



**HAL**  
open science

# Vers une approche multi-échelle pour l'interaction fluide-structure

Étienne Vergnault

► **To cite this version:**

Étienne Vergnault. Vers une approche multi-échelle pour l'interaction fluide-structure. Génie mécanique [physics.class-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2009. Français. NNT : 2009DENS0061 . tel-00661195

**HAL Id: tel-00661195**

**<https://theses.hal.science/tel-00661195v1>**

Submitted on 18 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°ENSC-2009/202



**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Etienne VERGNAULT**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse :

**Vers une approche multi-échelle pour l'interaction  
fluide-structure**

Soutenue à Cachan le 4 Décembre 2009 devant le jury composé de :

<b>Olivier ALLIX</b>	ENS de Cachan	Examineur
<b>Jean-François DEÜ</b>	Conservatoire National des Arts et Métiers	Rapporteur
<b>Frédéric DIAS</b>	ENS de Cachan	Examineur
<b>Serge MAISON-LE-POËC</b>	EADS Innovation Works	Examineur
<b>Nicolas MOËS</b>	École Centrale de Nantes	Examineur
<b>Pierre SAGAUT</b>	Université Pierre et Marie Curie-Paris 6	Rapporteur

---

**LMT-Cachan**

ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris  
61, avenue du Président Wilson  
94235 CACHAN CEDEX



C'est le moment où tout se termine. Les dernières lignes, la fin d'une aventure, mais le début de la suivante. Alors avant de clore ces quatre années, je voulais vous dire merci.

Je tiens tout d'abord à remercier Olivier ALLIX pour m'avoir fait confiance en me confiant ces travaux de recherche, et pour m'avoir ouvert la porte de son bureau aussi souvent que j'en avais besoin. Pour les conseils et l'orientation qu'il a su donner à mon travail, merci.

Merci également à Nicolas MOËS, président de mon jury de thèse et à Frédéric DIAS qui a accepté de faire le voyage pour participer au jury. Je souhaite exprimer ma gratitude à Jean-François DEÛ et Pierre SAGAUT d'avoir rapporté mon travail. Enfin, merci à Serge MAISON-LE-POËC sans qui ce projet n'aurait pas eu lieu.

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan dirigé par Olivier ALLIX. Un grand merci à tous ses membres avec qui j'ai eu d'agréables relations de travail. Un merci particulier aussi aux copains, Jean-Charles PASSIEUX, Julien PEBREL, Felipe BORDEU, Pierre KERFRIDEN et Pierre GOSSELET, Benjamin SOURCIS, David ODIÈVRE, Frisou, . . . et tous les autres que je n'ai pas la place de citer. . .

Je terminerai par un immense merci à ma famille, en particulier à mes parents et à ma sœur, et à Marianne, qui a su patienter tout en m'encourageant.

*À tous, vraiment, merci beaucoup.*  
Paris, 4 Décembre 2009



# Table des matières

Table des matières i

## I Étude bibliographique 1

### 1 Méthodes Éléments Finis pour les fluides 5

1	Introduction . . . . .	7
1.1	Modélisations des écoulements . . . . .	7
1.2	Modélisations numériques des équations de la mécanique des fluides	8
1.3	Discrétisation du problème continu . . . . .	9
2	Équations de la mécanique des fluides . . . . .	11
2.1	Description du mouvement . . . . .	11
2.2	Équations de conservation . . . . .	14
3	Instabilités liées aux Éléments Finis . . . . .	15
3.1	Une équation elliptique : problème de convection stationnaire . .	15
3.2	Une équation hyperbolique : problème de convection non station- naire . . . . .	21
3.3	Une équation parabolique : problème de convection-diffusion non stationnaire . . . . .	24
3.4	Écoulement incompressible d'un fluide visqueux . . . . .	26
4	Écoulements incluant une discontinuité . . . . .	32
4.1	Méthodes explicites . . . . .	33
4.2	Méthodes implicites . . . . .	33
5	Conclusions pour ces travaux . . . . .	35

### 2 Méthodes multi-échelles 37

1	Méthodes basées une décomposition analytique de la solution . . . . .	39
1.1	Méthodes d'homogénéisation du matériau . . . . .	39
1.2	Méthode variationnelle Multi-échelle . . . . .	41
1.3	Méthodes SDA et X-FEM . . . . .	44
2	Méthodes multigrilles . . . . .	44
2.1	Cycle en V . . . . .	44
2.2	Cycle en W . . . . .	45

2.3	Définition des opérateurs sur l'ensemble des grilles . . . . .	46
2.4	Parallélisation des méthodes multigrilles . . . . .	46
3	Méthodes basées sur une décomposition de domaine . . . . .	46
3.1	Décompositions de domaine avec recouvrement . . . . .	46
3.2	Décompositions de domaine sans recouvrement . . . . .	46
3.3	Application aux problèmes types de la mécanique des fluides . . .	52
4	Conclusions pour ces travaux . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Méthodes pour l'interaction fluide-structure</b>	<b>57</b>
1	Stratégies de couplage . . . . .	59
1.1	Méthodes partitionnées par point fixe . . . . .	59
1.2	Méthodes de Newton . . . . .	62
2	Méthodes d'interface . . . . .	62
2.1	Méthodes à maillage fluide mobile . . . . .	63
2.2	Méthodes à maillage fluide fixe . . . . .	64
2.3	Amélioration des conditions d'interface . . . . .	66
3	Conclusion pour ces travaux . . . . .	67
<b>II</b>	<b>Vers une méthode multi-échelle pour le couplage fluide-structure</b>	<b>69</b>
<b>4</b>	<b>Méthode de décomposition de domaine pour les écoulements incompressibles inspirée de la méthode LaTIn</b>	<b>71</b>
1	Rappel du problème fluide . . . . .	73
1.1	Formulation continue du problème de Navier-Stokes . . . . .	73
1.2	Formulation faible du problème de Navier-Stokes . . . . .	74
1.3	Résolution de l'équation non-linéaire . . . . .	75
1.4	Discrétisation par Éléments Finis . . . . .	78
2	Résolution du problème par décomposition du domaine . . . . .	79
2.1	Formulation continue du problème décomposé . . . . .	79
2.2	Formulation faible du problème décomposé . . . . .	82
3	Stratégie itérative de résolution mono-échelle . . . . .	84
3.1	Étape sur les interfaces . . . . .	84
3.2	Étape sur les sous-domaines . . . . .	86
3.3	Indicateur de convergence . . . . .	87
3.4	Remarques sur l'algorithme . . . . .	88
4	Exemple : écoulement de Poiseuille . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Problème macroscopique basé sur la conservation de masse au niveau global</b>	<b>91</b>
1	Incompressibilité de l'écoulement . . . . .	93
2	Séparation d'échelles . . . . .	94
2.1	Découplage des composantes . . . . .	94

3	Construction du problème macroscopique . . . . .	94
3.1	Projection sur l'espace des champs macroscopiquement admissibles . . . . .	95
3.2	Restriction <i>a priori</i> des espaces des vitesses macroscopiques . . . . .	98
3.3	Structure du problème macroscopique . . . . .	101
3.4	Exemple à $n$ sous-domaines . . . . .	102
3.5	Conclusion sur la méthode de décomposition de domaine . . . . .	102
4	Remarques sur la méthode multi-échelle . . . . .	103
4.1	Dépendance vis à vis des directions de recherche . . . . .	103
4.2	Initialisation . . . . .	103
4.3	Orientation des interfaces . . . . .	104
5	Exemple : écoulement autour d'un cylindre . . . . .	105
5.1	Écoulement stationnaire autour d'un cylindre . . . . .	108
6	Écoulement non stationnaire autour d'un cylindre . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Interfaces mixtes pour l'interaction fluide-structure</b>	<b>115</b>
1	Interfaces mixtes . . . . .	117
1.1	Étape sur un sous-domaine fluide . . . . .	118
1.2	Mise en œuvre dans un code C++ . . . . .	119
1.3	Choix des directions de recherche . . . . .	121
1.4	Repérage des interfaces . . . . .	121
2	Solide en grandes transformations . . . . .	122
2.1	Description du mouvement . . . . .	122
2.2	Mesures des déformations . . . . .	122
2.3	Mesures des contraintes . . . . .	122
2.4	Relation de comportement . . . . .	123
2.5	Formulations Lagrangiennes . . . . .	124
2.6	Formulation Lagrangien total et réactualisé dans LMTpp . . . . .	125
3	Algorithme partitionné pour le couplage . . . . .	125
4	Exemples . . . . .	127
4.1	Écoulement autour d'un cylindre . . . . .	127
4.2	Écoulement partiellement obstrué par un clapet . . . . .	129
5	Conclusion . . . . .	130
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>





**Première partie**  
**Étude bibliographique**



Dans cette partie, nous regroupons les travaux d'assimilation des méthodes numériques nécessaires à l'interaction fluide-structure. Le premier chapitre concerne la mécanique des fluides et les méthodes numériques associées. La grande diversité des comportements des fluides et des types d'écoulements impose de faire des hypothèses fortes, que nous expliquerons. Le caractère particulier des équations régissant les écoulements requiert certaines précautions quand à leur résolution.

Le deuxième chapitre recense les méthodes basées sur une séparation d'échelles. Celle-ci peut être analytique au niveau des inconnues du problème, fondée sur le caractère périodique du matériau, ou totalement arbitraire. La séparation d'échelle peut également être liée à l'emploi d'une méthode de décomposition de domaine pour résoudre le problème initial.

Enfin, le troisième chapitre détaille certaines méthodes pour l'interaction fluide-structure. Nous essaierons d'établir une classification des méthodes de couplage, et des méthodes permettant le dialogue entre les deux milieux.



# Chapitre 1

## Méthodes Éléments Finis pour les fluides

*Après quelques considérations générales sur la modélisation des écoulements, tant au niveau mathématique que numérique, ainsi que sur les méthodes de discrétisation utilisées pour les milieux fluides, ce chapitre présente les techniques adaptées à chaque type d'équation en mécanique des fluides (diffusion, convection, dynamique) pour une résolution par éléments finis. Enfin, une courte section s'intéresse au cas des écoulements à surface libre, et plus généralement, à ceux incluant une interface.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Modélisations des écoulements	7
1.2	Modélisations numériques des équations de la mécanique des fluides	8
1.3	Discrétisation du problème continu	9
1.3.1	Différences finies	9
1.3.2	Volumes finis	10
1.3.3	Méthodes sans maillage	10
1.3.4	Méthodes éléments finis	11
<b>2</b>	<b>Équations de la mécanique des fluides</b>	<b>11</b>
2.1	Description du mouvement	11
2.1.1	Descriptions lagrangienne et eulérienne	11
2.1.2	Description ALE	12
2.2	Équations de conservation	14

	2.2.1	Conservation de la masse . . . . .	14
	2.2.2	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	14
	2.2.3	Forme ALE des équations de conservation . . . . .	15
<b>3</b>		<b>Instabilités liées aux Éléments Finis . . . . .</b>	<b>15</b>
	3.1	Une équation elliptique : problème de convection stationnaire . . .	15
	3.1.1	Définition du problème . . . . .	15
	3.1.2	Approximation de Galerkin . . . . .	16
	3.1.3	Expressions asymétriques du gradient discret . . . . .	17
	3.1.4	Méthodes de stabilisation classiques . . . . .	19
	3.1.5	Méthodes de stabilisation originales . . . . .	20
	3.2	Une équation hyperbolique : problème de convection non stationnaire	21
	3.2.1	Définition du problème . . . . .	21
	3.2.2	Discrétisation temporelle . . . . .	22
	3.2.3	Discrétisation spatiale par méthode de Galerkin . . . . .	22
	3.2.4	Exemple de mise en œuvre . . . . .	23
	3.2.5	Contrôle de la solution . . . . .	23
	3.3	Une équation parabolique : problème de convection-diffusion non stationnaire . . . . .	24
	3.3.1	Définition du problème . . . . .	25
	3.3.2	Discrétisation temporelle . . . . .	25
	3.3.3	Exemple de mise en œuvre . . . . .	25
	3.4	Écoulement incompressible d'un fluide visqueux . . . . .	26
	3.4.1	Tenseur des contraintes pour un fluide newtonien . . . . .	26
	3.4.2	Équations de Navier-Stokes . . . . .	27
	3.4.3	Problème de Navier-Stokes stationnaire . . . . .	27
	3.4.4	Traitements particuliers liés à l'hypothèse d'incompressi- bilité . . . . .	28
	3.4.5	Stabilisation de la formulation Éléments Finis . . . . .	29
	3.4.6	Problème de Navier-Stokes non stationnaire . . . . .	31
	3.4.7	Méthodes de discrétisation à pas fractionné . . . . .	31
<b>4</b>		<b>Écoulements incluant une discontinuité . . . . .</b>	<b>32</b>
	4.1	Méthodes explicites . . . . .	33
	4.2	Méthodes implicites . . . . .	33
	4.2.1	Méthode de volume de fluide . . . . .	33
	4.2.2	Méthode de marqueurs de cellules . . . . .	33
	4.2.3	Méthode des lignes de niveau ( <i>Level-Set</i> ) . . . . .	34
<b>5</b>		<b>Conclusions pour ces travaux . . . . .</b>	<b>35</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Modélisations des écoulements

La description mathématique d'un écoulement commence par le choix d'un niveau d'approximation [82], qui détermine la précision avec laquelle seront évalués l'ensemble des paramètres du problème, paramètres qui contiennent toute l'information disponible. Un milieu peut par exemple être décrit à l'échelle atomique, microscopique ou macroscopique, cette dernière amenant à considérer le milieu comme un milieu continu. Les échelles de temps et d'espace sont alors choisies de manière à prendre en compte tous les phénomènes dynamiques présents dans le problème considéré. Le choix d'une description des efforts termine la modélisation effectuée : on peut par exemple négliger les effets visqueux, ou choisir un modèle à viscosité non constante, ou bien négliger les effets de convection. Ces choix sont guidés par des nombres sans dimensions, caractéristiques de l'écoulement considéré : nombre de Reynolds  $R_e$ , de Froude  $\mathcal{F}_r$ ...

Un fluide est dit parfait, par opposition à un fluide visqueux, si les effets de viscosité n'interviennent pas dans la description de son mouvement. En dehors de cas très particuliers (Hélium à très basse température), il s'agit d'une approximation, valide pour les très grands nombres de Reynolds. Les régimes d'écoulement envisagés dans cette thèse n'ont pas un nombre de Reynolds suffisant pour justifier cette approximation, souvent utilisée en aérodynamique.

Un fluide newtonien est caractérisé par une viscosité indépendante de la vitesse de cisaillement et du temps, par le fait que dans un écoulement de cisaillement simple (par exemple entre deux plans possédant des vitesses différentes), les seules contraintes sont des contraintes de cisaillement, et qu'elles disparaissent lorsque l'écoulement est arrêté. La partie déviatorique du tenseur des contraintes est alors une fonction linéaire du tenseur taux de déformation (voir Figure 1.1). De nombreux exemples de comportement non newtonien se trouvent dans la vie courante : le sang est un fluide dont la viscosité diminue lorsque le taux de cisaillement augmente, il est dit rhéofluidifiant. À l'inverse, on peut observer une viscosité qui augmente avec le taux de cisaillement : il s'agit de la famille des fluides rhéoépaississants, dont fait partie le sable mouillé. Le dentifrice est un cas particulier, puisqu'il possède un contrainte seuil, en dessous de laquelle aucun écoulement ne se développe : c'est ce qui l'empêche de sortir tout seul du tube. Il entre dans la catégorie des fluides de Bingham, comme la peinture ou le ketchup.

L'hypothèse d'incompressibilité concerne l'écoulement et non pas le fluide. Elle permet de simplifier l'équation de conservation de la masse. Comme nous le verrons par la suite, elle requiert des précautions particulières lors de l'emploi de méthodes numériques.

Dans ce travail, la description retenue est celle d'un fluide visqueux newtonien en écoulement incompressible. Nous prenons en compte les effets de convection et de viscosité, ce qui conduit aux équations de Navier-Stokes.



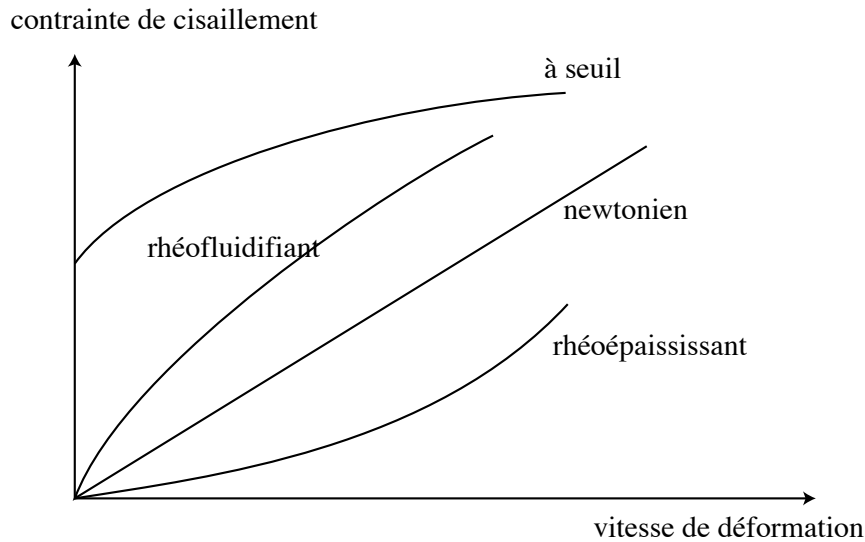


FIGURE 1.1 : Contraintes dans un fluide en fonction du taux de déformation

## 1.2 Modélisations numériques des équations de la mécanique des fluides

Une fois les choix de la description du milieu et de la description des efforts faits, un modèle mathématique du problème est établi, dans notre cas les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible. La résolution numérique doit alors fournir une solution, approchée, au système d'équations différentielles mises en jeu avec une précision suffisante.

L'exigence de précision impose de prendre en compte lors de la résolution toutes les échelles présentes dans l'écoulement, c'est à dire d'utiliser des discrétisations spatiales et temporelles au moins aussi fines que les plus petites échelles que l'on veut capturer. Cela peut parfois conduire à de grandes difficultés, en particulier lorsque des échelles très différentes sont présentes, par exemple dans le cas d'écoulements turbulents. Ainsi, considérant les rapports entre les échelles les plus petites et celles contenant le plus d'énergie, la résolution directe d'un problème d'écoulement turbulent demande des efforts numériques rapidement hors de portée, évoluant comme le cube du nombre de Reynolds [175].

Certaines approches permettent d'éliminer certaines échelles du calcul, et ainsi de réduire le coût des simulations d'écoulements turbulents. Elles reposent sur une séparation des échelles entre échelles macroscopiques d'une part, qui seront résolues numériquement, et les échelles microscopiques d'autre part, dont l'interaction avec les premières sera prise en compte par un modèle. Ces modèles, qui ajoutent un terme dans les équations résolues, contiennent uniquement une représentation statistique des petites échelles. Le choix de l'inconnue macroscopique définit la méthode : l'approche Reynolds Averaged

Numerical Simulation (RANS) [118] calcule uniquement une moyenne statistique de la solution. En séparant l'inconnue en une moyenne statistique et une partie fluctuante ( $v(\underline{x}, t) = \bar{v} + v'(\underline{x}, t)$ ),  $v'$  étant représentée par un modèle de turbulence, l'inconnue du problème devient  $\bar{v}$ . Cette moyenne ne permet bien évidemment pas une description fine des phénomènes en jeu. En calculant uniquement une valeur moyenne et quelques modes basse fréquence, on obtient la méthode URANS (Unsteady Reynolds Averaged Numerical Simulation), [124]. Par rapport à la méthode RANS, la partie fluctuante  $v'$  est toujours représentée par un modèle de turbulence, mais la résolution prend en compte les contributions de modes dit cohérents,  $\tilde{v}$ , en plus de la moyenne :  $v(\underline{x}, t) = \bar{v} + \tilde{v}(\underline{x}, t) + v'(\underline{x}, t)$ . Une autre manière de réduire la taille du problème est de le résoudre en projection sur une base de fonction adéquates, comme les modes de Fourier, ou une base de fonctions optimales, comme celles obtenues en utilisant la POD [11]. Enfin, l'approche Large-Eddy Simulation (LES) calcule uniquement les modes à basse fréquence présents dans la solution [175].

Dans le cas d'écoulements turbulents, on voit donc que le choix de l'approche des équations de Navier-Stokes est un compromis entre la précision des résultats et l'effort numérique pour les obtenir. Dans ces travaux, nous restons dans un régime laminaire pour les écoulements étudiés. Les approches décrites ci-dessus utilisent des modèles de turbulence afin de prendre en compte l'effet des petites échelles (que l'on pourrait qualifier de "micro") sur les grandes. Elles introduisent une échelle "micro" uniquement par son comportement homogénéisé, qui ne permet de déterminer l'évolution de l'écoulement que par des grandeurs moyennes ou contenant une information réduite. Étant donné qu'elles concernent la modélisation de la turbulence, elles ne seront pas décrites plus en détail au chapitre 2, bien que l'on puisse les qualifier de multi-échelles.

### 1.3 Discrétisation du problème continu

L'obtention d'une solution numérique des équations continues d'un problème demande de restreindre l'espace des solutions – en général de dimension infinie –, à un espace de dimension finie dans lequel les fonctions sont représentées par leur valeur sur un ensemble de points.

#### 1.3.1 Différences finies

À la différence des autres méthodes décrites ci-après, les différences finies sont basées sur une version discrète des opérateurs différentiels. Les dérivées partielles par rapport aux variables d'espace et de temps sont approchées à l'aide de développements de Taylor, afin d'en obtenir une expression faisant intervenir les valeurs des inconnues aux nœuds voisins et la taille de maille :

$$\frac{\partial F(u)}{\partial x} = \frac{F(u)_{i+1} - F(u)_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + O(\delta x^2)$$

$$\frac{\partial \square}{\partial x} \simeq \frac{\square_{i+1} - \square_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

L'ordre de précision obtenu dépend de la combinaison des développements de Taylor choisie pour construire la version discrète de l'opérateur de dérivée. L'inconvénient de cette méthode réside dans le traitement des domaines de forme complexe.

### 1.3.2 Volumes finis

Les volumes finis sont basés sur la vérification de la forme forte des équations, en moyenne, sur un petit volume que l'on appelle aussi élément. En transformant les intégrales sur le volume en intégrales de bord, on peut exprimer la variation de l'inconnue (attachée au volume) en fonction de flux sur le bord de ce volume. Ces flux dépendent des valeurs des inconnues sur l'élément courant et les volumes voisins, et font intervenir des calculs d'intégrales sur le bord de chaque élément. Ces calculs d'intégrales sont relativement simples, puisque les inconnues sont supposées constantes par volume : ils font intervenir des calculs d'aire et de normales, qui dépendent uniquement de la géométrie. Dans le cas de problèmes dépendants du temps, le choix d'une approximation pour l'évolution temporelle des flux permet de définir des schémas explicites ou implicites.

Les volumes finis sont très utilisés en mécanique des fluides, par exemple dans des codes commerciaux (Fluent) cependant, l'existence d'outils pour la méthode des éléments finis au laboratoire nous a fait préférer cette dernière.

### 1.3.3 Méthodes sans maillage

Une communauté relativement large développe des méthodes dites sans maillage, c'est à dire qui ne font pas appel aux notions d'élément et de fonction de forme telles qu'employées avec les éléments finis. Les inconnues sont alors attachées à des particules matérielles, et la formulation évidemment lagrangienne des équations évite tout terme de convection, mais déplace la difficulté vers d'autres points.

Dans la méthode des particules hydrodynamiques lissées (SPH) [63, 142], les propriétés d'une particule dépendent de celles de ses voisines, dans une région limitée de l'espace. Cette méthode donne de très bons résultats pour les problèmes à surface libre, mais pose problème pour la prise en compte de conditions aux limites.

À partir d'un nuage de particules, une triangulation [99] du domaine défini par exemple par la méthode  $\alpha$ -shape [40] permet de définir un ensemble d'éléments polygonaux, sur lesquels sont construits des fonctions de forme de type éléments finis. Cette méthode est appelée méthode éléments finis sans maillage (MFEM) [97, 100], et utilise la même démarche que la méthode particulière des éléments finis (PFEM) [4, 98, 152], par exemple appliquée avec succès aux écoulements de plusieurs fluides [101].

### 1.3.4 Méthodes éléments finis

Dans un souci de compatibilité maximale avec les outils et méthodes existant au laboratoire, nous choisissons de résoudre les équations gouvernant les écoulements par une méthode éléments finis. Cette méthode, si elle a été créée pour les solides, est utilisée dans le domaine des fluides, notamment sous l'impulsion des travaux de Zienkiewicz [210]. Une méthode de type éléments finis sans maillage impose en effet de reconstruire les éléments à chaque pas, et les autres méthodes sans maillage sont jugées trop éloignées pour être facilement couplées aux éléments finis utilisés pour la partie solide.

## 2 Équations de la mécanique des fluides

### 2.1 Description du mouvement

La description mathématique des écoulements de fluides repose sur le choix d'une description de la cinématique. Parmi les trois (lagrangienne, ALE et eulérienne) utilisées en mécanique des milieux continus, la troisième est ici préférée pour des raisons de simplicité.

La description lagrangienne, principalement utilisée en mécanique des structures, associe chaque nœud à un point matériel, qu'il suit lors du mouvement. Elle permet un suivi aisé des interfaces et des frontières, mais nécessite souvent un remaillage du domaine suite aux importantes distorsions de celui-ci, par exemple dans les cas de simulation de procédés de formage ou de crash. Ce peut être un choix très efficace, par exemple dans les cas de calcul de modes de ballottement dans un réservoir [180].

Les algorithmes ALE sont très utilisés pour les problèmes d'écoulements faisant intervenir des frontières mobiles ou souples. L'idée clef de la description ALE est de donner à la grille Éléments Finis un mouvement indépendant de celui du milieu, cela en vue de combiner les avantages des descriptions lagrangienne et eulérienne.

La description eulérienne est la plus utilisée en mécanique des fluides. Chaque nœud correspond à un point fixe et le milieu est en mouvement par rapport à la grille d'interpolation. Cette description facilite le traitement des grandes déformations du fluide, et s'avère indispensable pour la simulation des écoulements turbulents. En contrepartie, le suivi des interfaces requiert un traitement particulier, explicite ou implicite, abordé en section 4 de ce chapitre.

#### 2.1.1 Descriptions lagrangienne et eulérienne

La mécanique des milieux continus utilise généralement deux domaines : le domaine matériel  $R_X$  constitué des points matériels  $\underline{X}$  et le domaine spatial  $R_x$  constitué des points

$\underline{x}$ . Le point de vue lagrangien consiste à suivre les points matériels lors de leur mouvement. Pour cela on utilise une grille dont les nœuds suivent en permanence les mêmes particules du milieu. Les coordonnées matérielles  $\underline{X}$  permettent de repérer la configuration de référence  $R_X$ . Cette configuration peut être la configuration initiale (formulation lagrangienne totale), ou une configuration plus proche de la configuration actuelle, généralement à la configuration au précédent incrément de temps ou de chargement (formulation lagrangienne réactualisée). Le mouvement du milieu introduit un lien entre les coordonnées matérielles et spatiales, défini par l'application  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \phi : R_X &\rightarrow R_x \\ (\underline{X}, t) &\mapsto (\underline{x}, t) \end{aligned}$$

L'expression du gradient de la transformation permet de définir la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial (\underline{X}, t)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} & \underline{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \underline{v}(\underline{X}, t) &= \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \Big|_{\underline{X}} \end{aligned}$$

La description eulérienne permet d'examiner l'évolution des quantités attachées aux particules passant par une région fixée de l'espace. La vitesse à un nœud du maillage à l'instant  $t$  correspond à la vitesse de la particule coïncidant avec ce nœud à l'instant  $t$ , sans aucun lien avec la configuration de référence  $\underline{X}$ . La dissociation du maillage et du milieu en mouvement introduit des termes de convection dans les dérivées matérielles. Les dérivées temporelles matérielle et spatiale sont alors reliées par la formule :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\underline{X}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\underline{x}} + \underline{v} \cdot \nabla f \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla f \quad (1.1)$$

### 2.1.2 Description ALE

Dans la description ALE du mouvement, la référence n'est ni le domaine spatial  $R_x$  ni le domaine matériel  $R_X$ . Un troisième domaine, appelé domaine de référence  $R_\chi$ , de coordonnées  $\underline{\chi}$  est utilisé. Il est relié aux autres par les applications  $\Phi$  et  $\Psi$ , liées par  $\phi =$

$\Phi \circ \Psi^{-1}$  (figure 1.2). Le calcul de leurs gradients permet de définir les vitesses  $\underline{v}$ ,  $\hat{\underline{v}}$  et  $\underline{w}$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial(\underline{X}, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} & \underline{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(\underline{\chi}, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\chi}} & \hat{\underline{v}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial(\underline{X}, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{X}} & \underline{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

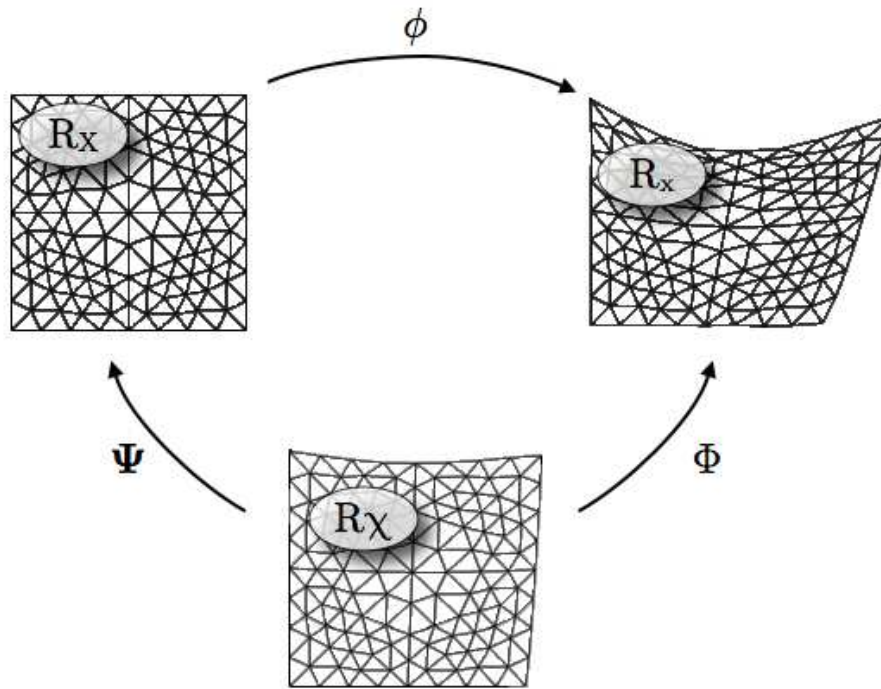


FIGURE 1.2 : maillages : lagrangien  $R_X$ , eulérien  $R_x$  et ALE  $R_\chi$

$\underline{w}$  est la vitesse de la particule dans le repère matériel  $R_X$ . Par dérivation de  $\phi = \Phi \circ \Psi^{-1}$ , on obtient :

$$\underline{c} = \underline{v} - \hat{\underline{v}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\chi}} \underline{w} \quad (1.2)$$

$\underline{c}$  est la vitesse de la particule vue dans le repère spatial  $R_x$ . Les vitesses  $\underline{c}$  et  $\underline{w}$  sont égales si et seulement si  $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\chi}} = \underline{I}$ , c'est à dire quand le mouvement du maillage est une translation, sans déformation ni rotation.

**Relation fondamentale en ALE** Afin d'exprimer les équations de conservation en formulation ALE, il faut exprimer la dérivée temporelle totale (ou dérivée matérielle) en fonction de la dérivée dans le repère de référence  $R_{\underline{x}}$  :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} |_{\underline{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} |_{\underline{x}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \underline{c} = \frac{\partial f}{\partial t} |_{\underline{x}} + \underline{c} \cdot \underline{\nabla} f \quad (1.3)$$

## 2.2 Équations de conservation

### 2.2.1 Conservation de la masse

La conservation de la masse stipule que la masse contenue dans un volume de fluide que l'on suit dans son mouvement reste constante au cours du temps. Elle s'écrit :

$$0 = \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

En utilisant la dérivation sous le signe somme et le théorème de Gauss-Ostrogradski on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \rho \underline{v} = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{soit encore} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (1.5)$$

### 2.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation traduisant la conservation de la quantité de mouvement relie la variation de la quantité de mouvement d'une portion de fluide aux forces qui s'appliquent sur cette portion de fluide. La variation de quantité de mouvement du fluide contenu dans un volume  $V$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV &= \int_V \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v} \otimes \underline{v}) dV \\ &= \int_V \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV \text{ sachant que } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \rho \underline{v} = 0 \end{aligned}$$

Le fluide est soumis à un chargement volumique  $\underline{b}$  et la contrainte de Cauchy dans le milieu est  $\underline{\underline{\sigma}}$ . L'équilibre s'écrit alors :

$$\int_V \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV = \int_V \rho \underline{b} dV + \int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} dV$$

Cette relation est valable pour tout volume  $V_t$ , on obtient l'équation de mouvement sous forme locale :

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \underline{b} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (1.6)$$

### 2.2.3 Forme ALE des équations de conservation

La forme ALE des équations est facilement obtenue en partant de leur forme en dérivée totale, et en la développant selon :

$$\frac{\partial f}{\partial t}|_{\underline{x}} = \frac{\partial f}{\partial t}|_{\underline{\chi}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \underline{c} = \frac{\partial f}{\partial t}|_{\underline{\chi}} + \underline{c} \cdot \underline{\nabla} f$$

On obtient alors, pour la conservation de la masse :  $\frac{\partial \rho}{\partial t}|_{\underline{\chi}} + \underline{c} \cdot \underline{\nabla} \rho = -\rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$  et pour conservation de la quantité de mouvement :  $\rho(\frac{\partial v}{\partial t}|_{\underline{\chi}} + \underline{c} \cdot \underline{\nabla} v) = \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \rho \underline{b}$ . La forme ALE des équations de conservation fait toujours apparaître un terme de convection et leur résolution entraîne les mêmes difficultés que la forme eulérienne.

## 3 Instabilités liées aux Éléments Finis

Le problème des instabilités liées à l'utilisation d'une méthode Éléments Finis est expliqué sur des exemples simples. Chaque terme est analysé séparément, selon un plan similaire à d'autres exposés plus complets : [39, 210].

### 3.1 Une équation elliptique : problème de convection stationnaire

La forme particulière des équations de conservation exprimées dans un formalisme eulérien rend leur résolution par une méthode Éléments Finis délicate. La présence d'un terme de convection se traduit par un terme additionnel de diffusion négatif, ce qui peut revenir à résoudre exactement une équation à diffusion plus faible, nulle ou négative. Dans ces deux derniers cas, la solution est instable. L'observation des équations résultant de la discrétisation permet d'introduire des termes correctifs.

#### 3.1.1 Définition du problème

**Forme forte** Soit le transport d'une quantité scalaire  $u(\underline{x})$  dans un domaine  $\Omega$  par les phénomènes de diffusion et de convection. La frontière est séparée en  $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$  selon que l'on impose la valeur de l'inconnue  $u$  ou du flux  $\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}$ . Le problème est défini par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \underline{\nabla} u - \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \underline{\nabla} u) &= s \text{ dans } \Omega & (1.7) \\ u &= u_D \text{ sur } \Gamma_D \\ \underline{n} \cdot \underline{v} \underline{\nabla} u &= h \text{ sur } \Gamma_N \end{aligned}$$

$\underline{n}$  est la normale sortante à  $\Omega$ . Le premier terme est celui de convection, le second celui de diffusion.



**Forme faible** Les espaces des champs cinématiquement admissibles  $\mathcal{S}$  et cinématiquement admissibles à zéro  $\mathcal{S}_0$  sont classiquement définis par :  $\mathcal{S} = \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid u = u_D \text{ sur } \Gamma_D\}$  et  $\mathcal{S}_0 = \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ . La formulation variationnelle du problème (1.7) s'écrit alors : Trouver  $u \in \mathcal{S}$  tel que :

$$\int_{\Omega} w(\underline{a} \cdot \underline{\nabla} u) \, d\Omega - \int_{\Omega} w \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \underline{\nabla} u) \, d\Omega = \int_{\Omega} w s \, d\Omega \quad \forall w \in \mathcal{S}_0$$

soit, en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{\Omega} w(\underline{a} \cdot \underline{\nabla} u) \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\nabla} w \cdot \underline{v} \underline{\nabla} u \, d\Omega = \int_{\Omega} w s \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} w h \, d\Gamma \quad \forall w \in \mathcal{S}_0 \quad (1.8)$$

### 3.1.2 Approximation de Galerkin

La résolution numérique de l'équation (1.7) introduit un nombre de Péclet numérique, par analogie avec celui défini pour l'équation de la chaleur. Il caractérise le rapport des phénomènes de diffusion ( $a$ ) et de convection ( $v$ ) pour une taille de maille  $h$ .

$$P_e = \frac{ah}{2v}$$

**Approximation linéaire par morceau en 1d** Dans le cas d'un problème mono-dimensionnel et d'une interpolation linéaire par morceaux sur un maillage supposé régulier de pas  $h$ , la forme discrète de (1.8) donne, avec  $s = 1$  et pour tout nœud non situé sur un bord :

$$\begin{aligned} a \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - v \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} &= 1 \\ \text{soit : } \left(\frac{a}{2h} - \frac{v}{h^2}\right)u_{j+1} + \frac{v}{h^2}u_j - \left(\frac{a}{2h} + \frac{v}{h^2}\right)u_{j-1} &= 1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Afin de comprendre la source des instabilités, considérons la solution exacte de 1.7, avec  $s = 1$  et  $\gamma = a/v$  :

$$u(x) = \frac{1}{a} \left( x - \frac{1 - e^{\gamma x}}{1 - e^{\gamma}} \right)$$

Cette solution exacte correspond à la relation de récurrence :

$$\alpha_1 u_{j-1} + \alpha_2 u_j + \alpha_3 u_{j+1} = 1$$

avec  $\alpha_1 = -a(1 + \coth P_e)/(2h)$   $\alpha_2 = a(\coth P_e)/h$   $\alpha_3 = a(1 - \coth P_e)/(2h)$ . On peut alors identifier un coefficient de viscosité  $\tilde{v}$  tel que la solution numérique corresponde à la solution exacte :  $v_{numer} = v + \tilde{v} = v + \beta v P_e$  et  $\beta = \coth P_e - 1/P_e$ .

$$a \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - (v + \tilde{v}) \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = 1 \quad (1.10)$$

**Asymétrie du gradient discret** L'ajout de viscosité (1.10) est équivalent à écrire :

$$\frac{1-\beta}{2}\left(a\frac{u_{j+1}-u_j}{h}\right) + \frac{1+\beta}{2}\left(a\frac{u_j-u_{j-1}}{h}\right) - \nu\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2} = 1 \quad (1.11)$$

et donc à remplacer  $a\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h}$  par  $\frac{1-\beta}{2}\left(a\frac{u_{j+1}-u_j}{h}\right) + \frac{1+\beta}{2}\left(a\frac{u_j-u_{j-1}}{h}\right)$ .

La discrétisation du terme de convection apparaît comme un somme pondérée des flux à droite et à gauche du nœud  $j$ , décentrant le schéma. C'est la base des méthodes dites « upwind ».

**Méthode de Galerkin et viscosité négative** De manière équivalente, la forme discrète (1.9) donne la solution exacte d'un problème, dont la viscosité serait :  $\nu_{Galerkin} = \nu - \tilde{\nu}\frac{\sinh^2 P_e}{P_e^2}$ . Lorsque le nombre de Péclet augmente, la viscosité numérique diminue et peut devenir négative. Pour  $P_e \simeq 1.35$ ,  $\nu_{Galerkin} = 0$  et dans ce cas l'existence d'une solution stable n'est pas garantie.

**Oscillations de la solution Galerkin** L'équation (1.9) permet de trouver deux constantes telles que  $u_j = C_1 + C_2\left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^j$ . Pour  $P_e > 1$ , cette solution numérique de l'équation de convection-diffusion homogène est évidemment oscillante.

La figure 1.3 présente la solution du problème (1.6) pour  $s = 1$ ,  $x \in [0, 1]$ , et 10 éléments. Les courbes pleines correspondent à la solution obtenue par la méthode de Galerkin, les courbes interrompues à la solution exacte. La qualité de la solution approchée dépend fortement du nombre de Péclet, et si celui-ci est trop grand, la solution devient oscillante.

### 3.1.3 Expressions asymétriques du gradient discret

Lorsque la convection devient le phénomène dominant (grand nombre de Péclet), la solution approchée obtenue par la méthode de Galerkin est de mauvaise qualité. Ceci est dû à l'utilisation d'une expression symétrique de la dérivée spatiale, alors que le problème est intrinsèquement non-symétrique, à cause du vecteur  $\underline{a}$ . Il est alors naturel de chercher à améliorer la solution numérique en augmentant le coefficient de viscosité, ou en utilisant une expression asymétrique de l'opérateur gradient. Ces deux idées aboutissent en fait au même résultat.

**Approximation upwind du terme de convection** Upwind, littéralement « sous le vent » désigne un type de méthodes utilisant une expression décentrée du gradient au nœud  $j$ . Selon le sens de la vitesse de convection, on ne considère qu'un coté du nœud, celui en amont :

$$a_j u_x(x_j) = \begin{cases} a_j \frac{u_j - u_{j-1}}{h} & \text{si } a_j \geq 0 \\ a_j \frac{u_{j+1} - u_j}{h} & \text{si } a_j < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

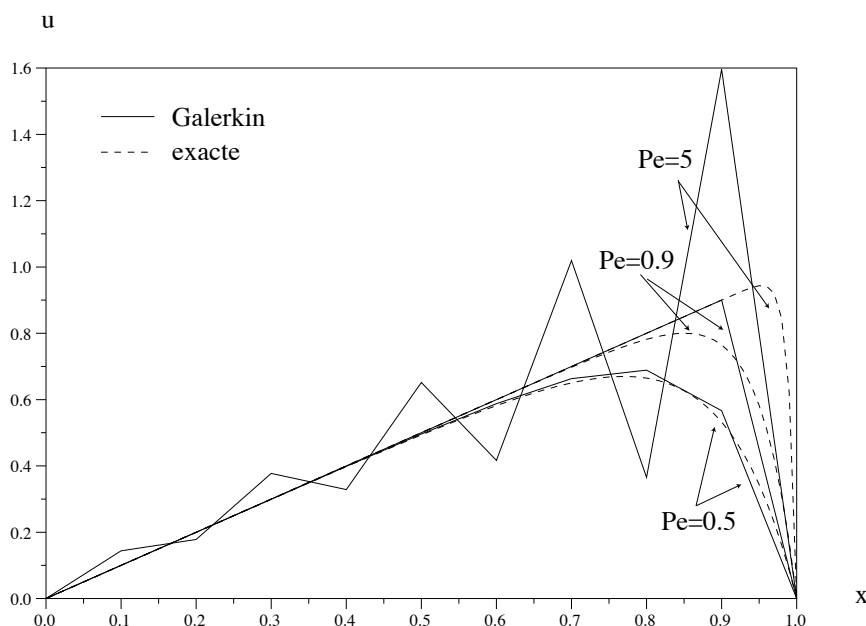


FIGURE 1.3 : Solutions du problème de convection (1.6)

En écrivant le développement de Taylor autour du nœud  $j$ , on constate que pour  $a_j \geq 0$  une méthode de type upwind remplace  $a_j u_x(x_j)$  par  $a_j \frac{u_j - u_{j-1}}{h} = a_j u_x(x_j) - \frac{a_j h}{2} u_{xx}(x_j) + O(h^2)$ . Le terme supplémentaire est analogue à un terme de viscosité. Un schéma d'upwind ajoute donc une viscosité  $\tilde{\nu} = a_j h/2$  au problème initial. Ceci permet effectivement de compenser la diminution de viscosité engendrée par la méthode de Galerkin, mais cette valeur est excessive. La valeur optimale obtenue par comparaison avec la solution exacte est en effet plus faible :  $\tilde{\nu}_{\text{opt}} = \beta a_j h/2$ .

**Fonctions de forme asymétriques** Constatant la viscosité numérique trop importante apportée par les schémas upwind, [80] propose d'utiliser des éléments possédant une interpolation asymétrique des inconnues. En donnant plus de poids à l'élément situé du côté amont du nœud, on peut aboutir à une méthode de Galerkin donnant de bons résultats en 1D. Malheureusement, employées sur des cas pluri-dimensionnels, ces méthodes aboutissent également à une viscosité numérique trop importante. Le même effet de dissymétrie peut être obtenu en modifiant la position des points d'intégration des éléments en fonction du nombre de Péclet [90]. Bien que donnant de bons résultats en 1D, cette méthode introduit trop de diffusion dans les directions orthogonales au courant dans les cas pluri-dimensionnels.

**Équivalence des deux solutions** Dans le cas d'une interpolation linéaire par morceaux, l'approximation upwind du terme de convection est équivalent à l'ajout d'une viscosité

supplémentaire  $\tilde{v}$  dans l'équation continue, lui même équivalent à utiliser un élément upwind dont les fonctions de forme sont asymétriques :

$$\begin{aligned} \int_0^L w a u_{,x} + w_{,x} (v + \tilde{v}) u_{,x} dx &= 0 \quad \forall w \\ \Leftrightarrow \int_0^L (w + \tilde{v} w_{,x}) a u_{,x} + w_{,x} v u_{,x} dx &= 0 \quad \forall w \\ \Leftrightarrow \int_0^L \bar{w} a u_{,x} + \bar{w}_{,x} v u_{,x} dx &= 0 \quad \forall w \text{ avec } \bar{w} = w + \tilde{v} w_{,x} \end{aligned}$$

La figure 1.4 présente les résultats obtenus en utilisant une approximation décentrée du terme de convection. L'approximation Upwind introduit une diffusion excessive. La méthode Streamline Upwind, qui utilise des fonctions de forme asymétriques, obtient des résultats bien meilleurs, sur cet exemple unidimensionnel.

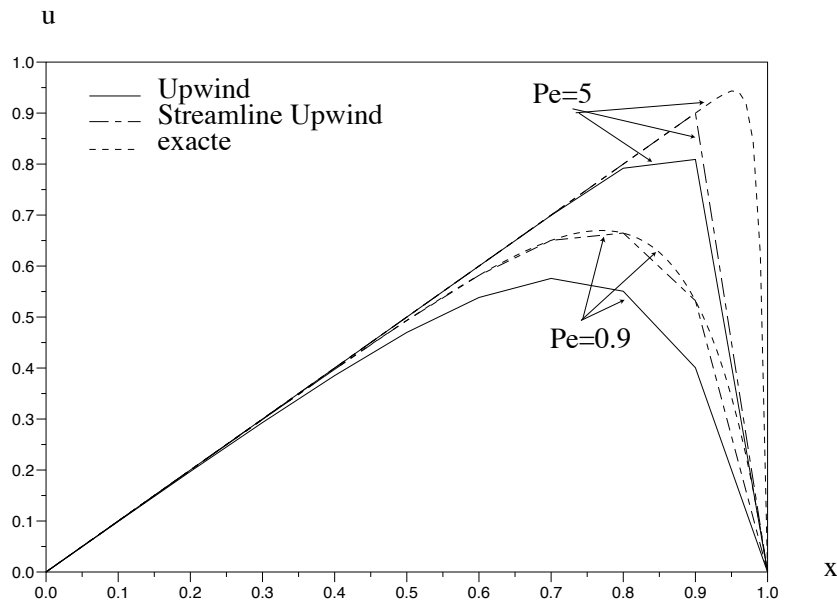


FIGURE 1.4 : Solutions du problème (1.6) obtenues avec des approximations asymétriques du terme de convection

### 3.1.4 Méthodes de stabilisation classiques

Si dans le cas 1D des méthodes simples aboutissent à de bons résultats, il n'en est pas de même en 2D ou 3D. L'ajout de viscosité numérique doit intervenir uniquement dans la direction du courant (c'est à dire dans la direction du vecteur  $\underline{a}$ ). Les techniques de stabilisation les plus répandues ajoutent à la forme faible (1.8) des termes qui augmentent

la diffusion dans les zones où la solution présente un fort gradient mais qui s'annulent si la solution est suffisamment régulière. Ces schémas sont appelés consistants parce qu'ils ne modifient pas l'ordre de l'approximation de Galerkin. Ils assurent qu'une solution de l'équation différentielle est aussi une solution de la forme faible. Pour cela, les termes supplémentaires doivent être fonction du résidu de l'équation différentielle et calculés sur l'intérieur des éléments.

Le problème de convection, diffusion et réaction consiste à trouver  $u$  tel que

$$L_{cdr}(u) = \underline{a} \cdot \underline{\nabla} u - \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \underline{\nabla} u) + \sigma u = s \quad (1.13)$$

Comme pour le problème de convection-diffusion,  $\underline{a}$  est le champ de convection,  $\underline{v}$  le coefficient de diffusion et  $\sigma$  un coefficient de réaction.  $L_{cdr}$  est la forme linéaire de convection-diffusion-réaction. Pour ce problème, on définit le résidu :

$$\mathcal{R}(u) = \underline{a} \cdot \underline{\nabla} u - \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \underline{\nabla} u) + \sigma u - s = L_{cdr}(u) - s \quad (1.14)$$

Les méthodes de stabilisation s'écrivent alors sous la forme générale suivante :

Trouver  $u$  tel que :

$$\int_{\Omega} (w \underline{a} \cdot \underline{\nabla} u + \underline{v} \underline{\nabla} w \underline{\nabla} u + w \sigma u) d\Omega + \sum_e \int_{\Omega_e} \mathcal{P}(w) \tau \mathcal{R}(u) d\Omega_e = \int_{\Omega} w \cdot s d\Omega + (w, h)_{\Gamma_N} \quad \forall w \in \mathcal{S}_0 \quad (1.15)$$

Le choix de  $\mathcal{P}(w)$  définit la méthode de stabilisation. La méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) [19] est très utilisée et correspond à  $\mathcal{P}(w) = \underline{a} \cdot \underline{\nabla} w$ , tandis que  $\mathcal{P}(w) = L_{cdr}(w) = \underline{a} \cdot \underline{\nabla} w - \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \underline{\nabla} w) + \sigma w$  définit la familles des méthodes GLS (Galerkin Least Square) [93].

La figure 1.5 présente les résultats obtenus avec les méthodes SUPG et GLS, pour le problème (1.13). Dans ce cas, la méthode GLS obtient le meilleur résultat.

**Choix du paramètre de stabilisation** Le choix du paramètre de stabilisation a suscité de nombreux travaux, démontrant l'existence de paramètres optimaux en 1D pour des éléments linéaires et quadratiques [39]. La valeur suivante sera employée dans la suite :

$$\tau = \left( \frac{2 \|\underline{a}\|}{h} + \frac{4\underline{v}}{h^2} + \sigma \right)^{-1}$$

### 3.1.5 Méthodes de stabilisation originales

Les méthodes de stabilisation pour les problèmes de transport dominés par la convection sont encore un domaine de recherche actif. Parmi les alternatives aux méthodes classiques, la méthode FIC (Finite Increment Calculus) vérifie l'équation (1.6) sur un volume de dimension finie, ce qui revient à lui substituer une équation d'ordre supérieur. Selon

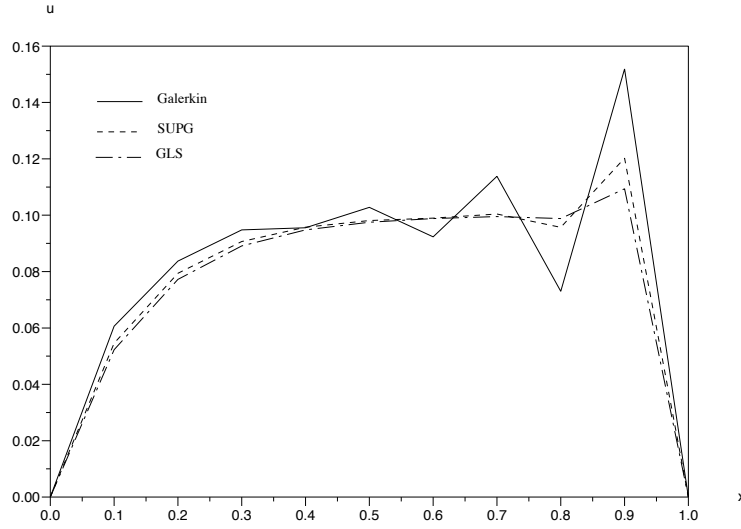


FIGURE 1.5 : Solutions du problème (1.13) obtenues avec les méthodes SUPG et GLS.  $a = 1, \nu = 10^{-2}, \sigma = 10$

ses créateurs, cela permet de retrouver les paramètres de stabilisation optimaux [151]. La variational multiscale method (VMS), proposée par [88], sépare une échelle dite soluble (par éléments finis) et une échelle dite "micro", qui n'est pas contenue dans l'approximation éléments finis. Avec certaines hypothèses sur la solution à l'échelle micro, cette décomposition aboutit à une forme similaire aux méthodes de stabilisation classiques, avec  $\mathcal{P}(w) = -L_{cdr}^*(w)$ ,  $L_{cdr}^*$  étant l'opérateur adjoint de  $L_{cdr}$ . Cette méthode est appelée SGS (Sub-Grid Scale) et donne des résultats très proches des méthodes SUPG ou GLS.

## 3.2 Une équation hyperbolique : problème de convection non stationnaire

### 3.2.1 Définition du problème

Par rapport à la section précédente, les problèmes traités ici font intervenir le temps. L'accent sera donc mis sur la discrétisation temporelle du problème continu :

$$\begin{aligned}
 u_t + \underline{\nabla} \cdot \underline{f}(u) &= s(\underline{x}, t) && \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\
 u(\underline{x}, 0) &= u_0(\underline{x}) && \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \\
 u &= u_D && \text{sur } \Gamma_D^{in} \times ]0, T[ \\
 -\underline{f} \cdot \underline{n} &= h && \text{sur } \Gamma_N^{in} \times ]0, T[
 \end{aligned} \tag{1.16a}$$

Où  $f$  est le flux de  $u$ . On peut généralement exprimer ce flux en fonction de  $u$  :  $\underline{f} = \underline{a}u$ . Si  $\underline{a}$  est à divergence nulle, on peut écrire le problème sous forme d'une équation de

convection :

$$\begin{aligned} u_t + \underline{a} \cdot \underline{\nabla} u &= s(\underline{x}, t) && \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ u(\underline{x}, 0) &= u_0(\underline{x}) && \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \\ u &= u_D && \text{sur } \Gamma_D^{in} \times ]0, T[ \\ -\underline{a} u \cdot \underline{n} &= h && \text{sur } \Gamma_N^{in} \times ]0, T[ \end{aligned}$$

Les équations ci dessus décrivent le transport de la quantité scalaire  $u$  par le champ de vitesse  $\underline{a}$ .

**Remarque 1 : Conditions aux limites** Pour un problème hyperbolique les conditions aux limites ne peuvent être définies que sur la portion de la frontière sur laquelle le flux est entrant. La frontière est donc décomposée en deux parties, selon le signe de  $\underline{a} \cdot \underline{n}$  :  $\partial\Omega = \Gamma^{in} \cup \Gamma^{out}$ ,  $\Gamma^{in} = \{\underline{x} \in \Gamma \mid \underline{a} \cdot \underline{n} < 0\}$  et  $\Gamma^{out} = \{\underline{x} \in \Gamma \mid \underline{a} \cdot \underline{n} > 0\}$ .

### 3.2.2 Discrétisation temporelle

Les méthodes en  $\theta$  sont une famille de méthodes pour l'intégration des équations différentielles du premier ordre, qui dérivent de la même expression :

$$\frac{u(t^{n+1}) - u(t^n)}{\Delta t} = \theta u_t(t^{n+1}) + (1 - \theta) u_t(t^n) + O((1/2 - \theta)\Delta t, \Delta t^2)$$

Pour certaines valeurs de  $\theta$ , cette méthode est connue sous un autre nom : Euler ( $\theta = 0$ ), Euler rétrograde ( $\theta = 1$ ), Crank-Nicholson ( $\theta = 1/2$ ). Seuls les schémas avec  $\theta \geq 1/2$  sont inconditionnellement stables. Employés pour l'équation de convection non stationnaire, ces schémas donnent :

$$\frac{u(t^{n+1}) - u(t^n)}{\Delta t} + \theta \underline{a} \cdot \underline{u}^{n+1} = \theta s^{n+1} + (1 - \theta) s^n - (1 - \theta) \underline{a} \cdot \underline{\nabla} u^n$$

D'autres méthodes (Lax-Wendroff, Leap-Frog) permettent d'atteindre des ordres supérieurs, en exprimant par la dérivée seconde en temps du développement de Taylor en fonction de dérivées spatiales. Les méthodes de Taylor-Galerkin, basées sur un développement de Taylor de  $\exp(-a\Delta t \frac{\partial}{\partial t})$  permettent également d'atteindre des ordres plus élevés.

### 3.2.3 Discrétisation spatiale par méthode de Galerkin

**Équation intégrale** La forme faible de l'équation (1.17a) s'écrit :

$$\int_{\Omega} w u_t \, d\Omega + \int_{\Omega} w (\underline{a} \cdot \underline{\nabla} u) \, d\Omega = \int_{\Omega} w s \, d\Omega$$

Les espaces de fonctions admissibles et admissibles à 0 sont définis par :

$$\mathcal{V} = \{w(\underline{x}) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid w(\underline{x}) = 0 \text{ sur } \Gamma_D^{in}\}$$

$$\mathcal{S}_t = \{u \mid u(\cdot, t) \in \mathcal{L}^2(\Omega), t \in [0, \infty[ \text{ et } u(\underline{x}, t) = u_D \text{ sur } \Gamma_D^{in}\}$$

et la forme faible du problème 1.16 est : pour tout  $t \in ]0, T[$  et  $w \in \mathcal{V}$ , trouver  $u \in \mathcal{S}_t$  tel que :

$$\int_{\Omega} (w \cdot u_{,t} + w \underline{a} \cdot \underline{\nabla} u) d\Omega + (w, \underline{u} \underline{a} \cdot \underline{n})_{\Gamma^{out}} = \int_{\Omega} (w \cdot s) d\Omega + (w, h)_{\Gamma^{in}} \quad \forall w \in \mathcal{S}_0 \quad (1.17)$$

### 3.2.4 Exemple de mise en œuvre

Le problème suivant illustre la difficulté à résoudre numériquement une équation de transport. Soit un domaine  $\Omega = \{x, x \in [0, 1]\}$  et un champ de convection  $\underline{a} = \underline{e}_x$  uniforme. Le problème de convection sans terme source s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{a} \cdot \underline{\nabla} u = 0$$

En  $\Gamma_{in} = \{x = 0\}$ , on impose  $u = 1$ . Deux conditions initiales différentes sont testées :

$$u(t = 0) = H(0.1 - x)$$

$$u(t = 0) = 0.5 * (1 + \cos(10\pi x)) * H(0.1 - x)$$

$H$  est la fonction de Heaviside, la première condition initiale est une fonction discontinue en espace, alors que la seconde est continue. Le maillage contient 100 nœuds, et le pas de temps est  $dt = 10^{-3}$ . Deux schémas sont utilisés pour la résolution, Euler implicite et Taylor-Galerkin d'ordre 2. La figure 1.6 présente les solutions obtenues. La forme de la solution  $u$  a clairement une importance. Pour un schéma temporel fixé, plus les gradients de la solution sont forts, plus celle-ci se dégrade rapidement. La solution est alors d'augmenter l'ordre de précision de l'intégration temporelle. Le résultat de ce test est à retenir pour la section 4, lors du choix d'une fonction auxiliaire.

### 3.2.5 Contrôle de la solution

Un aspect important de la résolution des équations de convection est la précision du schéma d'intégration temporelle. Cependant, la présence de discontinuités dans la solution peut générer des perturbations numériques. La solution exacte du problème peut être discontinue, même pour des problèmes linéaires, dans le cas de conditions aux limites discontinues, ou lors de l'avancée d'une fonction *level-set* discontinue par exemple. Dans certains cas, les oscillations numériques de la solution peuvent contredire la physique (masse volumique négative par exemple). Pour traiter de tels problèmes, les schémas numériques doivent contrôler l'allure de la solution.



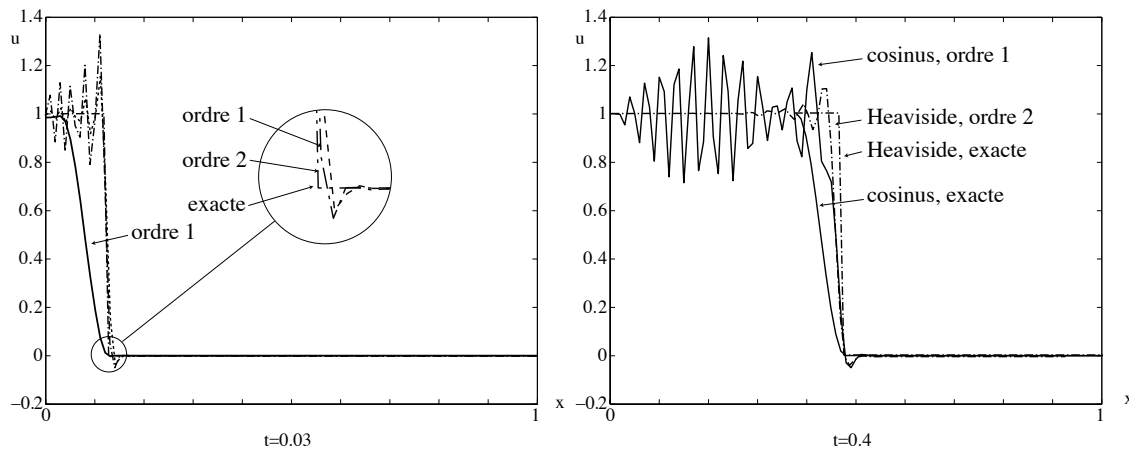


FIGURE 1.6 : Transport d'un scalaire  $u$ . Solutions à  $t = 0.03$  et  $t = 0.4$

Certains schémas conservent la monotonie de la solution. Il ne peut ainsi pas apparaître d'oscillations. Ces schémas introduisent en général une dissipation sur l'ensemble du domaine, ce qui est préjudiciable à la précision de la solution [69].

La solution physique d'une équation hyperbolique scalaire ne permet pas l'apparition de nouveaux extremums. Ainsi, la variation cumulée  $TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$  de l'inconnue  $u$  ne peut augmenter. C'est ce qu'assurent les schémas dits TVD (Total Variation Diminishing) [78]. Ils peuvent être vus comme des schémas aux différences centrées, auxquels on ajoute une dissipation calibrée de manière à assurer la monotonie sans compromettre la précision. Les méthodes modernes utilisent une dissipation numérique non linéaire dépendant du comportement local de la solution.

### 3.3 Une équation parabolique : problème de convection-diffusion non stationnaire

Les problèmes envisagés dans cette section font intervenir à la fois la diffusion, la convection et la dépendance temporelle. Ce sont des problèmes paraboliques, alors que les sections précédentes concernaient des problèmes elliptiques (convection-diffusion stationnaire) ou hyperboliques (convection non stationnaire). La présence de viscosité dans le problème régularise le comportement de l'écoulement, qui ne comporte pas de zones de discontinuités. Les conditions aux limites doivent être fixées sur l'ensemble du bord du domaine. Cependant, des zones à forts gradients peuvent exister, et la présence conjointe des opérateurs de dérivée temporelle et de double dérivée spatiale impose d'adapter les méthodes de stabilisation et de discrétisation pour obtenir des schémas à la fois précis et stables.

### 3.3.1 Définition du problème

À partir des données d'un champ de vitesse  $\underline{a}$ , d'un coefficient de diffusion  $\nu$ , d'une réaction  $\sigma$ , d'un terme source  $s$ , et de conditions initiales  $u_0$ , trouver  $u(\underline{x}, t)$  tel que :

$$u_t + \underline{a}\nabla u - \nabla \cdot (\nu \nabla u) + \sigma u = s \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \quad (1.18)$$

$$u(\underline{x}, 0) = u_0(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega \text{ pour } t = 0 \quad (1.19)$$

$$u = u_D \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (1.20)$$

$$\nu(\underline{n}\nabla)u = h \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (1.21)$$

### 3.3.2 Discrétisation temporelle

La présence d'une double dérivée en espace restreint le choix des méthodes possibles pour la discrétisation temporelle. En effet, selon l'ordre des fonctions d'interpolation employées, l'évaluation des dérivées spatiales est limitée, et par là même celui des dérivées temporelles. Les schémas les plus courants sont les méthodes  $\theta$ , les méthodes de Runge-Kutta, et les approximations de Padé de l'opérateur  $\partial \cdot / \partial t$ .

**Schémas multi-pas** Les schémas multi-pas sont souvent utilisés pour l'intégration en temps des problèmes non stationnaires. Ils sont basés sur la séparation de l'opérateur contenant les dérivées spatiales en une somme de plusieurs opérateurs, ici l'opérateur de convection et celui de diffusion-réaction. Cette séparation permet de choisir les algorithmes les plus adaptés pour traiter chacun des pas. L'évaluation des pas intermédiaires peut ainsi passer par l'utilisation d'un schéma dédié aux problèmes hyperboliques (ex. Taylor-Galerkin d'ordre 3) pour la phase de convection puis pour la phase de diffusion (ex. Cranck-Nicolson) [38].

### 3.3.3 Exemple de mise en œuvre

Le problème suivant illustre la résolution d'une équation de convection diffusion non stationnaire. Soit un domaine  $\Omega = \{x, x \in [0, 1]\}$  et un champ de convection  $\underline{a} = \underline{e}_x$  uniforme. Le problème de convection-diffusion sans terme source s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{a} \cdot \nabla u + \nu \nabla \cdot \nabla u = 0$$

En  $x = 0$ , on impose  $u = 0$ . La condition initiale est :

$$u(t = 0) = 0.5 * (1 + \cos(10\pi x)) * H(0.1 - x)$$

Le schéma temporel utilisé est le schéma de Taylor-Galerkin d'ordre 2, et la discrétisation spatiale est effectuée avec des éléments d'ordre 1. La figure 1.7 présente les résultats obtenus. On constate qu'il existe un domaine de stabilité de la méthode. Pour un nombre de Courant donné, la présence de viscosité ( $P_e$  faible) régularise la solution (premier graphe). Pour un nombre de Péclet faible, la convection devient négligeable. Pour un pas de temps

donné, il existe cependant limite inférieure pour le nombre de Péclet (graphe central), exprimée par la condition CFL (Courant Friedrich Lévy) pour l'équation de diffusion pure :  $2\nu\Delta t \leq h^2$ . Enfin, pour les grands nombres de Péclet (faible viscosité), la stabilité est limitée par le schéma d'intégration en temps, comme le montre le troisième graphe.

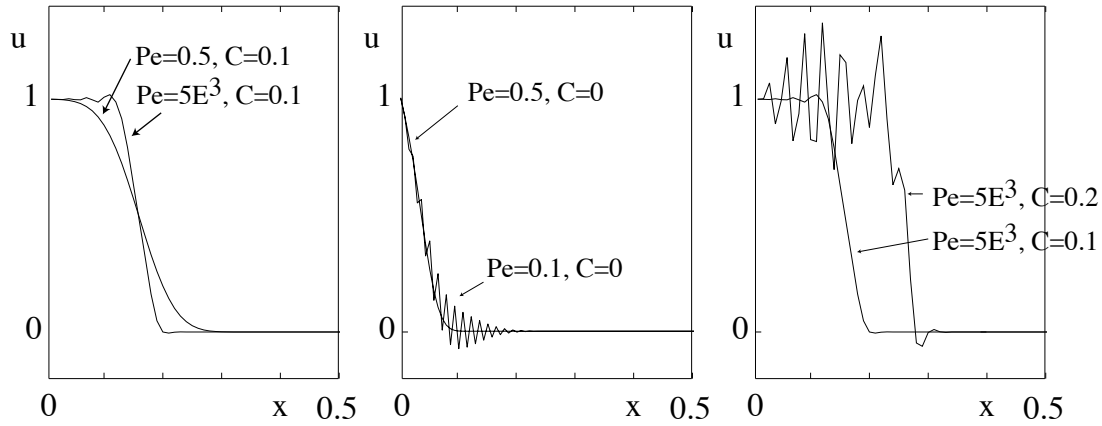


FIGURE 1.7 : Convection et diffusion d'un scalaire  $u$

### 3.4 Écoulement incompressible d'un fluide visqueux

Les écoulements incompressibles de fluides visqueux sont régis par les équations de Navier-Stokes, dont la résolution numérique fait apparaître deux difficultés. La première vient du terme de convection non linéaire, la seconde du problème de point selle résultant de l'action de la pression comme un multiplicateur de Lagrange sur la condition d'incompressibilité.

#### 3.4.1 Tenseur des contraintes pour un fluide newtonien

Dans un fluide au repos, les contraintes de cisaillement sont nulles et le tenseur des contraintes est sphérique et s'écrit :  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}}$ , avec  $p$  la pression dynamique. Dans un fluide en mouvement, la viscosité engendre des contraintes de cisaillement, et la pression est définie à partir de la trace du tenseur des contraintes, invariante par rotation. On décompose alors le tenseur en partie sphérique et partie déviatorique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}} \quad (1.22)$$

Pour un fluide newtonien, la partie déviatorique  $\underline{\underline{s}}$  du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  dépend linéairement du tenseur des déformations  $\underline{\underline{\nabla v}}$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \mu\underline{\underline{\nabla}}^S \underline{\underline{v}} + \lambda Tr(\underline{\underline{\nabla v}})\underline{\underline{I}} = -p\underline{\underline{I}} + \mu\underline{\underline{\nabla}}^S \underline{\underline{v}} + \lambda(\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}})\underline{\underline{I}}$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique et  $\lambda$  le second coefficient de viscosité. Pour un écoulement incompressible,  $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$  et la relation ci-dessus se réduit à la loi de Stokes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{I} + 2\mu\underline{\underline{\nabla}}^S \underline{v} \quad (1.23)$$

### 3.4.2 Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes décrivent l'effet dynamique des forces extérieures et intérieures (pression et viscosité) sur un fluide newtonien. La conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent alors, pour un fluide de masse volumique  $\rho$  :

$$\rho(\underline{v}_t + (\underline{v} \cdot \underline{\underline{\nabla}})\underline{v}) = \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{b} \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \quad (1.24a)$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \quad (1.24b)$$

**Normalisation par la densité** Dans le système (1.24), l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.24a) peut être divisée par la masse volumique pour obtenir :

$$\underline{v}_t + (\underline{v} \cdot \underline{\underline{\nabla}})\underline{v} = \underline{\underline{\nabla}} \cdot \left( -\frac{p}{\rho} \underline{I} + 2\nu \underline{\underline{\nabla}}^S \underline{v} \right) + \underline{b} \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \quad (1.25a)$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \quad (1.25b)$$

Dans la suite,  $p$  désignera la pression cinématique c'est-à-dire le quotient  $\frac{p}{\rho}$  apparaissant dans (1.25a).  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

### 3.4.3 Problème de Navier-Stokes stationnaire

La formulation des problèmes de Stokes ou Navier-Stokes en utilisant les inconnues de vitesse, pression et champ de contrainte (1.24) permet d'employer par la suite n'importe quelle relation de comportement. Ici, le fluide est supposé newtonien et la relation de comportement (1.23) s'applique. On peut donc éliminer l'inconnue  $\underline{\underline{\sigma}}$  des équations pour obtenir une formulation en vitesse et pression. L'hypothèse d'un écoulement stationnaire permet d'éliminer la dérivée temporelle du champ de vitesse dans les équations suivantes, et par conséquent d'éliminer dans un premier temps les difficultés liées à la gestion du temps. Le problème est de trouver les champs de vitesse  $\underline{v}$  et de pression  $p$  tels que :

$$-2\nu \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}^S \underline{v} + (\underline{v} \cdot \underline{\underline{\nabla}})\underline{v} + \underline{\underline{\nabla}} p = \underline{b} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.26a)$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.26b)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_D \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (1.26c)$$

$$-p\underline{n} + \nu(\underline{n} \cdot \underline{\underline{\nabla}})\underline{v} = \underline{t} \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (1.26d)$$

Ces problèmes sont des problèmes d'équilibre sous contrainte. Plusieurs méthodes existent pour traiter l'incompressibilité, ici la pression agit comme un multiplicateur de Lagrange pour imposer la condition (1.26b). La forme faible des équations (1.26) est obtenue par intégration par parties sur le domaine  $\Omega$ , après multiplication par les champs tests adéquats.

**Espaces d'admissibilité** L'équation (1.26c) définit l'espace d'admissibilité pour le champ de vitesse :

$$\underline{v} \in C_A = \{\underline{v} \in H^1(\Omega) | \underline{v} = \underline{v}_D \text{ sur } \Gamma_D\}$$

Le champ test correspondant  $\underline{w}$  appartient à l'espace vectoriel associé :

$$\underline{w} \in C_0 = \{\underline{w} \in H^1(\Omega) | \underline{w} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_D\}$$

La seule condition portant sur la pression est qu'elle soit de carré intégrable, soit :

$$p, q \in L^2(\Omega) \quad (1.27)$$

**Forme faible du problème** Trouver  $(\underline{v}, p) \in C_A \times L^2$  tels que  $\forall (\underline{w}, q) \in C_0 \times L^2$  :

$$\int_{\Omega} (2\nu \underline{\underline{\nabla}}^S \underline{w} \cdot \underline{\underline{\nabla}}^S \underline{v}) + \underline{w} \cdot \nu \underline{\underline{\nabla}} \underline{v}) - p \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{w}) \, d\Omega = \int_{\Omega} (\underline{w} \cdot \underline{b}) \, d\Omega + (\underline{w}, \underline{t})_{\Gamma}$$

$$\int_{\Omega} (q \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{v}) \, d\Omega = 0$$

**Formulation par Éléments Finis** En choisissant une interpolation pour les champs de vitesse et de pression, le problème s'écrit de manière matricielle :

$$\begin{pmatrix} K + C(\underline{v}) & G \\ G^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\underline{v}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Les sous-matrices  $K$ ,  $C$ ,  $G$  et  $G^T$  correspondant respectivement aux opérateurs de diffusion, convection, gradient et divergence.

### 3.4.4 Traitements particuliers liés à l'hypothèse d'incompressibilité

Les formulations en variables primitives (vitesse et pression), appelées formulations mixtes présentent des difficultés numériques : la pression est un multiplicateur de Lagrange destiné à imposer  $\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{v} = 0$ . Le problème est alors un problème de point selle, qui nécessite certaines précautions numériques. En remplaçant le multiplicateur de Lagrange par un terme de pénalisation, on peut éliminer la pression des équations et se ramener à un problème de minimum, plus simple à résoudre. En utilisant des éléments mixtes dont les interpolations de la vitesse et de la pression sont judicieusement choisies, le problème reste un problème de point selle, mais est de rang plein. Enfin, il est possible de résoudre le problème avec les mêmes fonctions de forme pour les deux inconnues, en ajoutant un terme de stabilisation à la forme faible des équations. Les solutions calculées avec deux dernières méthodes sont comparées sur la figure 1.9. Le problème résolu est le problème de Stokes ((1.26) dans lequel on néglige le terme de convection) entre deux plans parallèles.

**Pénalisation** En choisissant un paramètre  $\lambda$  grand, l'équation  $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$  peut être remplacée par  $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = -\frac{p}{\lambda}$ , ce qui, injecté dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, donne :

$$-2\underline{v} \cdot \underline{\underline{\nabla}}^S \underline{v} + (\underline{v} \cdot \underline{\underline{\nabla}}) \underline{v} - \lambda \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) = \underline{b}$$

La matrice résultant de la discrétisation par éléments finis du terme  $\lambda \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) = \lambda \underline{\nabla}^2 \underline{v}$  a la même structure que celle obtenue pour le terme de viscosité. Par conséquent, la pénalisation doit imposer  $K^\lambda \underline{v} = 0$  sans imposer  $\underline{v} = \underline{0}$ . Pour cela, la matrice  $K^\lambda$  est évaluée avec un nombre de points de Gauss inférieur à celui utilisé pour calculer la matrice de viscosité, afin d'être de rang inférieur.

La présence du terme de pénalisation entraîne néanmoins des difficultés : trop faible, la condition d'incompressibilité n'est pas imposée, trop élevé, il détériore le conditionnement de la matrice. Cette méthode n'est donc pas retenue pour ces travaux. Il faut cependant remarquer que dans le cas où les degrés de liberté en pression coïncident avec les points de Gauss utilisés pour le calcul de  $K^\lambda$ , on montre l'équivalence entre cette méthode de pénalisation et l'utilisation d'éléments mixtes [90]. Les références [64, 94, 129, 192] contiennent un exposé détaillé de la méthode, et des détails concernant l'implantation.

**Interpolation mixte vitesse-pression** On peut montrer que si la matrice  $G$  est de rang plein, la matrice du problème (1.28) est non-singulière. Pour assurer cela, les interpolations de vitesse et de pression doivent vérifier certaines conditions, connues sous le nom de condition LBB (d'après Ladyzhenskaya, Babuška et Brezzi) ou condition *inf-sup*. Une condition nécessaire mais non suffisante est que l'espace de recherche de la pression soit de dimension inférieure à celui de la vitesse. La stabilité est en général évaluée par des tests numériques ([8, 17]), étant donné la complexité de la preuve mathématique. Si l'interpolation choisie ne vérifie pas ces conditions, le champs de vitesse pourra converger mais la pression restera oscillante. Les interpolations des champs de vitesse et de pression les plus courantes sont illustrées sur la figure 1.8.

**Stabilisation PSPG** Une autre alternative à l'emploi d'éléments mixtes est d'ajouter un terme dans l'équation d'incompressibilité permettant d'utiliser la même interpolation pour les champs de vitesse et de pression. Cette méthode est connue comme stabilisation PSPG [193], elle est en effet analogue à une technique de stabilisation, puisqu'il s'agit d'ajouter à la formulation faible une pondération du résidu :

$$\int_{\Omega} (q \underline{\nabla} \cdot \underline{v}) \, d\Omega - \sum_e \tau_{PSPG} (\underline{\nabla} q^h, \mathcal{R}(\underline{v}^h))_{\Omega_e} = 0$$

### 3.4.5 Stabilisation de la formulation Éléments Finis

Le terme non linéaire et non symétrique de convection impose de stabiliser la formulation de Galerkin standard. Comme dans le cas d'une équation de convection, plusieurs choix sont possibles, parmi lesquels on pourra mentionner les techniques classiques

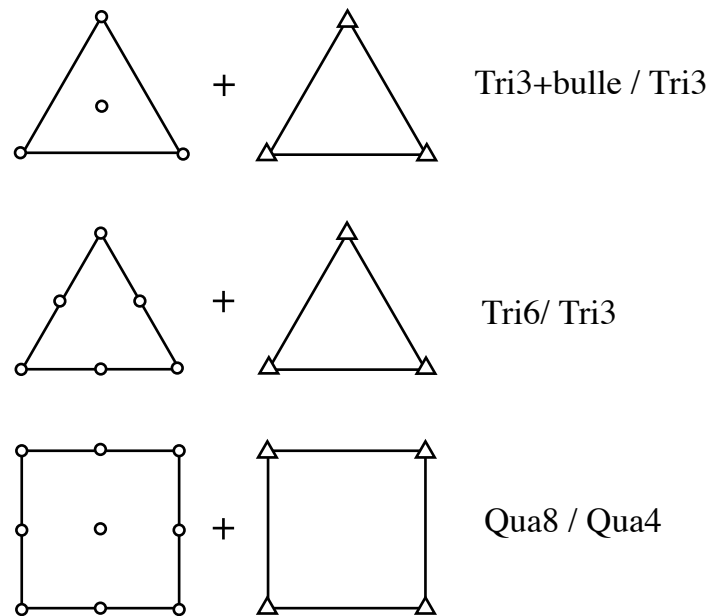


FIGURE 1.8 : Paires d'interpolations vitesse-pression définissant des éléments compatibles LBB

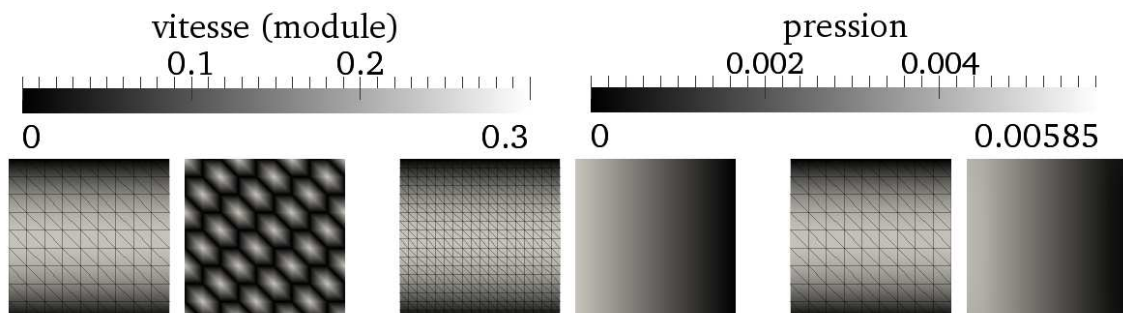


FIGURE 1.9 : Solutions (vitesse et pression) du problème de Stokes obtenues avec les éléments Tri3-Tri3, Tri6-Tri3, Tri3-Tri3 + PSPG

basées sur une pondération du résidu : SUPG ([19, 96, 95]), GLS ([92]), LS ([156]) ou SGS ([91]). On pourra trouver une discussion concernant ces méthodes dans [23] ou consulter les travaux de Hughes [91] qui établit un lien entre fonctions bulles et stabilisation.

### 3.4.6 Problème de Navier-Stokes non stationnaire

Une grande partie des remarques faites dans le cas stationnaire s'appliquent dans le cas où la dérivée temporelle de la vitesse n'est pas négligée. Seules les différences importantes seront soulignées. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - 2\nu \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}^S \underline{v} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} + \underline{\nabla} p &= \underline{b} \text{ dans } \Omega \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{v} &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \underline{v} &= \underline{v}_D \text{ sur } \Gamma_D \\ -p \underline{n} + \nu (\underline{n} \cdot \underline{v}) \underline{v} &= \underline{t} \text{ sur } \Gamma_N \\ \underline{v}(t=0) &= \underline{v}_0 \text{ tel que } \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_0 = 0 \end{aligned}$$

Les espaces d'admissibilité sont les produits des espaces précédemment définis par l'intervalle  $[0, T]$  :

$$\begin{aligned} \underline{v} \in C_A &= \{ \underline{v} \in H^1(\Omega) \mid \underline{v} = \underline{v}_D \text{ sur } \Gamma_D \} \times [0, T] \\ \underline{w} \in C_0 &= \{ \underline{w} \in H^1(\Omega) \mid \underline{w} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_D \} \times [0, T] \\ p, q \in Q &= L^2(\Omega) \times [0, T] \end{aligned}$$

Les espaces contenant les solutions approchées sont construits de la même manière, et la formulation faible aboutit à : Trouver  $(\underline{v}^h, p^h) \in C_A^h \times Q$  tels que  $\forall (\underline{w}^h, q^h) \in C_0^h \times Q$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\underline{w}^h \cdot \frac{\partial \underline{v}^h}{\partial t} + 2\nu \underline{\nabla}^S \underline{w}^h \cdot \underline{\nabla}^S \underline{v}^h) + \underline{w}^h \cdot \underline{v}^h \underline{\nabla} \underline{v}^h - p^h \underline{\nabla} \cdot \underline{w}^h) \, d\Omega &= \int_{\Omega} (\underline{w}^h \cdot \underline{b}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{w}^h \cdot \underline{t} \, d\Gamma \\ \int_{\Omega} (q^h \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^h) \, d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

Le problème matriciel associé comporte donc une matrice de masse, en plus des matrices déjà détaillées. Son expression dépend bien entendu du schéma temporel choisi.

### 3.4.7 Méthodes de discrétisation à pas fractionné

Les méthodes à pas fractionné permettent d'éviter le problème de point selle en séparant le traitement des différents opérateurs des équations. On pourra consulter [21, 191, 192] pour un exposé détaillé de ces méthodes.



**Projection de Chorin-Temam** Le principe de la projection de Chorin-Temam est de calculer séparément les champs de vitesse et de pression, en introduisant une vitesse intermédiaire qui est projetée sur l'espace des fonctions à divergence nulle :

*premier pas* : calculer  $\underline{v}_{int}^{n+1}$  par :

$$\begin{cases} \frac{\underline{v}_{int}^{n+1} - \underline{v}^n}{\Delta t} - \underline{\nu} \nabla^2 \underline{v}^{**} + (\underline{v}^* \cdot \nabla) \underline{v}^{**} = \underline{b}^{n+1} & \text{dans } \Omega \\ \underline{v}_{int}^{n+1} = \underline{v}_D^{n+1} & \text{sur } \Gamma_D \end{cases} \quad (1.29)$$

Les vitesses  $\underline{v}^*$  et  $\underline{v}^{**}$  doivent être choisies en fonction du traitement à apporter à la non linéarité :

$$\begin{aligned} \underline{v}^* = \underline{v}^{**} = \underline{v}^n & \quad \text{Euler explicite} \\ \underline{v}^* = \underline{v}^n \text{ et } \underline{v}^{**} = \underline{v}^{n+1} & \quad \text{semi-implicite} \\ \underline{v}^* = \underline{v}^{**} = \underline{v}^{n+1} & \quad \text{Euler implicite} \end{aligned}$$

*second pas* : calculer  $\underline{v}^{n+1}$  et  $p^{n+1}$  par :

$$\begin{cases} \frac{\underline{v}^{n+1} - \underline{v}_{int}^{n+1}}{\Delta t} \nabla p^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \underline{v}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{n} \cdot \underline{v}^{n+1} = \underline{n} \cdot \underline{v}_D^{n+1} & \text{sur } \Gamma_D \end{cases} \quad (1.30)$$

## 4 Écoulements incluant une discontinuité

Les exemples d'écoulements nécessitant de prendre en compte une discontinuité sont nombreux. La discontinuité peut être due à la présence de deux fluides aux propriétés différentes, de particules solides au sein de l'écoulement ou d'une frontière mobile. Il est alors nécessaire de distinguer au moins deux parties du domaine. Cette distinction peut se faire de manière explicite, l'interface est alors décrite explicitement par les nœuds qui lui sont attachés. C'est le cas par exemple des méthodes ALE [148] ou éléments finis espace-temps [54], pour lesquelles le domaine se déforme au cours du temps. Pour ces méthodes le suivi de l'interface entre fluides est très semblable au suivi d'une interface fluide-solide, puisque la position des nœuds correspond à la position de l'interface. La ségrégation peut également être implicite, faisant appel à une fonction auxiliaire, définie sur le maillage, ou les éléments, contenant au minimum une information permettant d'identifier le côté de l'interface courant. Les descriptions eulériennes du mouvement ont recours à ce type de méthode, les nœuds du maillage étant fixes, ils ne peuvent suivre une interface mobile.

## 4.1 Méthodes explicites

Ces méthodes décrivent l'interface par la position des particules qui s'y trouvent. L'interface est donc contenue dans le maillage utilisé, et son mouvement impose d'utiliser une formulation à maillage mobile. L'avantage d'une formulation lagrangienne [6, 146, 169] est que le problème d'écoulement est auto-adjoint. Cependant, les distorsions importantes du maillage peuvent faire préférer une méthode ALE [15, 83, 168], dont l'implantation est plus compliquée, mais qui permettent une plus grande latitude de mouvements. De ce point de vue, les méthodes particulières (PFEM, MFEM), en reconstruisant la connectivité à chaque pas ont un avantage certain. Cependant, pour les raisons déjà évoquées, nous préférons une méthode éléments finis. Les méthodes explicites faisant appel à un maillage mobile, seules les méthodes implicites (à maillage fixe) sont présentées ici.

## 4.2 Méthodes implicites

### 4.2.1 Méthode de volume de fluide

La méthode VOF (Volume Of Fluid) [84], est très populaire dans les simulations d'écoulements à surface libre. L'information auxiliaire utilisée est le taux de remplissage de chaque cellule du maillage. L'évolution de celle-ci est régie par une équation de convection. La résolution de cette équation de transport peut être effectuée par le schéma numérique utilisé pour les équations de l'écoulement, ce qui permet d'intégrer la méthode VOF en réutilisant des schémas déjà développés. L'information de position de la surface libre étant contenue uniquement au niveau élémentaire –dans les cellules dont le taux de remplissage est compris entre 0 et 1– la description de la surface libre sera d'autant plus précise qu'il y aura peu d'éléments impliqués (ils formeront alors une bande étroite autour de la frontière). La résolution numérique de l'équation de transport s'accompagne en général d'une diffusion excessive, ce qui provoque un élargissement de la bande d'éléments partiellement remplis, nuisant à la précision du repérage. Plusieurs stratégies existent pour éviter cela, on pourra consulter de manière non exhaustive les travaux suivants : *donor-acceptor* [84], la méthode SLIC [22] ou la méthode VOF sélective [184]. Leur principe est de contrôler la variation du taux de remplissage des éléments entre deux pas de temps, en agissant sur les flux entre éléments de la fonction auxiliaire. Malgré des travaux récents [189, 190], le calcul de la courbure de la surface est toujours un problème. Néanmoins, la méthode VOF est l'objet de développements nouveaux [105, 106, 127, 128].

### 4.2.2 Méthode de marqueurs de cellules

La méthode MAC (pour Marker And Cell) [76, 77, 200] est issue de travaux antérieurs sur la méthode PIC [43] et emploie des particules imaginaires pour marquer la surface libre. C'est une méthode utilisant les différences finies, ainsi les volumes élémentaires sont désignés par "cellules". Les particules fictives sont transportées par l'écoulement, et si une cellule en contient au moins une, elle est considérée comme remplie de fluide.

L'incompressibilité de l'écoulement, malmenée par la méthode MAC, est assurée dans une variante, nommée SMAC [1]. Certaines limitations furent levées par d'autres travaux, [32, 166] concernant les pas de temps limités, et [85, 147] pour les conditions en effort sur la surface libre. Les récentes évolutions de la méthode MAC permettent de calculer précisément les normales et courbures à l'interface [186]. Cependant, cette méthode est attachée aux différences finies, et les calculs de la géométrie de l'interface font intervenir de nombreuses opérations pour chaque cellule [138].

#### 4.2.3 Méthode des lignes de niveau (*Level-Set*)

Dans cette méthode, une fonction auxiliaire scalaire  $\phi$  permet de repérer deux fluides et l'interface entre eux-ci. Présentée à l'origine par Osher et Sethian [155], plusieurs livres exposent en détail la méthode et ses applications [154, 181, 183]. À une constante près, on peut supposer que l'interface correspond à la ligne de niveau 0 de  $\phi$  :

$$\phi(\underline{x}, t) \begin{cases} > 0 \forall \underline{x} \in \Omega_1 \\ = 0 \forall \underline{x} \in \Gamma \\ < 0 \forall \underline{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1.31)$$

L'avantage de ce type de méthode est un calcul très simple des normales et courbures de l'interface :

$$\underline{n} = \frac{\underline{\nabla}\phi}{\|\underline{\nabla}\phi\|} \quad \kappa = \underline{\nabla} \cdot \underline{n} \quad (1.32)$$

L'interface évoluant avec l'écoulement, les valeurs de la fonction  $\phi$  doivent être transportées par le champ de vitesse  $\underline{v}$  :

$$\frac{\partial\phi(\underline{X}, t)}{\partial t} = 0 \forall \underline{x} \in \Gamma \text{ soit } \frac{\partial\phi(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\phi = 0 \quad (1.33)$$

Le choix de la fonction distance (signée) à l'interface pour  $\phi$  permet de simplifier encore le calcul de la normale ( $\underline{n} = \underline{\nabla}\phi$ ), et d'obtenir de meilleurs résultats qu'avec d'autres fonctions discontinues (Heaviside, ...) [144].

La résolution numérique de l'équation de transport ci-dessus est sujette aux erreurs déjà décrites, d'autant plus qu'aucune diffusion ne vient limiter les instabilités. En présence de fortes variations de la courbure de l'interface, ou de forts gradients dans le champ  $\underline{v}$ , le transport de  $\phi$  peut être compliqué, et les propriétés de  $\phi$  sont éventuellement perdues [20]. Le schéma numérique peut également faire apparaître du bruit ou de forts gradients, qui sont préjudiciables pour l'ensemble de la résolution. Une ré-initialisation est donc parfois nécessaire. Plusieurs méthodes existent : *Crossing Times* [153] *Fast Marching Method* [182, 188]. Nous retenons une approche variationnelle [12]. Les références [108, 167, 207] contiennent un exposé de travaux récents utilisant la méthode level-set. L'inconvénient majeur de cette méthode est sa difficulté à conserver la masse (ou de manière équivalente, le volume dans le cas d'un écoulement incompressible). La méthode des lignes de niveau particulières (Particle Level-set) [42] combine une fonction auxiliaire et des particules lagrangiennes pour corriger ce défaut.

## 5 Conclusions pour ces travaux

La simplicité d'un maillage fixe pour la discrétisation des équations de la mécanique des fluides est un avantage certain face aux méthodes dont le maillage est mobile et potentiellement progressivement dégradé. Les oscillations et instabilités associées aux méthodes à maillage fixe sont efficacement corrigées par l'emploi de techniques de stabilisation du schéma numérique, qui permettent d'obtenir une solution de qualité. La présence d'un terme de convection dans les équations décrivant le type d'écoulement considéré ici est associée à la méthode SUPG. La présence de discontinuités dans les champs inconnus est écartée, soit par le caractère de l'écoulement, soit par le choix de fonctions continues. Lorsque le problème considéré fait intervenir une dérivée temporelle des inconnues, celle-ci sera approchée par une méthode  $\theta$ . Au moins pour ces travaux, la précision est jugée suffisante. L'approche de problèmes d'interaction fluide-structure par une description eulérienne du fluide introduit *a priori* une interface dans l'écoulement, et donc une fonction auxiliaire. Le caractère particulier de cette interface, dont on dispose d'une description lagrangienne, permet de s'affranchir du traitement difficile d'une équation de convection pure.



# Chapitre 2

## Méthodes multi-échelles

*Le but de ce chapitre est de faire l'inventaire des méthodes multi-échelles adaptées ou adaptables aux problèmes d'écoulement et d'interaction fluide-structure. Pour cela, nous explorons tant les méthodes développées pour les milieux fluides que celles destinées aux solides. Ces méthodes sont regroupées en quatre groupes : celles basées sur la théorie de l'homogénéisation classique, les méthodes basées sur un enrichissement local puis les méthodes multigrilles et enfin les méthodes dérivant d'une décomposition de domaine.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Méthodes basées une décomposition analytique de la solution . . . . .</b>	<b>39</b>
1.1	Méthodes d'homogénéisation du matériau . . . . .	39
1.2	Méthode variationnelle Multi-échelle . . . . .	41
1.2.1	Équation scalaire de convection-diffusion-réaction . . . . .	41
1.2.2	Séparation de deux échelles . . . . .	41
1.2.3	Résolution de l'échelle fine . . . . .	42
1.2.4	Prise en compte de l'effet des petites échelles sur les grandes . . . . .	43
1.2.5	Bilan . . . . .	43
1.3	Méthodes SDA et X-FEM . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Méthodes multigrilles . . . . .</b>	<b>44</b>
2.1	Cycle en V . . . . .	44
2.2	Cycle en W . . . . .	45
2.3	Définition des opérateurs sur l'ensemble des grilles . . . . .	46
2.4	Parallélisation des méthodes multigrilles . . . . .	46

---

<b>3</b>	<b>Méthodes basées sur une décomposition de domaine . . . . .</b>	<b>46</b>
3.1	Décompositions de domaine avec recouvrement . . . . .	46
3.2	Décompositions de domaine sans recouvrement . . . . .	46
3.2.1	Une méthode de condensation primale : BDD . . . . .	48
3.2.2	Une méthode de condensation duale : FETI . . . . .	49
3.2.3	Méthode de condensation mixtes . . . . .	50
3.2.4	Approche micro-macro et méthode LaTIn . . . . .	50
3.3	Application aux problèmes types de la mécanique des fluides . . . . .	52
3.3.1	Problème de point selle . . . . .	52
3.3.2	Cas non symétriques . . . . .	55
3.3.3	Traitement des non-linéarités . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Conclusions pour ces travaux . . . . .</b>	<b>55</b>

---

# 1 Méthodes basées une décomposition analytique de la solution

Les trois méthodes décrites ci-dessous sont basées sur une séparation analytique des inconnues, que l'on peut attacher à une séparation d'échelles. Cette séparation peut être effectuée dans le but d'accéder à une échelle supérieure, c'est le cas de la théorie de l'homogénéisation. Inversement, la séparation d'échelles peut aussi être réalisée dans le but d'accéder à une échelle plus fine. La méthode variationnelle multi-échelle considère ainsi que la solution éléments finis n'est pas exacte, et doit être complétée d'un champ qualifié de microscopique, champ dont l'action au niveau macroscopique est de prendre en compte les phénomènes ayant lieu à plus petite échelle, par exemple la turbulence. Enfin, les méthodes d'enrichissement, peuvent être vues comme des méthodes multi-échelles. Elles associent en effet une description macroscopique du milieu, et une description que l'on peut qualifier de microscopique, puisqu'attachée à un phénomène éminemment local tel qu'une fissure.

## 1.1 Méthodes d'homogénéisation du matériau

Ces méthodes ne sont exactes que dans deux cas, celui d'un matériau parfaitement aléatoire ou d'un matériau parfaitement périodique. Dans le premier cas, la méthode auto-cohérente [81] consiste à trouver un matériau homogène tel que l'homogénéisation de ce matériau et d'une inclusion aboutisse au même matériau homogène.

Le cas des matériaux composites est à rapprocher du cas des matériaux périodiques. Leur constitution en empilement de plis, eux mêmes constitués de fibres et de matrice permet de distinguer des volumes élémentaires représentatifs, juxtaposés pour former le matériau. La méthode asymptotique [176] est une méthode exacte et fournit la solution exacte dans le cas d'un milieu infini. Le résultat est néanmoins correct pour un milieu fini si l'on exclut une zone de quelques volumes élémentaires représentatifs (VER) près des bords.

La séparation des échelles est réalisée sur la variable de position :  $\underline{OM} = \underline{X} + \underline{y}$ , où  $\underline{X}$  repère la position du VER, et  $\underline{y}$  la position dans le VER. Ces deux variables ont donc un ordre de grandeur d'écart, noté  $\varepsilon$ , rapport de la taille du VER à la longueur caractéristique de la structure :  $\varepsilon = \frac{l}{L}$ . On réalise ensuite un développement asymptotique du champ de déplacement  $\underline{u}$  :

$$\underline{u}(\underline{X}, \underline{y}) = \underline{u}_0(\underline{X}, \underline{y}) + \varepsilon \underline{u}_1(\underline{X}, \underline{y}) + \varepsilon^2 \underline{u}_2(\underline{X}, \underline{y}) + O(\varepsilon^2)$$

Toutes les fonctions sont considérées comme périodiques en  $\underline{y}$ , de période  $l$ , suite à l'hypothèse de périodicité du matériau. On calcule alors les dérivées spatiales en effectuant



une mise à l'échelle ( $\underline{Y} = \frac{1}{\varepsilon} \underline{y}$ ) :

$$\begin{aligned}\underline{\nabla} \square &= \frac{\partial \square}{\partial \underline{X}} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \square}{\partial \underline{Y}} \\ \underline{\varepsilon} &= \underline{\varepsilon}_X + \frac{1}{\varepsilon} \underline{\varepsilon}_Y \\ \underline{\nabla} \cdot &= \underline{\nabla} \cdot \underline{X} + \frac{1}{\varepsilon} \underline{\nabla} \cdot \underline{Y}\end{aligned}$$

La résolution de l'équation d'équilibre  $\underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \underline{f} = 0$  ( $\underline{\sigma}$  est le tenseur des contraintes et  $\underline{f}$  sont les efforts imposés) donne, suivant les ordres de  $\varepsilon$  :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{Y} K \underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}_0) = 0 \quad (2.1)$$

$$\int_{\text{VER}} (\underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}_1) + \underline{\varepsilon}_X(\underline{u}_0)) K \underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}^*) = 0 \quad \forall \underline{u}^* \text{ y-périodique} \quad (2.2)$$

$$\text{condition d'existence de } \underline{u}_2 : \int_{\text{VER}} (\underline{\nabla} \cdot \underline{X} K (\underline{\varepsilon}_X(\underline{u}_0) + \underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}_1))) = 0 \quad (2.3)$$

Les problèmes (2.1)-(2.3) sont de la forme :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{Y} K \underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}_i) + g_i = 0 \quad (2.4)$$

Ces problèmes admettent une solution  $\underline{u}_i$  si et seulement si  $\langle g_i \rangle = 0$ ,  $\langle \rangle$  désignant la moyenne sur un VER.

Le problème en  $\varepsilon^{-2}$  (2.1) admet clairement une solution. Celle-ci est un déplacement de solide pour la variable  $Y$ , limité à une translation par l'hypothèse de périodicité. On a donc  $\underline{u}_0 = \underline{u}_0(\underline{X})$  et on note  $\underline{\varepsilon}_0 = \underline{\varepsilon}_X(\underline{u}_0)$ .

Le problème en  $\varepsilon^{-1}$  (2.2) admet une solution car :  $\langle \underline{\nabla} \cdot \underline{Y} K \underline{\varepsilon}_X(\underline{u}_0) \rangle = 0$  et par périodicité de  $K \underline{\varepsilon}_0$  et antipériodicité de  $\underline{n}$ ,  $\int_{\partial \text{VER}} K \underline{\varepsilon}_X(\underline{u}_0) \cdot \underline{n} = 0$ . On peut donc trouver un  $\underline{u}_1(\underline{X}, \underline{Y})$  tel que :

$$\int_{\text{VER}} (K \underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}_1) + K \underline{\varepsilon}_X(\underline{u}_0)) : \underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}^*) = 0 \quad \forall \underline{u}^* \quad (2.5)$$

On peut encore exprimer un opérateur de localisation reliant la déformation  $\underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}_1)$  à la déformation macroscopique  $\underline{\varepsilon}_X(\underline{u}_0)$  :

$$\underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}_1) = H \underline{\varepsilon}_X(\underline{u}_0) \quad (2.6)$$

La condition d'existence d'une solution  $\underline{u}_2$  au problème en  $\varepsilon^0$  (2.3) fournit :

$$\langle K \underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}_1) + K \underline{\varepsilon}_X(\underline{u}_0) \rangle + \langle \underline{f} \rangle = 0 \quad (2.7)$$

ce qui est un problème macroscopique concernant le déplacement  $\underline{u}_0$  :

$$\langle K(\mathbb{I}_d + H) \underline{\varepsilon}_0 \rangle + \langle \underline{f} \rangle = 0 \quad (2.8)$$

Le problème (2.7) est l'expression de l'équilibre des contraintes macroscopiques, définies comme une moyenne sur le VER de la contrainte locale au premier ordre :

$$\underline{\sigma}^M = \langle \underline{\sigma}^m \rangle = \langle K \underline{\varepsilon}^m \rangle = \langle K \underline{\varepsilon}_Y(\underline{u}_1) + K \underline{\varepsilon}_X(\underline{u}_0) \rangle \quad (2.9)$$

$$\underline{\sigma}^M = \langle K(\mathbb{I}_d + H) \underline{\varepsilon}_0 \rangle \quad (2.10)$$

## 1.2 Méthode variationnelle Multi-échelle

La méthode variationnelle Multi-échelle (en anglais Variational Multiscale Method ou VMS) initiée dans [88, 91] propose un cadre général pour les phénomènes multi-échelles. Les inconnues sont *a priori* décomposées en parties macro et micro, l'une des deux échelles étant supposée non résoluble numériquement sur la grille employée pour la discrétisation du problème. En ceci elle peut être vue comme une méthode d'enrichissement de la solution éléments finis (macro) par une information plus riche apportée par la résolution de l'échelle micro.

Appliquée aux problèmes de mécanique des fluides, cette méthode permet d'obtenir une expression des paramètres de stabilisation intervenant dans les méthodes de stabilisation classiques, en capturant l'effet d'échelles infra-maillage sur l'échelle "macro", celle des éléments finis. Plus de détails concernant l'application aux écoulements incompressibles (laminaires et turbulents) figurent dans [72].

### 1.2.1 Équation scalaire de convection-diffusion-réaction

L'équation de convection-diffusion-réaction (CDR) d'un champ  $\phi$  par le champ de vitesse  $\underline{a}$ , la diffusion  $\underline{\nu}$  et la réaction  $\sigma$  s'écrit :

$$\underline{a}\nabla\phi + \underline{\nu}\nabla\cdot\nabla\phi + \sigma\phi = 0$$

La forme faible associée est : Trouver  $\phi$  tel que :

$$B_{cdr}(\phi^*, \phi) = (\phi^*, \underline{a}\nabla\phi)_{\Omega} + (\nabla\phi^*, \underline{\nu}\nabla\phi)_{\Omega} + (\phi^*, \sigma\phi)_{\Omega} = (\phi^*, f)_{\Omega} + (\phi^*, h)_{\Gamma_h} \quad (2.11)$$

Où  $(\phi^*, \phi)_{\Omega}$  désigne le produit scalaire sur  $\Omega$  et  $B_{cdr}(\phi^*, \phi)$  est la forme bilinéaire de convection-diffusion-réaction. On note  $C_A$  et  $C_0$  les espaces d'admissibilité et d'admissibilité à zéro dans lesquels on cherche les champs  $\phi$  et  $\phi^*$  respectivement.

### 1.2.2 Séparation de deux échelles

L'espace des solutions est arbitrairement séparé en un espace de dimension finie  $C_A^M$  et son complémentaire  $C_A^m$ . L'espace de dimension finie est l'espace engendré par l'approximation par éléments finis de l'équation (2.11) et correspond à l'échelle macroscopique, supposée vérifier les conditions aux limites de Dirichlet. On note alors  $\phi \in C_A$  sous la forme  $\phi = \phi^M + \phi^m$  et  $\phi^* \in C_0$  sous la forme  $\phi^* = \phi^{M*} + \phi^{m*}$ . Dans la suite, on utilise des approximations sur des espaces de dimension finie  $\phi^h$  et  $\phi^{h*}$  qui seront notées  $\phi$  et  $\phi^*$  par souci de clarté. En introduisant cette décomposition dans (2.11) et en utilisant ses propriétés de linéarité, on obtient un sous problème à résoudre pour chacune des échelles :

$$\text{problème macro : } B_{cdr}(\phi^{M*}, \phi^M) + B_{cdr}(\phi^{M*}, \phi^m) = (\phi^{M*}, f)_{\Omega} + (\phi^{M*}, h)_{\Gamma_h} \quad (2.12a)$$

$$\text{problème micro : } B_{cdr}(\phi^{m*}, \phi^M) + B_{cdr}(\phi^{m*}, \phi^m) = (\phi^{m*}, f)_{\Omega} + (\phi^{m*}, h)_{\Gamma_h} \quad (2.12b)$$

En procédant à une intégration par parties sur les intégrales sur les éléments, on peut réécrire le système ci-dessus sous la forme :

$$B_{cdr}(\phi^{M^*}, \phi^M) + (L_{cdr}^* \phi^{M^*}, \phi^m) + (\underline{v} \cdot (\underline{a} \phi^{M^*} + \underline{v} \nabla \phi^{M^*}), \phi^m)_{\Gamma_h} = (\phi^{M^*}, f)_{\Omega} + (\phi^{M^*}, h)_{\Gamma_h} \quad (2.13a)$$

$$(\phi^{m^*}, L_{cdr} \phi^M + L_{cdr} \phi^m) + (\phi^{m^*}, \underline{n} \cdot (\underline{v} \nabla \phi^M + \underline{v} \nabla \phi^m))_{\Gamma_h} = (\phi^{m^*}, f)_{\Omega} + (\phi^{m^*}, h)_{\Gamma_h} \quad (2.13b)$$

### 1.2.3 Résolution de l'échelle fine

La séparation des échelles permet d'envisager différentes manières de résoudre le problème associé à l'échelle micro : éléments finis hiérarchiques, fonctions de Green (ou une approximation), fonctions bulle. L'utilisation de fonctions de forme hiérarchiques (polynômes d'ordre  $k$  et  $k^M$  pour l'échelle macro) définit une échelle micro dont les fonctions de forme sont des polynômes d'ordre  $k^m$  compris entre  $k$  et  $k^M$ . L'intérêt de la méthode est alors limité, puisqu'il faut stabiliser les problèmes discrets obtenus, de la même manière que décrite précédemment (Chapitre 1 Section 3.1).

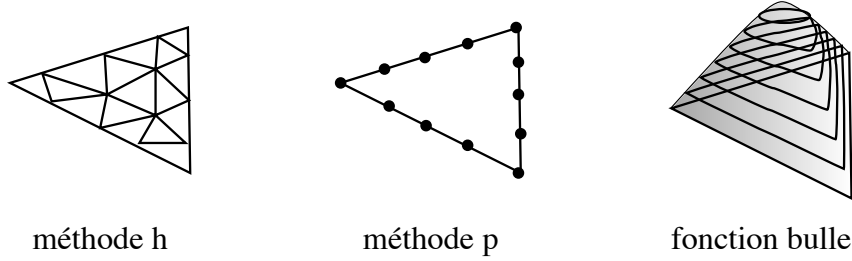


FIGURE 2.1 : Solutions d'enrichissement pour la VMS

**Solution par fonction de Green** L'équivalent continu de l'élimination de  $\phi^M$  dans (2.12a) est un projecteur noté  $P^m$  sur l'espace des inconnues micro  $C_A^m$  dans (2.13) :

$$P^m L_{cdr} \phi^m = -P^m (L_{cdr} \phi - f) \text{ dans } \Omega \quad (2.14a)$$

$$\phi^m = 0 \text{ sur } \Gamma_g \quad (2.14b)$$

$$\underline{n} \cdot \underline{v} \nabla \phi^m = -\underline{n} \cdot (\underline{v} \nabla \phi - h) \text{ sur } \Gamma_h \quad (2.14c)$$

En utilisant la fonction de Green associée à l'opérateur  $P^m L_{cdr}^*$  avec des conditions aux limites nulles, on peut écrire formellement la solution à l'échelle micro comme la convolution de cette fonction de Green avec  $L_{cdr} \phi^M - f$ , soit en notant  $\mathcal{M}$  cette opération :

$$\phi^m = \mathcal{M}(L_{cdr} \phi - f)$$

Ceci permet d'éliminer  $\phi^m$  de l'équation en  $\phi$ , du moins formellement. Le problème micro ainsi obtenu dépend uniquement du résidu à l'échelle macro. Si l'on suppose que la solution du problème est contenue dans l'espace macro, la solution micro doit en effet être nulle. Cette démarche pose un problème à l'échelle micro qu'il faut résoudre, de manière approchée. Plusieurs solutions sont alors envisageables, comme l'utilisation d'une approximation de la fonction de Green ou de fonctions bulles. L'approximation de la fonction de Green offre la possibilité de restreindre celle-ci au support d'un élément, et par conséquent d'obtenir un effet local des petites échelles sur les grandes. Les fonctions bulles confèrent également une influence locale à l'échelle micro, et permettent, sous certaines conditions [72], de résoudre un nombre fini de problèmes indépendants au niveau micro, pour en calculer l'influence sur l'échelle macro.

### 1.2.4 Prise en compte de l'effet des petites échelles sur les grandes

La séparation d'échelles effectuée par la VMS permet d'introduire, du moins formellement, l'effet des petites échelles sur les plus grandes, sans nécessiter de calcul explicite des premières. Par ce formalisme, la VMS permet d'établir un lien avec les méthodes de stabilisation classiquement employées en mécanique numérique des fluides. Dans la suite, on suppose que l'échelle la plus petite, appelée micro, n'est pas résolue.

**Méthodes stabilisées** Toutes les méthodes stabilisées classiques peuvent s'écrire selon le même schéma, dans lequel on ajoute à la forme faible de l'équation concernant l'échelle résolue (macro) une pondération du résidu (à l'échelle macro) : Trouver  $\phi \in C_A^M$  tel que  $\forall \phi^{M*} \in C_0^M$

$$B_{cdr}(\phi^{M*}, \phi^M) + \sum_{elts} (L_{cdr}^{stab} \phi^{M*}, \tau_e (L_{cdr} \phi^M - f))_{\Omega_e} = (\phi^{M*}, f)_{\Omega} + (\phi^{M*}, h)_{\Gamma_h} \quad (2.15)$$

Le choix de l'opérateur  $L_{cdr}^{stab}$  définit la méthode (voir section 3.1) :

- SUPG :  $L_{cdr}^{stab} = L_C$  opérateur de convection [19]
- GLS :  $L_{cdr}^{stab} = L_{cdr}$  opérateur de convection-diffusion-réaction [93]
- USFEM :  $L_{cdr}^{stab} = -L_{cdr}^*$  adjoint de l'opérateur  $L_{cdr}$  [49]

En comparant (2.15) et (2.13), on peut trouver  $\tau_e$  à partir :

- de la fonction de Green  $g'_e$  :  $\tau_e = \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} g'_e(x, x_0) d\Omega_e d\Omega_0$
- ou de la fonction bulle  $L_{RFB}$  :  $\tau_e = \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} L_{RFB}^{-1}(x_0) d\Omega_e d\Omega_0$

### 1.2.5 Bilan

La VMS offre la possibilité intéressante de calculer les paramètres de stabilisation. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, la démarche présentée est applicable à une version discrète en temps et linéarisée du problème [72, 73].

### 1.3 Méthodes SDA et X-FEM

Ces deux approches sont basées sur un enrichissement local de la cinématique par des fonctions discontinues permettant de prendre en compte la présence d'une fissure traversant le maillage. La Strong Discontinuity Approach (SDA) emploie un enrichissement interne aux éléments, ce qui permet d'éliminer les inconnues supplémentaires du problème éléments finis et de les traiter comme des variables internes [150]. La eXtended Finite Element Method (XFEM) enrichit l'interpolation continue éléments finis classique par des degrés de liberté supplémentaires attachés à des fonctions de forme décrivant des discontinuités ou une solution asymptotiques locales [139, 140].

Si ces méthodes introduisent indubitablement une échelle supplémentaire dans le calcul (en général celui de la fissure), elles restent des méthodes d'enrichissement local, destinées à décrire des discontinuités internes (fissures, interfaces, trous) tout en employant un maillage continu, sur lequel ces phénomènes sont repérés implicitement.

## 2 Méthodes multigrilles

La résolution d'un problème de mécanique par une méthode numérique conduit à résoudre des problèmes linéaires de la forme  $Ax = f$ . Les méthodes itératives de relaxation (Gauss-Seidel, Jacobi, Gradient Conjugué) sont alors plus intéressantes que les méthodes d'inversion directe. Cependant, elles produisent un amortissement inégal sur les modes du résidu. Ainsi, les modes à hautes fréquences ont une erreur qui décroît plus rapidement que les modes du demi-spectre inférieur. Ces derniers pénalisent donc la convergence de la méthode itérative. Les méthodes multigrilles initiées par [51, 187] utilisent plusieurs grilles de tailles caractéristiques différentes, afin de transformer les modes à basse fréquence sur la grille fine en modes à fréquence plus élevée sur la grille grossière, qui seront plus rapidement filtrés par la méthode de résolution. Pour plus de développements, on pourra consulter [18, 196] Elles sont très employées en mécanique des fluides, par exemple pour des écoulements laminaires bidimensionnels [136], turbulents [137] ou compressibles [117].

Les méthodes itératives sont basées sur la décomposition de la matrice  $A$  en deux sous-matrices  $M$  et  $N$  :  $A = M - N$  telles que  $M$  soit inversible. L'inversion directe de  $A$  est remplacée par des itérations :  $u^{n+1} = M^{-1}(Nu^n + f)$ . En introduisant l'erreur  $e^{n+1} = u^{n+1} - u^n$ , on obtient :  $e^{n+1} = M^{-1}N(u^n - u^{n-1}) = Be^n$  et par récurrence,  $e^{n+1} = B^n e^0$ .

### 2.1 Cycle en V

Les méthodes multigrilles emploient en général plus de deux grilles. La démarche reste la même que pour deux grilles, nous exposerons ici la méthode pour deux grilles,

indicées  $h$  pour la plus fine et  $H$  pour la plus grossière. La résolution d'un système linéaire sur la grille fine (obtenu par exemple par éléments finis) suit alors l'algorithme suivant :

```

Si (niveau =  $H$ ) Alors
  | résoudre  $A_H u_H = f_H$  (méthode directe)
Sinon
  | relaxer  $A_h u_h = f_h$ 
  | calculer le résidu  $r_h = f_h - A_h u_h$ 
  | projeter  $f_H = R r_h$ 
  | appeler MG(niveau - 1,  $A_H, v_H = 0, f_H$ )
  | injecter  $v_h = P v_H$ 
  | corriger  $u_h = u_h + v_h$ 
  | relaxer  $A_h u_h = f_h$  (facultatif)
Fin Si

```

Algorithme 1: MG(*niveau*,  $A_h, v_h = 0, f_h$ )

Les opérateurs  $R$  et  $P$  dans l'algorithme 1 sont des opérateurs de restriction et de prolongement, qui permettent de passer d'une grille vers le niveau supérieur (plus grossier) ou inférieur (plus fin).

## 2.2 Cycle en W

L'efficacité de la résolution par relaxation dépend de l'initialisation de la méthode. En partant de la grille grossière, on peut calculer à moindre coût une solution approchée qui sera utilisée pour initialiser la relaxation sur la grille de niveau inférieur. Cette démarche correspond au cycle en W :

```

initialiser  $f_k, \forall k$ 
Si (niveau = grossier) Alors
  | résoudre  $A_H v_H = f_H$ 
Sinon
  | injecter  $v_h = P v_H$ 
  | appeler MG(niveau - 1,  $A_h, v_h, f_h$ )
  | appeler FMG(niveau - 1,  $A_h, v_h, f_h$ )
Fin Si

```

Algorithme 2: FMG(*niveau*,  $A, v = 0, f$ )

## 2.3 Définition des opérateurs sur l'ensemble des grilles

La définition des opérateurs  $A$  sur les grilles grossières divise les méthodes multigrilles en deux catégories :

- multigrille géométrique : l'opérateur est recalculé sur chacune des grilles
- multigrille algébrique : l'opérateur est calculé sur la grille fine, et les versions "grossières" sont calculées par composition avec les opérateurs de restriction et de prolongation.

## 2.4 Parallélisation des méthodes multigrilles

Dans une optique parallèle, les méthodes multigrilles peuvent intervenir comme solveurs locaux à l'intérieur d'une méthode de décomposition de domaine de type Schwarz additive [35]. La condensation du problème initial sur les inconnues d'interface fait intervenir les compléments de Schur associés à chaque sous-domaine. Le système condensé n'est jamais résolu directement, mais par une méthode de type Krylov. Ainsi, la résolution ne fait intervenir que des produits matrice-vecteur entre le complément de Schur et les inconnues d'interface. L'évaluation de ces produits requiert la résolution de problèmes linéaires posés sur les inconnues internes aux sous-domaines, résolutions effectuées par une méthode multigrille. Dans cette démarche, la méthode multigrille est employée comme solveur linéaire itératif à la place d'un solveur direct, l'influence de sa convergence étant l'objet de discussions plus avancées dans [36].

Une autre manière de conjuguer multigrille et parallélisme consiste à paralléliser les résolutions sur les grilles grossières [57]. Cette méthode obtient des temps de calcul plus courts que la précédente, au moins pour des nombres réduits de sous-domaines [36].

# 3 Méthodes basées sur une décomposition de domaine

## 3.1 Décompositions de domaine avec recouvrement

Dans [159], une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement de type Schwarz est proposée pour résoudre le problème de Stokes stationnaire. Le système discret linéaire non défini issu de la discrétisation des équations est résolu par un algorithme de Krylov, dont le préconditionneur est obtenu par résolution de problèmes de point selle locaux (sur les sous-domaines avec recouvrement) et d'un problème de point selle global. Cette méthode obtient une convergence indépendante à la fois de la taille de maille locale et du nombre de sous-domaines.

## 3.2 Décompositions de domaine sans recouvrement

Les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement reposent sur une partition du domaine en sous-domaine disjoints, reliés par des interfaces.

Les liens sur ces interfaces distinguent trois familles de méthodes : les méthodes primales (ex. BDD, [130]) imposent la continuité du déplacement *a priori* alors que les méthodes dite duales (ex. FETI, [48]) recherchent des inter-efforts équilibrés. Les méthodes mixtes ne requièrent aucune continuité *ab-initio*. La résolution du problème est en général itérative, et nécessite la transmission d'une information globale pour être efficace, en particulier pour converger indépendamment du nombre de sous-domaines. Cette information est en général basée sur l'imposition de la continuité d'une partie des déplacements, des efforts, ou des deux à la fois.

**Décomposition en sous-domaines** La décomposition d'un domaine  $\Omega$  en  $N$  sous-domaines  $\Omega_E, E \in \mathcal{E}$ , fait apparaître les interfaces entre deux sous-domaines  $\Gamma_{ij}, i, j \in \mathcal{E}$ , la frontière  $\Gamma_E$  du sous-domaine  $\Omega_E$  constituée de l'union des interfaces entre  $\Omega_E$  et ses voisins et éventuellement d'une partie de  $\partial\Omega$ , et l'interface de la décomposition de domaine,  $\Gamma$ , constituée de l'ensemble des interfaces entre deux sous-domaines. La figure 2.2 illustre ces notations.

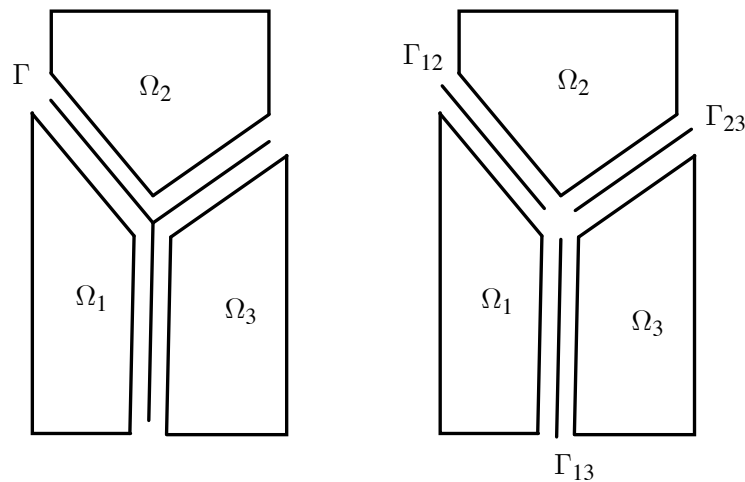


FIGURE 2.2 : Notations pour la décomposition de domaine sans recouvrement

Pour cet exposé, les modèles, interpolations et discrétisations sont choisis identiques de chaque côté des interfaces. Dans ce cas, les relations au travers de l'interface sont des relations nœud à nœud. Dans le cas contraire, l'utilisation d'une méthode mortar permet d'écrire les conditions de continuité et d'équilibre au niveau discret, mais complique inutilement l'exposé. La communication entre les sous-domaines fait apparaître quelques opérateurs : l'opérateur de trace, noté  $t$  est une projection d'un sous-domaine



sur sa frontière, sa transposée est l'injection correspondante :

$$\begin{aligned} t_E &: \Omega_E \rightarrow \Gamma_E \\ &u_E \rightarrow u_{b,E} \\ t_E^T &: \Gamma_E \rightarrow \Omega_E \\ &u_{b,E} \rightarrow u_{b,E} \text{ sur } \Gamma_E, 0 \text{ ailleurs} \end{aligned}$$

Les opérateurs d'assemblage non signé  $A$  et signé  $A^s$  permettent d'écrire les relations d'équilibre et de continuité. Dans le cas choisi de discrétisation compatibles, ils sont formés de 0, 1 et  $-1$ .

**Problème décomposé** Le problème discret est décomposé en :

$$K_E u_E = f_E + t_E^T \lambda_E \quad \text{pour tout } E \in \mathcal{E} \quad (2.16)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} A_E^s t_E u_E = 0 \quad (2.17)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} A_E \lambda_E = 0 \quad (2.18)$$

$\lambda_E$  représente les efforts exercés par ses voisins sur le sous-domaine  $\Omega_E$ . Ils doivent être équilibrés (équation 2.18), et interviennent dans l'équation d'équilibre par sous-domaine (2.16). La continuité des déplacements fait intervenir les opérateurs d'assemblage signés (2.17).

### 3.2.1 Une méthode de condensation primale : BDD

En supposant un unique champ de déplacement  $u_b = \sum_E A_E^T u_{b,E}$  sur l'interface  $\Gamma$ , les méthodes primales vérifient automatiquement l'équation (2.17). La recherche des champs d'inter-effort satisfaisant (2.18) est effectuée en condensant les problèmes locaux (2.16) :

$$\lambda_{b,E} = S_{p,E} u_{b,E} - f_{c,E} \quad (2.19)$$

$$S_{p,E} = K_{bb,E} - K_{bi,E} K_{ii,E}^{-1} K_{ib,E} \quad (2.20)$$

$$f_{c,E} = f_{b,E} - K_{bi,E} K_{ii,E}^{-1} f_{i,E} \quad (2.21)$$

$$\sum_E A_E \lambda_{b,E} = 0 \quad (2.22)$$

$$\sum_E A_E (S_{p,E} u_{b,E} - f_{c,E}) = 0 \quad (2.23)$$

$$S_p u_b = f_c \quad (2.24)$$

$$S_p = \sum_E A_E S_{p,E} A_E^T \quad f_c = \sum_E A_E f_{c,E} \quad (2.25)$$

L'équation (2.24) n'est pas résolue directement, mais par un algorithme itératif. L'utilisation d'un préconditionneur améliore grandement l'efficacité de l'algorithme. Pour

cela, une construction classique du préconditionneur est de réaliser une somme pondérée des inverses des contributions par sous-domaine, la pondération permettant de prendre en compte les éventuelles hétérogénéités entre sous-domaines [107]. Il faut alors calculer les inverses des compléments de Schur primaux par sous-domaine, qui sont les compléments de Schur duaux. Ceux-ci font intervenir des résolutions de problèmes de Neumann, avec des efforts imposés sur l'ensemble du bord du sous-domaine. Ces problèmes n'ayant pas toujours de solution, une condition supplémentaire est imposée, qui permet d'assurer que le résidu multiplié par le préconditionneur appartient bien à l'image de  $S_p$ . Cette méthode est alors appelée "Balancing Domain Decomposition" [130].

Le calcul du préconditionneur fait intervenir des pseudo-inverses. Afin d'éviter ces calculs, la méthode BDD peut être modifiée de manière à relâcher la continuité des inconnues primales sur un grand nombre de nœuds d'interface. La continuité est toujours imposée pour un petit nombre de nœuds, en général les coins des sous-domaines, et la continuité totale n'est obtenue qu'à convergence. Ceci permet d'assurer que les problèmes de Neumann locaux ont une solution unique. Cette méthode est appelée "Balancing Domain Decomposition under Constraints", BDDC [34]. Une application pour le problème de Stokes (problème de point selle) est détaillée dans [122].

### 3.2.2 Une méthode de condensation duale : FETI

Dans les méthodes duales, le problème d'interface est résolu en postulant un champ d'effort unique, assurant la vérification de (2.18). En exprimant les champs de déplacement à partir de l'équilibre local (2.16), l'équation de continuité est transformée en problème condensé sur les champs d'effort aux interfaces :

$$u_b = S_d(b_p + A^{s,T}\lambda_b) + R_b\alpha_b \quad (2.26)$$

$$A^s S_d A^{s,T}\lambda_b + A^s R_b \alpha_b = b_d \quad (2.27)$$

La résolution de (2.16) sur chaque sous-domaine fait intervenir des problèmes de Neumann. On a alors recours aux inverses généralisées, et la solution est déterminée à une combinaison de déplacements de solides rigides  $\alpha_b$  près, notée  $R_b\alpha_b$ . Pour avoir une solution, ces problèmes doivent avoir un chargement équilibré, condition qui s'écrit comme l'orthogonalité du chargement et du noyau de la matrice de rigidité :

$$R_b^T(b_p + A^{s,T}\lambda_b) = 0 \quad (2.28)$$

En utilisant les notations classiques, le problème devient :

$$\begin{bmatrix} S_d & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_b \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_d \\ -e \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

La méthode est appelée FETI pour Finite Element Tearing and Interconnecting [48]. Le problème (2.29) est résolu par un solveur itératif. Le préconditionneur, de la même manière que pour la méthode BDD est obtenu à partir de contributions locales pondérées. La condition de compatibilité (2.28), devenue  $G^T\lambda_b + e = 0$  traduit l'équilibre des champs

d'efforts d'interface  $\lambda_b$  avec les chargements extérieurs  $e$ . Le choix d'une initialisation  $\lambda_0$  et d'un projecteur  $P$  tels que  $\lambda_b = \lambda_0 + P\lambda^*$  et  $PG = 0$  fait apparaître un problème grossier d'équilibre des efforts pour le calcul de  $\lambda_0$  [71].

### 3.2.3 Méthode de condensation mixtes

Les méthodes mixtes sont un cadre large pour les méthodes de décomposition de domaine. Au lieu d'utiliser les inconnues primales ou duales pour condenser le problème décomposé, l'inconnue d'interface  $\mu_E$  est une combinaison linéaire de ces deux dernières, homogène à un effort :

$$\mu_E = \lambda_{E,b} + k_E u_{E,b} \quad (2.30)$$

Le paramètre  $k_E$  peut être interprété comme une rigidité d'interface. Dans le cas d'interfaces parfaites pour un problème d'élasticité, la méthode peut être interprétée comme l'ajout de ressorts entre les sous-domaines. Ce paramètre régularise les problèmes locaux, dispensant du calcul des inverses généralisées mais doit être choisi avec soin puisqu'il conditionne la convergence de l'algorithme itératif (non préconditionné) utilisé pour résoudre le problème condensé. Le choix pour  $k_E$  du complément de Schur du complémentaire du sous-domaine considéré, s'il aboutit à un problème grossier très simple (on obtient une matrice identité), n'est pas judicieux dans un cadre de calcul parallèle. Diverses stratégies visent alors à calculer un opérateur proche du complément de Schur, à moindre coût, par exemple en ne considérant qu'une bande d'éléments extérieurs au sous-domaine [160].

La régularisation des compléments de Schur locaux supprime les problèmes globaux (au niveau du préconditionneur ou de l'initialisation) des méthodes BDD et FETI. La transmission d'information entre les sous-domaines se fait alors uniquement de voisin à voisin, retardant la convergence. Il faut alors introduire un autre problème grossier, par exemple basé sur les modes de corps rigides [46] ou une base macroscopique de déplacements et de déformations d'interface [113].

### 3.2.4 Approche micro-macro et méthode LaTIn

**Partition du domaine** L'approche micro-macro présentée dans [110, 114] repose sur la partition du domaine (ou structure) en sous-structures et interfaces, que l'on considère comme des entités mécaniques à part entière. Ainsi, chacune possède ses propres variables, en général les champs de déplacement et de contraintes sur les sous-structures, alors que les interfaces possèdent des distributions d'efforts et de déplacements, qui confèrent un caractère mixte à la méthode. Ces interfaces permettent de relier les sous-structures entre elles et aux frontières sur lesquelles sont imposées les conditions aux limites du problème.

**Séparation d'échelles** Contrairement aux méthodes multi-échelles qui introduisent une séparation d'échelles sur l'ensemble des inconnues (VMS, SDA, XFEM), la séparation

d'échelles s'effectue au niveau des interfaces uniquement, par le choix d'une base macroscopique, adaptable au problème considéré. Les espaces micro et macro, et les projecteurs associés sont définis de manière à créer des sous-espaces supplémentaires au sens de la forme travail. Classiquement, on choisit les parties linéaires des quantités d'interface. Ce choix peut être adapté au problème considéré, il intègre par exemple une discontinuité pour les problèmes de fissuration [74].

**Problème macroscopique** Le problème à l'échelle macro permet de transférer une information globale à l'ensemble de la structure. Il est issu de l'imposition de l'équilibre statique efforts macroscopiques. Dans le cas de la dynamique, ce problème macroscopique doit être adapté pour assurer la continuité des parties macroscopiques des vitesses, et l'équilibre des efforts [149].

**Stratégie itérative de résolution** La résolution du problème décomposé est effectuée de manière itérative. L'ensemble des équations du problème est décomposé en deux groupes, l'un contenant les équations locales éventuellement non linéaires (comportement matériau, comportement des interfaces), définissant un espace noté  $\Gamma$  et l'autre contenant les équations linéaires éventuellement globales (admissibilité des champs, relations d'équilibre, équilibre des parties macroscopiques des efforts d'interface), qui définissent un espace noté  $A_d$ . Chaque itération de la méthode consiste alors à partir d'une solution  $s^n$  de l'espace  $A_d$ , à construire une solution intermédiaire  $s^{n+1/2}$  appartenant à  $\Gamma$ , puis une solution  $s^{n+1}$  dans  $A_d$ . Ces deux étapes constituent des problèmes bien posés grâce à l'introduction de directions de recherche (figure 2.3).

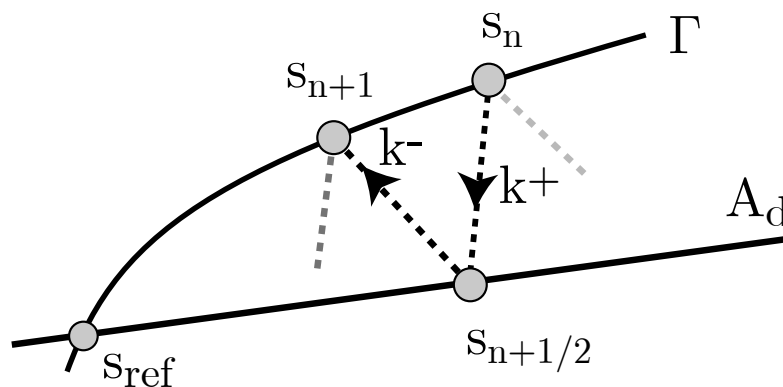


FIGURE 2.3 : Stratégie itérative de résolution : une itération

La méthode micro-macro a été appliquée aux problèmes de tenue des pièces en matériaux composites [104] et à la propagation de fissures (MSXFEM [74]). Dans le but de traiter des problèmes de tenue de structures composites sous chargement fluide, la partie solide du problème d'interaction fluide-structure sera traitée par cette méthode. Cependant, elle

n'est pas directement applicable aux problèmes de mécanique des fluides, pour plusieurs raisons. La première est que la séparation des équations en un groupe d'équations locales non-linéaires et un groupe d'équations linéaires globales n'est plus possible, du fait du terme de convection dans les équations de Navier-Stokes. La seconde est que le problème macroscopique est construit en imposant un équilibre statique des efforts macro sur les sous-structures, prenant en compte le comportement homogénéisé de celles-ci. Dans le cas d'un fluide, ce comportement n'est plus linéaire, ce qui rend impossible l'application du problème macro.

### 3.3 Application aux problèmes types de la mécanique des fluides

Les hypothèses formulées pour ces travaux amènent à résoudre un problème de point selle non symétrique et non linéaire sur l'ensemble du domaine. Cette section fait le bilan des possibilités envisagées sur la base des méthodes de condensation classiques BDD et FETI.

#### 3.3.1 Problème de point selle

**Problème de Stokes** Le problème de Stokes incompressible et stationnaire, posé sur le domaine  $\Omega$ , avec des conditions aux limites de Dirichlet sur l'ensemble de la frontière, est posé par les équations :

$$-\mathbf{v}\Delta\underline{v} + \underline{\nabla}p = \underline{f} \text{ dans } \Omega \quad (2.31)$$

$$-\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.32)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_d \text{ sur } \partial\Omega \quad (2.33)$$

Avec les notations utilisées au chapitre 1. La condition de compatibilité portant sur les données du problème impose  $\int_{\partial\Omega} \underline{v}_d \cdot \underline{n} dS = 0$ . Pour simplifier, dans la suite, on choisit  $\underline{v}_d = \underline{0}$ . Ce problème est un problème de point selle : Trouver  $(\underline{v}, p) \in H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$  tels que :

$$a(\underline{w}, \underline{v}) + b(\underline{w}, p) = \langle \underline{f}, \underline{w} \rangle \quad \forall \underline{w} \in H^1(\Omega)^d \quad (2.34)$$

$$b(\underline{v}, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \quad (2.35)$$

avec :

$$a(\underline{w}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{v}\underline{\nabla}\underline{v}\underline{\nabla}\underline{w} \quad (2.36)$$

$$b(\underline{v}, q) = - \int_{\Omega} q\underline{\nabla} \cdot \underline{v} \quad (2.37)$$

Une version discrète du système (2.34)-(2.35), obtenue par éléments finis, aboutit à un système matriciel de la forme :

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

avec  $\underline{v}$  et  $p$  des approximations des champs de vitesse et de pression, appartenant à des sous-espaces de dimensions finies  $W$  et  $Q$  de  $H^1(\Omega)^d$  et  $L^2(\Omega)$ . Les éléments employés pour la discrétisation sont bien sûr supposés vérifier la condition *inf-sup*.

Une adaptation de la méthode BDDC pour le problème (2.38) est décrite dans [122]. Nous détaillerons ici l'adaptation de la méthode FETI réalisée dans [121].

**Décomposition du problème** Le domaine  $\Omega$  est décomposé en  $N$  sous-domaines  $\Omega_E$ , sans recouvrement.  $\Gamma$  désigne l'ensemble des interfaces entre sous-domaine, c'est à dire l'ensemble des frontières des sous-domaines moins celles correspondant au bord de  $\Omega$ . Les espaces  $W$  et  $Q$  sont alors les sommes directes d'espaces  $W_E$  et  $Q_E$  contenant respectivement les champs de vitesse nuls sur  $\partial\Omega_E$  et les champs de pression à moyenne nulle sur  $\Omega_E$ , et d'espaces  $W_\Gamma$  et  $Q_0$  contenant les champs de vitesse sur  $\Gamma$  et les pressions constantes par sous-domaines, dont la moyenne sur  $\Omega$  est nulle. Le choix pour  $W_\Gamma$  dépend de la méthode employée, pour une méthode primale, l'inconnue de vitesse est continue entre les sous-domaines, et  $W_\Gamma$  est l'espace des fonctions continues sur  $\Gamma$ . Les algorithmes de type FETI utilisent une inconnue de chaque coté de l'interface, et  $W_\Gamma$  peut s'écrire comme somme directe d'espaces contenant des fonctions définies sur  $\partial\Omega_E$ . Enfin, FETI-DP scinde  $W_\Gamma$  en somme directe de sous-espaces indépendants par sous-domaines et d'un espace contenant les vitesses aux coins des sous-domaines  $\Omega_E$ , voir la figure 2.4.

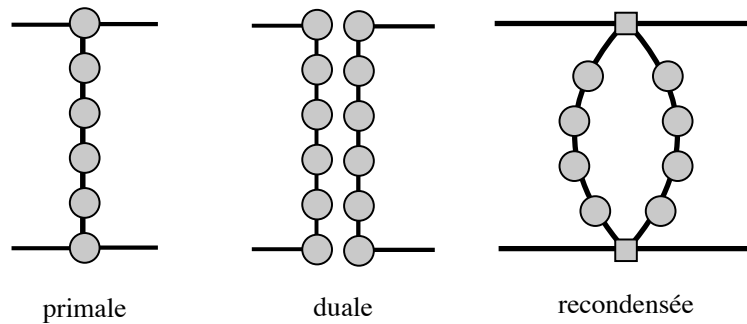


FIGURE 2.4 : Degrés de liberté de  $W_\Gamma$

**Problème condensé aux interfaces** Avec cette décomposition des espaces contenant les champs de vitesse et de pression, le problème (2.38) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A_{II} & B_{II}^T & A_{\Gamma I} & 0 \\ B_{II} & 0 & B_{I\Gamma} & 0 \\ A_{\Gamma I} & B_{I\Gamma}^T & A_{\Gamma\Gamma} & B_0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_I \\ p_I \\ \underline{v}_\Gamma \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_I \\ 0 \\ \underline{f}_\Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

que l'on peut aisément condenser sur les inconnues  $\underline{v}_\Gamma$  et  $p_0$  :

$$\begin{bmatrix} S_\Gamma & B_0^T \\ B_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_\Gamma \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_\Gamma^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

**FETI un niveau** Le problème de Stokes est donc réduit à la résolution de (2.40), avec  $\underline{v}_\Gamma \in W_\Gamma$  et  $p_0 \in Q_0$ . Les degrés de liberté pour  $\underline{v}_\Gamma$  sont indépendants de chaque coté d'une interface, la contrainte de continuité s'écrit :

$$B_\Gamma \underline{v}_\Gamma = 0 \quad (2.41)$$

Le problème peut donc s'écrire comme un problème de point selle sous contrainte de continuité, ou comme un problème de minimum, sous les contraintes  $B_\Gamma \underline{v}_\Gamma = 0$  et  $B_0 \underline{v}_\Gamma = 0$ . En introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\mu$  pour assurer la première,  $p_0$  étant le multiplicateur associé à la seconde contrainte, le problème s'écrit :

$$\begin{bmatrix} S_\Gamma & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_\Gamma \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_\Gamma^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

avec  $B = [B_0, B_\Gamma]$  et  $\lambda = (p_0, \mu)$ . La démarche habituelle de FETI est alors directement applicable :

$$\underline{v}_\Gamma = S_\Gamma^+ (\underline{f}_\Gamma^* - B^T \lambda) - R\alpha \quad (2.43)$$

sous les conditions  $B \underline{v}_\Gamma = 0$  et  $R^T (\underline{f}_\Gamma^* - B^T \lambda) = 0$  :

$$\begin{bmatrix} BS_\Gamma B^T & BR \\ R^T B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BS_\Gamma \underline{f}_\Gamma^* \\ R^T \underline{f}_\Gamma^* \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} F & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_\lambda \\ \underline{f}_\alpha \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Ce système est résolu par un gradient conjugué, avec comme projecteur :

$$P = I - G(G^T G)^{-1} G^T \quad (2.45)$$

**FETI deux niveaux** Cette méthode ajoute une contrainte au problème (2.44), qui est  $C^T P(F\lambda - d) = 0$ . Celle-ci revient à rendre les sauts de vitesse sur les interfaces orthogonaux aux colonnes de la matrice  $C$ , que l'on peut choisir de telle sorte à assurer la continuité des vitesses aux coins des sous-domaines par exemple.

**FETI-DP** La méthode FETIDP [45, 46] impose la continuité des champs de déplacement sur un petit nombre de nœuds d'interface à chaque itération. Il s'agit d'une méthode de reconcondensation, où le problème condensé sur les inconnues d'interfaces est reconcondensé sur un nombre d'inconnues plus petit. Avec la méthode FETI-DP, les champs de vitesses sont continus aux coins des sous-domaines et l'espace  $W_\Gamma$  est la somme directe de l'espace des degrés de liberté de coin  $W_C$  et de l'espace des fonctions discontinues sur le reste de  $\Gamma$ ,  $W_\Delta : W_\Gamma = W_C \oplus W_\Delta$ . La méthode introduit deux contraintes pour  $\underline{v}_\Delta : B_\Delta \underline{v}_\Delta = 0$  qui correspond à la continuité de  $\underline{v}$  sur les interfaces et  $Q_\Delta^T B_\Delta \underline{v}_\Delta = 0$  qui correspond à la continuité en moyenne le long des interfaces. Seule la seconde condition est imposée à chaque itération, la première n'est vérifiée qu'à convergence. Le problème est condensé sur les inconnues  $\underline{v}_C$ ,  $p_0$  et  $\mu$ , multiplicateur associé à la condition  $Q_\Delta^T B_\Delta \underline{v}_\Delta = 0$ .

### 3.3.2 Cas non symétriques

Dans le cas de matrices de rigidité non symétriques pour les sous-domaines, l'algorithme de gradient conjugué n'est plus valable. On a alors recours à un algorithme adapté : [120, 174].

### 3.3.3 Traitement des non-linéarités

La non-linéarité du problème global peut être traitée par un algorithme de Newton. Dans ce cas, les problèmes linéaires tangents sont résolus par une des méthodes de décomposition de domaine décrite dans les sections précédentes [7, 47]. Pour les équations de Navier-Stokes, [120] propose d'appliquer une méthode FETI-DP sur le problème linéarisé. Celui-ci étant non symétrique défini positif, l'algorithme itératif utilisé est GMRes. Dans le cadre de la mécanique des solides, les résolutions successives de problèmes linéaires pour un même pas de Newton a donné lieu à une réutilisation des espaces de Krylov déjà construits. On parle de solveurs à mémoire, comme GIRKS (Generalized Iterative Reuse of Krylov Subspaces) [171], SRKS (Selective Reuse of Krylov Subspaces) [70] ou GKC (Generalized Krylov Correction) [170]. Le traitement de non-linéarités concentrées dans certains sous-domaines (flambage par exemple) est possible par des itérations non-linéaires locales (à l'intérieur de chaque sous-domaine) à l'intérieur de chaque pas de Newton global [25, 161].

## 4 Conclusions pour ces travaux

Le traitement de l'interaction fluide-structure envisagé au chapitre suivant est un traitement partitionné. Alternativement, les problèmes posés sur le milieu solide et fluide sont résolus, soumis à des efforts ou des déplacements venant de l'autre milieu. La méthode employée pour résoudre le problème fluide est libre, à condition de retourner un champ d'effort sur l'interface. On pourrait donc envisager n'importe laquelle des méthodes décrites dans ce chapitre. Cependant, la taille des calculs envisagés nous oriente vers une méthode de décomposition de domaine. La méthode LaTInest utilisée au laboratoire pour la résolution de nombreux problèmes de mécanique des solides. Nous espérons tirer profit des quantités d'interface mixtes de cette méthode pour la résolution de problèmes de Navier-Stokes, formulés en variables mixtes de vitesse et de pression. La compatibilité maximale des méthodes de résolution pour le solide et le fluide, ainsi que le caractère mixte des méthodes, devraient constituer des atouts pour le traitement de l'interaction.





# Chapitre 3

## Méthodes pour l'interaction fluide-structure

*Deux problèmes distincts se posent aux cours de la résolution d'un problème d'interaction fluide-structure : la gestion de l'intégration temporelle et la gestion des échanges de champs entre les milieux fluide et solide. Une formulation monolithique du problème permet une avancée en temps intégrée à chaque résolution. Une stratégie partitionnée, plus souple au niveau des solveurs, devra prendre en compte la stabilité du schéma temporel. Les schémas explicites, semi-explicites et implicites présentent en effet des caractéristiques différentes, tant du point de vue de la stabilité que de la précision. L'échange de champs au travers de la frontière physique solide-fluide requiert un dialogue entre deux représentations numériques habituellement incompatibles. L'emploi d'un maillage fluide mobile permet de suivre le solide dans son mouvement, au prix d'un effort numérique supplémentaire : trouver le champ de vitesse non physique à lui imposer. Les méthodes à superposition de maillage proposent un alternative à la méthode ALE , en actualisant à chaque pas les éléments concernés par le couplage.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Stratégies de couplage</b> . . . . .	<b>59</b>
1.1	Méthodes partitionnées par point fixe . . . . .	59
1.2	Méthodes de Newton . . . . .	62
<b>2</b>	<b>Méthodes d'interface</b> . . . . .	<b>62</b>
2.1	Méthodes à maillage fluide mobile . . . . .	63

2.1.1	Méthode ALE . . . . .	63
2.2	Méthodes à maillage fluide fixe . . . . .	64
2.3	Amélioration des conditions d'interface . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Conclusion pour ces travaux . . . . .</b>	<b>67</b>

---

# 1 Stratégies de couplage

Les résolutions de problèmes d'interaction fluide-structure sont traditionnellement réparties en deux groupes. Les méthodes dites monolithiques tout d'abord, traitent l'ensemble du problème d'un seul bloc, garantissant le respect des conditions d'interface à tout moment. La résolution simultanée de toutes les équations est de plus profitable à la stabilité du système. En contrepartie, le système est plus complexe à résoudre, du fait de sa taille d'une part, et d'un conditionnement potentiellement mauvais, dû à la présence de matériaux aux propriétés physiques très contrastées. L'assemblage de deux problèmes *a priori* complexes donne un problème d'interaction plus complexe encore. Du fait de leur faible flexibilité, les méthodes monolithiques ne sont pas détaillées plus avant. On pourra consulter les références [14, 29] pour des exposés plus complets ou Bazilevs *et al.* [9] pour une application aux écoulements de sang dans les veines et [79] pour de grands déplacements de la structure. Les formulations par éléments finis espace-temps sont également employées pour la discrétisation de tels problèmes [86, 195].

Les méthodes appelées méthodes partitionnées, d'autre part, résolvent les équations associées au fluide et au solide séparément, puis les couplent par un algorithme adéquat. De cette manière, la configuration du domaine fluide ne change pas pendant la résolution de problème fluide, et les efforts appliqués à la structure sont constants pendant la résolution du problème solide. Cette approche permet une construction modulaire de la résolution, les codes de résolution pouvant être dédiés à l'un ou l'autre problème, voire même utilisés en tant que boîte noire [103]. Dans la suite de cette section, on considère un problème d'interaction fluide structure, discrétisé en éléments finis, dont la solution s'écrit, de manière très générale :

$$F(X) = \begin{bmatrix} H_f(\underline{x}_f, \underline{u}(\underline{x}_s)) \\ H_s(\underline{x}_s, \underline{\sigma}(\underline{x}_f)) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

$H_f$  et  $H_s$  sont les versions discrètes des équations dans  $\Omega_f$  et  $\Omega_s$ , généralement non linéaires. De manière équivalente, et tout aussi générale, on peut considérer que le couplage consiste à trouver la position de l'interface et les efforts transmis, respectivement obtenus en résolvant les problèmes solide et fluide, dont le comportement est noté  $F_s$  et  $F_f$  :

$$\begin{cases} \underline{u}(\underline{x}_s) = F_s(\underline{\sigma}(\underline{x}_f)) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}_f) = F_f(\underline{u}(\underline{x}_s)) \end{cases} \quad (3.2)$$

## 1.1 Méthodes partitionnées par point fixe

Le système (3.2) n'est pas résolu directement, mais par une méthode itérative. Le problème de la discrétisation en temps est supposé résolu en employant par exemple le même schéma d'intégration pour les deux milieux. Il ne reste alors plus que le problème de la précision et de la convergence du schéma itératif utilisé pour obtenir la solution du problème couplé, à un pas de temps donné. Les indices à droite désignent les pas de temps.

**Schéma partitionné explicite** La solution au pas de temps  $n + 1$  dans chaque domaine dépend uniquement des variables à l'instant  $n$  dans l'autre sous-domaine. Les résolutions sur les domaines fluide et solide, à l'intérieur d'un même pas de temps, sont indépendantes, et la communication entre les deux domaines n'a lieu qu'aux piquets de temps  $t_n$ , comme l'illustre la figure 3.1. Il existe plusieurs déclinaisons de ce genre de schéma, aussi appelé schéma de couplage faible, on pourra consulter par exemple les références [44, 52, 53].

Même si la dépendance vis-à-vis des variables "internes" au domaine considéré est implicite, c'est à dire que le schéma d'intégration temporelle à l'intérieur d'un domaine physique est implicite, le schéma global résultant est explicite, ce qui grève la stabilité et la précision de la résolution. En effet, la précision est au plus d'ordre un en temps, et le schéma est conditionnellement stable. De plus, ce type de schéma ne vérifie en général pas les lois de conservation au niveau global. Ces raisons font en général préférer une méthode implicite [131, 132, 134].

Ce type de schéma est également appelé Jacobi par bloc, ou Schwarz additif parallélisable, par analogie avec la terminologie employée en décomposition de domaines [185]. Dans le cas où chaque solveur n'est appelé qu'une seule fois par pas de temps, cette méthode revient à un schéma de point fixe explicite [135].

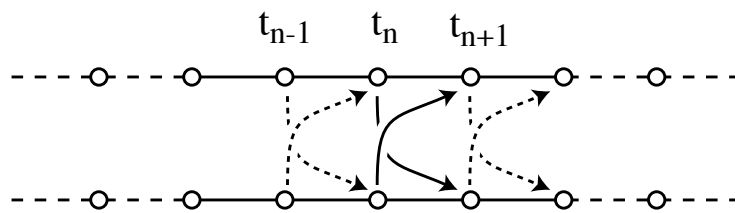


FIGURE 3.1 : Schéma partitionné explicite

**Schéma partitionné semi-explicite** En considérant le schéma précédent comme un schéma de Jacobi par blocs, la version Gauss-Seidel par blocs, obligatoirement séquentielle, est dérivée en avançant un domaine avant l'autre lors de l'intégration temporelle (figure 3.2). Le terme correspondant en décomposition de domaine serait un algorithme de Schwarz multiplicatif séquentiel.

**Méthodes de relaxation** Les deux schémas décrits ci-dessus peuvent ne pas converger sans une technique de relaxation, dont on peut montrer qu'elle assure la convergence dans certains cas [141, 143]. Un coefficient de relaxation constant est la plus simple des solutions, mais n'est bien sûr pas optimal, que ce soit vis-à-vis du nombre d'itérations ou de la garantie de la convergence. Les méthodes les plus performantes calculent le coefficient de relaxation applicable à chaque itération, à l'aide d'une partie ou de l'ensemble des itérations passées [109]. La meilleure méthode est bien entendu celle qui permet d'approcher au mieux le jacobien du problème (3.2).

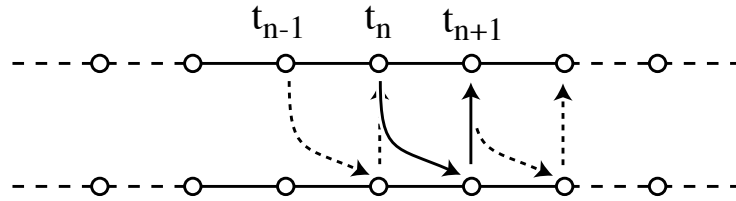


FIGURE 3.2 : Schéma partitionné semi-explicite

Les méthodes dites de couplage faible sont très utilisées pour les problèmes d'aéro-élasticité ou de thermo-mécanique [44, 52, 164, 165]. Il est à noter que dans certains cas, des coefficients de relaxation très importants doivent être utilisés, montrant ainsi les limites de ces schémas [56].

**Schéma partitionné implicite** En introduisant une dépendance implicite vis à vis de toutes les variables dans la résolution des équations de chaque sous-domaine, on aboutit à un schéma d'intégration temporelle implicite, dont les résolutions fluide et solide peuvent avoir lieu en parallèle (figure 3.3).

Ce type de schéma est habituellement désigné par schéma de couplage fort, et permet d'obtenir les mêmes résultats qu'une approche monolithique, même s'il s'agit d'un schéma partitionné [133]. Ce résultat justifie les nombreux travaux sur de tels algorithmes, de manière non exhaustive, on pourra consulter [102, 119, 173, 201, 202].

La différence par rapport aux méthodes monolithiques tient au fait que lors des résolutions sur chaque domaine, les informations concernant l'autre domaine ne sont pas disponibles, ou du moins à jour, et un processus itératif de résolution est nécessaire. C'est pourquoi on désigne aussi le schéma partitionné implicite comme itératif, par opposition à la méthode monolithique, jugée directe. Ces qualificatifs ne concernent pas les solveurs, mais bien l'obtention de la solution du problème couplé.

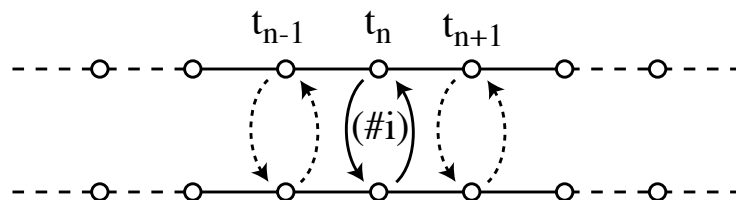


FIGURE 3.3 : Schéma partitionné implicite

## 1.2 Méthodes de Newton

L'application d'une méthode de Newton-Raphson au système (3.2) donne à chaque itération  $k$ , pour le pas de temps  $n$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_d - \partial_{\underline{u}} F_s & \partial_{\underline{\sigma}} F_s \\ \partial_{\underline{u}} F_f & \mathbb{I}_d - \partial_{\underline{\sigma}} F_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_n^{k+1} \\ \Delta \underline{\sigma}_n^{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{u}_n^k - F_s(\underline{u}_n^k, \underline{\sigma}_n^k) \\ \underline{\sigma}_n^k - F_f(\underline{u}_n^k, \underline{\sigma}_n^k) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

**Méthodes de Newton par blocs** En général, on ne dispose que des solveurs par sous-domaine, c'est à dire d'un moyen de calculer les termes blocs-diagonaux de l'équation (3.3). L'accès aux blocs extra-diagonaux, qui font intervenir des dérivées croisées n'est pas possible. Cependant, un tel système est souvent résolu par une méthode de Krylov, et seuls les produits des matrices blocs avec un vecteur sont nécessaires [59]. En utilisant les différences finies, ces calculs sont possibles uniquement à partir des solveurs sur chaque sous-domaine [134].

**Méthodes de Quasi-Newton par blocs** Ces méthodes résultent de l'application d'un algorithme dit "quasi-Newton" pour résoudre l'équation (3.3). Ces algorithmes sont très similaires à celui de Newton-Raphson, mais diffèrent par la construction d'approximations successives de la matrice tangente, au lieu de l'évaluer. L'algorithme BFGS permet de faire cela sans faire appel aux matrices jacobienne par bloc, mais uniquement à partir des résidus des équations. La résolution nécessite ainsi uniquement des appels aux solveurs sur chaque domaine. Degroote *et al.* proposent, dans [29], une technique pour construire une approximation de l'inverse de la matrice jacobienne, ce qui permet d'éviter la résolution du problème tangent à chaque itération de Newton. D'autres méthodes de Newton approchées sont proposées par Tezduyar [195] ou Dettmer et Perič [31].

## 2 Méthodes d'interface

Les déplacements de la structure délimitent le domaine sur lequel s'étend l'écoulement. La simulation numérique du milieu fluide doit donc être capable de prendre en compte un domaine dont l'étendue est variable. On peut alors distinguer deux types de méthodes, celles qui emploient un maillage mobile, qui pourra se déformer afin de suivre les mouvements du solide, et les méthodes à maillage fixe, pour lesquels on devra employer un maillage couvrant toute l'étendue potentielle de l'écoulement. Parmi ces dernières, on peut distinguer celles utilisant des multiplicateurs de Lagrange pour imposer les conditions de coupage –Méthode du domaine fictif et ses adaptations– de celles qui n'en utilisent pas –Frontière Immergée, Éléments finis Immergés–. Enfin, certains auteurs emploient une combinaison de maillages fixes et mobiles.

## 2.1 Méthodes à maillage fluide mobile

Les méthodes autorisant un mouvement du maillage fluide, ou le remaillage du domaine possèdent l'avantage certain de permettre une juxtaposition permanente des frontières fluides et solides. Cela permet un échange aisé des champs le long des interfaces de couplage, particulièrement dans le cas de maillages compatibles.

### 2.1.1 Méthode ALE

La plus répandue de ces méthodes est la méthode arbitrairement lagrangienne ou eulérienne, abrégée en ALE, qui permet un mouvement des nœuds du maillage fluide, et donc leur attribue une vitesse [37, 89]. La méthode ALE n'est pas spécifique aux fluides, elle est également employée en mécanique des solides [87, 172], par exemple pour des problèmes de localisation [3]. La vitesse des nœuds peut être choisie de manière à balayer tout l'intervalle entre la méthode eulérienne (pour laquelle la vitesse est nulle, le maillage étant fixe) et la méthode lagrangienne (pour laquelle la vitesse du maillage est la vitesse matérielle, les nœuds étant attachés aux particules). Le calcul de cette vitesse, qui est équivalent au calcul de la nouvelle position des nœuds peut se faire suivant deux stratégies. La première vise à limiter les distortions dans le maillage, qui sont source d'erreurs, la seconde à adapter le maillage au problème considéré, en concentrant par exemple les éléments dans les zones à fort gradient.

**Stratégies de régularisation de maillage** Les méthodes ALE utilisent en général une description lagrangienne de la frontière –au moins dans la direction normale à celle-ci– et une description eulérienne loin des zones mobiles, avec une étendue de taille variable entre ces deux parties [83, 87, 125, 126]. Dans les cas où la position de l'interface est elle-même une inconnue du problème –par exemple dans le cas de surfaces libres [15]– une description lagrangienne de celle-ci est préférée. Plusieurs techniques permettent de régulariser un maillage. À partir des données sur l'interface, on peut appliquer une méthode de maillage (*transfinite mapping method* [205]), résoudre une équation de laplacien [124] ou un problème d'élasticité [2, 10] ou encore appliquer un algorithme de régularisation de maillage [65, 177].

**Stratégies d'adaptation de maillage** Ces stratégies permettent d'adapter le maillage à la solution cherchée, ce qui permet par exemple de prendre en compte le caractère directionnel de l'écoulement ou de concentrer les éléments dans les couches limites [75, 145]. Ces stratégies d'adaptation nécessitent un estimateur d'erreur leur fournissant une donnée en entrée.

**Applications particulières** Pour une application au cas d'interaction particulier que représentent les parachutes et manches à air, Tezduyar et ses collaborateurs ont développé des méthodes adaptées, qui illustrent le besoin de techniques spécifiques pour chaque problème d'interaction fluide-structure. En particulier, les tissus ne sont pas étanches, et



leur perméabilité à l'air joue un rôle important dans le vol du parachute. Cette porosité est prise en compte par une méthode homogénéisée, HMGP [102]. La géométrie de la structure, ou son auto-contact –contact de deux parties initialement séparées– posent certains problèmes lors de l'emploi de méthodes ALE. La méthode FSI-GST régularise la géométrie de la structure, et la méthode SENCT gère les cas d'auto-contact [178].

## 2.2 Méthodes à maillage fluide fixe

Dans le cas où la description du mouvement du fluide est purement eulérienne, on doit coupler une description en général lagrangienne du solide, avec un maillage fluide sous-jacent. Là encore, les méthodes dépendent de l'application visée. Dans le domaine biomédical, les parois des artères ou les globules rouges peuvent être considérés comme des solides incompressibles. Un couplage volumique –ou surfacique, dans le cas d'études en 2D– entre le fluide et le solide n'est donc pas pénalisant.

**Méthodes des frontières immergées** Développée par Peskin pour l'étude d'écoulements autour de valvules cardiaques, cette méthode emploie une formulation lagrangienne pour le solide, et une formulation eulérienne pour le fluide [162]. Celui-ci est décrit par une méthode de différences finies, avec des conditions aux limites périodiques. Le solide est quand à lui supposé totalement immergé, et constitué d'un réseau de fibres unidimensionnelles, occupant un volume nul. Son influence sur le fluide est décrite par des distributions d'efforts sur les nœuds du réseau de fibres, transférées au fluide par des approximations de la fonction  $\delta$  de Dirac. Cette méthode, adaptée à l'étude de l'interaction entre le sang et des valvules ou le muscle cardiaque [163], à la nage de vers aquatiques [50] ou à d'autres applications [33, 62, 209] ne semble pas adaptée à notre étude. En effet, la modélisation très simple de la structure ne permet pas une analyse fine des contraintes s'y développant, or c'est un des buts recherchés ici.

**Méthode des éléments finis immergés IFEM** Cette méthode, dont on trouvera un exposé dans [208], partage beaucoup d'éléments avec la méthode des frontières immergées étendue EIBM [203]. Ces deux méthodes proposent de coupler un solide totalement immergé avec un écoulement, discrétisé sur une grille fixe sous-jacente. Les nœuds lagrangiens du solide sont couplés au fluide par des distributions de forces, mais cette fois l'approximation de la fonction  $\delta$  de Dirac est approchée par les fonctions de forme RKPM, beaucoup plus régulières, qui permettent une plus grande précision. Ces fonctions de forme sont également employées pour l'interpolation des champs de vitesse. La discrétisation des équations sur le solide, qui peut occuper un volume non nul dans l'écoulement, est faite par éléments finis, assurant un calcul précis des efforts internes. Le fluide est discrétisé en éléments finis (IFEM) ou éléments spectraux (EIBM). Cependant, la formulation du couplage, qui force les champs de vitesse du solide et du fluide à être égaux sur l'ensemble du domaine fluide, impose une cinématique incompressible au solide, ce qui peut être trop restrictif.

**Méthode du domaine fictif** Cette méthode propose comme les précédentes de superposer un maillage fixe pour résoudre les équations du milieu fluide et un maillage mobile pour celles du solide. La partie du domaine fluide recouverte par le solide est appelée domaine fictif. Les équations de la mécanique des fluides peuvent y être résolues, mais le résultat obtenu n'a pas d'intérêt en lui-même, puisqu'il correspond à une zone où il n'y a pas d'écoulement physique. Le couplage entre les deux domaines est effectué par des multiplicateurs de Lagrange, soit sur l'interface fluide-solide  $\gamma$  [68], soit sur la totalité du domaine solide  $\omega$  [67]. La procédure est décrite dans le cas où les mouvements du solide rigide sont connus a priori, par conséquent le seul problème à résoudre est celui de l'écoulement avec une inclusion solide mobile.

$$\begin{aligned} \text{équation du mouvement} \quad & \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{w} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} - 2\nu \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}^S \underline{v} + \underline{\nabla} p = \underline{b} \quad \text{dans } \Omega \setminus \omega(t) \\ \text{équation de continuité} \quad & \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \omega(t) \\ \text{CL en déplacement} \quad & \underline{v} = \underline{v}_d \quad \text{sur } \Gamma \\ \text{CL en déplacement} \quad & \underline{v} = \underline{v}_s \quad \text{sur } \gamma(t) \\ \text{CI} \quad & \underline{v}(t=0) = \underline{v}_0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \omega(t) \end{aligned}$$

Comme  $\underline{v}_s$  est la vitesse d'un solide rigide, ce champ est à flux nul sur  $\gamma(t)$ , ce qui impose que  $\underline{v}_d$  le soit aussi sur  $\Gamma$ . Le problème précédent est équivalent (au sens où les restrictions de  $\underline{v}$  et  $p$  à  $\Omega \setminus \omega(t)$  sont les mêmes) à : Trouver  $\underline{v}, p, \underline{\lambda}$  tels que  $\forall \underline{w}, q, \underline{\mu}$  :

$$\int_{\Omega} \underline{w} \cdot \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{w} \cdot (\underline{w} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} + 2\nu \underline{\nabla}^S \underline{v} \cdot \underline{\nabla}^S \underline{w} - p \underline{\nabla} \cdot \underline{w} d\Omega + \int_{\gamma(t)} \underline{\lambda} \cdot \underline{w} dS = \int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{w} d\Omega \quad (3.4a)$$

$$\int_{\Omega} q \underline{\nabla} \cdot \underline{v} d\Omega = 0 \quad (3.4b)$$

$$\int_{\gamma(t)} \underline{\mu} \cdot (\underline{v} - \underline{v}_s) dS = 0 \quad (3.4c)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_d \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.4d)$$

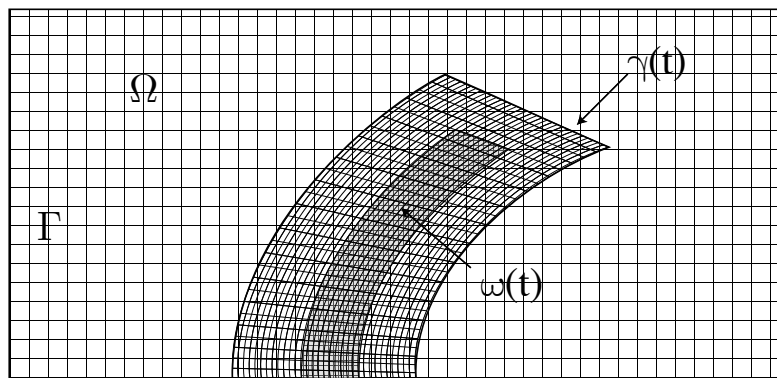
$$\underline{v}(t=0) = \underline{v}_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.4e)$$

L'intégration temporelle est effectuée par séparation des opérateurs [68], ce qui permet d'obtenir trois sous-problèmes simples respectivement associés à l'incompressibilité, la convection-diffusion et l'influence des multiplicateurs de Lagrange.

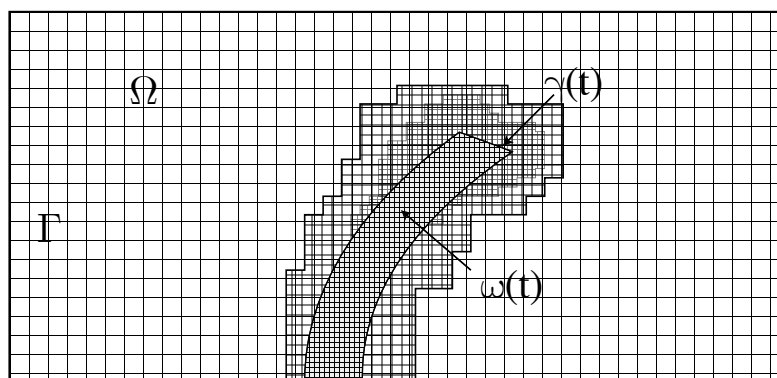
La procédure de couplage décrite ici permet d'imposer un champ de vitesse du solide vers le fluide, et donc d'utiliser les algorithmes de couplage décrits dans la section précédente. Cette méthode semble particulièrement adaptée au transport de particules rigides par l'écoulement [66]. Elle a également été adaptée à des problèmes d'interaction fluide-structure où la structure est déformable [5, 13, 28, 206]. Dans le cadre de la simulation de valves cardiaques, l'introduction d'un maillage adaptatif permet d'accroître la précision des calculs [197, 198].

### 2.3 Amélioration des conditions d'interface

L'intérêt porté à la précision des résultats obtenus à proximité de l'interface fluide-solide peut motiver des améliorations des méthodes évoquées ci-dessus. Ainsi, [61] établit une comparaison entre deux stratégies d'amélioration. La première est une adaptation de la méthode de domaine fictif couplé à des multiplicateurs de Lagrange précédemment décrite dans [60] employant un raffinement adaptatif du maillage. La seconde emploie une zone de transition dans un formalisme ALE autour du domaine solide, et une méthode de domaine fictif avec multiplicateurs de Lagrange, pour assurer le couplage entre la zone ALE et le reste du domaine fluide. Cette stratégie peut être vue comme une stratégie de domaine fictif avec multiplicateurs de Lagrange, où le couplage a lieu entre une grille fluide fixe, et un domaine mobile, constitué de l'union du maillage solide lagrangien, entouré d'un maillage fluide ALE. Ces deux derniers domaines sont également couplés par des multiplicateurs de Lagrange. La figure 3.4 résume ces deux stratégies.



(a) solution ALE



(b) adaptation du maillage fluide

FIGURE 3.4 : Stratégies d'amélioration

### 3 Conclusion pour ces travaux

Le choix d'une grille fixe pour la résolution du problème fluide impose d'utiliser une méthode de couplage entre maillages superposés pour l'interaction fluide-structure. Pour notre étude, on peut craindre que la simulation de la partie fluide comprenne trop d'erreur, et dégrade également les résultats obtenus pour le solide. En effet, les interpolations utilisées pour les champs de vitesse et de pression sont continues au travers des interfaces, ce qui peut dégrader la prise en compte des conditions aux limites pour l'écoulement [199]. Dans ce cas, il faudrait envisager d'enrichir les interpolations utilisées.



## **Deuxième partie**

# **Vers une méthode multi-échelle pour le couplage fluide-structure**



## Chapitre 4

# Méthode de décomposition de domaine pour les écoulements incompressibles inspirée de la méthode LaTIn

*Ce chapitre présente une méthode de décomposition de domaine pour traiter la partie fluide des problèmes d'interaction fluide-structure. La partition du domaine en sous-domaines et interfaces conduit à une résolution itérative du problème initial, alternant une étape sur les sous-domaines et une étape sur les interfaces. La convergence de cette stratégie sans problème macroscopique est d'autant plus lente que le nombre de sous-domaines est grand.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Rappel du problème fluide</b>	<b>73</b>
1.1	Formulation continue du problème de Navier-Stokes	73
1.2	Formulation faible du problème de Navier-Stokes	74
1.3	Résolution de l'équation non-linéaire	75
1.3.1	Linéarisation par itérations de Picard	75
1.3.2	Problème tangent résultant de la linéarisation du problème stabilisé	76
1.4	Discrétisation par Éléments Finis	78
<b>2</b>	<b>Résolution du problème par décomposition du domaine</b>	<b>79</b>
2.1	Formulation continue du problème décomposé	79
2.2	Formulation faible du problème décomposé	82
<b>3</b>	<b>Stratégie itérative de résolution mono-échelle</b>	<b>84</b>



3.1	Étape sur les interfaces . . . . .	84
3.2	Étape sur les sous-domaines . . . . .	86
3.3	Indicateur de convergence . . . . .	87
3.4	Remarques sur l'algorithme . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Exemple : écoulement de Poiseuille . . . . .</b>	<b>88</b>

---

# 1 Rappel du problème fluide

Nous rappelons dans cette section les équations de Navier-Stokes, puis expliquons les choix faits pour leur résolution. Ces choix sont présentés hors du cadre de la décomposition de domaine mais seront bien sûr maintenus lors de la résolution des problèmes sur les sous-domaines. L'exposé est accompagné de remarques pratiques concernant l'implantation dans un code éléments finis.

Ce code est basé sur la librairie LMTpp. Il s'agit d'une librairie développée au laboratoire, principalement par la cellule logicielle (H. Leclerc, R. Pasquier) dont le but est de faciliter les développements des doctorants du laboratoire. Pour cela, elle propose des outils de base (création et lecture de maillages, formulations, outils d'assemblage et de résolution, sauvegarde de résultats, ...) qui permettent d'avancer rapidement dans ces étapes obligatoires dans l'écriture d'un code, et facilitent l'obtention de premiers résultats. Il s'agit d'une plate-forme orientée objet, écrite en C++/Python, à laquelle chacun peut contribuer via un système de gestion de contributions, `git`. Son avantage est donc double, car elle permet de tester plus facilement des méthodes et des idées, et de pérenniser les développements des doctorants, une fois ceux-ci stabilisés.

## 1.1 Formulation continue du problème de Navier-Stokes

Considérons un écoulement non stationnaire homogène et incompressible d'un fluide visqueux occupant un domaine  $\Omega$  borné par  $\partial\Omega$ . L'écoulement est soumis à des conditions aux limites de Dirichlet  $\underline{v}_d$  sur  $\partial_v\Omega$  et à des efforts surfaciques  $\underline{f}$  sur  $\partial_f\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_v\Omega$ . Les efforts volumiques comme la gravité sont supposés sans effet sur le problème. Leur prise en compte ne modifie pas les résultats et les conclusions qui suivront. Le problème est formulé avec les inconnues de vitesse  $\underline{v}$  et de pression cinématique  $p$ .

Les équations du problème sont la conservation de la masse, l'hypothèse d'incompressibilité, la conservation de la quantité de mouvement, la relation de comportement d'un fluide newtonien, les conditions aux limites en vitesse et en effort, et enfin les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{v} &= 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} &= \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} & \text{sur } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} &= -p \underline{I} + \underline{\underline{\sigma}}_D = -p \underline{I} + 2\nu \underline{\underline{\nabla}}^S \underline{v} \\ -p \underline{n} + 2\nu \underline{\underline{\nabla}}^S \underline{v} \cdot \underline{n} &= \underline{f} & \text{sur } \partial_f \Omega \\ \underline{v} &= \underline{v}_d & \text{sur } \partial_v \Omega \\ \underline{v}(t=0) &= \underline{v}_o \end{aligned}$$

$\underline{v}_o$  doit être solénoïdal pour être compatible avec l'hypothèse d'incompressibilité. Il n'est pas nécessaire de préciser les conditions initiales pour la pression.

Hormis les conditions aux limites, les équations ci-dessus sont appelées équations de Navier-Stokes, et s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \underline{\nabla} \underline{v} - 2\nu \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}^S \underline{v} + \underline{\nabla} p = 0 \quad (4.1)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (4.2)$$

## 1.2 Formulation faible du problème de Navier-Stokes

La vérification en moyenne des équations (4.1) et (4.2) sur le domaine  $\Omega$  s'écrit, en notant les fonctions test  $\underline{w}$  et  $q$  :

$$\int_{\Omega} \underline{w} \cdot \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \underline{\nabla} \underline{v} - 2\nu \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}^S \underline{v} + \underline{\nabla} p \right) + q \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \, d\Omega = 0 \quad (4.3)$$

soit, après intégration par parties :

$$\int_{\Omega} \underline{w} \cdot \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{w} \cdot \underline{v} \underline{\nabla} \underline{v} + 2\nu \underline{\nabla}^S \underline{w} \underline{\nabla}^S \underline{v} - p \underline{\nabla} \cdot \underline{w} - q \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{w} \cdot \underline{f} \, d\Gamma \quad (4.4)$$

**Choix des espaces d'admissibilité** L'équation du problème au sens faible ne fait intervenir que des dérivées de premier ordre et pour le champ de vitesse uniquement. La solution du problème est cherchée sur un intervalle de temps noté  $[0, T]$ , les espaces définissant les champs admissibles sont donc classiquement :

$$\begin{aligned} \underline{v} \in \mathcal{V} &= \{ \underline{v} \in H^1(\Omega)^d \mid \underline{v} = \underline{v}_d \text{ sur } \partial_v \Omega \} \times [0, T] \\ \underline{w} \in \mathcal{V}_0 &= \{ \underline{w} \in H^1(\Omega)^d \mid \underline{w} = \underline{0} \text{ sur } \partial_v \Omega \} \times [0, T] \\ p, q \in \mathcal{Q} &= L^2(\Omega) \times [0, T] \end{aligned}$$

L'emploi d'une stabilisation de type SUPG fait cependant intervenir des dérivées du second ordre pour le champ de vitesse. Il faudrait donc en théorie restreindre les espaces  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}_0$  à  $\{ \underline{v} \in H^2(\Omega)^d \mid \underline{v} = \underline{v}_d \text{ sur } \partial_v \Omega \} \times [0, T]$  et  $\{ \underline{v} \in H^2(\Omega)^d \mid \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } \partial_v \Omega \} \times [0, T]$  respectivement. En pratique, ces problèmes sont résolus sur des espaces de dimension finie engendrés par des fonctions polynomiales, et donc appartenant à  $H^2(\Omega)$ . Ces restrictions sont distinguées des espaces de dimension infinie par un exposant  $h$ .

Dans le cas où les conditions aux limites de Dirichlet couvrent l'ensemble de la frontière du domaine, la pression est déterminée à une constante près, qui est fixée en imposant une moyenne nulle à la pression, ou une pression nulle en un point donné du domaine. L'espace de recherche correspondant est alors  $\mathcal{Q}_0 = (L^2(\Omega)/\mathbb{R}) \times [0, T]$ .

**Discrétisation temporelle** Dans le cas de problèmes d'évolution, l'intégration temporelle est réalisée par un schéma trapézoïdal, aussi appelé schéma de Crank Nicholson ou  $\theta$ -méthode,  $\theta = 1/2$ .

**Restriction dans le cas d'un écoulement stationnaire** Le problème de Navier-Stokes est un problème d'évolution. Cependant, dans certains cas, le problème stationnaire correspondant possède une solution. Cette solution peut être obtenue comme la limite, lorsque le temps tend vers l'infini, d'une solution du problème non stationnaire. Ce n'est pas l'approche que nous avons retenue ici. Nous préférons la calculer directement, comme solution de l'équation stationnaire écrite sous forme faible :

$$\int_{\Omega} \underline{w} \cdot \underline{v} \underline{\nabla} \underline{v} + 2\underline{v} \underline{\nabla} \underline{w} : \underline{\nabla} \underline{v} - p \underline{\nabla} \cdot \underline{w} - q \underline{\nabla} \cdot \underline{v} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{w} \cdot \underline{f} d\Gamma \quad (4.5)$$

Afin de ne pas surcharger les notations, lorsqu'il y sera fait référence, les espaces d'admissibilité seront notés de la même manière que dans le cas non stationnaire.

### 1.3 Résolution de l'équation non-linéaire

Le terme de convection est non linéaire, il faut donc décider d'une méthode pour résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Lorsque l'on cherche une solution non stationnaire, une des possibilités est d'employer un schéma d'intégration explicite. Le terme de convection apparaît alors au second membre, et l'équation à résoudre est linéaire. Cependant, cette méthode n'est pas valable dans notre cas, puisque nous voulons chercher les solutions du problème stationnaire directement. Nous comparons donc deux possibilités différentes pour linéariser l'équation 4.1. Dans la suite les indices désignent les pas de temps, et les exposants correspondent aux itérations de la méthode de linéarisation, à l'intérieur d'un pas de temps. Nous exposons uniquement la traitement de l'équation non linéaire, la condition d'incompressibilité étant linéaire. Mis à part dans le cas d'un traitement explicite du terme de convection, l'utilisation d'un schéma d'intégration fait apparaître un terme de convection dans le membre de gauche de (4.1), pondéré par un coefficient dépendant du schéma d'intégration choisi. Pour simplifier l'exposé, nous supposons que ce coefficient est unitaire, le déroulement de la méthode est le même si ce n'est pas le cas. En notant  $\underline{v}_{,tn}$  une approximation de  $\partial \underline{v} / \partial t$  au pas de temps  $n$ , par exemple  $(\underline{v}_n - \underline{v}_{n-1}) / \Delta t$ , nous cherchons donc les solutions de :

$$\underline{v}_{,tn} + \underline{v}_n \underline{\nabla} \underline{v}_n - 2\underline{v} \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}^S \underline{v}_n + \underline{\nabla} p_n = 0 \quad (4.6)$$

#### 1.3.1 Linéarisation par itérations de Picard

Une stratégie répandue pour la résolution des problèmes de Navier-Stokes est de linéariser le problème en remplaçant le terme de convection à un pas de temps fixé  $\underline{v}_n \cdot \underline{\nabla} \underline{v}_n$  par  $\underline{v}_n^{j-1} \cdot \underline{\nabla} \underline{v}_n^j$ , réalisant ainsi un algorithme de point fixe, aussi appelé itération de Picard. On obtient alors une équation linéaire, dont le terme de convection est fixé.

$$\underline{v}_{,tn}^j + \underline{v}_n^{j-1} \underline{\nabla} \underline{v}_n^j - 2\underline{v} \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}^S \underline{v}_n^j + \underline{\nabla} p_n^j = 0 \quad (4.7)$$

L'emploi d'une stabilisation SUPG n'ajoute pas de terme non-linéaire, puisque le résidu de l'équation (4.7) dépend linéairement des champs inconnus. À chaque pas du processus

itératif, il faut résoudre un problème de type : Trouver  $\underline{v}, p \in \mathcal{V} \times Q$  tels que,  $\forall \underline{w}, q \in \mathcal{V}_0 \times Q$  :

$$\begin{aligned} & \left( \underline{w}, \underline{v}_{,tn}^j + \underline{v}_n^{j-1} \underline{\nabla} \underline{v}_n^j \right)_\Omega + \left( \underline{v} \underline{\nabla}^S \underline{v}_n^j, \underline{\nabla}^S \underline{w} \right)_\Omega - (p_n^j, \underline{\nabla} \cdot \underline{w})_\Omega - (q, \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_n^j)_\Omega \\ & + \sum_e \tau_{\text{SUPG}} (\underline{v}_n^{j-1} \underline{\nabla} \underline{w}) \cdot (\underline{v}_{,tn}^j + \underline{v}_n^{j-1} \underline{\nabla} \underline{v}_n^j + \underline{\nabla} p_n^j - \underline{v} \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}^S \underline{v}_n^j) = (\underline{f}, \underline{w})_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

### 1.3.2 Problème tangent résultant de la linéarisation du problème stabilisé

L'ajout des termes de stabilisation introduit des termes non-linéaires supplémentaires dans la formulation. On peut alors appliquer un algorithme de Newton à l'équation stabilisée, comme par exemple dans [41]. Cette manière de faire impose de calculer plus de dérivées pour construire l'opérateur tangent.

L'équation 4.6 définit un résidu non linéaire  $R_{NL}$ , dont on note la partie bilinéaire  $R_L$  :

$$R_{NL}(\underline{v}, p) = \underline{v} \underline{\nabla} \underline{v} + R_L(\underline{v}, p) = 0 \quad (4.8)$$

La forme faible associée à (4.8) s'écrit : Trouver  $\underline{v}, p \in \mathcal{V} \times Q$  tels que,  $\forall \underline{w}, q \in \mathcal{V}_0 \times Q$  :

$$\mathcal{R}_{NL}(\underline{v}, \underline{w}, p, q) = (\underline{w}, \underline{v} \underline{\nabla} \underline{v}) + \mathcal{R}_L(\underline{v}, \underline{w}, p, q) = 0$$

Où  $\mathcal{R}_L$  est la forme faible issue de  $R_L$ .  $\mathcal{R}_{NL}$  n'est pas une forme bilinéaire, mais correspond à la vérification de (4.8) au sens faible. Le champ de convection étant ici  $\underline{v}$ , la stabilisation de ce problème par la méthode SUPG amène à résoudre : Trouver  $\underline{v}, p \in \mathcal{V} \times Q$  tels que  $\forall \underline{w}, q \in \mathcal{V}_0 \times Q$  :

$$\mathcal{R}_{NL}(\underline{v}, \underline{w}, p, q) + \sum_e \tau_{\text{SUPG}} (\underline{v} \underline{\nabla} \underline{w}) \cdot R_{NL}(\underline{v}, p) = 0 \quad (4.9)$$

Le problème tangent de (4.9) s'écrit : Trouver  $\underline{v}^{j+1} = \underline{v}^j + \underline{\Delta} \underline{v}, p \in \mathcal{V}_0 \times Q$  tels que  $\forall \underline{w}, q \in \mathcal{V}_0 \times Q$  :

$$\begin{aligned} & (\underline{w}, \underline{v}_n^{j+1} \underline{\nabla} \underline{v}_n^j + \underline{v}_n^j \underline{\nabla} \underline{v}_n^{j+1} - 2 \underline{v}_n^j \underline{\nabla} \underline{v}_n^j) + \mathcal{R}_L(\underline{v}^{j+1}, \underline{w}, p, q) \\ & + \sum_e \tau_{\text{SUPG}} (\underline{\Delta} \underline{v} \underline{\nabla} \underline{w} \cdot R_{NL}(\underline{v}_n^j, p^j) + \underline{v}_n^j \underline{\nabla} \underline{w} \cdot R_L(\underline{\Delta} \underline{v}) + \underline{v}_n^j \underline{\nabla} \underline{\Delta} \underline{v} + \underline{\Delta} \underline{v} \underline{\nabla} \underline{v}_n^j) = 0 \quad (4.10) \end{aligned}$$

**Remarque 2 :** Une troisième méthode serait de stabiliser l'équation obtenue par application d'un schéma de Newton-Raphson à l'équation (4.6). La stabilisation du problème est alors délicate. Il faut en effet stabiliser le problème linéaire effectivement résolu, et non pas le problème non linéaire. Nous n'avons pas obtenu de résultat convenable avec cette méthode, probablement à cause du terme source  $\underline{v}_n^j \underline{\nabla} \underline{v}_n^{j-1}$  introduit par l'opérateur tangent de  $\underline{v} \underline{\nabla} \underline{v}$ .

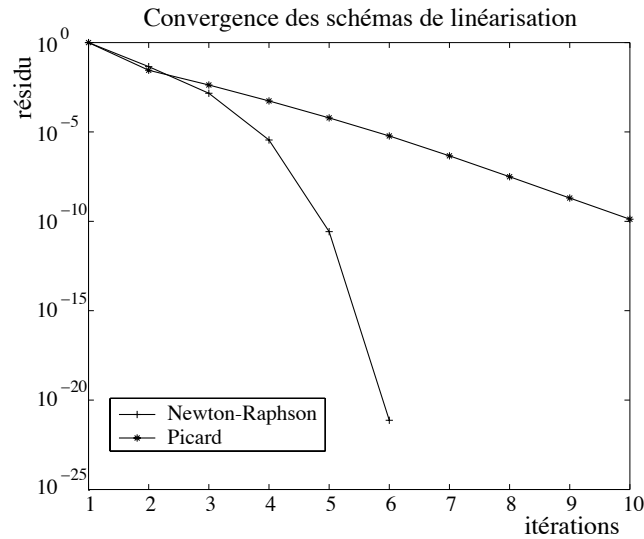


FIGURE 4.1 : Problème de Navier-Stokes ( $R_e = 40$ ) : convergence des stratégies de linéarisation

Les performances des deux solutions exposées ci-dessus sont illustrées sur le problème de Navier-Stokes présenté en fin de section. Pour le problème stationnaire, et un nombre de Reynolds modéré ( $R_e = 40$ ), la linéarisation de l'équation stabilisée est plus efficace que la méthode de point fixe. Elle est aussi plus complexe à mettre en œuvre. L'utilisation de la librairie LMTpp réduit considérablement la difficulté, nous choisissons d'employer cette méthode dans la suite.

**Remarque 3 : Solveur multifrontal non symétrique** *Le problème éléments finis est non symétrique, nous utilisons la librairie UMFPACK [27] pour inverser les systèmes linéaires à chaque pas de l'algorithme de Newton.*

**Choix du paramètre de stabilisation** Pour des interpolations d'ordre un, une analyse de l'erreur permet d'établir la dépendance de  $\tau$  vis à vis des paramètres du problème :  $a = \|\underline{v}\|, h, \nu$ . Ainsi, selon [24], la valeur optimale de  $\tau$  est :

$$\tau = \left( \frac{1}{\theta \Delta t} + \frac{2a}{h} + \frac{4\nu}{h^2} \right)^{-1} \quad (4.11)$$

L'absence de paramètre optimal pour des interpolations d'ordre supérieur, à part les résultats mentionnés dans [58], explique certainement le recours quasi-systématique à des interpolations de degré un, et par conséquent, l'emploi de la méthode de stabilisation PSPG.

Numériquement, l'expérience semble montrer que pour un ordre  $p$ , il faut employer un paramètre proche de  $\tau/p$ .

## 1.4 Discrétisation par Éléments Finis

**Éléments mixtes de Taylor-Hood** Comme précisé au premier chapitre, des éléments triangles combinés à des fonctions de forme linéaires et quadratiques pour la pression et la vitesse respectivement vérifient la condition *inf-sup*. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser une méthode de stabilisation supplémentaire.

### Remarque 4 : Implantation avec LMTpp

Dans LMTpp, un type unique d'élément est associé au maillage et à la formulation. Sur un type d'élément, l'interpolation est définie en associant un degré de liberté à chaque nœud. Nous choisissons des triangles à 6 nœuds, le champ de vitesse est ainsi quadratique, ce qui est recherché, mais le champ de pression également, ce qui n'est pas souhaité. Nous avons donc défini une nouvelle interpolation faisant intervenir les trois degrés de liberté sommitaux pour la pression, et ajouté un terme au résidu  $r$ , afin de bloquer les degrés de liberté associés aux nœuds milieux (figure 4.2). Pour des raisons de visualisation des résultats, on comprend facilement qu'il est plus judicieux de réaliser un blocage Tri3, bien que cela ne change pas les résultats obtenus pour les degrés de liberté sommitaux.

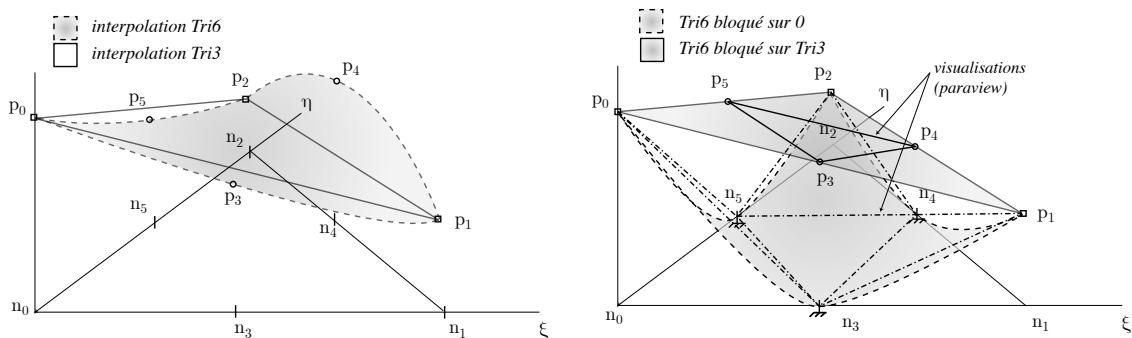


FIGURE 4.2 : Blocage de degrés de liberté excédentaires

**Éléments finis linéaires** L'utilisation d'interpolations polynomiales de même ordre pour les inconnues de vitesse et de pression conduit à des éléments qui ne vérifient pas la condition *inf-sup*. Il est cependant possible de contourner cette condition par l'ajout d'un terme de stabilisation supplémentaire [194]. Le paramètre  $\tau_p$  est choisi tel que :  $\tau_p = \frac{h^2}{12\nu}$ .

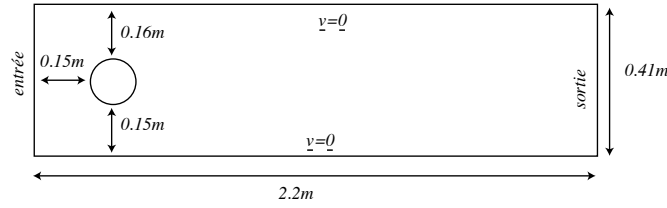


FIGURE 4.3 : Cas test d'illustration : écoulement autour d'un cylindre.  
Géométrie du problème

**Test des interpolations vitesse-pression** Pour isoler la difficulté liée à l'incompressibilité, nous considérons le problème de Stokes, qui peut être obtenu à partir du problème de Navier-Stokes. À faible nombre de Reynolds, le terme de convection du problème de peut en effet être négligé. Les deux problèmes sont des problèmes de point selle, puisque l'écoulement est incompressible. Les considérations numériques du traitement de l'incompressibilité s'appliquent donc aux deux problèmes. Considérons le problème d'un écoulement autour d'une section circulaire, tel que décrit sur la figure 4.3. La vitesse en entrée est imposée horizontale, et parabolique en  $y$ . La figure 4.4 présente les champs de vitesse et de pression obtenus pour différentes solutions éléments finis. L'emploi d'interpolations de même ordre (éléments triangles et fonctions de forme linéaires) génère des oscillations dans le champ de pression, visibles principalement en amont du cylindre. Le champ de vitesse est néanmoins correct. La stabilisation du problème par la méthode PSPG ou l'emploi d'une interpolation adéquate (éléments triangles et fonctions de forme quadratiques et linéaires) permettent d'obtenir un champ de pression juste. Les deux solutions aboutissent au même résultat.

## 2 Résolution du problème par décomposition du domaine

Le domaine  $\Omega$  occupé par l'écoulement est décomposé en  $N$  sous-domaines disjoints  $\Omega_{E \in \mathcal{E}}$  et en interfaces  $\Gamma_{EE'}$ , selon la figure 4.5, chacun ayant ses propres variables et équations [112]. On note  $\square_E$  la restriction de toute quantité  $\square$  à  $\Omega_E$ . Sur le sous-domaine  $\Omega_E$ , les variables sont donc  $\underline{v}_E$  et  $p_E$ , champs de vitesse et de pression. Sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$ , le champ  $\underline{W}_{EE'}$  est la trace de  $\underline{v}_E$ , et  $\underline{F}_{EE'}$  est la composante normale du tenseur des contraintes  $\sigma_E$ .

### 2.1 Formulation continue du problème décomposé

Pour être solutions du problème, les champs sur les sous-domaines et sur les interfaces doivent vérifier les conditions d'admissibilité sur les sous-domaines et les relations de comportement d'interface.



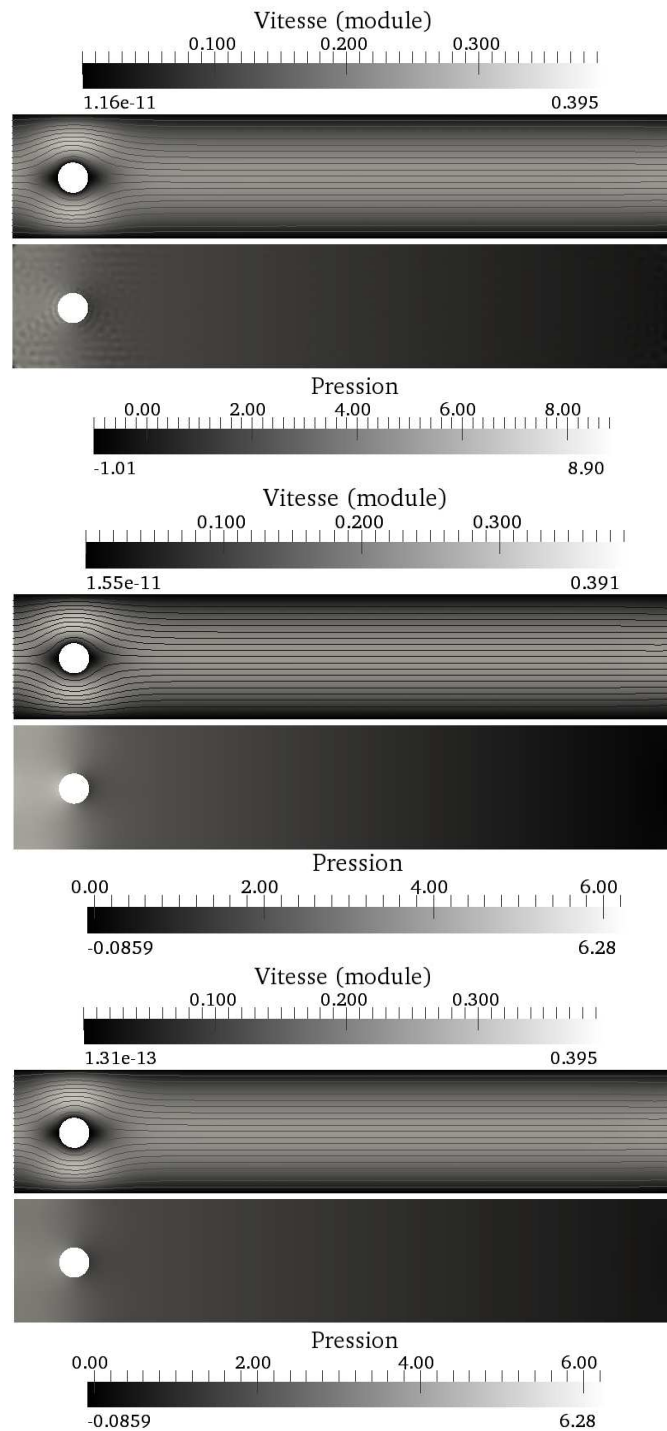


FIGURE 4.4 : Problème de Stokes : champs de vitesse et de pression.  
haut : éléments Tri3Tri3. milieu : éléments Tri3Tri3 et stabilisation  
PSPG. bas : éléments Tri6Tri3 compatibles LBB

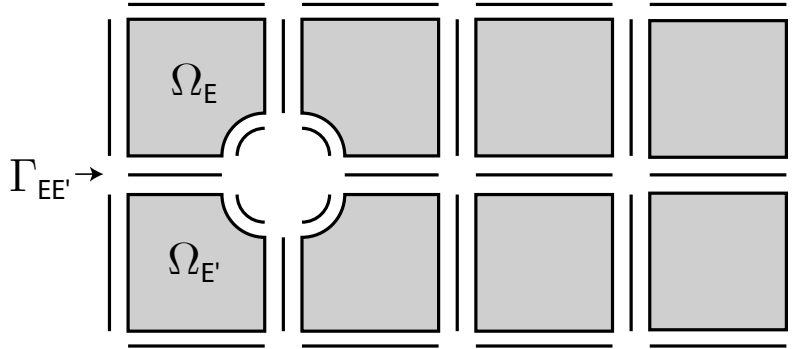


FIGURE 4.5 : Décomposition en sous-domaines et interfaces

**Conditions d'admissibilité par sous-domaine** Le champ  $\underline{v}_E$  doit être égal à la vitesse d'interface sur le bord du sous-domaine :

$$\underline{W}_E = \underline{v}_E|_{\partial\Omega_E}$$

Il doit également vérifier les conditions initiales dans le cas de problèmes d'évolution :

$$\underline{v}_E|_{t=0} = \underline{v}_{E,0}$$

Le champ de contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}_E$  doit équilibrer les efforts d'interface  $\underline{F}_E$  et les efforts d'inertie :

$$\frac{\partial \underline{v}_E}{\partial t} + \underline{v}_E \underline{\underline{\nabla}} \underline{v}_E + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_E = 0$$

et vérifier la relation de comportement d'un fluide newtonien :

$$\underline{\underline{\sigma}}_E = -pE\underline{\underline{I}} + 2\nu\underline{\underline{\nabla}}^S(\underline{v}_E)$$

**Comportement des interfaces** L'interface  $\Gamma_{EE'}$  entre  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  génère une relation de comportement entre  $\underline{W} = \underline{W}_{EE'}$ ,  $\underline{W}' = \underline{W}_{E'}$ ,  $\underline{F} = \underline{F}_{EE'}$  et  $\underline{F}' = \underline{F}_{E'E}$  qui sont des restrictions de  $\underline{W}_E$ ,  $\underline{W}_{E'}$ ,  $\underline{F}_E$  et  $\underline{F}_{E'}$  respectivement. Le problème de Navier-Stokes fait intervenir uniquement des interfaces parfaites, pour lesquelles la relation de comportement s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{W} &= \underline{W}' \\ \underline{F} &= -\underline{F}' \end{aligned}$$

**Remarque 5 : Conditions aux limites** Les conditions aux limites sont prises en compte comme une relation de comportement particulière :

- pour une interface à vitesse imposée :  $\underline{W} = \underline{W}_d$
- pour une interface à effort imposé :  $\underline{F} = \underline{F}_d$

**Reformulation du problème** Avec les définitions ci-dessus, le problème posé sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  s'écrit :

- Trouver  $(v_E, p_E, \underline{W}_E, \underline{F}_E)_{E \in \mathcal{E}}$  tels que :
1.  $(v_E, p_E, \underline{W}_E, \underline{F}_E)$  est admissible sur  $\Omega_E$
  2.  $(\underline{W}_E, \underline{F}_E)$  vérifie le comportement des interfaces

Les deux points définissent deux espaces, à l'intersection desquels se trouve la solution recherchée. Le calcul de cette solution est réalisé de manière itérative, et exposé dans la section 3.

## 2.2 Formulation faible du problème décomposé

La formulation faible associée au problème décomposé correspond à la vérification en moyenne des équations de Navier-Stokes sur chaque sous-domaine. Le problème éléments finis correspondant est construit de la même manière que décrite en début de chapitre. Les conditions d'interface sont également vérifiées de manière faible.

**Espaces d'approximation sur les interfaces** Sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$ , les champs de vitesse  $\underline{W}$  et d'effort  $\underline{F}$  doivent être choisis avec soin. Le champ d'effort  $\underline{F}$  appartient en effet à  $H^{-1/2}(\Gamma_{EE'})$ , il n'est donc pas forcément continu. En élastostatique, l'interpolation des champs d'effort est choisie compatible avec la trace du champ de contrainte sur le bord des sous-domaines. Ainsi, pour des éléments linéaires, le champ  $\underline{F}$  est constant par élément d'interface. En pratique, cela génère des modes oscillants sur l'interface, dont l'énergie est très mal évaluée. La convergence de la stratégie étant évaluée à partir des quantités d'interface, ces modes pénalisent également la convergence. Ces modes sont décrits plus précisément dans [115]. La figure 4.6 illustre la présence d'oscillations de l'effort normal dans une zone à fort gradient [158]. Pour remédier à cela, les bords des

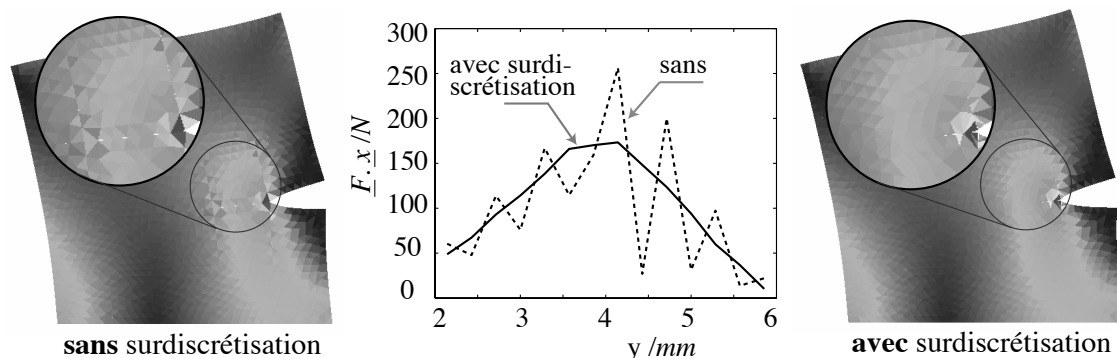


FIGURE 4.6 : Oscillations de l'effort normal sur une interface, d'après [158]

sous-domaines doivent posséder une description plus fine que les interfaces. En pratique, deux techniques sont possibles. Les éléments de bord des sous-domaines peuvent être divisés en plusieurs éléments, ou posséder une interpolation d'ordre plus élevé. On parle respectivement de sur-discrétisation  $h$  ou  $p$ . La figure 4.7 illustre ces deux méthodes. Dans notre cas, la méthode  $p$  est bien sûr préférée, puisqu'elle est automatiquement réalisée par l'emploi d'éléments Tri6-Tri3. Bien entendu, la surdiscrétisation ne concerne que le champ de vitesse, dont les dérivées spatiales interviennent dans le tenseur des contraintes. Le champ de pression, linéaire par élément n'a pas besoin d'être enrichi. Cependant, nous

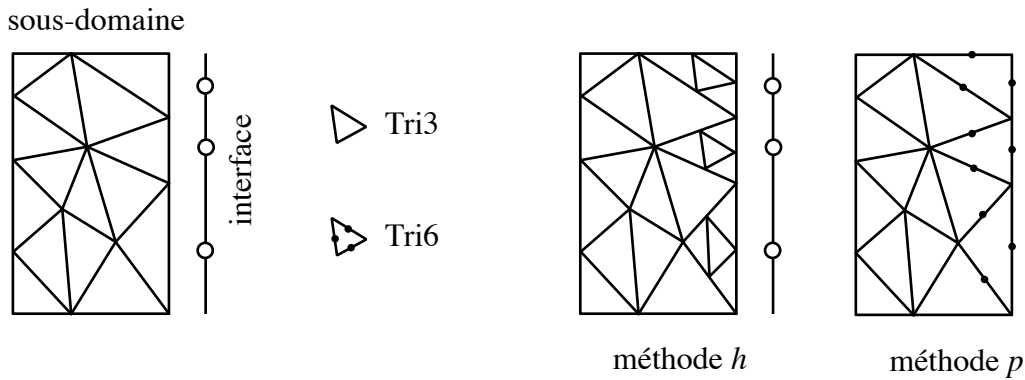


FIGURE 4.7 : Sur-discrétisation des éléments sur le bord des sous-domaines

n'avons pas observé de différence avec l'emploi d'interpolations linéaires et de quantités d'interfaces constantes par élément. Ainsi, ceci ne constitue pas un critère significatif pour le choix des approximations sur les sous-domaines. Les quantités d'interface sont maintenues constantes par élément d'interface. Les champs  $\underline{W}_E$  et  $\underline{F}_E$  appartiennent à des espaces notés  $\mathcal{W}_E$  et  $\mathcal{F}_E$  respectivement.

**Espaces d'approximation sur les sous-domaines** Les problèmes posés sur chaque sous-domaine sont soumis à des conditions aux limites de Robin, les espaces d'admissibilité pour les champs de vitesse et de pression n'ont donc d'autre contrainte que de contenir des fonctions suffisamment dérivables et intégrables, on choisit :

$$\underline{v}_E, \underline{w}_E \in \mathcal{V}_E = \{\underline{v}_E \in H^1(\Omega_E)^d\} \times [0, T] \quad (4.12)$$

$$p_E, q_E \in Q_E = L^2(\Omega_E) \times [0, T] \quad (4.13)$$

Dans la suite,  $\mathcal{V}_E$  et  $Q_E$  désignent des sous-espaces de dimension finie des espaces ci-dessus, associés aux éléments Tri6-Tri3 ou Tri3-Tri3.

**Conditions d'admissibilité par sous-domaine** Le champ  $\underline{v}_E$  doit être égal à la vitesse d'interface  $\underline{W}_E$  sur le bord du sous-domaine. Il en est de même pour les champs virtuels

$\underline{w}_E$  et  $\underline{W}_E^*$  :

$$\int_{\partial\Omega_E} (\underline{W}_E - \underline{v}_E) \cdot \underline{F}_E^* d\Gamma = 0 \quad \forall \underline{F}_E^* \in \mathcal{F}_E \quad (4.14)$$

Après intégration par parties, et injection de la relation de comportement, l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de conservation de la masse sur  $\Omega_E$  s'écrivent : Trouver  $(\underline{v}_E, p_E) \in \mathcal{V}_E \times Q_E$  tels que  $(\underline{w}_E, q_E) \in \mathcal{V}_E \times Q_E$

$$\int_{\Omega_E} \underline{w}_E \cdot \left( \frac{\partial \underline{v}_E}{\partial t} + \underline{v}_E \underline{\nabla} \underline{v}_E \right) + 2\nu \underline{\nabla}^S \underline{v}_E : \underline{\nabla}^S \underline{w}_E - p_E \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_E d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{W}_E^* dS \quad (4.15)$$

$$\int_{\Omega_E} -q_E \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_E d\Omega = 0 \quad (4.16)$$

### 3 Stratégie itérative de résolution mono-échelle

La méthode LaTIn[112] est à l'origine une méthode de résolution générale pour les problèmes non-linéaires d'évolution. Elle a été appliquée à un grand nombre de problèmes. Nous retenons ici deux points de cette méthode :

- la séparation des difficultés
- la stratégie itérative de résolution

Le premier point consiste à regrouper les équations selon leur caractère. Il s'agit en général d'un groupe contenant les équations linéaires éventuellement globales, et d'un second groupe contenant les équations locales, éventuellement non-linéaires. Le second point consiste à construire des solutions vérifiant alternativement l'un des groupes d'équations, définissant ainsi une stratégie itérative à deux étapes. Dans le cas du problème de Navier-Stokes résolu par décomposition de domaine, le premier groupe contient les conditions d'admissibilité sur les sous-domaines, et le second les relations de comportement des interfaces.

La figure 4.8 illustre l'application de la stratégie itérative à la méthode de décomposition de domaine pour le problème de Navier-Stokes. Il faut à chaque étape construire une solution dans l'espace  $A_d$  ou  $\Gamma$ , en partant d'une solution de  $\Gamma$  ou  $A_d$ . Ainsi posés, ces problèmes n'ont pas de solution unique. On doit ajouter les contraintes de direction de recherche, notées  $Z^+$  et  $Z^-$  pour fermer les problèmes.

#### 3.1 Étape sur les interfaces

À l'étape sur les interfaces, on ne cherche que les champs d'interface vérifiant les relations de comportement et la direction de recherche  $Z^+$ , à partir des champs  $(\underline{W}_E, \underline{F}_E) \in A_d$  :

$$\int_{\partial\Omega_E} \underline{\hat{z}}^{-1} (\underline{\hat{F}}_E - \underline{F}_E) - (\underline{\hat{W}}_E - \underline{W}_E) \cdot \underline{F}_E^* d\Gamma = 0 \quad \forall \underline{F}_E^* \in \mathcal{F}_E \quad (4.17)$$

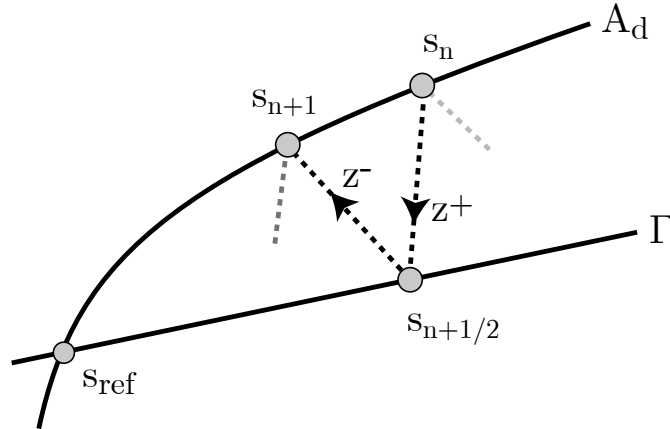


FIGURE 4.8 : Représentation schématique de la stratégie itérative

**Choix des directions de recherche** L'opérateur  $\underline{z}$  est en général choisi local, c'est à dire qu'il n'introduit pas de dépendance globale entre les différentes interfaces du problème. Ainsi, l'équation (4.17) peut être vérifiée en chaque point de Gauss des éléments de l'interface :

$$(\widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E) - \underline{z}(\widehat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E) = 0 \quad \text{en chaque point de Gauss}$$

Des travaux récents ont montré, dans le cas de l'élastostatique, que la direction de recherche optimale  $\underline{z}_{opt}$  est la rigidité du complémentaire de  $\Omega_E$  condensé sur  $\partial\Omega_E$ . Le calcul du complément de Schur n'étant pas envisageable, on peut calculer cet opérateur sur un voisinage de  $\Omega_E$  uniquement. Toujours dans le cas de l'élastostatique, le problème macroscopique propageant les résultantes et les moments sur les interfaces, les directions de recherche n'ont qu'un effet local. On montre également qu'une approximation grossière du complément de Schur est suffisante [116].

Dans notre cas, nous distinguons la direction suivant la normale  $\underline{n}$  à l'interface et les directions tangentes pour écrire :

$$\underline{z} = z_n \underline{n} \otimes \underline{n} + z_t (\underline{I} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \quad (4.18)$$

Selon la tangente à l'interface, l'expression de la trace du champ de contrainte donne :  $\underline{F}_t = 2\mu \underline{\nabla}^S \underline{v} \cdot \underline{t}$ . Nous choisissons donc  $z_t = \nu\rho/h$ , avec  $h$  la taille locale de l'élément. Selon la normale à l'interface, une étude paramétrique (voir le chapitre 5) montre que le meilleur choix pour  $z_n$  est compris dans l'intervalle  $[5\rho\nu/L; 50\rho\nu/L]$ ,  $L$  étant la taille de l'interface. Nous prendrons par la suite  $z_n = 10\rho\nu/L$ .

**Calcul des champs d'interface** On peut à présent introduire le comportement d'une interface parfaite

$$\widehat{\underline{W}}_E = \widehat{\underline{W}}_{E'} \quad \text{et} \quad \widehat{\underline{F}}_E = -\widehat{\underline{F}}_{E'}$$

pour déterminer complètement les champs  $\widehat{W}_E$  et  $\widehat{F}_E$  :

$$\widehat{W}_E = \widehat{W}_{E'} = \frac{1}{2}(\underline{W}_E + \underline{W}_{E'}) - \frac{1}{2\underline{z}}(\underline{F}_E + \underline{F}_{E'}) \quad (4.19)$$

$$\widehat{F}_E = -\widehat{F}_{E'} = \frac{1}{2}(\underline{F}_E - \underline{F}_{E'}) - \frac{1}{2\underline{z}}(\underline{W}_E - \underline{W}_{E'}) \quad (4.20)$$

**Remarque 6 : Conditions aux limites** *Un avantage certain de la méthode est de prendre en compte les conditions aux limites dans le même formalisme d'interface. Ainsi les problèmes sur les sous-domaines jouxtant le bord du domaine sont posés de la même manière que sur les sous-domaines situés à l'intérieur. Rappelons que les conditions aux limites correspondent à des comportements particuliers d'interface :*

– pour une interface à vitesse imposée :

$$\widehat{W}_E = \underline{W}_d \text{ et } \widehat{F}_E = \underline{F}_E + \underline{z}(\underline{W}_d - \underline{W}_E)$$

– pour une interface à effort imposé :

$$\widehat{F}_E = \underline{F}_d \text{ et } \widehat{W}_E = \underline{W}_E + \underline{z}^{-1}(\underline{F}_d - \underline{F}_E)$$

### 3.2 Étape sur les sous-domaines

En partant d'une solution  $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$  sur les interfaces composant le bord de chaque sous-domaine, on cherche une solution  $(\underline{v}_E, p_E, \underline{W}_E, \underline{F}_E)$  sur chacun des sous-domaines. Cette solution doit vérifier les conditions d'admissibilité (4.14) (4.15-4.16) et la direction de recherche :

$$(\underline{F}_E - \widehat{F}_E) + \underline{z}(\underline{W}_E - \widehat{W}_E) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_E \quad (4.21)$$

Soient donc à résoudre  $\dim(\mathcal{E})$  problèmes indépendants par sous-domaines, avec des conditions aux limites mixtes. La résolution de ces problèmes est évidemment réalisable en parallèle. Ces problèmes s'écrivent : Trouver  $(\underline{v}, p) \in \mathcal{V}_E \times Q_E$  tels que  $\forall (\underline{w}, q) \in \mathcal{V}_E \times Q_E$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_E} \underline{w}_E \cdot \left( \frac{\partial \underline{v}_E}{\partial t} + \underline{v}_E \underline{\nabla} \underline{v}_E \right) + 2\underline{v} \underline{\nabla}^S \underline{v}_E : \underline{\nabla}^S \underline{w}_E - p_E \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_E - q_E \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_E \, d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega_E} \underline{z} \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* \, dS = \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{F}_E + \underline{z} \widehat{W}_E) \cdot \underline{W}_E^* \, dS \end{aligned} \quad (4.22)$$

**Remarque 7 : Choix des directions de recherche pour les interfaces de condition aux limites** On remarque que dans le cas d'une interface à effort imposé, le choix  $\underline{z} = \underline{0}$  permet d'imposer exactement l'effort. De même, dans le cas d'une interface à vitesse imposée, la limite  $\underline{z} = k\underline{I}$ ,  $k \mapsto \infty$  permet d'imposer exactement la condition de Dirichlet. En pratique, nous choisissons des paramètres très petits ou très grands devant les directions de recherche habituelles (4.18), avec un rapport de l'ordre de  $k_{fact} = 10^6$ . Ceci permet de réaliser un compromis entre le conditionnement des matrices et l'imposition des conditions aux limites. Si celles-ci ne sont vérifiées exactement qu'à convergence, l'importance de  $k_{fact}$  permet d'assurer une erreur très faible sur les interfaces de condition aux limites par rapport aux autres interfaces.

**Assemblage des directions de recherche** Le calcul de la matrice du problème 4.22 est effectué par la librairie LMTpp pour ce qui concerne les intégrales sur  $\Omega$ . Les contributions liées aux intégrales sur les interfaces sont ajoutées ensuite. Elles forment le second membre de l'équation, et ajoutent un terme à la matrice du problème, pour les degrés de liberté situés sur le bord. Contrairement à la méthode LaTInoù les matrices de rigidité par sous-domaine sont calculées puis stockées, il faut ici recalculer la matrice à chaque itération et pour chaque pas de l'algorithme de Newton. Nous stockons donc des matrices relatives à l'interface, qui sont la représentation discrète des opérateurs de trace de d'injection, permettant de passer des degrés de liberté sur le bord d'un sous-domaine aux points de Gauss des éléments d'interface (notée  $N$ ), et de calculer les intégrales sur l'interface (notée  $M$ ). Ainsi :

$$\int_{\partial\Omega_E} \underline{z} \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* \, dS = W^* (\cdot N^T \cdot \underline{z} M \cdot N) \cdot W$$

### 3.3 Indicateur de convergence

L'indicateur d'erreur classiquement utilisé dans la méthode LaTInest l'erreur selon la direction de recherche  $Z^-$ . Celui-ci permet de mesurer la distance entre deux solutions consécutives appartenant aux espaces  $\Gamma$  et  $A_d$ ,  $s_{n+1/2}$  et  $s_{n+1}$  :

$$\eta_{CR}^2 = \frac{\sum_{E \in \mathcal{E}} \|\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E\|_{W, \partial\Omega_E}^2 + \|\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E\|_{F, \partial\Omega_E}^2}{\sum_{E \in \mathcal{E}} \|\underline{W}_E + \widehat{\underline{W}}_E\|_{W, \partial\Omega_E}^2 + \|\underline{F}_E + \widehat{\underline{F}}_E\|_{F, \partial\Omega_E}^2} \quad (4.23)$$

$$\|\widehat{\underline{W}}\|_{W, \partial\Omega_E}^2 = \int_{\partial\Omega_E} \widehat{\underline{W}} \cdot \underline{z} \widehat{\underline{W}} \quad (4.24)$$

$$\|\widehat{\underline{F}}\|_{F, \partial\Omega_E}^2 = \int_{\partial\Omega_E} \widehat{\underline{F}} \cdot \underline{z}^{-1} \widehat{\underline{F}} \quad (4.25)$$

Certains travaux ([104, 158]) ont montré que cet indicateur est sensible aux paramètres de directions de recherche et à la localisation de l'erreur sur une interface lorsque le



problème en comprend un grand nombre. Pour les interfaces de contact, le problème est crucial puisqu'un même niveau d'erreur ne garantit pas une solution de même qualité. Cependant, le problème que traitons ici ne comprend que des interfaces parfaites, l'indicateur d'erreur  $\eta_{CR}$  est donc conservé.

### 3.4 Remarques sur l'algorithme

**Contrôle de la convergence** La convergence de la stratégie a été démontrée dans [111], sous certaines conditions. Afin de garantir la convergence dans le cas d'hypothèses moins restrictives que celles de la démonstration, on introduit habituellement une étape de relaxation. À l'itération *LaTIn* $_k$ , la solution  $s_k$  issue de l'étape sur les sous-domaines est relâchée selon :

$$s_k \leftarrow \mu s_k + (1 - \mu) s_{k-1}$$

$\mu$  est le facteur de relaxation, compris entre 0 et 1. Un choix habituel est  $\mu = 0.8$ .

**Initialisation** L'algorithme est initialisé par une solution de  $\Gamma$ , la plus simple à calculer étant la solution nulle, hormis les conditions aux limites.

## 4 Exemple : écoulement de Poiseuille

Soit un écoulement plan, supposé infini dans la direction normale à ce plan, avec les conditions aux limites décrites figure 4.9. Le domaine est décomposé en  $n$  sous-domaines de hauteur  $H = 0.41$  et de longueur  $l = L/n$ .

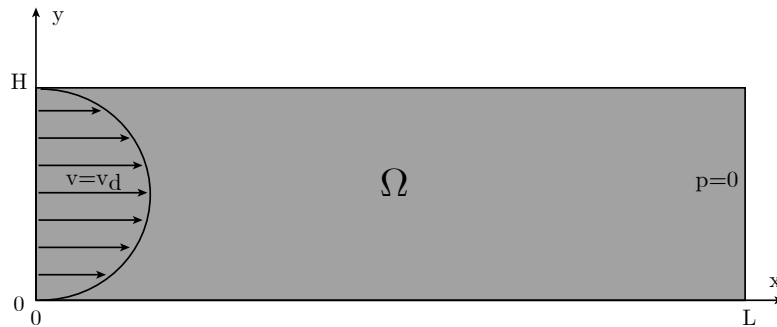


FIGURE 4.9 : Écoulement de Poiseuille

L'écoulement de Poiseuille est un exemple dégénéré d'application des équations de Navier-Stokes. En effet, le terme non-linéaire disparaît complètement. Le problème traduit l'équilibre entre le gradient du champ de pression et les efforts visqueux.

L'application de la stratégie décrite ci-dessus, avec différentes décompositions, montre clairement que le nombre d'itérations pour atteindre un niveau d'erreur donné dépend du

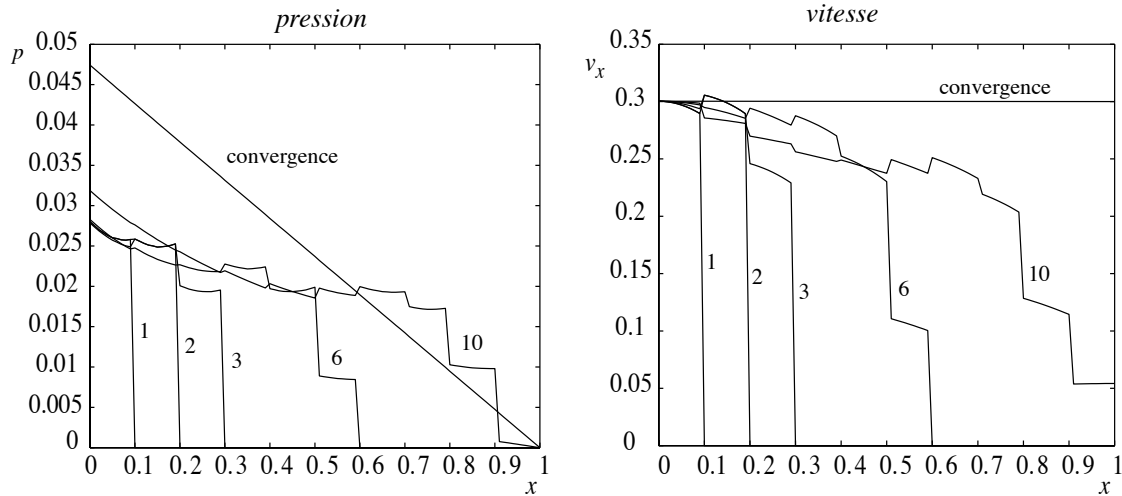


FIGURE 4.10 : Méthode *MoS* : propagation de l'information à travers le domaine en fonction des itérations

nombre de sous-domaines employés. Dans ce cas particulier certes défavorable, les sous-domaines sont alignés dans la direction de l'écoulement. Ainsi, à la première itération, seul le premier sous-domaine possède des conditions aux limites non nulles. À l'issue de cette itération, les deux premières interfaces seulement portent des champs non nuls. Chaque itération supplémentaire propage l'information d'un sous-domaine dans la direction de l'écoulement, ce qui pénalise la convergence. La figure 4.10 permet de comprendre ce phénomène de propagation. Pour les premières itérations, l'évolution des variables le long de la ligne médiane est dessinée. Pour ce calcul,  $L = 1$  et on utilise 10 sous-domaines. La figure 4.11 montre que la décroissance de l'erreur au fur et à mesure des itérations est d'autant plus faible que le nombre de sous-domaines utilisés est important. Dans la suite, nous appellerons cette méthode « méthode mono-échelle » ou méthode *MoS*.

**Conclusion** Cet exemple, aussi simple soit-il, montre un obstacle pour les méthodes de décomposition de domaine : l'utilisation d'un nombre élevé de sous-domaines ralentit d'autant la convergence. Le problème grossier associé à chaque méthode de décomposition de domaine permet de corriger ce défaut, en introduisant une condition globale, portant sur l'ensemble des sous-domaines ou des interfaces. C'est l'objet du chapitre suivant, qui propose de restreindre l'espace  $\Gamma$  en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement.

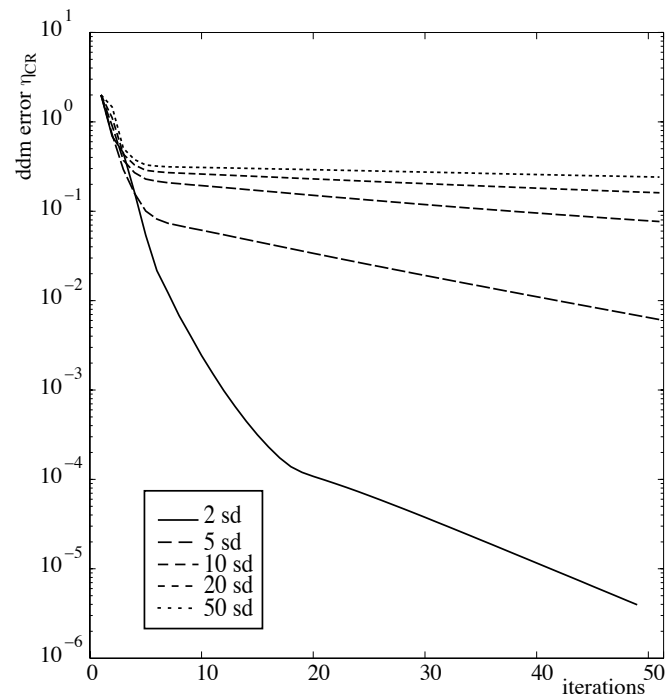


FIGURE 4.11 : La méthode mono-échelle *MoS* n'est pas extensible

# Chapitre 5

## Problème macroscopique basé sur la conservation de masse au niveau global

*La stratégie de décomposition de domaine décrite au chapitre précédent possède un taux de convergence dépendant du nombre de sous-domaines. Nous allons donc chercher à éliminer ce défaut, en construisant un problème appelé problème macroscopique, qui permet un échange d'information entre toutes les interfaces du problème à chaque itération. Deux manières de construire ce problème sont exposées. Seule celle faisant intervenir à la fois les parties macroscopiques des efforts et des vitesses, exploitant ainsi le caractère mixte de la méthode de décomposition de domaine proposée permet d'obtenir l'extensibilité, c'est à dire une convergence indépendante du nombre de sous-domaines employés.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Incompressibilité de l'écoulement</b>	<b>93</b>
<b>2</b>	<b>Séparation d'échelles</b>	<b>94</b>
2.1	Découplage des composantes	94
<b>3</b>	<b>Construction du problème macroscopique</b>	<b>94</b>
3.1	Projection sur l'espace des champs macroscopiquement admissibles	95
3.2	Restriction <i>a priori</i> des espaces des vitesses macroscopiques	98
3.2.1	Exemple	100
3.3	Structure du problème macroscopique	101
3.4	Exemple à $n$ sous-domaines	102
3.5	Conclusion sur la méthode de décomposition de domaine	102

<b>4</b>	<b>Remarques sur la méthode multi-échelle . . . . .</b>	<b>103</b>
4.1	Dépendance vis à vis des directions de recherche . . . . .	103
4.2	Initialisation . . . . .	103
4.3	Orientation des interfaces . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Exemple : écoulement autour d'un cylindre . . . . .</b>	<b>105</b>
5.1	Écoulement stationnaire autour d'un cylindre . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Écoulement non stationnaire autour d'un cylindre . . . . .</b>	<b>111</b>

---

## 1 Incompressibilité de l'écoulement

L'hypothèse d'écoulement incompressible impose, au niveau local :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

Imposer cette contrainte au champ  $\underline{v}$  est équivalent à choisir comme espace de recherche un sous-espace de  $H^1(\Omega)$ , qui ne contient que des champs solénoïdaux, que l'on note ici  $\mathcal{V}_{div}$ . La décomposition problème sur les sous-domaines fait intervenir les champs  $\underline{W}_E$ , qui sont la trace des champs  $\underline{v}_E$  sur le bord des sous-domaines. Ces champs  $\underline{W}_E$  ne sont donc pas quelconques, mais appartiennent à un sous-espace de  $H^{1/2}(\partial\Omega_E)$  contenant les projections sur les interfaces de champs à divergence nulle sur  $\Omega_E$ .

Nous désignerons par  $\mathcal{V}_{\Gamma_i, i \in I}$  l'espace contenant les champs  $\underline{W}_i$  définis sur l'interface  $\Gamma_{i, i \in I}$  et par  $\mathcal{W}_E$  l'espace contenant les champs  $\underline{W}_E$  définis sur  $\partial\Omega_E$ .

Sur un même sous-domaine, les espaces  $\mathcal{V}_{\Gamma_i, i \in I_E}$  ne sont pas indépendants. Au contraire, leur produit engendre l'espace  $\mathcal{W}_E$  qui possède la propriété suivante :

$$\int_{\partial\Omega_E} \underline{W} \cdot \underline{n} \, dS = 0 \quad \forall \underline{W} \in \mathcal{W}_E$$

Où  $\underline{n}$  est la normale sortante au sous-domaine. En revanche, les espaces  $\mathcal{W}_E$  sont indépendants les uns des autres, puisque l'on n'a postulé aucune continuité *a priori* des champs  $\underline{W}$  entre deux sous-domaines.

Il est alors naturel d'imposer que les champs d'interface  $\widehat{\underline{W}}$  construits à l'étape sur les interfaces appartiennent au même espace, et par conséquent que :

$$\int_{\partial\Omega_E} \widehat{\underline{W}} \cdot \underline{n} \, dS = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E} \quad (5.1)$$

Les champs  $\widehat{\underline{W}}$  sont continus entre deux sous-domaines. Ils appartiennent donc à une restriction de l'espace engendré par le produit des  $\mathcal{W}_E$  notée  $H_{div}^{1/2}(\Gamma)$ . La définition de cet espace fait intervenir l'ensemble des frontières de la décomposition de domaine. Nous n'utiliserons d'ailleurs pas d'expression explicite des champs de  $\mathcal{V}_{\partial\Omega_E, E \in \mathcal{E}}$ , mais uniquement les contraintes qu'ils doivent vérifier.

**Remarque 8 : Notations allégées** *Pour ne pas alourdir les notations, lorsque cela est possible et qu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'indice  $E$  désignant les inconnues sur le sous-domaine  $\Omega_E$  est abandonné. Sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$ , on remplace  $\underline{W}_E$  et  $\underline{W}_{E'}$  par  $\underline{W}$  et  $\underline{W}'$  respectivement.*

## 2 Séparation d'échelles

La condition (5.1) fait intervenir uniquement les parties moyennes des champs  $\widehat{W}$  sur les interfaces, c'est à dire la partie macroscopique, telle que définie ci-dessous :

$$\begin{aligned}\widehat{W}^M &= \widehat{W}^M \underline{n}_0 = \frac{1}{\text{mes}(\Gamma)} \int_{\Gamma} \widehat{W} \cdot \underline{n}_0 \, dS \, \underline{n}_0 \\ \widehat{W} &= \widehat{W}^M \underline{n}_0 + \widehat{W}^m\end{aligned}$$

$\underline{n}_0$  est une normale à l'interface considérée. Ce choix est arbitraire, on choisit la normale sortante au premier sous-domaine adjacent. On a ainsi :

$$\int_{\Gamma} \widehat{W} \cdot \underline{n}_0 \, dS = \text{mes}(\Gamma) \widehat{W}^M$$

### 2.1 Découplage des composantes

La séparation des composantes micro et macro des quantités d'interface définit deux sous-espaces supplémentaires au sens du produit scalaire  $(\widehat{W}, \widehat{F})_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \widehat{W} \cdot \widehat{F}$  :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \widehat{W} \cdot \widehat{F} \, dS &= \text{mes}(\Gamma) \widehat{W}^M \widehat{F}^M + \int_{\Gamma} \widehat{W}^m \cdot \widehat{F}^m \, dS \\ \text{soit : } (\widehat{W}, \widehat{F})_{\Gamma} &= (\widehat{W}^M, \widehat{F}^M)_{\Gamma} + (\widehat{W}^m, \widehat{F}^m)_{\Gamma}\end{aligned}$$

Cette séparation d'échelle permet de condenser le problème (5.1) sur une seule inconnue par champ. Par rapport à la résolution sans séparation d'échelle, le nombre d'inconnues est diminué d'un facteur égal au nombre de nœuds de l'interface, soit environ  $L/h$ .

**Remarque 9 : Directions de recherche** *Ces paramètres ne couplent pas les échelles définies ci-dessus, et les équations des directions de recherche peuvent être écrites pour chacune des échelles indépendamment de l'autre.*

## 3 Construction du problème macroscopique

Nous avons vu que la condition (5.1) restreint l'espace des champs  $\widehat{W}$  à l'espace contenant les traces de champs à divergence nulle sur chaque  $\Omega_E$ , que l'on notera  $H_{div}^{1/2}(\Gamma)$ ,  $\Gamma$  étant l'ensemble des interfaces. L'étape sur les interfaces doit donc être modifiée de manière à tenir compte de ce changement d'espace. Une première solution est d'ajouter une étape de projection sur  $H_{div}^{1/2}(\Gamma)$ . Une seconde solution est de prendre en compte la restriction de l'espace dès le début de l'étape sur les interfaces. De la même manière que le champ  $\underline{v}_E$  est choisi dans  $H^1(\Omega_E)$  et non pas dans  $H_{div}^1(\Omega_E)$  grâce au multiplicateur de Lagrange  $p$ , on peut choisir  $\widehat{W}_E$  dans  $H_{div}^{1/2}(\Gamma)$ , et imposer (5.1) à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange.

### 3.1 Projection sur l'espace des champs macroscopiquement admissibles

Au niveau d'un sous-domaine, l'espace des champs  $\widehat{W}$  admissibles est l'espace  $H_{div,E}^{1/2}$  défini par :

$$H_{div,E}^{1/2} = \{ \widehat{W}_E \in H^{1/2}(\partial\Omega_E) \mid \int_{\partial\Omega_E} \widehat{W}_E \cdot \underline{n} \, dS = 0 \}$$

Nous avons vu que la restriction n'affecte que la partie macroscopique des champs  $\widehat{W}$ , nous pouvons donc définir un espace d'admissibilité pour les parties macro :

$$H_{div,E}^{1/2,M} = \{ \widehat{W}_E^M \in H^{1/2}(\partial\Omega_E) \mid \sum_{i \in I_E} \widehat{W}_E^M \, mes(\Gamma_i) \underline{n} \cdot \underline{n}_0 = 0 \}$$

Remarquons que les espaces  $H_{div,E}^{1/2,M}$  ne sont pas indépendants entre eux puisqu'on a postulé que le champ  $\widehat{W}^M$  est unique sur une même interface. De la même manière, ces espaces ne sont pas indépendants des conditions aux limites, puisque la partie macroscopique des vitesses imposées intervient dans le bilan de flux. Ainsi, la projection sur l'espace des champs macroscopiquement admissibles doit prendre en compte les conditions aux limites et l'ensemble des sous-domaines. En désignant par  $I_{D,E}$  l'ensemble des interfaces appartenant à  $\partial\Omega_E \cap \partial_v \Omega$ , et par  $I_D$  celles de  $\partial_v \Omega$ , on peut écrire la projection sous la forme suivante :

Trouver  $B^M, \forall i \in I \setminus I_D$  rendant stationnaire le lagrangien :

$$\sum_{i \in I \setminus I_D} \frac{1}{2} \| \widehat{B}^M - \widehat{W}^M \|_{\Gamma_i}^2 \, dS + \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu_E \left( \int_{\Gamma \in I_E \setminus I_{D,E}} \widehat{B}^M \cdot \underline{n} \, dS + \int_{\Gamma \in I_{D,E}} \widehat{W}^M \cdot \underline{n} \, dS \right) \quad (5.2)$$

**Interprétation** On peut interpréter l'étape de projection (5.2) comme une modification des directions de recherche. La partie micro des vitesses d'interface et la totalité des efforts (parties micro et macro) ne sont pas modifiés par rapport à la méthode mono-échelle *MoS*. Schématiquement, le traitement apporté à la partie macro des vitesses est une projection orthogonale sur l'espace (noté  $\Gamma_{pMuS}$ ) des champs à flux nul sur chaque sous-domaine (figure 5.1). Ainsi, la direction de recherche pour la partie macro des vitesses, initialement locale, est modifiée pour devenir globale. Les champs d'effort n'étant pas modifiés, nous qualifions cette méthode de partiellement multi-échelle, ou méthode *pMuS*.

**Illustration :** Considérons un écoulement entre deux plans, décomposé en deux sous-domaines. Le problème comporte trois interfaces verticales, et quatre interfaces horizontales 5.2. Ces dernières n'interviennent pas dans les bilans de flux, puisqu'on y impose une vitesse nulle.

L'étape sur les interfaces pour ce problème consiste donc à :

- Calculer les champs  $\widehat{W}$  et  $\widehat{F}$  comme au chapitre précédent.



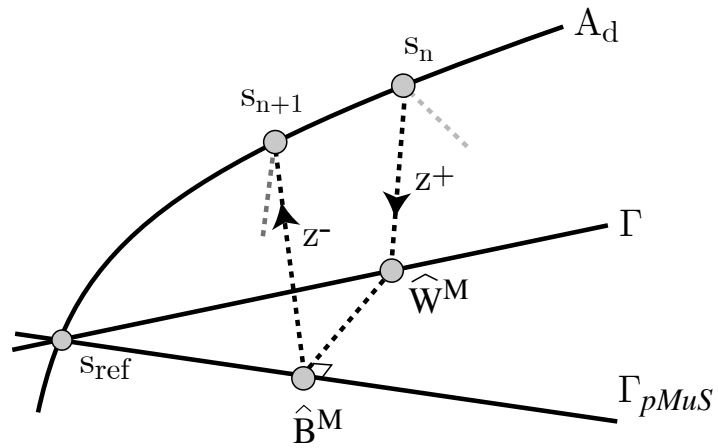


FIGURE 5.1 : Méthode  $pmuS$  : modification de la direction de recherche macroscopique

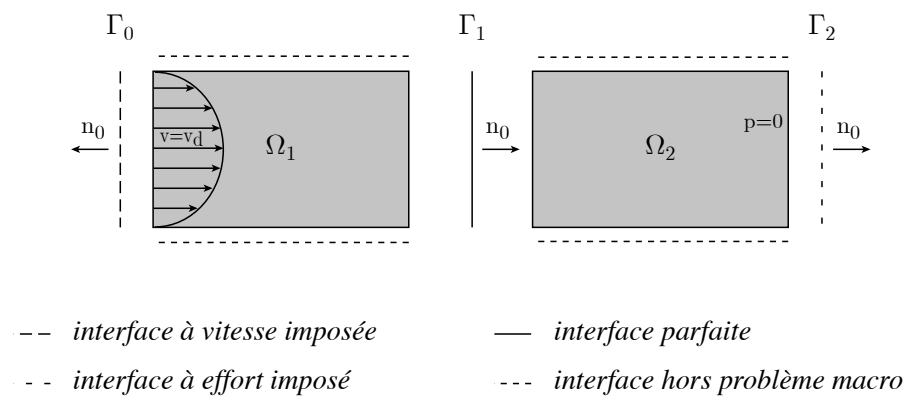


FIGURE 5.2 : Nomenclature du problème d'illustration

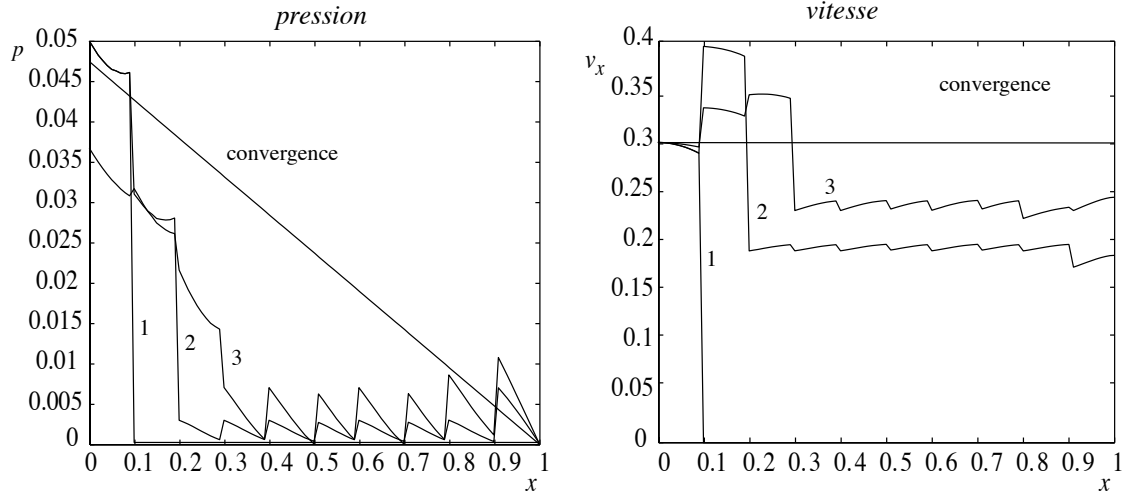


FIGURE 5.3 : Méthode  $pMuS$  : propagation de l'information à travers le domaine en fonction des itérations

– Projeter les champs  $\widehat{W}$  sur l'espace des champs macroscopiquement admissibles. Ce qui correspond à :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1 &= \underline{F}_1 + \underline{z}(\widehat{W}_d - \underline{W}_1) & \widehat{W}_1 &= \widehat{W}_d \text{ (donnée)} \\ \widehat{F}_2 &= 1/2(\underline{F}_2 - \underline{F}_{2'}) - \underline{z}/2(\underline{W}_2 - \underline{W}_{2'}) & \widehat{W}_2 &= 1/2(\underline{W}_2 + \underline{W}_{2'}) - \underline{z}^{-1}/2(\underline{F}_2 + \underline{F}_{2'}) \\ \widehat{F}_3 &= \underline{0} \text{ (donnée)} & \widehat{W}_3 &= \underline{W}_3 - \underline{z}^{-1}(\underline{F}_3 + \widehat{F}_3) \end{aligned}$$

puis :

$$\widehat{W}_2 = \widehat{W}_2^m + \widehat{W}_d^M \quad \widehat{W}_3 = \widehat{W}_3^m + \widehat{W}_d^M$$

Le problème macroscopique permet donc de vérifier l'équilibre des flux de  $\widehat{W}$  à chaque itération. En particulier, à la première itération,  $\widehat{W}_3 = \widehat{W}_d^M$  alors que sans ce problème,  $\widehat{W}_3 = \underline{0}$ . Le problème macroscopique par projection permet donc une transmission d'information à l'ensemble des interfaces, dès la première itération. Les champs d'effort ne sont cependant pas modifiés à la première itération. À la seconde itération, on obtiendra des champs  $\widehat{F}$  différents de la méthode mono-échelle, suite à l'étape sur les sous-domaines. La figure 5.3 représente l'évolution des variables le long de la ligne médiane pour les premières itérations. Pour ce calcul,  $L = 1$  et on utilise 10 sous-domaines. On remarque qu'il existe un gradient de pression dans chaque sous-domaine, et que dès la seconde itération, tous les sous-domaines possèdent des champs d'interface non nuls.

**Remarque 10 : Unicité de la solution** Dans le cas particulier ci-dessus, le problème macroscopique par projection est trivial, puisqu'au plus deux interfaces par sous-domaine sont concernées. La condition (5.1) suffit à elle seule à déterminer les  $\widehat{B}^M$ . En général ce n'est pas le cas, et il existe plusieurs solutions à l'équation (5.1). La solution choisie est celle qui minimise l'écart par rapport à  $\widehat{W}^M$ , ce qui permet de prendre en compte la physique du problème.

### 3.2 Restriction a priori des espaces des vitesses macroscopiques

Le découplage des composantes normales et tangentielles d'une part et micro et macro d'autre part permet de décomposer le problème résolu à l'étape sur les interfaces :

Trouver  $\widehat{W}, \widehat{F}$  tels que :

$$\int_{\Gamma} ((\widehat{F} - F) - \underline{z}(\widehat{W} - W)) \widehat{W}^* = 0 \quad \forall \widehat{W}^*$$

en deux problèmes indépendants :

Trouver  $\widehat{F}^m, \widehat{W}^m$  tels que :

$$\int_{\Gamma} ((\widehat{F}^m - F^m) - \underline{z}(\widehat{W}^m - W^m)) \widehat{W}^{m*} = 0 \quad \forall \widehat{W}^{m*} \quad (5.3)$$

Trouver  $\widehat{F}^M, \widehat{W}^M$  tels que :

$$\int_{\Gamma} ((\widehat{F}^M - F^M) - z_n(\widehat{W}^M - W^M)) \widehat{W}^{M*} = 0 \quad \forall \widehat{W}^{M*} \quad (5.4)$$

Le problème (5.3) peut être résolu de la même manière que précédemment, soit point de Gauss par point de Gauss. Il est toujours possible de paralléliser cette résolution. Le problème (5.4) doit être résolu sur  $H_{div}^{1/2}(\Gamma)$ , ce qui est équivalent à le résoudre sur  $H^{1/2}(\Gamma)$ , en imposant la contrainte par un multiplicateur de Lagrange. Il y a autant de contraintes que de sous-domaines, on associe donc un multiplicateur à chaque sous-domaine, pour obtenir le nouveau problème d'interface pour les quantités macroscopiques : Trouver  $\widehat{F}^M, \widehat{W}^M, \mu_E$  tels que :  $\forall \widehat{W}^{M*}, \mu_E^*$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} \int_{\partial\Omega_E} ((\widehat{F}^M - F^M) - z_n(\widehat{W}^M - W^M)) \cdot \widehat{W}^{M*} + \int_{\partial\Omega_E} \mu_E \widehat{W}^{M*} \underline{n}_0 \cdot \underline{n} = 0 \quad (5.5)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} \int_{\partial\Omega_E} \mu_E^* \widehat{W}^M \underline{n}_0 \cdot \underline{n} = 0 \quad (5.6)$$

**Modification de la direction de recherche par interface** Ici, l'équation des directions de recherche est écrite de manière vectorielle, en effet la séparation d'échelle est définie par le choix d'une normale par interface, notée  $\underline{n}_0$ . L'équation de flux fait intervenir  $\underline{n}$ , qui est la normale sortante au sous-domaine. Les produits scalaires  $\underline{n} \cdot \underline{n}_0$  changent ainsi de signe selon le coté de l'interface considéré. En considérant une interface en particulier dans l'équation (5.5), on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} (\widehat{F}^M - F^M) - z_n(\widehat{W}^M - W^M) + \mu_E \text{mes}(\Gamma) \underline{n} \cdot \underline{n}_0 &= 0 \\ (\widehat{F}'^M - F'^M) - z_n(\widehat{W}'^M - W'^M) + \mu_{E'} \text{mes}(\Gamma) \underline{n}' \cdot \underline{n}_0 &= 0 \end{aligned}$$

dans lequel on peut introduire la relation de comportement, et la convention  $\underline{n} = \underline{n}_0 = -\underline{n}'$  pour aboutir à :

$$\begin{aligned} (\widehat{F}^M - F^M) - z_n(\widehat{W}^M - W^M) + \mu_E \text{mes}(\Gamma) &= 0 \\ (-\widehat{F}^M - F'^M) - z_n(\widehat{W}^M - W'^M) - \mu_{E'} \text{mes}(\Gamma) &= 0 \end{aligned}$$

**Cas particuliers des conditions aux limites** Dans le cas d'interfaces de conditions aux limites, qui n'ont qu'un seul sous-domaine pour voisin, on obtient :

$$z_n^{-1}(\widehat{F}^M - F^M) - (\widehat{W}^M - W^M) + \mu_E \text{mes}(\Gamma) = 0$$

Pour les interfaces appartenant à  $\partial_1 \Omega$ ,  $\widehat{W}^M$  est une donnée, dans le cas d'interfaces appartenant à  $\partial_F \Omega$ , c'est  $\widehat{F}^M$ . En pratique, on ne conserve qu'une inconnue dans le problème macro,  $\widehat{F}^M$  ou  $\widehat{W}^M$  respectivement.

**Interprétation** Ici aussi, le problème macroscopique peut s'interpréter comme une modification des directions de recherche macroscopique. Cette modification concerne à la fois les champs de vitesse et les champs d'effort, la méthode est donc entièrement multi-échelle, nous la désignerons comme méthode *MuS*. La figure 5.4 illustre schématiquement la modification des directions de recherche de la méthode *MuS* : les champs d'interface sont recherchés dans un espace noté  $\Gamma_{MuS}$ , la différence entre l'espace  $\Gamma$  et l'espace  $\Gamma_{MuS}$  étant uniquement au niveau des parties macroscopiques des champs. Si les directions de recherche des parties macro sont maintenant globales, les parties micro sont toujours traitées par des directions de recherche locales en espace.

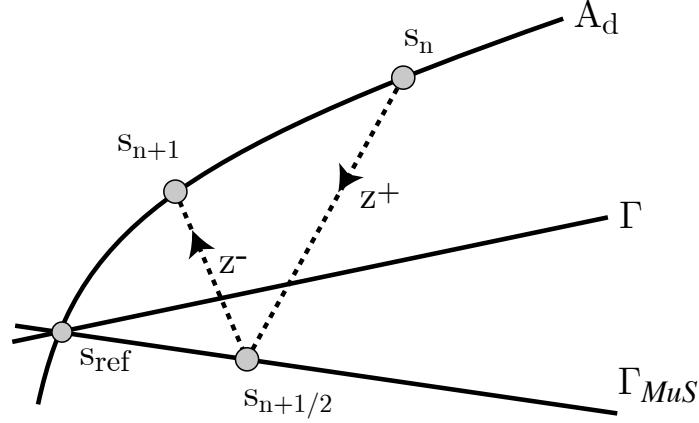


FIGURE 5.4 : Méthode *MuS* : modification des directions de recherche macro

### 3.2.1 Exemple

On note  $l_i = \text{mes}(\Gamma_i)$  la longueur de l'interface  $\Gamma_i$ . En reprenant l'exemple précédent comportant deux sous-domaines, le problème matriciel s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 1 & -z_n & 0 & -l_2 & 0 \\ 0 & -1 & -z_n & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & -z_n & 0 & -l_3 \\ 0 & 0 & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_2 & -l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{F}_1^M \\ \widehat{F}_2^M \\ \widehat{W}_2^M \\ \widehat{W}_3^M \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_n^{-1} F_1^M + (\widehat{W}_1^M - W_1^M) \\ z_n^{-1} F_2^M - W_2^M \\ z_n^{-1} F_2^M - W_2^M \\ z_n^{-1} (\widehat{F}_3^M - F_3^M) - W_3^M \\ l_1 \widehat{W}_d^M \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les champs d'interface solution de ce système s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \widehat{F}_1^M \\ \widehat{F}_2^M \\ \widehat{W}_2^M \\ \widehat{W}_3^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^M + z_n (\widehat{W}_1^M - W_1^M) - \mu_1 l_1 \\ \frac{1}{2} (F_2^M - F_2^M) - \frac{z_n}{2} (W_2^M - W_2^M) + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} l_2 \\ \widehat{W}_d^M \\ \widehat{W}_d^M \end{bmatrix}$$

L'équilibre macroscopique des flux est respecté, et les multiplicateurs sont liés au défaut de flux sur chaque sous domaine. L'information de flux est donc propagée de la même manière qu'en utilisant la méthode de projection. Cependant, la partie macroscopique des efforts est modifiée, ce qui propage en plus une information en effort. Cette double transmission d'information assure un meilleur comportement à la méthode, comme l'illustrent

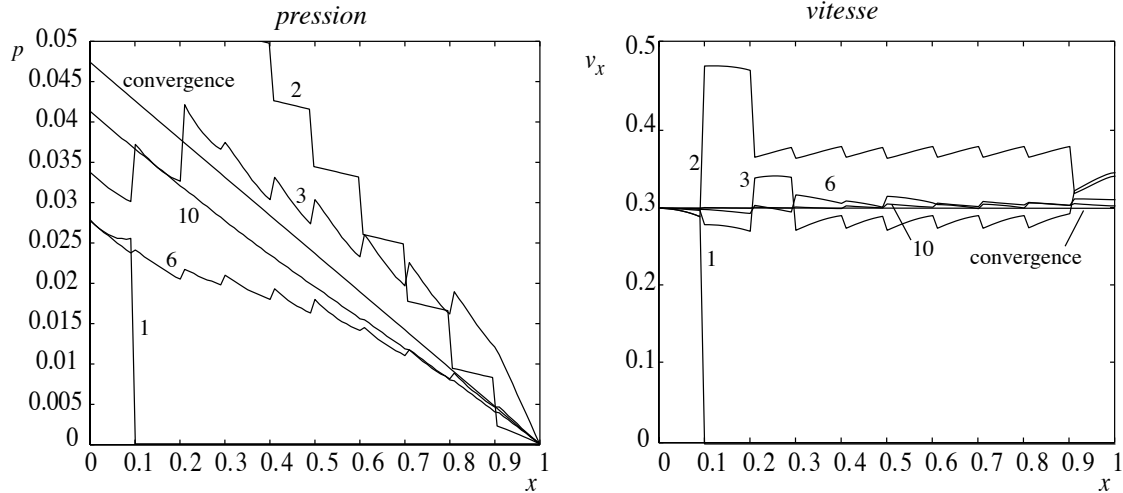


FIGURE 5.5 : Méthode *MuS* : propagation de l'information à travers le domaine en fonction des itérations

les exemples suivants. La figure 5.5 représente l'évolution des variables le long de la ligne médiane pour les premières itérations. Pour ce calcul,  $L = 1$  et on utilise 10 sous-domaines. On remarque qu'il existe un gradient de pression dans chaque sous-domaine et sur l'ensemble du domaine, contrairement à la méthode *pMuS*. Ceci est dû à la partie macroscopique des efforts d'interface. La propagation d'information a maintenant lieu sur tous les sous-domaines, à chaque itération.

### 3.3 Structure du problème macroscopique

Le problème macroscopique fait intervenir une inconnue par interface de condition aux limites, et deux inconnues par interface interne. Chaque interface de bord apporte une équation, et les interfaces internes, deux. Il y a de plus une équation supplémentaire par sous-domaine. Soient  $n_{sd}$  le nombre de sous-domaines,  $n_{ie}$  et  $n_{ii}$  le nombre d'interfaces situées sur le bord de  $\Omega$  et à l'intérieur. Le problème est donc de taille  $n_{MuS} = n_{ie} + 2 \cdot n_{ii} + n_{sd}$ . La matrice du problème macroscopique est constitué par l'assemblage par blocs des matrices  $K_z$ ,  $B_\mu$  et  $D$  correspondant respectivement aux équations sur les interfaces, à la contribution des multiplicateurs de Lagrange et à la condition de flux nul sur le bord des sous-domaines (figure 5.6). La matrice  $K_z$  est carrée  $(n_{ie} + 2 \cdot n_{ii}) \times (n_{ie} + 2 \cdot n_{ii})$ , tridiagonale et non symétrique, constituée des blocs

$$\begin{bmatrix} 1 & -z_n \\ -1 & -z_n \end{bmatrix} \quad [1] \quad [z_n] \quad (5.7)$$

selon le type d'interface. Les matrices  $B$  et  $D$  sont rectangulaires de taille  $(n_{ie} + 2 \cdot n_{ii}) \times n_{sd}$  et  $n_{sd} \times (n_{ie} + 2 \cdot n_{ii})$  respectivement. La ligne  $i$  de  $B$  contient des zéros, sauf pour les colonnes correspondant aux sous-domaines voisins de l'interface  $\Gamma_i$ . La ligne  $e$  de  $D$  est

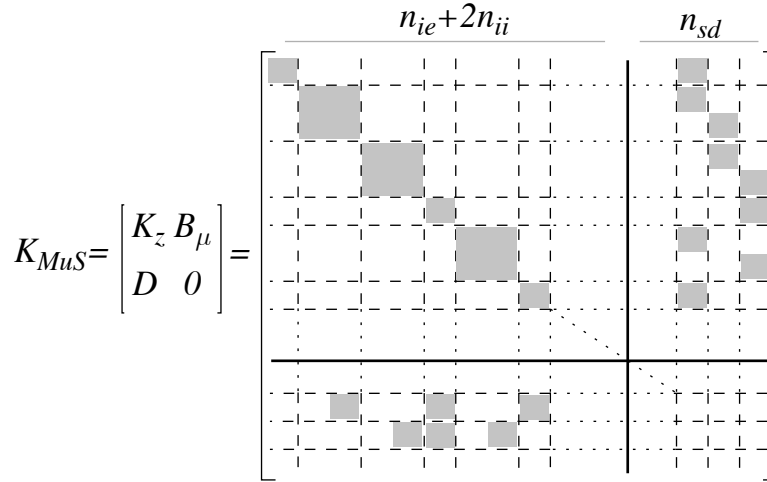


FIGURE 5.6 : Structure du problème macroscopique

aussi formée de zéros, sauf pour les colonnes correspondant aux interfaces appartenant à  $\partial\Omega_e$ .  $K_{MuS}$  peut donc être construite simplement par une boucle sur les interfaces et sur les sous-domaines, en utilisant le repérage préalable des « voisins ».

### 3.4 Exemple à n sous-domaines

La méthode  $MuS$  assure la propagation d'une information à l'ensemble des sous-domaines, à toutes les itérations. En effet, dès la première itération, l'équilibre des flux est vérifié pour chaque sous-domaine. La partie macroscopique des efforts induit un gradient de pression dans l'ensemble du domaine, ce qui n'était pas le cas avec la méthode de projection *a posteriori*. Ceci permet de réduire le nombre d'itérations à convergence, et surtout d'obtenir des taux de convergence indépendants du nombre de sous-domaines, comme le montre la figure 5.7

### 3.5 Conclusion sur la méthode de décomposition de domaine

Sur un exemple aussi simple que l'écoulement de Poiseuille, seule la méthode  $MuS$  incluant le problème macroscopique par restriction *a priori* de l'espace des parties macroscopiques des champs de vitesse sur les interface possède la propriété d'extensibilité numérique. Les équations de directions de recherche, qui sont les moins fiables, ont été relâchées, pour imposer une équation au sens physique fort, l'incompressibilité. Ceci a permis la prise en compte du caractère macroscopique à la fois en vitesse et en effort sur les interfaces. Les parties macroscopiques des efforts contiennent l'effet d'une pression macroscopique. En effet, si l'on considère le sous-domaine  $\Omega_E$ , sur chacune de ses interfaces, les quantités  $\hat{F}^M$  contiennent le terme  $\mu_E \underline{n} \cdot \underline{n}_0$ . À l'étape sur les sous-domaines suivante, les efforts exercés sur ce sous-domaine contiendront donc un terme de pression uniforme sur le bord du sous-domaine  $-\mu_E \underline{n}$ . La méthode  $MuS$  tire tout le profit du

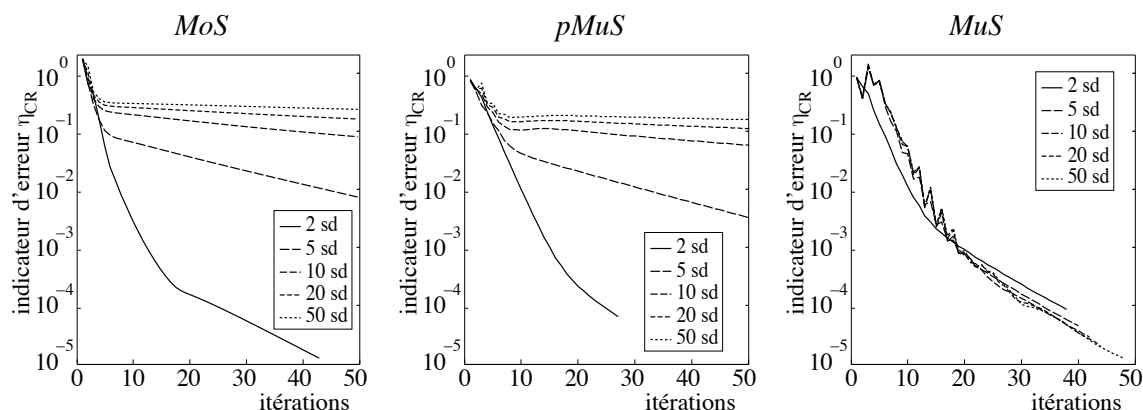


FIGURE 5.7 : Convergence des trois méthodes : mono-échelle *MoS*, projection *pMuS* et multi-échelle *MuS*

caractère mixte de la méthode de décomposition de domaine.

## 4 Remarques sur la méthode multi-échelle

### 4.1 Dépendance vis à vis des directions de recherche

En étudiant l'influence du paramètre  $z_n$  sur le taux de convergence, on remarque qu'il existe une valeur optimale - c'est à dire une valeur pour laquelle l'erreur est minimale, pour un nombre d'itérations donné - pour chaque problème.

La méthode est testée sur le problème de Poiseuille, avec différentes valeurs de la viscosité, de la vitesse imposée, ou de la distance entre les plans fixes et différents nombre de sous-domaines. La figure 5.8 présente l'erreur obtenue pour 25 itérations, en fonction d'un paramètre sans dimension, les directions de recherche étant homogènes à  $\rho v/L$ . Dans l'intervalle  $[5\rho v/L, 50\rho v/L]$ , la convergence est beaucoup plus rapide, ce qui permet de choisir les directions de recherche dans la suite.

### 4.2 Initialisation

L'algorithme de résolution mono-échelle est initialisé par une solution de  $\Gamma$ , la solution nulle, hormis les conditions aux limites. On peut initialiser l'algorithme multi-échelle de la même manière, dans ce cas, la première étape sur les sous-domaines sera identique à celle effectuée en mono-échelle : les seules solutions non nulles seront sur les sous-domaines situés contre une interface de condition aux limites. On peut également penser à calculer une solution  $(\widehat{W}, \widehat{F})$  qui soit solution du problème macroscopique. Cela revient à initialiser l'algorithme par une solution de  $A_d$  (nulle), puis à réaliser une étape sur les interfaces incluant le problème macroscopique. Celui-ci prend en compte les parties macroscopiques des conditions aux limites. La première étape sur les sous-domaines



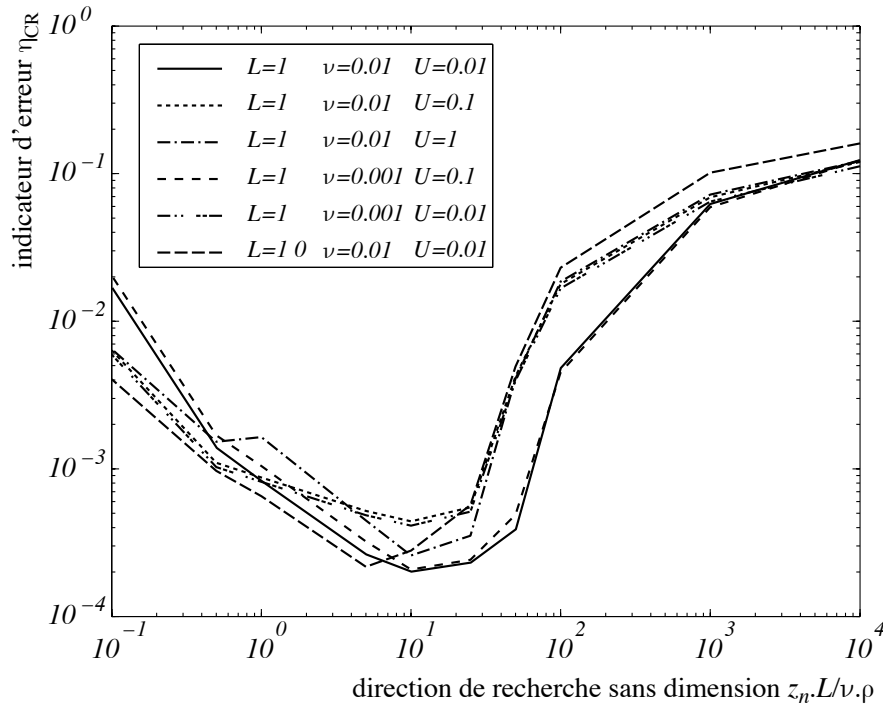


FIGURE 5.8 : Erreur  $\eta_{CR}$  en fonction d'une direction de recherche sans dimension

comporte alors un problème non trivial sur chaque sous-domaine : il s'agit de résoudre un problème de Navier-Stokes avec des quantités d'interfaces macroscopiques uniquement.

### 4.3 Orientation des interfaces

Dans les exemples précédents, les interfaces de la décomposition de domaine sont orientées selon des directions parallèles ou orthogonales à la direction principale de l'écoulement. Il est alors naturel de considérer un nouveau cas test, pour lequel les lignes de courant sont orientées de manière quelconque par rapport aux interfaces. Pour cela, considérons un domaine carré, au travers duquel on force un écoulement qui doit le traverser selon sa diagonale. Les dimensions du problème sont données sur la figure 5.9. Le carré est décomposé en 25, 49, ou 100 sous-domaines carrés, dont les cotés sont horizontaux et verticaux. On impose une vitesse horizontale parabolique sur les interfaces d'entrée, dont la valeur maximale est  $U_{\max} = 0.3\text{m/s}$ . La viscosité est fixée à  $\nu = 0.2\text{m}^2/\text{s}$ , ce qui donne un nombre de Reynolds de  $R_e = 30$ .

La figure 5.10 montre les champs de vitesse et de pression, les lignes de courant et le profil de vitesse le long des interfaces de la décomposition de domaine, pour 100 sous-domaines, aux itérations 1 et 20. Dès la première itération, un écoulement traverse tous les sous-domaines, et l'ensemble des interfaces porte un flux non nul. Les profils de vitesse dessinés ne sont pas continus, puisqu'il s'agit des champs  $\hat{W}$  issus de

l'étape sur les interfaces. À l'itération 20, les profils de vitesse sont continus. La figure 5.11 montre l'évolution de l'indicateur d'erreur en fonction des itérations. Pour les trois décompositions utilisées, cette évolution est la même, démontrant la performance de la méthode dans le cas d'interfaces inclinées par rapport à l'écoulement.

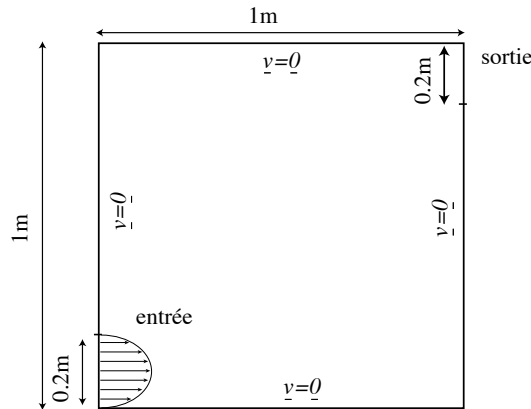


FIGURE 5.9 : Dimensions du problème

## 5 Exemple : écoulement autour d'un cylindre

L'étude d'un écoulement autour d'une section circulaire est un cas test répandu pour l'évaluation des schémas numériques mis en œuvre. Il s'agit d'un exemple très documenté dans la littérature, on pourra consulter par exemple les références suivantes : [16, 30, 55, 157, 179, 204]. Le nombre de Reynolds caractérise l'écoulement, et permet de discerner plusieurs régimes. À Reynolds faible, l'écoulement est laminaire, et les lignes de courant restent attachées au cylindre. Pour un Reynolds plus élevé, les lignes de courant se détachent du cylindre, et il se forme une zone de recirculation à l'arrière de celui-ci. L'écoulement est toujours laminaire. Lorsque le nombre de Reynolds augmente encore, des tourbillons se détachent du cylindre. L'écoulement devient ensuite turbulent. Ces régimes sont représentés sur la figure 5.12.

La géométrie du cas test utilisé ici est représentée sur la figure 5.13. Un cylindre de diamètre  $D = 0.1\text{m}$  est placé dans un tunnel de hauteur  $H = 0.41\text{m}$  et de longueur  $L = 2.2\text{m}$ . La vitesse de fluide est imposée à droite, selon une loi parabolique (5.8) dans la direction horizontale, et nulle dans la direction verticale. La section de sortie est laissée libre. En pratique, le choix d'une condition aux limites pour cette partie de la frontière n'a que peu d'influence sur les résultats.

$$v_d = U_{max} \times \frac{4y(H-y)}{H^2} e_x \quad (5.8)$$

La viscosité cinématique est  $\nu = 10^{-3}\text{m}^2/\text{s}$ , et la densité  $\rho = 1\text{kg}/\text{m}^3$ . Le nombre de Reynolds est défini par  $Re = U_\infty D / \nu$ , avec  $U_\infty = 2U_{max}/3$ . Ces données sont choisies de

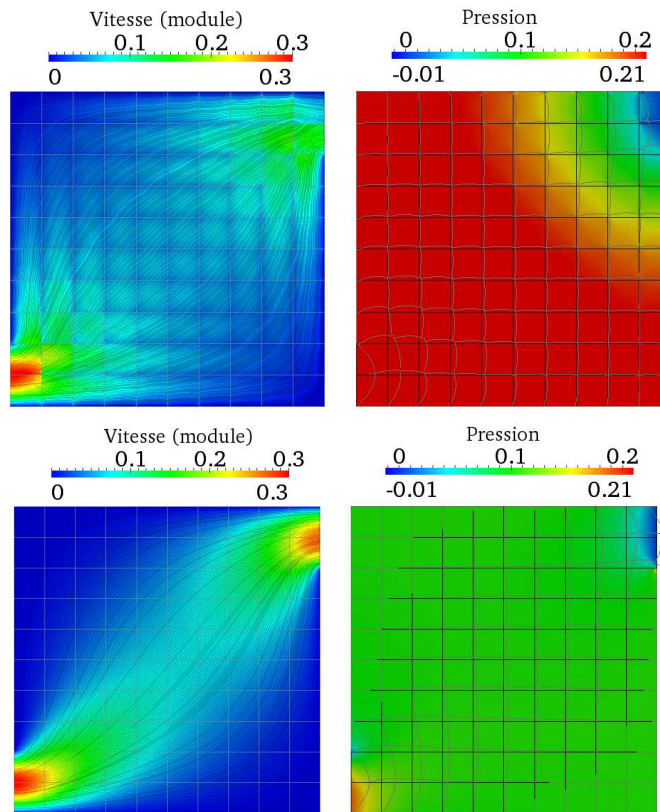


FIGURE 5.10 : Champs de pression et de vitesse calculés avec 100 sous-domaines, aux itérations 1 (en haut) et 20 (en bas)

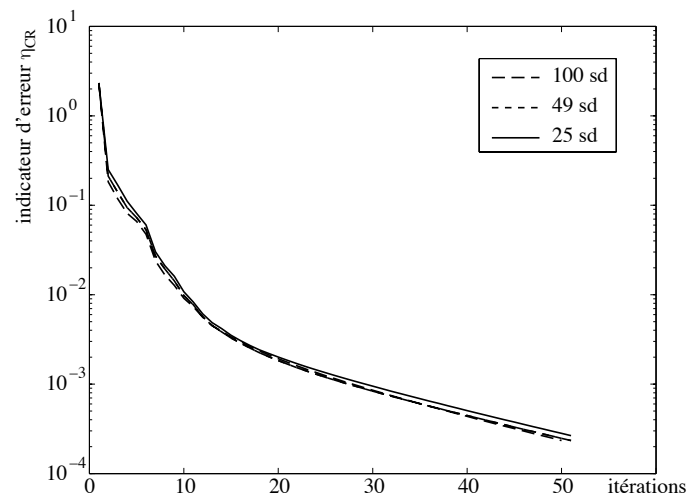


FIGURE 5.11 : Indicateur d'erreur en fonction du nombre d'itérations, pour trois décompositions différentes

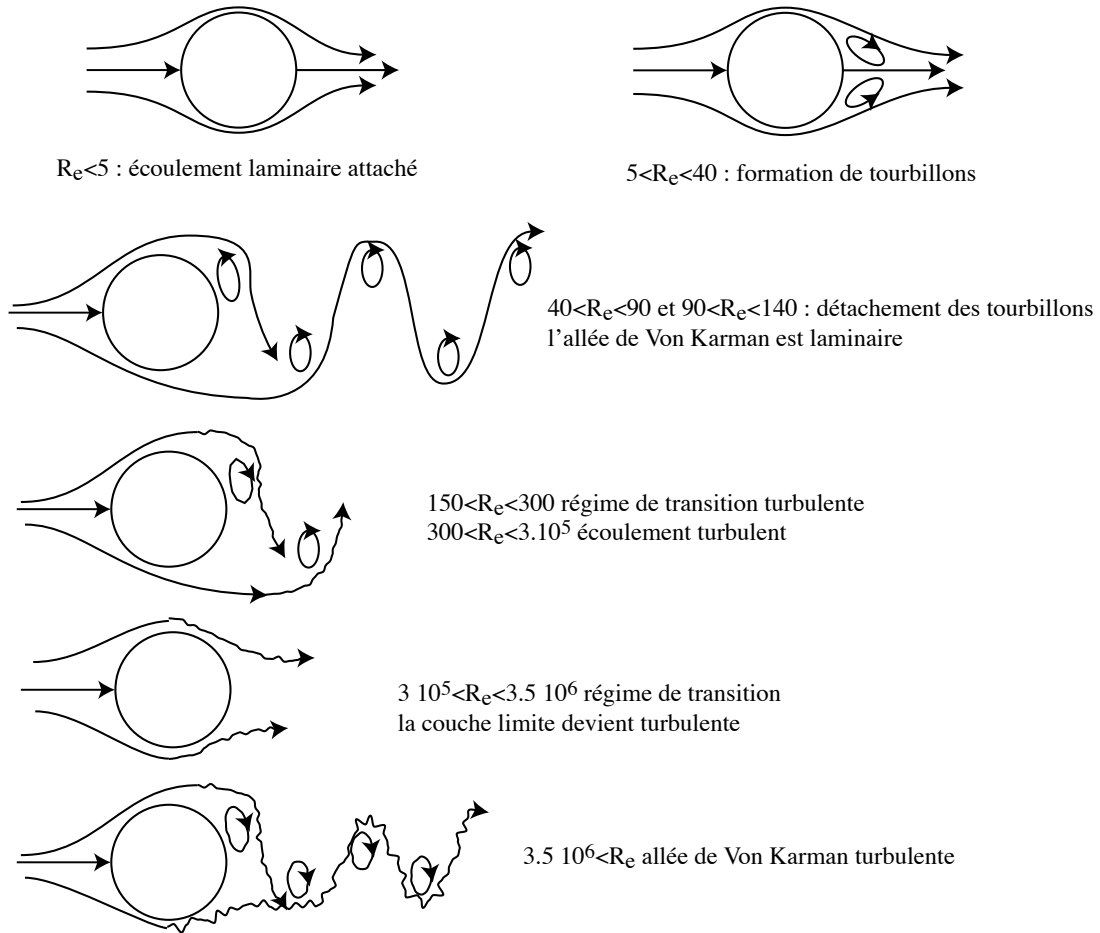


FIGURE 5.12 : Schématisation des régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds  $R_e$  d'après [123]

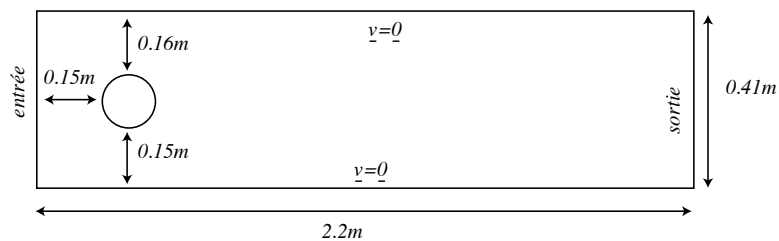


FIGURE 5.13 : Géométrie du cas test

manière à comparer les résultats obtenus ici et ceux exposés dans [179]. Les coefficients de portance et de traînée sont définis à partir des efforts s'exerçant sur le cylindre :

$$c_D = \frac{2F_D}{\rho DU_\infty^2} \quad c_L = \frac{2F_L}{\rho DU_\infty^2}$$

## 5.1 Écoulement stationnaire autour d'un cylindre

Lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment faible, l'écoulement est stationnaire et laminaire. Pour ce premier exemple, il est fixé à  $Re = 20$ . Plusieurs décompositions du domaine sont utilisées. La figure 5.14 montre la convergence de la méthode multi-échelle. L'évolution de l'indicateur d'erreur  $\eta_{CR}$  pour une résolution sans problème macroscopique est affichée à titre de comparaison. La transmission d'information à chaque itération permet d'obtenir des courbes de convergence proches pour les deux décompositions employées. Les courbes sont en effet parallèles dans une première partie du graphique. Leur pente est ensuite plus faible, et la convergence la plus lente correspond au plus grand nombre de sous-domaines. Ceci peut s'expliquer par la présence de plus d'interfaces dans la zone de recirculation, où le motif local de l'écoulement n'est pas capturé par le problème macroscopique.

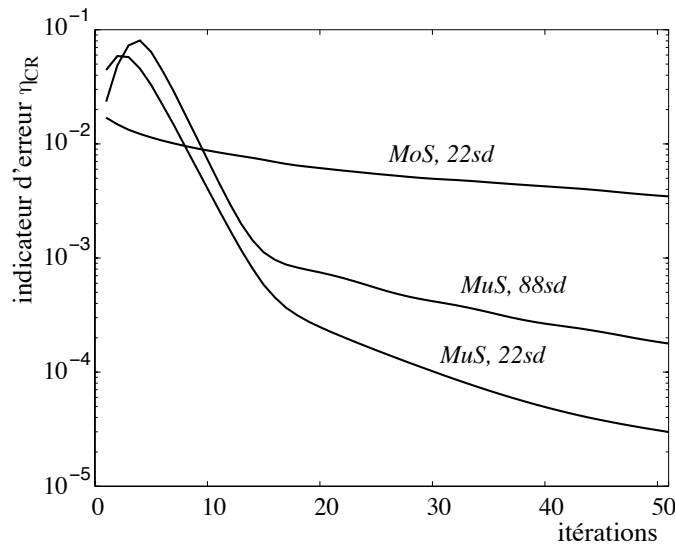


FIGURE 5.14 : Écoulement stationnaire autour d'un cylindre : indicateur d'erreur en fonction des itérations

Les figures 5.15 et 5.16 montrent les résultats du calcul avec 22 et 88 sous-domaines aux itérations 1 et 15 (pour laquelle  $\eta_{CR} \leq 10^{-3}$ ). Les lignes de courant sont représentées en surimpression du champ de vitesse, et le profil de vitesse est dessiné sur l'ensemble des interfaces, en superposition du champ de pression. On constate que visuellement, il n'existe plus de discontinuité entre les sous-domaines.

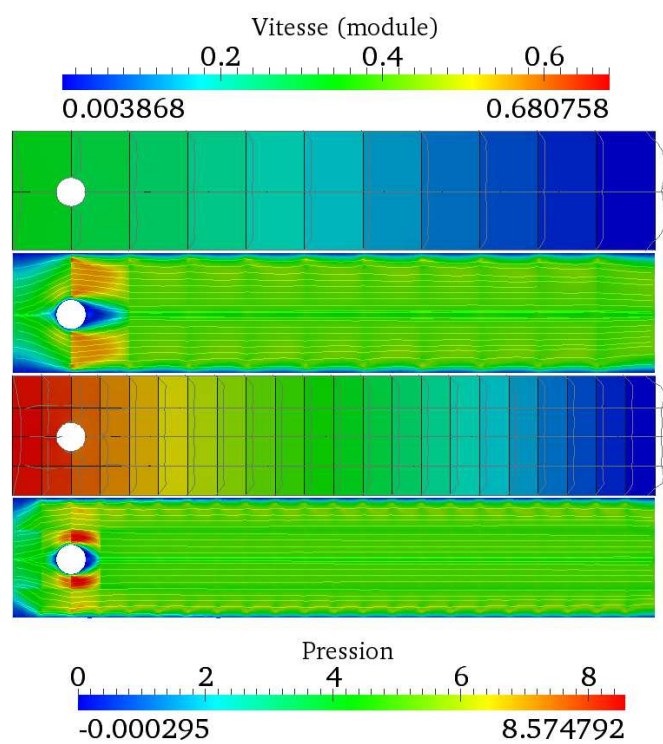


FIGURE 5.15 : Champs de pression (haut) et de vitesse (bas) à l'itération  
1

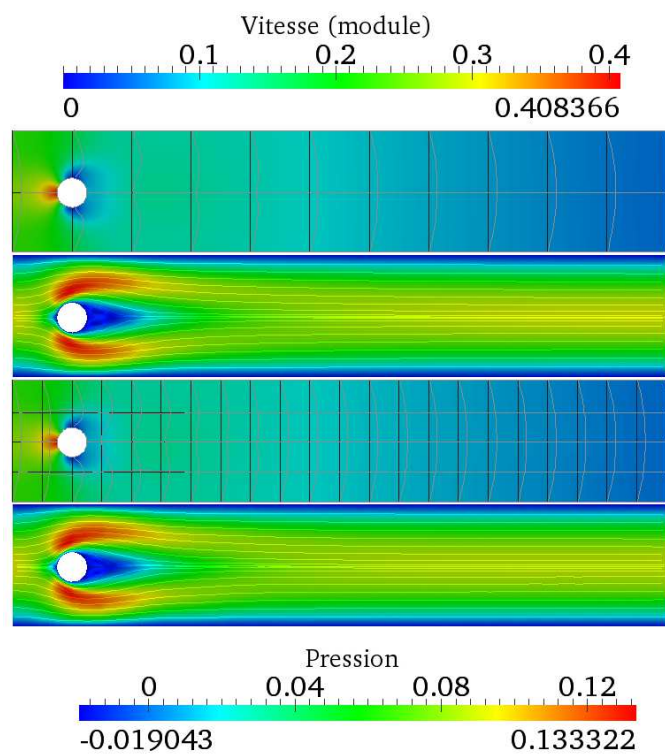


FIGURE 5.16 : Champs de pression (haut) et de vitesse (bas) à l'itération 15

**Coefficients aérodynamiques** Les coefficients calculés ici sont proches de ceux présentés dans [179]. Le tableau 5.9 présente les valeurs numériques obtenues et celles prises comme référence.

	type de calcul	$c_D$	$c_L$	$\Delta p$	$l_r$
décomposition de domaine	88sd	5.65	0.013	0.1183	0.85
	22sd	5.64	0.015	0.12	0.85
référence	borne basse	5.57	0.011	0.12	0.85
	borne haute	5.59	0.011	0.12	0.85

(5.9)

Les valeurs obtenues ici ont un écart relatif de quelques pour-cent avec les références.

## 6 Écoulement non stationnaire autour d'un cylindre

Lorsque l'on impose une vitesse plus importante, les tourbillons formés à l'arrière du cylindre se détachent de celui-ci, de manière périodique. Un nombre de Reynolds de  $Re = 100$  est caractéristique de ce régime d'écoulement. Le problème est non stationnaire, et le paramètre de stabilisation SUPG doit être adapté pour tenir compte du schéma d'intégration temporelle employé. À chaque pas de temps, le problème de Navier-Stokes est résolu par la méthode multi-échelle proposée. Il s'agit donc d'une résolution incrémentale, chaque problème est résolu jusqu'à convergence avant de passer au pas de temps suivant.

L'intégration temporelle est réalisée par un schéma de Crank-Nicholson et l'expression du paramètre de stabilisation est :

$$\tau_{\text{SUPG}} = \left( \frac{2}{\Delta t} + \frac{2\|\underline{v}\|}{h} + \frac{4\nu}{h^2} \right)^{-1}$$

Le pas de temps employé pour les calculs présentés ci-dessous est de  $\Delta t = 20\text{ms}$ , et les conditions initiales correspondent au fluide au repos ( $\underline{v} = \underline{0}, p = 0$ ). Le débit à travers la section d'entrée est progressivement augmenté de  $U_{\text{max}} = 0$  à  $U_{\text{max}} = 1.5$  sur une période de 50 pas de temps. Le calcul est ensuite poursuivi pendant 7 secondes.

Le détachement tourbillonnaire caractéristique du régime d'écoulement considéré est effectivement reproduit numériquement, comme le montrent les figures 5.17 et 5.18. La première présente les champs de vitesse et de pression calculés à  $t = 8\text{s}$ , la seconde l'évolution des coefficients aérodynamiques en fonction du temps. Les lignes de courant montrent clairement la présence de tourbillons dans le sillage du cylindre. La seconde figure montre que le lâcher de tourbillons est un phénomène pseudo-périodique, après un régime transitoire jusqu'à  $t = 5\text{s}$ . On peut extraire un nombre de Strouhal de la courbe 5.18. Celui-ci est défini à partir de la fréquence des oscillations du coefficient de portance par :

$$S_t = \frac{Df}{2U_{\text{max}}/3}$$



En réalisant la transformée de Fourier de l'évolution du coefficient de portance, on peut évaluer le nombre de Strouhal à  $S_t = 0.293$ . L'écart par rapport à la valeur expérimentale  $S_t = 0.29$  ([179]) est de seulement 1%.

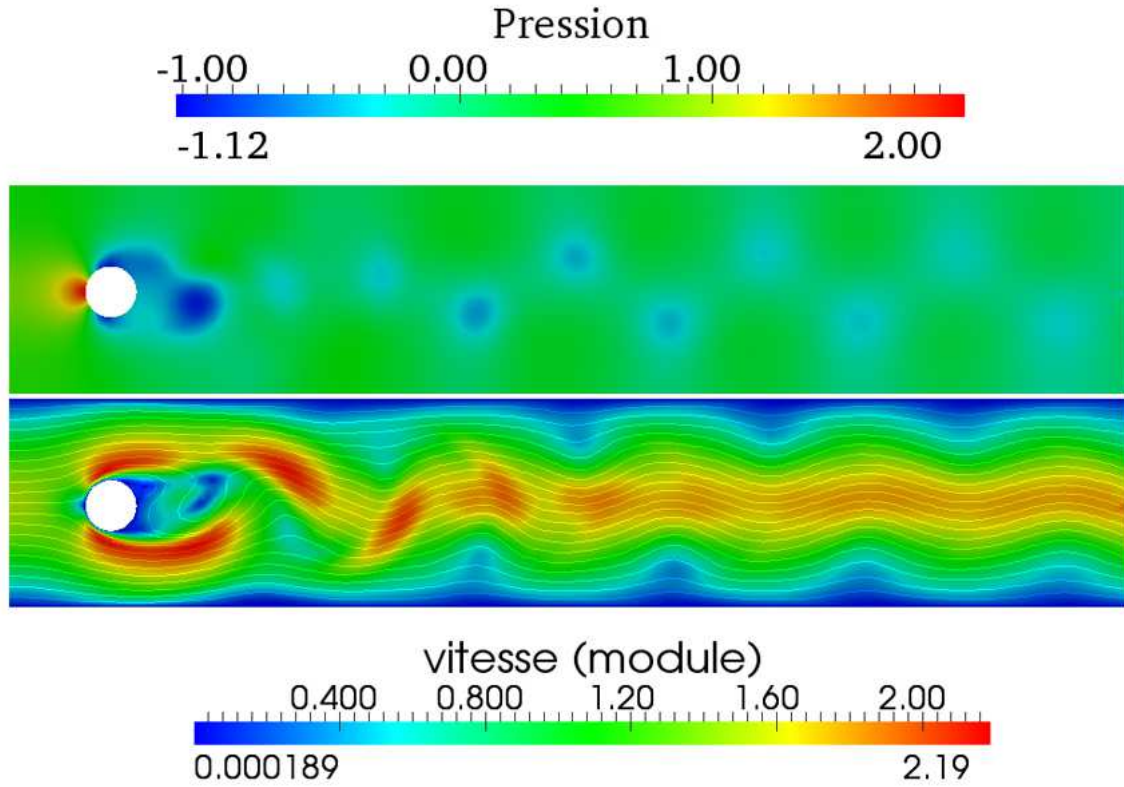


FIGURE 5.17 : Champ de vitesse à  $t=8s$ , avec 88 sous-domaines

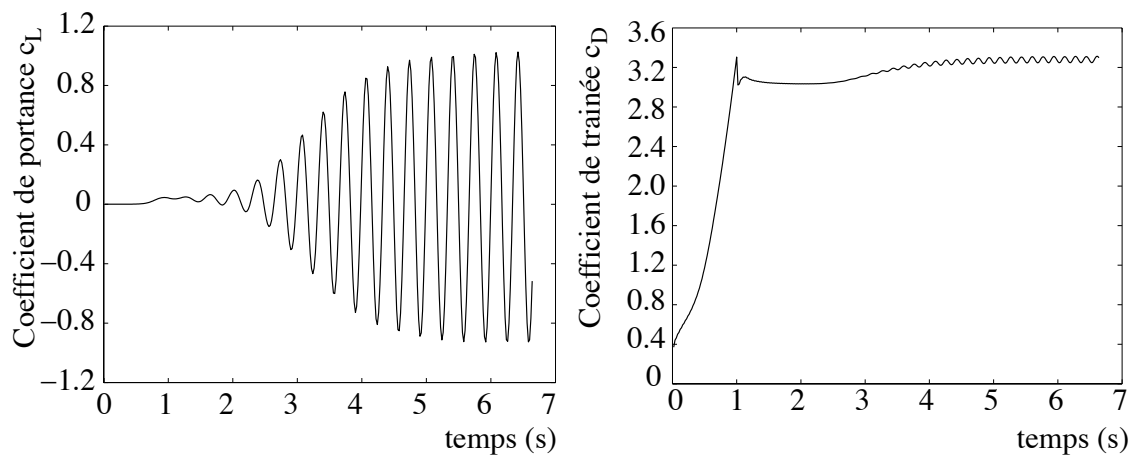


FIGURE 5.18 : Évolution des coefficients de portance et de traînée en fonction du temps, avec 88 sous-domaines



# Chapitre 6

## Interfaces mixtes pour l'interaction fluide-structure

*Ce chapitre présente la mise en œuvre des choix effectués au chapitre 3. Une méthode de domaine fictif est utilisée pour coupler le problème d'écoulement et le problème de mécanique des milieux continus, en utilisant des interfaces mixtes. La méthode est testée sur le problème d'écoulement autour d'un cylindre, en utilisant un solide rigide encastré, puis sur un problème d'écoulement partiellement obstrué par un clapet.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Interfaces mixtes</b> . . . . .	<b>117</b>
1.1	Étape sur un sous-domaine fluide . . . . .	118
1.1.1	Calcul des intégrales sur $\Gamma_c$ . . . . .	118
1.2	Mise en œuvre dans un code C++ . . . . .	119
1.3	Choix des directions de recherche . . . . .	121
1.4	Repérage des interfaces . . . . .	121
<b>2</b>	<b>Solide en grandes transformations</b> . . . . .	<b>122</b>
2.1	Description du mouvement . . . . .	122
2.2	Mesures des déformations . . . . .	122
2.3	Mesures des contraintes . . . . .	122
2.4	Relation de comportement . . . . .	123
2.5	Formulations Lagrangiennes . . . . .	124
2.5.1	Principe des puissances virtuelles . . . . .	124
2.6	Formulation Lagrangien total et réactualisé dans LMTpp . . . . .	125

<b>3</b>	<b>Algorithme partitionné pour le couplage</b> . . . . .	<b>125</b>
<b>4</b>	<b>Exemples</b> . . . . .	<b>127</b>
4.1	Écoulement autour d'un cylindre . . . . .	127
4.1.1	Précision des résultats . . . . .	129
4.2	Écoulement partiellement obstrué par un clapet . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>130</b>

---

Dans ce chapitre nous détaillons le couplage entre un écoulement et un solide, le long d'une frontière commune  $\Gamma_c$ . Le fluide occupe un domaine fixe noté  $\Omega$ , dont la frontière est notée  $\partial\Omega$ . Le solide occupe un domaine mobile  $\omega$  dont la frontière est  $\Gamma_c \cup \partial\omega$ , avec  $\Gamma_c \cap \partial\omega = \emptyset$ . Ces deux domaines peuvent se superposer, sur tout ou partie de leur étendue. On note  $\Omega^+$  la partie de  $\Omega$  non recouverte par  $\omega$ , et  $\Omega^-$  la partie recouverte par  $\omega$ . La figure 6.1 précise les notations utilisées au cours de ce chapitre.

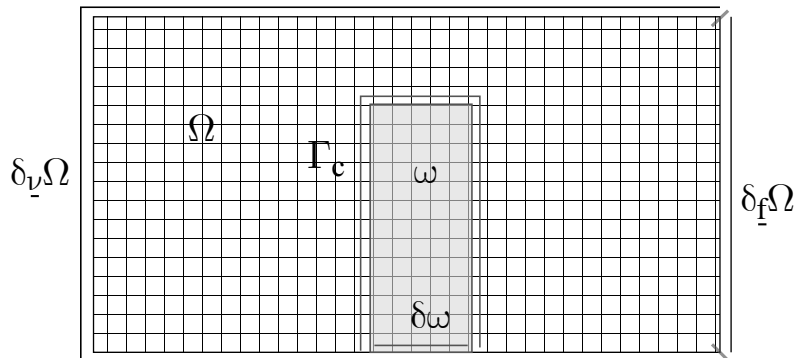


FIGURE 6.1 : Schématisation d'un problème d'interaction fluide-structure

## 1 Interfaces mixtes

Le couplage est traité de manière similaire à la méthode de domaine fictif [67, 198, 206], en utilisant des interfaces mixtes. Les interfaces de couplage possèdent donc les mêmes champs que les interfaces parfaites reliant deux sous-domaines, c'est-à-dire un champ de vitesse  $\underline{W}$  et un champ d'effort  $\underline{F}$ . Le domaine  $\Omega^+$  est la partie réelle de l'écoulement, et  $\Omega^-$  sa partie fictive.

Ces interfaces mixtes sont utilisées pour imposer les conditions aux limites sur les bords du maillage fluide au chapitre 4. Nous proposons ici d'étendre leur champ d'action à l'imposition de conditions à l'intérieur du maillage fluide, le long de l'interface fluide-solide. Elles représentent des conditions aux limites pour la partie réelle de l'écoulement, le long d'une ligne qui n'est pas comprise dans le maillage. Pour simplifier, nous supposons qu'il n'existe qu'un seul sous-domaine fluide sur lequel a lieu le couplage. Ceci permet d'alléger les notations :  $\widehat{W}_{\Gamma_c}$  et  $\widehat{F}_{\Gamma_c}$  représentent les champs sur l'interface de couplage. La majorité des algorithmes de couplage utilisent une vitesse imposée par le solide ( $\widehat{W}_{\Gamma_c} = \widehat{W}_s$ ). À partir des champs  $\widehat{W}_{\Gamma_c}$  et  $\widehat{F}_{\Gamma_c}$  sur l'interface fluide-solide, l'étape sur les sous-domaines traversés par une interface de couplage doit être modifiée pour prendre en compte cette interface supplémentaire.

## 1.1 Étape sur un sous-domaine fluide

Nous décrivons ici les modifications apportées à l'étape sur les sous-domaines fluides traversés par l'interface de couplage. Sur les autres sous-domaines fluides, cette étape n'est pas modifiée, et nous renvoyons le lecteur au chapitre 4 section 3.2. Dans la suite, l'indice  $E$  désigne les champs sur le bord du domaine  $\Omega$ , et l'indice  $\Gamma_c$  les champs sur  $\Gamma_c$ . Puisqu'on ne considère qu'un sous-domaine de couplage, l'indice  $E$  est abandonné pour les champs de pression et de vitesse.

En partant d'une solution  $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$  sur les interfaces composant le bord du sous-domaine et de  $(\widehat{W}_{\Gamma_c}, \widehat{F}_{\Gamma_c})$ , on cherche une solution  $(\underline{v}, p, \underline{W}_E, \underline{F}_E, \underline{W}_{\Gamma_c}, \underline{F}_{\Gamma_c})$ . Cette solution doit vérifier les conditions d'admissibilité (4.14) (4.15-4.16) et les directions de recherche :

$$(\underline{F}_E - \widehat{F}_E) + \underline{z}(\underline{W}_E - \widehat{W}_E) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad (6.1)$$

$$(\underline{F}_{\Gamma_c} - \widehat{F}_{\Gamma_c}) + \underline{z}(\underline{W}_{\Gamma_c} - \widehat{W}_{\Gamma_c}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \gamma \quad (6.2)$$

Le problème s'écrit : Trouver  $(\underline{v}, p) \in \mathcal{V}_E \times Q_E$  tels que  $\forall (\underline{w}, q) \in \mathcal{V}_E \times Q_E$  :

$$\int_{\Omega^+} \underline{w} \cdot \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \underline{\nabla} \underline{v} \right) + 2\underline{v} \underline{\nabla}^S \underline{v} : \underline{\nabla}^S \underline{w} - p \underline{\nabla} \cdot \underline{w} - q \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \, d\Omega \quad (6.3)$$

$$+ \int_{\Omega^-} \underline{w} \cdot \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \underline{\nabla} \underline{v} \right) + 2\underline{v} \underline{\nabla}^S \underline{v} : \underline{\nabla}^S \underline{w} - p \underline{\nabla} \cdot \underline{w} - q \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \, d\Omega \quad (6.4)$$

$$+ \int_{\partial\Omega_E} \underline{z} \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* \, dS + \int_{\Gamma_c} \underline{z} \underline{W}_{\Gamma_c} \cdot \underline{W}_{\Gamma_c}^* \, dS \quad (6.5)$$

$$= \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{F}_E + \underline{z} \widehat{W}_E) \cdot \underline{W}_E^* \, dS + \int_{\Gamma_c} (\widehat{F}_{\Gamma_c} + \underline{z} \widehat{W}_{\Gamma_c}) \cdot \underline{W}_{\Gamma_c}^* \, dS \quad (6.6)$$

**Remarque 11 : Partie fictive de l'écoulement** *La partie de l'écoulement correspondant à  $\Omega^-$  est une partie fictive. L'écoulement qui s'y développe n'a pas d'intérêt pour la simulation. Ainsi, certains auteurs [60] proposent de retirer les nœuds de  $\Omega^-$  du calcul, réduisant ainsi la taille du problème. Nous choisissons de les conserver, aux dépens du coût de calcul certes, mais au bénéfice de la simplicité d'implantation : la connectivité du maillage ne change pas, et la taille des matrices reste constante.*

### 1.1.1 Calcul des intégrales sur $\Gamma_c$

La particularité des interfaces de couplage est que leur maillage n'est pas un sous-maillage du sous-domaine fluide concerné. Ainsi, si pour les interfaces de décomposition de domaine, le calcul des intégrales sur l'interface fait intervenir des calculs sur le bord des éléments du sous-domaine, ce n'est plus le cas ici. La figure 6.2 illustre la différence entre les interfaces parfaites internes au fluide et les interfaces de couplage utilisées pour l'interaction avec le solide.

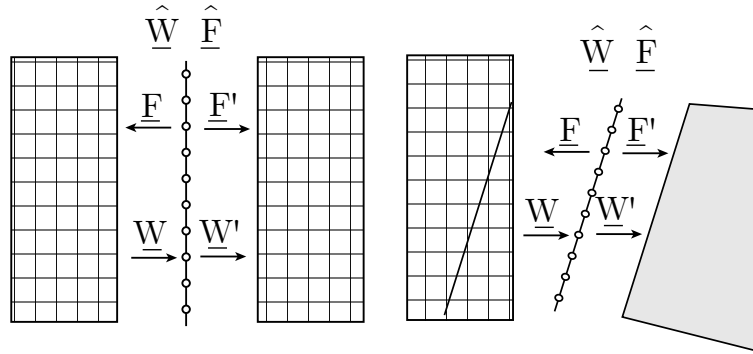


FIGURE 6.2 : Interface mixte entre un sous-domaine fluide et un autre sous-domaine fluide ou un solide

## 1.2 Mise en œuvre dans un code C++

Comme cela est fait pour les interfaces de décomposition de domaine, on doit donc fournir aux objets interfaces de couplage des matrices permettant d'effectuer le passage des maillages fluide et solide aux quantités d'interface, et de calculer l'intégrale de ces dernières. Ces matrices sont calculées à partir de la matrice d'un problème de minimisation : Connaissant  $\underline{u}$ , Trouver  $\underline{U}$  sur  $\Gamma_c$  et  $\underline{u}$  sur  $\Omega$  réalisant le minimum de  $E_p(\underline{U}, \underline{u}) = \int_{\Gamma_c} ||\underline{U} - \underline{u}||^2 dS$  revient à résoudre le problème matriciel :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{U} \end{bmatrix} = 0$$

Bien sûr ce problème n'admet pas une solution unique pour  $\underline{U}$  donné. Au contraire, pour  $\underline{u}$  donné, il existe une solution unique, déterminée par :

$$\underline{U} = M^{-1}C^{-1}B^T \underline{u} = Nu \quad (6.7)$$

Avec  $M$  la matrice d'intégration sur l'interface. Les quantités d'interface étant constantes par élément, c'est une matrice diagonale contenant les mesures des éléments. On possède dès lors une expression du lien entre  $\underline{U}$  et  $\underline{u}$ , vecteurs contenant les valeurs nodales de  $\underline{U}$  et  $\underline{u}$ .

**Matrice de rigidité liée aux directions de recherche** Le calcul de la matrice du problème 6.3 est effectué par la librairie LMTpp pour ce qui concerne les intégrales sur  $\Omega$ . Il faut ensuite ajouter les contributions des interfaces. Nous avons vu au chapitre 4 que ces contributions intervenaient au second membre, et sous forme d'une matrice de rigidité pour les degrés de liberté d'interface. Le formalisme est ici le même, et les interfaces de couplage donnent lieu à des matrices de rigidité de la forme :

$$K_{\Gamma_c} = N^T \cdot M \cdot N \quad (6.8)$$



**Remarque 12 : Fonctions génériques pour le calcul des matrices de trace** La librairie *LMTpp* permet d'effectuer ce calcul très simplement, puisqu'il s'agit d'obtenir la matrice « de rigidité » du problème de minimisation. Celle-ci est la somme des contributions de chaque élément de  $\Gamma_c$ . Ainsi, pour un type d'élément d'interface et un type d'élément sur le sous-domaine fluide, la dérivation symbolique permet d'obtenir une expression générique des termes de cette matrice, en fonction de la position des nœuds de chaque élément. On dispose alors d'une fonction par paire d'éléments (interface/sous-domaine) permettant de calculer les matrices  $B^T$  et  $C$ .

**Réduction du coût numérique** Les matrices de passage  $N$  doivent être calculées à chaque changement de position du domaine solide. Leur calcul implique l'appel d'une fonction sur chaque élément d'interface, qui balaie les éléments du domaine fluide. La matrice générée est de taille  $n_f \times n_i$ , avec  $n_f$  et  $n_i$  le nombre de nœuds des maillages fluide et d'interface, respectivement. Le maillage fluide étant potentiellement relativement fin au voisinage de l'interface, la taille de la matrice  $N$  peut être conséquente. Le calcul de la matrice  $K_{\Gamma_c}$  de rigidité associée à la direction de recherche sur l'interface n'est donc pas envisageable à chaque assemblage du problème fluide. Nous choisissons donc de stoker cette matrice, mais le temps nécessaire à l'assemblage reste important. Ce coût numérique peut être grandement réduit, en ne retenant que les nœuds du maillage fluide intervenant effectivement dans le calcul de la matrice  $N$ . Ainsi, sa taille est réduite à  $\tilde{n}_f \times n_i$ , et celle de  $K_{\Gamma_c}$  à  $\tilde{n}_f \times \tilde{n}_f$  au lieu de  $n_f \times n_f$ . L'assemblage dans la matrice de rigidité du sous domaine est alors effectué en utilisant le repérage des nœuds fluide ayant servi au calcul de  $N$ . La figure 6.3 illustre ces propos.

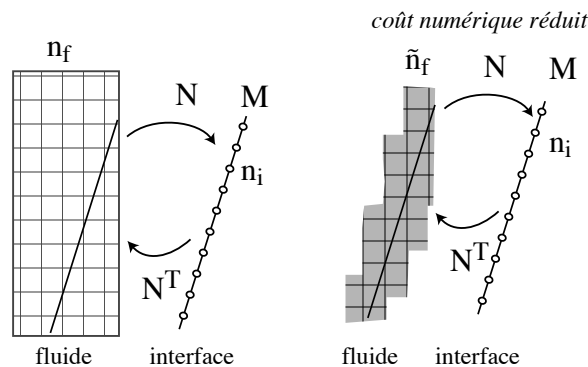


FIGURE 6.3 : Réduction du nombre de nœuds utilisés lors des calculs d'interface

### 1.3 Choix des directions de recherche

Les directions de recherche, qui sont, rappelons-le, des paramètres de la méthode de décomposition de domaine, sont le reflet de l'influence des sous-domaines voisins sur l'interface considérée. Dans le cas d'une interface parfaite entre deux sous-domaines du même milieu, les directions de recherche sont choisies identiques sur les deux côtés d'une interface. Pour les interfaces portant les conditions aux limites, elles sont choisies de manière à imposer les données du problème. Cette latitude dans le choix des directions de recherche permet de traduire un comportement différent de chaque côte d'une même interface dans le cas du couplage. Sur le côté correspondant au fluide, on choisit une direction de recherche identique aux interfaces à vitesse imposée. Sur le côté correspondant au solide, on choisit la direction de recherche comme pour les interfaces à effort imposé.

### 1.4 Repérage des interfaces

Les interfaces de couplage ont un côté en commun avec un domaine (ou sous-domaine) fluide et l'autre avec un domaine solide. Ce dernier est décrit dans un formalisme lagrangien, ce qui permet à chaque instant de connaître sa position. Cette information est partagée avec le côté de l'interface correspondant, dont on peut ainsi actualiser les informations de maillage. Cette description lagrangienne de l'interface est utilisée pour construire une fonction *level-set* sur le domaine fluide situé de l'autre côté. Cette fonction ne sert qu'à distinguer les parties réelles et fictives de l'écoulement, et est actualisée à chaque pas à partir de la position de l'interface. En effet, l'utilisation d'une équation de transport pour l'interface est impossible. Dans les schémas partitionnés pour le couplage fort, le champ de vitesse sur l'interface est déterminé itérativement. Il ne peut pas être utilisé pour déplacer la fonction *level-set* pendant la procédure itérative, puisque celle-ci a lieu à un pas de temps fixé. Il pourrait par contre servir pour calculer la position de l'interface au pas de temps suivant. La position de la structure, et par conséquent de l'interface est connue à chaque itération. Il suffit donc de construire une fonction distance à cette interface sur le maillage fluide. La figure 6.4 illustre l'actualisation de la fonction distance  $\phi$  sur le maillage fluide.

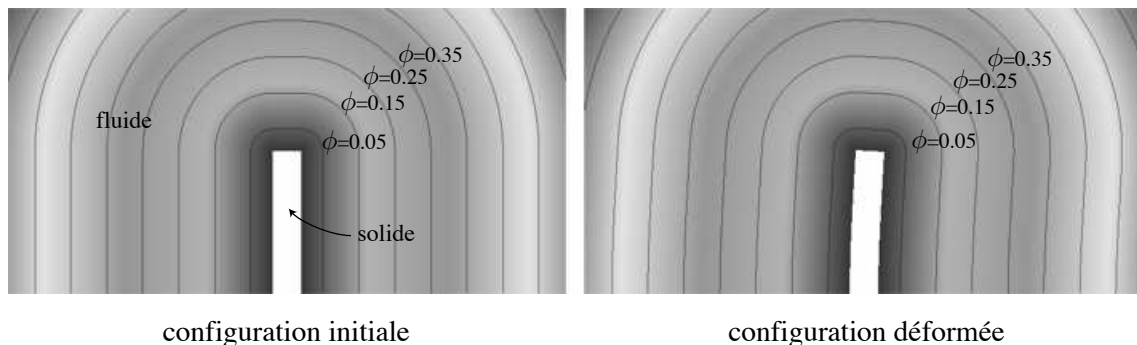


FIGURE 6.4 : Actualisation des lignes de niveau sur le maillage fluide

## 2 Solide en grandes transformations

Dans un problème d'interaction fluide-structure, ce sont les déformations du solide qui modifient le domaine sur lequel s'étend l'écoulement. Hormis dans le cas de solides très élancés, une modification importante du domaine fluide, est donc engendrée par une déformation du solide en contradiction avec l'hypothèse des petites perturbations. Nous exposons ici rapidement la formulation du problème solide, en dehors du cadre HPP.

### 2.1 Description du mouvement

Soit  $C_0$  la configuration initiale du matériau, dans laquelle une particule  $X$  occupe la position  $\underline{X}$ . Après déformation, la particule occupe la position  $\underline{x}$  dans la configuration  $C_t$ . La configuration  $C_0$  est également appelée configuration non déformée, et, sauf spécification contraire, sert de configuration de référence  $C_R$ . La configuration  $C_t$  est appelée configuration déformée, ou configuration courante. La description matérielle ou description lagrangienne choisit la configuration initiale comme référence pour la description du mouvement ( $C_R = C_0$ ). Le mouvement est décrit par la fonction  $\underline{\phi} : \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$

### 2.2 Mesures des déformations

Les mesures des déformations sont basées sur le tenseur gradient de déformation  $\underline{F}$  :  $d\underline{x} = \underline{F}d\underline{X}$ , soit  $\underline{F} = \underline{\nabla}_{\underline{X}}\underline{x}$ . Ce n'est cependant pas une mesure des déformations, en effet pour un mouvement de solide rigide ( $\underline{x} = \underline{R}\underline{X} + \underline{c}$ ), il n'est pas nul ( $\underline{F} = \underline{R}$ ) alors que le mouvement ne produit aucune déformation.

Les tenseurs des déformations de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi décrivent les déformations dans les configurations de référence et déformée, respectivement :

$$\begin{aligned} \text{Green-Lagrange} : \underline{E} &= \frac{1}{2}(\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{I}) \\ \text{Euler-Almansi} : \underline{e} &= \frac{1}{2}(\underline{I} - \underline{F}^{-T} \cdot \underline{F}^{-1}) \end{aligned}$$

### 2.3 Mesures des contraintes

Trois mesures des contraintes existent : le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\underline{\underline{\sigma}}$ , le tenseur de contrainte nominal,  $\underline{P}$  et enfin le second tenseur de Piola-Kirchhoff,  $\underline{S}$ .

Leur utilisation dépend de la configuration choisie pour décrire les efforts et les normales. La figure 6.5 précise les notations utilisées. Soit  $P$  un point du domaine, situé sur une surface de normale  $\underline{n}$  et de mesure  $d\Gamma$ . Les efforts sur cette surface et la normale à cette surface sont reliés par les tenseurs des contraintes. Dans la configuration courante, la relation s'écrit avec le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  :

$$\underline{f} = d\Gamma \underline{t} = \underline{n} \underline{\underline{\sigma}} d\Gamma \quad (6.9)$$

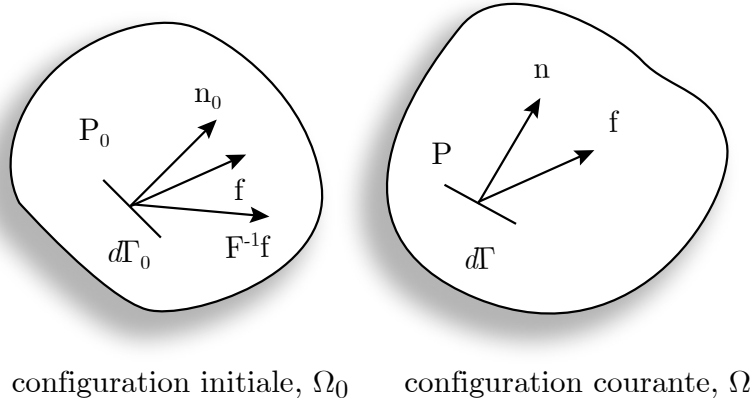


FIGURE 6.5 : Vecteurs forces et normales

Le transport de cette relation dans la configuration de référence donne, avec  $\underline{\underline{\mathbb{P}}}$  le tenseur des contraintes nominales :

$$\underline{f} = d\Gamma_0 \underline{t}_0 = \underline{n}_0 \underline{\underline{\mathbb{P}}} d\Gamma_0 \quad (6.10)$$

Attention, le tenseur  $\underline{\underline{\mathbb{P}}}$  n'est pas symétrique, et la relation est valable uniquement avec le vecteur normale à gauche. Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est défini par :

$$\underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1} \underline{f} = d\Gamma_0 \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1} \underline{t}_0 = \underline{n}_0 \underline{\underline{\mathbb{S}}} d\Gamma_0 \quad (6.11)$$

En écrivant que  $\underline{n} = \underline{\underline{\mathbb{F}}} \underline{n}_0$  et  $d\Gamma = J d\Gamma_0$ , on obtient les relations entre les différents tenseurs de contraintes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= J^{-1} \underline{\underline{\mathbb{F}}} \underline{\underline{\mathbb{S}}} \underline{\underline{\mathbb{F}}}^T = J^{-1} \underline{\underline{\mathbb{F}}} \underline{\underline{\mathbb{P}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{S}}} &= J \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-T} = \underline{\underline{\mathbb{P}}} \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-T} \end{aligned}$$

## 2.4 Relation de comportement

La réponse de matériaux élastiques soumis à de grands déplacements ou de grandes transformations peut être modélisée par une loi de comportement de Saint Venant - Kirchhoff, qui est une généralisation de l'élasticité linéaire au cas des grandes transformations. L'énergie potentielle élastique est donnée par :

$$W^{int} = \frac{1}{2} \lambda (Tr(\underline{\underline{\mathbb{E}}}))^2 + \mu Tr(\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2) = \underline{\underline{\mathbb{S}}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad (6.12)$$

La contrainte est donnée par :

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}} = \lambda Tr(\underline{\underline{\mathbb{E}}}) \underline{\underline{\mathbb{I}}} + 2\mu \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad (6.13)$$

## 2.5 Formulations Lagrangiennes

Les deux formulations lagrangienne et lagrangienne réactualisée diffèrent par la configuration de référence choisie pour écrire le principe des puissances virtuelles. Ce choix conditionne les tenseurs à employer pour décrire les déformations et les contraintes.

La formulation lagrangienne s'écrit sur la configuration initiale, avec le tenseur de Green-Lagrange et le second tenseur de Piola-Kirchhoff. Le système obtenu est non-linéaire, à cause de la non-linéarité des tenseurs.

Les formulations lagrangiennes réactualisées écrivent le principe des puissances virtuelles non pas sur la configuration initiale, mais sur une configuration de référence plus proche de la configuration déformée. Le choix pour  $C_R$  n'est pas unique, on peut choisir la configuration déformée  $C_t$  (inconnue, que l'on approche par itérations) ou la dernière configuration connue  $C_{t-1}$ . C'est le choix que nous faisons dans la suite.

Les différentes configurations sont indicées 0 pour la configuration initiale  $C_0$ , 1 pour la configuration de référence dans laquelle on écrit l'équilibre  $C_R = C_1$  et 2 pour la configuration déformée  $C_2 = C_t$  (voir la figure 6.6).

### 2.5.1 Principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles s'écrit, dans la configuration  $C_1$  :

$$\int_{\Omega_1} \underline{\underline{\mathbb{S}}} : \underline{\underline{E}}^* d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{u}}^* d\Omega_1 + \int_{\partial\Omega_1} \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{u}}^* d\Gamma \quad (6.14)$$

$\underline{\underline{E}}^*$  est le tenseur test des déformations de Green-Lagrange réactualisé :

$$\underline{\underline{E}}^*(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{\underline{X}}_2^{*T}}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \frac{\partial \underline{\underline{X}}_2}{\partial \underline{\underline{X}}_1} + \frac{\partial \underline{\underline{X}}_2^T}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \frac{\partial \underline{\underline{X}}_2^*}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{\underline{u}}^{*T}}{\partial \underline{\underline{X}}_1} + \frac{\partial \underline{\underline{u}}^*}{\partial \underline{\underline{X}}_1} + \frac{\partial \underline{\underline{u}}^T}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \frac{\partial \underline{\underline{u}}^*}{\partial \underline{\underline{X}}_1} + \frac{\partial \underline{\underline{u}}^{*T}}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \right)$$

$\underline{\underline{\mathbb{S}}}$  est le second tenseur de Piola-Kirchhoff réactualisé :

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}} = \underline{\underline{\mathbb{S}}}_0 + \underline{\underline{\mathbb{S}}}_1$$

$$\text{avec : } \underline{\underline{\mathbb{S}}}_0 = \underline{\underline{\mathbb{C}}}_0 \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbb{C}}}_0 \left( \underline{\underline{I}} - \frac{\partial \underline{\underline{X}}_0^T}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \frac{\partial \underline{\underline{X}}_0}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \right) \text{ et : } \underline{\underline{\mathbb{S}}}_1 = \underline{\underline{\mathbb{C}}}_1 \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbb{C}}}_1 \left( \frac{\partial \underline{\underline{X}}_2^T}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \frac{\partial \underline{\underline{X}}_2}{\partial \underline{\underline{X}}_1} - \underline{\underline{I}} \right)$$

**Linéarisation du tenseur de Green-Lagrange** Dans le cas où  $C_1$  et  $C_2$  sont proches, on peut faire l'hypothèse de linéarité en  $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{X}}_2 - \underline{\underline{X}}_1$  pour le tenseur des déformations de Green-Lagrange entre les états 1 et 2 :

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}_1 \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{\underline{X}}_2^T}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \frac{\partial \underline{\underline{X}}_2}{\partial \underline{\underline{X}}_1} - \underline{\underline{I}} \right) \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{\underline{u}}^T}{\partial \underline{\underline{X}}_1} + \frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial \underline{\underline{X}}_1} \right)$$

**Dérivations spatiales** La formulation lagrangienne réactualisée fait intervenir des dérivées par rapport à  $\underline{X}_1$ , il est plus simple en pratique de dériver par rapport aux coordonnées de l'élément de référence, et de multiplier par le jacobien de la transformation  $\xi \mapsto X_1(\xi, t)$ , voir figure 6.6.

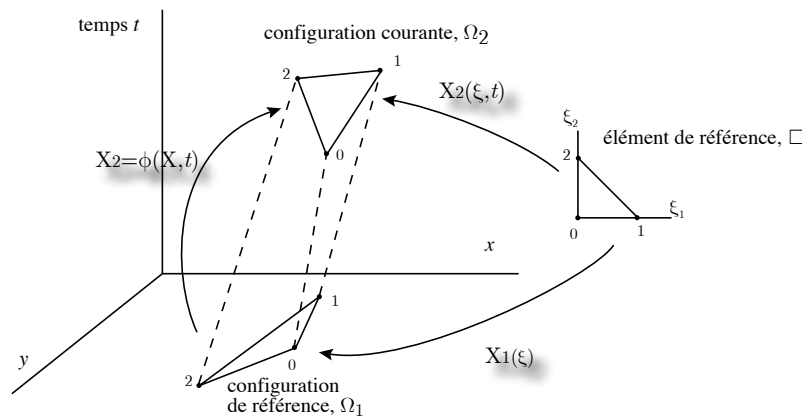


FIGURE 6.6 : Relations de composition pour dériver

## 2.6 Formulation Lagrangien total et réactualisé dans LMTpp

À partir de l'expression (6.14), et des expressions des tenseurs test de Green-Lagrange et de Piola-Kirchhoff, les formulations en Python s'écrivent de manière intuitive. En Lagrangien réactualisé, il faut cependant actualiser la position de la structure, et donc intervenir également au niveau de la résolution du problème, dans la partie C++.

**Algorithme de Newton** Le problème (6.14) est non linéaire. Il est résolu par un algorithme de Newton tangent. Il faut remarquer que ce problème n'inclut pas les conditions aux limites sur  $\partial\omega$ , l'assemblage des directions de recherche doit avoir lieu à chaque itération de Newton, puisque la matrice de rigidité est recalculée.

La figure 6.7 compare les courbes effort-déplacement obtenues avec la formulation lagrangienne, les hypothèses HPP et la solution analytique [26] dans le cas d'une poutre en compression.

## 3 Algorithme partitionné pour le couplage

Coupler deux problèmes, l'un posé sur le milieu fluide et l'autre sur le solide, sans se préoccuper de la manière dont ils seront résolus, permet d'envisager tout type d'algorithme de couplage partitionné : faible [53, 201] ou fort [202, 201, 102, 119]. La particularité de notre approche est de pouvoir utiliser une méthode de décomposition de domaine

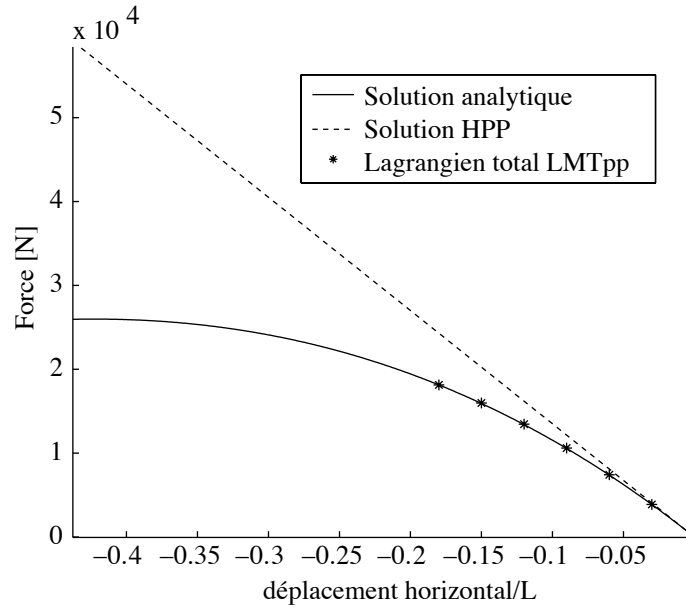


FIGURE 6.7 : Courbes effort-déplacement pour une poutre en compression axiale (crédit : K. Saavedra)

multi-échelle pour résoudre la partie fluide, et des interfaces mixtes pour assurer le couplage. Afin de simplifier l'exposé de la méthode, considérons le couplage entre une structure solide et un domaine fluide, ainsi  $\Gamma_c$  est une unique interface, alors que dans le cas où l'un au moins des domaines physiques est décomposé,  $\Gamma_c$  est constitué de l'ensemble des interfaces de couplage  $\Gamma_{cij}$  entre le sous-domaine fluide  $\Omega_{Ei}$  et le sous-domaine solide  $\Omega_{Ej}$ .

Dans un premier temps la structure est résolue de manière directe, sans décomposition de domaine. Cela permet de considérer indifféremment des solides rigides ou subissant de grandes transformations. L'algorithme de couplage choisi n'est cependant pas restrictif, et une méthode de décomposition de domaine peut être envisagée pour le solide.

Le problème d'équilibre pour le solide s'écrit : Trouver  $\underline{u}$  tel que

$$\int_{\omega} \underline{\mathbb{S}}(\underline{u}) : \underline{\underline{E}}^* d\Omega_s = \int_{\omega} \underline{f} \cdot \underline{u}^* d\Omega_s + \int_{\partial\omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \widehat{\underline{F}}_f \cdot \underline{u}^* d\Gamma \quad (6.15)$$

Soit sous forme matricielle, après discrétisation par éléments finis :

$$\underline{K}_s \underline{u} = \underline{F}_{s,ext} + \underline{N}_s \underline{M}_s \widehat{\underline{F}}_s \quad (6.16)$$

avec la condition de Neumann :  $\widehat{\underline{F}}_s = -\underline{F}_f$

Le problème d'équilibre pour le fluide s'écrit :

$$\underline{K}_f(\underline{v}) \begin{pmatrix} \underline{v} \\ p \end{pmatrix} = \underline{F}_{f,ext}$$

avec la condition de Dirichlet :  $\widehat{W}_f = W_s$

L'algorithme de couplage est constitué des pas suivants :

- résoudre le problème fluide, avec la condition  $\widehat{W}_f = W_s$  :

$$K_f(v) \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = F_{f,ext} + N_f M_f F_f \quad (6.17)$$

$$F_f = \widehat{F}_f + \underline{\underline{z}}_f (W_f - \widehat{W}_f) \quad (6.18)$$

- calculer les champs sur l'interface fluide-solide :

$$\widehat{F} - F_f + \underline{\underline{z}}_f (\widehat{W}_f - W_f) = 0 \quad (6.19)$$

$$\widehat{F} - F_s + \underline{\underline{z}}_s (\widehat{W}_s - W_s) = 0 \quad (6.20)$$

- résoudre le problème solide, avec les efforts  $\widehat{F}_s = -F_f$  :

$$K_s u = F_{s,ext} + N_s M_s F_s \quad (6.21)$$

$$F_s = \widehat{F}_s + \underline{\underline{z}}_s (W_s - \widehat{W}_s) \quad (6.22)$$

- actualiser la position du solide  $\omega$  et de l'interface  $\Gamma_c$  :

$$d_{n+1} = \mu d_{n+1} + (1 - \mu) d_n \quad (6.23)$$

- si la convergence est atteinte, passer au pas de temps suivant

**Choix de la base macroscopique pour le couplage** Dans le schéma choisi, les échanges de champs entre solide et fluide ont lieu du solide vers le fluide pour la vitesse et du fluide vers le solide pour les efforts. Le solide agit donc comme une condition aux limites en vitesse pour le fluide. Il est donc possible d'extraire la partie macroscopique de la vitesse de l'interface  $\Gamma_c$  pour l'injecter dans le problème macroscopique pour le fluide. Réciproquement, il sera possible, pour la méthode de décomposition de domaine solide, d'extraire les résultantes et moments le long de  $\Gamma_c$ , qui sont les parties macroscopiques des champs d'effort intervenant dans le problème macroscopique.

## 4 Exemples

### 4.1 Écoulement autour d'un cylindre

Le problème exploité au chapitre précédent pour illustrer les performances de la méthode de décomposition de domaine est réutilisé ici pour tester le transfert de champs par les interfaces mixtes de couplage. Ceci permet de plus de comparer les solutions obtenues en considérant le problème comme un problème d'écoulement seul (méthode *MuS*), ou comme un problème d'interaction avec un solide rigide (méthode *MuS+FSI*).



Dans le cas d'un écoulement stationnaire, la procédure de couplage avec un solide rigide immobile se résume à imposer une vitesse nulle sur l'interface de couplage. Les figures 6.9 et 6.8 comparent les résultats obtenus après 50 itérations de la méthode de décomposition de domaine, pour les méthodes *MuS* et *MuS+FSI*. On peut constater que l'allure générale des champs de vitesse et de pression est identique dans les deux cas. Les différences sont concentrées sur les éléments bordant l'interface  $\Gamma_c$ , et sont dues à l'utilisation d'interpolations continues. C'est un des inconvénients classiques de la méthode de domaine fictif, qui peut être traité par un enrichissement local des interpolations, par exemple X-FEM [60].

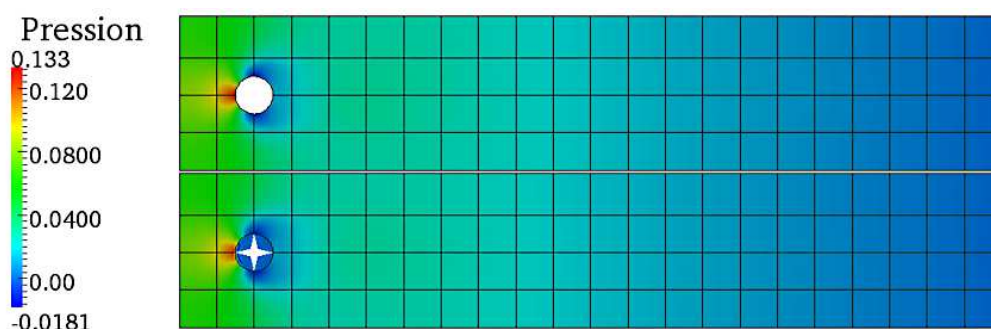


FIGURE 6.8 : Champs de pression. Méthode *MuS* en haut, méthode *MuS+FSI* en bas

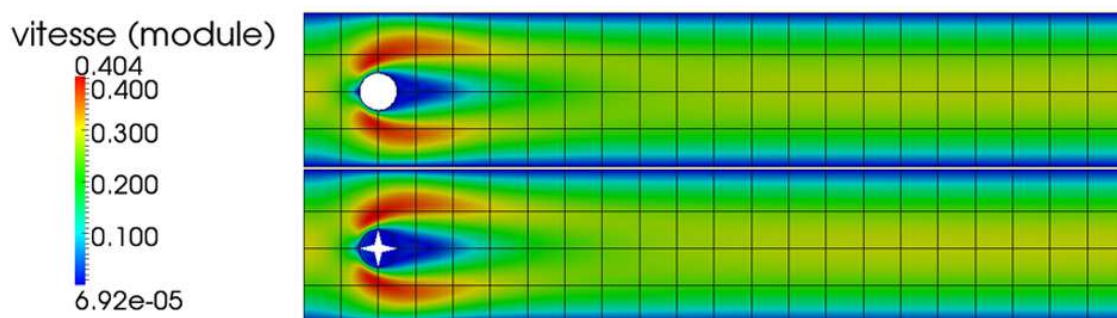


FIGURE 6.9 : Champs de vitesse. Méthode *MuS* en haut, méthode *MuS+FSI* en bas

**Remarque 13 : Domaine fictif** On peut constater que la décomposition utilisée avec la méthode *MuS+FSI* est bâtie de telle sorte qu'il n'y ait pas d'interfaces de décomposition de domaine dans la partie fictive de l'écoulement. Ainsi, l'indicateur de convergence n'est pas influencé par ce qu'il s'y passe.

### 4.1.1 Précision des résultats

Pour évaluer la précision des résultats obtenus avec la méthode de couplage, nous comparons les coefficients aérodynamiques avec ceux obtenus au chapitre précédent, lorsque le cylindre était une frontière du domaine fluide. En utilisant la même partition du domaine, on peut ainsi évaluer l'erreur introduite par l'utilisation de la méthode de domaine fictif pour imposer une vitesse nulle sur le bord du cylindre. Le tableau 6.24 présente les résultats obtenus. On peut constater que la précision est moins bonne avec la méthode de domaine fictif, mais que les résultats obtenus sont globalement bons. Les éléments utilisés au voisinage de l'interface ont néanmoins une taille deux fois inférieure pour la méthode  $MuS+FSI$ , comme le montrent les maillages dessinés sur la figure 6.10.

	type de calcul	$c_D$	$c_L$	$\Delta p$	$l_r$
$MuS$	88sd	5.65	0.013	0.1183	0.85
$MuS+FSI$	88sd	5.70	0.018	0.1186	0.80
référence	borne basse	5.57	0.011	0.12	0.85
	borne haute	5.59	0.011	0.12	0.85

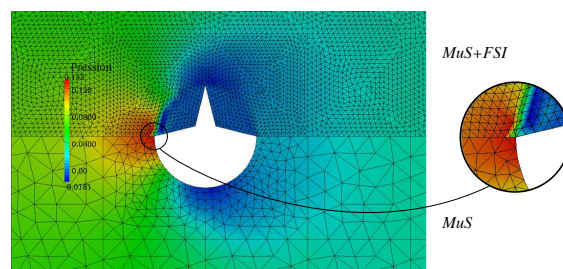
(6.24)


FIGURE 6.10 : Maillages utilisés à proximité de l'interface.  $MuS+FSI$  en haut,  $MuS$  en bas

## 4.2 Écoulement partiellement obstrué par un clapet

Considérons un écoulement entre deux plans parallèles, partiellement obstrué par un clapet. Le clapet est supposé avoir un comportement élastique. La vitesse sur l'interface d'entrée est choisie de manière à conserver un nombre de Reynolds faible (de l'ordre de 10), pour assurer un écoulement stationnaire.

Cet exemple permet de valider les procédures décrites ci-dessus : couplage par le biais d'interfaces mixtes, choix des directions de recherche, actualisation des matrices de trace  $N$  et algorithme itératif de couplage. La figure 6.11 trace l'évolution du déplacement de l'extrémité du clapet en fonction des itérations de l'algorithme de couplage. Rapidement, une configuration proche de la configuration d'équilibre est atteinte. La figure 6.12 montre la configuration déformée à convergence. Sur le solide en configuration déformée est affichée la contrainte de Von Mises, et sur la partie réelle de l'écoulement, le champ de

vitesse (en module). La variation de position du solide entre la configuration initiale et la configuration déformée est importante. Il faut donc estimer *a priori* la zone dans laquelle celui-ci se trouvera, de manière à raffiner le maillage fluide à cet endroit. Un maillage sous-jacent trop grossier dégraderait en effet la solution.

La résolution de la partie fluide par décomposition de domaine impose une étape supplémentaire lors de l'actualisation des matrices de trace  $N$  sur les interfaces. En fonction du déplacement du solide, certains éléments de  $\Gamma_c$  sont en effet situés « au dessus » d'un sous-domaine qui n'est pas le même que dans la configuration initiale. Cela revient à considérer l'interaction de chacun des sous-domaines fluides avec la partie de l'interface de couplage qui lui correspondait uniquement. La figure 6.13 illustre ceci : la portion du solide ayant traversé une interface de la décomposition du domaine fluide n'est pas prise en compte dans le couplage. L'actualisation des objets interface de couplage est donc plus longue, puisqu'il faut mettre à jour les différentes parties  $\Gamma_{cij}$  de  $\Gamma_c$ .

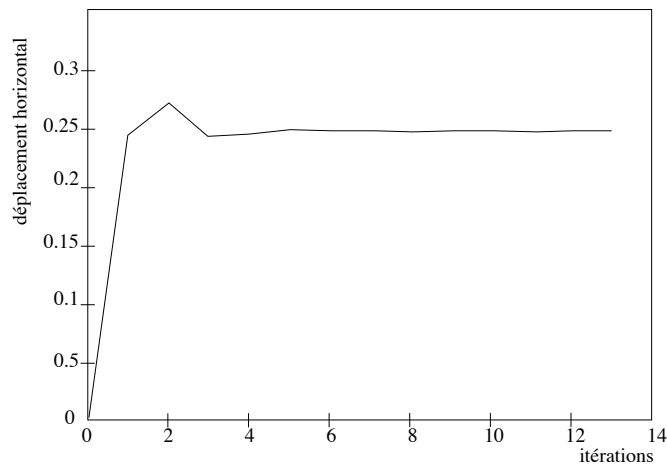


FIGURE 6.11 : Déplacement de l'extrémité du clapet en fonction des itérations de couplage

## 5 Conclusion

La méthode de domaine fictif testée ici en combinaison avec des interfaces mixtes peut donner de bons résultats. Il faut cependant employer un maillage fluide fin au niveau de l'interface et dans le cas d'une interface mobile, cela alourdit considérablement les calculs. Dans le cadre d'un schéma de couplage partitionné, l'augmentation du temps de résolution du problème fluide se cumule au fur et à mesure des itérations. Nous pensons donc qu'il faudrait réexaminer l'hypothèse de grands déplacements de la structure pour décider de l'amélioration à apporter au problème d'interface. Cette amélioration peut être envisagée par exemple sous forme d'un enrichissement local qui permettrait d'utiliser

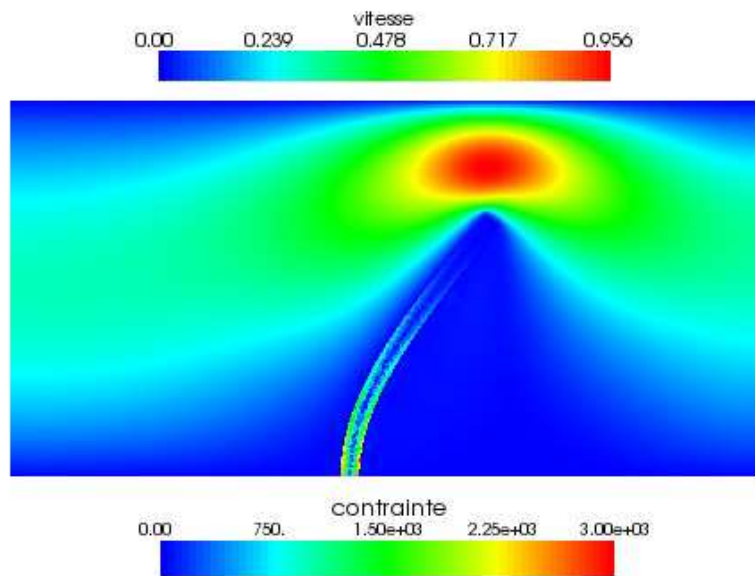


FIGURE 6.12 : Configuration à convergence (itération 13)

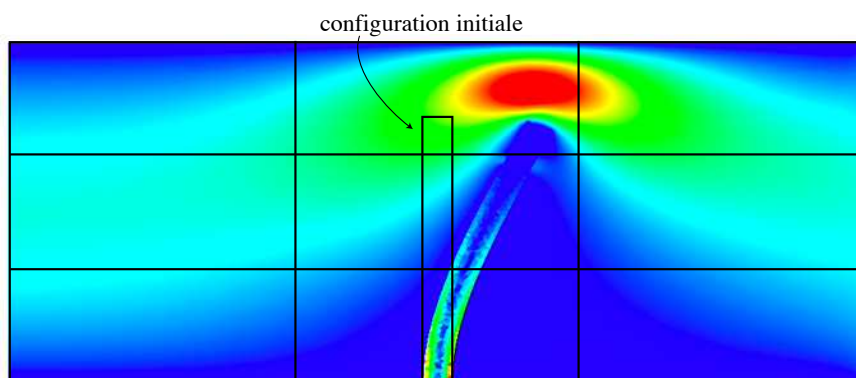


FIGURE 6.13 : Calcul avec actualisation partielle des interfaces

des éléments plus grossiers, parce qu'ils incluent la discontinuité sur l'interface. On peut également penser à adopter une méthode ALE pour les sous-domaines concernés par le couplage.

# Conclusion

La motivation initiale de ce travail de thèse vient du besoin de simulations réalistes de la tenue de réservoirs composites. Les modèles aptes à de réelles simulations prédictives intègrent nécessairement les principaux mécanismes de dégradation des matériaux employés. Pour les composites stratifiés utilisés de façon de plus en plus massives par l'industrie aéronautique, ces mécanismes ont une taille caractéristique inférieure au dixième de millimètre.

De nombreux travaux dans ce domaine ont été menés au laboratoire, tous utilisent et adaptent une méthode de décomposition de domaine mixte. Ce type de méthode permet en effet la conduite de calculs volumineux, en exploitant l'architecture parallèle des calculateurs modernes. Ces travaux ont permis d'obtenir des codes dédiés particulièrement performants, par exemple pour la simulation multi-échelle du délaminage [104].

Les défis posés pour nous par la simulation de réservoirs en composite sont multiples. La complexité du problème lui-même et les difficultés liées d'une part à la simulation des fluides et d'autre part aux problèmes d'interaction fluide structure sont les principaux défis pour des non-spécialistes. Le pari à l'origine de la thèse est qu'il était possible de proposer et d'implanter une méthode multi-échelle efficace, basée sur les outils développés au laboratoire. En effet la méthode de décomposition de domaine mixte utilisée au laboratoire possède *a priori* des atouts pour la simulation d'écoulements incompressibles, qui sont des problèmes mixtes. L'intérêt pour nous étant d'utiliser des formalismes voisins et donc des outils voisins, même si des méthodes probablement plus performantes ont été développées par les spécialistes. Les interfaces portant à la fois des champs de vitesse et d'effort étaient également *a priori* adaptées pour les problèmes d'interaction fluide-structure.

Nos travaux ont donc été orientés selon deux axes principaux, concernant respectivement la résolution d'un problème fluide par décomposition de domaine et la prise en compte de l'interaction de l'écoulement avec une structure.

Le fait de ne pas avoir encore travaillé sur les fluides constituait bien évidemment un obstacle considérable et une partie importante du travail a consisté à assimiler et à programmer dans un environnement logiciel avancé des outils et méthodes classiques dans le domaine. Nous proposons alors une méthode de décomposition de domaine pour les écoulements incompressibles de fluides visqueux possédant deux attributs originaux. Cette décomposition est tout d'abord inspirée de la méthode LaTIn, dont elle reprend la

stratégie itérative de résolution. Le caractère du problème étant très différent des problèmes traités par la méthode LaTIn jusqu' alors (élasticité, plasticité, viscosité), il nous a fallu apporter plusieurs modifications à la méthode. En particulier, nous avons vu que la séparation des difficultés traditionnellement effectuée doit être adaptée pour tenir compte du caractère non-linéaire des équations de Navier-Stokes. Le formalisme itératif de recherche de la solution est néanmoins conservé, avec la construction de deux espaces dont l'intersection est la solution du problème.

Le problème macroscopique utilisé en élastostatique n'est pas valable dans notre cas. En effet, il est basé sur l'équilibrage des efforts macroscopiques, qui introduit une correction de la solution sur les sous-domaines. La non-linéarité des problèmes par sous-domaine rend impossible cette correction. Nous proposons un problème macroscopique original basé sur la condition d'incompressibilité de l'écoulement. Ainsi, paradoxalement, cette hypothèse qui ajoute une difficulté numérique au problème devient un atout pour la convergence de la méthode de décomposition de domaine .

Les premiers travaux sur le couplage fluide structure en décomposition de domaine sont plus récents et moins aboutis. Cependant un certain nombre d'outils ont été développés qui ont permis d'obtenir des résultats prometteurs. Nous abordons le couplage par une méthode de domaine fictif, permettant d'envisager sans difficulté de grands déplacements de la structure. Son implantation a permis de démontrer sa faisabilité. Néanmoins, la finesse de la discrétisation du milieu fluide nécessaire à proximité de l'interface contribue à augmenter les temps de calcul.

Il est alors nécessaire d'envisager une partition du domaine fluide y compris dans la zone d'interaction. Dans le cas de grands déplacements de la structure, on peut se poser la question de la pertinence d'une discrétisation fine dans toute la zone potentiellement concernée par le couplage. De plus, pour les applications envisagées les déplacements avant rupture restent petits. Une partie des choix effectués dans ce chapitre sur le traitement du suivi des interfaces vont sans doute être amenés à évoluer de façon à assurer une précision satisfaisante des efforts d'interface.

Les perspectives ouvertes par ce sujet nouveau au laboratoire sont nombreuses. D'un point de vue strictement numérique, la stratégie de décomposition de domaine proposée permet de réaliser un grand nombre d'opérations en parallèle. Le code éléments finis doit donc être parallélisé, ce qui contribuera grandement à réduire les temps de simulation, jusqu'ici effectuée de manière séquentielle. Seul le problème macroscopique n'est pas, en l'état, parallélisable. Si l'on considère sa taille très réduite comparée aux problèmes sur les sous-domaines, l'emploi d'un solveur direct n'est pas un handicap. Le découplage des échelles proposé permet en effet de réaliser les résolutions aux échelles micro et macro en parallèle. Les calculs à de l'étape sur les interfaces peuvent ainsi être distribués sur plusieurs nœuds. Bien évidemment l'extension au 3D des outils est nécessaire mais l'expérience avec les méthodes pour les solides a montré qu'il n'y a pas là de points bloquants.

Ces différents aspects feront l'objet de travaux ultérieurs et nous espérons que les efforts faits pour intégrer l'ensemble des outils dans la plate-forme LMTpp permettront as-

sez rapidement de proposer des outils et méthodes permettant de simuler de façon efficace et précise le comportement jusqu'à rupture de pièces composites dans un environnement pour partie fluide.

Bien qu'assez spécifiques de nombreuses demandes industrielles dans ce domaine existent, la complexité des phénomènes mis en jeu, tant au niveau physique que numérique en fait un terrain particulièrement propice à des travaux de recherches. Les problèmes d'interaction fluide-structure ne se limitent pas loin de là, à la problématique abordée ici, et il n'est pas impossible que cette thèse ouvre pour le laboratoire un terrain de recherche fertile dans le futur.





# Bibliographie

- [1] A. Amsden and F. Harlow. The smac method : a numerical technique for calculating incompressible fluid flows. Technical Report LA-4370, Los Alamos National Laboratory, 1970.
- [2] F. Armero and E. Love. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for finite strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(4) :471–508, 2003.
- [3] H. Askes, A. Rodriguez-Ferran, and A. Huerta. Adaptive analysis of yield line patterns in plates with the arbitrary lagrangian- eulerian method. *Computers and Structures*, 70(3) :257–271, 1999.
- [4] R. Aubry, S. R. Idelsohn, and E. Oñate. Particle finite element method in fluid-mechanics including thermal convection-diffusion. *Computers & Structures*, 83(17-18) :1459–1475, 2005.
- [5] Frank P. T. Baaijens. A fictitious domain/mortar element method for fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 35(7) :743–761, 2001.
- [6] P. Bach and O. Hassager. An algorithm for the use of the lagrangian specification in newtonian fluid mechanics and applications to free-surface flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 152 :173–190, 1985.
- [7] M. Barboteu, P. Alart, and M. Vidrascu. A domain decomposition strategy for non-classical frictional multi-contact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 190(37-38) :4785–4803, 2001.
- [8] K. J. Bathe, D. Hendriana, F. Brezzi, and G. Sangalli. Inf-sup testing of upwind methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(5) :745–760, 2000.
- [9] Y. Bazilevs, V.M. Calo, Zhang Y., and Thomas J. R. Hughes. Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Computational Mechanics*, 38(4) :310–322, 2006.
- [10] T. Belytschko, W. K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. J. Wiley & Sons, New York, 2000.
- [11] G. Berkooz, P. Holmes, and J.L. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25 :539–575, 1993.

- [12] M. Bernacki, Y. Chastel, T. Coupez, and R. E. Logé. Level set framework for the numerical modelling of primary recrystallization in polycrystalline materials. *Scripta Materialia*, 58(12) :1129–1132, 2008.
- [13] F. Bertrand, P. A. Tanguy, and F. Thibault. A three-dimensional fictitious domain method for incompressible fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25(6) :719–736, 1997.
- [14] F.J. Bloom. A monolithical fluid–structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167 :69–91, 1998.
- [15] Henning Braess and Peter Wriggers. Arbitrary lagrangian eulerian finite element analysis of free surface flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(1-2) :95–109, 2000.
- [16] M. Breuer. Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder : numerical and modeling aspects. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 28 :1281, 1998.
- [17] F. Brezzi and K. J. Bathe. A discourse on the stability conditions for mixed finite element formulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 82(1-3) :27–57, 1990.
- [18] W. L. Briggs. A multigrid tutorial.
- [19] Alexander N. Brooks and Thomas J. R. Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1-3) :199–259, 1982.
- [20] D.L. Chopp. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *J. Comput. Phys.*, 106(1) :77 – 91, 1993.
- [21] A.J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22(104) :745–762, 1968.
- [22] A.J. Chorin. Flame advection and propagation algorithms. *J. Comput. Phys.*, 35, 1980.
- [23] Ramon Codina. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156(1-4) :185–210, 1998.
- [24] Ramon Codina. On stabilized finite element methods for linear systems of convection-diffusion-reaction equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 188(1) :61–82, 2000.
- [25] P. Cresta, O. Allix, C. Rey, and S. Guinard. Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods in structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :1436–1446, 2007.
- [26] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1. Wiley, 1991.
- [27] Timothy A. Davis. Algorithm 832 : Umfpack v4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Trans. Math. Softw.*, 30(2) :196–199, 2004.

- [28] J. De Hart, G. W. M. Peters, P. J. G. Schreurs, and F. P. T. Baaijens. A three-dimensional computational analysis of fluid-structure interaction in the aortic valve. *Journal of Biomechanics*, 36(1) :103–112, 2003.
- [29] Joris Degroote, Klaus-Jürgen Bathe, and Jan Vierendeels. Performance of a new partitioned procedure versus a monolithic procedure in fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, 87(11-12) :793–801, 2009.
- [30] S.C.R. Dennis and G.Z. Chang. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at reynolds number up to 100. *J. Fluid Mech.*, 42 :471–489, 1970.
- [31] W. Dettmer and D. Peric. On the coupling between fluid flow and mesh motion in the modelling of fluid-structure interaction. *Computational Mechanics*, 43(1) :81–90, 2008.
- [32] M.O. Deville. Numerical experiments on the mac code for slow flow. *J. Comput. Phys.*, 15 :362–374, 1974.
- [33] R. Dillon, L.J. Fauci, A. Fogelson, and D. Gaver III. Modeling biofilm processes using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 129 :57–73, 1996.
- [34] Clark R. Dohrmann. A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(1) :246–258, 2003.
- [35] V. Dolean and S. Lanteri. A hybrid domain decomposition and multigrid method for the acceleration of compressible viscous flow calculations on unstructured triangular meshes. *Comp. Fluid. Dyn. J.*, 14 :287–304, 2001.
- [36] V. Dolean and S. Lanteri. Parallel multigrid methods for the calculation of unsteady flows on unstructured grids : algorithmic aspects and parallel performances on clusters of pcs. *Parallel Computing*, 30 :503–525, 2004.
- [37] J. Donea, S. Giuliani, and J.P. Halleux. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 33 :689–723, 1982.
- [38] J. Donea, S. Giuliani, H. Laval, and L. Quartapelle. Finite element solution of the unsteady navier-stokes equations by a fractional step method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 30 :53–73, 1982.
- [39] J. Donea and A. Huerta. *Finite Elements Methods for Flow Problems*. Wiley, 2003.
- [40] H. Edelsbrunner and E.P. Mucke. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Trans. Graphics*, 13 :43–72, 1994.
- [41] R. N. Elias, A. L. G. A. Coutinho, and M. A. D. Martins. Inexact newton-type methods for the solution of steady incompressible viscoplastic flows with the supg/pspg finite element formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(23-24) :3145–3167, 4 2006/4/15/.
- [42] D. Enright, R. Fedkiw, J. Ferziger, and I. Mitchell. A hybrid particle level set method for improved interface capturing. *J. Comput. Phys.*, 183 :83–116, 2002.

- [43] M.W. Evans and F.H. Harlow. The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations. Technical Report LA-2139, Los Alamos National Laboratory, 1957.
- [44] C. Farhat and M. Lesoinne. Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182(3-4) :499–515, 2000.
- [45] C. Farhat, M. Lesoinne, P. Le Tallec, K. Pierson, and D. Rixen. A dual-primal unified feti method—part 1 : A faster alternative to the two-level feti method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :1523–1544, 2001.
- [46] C. Farhat, A. Macedo, M. Lesoinne, F.X. Roux, F. Magoules, and A. De La Bourdonnaie. Two-level domain decomposition methods with lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 184(27) :213–239, 2000.
- [47] C. Farhat, K. Pierson, and M. Lesoine. The second generation feti methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184 :333–374, 2000.
- [48] C. Farhat and F.X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :1205–1227, 1991.
- [49] Charbel Farhat and L.P. Franca. Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 123 :299–308, 1995.
- [50] L.J. Fauci and Charles S. Peskin. A computational model of aquatic animal locomotion. *Journal of Computational Physics*, 77 :85–108, 1988.
- [51] R.P. Fedorenko. The speed of convergence of one iterative process. *Russian J. Comput. Math. Math. Phys.*, 4 :227–235, 1964.
- [52] C.A. Felipa, K.C. Park, and C. Farhat. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Journal of Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190 :3247–3270, 2001.
- [53] CA Felippa, KC Park, and JA DeRuntz. Stabilization of staggered solution procedures for fluid–structure interaction analysis. *Comput. Methods Fluid-Structure Interaction Problems, AMD*, 26 :95–124, 1977.
- [54] Y. T. Feng and D. Peric. A time-adaptive space-time finite element method for incompressible lagrangian flows with free surfaces : computational issues. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 190(5-7) :499–518, 2000.
- [55] B. Fornberg. Steady viscous flow past a circular cylinder up to reynolds number 600. *J. Comp. Phys.*, 61(297-320), 1985.
- [56] Christiane Förster, Wolfgang A. Wall, and Ekkehard Ramm. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling of nonlinear structures and incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 196(7) :1278–1293, 2007.

- [57] L. Fournier and S. Lanteri. Parallel linear multigrid algorithms applied to the acceleration of compressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 184 :427–448, 2000.
- [58] L.P. Franca, S.L. Frey, and T.J.R. Hughes. Stabilized finite element methods. i : Application to the advective-diffusive model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 95(2) :253–276, 1992.
- [59] J.F. Gerbeau and M. Vidrascu. A quasi-newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(4) :631–647, 2003.
- [60] A. Gerstenberger and W.A. Wall. An extended finite element / mortar method based approach for fluid-structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :1699–1714, 2008.
- [61] Axel Gerstenberger and Wolfgang A. Wall. Enhancement of fixed-grid methods towards complex fluid-structure interaction applications. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57(9) :1227–1248, 2008.
- [62] Anvar Gilmanov and Fotis Sotiropoulos. A hybrid cartesian/immersed boundary method for simulating flows with 3d, geometrically complex, moving bodies. *Journal of Computational Physics*, 207(2) :457–492, 2005.
- [63] R. A. Gingold and J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics - theory and application to non-spherical stars. *Royal Astronomical Society, Monthly Notices.*, 181 :375–389, 1977.
- [64] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations-Theory and Algorithms*. Springer Verlag, 1986.
- [65] S. Giuliani. An algorithm for continuous rezoning of the hydrodynamic grid in arbitrary lagrangian-eulerian computer codes. *Nucl. Eng. Des.*, 72(205-212), 1982.
- [66] R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, and J. Périaux. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : Application to particulate flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :363–426, 5 2001/5/20.
- [67] R. Glowinski, T. W. Pan, and J. Periaux. A lagrange multiplier/fictitious domain method for the numerical simulation of incompressible viscous flow around moving rigid bodies : (i) case where the rigid body motions are known a priori. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 324 :361–369, 1997.
- [68] Roland Glowinski, Tsorng-Whay Pan, and Jacques Periaux. Distributed lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow around moving rigid bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151 :181–194, 1998.
- [69] S.K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Mat. Sb. (N.S.)*, 47(3) :271–306, 1959.

- [70] P. Gosselet. *Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multi-champs en mécanique non-linéaire*. PhD thesis, Université Paris 6, 2003.
- [71] P. Gosselet and C. Rey. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13 :515–572, 2006.
- [72] V. Gravemeier. *The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow*. PhD thesis, Institut für Baustatik Universität Stuttgart, 2003.
- [73] Volker Gravemeier, Wolfgang A. Wall, and Ekkehard Ramm. A three-level finite element method for the instationary incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(15-16) :1323–1366, 2004.
- [74] P.A. Guidault, O. Allix, L. Champaney, and S. Cornuault. A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5) :381–399, January 2008.
- [75] W.G. Habashi, M. Fortin, M.-G. Vallet, J. Dompierre, Y. Bourgault, and D. Ait-Ali-Yahia. Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent and solver-independent cfd solutions. part i : Theory. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32(6) :725–744, 2000.
- [76] Francis H. Harlow and J. Eddie Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8(12) :2182–2189, 1965.
- [77] Francis H. Harlow and J. Eddie Welch. Numerical study of large-amplitude free-surface motions. *Physics of Fluids*, 9(5) :842–851, 1966.
- [78] A Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49 :357–393, 1983.
- [79] Matthias Heil. An efficient solver for the fully-coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(1) :1–23, 2004.
- [80] J. C. Heinrich, P. S. Huyakorn, O. C. Zienkiewicz, and A. R. Mitchell. An 'upwind' finite element scheme for two-dimensional convective transport equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(1) :131–143, 1977.
- [81] R. Hill. A self consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13 :213–222, 1965.
- [82] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. John Wiley Son, 1987.
- [83] C. W. Hirt, A.A. Amsden, and J.L. Cook. An arbitrary lagrangian eulerian computing method for all flow speeds. *J. Comput. Phys.*, 14(227), 1974.
- [84] C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1) :201–225, 1981.

- [85] C. W. Hirt and J.P. Shannon. Free-surface stress conditions for incompressible-flow calculations. *J. Comput. Phys.*, 2 :403–411, 1968.
- [86] Björn Hübner, Elmar Walhorn, and Dieter Dinkler. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(23-26) :2087–2104, 2004.
- [87] J. Huétink, P.T. Vreede, and J. van der Lugt. Progress in mixed eulerian-lagrangian finite element simulation of forming processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30(8) :1441–1457, 1990.
- [88] T. J. R. Hughes, G. R. Feijoo, L. Mazzei, and J.-B. Quincy. The variational multiscale—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166 :3–24, 1998.
- [89] Thomas J. R. Hughes, Wing Kam Liu, and T.K. Zimmermann. Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 29 :329–349, 1981.
- [90] T.J.R. Hughes. A simple scheme for developing upwind finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(9) :1359–1365, 1978.
- [91] T.J.R. Hughes. Multiscale phenomena : Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127 :387–401, 1995.
- [92] T.J.R. Hughes, M. Balestra, and L.P. Franca. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : V. circumventing the babuimageka-brezzi condition : a stable petrov-galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59 :85–99, November 1986.
- [93] T.J.R. Hughes, G.M. Hulbert, and L.P. Franca. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73 :173–179, 1989.
- [94] T.J.R. Hughes, W. K. Liu, and Alexander N. Brooks. Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. *Journal of Computational Physics*, 30 :1–60, 1979.
- [95] T.J.R. Hughes and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : II. beyond supg. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54 :341–355, March 1986.
- [96] T.J.R. Hughes, M. Mallet, and L.P. Franca. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VI. convergence analysis of the generalized supg formulation for linear time-dependent multidimensional advective-diffusive systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 :97–112, July 1987.



- [97] S. Idelsohn, E. Oñate, and F. Del Pin. A lagrangian meshless finite element method applied to fluid structure interaction problems. *Computer and Structures*, 81 :655–671, 2003.
- [98] S. R. Idelsohn, E. Oñate, and F. Del Pin. The particle finite element method : a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International journal for numerical methods in engineering*, 61(7) :964–989, 2004.
- [99] Sergio R. Idelsohn, Nestor Calvo, and Eugenio Oñate. Polyhedrization of an arbitrary 3d point set. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(22-24) :2649–2667, 2003.
- [100] Sergio R. Idelsohn, Eugenio Oñate, Nestor Calvo, and Facundo Del Pin. The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(6) :893–912, 2003.
- [101] S.R. Idelsohn, M. Mier-Torrecilla, and E. Oñate. Multi-fluid flows with the particle finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, In Press, Accepted Manuscript :-.
- [102] V. Kalro and T. Tezduyar. A parallel 3d computational method for fluid-structure interactions in parachute systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :321–332, 2000.
- [103] Christophe Kassiotis. *Nonlinear Fluid-Structure Interaction : a Partitioned Approach and its Application Through Component Technology*. Thèse de Doctorat – dissertation zur erlangung des akademischen grades doktoringenieur, Université Paris-Est – Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 2009.
- [104] P. Kerfriden. *Stratégie de décomposition de domaine à trois échelles pour la prédiction du délaminage dans les stratifiés*. PhD thesis, ENS Cachan, 2008.
- [105] M.S. Kim and W.I. Lee. A new vof-based numerical scheme for the simulation of fluid flow with free surface. part i : New free surface-tracking algorithm and its verification. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 42 :765–790, 2003.
- [106] M.S. Kim, J.S. Park, and W.I. Lee. A new vof-based numerical scheme for the simulation of fluid flow with free surface. part ii : application to the cavity filling and sloshing problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 42 :791–812, 2003.
- [107] A. Klawonn and O. Widlund. Feti and neumann–neumann iterative substructuring methods : Connections and new results. Technical report, New York, NY, USA, 1999.
- [108] H. Kohno and T. Tanahashi. Numerical analysis of moving interfaces using a level set method coupled with adaptive mesh refinement. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 45 :921–944, 2004.
- [109] Ulrich Küttler and Wolfgang A. Wall. Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, 43(1) :61–72, 2008.

- [110] P. Ladevèze. Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Compte-rendu de l'académie des sciences*, 300 II :1205–1227, 1985.
- [111] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1999.
- [112] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1999.
- [113] P. Ladevèze and D. Dureisseix. A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for computational Civil and Structural Engineering*, 1 :18–28, 2000.
- [114] P. Ladevèze and D. Dureisseix. Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Compte-rendu de l'académie des sciences*, 337 IIB :1327–1344, 1999.
- [115] P. Ladevèze and A. Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3061–3087, 2003.
- [116] P.z Ladevèze, G. Lubineau, and D. Violeau. A computational damage micromodel of laminated composites. *International Journal of Fracture*, 137(1) :139–150, 01 2006/01/09/.
- [117] Marie-Helene Lallemand, H. Steve, and Alain Dervieux. Unstructured multigrid-ding by volume agglomeration : current status. Technical report, INRIA, 1990.
- [118] B.E. Launder and D.B. Spalding. *Mathematical models of turbulence*. London : Academic Press Inc., 1972.
- [119] P. Le Tallec, J.F. Gerbeau, P. Hauret, and M. Vidrascu. Fluid structure interaction problems in large deformation. *Comptes Rendus Mecanique*, 333(12) :910–922, 2005.
- [120] Jing Li. *Dual primal FETI methods for stationary Stokes and Navier-Stokes equations*. PhD thesis, Courant Institute of Mathematical Sciences, september 2002.
- [121] Jing Li. A dual-primal feti method for incompressible stokes equations. *Numer. Math.*, 102(2) :257–275, 2005.
- [122] Jing Li and Olof Widlund. Bddc algorithms for incompressible stokes equations. *SIAM journal on numerical analysis*, 44(6) :2432–2455, 2006.
- [123] J. Lienhard. Synopsis of lift, drag and vortex frequency data for rigid circular cylinder. Research Division Bulletin 300, Washington State University, College of Engineering, 1966.
- [124] J. T. C. Liu. Contributions to the understanding of large-scale coherent structures in developing free turbulent shear flows. *Advances in applied mechanics*, 26 :183–309, 1988.
- [125] Wing Kam Liu, T. Belytschko, and H. Chang. An arbitrary lagrangian- eulerian finite element method for path-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58(2) :227–245, 1986.

- [126] Wing Kam Liu and H.G. Chang. Efficient computational procedures for long-time duration fluid-structure interaction problems. *J. Press. Vessel Technol.-Trans. ASME*, 106 :317–322, 1984.
- [127] D. Lorstad, M. François, W. Shyy, and L. Fuchs. Assessment of volume of fluid and immersed boundary methods for droplet computations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 46 :109–125, 2004.
- [128] D. Lorstad and L. Fuchs. High-order surface tension vof-model for 3d bubble flows with high density ratio. *J. Comput. Phys.*, 200 :153–176, 2004.
- [129] D.S. Malkus and T.J.R. Hughes. Mixed finite element methods—reduced and selective integration techniques : a unification of concepts. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 15(1) :63–81, 1978.
- [130] J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9 :233–241, 1993.
- [131] H. Matthies and J. Steindorf. *Efficient iteration schemes for non-linear fluid-structure interaction problems*. Topping BHV, editor. Computational mechanics : techniques and developments Edinburgh : Civil-Comp Press, 2000.
- [132] H. Matthies and J. Steindorf. *How to make weak couplings strong*. Bathe KJ, editor. Computational Fluid and Solid Mechanics Amsterdam : Elsevier, 2001.
- [133] H. Matthies and J. Steindorf. Partitioned but strongly coupled iteration schemes for nonlinear fluid-structure interaction. *Computer and Structures*, 80 :1991–1999, 2002.
- [134] H. Matthies and J. Steindorf. Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction. *Computers and Structures*, 81 :805–812, 2003.
- [135] Hermann G. Matthies, Rainer Niekamp, and Jan Steindorf. Algorithms for strong coupling procedures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18) :2028–2049, 2006.
- [136] D. J. Mavriplis and V. Venkatakrisnan. Agglomeration multigrid for two-dimensional viscous flows. *Computers & Fluids*, 24(5) :553–570, 1995.
- [137] D. J. Mavriplis and V. Venkatakrisnan. A 3d agglomeration multigrid solver for the reynolds-averaged navier-stokes equations on unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 23(6) :527–544, 1996.
- [138] S. McKee, M. F. Tomè, V. G. Ferreira, J. A. Cuminato, A. Castelo, F. S. Sousa, and N. Mangiavacchi. The mac method. *Computers & Fluids*, 37(8) :907–930, 2008.
- [139] N Moës, J Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- [140] N Moës, A. Gravouil, and T. Belytschko. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets. part i : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53 :2549–2568, 2002.

- [141] D.P. Mok and W.A. Wall. *Partitioned analysis schemes for the transient interaction of incompressible flows and nonlinear flexible structures*. Wall WA, Bletzinger K-U, Schweizerhof K, editors. Trends in computational structural mechanics. Barcelona : CIMNE, 2001.
- [142] J. J. Monaghan. An introduction to sph. *Computer Physics Communications*, 48(1) :89–96, 1988.
- [143] J Mouro and P. Le Tallec. Fluid structure interaction with large structural displacement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(30) :39–67, 2001.
- [144] W. Mulder, S. Osher, and J.A. Sethian. Computing interface motion in compressible gas dynamics. *J. Comput. Phys.*, 100(2) :209 – 228, 1992.
- [145] J.-D. Müller. Anisotropic adaptation and multigrid for hybrid grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40(3-4) :445–455, 2002.
- [146] F. Muttin, T. Coupez, M. Bellet, and J. Chenot. Lagrangian finite-element analysis of time-dependent viscous free-surface flow using an automated remeshing technique : application to metal casting flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 :2001–2015, 1993.
- [147] B. D. Nichols and C. W. Hirt. Improved free surface boundary conditions for numerical incompressible flow calculations. *J. Comput. Phys.*, 8 :434, 1971.
- [148] P. Nithiarasu. An arbitrary lagrangian eulerian (ale) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (cbs) scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48(12) :1415–1428, 2005.
- [149] D. Odièvre, P.A. Boucard, and F. Gatuingt. A parallel, multiscale domain decomposition method for the transient dynamic analysis of assemblies with friction. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2009.
- [150] J. Olivier, M. Cervera, and O. Manzoli. Strong discontinuities and continuum plasticity models : the strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, 15(3) :319–351, 1999.
- [151] E. Oñate. A stabilized finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 182(3-4) :355–370, 2000.
- [152] E. Oñate, S.R. Idelsohn, F. del Pin, and R. Aubry. The particle finite element method. an overview. *International Journal Computational Method*, 1(2) :267–307, 2004.
- [153] S. Osher. A level set formulation for the solution of the dirichlet problem for hamilton-jacobi equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24(5) :1145 – 1152, 1993.
- [154] S. Osher and R.P. Fedkiw. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Springer, 2002.

- [155] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton–jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79, 1988.
- [156] N.S. Park and J.A. Liggett. Taylor-least-squares finite element for two-dimensional advection-dominated unsteady advection-diffusion problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11(1) :21–38, 1990.
- [157] Philippe Parnaudeau, Johan Carlier, Dominique Heitz, and Eric Lamballais. Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at reynolds number 3900. *Physics of Fluids*, 20(8) :085101, 2008.
- [158] Jean-Charles Passieux. *Approximation radiale et méthode LATIN multiéchelle en temps et en espace*. PhD thesis, ENS Cachan, 2008.
- [159] Luca F. Pavarino. Overlapping schwarz methods for elasticity and stokes problems. Technical report, Centre National de la Recherche Scientifique, 1997.
- [160] R. Paz and M. Storti. An interface strip preconditioner for domain decomposition methods : application to hydrology. *International journal for numerical methods in engineering*, 62 :1873–1894, 2005.
- [161] J. Pebrel, C. Rey, and P. Gosselet. A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *Int Jal of Multiscale Computational Engineering*, 6(3) :251–262, 2008.
- [162] Charles S. Peskin. Flow patterns around heart valves : A numerical method. *Journal of Computational Physics*, 10(2) :252–271, 1972.
- [163] C.S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, pages 220–252, 1977.
- [164] Serge Piperno. Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aeroelastic simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25(10) :1207–1226, 1997.
- [165] Serge Piperno, Charbel Farhat, and Bernard Larrouturou. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aroelastic problems part i : Model problem, theory and two-dimensional application. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 124(1-2) :79–112, 1995.
- [166] W.E. Pracht. A numerical method for calculating transient creeping flows. *J. Comput. Phys.*, 7 :46–60, 1971.
- [167] M. Quecedo and M. Pastor. Application of the level set method to the finite element solution of two-phases flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :645–663, 2001.
- [168] B. Ramaswamy and M. Kawahara. Arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for unsteady convective incompressible viscous free surface flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 7 :1053–1075, 1987.

- [169] B. Ramaswamy and M. Kawahara. Lagrangian finite element analysis applied to viscous free surface flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 7(9) :953–984, 1987.
- [170] C. Rey. Une technique d’accélération de la résolution de problèmes d’élasticité non-linéaire par décomposition de domaine. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 322 série IIb :601–606, 1996.
- [171] F. Risler and C. Rey. Iterative accelerating algorithms with krylov subspaces for the solution to large-scale nonlinear problems. *Numerical algorithms*, 23 :1–30, 2000.
- [172] A. Rodriguez-Ferran, A. Pérez-Foguet, and A. Huerta. Arbitrary lagrangian-eulerian (ale) formulation for hyperelastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(8) :1831–1851, 2002.
- [173] S. Rugonyi and K. J. Bathe. On finite element analysis of fluid flows fully coupled with structural interactions. *Comput. Model. Eng. Sci.*, 2(2) :195–212, 2001.
- [174] Youcef Saad and Martin H Schultz. Gmres : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3) :856–869, 1986.
- [175] Pierre Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer-Verlag Berlin, 2006.
- [176] E. Sanchez-Palencia. Comportement local et macroscopique d’un type de milieux physiques hétérogènes. *International Journal of Engineering Science*, 12(4) :331–351, 1974.
- [177] J. Sarrate and A. Huerta. An improved algorithm to smooth graded quadrilateral meshes preserving the prescribed element size. *Commun. Numer. Methods Eng.*, 17(89-99), 2001.
- [178] Sunil Sathe and T. E. Tezduyar. Modeling of fluid–structure interactions with the space–time finite elements : contact problems. *Computational Mechanics*, 43(1) :51–60, 2008.
- [179] M. Schäfer and S. Turek. Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. *Flow Simulation with High-Performance Computation II*, 52 :547–566, 1996.
- [180] Jean-Sébastien Schotté and R. Ohayon. Effect of gravity on a free-free elastic tank partially filled with incompressible liquid. *Journal of Fluids and Structures*, 18(2) :215–226, 2003.
- [181] J.A. Sethian. *Theory, algorithms, and applications of level set methods for propagating interfaces*. Acta Numerica. Cambridge University Press, 1995.
- [182] J.A. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Science of the USA*, 93 :1591–1595, 1996.
- [183] J.A. Sethian. *Level set methods : evolving interfaces in geometry*. Fluid mechanics, computer vision and material sciences. Cambridge University Press, 1996.

- [184] S. Shin and W.L. Lee. Finite element analysis of incompressible flows with moving free surface by selective volume of fluid method. *Intl. J. Heat and fluid flow*, 21 :197–206, 2000.
- [185] Barry F. Smith, Petter E. Bjorstad, and William Gropp. *Domain decomposition : parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*. Cambridge university press, 1996.
- [186] F. S. Sousa, N. Mangiavacchi, L.G. Nonato, A. Castelo, M. F. Tomè, and S. McKee. A front-tracking/front-capturing method for the simulation of 3d multi-fluid flows with free surfaces. *J. Comput. Phys.*, 198 :469–499, 2004.
- [187] R.V. Southwell. Stress calculation in frameworks by the method of relaxation of constraints. *Proc. Roy. Soc. A*, 151(56), 1935.
- [188] M. Sussman and E. Fatemi. An efficient interface-preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20 :1165–1191, 1999.
- [189] M. Sussman and E.G. Puckett. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows. *J. Comput. Phys.*, 162 :301–337, 2000.
- [190] M. Sussman and P. Smereka. Axisymmetric free boundary problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 341 :269–294, 1997.
- [191] R. Temam. Sur l’approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 33(5), 1969.
- [192] R. Temam. *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*. American Mathematical Society Edition, 2001.
- [193] T. E. Tezduyar. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. *Advances in applied mechanics*, 28 :1–44, 1992.
- [194] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray, and R. Shih. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95(2) :221–242, 1992.
- [195] Tayfun E. Tezduyar, Sunil Sathe, Ryan Keedy, and Keith Stein. Space-time finite element techniques for computation of fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18) :2002–2027, 2006.
- [196] U. Trottenberg, C.W. Oosterlee, and A. Schuller. *Multigrid*. Academic Press, 2001.
- [197] R. van Loon, P. D. Anderson, and F. N. van de Vosse. A fluid-structure interaction method with solid-rigid contact for heart valve dynamics. *Journal of Computational Physics*, 217(2) :806–823, 2006.
- [198] R. van Loon, P.D. Anderson, J. De Hart, and Frank P. T. Baaijens. A combined fictitious domain/adaptive meshing method for fluid-structure interaction in heart

- valves. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 46(5) :533–544, 2004.
- [199] R. van Loon, P.D. Anderson, F.N. van de Vosse, and S.J. Sherwin. Comparison of various fluid-structure interaction methods for deformable bodies. *Computers and Structures*, 85 :833–843, 2007.
- [200] J.A. Viccelli. A method for including arbitrary external boundaries in the mac incompressible uid computing technique. *J. Comput. Phys.*, 4 :543–551, 1969.
- [201] W.A. Wall, D.P. Mok, and E. Ramm. Partitioned analysis approach for the transient, coupled response of viscous fluids and flexible structures. In *ECCM'99—Proc. European conference on computational mechanics, Munich, Germany, August 31–September 3, 1999*.
- [202] Wolfgang A. Wall, Steffen Genkinger, and Ekkehard Ramm. A strong coupling partitioned approach for fluid-structure interaction with free surfaces. *Computers & Fluids*, 36(1) :169–183, 2007.
- [203] Xiaodong Wang and Wing Kam Liu. Extended immersed boundary method using fem and rkpm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(12–14) :1305–1321, 2004.
- [204] C. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28 :477–539, 1996.
- [205] T. Yamada and F. Kikuchi. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for incompressible hyperelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 102(2) :149–177, 1993.
- [206] Zhaosheng Yu. A dlm/fd method for fluid/flexible-body interactions. *Journal of Computational Physics*, 207(1) :1–27, 2005.
- [207] W.S. Yue, C.L. Lin, and V.C. Patel. Numerical simulation of unsteady multidimensional free surface motions by level set method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 42 :853–884, 2003.
- [208] Lucy Zhang, Axel Gerstenberger, Xiaodong Wang, and Wing Kam Liu. Immersed finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(21–22) :2051–2067, 2004.
- [209] Luoding Zhu and Charles S. Peskin. Simulation of a flapping flexible filament in a flowing soap film by the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 179(2) :452–468, 2002.
- [210] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and P. Nithiarasu. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2005.