



**HAL**  
open science

## Surfaces des espaces homogènes de dimension 3

Sébastien Cartier

► **To cite this version:**

Sébastien Cartier. Surfaces des espaces homogènes de dimension 3. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1007 . tel-00672332

**HAL Id: tel-00672332**

**<https://theses.hal.science/tel-00672332v1>**

Submitted on 21 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris-Est  
**École Doctorale MSTIC**

# THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par  
**Sébastien CARTIER**

---

## **Surfaces des espaces homogènes de dimension 3**

---

dirigée par Pascal ROMON

Soutenue le 15 septembre 2011 devant le jury composé de :

M. Benoît DANIEL	Examineur
M. Laurent HAUSWIRTH	Examineur
M. Frédéric HÉLEIN	Rapporteur
Mme Barbara NELLI	Examinatrice
M. Joaquín PÉREZ	Examineur
M. Pascal ROMON	Directeur
M. Antonio ROS	Rapporteur

LAMA – Université Paris-Est Marne-la-Vallée  
5 boulevard Descartes  
Cité Descartes – Champs-sur-Marne  
77454 Marne-la-Vallée Cedex 2

École doctorale MSTIC  
ENPC – Aile Vicat  
6-8 avenue Blaise Pascal  
77455 Marne-la-Vallée Cedex 2

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance envers Pascal Romon. Son encadrement a été exceptionnel. Je le remercie pour son écoute, sa patience et l'intérêt qu'il a porté à toutes mes questions et idées, pour ses conseils toujours avisés et ses remarques toujours pertinentes, pour m'avoir communiqué son enthousiasme et sa passion de la recherche. Merci pour ces années thèse qui ont été enrichissantes tant mathématiquement qu'humainement.

J'ai également eu la chance de collaborer avec Laurent Hauswirth. Je le remercie pour ces passionnantes séances de travail foisonnant d'idées, dans une ambiance toujours sympathique !

Frédéric Hélein, Antonio Ros et Barbara Nelli ont accepté de rapporter cette thèse. Je leur suis reconnaissant du temps et de l'énergie qu'ils ont consacrés à cette tâche, de l'intérêt qu'ils portent à mon travail et de la justesse de leurs remarques et commentaires. Benoît Daniel, Laurent Hauswirth et Joaquín Pérez m'ont fait l'honneur d'accepter d'être membres de mon jury, je les en remercie sincèrement.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude aux équipes du LAMA pour leur accueil. L'atmosphère chaleureuse et conviviale qui règne au laboratoire en fait un formidable cocon pour préparer sa thèse. Merci à mes camarades du laboratoire : Laurent, Stefano, Sidi, Qing, Filippo, Mohammed, Antoine, Delphine, Pieralberto, Lokman, Bertrand, Johann, Eduardo, David, Francesco, Ayech, Victor, Omar, Pierre.

Je salue également Julia, Graham, Rob, Magdalena, Juncheol, Rami et Hojoo que j'ai eu le plaisir de rencontrer lors de congrès, conférences, séminaires ou écoles d'été.

Je remercie mes camarades étudiants d'Orsay : Vianney, Othilie, Robin, Manu, Adeline, Alain, pour ces quatre années à l'ombre du bâtiment 425.

Je voudrais remercier ma famille pour son soutien et ses encouragements, et particulièrement mes parents qui, par leurs conseils et leurs attentions, m'ont permis de trouver ma voie.

Je remercie enfin ma femme Aurélie, pour sa présence, son amour, son soutien, sa capacité à faire de moi quelqu'un de meilleur. Merci pour tous ces moments que nous avons partagés et pour ce petit bonhomme qui a révolutionné nos vies.

# Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude des surfaces minimales et de courbure moyenne constante dans les espaces homogènes de dimension 3.

Nous établissons les formules de Sym-Bobenko pour les surfaces de courbure moyenne constante  $1/2$  de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et minimales du groupe de Heisenberg, et donnons des exemples de construction de telles immersions par la méthode DPW. Nous montrons également que des propriétés de symétrie passent aux correspondances de type surfaces sœurs et cousines, ce qui entraîne l'existence de graphes entiers de courbure moyenne constante  $1/2$  à bout vertical dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  qui ne sont pas de révolution.

Nous reprenons ensuite l'étude des bouts verticaux d'immersions de courbure moyenne constante  $1/2$  dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Nous munissons une famille de graphes entiers d'une structure de variété lisse et en déduisons un analogue pour  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  d'un théorème de A. E. Treibergs pour l'espace de Minkowski. Nous nous intéressons également aux déformations des anneaux de révolution. Une conséquence directe est l'existence d'anneaux immergés qui ne sont pas de révolution. Nous construisons notamment des anneaux dont les bouts n'ont pas le même axe.

Enfin, nous décrivons les invariants de Noether correspondant aux isométries des espaces homogènes pour les surfaces minimales et de courbure moyenne constante. Nous utilisons le formalisme de la géométrie de contact qui permet l'écriture de formules explicites en toute généralité, et nous étudions l'évolution des formes de Noether sous l'action des isométries des espaces homogènes. Nous calculons ces invariants dans le cas des anneaux déformés de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , et dans celui des anneaux horizontaux du groupe de Heisenberg.

MOTS-CLÉ : Surfaces à courbure moyenne constante, Espaces homogènes, Systèmes intégrables, Formules de Sym-Bobenko, Compactification de métriques, Espaces de modules, Structure de contact, Invariants de Noether.



# Abstract

## SURFACES IN 3-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACES.

The present dissertation deals with the study of minimal and constant mean curvature surfaces in 3-dimensional homogeneous spaces.

In a first part, we establish Sym-Bobenko formulæ for constant mean curvature  $1/2$  surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and minimal surfaces in the Heisenberg group, and give examples of construction of such immersions using the DPW method. We also show that certain symmetry properties are shared by sister or cousin surfaces, which implies the existence non rotational entire graphs of constant mean curvature  $1/2$  in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  with a vertical end.

In a second part, we treat in more details the study of vertical ends of constant mean curvature  $1/2$  immersions in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . We endow a particular family entire graphs with a structure of smooth manifold and deduce an analogue in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  to a theorem by A. E. Treibergs in the Minkowski space. We are also interested in deforming rotational annuli. A direct consequence is the existence of immersed non rotational annuli, and in particular we construct annuli with ends that do not have the same axis.

Finally, we describe the Noether invariants corresponding to isometries of the ambient homogeneous space for minimal and constant mean curvature surfaces. To do so, we use the formalism of contact geometry which allows general and explicit formulæ. We then study the evolution of Noether form under the action of isometries in homogeneous spaces. We compute these invariants in the case of deformed annuli in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , and in the case of horizontal annuli in Heisenberg group.

**KEYWORDS :** Constant mean curvature surfaces, Homogeneous spaces, Integrable systems, Sym-Bobenko formulæ, Metrics compactification, Moduli spaces, Contact structure, Noether invariants.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Surfaces minimales et CMC dans les espaces homogènes</b>	<b>15</b>
1.1 Espaces homogènes ambiants	15
1.1.1 L'espace de Minkowski	15
1.1.2 Les espaces $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$	16
1.1.3 Modèles pour $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	18
1.1.4 L'espace $\text{Sol}_3$	20
1.2 Conditions d'intégrabilité	20
1.2.1 Surfaces CMC-1/2 de type espace dans $\mathbb{L}^3$	20
1.2.2 Surfaces dans les $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$	21
1.2.3 Surfaces CMC-1/2 dans le modèle de Minkowski de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	22
1.3 Correspondance de Daniel	24
<b>2 Formules de Sym-Bobenko</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction	27
2.2 Résultats dans l'espace de Minkowski	28
2.3 Résultats dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ et $\text{Nil}_3$	29
2.3.1 Familles à un paramètre indexées par $\mathbb{S}^1$	29
2.3.2 Les formules de Sym-Bobenko dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ et $\text{Nil}_3$	30
2.4 Applications	32
2.4.1 Production d'exemples par la méthode DPW	32
2.4.2 Familles équivariantes	34

<b>3</b>	<b>Surfaces CMC-1/2 dans <math>\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}</math> à bouts verticaux</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	La famille $\mathcal{S}$ . . . . .	41
3.3	Structure de variété sur la famille $\mathcal{G}$ . . . . .	46
3.3.1	Déformations générales . . . . .	48
3.3.2	Déformations CMC-1/2 . . . . .	50
3.3.3	Applications . . . . .	52
3.4	Déformations d'anneaux CMC-1/2 . . . . .	53
3.4.1	Non dégénérescence des anneaux de révolution . . . . .	54
3.4.2	Petites déformations CMC-1/2 . . . . .	57
3.4.3	Anneaux sans axe . . . . .	60
3.5	Annexe : Preuve détaillée du Théorème 3.3 . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Formes de Noëther dans les espaces homogènes</b>	<b>67</b>
4.1	Introduction . . . . .	67
4.2	Étude générale . . . . .	68
4.2.1	Structure de contact . . . . .	68
4.2.2	Lagrangiens des surfaces minimales et CMC . . . . .	69
4.2.3	Symétries et formes de Noëther . . . . .	72
4.3	Dans les $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ . . . . .	74
4.3.1	Isométries et rotationnel . . . . .	74
4.3.2	Évolution sous l'action des isométries . . . . .	75
4.4	Dans $\text{Sol}_3$ . . . . .	77
4.4.1	Isométries et rotationnel . . . . .	77
4.4.2	Évolution sous l'action des isométries . . . . .	78
4.5	Exemples . . . . .	78
4.5.1	Bouts verticaux CMC-1/2 dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	78
4.5.2	Caténoides horizontaux dans $\text{Nil}_3$ . . . . .	80
	<b>Bibliographie</b>	<b>83</b>

# Introduction

En géométrie euclidienne, une surface *minimale* est un minimum local de la fonctionnelle d'aire, et l'on peut montrer que cette condition revient à la nullité de la courbure moyenne — i.e. la moyenne des courbures principales. Plus généralement, les surfaces de *courbure moyenne constante* (CMC) peuvent être vues comme les points critiques de la fonctionnelle d'aire sous une contrainte de volume. L'étude de telles surfaces a donné lieu à une théorie riche et variée. Ces constructions se généralisent simplement aux *espaces homogènes*, i.e. admettant un groupe d'isométries agissant transitivement sur les points. Ce sont les variétés riemanniennes les plus simples que l'on puisse considérer et elles sont liées aux géométries de Thurston. Parmi les exemples simplement connexes on peut noter les espaces de courbure constante  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  et  $\mathbb{H}^3$ , les espaces  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , le groupe de Heisenberg  $\text{Nil}_3$ , le revêtement universel de  $\text{PLS}_2(\mathbb{R})$  et l'espace  $\text{Sol}_3$ .

Dans ce mémoire, nous étudions les surfaces minimales et CMC dans les espaces homogènes de dimension 3 selon trois angles généraux :

- Quels moyens a-t-on pour construire des surfaces ?
- Ces surfaces sont-elles déformables et sous quelles conditions ?
- Quelles sont les conditions géométriques nécessaires à leur existence ?

Un outil propre à la construction et l'étude des surfaces minimales de  $\mathbb{R}^3$  est la représentation de Weierstrass. On peut utiliser les formules de Sym-Bobenko comme substituts intéressant à cette représentation.

## Chapitre 2 : Formules de Sym-Bobenko

Les formules de Sym-Bobenko sont connues dans les espaces  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  [4] et l'espace de Minkowski  $\mathbb{L}^3$  de dimension 3 [34]. Elles sont basées sur deux propriétés. La première est le fait qu'étant donnée une immersion, il existe une action du cercle  $\mathbb{S}^1$  permettant de

construire une famille à un paramètre, dite *famille associée* à l'immersion. La seconde est que le groupe d'isométries de l'espace ambiant agit transitivement sur les repères orthonormés, ce qui permet de décrire une immersion conforme par son repère mobile. La famille des repères mobiles de la famille associée à une immersion est appelée *repère étendu*, et une formule de Sym-Bobenko est l'expression de l'immersion à partir des données du repère étendu.

Dans les espaces homogènes de groupe d'isométries de dimension 4, le groupe des isométries n'agit plus transitivement sur les repères orthonormés ; on « manque de symétrie » pour construire des repères mobiles. Néanmoins, pour les immersions de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\text{Nil}_3$  de courbures moyennes critiques — à savoir les immersions CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et minimales dans  $\text{Nil}_3$ , on montre qu'il existe une famille associée (Proposition 2.4). Et le lien connu [11, 20, 21] entre les immersions CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$ , les immersions CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et les immersions minimales dans  $\text{Nil}_3$ , nous permet d'utiliser le repère mobile dans  $\mathbb{L}^3$  pour écrire les formules de Sym-Bobenko des immersions CMC-1/2 de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et minimales de  $\text{Nil}_3$  (Équations (2.3) et (2.4)).

Une première application de ces formules est la construction d'exemples (Section 2.4.1) — il suffit de construire un repère étendu. La méthode DPW [23, 7], qui utilise des outils issus de la théorie des systèmes intégrables, associe de façon univoque une donnée holomorphe à un repère étendu. Mais cela nécessite des méthodes de décomposition dans des espaces de dimension infinie, et de ce fait, l'obtention d'exemples explicites de surfaces s'avère souvent difficile. Les formules de Sym-Bobenko permettent également d'établir une « transmission » de certaines propriétés de symétrie d'une immersion à toutes les immersions des familles associées dans les trois espaces  $\mathbb{L}^3$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\text{Nil}_3$  (Théorème 2.7). On en déduit notamment l'existence de graphes entiers verticaux dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  qui ne sont pas de révolution (Théorème 2.8).

Le résultat d'existence du Théorème 2.8 est fondamentalement non-constructif. Pour comprendre la géométrie de ces surfaces et leurs éventuelles déformations, on utilise une approche différente, basée sur l'étude de l'opérateur courbure moyenne.

### Chapitre 3 : Surfaces CMC-1/2 dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ à bouts verticaux

Dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  il existe, à isométrie près, un unique graphe entier CMC-1/2 de révolution, l'*hyperboloïde*, dont le bout est vertical. Notre étude porte sur les surfaces CMC-1/2 de

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  dont les bouts sont des graphes à distance horizontale bornée de l'hyperboloïde avec une certaine asymptotique. La propriété clé de ces surfaces est que leur opérateur courbure moyenne peut être *compactifié* (Théorème 3.3) i.e. étendu au bord à l'infini de  $\mathbb{H}^2$ . Cela revient en fait à étendre la métrique induite par la surface au bord de  $\mathbb{H}^2$ , et donc à considérer ces surfaces comme des surfaces à bord sur un espace compact. L'information sur les déformations possibles de ces surfaces est contenue dans le linéarisé de l'opérateur courbure moyenne compactifié, dit *opérateur de Jacobi compactifié*, et plus précisément dans son noyau.

La propriété de compactification permet de munir une famille de graphes entiers CMC-1/2 d'une structure de variété de dimension infinie. On en déduit un équivalent dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  d'un théorème de A. E. Treibergs [35, 10] (Théorème 3.10). Un point important est que dans le cas de cette famille des graphes entiers, on peut considérer de « grandes déformations » parce que l'on comprend explicitement le noyau de l'opérateur de Jacobi compactifié.

Nous appliquons également cette méthode au cas des anneaux verticaux CMC-1/2 de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , en déformant les exemples de révolutions. On est ici restreint à de « petites déformations » car on ne peut déterminer le noyau de l'opérateur de Jacobi compactifié que pour les anneaux de révolution, sous la forme d'une propriété de *non dégénérescence* (Proposition 3.13). On obtient des exemples d'anneaux qui ne sont généralement pas congrus à des anneaux de révolution (Proposition 3.18), répondant ainsi à une question de M. Elbert, B. Nelli et R. Sa Earp [18]. Nous donnons également une construction d'anneaux verticaux *sans axe*, à savoir dont les bouts sont « asymptotiquement de révolution » — i.e. asymptotes à des anneaux de révolution — et non alignés (Théorème 3.19).

Les constructions des graphes entiers et anneaux (Propositions 3.8 et 3.18) font apparaître des contraintes sur le comportement asymptotique des surfaces. Ces contraintes sont en fait de nature géométrique et liées aux isométries de l'espace ambiant. La théorie des formes de Noether donne un cadre général à ce type d'invariant dans les espaces homogènes.

## Chapitre 4 : Formes de Noether dans les espaces homogènes

Des invariants classiques pour les surfaces minimales de  $\mathbb{R}^3$  sont le flux et le torque. Le flux est construit à partir des translations de l'espace et le torque à partir des rotations,

et ces invariants sont porteurs d'informations sur la géométrie de la surface. Par exemple, pour un caténoïde minimal, le flux donne la croissance du caténoïde et le torque la position de son axe. Ils constituent un cas particulier d'invariants de Noether. Le théorème de E. Noether sur les invariants différentiels associe, de façon constructive, une « symétrie » d'un problème variationnel à une classe de 1-formes fermées. Le problème variationnel qui nous occupe est celui des surfaces minimales et CMC dans les espaces homogènes, et les isométries de l'espace sont des symétries du problème en ce sens que l'image d'une solution par une isométrie est encore solution — autrement dit, les isométries préservent la courbure moyenne.

Nous utilisons le formalisme de la géométrie de contact [30, 8] qui offre un cadre unifié pour traiter des espaces homogènes, et l'on obtient une formule générale explicite (Proposition 4.5) donnant la forme de Noether associée à un champ de Killing, les isométries infinitésimales étant des champs de Killing.

On étudie ensuite plus en détail les formes de Noether dans les espaces  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  et  $\text{Sol}_3$ , et notamment leur comportement sous l'action des isométries ambiantes car si les isométries préservent la courbure moyenne, des solutions images l'une de l'autre par une isométrie n'ont généralement pas les mêmes invariants de Noether. On en déduit des conditions (nécessaires) simples pour qu'une surface soit invariante sous l'action d'une isométrie donnée.

On donne enfin des exemples explicites de calculs des invariants de Noether pour les bouts verticaux CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  étudiés au Chapitre 3, ainsi que pour les caténoïdes horizontaux construits par B. Daniel et L. Hauswirth dans  $\text{Nil}_3$  [13]. Tout comme le flux et le torque pour les surfaces minimales de  $\mathbb{R}^3$ , l'invariance homologique des quantités calculées permet d'établir des relations et des contraintes entre les différents paramètres caractérisant ces exemples.

# Chapitre 1

## Surfaces minimales et CMC dans les espaces homogènes

Dans ce chapitre, nous fixons quelques notations et donnons une description succincte des espaces homogènes qui nous intéressent.

Nous rappelons également les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité pour des surfaces minimales ou CMC dans trois espaces homogènes particuliers, à savoir l'espace de Minkowski  $\mathbb{L}^3$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et le groupe de Heisenberg  $\text{Nil}_3$ .

Enfin, nous citons le résultat de B. Daniel sur l'existence d'une correspondance de type Lawson entre surfaces minimales et CMC des  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ . Cette correspondance est sous-jacente aux idées développées au Chapitre 2.

### 1.1 Espaces homogènes ambiants

#### 1.1.1 L'espace de Minkowski

On considère l'espace de Minkowski de dimension  $k + 1$ , avec  $k \geq 2$  :

$$\mathbb{L}^{k+1} = \left( \{(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}\}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{k+1} = dx_1^2 + \dots + dx_k^2 - dx_0^2 \right).$$

Dans la suite, on s'intéresse uniquement aux dimensions 3 et 4 : on étudie les surfaces CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$  (Section 1.2.1) et l'espace  $\mathbb{L}^4$  sert de cadre au modèle de Minkowski de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (Section 1.1.3). De plus, l'espace  $\mathbb{L}^3$  est naturellement identifié à



la sous-variété  $\{x_3 = 0\}$  de  $\mathbb{L}^4$ .

Au Chapitre 2, on est amené à considérer le *modèle matriciel* suivant de  $\mathbb{L}^4$  :

$$(x_0, \dots, x_3) \in \mathbb{L}^4 \longleftrightarrow x_0\sigma_0 + \dots + x_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} x_3 + ix_0 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_3 - ix_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad (1.1)$$

$$\text{avec } \sigma_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la métrique lorentzienne est donnée par la trace :

$$\langle X, Y \rangle_4 = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY).$$

Pour  $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , on note  $[X, Y]$  le commutateur de  $X$  et  $Y$ , et  $]X, Y[ = XY + YX$ . Si  $X = x_0\sigma_0 + \dots + x_3\sigma_3$ , on a les « projections » suivantes :

$$\frac{1}{4}[\sigma_0, [X, \sigma_0]] = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}]X, \sigma_0[ = x_0\sigma_3.$$

### 1.1.2 Les espaces $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

On note  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  les espaces homogènes de dimension 3 simplement connexes dont le groupe d'isométries est de dimension 4 — engendré par trois translations et une rotation. Ils sont caractérisés par des paramètres réels  $\kappa$  et  $\tau$  tels que  $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ . Le modèle considéré dans ce mémoire est celui dont l'ensemble support est  $\Omega_\kappa \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ , de coordonnées génériques  $(w = x_1 + ix_2, x_3)$ , où :

$$\Omega_\kappa = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } \kappa \geq 0 \\ \mathbb{D}(2|\kappa|^{-1/2}) & \text{si } \kappa < 0 \end{cases},$$

et dont la métrique est définie par :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \lambda^2 |dw|^2 + \left( \tau \lambda (x_2 dx_1 - x_1 dx_2) + dx_3 \right)^2 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{1 + \kappa' |w|^2} \quad \text{et} \quad \kappa' = \frac{\kappa}{4}.$$

Ces espaces sont des fibrations riemanniennes de la *base*  $\Omega_\kappa$  pour la projection naturelle  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \Omega_\kappa$  sur les deux premières coordonnées. Le paramètre  $\kappa$  s'interprète comme la courbure de la base et  $\tau$  comme celle de la fibration.

On note  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita sur  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  et  $(E_1, E_2, E_3)$  le repère canonique. Il définit un produit vectoriel sur  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  si on le suppose orienté dans le sens direct.

La caractérisation du repère canonique dépend de la valeur de  $\tau$ . Si  $\tau \neq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{\lambda} \left( \cos(\sigma x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin(\sigma x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \tau (x_1 \sin(\sigma x_3) - x_2 \cos(\sigma x_3)) \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ E_2 &= \frac{1}{\lambda} \left( -\sin(\sigma x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos(\sigma x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \tau (x_1 \cos(\sigma x_3) + x_2 \sin(\sigma x_3)) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &\text{et } E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{avec } \sigma = \frac{\kappa}{2\tau}, \end{aligned}$$

et la connexion est telle que :

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= 0 & \nabla_{E_2} E_1 &= -\tau E_3 & \nabla_{E_3} E_1 &= (\sigma - \tau) E_2 \\ \nabla_{E_1} E_2 &= \tau E_3 & \nabla_{E_2} E_2 &= 0 & \nabla_{E_3} E_2 &= (\tau - \sigma) E_1 \\ \nabla_{E_1} E_3 &= -\tau E_2 & \nabla_{E_2} E_3 &= \tau E_1 & \nabla_{E_3} E_3 &= 0. \end{aligned}$$

L'espace  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  a donc la géométrie des sphères de Berger si  $\kappa > 0$ , celle du groupe de Heisenberg si  $\kappa = 0$ , et celle du recouvrement universel de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  si  $\kappa < 0$  — dans ce dernier cas néanmoins, le modèle décrit correspond au recouvrement universel de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  privé d'une fibre.

Le modèle que l'on utilise pour le groupe de Heisenberg  $\text{Nil}_3$  proprement dit, est l'espace normalisé  $\mathbb{E}^3(0, 1/2)$ . Il est intéressant, pour le Chapitre 2, d'écrire les coordonnées d'un point de  $\text{Nil}_3$  sous forme matricielle :

$$(x_1, x_2, x_3) \in \text{Nil}_3 \longleftrightarrow x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad (1.2)$$

ce qui permet de manipuler des données de  $\text{Nil}_3$  en cohérence avec le modèle (1.1). Il est à noter cependant que cette écriture ne respecte pas la métrique du groupe de Heisenberg ; c'est uniquement un « jeu » formel d'écriture sur les coordonnées des point de  $\text{Nil}_3$ .

Si  $\tau = 0$ , et donc  $\kappa \neq 0$ ,  $\mathbb{E}^3(\kappa, 0)$  est un espace produit. Le repère canonique est :

$$E_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},$$

et les termes non-nuls de la connexion sont :

$$\begin{aligned}\nabla_{E_1} E_1 &= 2\kappa' x_2 E_2 & \nabla_{E_2} E_1 &= -2\kappa' x_1 E_2 \\ \nabla_{E_1} E_2 &= -2\kappa' x_2 E_1 & \nabla_{E_2} E_2 &= 2\kappa' x_1 E_1.\end{aligned}$$

La géométrie de  $\mathbb{E}^3(\kappa, 0)$  est donc celle de  $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  si  $\kappa < 0$ , avec  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  espace de courbure constante négative égale à  $\kappa$ , et celle de  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  si  $\kappa > 0$ , avec  $\mathbb{S}^2(\kappa)$  espace de courbure constante positive égale à  $\kappa$ .

### 1.1.3 Modèles pour $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Dans la description précédente des  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ , l'espace  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  correspond à  $\mathbb{E}^3(-1, 0)$ . Mais si l'on traite de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  en particulier, on utilise d'autres standards de modèles.

Celui qui correspond à une normalisation de  $\mathbb{E}^3(-1, 0)$  est le modèle du *disque de Poincaré*. Il s'agit de l'homothétique de  $\mathbb{E}^3(-1, 0)$  de telle sorte que la base soit le disque unité  $\mathbb{D}$  :

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \left( \{(w, x_3) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}\}, \langle \cdot, \cdot \rangle_P = \frac{4}{(1 - |w|^2)^2} |dw|^2 + dx_3^2 \right). \quad (1.3)$$

Dans ce modèle, le repère canonique s'écrit :

$$E_1 = \frac{1 - |w|^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = \frac{1 - |w|^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},$$

et la connexion est définie par :

$$\begin{aligned}\nabla_{E_1} E_1 &= -x_2 E_2 & \nabla_{E_2} E_1 &= x_1 E_2 \\ \nabla_{E_1} E_2 &= x_2 E_1 & \nabla_{E_2} E_2 &= -x_1 E_1,\end{aligned}$$

les autres termes étant nuls.

Ce modèle est notamment utilisé à la Section 2.4.1 pour représenter des exemples de surfaces, ou encore plus largement au Chapitre 3. En effet, il permet d'exprimer simplement le bord à l'infini de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  comme étant  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , avec  $\mathbb{S}^1$  le cercle unité, ce qui est intéressant dans l'étude des comportements asymptotiques.

Le deuxième modèle que l'on considère est le *modèle de Minkowski*. On voit  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

comme un sous-espace de  $\mathbb{L}^4$ , précisément le produit cartésien de la nappe supérieure de la pseudo-sphère de rayon  $-1$  par  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \left\{ (x_0, \dots, x_3) \in \mathbb{L}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = -1 \text{ et } x_0 > 0 \right\}, \quad (1.4)$$

muni de la métrique induite. Une trivialisatation globale du fibré tangent à  $\mathbb{L}^4$  adaptée à ce modèle est la suivante :

$$\begin{aligned} E_0 &= x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2, & E_1 &= x_1 e_0 + \left( 1 + \frac{x_1^2}{1 + x_0} \right) e_1 + \frac{x_1 x_2}{1 + x_0} e_2, \\ E_2 &= x_2 e_0 + \frac{x_1 x_2}{1 + x_0} e_1 + \left( 1 + \frac{x_2^2}{1 + x_0} \right) e_2 & \text{ et } & E_3 = e_3, \end{aligned}$$

puisque'en un point de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $(E_1, E_2, E_3)$  est le repère canonique exprimé dans ce modèle.

Ce modèle est utile, par exemple, à la Section 1.2.3 car il permet de définir simplement l'application de Gauss hyperbolique des surfaces CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . La contrepartie est que les surfaces sont alors des sous-variétés de codimension 2.

On utilise également le modèle de Minkowski au Chapitre 2 pour exprimer la formule de Sym-Bobenko (2.3) à l'aide du modèle matriciel (1.1), vu que dans ce modèle  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  est une sous-variété de  $\mathbb{L}^4$ .

Les différents modèles de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  viennent évidemment des modèles de  $\mathbb{H}^2$ , vu comme  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  avec la métrique induite encore notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ . L'isométrie riemannienne entre les modèles de Poincaré et Minkowski de  $\mathbb{H}^2$  est la suivante :

$$\Theta_{PM} : w \in \mathbb{H}_{\text{Poincaré}}^2 \mapsto \frac{1}{1 - |w|^2} \left( 1 + |w|^2, 2 \operatorname{Re} w, 2 \operatorname{Im} w \right) \in \mathbb{H}_{\text{Minkowski}}^2.$$

On utilise également la projection stéréographique entre l'hémisphère nord  $\mathbb{S}_+^2$  de la sphère unité euclidienne de dimension 2 et le disque unité :

$$\Theta_{PS} : w \in \mathbb{D} \mapsto \frac{1}{1 + |w|^2} \left( 2 \operatorname{Re} w, 2 \operatorname{Im} w, 1 - |w|^2 \right) \in \mathbb{S}_+^2,$$

pour munir  $\mathbb{S}_+^2$  d'une métrique hyperbolique.

Dans un souci de clarté, on se sert systématiquement de ces bijections isométriques pour ne voir les applications à valeurs dans  $\mathbb{H}^2$  que dans le modèle du disque de Poincaré.

### 1.1.4 L'espace $\text{Sol}_3$

Le dernier espace homogène auquel nous nous intéressons est le groupe de Lie  $\text{Sol}_3$  :

$$\text{Sol}_3 = \left( \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}, \langle \cdot, \cdot \rangle = e^{2x_3} dx_1^2 + e^{-2x_3} dx_2^2 + dx_3^2 \right),$$

dont le groupe d'isométries est de dimension 3, engendré par trois translations.

On peut également définir un repère canonique  $(E_1, E_2, E_3)$  sur  $\text{Sol}_3$ , donné par :

$$E_1 = e^{-x_3} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = e^{x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},$$

d'où l'expression suivante des termes non nuls de la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  dans ce repère :

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= -E_3 & \nabla_{E_2} E_2 &= E_3 \\ \nabla_{E_1} E_3 &= E_1 & \nabla_{E_2} E_3 &= -E_2 \end{aligned}$$

## 1.2 Conditions d'intégrabilité

Pour l'étude locale des surfaces, on note  $\Sigma$  une surface de Riemann connexe, simplement connexe, et  $z = u + iv$  une coordonnée complexe sur  $\Sigma$ .

### 1.2.1 Surfaces CMC-1/2 de type espace dans $\mathbb{L}^3$

Soit  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  une immersion conforme, de type espace et CMC-1/2, pour laquelle  $h = -\langle f, e_0 \rangle_3 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  désigne la fonction hauteur. On note  $\rho$  le facteur conforme,  $N$  la normale unitaire, soit  $\langle N, N \rangle_3 = -1$ , et  $\varphi = -\langle N, e_0 \rangle_3 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \setminus ]-1, 1[$  la fonction d'angle de  $N$ . On considère enfin la différentielle de Hopf  $Qdz^2 = \langle f_z, N_z \rangle_3 dz^2$  de  $f$ . Les relations de compatibilité s'écrivent comme suit :

$$(\log \rho)_{z\bar{z}} = \frac{\rho}{8} - \frac{2|Q|^2}{\tau}, \quad (1.5)$$

$$Q_{\bar{z}} = 0, \quad (1.6)$$

$$h_{zz} = (\log \rho)_z h_z + \varphi Q \quad \text{et} \quad h_{z\bar{z}} = \frac{\rho\varphi}{4}, \quad (1.7)$$

$$\varphi_z = \frac{1}{2} h_z + \frac{2Q}{\rho} h_{\bar{z}} \quad \text{et} \quad \frac{4|h_z|^2}{\rho} = \varphi^2 - 1. \quad (1.8)$$

On peut montrer que l'intégrabilité du système est assurée par les équations de Gauss (1.5) et de Codazzi (1.6), les autres égalités permettant alors de définir le reste des données.

L'étude étant locale, quitte à changer l'orientation sur  $f$ , on se ramène à  $\varphi > 0$ . Ainsi, la normale  $N$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{H}^2$ . On note alors  $G = \Theta_{PM}^{-1} \circ N$  l'application de Gauss. C'est une application harmonique [1] et la métrique induite par  $G$  sur  $\mathbb{H}^2$  est :

$$\langle dG, dG \rangle_P = Qdz^2 + \left( \frac{\rho}{4} + \frac{4|Q|^2}{\rho} \right) |dz|^2 + \overline{Q}d\bar{z}^2. \quad (1.9)$$

Suivant [20], l'application harmonique  $G$  admet des données de Weierstrass puisqu'il existe  $\rho : \Sigma \rightarrow ]0, +\infty[$  satisfaisant (1.9), et l'on dit que  $\{Q, \rho\}$  sont les données de Weierstrass de  $G$ .

### 1.2.2 Surfaces dans les $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

On peut étudier certaines propriétés des surfaces — non nécessairement CMC — dans les  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  en toute généralité (pour plus de détails voir [19]). Nous considérons une immersion conforme  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  CMC- $H$  et de normale unitaire  $N$ . On note  $\rho$  le facteur conforme,  $\varphi = \langle N, E_3 \rangle : \Sigma \rightarrow ]-1, 1[$  la fonction d'angle de  $N$ ,  $A = \langle f_z, E_3 \rangle : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  la partie verticale de  $f_z$ , et  $pdz^2 = -\langle f_z, \nabla_{f_z} N \rangle dz^2$  la différentielle de Hopf de  $f$ . On dit que  $\{\rho, \varphi, H, p, A\}$  sont les données fondamentales de  $f$  [19]. La différentielle d'Abresch-Rosenberg s'exprime en fonction de ces données :

$$Qdz^2 = \left( 2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2 \right) dz^2.$$

On peut montrer qu'alors les relations nécessaires et suffisantes à l'existence de  $f$  ne sont plus seulement les équations de Gauss et Codazzi, mais les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned} Q_{\bar{z}} &= 0, \\ A_{\bar{z}} &= \frac{\rho\varphi}{2}(H + i\tau), \\ \varphi_z &= -(H - i\tau)A - \frac{2p}{\rho}\overline{A}, \\ \frac{4|A|^2}{\rho} &= 1 - \varphi^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

On déduit des trois dernières une équation qui complète (1.10) pour définir  $A$  :

$$A_z = (\log \rho)_z A + \varphi p.$$

Pour les surfaces minimales du groupe de Heisenberg  $\text{Nil}_3 = \mathbb{E}^3(0, 1/2)$ , la différentielle d'Abresch-Rosenberg est  $Qdz^2 = (ip + A^2)dz^2$  et le système précédent s'écrit :

$$Q_{\bar{z}} = 0, \quad (1.11)$$

$$(-iA)_{\bar{z}} = \frac{\rho\varphi^2}{4\varphi}, \quad (1.12)$$

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)_z = \frac{1}{2}(-iA) - \frac{2Q}{\rho\varphi^2}\overline{(-iA)}, \quad (1.13)$$

$$\frac{4|A|^2}{\rho} = 1 - \varphi^2. \quad (1.14)$$

On peut également exprimer l'équation supplémentaire de caractérisation de  $A$  comme :

$$(-iA)_z = \left(\log(\rho\varphi^2)\right)_z (-iA) - \frac{1}{\varphi}Q, \quad (1.15)$$

et l'équation de Gauss relative à  $f$  est :

$$(\log \rho)_{z\bar{z}} = -\frac{\rho}{8} \left(1 - \frac{4|A|^2}{\rho}\right) + \frac{2|Q|^2}{\rho} - i\varphi(A_{\bar{z}} - \bar{A}_z) - i(\varphi_{\bar{z}}A - \varphi_z\bar{A}). \quad (1.16)$$

De plus, pour une étude locale, on se ramène à  $\varphi > 0$ , soit  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{S}_+^2$ . On note alors  $G = \Theta_{PS}^{-1} \circ N$  l'application de Gauss, qui est harmonique [12], et admettant  $\{-Q, \rho\varphi^2\}$  pour données de Weierstrass puisqu'elle induit la métrique suivante sur  $\mathbb{H}^2$  :

$$\langle dG, dG \rangle_P = -Qdz^2 + \left(\frac{\rho\varphi^2}{4} + \frac{4|Q|^2}{\rho\varphi^2}\right)|dz|^2 - \bar{Q}d\bar{z}^2.$$

### 1.2.3 Surfaces CMC-1/2 dans le modèle de Minkowski de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Le raisonnement général de la Section 1.2.2 s'applique également à  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{E}^3(-1, 0)$ . Néanmoins, la construction d'une application harmonique à valeurs dans  $\mathbb{H}^2$ , dite *application de Gauss hyperbolique*, n'est pas aisée dans ce modèle. On lui préfère le modèle de

Minkowski de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (pour plus de précisions voir [20]).

Nous considérons donc  $f = (F, h) : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{L}^4$  une immersion conforme CMC-1/2, avec  $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{L}^3$  projection sur la base et  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  hauteur le long de la fibre. On note de nouveau  $\rho$  le facteur conforme,  $N$  la normale unitaire — et dans ce cas  $\langle N, N \rangle_4 = 1$  —,  $\varphi = \langle N, E_3 \rangle_4 : \Sigma \rightarrow [-1, 1]$  la fonction d'angle de  $N$  et  $pdz^2 = -\langle f_z, N_z \rangle_4 dz^2$  la différentielle de Hopf de  $f$ .

La situation ici est légèrement différente des précédentes puisque les surfaces sont de codimension 2 dans  $\mathbb{L}^4$ . Une conséquence est que la famille classique adaptée à la surface  $(f_u, f_v, N)$  ne constitue plus une base orthogonale de l'espace tangent. On remarque cependant que :

$$\langle df, F \rangle_4 = 0 \quad \text{et} \quad \langle N, F \rangle_4 = 0,$$

ce qui fait de  $(f_u, f_v, N, F)$  une base orthogonale de l'espace tangent adaptée à la surface. Une autre conséquence au fait de travailler en codimension 2 est l'existence d'équations de compatibilité surnuméraires [20].

La différentielle d'Abresch-Rosenberg de  $f$  est  $Q = p + h_z^2$  et comme  $\tau = 0$ , on a  $A = h_z$ , d'où l'expression suivante des conditions d'intégrabilité :

$$Q_{\bar{z}} = 0, \tag{1.17}$$

$$h_{z\bar{z}} = \frac{\rho\varphi^2}{4\varphi}, \tag{1.18}$$

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)_z = \frac{1}{2}h_z + \frac{2Q}{\rho\varphi^2}h_{\bar{z}}, \tag{1.19}$$

$$\frac{4|h_z|^2}{\rho} = 1 - \varphi^2. \tag{1.20}$$

De même que pour le groupe de Heisenberg, on peut montrer que :

$$h_{zz} = \left(\log(\rho\varphi^2)\right)_z h_z + \frac{1}{\varphi}Q, \tag{1.21}$$

et que l'équation de Gauss s'écrit :

$$(\log \rho)_{z\bar{z}} = -\frac{\rho}{8} + \frac{2}{\rho} \left( |Q|^2 - \bar{Q}h_z^2 - Qh_{\bar{z}}^2 \right) + \frac{\rho}{2} \left( 1 - \frac{2|h_z|^2}{\rho} \right)^2. \tag{1.22}$$



Également, pour une étude locale, on suppose que la projection  $F$  est régulière, d'où  $\varphi > 0$ . La construction de l'application de Gauss hyperbolique diffère des constructions précédentes. On considère le vecteur de type lumière  $\chi \in \mathbb{N}^3 \cap \{x_0 > 0\}$  tel que :

$$\chi = \frac{1}{\varphi}(F + N) = (K, 1),$$

où  $\mathbb{N}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 \mid \langle x, x \rangle_4 = 0\}$  désigne le *cône de lumière* de  $\mathbb{L}^4$ . Il est alors clair que  $K$  est à valeurs dans  $\mathbb{H}^2$  et l'on définit l'application de Gauss hyperbolique par  $G = \Theta_{PM}^{-1} \circ K$ . On peut vérifier que  $G$  est une application harmonique dans  $\mathbb{H}^2$  [20] et que la métrique induite sur  $\mathbb{H}^2$  est bla bla bla bla bla bla :

$$\langle dG, dG \rangle_P = -Qdz^2 + \left( \frac{\rho\varphi^2}{4} + \frac{4|Q|^2}{\rho\varphi^2} \right) |dz|^2 - \overline{Q}d\bar{z}^2,$$

donc  $G$  admet  $\{-Q, \rho\varphi^2\}$  pour données de Weierstrass.

On peut également voir  $K$  comme le point aboutissant de la demi-géodésique de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$  issue de  $(F, 0)$  et dirigée par  $N$ . Alors  $G$  est le projeté stéréographique de  $K$  par rapport au point  $(-1, 0, 0, 0)$  (pour plus de détails voir [20]).

### 1.3 Correspondance de Daniel

Un résultat central dans l'étude des immersions minimales et CMC dans les  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  est la correspondance de type Lawson, dite *correspondance de Daniel* :

**Théorème 1.1** (Daniel, 2007 [11]). *Soient  $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}^3(\kappa_1, \tau_1)$  et  $\mathbb{E}_2 = \mathbb{E}^3(\kappa_2, \tau_2)$  des variétés homogènes définies comme précédemment et telles que  $\kappa_1 - 4\tau_1^2 = \kappa_2 - 4\tau_2^2$ . On considère des immersions conformes CMC  $f_1 : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}_1$  et  $f_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}_2$ , dont on note  $\{\rho_1, \varphi_1, H_1, p_1, A_1\}$  et  $\{\rho_2, \varphi_2, H_2, p_2, A_2\}$  les données fondamentales respectives avec :*

$$\tau_1^2 + H_1^2 = \tau_2^2 + H_2^2.$$

*Soit enfin  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $H_2 + i\tau_2 = e^{i\theta}(H_1 + i\tau_1)$ . Alors  $f_1$  et  $f_2$  sont localement isométriques si et seulement si leurs données fondamentales vérifient :*

$$\rho_2 = \rho_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1, \quad p_2 = e^{\theta J} p_1 \quad \text{et} \quad A_2 = e^{\theta J} A_1,$$

où  $J$  désigne la structure complexe de  $T\Sigma$ . Lorsque ces conditions sont réalisées, les immersions sont dites immersions sœurs et l'on a de plus la relation suivante entre les différentielles d'Abresch-Rosenberg, notées respectivement  $Q_1$  et  $Q_2$  :

$$Q_2 = e^{2\theta J} Q_1.$$

En particulier, dans le cas du lien entre les surfaces CMC-1/2 de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et les minimales de  $\text{Nil}_3$ , on obtient :

**Corollaire 1.2.** *En supposant  $\mathbb{E}_1 = \text{Nil}_3$  et  $\mathbb{E}_2 = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , et avec  $H_1 = 0$  et  $H_2 = 1/2$ , on obtient  $\theta = -\pi/2$ . On en déduit la correspondance suivante pour les données fondamentales d'immersions définies comme précédemment :*

$$(\text{Nil}_3) \quad \{\rho, \varphi, 0, p, A\} \longleftrightarrow \{\rho, \varphi, 1/2, -ip, -iA\} \quad (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$$

*De plus, les différentielles d'Abresch-Rosenberg sont opposées l'une de l'autre.*

Le Théorème 1.1 et plus particulièrement le Corollaire 1.2 entre  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\text{Nil}_3$ , sont très utiles dans l'étude des graphes CMC. On peut notamment citer leur utilisation dans la résolution du problème de Bernstein pour les surfaces minimales de  $\text{Nil}_3$  [21]. Dans notre propos, nous nous servons de ces résultats dans la preuve par les formules de Sym-Bobenko de l'existence de graphes entiers CMC-1/2 à bout vertical dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  qui ne sont pas de révolution (Théorème 2.8).



# Chapitre 2

## Formules de Sym-Bobenko

### 2.1 Introduction

Une formule de Sym-Bobenko est l'expression d'une immersion en fonction d'une famille à un paramètre de repères mobiles, dite *repère étendu*. Cette idée fut initialement utilisée par A. Sym [33] dans le cas de surfaces de l'espace euclidien de courbure (de Gauss) strictement négative. A. I. Bobenko a ensuite très largement généralisé la méthode, notamment aux cas des surfaces CMC dans les espaces forme  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  et  $\mathbb{H}^3$  [3, 4, 5], et T. Taniguchi a établi une formule de Sym-Bobenko pour les surfaces CMC de type espace dans  $\mathbb{L}^3$  [34]. Dans le même temps, les travaux de J. Dorfmeister, F. Pedit et H. Wu [15] — généralisés en toute dimension à l'espace de Minkowski par D. Brander, W. Rossman et N. Schmitt [7] — permettent de voir les formules de Sym-Bobenko comme des représentations de type Weierstrass pour les surfaces CMC, puisque les repères étendus proviennent de données holomorphes.

Nous souhaitons obtenir de telles formules dans les espaces homogènes autres que les espaces forme, mais la méthode classique ne peut s'y appliquer. En effet, le groupe d'isométries n'agit plus transitivement sur les repères orthonormés; il y a « trop peu » d'isométries pour pouvoir définir un repère mobile. Néanmoins, dans les cas particuliers des immersions CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et minimales dans  $\text{Nil}_3$  — qui sont de courbures moyennes critiques dans ces espaces —, on peut utiliser le repère mobile d'une immersion CMC-1/2 de type espaces dans  $\mathbb{L}^3$  adéquate pour obtenir des formules de type Sym-Bobenko.

Dans la Section 2.2, nous rappelons certains résultats relatifs aux CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$ . Outre la formule de Sym-Bobenko elle-même, dont on donne une présentation légèrement différente de [34], deux résultats (Propositions 2.1 et 2.2) sont particulièrement intéressants car ils permettent de réduire les données initiales nécessaires à la détermination du repère mobile aux données de Weierstrass de l'application de Gauss.

La Section 2.3 est consacrée à l'établissement des résultats dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\text{Nil}_3$ . Nous montrons, en utilisant les conditions d'intégrabilité des Sections 1.2.2 et 1.2.3, qu'étant donnée une immersion CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  ou minimale dans  $\text{Nil}_3$ , il existe une famille à un paramètre indexée par  $\mathbb{S}^1$  qui lui est associée (Proposition 2.4). Nous établissons ensuite les formules de Sym-Bobenko proprement dites, à savoir les égalités (2.3) et (2.4). L'existence de la famille associée peut être vue *a posteriori* comme une conséquence des formules de Sym-Bobenko.

Enfin, à la Section 2.4, nous donnons des exemples simples de construction de surfaces dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\text{Nil}_3$  à l'aide de la méthode DPW [7]. Nous établissons également une propriété des familles à un paramètre liées à des surfaces symétriques et en déduisons l'existence de graphes verticaux CMC-1/2 immergés dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  dont le bout est vertical et qui ne sont pas de révolution (Théorème 2.8).

## 2.2 Résultats dans l'espace de Minkowski

L'idée sous-jacente aux formules de Sym-Bobenko dans les espaces forme est que la normale permet de « déterminer » l'immersion. Dans l'espace de Minkowski, on peut rendre cette idée plus précise à l'aide des deux résultats suivants :

**Proposition 2.1** (Taniguchi, 1997 [34]). *L'ensemble des classes d'applications harmoniques dans  $\mathbb{H}^2$  modulo les isométries de  $\mathbb{H}^2$  est en correspondance bijective avec l'ensemble des classes d'immersions conformes, de type espace et CMC-1/2 dans  $\mathbb{L}^3$ , modulo les isométries de  $\mathbb{L}^3$  préservant l'orientation.*

**Proposition 2.2** (Fernández–Mira, 2007 [20]). *Des applications harmoniques à valeurs dans  $\mathbb{H}^2$  admettant les mêmes données de Weierstrass déterminent des surfaces CMC-1/2 dans  $\mathbb{L}^3$  qui sont isométriques.*

Autrement dit, à translation près et une fois choisie une orientation, des données de Weierstrass déterminent complètement une immersion CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$ .

Soit donc  $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$  une application harmonique ou de façon équivalente ses données de Weierstrass  $\{Q, \rho\}$ .

On se place dans le modèle matriciel (1.1) avec  $\mathbb{L}^3 \equiv \{x_3 = 0\}$  et l'on considère la famille  $(\Psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de champs de matrices solution du système :

$$\begin{cases} \Psi_t^{-1} d\Psi_t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (\log \rho)_z & i\sqrt{\rho} \\ -\frac{4iQ}{\sqrt{\rho}} e^{2it} & -(\log \rho)_z \end{pmatrix} dz + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -(\log \rho)_{\bar{z}} & \frac{4i\bar{Q}}{\sqrt{\rho}} e^{-2it} \\ -i\sqrt{\rho} & (\log \rho)_{\bar{z}} \end{pmatrix} d\bar{z} \\ \Psi_t(z=0) = \sigma_3 \end{cases} \quad (2.1)$$

On en déduit une famille d'immersions conformes, de type espace, CMC-1/2 et isométriques  $f_t^L = (h_t^L, F_t^L) : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$ , de paramètre conforme  $\rho$  :

$$f_t^L = -2 \frac{\partial \Psi_t}{\partial t} \Psi_t^{-1} + 2 \Psi_t \sigma_0 \Psi_t^{-1}, \quad (2.2)$$

pour laquelle  $\Psi_t$  est un repère mobile, à savoir :

$$(f_t^L)_u = \rho \Psi_t \sigma_1 \Psi_t^{-1}, \quad (f_t^L)_v = \rho \Psi_t \sigma_2 \Psi_t^{-1} \quad \text{et} \quad N_t^L = \Psi_t \sigma_0 \Psi_t^{-1}.$$

## 2.3 Résultats dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ et $\text{Nil}_3$

### 2.3.1 Familles à un paramètre indexées par $\mathbb{S}^1$

Un résultat classique pour les CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$  est le suivant :

**Proposition 2.3.** *Soient  $\rho : \Sigma \rightarrow ]0, +\infty[$  et  $Q : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant les équations (1.5) et (1.6). Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe une immersion  $f_t : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  conforme, de type espace, CMC-1/2 et dont l'application de Gauss admet  $\{e^{2it}Q, \rho\}$  comme données de Weierstrass. On dit que  $e^{2it}$  est le paramètre spectral.*

Cette famille est certes celle établie par la formule de Sym-Bobenko (2.2), mais on peut également prouver son existence de façon indépendante en construisant directement les immersions, puisque les conditions d'intégrabilité (1.5) et (1.6) sont satisfaites.

On peut de même faire agir le cercle  $\mathbb{S}^1$  sur la différentielle d'Abresch-Rosenberg d'immersions dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\text{Nil}_3$ , et établir l'existence de familles à un paramètre :

**Proposition 2.4.** *Soient  $\rho_0 : \Sigma \rightarrow ]0, +\infty[$  et  $Q_0 : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant les équations (1.5) et (1.6). Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe des immersions conformes de  $\Sigma$ , CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et minimale dans  $\text{Nil}_3$ , de même application de Gauss (hyperbolique) admettant  $\{e^{2it}Q_0, \rho_0\}$  comme données de Weierstrass.*

*Preuve.* Fixons  $t \in \mathbb{R}$ . On vérifie qu'il existe une application  $A : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  telle que :

$$A_z = (\log \rho_0)_z A + \varepsilon e^{2it} Q_0 \sqrt{1 + \frac{4|A|^2}{\rho_0}} \quad \text{et} \quad A_{\bar{z}} = \frac{\rho_0}{4} \sqrt{1 + \frac{4|A|^2}{\rho_0}},$$

avec  $\varepsilon = -1$  pour  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\varepsilon = 1$  pour  $\text{Nil}_3$ . Une telle construction vient des équations (1.21) et (1.18) pour  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , et (1.15) et (1.12) pour  $\text{Nil}_3$ . Comme  $Q_0$  et  $\rho_0$  vérifient (1.5) et (1.6), on a :

$$\left( (\log \rho_0)_z A + \varepsilon e^{2it} Q_0 \sqrt{1 + \frac{4|A|^2}{\rho_0}} \right)_{\bar{z}} = \left( \frac{\rho_0}{4} \sqrt{1 + \frac{4|A|^2}{\rho_0}} \right)_z,$$

d'où l'existence de  $A$ , et l'on définit :

$$Q = e^{2it} Q_0, \quad \rho = \rho_0 + 4|A|^2 \quad \text{et} \quad \varphi = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 + 4|A|^2}}.$$

Les équations de compatibilités (1.17)–(1.20) et (1.11)–(1.14) sont donc vérifiées, assurant l'existence des immersions.  $\square$

Pour les espaces forme et  $\mathbb{L}^3$ , les familles d'immersions indexées par  $\mathbb{S}^1$  sont isométriques et issues de l'action d'un paramètre spectral. Dans les  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ , la correspondance de Daniel produit des familles d'immersions isométriques, mais les immersions n'existent pas dans un même espace. L'action de  $\mathbb{S}^1$  mise ici en valeur dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\text{Nil}_3$  est donc intéressante puisqu'elle est la réalisation de l'action d'un paramètre spectral sur des immersions d'un même espace.

### 2.3.2 Les formules de Sym-Bobenko dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ et $\text{Nil}_3$

Les groupes d'isométries de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\text{Nil}_3$  n'agissant pas transitivement sur les repères, il est impossible de définir un repère mobile et d'adapter la méthode classique.

On peut néanmoins utiliser un repère mobile de  $\mathbb{L}^3$  adéquat pour obtenir les formules de Sym-Bobenko, puisque les coordonnées d'immersions CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$ , CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et minimales dans  $\text{Nil}_3$  sont liées.

**Proposition 2.5** (Fernández–Mira, 2009 [21]). *Soient  $f^L$ ,  $f^H$  et  $f^N$  des immersions conformes respectivement CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$ , CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et minimale dans  $\text{Nil}_3$ . Supposons que  $\rho^H(\varphi^H)^2 = \rho^N(\varphi^N)^2 = \rho^L$  et  $Q^H = -Q^N = Q^L$ . Alors on a d'une part :*

$$(1.5) \iff (1.22) \iff (1.16) \quad \text{et} \quad (1.6) \iff (1.17) \iff (1.11),$$

et d'autre part,  $\varphi^H = \varphi^N = 1/\varphi^L$ ,  $h_z^H = -iA^N = h_z^L$  et  $F^N = F^L$  à isométrie de  $\mathbb{R}^2$  près.

**Corollaire 2.6.** *La donnée d'une surface CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$  assure l'existence de surfaces CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et minimale dans le groupe de Heisenberg de mêmes données de Weierstrass.*

Le corollaire 2.6 est une conséquence directe de la Proposition 2.4. Les formules de Sym-Bobenko dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\text{Nil}_3$  sont ensuite construites à partir des résultats précédents. Reprenons l'application harmonique  $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$  de données de Weierstrass  $\{Q, \rho\}$ .

### Dans l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Il existe une immersion  $f^H = (F^H, h^H) : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  conforme, CMC-1/2 et d'application de Gauss hyperbolique  $G^H = G$ , dont l'expression dans le modèle matriciel (1.1) — pour le modèle de Minkowski de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  — est la suivante :

$$f^H = \left[ \frac{\partial \Psi_t}{\partial t} \Big|_{t=\pi/2} \Psi_{\pi/2}^{-1}, \sigma_0 \left[ -\Psi_0 \Psi_{\pi/2}^{-1} \sigma_0 \Psi_{\pi/2} \Psi_0^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. + \right] \Psi_{\pi/2} \sigma_0 \Psi_{\pi/2}^{-1}, \sigma_0 \left[ (\sigma_3 - \Psi_0 \sigma_0 \Psi_0^{-1}) \right]. \quad (2.3)$$

En effet, une telle immersion  $f^H$  s'exprime également :

$$F^H = \frac{2}{\rho} \left( (h_{\pi/2}^L)_{\bar{z}} (f_0^L)_z + (h_{\pi/2}^L)_z (f_0^L)_{\bar{z}} \right) + \varphi_{\pi/2}^L N_0^L \quad \text{et} \quad h^H = h_{\pi/2}^L,$$



et I. Fernández et P. Mira [20] ont montré que les relations de compatibilité (1.17)–(1.20) sont vérifiées avec :

$$\rho^H = \rho + 4|(h_{\pi/2}^L)_z|^2, \quad \varphi^H = \frac{1}{\varphi_{\pi/2}^L} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4|(h_{\pi/2}^L)_z|^2}}, \quad Q^H = -Q \quad \text{et} \quad A^H = (h_{\pi/2}^L)_z.$$

### Dans le groupe de Heisenberg

De même que pour  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , il existe une immersion  $f^N = (F^N, h^N) : \Sigma \rightarrow \text{Nil}_3$  conforme, minimale et d'application de Gauss  $G^N = G$ , qui s'écrit comme suit dans le modèle (1.2) :

$$\begin{aligned} f^N = \frac{1}{2} \Bigg[ & \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial t^2} \Bigg|_{t=0} \Psi_0^{-1}, \sigma_0 \left[ -\frac{1}{2} \right] \left( \frac{\partial \Psi_t}{\partial t} \Bigg|_{t=0} \Psi_0^{-1} \right)^2, \sigma_0 \left[ +\frac{1}{2} [\sigma_0, [\Psi_0 \sigma_0 \Psi_0^{-1}, \sigma_0]] \right] \\ & - \frac{1}{2} \sigma_0 \left[ \frac{\partial \Psi_t}{\partial t} \Bigg|_{t=0} \Psi_0^{-1}, \sigma_0 + \Psi_0 \sigma_0 \Psi_0^{-1} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Psi_t}{\partial t} \Bigg|_{t=0} \Psi_0^{-1}, \sigma_0 - \Psi_0 \sigma_0 \Psi_0^{-1} \right] \sigma_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

En effet, on a bien  $F^N = F_0^L$  et la hauteur  $h^N$  vérifie :

$$h_z^N = i(h_0^L)_z - \frac{i}{4} \left( \overline{F^N} F_z^N - F^N \overline{F_z^N} \right),$$

ce qui correspond aux formules de compatibilité de B. Daniel [12]. Les données fondamentales sont alors :

$$\rho^N = \rho + 4|(h_0^L)_z|^2, \quad \varphi^N = \frac{1}{\varphi_0^L} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4|(h_0^L)_z|^2}}, \quad Q^N = -Q \quad \text{et} \quad A^N = i(h_0^L)_z.$$

## 2.4 Applications

### 2.4.1 Production d'exemples par la méthode DPW

On reprend dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\text{Nil}_3$  des exemples donnés dans l'espace de Minkowski par D. Brander, W. Rossman et N. Schmitt [7].

Pour commencer, on rappelle la « recette » DPW. Les constructions détaillées sont faites notamment dans [23, 15] pour le cas euclidien et dans [7] pour l'espace de Minkowski. Sur une surface de Riemann simplement connexe  $\overline{\Sigma}$ , munie d'une coordonnée locale

complexe  $w$ , on définit un *potentiel holomorphe*  $\xi$ , i.e. une 1-forme sur  $\bar{\Sigma}$  à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  dépendant d'un paramètre spectral  $\lambda \in \mathbb{S}^1$  :

$$\xi = \sum_{k \geq 0} \left[ \begin{pmatrix} c_{2k} \lambda^{2k} & 0 \\ 0 & c_{2k} \lambda^{2k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{2k-1} \lambda^{2k-1} \\ b_{2k-1} \lambda^{2k-1} & 0 \end{pmatrix} \right] dw,$$

où les  $a_{2k-1}dw$ ,  $b_{2k-1}dw$  et  $c_{2k}dw$  sont des 1-formes holomorphes sur  $\bar{\Sigma}$  et  $a_{-1}$  ne s'annule jamais.

On choisit  $\psi$  telle que  $\psi^{-1}d\psi = \xi$ . Sur un certain ouvert  $\Sigma \subset \bar{\Sigma}$ , on peut effectuer une décomposition d'Iwasawa  $\psi = \bar{\Psi} R$  avec  $\bar{\Psi}, R$  convenables, et notamment  $R$  prolongeable holomorphiquement (en  $\lambda$ ) sur  $\mathbb{D}$  avec :

$$R = \begin{pmatrix} \rho^{1/4} & 0 \\ 0 & \rho^{-1/4} \end{pmatrix} + O(\lambda) \quad \text{et} \quad \rho > 0.$$

En fait,  $\Sigma$  est l'ensemble des points où une telle décomposition existe et, sur  $\Sigma$ , on a :

$$(\Psi')^{-1}d\Psi' = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (\log \rho)_w & 4\lambda^{-1}a_{-1}\sqrt{\rho} \\ \frac{4b_{-1}}{\sqrt{\rho}}\lambda^{-1} & -(\log \rho)_w \end{pmatrix} dw + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -(\log \rho)_{\bar{w}} & \frac{4\bar{b}_{-1}}{\sqrt{\rho}}\lambda \\ 4\lambda\bar{a}_{-1}\sqrt{\rho} & (\log \rho)_{\bar{w}} \end{pmatrix} d\bar{w}.$$

On pose  $dz = -4ia_{-1}dw$ ,  $\lambda = e^{-it}$ ,  $Q = -b_{-1}/(4a_{-1})$  et la solution du système (2.1) est :

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} e^{-it/2} & 0 \\ 0 & e^{it/2} \end{pmatrix} \Psi' \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix}$$

Le premier exemple que l'on construit vient du potentiel  $\xi = \lambda^{-1}\sigma_1 dw$ . On obtient :

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} \mathrm{ch} \mathrm{Im}(e^{it}z) & -e^{-it} \mathrm{sh} \mathrm{Im}(e^{it}z) \\ -e^{it} \mathrm{sh} \mathrm{Im}(e^{it}z) & \mathrm{ch} \mathrm{Im}(e^{it}z) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{C},$$

d'où l'on tire après reparamétrisation :

$$\Sigma = \mathbb{C}, \quad f^H(z) = \left( \frac{-\mathrm{sh} u + i \mathrm{ch} u \mathrm{sh} v}{1 + \mathrm{ch} u \mathrm{ch} v}, \mathrm{ch} u \right) \quad \text{et} \quad f^N(z) = \left( u + i \mathrm{sh} v, \frac{u \mathrm{sh} v}{2} \right).$$

La Figure 2.1, page 35, représente l'image de l'immersion  $f^H$ , décrite par R. Sa Earp [16].

Et l'immersion  $f^N$ , invariante par translations le long de  $x_1$ , a été étudiée dans [22].

Pour le second exemple, on prend comme potentiel  $2\xi = \lambda^{-1}(\sigma_1 - i\sigma_2)dw$ . On obtient :

$$\Psi_t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(4 - |z|^2)}} \begin{pmatrix} 2\varepsilon & iz \\ -i\varepsilon\bar{z} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } |z| \neq 2 \quad \text{et } \varepsilon = \text{signe}(2 - |z|).$$

On en déduit après reparamétrisation :

$$\Sigma = \mathbb{D}, \quad f^H = \left( \frac{2z}{1 + |z|^2}, 2\frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2} \right) \quad \text{et} \quad f^N = \left( \frac{4z}{1 - |z|^2}, 0 \right).$$

De même, ces immersions sont bien connues (voir [17] pour  $f^H$  et [22] pour  $f^N$ ).

Construire des exemples de surfaces avec la méthode DPW s'avère difficile dans la pratique. En effet, le point central est la décomposition d'Iwasawa, et cette décomposition n'est explicite que pour des potentiels  $\xi$  « simples ». Néanmoins, une résolution numérique est possible dans un certain nombre de cas [7].

## 2.4.2 Familles équivariantes

Lorsqu'une surface — CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$ , CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  ou minimale dans  $\text{Nil}_3$  — admet de la symétrie, il est possible de trouver une paramétrisation conforme équivariante pour cette symétrie. Cette équivariance se retrouve alors dans les propriétés de l'application de Gauss (hyperbolique) et concerne donc toutes les familles d'immersions construites à partir de cette application harmonique :

**Théorème 2.7.** *Soit  $f : \Sigma \rightarrow M$  une immersion conforme, CMC-1/2 de type espace si  $M = \mathbb{L}^3$ , CMC-1/2 si  $M = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  ou minimale si  $M = \text{Nil}_3$ . On décompose  $f$  selon la fibration naturelle de  $M$  en notant  $F$  la projection sur la base et  $h$  la hauteur.*

*Supposons  $f$  équivariante pour la rotation d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé autour d'une fibre de  $M$ . On peut toujours se ramener à la fibre  $\{x_1 = x_2 = 0\}$ , d'où :*

$$F(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}F(z) \quad \text{et} \quad h(e^{i\theta}z) = h(z).$$

*Alors l'application de Gauss (hyperbolique) de  $f$  est elle-même équivariante et ses données*

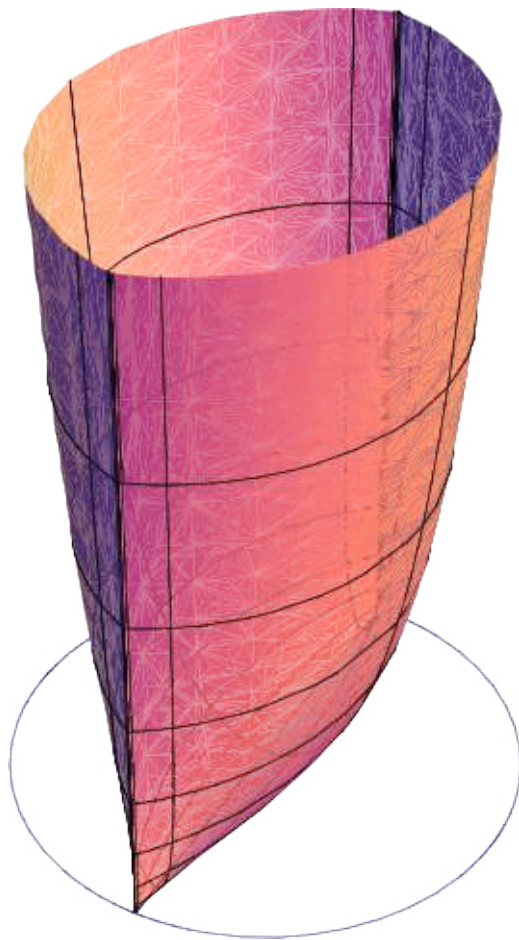


FIGURE 2.1 – Surface de Sa Earp dans le modèle (1.3) du disque de Poincaré de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Image P. Romon

de Weierstrass  $\{Q, \rho\}$  vérifient :

$$Q(e^{i\theta}z) = e^{-2i\theta}Q(z) \quad \text{et} \quad \rho(e^{i\theta}z) = \rho(z). \quad (2.5)$$

Réciproquement, soit  $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$  une application harmonique de données de Weierstrass  $\{Q, \rho\}$  vérifiant la propriété (2.5), pour un  $\theta \in \mathbb{R}$  donné. Alors les immersions CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$ , CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et minimale dans  $\text{Nil}_3$  d'application de Gauss  $G$  sont équivariantes pour la rotation d'angle  $\theta$ .

Les résultats précédents restent vrais si la propriété d'équivariance est relative à une symétrie par rapport à un plan géodésique vertical, que l'on peut toujours supposer être  $\{x_2 = 0\}$ , à savoir  $F(\bar{z}) = \overline{F}(z)$  et  $h(\bar{z}) = h(z)$ .

*Preuve.* On montre le résultat pour  $M = \mathbb{L}^3$ , les autres cas étant similaires. Soit donc une immersion  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  conforme, de type espace et CMC-1/2, équivariante pour la rotation d'angle  $\theta$ . On considère  $\hat{f} = (\hat{h}, \hat{F}) : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  définie par  $\hat{h}(z) = h(e^{i\theta}z)$  et  $\hat{F}(z) = e^{-i\theta}F(e^{i\theta}z)$  pour tout  $z \in \Sigma$ , et dont on note  $\hat{N} = (\hat{\varphi}, \hat{P})$  la normale. On en déduit :

$$\hat{f}_z(z) = e^{i\theta} \begin{pmatrix} h_z(e^{i\theta}z) \\ e^{-i\theta}F_z(e^{i\theta}z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{f}_{\bar{z}}(z) = e^{-i\theta} \begin{pmatrix} h_{\bar{z}}(e^{i\theta}z) \\ e^{-i\theta}F_{\bar{z}}(e^{i\theta}z) \end{pmatrix},$$

donc  $\hat{\rho}(z) = \rho(e^{i\theta}z)$ ,  $\hat{\varphi}(z) = \varphi(e^{i\theta}z)$  et  $\hat{P}(z) = e^{-i\theta}P(e^{i\theta}z)$ . Comme  $f$  est équivariante, on a  $\hat{f} \equiv f$ , donc  $\hat{N} \equiv N$  et l'application de Gauss hyperbolique  $\Theta_{PM}^{-1}(N)$  est elle-même équivariante. Ainsi, les données de Weierstrass vérifient bien la propriété (2.5).

Pour la propriété réciproque, on sait que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la forme de Maurer-Cartan  $\alpha_t = \Psi_t^{-1}d\Psi_t$  de la solution  $\Psi_t$  du système (2.1) vérifie :

$$\alpha_t^{1,0}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \alpha_t^{1,0}(e^{i\theta}z) \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_t^{0,1}(z) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_t^{0,1}(e^{i\theta}z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

On définit alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$  l'application  $\hat{\Psi}_t : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  par :

$$\hat{\Psi}_t(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \Psi_t(e^{i\theta}z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que  $\hat{\Psi}_t(z=0) = \sigma_3 = \Psi_t(z=0)$  et la forme de Maurer-Cartan  $\hat{\alpha}_t = \hat{\Psi}_t^{-1}d\hat{\Psi}_t$

de  $\widehat{\Psi}_t$  s'exprime comme suit en fonction de  $\alpha_t$  :

$$\widehat{\alpha}_t^{1,0}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \alpha_t^{1,0}(e^{i\theta}z) \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widehat{\alpha}_t^{0,1}(z) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_t^{0,1}(e^{i\theta}z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\widehat{\Psi}_t \equiv \Psi_t$ , ce qui signifie :

$$\Psi_t(e^{i\theta}z) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi_t(z) \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la forme des équations de Sym-Bobenko permet de conclure.  $\square$

Le fait que l'équivariance soit commune aux différentes familles d'immersions permet d'établir le résultat suivant sur l'existence de bouts verticaux CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  qui ne sont pas de révolution, à partir de l'absence de symétrie d'un graphe CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$  convenablement choisi :

**Théorème 2.8.** *Il existe des graphes entiers CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , d'image  $S$  inclus dans le demi-espace  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_+$ , admettant un bout vertical et qui n'est pas de révolution.*

*Preuve.* D'après [35], pour toute fonction  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{S}^1$ , il existe un graphe entier  $\sigma$ , convexe et CMC-1/2 de type espace dans  $\mathbb{L}^3$  tel que :

$$\sigma(x) = |x| + \gamma\left(\frac{x}{|x|}\right) + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

On note  $f^L = (F^L, h^L) : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  une paramétrisation conforme de l'image de  $\sigma$ .

On choisit  $\gamma$  de telle sorte que l'immersion  $f^L$  ne soit pas congruente à une surface de révolution. Donc ni l'immersion  $f^N : \Sigma \rightarrow \text{Nil}_3$  construite par la formule (2.4), ni son immersion sœur  $f^H = (F^H, h^H) : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  — que l'on voit dans le modèle du disque de Poincaré — ne sont congruentes à des surfaces de révolution.

Comme la métrique induite par  $f^L$  est complète,  $f^N$  est un graphe entier d'après [21], donc  $f^H$  également, puisque la correspondance de Daniel restreinte aux graphes entiers minimaux de  $\text{Nil}_3$  est une bijection sur les graphes entiers CMC-1/2 de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  [21]. De plus, on sait que  $h^H = h^L = \sigma \circ F^L$ , d'après la Proposition 2.5. Ainsi,  $h^H$  est minorée, donc  $h^H \geq 0$  à translation verticale près, et  $h^H$  diverge lorsque  $|F^H| \rightarrow 1$ , donc  $f^H$  admet un bout vertical.  $\square$



# Chapitre 3

## Surfaces CMC-1/2 dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ à bouts verticaux

*Ce travail a fait l'objet d'un article en collaboration avec L. Hauswirth [9].*

### 3.1 Introduction

Plusieurs familles de surfaces minimales dans  $\mathbb{R}^3$  peuvent être munies d'une structure de variété lisse. Le cas des surfaces compactes (à bord) a été largement étudié et a conduit à d'importants résultats (voir par exemple [6, 36, 37]). Pour les surfaces non compactes, la structure de variété vient d'une propriété de *compactification* de l'opérateur courbure moyenne. J. Pérez et A. Ros [29], et R. Kusner, R. Mazzeo et D. Pollack [25] ont montré que les familles de surfaces proprement plongées dans  $\mathbb{R}^3$  et minimales ou CMC admettent une telle compactification.

Nous traitons ici le cas des surfaces CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Pour ce faire, on considère comme *surface modèle* le graphe entier CMC-1/2 de révolution, l'hyperboloïde  $S_0$ , et l'on étudie ses déformations. Dans le modèle (1.3) du disque de Poincaré de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ , une paramétrisation de  $S_0$  en tant que graphe vertical est :

$$(\rho, \theta) \in [0, 1[ \times \mathbb{S}^1 \mapsto \left( \rho e^{i\theta}, \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R},$$



avec comme métrique induite exprimée en coordonnées polaires :

$$g = \frac{4}{(1 - \rho^2)^3} \begin{pmatrix} 2 - \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 - \rho^2 \end{pmatrix}.$$

Par compactification de l'opérateur courbure moyenne, on entend une extension convenable de l'opérateur à des fonctions définies jusqu'au bord à l'infini  $\{\rho = 1\}$  de  $\mathbb{H}^2$ . Une telle compactification découle d'une extension de la métrique induite  $g$  de la surface modèle, à savoir un changement conforme de métrique étendant  $g$  au bord à l'infini de  $\mathbb{H}^2$ . Mais un tel procédé ne marche pas dans le cas qui nous occupe, puisque les termes de  $g$  ont différentes vitesses d'explosion lorsque  $\rho \rightarrow 1$ ; la métrique ainsi obtenue ne peut que dégénérer sur le bord à l'infini de  $\mathbb{H}^2$ . Pour pouvoir compactifier la métrique induite, nous utilisons donc une paramétrisation conforme de la surface modèle  $S_0$ , soit l'immersion :

$$X^0 : (r, \theta) \in \mathbb{D} \mapsto \left( F(r, \theta), 2\frac{1+r^2}{1-r^2} \right) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \quad \text{où} \quad F(r, \theta) = \frac{2r}{1+r^2} e^{i\theta}.$$

On montre (Proposition 3.1) qu'un graphe normal borné de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $S_0$  peut être écrit comme :

$$X^\eta : (r, \theta) \in \Omega_R \mapsto \left( F(r, \theta), 2e^{\eta(r, \theta)} \frac{1+r^2}{1-r^2} \right) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R},$$

avec  $R \in ]0, 1[$ ,  $\Omega_R = \{R < r < 1\}$  et  $\eta \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_R})$  régulière sur le bord  $\{r = 1\}$ .

À la Section 3.2, on étudie la famille  $\mathcal{S}$  des surfaces — non nécessairement CMC — dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  dont les bouts admettent, après symétrie éventuelle par rapport au plan  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ , une paramétrisation de la forme  $X^\eta$  sur un domaine  $\Omega_R$  avec  $\eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega_R})$ . On s'intéresse particulièrement à la compactification au bord à l'infini de  $\mathbb{H}^2$  de leur opérateur courbure moyenne (Théorème 3.3). Une raison de l'existence de cette propriété de compactification est que la métrique induite par une immersion de la forme  $X^\eta$  précédente est équivalente pour  $r \rightarrow 1$  à la métrique induite par l'immersion modèle  $X^0$ .

À la Section 3.3, on considère l'ensemble  $\mathcal{G}$  des surfaces dans  $\mathcal{S}$  qui sont des graphes entiers CMC-1/2, complets contenus dans le demi-espace  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_+$ .  $\mathcal{G}$  admet une structure de variété de dimension infinie (Théorème 3.9), et localement dans  $\mathcal{G}$  une surface est caractérisée par son comportement asymptotique, à translation verticale près. Cela nous

permet d'établir un résultat (Théorème 3.10) qui est un analogue à  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  d'un théorème de A. E. Treibergs pour l'espace de Minkowski de dimension 3 [35, 10]. Précisément, étant donnée  $\gamma \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1)$  vérifiant une *condition de flux*, il existe un graphe entier vertical CMC-1/2 complet paramétré sur  $\mathbb{D}$  par  $X^\eta$  avec  $\eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$  tel que  $\eta|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma$ .

Finalement, à la Section 3.4, nous étudions les *petites* déformations des anneaux immergés CMC-1/2 de révolution introduits par R. Sa Earp et E. Toubiana [17, 26]. Ces anneaux nous intéressent car ils ont une propriété de *non dégénérescence* (Proposition 3.13), qui permet un contrôle des fonctions de Jacobi. En utilisant de nouveau une paramétrisation conforme des exemples de révolution, nous les déformons de telle sorte qu'en général les déformations ne sont asymptotes à des exemples de révolution, ce qui répond à une question posée par M. Elbert, B. Nelli et R. Sa Earp [18]. De plus, la souplesse de construction de ces déformations nous permet de construire un anneau dont les bouts ne sont pas alignés, en translatant horizontalement le bout supérieur d'un exemple de révolution (Théorème 3.19). Cela montre que contrairement au cas de référence des surfaces minimales plongées de  $\mathbb{R}^3$ , de courbure totale finie et dont les bouts sont horizontaux [29], la notion d'axe n'est pas pertinente en général pour les anneaux verticaux CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

On note  $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  le disque unité fermé,  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires sur  $\overline{\mathbb{D}}$  et  $ds_{\mathbb{P}}^2$  la métrique de Poincaré sur  $\mathbb{H}^2$ .

Pour tout  $R \in ]0, 1[$ , on note  $\Omega_R \subset \mathbb{D}$  le domaine extérieur  $\Omega_R = \{R < r < 1\}$  et  $\Omega_0 = \mathbb{D}$ . On considère l'ensemble  $\mathcal{D} = \{\Omega_R \mid 0 \leq R < 1\}$  des *domaines admissibles*. Le bord à l'infini de  $\mathbb{H}^2$  est souvent identifié à  $\mathbb{S}^1$ .

Pour  $\Omega \in \mathcal{D}$ , les espaces  $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  et  $\mathcal{C}_0^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ , avec  $k \geq 0$  et  $0 < \alpha < 1$ , sont respectivement l'espace de Hölder usuel et le sous-espace des fonctions nulles sur le bord  $\partial\Omega$ . Enfin, on considère les espaces  $L^2(\cdot)$  muni du produit scalaire naturel  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\cdot)}$  de norme de Hilbert associée notée  $|\cdot|_{L^2(\cdot)}$ .

## 3.2 La famille $\mathcal{S}$

Considérons l'application  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^2$  définie par :

$$F(r, \theta) = \left( \frac{1 + 6r^2 + r^4}{(1 - r^2)^2}, \frac{4r(1 + r^2)}{(1 - r^2)^2} \cos \theta, \frac{4r(1 + r^2)}{(1 - r^2)^2} \sin \theta \right) \quad \text{ou} \quad F(r, \theta) = \frac{2r}{1 + r^2} e^{i\theta},$$

dans les modèles de Minkowski et du disque de Poincaré de  $\mathbb{H}^2$  respectivement.  $F$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur  $\mathbb{H}^2$  et l'on appelle *coordonnées graphe* d'un graphe vertical dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , la paramétrisation du graphe dont la projection sur  $\mathbb{H}^2$  est  $F$ .

La famille  $\mathcal{S}$  est définie comme l'ensemble des surfaces immergées de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , donc chaque bout admet — à symétrie par rapport au plan  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  près — des coordonnées graphe de la forme :

$$X^\eta : (r, \theta) \in \Omega \mapsto \left( F(r, \theta), 2e^{\eta(r, \theta)} \frac{1+r^2}{1-r^2} \right) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

pour un domaine extérieur  $\Omega \in \mathcal{D}$  et  $\eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Les bouts des surfaces dans  $\mathcal{S}$  sont des *bouts verticaux* [18], i.e. des disques topologiques compacts pointés sans point asymptotique à hauteur finie, dirigés « vers le haut ou vers le bas ».

L'hyperboloïde  $S_0$  est clairement dans  $\mathcal{S}$ , de même que les graphes normaux bornés de classe  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  sur  $S_0$ , pour lesquels on contrôle également la distance horizontale à  $S_0$  à l'infini :

**Proposition 3.1.** *Un graphe normal  $S = \exp_{S_0}(\zeta N)$  au-dessus de  $S_0$ , avec  $N$  normale unitaire à  $S_0$  pointant vers le haut et  $\zeta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$ , est dans  $\mathcal{S}$ . En d'autres termes, il existe  $\Omega \in \mathcal{D}$  et  $\eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  tels que  $S$  admette des coordonnées graphe comme en (3.1). De plus, la valeur asymptotique de  $\eta$  est :*

$$\eta|_{\partial\mathbb{D}} = \frac{1}{2}\zeta|_{\partial\mathbb{D}}.$$

*Preuve.* On utilise le modèle de Minkowski (1.4) de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . L'application  $F$  s'écrit :

$$F(r, \theta) = \left( \operatorname{ch} \chi(r, \theta), \operatorname{sh} \chi(r, \theta) \cos \theta, \operatorname{sh} \chi(r, \theta) \sin \theta \right) \quad \text{avec} \quad \chi(r, \theta) = 2 \log \left( \frac{1+r}{1-r} \right),$$

et un calcul simple donne :

$$N = -\frac{2r}{1+r^2} \left( \sinh \chi \frac{\partial}{\partial x_0} + \cosh \chi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x_1} + \cosh \chi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{1-r^2}{1+r^2} \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Donc  $S$  est l'image de l'immersion :

$$\left( \operatorname{ch} \left( \chi - \frac{2r\zeta}{1+r^2} \right), \operatorname{sh} \left( \chi - \frac{2r\zeta}{1+r^2} \right) \cos \theta, \operatorname{sh} \left( \chi - \frac{2r\zeta}{1+r^2} \right) \sin \theta, 2 \frac{1+r^2}{1-r^2} + \frac{1-r^2}{1+r^2} \zeta \right).$$

Pour que les coordonnées graphe souhaitées existent, il suffit de montrer que pour  $r$  suffisamment proche de 1, il existe un unique  $\tilde{r}$  tel que :

$$\chi(\tilde{r}, \theta) = \chi(r, \theta) - \frac{2r}{1+r^2} \zeta(r, \theta). \quad (3.2)$$

On calcule alors :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \chi(r, \theta) - \frac{2r}{1+r^2} \zeta(r, \theta) \right) = \frac{4}{1-r^2} - \frac{2}{1+r^2} \left( \frac{1-r^2}{1+r^2} \zeta + r \zeta_r \right) = \frac{4}{1-r^2} + O(1-r^2).$$

Si  $r$  est suffisamment proche de 1, l'application  $r \mapsto \chi - 2r\zeta/(1+r^2)$  est strictement croissante (uniformément en  $\theta$ ), ce qui assure l'existence et l'unicité de  $\tilde{r}$ .

$\zeta|_{\partial\mathbb{D}}$  est la distance algébrique normale à l'infini entre  $S$  et  $S_0$ , et également la distance horizontale à l'infini puisque  $N$  est asymptotiquement horizontale. Considérons un plan horizontal  $\mathbb{H}^2 \times \{x\}$  intersectant  $S$  et  $S_0$ . Les rayons hyperboliques de  $S$  et  $S_0$  à hauteur  $x$  et dans la direction  $\theta$ , respectivement notés  $\rho_{\mathbb{H}}(S)(x, \theta)$  et  $\rho_{\mathbb{H}}(S_0)(x, \theta)$  sont :

$$\begin{aligned} x = 2e^\eta \operatorname{ch} \frac{\rho_{\mathbb{H}}(S)(x, \theta)}{2} &\iff \rho_{\mathbb{H}}(S)(x, \theta) = 2 \operatorname{argch} \frac{xe^{-\eta}}{2} = 2 \log x - 2\eta + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ \text{et } x = 2 \operatorname{ch} \frac{\rho_{\mathbb{H}}(S_0)(x, \theta)}{2} &\iff \rho_{\mathbb{H}}(S_0)(x, \theta) = 2 \operatorname{argch} \frac{x}{2} = 2 \log x + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \end{aligned}$$

donc la distance algébrique hyperbolique horizontale entre  $S$  et  $S_0$   $d_{\mathbb{H}}(S, S_0)(x, \theta)$  à hauteur  $x$  et dans la direction  $\theta$  est :

$$d_{\mathbb{H}}(S, S_0)(x, \theta) = \rho_{\mathbb{H}}(S_0)(x, \theta) - \rho_{\mathbb{H}}(S)(x, \theta) = 2\eta + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ce qui établit l'égalité  $\zeta|_{\partial\mathbb{D}} = 2\eta|_{\partial\mathbb{D}}$  à l'infini.  $\square$

Deux propriétés de la famille  $\mathcal{S}$  nous intéressent ici. La première décrit le comportement de  $\mathcal{S}$  sous l'action des isométries :

**Proposition 3.2.** *La famille  $\mathcal{S}$  est globalement invariante sous l'action des isométries de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .*

*Preuve.* Dans le modèle (1.3) du disque de Poincaré, on considère une surface  $S \in \mathcal{S}$ , définie sur  $\Omega \in \mathcal{D}$  et de coordonnées graphe  $(F, h)$ , et l'on note  $(F, h')$  les coordonnées

graphe de son image  $S'$  sous l'action d'une isométrie  $\psi$  de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . En utilisant l'écriture (3.1), on remarque que :

$$h = \frac{2e^\eta}{\sqrt{1 - |F|^2}} \quad \text{avec} \quad \eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Il suffit de traiter les cas où  $\psi$  est soit une isométrie de  $\mathbb{H}^2$  préservant la hauteur le long de la fibre soit une translation verticale. Si  $\psi$  est une translation verticale de  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$h' = \frac{2e^\eta}{\sqrt{1 - |F|^2}} + x_0 = 2 \exp \left( \eta + \log \left( 1 + x_0 \frac{e^{-\eta}}{2} \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \right) \right) \frac{1}{\sqrt{1 - |F|^2}},$$

éventuellement après restriction à un domaine  $\Omega' \in \mathcal{D}$  pour lequel  $h|_{\Omega'} > -x_0$ .

Si  $\psi$  se ramène à une isométrie de  $\mathbb{H}^2$  préservant l'orientation de  $\mathbb{H}^2$ , il existe  $w_0 \in \mathbb{D}$  et  $\delta_0 \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\psi(w) = \frac{w + w_0}{1 + \overline{w_0}w} e^{i\delta_0}.$$

Si  $\psi' = F^{-1} \circ \psi^{-1} \circ F$ , alors :

$$\begin{aligned} h' &= h \circ \psi' = \frac{2e^{\eta \circ \psi'}}{\sqrt{1 - |\psi^{-1} \circ F|^2}} = \left( e^{\eta \circ \psi'} \frac{|1 - \overline{w_0}F|}{\sqrt{1 - |w_0|^2}} \right) \frac{2}{\sqrt{1 - |F|^2}} \\ &= \exp \left( \eta \circ \psi' + \log \left( \frac{|1 - \overline{w_0}F|}{\sqrt{1 - |w_0|^2}} \right) \right) \frac{2}{\sqrt{1 - |F|^2}}, \end{aligned}$$

et  $S' \in \mathcal{S}$ . En remplaçant  $F$  par  $\overline{F}$ , on obtient le résultat pour  $\psi$  isométrie de  $\mathbb{H}^2$  renversant l'orientation.  $\square$

Notons que la valeur  $\eta|_{\partial\mathbb{D}}$  est invariante par translation verticale. La seconde propriété de la famille qui nous intéresse  $\mathcal{S}$  concerne l'extension de l'opérateur courbure moyenne en un opérateur sur les fonctions  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  au-dessus de domaines fermés :

**Théorème 3.3.** *Soient  $\Omega \in \mathcal{D}$  et  $a \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . On note avec des indices 1, 2 les quantités relatives aux coordonnées  $r, \theta$  respectivement. Alors, pour tout  $\xi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  les courbures moyennes  $H(a + \xi)$  et  $H(a)$ , de  $X^{a+\xi}$  et  $X^a$  respectivement, vérifient :*

$$\sqrt{|g(a)|} (H(a + \xi) - H(a)) = \sum_{i,j} A_{ij}(r, \theta, a, D\xi) \xi_{ij} + B(r, \theta, a, \xi, D\xi), \quad (3.3)$$

avec  $|g(a)|$  déterminant de la métrique induite par  $X^a$ ,  $A_{ij}$  et  $B$  des fonctions  $\mathcal{C}^{0,\alpha}$  sur  $\overline{\mathbb{D}}$  qui sont analytiques réelles en leurs variables, et  $A = (A_{ij})$  matrice coercive sur  $\overline{\mathbb{D}}$ .

*Preuve* (voir l'annexe Section 3.5 pour les détails). On note  $d\sigma^2$  la métrique  $F^*ds_{\mathbb{H}}^2$ , i.e. :

$$\sigma = \frac{16}{(1-r^2)^4} \begin{pmatrix} (1-r^2)^2 & 0 \\ 0 & r^2(1+r^2) \end{pmatrix}.$$

Les propriétés différentielles d'une surface dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  de coordonnées graphe  $(F, h)$  sont précisément celles du graphe de la fonction  $h$  dans l'espace  $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$  muni de la métrique  $d\sigma^2 + dx_3^2$ . D'après J. Spruck [32], la courbure moyenne  $H(a + \xi)$  s'écrit :

$$H(a + \xi) = \frac{1}{2} \operatorname{div}_\sigma \left( \frac{\nabla_\sigma h(a + \xi)}{W(a + \xi)} \right) \quad \text{avec} \quad W(a + \xi) = \sqrt{1 + |\nabla_\sigma h(a + \xi)|_\sigma^2},$$

les quantités étant calculées relativement à  $d\sigma^2$ . Si les  $(\Gamma_{ij}^k)$  sont les symboles de Christoffel associés à  $d\sigma^2$ , on a :

$$H(a + \xi) = \frac{1}{2W(a + \xi)} \sum_{i,j} g^{ij}(a + \xi) \left( \partial_{ij} h(a + \xi) - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k h(a + \xi) \right),$$

avec comme symboles de Christoffel non nuls :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{2r}{1-r^2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{4r}{1-r^2} \left( 1 + \frac{1+3r^2}{4r^2(1+r^2)}(1-r^2) \right) \\ \text{et } \Gamma_{22}^1 &= -\frac{4r^3(1+r^2)^2}{(1-r^2)^3} \left( 1 + \frac{1+3r^2}{4r^2(1+r^2)}(1-r^2) \right). \end{aligned}$$

La métrique induite  $g(a)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} g_{11}(a) &= \frac{64r^2 e^{2a}}{(1-r^2)^4} \left[ 1 + \frac{1+r^2}{2r} a_1 (1-r^2) + \frac{(1+r^2)^2}{16r^2} \left( a_1^2 + \frac{4e^{-2a}}{(1+r^2)^2} \right) (1-r^2)^2 \right], \\ g_{12}(a) &= \frac{16r(1+r^2)e^{2a}}{(1-r^2)^3} a_2 \left[ 1 + \frac{1+r^2}{4r} a_1 (1-r^2) \right] \\ \text{et } g_{22}(a) &= \frac{16r^2(1+r^2)^2 e^{2a}}{(1-r^2)^4} \left[ e^{-2a} + \frac{a_2^2}{4r^2} (1-r^2)^2 \right], \end{aligned}$$

et  $W(a)$  s'exprime  $W(a) = \sqrt{|g(a)|/|\sigma|}$ .

Le calcul détaillé dans l'annexe (Section 3.5) donne l'expression (3.3) avec la régularité souhaitée, et asymptotiquement, on a :

$$A_{11} = e^{-a} + O(1 - r^2), \quad A_{12} = A_{21} = O(1 - r^2) \quad \text{et} \quad A_{22} = e^a + O(1 - r^2),$$

ce qui établit la coercivité de  $A$ . □

L'opérateur  $\eta \mapsto \sqrt{g(a)}(H(\eta) - H(a))$  est qualifié de *compactification* de la courbure moyenne parce que sa construction repose sur une *compactification* de la métrique induite  $g(a)$ . En effet, cet opérateur est elliptique si et seulement si  $g(a)$  peut être prolongée en une métrique sur  $\overline{\mathbb{D}}$ , avec l'égalité suivante :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\gamma^a} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma^a} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|g(a)|}} g(a) + O(1 - r^2) \quad \text{avec} \quad \gamma^a = a|_{\partial\mathbb{D}}.$$

### 3.3 Structure de variété sur la famille $\mathcal{G}$

Soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble des graphes entiers CMC-1/2, éléments de  $\mathcal{S}$  et contenus dans le demi-espace  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ . On utilise (3.1) pour décrire une surface de  $\mathcal{G}$  en coordonnées graphe :

$$X^\eta = \left( F, 2e^\eta \frac{1+r^2}{1-r^2} \right) \quad \text{avec} \quad \eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}}),$$

et la fonction  $\eta|_{\partial\mathbb{D}} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , définie géométriquement, est la *valeur à l'infini* de la surface.

On considère un graphe entier CMC-1/2  $S$  dans  $\mathcal{G}$ , de coordonnées graphe  $X^a$  avec  $a \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$  et l'on note  $\gamma^a = a|_{\partial\mathbb{D}}$  sa valeur à l'infini. Un calcul simple montre que la composante verticale  $\varphi^a > 0$  de la normale unitaire,  $N^a$  à  $X^a$  s'exprime comme :

$$\varphi^a = \frac{e^{-a} (1 - r^2)}{2n^a (1 + r^2)}, \tag{3.4}$$

où  $n^a$  est une fonction  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  positive sur  $\overline{\mathbb{D}}$  telle que  $n^a|_{\partial\mathbb{D}} = 1/2$ .

**Lemme 3.4.** *La différentielle de l'opérateur  $H : \eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}}) \mapsto H(\eta) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$  au point  $a$  est :*

$$\forall \eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}}), \quad DH(a) \cdot \eta = \frac{1}{2} L \left( \frac{\eta}{n^a} \right),$$

avec  $L$  opérateur de Jacobi de  $X^a$ .

*Preuve.* Si  $(X^{\eta_t})$  est une famille différentiable telle que  $\eta_0 = a$  et  $\eta_t \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$ , on a classiquement :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(\eta_t) = \frac{1}{2} L \left\langle \left. \frac{dX^{\eta_t}}{dt} \right|_{t=0}, N^a \right\rangle = \frac{1}{2} L \left( 2e^a \varphi^a \frac{1+r^2}{1-r^2} \left. \frac{d\eta_t}{dt} \right|_{t=0} \right),$$

et l'expression (3.4) de  $\varphi^a$  permet de conclure.  $\square$

En utilisant le Théorème 3.3, on définit l'opérateur courbure moyenne compactifié comme :

$$\overline{H} : \eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}}) \mapsto \sqrt{|g(a)|} \left( H(a + 2n^a \eta) - \frac{1}{2} \right) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{D}}).$$

L'opérateur de Jacobi compactifié est  $\overline{L} = D\overline{H}(0) : \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}}) \rightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$  et en appliquant le Lemme 3.4, on obtient :

$$\overline{L} = \sqrt{|g(a)|} L.$$

On note  $\overline{L}_0$  la restriction de  $\overline{L}$  à  $\mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$ , et l'on considère  $K = \ker \overline{L}_0$ ,  $K^\perp$  l'orthogonal de  $K$  dans  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$  et  $K_0^\perp = K^\perp \cap \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$ .

Soit enfin  $\mu_a : \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$  tel que  $\mu_a(\gamma)$  est l'extension harmonique sur  $\overline{\mathbb{D}}$  (pour le laplacien plat) de la fonction  $\gamma - \gamma^a$  sur le bord  $\partial\mathbb{D}$ . Cet opérateur contient dans la suite l'information sur le comportement asymptotique.

Soient  $u, v \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$ . Pour  $R \in ]0, 1[$ ,  $L$  satisfait une identité de Green sur  $\{r \leq R\}$  :

$$\int_{\{r \leq R\}} (uLv - vLu) dA = \int_{\{r=R\}} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds,$$

avec  $dA$  et  $ds$  mesures correspondant à la métrique induite par  $X^a$  sur  $\{r \leq R\}$  et  $\{r = R\}$  respectivement, et où  $\nu$  est la co-normale avec  $d \cdot / \partial \nu$  dérivée co-normale. On note que :

$$dA = \sqrt{|g(a)|} d\overline{A}, \quad ds = \sqrt{g_{22}(a)} d\theta \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{g_{22}(a)|g(a)|}} (g_{22}(a)X_1^a - g_{12}(a)X_2^a),$$

avec  $d\overline{A}$  mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ . En prenant la limite lorsque  $R \rightarrow 1$ , on obtient un identité de Green pour  $\overline{L}$  sur  $\overline{\mathbb{D}}$  :

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} (u\overline{L}v - v\overline{L}u) d\overline{A} = \int_0^{2\pi} e^{-\gamma^a} \left( u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} d\theta. \quad (3.5)$$



Un résultat standard montre que la restriction  $\bar{L}_0$  est un opérateur de Fredholm d'indice nul (voir notamment [24]). Précisément,  $K = \mathbb{R}\varphi^a$  et  $\bar{L}_0(\mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\bar{\mathbb{D}})) = K^\perp$ . On peut alors montrer qu'il n'existe pas de solution  $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\mathbb{D}})$  à l'équation :

$$\bar{L}u = 0 \text{ on } \bar{\mathbb{D}} \quad \text{et} \quad u|_{\partial\mathbb{D}} = 1. \quad (3.6)$$

En effet, si une telle solution  $u$  existait, on aurait :

$$0 = \int_{\bar{\mathbb{D}}} (\varphi^a \bar{L}u - u \bar{L}\varphi^a) d\bar{A} = \int_0^{2\pi} e^{-\gamma^a} \left( \varphi^a \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \varphi^a}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-2\gamma^a} d\theta,$$

par application de l'identité de Green (3.5) à  $\varphi^a$  et  $u$ , ce qui est impossible.

### 3.3.1 Déformations générales

Soient  $\Pi_K$  et  $\Pi_{K^\perp}$  les projections orthogonales sur  $K$  et  $K^\perp$  respectivement. Suivant B. White [36], on montre :

**Lemme 3.5.** *Soit  $\Phi : \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{R} \times K_0^\perp \rightarrow K^\perp$  l'application définie par :*

$$\Phi(\gamma, \lambda, \sigma) = \Pi_{K^\perp} \circ \bar{H}(\mu_a(\gamma) + \lambda\varphi^a + \sigma).$$

Alors  $D_3\Phi(\gamma^a, 0, 0) : K_0^\perp \rightarrow K^\perp$  est un isomorphisme.

*Preuve.* Un calcul simple donne  $D_3\Phi(\gamma^a, 0, 0) = \Pi_{K^\perp} \circ \bar{L}_0|_{K_0^\perp}$  et l'on sait que  $K^\perp$  est l'image de  $\bar{L}_0$ . Donc  $D_3\Phi(\gamma^a, 0, 0) = \bar{L}_0|_{K_0^\perp}$  est bien un isomorphisme sur  $K^\perp$ .  $\square$

On applique alors le théorème des fonctions implicites à  $\Phi$ , ce qui assure l'existence d'un voisinage  $U_a$  de  $(\gamma^a, 0)$  dans  $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}$  et d'une unique application lisse  $\sigma : U_a \rightarrow K_0^\perp$  telle que :

$$\sigma(\gamma^a, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (\gamma, \lambda) \in U_a, \quad \Phi(\gamma, \lambda, \sigma(\gamma, \lambda)) = 0.$$

On définit les applications  $\eta_a : U_a \rightarrow \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\mathbb{D}})$  et  $\kappa_a : U_a \rightarrow K$  comme :

$$\eta_a(\gamma, \lambda) = a + 2n^a(\mu_a(\gamma) + \lambda\varphi^a + \sigma(\gamma, \lambda)) \quad \text{et} \quad \kappa_a(\gamma, \lambda) = \Pi_K \circ \bar{H}(\mu_a(\gamma) + \lambda\varphi^a + \sigma(\gamma, \lambda)).$$

Si une surface de  $\mathcal{S}$  admet  $X\eta_a(\gamma, \lambda)$  comme coordonnées graphe, on dit que  $\{\gamma, \lambda\}$  sont les *données* de la surface par rapport à  $S$  ou  $a$ .

**Lemme 3.6.** *L'application  $\eta_a$  satisfait les propriétés suivantes :*

1.  $\eta_a(\gamma^a, 0) = a$ .
2.  $\forall (\gamma, \lambda) \in U_a, \eta_a(\gamma, \lambda)|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma$ .
3.  $D_2\eta_a(\gamma^a, 0) : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto 2\lambda n^a \varphi^a \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$ .

*Preuve.* Le Point 1 vient de la définition de  $\mu_a$  et de l'unicité dans le théorème des fonctions implicites, et le Point 2 résulte d'un calcul direct. Pour le Point 3, il est suffisant de montrer que  $D_2\sigma(\gamma^a, 0) = 0$ . Pour ce faire, on écrit :

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\gamma^a, t, \sigma(\gamma^a, t)) = \Pi_{K^\perp} \circ \bar{L}_0(\varphi^a + D_2\sigma(\gamma^a, 0) \cdot 1) = \bar{L}_0(D_2\sigma(\gamma^a, 0) \cdot 1).$$

Ainsi,  $D_2\sigma(\gamma^a, 0) \cdot 1 \in K \cap K^\perp = \{0\}$ , d'où  $D_2\sigma(\gamma^a, 0) = 0$ .  $\square$

Soit  $S' \in \mathcal{G}$  de coordonnées graphe  $X^{a'}$ . Supposons qu'il existe une surface dans  $\mathcal{S}$  de données  $\{\gamma, \lambda\}$  et  $\{\gamma', \lambda'\}$  par rapport à  $S$  et  $S'$  respectivement. Alors, cette surface admet des coordonnées graphe  $X^{\eta_a(\gamma, \lambda)}$  et  $X^{\eta_{a'}(\gamma', \lambda')}$  — i.e.  $\eta_a(\gamma, \lambda) = \eta_{a'}(\gamma', \lambda')$  — ce qui donne :

$$\gamma' = \gamma \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{1}{|\varphi^{a'}|_{L^2(\mathbb{D})}^2} \left\langle \frac{\eta_a(\gamma, \lambda) - a'}{2n^{a'}} - \mu_{a'}(\gamma), \varphi^{a'} \right\rangle_{L^2(\mathbb{D})}. \quad (3.7)$$

L'égalité des valeurs à l'infini vient du Lemme 3.6 Point 2, et l'expression de  $\lambda'$  est simplement la projection le long de  $\varphi^{a'}$ .

Le lemme 3.6 Point 2 montre également que la valeur à l'infini d'une surface  $X^{\eta_a(\gamma, \lambda)}$  ne dépend pas de  $\lambda$ , ce qui signifie qu'il existe une famille à 1 paramètre de surfaces admettant la même valeur à l'infini. Cette famille est en fait celle des translatées verticales de  $X^{\eta_a(\gamma, \lambda)}$ .

**Proposition 3.7.** *Soit  $(\gamma, \lambda) \in U_a$ . La surface  $X^{\eta_a(\gamma, \lambda')}$  existe pour tout  $\lambda' \in \mathbb{R}$  et coïncide avec  $X^{\eta_a(\gamma, \lambda)}$  à translation verticale près.*

*Preuve.* Quitte à changer  $a$  en  $\eta_a(\gamma, \lambda)$ , on peut supposer, d'après (3.7), que  $\gamma = \gamma^a$  et  $\lambda = 0$ . Si  $m$  est la borne inférieure de la fonction hauteur de  $S$  sur  $\mathbb{D}$ , les coordonnées graphe de la translatée de  $S$  par la translation verticale de  $x \in \mathbb{R}$  peuvent s'écrire  $X^{a'}$  si et seulement si  $x > -m$ , et auquel cas :

$$a' = a + \log \left( 1 + x \frac{e^{-a}}{2} \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \right).$$

Il est clair que  $a'|_{\partial\mathbb{D}} = a|_{\partial\mathbb{D}}$ , d'où  $\mu_a(a') = 0$ . Il suffit donc de montrer que la coordonnée  $\lambda$  de  $(a' - a) \in \mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\mathbb{D})$  le long de  $n^a \varphi^a$  est, pour la variable  $x$ , une bijection de  $] - m, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ . L'expression de  $\lambda$  est la suivante :

$$\lambda = \frac{1}{|\varphi^a|_{L^2(\mathbb{D})}^2} \left\langle \frac{a' - a}{2n^a}, \varphi^a \right\rangle_{L^2(\mathbb{D})} = \frac{1}{2\pi |\varphi^a|_{L^2(\mathbb{D})}^2} \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi^a}{n^a} \log \left( 1 + x \frac{e^{-a}}{2} \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \right),$$

qui est effectivement bijective de  $] - m, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Le fait de devoir se limiter à des translations verticales  $x \geq -m$  est clairement un artefact de l'écriture sous forme exponentielle. Cela permet par contre de borner inférieurement les surfaces considérées.

### 3.3.2 Déformations CMC-1/2

La valeur de la courbure moyenne d'une déformation  $X^{\eta_a(\gamma, \lambda)}$  de  $S$  est déterminée par  $\kappa_a$  de par l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \overline{H}(\mu_a(\gamma) + \lambda \varphi^a + \sigma(\gamma, \lambda)) &= \kappa_a(\gamma, \lambda) + \Phi(\gamma, \lambda, \sigma(\gamma, \lambda)) = \kappa_a(\gamma, \lambda), \\ \text{puisque } \kappa_a(\gamma, \lambda) &= \Pi_K \circ \overline{H}(\mu_a(\gamma) + \lambda \varphi^a + \sigma(\gamma, \lambda)) \\ \text{et } \Phi(\gamma, \lambda, \sigma(\gamma, \lambda)) &= \Pi_{K^\perp} \circ \overline{H}(\mu_a(\gamma) + \lambda \varphi^a + \sigma(\gamma, \lambda)) = 0. \end{aligned}$$

En particulier, la construction de l'opérateur courbure moyenne compactifié  $\overline{H}$ , dont les points critiques sont des immersions CMC-1/2, donne :

$$\forall (\gamma, \lambda) \in U_a, \quad H(\eta_a(\gamma, \lambda)) = \frac{1}{2} \iff \kappa_a(\gamma, \lambda) = 0.$$

On considère  $\mathcal{U}_a = \kappa_a^{-1}(\{0\}) \cap U_a$  et  $\mathcal{V}_a \subset \mathcal{G}$  l'ensemble des surfaces dont les données sont dans  $\mathcal{U}_a$ . D'après la Proposition 3.7, il existe un sous-ensemble  $\Gamma_a \subset \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1)$  tel que  $\mathcal{U}_a = \Gamma_a \times \mathbb{R}$ .

**Proposition 3.8.**  $\Gamma_a$  est une sous-variété réelle-analytique de codimension 1 de  $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1)$  telle que l'espace tangent à  $\Gamma_a$  en  $\gamma^a$  est l'orthogonal  $\langle e^{-2\gamma^a} \rangle^\perp$  à  $e^{-2\gamma^a}$  dans  $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1)$  pour le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{S}^1)$ . De plus,  $\Gamma_a$  est un sous-espace fermé de :

$$\left\{ \gamma \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1) \mid |e^{-\gamma}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = |e^{-\gamma^a}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} \right\}.$$

*Preuve.* Il est clair que  $\Gamma_a$  est une sous-variété lisse de  $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1)$  et que sa codimension est le rang de  $D\kappa_a(\gamma^a, 0)$ . On calcule :

$$D_2\kappa_a(\gamma^a, 0) \cdot 1 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \kappa_a(\gamma^a, t) = \Pi_K \circ \bar{L} \left( \frac{1}{2n^a} D_2\eta_a(\gamma^a, 0) \cdot 1 \right) = \Pi_K \circ \bar{L}_0(\varphi^a) = 0.$$

Donc le rang de  $D\kappa_a(\gamma^a, 0)$  est celui de  $D_1\kappa_a(\gamma^a, 0)$ , et l'on a  $\text{rg } D_1\kappa_a(\gamma^a, 0) \leq \dim K = 1$ . Il suffit donc de mettre en évidence une courbe  $\gamma \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1)$  telle que  $D_1\kappa_a(\gamma^a, 0) \cdot \gamma$  n'est pas identiquement nulle. On peut prendre  $\gamma \equiv 1$ . En effet :

$$D_1\kappa_a(\gamma^a, 0) \cdot 1 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \kappa_a(t, 0) = \Pi_K \circ \bar{L}u = \bar{L}u \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{2n^a} D_1\eta_a(\gamma^a, 0) \cdot 1.$$

On a  $u|_{\partial\mathbb{D}} = 1$ , d'après le lemme 3.6 Point 2. Et comme l'équation (3.6) n'a pas de solution,  $D_1\kappa_a(\gamma^a, 0) \cdot 1$  n'est pas identiquement nulle.

On considère un chemin lisse  $\gamma_t$  de  $\Gamma_a$  avec  $\gamma_0 = \gamma^a$  et des vecteurs tangents notés  $\dot{\gamma}_t$ . On a :

$$0 = D\kappa_a(\gamma^a, 0) \cdot (\dot{\gamma}_0, 0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \kappa_a(\gamma_t, 0) = \Pi_K \circ \bar{L}v = \bar{L}v \quad \text{avec} \quad v = \frac{1}{2n^a} D_1\eta_a(\gamma^a, 0) \cdot \dot{\gamma}_0,$$

et en appliquant l'identité de Green (3.5) à  $\varphi^a$  et  $v$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{D}} (\varphi^a \bar{L}v - v \bar{L}\varphi^a) d\bar{A} = \int_0^{2\pi} e^{-\gamma^a} \left( \varphi^a \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial \varphi^a}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \dot{\gamma}_0 e^{-2\gamma^a} d\theta = 2\pi \langle \dot{\gamma}_0, e^{-2\gamma^a} \rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ainsi  $\langle e^{-2\gamma^a} \rangle^\perp$  est bien l'espace tangent à  $\Gamma_a$  en  $\gamma^a$ , sa codimension étant 1.

Pour un  $t$  fixé, soient  $\gamma'_s = \gamma_{s+t}$  le chemin reparamétré et  $a' = \eta_a(\gamma_t, 0)$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\gamma'_s \in \Gamma_{a'}$  pour tout  $|s| < \varepsilon$ , donc le chemin de surfaces  $X^{\eta_a(\gamma'_s, 0)}$  peut être décrit par un chemin de données  $\{\gamma'_s, \lambda'_s\}$  dans  $\mathcal{U}_{a'}$ ,  $|s| < \varepsilon$ , avec  $\lambda'_0 = 0$  et des vecteurs tangents notés  $\dot{\gamma}'_s$ . Par construction, on sait que  $\dot{\gamma}'_0 = \dot{\gamma}_t$ . Le résultat (3.8) s'applique à  $\{\gamma'_s, \lambda'_s\}$ , d'où :

$$\frac{d}{dt} |e^{-\gamma_t}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 = -2 \langle \dot{\gamma}_t, e^{-2\gamma_t} \rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)} = 0,$$

pour tout  $t$ , et donc la norme  $|e^{-\gamma_t}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}$  est constante.

Pour montrer que  $\Gamma_a$  est fermé, on considère  $\gamma$  dans la fermeture  $\overline{\Gamma_a}$ , et un chemin lisse  $(\gamma_t)$  tel que  $\gamma_0 = \gamma^a$ ,  $\gamma_1 = \gamma$  et  $\gamma_t \in \Gamma_a$  pour tout  $0 \leq t < 1$ . Pour  $t \in [0, 1[$ , il existe une immersion  $X_t$  de valeur à l'infini  $\gamma_t$ , et d'après la Proposition 3.7, on peut supposer que la hauteur minimale de  $X_t$  est exactement 1, pour empêcher les immersions de s'échapper à l'infini. Il suffit de montrer que  $X_t$  converge lorsque  $t \rightarrow 1$  vers un graphe vertical  $X_1$  sans point asymptotique à hauteur finie. Le fait que  $X_1$  admette  $\gamma$  comme valeur à l'infini est alors direct, puisque les surfaces sont en fait considérées comme des surfaces à bord, à cause de la propriété de compactification.

Soit  $d = 2 \max \{|\gamma_t| \mid 0 \leq t \leq 1\}$ , la plus grande distance à  $S_0$  à l'infini, et considérons  $\beta = e^{d+1}$ . Comme développé au début de la Section 3.4, un anneau de révolution  $A_\beta$  immergé, à distance algébrique  $-\log \beta = -d - 1$  de  $S_0$  à l'infini. Précisément, cela signifie qu'à l'infini la distance hyperbolique entre  $A_\beta$  et un  $X_t$  arbitraire est supérieure à 1, et que le bout de chaque  $X_t$  est contenue dans la partie mean-convexe de  $A_\beta$ . Quitte à translater  $A_\beta$  verticalement (ce qui préserve le comportement asymptotique), on peut supposer que  $A_\beta \cap (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_+^*)$  est plongé et que  $X_0$  est strictement incluse dans la partie mean-convexe de  $A_\beta$ . On utilise  $A_\beta$  comme barrière extérieure, et il reste seulement à montrer que les  $X_t$  sont totalement contenues dans la partie mean-convexe de  $A_\beta$  pour tout  $t \in [0, 1[$ , pour obtenir l'existence de  $X_1$ .

Pour de petites valeurs du paramètre  $t$ ,  $X_t$  est strictement incluse dans la partie mean-convexe de  $A_\beta$ , puisque le processus est lisse. Par l'absurde, supposons qu'il existe une première valeur  $t_0 \in ]0, 1[$  pour laquelle la distance hyperbolique entre  $X_{t_0}$  et  $A_\beta$  est nulle. Par construction de  $A_\beta$ , le contact n'est pas à l'infini, de telle sorte que l'on puisse appliquer le principe du maximum à  $A_\beta$  et  $X_{t_0}$ , ce qui est absurde.  $\square$

### 3.3.3 Applications

**Théorème 3.9.** *La famille  $\mathcal{G}$  peut être munie d'une structure de variété lisse de dimension infinie modélée sur l'espace  $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}$ .*

*Preuve.* Il suffit de montrer que pour toute surface  $S \in \mathcal{G}$  de coordonnées graphe  $X^a$ , une carte locale au voisinage de  $S$  est donnée par l'application  $S' \in \mathcal{V}_a \mapsto (\gamma, \lambda) \in \mathcal{U}_a$  où  $\{\gamma, \lambda\}$  sont les données de  $S'$  par rapport à  $a$ . Cette propriété se déduit directement des relations (3.7).  $\square$

A. E. Treibergs a montré [35] qu'étant donnée une courbe  $\gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{S}^1)$ , il existe un graphe entier vertical, complet et CMC-1/2 dans  $\mathbb{L}^3$  qui est asymptotiquement à distance  $\gamma$  du cône de lumière. Précisément, cette surface est le graphe d'une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$f(x) = |x| + \gamma \left( \frac{x}{|x|} \right) + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

La structure de  $\mathcal{G}$  permet de montrer une version  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  de ce résultat dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

**Théorème 3.10.** *Soient  $S$  une surface dans  $\mathcal{G}$  de coordonnées graphe  $X^a$  et  $\gamma \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1)$  telle que  $|e^{-\gamma}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = |e^{-\gamma^a}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}$ . Il existe une surface de  $\mathcal{G}$  admettant  $\gamma$  comme valeur à l'infini.*

*En particulier, si  $S = S_0$  il existe un graphe entier vertical, complet et CMC-1/2 asymptotiquement à distance normale  $\gamma$  de  $S_0$ , pour tout  $\gamma \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1)$  de norme  $L^2(\mathbb{S}^1)$  unitaire.*

*Preuve.* Soient  $\gamma_t$  le chemin de  $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1)$  défini pour tout  $0 \leq t \leq 1$  par :

$$\gamma_t = -\frac{1}{2} \log \left( (1-t)e^{-2\gamma^a} + te^{-2\gamma} \right),$$

et  $\mathcal{T}$  l'ensemble des  $t \in [0, 1]$  pour lesquels  $\gamma_t$  est la valeur à l'infini d'une surface de  $\mathcal{G}$ . On sait que  $\mathcal{T}$  n'est pas vide, vu que  $0 \in \mathcal{T}$ . D'après la Proposition 3.8 et le fait que  $|e^{-\gamma_t}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = |e^{-\gamma^a}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}$  pour tout  $t$ , il est clair que  $\mathcal{T}$  est connexe, d'où  $1 \in \mathcal{T}$ .  $\square$

**Corollaire 3.11.** *Pour toute surface dans  $\mathcal{G}$  de coordonnées graphe  $X^a$ , on a :*

$$\Gamma_a = \left\{ \gamma \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1) \mid |e^{-\gamma}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = |e^{-\gamma^a}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} \right\}.$$

### 3.4 Déformations d'anneaux CMC-1/2

R. Sa Earp et E. Toubiana ont montré [17] que — à une isométrie de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  près — un anneau vertical CMC-1/2 de révolution est un bi-graphe, symétrique par rapport au plan  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ . La partie graphique supérieure d'un tel anneau admet des coordonnées graphe  $(F, h_\beta)$ , avec  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\beta \neq 1$  et  $h_\beta$  défini par :

$$h_\beta(r) = \int_{|\log \beta|}^{2 \log \left( \frac{1+r}{1-r} \right)} \frac{\operatorname{ch} t - \beta}{\sqrt{2\beta \operatorname{ch} t - 1 - \beta^2}} dt \quad \text{pour} \quad r \geq \left| \frac{\sqrt{\beta} - 1}{\sqrt{\beta} + 1} \right| = R_\beta.$$

On note  $A_\beta$  cet anneau, qui est plongé si  $0 < \beta < 1$  et seulement immergé pour  $\beta > 1$ . On a le développement asymptotique suivant lorsque  $r \rightarrow 1$  :

$$h_\beta(r) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{1+r}{1-r} + O(1),$$

ce qui signifie que la restriction de  $(F, h_\beta)$  au domaine extérieur  $\Omega_{R_\beta}$  est dans  $\mathcal{S}$  de valeur à l'infini constante égale à  $-\log \beta$ . La méthode développée à la Section 3.3 devrait donc pouvoir être adaptée à l'étude des déformations de ces anneaux.

On commence par modifier légèrement les notations. Fixons  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$  avec  $\beta \neq 1$ ; l'anneau  $A_\beta$  est désormais notre surface modèle. Pour déformer cet anneau de révolution, on a besoin de coordonnées conformes pour assurer une compactification de la courbure moyenne. Une telle paramétrisation de  $A_\beta$ , en coordonnées cylindriques, est la suivante :

$$\begin{aligned} X^0 : (s, \theta) \in \Omega^\beta &\mapsto \left( F(r(s), \theta), \varepsilon(s) h_\beta(r(s)) \right) \quad \text{avec} \quad \Omega^\beta = ]-T, T[ \times \mathbb{S}^1, \quad (3.9) \\ T &= \frac{4}{|\beta - 1|} \int_{R_\beta}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - R_\beta^2)(R_\beta^{-2} - t^2)}}, \quad \varepsilon(s) = \text{signe}(s), \\ \frac{dr}{ds} &= \frac{|\beta - 1|}{4} \sqrt{(r^2(s) - R_\beta^2)(R_\beta^{-2} - r^2(s))} \quad \text{et} \quad r(0) = R_\beta. \end{aligned}$$

On identifie les fonctions sur  $A_\beta$  aux fonctions sur  $\Omega^\beta$  et l'on appelle *paramétrisation cylindrique* d'un anneau déformé l'immersion suivante :

$$X^\eta : (s, \theta) \in \Omega^\beta \mapsto \left( F(r(s), \theta), \varepsilon(s) e^{\eta(s, \theta)} h_\beta(r(s)) \right) \quad \text{avec} \quad \eta \in \mathcal{C}^{2, \alpha}(\overline{\Omega^\beta}).$$

Le déterminant de la première forme fondamentale est  $|g(\eta)|$ , la courbure moyenne  $H(\eta)$  et les valeurs à l'infini sont le couple  $(\eta(T, \cdot), \eta(-T, \cdot)) \in (\mathcal{C}^{2, \alpha}(\mathbb{S}^1))^2$ .

### 3.4.1 Non dégénérescence des anneaux de révolution

De même qu'à la Section 3.3, on a besoin de comprendre les fonctions de Jacobi pour contrôler les déformations. On porte donc une attention particulière à l'étude des anneaux de  $\mathcal{S}$  qui sont non dégénérés dans le sens suivant :

**Définition 3.12.** Une surface immergée dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  est dite *non dégénérée* si les seules fonctions de Jacobi nulles sur le bord de la surface proviennent des isométries de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

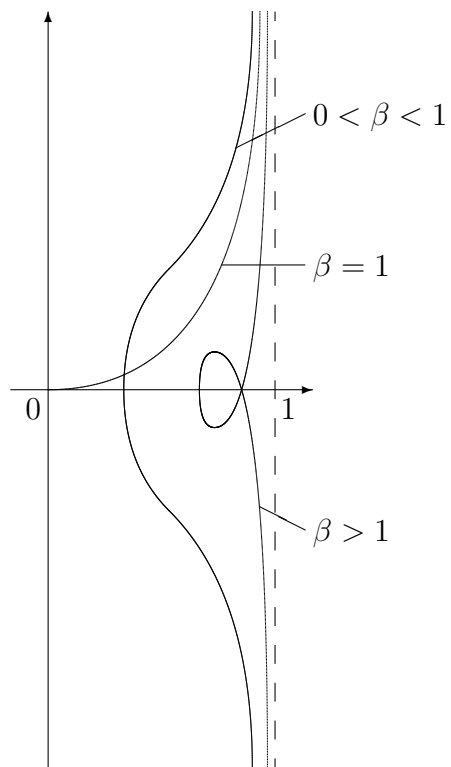


FIGURE 3.1 – Courbes génératrices des anneaux de révolution  
(Modèle du disque de Poincaré)



D'après la preuve de la Proposition 3.2 et la forme des bouts, il est clair que si un anneau de  $\mathcal{S}$  est non dégénéré, alors l'espace des fonctions de Jacobi nulles au bord est de dimension 1, engendré par la composante verticale de la normale unitaire. Autre remarque intéressante, comme le rang de l'opérateur de Jacobi est localement constant, de « petites » déformations d'anneaux non dégénérés sont encore non dégénérées. Ainsi, la méthode utilisée à la Section 3.3 peut être strictement transposée à l'étude des déformations dans de petits voisinages d'exemples non dégénérés.

**Proposition 3.13.** *L'anneau  $A_\beta$  est non dégénéré pour toute valeur de  $\beta$ .*

*Preuve.* Si  $L$  est l'opérateur de Jacobi de  $A_\beta$ , son compactifié  $\bar{L}$  s'écrit  $\Delta + q(s)$  dans paramétrisation conforme (3.9), où  $\Delta$  représente le laplacien plat et  $q \in \mathcal{C}^0([-T, T])$ . De plus,  $A_\beta$  étant symétrique par rapport au plan  $\mathbb{H}^2$ , la fonction  $q$  est paire. Comme une fonction de Jacobi est  $2\pi$ -périodique en  $\theta$ , en utilisant une décomposition en série de Fourier, on se ramène à résoudre une famille  $(D_n)$  de problèmes de Dirichlet sur  $\mathcal{C}^2([-T, T])$  pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u'' + (q(s) - n^2)u = 0 \quad \text{et} \quad u(-T) = u(T) = 0. \quad (D_n)$$

On fait deux observations immédiates :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les parties paire et impaire d'une solution de  $(D_n)$  sont également solutions de  $(D_n)$ . On peut donc seulement considérer les solutions paires et impaires.
- La composante verticale  $\varphi$  de la normale unitaire à  $A_\beta$  est une solution impaire de  $(D_0)$  qui ne s'annule pas sur  $]0, T[$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une solution impaire de  $(D_n)$  est proportionnelle à  $\varphi$ . Sinon, d'après le théorème de comparaison de Sturm avec  $q - n^2 \leq q$ ,  $\varphi$  devrait s'annuler une fois sur  $]0, T[$ . L'équation  $(D_n)$  n'admet pas de solution paire. Supposons qu'une telle fonction existe. D'après le théorème de comparaison de Sturm, cette fonction ne s'annule pas sur  $] -T, T[$  puisqu'elle ne peut s'annuler en 0 et que  $\varphi$  ne s'annule qu'en 0, et donc  $n^2$  est la première valeur propre de l'opérateur elliptique :

$$\frac{d^2}{ds^2} + q(s),$$

ce qui contrevient à l'existence de  $\varphi$ . □

### 3.4.2 Petites déformations CMC-1/2

**Définition 3.14.** Un anneau vertical CMC-1/2 est dit  $\beta$ -déformable pour  $\beta \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ , s'il est non dégénéré, s'il admet une paramétrisation cylindrique de la forme  $X^b$  avec  $b \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega^\beta})$ , et si ses valeurs à l'infini, notées  $\gamma^b = (\gamma_+^b, \gamma_-^b) = b|_{\partial\Omega^\beta}$ , vérifient :

$$|e^{-\gamma_+^b}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = |e^{-\gamma_-^b}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Soit  $A$  un anneau  $\beta$ -déformable. On utilise les notations de la Définition 3.14. De nouveau, la composante verticale  $\varphi^b$  de la normale unitaire à  $A$  s'écrit sous la forme :

$$\varphi^b = \varepsilon \frac{e^{-b}}{h_\beta(r)} \frac{1}{n^b} \quad \text{avec} \quad n^b|_{\partial\Omega^\beta} = \frac{1}{2},$$

et l'on définit l'opérateur courbure moyenne compactifié comme à la Section 3.3 :

$$\overline{H} : \eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega^\beta}) \mapsto \sqrt{|g(b)|} \left( H(b + 2n^b\eta) - \frac{1}{2} \right) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega^\beta}).$$

L'opérateur de Jacobi compactifié est encore  $\overline{L} = D\overline{H}(0)$ ,  $\overline{L}_0$  désigne sa restriction à  $\mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega^\beta})$  et  $K, K^\perp, K_0^\perp$  sont définis comme précédemment. L'hypothèse de non dégénérescence sur  $A$  entraîne  $\overline{L}_0 = \mathbb{R}\varphi^b$ . Enfin,  $\mu_b : (\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1))^2 \rightarrow \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega^\beta})$  désigne la fonction harmonique sur  $\overline{\Omega^\beta}$  de valeurs  $\gamma - \gamma^b$  sur  $\partial\Omega^\beta$ .

L'opérateur de Jacobi compactifié satisfait une identité de Green similaire à l'identité de Green (3.5). Soient  $u, v \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega^\beta})$  et désignons par  $d\overline{A}$  la mesure de Lebesgue sur  $\overline{\Omega^\beta}$ . On a la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega^\beta}} (u\overline{L}v - v\overline{L}u) d\overline{A} &= \sqrt{\beta} \int_0^{2\pi} e^{-\gamma_+^b} \left( u \frac{\partial v}{\partial s} - v \frac{\partial u}{\partial s} \right) \Big|_{s=T} d\theta \\ &\quad - \sqrt{\beta} \int_0^{2\pi} e^{-\gamma_-^b} \left( u \frac{\partial v}{\partial s} - v \frac{\partial u}{\partial s} \right) \Big|_{s=-T} d\theta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De nouveau, on peut montrer qu'il n'existe pas de solution  $u$  de classe  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  sur  $\overline{\Omega^\beta}$  à l'équation :

$$\overline{L}u = 0 \text{ on } \overline{\Omega^\beta} \quad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega^\beta} = (1, -1). \quad (3.11)$$

En effet, en raisonnant par l'absurde, si une telle solution existait, l'identité de Green

(3.10) appliquée à  $\varphi^b$  et  $u$  donnerait :

$$0 = \int_{\Omega^\beta} (\varphi^b \bar{L}u - u \bar{L}\varphi^b) d\bar{A} = |e^{-\gamma^b}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 + |e^{-\gamma^b}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2,$$

ce qui est absurde.

Soient  $\Pi_K$  et  $\Pi_{K^\perp}$  définis comme à la Section 3.3.1. Le lemme 3.5 reste vrai pour des raisons évidentes :

**Lemme 3.15.** *Soit  $\Phi : (\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1))^2 \times \mathbb{R} \times K_0^\perp \rightarrow K^\perp$  l'application définie par :*

$$\Phi(\gamma, \lambda, \sigma) = \Pi_{K^\perp} \circ \bar{H}(\mu_b(\gamma) + \lambda\varphi^b + \sigma).$$

Alors  $D_3\Phi(\gamma^a, 0, 0) : K_0^\perp \rightarrow K^\perp$  est un isomorphisme.

On peut de nouveau appliquer le théorème des fonctions implicites à  $\Phi$ , qui établit l'existence d'un voisinage  $U_b$  de  $(\gamma^b, 0)$  dans  $(\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1))^2 \times \mathbb{R}$  et d'une unique application lisse  $\sigma : U_b \rightarrow K_0^\perp$  telle que :

$$\forall (\gamma, \lambda) \in U_b, \quad \Phi(\gamma, \lambda, \sigma(\gamma, \lambda)) = 0.$$

On définit de façon similaire les applications  $\eta_b : U_b \rightarrow \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}^\beta)$  et  $\kappa_b : U_b \rightarrow K$  par :

$$\eta_b(\gamma, \lambda) = b + 2n^b(\mu_b(\gamma) + \lambda\varphi^b + \sigma(\gamma, \lambda)) \quad \text{et} \quad \kappa_b(\gamma, \lambda) = \Pi_K \circ \bar{H}(\mu_b(\gamma) + \lambda\varphi^b + \sigma(\gamma, \lambda)).$$

De plus, si un anneau, admet  $X^{\eta_b(\gamma,\lambda)}$  comme paramétrisation sur  $\Omega^\beta$ , on dit que  $\{\gamma, \lambda\}$  sont les *données* de l'anneau par rapport à  $A$  ou  $b$ .

Les propriétés de  $\eta_b$  sont semblables à celles de  $\eta_a$  à la Section 3.3.1.

**Lemme 3.16.** *L'application  $\eta_b$  a les propriétés suivantes :*

1.  $\eta_b(\gamma^b, 0) = b$ .
2.  $\forall (\gamma, \lambda) \in U_b, \quad \eta_b(\gamma, \lambda)|_{\partial\Omega^\beta} = \gamma$ .
3.  $D_2\eta_b(\gamma^b, 0) : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto 2\lambda n^b \varphi^b \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}^\beta)$ .

Soit  $A'$  un anneau  $\beta$ -déformable de paramétrisation cylindrique  $X^{b'}$ . On suppose qu'il existe un anneau de données  $\{\gamma, \lambda\}$  et  $\{\gamma', \lambda'\}$  par rapport à  $A$  et  $A'$  respectivement. Cette

surface peut être décrite par  $X^{\eta_b(\gamma, \lambda)}$  et  $X^{\eta_{b'}(\gamma', \lambda')}$ , et l'on obtient :

$$\gamma' = \gamma \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{1}{|\varphi^{b'}|_{L^2(\Omega^\beta)}^2} \left\langle \frac{\eta_b(\gamma, \lambda) - b'}{2n^{b'}} - \mu_{b'}(\gamma), \varphi^{b'} \right\rangle_{L^2(\Omega^\beta)}. \quad (3.12)$$

Le Point 2 du Lemme 3.16 montre que les valeurs à l'infini sont encore indépendantes du paramètre  $\lambda$ . La raison est la même que précédemment :

**Proposition 3.17.** *Soit  $(\gamma, \lambda) \in U_b$ . La surface  $X^{\eta_b(\gamma, \lambda)}$  existe pour tout  $\lambda' \in \mathbb{R}$  et coïncide avec  $X^{\eta_b(\gamma, \lambda)}$  à translation verticale près.*

On s'intéresse désormais aux déformations  $X^{\eta_b(\gamma, \lambda)}$  de  $A$  qui sont CMC-1/2, autrement dit les déformations telles que  $\kappa_b(\gamma, \lambda) = 0$ . On considère  $\mathcal{U}_b = \kappa_b^{-1}(\{0\}) \cap U_b$  et  $\mathcal{V}_b \subset \mathcal{S}$  l'ensemble des anneaux dont les données sont dans  $\mathcal{U}_b$ . D'après la Proposition 3.17, on sait qu'il existe un ensemble  $\Gamma_b \subset (\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1))^2$  tel que  $\mathcal{U}_b = \Gamma_b \times \mathbb{R}$ .

**Proposition 3.18.**  $\Gamma_b$  est une sous-variété de  $(\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1))^2$ , analytique réelle de codimension 1, contenue dans l'ensemble :

$$\left\{ (\gamma_+, \gamma_-) \in (\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1))^2 \mid |e^{-\gamma_+}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = |e^{-\gamma_-}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} \right\}.$$

*Preuve.*  $\Gamma_b$  est clairement une sous-variété lisse de  $(\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1))^2$  et l'on sait que sa codimension est le rang de  $D\kappa_b(\gamma^b, 0)$ . De nouveau, on a  $D_2\kappa_b(\gamma^b, 0) = 0$  puisque :

$$D_2\kappa_b(\gamma^b, 0) \cdot 1 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \kappa_b(\gamma^b, t) = \Pi_K \circ \bar{L} \left( \frac{1}{2n^b} D_2\eta_b(\gamma^b, 0) \cdot 1 \right) = \Pi_K \circ \bar{L}_0(\varphi^b) = 0.$$

Donc le rang de  $D\kappa_b(\gamma^b, 0)$  est celui de  $D_1\kappa_b(\gamma^b, 0)$ . Soit  $\gamma = (1, -1) \in (\mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1))^2$ . On calcule :

$$D_1\kappa_b(\gamma^b, 0) \cdot \gamma = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \kappa_b((t, -t), 0) = \Pi_K \circ \bar{L}u = \bar{L}u \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{2n^b} D_1\eta_b(\gamma^b, 0) \cdot (1, -1).$$

Le Point 2 du Lemme 3.16 montre que  $u|_{\partial\mathbb{D}} = (1, -1)$ . Comme l'équation (3.11) n'a pas de solution,  $D_1\kappa_b(\gamma^b, 0) \cdot (1, -1)$  n'est pas identiquement nul, d'où  $\text{rg } D_1\kappa_b(\gamma^b, 0) = 1$ .

Considérons un chemin lisse  $\gamma_t = ((\gamma_+)_t, (\gamma_-)_t)$  dans  $\Gamma_b$  avec  $\gamma_0 = \gamma^b$  dont on note

$\dot{\gamma}_t = ((\dot{\gamma}_+)_t, (\dot{\gamma}_-)_t)$  le vecteur tangent à  $t$ . On a :

$$0 = D\kappa_b(\gamma^b, 0) \cdot (\dot{\gamma}_0, 0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \kappa_b(\gamma_t, 0) = \bar{L}v \quad \text{avec} \quad v = \frac{1}{2n^b} D\eta_b(\gamma^b, 0) \cdot (\dot{\gamma}_0, 0),$$

et l'on applique l'identité de Green (3.10) à  $\varphi^b$  et  $v$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega^\beta} (\varphi^b \bar{L}v - v \bar{L}\varphi^b) d\bar{A} = \sqrt{\beta} \int_0^{2\pi} (\dot{\gamma}_+)_0 e^{-2\gamma_+^b} d\theta - \sqrt{\beta} \int_0^{2\pi} (\dot{\gamma}_-)_0 e^{-2\gamma_-^b} d\theta \\ &= 2\pi\sqrt{\beta} \left( \left\langle (\dot{\gamma}_+)_0, e^{-2\gamma_+^b} \right\rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)} - \left\langle (\dot{\gamma}_-)_0, e^{-2\gamma_-^b} \right\rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour  $t$  fixé, on reparamètre le chemin en  $\gamma'_s = \gamma_{s+t}$  et l'on pose  $b' = \eta_b(\gamma_t, 0)$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\gamma'_s \in \Gamma_{b'}$  pour tout  $|s| < \varepsilon$ . Donc le chemin de surfaces  $X^{\eta_b(\gamma'_s, 0)}$  peut être décrit par un chemin de données  $\{\gamma'_s, \lambda'_s\}$  dans  $\mathcal{U}_{b'}$ ,  $|s| < \varepsilon$ , avec  $\lambda'_0 = 0$  et comme tangent  $\dot{\gamma}'_0 = \dot{\gamma}_t$  en  $s = 0$ . Le résultat (3.8) s'applique à  $(\gamma'_s, \lambda'_s)$ , soit :

$$\frac{d}{dt} \left( |e^{-(\gamma_+)_t}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 - |e^{-(\gamma_-)_t}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 \right) = \left\langle (\dot{\gamma}_+)_t, e^{-2(\gamma_+)_t} \right\rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)} - \left\langle (\dot{\gamma}_-)_t, e^{-2(\gamma_-)_t} \right\rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)} = 0,$$

pour tout  $t$ , et ainsi :

$$|e^{-(\gamma_+)_t}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 - |e^{-(\gamma_-)_t}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 = |e^{-\gamma_+^b}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 - |e^{-\gamma_-^b}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 = 0,$$

puisque l'anneau  $A$  est  $\beta$ -déformable.  $\square$

La condition sur les valeurs à l'infini permettant de caractériser  $\Gamma_b$  traduit en fait la conservation du flux vertical dans l'anneau déformé.

### 3.4.3 Anneaux sans axe

Pour les surfaces minimales de  $\mathbb{R}^3$ , on peut définir deux invariants vectoriels de Noether associés aux isométries, à savoir le flux — associé aux translations — et le torque — associé aux rotations. Dans le cas d'un bout minimal caténoïdal de croissance  $\alpha > 0$  et d'axe vertical  $\{x_1 = u, x_2 = v\}$ , le flux et le torque sont respectivement  $(0, 0, 2\pi\alpha)$  et  $2\pi\alpha(v, -u, 0)$ . En d'autres termes, la croissance et la position de l'axe du bout sont déterminés par la composante verticale du flux et la composante horizontale du torque.

Dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , les invariants de Noether se construisent de façon similaire mais le torque n'est plus vectoriel, puisque seules restent les rotations autour de l'axe vertical. Dans le cas d'un bout vertical de révolution de paramètre  $\beta > 0$ , le flux est vertical de composante  $\beta$  et le torque est nul, quelque soit la position de l'axe de révolution. Le fait que la position de l'axe ne soit plus traduite dans les invariants de Noether, laisse à penser que la construction d'anneaux CMC-1/2 à bouts verticaux devrait être plus souple quant aux contraintes de position des axes des bouts.

**Théorème 3.19.** *Il existe des anneaux CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  à bouts verticaux, dont les bouts sont asymptotes à des exemples de révolution — au sens où la distance horizontale tend vers 0 uniformément lorsque  $r$  tend vers 1 — d'axes verticaux différents.*

*Preuve.* Fixons  $\beta > 0$ ,  $\beta \neq 1$ . Dans le modèle du disque de Poincaré, la translation horizontale de  $w_0 = \varepsilon e^{i\theta_0} \in \mathbb{D}^*$  change la valeur à l'infini supérieure de l'anneau de révolution  $A_\beta$  en :

$$\gamma(\theta) = \log \left( \frac{|1 - \varepsilon e^{i(\theta - \theta_0)}|}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right).$$

Un calcul direct montre que  $|e^{-\gamma}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = 1$ . Donc pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, l'anneau CMC-1/2 paramétré par  $X^{\eta_0((\gamma, 0), 0)}$  existe. Les bouts de cet anneau sont bien asymptotiquement de révolution, puisque les valeurs à l'infini sont celles d'exemples de révolution.  $\square$

### 3.5 Annexe : Preuve détaillée du Théorème 3.3

On considère la métrique produit  $d\sigma^2 + dx_3^2$  sur  $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$  avec :

$$d\sigma^2 = F^* ds_{\mathbb{H}}^2 \quad \text{et} \quad F : (r, \theta) \in \mathbb{D} \mapsto \frac{2r}{1+r^2} e^{i\theta} \in \mathbb{H}^2,$$

dans le modèle (1.3) du disque de Poincaré. Pour alléger les notations, on utilise les indices 1, 2 pour des quantités relatives respectivement aux coordonnées  $r, \theta$  sur  $\mathbb{D}$ . La matrice de la métrique  $d\sigma^2$  est alors  $\sigma = (\sigma_{ij})$  diagonale avec :

$$\sigma_{11} = \frac{16}{(1-r^2)^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{22} = \frac{16r^2(1+r^2)^2}{(1-r^2)^4} \quad \text{avec} \quad |\sigma| = \left( \frac{16r(1+r^2)}{(1-r^2)^3} \right)^2.$$

Les symboles de Christoffel ( $\Gamma_{ij}^k$ ) associés à la métrique  $d\sigma^2$  pour la connexion de Levi-Civita sont classiquement définis par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \sigma^{kl} (\partial_i \sigma_{jm} + \partial_j \sigma_{im} - \partial_m \sigma_{ij}),$$

ce qui revient, pour les termes non nuls, à :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{2r}{1-r^2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{4r}{1-r^2} \left( 1 + \frac{1+3r^2}{4r^2(1+r^2)}(1-r^2) \right) \\ \text{et } \Gamma_{22}^1 &= -\frac{4r^3(1+r^2)^2}{(1-r^2)^3} \left( 1 + \frac{1+3r^2}{4r^2(1+r^2)}(1-r^2) \right). \end{aligned}$$

Fixons  $\Omega \in \mathcal{D}$ . Une surface  $S \in \mathcal{S}$  définie sur  $\Omega$  de coordonnées graphe :

$$(r, \theta) \in \Omega \mapsto \left( F(r, \theta), h(\eta) \right) \quad \text{avec } \eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \text{et } h(\eta) = 2e^\eta \frac{1+r^2}{1-r^2},$$

peut être vue comme le graphe d'une fonction  $h(\eta) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  avec la métrique  $d\sigma^2$  sur  $\Omega$ . Comme établi par J. Spruck [32], la métrique  $g(\eta) = (g_{ij}(\eta))$  induite par  $h(\eta)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} g_{ij}(\eta) &= \sigma_{ij} + \partial_i h(\eta) \partial_j h(\eta) \\ \text{i.e. } g_{11}(\eta) &= \frac{64r^2 e^{2\eta}}{(1-r^2)^4} \left[ 1 + \frac{1+r^2}{2r} \eta_1 (1-r^2) + \frac{(1+r^2)^2}{16r^2} \left( \eta_1^2 + \frac{4e^{-2\eta}}{(1+r^2)^2} \right) (1-r^2)^2 \right], \\ g_{12}(\eta) &= \frac{16r(1+r^2)e^{2\eta}}{(1-r^2)^3} \eta_2 \left[ 1 + \frac{1+r^2}{4r} \eta_1 (1-r^2) \right] \\ \text{et } g_{22}(\eta) &= \frac{16r^2(1+r^2)^2 e^{2\eta}}{(1-r^2)^4} \left[ e^{-2\eta} + \frac{\eta_2^2}{4r^2} (1-r^2)^2 \right]. \end{aligned}$$

Le déterminant  $|g(\eta)|$  de la métrique induite est donc :

$$\begin{aligned} |g(\eta)| &= \left( \frac{32r^2(1+r^2)e^\eta}{(1-r^2)^4} \right)^2 w^2(\eta) \\ \text{avec } w^2(\eta) &= 1 + \frac{1+r^2}{2r} \eta_1 (1-r^2) + \frac{(1+r^2)^2}{16r^2} \left( \eta_1^2 + \frac{4e^{-2\eta}}{(1+r^2)^2} \right) (1-r^2)^2 \\ &\quad + \frac{\eta_2^2}{16r^4} (1-r^2)^4. \end{aligned}$$

Relativement à la métrique  $d\sigma^2$  sur  $\mathbb{D}$ , la courbure moyenne  $H(\eta)$  de  $S$  s'écrit :

$$\begin{aligned} 2H(\eta) &= \operatorname{div}_\sigma \left( \frac{\nabla_\sigma h(\eta)}{W(\eta)} \right) = \frac{1}{W(\eta)} \sum_{i,j} g^{ij}(\eta) \left( \partial_{ij} h(\eta) - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k h(\eta) \right) \\ &= \frac{1}{W(\eta)} \sum_{i,j} H_{ij}(\eta), \end{aligned}$$

où  $W(\eta)$  désigne :

$$W(\eta) = \sqrt{1 + |\nabla_\sigma h(\eta)|_\sigma^2} = \frac{2re^\eta}{1-r^2} w(\eta).$$

On pose  $\eta = a + \xi$  avec  $a, \xi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  et l'on calcule les développements limités des  $H_{ij}(a + \xi)$ . Pour  $H_{11}(a + \xi)$ , on a :

$$\begin{aligned} e^{-(a+\xi)} H_{11}(a + \xi) &= e^{-(a+\xi)} g^{11}(a + \xi) \left( \partial_{11} h(\eta) - \Gamma_{11}^1 \partial_1 h(\eta) \right) \\ &= \frac{e^{-a} w^2(a)}{w^2(a + \xi)} H_{11}(a) + \frac{(1+r^2)(1-r^2)}{8r^2 w^2(a + \xi)} \left( e^{-2a} (e^{-2\xi} - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{1+r^2} \xi_1 (1-r^2) + R_{11} (1-r^2)^2 \right) + \frac{2(1+r^2)}{1-r^2} g^{11}(a + \xi) \xi_{11}, \end{aligned}$$

avec  $R_{11} = R_{11}(r, \theta, a, \xi, D\xi)$  est définie sur  $\Omega \cup \partial\mathbb{D}$ , identiquement nulle si  $\xi = 0$  et analytique réelle en ses variables. Pour  $H_{12}(a + \xi)$ , on écrit :

$$\begin{aligned} e^{-(a+\xi)} H_{12}(a + \xi) &= e^{-(a+\xi)} g^{12}(a + \xi) \left( \partial_{12} h(a + \xi) - \Gamma_{12}^2 \partial_2 h(a + \xi) \right) \\ &= \frac{e^{-a} w^2(a)}{w^2(a + \xi)} H_{12}(a) + R_{12} (1-r^2)^3 + \frac{2(1+r^2)}{1-r^2} g^{12}(a + \xi) \xi_{12}, \end{aligned}$$

avec de nouveau  $R_{12} = R_{12}(r, \theta, a, \xi, D\xi)$  définie sur  $\Omega \cup \partial\mathbb{D}$ , nulle si  $\xi = 0$  et analytique réelle en ses variables. Et pour  $H_{22}(a + \xi)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} e^{-(a+\xi)} H_{22}(a + \xi) &= e^{-(a+\xi)} g^{22}(a + \xi) \left( \partial_{22} h(a + \xi) - \Gamma_{22}^1 \partial_1 h(a + \xi) \right) \\ &= \frac{e^{-a} w^2(a)}{w^2(a + \xi)} H_{22}(a) + \frac{1+r^2}{2rw^2(a + \xi)} \left\{ 2\xi_1 + \frac{1+r^2}{4r} \left[ 3\xi_1^2 + 3 \left( 2a_1 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1+3r^2}{r(1+r^2)^2} \right) \xi_1 + \frac{4e^{-2a}}{(1+r^2)^2} (e^{-2\xi} - 1) \right] (1-r^2) + \frac{(1+r^2)^2}{16r^2} \left[ \xi_1^3 \right. \right. \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 3 \left( a_1 + \frac{1+3r^2}{r(1+r^2)^2} \right) \xi_1^2 + \left( 3a_1^2 + \frac{6(1+3r^2)}{r(1+r^2)^2} a_1 + \frac{4e^{-2a}}{(1+r^2)^2} e^{-2\xi} \right) \xi_1 \\
& + \frac{4e^{-2a}}{(1+r^2)^2} \left( a_1 + \frac{1+3r^2}{r(1+r^2)^2} \right) (e^{-2\xi} - 1) \left[ (1-r^2)^2 + R_{22}(1-r^2)^3 \right] \\
& + \frac{2(1+r^2)}{1-r^2} g^{22}(a+\xi) \xi_{22},
\end{aligned}$$

avec  $R_{22} = R_{22}(r, \theta, a, \xi, D\xi)$  définie sur  $\Omega \cup \partial\mathbb{D}$ , nulle si  $\xi = 0$  et analytique réelle en ses variables. Le développement limité de la courbure moyenne  $H(a + \xi)$  est alors :

$$\begin{aligned}
H(a + \xi) &= \frac{w^3(a)}{w^3(a + \xi)} H(a) + \sum_{i,j} \frac{(1+r^2)g^{ij}(a + \xi)}{2rw(a + \xi)} \xi_{ij} + \frac{(1+r^2)(1-r^2)}{8r^2w^3(a + \xi)} \left\{ 2\xi_1 \right. \\
& + \frac{1+r^2}{4r} \left[ 3\xi_1^2 + 3 \left( 2a_1 + \frac{1+3r^2}{r(1+r^2)^2} \right) \xi_1 + \frac{(5+r^2)e^{-2a}}{(1+r^2)^2} (e^{-2\xi} - 1) \right] (1-r^2) \\
& + \frac{(1+r^2)^2}{16r^2} \left[ \xi_1^3 + 3 \left( a_1 + \frac{1+3r^2}{r(1+r^2)^2} \right) \xi_1^2 + \left( 3a_1^2 + \frac{6(1+3r^2)}{r(1+r^2)^2} a_1 \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{4e^{-2a}}{(1+r^2)^2} e^{-2\xi} + \frac{4r^2}{(1+r^2)^3} \right) \xi_1 + \frac{4e^{-2a}}{(1+r^2)^2} \left( a_1 \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1+3r^2}{r(1+r^2)^2} \right) (e^{-2\xi} - 1) \right] (1-r^2)^2 \left. \right\} + R_H(1-r^2)^4,
\end{aligned}$$

avec de nouveau  $R_H = R_H(r, \theta, a, \xi, D\xi)$  définie sur  $\Omega \cup \partial\mathbb{D}$ , identiquement nulle si  $\xi = 0$  est analytique réelle en ses variables.

On exprime ensuite le développement limité de  $w^{-3}(a + \xi)$  à l'ordre 4 en  $(1 - r^2)$ , en fonction de  $w(a)$  et  $\xi$  :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w^3(a + \xi)} &= \frac{1}{w^3(a)} \left\{ 1 - \frac{3(1+r^2)}{4rw^2(a)} \xi_1 (1-r^2) + \frac{3(1+r^2)^2}{16r^2w^4(a)} \left[ 2\xi_1^2 - a_1 \xi_1 \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{2e^{-2a}}{(1+r^2)^2} (e^{-2\xi} - 1) \right] (1-r^2)^2 - \frac{(1+r^2)^3}{32r^3w^6(a)} \left[ 5\xi_1^3 - 6a_1 \xi_1^2 + 3 \left( a_1^2 \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{5e^{-2a}}{(1+r^2)^2} (e^{-2\xi} - 1) \right) \xi_1 + \frac{6e^{-2a}}{(1+r^2)^2} a_1 (e^{-2\xi} - 1) \right] (1-r^2)^3 \left. \right\} \\
& + R_w(1-r^2)^4,
\end{aligned}$$

avec  $R_w = R_w(r, \theta, a, \xi, D\xi)$  définie sur  $\Omega \cup \partial\mathbb{D}$ , nulle si  $\xi = 0$  et analytique réelle en ses variables. Finalement, on obtient :

$$H(a + \xi) = H(a) + \frac{1}{\sqrt{|g(a)|}} \sum_{i,j} A_{ij} \xi_{ij} + \frac{1}{\sqrt{|g(a)|}} B,$$

avec

$$A_{11} = \frac{(1+r^2)}{2rw(a+\xi)} \sqrt{|g(a)|} g^{11}(a+\xi) = \frac{(1+r^2)}{2rw(a+\xi)} \frac{g_{22}(a+\xi)}{\sqrt{|g(a)|}} = e^{-a} + O(1-r^2),$$

$$A_{12} = \frac{(1+r^2)}{2rw(a+\xi)} \sqrt{|g(a)|} g^{12}(a+\xi) = -\frac{(1+r^2)}{2rw(a+\xi)} \frac{g_{12}(a+\xi)}{\sqrt{|g(a)|}} = O(1-r^2)$$

et

$$A_{22} = \frac{(1+r^2)}{2rw(a+\xi)} \sqrt{|g(a)|} g^{22}(a+\xi) = \frac{(1+r^2)}{2rw(a+\xi)} \frac{g_{11}(a+\xi)}{\sqrt{|g(a)|}} = e^a + O(1-r^2).$$

De plus,  $A_{ij} = A_{ij}(r, \theta, a, \xi, D\xi)$  et  $B = B(r, \theta, a, \xi, D\xi)$  sont définis sur  $\Omega \cup \partial\mathbb{D}$  et analytiques réels en leurs variables, la matrice  $A = (A_{ij})$  est coercive sur  $\Omega \cup \partial\mathbb{D}$ , et  $B$  est identiquement nulle si  $\xi = 0$ .



# Chapitre 4

## Formes de Noether dans les espaces homogènes

### 4.1 Introduction

Le théorème de Noether [27] décrit un isomorphisme entre l'algèbre de Lie des générateurs infinitésimaux des *symétries variationnelles* associées à un problème variationnel et un espace de *lois de conservation* pour les équations d'Euler-Lagrange concernées. On peut notamment l'appliquer au problème variationnel des surfaces minimales ou CMC dans un espace homogène avec comme symétries les isométries de l'espace. En particulier, pour les surfaces minimales dans l'espace euclidien, le théorème de Noether conduit aux notions de flux et de torque. Autrement dit, dans ce cas le théorème de Noether permet de mettre en évidence des invariants géométriques des surfaces et l'on peut par exemple en déduire des conditions d'alignement sur les bouts caténoïdaux verticaux [31].

Nous nous intéressons aux formes de Noether des surfaces minimales et CMC dans les espaces  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  et  $\text{Sol}_3$  correspondant aux isométries de l'espace ambiant. De même que pour le cas euclidien, ces formes permettent de construire des invariants géométriques propres à la surface. Le problème peut être traité en coordonnées en considérant l'espace des jets [28] ou plus abstraitement en utilisant des outils de géométrie différentielle extérieure [8, 30]. Nous choisissons cette seconde approche, sans coordonnées, qui donne lieu à un traitement plus général.

La Section 4.2 est consacrée à l'étude générale des invariants de Noether sur des

surfaces CMC dans une variété riemannienne de dimension 3. Nous donnons notamment une formule explicite des formes de Noëther relatives à des champs de Killing, ce qui s'applique en particulier aux générateurs infinitésimaux des isométries, lorsque la variété ambiante est un espace homogène.

Aux Sections 4.3 et 4.4, nous détaillons les cas des  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  et de  $\text{Sol}_3$ . Après avoir décrit les générateurs infinitésimaux des isométries dans ces espaces, nous calculons explicitement les formes relatives à ces isométries et nous décrivons le comportement de ces formes sous l'action des isométries.

Enfin, à la Section 4.5, nous donnons des exemples de calcul d'invariants de Noëther pour les bouts CMC-1/2 verticaux dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  étudiés au Chapitre 3, et les anneaux horizontaux de Daniel-Hauswirth dans  $\text{Nil}_3$  [13]. Le fait que les invariants de Noëther soient des invariants homologiques permet d'obtenir des relations entre les différents paramètres de construction des surfaces.

## 4.2 Étude générale

### 4.2.1 Structure de contact

Soit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  une variété riemannienne de dimension 3. On considère la fibration suivante :

$$FM \xrightarrow{\pi'} \mathcal{C} \xrightarrow{\pi} M,$$

où la variété de contact  $\mathcal{C}$  est le fibré unitaire  $UM$  de  $M$  — ou de façon équivalente la grassmannienne des 2-plans orientés tangents à  $M$  — et  $FM$  celui des repères orthonormaux. L'étude étant locale, on se place dans une carte de  $M$  de point générique noté  $x$ . Un élément de  $\mathcal{C}$  est alors un couple  $(x, e_0)$  avec  $e_0 \in \mathbb{S}^2$  et un élément de  $FM$  s'écrit  $(x, e)$  où  $e = (e_0, e_1, e_2)$  est une famille orthonormale pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ . Enfin, les projections  $\pi'$  et  $\pi$  sont respectivement :

$$\pi'(x, e) = (x, e_0) \quad \text{et} \quad \pi(x, e_0) = x.$$

Dans la suite, on travaille dans  $FM$  pour la simplicité des calculs, mais les quantités définies sont en fait *basiques*, i.e. qu'elles sont les relevés de quantités définies sur  $\mathcal{C}$ . Par souci de clarté, on note de façon identique une forme et ses relevés. De même, on ne

distingue pas dans la notation le générateur infinitésimal d'une action sur  $M$  est ses *prolongements* à  $\mathcal{C}$  ou  $FM$ , à savoir les générateurs infinitésimaux des prolongements naturels de l'action.

Si  $e = (e_0, e_1, e_2)$  est un repère sur  $M$ , on note  $(\theta^0, \theta^1, \theta^2)$  la base duale des 1-formes. On considère également les éléments  $(\omega_j^i)_{0 \leq i, j \leq 2}$  de  $\Omega^1(FM)$  tels que :

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= -\omega_1^0 \wedge \theta^1 + \omega_0^2 \wedge \theta^2, & d\theta^1 &= \omega_1^0 \wedge \theta^0 - \omega_2^1 \wedge \theta^2, \\ d\theta^2 &= -\omega_0^2 \wedge \theta^0 + \omega_2^1 \wedge \theta^1 & \text{et} & \quad \omega_j^i = -\omega_i^j. \end{aligned}$$

Les formes de structure  $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \omega_1^0, \omega_2^1$  et  $\omega_0^2$  sont indépendantes et engendrent  $\Omega^1(FM)$ .

**Proposition 4.1.** *Soit  $\theta^0 \in \Omega^1(\mathcal{C})$  définie comme suit :*

$$\forall (x, e_0) \in \mathcal{C}, \forall (u, \xi) \in T_{(x, e_0)}\mathcal{C}, \theta_{(x, e_0)}^0(u, \xi) = \langle e_0, u \rangle_x.$$

Si  $I$  est le sous-fibré en ligne de  $T^*\mathcal{C}$  engendré par  $\theta^0$ , alors  $(\mathcal{C}, I)$  est une structure de contact. On dit que  $\theta^0$  est la forme de contact.

L'idéal différentiel de contact  $\mathcal{I} \subset \Omega^*(\mathcal{C})$  est l'idéal — pour le produit extérieur — engendré par  $\{\theta^0, d\theta^0\}$ . Si l'on relève  $e_0$  en un élément  $(e_0, e_1, e_2)$  de  $FM$ , de base duale  $(\theta^0, \theta^1, \theta^2)$ , alors la forme  $\theta^0$  sur  $FM$  coïncide avec le relevé de la forme de contact, d'où l'abus de notation.

Si  $f : \Sigma \rightarrow M$  est une immersion, il existe un *relevé legendrien*  $N : \Sigma \rightarrow \mathcal{C}$  de  $f$  à  $\mathcal{C}$ , ce qui signifie exactement que  $N$  vérifie  $N^*\theta^0 = 0$  et  $f = \pi \circ N$ . Il est à noter que le relevé  $N$  est unique au signe près et que c'est un vecteur normal à  $f$ , par construction de  $\theta^0$ . De plus, la condition  $N^*\theta^0 = 0$  entraîne  $N^*d\theta^0 = 0$ , et donc de façon générale  $N^*\mathcal{I} = \{0\}$ .

## 4.2.2 Lagrangiens des surfaces minimales et CMC

L'étude étant locale, on suppose  $\Sigma$  compact, éventuellement à bord. On définit la fonctionnelle  $\mathcal{A}$  comme :

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_{\Sigma} N^*\Lambda_0 \quad \text{avec} \quad \Lambda_0 = e_0 \lrcorner \text{vol}_M,$$

où  $\text{vol}_M$  est la forme volume sur  $M$ . On dit que  $\Lambda_0$  est le *lagrangien* de la fonctionnelle. En fait,  $\mathcal{A}$  est la fonctionnelle d'aire, puisqu'une expression de  $\Lambda_0$  dans  $FM$  est  $\Lambda_0 = \theta^1 \wedge \theta^2$ , la forme volume s'écrivant  $\text{vol}_M = \theta^0 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2$ .

Soit  $\eta : \Sigma \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $\varepsilon > 0$ , une application lisse telle que  $\eta_0 = N$ , et  $\eta_t$  est legendrienne pour tout  $t$  et coïncide avec  $N$  en dehors d'un compact de  $\Sigma$ , de valeur sur  $\partial\Sigma$  constante en  $t$ . Si  $V_t \in \mathfrak{X}(N^*\mathcal{C})$  est la variation infinitésimale en  $t$ , alors  $V_t$  est nulle sur  $\partial\Sigma$  et :

$$\delta\mathcal{A}(V_t) = \int_{\Sigma} \mathcal{L}_{V_t}(\eta_t^*\Lambda_0) = \int_{\Sigma} \left( d(V_t \lrcorner (\eta_t^*\Lambda_0)) + V_t \lrcorner (\eta_t^*d\Lambda_0) \right) = \int_{\Sigma} V_t \lrcorner (\eta_t^*d\Lambda_0),$$

d'après Stokes. On calcule :

$$d\Lambda_0 = d(\theta^1 \wedge \theta^2) = \theta^0 \wedge (-\omega_0^2 \wedge \theta^1 - \omega_1^0 \wedge \theta^2),$$

et l'on pose  $\Psi_0 = -\omega_0^2 \wedge \theta^1 - \omega_1^0 \wedge \theta^2$ . C'est l'*opérateur d'Euler-Lagrange* associé  $\Lambda_0$ . On en déduit en  $t = 0$  :

$$\delta\mathcal{A}(V_0) = \int_{\Sigma} (V_t \lrcorner (\eta_t^*\theta^0))|_{t=0} \eta_0^*\Psi_0 = \int_{\Sigma} (V_t \lrcorner (\eta_t^*\theta^0))|_{t=0} N^*\Psi_0,$$

puisque  $\eta_0^*\theta^0 = N^*\theta^0 = 0$ . Ainsi,  $N$  est un point critique de  $\mathcal{A}$ , si et seulement si  $\delta\mathcal{A}(V_0) = 0$ , ce qui revient à avoir  $N^*\Psi_0 = 0$ , puisque  $(V_t \lrcorner (\eta_t^*\theta^0))|_{t=0}$  peut prendre des valeurs arbitraires [8]. La contrainte  $N^*\Psi_0 = 0$  est la *condition d'Euler-Lagrange*.

On déduit aisément de cette condition que les points critiques de  $\mathcal{A}$  correspondent aux immersions minimales dans  $M$ . En effet, soit  $f : \Sigma \rightarrow M$  une immersion, point critique de  $\mathcal{A}$ , de relevé legendrien  $N : \Sigma \rightarrow \mathcal{C}$ . On remarque que :

$$-N^*\omega_1^0 \wedge N^*\theta^1 + N^*\omega_0^2 \wedge N^*\theta^2 = N^*d\theta^0 = 0.$$

D'après le lemme de Cartan, il existe des fonctions  $(h_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  telles que  $h_{ij} = h_{ji}$  et :

$$N^*\omega_1^0 = h_{11}N^*\theta^1 + h_{12}N^*\theta^2 \quad \text{et} \quad N^*\omega_0^2 = -h_{12}N^*\theta^1 - h_{22}N^*\theta^2.$$

Les  $h_{ij}$  ne sont autres que les coefficients de la seconde forme fondamentale de  $f$ , d'où :

$$N^*\Psi_0 = -(h_{11} + h_{22})N^*\Lambda_0 = -2H(f)N^*\Lambda_0,$$

où  $H(f)$  est la courbure moyenne de  $f$ .

Dans la suite, nous fixons  $H$  une constante, éventuellement nulle. Pour le problème variationnel associé aux immersions CMC- $H$  dans  $M$ , on ajoute un multiplicateur de Lagrange traduisant la contrainte de volume lorsque  $H \neq 0$ . Commençons par le lemme :

**Lemme 4.2.** *Dans toute variété riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $n$ , il existe localement et de façon non unique, un champ de vecteurs  $\Xi \in \mathfrak{X}(M)$ , dit champ de volume, de divergence 1 sur  $M$ .*

*Preuve.* Une preuve basique est la suivante. On se place dans une carte locale de  $M$  de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ . Pour un champ de vecteurs  $\Xi$  de coordonnées  $(\Xi^1, \dots, \Xi^n)$  dans la base canonique du tangent à  $M$ , la divergence  $\operatorname{div}_M \Xi$  est définie par :

$$(\operatorname{div}_M \Xi) \operatorname{vol}_M = \mathcal{L}_\Xi \operatorname{vol}_M \quad \text{soit} \quad \operatorname{div}_M \Xi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{|g|} \Xi^i \right),$$

où  $|g|$  est le déterminant de la métrique  $g$ . On peut, par exemple, choisir  $\Xi^i$  qui soit solution, pour tout  $i$ , de l'EDO linéaire :

$$\frac{\partial \Xi^i}{\partial x_i} + \left( \frac{1}{2|g|} \frac{\partial |g|}{\partial x_i} \right) \Xi^i = \frac{1}{n},$$

pour obtenir un  $\Xi$  convenable. □

L'utilisation d'un champ de volume relève plus de l'intermédiaire de calcul que de la nécessité théorique, et il devrait être possible de développer une formulation du raisonnement sans y avoir recours. En effet, on remarque d'une part que le champ de volume n'apparaît pas dans l'expression des formes de Noether relatives à des champs de Killing (Proposition 4.5), et d'autre part, on peut construire des formes de Noether alors qu'il n'existe pas de champ de volume défini globalement sur la variété — ce qui est notamment le cas des sphères de Berger à la Section 4.3.

**Proposition 4.3.** *Soit  $\Xi$  un champ de volume sur  $M$ . Le lagrangien  $\Lambda$  défini sur  $\mathcal{C}$  par :*

$$\Lambda = \Lambda_0 + 2H\Lambda' \quad \text{avec} \quad \Lambda' = \Xi \lrcorner \operatorname{vol}_M, \tag{4.1}$$

*est associé au problème variationnel des immersions CMC- $H$  de  $M$ .*



*Preuve.* De même que pour le cas minimal, on peut calculer l'opérateur d'Euler-Lagrange, à savoir la 2-forme  $\Psi$  sur  $\mathcal{C}$  telle que  $d\Lambda = \theta^0 \wedge \Psi$ . On obtient  $\Psi = \Psi_0 + 2H\Lambda_0$ , d'où :

$$N^*\Psi = 2(H - H(f))N^*\Lambda_0,$$

et la condition d'Euler-Lagrange  $N^*\Psi = 0$  entraîne  $H(f) = H$ .  $\square$

On définit enfin le *système d'Euler-Lagrange* comme étant l'idéal différentiel  $\mathcal{E} \subset \Omega^*(\mathcal{C})$  engendré par  $\{\theta^0, d\theta^0, \Psi\}$ . Pour déterminer une forme de Noëther relative à une immersion minimale ou CMC  $f : \Sigma \rightarrow M$ , il suffit donc de calculer une classe de formes sur  $\mathcal{C}$  modulo l'idéal  $\mathcal{E}$  et relever un représentant à  $\Omega^1(\Sigma)$ .

### 4.2.3 Symétries et formes de Noëther

On appelle *symétrie à divergence près* du problème variationnel de lagrangien  $\Lambda$  défini par (4.1), tout élément  $S \in \mathfrak{X}(\mathcal{C})$  pour lequel il existe une classe  $\Phi_S \in H^1(\mathcal{C})$  vérifiant  $\mathcal{L}_S\Lambda \equiv d\varphi \pmod{\mathcal{E}}$ , pour  $\varphi \in \Phi_S$  arbitraire. Le théorème de Noëther s'énonce alors :

**Théorème 4.4** (Noëther, 1918 [27]). *À toute symétrie à divergence près  $S$  correspond de manière univoque une classe de 1-formes  $\mu_S \in H^1(\mathcal{C})/\mathcal{E}$  définie par :*

$$\mu_S = S \lrcorner \Lambda - \varphi \quad \text{dans } H^1(\mathcal{C})/\mathcal{E} \quad \text{avec } \varphi \in \Phi_S.$$

De plus, si  $N : \Sigma \rightarrow \mathcal{C}$  est le relevé legendrien d'un point critique de  $\Lambda$  — i.e. une immersion CMC- $H$  —, alors le tiré en arrière  $N^*\mu_S$  est une forme fermée sur  $\Sigma$  et la quantité :

$$\sigma_S(c) = \int_c N^*\mu_S$$

est l'invariant de Noëther ou quantité conservée associé à  $S$  le long du cycle  $c \in H_1(\Sigma)$ .

La fermeture de  $N^*\mu_S$  est la *loi de conservation* mentionnée précédemment. On peut préciser l'expression de la forme de Noëther dans le cas des champs de Killing :

**Proposition 4.5.** *Soit  $S \in \mathfrak{X}(M)$  un champ de Killing. Alors le prolongement de  $S$  à  $\mathcal{C}$  est une symétrie du problème variationnel. Si  $F \in \mathfrak{X}(\mathcal{C})$  est le prolongement d'un potentiel vecteur de  $S$  — i.e. d'un champ  $F \in \mathfrak{X}(M)$  tel que  $\text{rot}_M F = S$  —, alors la forme de*

Nœther correspondante  $\mu_S$  s'écrit :

$$\mu_S = S \lrcorner \Lambda_0 - 2HF^b \quad \text{dans } H^1(\mathcal{C})/\mathcal{E},$$

et cette expression ne dépend pas du choix du potentiel vecteur.

*Preuve.* Comme  $S$  est un champ de Killing sur  $M$ , on a  $\operatorname{div}_M S = 0$ . Il existe donc bien un champ  $F \in \mathfrak{X}(M)$  tel que  $S = \operatorname{rot}_M F$ . On a de plus  $\mathcal{L}_S \Lambda \equiv 2H\mathcal{L}_S \Lambda' \pmod{\mathcal{E}}$ , avec par définition  $\mathcal{L}_S \Lambda' = d(S \lrcorner \Lambda') + S \lrcorner d\Lambda'$ . Or, si  $*$  désigne l'opérateur de Hodge, on sait que :

$$S \lrcorner d\Lambda' = S \lrcorner \operatorname{vol}_M = *S^b = *^2 dF^b = dF^b,$$

puisque  $S = \operatorname{rot}_M F = (*dF^b)^\sharp$ . Ainsi :

$$\mathcal{L}_S \Lambda \equiv 2Hd(S \lrcorner \Lambda' + F^b) \pmod{\mathcal{E}},$$

et  $S$  est bien une symétrie. La forme de Noether associée à  $S$  est alors :

$$\mu_S = S \lrcorner \Lambda - 2H(S \lrcorner \Lambda' + F^b) = S \lrcorner \Lambda_0 - 2HF^b \quad \text{dans } H^1(\mathcal{C})/\mathcal{E},$$

comme souhaité. □

**Corollaire 4.6.** *Si  $M$  est un espace homogène, les prolongements des générateurs infinitésimaux de familles à un paramètre d'isométries sont des symétries à divergence près.*

Soit  $f : \Sigma \rightarrow M$  une immersion (orientée) CMC- $H$ . On choisit son relevé legendrien  $N : \Sigma \rightarrow \mathcal{C}$  de telle sorte qu'il coïncide avec la normale unitaire à  $f$ . Alors le tiré en arrière  $N^* \mu_S$  est bien défini dans  $H^1(\Sigma)$  et s'écrit :

$$N^* \mu_S = N^* \mu_S^0 - 2HN^* \mu'_S \quad \text{avec} \quad \mu_S^0 = \langle S, *df \rangle \quad \text{et} \quad \mu'_S = \langle F, df \rangle, \quad (4.2)$$

puisque  $df = e_1 \theta^1 + e_2 \theta^2$ . On dit que  $\mu_S^0$  est la *partie minimale* de la forme de Noether et  $\mu'_S$  sa *partie CMC*.

Dans le cas des espaces  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  et  $\operatorname{Sol}_3$  (Sections 4.3 et 4.4), on note  $\sigma_i(\cdot)$ , avec  $i = 1, 2, 3, R$ , les invariants de Noether correspondant aux isométries. Le *flux* à travers un

cycle  $c \in H_1(\Sigma)$  est alors le vecteur  $\sigma(c) = (\sigma_1(c), \sigma_2(c), \sigma_3(c))$ , et le *torque* est  $\sigma_R(c)$ .

Si  $\mathcal{S}(t)$  est un groupe à un paramètre d'isométries de générateur infinitésimal  $S$ , alors d'après (4.2), déterminer la forme de Noëther  $\mu_S$  correspondante en restriction à  $f$  revient à calculer  $S$  et un de ses potentiels vecteur  $F$ .

Ensuite, si  $\mathcal{S}'(t)$  est également un groupe à un paramètre d'isométries, on compare la forme  $\mu_S$  en restriction à  $f$  et la forme notée  $\mu_{S'}(\mathcal{S}'(t))$  en restriction à l'immersion  $\mathcal{S}'(t) \circ f$ , sachant que :

$$\mu_{S'}(\mathcal{S}'(t)) = \langle d\mathcal{S}'(t)^{-1} \cdot S(\mathcal{S}(t)), *df \rangle - 2H \langle d\mathcal{S}'(t)^{-1} \cdot F(\mathcal{S}(t)), df \rangle.$$

### 4.3 Dans les $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

#### 4.3.1 Isométries et rotationnel

Un champ de volume naturel est  $\Xi = x_3 E_3$ . Il est à noter que dans le cas des sphères de Berger ( $\kappa > 0$  et  $\tau \neq 0$ ), il n'existe pas de champ de volume défini globalement.

Le groupe d'isométries de  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  est de dimension 4. Il est engendré par trois groupes à un paramètre de translations et un de rotations :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(t)(w, x_3) &= \left( \frac{t+w}{1-\kappa'tw}, x_3 + \frac{4}{\sigma} \arctan \left( \frac{\kappa'tx_2}{1-\kappa'tx_1 + |1-\kappa'tw|} \right) \right), \\ \mathcal{S}_2(t)(w, x_3) &= \left( \frac{it+w}{1+i\kappa'tw}, x_3 - \frac{4}{\sigma} \arctan \left( \frac{\kappa'tx_1}{1-\kappa'tx_2 + |1+i\kappa'tw|} \right) \right), \\ \mathcal{S}_3(t)(w, x_3) &= (w, x_3 + t) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_R(t)(w, x_3) = (we^{it}, x_3) \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{\kappa}{2\tau}. \end{aligned}$$

Des générateurs infinitésimaux de ces groupes sont respectivement :

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(1 + \kappa'(x_1^2 - x_2^2)\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\kappa'x_1x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \tau x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ S_2 &= 2\kappa'x_1x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(1 - \kappa'(x_1^2 - x_2^2)\right) \frac{\partial}{\partial x_2} - \tau x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ S_3 &= \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{et} \quad S_R = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Soit  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau))$  que l'on décompose en  $X = X^1 E_1 + X^2 E_2 + X^3 E_3$ . L'expression

de son rotationnel dépend de  $\tau$ . Si  $\tau \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \text{rot } X = & \left( dX^3(E_2) - dX^2(E_3) - \sigma X^1 \right) E_1 + \left( dX^1(E_3) - dX^3(E_1) - \sigma X^2 \right) E_2 \\ & + \left( dX^2(E_1) - dX^1(E_2) - 2\tau X^3 \right) E_3, \end{aligned}$$

et si  $\tau = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{rot } X = & \left( dX^3(E_2) - dX^2(E_3) \right) E_1 + \left( dX^1(E_3) - dX^3(E_1) \right) E_2 \\ & + \left( dX^2(E_1) - dX^1(E_2) + 2\kappa'(x_2 X^1 - x_1 X^2) \right) E_3. \end{aligned}$$

Pour les translations horizontales et la rotation, des potentiels vecteur sont, si  $\kappa \neq 0$  :

$$F_1 = \frac{1}{\sigma} S_1^h + \lambda x_2 E_3, \quad F_2 = \frac{1}{\sigma} S_2^h - \lambda x_1 E_3 \quad \text{et} \quad F_R = \frac{1}{\sigma} S_R^h + \frac{\lambda}{2\kappa'} E_3,$$

où l'exposant  $\cdot^h$  désigne la partie horizontale, et si  $\kappa = 0$  :

$$F_1 = (\tau x_1 x_2 - x_3) E_2, \quad F_2 = (\tau x_1 x_2 + x_3) E_1 \quad \text{et} \quad F_R = x_1 x_3 E_1 + x_2 x_3 E_2.$$

Le cas de la translation verticale est discriminé par  $\tau$  :

$$F_3 = \begin{cases} -\frac{1}{2\tau} E_3 & \text{si } \tau \neq 0 \\ -\frac{x_2}{2} E_1 + \frac{x_1}{2} E_2 & \text{si } \tau = 0 \end{cases}.$$

### 4.3.2 Évolution sous l'action des isométries

**Si  $\tau \neq 0$ .** On a le comportement suivant des formes de Noether :

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathcal{S}_1(t)) = \mu_1(\mathcal{S}_3(t)) = \mu_1, \quad \mu_1(\mathcal{S}_2(t)) &= \frac{1 - \kappa' t^2}{1 + \kappa' t^2} \mu_1 + \frac{2t}{1 + \kappa' t^2} (2\kappa' \mu_R + \tau \mu_3) \\ \text{et } \mu_1(\mathcal{S}_R(t)) &= \cos t \mu_1 - \sin t \mu_2, \\ \mu_2(\mathcal{S}_1(t)) &= \frac{1 - \kappa' t^2}{1 + \kappa' t^2} \mu_2 - \frac{2t}{1 + \kappa' t^2} (2\kappa' \mu_R + \tau \mu_3), \quad \mu_2(\mathcal{S}_2(t)) = \mu_2(\mathcal{S}_3(t)) = \mu_2, \\ \text{et } \mu_2(\mathcal{S}_R(t)) &= \cos t \mu_2 + \sin t \mu_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3(\mathcal{S}_1(t)) &= \mu_3(\mathcal{S}_2(t)) = \mu_3(\mathcal{S}_3(t)) = \mu_3(\mathcal{S}_R(t)) = \mu_3, \\ \mu_R(\mathcal{S}_1(t)) &= \frac{1 - \kappa't^2}{1 + \kappa't^2}\mu_R + \frac{t}{1 + \kappa't^2}(\mu_2 - \tau t\mu_3), \\ \mu_R(\mathcal{S}_2(t)) &= \frac{1 - \kappa't^2}{1 + \kappa't^2}\mu_R - \frac{t}{1 + \kappa't^2}(\mu_1 + \tau t\mu_3) \quad \text{et} \quad \mu_R(\mathcal{S}_3(t)) = \mu_R(\mathcal{S}_R(t)) = \mu_R.\end{aligned}$$

**Proposition 4.7.** *Soit  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ ,  $\tau \neq 0$ , une immersion minimale ou CMC. On a les assertions suivantes :*

- (i) *Supposons  $f$  invariante sous l'action d'une translation  $\mathcal{S}_1(t)$  (resp.  $\mathcal{S}_2(t)$ ). Alors  $\mu_2 = \mu_3 = 0$  (resp.  $\mu_1 = \mu_3 = 0$ ) si  $\kappa = 0$ , et  $\mu_2 = \kappa\mu_R + 2\tau\mu_3 = 0$  (resp.  $\mu_1 = \kappa\mu_R + 2\tau\mu_3 = 0$ ) si  $\kappa \neq 0$ .*
- (ii) *Supposons  $f$  invariante pour une rotation  $\mathcal{S}_R(t)$ . Si  $c$  est un cycle homologue à son image  $\mathcal{S}_R(t) \cdot c$ , alors  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ .*

**Si  $\tau = 0$ .** Les formes de Noëther évoluent comme précédemment pour les translations horizontales et la rotation :

$$\begin{aligned}\mu_1(\mathcal{S}_1(t)) &= \mu_1(\mathcal{S}_3(t)) = \mu_1, \quad \mu_1(\mathcal{S}_2(t)) = \frac{1 - \kappa't^2}{1 + \kappa't^2}\mu_1 + \frac{4\kappa't}{1 + \kappa't^2}\mu_R, \\ &\text{et} \quad \mu_1(\mathcal{S}_R(t)) = \cos t\mu_1 - \sin t\mu_2, \\ \mu_2(\mathcal{S}_1(t)) &= \frac{1 - \kappa't^2}{1 + \kappa't^2}\mu_2 - \frac{4\kappa't}{1 + \kappa't^2}\mu_R, \quad \mu_2(\mathcal{S}_2(t)) = \mu_2(\mathcal{S}_3(t)) = \mu_2, \\ &\text{et} \quad \mu_2(\mathcal{S}_R(t)) = \cos t\mu_2 + \sin t\mu_1, \\ \mu_R(\mathcal{S}_1(t)) &= \frac{1 - \kappa't^2}{1 + \kappa't^2}\mu_R + \frac{t}{1 + \kappa't^2}\mu_2, \quad \mu_R(\mathcal{S}_2(t)) = \frac{1 - \kappa't^2}{1 + \kappa't^2}\mu_R - \frac{t}{1 + \kappa't^2}\mu_1 \\ &\text{et} \quad \mu_R(\mathcal{S}_3(t)) = \mu_R(\mathcal{S}_R(t)) = \mu_R.\end{aligned}$$

Pour la forme correspondant à  $\mathcal{S}_3$ , la partie minimale évolue comme précédemment et la partie CMC vérifie :

$$\begin{aligned}\mu'_3(\mathcal{S}_1(t)) &= \frac{1}{|1 - \kappa'tw|^2}\mu'_3 + \frac{t}{2\lambda|1 - \kappa'tw|^2}\langle \mathcal{S}_2, df \rangle, \\ \mu'_3(\mathcal{S}_2(t)) &= \frac{1}{|1 + i\kappa'tw|^2}\mu'_3 - \frac{t}{2\lambda|1 + i\kappa'tw|^2}\langle \mathcal{S}_1, df \rangle, \\ \mu'_3(\mathcal{S}_3(t)) &= \mu'_3 \quad \text{et} \quad \mu'_3(\mathcal{S}_R(t)) = \mu'_3.\end{aligned}$$

**Proposition 4.8.** *Soit  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}^3(\kappa, 0)$  une immersion minimale ou CMC. On a les assertions suivantes :*

- (i) *Supposons  $f$  invariante sous l'action d'une translation  $\mathcal{S}_1(t)$  (resp.  $\mathcal{S}_2(t)$ ). Alors  $\mu_2 = \mu_R = 0$  (resp.  $\mu_1 = \mu_R = 0$ ).*
- (ii) *Supposons  $f$  invariante pour une rotation  $\mathcal{S}_R(t)$ . Si  $c$  est un cycle homologue à  $\mathcal{S}_R(t) \cdot c$ , alors  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ .*

## 4.4 Dans Sol<sub>3</sub>

### 4.4.1 Isométries et rotationnel

De même que pour les  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ , un champ de volume naturel est  $\Xi = x_3 E_3$ .

Le groupe d'isométries de Sol<sub>3</sub> est de dimension 3, engendré par les trois groupes à un paramètre de translations suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(t)(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + t, x_2, x_3), & \mathcal{S}_2(t)(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2 + t, x_3) \\ \text{et } \mathcal{S}_3(t)(x_1, x_2, x_3) &= (e^{-t}x_1, e^t x_2, x_3 + t). \end{aligned}$$

Des générateurs infinitésimaux sont respectivement :

$$S_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad S_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad S_3 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Soit  $X \in \mathfrak{X}(\text{Sol}_3)$ , de coordonnées  $(X^1, X^2, X^3)$  dans le repère canonique. Son rotationnel s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{rot } X &= \left( dX^3(E_2) - dX^2(E_3) + X^2 \right) E_1 + \left( dX^1(E_3) - dX^3(E_1) + X^1 \right) E_2 \\ &\quad + \left( dX^2(E_1) - dX^1(E_2) \right) E_3. \end{aligned}$$

On en déduit des expressions des potentiels vecteur :

$$F_1 = x_2 E_3, \quad F_2 = -x_1 E_3 \quad \text{et} \quad F_3 = -\frac{x_2 e^{-x_3}}{2} E_1 + \frac{x_1 e^{x_3}}{2} E_2 - x_1 x_2 E_3.$$

### 4.4.2 Évolution sous l'action des isométries

Les expressions des formes de Noether sont plus simples dans le cas de  $\text{Sol}_3$  que pour les  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ . On obtient directement :

$$\begin{aligned}\mu_1(\mathcal{S}_1(t)) &= \mu_1(\mathcal{S}_2(t)) = \mu_1 & \text{et} & & \mu_1(\mathcal{S}_3(t)) &= e^t \mu_1, \\ \mu_2(\mathcal{S}_1(t)) &= \mu_2(\mathcal{S}_2(t)) = \mu_2 & \text{et} & & \mu_2(\mathcal{S}_3(t)) &= e^{-t} \mu_2, \\ \mu_3(\mathcal{S}_1(t)) &= \mu_3 - t\mu_1, & \mu_3(\mathcal{S}_2(t)) &= \mu_3 + t\mu_2 & \text{et} & & \mu_3(\mathcal{S}_3(t)) &= \mu_3.\end{aligned}$$

**Proposition 4.9.** *Soit  $f : \Sigma \rightarrow \text{Sol}_3$  une immersion minimale ou CMC. Si  $f$  est invariante sous l'action d'une translation horizontale  $\mathcal{S}_1(t)$  (resp.  $\mathcal{S}_2(t)$ ), alors  $\mu_1 = 0$  (resp.  $\mu_2 = 0$ ). Et si  $f$  est invariante pour une translation verticale  $\mathcal{S}_3(t)$ , alors  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ .*

## 4.5 Exemples

### 4.5.1 Bouts verticaux CMC-1/2 dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

On calcule les invariants de Noether pour les bouts verticaux CMC-1/2 dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  étudiés au Chapitre 3. On reprend pour ce faire les notations qui y sont adoptées, et notamment les modèles (1.3) et (1.4) de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  de la Section 1.1.3.

On considère  $\varepsilon \in ]0, 1]$ ,  $\beta > 0$  et l'on étudie le bout vertical de coordonnées graphes  $(F, e^\eta h_\beta)$  sur  $\Omega_{1-\varepsilon} \in \mathcal{D}$  avec  $\eta \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega_{1-\varepsilon}})$ . Cette notation générique, déjà utilisée à la Section 3.4 pour les anneaux comprend également les graphes entiers ( $\beta = 1$ ).

Les modèles de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  utilisés diffèrent du modèle des  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  dont nous nous sommes servi pour construire les formes de Noether. On note  $(E_\rho, E_\theta, E_3)$  le repère orthonormal des coordonnées cylindriques de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , soit dans le modèle du disque de Poincaré (1.3) :

$$E_\rho = \frac{1 - \rho^2}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{1 - \rho^2}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

au point  $w = \rho e^{i\theta}$ . Les générateurs infinitésimaux des isométries s'expriment alors :

$$S_1 = 2 \left( \cos \theta E_\rho - \frac{1 + 6r^2 + r^4}{(1 - r^2)^2} \sin \theta E_\theta \right), \quad S_2 = 2 \left( \sin \theta E_\rho + \frac{1 + 6r^2 + r^4}{(1 - r^2)^2} \cos \theta E_\theta \right),$$

$$S_3 = E_3 \quad \text{et} \quad S_R = \frac{4r(1+r^2)^2}{(1-r^2)^2} E_\theta,$$

en un point  $F(r, \theta)$ , et les potentiels vecteur s'écrivent :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{8r(1+r^2)^2}{(1-r^2)^2} \sin \theta E_3, & F_2 &= -\frac{8r(1+r^2)^2}{(1-r^2)^2} \cos \theta E_3, \\ F_3 &= \frac{2r}{1+r^2} E_\theta & \text{et} & \quad F_R = -2 \frac{(1+r^2)^2}{(1-r^2)^2} E_3. \end{aligned}$$

On choisit de calculer les invariants sur un cercle  $\{r = r_0\}$  avec  $1 - \varepsilon < r_0 < 1$ . En faisant  $r_0 \rightarrow 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 8\sqrt{\beta} \int_0^{2\pi} [(k - \gamma_r) \cos \theta + \gamma_r \gamma_\theta \sin \theta] e^{-\gamma} d\theta, \\ \sigma_2 &= 8\sqrt{\beta} \int_0^{2\pi} [(k - \gamma_r) \sin \theta - \gamma_r \gamma_\theta \cos \theta] e^{-\gamma} d\theta, \\ \sigma_3 &= 2\pi \left(1 - \beta |e^{-\gamma}|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2\right) \quad \text{et} \quad \sigma_R = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \gamma_r \left(\gamma_r^2 - 6\sqrt{\beta} e^{-2\gamma}\right) d\theta, \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\gamma = b|_{r=1}$ ,  $\gamma_r = b_r|_{r=1}$  et  $\gamma_\theta = b_\theta|_{r=1}$ , et où  $k$  est le terme constant du développement asymptotique de  $h_\beta$  :

$$h_\beta = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{1+r}{1-r} + k + O(1-r).$$

Dans le cas des graphes entiers, avec  $\beta = 1$ , les invariants sont tous nuls puisque l'homologie est triviale. Cela permet notamment de préciser le Corollaire 3.11 :

**Proposition 4.10.** *Tout élément de  $\mathcal{G}$  est asymptote à un déformé de l'hyperboloïde, en ce sens que la distance horizontale tend vers 0 lorsque  $r \rightarrow 1$ .*

*Preuve.* Avec les notations du Chapitre 3, la valeur à l'infini  $\gamma \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathbb{S}^1)$  d'une surface  $S \in \mathcal{G}$  vérifie  $|e^{-\gamma}|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = 1$ , puisque  $\sigma_3 = 0$ . Donc, d'après le Théorème 3.10, il existe une déformation  $S'$  de l'hyperboloïde  $S_0$  admettant  $\gamma$  comme valeur à l'infini. En particulier, la distance horizontale entre  $S$  et  $S'$  tend vers 0 lorsque  $r \rightarrow 1$ .  $\square$

Dans le cas des anneaux,  $\beta \neq 1$ , les deux bouts doivent avoir les mêmes invariants de Noether. La conservation de  $\sigma_3$  est d'ailleurs la condition permettant la construction de



$\Gamma_b$  à la Proposition 3.18.

On peut s'interroger sur les trois autres invariants  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_R$ . Pour un anneau  $\beta$ -déformables, la conservation de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_R$  découle forcément de celle de  $\sigma_3$ , d'après le Théorème 3.10.

### 4.5.2 Caténoïdes horizontaux dans $\text{Nil}_3$

On suit les notations de B. Daniel et L. Hauswirth [13] en considérant les coordonnées  $(y_1, y_2, y_3)$  sur  $\text{Nil}_3$  avec :

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 \quad \text{et} \quad y_3 = x_3 + \frac{x_1 x_2}{2}.$$

La métrique sur  $\text{Nil}_3$  est alors  $dy_1^2 + dy_2^2 + (y_1 dy_2 - dy_3)^2$  et le changement de base sur l'espace tangent s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Dans ces coordonnées, l'immersion  $f = (F, h) : \mathbb{C} \rightarrow \text{Nil}_3$  décrivant le caténoïde  $\mathcal{C}_\alpha$  de paramètre  $\alpha > 0$  s'exprime comme :

$$\begin{aligned} F_1(u, v) &= \frac{G'(u)}{\alpha} \cos \varphi(u) \operatorname{sh} A(u, v) - \frac{C}{\alpha} \sin \varphi(u) \operatorname{ch} A(u, v), \\ F_2(u, v) &= \frac{C}{\alpha} A(u, v) - \frac{C}{\alpha} \beta(u) - G(u) \\ \text{et } h(u, v) &= \frac{C}{\alpha} \left( \frac{G'(u)}{\alpha} - 1 \right) \cos \varphi(u) \operatorname{ch} A(u, v) - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{C^2}{\alpha} + G'(u) \right) \sin \varphi(u) \operatorname{sh} A(u, v), \end{aligned}$$

avec  $C, \varphi, \beta, A, G$  définis comme dans [13], à savoir  $C = \sin(2\theta)/(2\alpha)$ ,  $\varphi$  est solution de l'EDO :

$$\varphi'^2 = \alpha^2 + \cos(2\theta) \cos^2 \varphi - C^2 \cos^4 \varphi,$$

$\beta$  et  $G$  sont définies respectivement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta' = C \cos^2 \varphi \\ \beta(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} G' = \frac{C^2 \cos^2 \varphi - \cos(2\theta)}{\alpha - \varphi'} \\ G(0) = 0 \end{array} \right. ,$$

$A = \alpha v + \beta(u)$  et le paramètre  $\theta$  est préalablement choisi comme solution de l'équation :

$$\int_{-1}^1 \frac{2\alpha C^2 t^2 - \alpha \cos(2\theta) + C^2 t^2 \sqrt{P(t)}}{\sqrt{(1-t^2)P(t)}(\alpha + \sqrt{P(t)})} dt = 0 \quad \text{avec} \quad P(t) = \alpha^2 + \cos(2\theta)t^2 - C^2 t^4.$$

On se place sur la courbe convexe fermée  $\mathcal{C}_\alpha \cap \{y_2 = t\}$  de période  $2U$ , naturellement paramétrée par :

$$u \in [0, 2U] \mapsto (F_1(u, v), t, h(u, v)) \in \text{Nil}_3,$$

avec comme expression de  $A$  sur la courbe :

$$A(u, v) = \frac{\alpha}{C}t + \beta(u) + \frac{\alpha}{C}G(u).$$

Une base orthonormale  $(e_1, e_2)$  de l'espace tangent à  $\mathcal{C}_\alpha$  est :

$$e_1 = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y_1} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y_3}$$

et 
$$e_2 = \frac{1}{\text{ch } A} \left( -\sin \varphi \text{sh } A \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + (F_1 - \cos \varphi \text{sh } A) \frac{\partial}{\partial y_3} \right),$$

avec  $e_1$  tangent à la courbe  $\mathcal{C}_\alpha \cap \{y_2 = t\}$ .

Si  $S$  est le générateur infinitésimal d'une famille à un paramètre d'isométries, on a :

$$\mu_S = \frac{C^2 + G'^2}{C} \text{ch } A \langle S, e_2 \rangle du \quad \text{d'où} \quad \sigma_S = \frac{1}{C} \int_0^{2U} (C^2 + G'^2) \langle S, \text{ch } A e_2 \rangle du.$$

Les générateurs infinitésimaux  $S_1, S_2, S_3, S_R$  s'expriment comme suit le long de la courbe, dans les coordonnées  $(y_1, y_2, y_3)$  :

$$S_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} + t \frac{\partial}{\partial y_3}, \quad S_2 = \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad S_3 = \frac{\partial}{\partial y_3} \quad \text{et} \quad S_R = -t \frac{\partial}{\partial y_1} + F_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{F_1^2 - t^2}{2} \frac{\partial}{\partial y_3}.$$

Un calcul direct montre que :

$$\sigma_1 = -\frac{1}{C} \int_0^{2U} (C^2 + G'^2) (\sin \varphi + t \cos \varphi) \text{sh } A \, du.$$

Comme  $\sigma_1$  est un invariant homologique, il est indépendant de  $t$ , donc  $\sigma_1 = 0$  et les

relations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \int_0^{2U} (C^2 + G'^2) \sin \varphi e^{\beta(u) + \alpha G(u)/C} du &= \int_0^{2U} (C^2 + G'^2) \sin \varphi e^{-\beta(u) - \alpha G(u)/C} du \\ &= \int_0^{2U} (C^2 + G'^2) \cos \varphi e^{\beta(u) + \alpha G(u)/C} du = \int_0^{2U} (C^2 + G'^2) \cos \varphi e^{-\beta(u) - \alpha G(u)/C} du = 0. \end{aligned}$$

De même, on a  $\sigma_3 = \sigma_R = 0$  puisque :

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= -\frac{1}{C} \int_0^{2U} (C^2 + G'^2) \cos \varphi \operatorname{sh} A du \\ \text{et } \sigma_R &= \frac{1}{C} \int_0^{2U} (C^2 + G'^2) \left[ \frac{F_1}{2} (2 + \cos \varphi F_1 \operatorname{sh} A) + t \left( \sin \varphi + t \frac{\cos \varphi}{2} \right) \operatorname{sh} A \right] du. \end{aligned}$$

Enfin, pour  $\sigma_2$  on obtient :

$$\sigma_2 = \frac{1}{C} \int_0^{2U} (C^2 + G'^2) (1 + \cos \varphi F_1 \operatorname{sh} A) du,$$

et l'indépendance en  $t$  donne :

$$\sigma_2 = -\frac{1}{C} \int_0^{2U} (C^2 + G'^2) \left( 1 - \frac{G' \cos^2 \varphi}{2\alpha} \right) du.$$

En utilisant les relations entre  $G$  et  $\varphi$  données dans [13], on déduit :

$$\sigma_2 = \frac{\cos(2\tilde{\theta}_\alpha)}{\alpha C} G(U) - 2CU.$$

# Bibliographie

- [1] R. Aiyama, *On the Gauss map of complete space-like hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), no. 2, 353–361.
- [2] K. Akutagawa and S. Nishigawa, *The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space*, Tohoku Math. J. (2) **42** (1990), no. 1, 67–82.
- [3] A. I. Bobenko, *All constant mean curvature tori in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  in terms of theta functions*, Math. Ann. **290** (1991), no. 2, 209–245.
- [4] ———, *Constant mean curvature surfaces and integrable equations*, Russian Math. Surveys **46** (1991), no. 4, 1–45.
- [5] ———, *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases*, Harmonic maps and integrable systems, Vieweg, 1994, pp. 83–127.
- [6] R. Böhme and A. J. Tromba, *The index theorem for classical minimal surfaces*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 3, 447–499.
- [7] D. Brander, W. Rossman, and N. Schmitt, *Holomorphic representation of constant mean curvature surfaces in Minkowski space : consequences of non-compactness in loop group methods*, Adv. Math. **223** (2010), 949–986.
- [8] R. Bryant, P. Griffiths, and D. Grossman, *Exterior differential systems and Euler-Lagrange partial differential equations*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 2003.
- [9] S. Cartier and L. Hauswirth, *Deformations of CMC-1/2 surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  with vertical ends at infinity*, Work in progress.
- [10] H. I. Choi and A. E. Treibergs, *Gauss map of spacelike constant mean curvature hypersurfaces in Minkowski space*, J. Differential Geom. **32** (1990), no. 3, 775–817.

- 
- [11] B. Daniel, *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*, Comment. Math. Helv. **82** (2007), no. 1, 87–131.
- [12] ———, *The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg group*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2011), no. 3, 674–695.
- [13] B. Daniel and L. Hauswirth, *Half-space theorem, embedded minimal annuli and minimal graphs in the Heisenberg group*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **98** (2009), no. 2, 445–470.
- [14] B. Daniel, L. Hauswirth, and P. Mira, *Constant mean curvature surfaces in homogeneous manifolds*, unpublished proceedings of the 4th KIAS Workshop on Differential Geometry, 2009.
- [15] J. Dorfmeister, F. Pedit, and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), no. 4, 633–668.
- [16] R. Sa Earp, *Parabolic and hyperbolic screw motion surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , J. Aust. Math. Soc. **85** (2008), no. 1, 113–143.
- [17] R. Sa Earp and E. Toubiana, *Screw motion surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* , Illinois J. Math. **49** (2005), no. 4, 1323–1362 (electronic).
- [18] M. F. Elbert, B. Nelli, and R. Sa Earp, *Vertical ends of constant mean curvature  $H = 1/2$  in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [19] I. Fernández and P. Mira, *A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds*, Differential Geom. Appl. **25** (2007), no. 3, 281–289.
- [20] ———, *Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Amer. J. Math. **129** (2007), no. 4, 1145–1181.
- [21] ———, *Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 11, 5737–5752.
- [22] C. B. Figueroa, F. Mercuri, and R. H. L. Pedrosa, *Invariant surfaces of the Heisenberg groups*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **177** (1999), 173–194.
- [23] S. Fujimori, S.-P. Kobayashi, and W. Rossman, *Loop group methods for constant mean curvature surfaces*, preprint (2006) arXiv : math/0602570v2.
- [24] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 2001, Reprint of the 1998 edition.

- 
- [25] R. Kusner, R. Mazzeo, and D. Pollack, *The moduli space of complete embedded constant mean curvature surfaces*, *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), no. 1, 120–137.
- [26] B. Nelli, R. Sa Earp, W. Santos, and E. Toubiana, *Uniqueness of  $H$ -surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $|H| \leq 1/2$ , with boundary one or two parallel horizontal circles*, *Ann. Global Anal. Geom.* **33** (2008), no. 4, 307–321.
- [27] E. Noether, *Invariant variation problems*, *Transport Theory Statist. Phys.* **1** (1971), no. 3, 186–207, Translated from the German (*Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* 1918, 235–257).
- [28] P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, 1993.
- [29] J. Pérez and A. Ros, *The space of properly embedded minimal surfaces with finite total curvature*, *Indiana Univ. Math. J.* **45** (1996), 177–204.
- [30] P. Romon, *Noether theorem, conserved quantities, minimal and CMC surfaces*, in *Oberwolfach Mini-Workshop Progress in surface theory*, Report no. 21/2010.
- [31] ———, *Symmetries and conserved quantities for minimal surfaces*, unpublished preprint (1997).
- [32] J. Spruck, *Interior gradient estimates and existence theorems for constant mean curvature graphs in  $M^n \times \mathbf{R}$* , *Pure Appl. Math. Q.* **3** (2007), no. 3, Special Issue : In honor of Leon Simon. Part 2, 785–800.
- [33] A. Sym, *Soliton surfaces and their applications (soliton geometry from spectral problems)*, *Geometric aspects of the Einstein equations and integrable systems* (Scheveningen, 1984), Springer, 1985, pp. 154–231.
- [34] T. Taniguchi, *The Sym-Bobenko formula and constant mean curvature surfaces in Minkowski 3-space*, *Tokyo J. Math.* **20** (1997), no. 2, 463–473.
- [35] A. E. Treibergs, *Entire spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space*, *Invent. Math.* **66** (1982), no. 1, 39–56.
- [36] B. White, *The space of  $m$ -dimensional surfaces that are stationary for a parametric elliptic functional*, *Indiana Univ. Math. J.* **36** (1987), 567–603.
- [37] ———, *The space of minimal submanifolds for varying Riemannian metrics*, *Indiana Univ. Math. J.* **40** (1991), no. 1, 161–200.