



Cubulations de variétés hyperboliques compactes

Guillaume Dufour

► To cite this version:

Guillaume Dufour. Cubulations de variétés hyperboliques compactes. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2012. Français. NNT : 2012PA112053 . tel-00690334

HAL Id: tel-00690334

<https://theses.hal.science/tel-00690334>

Submitted on 23 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Préparée à l'École Doctorale
de Mathématiques de la région Paris-Sud

Spécialité : Mathématiques

par

Guillaume Dufour

Cubulations de variétés hyperboliques compactes

Soutenue le 23 Mars 2012 devant la Commission d'examen :

M.	Nicolas	BERGERON	(Examineur)
M.	Michel	BOILEAU	(Rapporteur)
M.	Vincent	GUIRADEL	(Rapporteur)
M.	Frédéric	HAGLUND	(Directeur de thèse)
M.	Frédéric	PAULIN	(Examineur)
M.	Michah	SAGEEV	(Président du jury)



Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628)
Bâtiment 425
Université Paris-Sud 11
91405 Orsay CEDEX

Résumé

Cette thèse est une contribution au domaine des cubulations de groupes hyperboliques au sens de Gromov. Nous nous intéressons au cas particulier des groupes fondamentaux de variétés hyperboliques réelles compactes. La philosophie inspirée dans ce domaine par les travaux de M. Sageev est que si un groupe hyperbolique possède suffisamment de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes, alors il agit géométriquement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ de dimension finie. Nous démontrons un critère précis de cubulation pour les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes, à l'aide de constructions d'espaces à murs quasi-isométriques à l'espace hyperbolique réel.

Nous nous restreignons par la suite au cas particulier de la dimension 3 et plus particulièrement aux 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle. Nous exploitons alors une construction de surfaces immergées incompressibles dites coupées-croisées due à D. Cooper, D. Long et A. Reid dans une telle 3-variété M pour fabriquer des sous-groupes de surface de son groupe fondamental G . En raffinant des arguments de J. Masters et en exploitant la structure de l'application de Cannon-Thurston, nous parvenons à construire des sous-groupes de surfaces quasi-convexes de G en quantité suffisante pour que leurs ensembles limites permettent de séparer toutes les paires de points distincts du bord du revêtement universel de M . En conséquence de cette construction, G agit géométriquement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ de dimension finie.

D. Wise soulève alors la question de savoir si ce groupe G peut agir géométriquement et également virtuellement co-spécialement (au sens de F. Haglund et D. Wise) sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$. Une réponse positive résoudrait les conjectures selon lesquelles G est large et le premier nombre de Betti virtuel de M est infini. Nous faisons remarquer que pour obtenir une réponse positive à cette question, il suffit de trouver une surface coupée-croisée virtuellement plongée dans un revêtement fini fibré sur le cercle de M . Nous concluons en présentant des conditions algébriques, puis géométriques et cohomologiques suffisantes pour qu'une surface coupée-croisée donnée soit virtuellement plongée.

Mots-clefs : Espaces à murs, Complexes cubiques $\text{CAT}(0)$, Groupes hyperboliques, 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle, Sous-groupes de surface, Surfaces coupées-croisées

CUBULATIONS OF CLOSED HYPERBOLIC MANIFOLDS

Abstract

This thesis contributes to the study of geometric actions of word-hyperbolic groups on finite dimensional $\text{CAT}(0)$ cube complexes. We are mainly interested in the case of fundamental groups of closed hyperbolic manifolds. The philosophy coming from pioneer work of M. Sageev is that a hyperbolic group with sufficiently many quasi-convex codimension one subgroups acts geometrically on a finite dimensional $\text{CAT}(0)$ cube complex. We prove a precise criterion for cubulation in the case of closed hyperbolic manifolds, by constructing spaces with walls quasi-isometric to real hyperbolic space.

We next focus on the case of three dimensional closed hyperbolic manifolds which are virtually fibered over the circle. In this setting, we use a construction of incompressibly immersed cut-and-cross-join surfaces due to D. Cooper, D. Long and A. Reid that yields surface subgroups of the fundamental group G of the 3-manifold M . By expanding on work of J. Masters and using the structure of the Cannon-Thurston map, we are able to build many quasi-convex surface subgroups of G whose limits sets may be used to separate any pair of distinct points in the boundary of the universal cover of M . As a consequence, G acts geometrically on a finite dimensional $\text{CAT}(0)$ cube complex.

D. Wise then asks if it is possible that G acts both geometrically and virtually co-specially (in the sense of F. Haglund and D. Wise) on a $\text{CAT}(0)$ cube complex. A positive answer would solve the long-standing conjectures that G is large and M has infinite virtual first Betti number. We then explain why finding a virtually embedded cut-and-cross-join surface in a finite cover of M would be enough to solve this problem. Finally, we give some algebraic and then geometric and cohomological sufficient conditions for a given cut-and-cross-join surface to virtually embed.

Keywords : Spaces with walls, $\text{CAT}(0)$ cube complexes, Hyperbolic groups, Closed hyperbolic 3-manifolds virtually fibered over the circle, Surface subgroups, Cut-and-cross-join surfaces

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier très chaleureusement mon directeur de thèse Frédéric Haglund pour toutes ces années riches en échanges mathématiques, pour avoir accepté d'encadrer mon stage de Master 2 et m'avoir permis de poursuivre en thèse, tout en connaissant mon projet professionnel. J'ai énormément apprécié les qualités humaines de Frédéric, sa grande gentillesse et sa patience infinie, autant que sa grande disponibilité et son soutien indéfectible en toutes circonstances. Je le remercie d'avoir consacré autant de temps, d'énergie et de bonne humeur à ma formation mathématique durant ces cinq dernières années. J'ai énormément appris à son contact, sur le fond bien sûr, mais également à travers sa vision éminemment géométrique qui m'a beaucoup séduit tant par sa puissance que par son élégance. Je bénéficierai certainement à vie de cette influence positive dans ma manière de faire et surtout de transmettre les mathématiques.

Je remercie également Michel Boileau et Vincent Guirardel pour avoir accepté la lourde tâche de relire ce manuscrit en détail. Merci pour l'intérêt que vous portez pour cette thèse et pour les critiques constructives qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce texte. Je suis également très honoré par la présence dans mon jury de thèse de Nicolas Bergeron et Frédéric Paulin, que j'admire tous deux pour leurs talents de mathématiciens, mais surtout pour leurs grandes qualités de pédagogues et la passion évidente qui les anime lorsqu'ils transmettent les mathématiques. Enfin, je remercie très chaleureusement le président du jury Michah Sageev pour me faire l'honneur d'être présent pour la soutenance de cette thèse qui doit tant à ses propres travaux, pour avoir fait le déplacement et également pour ses talents extraordinaires d'organisateur de conférence : mes 27 ans en Israël resteront sans doute un de mes meilleurs souvenirs mathématiques de ces dernières années.

J'ai énormément apprécié le cadre d'initiation à la recherche fourni par le laboratoire de mathématiques d'Orsay. Les mathématiques que l'on y découvre sont toujours indiscutablement fascinantes (même si j'avoue la plupart du temps ne pas en comprendre un traître mot) et véhiculées par de vrais passionnés. Je souhaite également remercier les secrétaires indispensables qui ont pu me faciliter nombre de démarches administratives tout au long de cette thèse, Martine Justin, Fabienne Jacquemin, et surtout Valérie Lavigne pour sa gentillesse et sa disponibilité inégalées et sans qui l'école doctorale n'aurait pas la moindre chance de survie.

Merci également à tous mes camarades passés et présents de l'école doctorale, qui insufflent une grande dose de bonne humeur dans les couloirs du 430. C'est une grande chance d'être entouré de personnes prêtes à tant partager, échanger et à se soutenir mutuellement face aux épreuves inévitablement rencontrées au cours d'une thèse. Merci à Thomas, Nicolas, Emmanuel, Richard, Paul, Ludovic, Fanny, Cyril, Eddy, Robin, Bernardo, Jérémie, Sébastien, Aurélien, Olivier, Laure, Thierry, Caroline, aux anciens du 112 Marianne, Camille, Abed, Thi Thu, Pierre et Oana pour l'excellente ambiance de bureau et également à Ramla pour avoir beaucoup refait le monde ensemble pendant ces dernières années.

Ces quelques courtes années de thèse marquent l'aboutissement de dix ans d'études au cours desquelles j'ai eu la chance de rencontrer certains excellents enseignants de mathématiques qui ont su m'inspirer et me transmettre leur passion commune. Mes études universitaires ont été particulièrement marquées par les professeurs Patrick Popescu-Pampu et Nicolas Bergeron à qui je dois reconnaître un talent inouï pour faire aimer la géométrie. Mes remerciements les plus chaleureux vont également à Nicolas Tosel pour son investissement légendaire auprès de ses élèves et l'extraordinaire qualité de ses cours. Avoir eu un enseignant aussi compétent n'est pas complètement étranger à mon désir de devenir à mon tour professeur de classes préparatoires et il est évident que je ne serais pas là où j'en suis aujourd'hui sans le bénéfice des deux années passées sur les bancs de sa classe.

Je souhaite également adresser mes remerciements à mes amis de longue date. Merci tout particulièrement à mes alcoolyles de Lyon préférés (non, pas de faute de frappe, ils se reconnaîtront même s'ils prétendent le contraire) pour les montagnes de bons souvenirs que j'ai avec eux. Ces dix dernières années auraient été bien plus ternes sans vous.

Je remercie également mes amis de promotion de l'ENS Cachan, pour leur contact enrichissant et un bel esprit de camaraderie. Je pense en particulier à Antoine, Aude, Florent, Grégory, Julien, Nassradine, Olivier et Xavier. La mention "fou rire" vous revient de droit !

Merci également aux inénarrables Billys, tout particulièrement à Billy, Billy, Billy et Billy (à savoir Dju, Floflo, Gaël et Robin pour ceux qui n'auraient pas suivi). L'épopée No Comment, à défaut d'avoir abouti à une tournée mondiale pourtant méritée, n'en restera pas moins une expérience que j'ai été heureux de partager avec vous.

Et pour finir, merci à mes camarades masochistes d'Escalad'Indoor pour tous les bons moments passés ensemble dans ce club extraordinaire. C'est toujours un plaisir de venir se péter une cheville ou se ruiner les doigts en votre compagnie. Merci à Antoine, Jacques-Olivier, Adrien, Marie-Noëlle, Rémi, Adeline et Justine entre autres.

Je remercie également ma famille, particulièrement mes parents pour avoir toujours encouragé mes projets et m'avoir soutenu pendant des années d'études pas toujours faciles, également pour avoir su me transmettre depuis tout petit curiosité, soif de connaissances, passion des livres, beaucoup de choses qui font de moi ce que je suis aujourd'hui. Merci également à mon frère Thomas pour son caractère passionné et enthousiaste et son exemple qui a inconsciemment suggéré à mon jeune esprit malléable que le monde des mathématiques pouvait être fichtrement chouette (ah, et merci aussi pour m'avoir laissé te voler ta guitare, grâce à ça je n'ai pas à me casser la tête à chercher des modèles gauchers aujourd'hui).

Enfin, je remercie de tout mon cœur Emilie, pour toute sa gentillesse au quotidien et son soutien (même de mon humour !), ainsi que pour tous les moments extraordinaires que nous passons ensemble.

Table des matières

Introduction	1
I Critères de cubulation	9
1 Complexes cubiques CAT(0) et espaces à murs	15
1.1 Complexes cubiques CAT(0)	16
1.1.1 Sous-groupes de codimension 1 et semi-scindements	16
1.1.2 Complexes cubiques CAT(0) et hyperplans	17
1.1.3 Complexe cubique CAT(0) dual à un sous-groupe de codimension 1	20
1.2 Espaces à murs	21
1.2.1 Systèmes de murs	22
1.2.2 Distance de murs	22
1.2.3 Action d'un groupe discret sur un espace à murs	22
1.3 Cubulation des espaces à murs	23
1.3.1 Graphes médians	23
1.3.2 Ultrafiltres sur un espace à murs	23
1.3.3 Cubulation des espaces murs	24
1.3.4 Espaces à murs géométriquement cubulables	24
1.3.5 Graphes médians et complexes cubiques CAT(0)	25
2 Cubulations de variétés hyperboliques compactes	27
2.1 Familles asymptotiquement séparantes de quasi-hyperplans	28
2.1.1 Propriétés de convexité	28
2.1.2 Quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$	28
2.1.3 Séparation à grande échelle et quasi-isométrie	30
2.2 Cubulation des familles de quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$	32
2.2.1 Projections sur les quasi-convexes des espaces hyperboliques	33
2.2.2 Quasi-surjectivité et locale finitude de la cubulation	33
2.3 Critères de cubulation de variétés hyperboliques compactes	36
2.3.1 Quasi-hyperplans Γ -cocompacts	36
2.3.2 Critère de cubulation dans $\mathbb{H}^n$	37
2.3.3 Quasi-hyperplans généralisés et variante de la construction d'espace à murs	38
2.3.4 Critère de cubulation au bord de $\mathbb{H}^n$	39
2.4 Application aux variétés arithmétiques	41
2.4.1 Commensurateur et densité	41
2.4.2 Cubulation des variétés arithmétiques	41
II Cubulations de 3-variétés hyperboliques compactes	47
3 Topologie et Géométrie des 3-variétés fibrées sur le cercle	57
3.1 3-variétés virtuellement fibrées sur le cercle	58
3.1.1 3-variétés fibrées sur le cercle	58
3.1.2 Revêtements d'une suspension	59
3.1.3 Groupe fondamental d'une suspension	60

3.1.4	Action de $\pi_1(M)$ sur le revêtement universel $\tilde{F}$ de la fibre	61
3.2	Hyperbolisation et bord à l'infini	62
3.2.1	Présentation du théorème d'hyperbolisation	62
3.2.2	Feuilletages transverses et transversalement mesurés	63
3.2.3	Géométrie localement euclidienne à singularités sur la fibre	64
3.2.4	Géométrie à grande échelle de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$	65
3.2.5	Application de Cannon-Thurston	68
4	Surfaces coupées-croisées des 3-variétés fibrées sur le cercle	69
4.1	Surfaces coupées-croisées et quasi-convexité	70
4.1.1	Construction des surfaces coupées-croisées	70
4.1.2	Le polygone idéal $P(\tilde{S}) = \Phi(\tilde{S})$	72
4.1.3	Ensemble limite isométrique et critère de quasi-convexité	73
4.2	Ensembles limites des surfaces coupées-croisées quasi-convexes	75
4.2.1	Paramétrisation de $\Lambda(\pi_1(S))$ par l'ensemble limite isométrique	75
4.2.2	Points identifiés dans l'ensemble limite isométrique	76
4.2.3	Image réciproque de $\Lambda(\pi_1(S))$ par l'application de Cannon-Thurston	76
4.2.4	Séparation de paires de points de $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$ par $\Lambda(\pi_1(S))$	81
5	Constructions de sous-groupes de surface quasi-convexes	83
5.1	Relevés des surfaces coupées-croisées dans $F \times \mathbb{R}$	84
5.1.1	Les relevés de la partie plongée de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$	84
5.1.2	Structure des relevés de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$	85
5.1.3	Pavages de $\tilde{F}$ associés à la courbe c	86
5.1.4	Structure du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$	88
5.2	Constructions de surfaces coupées-croisées quasi-convexes	89
5.2.1	Dynamique des relevés des puissances de la monodromie dans $\bar{F}$	89
5.2.2	Une condition suffisante de quasi-convexité	91
5.2.3	Tripodes droits et courbes compatibles	91
5.2.4	Prescription d'un côté du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$	93
5.3	Surfaces coupées-croisées généralisées	97
5.3.1	Construction des surfaces coupées-croisées généralisées	97
5.3.2	Relevés des surfaces coupées-croisées généralisées	98
5.4	Constructions de surfaces coupées-croisées généralisées quasi-convexes	100
5.4.1	Une condition suffisante de quasi-convexité	100
5.4.2	Paires de tripodes droits alternés	100
5.4.3	Prescription d'une paire de côtés du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$	101
6	Application du critère de cubulation aux 3-variétés fibrées	107
6.1	Quelques outils de densité	108
6.1.1	Existence automatique de courbes compatibles pour les tripodes	108
6.1.2	Propriétés de densité des points et feuilles périodiques	109
6.2	Séparation de points du bord	110
6.2.1	Le cas d'un point non-injectif pour CT	110
6.2.2	Le cas de deux points injectifs pour CT	112
III	Plongements virtuels de surfaces coupées-croisées	115
7	Un problème de connexité	125
7.1	Relevés et produits fibrés	126
7.1.1	Relevés d'applications	126
7.1.2	Produit fibré	126
7.1.3	Identifier les composantes connexes du produit fibré	127
7.1.4	Relever les plongements par morceaux	128
7.2	Les relevés de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$	128
7.2.1	Le relevé S_∞ dans $F \times \mathbb{R}$	128
7.2.2	Le produit fibré $\widehat{S_\infty}$ associé à un revêtement fini $\hat{F}$	131
7.2.3	Une condition suffisante de plongement virtuel	133

7.2.4	Une condition suffisante combinatoire de plongement virtuel	134
7.3	Propriétés d'engouffrement	135
7.3.1	Engouffrement de $\pi_1(S)$ dans $\pi_1(M)$	136
7.3.2	Engouffrement de $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ dans $\pi_1(F)$	136
7.4	Premières expérimentations	137
7.4.1	Revêtements doubles	137
7.4.2	Le cas d'une courbe φ -périodique	138
7.5	Hypothèses cohomologiques	142
7.5.1	Le cas $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	142
7.5.2	Le cas $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $c \cap \varphi^{n-1}(c) = \emptyset$	144

Bibliographie

151

Introduction

Les travaux de la présente thèse s'inscrivent au croisement de la théorie géométrique des groupes et de la topologie de petite dimension. La théorie des groupes est la branche des mathématiques qui explore le concept de symétrie ; le géomètre des groupes est plus précisément le mathématicien qui tente de réaliser certaines symétries données comme des isométries d'un espace métrique aux propriétés qu'il juge intéressantes. L'étude de la géométrie d'un groupe à travers de tels espaces modèles permet bien souvent d'obtenir en retour des propriétés algébriques du groupe considéré et cette démarche est au cœur de cet ouvrage.

Modèles géométriques

On dit qu'un groupe G de type fini agit *géométriquement* sur un espace métrique localement compact (X, d) s'il est muni d'une action par isométries à la fois propre et cocompacte sur X . Par exemple, on peut munir le groupe G d'une partie génératrice finie et symétrique S et construire le graphe de Cayley $\Gamma(G, S)$ associé : les sommets de $\Gamma(G, S)$ sont les éléments de G et il existe une arête entre deux sommets g et h si, et seulement si, $g^{-1}h \in S$. Le groupe G agit alors géométriquement par translation à gauche sur $\Gamma(G, S)^{(0)}$ (pour la distance combinatoire usuelle sur ce graphe). On voit alors le groupe G lui-même comme un espace métrique, ce graphe de Cayley étant un modèle de la géométrie de ce groupe.

Définition. Soit G un groupe de type fini. Nous dirons qu'un espace métrique localement compact (X, d) est un *modèle géométrique* pour le groupe G s'il existe une action géométrique de G sur X .

Deux modèles géométriques différents d'un groupe G donné sont *quasi-isométriques*, i.e. leurs propriétés géométriques à grande échelle sont comparables. Mais il est tout de même parfois possible de trouver un modèle géométrique d'un groupe G permettant d'obtenir plus de propriétés sur le groupe G qu'à l'aide de l'étude de l'un de ses graphes de Cayley.

Les groupes que nous étudions dans cette thèse sont des groupes hyperboliques au sens de Gromov, généralisant les groupes libres et les groupes agissant classiquement géométriquement sur les espaces hyperboliques réels.

Rappelons qu'un espace métrique géodésique est dit δ -hyperbolique si, pour tout triangle géodésique $T = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$, on a l'inclusion $[x, y] \subset \mathcal{V}_\delta([y, z] \cup [z, x])$ (où $\mathcal{V}_\delta$ désigne le δ -voisinage d'une partie). Un groupe G de type fini est dit *hyperbolique au sens de Gromov* (ou simplement hyperbolique) s'il existe $\delta \geq 0$ et un graphe de Cayley $\Gamma(G, S)$ de G qui muni de la distance combinatoire usuelle soit δ -hyperbolique (et cette notion ne dépend pas de la partie génératrice finie fixée).

Cubulations

Les espaces métriques parmi lesquels nous chercherons des modèles géométriques de groupes donnés sont des objets combinatoires introduits par M. Gromov sous le nom de *complexes cubiques* CAT(0) et généralisant la notion d'arbre simplicial. Ces objets sont des CW-complexes simplement connexes dont les cellules modelées sur les cubes standards de l'espace euclidien sont recollées par des isométries le long de leur faces, et possédant une propriété combinatoire de courbure négative ou nulle : les links de sommets doivent être des complexes simpliciaux de drapeaux. Ces complexes sont munis de la distance combinatoire usuelle sur leur 1-squelette.

Les groupes de type fini qui admettent une action non-triviale sur un complexe cubique CAT(0) sont exactement ceux qui possèdent un sous-groupe de *codimension* 1 (i.e. un sous-groupe dont au moins un voisinage fini disconnecte un graphe de Cayley). Ce résultat fondateur dû à M. Sageev admet une version plus précise dans le cas des groupes hyperboliques.

Théorème (M. Sageev, [Sag95]). *Un groupe hyperbolique possédant un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe admet une action par isométries, sans point fixe global et cocompacte sur un complexe cubique CAT(0) de dimension finie.*

L'action obtenue dans le résultat de M. Sageev n'est cependant pas toujours propre. Il faut parfois plus d'un seul sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe dans un groupe hyperbolique pour être en mesure de trouver un modèle géométrique cubique CAT(0). La philosophie générale de cette thèse consiste à penser que si un groupe hyperbolique possède suffisamment (en un sens à préciser) de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes, alors il admet un modèle géométrique qui est un complexe cubique CAT(0).

Définition. Un groupe G de type fini est dit *cubique CAT(0)* s'il admet une action par isométries, propre et cocompacte sur un complexe cubique CAT(0) de dimension finie.

La problématique de cette thèse est la suivante. Étant donné un groupe G hyperbolique au sens de Gromov, on souhaite savoir si G est *cubulable*, i.e. admet un modèle géométrique qui est un complexe cubique CAT(0). Nous sommes particulièrement intéressés par le cas des groupes hyperboliques à un bout que sont les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes.

Cubulations spéciales

Trouver un modèle géométrique cubique CAT(0) pour le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte n'apporte aucun corollaire algébrique non déjà établi pour ce groupe. Pour obtenir des résultats de structure originaux pour de tels groupes, il faut les identifier au groupe fondamental d'un complexe cubique compact à courbure négative ou nulle qui est de plus *spécial*, au sens défini par F. Haglund et D. Wise ([HW07]).

Les propriétés essentielles des complexes cubiques sont celles de leurs hyperplans immergés. Dans un complexe cubique compact à courbure négative ou nulle, ces hyperplans peuvent présenter un certain nombre de pathologies : la non-séparation, l'auto-intersection, l'auto-osculation et l'inter-osculation. Lorsque ces comportements ne se présentent pas, on dit que le complexe cubique est *spécial* (les complexes cubiques CAT(0) sont par exemple spéciaux).

Les groupes fondamentaux de complexes cubiques spéciaux sont virtuellement sous-groupes de groupes d'Artin à angles droits (i.e. de groupes de présentation $\langle s_1, \dots, s_n \mid [s_i, s_j]^{m_{i,j}} = 1 \rangle$ où $m_{i,j} \in \{0, 1\}$ pour $1 \leq i, j \leq n$). En particulier, ces groupes sont larges dans le cas non-abélien (i.e. se surjectent virtuellement sur un groupe libre non-abélien). Cette dernière propriété n'étant pas du tout connue en général pour les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes en dimension ≥ 3 , il peut être intéressant de chercher à l'établir via les complexes cubiques spéciaux.

Définition. On dit qu'un groupe G est *cubique spécial*, ou plus simplement *spécial*, s'il existe un complexe cubique X compact connexe à courbure négative ou nulle et spécial ainsi qu'un isomorphisme $G \simeq \pi_1(X)$.

La problématique qui dominera la troisième partie de cette thèse est alors la suivante. Si M est une variété hyperbolique compacte de dimension trois, le groupe fondamental de M est-il virtuellement cubique spécial ?

Organisation

Cette thèse est découpée en trois parties dont les thématiques sont les suivantes :

1. Dans la première partie, nous établirons deux critères géométriques qui suffisent à assurer que le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte est cubique CAT(0).
2. Dans une seconde partie, nous démontrons via notre critère de cubulation que les groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle sont cubiques CAT(0). L'ingrédient principal de cette cubulation est l'existence de nombreux sous-groupes de surface quasi-convexes, obtenus par des constructions de surfaces dites coupées-croisées.
3. Dans la troisième partie, nous présentons des tentatives de démonstration de l'existence dans les 3-variétés fibrées sur le cercle d'au moins une surface coupée-croisée virtuellement plongée. Nous expliquons pourquoi un tel résultat entraînerait que les groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement de Haken sont virtuellement cubiques spéciaux.

Critères de cubulation

Dans la première partie de cette thèse, nous rappellerons le fonctionnement du procédé de cubulation des espaces à murs de B. Nica ([Nic04]). Tout espace à murs séparé, vu comme un espace métrique, est canoniquement isométriquement plongé dans l'ensemble des sommets d'un complexe cubique $\text{CAT}(0)$. Ce plongement naturel permet d'étendre toute action d'un groupe sur un espace à murs en une action sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$.

Nous démontrerons que des propriétés raisonnables imposées au plongement de l'espace à murs dans son complexe cubique dual permettent de garantir que les actions géométriques d'un groupe sur un espace à murs s'étendent en une action géométrique sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$. Les espaces à murs possédant cette propriété seront dits *géométriquement cubulables*.

Définition. Un espace à murs séparé $(X, \mathcal{M})$ dont le graphe des ultrafiltres quasi-principaux $\mathcal{C}^1(X)$ est localement fini et tel que le plongement isométrique $X \hookrightarrow \mathcal{C}^1(X)$ soit quasi-surjectif est dit *géométriquement cubulable*.

Notre stratégie pour cubuler un groupe donné consistera donc à démontrer que celui-ci agit géométriquement sur un espace à murs géométriquement cubulable.

Quasi-hyperplans

Nous fabriquerons alors des espaces à murs dans l'espace hyperbolique réel, généralisant les situations classiques de murs provenant d'hyperplans totalement géodésiques. Nous introduirons une notion de quasi-hyperplans, qui seront des parties (uniformément) quasi-convexes de $\mathbb{H}^n$ dont un voisinage fini disconnecte $\mathbb{H}^n$. Nos murs seront obtenus en considérant les composantes de bord de l'enveloppe convexe de telles parties. À une famille uniformément localement finie de tels quasi-hyperplans, nous associerons un espace à murs dual.

Nous introduirons alors une hypothèse de séparation à grande échelle pour les familles de quasi-hyperplans, imposant une certaine forme d'équirépartition aux murs correspondant. Sous cette hypothèse de séparation asymptotique, nous montrerons que les espaces à murs considérés sont géométriquement cubulables.

Théorème (Espaces à murs géométriquement cubulables). *Soit $L \geq 0$ et $\mathcal{H}$ une famille uniformément localement finie et asymptotiquement séparante de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$. Alors l'espace à murs séparé dual à $\mathcal{H}$ est géométriquement cubulable. Le graphe médian $\mathcal{C}^1(X)$ est de plus uniformément localement fini et le complexe cubique associé est donc de dimension finie.*

Les groupes opérant géométriquement sur de tels espaces à murs seront alors cubiques $\text{CAT}(0)$.

Critères de cubulation des réseaux uniformes de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$

Nous montrerons alors que la présence d'une quantité suffisante de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes dans le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte permet de construire un espace à murs géométriquement cubulable sur lequel le groupe fondamental de la variété agit géométriquement.

Nous obtiendrons le critère de cubulation formulé ci-dessous.

Théorème (Cubulation par les quasi-hyperplans). *Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme. On suppose qu'il existe une famille $(\Gamma$ -invariante et) asymptotiquement séparante de quasi-hyperplans Γ -cocompacts de $\mathbb{H}^n$. Alors Γ est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Nous établirons ensuite que ce critère de cubulation est équivalent à un autre critère formulé au bord du revêtement universel de la variété.

Théorème (Cubulation par séparation des paires de points du bord). *Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme. On suppose que pour tous $x, y \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$ distincts, il existe un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe $\Sigma \leq \Gamma$ dont l'ensemble limite $\Lambda(\Sigma)$ sépare x et y dans $\partial_\infty \mathbb{H}^n$. Alors Γ est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Ce dernier théorème est en général le critère appliqué pour démontrer en pratique qu'une variété hyperbolique compacte est cubique $\text{CAT}(0)$ (nous mettrons en œuvre cette démarche dans la seconde partie pour traiter le cas des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle).

Application au cas des variétés arithmétiques

Nous raffinerons ce critère dans le cas des variétés arithmétiques. La propriété de densité du commensurateur nous permettra d'affirmer qu'il suffit dans ce cas de disposer d'un seul sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe pour obtenir une cubulation.

Théorème (Critère de cubulation des variétés hyperboliques compactes arithmétiques). *Soit Γ un réseau uniforme arithmétique de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Si Γ possède un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe, alors Γ est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Ce dernier résultat, combiné au récent théorème de M. Lackenby ([Lac10]) démontrant l'existence de sous-groupes de codimension 1 pour les 3-variétés hyperboliques arithmétiques, permet d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire (Cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes arithmétiques). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte et arithmétique. Alors $\pi_1(M)$ est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Cubulations de 3-variétés hyperboliques compactes

Dans la seconde partie de cette thèse, nous nous intéressons plus précisément au problème de la cubulation des groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes de dimension 3. Pour réaliser une telle cubulation, il est nécessaire de disposer de nombreux sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes.

Or en dimension 3, les sous-groupes de surface (i.e. les sous-groupes isomorphes au groupe fondamental $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle$ d'une surface compacte connexe orientable de genre $g \geq 2$) sont des sous-groupes de codimension 1.

Si M est une 3-variété hyperbolique compacte connexe, on espère donc que $\pi_1(M)$ contient de nombreux sous-groupes de surface quasi-convexes, en particulier une collection suffisante pour que leurs ensembles limites au bord de $\widehat{M}$ permettent de séparer toutes les paires de points distincts.

Au démarrage de cette thèse, le résultat d'existence de sous-groupes de surface de M. Lackenby dans le cas arithmétique a beaucoup motivé les travaux de la première partie de cette thèse. Par ailleurs, il existait également une autre classe de 3-variétés pour laquelle l'existence de sous-groupes de surface quasi-convexe était établie. Il s'agit des 3-variétés compactes connexes virtuellement fibrées sur le cercle. D. Cooper, D. Long et A. Reid ont en effet démontré que les groupes fondamentaux de telles 3-variétés contenaient toujours un sous-groupe de surface quasi-convexe ([CLR94]). Leur résultat avait d'ailleurs récemment été amélioré par J. Masters, qui a démontré dans ce cas l'existence de très nombreux sous-groupes de surface quasi-convexes ([Mas06]). Ces résultats d'existence nous ont incité à vérifier qu'il est possible d'appliquer l'un de nos critères de cubulation à cette classe de 3-variétés.

Le problème posé dans cette seconde partie est donc de démontrer que les groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques compactes connexes virtuellement fibrées sur le cercle sont cubiques $\text{CAT}(0)$.

Surfaces immergées incompressibles et quasi-convexité

Si M est une 3-variété hyperbolique compacte connexe, l'existence d'un sous-groupe de surface de $\pi_1(M)$ équivaut à celle d'une immersion π_1 -injective $S \rightarrow M$ d'une surface S de genre $g \geq 2$ dans M . Dans le cas des 3-variétés fibrées sur le cercle, l'inclusion de la fibre est un exemple de plongement π_1 -injectif d'une surface dans M . Cependant, le sous-groupe de surface correspondant n'est pas quasi-convexe et ne peut donc pas être utilisé pour cubuler.

Cette situation particulière décrit essentiellement tous les sous-groupes de surface non quasi-convexes du groupe fondamental d'une 3-variété hyperbolique compacte.

Théorème (F. Bonahon [Bon86], A. Marden [Mar74], W. Thurston [Thu86b]). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte connexe et $\iota : S \hookrightarrow M$ une immersion π_1 -injective d'une surface compacte connexe orientable S de genre $g \geq 2$ dans M . Alors soit $\iota_*(\pi_1(S))$ est quasi-convexe dans $\pi_1(M)$, soit il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M auquel ι se relève en une application homotope à l'inclusion d'une fibre pour une certaine fibration de $\widehat{M}$ sur le cercle.*

Le corollaire essentiel de ce théorème est qu'un sous-groupe de surface de $\pi_1(M)$ est quasi-convexe dès que son ensemble limite ne remplit pas la sphère à l'infini $\partial_\infty \widehat{M}$.

Sous-groupes de surface quasi-convexes des 3-variétés fibrées sur le cercle

On s'intéresse maintenant au cas des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle. Si M est une telle variété, il est connu depuis longtemps que $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe de surface quasi-convexe.

Théorème (D. Cooper, D. Long, A. Reid, [CLR94]). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte connexe virtuellement fibrée sur le cercle. Alors $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe de surface quasi-convexe.*

Ce théorème est démontré dans le cas des 3-variétés fibrées sur le cercle à l'aide de constructions d'immersions π_1 -injectives $S \rightarrow M$ que l'on appelle des surfaces coupées-croisées. À l'aide de ces surfaces, il est possible de démontrer en fait que $\pi_1(M)$ contient de très nombreux sous-groupes de surface quasi-convexes.

Théorème (J. Masters, [Mas06]). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte connexe virtuellement fibrée sur le cercle. Alors il existe une suite $\Sigma_i \leq \pi_1(M)$ de sous-groupes de surface quasi-convexes d'épaisseurs non-majorées (l'épaisseur étant la distance entre les composantes de frontière du cœur de Nielsen du sous-groupe).*

Ce dernier résultat et les arguments constructifs qui aboutissent à sa démonstration constituent réellement le point de départ des travaux de la seconde partie de cette thèse.

Surfaces coupées-croisées

Nous fixerons désormais une 3-variété hyperbolique compacte connexe fibrée sur le cercle M_φ (vue sous la forme $M_\varphi = (F \times [0, 1]) / ((x, 0) \sim (\varphi(x), 1))$, où F est une surface compacte connexe orientable de genre $g \geq 2$ et φ un homéomorphisme pseudo-Anosov de F). Notre objectif sera de construire suffisamment de sous-groupes de surface quasi-convexes dans le groupe fondamental $\pi_1(M_\varphi)$ pour pouvoir appliquer notre critère de cubulation.

Suivant D. Cooper, D. Long, A. Reid et J. Masters, nous présenterons une méthode de construction de surfaces $S \hookrightarrow M_\varphi$ immergées (mais non plongées) de manière π_1 -injective et partout transverse au flot connues sous le nom de *surfaces coupées-croisées* (ces surfaces sont réellement l'objet central de cette thèse).

Ces surfaces coupées-croisées sont obtenues à partir d'une courbe fermée simple c de la fibre F disjointe de son image par φ . On peut dans ce cas découper la fibre le long de c et $\varphi(c)$, et utiliser le flot de M_φ pour recoller de manière croisée les quatre composantes de bord ainsi créées par deux anneaux plongés de M_φ . On obtient le plus souvent une surface connexe orientable $S = S(c, \varphi)$ immergée dans M_φ de même genre que la fibre F (et également homologue à la fibre).

Étant donné un relevé $\tilde{S}$ de S au revêtement universel $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ de M_φ , on peut considérer la projection $\Phi(\tilde{S})$ de ce relevé sur $\tilde{F}$ (où $\Phi : \tilde{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{F}$ est la projection sur le premier facteur). Ce projeté permet de caractériser la quasi-convexité de $\pi_1(S)$, via le résultat suivant.

Théorème (D. Cooper, D. Long, A. Reid, [CLR94]). *Soit $S \rightarrow M_\varphi$ une surface immergée de manière partout transverse au flot et $\tilde{S}$ un relevé de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$. Alors $\tilde{S}$ est quasi-convexe dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\Phi(\tilde{S}) \neq \tilde{F}$.*

À l'aide de ce critère, nous proposerons de nombreuses constructions de sous-groupes de surface quasi-convexes dans M_φ , généralisant les constructions existantes de J. Masters. Pour vérifier alors que notre critère de cubulation s'applique à cette situation, nous aurons besoin d'une description précise des ensembles limites des sous-groupes correspondant aux surfaces coupées-croisées.

Ensembles limites des sous-groupes de surfaces coupées-croisées

Pour développer une image de l'ensemble limite d'un sous-groupe de surface coupée-croisée, nous aurons besoin de deux outils essentiels dont le premier est le projeté $\Phi(\tilde{S})$ introduit ci-dessus. Le second est l'application de Cannon-Thurston qui étend continûment l'inclusion $\tilde{F} = \tilde{F} \times \{0\} \hookrightarrow \tilde{F} \times \mathbb{R}$ au bord en une application équivariante surjective et à fibres finies CT : $\partial_\infty \tilde{F} \rightarrow \partial_\infty \tilde{M}_\varphi$. Cette application identifie deux points de $\partial_\infty \tilde{F}$ exactement lorsque ceux-ci sont extrémités d'une même feuille (éventuellement singulière) de l'un des feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (stable) ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ (instable) de $\tilde{F}$ associés à la monodromie pseudo-Anosov φ .

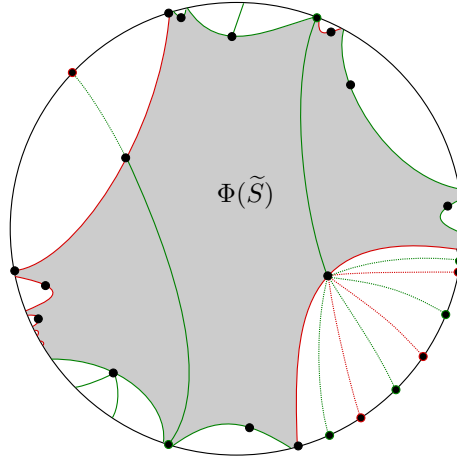
L'action par relevés de puissances de la monodromie de $\pi_1(S)$ sur $\tilde{F}$ se restreint en une action libre sur le projeté $\Phi(\tilde{S})$. Lorsque S est quasi-convexe, il existe cependant un ensemble non-vide de points de l'adhérence $P(\tilde{S})$ de $\Phi(\tilde{S})$ dans $\tilde{F}$ fixés par des éléments de $\pi_1(S)$ (il existe en fait exactement un tel point pour chaque composante connexe de la frontière de $\Phi(\tilde{S})$). Cet ensemble permet de localiser précisément l'ensemble limite du sous-groupe de surface, via l'application de Cannon-Thurston. Nous obtiendrons en particulier le résultat suivant.

Proposition. *L'image réciproque par l'application de Cannon-Thurston de l'ensemble limite de $\pi_1(S)$ dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$ est formé de l'adhérence de $\Phi(\tilde{S})$ dans $\partial_\infty \tilde{F}$ et des extrémités dans $\partial_\infty \tilde{F}$ des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ contenant l'un des points adhérents à $\Phi(\tilde{S})$ fixés par un élément de $\pi_1(S)$.*

Le complémentaire dans $\partial_\infty \tilde{F}$ de l'image réciproque $\text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$ est de plus naturellement partitionné en deux parties qui permettent de comprendre exactement les images réciproques des composantes connexes du complémentaire de $\Lambda(\pi_1(S))$ dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$.

En effet, les composantes connexes de la frontière de $\Phi(\tilde{S})$ dans $\tilde{F}$ sont des droites contenues dans des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$. Nous les appelons les *côtés* du projeté $\Phi(\tilde{S})$. Les points de $\partial_\infty \tilde{F}$ dont l'image par l'application de Cannon-Thurston n'est pas dans $\Lambda(\pi_1(S))$ sont donc situés soit à l'extérieur d'un côté stable, soit à l'extérieur d'un côté instable. Nous obtiendrons alors une description permettant de caractériser les paires de points du bord séparés par l'ensemble limite du sous-groupe de surface considéré.

Proposition. *Soient $p, q \in \partial_\infty \tilde{F}$. Alors $\Lambda(\pi_1(S))$ sépare $\text{CT}(p)$ et $\text{CT}(q)$ dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$ si, et seulement si, p et q sont situés au-delà de deux côtés ℓ et ℓ' de $\Phi(\tilde{S})$ de stabilités opposées et de plus p et q ne sont pas adhérents à une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ contenant l'un des points adhérents à $\Phi(\tilde{S})$ fixés par un élément de $\pi_1(S)$.*



Cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle

La compréhension des ensembles limites de surfaces coupées-croisées nous guidera pour proposer des constructions relativement souples de surfaces coupées-croisées quasi-convexes dans une suspension M_φ . Nous proposerons des constructions permettant de réaliser effectivement la séparation des paires de points distincts du bord et obtiendrons le résultat suivant.

Théorème (Séparation des paires de points distincts du bord). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement fibrée sur le cercle. Alors pour toute paire de points distincts $p, q \in \partial_\infty \tilde{M}$, il existe $\Sigma \leq \pi_1(M)$ un sous-groupe de surface quasi-convexe de $\pi_1(M)$ dont l'ensemble limite sépare p et q dans $\partial_\infty \tilde{M}$.*

En particulier, l'application de notre critère de cubulation fournit le corollaire suivant.

Corollaire (Cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte connexe virtuellement fibrée sur le cercle. Alors $\pi_1(M)$ est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Plongements virtuels de surfaces coupées-croisées

Pour finir cette thèse, nous initions un programme de recherche dont le but final est de démontrer que toute 3-variété hyperbolique compacte connexe virtuellement de Haken a un groupe fondamental virtuellement spécial (cette conjecture est formulée par D. Wise).

Un tel résultat entraînerait par exemple que les groupes fondamentaux de telles 3-variétés sont larges (i.e. possèdent un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non-abélien). Il en découlerait en particulier que toutes les conjectures classiques formulées pour les 3-variétés hyperboliques compactes sont vérifiées dans le cas des variétés virtuellement de Haken (voir le tableau récapitulatif 6.2.9 de l'introduction de la troisième partie).

Cubulations spéciales, a priori

Nous avons vu précédemment que pour cubuler une 3-variété hyperbolique compacte, il suffit de disposer d'une grande quantité de sous-groupes de surface quasi-convexes. Pour obtenir une cubulation spéciale, il convient de rajouter d'autres hypothèses aux sous-groupes de surface utilisés pour cubuler. Les propriétés essentielles pour obtenir une cubulation spéciale sont la *séparabilité* et la *malnormalité*.

Les travaux de F. Haglund et D. Wise sur les groupes hyperboliques possédant une hiérarchie quasi-convexe et malnormale permettent de raffiner notre critère de cubulation général pour les variétés hyperboliques compactes (le théorème énoncé ci-dessous n'est pas démontré dans cette thèse mais fait partie du folklore sur les cubulations spéciales).

Théorème (Critère de cubulation spéciale, d'après F. Haglund et D. Wise, [HW09]). *Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme. On suppose que pour tous $x, y \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$ distincts, il existe un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe, séparable et malnormal $\Sigma \leq \Gamma$ dont l'ensemble limite $\Lambda(\Sigma)$ sépare x et y dans $\partial_\infty \mathbb{H}^n$. Alors Γ est virtuellement cubique spécial.*

A priori, il nous faudrait alors reprendre en détail l'étude des sous-groupes de surfaces coupées-croisées des variétés fibrées et étudier leurs éventuelles propriétés de séparabilité et de malnormalité pour pouvoir avancer vers une cubulation spéciale. Cependant, des résultats récents et profonds de D. Wise viennent changer complètement le paysage de ce programme de recherche.

3-variétés hyperboliques virtuellement de Haken de manière quasi-convexe

D. Wise introduit la classe des 3-variétés hyperboliques compactes qui possèdent au moins une surface *plongée* de manière π_1 -injective correspondant à un sous-groupe quasi-convexe. Pour ces variétés, il est alors capable de trouver un modèle géométrique virtuellement cubique spécial.

Définition. Soit M une 3-variété hyperbolique compacte connexe. On dit que M est *de Haken de manière quasi-convexe* s'il existe une surface compacte connexe orientable S de genre $g \geq 2$ et un plongement π_1 -injectif $S \hookrightarrow M$ tel que le sous-groupe de surface correspondant soit quasi-convexe dans $\pi_1(M)$.

Théorème (D. Wise, [Wis09]). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte connexe virtuellement de Haken de manière quasi-convexe. Alors $\pi_1(M)$ est virtuellement cubique spécial.*

Les arguments de D. Wise reposent sur une étude fine des groupes hyperboliques possédant une hiérarchie quasi-convexe. De tels groupes sont en fait virtuellement cubiques spéciaux. Or une telle hiérarchie existe automatiquement, d'après des travaux de W. Thurston, sous l'hypothèse virtuellement de Haken de manière quasi-convexe.

La question à résoudre pour aboutir à un modèle géométrique virtuellement cubique spécial est donc réduite à la conjecture virtuellement de Haken de manière quasi-convexe formulée ci-dessous.

Question Une 3-variété hyperbolique compacte connexe virtuellement de Haken est-elle également virtuellement de Haken de manière quasi-convexe ?

Dans la troisième partie de cette thèse, nous étudions cette question dans le cas des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle (ce sont exactement les variétés virtuellement de Haken qui ne sont pas tautologiquement virtuellement de Haken de manière quasi-convexe). Pour ces variétés, nous essaierons d'apporter une réponse positive à la question posée ci-dessus en exploitant les constructions de surfaces coupées-croisées étudiées dans la seconde partie.

Cubulation spéciale via les surfaces coupées-croisées

Nous considérons à nouveau une 3-variété hyperbolique compacte connexe fibrée sur le cercle M_φ . Au cours de la seconde partie de cette thèse, nous avons fabriqué de très nombreuses surfaces coupées-croisées quasi-convexes dans des revêtements finis de M_φ . Les résultats de D. Wise permettent d'affirmer qu'il suffit de démontrer que ces surfaces coupées-croisées sont *virtuellement plongées* pour conclure que M_φ est virtuellement de Haken de manière quasi-convexe.

Il n'est en fait même pas nécessaire de se retreindre au cas des surfaces coupées-croisées quasi-convexes. Des arguments développés par D. Cooper, D. Long et A. Reid ([CLR94]) permettent d'affirmer que si M_φ possède une surface coupée-croisée qui n'est pas quasi-convexe, alors $vb_1(M_\varphi) > 1$ (où vb_1 désigne le premier nombre de Betti virtuel). Des travaux de W. Thurston garantissent sous cette dernière condition que M_φ est virtuellement de Haken de manière quasi-convexe. Autrement dit, nous venons de justifier la proposition suivante, au cœur de la démarche de cette dernière partie.

Proposition. *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Supposons qu'il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M qui est fibré sur le cercle et une surface coupée-croisée $S \looparrowright \widehat{M}$ qui est virtuellement plongée dans $\widehat{M}$. Alors M est virtuellement de Haken de manière quasi-convexe (et donc $\pi_1(M)$ est virtuellement cubique spécial).*

Nous proposerons alors d'étudier la possibilité de relever les immersions définissant les surfaces coupées-croisées en plongements en passant à des revêtements finis. Nous formulerons tout d'abord les conditions suffisantes d'apparence très faibles pour qu'une surface coupée-croisée soit virtuellement plongée.

Proposition. *Soit S une surface coupée-croisée dans une 3-variété fibrée sur le cercle M . Alors S est virtuellement plongée dans M dès que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- (i) *le sous-groupe $\pi_1(S)$ est contenu dans un sous-groupe propre d'indice fini de $\pi_1(M)$.*
- (ii) *il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \leq \pi_1(M)$ tel que $\pi_1(M) \neq \Gamma \cdot \pi_1(S)$.*
- (iii) *le sous-groupe $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ est contenu dans un sous-groupe propre d'indice fini de $\pi_1(F)$.*
- (iv) *il existe un sous-groupe d'indice fini $\Sigma \leq \pi_1(F)$ tel que $\pi_1(F) \neq \Sigma \cdot (\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$.*

Nous obtenons également des résultats d'existence de surfaces coupées-croisées virtuellement plongées sous certaines conditions géométriques et cohomologiques.

Proposition. *Soit M_φ une 3-variété hyperbolique compacte connexe virtuellement fibrée sur le cercle de monodromie φ possédant un point fixe dans la fibre F . On considère une surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ immergée dans M_φ (en particulier $c \cap \varphi(c) = \emptyset$).*

- (i) *Si $c \sqcup \varphi(c)$ est séparante dans F , alors S est virtuellement plongée dans M_φ .*
- (ii) *Si $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, alors S est virtuellement plongée dans M_φ .*
- (iii) *(Généralisation de (ii)) S'il existe $n \geq 2$ tel que $c \cap \varphi^{n-1}(c) = \emptyset$ et $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, alors S est virtuellement plongée dans M_φ .*

Première partie

Critères de cubulation

Introduction de la première partie

Dans la première partie de cette thèse, nous étudions les liens pouvant être tissés entre le monde des groupes de type fini et celui de la géométrie combinatoire à travers les structures connues sous le nom de complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ (introduites par M. Gromov, voir [Gro87]). Ces objets sont des CW-complexes simplement connexes dont les cellules modelées sur les cubes standards des espaces euclidiens sont recollées par des isométries le long de leur faces et qui possèdent une propriété combinatoire de courbure négative ou nulle : les links de sommets doivent être des complexes simpliciaux de drapeaux.

Les arbres simpliciaux sont des exemples de complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ et l'étude des actions de groupes sur les complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ de dimension 1 est donc un domaine déjà très développé des mathématiques, via notamment la théorie de Bass-Serre (voir [SB77]). En dimension supérieure, les complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ se révèlent être remarquablement adaptés à l'étude de certains groupes hyperboliques au sens de Gromov.

Les travaux pionniers de M. Sageev (voir [Sag95] et [Sag97]) mettent en évidence un lien entre actions non-triviales sur des complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ et la présence de sous-groupes remarquables dits de codimension 1 dans n'importe quel groupe de type fini. L'existence de tels sous-groupes généralise en fait la notion de scindement de la théorie de Bass-Serre et M. Sageev démontre que cette propriété caractérise les groupes pouvant agir non-trivialement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$.

En analysant plus précisément cette dualité entre actions de groupes sur des complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ et sous-groupes de codimension 1 dans le cas des groupes hyperboliques, M. Sageev démontre le résultat suivant : tout groupe hyperbolique possédant un sous-groupe de codimension 1 qui est de plus quasi-convexe agit sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ de dimension finie avec quotient compact.

Cubuler des groupes ...

Ce résultat soulève assez naturellement la question de savoir quels sont les groupes hyperboliques qui possèdent un sous-groupe de codimension 1 et parmi ceux-ci, quels sont ceux qui agissent (par isométries) proprement et cocompactement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ de dimension finie.

Définition. Un groupe G de type fini est dit *cubique* $\text{CAT}(0)$ s'il admet une action par isométries, propre et cocompacte sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ de dimension finie.

Cubuler un groupe consiste à lui trouver un modèle géométrique qui soit un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ de dimension finie (on dira également qu'un groupe est *cubulable* lorsqu'on peut le cubuler).

De nombreux travaux de recherche récents étudient cette question et tentent d'établir des conditions suffisantes applicables à certaines classes de groupes permettant d'envisager une cubulation (voir par exemple [BW10] ou [BHW11], également [HW10] pour des généralisations aux groupes relativement hyperboliques, ou encore [Gur06] pour les groupes $\text{CAT}(0)$, [NR03] et [Cap06] pour les groupes de Coxeter, [Wis04] pour les groupes à petite simplification ...).

Les travaux de cette première partie s'inscrivent dans la directe continuité de ceux de M. Sageev dans le cas des réseaux uniformes du groupe d'isométries de l'espace hyperbolique réel (dans cette classe de groupes hyperboliques à un bout, on trouve les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes). Nous présenterons deux critères de cubulation pour de tels groupes hyperboliques qui auront vocation à être appliqués dans la seconde partie de cette thèse dans le cas de la dimension 3.

...via les espaces à murs

Le point de départ des constructions que nous présenterons est le procédé de cubulation des espaces à murs décrit par B. Nica (voir [Nic04]) et qui généralise la construction de M. Sageev de complexe cubique $\text{CAT}(0)$ dual à un sous-groupe de codimension 1 d'un groupe de type fini.

Cette construction associe à chaque espace muni de murs, i.e. d'un système raisonnable de partitions en deux morceaux, un plongement canonique vers un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ dans lequel les murs deviennent des hyperplans. Ainsi, dès qu'un groupe agit sur un espace en préservant une famille de murs, il agit automatiquement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ dual à la donnée de ces murs.

Nous décrirons précisément cette construction au chapitre 1.3, mais sans entrer dans les détails techniques, nous souhaitons tout de même présenter intuitivement quelques exemples classiques (révélateurs de phénomènes parfois pathologiques liés à cette construction et qui guideront le cadre de travail que nous fixerons dans ce mémoire). On rencontre en effet très couramment la situation d'espaces munis de murs pour lesquels on peut facilement voir le complexe cubique $\text{CAT}(0)$ dual.

Quelques pavages classiques

Cette situation se produit par exemple lorsque l'on considère des groupes opérant sur des pavages d'espaces classiques. On obtient par exemple de tels pavages en faisant agir un groupe d'isométries par réflexions sur une famille convenable d'hyperplans totalement géodésiques dans les plans euclidien et hyperbolique. L'espace à murs associé à de tels pavages est en fait donné par le (l'ensemble des sommets du) graphe dual du pavage (muni de la distance combinatoire). Ce graphe dual est donc plongé dans un complexe cubique CAT(0) par la construction de B. Nica, parfois de manière très visuelle.

Les pavages arborescents (i.e. ceux dont le graphe dual est un arbre) fournissent de premiers exemples manifestes de complexes cubiques CAT(0) duaux à des espaces à murs, comme par exemple le pavage du plan hyperbolique par triangles idéaux et son groupe de réflexions associé.

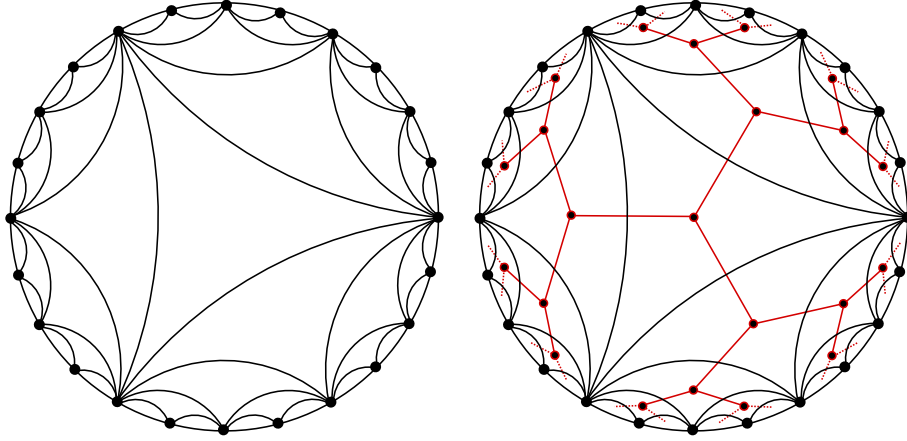


FIGURE 0.0.1 – Le complexe cubique CAT(0) dual à l'espace à murs associé au pavage du plan hyperbolique par triangles idéaux est l'arbre régulier trivalent.

Le pavage carré du plan euclidien muni de son groupe de translation $\mathbb{Z}^2$ est un autre exemple, dont le graphe dual peut être rempli par des carrés pour former un 2-complexe carré qui est le complexe cubique CAT(0) dans lequel se plonge l'espace à murs. Le groupe $\mathbb{Z}^2$ agit proprement et cocompactement sur ce complexe cubique CAT(0).

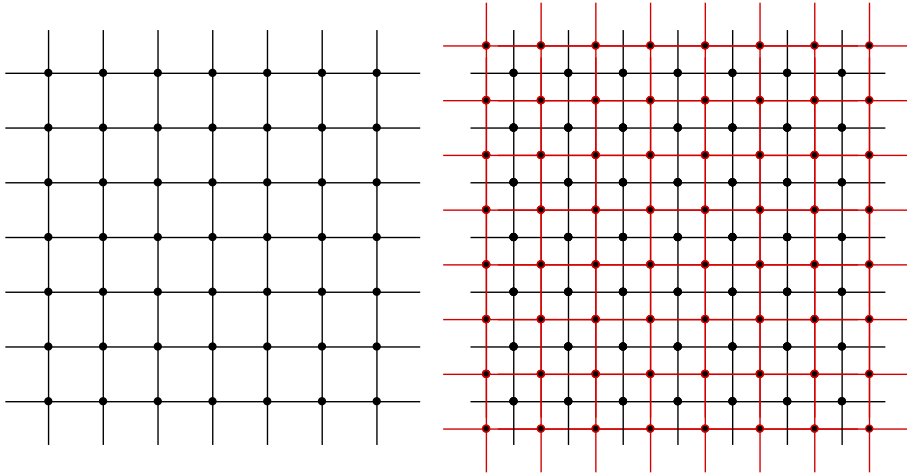


FIGURE 0.0.2 – Le complexe cubique CAT(0) dual à l'espace à murs associé au pavage du plan euclidien par des carrés est le complexe carré standard de $\mathbb{R}^2$.

Dans le plan hyperbolique, on peut également considérer le pavage classique par pentagones (ou bien un n -gone avec $n \geq 5$) réguliers à angles droits sur lequel agit un groupe de Coxeter à angles droits. Le graphe dual à ce pavage permet également de munir le plan hyperbolique d'une structure de complexe carré CAT(0) (la condition sur les links de sommets est remplie car il y a au moins 4 carrés autour de chaque sommet) sur lequel le groupe de Coxeter agit proprement et cocompactement.

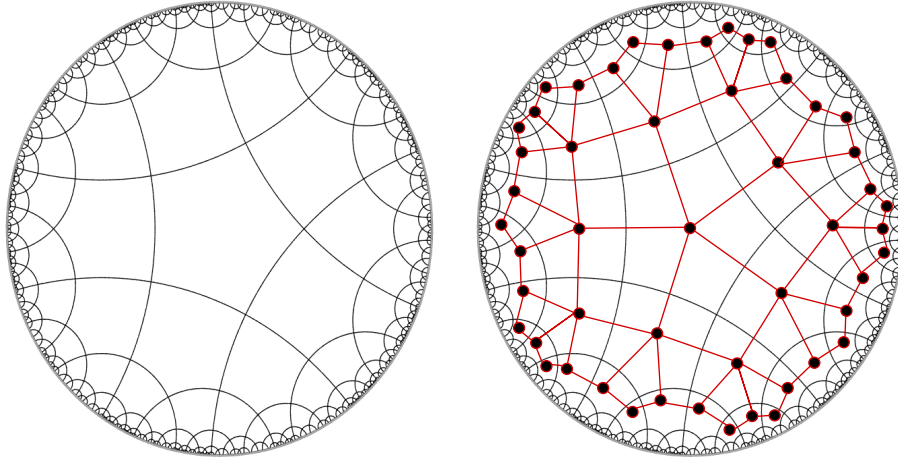


FIGURE 0.0.3 – Le complexe cubique $CAT(0)$ dual à l'espace à murs associé au pavage du plan hyperbolique par des pentagones à angles droits est un complexe carré $CAT(0)$ régulier dont les links de sommets sont de longueur 5.

Dans les cas présentés ci-dessus, il n'y a essentiellement pas de différence entre l'espace à murs considéré et le complexe cubique qui lui est dual. La situation peut toutefois ne pas être aussi favorable.

Considérons par exemple le pavage du plan euclidien par triangles équilatéraux. Le graphe dual à ce pavage par hyperplans est le graphe plan trivalent à faces hexagonales.

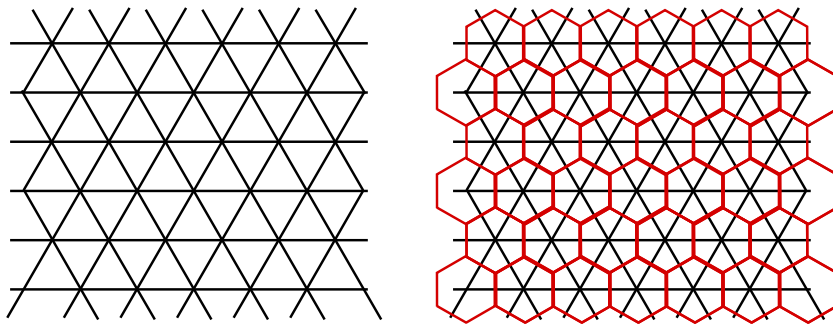


FIGURE 0.0.4 – Le graphe dual au pavage par triangles équilatéraux du plan euclidien ne fournit pas directement un complexe cubique $CAT(0)$. Il faut lui adjoindre des cubes tridimensionnels.

Pour comprendre le complexe cubique $CAT(0)$ dual, on observe que trois murs de départ formés par les médiatrices d'un hexagone deviennent trois hyperplans deux à deux sécants dans un cube tridimensionnel du complexe d'arrivée. Autrement dit, la complétion canonique d'un hexagone en un complexe cubique $CAT(0)$ consiste à attacher deux tripodes aux triplets de sommets alternés pour former le 1-squelette d'un cube, que l'on complète ensuite en un vrai cube de dimension 3.

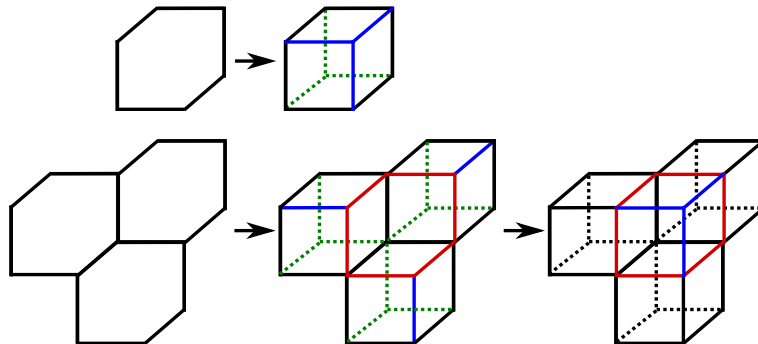


FIGURE 0.0.5 – La complétion cubique du graphe hexagonal tétravalent aboutit à la division cubique usuelle de l'espace euclidien.

Pour le pavage considéré, il faut donc effectuer cette opération pour chaque hexagone du plan euclidien. Ce faisant, on crée un graphe qui possède de nouveaux hexagones qu'il faut à nouveau compléter de la même manière, puis à nouveau, ...

La complétion du graphe trivalent hexagonal du plan euclidien en un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ aboutit au final au complexe cubique standard de l'espace euclidien tridimensionnel. La structure obtenue est donc très différente de celle de l'espace à murs de départ. La cubulation ne se fait pas dans ce cas à distance de Hausdorff finie, contrairement aux exemples précédents.

Utiliser les propriétés de quasi-convexité des espaces hyperboliques

Les situations qui nous intéressent sont plutôt du premier type : on souhaite pouvoir obtenir des résultats de quasi-isométrie entre l'espace à murs de départ et le complexe cubique $\text{CAT}(0)$ dual. Il est donc préférable que la construction du complexe dual ne parte pas de manière incontrôlée à l'infini. Sous de bonnes hypothèses, le fait de travailler dans un espace hyperbolique au sens de Gromov permet souvent de domestiquer ces phénomènes d'explosion à l'infini (que l'on contrôle moins facilement dans un cadre seulement $\text{CAT}(0)$).

Les exemples classiques que nous avons passés en revue sont par ailleurs bien plus structurés que les espaces à murs généraux : nous aurions pu les qualifier d'espaces avec hyperplans totalement géodésiques.

En effet, les murs étaient toujours définis par des hyperplans dans les cas étudiés, mais nous pouvons relaxer cette condition et autoriser des déformations de ces hyperplans, voire les remplacer par des parties quelconques dont la seule propriété est d'avoir un voisinage qui sépare l'espace ambiant en au moins deux composantes non-bornées. Pour ne pas trop s'éloigner tout de même des exemples modèles et réussir à faire marcher nos constructions, nous nous restreindrons toutefois à des murs définis par des parties quasi-convexes.

Sous ce type d'hypothèses, nous fabriquerons des espaces à murs quasi-isométriques à leur complexe cubique $\text{CAT}(0)$ dual. À l'aide de ces espaces à murs, nous pourrons alors formuler des critères naturels de cubulation pour les réseaux uniformes de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

Principaux résultats de la première partie et organisation

Le premier chapitre de cette thèse présente les notions centrales pour ce texte de complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ et d'espaces à murs. Nous exposons rapidement certaines parties des articles [Sag95], [Sag97] et [Nic04], sans présenter de résultat original (autre que le corollaire 1.3.17).

Dans une première partie, nous rappelons les définitions des notions de sous-groupe de codimension 1 d'un groupe de type fini et de groupe semi-scindable. Nous exposerons alors les résultats fondamentaux de M. Sageev établissant la correspondance entre les groupes semi-scindables et ceux opérant de manière essentielle sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$. Dans le cas des groupes hyperboliques, M. Sageev démontre que l'existence d'un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe suffit à garantir que le groupe ambiant agit avec quotient compact sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ de dimension finie.

Dans une seconde partie, nous adopterons le point de vue plus général des espaces à murs, développé par B. Nica. Nous expliquerons la construction générale d'un plongement canonique d'un espace à murs séparé vers un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ défini via la notion d'orientation cohérente des murs (ou ultrafiltre). Plus précisément, la construction de B. Nica propose une manière naturelle de compléter un espace à murs en un graphe médian. La dernière étape établissant que les graphes médians sont exactement les 1-squelettes de complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ est un résultat plus ancien de V. Chepoi.

Nous introduirons enfin la classe des espaces à murs géométriquement cubulables, i.e. ceux qui se plongent dans un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ localement fini et à distance de Hausdorff finie. Nous montrons alors que les groupes opérant géométriquement sur de tels espaces à murs sont cubiques $\text{CAT}(0)$ (voir corollaire 1.3.17).

Corollaire (Obtenir un groupe cubique $\text{CAT}(0)$). *Soit G un groupe discret agissant géométriquement sur un espace à murs géométriquement cubulable. Alors G est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Le second chapitre est alors consacré à la présentation d'un procédé de construction original d'espaces à murs géométriquement cubulables à l'aide de la géométrie de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$. Nous introduirons une notion de quasi-hyperplans généralisant les hyperplans totalement géodésiques permettant de définir des partitions de $\mathbb{H}^n$ en demi-espaces dont l'un est convexe. À une famille localement finie de tels quasi-hyperplans, nous associerons donc un espace à murs et munirons $\mathbb{H}^n$ d'une pseudo-distance de murs.

Nous montrerons que sous une hypothèse de séparation à grande échelle (exprimant que deux points de $\mathbb{H}^n$ suffisamment éloignés sont séparés par au moins un mur), les espaces à murs ainsi construits sont géométriquement cubulables (voir théorème 2.2.1).

Théorème (Espaces à murs géométriquement cubulables). *Soit $L \geq 0$ et $\mathcal{H}$ une famille uniformément localement finie et asymptotiquement séparante de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$. Alors l'espace à murs séparé dual à $\mathcal{H}$ est géométriquement cubulable. Le graphe médian $C^1(X)$ est de plus uniformément localement fini donc le complexe cubique associé est de dimension finie.*

La dernière moitié de ce chapitre est alors consacrée à l'application naturelle de ces constructions au cas des variétés hyperboliques compactes. Nous formulerons deux critères de cubulation pour de telles variétés, exprimant que si leur groupe fondamental contient une quantité suffisamment grande de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes, alors il est cubique CAT(0). Nous obtiendrons les résultats suivants de cubulation pour les réseaux uniformes de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ (voir théorèmes 2.3.5 et 2.3.13).

Théorème (Cubulation par les quasi-hyperplans). *Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme. On suppose qu'il existe une famille (Γ -invariante et) asymptotiquement séparante de quasi-hyperplans Γ -cocompacts de $\mathbb{H}^n$. Alors Γ est cubique CAT(0).*

Théorème (Cubulation par séparation des paires de points du bord). *Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme. On suppose que pour tous $x, y \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$ distincts, il existe un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe $\Sigma \leq \Gamma$ dont l'ensemble limite $\Lambda(\Sigma)$ sépare x et y dans $\partial_\infty \mathbb{H}^n$. Alors Γ est cubique CAT(0).*

Nous concluons enfin par une application de ces critères dans le cas des variétés hyperboliques compactes arithmétiques. La densité du commensurateur permet dans ce contexte de démontrer que l'existence d'un unique sous-groupe de surface quasi-convexe suffit pour que le groupe ait un modèle cubique CAT(0). Nous obtenons le critère suivant (voir théorème 2.4.1).

Théorème (Critère de cubulation des variétés hyperboliques compactes arithmétiques). *Soit Γ un réseau uniforme arithmétique de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Si Γ possède un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe, alors Γ est cubique CAT(0).*

Un théorème d'existence de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes en dimension 3 de M. Lackenby (voir [Lac10]) nous permet donc d'obtenir le corollaire ci-dessous (voir corollaire 2.4.2).

Corollaire (Cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes arithmétiques). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte arithmétique. Alors $\pi_1(M)$ est cubique CAT(0).*

Nous présenterons alors une conclusion générale qui invite à pousser plus loin ces constructions de modèles géométriques cubiques CAT(0) pour les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes, en se dirigeant plus particulièrement vers les complexes cubiques spéciaux de F. Haglund et D. Wise.

Chapitre 1

Complexes cubiques CAT(0) et espaces à murs

Sommaire

1.1	Complexes cubiques CAT(0)	16
1.1.1	Sous-groupes de codimension 1 et semi-scindements	16
1.1.2	Complexes cubiques CAT(0) et hyperplans	17
1.1.3	Complexe cubique CAT(0) dual à un sous-groupe de codimension 1	20
1.2	Espaces à murs	21
1.2.1	Systèmes de murs	22
1.2.2	Distance de murs	22
1.2.3	Action d'un groupe discret sur un espace à murs	22
1.3	Cubulation des espaces à murs	23
1.3.1	Graphes médians	23
1.3.2	Ultrafiltres sur un espace à murs	23
1.3.3	Cubulation des espaces murs	24
1.3.4	Espaces à murs géométriquement cubulables	24
1.3.5	Graphes médians et complexes cubiques CAT(0)	25

1.1 Complexes cubiques CAT(0)

Les complexes cubiques CAT(0), introduits par M. Gromov ([Gro87]), forment la classe d'objets combinatoires au cœur de cet ouvrage. Ils sont à l'origine de nombreux développements récents en théorie géométrique des groupes, tout particulièrement pour l'étude des groupes hyperboliques. Les complexes cubiques CAT(0) sont des CW-complexes simplement connexes et à courbure négative ou nulle construits en recollant des cubes euclidiens le long de leurs faces par des isométries (voir paragraphe 1.1.2 pour une définition plus précise) et jouent à ce titre le rôle d'analogues multi-dimensionnels des arbres.

L'idée centrale de la théorie géométrique des groupes est de dégager des propriétés algébriques des groupes en les faisant agir convenablement sur certains espaces métriques bien choisis. Dans le cas des groupes agissant sur les arbres, cette idée amène à la théorie de Bass-Serre dans laquelle un groupe de type fini est dit *scindable* s'il peut s'écrire de manière non-triviale comme un produit libre amalgamé ou une extension HNN. Cette propriété algébrique de scindement est caractérisée par le fait que le groupe admette une action sans inversions et sans point fixe global sur un arbre (voir [SB77]).

Question Que dire plus généralement des propriétés algébriques d'un groupe agissant (non-trivialement, en un sens à définir) sur un complexe cubique CAT(0) ?

Cette question a été explorée par Michah Sageev ([Sag95] et [Sag97]) qui dans sa thèse a dégagé de nouveaux liens entre une propriété de scindement faible des groupes et la possibilité d'agir non-trivialement sur un complexe cubique CAT(0). Son étude aboutit, dans le cas des groupes hyperboliques, à un résultat (voir théorème 1.1.14) qui constitue le point de départ de cette thèse. Nous détaillerons les liens entre les groupes hyperboliques et leurs sous-groupes de codimension 1, en particulier dans le cas de sous-groupes quasi-convexes.

1.1.1 Sous-groupes de codimension 1 et semi-scindements

Une notion située au cœur de cette thèse est celle de sous-groupe de codimension 1 d'un groupe de type fini. Pour présenter ce concept, rappelons que le nombre de bouts d'un CW-complexe localement fini X est par définition le supremum pris sur toutes les parties compactes $K \subset X$ du nombre de composantes connexes non-bornées de $X \setminus K$. Il s'agit donc d'un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, noté $e(X)$.

Définition 1.1.1. Soit G un groupe de type fini et Γ un graphe de Cayley de G associé à une partie génératrice finie. Pour un sous-groupe $H \leq G$, le *nombre de bouts de la paire* (G, H) est le nombre de bouts du graphe quotient Γ/H obtenu sous l'action naturelle par translation à gauche de H sur Γ . Ce nombre, indépendant du choix de partie génératrice finie, est noté $e(G, H)$.

Cette définition contient en particulier le cas du sous-groupe trivial $H = \{1\}$, pour lequel on retrouve la notion classique du nombre de bouts $e(G) = e(G, \{1\})$ d'un groupe G de type fini. Il est classique que le nombre de bouts d'un groupe de type fini appartient à l'ensemble $\{0, 1, 2\} \cup \{+\infty\}$. Plus précisément, on a les équivalences suivantes :

1. Le nombre de bouts de G est nul si, et seulement si, G est un groupe fini.
2. Le nombre de bouts de G vaut 2 si, et seulement si, G est virtuellement isomorphe à $\mathbb{Z}$.
3. Le nombre de bouts de G est égal à $+\infty$ si, et seulement si, G est le groupe fondamental d'un graphe de groupes de groupes d'arêtes finis (voir [Sta71]). Autrement dit, G admet dans ce cas une action sans inversions, sans point fixe global et à stabilisateurs d'arêtes finis sur un arbre simplicial et est donc en particulier scindable.

Dans tous les autres cas, le nombre de bouts de G vaut donc 1. Nous nous intéressons principalement à des groupes de cette dernière catégorie, comme par exemple les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes (de dimension ≥ 2) ou plus généralement les groupes hyperboliques à un bout.

Le nombre de bouts d'une paire (G, H) possède une interprétation topologique à l'aide du revêtement associé à H d'un espace de groupe fondamental G .

Lemme 1.1.2 (Interprétation topologique du nombre $e(G, H)$), voir [Sag95] théorème 2.2). *Soit G un groupe de présentation finie et $H \leq G$ un sous-groupe de G . Si X est un CW-complexe fini tel que $\pi_1(X) \simeq G$ et $X_H = \tilde{X}/H$ est le revêtement de X associé à H , alors $e(G, H) = e(X_H)$.*

Sous-groupes de codimension 1

La notion de sous-groupe de codimension 1, introduite par C. Houghton puis étudiée entres autres par P. Scott et M. Sageev (voir [Hou74], [Sco77] et [Sag95]), est alors définie en termes de nombre de bouts relativement à ce sous-groupe.

Définition 1.1.3. Soit G un groupe de type fini et $H \leq G$ un sous-groupe de G . On dit que H est un *sous-groupe de codimension 1* de G si $e(G, H) > 1$.

Exemples

1. Le groupe $\mathbb{Z}^n$ est de codimension 1 dans $\mathbb{Z}^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ au même titre qu'un tore $\mathbb{T}^n$ contenu dans un tore $\mathbb{T}^{n+1}$ est une sous-variété de codimension 1.
2. Si G est le groupe fondamental d'une surface connexe compacte orientable, alors pour tout sous-groupe H de G isomorphe à $\mathbb{Z}$, on a l'égalité $e(G, H) = 2$.
3. Plus généralement une immersion π_1 -injective d'une variété de dimension n dans une variété de dimension $n + 1$ fournit typiquement un sous-groupe de codimension 1 (voir par exemple l'introduction de la seconde partie pour le cas des sous-groupes de surface des groupes fondamentaux de 3-variétés compactes).

L'existence d'un sous-groupe de codimension 1 est une condition plus faible que l'existence d'un scindement. En effet, si un groupe G s'écrit comme produit libre amalgamé ou extension HNN au-dessus d'un sous-groupe H , alors $e(G, H) > 1$.

Définition 1.1.4. Soit G un groupe de type fini. On dit que G est *semi-scindable* s'il existe un sous-groupe $H \leq G$ de G tel que $e(G, H) > 1$.

L'objet de l'article de M. Sageev ([Sag95]) est alors de montrer que les groupes semi-scindables sont exactement ceux qui agissent non-trivialement (en un certain sens) sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$.

1.1.2 Complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ et hyperplans

Nous définissons maintenant les complexes dont il est question dans cette thèse, formés à partir de recollement de cubes modèles de l'espace euclidien.

Notons $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Un *cube euclidien* de dimension $n \in \mathbb{N}$, ou *n-cube*, est l'ensemble produit I^n (avec pour convention I^0 réduit à un point). Un cube de dimension n contient en particulier de nombreux cubes de dimensions inférieures, par restriction d'une ou plusieurs coordonnées à l'une des valeurs ± 1 . Les cubes de dimension $n - 1$ ainsi contenus dans un n -cube sont appelés les *faces* de ce n -cube. Pour les dimensions 0, 1, 2, on parle aussi respectivement de sommets, d'arêtes et de carrés.

On peut alors essentiellement définir les complexes cubiques comme les espaces formés en recollant entre eux des cubes euclidiens par des isométries le long de leurs faces (sans hypothèse de finitude locale).

Définition 1.1.5. Un *complexe cubique* X est un CW-complexe dont les cellules sont paramétrées par des cubes euclidiens et tel que pour tout n -cube $\sigma : I^n \rightarrow X^{(n)}$, l'application de recollement $\partial\sigma : \partial I^n \rightarrow X^{(n-1)}$ soit un homéomorphisme sur son image dont les restrictions aux faces de I^n sont des isométries de I^{n-1} (post-composées avec un $(n - 1)$ -cube de X).

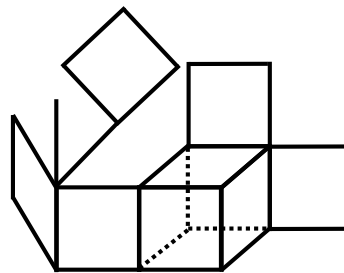


FIGURE 1.1.1 – Un complexe cubique.

Pour formuler une condition de courbure négative ou nulle adaptée à cette classe d'objets combinatoires, il nous faut tout d'abord définir le link d'un sommet.

Définition 1.1.6. Soit X un complexe cubique et v un sommet de X . Le *link* de v dans X est le complexe multi-simplicial dont les sommets sont les arêtes de X contenant v et dans lequel un n -uplet $(e_1, \dots, e_n)$ engendre un $(n-1)$ -simplexe pour chaque n -cube de X contenant les arêtes $e_1, \dots, e_n$.

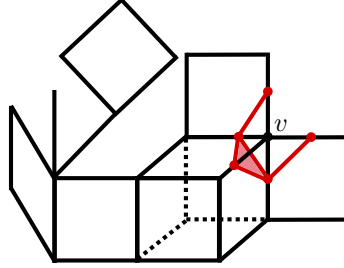


FIGURE 1.1.2 – Le link d'un sommet.

Les complexes cubiques qui nous intéressent sont ceux qui sont *simples*, au sens où le link de chaque sommet est un complexe simplicial. En particulier, il n'existe alors pas de bigone dans les links de sommets sous cette condition, ce qui signifie qu'il n'est pas possible que deux carrés distincts s'intersectent le long de deux arêtes consécutives.

Définition 1.1.7. Un *complexe de drapeaux* est un complexe simplicial dans lequel pour toute collection $v_0, \dots, v_n$ de sommets deux à deux adjacents, il existe un n -simplexe d'ensemble de sommets $v_0, \dots, v_n$.

Autrement dit, un complexe simplicial est de drapeaux si, lorsque l'on voit le 1-squelette d'un simplexe, il y a effectivement un simplexe. Un tel complexe est donc déterminé par son 1-squelette. Nous sommes alors en mesure de formuler la condition de courbure négative ou nulle pour les complexes cubiques.

Définition 1.1.8 (voir [Gro87]). Un complexe cubique X est dit à *courbure négative ou nulle* si pour tout sommet $v \in X^{(0)}$, le link de v dans X est un complexe simplicial de drapeaux. Un *complexe cubique CAT(0)* est un complexe cubique connexe et simplement connexe à courbure négative ou nulle.

Ainsi, dans un complexe cubique à courbure négative ou nulle, si l'on voit la structure d'un coin de cube, alors il doit effectivement exister un cube qui complète ce coin.

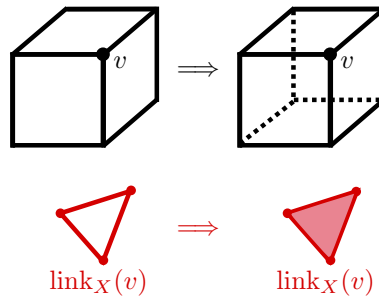


FIGURE 1.1.3 – Complétion des coins de cubes dans un complexe cubique CAT(0).

Exemples

1. Les complexes cubiques CAT(0) de dimension 1 sont les arbres simpliciaux.
2. Si X est un complexe carré (i.e. un complexe cubique de dimension 2) simplement connexe dont l'espace sous-jacent est homéomorphe à un plan, alors la condition de courbure négative ou nulle signifie exactement que les links de sommets sont des cercles de longueur minorée par 4. Autrement dit, il existe au moins 4 carrés autour de chaque sommet.

Sur un complexe cubique donné, on peut, de manière cohérente, munir chaque cube de la distance euclidienne habituelle et considérer une distance de longueur via les chemins qui intersectent chaque cube le long d'un segment géodésique. Sur un complexe cubique CAT(0) au sens défini ci-dessus, on obtient alors une distance géodésique qui est CAT(0) au sens classique (voir [Gro87]).

Toutefois, cette distance ne nous préoccupera guère et nous renvoyons par exemple à [BH99] pour un traitement général des complexes polyédraux CAT(0). La structure métrique qui nous intéresse sur un complexe cubique CAT(0) provient de la distance de longueur sur son 1-squelette obtenue en déclarant que les arêtes sont isométriques à l'intervalle $[0, 1]$, ou la restriction de cette distance à l'ensemble des sommets.

Hyperplans

Les propriétés des complexes cubiques CAT(0) qui nous intéressent le plus sont en fait celles de leurs hyperplans, que nous présentons à présent.

Définition 1.1.9. Deux arêtes d'un complexe cubique sont dites *élémentairement parallèles* si elles forment les arêtes opposées d'un carré de X . Le *parallélisme* est la relation d'équivalence sur l'ensemble des arêtes de X engendrée par la relation de parallélisme élémentaire. Un *mur* de X est la donnée d'une classe d'équivalence d'arêtes parallèles.

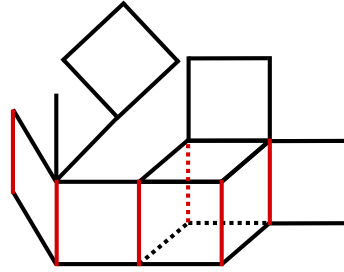


FIGURE 1.1.4 – Une classe d'équivalence d'arêtes parallèles dans un complexe cubique.

À cette notion combinatoire de parallélisme peut-être associée une construction concrète d'hyperplans dans le complexe cubique X . Un *hyperplan* d'un cube I^n est l'intersection de I^n avec un hyperplan de coordonnée de $\mathbb{R}^n$ (i.e. de la forme $I^k \times \{0\} \times I^{n-1-k}$ avec $0 \leq k \leq n-1$, donc identifiable à un cube I^{n-1}). Les arêtes de I^n *duales* à un tel hyperplan sont les arêtes de I^n qui sont perpendiculaires à cet hyperplan (donc de la forme $\{\pm 1\}^k \times I \times \{\pm 1\}^{n-1-k}$).

Étant donnée une classe d'équivalence de parallélisme d'une arête $e \in X^{(1)}$, on considère la collection H des hyperplans de cubes de X qui sont duaux à une arête de X parallèle à e . Cette collection peut être munie d'une structure de complexe cubique ainsi que d'une immersion à valeurs dans la première subdivision barycentrique cubique de X . On dit alors que H est un *hyperplan* (immergé) du complexe cubique X (voir [Sag95] pour plus de détails).

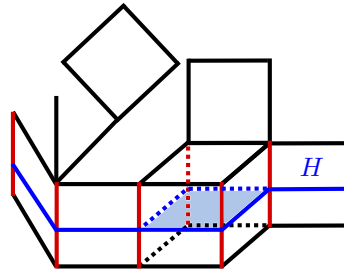


FIGURE 1.1.5 – Un hyperplan dans un complexe cubique et les arêtes qui lui sont duales.

On énonce alors les propriétés essentielles des hyperplans des complexes cubiques CAT(0).

Proposition 1.1.10 (Hyperplans d'un complexe cubique CAT(0)), voir [Sag95] théorèmes 4.10 et 4.11). *Soit X un complexe cubique CAT(0) et H un hyperplan (immergé) de X . Alors H est tout d'abord plongé dans X , i.e. un cube de X intersecte H selon au plus un hyperplan de ce cube. De plus, H est également un complexe cubique CAT(0) et son complémentaire $X \setminus H$ dans X possède exactement deux composantes connexes.*

1.1.3 Complexe cubique CAT(0) dual à un sous-groupe de codimension 1

M. Sageev développe une construction systématique de complexe cubique CAT(0) dual à la donnée d'un sous-groupe H de codimension 1 d'un groupe G de type fini.

Le complexe cubique CAT(0) X ainsi construit est de plus muni d'une action par isométries de G pour laquelle le sous-groupe H agit comme le stabilisateur d'un hyperplan de X . Pour formuler la bonne notion de non-trivialité d'une action de groupe sur un complexe cubique CAT(0), nous avons alors besoin de quelques définitions supplémentaires.

Un *automorphisme* d'un complexe cubique CAT(0) est un homéomorphisme de l'espace topologique sous-jacent qui en restriction à chaque cube est une isométrie vers un autre cube. Une action d'un groupe G sur un complexe cubique CAT(0) X est la donnée d'un morphisme de groupe de G dans le groupe d'automorphismes de X (en particulier, on considère des actions par isométries).

Soit X un complexe cubique CAT(0), H un hyperplan de X et Y et Y' les composantes connexes de $X \setminus H$. On dit qu'une action d'un groupe G sur X est *essentielle relativement à H* s'il existe un sommet $v \in X^{(0)}$ tel que l'ensemble $\{g \in G \mid g.v \in Y\}$ et son complémentaire dans G contiennent tous deux une infinité de représentants de classes distinctes de G modulo $\text{Stab}_G(H)$. Une action d'un groupe G sur X est dite *essentielle* si elle est essentielle relativement à un hyperplan de X .

Théorème 1.1.11 (Semi-scindements et actions essentielles sur des complexes cubiques CAT(0)), voir [Sag95] théorème 3.1). *Soit G un groupe de type fini. Alors G est semi-scindable si, et seulement si, il existe une action essentielle de G sur un complexe cubique CAT(0).*

Remarque Dans le cas des complexes cubiques CAT(0) de dimension finie, une action essentielle n'est rien d'autre qu'une action avec une orbite non-bornée (voir [Sag95]). De plus, même sans hypothèse de locale finitude du complexe cubique, l'existence d'une orbite bornée suffit en dimension finie à garantir l'existence d'un point fixe global, d'après un résultat de M. Bridson (voir [Sag97] et [Bri91]).

Des résultats postérieurs de V. Gerasimov (voir [Ger97] théorèmes 1 et 2) assurent en fait que les groupes de type fini qui ont un sous-groupe de codimension 1 sont exactement ceux qui admettent une action sans point fixe global sur un complexe cubique CAT(0).

Sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes des groupes hyperboliques

Nous étudions maintenant le cas des groupes hyperboliques au sens de Gromov. Dans ce contexte, l'existence d'un sous-groupe de codimension 1 **quasi-convexe** fournit un complexe cubique CAT(0) dual muni d'une action cocompacte. Nous commençons par quelques rappels sur la quasi-convexité.

Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie non-vidée $Y \subset X$ et tout point $x \in X$, on note $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$ la distance de x à Y . Pour tout $K \geq 0$, on définit alors le K -voisinage de Y dans X , $\mathcal{V}_K(Y) = \{x \in X \mid d(x, Y) \leq K\}$.

Définition 1.1.12. Soit (X, d) un espace métrique géodésique. Une partie $Y \subset X$ est dite *K -quasi-convexe* si pour tout segment géodésique γ de X dont les extrémités appartiennent à Y , γ est contenu dans le K -voisinage $\mathcal{V}_K(Y)$ de Y . Une partie 0-quasi-convexe de X est dite *convexe*.

On définit alors la notion de sous-groupe quasi-convexe d'un groupe G de type fini via un graphe de Cayley, vu comme graphe métrique dans lequel les arêtes sont isométriques à l'intervalle $[0, 1]$. Cette notion ne dépend pas de la partie génératrice choisie lorsque le groupe ambiant est hyperbolique.

Définition 1.1.13. Soit G un groupe de type fini. Un sous-groupe $H \leq G$ de G est dit *quasi-convexe* si l'ensemble des sommets appartenant à H d'un graphe de Cayley Γ de G est une partie quasi-convexe de Γ .

La construction de complexe cubique CAT(0) dual à un sous-groupe de codimension 1 fournit le résultat suivant pour les sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes des groupes hyperboliques.

Théorème 1.1.14 (Action cocompacte sur un complexe cubique CAT(0)), voir [Sag97] théorème 3.1). *Soit G un groupe hyperbolique et H un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe de G . Alors G agit par isométries avec quotient compact sur un complexe cubique CAT(0) de dimension finie.*

Ce théorème est une première étape de recherche d'un modèle géométrique dans la classe des complexes cubiques CAT(0) pour un groupe hyperbolique donné. L'action obtenue n'est cependant pas toujours propre.

Exemple Considérons une surface S connexe compacte orientable de genre $g \geq 2$ et une géodésique fermée simple γ dans S . Alors le lacet γ définit un élément de $\pi_1(S)$ (on suppose fixé un point base de S sur γ) qui engendre un sous-groupe de codimension 1 de $\pi_1(S)$. Ce sous-groupe $\mathbb{Z}$ est de plus quasi-convexe dans le groupe hyperbolique $\pi_1(S)$.

On considère alors au revêtement universel $\tilde{S}$ de S la collection des relevés de la géodésique γ , qui forment un pavage arborescent dont les chambres sont des domaines convexes non-bornés de $\tilde{S}$. L'arbre simplicial $\mathcal{T}$ dual à ce pavage est alors le complexe cubique CAT(0) dual au sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe $\langle \gamma \rangle$ de $\pi_1(S)$.

L'action de $\pi_1(S)$ sur ce complexe cubique CAT(0) est induite par l'action naturelle de $\pi_1(S)$ sur $\tilde{S}$, qui préserve le pavage considéré. Cette action est cocompacte sur l'arbre $\mathcal{T}$ (le graphe quotient est une boucle), mais n'est pas propre, car les stabilisateurs de sommets sont infinis.

La construction de M. Sageev de complexe cubique CAT(0) dual à un sous-groupe de codimension 1 d'un groupe de type fini peut être étendue à une famille finie de sous-groupes de codimension 1. Ceci peut parfois permettre d'obtenir de meilleures propriétés de l'action du groupe considéré sur un complexe cubique CAT(0).

Exemple On considère une surface S comme dans l'exemple précédent et une famille $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ de géodésiques fermées simples de S telles que $S \setminus (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k)$ soit une collection de disques ouverts. Alors le complexe cubique CAT(0) de dimension finie dual à la famille de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes $\langle \gamma_1 \rangle, \dots, \langle \gamma_k \rangle$ de $\pi_1(S)$ est naturellement muni d'une action par isométries de $\pi_1(S)$ qui est cocompacte et également propre (ce résultat deviendra clair dans la suite de cette thèse).

On aboutit à l'aide de ces exemples à la philosophie générale qui guide les travaux de la première partie de cette thèse. Dans un groupe hyperbolique, l'existence d'un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe ne suffit pas en général à obtenir un modèle géométrique dans la classe des complexes cubiques CAT(0). Cependant, l'existence d'une collection suffisamment grande (dans un sens à préciser selon le contexte) de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes peut suffire.

Définition 1.1.15. Un groupe G est dit *cubique* CAT(0), ou plus simplement *cubique*, s'il admet une action par isométries propre et cocompacte sur un complexe cubique CAT(0) de dimension finie.

Question Quels groupes hyperboliques sont cubiques CAT(0) ?

Pour conclure cette section d'introduction, signalons que la construction de M. Sageev a motivé de nombreux travaux de recherche pour étudier les groupes agissant sur les complexes cubiques CAT(0).

G. Niblo et L. Reeves montrent par exemple que les groupes de Coxeter de type fini admettent une action propre par isométries sur un complexe cubique CAT(0) de dimension finie et localement fini. Ils prouvent de plus dans le cas des groupes de Coxeter hyperboliques (caractérisés par G. Moussong, [Mou88]) ou à angles droits que cette action est cocompacte (voir [NR03]).

Daniel Wise démontre également que les groupes de petite simplification $C'(1/6)$ ont un modèle géométrique dans la classe des complexes cubiques CAT(0) (voir [Wis04]).

Nous allons expliquer au cours de la section suivante que les complexes cubiques CAT(0) surgissent en fait à partir de n'importe quelle action d'un groupe sur un espace à murs (voir [Nic04] ou [CN05]), ce qui rend cette situation extrêmement courante.

Cependant, il existe tout de même des classes de groupes connues qui ne peuvent pas agir de manière non-triviale sur un complexe cubique CAT(0), comme par exemple, à l'opposé du spectre des groupes possédant la propriété de Haagerup, les groupes possédant la propriété (T) de Kazhdan (voir [NR97] et [NR98]).

1.2 Espaces à murs

Nous présentons maintenant la notion d'espace à murs, introduite par Frédéric Haglund et Frédéric Paulin (voir [HP98]). Cette courte section expose les définitions usuelles sur les espaces à murs vus comme espaces métriques ainsi que sur les actions de groupes discrets sur des espaces à murs. Le lien entre les espaces à murs et les complexes cubiques CAT(0) sera alors mis en évidence lors de la section suivante.

1.2.1 Systèmes de murs

Soit X un ensemble non vide. Un *mur* sur X est la donnée d'une partition de X de la forme $\{Y, Y^c\}$. Si $\mathcal{M}$ est une famille de murs sur un ensemble X , un *demi-espace* de X (relativement à $\mathcal{M}$) est une partie $Y \subset X$ telle que $\{Y, Y^c\} \in \mathcal{M}$. On note $\underline{\mathcal{M}}$ l'ensemble des demi-espaces de X relativement à $\mathcal{M}$.

On dit également qu'un mur $\{Y, Y^c\}$ *sépare* deux points $x, y \in X$ si $|\{x, y\} \cap Y| = 1$ (ou, de manière équivalente, $|\{x, y\} \cap Y^c| = 1$). Étant donnée une famille de murs $\mathcal{M}$ sur X et deux points $x, y \in X$, on notera $\mathcal{M}(x, y)$ l'ensemble des murs de $\mathcal{M}$ qui séparent x et y .

On observe alors la propriété élémentaire suivante.

Lemme 1.2.1. *Pour $x, y, z \in X$, on a l'égalité $\mathcal{M}(x, y) = \mathcal{M}(x, z) \triangle \mathcal{M}(z, y)$.*

Les espaces à murs sont alors définis via une condition de finitude des ensembles de murs séparant deux points donnés.

Définition 1.2.2. Un *système de murs* sur X est la donnée d'une famille $\mathcal{M}$ de murs sur X contenant le mur trivial¹ $\{\emptyset, X\}$ et telle que, pour tous $x, y \in X$, on ait la condition $|\mathcal{M}(x, y)| < \infty$. Un *espace à murs* $(X, \mathcal{M})$ est la donnée d'un ensemble non vide muni d'un système de murs.

1.2.2 Distance de murs

Dorénavant, X est un ensemble non vide muni d'un système de murs $\mathcal{M}$. Pour $x, y \in X$, on pose :

$$\omega(x, y) = |\mathcal{M}(x, y)|.$$

La propriété énoncée par le lemme 1.2.1 entraîne que ω est une pseudo-distance sur X , appelée *pseudo-distance de murs* sur X .

Définition 1.2.3. Un espace à murs $(X, \mathcal{M})$ est dit *séparé* si ω est une distance sur X , alors appelée *distance de murs* sur X .

Définissons sur X une relation d'équivalence $\sim$ par la condition $x \sim y \iff \omega(x, y) = 0$. Alors la famille de murs $\mathcal{M}/\sim = \{\{Y/\sim, Y^c/\sim\} \mid \{Y, Y^c\} \in \mathcal{M}\}$ est un système de murs sur le quotient $X/\sim$. En effet, si $x \sim y$, alors pour tout mur $\{Y, Y^c\} \in \mathcal{M}$, on a $\{x, y\} \subset Y$ ou bien $\{x, y\} \subset Y^c$.

Définition 1.2.4. L'espace à murs $(X/\sim, \mathcal{M}/\sim)$ est séparé et est appelé le *séparé* de l'espace à murs $(X, \mathcal{M})$. De plus, la distance de murs sur $X/\sim$ est bien la distance quotient par la relation $\sim$ de la pseudo-distance de murs ω sur X .

Le système de murs $\mathcal{M}/\sim$ étant canoniquement en bijection avec $\mathcal{M}$, il sera souvent par la suite noté simplement $\mathcal{M}$, lorsque cela ne soulèvera aucune ambiguïté.

1.2.3 Action d'un groupe discret sur un espace à murs

Définition 1.2.5. Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(X', \mathcal{M}')$ deux espaces à murs. Une application $f : X \rightarrow X'$ est un *morphisme d'espaces à murs* si, pour tout demi-espace $Y' \in \mathcal{M}'$, $f^{-1}(Y') \in \mathcal{M}$. Un *automorphisme d'espaces à murs* est une bijection $f : X \rightarrow X$ telle que f et f^{-1} soient des morphismes d'espaces à murs.

Étant donné un espace à murs $(X, \mathcal{M})$, on note $\text{Aut}_{\mathcal{M}}(X)$ le groupe des automorphismes de $(X, \mathcal{M})$. Une action d'un groupe G sur $(X, \mathcal{M})$ est la donnée d'un morphisme de groupes de G dans $\text{Aut}_{\mathcal{M}}(X)$. Autrement dit, les éléments de G induisent des permutations de X et de $\mathcal{M}$. En particulier, un groupe G agit par isométries sur l'espace pseudo-métrique (X, ω) .

Définition 1.2.6. Une action d'un groupe discret G sur un espace à murs $(X, \mathcal{M})$ est dite :

1. *métriquement propre*, ou plus simplement *propre*, si, pour toute boule $B \subset (X, \omega)$:

$$|\{g \in G \mid g.B \cap B \neq \emptyset\}| < \infty.$$

2. *cocompacte* s'il existe une partie finie $K \subset X$ telle que :

$$X = \bigcup_{g \in G} g.K.$$

3. *géométrique* si elle est à la fois propre et cocompacte.

¹Le choix d'inclure le mur trivial est une commodité pour la définition à venir des morphismes d'espaces à murs. De plus, ce mur apparaît systématiquement dans les contextes où la notion de murs convexes a un sens (voir les graphes médians dans la section suivante).

1.3 Cubulation des espaces à murs

Nous présentons maintenant le lien entre espaces à murs et complexes cubiques CAT(0), tel qu'exposé par B. Nica (voir [Nic04]), à qui sont dus les résultats de cette section. Ce lien généralise la construction de M. Sageev de complexe cubique CAT(0) dual à une famille de sous-groupes de codimension 1 d'un groupe de type fini. Nous allons passer en revue cette construction de sorte à introduire les notations et définitions qui seront utilisées systématiquement par la suite. Tous les espaces à murs considérés seront séparés.

1.3.1 Graphes médians

Tous les graphes considérés seront simpliciaux et, sauf mention du contraire, connexes. Ils sont alors munis de la distance combinatoire usuelle, pour laquelle les arêtes sont isométriques à l'intervalle $[0, 1]$.

Définition 1.3.1. Soit $\mathcal{G}$ un graphe et $x, y \in \mathcal{G}^{(0)}$. L'intervalle géodésique entre x et y , noté $[x, y]$ est la réunion des sommets de $\mathcal{G}$ appartenant à un quelconque segment géodésique reliant x à y .

Définition 1.3.2. Un graphe $\mathcal{G}$ est dit *médian* si, pour tous $x, y, z \in \mathcal{G}^{(0)}$, on a l'égalité :

$$|[x, y] \cap [y, z] \cap [x, z]| = 1.$$

Dans ce cas, on note $m(x, y, z)$ l'unique point de $[x, y] \cap [y, z] \cap [x, z]$, appelé *médian* des points x, y, z .

Une propriété cruciale des graphes médians est que ceux-ci possèdent des demi-espaces convexes naturels qui leur confèrent une structure d'espace à murs.

Définition 1.3.3. Soit $\mathcal{G}$ un graphe médian. Une partie $Y \subset \mathcal{G}^{(0)}$ est dite *convexe* si, pour tous $x, y \in Y$, on a l'inclusion $[x, y] \subset Y$. Un *demi-espace* de $\mathcal{G}$ est une partie convexe $Y \subset \mathcal{G}^{(0)}$ dont le complémentaire (dans $\mathcal{G}^{(0)}$) est également convexe. Un *mur convexe* sur $\mathcal{G}$ est une partition $\mathcal{G}^{(0)} = \{Y, Y^c\}$ avec Y, Y^c convexes.

Proposition 1.3.4 (Graphe médian implique espace à murs, voir [Nic04] proposition 3.6). Soit $\mathcal{G}$ un graphe médian et $\mathcal{M}$ la famille des murs convexes de $\mathcal{G}$. Alors $(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{M})$ est un espace à murs séparé.

1.3.2 Ultrafiltres sur un espace à murs

Définition 1.3.5. Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace à murs. Un *ultrafiltre* sur $(X, \mathcal{M})$ est une famille σ de demi-espaces de $(X, \mathcal{M})$ telle que :

- (i) pour tout $Y \in \underline{\mathcal{M}}$, soit $Y \in \sigma$, soit $Y^c \in \sigma$, mais $\{Y, Y^c\} \not\subset \sigma$,
- (ii) si $Y \in \sigma$ et $Y' \in \underline{\mathcal{M}}$ sont tels que $Y \subset Y'$, alors $Y' \in \sigma$.

Autrement dit, un ultrafiltre sur $(X, \mathcal{M})$ est la donnée d'une orientation cohérente des murs. Certains ultrafiltres s'identifient aux points de X , via la collection des demi-espaces contenant un point donné.

Définition 1.3.6. Un ultrafiltre *principal* sur $(X, \mathcal{M})$ est un ultrafiltre de la forme :

$$\sigma_x = \{Y \in \underline{\mathcal{M}} \mid x \in Y\}, \text{ avec } x \in X.$$

Définition 1.3.7. Le *graphe des ultrafiltres* d'un espace à murs $(X, \mathcal{M})$ est le graphe $\mathcal{G}$ dont les sommets sont les ultrafiltres sur $(X, \mathcal{M})$ possédant une arête entre deux ultrafiltres σ et τ si, et seulement si :

$$|\sigma \triangle \tau| = 2.$$

Le graphe des ultrafiltres d'un espace à murs n'est en général pas connexe mais possède une composante connexe privilégiée contenant une copie de l'espace à murs de départ.

Proposition 1.3.8 (Composante principale, voir [Nic04] lemme 4.3). Les ultrafiltres principaux sur $(X, \mathcal{M})$ sont tous contenus dans une composante connexe de $\mathcal{G}$ sur laquelle la distance combinatoire d_c est donnée par la formule $d_c(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}|\sigma \triangle \tau|$.

Définition 1.3.9. La composante connexe de $\mathcal{G}$ contenant les ultrafiltres principaux sur $(X, \mathcal{M})$ est appelée *composante connexe principale* de $\mathcal{G}$ et notée $\mathcal{C}^1(X)$. Les sommets du graphe $\mathcal{C}^1(X)$ sont appelés ultrafiltres *quasi-principaux* sur $(X, \mathcal{M})$.

1.3.3 Cubulation des espaces murs

Le lien entre les espaces à murs et les complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ va essentiellement découler de la proposition suivante.

Proposition 1.3.10 (Le graphe médian des ultrafiltres quasi-principaux, voir [Nic04] proposition 4.5). *Le graphe $\mathcal{C}^1(X)$ est un graphe médian.*

Le graphe $\mathcal{C}^1(X)$ des ultrafiltres quasi-principaux est donc, d'après la proposition 1.3.4, un espace à murs. Il y a de plus une correspondance bijective entre les murs de X et les murs de $\mathcal{C}^1(X)$.

Proposition 1.3.11 (Compatibilité des murs, voir [Nic04] proposition 4.6). *Pour $Y \in \underline{\mathcal{M}}$, posons $H_Y = \{\sigma \in \mathcal{C}^1(X) \mid Y \in \sigma\}$. Alors l'application :*

$$\{Y, Y^c\} \mapsto \{H_Y, H_{Y^c}\}$$

réalise une bijection entre l'ensemble des murs de X et l'ensemble des murs convexes de $\mathcal{C}^1(X)$.

On peut alors énoncer que tout espace à murs se plonge canoniquement dans un graphe médian.

Théorème 1.3.12 (Plongement canonique d'un espace à murs dans un graphe médian, voir [Nic04] proposition 4.8). *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace à murs séparé. Alors l'application injective :*

$$\begin{aligned} C_X : X &\hookrightarrow \mathcal{C}^1(X) \\ x &\mapsto \sigma_x \end{aligned}$$

est un morphisme d'espaces à murs séparés et un plongement isométrique de $(X, \mathcal{M})$ dans $(\mathcal{C}^1(X), \mathcal{M})$. De plus, tout sous-graphe de $\mathcal{C}^1(X)$, médian et contenant $C_X(X)$, est égal à $\mathcal{C}^1(X)$.

1.3.4 Espaces à murs géométriquement cubulables

Voyons maintenant comment le plongement C_X permet de transporter les actions de groupes.

Proposition 1.3.13 (Extension des automorphismes d'espaces à murs, voir [Nic04] proposition 4.11). *Soit $f : X \rightarrow X$ un automorphisme d'un espace à murs $(X, \mathcal{M})$. Alors il existe un unique automorphisme d'espaces à murs $f_* : \mathcal{C}^1(X) \rightarrow \mathcal{C}^1(X)$ tel que $f_* \circ C_X = C_X \circ f$.*

L'application $\text{Aut}_{\mathcal{M}}(X) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}^1(X))$ permet d'étendre toute action $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{M}}(X)$ d'un groupe G sur un espace à murs $(X, \mathcal{M})$ en une action $\varphi_* : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}^1(X))$ en posant $\varphi_*(g) = \varphi(g)_*$.

Les résultats de cette section énoncés jusqu'ici sont dus à B. Nica. Pour compléter cet exposé, nous énonçons les hypothèses raisonnables permettant de transporter les actions géométriques de groupes discrets à travers ce procédé de cubulation.

Proposition 1.3.14 (Actions géométriques et cubulation). *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace à murs tel que :*

- (i) *le graphe $\mathcal{C}^1(X)$ soit localement fini,*
- (ii) *le plongement isométrique $C_X : X \hookrightarrow \mathcal{C}^1(X)$ soit quasi-surjectif (i.e. la distance de Hausdorff entre $C_X(X)$ et $\mathcal{C}^1(X)$ est finie).*

Alors, pour toute action géométrique $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{M}}(X)$ d'un groupe discret G sur $(X, \mathcal{M})$, l'action induite $\varphi_ : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}^1(X))$ de G sur $(\mathcal{C}^1(X), \mathcal{M})$ est également géométrique.*

Démonstration. Soit $K \subset X$ une partie finie telle que $X = \bigcup_{g \in G} g.K$ et D une constante de quasi-

surjectivité de C_X . Pour $\sigma \in \mathcal{C}^1(X)$, il existe $\sigma_x \in X$ tel que $\omega(\sigma, \sigma_x) \leq D$. Soit alors $g \in G$ tel que $g.\sigma_x \in K$. Comme G agit par isométries sur $\mathcal{C}^1(X)$, on a $\omega(g.\sigma, g.\sigma_x) = \omega(\sigma, \sigma_x) \leq D$. Par finitude de K et locale finitude de $\mathcal{C}^1(X)$, le D -voisinage $\mathcal{V}_D(K)$ de K dans $\mathcal{C}^1(X)$ est un ensemble fini tel que de plus $\mathcal{C}^1(X)^{(0)} = \bigcup_{g \in G} g.\mathcal{V}_D(K)$. Donc l'action de G sur $\mathcal{C}^1(X)$ est cocompacte.

Soit maintenant $K \subset \mathcal{C}^1(X)^{(0)}$ compact. Par locale finitude, K est fini. Si $g \in G$ vérifie $\varphi(g)_*.K \cap K \neq \emptyset$, alors il existe $x \in \mathcal{V}_D(K) \cap X$ tel que $\varphi(g)_*(\sigma_x) \in \mathcal{V}_D(K) \cap X$, i.e. $g.x \in \mathcal{V}_D(K) \cap X$. En particulier, $g.(\mathcal{V}_D(K) \cap X) \cap (\mathcal{V}_D(K) \cap X) \neq \emptyset$. L'action de G sur X étant propre, g appartient à un ensemble fini. L'action induite de G sur $\mathcal{C}^1(X)$ est donc propre. $\square$

Définition 1.3.15. Un espace à murs séparé $(X, \mathcal{M})$ dont le graphe des ultrafiltres quasi-principaux $\mathcal{C}^1(X)$ est localement fini et tel que le plongement isométrique $C_X : X \hookrightarrow \mathcal{C}^1(X)$ soit quasi-surjectif est dit *géométriquement cubulable*.

1.3.5 Graphes médians et complexes cubiques $\text{CAT}(0)$

Pour compléter le lien entre espaces à murs et complexes cubiques $\text{CAT}(0)$, il ne reste alors plus qu'à présenter l'équivalence entre la classe des graphes médians et celle des complexes cubiques $\text{CAT}(0)$.

Tout d'abord, le 1-squelette d'un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ est toujours un graphe médian. Réciproquement, à partir d'un graphe médian, on peut fabriquer un complexe cubique par un procédé inductif en attachant un n -cube à chaque $(n - 1)$ -squelette de n -cube que l'on rencontre. On obtient alors un complexe cubique $\text{CAT}(0)$.

De plus, les hyperplans d'un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ permettent de définir une structure d'espace à murs sur un tel complexe. L'équivalence entre ces deux classes d'objets combinatoires a été démontrée par V. Chepoi (voir [Che00]).

Théorème 1.3.16 (Graphes médians et complexes cubiques $\text{CAT}(0)$). *Tout graphe médian est, de manière unique, le 1-squelette d'un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ et les structures sous-jacentes d'espaces à murs sont compatibles.*

La conjonction des résultats des théorèmes 1.3.12 et 1.3.16 et de la proposition 1.3.14 fournit l'énoncé ci-dessous, qui est au cœur de la démarche de la première partie de cette thèse.

Corollaire 1.3.17 (Obtenir un groupe cubique $\text{CAT}(0)$). *Soit G un groupe discret agissant géométriquement sur un espace à murs géométriquement cubulable. Alors G est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Le chapitre 2 sera consacré à la présentation de procédés de fabrication d'espaces à murs géométriquement cubulables grâce à la géométrie de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, puis à l'étude d'actions géométriques de réseaux uniformes de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ sur de tels espaces à murs.

Chapitre 2

Cubulations de variétés hyperboliques compactes

Sommaire

2.1 Familles asymptotiquement séparantes de quasi-hyperplans	28
2.1.1 Propriétés de convexité	28
2.1.2 Quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$	28
2.1.3 Séparation à grande échelle et quasi-isométrie	30
2.2 Cubulation des familles de quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$	32
2.2.1 Projections sur les quasi-convexes des espaces hyperboliques	33
2.2.2 Quasi-surjectivité et locale finitude de la cubulation	33
2.3 Critères de cubulation de variétés hyperboliques compactes	36
2.3.1 Quasi-hyperplans Γ -cocompacts	36
2.3.2 Critère de cubulation dans $\mathbb{H}^n$	37
2.3.3 Quasi-hyperplans généralisés et variante de la construction d'espace à murs .	38
2.3.4 Critère de cubulation au bord de $\mathbb{H}^n$	39
2.4 Application aux variétés arithmétiques	41
2.4.1 Commensurateur et densité	41
2.4.2 Cubulation des variétés arithmétiques	41

2.1 Familles asymptotiquement séparantes de quasi-hyperplans

On se place jusqu'à la fin de ce chapitre dans l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$ de dimension $n \geq 2$. Nous allons présenter dans cette section et la suivante une manière de construire des espaces à murs géométriquement cubulables à l'aide de familles de murs bien choisis sur $\mathbb{H}^n$. Ces constructions seront alors appliquées à la section 2.3 au problème de la cubulation des variétés hyperboliques compactes.

2.1.1 Propriétés de convexité

Commençons par quelques rappels indispensables sur les notions de plongements quasi-isométriques, de quasi-convexité et d'enveloppes convexes dans l'espace hyperbolique réel (voir [GdLH90]).

Définition 2.1.1. Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques et $f : X \rightarrow X'$ une application. Pour $\lambda \geq 1$ et $C \geq 0$, on dit que f est un (λ, C) -plongement quasi-isométrique si, pour tous $x, y \in X$:

$$\lambda^{-1}d(x, y) - C \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + C.$$

On dit que f est un *plongement quasi-isométrique* si f est un (λ, C) -plongement quasi-isométrique pour certains paramètres (λ, C) . On dit de plus que f est *quasi-surjective* si la distance de Hausdorff entre $f(X)$ et X' est finie. Enfin, une *quasi-isométrie* est un plongement quasi-isométrique quasi-surjectif.

Lemme 2.1.2 (Images de plongements quasi-isométriques à but hyperbolique). Soit (X, d) un espace métrique géodésique, (X', d') un espace métrique géodésique hyperbolique au sens de Gromov et $f : X \rightarrow X'$ un plongement quasi-isométrique, alors $f(X)$ est une partie quasi-convexe de X' .

Nous définissons également l'enveloppe convexe d'une partie de l'espace hyperbolique réel.

Définition 2.1.3. Soit $Y \subset \mathbb{H}^n$. On appelle *enveloppe convexe fermée* de Y dans $\mathbb{H}^n$ l'intersection des parties convexes fermées de $\mathbb{H}^n$ qui contiennent Y . On note cet ensemble $\text{Conv}_{\mathbb{H}^n}(Y)$ ou plus simplement $\text{Conv}(Y)$ lorsque cela ne soulève aucune ambiguïté.

Remarque Lorsque $\text{Conv}(Y) \neq \mathbb{H}^n$, il existe un demi-espace fermé¹ de $\mathbb{H}^n$ contenant Y et $\text{Conv}(Y)$ est précisément l'intersection des demi-espaces fermés de $\mathbb{H}^n$ qui contiennent Y .

On a alors la propriété de stabilité suivante pour les enveloppes convexes de parties quasi-convexes.

Lemme 2.1.4 (Stabilité de l'enveloppe convexe des parties quasi-convexes). Soit $Y \subset \mathbb{H}^n$ une partie L -quasi-convexe. Alors Y et $\text{Conv}(Y)$ sont à distance de Hausdorff finie. Plus précisément, il existe $K = K(L) \geq 0$ tel que $\text{Conv}(Y) \subset \mathcal{V}_K(Y)$.

Les résultats de ce paragraphe n'ont rien de spécifique à l'espace hyperbolique réel et valent en remplaçant $\mathbb{H}^n$ par n'importe quel espace métrique géodésique hyperbolique au sens de Gromov.

2.1.2 Quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$

Définition 2.1.5. Soit $L \geq 0$. Un L -quasi-hyperplan de $\mathbb{H}^n$ est l'image d'un plongement quasi-isométrique $f : \mathbb{H}^{n-1} \rightarrow \mathbb{H}^n$ tel que $f(\mathbb{H}^{n-1})$ soit L -quasi-convexe et $\text{Conv}(f(\mathbb{H}^{n-1})) \subset \mathcal{V}_L(f(\mathbb{H}^{n-1}))$. Un *quasi-hyperplan* de $\mathbb{H}^n$ est l'image d'un plongement quasi-isométrique $\mathbb{H}^{n-1} \rightarrow \mathbb{H}^n$.

Remarques

1. Pour cette généralisation de la notion usuelle d'hyperplan totalement géodésique (qui sont des 0-quasi-hyperplans particuliers), on ne requiert nullement la continuité du plongement quasi-isométrique de $\mathbb{H}^{n-1}$ dans $\mathbb{H}^n$. Un L -quasi-hyperplan de $\mathbb{H}^n$ peut être une partie discrète.
2. Si $f : \mathbb{H}^{n-1} \rightarrow \mathbb{H}^n$ est un plongement quasi-isométrique, alors il existe $L \geq 0$ tel que $f(\mathbb{H}^{n-1})$ est L -quasi-convexe et donc également $K \geq 0$ tel que $\text{Conv}(f(\mathbb{H}^{n-1})) \subset \mathcal{V}_K(f(\mathbb{H}^{n-1}))$ (d'après les lemmes 2.1.2 et 2.1.4). Donc $f(\mathbb{H}^{n-1})$ est un $\max(L, K)$ -quasi-hyperplan, et cette constante ne dépend que des constantes du plongement quasi-isométrique f .

¹Les demi-espaces fermés de $\mathbb{H}^n$ sont les adhérences de composantes connexes de complémentaires d'hyperplans de $\mathbb{H}^n$.

La propriété de séparation suivante est alors cruciale pour toutes les constructions à venir.

Lemme 2.1.6 (L'enveloppe convexe d'un quasi-hyperplan est séparante). *Soit H un quasi-hyperplan de $\mathbb{H}^n$. Alors $\mathbb{H}^n \setminus \text{Conv}(H)$ possède deux composantes connexes.*

Démonstration. Il existe $L \geq 0$ tel que H soit L -quasi-convexe et $H \subset \text{Conv}(H) \subset \mathcal{V}_L(H)$ ce qui implique² que $\partial_\infty \text{Conv}(H) = \partial_\infty H$. De plus, l'hypothèse de plongement quasi-isométrique garantit que $\partial_\infty H \xrightarrow{\text{homeo}} \partial_\infty \mathbb{H}^{n-1} \xrightarrow{\text{homeo}} \mathbb{S}^{n-2}$. Au final, $\partial_\infty \mathbb{H}^n \setminus \partial_\infty \text{Conv}(H)$ possède deux composantes connexes car une sphère $\mathbb{S}^{n-2}$ plongée dans $\mathbb{S}^{n-1}$ est toujours séparante d'après le théorème de Jordan-Brouwer. En passant à l'enveloppe convexe dans $\mathbb{H}^n$, le résultat suit. $\square$

Fixons une famille $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$. L'objectif de ce paragraphe est alors de construire un espace à murs dual à cette famille $\mathcal{H}$.

Notations Pour $\alpha \in A$, considérons C_α l'enveloppe convexe fermée de H_α dans $\mathbb{H}^n$ et $\overleftarrow{\Omega}_\alpha^-$ et $\overrightarrow{\Omega}_\alpha^+$ les deux composantes connexes de $\mathbb{H}^n \setminus C_\alpha$. Notons également $\overrightarrow{\Omega}_\alpha^- = \mathbb{H}^n \setminus \overleftarrow{\Omega}_\alpha^-$ et $\overleftarrow{\Omega}_\alpha^+ = \mathbb{H}^n \setminus \overrightarrow{\Omega}_\alpha^+$, et enfin $\Omega_\alpha^- = \overleftarrow{\Omega}_\alpha^- \cap \overrightarrow{\Omega}_\alpha^+$ et $\Omega_\alpha^+ = \overleftarrow{\Omega}_\alpha^+ \cap \overrightarrow{\Omega}_\alpha^-$.

Propriétés de convexité

1. Les parties $\overrightarrow{\Omega}_\alpha^-$ et $\overrightarrow{\Omega}_\alpha^+$ sont des *convexes fermés* de $\mathbb{H}^n$. On a de plus les inclusions :

$$\overleftarrow{\Omega}_\alpha^- \subset \overrightarrow{\Omega}_\alpha^+ \text{ et } \overleftarrow{\Omega}_\alpha^+ \subset \overrightarrow{\Omega}_\alpha^-.$$

On dira donc que les partitions $\mathbb{H}^n = \overleftarrow{\Omega}_\alpha^- \sqcup \overrightarrow{\Omega}_\alpha^+$ et $\mathbb{H}^n = \overleftarrow{\Omega}_\alpha^+ \sqcup \overrightarrow{\Omega}_\alpha^-$ sont des *murs convexes-concaves* de $\mathbb{H}^n$, notion plus souple que celle de murs convexes (i.e. partition en partie convexe de complémentaire convexe).

2. La frontière topologique de C_α est $\partial C_\alpha = C_\alpha \setminus \overset{\circ}{C}_\alpha = \Omega_\alpha^- \cup \Omega_\alpha^+$. De plus, le cas $\Omega_\alpha^- = \Omega_\alpha^+$ apparaît exactement lorsque H_α est un hyperplan totalement géodésique de $\mathbb{H}^n$. Les hypersurfaces Ω_α^- et Ω_α^+ sont appelés *murs géométriques* associés aux partitions $\mathbb{H}^n = \overleftarrow{\Omega}_\alpha^- \sqcup \overrightarrow{\Omega}_\alpha^+$ et $\mathbb{H}^n = \overleftarrow{\Omega}_\alpha^+ \sqcup \overrightarrow{\Omega}_\alpha^-$.

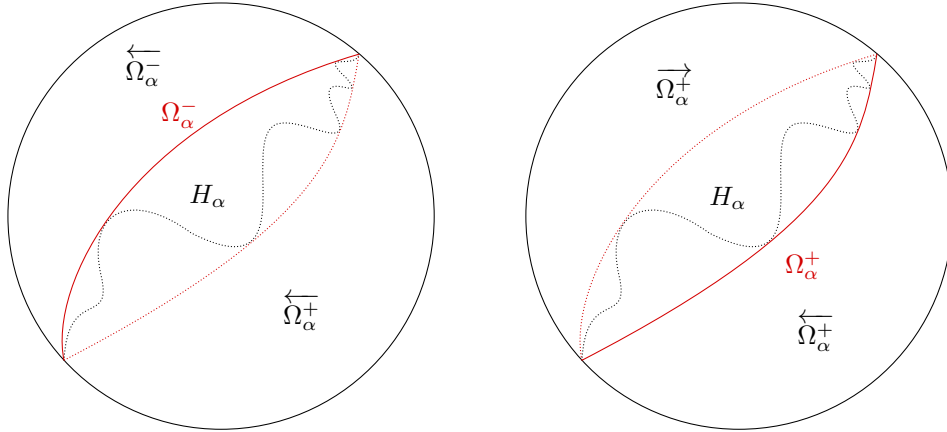


FIGURE 2.1.1 – Deux murs convexes-concaves Ω_α^- et Ω_α^+ associés à un quasi-hyperplan H_α .

Les partitions $M_\alpha^- = \{\overleftarrow{\Omega}_\alpha^-, \overrightarrow{\Omega}_\alpha^+\}$ et $M_\alpha^+ = \{\overleftarrow{\Omega}_\alpha^+, \overrightarrow{\Omega}_\alpha^-\}$ pour $\alpha \in A$ définissent alors une famille de murs $\mathcal{M} = \{\emptyset, \mathbb{H}^n\} \cup \{M_\alpha^-, M_\alpha^+\}_{\alpha \in A}$ sur $\mathbb{H}^n$. Nous allons alors imposer une condition naturelle à la famille $\mathcal{H}$ de quasi-hyperplans fixée au départ pour que cette famille de murs soit un système de murs.

Définition 2.1.7. Soit $\mathcal{H}$ un ensemble de parties de $\mathbb{H}^n$. On dit que $\mathcal{H}$ est *uniformément localement fini* dans $\mathbb{H}^n$ si, pour tout rayon $R \geq 0$, il existe $N(R) \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour toute boule $B \subset \mathbb{H}^n$ de rayon R , on ait la condition de finitude $|\{H \in \mathcal{H} \mid B \cap H \neq \emptyset\}| \leq N(R)$.

²Si X est une partie de $\mathbb{H}^n$, alors $\partial_\infty X$ désigne l'intersection avec la sphère à l'infini de $\mathbb{H}^n$ de l'adhérence de X dans la compactification usuelle de $\mathbb{H}^n$ par les classes d'équivalence de rayons quasi-géodésiques pour la relation de distance de Hausdorff finie.

Lemme 2.1.8 (Locale finitude uniforme et systèmes de murs). *Soit $\mathcal{H}$ une famille uniformément localement finie de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$. Alors $(\mathbb{H}^n, \mathcal{M})$ est un espace à murs (a priori non-séparé).*

Démonstration. Il suffit de prouver que l'hypothèse de locale finitude uniforme force la famille de murs géométriques $\{\Omega_\alpha^-, \Omega_\alpha^+\}_{\alpha \in A}$ à être également uniformément localement finie. À cet effet, fixons $R > 0$. L'hypothèse assure l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour toute boule $B \subset \mathbb{H}^n$ de rayon $R + L$, on ait $|\{\alpha \in A \mid B \cap H_\alpha \neq \emptyset\}| \leq n_0$. Soit $B_0 \subset \mathbb{H}^n$ une boule de rayon R . Comme $C_\alpha \subset \mathcal{V}_L(H_\alpha)$ pour tout $\alpha \in A$, on a l'implication $B_0 \cap (\Omega_\alpha^- \cup \Omega_\alpha^+) \neq \emptyset \implies \mathcal{V}_L(B_0) \cap H_\alpha \neq \emptyset$, d'où au plus n_0 indices α possibles. La famille de murs géométriques est donc également uniformément localement finie. $\square$

Définition 2.1.9. Soit $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille uniformément localement finie de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$. L'espace à murs $(\mathbb{H}^n, \mathcal{M})$ est appelé *espace à murs dual à $\mathcal{H}$* et son séparé $(X, \mathcal{M})$ est appelé *espace à murs séparé dual à $\mathcal{H}$* .

Remarque Il ne faut pas croire que l'espace à murs séparé dual à une famille $\mathcal{H}$ correspond d'une quelconque manière à l'espace des composantes connexes du complémentaire de la réunion des murs géométriques dans $\mathbb{H}^n$. Ce serait effectivement le cas si ces murs étaient convexes, mais dans notre situation il est possible que deux telles composantes connexes distinctes ne soient séparées par aucun mur, comme le suggère le schéma ci-dessous.

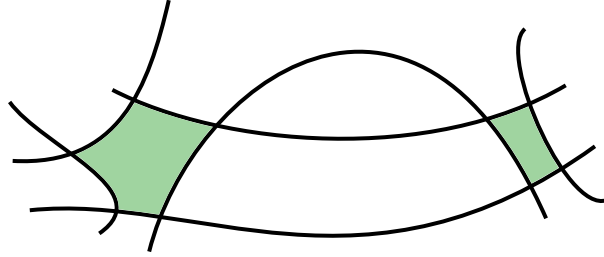


FIGURE 2.1.2 – Une configuration de deux composantes connexes distinctes non-séparées.

Le but des paragraphes suivants est de dégager des conditions suffisantes naturelles pour que l'espace à murs séparé dual à une famille uniformément localement finie de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$ soit géométriquement cubulable. Pour des raisons de commodité, nous travaillerons cependant essentiellement avec l'espace à murs non-séparé $(\mathbb{H}^n, \mathcal{M})$.

Remarque La construction de l'espace à murs dual à une famille uniformément localement finie $\mathcal{H}$ de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$ est canonique, au sens où elle ne fait intervenir aucun choix.

2.1.3 Séparation à grande échelle et quasi-isométrie

Dans ce paragraphe, nous introduisons une hypothèse de séparation à grande échelle garantissant que l'espace à murs séparé dual à une famille de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$ est quasi-isométrique à $(\mathbb{H}^n, d)$.

Définition 2.1.10. Soit X un espace topologique et $Y, Y_1, Y_2 \subset X$. On dit que Y *sépare* (topologiquement) Y_1 et Y_2 si Y_1 et Y_2 sont contenus dans des composantes connexes distinctes de $X \setminus Y$.

Propriétés de séparation

1. Pour $x, y \in \mathbb{H}^n$ et $\alpha \in A$, le convexe C_α sépare x et y au sens topologique si, et seulement si :

$$(x, y) \in \overleftarrow{\Omega_\alpha^-} \times \overleftarrow{\Omega_\alpha^+} \text{ ou bien } (y, x) \in \overleftarrow{\Omega_\alpha^-} \times \overleftarrow{\Omega_\alpha^+}.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{H}^n$ et $\alpha \in A$. Si le convexe C_α sépare x et y , alors $\{M_\alpha^-, M_\alpha^+\} \subset \mathcal{M}(x, y)$ car on peut supposer, quitte à permuter x et y , que $(x, y) \in \overleftarrow{\Omega_\alpha^-} \times \overleftarrow{\Omega_\alpha^+} \subset \overleftarrow{\Omega_\alpha^-} \times \overrightarrow{\Omega_\alpha^+}$.

Nous pouvons alors formuler une hypothèse de séparation à grande échelle qui se révélera cruciale pour que l'espace à murs séparé dual à $\mathcal{H}$ soit géométriquement cubulable.

Définition 2.1.11. Soit $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$. On dit que la famille $\mathcal{H}$ est ℓ -séparante si, pour tous $x, y \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(x, y) \geq \ell$, il existe $\alpha \in A$ tel que C_α sépare x et y . On dira alors que $\mathcal{H}$ est *asymptotiquement séparante* s'il existe $\ell \geq 0$ tel que $\mathcal{H}$ soit ℓ -séparante.

Remarques

1. En termes géométriques, l'hypothèse de séparation asymptotique signifie que tout segment géodésique suffisamment long de $\mathbb{H}^n$ traverse au moins un convexe C_α le long d'un sous-segment strict, ce qui vu de loin ressemble à la situation d'une géodésique coupant un hyperplan en un point.
2. Cette hypothèse garantit que les composantes connexes du complémentaire dans $\mathbb{H}^n$ de la réunion des murs géométriques sont de diamètres uniformément majorés.
3. Une autre reformulation de cette condition est le fait que le nombre de murs séparant deux telles composantes connexes tend vers $+\infty$ lorsque la distance dans l'espace hyperbolique entre ces composantes tend vers $+\infty$ (voir proposition 2.1.14). Il s'agit donc d'une condition de propreté qui impose une compatibilité à grande échelle entre distance de murs et distance hyperbolique.

Avant de démontrer la quasi-isométrie annoncée, nous énonçons une dernière propriété de séparation liée à la convexité des ensembles utilisés pour séparer.

Notation Pour $x, y \in \mathbb{H}^n$ (ou $\partial_\infty \mathbb{H}^n$) distincts, nous noterons $[x, y]$ le segment géodésique reliant x à y et $]x, y[= [x, y] \setminus \{x, y\}$ son intérieur.

Lemme 2.1.12 (Prolongement de la séparation). Soient $x', y' \in \mathbb{H}^n$ et $\alpha \in A$ tel que C_α sépare x' et y' . Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{H}^n$ tels que $[x', y'] \subset [x, y]$, le convexe C_α sépare également x et y .

Démonstration. Par convexité, $C_\alpha \cap [x, y]$ est un segment contenant $C_\alpha \cap [x', y']$. D'après l'hypothèse, $C_\alpha \cap [x', y']$ est un segment contenu dans $]x', y'[,$ donc dans $]x, y[$. Ainsi, $C_\alpha \cap [x, y]$ est un segment non-vide contenu dans $]x', y'[,$ Comme de plus C_α sépare x' et y' , on obtient que C_α sépare x et y . $\square$

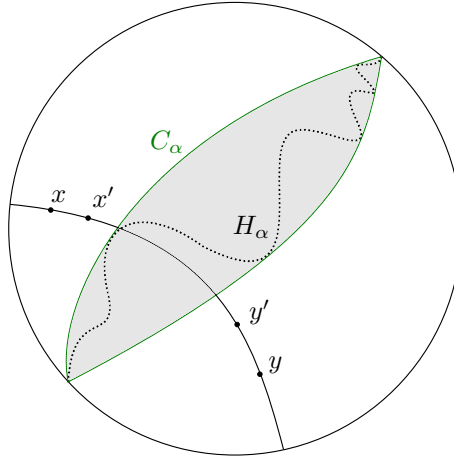


FIGURE 2.1.3 – Prolongement de la séparation à l'extérieur du convexe.

Notons alors ω la pseudo-distance de murs sur l'espace à murs $(\mathbb{H}^n, \mathcal{M})$ et également la distance de murs sur l'espace à murs séparé $(X, \mathcal{M})$. Rappelons que par définition, l'application quotient $\pi : (\mathbb{H}^n, \omega) \rightarrow (X, \omega)$ est une isométrie entre espaces pseudo-métriques, i.e. $\omega(\pi(x), \pi(y)) = \omega(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{H}^n$.

La notion de quasi-isométrie entre espaces pseudo-métriques se formule à l'identique de celle de quasi-isométrie pour les espaces métriques.

Définition 2.1.13. Soient (X, d) et (X', d') deux espaces pseudo-métriques. Pour $\lambda \geq 1$ et $C \geq 0$, on dit qu'une application $f : X \rightarrow X'$ est une (λ, C) -quasi-isométrie si f est quasi-surjective et, pour tous $x, y \in X$:

$$\lambda^{-1}d(x, y) - C \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + C$$

On dit que f est une *quasi-isométrie* si f est une (λ, C) -quasi-isométrie pour certains paramètres (λ, C) .

Proposition 2.1.14 (Quasi-isométrie entre l'espace hyperbolique et l'espace à murs dual). *Soit $\mathcal{H}$ une famille uniformément localement finie et asymptotiquement séparante de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$. Alors l'application identité $(\mathbb{H}^n, d) \longrightarrow (\mathbb{H}^n, \omega)$ est une quasi-isométrie.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(x, y) = D > 0$ et $\gamma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{H}^n$ l'unique rayon géodésique tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(D) = y$.

Étape 1 : On démontre une majoration de la forme $\omega(x, y) \leq \lambda d(x, y) + C$ en subdivisant $[x, y]$ en segments de longueur 1 et en utilisant l'hypothèse de locale finitude uniforme.

Par locale finitude uniforme, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour toute boule $B \subset \mathbb{H}^n$ de rayon 1, on ait $|\{\alpha \in A \mid B \cap (\Omega_\alpha^- \cup \Omega_\alpha^+) \neq \emptyset\}| \leq n_1$. Pour tout $j \in J = \{1, \dots, [D] + 1\}$, on a donc également l'inégalité $|\{\alpha \in A \mid \gamma([j-1, j]) \cap (\Omega_\alpha^- \cup \Omega_\alpha^+) \neq \emptyset\}| \leq n_1$.

Par ailleurs, si $M = \left\{ \overleftarrow{\Omega}_\alpha^\pm, \overrightarrow{\Omega}_\alpha^\pm \right\} \in \mathcal{M}(x, y)$ alors nécessairement $\Omega_\alpha^\pm \cap [x, y] \neq \emptyset$. La remarque précédente assure donc, puisque $[x, y] \subset \bigcup_{j \in J} \gamma([j-1, j])$, que $\omega(x, y) \leq 2n_1([D] + 1) \leq 2n_1(d(x, y) + 1)$.

Étape 2 : On démontre une minoration de la forme $\omega(x, y) \geq \lambda^{-1}d(x, y) - C$ en subdivisant $[x, y]$ en segments d'une longueur ℓ choisie telle que la famille $\mathcal{H}$ soit ℓ -séparante.

Si $D \leq \ell$, alors on a trivialement la minoration $\omega(x, y) \geq 0 \geq \ell^{-1}d(x, y) - 1$. Nous démontrons alors la même inégalité sous l'hypothèse que $D \geq \ell$.

Pour $0 \leq j \leq [\frac{D}{\ell}]$, posons $\gamma_j = \gamma(j\ell)$. Par hypothèse, pour tout $1 \leq j \leq [\frac{D}{\ell}]$, il existe $\alpha_j \in A$ tel que C_{α_j} sépare γ_{j-1} et γ_j . D'après le lemme 2.1.12, C_{α_j} sépare également $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(D)$ car $[x, y] = [\gamma(0), \gamma(D)] \supset [\gamma_{j-1}, \gamma_j]$. Il reste simplement à démontrer que $j \neq k \implies \alpha_j \neq \alpha_k$ pour conclure que $\omega(x, y) \geq [\frac{D}{\ell}] \geq \ell^{-1}d(x, y) - 1$.

Or si $\alpha_j = \alpha_k$ avec $1 \leq j < k \leq [\frac{D}{\ell}]$, alors $[\gamma_{j-1}, \gamma_j] \subset [\gamma_{j-1}, \gamma_{k-1}] \subset [\gamma_{j-1}, \gamma_k]$. D'après le lemme 2.1.12, C_{α_j} sépare donc γ_{j-1} et γ_{k-1} ainsi que γ_{j-1} et γ_k . Ceci contredit le fait que $C_{\alpha_j} = C_{\alpha_k}$ sépare par définition γ_{k-1} et γ_k . $\square$

Corollaire 2.1.15 (Quasi-isométrie entre l'espace hyperbolique et l'espace à murs séparé dual). *L'espace hyperbolique réel $(\mathbb{H}^n, d)$ et l'espace à murs séparé (X, ω) dual à la famille $\mathcal{H}$ sont quasi-isométriques.*

Démonstration. La composée de l'identité $(\mathbb{H}^n, d) \longrightarrow (\mathbb{H}^n, \omega)$ avec l'isométrie $(\mathbb{H}^n, \omega) \longrightarrow (X, \omega)$ est d'après la proposition 2.1.14 une quasi-isométrie surjective entre $(\mathbb{H}^n, d)$ et (X, ω) . $\square$

2.2 Cubulation des familles de quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$

Fixons $L \geq 0$, $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille uniformément localement finie et asymptotiquement séparante de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$. Nous démontrons alors que l'espace à murs séparé $(X, \mathcal{M})$ dual à $\mathcal{H}$ est géométriquement cubulable.

Rappelons que le procédé de cubulation des espace à murs de B. Nica décrit en section 1.3 permet de plonger canoniquement l'espace à murs $(X, \mathcal{M})$ dans un graphe médian $(\mathcal{C}^1(X), \mathcal{M})$ dont les sommets sont les ultrafiltres quasi-principaux sur $(X, \mathcal{M})$. Nous noterons ω la distance de murs sur $\mathcal{C}^1(X)^{(0)}$, pour laquelle on rappelle que si $\sigma, \tau \in \mathcal{C}^1(X)^{(0)}$, alors $\omega(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}|\sigma \Delta \tau|$.

Théorème 2.2.1 (Espaces à murs géométriquement cubulables). *Soit $L \geq 0$ et $\mathcal{H}$ une famille uniformément localement finie et asymptotiquement séparante de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$. Alors l'espace à murs séparé dual à $\mathcal{H}$ est géométriquement cubulable. Le graphe médian $\mathcal{C}^1(X)$ est de plus uniformément localement fini donc le complexe cubique associé est de dimension finie.*

Nous démontrons donc d'une part que le graphe $\mathcal{C}^1(X)$ est uniformément localement fini, et d'autre part que le plongement canonique $C_X : X \hookrightarrow \mathcal{C}^1(X)$ est quasi-surjectif.

2.2.1 Projections sur les quasi-convexes des espaces hyperboliques

Pour prouver la quasi-surjectivité de la cubulation, nous utiliserons un lemme sur les propriétés générales des projections sur les parties quasi-convexes dans les espaces δ -hyperboliques (voir [Gro87]).

Lemme 2.2.2 (Projection sur les parties quasi-convexes). *Soit (X, d) un espace métrique géodésique δ -hyperbolique et $Y \subset X$ une partie non-vidue et L -quasi-convexe. Alors pour tous $x \in X$ et $p \in Y$ tels que $d(x, p) = d(x, Y)$, pour tout $y \in Y$ et pour tout segment géodésique $[x, y]$ on a :*

$$d(p, [x, y]) \leq 3\delta + L.$$

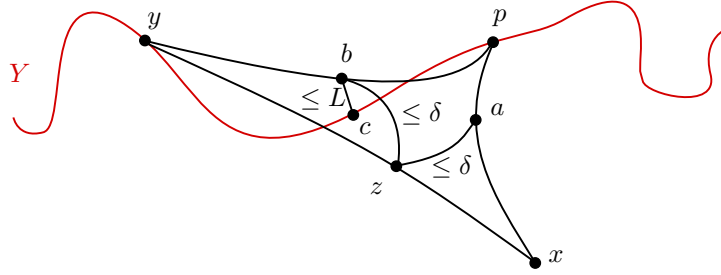


FIGURE 2.2.1 – Projection sur une partie L -quasi-convexe dans un espace δ -hyperbolique.

Démonstration. Soient x, p, y et $[x, y]$ comme dans l'énoncé. On choisit deux segments géodésiques $[x, p]$, $[y, p]$. Soit alors $z \in \mathcal{V}_\delta([x, p]) \cap [x, y] \cap \mathcal{V}_\delta([y, p])$. Soit $a \in [x, p]$ tel que $d(a, z) \leq \delta$ et $b \in [y, p]$ tel que $d(b, z) \leq \delta$. Comme Y est L -quasi-convexe et $b \in [y, p]$, il existe $c \in Y$ tel que $d(b, c) \leq L$. Remarquons que $d(a, p) = d(x, p) - d(x, a) \leq d(x, p) - d(x, c) + d(a, c) \leq d(a, c)$ car $c \in Y$ et $d(x, p) = d(x, Y)$. Mais alors, $d(z, p) \leq d(z, a) + d(a, p) \leq \delta + d(a, c) \leq \delta + (2\delta + L) = 3\delta + L$. $\square$

2.2.2 Quasi-surjectivité et locale finitude de la cubulation

Pour démontrer la quasi-surjectivité du plongement isométrique $C_X : X \hookrightarrow \mathcal{C}^1(X)$, nous allons raisonner dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ plutôt que dans l'espace à murs séparé X . Nous identifierons un point $x \in \mathbb{H}^n$ et l'ultrafiltre principal $\sigma_x \in \mathcal{C}^1(X)$ via les applications :

$$(\mathbb{H}^n, d) \xrightarrow[\text{quasi-isom.}]{\text{id}} (\mathbb{H}^n, \omega) \xrightarrow[\text{isom.}]{C_X} (X, \omega) \xrightarrow[\text{isom.}]{C_X} (\mathcal{C}^1(X), \omega).$$

Nous identifierons également un mur abstrait $M = \{\overleftarrow{M}, \overrightarrow{M}\} \in \mathcal{M}$ et le mur géométrique de la forme $\Omega_\alpha^\pm$ dont il provient, ce qui permet de voir les murs comme contenus dans $\mathbb{H}^n$.

Fixons un point $x \in \mathbb{H}^n$, un mur $M \in \mathcal{M}$ et un point $p \in M$ tel que $d(x, p) = d(x, M)$. La propriété principale que nous démontrons dans ce paragraphe est que si la distance $d(x, p)$ est suffisamment grande, alors la plupart des murs de $\mathcal{M}(x, p)$ sont disjoints³ de M (il s'agit d'une conséquence de la locale finitude uniforme et des propriétés de quasi-convexité du paragraphe précédent).

Lemme 2.2.3 (Quasi-convexité uniforme des murs géométriques). *Il existe $K \geq 0$ tel que si H_α est un L -quasi-hyperplan, alors les murs géométriques $\Omega_\alpha^\pm$ sont K -quasi-convexes.*

Démonstration. Le quasi-hyperplan H_α et les murs $\Omega_\alpha^\pm$ sont en effet à distance de Hausdorff majorée par L donc $K = 2L$ convient. $\square$

Fixons alors $\delta \geq 0$ tel que l'espace métrique $(\mathbb{H}^n, d)$ soit δ -hyperbolique. L'hypothèse de locale finitude uniforme justifie l'existence d'un nombre $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour toute boule $B \subset \mathbb{H}^n$ de rayon $3\delta + L + K$, on ait $|\{M \in \mathcal{M} \mid B \cap M \neq \emptyset\}| \leq n_0$.

Lemme 2.2.4 (Le cas exceptionnel des murs séparant x et p intersectant M). *Soit $x \in \mathbb{H}^n$, $M \in \mathcal{M}$ et $p \in M$ tel que $d(x, p) = d(x, M)$. Alors :*

$$|\{M' \in \mathcal{M}(x, p) \mid M' \cap M \neq \emptyset\}| \leq n_0$$

³On pourra comparer ceci à la propriété de murs parallèles dont il est question dans [Gur06].

Démonstration. Choisissons $y \in M' \cap M$ et $z \in M' \cap [x, p]$. Par application du lemme 2.2.2 pour $(Y, x, p, y) = (M, z, p, y)$, il vient $d(p, [z, y]) \leq 3\delta + L$. Mais, par K -quasi-convexité de M' , on a également $[z, y] \subset \mathcal{V}_K(M')$ donc $d(p, M') \leq 3\delta + L + K$. Par définition de n_0 , le résultat suit. $\square$

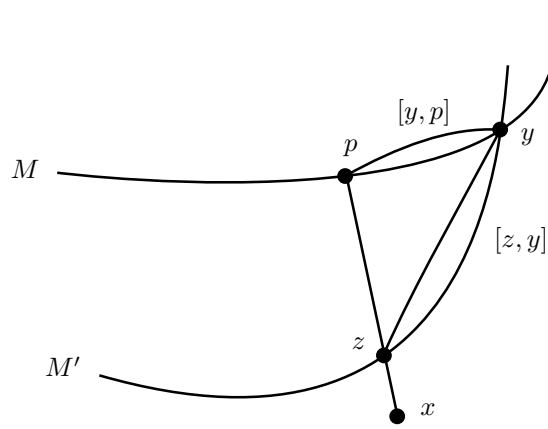


FIGURE 2.2.2 – Cas exceptionnel : murs sécants.

Lemme 2.2.5 (Le cas générique des murs séparant x et p disjoints de M). Soit $x \in \mathbb{H}^n$, $M \in \mathcal{M}$, $p \in M$ tel que $d(x, p) = d(x, M)$ et $\sigma \in \mathcal{C}^1(X)^{(0)}$ tel que $M \in \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$. Alors :

$$\{M' \in \mathcal{M}(x, p) \mid M' \cap M = \emptyset\} \subset \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x).$$

Démonstration. Supposons par exemple que $\vec{M} \in \sigma$ et $x \in \overleftarrow{M'}$. Comme $M \in \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$, on a alors $x \in \overleftarrow{M}$. L'hypothèse $M \cap M' = \emptyset$ et le fait que $x \in \overleftarrow{M} \cap \overleftarrow{M'}$ entraînent l'inclusion $\overleftarrow{M} \supset \overleftarrow{M'}$ et donc également $\overrightarrow{M'} \supset \overrightarrow{M}$. Ceci force donc $\overrightarrow{M'} \in \sigma$ et donc $M' \in \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$. Les trois autres cas se traitent de manière similaire, aucune propriété de convexité des murs n'ayant été utilisée. $\square$

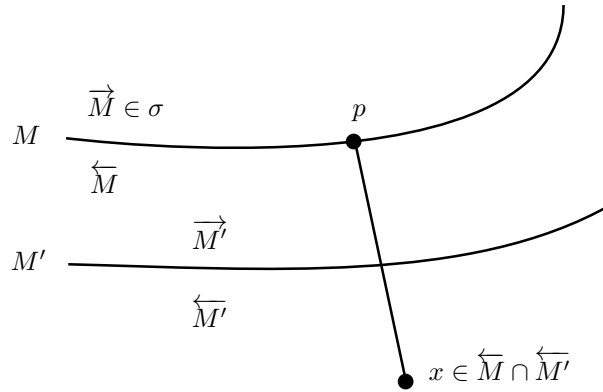


FIGURE 2.2.3 – Cas générique : murs disjoints.

Corollaire 2.2.6 (La plupart des murs séparant x et p séparent σ et σ_x). Soit $x \in \mathbb{H}^n$, $M \in \mathcal{M}$, $p \in M$ tel que $d(x, p) = d(x, M)$ et $\sigma \in \mathcal{C}^1(X)^{(0)}$ tel que $M \in \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$. Alors :

$$|\mathcal{M}(x, p) \cap \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)^c| \leq n_0 \text{ et } |\mathcal{M}(x, p) \cap \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)| \geq \omega(x, p) - n_0.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.2.5, $\mathcal{M}(x, p) \cap \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)^c \subset \{M' \in \mathcal{M}(x, p) \mid M' \cap M \neq \emptyset\}$. Le lemme 2.2.4 permet donc de conclure. $\square$

Ces résultats établis, nous pouvons maintenant démontrer la propriété essentielle suivante. Fixons à nouveau $\ell \geq 0$ tel que la famille $\mathcal{H}$ soit ℓ -séparante.

Proposition 2.2.7 (Approcher un ultrafiltre quasi-principal). *Soient $x \in \mathbb{H}^n$, $\sigma \in \mathcal{C}^1(X)^{(0)}$, $M \in \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$ et $p \in M$ tels que $d(x, p) = d(x, M) > 2n_0\ell$ et $p \in M$. Alors $\omega(\sigma, \sigma_p) < \omega(\sigma, \sigma_x)$.*

Démonstration. On rappelle que $\mathcal{M}(\sigma, \sigma_p) = \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x) \triangle \mathcal{M}(x, p)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
 \omega(\sigma, \sigma_p) &= |\mathcal{M}(\sigma, \sigma_x) \triangle \mathcal{M}(x, p)| \\
 &= |(\mathcal{M}(\sigma, \sigma_x) \cap \mathcal{M}(x, p)^c) \sqcup (\mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)^c \cap \mathcal{M}(x, p))| \\
 &= |\mathcal{M}(\sigma, \sigma_x) \cap \mathcal{M}(x, p)^c| + |\mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)^c \cap \mathcal{M}(x, p)| \\
 &= \omega(\sigma, \sigma_x) - |\mathcal{M}(\sigma, \sigma_x) \cap \mathcal{M}(x, p)| + |\mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)^c \cap \mathcal{M}(x, p)| \\
 (*) &\leq \omega(\sigma, \sigma_x) + (n_0 - \omega(x, p)) + n_0 \\
 (**) &\leq \omega(\sigma, \sigma_x) + 2n_0 + 1 - \ell^{-1}d(x, p) \\
 &< \omega(\sigma, \sigma_x) + 2n_0 - 2n_0 \\
 &= \omega(\sigma, \sigma_x).
 \end{aligned}$$

L'inégalité (*) utilise les résultats du corollaire 2.2.6, tandis que l'inégalité (**) provient de l'inégalité $\omega(x, p) \geq \ell^{-1}d(x, p) - 1$ obtenue dans la démonstration de la proposition 2.1.14. $\square$

Nous pouvons enfin de démontrer que $\mathcal{C}^1(X)$ est un graphe uniformément localement fini et que le plongement $C_X : X \hookrightarrow \mathcal{C}^1(X)$ est quasi-surjectif pour compléter la démonstration du théorème 2.2.1.

Proposition 2.2.8 (Quasi-surjectivité de la cubulation). *Soit $L \geq 0$, $\mathcal{H}$ une famille uniformément localement finie et asymptotiquement séparante de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$ et $(X, \mathcal{M})$ l'espace à murs séparé dual à $\mathcal{H}$. Alors le plongement isométrique $C_X : X \hookrightarrow \mathcal{C}^1(X)$ est quasi-surjectif. Les espaces métriques $(\mathbb{H}^n, d)$ et $(\mathcal{C}^1(X), \omega)$ sont donc quasi-isométriques.*

Démonstration. Par locale finitude uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour toute boule $B \subset H^n$ de rayon $2n_0\ell$, on ait la majoration $|\{M \in \mathcal{M} \mid B \cap M \neq \emptyset\}| \leq N$. Soit alors $\sigma \in \mathcal{C}^1(X)$ et $x \in X$ tel que $\omega(\sigma, \sigma_x) = \min_{y \in X} \omega(\sigma, \sigma_y)$. Le lemme 2.2.7 assure que si $M \in \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$, alors $B(x, 2n_0\ell) \cap M \neq \emptyset$. Ceci implique que $\omega(\sigma, \sigma_x) \leq N$ et donc que $\mathcal{V}_N(C_X(X)) = \mathcal{C}^1(X)^{(0)}$. $\square$

Proposition 2.2.9 (Locale finitude uniforme du graphe $\mathcal{C}^1(X)$). *Soit $L \geq 0$, $\mathcal{H}$ une famille uniformément localement finie et asymptotiquement séparante de L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$ et $(X, \mathcal{M})$ l'espace à murs séparé dual à $\mathcal{H}$. Alors le graphe médian $\mathcal{C}^1(X)$ est uniformément localement fini.*

Démonstration.

Étape 1 : On montre que le sous-graphe plein engendré par X dans $\mathcal{C}^1(X)$ est un graphe uniformément localement fini. Pour $x, y \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(x, y) > 2\ell$, on a $\omega(x, y) \geq \ell^{-1}d(x, y) - 1 > 1$, donc $\omega(x, y) \geq 2$. Autrement dit si $\omega(x, y) = 1$, alors $d(x, y) \leq 2\ell$. Soit $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que pour toute boule $B \subset H^n$ de rayon 2ℓ , on ait la majoration $|\{M \in \mathcal{M} \mid B \cap M \neq \emptyset\}| \leq N'$. Nous venons de montrer que la valence des sommets du sous-graphe plein sur X est majorée par N' .

Étape 2 : Rappelons que la proposition 2.2.8 fournit l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{C}^1(X)^{(0)} = \bigcup_{x \in X} B(\sigma_x, N)$. Il suffit donc de démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que toute boule de $\mathcal{C}^1(X)^{(0)}$ de rayon k centrée en un point $x \in X$ est finie, de cardinal majoré par $N(k)$.

Fondation : Soit $x \in X$, $\sigma \in \mathcal{C}^1(X)^{(0)}$ tel que $\omega(\sigma, \sigma_x) = 1$. S'il existe $M \in \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$ tel que $d(x, M) > 2n_0\ell$, alors le lemme 2.2.7 assure que σ est principal. Sinon, $d(x, M) \leq 2n_0\ell$ pour tout $M \in \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$ et donc $\mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$ est de cardinal majoré par N . Au final, σ appartient à un ensemble fini de cardinal majoré indépendamment de x .

Hérédité : Supposons le résultat acquis pour $k \geq 1$ et démontrons le pour $k+1$. On considère $x \in X$, $\sigma \in \mathcal{C}^1(X)^{(0)}$ tel que $\omega(\sigma, \sigma_x) = k+1$. Supposons qu'il existe $M \in \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$ tel que $d(x, M) > 2n_0\ell$. Alors le lemme 2.2.7 fournit $y \in X$ tel que $\omega(\sigma, \sigma_y) \leq k$ et σ appartient donc à un ensemble de cardinal majoré par $N(k)$. Sinon, $d(x, M) \leq 2n_0\ell$ pour tout $M \in \mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$ et $\mathcal{M}(\sigma, \sigma_x)$ est de cardinal majoré par N . Au final, σ appartient à un ensemble fini de cardinal majoré indépendamment de x . $\square$

Remarque Le théorème affirme que le complexe cubique $\text{CAT}(0)$ dual à $\mathcal{H}$ est de dimension finie, mais cette dimension n'est pas en général égale à la dimension n de l'espace hyperbolique ambiant.

2.3 Critères de cubulation de variétés hyperboliques compactes

L'objectif de cette section est d'énoncer une condition suffisante pour que le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension n , ou plus généralement un réseau uniforme Γ du groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ soit cubique $\text{CAT}(0)$.

Nous allons pour cela dégager des conditions naturelles sous lesquelles l'espace à murs dual à une famille Γ -invariante de quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$ est géométriquement cubulable.

2.3.1 Quasi-hyperplans Γ -cocompacts

Fixons Γ un réseau uniforme dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. L'hypothèse de locale finitude uniforme pour une famille Γ -invariante de fermés de $\mathbb{H}^n$ est fortement reliée à la notion de Γ -cocompacité.

Définition 2.3.1. Soit F une partie fermée de $\mathbb{H}^n$ et $\Sigma = \text{Stab}_\Gamma(F)$. On dit que F est Γ -cocompacte s'il existe une partie compacte $K \subset F$ telle que $F = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma(K)$.

Proposition 2.3.2 (Fermés Γ -cocompacts et locale finitude). Soit $F \subset \mathbb{H}^n$ une partie fermée et Γ -cocompacte. Alors la famille $\{\gamma(F)\}_{\gamma \in \Gamma}$ est uniformément localement finie.

Démonstration. Soit $B \subset \mathbb{H}^n$ une boule de rayon $R \geq 0$, $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(F) \cap B \neq \emptyset$ et $K \subset F$ un compact tel que $F = \bigcup_{\sigma \in \text{Stab}_\Gamma(F)} \sigma(K)$. Remarquons qu'il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $\gamma_0(B) \subset \mathcal{V}_{R+D}(K)$ où D est le diamètre de $\mathbb{H}^n/\Gamma$. Alors $\gamma_0 \circ \gamma(F) \cap \mathcal{V}_{R+D}(K) \neq \emptyset$. Il existe donc $\sigma \in \text{Stab}_\Gamma(F)$ tel que $\gamma_0 \circ \gamma \circ \sigma(K) \cap \mathcal{V}_{R+D}(K) \neq \emptyset$. Ainsi,

$$\gamma_0 \circ \gamma \circ \sigma \in M_{R+D} = \{\gamma' \in \Gamma \mid \gamma'(\mathcal{V}_{R+D}(K)) \cap \mathcal{V}_{R+D}(K) \neq \emptyset\}.$$

L'ensemble M_{R+D} est de plus fini par propriété de l'action de Γ sur $\mathbb{H}^n$ et son cardinal est majoré par une quantité qui ne dépend que du rayon R de B . Comme de plus σ stabilise F , on obtient que $\gamma(F)$ appartient à la famille finie $\{\gamma_0^{-1}\gamma'(F)\}_{\gamma' \in M_{R+D}}$. $\square$

Corollaire 2.3.3 (Locale finitude uniforme des familles Γ -cofinies). Soit $\mathcal{H}$ une famille Γ -invariante et Γ -cofinie de quasi-hyperplans Γ -cocompacts de $\mathbb{H}^n$. Alors $\mathcal{H}$ est uniformément localement finie dans $\mathbb{H}^n$.

Remarque Si $\mathcal{H}$ est une famille Γ -invariante et uniformément localement finie de quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$, alors elle est nécessairement Γ -cofinie. En particulier, il existe $L \geq 0$ tel que les éléments de $\mathcal{H}$ soient des L -quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$ (i.e. l'uniforme quasi-convexité est automatique).

Nous allons par la suite chercher à fabriquer des quasi-hyperplans Γ -cocompacts de $\mathbb{H}^n$ pour pouvoir fabriquer une famille Γ -invariante et uniformément localement finie de quasi-hyperplans de $\mathbb{H}^n$. La proposition suivante fournit une méthode particulièrement commode de construction de tels quasi-hyperplans.

Proposition 2.3.4 (Construction de quasi-hyperplans Γ -cocompacts). Soit Σ un sous-groupe quasi-convexe de Γ isomorphe à un réseau uniforme du groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^{n-1})$. Alors toute orbite de Σ dans $\mathbb{H}^n$ est un quasi-hyperplan Γ -cocompact de $\mathbb{H}^n$.

Démonstration. Fixons un point O dans $\mathbb{H}^n$. Les hypothèses garantissent l'existence d'une quasi-isométrie surjective $\psi : \mathbb{H}^{n-1} \rightarrow \Sigma$, d'un plongement quasi-isométrique $\chi : \Sigma \rightarrow \Gamma$ et d'une quasi-isométrie orbitale $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{H}^n$ telle que $\varphi(\gamma) = \gamma(O)$. La composée $\varphi \circ \chi \circ \psi : \mathbb{H}^{n-1} \rightarrow \mathbb{H}^n$ est donc un plongement quasi-isométrique d'image égale à la Σ -orbite de O dans $\mathbb{H}^n$. Ce quasi-hyperplan $H = \Sigma.O$ est bien sûr Γ -cocompact (on pourrait même dire Γ -cocompactuel). $\square$

2.3.2 Critère de cubulation dans $\mathbb{H}^n$

Nous sommes maintenant en mesure de formuler les conditions naturelles permettant d'affirmer qu'un réseau uniforme de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ est cubique $\text{CAT}(0)$.

Théorème 2.3.5 (Cubulation par les quasi-hyperplans). *Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme. On suppose qu'il existe une famille Γ -invariante et asymptotiquement séparante de quasi-hyperplans Γ -cocompacts de $\mathbb{H}^n$. Alors Γ est cubique $\text{CAT}(0)$.*

On notera la disparition, par rapport à la section précédente, de l'hypothèse de locale finitude uniforme de la famille $\mathcal{H}$, ainsi que celle d'uniforme quasi-convexité des quasi-hyperplans. Ces hypothèses cruciales pour obtenir un espace à murs géométriquement cubulable sont en fait récupérables à l'aide des hypothèses de Γ -invariance de $\mathcal{H}$ et de Γ -cocompacité des quasi-hyperplans.

Proposition 2.3.6 (Passage à une famille Γ -cofinie). *Soit $\mathcal{H}$ une famille Γ -invariante et asymptotiquement séparante de quasi-hyperplans Γ -cocompacts de $\mathbb{H}^n$. Alors $\mathcal{H}$ contient une sous-famille $\mathcal{H}'$ qui est Γ -invariante, asymptotiquement séparante et de plus Γ -cofinie.*

Remarque Une famille $\mathcal{H}'$ fournie par la proposition ci-dessus est nécessairement uniformément localement finie et ses éléments sont uniformément quasi-convexes, d'après la proposition 2.3.2.

Démonstration. Soit D le diamètre de $\mathbb{H}^n/\Gamma$ et O une origine dans $\mathbb{H}^n$. On fixe une constante $\ell \geq 0$ telle que la famille $\mathcal{H}$ soit ℓ -séparante. Notons K l'ensemble des paires de points $x, y \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(x, y) = \ell$ et le milieu du segment $[x, y]$ appartienne à la boule fermée de centre O et de rayon D . Ce sous-ensemble de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n$ est compact (car fermé et contenu dans $B(O, D + \ell) \times B(O, D + \ell)$).

Étape 1 : Pour $(x, y) \in K$, il existe par hypothèse un quasi-hyperplan $H_{x,y} \in \mathcal{H}$ tel que $\text{Conv}(H_{x,y})$ sépare x et y . Il existe donc également $\varepsilon_{x,y} > 0$ tel que $\text{Conv}(H_{x,y})$ sépare les boules $B(x, \varepsilon_{x,y})$ et $B(y, \varepsilon_{x,y})$. Considérons alors le recouvrement ouvert :

$$K = \bigcup_{(x,y) \in K} (B(x, \varepsilon_{x,y}) \times B(y, \varepsilon_{x,y})) \cap K.$$

De ce recouvrement, on extrait un recouvrement fini :

$$K = \bigcup_{i=1}^m (B(x_i, \varepsilon_{x_i, y_i}) \times B(y_i, \varepsilon_{x_i, y_i})) \cap K.$$

Soit $(x, y) \in K$. Alors il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $(x, y) \in B(x_i, \varepsilon_{x_i, y_i}) \times B(y_i, \varepsilon_{x_i, y_i})$ et donc $\text{Conv}(H_{x_i, y_i})$ sépare x et y .

Étape 2 : Posons alors $\mathcal{H}_0 = \{H_{x_i, y_i}\}_{1 \leq i \leq m}$ et $\mathcal{H}' = \{\gamma(H)\}_{\gamma \in \Gamma, H \in \mathcal{H}_0}$. Alors $\mathcal{H}'$ est une sous-famille Γ -invariante et Γ -cofinie de $\mathcal{H}$. Montrons qu'elle est de plus ℓ -séparante. Soient $x, y \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(x, y) \geq \ell$. Considérons un sous-segment $[x', y'] \subset [x, y]$ tel que $d(x', y') = \ell$ et $\gamma \in \Gamma$ tel que le milieu du segment $[\gamma^{-1}(x'), \gamma^{-1}(y')]$ soit contenu dans $B(O, D)$. Alors par construction, il existe $H \in \mathcal{H}_0$ tel que $\text{Conv}(H)$ sépare $\gamma^{-1}(x')$ et $\gamma^{-1}(y')$. Alors $\gamma(\text{Conv}(H)) = \text{Conv}(\gamma(H))$ sépare x' et y' . D'après le lemme 2.1.12, la condition $[x', y'] \subset [x, y]$ garantit que $\text{Conv}(\gamma(H))$ sépare x et y . $\square$

Nous sommes alors en mesure de terminer la démonstration du théorème 2.3.5

Démonstration du théorème 2.3.5. Soit $\mathcal{H}$ une famille Γ -invariante et asymptotiquement séparante de quasi-hyperplans Γ -cocompacts, que l'on suppose Γ -cofinie via la proposition 2.3.6. La famille de quasi-hyperplans étant Γ -invariante, il en va de même de la famille de murs géométriques et l'action par isométries de Γ sur $\mathbb{H}^n$ induit une action de Γ sur l'espace à murs $(X, \mathcal{M})$ dual à $\mathcal{H}$. D'après le corollaire 2.1.15, on a une quasi-isométrie Γ -équivariante $(\mathbb{H}^n, d) \rightarrow (X, \omega)$. Comme l'action de Γ sur $\mathbb{H}^n$ est propre et cocompacte, on en déduit que Γ agit également géométriquement sur l'espace à murs $(X, \mathcal{M})$. Le théorème 2.2.1 et le corollaire 1.3.17 permettent alors de conclure. $\square$

Conclusion Le problème de la cubulation d'un réseau uniforme $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ a donc été réduit à la construction d'une famille (Γ -invariante et) asymptotiquement séparante de quasi-hyperplans Γ -cocompacts de $\mathbb{H}^n$.

2.3.3 Quasi-hyperplans généralisés et variante de la construction d'espace à murs

Nous allons maintenant proposer quelques critiques sur la démarche suivie depuis le début de la section 2.1 permettant la fabrication d'espaces à murs géométriquement cubulables et la cubulation de réseaux uniformes de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Rappelons qu'un quasi-hyperplan H est une partie quasi-convexe de $\mathbb{H}^n$ égale à l'image d'un plongement quasi-isométrique de $\mathbb{H}^{n-1}$ dans $\mathbb{H}^n$. Cette condition assure que l'enveloppe convexe fermée de H dans $\mathbb{H}^n$ sépare $\mathbb{H}^n$ en exactement deux composantes connexes. Dans toutes les constructions effectuées, nous n'avons en fait utilisé que le fait que $\text{Conv}(H)$ disconnecte $\mathbb{H}^n$.

Définition 2.3.7. Un *L-quasi-hyperplan généralisé* (resp. *quasi-hyperplan généralisé*) de $\mathbb{H}^n$ est une partie $H \subset \mathbb{H}^n$ L-quasi-convexe (resp. quasi-convexe) telle que $\mathbb{H}^n \setminus \text{Conv}(H)$ soit disconnecte.

Nous avons ensuite défini deux murs géométriques dans $\mathbb{H}^n$ à l'aide d'un quasi-hyperplan H_α , à savoir les composantes de frontière des composantes connexes de $\mathbb{H}^n \setminus \text{Conv}(H_\alpha)$, que nous avons notés Ω_α^+ et Ω_α^- (avec éventuellement égalité de ces deux murs si H_α est un hyperplan totalement géodésique de $\mathbb{H}^n$). Le choix d'associer deux murs à un quasi-hyperplan était uniquement dicté par une préférence esthétique et un souhait de présenter une construction affranchie de toute forme de choix arbitraire.

Il aurait été tout aussi judicieux de ne considérer que l'un des deux murs Ω_α^+ ou Ω_α^- . Nous affirmons que toutes les constructions et toutes les démonstrations des sections 2.1 et 2.2 et des paragraphes 2.3.1 et 2.3.2 demeurent exactes si à chaque quasi-hyperplan H_α , on choisit de n'associer que l'un des deux murs Ω_α^+ ou Ω_α^- .

Définition 2.3.8. Soit alors $\mathcal{H}$ une famille uniformément localement finie de L-quasi-hyperplans généralisés de $\mathbb{H}^n$. Pour tout $H \in \mathcal{H}$, on définit un mur géométrique en choisissant arbitrairement une composante connexe de la frontière de $\mathbb{H}^n \setminus \text{Conv}(H)$. L'espace à murs $(X, \mathcal{M})$ alors obtenu est appelé *espace à murs dual* à la famille $\mathcal{H}$.

Remarque La seule différence par rapport au cas des quasi-hyperplans est que la construction d'un espace à murs dual à une famille de quasi-hyperplans généralisés n'est pas canonique, elle implique un choix de mur arbitraire. En effet, pour un tel quasi-hyperplan généralisé H , l'ensemble $\mathbb{H}^n \setminus \text{Conv}(H)$ peut posséder une infinité de composantes de frontière.

Tous les résultats des sections 2.1 et 2.2 et des paragraphes 2.3.1 et 2.3.2 se reformulent alors à l'identique dans ce nouveau contexte. En particulier, les théorèmes 2.2.1 et 2.3.5 deviennent.

Théorème 2.3.9 (Espaces à murs géométriquement cubulables). *Soit $L \geq 0$ et $\mathcal{H}$ une famille uniformément localement finie et asymptotiquement séparante de L-quasi-hyperplans généralisés de $\mathbb{H}^n$. Alors tout espace à murs dual à $\mathcal{H}$ est géométriquement cubulable.*

Théorème 2.3.10 (Cubulation par les quasi-hyperplans généralisés). *Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme. On suppose qu'il existe une famille Γ -invariante et asymptotiquement séparante de quasi-hyperplans généralisés Γ -cocompacts de $\mathbb{H}^n$. Alors Γ est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Question Pourquoi préférer l'usage des quasi-hyperplans généralisés à celui des quasi-hyperplans ?

D'après la proposition 2.3.4, toute orbite d'un sous-groupe d'un réseau uniforme de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ à la fois quasi-convexe et isomorphe à un réseau uniforme de $\mathbb{H}^{n-1}$ est un quasi-hyperplan de $\mathbb{H}^n$. De tels sous-groupes sont des cas particuliers de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes de Γ . La définition de quasi-hyperplan généralisé a été introduite dans le but d'étendre la proposition 2.3.4 à tous les sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes d'un réseau uniforme de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

On propose ci-dessous une caractérisation des sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes des réseaux uniformes de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ via la non-connexité de leur ensemble ordinaire.

Proposition 2.3.11 (Caractérisation des sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes). *Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme et $\Sigma \leq \Gamma$ un sous-groupe quasi-convexe. Alors Σ est un sous-groupe de codimension 1 de Γ si, et seulement si, l'ensemble limite $\Lambda(\Sigma)$ disconnecte $\partial_\infty \mathbb{H}^n$.*

La démonstration de la proposition 2.3.4 s'adapte alors aux sous-groupes de codimension 1 pour fournir le résultat suivant.

Corollaire 2.3.12 (Construction de quasi-hyperplans généralisés Γ -cocompacts). *Soit Σ un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe de Γ . Alors toute orbite de Σ dans $\mathbb{H}^n$ est un quasi-hyperplan généralisé Γ -cocompact de $\mathbb{H}^n$.*

Nous allons utiliser cette généralisation au paragraphe suivant pour énoncer un critère de cubulation en termes de l'existence en abondance de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes, généralisant ainsi dans ce cadre le théorème 1.1.14 de M. Sageev qui a servi de point de départ pour ce texte.

2.3.4 Critère de cubulation au bord de $\mathbb{H}^n$

Pour conclure cette partie de présentation de critères de cubulations des réseaux uniformes de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, on propose de constater l'équivalence du critère de cubulation énoncé par le théorème 2.3.10 avec un critère formulé au bord de $\mathbb{H}^n$, énoncé indépendamment par N. Bergeron et D. Wise (voir [BW10]).

Théorème 2.3.13 (Cubulation par séparation des paires de points distincts du bord). *Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme. On suppose que pour tous $x, y \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$ distincts, il existe un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe $\Sigma \leq \Gamma$ dont l'ensemble limite $\Lambda(\Sigma)$ sépare x et y dans $\partial_\infty \mathbb{H}^n$. Alors Γ est cubique CAT(0).*

Démonstration. Pour $x \neq y \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$, fixons $\Sigma_{x,y} \leq \Gamma$ un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe tel que $\Lambda(\Sigma_{x,y})$ sépare x et y dans $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ et notons $H_{x,y} = \Sigma_{x,y}.O$. Il suffit d'après le théorème 2.3.10 de montrer que la famille Γ -invariante de quasi-hyperplans généralisés Γ -cocompacts $\mathcal{H} = \{\gamma(H_{x,y})\}_{\gamma \in \Gamma, x \neq y \in \partial_\infty \mathbb{H}^n}$ est asymptotiquement séparante. Fixons une origine O dans $\mathbb{H}^n$ et notons d_∞ la distance visuelle basée en O sur $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ (distance pour laquelle les boules seront notées B_∞).

Étape 1 : Pour $x \neq y \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$, fixons $\varepsilon_{x,y} > 0$ tel que $\Lambda(\Sigma_{x,y})$ sépare $B_\infty(x, 2\varepsilon_{x,y})$ et $B_\infty(y, 2\varepsilon_{x,y})$. Posons $\theta = 4 \arctan(e^{-D})$ où D est le diamètre de $\mathbb{H}^n/\Gamma$ et $K_\theta = \{x, y \in \partial_\infty \mathbb{H}^n \mid d_\infty(x, y) \geq \theta\}$. Le choix de la valeur de θ est précisément celui qui permet d'identifier cet espace compact K_θ à celui des géodésiques (orientées) bi-infinies de $\mathbb{H}^n$ qui intersectent la boule $B(O, D)$. Du recouvrement ouvert :

$$K_\theta = \bigcup_{(x,y) \in K_\theta} (B(x, \varepsilon_{x,y}) \times B(y, \varepsilon_{x,y})) \cap K_\theta,$$

extrayons un recouvrement fini :

$$K_\theta = \bigcup_{i=1}^m (B(x_i, \varepsilon_i) \times B(y_i, \varepsilon_i)) \cap K_\theta.$$

Posons alors $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i$ (on supposera également que $\varepsilon_i \leq \frac{\theta}{2}$ pour tout $1 \leq i \leq m$).

Étape 2 : Pour $x \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$ et $\varepsilon > 0$, notons $C_{x,\varepsilon} = \text{Conv}_{\mathbb{H}^n}(B_\infty(x, \varepsilon))$ et posons :

$$\ell_{\theta,\varepsilon} = \sup_{(x,y) \in K_\theta} d(C_{x,\varepsilon}, C_{y,\varepsilon}).$$

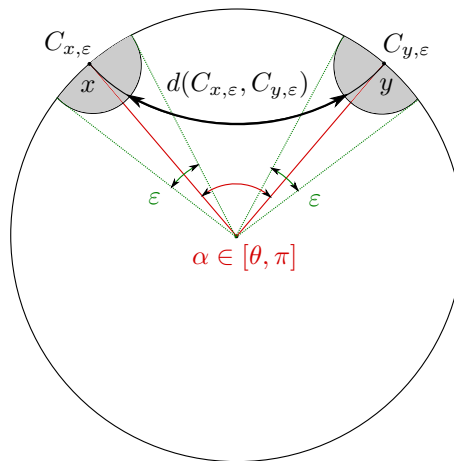


FIGURE 2.3.1 – Distance maximale entre deux géodésiques bordant les ε -voisinages de points de K_θ .

Alors $\ell_{\theta,\varepsilon} \in \mathbb{R}$, car la fonction $(x, y) \mapsto d_{\mathbb{H}^n}(C_{x,\varepsilon}, C_{y,\varepsilon})$ ne dépend que de l'angle $d_\infty(x, y)$, de surcroît continûment, et que $d_\infty(x, y) \in [\theta, \pi]$ lorsque $(x, y) \in K_\theta$. Montrons alors que la famille $\mathcal{H}$ est précisément $(2\ell_{\theta,\varepsilon})$ -séparante.

Étape 3 : Soient $a, b \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(a, b) \geq 2\ell_{\theta,\varepsilon}$. Supposons tout d'abord que le milieu c du segment $[a, b]$ appartient à la boule $B(O, D)$. Notons $a_\infty, b_\infty \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$ les extrémités de la géodésique bi-infinie contenant $[a, b]$, avec la convention $a \in]a_\infty, b]$. Par hypothèse, $(a_\infty, b_\infty) \in K_\theta$, donc qu'il existe $1 \leq i \leq m$ tel que $a_\infty \in B_\infty(x_i, \varepsilon_i)$ et $b_\infty \in B_\infty(y_i, \varepsilon_i)$. On a alors $B_\infty(a_\infty, \varepsilon_i) \subset B_\infty(x_i, 2\varepsilon_i)$ et également $B_\infty(b_\infty, \varepsilon_i) \subset B_\infty(y_i, 2\varepsilon_i)$. Notons a' (resp. b') l'origine du rayon $C_{a_\infty, \varepsilon_i} \cap]a_\infty, b_\infty[$ (resp. $C_{b_\infty, \varepsilon_i} \cap]a_\infty, b_\infty[$). Comme $2\varepsilon_i \leq \theta$, $C_{a_\infty, \varepsilon_i} \cap B(O, D) = C_{b_\infty, \varepsilon_i} \cap B(O, D) = \emptyset$. On en déduit que ni a' ni b' n'appartient à $B(O, D)$ et donc que $c \in]a', b'[,$ Ensuite, par définition de $\ell_{\theta, \varepsilon_i}$, on a $d(a', b') \leq \ell_{\theta, \varepsilon_i} \leq \ell_{\theta, \varepsilon}$ (car $\varepsilon \leq \varepsilon_i$). On a alors les inégalités :

$$\max(d(a', c), d(b', c)) \stackrel{(*)}{\leq} \ell_{\theta, \varepsilon} \stackrel{(**)}{\leq} \min(d(a, c), d(b, c))$$

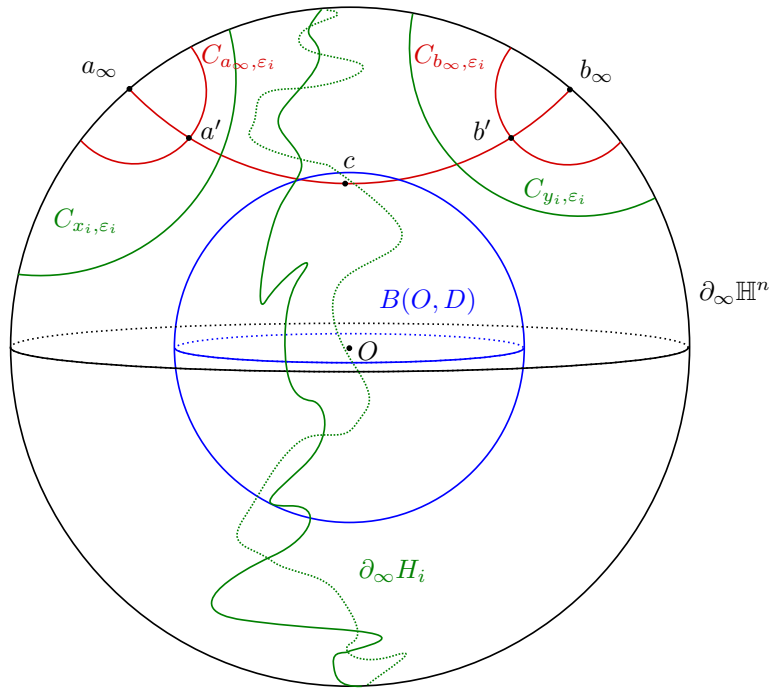


FIGURE 2.3.2 – Fabrication d'une constante de séparation.

L'inégalité $(*)$ découle des propriétés $d(a', b') \leq \ell_{\theta, \varepsilon}$ et $c \in]a', b'[,$ tandis que l'inégalité $(**)$ découle de l'hypothèse $d(a, b) \geq 2\ell_{\theta, \varepsilon}$ car c est le milieu de $[a, b]$. Nécessairement, $a \in C_{a_\infty, \varepsilon_i} \subset C_{x_i, 2\varepsilon_i}$ et également $b \in C_{b_\infty, \varepsilon_i} \subset C_{y_i, 2\varepsilon_i}$. Enfin, il existe un quasi-hyperplan $H_i = H_{x_i, y_i}$ tel que $\partial_\infty H_i$ sépare $B_\infty(x_i, 2\varepsilon_i)$ et $B_\infty(y_i, 2\varepsilon_i)$. On en déduit que $\text{Conv}(H_i)$ sépare $C_{x_i, 2\varepsilon_i}$ et $C_{y_i, 2\varepsilon_i}$ et donc sépare en particulier a et b .

Étape 4 : Soient $a, b \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(a, b) \geq 2\ell_{\theta, \varepsilon}$. Fixons $\gamma \in \Gamma$ tel que le milieu du segment $[\gamma^{-1}(a), \gamma^{-1}(b)]$ appartienne à la boule de centre O et de rayon D . D'après l'étape précédente, il existe un quasi-hyperplan généralisé H tel que $\text{Conv}(H)$ sépare $\gamma^{-1}(a)$ et $\gamma^{-1}(b)$. Alors $\gamma(\text{Conv}(H)) = \text{Conv}(\gamma(H))$ sépare a et b . La famille $\mathcal{H}$ est donc ℓ -séparante pour $\ell = 2\ell_{\theta, \varepsilon}$. $\square$

Remarque Les critères de cubulation 2.3.13 et 2.3.10 sont en fait strictement équivalents. Pour le voir, supposons qu'il existe une famille $\mathcal{H}$ Γ -invariante et ℓ -séparante de quasi-hyperplans généralisés Γ -cocompacts de $\mathbb{H}^n$. Fixons alors $x, y \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$ et $x', y' \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(x', y') \geq \ell$ et $[x', y'] \subset]x, y[$. Alors il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $\text{Conv}(H)$ sépare x' et y' . On en déduit que $\partial_\infty H$ sépare x et y dans $\partial_\infty \mathbb{H}^n$. Ainsi, le sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe $\text{Stab}_\Gamma(H)$ de Γ a un ensemble limite qui sépare x et y dans $\partial_\infty \mathbb{H}^n$.

2.4 Application aux variétés arithmétiques

Pour clore cette partie concernant les critères généraux de cubulation des variétés hyperboliques compactes, nous étudions le cas très instructif des variétés arithmétiques. Nous allons voir que si un réseau uniforme arithmétique de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ contient un seul sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe, alors nos critères de cubulation s'appliquent, car il existe automatiquement de très nombreux sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes dans ce cas.

Théorème 2.4.1 (Critère de cubulation des variétés hyperboliques compactes arithmétiques). *Soit Γ un réseau uniforme arithmétique de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Si Γ possède un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe, alors Γ est cubique $\text{CAT}(0)$.⁴*

Nous verrons dans l'introduction de la seconde partie de cette thèse qu'en dimension 3, l'existence de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes des groupes fondamentaux de variétés arithmétiques est établie depuis peu par M. Lackenby (voir [Lac10]). On obtient donc le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.2 (Cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes arithmétiques). *Soit M une variété hyperbolique compacte arithmétique de dimension 3. Alors $\pi_1(M)$ est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Mentionnons pour finir que dans le cas arithmétique, des énoncés de cubulation ont déjà été formulés par N. Bergeron, F. Haglund, et D. Wise (voir [BHW11]). Le théorème 2.4.1 y est démontré pour les variétés hyperboliques compactes arithmétiques *de type simple*, i.e. celles construites à partir de formes quadratiques en toute dimension. Ce résultat est également une conséquence du théorème 2.4.1, car ces variétés $\mathbb{H}^n/\Gamma$ possèdent des hyperplans totalement géodésiques et Γ -cocompacts.

Une autre approche est présentée dans [HW09] où est démontré le fait que les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes arithmétiques de type simple sont en fait virtuellement cubiques spéciaux (voir l'introduction de la troisième partie de cette thèse pour la définition de ce renforcement de la propriété cubique $\text{CAT}(0)$).

2.4.1 Commensurateur et densité

Fixons dans cette partie un réseau uniforme Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Nous commençons par rappeler la définition du commensurateur d'un tel réseau dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ pour formuler la condition d'arithmécité d'une manière qui se révèlera facilement exploitable pour la cubulation.

Définition 2.4.3. Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme. On appelle *commensurateur* de Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ le sous-groupe :

$$\text{Comm}(\Gamma) = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n) \mid [\Gamma : g\Gamma g^{-1} \cap \Gamma] < \infty \text{ et } [g\Gamma g^{-1} : g\Gamma g^{-1} \cap \Gamma] < \infty\}$$

On munit le groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ de sa topologie usuelle de groupe de Lie, à savoir la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. D'après un théorème célèbre démontré par Gregori Margulis [Mar91], l'arithmécité du réseau Γ est équivalente à la densité de son commensurateur dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. C'est ce point de vue que nous privilégierons, ce qui nous permet de ne pas avoir à rappeler la (lourde) définition de réseau arithmétique.

Théorème 2.4.4 (Caractérisation de l'arithmécité). *Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme. Alors Γ est arithmétique si, et seulement si, $\text{Comm}(\Gamma)$ est dense dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.*

2.4.2 Cubulation des variétés arithmétiques

Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un réseau uniforme dont le commensurateur est dense dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

Hypothèse. On suppose que Γ contient un sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe Σ (on pourra éventuellement penser à un sous-groupe quasi-convexe isomorphe à un réseau uniforme de $\text{Isom}(\mathbb{H}^{n-1})$).

On sait alors que toute Σ -orbite est un quasi-hyperplan généralisé Γ -cocompact de $\mathbb{H}^n$. Il s'agit de notre premier mur, permettant d'initialiser la cubulation. La densité du commensurateur de Γ va faire le reste du travail en nous permettant de fabriquer de très nombreux autres quasi-hyperplans Γ -cocompacts jusqu'à obtenir une famille asymptotiquement séparante.

⁴Remarquons que d'après le théorème 1.1.11 de M. Sageev, on a en fait une équivalence dans ce cas.

Lemme 2.4.5 (Le commensurateur agit sur les Γ -hyperplans). *Soit H un quasi-hyperplan généralisé Γ -cocompact de $\mathbb{H}^n$ et $g \in \text{Comm}(\Gamma)$. Alors $g(H)$ est un quasi-hyperplan généralisé Γ -cocompact de $\mathbb{H}^n$.*

Démonstration. Il est clair que $g(H)$ est un quasi-hyperplan généralisé de $\mathbb{H}^n$. Notons $\Sigma = \text{Stab}_\Gamma(H)$ et $\Sigma^g = \text{Stab}_\Gamma(g(H))$. Par hypothèse, il existe un compact $K \subset H$ tel que $H = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma(K)$. Comme $g \in \text{Comm}(\Gamma)$, il existe deux sous-groupes d'indice fini $\Gamma_1, \Gamma_2 \leq \Gamma$ tels que $g\Gamma_1 g^{-1} = \Gamma_2$. Alors $\Sigma \cap \Gamma_1$ est un sous-groupe d'indice fini de Σ , donc il existe $K' \subset H$ compact tel que $H = \bigcup_{\sigma \in \Sigma \cap \Gamma_1} \sigma(K')$. Mais alors, on a l'égalité :

$$g(H) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma \cap \Gamma_1} g \circ \sigma \circ g^{-1}(g(K')) = \bigcup_{\sigma' \in \Sigma^g \cap \Gamma_2} \sigma'(g(K')).$$

Au final, $g(H) = \bigcup_{\sigma' \in \Sigma^g} \sigma'(g(K'))$ et $g(K')$ est un compact de $g(H)$. Donc $g(H)$ est Γ -cocompact. $\square$

On fixe alors une origine O dans $\mathbb{H}^n$ et on considère l'orbite $H = \Sigma.O$, qui est un quasi-hyperplan généralisé Γ -cocompact. On considère alors la famille $\mathcal{H} = \{\gamma(g(H))\}_{(\gamma,g) \in \Gamma \times \text{Comm}(\Gamma)}$, qui est une famille Γ -invariante de quasi-hyperplans Γ -cocompacts de $\mathbb{H}^n$ d'après le lemme précédent. Pour conclure la démonstration du théorème 2.4.1, il suffit donc d'après le théorème 2.3.10 de démontrer que $\mathcal{H}$ est asymptotiquement séparante.

Proposition 2.4.6 (Séparation suffisante des points du bord via le commensurateur). *La famille $\mathcal{H} = \{\gamma(g(H))\}_{(\gamma,g) \in \Gamma \times \text{Comm}(\Gamma)}$ est asymptotiquement séparante.*

Démonstration. Soient $x_0, y_0 \in \mathbb{H}^n$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Conv}(H)$ sépare $B(x_0, \varepsilon)$ et $B(y_0, \varepsilon)$. Notons $\ell = d(x_0, y_0)$. Soient $x', y' \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(x', y') = \ell$. Alors il existe $f \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tel que $f(x_0) = x'$ et $f(y_0) = y'$ (car les stabilisateurs de points dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ agissent transitivement sur les sphères qu'ils stabilisent). Ainsi, par densité de $\text{Comm}(\Gamma)$ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, il existe $g \in \text{Comm}(\Gamma)$ tel que $x' \in B(g(x_0), \varepsilon)$ et $y' \in B(g(y_0), \varepsilon)$. Or $g(\text{Conv}(H)) = \text{Conv}(g(H))$ sépare $B(g(x_0), \varepsilon)$ et $B(g(y_0), \varepsilon)$ donc sépare x' et y' . Soient alors $x, y \in \mathbb{H}^n$ tels que $d(x, y) \geq \ell$ et $[x', y'] \subset [x, y]$ un sous-segment de longueur ℓ . D'après le point précédent, il existe $g \in \text{Comm}(\Gamma)$ tel que $\text{Conv}(g(H))$ sépare x' et y' . D'après le lemme 2.1.12, $\text{Conv}(g(H))$ sépare également x et y . Donc $\mathcal{H}$ est ℓ -séparante. $\square$

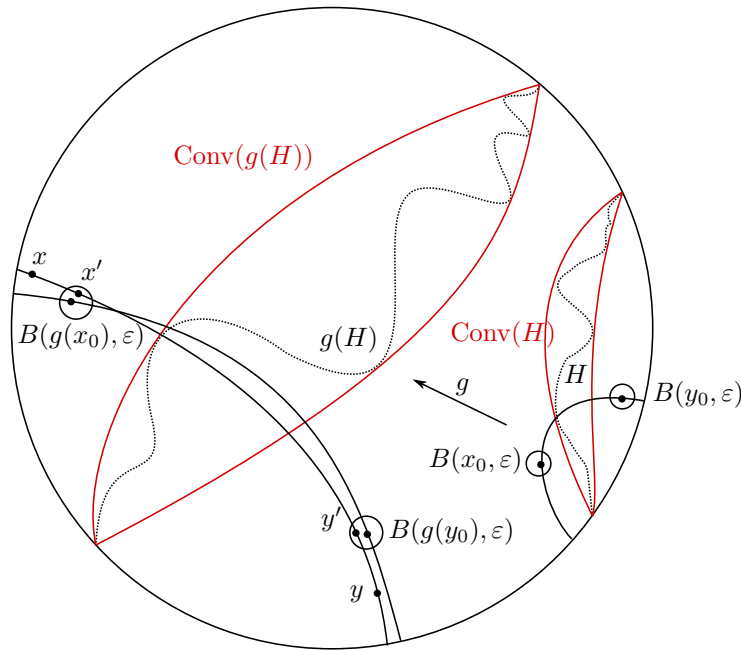


FIGURE 2.4.1 – Double transitivité (isométrique) topologique de $\text{Comm}(\Gamma)$.

Conclusion de la première partie

Pour conclure cette première partie, nous soulevons la question de l'utilité de la cubulation des groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes. Les groupes hyperboliques cubiques $\text{CAT}(0)$ possèdent-ils en général des propriétés algébriques qui ne sont pas déjà connues pour les réseaux uniformes de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$? La réponse est négative, ce travail de cubulation ne nous apprend rien de nouveau sur les groupes étudiés. Pourquoi chercher alors à appliquer le critère de cubulation du théorème 2.3.13 à certaines situations concrètes, comme nous allons le faire dans la seconde partie ?

On peut répondre à cette question en envisageant la cubulation des groupes hyperboliques comme une première étape vers un résultat plus profond, que nous appellerons cubulation **spéciale**.

Pour expliquer (de manière informelle) le sens de ces mots, revenons à la situation d'un groupe hyperbolique G agissant géométriquement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ noté $\tilde{X}$. Notons $X = \tilde{X}/G$ le complexe cubique quotient, qui est compact et à courbure négative ou nulle.

Ce complexe cubique possède des hyperplans immergés qui peuvent présenter certaines pathologies. Par exemple, ces hyperplans peuvent ne pas être plongés (contrairement à ceux de $\tilde{X}$). Il existe également des propriétés d'auto-osculation et d'inter-osculation, décrites par F. Haglund et D. Wise, qui ne sont pas souhaitables (voir [HW07]).

Ces deux auteurs appellent complexes cubiques spéciaux les complexes cubiques à courbure négative ou nulle dont les hyperplans ne présentent aucune des pathologies évoquées ci-dessus. Ils démontrent alors que les groupes fondamentaux de complexes compacts spéciaux sont virtuellement sous-groupes de groupes d'Artin à angles droits (voir l'introduction de la troisième partie pour une définition).

Ils obtiennent en corollaires que ces groupes sont linéaires sur les entiers, résiduellement nilpotents sans torsion ou encore larges (i.e. admettent virtuellement une surjection sur un groupe libre non-abélien). Ce contexte particulier permet donc d'obtenir des corollaires algébriques très forts pour les groupes opérant géométriquement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ avec quotient spécial.

Question Soit M une variété hyperbolique compacte possédant une famille de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes permettant de séparer toutes les paires de points distincts de $\partial_\infty \tilde{M}$. Notons $\tilde{X}$ un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ dual obtenu par application du théorème 2.3.13. À quelles conditions peut-on assurer que le complexe cubique $X = \tilde{X}/\pi_1(M)$ est (virtuellement) spécial ?

Les pistes principales pour avancer sur cette question sont essentiellement résumées par les deux mots **séparabilité** et **malnormalité**. Nous présentons ci-dessous les significations de ces termes et établissons le lien avec la question posée.

Séparabilité

La séparabilité est une propriété des sous-groupes qui, si elle est imposée aux sous-groupes de codimension 1 utilisés pour cubuler, permet de garantir que les hyperplans du complexe cubique quotient X sont plongés (quitte à passer à un revêtement fini de X).

Définition. Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe de G . On dit que H est *séparable*⁵ dans G si H est égal à l'intersection des sous-groupes d'indice fini de G qui le contiennent.

L'origine du mot séparabilité réside dans le lemme tautologique énoncé ci-dessous.

Lemme. Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe séparable de G . Pour toute partie finie $K \subset G \setminus H$, il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \leq G$ tel que $H \leq \Gamma$ et $\Gamma \cap K = \emptyset$.

La propriété de séparabilité peut être caractérisée en termes topologiques de la manière suivante.

Proposition (Interprétation topologique de la séparabilité, voir [Sco78] lemme 1.4). Soit M une variété topologique compacte et $H \leq \pi_1(M)$ un sous-groupe de son groupe fondamental. Alors H est séparable dans $\pi_1(M)$ si, et seulement si, pour tout compact $C \subset \tilde{M}/H$, il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \leq \pi_1(M)$ tel que $H \leq \Gamma$ et la restriction $C \hookrightarrow \tilde{M} = \tilde{M}/\Gamma$ de la projection $\tilde{M}/H \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ soit un plongement.

⁵Cette condition est équivalente au fait que H est un sous-groupe fermé de G pour la topologie profinie.

Démonstration. Seul le sens direct de cette équivalence nous intéressera par la suite. Supposons donc que H est un sous-groupe séparable de $\pi_1(M)$, puis fixons $C \subset \widetilde{M}/H$ une partie compacte et notons $\pi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/H$ la projection naturelle. Alors il existe une partie compacte $K \subset \widetilde{M}$ telle que $\pi(K) = C$. L'action de $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ étant proprement discontinue, l'ensemble $M_K = \{g \in \pi_1(M) \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. Par séparabilité de H dans $\pi_1(M)$, il existe donc un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \leq \pi_1(M)$ tel que $H \leq \Gamma$ et $M_K \cap \Gamma \subset H$. La restriction $C \hookrightarrow \widehat{M} = \widetilde{M}/\Gamma$ de la projection $\widetilde{M}/H \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$ est alors un plongement. $\square$

Plongements virtuels

Définition. Soit X, Y deux espaces topologiques et $f : Y \rightarrow X$ une application continue. On dit que f est un *plongement virtuel* s'il existe des revêtements finis $\widehat{\pi}_Y : \widehat{Y} \rightarrow Y$ et $\widehat{\pi}_X : \widehat{X} \rightarrow X$ et une application continue injective $\widehat{f} : \widehat{Y} \hookrightarrow \widehat{X}$ rendant commutatif le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{Y} & \xhookrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{X} \\ \widehat{\pi}_Y \downarrow & & \downarrow \widehat{\pi}_X \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Nous expliquons ci-dessous que la séparabilité est la propriété naturelle permettant d'établir qu'une immersion est un plongement virtuel. Nous supposons fixés deux espaces topologiques X et Y non-pathologiques, par exemple des variétés topologiques compactes (connexes).

Définition. On dit qu'une immersion⁶ $f : Y \rightarrow X$ est *géométriquement incompressible* si les relevés $\widehat{f} : \widehat{Y} \hookrightarrow \widehat{X}$ de f au niveau des revêtements universels sont injectifs.

Remarques

1. On suppose X et Y munis de points base. Si $f : Y \rightarrow X$ est une immersion géométriquement incompressible (envoyant point base sur point base), alors le morphisme $f_* : \pi_1(Y) \hookrightarrow \pi_1(X)$ induit au niveau des groupes fondamentaux est injectif. Une application f telle que f_* est injective est dite *incompressible*.
2. Si $f : Y \rightarrow X$ est une immersion qui n'est pas géométriquement incompressible, alors f n'est pas un plongement virtuel.

On considère donc une immersion $f : Y \rightarrow X$ que l'on suppose géométriquement incompressible. On fixe un relevé $\widehat{f} : \widehat{Y} \hookrightarrow \widehat{X}$ de f et on note simplement $\pi_1(Y)$ le sous-groupe $f_*(\pi_1(Y))$ de $\pi_1(X)$. Pour étudier la possibilité que f soit un plongement virtuel, l'ensemble à considérer naturellement est l'auto-intersecteur de $\widehat{Y}$ dans le groupe fondamental de X .

Définition. On appelle *auto-intersecteur* de $\widehat{Y}$ dans $\pi_1(X)$ l'ensemble :

$$M_{\widehat{Y}} = \{\gamma \in \pi_1(X) \mid \gamma(\widehat{Y}) \cap \widehat{Y} \neq \emptyset\} \setminus \pi_1(Y).$$

Nous énonçons alors les propriétés tautologiques suivantes.

Propriétés

1. L'immersion $f : Y \rightarrow X$ est injective si, et seulement si, $M_{\widehat{Y}}$ est vide.
2. Plus généralement, l'immersion $f : Y \rightarrow X$ est un plongement virtuel si, et seulement si, il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \leq \pi_1(X)$ tel que $\Gamma \cap M_{\widehat{Y}} = \emptyset$.

Plus précisément, Γ contient dans ce cas un sous-groupe d'indice fini Σ de $\pi_1(Y)$ correspondant à un revêtement fini $\widehat{Y} = \widetilde{Y}/\Sigma$ de Y et l'application $\widehat{f} : \widehat{Y} \hookrightarrow \widehat{X} = \widetilde{X}/\Gamma$ est injective.

⁶i.e. une application continue localement injective, soit encore une application qui est localement un homéomorphisme sur son image.

Doubles classes de l'auto-intersecteur

L'auto-intersecteur d'une partie $\pi_1(X)$ -cocompacte⁷ de $\tilde{X}$ possède des propriétés d'invariance et de finitude essentielles pour les problèmes de relèvement d'immersions en plongements virtuels.

Propriétés

1. On a l'égalité $\pi_1(Y).M_{\tilde{Y}}.\pi_1(Y) = M_{\tilde{Y}}$.
2. L'ensemble des doubles-classes $\pi_1(Y)\backslash M_{\tilde{Y}}/\pi_1(Y)$ est fini.

Représentons l'ensemble fini des doubles classes $\pi_1(Y)\backslash M_{\tilde{Y}}/\pi_1(Y)$ par une partie finie $K \subset M_{\tilde{Y}}$. Supposons qu'il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \leq \pi_1(X)$ tel que $\pi_1(Y) \leq \Gamma$ et $\Gamma \cap K = \emptyset$.

Alors on a automatiquement la condition $\Gamma \cap M_{\tilde{Y}} = \emptyset$ et donc f est un plongement virtuel.

La propriété de séparabilité permet exactement de réaliser ce programme. Nous venons donc de démontrer le résultat suivant.

Proposition (Séparabilité implique plongement virtuel). *Soit $f : Y \rightarrow X$ une immersion géométriquement incompressible avec $f_*(\pi_1(Y))$ séparable dans $\pi_1(X)$. Alors f est un plongement virtuel.*

Nous donnons maintenant une seconde explication équivalente de ce résultat d'un point de vue plus géométrique. Considérons à nouveau une immersion $f : Y \rightarrow X$ géométriquement incompressible et $\tilde{f} : \tilde{Y} \hookrightarrow \tilde{X}$ un relèvement de f . Alors on dispose d'un plongement $\tilde{Y} = \tilde{Y}/\pi_1(Y) \hookrightarrow \tilde{X}/\pi_1(Y)$ qui rend commutatif le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{Y} & \xhookrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & \nearrow \tilde{f} & \tilde{X}/\pi_1(Y) \\
 Y & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

Le critère de P. Scott s'applique alors à la partie compacte $\tilde{f}(Y) \subset \tilde{X}/\pi_1(Y)$ et fournit alors un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \leq \pi_1(X)$ tel que $\pi_1(Y) \leq \Gamma$ et la restriction $\tilde{f}(Y) \hookrightarrow \hat{X} = \tilde{X}/\Gamma$ de la projection $\tilde{X}/\pi_1(Y) \rightarrow \tilde{X}/\Gamma$ est un plongement. On obtient le diagramme commutatif ci-dessous, qui montre que f est un plongement virtuel (sans avoir à passer à un revêtement fini de Y dans ce cas).

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{Y} & \xhookrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \nearrow \tilde{f} & \tilde{X}/\pi_1(Y) & \longrightarrow & \hat{X} = \tilde{X}/\Gamma \\
 Y & \xrightarrow{f} & X & &
 \end{array}$$

Pour en revenir aux groupes opérant géométriquement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$, on obtient le corollaire suivant, qui énonce que la séparabilité suffit à obtenir des hyperplans plongés.

Corollaire (Séparabilité implique hyperplans plongés). *Soit M une variété hyperbolique compacte et $\{H_i\}_{i \in I}$ une famille (finie à conjugaison près) de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes de $\pi_1(M)$ permettant de séparer les paires de points de $\partial_\infty \tilde{M}$. Notons $\tilde{X}$ un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ dual obtenu par application du théorème 2.3.13 et $X = \tilde{X}/\pi_1(M)$. Si les sous-groupes H_i sont séparables dans $\pi_1(M)$, alors X possède un revêtement fini dans lequel les hyperplans sont plongés.*

⁷Au sens de la définition 2.3.1, i.e. cocompacte sous l'action de son stabilisateur dans $\pi_1(X)$.

Malnormalité

Définition 2.4.7. Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe de G . On dit que H est *malnormal* dans G si, pour tout $g \in G \setminus H$, on a l'égalité $gHg^{-1} \cap H = \{1\}$.

La propriété de malnormalité des sous-groupes de codimension 1 utilisés pour la cubulation permet d'obtenir un complexe cubique compact dans lequel les hyperplans ne présentent pas les dernières pathologies interdites d'auto-osculation et d'inter-osculation. Combinée à la séparabilité, elle permet donc d'aboutir à ce que nous avons appelé une cubulation spéciale.

L'étude des groupes hyperboliques possédant une hiérarchie quasi-convexe malnormale menée par F. Haglund et D. Wise (voir [HW09]) permet de formuler l'énoncé suivant.

Proposition 2.4.8 (Séparabilité et malnormalité implique virtuellement spécial). *Soit M une variété hyperbolique compacte et $\{H_i\}_{i \in I}$ une famille (finie à conjugaison près) de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes de $\pi_1(M)$ permettant de séparer les paires de points de $\partial_\infty \widetilde{M}$. Notons $\widetilde{X}$ un complexe cubique CAT(0) dual obtenu par application du théorème 2.3.13 et $X = \widetilde{X}/\pi_1(M)$. Si les sous-groupes H_i sont séparables et malnormaux dans $\pi_1(M)$, alors X possède un revêtement fini qui est un complexe cubique spécial.*

Stratégie

Les propriétés de séparabilité et de malnormalité permettent donc d'aboutir à un résultat de cubulation bien plus riche de conséquences que ceux présentés dans cette première partie.

Dans la seconde partie de cette thèse, nous initions un programme de recherche sur les 3-variétés hyperboliques compactes dites virtuellement fibrées sur le cercle dont le but est d'aboutir à une cubulation spéciale. Nous démontrerons dans cette partie que les groupes fondamentaux de telles variétés sont cubiques CAT(0).

Dans la troisième partie, nous expliquerons alors comment contourner, à l'aide des travaux récents de D. Wise, la plupart des arguments présentés ci-dessus. Nous expliquerons pourquoi l'existence d'un seul sous-groupe de codimension 1 quasi-convexe et séparable suffit pour obtenir une cubulation spéciale.

Nous proposerons alors dans cette dernière partie des tentatives de résolution de la conjecture que nous appellerons *conjecture virtuellement de Haken de manière quasi-convexe*. Une résolution de cette conjecture permet en effet d'aboutir à une cubulation spéciale des groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle.

Deuxième partie

Cubulations de **3**-variétés
hyperboliques compactes

Introduction de la seconde partie

Nous avons énoncé dans la première partie de ce manuscrit deux critères équivalents permettant d’assurer qu’un réseau uniforme de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ est cubique $\text{CAT}(0)$. Nous allons dorénavant nous concentrer spécifiquement sur le cas de la dimension trois et étudier en particulier les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes dans cette dimension, i.e. les réseaux uniformes sans torsion de $\text{Isom}_+(\mathbb{H}^3) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

L’outil indispensable à la cubulation d’un groupe hyperbolique au sens de Gromov est la présence en quantité abondante de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes. En particulier, il faut être en mesure de produire des sous-groupes de codimension 1 du groupe fondamental d’une 3-variété hyperbolique compacte donnée.

Sous-groupes de surface

Les surfaces sont naturellement des objets de codimension 1 par rapport aux 3-variétés et permettent d’obtenir aisément des sous-groupes de codimension 1 des groupes de 3-variétés de la manière suivante.

Mise en garde Dans tout ce texte, une *surface* est un espace topologique séparé à base de voisinages dénombrable et localement homéomorphe à $\mathbb{R}^2$, en particulier sans bord. De même, une *variété* topologique sera toujours sans bord. Lorsque cela sera nécessaire, nous utiliserons systématiquement les termes *surface à bord* et *variété à bord* en présence d’un bord éventuellement non vide.

Définition. Un groupe de surface est un groupe isomorphe au groupe fondamental d’une surface connexe compacte orientable de genre $g \geq 1$. Un tel groupe admet la présentation standard $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle$.

Les groupes de surface fournissent alors systématiquement des sous-groupes de codimension 1 en dimension 3. Plus précisément, si M est une 3-variété connexe compacte et Σ est un sous-groupe de $\pi_1(M)$ isomorphe à un groupe de surface, alors le nombre de bouts $e(\pi_1(M), \Sigma)$ est supérieur ou égal à 2, i.e. Σ est un sous-groupe de codimension 1 de $\pi_1(M)$ (voir [Swa73]). On dira dans ce cas que Σ est un *sous-groupe de surface* de $\pi_1(M)$.

Remarque Lorsque M est une 3-variété hyperbolique compacte, son groupe fondamental est hyperbolique au sens de Gromov. En particulier, $\pi_1(M)$ ne contient aucun sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2 \simeq \pi_1(\mathbb{T}^2)$ (voir [BH99], corollaire 3.10 page 462). Ainsi, un sous-groupe de surface de $\pi_1(M)$ est nécessairement isomorphe au groupe fondamental d’une surface de genre $g \geq 2$.

Fixons M une variété hyperbolique compacte (M sera toujours supposée connexe et orientable) de dimension trois et notons $\pi_1(M)$ son groupe fondamental. Dans le but d’obtenir un résultat de cubulation pour le groupe $\pi_1(M)$, nous soulevons les questions naturelles suivantes.

Questions

1. $\pi_1(M)$ contient-il un sous-groupe de surface ?
2. $\pi_1(M)$ contient-il un sous-groupe de surface quasi-convexe ?
3. $\pi_1(M)$ contient-il beaucoup de sous-groupes de surface quasi-convexes ?

La première de ces questions est l’objet d’une conjecture remontant aux travaux de F. Waldhausen (voir [Wal68]).

Conjecture (Conjecture du sous-groupe de surface). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe de surface.*

Nous expliquerons d’ici quelques paragraphes que cette conjecture est désormais résolue, via une solution récente qui apporte même une réponse positive aux questions 2 et 3 ci-dessus. Nous allons cependant commencer par présenter quelques cas particuliers dans lesquels cette conjecture est immédiatement résolue, via l’introduction de propriétés algébriques nettement plus fortes que l’existence d’un sous-groupe de surface.

Surfaces immergées incompressibles

Au-delà de notre problème de cubulation dans le cas hyperbolique, cette question est une source de motivation pour de nombreux travaux sur les 3-variétés. L'existence d'un sous-groupe de surface est fortement reliée à la présence dans la 3-variété d'une surface incompressible.

Définition. On dit qu'une immersion (resp. un plongement⁸) $S \looparrowright M$ d'une surface compacte S de genre $g \geq 2$ dans une 3-variété hyperbolique compacte M est *incompressible* si l'application induite au niveau des groupes fondamentaux est un morphisme injectif $\pi_1(S) \hookrightarrow \pi_1(M)$.

Une surface immergée incompressible dans M fournit donc automatiquement un sous-groupe de surface de $\pi_1(M)$. La réciproque est également vraie. En effet, les variétés S et M ont un revêtement universel contractile et sont donc des espaces d'Eilenberg Mac Lane de type $K(\pi, 1)$. Un morphisme de groupes $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ peut donc être réalisé comme application induite au niveau des groupes fondamentaux par une application continue $f : S \rightarrow M$ que l'on peut supposer être une immersion.

On ne peut toutefois pas en général supposer que l'application f est injective. Autrement dit, l'existence d'un sous-groupe de surface ne suffit pas à garantir la présence d'une surface plongée incompressible dans M . Cette dernière propriété est reliée à d'autres conjectures classiques plus fortes sur la variété M , que nous passons en revue ci-dessous.

Variétés de Haken

Définition. Une 3-variété hyperbolique compacte M est dite *de Haken* s'il existe un plongement $S \hookrightarrow M$ incompressible d'une surface compacte S de genre $g \geq 2$ dans M . On dit également que M est *virtuellement de Haken* s'il existe un revêtement fini $\widehat{M} \rightarrow M$ tel que $\widehat{M}$ soit de Haken.

Il existe des 3-variétés hyperboliques compactes qui ne sont pas de Haken (voir [Thu79], [Thu82] ou [HT85]). Cependant, on conjecture la propriété suivante, qui entraînerait immédiatement la conjecture du sous-groupe de surface énoncée ci-dessus (car la classe des groupes de surface est stable par passage à un sous-groupe d'indice fini).

Conjecture (Conjecture virtuellement de Haken). Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors M est virtuellement de Haken.

Cette conjecture, due à W. Thurston, est toujours ouverte à l'heure actuelle.

Premier nombre de Betti virtuel

L'existence de surfaces plongées incompressibles dans M est détectable via l'étude des groupes d'homologie/cohomologie de la variété M . Ces groupes sont déterminés⁹ par le groupe fondamental de M et le premier groupe de cohomologie à coefficients entiers $H^1(M, \mathbb{Z})$ s'identifie à l'espace $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ des morphismes de groupes de $\pi_1(M)$ vers $\mathbb{Z}$.

Sous l'hypothèse $H^1(M, \mathbb{Z}) \neq 0$, on peut réaliser une classe de cohomologie non-nulle comme un morphisme $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ non-trivial et ce morphisme est induit au niveau des groupes fondamentaux par une application continue $M \rightarrow \mathbb{S}^1$. Quitte à remplacer cette application par une application homotope, on peut supposer que ses valeurs régulières ont pour image réciproque dans M des surfaces plongées incompressibles. En particulier, M est alors de Haken. La conjecture virtuellement de Haken découlerait alors d'une conjecture portant sur le premier nombre de Betti virtuel de M .

Définition. Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Le *premier nombre de Betti virtuel* de M , noté $\text{vb}_1(M)$, est défini par la relation :

$$\text{vb}_1(M) = \sup\{b_1(\widehat{M}) \mid \widehat{M} \text{ est un revêtement fini de } M\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

où $b_1(\cdot) = \text{rang}(H_1(\cdot, \mathbb{Z}))$ désigne le premier nombre de Betti.

On formule alors la conjecture suivante.

⁸Une immersion est un homéomorphisme local, un plongement est une immersion injective.

⁹ $H_1(M, \mathbb{Z})$ est l'abélianisé de $\pi_1(M)$, $H_2(M, \mathbb{Z}) = H^1(M, \mathbb{Z}) = H_1(M, \mathbb{Z})/\text{Tor}(H_1(M, \mathbb{Z}))$ et $H_3(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Conjecture (Conjecture du premier nombre de Betti virtuel non nul). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors $\text{vb}_1(M) > 0$.*

La conjecture ci-dessus porte donc sur l'existence d'un morphisme non-trivial $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$. Cette condition est en particulier réalisée lorsqu'il existe un morphisme surjectif $\pi_1(M) \rightarrow F_2$, où F_2 désigne le groupe libre non-abélien engendré par deux éléments.

Cette dernière propriété entraîne en fait que le premier nombre de Betti virtuel de M est infini. Il est également conjecturé que chacune de ces deux propriétés est vérifiée pour les 3-variétés hyperboliques compactes.

Définition. Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. On dit que le groupe fondamental de M est *large* s'il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \leq \pi_1(M)$ et un morphisme surjectif $\Gamma \rightarrow F_2$.

Remarquons que l'existence de deux sous-variétés de codimension 1 disjointes et de réunion non-séparante dans une variété compacte orientable X est une condition suffisante pour qu'il existe un morphisme surjectif $\pi_1(X) \rightarrow F_2$. En particulier, ceci permet de voir que les groupes fondamentaux des surfaces compactes de genre $g \geq 2$ sont larges, puisqu'il n'est pas difficile de trouver sur une telle surface deux courbes fermées simples disjointes et non-homologues.

Pour les 3-variétés, l'existence de deux surfaces plongées incompressibles disjointes et de réunion non-séparante (i.e. indépendantes dans $H_2(\cdot, \mathbb{Z})$) suffit également à obtenir un groupe fondamental large. Cette dernière propriété est un renforcement substantiel du fait d'être de Haken.

Conjecture (Conjecture du premier nombre de Betti virtuel infini). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors $\text{vb}_1(M) = +\infty$.*

Conjecture (Conjecture du groupe fondamental large). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors $\pi_1(M)$ est large.*

Variétés fibrées sur le cercle

Nous décrivons maintenant une classe particulière de 3-variétés hyperboliques compactes pour lesquelles l'existence d'un sous-groupe de surface est évidente : il s'agit des variétés qui sont des espaces fibrés en surfaces au-dessus du cercle¹⁰.

Définition. Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. On dit que M est *fibrée sur le cercle* si M est un espace fibré en surface au dessus du cercle $\mathbb{S}^1$. On dit également que M est *virtuellement fibrée sur le cercle* s'il existe un revêtement fini $\widehat{M} \rightarrow M$ tel que $\widehat{M}$ soit fibrée sur le cercle.

Pour une 3-variété fibrée sur le cercle, les fibres de la fibration $M \rightarrow \mathbb{S}^1$ fournissent immédiatement des surfaces incompressibles dans M . Les conjectures du premier nombre de Betti virtuel non-nul et du sous-groupe de surface sont donc automatiquement vérifiées pour ces 3-variétés.

Cependant, notant Σ un sous-groupe de surface correspondant à la fibre de la fibration $M \rightarrow \mathbb{S}^1$, nous verrons au cours du premier chapitre de cette seconde partie que Σ est un sous-groupe normal de $\pi_1(M)$. Ceci entraîne que l'ensemble limite de l'action par isométries de Σ sur $\widetilde{M} \simeq \mathbb{H}^3$ est égal à la sphère $\partial_\infty \widetilde{M} \simeq \mathbb{S}^2$. En particulier, Σ n'est pas un sous-groupe de surface quasi-convexe de $\pi_1(M)$ et nous ne pouvons donc pas utiliser ce sous-groupe de codimension 1 pour notre programme de cubulation dans ce cas.

Remarquons pour finir que le cas des 3-variétés fibrées sur le cercle est loin d'être anecdotique, car, bien qu'il existe des 3-variétés hyperboliques compactes qui ne sont pas fibrées sur le cercle, on conjecture tout de même, en suivant à nouveau W. Thurston, le résultat suivant.

Conjecture (Conjecture virtuellement fibrée sur le cercle). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors M est virtuellement fibrée sur le cercle.*

¹⁰voir le chapitre 3 pour une présentation alternative des 3-variétés fibrées sur le cercle via les suspensions d'homéomorphismes de surfaces.

Sous-groupes de surface quasi-convexes

Nous venons d'observer que même si certaines 3-variétés hyperboliques compactes contiennent trivialement des sous-groupes de surfaces, il n'est pas clair pour autant que ces sous-groupes puissent être supposés quasi-convexes dans $\pi_1(M)$.

Nous allons maintenant présenter les deux comportements géométriques possibles pour les sous-groupes de surface de $\pi_1(M)$: ceux qui ne sont pas quasi-convexes relèvent en fait essentiellement de la situation décrite ci-dessus des 3-variétés fibrées sur le cercle. Des travaux profonds de F. Bonahon, A. Marden et W. Thurston se combinent pour former l'énoncé suivant.

Théorème (Dichotomie des sous-groupes de surface en dimension trois, voir [Mar74], [Thu79] et [Bon86]). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte et $\iota : S \looparrowright M$ une immersion incompressible d'une surface compacte S de genre $g \geq 2$ dans M . Alors on a l'alternative :*

- (i) $\iota_*(\pi_1(S))$ est un sous-groupe de surface quasi-convexe de $\pi_1(M)$, ou bien,
- (ii) il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M auquel ι se relève en une application homotope à l'inclusion d'une fibre pour une certaine fibration de $\widehat{M}$ sur le cercle.

On peut préciser la situation géométrique dans chacun des cas de cette alternative.

Le cas géométriquement fini

Dans le premier cas, on dit que le sous-groupe de surface $\iota_*(\pi_1(S)) \leq \pi_1(M)$ est *géométriquement fini*¹¹, ou encore *quasi-fuchsien*. On dit également que la surface $\widetilde{S}$ est quasi-convexe. L'ensemble limite de l'action du sous-groupe $\iota_*(\pi_1(S))$ sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M est alors un cercle topologique de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 2. En particulier, $\partial_\infty \widetilde{M} \setminus \Lambda(\iota_*(\pi_1(S)))$ possède deux composantes connexes.

Le cas d'une fibre virtuelle

Dans le second cas, on dit que le sous-groupe de surface $\iota_*(\pi_1(S))$ est *géométriquement infini*. Il s'agit alors d'un sous-groupe normal d'un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(M)$. En particulier, son ensemble limite est égal à la sphère à l'infini $\partial_\infty \widetilde{M}$.

On en déduit en particulier le corollaire suivant, qui permet de détecter la quasi-convexité d'un sous-groupe de surface par la non-vacuité de son ensemble ordinaire (i.e. le complémentaire de son ensemble limite).

Corollaire (Ensemble ordinaire non-vide implique quasi-convexe). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte et $\Sigma \leq \pi_1(M)$ un sous-groupe de surface. Alors Σ est un sous-groupe quasi-convexe de $\pi_1(M)$ si, et seulement si, $\Lambda(\Sigma) \neq \partial_\infty \widetilde{M}$.*

Nous allons alors présenter quelques premiers résultats sur l'existence de sous-groupes de surface quasi-convexes pour certaines classes générales de 3-variétés hyperboliques compactes.

Sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes pour les variétés arithmétiques

Le cas des 3-variétés arithmétiques, i.e. $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ avec $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ un réseau uniforme sans torsion dont le commensurateur est dense dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$, est traité par un récent théorème de M. Lackenby qui a été une impulsion considérable pour le démarrage de cette thèse (voir [LLR08] et [Lac10]).

Théorème (Théorème du sous-groupe de surface quasi-convexe pour les 3-variétés arithmétiques, voir [Lac10] théorème 1.2). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte arithmétique. Alors $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe de surface quasi-convexe.*

¹¹Le sous-groupe de surface Σ est en fait géométriquement fini au sens classique, c'est-à-dire qu'il existe un ε -voisinage C_ε de l'enveloppe convexe dans $\mathbb{H}^3$ de l'ensemble limite de Σ dans $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ tel que le quotient C_ε/Σ soit de volume fini. Mieux, Σ est en fait dans ce cas convexe-cocompact dans $\mathbb{H}^3$, i.e. C_0/Σ est compact.

La démonstration de M. Lackenby se déroule en deux étapes. Il démontre tout d'abord que le groupe fondamental de M est dans le cas arithmétique commensurable à un groupe Kleinien de type fini contenant un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Or le fait de contenir un sous-groupe de surface ne dépend pas de la classe de commensurabilité.

Un résultat plus ancien de M. Lackenby, D. Long et A. Reid affirmant que tout groupe Kleinien de type fini contenant un sous-groupe fini non-cyclique est soit fini, soit virtuellement libre, soit contient un sous-groupe de surface, permet donc d'affirmer que $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe de surface.

Si celui-ci n'était pas quasi-convexe, on pourrait à l'aide du théorème de dichotomie se ramener au cas des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle que nous traitons ci-dessous.

Comme nous avons par ailleurs démontré au chapitre 2 que l'existence d'un seul sous-groupe de surface quasi-convexe suffit à obtenir la cubulation des variétés arithmétiques en toute dimension (voir théorème 2.4.1), le résultat de M. Lackenby fournit donc le corollaire 2.4.2 annoncé en section 2.4.

Corollaire (Cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes arithmétiques). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte arithmétique. Alors $\pi_1(M)$ est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes pour les variétés fibrées sur le cercle

Le théorème de dichotomie est également à la base de très nombreuses constructions de sous-groupes de surface quasi-convexes dans les groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle.

Dans ce contexte, D. Cooper, D. Long et A. Reid démontrent tout d'abord qu'il existe toujours au moins un tel sous-groupe de surface quasi-convexe.

Théorème (Théorème du sous-groupe de surface quasi-convexe pour les 3-variétés virtuellement fibrées sur le cercle, (voir [CLR94]) **théorème 2.6).** *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement fibrée sur le cercle. Alors $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe de surface quasi-convexe.*

Ce résultat est acquis dans le cas où $\text{vb}_1(M) > 1$, car alors W. Thurston montre qu'il existe une surface plongée incompressible dans M qui ne coïncide pas avec la fibre d'une éventuelle fibration de M sur le cercle (voir [Thu86b]). D'après un théorème de W. Heil (voir [Hei81]), le sous-groupe de surface correspondant est alors égal à son normalisateur dans $\pi_1(M)$, et donc est quasi-convexe d'après le théorème de dichotomie.

Dans le cas général, D. Cooper, D. Long et A. Reid présentent une construction de sous-groupe de surface (que nous exposerons au chapitre 4 de ce mémoire) qui soit fournit un sous-groupe quasi-convexe, soit fournit (dans un revêtement fini) une classe d'homologie indépendante de celle définie par la fibre, permettant de se ramener au cas précédent.

Des travaux plus récents de J. Masters reprennent la construction de D. Cooper, D. Long et A. Reid et démontrent qu'il existe en fait une quantité abondante de sous-groupes de surface quasi-convexes dans le groupe fondamental d'une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement fibrée sur le cercle (voir [Mas06]). Pour formuler précisément cette assertion, introduisons la notion d'épaisseur d'un sous-groupe de surface, qui est une mesure de l'éventuelle quasi-convexité de celui-ci.

Définition. Soit M une 3-variété hyperbolique compacte et $\Sigma \leq \pi_1(M)$ un sous-groupe de surface.

1. Si Σ est géométriquement infini, alors on pose $t(\Sigma) = +\infty$.
2. Si Σ est un sous-groupe convexe de $\pi_1(M)$ (i.e. un groupe fuchsien), alors on pose $t(\Sigma) = 0$.
3. Sinon, on considère l'enveloppe convexe fermée C dans $\mathbb{H}^3$ de l'ensemble limite de Σ et on définit $t(\Sigma)$ comme la distance entre les composantes de bord de la 3-variété à bord compacte C/Σ .

Le théorème de J. Masters affirme alors qu'il existe dans le cas fibré des sous-groupes de surface de $\pi_1(M)$ d'épaisseur arbitrairement grande, i.e. aussi peu quasi-convexes qu'on peut le souhaiter.

Théorème (Abondance de sous-groupes de surface quasi-convexes pour les 3-variétés virtuellement fibrées sur le cercle, voir [Mas06] **théorème 1.1).** *Soit M une 3-variété hyperbolique virtuellement fibrée sur le cercle. Alors il existe une suite $\Sigma_i \leq \pi_1(M)$ de sous-groupes de surface quasi-convexes tels que $t(\Sigma_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.*

Ce dernier résultat a joué le rôle de point de départ de la seconde partie de cette thèse. La question qui se pose naturellement à ce stade est de savoir si parmi les très nombreux sous-groupes de surface quasi-convexes du groupe fondamental d'une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement fibrée sur le cercle, on peut en trouver une collection suffisante pour appliquer l'un de nos critères de cubulation. La question suivante est soulevée par M. Sageev.

Question Soit M une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement fibrée sur le cercle. Le groupe fondamental de M est-il cubique CAT(0) ?

Le but de cette seconde partie est d'apporter une réponse positive à cette question. En revenant sur les méthodes de construction proposées par J. Masters, nous développerons également une manière de produire de nombreux sous-groupes de surface quasi-convexes de $\pi_1(M)$, grâce auxquels nous pourrions alors appliquer l'un de nos critères de cubulation.

Cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes

Pour terminer cette introduction, nous énonçons enfin les résultats récents de J. Kahn et V. Markovic sur l'existence de sous-groupes de surface quasi-convexes obtenus sans hypothèse sur la 3-variété hyperbolique ambiante. Les résultats qu'ils obtiennent sont tellement puissants qu'ils s'appliquent même au problème de la cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes, en toute généralité.

Ces auteurs obtiennent par des méthodes de recollements quasi-géodésiques aléatoires de pantalons presque plans de nombreuses surfaces immergées incompressibles fournissant des sous-groupes de surface quasi-convexes. Il s'agit à ce jour de la seule construction générale de sous-groupes de surface dans les groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques compactes (voir [KM10]).

Théorème (Abondance de sous-groupes de surface quasi-convexes, voir [KM10]). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors pour tout cercle métrique $\mathcal{C} \subset \partial_\infty \mathbb{H}^3$ (i.e. le bord d'un hyperplan totalement géodésique) et tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-groupe de surface quasi-convexe de $\pi_1(M)$ dont l'ensemble limite approche $\mathcal{C}$ à ε près.*

Comme le font indépendamment remarquer N. Bergeron et D. Wise, on peut déduire immédiatement de ce théorème le résultat de séparation suivant (voir [BW10]).

Corollaire (Séparation des paires de points distincts du bord). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors pour toute paire de points distincts $p, q \in \partial_\infty \widetilde{M}$, il existe $\Sigma \leq \pi_1(M)$ un sous-groupe de surface quasi-convexe dont l'ensemble limite sépare p et q dans $\partial_\infty \widetilde{M}$.*

Ce corollaire et notre critère de cubulation 2.3.13 fournissent donc l'énoncé de cubulation suivant.

Corollaire (Cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors $\pi_1(M)$ est cubique CAT(0).*

Nous discuterons des potentiels avantages des travaux de cette seconde partie par rapport à l'approche de J. Kahn et V. Markovic lors de la troisième partie de cette thèse, lorsque sera soulevée la question plus profonde d'une éventuelle cubulation spéciale des 3-variétés hyperboliques.

Principaux résultats de la seconde partie et organisation des chapitres

Le troisième chapitre présente quelques pré-requis classiques de topologie et de géométrie des 3-variétés hyperboliques fibrées sur le cercle, obtenues par suspensions d'homéomorphismes de surfaces. Nous étudierons pour ces 3-variétés le revêtement infini monogène associé à la fibration sur le cercle et le revêtement universel, puis nous décrirons tous les revêtements finis, obtenus par suspensions de relevés de la monodromie.

Nous analyserons la structure de produit semi-direct du groupe fondamental d'une telle 3-variété, ainsi que son action au revêtement universel. Nous rappellerons que cette action peut être semi-conjugée par une projection naturelle sur le revêtement universel de la fibre. Ce point de vue permet d'identifier ce groupe fondamental au groupe des relevés des puissances de la monodromie au revêtement universel de la fibre, et sera systématiquement utilisé au cours des chapitres suivants.

Nous évoquerons alors le problème général de la géométrisation des suspensions d'homéomorphismes de surface. Nous rappellerons le théorème d'hyperbolisation de W. Thurston affirmant que les suspensions hyperbolisables sont exactement celles dont la monodromie est (isotope à) un homéomorphisme pseudo-Anosov. Ces homéomorphismes sont caractérisés par le fait qu'ils préservent une paire de feuilletages singuliers mesurés transverses de la fibre avec une dynamique de dilatation/contraction explicite.

Nous rappellerons alors comment J. Cannon et W. Thurston, munissent le revêtement universel de la fibre ainsi que celui de la 3-variété d'une structure métrique alternative moins rigide que la métrique hyperbolique. Nous expliquerons alors que cette géométrie permet de capter les informations essentielles concernant le bord à l'infini du revêtement universel de la 3-variété. Nous présenterons enfin la structure de l'application de Cannon-Thurston prolongeant continûment l'inclusion du revêtement universel de la fibre dans celui de la 3-variété. La description des fibres de cette application est le premier outil que nous utiliserons pour la cubulation. Pour le lecteur connaissant bien ces propriétés, ce chapitre est donc tout à fait facultatif.

Le quatrième chapitre présente une construction due à D. Cooper, D. Long et A. Reid de surfaces dites coupées-croisées dans la suspension d'un homéomorphisme pseudo-Anosov φ d'une surface F . Une telle surface coupée-croisée est construite à partir de la donnée d'une courbe simple c de F disjointe de son image par φ . On peut alors utiliser les courbes c et $\varphi(c)$ pour modifier la fibre et construire une surface immergée dans la suspension M_φ de φ de manière partout transverse au flot de cette suspension, ce qui garantit en particulier que la surface obtenue est incompressible.

Nous présentons alors les propriétés générales de ces surfaces coupées-croisées, telles qu'exposées par D. Cooper, D. Long et A. Reid. Cette étude fait intervenir le choix d'un relevé (plongé) au revêtement universel, que l'on projette sur le revêtement universel de la fibre. On obtient alors un polygone P (un infini-gone en fait) qui capte essentiellement la géométrie de la surface coupée-croisée. Nous rappellerons en effet que le sous-groupe de surface correspondant est quasi-convexe si, et seulement si, le complémentaire de ce polygone est non-vide.

La dernière moitié de ce chapitre présente alors une description, dans le cas des surfaces coupées-croisées quasi-convexes, de l'ensemble limite du sous-groupe de surface correspondant. Nous reprendrons pour cela les travaux de D. Cooper, D. Long et A. Reid, que nous réinterprétons de la manière suivante.

Le polygone P du revêtement universel de la fibre possède une infinité de côtés qui sont essentiellement des feuilles des feuilletages stable et instable associés à la monodromie. En décomposant le bord à l'infini de ce revêtement universel en trois parties, les points adhérents au polygone, les points au-delà des côtés stables et les points au-delà des côtés instables, on obtient via l'application de Cannon-Thurston la décomposition du revêtement universel de M_φ formée de l'ensemble limite du sous-groupe de surface et ses deux composantes complémentaires.

Cette description n'est pas tout à fait exacte, il faudra expliquer qu'au delà de chaque côté stable ou instable de P il existe un nombre fini (non nul) de points à traiter à part dont l'image par l'application de Cannon-Thurston appartient à l'ensemble limite du sous-groupe de surface. Cette description originale, formulée précisément ci-dessous, est le but de ce second chapitre (voir corollaire 4.2.26).

Corollaire (Séparation des paires de points de $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$ par $\Lambda(\pi_1(S))$). *Soient $p, q \in \partial_\infty \widetilde{F}$. Alors $\Lambda(\pi_1(S))$ sépare $CT(p)$ et $CT(q)$ dans $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$ si, et seulement si, p et q sont situés au-delà de deux côtés ℓ et ℓ' de $P(\widetilde{S})$ de stabilités opposées et de plus p et q ne sont pas adhérents dans $\overline{F}$ aux deux feuilles de $\widetilde{F}^s$ ou $\widetilde{F}^u$ contenant ℓ et ℓ' ou à leurs feuilles duales.*

Le cinquième chapitre est alors un exposé de constructions originales de sous-groupes de surfaces coupées-croisées quasi-convexes, inspirées tout particulièrement des constructions antérieures proposées par J. Masters. Pour présenter ces constructions, nous exposerons des propriétés de structure des relevés d'une surface coupée-croisée au revêtement universel. Si la surface est construite à partir de deux courbes c et $\varphi(c)$ disjointes, alors nous considérerons le pavage $\mathcal{P}_0$ du revêtement universel $\widetilde{F}$ de la fibre obtenu en considérant tous les relevés de c et $\varphi(c)$. Nous formulerons à l'aide de ce pavage une condition suffisante de quasi-convexité fondée sur le critère de quasi-convexité du corollaire 4.2.13) raffinant un résultat de J. Masters (voir proposition 5.2.2).

Proposition (Condition suffisante de quasi-convexité de $\pi_1(S)$). *Soit C une chambre du pavage $\mathcal{P}_0$. Supposons qu'il existe un relevé $\widetilde{\varphi}$ de φ fixant un point de $\widetilde{F}$ tel que $\overline{C} \cap \overline{\widetilde{\varphi}(C)}$ soit une composante de frontière commune à C et $\widetilde{\varphi}(C)$. Alors $\pi_1(S)$ est un sous-groupe quasi-convexe de $\pi_1(M)$.*

Au cours du chapitre 4, nous définissons la notion de tripode droit formé d'une géodésique bi-infinie contenue dans une feuille périodique de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ et d'un rayon orthogonal contenu dans la feuille duale. De tels tripodes apparaissent naturellement en regardant les côtés d'un polygone P associé à la projection d'une surface coupée-croisée.

Dans la suite du chapitre 5, nous présenterons alors une construction originale qui réalise tout tripode droit comme paire formé d'un côté et de son rayon dual d'un polygone P associé à une construction de surface coupée-croisée quasi-convexe (voir corollaire 6.1.4).

Corollaire (Tout tripode droit se réalise au bord d'un polygone $P(\tilde{S})$ d'une surface coupée-croisée). *Soit $\{\ell, r\}$ un tripode droit. Alors il existe une surface coupée-croisée quasi-convexe S dans un revêtement fini $\widehat{M}$ de M_φ et un relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que ℓ est un côté de $P(\tilde{S})$ dont r est le rayon dual.*

Nous définirons alors une généralisation de la notion de surface coupée-croisée (également due à D. Cooper, D. Long et A. Reid) qui permet de donner un sens à de telles surfaces lorsque les courbes c et $\varphi(c)$ s'intersectent. Nous décrirons également les relevés de ces surfaces au revêtement universel et formulerons une condition suffisante de quasi-convexité qui leur sera facilement applicable.

Enfin, nous étendrons l'énoncé précédent au cas de deux tripodes droits de stabilités opposées dont les rayons duaux possèdent une certaine propriété d'alternance (i.e. ne vont pas du même côté à l'infini). Nous obtiendrons le résultat suivant (voir corollaire 6.1.5).

Corollaire (Toute paire de tripodes droits alternés se réalise au bord d'un polygone $P(\tilde{S})$ d'une surface coupée-croisée généralisée). *Soit $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ deux tripodes droits alternés. Alors il existe une surface coupée-croisée généralisée quasi-convexe S dans un revêtement fini $\widehat{M}$ de M_φ et un relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que ℓ et ℓ' soient des côtés de $\Phi(\tilde{S})$ de rayons duaux respectifs r et r' .*

Les constructions évoquées ci-dessus nécessitent l'utilisation de propriétés de séparabilité des groupes de surfaces (voir la conclusion de la première partie pour la définition de la notion de séparabilité). Nous supposons donc connu le théorème de P. Scott affirmant que les sous-groupes de type fini des groupes de surface sont séparables (voir [Sco78] et [Sco85]).

Dans le sixième chapitre, nous appliquerons ces constructions au problème de la séparation des paires de points distincts du bord du revêtement universel de M_φ par des ensembles limites de sous-groupes de surface quasi-convexes de $\pi_1(M)$. Nous obtiendrons le résultat suivant (voir théorème 6.2.1).

Théorème (Séparation des paires de points distincts du bord). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement fibrée sur le cercle. Alors pour toute paire de points distincts $p, q \in \partial_\infty \widehat{M}$, il existe $\Sigma \leq \pi_1(M)$ un sous-groupe de surface quasi-convexe dont l'ensemble limite sépare p et q dans $\partial_\infty \widehat{M}$.*

À l'aide de ce théorème de séparation et de notre critère de cubulation 2.3.13, nous obtiendrons le corollaire ci-dessous (voir corollaire 6.2.2), qui est le but de cette seconde partie.

Corollaire (Cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement fibrée sur le cercle. Alors $\pi_1(M)$ est cubique CAT(0).*

Remarquons pour finir que le cas des 3-variétés virtuellement fibrées sur le cercle ne doit pas être considéré comme particulièrement restrictif. Nous avons déjà énoncé au début de cette introduction la conjecture virtuellement fibrée sur le cercle, qui permettrait de ramener la question de la cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes quelconques à l'énoncé de notre théorème ci-dessus.

Conjectures sur les 3-variétés hyperboliques compactes

En annexe de cette introduction, nous présentons la chaîne de conjectures classiques sur les 3-variétés hyperboliques compactes que nous venons de mettre en évidence. Ce diagramme sera complété dans l'introduction de la troisième partie.

Nous avons vu que le seul résultat établi en toute généralité est l'existence d'un sous-groupe de surface (et donc, d'après le théorème de dichotomie et les arguments de D. Cooper, D. Long et A. Reid, l'existence également d'un sous-groupe de surface quasi-convexe). Les propriétés (ordonnées par ordre logique décroissant) du groupe fondamental large, du premier nombre de Betti virtuel infini ou non nul et de la conjecture virtuellement de Haken sont à ce jour toujours ouvertes, la conjecture virtuellement fibrée sur le cercle venant s'insérer au-dessus de celle du premier nombre de Betti virtuel non nul.

Nous expliquerons dans l'introduction de la troisième partie de cette thèse que des résultats très récents et non complètement vérifiés à ce jour de D. Wise permettent d'établir l'équivalence des trois conjectures virtuellement de Haken, virtuellement fibrée sur le cercle et du premier nombre de Betti virtuel non nul.

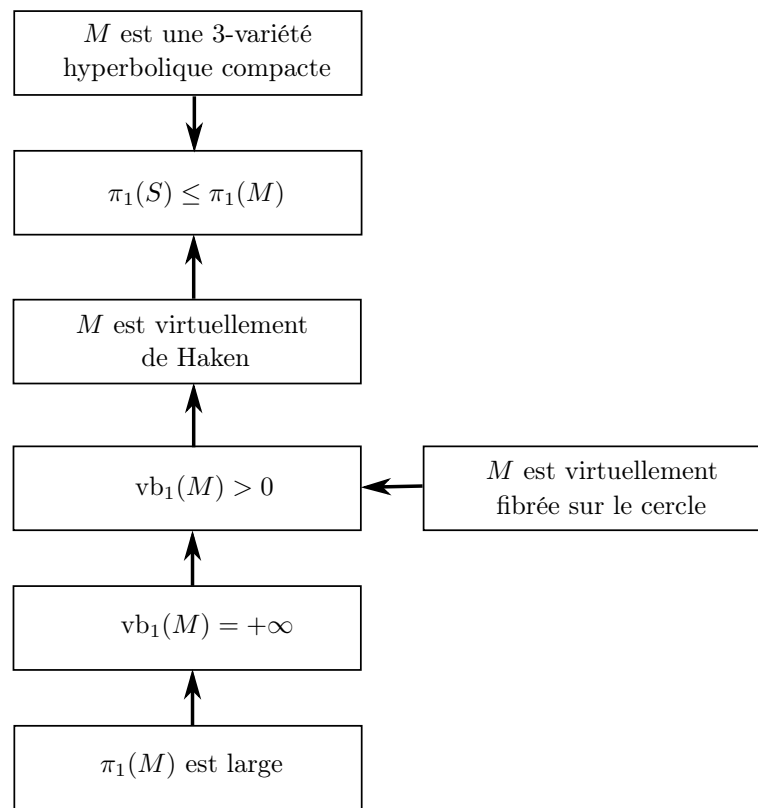


FIGURE 2.4.2 – Diagramme logique des conjectures classiques sur les 3-variétés hyperboliques compactes.

Chapitre 3

Topologie et Géométrie des 3-variétés fibrées sur le cercle

Sommaire

3.1	3-variétés virtuellement fibrées sur le cercle	58
3.1.1	3-variétés fibrées sur le cercle	58
3.1.2	Revêtements d'une suspension	59
3.1.3	Groupe fondamental d'une suspension	60
3.1.4	Action de $\pi_1(M)$ sur le revêtement universel $\tilde{F}$ de la fibre	61
3.2	Hyperbolisation et bord à l'infini	62
3.2.1	Présentation du théorème d'hyperbolisation	62
3.2.2	Feuilletages transverses et transversalement mesurés	63
3.2.3	Géométrie localement euclidienne à singularités sur la fibre	64
3.2.4	Géométrie à grande échelle de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$	65
3.2.5	Application de Cannon-Thurston	68

3.1 3-variétés virtuellement fibrées sur le cercle

Dans cette section, nous présentons quelques propriétés topologiques des 3-variétés fibrées sur le cercle, vues comme suspensions d'homéomorphismes de surface. Nous nous intéresserons tout particulièrement à certains de leurs revêtements ainsi qu'à leur groupe fondamental.

Fixons pour la durée de cette section une surface F connexe compacte orientable ainsi qu'une transformation $\varphi \in \text{Homeo}(F)$ préservant l'orientation.

3.1.1 3-variétés fibrées sur le cercle

Nous considérons la transformation $\gamma_\infty \in \text{Homeo}(F \times \mathbb{R})$ définie par la relation $\gamma_\infty(x, t) = (\varphi(x), t + 1)$ pour tout $(x, t) \in F \times \mathbb{R}$. L'action du sous-groupe $\mathbb{Z} \simeq \langle \gamma_\infty \rangle \leq \text{Homeo}(F \times \mathbb{R})$ sur $F \times \mathbb{R}$ est bien sûr libre, propre et cocompacte.

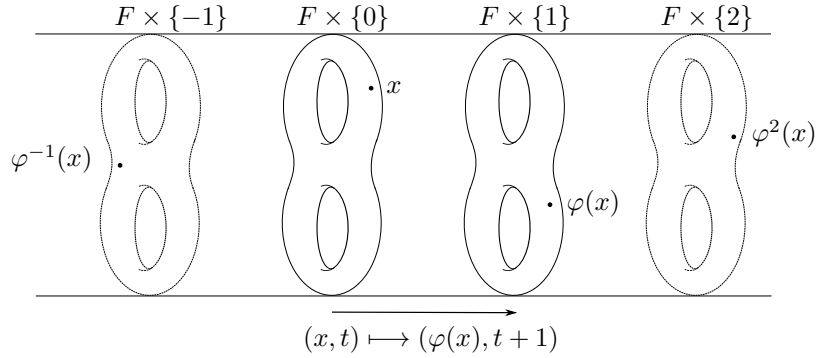


FIGURE 3.1.1 – Générateur de l'action de $\mathbb{Z}$ sur $F \times \mathbb{R}$.

Définition 3.1.1. La *suspension* de l'homéomorphisme $\varphi : F \longrightarrow F$ est la variété topologique de dimension trois $M_\varphi = (F \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ munie de la topologie quotient, pour l'action de $\mathbb{Z}$ définie ci-dessus. L'homéomorphisme φ est alors appelé la *monodromie* de la suspension.

Il est clair que $F \times [0, 1]$ est un domaine fondamental compact pour cette action et que toute orbite rencontre une unique fois le produit $F \times [0, 1]$. Les identifications dans $F \times [0, 1]$ ont donc lieu entre les surfaces $F \times \{0\}$ et $F \times \{1\}$, via l'action du générateur 1 de $\mathbb{Z}$ identifiant les points $(x, 0)$ et $(\varphi(x), 1)$, pour tout $x \in F$. Définissons alors sur le produit $F \times [0, 1]$ la relation d'équivalence $\sim_\varphi$ pour laquelle $(x, 0) \sim_\varphi (\varphi(x), 1)$ pour tout $x \in F$.

La suspension M_φ est homéomorphe à l'espace topologique quotient $(F \times [0, 1])/\sim_\varphi$, obtenu par recollement des composantes de bord du produit $F \times [0, 1]$ à l'aide de l'homéomorphisme φ .

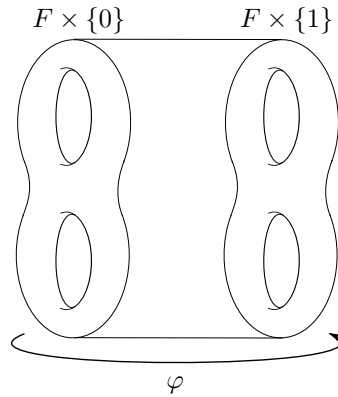


FIGURE 3.1.2 – Suspension d'un homéomorphisme par recollement.

Plus précisément, l'inclusion naturelle $F \times [0, 1] \hookrightarrow F \times \mathbb{R}$ induit un homéomorphisme entre les espaces $(F \times [0, 1])/\sim_\varphi$ et $(F \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$. Dans la littérature, la suspension d'un homéomorphisme est le plus souvent définie via l'espace $(F \times [0, 1])/\sim_\varphi$.

Remarques

1. Notons $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité du plan complexe muni de la topologie usuelle. Notant $[\cdot]_{\sim_\varphi}$ les classes d'équivalence de la relation $\sim_\varphi$, l'application continue :

$$f_\varphi : (F \times [0, 1]) / \sim_\varphi \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

$$[(x, t)]_{\sim_\varphi} \longmapsto e^{2i\pi(t-[t])}$$

est une fibration de fibre $f_\varphi^{-1}(1)$ s'identifiant à l'image de $F \times \{0\}$ dans M_φ . On dit que la 3-variété M_φ est *fibrée sur le cercle*, de *fibre* la surface F et de *monodromie* l'homéomorphisme φ .

2. La fibre F est vue comme contenue dans M_φ via l'inclusion $F = F \times \{0\} \hookrightarrow F \times \mathbb{R} \rightarrow M_\varphi$. En effet, l'application quotient $F \times \mathbb{R} \rightarrow M_\varphi$ est même injective sur $F \times [0, 1[$. Ce plongement $F \hookrightarrow M_\varphi$ est de plus π_1 -injectif, i.e. F est une surface plongée incompressible dans M_φ (voir le corollaire 3.1.4 pour une justification de ce fait).
3. La classe d'homéomorphisme de la variété M_φ est uniquement déterminée par la classe d'isotopie de la monodromie φ (voir [Thu86a]). Autrement dit, deux suspensions M_φ et M_ψ sont homéomorphes si, et seulement si, il existe $h \in \text{Homeo}_0(F)$ tel que $\varphi = \psi \circ h$ (i.e. φ et ψ appartiennent à une même composante connexe du groupe topologique $\text{Homeo}(F)$ muni de la topologie compacte-ouverte).

Définition 3.1.2. Une 3-variété compacte connexe M est dite *virtuellement fibrée sur le cercle* s'il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M homéomorphe à la suspension M_φ d'un homéomorphisme de surface compacte connexe orientable.

3.1.2 Revêtements d'une suspension

Dans ce paragraphe, nous introduisons un modèle pour le revêtement universel de M_φ et présentons également les revêtements finis de cette 3-variété.

3.1.2.1 Revêtement infini monogène

L'application quotient $\pi_\infty : F \times \mathbb{R} \rightarrow (F \times \mathbb{R})/\mathbb{Z} = M_\varphi$ est un revêtement galoisien, que nous appellerons *revêtement infini monogène* de M_φ .

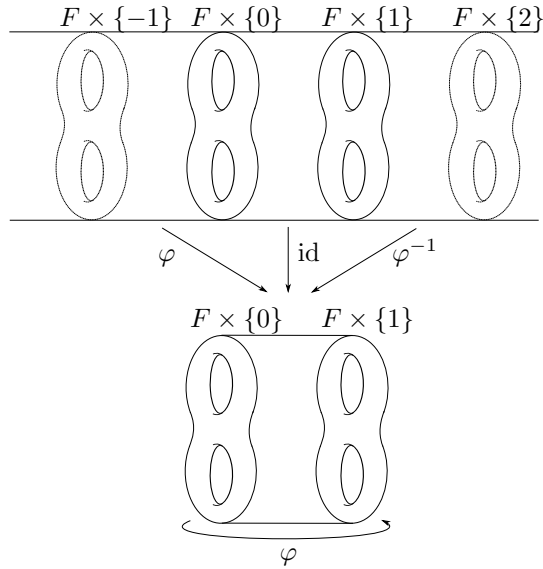


FIGURE 3.1.3 – Le revêtement infini monogène de M_φ .

Un des intérêts de ce revêtement infini monogène réside dans sa structure naturelle de produit, qui permet de définir un flot sur la suspension M_φ , par projection des droites naturelles du produit $F \times \mathbb{R}$.

Définition 3.1.3. Une *ligne de flot* de $F \times \mathbb{R}$ (resp. M_φ) est une partie de la forme $\mathcal{L}_x = \{x\} \times \mathbb{R} \subset F \times \mathbb{R}$ (resp. $\pi_\infty(\{x\} \times \mathbb{R}) \subset M_\varphi$) avec $x \in F$.

Une ligne de flot de M_φ est donc une sous-variété injectivement immergée de dimension 1, plongée et homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ si elle intersecte F en un point φ -périodique et homéomorphe à $\mathbb{R}$ sinon.

3.1.2.2 Revêtement universel

Introduisons un revêtement universel $\pi_F : \tilde{F} \rightarrow F$ de la fibre F . Alors la composée $\pi_M = \pi_\infty \circ (\pi_F \times \text{id}) : \tilde{F} \times \mathbb{R} \rightarrow M_\varphi$, est un modèle pour le revêtement universel de M_φ .

L'inclusion de la fibre $F = F \times \{0\} \hookrightarrow M_\varphi$ se relève alors en une inclusion $\tilde{F} = \tilde{F} \times \{0\} \hookrightarrow \tilde{F} \times \mathbb{R}$ permettant d'identifier le revêtement universel $\tilde{F}$ de la fibre F à la partie $\tilde{F} \times \{0\}$ de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$, au sens où $\pi_M|_{\tilde{F} \times \{0\}} = \pi_F$. On en déduit l'incompressibilité annoncée de la fibre.

Corollaire 3.1.4 (Fibre incompressible). *L'inclusion $F = F \times \{0\} \hookrightarrow M_\varphi$ est π_1 -injective.*

La structure produit permet à nouveau de définir des lignes de flot au revêtement universel.

Définition 3.1.5. Une *ligne de flot* du revêtement universel est une droite de la forme $\mathcal{L}_{\tilde{x}} = \{\tilde{x}\} \times \mathbb{R}$ avec $\tilde{x} \in \tilde{F}$, i.e. une composante connexe de l'image réciproque dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ d'une ligne de flot de $F \times \mathbb{R}$.

3.1.2.3 Revêtements cycliques

Nous présentons maintenant les revêtements finis évidents de M_φ obtenus en passant à un sous-groupe d'indice fini pour l'action de $\mathbb{Z}$ sur $F \times \mathbb{R}$ considérée. L'assertion suivante est claire.

Lemme 3.1.6 (Revêtements cycliques d'une suspension). *Le revêtement fini $(F \times \mathbb{R})/n\mathbb{Z}$ de M_φ est homéomorphe à la suspension M_{φ^n} de l'homéomorphisme $\varphi^n : F \rightarrow F$.*

Remarque Notons $\Pi_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ le revêtement de degré n défini par la relation $\Pi_n(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi nt}$, $\pi_n : M_{\varphi^n} \rightarrow M_\varphi$ le revêtement cyclique décrit ci-dessus et f_φ et f_{φ^n} les fibrations de M_φ et M_{φ^n} sur le cercle. Alors $\Pi_n \circ f_{\varphi^n} = f_\varphi \circ \pi_n$.

3.1.2.4 Revêtements finis de la fibre

Fixons un revêtement fini connexe $\hat{\pi} : \hat{F} \rightarrow F$, un entier $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et un relevé¹ $\psi : \hat{F} \rightarrow \hat{F}$ de φ^n à $\hat{F}$ (i.e. un homéomorphisme de $\hat{F}$ tel que $\hat{\pi} \circ \psi = \varphi^n \circ \hat{\pi}$).

Lemme 3.1.7 (Suspensions de relevés de puissances de la monodromie). *Le revêtement fini $\hat{\pi} \times \text{id} : \hat{F} \times \mathbb{R} \rightarrow F \times \mathbb{R}$ induit un revêtement fini $M_\psi \rightarrow M_{\varphi^n}$, donc M_ψ est un revêtement fini de M_φ .*

Proposition 3.1.8 (Revêtements finis d'une suspension). *Tout revêtement fini de M_φ est (homéomorphe à) la suspension d'un relevé d'une puissance non nulle de φ à un revêtement fini de F .*

3.1.3 Groupe fondamental d'une suspension

Fixons un point base $p \in F$, également utilisé comme point base de M_φ via l'inclusion $F \hookrightarrow M_\varphi$. Nous identifions classiquement le groupe fondamental $\pi_1(F) = \pi_1(F, p)$ au groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\pi_F)$ du revêtement universel de la fibre F ainsi que le groupe fondamental $\pi_1(M) = \pi_1(M_\varphi, p)$ au groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\pi_M)$ du revêtement universel de la suspension M_φ .

Suite exacte de fibration

1. Le revêtement galoisien π_∞ a par construction un groupe d'automorphismes égal à $\langle \gamma_\infty \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Le revêtement universel $\pi_F \times \text{id}$ de $F \times \mathbb{R}$ a pour groupe d'automorphisme $\text{Aut}(\pi_F)$ vu comme sous-groupe de $\text{Homeo}(\tilde{F} \times \mathbb{R})$ par adjonction de l'identité sur le facteur $\mathbb{R}$.
2. En conséquence, $\pi_1(F) = \text{Aut}(\pi_F)$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(M)$ et le groupe quotient $\pi_1(M)/\pi_1(F)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. La suite exacte $0 \rightarrow \pi_1(F) \hookrightarrow \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ est induite en homotopie par la fibration $F \hookrightarrow M_\varphi \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Sections du morphisme $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$

1. Pour tout relevé $\tilde{\varphi} : \tilde{F} \rightarrow \tilde{F}$ de φ à $\tilde{F}$, la transformation $\gamma(\tilde{\varphi}) : (\tilde{x}, t) \mapsto (\tilde{\varphi}(\tilde{x}), t + 1)$ relève l'automorphisme γ_∞ à $\text{Homeo}(\tilde{F} \times \mathbb{R})$.
2. Le groupe $\pi_1(M)$ est le produit semi-direct des sous-groupes $\pi_1(F)$ et $\langle \gamma(\tilde{\varphi}) \rangle$ de $\text{Homeo}(\tilde{F} \times \mathbb{R})$.

¹Pour tout revêtement fini $\hat{F} \rightarrow F$ de F , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que φ^n se relève à $\hat{F}$ (car $\pi_1(F)$ est un groupe de type fini et donc possède un nombre fini de sous-groupes d'indice fini fixé).

Présentation de $\pi_1(M)$ Supposons que le point base $p \in F$ est un point fixe de la monodromie, de sorte que φ induise un automorphisme φ_* du groupe fondamental $\pi_1(F)$ (cette hypothèse peut toujours être réalisée quitte à isotoper la monodromie).

1. Pour tout relevé $\tilde{\varphi} : \tilde{F} \rightarrow \tilde{F}$ de φ à $\tilde{F}$, on a la relation d'équivariance $\tilde{\varphi} \circ \sigma = \varphi_*(\sigma) \circ \tilde{\varphi}$ dans $\text{Homeo}(\tilde{F})$, pour tout $\sigma \in \pi_1(F)$. En conséquence, l'action par conjugaison de $\langle \gamma(\tilde{\varphi}) \rangle$ sur $\pi_1(F)$ réalise φ_* , i.e. $\gamma(\tilde{\varphi}) \circ \sigma \circ \gamma(\tilde{\varphi})^{-1} = \varphi_*(\sigma)$ dans $\text{Homeo}(\tilde{F} \times \mathbb{R})$, pour tout $\sigma \in \pi_1(F)$.
2. Le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est donc isomorphe au produit semi-direct $\pi_1(F) \rtimes_{\varphi_*} \mathbb{Z}$ associé à l'automorphisme $\varphi_* \in \text{Aut}(\pi_1(F))$. Il est donc également isomorphe au groupe de présentation $\langle \pi_1(F), \tau \mid \tau \sigma \tau^{-1} = \varphi_*(\sigma), \forall \sigma \in \pi_1(F) \rangle$, aussi appelé *extension HNN* de $\pi_1(F)$ par φ_* .

3.1.4 Action de $\pi_1(M)$ sur le revêtement universel $\tilde{F}$ de la fibre

Nous présentons enfin une vision bidimensionnelle du groupe $\pi_1(M)$ obtenue en identifiant ce groupe à celui des relevés des puissances de la monodromie opérant au revêtement universel de la fibre.

Hypothèse. Nous supposons dorénavant que φ est d'ordre infini dans le groupe $\text{Homeo}(F)$. Cette hypothèse a la conséquence immédiate suivante.

Lemme 3.1.9. *Soit $g \in \text{Homeo}(\tilde{F})$ un relevé d'une puissance de φ à $\tilde{F}$. Alors il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que g relève φ^n .*

À tout relevé g d'une puissance φ^n de la monodromie dans $\text{Homeo}(\tilde{F})$, on associe alors une transformation $\gamma(g) : (\tilde{x}, t) \mapsto (g(\tilde{x}), t + n) \in \text{Homeo}(\tilde{F} \times \mathbb{R})$ qui est un élément de $\pi_1(M)$. Réciproquement, le flot lié à la structure produit de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ permet, en oubliant la partie de translation d'un élément de $\pi_1(M)$, de définir un relevé d'une puissance de la monodromie opérant sur $\tilde{F}$.

Notation Nous noterons $\Phi : \tilde{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{F}$ la projection sur le premier facteur.

Si $g \in \pi_1(M)$, alors la transformation $g^\Phi : \tilde{x} \mapsto \Phi(g(\tilde{x}, 0))$ est un relevé d'une puissance de φ (car étant donné un relevé $\tilde{\varphi}$ de φ à $\tilde{F}$, g s'écrit sous la forme $g = \sigma \circ \gamma(\tilde{\varphi})^n$ et alors g^Φ relève φ^n).

Lemme 3.1.10. *Les applications $g \mapsto \gamma(g)$ et $g \mapsto g^\Phi$ sont des isomorphismes de groupes réciproques entre le groupe fondamental $\pi_1(M) = \text{Aut}(\pi_M)$ et le groupe des relevés des puissances de φ à $\tilde{F}$.*

On dit que les actions du groupe $\pi_1(M)$ sur $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ par automorphismes du revêtement universel et sur $\tilde{F}$ par relèvement des puissances de la monodromie sont *semi-conjuguées* par la projection $\Phi : \tilde{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{F}$ associée au flot de la suspension.

Quelques sous-groupes de $\pi_1(M)$

1. L'application d'oubli de la partie de translation $g \mapsto g^\Phi$ induit l'identité sur le groupe fondamental de la fibre, i.e. $\sigma^\Phi = \sigma$ pour tout $\sigma \in \pi_1(F)$ et $\pi_1(F)$ est le groupe des relevés dans $\tilde{F}$ de $\varphi^0 = \text{id}$, i.e. le groupe d'automorphismes du revêtement universel de la fibre.
2. Pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, le sous-groupe $\{g^\Phi \mid g \in \pi_1(M_{\varphi^n})\}$ est le groupe des relevés dans $\tilde{F}$ des puissances de φ^n .
3. Plus généralement, si $\psi : \hat{F} \rightarrow \hat{F}$ est un relevé d'une puissance de φ dans un revêtement fini $\hat{F}$ de F , alors le sous-groupe $\{g^\Phi \mid g \in \pi_1(M_\psi)\}$ est le groupe des relevés à $\tilde{F}$ des puissances de ψ .

Remarque On peut d'ores et déjà exhiber une différence majeure entre les actions de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ par automorphismes de revêtement et sur $\tilde{F}$ par relèvement des puissances de la monodromie. Supposons par exemple que φ possède un point périodique dans F . Alors il existe un relevé d'une puissance de φ à $\tilde{F}$ qui possède un point fixe dans $\tilde{F}$. Ainsi, $\pi_1(M)$ n'agit pas librement sur $\tilde{F}$, par opposition au fait que $\pi_1(M)$ agit librement sur $\tilde{F} \times \mathbb{R}$. On peut penser qu'il s'agit là du prix à payer pour passer d'un modèle tridimensionnel à un modèle bidimensionnel pour ce groupe.

Pour conclure, remarquons que les notions exposées n'utilisent jamais le fait que la fibre F est une surface. Celle-ci peut donc partout être remplacée par un espace topologique X pas trop pathologique, i.e. admettant un revêtement connexe et simplement connexe par exemple. Pour l'étude à suivre de la géométrie de ces suspensions en revanche, nous utiliserons le fait que la fibre est une surface.

3.2 Hyperbolisation et bord à l'infini

Le théorème de géométrisation de Thurston-Perelman (voir [Thu82] ou [Boi] pour un aperçu) démontre que toute 3-variété compacte peut être décomposée canoniquement en morceaux modelés sur l'une des huit structures géométriques de dimension 3 : $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Nil, Sol ou $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$.

Les travaux de W. Thurston sur les surfaces (voir [FLP⁺79]) permettent de comprendre quelles suspensions admettent une structure hyperbolique (on pourra consulter [Thu86a] ou [Ota96]).

Remarques sur le genre de la fibre

1. Une suspension de fibre $F = \mathbb{S}^2$ n'est pas irréductible. Or toute 3-variété hyperbolique compacte M est irréductible, i.e. tout plongement $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow M$ s'étend en un plongement $\mathbb{B}^3 \hookrightarrow M$.
2. Lorsque la fibre F d'une suspension M_φ est le tore $\mathbb{T}^2$, l'incompressibilité de la fibre garantit que $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2)$, donc n'est pas hyperbolique au sens de Gromov et n'est donc pas isomorphe à un réseau uniforme de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Hypothèse. On supposera désormais que F est une *surface hyperbolique*, i.e. une surface connexe compacte orientable de genre $g \geq 2$ munie d'une métrique riemannienne à courbure -1 .

3.2.1 Présentation du théorème d'hyperbolisation

La classe d'isomorphisme du groupe fondamental d'une suspension M_φ ne dépendant que de la classe d'isotopie de φ dans $\mathrm{Homeo}_+(F)$, le problème de la géométrisation de ces suspensions a historiquement conduit W. Thurston à développer naturellement une classification des homéomorphismes de surfaces hyperboliques à isotopie près. Dans cette classification, trois cas émergent, dont la classe des homéomorphismes dits pseudo-Anosov, généralisant la notion d'homéomorphismes d'Anosov du tore $\mathbb{T}^2$ et intimement liés à l'existence d'une structure hyperbolique sur une suspension.

Théorème 3.2.1 (Classification de Nielsen-Thurston) (voir [CB88] ou [Thu86a]). *Tout homéomorphisme d'une surface compacte de genre $g \geq 2$ non-isotope à un homéomorphisme périodique ou réductible est isotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov², au sens des définitions suivantes :*

- (i) Un homéomorphisme d'une surface F est dit *périodique* s'il est d'ordre fini dans $\mathrm{Homeo}(F)$.
- (ii) Un homéomorphisme φ d'une surface F est dit *réductible* s'il permute une famille finie non vide de courbes fermées simples non homotopes à 0 et deux à deux disjointes.
- (iii) Un homéomorphisme φ d'une surface F est dit *pseudo-Anosov* s'il existe sur F deux feuilletages (voir les définitions au paragraphe suivant) singuliers transverses et transversalement mesurés $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ et un nombre réel $\lambda > 1$ tels que φ préserve $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ et multiplie les mesures transverses en rapport inverse, i.e. $\varphi(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda\mu^s)$ et $\varphi(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda^{-1}\mu^u)$. Les feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont appelés les feuilletages *stable* et *instable* associés à φ et le nombre λ est la *dilatation* de φ .

Géométrisation pour les suspensions d'homéomorphismes périodiques ou réductibles

1. Lorsque φ est un homéomorphisme périodique de la fibre F , la suspension M_φ admet une structure géométrique modelée sur le produit $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.
2. Lorsque φ est un homéomorphisme réductible de la fibre F , la suspension M_φ possède un tore plongé incompressible et doit être découpée en morceaux admettant des structures géométriques.

Géométrisation pour les suspensions d'homéomorphismes pseudo-Anosov

Théorème 3.2.2 (Théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées) (voir [Thu86a], [Ota96] ou [Kap01]). *Soit F une surface hyperbolique et $\varphi \in \mathrm{Homeo}(F)$ un homéomorphisme pseudo-Anosov. Alors la suspension M_φ admet une métrique riemannienne à courbure sectionnelle -1 .*

Une 3-variété hyperbolique compacte (connexe et orientable) M est donc *virtuellement fibrée sur le cercle* s'il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M tel que $\widehat{M}$ soit homéomorphe à la suspension M_φ d'un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface compacte connexe orientable de genre $g \geq 2$.

²De plus, un homéomorphisme isotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov ne peut être ni périodique ni réductible.

3.2.2 Feuilletages transverses et transversalement mesurés

Nous présentons maintenant quelques propriétés générales des homéomorphismes pseudo-Anosov et des feuilletages qui les caractérisent.

Notation Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\omega_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'élévation à la puissance n .
 $z \longmapsto z^n$

Définition 3.2.3. Pour $k \geq 3$, on appelle *singularité verticale (resp. horizontale) d'ordre k* la partition de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ en feuilles de la forme $\mathcal{D}^{2/k}$, où $\mathcal{D}$ est une droite affine verticale (resp. horizontale) arbitraire de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{D}^{2/k} = \omega_k^{-1}(\omega_2(\mathcal{D}))$.

Définition 3.2.4. Un *feuilletage (topologique) singulier* $\mathcal{F}$ sur une surface compacte F est la donnée d'un ensemble fini de *points singuliers* $\Sigma \subset F$ et d'une partition de $F \setminus \Sigma$ en sous-ensembles appelés *feuilles* tels que :

- (i) pour tout $x \in F \setminus \Sigma$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $F \setminus \Sigma$ et une carte³ $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que la partition de U induite par les feuilles de $\mathcal{F}$ ait pour image par ϕ la partition de $\phi(U) \subset \mathbb{R}^2$ en droites verticales,
- (ii) pour tout $x \in \Sigma$, il existe $k \geq 3$, un voisinage ouvert U de x dans F et une carte $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\phi(x) = 0$ telle que la partition de U induite par les feuilles de $\mathcal{F}$ ait pour image par ϕ la partition de $\phi(U) \subset \mathbb{R}^2$ induite par la singularité verticale d'ordre k .

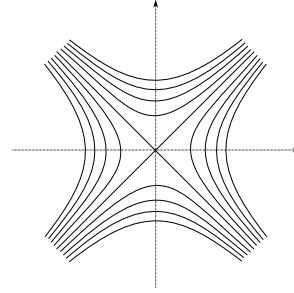
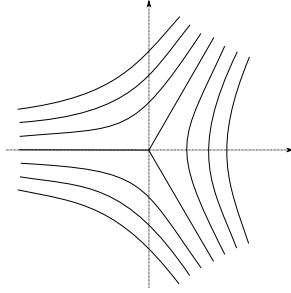


FIGURE 3.2.1 – Singularité verticale d'ordre 3. FIGURE 3.2.2 – Singularité verticale d'ordre 4.

Les feuilletages singuliers possèdent donc deux types de feuilles ℓ , celles *régulières* vérifiant la condition $\ell \cap \Sigma = \emptyset$ et celles *singulières* pour lesquelles au contraire $\ell \cap \Sigma \neq \emptyset$.

Définition 3.2.5. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier sur F . Une *mesure transverse* sur $\mathcal{F}$ est la donnée, pour tout arc plongé $\alpha : [0, 1] \hookrightarrow F$ transverse à $\mathcal{F}$ d'une mesure borélienne μ_α sur $\alpha([0, 1])$, de support total et non-atomique, telle que :

- (i) Pour tout arc $\beta \subset \alpha$, μ_β soit la restriction de μ_α à (l'ensemble des boréliens de l'image de) β ,
- (ii) Si $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow F$ sont deux arcs transverses à $\mathcal{F}$ et homotopes relativement aux feuilles de $\mathcal{F}$ (i.e. par une homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow F$ telle que $H(0, \cdot) = \alpha$, $H(1, \cdot) = \beta$ et telle qu'il existe ℓ, ℓ' feuilles de $\mathcal{F}$ avec $H(\cdot, 0) \in \ell$ et $H(\cdot, 1) \in \ell'$, avec de plus $H(0, s)$ et $H(1, s)$ appartenant à une même feuille pour tout $s \in [0, 1]$), alors $\mu_\beta = h_*(\mu_\alpha)$ où $h : \alpha([0, 1]) \rightarrow \beta([0, 1])$ est définie par $h(\alpha(t)) = \beta(t)$.

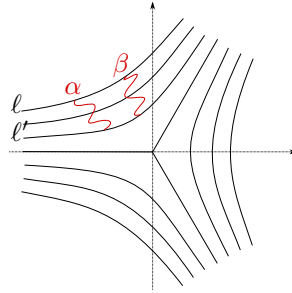


FIGURE 3.2.3 – Arcs transverses au feuilletage et homotopes le long de feuilles régulières.

Un *feuilletage transversalement mesuré* sur F est un feuilletage singulier muni d'une mesure transverse.

³Une carte est ici à prendre au sens topologique, i.e. un homéomorphisme local.

Définition 3.2.6. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux feuilletages singuliers sur F . On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont *transverses* s'ils possèdent le même ensemble de point singuliers $\Sigma \subset F$ et si :

- (i) pour tout $x \in F \setminus \Sigma$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $F \setminus \Sigma$ et une carte $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que la partition de U induite par les feuilles de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) soit envoyée sur la partition de $\phi(U) \subset \mathbb{R}^2$ en droites verticales (resp. horizontales),
- (ii) pour tout $x \in \Sigma$, il existe $k \geq 3$, un voisinage ouvert U de x dans F et une carte $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\phi(x) = 0$ telle que la partition de U induite par les feuilles de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) soit envoyée sur la partition de $\phi(U) \subset \mathbb{R}^2$ induite par la singularité verticale (resp. horizontale) d'ordre k .

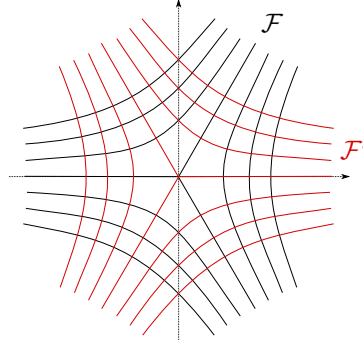


FIGURE 3.2.4 – Transversalité locale au voisinage d'une singularité d'ordre 3.

Définition 3.2.7. Un homéomorphisme $\varphi : F \rightarrow F$ est dit *pseudo-Anosov* s'il existe un couple $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ de feuilletages singuliers transverses et transversalement mesurés sur F dont les feuilles sont permutées par φ et un nombre $\lambda > 1$, tels que, $\varphi(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda\mu^s)$ et $\varphi(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda^{-1}\mu^u)$. Autrement dit, pour tout arc $\alpha : [0, 1] \rightarrow F$ transverse à $\mathcal{F}^s$ (resp. $\mathcal{F}^u$), on a la relation $\mu_{\varphi(\alpha)}^s = \lambda\varphi_*(\mu_\alpha^s)$ (resp. $\mu_{\varphi(\alpha)}^u = \lambda^{-1}\varphi_*(\mu_\alpha^u)$).

Un exemple d'homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface de genre 2 obtenu par un revêtement ramifié du tore $\mathbb{T}^2$ et un relèvement d'un difféomorphisme d'Anosov est décrit page 273 de [Kap01].

3.2.3 Géométrie localement euclidienne à singularités sur la fibre

Nous expliquons maintenant comment la donnée d'un homéomorphisme pseudo-Anosov φ et des feuilletages $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ permet de munir le revêtement universel $\tilde{F}$ de la fibre d'une structure métrique CAT(0), localement euclidienne en dehors de singularités isolées et hyperbolique au sens de Gromov (pour plus de détails, on pourra consulter [CT07] ou l'appendice de [CLR94]).

Une métrique riemannienne à singularités sur la fibre F

Rappelons que φ préserve globalement les feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ tout en dilatant les mesures transverses dont sont équipés ces feuilletages. Plus précisément, si $\alpha \subset F$ est un arc transverse au feuilletage stable $\mathcal{F}^s$ (par exemple un arc contenu dans une feuille de $\mathcal{F}^u$), alors $\mu^s(\varphi(\alpha)) = \lambda\mu^s(\alpha)$. Ceci signifie en particulier que φ dilate les feuilles instables du facteur $\lambda > 1$ (et également contracte les feuilles stables de ce même facteur).

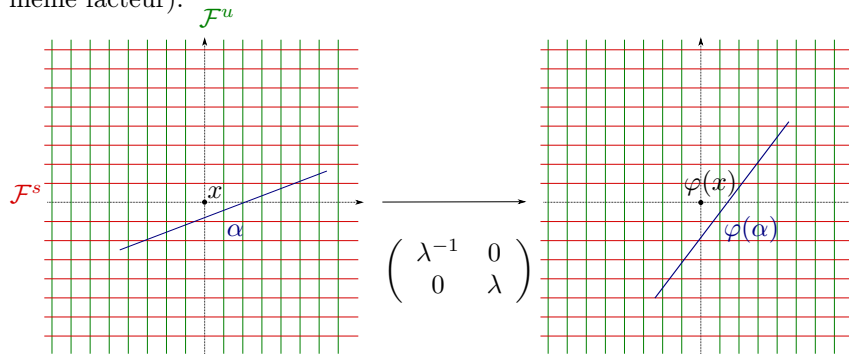


FIGURE 3.2.5 – Action locale de φ sur $F \setminus \text{Sing}$ vue dans une carte.

Les feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ définissent des coordonnées locales euclidiennes (x, y) sur le complémentaire dans F de l'ensemble fini $\text{Sing} \subset F$ des singularités communes aux deux feuilletages. Nous supposons que x est constante le long des feuilles de $\mathcal{F}^u$, tandis que y est constante le long des feuilles de $\mathcal{F}^s$. La mesure μ^s coïncide alors localement avec dy , tandis que μ^u s'identifie localement à dx . L'action de φ sur F est donc donnée localement, dans les coordonnées locales associées aux feuilletages au voisinage d'un point régulier et de son image, par la matrice $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

On peut donc définir sur $F \setminus \text{Sing}$ une métrique riemannienne localement euclidienne par la formule $dt^2 = dx^2 + dy^2$. Cette métrique admet une complétion à la surface F qui est une métrique riemannienne complète avec un nombre fini de singularités isolées.

Une métrique riemannienne à singularités sur le revêtement universel $\tilde{F}$ de la fibre

On relève alors dt en une métrique riemannienne complète à singularités, toujours notée dt , sur le revêtement universel $\tilde{F}$ de F de sorte que la projection $\pi_F : \tilde{F} \rightarrow F$ soit une isométrie locale. En dehors de l'ensemble $\pi_F^{-1}(\text{Sing})$ des relevés dans $\tilde{F}$ des points singuliers, cette métrique est à nouveau donnée par la formule $dt^2 = dx^2 + dy^2$, où (x, y) sont les coordonnées euclidiennes locales associées aux relevés des feuilletages transverses et transversalement mesurés $(\tilde{\mathcal{F}}^s, \tilde{\mu}^s)$ et $(\tilde{\mathcal{F}}^u, \tilde{\mu}^u)$ obtenus par relèvement des feuilletages mesurés $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ dans $\tilde{F}$.

Lemme 3.2.8 (Distance géodésique CAT(0)). *La distance de longueur associée à la complétion de la métrique $dt^2 = dx^2 + dy^2$ définie sur $\tilde{F} \setminus \pi_F^{-1}(\text{Sing})$ est une distance géodésique et CAT(0) sur $\tilde{F}$.*

Démonstration. Les singularités des feuilletages ayant au moins $k \geq 3$ branches, les angles coniques $(k-1)\pi$ en ces points singuliers sont supérieurs ou égaux à 2π , donc l'espace métrique $\tilde{F}$ ainsi construit est à courbure négative ou nulle. $\square$

Les géodésiques locales de $(\tilde{F} \setminus \pi_F^{-1}(\text{Sing}), dt)$ sont les géodésiques euclidiennes. Tout segment (resp. rayon, droite) contenu dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ est donc un segment (resp. rayon, droite) géodésique.

Analogie avec les complexes carrés CAT(0)

L'observation du revêtement universel $\tilde{F}$ de F muni des feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ met en évidence une structure de complexe carré CAT(0). De tels carrés sont apparents dans un voisinage modèle d'un point régulier ou singulier. Ces singularités étant isolées à distance minorée par une constante $\varepsilon_0 > 0$, on peut discrétiser l'espace à l'aide de carrés de taille comparable à ε_0 dont les côtés sont des segments alternativement contenus dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou bien une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ (et de manière $\pi_1(F)$ -invariante). On voit alors émerger l'image d'une structure de complexe carré CAT(0) pour $\tilde{F}$, chaque sommet appartenant à au moins quatre carrés. Cette structure est bien visible sur la figure 3.2.4.

On pourra garder en tête cette vision carrée CAT(0) du revêtement universel $\tilde{F}$ de F , qui peut éclairer sous un angle nouveau nombre des résultats que nous proposerons aux chapitres suivants.

3.2.4 Géométrie à grande échelle de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$

Pour étudier le bord d'une 3-variété hyperbolique compacte fibrée sur le cercle, J. Cannon et W. Thurston construisent à l'aide des feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ une distance géodésique quasi-isométrique à la distance hyperbolique sur le produit $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ (voir à nouveau [CT07] et [CLR94]).

Pour des études plus proches de la théorie géométrique des groupes de la géométrie du bord de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$, on pourra également consulter à profit les articles [BF92], [Mit98a] et [Mit98b].

Construction d'une métrique riemannienne à singularités sur $\tilde{F} \times \mathbb{R}$

La surface ouverte $F \setminus \text{Sing}$ est munie de coordonnées locales euclidiennes (x, y) provenant des feuilletages mesurés $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$. Sur le produit $(F \setminus \text{Sing}) \times \mathbb{R}$, muni d'une coordonnée globale z sur le facteur $\mathbb{R}$, on définit une métrique riemannienne par la formule :

$$ds^2 = \lambda^{2z} dx^2 + \lambda^{-2z} dy^2 + dz^2.$$

Cette métrique admet une complétion à $F \times \mathbb{R}$ qui est une métrique riemannienne complète à singularités pour laquelle l'action de $\mathbb{Z}$ définie sur $F \times \mathbb{R}$ au paragraphe 3.1.1 est une action par isométries.

Corollaire 3.2.9 (Métrique singulière de M_φ). *La métrique ds définie ci-dessus induit sur le quotient $M_\varphi = (F \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ une métrique riemannienne complète à singularités, encore notée ds .*

Enfin, la métrique ds (de $F \times \mathbb{R}$ ou de M_φ) se relève au revêtement universel $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ en une métrique riemannienne complète à singularités, qui sera également notée ds . Notant (x, y) les coordonnées euclidiennes locales associées aux feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ et z la coordonnée globale de $\mathbb{R}$ dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ relevant celle définie pour $F \times \mathbb{R}$, alors la métrique ds est donnée sur $(\tilde{F} \setminus \pi_F^{-1}(\text{Sing})) \times \mathbb{R}$ par la même formule :

$$ds^2 = \lambda^{2z} dx^2 + \lambda^{-2z} dy^2 + dz^2.$$

Propriétés à grande échelle de la géométrie de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$

Nous mettons en évidence quelques propriétés de convexité de l'espace métrique $(\tilde{F} \times \mathbb{R}, ds)$, en vue de l'étude du bord hyperbolique de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ au paragraphe suivant.

Lemme 3.2.10. *Les lignes de flot $\{\tilde{x}\} \times \mathbb{R}$ sont des géodésiques du revêtement universel $(\tilde{F} \times \mathbb{R}, ds)$.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe de la formule $ds^2 = \lambda^{2z} dx^2 + \lambda^{-2z} dy^2 + dz^2$ (au moins pour les lignes de flot ne passant pas par un point singulier). $\square$

En particulier, on en déduit que pour un point $q = (\tilde{x}, t) \in \tilde{F} \times \mathbb{R}$, on a l'égalité $d(q, \tilde{F}) = t$. Les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ permettent ensuite de mettre en évidence d'autres parties convexes de $(\tilde{F} \times \mathbb{R}, ds)$.

Proposition 3.2.11 (Hyperplans totalement géodésiques isométriques à $\mathbb{H}^2$). *Soit ℓ une droite topologique (i.e. une copie proprement plongée de $\mathbb{R}$) contenue dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$. Alors :*

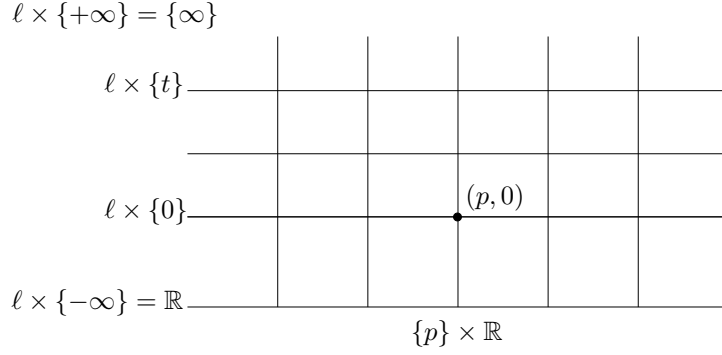
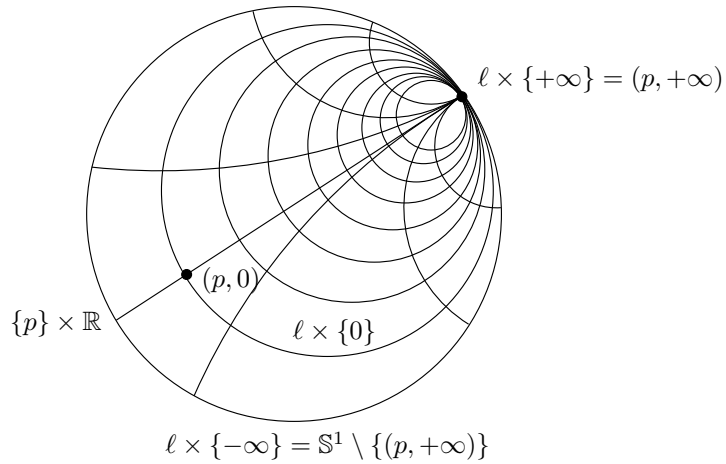
1. *Le plan topologique $\ell \times \mathbb{R}$ est une partie géodésiquement convexe de $(\tilde{F} \times \mathbb{R}, ds)$, dont le complémentaire dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ possède deux composantes connexes également géodésiquement convexes.*
2. *Le plan $(\ell \times \mathbb{R}, ds)$ est isométrique à un plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ de courbure $\kappa = -\ln(\lambda)$.*
3. *Les droites topologiques $\ell \times \{t\}$ pour $t \in \mathbb{R}$ fixé sont des horocycles basés en un même point p_∞ du bord de $\ell \times \mathbb{R}$.*
4. *Les lignes de flot $\{p\} \times \mathbb{R}$ avec $p \in \ell$ sont les géodésiques issues du point à l'infini p_∞ .*

Démonstration. 1. Puisque dt est à courbure négative ou nulle, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{F}$, il existe un unique segment géodésique reliant $\tilde{x}$ à un point de ℓ qui soit orthogonal à ℓ . On dispose donc d'une application de projection orthogonale $p_\ell : \tilde{F} \rightarrow \ell$ qui est 1-Lipschitzienne pour la métrique dt . On étend alors cette projection au produit $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ pour obtenir une application $p_\ell : \tilde{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \ell \times \mathbb{R}$, dont on peut vérifier à l'aide de la formule $ds^2 = \lambda^{2z} dx^2 + \lambda^{-2z} dy^2 + dz^2$ qu'elle est également 1-Lipschitzienne. On en déduit donc que le plus court chemin entre deux points de $\ell \times \mathbb{R}$ est contenu dans $\ell \times \mathbb{R}$.

2. Supposons que ℓ est une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ (i.e. de coordonnée x constante). La métrique ds est donc définie sur le plan $\ell \times \mathbb{R}$ par la formule $ds^2 = \lambda^{-2z} dy^2 + dz^2$. On change de paramétrage pour ce plan via le changement de coordonnées $(y, t) \mapsto (y', z')$ avec $y' = \ln(\lambda)y$ et $z' = \lambda^z$. Alors $dy = \frac{dy'}{\ln(\lambda)}$ et $dz = \frac{dz'}{\ln(\lambda)z'}$ de sorte que $ds^2 = \frac{dy'^2 + dz'^2}{\ln(\lambda)z'^2}$. On reconnaît donc (le modèle du demi-plan de Poincaré d') un plan hyperbolique de courbure $-\ln(\lambda) < 0$.

3. Les horocycles issus du point $\{\infty\}$ de ce plan hyperbolique sont les droites de coordonnée $z' = \lambda^z$ constante, i.e. les droites de la forme $\ell \times \{t\}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
4. Les géodésiques issues du point $\{\infty\}$ sont les droites de coordonnée $y' = \ln(\lambda)y$ constante, i.e. les lignes de flot $\{p\} \times \mathbb{R}$ avec $p \in \ell$. $\square$

Remarque On peut également définir ds par la formule $ds^2 = \lambda^{2z} dx^2 + \lambda^{-2z} dy^2 + (\ln \lambda)^2 dz^2$ pour que les hyperplans $\ell \times \mathbb{R}$ soient normalisés à courbure -1 .

FIGURE 3.2.6 – Le plan hyperbolique $\ell \times \mathbb{R}$ dans le modèle du demi-plan.FIGURE 3.2.7 – Le plan hyperbolique $\ell \times \mathbb{R}$ dans le modèle du disque.

Les horocycles et géodésiques issus du point à l'infini du modèle du demi-plan permettent donc de comprendre le bord à l'infini des plans $\ell \times \mathbb{R}$ dans la compactification $(\tilde{F} \cup \partial_\infty \tilde{F}) \times [-\infty, +\infty]$ de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$.

Corollaire 3.2.12 (Cercle à l'infini de $\ell \times \mathbb{R}$). *Soit ℓ une droite topologique contenue dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et d'extrémités $p, q \in \partial_\infty \tilde{F}$. Alors :*

1. *Les demi-lignes de flot $\{\tilde{x}\} \times \mathbb{R}^-$ sont des rayons géodésiques asymptotes.*
2. *Pour un rayon $r \subset \ell$ et $t, s \in \mathbb{R}$, les rayons horocycliques $r \times \{t\}$ et $r \times \{s\}$ sont asymptotes.*
3. *Soit $\mathcal{C}_\ell$ le cercle topologique $(\ell \times \{-\infty, +\infty\}) \cup (\{p, q\} \times [-\infty, +\infty])$. Alors $\mathcal{C}_\ell$ se surjecte sur le bord $\partial_\infty(\ell \times \mathbb{R})$ avec pour fibres les points de $\ell \times \{-\infty\}$ et l'arc de cercle $(\ell \times \{+\infty\}) \cup (\{p, q\} \times [-\infty, +\infty])$.*

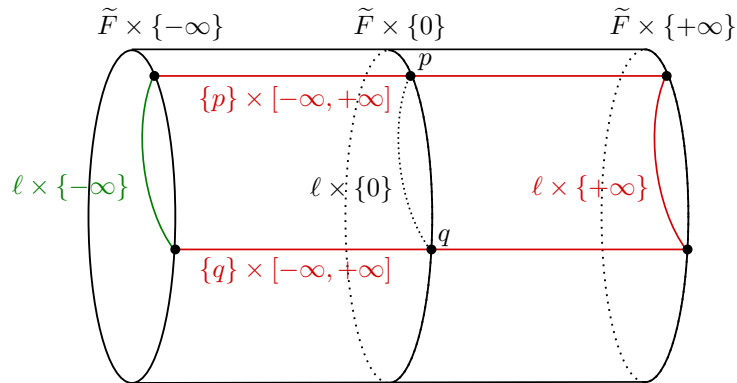


FIGURE 3.2.8 – Lorsque ℓ est une droite contenue dans une feuille instable d'extrémités $p, q \in \partial_\infty \tilde{F}$, le cercle à l'infini du plan hyperbolique $\ell \times \mathbb{R}$ est formé de l'arc $\ell \times \{-\infty\}$ et d'un unique point obtenu en écrasant l'arc $(\ell \times \{+\infty\}) \cup (\{p, q\} \times [-\infty, +\infty])$.

3.2.5 Application de Cannon-Thurston

Nous présentons enfin l'application de Cannon-Thurston (voir à nouveau [CT07], [Mit98a] et [Mit98b]) qui permet de paramétrer le bord hyperbolique du revêtement universel $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ de M_φ par celui du revêtement universel $\tilde{F}$ de la fibre F .

On considère les compactifications $\overline{F} = \tilde{F} \sqcup \partial_\infty \tilde{F}$ et $\overline{M}_\varphi = \widetilde{M}_\varphi \sqcup \partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$ des variétés hyperboliques F et M_φ par les classes d'équivalences de rayons géodésiques⁴ pour la relation de distance de Hausdorff finie, munies de la topologie usuelle. Les actions par isométries de $\pi_1(F)$ sur $\tilde{F}$ et de $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}_\varphi$ s'étendent alors en des actions par homéomorphismes conformes sur $\overline{F}$ et $\overline{M}_\varphi$ (voir [GdLH90]).

Théorème 3.2.13 (Existence de l'application de Cannon-Thurston ([CT07], section 4)). *L'inclusion $F \hookrightarrow M_\varphi$ se relève en un plongement $\tilde{F} \hookrightarrow \widetilde{M}_\varphi$ qui admet un prolongement continu et $\pi_1(F)$ -équivariant $\tilde{F} \rightarrow \widetilde{M}_\varphi$ appelé application de Cannon-Thurston de la suspension M_φ .*

Notation Notons $CT : \partial_\infty \tilde{F} \rightarrow \partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$ la restriction de l'application de Cannon-Thurston à $\partial_\infty \tilde{F}$.

Défaut d'injectivité de l'application de Cannon-Thurston

Remarquons que, bien que le plongement $\tilde{F} \hookrightarrow \tilde{F} \times \mathbb{R}$ relevant l'inclusion de la fibre soit injectif, il n'en est rien pour l'application de Cannon-Thurston qui étend ce plongement.

En effet, le sous-groupe $\pi_1(F)$ est un sous-groupe normal infini du groupe hyperbolique $\pi_1(M)$. L'ensemble limite de $\pi_1(F)$ agissant sur $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$ est donc égal à la sphère $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi \simeq \mathbb{S}^2$ toute entière.

Plus précisément, la proposition 3.2.11 impose des identifications entre les extrémités de feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ (utiliser un argument de transitivité pour le cas des feuilles singulières).

Lemme 3.2.14 (Identification des extrémités d'une feuille). *Soit ℓ une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$. Alors les extrémités de ℓ dans $\partial_\infty \tilde{F}$ sont identifiées par l'application de Cannon-Thurston.*

Le lemme 3.2.14 caractérise en fait les fibres de l'application de Cannon-Thurston (rappelons que deux feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ distinctes n'ont aucune extrémité en commun dans $\tilde{F}$, voir [CB88]).

Théorème 3.2.15 (Structure de l'application de Cannon-Thurston (voir [CT07], section 15)). *L'application de Cannon-Thurston $CT : \partial_\infty \tilde{F} \rightarrow \partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$ est continue surjective à fibres finies (de cardinaux uniformément majorés). De plus, deux points de $\partial_\infty \tilde{F}$ ont même image par CT si, et seulement si, ils sont adhérents dans $\tilde{F}$ à une même feuille (régulière ou singulière) de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou de $\tilde{\mathcal{F}}^u$.*

La relation d'équivalence sur le cercle $\partial_\infty \tilde{F}$ induite par les fibres de l'application de Cannon-Thurston définit donc une courbe de Peano paramétrant la sphère $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$ de manière $\pi_1(F)$ -invariante.

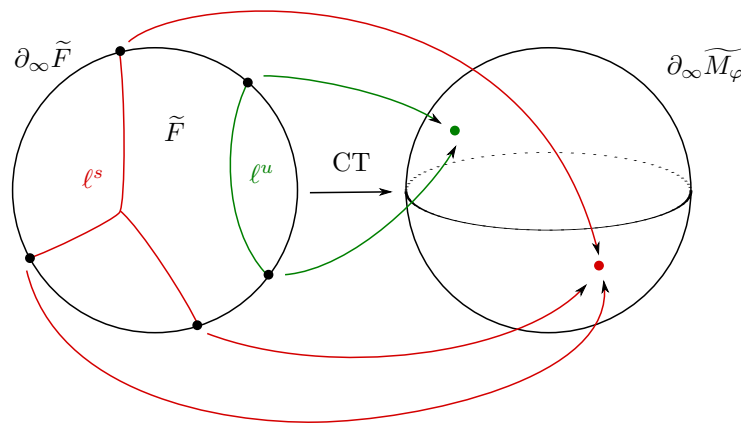


FIGURE 3.2.9 – Fibres non-punctuelles de l'application de Cannon-Thurston.

Définition 3.2.16. Un point $p \in \partial_\infty \tilde{F}$ sera dit *CT-injectif* si $CT^{-1}(\{CT(p)\}) = \{p\}$.

L'ensemble des points CT-injectifs est un G_δ dense de $\partial_\infty \tilde{F}$. Il est formé des points de $\partial_\infty \tilde{F}$ qui ne sont extrémité d'aucune feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$.

⁴Comme les espaces métriques $(\tilde{F}, dt)$ et $(\tilde{F} \times \mathbb{R}, ds)$ sont quasi-isométriques à $\mathbb{H}^2$ et $\mathbb{H}^3$ respectivement, on peut indifféremment considérer les distances dt et ds ou bien les distances provenant des métriques hyperboliques.

Chapitre 4

Surfaces coupées-croisées des 3-variétés fibrées sur le cercle

Sommaire

4.1 Surfaces coupées-croisées et quasi-convexité	70
4.1.1 Construction des surfaces coupées-croisées	70
4.1.2 Le polygone idéal $P(\tilde{S}) = \overline{\Phi(\tilde{S})}$	72
4.1.3 Ensemble limite isométrique et critère de quasi-convexité	73
4.2 Ensembles limites des surfaces coupées-croisées quasi-convexes	75
4.2.1 Paramétrisation de $\Lambda(\pi_1(S))$ par l'ensemble limite isométrique	75
4.2.2 Points identifiés dans l'ensemble limite isométrique	76
4.2.3 Image réciproque de $\Lambda(\pi_1(S))$ par l'application de Cannon-Thurston	76
4.2.4 Séparation de paires de points de $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$ par $\Lambda(\pi_1(S))$	81

4.1 Surfaces coupées-croisées et quasi-convexité

Ce chapitre a pour but l'exposition d'une partie de l'article *Bundles and Finite Foliations* de D. Cooper, D. Long et A. Reid sur les immersions incompressibles de surfaces dans les variétés fibrées M_φ qui sont partout transverses au flot (voir [CLR94] et [CLR97]). Suivant ces auteurs, nous décrivons une classe d'exemples de telles immersions, appelées surfaces coupées-croisées, avant de présenter un critère de quasi-convexité de ces surfaces et d'étudier leur ensemble limite au bord de M_φ , via l'application de Cannon-Thurston introduite au chapitre précédent. Nous dégagerons en particulier un énoncé original de séparation de paires de points du bord de $\bar{M}_\varphi$ à l'aide d'un ensemble limite de surface coupée-croisée quasi-convexe qui sera l'outil essentiel pour la cubulation de M_φ au chapitre suivant.

4.1.1 Construction des surfaces coupées-croisées

Considérons une surface F compacte connexe orientable de genre $g \geq 2$ ainsi qu'un homéomorphisme pseudo-Anosov $\varphi \in \text{Homeo}_+(F)$. Suivant D. Cooper, D. Long et A. Reid, nous expliquons comment découper puis recoller la fibre F de manière à obtenir des immersions incompressibles de surfaces dans la 3-variété fibrée M_φ , de manière partout transverse au flot (les notations de ce paragraphe nous suivront tout au long de ce mémoire).

Hypothèse. On considère une courbe fermée simple essentielle¹ $c \subset F$ telle que $c \cap \varphi(c) = \emptyset$.

Fixons un voisinage régulier ouvert² $\mathcal{V} \subset F$ de c disjoint de $\varphi(\mathcal{V})$ et notons c^- et c^+ les composantes de frontière de $\mathcal{V}$. Définissons alors la surface à bord compacte $F_c = F \setminus (\mathcal{V} \sqcup \varphi(\mathcal{V}))$ dont les quatre composantes de bord sont les courbes $c^-, c^+, \varphi(c^-)$ et $\varphi(c^+)$.

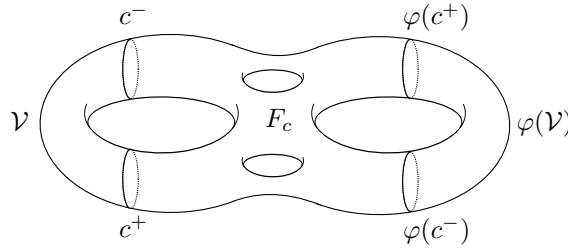


FIGURE 4.1.1 – Découpe de la fibre F le long d'une courbe c disjointe de $\varphi(c)$.

Paramétrisons l'anneau compact $\overline{\varphi(\mathcal{V})}$ sous la forme $[-1, 1] \times \mathbb{S}^1$. Dans $\varphi(\mathcal{V}) \times [0, 1] \subset F \times \mathbb{R}$, nous définissons deux anneaux plongés obtenus par double dérive linéaire des composantes de bord de $\varphi(\mathcal{V})$, simultanément de ∓ 1 à ± 1 dans ce voisinage et de 0 à 1 sur le facteur $[0, 1]$.

On considère le sous-espace plongé $A = \{((s, x), \frac{1+s}{2}) \mid (s, x) \in [-1, 1] \times \mathbb{S}^1\} \subset F \times \mathbb{R}$. Son image dans M_φ est un anneau plongé reliant les courbes $\varphi(c^-) \subset F \times \{0\}$ et $\varphi(c^+) \subset F \times \{1\} \sim_\varphi c^+ \subset F \times \{0\}$.

On définit de même $A' = \{((s, x), \frac{1-s}{2}) \mid (s, x) \in [-1, 1] \times \mathbb{S}^1\} \subset F \times \mathbb{R}$, d'image dans M_φ un anneau plongé reliant les courbes $\varphi(c^+) \subset F \times \{0\}$ et $\varphi(c^-) \subset F \times \{1\} \sim_\varphi c^- \subset F \times \{0\}$.

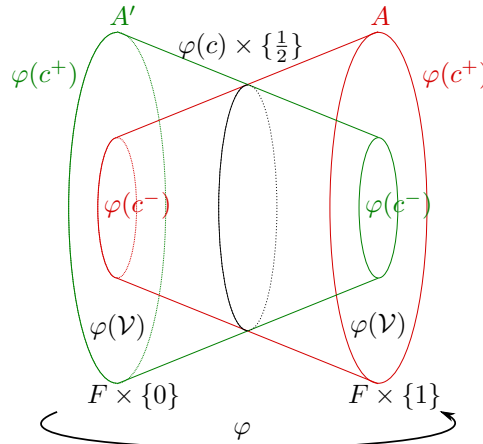


FIGURE 4.1.2 – Les anneaux plongés A et A' de M_φ .

¹i.e. non librement homotope à un point dans F .

²i.e. homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$

Considérons enfin les plongements $F_c \hookrightarrow M_\varphi$, $A \hookrightarrow M_\varphi$ et $A' \hookrightarrow M_\varphi$ qui fournissent une application $F_c \cup A \cup A' \rightarrow M_\varphi$. Cette application s'identifie alors à une immersion $\iota : S \hookrightarrow M_\varphi$ d'une surface S obtenue par recollement de la réunion disjointe des trois sous-espaces F_c , A et A' dans M_φ .

Définition 4.1.1. L'immersion $\iota : S \hookrightarrow M_\varphi$ est appelée *surface coupée-croisée* associée aux courbes c et $\varphi(c)$ (nous ne ferons pas mention des choix de $\mathcal{V}$, A et A'). Par abus de langage, l'image de ι sera également appelée surface coupée-croisée bien que ce ne soit pas une surface topologique.

Cette immersion est singulière le long d'un lieu de points doubles égal à (l'image dans M_φ par le revêtement π_∞ de) la courbe $c_* = \varphi(c) \times \{\frac{1}{2}\} \subset F \times \{\frac{1}{2}\}$. Nous noterons $S_* = S \setminus \iota^{-1}(c_*)$ le lieu d'injectivité de ι , qui sera identifié à son image dans M_φ (i.e. la partie plongée de S).

Remarques

1. L'immersion définie ci-dessus appartient naturellement à la catégorie PL. Il ne fait cependant aucun doute que cette construction puisse être lissée, de sorte que ι est en fait homotope à une immersion de classe $\mathcal{C}^\infty$, également partout transverse au flot.
2. La surface coupée-croisée S est orientable. On peut s'en convaincre en observant les orientations normales représentées sur la figure 4.1.3.

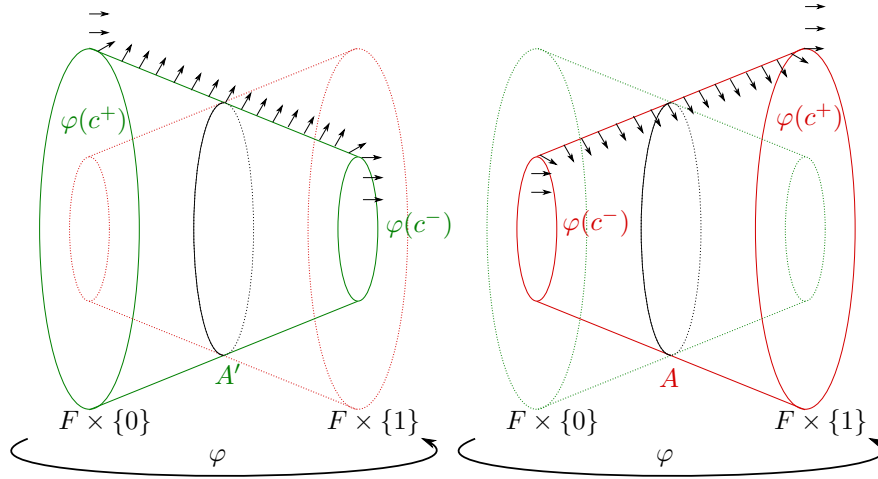


FIGURE 4.1.3 – Orientabilité des surfaces coupées-croisées.

Lemme 4.1.2 (Connexité des surfaces coupées-croisées). *La surface S est connexe si, et seulement si, la multi-courbe $c \sqcup \varphi(c)$ est non-séparante dans F .*

Démonstration. On raisonne dans le cas où il existe un point fixe singulier pour les feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$. Si $c \sqcup \varphi(c)$ est non-séparante, i.e. si F_c est connexe, alors par construction S est connexe. Pour la réciproque, rappelons que φ est supposé pseudo-Anosov. On considère alors un point fixe singulier $q_0 \in F$, ainsi qu'un rayon r issu de q_0 contenu dans une feuille de $\mathcal{F}^s$. Ce rayon est alors dense dans F (voir [CB88]), donc intersecte la courbe c une première fois en un point q . Nous savons par ailleurs que φ agit par contraction sur r en fixant q_0 , donc il existe un unique point d'intersection de $\varphi(c)$ et r entre q_0 et q . Il s'agit du point $\varphi(q)$. Le segment $[q, \varphi(q)]$ (privé de son intersection avec $\mathcal{V} \sqcup \varphi(\mathcal{V})$ pour être exact) est donc contenu dans une composante connexe de F_c et la dynamique de l'action de φ sur r garantit qu'il intersecte soit c^- et $\varphi(c^+)$, soit c^+ et $\varphi(c^-)$. Donc S est disconnexe. $\square$

Remarque Lorsque S est disconnexe, l'immersion ι est injective sur chaque composante connexe de S .

Lemme 4.1.3 (Incompressibilité des surfaces coupées-croisées, voir [CLR94] lemme 2.5). *L'immersion $\iota : S \hookrightarrow M_\varphi$ construite ci-dessus est π_1 -injective (sur chaque composante connexe de S).*

Démonstration. L'immersion construite ci-dessus est partout transverse aux lignes de flot de la suspension M_φ . Une immersion possédant cette propriété de transversalité est toujours injective au niveau des groupes fondamentaux d'après un résultat de Brian Mangum (voir [Man98]). $\square$

4.1.2 Le polygone idéal $P(\tilde{S}) = \overline{\Phi(\tilde{S})}$

Nous exposons à présent les résultats généraux de D. Cooper, D. Long et A. Reid concernant les immersions $S \looparrowright M_\varphi$ qui sont partout transverses au flot de M_φ (et s'appliquent donc au cas des surfaces coupées-croisées). Nous travaillerons pour toute la durée de ce chapitre avec une surface coupée-croisée connexe (quitte à remplacer une telle surface disconnexe par l'une de ses composantes connexes).

Notations Notons $\pi_1(S) = \iota_*(\pi_1(S))$ le³ sous-groupe de surface de $\pi_1(M)$ associé à l'immersion incompressible $\iota : S \looparrowright M_\varphi$ du paragraphe précédent. On choisit alors un relevé $\tilde{\iota} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{F} \times \mathbb{R}$ de l'immersion $\iota : S \looparrowright M_\varphi$ permettant d'identifier $\pi_1(S)$ au stabilisateur de $\tilde{\iota}(\tilde{S})$ dans $\pi_1(M)$.

Proposition 4.1.4. *Soit $\tilde{x} \in \tilde{F}$. Alors $\tilde{\iota}(\tilde{S})$ intersecte au plus une fois la ligne de flot $\{\tilde{x}\} \times \mathbb{R}$.*

Démonstration. Voir le corollaire 5.1.6 ou [CLR94], lemme 3.2. □

Corollaire 4.1.5 (Incompressibilité géométrique). *L'immersion $\tilde{\iota}$ est un plongement.*

Démonstration. Ceci découle du fait que $\tilde{\iota}$ est partout transverse au flot et de la proposition 4.1.4. □

L'injectivité du relevé $\tilde{\iota}$ permet d'identifier sans ambiguïté le revêtement universel $\tilde{S}$ de S et son image $\tilde{\iota}(\tilde{S})$ dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, la proposition 4.1.4 assure que la projection sur le premier facteur $\Phi : \tilde{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{F}$ se restreint en un homéomorphisme local sur $\tilde{S}$. On obtient donc les corollaires suivants.

Corollaire 4.1.6 (Projection des relevés de surfaces coupées-croisées). *La restriction de la projection $\Phi : \tilde{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{F}$ à la surface $\tilde{S}$ est un homéomorphisme sur son image.*

Corollaire 4.1.7. *La projection $\Phi(\tilde{S})$ de $\tilde{S}$ dans $\tilde{F}$ est un ouvert connexe $\pi_1(S)$ -invariant sur lequel le groupe $\pi_1(S)$ agit librement et proprement discontinûment.*

Démonstration. Ceci découle du fait que les actions de $\pi_1(S)$ sur $\tilde{S}$ par automorphismes de revêtement et sur $\Phi(\tilde{S})$ par relevés de puissances de φ sont **conjuguées** par l'homéomorphisme $\Phi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \Phi(\tilde{S})$. □

Suivant à nouveau D. Cooper, D. Long et A. Reid, nous étudions la structure de l'adhérence dans $\tilde{F}$, puis dans $\overline{\tilde{F}}$, de l'ouvert connexe $\Phi(\tilde{S})$. En un certain sens, l'étude au bord de $\Phi(\tilde{S})$ de l'action de $\pi_1(S)$ permettra de distinguer l'éventuelle quasi-convexité du sous-groupe de surface coupée-croisée.

Notations Notons $P(\tilde{S}) = \overline{\Phi(\tilde{S})}$ l'adhérence de $\Phi(\tilde{S})$ dans $\tilde{F}$, $\text{Fr}(P(\tilde{S})) = P(\tilde{S}) \setminus \Phi(\tilde{S})$ la frontière de $\Phi(\tilde{S})$ dans $\tilde{F}$ et $\partial_\infty P(\tilde{S})$ l'ensemble des points de $\partial_\infty \tilde{F}$ adhérents à $\Phi(\tilde{S})$.

Rappelons que le revêtement universel de la fibre est muni d'une métrique riemannienne localement euclidienne à singularités dt associée aux feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ (voir paragraphe 3.2.3). Cette métrique étant à courbure négative ou nulle, on dispose du vocabulaire usuel autour des notions de convexité.

Proposition 4.1.8 (Structure du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$), voir [CLR94] proposition 3.9). *L'adhérence $P(\tilde{S})$ du projeté $\Phi(\tilde{S})$ de $\tilde{S}$ sur $\tilde{F}$ vérifie les propriétés suivantes.*

- (i) $P(\tilde{S})$ est homéomorphe à un disque privé d'une partie de son bord.
- (ii) $P(\tilde{S})$ est une partie convexe de $(\tilde{F}, dt)$ dont la frontière dans $\tilde{F}$ est une union disjointe (éventuellement vide ou infinie) de géodésiques bi-infinies de $(\tilde{F}, dt)$.
- (iii) Toute composante connexe de $\text{Fr}(P(\tilde{S}))$ est contenue dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ et si d est une telle composante contenue dans une feuille singulière ℓ de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$, alors :

$$\ell \cap P(\tilde{S}) = d \quad (\Longleftrightarrow \ell \cap \Phi(\tilde{S}) = \emptyset).$$

³On utilise un point base commun $p \in F_c$ pour $\pi_1(F)$, $\pi_1(M)$ et $\pi_1(S)$.

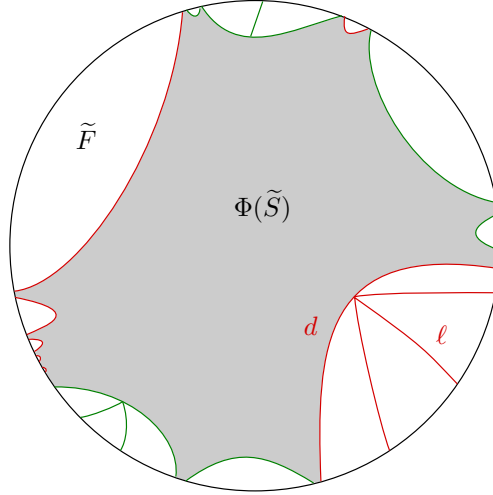


FIGURE 4.1.4 – Le polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$, bordé par des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$, les feuilles singulières étant tournées vers l'extérieur.

Ainsi, l'ensemble $P(\tilde{S})$ est un polygone convexe idéal de $(\tilde{F}, dt)$ (avec une infinité de sommets idéaux) bordé par des droites topologiques contenues dans des feuilles des feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$. De plus, si une telle composante de frontière est contenue dans une feuille singulière, les branches de cette feuille singulière sont extérieures au projeté $\Phi(\tilde{S})$. Autrement dit toute composante de frontière est approchable à l'intérieur de $\Phi(\tilde{S})$ par des segments contenus dans des feuilles régulières et arbitrairement longs. Une composante connexe de $\text{Fr}(P(\tilde{S}))$ sera désormais appelée un *côté* du polygone $P(\tilde{S})$.

4.1.3 Ensemble limite isométrique et critère de quasi-convexité

Introduisons maintenant une notion d'ensemble limite pour l'action de $\pi_1(S)$ sur $\tilde{F}$ par relevés de puissances de la monodromie φ . Par construction de la surface S , le morphisme $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ induit par la fibration sur le cercle se restreint en un morphisme surjectif $\pi_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$. Le sous-groupe de surface $\pi_1(S)$ n'est donc jamais contenu dans $\pi_1(F)$ et donc n'agit pas par isométries sur $\tilde{F}$ (seulement par quasi-isométries). Il n'est donc pas a priori possible de parler d'ensemble limite au bord de $\tilde{F}$ pour l'action de $\pi_1(S)$.

Pour contourner ce désagrément, D. Cooper, D. Long et A. Reid ont l'idée de ne considérer que l'intersection $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ de $\pi_1(S)$ avec $\pi_1(F)$, qui est exactement le sous-groupe des éléments de $\pi_1(S)$ agissant par isométries sur $\tilde{F}$.

Définition 4.1.9. L'ensemble limite isométrique pour l'action de $\pi_1(S)$ sur $\tilde{F}$ par relevés de puissances de φ est l'ensemble limite usuel pour l'action du sous-groupe $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ sur $\tilde{F}$ par automorphismes de revêtement (i.e. par relevés de φ^0), à savoir l'ensemble des points d'accumulation dans $\tilde{F}$ d'une quelconque orbite de ce sous-groupe.

Lemme 4.1.10. L'ensemble limite isométrique $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ est un fermé $\pi_1(S)$ -invariant de $\partial_\infty \tilde{F}$.

Démonstration. Si $\gamma \in \pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ et $g \in \pi_1(S)$, alors $g \circ \gamma \circ g^{-1} \in \pi_1(S)$ et $g \circ \gamma \circ g^{-1} \in \pi_1(F)$ car $\pi_1(F)$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(M)$. Donc $\pi_1(S)$ normalise $G = \pi_1(S) \cap \pi_1(F)$. Ainsi, si $g \in \pi_1(S)$ et $\tilde{p} \in \tilde{F}$, alors $g(G \cdot \tilde{p}) = gGg^{-1} \cdot g(\tilde{p}) = G \cdot g(\tilde{p})$. En passant aux actions au bord et en utilisant le fait que $\Lambda(G)$ est l'ensemble des points d'accumulation d'une quelconque orbite de G , on obtient au final l'égalité $g(\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))) = \pi_1(S) \cap \pi_1(F)$. $\square$

Proposition 4.1.11 (Les sommets idéaux de $P(\tilde{S})$ forment l'ensemble limite isométrique, voir [CLR94] théorème 3.12). On a les égalités suivantes⁴ entre ensembles $\pi_1(S)$ -invariants :

- (i) $\partial_\infty P(\tilde{S}) = \Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ dans $\partial_\infty \tilde{F}$.
- (ii) $P(\tilde{S}) = \text{Conv}_{\tilde{F}}(\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F)))$ dans $\tilde{F}$.

⁴ $\text{Conv}_{\tilde{F}}(X)$ désigne l'intersection des parties convexes fermées de $\tilde{F}$ dont l'adhérence dans $\tilde{F} \sqcup \partial_\infty \tilde{F}$ contient X .

Démonstration. Tout d'abord, $\partial_\infty P(\tilde{S})$ est par construction un fermé $\pi_1(S)$ -invariant de $\partial_\infty \tilde{F}$, en particulier $(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ -invariant donc contient $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$. Supposons par l'absurde que cette inclusion soit stricte. Se souvenant que $P(\tilde{S}) = \text{Conv}_{\tilde{F}}(\partial_\infty P(\tilde{S}))$, on a alors l'inclusion stricte $P(\tilde{S}) \supsetneq C = \text{Conv}_{\tilde{F}}(\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F)))$. Un côté ℓ du polygone idéal C rencontre donc $\Phi(\tilde{S})$ et est donc contenu dans $\Phi(\tilde{S})$. En effet, dans le cas contraire, ℓ intersecterait un côté du polygone idéal $P(\tilde{S})$ avec un angle non nul et aurait donc un point limite en dehors de $\partial_\infty P(\tilde{S})$, ce qui contredit la première inclusion. On considère alors le domaine $C' = C \sqcup \pi_1(S) \cdot \ell$ qui d'après le lemme 4.1.10 est une partie simplement connexe et $\pi_1(S)$ -invariante de $\Phi(\tilde{S})$ (en fait convexe). D'après le corollaire 4.1.7, l'espace quotient $C'/\pi_1(S)$ est donc une surface à bord de groupe fondamental isomorphe à $\pi_1(S)$, en particulier non libre. Contradiction. $\square$

Nous rappelons un lemme classique sur les ensembles limites de sous-groupes normaux infinis de réseaux uniformes de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Lemme 4.1.12 (Ensembles limites de sous-groupes normaux). *Soit $\Gamma \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ un réseau uniforme et G un sous-groupe normal infini de Γ . Alors $\Lambda(G) = \partial_\infty \mathbb{H}^2$.*

Démonstration. Comme Γ normalise G , l'ensemble limite $\Lambda(G)$, qui est un fermé non vide de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, est de plus Γ -invariant. Ceci implique donc que $\Lambda(G) \supset \Lambda(\Gamma) = \partial_\infty \mathbb{H}^2$. $\square$

Remarque Ce dernier lemme n'a rien de spécifique aux réseaux uniformes de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Plus généralement, si G est un groupe hyperbolique et H est un sous-groupe normal infini de G , alors $\partial_\infty H = \partial_\infty G$.

Théorème 4.1.13 (Critère de quasi-convexité des surfaces coupées-croisées, voir [CLR94] théorème 3.14). *Le sous-groupe de surface $\pi_1(S)$ est quasi-convexe dans $\pi_1(M)$ si, et seulement si,*

$$\Phi(\tilde{S}) \neq \tilde{F}.$$

Démonstration. Si $\pi_1(S)$ est un sous-groupe quasi-convexe de $\pi_1(M)$, alors l'ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$ est un cercle topologique de $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$. Soit $\mathcal{L} = \{\tilde{x}\} \times \mathbb{R}$ une ligne de flot et $\gamma \in \pi_1(M)$ un élément dont les points fixes sont disjoints à la fois de l'ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$ et des extrémités de $\mathcal{L}$. Alors l'image de $\mathcal{L}$ par une très grande puissance de γ est une ligne de flot disjointe de $\tilde{S}$ et donc $\Phi(\tilde{S}) \neq \tilde{F}$.

Réciproquement, supposons que $\pi_1(S)$ ne soit pas un sous-groupe quasi-convexe de $\pi_1(M)$. Alors le théorème de dichotomie pour les sous-groupes de surface de $\pi_1(M)$ assure que $\pi_1(S)$ est un sous-groupe normal d'un sous-groupe d'indice fini Γ de $\pi_1(M)$, donc $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ est un sous-groupe normal de $\Gamma \cap \pi_1(F)$. Comme Γ est d'indice fini dans $\pi_1(M)$, $\Lambda(\Gamma \cap \pi_1(F)) = \partial_\infty \tilde{F}$. Le lemme 4.1.12 permet donc d'affirmer que $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F)) = \partial_\infty \tilde{F}$. Au final, d'après l'inclusion $P(\tilde{S}) \supset \text{Conv}_{\tilde{F}}(\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F)))$ de la proposition 4.1.11, on a $P(\tilde{S}) = \tilde{F}$. Comme de plus $\Phi(\tilde{S})$ est une partie convexe de $\tilde{F}$, on en déduit que $\Phi(\tilde{S}) = \tilde{F}$. $\square$

Remarques

1. Le critère de quasi-convexité découle précisément du théorème de dichotomie des sous-groupes de surface de $\pi_1(M)$ et de la seule inclusion $P(\tilde{S}) \supset \text{Conv}_{\tilde{F}}(\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F)))$.
2. En particulier, si $\pi_1(S)$ n'est pas un sous-groupe quasi-convexe de $\pi_1(M)$, alors $\pi_1(S)$ agit librement sur $\tilde{F} = \Phi(\tilde{S})$. Nous verrons au cours de la section suivante que la réciproque est vraie.
3. Pour un exemple de construction de surfaces coupées-croisées géométriquement infinies, on pourra consulter l'article *Finite foliations and similarity interval exchange maps* ([CLR97]).
4. On observe que la quasi-convexité du sous-groupe de surface $\pi_1(S)$ ne dépend pas du relevé $\tilde{\iota}$ de l'immersion ι choisi. Le théorème précédent implique alors que, soit chaque relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ est disjoint d'au moins une ligne de flot, soit chacune de leurs projections recouvre $\tilde{F}$.
5. Le sous-groupe $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ dont l'ensemble limite est considéré dans ce paragraphe est un sous-groupe de $\pi_1(F)$ infini (car contenant $\pi_1(F_c)$), libre (car d'indice infini), mais qui n'est pas de type fini. Ce sous-groupe compliqué joue un rôle central dans l'étude des surfaces coupées-croisées.
6. Le sous-groupe libre de type fini $\pi_1(F_c) \leq \pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ est lui toujours quasi-convexe dans $\pi_1(M)$, d'après un théorème de Peter Scott et Gadde Swarup (voir [SS90] et [Mit99]).

4.2 Ensembles limites des surfaces coupées-croisées quasi-convexes

Nous poursuivons dans cette section l'étude des sous-groupes de surfaces coupées-croisées dans M_φ dans le cas quasi-convexe, en vue d'une compréhension complète des ensembles limites de tels sous-groupes dans $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$. Nous aboutirons à une caractérisation des paires de points de $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$ séparées par l'ensemble limite étudié. Les résultats 4.2.1 et 4.2.6 (déjà présents dans [CLR94]) fournissent une paramétrisation complète de ces ensembles limites, tandis que la proposition 4.2.21 décrit leur image réciproque par l'application de Cannon-Thurston. Le corollaire 4.2.26 caractérise alors la séparation des paires de points du bord. Ces deux derniers résultats sont, à défaut d'être énoncés dans l'article *Bundles and Finite Foliations* ([CLR94]), au moins contenus dans son adhérence.

Hypothèse. On suppose que $\pi_1(S)$ est un sous-groupe quasi-convexe de $\pi_1(M)$, i.e. d'après le théorème 4.1.13 que $\text{Fr}(P(\widetilde{S})) \neq \emptyset$. De tels sous-groupes seront construits en abondance au chapitre suivant.

4.2.1 Paramétrisation de $\Lambda(\pi_1(S))$ par l'ensemble limite isométrique

Nous présentons dans ce paragraphe une partie naturelle de $\partial_\infty \widetilde{F}$ dont l'image par l'application de Cannon-Thurston est l'ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$.

Notons $\mathcal{C}(\widetilde{S})$ la frontière du polygone $P(\widetilde{S})$ dans $\overline{F}$, union des géodésiques bi-infinies de $\widetilde{F}$ qui forment $\text{Fr}(P(\widetilde{S}))$ et de l'ensemble limite isométrique $\partial_\infty P(\widetilde{S}) = \Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$. Ce cercle topologique joue essentiellement le rôle du bord à l'infini $\partial_\infty \widetilde{S}$ de $\widetilde{S}$, vu distordu en projection dans le revêtement universel de la fibre. Il n'est donc pas déraisonnable de penser que ce cercle représente toutes les manières d'aller à l'infini dans $\widetilde{S}$ et soit relié à l'ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$. Nous donnons dans ce paragraphe quelques arguments informels permettant de reconstituer une image tridimensionnelle de $\widetilde{S}$ à partir de sa projection $\Phi(\widetilde{S})$ afin de justifier la proposition suivante (voir [CLR94], lemme 3.18).

Proposition 4.2.1 (L'ensemble limite isométrique se surjecte sur l'ensemble limite, voir [CLR94] lemme 3.18).

$$\text{CT}(\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))) = \Lambda(\pi_1(S)).$$

Remarque L'inclusion $\text{CT}(\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))) \supset \Lambda(\pi_1(S))$ résulte de l'équivariance de l'application de Cannon-Thurston et du fait que $\pi_1(S)$ normalise $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$.

Définition 4.2.2. L'*altitude* d'un point $\tilde{x} \in \Phi(\widetilde{S})$ est le nombre $t = \text{Alt}_{\widetilde{S}}(\tilde{x}) \in \mathbb{R}$ tel que $(\tilde{x}, t) \in \widetilde{S}$.

Lemme 4.2.3 (Explosion de l'altitude au voisinage de $\text{Fr}(P(\widetilde{S}))$) voir [CLR94] corollaire 3.6). Si $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Phi(\widetilde{S})^{\mathbb{N}}$ et $\tilde{x} \in \text{Fr}(P(\widetilde{S}))$ sont tels que $\tilde{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{x}$, alors $|\text{Alt}_{\widetilde{S}}(\tilde{x}_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Plus précisément, si $\tilde{x}$ appartient à une composante connexe de $\text{Fr}(P(\widetilde{S}))$ contenue dans une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ (resp. $\widetilde{\mathcal{F}}^u$), alors $\text{Alt}_{\widetilde{S}}(\tilde{x}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ (resp. $\text{Alt}_{\widetilde{S}}(\tilde{x}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$).

On développe alors l'image mentale suivante du relevé $\widetilde{S}$ en observant son projeté $\Phi(\widetilde{S})$. Au voisinage d'un côté ℓ^u de $P(\widetilde{S})$ contenu dans une feuille instable, on observe en projection dans $\Phi(\widetilde{S})$ une partie de $\widetilde{S}$ dont l'altitude s'approche de $+\infty$. On imagine donc que la surface $\widetilde{S}$ monte dans $\widetilde{F} \times \mathbb{R}$ de manière asymptote au demi-plan $\ell^u \times \mathbb{R}^+$.

Souvenons-nous alors que toutes les demi-lignes de flot contenues dans $\ell^u \times \mathbb{R}^+$ sont asymptotes (voir proposition 3.2.11) et définissent donc un unique point de $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$. Il s'agit plus précisément d'un point de l'ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$, égal à l'image commune par l'application de Cannon-Thurston des extrémités de ℓ^u dans $\partial_\infty \widetilde{F}$. Notons que ces extrémités sont des points de l'ensemble limite isométrique $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F)) = \partial_\infty P(\widetilde{S})$.

Ainsi, pour tout côté ℓ^u de $P(\widetilde{S})$ d'extrémités $p, q \in \partial_\infty \widetilde{F}$, le point du bord de $\widetilde{M}_\varphi$ correspondant à l'écrasement de l'arc de cercle $(\ell \times \{+\infty\}) \cup (\{p, q\} \times [-\infty, +\infty])$ décrit par le corollaire 3.2.12 est un point de $\Lambda(\pi_1(S))$ qui admet un antécédent par l'application de Cannon-Thurston dans l'ensemble limite isométrique $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ (et il y a un résultat dual pour une composante stable).

En conclusion, il semble donc raisonnable que l'ensemble limite isométrique capte toutes les manières d'aller à l'infini, vues en projection, pour le relevé $\widetilde{S}$ de S dans $\widetilde{F} \times \mathbb{R}$.

4.2.2 Points identifiés dans l'ensemble limite isométrique

D'après le lemme 3.2.14, l'application de Cannon-Thurston n'est pas injective sur l'ensemble limite isométrique $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$. Les extrémités de chaque côté de $P(\tilde{S})$ sont en effet identifiées. Nous allons observer dans ce paragraphe que ces identifications sont les seules, et en déduire la construction d'un cercle topologique qui représente exactement $\Lambda(\pi_1(S))$ via l'application de Cannon-Thurston.

Lemme 4.2.4. *Soit ℓ une droite topologique contenue dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$. Alors $\ell \not\subset \Phi(\tilde{S})$.*

Démonstration. Supposons que $\ell \subset \Phi(\tilde{S})$ et rappelons que le plan topologique $\ell \times \mathbb{R}$ est une partie convexe de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ muni de la métrique riemannienne à singularités introduite au paragraphe 3.2.4. L'image réciproque $\Phi_{|\tilde{S}}^{-1}(\ell) = (\ell \times \mathbb{R}) \cap \tilde{S}$ est donc intersection de deux parties quasi-convexes de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$, donc est une quasi-géodésique de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$. Ses extrémités définissent donc deux points distincts de $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$. Ceci contredit la description du cercle à l'infini du plan $\ell \times \mathbb{R}$ fournie par le corollaire 3.2.12, car les extrémités de $\Phi_{|\tilde{S}}^{-1}(\ell)$ appartiennent à l'arc de cercle $(\ell \times \{+\infty\}) \cup (\{p, q\} \times [-\infty, +\infty])$ écrasé en un point (pour fixer les idées, on a supposé ℓ contenue dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^u$). $\square$

Lemme 4.2.5. *Soient p, q deux points distincts de l'ensemble limite isométrique $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ qui ne sont pas extrémités d'un même côté de $P(\tilde{S})$. Alors $\text{CT}(p) \neq \text{CT}(q)$.*

Démonstration. Supposons que $\text{CT}(p) = \text{CT}(q)$. Alors d'après le théorème 3.2.15, il existe une feuille ℓ de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ telle que p et q soient deux extrémités distinctes de ℓ . Comme p et q ne sont pas adhérents à un même côté de $P(\tilde{S})$, on doit avoir $\ell \cap \Phi(\tilde{S}) \neq \emptyset$. Plus précisément, $\ell \cap \Phi(\tilde{S})$ est par convexité un intervalle de ℓ . Comme p et q doivent être adhérents à ℓ et à $\Phi(\tilde{S})$, on en déduit que $\ell \subset \Phi(\tilde{S})$, ce qui est impossible d'après le lemme précédent. $\square$

Définissons enfin une relation d'équivalence $\sim$ sur le cercle $\mathcal{C}(\tilde{S})$ en identifiant deux points si, et seulement si, ils sont adhérents dans $\bar{F}$ à un même côté de $P(\tilde{S})$. L'espace quotient $\mathcal{C}(\tilde{S})/\sim$ est alors un cercle topologique (car on a simplement écrasé une collections d'intervalles deux à deux disjoints, à savoir les adhérences des côtés du polygone $P(\tilde{S})$, voir par exemple [CLR94], lemme 3.17).

Proposition 4.2.6 (Construction de $\Lambda(\pi_1(S))$), voir [CLR94] lemme 3.18). *L'application de Cannon-Thurston induit un homéomorphisme entre le cercle $\mathcal{C}(\tilde{S})/\sim$ et l'ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$.*

Démonstration. Plus précisément, à tout point de $\mathcal{C}(\tilde{S})/\sim$ est associé un représentant dans $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$, chaque intervalle de $\mathcal{C}(\tilde{S})$ écrasé par la relation $\sim$ ayant ses deux extrémités dans $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$. Il lui correspond donc également une image bien définie par CT dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$. De plus, la relation $\sim$ est définie exactement pour éliminer le défaut d'injectivité de la restriction de CT à $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ (d'après le lemme 4.2.5). On en déduit que l'application de Cannon-Thurston induit un homéomorphisme entre le cercle $\mathcal{C}(\tilde{S})/\sim$ et $\Lambda(\pi_1(S))$. $\square$

4.2.3 Image réciproque de $\Lambda(\pi_1(S))$ par l'application de Cannon-Thurston

Nous déterminons maintenant l'ensemble X des points de l'ensemble limite isométrique qui sont extrémité dans $\partial_\infty \tilde{F}$ d'une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$. On aura alors d'après le théorème 3.2.15 l'égalité :

$$\text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S))) = \Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F)) \cup \text{CT}^{-1}(\text{CT}(X)).$$

Lemme 4.2.7 (Feuilles dont une extrémité est adhérente à $P(\tilde{S})$ dans $\bar{F}$). *Soit ℓ une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ dont une extrémité dans $\partial_\infty \tilde{F}$ appartient à l'ensemble limite isométrique $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$. On a alors l'alternative :*

- (i) *soit ℓ contient un côté de $P(\tilde{S})$,*
- (ii) *soit $\ell \cap \Phi(\tilde{S})$ est un rayon géodésique ouvert.*

Démonstration. Si une feuille ℓ de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ a une extrémité dans $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F)) = \partial_\infty P(\widetilde{S})$, alors $\ell \cap P(\widetilde{S})$ est une partie convexe (non vide) de ℓ et non bornée. Ainsi ℓ contient un rayon contenu dans $P(\widetilde{S})$. Soit ce rayon aboutit dans $\partial_\infty P(\widetilde{S})$ et alors $\ell \cap \Phi(\widetilde{S})$ est bien un rayon d'après le lemme 4.2.4, soit il est contenu dans $\text{Fr}(P(\widetilde{S}))$, mais alors ℓ contient le côté correspondant de $P(\widetilde{S})$. $\square$

Pour déterminer l'ensemble X , il nous faut donc déterminer quelles sont les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ dont l'intersection avec $\Phi(\widetilde{S})$ est un rayon. Une étude plus poussée de l'action de $\pi_1(S)$ sur le polygone $P(\widetilde{S})$, en particulier sur ses côtés, va nous permettre de conclure, mais pour cela, nous aurons besoin de quelques propriétés sur les stabilisateurs de feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ dans $\pi_1(M)$.

Stabilisateurs de feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ dans $\pi_1(M)$

Définition 4.2.8. Une feuille ℓ de l'un des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ sur $\widetilde{F}$ est dite *périodique* si elle contient un relevé dans $\widetilde{F}$ d'un point φ -périodique de F .

Mise en garde Attention à ne pas penser que le mot périodique suggère que ℓ a pour image dans la fibre une courbe périodique (i.e. une feuille fermée). Observons en effet qu'aucune feuille de $\mathcal{F}^s$ ou $\mathcal{F}^u$ n'est fermée (voir [CB88]).

Lemme 4.2.9 (Structure des feuilles périodiques). *Soit ℓ une feuille périodique de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$. Alors il existe un élément (non-trivial) de $\pi_1(M)$ qui stabilise ℓ (pour l'action de $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{F}$ par relevés de puissances de φ). De plus, ℓ contient un unique relevé de point φ -périodique.*

Démonstration. Soit $\tilde{x} \in \ell$ tel que $\pi_F(\tilde{x})$ soit φ -périodique. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que φ^n fixe $\pi_F(\tilde{x})$. Il existe donc un unique relevé de φ^n qui fixe $\tilde{x}$. Un tel relevé doit, puisque φ préserve les feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$, stabiliser la feuille ℓ . Supposons alors que ℓ contienne deux relevés $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ de points φ -périodiques. Alors $\pi_F(\ell)$ contient deux points périodiques $x = \pi_F(\tilde{x})$ et $y = \pi_F(\tilde{y})$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^m(x) = x$ et $\varphi^m(y) = y$. Le segment $[x, y]$ de la feuille $\pi_F(\ell)$ est donc stable par φ^m . Ceci contredit le fait que φ agit par contraction ou dilatation sur les feuilles de $\mathcal{F}^s$ ou $\mathcal{F}^u$. $\square$

En particulier, une feuille singulière de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ ne contient qu'un seul relevé d'un point singulier, puisque ces derniers sont nécessairement permutés par φ et en nombre fini, donc périodiques.

Définition 4.2.10. Soit ℓ une feuille périodique de l'un des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ et $\tilde{x} \in \ell$ l'unique relevé de point φ -périodique de F contenu dans ℓ . La feuille de stabilité opposée à celle de ℓ et contenant $\tilde{x}$ est appelée *feuille dual* à ℓ .

Proposition 4.2.11 (Stabilisateurs de feuilles dans $\pi_1(M)$). *Une feuille ℓ de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ est périodique si, et seulement si, son stabilisateur dans $\pi_1(M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Dans le cas contraire, ce stabilisateur est trivial.*

Démonstration. Comme $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ ne contiennent aucune feuille fermée, aucun élément de $\pi_1(F)$ ne peut stabiliser une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$. Donc si ℓ est une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$, alors le stabilisateur de ℓ dans $\pi_1(M)$ s'identifie à un sous-groupe de $\pi_1(M)/\pi_1(F) \simeq \mathbb{Z}$. Nous avons déjà vu que lorsque ℓ est périodique, son stabilisateur dans $\pi_1(M)$ est non trivial, donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. Réciproquement, si un relevé g d'une puissance de φ stabilise ℓ , alors g ne relève pas $\varphi^0 = \text{id}$ et g ou g^{-1} agit donc par contraction sur la feuille ℓ et possède nécessairement un point fixe dans ℓ . Ce point fixe est un relevé d'un point φ -périodique de F et donc ℓ est périodique. $\square$

Stabilisateurs des côtés du polygone idéal $P(\widetilde{S})$ dans $\pi_1(S)$

La proposition suivante nous semble être le point clef de l'article *Bundles and Finite Foliations*. L'auteur de cette thèse souhaiterait en obtenir une démonstration géométrique directe, à l'inverse de l'argument par l'absurde proposé dans [CLR94], lemmes 3.20 et 3.21.

Proposition 4.2.12 (Chaque côté de $P(\widetilde{S})$ est contenu dans une feuille périodique et stabilisé dans $\pi_1(S)$). *Soit ℓ un côté de $P(\widetilde{S})$. Alors il existe un élément $g \in \pi_1(S)$ qui stabilise ℓ et agit sur ℓ par une dilatation centrée en un relevé $\tilde{x}$ d'un point φ -périodique.*

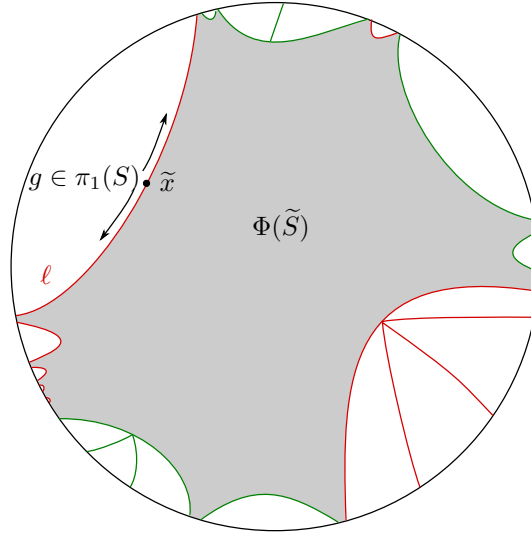


FIGURE 4.2.1 – Les côtés du polygone $P(\tilde{S})$ ont un stabilisateur non-trivial dans $\pi_1(S)$.

Corollaire 4.2.13 (Les sous-groupes de surfaces coupées-croisées quasi-convexes n’agissent pas librement sur $\tilde{F}$). *Le sous-groupe de surface $\pi_1(S)$ est quasi-convexe dans $\pi_1(M)$ si, et seulement si, $\pi_1(S)$ n’agit pas librement sur $\tilde{F}$.*

Ainsi, tout côté de $P(\tilde{S})$ admet un stabilisateur dans $\pi_1(S)$ isomorphe à $\mathbb{Z}$. Ceci implique qu’un tel côté contient un relevé d’un point φ -périodique qui est un point fixe commun aux éléments de $\pi_1(S)$ qui le stabilisent et que ces éléments agissent par contraction ou dilatation en restriction à ce côté. Nous allons maintenant pouvoir expliquer pourquoi un côté du polygone $P(\tilde{S})$ fabrique naturellement un second point de l’ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$ via un rayon contenu dans une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ et dans $\Phi(\tilde{S})$.

Rayons duaux aux côtés du polygone idéal $P(\tilde{S})$

Définition 4.2.14. Soit ℓ un côté de $P(\tilde{S})$ et $\tilde{x}$ l’unique relevé de point φ -périodique appartenant à ℓ . Alors l’unique rayon r issu de $\tilde{x}$, contenu dans la feuille duale à ℓ et qui intersecte $\Phi(\tilde{S})$ est appelé le *rayon dual* au côté ℓ .

Lemme 4.2.15 ($\Phi(\tilde{S})$ contient les rayons duaux). *Soit ℓ un côté de $P(\tilde{S})$, r son rayon dual et $\mathring{r} = r \setminus (r \cap \ell)$ le rayon ouvert. Alors $\mathring{r} \subset \Phi(\tilde{S})$.*

Démonstration. Nous montrons que la feuille ℓ' contenant r doit avoir une extrémité dans $\partial_\infty P(\tilde{S})$. La proposition 4.1.8 assure alors que $\ell' \cap P(\tilde{S}) = r$. Ceci force l’extrémité de r dans $\partial_\infty \tilde{F}$ à appartenir à $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ et donc par convexité, $r \cap \Phi(\tilde{S}) = \mathring{r}$.

Soit donc $g \in \pi_1(S)$ un générateur du stabilisateur de ℓ . Par définition du rayon dual r , on a l’égalité $g(r) = r$. L’extrémité de r dans $\partial_\infty \tilde{F}$ est donc un point fixe d’un élément de $\pi_1(S)$ donc son image par CT appartient à $\Lambda(\pi_1(S))$ (d’après l’équivariance de l’application de Cannon-Thurston). Ceci implique d’après la proposition 4.2.1 que l’une au moins des extrémités de la feuille contenant r appartient à $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$. $\square$

Les feuilles duales aux côtés du polygone idéal $P(\tilde{S})$ constituent donc une classe d’exemples de feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ ne contenant pas un côté de $P(\tilde{S})$ et dont une extrémité dans $\partial_\infty \tilde{F}$ appartient tout de même à l’ensemble limite isométrique $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$.

Corollaire 4.2.16. *Soit ℓ un côté de $P(\tilde{S})$, r son rayon dual et $g \in \pi_1(S)$ un générateur du stabilisateur de ℓ dans $\pi_1(S)$. Alors l’image commune par CT des extrémités de ℓ et celle de l’extrémité de r sont les points fixes de g dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$.*

Le lemme 4.2.15 permet en particulier d’affirmer que l’image réciproque $\text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$ contient strictement l’ensemble limite isométrique $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$. Il faut au moins ajouter les extrémités des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ contenant un côté de $P(\tilde{S})$ ou un rayon dual à un tel côté.

Feuilletages suspendus sur une surface coupée-croisée

Pour achever la description de l'image réciproque $\text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$, il nous reste à démontrer que les seules feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ dont une extrémité dans $\partial_\infty \widetilde{F}$ appartient à $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ sont celles qui contiennent soit un côté de $P(\widetilde{S})$ soit à rayon dual à un tel côté.

Autrement dit, on souhaite démontrer que toute feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ ne contenant ni côté de $P(\widetilde{S})$ ni à rayon dual à un tel côté intersecte $P(\widetilde{S})$ selon une partie bornée.

Lemme 4.2.17 (Stabilisateur dans $\pi_1(S)$ d'une feuille intersectant $\Phi(\widetilde{S})$). *Soit ℓ une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ qui intersecte $\Phi(\widetilde{S})$. Alors soit $\ell \cap P(\widetilde{S})$ est un rayon dual à un côté de $P(\widetilde{S})$, soit il n'existe aucun élément (non-trivial) de $\pi_1(S)$ qui stabilise $\ell \cap \Phi(\widetilde{S})$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $g \in \pi_1(S)$ stabilisant $\ell \cap \Phi(\widetilde{S})$ (et donc également ℓ). D'après le lemme 4.2.4, ℓ intersecte un côté ℓ' de $P(\widetilde{S})$. Ceci implique que g stabilise à la fois ℓ et ℓ' . Or un élément du stabilisateur de ℓ' dans $\pi_1(M)$ ne stabilise ℓ que si ℓ est la feuille duale à la feuille contenant ℓ' . $\square$

D. Cooper, D. Long et A. Reid définissent les suspensions $\mathcal{F}_S^s$ et $\mathcal{F}_S^u$ dans S des feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ de F comme images (feuille à feuille) par $\pi_M \circ \Phi_{|\widetilde{S}}^{-1}$ des intersections avec $\Phi(\widetilde{S})$ des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ puis énoncent un théorème de finitude relatif à ces feuilletages (voir [CLR94], théorème 3.22).

Théorème 4.2.18 (Structure des feuilletages suspendus $\mathcal{F}_S^s$ et $\mathcal{F}_S^u$, voir [CLR94] théorème 3.22). *Chacun des deux feuilletages $\mathcal{F}_S^s$ et $\mathcal{F}_S^u$ contient un nombre fini non nul de feuilles fermées, et toute feuille non-fermée spirale à chacune de ses extrémités autour d'une feuille fermée.*

Remarques

1. Nous avons vu que tout rayon dual à un côté de $P(\widetilde{S})$ était stabilisé par un élément de $\pi_1(S)$. Ceci implique que l'image dans le feuilletage suspendu $\mathcal{F}_S^s$ ou $\mathcal{F}_S^u$ de ce rayon dual est une feuille fermée. Or les rayons duaux sont les seules feuilles intersectant $\Phi(\widetilde{S})$ à avoir un stabilisateur dans $\pi_1(S)$. Autrement dit, les feuilles fermées de $\mathcal{F}_S^s$ et $\mathcal{F}_S^u$ correspondent aux rayons duaux.
2. Le théorème affirme que chacun des feuilletages $\mathcal{F}_S^s$ et $\mathcal{F}_S^u$ ne possède qu'un nombre fini de feuilles fermées. Or chaque côté de $P(\widetilde{S})$ fabrique via son rayon dual une feuille fermée dans l'un de ces deux feuilletages. On en déduit que $P(\widetilde{S})$ a un nombre fini de côtés modulo l'action de $\pi_1(S)$.

Le théorème 4.2.18 permet alors de donner une description complète des interactions possibles entre le polygone $\Phi(\widetilde{S})$ et les feuilles des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$.

Corollaire 4.2.19 (Restrictions des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ à $P(\widetilde{S})$). *Soit ℓ une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$. Alors $\ell \cap P(\widetilde{S})$ est soit un côté de $P(\widetilde{S})$, soit un rayon dual à un tel côté, soit un multipode borné (éventuellement un segment) de ℓ dont les extrémités appartiennent à des côtés de $P(\widetilde{S})$ distincts et de même stabilité, soit vide.*

Démonstration. Soit ℓ une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ dont l'intersection avec $P(\widetilde{S})$ n'est ni un côté de $P(\widetilde{S})$, ni un rayon dual à un tel côté, ni vide. Alors le lemme 4.2.17 assure que $\Phi_{|\widetilde{S}}^{-1}(\ell \cap \Phi(\widetilde{S}))$ se projette dans S sur une feuille non fermée. Le théorème 4.2.18 affirme alors que cette feuille non fermée spirale à ses extrémités autour de feuilles fermées. Alors $\ell \cap \Phi(\widetilde{S})$ est asymptote à chaque extrémité à une feuille fermée, ce qui veut dire asymptote à au moins deux rayons duaux à des côtés distincts de $P(\widetilde{S})$. Or les feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ sont tels que ℓ ne peut avoir d'extrémité en commun avec un rayon dual, ce qui implique que ℓ a ses extrémités sur les côtés associés aux rayons duaux asymptotes à ℓ . En particulier $\ell \cap P(\widetilde{S})$ est bien un multipode borné reliant plusieurs composantes connexes de $\text{Fr}(P(\widetilde{S}))$, nécessairement de même stabilité. $\square$

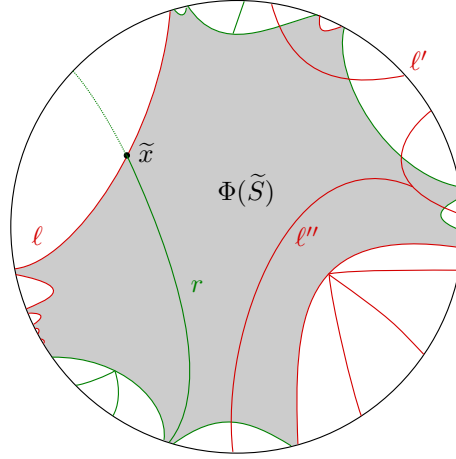


FIGURE 4.2.2 – Exemples d'un côté ℓ de $P(\tilde{S})$ de rayon dual r , d'une feuille ℓ' intersectant $P(\tilde{S})$ selon un segment et d'une feuille ℓ'' intersectant $P(\tilde{S})$ selon un multipode.

Dans la classification précédente, les rayons duaux aux côtés de $P(\tilde{S})$ sont identifiés aux feuilles fermées des feuilletages suspendus sur S . Les autres feuilles reliant des côtés distincts de $P(\tilde{S})$ sont identifiées aux feuilles non-fermées de ces mêmes feuilletages suspendus.

Corollaire 4.2.20 (Feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ adhérentes à $\partial_\infty P(\tilde{S})$). *Soit ℓ une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ ayant une extrémité adhérente à $\Phi(\tilde{S})$ dans $\bar{F}$. Alors ℓ contient soit un côté de $P(\tilde{S})$, soit un rayon dual à un tel côté.*

Ce dernier corollaire nous permet alors via les commentaires du début de paragraphe de décrire complètement l'image réciproque par l'application de Cannon-Thurston de l'ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$.

Proposition 4.2.21 (Image réciproque de $\Lambda(\pi_1(S))$ par CT). *L'image réciproque $\text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$ est union de l'ensemble limite isométrique $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ et des extrémités dans $\partial_\infty \tilde{F}$ des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ contenant soit un côté du polygone $P(\tilde{S})$, soit un rayon dual à un tel côté.*

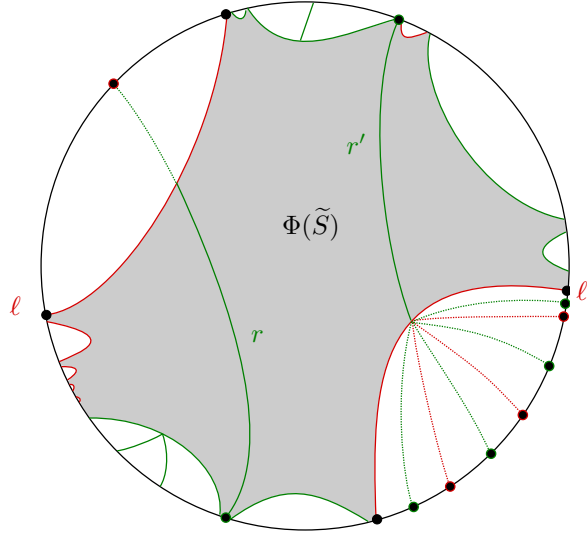


FIGURE 4.2.3 – Les points à ajouter à $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ pour obtenir $\text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$ sont les extrémités des feuilles contenant soit un côté de $P(\tilde{S})$ soit un rayon dual à un tel côté. Sur la figure, le côté ℓ est une feuille régulière et le côté ℓ' est contenu dans une feuille singulière.

Remarque La proposition 4.2.21 implique en particulier que, si $p \in \partial_\infty \tilde{F}$ est l'extrémité d'une feuille non-périodique de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$, alors $\text{CT}(p)$ n'appartient pas à un ensemble limite de sous-groupe de surface quasi-convexe de $\pi_1(M)$ obtenu par une construction de type coupée-croisée (ou même par une quelconque immersion partout transverse au flot).

Nous terminons ce paragraphe par l'analyse du stabilisateur Σ du polygone $\Phi(\tilde{S})$ dans $\pi_1(M)$.

Considérons un élément $g \in \Sigma$. Alors en étendant l'action de g au bord de $\tilde{F}$, on constate que $g(\partial_\infty P(\tilde{S})) = \partial_\infty P(\tilde{S})$. Autrement dit, g stabilise l'ensemble limite isométrique $\Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$. D'après la proposition 4.2.1 et la propriété d'équivariance de l'application de Cannon-Thurston (voir théorème 3.2.13), on a l'égalité $g(\Lambda(\pi_1(S))) = \Lambda(\pi_1(S))$ pour l'action de g au bord de $\tilde{M}_\varphi$.

Nous avons donc démontré que le stabilisateur Σ du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$ dans $\pi_1(M)$ est contenu dans le stabilisateur de l'ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$ dans $\pi_1(M)$. Or ce dernier sous-groupe contient le sous-groupe de surface $\pi_1(S)$ avec indice fini. Il en va donc de même du stabilisateur Σ de $\Phi(\tilde{S})$.

4.2.4 Séparation de paires de points de $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$ par $\Lambda(\pi_1(S))$

Le sous-groupe de surface coupée-croisée $\pi_1(S)$ étant quasi-convexe, le complémentaire de son ensemble limite dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$ possède deux composantes connexes dont nous proposons de décrire les images réciproques par l'application de Cannon-Thurston. Nous serons alors en mesure de caractériser les paires de points séparés par un ensemble limite de sous-groupe de surface coupée-croisée quasi-convexe.

Le complémentaire de $\partial_\infty P(\tilde{S})$ dans $\partial_\infty \tilde{F}$ est une union disjointe d'intervalles ouverts de $\partial_\infty \tilde{F}$. Chacun de ces intervalles a pour extrémités les extrémités dans $\partial_\infty \tilde{F}$ d'un côté du polygone idéal $P(\tilde{S})$. D'après les résultats du paragraphe précédent, chaque composante connexe de $\partial_\infty \tilde{F} \setminus \Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ contient un nombre fini strictement positif de points de $\text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$. Plus précisément, chaque composante connexe de $\partial_\infty \tilde{F} \setminus \text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$ est un intervalle ouvert (contenu dans une composante connexe de $\partial_\infty \tilde{F} \setminus \Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$) et ayant pour extrémités exactement une extrémité dans $\partial_\infty \tilde{F}$ d'une feuille ℓ contenant un côté de $P(\tilde{S})$ et une extrémité dans $\partial_\infty \tilde{F}$ de la feuille duale à ℓ .

Définition 4.2.22. Un *intervalle stable* (resp. *intervalle instable*) est une composante connexe de $\partial_\infty \tilde{F} \setminus \text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$ contenue dans une composante connexe de $\partial_\infty \tilde{F} \setminus \Lambda(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ dont les extrémités sont les extrémités dans $\partial_\infty \tilde{F}$ d'un côté de $P(\tilde{S})$ contenu dans une feuille de $\mathcal{F}^s$ (resp. $\mathcal{F}^u$).

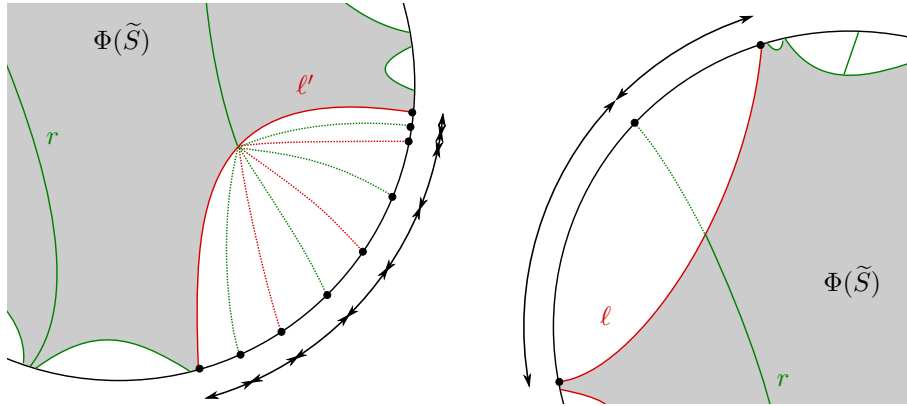


FIGURE 4.2.4 – Exemples de huit intervalles stables au-delà du côté stable ℓ' contenu dans une feuille singulière à 5 branches et de deux intervalles stables au-delà de la feuille stable régulière ℓ .

Remarque Il existe toujours une infinité d'intervalles stables et d'intervalles instables au bord de $\partial_\infty \tilde{F}$. On peut le voir en faisant agir le stabilisateur d'un côté de $P(\tilde{S})$ sur les autres côtés.

Lemme 4.2.23 (Séparation de paires de points du bord). Soient $p, q \in \partial_\infty \tilde{F}$. Si p appartient à un intervalle stable et q à un intervalle instable, alors $\Lambda(\pi_1(S))$ sépare $\text{CT}(p)$ et $\text{CT}(q)$ dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$.

Démonstration. On travaille dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ et on considère un point $\tilde{x}$ de $\Phi(\tilde{S}) \cap \tilde{S}$ et un segment $\{\tilde{x}\} \times [-T, T]$ de la ligne de flot correspondante. Remarquons que si T est choisi suffisamment grand, alors $(\tilde{x}, T)$ peut être relié à $(p, 0)$ par un rayon quasi-géodésique de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ (d'extrémité $(p, 0)$ à l'infini) qui n'intersecte pas $\tilde{S}$ (car p est au delà d'une composante de frontière stable de $\Phi(\tilde{S})$, ce qui signifie que l'altitude de la surface $\tilde{S}$ est très proche de $-\infty$ au voisinage de cette composante). De même, $(\tilde{x}, -T)$ et $(q, 0)$ peuvent être reliés par un rayon quasi-géodésique ne rencontrant pas $\tilde{S}$. La concaténation des deux arcs ainsi créés et du segment de ligne de flot est alors une courbe qui intersecte une unique fois transversalement $\tilde{S}$ (en $(\tilde{x}, 0)$) et relie $(p, 0)$ et $(q, 0)$. Ceci prouve l'assertion. $\square$

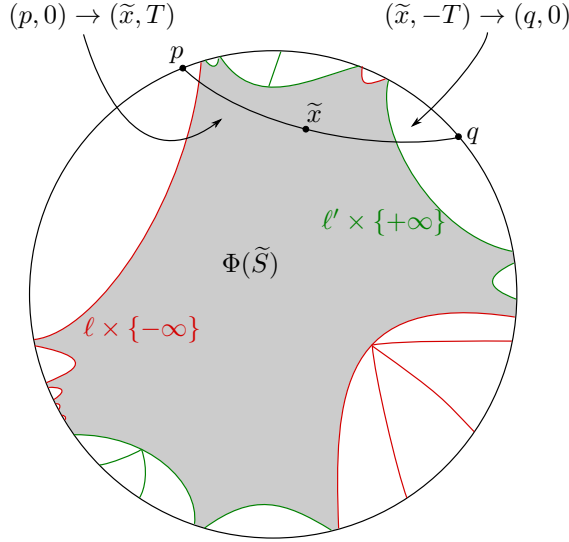


FIGURE 4.2.5 – Un chemin reliant p et q et intersectant transversalement $\tilde{S}$ une unique fois au milieu du segment $\{\tilde{x}\} \times [-T, T]$.

Lemme 4.2.24 (Non-séparation de paires de points du bord). *Soient $p, q \in \partial_\infty \tilde{F}$. Si p et q appartiennent chacun à un intervalle stable, alors $\Lambda(\pi_1(S))$ ne sépare pas $\text{CT}(p)$ et $\text{CT}(q)$ dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du lemme 4.2.23 et du fait qu'il existe toujours au moins un intervalle de chaque stabilité, par anti-transitivité de la relation de séparation. On pourrait également construire un chemin reliant $(p, 0)$ et $(q, 0)$ et disjoint $\tilde{S}$, dans l'esprit du lemme 4.2.23. $\square$

Le critère de séparation des paires de points de $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$

On développe alors l'image visuelle suivante. Si p est un point d'un intervalle stable, alors il est à l'extérieur d'un côté stable de $P(\tilde{S})$ qui représente un endroit où l'altitude de la surface $\tilde{S}$ est très proche de $-\infty$. On imagine donc dans ce cas que p est *au-dessus* de $\tilde{S}$. Au contraire, lorsque q appartient à un intervalle instable, on pense plutôt que q est *en-dessous* de $\tilde{S}$. Cette interprétation éclaire les deux résultats de séparation que nous venons d'énoncer.

Notation Notons $\partial_\infty^+ \tilde{S}$ (resp. $\partial_\infty^- \tilde{S}$) le sous-ensemble de $\partial_\infty \tilde{F}$ égal à la réunion des intervalles stables (resp. instables) de la décomposition de $\partial_\infty \tilde{F} \setminus \text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$.

Les lemmes 4.2.23 et 4.2.24 fournissent alors une description complète de l'image réciproque par l'application de Cannon-Thurston des composantes connexes du complémentaire de l'ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$ dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$.

Proposition 4.2.25 (Image réciproque du complémentaire de $\Lambda(\pi_1(S))$). *Les ensembles $\partial_\infty^+ \tilde{S}$ et $\partial_\infty^- \tilde{S}$ sont les images réciproques par l'application de Cannon-Thurston des composantes connexes de $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi \setminus \Lambda(\pi_1(S))$.*

Corollaire 4.2.26 (Séparation des paires de points de $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$ par $\Lambda(\pi_1(S))$). *Soient $p, q \in \partial_\infty \tilde{F}$. Alors $\Lambda(\pi_1(S))$ sépare $\text{CT}(p)$ et $\text{CT}(q)$ dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$ si, et seulement si, p et q sont situés au-delà de deux côtés ℓ et ℓ' de $P(\tilde{S})$ de stabilités opposées et de plus p et q ne sont pas adhérents dans $\tilde{F}$ aux deux feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ contenant ℓ et ℓ' ou à leurs feuilles duales.*

À l'issue de ce chapitre, nous sommes donc en mesure de caractériser les paires de points du bord de $\tilde{M}_\varphi$ séparés par un ensemble limite de surface coupée-croisée. Les chapitres suivants présenteront des constructions effectives pour construire une surface coupée-croisée quasi-convexe dont l'ensemble limite sépare deux points donnés de $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$, afin d'appliquer le critère de cubulation des variétés hyperboliques compacts démontré en première partie.

Chapitre 5

Constructions de sous-groupes de surface quasi-convexes

Sommaire

5.1	Relevés des surfaces coupées-croisées dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$	84
5.1.1	Les relevés de la partie plongée de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$	84
5.1.2	Structure des relevés de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$	85
5.1.3	Pavages de $\tilde{F}$ associés à la courbe c	86
5.1.4	Structure du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$	88
5.2	Constructions de surfaces coupées-croisées quasi-convexes	89
5.2.1	Dynamique des relevés des puissances de la monodromie dans $\bar{F}$	89
5.2.2	Une condition suffisante de quasi-convexité	91
5.2.3	Tripodes droits et courbes compatibles	91
5.2.4	Prescription d'un côté du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$	93
5.3	Surfaces coupées-croisées généralisées	97
5.3.1	Construction des surfaces coupées-croisées généralisées	97
5.3.2	Relevés des surfaces coupées-croisées généralisées	98
5.4	Constructions de surfaces coupées-croisées généralisées quasi-convexes	100
5.4.1	Une condition suffisante de quasi-convexité	100
5.4.2	Paires de tripodes droits alternés	100
5.4.3	Prescription d'une paire de côtés du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$	101

5.1 Relevés des surfaces coupées-croisées dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$

Les constructions originales de surfaces coupées-croisées quasi-convexes présentées dans ce chapitre sont naturellement basées sur le critère de quasi-convexité du théorème 4.1.13. Celui-ci affirme que si $S \looparrowright M_\varphi$ est une immersion d'une surface qui est partout transverse au flot de la suspension, alors un relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ est quasi-convexe si, et seulement si, sa projection $\Phi(\tilde{S})$ sur le revêtement universel $\tilde{F}$ de la fibre vérifie $\Phi(\tilde{S}) \neq \tilde{F}$. Nous commençons donc par présenter quelques propriétés de structure des relevés des surfaces coupées-croisées au revêtement universel, ainsi que des polygones $\Phi(\tilde{S})$ observés en projection dans $\tilde{F}$.

5.1.1 Les relevés de la partie plongée de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$

Fixons à nouveau une surface hyperbolique F et un homéomorphisme pseudo-Anosov $\varphi \in \text{Homeo}_+(F)$, ainsi qu'une courbe fermée simple essentielle $c \subset F$ telle que $c \cap \varphi(c) = \emptyset$.

Hypothèse. Nous supposons que la fibre coupée F_c est connexe, i.e. que $c \sqcup \varphi(c)$ est non-séparante.

Rappelons que nous avons défini la courbe $c_* = \varphi(c) \times \{\frac{1}{2}\} \subset M_\varphi$ des points doubles de l'immersion $\iota : S \looparrowright M_\varphi$ et la partie plongée $S_* = S \setminus \iota^{-1}(c_*)$ de la surface coupée-croisée, qui est dense dans S .

Un relevé $\tilde{S}$ de S est donc union d'adhérences de relevés de S_* dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$, i.e. d'adhérences de composantes connexes de l'image réciproque $\pi_M^{-1}(S_*)$ puisque $\iota|_{S_*}$ est un plongement et que S_* est supposée connexe. Nous allons expliquer comment, à partir d'un relevé de S_* dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$, construire de manière déterministe l'unique relevé de S le contenant.

Lemme 5.1.1 (Altitude d'un relevé de S_*). *Soit $\tilde{S}_*$ un relevé de S_* dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$. Alors il existe une unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{S}_* \subset \tilde{F} \times]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$. De plus $\tilde{S}_*$ possède une infinité de composantes de frontière dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$, chacune étant un relevé de c_* contenu soit dans $\tilde{F} \times \{n - \frac{1}{2}\}$, soit dans $\tilde{F} \times \{n + \frac{1}{2}\}$.*

Démonstration. Toutes ces assertions découlent immédiatement de la description de l'immersion ι . $\square$

Définition 5.1.2. On dit qu'un relevé $\tilde{S}_*$ de S_* (resp. $\tilde{c}_*$ de c_*) est d'*altitude* n (resp. d'*altitude* $n + \frac{1}{2}$) si $\tilde{S}_* \subset \tilde{F} \times]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$ (resp. $\tilde{c}_* \subset \tilde{F} \times \{n + \frac{1}{2}\}$).

Lemme 5.1.3 (Adjacence de relevés de S_*). *Soit $\tilde{c}_*$ un relevé de la courbe c_* dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ d'altitude $n + \frac{1}{2}$. Alors il existe exactement quatre relevés de S_* dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ dont l'adhérence contient $\tilde{c}_*$. Deux d'entre eux sont d'altitude n et les deux autres d'altitude $n + 1$.*

Démonstration. La courbe $\tilde{c}_*$ est l'intersection de deux relevés $\tilde{A}$ et $\tilde{A}'$ des deux anneaux plongés A et A' . Ces relevés sont donc homéomorphes à des bandes $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ se croisant le long de $\{0\} \times \mathbb{R}$. Il y a donc exactement autant de relevés de S_* contenant $\tilde{c}_*$ que de composantes connexes de $(\tilde{A} \cup \tilde{A}') \setminus (\tilde{A} \cap \tilde{A}')$ et le résultat suit. $\square$

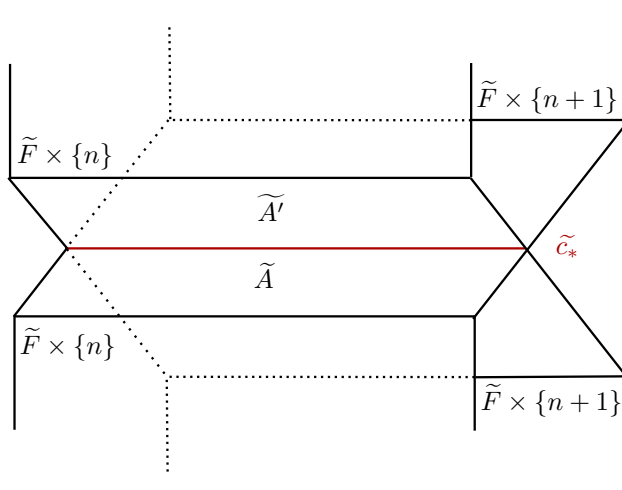


FIGURE 5.1.1 – Croisement des quatre relevés de S_* adhérents à un relevé de c_* .

Nous caractérisons enfin parmi les quatre relevés de S_* adhérents à un même relevé de c_* , quelles sont les paires appartenant à un même relevé de S .

Proposition 5.1.4 (Prolongement d'un relevé de S au-delà d'un relevé de S_*). *Soit $\tilde{c}_*$ un relevé de c_* adhérent à un relevé $\tilde{S}_*$ de S_* et $\tilde{S}$ l'unique relevé de S qui contient $\tilde{S}_*$. Alors :*

- (i) *Il existe un unique relevé $\tilde{X}$ de S_* adhérent à $\tilde{c}_*$ à la fois distinct de $\tilde{S}_*$ et contenu dans $\tilde{S}$.*
- (ii) *$\tilde{X}$ est l'unique relevé de S_* adhérent à $\tilde{c}_*$ d'altitude distincte de celle de $\tilde{S}_*$ et vérifiant la condition :*

$$\Phi(\tilde{S}_*) \cap \Phi(\tilde{X}) = \emptyset.$$

- (iii) *$\tilde{X}$ est également l'unique relevé de S_* adhérent à $\tilde{c}_*$ tel que $\tilde{X} \cup \tilde{S}_*$ contienne un relevé de A ou A' dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$.*

Démonstration. Les relevés de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ étant plongés d'après le corollaire 4.1.5, il existe exactement deux relevés $\tilde{S}$ et $\tilde{S}'$ contenant $\tilde{c}_*$, ce qui justifie le premier point. Si $\tilde{S}_*$ contient une composante connexe de $(\tilde{A} \cup \tilde{A}') \setminus (\tilde{A} \cap \tilde{A}')$ contenue dans $\tilde{A}$, alors $\tilde{X}$ contient l'unique composante distincte de $(\tilde{A} \cup \tilde{A}') \setminus (\tilde{A} \cap \tilde{A}')$ contenue dans $\tilde{A}$. Il est donc clair que $\tilde{X}$ est d'altitude distincte de celle de $\tilde{S}_*$ et que le plan $\tilde{c}_* \times \mathbb{R}$ sépare les lignes de flot intersectant $\tilde{S}_*$ de celles intersectant $\tilde{X}$. $\square$

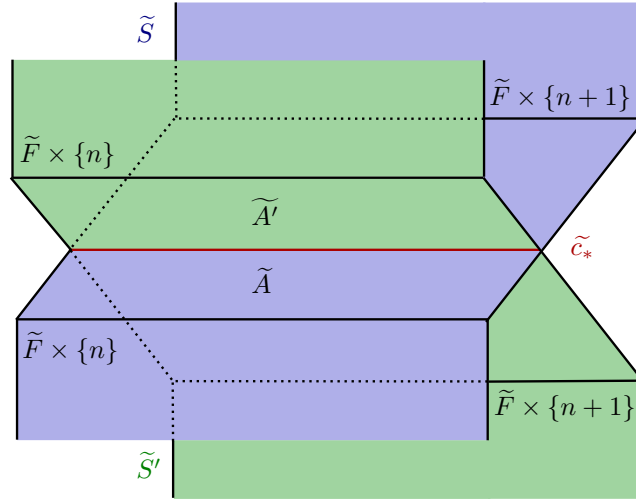


FIGURE 5.1.2 – Croisement de deux relevés $\tilde{S}$ et $\tilde{S}'$ de S le long d'un relevé $\tilde{c}_*$ de c_* .

Notation Soit $\tilde{S}_*$ un relevé de S_* dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ et $\tilde{c}_*$ une composante de frontière de $\tilde{S}_*$. L'unique relevé $\tilde{X}$ de S_* adhérent à $\tilde{c}_*$ tel que $\tilde{X} \cup \tilde{S}_*$ contienne un relevé de A ou A' dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ est noté $\tilde{X}(\tilde{S}_*, \tilde{c}_*)$.

5.1.2 Structure des relevés de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$

Nous décrivons maintenant une construction de proche en proche d'un relevé $\tilde{S}$ de S à partir de la donnée d'un relevé $\tilde{S}_*$ de S_* . On ajoute progressivement le long des composantes de frontières de $\tilde{S}_*$ les relevés compatibles étudiés au paragraphe précédent, puis on recommence avec le nouvel ensemble obtenu, ...

Étape 0 : Fixons $\tilde{S}_*$ un relevé de S_* dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ et posons $A_0 = \overline{\tilde{S}_*}$.

Étape 1 : Pour chaque composante de frontière $\tilde{c}_*$ de A_0 , on ajoute à A_0 le relevé $\tilde{X}(\tilde{S}_*, \tilde{c}_*)$ défini au paragraphe précédent. On pose donc :

$$A_1 = A_0 \cup \bigcup_{\tilde{c}_* \in \text{Fr}(A_0)} \overline{\tilde{X}(\tilde{S}_*, \tilde{c}_*)}.$$

Le domaine A_1 est alors une union connexe d'adhérences de relevés de S_* telle qu'aucune ligne de flot n'intersecte A_1 en deux points distincts (d'après la proposition 5.1.4).

Étape $n + 1$: Supposons construit un ensemble A_n qui est une union connexe d'adhérences de relevés de S_* telle qu'aucune ligne de flot de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ n'intersecte A_n en deux points distincts. Pour chaque composante de frontière $\tilde{c}_*$ de A_n , il existe alors un unique relevé $\tilde{S}_*(\tilde{c}_*)$ de S_* contenu dans A_n et dont $\tilde{c}_*$ est une composante de frontière. On pose alors :

$$A_{n+1} = A_n \cup \bigcup_{\tilde{c}_* \subset \text{Fr}(A_n)} \overline{\tilde{X}(\tilde{S}_*(\tilde{c}_*), \tilde{c}_*)}$$

L'ensemble A_{n+1} est alors une union connexe d'adhérences de relevés de S_* et aucune ligne de flot n'intersecte A_{n+1} en deux points distincts (à nouveau d'après la proposition 5.1.4).

Étape ∞ : On définit alors l'ensemble $A_\infty = A_\infty(\tilde{S}_*) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Proposition 5.1.5. Soit $\tilde{S}_*$ un relevé de S_* dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ et $\tilde{S}$ l'unique relevé de S contenant $\tilde{S}_*$. Alors :

$$\tilde{S} = A_\infty(\tilde{S}_*).$$

Démonstration. D'après la proposition 5.1.4, $A_\infty(\tilde{S}_*)$ est une sous-surface ouverte et fermée de la surface connexe $\tilde{S}$. D'où l'égalité. $\square$

Cette construction a le mérite de rendre complètement transparente la proposition 4.1.4.

Corollaire 5.1.6. La surface $\tilde{S}$ intersecte une ligne de flot $\{\tilde{x}\} \times \mathbb{R}$ au plus une fois.

5.1.3 Pavages de $\tilde{F}$ associés à la courbe c

Nous allons maintenant retranscrire la construction itérative d'un relevé $\tilde{S}$ pavé par certains relevés bien choisis de $\tilde{S}_*$ en projection dans le revêtement universel $\tilde{F}$ de la fibre. Nous allons voir que nous aurons à assembler convenablement les chambres de certains pavages de $\tilde{F}$ associés aux relevés des courbes de la forme $\varphi^n(c)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 5.1.7. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit le pavage $\mathcal{P}_n$ de $\tilde{F}$ en considérant l'ensemble des relevés dans $\tilde{F}$ des courbes $\varphi^n(c)$ et $\varphi^{n+1}(c)$. Une chambre du pavage $\mathcal{P}_n$ est une composante connexe de :

$$\tilde{F} \setminus \pi_F^{-1}(\varphi^n(c) \sqcup \varphi^{n+1}(c)).$$

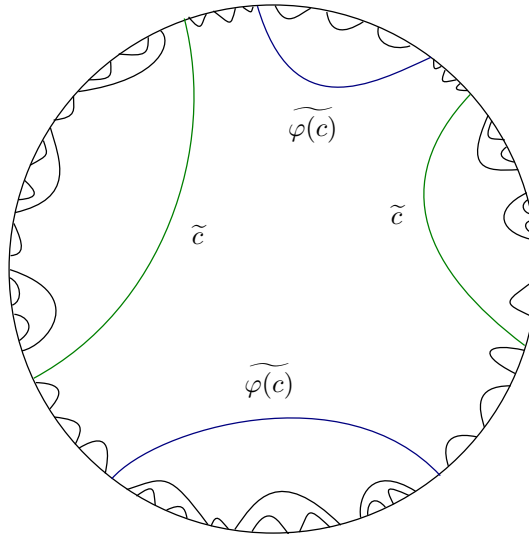


FIGURE 5.1.3 – Pavage arborescent $\mathcal{P}_0$ de $\tilde{F}$ induit par les relevés de c et $\varphi(c)$.

Remarques

1. Comme c est une courbe simple et $c \cap \varphi(c) = \emptyset$, les relevés dans $\tilde{F}$ de $\varphi^n(c)$ et $\varphi^{n+1}(c)$ sont des courbes deux à deux d'adhérences disjointes dans $\tilde{F}$. Le graphe dual au pavage $\mathcal{P}_n$ est donc un arbre régulier de valence infinie. Le groupe fondamental $\pi_1(F)$ agit sur ce pavage et les stabilisateurs des chambres sont conjugués au groupe fondamental de la fibre coupée $\pi_1(F_c)$.
2. Une courbe ℓ de $\tilde{F}$ relève $\varphi^n(c)$ pour au plus un entier $n \in \mathbb{Z}$. En effet, si un relevé de $\varphi^n(c)$ coïncide avec un relevé de $\varphi^m(c)$, alors $\varphi^n(c) = \varphi^m(c)$ et donc $n = m$ car φ est un homéomorphisme pseudo-Anosov¹. On dira donc sans ambiguïté qu'une chambre de $\mathcal{P}_n$ est d'altitude n .

L'intérêt de l'introduction de ces pavages apparaît grâce aux lemmes suivants, qui reprennent en projection l'étude menée pour les relevés $\tilde{S}_*$ de S_* .

Lemme 5.1.8 (Projection des relevés de c_*). *Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\tilde{c}_*$ un relevé de c_* d'altitude $n + \frac{1}{2}$. Alors $\Phi(\tilde{c}_*)$ est un relevé de $\varphi^{n+1}(c)$.*

Démonstration. Rappelons que c_* est l'image dans M_φ de la courbe $\varphi(c) \times \{\frac{1}{2}\}$ du produit $F \times \mathbb{R}$. On en déduit que pour tout relevé $\tilde{c}_*$ de c_* d'altitude $\frac{1}{2}$, $\Phi(\tilde{c}_*)$ est un relevé de $\varphi(c)$. Soit alors $\tilde{c}_*$ un relevé de c_* d'altitude $n + \frac{1}{2}$ et $\gamma(\tilde{\varphi})$ un relevé de γ_∞ à $\tilde{F} \times \mathbb{R}$. Alors $\gamma(\tilde{\varphi})^{-n}(\tilde{c}_*)$ est un relevé de c_* d'altitude $\frac{1}{2}$. Donc $\Phi(\gamma(\tilde{\varphi})^{-n}(\tilde{c}_*))$ relève $\varphi(c)$. On en déduit donc que $\Phi(\tilde{c}_*)$ relève $\varphi^n(\varphi(c)) = \varphi^{n+1}(c)$. $\square$

Corollaire 5.1.9 (Identification des chambres des pavages aux projetés des relevés de S_*).

Soit $n \in \mathbb{Z}$. La projection $\Phi : \tilde{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{F}$ réalise une bijection de l'ensemble des relevés de S_ d'altitude n sur celui des chambres de $\mathcal{P}_n$.*

Si l'on se donne une chambre C d'un pavage $\mathcal{P}_n$, il s'agit de la projection d'un unique relevé de S_* , contenu dans un unique relevé $\tilde{S}$ de S et naturellement, $\Phi(\tilde{S}) \supset C$. On souhaite alors comprendre comment prolonger la construction du polygone $\Phi(\tilde{S})$ au-delà des composantes de frontière de C .

Proposition 5.1.10 (Prolongement de la projection d'un relevé de S au-delà d'une chambre d'un pavage). *Soit $n \in \mathbb{Z}$, C une chambre du pavage $\mathcal{P}_n$ et ℓ une composante de frontière de C . Alors il existe une unique chambre C' de l'un des pavages $\mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{Z}$ d'altitude distincte de celle de C et telle que $\overline{C} \cap \overline{C'} = \ell$ (et de plus $m = n \pm 1$).*

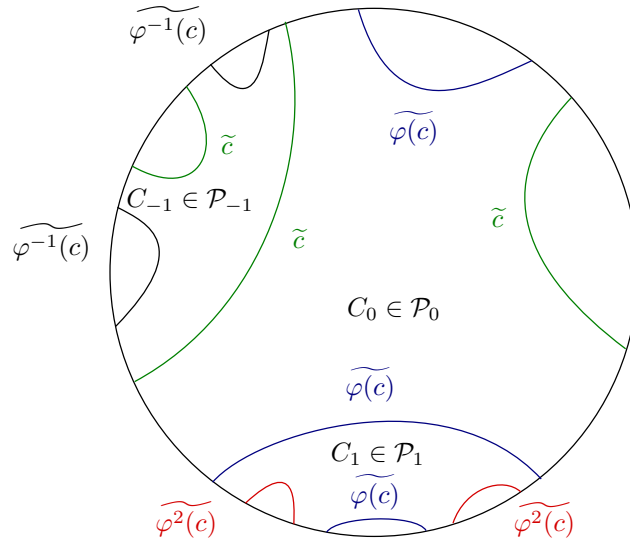


FIGURE 5.1.4 – Chaque composante de frontière d'une chambre de $\mathcal{P}_n$ est commune à exactement une chambre disjointe de $\mathcal{P}_{n \pm 1}$.

¹Si φ est un homéomorphisme pseudo-Anosov et c une courbe fermée simple essentielle, alors l'hypothèse que $\varphi^n(c)$ est librement homotope à $\varphi^m(c)$ entraîne que $n = m$.

Démonstration. L'assertion est claire par construction des pavages $\mathcal{P}_n$. Remarquons de plus que si $\tilde{S}_*$ est le relevé de S_* tel que $\Phi(\tilde{S}_*) = C$ et $\tilde{c}_*$ est le relevé de c_* tel que $\Phi(\tilde{c}_*) = \ell$, alors le relevé $\tilde{X}$ tel que $\Phi(\tilde{X}) = C'$ est égal à $\tilde{X}(\tilde{S}_*, \tilde{c}_*)$. En effet, si $\overline{C} \cap \overline{C'} = \ell$, alors $C \cap C' = \emptyset$, i.e. $\Phi(\tilde{S}_*) \cap \Phi(\tilde{X}(\tilde{S}_*, \tilde{c}_*)) = \emptyset$. $\square$

5.1.4 Structure du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$

Nous reprenons maintenant en projection la construction itérative des relevés $\tilde{S}$ de S présentée au paragraphe 5.1.2. À partir d'une quelconque chambre de $\mathcal{P}_n$, on ajoute les chambres adjacentes des pavages $\mathcal{P}_{n\pm 1}$, puis on itère ce procédé de construction jusqu'à obtenir le projeté $\Phi(\tilde{S})$ recherché (celui associé au relevé $\tilde{S}$ de S contenant le relevé d'altitude n de S_* se projetant sur la chambre initiale).

Étape 0 : Fixons C une chambre de l'un des pavages $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ et posons $B_0 = \overline{C}$.

Étape 1 : Pour chaque composante de frontière ℓ de B_0 , on ajoute à B_0 l'unique chambre $C'(\ell)$ de l'un des pavages $\mathcal{P}_{n\pm 1}$ telle que $\overline{C} \cap \overline{C'(\ell)} = \ell$. On pose donc :

$$B_1 = B_0 \cup \bigcup_{\ell \in \text{Fr}(B_0)} \overline{C'(\ell)}.$$

Le domaine B_1 est alors une union connexe d'adhérences de chambres deux à deux disjointes.

Étape $n+1$: Supposons construit un ensemble B_n union connexe d'adhérences de chambres deux à deux disjointes des pavages $\mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{Z}$. Pour chaque composante de frontière ℓ de B_n , on note $C(\ell)$ l'unique chambre de l'un des pavages $\mathcal{P}_m$ contenue dans B_n et $C'(\ell)$ l'unique chambre d'altitude distincte de celle de $C(\ell)$ telle que $\overline{C(\ell)} \cap \overline{C'(\ell)} = \ell$. On pose alors :

$$B_{n+1} = B_n \cup \bigcup_{\ell \in \text{Fr}(B_n)} \overline{C'(\ell)}.$$

L'ensemble B_{n+1} est alors une union connexe d'adhérences de chambres deux à deux disjointes.

Étape ∞ : On définit alors $B_\infty = B_\infty(C) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Remarque Si C et C' sont deux chambres chacune contenue dans l'une des parties $B_{n+1} \setminus B_n$, $n \in \mathbb{N}$, alors $B_\infty(C) = B_\infty(C')$. Ceci découle de l'aspect complètement déterministe de la construction.

Proposition 5.1.11 (Construction itérative du polygone $\Phi(\tilde{S})$). Soit $\tilde{S}_*$ un relevé de S_* dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ et $\tilde{S}$ l'unique relevé de S qui contient $\tilde{S}_*$. Alors :

$$\Phi(\tilde{S}) = B_\infty(\Phi(\tilde{S}_*)).$$

Remarques

1. Nous avons par commodité supposé que la multi-courbe $c \sqcup \varphi(c)$ est non-séparante dans F . Dans le cas contraire, la fibre coupée F_c est disconnexe et la partie plongée S_* est également disconnexe. Toutes les propriétés des relevés de S_* ou des chambres des pavages $\mathcal{P}_n$ que nous avons énoncés dans cette section restent valables en remplaçant les relevés de S_* par les relevés des composantes connexes de S_* et également les relevés de S par les relevés des composantes connexes de S dans le cas où S est disconnexe.
2. La description de la construction itérative du polygone $\Phi(\tilde{S})$ ne fait à aucun moment intervenir les voisinages réguliers $\mathcal{V}$ et $\varphi(\mathcal{V})$ des courbes c et $\varphi(c)$ dans F , ni la définition précise de l'immersion ι en restriction aux anneaux A et A' . Le polygone $\Phi(\tilde{S})$ construit à partir d'un relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ est donc indépendant de la manière de couper la fibre F ainsi que de la manière de croiser ses anses pour obtenir une surface coupée-croisée, du moment que l'immersion fabriquée est transverse au flot. L'ensemble limite du sous-groupe de surface ainsi obtenu est donc également indépendant des opérations précises de coupe et de croisement et est entièrement déterminé par la courbe $c \subset F$. Nous nous autoriserons donc la notation $S = S(c, \varphi)$ (omettant le choix de $\mathcal{V}$) pour la surface coupée-croisée associée à une courbe fermée simple c telle que $c \cap \varphi(c) = \emptyset$.

5.2 Constructions de surfaces coupées-croisées quasi-convexes

À l'aide de la description itérative des polygones $\Phi(\tilde{S})$ de la section précédente, nous allons dégager des conditions suffisantes sur une courbe $c \subset F$ telle que $c \cap \varphi(c) = \emptyset$ pour que la surface coupée-croisée $S(c, \varphi)$ soit quasi-convexe. Pour ce faire, nous aurons de prime abord besoin de comprendre en détail la dynamique dans le disque fermé $\bar{F}$ des relevés des puissances de la monodromie.

5.2.1 Dynamique des relevés des puissances de la monodromie dans $\bar{F}$

On considère dans ce paragraphe un élément $g \in \pi_1(M) \setminus \{1\}$ et son opération sur $\tilde{F}$ où il agit comme un relevé d'une puissance de φ . Cette transformation g étant alors une quasi-isométrie de $\tilde{F}$, elle s'étend continûment de manière unique en un homéomorphisme (quasi-conforme) de la compactification $\bar{F}$ de $\tilde{F}$. Nous présentons dans ce paragraphe les quatre cas possibles de dynamique pour cette action de g sur $\bar{F}$ (voir [CB88]).

Premier cas (Fixation des extrémités d'une feuille régulière)

Supposons que g fixe les extrémités d'une feuille régulière ℓ de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$. Alors g stabilise ℓ , donc ℓ est une feuille périodique et contient un unique relevé $\tilde{x}$ d'un point φ -périodique. Les feuilles ℓ et ℓ' de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ qui contiennent $\tilde{x}$ sont alors stables par g , qui possède exactement quatre points fixes dans $\partial_\infty \tilde{F}$, dont deux sont attractifs et les deux autres répulsifs, et exactement un point fixe dans $\tilde{F}$. Plus précisément, si g relève une puissance positive de φ et ℓ est une feuille stable, alors g contracte (resp. dilate) ℓ (resp. ℓ') et les extrémités de ℓ (resp. ℓ') sont des points fixes répulsifs (resp. attractifs) de g .

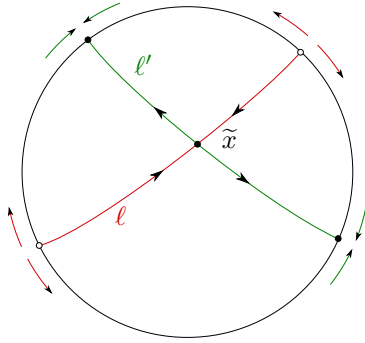


FIGURE 5.2.1 – Le cas d'une feuille régulière stabilisée (et donc périodique).

Second cas (Fixation des extrémités d'une feuille singulière)

Supposons que g fixe les extrémités d'une feuille singulière ℓ à k branches de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$. Alors les conclusions du cas précédent sont encore valides, $\tilde{x}$ étant le point singulier commun à ℓ et ℓ' et g ayant dans ce cas $2k$ points fixes dans $\partial_\infty \tilde{F}$, alternativement attractifs et répulsifs.

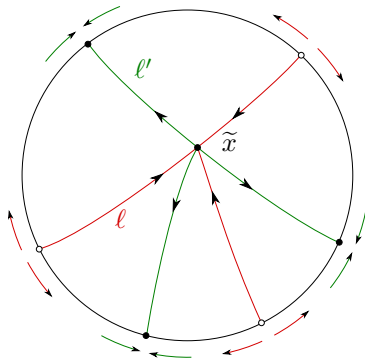


FIGURE 5.2.2 – Le cas d'une feuille singulière stabilisée (avec ici $k = 3$ branches).

Troisième cas (Action libre sur $\partial_\infty \tilde{F}$)

Supposons que g ne possède aucun point fixe dans $\partial_\infty \tilde{F}$. Alors d'après le théorème de point fixe de Brouwer, g possède un point fixe $\tilde{x}$ dans $\tilde{F}$. Les feuilles ℓ et ℓ' de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ qui contiennent $\tilde{x}$ sont donc périodiques et stables par g . Leurs extrémités sont de plus permutées par g , via une permutation sans point fixe. En particulier, il existe une puissance de g qui relève du premier cas si $\tilde{x}$ est régulier, du second si $\tilde{x}$ est singulier.

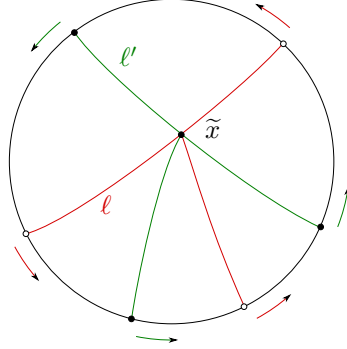


FIGURE 5.2.3 – Action sans point fixe au bord avec un point fixe dans $\tilde{F}$.

Quatrième cas (Action libre sur $\tilde{F}$ et dynamique nord-sud)

Supposons enfin que g ne fixe les extrémités d'aucune feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ et possède un point fixe dans $\partial_\infty \tilde{F}$. Alors g possède exactement deux points fixes dans $\partial_\infty \tilde{F}$, l'un attractif, l'autre répulsif, et agit sur le disque $\tilde{F}$ avec une dynamique nord-sud classique (les éléments de $\pi_1(F) \setminus \{\text{id}\}$ relèvent de ce cas).

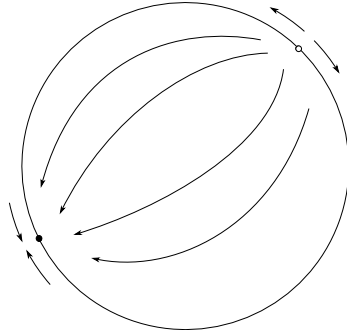


FIGURE 5.2.4 – Action sans point fixe dans $\tilde{F}$ avec la même dynamique que les éléments de $\pi_1(F)$.

Remarques

1. Un élément de $\pi_1(M)$ agit librement sur $\tilde{F}$ si, et seulement si, il relève du quatrième cas, soit encore de manière équivalente, s'il possède exactement deux points fixes dans $\partial_\infty \tilde{F}$.
2. Lorsqu'un élément de $\pi_1(M)$ n'agit pas librement sur $\tilde{F}$, le lemme suivant affirme qu'il possède alors exactement un point fixe qui est de plus son unique point périodique.

Lemme 5.2.1 (Au plus un point périodique dans $\tilde{F}$). *Tout élément $g \in \pi_1(M)$ non trivial possède au plus un point périodique dans $\tilde{F}$ et cet éventuel point périodique est, s'il existe, un point fixe.*

Démonstration. Supposons que g possède deux points périodiques distincts $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ dans $\tilde{F}$. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que g^n fixe à la fois $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$. Alors g^n stabilise les quatre feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ qui passent par $\tilde{x}$ ou $\tilde{y}$. Il existe donc une puissance g^{nm} de g^n qui possède au moins huit points fixes dans $\partial_\infty \tilde{F}$ et deux points fixes dans $\tilde{F}$. Cette première condition implique que g^{nm} relève du second cas, et possède donc un unique point fixe dans $\tilde{F}$, ce qui contredit la seconde condition. $\square$

5.2.2 Une condition suffisante de quasi-convexité

Nous allons maintenant énoncer une condition suffisante sur une courbe c formulée au revêtement universel pour qu'une surface coupée-croisée soit quasi-convexe. Il s'agit essentiellement d'une reformulation du critère de Joseph Masters (voir l'article [Mas06] où sont construits de nombreux sous-groupes de surface quasi-convexes de $\pi_1(M)$).

Considérons dans la fibre F une courbe fermée simple essentielle c telle que $c \cap \varphi(c) = \emptyset$ et $\iota : S \rightarrow M_\varphi$ la surface coupée-croisée associée à c définie au paragraphe 4.1.1. Lorsque S n'est pas connexe, nous parlerons abusivement de relevés de S pour les relevés d'une quelconque composante connexe de S .

On rappelle que, pour tout relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$, on dispose d'une construction itérative du polygone $\Phi(\tilde{S})$ via certains pavages $\mathcal{P}_n$ de la fibre dont les chambres sont les composantes connexes de $\tilde{F} \setminus \pi_F^{-1}(\varphi^n(c) \sqcup \varphi^{n+1}(c))$ (voir paragraphe 5.1.4). L'étude de l'action des éléments de $\pi_1(M)$ sur ces pavages permet de formuler un critère simple de quasi-convexité de $\pi_1(S)$.

Proposition 5.2.2 (Condition suffisante de quasi-convexité de $\pi_1(S)$). *Soit C une chambre de l'un des pavages $\mathcal{P}_n$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe un relevé $\tilde{\varphi}$ de φ fixant un point de $\tilde{F}$ tel que $\tilde{C} \cap \tilde{\varphi}(C)$ soit une composante de frontière commune à C et $\tilde{\varphi}(C)$. Alors $\tilde{\varphi}$ stabilise $B_\infty(C)$ et $\pi_1(S)$ est un sous-groupe quasi-convexe de $\pi_1(M)$.*

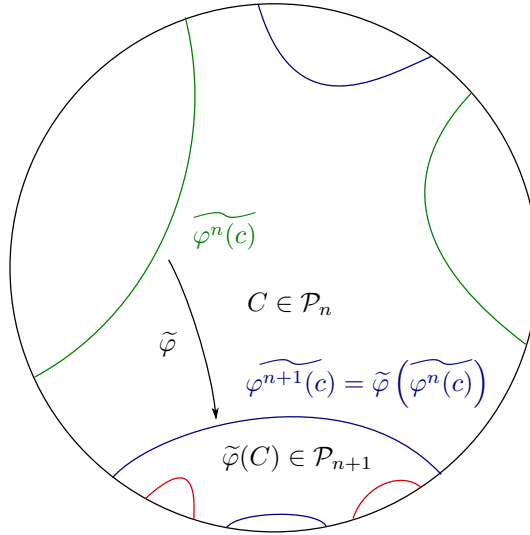


FIGURE 5.2.5 – Une condition suffisante de quasi-convexité.

Démonstration. Posons $B_0 = \overline{C}$. Alors par hypothèse et par construction de B_1 , $\tilde{\varphi}(C) \subset B_1 \setminus B_0$ et donc $\tilde{\varphi}(B_\infty(C)) = B_\infty(\tilde{\varphi}(C)) = B_\infty(C)$. Rappelons que le stabilisateur de $\Phi(\tilde{S})$ contient (un conjugué de) $\pi_1(S)$ avec indice fini (voir le dernier paragraphe de la section 4.2.3). Il en découle qu'une puissance non nulle de $\tilde{\varphi}$ appartient à (un conjugué de) $\pi_1(S)$ dans $\pi_1(M)$ et donc que $\pi_1(S)$ n'agit pas librement sur $\tilde{F}$. Le résultat suit donc du corollaire 4.2.13. $\square$

5.2.3 Tripodes droits et courbes compatibles

Nous allons utiliser le critère du paragraphe précédent pour construire de nombreuses surfaces coupées-croisées quasi-convexes dans M_φ . Plus précisément, nous allons expliquer pourquoi ce critère permet non seulement de construire de telles surfaces, mais également comment l'exploiter pour localiser un côté du polygone idéal $P(\tilde{S})$ et son rayon dual.

La donnée d'un côté d'un polygone $P(\tilde{S})$ et de son rayon dual forme un tripode dans $\tilde{F}$ possédant des propriétés remarquables en lien avec les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$. Nous introduisons une définition générale de tripode topologique qui reproduit ces propriétés.

Définition 5.2.3. Un *tripode droit* $\{\ell, r\}$ dans $\tilde{F}$ est la donnée d'une géodésique bi-infinie (de (F, dt)) ℓ contenue dans une feuille périodique ℓ' de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ et d'un rayon r contenu dans la feuille ℓ'' duale à ℓ' et issu de l'unique point $\tilde{x} \in \ell$ relevant un point φ -périodique tels que ℓ sépare $r \setminus \{\tilde{x}\}$ et $\ell'' \setminus r$ dans $\tilde{F}$. Le point $\tilde{x} = \ell \cap r$ est alors appelé *centre* du tripode.

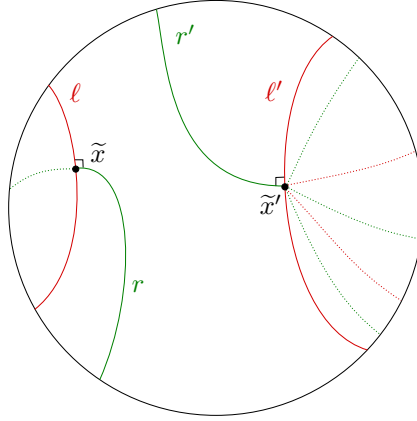


FIGURE 5.2.6 – Un tripode droit $\{\ell, r\}$ (resp. $\{\ell', r'\}$) de centre $\tilde{x}$ (resp. $\tilde{x}'$) régulier (resp. singulier).

Remarque La terminologie de tripode *droit* provient du fait que les angles entre chacun des rayons de ℓ issus de $\tilde{x}$ et le rayon r valent $\frac{\pi}{2}$.

Exemple Soit $\Phi(\tilde{S})$ un polygone idéal associé à un relevé $\tilde{S}$ d'une surface coupée-croisée S . Si ℓ est un côté de $\Phi(\tilde{S})$ de rayon dual r , alors $\{\ell, r\}$ est un tripode droit.

Au terme du paragraphe 5.2.4, nous aurons démontré réciproquement que tout tripode droit apparaît au bord d'un polygone associé à une construction de surface coupée-croisée quasi-convexe.

Définition 5.2.4. Une courbe fermée essentielle $c \subset F$ est dite *compatible avec un tripode droit* $\{\ell, r\}$ s'il existe un relevé $\tilde{c}$ de c plongé dans $\tilde{F}$ tel que $\tilde{c} \cap \ell = \emptyset$ et l'adhérence de $\ell \cup r$ dans $\overline{F}$ sépare les extrémités de $\tilde{c}$ dans $\partial_\infty \tilde{F}$. On s'autorisera alors à dire que la courbe $c \subset F$ est compatible avec $\{\ell, r\}$ via un relevé $\tilde{c}$.

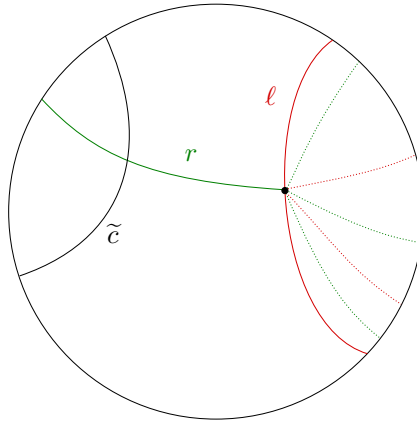


FIGURE 5.2.7 – Un relevé $\tilde{c}$ d'une courbe compatible avec le tripode droit $\{\ell, r\}$.

Remarques

1. Si c est une courbe compatible avec un tripode admissible $\{\ell, r\}$ via un relevé $\tilde{c}$, alors $\tilde{c} \cap r \neq \emptyset$.
2. L'hypothèse faite que c est plongée au niveau du revêtement universel garantit que c peut se relever en une courbe fermée simple dans un revêtement fini de F .
3. Rappelons qu'un tripode admissible $\{\ell, r\}$ possède un stabilisateur isomorphe à $\mathbb{Z}$ dans $\pi_1(M)$, par exemple engendré par un relevé d'une puissance de φ qui dilate ℓ et contracte r . Si ce stabilisateur est engendré par un relevé $\tilde{\varphi}$ de φ , alors les courbes $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ peuvent parfois être des composantes de frontière d'une même chambre du pavage $\mathcal{P}_0$. Nous allons voir que dans ce cas, notre condition suffisante de quasi-convexité s'applique.

Proposition 5.2.5 (Localisation d'un côté de $P(\tilde{S})$). Soit $\{\ell, r\}$ un tripode droit stabilisé par un relevé $\tilde{\varphi}$ de φ et c une courbe fermée simple essentielle telle que $c \cap \varphi(c) = \emptyset$ et compatible avec $\{\ell, r\}$ via un relevé $\tilde{c}$. Si aucun relevé de c ou $\varphi(c)$ ne sépare $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ dans $\tilde{F}$, alors il existe un relevé $\tilde{S}$ de $S = S(c, \varphi)$ dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que ℓ soit un côté du polygone $P(\tilde{S})$ de rayon dual r et $\tilde{c} \subset \Phi(\tilde{S})$.

Démonstration. On suppose pour fixer les idées que ℓ est contenue dans une feuille instable et donc r est un rayon stable. Ceci implique que $\tilde{\varphi}$ agit par contraction sur le rayon r . Les hypothèses garantissent qu'il existe une chambre C du pavage $\mathcal{P}_0$ dont les courbes $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ sont des composantes de frontière. La condition de compatibilité de $\tilde{c}$ avec le tripode $\{\ell, r\}$ et la dynamique de $\tilde{\varphi}$ sur le rayon r impliquent alors que $\overline{C} \cap \overline{\tilde{\varphi}(C)} = \tilde{\varphi}(\tilde{c})$. D'après la proposition 5.2.2, la surface $S = S(c, \varphi)$ est donc quasi-convexe. De plus, par construction de $B_\infty(C)$, $\tilde{\varphi}^n(C) \subset B_n \setminus B_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $\tilde{\varphi}^{n+1}(\tilde{c})$ est une composante de frontière de B_n . Ainsi, le centre $\tilde{x}$ n'est adhérent à aucun des ensembles B_n avec $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, si $p \in \tilde{c} \cap r$, alors $\tilde{\varphi}^n(p)$ converge vers $\tilde{x}$, donc $\tilde{x}$ est adhérent à $B_\infty(C)$. Nécessairement, ℓ est une composante de frontière de $B_\infty(C) = \Phi(\tilde{S})$ dont le rayon dual est r et bien sûr $\tilde{c} \subset \Phi(\tilde{S})$. $\square$

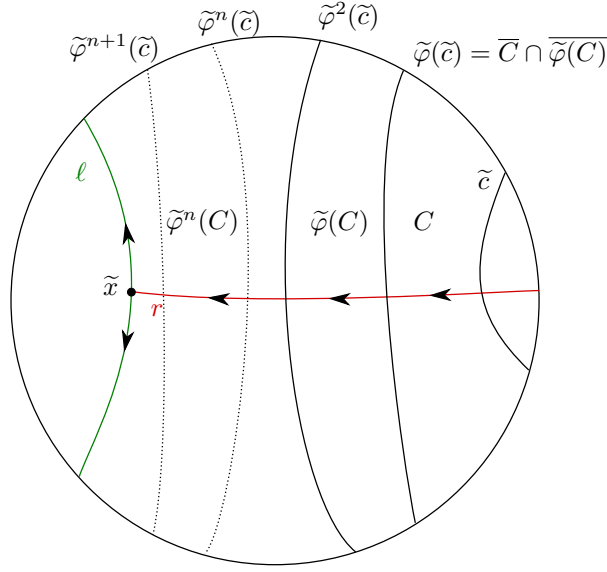


FIGURE 5.2.8 – L'accumulation des chambres $\tilde{\varphi}^n(C)$ le long du rayon r fabrique le côté ℓ de $\Phi(\tilde{S})$.

Remarque On considère un tripode droit $\{\ell, r\}$ et une courbe fermée essentielle c compatible avec $\{\ell, r\}$ via un relevé $\tilde{c}$. J. Masters (voir [Mas06]) démontre que quitte à remplacer $\tilde{c}$ par un autre relevé de c compatible avec $\{\ell, r\}$ suffisamment éloigné du centre $\tilde{x}$ du tripode, alors $\tilde{c} \cap \tilde{\varphi}(\tilde{c}) = \emptyset$. Il assure alors par séparabilité qu'aucun relevé de c ou $\varphi(c)$ ne sépare $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$. La courbe $\tilde{c}$ peut alors être utilisée pour construire un sous-groupe de surface coupée-croisée (généralisée, voir section 5.3) très peu quasi-convexe. Nous montrons ci-dessous qu'une telle courbe $\tilde{c}$ peut toujours être utilisée pour une construction de surface coupée-croisée quasi-convexe, sans avoir à l'éloigner du centre $\tilde{x}$ du tripode.

5.2.4 Prescription d'un côté du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$

Nous démontrons dans ce paragraphe que tout tripode droit apparaît au bord d'un polygone idéal $P(\tilde{S})$ pour au moins un relevé $\tilde{S}$ d'une surface coupée-croisée construite dans un revêtement fini de M_φ . La stratégie consiste à démontrer que les hypothèses de la proposition 5.2.5 sont toujours *virtuellement* réalisables en partant d'un tripode admissible et d'une quelconque courbe compatible avec ce tripode.

Proposition 5.2.6 (Réalisation virtuelle de la condition suffisante de quasi-convexité). Soit $\{\ell, r\}$ un tripode droit de centre $\tilde{x}$ et $c \subset F$ une courbe fermée essentielle compatible avec $\{\ell, r\}$ via un relevé $\tilde{c}$. Alors il existe un revêtement fini $\hat{F}$ de F avec $\tilde{F} \xrightarrow{\pi} \hat{F} \xrightarrow{\leq \infty} F$ et $\psi : \hat{F} \rightarrow \hat{F}$ un relevé d'une puissance non nulle de φ fixant le point $\hat{x} = \pi(\tilde{x})$ tels que $\hat{c} = \pi(\tilde{c})$ soit une courbe fermée simple disjointe de $\psi(\hat{c})$ et, notant $\hat{\psi}$ l'unique relevé de ψ qui fixe $\hat{x}$, aucun relevé de $\hat{c}$ ou $\psi(\hat{c})$ dans $\tilde{F}$ ne sépare $\tilde{c}$ et $\tilde{\psi}(\tilde{c})$.

La proposition 5.2.5 permet donc en considérant la surface coupée-croisée $S = S(\hat{c}, \psi)$ du revêtement fini M_ψ de M_φ fournie par la proposition 5.2.6 d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.7. *Soit $\{\ell, r\}$ un tripode droit et c une courbe compatible avec $\{\ell, r\}$ via un relevé $\tilde{c}$. Alors il existe une surface coupée-croisée quasi-convexe S dans un revêtement fini $\widehat{M}$ de M_φ et un relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que $\tilde{c} \subset \Phi(\tilde{S})$ et ℓ est un côté de $\Phi(\tilde{S})$ dont r est le rayon dual.*

Remarque En composant l'immersion $S \hookrightarrow \widehat{M}$ et le revêtement $\widehat{M} \rightarrow M_\varphi$, on obtient une immersion $S \hookrightarrow M_\varphi$ partout transverse au flot. Sous les hypothèses du corollaire 5.2.7, on peut donc également dire qu'il existe une surface immergée S partout transverse au flot dans M_φ et un relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que $\tilde{c} \subset \Phi(\tilde{S})$ et ℓ est un côté de $\Phi(\tilde{S})$ dont r est le rayon dual.

Pour démontrer la proposition 5.2.6, nous utiliserons des arguments classiques de séparabilité, via le théorème de P. Scott énoncé ci-dessous.

Théorème 5.2.8 (Séparabilité des groupes de surface, voir [Sco78] et [Sco85]). *Soit S une surface connexe (par exemple compacte orientable de genre $g \geq 2$). Alors les sous-groupes de type fini de $\pi_1(S)$ sont séparables dans $\pi_1(S)$.*

Démonstration de la proposition 5.2.6

Cette démonstration se fait en plusieurs étapes, par une succession de revêtements finis de la fibre dans lesquels apparaissent les propriétés voulues. Pour fixer les idées, nous supposons que ℓ est contenue dans une feuille instable et que r est un rayon stable et également que φ possède un point fixe² p dans F servant de point base au groupe fondamental $\pi_1(F, p)$. Ceci donne en particulier un sens à l'automorphisme φ_* de $\pi_1(F)$ induit en homotopie par φ .

Étape 1 : Quitte à remplacer F par un revêtement fini (par exemple caractéristique) et à relever la monodromie à ce revêtement, on peut supposer que c est une courbe fermée simple essentielle. Tout relevé de c dans un revêtement de F est alors également simple.

Étape 2 : On utilise la dynamique des éléments du stabilisateur du tripode admissible $\{\ell, r\}$ pour traduire $\tilde{c}$ sur une courbe disjointe, puis on remplace φ par une de ses puissances.

Lemme 5.2.9 (Action du stabilisateur du tripode sur $\tilde{c}$). *Il existe un élément $g \in \pi_1(M)$ qui stabilise la droite ℓ et contracte le rayon r et vérifie de plus la condition $g(\tilde{c}) \cap \tilde{c} = \emptyset$. De plus, toute puissance strictement positive de g convient alors également.*

Démonstration. Supposons que $\pi_F(\tilde{x})$ est φ -périodique de plus petite période $m \geq 1$. Notons alors h l'unique relevé de φ^m qui fixe $\tilde{x}$ (et donc contracte le rayon r). Comme l'adhérence dans $\overline{F}$ de la courbe $\tilde{c}$ est par hypothèse un compact du demi-espace ouvert de $\overline{F}$ délimité par ℓ et contenant r , elle peut être attirée dans un voisinage arbitraire dans $\overline{F}$ de l'extrémité de r dans $\partial_\infty \tilde{F}$ par une grande puissance de h^{-1} . En particulier, $\tilde{c} \cap h^{-n}(\tilde{c}) = \emptyset$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand. Alors $g = h^n$ convient ainsi que toutes ses puissances positives. $\square$

On remplace alors la monodromie φ par la puissance φ^{mn} , avec m et n comme dans la démonstration du lemme. Ainsi, cette seconde étape démontre que, quitte à remplacer la monodromie par une de ses puissances, on peut de plus supposer que $\tilde{x}$ est un relevé d'un point fixe de φ et, si l'on note $\tilde{\varphi}$ l'unique relevé de φ qui fixe $\tilde{x}$, alors $\tilde{c} \cap \tilde{\varphi}(\tilde{c}) = \emptyset$. On ajoute donc ces hypothèses pour la troisième et dernière étape de la démonstration.

Étape 3 : On réalise enfin la disjonction $c \cap \varphi(c) = \emptyset$ et le fait qu'aucun relevé de c ou $\varphi(c)$ dans $\tilde{F}$ ne sépare $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$. Tout repose à nouveau sur des propriétés de séparabilité, dont la mise en place se fait par une étude dynamique rappelant le lemme du ping-pong (ou tennis de table pour certains).

On pose $M_0 = \{\sigma \in \pi_1(F) \mid \sigma(\tilde{\varphi}(\tilde{c})) \cap \tilde{c} \neq \emptyset\}$, $M_1 = \{\sigma \in \pi_1(F) \mid \sigma(\tilde{c}) \text{ sépare } \tilde{c} \text{ et } \tilde{\varphi}(\tilde{c})\}$ et $M_2 = \{\sigma \in \pi_1(F) \mid \sigma(\tilde{\varphi}(\tilde{c})) \text{ sépare } \tilde{c} \text{ et } \tilde{\varphi}(\tilde{c})\}$. Enfin, on note $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$. Notre but est de fabriquer un sous-groupe d'indice fini φ_* -invariant $\Sigma \leq \pi_1(F)$ tel que $\Sigma \cap M = \emptyset$.

²Quitte à remplacer φ par une de ses puissances, on peut toujours se ramener à ce cas d'après le lemme 6.1.6.

Notation Notons Γ (resp. Γ') le stabilisateur de $\tilde{c}$ (resp. $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$) dans $\pi_1(F)$ et choisissons γ (resp. γ') un générateur de Γ (resp. Γ').

Lemme 5.2.10 (Propriétés d'invariance modulo les stabilisateurs). *On a les égalités :*

- (i) $\Gamma.M_0.\Gamma' = M_0$,
- (ii) $M_1.\Gamma = M_1$,
- (iii) $M_2.\Gamma' = M_2$.

Démonstration. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ et $\sigma \in M_0$, alors :

$$\gamma^n \circ \sigma \circ \gamma'^m(\tilde{\varphi}(\tilde{c})) \cap \tilde{c} = \gamma^n(\sigma(\tilde{\varphi}(\tilde{c})) \cap \gamma^{-n}(\tilde{c})) = \gamma^n(\sigma(\tilde{\varphi}(\tilde{c})) \cap \tilde{c}) \neq \emptyset$$

car $\sigma(\tilde{\varphi}(\tilde{c})) \cap \tilde{c} \neq \emptyset$. Les propriétés (ii) et (iii) sont claires par définition de M_1 et M_2 . $\square$

Les ensembles quotients $\Gamma \backslash M_0 / \Gamma'$, M_1 / Γ et M_2 / Γ' sont alors finis (voir lemme 5.2.12). On peut donc les représenter, modulo le sous-groupe $\langle \Gamma \cup \Gamma' \rangle$ engendré par les stabilisateurs, par un nombre fini de mauvais éléments. Pour éliminer ces mauvais éléments en dehors d'un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(F)$, on souhaite donc utiliser la séparabilité de $\langle \Gamma \cup \Gamma' \rangle$ dans $\pi_1(F)$, mais il n'y a aucune raison a priori que $\langle \Gamma \cup \Gamma' \rangle \setminus (\Gamma \cup \Gamma')$ ne contienne aucun de ces mauvais éléments. L'étude dynamique menée dans le lemme suivant va nous permettre de régler ce problème.

Lemme 5.2.11 (Dynamique du sous-groupe $\langle \Gamma \cup \Gamma' \rangle$ dans $\tilde{F}$). *Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :*

$$M \cap \langle \gamma^N, \gamma'^N \rangle = \emptyset.$$

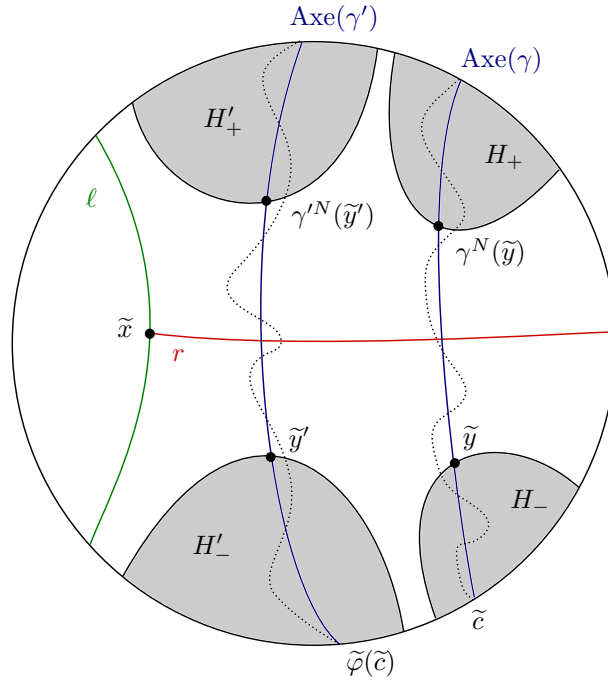


FIGURE 5.2.9 – Matérialiser la dynamique du sous-groupe $\langle \gamma^N, \gamma'^N \rangle$ dans $\tilde{F}$.

Démonstration. Commençons, pour $N \in \mathbb{N}^*$, par matérialiser la dynamique de l'action de γ^N sur son axe dans $\tilde{F}$ (i.e. on veut faire apparaître la longueur de translation). Choisissons une géodésique bi-infinie perpendiculaire à l'axe de γ et notons H_- le demi-espace fermé qu'elle délimite contenant à l'infini le point fixe répulsif de γ^N . Posons ensuite $H_+ = \gamma^N(\tilde{F} \setminus H_-)$ (voir figure 5.2.9). Définissons de manière similaire des demi-espaces fermés $H'_\pm$ matérialisant la dynamique de l'action de γ'^N sur son axe dans $\tilde{F}$.

Les courbes $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ étant d'adhérences disjointes dans $\tilde{F}$, on peut choisir l'entier $N \in \mathbb{N}^*$ et les géodésiques perpendiculaires aux axes de γ^N et γ'^N de telle sorte que les quatre demi-espaces $H_\pm, H'_\pm$ soient d'adhérences deux à deux disjointes dans $\tilde{F}$, avec la condition supplémentaire $(H'_+ \cup H'_-) \cap \tilde{c} = \emptyset$.

Supposons alors qu'il existe $\sigma \in M_0 \cap \langle \gamma^N, \gamma'^N \rangle$. Alors σ est un mot sur l'alphabet $\{\gamma^{\pm N}, \gamma'^{\pm N}\}$. L'invariance $\Gamma.M_0 = M_0$ permet de supposer que σ est un mot qui commence par $\gamma'^{\pm N}$. Alors $\sigma(\tilde{\varphi}(\tilde{c}))$ est soit égal à $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$, soit contenu dans l'un des demi-espaces H'_+ ou H'_- (un argument classique de ping-pong dans le groupe libre $\langle \gamma^N, \gamma'^N \rangle$ assure sans hypothèse sur σ que $\sigma(\tilde{\varphi}(\tilde{c}))$ est soit égal à $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ soit contenu dans l'un des quatre demi-espaces $H_{\pm}$ ou $H'_{\pm}$). Dans tous les cas, $\sigma(\tilde{\varphi}(\tilde{c})) \cap \tilde{c} = \emptyset$. Contradiction.

Par ailleurs, si $g \in \langle \gamma^N, \gamma'^N \rangle$, alors $g(\tilde{c})$ (resp. $g(\tilde{\varphi}(\tilde{c}))$) est soit égal à $\tilde{c}$ (resp. $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$), soit à une courbe contenue dans l'un des quatre demi-espaces $H_{\pm}, H'_{\pm}$. Dans chaque cas, $g(\tilde{c})$ (resp. $g(\tilde{\varphi}(\tilde{c}))$) ne sépare pas $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ et donc $g \notin M_1 \cup M_2$.

Au final, nous avons obtenu que $M \cap \langle \gamma^N, \gamma'^N \rangle = \emptyset$. $\square$

Notation On note alors $\Gamma_N = \langle \gamma^N \rangle$ et $\Gamma'_N = \langle \gamma'^N \rangle$.

Lemme 5.2.12 (Cofinitude modulo les stabilisateurs). *On a les propriétés de finitude :*

- (i) $|\Gamma_N \backslash M_0 / \Gamma'_N| < \infty$,
- (ii) $|M_1 / \Gamma_N| < \infty$,
- (iii) $|M_2 / \Gamma'_N| < \infty$.

Démonstration. On fixe un domaine fondamental compact K pour l'action de Γ sur $\tilde{c}$. La famille $\{\gamma(\tilde{\varphi}(\tilde{c}))\}_{\gamma \in \pi_1(F)}$ étant localement finie, il existe un nombre fini de translatés de $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ qui intersectent K , ce qui signifie exactement que $\Gamma \backslash M_0 / \Gamma'$ est un ensemble fini. Comme Γ_N et Γ'_N sont des sous-groupes d'indice fini de Γ et Γ' respectivement, la propriété (i) est vérifiée. Considérons alors le segment $I \subset r$ reliant les courbes $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$. Il existe au plus un nombre fini de translatés de $\tilde{c}$ (resp. $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$) qui intersectent le compact I . Or tout relevé de $\tilde{c}$ ou $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ qui sépare $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ intersecte nécessairement I . On en déduit que M_1 / Γ et M_2 / Γ' sont des ensembles finis. Les propriétés (ii) et (iii) en découlent. $\square$

Il existe alors $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau_1, \dots, \tau_l$ et $\tau'_1, \dots, \tau'_m$ des éléments de $\pi_1(F)$ tels que :

$$M_0 = \bigsqcup_{i=1}^k \Gamma_N \cdot \sigma_i \cdot \Gamma'_N, \quad M_1 = \bigsqcup_{i=1}^l \tau_i \cdot \Gamma_N \quad \text{et} \quad M_2 = \bigsqcup_{i=1}^m \tau'_i \cdot \Gamma'_N.$$

Le sous-groupe $\langle \gamma^N, \gamma'^N \rangle$ étant de type fini (et donc séparable dans $\pi_1(F)$), il existe un sous-groupe d'indice fini $\Sigma' \leq \pi_1(F)$ tel que $\langle \gamma^N, \gamma'^N \rangle \leq \Sigma'$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau_1, \dots, \tau_l, \tau'_1, \dots, \tau'_m \notin \Sigma'$.

Lemme 5.2.13 (M est virtuellement vide). $\Sigma' \cap M = \emptyset$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $\sigma \in M_0 \cap \Sigma'$. Alors il existe $1 \leq i \leq k, \gamma \in \Gamma_N$ et $\gamma' \in \Gamma'_N$ tels que $\sigma = \gamma \circ \sigma_i \circ \gamma'$. Mais comme $\langle \Gamma_N \cup \Gamma'_N \rangle \leq \Sigma'$, $\sigma_i = \gamma^{-1} \circ \sigma \circ \gamma'^{-1} \in \Sigma'$. Contradiction. On montre de manière similaire que $(M_1 \cup M_2) \cap \Sigma' = \emptyset$. $\square$

Nous énonçons enfin un dernier lemme indispensable sur les propriétés de finitude des intersections de sous-groupes d'indice fini fixé des groupes de type fini.

Lemme 5.2.14 (Intersections de sous-groupes d'indice fini). *Soit G un groupe de type fini et $\mathcal{A} \subset \text{Aut}(G)$ une partie quelconque. Alors pour tout sous-groupe d'indice fini $\Gamma \leq G$, l'intersection $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha(\Gamma)$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ .*

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \text{Aut}(G)$, on a l'égalité $[G : \Gamma] = [G : \alpha(\Gamma)]$. Le résultat découle donc du fait qu'un groupe de type fini G contient un nombre fini de sous-groupes d'indice fini fixé et qu'une intersection finie de sous-groupes d'indice fini est un sous-groupe d'indice fini. $\square$

Posons $\Sigma = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_*^n(\Sigma')$. Alors Σ est d'après le lemme 5.2.14 un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(F)$ et est par construction φ_* -invariant. De plus, $\Sigma \cap M = \emptyset$ car $\Sigma \leq \Sigma'$.

On considère le revêtement fini associé $\tilde{F} \xrightarrow{\pi} \hat{F} = \tilde{F} / \Sigma \xrightarrow{\leq \infty} F$. Posons alors $\hat{c} = \pi(\tilde{c})$ et $\hat{\alpha} = \pi(\tilde{\varphi}(\tilde{c}))$ et considérons un relevé $\hat{\varphi} : \hat{F} \rightarrow \hat{F}$ de φ à $\hat{F}$ tel que $\hat{\varphi}(\hat{c}) = \hat{\alpha}$. Alors $\hat{\varphi}$ est un relevé de $\tilde{\varphi}$ dans $\tilde{F}$ et, posant $\hat{x} = \pi(\tilde{x})$, on a donc $\hat{\varphi}(\hat{x}) = \hat{x}$.

De plus, $\hat{c} \cap \hat{\varphi}(\hat{c}) = \emptyset$ (car $\pi_1(\hat{F}) \cap M_0 = \emptyset$) et il n'existe aucun relevé de $\hat{c}$ ou de $\hat{\varphi}(\hat{c})$ dans $\tilde{F}$ qui sépare $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ (car $\pi_1(\tilde{F}) \cap (M_1 \cup M_2) = \emptyset$).

En mettant bout à bout les étapes 1, 2 et 3, la proposition 5.2.6 est donc finalement démontrée.

5.3 Surfaces coupées-croisées généralisées

Nous présentons dans cette section une modification de la construction des surfaces coupées-croisées dans le cas d'une courbe fermée simple essentielle $c \subset F$ qui ne vérifie pas nécessairement la condition de disjonction $c \cap \varphi(c) = \emptyset$. Cette construction est déjà présente dans l'article fondateur de D. Cooper, D. Long et A. Reid ([CLR94]) et également très utilisée par J. Masters pour ses constructions explicites de sous-groupes de surface d'épaisseur arbitrairement grande ([Mas06]).

L'idée est essentiellement de faire transiter cette construction par un revêtement fini de la fibre dans lequel c et $\varphi(c)$ ont des relevés disjoints. En pratique, un tel revêtement fini existe toujours par des propriétés de séparabilité, mais il n'existe pas forcément de relevé de la monodromie permettant de réaliser la construction de surfaces coupées-croisées dans ce revêtement fini.

Nous présentons dans un premier temps ces surfaces coupées-croisées généralisées et analysons ensuite la structure de leurs relevés à $\widehat{F} \times \mathbb{R}$. Cette étude met l'accent sur les modifications à apporter au cas classique étudié en section 5.1.

5.3.1 Construction des surfaces coupées-croisées généralisées

On considère une courbe fermée simple essentielle $c \subset F$.

Hypothèse. On suppose qu'il existe un revêtement fini connexe $\widehat{\pi} : \widehat{F} \rightarrow F$ et deux relevés $\widehat{c}$ et $\widehat{\alpha}$ des courbes c et $\varphi(c)$ respectivement tels que $\widehat{c} \cap \widehat{\alpha} = \emptyset$ et les revêtements finis $\widehat{c} \rightarrow c$ et $\widehat{\alpha} \rightarrow \varphi(c)$ induits par $\widehat{\pi}$ soient isomorphes (i.e. de même degré d en tant que revêtements finis du cercle $\mathbb{S}^1$).

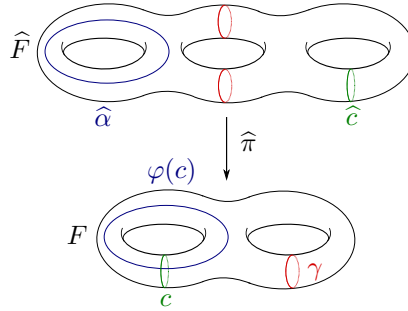


FIGURE 5.3.1 – Disjonction des courbes c et $\varphi(c)$ dans un revêtement fini. Dans cet exemple graphique, on a représenté le revêtement double associé à la courbe γ .

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage régulier ouvert de c dans F de composantes de bord notées $c^\pm$. Relevons $\mathcal{V}$ et $\varphi(\mathcal{V})$ dans $\widehat{F}$ en deux voisinages réguliers ouverts $\widehat{\mathcal{V}}$ de $\widehat{c}$ et $\widehat{\mathcal{W}}$ de $\widehat{\alpha}$ tels que $\widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{W}} = \emptyset$. Posons ensuite $\widehat{F}_c = \widehat{F} \setminus (\widehat{\mathcal{V}} \sqcup \widehat{\mathcal{W}})$ et notons $\widehat{c}^\pm$ et $\widehat{\alpha}^\pm$ les composantes de bord $\widehat{F}_c$, avec les conventions $\widehat{\pi}(\widehat{c}^\pm) = c^\pm$ et $\widehat{\pi}(\widehat{\alpha}^\pm) = \varphi(c^\pm)$.

Nous considérons les anneaux plongés $A \hookrightarrow M_\varphi$ et $A' \hookrightarrow M_\varphi$ définis au paragraphe 4.1.1, deux anneaux compacts $\widehat{A}$ et $\widehat{A}'$ de composantes de bord $\widehat{A}^\pm$ et $\widehat{A}'^\pm$ et deux revêtements $\widehat{A} \rightarrow A$ et $\widehat{A}' \rightarrow A'$ de degré d induisant des revêtements $\widehat{A}^- \rightarrow \varphi(c^-)$, $\widehat{A}^+ \rightarrow c^+$, $\widehat{A}'^- \rightarrow \varphi(c^+)$ et $\widehat{A}'^+ \rightarrow c^-$.

On dispose alors de trois applications $\widehat{F}_c \rightarrow F \hookrightarrow M_\varphi$, $\widehat{A} \rightarrow A \hookrightarrow M_\varphi$ et $\widehat{A}' \rightarrow A' \hookrightarrow M_\varphi$ que l'on peut recoller pour obtenir une immersion d'une surface S dans M_φ . Pour ce faire, on identifie à la source les courbes $\widehat{A}^-$ et $\widehat{\alpha}^-$, $\widehat{A}^+$ et $\widehat{c}^+$, $\widehat{A}'^-$ et $\widehat{\alpha}^+$ et enfin $\widehat{A}'^+$ et $\widehat{c}^-$.

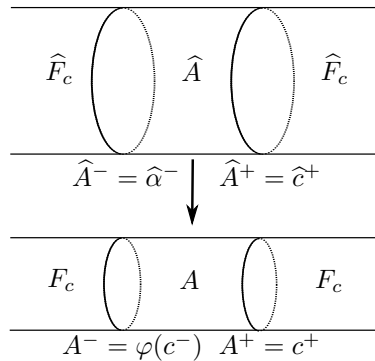


FIGURE 5.3.2 – Construction des surfaces coupées-croisées généralisées.

Définition 5.3.1. L'immersion $\iota : S \looparrowright M_\varphi$ construite ci-dessus est appelée *surface coupée-croisée généralisée* associée au revêtement $\widehat{\pi}$ et aux courbes $\widehat{c}$ et $\widehat{\alpha}$. Par abus de langage, l'image de ι sera également appelée surface coupée-croisée généralisée bien que ce ne soit pas une surface topologique.

Lemme 5.3.2 (Incompressibilité des surfaces coupées-croisées généralisées). *L'immersion $\iota : S \looparrowright M_\varphi$ construite ci-dessus est π_1 -injective (sur chaque composante connexe de S).*

Démonstration. Il s'agit à nouveau d'une conséquence de la transversalité au flot. □

Remarques

1. Lorsque $\widehat{\pi}$ est un homéomorphisme, cette construction coïncide avec la construction de surface coupée-croisée associée aux courbes c et $\varphi(c)$ donnée au paragraphe 4.1.1.
2. On dispose des mêmes résultats que dans le cas classique : S peut être lissée, est orientable et est connexe si, et seulement si, $\widehat{c} \sqcup \widehat{\alpha}$ est non-séparante dans $\widehat{F}$, i.e. si $\widehat{F}_c$ est connexe.

Pour conclure ce paragraphe, remarquons que la courbe c_* image de la courbe $\varphi(c) \times \{\frac{1}{2}\} \subset F \times \{\frac{1}{2}\}$ dans M_φ est à nouveau une courbe de points multiples de l'immersion ι (et plus précisément, les fibres de tels points sont de cardinal $2d$). On note $S_* = S \setminus \iota^{-1}(c_*)$. Il ne s'agit pas du lieu d'injectivité de ι lorsque $\widehat{\pi}$ n'est pas un homéomorphisme, mais cette sous-surface se révélera néanmoins utile pour exposer le procédé de construction itératif des relevés de la surface coupée-croisée généralisée au revêtement universel.

5.3.2 Relevés des surfaces coupées-croisées généralisées

Fixons maintenant un relevé $\widetilde{\iota} : \widetilde{S} \longrightarrow \widetilde{F} \times \mathbb{R}$ de l'immersion $\iota : S \looparrowright M_\varphi$ construite au paragraphe précédent. Tous les résultats du chapitre 4 (à partir du paragraphe 4.1.2) s'appliquent aux surfaces coupées-croisées généralisées, puisqu'ils sont valables pour toute immersion partout transverse au flot. Nous allons maintenant expliquer les modifications à apporter à la construction itérative d'un relevé $\widetilde{S} = \widetilde{\iota}(\widetilde{S})$ par rapport à celle présentée en section 5.1.

Pour fixer les idées, on suppose que la multi-courbe $\widehat{c} \sqcup \widehat{\alpha}$ est non-séparante dans $\widehat{F}$, ce qui signifie que la fibre coupée $\widehat{F}_c$ est connexe. Par construction de l'immersion ι , les lemmes décrivant l'agencement des relevés de S_* dans $\widetilde{F} \times \mathbb{R}$ restent valables dans le cas des surfaces coupées-croisées généralisées. Les résultats 5.1.1, 5.1.3 et 5.1.4 peuvent être recopiés à l'identique.

Ceci permet de reproduire mot pour mot la construction de $\widetilde{S}$ présentée au paragraphe 5.1.2 à partir d'un relevé $\widetilde{S}_*$ de S_* dans $\widetilde{F} \times \mathbb{R}$. Nous aimerions alors comprendre comment se traduit cette construction à travers la projection $\Phi : \widetilde{F} \times \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{F}$, dans l'esprit de ce qui a été fait aux paragraphes 5.1.3 et 5.1.4 pour passer de la construction de A_∞ à celle de B_∞ .

Structure du polygone idéal $\Phi(\widetilde{S})$

Les lemmes 5.1.1 et 5.1.8 impliquent en particulier que les projections $\Phi(\widetilde{S}_*)$ des relevés $\widetilde{S}_*$ sont des domaines de $\widetilde{F}$ dont les composantes de frontière sont des relevés des courbes $\varphi^n(c)$ avec $n \in \mathbb{Z}$. La question qui se pose naturellement est de savoir précisément quelles courbes apparaissent au bord de ces domaines.

Lemme 5.3.3 (Projection des relevés de S_* d'altitude 0). *Soit $\widetilde{S}_*$ un relevé de S_* d'altitude 0. Alors les composantes de frontière de $\Phi(\widetilde{S}_*)$ sont des relevés dans $\widetilde{F}$ des courbes $\widehat{c}$ et $\widehat{\alpha}$ de $\widehat{F}$.*

Démonstration. On constate par construction qu'un relevé de $\widetilde{S}_*$ d'altitude 0 est un épaississement d'un relevé $\widetilde{X}$ de la surface à bord $\widehat{F}_c$ dans $\widetilde{F}$ auquel sont ajoutées des bandes montantes et descendantes le long de ses composantes de frontières. Ces bandes font le lien entre les composantes de frontière de $\widetilde{X}$ et les relevés de c_* d'altitudes $-\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}$ dont les projections dans $\widetilde{F}$ sont parallèles aux composantes de frontière de $\widetilde{X}$. Les composantes de frontière de $\widetilde{S}_*$ ont donc pour image par Φ des relevés de $\widehat{c}$ et $\widehat{\alpha}$ dans $\widetilde{F}$. □

On introduit alors le pavage $\mathcal{P}_0$ de $\tilde{F}$ obtenu en considérant la collection des relevés à $\tilde{F}$ des courbes $\hat{c}$ et $\hat{\alpha}$ de $\hat{F}$. Autrement dit, les chambres de $\mathcal{P}_0$ sont les composantes connexes de $\tilde{F} \setminus \hat{\pi}^{-1}(\hat{c} \sqcup \hat{\alpha})$. Notons que ce pavage est précisément $\pi_1(\hat{F})$ -invariant. On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 5.3.4 (Chambres du pavage $\mathcal{P}_0$ et relevés de S_* d'altitude 0). *La projection Φ induit une bijection de l'ensemble des relevés de S_* d'altitude 0 sur celui des chambres du pavage $\mathcal{P}_0$.*

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note alors $\mathcal{P}_n$ le pavage de $\tilde{F}$ induit par la collection des composantes de frontière des projections dans $\tilde{F}$ des relevés de S_* d'altitude n . Nous allons dégager une description explicite des chambres de ces pavages à l'aide des courbes $\hat{c}$ et $\hat{\alpha}$ et d'éléments bien choisis de $\pi_1(M)$.

Lemme 5.3.5. *Soit $\tilde{c}$ un relevé de $\hat{c}$ et $\tilde{\alpha}$ un relevé de $\hat{\alpha}$ dans $\tilde{F}$. On considère alors un relevé $\tilde{\varphi}$ de φ à $\tilde{F}$ tel que $\tilde{\varphi}(\tilde{c}) = \tilde{\alpha}$. Le pavage $\tilde{\varphi}(\mathcal{P}_0)$ de $\tilde{F}$ est alors indépendant des choix de relevés $\tilde{c}$, $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\varphi}$.*

Démonstration. Cette propriété découle du fait que $\mathcal{P}_0$ est précisément $\pi_1(\hat{F})$ -invariant et que les trois choix de relevés sont paramétrés par le sous-groupe $\pi_1(\hat{F})$. $\square$

Lemme 5.3.6 (Identification des chambres du pavage $\mathcal{P}_1$). *Soit $\tilde{\varphi}$ un relevé de φ dans $\tilde{F}$. Alors $\tilde{\varphi}(\mathcal{P}_0) = \mathcal{P}_1$ si, et seulement si, $\tilde{\varphi}$ envoie un (et donc chaque) relevé de $\hat{c}$ sur un relevé de $\hat{\alpha}$.*

Démonstration. Par construction de l'immersion ι , la condition que doit vérifier un relevé $\tilde{\varphi}$ de φ pour garantir que $\tilde{\varphi}(\mathcal{P}_0) = \mathcal{P}_1$ est précisément d'obtenir la famille des relevés de $\hat{\alpha}$ dans $\tilde{F}$ comme composantes de frontière des chambres de $\tilde{\varphi}(\mathcal{P}_0)$. En effet, cette famille apparaissant comme composantes de frontière des chambres de $\mathcal{P}_0$, elle doit également apparaître comme composantes de frontière des chambres de $\mathcal{P}_1$. Ainsi, $\tilde{\varphi}$ doit envoyer la collection des relevés de $\hat{c}$ sur celle des relevés de $\hat{\alpha}$. Or pour tous les choix de relevés $\tilde{\varphi}$ possibles vérifiant cette condition, le pavage $\tilde{\varphi}(\mathcal{P}_0)$ obtenu est identique d'après le lemme 5.3.5. C'est donc nécessairement que, pour chacun de ces choix, $\tilde{\varphi}(\mathcal{P}_0) = \mathcal{P}_1$. $\square$

Fixons des relevés $\tilde{c}$ de $\hat{c}$ et $\tilde{\alpha}$ de $\hat{\alpha}$ dans $\tilde{F}$ et considérons un relevé $\tilde{\varphi}$ de φ à $\tilde{F}$ tel que $\tilde{\varphi}(\tilde{c}) = \tilde{\alpha}$.

Corollaire 5.3.7 (Identifications des chambres des pavages $\mathcal{P}_n$). *Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}_n = \tilde{\varphi}^n(\mathcal{P}_0)$.*

Démonstration. On reproduit par récurrence l'argument du lemme 5.3.6. $\square$

Remarque La famille des pavages $\tilde{\varphi}^n(\mathcal{P}_0)$, $n \in \mathbb{Z}$ est indépendante des choix de $\tilde{c}$, $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\varphi}$ réalisés pour les construire (car ceci est vrai de la famille de pavages $\mathcal{P}_n$ par définition). Les chambres de $\mathcal{P}_n$ sont les composantes connexes de $\tilde{F} \setminus \tilde{\varphi}^n(\tilde{c} \sqcup \tilde{\alpha})$ et ces pavages sont $\pi_1(\hat{F})$ -invariants.

Les énoncés de structure des pavages $\mathcal{P}_n$ du paragraphe 5.1.3 se transposent donc à l'identique pour cette nouvelle famille de pavages construits à partir de $\hat{c}$ et $\hat{\alpha}$.

Proposition 5.3.8 (Prolongement de la projection d'un relevé de S au-delà d'une chambre d'un pavage). *Soit $n \in \mathbb{Z}$, C une chambre du pavage $\mathcal{P}_n$ et ℓ une composante de frontière de C . Alors il existe une unique chambre C' de l'un des pavages $\mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{Z}$ d'altitude distincte de celle de C et telle que $\overline{C} \cap \overline{C'} = \ell$ (et de plus $m = n \pm 1$).*

On tire de cette dernière proposition une description itérative de la structure du polygone $\Phi(\tilde{S})$ identique à celle proposée dans le cas des surfaces coupées-croisées. Autrement dit, on définit par étapes les ensembles B_n , $n \in \mathbb{N}$ et B_∞ à l'aide de la proposition 5.3.8 exactement comme au cours du paragraphe 5.1.4.

La seule modification à faire pour les surfaces coupées-croisées généralisées aura donc été lors de la définition des pavages $\mathcal{P}_n$, qui ne font pas apparaître tous les relevés des courbes $\varphi^n(c)$, mais seulement ceux de $\hat{c}$, $\hat{\alpha}$ et plus généralement des courbes $\pi_{\tilde{F}}(\tilde{\varphi}^n(\tilde{c}))$ pour tout choix de relevés $\tilde{\varphi}$ de φ et $\tilde{c}$ de $\hat{c}$ tels que $\pi_{\tilde{F}}(\tilde{\varphi}(\tilde{c})) = \hat{\alpha}$.

Remarque Dans le cas où la fibre coupée $\hat{F}_c$ est disconnexe, il faut à nouveau remplacer les relevés de $\hat{F}_c$, de S_* ou de S par les relevés des composantes connexes de $\hat{F}_c$, de S_* ou de S si S est disconnexe. Les énoncés deviennent alors corrects.

5.4 Constructions de surfaces coupées-croisées généralisées quasi-convexes

Nous présentons maintenant des constructions de surfaces coupées-croisées généralisées quasi-convexes qui font fortement écho à celles de la section 5.2.

Considérons dans la fibre F une courbe fermée simple essentielle c , un revêtement fini $\hat{\pi} : \hat{F} \rightarrow F$ et deux relevés $\hat{c}$ et $\hat{\alpha}$ de c et $\varphi(c)$ respectivement tels que $\hat{c} \cap \hat{\alpha} = \emptyset$ et les revêtements $\hat{\pi}|_{\hat{c}} : \hat{c} \rightarrow c$ et $\hat{\pi}|_{\hat{\alpha}} : \hat{\alpha} \rightarrow \varphi(c)$ induits par restriction de $\hat{\pi}$ soient de même degré.

Une telle configuration permet de construire une surface coupée-croisée généralisée $S = S(\hat{c}, \hat{\alpha}, \hat{\pi}, \varphi)$ dans M_φ via une immersion ι définie comme au paragraphe 5.3.1.

5.4.1 Une condition suffisante de quasi-convexité

Nous énonçons une condition suffisante de quasi-convexité de $\tilde{S}$ à l'aide des chambres des pavages $\mathcal{P}_n$ introduits au paragraphe 5.3.2.

Proposition 5.4.1 (Condition suffisante de quasi-convexité de $\pi_1(S)$). *Soit C une chambre de l'un des pavages $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe un relevé $\tilde{\varphi}$ de φ fixant un point de $\tilde{F}$ tel que $\overline{C} \cap \overline{\tilde{\varphi}(C)}$ est une composante de frontière commune à $\overline{C}$ et $\overline{\tilde{\varphi}(C)}$. Alors $\tilde{\varphi}$ stabilise $B_\infty(C)$ et $\pi_1(S)$ est un sous-groupe quasi-convexe de $\pi_1(M)$.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 5.2.2. □

5.4.2 Paires de tripodes droits alternés

Notation Si ℓ est une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$, on note $\bar{\ell}$ l'adhérence de ℓ dans $\tilde{F}$.

Définition 5.4.2. Deux tripodes droits $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ sont dits *alternés* si :

1. ℓ et ℓ' sont contenues dans des feuilles de stabilités opposées,
2. $\ell \cap \ell' = \emptyset$ (ce qui entraîne avec 1. que $\ell \cup \ell'$ n'intersecte pas l'intérieur de r ou de r'),
3. $\ell \cup \ell'$ ne sépare pas r et r' dans $\tilde{F}$ et
4. $\bar{\ell} \cup \bar{\ell}'$ sépare les extrémités de r et r' dans $\partial_\infty \tilde{F}$.

Exemple Si $P(\tilde{S})$ est un polygone associé à une construction de surface coupée-croisée généralisée quasi-convexe, ℓ et ℓ' deux composantes de $\text{Fr}(P(\tilde{S}))$ de stabilités distinctes et de rayons duaux r et r' , alors $\ell \cap \ell' = \emptyset$, $\ell \cup \ell'$ ne sépare pas r et r' dans $\tilde{F}$. Il y a potentiellement deux cas possibles. Dans la composante connexe de $\tilde{F} \setminus (\bar{\ell} \cup \bar{\ell}')$ qui contient r et r' , soit ces deux rayons vont du même côté à l'infini, soit pas. Dans le second cas, $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ sont deux tripodes droits alternés.

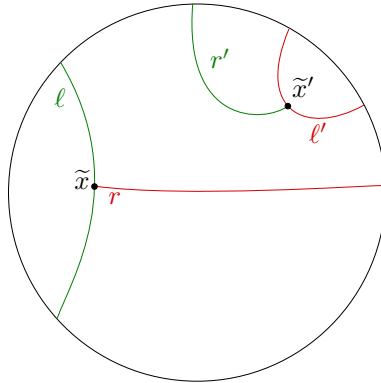


FIGURE 5.4.1 – Deux tripodes droits $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ alternés.

Remarque Si deux tripodes droits $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ sont alternés, alors $\bar{\ell} \cap \bar{r}' = \bar{\ell}' \cap \bar{r} = \bar{r} \cap \bar{r}' = \emptyset$.

Pour terminer ce chapitre, nous allons démontrer que deux tripodes alternés peuvent toujours être réalisés comme côtés et rayons duaux d'un polygone $P(\tilde{S})$ comme ci-dessus. Nous ne savons pas s'il est possible de réaliser une telle construction avec une paire de tripodes droits non-alternés.

Proposition 5.4.3 (Localisation d'une paire de côtés de $P(\tilde{S})$). *Soient $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ deux tripodes admissibles alternés de centres $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ fixés par des relevés $\tilde{\varphi}_1$ et $\tilde{\varphi}_2$ de φ à $\tilde{F}$. On suppose que la courbe $\tilde{c}$ est compatible avec $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ via un même relevé $\tilde{c}$ et que $\tilde{\varphi}_1(\tilde{c})$ et $\tilde{\varphi}_2(\tilde{c})$ sont des relevés de $\hat{\alpha}$. Si aucun relevé de $\tilde{c}$ ou $\hat{\alpha}$ dans $\tilde{F}$ ne sépare $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}_1(\tilde{c})$ ou $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}_2(\tilde{c})$, alors il existe un relevé $\tilde{S}$ de $S = S(\tilde{c}, \hat{\alpha}, \pi, \varphi)$ dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que ℓ et ℓ' soient des côtés de $P(\tilde{S})$ de rayons duaux r et r' .*

Démonstration. On suppose pour fixer les idées que ℓ est contenue dans une feuille instable et donc r est un rayon stable. Alors ℓ' est contenue dans une feuille stable et r' est un rayon instable. Ceci implique que $\tilde{\varphi}_1$ (resp. $\tilde{\varphi}_2$) agit par contraction (resp. dilatation) sur le rayon r (resp. r').

Les hypothèses garantissent qu'il existe une chambre C du pavage $\mathcal{P}_0$ dont les courbes $\tilde{c}$, $\tilde{\varphi}_1(\tilde{c})$ et $\tilde{\varphi}_2(\tilde{c})$ sont des composantes de frontière. La condition de compatibilité de $\tilde{c}$ avec les tripodes $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ et la dynamique de $\tilde{\varphi}_1$ (resp. $\tilde{\varphi}_2$) sur le rayon r (resp. r') garantissent que $\overline{C} \cap \tilde{\varphi}_1(C) = \tilde{\varphi}_1(\tilde{c})$ et $\overline{C} \cap \tilde{\varphi}_2^{-1}(C) = \tilde{c}$. D'après la proposition 5.4.1, S est donc quasi-convexe.

On considère alors le relevé $\tilde{S}$ de S contenant l'unique relevé de S_* dont la projection sur $\tilde{F}$ est égale à C . Les arguments de la démonstration de la proposition 5.2.5 se reproduisent alors à l'identique pour démontrer que $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \text{Fr}(P(\tilde{S}))$. Les assertions annoncées en découlent. $\square$

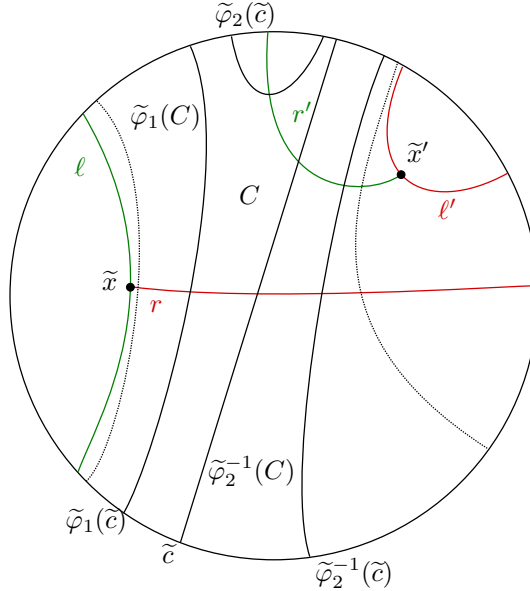


FIGURE 5.4.2 – Accumulation des chambres $\tilde{\varphi}_1^n(C)$ (resp. $\tilde{\varphi}_2^{-n}(C)$) le long du côté ℓ (resp. ℓ').

5.4.3 Prescription d'une paire de côtés du polygone idéal $\Phi(\tilde{S})$

Nous montrons enfin que les hypothèses de la proposition 5.4.3 sont toujours *virtuellement* réalisables.

Proposition 5.4.4 (Réalisation virtuelle de la condition suffisante de quasi-convexité). *Soient $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ deux tripodes droits alternés de centres $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ et $c \subset F$ une courbe fermée essentielle compatible avec $\{\ell, r\}$ et avec $\{\ell', r'\}$ via un même relevé $\tilde{c}$ dans $\tilde{F}$. Alors :*

- (i) *il existe un revêtement fini $\tilde{F} \xrightarrow{\pi_0} \hat{F}_0 \xrightarrow{\leq \infty} F$ et un relevé $\psi : \hat{F}_0 \rightarrow \hat{F}_0$ d'une puissance strictement positive de φ fixant les points $\hat{x}_0 = \pi_0(\tilde{x})$ et $\hat{x}'_0 = \pi_0(\tilde{x}')$ tel que $\hat{c}_0 = \pi_0(\tilde{c})$ soit simple et, notant $\tilde{\psi}_1$ (resp. $\tilde{\psi}_2$) l'unique relevé de ψ qui fixe $\tilde{x}$ (resp. $\tilde{x}'$), on ait les conditions $\tilde{c} \cap \tilde{\psi}_1(\tilde{c}) = \tilde{c} \cap \tilde{\psi}_2(\tilde{c}) = \emptyset$.*
- (ii) *De plus, il existe un revêtement fini $\tilde{F} \xrightarrow{\pi} \hat{F} \xrightarrow{\leq \infty} \hat{F}_0$ tel que, notant $\hat{c} = \pi(\tilde{c})$ et $\hat{\alpha} = \pi(\tilde{\psi}_1(\tilde{c}))$, on ait $\hat{c} \cap \hat{\alpha} = \emptyset$, les revêtements $\hat{c} \rightarrow \hat{c}_0$ et $\hat{\alpha} \rightarrow \psi(\hat{c}_0)$ soient isomorphes et enfin tel que $\tilde{\psi}_2(\tilde{c})$ soit un relevé de $\hat{\alpha}$ dans $\tilde{F}$ et aucun relevé de $\hat{c}$ ou $\hat{\alpha}$ dans $\tilde{F}$ ne sépare $\tilde{c}$ et $\tilde{\psi}_1(\tilde{c})$ ou $\tilde{\psi}_2(\tilde{c})$.*

La proposition 5.4.3 permet en considérant la surface coupée-croisée généralisée $S = S(\tilde{c}, \hat{\alpha}, \pi, \psi)$ du revêtement fini M_ψ de M_φ fournie par la proposition 5.4.4 d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 5.4.5. Soient $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ deux tripodes droits alternés et c une courbe compatible avec $\{\ell, r\}$ et avec $\{\ell', r'\}$ via un même relevé $\tilde{c}$. Alors il existe une surface coupée-croisée généralisée quasi-convexe S dans un revêtement fini $\tilde{M}$ de M_φ et un relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que ℓ et ℓ' soient deux côtés du polygone $P(\tilde{S})$ de rayons duaux respectifs r et r' .

Démonstration de la proposition 5.4.4

Nous démontrons la proposition 5.4.4 dans le cas particulier où la courbe c est une géodésique fermée. Ceci ne soulèvera aucun conflit, cette proposition n'étant utilisée au chapitre 6 que dans des situations où la courbe c est effectivement une géodésique (voir lemme 6.1.3). Rappelons enfin que φ , qui n'est pas une isométrie de F , envoie tout de même géodésique sur géodésique.

Pour fixer les idées, nous supposons que ℓ est contenue dans une feuille instable et que r est un rayon stable, donc également que ℓ' est contenue dans une feuille stable et que r' est un rayon instable.

Étape 1 : Quitte à remplacer F par un revêtement fini caractéristique $\hat{F}_0$ et φ par un relevé $\hat{\varphi}$, on peut supposer que la courbe c est simple. D'après le lemme 5.2.9, il existe de plus deux éléments $g_1, g_2 \in \pi_1(M_{\hat{\varphi}})$ tels que $g_1(\tilde{x}) = \tilde{x}$, $g_2(\tilde{x}') = \tilde{x}'$ et $g_1(\tilde{c}) \cap \tilde{c} = g_2(\tilde{c}) \cap \tilde{c} = \emptyset$ (et toute puissance strictement positive de g_1 ou g_2 convient alors également).

Ceci implique qu'il existe une puissance ψ de $\hat{\varphi}$ fixant les projetés de $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ dans $\hat{F}_0$ et pour lequel l'unique relevé g de ψ fixant $\tilde{x}$ (resp. $\tilde{x}'$) vérifie la condition $\tilde{c} \cap g(\tilde{c}) = \emptyset$.

Le point (i) est donc démontré (et on adopte les notations qu'il introduit par la suite).

Remarques

1. Dans la construction précédente, les extrémités de $g_1(\tilde{c})$ peuvent, quitte à remplacer g_1 par l'une de ses puissances, être supposées très proches des extrémités de ℓ . On peut de même supposer que les extrémités de $g_2(\tilde{c})$ sont très proches de celle de r' .
2. D'après la remarque précédente, nous pouvons supposer que les géodésiques $\tilde{\psi}_1(\tilde{c})$ et $\tilde{\psi}_2(\tilde{c})$ sont des relevés distincts de $\psi(\tilde{c}_0)$. Comme de plus $\tilde{c}_0$ est une courbe simple, on observe alors que $\tilde{\psi}_1(\tilde{c}) \cap \tilde{\psi}_2(\tilde{c}) = \emptyset$. La situation est donc bien précisément celle représentée sur la figure 5.4.3.

Notation Pour alléger les énoncés à venir, nous noterons dorénavant $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\psi}_1(\tilde{c})$ et $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\psi}_2(\tilde{c})$.

Étape 2 : Nous énonçons un lemme technique qui nous permettra de relier les stabilisateurs des deux tripodes admissibles $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$. Un tel lien aura pour but de garantir dans la construction de l'étape 3 que $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ sont des relevés de la courbe $\hat{\alpha}$ du revêtement $\hat{F}$ que nous construirons.

Lemme 5.4.6 (Un lien bien choisi entre les géodésiques $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$). Il existe un élément $\theta \in \pi_1(\hat{F}_0)$ tel que $\theta(\tilde{\alpha}_1) = \tilde{\alpha}_2$ pour lequel existe de plus un choix de géodésique bi-infinie perpendiculaire à l'axe de θ dans $\tilde{F}$ délimitant un demi-espace fermé H_-^θ de $\tilde{F}$ contenant à l'infini le point fixe répulsif de θ tel que, si $H_+^\theta = \theta(\tilde{F} \setminus H_-^\theta)$, alors $\overline{H_-^\theta \cup H_+^\theta} \cap \tilde{c} \cup \tilde{\alpha}_1 = \emptyset$ dans $\tilde{F}$.

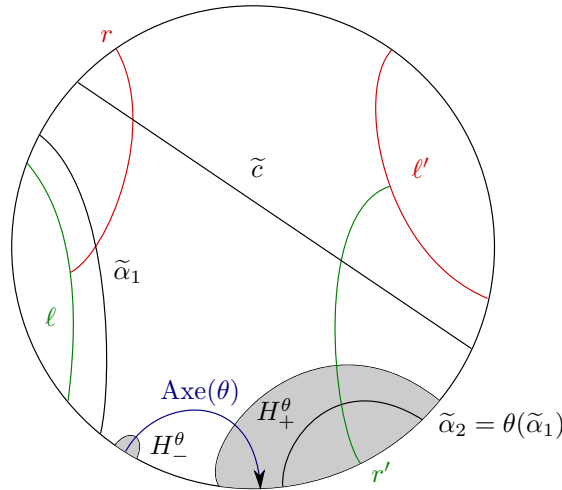


FIGURE 5.4.3 – Un lien bien choisi entre les géodésiques $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'élément $\tilde{\psi}_2 \circ \tilde{\psi}_1^{-1} \in \pi_1(\tilde{F}_0)$ envoie la courbe $\tilde{\alpha}_1$ sur $\tilde{\alpha}_2$. Notons γ_1 un générateur du stabilisateur dans $\pi_1(\tilde{F}_0)$ de $\tilde{\alpha}_1$. Alors, les éléments $\theta_m = \tilde{\psi}_2 \circ \tilde{\psi}_1^{-1} \circ \gamma_1^m$ avec $m \in \mathbb{Z}$ vérifient la condition $\theta_m(\tilde{\alpha}_1) = \tilde{\alpha}_2$ (et ce sont les seuls candidats possibles).

Nous souhaitons maintenant localiser les points fixes à l'infini des éléments θ_m . Pour ce faire, choisissons une orientation de la géodésique $\tilde{c}$ de sorte à rencontrer, entre l'origine et l'extrémité, d'abord le rayon r' puis ensuite le rayon r . Les géodésiques $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ héritent alors également d'une orientation (représentées sur la figure 5.4.4). Notons a_1 l'origine et b_1 l'extrémité de $\tilde{\alpha}_1$ et également a_2 l'origine et b_2 l'extrémité de $\tilde{\alpha}_2$. Le complémentaire de $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ dans $\partial_\infty \tilde{F}$ est formé de quatre intervalles ouverts deux à deux disjoints $]a_1, b_1[$, $]b_1, a_2[$, $]a_2, b_2[$ et $]b_2, a_1[$.

Fait La condition $(\theta_m \times \theta_m)(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ entraîne alors que les points fixes $\theta_m^{\pm\infty}$ de θ_m dans $\partial_\infty \tilde{F}$ appartiennent tous deux soit à l'intervalle $I =]b_2, a_1[$, soit à l'intervalle $J =]b_1, a_2[$ (voir figure 5.4.4).

De plus, si γ_1 est choisi tel que a_1 soit le point fixe répulsif de γ_1 , alors il existe $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand tel que les points fixes de θ_m appartiennent à l'intervalle I . On fixe désormais un tel entier m .

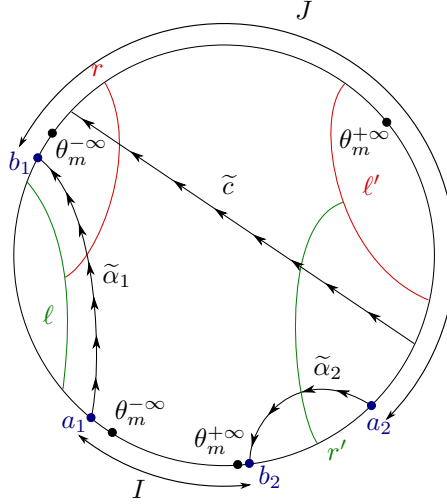


FIGURE 5.4.4 – Configurations possibles pour les points fixes des éléments θ_m dans $\partial_\infty \tilde{F}$.

Notons a_0 l'origine de $\tilde{c}$. Soit q un point de l'intervalle $]a_0, a_2[$, i.e. entre les origines de $\tilde{c}$ et de $\tilde{\alpha}_2$. Alors $p = \theta_m^{-1}(q)$ appartient à l'intervalle ouvert $] \theta_m^{-\infty}, a_1[$ (voir figure 5.4.5).

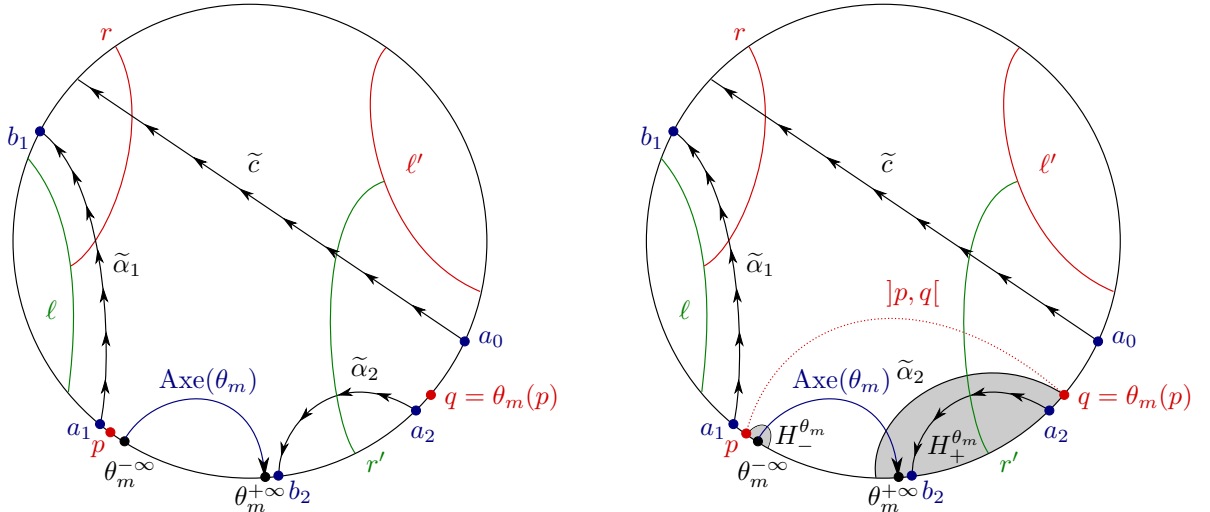


FIGURE 5.4.5 – Matérialiser la dynamique de θ_m dans $\tilde{F}$.

Considérons une géodésique bi-infinie issue de p et orthogonale à l'axe de θ_m délimitant un demi-espace fermé $H_m^{\theta_m-}$ contenant à l'infini le point fixe répulsif $\theta_m^{-\infty}$ et posons enfin $H_m^{\theta_m+} = \theta_m(\tilde{F} \setminus H_m^{\theta_m-})$. Alors $\overline{H_m^{\theta_m-}} \cup \overline{H_m^{\theta_m+}} \cap \tilde{c} \cup \tilde{\alpha}_1 = \emptyset$ dans $\tilde{F}$. En effet, $H_m^{\theta_m-} \cup H_m^{\theta_m+}$ est contenu dans le demi-espace délimité par la géodésique bi-infinie $]p, q[$ reliant p à q et contenant les points fixes $\theta_m^{\pm\infty}$ à l'infini. Or par construction, ce demi-espace est disjoint de $\tilde{c} \cup \tilde{\alpha}_1$ dans $\tilde{F}$, car $\{p, q\} \subset]a_0, a_1[$ et $\tilde{c}$ et $\tilde{\alpha}_1$ sont des géodésiques. $\square$

Étape 3 : On construit alors le revêtement fini $\widehat{F}$ par un mélange de propriétés de séparabilité et d'arguments de dynamique de type ping-pong.

Soient $M_0 = \{\sigma \in \pi_1(\widehat{F}_0) \mid \sigma(\tilde{\varphi}(\tilde{c})) \cap \tilde{c} \neq \emptyset\}$, $M_1 = \{\sigma \in \pi_1(\widehat{F}_0) \mid \sigma(\tilde{c}) \text{ sépare } \tilde{c} \text{ et } \tilde{\alpha}_1 \text{ ou } \tilde{\alpha}_2\}$ et $M_2 = \{\sigma \in \pi_1(\widehat{F}_0) \mid \sigma(\tilde{\alpha}_1) \text{ sépare } \tilde{c} \text{ et } \tilde{\alpha}_1 \text{ ou } \tilde{\alpha}_2\}$ et enfin $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$.

Notation. Notons Γ (resp. Γ') le stabilisateur de $\tilde{c}$ (resp. $\tilde{\alpha}_1$) dans $\pi_1(\widehat{F}_0)$ et choisissons γ (resp. γ') un générateur de Γ (resp. Γ').

Lemme 5.4.7 (Propriétés d'invariance modulo les stabilisateurs). *On a les égalités :*

- (i) $\Gamma.M_0.\Gamma' = M_0$,
- (ii) $M_1.\Gamma = M_1$,
- (iii) $M_2.\Gamma' = M_2$.

Démonstration. Identique au cas du lemme 5.2.10. □

Lemme 5.4.8 (Dynamique du sous-groupe $\langle \Gamma \cup \Gamma' \cup \{\theta\} \rangle$ dans $\overline{F}$). *Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :*

$$M \cap \langle \gamma^N, \gamma'^N, \theta \rangle = \emptyset.$$

Démonstration. Commençons, pour $N \in \mathbb{N}^*$, par matérialiser la dynamique de l'action de γ^N sur son axe $\tilde{c}$ dans $\tilde{F}$. Choisissons une géodésique bi-infinie perpendiculaire à $\tilde{c}$ et notons H_- le demi-espace fermé qu'elle délimite contenant à l'infini le point fixe répulsif de γ^N . Posons ensuite $H_+ = \gamma^N(\tilde{F} \setminus H_-)$ (voir figure 5.4.6). Définissons de manière similaire des demi-espaces fermés $H'_\pm$ matérialisant la dynamique de l'action de γ'^N sur son axe $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ dans $\tilde{F}$.

On rappelle également que l'on a associé à l'élément θ du lemme 5.4.6 une paire de demi-espaces fermés H_+^θ et H_-^θ tels que $H_-^\theta \cup H_+^\theta \cap \tilde{c} \cup \tilde{\alpha}_1 = \emptyset$ dans $\tilde{F}$. Comme de plus $\tilde{c} \cap \tilde{\alpha}_1 = \emptyset$ dans $\tilde{F}$, il existe un choix de $N \in \mathbb{N}^*$ et de géodésiques perpendiculaires à $\tilde{c}$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{c})$ tels que les six demi-espaces $H_\pm, H'_\pm, H_\pm^\theta$ soient d'adhérences deux à deux disjointes dans $\tilde{F}$, et de plus $(H'_+ \cup H_-) \cap \tilde{c} = \emptyset$.

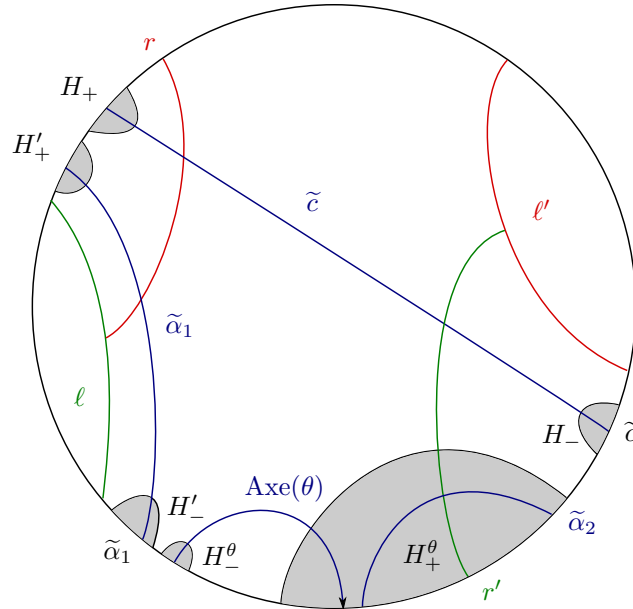


FIGURE 5.4.6 – Matérialiser la dynamique du sous-groupe $\langle \gamma^N, \gamma'^N, \theta \rangle$ dans $\tilde{F}$.

Supposons alors qu'il existe un mauvais élément $\sigma \in M_0 \cap \langle \gamma^N, \gamma'^N, \theta \rangle$. Alors σ est un mot sur l'alphabet $\{\gamma^{\pm N}, \gamma'^{\pm N}, \theta^{\pm 1}\}$. L'invariance $\Gamma.M_0 = M_0$ permet de supposer que σ est un mot qui commence soit par $\gamma'^{\pm N}$, soit par $\theta^{\pm 1}$. Alors $\sigma(\tilde{\alpha}_1)$ est soit égal à $\tilde{\alpha}_1$, soit contenu dans l'un des quatre demi-espaces H'_+, H'_-, H_+^θ ou H_-^θ . Dans tous les cas, $\sigma(\tilde{\alpha}_1) \cap \tilde{c} = \emptyset$. Contradiction.

Par ailleurs, si $g \in \langle \gamma^N, \gamma'^N, \theta \rangle$, alors $g(\tilde{c})$ (resp. $g(\tilde{\alpha}_1)$) est soit égal à $\tilde{c}$ (resp. $\tilde{\alpha}_1$), soit une courbe contenue dans l'un des six demi-espaces $H_\pm, H'_\pm, H_\pm^\theta$. Dans chaque cas, $g(\tilde{c})$ (resp. $g(\tilde{\alpha}_1)$) ne sépare pas $\tilde{c}$ et $\tilde{\alpha}_1$ ou $\tilde{c}$ et $\tilde{\alpha}_2$. Au final, $M \cap \langle \gamma^N, \gamma'^N, \theta \rangle = \emptyset$. $\square$

On note alors $\Gamma_N = \langle \gamma^N \rangle$ et $\Gamma'_N = \langle \gamma'^N \rangle$.

Lemme 5.4.9 (Cofinitude modulo les stabilisateurs). *On a les propriétés de finitude :*

- (i) $|\Gamma_N \backslash M_0 / \Gamma'_N| < \infty$,
- (ii) $|M_1 / \Gamma_N| < \infty$,
- (iii) $|M_2 / \Gamma'_N| < \infty$.

Démonstration. Identique au cas du lemme 5.2.12. $\square$

Il existe alors $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau_1, \dots, \tau_l$ et $\tau'_1, \dots, \tau'_m$ des éléments de $\pi_1(F)$ tels que :

$$M_0 = \bigsqcup_{i=1}^k \Gamma_N \cdot \sigma_i \cdot \Gamma'_N, \quad M_1 = \bigsqcup_{i=1}^l \tau_i \cdot \Gamma_N \quad \text{et} \quad M_2 = \bigsqcup_{i=1}^m \tau'_i \cdot \Gamma'_N.$$

Le sous-groupe $\langle \gamma^N, \gamma'^N, \theta \rangle$ étant de type fini (et donc séparable dans $\pi_1(F)$), il existe un sous-groupe d'indice fini $\Sigma \leq \pi_1(F)$ tel que $\langle \gamma^N, \gamma'^N, \theta \rangle \leq \Sigma$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau_1, \dots, \tau_l, \tau'_1, \dots, \tau'_m \notin \Sigma$.

On impose de plus les conditions $\gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{N-1}, \gamma', \gamma'^2, \dots, \gamma'^{N-1} \notin \Sigma$, ce qui est licite car ces éléments n'appartiennent pas au sous-groupe $\langle \gamma^N, \gamma'^N, \theta \rangle$.

Lemme 5.4.10 (M est virtuellement vide). $\Sigma \cap M = \emptyset$.

Démonstration. Identique au cas du lemme 5.2.13. $\square$

On construit le revêtement fini associé $\tilde{F} \xrightarrow{\pi} \hat{F} = \tilde{F} / \Sigma \xrightarrow{\leq \infty} \hat{F}_0$ et on pose $\hat{c} = \pi(\tilde{c})$ et $\hat{\alpha} = \pi(\tilde{\alpha}_1)$. Par construction, $\hat{c} \cap \hat{\alpha} = \emptyset$ (car $\pi_1(\hat{F}) \cap M = \emptyset$) et aucun relevé de $\hat{c}$ ou de $\hat{\alpha}$ ne sépare $\tilde{c}$ et $\tilde{\alpha}_1$ ou $\tilde{\alpha}_2$ dans $\tilde{F}$ (car $\pi_1(\hat{F}) \cap (M_1 \cup M_2) = \emptyset$). Par ailleurs, comme $\theta \in \pi_1(\hat{F})$ la courbe $\tilde{\alpha}_2 = \theta(\tilde{\alpha}_1)$ est un relevé de $\hat{\alpha}$ dans $\tilde{F}$.

Enfin, les revêtements $\hat{c} \longrightarrow \hat{c}_0$ et $\hat{\alpha} \longrightarrow \psi(\hat{c}_0)$ induit par le revêtement $\hat{F} \longrightarrow \hat{F}_0$ sont isomorphes de degré N car, par construction, $\Sigma \cap \Gamma = \Gamma_N$ et $\Sigma \cap \Gamma' = \Gamma'_N$.

En mettant bout à bout les étapes 1, 2 et 3, la proposition 5.4.4 est donc finalement démontrée.

Chapitre 6

Application du critère de cubulation aux 3-variétés fibrées

Sommaire

6.1	Quelques outils de densité	108
6.1.1	Existence automatique de courbes compatibles pour les tripodes	108
6.1.2	Propriétés de densité des points et feuilles périodiques	109
6.2	Séparation de points du bord	110
6.2.1	Le cas d'un point non-injectif pour CT	110
6.2.2	Le cas de deux points injectifs pour CT	112

6.1 Quelques outils de densité

Pour cubuler une 3-variété hyperbolique compacte M virtuellement fibrée sur le cercle, nous démontrons que les constructions du chapitre précédent fournissent suffisamment de sous-groupes de surface quasi-convexes de $\pi_1(M)$ pour appliquer notre critère de cubulation (voir théorème 2.3.13).

Nous utiliserons des propriétés de densité des géodésiques périodiques en courbure négative et des feuilles périodiques des feuilletages stable et instable associés à un homéomorphisme pseudo-Anosov.

6.1.1 Existence automatique de courbes compatibles pour les tripodes

Nous démontrons dans ce paragraphe que l'existence de courbes $c \subset F$ compatibles via un relevé $\tilde{c}$ avec un tripode droit ou avec deux tripodes alternés est automatique. Nous raffinons alors les résultats des constructions du chapitre 5.

Soit F une surface hyperbolique, φ un homéomorphisme pseudo-Anosov de F et (F, dt) la géométrie euclidienne à singularités décrite au paragraphe 3.2.3. L'ensemble des géodésiques bi-infinies de F s'identifie à l'ensemble des paires non-ordonnées de points distincts du cercle $\partial_\infty \tilde{F} \simeq \mathbb{S}^1$ muni de la topologie quotient de $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ où le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$. On dispose alors du résultat classique de densité ci-dessous.

Théorème 6.1.1 (Densité des géodésiques périodiques). *L'ensemble des géodésiques périodiques de F est dense dans l'ensemble des géodésiques de F .*

Ce résultat de densité permet de construire des géodésiques fermées compatibles avec n'importe quel tripode droit ou paire de tripodes droits alternés.

Lemme 6.1.2 (Existence de courbes compatibles avec un tripode admissible). *Soit $\{\ell, r\}$ un tripode admissible. Alors il existe une courbe fermée essentielle $c \subset F$ compatible avec le tripode $\{\ell, r\}$.*

Démonstration. Le théorème 6.1.1 permet d'affirmer qu'il existe des points $x, y \in \partial_\infty \tilde{F}$ tels que la géodésique γ de la métrique localement euclidienne joignant x à y dans $\tilde{F}$ ait pour image dans F une courbe périodique, et tels que de plus les extrémités de ℓ ne séparent pas x et y dans $\partial_\infty \tilde{F}$ et l'adhérence de $\ell \cup r$ dans $\tilde{F}$ sépare x et y dans $\partial_\infty \tilde{F}$. On a alors automatiquement la condition $\gamma \cap \ell = \emptyset$, car ℓ est également une géodésique. $\square$

Remarque Il est de plus manifeste qu'il existe un grand degré de liberté sur le choix d'une courbe fermée essentielle $c \subset F$ compatible avec un tripode donné $\{\ell, r\}$ de $\tilde{F}$. Nous utiliserons à profit ce degré de liberté pour les constructions de la section suivante.

Lemme 6.1.3 (Existence de courbes compatibles avec une paire de tripodes droits alternés). *Soit $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ deux tripodes droits alternés. Alors il existe une courbe fermée essentielle $c \subset F$ compatible avec $\{\ell, r\}$ et avec $\{\ell', r'\}$ via un même relevé $\tilde{c}$ dans $\tilde{F}$. On peut de plus supposer que c est une géodésique.*

Démonstration. On applique la démonstration du lemme 6.1.2 aux deux tripodes et on observe grâce au théorème 6.1.1 qu'il existe une géodésique simultanément compatible avec ces deux tripodes. $\square$

On reformule alors plus synthétiquement les corollaires 5.2.7 et 5.4.5.

Corollaire 6.1.4 (Tout tripode droit se réalise au bord d'un polygone $P(\tilde{S})$ d'une surface coupée-croisée). *Soit $\{\ell, r\}$ un tripode droit. Alors il existe une surface coupée-croisée quasi-convexe S dans un revêtement fini $\tilde{M}$ de M_φ et un relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que ℓ est un côté de $P(\tilde{S})$ dont r est le rayon dual.*

Corollaire 6.1.5 (Toute paire de tripodes droits alternés se réalise au bord d'un polygone $\Phi(\tilde{S})$ d'une surface coupée-croisée généralisée). *Soit $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ deux tripodes droits alternés. Alors il existe une surface coupée-croisée généralisée quasi-convexe S dans un revêtement fini $\tilde{M}$ de M_φ et un relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que ℓ et ℓ' soient des côtés de $P(\tilde{S})$ de rayons duaux respectifs r et r' .*

6.1.2 Propriétés de densité des points et feuilles périodiques

Nous énonçons maintenant quelques propriétés de densité des feuilletages stable et instable associés à un homéomorphisme pseudo-Anosov.

Soit F une surface hyperbolique et φ un homéomorphisme pseudo-Anosov de F équipé de deux feuilletages singuliers transverses et transversalement mesurés φ -invariants $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$. Les points singuliers de ces feuilletages, nécessairement permutés par φ , sont des exemples de points φ -périodiques. On a en fait le résultat classique suivant (voir [CB88]).

Lemme 6.1.6 (Densité des points φ -périodiques de F). *L'ensemble des points de F qui sont φ -périodiques est dense dans F .*

Notons $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ les feuilletages singuliers de la surface $\widetilde{F}$ obtenus en relevant feuille à feuille les feuilletages stable et instable $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ et munissons $\widetilde{F}$ d'une relation d'équivalence $\sim_s$ (resp. $\sim_u$) pour laquelle deux points sont en relation si, et seulement si, ils appartiennent à une même feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ (resp. $\widetilde{\mathcal{F}}^u$). La mesure transverse μ^s (resp. μ^u), relevée à $\widetilde{F}$, permet de munir l'espace quotient $\mathcal{T}^s = \widetilde{F} / \sim_s$ (resp. $\mathcal{T}^u = \widetilde{F} / \sim_u$) d'une distance qui en fait un arbre réel (voir [Pau88], [Ota96] ou [Kap01]).

Définition 6.1.7. Un point de l'arbre réel $\mathcal{T}^s$ (resp. $\mathcal{T}^u$) est dit *périodique* s'il provient de l'écrasement d'une feuille périodique de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ (resp. $\widetilde{\mathcal{F}}^u$).

On dispose alors d'un résultat de densité des points périodiques dans ces arbres réels.

Proposition 6.1.8 (Densité des feuilles périodiques des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$). *L'ensemble des points périodiques de $\mathcal{T}^s$ (resp. $\mathcal{T}^u$) est dense dans $\mathcal{T}^s$ (resp. $\mathcal{T}^u$).*

Démonstration. Considérons deux feuilles distinctes de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ dans $\widetilde{F}$ et un arc continu ℓ dont la projection dans $\mathcal{T}^s$ est l'unique segment géodésique reliant ces deux feuilles. Montrons alors qu'il existe un point $\tilde{x}$ intérieur à ℓ tel que la feuille stable passant par $\tilde{x}$ soit périodique. On considère pour cela un point régulier $\tilde{y}$ dans l'intérieur de ℓ et un voisinage $\mathcal{V}$ de $\tilde{y}$ dans lequel le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ est le feuilletage horizontal standard de $\mathbb{R}^2$. Quitte à restreindre $\mathcal{V}$, on peut supposer que $\mathcal{V} \cap \ell$ est contenu dans l'intérieur de ℓ . D'après le lemme 6.1.6, il existe un point $\tilde{z} \in \mathcal{V}$ qui relève un point φ -périodique de F . Alors la feuille stable passant par $\tilde{z}$ intersecte par construction l'intervalle $\mathcal{V} \cap \ell$ en un point $\tilde{x}$ qui convient. La densité des points périodiques dans $\mathcal{T}^s$ en découle. $\square$

Enfin, remarquons que les propriétés de densité énoncées permettent de considérer des bases de voisinages intéressantes pour les points du bord du revêtement universel $\widetilde{F}$.

Proposition 6.1.9 (Base de voisinages bordés par des feuilles périodiques). *Soit p un point de $\partial_\infty \widetilde{F}$ qui n'est pas extrémité d'une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$. Alors p admet une base de voisinages dans $\widetilde{F}$ délimités par des adhérences de feuilles régulières ou de droites contenues dans des feuilles singulières de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ dans $\widetilde{F}$. De plus, on peut supposer que ces voisinages sont fournis par des feuilles périodiques.*

Démonstration. Considérons un rayon géodésique de $\widetilde{F}$ d'extrémité p et une suite $\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n, \dots$ de points de ce rayon qui converge à l'infini vers p . Alors il est connu que la collection des feuilles stables passant par les points $\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n, \dots$ fournit une base de voisinages de p (voir par exemple [CT07]). On peut supposer de plus que ces points sont périodiques, grâce au lemme 6.1.6 $\square$.

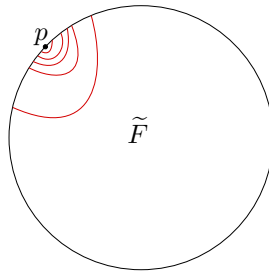


FIGURE 6.1.1 – Base de voisinages au bord délimités par des feuilles périodiques de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$.

6.2 Séparation de points du bord

Le théorème que nous démontrons grâce aux constructions du chapitre précédent est le suivant.

Théorème 6.2.1 (Séparation des paires de points distincts du bord). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement fibrée sur le cercle. Alors pour toute paire de points $p, q \in \partial_\infty \widetilde{M}$ distincts, il existe $\Sigma \leq \pi_1(M)$ un sous-groupe de surface quasi-convexe dont l'ensemble limite $\Lambda(\Sigma)$ sépare p et q dans $\partial_\infty \widetilde{M}$.*

Corollaire 6.2.2 (Cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement fibrée sur le cercle. Alors $\pi_1(M)$ est cubique CAT(0).*

Remarques

1. Soit M une 3-variété hyperbolique compacte de dimension trois et $p, q \in \partial_\infty \widetilde{M}$. S'il existe un revêtement fini $\widehat{\pi} : \widehat{M} \rightarrow M$ de M et un sous-groupe de surface quasi-convexe Σ de $\pi_1(\widehat{M})$ dont l'ensemble limite sépare p et q dans $\partial_\infty \widehat{M}$, alors $\widehat{\pi}_*(\Sigma)$ est un sous-groupe de surface quasi-convexe de $\pi_1(M)$ de même ensemble limite que Σ , donc séparant en particulier p et q dans $\partial_\infty \widetilde{M}$. Pour démontrer le théorème, on peut donc supposer que M est fibrée sur le cercle de monodromie φ possédant un point fixe $p \in F$.
2. Les sous-groupes de surface quasi-convexes obtenus au théorème 6.2.1 sont associés à des constructions de surfaces coupées-croisées (éventuellement généralisées) dans des revêtements finis de M .

Pour démontrer le théorème 6.2.1, nous raisonnons dans la compactification $\overline{F}$ à l'aide des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ et de l'application de Cannon-Thurston. Nous traiterons séparément le cas de deux points dont l'un est extrémité d'une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ et le cas complémentaire de deux points CT-injectifs.

6.2.1 Le cas d'un point non-injectif pour CT

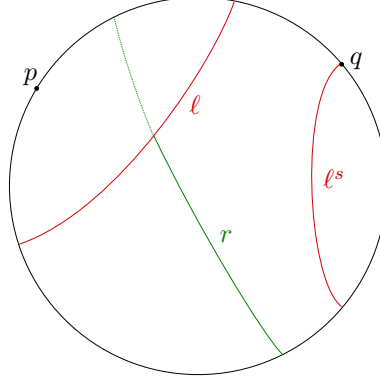
On propose dans ce paragraphe une construction permettant de séparer deux points distincts de $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$ par l'ensemble limite d'un sous-groupe de surface quasi-convexe de $\pi_1(M)$ dans le cas où l'image réciproque par l'application de Cannon-Thurston de l'un de ces points n'est pas un singleton.

Lemme 6.2.3. *Soient $p, q \in \partial_\infty \widetilde{F}$ tels que q soit une extrémité d'une feuille ℓ^s de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $p \notin \overline{\ell^s}$. Alors il existe une infinité de feuilles périodiques de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ qui séparent p et $\overline{\ell^s}$ dans $\overline{F}$.*

Démonstration. Commençons par supposer que p n'est pas une extrémité d'une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$. Alors, d'après la proposition 6.1.9, il existe une feuille ℓ'^s de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ qui isole un tout petit voisinage de p et donc sépare p et ℓ^s . On considère alors le segment géodésique I reliant les images des feuilles ℓ^s et ℓ'^s dans l'arbre réel $\mathcal{T}^s$. Toute feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ dont l'image dans $\mathcal{T}^s$ appartient à l'intérieur de I sépare ℓ^s et ℓ'^s dans $\overline{F}$, et donc sépare également p et ℓ^s . Or d'après la proposition 6.1.8, il existe une infinité de points périodiques dans le segment non ponctuel I . Enfin, si p est extrémité d'une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$, on remplace ℓ'^s par cette feuille et on applique le même raisonnement. $\square$

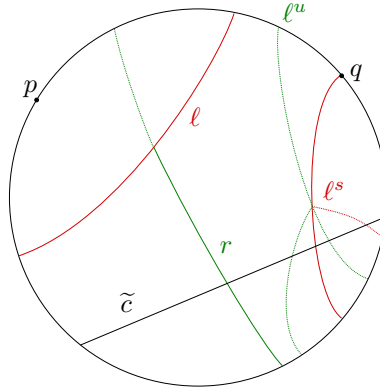
Corollaire 6.2.4 (Mise en place d'un tripode droit séparant convenablement p et ℓ^s). *Soient $p, q \in \partial_\infty \widetilde{F}$ tels que q soit une extrémité d'une feuille ℓ^s de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $p \notin \overline{\ell^s}$. Alors il existe un tripode droit $\{\ell, r\}$ où ℓ est contenue dans une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ qui sépare p et ℓ^s ainsi que p et r dans $\overline{F}$ et tel que de plus p ne soit pas adhérent à une feuille contenant ℓ ou r .*

Démonstration. Soit ℓ' une feuille périodique de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ qui sépare p et $\overline{\ell^s}$ dans $\overline{F}$. Alors il existe un choix de droite topologique ℓ contenue dans ℓ' et de rayon r contenu dans la feuille duale à ℓ' tel que $\{\ell, r\}$ est un tripode droit et ℓ sépare p et r dans $\overline{F}$. Le résultat découle alors du lemme 6.2.3 et du fait que p est au plus adhérent à une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$. $\square$

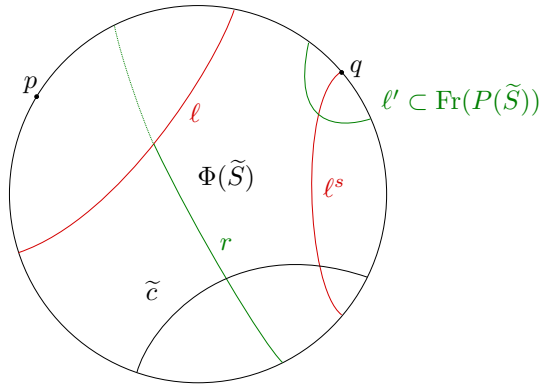
FIGURE 6.2.1 – Un tripode droit séparant p et la feuille d'extrémité q .

Lemme 6.2.5 (Mise en place d'une courbe convenablement compatible avec le tripode). *À partir de la situation du corollaire 6.2.4, il existe une courbe fermée essentielle $c \subset F$ compatible avec le tripode $\{\ell, r\}$ via un relevé $\tilde{c}$ qui intersecte ℓ^s et, dans le cas où ℓ^s est périodique, intersecte également la feuille ℓ^u duale à ℓ^s .*

Démonstration. À nouveau, il existe suffisamment de degrés de liberté dans l'énoncé de densité des géodésiques périodiques pour trouver une géodésique bi-infinie $\tilde{c}$ vérifiant les conditions requises. $\square$

FIGURE 6.2.2 – Une courbe $\tilde{c}$ compatible avec le tripode $\{\ell, r\}$ intersectant ℓ^s et sa feuille duale ℓ^u .

Corollaire 6.2.6 (Séparation effective des points p et q). *Soient $p, q \in \partial_\infty \tilde{F}$ deux points distincts tels que q soit une extrémité d'une feuille ℓ^s de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $p \notin \bar{\ell}^s$. Alors il existe un sous-groupe de surface quasi-convexe de $\pi_1(M)$ dont l'ensemble limite sépare $\text{CT}(p)$ et $\text{CT}(q)$ dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$.*

FIGURE 6.2.3 – Le polygone associé à une surface dont l'ensemble limite sépare $\text{CT}(p)$ et $\text{CT}(q)$.

Démonstration. On fixe un tripode droit $\{\ell, r\}$ et une courbe fermée essentielle $c \subset F$ compatible avec $\{\ell, r\}$ vérifiant les conclusions du lemme 6.2.5. Alors d'après le corollaire 5.2.7, il existe une surface coupée-croisée quasi-convexe S dans un revêtement fini $\tilde{M}$ de M_φ et un relevé $\tilde{S}$ de S dans $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que $\tilde{c} \subset \Phi(\tilde{S})$ avec ℓ un côté de $P(\tilde{S})$ de rayon dual r .

On considère la décomposition de $\partial_\infty \tilde{F} \setminus \text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$ étudiée au paragraphe 4.2.4. Par construction, p est dans un intervalle stable délimité par ℓ et $\text{CT}(p) \notin \Lambda(\pi_1(S))$ car p n'est pas adhérent à une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^u$ contenant ℓ ou r .

Par ailleurs, les conditions $\tilde{c} \subset \Phi(\tilde{S})$ et $\tilde{c} \cap \ell^s \neq \emptyset$ garantissent que $\ell^s \cap \Phi(\tilde{S}) \neq \emptyset$. Ainsi ℓ^s ne contient pas un côté de $\Phi(\tilde{S})$. De même, si ℓ^s est périodique, la condition $\tilde{c} \cap \ell^u \neq \emptyset$ garantit que $\ell^u \cap \Phi(\tilde{S}) \neq \emptyset$, donc ℓ^u ne contient pas non plus un côté de $P(\tilde{S})$. Au final, $\text{CT}(q) \notin \Lambda(\pi_1(S))$.

Enfin, d'après le corollaire 4.2.19, tout rayon de ℓ^s qui intersecte $\Phi(\tilde{S})$ intersecte un côté ℓ' de $P(\tilde{S})$ contenu dans une feuille instable. Donc q appartient à un intervalle instable de la décomposition de $\partial_\infty \tilde{F} \setminus \text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$. Alors le lemme 4.2.23 permet de conclure que $\Lambda(\pi_1(S))$ sépare $\text{CT}(p)$ et $\text{CT}(q)$ dans $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$. $\square$

6.2.2 Le cas de deux points injectifs pour CT

On propose enfin une construction permettant de séparer deux points distincts de $\partial_\infty \tilde{M}_\varphi$ par l'ensemble limite d'un sous-groupe de surface quasi-convexe dans le cas où les images réciproques par l'application de Cannon-Thurston de chacun de ces points est un singleton de $\partial_\infty \tilde{F}$.

Définition 6.2.7. Soit $\{\ell, r\}$ un tripode droit et $p \in \partial_\infty \tilde{F}$. On dit que p est *extérieure* à $\{\ell, r\}$ si p appartient à la composante connexe de $\overline{F} \setminus \bar{\ell}$ ne contenant pas l'extrémité de r dans $\partial_\infty \tilde{F}$.

Nous démontrons alors qu'il est toujours possible de séparer deux points CT-injectifs de $\partial_\infty \tilde{F}$ par une paire de tripodes droits alternés, au sens où chacun des deux points donnés est extérieur à l'un de ces deux tripodes.

Proposition 6.2.8 (Séparation de points CT-injectifs par des tripodes droits alternés). Soient $p, q \in \partial_\infty \tilde{F}$ deux points distincts injectifs pour CT. Alors il existe deux tripodes droits alternés $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ tels que p (resp. q) soit extérieur à $\{\ell, r\}$ (resp. $\{\ell', r'\}$).

Démonstration de la proposition 6.2.8

La démonstration de cette proposition se fait en plusieurs étapes et repose essentiellement sur les propriétés de densité étudiées au paragraphe 6.1.2. La difficulté essentielle consiste à obtenir des tripodes droits dont les rayons duaux ne vont pas du même côté à l'infini.

Étape 1 : On considère une feuille périodique ℓ'^s de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ qui sépare p et q . Ceci est possible grâce à la proposition 6.1.9, car ni p ni q n'est adhérent à une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$. Alors on peut considérer une droite topologique ℓ^s contenue dans ℓ'^s et un rayon r^u contenu dans la feuille duale à ℓ'^s pour former un tripode droit $\{\ell^s, r^u\}$ tel que q soit extérieur à $\{\ell^s, r^u\}$ et p ne soit pas extérieur à $\{\ell^s, r^u\}$.

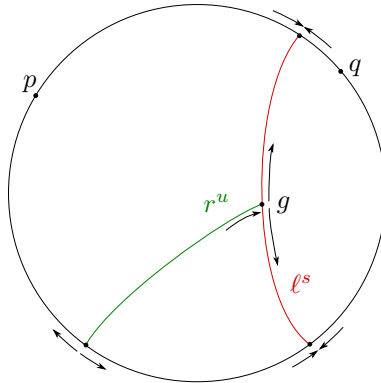


FIGURE 6.2.4 – Un tripode droit séparant p et q et dynamique d'un élément stabilisant ce tripode.

Étape 2 : On note I et J les composantes connexes de $\partial_\infty \tilde{F} \setminus \{p, q\}$ et on suppose que l'extrémité de r^u dans $\partial_\infty \tilde{F}$ appartient à I . Nous allons fabriquer dans les étapes 2 et 3 un tripode droit pour lequel q sera extérieur, mais pas p , et dont le rayon aura une extrémité dans J .

Lemme 6.2.9 (Mise en place d'un second tripode). *Il existe un point périodique $\tilde{x} \in \tilde{F}$ tel que $\overline{\ell^s \cup r^u}$ ne sépare pas $\tilde{x}$ et p dans $\tilde{F}$ et la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ passant par $\tilde{x}$ soit régulière et intersecte r^u .*

Démonstration. On considère un point régulier $\tilde{y}$ dans l'intérieur du rayon r^u . Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $\tilde{y}$ disjoint de ℓ^s dans lequel les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ sont les feuilletages horizontaux et verticaux standard de $\mathbb{R}^2$. En particulier, $\mathcal{V}$ ne contient aucun point singulier.

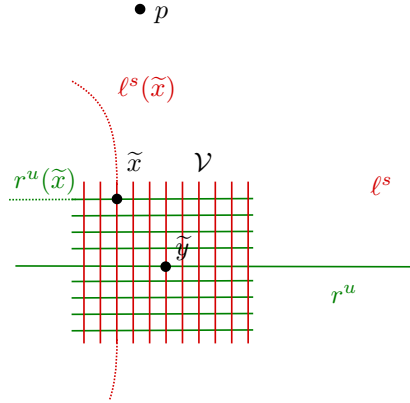


FIGURE 6.2.5 – Trouver une feuille régulière périodique qui intersecte r^u .

D'après le lemme 6.1.6, l'intersection de $\mathcal{V}$ avec le quart d'espace délimité par ℓ^s et r^u auquel p est adhérent contient un relevé $\tilde{x}$ d'un point φ -périodique de F (qui est donc régulier). Alors la description des feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et $\tilde{\mathcal{F}}^u$ dans le voisinage $\mathcal{V}$ garantit que la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ passant par $\tilde{x}$ intersecte le rayon r^u (et est régulière car son unique relevé de point φ -périodique est régulier). $\square$

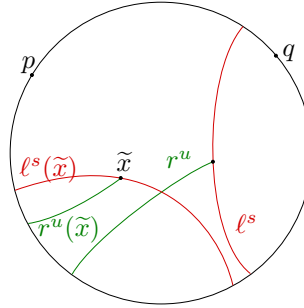


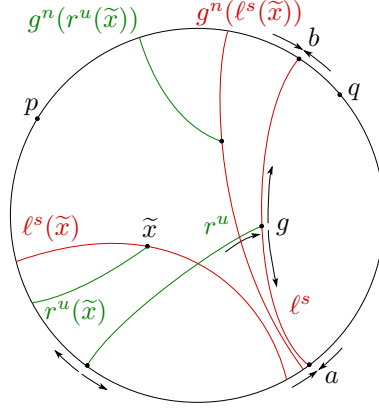
FIGURE 6.2.6 – Un second tripode droit.

On note alors $\ell^s(\tilde{x})$ la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ passant par $\tilde{x}$ et $r^u(\tilde{x})$ le rayon issu de $\tilde{x}$ et contenu dans la feuille duale à $\ell^s(\tilde{x})$ tel que $\overline{\ell^s(\tilde{x})}$ ne sépare pas l'extrémité de $r^u(\tilde{x})$ et celle de r^u dans $\tilde{F}$. Le fait que la feuille $\ell^s(\tilde{x})$ est régulière garantit que $\{\ell^s(\tilde{x}), r^u(\tilde{x})\}$ est un tripode droit et par choix de $r^u(\tilde{x})$, q est extérieur à ce tripode.

Étape 3 : On fixe $g \in \pi_1(M)$ le générateur du stabilisateur de ℓ^s qui contracte le rayon r^u . Alors les extrémités de ℓ^s sont des points fixes attractifs de g et celle de r^u est un point fixe répulsif de g . Notons que tous les autres points fixes de g dans $\partial_\infty \tilde{F}$ sont contenus dans l'intervalle ouvert joignant les extrémités de ℓ^s et contenant q .

Lemme 6.2.10 (Mise en place d'un second tripode droit). *Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{g^n(\ell^s(\tilde{x}))}$ sépare p et q dans $\tilde{F}$ et l'extrémité du rayon $g^n(r^u(\tilde{x}))$ appartienne à l'intervalle J .*

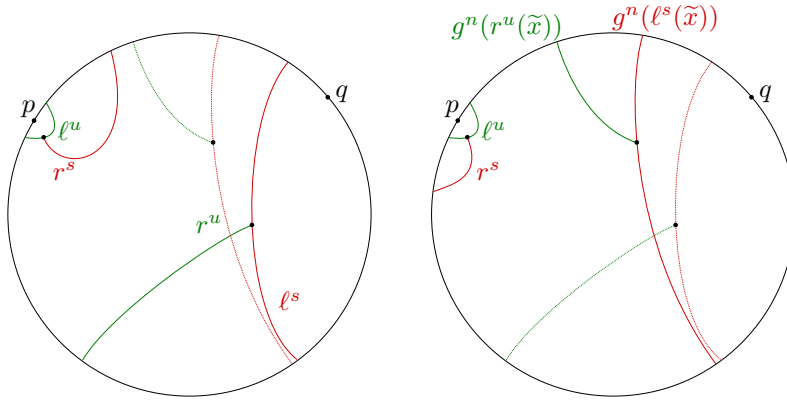
Démonstration. Notons a, b les extrémités de ℓ^s dans $\partial_\infty \tilde{F}$ avec $a \in I$ et $b \in J$. Par construction, les extrémités de $g^n(\ell^s(\tilde{x}))$ convergent vers la paire $\{a, b\}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ceci prouve la première assertion. Par construction du rayon $r^u(\tilde{x})$, on peut également affirmer que l'extrémité du rayon $g^n(r^u(\tilde{x}))$ converge vers b lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve la seconde assertion. $\square$

FIGURE 6.2.7 – Action de g sur le tripode droit $\{\ell^s(\tilde{x}), r^u(\tilde{x})\}$.

Observons également que $\{g^n(\ell^s(\tilde{x})), g^n(r^u(\tilde{x}))\}$ est un tripode droit pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étape 4 : On fixe enfin une feuille ℓ de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ qui sépare p et chacune des droites ou rayons ℓ^s , r^u , $\ell^s(\tilde{x})$, $r^u(\tilde{x})$, $g^n(\ell^s(\tilde{x}))$ et $g^n(r^u(\tilde{x}))$ avec $n \in \mathbb{N}$ comme dans les conclusions du lemme 6.2.10. Alors la proposition 6.1.9 assure qu'il existe une feuille périodique ℓ^u de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ qui sépare p et ℓ . On choisit alors une géodésique bi-infinie ℓ^u contenue dans ℓ^u et un rayon r^s contenu dans la feuille duale à ℓ^u pour former un tripode droit $\{\ell^u, r^s\}$ tel que p soit extérieur à $\{\ell^u, r^s\}$.

Conclusion : Si l'extrémité de r^s appartient à l'intervalle J , alors $\{\ell^u, r^s\}$ et $\{\ell^s, r^u\}$ sont deux tripodes droits alternés tels que p est extérieur à $\{\ell^u, r^s\}$ et q est extérieur à $\{\ell^s, r^u\}$. Sinon, $\{\ell^u, r^s\}$ et $\{g^n(\ell^s(\tilde{x})), g^n(r^u(\tilde{x}))\}$ sont deux tripodes droits alternés tels que p est extérieur à $\{\ell^u, r^s\}$ et q est extérieur à $\{g^n(\ell^s(\tilde{x})), g^n(r^u(\tilde{x}))\}$. La proposition 6.2.8 est donc démontrée.

FIGURE 6.2.8 – Deux tripodes droits alternés pour lesquels p et q sont à l'extérieur.

Corollaire 6.2.11 (Séparation effective des points p et q). Soient $p, q \in \partial_\infty \widetilde{F}$ deux points distincts injectifs pour CT. Alors il existe un sous-groupe de surface quasi-convexe de $\pi_1(M)$ dont l'ensemble limite sépare $\text{CT}(p)$ et $\text{CT}(q)$ dans $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$.

Démonstration. La proposition 6.2.8 fournit deux tripodes droits alternés $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$ tels que p soit extérieur à $\{\ell, r\}$ et q soit extérieur à $\{\ell', r'\}$. Le corollaire 6.1.5 affirme alors l'existence d'une surface coupée-croisée généralisée quasi-convexe S dans un revêtement fini $\widehat{M}$ de M_φ et un relevé $\widetilde{S}$ de S dans $\widetilde{F} \times \mathbb{R}$ tel que ℓ et ℓ' soient deux côtés de $\Phi(\widetilde{S})$ de rayons duaux respectifs r et r' .

Comme p et q sont tous deux CT-injectifs et respectivement extérieurs à $\{\ell, r\}$ et $\{\ell', r'\}$, ils appartiennent à des intervalles de stabilité opposées de $\partial_\infty \widetilde{F} \setminus \text{CT}^{-1}(\Lambda(\pi_1(S)))$. D'après le lemme 4.2.23, l'ensemble limite $\Lambda(\pi_1(S))$ sépare $\text{CT}(p)$ et $\text{CT}(q)$ dans $\partial_\infty \widetilde{M}_\varphi$. $\square$

Ceci conclut la cubulation des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle.

Troisième partie

Plongements virtuels de surfaces
coupées-croisées

Introduction de la troisième partie

Nous avons établi dans la seconde partie de ce mémoire que si M est une variété hyperbolique compacte de dimension trois virtuellement fibrée sur le cercle, alors le groupe fondamental de M est cubique $\text{CAT}(0)$, i.e. agit par isométries proprement et cocompactement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ de dimension finie. Un tel résultat n'entraîne malheureusement pas de corollaires algébriques intéressants pour le groupe $\pi_1(M)$, en particulier ne permet pas d'apporter d'éléments de réponse aux conjectures classiques portant sur les groupes fondamentaux de 3-variétés (les conjectures virtuellement de Haken, virtuellement fibrée sur le cercle, du premier nombre de Betti virtuel non nul ou infini et du groupe fondamental large, voir introduction de la seconde partie).

Complexes cubiques spéciaux

Pour obtenir des résultats de structure intéressants pour le groupe fondamental de M à l'aide de complexes cubiques $\text{CAT}(0)$, il faut aller significativement plus loin et essayer de trouver un modèle géométrique pour le groupe $\pi_1(M)$ (ou l'un de ses sous-groupes d'indice fini) qui soit un complexe cubique **spécial**.

Les complexes cubiques spéciaux sont des complexes cubiques compacts à courbure négative ou nulle dont les hyperplans se comportent raisonnablement bien. Ces hyperplans doivent tout d'abord être plongés (i.e. ne pas s'auto-intersecter) et ne peuvent pas présenter certaines pathologies d'auto-osculation ou d'inter-osculation. Pour les définitions et propriétés des complexes cubiques spéciaux, nous renvoyons à l'article *Special Cube Complexes* ([HW07]) de F. Haglund et D. Wise où est définie et étudiée cette classe d'objets.

Définition. On dit qu'un groupe G est *cubique spécial*, ou plus simplement *spécial*, s'il existe un complexe cubique X compact connexe à courbure négative ou nulle et spécial ainsi qu'un isomorphisme $G \simeq \pi_1(X)$.

Pour une 3-variété hyperbolique compacte M , nous savons¹ qu'il existe un complexe cubique X compact à courbure négative ou nulle de dimension finie ainsi qu'un isomorphisme $\pi_1(M) \simeq \pi_1(X)$. Il n'est absolument pas garanti que ce complexe cubique X soit spécial, ni même virtuellement spécial (car nous n'avons pas imposé de propriétés particulières aux quasi-hyperplans utilisés pour la cubulation, les hyperplans du complexe cubique dual peuvent donc a priori être pathologiques). Voici alors une question naturelle, soulevée par D. Wise, pour aller plus loin dans le domaine des cubulations.

Question Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Le groupe $\pi_1(M)$ est-il virtuellement spécial ?

Nous avons expliqué lors de la conclusion de la première partie de cette thèse que si l'on peut appliquer le critère de cubulation du théorème 2.3.13 à une famille de sous-groupes de codimension 1 quasi-convexes qui sont de plus séparables et malnormaux, alors on obtient effectivement une cubulation spéciale.

Dans le cas de la dimension 3, des travaux récents de D. Wise permettent cependant d'obtenir une cubulation spéciale à bien moindre coût.

Une condition suffisante de cubulation spéciale

Pour cubuler les 3-variétés hyperboliques compactes, on utilise une quantité suffisante de surfaces immergées incompressibles qui sont quasi-convexes. Pour obtenir une cubulation spéciale, l'idée principale est de travailler avec suffisamment de surfaces plongées incompressibles et quasi-convexes. Les récents travaux de D. Wise ([Wis09]) permettent de raffiner cette approche à l'extrême en établissant que l'existence d'une seule surface plongée incompressible et quasi-convexe est suffisante.

Définition. Soit M une 3-variété hyperbolique compacte connexe. On dit que M est *de Haken de manière quasi-convexe* s'il existe une surface S compacte connexe orientable de genre $g \geq 2$ et un plongement π_1 -injectif $S \hookrightarrow M$ tel que le sous-groupe de surface correspondant soit quasi-convexe dans $\pi_1(M)$.

¹Sans l'hypothèse de fibration virtuelle sur le cercle, il faut à ce jour utiliser le théorème de Kahn et Markovic, car M n'est que conjecturalement virtuellement fibrée sur le cercle.

Théorème (Il suffit d'une seule surface plongée incompressible quasi-convexe, voir [Wis09]). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement de Haken de manière quasi-convexe. Alors $\pi_1(M)$ est virtuellement spécial.*

Les étapes à réaliser pour obtenir une cubulation spéciale décrites ci-dessous sont spectaculairement réduites par ce nouveau résultat. Il semblait a priori nécessaire de trouver suffisamment de sous-groupes de surface quasi-convexes et malnormaux provenant de surfaces incompressiblement plongées dans un revêtement fini de M . D'après le théorème ci-dessus, il suffit en fait de trouver **une seule** surface plongée incompressible et quasi-convexe dans un revêtement fini de M .

Hierarchies quasi-convexes

Le théorème énoncé ci-dessus provient d'une étude fine des groupes possédant une hiérarchie quasi-convexe. La classe des groupes possédant une hiérarchie quasi-convexe est la classe $\mathcal{H}$ contenant le groupe trivial et telle que, si $A, B \in \mathcal{H}$ alors les produits libres amalgamés $A *_C B$ et les extensions HNN $A *_t C t^{-1} = C'$ font également partie de cette classe, sous l'hypothèse que C est de type fini et que les inclusions $C \hookrightarrow A *_C B$ et $C \hookrightarrow A *_t C t^{-1} = C'$ sont des plongements quasi-isométriques relativement aux distances de mots de type fini (les groupes de la classe sont de présentation finie).

Par exemple, la classe des groupes possédant une hiérarchie quasi-convexe contient $\mathbb{Z}$ (extension HNN du groupe trivial), le groupe libre $F_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, les groupes de surface via $F_2 *_\mathbb{Z} F_2, \dots$ Par contre, le groupe de Baumslag-Solitar $B(1, 2) = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^2 \rangle = \langle a \rangle *_t \langle a \rangle t^{-1} = \langle a^2 \rangle$ fait apparaître une hiérarchie non quasi-convexe. De même, le groupe fondamental $\pi_1(M) = \pi_1(F) \rtimes_{\varphi_*} \mathbb{Z}$ d'une 3-variété hyperbolique compacte fibrée sur le cercle a une hiérarchie qui n'est pas quasi-convexe car $\pi_1(F)$ n'est pas quasi-isométriquement plongé dans $\pi_1(M)$.

Le résultat principal de [Wis09] est le théorème suivant.

Théorème (Structure des groupes hyperboliques possédant une hiérarchie quasi-convexe). *Soit G un groupe hyperbolique possédant une hiérarchie quasi-convexe. Alors G est virtuellement spécial.*

Les hiérarchies apparaissent naturellement pour les 3-variétés de Haken par un procédé de découpe le long de surfaces plongées incompressibles. D. Wise fait remarquer que des résultats profonds de W. Thurston assurent que si l'on démarre une telle hiérarchie à partir d'une surface plongée incompressible qui est de plus quasi-convexe, alors on obtient en fait une hiérarchie quasi-convexe. Cette remarque permet d'affirmer que si M est une 3-variété hyperbolique compacte de Haken de manière quasi-convexe, alors le groupe hyperbolique $\pi_1(M)$ admet une hiérarchie quasi-convexe et donc est virtuellement spécial.

Conjecture virtuellement de Haken de manière quasi-convexe

L'existence de surfaces plongées incompressibles est conjecturée pour toute 3-variété hyperbolique compacte, quitte à passer à un revêtement fini. Un tel résultat entraînerait d'après le théorème de D. Wise que les groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques compactes sont virtuellement spéciaux.

Conjecture (Conjecture virtuellement de Haken de manière quasi-convexe). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M et une surface plongée incompressible $S \hookrightarrow \widehat{M}$ qui est quasi-convexe.*

Cette question est toujours ouverte, les surfaces aléatoires de J. Kahn et V. Markovic donnant toujours naissance à des sous-groupes quasi-convexes mais étant bien loin d'être plongées. Il ne semble pas clair à ce jour que leur construction puisse un jour aboutir directement à l'existence de surfaces plongées incompressibles et quasi-convexes via un revêtement fini de la variété ambiante.

Même en restreignant la question posée à la sous-classe des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle, la réponse reste inconnue. Dans une suspension M_φ , on dispose bien d'une surface plongée incompressible, la fibre F , mais le sous-groupe de surface correspondant n'est pas quasi-convexe dans $\pi_1(M)$.

À l'inverse, nous avons construit de très nombreux sous-groupes de surface quasi-convexes dans $\pi_1(M)$ à l'aide de constructions géométriques de surfaces coupées-croisées dans M_φ . Mais ces surfaces ne sont pas plongées dans la 3-variété M_φ et il n'est donc pas clair du tout que M_φ , ou l'un de ses revêtements finis, contient une surface à la fois incompressiblement plongée et quasi-convexe.

Retour sur le premier nombre de Betti virtuel

La conjecture virtuellement de Haken de manière quasi-convexe est déjà résolue dans de nombreux cas. Dès que l'homologie de la 3-variété est suffisamment riche, on peut être sûr de l'existence de surfaces plongées incompressibles quasi-convexes, via des travaux de W. Thurston.

Théorème (Surfaces plongées quasi-convexes, voir [Thu86b]). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte telle que $vb_1(M) > 1$. Alors il existe une surface plongée $S \hookrightarrow M$ qui n'est pas (homotope à l'inclusion d')une fibre pour une fibration de M sur le cercle.*

Une surface provenant du théorème ci-dessus ne peut pas être géométriquement infinie. L'utilisation du théorème de dichotomie pour les sous-groupes de surface des 3-variétés fournit donc le corollaire suivant.

Corollaire (Résolution du cas $vb_1 > 1$). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte telle que $vb_1(M) > 1$. Alors M est virtuellement de Haken de manière quasi-convexe.*

Pour les 3-variétés hyperboliques compactes qui sont de Haken, le seul cas ouvert de la conjecture virtuellement Haken quasi-convexe est donc pour les variétés M qui sont virtuellement fibrées sur le cercle et telles que $b_1(M) = 1$.

Remarque (Le cas d'une fibre de genre 2) Soit M une 3-variété hyperbolique fibrée sur le cercle de fibre $F = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ de genre $g = 2$. Alors des travaux de J. Masters permettent d'affirmer que $vb_1(M) = +\infty$ (voir [Mas02]). En particulier dans ce cas, M est virtuellement de Haken de manière quasi-convexe et $\pi_1(M)$ est donc virtuellement spécial.

Nous expliquons maintenant les liens entre les conjectures classiques sur les 3-variétés hyperboliques compactes et le fait que leur groupe fondamental soit virtuellement spécial.

Groupes d'Artin à angles droits

Définition. Un *groupe d'Artin à angles droits* est un groupe donné par une présentation de la forme $\langle s_1, \dots, s_n \mid [s_i, s_j]^{m_{i,j}} = 1 \rangle$ où $m_{i,j} \in \{0, 1\}$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

Autrement dit, un groupe d'Artin à angles droits est engendré par des éléments que l'on autorise éventuellement à commuter. Une autre manière de définir les groupes d'Artin à angles droits consiste à se donner un graphe simplicial fini Γ qui code les relations de commutation entre générateurs. On définit le groupe $G(\Gamma) = \langle v \in \Gamma^{(0)} \mid [u, v] = 1 \iff (u, v) \in \Gamma^{(1)} \rangle$.

Exemples Pour un graphe Γ d'ensemble d'arêtes vide, on obtient les groupes libres F_n , tandis que pour les graphes complets K_n , on obtient les groupes abéliens libres $\mathbb{Z}^n$. Pour un graphe bipartite $K_{n,m}$, le groupe d'Artin à angles droits correspondant est le produit direct $F_n \times F_m$.

Les groupes d'Artin à angles droits sont résiduellement finis et même sous-groupes de $SL_n(\mathbb{Z})$ pour n suffisamment grand. De plus, lorsque Γ n'est pas un graphe complet, il existe un morphisme surjectif $G(\Gamma) \rightarrow F_2$ et donc $G(\Gamma)$ est large. Plus généralement, les sous-groupes non-abéliens des groupes d'Artin à angles droits sont larges.

Les sous-groupes des groupes d'Artin à angles droits servent alors de modèle aux groupes virtuellement spéciaux, via le théorème suivant dû à F. Haglund et D. Wise.

Théorème (Des complexes cubiques spéciaux aux groupes d'Artin à angles droits, voir [HW07]). *Tout groupe G virtuellement spécial est virtuellement sous-groupe d'un groupe d'Artin à angles droits.*

Corollaire (Cubique spécial implique large). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte telle que $\pi_1(M)$ soit virtuellement spécial. Alors $\pi_1(M)$ est large.*

Le fait que le groupe fondamental de M soit large entraîne des réponses positives pour toutes les conjectures classiques énoncées dans l'introduction de la deuxième partie. Les résultats précédents constituent donc une grande source de motivation pour mener à bout un programme de cubulation spéciale (virtuelle) des 3-variétés hyperboliques compactes.

Réduction de la conjecture virtuellement fibrée à la conjecture virtuellement de Haken

Les travaux de D. Wise permettent également de réduire significativement les cas ouverts de la conjecture virtuellement fibrée sur le cercle.

I. Agol énonce une condition suffisante algébrique permettant de garantir qu’une 3-variété est virtuellement fibrée sur le cercle. Plus précisément, si M est une 3-variété hyperbolique compacte telle que $\pi_1(M)$ est RFRS (residually finite rationally solvable), alors M est virtuellement fibrée sur le cercle (voir [Ago08] pour une définition précise de la condition RFRS).

La condition RFRS est vérifiée par les groupes qui sont résiduellement nilpotents sans-torsion, ce qui est le cas des groupes d’Artin à angles droits. D. Wise en déduit donc que toute 3-variété hyperbolique compacte (virtuellement) de Haken est virtuellement fibrée sur le cercle. En effet, pour une 3-variété de Haken, soit une hiérarchie démarre avec une fibre virtuelle, soit elle est quasi-convexe et le critère obtenu par I. Agol s’applique alors, via le résultat de cubulation spéciale de D. Wise.

Théorème (de Haken implique virtuellement fibrée, voir [Ago08] et [Wis09]). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement de Haken. Alors M est virtuellement fibrée sur le cercle.*

Conjecture LERF

La conjecture virtuellement de Haken de manière quasi-convexe est reliée aux propriétés de séparabilité des groupes fondamentaux. En effet, toute 3-variété hyperbolique compacte contient un sous-groupe de surface quasi-convexe (d’après le théorème de J. Kahn et V. Markovic). Si un tel sous-groupe est de plus séparable, alors une surface immergée représentant ce sous-groupe de surface peut être plongée dans un revêtement fini. La variété considérée est alors virtuellement de Haken de manière quasi-convexe.

Si M est une 3-variété hyperbolique compacte, on s’attend en fait à ce que tous les sous-groupes de type fini de $\pi_1(M)$ soient séparables.

Définition. Soit G un groupe de type fini. On dit que G est localement séparable (ou LERF, i.e. locally extended residually finite) si tous les sous-groupes de type fini de G sont séparables dans G .

Conjecture (Conjecture LERF). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors $\pi_1(M)$ est localement séparable.*

En corollaire de son résultat de cubulation spéciale des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement de Haken de manière quasi-convexe, D. Wise obtient que cette classe de 3-variétés vérifie la conjecture LERF.

Théorème (voir [Wis09]). *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement de Haken de manière quasi-convexe. Alors $\pi_1(M)$ est localement séparable.*

Deux problèmes ouverts

Les résultats décrits dans les paragraphes précédents se combinent en un diagramme qui relie toutes les conjectures sur les 3-variétés hyperboliques compactes (voir figure 6.2.9). On constate sur ce diagramme qu’il reste deux questions majeures pour lesquelles une résolution permettrait d’établir que toutes les conjectures formulées sont vérifiées. Ce sont les deux problèmes ouverts ci-dessous.

1. Une 3-variété hyperbolique compacte est-elle virtuellement de Haken ?
2. Une 3-variété hyperbolique compacte fibrée sur le cercle est-elle virtuellement de Haken de manière quasi-convexe ?

La fin de cette thèse étudie la seconde de ces questions ouvertes. Plus précisément, on se donne une 3-variété hyperbolique compacte fibrée sur le cercle M_φ . On souhaite alors, à l’aide des surfaces coupées-croisées de D. Cooper, D. Long et A. Reid, réussir à obtenir une surface S incompressiblement plongée dans un revêtement fini de M_φ .

Cubulation spéciale via les surfaces coupées-croisées

Nous expliquons maintenant précisément ce qu'il suffit de démontrer pour résoudre la conjecture virtuellement de Haken de manière quasi-convexe pour les 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle.

Étant donnée une surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ dans une suspension M_φ , on se demande si S est virtuellement plongée dans M_φ , i.e. s'il existe des revêtements finis $\widehat{M} \rightarrow M$ et $\widehat{S} \rightarrow S$ et un plongement $\widehat{S} \hookrightarrow \widehat{M}$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{S} & \hookrightarrow & \widehat{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \hookrightarrow & M \end{array}$$

Si la réponse à cette question est affirmative et qu'en plus $\pi_1(S)$ est quasi-convexe, alors (de manière tautologique) M_φ est virtuellement de Haken de manière quasi-convexe. Nous allons maintenant expliquer pourquoi l'hypothèse de quasi-convexité de $\pi_1(S)$ est superflue.

Dans leur article fondateur *Bundles and finite foliations* (voir [CLR94], démonstration du théorème 2.6), D. Cooper, D. Long et A. Reid démontrent le résultat suivant.

Théorème (voir [CLR94]). *Soit M_φ une 3-variété hyperbolique compacte fibrée sur le cercle et S une surface coupée-croisée dans M_φ . Si S est géométriquement infinie, alors $\text{vb}_1(M_\varphi) > 1$.*

Ce théorème est obtenu en relevant la surface coupée-croisée en une fibre d'un revêtement fini $\widehat{M}$ de M_φ . Dans ce revêtement fini, le relevé de la fibre de M_φ et le relevé plongé de la surface coupée-croisée fournissent alors automatiquement deux éléments linéairement indépendants de $H_2(M, \mathbb{Z})$, d'où la conclusion.

Remarque Ce résultat explique en particulier qu'il est extrêmement intéressant d'être capable de produire des surfaces coupées-croisées qui ne sont pas quasi-convexes, donc à l'opposé des constructions que nous avons proposées dans la seconde partie de cette thèse.

Un exemple de surface coupée-croisée non quasi-convexe d'une suspension M_φ explicite est construit par D. Cooper, D. Long et A. Reid dans [CLR97], mais ces auteurs soulignent qu'il semble remarquablement difficile en général de réaliser de telles constructions. Il est concrètement bien plus simple de construire des surfaces coupées-croisées quasi-convexes. La question suivante est cependant ouverte.

Question Soit M_φ une 3-variété hyperbolique compacte fibrée sur le cercle. Existe-t-il une surface coupée-croisée dans M_φ (ou un revêtement fini de M_φ) qui n'est pas quasi-convexe ?

Le théorème précédent, combiné au résultat d'existence automatique de surfaces plongées incompressibles quasi-convexes ainsi qu'à la résolution de la conjecture virtuellement de Haken de manière quasi-convexe dans le cas $\text{vb}_1 > 1$ fournit donc le corollaire suivant.

Corollaire (Une seule surface coupée-croisée virtuellement plongée suffit). *Soit M_φ une 3-variété hyperbolique compacte fibrée sur le cercle et S une surface coupée-croisée dans M_φ . Si S est virtuellement plongée dans M_φ , alors M_φ est virtuellement de Haken de manière quasi-convexe.*

En résumé, pour obtenir une cubulation spéciale d'une 3-variété hyperbolique compacte virtuellement fibrée sur le cercle M , il suffit de construire une surface coupée-croisée virtuellement plongée dans un revêtement fini (fibré sur le cercle) de M .

Voici donc le cadre de travail de cette troisième partie. On considère une 3-variété hyperbolique compacte fibrée sur le cercle M_φ dont la monodromie φ est un homéomorphisme pseudo-Anosov qui possède un point fixe p dans la fibre F .

On considère également une surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ construite à partir d'une courbe fermée simple essentielle $c \subset F$ telle que $c \cap \varphi(c) = \emptyset$. La question posée est la suivante.

Question L'immersion $S \looparrowright M_\varphi$ est-elle un plongement virtuel ?

Le cas des surfaces coupées-croisées discontinues

Pour conclure cette introduction, nous écartons ci-dessous le cas des surfaces coupées-croisées discontinues, grâce auxquelles il est facile d'obtenir directement la résolution de la conjecture virtuellement de Haken de manière quasi-convexe.

Théorème (Les surfaces coupées-croisées discontinues sont plongées et quasi-convexes).
Supposons que la monodromie φ possède un point fixe et que la multi-courbe $c \sqcup \varphi(c)$ est séparante dans la fibre F . Alors M_φ est de Haken de manière quasi-convexe.

Démonstration. Nous considérons l'immersion $\iota : S \looparrowright M_\varphi$ usuelle de la surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ dans M_φ et nous rappelons que les hypothèses assurent exactement que S possède deux composantes connexes S_1 et S_2 .

Le voisinage régulier ouvert $\mathcal{V}$ de c choisi pour la construction de S vérifie la condition $\mathcal{V} \cap \varphi(\mathcal{V}) = \emptyset$, donc l'une des composantes connexes de la fibre coupée F_c contient le point fixe p de φ considéré. Supposons donc par exemple que $p \in S_1$ et considérons la restriction $\iota_2 : S_2 \hookrightarrow M_\varphi$ de ι à la composante connexe S_2 de S . Cette restriction est par construction un plongement incompressible.

De plus, la ligne de flot $\mathcal{L}_p = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\varphi^n(p)\} \times [0, 1] = \{p\} \times [0, 1]$ de M_φ est disjointe de l'image $\iota_2(S_2)$.

En particulier, aucune ligne de flot de $\tilde{F} \times \mathbb{R}$ relevant $\mathcal{L}_p$ n'intersecte un relevé $\tilde{S}_2$ de la surface plongée S_2 . D'après le critère de quasi-convexité donné par le théorème 4.1.13, S_2 est une surface plongée incompressible et quasi-convexe dans M_φ . $\square$

Nous travaillerons donc dans la suite sous l'hypothèse que la multi-courbe $c \sqcup \varphi(c)$ est non-séparante dans F , ou de manière équivalente, que la fibre coupée F_c est connexe, ce qui entraîne que S est connexe.

Principaux résultats de la troisième partie et organisation des chapitres

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous étudierons les relevés d'une surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ dans les revêtements infinis de M_φ de la forme $\hat{F} \times \mathbb{R}$ où $\hat{F}$ est un revêtement fini connexe de la fibre F . Nous introduirons le vocabulaire sur les produits fibrés nécessaire à la formulation de conditions suffisantes de plongement virtuel des surfaces coupées-croisées. Nous montrerons que la condition nécessaire et suffisante de plongement virtuel de S dans M_φ est la disconnexité du produit fibré $S \times_{M_\varphi} (\hat{F} \times \mathbb{R})$ pour au moins un revêtement fini connexe $\hat{F}$ de F (voir proposition 7.2.3).

Proposition. *Soit S une surface coupée-croisée dans une suspension M_φ . Alors S est virtuellement plongée dans M_φ si, et seulement si, il existe un revêtement fini connexe $\hat{F}$ de F tel que le produit fibré $S \times_{M_\varphi} (\hat{F} \times \mathbb{R})$ soit disconnexe.*

La condition suffisante de plongement virtuel est la partie substantielle de ce résultat. Elle exprime que S est virtuellement plongée dans M_φ sous une condition a priori très faible, qui est vraiment liée au fait que le lieu d'auto-intersection d'une surface coupée-croisée est réduit à une courbe fermée simple de points doubles.

Cette proposition nous permettra ensuite de formuler les conditions suffisantes de plongement virtuel qui sont regroupées ci-dessous. On rappelle qu'un sous-groupe H d'un groupe G est *engouffré* dans G s'il existe un sous-groupe propre d'indice fini Γ de G tel que $H \leq \Gamma$ (voir la proposition 7.3.2 et le corollaire 7.3.4).

Proposition. *Soit S une surface coupée-croisée dans une suspension M_φ . Alors S est virtuellement plongée dans M_φ dès que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- (i) *le sous-groupe $\pi_1(S)$ est engouffré dans $\pi_1(M)$.*
- (ii) *il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \leq \pi_1(M)$ tel que $\pi_1(M) \neq \Gamma \cdot \pi_1(S)$.*
- (iii) *le sous-groupe $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ est engouffré dans $\pi_1(F)$.*
- (iv) *il existe un sous-groupe d'indice fini $\Sigma \leq \pi_1(F)$ tel que $\pi_1(F) \neq \Sigma \cdot (\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$.*

Remarque Dans la proposition précédente, on a bien sûr les implications (i) $\implies$ (ii) et (iii) $\implies$ (iv).

Proposition. *Soit $S = S(c, \varphi)$ une surface coupée-croisée d'une suspension M_φ de monodromie φ non-nécessairement pseudo-Anosov. S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que les courbes c et $\varphi^n(c)$ soient égales, alors S est virtuellement plongée dans M_φ .*

Proposition. *Soit $S = S(c, \varphi)$ une surface coupée-croisée d'une suspension M_φ avec $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Alors S est virtuellement plongée dans M_φ .*

Récapitulatif des conjectures sur les 3-variétés hyperboliques compactes

Pour conclure cette introduction, nous présentons un diagramme logique représentant les liens de causalité entre les diverses conjectures majeures sur les 3-variétés hyperboliques compactes. Les liens sans légende sont essentiellement tautologiques ou dûs à des arguments classiques de théorie des 3-variétés. Les noms des auteurs des démonstrations majeures apparaissent sur les autres liens (on pourra consulter la bibliographie). Les questions ouvertes sont quant à elles matérialisées en pointillés. Enfin, les couleurs ont été choisies pour représenter les classes d'équivalence connues entre toutes ces propriétés.

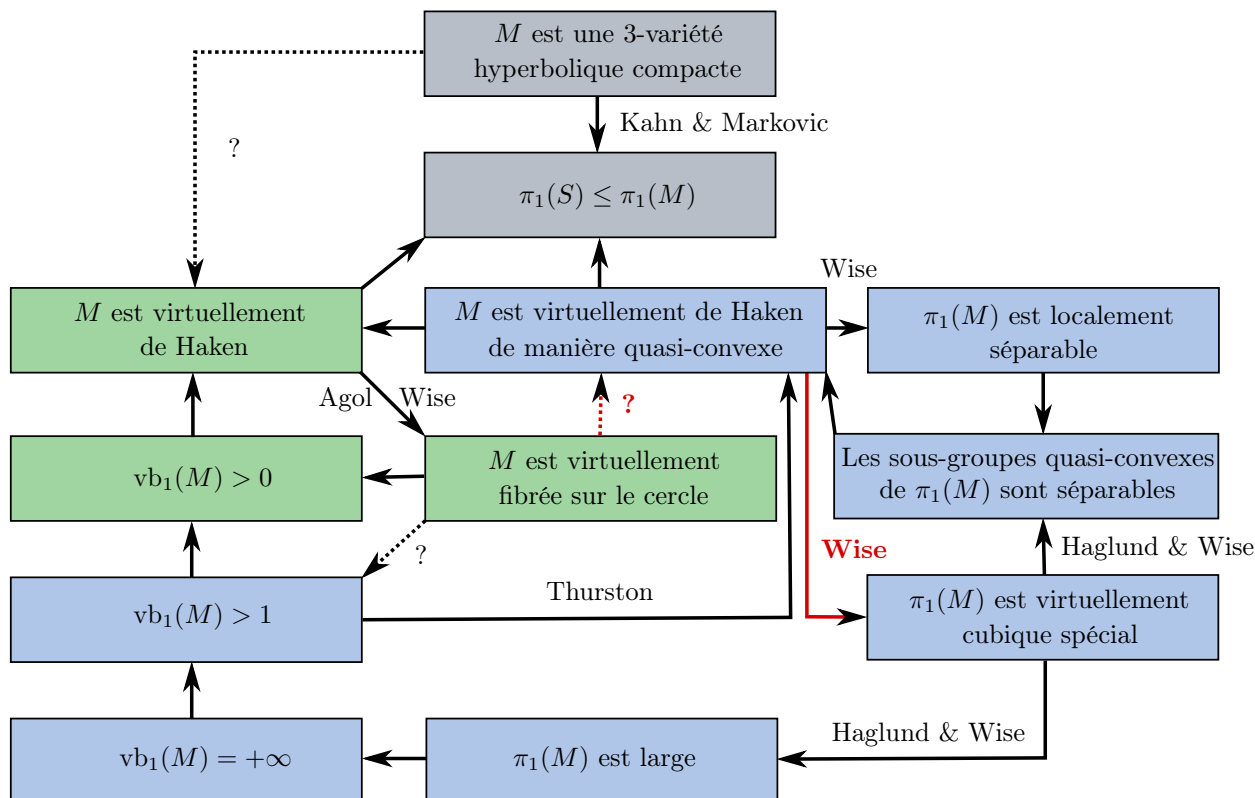


FIGURE 6.2.9 – Diagramme logique des conjectures sur les 3-variétés hyperboliques compactes.

Mise à jour en date du 15 Mars 2012

Le panorama présenté ci-dessus concernant les problèmes classiques autour de la topologie des 3-variétés hyperboliques compactes a connu dans les derniers jours précédant la soutenance de cette thèse un bouleversement majeur.

I. Agol a en effet annoncé avoir résolu une conjecture émise par D. Wise (voir problème 6.1 de [Wis09] et problème 19.3 et conjecture 19.5 du preprint [Wis12] correspondant) permettant un passage automatique des groupes cubiques $\text{CAT}(0)$ aux groupes virtuellement spéciaux, dans le cadre hyperbolique. Le résultat annoncé, en cours de vérification, est le suivant (voir [Ago12]).

Théorème. *Soit G un groupe hyperbolique cubique $\text{CAT}(0)$. Alors G est virtuellement cubique spécial.*

Nous avons déjà fait remarquer à la fin de l'introduction de la seconde partie de cette thèse le résultat de cubulation suivant, obtenu en combinant notre critère de cubulation (voir théorème 2.3.13 et indépendamment [BW10]) et le théorème de J. Kahn et V. Markovic ([KM10]). Nous avons aussi donné une démonstration alternative complète de ce résultat de cubulation sans utiliser les constructions de J. Kahn et V. Markovic dans le cas des 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle.

Théorème. *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors $\pi_1(M)$ est cubique $\text{CAT}(0)$.*

Le résultat annoncé par I. Agol permet donc de résoudre la conjecture la plus forte formulée dans l'introduction de cette troisième partie.

Corollaire. *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte. Alors $\pi_1(M)$ est virtuellement cubique spécial.*

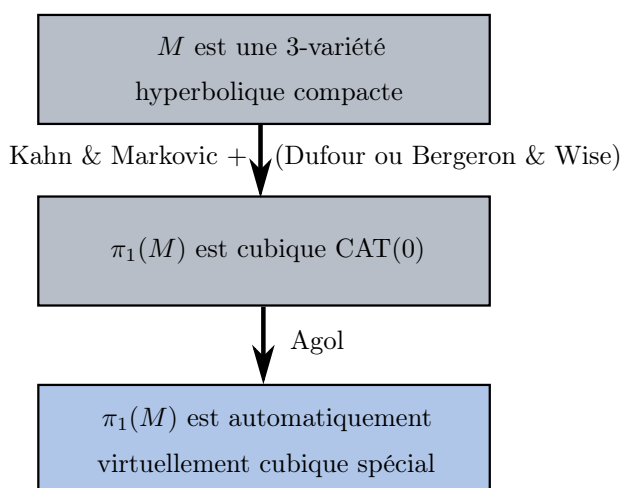


FIGURE 6.2.10 – Un raccourci retentissant.

En conséquence de ce résultat, tous les énoncés formulés sous forme de questions ou de conjectures dans l'introduction de cette troisième partie admettent une réponse positive, et deviennent des théorèmes. En particulier, les 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle étudiées dans cette thèse représentent toutes les 3-variétés hyperboliques compactes.

En lien plus proche avec les problèmes étudiés dans la troisième partie de cette thèse, le résultat annoncé par I. Agol a également la conséquence suivante.

Corollaire. *Soit M une 3-variété hyperbolique compacte et $S \looparrowright \widehat{M}$ une surface coupée-croisée d'un revêtement fini fibré sur le cercle $\widehat{M}$ de M . Alors S est virtuellement plongée dans $\widehat{M}$ (et le sous-groupe de surface associé est même séparable dans $\pi_1(\widehat{M})$).*

Les résultats de plongement virtuels que nous souhaitions traiter dans la troisième partie de cette thèse sont donc finalement démontrés de manière détournée. L'auteur de cette thèse n'en reste pas moins toujours très intéressé par cette question (malgré son apparente obsolescence désormais), et la possibilité de redémontrer ce résultat par des méthodes alternatives plus élémentaires de topologie ou de géométrie ne faisant pas intervenir les complexes cubiques. Toute communication sur le sujet serait accueillie avec le plus grand intérêt.

Chapitre 7

Un problème de connexité

Sommaire

7.1	Relevés et produits fibrés	126
7.1.1	Relevés d'applications	126
7.1.2	Produit fibré	126
7.1.3	Identifier les composantes connexes du produit fibré	127
7.1.4	Relever les plongements par morceaux	128
7.2	Les relevés de S dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$	128
7.2.1	Le relevé S_∞ dans $F \times \mathbb{R}$	128
7.2.2	Le produit fibré $\widehat{S_\infty}$ associé à un revêtement fini $\widehat{F}$	131
7.2.3	Une condition suffisante de plongement virtuel	133
7.2.4	Une condition suffisante combinatoire de plongement virtuel	134
7.3	Propriétés d'engouffrement	135
7.3.1	Engouffrement de $\pi_1(S)$ dans $\pi_1(M)$	136
7.3.2	Engouffrement de $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ dans $\pi_1(F)$	136
7.4	Premières expérimentations	137
7.4.1	Revêtements doubles	137
7.4.2	Le cas d'une courbe φ -périodique	138
7.5	Hypothèses cohomologiques	142
7.5.1	Le cas $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	142
7.5.2	Le cas $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $c \cap \varphi^{n-1}(c) = \emptyset$	144

7.1 Relevés et produits fibrés

Dans cette section d'introduction, nous présentons le vocabulaire que nous utiliserons pour décrire les relevés d'une surface coupée-croisée dans un revêtement de M_φ de la forme $\widehat{F} \times \mathbb{R}$, avec $\widehat{F}$ un revêtement fini connexe de F .

7.1.1 Relevés d'applications

On considère X, B, E trois espaces topologiques connexes, $f : X \rightarrow B$ une application continue et $g : E \rightarrow B$ un revêtement.

Définition 7.1.1. Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement connexe. Un *relevé* de f à Y à travers g est la donnée d'une application continue $q : Y \rightarrow E$ telle que le diagramme carré ci-dessous commute, i.e. telle que $g \circ q = f \circ p$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{q} & E \\ p \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Un *relevé* de f à travers g est la donnée d'un triplet (Y, p, q) avec $p : Y \rightarrow X$ un revêtement connexe et $q : Y \rightarrow E$ un relevé de f à Y à travers g .

On munit l'ensemble des relevés d'une application continue $f : X \rightarrow B$ à un revêtement fixé $g : E \rightarrow B$ d'une relation de comparaison. Pour deux relevés (Y, p, q) et (Y', p', q') de f à travers g , on note $(Y, p, q) \leq (Y', p', q')$ s'il existe une application continue $h : Y' \rightarrow Y$ telle que le diagramme ci-dessous commute, i.e. telle que $q \circ h = q'$ et $p \circ h = p'$.

$$\begin{array}{ccccc} Y' & & & & \\ & \searrow^{q'} & & & \\ & & Y & \xrightarrow{q} & E \\ & \searrow^{p'} & \downarrow p & & \downarrow g \\ & & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

$\exists h : Y' \rightarrow Y$ tel que $q \circ h = q'$ et $p \circ h = p'$

On définit alors une relation d'équivalence entre ces relevés. Pour deux relevés (Y, p, q) et (Y', p', q') de f à travers g , on note $(Y, p, q) \sim (Y', p', q')$ si $(Y, p, q) \leq (Y', p', q')$ et $(Y', p', q') \leq (Y, p, q)$.

Définition 7.1.2. Un relevé (Y, p, q) de $f : X \rightarrow B$ à travers $g : E \rightarrow B$ est dit *minimal* si pour tout relevé (Y', p', q') de f à travers g tel que $(Y', p', q') \leq (Y, p, q)$, on a $(Y', p', q') \sim (Y, p, q)$.

7.1.2 Produit fibré

Le produit fibré est une construction catégorique qui permet de construire simultanément tous les relevés minimaux d'une application à travers un revêtement.

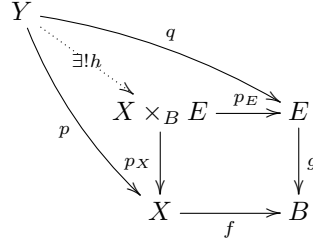
Définition 7.1.3. Le *produit fibré* de l'application continue $f : X \rightarrow B$ et du revêtement $g : E \rightarrow B$ est la donnée de l'ensemble $X \times_B E = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = g(e)\} \subset X \times E$ muni de la topologie induite par celle de $X \times E$ et des deux restrictions $p_X : X \times_B E \rightarrow X$ et $p_E : X \times_B E \rightarrow E$ des projections naturelles $X \times E \rightarrow X$ et $X \times E \rightarrow E$.

$$\begin{array}{ccc} X \times_B E & \xrightarrow{p_E} & E \\ p_X \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Remarque La projection $p_X : X \times_B E \rightarrow X$ est un revêtement, mais l'espace total $X \times_B E$ n'est pas en général connexe.

Propriété universelle

Le produit fibré de deux applications possède la propriété universelle suivante. Si Y est un espace topologique muni de deux applications continues $p : Y \rightarrow X$ et $q : Y \rightarrow E$ telles que $g \circ q = f \circ p$, alors il existe une unique application continue $h : Y \rightarrow X \times_B E$ rendant commutatif le diagramme ci-dessous, i.e. telle que $q = p_E \circ h$ et $p = p_X \circ h$.



On obtient donc avec le vocabulaire du paragraphe précédent les propriétés tautologiques suivantes.

Propriétés

1. Soit (Y, p, q) un relevé de $f : X \rightarrow B$ à travers le revêtement $g : E \rightarrow B$. Alors il existe une composante connexe C du produit fibré $X \times_B E$ de f et g telle que $(C, p_X, p_E) \leq (Y, p, q)$.
2. Soit (Y, p, q) un relevé minimal de $f : X \rightarrow B$ à travers le revêtement $g : E \rightarrow B$. Alors il existe une composante connexe C du produit fibré $X \times_B E$ de f et g telle que $(C, p_X, p_E) \sim (Y, p, q)$.

Les composantes connexes du produit fibré de f et g , munies de leurs projections vers X et E , sont donc exactement les relevés minimaux de f à travers g . Remarquons pour finir que si f est injective, alors ses relevés minimaux sont également injectifs.

Lemme 7.1.4. *Soit $f : X \hookrightarrow B$ une application injective et $g : E \rightarrow B$ un revêtement. Alors pour tout relevé minimal (Y, p, q) de f à travers g , l'application $q : Y \rightarrow E$ est injective.*

Démonstration. On raisonne directement avec le produit fibré. Soient $(x, e), (x', e') \in X \times_B E$ tels que $e = e'$. Alors $g(e) = g(e')$, i.e. $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, $x = x'$ et donc $(x, e) = (x', e')$. La projection $p_E : X \times_B E \hookrightarrow E$ est donc injective. $\square$

7.1.3 Identifier les composantes connexes du produit fibré

On fixe désormais des points base $b_0 \in B$, $x_0 \in X$ et $e_0 \in E$ tels que $f(x_0) = b_0 = g(e_0)$. Alors le point (x_0, e_0) est un point base canonique pour le produit fibré $X \times_B E$ de f et g (et sélectionne donc une composante connexe de $X \times_B E$). Nous souhaitons comprendre les composantes connexes de $X \times_B E$, en les identifiant par les points de la fibre $p_X^{-1}(x_0)$ qu'elles contiennent.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ un lacet basé en b_0 . On considère le relevé $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$ tel que $\bar{\gamma}(0) = e_0$. On note alors $e(\gamma) = \bar{\gamma}(1)$ l'extrémité de ce relevé. Alors le point $(x_0, e(\gamma)) \in X \times E$ appartient à $X \times_B E$ et est donc contenu dans une unique composante connexe de $X \times_B E$, notée $C(\gamma)$.

Propriétés

1. Si $\gamma' : [0, 1] \rightarrow B$ est un lacet basé en b_0 homotope à γ , alors $e(\gamma) = e(\gamma')$, donc $C(\gamma) = C(\gamma')$.
On dispose donc d'une application $\pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(X \times_B E)$ qui à la classe d'homotopie d'un lacet γ de B basé en b_0 associe la composante connexe $C(\gamma)$ de $X \times_B E$.
2. Soit $\gamma \in \pi_1(B, b_0)$ et $\gamma' \in \pi_1(E, e_0)$. Alors $C(g_*(\gamma').\gamma) = C(\gamma)$.
3. Soit $\gamma \in \pi_1(B, b_0)$ et $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Alors $C(\gamma.f_*(\sigma)) = C(\gamma)$.

Plus précisément, on a le résultat suivant.

Lemme 7.1.5. *On a l'équivalence $C(\gamma) = C(\gamma') \iff \gamma' \in g_*(\pi_1(E, e_0)).\gamma.f_*(\pi_1(X, x_0))$.*

Corollaire 7.1.6. *Les relevés minimaux de f à travers g s'identifient aux doubles classes de $\pi_1(B, b_0)$ modulo $g_*(\pi_1(E, e_0))$ à gauche et $f_*(\pi_1(X, x_0))$ à droite.*

7.1.4 Relever les plongements par morceaux

Considérons le cas d'un espace $X = X_1 \cup X_2$ avec X_1 , X_2 et $X_1 \cap X_2$ connexes tel que les restrictions $f|_{X_1} : X_1 \hookrightarrow B$ et $f|_{X_2} : X_2 \hookrightarrow B$ soient des applications injectives. Nous expliquons dans cette situation comment construire les relevés minimaux de f à travers g de proche en proche, à partir de la décomposition de l'application f en plongements par morceaux.

On dispose tout d'abord par définition du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc} X_1 \times_B E & \xhookrightarrow{\quad} & X \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xhookrightarrow{\quad} & X & \longrightarrow & B \end{array}$$

Le choix d'une composante connexe C_1 de $X_1 \times_B E$ (i.e. d'un relevé minimal de X_1) définit donc une composante connexe C de $X \times_B E$ (i.e. un relevé minimal de X) dont on souhaite comprendre la structure. Pour prolonger C au-delà de C_1 , il faut commencer par adjoindre à C_1 les relevés de X_2 qui intersectent C_1 . On a, pour $i \in \{1, 2\}$, les diagrammes commutatifs ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc} (X_1 \cap X_2) \times_B E & \xhookrightarrow{\quad} & X_i \times_B E & \xhookrightarrow{\quad} & X \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_1 \cap X_2 & \xhookrightarrow{\quad} & X_i & \xhookrightarrow{\quad} & X & \longrightarrow & B \end{array}$$

Le choix d'une composante connexe $C_{1,2}$ de $(X_1 \cap X_2) \times_B E$ d'image contenue dans C_1 dans $X_1 \times_B E$ définit donc une unique composante C_2 de $X_2 \times_B E$ telle que $C_1 \cap C_2 = C_{1,2}$. En adjoignant cette composante C_2 à C_1 , on prolonge donc de proche en proche la construction du relevé C .

On peut réaliser cette construction pour chacune des composantes connexes de $(X_1 \cap X_2) \times_B E$ contenues dans C_1 , et alors on adjoint à C_1 une collection C_2^k , $1 \leq k \leq m$ de relevés de X_2 qui chacun intersectent C_1 en une composante connexe de $(X_1 \cap X_2) \times_B E$.

On peut alors reproduire à nouveau ce procédé à partir de chacun des relevés $C_2^k, \dots$. Au final, le relevé C est une union connexe de relevés de X_1 et X_2 qui s'intersectent le long de relevés de $X_1 \cap X_2$.

Remarque Cette description s'étend sans difficultés au cas d'une intersection $X_1 \cap X_2$ disconnexe, ainsi qu'au cas d'une décomposition de X de la forme $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ avec $f|_{X_i} : X_i \hookrightarrow B$ injectif pour tout $1 \leq i \leq n$.

7.2 Les relevés de S dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$

Dans cette section, nous expliquons notre vision des relevés (minimaux) d'une surface coupée-croisée connexe $S = S(c, \varphi)$ d'une suspension M_φ dans un revêtement infini de la forme $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ où $\widehat{F}$ est un revêtement fini connexe de F .

Rappelons qu'une surface coupée-croisée est la donnée d'une immersion qui est naturellement décomposée en plongements par morceaux via les sous-espaces F_c , A et A' de M_φ (voir paragraphe 4.1.1). Nous allons donc expliquer comment voir les relevés de S dans un revêtement de M_φ à l'aide des relevés des plongements $F_c \hookrightarrow M_\varphi$, $A \hookrightarrow M_\varphi$ et $A' \hookrightarrow M_\varphi$. Les trois intersections de ces sous-parties sont $A \cap A' = \emptyset^1$, $F_c \cap A = \varphi(c^-) \sqcup c^+$ et $F_c \cap A' = \varphi(c^+) \sqcup c^-$.

7.2.1 Le relevé S_∞ dans $F \times \mathbb{R}$

Nous décrivons dans un premier temps l'unique relevé de la surface coupée-croisée S dans $F \times \mathbb{R}$. On considère pour cela le produit fibré $S_\infty = S \times_{M_\varphi} (F \times \mathbb{R})$ muni de la projection $\iota_\infty : S_\infty \longrightarrow F \times \mathbb{R}$ qui est à nouveau une immersion partout transverse au flot.

$$\begin{array}{ccc} S_\infty & \xrightarrow{\iota_\infty} & F \times \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \pi_\infty \\ S & \xrightarrow{\iota} & M_\varphi \end{array}$$

¹attention, ici les anneaux A et A' sont considérés à la source dans la surface S et sont donc disjoints, contrairement à ce qui se passe dans la suspension M_φ .

Lemme 7.2.1. *La surface S_∞ est connexe et s'identifie au revêtement $\tilde{S}/(\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$ de S .*

Démonstration. Par construction des surfaces coupées-croisées, le morphisme $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ restreint à la source au sous-groupe de surface $\pi_1(S)$ est surjectif. Ceci implique que $\pi_1(S)$ contient au moins un élément γ de $\pi_1(M)$ dont l'image dans $\mathbb{Z}$ est égale à 1. En particulier, $\pi_1(M) = \pi_1(F) \cdot \langle \gamma \rangle$, et donc $\pi_1(M) = \pi_1(F) \cdot \pi_1(S)$. Mais cette dernière propriété signifie qu'il existe une unique composante connexe du produit fibré $S \times_{M_\varphi} (F \times \mathbb{R})$ (d'après le corollaire 7.1.6 car nous avons supposé que S est connexe). De plus, la projection $S_\infty \rightarrow S$ s'identifie par construction au revêtement de S associé au noyau du morphisme $\pi_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$, qui est exactement $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$. $\square$

Remarque Le sous-groupe $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ étant un sous-groupe normal de $\pi_1(S)$, ce revêtement $S_\infty \rightarrow S$ est galoisien, de groupe d'automorphisme isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Nous utilisons maintenant les explications du paragraphe précédent concernant le relèvement des immersions qui sont des plongements par morceaux pour présenter une construction graphique de la surface S_∞ immergée dans M_φ . Nous considérons les relevés (minimaux) de F_c , A et A' , que l'on voit plongés dans $F \times \mathbb{R}$ et nous expliquons comment connecter convenablement ces relevés pour obtenir la surface S_∞ , vue immergée dans $F \times \mathbb{R}$.

Relèvement par morceaux de S dans $F \times \mathbb{R}$

1. Un relevé de la fibre coupée F_c dans $F \times \mathbb{R}$ est une partie de la forme $\varphi^n(F_c) \subset F \times \{n\}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.
2. Un relevé de l'anneau A dans $F \times \mathbb{R}$ est un anneau compact dont l'intérieur est contenu dans une tranche $F \times]n, n+1[$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, et dont les composantes de bord sont alors les courbes $\varphi^{n+1}(c^-) \times \{n\} \subset F \times \{n\}$ et $\varphi^{n+1}(c^+) \times \{n+1\} \subset F \times \{n+1\}$.
3. Un relevé de l'anneau A' dans $F \times \mathbb{R}$ est un anneau compact dont l'intérieur est contenu dans une tranche $F \times]n, n+1[$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, et dont les composantes de bord sont alors les courbes $\varphi^{n+1}(c^+) \times \{n\} \subset F \times \{n\}$ et $\varphi^{n+1}(c^-) \times \{n+1\} \subset F \times \{n+1\}$.

Structure de S_∞ dans les tranches $F \times [n, n+1]$

La figure 4.1.2 représente le croisement des uniques relevés de A et A' dans la tranche $F \times [0, 1]$. En appliquant, pour $n \in \mathbb{Z}$, l'homéomorphisme $(x, t) \mapsto (\varphi^n(x), t + n)$, on obtient alors les uniques relevés de A et de A' contenus dans $F \times [n, n+1]$, représentés sur la figure suivante.

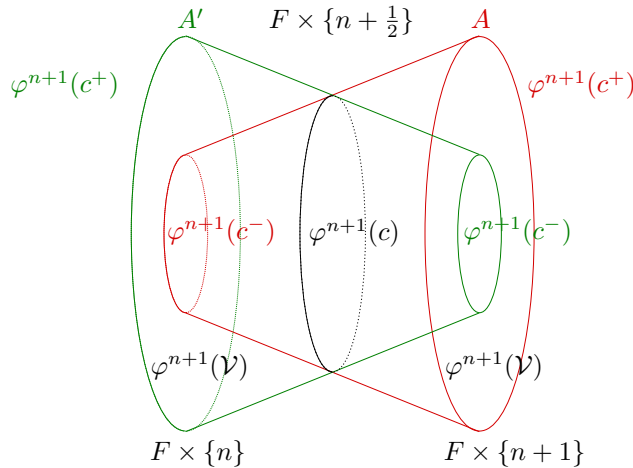


FIGURE 7.2.1 – L'image réciproque de S dans la tranche $F \times [n, n+1]$.

Les relevés de A et A' contenus dans la tranche $F \times [n, n+1]$ sont donc en particulier contenus dans $\varphi^{n+1}(\mathcal{V}) \times [n, n+1]$ et s'intersectent le long de la courbe fermée simple $\varphi^{n+1}(c) \times \{n + \frac{1}{2}\} \subset F \times \{n + \frac{1}{2}\}$.

Notations Pour alléger les notations, nous posons $F_n = F \times \{n\} \subset F \times \mathbb{R}$, $F_c^n = \varphi^n(F_c)$, $\mathcal{V}_n = \varphi^n(\mathcal{V})$, puis $c_n = \varphi^n(c)$ et enfin $c_n^\pm = \varphi^n(c^\pm)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Représentation graphique de la surface immergée S_∞

Nous commençons par représenter les sous-surfaces à bord $\varphi^n(F_c) \times \{n\}$ de $F \times \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

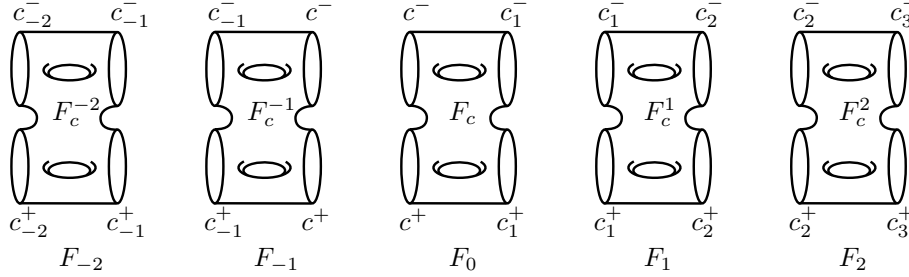


FIGURE 7.2.2 – L'image réciproque de la fibre coupée F_c dans $F \times \mathbb{R}$.

Remarque Les surfaces à bord $\varphi^n(F_c)$ sont dessinées de la même manière car elles sont toutes homéomorphes, mais il faut garder à l'esprit qu'elles n'occupent pas du tout le même sous-ensemble de chacune des copies $F \times \{n\}$ de la fibre, contrairement à ce que laisse penser la figure ci-dessus.

Chaque relevé de la fibre coupée doit alors être recollé à des relevés de A et A' le long de chacune de ses quatre composantes de bord, suivant le modèle de la figure 7.2.1.

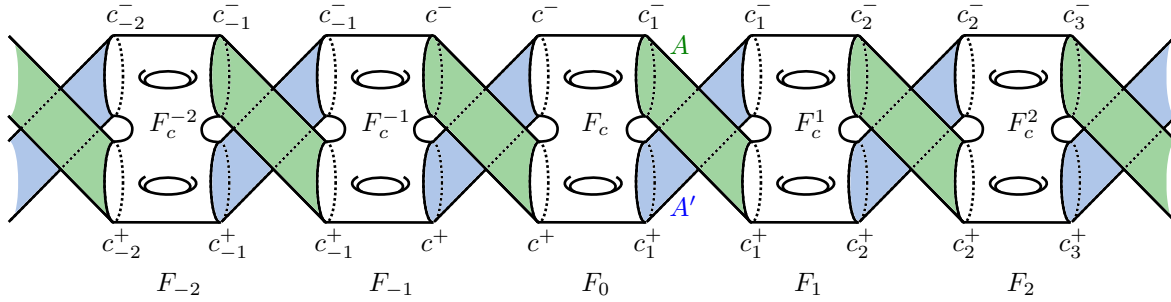


FIGURE 7.2.3 – L'image réciproque de (l'image de) la surface coupée-croisée S dans $F \times \mathbb{R}$.

Remarque Nous avons par commodité choisi de représenter les relevés de A et A' de manière disjointe, mais il faut plutôt avoir comme modèle d'une tranche $F \times]n, n+1[$ le schéma de la figure 7.2.1.

Souvenons-nous que nous souhaitons savoir si S est virtuellement plongée dans M_φ . Autrement dit, on cherche un revêtement fini $\widehat{M}$ de M tel qu'il existe une composante connexe du produit fibré $S \times_{M_\varphi} \widehat{M}$ qui soit plongée dans $\widehat{M}$. Nous venons par la construction graphique de S_∞ de constater le résultat suivant.

Lemme 7.2.2 (Pas de plongement virtuel dans les revêtements cycliques). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le produit fibré $S \times_{M_\varphi} M_{\varphi^n}$ est connexe et le relevé minimal de S à $\widehat{M}$ n'est pas plongé.*

Démonstration. Comme $\pi_1(F) \leq \pi_1(M_{\varphi^n})$ et que $\pi_1(M) = \pi_1(F) \cdot \pi_1(S)$, on a également l'égalité $\pi_1(M) = \pi_1(M_{\varphi^n}) \cdot \pi_1(S)$ et donc $S \times_{M_\varphi} M_{\varphi^n}$ est connexe. L'assertion suivante est une généralité sur les produits fibrés. Si $f : X \rightarrow B$ est non-injective et que $X \times_B E$ est connexe, considérons $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$. Choisissons alors $e \in E$ tel que $g(e) = f(x) = f(x')$. Alors $(x, e) \in X \times_B E$ et $(x', e) \in X \times_B E$ et $p_E(x, e) = p_E(x', e) = e$. Donc p_E n'est pas injective et l'unique relevé minimal de f à travers g n'est donc pas un plongement. $\square$

Il est donc nécessaire de considérer des revêtements fini $\widehat{M}$ de M avec $\pi_1(\widehat{M}) \cap \pi_1(F) \neq \pi_1(F)$, i.e. faisant intervenir un revêtement fini $\widehat{F}$ de F non-trivial.

7.2.2 Le produit fibré $\widehat{S}_\infty$ associé à un revêtement fini $\widehat{F}$

Nous considérons maintenant un revêtement fini connexe $\widehat{\pi} : \widehat{F} \rightarrow F$ de F non-trivial et souhaitons décrire les relevés minimaux de S dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$. Nous considérons le produit fibré $\widehat{S}_\infty = S \times_{M_\varphi} (\widehat{F} \times \mathbb{R})$ de l'immersion ι et du revêtement $\pi_\infty \circ (\widehat{\pi} \times \text{id}_\mathbb{R})$, aussi égal au produit fibré $S_\infty \times_{(F \times \mathbb{R})} (\widehat{F} \times \mathbb{R})$ de l'immersion ι_∞ et du revêtement fini $\widehat{\pi} \times \text{id}_\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{S}_\infty & \xrightarrow{\iota_\infty} & \widehat{F} \times \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \widehat{\pi} \times \text{id}_\mathbb{R} \\ S_\infty & \xrightarrow{\iota_\infty} & F \times \mathbb{R} \end{array}$$

Nous souhaitons être en mesure de comprendre si l'une des composantes connexes de $\widehat{S}_\infty$ est plongée dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ (ce qui nécessite que la surface $\widehat{S}_\infty$ soit disconnexe car ι n'est pas injective). Pour ce faire, nous allons commencer par décrire les composantes connexes de la surface $\widehat{S}_\infty$ comme union de relevés convenablement connectés de F_c , A et A' à $\widehat{F} \times \mathbb{R}$.

Partitions de $\widehat{F}$

La description de l'immersion $\iota_\infty : S_\infty \rightarrow F \times \mathbb{R}$ faisait naturellement intervenir les partitions des surfaces $F \times \{n\} \subset F \times \mathbb{R}$ de la forme $F \times \{n\} = \varphi^n(F_c) \sqcup \varphi^n(\mathcal{V}) \sqcup \varphi^{n+1}(\mathcal{V})$, soit encore, en utilisant les notations synthétiques, $F_n = F_c^n \sqcup \mathcal{V}_n \sqcup \mathcal{V}_{n+1}$.

Nous noterons dorénavant $\widehat{F}_n = \widehat{F} \times \{n\} \subset \widehat{F} \times \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Pour comprendre l'image réciproque de S_∞ dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$, nous allons naturellement utiliser les partitions $\widehat{F}_n = \widehat{\pi}^{-1}(F_c^n) \sqcup \widehat{\pi}^{-1}(\mathcal{V}_n) \sqcup \widehat{\pi}^{-1}(\mathcal{V}_{n+1})$. Autrement dit, la surface $\widehat{F}_n$ est vue comme réunion des relevés de F_c^n et des anneaux $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{V}_{n+1}$.

Relèvement par morceaux de S_∞ dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$

Nous pouvons alors énoncer des propriétés analogues à celles du paragraphe précédent. Le but est de reproduire la description de l'immersion $S_\infty \hookrightarrow F \times \mathbb{R}$ à l'aide de la décomposition de S_∞ sous forme de réunion disjointe $\bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} F_c^n$ convenablement connectée à l'aide de copies de A et A' .

Tout d'abord, les relevés des surfaces à bord connexes $F_c^n \subset F_n$ dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ s'identifient aux composantes connexes de $\widehat{\pi}^{-1}(F_c^n) \subset \widehat{F}_n$. La réunion de tous ces relevés forme l'intersection de $\widehat{\iota}_\infty(\widehat{S}_\infty)$ avec $\widehat{F} \times \mathbb{Z}$ dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$. Il faut alors expliquer comment connecter convenablement un relevé de F_c^n à un relevé de F_c^{n+1} par un relevé de A ou A' dans une tranche $F \times [n, n+1]$.

Fixons donc X un relevé de F_c^n dans $\widehat{F}_n$. Le long de chaque composante de bord de X , il faut attacher un relevé de A ou A' qui connectera X à un relevé de $F_c^{n \pm 1}$ dans $\widehat{F}_{n \pm 1}$.

Relèvement des anneaux A et A' dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$

1. Soit ℓ une composante de bord de X . Alors il existe un unique relevé Y de $\mathcal{V}_n$ ou $\mathcal{V}_{n+1}$ dans $\widehat{F}_n$ tel que $\ell \subset \overline{Y}$. Notons alors ℓ' la composante de bord de Y distincte de ℓ . Cette courbe ℓ' est alors une composante de bord d'un unique relevé de F_c^n dans $\widehat{F}_n$, qui est en général distinct de X .

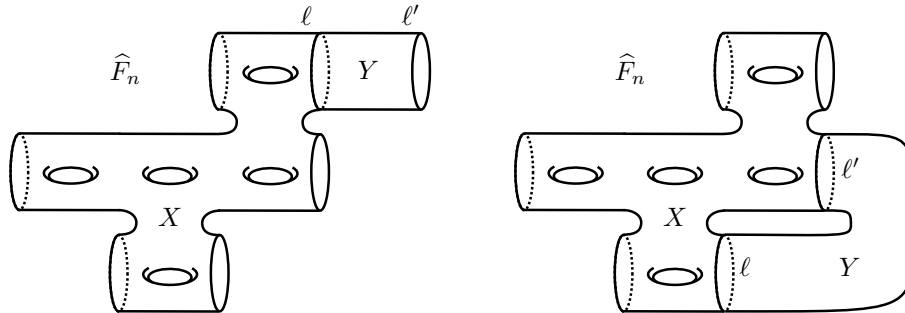


FIGURE 7.2.4 – Prolongement de X au-delà de ℓ par un unique anneau relevant $\mathcal{V}_n$ ou $\mathcal{V}_{n+1}$. Dans l'exemple de gauche, $\ell' \cap X = \emptyset$, tandis que dans l'exemple de droite $\ell' \subset X$.

2. L'anneau Y est alors une partie commune aux partitions de $\widehat{F}_n$ et $\widehat{F}_{n+1}$ présentées ci-dessus (suivant que Y relève $\mathcal{V}_n$ ou $\mathcal{V}_{n+1}$). En particulier, la courbe $\ell' \times \{n \pm 1\}$ est une composante de bord d'un relevé X' de $F_c^{n \pm 1}$ dans $\widehat{F}_{n \pm 1}$.

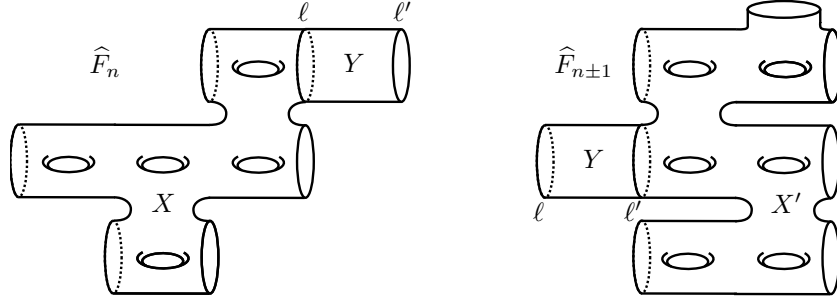


FIGURE 7.2.5 – L'anneau Y est commun aux décompositions de $\widehat{F}_n$ et $\widehat{F}_{n+1}$.

3. Il existe alors un unique relevé Z de A ou A' dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ contenant ℓ . De plus, on a alors $Z \subset Y \times [n-1, n]$ ou bien $Z \subset Y \times [n, n+1]$ et les composantes de bord de Z sont les courbes $\ell \times \{n\} \subset \widehat{F}_n$ et $\ell' \times \{n \pm 1\} \subset \widehat{F}_{n \pm 1}$.

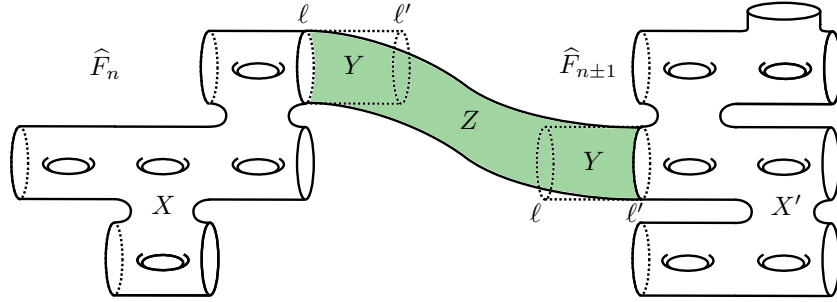


FIGURE 7.2.6 – Un anneau de $\widehat{S}_\infty$ joignant un relevé de F_c^n dans $\widehat{F}_n$ à un relevé de $F_c^{n \pm 1}$ dans $\widehat{F}_{n \pm 1}$ et relevant l'un des anneaux A ou A' .

On comprend donc localement comment prolonger une composante connexe de $\widehat{S}_\infty$ au-delà d'un relevé de F_c par adjonction de relevés de A et A' . Il ne semble toutefois pas particulièrement aisé de déterminer à ce stade si une composante connexe de $\widehat{S}_\infty$ est plongée ou non dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$.

Appariement des relevés de A et A'

Pour terminer ce paragraphe, nous proposons de reformuler la description de la surface $\widehat{S}_\infty$ présentée ci-dessus de manière à mettre en évidence le fait que les relevés de A et A' dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ viennent par paires qui s'auto-intersectent.

Considérons un relevé Y de $\mathcal{V}_{n+1}$ dans $\widehat{F}_n$. S'inspirant de la description de S_∞ dans $F \times \mathbb{R}$, on considère le produit $\overline{Y} \times [n, n+1]$, dans lequel existe un unique relevé Z de A et un unique relevé Z' de A' , qui se croisent toujours suivant le même modèle.

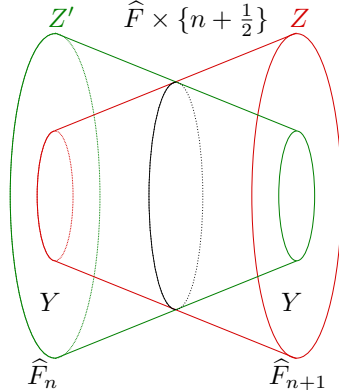


FIGURE 7.2.7 – Croisement de deux anneaux relevant A et A' dans une partie de la forme $\overline{Y} \times [n, n+1]$.

L'anneau Z (resp. Z') relie alors un relevé X_1 (resp. X_2) de F_c^n dans $\widehat{F}_n$ à un relevé X'_1 (resp. X'_2) de F_c^{n+1} dans $\widehat{F}_{n+1}$. L'anneau Y de $\widehat{F}_n$ relie alors X_1 et X_2 , tandis que l'anneau Y de $\widehat{F}_{n+1}$ relie X'_1 et X'_2 . On peut représenter ces informations par le diagramme de croisement ci-dessous.

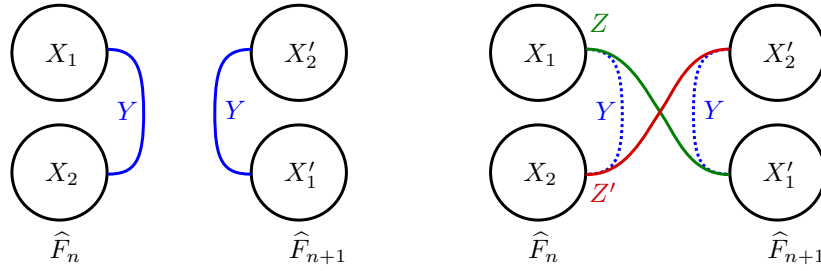


FIGURE 7.2.8 – Les connexions de la surface $\widehat{S}_\infty$ dans une partie $\overline{Y} \times [n, n+1]$.

Ce qui est plus complexe dans la description de $\widehat{S}_\infty$ par rapport à celle de S_∞ est essentiellement dû au fait qu'il n'y a pas de raison a priori pour que les composantes X_1 et X_2 soient égales, de même que les composantes X'_1 et X'_2 et même lorsque $X_1 = X_2$, il est possible que $X'_1 \neq X'_2$.

Ce sont toutefois ces propriétés plus compliquées à gérer globalement qui peuvent permettre à la surface $\widehat{S}_\infty$ d'avoir une composante connexe plongée dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$, mais il est nécessaire pour cela que $\widehat{S}_\infty$ soit disconnexe. Une première difficulté de taille consiste donc à trouver un revêtement fini connexe $\widehat{F}$ de F tel que la surface $\widehat{S}_\infty$ que nous venons de décrire soit disconnexe.

Remarque Considérons la seconde projection $\widehat{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Remarquons que si X est un relevé de F_c dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$, alors X est adhérent à au moins un relevé de $\mathcal{V}$ ainsi qu'à un relevé de $\varphi(\mathcal{V})$ dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$. Cette remarque permet d'affirmer que pour toute composante connexe C de $\widehat{S}_\infty$, la composée $C \rightarrow \widehat{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective. Autrement dit, un relevé de S dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ visite toutes les altitudes possibles.

7.2.3 Une condition suffisante de plongement virtuel

Nous démontrons dans ce paragraphe que s'il existe un revêtement fini connexe $\widehat{F}$ de F pour lequel le produit fibré $\widehat{S}_\infty$ est disconnexe, alors S est automatiquement virtuellement plongée dans M_φ .

Proposition 7.2.3 (Condition suffisante de plongement virtuel des surfaces coupées-croisées).

Supposons qu'il existe un revêtement fini connexe $\widehat{\pi} : \widehat{F} \rightarrow F$ de la fibre tel que le produit fibré $\widehat{S}_\infty = S_\infty \times_{(F \times \mathbb{R})} (\widehat{F} \times \mathbb{R})$ de l'immersion ι_∞ et du revêtement $\widehat{\pi} \times \text{id}_\mathbb{R}$ soit disconnexe.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{S}_\infty & \xrightarrow{\quad} & \widehat{F} \times \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \widehat{\pi} \times \text{id}_\mathbb{R} \\ S_\infty & \xrightarrow[\iota_\infty]{} & F \times \mathbb{R} \end{array}$$

Alors S est virtuellement plongée dans M_φ .

Nous utiliserons les lemmes suivants pour démontrer cette proposition.

Lemme 7.2.4. *Soit $f : X \rightarrow B$ une application continue et $g : E \rightarrow B$ et $g' : E' \rightarrow B$ deux revêtements (connexes). Si $X \times_B E$ est disconnexe, alors $X \times_B E'$ est disconnexe.*

Démonstration. On suppose réalisé un choix cohérent de points base pour X , B , E et E' . L'hypothèse signifie que $\pi_1(B) \neq \pi_1(E) \cdot \pi_1(X)$. Comme de plus $\pi_1(E') \leq \pi_1(E)$, on a également $\pi_1(B) \neq \pi_1(E') \cdot \pi_1(X)$ et donc $X \times_B E'$ est disconnexe. $\square$

Lemme 7.2.5. *Soit $\gamma : E \rightarrow E$ un automorphisme du revêtement $g : E \rightarrow B$. Alors γ agit sur le produit fibré $X \times_B E$ par la formule $\gamma.(x, e) = (x, \gamma(e))$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que si $(x, e) \in X \times_B E$, alors $(x, \gamma(e)) \in X \times_B E$. Or comme $g \circ \gamma = g$, on a $g \circ \gamma(e) = g(e) = f(x)$ donc $(x, \gamma(e)) \in X \times_B E$. $\square$

Démonstration de la proposition 7.2.3. On démontre que quitte à prendre un revêtement fini de $\widehat{F}$, on peut supposer que toutes les composantes connexes de $\widehat{S}_\infty$ sont plongées dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$, puis on redescend dans un revêtement fini de M_φ .

Étape 1 : Le sous-groupe $\pi_1(\widehat{F})$ étant d'indice fini dans $\pi_1(F)$, il contient un sous-groupe caractéristique d'indice fini de $\pi_1(F)$. Le lemme 7.2.4 permet donc d'affirmer que l'on peut supposer de plus que $\widehat{F}$ est un revêtement caractéristique.

Étape 2 : L'existence de plusieurs composantes connexes de $\widehat{S}_\infty$ permet d'affirmer qu'il existe un relevé Y de $\mathcal{V}$ ou $\varphi(\mathcal{V})$ dans $\widehat{F}_0$ tel que les relevés Z et Z' de A et A' dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ contenus dans $\overline{Y} \times [-1, 0]$ ou dans $\overline{Y} \times [0, 1]$ proviennent de deux composantes connexes distinctes de $\widehat{S}_\infty$.

En effet, dans le cas contraire, pour tout relevé Y de $\mathcal{V}$ dans $\widehat{F}_0$, les deux relevés de A et A' contenus dans $\overline{Y} \times [-1, 0]$ proviennent de la même composante connexe de $\widehat{S}_\infty$ et pour tout relevé Y' de $\varphi(\mathcal{V})$ dans $\widehat{F}_0$, les deux relevés de A et A' contenus dans $\overline{Y'} \times [0, 1]$ proviennent de la même composante connexe de $\widehat{S}_\infty$. Or tous les relevés de F_c dans $\widehat{F}_0$ sont connectés par une suite de relevés de $\mathcal{V}$ et $\varphi(\mathcal{V})$ dans $\widehat{F}_0$ (car $\widehat{F}$ est connexe). Les arguments de la construction de proche en proche des relevés de S à $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ prouvent alors qu'une composante connexe de $\widehat{S}_\infty$ contient tous les relevés de F_c dans $\widehat{F}_0$, ce qui implique que $\widehat{S}_\infty$ est connexe. Contradiction.

Étape 3 : On suppose qu'il existe un relevé Y de $\varphi(\mathcal{V})$ dans $\widehat{F}_0$ tel que les relevés Z et Z' de A et A' dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ contenus dans $\overline{Y} \times [0, 1]$ proviennent de deux composantes connexes distinctes de $\widehat{S}_\infty$.

Le groupe d'automorphismes du revêtement galoisien $\widehat{\pi} \times \text{id}_{\mathbb{R}}$ agissant transitivement sur l'ensemble des relevés de $\varphi(\mathcal{V})$ dans $\widehat{F}_0$, on peut affirmer que pour tout relevé Y' de $\varphi(\mathcal{V})$ dans $\widehat{F}_0$, les relevés Z et Z' de A et A' contenus dans $\overline{Y'} \times [0, 1]$ ne proviennent pas de la même composante connexe de $\widehat{S}_\infty$.

Étape 4 : Comme $\widehat{F}$ est un revêtement caractéristique de F , il existe un relevé $\widehat{\varphi}$ de φ à $\widehat{F}$ et nous pouvons considérer la transformation $\theta : (\widehat{x}, t) \mapsto (\widehat{\varphi}(\widehat{x}), t + 1)$ de $\widehat{F} \times \mathbb{R}$. En appliquant la transformation θ^n à la situation décrite par l'étape précédente, on obtient que pour tout relevé Y de $\mathcal{V}_n$ dans $\widehat{F}_n$, les deux relevés Z et Z' de A et A' contenus dans $\overline{Y} \times [n, n + 1]$ ne proviennent pas de la même composante connexe de $\widehat{S}_\infty$.

Au final, nous avons démontré que si $\widehat{F}$ est un revêtement galoisien de F auquel φ se relève et pour lequel $\widehat{S}_\infty$ est disconnexe, alors les composantes connexes de $\widehat{S}_\infty$ sont toutes plongées dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$.

Étape 5 : On considère alors une composante connexe C de $\widehat{S}_\infty$. Alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\theta^k(C) = C$ (car $\widehat{S}_\infty$ possède un nombre fini de composantes connexes). L'image de C dans le quotient $(\widehat{F} \times \mathbb{R}) / \langle \theta^k \rangle \simeq M_{\widehat{\varphi}^k}$ est alors une surface plongée incompressible relevant la surface coupée-croisée S . Donc S est virtuellement plongée dans M_φ . $\square$

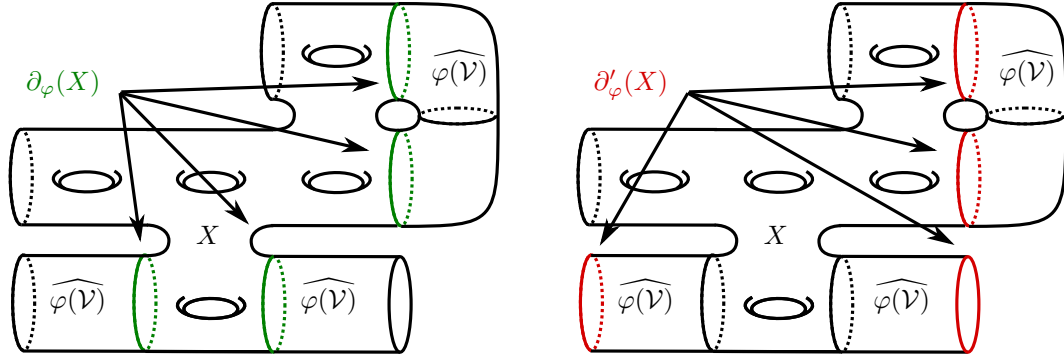
Corollaire 7.2.6. *La surface coupée-croisée connexe S est virtuellement plongée dans M_φ si, et seulement si, il existe un sous-groupe d'indice fini $\Sigma \leq \pi_1(F)$ tel que $\pi_1(F) \neq \Sigma \cdot (\pi_1(S) \cap \pi_1(F))$.*

7.2.4 Une condition suffisante combinatoire de plongement virtuel

Nous allons maintenant proposer une condition suffisante sur un revêtement fini connexe $\widehat{F}$ de F pour que la surface $\widehat{S}_\infty$ associée soit disconnexe. Cette condition fait intervenir la partie commune des deux décompositions $\widehat{F} = \widehat{\pi}^{-1}(F_c) \sqcup \widehat{\pi}^{-1}(\mathcal{V}) \sqcup \widehat{\pi}^{-1}(\varphi(V))$ et $\widehat{F} = \widehat{\pi}^{-1}(\varphi(F_c)) \sqcup \widehat{\pi}^{-1}(\varphi(V)) \sqcup \widehat{\pi}^{-1}(\varphi^2(V))$.

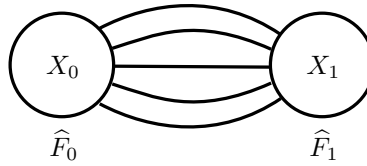
Notations Soit $\widehat{F}$ un revêtement fini connexe de F et X un relevé de F_c ou de $\varphi(F_c)$ à $\widehat{F}$.

1. On note $\partial_\varphi(X)$ la réunion des composantes de bord de X relevant $\varphi(c^+)$ ou $\varphi(c^-)$.
2. Pour chaque composante de bord ℓ de X relevant $\varphi(c^+)$ ou $\varphi(c^-)$, on note $Y(X, \ell)$ l'unique relevé de $\varphi(\mathcal{V})$ à $\widehat{F}$ tel que $\ell \subset \overline{Y(X, \ell)}$, puis $\ell'(Y(X, \ell))$ la composante de bord de $Y(X, \ell)$ distincte de ℓ .
3. On note alors $\partial'_\varphi(X) = \bigcup \ell'(Y(X, \ell))$, la réunion étant prise sur l'ensemble des composantes de bord ℓ de X relevant $\varphi(c^+)$ ou $\varphi(c^-)$ (voir figure 7.2.9).

FIGURE 7.2.9 – Les familles de courbes $\partial_\varphi(X)$ et $\partial'_\varphi(X)$ associées à un relevé X de F_c ou $\varphi(F_c)$.

Proposition 7.2.7. Soit $\hat{\pi} : \hat{F} \rightarrow F$ un revêtement fini connexe de F tel que $\hat{\pi}^{-1}(F_c)$ soit disconnexe. On suppose qu'il existe un relevé X_0 de F_c à $\hat{F}$ et un relevé X_1 de $\varphi(F_c)$ à $\hat{F}$ tels que $\partial'_\varphi(X_0) = \partial_\varphi(X_1)$. Si de plus il existe un relevé $\hat{\varphi}$ de φ à $\hat{F}$ tel que $\hat{\varphi}(X_0) = X_1$, alors la surface $\widehat{S}_\infty$ est disconnexe.

Démonstration. Nous considérons la composante connexe de $\widehat{S}_\infty$ contenant le relevé $X_0 \subset \hat{F}_0$ de F_c à $\hat{F} \times \mathbb{R}$. Définissons alors une surface à bord S' obtenue en adjoignant à X_0 les relevés de A ou A' contenus dans $\hat{F} \times [0, 1]$ et qui intersectent X_0 . Alors le bord de S' intersecte $\hat{F}_1$ exactement selon $\partial'_\varphi(X_1) \subset \hat{F}_1$.

FIGURE 7.2.10 – Un relevé X_0 de F_c bien connecté à un relevé X_1 de $\varphi(F_c)$. Les relevés de A ou A' contenus dans $\hat{F} \times [0, 1]$ et adhérents à $X_0 \subset \hat{F}_0$ sont exactement les relevés de A ou A' contenus dans $\hat{F} \times [0, 1]$ et adhérents à $X_1 \subset \hat{F}_1$.

Notons alors $\theta : (\hat{x}, t) \mapsto (\hat{\varphi}(\hat{x}), t + 1)$ la transformation de $\hat{F} \times \mathbb{R}$ naturellement définie par $\hat{\varphi}$. Alors $\theta^{-1}(\partial'_\varphi(X_1))$ coïncide avec la réunion des composantes de bord de X qui relèvent c^+ ou c^- . En conséquence, (l'image de) la composante connexe de $\widehat{S}_\infty$ contenant $X_0 \subset \hat{F}_0$ est égale à $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \theta^n(S')$. En particulier son intersection avec $\hat{F}_0$ est égale à X_0 . Comme $\hat{\pi}^{-1}(F_c)$ est disconnexe, le résultat suit. $\square$

Remarque L'image de S' dans le quotient $M_\varphi = (\hat{F} \times \mathbb{R}) / \langle \theta \rangle$ est une surface (sans bord) compacte relevant S dont l'intersection avec $\hat{F}$ est égale à X_0 . Cette surface est plongée dans M_φ si, et seulement si, la condition $\partial_\varphi(X_0) \cap \partial'_\varphi(X_0) = \emptyset$ est de plus vérifiée.

7.3 Propriétés d'engouffrement

Pour démontrer que S est virtuellement plongée dans M_φ , nous savons qu'il suffit de démontrer que le sous-groupe de surface $\pi_1(S)$ est séparable dans $\pi_1(M)$. À ce stade, il n'est cependant même pas clair que l'on puisse trouver un sous-groupe propre d'indice fini $\Gamma \leq \pi_1(M)$ tel que $\pi_1(S) \leq \Gamma$. Nous allons cependant démontrer que si un tel sous-groupe existe, alors S est virtuellement plongée dans M_φ .

Définition 7.3.1. Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe de G . On dit que H est *engouffré* dans G s'il existe un sous-groupe propre et d'indice fini $\Gamma \leq G$ tel que $H \leq \Gamma$.

Cette notion d'engouffrement a été introduite par D. Long (voir [Lon88], on pourra également consulter [Lon87]) pour mettre en évidence le fait qu'une des difficultés majeures rencontrées pour établir qu'un sous-groupe H est séparable dans un groupe G réside dans le fait que l'on ne dispose même pas en général ne serait-ce que d'un seul sous-groupe propre d'indice fini de G contenant H .

G. Niblo et D. Wise montrent par exemple qu'il existe une 3-variété de Haken (non-hyperbolique) dont le groupe fondamental possède un sous-groupe de type fini non-engouffré, en particulier non-séparable (voir [NW98]).

À l'inverse, D. Long démontre que la propriété d'engouffrement peut parfois entraîner des résultats de séparabilité. Par exemple, il démontre que si M est une 3-variété hyperbolique compacte telle que tout sous-groupe de type fini $H \leq \pi_1(M)$ pour lequel $\Lambda(H) \neq \partial_\infty \widehat{M}$ est engouffré dans $\pi_1(M)$, alors tous les sous-groupes géométriquement finis de $\pi_1(M)$ sont séparables dans $\pi_1(M)$.

Une autre source d'intérêt portant sur cette propriété d'engouffrement est liée à la question de la résiduelle finitude des groupes hyperboliques. I. Kapovich et D. Wise démontrent par exemple que si les sous-groupes triviaux de tous les groupes hyperboliques sont engouffrés, alors les groupes hyperboliques sont résiduellement finis, i.e. leurs sous-groupes triviaux sont séparables (voir [KW00]).

7.3.1 Engouffrement de $\pi_1(S)$ dans $\pi_1(M)$

Nous démontrons dans ce paragraphe que l'engouffrement de $\pi_1(S)$ dans $\pi_1(M)$ suffit à garantir que S est virtuellement plongée dans M_φ . Cette assertion est à mettre en regard de la localisation de l'auto-intersection d'une surface coupée-croisée le long d'une seule courbe fermée simple de points doubles.

Proposition 7.3.2 (L'engouffrement de $\pi_1(S)$ dans $\pi_1(M)$ suffit). *Si le sous-groupe $\pi_1(S)$ est engouffré dans $\pi_1(M)$, alors la surface coupée-croisée S est virtuellement plongée dans M_φ .*

Démonstration. Soit $\Gamma \leq \pi_1(M)$ un sous-groupe propre d'indice fini de $\pi_1(M)$ tel que $\pi_1(S) \leq \Gamma$ et $\widehat{M} = \widehat{M}/\Gamma$. On considère le produit fibré $\widehat{S} = S \times_{M_\varphi} \widehat{M}$. Comme $\pi_1(\widehat{M}).\pi_1(S) = \pi_1(\widehat{M}) \neq \pi_1(M)$, ce produit fibré est disconnexe.

Écrivons alors que $\widehat{M}$ est la suspension² d'un relevé $\widehat{\varphi}$ de φ à un revêtement fini $\widehat{F}$ de F . Alors le lemme 7.2.4 garantit que le produit fibré $\widehat{S}_\infty = S \times_{M_\varphi} (\widehat{F} \times \mathbb{R})$ revêtant $\widehat{S}$ est disconnexe. La proposition 7.2.3 permet donc de conclure. $\square$

7.3.2 Engouffrement de $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ dans $\pi_1(F)$

Nous démontrons dans ce paragraphe que l'engouffrement de l'intersection $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ dans le groupe fondamental de la fibre est également une condition suffisante de plongement virtuel pour les surfaces coupées-croisées.

Proposition 7.3.3. *Si le sous-groupe $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ est engouffré dans $\pi_1(F)$, alors il existe un revêtement fini connexe $\widehat{F}$ de F tel que le produit fibré $\widehat{S}_\infty = S_\infty \times_{(F \times \mathbb{R})} (\widehat{F} \times \mathbb{R})$ soit disconnexe.*

Démonstration. Soit $\Sigma \leq \pi_1(F)$ un sous-groupe propre d'indice fini tel que $\pi_1(S) \cap \pi_1(F) \leq \Sigma$. Alors $\Sigma.(\pi_1(S) \cap \pi_1(F)) = \Sigma \neq \pi_1(F)$. Le revêtement fini $\widehat{F} = \widetilde{F}/\Sigma$ convient donc. $\square$

Corollaire 7.3.4 (L'engouffrement de $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ dans $\pi_1(F)$ suffit). *Si le sous-groupe $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ est engouffré dans $\pi_1(F)$, alors S est virtuellement plongée dans M_φ .*

Remarques

1. Le théorème de P. Scott sur la séparabilité locale des groupes de surface permet en particulier d'affirmer que les sous-groupes de type fini de $\pi_1(F)$ sont engouffrés dans $\pi_1(F)$, mais ce résultat ne s'applique malheureusement pas au cas du sous-groupe de type infini $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$.

Le corollaire 7.3.4 permet donc simplement de ramener le problème du plongement virtuel d'une surface coupée-croisée à l'étude de propriétés de séparabilité d'un sous-groupe libre de type infini d'un groupe de surface.

2. Ce problème doit alors se traiter au cas par cas, car $\pi_1(F)$ contient effectivement des sous-groupes (nécessairement de type infini) qui ne sont pas engouffrés dans $\pi_1(F)$. On pourra à nouveau consulter [Lon88] pour des idées de construction de sous-groupes non-engouffrés dans n'importe quel groupe hyperbolique non-élémentaire.

²Le morphisme $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ restreint à $\pi_1(\widehat{M})$ est nécessairement surjectif, donc $\widehat{M}$ s'identifie à la suspension d'un relevé de φ , pas d'une puissance plus élevée de φ .

Inclusion dans un sous-groupe propre de type fini

Nous pouvons raffiner le résultat du corollaire 7.3.4 en utilisant les propriétés de séparabilité du groupe ambiant $\pi_1(F)$, qui est cette fois un groupe de surface.

Corollaire 7.3.5 (L'engouffrement dans un sous-groupe propre de type fini suffit). *Si le sous-groupe $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ est contenu dans un sous-groupe propre de type fini de $\pi_1(F)$, alors $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ est engouffré dans $\pi_1(F)$ (et donc S est virtuellement plongée dans M_φ).*

Démonstration. Si $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ est contenu dans un sous-groupe propre de type fini $\Sigma \leq \pi_1(F)$, choisissons un élément $\alpha \in \pi_1(F) \setminus \Sigma$. D'après le théorème de P. Scott (voir théorème 5.2.8), Σ est séparable dans $\pi_1(F)$ donc il existe un sous-groupe $\Gamma \leq \pi_1(F)$ d'indice fini tel que $\Sigma \leq \Gamma$ et $\alpha \notin \Gamma$. Alors Γ est un sous-groupe propre d'indice fini de $\pi_1(F)$ et $\pi_1(S) \cap \pi_1(F) \leq \Sigma \leq \Gamma$. Donc $\pi_1(S) \cap \pi_1(F)$ est engouffré dans $\pi_1(F)$. $\square$

Remarque Remarquons que si S est une surface coupée-croisée virtuellement plongée dans M_φ , alors $\pi_1(M)$ est virtuellement spécial. En particulier, $\pi_1(M)$ est localement séparable et donc $\pi_1(S)$ est séparable, en particulier engouffré, dans $\pi_1(M)$. Ainsi, une surface coupée-croisée S est virtuellement plongée dans M_φ si, et seulement si, $\pi_1(S)$ est engouffré (ou séparable) dans $\pi_1(M)$.

7.4 Premières expérimentations

7.4.1 Revêtements doubles

La proposition 7.2.3 suggère de chercher des revêtements finis connexes de F qui possèdent au minimum la propriété que l'image réciproque de la fibre coupée F_c dans ces revêtements ne soit pas connexe. On peut être tenté de commencer par étudier les revêtements doubles de F qui possèdent cette propriété, pour se familiariser avec la situation par l'étude de quelques exemples simples.

Les revêtements doubles connexes de la surface F correspondent à des sous-groupes d'indice 2 de $\pi_1(F)$, i.e. à des noyaux de morphismes non-triviaux de $\pi_1(F)$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (rappelons que le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel des morphismes de groupe de $\pi_1(F)$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ s'identifie au premier groupe de cohomologie $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$). Une courbe fermée simple non-séparante $\gamma \subset F$ définit une forme d'intersection algébrique modulo 2 avec les lacets de F qui fournit un exemple de morphisme non-trivial $\pi_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

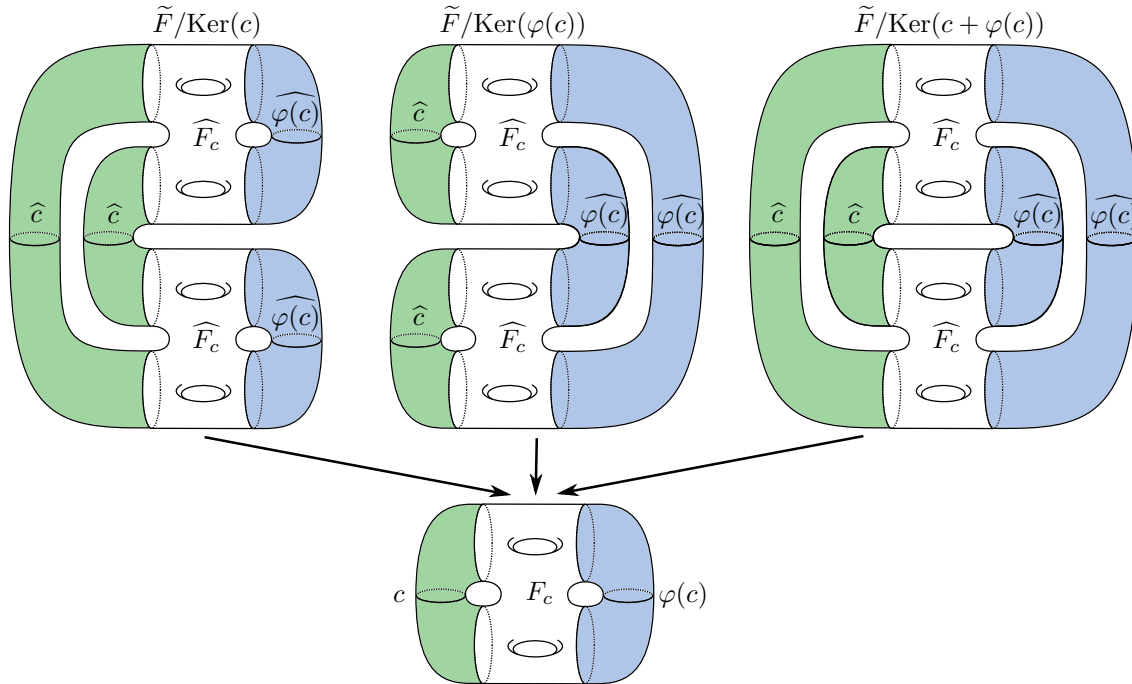


FIGURE 7.4.1 – Les revêtements doubles de F associés aux noyaux des formes d'intersection modulo 2 c , $\varphi(c)$ et $c + \varphi(c)$ définies par les courbes c , $\varphi(c)$ et la multi-courbe $c \sqcup \varphi(c)$.

Les trois revêtements doubles connexes de F pour lesquels $\widehat{\pi}^{-1}(F_c)$ est disconnexe sont les revêtements doubles associés aux courbes c , $\varphi(c)$ et à la multi-courbe non-séparante $c \sqcup \varphi(c)$. Autrement dit, ce sont les revêtements associés aux noyaux des trois éléments c , $\varphi(c)$ et $c + \varphi(c)$ de $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

La condition de non-connexité de $\widehat{\pi}^{-1}(F_c)$ est remplie pour ces trois revêtements, mais il peut arriver cependant que les surfaces $\widehat{S}_\infty$ qui leur sont associées soient tout de même connexes. Ceci se produit si par exemple $\widehat{\pi}^{-1}(\varphi(F_c))$ est connexe. Cette condition défavorable est remplie pour le revêtement double associé au noyau $\text{Ker}(c + \varphi(c))$ lorsque $c \cap \varphi^2(c) = \emptyset$ et $F \setminus (c \cup \varphi(c) \cup \varphi^2(c))$ est connexe. On voit dans ce cas qu'il n'existe qu'un seul relevé de $\varphi(F_c)$ à $\widehat{F}$, revêtant doublement $\varphi(F_c)$.

Le problème rencontré tient donc ici à l'absence d'invariance de ces revêtements doubles sous l'action de la monodromie en général. En revanche, si $\varphi_*(\pi_1(\widehat{F})) = \pi_1(\widehat{F})$ et $\widehat{\pi}^{-1}(F_c)$ est disconnexe, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'image réciproque $\widehat{\pi}^{-1}(F_c^n)$ est disconnexe. Il n'y a alors pas d'obstruction immédiate au fait que $\widehat{S}_\infty$ soit disconnexe.

Nous reviendrons sur ces conditions d'invariance de ces revêtements doubles au paragraphe 7.5.1. Nous démontrerons en particulier que lorsque la monodromie se relève au revêtement double associé au noyau $\text{Ker}(c + \varphi(c))$, alors le produit fibré $S_\infty \times_{(F \times \mathbb{R})} (\widehat{F}/\text{Ker}(c + \varphi(c)) \times \mathbb{R})$ est disconnexe. Nous pourrions en déduire explicitement un revêtement double de M_φ dans lequel S admet un relevé plongé.

7.4.2 Le cas d'une courbe φ -périodique

Dans ce paragraphe, nous proposons une excursion en dehors du monde des 3-variétés hyperboliques. Nous nous intéresserons aux surfaces coupées-croisées de suspensions M_φ dont la monodromie n'est pas isotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov.

Soit F une surface connexe compacte et φ un homéomorphisme de F préservant l'orientation. On considère une courbe fermée simple essentielle $c \subset F$ telle que $c \cap \varphi(c) = \emptyset$ et $c \sqcup \varphi(c)$ est non-séparante dans F . Alors on peut construire à partir de ces données une surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ dans la suspension M_φ , et cette surface est connexe.

Hypothèse. Nous supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que les courbes c et $\varphi^n(c)$ soient égales dans la surface F (et donc nécessairement $n \geq 2$).

Sous cette hypothèse, nous proposons de construire un revêtement fini $\widehat{F}$ de F tel que la surface $\widehat{S}_\infty$ correspondant soit disconnexe. Nous présenterons en fait directement un plongement relevant l'immersion $S \hookrightarrow M_\varphi$ dans un revêtement fini de M_φ .

Étape 1 : Construction de pièces élémentaires

Nous considérons tout d'abord une surface à bord S_0 obtenue en recollant abstraitement à la fibre coupée F_c deux copies distinctes de l'anneau $\varphi(\mathcal{V})$ le long des deux courbes $\varphi(c^-)$ et $\varphi(c^+)$ contenues dans le bord de F_c .

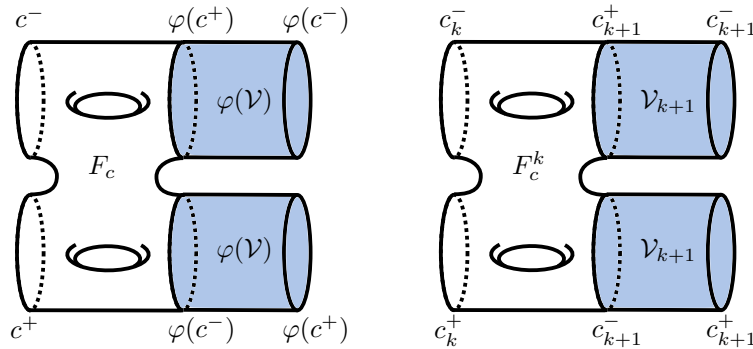


FIGURE 7.4.2 – La surface à bord S_0 et ses “images” par φ^k .

Nous définissons plus généralement pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ une surface à bord S_k obtenue en recollant abstraitement à la surface à bord F_c^k deux copies distinctes de l'anneau $\mathcal{V}_{k+1}$ le long des courbes c_{k+1}^- et c_{k+1}^+ contenues dans F_c^k .

Étape 2 : Recollement cyclique des pièces élémentaires

On fabrique alors une surface compacte $\widehat{F} = \widehat{F}(n)$ à partir de la réunion disjointe $S_0 \sqcup \dots \sqcup S_{n-1}$ en identifiant pour $k \in \{0, \dots, n-2\}$ les composantes de bord $c_{k+1}^\pm$ communes aux surfaces à bord S_k et S_{k+1} , ainsi que les composantes de bord $c^\pm$ communes aux surfaces à bord S_0 et S_{n-1} (ceci est possible car par hypothèse, $c_n^\pm = c^\pm$).

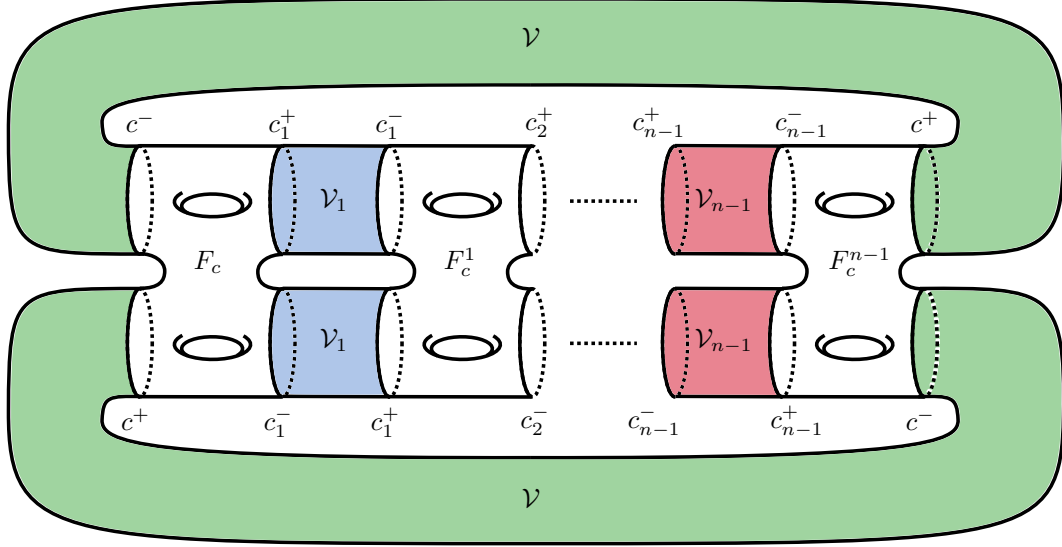


FIGURE 7.4.3 – Le revêtement de degré n obtenu par recollement cyclique de $F_c, \varphi(F_c), \dots$ et $\varphi^{n-1}(F_c)$ à l'aide de deux copies de chaque anneau $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_{n-1}, \mathcal{V} = \mathcal{V}_n$.

Chacune des surfaces à bord S_k pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ est munie d'une projection naturelle $S_k \rightarrow F$ qui s'identifie localement à l'identité de F . On obtient une application continue $S_0 \sqcup \dots \sqcup S_{n-1} \rightarrow F$ qui passe au quotient pour fournir au final une projection $\widehat{F} \rightarrow F$. Cette projection est alors par construction un homéomorphisme local entre surfaces compactes, donc un revêtement (de degré n).

Proposition 7.4.1. *S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $c = \varphi^n(c)$, alors la surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ est virtuellement plongée dans M_φ . Plus précisément, le produit fibré $S_\infty \times_{(F \times \mathbb{R})} (\widehat{F}(n) \times \mathbb{R})$ est disconnexe pour le revêtement fini $\widehat{F}(n)$ construit ci-dessus.*

Avant de démontrer cette proposition, nous proposons quelques arguments graphiques qui devraient convaincre le lecteur de l'existence de plusieurs relevés minimaux de S_∞ dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$. Nous allons en fait expliquer que le choix de $\widehat{F}$ permet de dessiner un relevé homéomorphe de S_∞ dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$.

Nous démontrerons ensuite la proposition 7.4.1 à l'aide du critère combinatoire de la proposition 7.2.7.

Heuristique dans le cas $n \in \{2, 3\}$

Supposons que $n = 2$. Alors le revêtement construit est le revêtement double associé au noyau du morphisme $c + \varphi(c) : \pi_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous représentons ce revêtement par le graphe d'espaces ayant deux sommets étiquetés par la surface à bord $F_c = \varphi(F_c)$ et deux paires d'arêtes entre ces deux sommets étiquetées par les anneaux $\mathcal{V}$ et $\varphi(\mathcal{V})$.

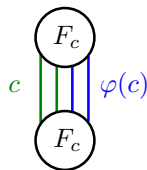


FIGURE 7.4.4 – Le graphe d'espaces associé au revêtement double.

Nous pouvons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, identifier les composantes connexes de $\hat{\pi}^{-1}(F_c^n)$ dans $\hat{F}$ (où $\hat{\pi} : \hat{F} \rightarrow F$ est la projection du revêtement). En effet, l'hypothèse $c = \varphi^2(c)$ entraîne que $F_c = F_c^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Donc les composantes connexes de $\hat{\pi}^{-1}(F_c^n)$ sont les deux copies de F_c contenues dans $\hat{F}$.

À l'aide de cette information, nous pouvons suivre les instructions données en section 7.2.2 pour construire de proche en proche une composante connexe du produit fibré $S_\infty \times_{(F \times \mathbb{R})} (\hat{F} \times \mathbb{R})$ à partir de la donnée d'un relevé de la fibre coupée F_c dans $\hat{F}_0$. On observe alors lors de cette construction de proche en proche une alternance qui met en évidence le fait que le relevé considéré ne remplit pas l'image réciproque de S dans $\hat{F} \times \mathbb{R}$. Ceci implique que $\widehat{S_\infty}$ est disconnexe.

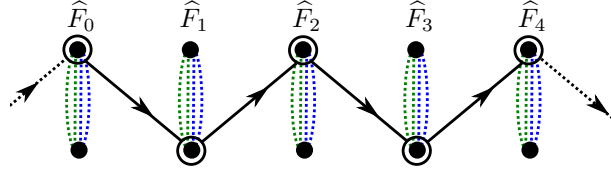


FIGURE 7.4.5 – Construction d'un relevé de S dans $\tilde{F}/\text{Ker}(c + \varphi(c)) \times \mathbb{R}$.

Supposons maintenant que $n = 3$. On a alors en particulier la condition $c \cap \varphi^2(c) = \emptyset$. Nous représenterons à nouveau la surface $\hat{F}$ comme un graphe d'espaces, de sommets F_c , F_c^1 et F_c^2 , avec pour arêtes les deux copies de chaque anneau $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$.

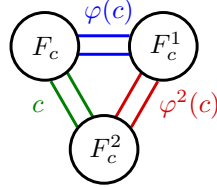


FIGURE 7.4.6 – Graphe associé au revêtement triple.

Nous pouvons à nouveau déterminer précisément les composantes connexes de $\hat{\pi}^{-1}(F_c^n)$ dans $\hat{F}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par exemple $\hat{\pi}^{-1}(F_c)$ possède deux composantes connexes : l'une est égale à la copie de F_c contenue dans $\hat{F}$, l'autre est formée des copies de F_c^1 et F_c^2 contenues dans $\hat{F}$, auxquelles il faut ajouter les deux copies de l'anneau $\mathcal{V}_2$ qui les relient. On peut reprendre cette description à l'identique pour $n = 1$ et $n = 2$ et enfin en déduire le cas général par périodicité modulo 3.

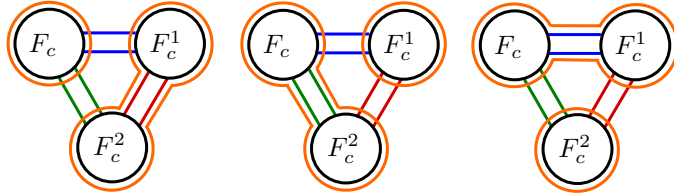


FIGURE 7.4.7 – De gauche à droite : mise en évidence des deux composantes connexes de $\hat{\pi}^{-1}(F_c^n)$ pour $n = 0$, puis $n = 1$ et enfin $n = 2$.

Le relevé de S à $\hat{F} \times \mathbb{R}$ contenant la copie de F_c contenue dans $\hat{F}_0$ peut alors être construit de proche en proche en suivant les instructions habituelles. On constate alors que ce relevé ne remplit pas l'image réciproque de S dans $\hat{F} \times \mathbb{R}$, ce qui entraîne à nouveau que $\widehat{S_\infty}$ est disconnexe.

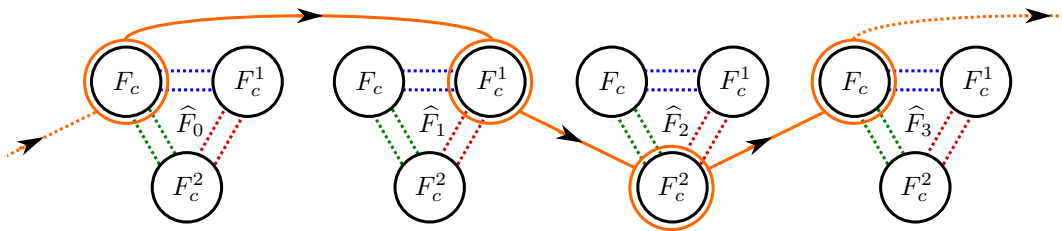


FIGURE 7.4.8 – Construction d'un relevé de S_∞ dans $\hat{F} \times \mathbb{R}$.

Remarque Les outils développés jusqu'ici permettent également dans cette situation construire graphiquement de proche en proche l'autre relevé de S_∞ dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ (par exemple en supposant que $F \setminus (c \cup \varphi(c) \cup \varphi^2(c))$ connexe).

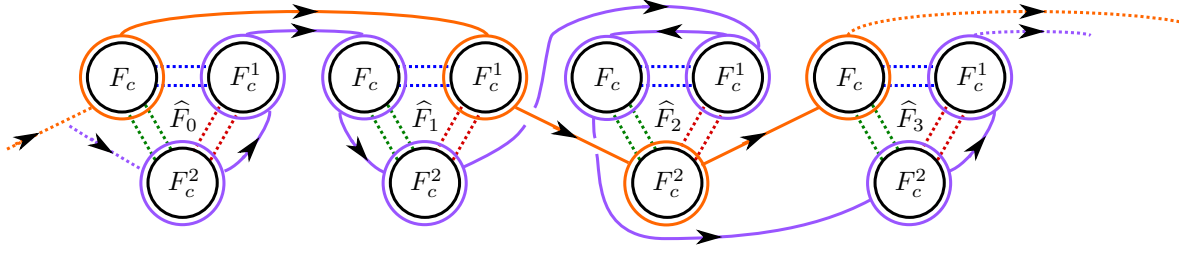


FIGURE 7.4.9 – Construction des deux relevés de S_∞ dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$.

Utilisation du critère combinatoire

Nous démontrons maintenant formellement la proposition 7.4.1, en mettant en évidence que la condition suffisante combinatoire de la proposition 7.2.7 s'applique au cas du revêtement $\widehat{F}(n)$ construit précédemment.

Démonstration de la proposition 7.4.1. Nous considérons le relevé X_0 de F_c à $\widehat{F}$ contenu dans S_0 vu dans $\widehat{F}_0$ et le relevé X_1 de $\varphi(F_c)$ à $\widehat{F}$ contenu dans S_1 vu dans $\widehat{F}_1$. Alors par construction du revêtement $\widehat{F}$, on a l'égalité $\partial'_\varphi(X_0) = \partial_\varphi(X_1)$ (cet ensemble est formé des deux courbes $\varphi(c^\pm)$ contenues dans S_1 et vues dans $\widehat{F}_1$).

D'autre part, il existe un relevé naturel de φ à $\widehat{F}$. En effet, il existe par construction un homéomorphisme $f_k : S_k \rightarrow S_{k+1}$ rendant commutatif le diagramme ci-dessous, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (en posant par convention $S_n = S_0$).

$$\begin{array}{ccc} S_k & \xrightarrow{f_k} & S_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{\varphi} & F \end{array}$$

Les applications f_k , $0 \leq k \leq n$ se recollent alors pour définir un homéomorphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{F} \rightarrow \widehat{F}$ qui est un relevé de φ à $\widehat{F}$. De plus, ce relevé $\widehat{\varphi}$ de φ à $\widehat{F}$ vérifie par construction la condition $\widehat{\varphi}(X_0) = X_1$. D'après la proposition 7.2.7, la surface $\widehat{S}_\infty$ est disconnexe et la surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ est donc virtuellement plongée dans M_φ . $\square$

Remarques

1. Nous pouvons préciser la fin de la démonstration de la proposition 7.4.1. Avec les notations mises en place, la surface coupée-croisée admet en fait un relevé plongé dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$. Notons $\theta : (\widehat{x}, t) \mapsto (\widehat{\varphi}(\widehat{x}), t + 1)$ la transformation de $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ relevant γ_∞ . Notons également X_0^* la surface à bord obtenue en recollant à X_0 les relevés de A et A' dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ qui intersectent X_0 . Alors le relevé de S_∞ mis en évidence dans les constructions graphiques ci-dessus est égal à $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \theta^n(X_0^*)$.
2. Ce relevé est de plus plongé dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ d'après la remarque qui suit la proposition 7.2.7 car ici, on a par construction la condition $\partial_\varphi(X_0) \cap \partial'_\varphi(X_0) = \emptyset$. Ceci entraîne précisément que S admet un relevé plongé dans la suspension de $\widehat{\varphi}$, égal à l'image dans $M_{\widehat{\varphi}}$ de X_0^* .
3. Cette construction ne présente malheureusement pas grand intérêt a priori pour l'étude des surfaces coupées-croisées dans les suspensions d'homéomorphismes pseudo-Anosov. Cependant, nous allons expliquer au cours de la dernière section de ce chapitre que la condition $c = \varphi^n(c)$ sous laquelle nous avons travaillé peut être considérablement affaiblie tout en préservant la validité des raisonnements effectués ci-dessus.

7.5 Hypothèses cohomologiques

Le but de cet ultime section est d'améliorer les constructions du paragraphe précédent pour démontrer le théorème de plongement virtuel suivant.

Théorème 7.5.1 (Conditions géométrico-homologiques suffisantes de plongement virtuel). *Soit $c \subset F$ une courbe fermée simple essentielle telle que $c \cap \varphi(c) = \emptyset$ et $S = S(c, \varphi)$ la surface coupée-croisée associée à c et $\varphi(c)$. S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $c \cap \varphi^{n-1}(c) = \emptyset$ et $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, alors S est virtuellement plongée dans M_φ .*

Remarques

1. Dans le cas $n = 1$, on suppose simplement que $c = \varphi(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Dans ce cas, la multi-courbe $c \sqcup \varphi(c)$ est séparante dans F et la surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ est disconnexe (lorsque φ est pseudo-Anosov), donc chacune de ses composantes connexes est plongée dans M_φ .
2. Dans le cas $n = 2$, il n'y a également qu'une seule hypothèse ajoutée à la condition $c \cap \varphi(c) = \emptyset$, à savoir l'égalité $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Nous verrons qu'il s'agit de la condition d'invariance du revêtement double associé à $\text{Ker}(c + \varphi(c))$ qui semblait nous manquer pour avancer lors des premières expérimentations sur les revêtements doubles.

Pour démontrer ce théorème, nous supposons toujours que la multi-courbe $c \sqcup \varphi(c)$ est non-séparante, et donc que la surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ est connexe. Nous proposons de démontrer dans un premier temps ce théorème dans le cas $n = 2$, particulièrement instructif. Nous présenterons ensuite une démonstration générale inspirée des constructions simples du paragraphe précédent.

7.5.1 Le cas $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Au cours du paragraphe précédent, nous avons résolu le cas de courbes vérifiant l'égalité $c = \varphi^2(c)$ à l'aide du revêtement double $\widehat{F}$ de F associé au noyau $\text{Ker}(c + \varphi(c))$. Nous allons démontrer que sous la seule hypothèse cohomologique $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, le critère combinatoire de la proposition 7.2.7 s'applique à ce revêtement double.

Pour utiliser ce critère combinatoire, il est nécessaire de disposer d'un relevé de la monodromie à $\widehat{F}$. Il nous faut donc en premier lieu déterminer à quelle condition un tel relevé existe.

Lemme 7.5.2. *La monodromie φ se relève dans le revêtement double $\widehat{F}$ associé à $\text{Ker}(c + \varphi(c))$ si, et seulement si, l'égalité $c = \varphi^2(c)$ a lieu en tant que classes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Démonstration. En effet, dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, les égalités $c = \varphi^2(c)$ et $c + \varphi(c) = \varphi(c) + \varphi^2(c)$ sont équivalentes. Comme $\varphi_*(\text{Ker}(c + \varphi(c))) = \text{Ker}(\varphi(c) + \varphi^2(c))$, la condition $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ entraîne donc que $\text{Ker}(c + \varphi(c))$ est φ_* -invariant. La réciproque découle du fait qu'un morphisme vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est uniquement déterminé par son noyau. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante, cas particulier du théorème 7.5.1 dans le cas $n = 2$.

Proposition 7.5.3. *Si $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, alors la surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ est virtuellement plongée dans M_φ .*

Démonstration. Nous considérons le revêtement double $\widehat{F} = \widetilde{F}/\text{Ker}(c + \varphi(c))$ de F . Dans ce revêtement, notons $\widehat{p}_1$ et $\widehat{p}_2$ les deux relevés d'un point fixe $p \in F_c$ de φ . Notons également $\widehat{\varphi}$ le relevé de φ à $\widehat{F}$ tel que $\widehat{\varphi}(\widehat{p}_1) = \widehat{p}_2$ (i.e. l'unique relevé de φ à $\widehat{F}$ qui ne possède pas de point fixe dans $\widehat{F}$).

Choisissons pour X_0 le relevé de F_c à $\widehat{F}$ contenant $\widehat{p}_1$ et pour X_1 le relevé de $\varphi(F_c)$ à $\widehat{F}$ contenant $\widehat{p}_2$. On a alors nécessairement l'égalité $\widehat{\varphi}(X_0) = X_1$. De plus, par construction de ce revêtement double, on a l'égalité $\partial'_\varphi(X_0) = \partial_\varphi(X_1)$ (cet ensemble est formé des deux courbes relevant $\varphi(c^-)$ et $\varphi(c^+)$ que contient X_1). Le critère combinatoire de la proposition 7.2.7 s'applique donc, ce qui permet de conclure que S est virtuellement plongée dans M_φ d'après la proposition 7.2.3. $\square$

Remarques

1. La figure 7.4.5 décrivant l'agencement des deux relevés de S_∞ dans $\widehat{F} \times \mathbb{R}$ dans le cas où les courbes c et $\varphi^2(c)$ sont égales est à nouveau valable sous la seule hypothèse cohomologique $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
2. Les égalités $c = \varphi^2(c)$ et $c + \varphi(c) = \varphi(c) + \varphi^2(c)$ sont équivalentes dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Mais cette condition s'interprète également comme le fait que $c + \varphi(c)$ est un point fixe de l'action de φ sur $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cette remarque peut être utilisée pour formuler ci-dessous une condition suffisante de plongement virtuel d'une éventuelle surface coupée-croisée $S(c, \varphi^n)$ lorsque $c \cap \varphi^n(c) = \emptyset$, via une propriété de calcul modulo 2.

Corollaire 7.5.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $c \cap \varphi^n(c) = \emptyset$ et le vecteur $c + \varphi(c)$ soit un point fixe pour l'action de φ^n sur $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Alors la surface coupée-croisée $S(c, \varphi^n)$ est virtuellement plongée dans M_{φ^n} .*

Démonstration. Sous l'hypothèse $c + \varphi(c) = \varphi^n(c) + \varphi^{n+1}(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on a également l'égalité $c + \varphi^n(c) = \varphi(c) + \varphi^{n+1}(c)$. Autrement dit, $c + \varphi^n(c)$ est un point fixe de l'action de φ sur $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. En conséquence, $c + \varphi^n(c)$ est également un point fixe de l'action de φ^n sur $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cette dernière condition se simplifie sous la forme $c = \varphi^{2n}(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et la proposition 7.5.3. s'applique pour la surface coupée-croisée $S(c, \varphi^n)$. $\square$

Remarques

1. Il existe des exemples d'homéomorphismes pseudo-Anosov pour lesquels il est possible d'avoir simultanément les propriétés $c \cap \varphi(c) = \emptyset$ et $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Le résultat de la proposition 7.5.3 est donc beaucoup plus intéressant que celui de la section précédente pour ce qui concerne la résolution de la conjecture virtuellement de Haken de manière quasi-convexe pour les 3-variétés hyperboliques compactes virtuellement fibrées sur le cercle.
2. Les propriétés de séparabilité des groupes de surface font qu'il est très facile, étant donnée une courbe fermée simple $c \subset F$, de construire un revêtement fini $\widehat{F}$ de F auquel φ se relève en un homéomorphisme $\widehat{\varphi}$ et un relevé $\widehat{c}$ de c dans $\widehat{F}$ tels que $\widehat{c} \cap \widehat{\varphi}(\widehat{c}) = \emptyset$.
3. Étant donnée une courbe fermée simple $c \subset F$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (qui est un groupe fini), donc quitte à remplacer φ par une de ses puissances, on peut supposer que $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

4. Il est en revanche difficile a priori d'obtenir simultanément les conditions $c \cap \varphi(c) = \emptyset$ et $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Supposons que $c \cap \varphi(c) = \emptyset$. En remplaçant φ par l'une de ses puissances φ^n pour obtenir la condition $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on perd a priori l'hypothèse géométrique $c \cap \varphi(c) = \emptyset$ car il n'est pas garanti que $c \cap \varphi^n(c) = \emptyset$.

Réciproquement, si $c = \varphi^2(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on peut considérer un revêtement fini $\widehat{F}$ de F , un relevé $\widehat{\varphi}$ de φ à $\widehat{F}$ et un relevé $\widehat{c}$ de c dans $\widehat{F}$ tels que $\widehat{c} \cap \widehat{\varphi}(\widehat{c}) = \emptyset$. Mais alors il n'y a pas de raison pour que $\widehat{c} = \widehat{\varphi}^2(\widehat{c})$ dans $H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

5. Le vecteur $c + \varphi(c)$ est un point fixe de l'action de φ^n sur $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ pour une infinité de valeurs de n , mais il semble toutefois peu probable que la condition $c \cap \varphi^n(c) = \emptyset$ soit alors simultanément vérifiée.
6. Le cas $n = 1$ du corollaire 7.5.4 est exactement l'énoncé de la proposition 7.5.3. On peut donc voir ce corollaire comme une généralisation du résultat précédent.

7.5.2 Le cas $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $c \cap \varphi^{n-1}(c) = \emptyset$

Nous proposons au cours de ce paragraphe final de généraliser la construction du revêtement $\hat{F} = \hat{F}(n)$ construit dans la section précédente par un recollement cyclique des surfaces à bord $S_0, \dots, S_{n-1}$. Nous allons observer que l'hypothèse géométrique $c = \varphi^n(c)$ n'était pas vraiment strictement nécessaire pour donner un sens à cette surface $\hat{F}$, quitte à modifier légèrement le dernier morceau S_{n-1} .

Nous expliquerons alors que sous l'hypothèse cohomologique $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et l'hypothèse géométrique $c \cap \varphi^{n-1}(c) = \emptyset$, les arguments du critère combinatoire s'appliquent à nouveau et permettent de démontrer le théorème 7.5.1.

Construction d'un revêtement fini $\hat{F}$

Supposons à ce stade simplement que l'hypothèse géométrique $c \cap \varphi^{n-1}(c) = \emptyset$ est vérifiée.

Étape 1 : Redéfinition de la surface à bord S_{n-1}

Nous considérons à nouveau les surfaces à bord $S_0, \dots, S_{n-2}$ définies comme au paragraphe 7.4.2. On définit alors la surface à bord S_{n-1} comme étant égale à la surface à bord $F_* = F \setminus (\mathcal{V} \sqcup \mathcal{V}_{n-1})$, à laquelle on recolte deux copies de l'anneau $\mathcal{V}$ le long de ses composantes de frontière $c^\pm$.

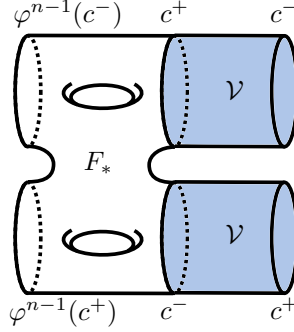


FIGURE 7.5.1 – La surface à bord S_{n-1} .

Autrement dit, on remplace dans la construction de S_{n-1} la partie $F_c^{n-1} = F \setminus (\mathcal{V}_n \sqcup \mathcal{V}_{n-1})$ par $F_* = F \setminus (\mathcal{V} \sqcup \mathcal{V}_{n-1})$, en utilisant l'hypothèse géométrique $c \cap \varphi^{n-1}(c) = \emptyset$. Cette modification nous permet ensuite de définir un recollement cyclique des pièces élémentaires $S_0, \dots, S_{n-1}$ exactement comme dans le cas d'une courbe φ -périodique.

Étape 2 : Recollement cyclique des pièces élémentaires

On fabrique une surface compacte $\hat{F} = \hat{F}(n)$ à partir de la réunion disjointe $S_0 \sqcup \dots \sqcup S_{n-1}$ en identifiant pour $k \in \{0, \dots, n-2\}$ les composantes de bord $c_{k+1}^\pm$ communes aux surfaces à bord S_k et S_{k+1} , ainsi que les composantes de bord $c^\pm$ communes aux surfaces à bord S_0 et S_{n-1} .

On obtient alors une surface $\hat{F}$, munie d'une projection naturelle $\hat{F} \rightarrow F$ qui est un homéomorphisme local. Il s'agit donc à nouveau d'un revêtement de degré n . Ce revêtement peut être représenté à l'aide de la figure 7.4.3, en changeant dans la légende la partie F_c^{n-1} en F_* (en particulier, ce nouveau revêtement redonne bien le revêtement construit précédemment lorsque $c = \varphi^n(c)$ puisque cette condition entraîne que $F_* = F_c^{n-1}$).

Relevés de F_c et $\varphi(F_c)$ convenablement connectés

Nous considérons le relevé X_0 de F_c dans $\hat{F}$ formé de la copie de F_c contenue dans S_0 , ainsi que le relevé X_1 de $\varphi(F_c)$ dans $\hat{F}$ formé de la copie de $\varphi(F_c)$ contenue dans S_1 . En considérant dans $\hat{F} \times \mathbb{R}$ le relevé X_0 vu dans $\hat{F}_0$ et le relevé X_1 vu dans $\hat{F}_1$, on a par construction l'égalité $\partial'_\varphi(X_0) = \partial_\varphi(X_1)$.

La possibilité d'appliquer le critère combinatoire à cette situation se met donc progressivement en place. Pour conclure, il nous reste à dégager une condition d'existence d'un relevé $\hat{\varphi}$ de φ à $\hat{F}$ tel que $\hat{\varphi}(X_0) = X_1$. Nous allons montrer précisément que la condition cohomologique $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est suffisante pour qu'un tel relevé existe.

Construction d'un relevé de φ à $\widehat{F}$

Nous supposons dorénavant également que $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Commençons par remarquer que cette hypothèse implique que le revêtement fini $\widehat{F}(n)$ est connexe.

Lemme 7.5.5. *Sous la condition $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, la surface à bord F_* est connexe.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $F_* = F \setminus (\mathcal{V} \sqcup \mathcal{V}_{n-1})$ n'est pas connexe. Alors $c = \varphi^{n-1}(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Grâce à l'hypothèse, on obtient donc l'égalité $\varphi^{n-1}(c) = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. En particulier, $\varphi^{n-1}(c) \sqcup \varphi^n(c)$ est séparante dans F . Contradiction. $\square$

Nous construisons alors à la main un relevé $\widehat{\varphi}$ de φ à $\widehat{F}$ tel que $\widehat{\varphi}(X_0) = X_1$. La surface F n'étant pas clairement construite de manière φ -périodique, cette construction se révèle un peu plus délicate que dans le cas où $c = \varphi^n(c)$ en tant que courbes géométriques. Le cas $n = 2$ ayant déjà été traité, nous supposons donc dorénavant que $n \geq 3$.

Proposition 7.5.6. *Soit $\widehat{F} = \widehat{F}(n)$ le revêtement fini de degré n construit ci-dessus sous l'hypothèse géométrique $c \cap \varphi^{n-1}(c) = \emptyset$. Si de plus $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, alors il existe un relevé $\widehat{\varphi}$ de φ à $\widehat{F}$ tel que $\widehat{\varphi}(X_0) = X_1$.*

Démonstration. Nous considérerons les surfaces à bord abstraites $S_0, \dots, S_{n-1}$ comme des parties du revêtement fini $\widehat{F}$ (ce qui est légitime, car l'application quotient $S_0 \sqcup \dots \sqcup S_{n-1} \rightarrow \widehat{F}$ est injective sur S_k pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$).

Étape 1 : La partie facile

Nous commençons par définir un homéomorphisme de $S_0 \cup \dots \cup S_{n-3}$ sur $S_1 \cup \dots \cup S_{n-2}$. Cet homéomorphisme est le candidat raisonnable pour être la restriction à $S_0 \cup \dots \cup S_{n-3}$ du relevé $\widehat{\varphi}$ recherché tel que $\widehat{\varphi}(X_0) = X_1$.

Pour ce faire, rappelons qu'il existe pour $k \in \{0, \dots, n-3\}$ un homéomorphisme $f_k : S_k \rightarrow S_{k+1}$ relevant φ , i.e. tel que le diagramme suivant commute.

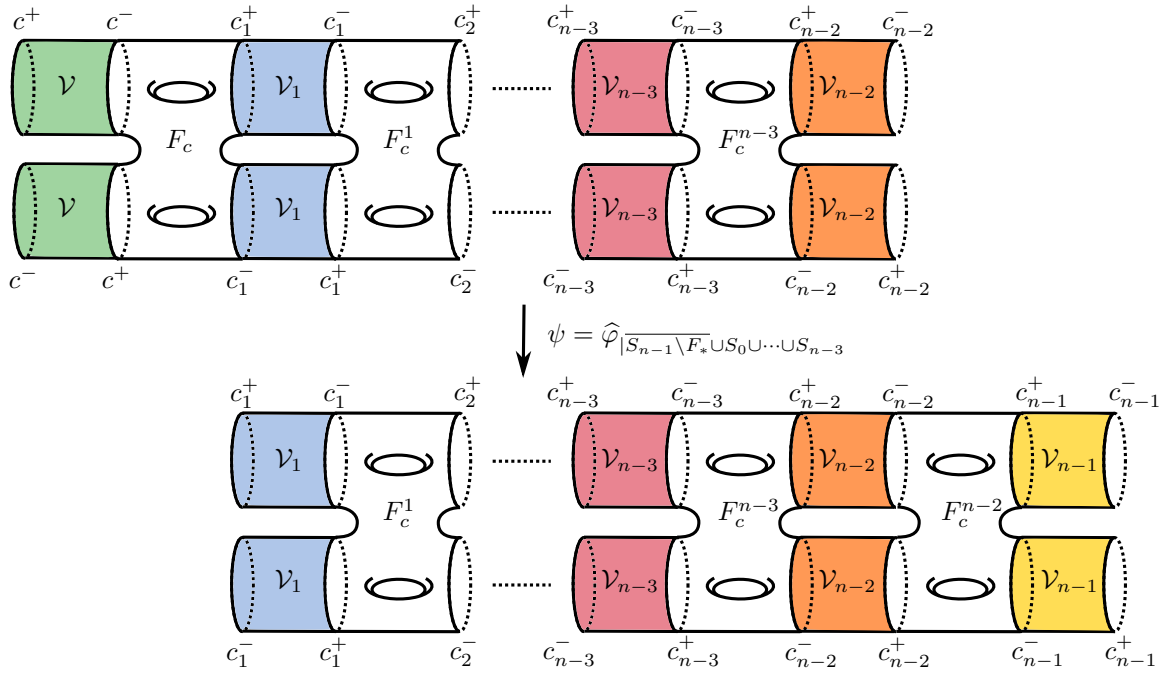
$$\begin{array}{ccc} S_k & \xrightarrow{f_k} & S_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{\varphi} & F \end{array}$$

En revanche, il n'est pas du tout clair qu'il existe des homéomorphismes $f_{n-2} : S_{n-2} \rightarrow S_{n-1}$ et $f_{n-1} : S_{n-1} \rightarrow S_0$ relevant φ comme dans le cas où la courbe c est φ -périodique.

Nous obtenons donc par recollement des applications $f_0, \dots, f_{n-3}$ un homéomorphisme raisonnable $S_0 \cup \dots \cup S_{n-3} \rightarrow S_1 \cup \dots \cup S_{n-2}$ qui relève la monodromie φ . Nous pouvons ensuite prolonger légèrement ce relevé à l'aide de l'homéomorphisme³ naturel $\overline{S_{n-1} \setminus F_*} \rightarrow \overline{S_0 \setminus F_c}$ relevant φ (qui envoie les deux copies de $\overline{\mathcal{V}}$ contenues dans $\overline{S_{n-1}}$ sur les deux copies de $\overline{\mathcal{V}_1}$ contenues dans $\overline{S_0}$). Nous obtenons un homéomorphisme $\psi : \overline{S_{n-1} \setminus F_*} \cup S_0 \cup \dots \cup S_{n-3} \rightarrow \overline{S_0 \setminus F_c} \cup S_1 \cup \dots \cup S_{n-2}$ relevant φ et réalisant d'ores et déjà la condition $\psi(X_0) = X_1$.

$$\begin{array}{ccc} \overline{S_{n-1} \setminus F_*} \cup S_0 \cup \dots \cup S_{n-3} & \xrightarrow{\psi} & \overline{S_0 \setminus F_c} \cup S_1 \cup \dots \cup S_{n-2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{\varphi} & F \end{array}$$

³Il y a en fait deux choix possibles, équivalents à une transposition près. Nous faisons naturellement le choix qui est compatible avec la définition de ψ à la ligne suivante.

FIGURE 7.5.2 – Définition naturelle de $\hat{\varphi}$ sur $S_{n-1} \setminus F_* \cup S_0 \cup \dots \cup S_{n-3}$.

Étape 2 : La partie délicate

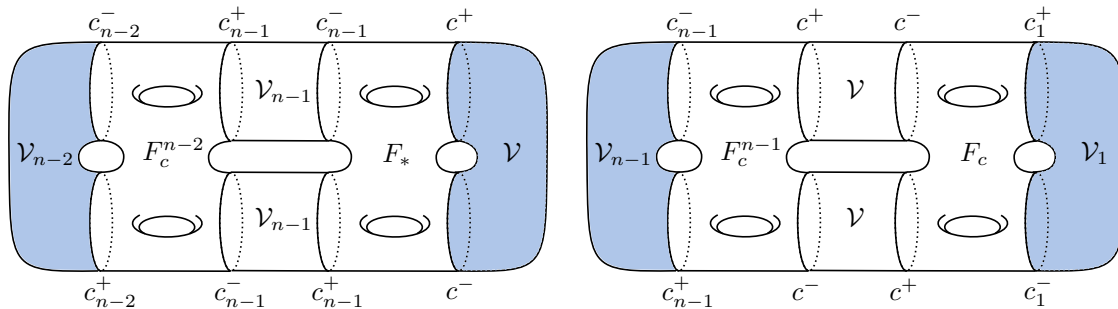
Il reste alors à définir le relevé $\hat{\varphi}$ sur la surface à bord $S_{n-2} \cup F_*$ de sorte à réaliser un homéomorphisme $S_{n-2} \cup F_* \rightarrow S_{n-1} \cup F_c$ relevant φ et compatible au bord avec l'application ψ définie dans la première étape.

Fait Il existe des inclusions :

- (i) $S_{n-2} \cup F_* \subset \tilde{F}/\text{Ker}(\varphi^{n-1}(c))$,
- (ii) $S_{n-1} \cup F_c \subset \tilde{F}/\text{Ker}(c)$.

Pour obtenir concrètement ces inclusions, il suffit de recoller un anneau $\mathcal{V}_{n-2}$ au bord de S_{n-2} et un anneau $\mathcal{V}$ au bord de F_* dans $S_{n-2} \cup F_*$. On obtient alors une surface munie d'une projection naturelle vers F qui est un homéomorphisme local. Il s'agit donc nécessairement d'un revêtement double de F . Comme on observe deux copies de la courbe $\varphi^{n-1}(c)$ dans ce revêtement double, il s'agit précisément du revêtement double associé au noyau $\text{Ker}(\varphi^{n-1}(c))$.

De même, il suffit de recoller un anneau $\mathcal{V}_{n-1}$ au bord de S_{n-1} et un anneau $\mathcal{V}_1$ au bord de F_* dans $S_{n-1} \cup F_c$. On obtient alors un revêtement double de F contenant deux copies de la courbe c . On conclut qu'il s'agit précisément du revêtement double associé au noyau $\text{Ker}(c)$.

FIGURE 7.5.3 – Inclusions de $S_{n-2} \cup F_*$ dans $\tilde{F}/\text{Ker}(\varphi^{n-1}(c))$ et de $S_{n-1} \cup F_c$ dans $\tilde{F}/\text{Ker}(c)$.

Or l'hypothèse $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est justement la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un homéomorphisme $\psi' : \tilde{F}/\text{Ker}(\varphi^{n-1}(c)) \rightarrow \tilde{F}/\text{Ker}(c)$ relevant φ , i.e. rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{F}/\text{Ker}(\varphi^{n-1}(c)) & \xrightarrow{\psi'} & \tilde{F}/\text{Ker}(c) \\
\downarrow & & \downarrow \\
F & \xrightarrow{\varphi} & F
\end{array}$$

Remarquons qu'il existe plus précisément un tel relevé envoyant la copie de $\mathcal{V}_{n-2}$ contenue dans $\tilde{F}/\text{Ker}(\varphi^{n-1}(c)) \setminus (S_{n-2} \cup F_*)$ sur la copie de $\mathcal{V}_{n-1}$ contenue dans $\tilde{F}/\text{Ker}(c) \setminus (S_{n-1} \cup F_c)$. Ce relevé envoie alors automatiquement la copie de $\mathcal{V}$ contenue dans $\tilde{F}/\text{Ker}(\varphi^{n-1}(c)) \setminus (S_{n-2} \cup F_*)$ sur la copie de $\mathcal{V}_1$ contenue dans $\tilde{F}/\text{Ker}(c) \setminus (S_{n-1} \cup F_c)$.

Autrement dit, la restriction de ψ' à $S_{n-2} \cup F_*$ réalise un homéomorphisme entre les surfaces à bord $S_{n-2} \cup F_*$ et $S_{n-1} \cup F_c$. Cet homéomorphisme se recolte alors à l'application ψ relevant φ sur $S_{n-1} \setminus F_* \cup S_0 \cup \dots \cup S_{n-3}$ pour fournir un relevé $\hat{\varphi}$ de φ à $\hat{F}$ tel que $\hat{\varphi}(X_0) = X_1$. $\square$

L'existence d'un relevé $\hat{\varphi}$ tel que fournit par la proposition 7.5.6 permet donc à nouveau d'appliquer le critère combinatoire de la proposition 7.2.7. Nous obtenons que le produit fibré $\widehat{S_\infty}$ associé au revêtement fini $\hat{F}(n)$ est disconnexe, et donc que la surface coupée-croisée $S = S(c, \varphi)$ est virtuellement plongée dans M_φ . Le théorème 7.5.1 est donc démontré.

Conclusion

Ce travail en cours ne fournit donc qu'un résultat partiel de type condition suffisante de plongement virtuel mêlant la géométrie et l'homologie des courbes intervenant dans la construction d'une surface coupée-croisée. Il serait souhaitable de tenter de reprendre la construction proposée ci-dessus dans le cas complémentaire où $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $c \cap \varphi^{n-1}(c) \neq \emptyset$. Est-il encore possible dans ce cas de trouver une liste d'instructions explicites permettant de construire un revêtement fini de M_φ dans lequel la surface coupée-croisée se relève de manière plongée ?

Pour tenter de répondre à cette question, une première étape pourrait consister à redéfinir $\hat{F}(n)$ lorsque $c \cap \varphi^{n-1}(c) \neq \emptyset$. Il y a sans doute plusieurs manières d'imaginer des généralisations de cette construction. Il n'est par exemple pas difficile de généraliser $\hat{F}(n)$ lorsque $c \cap \varphi^{n-1}(c) \neq \emptyset$ et de plus $c \cap \varphi^{n-2}(c) = \emptyset$, mais la construction éventuelle d'un relevé de φ devient alors beaucoup plus délicate. Une question reliée et sans doute intéressante serait d'essayer de résoudre complètement le cas $c = \varphi^3(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, qui devrait être instructif (ce cas est résolu lorsque de plus $c \cap \varphi^2(c) = \emptyset$, que faire lorsque $c \cap \varphi^2(c) \neq \emptyset$?).

À ce stade, on peut également faire remarquer que le théorème 7.5.1 décrit les seules situations connues par l'auteur de cette thèse où il est possible de conclure que la surface coupée-croisée considérée est virtuellement plongée (ceci inclut comme nous l'avons déjà remarqué le cas des surfaces coupées-croisées disconnexes). Ce qui veut dire qu'il n'y a en fait essentiellement qu'un seul cas où l'on sait conclure. Il semble donc aujourd'hui important de continuer à expérimenter avec ces surfaces coupées-croisées à un niveau élémentaire, pour peut-être dégager de nouvelles situations radicalement différentes pour lesquelles il serait possible d'obtenir des résultats partiels positifs.

Enfin, on peut se demander quelles sont les suspensions M_φ pour lesquelles l'application du théorème 7.5.1 suffit à démontrer qu'elles sont virtuellement de Haken de manière quasi-convexe. De manière équivalente, il s'agit de savoir quels sont les homéomorphismes pseudo-Anosov pour lesquels les conditions $c \cap \varphi(c) = \emptyset$, $c \cap \varphi^{n-1}(c) = \emptyset$ et $c = \varphi^n(c)$ dans $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ peuvent être vérifiées par une courbe fermée simple essentielle. Pour cela, il faudrait être capable de répondre à la question suivante.

Question Soit F une surface hyperbolique compacte et $\varphi : F \rightarrow F$ un homéomorphisme préservant l'orientation et pseudo-Anosov.

Existe-t-il un revêtement fini $\hat{F}$ de F et un relevé $\psi : \hat{F} \rightarrow \hat{F}$ d'une puissance non nulle de φ , ainsi qu'une courbe fermée simple $c \subset \hat{F}$ telle que $c \cap \psi(c) = \emptyset$, $c \cap \psi^{n-1}(c) = \emptyset$ et $c = \psi^n(c)$ dans $H^1(\hat{F}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$?

Si la réponse est non en général, est-il possible de caractériser la classe des homéomorphismes pseudo-Anosov pour lesquels cette question admet une réponse positive ?

Bibliographie

- [Ago08] Ian Agol. Criteria for virtual fibering. *Journal of Topology*, 1(2) :269–284, 2008.
- [Ago12] Ian Agol. The virtual haken conjecture (preprint). 2012.
- [BF92] Mladen Bestvina and Mark Feighn. A combination theorem for negatively curved groups. *Journal of Differential Geometry*, 35(1) :85–101, 1992.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer Verlag, 1999.
- [BHW11] Nicolas Bergeron, Frédéric Haglund, and Daniel T. Wise. Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds. *Journal of the London Mathematical Society*, 83(2) :431, 2011.
- [Boi] Michel Boileau. Geometrization of 3-manifolds with symmetries.
- [Bon86] Francis Bonahon. Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3. *The Annals of Mathematics*, 124(1) :71–158, 1986.
- [Bri91] Martin R. Bridson. Geodesics and curvature in metric simplicial complexes. 1991.
- [BW10] Nicolas Bergeron and Daniel T. Wise. A boundary criterion for cubulation. *arXiv :0908.3609v3 [math.GT]*, 2010.
- [Cap06] Pierre Emmanuel Caprace. Conjugacy of one-ended subgroups of Coxeter groups and parallel walls. *Preprint*, 2006.
- [CB88] Andrew J. Casson and Steven A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, volume 9 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, 1988.
- [Che00] Victor Chepoi. Graphs of some CAT(0) complexes. *Advances in Applied Mathematics*, 24 :125 – 179, 2000.
- [CLR94] Daryl Cooper, Darren D. Long, and Alan W. Reid. Bundles and finite foliations. *Inventiones Mathematicae*, 118(1) :255–283, 1994.
- [CLR97] Daryl Cooper, Darren D. Long, and Alan W. Reid. Finite foliations and similarity interval exchange maps. *Topology*, 36(1) :209–228, 1997.
- [CN05] Indira Chatterji and Graham A. Niblo. From wall spaces to CAT(0) cube complexes. *International Journal of Algebra and Computation*, 15 :5–6, 2005.
- [CT07] James W. Cannon and William P. Thurston. Group invariant Peano curves. *Geometry & Topology*, 11 :1315–1355, 2007.
- [FLP⁺79] Albert Fathi, François Laudenbach, Valentin Poénaru, et al. Travaux de Thurston sur les surfaces. *Astérisque*, 66(67) :1–284, 1979.
- [GdLH90] Etienne Ghys and Pierre de La Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*. Birkhäuser, 1990.
- [Ger97] Victor N. Gerasimov. Semi-splittings of groups and actions on cubings. *Algebra, geometry, analysis and mathematical physics (Russian)(Novosibirsk, 1996)*, pages 91–109, 1997.

- [Gro87] Mikhail Gromov. Hyperbolic groups. *Essays in group theory*, 8(75-263) :2, 1987.
- [Gur06] Dan P. Guralnik. Local finiteness for cubulations of $CAT(0)$ groups. *Arxiv preprint math/0610950*, 2006.
- [Hei81] W. Heil. Normalizers of incompressible surfaces in 3-manifolds. *Glasnik Matematički*, 16(36) :145–150, 1981.
- [Hou74] C. H. Houghton. Ends of locally compact groups and their coset spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 17(03) :274–284, 1974.
- [HP98] Frédéric Haglund and Frédéric Paulin. Simplicité de groupes d’automorphismes d’espaces à courbure négative. *Geometry and Topology Monographs*, 1 :181 – 248, 1998.
- [HT85] Allen Hatcher and William P. Thurston. Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements. *Inventiones Mathematicae*, 79(2) :225–246, 1985.
- [HW07] Frédéric Haglund and Daniel T. Wise. Special cube complexes. *Geometric And Functional Analysis*, 17 :1551 – 1620, 2007.
- [HW09] Frédéric Haglund and Daniel T. Wise. A combination theorem for special cube complexes, 2009.
- [HW10] G.C. Hruska and Daniel T. Wise. Finiteness properties of cubulated groups. *To appear*, 2010.
- [Kap01] Michael Kapovich. *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, volume 183. Birkhauser, 2001.
- [KM10] Jeremy Kahn and Vladimir Marcovic. Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three-manifold. *arXiv :0910.5501v3 [math.GT]*, 2010.
- [KW00] Ilya Kapovich and Daniel T. Wise. The equivalence of some residual properties of word-hyperbolic groups. *Journal of Algebra*, 223(2) :562–583, 2000.
- [Lac10] Marc Lackenby. Surface subgroups of Kleinian groups with torsion. *Inventiones Mathematicae*, 179(1) :175–190, 2010.
- [LLR08] Marc Lackenby, Darren D. Long, and Alan W. Reid. Covering spaces of arithmetic 3-orbifolds. *International mathematics research notices*, 2008, 2008.
- [Lon87] Darren D. Long. Immersions and embeddings of totally geodesic surfaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 19(5) :481, 1987.
- [Lon88] Darren D. Long. Engulfing and subgroup separability for hyperbolic groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 849–859, 1988.
- [Man98] Brian S. Mangum. Incompressible surfaces and pseudo-Anosov flows. *Topology and its Applications*, 87(1) :29–51, 1998.
- [Mar74] Albert Marden. The geometry of finitely generated Kleinian groups. *The Annals of Mathematics*, 99(3) :383–462, 1974.
- [Mar91] Gregori Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*. Springer-Verlag, 1991.
- [Mas02] Joseph D. Masters. Virtual Betti numbers of genus 2 bundles. *Geometry and Topology*, 6(541) :562, 2002.
- [Mas06] Joseph D. Masters. Thick surfaces in hyperbolic 3-manifolds. *Geometriae Dedicata*, 119(1) :17–33, 2006.
- [Mit98a] Mahan Mitra. Cannon-Thurston maps for hyperbolic group extensions. *Topology*, 37(3) :527–538, 1998.
- [Mit98b] Mahan Mitra. Cannon-Thurston maps for trees of hyperbolic metric spaces. *Journal of Differential Geometry*, 48(1) :135–164, 1998.

- [Mit99] Mahan Mitra. On a theorem of Scott and Swarup. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(6) :1625–1631, 1999.
- [Mou88] Gabor Moussong. Hyperbolic coxeter groups. 1988.
- [Nic04] Bogdan Nica. Cubulating spaces with walls. *Algebraic and Geometric Topology*, 4 :297 – 309, 2004.
- [NR97] Graham A. Niblo and Lawrence D. Reeves. Groups acting on CAT(0) cube complexes. *Geometry and Topology*, 1(1) :7, 1997.
- [NR98] Graham A. Niblo and Martin A. Roller. Groups acting on cubes and Kazhdan’s property (T). *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(3) :693–699, 1998.
- [NR03] Graham A. Niblo and Lawrence D. Reeves. Coxeter groups act on CAT(0) cube complexes. *J. Group Theory*, 6 :399–413, 2003.
- [NW98] Graham A. Niblo and Daniel T. Wise. The engulfing property for 3-manifolds. *Geometry and Topology Monographs*, 1 :413–418, 1998.
- [Ota96] Jean-Pierre Otal. Le théorème d’hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque*, 235, 1996.
- [Pau88] Frédéric Paulin. Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels. *Inventiones Mathematicae*, 94(1) :53–80, 1988.
- [Sag95] Michah Sageev. Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3) :585, 1995.
- [Sag97] Michah Sageev. Codimension 1 subgroups and splittings of groups. *Journal of Algebra*, 189 :377 – 389, 1997.
- [SB77] Jean-Pierre Serre and Hyman Bass. *Arbres, amalgames, SL_2* . Société mathématique de France, 1977.
- [Sco77] Peter G. Scott. Ends of pairs of groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 11(1-3) :179–198, 1977.
- [Sco78] Peter G. Scott. Subgroups of surface groups are almost geometric. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3) :555, 1978.
- [Sco85] Peter G. Scott. Correction to “Subgroups of surface groups are almost geometric”. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2) :217, 1985.
- [SS90] Peter G. Scott and Gadde A. Swarup. Geometric finiteness of certain Kleinian groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 109(3), 1990.
- [Sta71] John R. Stallings. *Group theory and three-dimensional manifolds*. Yale University Press, 1971.
- [Swa73] Gadde A. Swarup. Finding incompressible surfaces in 3-manifolds. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3) :441, 1973.
- [Thu79] William P. Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University, 1979.
- [Thu82] William P. Thurston. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 6(3) :357–381, 1982.
- [Thu86a] William P. Thurston. Hyperbolic structures on 3-manifolds, II : Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle. *arXiv :math/9801045v1 [math.GT]*, 1986.
- [Thu86b] William P. Thurston. A norm for the homology of 3-manifolds. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 59(339) :99–130, 1986.

- [Wal68] Friedhelm Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *The Annals of Mathematics*, 87(1) :56–88, 1968.
- [Wis04] Daniel T. Wise. Cubulating small cancellation groups. *Geometric and Functional Analysis*, 14(1) :150–214, 2004.
- [Wis09] Daniel T. Wise. Research announcement : the structure of groups with a quasiconvex hierarchy. 2009.
- [Wis12] Daniel T. Wise. The structure of groups with a quasiconvex hierarchy (preprint). 2012.

