



**HAL**  
open science

# Développement de méthodes numériques multi échelle pour le calcul des structures constituées de matériaux fortement hétérogènes élastiques et viscoélastiques

Anh Binh Tran

► **To cite this version:**

Anh Binh Tran. Développement de méthodes numériques multi échelle pour le calcul des structures constituées de matériaux fortement hétérogènes élastiques et viscoélastiques. Autre. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1123 . tel-00657270

**HAL Id: tel-00657270**

**<https://theses.hal.science/tel-00657270v1>**

Submitted on 6 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

ANNÉE 2011

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paris-Est**

Spécialité : **Génie civil**

préparée au

**Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle**

rattaché à l'École Doctorat SIE

Titre

**Développement de méthodes numériques multi échelle pour le  
calcul des structures constituées de matériaux fortement  
hétérogènes élastiques et viscoélastiques**

Présentée par

**Anh Binh TRAN**

Soutenue le 13 Octobre 2011 devant le jury

M. Patrice CARTRAUD	Rapporteur
M. Frédéric FEYEL	Rapporteur
M. Marc GEERS	Président
M. Samuel GENIAUT	Invité
M. Qi-Chang HE	Directeur de thèse
M. Julien SANAHUJA	Examinateur
M. Charles TOULEMONDE	Examinateur
M. Julien YVONNET	Examinateur







# Remerciements

Au terme de ce travail, c'est avec émotion que je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce projet.

Je tiens à remercier en tout premier lieu Monsieur Qi-Chang HE qui a dirigé cette thèse dans la continuité de mon stage de Master 2 de recherche avec énormément de patience et beaucoup d'enthousiasme et qui m'a témoigné sa confiance et apporté son aide scientifique. Sans lui, cette thèse n'aurait pu être menée jusqu'à son terme.

Je tiens à remercier Monsieur Julien YVONNET de m'avoir encadré durant cette thèse et d'avoir toujours été disponible pour des discussions scientifiques très enrichissantes.

Je voudrais adresser mes remerciements à Monsieur Charles TOULEMONDE et Monsieur Julien SANAHUJA qui ont co-encadré cette thèse. En me proposant un sujet très intéressant, ils m'ont permis d'enrichir mes connaissances dans le domaine du génie civil et plus particulièrement des enceintes de confinement des centrales nucléaires.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur Marc GEERS d'avoir présidé mon jury de thèse. Je remercie très chaleureusement Messieurs Patrice CARTRAUD et Frédéric FEYEL qui ont accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse, et qui ont pris le temps d'examiner avec une grande attention mon travail en apportant des critiques profondes et constructives. Je voudrais également remercier Monsieur Samuel GENIAUT pour l'honneur qu'il m'a fait d'être dans ce jury de thèse.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du laboratoire MSME et du groupe T25 du département MMC d'EDF R&D qui m'ont offert un environnement de travail très agréable. Avec eux, j'ai passé trois années qui resteront un souvenir marquant de ma vie.

J'adresse un grand merci à mes parents, pour leurs encouragements et leur soutien depuis mon enfance. Il est évident que, sans eux, je n'aurais jamais réussi à arriver jusque là. Enfin, c'est vers ma femme TRIEU Thi Duyen, mon fils Hoang Viet et ma fille Khanh Huyen que je me tourne. Je leurs dédie ce mémoire pour m'avoir supporté et encouragé pendant ces trois années, d'avoir enduré mes horaires tardifs et mes sautes d'humeur : bref, merci pour tout !



# Résumé

Les bétons sont des matériaux composites à la microstructure complexe et constitués de phases dont le contraste des propriétés physiques et mécaniques peut être très grand. Ces matériaux posent des difficultés aux approches macroscopiques lorsqu'il s'agit de maîtriser leurs comportements effectifs comme celui du fluage. Malgré ces difficultés, EDF doit se doter d'outils permettant de modéliser de façon prédictive l'évolution des bétons des ouvrages en service ou de prescrire le cahier des charges des bétons de nouvelles installations. Ayant pour objectif de contribuer à la résolution de ce problème, ce travail de thèse développe des méthodes numériques multi échelle pour le calcul des structures constituées de matériaux fortement hétérogènes élastiques ou viscoélastiques.

Plus précisément, ce travail de thèse comporte trois parties. Dans la première partie, nous nous intéressons à un composite constitué d'une matrice élastique renforcée par des inclusions élastiques dont les formes géométriques peuvent être quelconques et dont la fraction volumique peut être importante. Pour modéliser ce matériau composite, une première approche numérique consistant à combiner la méthode des éléments finis étendus (XFEM) standard et la méthode "level-set" (LS) classique est d'abord utilisée. Nous montrons que cette première approche numérique, qui apparaît naturelle, induit en fait plusieurs artefacts numériques non rapportés dans la littérature, conduisant en particulier à une convergence non optimale par rapport à la finesse du maillage. Par suite, nous élaborons une nouvelle approche numérique ( $\mu$ -XFEM) basée sur la description des interfaces par des courbes de niveaux multiples et sur un enrichissement augmenté permettant de prendre en compte plusieurs interfaces dans un même élément. Nous démontrons au travers des comparaisons et exemples que la convergence est améliorée de manière substantielle par rapport à la première approche numérique.

Dans la deuxième partie, nous proposons une nouvelle méthode pour calculer les déformations différées des structures composées de matériaux hétérogènes viscoélastiques linéaires. Contrairement aux approches proposées jusqu'à présent, notre méthode opère directement dans l'espace temporel et permet d'extraire de manière séquentielle le comportement homogénéisé d'un matériau hétérogène viscoélastique linéaire. Concrètement, les composantes du tenseur de relaxation effectif du matériau sont d'abord obtenues à partir d'un volume élémentaire représentatif et échantillonnées au cours du temps. Une technique d'interpolation et un algorithme implicite permettent ensuite d'évaluer numériquement la réponse temporelle du matériau par le biais d'un produit de convolution. Les déformations différées des structures sont enfin calculées par la méthode des éléments finis classique. Différents tests sont effectués pour évaluer la qualité et l'efficacité de la méthode proposée, montrant que cette dernière permet d'avoir un gain en temps de l'ordre de plusieurs centaines par rapport aux approches de type éléments finis multi niveaux.

La troisième partie est consacrée à l'étude de la structure de l'enceinte de confinement d'un réacteur nucléaire. Nous prenons en compte les quatre niveaux d'échelles associés à la pâte de ciment, au mortier, au béton et à la structure en béton précontraint par des câbles en acier. La méthode numérique d'homogénéisation élaborée dans la seconde partie est appliquée afin de construire les lois de comportement pour chacun des trois premiers niveaux. Les résultats obtenus présentent un intérêt pratique pour résoudre des problèmes posés par EDF.

**Mots clés :** Matériaux composites, élasticité, viscoélasticité, XFEM, level-set, homogénéisation numérique, modélisation multi échelle, béton, structures en béton



# Abstract

**Title : Development of multiscale numerical methods for the computation of structures consisting of highly inhomogeneous elastic and viscoelastic materials**

Concretes are composite materials having complex microstructure and consisting of phases whose physical and mechanical properties can exhibit high contrast. Difficulties arise when macroscopic approaches are used to evaluate their effective behaviors such as the creeping one. Despite these difficulties, EDF has to be endowed with tools allowing to model in a predictive way the evolution of concrete structures in service or to prescribe the specifications of concrete for new facilities. Aimed to contribute to solving this problem, this thesis develops multi-scale numerical methods for the computation of structures made of highly heterogeneous elastic or viscoelastic materials.

More precisely, this thesis comprises three parts. In the first part, we focus on a composite consisting of an elastic matrix reinforced by elastic inclusions which may be of any geometric shapes and whose volume fraction can be significant. To model this composite material, a first numerical approach which combines the standard extended finite element method (XFEM) and the classical level-set method (LSM) is used. We show that this numerical approach, which appears natural, leads in fact to several numerical artefacts having not been reported in the literature, giving rise in particular to non-optimal convergence with respect to the fineness of the mesh. In view of this, we develop a new numerical approach ( $\mu$ -XFEM) based on the description of the interfaces with multiple level sets and augmented enrichment so as to account for multiple interfaces in a single finite element. We demonstrate through examples and benchmarks that  $\mu$ -XFEM significantly improves convergence compared to the first numerical approach.

In the second part, we elaborate a new method to compute the creeping of structures formed of linearly viscoelastic heterogeneous materials. Unlike the approaches proposed up to now, our method operates directly in the time space and allows to sequentially extract the homogenized properties of a linearly viscoelastic heterogeneous material. Precisely, the components of the effective relaxation tensor of the material is first obtained from a representative volume element and sampled over time. An interpolation technique and an implicit algorithm are then used to numerically evaluate the time-dependent response of the material through a convolution product. The creeping of structures is finally calculated by the classical finite element method. Various tests are performed to assess the quality and effectiveness of the proposed method, showing that it can give a gain of time of the order of several hundreds compared to approaches such as multi-level finite element.

The third part of the thesis is devoted to the study of the structure of containment of a nuclear reactor. We consider four scale levels associated with cement paste, mortar, concrete and a pre-stressed concrete structure with steel cables. The numerical method of homogenization developed in the second part is applied to construct the constitutive equations for each of the first three scale levels. The results thus obtained are useful for solving some practical problems posed by EDF.

**Keywords** : Composite materials, elasticity, viscoelasticity, XFEM, level-set, numerical homogenization, multi-scale modeling, concrete, concrete structures

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>I. Introduction</b>	<b>1</b>
1. Contexte	1
2. Objectifs	2
3. Homogénéisation numérique des matériaux linéaires élastiques	2
4. Homogénéisation numérique des matériaux viscoélastiques linéaires	5
5. Organisation de la thèse	8
<b>II. Homogénéisation des matériaux linéaires élastiques fortement hétérogènes, avec fractions volumiques importantes et inclusions proches : une approche XFEM modifiée</b>	<b>11</b>
1. Introduction	11
2. La méthode XFEM/Level-Set	12
2.1. La méthode Level-set	12
2.2. La méthode XFEM	14
2.2.1. Approximation XFEM	14
2.2.2. Discontinuités	15
2.2.3. Intégration numérique	17
3. Artefacts numériques	18
3.1. Percolation artificielle	18
3.2. Distorsion amplifiée de la géométrie des phases	19
3.3. Défaut d'enrichissement	21
4. Méthode XFEM avec fonctions Level-set multiples ( $\mu$ -XFEM)	23
4.1. Approximation de $\mu$ -XFEM	23
4.2. Stockage des fonctions Level-set	25
4.3. Assemblage de la matrice de rigidité	26
4.4. Intégration numérique	26
4.5. Formulation du problème élastostatique	29
4.5.1. Formulation forte	29
4.5.2. Formulation faible	30
5. Traitement des artefacts numériques par la méthode $\mu$ -XFEM	30
5.1. Percolation artificielle	30
5.2. Distorsion artificielle des interfaces	32
5.3. Défaut d'enrichissement	32
5.4. Remarques	33
6. Exemples numériques	34

6.1. Interphase unidimensionnelle . . . . .	35
6.2. Cas-test 2D avec inclusions proches . . . . .	37
6.3. Exemple d'échantillon 2D contenant 100 inclusions . . . . .	39
6.4. "VER" 3-D avec 50 inclusions . . . . .	40
6.5. "VER" 3D avec 2024 inclusions . . . . .	41
7. Comparaison entre la méthode $\mu$ -XFEM et les autres méthodes numérique . . . . .	42
8. Conclusion . . . . .	46

### **III. Une nouvelle méthode numérique simplifiée pour le calcul des structures hétérogènes viscoélastiques linéaires 49**

1. Introduction . . . . .	49
2. Problème viscoélastique à l'échelle microscopique . . . . .	50
2.1. Viscoélasticité linéaire : modèle de Maxwell généralisé 1D . . . . .	50
2.1.1. Fonction de relaxation . . . . .	50
2.1.2. Convolution intégrale . . . . .	52
2.1.3. Discrétisation temporelle et algorithme explicite microscopique . . . . .	52
2.2. Viscoélasticité linéaire 3D : modèle de Maxwell généralisé . . . . .	57
2.2.1. Fonction de relaxation . . . . .	57
2.2.2. Convolution intégrale . . . . .	58
2.2.3. Discrétisation temporelle et algorithme explicite microscopique . . . . .	58
2.3. Formulation forte pour un problème local . . . . .	60
2.4. Formulation faible et procédure de FEM . . . . .	61
3. Problème viscoélastique à l'échelle macroscopique . . . . .	61
3.1. Valeurs discrètes du tenseur de relaxation effectif . . . . .	62
3.2. Représentation continue du tenseur de relaxation effectif . . . . .	63
3.3. Choix des fonctions d'interpolation et d'extrapolation . . . . .	65
3.4. Discrétisation temporelle et algorithme macroscopique . . . . .	66
3.5. Formulation forte . . . . .	67
3.6. Formulation faible et procédure éléments finis (FEM) . . . . .	67
4. Résumé de l'algorithme . . . . .	68
4.1. Calculs à l'échelle micro . . . . .	68
4.2. Calcul à l'échelle macro . . . . .	70
5. Exemples numériques . . . . .	71
5.1. Test de validation à l'échelle microscopique . . . . .	72
5.1.1. VER contenant une inclusion elliptique . . . . .	72
5.1.2. VER contenant 100 inclusions circulaires . . . . .	75
5.2. Calcul d'une structure à deux échelles . . . . .	76
5.2.1. VER contenant une inclusion elliptique . . . . .	76
5.2.2. RVE contenant 100 inclusions circulaires . . . . .	80
5.3. Barrage tridimensionnel . . . . .	80
6. Conclusions . . . . .	85

### **IV. Une approche à quatre échelles pour le calcul de la réponse en fluage sur 60 ans d'une enceinte interne de confinement d'un réacteur de centrale nucléaire 89**

1. Introduction . . . . .	89
---------------------------	----

2. Modélisation .....	90
2.1. Géométrie et maillage de la structure .....	90
2.2. Câbles de précontrainte .....	92
2.3. Chargement .....	99
2.3.1. Conditions aux limites pour le béton .....	99
2.3.2. Tension des câbles .....	101
2.3.3. Effets de la gravité.....	101
2.3.4. Scénarios de chargement .....	102
3. Comportement du béton en fluage : une approche multi échelle à quatre niveaux	102
3.1. Échelle 1 : pâte de ciment .....	103
3.2. Échelle 2 : mortier .....	106
3.3. Échelle 3 : béton .....	107
3.4. Échelle 4 : Structure .....	109
4. Résultats .....	110
4.1. Scénario 1 de chargement .....	110
4.2. Scénario 2 de chargement .....	110
4.3. Temps de calcul .....	115
5. Conclusions et perspectives .....	116
5.1. Conclusions.....	116
5.2. Perspectives .....	116
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>117</b>
<b>Annexe : Intégration numérique pour éléments bi et tridimensionnels</b>	<b>121</b>
1. Éléments tridimensionnels hexaédriques et prismatiques.....	121
2. Intégration numérique en deux dimensions .....	121
2.1. Élément de référence triangulaire .....	121
2.2. Élément de référence carré .....	123
3. Intégration numérique en trois dimensions .....	124
3.1. Élément de référence hexaédrique .....	124
3.2. Élément de référence tétraédrique.....	124
3.3. Élément de référence prismatique .....	125
<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>



# Chapitre I

## Introduction

### 1 Contexte

EDF premier exploitant électro-nucléaire mondial, gère en France un parc de production composé de 58 unités de production réparties sur 19 sites. Le parc produit en moyenne 410 TWh par an et assure plus de 80% de la production d'électricité d'EDF en France.

Historiquement, les chocs pétroliers de 1973 et 1979 ont mené à des modifications de la politique énergétique française. En vue de pouvoir faire face à cette crise pétrolière, le gouvernement français a alors développé massivement le programme nucléaire civil afin de réduire la dépendance énergétique du pays vis à vis des hydro-carbures. EDF a ensuite choisi d'adopter pour les filières REP 1300 et 1500 MWe le concept des enceintes à double paroi, afin de garantir la confinement du réacteur.

La paroi externe en béton armé protège le réacteur nucléaire des agressions externes, qu'elles soient d'origine naturelle (séisme, tempête) ou accidentelle (explosion, chute d'avion). La paroi interne en béton de 1,2m d'épaisseur est la troisième barrière (après la gaine du combustible et le circuit primaire fermé) empêchant la dispersion radioactive en cas d'accident nucléaire. Elle est dimensionnée pour résister à une pression interne de 5 bars à la température de 140°C, ce qui correspond à l'accident de dimensionnement APRP (Accident par Perte de Réfrigérant Primaire). Pour éviter la fuite de radioéléments qui peut se produire à travers les fissures, la paroi interne est mise en précontrainte par un réseau de câbles. La prédiction de la perte de la précontrainte est très importante pour la garantie de l'étanchéité des enceintes de confinement. Une des principales causes de la perte de précontrainte est l'évolution des déformations en fluage du béton.

Des études sur les déformations différées du béton ont été mises en place depuis longtemps, notamment sur les effets des sollicitations biaxiales sur ces déformations, que ce soit à EDF [9, 53] ou ailleurs [3, 110]. En se basant sur des approches macroscopiques, ces études proposent de nouveaux modèles hydromécaniques intégrant de nombreux phénomènes (séchage, fissuration, fluage, retrait, ...). Ces modèles sont basés sur ce que l'on connaît des mécanismes physico-chimiques, et sont compatibles avec de nombreuses observations expérimentales. En vue de pouvoir prédire le comportement du béton, de nombreuses hypothèses concernant les mécanismes de séchage, fissuration, fluage et retrait sont adoptées. Les paramètres du modèle sont ensuite identifiés en se basant sur les données expérimentales obtenues par des essais sur des éprouvettes du matériau. L'identification des paramètres et l'étude de la sensibilité au choix des paramètres des modèles ont été menées [103, 104]. Cependant, ceci peut s'avérer très coûteux et nécessite des essais sur une durée très longue. De plus, ces méthodes ne

tiennent pas compte de la morphologie complexe de la microstructure, ni des propriétés des composants constitutifs du matériau. Des approches d'homogénéisation semi-analytiques ont été également développées. Le Roy [110] a réalisé une étude sur une morphologie trisphère, dans un milieu infini, pour un calcul des amplitudes de fluage propre et de retrait endogène. Le [72] a estimé les propriétés viscoélastiques effectives du matériau viscoélastique en utilisant le schéma auto-cohérent généralisé, celui de Mori-Tanaka et la transformation inverse de Laplace-Carson. Toutefois, la prédiction du fluage du béton prenant en compte sa microstructure reste actuellement un enjeu majeur scientifique.

Ces dernières années, la performance des ordinateurs croît considérablement, réduisant ainsi le temps de calculs et permettant d'effectuer des études de plus en plus complexes. Récemment, le développement des méthodes d'homogénéisation numériques, telles que la méthode FE2 [40] ou celle utilisant la transformation inverse de Laplace [54, 55], permet de déterminer les propriétés effectives des matériaux hétérogènes dans un certain nombre de cas réalistes. Cependant, le coût de calculs pour des microstructures complexes reste très élevé et le développement de méthodes efficaces est encore une préoccupation majeure.

## 2 Objectifs

L'objectif de ce travail est de développer des outils numériques permettant de prédire le comportement mécanique des structures constituées de matériaux viscoélastiques linéaires fortement hétérogènes en tenant compte de leurs microstructures. Ainsi, ce travail contribuera à la résolution de certains problèmes industriels posés par EDF et plus particulièrement celui de fluage de l'enceinte interne de confinement des réacteurs nucléaires. Pour atteindre cet objectif, le problème d'homogénéisation numérique d'un milieu élastique linéaire fortement hétérogène avec une microstructure complexe sera étudié dans un premier temps. Cette étude servira à déterminer les propriétés élastiques effectives du béton. Les résultats obtenus pour des morphologies microstructurales réalistes du béton sont encourageants. Dans un deuxième temps, le comportement viscoélastique effectif d'un matériau constitué de phases viscoélastiques linéaires sera d'abord déterminé et la réponse temporelle des structures formées du matériau viscoélastique hétérogène sera ensuite calculée. Les outils numériques issus de cette seconde étude seront appliqués à des structures simples. La dernière partie consistera à appliquer les approches établies et les outils numériques élaborés pour déterminer les déformations différées d'une structure d'enceinte réelle en béton précontraint.

## 3 Homogénéisation numérique des matériaux linéaires élastiques

Le béton est un matériau couramment utilisé pour la construction de structures et d'ouvrages, tels que des bâtiments et des barrages. Il est constitué de phases dont le contraste des propriétés physiques et mécaniques est souvent très fort. Par exemple, l'homogénéisation en fluage d'un béton conduit à déterminer l'élasticité effective du béton pour un contraste variable entre le module de Young des granulats et celui, fictif (dans l'espace de Laplace), de la pâte. Ce contraste peut varier de 3 à 300 fois pour une période de 1 an à 100 ans [112]. Plus

le béton est âgé, c'est à dire que plus il flue, plus le contraste fictif est élevé. La description de la microstructure doit d'autant plus raffinée que ce contraste est élevé [62]. Ce dernier point met en difficulté les approches macroscopiques lorsqu'il s'agit de déterminer les propriétés effectives du matériau. De plus, ayant une morphologie complexe, l'homogénéisation analytique de ce matériau est une tâche impossible. Les méthodes numériques permettent de résoudre le problème associé à certaine tailles de maillages  $h$ . Cependant, l'extrapolation pour obtenir les résultats correspondants à la valeur  $h = 0$  nécessite plusieurs calculs associés aux différentes valeurs de  $h$ . De plus, les méthodes numériques proposées exhibent actuellement un coût de calcul trop important pour les microstructures complexes comme le béton. Le développement d'une méthode numérique pertinente pour obtenir une extrapolation efficace est encore une question scientifique difficile. En raison de l'utilisation très répandue du béton, la prédiction et l'optimisation des propriétés effectives de ce matériau à partir des données sur les propriétés de ses phases constitutives et sur sa microstructure sont d'un intérêt industriel majeur.

Des méthodes analytiques ont été proposées pour estimer ou encadrer les propriétés effectives des matériaux hétérogènes. Les méthodes d'estimation incluent le schéma auto-cohérent [18, 58, 73] et celui de Mori-Tanaka [50, 95, 127]. Ces méthodes font appel aux solutions de base pour une inclusion de forme géométrique simple noyée dans une matrice infinie [22, 23, 37, 38, 49, 66, 67, 76, 79]. La différence entre ces estimations est autant plus grande que le contraste des propriétés des phases est fort [62, 112]. Les résultats d'encadrement comprennent les bornes de Voigt, Reuss, Hashin, Hashin-Shtrikman. Ces bornes dépendent du choix des champs admissibles et parfois des hypothèses explicites ou tacites faites sur la morphologie. Cependant, les méthodes d'estimation ou d'encadrement se limitent à des microstructures simples loin d'être réalistes ou ne sont pas suffisamment précises.

Les techniques d'homogénéisation numériques permettent de surmonter les limitations susmentionnées. Mais, des stratégies numériques efficaces doivent être développées afin d'éviter les coûts de calcul trop importants en terme de mémoire et du temps de calcul, en particulier quand des modèles complexes 3D sont en question. Plusieurs approches numériques ont été proposées au cours des dernières décennies. On peut mentionner d'abord la méthode des différences finies où les degrés de liberté sont situés sur les noeuds d'une grille cartésienne et la dérivation est discrétisée par différences finies [112]. Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre. Cependant cette méthode considère un raffinement uniforme sur le VER, ce qui peut entraîner la nécessité d'un grand nombre de degrés de liberté pour atteindre la précision requise. On peut citer ensuite une autre directe et coûteuse qui consiste à mailler explicitement toutes les hétérogénéités (voir [4, 5, 63]). La technique de raffinement adaptatif du maillage [26, 31] peut être utilisée ensuite sur ce cadre pour atteindre une meilleure description locale des champs pour les microstructures simples. Cependant, pour les microstructures tridimensionnelles complexes comme celles du béton, l'utilisation de cette technique peut conduire probablement à un maillage trop fin ou raffiné uniformément. Ces approches nécessitent un logiciel générant un maillage conforme 3D et demandent beaucoup de temps de calcul pour les géométries complexes 3D. Une autre méthode consiste à projeter les propriétés des phases sur un maillage non-conforme, sans représenter explicitement les interfaces (voir par exemples [120, 137]). Une procédure pour obtenir des bornes ainsi que des estimations des propriétés élastiques effectives est proposée. Cependant, cette procédure est limitée aux formes simples des inclusions. Sanahuja et al [112] ont proposé récemment



une procédure améliorée pour traiter des formes complexes des inclusions en utilisant la méthode de Level-set. En vue de pouvoir éviter la consommation importante du mémoire vive de la méthode FEM, l'implantation de cette méthode dans le cadre des volumes finis pour le problème de conductivité thermique est également effectuée dans ses travaux. En évitant les difficultés liées à l'élaboration du maillage conforme, cette méthode nécessite des maillages fins afin de pouvoir atteindre une description raisonnable des champs locaux dans le voisinage des interfaces. La transformation de Fourier est aussi utilisée pour obtenir les propriétés effectives des matériaux composites [16, 20, 24, 86, 96, 100]. Elle permet de convertir une équation intégrale en un système d'équations linéaires dont les inconnues sont des coefficients de Fourier. Par exemple, Suquet et al. [86] et Ying Chen [20] ont développé le tenseur des déformations et le tenseur d'Eshelby en séries de Fourier. Néanmoins, le taux de convergence de la méthode est conditionné par le choix du milieu de référence et un mauvais choix peut conduire à la divergence de la procédure itérative.

Plus récemment, la méthode des éléments finis étendus (eXtended Finite Element Method - XFEM) [7, 92] a été proposée et elle peut être utilisée pour le traitement de microstructures complexes ainsi que pour la détermination des propriétés effectives des matériaux hétérogènes. XFEM consiste à enrichir l'approximation des éléments finis classiques via des fonctions d'enrichissement [44, 93]. Cette méthode permet de traiter divers problèmes. Dolbow [85] a appliqué XFEM pour résoudre les problèmes liés à l'évolution des phases qui sont classiquement résolus par la génération d'un nouveau maillage conforme pour chaque pas du temps. En choisissant la fonction de Heaviside comme la fonction d'enrichissement, on a réussi à modéliser les interfaces imparfaites [29, 132, 133] ainsi qu'à traiter des problèmes liés aux fissures [27, 65, 92, 116]. En remplaçant cette fonction par une fonction Heaviside régularisée [11, 12, 105], XFEM est parvenue à modéliser les sauts de champs qui ne se produisent pas brutalement au voisinage des interfaces. Récemment, XFEM a été utilisée pour prescrire des contraintes sur l'interface [6, 59, 90, 98]. Les problèmes liés aux "blending" éléments ont été également résolus en corrigeant l'approximation de l'élément par la construction d'une fonction de transition rampe dans ces éléments [43, 52]. Différentes stratégies ont été mises en place pour obtenir plus de précision. Une stratégie consiste à multiplier la fonction d'enrichissement par un polynôme de certain ordre [21, 32, 82] tandis qu'une autre stratégie utilise les fonctions de forme d'ordre élevé telles que les fonctions hiérarchiques [92, 117] ou quadratiques [114, 126]. En particulier, cette dernière méthode décrit les interfaces par une approximation d'ordre plus élevé, en approchant la géométrie sur une grille différente par celle utilisée pour l'approximation des éléments finis [74]. Celle-ci permet de rendre plus précise l'intégration numérique dans les éléments enrichis. Moës [91] a proposé un enrichissement permettant de traiter les problèmes liés aux interfaces parfaites [115, 134]. Dans cette approche, la fonction de level-set est utilisée pour décrire implicitement les interfaces. Cette méthode permet de calculer les propriétés effectives des matériaux ayant une microstructure complexe et arbitraire sans nécessiter un maillage conforme.

Dans les matériaux complexes avec une forte fraction volumique d'inclusions, telles que le béton, la construction du maillage explicite de toutes les hétérogénéités est une tâche difficile et coûteuse voire impossible. Ceci provient d'une large gamme de dimensions caractéristiques et de la proximité des hétérogénéités. La méthode XFEM/level-set est potentiellement intéressant pour s'affranchir de ces difficultés. Cependant, l'utilisation d'une seule fonction de level-set pour construire la fonction d'enrichissement induit de nombreux phénomènes

indésirables. Dans la première partie de cette thèse, nous mettons en évidence différents artefacts numériques liés à la présence de deux inclusions très proches l'une de l'autre quand la méthode XFEM/level-set classique est adoptée. Cette dernière souffre d'une description insuffisante des champs locaux, ce qui induit en particulier une mauvaise convergence par rapport à la taille des maillages. Pour éliminer ces inconvénients, nous proposons une nouvelle version de la méthode XFEM/level-set classique. Dans cette nouvelle version, chaque inclusion est associée à une fonction level-set et les degrés de liberté supplémentaires sont introduits pour les nœuds dont le support est coupé par plus d'une interface. Une description locale des fonctions de level-set est introduite pour éviter le stockage trop coûteux de toutes les valeurs des fonctions level-set. Une technique simple pour l'intégration numérique dans ce cadre est également proposée. Par rapport à la méthode XFEM/level-set classique, notre méthode offre les avantages suivants : (a) les artefacts dus à la proximité des inclusions sont supprimés ; (b) la convergence par rapport au nombre de degrés de liberté (ddls) est significativement améliorée ; (c) chaque inclusion peut être formée d'un matériau différent.

## 4 Homogénéisation numérique des matériaux viscoélastiques linéaires

Le béton est un matériau composite constitué du mortier et des granulats. Pour des raisons environnementales et économiques évidentes, ces granulats proviennent souvent de carrières proches du futur ouvrage. Le changement des propriétés des granulats selon la zone géographique et le changement de la morphologie du béton construisent la diversité de ce type de matériau. De plus, le béton n'est pas simplement un matériau hétérogène élastique, car il exhibe en général des déformations différées qui croissent lorsqu'il est soumis à une contrainte constante. Ces derniers points posent des difficultés lors qu'on vise à déterminer la réponse en fluage des structures en bétons. La prédiction du fluage du béton est actuellement un enjeu majeur en génie civil. Par exemple, la réduction de l'amplitude de fluage du béton permet de diminuer l'endommagement associé [81]. Le fluage fait diminuer la tension des câbles de précontrainte et induit les problèmes de fissuration qui influencent au fonctionnement des réacteurs nucléaires. Cependant, les essais de relaxation ou de fluage des bétons sont extrêmement coûteux et peuvent durer des mois à des années [36, 51, 57, 78] et irréalisables pour tous les types de bétons. Même aux cas où les données expérimentales sont obtenues pour une courte durée, l'extrapolation de ces résultats pour toute durée de vie de structures est un travail difficile et délicate. Il donne des incertitudes et des résultats relativement dispersés, et dépend largement des modèles du matériau choisis. En même temps, le progrès dans la conception des structures ou des ouvrages en béton ou en béton précontraint à haute performance exige des modèles prédictifs et des méthodes de simulation performantes qui prennent en compte à la fois la microstructure du béton et des données expérimentales à l'échelle de la pâte de ciment. Pour ces raisons, nous nous intéressons au problème de la prédiction des propriétés effectives des matériaux viscoélastiques hétérogènes.

Les méthodes analytiques d'homogénéisation des milieux hétérogènes viscoélastiques linéaires ont été proposées d'abord par Hashin [54, 55], qui exploite le principe de correspondance entre l'élasticité linéaire et la viscoélasticité linéaire en utilisant la transformation de Laplace. Cette technique permet de transformer le comportement linéaire viscoélastique

à celui élastique symbolique sur lequel les schémas d'homogénéisation classiques peuvent être appliqués directement. Les propriétés viscoélastiques effectives sont ensuite déduites par l'inversion de la transformation de Laplace-Carson. A part certains cas simples pour lesquels il est possible de procéder exactement cet opérateur en calculant analytiquement l'intégrale de Bromwich définie dans l'espace transformé  $f(t) = 1/(2i\pi) \int f^*(p) e^{pt}/p dp$  [14], cette inversion est réalisée numériquement, dans la plupart des cas, de manière approchée [56, 75, 107, 125]. Cependant, la précision et le coût de calcul de cette inversion numérique restent des problèmes n'ayant pas été complètement résolus. Les schémas d'homogénéisation peuvent être appliqués dans l'espace transformé sont ceux auto-cohérents [13, 15, 71, 80, 111, 123], de Mori-Tanaka [17, 34, 41, 42, 124] ou asymptotique [10, 60, 128]. La méthode auto-cohérente, mise en oeuvre au départ pour les polycristaux, consiste à considérer chaque phase du matériau hétérogène comme une inclusion ellipsoïdale en interaction avec une matrice, homogène et infinie qui possède un comportement identique à celui du Milieu Homogène Équivalent Recherché (MHER). Cette technique est d'assimiler les interactions entre une inclusion et toutes les autres, celles entre le MHER et chaque inclusion. Elle transforme un problème à N phases à N problèmes élémentaires à une phase. Le schéma auto-cohérent est une méthode de résolution implicite, c'est-à-dire que les propriétés du MHER, étant inconnues du problème, sont exprimées en fonction d'elles-mêmes en plus d'autres variables du problème. Étant différente avec la méthode auto-cohérente présentée ci-dessus, la méthode Mori-Tanaka suppose que chaque inclusion est noyée dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice. Cette hypothèse conduit à une résolution explicite du problème. La méthode d'homogénéisation asymptotique est une méthode très utilisée, introduite par Bensoussan [10]. Cette méthode est basée sur un développement asymptotique des champs par rapport à un paramètre représentant le rapport entre les échelles impliquées. Cette technique fournit les propriétés effectives globales ainsi que les valeurs des champs locaux, comme par exemple les contraintes et les déformations. Toutefois, l'application de ces méthodes à des microstructures complexes réalistes ayant un fort contraste entre les propriétés mécaniques des phases comme celles des bétons est problématique à cause des hypothèses restrictives sous-jacentes des méthodes analytiques sur la microstructure et sur les lois constitutives locales. Notons que, dans [83], le problème local a été résolu par la méthode de la cellule généralisée (generalized cell method). Cependant, la méthode est limitée à des morphologies simples bi-dimensionnelles de la cellule [106].

Pour éviter les difficultés liées à l'inversion de la transformée de Laplace, des méthodes numériques alternatives opérant dans le domaine temporel ont été proposées. Lahellec et Suquet [70] ont élaboré une approche dans laquelle les variables internes liées aux déformations visqueuses sont utilisées. Leur méthode opère directement dans l'espace-temps réel en ramenant l'intégration des lois d'évolution des variables internes à un problème variationnel incrémental. Ce dernier est approché par un problème de stationnarité en suivant la procédure variationnelle de Ponte-Castañeda [99] et résolu analytiquement pour des composites périodiques bidimensionnels. Ce travail constitue une avancée notable pour l'homogénéisation des milieux viscoélastiques. Ricaud et Masson [109] ont proposé une autre piste en se basant sur l'extension de la série de Prony-Dirichlet combinée avec la notion des variables internes. Coulibaly [25] a suggéré une nouvelle formulation intégrale prenant en compte les équations des champs et les lois constitutives locales et il a résolu le problème d'homogénéisation à l'aide de l'approximation d'auto-cohérence.

Dans [40], une autre méthode a été proposée, conduisant à une procédure numérique à deux échelles, dans laquelle chaque point d'intégration d'une structure est associé à un Volume élémentaire Représentatif (VER) et, à chaque pas de temps, les déformations macroscopiques en tout point d'intégration sont considérées comme les conditions aux limites pour le problème local défini sur le VER du matériau hétérogène constituant. La solution numérique de ce problème donne les contraintes effectives du point d'intégration à l'échelle macroscopique. Cette idée a été introduite originalement par Renard et Marmonier [108], puis utilisée par différents auteurs [68, 69, 94, 130]. Le principal avantage de cette méthode est de s'affranchir totalement des limitations sur les lois de comportement locales, la morphologie des inclusions, voir une possible évolution de la microstructure. Cependant, cette méthode induit d'importants coûts de calcul et nécessite beaucoup de mémoire pour le stockage des variables internes, même si des progrès ont été réalisés grâce aux moyens de calcul parallèle [40] ou par la réduction de modèle [94, 130].

Parmi des autres méthodes dans le contexte des méthodes d'homogénéisation semi-analytiques ou numériques des matériaux composites non-linéaires, on peut mentionner l'analyse des champs de transformation non uniforme (Non uniform TFA) proposée par Michel et Suquet [88]. Étant une extension récente de la TFA [35], la méthode s'appuie sur une décomposition du champ local de déformation anélastique en une somme finie de champs de transformation (mode plastique). Cette approche permet de prendre en compte des hétérogénéités dans les estimations des propriétés macroscopiques de composites à constituants non linéaires [45–48, 88]. Une autre méthode assez populaire est la méthode de la cellule ou celle généralisée proposées par Aboudi et Papley [1, 2, 102]. La méthode consiste à discrétiser la cellule de base en quelques sous-domaines (rectangulaire en 2D et parallélépipède en 3D) ou en un nombre quelconque des sous-domaines dans sa version généralisée. La continuité et l'équilibre des sous-domaines sont satisfaits dans un sens moyen. Le comportement effectif est exprimé comme une relation constitutive entre la moyenne de contrainte, de déformation et la déformation plastique en conjonction avec le tenseur de rigidité élastique du composite. La transformation de Fourier (FFT) est aussi utilisée dans ce contexte [86, 96, 97]. Cette méthode permet d'utiliser directement des images microstructure des matériaux hétérogènes et d'éviter les difficultés liées à la création des maillages de toutes hétérogénéités dans le cas de microstructures complexes. Des schémas alternatifs pour traiter les cas de fort contraste de propriétés des phases sont ensuite proposés [39, 87].

Un état de l'art des différentes méthodes multi-échelle pour le matériau composite peut être trouvé dans [64]. Nous enrichissons cet état de l'art par une nouvelle méthode numérique multi-échelle séquentielle qui est proposée très récemment par Yvonnet et al [129, 131], permettant de traiter une large classe de problèmes non linéaires hétérogènes en petites déformations ou grandes déformations. Dans cette méthode, le comportement n'est pas calculé par couplage entre les échelles, mais par l'identification de fonctionnelles permettant de construire la loi de comportement macroscopique, à partir de calculs préliminaires sur un VER. Étant intéressé par cette idée, nous développons ensuite cette méthode pour l'homogénéisation des matériaux viscoélastiques linéaires et pour les calculs multi-échelle des structures hétérogènes constituées de ces matériaux.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous présentons une méthode simple et efficace pour calculer la réponse temporelle des structures constituées des matériaux viscoélastiques linéaires hétérogènes et soumises à des chargements arbitraires. Contrairement à la plupart

des approches décrites dans la littérature, la méthode proposée opère directement dans le domaine temporel. Ainsi, la définition des variables internes peut être évitée et les calculs se réalisent séparément aux échelles microscopique et macroscopique. La loi constitutive macroscopique prend la forme d'une intégrale de convolution faisant intervenir un tenseur de relaxation effectif. Afin de déterminer numériquement ce tenseur, un VER de la microstructure est d'abord choisi. Les calculs préliminaires sont ensuite effectués numériquement sur le VER en se basant sur un algorithme efficace [61, 113, 118]. Les composantes du tenseur de relaxation effectif sont déterminées et stockées à chaque pas de temps. A l'échelle macroscopique, une représentation continue du tenseur de relaxation effectif est obtenue dans le domaine temporel en interpolant leurs valeurs discrètes à l'aide de fonctions splines. La convolution intégrale représentant la relation contrainte-déformation macroscopique est numériquement évaluée. Cette procédure permet de déterminer le comportement effectif des matériaux linéaires viscoélastiques hétérogènes avec des phases de morphologie quelconque. Afin de calculer la réponse temporelle d'une structure à l'échelle macroscopique, un algorithme implicite est enfin proposé. Cet algorithme est intégrable facilement aux codes éléments finis classiques ou étendus.

Par rapport aux approches existantes, notre approche offre les avantages suivants : (a) la méthode fonctionne directement dans le domaine temporel et évite les inconvénients des techniques basées sur la transformée de Laplace ; (b) aucune variable interne macroscopique n'est introduite dans l'algorithme ; (c) contrairement aux approches multi-niveaux dont les calculs sont effectués simultanément, la méthode proposée permet de séparer les calculs à l'échelle microscopique de ceux à l'échelle macroscopique. De plus, une fois que les valeurs des composantes de tenseur de relaxation effectif sont déterminées et stockées à l'étape préliminaire, plusieurs structures peuvent être calculées sans résoudre à nouveau les problèmes locaux sur le VER ; (d) la mise en œuvre de l'approche proposée est simple. La méthode peut être facilement intégrée aux outils numériques existants.

## 5 Organisation de la thèse

Le travail de thèse comporte trois parties. La première partie s'intitule "Homogénéisation des matériaux linéaires élastiques fortement hétérogènes, avec fractions volumiques importantes et inclusions proches : une approche XFEM modifiée". Après quelques rappels sur la méthode XFEM/level-set standard, les artefacts dus à la présence des inclusions qui sont proches les unes des autres par rapport à la taille moyenne des éléments sont décrits et détaillés. En vue de pouvoir éviter ces artefacts, les causes et les conséquences de chaque artefact sont étudiées. Une nouvelle version de la méthode XFEM/level-set permettant de supprimer tous ces artefacts est ensuite proposée. Celle-ci consiste à enrichir l'approximation de XFEM/level-set standard et à utiliser plusieurs fonctions de level-set dans la description des inclusions. Le traitement des artefacts avec cette approche est ensuite détaillé. Enfin, le gain et la robustesse de la méthode proposée par rapport à la méthode XFEM/level-set standard sont illustrés au travers d'exemples numériques. En particulier, le gain de la méthode proposée par rapport à la méthode XFEM standard est de 3.7 fois en terme du nombre de degrés de liberté pour une erreur donnée de 5% et 2.5 fois pour une erreur de 2.5%.

La deuxième partie est consacrée à l'homogénéisation numérique des matériaux viscoélas-

tiques linéaires hétérogènes. Dans cette partie, les éléments de base concernant le modèle de Maxwell généralisé sont d'abord présentés. Une synthèse des algorithmes pour la résolution du problème viscoélastique local à l'échelle micro est fournie. Ensuite, une nouvelle méthode pour calculer la réponse temporelle d'une structure constituée d'un matériau viscoélastique est élaborée. Cette nouvelle méthode comporte trois étapes : (i) détermination des valeurs discrètes du tenseur de relaxation effectif ; (ii) construction d'une représentation continue temporelle de ce dernier ; (iii) élaboration d'un algorithme explicite et intégration de cet algorithme dans la méthode des éléments finis classique. Enfin, des comparaisons de temps de calculs et de consommation de mémoire vive entre cette nouvelle approche et une technique de type calcul multi-niveau ( $FE^2$  [40]) sont effectuées à travers des exemples numériques.

La troisième partie est dédiée à l'application industrielle où une enceinte réelle de confinement en béton précontraint d'un réacteur nucléaire est considérée. Après la description détaillée de la structure, les techniques de modélisation sont présentées. La méthode proposée dans cette partie est ensuite utilisée pour déterminer les déformations différées de la structure. Ces calculs se réalisent sur quatre échelles : (a) échelle de la pâte de ciment où les paramètres du modèle de Maxwell généralisé sont identifiés en se basant sur des données expérimentales ; (b) échelle du mortier pour lequel les composantes du tenseur de relaxation effectif sont déterminées numériquement sur un VER constitué d'une pâte de ciment et de sables ; (c) échelle du béton dont les composantes du tenseur de relaxation effectif sont calculées sur un VER du béton constitué d'un mortier et de gros granulats ; (d) échelle de la structure dont le fluage est déterminé.



# Chapitre II

## Homogénéisation des matériaux linéaires élastiques fortement hétérogènes, avec fractions volumiques importantes et inclusions proches : une approche XFEM modifiée

### 1 Introduction

Dans ce chapitre, nous mettons en évidence plusieurs artefacts numériques induits par la méthode des éléments finis étendus (XFEM) [7, 92] dans le cadre de la modélisation des microstructures complexes, en particulier dans le cas où les inclusions sont proches les unes des autres. Ce type de configuration est fréquente pour la modélisation des microstructures compactes de type béton, question centrale dans ce travail de thèse. Les artefacts mentionnés, qui peuvent affecter de manière significative la convergence et la précision de la solution numérique du problème, sont les suivants :

- Une percolation artificielle entre les inclusions proches,
- Une distorsion amplifiée des géométries approximées des phases,
- Un défaut d’enrichissement.

L’impact de ces artefacts sur les propriétés effectives dans les applications à l’homogénéisation est d’autant plus fort que le contraste entre les phases constituantes est élevé. Ce cas est d’un grand intérêt pour EDF lors qu’il s’agit du phénomène de fluage du béton puisque l’homogénéisation par transformée de Laplace-Carson requiert des calculs élastiques avec un contraste fictif entre inclusions et matrice de plus en plus élevé avec le temps.

Pour pallier ces défauts, nous proposons une version modifiée de la méthode XFEM/Level-Set. Les ingrédients de cette nouvelle technique sont (a) l’utilisation d’une fonction level-set pour chaque inclusion du domaine et (b) un enrichissement augmenté pour les nœuds des éléments coupés par plusieurs interfaces. Afin d’éviter le stockage trop coûteux de toutes les fonctions level-set, une description locale de celles-ci est introduite. Une solution simple pour effectuer l’intégration numérique dans ce cadre est également proposée. Nous montrons au travers d’exemples et de comparaisons numériques que cette technique permet de supprimer les artefacts et d’améliorer de façon significative la convergence pour un même nombre de degrés de liberté par rapport à la méthode XFEM classique. Des applications à l’homogé-



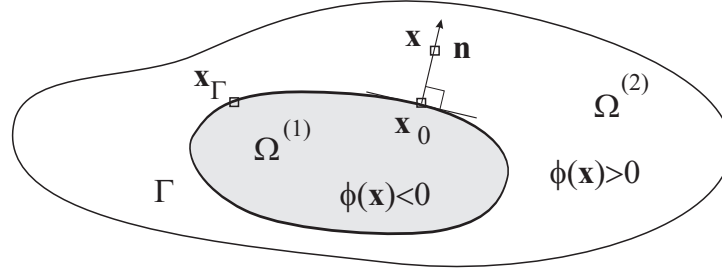


FIGURE II.1: Domaine contenant une interface  $\Gamma$ . La fonction level-set  $\phi(\mathbf{x})$  vaut zéro sur l'interface  $\Gamma$  et prend des valeurs négatives dans le domaine  $\Omega^{(1)}$ , positives dans  $\Omega^{(2)}$ .

néisation de matériaux de type béton serviront à illustrer la méthode et à tester la qualité des solutions obtenues au travers de cas 2D et 3D.

Ce chapitre est composé de six parties. Nous rappelons premièrement les bases de la méthode XFEM/Level-Set dans la section 2. Nous décrivons ensuite dans la section 3 les différents artefacts induits par la méthode dans le cas où les inclusions d'une microstructure sont proches les unes des autres en comparaison avec la taille moyenne des éléments. Dans la section 4, la technique proposée, baptisée méthode XFEM avec level-set multiples ( $\mu$ -XFEM) est décrite. Le travail a fait l'objet d'un article publié [121]. Le traitement des artefacts avec cette approche est détaillé dans la section 5. Enfin, les exemples numériques sont présentés dans la section 6 dans lesquels les méthodes XFEM et  $\mu$ -XFEM sont comparées.

## 2 La méthode XFEM/Level-Set

### 2.1 La méthode Level-set

La méthode level-set [101] a été introduite à l'origine pour décrire des interfaces mobiles. L'idée est de représenter une surface dans l'espace comme l'iso-valeur d'une fonction  $\phi(x, t)$  dans un espace de dimension supérieure. Ce concept est classique dans le cadre de la géométrie différentielle (voir par exemple Do Carmo [19], Thorpe [119]). Dans le cas des interfaces statiques, les deux idées coïncident. Dans le cadre de cette thèse, nous ne considérerons que les interfaces statiques.

L'idée est de décrire une interface  $\Gamma(x) \subset \mathbb{R}^D$  à partir d'une fonction  $\phi : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (\text{II.1})$$

Un exemple important de cette fonction est la fonction de distance signée définie au point  $\mathbf{x}$  par :

$$\phi(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \min_{\mathbf{x}_\Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma\| = s(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|, \quad (\text{II.2})$$

où  $s(\mathbf{x}) = \pm 1$ , le signe de la fonction étant négatif dans  $\Omega^{(1)}$  et positif dans  $\Omega^{(2)}$  (voir la figure II.1) et  $\mathbf{x}_0$  est un point appartenant à l'interface  $\Gamma$  et satisfaisant  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \min_{\mathbf{x}_\Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma\|$ .

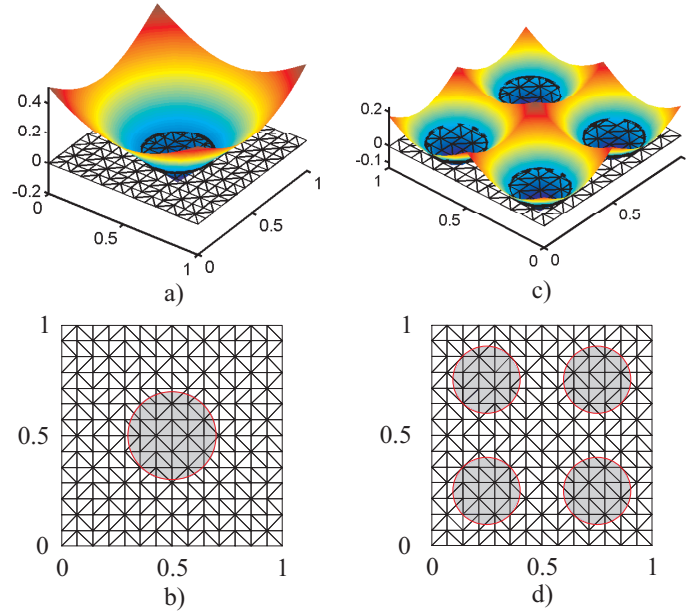


FIGURE II.2: a) Fonction level-set pour une interface circulaire ; b) Maillage et interface approximée associée à la fonction level-set ; c) Fonction Level-set définissant quatre interfaces circulaires ; d) Maillage et interfaces approximées associées à la fonction level-set.

Nous définissons le vecteur normal unitaire  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$  de l'interface  $\Gamma$  au point  $\mathbf{x}_0$  et orienté de  $\Omega^{(1)}$  à  $\Omega^{(2)}$ . Le signe  $s(\mathbf{x})$  dans Eq. (II.2) est exprimé par :

$$s(\mathbf{x}) = \text{sign}(\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) = \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}. \quad (\text{II.3})$$

Pour plusieurs interfaces  $\Gamma_k$  avec  $k = 1, 2, \dots, N_{int}$ , on peut définir des fonctions  $\phi^k(\mathbf{x})$  associées aux domaines  $\Omega^{(1)k}$  telles que

$$\phi^k(\mathbf{x}) = s^k(\mathbf{x}) \min_{\mathbf{x}_{\Gamma_k}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\Gamma_k}\| = s^k(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^k\|, \quad (\text{II.4})$$

où  $\Omega^{(1)} = \bigcup_k \{\Omega^{(1)k}\}$  et

$$s^k(\mathbf{x}) = \text{sign}(\mathbf{n}(\mathbf{x}_0^k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^k)). \quad (\text{II.5})$$

La fonction level-set est finalement donnée par

$$\phi(\mathbf{x}) = \text{Min}_{k=1,2,\dots,N_{int}} \phi^k(\mathbf{x}). \quad (\text{II.6})$$

Un cas particulier simple largement utilisé dans ce travail est le cas de plusieurs inclusions sphériques en 3D ou circulaires en 2D. L'équation (II.6) se réduit alors à :

$$\phi(\mathbf{x}) = \min_{k=1,2,\dots,n_c} \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c^k\| - r^k \}, \quad (\text{II.7})$$

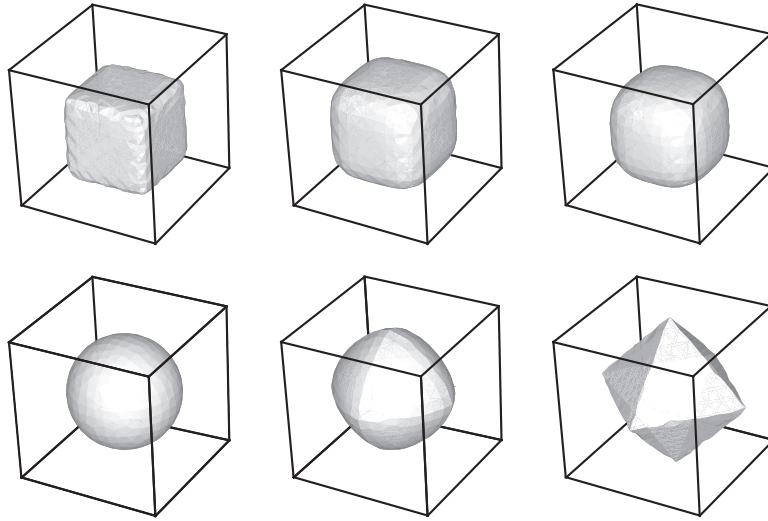


FIGURE II.3: Diverses formes géométriques pouvant être définies par une fonction level-set.

où  $n_c$  est le nombre d'inclusions,  $\mathbf{x}_c^k$  est la coordonnée du centre de l'inclusion  $k$  dont  $r^k$  est le rayon. Une extension de cette définition pour des formes plus générales, depuis l'ellipsoïde aux parallélépipède (voir la figure II.3), peut être trouvée par exemple dans Yvonnet et al. [132]. Les figures II.2.a et II.2.c illustrent la fonction level-set pour une inclusion et pour quatre inclusions, respectivement. Cette fonction est positive à l'extérieur des inclusions, négative à l'intérieur des inclusions et vaut zéro à l'interface entre matrice et inclusions.

## 2.2 La méthode XFEM

La modélisation d'un milieu hétérogène contenant des interfaces par la méthode des éléments finis classique (Finite Elements Method - FEM) nécessite un maillage conforme dont les nœuds coïncident avec les interfaces. La construction d'un maillage conforme est une opération coûteuse et délicate, particulièrement dans le cas de microstructures tridimensionnelles complexes et compactes. Ces difficultés sont amplifiées en présence d'interfaces mobiles ou de propagation de fissures. La méthode XFEM, introduite par Belytschko et Black [7] et Moës et al. [92], permet de s'affranchir de ces difficultés. Cas particulier de la méthode de la partition de l'Unité [84], la méthode consiste à enrichir l'approximation éléments finis à l'aide de fonctions analytiques discontinues associées à des inconnues nodales supplémentaires.

### 2.2.1 Approximation XFEM

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ , ( $D$  étant la dimension de l'espace) un domaine ouvert. L'approximation XFEM est donnée par :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{S}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in \mathcal{S}^e} N_j^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j. \quad (\text{II.8})$$

Dans cette équation,  $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^*$  ( $\mathbb{N}^*$  étant l'ensemble des nombres naturels positifs) est l'ensemble des indices des nœuds du maillage,  $\omega_i = \text{supp}(n_i)$  est le support du nœud  $n_i$ , qui

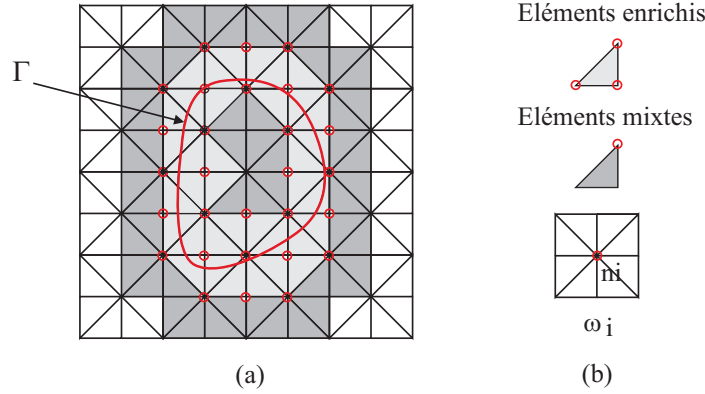


FIGURE II.4: a) Interface  $\Gamma$  dans un maillage non-conforme ; b) nœud  $n_i$  enrichi dont le support  $\omega_i$  est coupé par une ou plusieurs interfaces (désigné par un cercle rouge). Les éléments enrichis et les éléments mixtes sont indiqués en gris clair et gris foncé, respectivement.

se compose de l'union de tous les éléments connectés au nœud  $n_i$  (voir la figure II.4.b),  $\mathbf{u}_i$  sont les inconnues nodales de l'approximation FEM classique,  $\mathbf{a}_j$  sont des degrés de liberté supplémentaires pour les nœuds des éléments coupés par les interfaces et  $N_i(\mathbf{x})$  et  $N_j^*(\mathbf{x})$  sont des fonctions de forme éléments finis et d'enrichissement, non nécessairement identiques. Dans ce travail nous choisirons néanmoins  $N_i(\mathbf{x}) = N_j^*(\mathbf{x})$ . L'ensemble des nœuds  $\mathcal{S}^e$  est défini par :

$$\mathcal{S}^e = \{j | j \in \mathcal{S}, \omega_j \cap \Gamma \neq \emptyset\}, \quad (\text{II.9})$$

où  $\Gamma$  est l'ensemble des interfaces et  $\psi(\mathbf{x})$  est une fonction d'enrichissement qui exprime la discontinuité dans un élément. L'approximation (II.8) permet d'introduire des discontinuités dans les éléments sans nécessiter de maillage conforme.

Si la fonction d'enrichissement  $\psi(\mathbf{x})$  ne s'annule pas sur le bord du domaine  $\tilde{\Omega}$ , défini comme l'union de tous les éléments enrichis, les éléments voisins des éléments coupés par l'interface sont partiellement enrichis : certains de leurs nœuds possèdent des inconnues supplémentaires et d'autres non (voir figure II.4). Ces éléments sont désignés dans la littérature par le terme de "blending elements". Ceci peut provoquer des problèmes de convergence [115] et des difficultés pour imposer les conditions aux limites si les nœuds enrichis se trouvent sur le bord du domaine. Plusieurs solutions ont été proposées pour contourner ce problème. Dans [91], Moës et al. ont introduit une fonction d'enrichissement  $\psi(\mathbf{x})$  s'annulant sur le bord de  $\tilde{\Omega}$  [91]. Une autre possibilité est d'utiliser une approximation corrigée [43], [52], où une fonction de transition rampe est construite dans les éléments mixtes.

### 2.2.2 Discontinuités

Deux types de discontinuités peuvent être rencontrées : les discontinuités dites "faibles" et "fortes". Dans le cadre mécanique, les premières concernent les dérivées des champs de déformations, en maintenant la continuité des champs des déplacements. Le deuxième type de discontinuités est associé au discontinuités sur les déplacements.

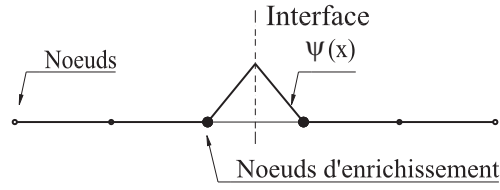


FIGURE II.5: Fonction d'enrichissement  $\psi(\mathbf{x})$  dans le cas 1D pour une discontinuité faible.

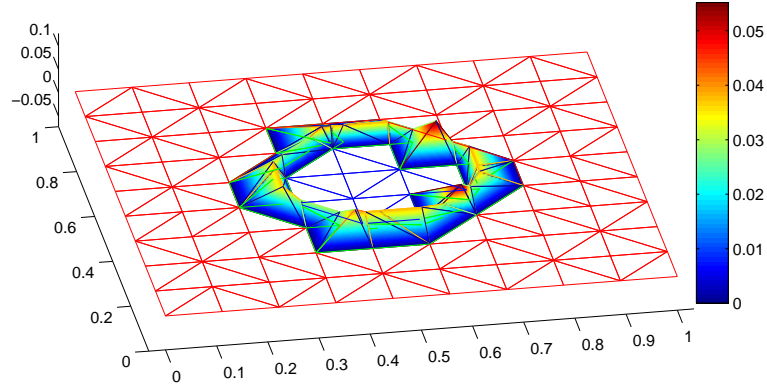


FIGURE II.6: Fonction d'enrichissement  $\psi(\mathbf{x})$  dans le cas 2D pour une discontinuité faible.

### Discontinuités faibles

Au travers d'une discontinuité faible, les champs de déplacements et de déformations vérifient les relations suivantes : la continuité des déplacements

$$[[\mathbf{u}]] = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{II.10})$$

et la discontinuité des déformations selon la condition d'Hadamard :

$$[[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})]] = \mathbf{a} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{a} \quad \text{sur } \Gamma. \quad (\text{II.11})$$

Dans le cadre de la méthode XFEM, le champ de déplacements vérifie ces deux conditions si la fonction d'enrichissement  $\psi(\mathbf{x})$  vérifie les mêmes conditions. Un choix possible pour  $\psi(\mathbf{x})$  permettant d'éviter les problèmes de "blending elements" est le suivant [91] :

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_i |\phi_i| N_i(\mathbf{x}) - \left| \sum_i \phi_i N_i(\mathbf{x}) \right|, \quad (\text{II.12})$$

où  $\phi_i$  est la valeur nodale de la fonction level-set.

Une illustration de cet enrichissement est donné dans la figure II.5 pour le cas 1D et dans la figure II.6 pour le cas 2D. On peut observer que la fonction  $\psi(\mathbf{x})$  fait intervenir un changement de pente au passage de l'interface, s'annule sur le bord du domaine  $\tilde{\Omega}$ , et devient nulle dans les éléments non coupés par l'interface.

### Discontinuité forte

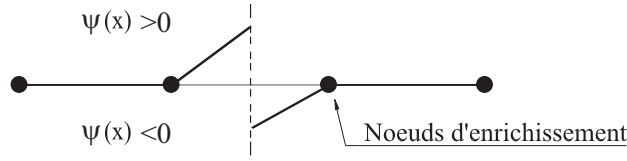


FIGURE II.7: Fonction d'enrichissement  $\psi(\mathbf{x})$  pour une discontinuité forte dans le cas 1D.

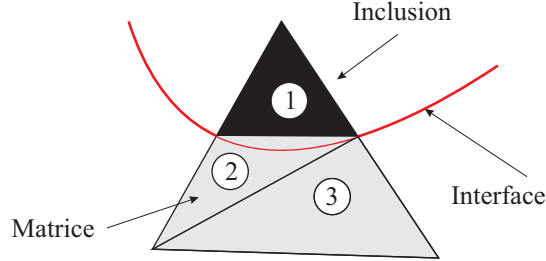


FIGURE II.8: Subdivision d'un élément enrichi à l'aide de plusieurs éléments triangulaires. Les sous-éléments représentés en noir et gris appartiennent au matériau des inclusions et de la matrice, respectivement.

Les discontinuités fortes impliquent une discontinuité du champ de déplacement :

$$[[\mathbf{u}]] \neq 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (\text{II.13})$$

Pour vérifier cette condition, la fonction d'enrichissement doit elle-même être discontinue, en faisant intervenir par exemple une fonction de Heaviside  $H(x)$  [44] :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{S}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in \mathcal{S}^e} N_j^*(\mathbf{x}) (H(\phi(\mathbf{x})) - H(\phi_i)) \mathbf{a}_j, \quad (\text{II.14})$$

où  $H(x)$  est définie par :

$$H(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'approximation (II.14) ou ses variantes permettent de résoudre les problèmes d'interfaces imparfaites [133, 136]. Les problèmes de fissuration sont également traités en ajoutant à cette approximation un enrichissement en pointe de fissures [27, 65, 92, 116]. Dans le cadre de cette thèse, nous ne considérons que des cas d'interfaces parfaites (Eqs II.8 et II.12).

### 2.2.3 Intégration numérique

Dans le cadre de la modélisation d'un milieu hétérogène avec une méthode d'éléments finis conformes, chaque élément est associé à un matériau. Dans le cadre d'XFEM, une attention particulière doit être accordée aux éléments coupés par l'interface, du fait de la discontinuité des champs de déformation et du changement de propriétés au travers de celle-ci.

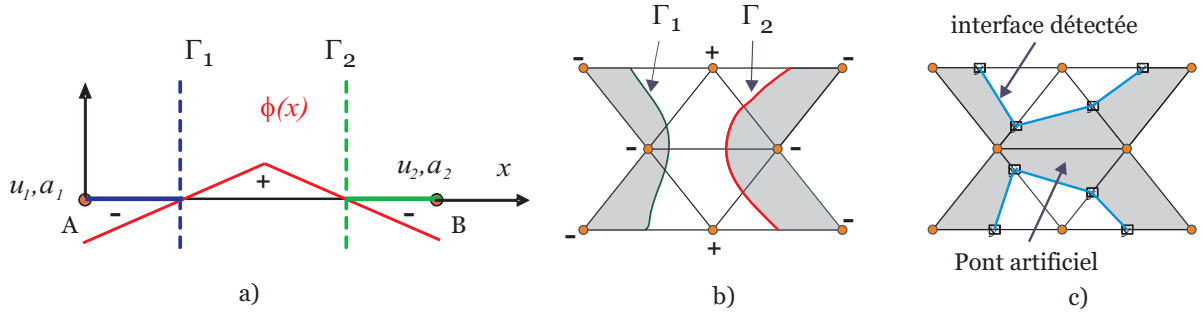


FIGURE II.9: a) Élément coupé par deux interfaces et fonction level-set associée aux interfaces ; b) maillage et interfaces exactes de deux inclusions proches. Les symboles ”+” et ”-” indiquent le signe des valeurs nodales de la fonction level-set ; c) Interfaces approximées par l’interpolation linéaire des valeurs nodales de la fonction level-set.

L’intégration numérique est réalisée dans les éléments coupés par l’interface en subdivisant ceux-ci à partir de l’approximation linéaire de l’interface (voir les figures II.8 et II.16). Le point d’intersection  $x_p$  entre l’arête d’un élément enrichi et l’interface est donné par

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_i + \xi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad \xi = -\frac{\phi_i}{\phi_j - \phi_i}. \quad (\text{II.15})$$

où  $[n_i^e, n_j^e]$  sont les nœuds de l’arête intersectée et  $\phi_i^e, \phi_j^e$  sont les valeurs de la fonction level-set dans ces mêmes nœuds. Une arête intersectée est facilement détectée car dans ce cas on a  $\phi_i^e \phi_j^e < 0$ .

### 3 Artefacts numériques

Lorsqu’une seule fonction level-set est utilisée pour décrire une microstructure, et que la distance entre deux inclusions est petite par rapport à la taille des éléments, des artefacts numériques peuvent être induits par la méthode XFEM/Level-Set classique, comme nous le montrons dans les paragraphes suivants.

#### 3.1 Percolation artificielle

Le premier artefact concerne la percolation artificielle entre deux inclusions proches l’une de l’autre. Ce phénomène intervient lorsque deux interfaces coupent simultanément un élément. Il se crée alors artificiellement une jonction entre les deux inclusions (voir figure II.9.b et II.9.c). Dans cet élément, les valeurs nodales de la fonction level-set ne changent pas de signe d’une inclusion à l’autre. Cela provoque une percolation artificielle et peut influencer de manière significative les propriétés effectives calculées de la microstructure surtout quand le contraste entre les propriétés des phases est fort. Pour mieux comprendre ce point, nous considérons un élément unidimensionnel coupé par deux interfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  (voir figure II.9.a) et utilisons une seule fonction level-set positive dans le domaine central limité par les deux

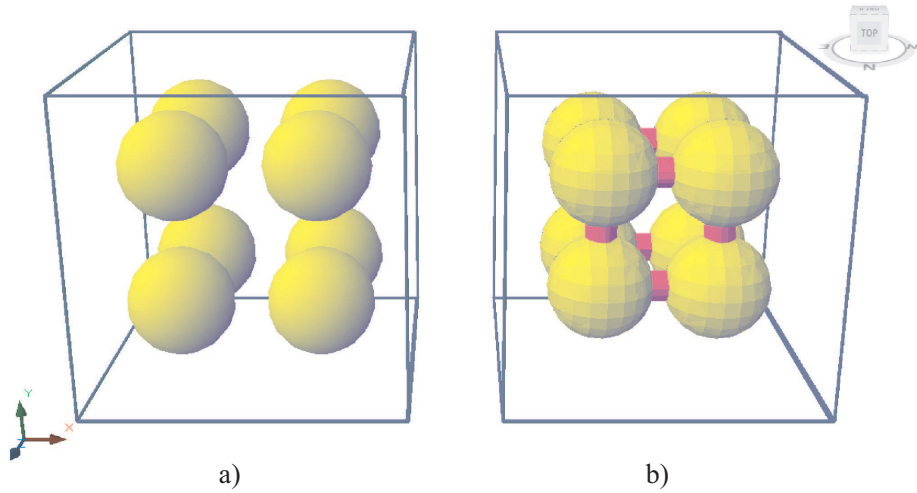


FIGURE II.10: a) VER contenant 8 inclusions sphériques ; b) Interfaces approximées par la méthode XFEM/Level-Set. Les parties colorées en magenta appartenant aux inclusions sont des conséquence du phénomène de percolation.

interfaces et négatives ailleurs. Comme les valeurs nodales  $\phi_A$  et  $\phi_B$  aux points A et B sont de mêmes signes, leur produit est positif ( $\phi_A \phi_B > 0$ ), la présence d'une interface à l'intérieur de l'élément n'est pas détectée.

Nous observons que la percolation artificielle des inclusions dans une microstructure (voir la figure II.10) se produit lorsque la taille caractéristique d'un élément est de l'ordre de la distance entre les inclusions.

### 3.2 Distorsion amplifiée de la géométrie des phases

Lorsque le support d'un nœud est coupé par au moins deux interfaces (voir figure II.11), l'interpolation linéaire entre les valeurs nodales d'une seule fonction level-set provoque une distorsion artificielle des domaines limités par les interfaces. Pour illustrer ce point, nous considérons un exemple 1-D décrit dans la figure II.11.a. Un domaine est discrétisé par 6 éléments finis dont les coordonnées des nœuds sont désignées par  $x_1, x_2, \dots, x_7$ . Nous nous intéressons à deux inclusions de rayon  $r$ , dont les positions des centres sont  $x_{C_1}$  et  $x_{C_2}$ , telles que  $x_2 < x_{C_1} < x_3$  et  $x_5 < x_{C_2} < x_6$ .

En utilisant l'Eq. (II.7), les valeurs nodales de la fonction level-set sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x_1) = \phi^1 = \min(|x_1 - x_{C_1}| - r, |x_1 - x_{C_2}| - r) = x_{C_1} - x_1 - r, \\ \phi(x_2) = \phi^2 = \min(|x_2 - x_{C_1}| - r, |x_2 - x_{C_2}| - r) = x_{C_1} - x_2 - r, \\ \phi(x_3) = \phi^3 = \min(|x_3 - x_{C_1}| - r, |x_3 - x_{C_2}| - r) = x_3 - x_{C_1} - r, \\ \phi(x_4) = \phi^4 = \min(|x_4 - x_{C_1}| - r, |x_4 - x_{C_2}| - r) = x_{C_2} - x_4 - r, \\ \phi(x_5) = \phi^5 = \min(|x_5 - x_{C_1}| - r, |x_5 - x_{C_2}| - r) = x_{C_2} - x_5 - r, \\ \phi(x_6) = \phi^6 = \min(|x_6 - x_{C_1}| - r, |x_6 - x_{C_2}| - r) = x_6 - x_{C_2} - r, \\ \phi(x_7) = \phi^7 = \min(|x_7 - x_{C_1}| - r, |x_7 - x_{C_2}| - r) = x_7 - x_{C_2} - r, \end{array} \right. \quad (\text{II.16})$$

Les positions exactes des interfaces sont données par  $x_{\Gamma_1} = x_{C_1} - r$ ,  $x_{\Gamma_2} = x_{C_1} + r$ ,  $x_{\Gamma_3} = x_{C_2} - r$  et  $x_{\Gamma_4} = x_{C_2} + r$ .



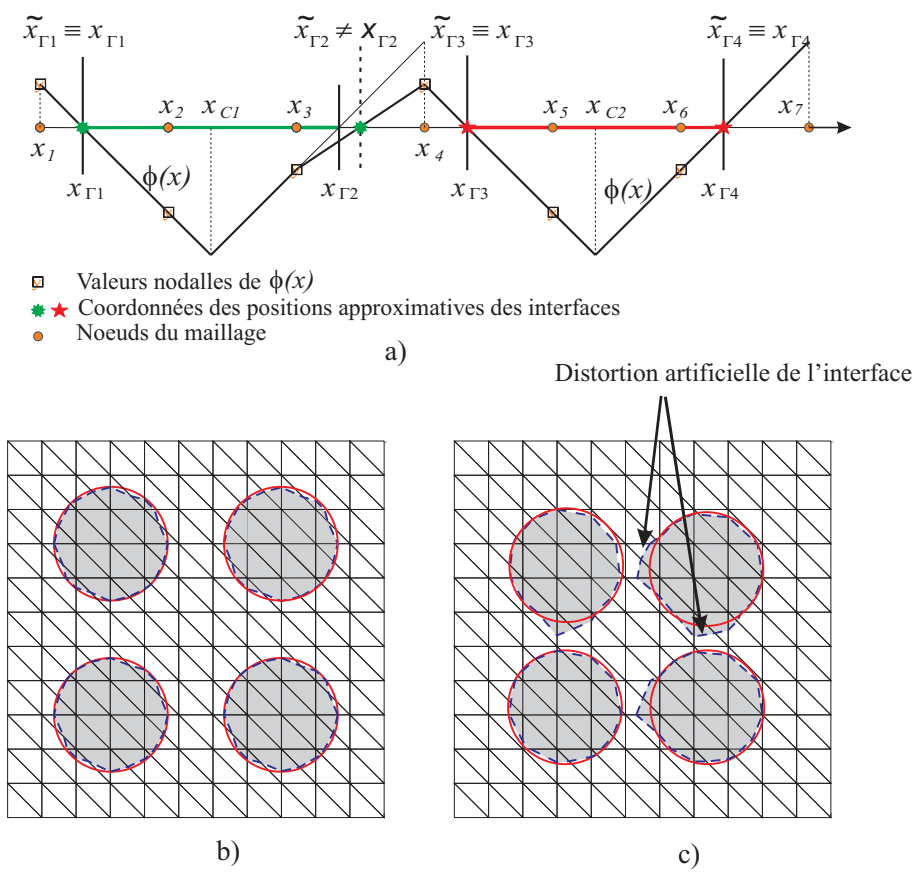


FIGURE II.11: a) Fonction Level-set pour deux inclusions proches en 1-D. b) Interfaces théoriques (traits rouges et pleins) de plusieurs inclusions circulaires et interfaces approximées (traits en pointillés) en utilisant une seule fonction level-set. Les inclusions sont séparées par une bande d'éléments; c) Interfaces théoriques (traits rouges et pleins) de plusieurs inclusions circulaires et interfaces approximées (traits pointillés) en utilisant une seule fonction level-set. Une distorsion apparaît si deux éléments connectés sont chacun coupés par une interface.

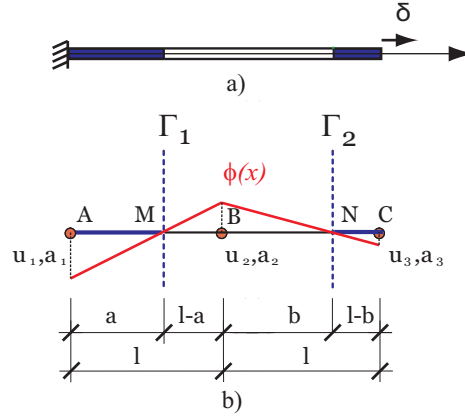


FIGURE II.12: a) Barre constituée de deux matériaux ; b) Fonction level-set et inconnues du problème traité avec XFEM.

Dans la méthode XFEM/Level-Set, la condition  $\phi(x) = 0$  est utilisée pour définir les positions des interfaces. En utilisant l'interpolation linéaire (II.15) et en se basant sur les valeurs nodales de la fonction level-set (II.16), la position approximée de l'interface  $\Gamma_1$  est alors donnée par :

$$\tilde{x}_{\Gamma_1} = x_1 + \xi(x_2 - x_1) \quad \text{avec} \quad \xi = -\frac{\phi^1}{\phi^2 - \phi^1}. \quad (\text{II.17})$$

En substituant les expressions de  $\phi^1$  et  $\phi^2$  dans l'expression (II.17), la position de l'interface  $\Gamma_1$  définie par la méthode XFEM devient :

$$\tilde{x}_{\Gamma_1} = x_{C_1} - r \equiv x_{\Gamma_1}. \quad (\text{II.18})$$

Dan ce cas, la position approximée de l'interface  $\Gamma_1$  coïncide avec la position exacte. De façon similaire, on peut montrer que l'approximation linéaire des positions des interfaces  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  est aussi exacte. En revanche, on obtient :

$$\tilde{x}_{\Gamma_2} = x_3 - \frac{x_3 - x_{C_1} - r}{x_{C_2} + x_{C_1} - x_3 - x_4}(x_3 - x_4) \neq x_{\Gamma_2} = x_{C_1} + r. \quad (\text{II.19})$$

Il est intéressant de noter que même dans ce cas unidimensionnel, certaines interfaces souffrent d'un décalage de position. Ce phénomène est illustré en deux dimensions dans la figure II.11.b. Pour une microstructure complexe avec une grande fraction volumique, ce phénomène peut introduire des erreurs importantes dans l'approximation de la fraction volumique et de la forme des inclusions, ce qui ajoute une source d'erreur dans l'évaluation des propriétés effectives de la microstructure.

### 3.3 Défaut d'enrichissement

Si les deux artefacts mentionnés ci dessus sont uniquement liés à la méthode level-set, nous montrons, dans cette section, un autre artefact dû à l'enrichissement dans l'approximation de la méthode XFEM. En effet, lorsque le support d'un élément est coupé par plus d'une

interface, l'ajout d'un seul degré de liberté par composante du champ inconnu ne suffit pas à décrire dans des cas linéaires la cinématique du problème. Afin de mieux comprendre ce phénomène, nous considérons un exemple unidimensionnel, illustré dans la figure II.12.a. Une barre est discrétisée par seulement deux éléments linéaires. Le matériau constituant la barre est homogène par morceaux. Les interfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  entre les phases se situent aux points  $M$  et  $N$ . Une fonction level-set  $\phi(x)$  est définie telle que  $\phi(x) > 0$  pour  $x$  appartenant à la phase 1,  $\phi(x) < 0$  pour  $x$  appartenant à phase 2, et  $\phi(x) = 0$  pour  $x$  étant sur les interfaces (voir II.12.b). Afin d'éviter les deux premiers artefacts, nous construisons une fonction level-set particulière définie par :

$$\phi_1 = -\frac{ca}{l-a}, \quad \phi_2 = c, \quad \phi_3 = -\frac{c(l-b)}{b}, \quad (\text{II.20})$$

où  $a$  et  $b$  sont deux longueurs strictement inférieures à la longueur  $l$  d'un élément, et  $c > 0$  est une constante.

Supposons que la barre est encastée au point A et soumise à un déplacement imposé  $\delta$  au point C et  $x_A, x_M, x_B, x_N$  et  $x_C$  sont les coordonnées des points A, M, B, N et C de la barre, respectivement. L'hypothèse des petites déformations est prise en compte dans ce problème. Les phases 1 et 2 sont constituées par des matériaux linéaires élastiques, caractérisés par les modules de Young  $E_1$  et  $E_2$ , respectivement.

En appliquant l'approximation (II.8) aux éléments  $\{x_A - x_B\}$  et  $\{x_B - x_C\}$ , on obtient :

$$u^h(x) = u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x) + [a_1 N_1(x) + a_2 N_2(x)] \psi(x), \quad x \in [x_A, x_B], \quad (\text{II.21})$$

$$u^h(x) = u_2 N_2(x) + u_3 N_3(x) + [a_2 N_2(x) + a_3 N_3(x)] \psi(x), \quad x \in [x_B, x_C], \quad (\text{II.22})$$

où  $N_i(x)$  est une fonction de forme linéaire. En prenant en compte les conditions aux limites  $u_1 = 0$  et  $u_3 = \delta$ , nous calculons d'abord les énergies pour les segments  $\{x_A - x_M\}$ ,  $\{x_M - x_B\}$ ,  $\{x_B - x_N\}$  et  $\{x_N - x_C\}$  :

$$W_{x_i-x_j} = \int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{2} E_i \left( \frac{du^h(x)}{dx} \right)^2 dx. \quad (\text{II.23})$$

Nous minimisons ensuite l'énergie totale en fonction des inconnues  $u_2, a_1, a_2$  et  $a_3$ . En choisissant les valeurs numériques  $a = 0.5$  m,  $b = 0.5$  m et  $l = 1$  m, nous obtenons :

$$a_1 = -\delta \frac{3(E_1 - E_2)}{8c(E_1 + E_2)}, \quad (\text{II.24})$$

$$a_2 = 0, \quad (\text{II.25})$$

$$a_3 = \delta \frac{3(E_1 - E_2)}{8c(E_1 + E_2)}, \quad (\text{II.26})$$

$$u_2 = \delta/2. \quad (\text{II.27})$$

En introduisant le résultat des inconnues mentionnées aux expressions des éléments finis, nous obtenons :

$$u_{AB}(x) = \frac{-\delta(-7E_1x - E_2x + 3E_1x|2x-1| + 3E_1)}{8(E_1 + E_2)} + \frac{-\delta(-3E_1|2x-1| - 3E_2x|2x-1| - 3E_2 + 3E_2|2x-1|)}{8(E_1 + E_2)}, \quad (\text{II.28})$$

$$u_{BC}(x) = \frac{-\delta(-7E_1x - E_2x + 3E_1x|2x-3| + 3E_1)}{8(E_1 + E_2)} + \frac{-\delta(-3E_1|2x-3| - 3E_2x|2x-3| - 3E_2 + 3E_2|2x-3|)}{8(E_1 + E_2)}, \quad (\text{II.29})$$

$$W_{totale} = \delta^2 \frac{E_1^2 + 14E_1E_2 + E_2^2}{32(E_1 + E_2)}, \quad (\text{II.30})$$

où  $u_{AB}$  et  $u_{BC}$  sont les champs de déplacement pour  $x \in [x_A, x_B]$  et  $x \in [x_B, x_C]$ , respectivement ;  $W_{totale}$  est l'énergie totale de la barre en utilisant l'approximation XFEM.

L'énergie exacte de la barre est obtenue simplement par

$$W_{totale}^{exacte} = \delta^2 \frac{E_1E_2}{2(E_1 + E_2)}. \quad (\text{II.31})$$

En se basant sur les équations (II.30) et (II.31), on peut calculer l'erreur relative sur l'énergie :

$$\Delta W^{XFEM} = \frac{W_{totale}^{exacte} - W_{totale}}{W_{totale}^{exacte}} = \frac{(E_1 - E_2)^2}{32E_2E_1}. \quad (\text{II.32})$$

Nous observons que l'erreur relative en énergie  $\Delta W^{XFEM}$  est nulle pour le cas de la barre homogène où  $E_1 = E_2$ . Dans le cas contraire, il existe toujours une valeur non-nulle de  $\Delta W^{XFEM}$ . Nous observons également que plus le contraste entre les propriétés des phases ( $E_1$  et  $E_2$ ) est élevé, plus l'erreur relative en énergie est grande. A titre d'illustration, les champs de déplacements et de déformations sont tracés dans la figure II.13 en choisissant les valeurs numériques  $\delta = 0,05\text{m}$ ,  $E_1 = 10\text{MPa}$  et  $E_2 = 100\text{MPa}$ . On voit que l'approche XFEM/Level-Set ne peut pas reproduire la solution exacte qui est linéaire par morceau, c'est à dire qu'un déficit d'enrichissement. Pour les microstructures complexes avec fortes fraction volumique d'inclusions, lorsque le maillage est plus petit que la distance entre les inclusions, ce déficit d'enrichissement peut conduire une source d'erreur se rajoutant aux deux précédentes.

Les trois artefacts mentionnés influencent d'abord aux champs cinématiques locaux où ils se situent, puis aux propriétés effectives de matériaux. Plus le contraste des propriétés des phases est élevé, plus l'impact de ces artefacts est fort. Ce dernier est important lors qu'on détermine la réponse en fluage des structures en béton dont le rapport entre les propriété des phases constituantes à long terme peut être de centaines fois.

## 4 Méthode XFEM avec fonctions Level-set multiples ( $\mu$ -XFEM)

### 4.1 Approximation de $\mu$ -XFEM

Afin de supprimer les différents artefacts décrits dans la partie précédente, nous proposons ici une version modifiée de la méthode XFEM/Level-Set, dite Méthode XFEM avec fonctions Level-set multiples ( $\mu$ -XFEM). L'idée est d'associer chaque interface séparant deux domaines

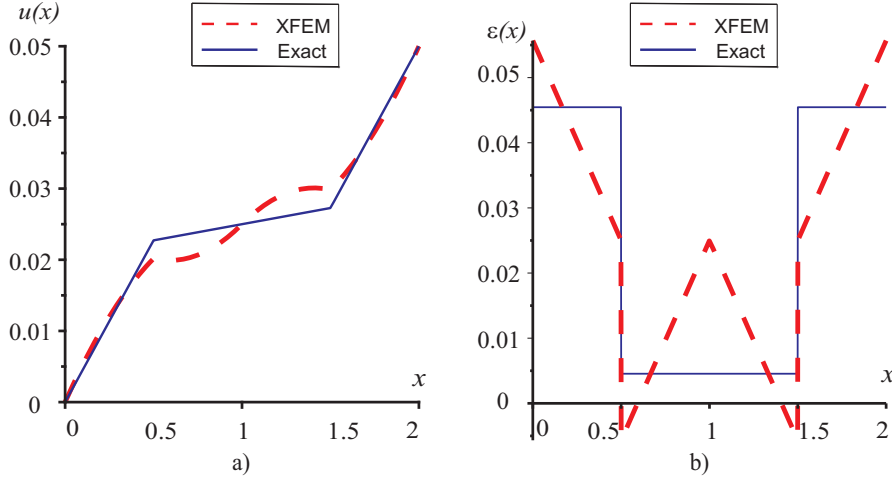


FIGURE II.13: Comparaison entre solutions exactes et XFEM/Level-Set : a) déplacements ; b) déformations.

à une fonction niveau et un enrichissement individuel. Cette nouvelle approximation est exprimée par

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{S}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_k^{N_{int}} \sum_{j \in \mathcal{S}^{ek}} N_j(\mathbf{x}) \psi^k(\phi^k(\mathbf{x})) \mathbf{a}_j^k. \quad (\text{II.33})$$

Dans cette équation,  $\mathbf{a}_j^k$  sont des inconnues nodales supplémentaires, l'ensemble des nœuds étant défini par :

$$\mathcal{S}^{ek} = \{j | j \in \mathcal{S}, \omega_j \cap \Gamma^k \neq \emptyset\}. \quad (\text{II.34})$$

L'illustration de la figure II.14.a représente le cas où un élément linéaire triangulaire est coupé par trois interfaces. La forme générale de fonction level-set  $\phi^k$  associée à l'interface  $\Gamma_k$  peut s'écrire :

$$\Gamma_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d | \phi^k(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (\text{II.35})$$

Comme dans le cadre de la méthode XFEM standard, la fonction de distance signée peut être choisie pour la fonction level-set  $\phi^k(\mathbf{x})$ , donnée par l'équation (II.2). Pour une inclusion sphérique  $k$ ,  $\phi^k(\mathbf{x})$  est exprimée par :

$$\phi^k(\mathbf{x}) = \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c^k\| - r^k \}. \quad (\text{II.36})$$

La fonction  $\psi^k(\phi^k(\mathbf{x}))$  est la fonction d'enrichissement construite grâce à la fonction level-set  $\phi^k$  de l'inclusion  $k$  d'interface  $\Gamma_k$  :

$$\psi^k(\mathbf{x}) = \sum_i |\phi_i^k| N_i(\mathbf{x}) - \left| \sum_i \phi_i^k N_i(\mathbf{x}) \right|, \quad (\text{II.37})$$

L'approximation (II.33) permet naturellement d'introduire plusieurs discontinuités dans un même élément comme illustré dans la figure II.14.b. Elle permet également de supprimer tous les artefacts induits par la présence d'inclusions proches, comme montré par la suite. Cependant, cette méthode fait intervenir plusieurs nouvelles difficultés :

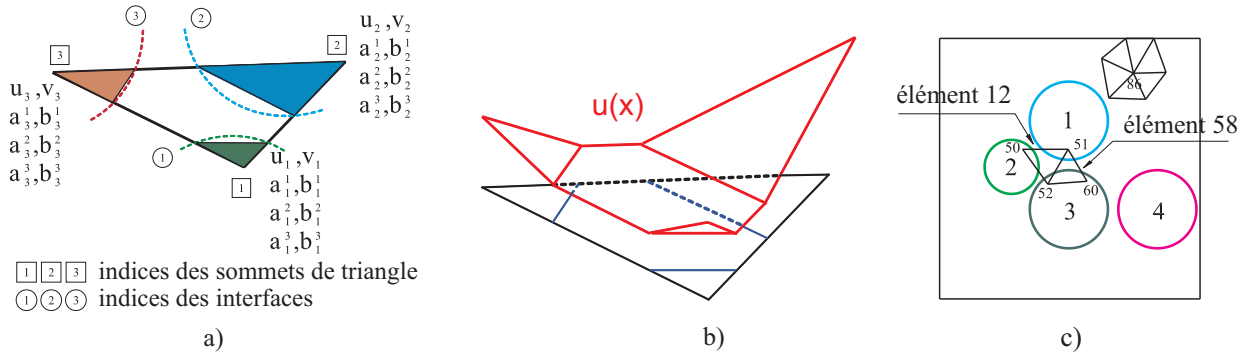


FIGURE II.14: a) Inconnues dans le cas 2D pour un élément coupé par trois interfaces;  $u_i$  et  $v_i$  désignent les ddl FEM standard, tandis que  $a_i^k$  et  $b_i^k$  désignent les dds associés à l'interface  $k$ ; b) champs de déplacement dans un élément linéaire triangulaire coupé par trois interfaces. c) le VER bidimensionnel contenant quatre inclusions circulaires.

- Le stockage des fonctions level-set dans le cas d'un très grand nombre d'inclusions;
- L'intégration numérique sur un élément coupé par plus d'une interface;
- L'assemblage de la matrice de rigidité.

Nous proposons, dans les sections suivantes, des solutions simples pour surmonter ces difficultés.

## 4.2 Stockage des fonctions Level-set

Le stockage des fonctions level-set définies en chaque nœud du domaine nécessite une matrice à deux dimensions de taille  $N \times N_{inter}$  où  $N$  est le nombre total de nœuds dans le maillage et  $N_{inter}$  est le nombre total des interfaces. Cela demande beaucoup de place de mémoire lorsque le domaine contient un grand nombre d'inclusions. Ce problème peut être allégé en ne stockant les valeurs de la fonction level-set  $\phi^k$  associée à l'interface  $\Gamma_k$  que pour les nœuds dont le support est coupé par l'interface  $\Gamma_k$ . Il est alors possible d'utiliser des techniques de type matrices creuses ou dynamiques pour optimiser la place mémoire.

Dans le premier cas, deux matrices creuses sont définies,  $\mathbf{LSnoeuds}$  et  $\mathbf{LSelements}$ , où  $\mathbf{LSnoeuds}(j, k) = \phi^k(x_j)$  si le support du nœud  $x_j$  est coupé par l'interface  $\Gamma_k$ . La ligne  $i$  de la matrice  $\mathbf{LSelements}$  contient les indices des interfaces coupant l'élément  $i$ . Par exemple, quelques lignes de la matrice  $\mathbf{LSnoeuds}$  associée au VER illustré dans la figure II.14.c sont

données par :

$$\mathbf{LSnoeuds} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dots \\ \phi^1(\mathbf{x}_{50}) \\ \phi^1(\mathbf{x}_{51}) \\ \phi^1(\mathbf{x}_{52}) \\ \dots \\ \phi^1(\mathbf{x}_{60}) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \phi^2(\mathbf{x}_{50}) \\ \phi^2(\mathbf{x}_{51}) \\ \phi^2(\mathbf{x}_{52}) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \phi^3(\mathbf{x}_{50}) \\ \phi^3(\mathbf{x}_{51}) \\ \phi^3(\mathbf{x}_{52}) \\ \dots \\ \phi^3(\mathbf{x}_{60}) \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 50 \\ 51 \\ 52 \\ \dots \\ 60 \\ \dots \\ 86 \\ \dots \end{matrix} \end{matrix}, \quad (\text{II.38})$$

et les lignes 12, 58 de la matrice  $\mathbf{LSelements}$  correspondant aux éléments numérotés 12, 58 sont telles que :

$$\mathbf{LSelements} = \begin{matrix} \begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ 12 \\ \dots \\ 58 \\ \dots \end{matrix} \end{matrix} \quad (\text{II.39})$$

### 4.3 Assemblage de la matrice de rigidité

Dans la méthode XFEM standard, chaque nœud dont le support est coupé par une interface est associé à  $2 \times D$  degrés de liberté (ddls), où  $D$  est la dimension du problème. Cependant, dans la méthode  $\mu$ -XFEM, chaque nœud dont le support est coupé par  $N_{inter}$  interfaces est associé à  $D \times (1 + N_{inter})$  ddls. Lorsque des éléments connectés ne sont pas coupés par le même nombre d'interfaces, l'opération d'assemblage n'est pas triviale. Nous proposons une technique pour surmonter cette difficulté. Pour simplifier, nous limitons la discussion au cas bi-dimensionnel ( $D = 2$ ). Prenons un nœud  $i$  avec deux composantes de déplacement  $u_i, v_i$  et  $D \times N_{inter}^i$  ddls supplémentaires  $a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{N_{inter}^i}, b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^{N_{inter}^i}$ . Le nombre d'interfaces traversant le support du nœud  $i$ ,  $N_{inter}^i$ , est égal au nombre d'indices non-nuls dans la ligne  $i$  de la matrice  $\mathbf{LVnoeuds}$  définie dans la section 4.2. Un choix pour le stockage des degrés de liberté dans le vecteur global des inconnues  $\mathbf{d}$  dans (III.80) est de choisir les indices des déplacements nodaux comme  $2i - 1, 2i$ , et ceux des degrés de liberté supplémentaires comme  $\mathcal{A}(i) + 1$  à  $\mathcal{A}(i) + D \times N_{inter}^i$ , où le vecteur  $\mathcal{A}$  est défini par

$$\mathcal{A}(i) = D \left( N + \sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{L}(LVinter(j)) \right), \quad (\text{II.40})$$

avec  $N$  le nombre total de nœuds dans le maillage et  $\mathcal{L}(\cdot)$  un opérateur permettant de calculer le nombre de valeurs non-nulles dans le vecteur  $(\cdot)$ .

### 4.4 Intégration numérique

Dans la méthode XFEM/Level-Set, si un élément est coupé par une interface, l'élément doit être décomposé en plusieurs sous-domaines pour appliquer le schéma de Gauss de part et

d'autre de l'interface. Pour un élément linéaire coupé par une seule interface, les possibilités de découpage géométrique sont très limitées même dans le cas 3D [8]. Cependant, quand un élément est coupé par plus d'une interface, un domaine complexe de forme polyédrique peut être généré entre les interfaces, conduisant à une complexité importante pour appliquer un schéma de Gauss (voir figure II.15). Nous proposons ici une technique simple pour alléger ce problème. L'idée est de ne faire l'intégration que sur les sous-domaines géométriques simples (tétraèdres) et de soustraire les valeurs de ces intégrales à l'intégrale complète sur le domaine complexe polyédrique. Pour mieux comprendre cette démarche, considérons le cas représenté figure II.15. L'intégration est facilement réalisée dans les sous-domaines  $\Omega_i$  en utilisant la formule de quadrature de Gauss. La difficulté est associée au domaine polyédrique  $\Omega^* = \Omega \setminus (\bigcup_i \Omega_i)$ , dont la forme dépend du nombre d'interfaces traversant l'élément et du nombre de points d'intersection entre les arêtes de l'élément et les interfaces.

Notre objectif ici est de calculer l'intégrale de la fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sur le domaine tétraédrique  $\Omega$  avec :

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} f^*(\mathbf{x}) & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega^* \\ f_i(\mathbf{x}) & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_i \end{cases}, \quad (\text{II.41})$$

où les fonctions  $f_i(\mathbf{x})$  et  $f^*(\mathbf{x})$  sont associées aux inclusions et à la matrice, respectivement. Nous avons :

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_i \int_{\Omega_i} f_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega^*} f^*(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (\text{II.42})$$

Pour surmonter la difficulté numérique liées à l'intégration de  $f^*(\mathbf{x})$  sur le domaine  $\Omega^*$ , nous utilisons un technique simple de superposition :

$$\int_{\Omega^*} f^*(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} f^*(\mathbf{x}) d\Omega - \sum_i \left( \int_{\Omega_i} f^*(\mathbf{x}) d\Omega \right), \quad (\text{II.43})$$

où  $f^* : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est étendue partout dans le domaine  $\Omega$ .

En introduisant l'expression ci-dessus dans l'équation (II.42), l'intégration de  $f(x)$  sur le domaine tétraédrique peut s'écrire :

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} f^*(\mathbf{x}) d\Omega + \sum_i \left( \int_{\Omega_i} (f_i(\mathbf{x}) - f^*(\mathbf{x})) d\Omega \right). \quad (\text{II.44})$$

Les deux termes à droite dans l'équation (II.44) peuvent être calculés facilement. Ensuite, il est seulement nécessaire : (i) de construire les intersections entre l'élément  $\Omega^e$  et les interfaces  $\Gamma_k$  en utilisant l'approximation linéaire des valeurs des fonctions level-set  $\phi^k$ ; (ii) de partitionner les domaines  $\Omega_i$  en tétraèdres comme illustré dans la figure II.16.

Les points d'intersection  $\mathbf{x}_p$  sont donnés par :

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_i + \xi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad \xi = -\frac{\phi_i^k}{\phi_j^k - \phi_i^k}, \quad (\text{II.45})$$



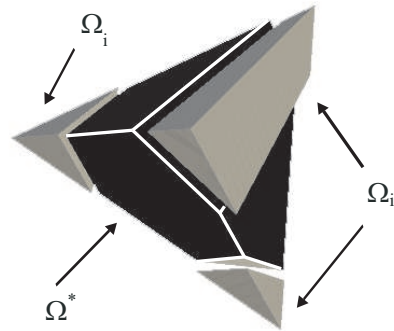


FIGURE II.15: Élément tétraédrique coupé par trois interfaces et partitionnement de l'élément en sous-domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega^*$ . Le sous-domaine noir appartient à la matrice et les sous-domaines gris font partie des inclusions.

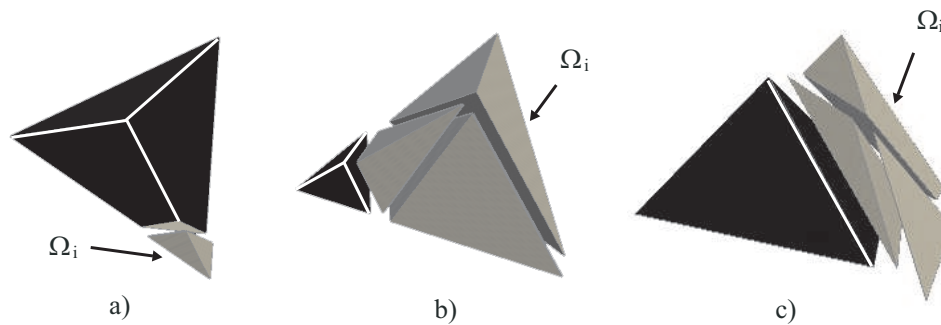


FIGURE II.16: Trois possibilités (a, b, c) de subdivision d'un sous-domaine  $\Omega_i$  en sous-domaines tétraédriques. Les sous-domaines représentés en noir appartiennent à la matrice et ceux en gris font partie des inclusions.

où  $\mathbf{x}_j$  sont deux sommets d'un élément,  $\phi_i^k$  et  $\phi_j^k$  sont les valeurs de la fonction level-set de l'interface  $\Gamma_k$  aux points  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$ . Nous rappelons qu'une arête d'élément est coupée par l'interface  $\Gamma_k$  si et seulement si  $\phi_i^k \phi_j^k < 0$ . Avec cette condition, chaque sous-domaine peut être facilement associé à un matériau différent en se basant sur la signe de  $\phi_i^k(\mathbf{x})$ . Une fois les domaines  $\Omega_i$  construits, la subdivision de  $\Omega_i$  en tétraèdres est facilement obtenue comme expliqué dans [8] en faisant une boucle sur les interfaces traversant le domaine tétraédrique  $\Omega$ . Les possibilités pour la subdivision sont illustrées dans la figure II.16. Les sous-domaines tétraédriques (représentés en noir) appartiennent à la matrice et ceux en gris font partie des inclusions. Avec la méthode  $\mu$ -XFEM, la subdivision ne doit être faite que dans les domaines gris appartenant aux inclusions. Les figures II.16.a et II.16.b correspondent au cas où l'interface traverse trois côtés d'élément et la figure II.16.c montre le cas d'une interface coupant quatre côtés d'élément.

Une des applications de l'équation (II.44) est le calcul de la matrice de rigidité élémentaire exprimée par :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K_e d\Omega &= \int_{\Omega} (B^T C B) d\Omega = \int_{\Omega_i} (B_I^T C_I B_I) d\Omega + \int_{\Omega^*} (B_M^T C_M B_M) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_i} (B_I^T C_I B_I) d\Omega + \left[ \int_{\Omega} (B_M^T C_M B_M) d\Omega - \int_{\Omega_i} (B_M^T C_M B_M) d\Omega \right] \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

où  $C_I$  et  $C_M$  sont les matrices d'élasticité des inclusions et de la matrice, respectivement et  $B_I$  et  $B_M$  sont les matrices des dérivés des fonctions de forme associées aux inclusions et à la matrice, respectivement. Dans la formule (II.46), le support de  $B_M$  est étendu partout dans le domaine  $\Omega$ .

## 4.5 Formulation du problème élastostatique

Dans cette section, nous présentons les équations principales du problème linéaire élastostatique avec l'hypothèse de petites déformations.

### 4.5.1 Formulation forte

Nous considérons un domaine ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  de bord  $\partial\Omega$ . Le bord  $\partial\Omega$  se compose en deux parties disjointes et complémentaires  $\partial\Omega_u$  et  $\partial\Omega_t$ , sur lesquelles les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann sont appliquées, respectivement. Les équations du problème élastostatique sont données par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\text{II.47})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{II.48})$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$  et  $\mathbb{C}$  est le tenseur d'élasticité de quatrième ordre. Les conditions aux limites essentielles et naturelles sont :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } \partial\Omega_u, \quad (\text{II.49})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sur } \partial\Omega_t, \quad (\text{II.50})$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire du  $\partial\Omega$ , orienté vers l'extérieur du domaine  $\Omega$ .

#### 4.5.2 Formulation faible

La formulation faible associée à l'équation (III.74)-(II.50) est donnée par : Chercher  $\mathbf{u} \in \mathcal{D} = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ au bord } \partial\Omega_u, \mathbf{u} \in H^1(\Omega)\}$  satisfaisant

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad \forall \delta\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega), \quad (\text{II.51})$$

où  $H_0^1(\Omega) = \{\delta\mathbf{u} | \delta\mathbf{u} \in H^1(\Omega), \delta\mathbf{u} = 0 \text{ au bord } \partial\Omega_u\}$

En substituant l'approximation des déplacements définie dans l'équation (II.33) dans la formulation faible (III.77), nous obtenons le système discret d'équations linéaires ordinaires :

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{d} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{array} \right\}^T, \quad (\text{II.52})$$

où  $\mathbf{d}$  est le vecteur des inconnues nodales avec  $\mathbf{u}$  le vecteur de déplacements nodaux dans le cadre de FEM et  $\mathbf{a}$  est le vecteur d'inconnues supplémentaires ajoutées dans le cadre de  $\mu$ -XFEM.  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{f}$  sont la matrice de rigidité globale et le vecteur des forces externes, respectivement. Plus précisément, la matrice  $\mathbf{K}$  et le vecteur  $\mathbf{f}$  sont définis par

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega, \quad \mathbf{f} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega, \quad (\text{II.53})$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{N}$  sont la matrice des dérivés des fonctions de forme et les fonctions de forme associées au schéma d'approximation (II.33) et la matrice  $\mathbf{C}$  correspond au tenseur d'élasticité du quatrième ordre  $\mathbb{C}$ .

## 5 Traitement des artefacts numériques par la méthode $\mu$ -XFEM

Dans cette section, nous décrivons comment les différents artefacts numériques abordés dans la section 3 sont évités en utilisant la méthode  $\mu$ -XFEM.

### 5.1 Percolation artificielle

Dans le cadre de la méthode  $\mu$ -XFEM, chaque inclusion est associée à une fonction level-set propre (voir la figure II.17). La percolation artificielle est ainsi naturellement supprimée. Pour illustrer ce point, nous considérons un exemple simple unidimensionnel, schématisé dans la figure II.18.a. L'interface  $\Gamma_1$  est reproduite par la fonction  $\phi^1(\mathbf{x})$ , tandis que la deuxième fonction  $\phi^2(\mathbf{x})$  est utilisée pour décrire  $\Gamma_2$ . On observe que dans ce cas, la percolation n'apparaît plus.

Un deuxième exemple 2D est présenté dans les figures II.18.b et II.18.c. Les signes des valeurs nodales des fonctions  $\phi^1(x)$  et  $\phi^2(x)$  reliées aux interfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont indiqués. En utilisant les formules (II.45), les intersections entre le maillage et les inclusions sont représentées par des symboles carrés. Nous observons que contrairement au cas où une seule fonction level-set est utilisée (figure II.9.c), les jonctions artificielles entre les inclusions n'apparaissent plus.

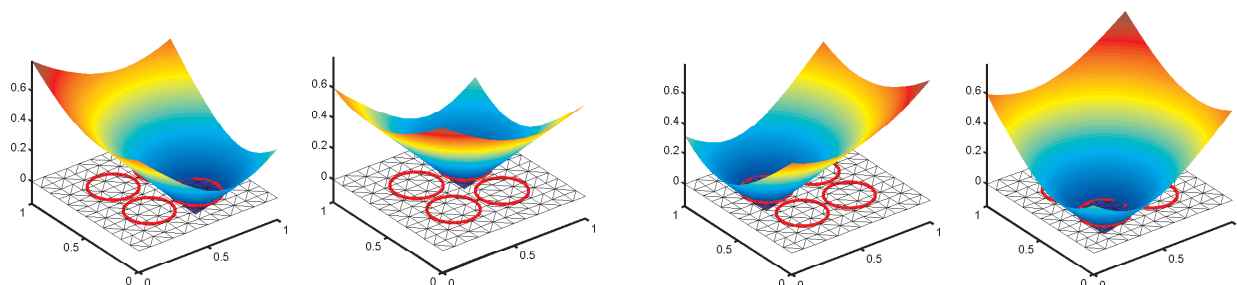


FIGURE II.17: Description de quatre interfaces avec  $\mu$ -XFEM : chaque inclusion est associée à une fonction level-set.

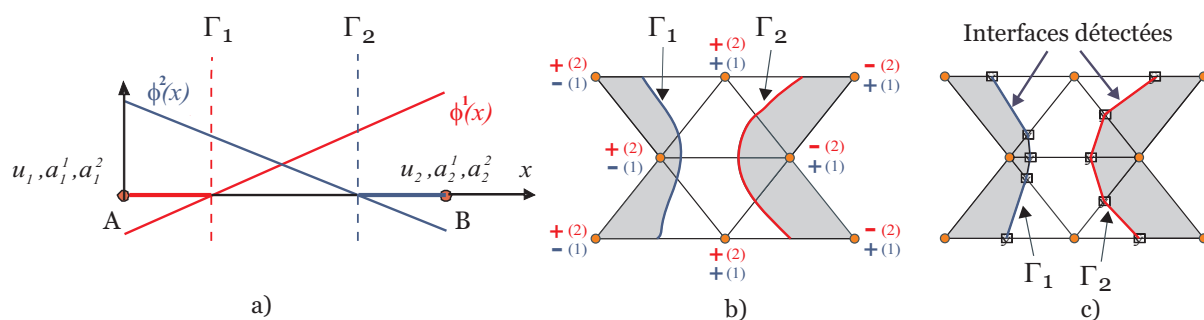


FIGURE II.18: a) Un élément est coupé par deux interfaces dans la méthode  $\mu$ -XFEM ; chaque inclusion est associée à une fonction level-set ; b) Interfaces exactes de deux inclusions. Les exposants ”+(k)” et ”-(k)” indiquent la signe des valeurs nodales des fonctions level-set  $\phi^k$  ; c) Interfaces associées à une simple approximation linéaire du niveau zéro des level-sets.

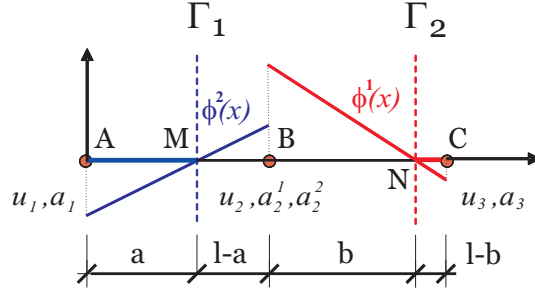


FIGURE II.19: Deux éléments coupés par deux interfaces dans la méthode  $\mu$ -XFEM.

## 5.2 Distorsion artificielle des interfaces

Nous montrons ici comment la méthode  $\mu$ -XFEM permet d'éviter le problème de distorsion artificielle décrit dans la section 3.2. Nous considérons un exemple unidimensionnel représenté dans la figure II.19 : chacun des deux éléments connectés contient une interface. En utilisant la méthode  $\mu$ -XFEM, les interfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont respectivement approximées en se basant sur les valeurs nodales des fonctions level-set  $\phi^1(x)$  et  $\phi^2(x)$ . L'approximation de chaque interface est indépendante, donc aucune distorsion d'interface ne se produit.

## 5.3 Défaut d'enrichissement

Nous considérons le même problème qu'étudié dans la section 3.3. Nous montrons que la méthode  $\mu$ -XFEM permet de reproduire un champs linéaire par morceaux à proximité de deux éléments chacun coupés par une interface. Les valeurs nodales des fonctions de level-set  $\phi^1(x)$  et  $\phi^2(x)$  (voir la figure II.19) définies dans (II.36) sont données par :

$$\phi_1^1 = -a; \quad \phi_2^1 = l - a; \quad \phi_2^2 = b; \quad \phi_3^2 = b - l, \quad (\text{II.54})$$

où les deux longueurs  $a$  et  $b$  sont strictement positives et inférieures à  $l$ , la longueur des éléments.

En appliquant l'approximation (II.33) aux éléments  $\{x_A - x_B\}$  et  $\{x_B - x_C\}$ , nous obtenons :

$$u^h(\mathbf{x}) = u_1 N_1(\mathbf{x}) + u_2 N_2(\mathbf{x}) + [a_1^1 N_1(\mathbf{x}) + a_2^1 N_2(\mathbf{x})] \psi^1(\mathbf{x}) \quad \forall x \in \{x_A, x_B\}, \quad (\text{II.55})$$

$$u^h(\mathbf{x}) = u_2 N_2(\mathbf{x}) + u_3 N_3(\mathbf{x}) + [a_2^2 N_2(\mathbf{x}) + a_3^2 N_3(\mathbf{x})] \psi^2(\mathbf{x}) \quad \forall x \in \{x_B, x_C\}, \quad (\text{II.56})$$

où  $\psi^k(\mathbf{x})$  sont les fonctions d'enrichissement définies par l'équation (II.37) :

$$\psi^1(\mathbf{x}) = |\phi_1^1| N_1(\mathbf{x}) + |\phi_2^1| N_2(\mathbf{x}) - |\phi_1^1 N_1(\mathbf{x}) + \phi_2^1 N_2(\mathbf{x})|, \quad (\text{II.57})$$

$$\psi^2(\mathbf{x}) = |\phi_2^2| N_2(\mathbf{x}) + |\phi_3^2| N_3(\mathbf{x}) - |\phi_2^2 N_2(\mathbf{x}) + \phi_3^2 N_3(\mathbf{x})|. \quad (\text{II.58})$$

Nous utilisons ici la même méthodologie que présentée dans la section 3.3. Les conditions aux limites  $u_1 = 0$  et  $u_3 = \delta$  sont imposées. L'énergie totale est ensuite minimisée par rapport aux inconnues du problème. Par rapport à la méthode XFEM standard, des degrés de liberté sont ajoutés dans  $\mu$ -XFEM. Plus précisément, les inconnues supplémentaires sont à présent

$u_2$ ,  $a_1^1$ ,  $a_2^1$ ,  $a_2^2$  et  $a_3^2$ . Les paramètres suivants sont adoptés :  $a = 2/3$  m,  $b = 2/3$  m,  $l = 1$  m. Nous obtenons :

$$a_1 = -\frac{1}{2} \frac{(E_1 - E_2) \delta}{E_1 + E_2}, \quad (\text{II.59})$$

$$a_2^1 = -\frac{1}{2} \frac{(E_1 - E_2) \delta}{E_1 + E_2}, \quad (\text{II.60})$$

$$a_2^2 = \frac{1}{2} \frac{(E_1 - E_2) \delta}{E_1 + E_2}, \quad (\text{II.61})$$

$$a_3^2 = \frac{1}{2} \frac{(E_1 - E_2) \delta}{E_1 + E_2}, \quad (\text{II.62})$$

$$u_2 = \frac{1}{3} \frac{(E_1 + 2E_2) \delta}{E_1 + E_2}. \quad (\text{II.63})$$

En introduisant ces expressions ci-dessus dans celles du champ de déplacements et de l'énergie totale, nous obtenons :

$$u_{AB}^{\mu\text{-XFEM}}(x) = \frac{1}{6} \frac{(3E_1x + 3E_2x - 2E_1 + E_1|3x - 2| + 2E_2 - E_2|3x - 2|) \delta}{E_1 + E_2}, \quad (\text{II.64})$$

$$u_{BC}^{\mu\text{-XFEM}}(x) = -\frac{1}{6} \frac{(-3E_1x - 3E_2x - E_1 + E_1|3x - 5| + E_2 - E_2|3x - 5|) \delta}{E_1 + E_2}, \quad (\text{II.65})$$

$$W_{total} = \delta^2 \frac{E_1 E_2}{2(E_1 + E_2)}. \quad (\text{II.66})$$

En utilisant l'expression de l'énergie exacte totale (II.31), l'erreur relative de l'énergie totale devient :

$$\Delta W^{\mu\text{-XFEM}} = \frac{W_{total}^{exact} - W_{total}}{W_{total}^{exact}} = 0. \quad (\text{II.67})$$

A titre d'illustration, nous choisissons les valeurs numériques suivantes :  $\delta = 0.05$  m,  $E_1 = 10$  MPa et  $E_2 = 100$  MPa. Avec ces paramètres, les champs de déplacement et de déformation sont montrés dans la figure II.20. Nous observons que la méthode  $\mu$ -XFEM parvient à reproduire la solution exacte qui est linéaire par morceaux sur le domaine considéré.

Pour comparer avec les résultats calculés par la méthode XFEM standard dans la section 3.3, nous effectuons les mêmes démarches ci-dessus en choisissant  $a = 0.5$  m,  $b = 0.5$  m,  $l = 1$  m,  $\delta = 0.05$  m,  $E_1 = 10$  MPa et  $E_2 = 100$  MPa. Contrairement à la méthode XFEM standard, nous obtenons un bon accord entre les résultats analytiques et ceux calculés par la méthode  $\mu$ -XFEM.

## 5.4 Remarques

- Il faut noter que la percolation et la distorsion artificielles mentionnées sont induits seulement quand une approximation linéaire est utilisée. Des approximations d'ordre supérieur (par exemple : quadratique) peuvent être utilisées pour corriger ces artefacts, mais induisent en contrepartie d'autres difficultés techniques [30]. L'objectif de la technique proposée est de garder la simplicité du cadre de l'approximation linéaire.

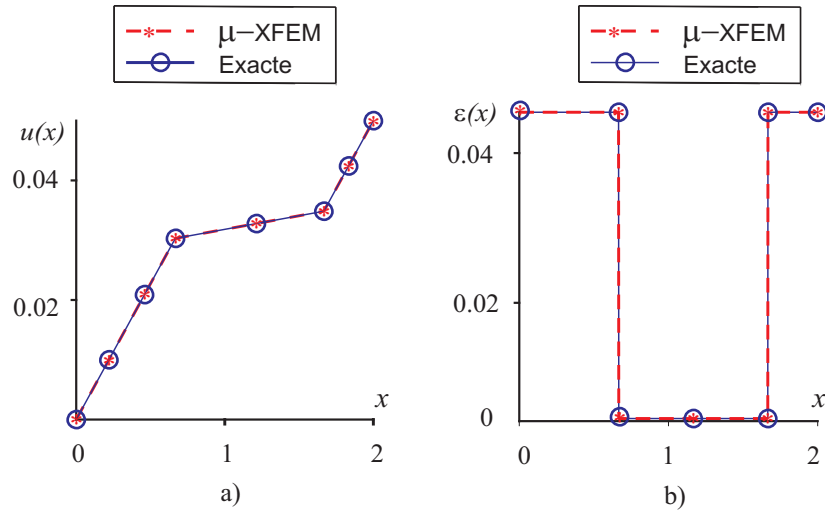


FIGURE II.20: Comparaison entre la solution exacte et la solution  $\mu$ -XFEM/Level-Set pour le problème 1-D avec la présence de deux interfaces : a) déplacement et b) déformation.

- Lorsque la distance entre deux inclusions est inférieure à deux fois de taille des éléments, la méthode  $\mu$ -XFEM reproduit une solution exacte linéaire par morceaux, tandis que la méthode XFEM standard induit des erreurs. Sinon les deux méthodes produisent les mêmes résultats.
- Une approche combinant la méthode XFEM et une technique de raffinement de maillage est proposée dans [31]. Nous soulignons que, dans certains cas, lorsque les inclusions sont proches l'une de l'autre, cette technique pourrait être utile pour décrire précisément les champs de contrainte entre deux inclusions. Cependant, pour les microstructures très complexes comme l'exemple de la section 6.5, une stratégie de raffinement de maillage conduirait probablement à un maillage raffiné uniformément dans l'ensemble du domaine. Pour les cas plus simples, la méthode proposée et la technique de raffinement de maillage sont entièrement compatibles et pourraient conduire à des stratégies hybrides plus efficaces pour décrire des microstructures complexes.
- Dans la méthode  $\mu$ -XFEM, chaque phase peut être associée à un matériau différent en se basant sur les signes des fonctions de level-set.

## 6 Exemples numériques

Dans cette section, nous appliquons la méthode proposée aux calculs des propriétés effectives de matériaux. Des comparaisons entre la méthode proposée et la méthode XFEM seront réalisées. L'impact des artéfacts mentionnés sur la convergence des problèmes sera étudié. Nous observons que plus le contraste entre les propriétés des phases est élevé, plus l'influence de ces artéfacts sur la convergence des problème est forte. Ce dernier point est intéressé par EDF car il rejoint au fluage des bétons. Pour cette raison, nous choisirons, pour les exemples numériques, le contraste de 100 fois entre les propriétés de la matrice et celles des inclusions.

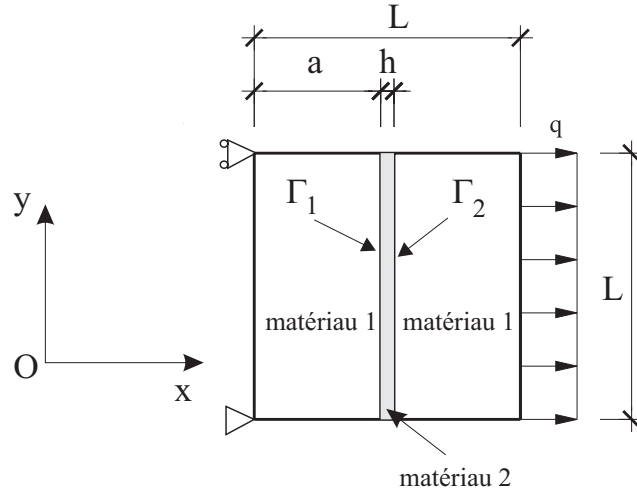
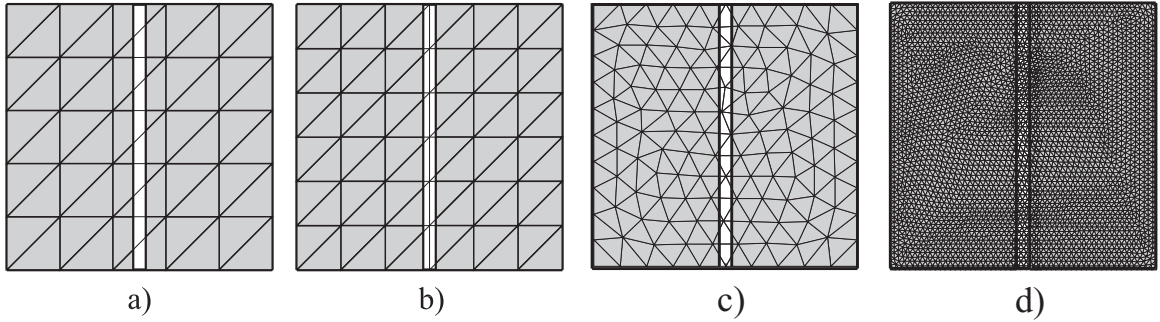


FIGURE II.21: Géométrie du problème et condition aux limites.

FIGURE II.22: Maillages réguliers correspondants à a)  $n = 6$  (pair); b)  $n = 7$  (impair); c) et d) maillages non-structurés.

## 6.1 Interphase unidimensionnelle

Dans le premier exemple, nous proposons un cas test où une bande d'interphase mince se situe entre deux phases. La géométrie du problème est représentée dans la figure II.21. L'objectif de cet exemple est de montrer que la méthode proposée permet de reproduire une solution linéaire par morceaux avec deux interfaces proches, tandis que la méthode XFEM/Level-Set est déficiente dans ce cas.

Un domaine carré est bloqué sur le bord  $x = 0$  et soumis à une force répartie  $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_x$  sur la face opposée. Les matériaux des phases sont homogènes avec des coefficients de Poisson nuls. La solution exacte de ce problème peut être déterminée et est donnée par :

$$u^{ex}(x) = \begin{cases} \frac{q}{E_1}x & 0 \leq x \leq a \\ \frac{qa}{E_1} + \frac{q}{E_2}(x-a) & a \leq x \leq a+h \\ \frac{qa}{E_1} + \frac{qh}{E_2} + \frac{q}{E_1}(x-a-h) & a+h \leq x \leq L \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

où  $E_1$  et  $E_2$  sont les modules d'Young du matériau 1 et 2 (voir la figure II.21).

Pour la méthode XFEM/Level-Set, une seule fonction level-set  $\phi(x) = \min(\phi^1(x), \phi^2(x))$  est utilisée avec  $\phi^1(x) = x - a$  et  $\phi^2(x) = a + h - x$ . Tandis que, pour  $\mu$ -XFEM, deux



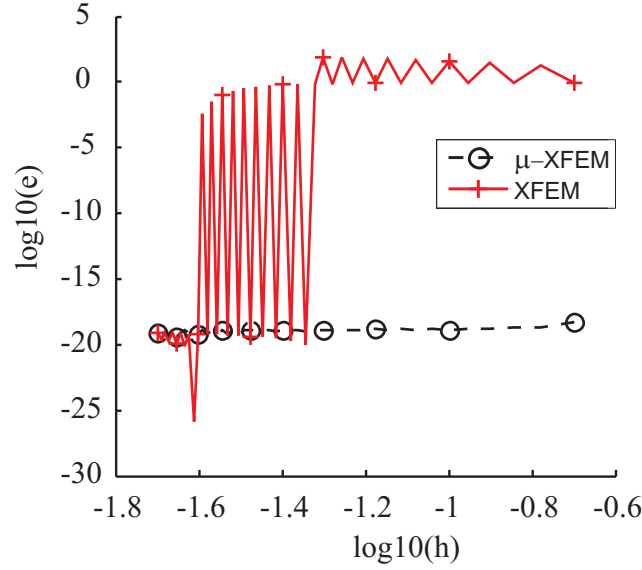


FIGURE II.23: Analyse de la convergence pour le problème d'interphase unidimensionnelle en utilisant les maillages réguliers dont la taille de maille vaut  $h$ .

fonctions level-set  $\phi^1(x)$  et  $\phi^2(x)$  sont respectivement associées à deux interfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Les paramètres numériques suivants sont adoptés :  $E_1 = 1$  MPa,  $\nu_1 = 0$ ,  $E_2 = 100$  MPa,  $\nu_2 = 0$ ,  $q = 10$  MPa/m,  $h = 0.05$  m et  $a = 0.45$  m. Les indices 1 and 2 correspondent aux domaines 1 et 2, respectivement (voir figure II.21.a).

Le VER est discrétisé en éléments linéaires triangulaires. Nous étudions deux cas :

- Des maillages réguliers, illustrés dans les figures II.22.a et II.22.b ;
- Des maillages non-structurés (voir les figures II.22.c et II.22.d.)

Nous calculons le norme de l'erreur relative en énergie défini par

$$e = \frac{\|\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}^h\|_E}{\|\mathbf{u}^{ex}\|_E} = \frac{(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^h - \boldsymbol{\varepsilon}^{ex}) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}^h - \boldsymbol{\varepsilon}^{ex}) d\Omega)^{1/2}}{(\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{ex} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{ex} d\Omega)^{1/2}} \quad (\text{II.69})$$

en augmentant la densité des éléments associée à la taille de maille élémentaire  $h$ , avec  $h = 1/(n - 1)$  où  $n$  est nombre des nœuds dans la direction  $x$ . Pour le maillage régulier, les résultats sont illustrés sur la figure II.23. On peut remarquer que la courbe obtenue avec XFEM est fortement oscillante jusqu'au stade où la bande contient un ou plusieurs éléments. À ce moment, la méthode XFEM peut reproduire la solution du problème avec la précision de machine. Ce comportement oscillant peut être expliqué en distinguant deux cas de maillage :  $n$  pair et  $n$  impair. Le cas de  $n$  impair correspond à l'artefact lié à l'enrichissement insuffisant (voir section 3.3). Le cas de  $n$  pair correspond au phénomène de percolation artificielle (décrit dans la section 3.1). Nous avons tracé séparément les courbes de convergence pour les deux cas dans les figures II.24.a et II.24.b.

En revanche, la méthode  $\mu$ -XFEM permet de reproduire exactement la solution pour n'importe quel maillage. Lorsque le maillage est suffisamment fin, les solutions XFEM et  $\mu$ -XFEM coïncident.

Afin de faire intervenir les différents artefacts simultanément, des maillages non structurés ont été utilisés. Nous étudions la convergence de la solution pour ce cas dans la figure II.25

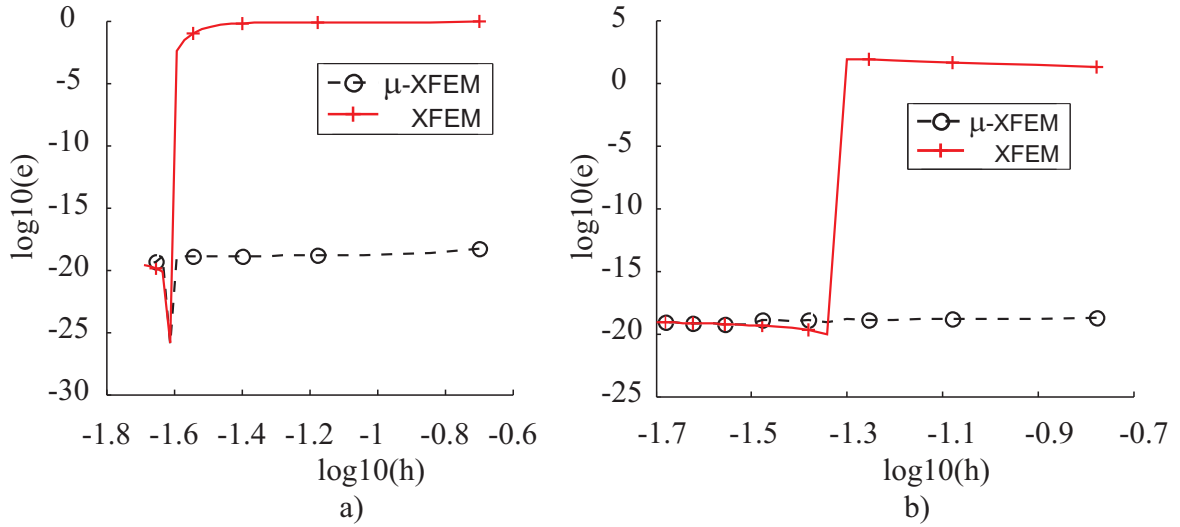


FIGURE II.24: Analyse de la convergence pour le problème d'interphase unidimensionnelle en utilisant les maillages réguliers : a)  $n$  impair ; b)  $n$  pair.

où la valeur  $h$  est définie par  $h = \frac{1}{\sqrt{N-1}}$  avec  $N$  le nombre des nœuds dans le maillage. Encore une fois, la méthode XFEM ne peut pas reproduire la solution exacte jusqu'au stade où une densité d'élément suffisante est atteinte pour supprimer les trois artefacts. Par contre, la méthode  $\mu$ -XFEM peut reproduire la solution avec la précision de machine pour un maillage quelconque.

## 6.2 Cas-test 2D avec inclusions proches

Dans cette exemple, nous considérons un domaine carré contenant quatre inclusions circulaires proches les unes des autres. La géométrie du problème est représentée dans la figure II.26. L'objectif est ici de montrer que dans un problème faisant intervenir des inclusions proches, la convergence de la méthode  $\mu$ -XFEM est meilleure que celle de la méthode XFEM standard. Des maillages non-conformes avec des éléments triangulaires linéaires sont utilisés. Dans le cas de XFEM/Level-Set, une seule fonction level-set définie par (II.7) est introduite. Pour le cas de  $\mu$ -XFEM, chaque inclusion est décrite par une fonction level-set définie par (II.36). Les matériaux de la matrice et des inclusions sont linéaires isotropes. Les paramètres numériques suivants sont choisis :  $E_m = 20$  MPa,  $\nu_m = 0$ ,  $E_i = 2000$  MPa,  $\nu_i = 0$ , les indices  $i$  et  $m$  font référence aux inclusions et à la matrice, respectivement. Nous calculons le tenseur d'élasticité effectif  $\bar{\mathbb{C}}$  en appliquant un déplacement linéaire associé à une déformation homogène sur le bord et en utilisant une procédure d'homogénéisation classique (voir par exemple [63]).

Premièrement, nous étudions la convergence de la composante  $\bar{C}_{1111}$  par rapport à la taille de maille élémentaire  $h$  (voir la figure II.27.a). Comme il n'y a pas de solution analytique pour ce problème, nous utilisons une solution FEM avec un maillage conforme fin correspondant à 24898 ddls qui donne  $\bar{C}_{1111}^{ref} = 34.7244$  MPa comme solution de référence. La norme de

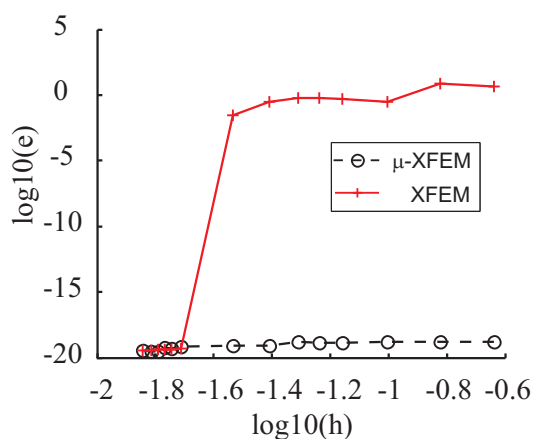


FIGURE II.25: Analyse de la convergence de la solution en utilisant des maillages non-structurés pour le problème d'interphase unidimensionnelle.

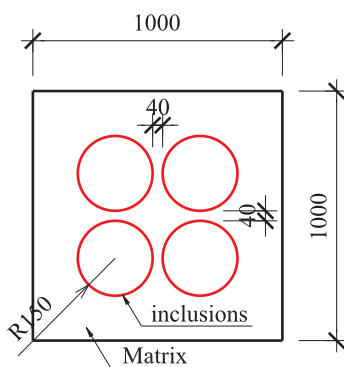


FIGURE II.26: Domaine contenant quatre inclusions circulaires proches.

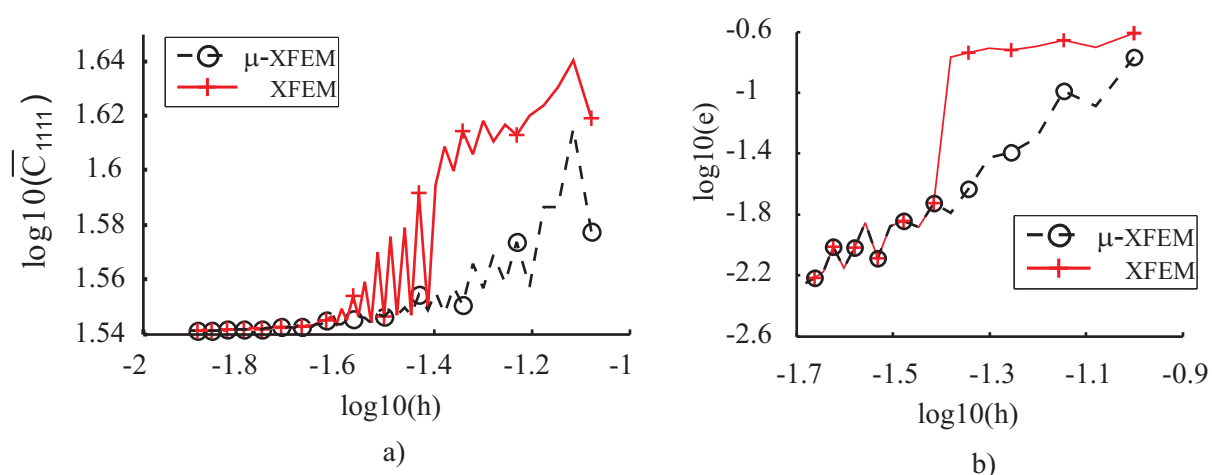


FIGURE II.27: a) Convergence de la composante  $\bar{C}_{1111}$  et b) norme de l'erreur relative de  $\bar{C}_{1111}$  avec XFEM et  $\mu$ -XFEM par rapport à la taille de maille élémentaire.

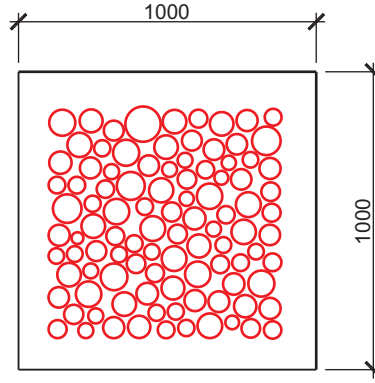


FIGURE II.28: VER contenant 100 inclusions circulaires.

l'erreur relative de  $\bar{C}_{1111}$  définie par

$$e = \frac{|\bar{C}_{1111} - \bar{C}_{1111}^{ref}|}{\bar{C}_{1111}^{ref}} \quad (\text{II.70})$$

est ensuite calculée et illustrée dans la figure II.27.b.

On peut remarquer que la solution  $\mu$ -XFEM converge assez rapidement vers la solution de référence. Par contre, la méthode XFEM conduit à un résultat oscillant et son taux de convergence est plus lent. Les deux courbes coïncident lorsque le maillage est suffisamment fin.

### 6.3 Exemple d'échantillon 2D contenant 100 inclusions

Dans cet exemple, un échantillon contenant 100 inclusions circulaires est modélisé et illustré dans la figure II.28. Les rayons des inclusions sont générés de façon aléatoire avec une distribution de probabilité uniforme entre  $r_{min} = 19.76$  mm et  $r_{max} = 59.26$  mm. La distance minimale entre les inclusions est 5.897 mm. La fraction volumique des inclusions est  $f = 0.3703$ . Les centres des inclusions sont générés aléatoirement en utilisant un algorithme de non-pénétration. Des maillages non-conformes avec éléments linéaires triangulaires sont utilisés pour étudier la convergence des deux méthodes  $\mu$ -XFEM et XFEM.

Les matériaux des inclusions et de la matrice sont supposés linéaires élastiques isotropes avec  $E_m = 1$  MPa,  $\nu_m = 0.2$ ,  $E_i = 100$  MPa,  $\nu_i = 0.2$ . Nous calculons le tenseur de rigidité effectif  $\bar{C}$  en imposant la condition aux limites linéaire de déplacement aux bords correspondant à une déformation uniforme. Dans la figure II.29.a, nous étudions la convergence de  $\bar{C}_{1111}$  par rapport à la taille des éléments pour les deux méthodes. Afin d'avoir une bonne comparaison, les valeurs sont illustrées sur les figures en fonction du nombre de ddls. La solution FEM de référence est obtenue avec des éléments finis standards et un maillage conforme de 129540 ddls. La norme d'erreur relative définie dans (II.70) est également calculée et tracée dans la figure II.29.b.

La méthode  $\mu$ -XFEM fait intervenir pour un même maillage plus d'inconnues nodales que XFEM, en raison de l'enrichissement augmenté. Cependant, nous pouvons constater dans les figures II.29.a et II.29.b que la solution  $\mu$ -XFEM converge beaucoup plus rapidement

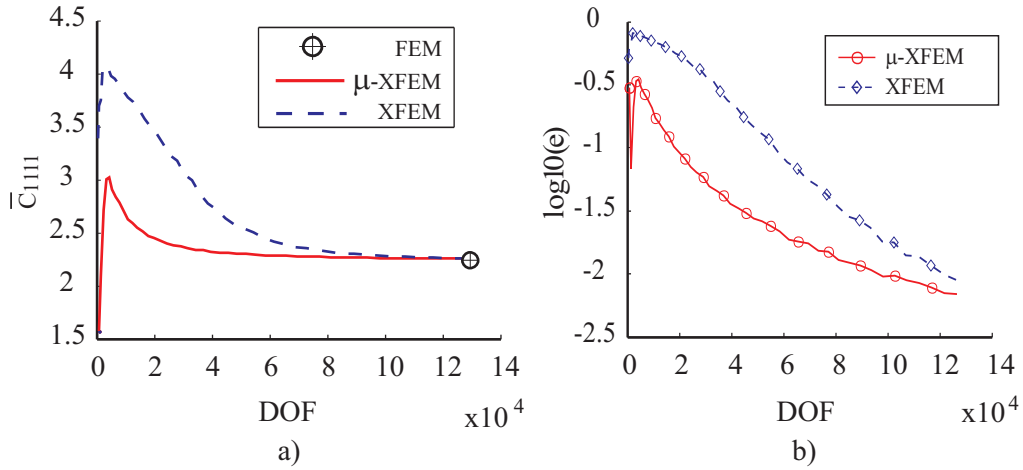


FIGURE II.29: a) Convergence de  $\bar{C}_{1111}$ , b) Norme de l'erreur relative de  $\bar{C}_{1111}$  par rapport au nombre total de ddls.

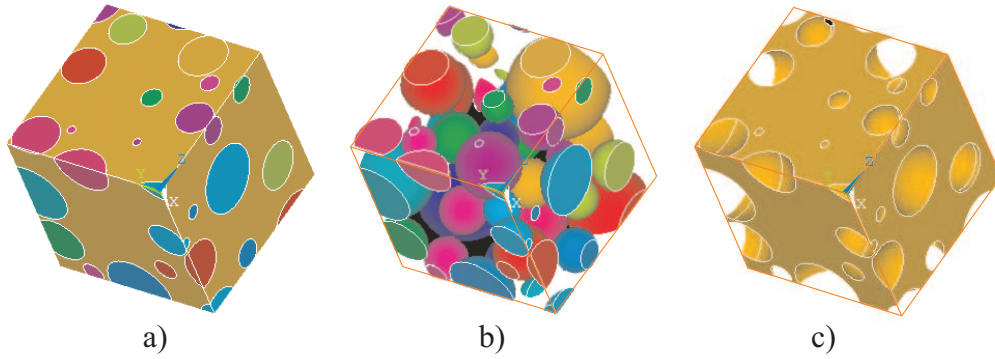


FIGURE II.30: a) VER en 3D contenant 50 inclusions ; b) les inclusions du VER ; c) la matrice du VER.

vers la solution de FEM, et est plus précise pour un même nombre de ddls. Cela permet un économie significative de temps de calcul pour une précision donnée.

#### 6.4 "VER" 3-D avec 50 inclusions

Un "VER" de béton idéalisé tridimensionnel est étudié dans cet exemple. Le "VER" cubique unitaire contient 50 inclusions sphériques avec des positions aléatoires. Les rayons des inclusions sont générés aléatoirement en utilisant une fonction de probabilité déduite à partir d'une courbe expérimentale de tamisage (fournie par EDF), avec un rayon minimal  $r_{min} = 0.0860$  m et maximal  $r_{max} = 0.3072$  m. La fraction volumique totale est  $f = 0.58279$ . Malgré la simplification et l'idéalisation dans de nombreux aspects par rapport à la microstructure de béton réel, ce modèle constitue un problème difficile dû à la présence de nombreuses inclusions proches les unes des autres. Le but de cet exemple est de calculer le tenseur de rigidité effectif  $\bar{C}$  associé au matériau homogénéisé. Nous utilisons XFEM/Level-Set standard et  $\mu$ -XFEM pour un maillage tétraédrique non-conforme. La méthode FEM

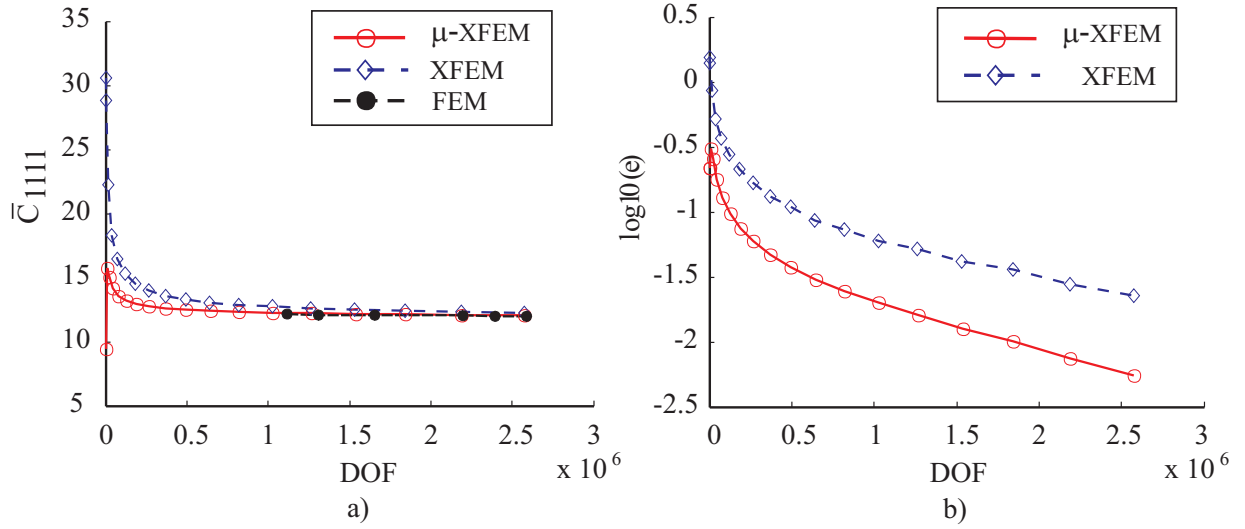


FIGURE II.31: VER tridimensionnel contenant 50 inclusions : a) convergence de  $\bar{C}_{1111}$  ; b) Norme de l'erreur relative de la composante  $\bar{C}_{1111}$  par rapport au nombre de ddls

associée à un maillage tétraédrique conforme est également utilisée afin d'avoir un résultat de référence.

Nous supposons que les matériaux de la matrice et des inclusions sont linéaires élastiques et isotropes avec des modules d'Young et coefficients de Poisson  $E_m = 1$  MPa,  $\nu_m = 0.2$ ,  $E_i = 100$  MPa,  $\nu_i = 0.2$ .

Par opposition avec les exemples précédents, le VER de cet exemple contient des inclusions qui coupent les faces du VER. En vue de pouvoir imposer des conditions aux limites en déplacements (ici linéaires sur les surfaces du VER), les ddls supplémentaires qui se trouvent sur ces surfaces sont fixés à zéro pour XFEM ainsi que pour  $\mu$ -XFEM. Une analyse de la convergence est réalisée avec différents maillages en augmentant la densité des éléments associés à une taille  $h$ . Pour chaque maillage, le tenseur d'élasticité effectif  $\bar{C}$  est calculé.

Comme aucune solution exacte n'existe pour ce problème, la solution FEM avec maillage conforme très fin (voir figure II.31.a.) est utilisée comme solution de référence. L'analyse de convergence de la composante  $\bar{C}_{1111}$  est étudiée dans la figure II.31.b. Nous observons que les solutions des deux méthodes XFEM and  $\mu$ -XFEM convergent bien vers la solution de référence. Cependant, on peut observer une convergence plus rapide avec la méthode  $\mu$ -XFEM. Dans le tableau II.1, nous comparons le nombre des degrés de liberté exigé pour une erreur relative donnée de  $\bar{C}_{1111}$ . Nous pouvons noter que pour une erreur de 5%, le gain de nombre de ddls pour  $\mu$ -XFEM par rapport à XFEM est de 3.7, et de 2.5 pour une erreur de 2.5%.

## 6.5 "VER" 3D avec 2024 inclusions

Dans ce dernier exemple, un "VER" unitaire de forme cubique contenant 2024 inclusions est étudié. Comme pour le problème précédent, les rayons des inclusions sont générés aléatoirement avec un rayon maximal  $r_{min} = 0.0214$  m et minimal  $r_{max} = 0.0833$  m. La fraction

TABLE II.1: Nombre des degrés de liberté requis pour atteindre une valeur de l'erreur relative donnée, comparaison entre XFEM et  $\mu$ -XFEM pour le problème en 3D avec 50 inclusions.

Erreur relative donnée	XFEM (ddls)	$\mu$ -XFEM (ddls)
5.0%	1294156	341289
2.5%	2369454	791259

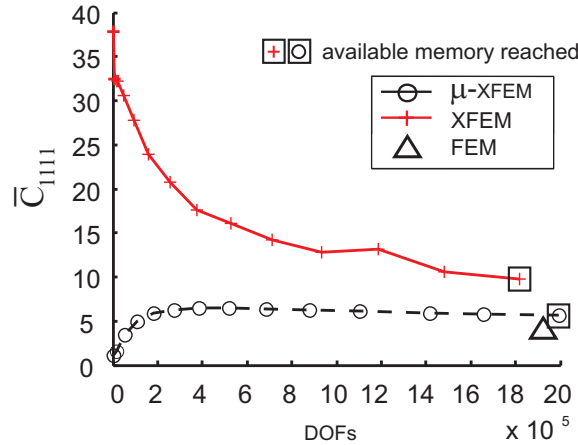


FIGURE II.32: Convergence de la propriété effective pour un VER élastique 3D contenant 2024 inclusions. La solutions FEM est obtenue avec une maillage tétraédrique conforme de 9 millions ddls (gracieusement fournie par B. Bary, CEA, France [5]).

volumique des inclusions est  $f = 0.4$ . Les matériaux des phases du problème précédent sont utilisés. Dans ce cas, les travaux de construction du maillage conforme sont très difficiles et coûteux. C'est la raison pour laquelle une seule solution FEM correspondant à  $9.10^6$  ddls a été calculée (fournie par B. Bary, CEA, France [5]). En l'absence d'autres solutions avec maillages plus fins, nous ne pouvons conclure sur la convergence de cette solution. Nous montrons, dans la figure II.32, l'analyse de la convergence du composant  $\bar{C}_{1111}$  en fonction du nombre de ddls. Nous notons qu'ici aussi,  $\mu$ -XFEM atteint plus rapidement une solution convergée.

La figure II.33 montre les interfaces approximées par XFEM et  $\mu$ -XFEM, pour un maillage de 511104 éléments. Qualitativement, on peut observer que  $\mu$ -XFEM supprime la percolation artificielle. La suppression des autres artefacts participe à la meilleure convergence de la méthode pour le calcul des propriétés effectives.

## 7 Comparaison entre la méthode $\mu$ -XFEM et les autres méthodes numérique

Dans cette section, on cherche à positionner la méthode  $\mu$ -XFEM vis-à-vis d'autres méthodes numériques. Ce travail a fait l'objet d'un article [33]. Chaque auteur a proposé sa

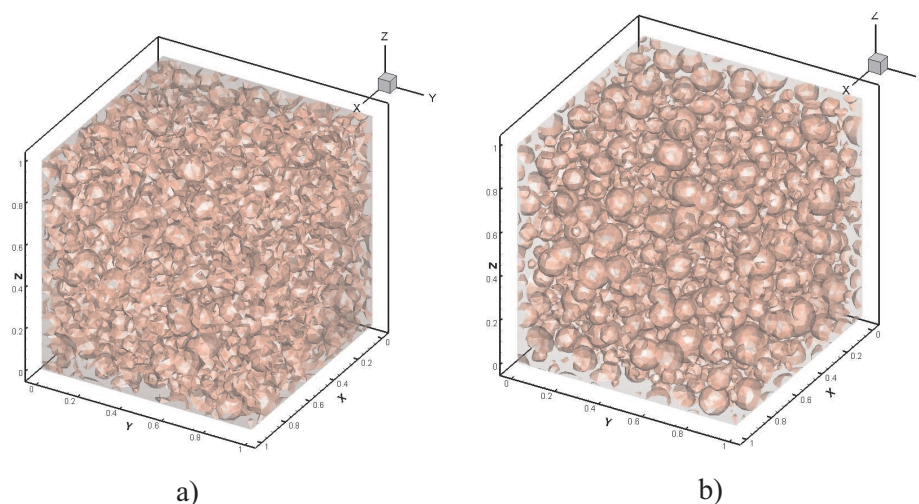


FIGURE II.33: VER contenant 2024 inclusions : les interfaces des inclusions approximées par a) XFEM ; b)  $\mu$ -XFEM ; pour un même maillage régulier de 511104 éléments.

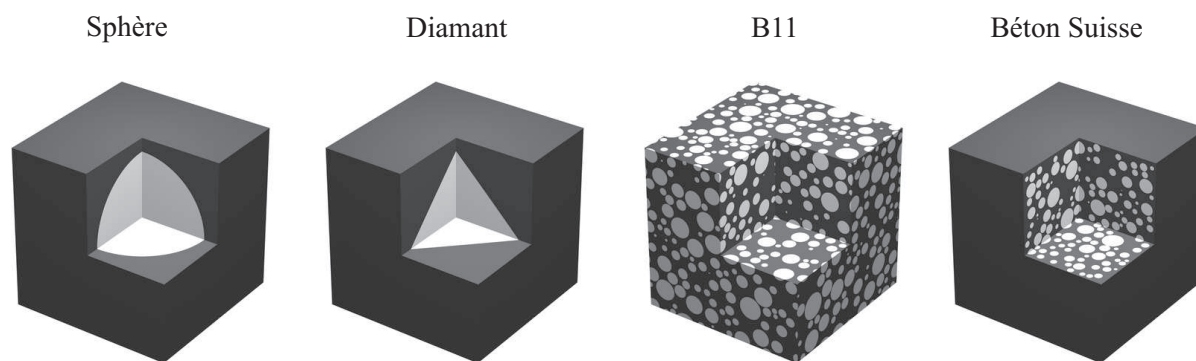


FIGURE II.34: Représentation des quatre microstructures étudiées [33].

méthode pour déterminer les propriétés effectives d'un matériau hétérogène. Parmi les méthodes considérées [33], celles qui nous intéressent ici sont :

- FEM CAST3M, consistant à utiliser la méthode éléments finis (CAST3M) sur un maillage conforme des hétérogénéités.
- FEM Maillage Adaptatif, utilisant la technique de maillage adaptatif (non-conforme) pour mailler les microstructures complexes.
- $\mu$ -XFEM, proposée dans ce chapitre.
- FEM Benhur, exploitant la procédure proposée dans [120] pour représenter de façon approximative la géométrie d'une microstructure donnée sur un maillage quelconque. Cette méthode permet également d'estimer les propriétés effectives du matériau hétérogène.

Quatre morphologies étudiées sont illustrées dans la figure II.34. Les deux premiers sont de simples microstructures conçues pour valider les approches d'homogénéisation : la première est une sphère centrée dans un cube (la fraction de volume des inclusions est de 0.3), la deuxième est un diamant centré dans un cube (la fraction volumique des inclusions est de 0.1). Pour éviter de trop grandes singularités géométriques, les pointes du diamant sont



légèrement lissées. L'interface des inclusions est définie par :

$$\left|\frac{x}{a}\right|^p + \left|\frac{y}{a}\right|^p + \left|\frac{z}{a}\right|^p = 1 \quad (\text{II.71})$$

La troisième microstructure, nommé "B11", compose de 2024 sphères placées de façon aléatoire dans un cube. Ces sphères peuvent se croiser les faces du cube. La quatrième microstructure, appelée "Béton Suisse", est constituée de 3200 sphères placées aléatoirement dans un cube. Contrairement à la troisième microstructure, les sphères ici ne coupent pas les faces du cube. Sa fraction volumique des inclusions est plus faible que celle de B11 mais la distance entre les inclusions est beaucoup plus faible que celle de B11. Les caractéristiques des deux dernières morphologies sont présentées dans le tableau II.2. Dans ce tableau,  $N_{ins}$  est le nombre des inclusions,  $f_i$  est la fraction volumique des inclusions,  $L$  est la longueur des arrêts du cube,  $\phi_{min}$ ,  $\phi_{max}$  sont respectivement les diamètres minimal et maximal des inclusions,  $d_{min}$  est la distance minimale entre les inclusions.

TABLE II.2: Certaines caractéristiques des microstructures complexes.

Morphologie	$N_{ins}$	$f_i$	$\phi_{min}/L$	$\phi_{max}/L$	$d_{min}/L$
B11	2024	0.402	0.043	0.167	$1.14 * 10^{-3}$
Béton Suisse	3000	0.361	0.036	0.125	$2.17 * 10^{-7}$

Les matériaux élémentaires constituant les phases sont supposés élastiques isotropes. Pour chacune des morphologies, nous effectuons les calculs correspondants aux paramètres matériau suivants :

- cas de fort contraste :  $E_i = 100$  GPa,  $\nu_i = 0.2$ ,  $E_m = 1$  GPa,  $\nu_m = 0.2$ ,
- cas de faible contraste :  $E_i = 3$  GPa,  $\nu_i = 0.4$ ,  $E_m = 1$  GPa,  $\nu_m = 0.1$ .

où  $E_i$ ,  $E_m$  sont respectivement les modules de Young des inclusions et de la matrice et  $\nu_i$ ,  $\nu_m$  sont respectivement les coefficients de Poisson des inclusions et de la matrice.

L'objectif ici est de comparer les propriétés effectives calculées par de différentes méthodes numériques. Pour cette raison, les conditions aux limites ont été choisies : pure Dirichlet et pure Neumann.

En vue de pouvoir obtenir des résultats correspondants au maillage infiniment fin (c'est-à-dire pour une taille de maillage régulier  $h$  tendant vers 0), une stratégie d'extrapolation linéaire est adoptée pour la méthode  $\mu$ -XFEM. Les résultats d'extrapolation est obtenus à partir des calculs correspondants aux  $h = L/(70 - 1)$  et  $h = L/(75 - 1)$ . L'extrapolation linéaire est aussi appliquée pour la méthode FEM Benur.

Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux II.3, II.4, II.5 et II.6. Nous observons que les méthodes donnent des résultats assez proches pour le cas de faible contraste. Cependant, pour le cas de fort contraste, un écart entre les résultats est observé. Cela vient de différente approche utilisée dans chaque méthode considérée. Les impacts de fort contraste sur les approche différentes sont différents. Les résultats de la méthode  $\mu$ -XFEM sont toujours proches de la méthode éléments finis avec maillage conforme. Concernant les calculs sur des maillages non-structurés (les méthodes FEM CAST3M et FEM Maillage Adaptatif), la

TABLE II.3: Résultats du composante  $C_{1111}$  (GPa) du tenseur d'élasticité effectif pour la microstructure contenant une sphère (\* indique les résultats obtenus par l'extrapolation).

Contraste	Conditions aux limites	FEM CAST3M	FEM Maillage Adaptatif	$\mu$ -XFEM	FEM Benur
3	Contrainte	1.4670		1.4669*	1.4745*
3	Déformation	1.5621	1.5322	1.5620*	1.5728*
100	Contrainte	1.8642	1.5062	1.8621*	1.8990*
100	Déformation	2.3057	2.2121	2.3022*	2.3809*

TABLE II.4: Résultats du composante  $C_{1111}$  (GPa) du tenseur d'élasticité effectif pour la microstructure contenant un diamant (\* indique les résultats obtenus par l'extrapolation).

Contraste	Conditions aux limites	FEM CAST3M	FEM Maillage Adaptatif	$\mu$ -XFEM	FEM Benur
3	Contrainte	1.1581		1.1596*	1.1631*
3	Déformation	1.1738	1.2307	1.1666*	1.1788*
100	Contrainte	1.3329		1.3418*	1.3552*
100	Déformation	1.4140	1.3957	1.4206*	1.4502*

méthode d'extrapolation n'est pas évidente à définir. Par contre, les méthodes FEM Benur et  $\mu$ -XFEM présentent plusieurs moyens naturels pour extrapoler leurs résultats par rapport à la taille des maillages puisque leurs calculs se font sur des grilles régulières.

Nous rappelons que les méthodes XFEM et  $\mu$ -XFEM donnent des résultats exactement identiques pour les morphologies contenant une inclusion (sphère et diamant). Cette conclusion est maintenue pour l'analyse du temps de calcul et de la consommation de mémoire vive. Il est intéressant maintenant de comparer les deux méthodes pour traiter la morphologie B11. Le tableau II.7 illustre les résultats obtenus et le mémoire vive requis pour chaque méthode. Pour une même grille, nous observons que la méthode  $\mu$ -XFEM consomme moins de mémoire vive que la méthode XFEM standard bien que  $\mu$ -XFEM exhibe un plus grand nombre de ddls que la méthode XFEM standard. Le temps de résolution des systèmes linéaires est quasiment similaire pour les deux méthodes. Cependant, la construction de la matrice de rigidité de la méthode  $\mu$ -XFEM demande plus de temps par rapport à la méthode XFEM standard. Les résultats d'extrapolation sont ensuite analysés en utilisant un schéma d'extrapolation linéaire, par rapport à la taille de maille, pour les deux maillages les plus fins. Nous extrapolons les valeurs  $C_{1111}$  à partir des deux dernier calculs. Nous obtenons, pour  $h \rightarrow 0$ ,  $C_{1111}^{\mu\text{-XFEM}} = 4.12$  GPa et  $C_{1111}^{\text{XFEM}} = 0.90$  GPa. Il est aisé de trouver que la

TABLE II.5: Résultats du composante  $C_{1111}$  (GPa) du tenseur d'élasticité effectif pour la microstructure B11 (\* indique les résultats obtenus par l'extrapolation).

Contraste	Conditions aux limites	FEM CAST3M	FEM Maillage Adaptatif	$\mu$ -XFEM	FEM Benur
3	Contrainte	1.7403		1.7770*	1.7150*
3	Déformation	1.7936	1.6520	1.8371*	1.7699*
100	Contrainte	2.7014		2.5840*	2.7583*
100	Déformation	4.2186	4.7037	4.1204*	4.5754*

TABLE II.6: Résultats du composante  $C_{1111}$  (GPa) du tenseur d'élasticité effectif pour la microstructure "Béton Suisse" (\* indique les résultats obtenus par l'extrapolation).

Contraste	Conditions aux limites	FEM CAST3M	FEM Maillage Adaptatif	$\mu$ -XFEM	FEM Benur
3	Contrainte	1.6546		1.6216	1.6242*
3	Déformation	1.6661	1.6346	1.6851	1.6331*
100	Contrainte	2.5247		3.6817	2.9429*
100	Déformation	2.5926	2.7625	3.6833	3.0637*

méthode  $\mu$ -XFEM offre un résultat d'extrapolation raisonnable. Par contre, l'extrapolation de la méthode XFEM standard donne de mauvais résultats, à cause des artefacts numériques. Les deux méthodes permettent de réaliser des calculs sur la morphologie de "béton suisse". Cependant, dans la limite des calculs effectués sur un ordinateur présentant 32Gb de mémoire vive, les deux méthodes n'arrivent pas à décrire cette morphologie de façon suffisamment fidèle et plusieurs inclusions ne sont pas détectées. Cela ne permet pas d'extrapoler les résultats obtenus.

## 8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence un certain nombre de problèmes numériques intervenant lors la modélisation des microstructures complexes avec XFEM. Lorsque les inclusions sont proches les unes des autres par rapport à la taille moyenne des éléments, trois artefacts sont induits : (i) une percolation artificielle entre les inclusions, (ii) une distorsion amplifiée des interfaces et (iii) un défaut d'enrichissement. Les deux premiers artefacts sont liés à la description des interfaces lorsqu'une seule fonction level-set est utilisée. Le troisième artefact est dû à l'approximation de la méthode XFEM, qui n'est pas suffisamment riche pour reproduire un champ linéaire lorsque deux éléments voisins sont chacun traversés par

TABLE II.7: Résultats des méthodes XFEM standard et  $\mu$ -XFEM pour la microstructure B11 dans le cas de fort contraste ( $N$  est nombre des ddls,  $M$  est le mémoire vive requis,  $f_i$  est la fraction volumique détectée).

$h/L$	$N$	$M$ (GB)	$f_i$	$C_{1111}$ (GPa)	$N$	$M$ (GB)	$C_{1111}$ (GPa)	$f_i$
	$\mu$ -XFEM	$\mu$ -XFEM	$\mu$ -XFEM	$\mu$ -XFEM	XFEM	XFEM	XFEM	XFEM
0.2500	2106	-	0.001	1.1552	750	-	37.781	0.406
0.1111	18156	-	0.012	1.5967	5994	-	32.482	0.389
0.0714	53022	-	0.082	3.3928	20220	-	32.205	0.392
0.0526	109440	-	0.163	4.9262	47958	-	30.550	0.393
0.0416	182424	-	0.226	5.8978	93603	-	27.744	0.387
0.0344	273405	1.3	0.270	6.3103	161178	1.2	23.939	0.383
0.0294	384828	1.7	0.302	6.4893	254427	1.8	20.776	0.382
0.0256	520401	2.4	0.321	6.4836	375963	2.5	18.224	0.383
0.0227	684948	3.5	0.342	6.3809	528600	3.7	16.096	0.384
0.0204	876714	4.4	0.355	6.2423	713316	6.2	14.261	0.386
0.0185	1101801	6.7	0.362	6.0829	932967	8.3	12.812	0.387
0.0166	1417221	10.2	0.369	5.9121	1244550	12.3	11.412	0.388
0.0156	1657263	12.5	0.373	5.7977	1482765	16.0	10.623	0.389
0.0144	1992159	15.7	0.377	5.6774	1816068	18.8	9.820	0.339
0.0135	2369517	23.3	0.380	5.5722	2191563	27.0	9.218	0.391

une interface. Le premier artefact se produit lorsqu'un élément est coupé par plus d'une interface. Tandis que les deux derniers artefacts se manifestent quand le support d'un nœud est coupé par plus d'une interface. Ces différents problèmes induisent des erreurs numériques supplémentaires qui ralentissent la vitesse de convergence.

Nous avons présenté ensuite une nouvelle version de la méthode XFEM permettant d'éviter les problèmes mentionnés. Nous avons montré que les artefacts numériques sont éliminés avec ce nouveau schéma. Dans la méthode proposée, chaque inclusion est associée à une fonction level-set. Cette modification fait disparaître les deux premiers artefacts. De plus, un enrichissement augmenté est introduit, permettant d'éviter le problème lié au troisième artefact. Au travers de différents exemples 2D et 3D, la précision et le gain de la méthode proposée ont été illustrés. Les résultats obtenus montrent que pour des applications visant à déterminer les propriétés effectives de matériaux hétérogènes complexes, pour des fortes fractions volumiques d'inclusions, la convergence par rapport au nombre de ddls est significativement améliorée. Ce dernier point permet d'utiliser des maillages plus grossiers pour une précision donnée par rapport à la méthode XFEM/Level-Set standard. Un autre avantage de cette approche est la possibilité d'introduire simplement pour chaque inclusion un matériau différent.



# Chapitre III

## Une nouvelle méthode numérique simplifiée pour le calcul des structures hétérogènes viscoélastiques linéaires

### 1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une méthode efficace pour homogénéiser un composite dans le cadre de l'élasticité linéaire des microstructures complexes fortement hétérogènes telle que celles des bétons, dont le contraste des propriétés des phases peut être très fort et la fraction volumique des inclusions est grande. Comme présenté dans le chapitre I, le béton n'est pas simplement un matériau hétérogène élastique. Il présente toujours des déformations différées au cours du temps. Parmi ces déformations, nous nous intéressons particulièrement au phénomène de fluage propre. Dans ce chapitre, nous proposons une méthode multi échelle numérique permettant de calculer la réponse de structures constituées de matériaux viscoélastiques linéaires fortement hétérogènes [122]. Par rapport aux approches proposées jusqu'à présent dans ce cadre, notre méthode numérique n'utilise pas la transformée de Laplace ni les calculs couplés à deux échelles. Afin d'éviter les problèmes liés à l'inversion de la transformée de Laplace numérique et aux forts coûts de calculs couplés multi échelle dans les différentes approches proposées, nous introduisons une méthode simple, basée sur la construction d'un tenseur de relaxation effectif  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$  associé à un Volume Élémentaire Représentatif (VER) de la microstructure, dont la morphologie et le comportement des phases sont supposés connus. Ce tenseur est calculé numériquement et stocké à chaque pas de temps. Une méthode d'interpolation appropriée permet ensuite de construire une représentation continue de  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$  à partir d'un certain nombre de valeurs discrètes. Pour calculer la réponse d'une structure composée d'un matériau viscoélastique linéaire hétérogène, des algorithmes implicites sont construits à l'aide de la représentation continue de  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$  dans l'expression de la loi de comportement sous forme d'un produit de convolution.

Le chapitre est constitué de 5 sections. Dans la section suivante, nous présentons les équations et les algorithmes associés au problème local viscoélastique. La section 3 présente en détail l'algorithme explicite pour calculer la réponse temporelle d'une structure formée d'un matériau viscoélastique hétérogène. Les algorithmes à deux échelles sont résumés synthétiquement dans la section 4. Dans la section 5, la précision, l'efficacité et la convergence de la méthode sont discutées et illustrées au travers des exemples numériques. Nous appliquons notre méthode à l'étude du fluage de structures en bétons. Pour conclure, nous effectuons

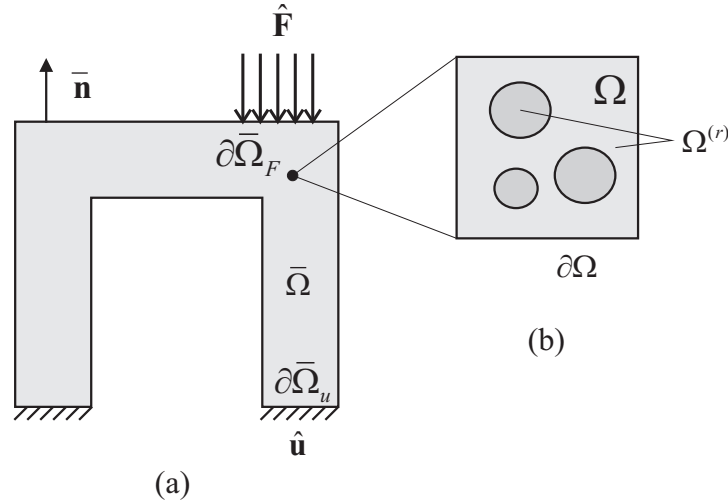


FIGURE III.1: (a) Une structure et (b) un volume élémentaire représentatif (VER).

la comparaison du temps de calculs et de la consommation de mémoire vive entre notre approche et une technique typique de calculs à au moins deux niveaux (FE<sup>2</sup> [40]).

## 2 Problème viscoélastique à l'échelle microscopique

L'objectif de cette section est de présenter les algorithmes pour calculer numériquement les champs dans un VER par les méthodes numériques FEM, XFEM ou FFT ou FV. Nous considérons une microstructure composée d'un matériau hétérogène dont les phases sont viscoélastiques linéaires. Nous supposons que la microstructure est définie par un VER occupant un domaine  $\Omega$  illustré dans la figure III.1.b. Les sous-domaines occupés par les différentes phases sont dénotés par  $\Omega^{(r)}$  avec  $r = 1, 2, \dots, R$  et nous avons  $\Omega = \bigcup_{r=1}^R \Omega^{(r)}$ . Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur le cadre offert par le modèle de Maxwell généralisé avec un nombre infini de branches, qui est le modèle le plus général pour la viscoélasticité linéaire.

### 2.1 Viscoélasticité linéaire : modèle de Maxwell généralisé 1D

#### 2.1.1 Fonction de relaxation

Nous présentons ici la méthode classique permettant de déterminer la fonction de relaxation du modèle de Maxwell généralisé moyennant la transformation de Laplace. Pour simplifier, la méthode est détaillée ci-dessous dans le cas unidimensionnel (1D).

Le système des équations associé au modèle de Maxwell généralisé (figure III.2) est exprimé par

$$\begin{cases} \sigma_{\infty}(t) = E_{\infty} \varepsilon(t), \\ \sigma_i(t) = E_i (\varepsilon(t) - \alpha_i(t)) = \eta_i \dot{\alpha}_i, \\ \sigma(t) = \sigma_{\infty}(t) + \sum_{i=1}^N \sigma_i(t). \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Dans (III.1),  $\sigma_i$  est la contrainte dans l'élément de ressort-amortisseur  $i$ ,  $\alpha_i$  est la déformation reliée à l'amortisseur  $i$ ; l'indice  $i = 1, 2, \dots, N$  avec  $N$  étant le nombre des éléments de ressort-

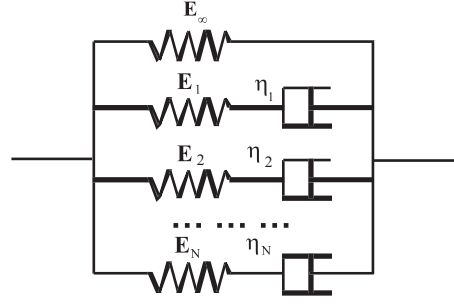


FIGURE III.2: Représentation schématique du modèle de Maxwell généralisé.

amortisseurs parallèles;  $E_\infty$  et  $E_i$  sont des modules d'Young;  $\eta_i$  caractérise l'amortissement de l'élément  $i$ ;  $\sigma$  et  $\varepsilon$  indiquent la contrainte totale et la déformation totale du système;  $\dot{x}$  est la dérivée de  $x$  par rapport au temps. En appliquant la transformée de Laplace au système d'équations (III.1), on obtient

$$\begin{cases} \sigma_\infty^*(p) = E_\infty \varepsilon^*(p), \\ \sigma_i^*(p) = E_i (\varepsilon^*(p) - \alpha_i^*(p)) = \eta_i p \alpha_i^*(p), \\ \sigma^*(p) = \sigma_\infty^*(p) + \sum_{i=1}^N \sigma_i^*(p), \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

où  $p$  est une variable complexe. Il résulte de l'équation (III.2) que

$$\alpha_i^*(p) = \frac{E_i \varepsilon^*(p)}{\eta_i p + E_i} \quad (\text{III.3})$$

et la contrainte totale est exprimée par

$$\sigma_i^*(p) = \frac{\eta_i p E_i \varepsilon^*(p)}{\eta_i p + E_i}. \quad (\text{III.4})$$

En substituant  $\sigma_i^*(p)$  et  $\sigma_\infty^*(p)$  dans l'équation (III.2), on arrive à

$$\sigma^*(p) = \left( E_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i p E_i}{\eta_i p + E_i} \right) \varepsilon^*(p). \quad (\text{III.5})$$

En vue d'obtenir la fonction de relaxation du modèle, nous appliquons une déformation macroscopique  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$  où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside et  $\varepsilon_0$  est une constante. Nous avons  $\varepsilon^*(p) = L\{\varepsilon(t)\} = \varepsilon_0 \frac{1}{p}$  avec  $L\{\cdot\}$  étant l'opérateur de transformée de Laplace. En substituant l'expression de  $\varepsilon^*(p)$  dans l'équation (III.5), la contrainte totale dans l'espace de Laplace est exprimée par :

$$\sigma^*(p) = \frac{1}{p} \left( E_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i p E_i}{\eta_i p + E_i} \right) \varepsilon_0. \quad (\text{III.6})$$

La contrainte totale s'obtient dans l'espace temporelle en appliquant la transformée inverse de Laplace à l'équation (III.6) :

$$\sigma(t) = G(t) \varepsilon_0 \quad (\text{III.7})$$



où la fonction de relaxation  $G(t)$  est définie par :

$$\begin{aligned} G(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \left( E_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i p E_i}{\eta_i p + E_i} \right) \right\} \\ &= E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \exp(-t/\tau_i), \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

$\tau_i$  étant le temps de relaxation de l'élément ressort-amortisseur  $i$ , défini par  $\tau_i = \eta_i/E_i$ .

### 2.1.2 Convolution intégrale

Un matériau linéaire viscoélastique peut être caractérisé par une relation contrainte-déformation sous la forme d'une convolution intégrale de Riemann-Stieltjes :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds, \quad (\text{III.9})$$

où  $G(t)$  est la fonction de relaxation. Il convient de considérer la contrainte  $\sigma(t)$  et la déformation  $\varepsilon(t)$  qui sont nulles pour  $t < 0$ , et qui peuvent posséder une discontinuité à l'instant  $t = 0$ . Dans ce cas, nous pouvons écrire l'équation (III.9) sous la forme

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds + G(t) \varepsilon(0). \quad (\text{III.10})$$

En substituant l'expression (III.8) de  $G(t)$  dans (III.10), il vient que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_0^t \dot{\sigma}_\infty(s) ds + \sum_{i=1}^N \int_0^t \gamma_i \exp(-(t-s)/\tau_i) \dot{\sigma}_\infty(s) ds \\ &\quad + \left( 1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-t/\tau_i) \right) \sigma_\infty(0), \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

où  $\sigma_\infty(t) = E_\infty \varepsilon(t)$  et  $\gamma_i = E_i/E_\infty$ . En introduisant les variables internes

$$q_i = \int_0^t \gamma_i \exp[-(t-s)/\tau_i] \dot{\sigma}_\infty(s) ds, \quad (\text{III.12})$$

nous obtenons finalement

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^N q_i + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-t/\tau_i) \sigma_\infty(0) + \sigma_\infty(t). \quad (\text{III.13})$$

### 2.1.3 Discrétisation temporelle et algorithme explicite microscopique

Cette section est dédiée à la discrétisation temporelle du problème viscoélastique linéaire lié au modèle de Maxwell généralisé. Trois algorithmes seront présentés selon l'ordre croissant de la précision mais décroissant de la généralité.

L'intervalle du temps à l'échelle microscopique  $\mathcal{T} = [0, t^{max}]$  est discrétisé en plusieurs instants  $t^i = (i - 1)\Delta t$  avec  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $t^{max}$  étant le temps maximal de simulation et  $\Delta t$  le pas du temps. Par simplicité et sans perte de généralité, on suppose ci-dessous que le pas du temps  $\Delta t$  est constant.

**Algorithme 1**

L'énergie libre du problème a l'expression

$$w(\varepsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = \frac{1}{2}\varepsilon E_\infty \varepsilon + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\varepsilon - \alpha_i) E_i (\varepsilon - \alpha_i) \quad (\text{III.14})$$

et le potentiel d'énergie dissipée est donné par

$$\varphi(\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i \eta_i \dot{\alpha}_i. \quad (\text{III.15})$$

Le système des équations associé au modèle de Maxwell généralisé (figure III.2) est fourni par

$$\sigma = \frac{\partial w(\varepsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_N)}{\partial \varepsilon}, \quad (\text{III.16})$$

$$\frac{\partial w(\varepsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_N)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi(\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_N)}{\partial \dot{\alpha}_i} = 0. \quad (\text{III.17})$$

La contrainte partielle dans chaque branche du modèle de Maxwell généralisé se calcule par

$$\sigma_\infty = E_\infty \varepsilon, \quad (\text{III.18})$$

$$\sigma_i = E_i (\varepsilon - \alpha_i) = \eta_i \dot{\alpha}_i. \quad (\text{III.19})$$

La contrainte totale est la somme des contraintes partielles :

$$\sigma = \sigma_\infty + \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (\text{III.20})$$

L'approximation suivante est ensuite utilisée pour  $t \in [t^n, t^{n+1}]$  :

$$\dot{f}(t) = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t}, \quad (\text{III.21})$$

$$f(t) = (1 - \omega) f^n + \omega f^{n+1} \quad \text{avec } \omega \in [0, 1]. \quad (\text{III.22})$$

Avec cette approximation, les équations (III.18), (III.19) et (III.20) deviennent

$$(1 - \omega) \sigma_\infty^n + \omega \sigma_\infty^{n+1} = E_\infty [(1 - \omega) \varepsilon^n + \omega \varepsilon^{n+1}], \quad (\text{III.23})$$

$$\begin{aligned} (1 - \omega) \sigma_i^n + \omega \sigma_i^{n+1} &= E_i [((1 - \omega) \varepsilon^n + \omega \varepsilon^{n+1}) - ((1 - \omega) \alpha_i^n + \omega \alpha_i^{n+1})] \\ &= \eta_i [\alpha_i^{n+1} - \alpha_i^n] / \Delta t, \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

$$(1 - \omega) \sigma^n + \omega \sigma^{n+1} = (1 - \omega) \sigma_\infty^n + \omega \sigma_\infty^{n+1} + \sum_{i=1}^N [(1 - \omega) \sigma_i^n + \omega \sigma_i^{n+1}]. \quad (\text{III.25})$$

Des équations (III.23), (III.24) et (III.25), on peut déduire :

$$\alpha_i^{n+1} = \omega P_i E_i \varepsilon^{n+1} + (1 - \omega) P_i E_i \varepsilon_i^n - P_i Q_i \alpha_i^n, \quad (\text{III.26})$$

$$\begin{aligned} \sigma^{n+1} = & \left[ E_\infty + \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^N \eta_i P_i E_i \right] \varepsilon^{n+1} - \frac{1 - \omega}{\omega} \sigma^n \\ & - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{i=1}^N \eta_i [ P_i Q_i + I ] \alpha_i^n + \left[ \frac{1 - \omega}{\omega} E_\infty + \frac{1 - \omega}{\omega \Delta t} \sum_{i=1}^N \eta_i P_i E_i \right] \varepsilon^n, \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

où

$$P_i = \left[ \omega E_i + \frac{1}{\Delta t} \eta_i \right]^{-1}, \quad (\text{III.28})$$

$$Q_i = (1 - \omega) E_i + \frac{1}{\Delta t} \eta_i. \quad (\text{III.29})$$

Si l'on pose

$$C_{M1} = E_\infty + \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^N \eta_i P_i E_i, \quad (\text{III.30})$$

$$L_{M1}^{n+1} = -\frac{1 - \omega}{\omega} \sigma^n - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{i=1}^N \eta_i [ P_i Q_i + I ] \alpha_i^n + \left[ \frac{1 - \omega}{\omega} E_\infty + \frac{1 - \omega}{\omega \Delta t} \sum_{i=1}^N \eta_i P_i E_i \right] \varepsilon^n, \quad (\text{III.31})$$

l'équation (III.27) prend la forme

$$\sigma^{n+1} = C_{M1} \varepsilon^{n+1} + L_{M1}^{n+1}. \quad (\text{III.32})$$

Dans cet algorithme,  $C_{M1}$  est constant et joue le rôle d'une matrice tangente. Une fois que nous avons la relation (III.32), le problème est facile à résoudre à l'aide de la discrétisation spatiale qui sera discutée dans la section 2.4.

L'algorithme présenté ci-dessus est valable non seulement pour le modèle de Maxwell généralisé mais aussi pour d'autres modèles viscoélastiques tels que ceux de Burger et Kelvin-voigt. Il est aisé d'étendre l'algorithme en trois dimensions. Dans ce cas,  $L_{M1}^{n+1}$ ,  $C_{M1}$  sont des tenseurs du deuxième ordre et  $P_i$  et  $Q_i$  sont des tenseurs du quatrième ordre.

### **Algorithme 2**

Le deuxième algorithme se base sur l'expression de la fonction de relaxation du modèle et exploite la forme exponentielle des variables internes. En utilisant l'équation (III.13), la contrainte totale à l'instant  $t^{n+1}$  est donnée par

$$\sigma^{n+1} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-t^{n+1}/\tau_i) \sigma_\infty^{(0)} + \sigma_\infty^{n+1} + \sum_{i=1}^N q_i^{n+1}. \quad (\text{III.33})$$

Il convient d'écrire

$$\exp\left(-\frac{t^{n+1}}{\tau_i}\right) = \exp\left(-\frac{t^n + \Delta t}{\tau_i}\right) = \exp\left(-\frac{t^n}{\tau_i}\right) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right). \quad (\text{III.34})$$

Les variables internes dans l'équation (III.12) peuvent s'exprimer par

$$\begin{aligned} q_i^{n+1} &= \int_0^{t^{n+1}} \gamma_i \exp\left(-\frac{(t^{n+1} - s)}{\tau_i}\right) \dot{\sigma}_\infty(s) ds \\ &= \int_0^{t^n} \gamma_i \exp\left(-\frac{(t^{n+1} - s)}{\tau_i}\right) \dot{\sigma}_\infty(s) ds \\ &\quad + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \gamma_i \exp\left(-\frac{(t^{n+1} - s)}{\tau_i}\right) \dot{\sigma}_\infty(s) ds \\ &= \exp(-\Delta t/\tau_i) q_i^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \gamma_i \exp\left(-\frac{(t^{n+1} - s)}{\tau_i}\right) \dot{\sigma}_\infty(s) ds. \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

En utilisant les approximations [113]

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_i \exp\left(-\frac{(t_{n+1} - s)}{\tau_i}\right) \dot{\sigma}_\infty(s) ds \cong \gamma_i \exp\left(-\frac{(t_{n+1} - s)}{\tau_i}\right) \dot{\sigma}_\infty(s) \Big|_{s=\frac{t_{n+1}+t_n}{2}} \Delta t, \quad (\text{III.36})$$

$$\text{et } \dot{\sigma}_\infty(t) \simeq \frac{\sigma_\infty^{n+1} - \sigma_\infty^n}{\Delta t} \quad \text{pour } t \in [t^n, t^{n+1}], \quad (\text{III.37})$$

nous obtenons la formule de récurrence :

$$q_i^{n+1} \cong \exp(-\Delta t/\tau_i) q_i^n + \gamma_i [\sigma_\infty^{n+1} - \sigma_\infty^n] \exp(-\Delta t/(2\tau_i)). \quad (\text{III.38})$$

En substituant (III.38) dans (III.33), la contrainte totale prend la forme

$$\begin{aligned} \sigma^{n+1} &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp\left(-\frac{t^{n+1}}{\tau_i}\right) \sigma_\infty^{(0)} + \sum_{i=1}^N \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) q_i^n \\ &\quad - \sigma_\infty^n \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp\left(-\frac{\Delta t}{(2\tau_i)}\right) + \sigma_\infty^{n+1} \left(1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp\left(-\frac{\Delta t}{(2\tau_i)}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

En notant que  $\sigma_\infty^{n+1} = E_\infty \varepsilon^{n+1}$ , le dernière équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma^{n+1} &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp\left(-\frac{t^{n+1}}{\tau_i}\right) \sigma_\infty^{(0)} + \sum_{i=1}^N \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) q_i^n \\ &\quad - \sigma_\infty^n \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp\left(-\frac{\Delta t}{(2\tau_i)}\right) + E_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp\left(-\frac{\Delta t}{(2\tau_i)}\right)\right) \varepsilon^{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

En posant

$$C_{M2} = E_{\infty} \left( 1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-\Delta t / (2\tau_i)) \right), \quad (\text{III.41})$$

$$L_{M2}^{n+1} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-t^{n+1} / \tau_i) \sigma_{\infty}^{(0)} + \sum_{i=1}^N \exp(-\Delta t / \tau_i) q_i^n - \sigma_{\infty}^n \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-\Delta t / (2\tau_i)), \quad (\text{III.42})$$

la contrainte totale à l'instant  $t^{n+1}$  dans l'équation (III.40) se calcule par

$$\sigma^{n+1} = C_{M2} \varepsilon^{n+1} + L_{M2}^{n+1}. \quad (\text{III.43})$$

Nous constatons que  $L_{M2}^{n+1}$  dépend des calculs à l'instant antérieur et que  $C_{M2}$  ne dépend que des propriétés des phases et du pas de temps  $\Delta t$ . La relation (III.43) permet de résoudre le problème viscoélastique par la procédure des éléments finis. L'extension de l'algorithme au cas tridimensionnel peut se faire de la même manière que celle présentée dans 2.2.3 pour le troisième algorithme.

### **Algorithme 3**

Le troisième algorithme exploite la fonction de relaxation du modèle Maxwell généralisé ainsi que la formule de convolution du comportement de matériau linéaire viscoélastique de la même manière que celle employée dans le deuxième algorithme. En fait, dans l'algorithme en question, l'approximation suivante est utilisée [61, 113, 118] :

$$\dot{\sigma}_{\infty}(t) \simeq \frac{\sigma_{\infty}^{n+1} - \sigma_{\infty}^n}{\Delta t} \quad \text{pour } t \in [t^n, t^{n+1}]. \quad (\text{III.44})$$

En introduisant cette approximation dans l'expression des variables internes (III.35), on obtient la formule de récurrence :

$$q_i^{n+1} = \exp(-\Delta t / \tau_i) q_i^n + \gamma_i \left[ \frac{\sigma_{\infty}^{n+1} - \sigma_{\infty}^n}{\Delta t} \right] \int_{t^n}^{t^{n+1}} \exp(-(t^{n+1} - s) / \tau_i) ds \quad (\text{III.45})$$

$$= \exp(-\Delta t / \tau_i) q_i^n + \gamma_i \tau_i \frac{1 - \exp(-\Delta t / \tau_i)}{\Delta t} [\sigma_{\infty}^{n+1} - \sigma_{\infty}^n]. \quad (\text{III.46})$$

A l'aide de cette formule, l'expression (III.33) de la contrainte totale à l'instant  $t^{n+1}$  peut se calculer par

$$\sigma^{n+1} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-t^{n+1} / \tau_i) \sigma_{\infty}^{(0)} + \sum_{i=1}^N \exp(-\Delta t / \tau_i) q_i^n - \sigma_{\infty}^n \sum_{i=1}^N \gamma_i \tau_i \frac{1 - \exp(-\Delta t / \tau_i)}{\Delta t} + \sigma_{\infty}^{n+1} \left( 1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \tau_i \frac{1 - \exp(-\Delta t / \tau_i)}{\Delta t} \right). \quad (\text{III.47})$$

En tenant compte de  $\sigma_\infty^{n+1} = E_\infty \varepsilon^{n+1}$  dans l'équation ci-dessus, il vient que

$$\begin{aligned} \sigma^{n+1} &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-t^{n+1}/\tau_i) \sigma_\infty^{(0)} + \sum_{i=1}^N \exp(-\Delta t/\tau_i) q_i^n \\ &\quad - \sigma_\infty^n \sum_{i=1}^N \gamma_i \tau_i \frac{1 - \exp(-\Delta t/\tau_i)}{\Delta t} + E_\infty \left( 1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \tau_i \frac{1 - \exp(-\Delta t/\tau_i)}{\Delta t} \right) \varepsilon^{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

Nous obtenons finalement la relation entre  $\sigma^{n+1}$  et  $\varepsilon^{n+1}$  sous la forme

$$\sigma^{n+1} = C_{M3} \varepsilon^{n+1} + L_{M3}^{n+1} \quad (\text{III.49})$$

où

$$C_{M3} = E_\infty \left( 1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \tau_i \frac{1 - \exp(-\Delta t/\tau_i)}{\Delta t} \right), \quad (\text{III.50})$$

$$\begin{aligned} L_{M3}^n &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp(-t^{n+1}/\tau_i) \sigma_\infty^{(0)} + \sum_{i=1}^N \exp(-\Delta t/\tau_i) q_i^n \\ &\quad - \sigma_\infty^{n+1} \sum_{i=1}^N \gamma_i \tau_i \frac{1 - \exp(-\Delta t/\tau_i)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Avec l'équation (III.49), le problème peut être résolu facilement à l'aide d'une discrétisation spatiale. Cet algorithme n'est applicable qu'au modèle de Maxwell généralisé où l'intégrale dans l'expression approximative de  $q^{n+1}$  (eq. III.45) peut être calculée de façon analytique. L'extension au cas tridimensionnel peut se faire sans difficulté et sera présentée dans la section 2.4.

### **Remarques**

- Le premier algorithme est plus général que le deuxième ou le troisième puisqu'il ne se limite pas au modèle de Maxwell généralisé alors que les deux derniers ne sont applicables qu'au modèle de Maxwell généralisé.
- Parmi les trois algorithmes présentés ci-dessus, le troisième est le plus précis et le premier l'est le moins.

Dans la suite, nous ne considérons que le modèle de Maxwell généralisé et nous utiliserons le troisième algorithme.

## **2.2 Viscoélasticité linéaire 3D : modèle de Maxwell généralisé**

### **2.2.1 Fonction de relaxation**

Nous nous limitons au cas tridimensionnel isotrope où les parties déviatorique et hydrostatique du tenseur des contraintes peuvent s'exprimer séparément. Les tenseurs du quatrième ordre associés aux éléments du modèle de Maxwell généralisé sont donnés par

$$\mathbb{C}_\infty = 3k_\infty \mathbb{J}_1 + 2\mu_\infty \mathbb{J}_2, \quad (\text{III.52})$$

$$\mathbb{C}_i^e = 3k_i^e \mathbb{J}_1 + 2\mu_i^e \mathbb{J}_2, \quad (\text{III.53})$$

$$\mathbb{C}_i^v = 3k_i^v \mathbb{J}_1 + 2\mu_i^v \mathbb{J}_2, \quad (\text{III.54})$$

où  $\mathbb{C}_\infty$  correspond à l'élément élastique de la première branche du modèle,  $\mathbb{C}_i^e$  et  $\mathbb{C}_i^v$  caractérisent les propriétés de l'élément élastique et de l'élément visqueux de la branche viscoélastique  $i$ ,  $k_\infty$ ,  $k_i^e$ ,  $\mu_\infty$  et  $\mu_i^e$  sont les modules élastiques de compressibilité et de cisaillement correspondants,  $k_i^v$  et  $\mu_i^v$  sont les modules visqueux de compressibilité et de cisaillement correspondants. Les tenseurs du quatrième ordre  $\mathbb{J}_1$  et  $\mathbb{J}_2$  sont définis par

$$\mathbb{J}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \mathbb{J}_2 = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \quad (\text{III.55})$$

Dans cette formule,  $\mathbf{1}$  et  $\mathbb{I}$  dénotent les tenseurs d'identité du deuxième ordre et du quatrième ordre.

Pour un matériau viscoélastique linéaire décrit par le modèle de Maxwell généralisé, nous avons les fonctions de relaxation pour la compressibilité et le cisaillement :

$$\begin{cases} G_k(t) = 3k_\infty + \sum_{i=1}^N 3k_i^e \exp(-t/\tau_i^k), \\ G_\mu(t) = 2\mu_\infty + \sum_{i=1}^N 2\mu_i^e \exp(-t/\tau_i^\mu), \end{cases} \quad (\text{III.56})$$

où  $\tau_i^k$  et  $\tau_i^\mu$  sont définis par

$$\tau_i^k = \frac{k_i^v}{k_i^e}, \quad \tau_i^\mu = \frac{\mu_i^v}{\mu_i^e}. \quad (\text{III.57})$$

### 2.2.2 Convolution intégrale

La relation contrainte-déformation du matériau isotrope compressible linéaire et viscoélastique est donnée par :

$$\begin{cases} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \int_0^t G_k(t-s) \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)) ds + G_k(t) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(0)), \\ \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \int_0^t G_\mu(t-s) \mathbf{dev}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)) ds + G_\mu(t) \mathbf{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}(0)), \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

où  $\text{tr}(\cdot)$  et  $\mathbf{dev}(\cdot)$  désignent la trace et la partie déviatorique d'un tenseur ;  $G_k(t)$  et  $G_\mu(t)$  sont les fonctions de relaxation pour la compressibilité et le cisaillement.

### 2.2.3 Discrétisation temporelle et algorithme explicite microscopique

On présente ici l'extension tridimensionnelle du troisième algorithme dans la section 2.1.3. En introduisant (III.56) dans (III.58), on a l'expression du tenseur des contraintes à l'instant  $t^{n+1}$  :

$$\begin{cases} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}) &= \sum_{i=1}^N \gamma_i^k \exp(-t^{n+1}/\tau_i^k) \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty^{(0)}) \\ &+ \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty^{n+1}) + \sum_{i=1}^N (q_i^k)^{n+1} \\ \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}) &= \sum_{i=1}^N \gamma_i^\mu \exp(-t^{n+1}/\tau_i^\mu) \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty^{(0)}) \\ &+ \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty^{n+1}) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{q}_i^\mu)^{n+1} \end{cases} \quad (\text{III.59})$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_\infty = \mathbb{C}_\infty : \boldsymbol{\varepsilon}$ . En utilisant l'approximation suivante

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_\infty(t) \cong \frac{\boldsymbol{\sigma}_\infty(t_{n+1}) - \boldsymbol{\sigma}_\infty(t_n)}{\Delta t} \quad \text{pour } t \in [t^n, t^{n+1}], \quad (\text{III.60})$$

les variables internes peuvent être calculées à l'aide d'une formule récursive [113, 118] :

$$(q_i^k)^{n+1} = \exp(-\Delta t/\tau_i^k) (q_i^k)^n + \gamma_i^k \tau_i^k \frac{1 - \exp(-\Delta t/\tau_i^k)}{\Delta t} (tr(\boldsymbol{\sigma}_\infty^{n+1}) - tr(\boldsymbol{\sigma}_\infty^n)), \quad (\text{III.61})$$

$$(\mathbf{q}_i^\mu)^{n+1} = \exp(-\Delta t/\tau_i^\mu) (\mathbf{q}_i^\mu)^n + \gamma_i^\mu \tau_i^\mu \frac{1 - \exp(-\Delta t/\tau_i^\mu)}{\Delta t} (\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty^{n+1}) - \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty^n)) \quad (\text{III.62})$$

avec  $\gamma_i^k$  et  $\gamma_i^\mu$  définis par

$$\gamma_i^k = \frac{k_i^e}{k_\infty^e}, \quad \gamma_i^\mu = \frac{\mu_i^e}{\mu_\infty^e}. \quad (\text{III.63})$$

En introduisant (III.59) dans l'expression du tenseur des contraintes à l'instant  $t^{n+1}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{n+1} &= \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}) \mathbf{1} + \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}) \\ &= \left( \sum_{i=1}^N \gamma_i^k \exp(-t^{n+1}/\tau_i^k) tr(\boldsymbol{\sigma}_\infty^{(0)}) \right) \frac{1}{3} \mathbf{1} + \left( tr(\boldsymbol{\sigma}_\infty^{n+1}) + \sum_{i=1}^N (q_i^k)^{n+1} \right) \frac{1}{3} \mathbf{1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \gamma_i^\mu \exp(-t^{n+1}/\tau_i^\mu) \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty^{(0)}) + \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty^{(n+1)}) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{q}_i^\mu)^{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

En substituant les formules récursives (III.61-III.62) dans l'expression ci-dessus, nous avons

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} : \mathbb{C} + \boldsymbol{\sigma}_\infty^{(0)} : \mathbb{I}_1 + \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{3} \mathbf{1} \chi_i^k (q_i^k)^n + \chi_i^\mu (\mathbf{q}_i^\mu)^n \right) - \boldsymbol{\sigma}_\infty^n : \mathbb{I}_2 \quad (\text{III.65})$$

où

$$\chi_i^k = \exp(-\Delta t/\tau_i^k), \quad \chi_i^\mu = \exp(-\Delta t/\tau_i^\mu), \quad (\text{III.66})$$

et les tenseurs  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{I}_1$  et  $\mathbb{I}_2$  sont définis par

$$\mathbb{C} = 3k_\infty M^k \mathbb{J}_1 + 2\mu_\infty M^\mu \mathbb{J}_2, \quad (\text{III.67})$$

$$\mathbb{I}_1 = N^k \mathbb{J}_1 + N^\mu \mathbb{J}_2, \quad \mathbb{I}_2 = P^k \mathbb{J}_1 + P^\mu \mathbb{J}_2, \quad (\text{III.68})$$

avec

$$M^k = 1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i^k \tau_i^k \frac{1 - \chi_i^k}{\Delta t}, \quad M^\mu = 1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i^\mu \tau_i^\mu \frac{1 - \chi_i^\mu}{\Delta t}, \quad (\text{III.69})$$



$$P^k = \sum_{i=1}^N \gamma_i^k \tau_i^k \frac{1 - \chi_i^k}{\Delta t}, \quad P^\mu = \sum_{i=1}^N \gamma_i^\mu \tau_i^\mu \frac{1 - \chi_i^\mu}{\Delta t}, \quad (\text{III.70})$$

$$N^\mu = \sum_{i=1}^N \gamma_i^\mu \exp(-t^{n+1}/\tau_i^\mu), \quad N^k = \sum_{i=1}^N \gamma_i^k \exp(-t^{n+1}/\tau_i^k). \quad (\text{III.71})$$

En posant

$$\mathbf{L}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_\infty^{(0)} : \mathbb{I}_1 + \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{3} \mathbf{1} \chi_i^k (q_i^k)^n + \chi_i^\mu (\mathbf{q}_i^\mu)^n \right) - \boldsymbol{\sigma}_\infty^n : \mathbb{I}_2, \quad (\text{III.72})$$

le tenseur des contraintes à l'instant  $t^{n+1}$  dans l'équation (III.65) se réduit à

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} : \mathbb{C} + \mathbf{L}^{n+1}. \quad (\text{III.73})$$

Dans cette équation,  $\mathbb{C}$  est un tenseur du quatrième ordre constant et  $\mathbf{L}^{n+1}$  dépend des variables connues de l'instant  $t^0 = 0$  et  $t^n$ . Ce dernier point résulte d'un algorithme récursif.

## 2.3 Formulation forte pour un problème local

Dans la suite, nous présentons les équations gouvernant un problème local viscoélastique. La solution numérique de ce problème sera utilisée dans la section suivante pour construire la loi constitutive macroscopique.

Considérons un VER défini par le domaine  $\Omega$  avec sa frontière  $\partial\Omega$  comme le montre la figure III.1b. En négligeant les forces volumiques, les équations d'équilibre du problème s'écrivent :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\text{III.74})$$

où la relation contrainte-déformation est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{V}(t) \{ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \}. \quad (\text{III.75})$$

Dans l'équation (III.74),  $\nabla \cdot (\cdot)$  est l'opérateur de divergence,  $\boldsymbol{\sigma}$  désigne le tenseur des contraintes de Cauchy. Dans l'équation (III.75), le tenseur des déformations infinitésimales est lié au vecteur de déplacement par  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$  et  $\mathcal{V}(t)$  est l'opérateur dépendant du temps, associé au modèle viscoélastique (voir l'équation (III.58)). Nous prescrivons ensuite les conditions aux limites :

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}} \text{ sur } \partial\Omega, \quad (\text{III.76})$$

où  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$  est le tenseur des déformations macroscopiques,  $\mathbf{x}$  est la coordonnée vectorielle d'un point du matériau dans  $\Omega$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}$  est le vecteur des déplacements périodiques. L'équation (III.76) correspond à la condition périodique. La méthode du multiplicateur de Lagrange expliquée est utilisée pour prendre en compte ces conditions aux limites périodiques. Lorsque le maillage n'est pas périodique, comme l'exemple numérique d'un barrage 3D dans la section 5.3, les conditions aux limites linéaires ( $\tilde{\mathbf{u}} = 0$ ) sont considérées.

## 2.4 Formulation faible et procédure de FEM

La formulation faible associée aux équations (III.74-III.76) est donnée par : trouver  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{D} = \{\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) \text{ sur } \partial\Omega, \mathbf{u}(t) \in H^1(\Omega)\}$  tel que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega), \quad (\text{III.77})$$

où  $H_0^1(\Omega) = \{\delta\mathbf{u} \in H^1(\Omega), \delta\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$  et  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  est le déplacement imposé dans l'équation (III.76). En utilisant la discrétisation temporelle, l'équation (III.77) à l'instant  $t^{n+1}$  peut s'écrire sous la forme

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) d\Omega = 0. \quad (\text{III.78})$$

En substituant l'expression (III.73) dans l'équation (III.78), nous obtenons la formulation faible :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{L}^{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) d\Omega. \quad (\text{III.79})$$

Le terme à droite de l'équation (III.79) peut être calculé en fonction du champ de déplacements obtenu à l'instant  $t^n$ .

En appliquant la discrétisation des éléments finis à la formulation faible (III.79), nous obtenons le système linéaire à l'instant  $t^{n+1}$  :

$$\mathbf{K}\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} \quad (\text{III.80})$$

où  $\mathbf{d}^{n+1}$  est le vecteur de déplacements nodaux à l'instant  $t^{n+1}$ ,  $\mathbf{K}^{n+1}$  et  $\mathbf{f}^{n+1}$  sont la matrice de rigidité globale et le vecteur de force. Plus précisément, la matrice  $\mathbf{K}^{n+1}$  et le vecteur  $\mathbf{f}^{n+1}$  sont fournis par

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega, \quad (\text{III.81})$$

$$\mathbf{f}^{n+1} = - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T [\mathbf{L}^{n+1}], \quad (\text{III.82})$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{N}$  sont les matrices des dérivées des fonctions de forme et des fonctions de forme associées à l'approximation des éléments finis,  $\mathbf{C}$  est la forme matricielle du tenseur de quatrième ordre  $\mathbb{C}$  et  $[\mathbf{L}^{n+1}]$  est la forme vectorielle du tenseur du deuxième ordre  $\mathbf{L}^{n+1}$ .

## 3 Problème viscoélastique à l'échelle macroscopique

Nous présentons, dans cette section, une nouvelle méthode permettant de déterminer la réponse temporelle d'une structure constituée des phases viscoélastiques linéaires. Cette méthode se base sur les valeurs discrètes du tenseur de relaxation effectif, qui sont calculées par la méthode des éléments finis et la discrétisation temporelle présentée dans la section 2. Ce tenseur peut être calculé numériquement par les autres méthodes, par exemple la méthode de transformation de Fourier [86]. Une représentation continue du tenseur de relaxation effectif est ensuite élaborée. Un algorithme explicite est enfin proposé pour déterminer les champs de la structure en utilisant la méthode des éléments finis classique.

### 3.1 Valeurs discrètes du tenseur de relaxation effectif

L'objectif est de calculer numériquement le tenseur de relaxation effectif associé au VER pour un certain nombre de pas temporels. On peut montrer que le comportement effectif d'un composite dont les phases sont viscoélastiques linéaires est lui-même viscoélastique linéaire (voir [54, 55]). Ce comportement peut être exprimé par le biais d'un produit de convolution :

$$\bar{\sigma}_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \bar{\Gamma}_{ijkl}(t-s) \frac{d\bar{\varepsilon}_{kl}(s)}{ds} ds, \quad (\text{III.83})$$

$$= \int_0^t \bar{\Gamma}_{ijkl}(t-s) \frac{d\bar{\varepsilon}_{kl}(s)}{ds} ds + \bar{\Gamma}_{ijkl}(t) \bar{\varepsilon}_{kl}(0), \quad (\text{III.84})$$

où  $\bar{\sigma}_{ij}(t) = \langle \sigma_{ij} \rangle_{\Omega}$  et  $\bar{\varepsilon}_{ij}(t) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\Omega}$  avec  $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$  étant l'opérateur de moyenne sur le domaine  $\Omega$  occupé par un VER. Dans l'équation (III.84),  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$  est le tenseur de relaxation effectif dont la forme ne peut être explicitement déterminée dans le cas général, en fonction de la morphologie et des lois de comportement des phases constitutives. Nous proposons dans ce travail de construire numériquement ce tenseur. En choisissant

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(t) = H(t) \bar{\varepsilon}_{ij}^0, \quad (\text{III.85})$$

où  $\bar{\varepsilon}_{ij}^0$  est un tenseur de déformation constant, l'équation (III.84) devient

$$\bar{\sigma}_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \bar{\Gamma}_{ijkl}(t-s) \bar{\varepsilon}_{kl}^0 \delta(s) ds, \quad (\text{III.86})$$

où  $\delta(t)$  est la fonction de Dirac. En utilisant la propriété

$$\int_{-\infty}^t f(t-s) \delta(s) ds = f(t), \quad (\text{III.87})$$

nous obtenons finalement

$$\bar{\sigma}_{ij}(t) = \bar{\Gamma}_{ijkl}(t) \bar{\varepsilon}_{kl}^0. \quad (\text{III.88})$$

Le tenseur de relaxation effective  $\bar{\Gamma}(t)$  peut être déterminé en choisissant

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0 = \bar{\varepsilon}_{kl}^0(r, q) = \frac{1}{2} \xi_0 (\delta_{rk} \delta_{ql} + \delta_{qk} \delta_{rl}), \quad (\text{III.89})$$

où  $\varepsilon_0$  est une constante non-nulle suffisamment petite pour être compatible avec l'hypothèse des petites déformations,  $\delta$  est l'indice de Kronecker, et  $r, q$  sont des constantes de 1 à 3. En introduisant l'expression choisie de  $\bar{\varepsilon}_{kl}^0$  dans l'équation (III.88), nous avons

$$\bar{\sigma}_{ij}(t, r, q) = \bar{\Gamma}_{ijkl}(t) \frac{1}{2} \xi_0 (\delta_{rk} \delta_{ql} + \delta_{qk} \delta_{rl}) = \xi_0 \bar{\Gamma}_{ijrq}(t). \quad (\text{III.90})$$

Nous en déduisons que

$$\bar{\Gamma}_{ijrq}(t) = \bar{\sigma}_{ij}(t, r, q) / \xi_0, \quad (\text{III.91})$$

où la contrainte moyenne  $\bar{\sigma}_{ij}(t, r, q)$  est obtenue à l'aide des algorithmes détaillés dans la section 2 en imposant sur le bord du VER une déformation macroscopique de la forme  $\bar{\varepsilon}_{kl}^0 = \bar{\varepsilon}_{kl}^0(r, q)$  définie dans (III.89).

En résumé, le calcul de  $\bar{\Gamma}_{ijrq}(t)$  nécessite l'application de plusieurs chargements élémentaires de type échelon sur les bords du VER et le stockage des valeurs des contraintes moyennes au cours du temps. Nous notons par  $\chi_p^{ijrq}$  les composantes de  $\bar{\Gamma}_{ijrq}(t)$  à l'instant  $t_p$ . La détermination de  $\chi_q^{ijrq}$  demande 3 calculs temporels pour un problème 2D et 6 calculs temporels pour un problème 3D. Par exemple, on peut choisir

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0(1, 1) = 10^{-3} \delta_{1k} \delta_{1l}; \quad (\text{III.92})$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0(2, 2) = 10^{-3} \delta_{2k} \delta_{2l}; \quad (\text{III.93})$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0(1, 2) = \frac{1}{2} 10^{-3} (\delta_{1k} \delta_{2l} + \delta_{2k} \delta_{1l}), \quad (\text{III.94})$$

et en 3D par

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0(1, 1) = 10^{-3} \delta_{1k} \delta_{1l}; \quad (\text{III.95})$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0(2, 2) = 10^{-3} \delta_{2k} \delta_{2l}; \quad (\text{III.96})$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0(3, 3) = 10^{-3} \delta_{3k} \delta_{3l}; \quad (\text{III.97})$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0(1, 2) = \frac{1}{2} 10^{-3} (\delta_{1k} \delta_{2l} + \delta_{2k} \delta_{1l}); \quad (\text{III.98})$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0(2, 3) = \frac{1}{2} 10^{-3} (\delta_{2k} \delta_{3l} + \delta_{3k} \delta_{2l}); \quad (\text{III.99})$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0(3, 1) = \frac{1}{2} 10^{-3} (\delta_{3k} \delta_{1l} + \delta_{1k} \delta_{3l}). \quad (\text{III.100})$$

pour un problème 3D avec  $\xi_0 = 10^{-3}$ .

L'intervalle de temps microscopique  $\mathcal{T} = [0, t^{max}]$  est discrétisé en plusieurs instants  $t^p = (p-1)\Delta t$  avec  $p = 1, 2, \dots, n$ . Pour chaque chargement élémentaire, on calcule  $\chi_p^{ijrq}$  à chaque instant  $t^p$  puis on stocke les valeurs de  $\chi_p^{ijrq}$  pour les calculs à l'échelle macroscopique.

### 3.2 Représentation continue du tenseur de relaxation effectif

En vue d'évaluer continûment le tenseur de relaxation effectif  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ , une transformation  $\bar{\Gamma}_{ijkl} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est introduite comme suit :

$$\bar{\Gamma}_{ijkl}(t) \simeq \sum_{p=1}^M \phi_p^{ijkl}(t) \chi_p^{ijkl} \quad (\text{III.101})$$

où  $\phi_p^{ijkl}(t)$  sont des fonctions d'interpolation dans le domaine temporel et  $M$  indique le nombre de fonctions d'interpolation non-nulles à l'instant  $t$ . Différents choix étant possibles pour ces fonctions, nous utilisons dans ce travail des splines cubiques. Ces fonctions seront présentées en détail dans la section suivante.

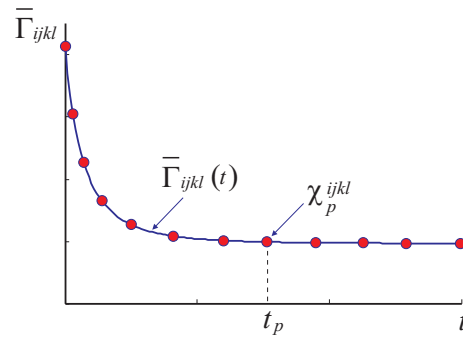


FIGURE III.3: Valeurs discrètes du tenseur de relaxation effectif  $\chi_p^{ijkl}$  et interpolation continue de  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ .

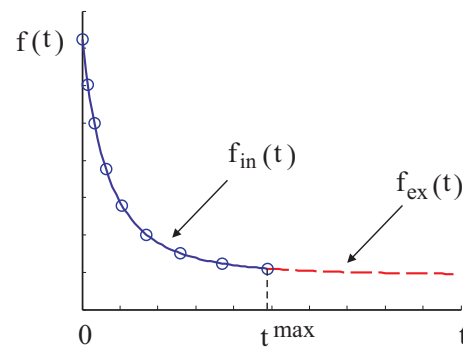


FIGURE III.4: Une composante du tenseur de relaxation effectif pour  $t > t^{max}$ .

### 3.3 Choix des fonctions d'interpolation et d'extrapolation

Plusieurs choix sont possibles pour les fonctions d'interpolation  $\phi_p^{ijkl}(t)$ . Dans ce qui suit, les fonctions splines cubiques sont adoptées entre deux instants. Pour  $t > t^{max}$ , la représentation continue de  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$  peut être obtenue par une extrapolation, en prenant en compte les propriétés asymptotiques de  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ . Dans la figure III.4, la courbe continue illustre la partie d'interpolation et la courbe en pointillés représente la partie d'extrapolation. Les fonctions splines  $f_{in}(t) = \left\{ f_{in}^{(i)}(t) \text{ si } t \in [t^{i-1}, t^i] \right\}$  sont largement utilisées pour construire une représentation continue à partir des valeurs discrètes. Chaque fonction  $f_{in}^{(i)}$  est un polynôme deux fois continûment différentiable, dont les coefficients sont déterminés en demandant que les équations suivantes soient vérifiées à chaque l'instant  $t_i$  :

$$\begin{cases} f_{in}^{(i)}(t_i) = f_{in}^{(i+1)}(t_i), \\ f_{in}^{(i)'}(t_i) = f_{in}^{(i+1)'}(t_i), \\ f_{in}^{(i)''}(t_i) = f_{in}^{(i+1)''}(t_i). \end{cases} \quad (\text{III.102})$$

Dans ce travail, les fonctions "spline.m" et "ppval.m" de l'outil Matlab  $\text{\textcircled{R}}$  Spline sont utilisées pour calculer les coefficients des splines. Ces fonctions possèdent une grande précision pour les courbes lissantes. Elles permettent de réduire le nombre de points d'échantillonnage tout en maintenant une bonne représentation de la fonction interpolée. Elles sont adéquates pour l'interpolation des points discrets du tenseur de relaxation puisque ce tenseur ne présente pas des variations brutales par nature.

Après avoir calculé un nombre fini de points d'échantillonnage, il est nécessaire de définir une procédure d'extrapolation pour trouver les valeurs du tenseur de relaxation lorsque l'échantillonnage s'arrête à l'instant  $t^{max}$ . En exploitant la propriété asymptotique de  $\bar{\Gamma}_{ijkl}$  pour  $t \rightarrow \infty$ , nous définissons  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$  pour l'intervalle  $t \in [t^{max}, +\infty[$  par

$$f_{ex}(t) = ae^{-bt} + c \quad (\text{III.103})$$

qui possède la propriété  $f_{ex}(t \rightarrow \infty) = c$ . Les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont identifiés à partir des conditions de continuité à l'instant  $t^{max}$  :

$$\begin{cases} f_{ex}(t^{max}) = f_{in}(t^{max}) \\ f_{ex}'(t^{max}) = f_{in}'(t^{max}) \\ f_{ex}''(t^{max}) = f_{in}''(t^{max}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^{-bt^{max}} + c = f_{in}(t^{max}) \\ -abe^{-bt^{max}} = f_{in}'(t^{max}) \\ ab^2e^{-bt^{max}} = f_{in}''(t^{max}) \end{cases} . \quad (\text{III.104})$$

La solution de l'équation (III.104) est donnée par

$$\begin{aligned} b &= -\frac{f_{in}''(t^{max})}{f_{in}'(t^{max})}, \\ a &= -\frac{f_{in}'(t^{max})}{be^{-bt^{max}}}, \\ c &= f_{in}(t^{max}) - ae^{-bt^{max}}. \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que la constante  $c$  peut être déterminée directement par le détermination des propriétés effectives linéaires élastiques du VER. En régime stationnaire, nous

avons  $c = C_{ijkl}^\infty$ . Dans ce cas, la troisième équation de (III.104) est inopérante, les expressions de  $a$  et  $b$  sont

$$b = -\frac{f'_{in}(t^{max})}{f_{in}(t^{max}) - c},$$

$$a = \frac{f_{in}(t^{max}) - c}{e^{-bt^{max}}}.$$

### 3.4 Discrétisation temporelle et algorithme macroscopique

L'intervalle du temps macroscopique  $\bar{\mathcal{T}} = [0, \bar{t}^{max}]$  avec  $\bar{t}^{max}$  étant le temps maximal de simulation est discrétisé en plusieurs instants  $\bar{t}^i$ , avec  $\bar{t}^i = (i-1)\bar{\Delta}t$ ,  $i = 1, 2, \dots, \bar{n}$  et  $\bar{\Delta}t$  le pas de temps macroscopique. Il est à noter que  $\bar{t}^{max}$  et  $\bar{\Delta}t$  peuvent être différents respectivement de  $t^{max}$  et  $\Delta t$  pour l'échelle microscopique.

L'expression des contraintes dans l'équation (III.84) à l'instant  $\bar{t}^{n+1}$  est fournie par

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^{n+1} &= \int_0^{\bar{t}^{n+1}} \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1} - s) \frac{d\bar{\varepsilon}_{kl}(s)}{ds} ds + \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\varepsilon}_{kl}^{(0)} \\ &= \sum_{m=0}^n \int_{\bar{t}^m}^{\bar{t}^{m+1}} \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1} - s) \frac{d\bar{\varepsilon}_{kl}(s)}{ds} ds + \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\varepsilon}_{kl}^{(0)}. \end{aligned} \quad (III.105)$$

En utilisant l'approximation suivante

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_{kl}(t)}{dt} \simeq \frac{\bar{\varepsilon}_{kl}^{m+1} - \bar{\varepsilon}_{kl}^m}{\bar{\Delta}t}, \quad \text{for } t \in [\bar{t}^m, \bar{t}^{m+1}], \quad (III.106)$$

la contrainte à l'instant  $\bar{t}^{n+1}$  dans l'équation (III.105) devient

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^{n+1} &= \sum_{m=0}^n \left\{ \left( \frac{\bar{\varepsilon}_{kl}^{m+1} - \bar{\varepsilon}_{kl}^m}{\bar{\Delta}t} \right) \int_{\bar{t}^m}^{\bar{t}^{m+1}} \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1} - s) ds \right\} + \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\varepsilon}_{kl}^{(0)} \\ &= \sum_{m=0}^n (\bar{\varepsilon}_{kl}^{m+1} - \bar{\varepsilon}_{kl}^m) A_{ijkl}^{(m,m+1)}(\bar{t}^{n+1}) + \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\varepsilon}_{kl}^{(0)}, \\ &= \bar{\varepsilon}_{kl}^{n+1} A_{ijkl}^{(n,n+1)}(\bar{t}^{n+1}) - \bar{\varepsilon}_{kl}^n A_{ijkl}^{(n,n+1)}(\bar{t}^{n+1}) + \sum_{m=0}^{n-1} (\bar{\varepsilon}_{kl}^{m+1} - \bar{\varepsilon}_{kl}^m) A_{ijkl}^{(m,m+1)}(\bar{t}^{n+1}) \\ &\quad + \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\varepsilon}_{kl}^{(0)} \end{aligned} \quad (III.107)$$

où

$$\begin{aligned} A_{ijkl}^{(m,m+1)}(\bar{t}^{n+1}) &= \frac{1}{\bar{\Delta}t} \int_{\bar{t}^m}^{\bar{t}^{m+1}} \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1} - s) ds \\ &= \frac{1}{\bar{\Delta}t} \sum_{p=1}^M \chi_p^{ijkl} \int_{\bar{t}^m}^{\bar{t}^{m+1}} \phi_p^{ijkl}(\bar{t}^{n+1} - s) ds. \end{aligned} \quad (III.108)$$

Notons que, dans l'expression ci-dessus, l'intégrale peut être analytiquement calculée. En vue de simplifier l'expression de  $\bar{\sigma}_{ij}^{n+1}$  dans l'équation (III.107), nous posons

$$\bar{C}_{ijkl}^{n+1} = A_{ijkl}^{(n,n+1)}(\bar{t}^{n+1}), \quad (\text{III.109})$$

$$\bar{L}_{ij}^{n+1} = -\bar{\varepsilon}_{kl}^n A_{ijkl}^{(n,n+1)}(\bar{t}^{n+1}) + \sum_{m=0}^{n-1} (\bar{\varepsilon}_{kl}^{m+1} - \bar{\varepsilon}_{kl}^m) A_{ijkl}^{(m,m+1)}(\bar{t}^{n+1}) + \bar{\Gamma}_{ijkl}(\bar{t}^{n+1}) \bar{\varepsilon}_{kl}^{(0)}. \quad (\text{III.110})$$

L'équation (III.107) devient

$$\bar{\sigma}_{ij}^{n+1} = \bar{C}_{ijkl}^{n+1} \bar{\varepsilon}_{kl}^{n+1} + \bar{L}_{ij}^{n+1}. \quad (\text{III.111})$$

Contrairement à l'algorithme récursif à l'échelle microscopique, le tenseur  $\bar{\mathbf{C}}$  prend une différente valeur à chaque itération, et  $\bar{\mathbf{L}}^{n+1}$  dépend des valeurs de  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  correspondant aux instants antérieurs  $t^0, t^1, \dots, t^n$ .

### 3.5 Formulation forte

On considère un domaine  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$  associé à une structure à l'échelle macroscopique. Le bord  $\partial\bar{\Omega}$  du domaine se décompose en deux parties disjointes et complémentaires  $\partial\bar{\Omega}_u$  et  $\partial\bar{\Omega}_F$  où les conditions aux limites de types Dirichlet et Neumann sont respectivement imposées. Les équations du problème sont :

$$\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{t}) + \mathbf{b} = 0 \quad \text{sur } \bar{\Omega}, \quad (\text{III.112})$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{t}) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{t}) \quad \text{sur } \partial\bar{\Omega}_F, \quad (\text{III.113})$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{t}) = \bar{\mathbf{v}}(\bar{t}) \quad \text{sur } \partial\bar{\Omega}_u, \quad (\text{III.114})$$

où  $\mathbf{b}$  est une force volumique,  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal sortant du bord  $\partial\bar{\Omega}$ ;  $\bar{\mathbf{f}}(\bar{t})$  et  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{t})$  sont les contraintes imposées et les déplacements imposés sur le bord du domaine. La méthode proposée consiste à effectuer des calculs séparés à deux échelles. Afin d'éviter la confusion avec le temps  $t$  à l'échelle microscopique, on désigne par  $\bar{t}$  le temps à l'échelle macroscopique.

### 3.6 Formulation faible et procédure éléments finis (FEM)

La formule faible associée aux équations (III.112-III.114) est donnée par :

Trouver  $\bar{\mathbf{u}}(t) \in H^1(\bar{\Omega})$  tel que  $\bar{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{v}}(t)$  sur  $\partial\bar{\Omega}_u$  et

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\delta\mathbf{u}) d\bar{\Omega} = - \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\bar{\Omega} + \int_{\partial\bar{\Omega}_F} \bar{\mathbf{f}}(t) \cdot \delta\mathbf{u} d\bar{\Gamma} \quad (\text{III.115})$$

$\forall \delta\mathbf{u} \in H_0^1(\bar{\Omega})$  et  $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\partial\bar{\Omega}_u$ . Ici,  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  est le vecteur des déplacements macroscopiques d'un point dans  $\bar{\Omega}$ . En utilisant la discrétisation temporelle, la formule faible à l'instant  $t^{n+1}$  est exprimée par :

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\delta\mathbf{u}) d\bar{\Omega} = - \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\bar{\Omega} + \int_{\partial\bar{\Omega}_F} \bar{\mathbf{f}}^{n+1} \cdot \delta\mathbf{u} d\bar{\Gamma} \quad (\text{III.116})$$



En substituant (III.111) dans (III.116), on obtient :

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1} : \bar{\mathbf{C}}^{n+1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\delta \mathbf{u}) d\bar{\Omega} = - \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\bar{\Omega} + \int_{\partial \bar{\Omega}_F} \bar{\mathbf{f}}^{n+1} \cdot \delta \mathbf{u} d\bar{\Gamma} - \int_{\bar{\Omega}} \bar{\mathbf{L}}^{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\bar{\Omega} \quad (\text{III.117})$$

En introduisant l'approximation des éléments finis standard, on obtient, à l'instant  $\bar{t}^{n+1}$ , un système linéaire :

$$\bar{\mathbf{K}}^{n+1} \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{f}}_{ext}^{n+1} + \bar{\mathbf{f}}_V^{n+1} \quad (\text{III.118})$$

avec

$$\bar{\mathbf{K}}^{n+1} = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{n+1} \mathbf{B} d\bar{\Omega}, \quad (\text{III.119})$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{ext}^{n+1} = - \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\bar{\Omega} + \int_{\partial \bar{\Omega}_F} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}}^{n+1} d\bar{\Gamma}, \quad (\text{III.120})$$

$$\bar{\mathbf{f}}_V^{n+1} = - \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T [\bar{\mathbf{L}}^{n+1}] d\bar{\Omega}. \quad (\text{III.121})$$

Dans les équations ci-dessus,  $\bar{\mathbf{C}}^{n+1}$  est la forme matricielle du tenseur du quatrième ordre  $\bar{\mathbf{C}}^{n+1}$  et  $[\bar{\mathbf{L}}^{n+1}]$  est la forme vectorielle du tenseur de deuxième ordre  $\bar{\mathbf{L}}^{n+1}$ .

Nous notons que le vecteur  $\bar{\mathbf{f}}_V^{n+1}$  dans l'équation (III.121) dépend de  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \dots, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$ . Contrairement aux algorithmes récursifs [113], il est nécessaire ici de stocker toutes les déformations macroscopiques de tous les éléments du domaine  $\bar{\Omega}$ , pour tous les instants considérés. Ceci peut s'avérer lourd lorsque le maillage macroscopique de la structure est très fin et le pas de temps macroscopique très petit. Cependant, comme le montrent les exemples numériques de la section 5, la méthode proposée reste moins coûteuse que les autres approches telles que la méthode à plusieurs niveaux [40, 69].

## 4 Résumé de l'algorithme

Les principales étapes de l'algorithme à deux échelles sont résumées dans cette section.

### 4.1 Calculs à l'échelle micro

L'objectif des calculs à l'échelle micro est d'identifier les valeurs discrètes  $\chi_p^{ijrq}$  du tenseur de relaxation effectif  $\bar{\Gamma}_{ijrq}(t)$ . Ces calculs sont effectués sur un volume représentatif élémentaire (VER). D'abord, l'intervalle de temps à l'échelle microscopique  $\mathcal{T} = [0, t^{max}]$  est discrétisé en un certain nombre d'instant  $t^i = (i-1)\Delta t$  avec  $i = 1, 2, \dots, n$ . On réalise ensuite trois calculs élémentaires en 2D ou six calculs élémentaires en 3D en prescrivant, sur le bord du VER, une déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^0$  dans les équations (III.92-III.100). Ces calculs se basent sur l'algorithme à l'échelle micro et la procédure de la section 2. La contrainte moyenne est calculée et enregistrée à chaque pas du temps pour chaque calcul mentionné. Les valeurs

$\chi_p^{ijrq}$  sont finalement déterminées en utilisant la formule (III.91). Les étapes des calculs du problème 3D sont présentées schématiquement comme suit :

i=0

**TANT QUE**  $i < 6$ ,

1.  $i = i + 1$

2. Choisir les valeurs  $r$  et  $q$  :

**CAS**  $i$

a) 1 :  $r = 1, q = 1$ .

b) 2 :  $r = 2, q = 2$ .

c) 3 :  $r = 3, q = 3$ .

d) 4 :  $r = 1, q = 2$ .

e) 5 :  $r = 2, q = 3$ .

f) 6 :  $r = 3, q = 1$ .

**FIN**

3. Réaliser le calcul élémentaire correspondant aux valeurs  $r$  et  $q$

a) Réaliser les calculs préliminaires :

i. Effectuer les calculs élastiques pour  $t = 0$  en appliquant une déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$  définie par (III.89).

A. Construire la matrice de raideur  $\mathbf{K}_{Ins}$  instantanée correspondant à l'instant  $t = 0$  :

**BOUCLE** sur les éléments du maillage de VER

- Calculer la matrice élémentaire  $\mathbf{K}_{Ins}^e$  avec la réponse instantanée du modèle.

- Assembler  $\mathbf{K}_{Ins}^e$ .

**FIN**

B. Résoudre le système d'équations linéaires  $\mathbf{K}_{Ins}\mathbf{u}_{Ins} = \mathbf{0}$  en tenant compte de la déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$  appliquée sur VER.

C. Calculer et enregistrer  $\boldsymbol{\sigma}_\infty^0$  à chaque point de Gauss.

D. Calculer la contrainte moyenne  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^0$  sur VER.

E. Calculer et mémoriser le tenseur de relaxation effectif  $\chi_0^{ijrq}$  à l'instant initial en utilisant l'équation (III.91).

ii. Construire la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  pour  $t > 0$  :

**BOUCLE** sur les éléments du maillage de VER

A. Calculer la matrice élémentaire  $\mathbf{K}^e$  en utilisant (III.81).

B. Assembler  $\mathbf{K}^e$ .

**FIN**

iii. Initialiser les variables internes.

b) Effectuer les calculs pour  $t > 0$  :

**TANT QUE**  $t < t^{max}$ ,

i. Calculer le vecteur de force visqueuse  $\mathbf{f}^{n+1}$

**BOUCLE** sur les éléments du maillage de VER

A. Calculer le vecteur élémentaire  $\mathbf{f}^{e,n+1}$  en utilisant (III.82).

B. Assembler  $\mathbf{f}^{e,n+1}$ .

**FIN**

ii. Résoudre le système d'équations linéaires (III.80) en tenant compte de la déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$  appliquée sur VER.

iii. Calculer  $\boldsymbol{\sigma}_\infty^{n+1}$  à chaque point de Gauss.

iv. Mettre à jour les variables internes en utilisant (III.61-III.62).

v. Calculer la contrainte moyenne  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1}$  sur VER en utilisant (III.65).

vi. Calculer et mémoriser le tenseur de relaxation effectif  $\chi_{n+1}^{ijrq}$  en utilisant l'équation (III.91).

vii. Retourner à l'étape 2.

**FIN**

Nous soulignons le fait que les six calculs élémentaires sont indépendants et peuvent être réalisés sur six coeurs différents d'une même machine.

## 4.2 Calcul à l'échelle macro

Les calculs à l'échelle macro sont pour objectif de déterminer la réponse temporelle de la structure constituée d'un matériau viscoélastique linéaire hétérogène. Ces calculs se basent sur les valeurs discrètes du tenseur de relaxation effectif  $\chi_{t^i}^{ijrq}$  qui sont identifiées dans la section 4.1. D'abord, l'intervalle du temps macroscopique  $\mathcal{T} = [0, \bar{t}^{max}]$  avec  $\bar{t}^{max}$  le temps maximal de simulation est discrétisé en un certain nombre d'instantanés  $\bar{t}^i$  avec  $\bar{t}^i = (i - 1)\bar{\Delta}t$  et  $i = 1, 2, \dots, \bar{n}$ . Ensuite, les étapes de calcul sont résumées ci-dessous :

1. Effectuer les calculs élastiques de la structure, correspondant à l'instant  $\bar{t} = 0$ , en se basant sur les valeurs  $\chi_0^{ijrq}$ , ce qui représente le tenseur d'élasticité instantané du matériau.

a) Construire la matrice de raideur  $\bar{\mathbf{K}}_{Ins}$  et le vecteur de force  $\bar{\mathbf{f}}_{ext}^0$  :

**BOUCLE** sur les éléments du maillage de la structure

i. Calculer la matrice élémentaire  $\bar{\mathbf{K}}_{Ins}^e$

ii. Calculer le vecteur élémentaire  $\bar{\mathbf{f}}_{ext}^{e,0}$  en utilisant (III.120).

iii. Assembler  $\bar{\mathbf{K}}^{e,n+1}$  et  $\bar{\mathbf{f}}_{ext}^{e,0}$ .

**FIN**

b) Résoudre le système d'équations linéaires  $\bar{\mathbf{K}}_{Ins} \bar{\mathbf{u}}_{Ins} = \bar{\mathbf{f}}_{ext}^0$ .

c) Calculer et stocker  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ins}$  pour tous les points d'intégration du domaine macroscopique.

2. Effectuer les calculs pour  $\bar{t} > 0$

**TANT QUE**  $\bar{t} < \bar{t}^{max}$

a) Calculer la matrice de raideur et les vecteurs des forces :

**BOUCLE** sur les éléments du maillage de VER

i. Calculer la matrice élémentaire  $\bar{\mathbf{K}}^{e,n+1}$  et le vecteur élémentaire  $\bar{\mathbf{f}}_{ext}^{e,n+1}$  en utilisant (III.119-III.120).

ii. Calculer le vecteur élémentaire  $\bar{\mathbf{f}}_v^{e,n+1}$  en utilisant (III.121).

iii. Assembler  $\bar{\mathbf{K}}^{e,n+1}$ ,  $\bar{\mathbf{f}}_{ext}^{e,n+1}$  et  $\bar{\mathbf{f}}_v^{e,n+1}$ .

**FIN**

b) Résoudre le système d'équations linéaires (III.118).

c) Calculer et stocker  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1}$  pour tous les points d'intégration du domaine macroscopique.

d) Retourner à l'étape 2.

**FIN**

## 5 Exemples numériques

Dans cette section, la précision et l'efficacité de la méthode proposée seront analysées. Tout d'abord, les calculs à une échelle sont réalisés pour tester la procédure d'homogénéisation proposée en prenant certains chargements arbitraires dépendantes du temps. Ensuite, des exemples à deux échelles en 2D et 3D sont présentés. Différents VER avec des caractéristiques morphologiques variées sont étudiées. Dans ces exemples, nous utilisons la méthode des éléments finis pour les calculs effectués sur les VER. La méthode  $\mu$ -XFEM peut être appliquée dans ce cadre. Cependant, ce chapitre étant consacré au développement d'une méthode multi-échelle d'homogénéisation des composites viscoélastiques linéaires, et ce afin de découpler au maximum les problèmes (ce que cette méthode permet justement en séparant les calculs réalisés aux différentes échelles), l'accent n'est pas mis sur la complexité de la morphologie. Les microstructures retenues ici sont en effet suffisamment simples pour être homogénéisées par éléments finis classiques. L'exploitation conjointe de  $\mu$ -XFEM et de la méthode multi-échelle d'homogénéisation des composites viscoélastiques linéaires proposée ici est une perspective de cette thèse. Cela permettra de prendre en compte à la fois des microstructures complexes et des comportements viscoélastiques. Rappelons que les phases des VER considérés dans ces exemples sont viscoélastiques linéaires et décrites par le modèle de Maxwell généralisé.

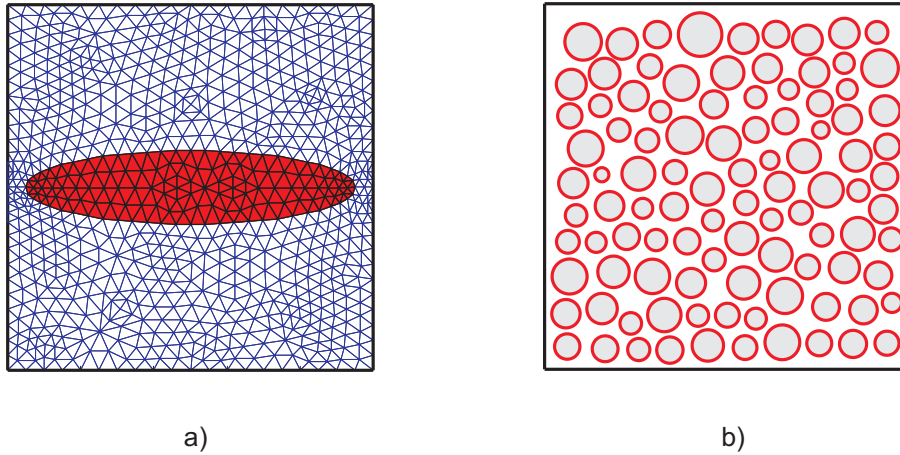


FIGURE III.5: a) Maillage et géométrie du VER contenant une inclusion elliptique; b) Géométrie du VER contenant 100 inclusions circulaires.

TABLE III.1: Paramètres numériques des phases du VER contenant une inclusion.

Paramètres de la matrice					
$E_{\infty,m}$ (MPa)	13909				
$\nu_{\infty,m}$	0.256				
$E_m^e$ (MPa)	231	322	425	630	577
$\nu_m^e$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.25
$E_m^v$ (MPa.jours)	201200	255500	348900	503000	657700
$\nu_m^v$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.25
Paramètres de l'inclusion					
$E_i$ (MPa)	2398400				
$\nu_i$	0.28				

## 5.1 Test de validation à l'échelle microscopique

### 5.1.1 VER contenant une inclusion elliptique

Cet exemple a pour but de comparer les résultats obtenus par la méthode proposée et par un calcul direct de type éléments finis pour un chargement temporel quelconque. La microstructure en question est entièrement décrite par le VER associé et illustrée dans la figure III.5a. Ce VER est constitué d'une inclusion elliptique positionnée dans un domaine carré de dimension  $L \times L$ . Les longueurs des demi-axes de l'inclusions sont  $r_a = 0.45L$  et  $r_b = 0.1L$ . Un maillage conforme constitué de 1264 triangles linéaires est utilisé pour la discrétisation du VER. Le matériau de la matrice est viscoélastique linéaire et celui de l'inclusion est élastique linéaire. On suppose ici que ces deux matériaux sont isotropes. Plus précisément, la matrice est décrite par le modèle de Maxwell généralisé avec une branche élastique et 5 branches viscoélastiques (voir la figure III.2). Les paramètres numériques sont donnés dans le tableau III.1 où les indices  $i$  et  $m$  désignent respectivement l'inclusion et la matrice.

En vue de déterminer le tenseur de relaxation macroscopique du VER, nous appliquons la

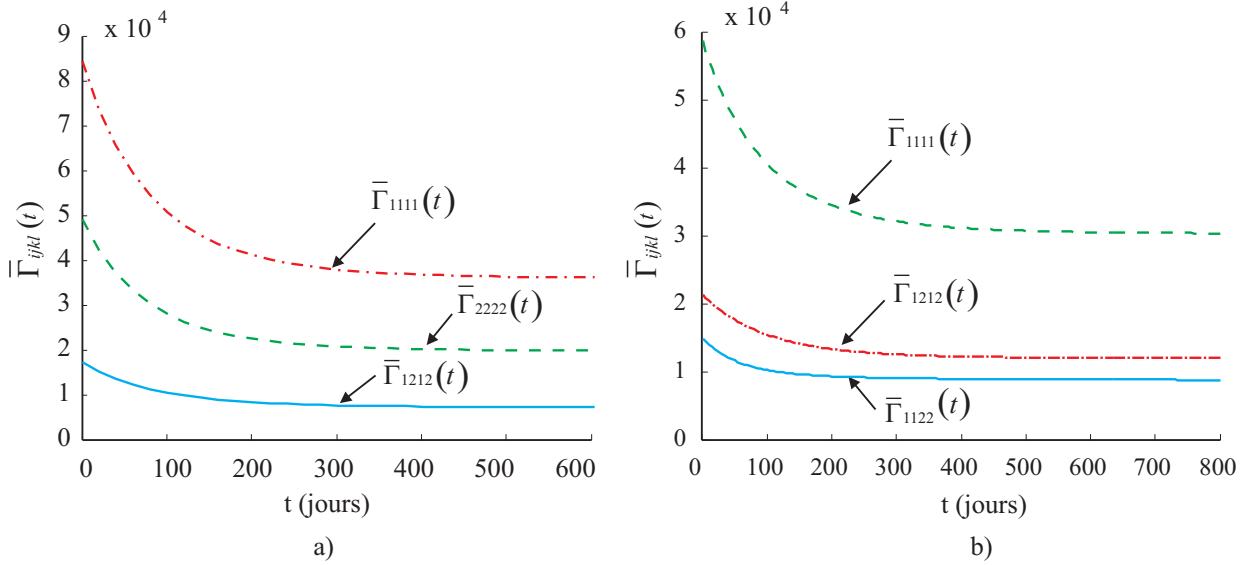


FIGURE III.6: Des composantes du tenseur de relaxation macroscopique : a) VER avec une seule inclusion elliptique ; b) VER contenant 100 inclusions circulaires.

procédure décrite dans la section 4.1. Des composantes de ce tenseur sont montrées dans la figure III.6a.

Ensuite, nous imposons une déformation  $\bar{\varepsilon}_{kl}(\bar{t})$  sur le bord du VER et calculons  $\bar{\sigma}_{ij}(\bar{t})$  en utilisant la méthode proposée et la FEM. Les conditions aux limites périodiques (III.76) sont imposées à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Les résultats obtenus sont présentés et comparés dans la figure III.8. Dans cette figure, nous prenons  $\bar{\varepsilon}_{kl}(\bar{t}) = \bar{\varepsilon}_{kl}^0 F(\bar{t})$  avec

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \quad (\text{III.122})$$

et  $F(\bar{t})$  dépendant du temps. Deux cas de  $F(\bar{t})$  sont étudiés :

$$F(\bar{t}) = F_1(\bar{t}) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\bar{t}}{500} \right) \right), \quad (\text{III.123})$$

$$F(\bar{t}) = F_2(\bar{t}) = \frac{1}{2} \left( 1 + (-1)^{\lfloor \frac{\bar{t}}{500} \rfloor} \right) \quad (\text{III.124})$$

où  $\lfloor x \rfloor$  désigne le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Les fonctions  $F_1(\bar{t})$  et  $F_2(\bar{t})$  sont illustrées dans la figure III.7. Nous observons un très bon accord entre la solution obtenue par la méthode proposée et la solution FEM pour chaque choix de  $F(\bar{t})$ .

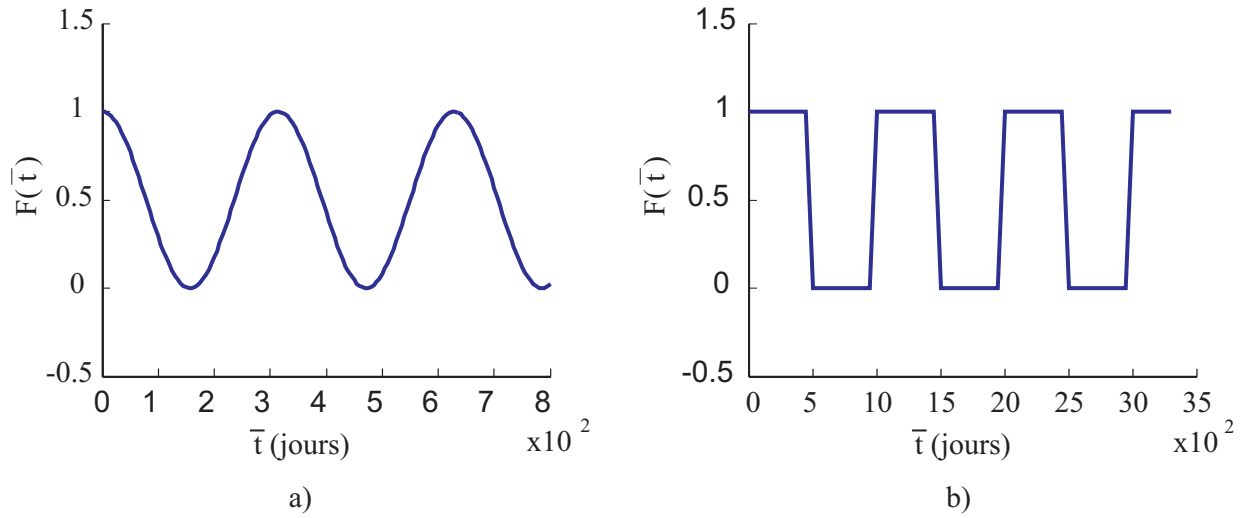


FIGURE III.7: Deux types de la fonction de chargement dépendant du temps a)  $F_1(t)$ , b)  $F_2(t)$ .

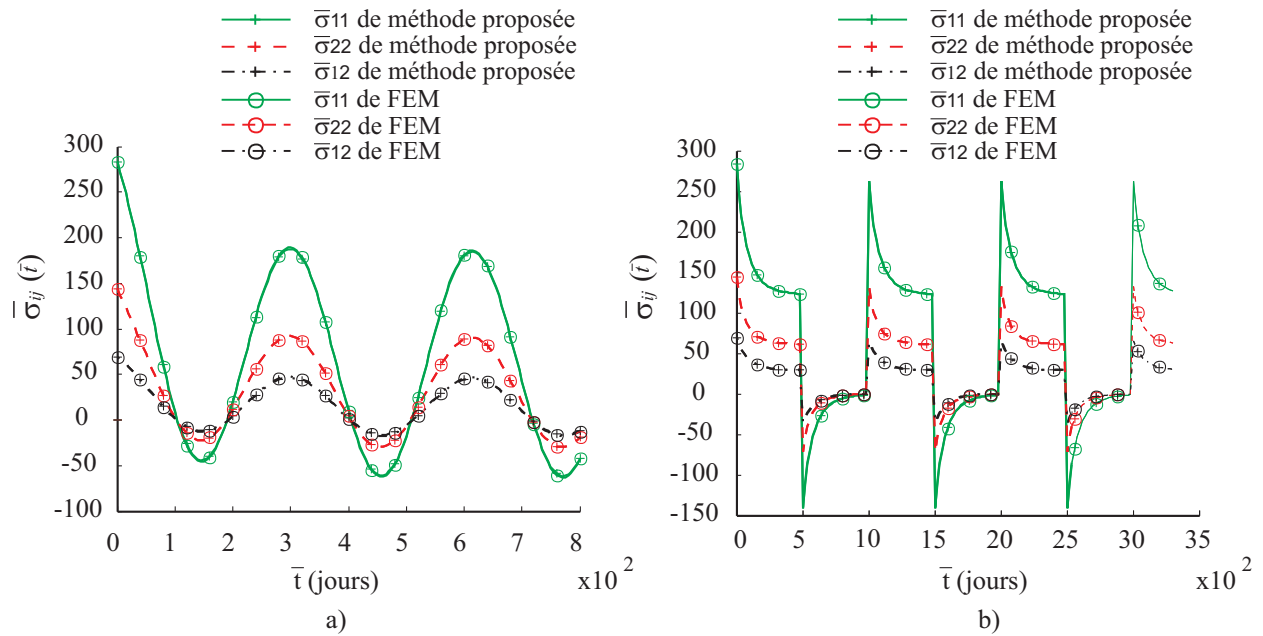


FIGURE III.8: Comparaison entre la méthode proposée et le calcul direct de FEM pour le test du VER contenant une inclusion elliptique : a)  $F(t) = F_1(t)$  ; b)  $F(t) = F_2(t)$ .

TABLE III.2: Paramètres des phases viscoélastiques constituant le VER dans l'exemple 5.1.2.

Paramètres de la matrice					
$E_{\infty,m}$ (MPa)	13909				
$\nu_{\infty,m}$	0.256				
$E_m^e$ (MPa)	2310	3220	4250	6300	5770
$\nu_m^e$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.25
$E_m^v$ (MPa.jours)	201200	255500	348900	503000	657700
$\nu_m^v$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.25
Paramètres des inclusions					
$E_{\infty,i}$ (MPa)	89000				
$\nu_{\infty,i}$	0.15				
$E_i^e$ (MPa)	584	689	752	880	
$\nu_i^e$	0.12	0.25	0.32	0.18	
$E_i^v$ (MPa.jours)	60000	105000	144000	186000	
$\nu_i^v$	0.2	0.12	0.1	0.22	

### 5.1.2 VER contenant 100 inclusions circulaires

L'objectif de cet exemple est de démontrer la capacité de la méthode proposée pour le traitement de microstructures complexes. Ici, nous considérons un VER de dimension de  $L \times L$ , illustré sur la figure III.5.b, contenant 100 inclusions circulaires. Les rayons des inclusions sont choisis suivant une loi de probabilité uniforme avec  $r_{min} = 0.0193L$  et  $r_{max} = 0.0595L$ . Un critère de non pénétration pour les inclusions est implémenté. La fraction volumique des inclusions est égale à 0.4425. Dans cet exemple, les matériaux de la matrice et des inclusions sont viscoélastiques linéaires isotropes. La matrice est caractérisée par le modèle de Maxwell généralisé avec une branche élastique et 5 branches visco-élastiques alors que les inclusions sont décrites par le même modèle mais avec une branche élastique et 4 branches visco-élastiques (voir la figure III.2). Les paramètres numériques sont précisés dans le tableau III.2 où les indices  $i$  et  $m$  indiquent les inclusions et la matrice. Un maillage contenant 109948 éléments triangulaires linéaires est choisi pour la discrétisation du VER.

Quelques composantes du tenseur de relaxation macroscopique sont montrées dans la figure III.6b. Différents chargements  $\bar{\varepsilon}_{kl}(t) = \bar{\varepsilon}_{kl}^0 F(t)$  sont utilisés pour tester la méthode avec

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3}, \quad (\text{III.125})$$

et la fonction  $F(t)$  définie par (III.123) ou (III.124).

La figure III.9 illustre les résultats obtenus par la méthode proposée et la méthode FEM. Encore une fois, un bon accord entre les résultats issues des méthodes est constaté pour chaque cas de  $F(t)$ .



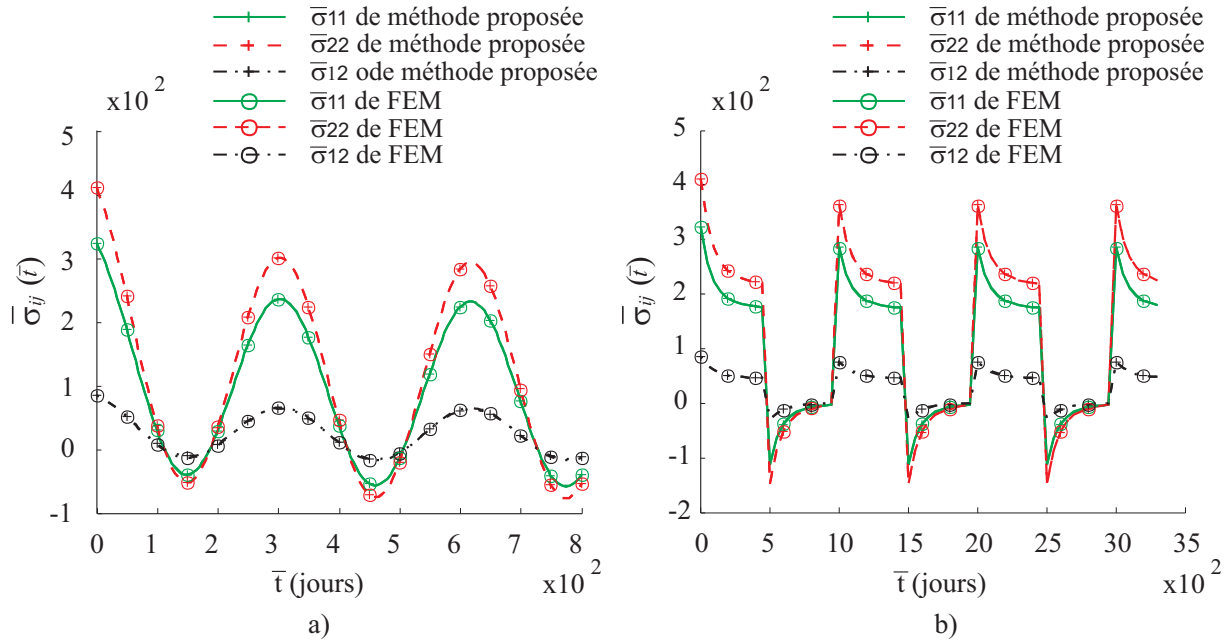


FIGURE III.9: Comparaison entre la méthode proposée et la méthode des éléments finis directe dans le cas d'un VER contenant 100 inclusions circulaires : a)  $F(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{t}{50}))$ ; b)  $F(t) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{\lfloor (\frac{t}{500}) \rfloor})$ .

## 5.2 Calcul d'une structure à deux échelles

L'objectif de cet exemple est de calculer la réponse d'une poutre formée d'un matériau viscoélastique linéaire hétérogène. La géométrie et les conditions aux limites du problème sont présentées dans la figure III.10. La poutre est soumise à une charge permanente  $q = 0.1$  MPa/m sur la surface supérieure. Les dimensions de la poutre sont :  $L = 10$  et  $B = 1$  m. Cette structure simple est discrétisée par des éléments linéaires triangulaires. L'algorithme présenté dans la section 4 est utilisé pour déterminer la réponse de la structure. Comme ce problème n'admet pas une solution analytique, nous avons implanté la méthode multi-échelle de FEM ( $FE^2$ ) [40] dans laquelle la relation contrainte-déformation est déterminée en chaque point d'intégration du maillage macroscopique grâce à un calcul local indépendant. Nous comparons ensuite les résultats des deux méthodes. Afin d'avoir une bonne comparaison, nous avons pris le même pas de temps pour les deux méthodes. Les deux microstructures caractérisées par les deux VER ((a) et (b) dans la figure III.10) sont ci-dessous analysées.

### 5.2.1 VER contenant une inclusion elliptique

Dans ce cas, le VER contient une inclusion elliptique, comme dans l'exemple 5.1.1. Le champ de déplacements dépendant du temps dû à la charge permanente  $q$  est calculé. Le déplacement vertical du point A (voir la figure III.10) est présenté dans la figure III.11. Nous

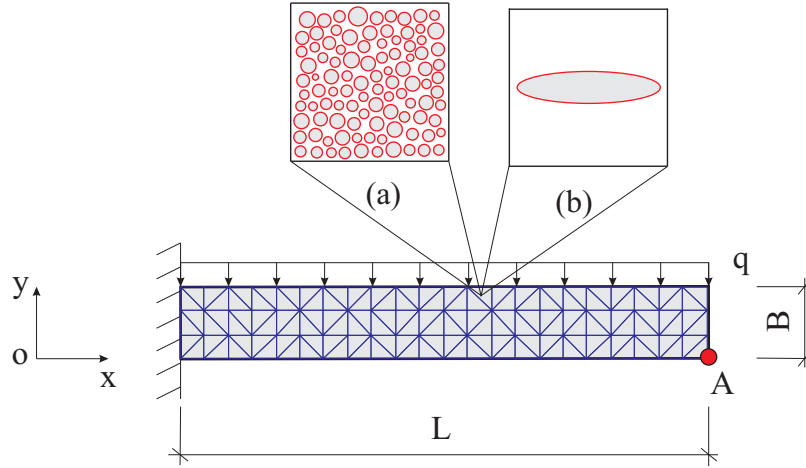


FIGURE III.10: Géométrie et conditions aux limites d'une poutre dont la microstructure du matériau constitutif est représentée par le VER a) ou b).

définissons l'erreur relative

$$e_1 = \frac{|u_A^{(y)}(\bar{t}) - u_{A,FE2}^{(y)}(\bar{t})|}{|u_{A,FE2}^{(y)}(\bar{t})|} \quad (\text{III.126})$$

où  $u_A^{(y)}$  et  $u_{A,FE2}^{(y)}$  sont les déplacements verticaux du point A obtenus par la méthode proposée et par la méthode FE<sup>2</sup>. Les résultats sont présentés dans la figure III.11b. Ces derniers correspondent à un maillage macroscopique de 300 éléments triangulaires et à un pas de temps macroscopique  $\bar{\Delta}t = 20$  jours. Nous observons que l'erreur relative  $e_1$  est petite pour toute la durée de la simulation.

Désignons par  $h$  la taille des éléments du maillage macroscopique. La convergence de la méthode proposée par rapport à  $h$  est ensuite analysée. Nous montrons, dans la figure III.12a, le déplacement vertical  $u_A^{(y)}(\bar{t})$  du point A pour différents raffinements du maillage. La solution de référence est obtenue par la méthode proposée avec un maillage très fin ( $h_{ref} = 1/100$  m). Pour étudier la convergence de la solution par rapport à  $h$  et  $\bar{\Delta}t$ , nous définissons l'erreur relative

$$e_2(h, \bar{\Delta}t) = \frac{\int_0^T |u_A^{(y)}(\bar{t}) - u_{A,ref}^{(y)}(\bar{t})| d\bar{t}}{\int_0^T |u_{A,ref}^{(y)}(\bar{t})| d\bar{t}}. \quad (\text{III.127})$$

Dans la figure III.12b, la courbe de  $e_2(h)$  correspond au pas de temps macroscopique  $\bar{\Delta}t = 10$  jours et à la durée du temps de simulation  $T = 2000$  jours. On observe une bonne convergence de la solution numérique du problème.

Pour analyser la convergence de la méthode proposée par rapport au pas de temps macroscopique  $\bar{\Delta}t$ , nous prenons une valeur constante de  $h$  et calculons  $e_2$  pour différentes valeurs de  $\bar{\Delta}t$ . Les résultats de convergence sont tracés dans la figure III.13 avec  $h = 1/4$  m et  $\bar{\Delta}t_{ref} = 0.5$  jours.

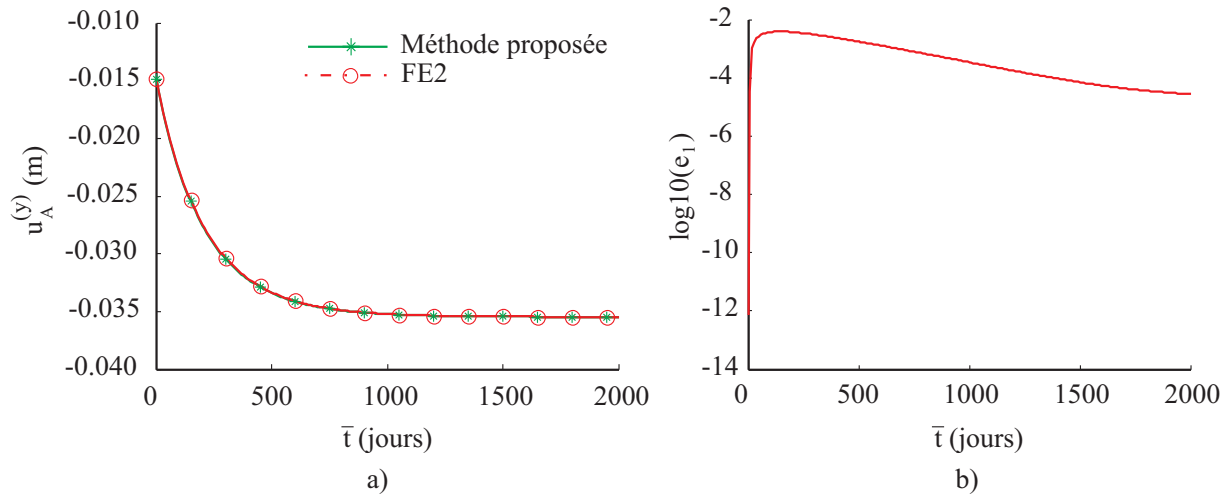


FIGURE III.11: Poutre bi-dimensionnelle associée au VER contenant une inclusion : a) le déplacement vertical du point A de la structure; la comparaison entre la solution de la méthode proposée et celle de référence (FE<sup>2</sup>); b) la courbe de l'erreur relative  $e_1(t)$  pendant la simulation.

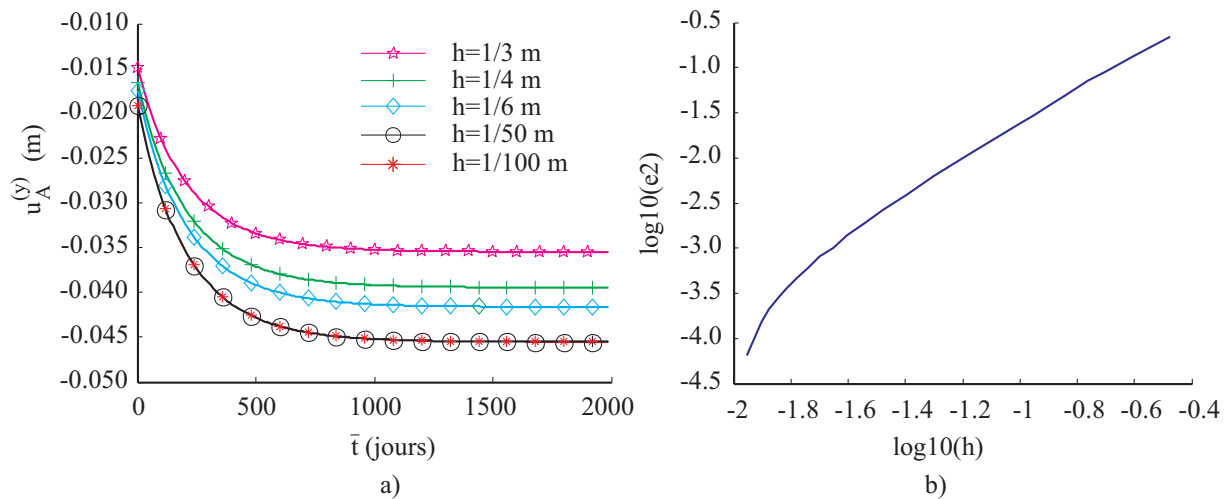


FIGURE III.12: Poutre bi-dimensionnelle associée au VER contenant une inclusion : a) la convergence de la solution (déplacement du point A de la poutre) pour différentes tailles du maillage  $h$ ; b) la relation entre l'erreur relative  $e_2$  et la taille du maillage  $h$  avec une valeur constante de  $\bar{\Delta}t$ .

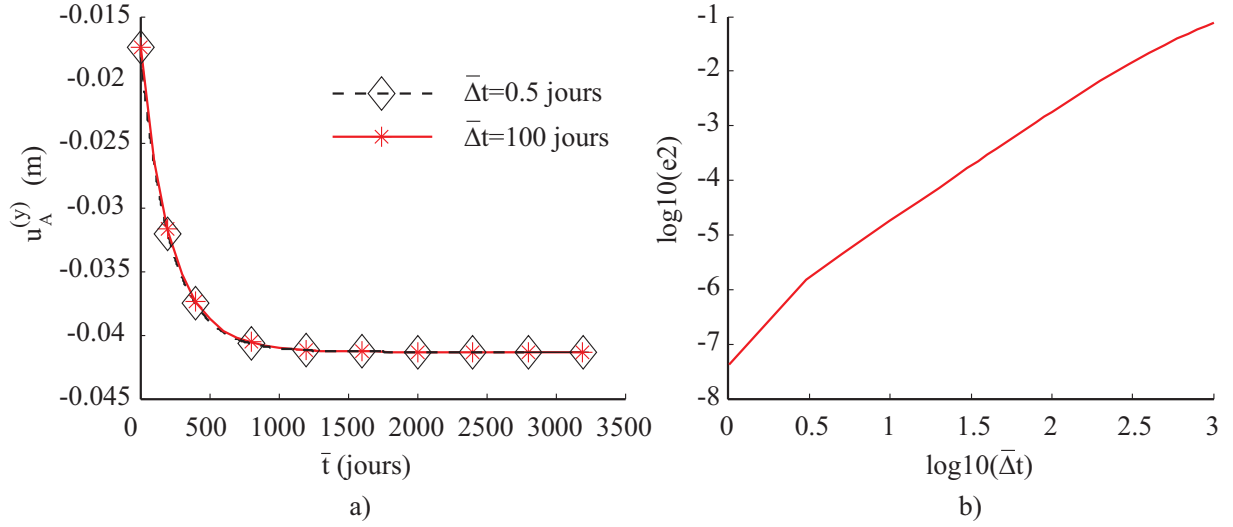


FIGURE III.13: Poutre bi-dimensionnelle associée au VER contenant une inclusion : a) la convergence de la solution (déplacement du point  $A$  de la poutre) pour différentes valeurs du pas de temps macroscopique  $\bar{\Delta}t$ ; b) L'erreur relative  $e_2$  en fonction de  $\bar{\Delta}t$  pour une valeur constante de  $h$ .

Les calculs de  $FE^2$  prennent beaucoup de temps et de mémoire. Par conséquent, il est très difficile d'étudier la convergence de cette méthode par rapport à  $h$  et  $\bar{\Delta}t$ .

Dans la suite, nous analysons la consommation de mémoire et le temps de calcul de la méthode proposée. La figure III.14 montre les mémoires utilisés par la méthode proposée et la méthode  $FE^2$  en fonction de  $\bar{\Delta}t$ . Ce résultat correspond au maillage macroscopique de 500 éléments et au maillage microscopique de 1264 éléments. Le mémoire total de la méthode  $FE^2$  comporte d'abord celui destiné au stockage de l'histoire de déformation de tous les éléments et celui occupé par les variables internes. Le mémoire pour stocker la matrice de rigidité et pour résoudre le système des équations n'est pas compté dans cette étude. Nous observons que avec une erreur raisonnable, la méthode proposée permet d'économiser une grande quantité de mémoire. Par exemple, en prenant une erreur  $e_2 \leq e_{tot} = 10^{-6}$  correspondant au pas de temps macroscopique  $\bar{\Delta}t \geq 2.5$  (voir la figure III.13b) et en comparant le mémoire utilisé des deux méthode avec  $\bar{\Delta}t \geq 2.5$  dans la figure III.14, nous obtenons un avantage de la méthode proposée en terme de mémoire utilisé.

La comparaison du temps de calcul est également montrée dans le tableau III.3 où  $h$  est la taille du maillage macroscopique,  $T$  est le temps de simulation,  $T^{mi}$  est le temps nécessaire pour construire les données relatives au tenseur  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ . Il s'agit des calculs effectués sur VER à l'échelle microscopique,  $T^{ma}$  étant le temps de calcul à l'échelle macroscopique et comprenant le temps pour calculer la structure à partir des valeurs discrètes du tenseur  $\bar{\Gamma}_{ijkl}(t)$ . Le temps de calcul total de la méthode proposée est estimé par  $T^{tot} = T^{mi} + T^{ma}$ . Pour la méthode  $FE^2$ , le temps de calcul est désigné par  $T_{FE^2}^{tot}$ . Nous notons que par rapport à la méthode  $FE^2$ , le gain en temps de calcul varie de 65 jusqu'à 332 fois.

TABLE III.3: Temps de calcul de la méthode proposée et FE<sup>2</sup> pour la poutre en 2-D.

Exemple	$\bar{\Delta}t$ (j)	$h$ (m)	$T$ (j)	$T^{mi}$ (min)	$T^{ma}$ (min)	$T^{tot}$ (min)	$T_{FE^2}^{tot}$ (min)	$\frac{T^{tot}}{T_{FE^2}^{tot}}$
5.2.1	2.30	0.2500	3240	4.1	10.0	14.1	914	65.11
5.2.1	23.20	0.2500	3240	0.5	0.8	1.3	91	68.45
5.2.1	10.00	0.0625	2000	1.0	4.8	5.8	1406	243.79
5.2.1	10.00	0.0256	2000	1.0	19.6	20.6	6846	332.34
5.2.2	3.130	0.2500	3240	350.0	6.5	356.5	76430	214.41
5.2.2	31.26	0.2500	3240	35.7	0.6	36.3	7709	212.38

### 5.2.2 RVE contenant 100 inclusions circulaires

Dans cette section, le même problème que celui de l'exemple ci-dessus est analysé cependant le VER associé à la microstructure d'une poutre contient 100 inclusions circulaires. La poutre est maillée par 300 éléments triangulaires linéaires. Les données de la poutre ainsi que celles du VER sont tirées des exemples 5.2.1 et 5.1.2. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures III.15, III.16, III.17 et III.18. Malgré le fait que la microstructure est beaucoup plus complexe que celle de l'exemple précédent, la précision et la convergence de la méthode proposée restent très bonnes. Les conclusions concernant la consommation des ressources sont similaires à celles relatives à l'exemple précédent.

### 5.3 Barrage tridimensionnel

Dans cet exemple, un modèle simple de barrage 3D est étudié. L'objectif est de déterminer le comportement en fluage du barrage soumis à la pression de l'eau. La géométrie du problème est illustrée dans la figure III.19a. Les dimensions du barrage (voir la figure III.19b) sont données par  $b_1 = 1.5 \text{ m}$ ,  $b_2 = 3 \text{ m}$ ,  $H = 10 \text{ m}$  et  $l = l_{BM} = 20 \text{ m}$ . Les faces  $BCDE$ ,  $MNPQ$  et  $CDPQ$  sont encastées. La pression de l'eau varie linéairement de 0 à la surface de l'eau à  $qgH$  au fond du barrage avec  $q = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $g$  étant l'accélération de la gravité. La pression de l'eau est imposée sur la surface  $BCQM$ . Des maillages tétraédriques contenant 3370, 28181 ou 435661 éléments sont utilisés pour analyser la convergence du problème.

Le matériau constituant le barrage est hétérogène et caractérisé par un VER illustré dans les figures III.20c, III.20d. Des inclusions sphériques sont disposées sur un réseau cubique centré dans le VER. Le rayon des sphères est de  $0.4 L$ ,  $L$  étant la dimension du cube. La fraction volumique des inclusions est de 0.5362. Les matériaux de la matrice et des inclusions sont isotropes. La matrice est viscoélastique linéaire et décrite par un modèle de Maxwell généralisé avec 5 branches viscoélastiques et une branche élastique. Les inclusions sont supposées élastiques. Les paramètres des matériaux sont choisis à titre d'exemple et présentés dans le tableau III.4. Un maillage conforme de 2561 tétraèdres linéaires est adopté pour la discrétisation du VER (voir la figure III.20.c).

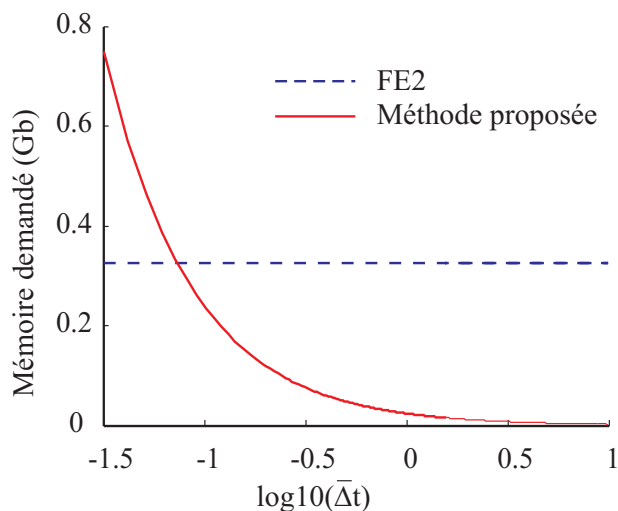


FIGURE III.14: Poutre bi-dimensionnelle associée au VER contenant une inclusion : la consommation du mémoire pendant la simulation en fonction du pas de temps macroscopique  $\bar{\Delta}t$ .

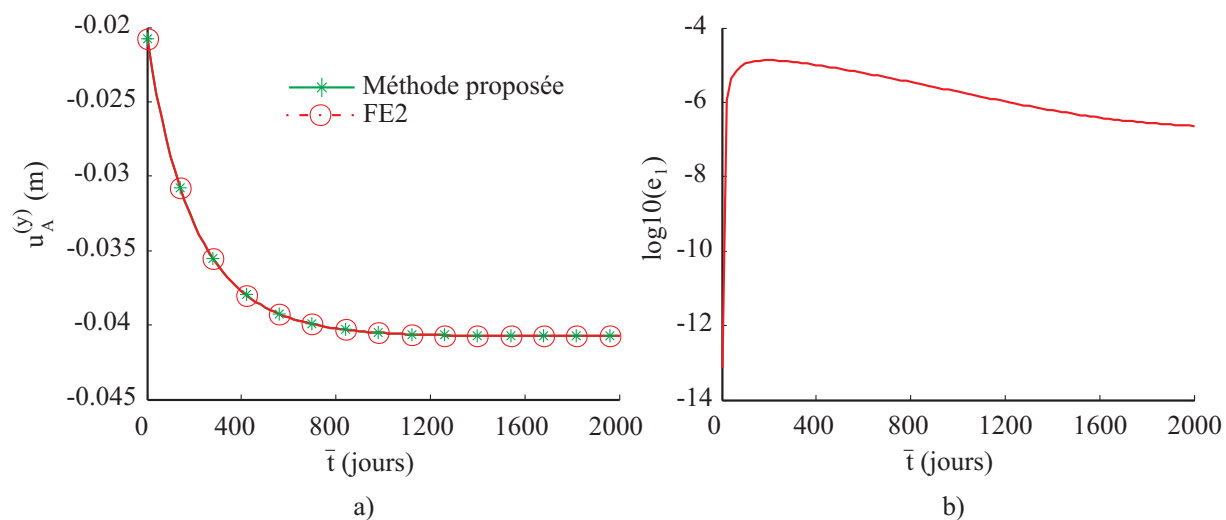


FIGURE III.15: Poutre avec un VER contenant 100 inclusions : a) le déplacement vertical du point A de la structure et la comparaison entre la solution de la méthode proposée et celle de référence ( $FE^2$ ); b) l'erreur relative  $e_1(t)$  pendant la simulation.

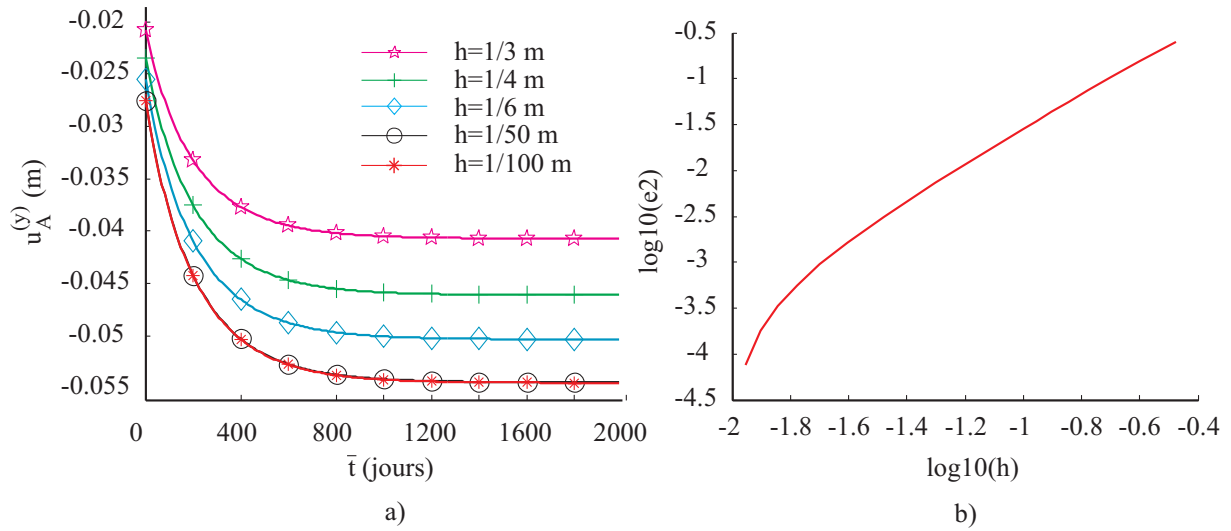


FIGURE III.16: Poutre bi-dimensionnelle associée au VER contenant 100 inclusions : a) la convergence de la solution (déplacement du point  $A$  de la poutre) pour différentes tailles du maillage  $h$ ; b) la relation entre l'erreur relative  $e_2$  et la taille du maillage  $h$  avec une valeur constante de  $\bar{\Delta}t$ .

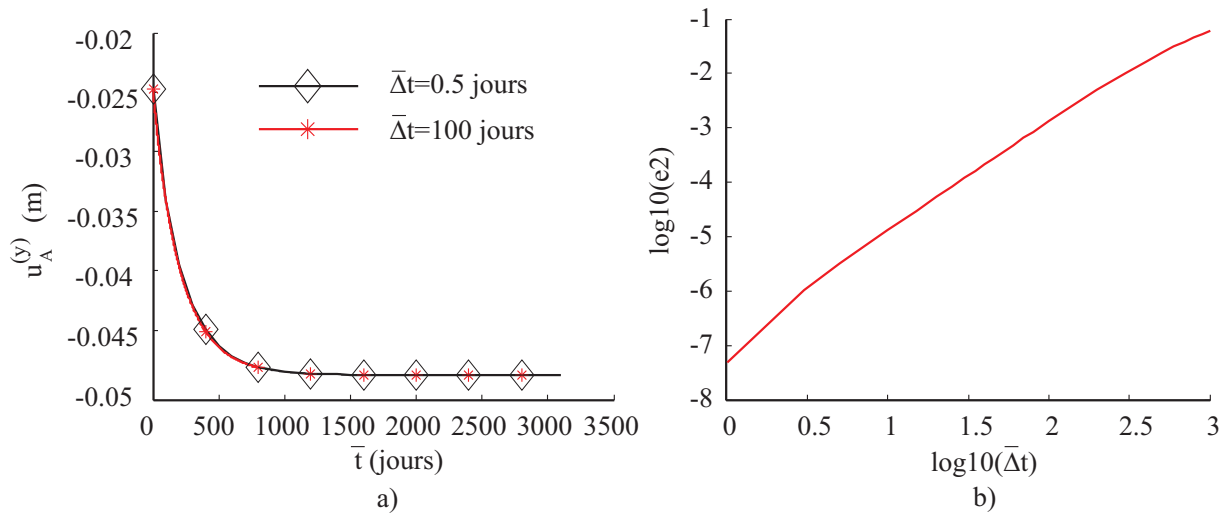


FIGURE III.17: Poutre avec un VER contenant 100 inclusions : a) la convergence de la solution (déplacement du point  $A$  de la poutre) pour différents pas du temps macroscopique  $\bar{\Delta}t$ ; b) l'erreur relative  $e_2$  en fonction de  $\bar{\Delta}t$  avec une valeur constante de  $h$ .

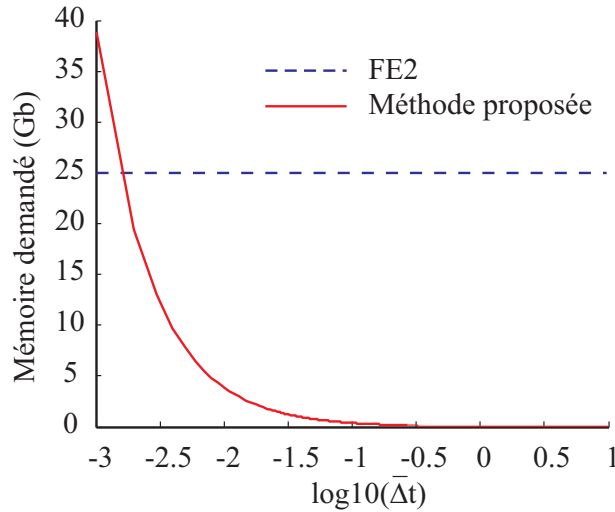


FIGURE III.18: Poutre avec un VER contenant 100 inclusions : la consommation du mémoire pendant la simulation en fonction du pas de temps macroscopique  $\bar{\Delta}t$ .

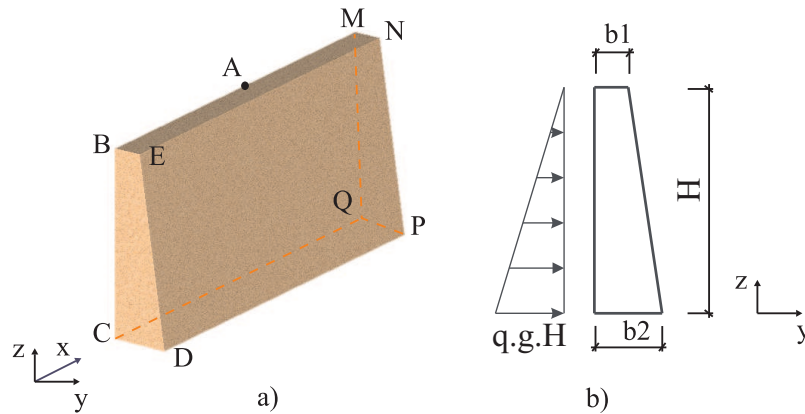


FIGURE III.19: a) Modèle tri-dimensionnel d'un barrage ; b) Section transversale du barrage et distribution de la pression d'eau.

Comme dans les exemples précédents, la méthode  $FE^2$  est implémentée afin de fournir une solution de référence. Nous analysons  $u_A^{(y)}(t)$  et  $u_{A,FE^2}^{(y)}(t)$ , qui sont les composantes  $y$  des déplacements du point A localisé au milieu du segment  $BM$  (voir la figure III.19) pour la méthode proposée et pour la méthode  $FE^2$ . Les résultats correspondants sont indiqués dans la figure III.21a. Nous constatons un bon accord entre la solution de référence et celle donnée par la nouvelle méthode. La figure III.21b montre la relation entre l'erreur relative  $e_1$  définie par l'équation (III.126) et le pas de temps à l'échelle macroscopique  $\bar{\Delta}t$ . Dans cette comparaison, nous avons choisi la même valeur du pas de temps à l'échelle macroscopique  $\bar{\Delta}t$  que celle de l'échelle microscopique  $\Delta t$ .

La convergence de la solution par rapport au temps macroscopique est également étudiée et présentée dans la figure III.22 où l'erreur relative  $e_2$  est définie par (III.127). La solution de référence  $u_{A,ref}^{(y)}(t)$  est obtenue avec un petit pas de temps  $\bar{\Delta}t_{ref} = 3$  jours.

L'analyse de la convergence par rapport à la taille du maillage macroscopique est effectuée



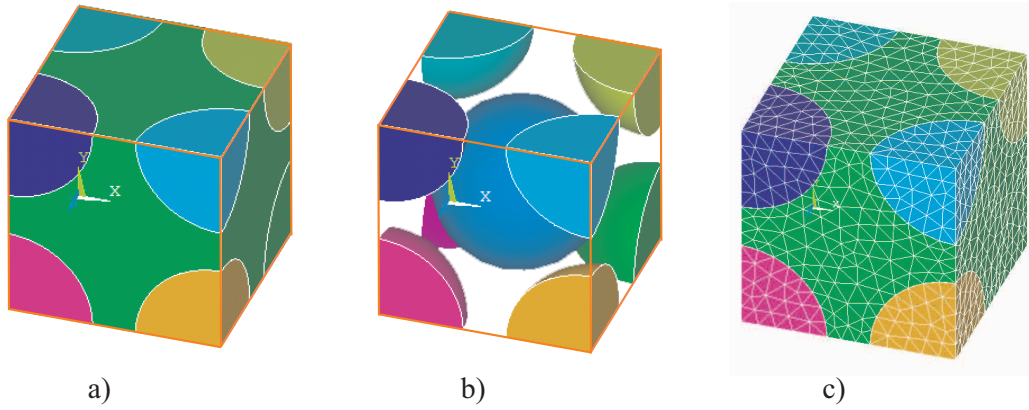


FIGURE III.20: a) Géométrie du VER; b) Inclusions du VER; c) Maillage conforme contenant des éléments tétraédriques.

TABLE III.4: Paramètres matériels des phases du VER pour l'exemple 3D.

Paramètres de la matrice					
$E_{\infty,m}$ (MPa)	13909				
$\nu_{\infty,m}$	0.256				
$E_m^e$ (MPa)	6930	9660	12750	18900	17310
$\nu_m^e$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.25
$E_m^v$ (MPa.jours)	2012000	2555000	3489000	5030000	6577000
$\nu_m^v$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.25
Paramètres des inclusions					
$E_i$ (MPa)	1098400				
$\nu_i$	0.28				

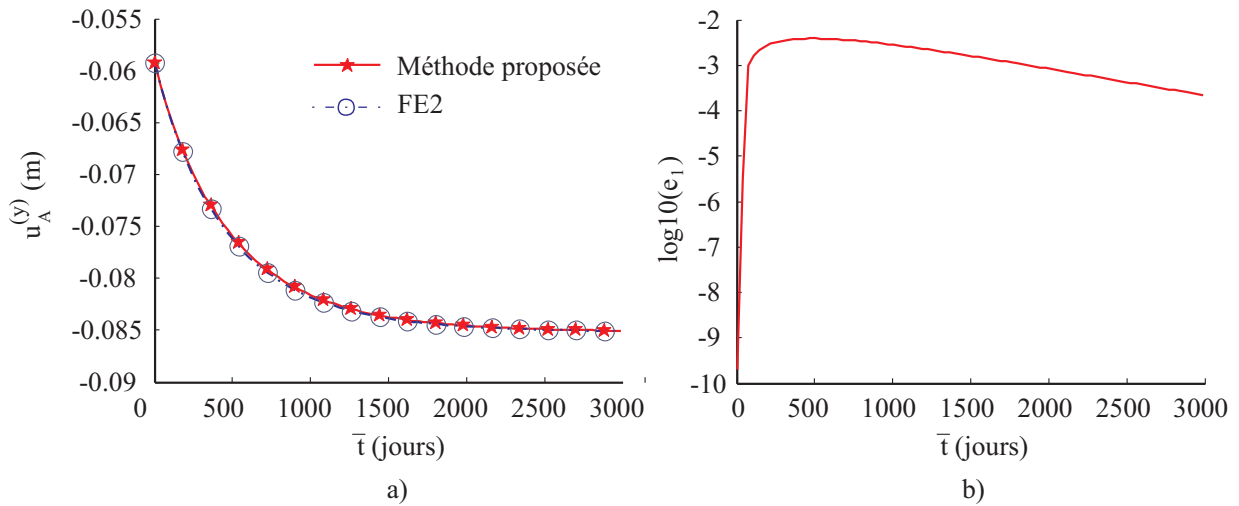


FIGURE III.21: Barrage en 3D : Composante  $y$  du déplacement du point A de la structure; comparaison entre la solution de la méthode proposée et celle de référence ( $FE^2$ ); b) Evolution de l'erreur relative  $e_1(\bar{t})$  durant la simulation.

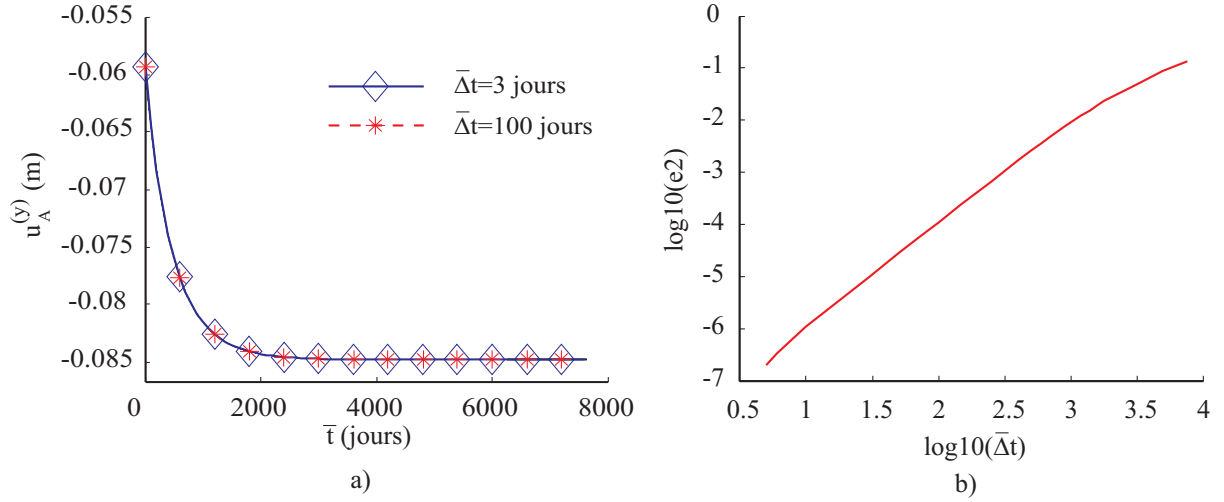


FIGURE III.22: Barrage en 3D : a) Convergence de la solution (Composante y du déplacement du point  $A$  de la structure) pour différents pas  $\bar{\Delta t}$  avec  $T = 7650$  jours ; b) Erreur relative  $e_2$  par rapport à  $\bar{\Delta t}$ .

et illustrée dans la figure III.23a. Comme le temps de calcul est long, seulement trois courbes sont calculées dans cet analyse.

Les consommations de mémoire pour les deux méthodes sont indiquées dans la figure III.24. Pour  $\log_{10}(\bar{\Delta t}) \geq 1$  (ce qui correspond à une erreur relative  $e_2 \geq 10^{-6}$  dans la figure III.22.b), la méthode proposée utilise beaucoup moins de mémoire qu'une méthode multi niveaux classique. La comparaison du temps de calcul total des deux méthodes est également effectuée et présentée dans le tableau III.5 où  $N_{mi}$  et  $N_{ma}$  sont les nombres d'éléments du maillage à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique. Nous soulignons ici que, par rapport à une méthode multi niveaux, le gain en temps de calcul est de l'ordre de cent.

TABLE III.5: Le temps de calcul de la méthode proposée et celui de la méthode FE<sup>2</sup> pour le barrage en 3D.

$\bar{\Delta t}$ (j)	$N_{ma}$	$N_{mi}$	$T$ (j)	$T^{mi}$ (min)	$T^{ma}$ (min)	$T^{tot}$ (min)	$T_{FE^2}^{tot}$ (min)	$\frac{T^{tot}}{T_{FE^2}^{tot}}$
36	3370	2561	7650	3.21	5.95	9.15	2840	310
36	6865	8117	7650	20.58	10.25	30.83	6342	206

## 6 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode multi-échelle permettant de déterminer la réponse temporelle de structures constituées de matériaux viscoélastiques linéaires

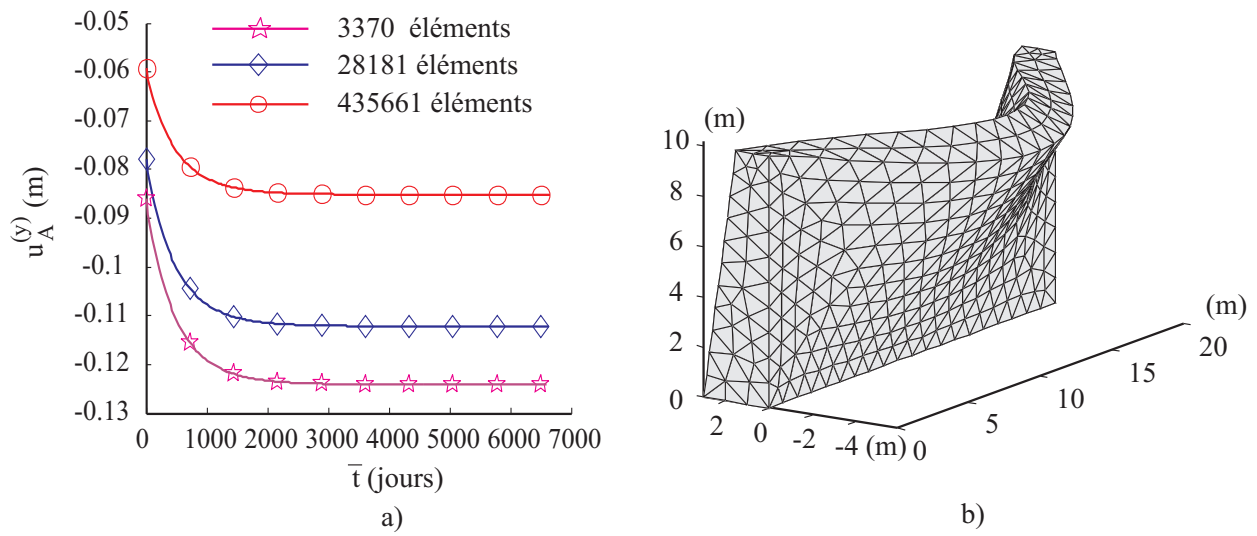


FIGURE III.23: Barrage en 3D : a) Convergence de la solution (déplacement d'un point dans la structure) pour différents maillages avec un pas de temps microscopique constant  $\Delta t = 36$  jours ; b) Illustration de la déformée de la structure (déplacements amplifiés).

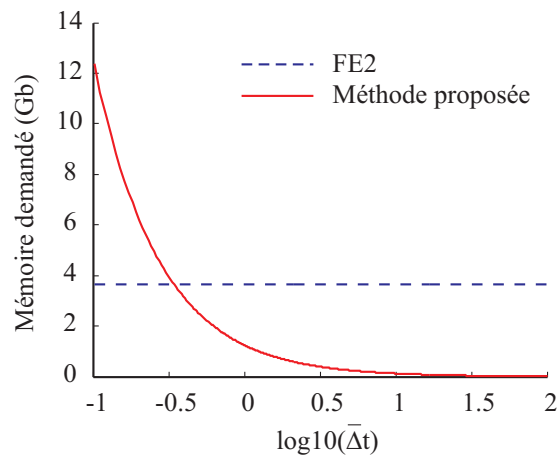


FIGURE III.24: Relation entre les mémoire consommées des deux méthodes et le pas du temps macroscopique  $\bar{\Delta}t$ .

hétérogènes. Contrairement aux méthodes basées sur la transformée de Laplace, notre méthode opère directement dans le domaine temporel. La méthode fait intervenir deux étapes. Tout d'abord, des calculs éléments finis sont réalisés sur un VER associé à la microstructure. Les composantes du tenseur de relaxation effectif sont échantillonnées pour les différents instants dans le domaine temporel. Dans la seconde étape où les calculs sont effectués sur la structure macroscopique, la loi de comportement effective est exprimée comme un produit de convolution faisant intervenir le tenseur de relaxation calculé précédemment et une procédure d'interpolation est utilisée pour évaluer numériquement l'intégrale du produit de convolution. Les deux étapes sont réalisées séparément. Une fois le tenseur de relaxation effectif calculé et stocké, des calculs des structures peuvent être réalisés sans avoir besoin de résoudre de nouveaux des problèmes à l'échelle microscopique. Enfin, la mise en œuvre de cette méthode est simple et facile à intégrer aux outils numériques des éléments finis existants. Nous rappelons que la méthode  $\mu$ -XFEM peut être utilisée dans ce cadre pour tenir compte des microstructures complexes et que les valeurs discrètes du tenseur de relaxation peuvent être calculées par les autres approches telles que la méthode de transformation de Fourier (FFT) [86]. Les différents exemples numériques étudiés ont démontré la robustesse, l'efficacité et la précision de notre méthode.



# Chapitre IV

## Une approche à quatre échelles pour le calcul de la réponse en fluage sur 60 ans d'une enceinte interne de confinement d'un réacteur de centrale nucléaire

### 1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer la démarche d'homogénéisation viscoélastique présentée dans le chapitre précédent à un cas industriel plus complexe et plus réaliste. Le problème concerne l'étude de la réponse en fluage d'une enceinte de réacteur nucléaire. Contrairement aux études classiques déjà menées jusqu'à présent, nous nous proposons de déterminer la réponse de la structure sous l'action de différents chargements (poids propre, action des câbles de précontrainte, éventuelle mise en pression), en prenant en compte quatre niveaux d'échelles. Le comportement de la pâte de ciment à l'échelle microscopique est tout d'abord identifié expérimentalement. A l'échelle du mortier, constitué de ciment et de sable, une première homogénéisation est réalisée par le biais de la méthode numérique présentée dans le chapitre III. Une seconde homogénéisation est ensuite effectuée à l'échelle du béton, constitué de mortier et de gros granulats. Enfin, la réponse de la structure, constituée de béton et de câbles de précontrainte, est calculée en appliquant la méthode une troisième fois. La démarche est résumée sur la figure IV.15.

La structure du réacteur est constituée d'une enceinte à double paroi, avec une épaisseur de paroi interne de 1.2 m. L'enceinte interne est la troisième barrière étanche, après la gaine du combustible et le circuit primaire. On s'assure périodiquement de l'évolution de l'étanchéité de l'enceinte au moyen d'épreuves. Les épreuves consistent à effectuer un test de mise en pression sous air sec à 0,5 MPa avant la mise en service, puis tous les dix ans. L'épreuve permet de vérifier que l'enceinte assurera son rôle de confinement en cas d'accident. L'étanchéité de la paroi interne repose sur la mise en place d'une précontrainte bi-axiale. La perte de précontrainte des câbles dépend du fluage du béton. Le calcul en fluage de la structure de l'enceinte permet donc de vérifier qu'elle assure sa fonction de troisième barrière de confinement.

Dans ce chapitre, la modélisation du problème est tout d'abord présentée. Celle-ci inclut la description de la géométrie de la structure de l'enceinte, l'interaction du béton avec les câbles de précontrainte et le chargement pour plusieurs scénarios différents de mise en pression

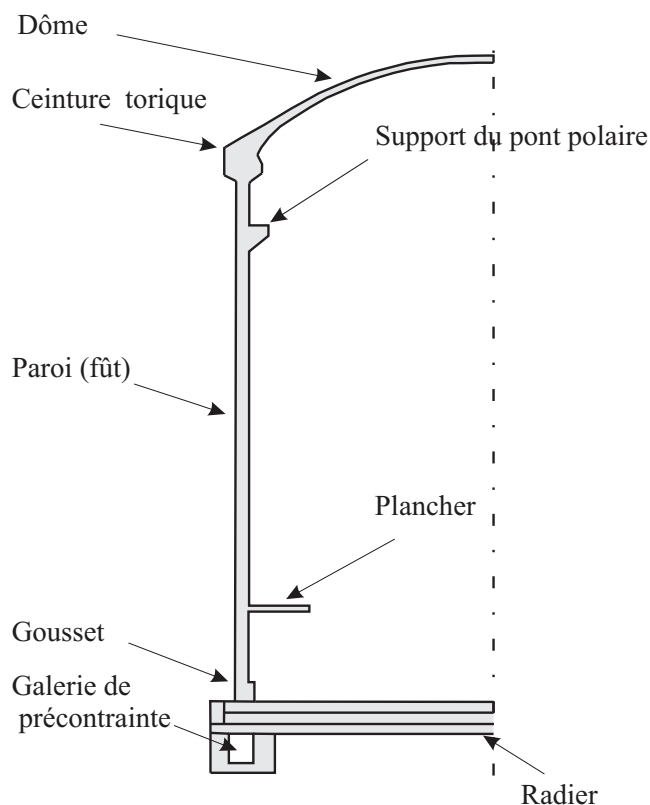


FIGURE IV.1: Section de la structure de l'enceinte : géométrie.

de l'enceinte. La géométrie de l'enceinte est prise en compte de façon réaliste à partir de données cotées. Les câbles de précontrainte sont également modélisés (câbles horizontaux, verticaux pur, Gamma de famille 1 et 2 (voir section 2.1)). Seules les armatures passives sont négligées. Les interactions entre le sol et l'ouvrage n'ont pas été prises en compte. Enfin, le comportement du béton sera modélisé par le biais de la méthode d'homogénéisation viscoélastique sur trois échelles. Seul le comportement viscoélastique linéaire et le fluage propre sont pris en compte, nous n'avons pas inclus les effets des réactions thermo-chimiques, de séchage et d'hydratation. Les résultats présentés ont pour objectif de fournir les tendances de réponse de points critiques de la structure, et sont comparés avec d'autres études de modélisation ou des mesures expérimentales fournies par EDF.

Les calculs effectués par le biais de l'approche à quatre échelles de ce chapitre ont été exclusivement menés avec le code personnel développé sous Matlab tout au long de la thèse.

## 2 Modélisation

### 2.1 Géométrie et maillage de la structure

La géométrie de la structure est présentée dans la figure IV.1. Les composants de la structure sont décrits dans la figure IV.2.a. La structure en béton est renforcée par un réseau de câbles de précontrainte (figure IV.2.b). Les câbles sont répartis en plusieurs familles : les câbles horizontaux, les câbles verticaux purs, et les câbles désignés par "Gamma de familles

## Double Enceinte en béton des REP1300

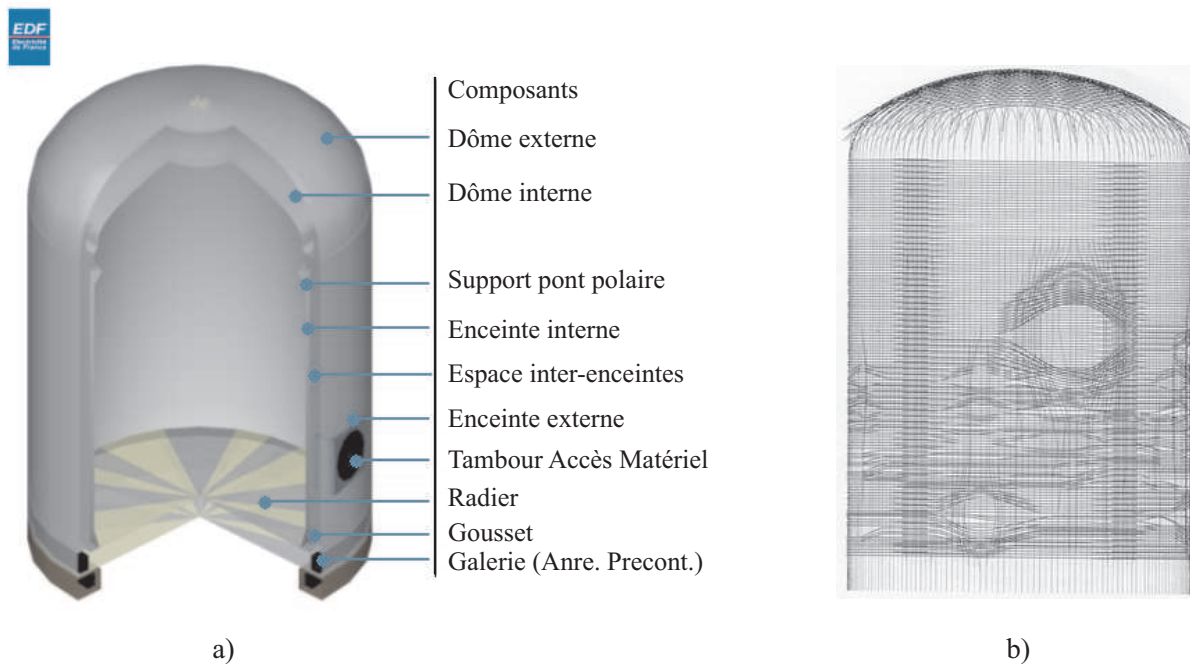


FIGURE IV.2: a) Composants de la structure de l'enceinte à double paroi ; b) Câbles de précontrainte.

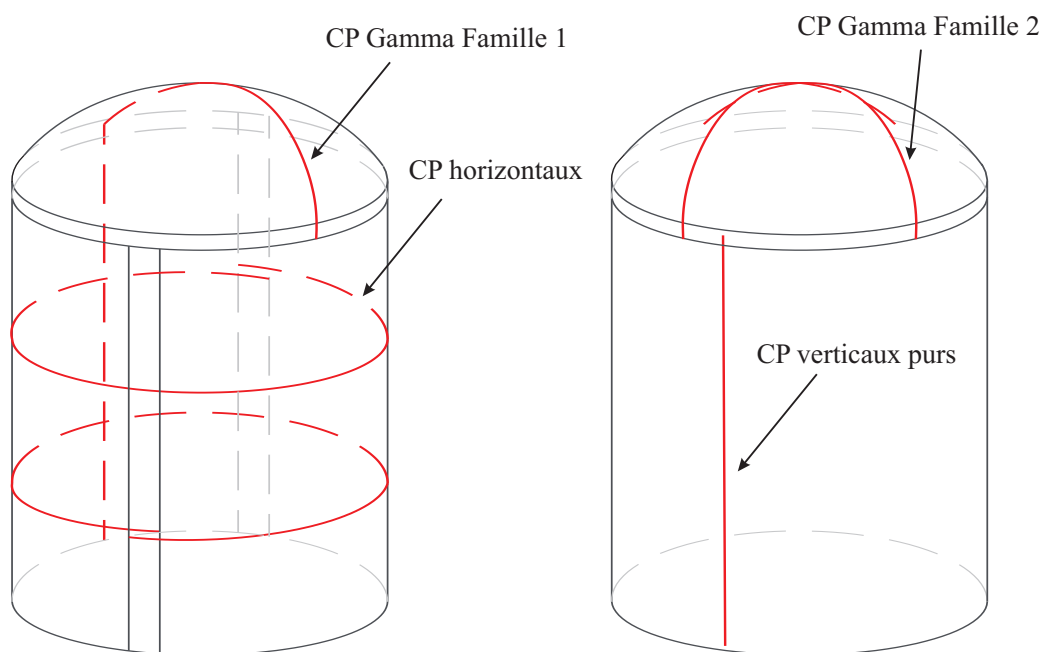


FIGURE IV.3: Câbles de précontrainte.



1" et "2" dont les dispositions sont illustrées dans la figure IV.3. Pour alléger la modélisation, en tenant compte de la géométrie de l'enceinte du réacteur, un seul secteur est représenté. L'angle du secteur est de  $6,14^\circ$ , déterminé par la condition de périodicité circonférentielle des câbles de précontrainte (CP) verticaux. Une période inclut la séquence suivante : un CP Gamma - un CP vertical pur - un CP Gamma (voir les figures IV.8 et IV.9). Le maillage tridimensionnel du secteur a été construit dans une étude précédente d'EDF et réutilisé pour ce travail. Il est obtenu par construction d'un maillage 2D (voir figure IV.4), puis extrudé par révolution (voir les figures IV.5, IV.6 et IV.7). Le maillage final comporte 74752 nœuds et 14217 éléments, dont 13986 éléments hexaèdres quadratiques à 20 nœuds et 231 éléments prismatiques quadratiques à 15 nœuds.

## 2.2 Câbles de précontrainte

Pour compenser la faible résistance en traction du béton et pour éviter l'apparition des fissures dans certaines structures de Génie Civil, le béton est précontraint à l'aide de câbles. Dans le cadre de ce travail, les câbles de précontrainte sont modélisés par des éléments de barre linéaires unidirectionnels et élastiques [77]. Ils sont maillés séparément du volume du béton. Le nombre des nœuds de l'ensemble des câbles est de 4904. Les nœuds du béton et ceux des aciers sont disjoints dans ce maillage.

Étant conçu pour ne prendre en compte que la force axiale, l'élément de barre se déforme seulement dans sa direction axiale (voir la figure IV.11). La section transversale de la barre peut être arbitraire, mais les dimensions de la section transversale doivent être beaucoup plus faibles que celles dans le sens axial.

Dans le système de coordonnées local, le champ de déplacement de la barre est donné approximativement par

$$u(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2, \quad (\text{IV.1})$$

où  $N_i(\xi)$  sont des fonctions de forme. On utilise ensuite la matrice de rotation  $\mathbf{T}$  pour effectuer une transformation des coordonnées locales ( $\xi$ ) vers les coordonnées globales ( $x,y,z$ ). Cette matrice  $\mathbf{T}$  est définie par :

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{T}\mathbf{D}_e, \quad (\text{IV.2})$$

dans laquelle,  $\mathbf{d}_e$  et  $\mathbf{D}_e$  désignent le vecteur des inconnues locales et globales, respectivement, associées aux nœuds, avec  $d_e = [u_1 \ u_2]^T$  et  $D_e = [U_1 \ V_1 \ W_1 \ U_2 \ V_2 \ W_2]^T$ . La matrice  $\mathbf{T}$  est donnée par

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.3})$$

où

$$l_{ij} = \cos(\xi, x) = \frac{x_j - x_i}{l_e}, \quad (\text{IV.4})$$

$$m_{ij} = \cos(\xi, y) = \frac{y_j - y_i}{l_e}, \quad (\text{IV.5})$$

$$n_{ij} = \cos(\xi, z) = \frac{z_j - z_i}{l_e}. \quad (\text{IV.6})$$

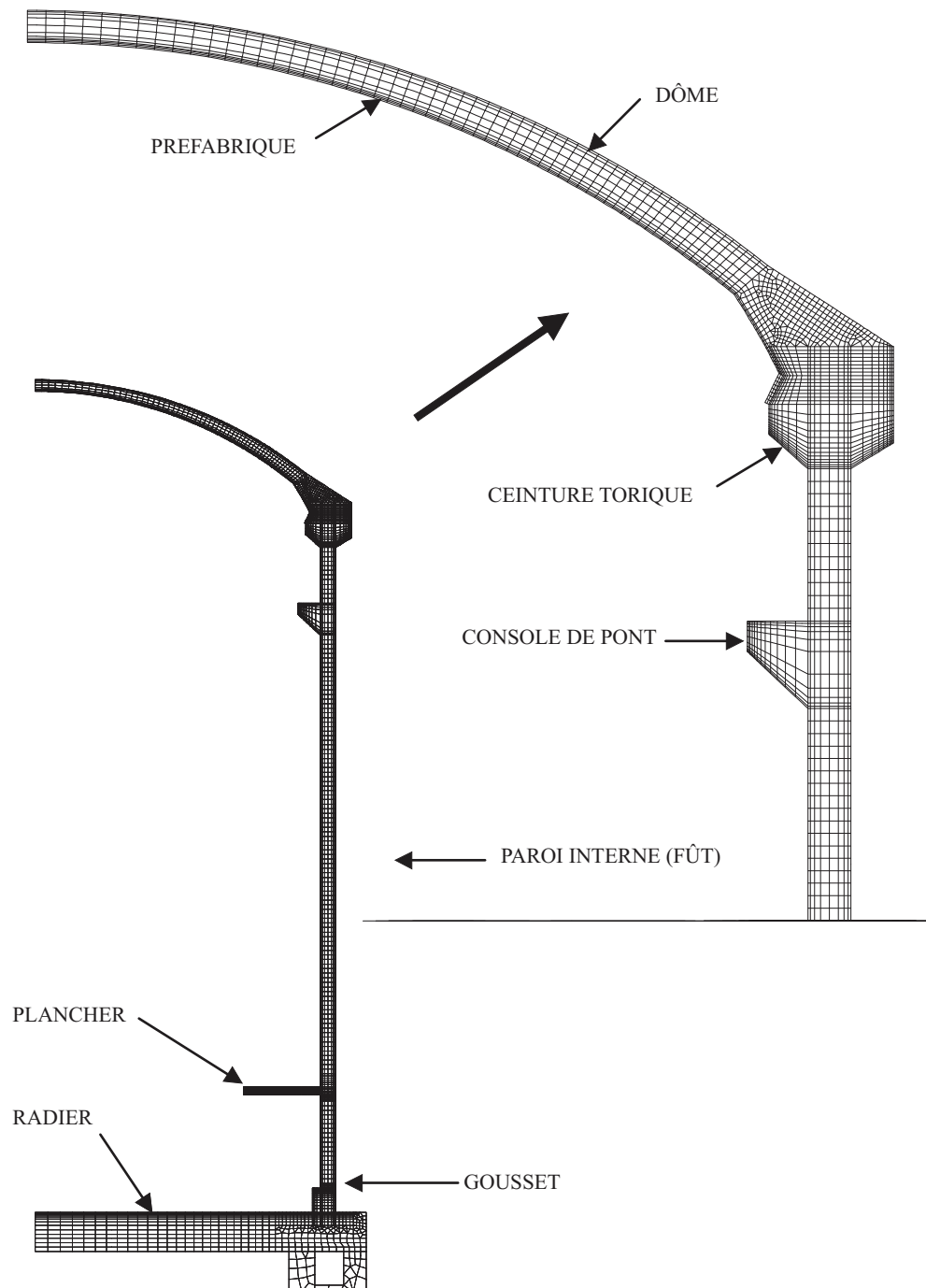


FIGURE IV.4: Secteur d'enceinte - Modèle axisymétrique initial.

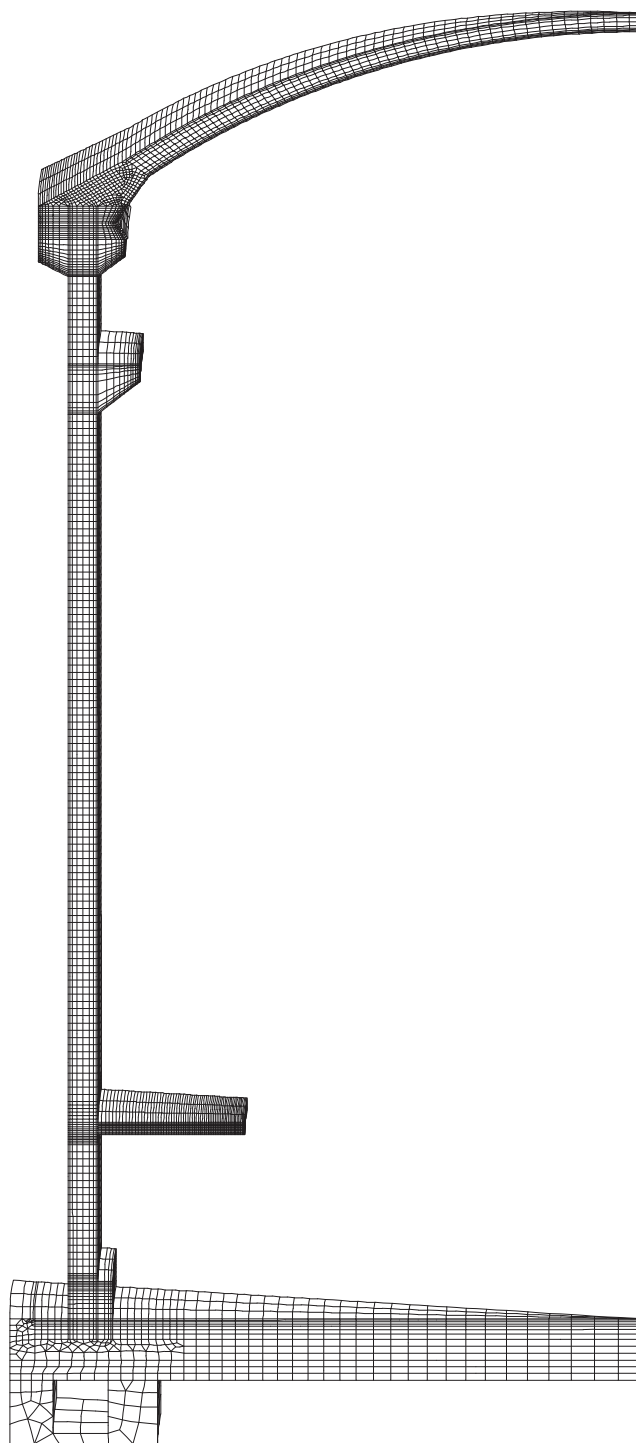


FIGURE IV.5: Secteur d'enceinte - Maillage en 3D (vue d'ensemble).

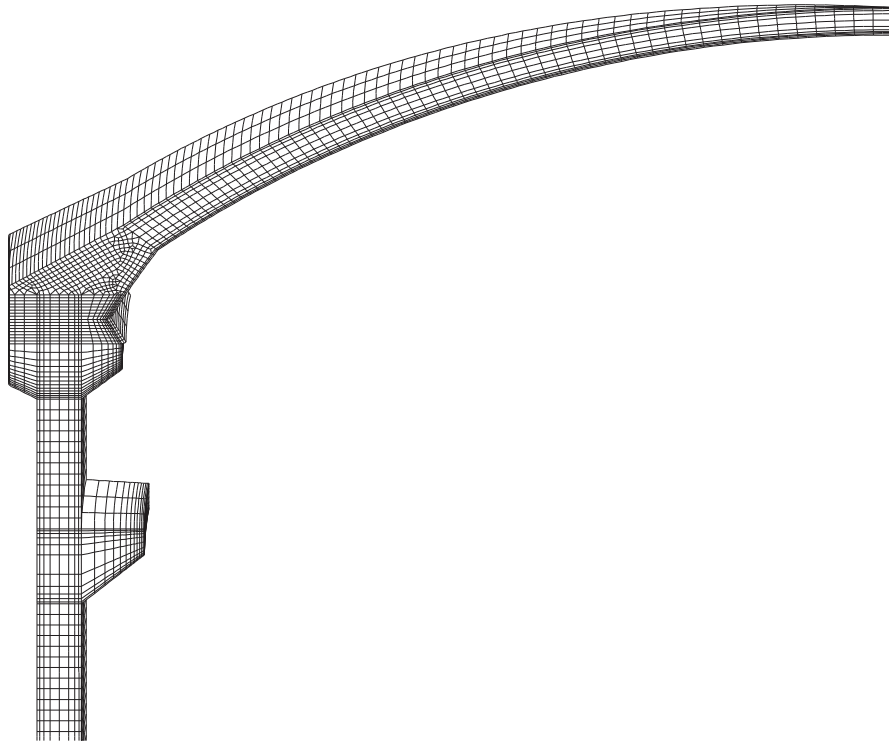


FIGURE IV.6: Secteur d'enceinte - Maillage en 3D (Zoom partie haute).

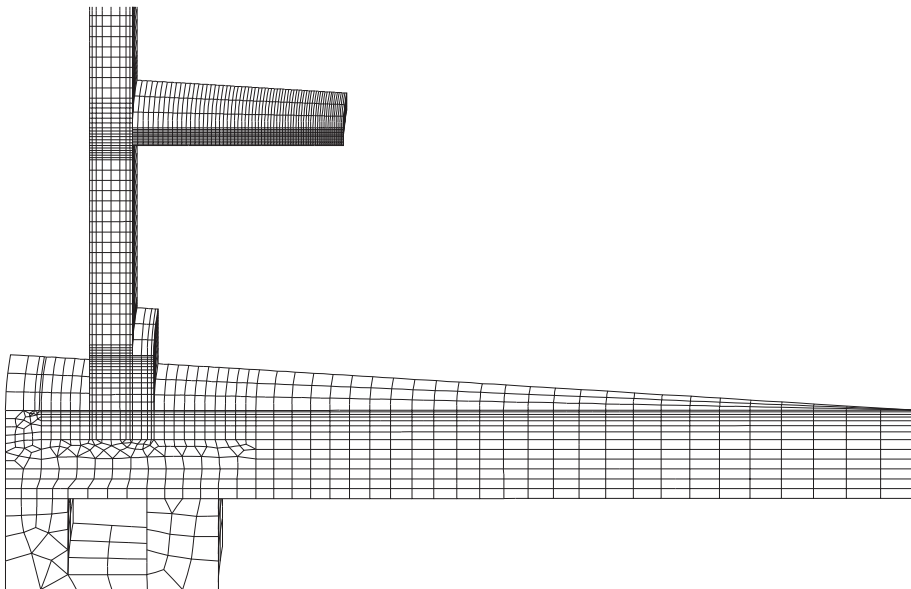


FIGURE IV.7: Secteur d'enceinte - Maillage en 3D (Zoom partie basse).

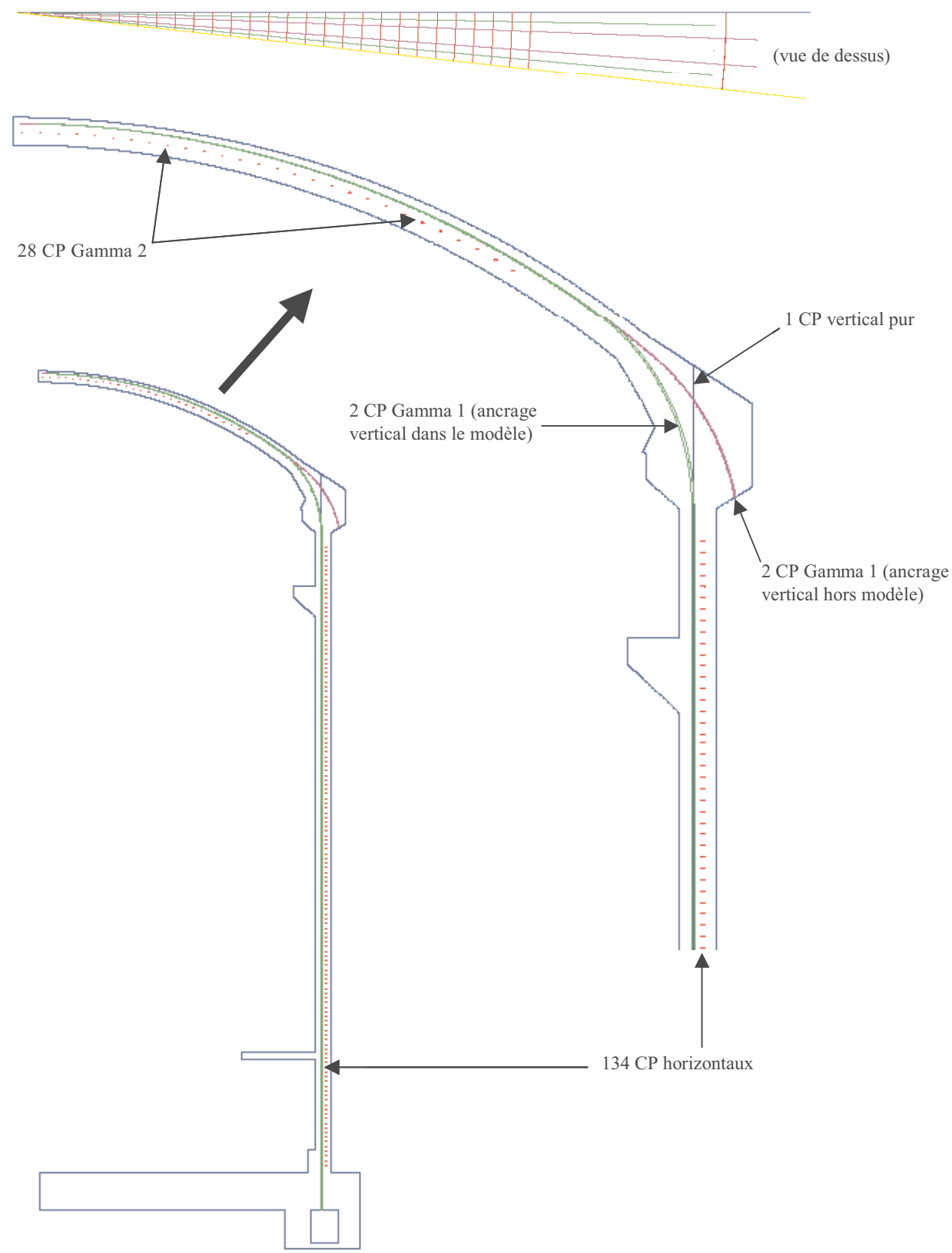


FIGURE IV.8: Secteur d'enceinte - Câbles de précontrainte (Vues de face et de dessus).

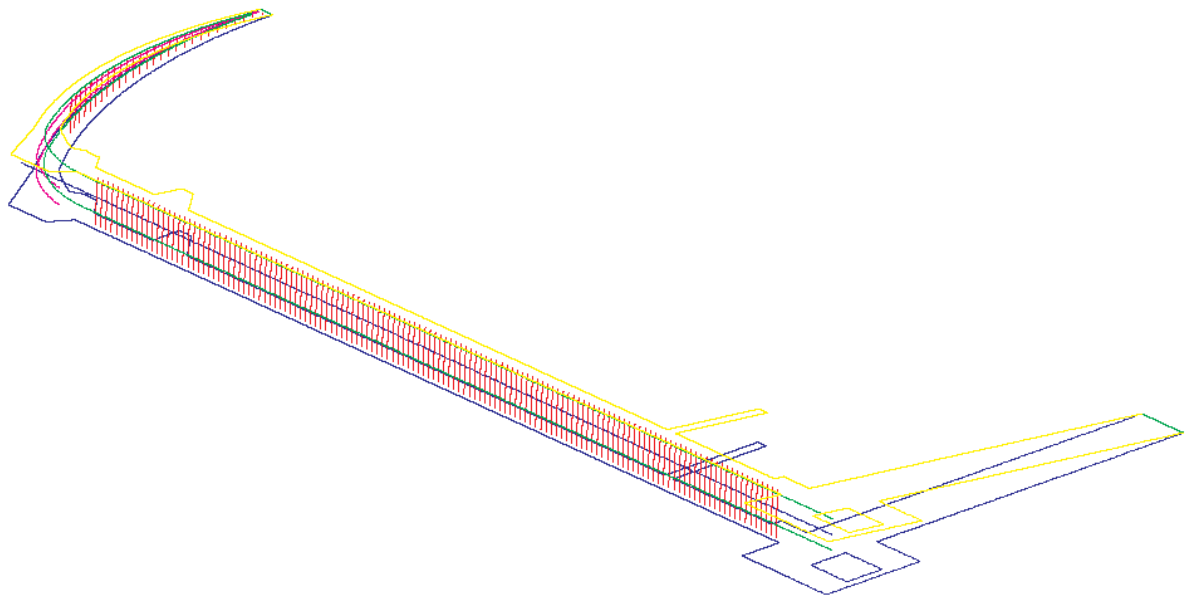


FIGURE IV.9: Secteur d'enceinte - Câbles de précontrainte (Vue de profil).

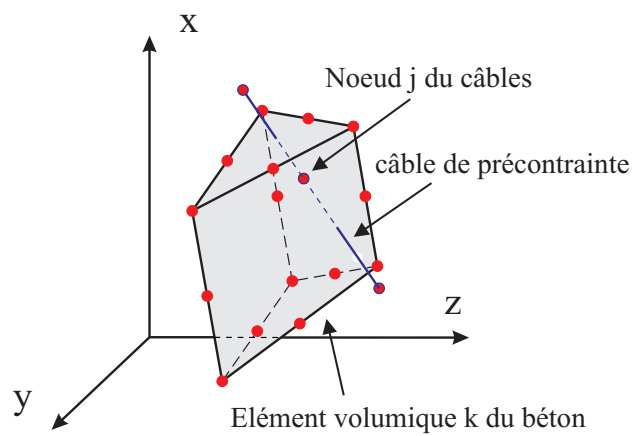


FIGURE IV.10: Câble de précontrainte et élément volumique de béton.

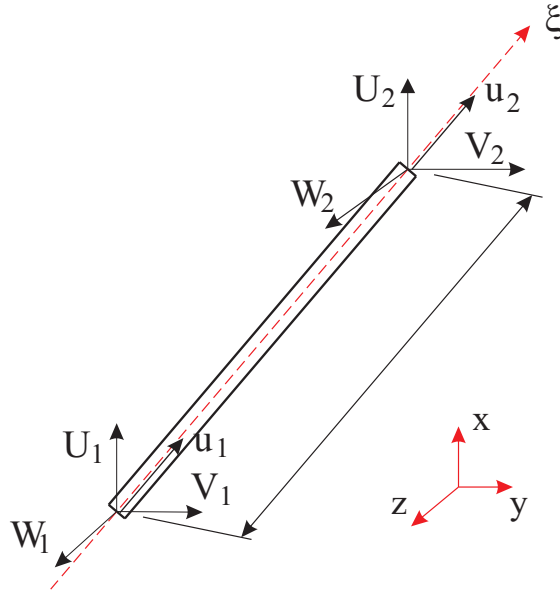


FIGURE IV.11: Élément de barre avec déplacements locaux  $u_1, u_2$  et vecteurs de déplacement globaux  $(U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2)$ .

Dans le système de coordonnées global,  $l_e$  est la longueur d'élément donnée par

$$l_e = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (\text{IV.7})$$

En utilisant la matrice de rotation  $\mathbf{T}$ , l'expression de matrice de rigidité dans le système global s'écrit :

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}. \quad (\text{IV.8})$$

où  $\mathbf{k}_e$  et  $\mathbf{K}_e$  sont les matrices de rigidité élémentaires dans les système locaux et globaux, respectivement. Les propriétés matériaux et les caractéristiques associées à chaque type de câble sont donnés dans le tableau IV.1

Les éléments des barres sont ensuite liés cinématiquement aux éléments de volume par le biais d'une méthode de multiplicateurs de Lagrange, décrite ci-dessous. La condition de continuité des déplacements est donnée par [89] :

$$\mathbf{u}_j^{CP} = \sum_{i=1}^n N_{i,k}(\mathbf{x}_j) \mathbf{u}_{i,k}^{BT}, \quad (\text{IV.9})$$

où l'indice  $j$  est associé au nœud  $j$  des câbles et l'indice  $k$  indique l'élément volumique  $k$  dans le béton qui contient le nœud  $j$  des câbles de précontrainte (voir la figure IV.10);  $\mathbf{u}_j^{CP}$  est le déplacement du nœud  $j$  des câbles;  $\mathbf{x}_j$  est la coordonnée du nœud  $j$  des câbles;  $\mathbf{u}_{i,k}^{BT}$  est le déplacement du nœud  $i$  de l'élément volumique  $k$  du béton;  $N_{i,k}$  est la fonction de forme de l'élément  $k$  du béton.

TABLE IV.1: Caractéristiques des câbles de précontrainte.

Paramètre	CP Horizontaux	CP Verticaux Purs	CP Gamma
Module d'Young ( $GPa$ )	190	190	190
Section verticale ( $mm^2$ )	5550	5550	5550
Coefficient de poisson	0,3	0,3	0,3
Masse volumique ( $kg/m^3$ )	7850	7850	7850
Contrainte garantie de la charge maximale à rupture ( $MPa$ )	1860	1860	1860
Coefficient de dilatation thermique ( $^{\circ}C^{-1}$ )	1e-5	1e-5	1e-5
Coefficient de frottement angulaire ( $rad^{-1}$ )	0,18	0,16	0,16
Coefficient de frottement linéaire ( $m^{-1}$ )	0,0016	0,0008	0,0016

## 2.3 Chargement

### 2.3.1 Conditions aux limites pour le béton

Les conditions aux limites mécaniques sont représentées sur la figure IV.12 et sont détaillées ci-dessous.

#### Encastrement du radier et du plancher

Les déplacements verticaux des surfaces inférieures du radier sont bloqués. Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice. Un blocage des déplacements verticaux de la ligne inférieure de l'extrémité du plancher est également réalisé. Cela correspond à l'appui du plancher sur les voiles externes du bâtiment de réacteur non modélisés et considérés comme rigides.

#### Prise en compte de l'axisymétrie du secteur

Les déplacements normaux sur les faces 1 et 2 du secteur (figure IV.12) sont nuls. Cette condition permet de garantir l'axisymétrie de secteur (les déplacements des faces du secteur restent dans le même plan). Celle-ci est équivalente à  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0$  ou

$$\begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) & v(\mathbf{x}) & w(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x(\mathbf{x}) & n_y(\mathbf{x}) & n_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T = 0 \quad (\text{IV.10})$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal de la face au point  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{u}$  est le vecteur de déplacement du point  $\mathbf{x}$ .

La condition (IV.10) est appliquée pour tous les nœuds sur les faces 1 et 2 du secteur. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est introduite pour garantir cette condition.



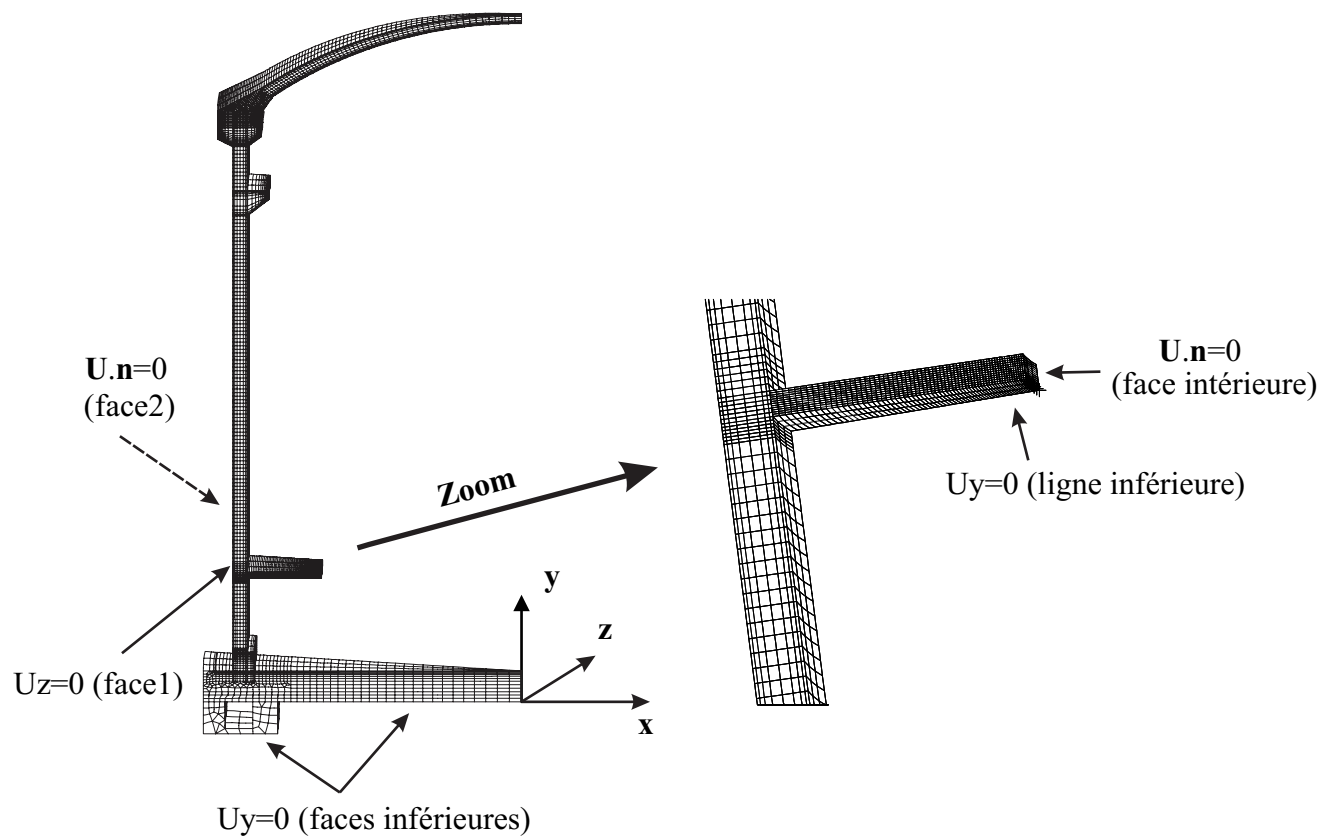


FIGURE IV.12: Secteur d'enceinte - conditions aux limites.

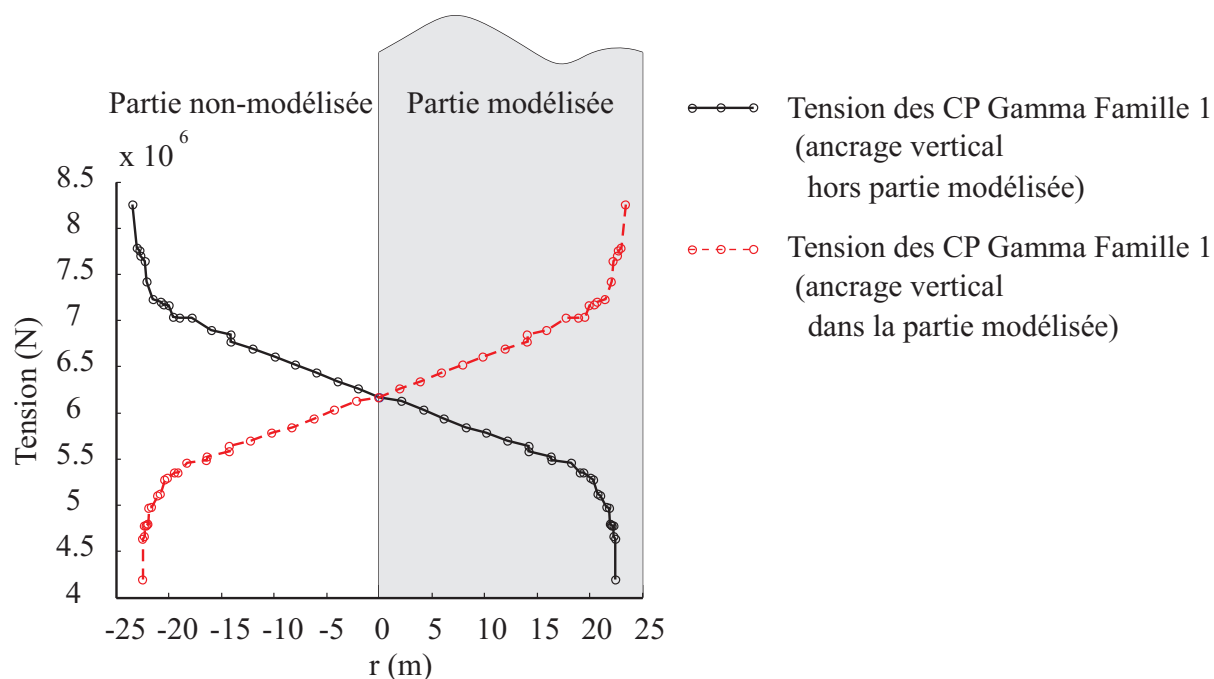


FIGURE IV.13: Tension du câble Gamma Famille 1.

### 2.3.2 Tension des câbles

La tension des câbles horizontaux, verticaux purs et des câbles Gamma Famille 2 est constante, donnée dans le tableau IV.2. En raison de la perte de précontrainte selon la coordonnée curviligne, la tension des câbles Gamma Famille 1 a été calculée théoriquement par les études précédentes dans le cadre du projet BILOBA. Elle varie de  $4.19 \times 10^6$  N à  $8.26 \times 10^6$  N comme illustrée dans la figure IV.13.

TABLE IV.2: Tension des câbles.

Câble	Tension appliquée (N)
Câbles horizontaux	$5.41 \times 10^6$
Câbles verticaux purs	$8.2584 \times 10^6$
Câbles Gamma Famille 1 ancrés dans la partie modélisée	voir la figure IV.13
Câbles Gamma Famille 1 ancrés dans la partie non-modélisée	voir la figure IV.13
Câbles Gamma Famille 2	$6.18678 \times 10^6$

### 2.3.3 Effets de la gravité

Le poids propre de la structure est faible par rapport à sa capacité portante. Le déplacement dû à ce chargement est donc très petit pour le calcul élastique. Cependant, ce dernier

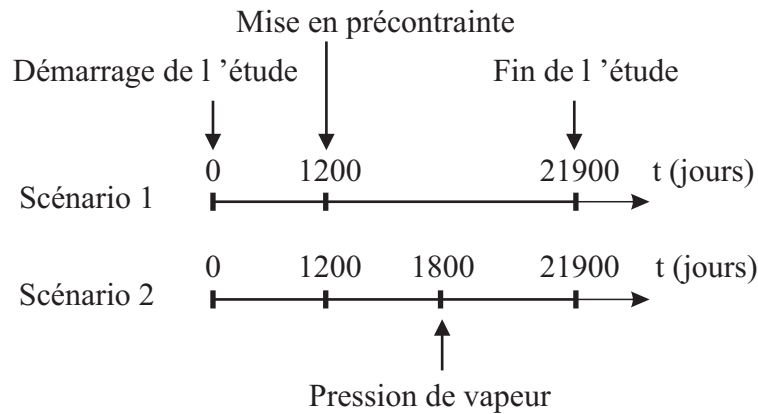


FIGURE IV.14: Scénarios de chargement.

peut être plus important si le fluage à long terme est pris en compte. Dans cette étude, les actions des poids propres du béton et des câbles sont inclus. Les masses volumiques du béton et des câbles sont respectivement données par  $\rho_{BT} = 2334 \text{ kg/m}^3$  et  $\rho_{CP} = 7850 \text{ kg/m}^3$ .

### 2.3.4 Scénarios de chargement

Les chargements agissant sur la structure sont liés aux actions de la pesanteur et des câbles de précontrainte, ainsi qu'à une éventuelle pression interne. Dans la phase de construction, plusieurs phénomènes physiques se produisent au sein du matériau de béton tels que les réactions chimiques, phénomène de retrait, etc. Ici, on suppose que tout le béton de l'enceinte est modélisé au démarrage de l'étude sans tenir compte des phases de la construction. Pour simplifier, on suppose que les câbles sont simultanément mis en précontrainte. Deux scénarios de chargement sont proposés et illustrés dans la figure IV.14. Dans les deux scénarios, les câbles sont mis en précontrainte à 1200 jours. Dans le premier scénario, la structure est soumise au poids propre et la tension des câbles. Dans le second scénario, on suppose à titre indicatif qu'un accident d'APRP (Accident par Perte de Réfrigérant Primaire). Dans ce cas, mise à part son poids propre et la tension des câbles, la structure est soumise à une pression de vapeur de 5 bar (ou 0.5 MPa) sur la paroi interne de la structure. Cette pression est supposée maintenue pendant 1 an. Ces deux scénarios ont une vocation purement illustrative.

## 3 Comportement du béton en fluage : une approche multi échelle à quatre niveaux

Dans cette partie, nous décrivons l'application de la méthode d'homogénéisation viscoélastique développée dans le chapitre III pour un problème de calcul de structure impliquant quatre niveaux d'échelles. L'objectif est de déterminer la loi de comportement effective viscoélastique du béton, à partir des différentes échelles inférieures (mortier, pâte de ciment). Le schéma récapitulatif de la démarche est illustré dans la figure IV.15. A la première échelle (pâte de ciment), la loi de comportement est identifiée expérimentalement, en supposant une loi viscoélastique de type Maxwell généralisé. A l'échelle du mortier, un VER est modélisé

par une matrice constituée de pâte de ciment et contenant des inclusions associées au sable, dont les tailles caractéristiques sont déterminées à l'aide de courbes de tamisage. A l'aide de ce VER, une première application de la méthode d'homogénéisation permet de déterminer les valeurs discrètes dans le temps du tenseur de relaxation effectif associées au matériau homogène équivalent (mortier). Un VER de béton constitué d'une matrice homogène de mortier et contenant des inclusions (graviers) est ensuite modélisé. Une deuxième application de la méthode d'homogénéisation permet d'obtenir le tenseur de relaxation effectif du matériau homogène équivalent (béton). Le tenseur de relaxation effectif est ensuite utilisé pour obtenir la réponse en temps de la structure de béton contenant les câbles de précontraintes.

### 3.1 Échelle 1 : pâte de ciment

On suppose que la pâte de ciment est caractérisée par un comportement de type Maxwell généralisé avec  $N$  branches viscoélastiques. Afin d'identifier les paramètres du modèle, une procédure classique de minimisation de l'aire entre la courbe de relaxation expérimentale et de celle du modèle est effectuée. Les essais expérimentaux ont été réalisés par EDF R&D sur des éprouvettes cylindriques de pâte de ciment [57]. La cinétique de relaxation est relativement rapide, ce qui peut conduire à avoir quelques doutes sur la pertinence de ces données expérimentales. Des essais complémentaires doivent être menés afin de confirmer ou non cette cinétique de relaxation. Toujours est-il que nous exploitons ici, faute de mieux, cette courbe expérimentale. Rappelons que l'objectif principal de cette partie est d'illustrer l'applicabilité de la méthode multi-échelle de calcul viscoélastique. Dès que de nouveaux résultats d'essai seront disponibles, il suffira de relancer les mêmes calculs avec les paramètres de Maxwell nouvellement ajustés.

Le problème de minimisation est donné par

$$\min_{\mathbf{x}} \|f(\mathbf{x})\|_2^2 = \min_{\mathbf{x}} (f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 + \dots + f_n(\mathbf{x})^2) \quad (\text{IV.11})$$

sous la condition  $f_1(\mathbf{x}) = 0$  avec

$$f_i(\mathbf{x}) = G(t_i, \mathbf{x}) - G_{\text{exp}}(t_i) \quad (\text{IV.12})$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur des paramètres du modèle,  $t_i$  sont les pas de temps discrets de l'essai expérimental,  $G(t_i, \mathbf{x})$  est la fonction de relaxation définie par (III.8) et  $G_{\text{exp}}(t_i)$  est la valeur expérimentale de la fonction de relaxation à l'instant  $t_i$ .

L'identification des paramètres du modèle de Maxwell généralisé donne plusieurs possibilités en termes de jeux de coefficients. Ce jeu dépend en particulier de  $N$ , le nombre de branches viscoélastiques du modèle. A titre d'exemple, nous présentons dans le tableau IV.3 le résultat correspondant à  $N = 6$ . La figure IV.16 montre la courbe de relaxation du modèle de Maxwell généralisé avec les paramètres identifiés. Le modèle est ensuite étendu au cas 3D en prenant un coefficient de Poisson égal à  $\nu = 0.2$  pour tous les éléments (élastiques et visqueux) du modèle. Le module de cisaillement des éléments de modèle est calculé par :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.13})$$

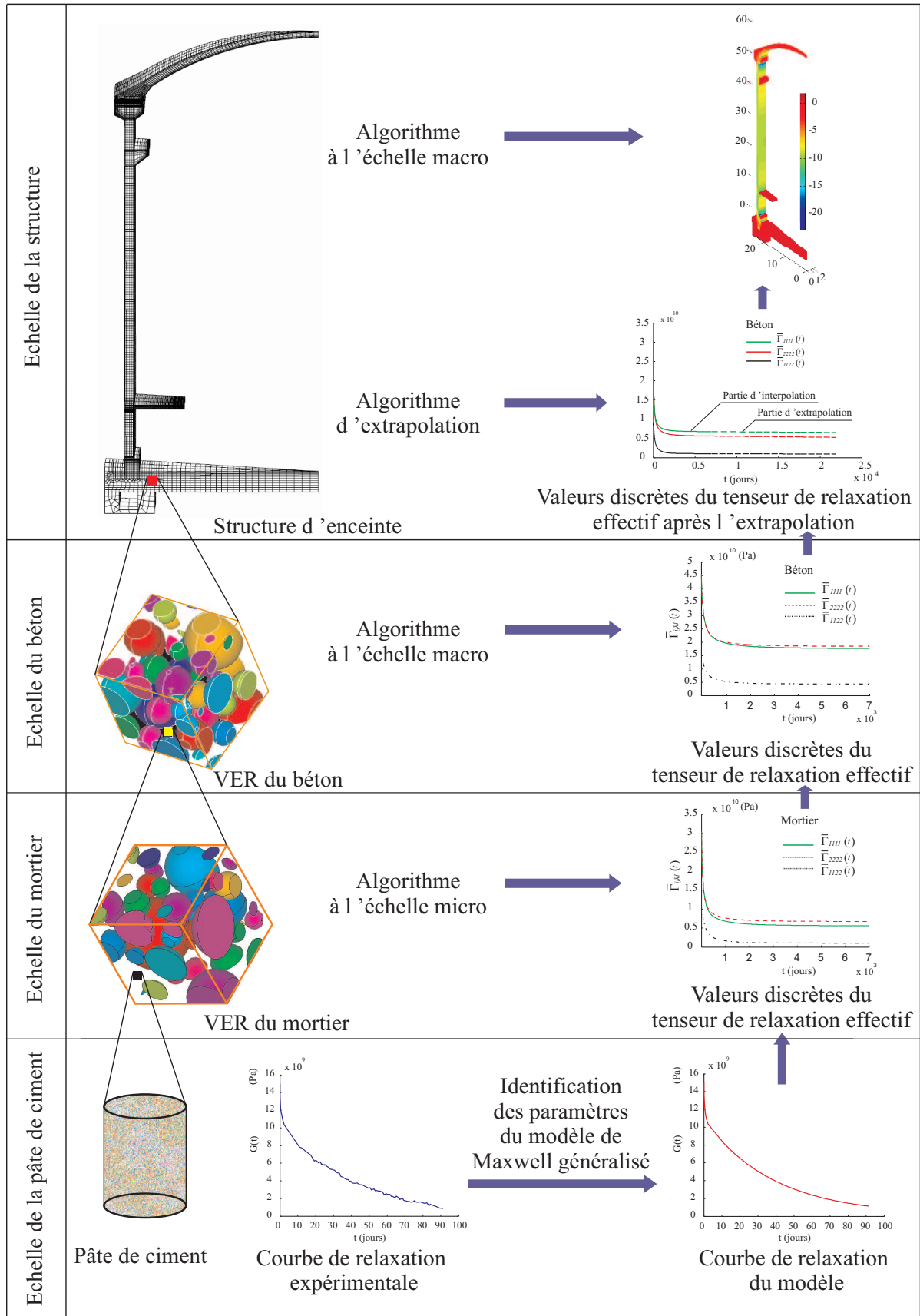


FIGURE IV.15: Schéma de calcul.

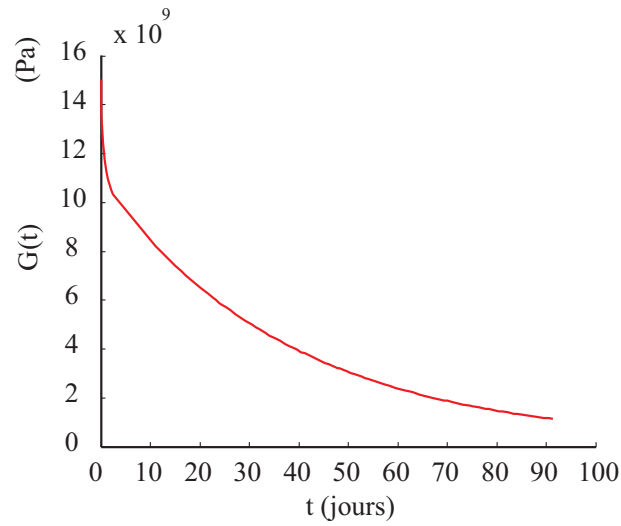


FIGURE IV.16: Courbe de relaxation du modèle de Maxwell généralisé correspondant aux paramètres du tableau IV.3.

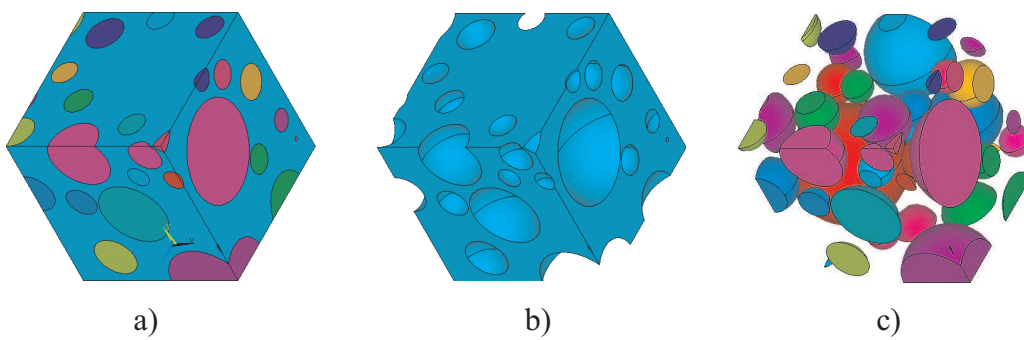


FIGURE IV.17: a) VER ; b) Matrice ; c) Inclusions ; le VER de mortier contient 48 inclusions.

TABLE IV.3: Paramètres du modèle de Maxwell généralisé ( $N = 6$ ).

Paramètre	$E_\infty$	$E_1^e$	$E_2^e$	$E_3^e$	$E_4^e$	$E_5^e$	$E_6^e$
(Pa)	6.91e+7	1.07e+10	2.78e+9	7.80e-11	3e+7	4.59e+7	1.33e+9
Paramètre		$E_1^v$	$E_2^v$	$E_3^v$	$E_4^v$	$E_5^v$	$E_6^v$
(Pa.Jours)		4.11e+11	2.11e+9	9.72e-7	3.55e+12	2.72e+12	1.29e+7

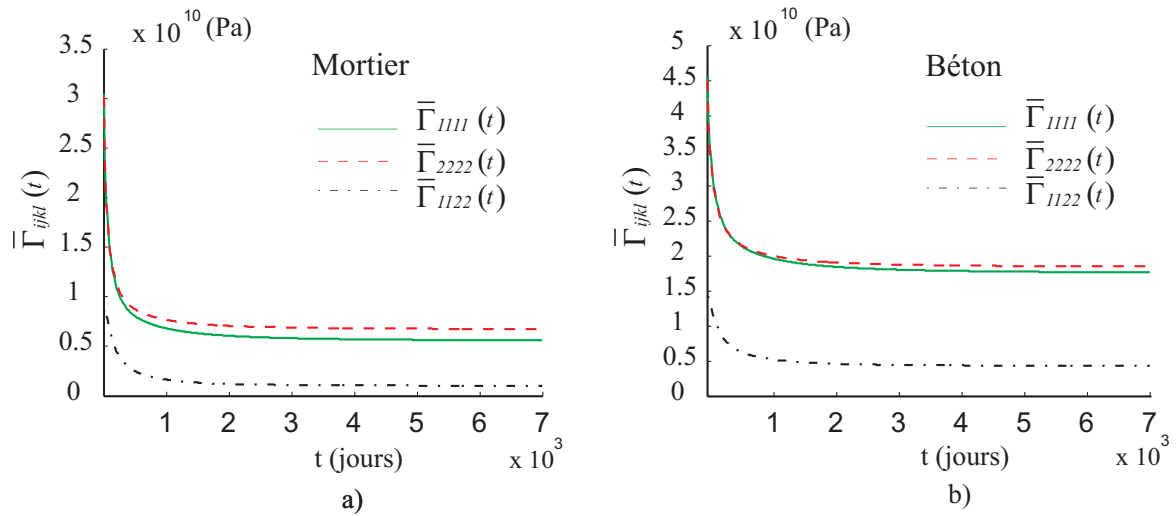


FIGURE IV.18: Quelques composantes du tenseur de relaxation effectif du mortier et du béton.

### 3.2 Échelle 2 : mortier

Dans le cadre de cette thèse, le mortier est représenté par un VER idéalisé tridimensionnel de dimension  $L \times L \times L$  (voir la figure IV.17). Ce VER contient 48 inclusions sphériques positionnées aléatoirement. Les inclusions sont associées aux grains de sable et la matrice est constituée de pâte de ciment décrite dans la section 3.1. Les rayons des inclusions sont générés aléatoirement en utilisant une fonction de probabilité déduite à partir d'une courbe granulométrique (fournie par EDF), avec des rayons minimaux  $r_{min} = 0.0859L$  et maximaux  $r_{max} = 0.3250L$ . La fraction volumique des inclusions est  $f = 0.61412$ . Un maillage conforme contenant 498858 éléments tétraédriques linéaires est utilisé pour la discrétisation du VER. Les paramètres du sable sont présentés dans le tableau IV.4.

Nous déterminons ensuite les valeurs discrètes du tenseur de relaxation effective du mortier en se basant sur les paramètres de la pâte de ciment qui sont identifiés dans la section 3.1. La procédure pour calculer ces valeurs a été présentée dans la section III.4. La figure IV.18.a montre quelques composantes du tenseur de relaxation effectif. Ce résultat correspond à un pas de temps  $\Delta t = 10$  jours.

TABLE IV.4: Paramètres des matériaux.

Paramètre	$E$ (Pa)	$\nu$
Sable	61.9e+9	0.28
Gravier	61.9e+9	0.28

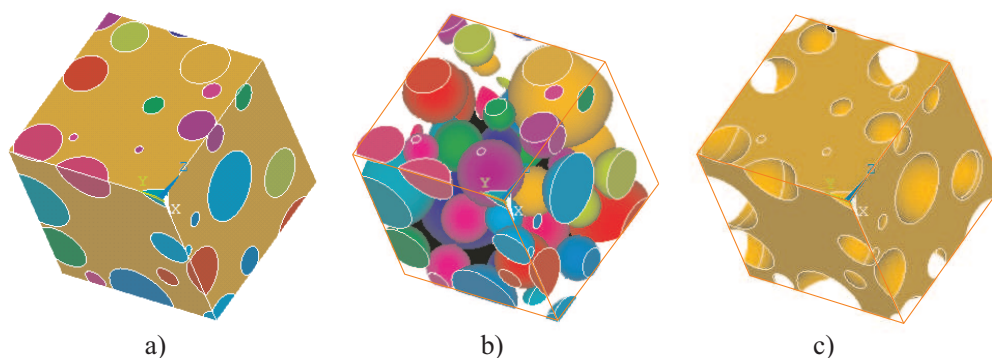


FIGURE IV.19: a) VER du béton contenant 50 inclusions ; b) Inclusions ; c) Matrice.

### 3.3 Échelle 3 : béton

Le VER de béton est modélisé comme un domaine cubique contenant 50 inclusions sphériques, décrit dans la section II.6.4 et illustré dans la figure IV.19. Les inclusions sont les graviers idéalisés et la matrice est constituée de mortier. Les valeurs discrètes du tenseur de relaxation du mortier ont été déterminées dans la section 3.2. Les paramètres des graviers se trouvent dans le tableau IV.4. Le VER est maillé à l'aide de 298253 éléments tétraédriques linéaires.

Pour pouvoir déterminer les valeurs discrètes du tenseur de relaxation effectif du béton, on réalise 6 calculs élémentaires correspondant aux 6 déformations macroscopiques  $\bar{\varepsilon}_{kl}^0$  appliquées au bord du VER du béton. Ces déformations sont définies dans les équations (III.92-III.100). Pour chaque calcul élémentaire, l'algorithme à l'échelle macro décrit dans la section III.4.2 est utilisé pour résoudre le problème local. Les étapes de calcul sont résumées schématiquement ci-dessous :

$i=0$

**TANT QUE**  $i < 6$ ,

1.  $i=i+1$

2. Pour les valeurs  $r$  et  $q$  :

**CAS**

a) 1 :  $r = 1, q = 1$ .

b) 2 :  $r = 2, q = 2$ .

c) 3 :  $r = 3, q = 3$ .

d) 4 :  $r = 1, q = 2$ .



e) 5 :  $r = 2, q = 3$ .

f) 6 :  $r = 3, q = 1$ .

**FIN**

3. Réaliser le calcul élémentaire correspondant à la déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{BT}^0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0(r, q)$  définie par (III.89) :

a) Effectuer les calculs élastiques sur le VER de béton, correspondant à l'instant  $\bar{t} = 0$ , en se basant sur les valeurs  $\chi_0^{ijrq}$  du mortier, représentant le tenseur d'élasticité instantané du mortier.

i. Construire la matrice de raideur  $\bar{\mathbf{K}}_{Ins}$  :

**BOUCLE** sur les éléments du maillage de la structure

A. Calculer la matrice élémentaire  $\bar{\mathbf{K}}_{Ins}^e$ .

B. Assembler  $\bar{\mathbf{K}}^{e,n+1}$ .

**FIN**

ii. Résoudre le système linéaire  $\bar{\mathbf{K}}_{Ins} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{Ins} = \mathbf{0}$  en tenant compte la déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{BT}^0$  appliquée sur le bord du VER.

iii. Calculer et stocker  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ins}$  pour tous les points d'intégration du domaine macroscopique.

iv. Calculer la contrainte moyenne  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^0$  sur le VER.

v. Calculer et stocker le tenseur de relaxation effectif  $\chi_0^{ijrq}$  à l'instant initial en utilisant l'équation (III.91).

b) Effectuer les calculs pour  $\bar{t} > 0$

**TANT QUE**  $\bar{t} < \bar{t}^{max}$

i. Calculer la matrice de raideur et les vecteurs de forces :

**BOUCLE** sur les éléments du maillage de VER

A. Calculer la matrice élémentaire  $\bar{\mathbf{K}}^{e,n+1}$  en utilisant (III.119).

B. Calculer le vecteur élémentaire  $\bar{\mathbf{f}}_v^{e,n+1}$  en utilisant (III.121).

C. Assembler  $\bar{\mathbf{K}}^{e,n+1}$  et  $\bar{\mathbf{f}}_v^{e,n+1}$ .

**FIN**

ii. Résoudre le système d'équations linéaires (III.118) en posant  $\bar{\mathbf{f}}_{ext}^{n+1} = \mathbf{0}$  et en prenant en compte la déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{BT}^0$  appliquée sur le bord du VER.

iii. Calculer et stocker  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1}$  pour tous les points d'intégration du domaine macroscopique.

iv. Calculer la contrainte moyenne  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1}$  sur le VER.

v. Calculer et mémoriser le tenseur de relaxation effectif  $\chi_{n+1}^{ijrq}$  en utilisant l'équation (III.91).

vi. Retourner à l'étape b.

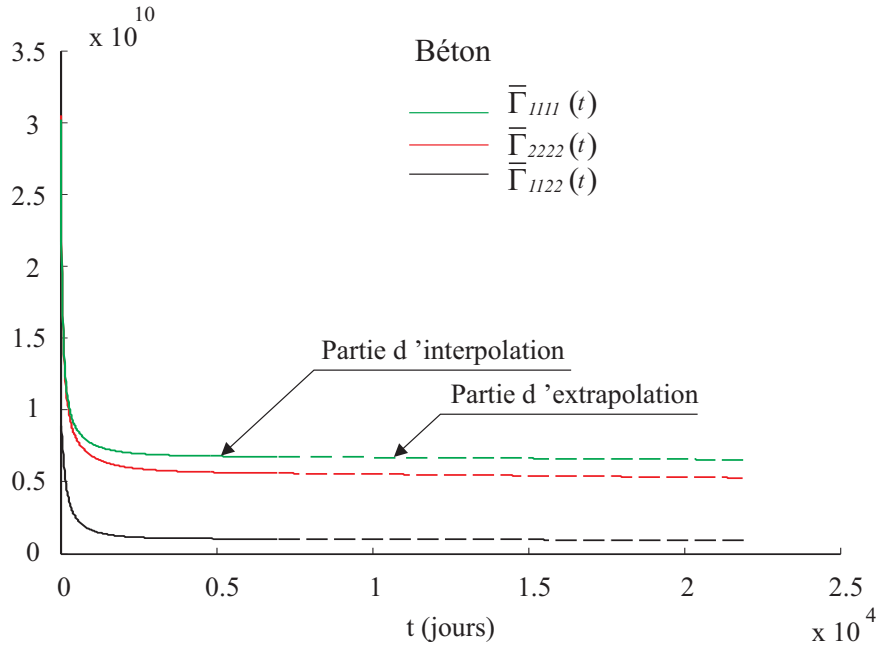


FIGURE IV.20: Interpolation et extrapolation de quelques composants du tenseur de relaxation effectif du béton.

**FIN**

**FIN**

Quelques composants du tenseur de relaxation effectif sont représentées dans la figure IV.18.b. Ce résultat correspondant à un pas du temps  $\bar{\Delta}t = 15$  jours. Afin de réduire le temps de simulation à l'échelle du mortier ainsi que celui de l'échelle du béton, l'algorithme d'extrapolation des courbes décrit dans la section III.3.3 est introduit pour étendre les composants numériques du tenseur de relaxation effectif du béton jusqu'à 60 ans. Lors  $t \rightarrow +\infty$ , un régime stationnaire est établi à toutes les échelles. A la première échelle, les éléments visco-élastique du modèle de Maxwell généralisé sont entièrement relaxées, seule la première branche élastique contribue encore à la fonction de relaxation du modèle. En exploitant cette propriété, nous calculons les valeurs du tenseur de relaxation effectif correspondant à  $t \rightarrow +\infty$  par le calcul élastique numérique multi-échelle (pâte de ciment, mortier, béton) au régime stationnaire. Le résultat de l'extrapolation est présenté dans la figure IV.20. Dans cette figure, les courbes en traits continus correspondent à la partie d'interpolation et celles en traits discontinus représentent la partie d'extrapolation.

### 3.4 Échelle 4 : Structure

Dans cette échelle, l'algorithme à l'échelle macro décrit dans la section III.4.2 est utilisé pour calculer la structure du béton. Le matériau béton est caractérisé par ses valeurs discrètes du tenseur de relaxation effectif calculées dans la section 3.3. Nous effectuons deux calculs correspondant à deux scénarios de chargements décrits dans la section 2.3.4. Les résultats obtenus sont montrés dans la section suivante.

## 4 Résultats

La mise en oeuvre de l'ensemble est résumée dans la figure IV.15. Les résultats d'analyse dépendent des propriétés de la pâte de ciment, qui sont identifiées par le biais de la procédure décrite dans la section 3.1. Un seul modèle de Maxwell généralisé de la pâte de ciment dont les paramètres sont présentés dans le tableau IV.3 est utilisé pour analyser la structure. Concernant le traitement des résultats, nous nous limitons à montrer les résultats obtenus (déplacement, déformation, contrainte,...). Nous ne traitons pas la rupture de la structure. Les calculs dans ces travaux ne tiennent pas compte des couplages thermique, du séchage, ni de l'hydratation. Les résultats sont donc loin d'être comparables avec ceux obtenus par les études précédentes au sein d'EDF R&D. Cependant, ils montrent le potentiel de la méthode multi-échelle proposée dans le chapitre III pour calculer des structures complexes et réalistes. De plus, ils ouvrent de nouvelles perspectives où les couplages thermiques, de séchage, et d'hydratation pourront être pris en compte.

### 4.1 Scénario 1 de chargement

Les résultats exposés ci-dessous correspondent au scénario 1 de chargement (voir IV.14) avec  $\Delta t = 30$  jours. Les figures IV.21 et IV.22 montrent l'iso-valeur des composantes de contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  de la structure d'enceinte à 60 ans. On remarque que le fût est en compression à cause de la tension des câbles. Les zones radier et plancher où on ne dispose pas de câbles de précontrainte se trouvent en faible compression. La contrainte aux sommets du dôme est la plus élevée à cause du passage, au centre du dôme, de plusieurs câbles de précontrainte. Des modèles plus réalistes sont réalisés sur ce point au sein de EDF R&D.

L'évolution de la contrainte au cours du temps est représentée dans la figure IV.23. Après une mise en contrainte, le béton est en compression (valeur de contrainte négative) sous l'effet de la mise en tension des câbles.

Le déplacement vertical du sommet du dôme (le point A) est présenté dans la figure IV.24a. Le déplacement transversal du mi-fût (le point B) est également tracé dans la figure IV.24.b. On illustre sur la figure IV.25 le maillage déformé correspondant à trois pas de temps importants : un instant avant la mise en précontrainte, après la mise en précontrainte, et à 60 ans où l'étude est terminée.

### 4.2 Scénario 2 de chargement

Dans ce cas, afin de réduire le nombre de figures, nous n'exposons que les déplacements des points A et B dans la figure IV.26. Un saut de déplacement se produit après la mise en contrainte et après la mise en pression. Ce dernier correspond au déplacement instantané de la structure. Le déplacement des points A et B pendant la durée de l'accident augmente au cours du temps. Cela est expliqué par le fait que le déplacement visqueux dans les amortisseurs est augmenté lentement sous l'effet de la pression interne.

La figure IV.27 montre quelques composantes du tenseur de contrainte juste après la mise en pression. On observe que le béton est toujours en compression malgré la pression de 0.5 MPa appliquée sur la peau interne de la paroi. Cet état comprimé du béton va empêcher la propagation des fissures dans le béton et assure le rôle de confinement de l'enceinte.

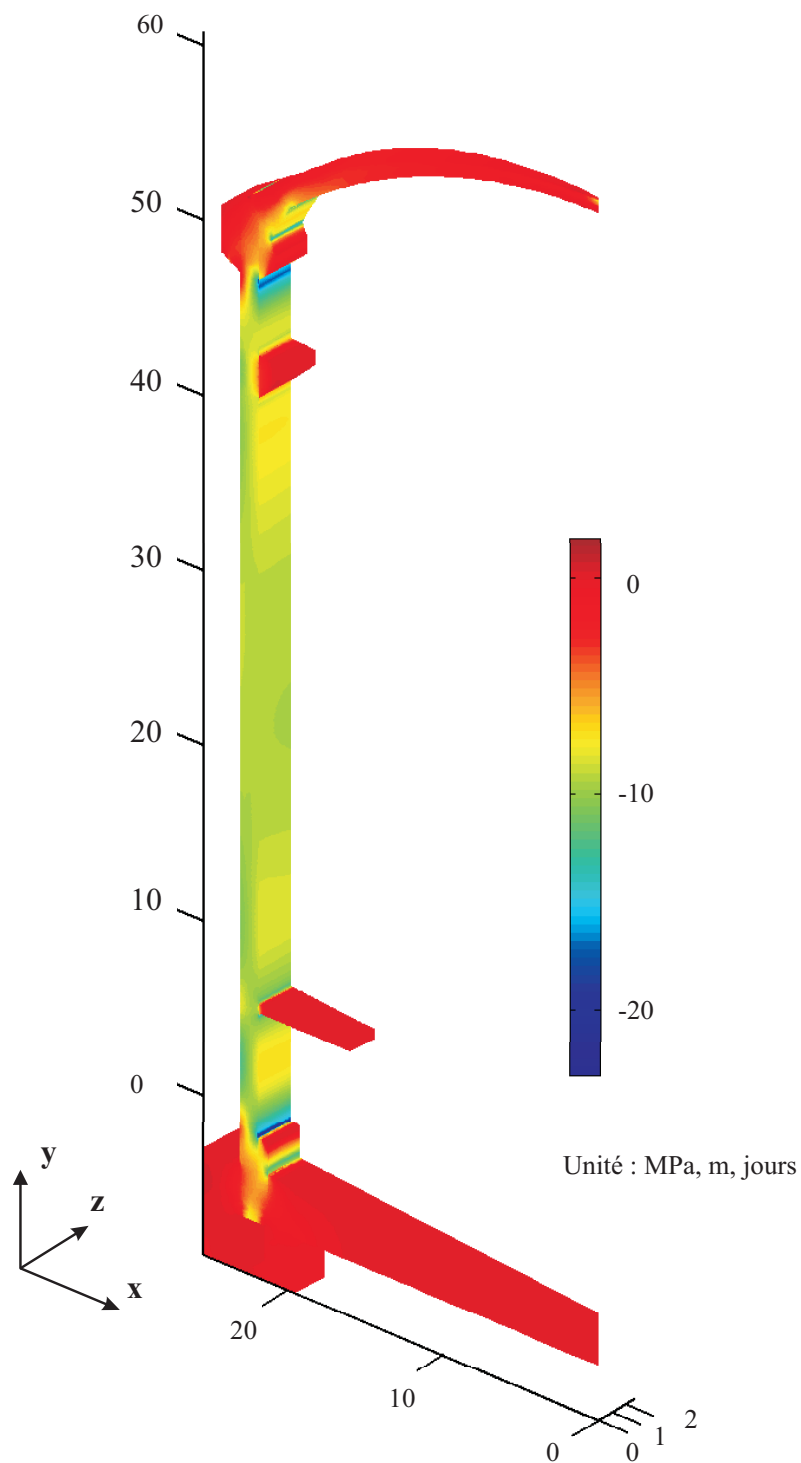


FIGURE IV.21: Scénario 1 : Champs de contrainte  $\sigma_{yy}$  de la structure à 60 ans.

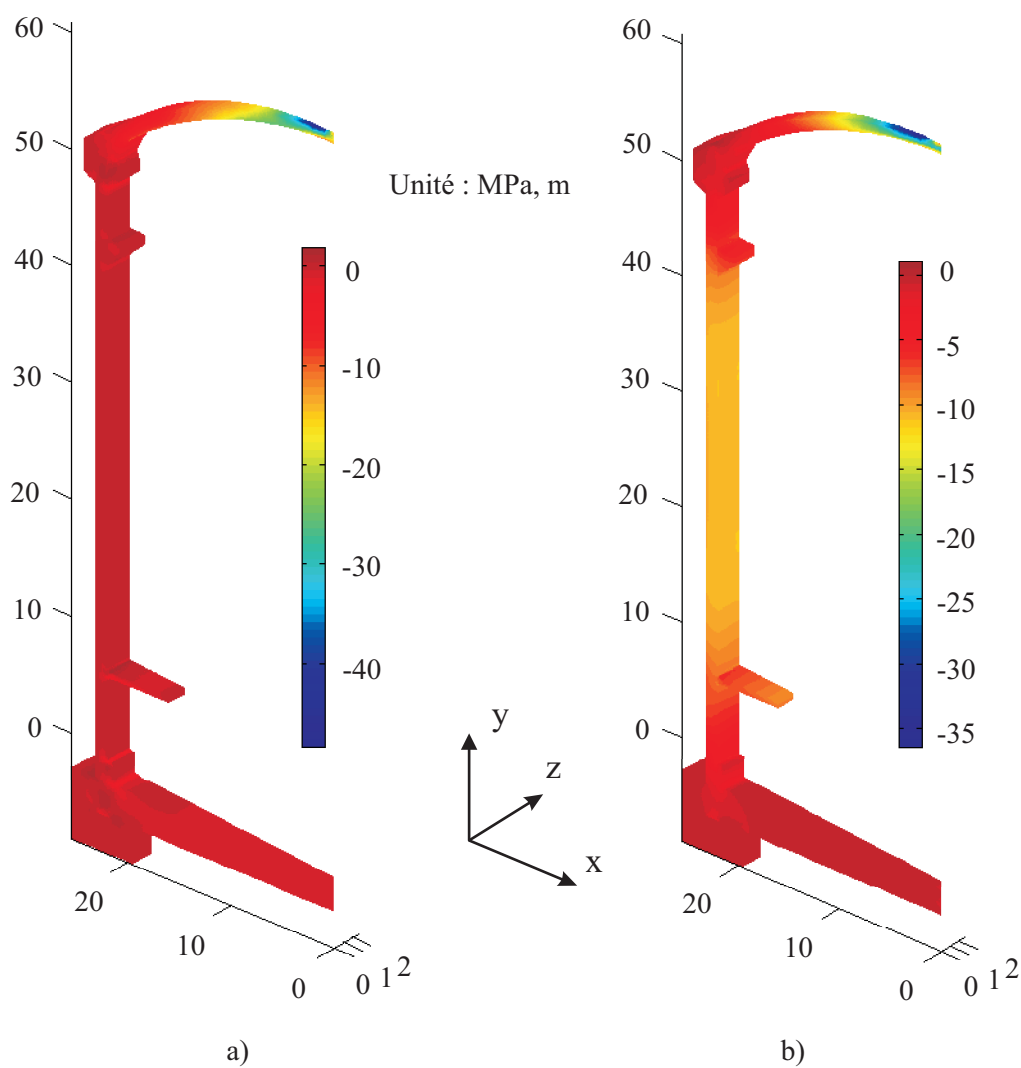


FIGURE IV.22: Scénario 1 : Champs de contraintes a)  $\sigma_{xx}$  b)  $\sigma_{zz}$  de la structure à 60 ans.

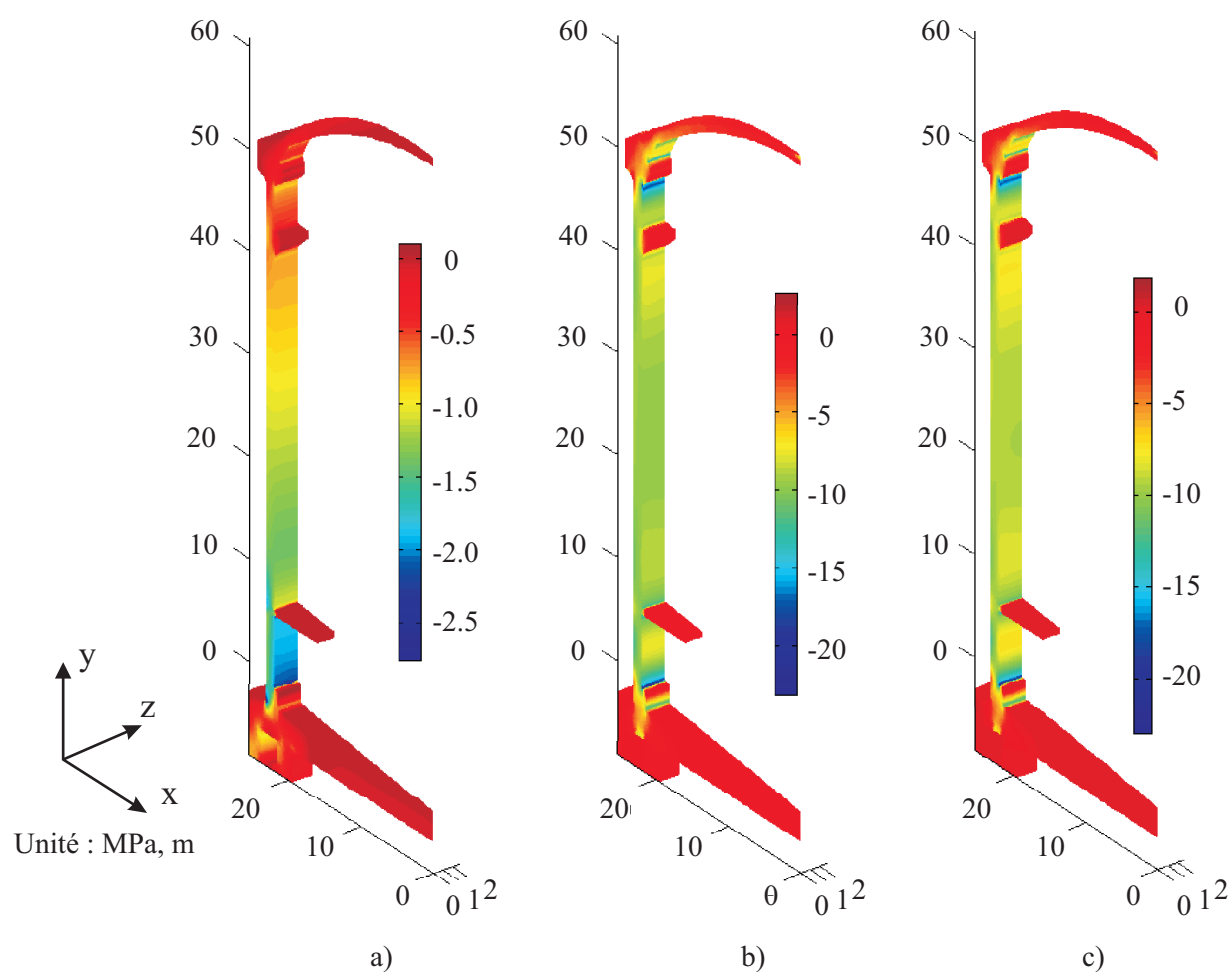


FIGURE IV.23: Scénario 1 : Champs de contrainte  $\sigma_{yy}$  de la structure a) avant mise en précontrainte, b) après mise en précontrainte, c) à 60 ans.

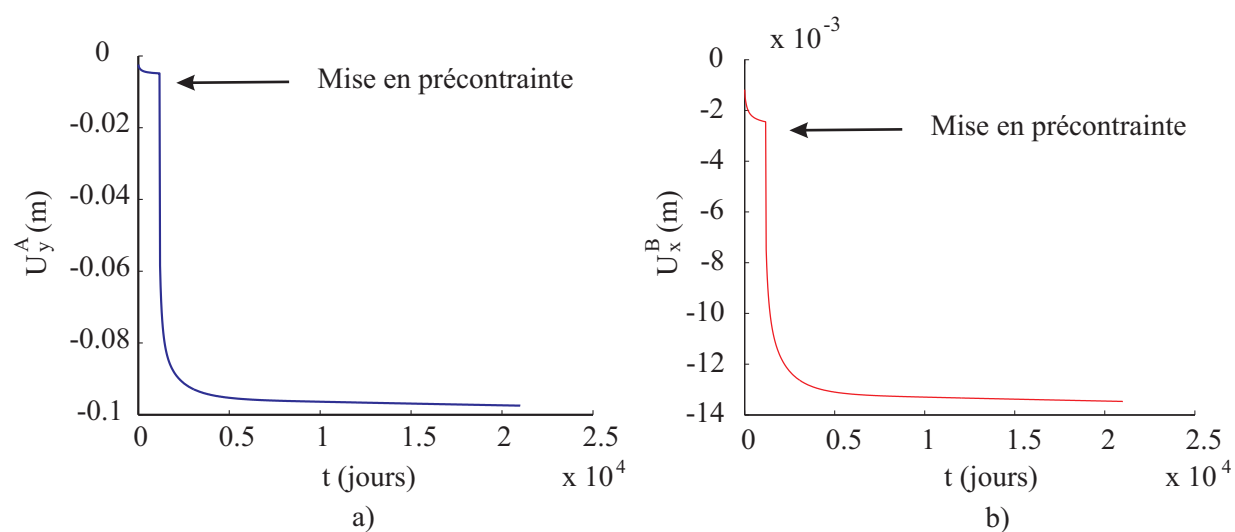


FIGURE IV.24: Scénario 1 : Déplacement des points A et B de la structure.

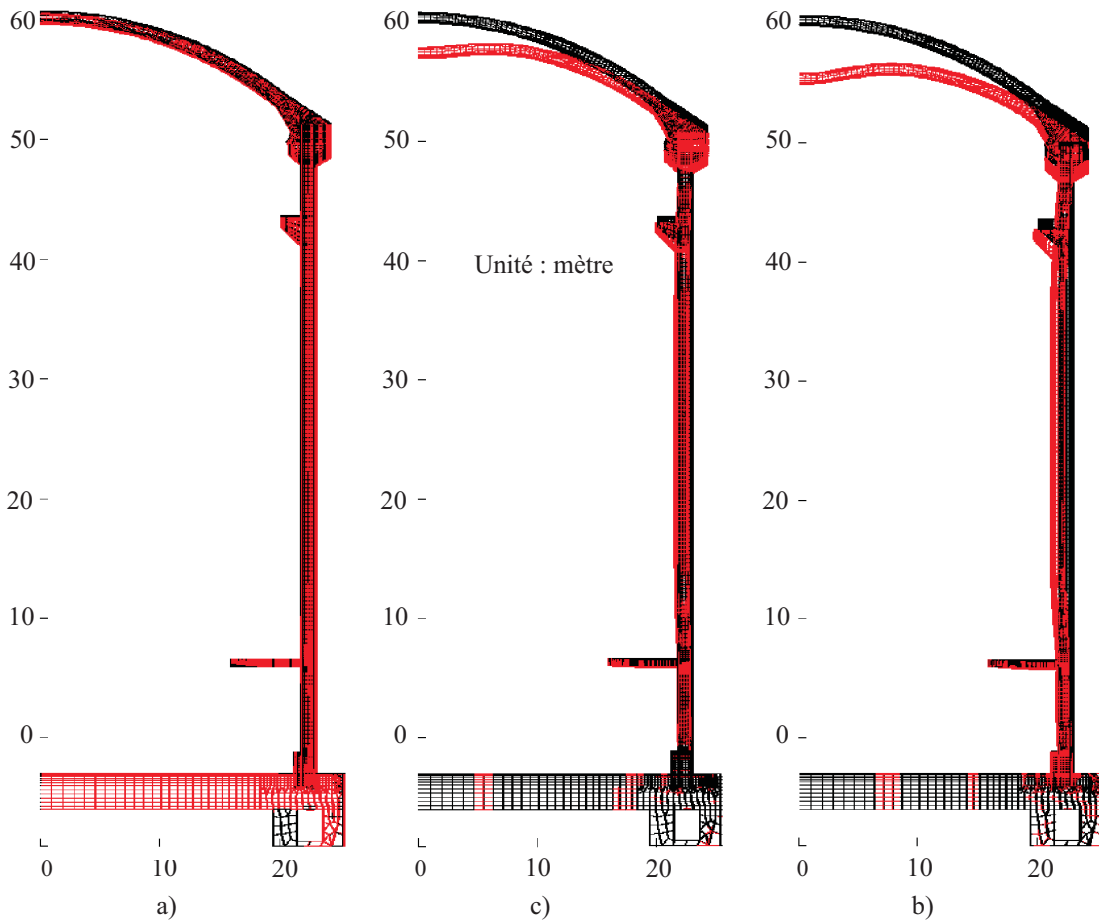


FIGURE IV.25: Scénario 1 : La structure déformée (amplifiée 50 fois) a) juste avant la mise en précontrainte, b) après la mise en précontrainte, c) à 60 ans.

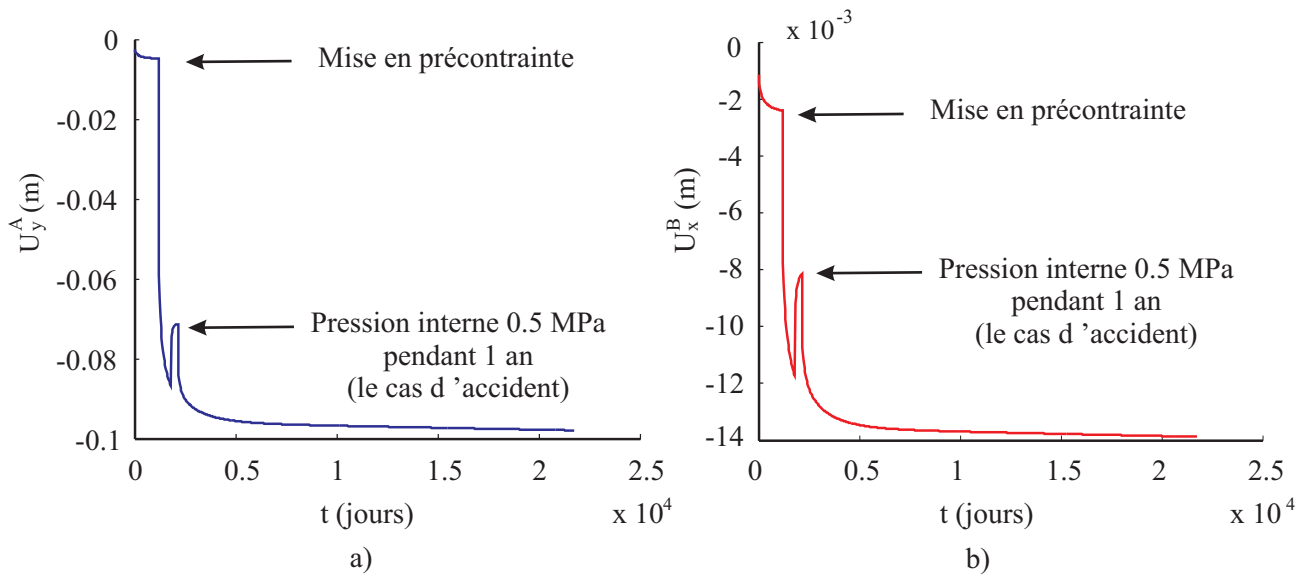


FIGURE IV.26: Scénario 2 : Déplacement du point A et B de la structure

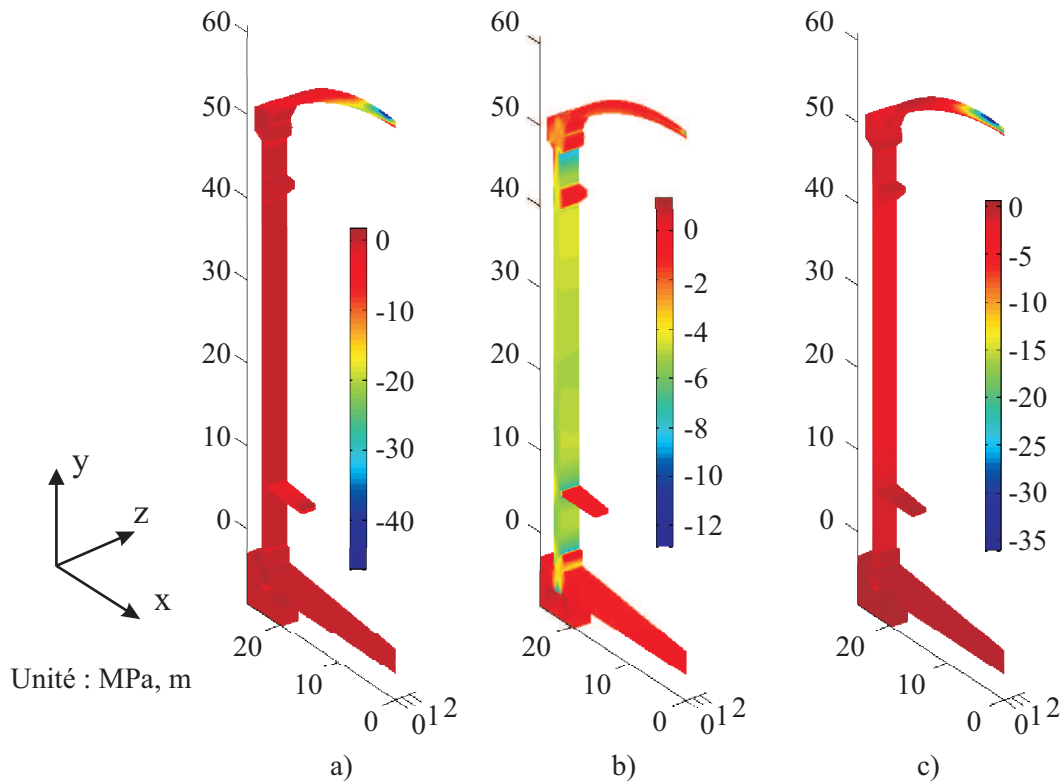


FIGURE IV.27: Scénario 2 : contrainte  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  après la mise en pression interne.

### 4.3 Temps de calcul

Le tableau IV.5 indique les temps de calcul pour les trois échelles. L'échelle du mortier consomme le plus de temps car les discrétisations spatiales et temporelles sont les plus fines. Nous observons également que la part la plus importante des temps de calcul est associée à la résolution du système d'équations linéaires  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ . Le temps total de calcul sur les trois échelles est de  $T_{total} = 100 + 36 + 21 = 157$ (heures) = 6.54 (jours).

TABLE IV.5: Temps de calcul de l'enceinte de réacteur nucléaire.

	Mortier	Béton	Enceinte
Pas de temps (jours)	10	15	30
Discrétisation spatiale (éléments)	498858	298253	14217
Temps de calcul (heures)	100	36	21



## 5 Conclusions et perspectives

### 5.1 Conclusions

Les exemples précédemment présentés au chapitre III se sont limités à une ou deux échelles. Nous avons montré, dans ce chapitre, l'application de la méthode proposée dans le chapitre III pour un calcul de structure comprenant 4 niveaux d'échelles. Par rapport aux exemples précédents, les microstructures et la structure de cet exemple sont plus complexes et plus réalistes. Les calculs débutent par l'échelle de la pâte de ciment où le matériau constitué est supposé homogène viscoélastique et caractérisé par le modèle de Maxwell généralisé. Les paramètres du modèle sont identifiés à partir des données expérimentales par moindres carrés. Les valeurs numériques du tenseur de relaxation effectif du mortier et du béton sont ensuite calculées à l'échelle du mortier et du béton, respectivement. Le calcul en fluage de la structure complexe renforcée par le réseau des câbles de précontrainte est finalement effectué en utilisant les valeurs discrètes du tenseur de relaxation effectif du béton. Cet exemple a permis de mettre en évidence la robustesse et l'efficacité de la méthode multi-échelle décrite dans le chapitre III. Il est clair que plusieurs améliorations sont nécessaires avant d'en faire un outil prédictif.

### 5.2 Perspectives

Les résultats des calculs de structure obtenus ici mériteraient d'être davantage exploités et interprétés. Par exemple, les évolutions de déformations locales en certains points pourront être comparées à celles obtenues par les études EDF précédentes et à des mesures sur place sur structures réelles.

Le problème de couplage avec les champs thermique, de séchage, d'hydratation devra constituer une étude séparée dans une suite éventuelle de ce projet.

Les VER du béton et du mortier restent encore peu réalistes. Les calculs associés à des VER plus grands, ayant plus d'hétérogénéités, devront être réalisés pour obtenir des résultats plus réalistes. Les VER, alors plus complexes, ne pourront probablement plus être homogénéisés par éléments finis classiques. Il faudra alors mettre en œuvre la méthode  $\mu$ -XFEM développée au chapitre II et adaptée aux comportements viscoélastiques avec l'algorithme à l'échelle micro exposé au début du chapitre III.

# Conclusions et perspectives

Ayant pour objectif de contribuer à la résolution de certains problèmes de sûreté et de durabilité des ouvrages en béton précontraint que possède ou construira EDF, ce travail de thèse a permis de développer des méthodes numériques multi échelle pour le calcul de structures constituées de matériaux fortement hétérogènes élastiques et viscoélastiques. Ce chapitre donne les principales conclusions et perspectives pour chacun des thèmes abordés dans cette thèse : homogénéisation élastique des microstructures complexes par  $\mu$ -XFEM, homogénéisation multi-échelle des matériaux composites viscoélastiques linéaires, application industrielle allant de la pâte de ciment à l'enceinte de confinement.

Dans un premier temps, la méthode XFEM/Level-set est apparue comme un outil numérique approprié et puissant pour modéliser et homogénéiser ces matériaux hétérogènes. Cependant, un examen approfondi de cette méthode a mis en évidence qu'elle pose un certain nombre de problèmes numériques quand une microstructure avec des inclusions très proches les unes des autres est en jeu. Plus précisément, lorsque la distance entre deux inclusions dans une matrice est très petite par rapport à la taille des éléments, trois artefacts numériques se présentent : (i) une percolation artificielle entre les inclusions ; (ii) une distorsion amplifiée des interfaces ; (iii) un manque d'enrichissement suffisant. Les sources de ces artefacts ont été ensuite identifiées : les deux premiers artefacts sont induits par le fait qu'une seule fonction level-set est habituellement utilisée dans la méthode XFEM/Level-set, tandis que le troisième artefact est dû à l'approximation de XFEM qui n'est pas suffisamment riche pour décrire des champs linéaires lorsque deux éléments voisins sont chacun traversés par une interface. Nous avons illustré et analysé ces artefacts à travers des exemples géométriques et montré qu'ils induisent des erreurs numériques qui ralentissent considérablement la vitesse de convergence par rapport à la finesse de discrétisation. Ayant identifié les sources des artefacts, nous avons ensuite proposé une nouvelle version de la méthode XFEM/Level-set permettant de les éviter tous. Dans la nouvelle méthode, chaque inclusion est associée à une fonction level-set et un enrichissement augmenté est introduit. Afin d'alléger le stockage des fonctions level-set, une description locale de celles-ci a été adoptée. De plus, une solution simple pour effectuer l'intégration numérique dans les éléments coupés par plusieurs interfaces a été proposée. La nouvelle méthode a été appliquée à la détermination des propriétés effectives de matériaux hétérogènes complexes avec de fortes fractions volumiques d'inclusions. Les résultats montrent que la convergence par rapport au nombre de ddl est améliorée de façon très significative. La précision et le gain de la nouvelle méthode proposée ont été illustrés au travers de différentes applications. En vue de pouvoir tester le gain industriel de la méthode proposée, nous l'avons appliquée pour déterminer les propriétés effectives d'une morphologie complexe de béton "B11" idéalisé contenant 2024 inclusions sphériques. Une stratégie d'extrapolation linéaire est utilisée pour obtenir les résultats correspondants à  $h = 0$  où  $h$  est la taille de maillage. En comparant avec les résultats des autres méthodes

numériques, un accord raisonnable entre eux est observé dans tous les cas de fort et faible contraste de propriétés des phases (voir les tableaux II.3, II.4 et II.5)

Cependant, pour les morphologies plus réalistes donc plus complexes (comportant plusieurs milliers d'inclusions),  $\mu$ -XFEM demande des maillages fins et exige beaucoup de mémoire pour obtenir un bon résultat extrapolé. Dans ce cas, en utilisant un ordinateur de 32 Gb de mémoire vive avec le solveur direct MUMPS, elle n'arrive pas à reproduire la morphologie et plusieurs inclusions ne sont pas détectées. On s'attend à ce que le passage à un solveur itératif permette de gagner à la fois en temps de calcul et en mémoire consommée [112].

Dans un deuxième temps, nous avons élaboré une méthode numérique multi échelle permettant le calcul des structures constituées de matériaux viscoélastiques linéaires hétérogènes. Cette méthode traite un tel matériau à la fois à l'échelle micro et à l'échelle macro. A l'échelle micro, des calculs préliminaires par éléments finis sont réalisés sur un VER associé à la microstructure du matériau hétérogène constituant une structure. Les composantes du tenseur de relaxation effectif du matériau sont échantillonnées pour différents instants dans le domaine temporel et leurs valeurs discrètes sont stockées pour servir aux calculs à l'échelle macro. A l'échelle macro associée, une représentation continue du tenseur de relaxation effectif est construite à partir de ses valeurs discrètes préalablement obtenues et à l'aide des fonctions d'interpolation et d'extrapolation appropriées. La loi de comportement effective du matériau est enfin exprimée sous forme d'un produit de convolution, faisant intervenir l'expression continue du tenseur de relaxation. Un algorithme explicite est élaboré pour évaluer numériquement le produit de convolution et pour l'intégrer à la procédure des éléments finis utilisée directement pour la structure. Notre méthode offre multi échelle numériquement les avantages suivants : (i) elle opère directement dans le domaine temporel et évite tous les problèmes liés à l'inversion de la transformée de Laplace ; (ii) les calculs aux deux échelles sont réalisés séparément. Une fois que le tenseur de relaxation effectif a été calculé et stocké, le comportement des structures peut être réalisé sans avoir besoin de résoudre de nouveaux problèmes à l'échelle micro ; (iii) la mise en œuvre de cette méthode est simple et facile à intégrer aux codes éléments finis existants ; (iv) la consommation de mémoire est très modérée. La robustesse, l'efficacité et la précision de notre méthode a été démontrée à travers plusieurs exemples numériques de calcul des structures.

Nous soulignons que les valeurs discrètes de tenseur de relaxation peuvent être calculées par les autres méthodes numériques telles que la méthode XFEM,  $\mu$ -XFEM, Transformation de Fourier, etc. Malgré la méthode est plus avantageuse par rapport aux méthodes proposées précédemment, son algorithme demande de stocker l'histoire de déformation pour tous les points d'intégration de la structure. Ce stockage peut être lourd lors que le maillage est fin et le pas de temps est petit. Ce dernier point peut être résolu si un algorithme récursif est trouvé dans le futur travail. De plus, ce travail est limitée au cadre des matériaux viscoélastiques linéaires.

Enfin, dans un troisième temps, nous avons appliqué la méthode numérique multi-échelle à l'enceinte de confinement d'un réacteur nucléaire. Cette application comporte des calculs à quatre échelles associées à la pâte de ciment, au mortier, au béton et à la structure qu'est l'enceinte de confinement. Les microstructures complexes du mortier et du béton sont représentées par des VER. La pâte de ciment a été supposée homogène viscoélastique et

---

caractérisée par un modèle de Maxwell généralisé, dont les paramètres du modèle ont été identifiés à partir de données expérimentales disponibles. Les valeurs numériques du tenseur de relaxation effectif du mortier et du béton ont été ensuite calculées et stockées à l'échelle du mortier et à celle du béton. Le comportement différé de l'enceinte qui est une structure en béton et renforcée par un réseau de câbles de précontrainte a finalement été calculé par la méthode des éléments finis dans laquelle un traitement spécial a été effectué pour tenir compte de la présence des câbles de précontrainte. Les résultats ont confirmé la robustesse et l'efficacité de la méthode numérique multi échelle proposée.

En vue de pouvoir obtenir des meilleurs résultats, la méthode numérique efficace telle que  $\mu$ -XFEM devrait être implantée en viscoélasticité pour prendre en compte des morphologies complexes aux échelles du béton et du mortier. Les calculs associés à des calculs plus grands devront être réalisés. Cependant le temps de calcul peut s'avérer être très long pour des microstructures complexes telle que "béton B11".

A terme, l'objectif est de réaliser des calculs de structure multi-échelles en fluage, utilisant des comportements mesurés aux échelles les plus basses (pâte de ciment) et des modèles de microstructure réalistes. Cela ne pourra se faire qu'en exploitant chacune des parties fondamentales de cette thèse :

- $\mu$ -XFEM pour l'homogénéisation viscoélastique sur microstructures représentatives des matériaux réels, donc nécessairement complexes,
- l'approche de calcul viscoélastique pour réaliser efficacement les passages d'échelles successifs de la plus basse à celle de la structure.



# Annexe : Intégration numérique pour éléments bi et tridimensionnels

Cette annexe présente un rappel des schémas d'intégration de Gauss utilisés pour les différentes discrétisations par les méthodes des éléments finis et XFEM. Nous présentons également le cas des éléments prismatiques, que nous avons utilisés pour le maillage tridimensionnel associé à l'enceinte du réacteur dans le chapitre IV.

## 1 Éléments tridimensionnels hexaédriques et prismatiques

Le volume de béton est discrétisé par les éléments quadratiques de types hexaèdres et prismatiques (figure IV.28). La base polynomiale des éléments hexaèdres est choisie de la manière suivante :

$$\langle P_{Hex} \rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccccccc} 1 & \xi & \eta & \zeta; & \xi^2 & \xi\eta & \xi^2 & \eta\zeta & \zeta^2 & \zeta\xi; \\ \xi^2\eta & \eta^2\xi & \eta^2\zeta & \eta\zeta^2 & \zeta^2\xi & \zeta\xi^2 & \xi\eta\zeta; & \xi^2\eta\zeta & \xi\eta^2\zeta & \xi\eta\zeta^2 \end{array} \right\rangle. \quad (IV.14)$$

Plusieurs choix sont possibles pour la base polynomiale des éléments prismatiques [28]. Nous proposons ici une base polynomiale qui assure la continuité des déplacements lorsque deux élément hexaèdre et prismatique sont raccordés (voir figure IV.29) :

$$\langle P_{Pri} \rangle = \left\langle \begin{array}{cccccccccccc} 1 & \xi & \eta & \zeta; & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \eta\zeta & \zeta^2 & \zeta\xi; & \xi^2\zeta & \zeta^2\xi & \eta^2\zeta & \eta\zeta^2 & \xi\eta\zeta \end{array} \right\rangle. \quad (IV.15)$$

Les fonctions de forme  $N_i(\mathbf{x})$  sont obtenues en vérifiant la condition :

$$N_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{avec } j = 1, \dots, n, \quad (IV.16)$$

où  $n$  est nombre des nœuds d'élément et  $\mathbf{x}_j$  est le vecteur des coordonnées du nœud  $j$  d'élément.

## 2 Intégration numérique en deux dimensions

### 2.1 Élément de référence triangulaire

L'intégrale d'une fonction  $f(\xi, \eta)$  dans un élément de référence triangulaire (voir la figure IV.30.b) est exprimée par la formule approximative suivante :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^r w_i f(\xi_i, \eta_i). \quad (IV.17)$$

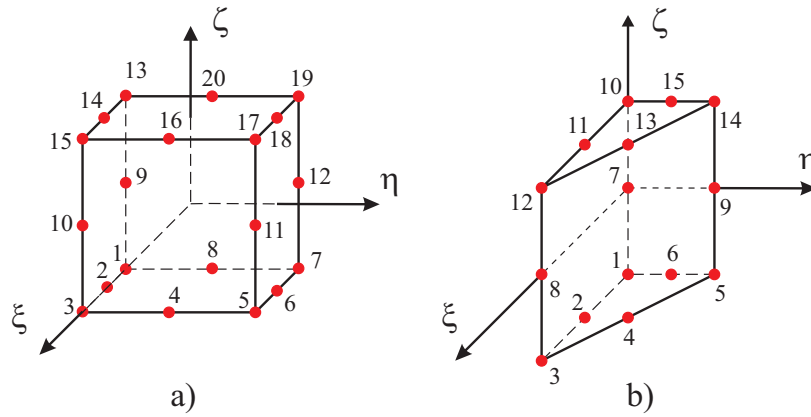


FIGURE IV.28: a) Élément quadratique de type hexaèdre ; b) Élément quadratique de type prismatique.

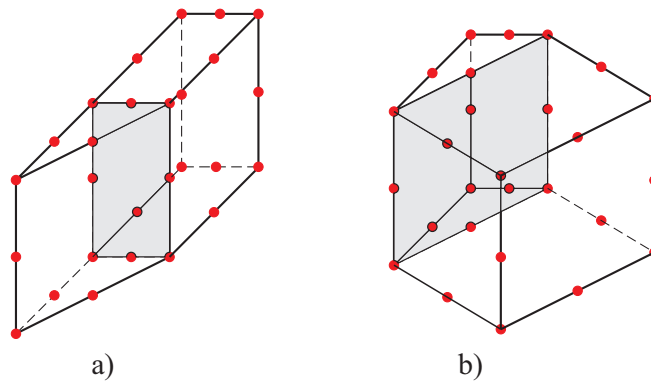


FIGURE IV.29: Raccordement entre deux types d'éléments.

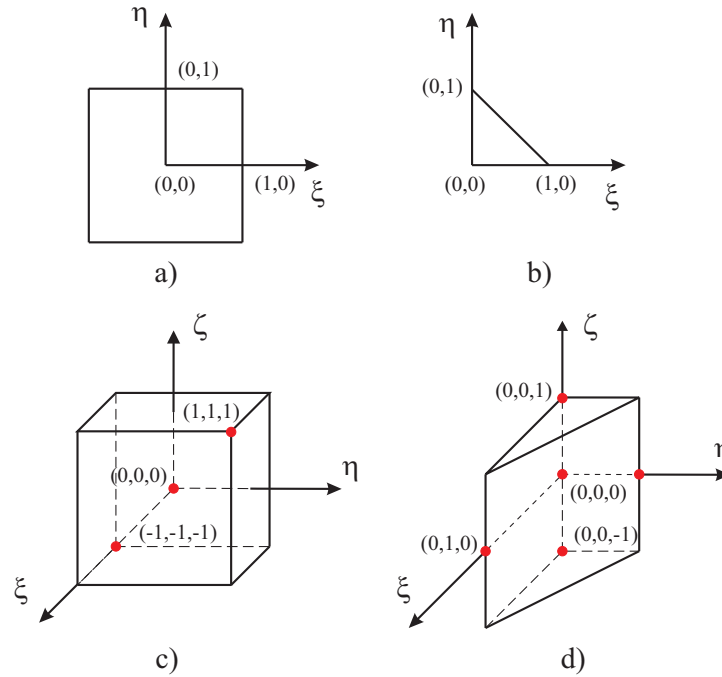


FIGURE IV.30: Les éléments de référence.

Dans cette formule,  $(\xi_i, \eta_i)$  sont les coordonnées des points de Gauss et  $w_i$  sont les poids de Gauss associés au point de Gauss  $i$ ,  $r$  est nombre des points d'intégration considérés. La fonction  $f(\xi, \eta)$  peut être intégrée exactement lors qu'elle les produits  $\xi^k \cdot \eta^l$  sont inclus dans sa base, et pour  $k + l \leq m$ . Le tableau IV.6 donne les valeurs numériques de  $(\xi_i, \eta_i)$  et  $w_i$  correspondant à quelques valeurs de  $m$ .

## 2.2 Élément de référence carré

Nous présentons ici deux méthodes pour effectuer l'intégration numérique sur un élément de référence carré (voir la figure IV.30.a). La première méthode consiste à utiliser dans chaque direction  $\xi$  et  $\eta$  une intégration numérique à une dimension. Si nous utilisons  $r_1$  points de Gauss dans le sens  $\xi$  et  $r_2$  points de Gauss dans le sens  $\eta$ , la méthode de Gauss intègre exactement les produits  $\xi^k \cdot \eta^l$  à condition que  $k \leq 2r_1 - 1$  et  $l \leq 2r_2 - 1$ . L'approximation de la méthode est mathématiquement présentée ci-dessous :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{IV.18})$$

les coordonnées de  $\xi_i$  et  $\eta_j$ , ainsi que les poids de Gauss  $w_i$  et  $w_j$  peuvent être trouvés dans le tableau IV.10.

La deuxième méthode est la technique utilisée dans la section 2.1. La formule approxima-



tive est donnée par :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^r w_i f(\xi_i, \eta_i). \quad (\text{IV.19})$$

La formule (IV.19) intègre exactement des polynômes d'ordre  $m$  (incluant des monômes  $\xi^k \eta^l$  tels que  $k + l \leq m$ ). Les points de Gauss et les poids de Gauss sont donnés dans le tableau 2.2.

### 3 Intégration numérique en trois dimensions

#### 3.1 Élément de référence hexaédrique

La méthode basée sur les "produits" pour l'élément de référence hexaèdre (voir la figure IV.30.c) s'écrit :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3} w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k). \quad (\text{IV.20})$$

La méthode à  $r_1 \times r_2 \times r_3$  points intègre exactement les monômes  $\xi^p \eta^q \zeta^k$  tels que  $p \leq 2r_1 - 1$ ,  $q \leq 2r_2 - 1$ ,  $k \leq 2r_3 - 1$ .

La méthode "directe" est exprimée par :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^r w_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i). \quad (\text{IV.21})$$

Cette approche est exacte lors que la fonction  $f(\xi, \eta, \zeta)$  est un polynôme contenant les monômes  $\xi^p \eta^q \zeta^k$  tels que  $p + q + k \leq m$ . Les positions des points et les poids de Gauss sont donnés dans le tableau IV.8

#### 3.2 Élément de référence tétraédrique

L'intégration numérique sur un élément de référence tétraédrique (voir la figure IV.30.d) est donnée par

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^r w_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i). \quad (\text{IV.22})$$

où les positions des points et les poids de Gauss peuvent être trouvés dans le tableau IV.9. La formule (IV.22) intègre exactement des polynômes d'ordre  $m$  (incluant des monômes  $\xi^k \eta^l \zeta^h$  tels que  $k + l + h \leq m$ ).

### 3.3 Élément de référence prismatique

L'intégration d'une fonction  $f(\xi, \eta, \zeta)$  sur un élément de référence prismatique consiste à utiliser dans la direction  $\xi$  et  $\eta$  une intégration numérique à deux dimensions associée à un élément de référence triangulaire et dans la direction  $\zeta$  une intégration numérique à une dimension. Cette approximation est donnée par [135] :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_i w_j f(\xi_i, \eta_i, \zeta_j), \quad (\text{IV.23})$$

où  $r_1$ ,  $r_2$  sont les nombres de points de Gauss sur l'éléments triangulaire et sur élément unidimensionnel, respectivement. L'approximation (IV.23) est exacte si la fonction  $f(\xi, \eta, \zeta)$  contient les produits  $\xi^p \cdot \eta^q \cdot \zeta^k$  avec  $p + q \leq m$  et  $k \leq 2r_2 - 1$ . Les coordonnées  $(\xi_i, \eta_i)$ , les poids  $w_i$  et les valeurs de  $m$  sont donnés dans le tableau IV.6 ;  $\zeta_j$  et  $w_j$  sont fournis dans le tableau IV.10.

TABLE IV.6: Intégration de Gauss sur un élément de référence triangulaire.

$m$	$r$	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$	paramètres
1	1	1/3	1/3	1/2	
2	3	1/2 0 1/2	1/2 1/2 0	1/6	
3	4	1/3 1/5 3/5 1/5	1/3 1/5 1/5 3/5	-27/96 25/96 25/96 25/96	
4	6	$a$ $1 - 2a$ $a$ $b$ $1 - 2b$ $b$	$a$ $a$ $1 - 2a$ $b$ $b$ $1 - 2b$	$c$ $c$ $c$ $d$ $d$ $d$	$a = 0.44594849$ $b = 0.09157621$ $c = 0.11169079$ $d = 0.05497587$
5	7	1/3 $a$ $1 - 2a$ $a$ $b$ $1 - 2b$ $b$	1/3 $a$ $a$ $1 - 2a$ $b$ $b$ $1 - 2b$	9/80 $A$ $A$ $A$ $B$ $B$ $B$	$a = \frac{6+\sqrt{15}}{21}$ $b = 4/7 - a$ $A = \frac{155+\sqrt{15}}{2400}$ $B = \frac{31}{240} - A$
6	12	$a$ $1 - 2a$ $a$ $b$ $1 - 2b$ $b$ $c$ $d$ $1 - c - d$ $1 - c - d$ $c$ $d$	$a$ $a$ $1 - 2a$ $b$ $b$ $1 - 2b$ $d$ $c$ $c$ $d$ $1 - c - d$ $1 - c - d$	$e$ $e$ $e$ $f$ $f$ $f$ $g$ $g$ $g$ $g$ $g$ $g$	$a = 0.063089014$ $b = 0.249286745$ $c = 0.310352451$ $d = 0.053145049$ $e = 0.025422453$ $f = 0.058393137$ $g = 0.041425537$

TABLE IV.7: Intégration de Gauss sur un élément de référence carré.

$m$	$r$	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$
2	3	$\sqrt{2/3}$	0	4/3
		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	
3	4	$\pm \sqrt{1/3}$	$\pm \sqrt{1/3}$	1
		$\mp \sqrt{1/3}$	$\pm \sqrt{1/3}$	
5	7	0	0	8/7
		0	$\pm \sqrt{14/15}$	20/63
		$\pm \sqrt{3/5}$	$\pm \sqrt{3/5}$	20/63

TABLE IV.8: Intégration de Gauss sur un élément de référence hexaédrique.

$m$	$r$	$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$	$w_i$	
2	4	0	$\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	
		$\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		
$m$	$r$	$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$	$w_i$	
3	6	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	4/3	
		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		
		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		
		$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		
5	14	$\pm a$	0	0	320/361	$a = \sqrt{\frac{19}{30}}$ $b = \sqrt{\frac{19}{33}}$
		0	$\pm a$	0	320/361	
		0	0	$\pm a$	320/361	
		$\pm b$	$\pm b$	$\pm b$	121/361	
7	34	$\pm a$	0	0	$d_1$	$a = 0.9258200997$ $b = 0.3308149636$ $c = 0.7341125287$ $d_1 = 0.2957475994$ $d_2 = 0.0941015089$ $d_3 = 0.4123338622$ $d_4 = 0.2247031747$
		0	$\pm a$	0	$d_1$	
		0	0	$\pm a$	$d_1$	
		$\pm a$	$\pm a$	0	$d_2$	
		0	$\pm a$	$\pm a$	$d_2$	
		$\pm a$	0	$\pm a$	$d_2$	
		$\pm b$	$\pm b$	$\pm b$	$d_3$	
		$\pm c$	$\pm c$	$\pm c$	$d_4$	

TABLE IV.9: Intégration de Gauss sur un élément de référence carré.

$m$	$r$	$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$	$w_i$	paramètres
1	1	1/4	1/4	1/4	1/6	
2	4	$a$ $a$ $a$ $b$	$a$ $a$ $b$ $a$	$a$ $b$ $a$ $a$	1/24	$a = \frac{5-\sqrt{5}}{20}$ $b = \frac{5+3\sqrt{5}}{20}$
3	5	$a$ $b$ $b$ $b$ $c$	$a$ $b$ $b$ $c$ $b$	$a$ $b$ $c$ $b$ $b$	$d$ $e$ $e$ $e$ $e$	$a = 1/4$ $b = 1/6$ $c = 1/2$ $d = -2/15$ $e = 3/40$
5	15	$a$ $b_i$ $b_i$ $b_i$ $c_i$ $d$ $d$ $e$ $d$ $e$ $e$	$a$ $b_i$ $b_i$ $c_i$ $b_i$ $d$ $e$ $d$ $e$ $d$ $e$	$a$ $b_i$ $c_i$ $b_i$ $b_i$ $e$ $d$ $d$ $e$ $e$ $d$	8/405 $w_i$ $w_i$ $w_i$ $w_i$ 5/567 5/567 5/567 5/567 5/567 $d$	$i = 1, 2$ $a = 1/4$ $b_1 = \frac{7+\sqrt{15}}{34}$ $b_2 = \frac{7-\sqrt{15}}{34}$ $c_1 = \frac{13-3\sqrt{15}}{34}$ $c_2 = \frac{13+3\sqrt{15}}{34}$ $d = \frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $e = \frac{5+\sqrt{15}}{20}$ $w_1 = \frac{2665-14\sqrt{15}}{226800}$ $w_2 = \frac{2665+14\sqrt{15}}{226800}$

TABLE IV.10: Intégration de Gauss sur un élément unidimensionnel.

$r$	$\xi_i$	$w_i$
1	0	2
2	$\pm\sqrt{1/3}$	1
3	0 $\pm\sqrt{3/5}$	8/9 5/9
4	$\pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$ $\pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$
5	0 $\pm\frac{1}{3}\sqrt{5 - 4\sqrt{5/14}}$ $\pm\frac{1}{3}\sqrt{5 + 4\sqrt{5/14}}$	128/225 $\frac{161}{450} + \frac{13}{180\sqrt{5/14}}$ $\frac{161}{450} - \frac{13}{180\sqrt{5/14}}$
6	$\pm 0.2386191860$ $\pm 0.6612093864$ $\pm 0.9324695142$	0.4679139345 0.3607615730 0.1713244923
7	0 $\pm 0.4058451513$ $\pm 0.7415311855$ $\pm 0.9491079123$	0.4179591836 0.3818300500 0.2797053914 0.1294849661



# Bibliographie

- [1] J. Aboudi. A continuum theory for fiber-reinforced elastoviscoplastic composites. *Int. J. Eng. Sci.*, 20 :605–621, 1982.
- [2] J. Aboudi. Constitutive equations for elastoplastic composites with imperfect bonding. *Int. J. Plast.*, 4 :103–125, 1988.
- [3] P. Acker. *Comportement mécanique des bétons : Apports de l'approche physico-chimique*. PhD thesis, l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1988.
- [4] F. Barbea, R. Queyc, A. Musienkod, and G. Cailletaud. Three-dimensional characterization of strain localization bands in high-resolution elastoplastic polycrystals. *Mech. Res. Commun.*, 36(7) :762–768, 2009.
- [5] B. Bary, M. Ben Haha, E. Adam, and P. Montarnal. Numerical and analytical effective elastic properties of degraded cement pastes. *Cem. Concr. Res.*, 39(10) :902–912, 2009.
- [6] E. Béchet, N. Moës, and B. Wohlmuth. A stable lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 78 :931–954, 2009.
- [7] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 45(5) :601–620, 1999.
- [8] T. Belytschko, C. Parimi, N. Moës, N. Sukumar, and S. Usui. Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 56 :609–635, 2003.
- [9] F. Benboudjema. *Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations biaxiales. Application aux enceinte de confinement de bâtiments réacteurs des centrales nucléaires*. PhD thesis, Université de Marne-la-Vallée, 2002.
- [10] A. Bensoussan, J. L. Lionis, and G. Papanicolaou. Asymptotic analysis for periodic structures. *Document*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [11] E. Benvenuti. A regularized xfm framework for embedded cohesive interfaces. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 197 :4367–4378, 2008.
- [12] E. Benvenuti, A. Tralli, and G. Ventura. A regularized xfm model for the transition from continuous to discontinuous displacements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 74 :911–644, 2008.
- [13] S. Berbennia, V. Favier, X. Lemoine, and M. Berveiller. Micromechanical modeling of the elastic-viscoplastic behavior of polycrystalline steels having different microstructures. *Mater. Sci. Eng. A*, 372 (1-2) :128–136, 2004.
- [14] S. Beurthey and A. Zaoui. Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials. *Eur. J. Mech. A-Solids*, 19 :1–16, 2000.
- [15] S. Beurthey and A. Zaoui. Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials. *Eur. J. Mech. A-Solids*, 19 :1–16, 2000.
- [16] G. Bonnet. Effective properties of elastic periodic composite media with fibers. *J.*



- Mech. Phys. Solids*, 55(5) :881–899, 2007.
- [17] L. C. Brinson and W. S. Lin. Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Compos. Struct.*, 41 :353–367, 1998.
- [18] B. Budiansky. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13(4) :223–224, 1965.
- [19] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [20] Ying Chen and Christopher A. Schuh. Analytical homogenization method for periodic composite materials. *Phys. Rev. B*, 79 :094104, 2009.
- [21] K.W. Cheng and T.P. Fries. Higher-order xfm for curved strong and weak discontinuities. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 82 :564–590, 2009.
- [22] Z.-Q. Cheng and L.-H. He. Micropolar elastic fields due to a spherical inclusion,. *Int. J. Eng. Sci.*, 33 :389–397, 1995.
- [23] Z.-Q. Cheng and L.-H. He. Micropolar elastic fields due to a circular cylindrical inclusion. *Int. J. Eng. Sci.*, 35 :659–668, 1997.
- [24] Israel Cohen and David J. Bergman. Effective elastic properties of periodic composite medium. *J. Mech. Phys. Solids*, 51(8) :1433–1457, 2003.
- [25] Mamadou Coulibaly and H. Sabar. Micromechanical modeling of linear viscoelastic behavior of heterogeneous materialst. *Arch. Appl. Mech.*, 81 :345–359, 2011.
- [26] T. Coupez, L. Silva, M. Bernacki, H. Resk, and W. Zerguine. Adaptive mesh refinement for the numerical modelling of complex microstructural evolution applications. *Note technique*, Mines ParisTech, CEMEF- Centre de Mise en Forme des Matériaux, CNRS UMR 7635.
- [27] C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 48(12) :1741–1760, 2000.
- [28] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. 1984.
- [29] J. Dolbow and I. Harari. An efficient finite element method for embedded interface problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 78 :229–252, 2009.
- [30] K. Dréau, N. Chevaugeon, and N. Moës. Studied x-fem enrichment to handle material interfaces with higher order finite element. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 199 :1922–1936, 2010.
- [31] C. Duarte, L.G. Reno, and A. Simone. A high-order generalized fem for through-the-thickness branched cracks. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 72 :325–351, 2007.
- [32] C.A. Duarte, L.G. Reno, and A. Simone. A high-order generalized fem for through-the-thickness branched cracks. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 72 :325–351, 2007.
- [33] C. Dunant, A. Giorla, C. Péniguel, J. Sanahuja, C. Toulemonde, A.-B. Tran, F. Willot, and J.Yvonnet. Estimation of effective behaviour of cementitious materials through numerical homogenization : multi-approach benchmark. *submitted for publication*.
- [34] V.F. Pasa Dutra, S. Maghous, A. Campos Filho, and A.R Pacheco. A micromechanical approach to elastic and viscoelastic properties of fiber reinforced concrete. *Cem. Concr. Res.*, 40 :460–472, 2010.
- [35] G. Dvorak. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 437 :311–327, 1992.

- [36] Zdeněk P. Bažant and Guang-Hua Li. Comprehensive database on concrete creep and shrinkage. Technical report, Infrastructure Technology Institute, McCormick School of Engineering and Applied Science, Northwestern University, 2008.
- [37] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 241 :376–396, 1957.
- [38] J. D. Eshelby. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 252 :561–569, 1959.
- [39] D.J. Eyre and G.W. Milton. A fast numerical scheme for computing the response of composites using grid refinement. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, 6 :41–47, 1999.
- [40] F. Feyel. Multiscale  $fe^2$  elastoviscoplastic analysis of composites structures. *Computational Materials Science*, 16 :344–354, 1999.
- [41] F.T. Fisher and L.C. Brinson. Viscoelastic interphases in polymer-matrix composites : theoretical models and finite-element analysis. *Compos. Sci. Technol.*, 61 :731–748, 2001.
- [42] C. Friebel, I. Doghri, and V. Legat. General mean-field homogenization schemes for viscoelastic composites containing multiple phases of coated inclusions. *Int. J. Solids Struct.*, 43 :2513–2541, 2006.
- [43] T.P. Fries. A corrected xfm approximation without problems in blending elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 75(5) :503–32, 2008.
- [44] T.P. Fries and T. Belytschko. The extended/generalized finite element method : An overview of the method and its applications. *Int. J. Numer. Methods Eng*, 84(3) :253–304, 2010.
- [45] F. Fritzen and T. Böhlke. Homogenization of the physically nonlinear properties of three-dimensional metal matrix composites using the nonuniform transformation field analysis. *Document*, pages 1–10, 2009.
- [46] F. Fritzen and T. Böhlke. Homogenization of three-dimensional microheterogeneous materials using nonuniform transformation fields. *Document*, pages 1–12, 2009.
- [47] F. Fritzen and T. Böhlke. Three-dimensional finite element implementation of the nonuniform transformation field analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng*, 84 :803–829, 2010.
- [48] F. Fritzen and T. Böhlke. Nonuniform transformation field analysis of materials with morphological anisotropy. *Compos. Sci. Technol.*, 71 :433–442, 2011.
- [49] X.-L. Gao and H.M. Ma. Solution of eshelby’s inclusion problem with a bounded domain and eshelby’s tensor for a spherical inclusion in a finite spherical matrix based on a simplified strain gradient elasticity theory. *J. Mech. Phys. Solids*, 58(5) :779–797, 2010.
- [50] G. M. Genin and V. Birman. Micromechanics and structural response of functionally graded, particulate - matrix, fiber - reinforced composites. *Int. J. Solids Struct.*, 46 :136–2150, 2009.
- [51] J. Glücklich and A. Amar. The volumetric creep of mortars subjected to triaxial compression. In *La déformation et la rupture des solides soumis à des sollicitations pluri-axiales*, 1, pages 79–95, Cannes, France. Colloque international de la RILEM.
- [52] R. Gracie, H. Wang, and T. Belytschko. Blending in the extended finite element method by discontinuous galerkin and assumed strain methods. *Int. J. Numer. Methods Eng.*,

- 74(11) :1645–669, 2008.
- [53] L. Granger. *Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires, Analyse et modélisation*. PhD thesis, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 1996.
- [54] Z. Hashin. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *J. Appl. Mech.*, 32 :630, 1965.
- [55] Z. Hashin. Complex moduli of viscoelastic composites - i. general theory and application to particulate composites. *Int. J. Solids Struct.*, 6 :539–552, 1970.
- [56] H. Hassanzadeh and M. Pooladi-Darvish. Comparison of different numerical laplace inversion methods for engineering applications. *Appl. Math. Comput.*, 189 :1966–1981, 2007.
- [57] M. Herve and Y. Le-Pape. *Projet BILOBA/CIWAP : Essais de relaxation sur éprouvettes cylindriques de pâte de ciment de type B11, à différents paliers d'hygrométrie, réalisés au L(MC)2 du Département MMC - Préparation, lancement et résultats des essais à mi-campagne*. EDF R&D, En cours de rédaction. H /T25/2010/02698/FR.
- [58] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13(4) :213–222, 1965.
- [59] H. Ji and J.E. Dolbow. On strategies for enforcing interfacial constraints and evaluating jump conditions with the extended finite element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 61 :2508–2535, 2004.
- [60] A. L. Kalamkarov, I. V. Andrianov, and V. V. Danishevskyy. Asymptotic homogenization of composite materials and structures. *ASME J. Appl. Mech*, DOI : 10.1115/1.3090830, 2009.
- [61] M. Kaliske and H. Rothert. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Comput. Mech.*, 19(3) :228–239, 1997.
- [62] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int. J. Solids Struct.*, 40 :3647–3679, 2003.
- [63] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int. J. Solids Struct.*, 40 :3647–3679, 2003.
- [64] P. Kanouté, D.P. Boso, J.L. Chaboche, and B.A. Schrefler. Multiscale methods for composites : A review. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 16 :31–75, 2009.
- [65] B.L. Karihaloo and Q.Z. Xiao. Modelling of stationary and growing cracks in fe framework without remeshing : a state-of-the-art review. *Comput. and Struct.*, 81 :119–129, 2003.
- [66] N. Kinoshita and T. Mura. Eigenstrain problems in a finite elastic body. *SIAM J. Appl. Math*, 44 :524–535, 1984.
- [67] A. Kiris and E. Inan. Eshelby tensors for a spherical inclusion in microstretch elastic fields. *Int. J. Solids Struct.*, 43(16) :4720–4738, 2006.
- [68] V.G. Kouznetsova, M.G.D. Geers, and W.A.M. Brekelmans. Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193 :5525–5550, 2004.
- [69] B. Kurnatowski and A. Matzenmiller. Finite element analysis of viscoelastic composite structures based on a micromechanical material model. *Comput. Mater. Sci.*, 43 :957–

- 973, 2008.
- [70] N. Lahellec and P. Suquet. Effective behavior of linear viscoelastic composites : A time-integration approach. *Int. J. Solids Struct.*, 44 :507–529, 2007.
- [71] N. Laws and R. McLaughlin. Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 395 :251–273, 1978.
- [72] Q. V. Le. *Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastique hétérogènes. Application à l'identification et à l'estimation du fluage propre de béton d'enclaves de centrales nucléaires*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2008.
- [73] H. Le-Quang and Q.-C.He. A one-parameter generalized self-consistent model for isotropic multiphase composites. *Int. J. Solids Struct.*, 44(21) :6805–6825, 2007.
- [74] G. Legrain, N. Chevaugéon, and K. Dréau. Simulations de géométries complexes avec x-fem et level-sets : Séparation de l'approximation et de la géométrie. *10e Colloque National en Calcul des Structures, CSMA 2011*, 2011.
- [75] M. Lévesque, M. D. Gilchrist, N. Bouleau, K. Derrien, and D. Baptiste. Numerical inversion of the laplace-carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media. *Comput. Mech.*, 40 :771–789, 2007.
- [76] S. Li, R.A. Sauer, and G. Wang. The eshelby tensors in a finite spherical domain - part i : Theoretical formulations. *ASME J. Appl. Mech.*, 74 :770–783, 2007.
- [77] G.R. Liu and S.S. Quek. *The finite element method : A practical course*. Linacre House, 2003.
- [78] L.J.Parrott. Lateral strains in hardened cement paste under short and long-term loading. *Magazine of Concrete Research*, 26(89) :198–202, 1974.
- [79] H.S. Ma and G.K. Hu. Eshelby tensors for an ellipsoidal inclusion in a micropolar material,. *Int. J. Eng. Sci.*, 44 :595–605, 2006.
- [80] C. Maeau, V. Favier, and M. Berveiller. Micromechanical modeling coupling time-independent and time-dependent behaviors for heterogeneous materials. *Int. J. Solids Struct.*, 46 :223–237, 2009.
- [81] P.S. Mangat and M.M. Azari. A theory for the creep of steel fibre reinforced cement matrices under compression. *J. Mater. Sci.*, 20 :1119–1133, 1985.
- [82] S. Mariani and U. Perego. Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 58 :103–106, 2003.
- [83] A. Matzenmiller and S. Gerlach. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber-matrix bonding. *Comput. Mater. Sci.*, 29(3) :283–300, 2003.
- [84] J.M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 39 :289–14, 1996.
- [85] R. Merle and J. Dolbow. Solving thermal and phase change problems with the extended finite element method. *Comput. Mech.*, 28(5) :339–350, 2002.
- [86] J. C. Michel, H. Moulinec, and P. Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 172(1-4) :109–143, 1999.
- [87] J.C. Michel, H. Moulinec, and P. Suquet. A computational method based on augmented lagrangians and fast fourier transforms for composites with high contrast. *Comput. Model. Eng. Sci.*, 1(2) :79–88, 2000.

- [88] J.C. Michel and P. Suquet. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193 :5477–5502, 2004.
- [89] S. Michel-Ponnelle. *Modélisation des câbles de précontrainte*, manuel code aster edition, 9 2009. Clé R7.01.02.
- [90] Moës, E. Bechet, and M. Tourbier. Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 67 :1641–1669, 2006.
- [91] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, and J.-F. Remacle. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 192 :3163–3177, 2003.
- [92] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 46(1) :131–156, 1999.
- [93] Soheil Mohammadi. *Extended Finite Element Method*. Blackwell Publishing Inc., 2008.
- [94] E. Monteiro, J. Yvonnet, and Q.-C. He. Computational homogenization for nonlinear conduction in heterogeneous materials using model reduction. *Comput. Mater. Sci.*, 42 :704–712, 2008.
- [95] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 21(5) :571–574, 1973.
- [96] H. Moulinec and P. Suquet. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites. *C. R. Acad. Sci. II*, 318, :417–1423, 1994.
- [97] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of non-linear composites with complex microstructure. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 157 :69–94, 1998.
- [98] H.M. Mourad, J. Dolbow, and I. Harari. A bubble-stabilized finite element method for dirichlet constraints on embedded interfaces. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 69 :772–793, 2007.
- [99] P. Ponte Castañeda. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 :1757–1788, 1992.
- [100] S. Nemat-Nasser, T. Iwakuma, and M. Hejazi. On composites with periodic structure. *Mech. Mater*, 1 :239–267, 1982.
- [101] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79(1) :12–49, 1998.
- [102] M. Paley and J. Aboudi. Micromechanical analysis of composites by the generalized cells model. *Mech. Mater*, 14 :127–139, 1992.
- [103] Y. Le Pape. *Fiche d’identité du modèle de comportement de fluage propre du béton BETON\_UMLV\_FP*. EDF R&D, 2004. HT-25/04/007/A.
- [104] Y. Le Pape. *Fiche d’identité du modèle BETON\_UMLV\_FP, intégration du modèle de fluage de dessiccation BAZANT\_FD*. EDF R&D, 2006. HT-25/05/046/A.
- [105] B. Patzák and M. Jirásek. Process zone resolution by extended finite elements. *Eng. Fract. Mech.*, 70 :957–977, 2003.
- [106] M.-J. Pindera and B. A. Bednarczyk. An efficient implementation of the generalized method of cells for unidirectional, multi-phased composites with complex microstructures. *Composites part B : engineering*, 30 :87–105, 1999.

- [107] A. Rekika and R. Brennerb. Optimization of the collocation inversion method for the linear viscoelastic homogenization. *Mech. Res. Commun.*, 38 :305–308, 2011.
- [108] J. Renard and M. F. Marmonier. Etude de l’initiation de l’endommagement dans la matrice d’un matériau composite par une méthode d’homogénéisation. *Aerospace Science and Technology*, 9 :37–51, 1987.
- [109] J. M. Ricaud and R. Masson. Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media : Internal variables formulation and extension to ageing behaviours. *Int. J. Solids Struct.*, 46 :1599–1606, 2009.
- [110] R. Le Roy. *Déformations instantanées et différées des bétons à hautes performances*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [111] H. Sabar, M. Berveiller, V. Favier, and S. Berbenni. A new class of micro-macro models for elastic-viscoplastic heterogeneous materials. *Int. J. Solids Struct.*, 39(12) :2357–3276, 2002.
- [112] J. Sanahuja and C. Toulemonde. Numerical homogenization of concrete microstructures without explicit meshes. *Cem. Concr. Res.*, 2011.
- [113] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, 1998.
- [114] F. L. Stazi, E. Budyn, J. Chessa, and T. Belytschko. An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Comput. Mech.*, 31 :38–48, 2003.
- [115] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level-sets in the extended finite-element method. *Int. J. Solids Struct., Comput. Method. Appl. M.*, 6183-6200 :190, 2001.
- [116] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 48(11) :1549–1570, 2000.
- [117] J. E. Tarancón, A. Vercher, E. Giner, and F. J. Fuenmayor. Enhanced blending elements for xfm applied to linear elastic fracture mechanics. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 77 :126–148, 2009.
- [118] R. Taylor, K. Pister, and G. Goudreau. Thermomechanical analysis of viscoelastic solids. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2 :45–59, 1970.
- [119] J.A. Thorpe. *Elementary Topics in Differential Geometry*. Springer-Verlag, 1979.
- [120] C. Toulemonde, R. Masson, and J. El Gharib. Modeling the effective elastic behavior of composites : a mixed finite element and homogenisation approach. *C. R. Mec.*, 336(3) :275–282, 2008.
- [121] A. B. Tran, J. Yvonnet, Q.-C. He, C. Toulemonde, and J. Sanahuja. A multiple level set approach to prevent numerical artefacts in complex microstructures with nearby inclusions within xfm. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 85(11) :1436–1459, 2010.
- [122] A.B. Tran, J. Yvonnet, Q.-C. He, C. Toulemonde, and J. Sanahuja. A simple multiscale numerical method for computing the response of linear viscoelastic heterogeneous structures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, accepted, 2011.
- [123] P. A. Turner and C. N. Tomé. Self-consistent modeling of visco-elastic polycrystals : Application to irradiation creep and growth. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(7) :1191–1211, 1993.
- [124] Y.M. Wang and G.J. Weng. The influence of inclusions shape on the overall viscoelastic behavior of composites. *J. Appl. Mech.*, 59 :510–518, 1992.

- [125] W.T. Weeks. Numerical inversion of laplace transforms using laguerre functions. *J. ACM*, 13(3) :419–429, 1966.
- [126] G. N. Wells and L. J. Sluys. A new method for modelling cohesive cracks using nite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng*, 50 :2667–2682, 2001.
- [127] G. J. Weng. The theoretical connection between mori-tanaka’s theory and the hashinshtrikman-walpole bounds. *Int. J. Eng. Sci*, 28(11) :1111–1120, 1990.
- [128] Y.-M. Yi, S.-H. Park, and S.-K. Youn. Asymptotic homogenization viscoelastic composites periodic microstructures. *Int. J. Solids Struct.*, 35(17) :2039–2055, 1998.
- [129] J. Yvonnet, D. Gonzalez, and Q.-C. He. Numerically explicit potentials for the homogenization of nonlinear elastic heterogeneous materials. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 198 :2723–2737, 2009.
- [130] J. Yvonnet and Q.-C. He. The reduced model multiscale method (r3m) for the nonlinear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *J. Comput. Phys.*, 223 :341–368, 2007.
- [131] J. Yvonnet and Q.-C He. A non-concurrent multiscale method for computing the response of nonlinear heterogeneous structures. *Eur. J. Comput. Mech.*, 19 :105–116, 2010.
- [132] J. Yvonnet, Q.-C. He, and C. Toulemonde. Numerical modelling of the effective conductivities of composites with arbitrarily shaped inclusions and highly conducting interface. *Compos. Sci. Technol*, 68 :2828–2825, 2008.
- [133] J. Yvonnet, Q.-C.He, Q.-Z. Zhu, and J.-F. Shao. A general and efficient computational procedure for modelling the kapitza thermal resistance based on xfem. *Comput. Mater. Sci.*, 50 :1220–1224, 2011.
- [134] J. Yvonnet, H. Le Quang, and Q.-C. He. An xfem/level-set approach to modeling surface/interface effects and to computing the size-dependent effective properties of nanocomposites. *Comput. Mech.*, 42 :119–131, 2008.
- [135] G. Zboinski. Application of the three-dimensional triangular-prism hpq adative finite element to plate and shell analysis. *Comput. and Struct.*, 65.4 :497–514, 1997.
- [136] Q.-Z. Zhu, S.-T. Gu, J. Yvonnet, J.-F. Shao, and Q.-C. He. Three-dimensional numerical modelling by xfem of spring-layer imperfect curved interfaces with applications to linearly elastic composite materials. *Int. J. Numer. Methods Eng*, DOI : 10.1002/nme.3175, 2011.
- [137] T.I. Zohdi and P. Wriggers. Aspects of the computational testing of the mechanical properties of microheterogeneous material samples. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 50 :2573–2599, 2001.