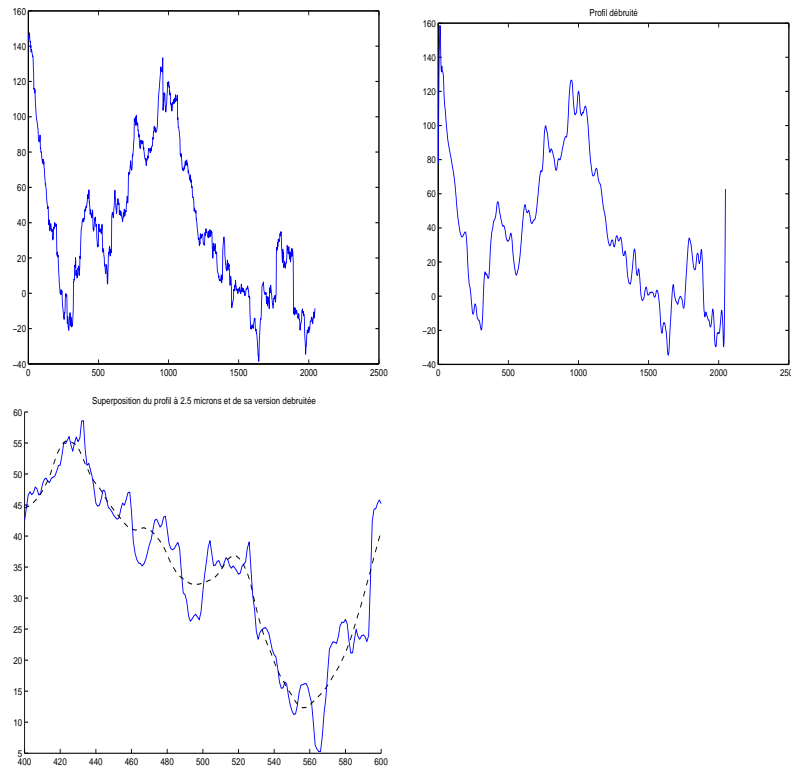


FIG. 7.10: Débruitage d'un profil routier échantillonné à 2.5 micron. Haut gauche : profil original à 10 microns. Haut droite : profil débruité. Bas gauche : superposition du profil original et de sa version débruitée, zoom.

7.2.2 Application au calcul du frottement

Après avoir montré sur un profil en particulier les modifications engendrée par la technique de débruitage que nous proposons, on applique maintenant à l'ensemble des profils un débruitage afin de tenter d'augmenter la corrélation entre le frottement SRT et le frottement calculé par la méthode d'indenteur.

Seuil optimal de débruitage

Comme nous l'avons mentionné, il va falloir déterminer le seuil optimal de débruitage. On se sert des signaux dont on dispose comme d'une classe d'apprentissage. On fait varier le paramètre de débruitage et pour chaque valeur on calcule le frottement sur les profils obtenus. Ce frottement est ensuite corrélé avec le frottement SRT. Le seuil optimal est celui nous donnant la meilleure corrélation. L'évolution de la corrélation en fonction du paramètre de débruitage est représentée figure 7.14. On montre cette courbe seulement pour le débruitage Bayésien qui donne la meilleure corrélation et pour la méthode classique de Hard Thresholding. Pour ces deux méthodes, l'évolution de la corrélation en fonction du paramètre de débruitage présente un maximum qui détermine le paramètre optimal de débruitage. Comme on peut le constater, pour la méthode de débruitage Bayésien, le paramètre optimal de débruitage est 1 ce qui donne une corrélation de 0.86 et pour le Hard Thresholding le seuil optimal est $\lambda = 18$ pour une corrélation de 0.81.

Corrélations

Maintenant que le paramètre de débruitage est déterminé, on considère la nouvelle famille de profils obtenue après débruitage multifractal Bayésien. Ces profils sont ensuite soumis au calcul de frottement

par la technique d'indenteurs. On représente sur la figure 7.15 les divers résultats obtenus (voir table 7.16 pour les détails des valeurs). Ces résultats sont comparés à ceux obtenus sur les signaux à 10 microns, ceux à 2.5 microns et ceux sur les signaux interpolés. La corrélation obtenue avec le frottement SRT est de 0.8565 (comme on pouvait le voir en considérant le maximum sur la figure 7.14). Le pré-traitement proposé est donc très adapté à l'amélioration du calcul du frottement.

Echelles les plus modifiées

Comme on obtient de bons résultats après le débruitage des signaux échantillonnés à 2.5 microns, il est naturel de se demander quelles sont les fréquences qui ont été le plus modifiées par notre technique de débruitage. Pour pouvoir mener cette étude on doit nécessairement travailler sur des profils ayant la même longueur (et ainsi le même nombre d'échelles de décomposition). Un compromis a donc été fait entre le nombre de profils étudiés et la longueur de ces profils. On n'a conservé pour notre étude que les profils ayant plus de 2^{10} points et on les a ramenés à cette dimension. Bien entendu, il en découle que les corrélations avec le frottement SRT sont modifiées ainsi que le seuil optimal de débruitage. Les signaux ne sont débruités que sur les échelles 7 à 10 (pour garantir le caractère minimax de la méthode de débruitage). Par conséquent on ne touche qu'aux fréquences (hautes) correspondant aux longueurs $2.5\mu - 30\mu$. Le seuil optimal passe de 1 à 1.2 et la corrélation obtenue est de 0.9 (voir figure 7.17).

Pour déterminer les fréquences les plus modifiées par le débruitage, on débruite tous les signaux avec le seuil optimal 1.2, puis on compare le signal original au signal débruité échelle par échelle. Encore une fois, pour illustrer le cheminement observé, on représente le 5ème profil de l'échantillon **03-0035** décomposé en somme de contributions d'échelles sur la figure 7.18. De la même manière, on décompose le signal débruité. La figure 7.19 présente les échelles 7 à 10 du signal original et du signal débruité.

On calcule ensuite l'écart normalisé entre chacune des échelles pour évaluer les plus modifiées par le débruitage. Sur ce profil, on obtient :

- Echelle 7 : 0.0429
- Echelle 8 : 0.0254
- Echelle 9 : 0.0179
- Echelle 10 : 0.0123

On effectue ce travail sur l'ensemble des profils, ce qui nous permet d'obtenir les résultats suivants en moyenne.

échelle	7	8	9	10
ecart	0.1380	0.1006	0.0766	0.0732

La fréquence la plus modifiée est la 7ème en partant des basses fréquences, c'est à dire que l'on modifie des longueurs entre 15 et 30 microns (autour de 20 microns).

7.2.3 Conclusion

Le capteur utilisé en limite de résolution (2.5 microns) donne des profils entachés de bruit et les rendant inutilisables pour le calcul du frottement. Le débruitage de ces signaux permet de retrouver les bonnes propriétés des indenteurs et améliore ainsi la corrélation entre le frottement SRT mesuré et le frottement estimé. Certaines échelles sont plus sensibles au pré-traitement proposé ce qui pourrait laisser penser que le bruit d'acquisition se situe dans des longueurs d'onde de l'ordre de 20 microns.

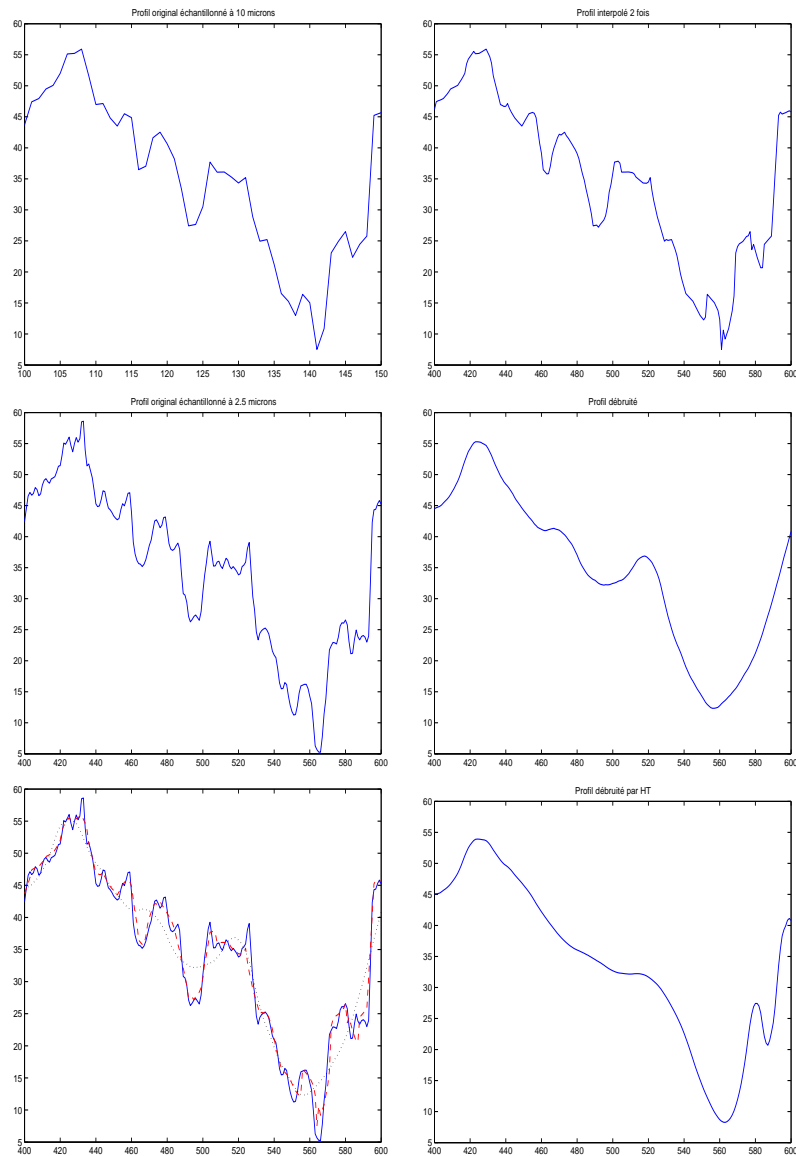


FIG. 7.11: Comparaison des diverses version d'un même profil, zoom. Haut Gauche : profil original à 10 microns, haut droite : profil interpolé, milieu gauche : profil original à 2.5 microns, milieu droite : profil débruité. En bas à gauche : superposition des diverses versions à 2.5 microns. Traits pleins : signal original à 2.5 microns, tirets : profil à 10 microns extrapolé vers un profil à 2.5 microns, pointillés : signal à 2.5 microns débruité. En bas à droite : débruitage par Hard Thresholding.

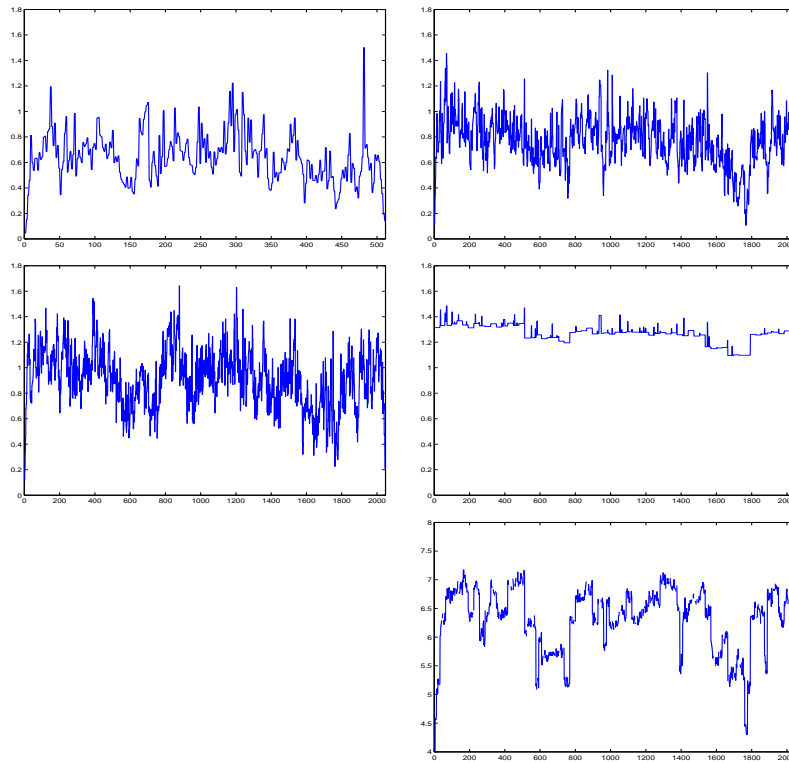


FIG. 7.12: *Fonctions de Hölder. Haut gauche : fonction de Hölder du profil à 10 microns (moyenne 0.6428). Haut droite : fonction de Hölder du profil original à 2.5 microns (moyenne 0.6169). Milieu gauche : fonction de Hölder du profil à 10 micron interpolé (moyenne 0.9127). Milieu droite : fonction de Hölder du profil débruité (moyenne 1.2684). Bas droite : fonction de Hölder du profil débruité par Hard Thresholding. Les ordonnées de cette figure ne correspondent pas à celles des autres figures car le Hard Thresholding a trop lissé le profil. Par conséquent, la fonction de Hölder prend des valeurs très élevées.*

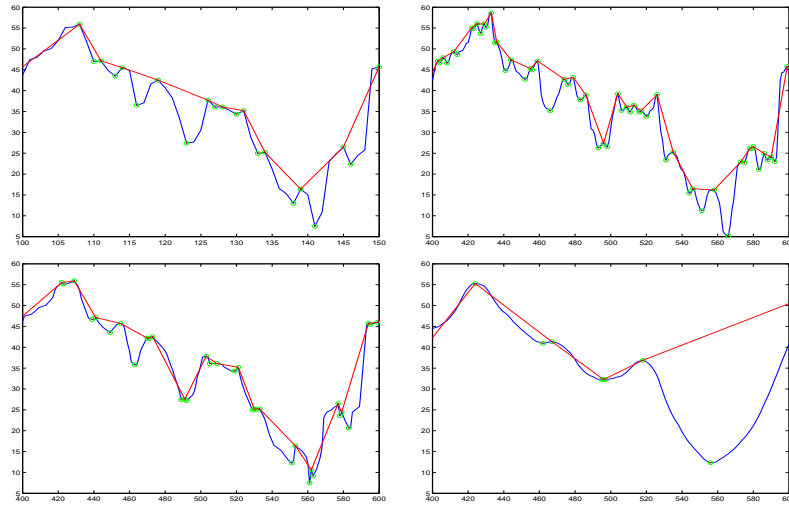


FIG. 7.13: *Détection des indenteurs et de l'échelle d'ondulation. En haut à gauche : signal original à 10 microns. En haut à droite : signal original à 2.5 microns. En bas à gauche, signal à 10 microns interpolé vers un signal à 2.5 microns. En bas à droite signal à 2.5 microns débruité. Courbe bleu : profil routier, courbe rouge : échelle d'ondulation, ronds verts : extrema locaux, points noirs : maxima locaux, points rouges : minima locaux. indenteur est défini comme le triangle formé par un sommet (point noir) et les deux vallées voisines (points rouges). Le débruitage supprime un grand nombre d'indenteurs et modifie fortement l'échelle d'ondulation.*

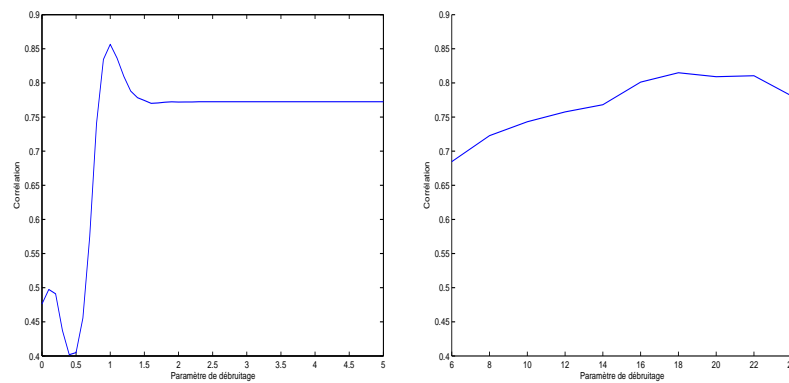


FIG. 7.14: *Evolution de la corrélation frottement SRT / frottement mesuré en fonction du paramètre de débruitage pour le débruitage multifractal Bayésien (corrélation maximum 0.86 à gauche) et le Hard Thresholding (corrélation maximum 0.81 à droite).*

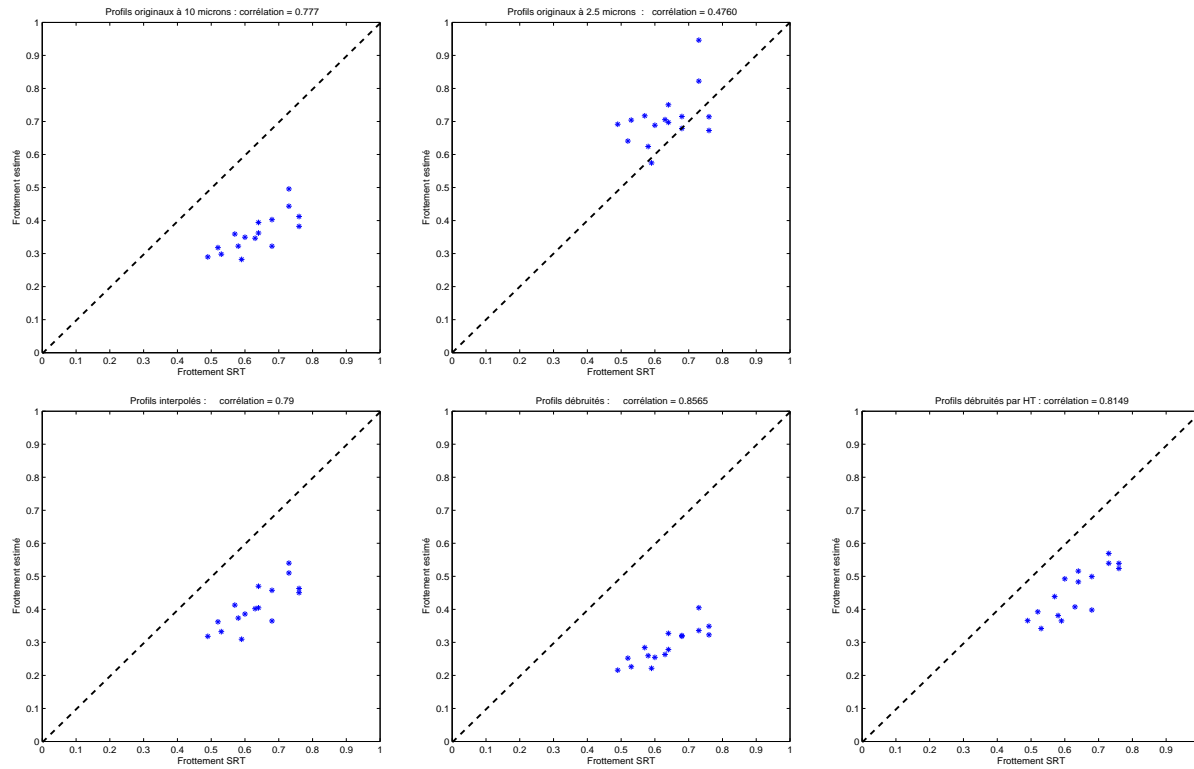


FIG. 7.15: Frottement calculé en fonction du frottement SRT. Chaque étoile représente un échantillon. Le calcul est effectué pour chacun des profils puis moyenné pour obtenir la valeur de l'échantillon. En haut à gauche, profils originaux échantillonnés à 10 microns (corrélation : 0.777). En haut à droite : profils originaux échantillonnés à 2.5 microns (corrélation : 0.47171). En bas à gauche : profils échantillonnés à 10 microns puis interpolés à 2.5 microns (corrélation : 0.79). En bas au milieu, profils échantillonnés à 2.5 microns et débruités par débruitage Bayésien (corrélation : 0.8565). En bas à droite, profils échantillonnés à 2.5 microns et débruités par Hard Thresholding (corrélation : 0.8149).

Echantillon	03-0007	03-0009	03-0011	03-0013	03-0015	03-0017	03-0020	03-0021	03-0022	03-0024	03-0027	03-0028	03-0030	03-0032	03-0033	03-0035
SRT	0,57	0,73	0,53	0,73	0,64	0,76	0,58	0,68	0,52	0,64	0,49	0,63	0,6	0,68	0,59	0,76
Moyenne	0,2843	0,4048	0,2262	0,3357	0,2764	0,3488	0,2597	0,3186	0,2523	0,3274	0,2159	0,2634	0,2548	0,3207	0,2216	0,3229
Détails	0,2721	0,7043	0,292	0,3076	0,3533	0,5819	0,2581	0,4405	0,291	0,3408	0,2137	0,3584	0,2513	0,2662	0,2258	0,3281
	0,2945	0,3172	0,2006	0,3318	0,2602	0,3379	0,3141	0,3758	0,2607	0,2806	0,2297	0,3217	0,2804	0,2834	0,1928	0,2407
	0,2419	0,6585	0,2335	0,365	0,2793	0,3396	0,3075	0,2875	0,1375	0,3884	0,1925	0,3376	0,2383	0,251	0,2667	0,3704
	0,2563	0,848	0,3176	0,1873	0,427	0,3594	0,2555	0,3328	0,2325	0,4461	0,1752	0,269	0,2286	0,2702	0,1882	0,3475
	0,3157	0,8394	0,1934	0,2287	0,3247	0,3594	0,1829	0,2556	0,4082	0,3428	0,1573	0,2849	0,3177	1,1368	0,2457	0,3254
	0,3382	0,3992	0,2834	0,222	0,2356	0,3527	0,3423	0,3455	0,2944	0,2748	0,2872	0,2174	0,2937	0,1701	0,2357	0,331
	0,313	0,29	0,1733	0,2695	0,3328	0,3329	0,1987	0,2687	0,2415	0,357	0,148	0,3175	0,1876	0,1568	0,1551	0,3436
	0,0926	0,4985	0,2153	0,1763	0,2373	0,352	0,2333	0,2951	0,2743	0,3428	0,2726	0,2576	0,218	0,5444	0,1754	0,3202
	0,3021	0,5524	0,225	0,4174	0,2624	0,3299	0,4161	0,2453	0,2401	0,2403	0,2145	0,2922	0,1831	0,3415	0,2051	0,2673
	0,2903	0,2481	0,1966	0,4616	0,3052	0,3631	0,2099	0,3071	0,1804	0,3509	0,1706	0,2327	0,2701	0,2394	0,2821	0,2642
	0,5224	0,2173	0,1952	0,6974	0,1933	0,3584	0,1907	0,4704	0,3208	0,3529	0,1682	0,1953	0,2487	0,2217	0,2535	0,3454
	0,1443	0,2961	0,1855	0,3338	0,1191	0,1786	0,2147	0,2515	0,2456	0,3348	0,2029	0,3018	0,2485	0,2062	0,2372	0,4577
	0,222	0,3579	0,1714	0,2789	0,3569	0,1848	0,2642	0,4317	0,2089	0,2682	0,2335	0,2845	0,3722	0,3008	0,2771	0,3086
	0,3896	0,3232	0,2057	0,3364	0,2652	0,2299	0,2305	0,1532	0,1862	0,2286	0,1929	0,2107	0,2521	0,2689	0,2054	0,3172
	0,2603	0,2174	0,2193	0,2356	0,292	0,2866	0,269		0,2629	0,3061	0,1969	0,2386	0,2756	0,209	0,1559	0,3058
	0,2579	0,2617	0,1954	0,4151	0,2102	0,3405	0,2673		0,3828	0,2617	0,2092	0,2536	0,2643	0,2447	0,2929	
	0,2713	0,3242	0,2817	0,4432		0,3156					0,3383	0,1961	0,2345			
	0,3332	0,3893	0,2813			0,4476					0,2332	0,1999	0,232			
		0,4287	0,1481			0,3154					0,2137	0,2786				
		0,3501	0,3099			0,4095										
		0,3334				0,4429										
		0,269				0,5113										
		0,3306				0,3021										
		0,3059														
		0,4403														
		0,4448														
		0,442														
		0,2472														

FIG. 7.16: Estimation du frottement par la méthode d'indenteur sur les profils à 10 microns après interpolation vers 2.5 microns.

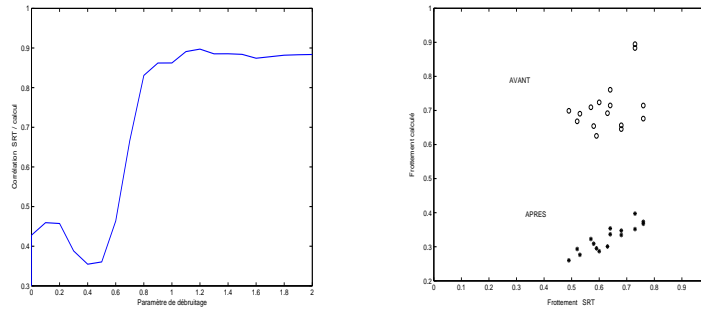


FIG. 7.17: A gauche : Evolution de la corrélation SRT / calcul indenteur en fonction du seuil paramétrant la méthode de débruitage. A droite : En abscisse SRT, en ordonnée le frottement estimé par le calcul. Signaux à 2.5 microns (ronds) et débruités avec le seuil 1.2 (étoiles).

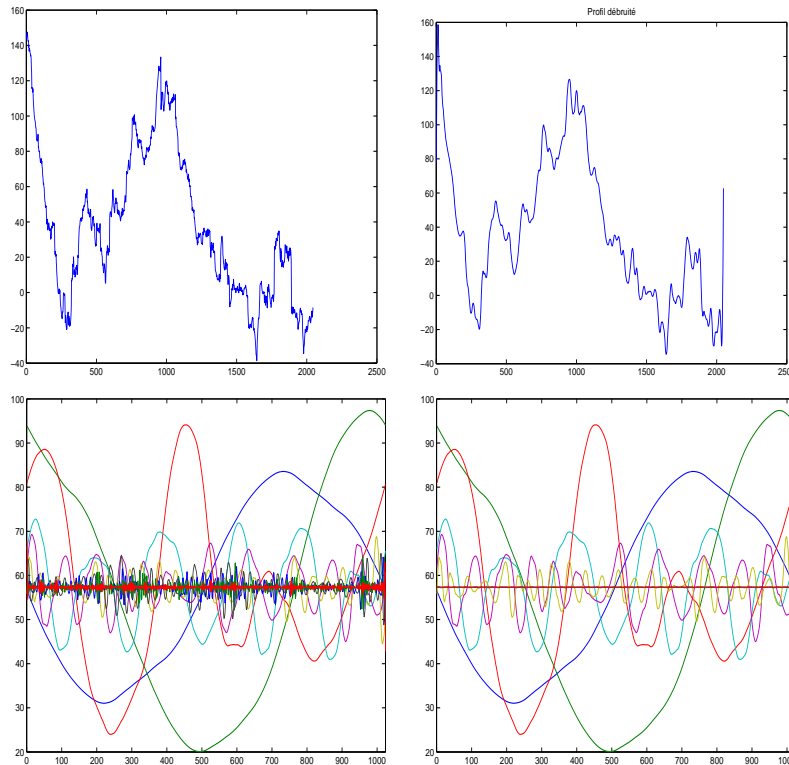


FIG. 7.18: Decomposition d'un profil en somme de profils par échelle. A gauche signal original à 2.5 microns et à droite signal débruité. Le débruitage n'a été appliqué que sur les hautes fréquences par conséquent les basses fréquences sont identiques à gauche et à droite.

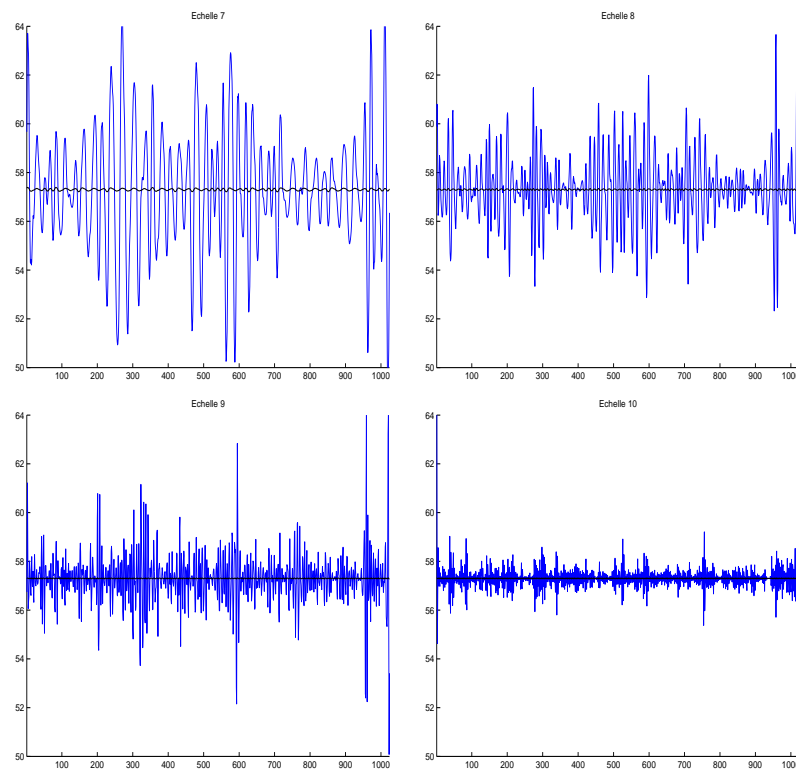


FIG. 7.19: *Decomposition d'un profil en somme de profils par échelle. Echelles 7 à 10. En bleu signal original à 2.5 microns et en noir signal débruité.*

7.3 Corrélations Multi-échelle

Le frottement découle de la contribution de plusieurs échelles de micro-texture. Ces contributions ne sont pas forcément équivalentes. Dans ce chapitre, on envisage une technique pour faire apparaître les échelles les plus importantes dans le frottement. K. Himeno, Y. Nakamura, A. Kawamura et K. Saito ont montré par analyse spectrale dans [HNKS00] que la plage de longueur d'onde la plus importante pour le frottement était comprise entre 10 microns et 1000 microns. Les profils sur lesquels nous travaillons font une longueur d'environ 2500 microns et on dispose d'un échantillonnage à 2.5 microns. Par conséquent nous recouvrons la gamme de fréquences étudiée dans [HNKS00] et nous allons essayer de déterminer dans cette zone les échelles prépondérantes.

7.3.1 Précision sur les corrélations de référence

Certains profils avaient été mis de cotés pour l'étude des échelles les plus débruitées. On avait alors évoqué le fait que les corrélations entre les frottements calculés sur les profils restant et les frottement SRT étaient modifiées. De la même manière on souhaite maintenant disposer d'un nombre suffisant d'échelles à étudier, ce qui nous a amené une nouvelle fois à ne pas tenir compte de ce nombre négligeable de signaux possédant trop peu de points. Nous avons donc re-calculé nos corrélations "de référence" (originaux à 10 microns, originaux à 2.5 microns, extrapolés, débruités) pour ces mêmes signaux afin de pouvoir comparer nos résultats, en terme de corrélation, entre les techniques "multi-échelle" et les autres.

Les profils considérés par la suite sont classés par échantillons et par numéro d'acquisition dans le tableau suivant :

03-0007 : [1 :18]	03-0009 : [2, 6, 7, 10 :15, 17, 19, 20, 22 :25, 27, 28]
03-0011 : [1 :20]	03-0013 : [1 :3, 6 :17]
03-0015 : [1 :16]	03-0017 : [1 :22]
03-0020 : [1 :16]	03-0021 : [1 :14]
03-0022 : [1 :15]	03-0024 : [1 :16]
03-0027 : [1 :4, 6 :19]	03-0028 : [1 :19]
03-0030 : [1 :18]	03-0032 : [1 :4, 6 :16]
03-0033 : [1 :16]	03-0035 : [1 :16]

Les nouvelles corrélations de référence sont recalculées :

signaux échantillonnés à 10 microns	0.81
signaux échantillonnés à 2.5 microns	0.41
signaux à 10 microns extrapolés à 2.5 microns	0.81
signaux à 2.5 microns débruités	0.90

7.3.2 Position du problème

On propose une technique pour maximiser un critère multi-échelle par pondération selon les échelles. En effet, on pense que les échelles ne contribuent pas toutes de la même manière au frottement. C'est un résultat très général car applicable à n'importe quelle autre technique de calcul de frottements, ainsi qu'à n'importe quel critère susceptible d'avoir des propriétés différentes selon l'échelle considérée.

L'échantillon E contient p profils. Chacun de ces profils i présente un frottement moyen à l'échelle j pour $j = 1..n$ que l'on note $\mu_{E,i,j}$. On obtient un frottement moyen $\mu_{E,j} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \mu_{E,i,j}$ à l'échelle j pour l'échantillon E .

On définit $\mu_{E,global}$ comme étant une combinaison linéaire des μ par échelle.

$$\mu_{E,global} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{E,j} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{E,i,j} \quad (7.1)$$

A partir de cette écriture, on souhaite maximiser la corrélation de notre frottement estimé avec le frottement SRT mesuré en effectuant une optimisation sur le vecteur $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$.

Critère à maximiser

Proposition 7.3.1

Le vecteur $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ maximisant la corrélation entre

$$Y = [Y_1, \dots, Y_{N_e}]$$

et $X = \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j X_{1,j}, \dots, \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{N_e,j} \right]$ est

$$\Lambda = P^{-1}(\overline{\Delta})^{-1}PT \quad (7.2)$$

avec

$$T = \left[\sum_{e=1}^{N_e} [Y_e - \langle Y \rangle] \left[X_{e,1} - \frac{1}{N_e} \sum_{e1=1}^{N_e} X_{e1,j} \right], \dots, \sum_{e=1}^{N_e} [Y_e - \langle Y \rangle] \left[X_{e,n} - \frac{1}{N_e} \sum_{e1=1}^{N_e} X_{e1,j} \right] \right]$$

$$\Delta = \left(\sum_{e=1}^{N_e} \left[X_{e,j} - \frac{1}{N_e} \sum_{e1=1}^{N_e} X_{e1,j} \right] \left[X_{e,k} - \frac{1}{N_e} \sum_{e1=1}^{N_e} X_{e1,j} \right] \right)_{j,k}$$

et P la matrice de passage de la diagonalisation de Δ vers $\overline{\Delta}$.

Corollaire 7.3.1

Le vecteur $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ maximisant la corrélation entre $SRT = [SRT_1, \dots, SRT_{N_e}]$ et $\mu_{global} =$

$$\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{1,j}, \dots, \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{N_e,j} \right] \text{ est}$$

$$\Lambda = P^{-1}(\overline{\Delta})^{-1}PT \quad (7.3)$$

avec

$$T = \left[\sum_{e=1}^{N_e} [SRT_e - \langle SRT \rangle] \left[\mu_{e,1} - \frac{1}{N_e} \sum_{e1=1}^{N_e} \mu_{e1,j} \right], \dots, \sum_{e=1}^{N_e} [SRT_e - \langle SRT \rangle] \left[\mu_{e,n} - \frac{1}{N_e} \sum_{e1=1}^{N_e} \mu_{e1,j} \right] \right]$$

$$\Delta = \left(\sum_{e=1}^{N_e} \left[\mu_{e,j} - \frac{1}{N_e} \sum_{e1=1}^{N_e} \mu_{e1,j} \right] \left[\mu_{e,k} - \frac{1}{N_e} \sum_{e1=1}^{N_e} \mu_{e1,j} \right] \right)_{j,k}$$

et P la matrice de passage de la diagonalisation de Δ vers $\overline{\Delta}$

Preuve

On prouve le corollaire. Maximiser la corrélation revient à maximiser la quantité suivante.

$$CORR = \frac{COV\left(\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e1,j}, \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e2,j}, \dots, \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e_n,j}\right], [SRT_1, SRT_2, \dots, SRT_n]\right)}{\sigma_{[SRT_1, \dots, SRT_n]} \times \sigma_{\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e1,j}, \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e2,j}, \dots, \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e_n,j}\right]}} \quad (7.4)$$

On peut se contenter de maximiser A puisque l'écart type du vecteur de frottement SRT est une constante.

$$A = \frac{COV([\sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e1,j}, \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e2,j}, \dots, \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{en,j}], [SRT1, SRT2, \dots, SRTn])}{\sigma[\sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e1,j}, \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e2,j}, \dots, \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{en,j}]} \quad (7.5)$$

$$A = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} [(\sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e,j} - \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e,j})(SRT_e - \langle SRT \rangle)]}{\sqrt{\sum_{e=1}^{N_e} (\sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e,j} - \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{e,j})^2}} \quad (7.6)$$

avec N_e le nombre d'échantillons. On pose

$$s_e = SRT_e - \langle SRT \rangle \text{ et } \overline{\mu_{e,j}} = \mu_{e,j} - \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \mu_{e,j} \quad (7.7)$$

On obtient donc :

$$A = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} (\sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{\mu_{e,j}}) s_e}{\sqrt{\sum_{e=1}^{N_e} (\sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{\mu_{e,j}})^2}} \quad (7.8)$$

Enfin on pose

$$T_j = \sum_{e=1}^{N_e} s_e \overline{\mu_{e,j}} \quad (7.9)$$

D'où

$$A = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j T_j}{\sqrt{\sum_{e=1}^{N_e} (\sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{\mu_{e,j}})^2}} \quad (7.10)$$

$$A = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j T_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j \lambda_k \delta_{j,k}}} \text{ avec } \delta_{j,k} = \sum_{e=1}^{N_e} \overline{\mu_{e,j}} \overline{\mu_{e,k}} \quad (7.11)$$

On peut réécrire sous forme matricielle.

$$A = \frac{\langle \Lambda, T \rangle}{\sqrt{t \Lambda \Delta \Lambda}} \quad (7.12)$$

Or Δ est symétrique et définie positive. Par conséquent Δ est diagonalisable. Ainsi $\Delta = P^{-1} \overline{\Delta} P$, avec $P^{-1} = {}^t P$ (puisque Δ est symétrique) et $\overline{\Delta}$ diagonale à valeurs propres positive. Ainsi, on peut définir la matrice $\Theta = \sqrt{\overline{\Delta}}$.

On peut donc écrire

$$A = \frac{\langle \Lambda, T \rangle}{\sqrt{t \Lambda P^{-1} \Theta \Theta P \Lambda}} \quad (7.13)$$

Or ${}^t\Theta = \Theta$ et $P^{-1} = {}^tP$ donc

$$A = \frac{\langle \Lambda, T \rangle}{\sqrt{{}^t\Lambda {}^tP {}^t\Theta \Theta P \Lambda}} \quad (7.14)$$

$$A = \frac{\langle \Lambda, T \rangle}{\sqrt{{}^t(\Theta P \Lambda) \Theta P \Lambda}} \quad (7.15)$$

On pose $\nu = \Theta P \Lambda$ donc $\Lambda = P^{-1} \Theta^{-1} \nu$.

Ainsi on obtient

$$A = \frac{\langle P^{-1} \Theta^{-1} \nu, T \rangle}{\|\nu\|} \quad (7.16)$$

Or $\langle P^{-1} \Theta^{-1} \nu, T \rangle = \langle \nu, {}^t(P^{-1} \Theta^{-1}) T \rangle = \langle \nu, \Theta^{-1} P T \rangle$

Par conséquent, si on pose $\Gamma = \Theta^{-1} P T$, on obtient

$$A = \frac{\langle \nu, \Gamma \rangle}{\|\nu\|}$$

A est donc maximum lorsque Γ et ν sont colinéaires.

$$\nu = \Gamma \Leftrightarrow \Theta P \Lambda = \Theta^{-1} P T \Leftrightarrow \Lambda = P^{-1} (\overline{\Delta})^{-1} P T$$

Donc le Λ qui maximise A est donné par

$$\Lambda = P^{-1} (\overline{\Delta})^{-1} P T \quad (7.17)$$

■

Résolution sous contrainte de positivité

Les racines maximisant notre critère peuvent être négatives numériquement. Toutefois Λ est un vecteur de pondération, ce qui pourrait impliquer que ses composantes soient positives. On résout donc le problème sous contrainte. On doit toutefois s'interroger sur le sens d'un poids négatif pour une échelle. Cela pourrait correspondre à une échelle de relaxation de la gomme et qui donc, au lieu de contribuer au frottement, le diminue.

7.3.3 Application au frottements

On ne démarre le processus qu'à partir de la 3ème échelle. Ceci est dû au programme d'indenteurs. En effet, pour fonctionner, il faut être sûr de détecter des indenteurs sur le profil. Or lorsqu'on considère les signaux reconstruits à partir des basses fréquences, ce n'est pas évident. Précisons que pour obtenir $\mu_{E,i,j}$, le frottement correspondant à l'échelle i du profil j de l'échantillon E , on décompose le profil en somme de profils (de la même manière que dans la section 7.2), chacun correspondant à une fréquence j déterminée. Ensuite on applique la technique d'indenteurs.

Corrélations

On obtient donc de nouvelles valeurs de référence en terme de corrélation, celles correspondant aux échelles 3 à 8 pour les signaux échantillonnés à 10 microns, et aux échelles 3 à 10 pour les autres. Ces valeurs se retrouvent dans la 1ère colonne du tableau suivant sous l'appellation "Orig". Il faut avoir à l'esprit que non seulement on ne considère que les dernières échelles mais que de plus la méthode

de calcul de frottement par indenteurs est non-linéaire. C'est pourquoi ce sont de nouvelles valeurs de référence. Nous sommes déçu par la valeur de référence "orig/signaux débruité" car on ne s'explique pas cette valeur relativement faible. Après notre optimisation, on obtient les corrélations suivantes :

	orig	plus/moins	plus
signaux échantillonnés à 10 microns	0.7155	0.8747	0.7957
signaux échantillonnés à 2.5 microns	0.577	0.9441	0.7284
signaux à 10 microns extrapolés à 2.5 microns	0.7275	0.945	0.8207
signaux à 2.5 microns débruités	0.607	0.9243	0.6617

La colonne "plus/moins" correspond aux corrélations obtenues grâce à nos vecteurs de pondération issus de l'optimisation. La colonne "plus" correspond à celles obtenues après résolution sous contrainte de positivité. La méthode d'extrapolation combinée à la technique multi-échelle donne un excellent résultat.

Vecteurs de pondération

poids obtenus	plus/moins	plus	moins	fréquence	longueur
	1.0793	0.21506	0	échelle 3	320 microns
	3.6703	0.73133	0	échelle 4	160 microns
10 microns	-1.2794	0	-0.30406	échelle 5	80 microns
	-4.0086	0	-0.95265	échelle 6	40 microns
	3.2248	0.64257	0	échelle 7	20 microns
	0.38906	0.077524	0	échelle 8	10 microns

poids obtenus	plus/moins	plus	moins	fréquence	longueur
	1.3391	0.17051	0	échelle 3	320 microns
	6.3315	0.80622	0	échelle 4	160 microns
	-1.8882	0	-0.33562	échelle 5	80 microns
2.5 microns	-4.069	0	-0.72324	échelle 6	40 microns
	1.0572	0.13462	0	échelle 7	20 microns
	4.1518	0.52867	0	échelle 8	10 microns
	-3.3956	0	-0.60356	échelle 9	5 microns
	1.1992	0.152700	0	échelle 10	2.5 microns

poids obtenus	plus/moins	plus	moins	fréquence	longueur
	0.16168	0.02925	0	échelle 3	320 microns
	3.7499	0.67842	0	échelle 4	160 microns
	-2.0222	0	-0.51892	échelle 5	80 microns
extrapolés	0.37814	0.068413	0	échelle 6	40 microns
	0.63128	0.11421	0	échelle 7	20 microns
	-3.3111	0	-0.84965	échelle 8	10 microns
	3.9903	0.72192	0	échelle 9	5 microns
	-0.36589	0	-0.09389	échelle 10	2.5 microns

poids obtenus	plus/moins	plus	moins	fréquence	longueur
	0.76503	0.077791	0	échelle 3	320 microns
	4.1845	0.4255	0	échelle 4	160 microns
	-2.3321	0	-0.223	échelle 5	80 microns
débruités	0.94747	0.096343	0	échelle 6	40 microns
	-3.876	0	-0.37064	échelle 7	20 microns
	8.7663	0.89139	0	échelle 8	10 microns
	0.93471	0.095046	0	échelle 9	5 microns
	-9.4287	0	-0.90161	échelle 10	2.5 microns

Stabilité

Le poids des contributions des échelles au frottement a été obtenu par apprentissage sur l'ensemble des profils de chaque échantillon. La corrélation entre le frottement SRT et les frottements calculés puis pondérés par échelle

On va maintenant regarder quelles sont les échelles qui comptent pour le frottement et si elle sont stables. On effectue cent tirages aléatoires. On prend au hasard $\frac{3}{4}$ des signaux de chacun des échantillons et on effectue la pondération des échelles. Ensuite on compte combien de fois chacune des échelles est considérée comme une échelle qui "compte", c'est à dire que son poids est parmi les 3 plus gros.

échelle	10 microns	2.5 microns	extrapolés	débruité	longueur
3	63	49	12	15	320 microns
4	98	95	84	76	160 microns
5	10	7	5	8	80 microns
6	0	11	32	52	40 microns
7	98	30	61	2	20 microns
8	31	84	3	91	10 microns
9		2	95	11	5 microns
10		22	8	11	2.5 microns

Conclusion : On constate un excellent résultat pour la technique d'interpolation. En effet la première échelle créée (passage de 10 à 5 microns) semble très explicative du frottement. D'autre part le débruitage provoque un décalage d'importance vers les hautes fréquences (entachées de bruit auparavant).

Chapitre 8

Conclusions et Perspectives

8.1 Résultats obtenus

Le premier résultat est simplement la confirmation d'une propriété déjà évoquée dans plusieurs travaux. On se sert d'outils d'analyse fractale pour montrer la fractalité des profils routiers. Bien que ce résultat soit connu, il fallait en avoir la confirmation pour justifier notre étude.

Dans la partie théorique de cette thèse, nous avons proposé une méthode d'estimation de l'exposant de Hölder. Les résultats numériques présentés dans ce chapitre montraient un bon comportement de notre estimateur. Dans la partie appliquée, cette méthode d'estimation combinée à une utilisation appropriée des résultats obtenus (histogrammes des fonctions de Hölder) permet de classer en terme de frottement les échantillons de profils routier dont nous disposons.

Puisque l'exposant de Hölder donne de bons résultats pour la caractérisation des profils, nous avons appliqué naturellement les apports théoriques de cette thèse à l'analyse de la régularité Hölderienne sur les profils routiers. La méthode d'interpolation Hölderienne et ses bonnes propriétés théoriques permet de magnifier la technique de calcul de frottement initiée par Minh-Tan Do sur le modèle de Stéfani. Cet outil semble donc constituer un pré-traitement spécialement adapté aux signaux pour lesquels le capteur n'a pas renvoyé les échelles les plus fines (signaux à 10 microns).

D'autre part, lorsque l'on se place aux limites de résolution du capteur (signaux à 2.5 microns), l'acquisition est perturbée par un bruit. Cet artefact peut être supprimé en appliquant une des techniques de débruitage pour laquelle on a montré dans la partie théorique un bon comportement théorique. Une nouvelle fois, ce pré-traitement des signaux améliore la corrélation entre le frottement calculé et le frottement SRT.

On a donc deux solutions de pré-traitement des profils pour continuer à analyser les mécanismes du frottement entre un pneumatique et une chaussée. Soit on choisit de mesurer des profils avec une relativement faible résolution puis on les interpole, soit on décide de se placer aux limites du capteur puis on effectue un débruitage multifractal Bayésien.

8.2 Perspectives

Les perspectives ouvertes par cette thèse sont premièrement une caractérisation locale du frottement et deuxièmement une caractérisation complète, locale et multi-échelle. Les résultats préliminaires sur la caractérisation locale sont très prometteurs ce qui justifierait une étude plus approfondie. On rappelle dans cette section le modèle original puis on décrit les raffinements conduisant au modèle local. Les premiers résultats sur les profils image optique sont regroupés sur les figures 8.1 et 8.2.1. Ensuite on propose une caractérisation complète d'un profil en terme de frottement et enfin le moyen de synthétiser des profils ayant le frottement calculé souhaité.

8.2.1 Raffinement du modèle de frottement

Modèle original

Le modèle tel qu'il a été conçu par Minh-Tan Do prend en compte un indenteur moyen (voir section 4.3.4). c'est à dire que pour l'implémentation, le cheminement est le suivant :

L'algorithme comprend l'analyse du profil routier et l'extraction des indenteurs. Les angles θ sont moyennés pour obtenir un $\theta_{1,2}$ global et représentatif du profil analysé.

On récupère tous les angles de forme des indenteurs (α) et on assigne à α_1 le vecteur $\alpha/2$. Le vecteur des co-tangentes est ensuite calculé puis moyenné. Nous obtenons donc une co-tangente moyenne de l'angle α_1 , noté \cotan_{α_1} et à partir de cette valeur une tangente "moyenne" (plus précisément, l'inverse de la co-tangente moyenne) \tan_{α_1} . Le calcul de \cotan_{α_2} découle de $\theta_{1,2}$ et de \cotan_{α_1} . De la même manière que pour α_1 , on obtient \tan_{α_2} .

On détermine les largeurs d'indenteur, en simplifiant le problème, c'est à dire que $l_3 = 0$ et $l_1 = l_2 = L$.

La largeur moyenne Li_{moy} est obtenue par la moyenne des distances entre les minima locaux. Le temps de passage $t1$ sur la partie descendante du motif est calculé à partir de \tan_{α_1} et de la largeur moyenne Li_{moy} . Alors que le temps $t2$ de passage sur la partie montante du motif est obtenue par optimisation et à partir de Li_{moy} .

On dispose donc d'un motif moyen et de temps de passage moyens pour caractériser le profil d'analyse en terme de frottements.

Modèle local

On propose un raffinement de la méthode avec pour objectif la détermination d'un frottement local afin de mieux caractériser chaque profil. Par conséquent on va calculer un frottement sur chaque motif du profil. Aucune moyenne n'est pratiquée. Les angles θ , α_1 et α_2 sont mesurés directement ainsi que les largeurs $l1$ et $l2$ qui peuvent désormais varier indépendamment.

Le nouvel algorithme fournit en sortie un vecteur de frottement regroupant les frottements locaux estimés.

On compare sur les figures 8.1 à 8.2.1 les deux méthodes. Pour pouvoir établir une comparaison, on moyenne le vecteur de sortie du raffinement présenté ci-dessus. Par conséquent, on évalue les deux possibilités : 1) Frottement sur un motif moyen ou 2) Moyenne des frottements sur chacun des motifs.

Comme le lecteur pourra le remarquer, les corrélations originales sont quelques peu différentes de celles données dans les chapitres précédents. Ces nuances sont dues à l'adaptation de l'algorithme original afin de traiter les éventuels plateaux de manière plus appropriée au modèle de Stéfani combinée à la prise en compte de motifs entiers (modifications sur les bords).

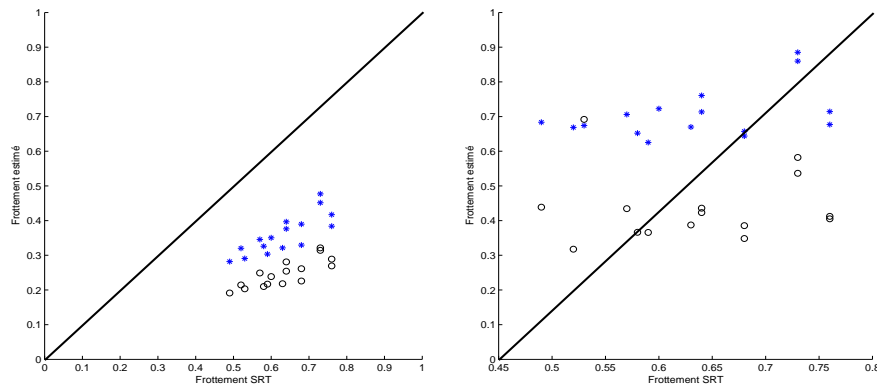


FIG. 8.1: Frottement calculé en fonction du frottement SRT. Les étoiles sont obtenues par la méthode originale et les ronds par le modèle local. A gauche, profils échantillonnés à 10 microns. A droite les profils échantillonnés à 2.5 microns. En terme de corrélation, le nouveau modèle fait passer de 0.8185 à 0.8205 pour les signaux à 10 microns et de 0.4444 à -0.0682 pour les signaux à 2.5 microns.

8.2.2 Combinaison avec le modèle multi-échelle

Dans la section 7.3.2, on décrit une technique donnant les contributions au frottement des échelles de décomposition d'un profil. On propose maintenant de combiner cet outil avec le modèle local dans le but de donner un pavage de l'espace temps-fréquence similaire à celui d'une grille dyadique mais comportant des valeurs de frottements (voir figure 8.2.2).

On obtient ainsi une description complète d'un profil en terme de frottement. Ce type de représentation me paraît parfaitement adaptée pour fonder une technique de classification des profils dont les critères seraient le comportement inter-échelle et le comportement intra-échelle.

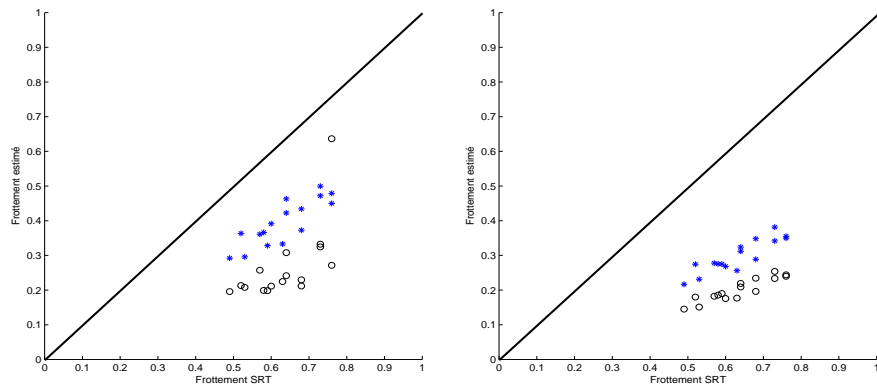


FIG. 8.2: *Frottement calculé en fonction du frottement SRT. Les étoiles sont obtenues par la méthode originale et les ronds par le modèle local. A gauche, profils échantillonnés à 10 microns interpolés. A droite les profils échantillonnés à 2.5 microns débruité. En terme de corrélation, le nouveau modèle fait passer de 0.8483 à 0.6240 pour les signaux interpolés et de 0.8881 à 0.9148 pour les signaux à 2.5 microns débruités.*

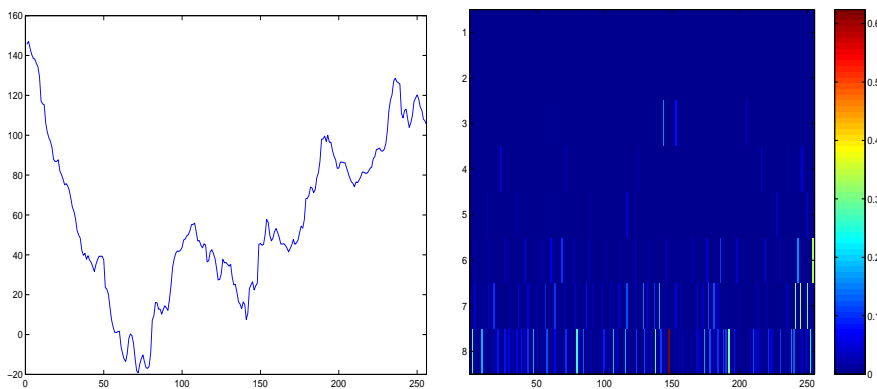


FIG. 8.3: *Combinaison du modèle multi-échelle avec le modèle local. A gauche, profil d'analyse. A droite, représentation des coefficients de frottement dans un pavage temps fréquence. En abscisse les lieux des indenteurs, en ordonnée les échelles.*

On peut se demander alors comment serait constitué un profil maximisant toutes les échelles de frottement. Une fois ce problème résolu, on peut très aisément synthétiser un profil ayant ces propriétés à partir du modèle local.

8.2.3 Synthèse de profils routiers

Les résultats sont présentés seulement sur une échelle mais la technique serait la même sur plusieurs échelles avec la méthode de décomposition présentée dans le chapitre 7.3.

La méthode de calcul de frottement, présentée dans la section 4.3, est liée directement à la géométrie des indenteurs présents sur le profil. Ainsi, on peut réduire une classe de profils à un seul signal, constitué des indenteurs seulement. Tous les profils de cette classe présenteront le même frottement calculé par la méthode d'indenteur. Maintenant, si on modifie l'ordre des indenteurs, l'échelle d'ondulation est modifiée, mais le frottement généré par l'échelle de rugosité reste le même.

On propose dans cette partie de générer des signaux avec l'échantillonnage souhaité à partir de la distribution des demi-angles des indenteurs et des demi-largeurs. Les paramètres d'entrée du modèle peuvent être déterministes ou stochastiques. On note α_1 et α_2 les demi-angles de l'indenteur et l_1 et l_2

les demi-largeurs.

Exemples déterministes

Pour le premier exemple, on génère des indenteurs symétriques.

```
l1(t)=floor(10*abs(rand(1))+1) ;
```

```
l2(t)=floor(10*abs(rand(1))+1) ;
```

```
echant=10 ;
```

```
N=300 ;
```

```
alpha1=ones(1,N) ;
```

```
alpha2=ones(1,N) ;
```

Ce profil est illustré sur la figure 8.4.

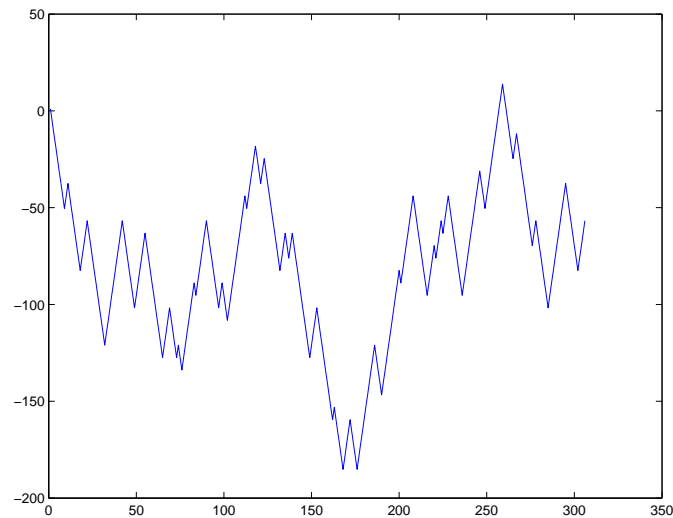


FIG. 8.4: Exemple déterministe de synthèse de profils.

Exemples stochastiques

On a généré deux signaux avec les distributions suivantes (figure 8.5).

```
alpha1=ones(1,N).*abs(rand(1,N)) ;
```

```
alpha2=ones(1,N).*abs(rand(1,N)) ;
```

```
l1(t)=floor(10*abs(rand(1))+1) ;
```

```
l2(t)=floor(10*abs(rand(1))+1) ;
```

A partir des vrais profils

On peut récupérer les valeurs des paramètres de chacun des motifs (en sortie de l'algorithme du modèle local par exemple) puis reconstruire ce profil directement en mode indenteur (figure 8.6, ou après mélange de ces paramètres (par 4-uplet, alors le signal synthétisé appartiendra à la même classe de frottement), par mélanges croisés (alors le frottement change), ou enfin avec la même distribution de ces paramètres.

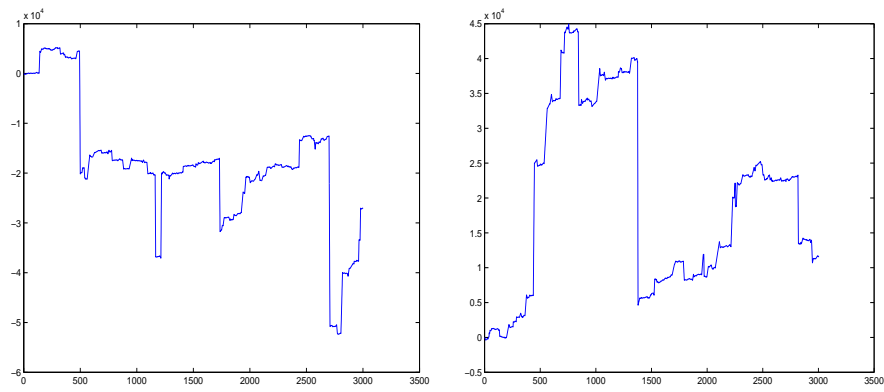


FIG. 8.5: Exemples stochastiques de synthèse de profils. Les deux signaux présentés sont synthétisés à partir de la même distribution des angles et des demi-largeurs des indenteurs.

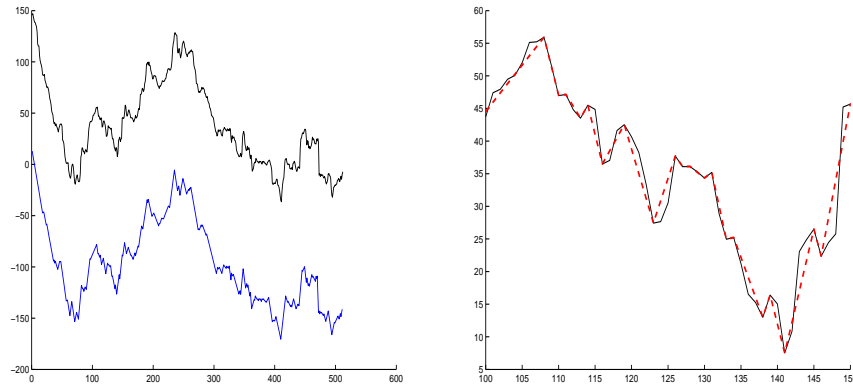


FIG. 8.6: Synthèse de profil en mode indenteur. Zoom et superposition à droite.

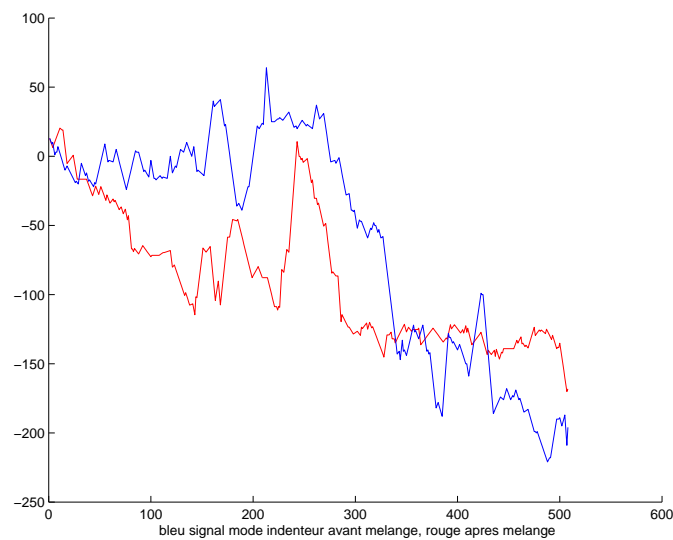


FIG. 8.7: Mélange des paramètres d'angle et de densité puis synthèse de profil.

Bibliographie

- [AB] A. Antoniadis and J. Bigot. Wavelet estimators in nonparametric regression : A comparative simulation study.
- [AS99] F. Abramovich and T. Sapatinas. *Bayesian approach to wavelet decomposition and shrinkage*, volume 141. Bayesian Inference in Wavelet Based Models, Lecture Notes in Statistics, New-York : Springer-Verlag, 1999.
- [AV99] A. Ayache and J. Levy Vehel. *Generalized multifractional Brownian Motion : definition and preliminary results*. Springer, 1999.
- [AV00] A. Ayache and J. Levy Vehel. The generalized multifractional brownian motion. *Statistical Inference for Stochastic Processes 3*, pages 7–18, 2000.
- [AV04] A. Ayache and J. Levy Vehel. On the identification of the pointwise hölder exponent of the generalized multifractional brownian motion. *Stoch. Proc. Appl.*, 111 :119–156, 2004.
- [Aya02] A. Ayache. The generalized multifractional field : a nice tool for the study of the generalized multifractional brownian motion. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 8 :581–601, 2002.
- [BBCI00] A. Benassi, P. Bertrand, S. Cohen, and J. Istas. Identification of the hurst exponent of a step multifractional brownian motion. *Statistical Inference for Stochastic Processes 3*, pages 101–110, 2000.
- [BCI98] A. Benassi, S. Cohen, and J. Istas. Identifying the multifractional function of a gaussian process. *Stat. Prob. letters*, 39 :31–49, 1998.
- [Ber94] J. Beran. *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman and Hall, New York, 1994.
- [BH79] J. Bretagnolle and C. Huber. Estimation des densités : risque minimax. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 47 :119–137, 1979.
- [BK01] S. Baker and T. Kanade. Super-resolution : Reconstruction of Recognition. *Proc. of IEEE-Eurasip Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, pages 349–385, 2001.
- [BM97] L. Birgé and P. Massart. *From model selection to adaptative estimation*. Festschrift for L. Le Cam, Springer, 1997.
- [Coe00] J.F. Coeurjolly. Inference statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires. *thesis, university Joseph Fourier (Grenoble France)*, 2000.
- [CP99] F.M. Candocia and J.C. Principe. Superresolutions of images based on local correlations. *IEEE Tr. Neural Networks*, 10(2) :372–380, March 1999.
- [Dau92] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*, volume 61. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [Del92] G. Delalande. Résistance des granulats au polissage - méthode d’essai par projection. *Bulletin de liaison des laboratoires des ponts et chaussées (BL)*, (177) :73–80, Fevrier 1992.
- [Dij74] IR. A. Dijks. A multifactor examination of wet skid resistance of car tires. *Int. Automobile tire conference, Toronto, Canada*, 1974.

- [DJ94] D. Donoho and I. Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81 :425–455, 1994.
- [DJKP96] D. Donoho, I. Johnstone, G. Kerkyacharian, and D. Picard. Density estimation by wavelet thresholding. *Annals of Statistics*, 24 :508–539, 1996.
- [DL92] R.A. Devore and B. Lucier. Fast wavelet techniques for near optimal image processing. *IEEE Military Communications Conference*, 2–12, 1992.
- [Don94] D. Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans. Inf. Theory* 41, pages 613–627, 1994.
- [DS89] D.L. Donoho and P. B. Starck. Uncertainty Principles and Signal Recovery. *SIAM J. App. Math.*, 49 :906–931, 1989.
- [DVM98] K. Daoudi, J. Levy Vehel, and Y. Meyer. Construction of functions with prescribed local regularity. *Constructive Approximation*, 014(03) :349–385, 1998.
- [DZ01] M.T. Do and H. Zahouani. Frottement pneumatique/chaussée, influence de la microtexture des surfaces de chaussée. *JIFT*, 2001.
- [Fal90] K.J. Falconer. Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications. *John Wiley, New York*, 1990.
- [Fer94] P.J.S.G. Ferreira. Noniterative and faster iterative for interpolation and extrapolation. *IEEE Tr. Sig. Proc.*, 42 :3278–3282, 1994.
- [FJP01] W.T. Freeman, T.R. Jones, and E.C. Pazstor. Example-Based Super-Resolution. *MERL Tech. Rep.*, 30, 2001.
- [GL89] X. Guyon and G. Leon. Convergence en loi des h -variations d'un processus gaussien stationnaire. *Ann. Inst. Poincaré*, 25 :265–282, 1989.
- [GS96] L. Gagnon and F. Drissi Smaili. Speckle noise reduction of airborne SAR images with symetric Daubechies wavelets. *Signal and Data Processing of Small Targerts, Proc. SPIE 2759*, 1996.
- [GSC64] C. E. Giles, B. E. Sabey, and K. H. F. Cardew. Development and performance of the portable skid-resistance testeur. *Road Research Technical Paper, Department of Scientific and Industrial Research*, (66), 1964.
- [GT58] J. A. Greenwood and D. Tabor. The friction of hard sliders on lubricated rubber : The importance of deformation losses. *Proceedings of the Physical Society*, 71 :989–1001, 1958.
- [GV98a] M. Guglielmi and J. Levy Vehel. Analysis and simulation of road profile by means of fractal model. *Conference on Advances in Vehicle Control and Safety (AVCS 98), Amiens*, 1998.
- [GV98b] B. Guiheneuf and J. Levy Vehel. 2-microlocal analysis and applications in signal processing. *International Wavelets Conference, Tangier*, April 1998.
- [Heg69] R. R. Hegmon. The contribution of deformation losses to rubber friction. *Rubber Chemistry technology*, 42 :1122–1135, 1969.
- [Hei97] G. Heinrich. Hysteresis friction of sliding rubbers on rough and fractal surfaces. *Rubber Chemistry and Technology*, 70(1) :1–14, 1997.
- [HKPT98] W. Härdle, G. Kerkyacharian, D. Picard, and A. Tsybakov. *Wavelets, Approximation, and Statistical Applications*. Lecture Notes in Statistics, Springer, 1998.
- [HNKS00] K. Himeno, Y. Nakamura, A. Kawamura, and K. Saito. Skid resistance of asphalt pavement surfaces related to their microtexture. *AIPCR/PIARC*, pages 207–215, 2000.
- [IL97] J. Istas and G. Lang. Quadratic variations and estimation of the local hölder index of a gaussian process. *Ann. Inst. Poincaré*, 4(33) :407–436, 1997.
- [Jaf97] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions, i and ii. *Siam J. Math. Anal.*, 28(4), 1997.
- [Jaf00] S. Jaffard. On lacunarity wavelet series. *The An. of Appl. Prob.*, 10 (1) :313–319, 2000.

- [Jafar] S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, To appear.
- [JM96] S. Jaffard and Y. Meyer. Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 123(587), 1996.
- [KH00] M. Klüppel and G. Heinrich. Rubber friction on self affine road tracks. *Rubber Chemistry Technology*, 73 :578–606, 2000.
- [Kol40] A. Kolmogorov. Wienerische spiralen und einige andere interessante kurven in hilbertsche raum. *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS*, 26 :115–118, 1940.
- [KPT96] G. Kerkycharian, D. Picard, and K. Tribouley. L_p adaptive density estimation. *Bernoulli*, 2 :229–247, 1996.
- [Lep90] O. Lepskii. On a problem of adaptative estimation in gaussian white noise. *Theory Prob. Appl.*, 35 :454–466, 1990.
- [Lep91] O. Lepskii. Asymptotically minimax adaptative estimation i : Upper bounds. optimal adaptive estimates. *Theory Prob. Appl.*, 36 :682–697, 1991.
- [Lep92] O. Lepskii. Asymptotically minimax adaptative estimation ii : Statistical models without optimal adaptation. adaptive estimates. *Theory Prob. Appl.*, 37 :433–468, 1992.
- [LV03a] P. Legrand and J. Levy Vehel. local regularity-based interpolation. *WAVELET X, Part of SPIE's Symposium on Optical Science and Technology, San Diego, CA, proceedings of SPIE*, 5207, August 3-8, 2003.
- [LV03b] P. Legrand and J. Levy Vehel. Local regularity - based image denoising. *ICIP03, Spain, IEEE International Conference on Image Processing*, September 14-17, 2003.
- [LV03c] P. Legrand and J. Levy Vehel. Interpolation de signaux par conservation de la régularité hölderienne. *GRETSI03, 19 th GRETSI Symposium on Signal and Image Processing, Paris*, september 8-11, 2003.
- [LVD04] P. Legrand, J. Levy Vehel, and M.T Do. Fractal Properties and Characterization of Road Profiles. *FRACTAL 2004, Complexity and Fractals in Nature, 8th International Multidisciplinary Conference, Vancouver*, 4-7 April 2004.
- [Man97a] B. Mandelbrot. *Fractal and Scaling in finance*. Springer, 1997.
- [Man97b] B. Mandelbrot. *Fractal Geometry of Nature*. Springer, 1997.
- [Mey90] Y. Meyer. *Ondelettes et Opérateurs*. Hermann, Paris, 1990.
- [Mey97] Y. Meyer. Wavelets, Vibrations and Scalings. *American Mathematical Society, CRM Monograph Series*, 9, 1997.
- [Mic01] Michelin. *Le pneu, l'adhérence*. Société de technologie Michelin, 2001.
- [MN68] B. Mandelbrot and J. Van Ness. Fractionnal brownian motion : fractional noises and applications. *Siam Review*, 10 :422–437, 1968.
- [Nik75] S.M. Nikol'skii. *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*. Springer, New York, 1975.
- [Oli91] C.J Oliver. Information from SAR images. *J. Phys. D*, pages 1493–1514, 1991.
- [Pap75] A. Papoulis. A new algorithm in spectral analysis and bandlimited extrapolation. *IEEE Tr. Circuits Syst.*, 22(9) :735–742, 1975.
- [Pee75] J. Peetre. New thoughts on besov spaces. Technical Report 1, Duke University, Durham, NC, 1975.
- [PV95] R.F. Peltier and J. Levy Vehel. Multifractionnal brownian motion : definition and preliminary results. Technical Report 2645, INRIA, 1995.
- [Rad94] Z. Rado. A study of road texture and its relationship to friction, phd thesis. *The Pennsylvania State University*, 1994.

- [RV98] F. Roueff and J. Levy Vehel. A regularization approach to fractional dimension estimation. *Fractals conference, Malta*, 1998.
- [RV99] F. Ruggeri and B. Vidakovic. A Bayesian decision theoretic approach to wavelet thresholding. *Statistica Sinica*, 9(1) :183–197, 1999.
- [SP61] D. Slepian and H.O. Pollak. Prolate spheroidal functions, Fourier analysis and uncertainty - I. *Bell Syst. Tech. J.*, 40 (1) :43–63, 1961.
- [SS82] M.I. Sezan and H. Stark. Image restoration by the method of convex projection : Part II - applications and numerical results. *IEEE Tr. Med. Imag.*, 1(2) :95–101, 1982.
- [ST94] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes*. Chapman and Hall, 1994.
- [Sto82] C.J. Stone. Optimal global rates of convergence for nonparametric regression. *Annals of Statistics*, 10 :1040–1053, 1982.
- [SV02] S. Seuret and J. Levy Vehel. The local hölder function of a continuous function. *Comput. Harmon. Analysis*, 13(3) :263–276, 2002.
- [SWL70] B. E. Sabey, T. Williams, and G. N. Lupton. Factors affecting the friction of tires on wet roads. *SAE int. automobile safety, conf compendium. Society of automotive engineers*, 1970.
- [Tri95] C. Tricot. *Curves and Fractal Dimension*. Springer-Verlag, 1995.
- [TY81] P. Taneerananon and W. O. Yandell. Microtexture roughness effect on predicted road-tyre friction in wet conditions. *Wear*, (69) :321–337, 1981.
- [VD96] J. Levy Vehel and K. Daoudi. Generalized ifs for signal processing. *IEEE DSP workshop, Loen, Norway*, September 1-4 1996.
- [Veh95] J. Levy Vehel. Fractal Approaches in Signal Processing. *Fractals*, 4 :755–775, 1995.
- [Veh98] J. Levy Vehel. Introduction to the multifractal analysis of images. *Fractal Image Encoding and Analysis*, 1998.
- [VL93] R.A. De Vore and G. Lorentz. *Constructive Approximation*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [VL01] J. Levy Vehel and E. Lutton. Evolutionary signal enhancement based on hölder regularity analysis. *EVOIASP2001, LNCS 2038*, 2001.
- [VL03] J. Levy Vehel and P. Legrand. Bayesian multifractal denoising. *ICASSP 2003, IEEE internat. conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Hong Kong*, April 6-10 2003.
- [VL04] J. Levy Vehel and P. Legrand. Signal and Image Processing with FracLab. *FRACTAL 2004, Complexity and Fractals in Nature, 8th International Multidisciplinary Conference, Vancouver*, 4-7 April 2004.
- [VP88] R. De Vore and V. Popov. Interpolation of besov spaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1988.
- [VR97] J. Levy Vehel and R. H. Riedi. Fractional brownian motion and data traffic modeling : The other end of the spectrum. *Fractals in Engineering, Eds. J. Lévy Véhel, E. Lutton, C. Tricot*, Springer, 1997.
- [VR01] B. Vidakovic and F. Ruggeri. BAMS method : Theory and simulations. *The Indian Journal of Statistics*, 63, 2001.
- [VS04] J. Levy Vehel and S. Seuret. The 2-microlocal Formalism. *Fractal geometry and Applications : A jubilee of Benoit Mandelbrot, Proc. Sympos. Pure Math.*, 72-2 :153–215, 2004.
- [YS94] W. O. Yandell and S. Sawyer. Prediction of tire-road friction from texture measurements. *Transportation Research Record, TRB, National Research Council, Washington D.C.*, (1435) :86–91, 1994.
- [YW82] D.C. Youla and H. Webb. Image restoration by the method of convex projections : Part I - theory. *IEEE Tr. Med. Imag.*, 1 (2) :81–94, 1982.