



HAL
open science

Modélisation objective de la localisation des déformations et de la fissuration des structures en béton soumises à des chargements statiques ou dynamiques

Cedric Giry

► **To cite this version:**

Cedric Giry. Modélisation objective de la localisation des déformations et de la fissuration des structures en béton soumises à des chargements statiques ou dynamiques. Autre. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENI074 . tel-00697769

HAL Id: tel-00697769

<https://theses.hal.science/tel-00697769>

Submitted on 16 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Matériaux, Mécanique, Génie civil, Electrochimie**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée et soutenue publiquement par

Cédric GIRY

Thèse dirigée par **Jacky MAZARS** et
codirigée par **Frédéric DUFOUR**

préparée au sein du **Laboratoire Sols, Solides, Structures, Risques 3SR**
dans l'École Doctorale **INGENIERIE - MATERIAUX, MECANIQUE,
ENVIRONNEMENT, ENERGETIQUE, PROCEDES, PRODUCTION (I-MEP²)**

Modélisation objective de la localisation des déformations et de la fissuration dans les structures en béton armé.

Soutenue le **10 Novembre 2011**, devant le jury composé de :

M. Frédéric RAGUENEAU

Professeur des Universités, ENS Cachan, Président

M. Gilles PIJAUDIER-CABOT

Professeur des Universités, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Rapporteur

M. Angelo SIMONE

Assistant professeur, TU Delft, Rapporteur

M. Panagiotis KOTRONIS

Professeur des Universités, EC Nantes, Examineur

M. Pierre PEGON

EC/JRC/ELSA, Ispra, Examineur

M. Jacky MAZARS

Professeur des Universités, Grenoble INP, Directeur de thèse

M. Frédéric DUFOUR

Professeur des Universités, Grenoble INP, Co-directeur de thèse



Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu mes encadrants de thèse :

- Jacky Mazars, pour qui j'ai eu l'honneur d'être le dernier thésard de sa longue carrière riche et brillante et qui a su me guider tout au long de ces 3 années. Je le remercie pour sa gentillesse, ses conseils pertinents et son soutien dans les derniers mois compliqués de la thèse.
- Frédéric Dufour à qui je dois beaucoup de ce travail. Je le remercie pour tout le savoir qu'il m'a transmis, pour la confiance qu'il m'a accordée, sa disponibilité que ce soit pour échanger nos idées ou bien pour la relecture parfois fastidieuse de mes travaux. Je le remercie enfin pour tous les moments passés en dehors de la recherche et qui font que les encadrants deviennent avant tout des amis.

Je souhaite également associer à ces remerciements Panos Kotronis qui m'a encadré au début de ma thèse, un moment toujours particulier pour un travail de longue haleine. Nos routes se sont ensuite un peu éloignées mais c'est toujours un réel plaisir de le retrouver pour discuter.

J'aimerais également remercier particulièrement Gilles Pijaudier-Cabot et Angelo Simone pour avoir accepté de rapporter ma thèse et pour les commentaires qu'ils ont pu faire. Je remercie les membres du Jury qui ont accepté de lire ce manuscrit et d'assister à ma soutenance de thèse : Frédéric Ragueneau, que je remercie particulièrement pour avoir présider ce Jury de thèse, Pierre Pegon et Panos Kotronis.

La thèse c'est également une aventure humaine et je ne remercierai jamais assez tout mes amis grenoblois pour ces trois belles années. Merci au trio de choc Lolo, Ludo et Steph pour tous les bons moments partagés ensemble, autour d'un verre, d'un instrument de musique, d'un velo, d'une piste de course à pieds, d'un bon repas ... et pour toutes les aides diverses qu'ils ont pu m'apporter. Merci à mes premiers co-bureau Jeff et Ludo pour l'accueil qu'il m'ont fait et qui m'a permis de débiter cette belle aventure et Merci à Noémie, François, Forent, Cédric, Clément, Antoine, Jérôme, Jérónimo ... et j'en oublie encore beaucoup, pour l'ambiance si sympathique qu'il y a eu au cours de ces 3 années que ce soit au labo ou à l'extérieur.

Je remercie également les informaticiens et les secrétaires successives du 3S-R qui permettent que tout se déroule au mieux au quotidien et ce n'est pas toujours facile. Je tiens aussi à remercier mes plus anciens amis Agnès, Claire, Olivier et Vivien qu'il est toujours bon de revoir.

Pour finir, un grand merci à ma famille et particulièrement à mes parents qui ont toujours été à mes côtés tout au long de cette thèse, je leur dois beaucoup.

Dans une problématique d'analyse de la durabilité des structures en béton armé, la quantification de la localisation des déformations et des propriétés des fissures sont deux points clés.

Ce travail présente une méthode permettant, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, d'améliorer la description de l'évolution de la localisation des déformations. En se basant sur une approche continue du problème, l'évolution des nonlinéarités dans le béton est décrite au travers d'un modèle d'endommagement régularisé. Pour améliorer la description de la localisation des déformations, une modification de la méthode de régularisation nonlocale intégrale sur les variables internes est proposée. L'influence de l'état de contrainte sur les interactions nonlocales est introduite dans la régularisation, afin de prendre en compte la dégradation de la structure ainsi que l'influence des conditions aux limites sur les interactions nonlocales.

Cette méthode, implantée dans le code aux éléments finis Cast3M, est validée sur différents cas tests analysant l'évolution des nonlinéarités de l'enclenchement de l'endommagement jusqu'à la rupture et permet notamment de résoudre des pathologies identifiées pour la méthode nonlocale originale. La comparaison avec des résultats expérimentaux montre également la capacité du modèle à décrire l'évolution de la fissuration dans une structure.

Le modèle développé est ensuite utilisé pour analyser le comportement de structures en béton armé et sert de base pour introduire une description de la fissuration dans une modélisation simplifiée de type poutre multifibre. A partir de calcul 3D sur des éléments en béton armé utilisant le modèle développé, une loi uniaxiale est identifiée pour déterminer la fissuration dans une fibre en fonction de l'énergie dissipée par le modèle d'endommagement. Une comparaison avec des résultats expérimentaux est effectuée et montre la capacité de cette approche simplifiée à estimer la fissuration.

For the durability analysis of reinforced concrete structures, the modelling of strain localization and the estimation of cracking properties are hot topics.

This work introduces a method allowing, in the framework of continuous mechanics, to improve the description of the evolution of strain localization. Based on a continuous description of the problem, the evolution of nonlinearities in concrete is described with a regularized damage model. In order to improve the description of strain localization, a modification of the nonlocal integral regularization method is proposed. The influence of the stress state on the nonlocal interactions is introduced in the regularization method, in order to take into account the degradation of the structure (decrease of the bearing capacities) as well as the influence of free boundary conditions.

This method, implemented in the finite element code Cast3M, is validated against several cases of study, by analyzing the evolution of nonlinearities from damage initiation up to failure. It allows solving several pathologies pointed out for the original nonlocal method. The comparison with experimental results shows also the capacity of the proposed model to describe the evolution of cracking in a structure.

Then, the model developed is used to analyse the behaviour of reinforced concrete structures and to develop a method to quantify cracking in a multifiber beam element modelling. From 3D calculation on reinforced concrete element with the new nonlocal model developed, a uniaxial law is identified in order to estimate cracking as a function of the energy dissipated by the damage model. A comparison with experimental data is performed and shows the potentiality of this simplified approach to estimate cracking.

Remerciements	i
Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	x
Table des figures	xiv
Liste des tableaux	xv
Chapitre 1 Introduction générale	1
1.1 Problématique et contexte de l'étude	1
1.2 Approche scientifique et objectifs	2
1.3 Organisation du manuscrit	3
Chapitre 2 Description du problème mécanique	1
2.1 Formulation du problème aux conditions limites	1
2.2 Description du comportement de matériaux quasi-fragiles	2
2.2.1 Les matériaux quasi-fragiles vus expérimentalement	2
2.2.2 Modélisation des matériaux quasi-fragiles	4
2.2.2.1 Mécanique de la rupture	5
2.2.2.2 Modèle de fissure fictive	6
2.2.2.3 EXtended Finite Element Method (XFEM)	6
2.2.2.4 Théorie de la bande de fissuration	7
2.2.2.5 Modèles de fissuration répartie	8
2.2.2.6 Modèles d'endommagement	8
2.3 Méthode de résolution du problème mécanique	14
2.3.1 Pilotage en déplacement	17

2.3.2	Pilotage en longueur d'arc	17
2.4	Modélisation objective de la localisation	19
2.4.1	Localisation dans les milieux adoucissants	19
2.4.2	Analyse simplifiée de la localisation dans une barre	20
2.4.3	Méthode de régularisation	22
2.4.3.1	Régularisation énergétique : Méthode de Hillerborg	22
2.4.3.2	Régularisation par enrichissement cinématique	23
2.4.3.3	Régularisation nonlocale de variables internes	24
Chapitre 3 Modèle nonlocal intégral basé sur l'état de contrainte		29
3.1	Pathologies des modèles nonlocaux de variables internes	29
3.1.1	Amorçage de l'endommagement en présence de singularité géométrique	29
3.1.2	Description des interactions nonlocales proche d'un bord	33
3.1.3	Description des interactions nonlocales à la rupture	36
3.2	Vers une évolution du modèle intégral nonlocal	38
3.2.1	Modification de la régularisation en gradient	38
3.2.2	Modification de modèles d'endommagement nonlocaux en fonction de l'endommagement	39
3.2.3	Modification de modèles d'endommagement nonlocaux à partir de la micromécanique	41
3.3	Modèle nonlocal intégral basé sur l'état de contrainte	45
3.3.1	Analyse des interactions nonlocales	45
3.3.2	Définition d'une longueur interne évolutive	46
3.3.3	Implantation numérique du modèle	49
3.3.3.1	Introduction de la régularisation nonlocale basée sur l'état de contrainte dans le schéma de résolution	49
3.3.3.2	Spécificités numériques liées à la régularisation nonlocale basée sur l'état de contrainte	51
Chapitre 4 Analyse de la fissuration par le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte		53
4.1	Description du champ nonlocal sous fort gradient et conséquence sur les effets d'échelle	53
4.1.1	Description de l'enclenchement de l'endommagement en pointe d'entaille	53
4.1.2	Analyse d'effets d'échelle.	56
4.1.2.1	Effet d'échelle sur des poutres non entaillées	57
4.1.3	Effet d'échelle sur des poutres entaillées	59
4.1.4	Identification des paramètres du matériau	60
4.2	Propagation de l'endommagement en présence d'un bord	63

4.2.1	Test aux barres d'Hopkinson	63
4.2.2	Bande de cisaillement.	64
4.3	Description de grandeurs locales au travers de la zone de fissuration . . .	73
4.3.1	Description de l'endommagement à la rupture	73
4.3.1.1	Comportement global	74
4.3.1.2	Description de l'évolution de la zone de localisation	74
4.3.1.3	Post-analyse continu discret : estimation de la fissuration	76
4.3.2	Fissuration	79
4.3.3	Perspectives sur la transition continu-discret	82
Chapitre 5	Modélisation objective de la localisation des déformations dans les structures en béton armé	85
5.1	Description de la localisation des déformations dans les structures en béton armé	85
5.1.1	Essai de tirant en béton armé	86
5.1.1.1	Analyse en aveugle du comportement	87
5.1.1.2	Analyse globale	91
5.1.1.3	Analyse de la fissuration	92
5.1.2	Description simplifiée de la liaison acier-béton : Application à un essai 3D de tirant armé	98
5.1.2.1	Modélisation continue de la liaison acier-béton par un modèle d'endommagement	99
5.1.2.2	Analyse 3D d'un essai de tirant à double traction	102
5.2	Enrichissement d'une méthode simplifiée pour l'estimation de la fissuration	107
5.2.1	Élément poutre Timoshenko multifibre	107
5.2.2	Enrichissement de l'élément poutre Timoshenko multifibre pour la détermination de la fissuration	111
5.2.3	Analyse d'une poutre en béton armé en flexion 4 points par une méthode simplifiée	115
Chapitre 6	Conclusions et perspectives	125
6.1	Conclusions	125
6.2	Perspectives	129
Annexe A	Application du multifibre à l'analyse sismique d'une structure en béton armé	133
A.1	Analyse modale	134
A.2	Analyse dynamique nonlinéaire	135
Annexe B	Influence de la longueur minimale imposée sur la réponse mécanique d'une barre en traction	139

Bibliographie

148

2.1	Damage field.	3
2.2	Damage field.	4
2.3	Modèle de Hillerborg <i>et al.</i> [1976].	6
2.4	Comparaison d’approches continue et discontinue pour modéliser la zone de fissuration (Bažant et Oh [1983]).	7
2.6	Loi d’évolution contrainte-déformation de Mazars pour une sollicitation uniaxiale. 10	10
2.8	Loi d’évolution contrainte déformation de Peerlings pour une contrainte uniaxiale. 12	12
2.9	Illustration des limites du pilotage en force et en déplacement pour des matériaux quasi-fragiles.	15
2.10	Illustration d’un point limite charge-décharge sur l’évolution du comportement global.	19
2.13	Exemple de réponses possibles pour la barre en traction.	21
2.15	Barre en traction uniaxiale : phénomène de blocage de la contrainte pour une régularisation nonlocale intégrale sur l’endommagement (1 : réponse homogène ; 2 : réponse régularisée en endommagement.)	25
3.1	Spécimen entaillé en traction simple	30
3.2	Repère associé à la pointe de l’entaille	30
3.4	Champ de déformation équivalente nonlocale	32
3.5	Influence de la longueur interne sur la position du maximum.	32
3.7	Essai aux barres d’Hopkinson.	34
3.8	Barres d’Hopkinson : Influence de l_0 sur la position du maximum du champ de déformation équivalente nonlocale.	35
3.9	Barre d’Hopkinson : Evolution du profil d’endommagement au cours de l’essai. 35	35
3.11	Barre en traction : Evolution de la force en fonction du déplacement. Objectivité des résultats vis-à-vis du maillage.	37
3.13	Interaction entre 2 fissures (Bažant [1994]).	41
3.14	Analyse micromécanique (Pijaudier-Cabot <i>et al.</i> [2004]).	42
3.15	Analyse micromécanique d’un milieu semi-infini (Pijaudier-Cabot et Dufour [2010]).	44
3.16	Représentation 3D d’une surface isovaleur de $\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s}))$ ($\sigma_I(\mathbf{s}) = f_t, \sigma_{II}(\mathbf{s}) = 0, 5.f_t, \sigma_{III}(\mathbf{s}) = 0, 2.f_t$)	47
3.17	Exemple de fonction poids modifiée en fonction de l’état de contrainte.	48
3.18	Schéma d’implémentation du modèle d’endommagement nonlocal basé sur l’état de contrainte (pas k, itération n).	49

3.19	Zone d'influence d'un point en \mathbf{x}_i pour un état de contrainte quasi-uniaxial ($\sigma_2(\mathbf{x}_i) \simeq 0$).	52
4.1	Eprouvette entaillée en traction	54
4.2	Damage field.	54
4.3	Damage field.	55
4.4	Poutre non entaillée en flexion 3 points	57
4.5	Maillage de la grande poutre non entaillée.	57
4.6	Flexion 3 points sur poutre non entaillée : Courbe force-déplacement pour les 3 tailles de poutres (Petite, Moyenne et Grande) et les 2 méthodes de régularisation (NLOR et SBNL)	58
4.7	Poutre entaillée en flexion 3 points	59
4.8	Maillage de la grande poutre entaillée.	59
4.9	Endommagement.	62
4.10	Damage field.	64
4.11	Damage field.	65
4.12	Géométrie et conditions limites pour le spécimen en compression ($h = 60$ mm ; zone affaiblie : $h/10 \times h/20$)	65
4.13	Comportement global du spécimen en compression pour les 2 méthodes de régularisation.	66
4.14	Endommagement.	67
4.15	Endommagement.	68
4.16	Domaine de régularisation nonlocal proche de l'axe de symétrie pour le problème de la bande de cisaillement.	68
4.17	Endommagement.	69
4.18	Damage field.	70
4.19	Endommagement.	71
4.20	Damage field.	72
4.21	Damage field.	72
4.22	Barre en traction : Evolution force-déplacement pour les 3 tailles de maille avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte et le modèle nonlocal original.	74
4.24	Barre en traction : Profil d'endommagement à la rupture pour différentes tailles de maille avec le modèle d'endommagement basé sur l'état de contrainte.	76
4.25	Barre en traction : Déformation maximale après rupture de la barre pour différentes tailles de maille et les 2 méthodes de régularisation	76
4.26	Profil de déplacement analytique de la discontinuité forte	77
4.27	Profil de déformation analytique de la discontinuité forte	77
4.28	Produit de convolution du profil de déformation analytique de la discontinuité forte avec une fonction Gaussienne.	77
4.29	Ouverture de fissure en fonction du déplacement aux extrémités de la barre.	78
4.30	Erreur relative en fonction de l'ouverture de fissure.	79
4.32	Flexion 3 points entaillée : Evolution de la force appliquée en fonction du CMOD (Crack Mouth Opening Displacement). Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux.	80
4.33	Méthode de recherche de la position de la fissure.	81
4.35	Flexion 3 points entaillée : Comparaison des approches pour l'estimation de l'ouverture de fissure (CMOD : $200 \mu m$).	82
5.1	Répartition des aciers dans le tirant	86

5.3	Résultats expérimentaux : Faciès de fissuration pour une déformation de 0,3 %/00. (Mivelaz [1996])	87
5.4	Première analyse : Force en fonction de la déformation imposée.	88
5.6	Distribution aléatoire de la déformation seuil de première fissuration ε_{D_0}	90
5.7	Zone de moyenne nonlocale proche des armatures	91
5.8	Seconde analyse : Force en fonction de la déformation imposée.	92
5.10	Procédure de recherche topologique de la position de la fissure	93
5.12	Recherche des points appartenant à la fissure et aux limites de la zone de fissuration sur le profil orthogonal.	96
5.13	Tirant armé : Superposition du champ D et des fissures détectées.	96
5.14	Evolution de l'ouverture moyenne pour les 2 premières fissures en fonction de la déformation imposée	97
5.15	Représentation de la zone d'influence de l'armature sur la fissure traversante suivant la dimension du calcul.	97
5.16	Exemple d'évolution de la fissuration sur la hauteur de la poutre pour la première fissure.	98
5.17	Définition de zones dans la liaison acier-béton.	99
5.18	Equilibre de l'élément béton armé.	100
5.19	Equilibre de la zone de béton dans la liaison acier-béton.	102
5.20	Evolution de la distance x_{max} en fonction du paramètre A_t	102
5.21	Evolution de la force en fonction de l'allongement de la barre pour $A_{t_g} = 0,6$	103
5.22	Endommagement.	104
5.23	Endommagement.	104
5.24	Evolution de la force en fonction de l'allongement de la barre avec un modèle d'endommagement nonlocal intégral (nonlocal original et nonlocal basé sur l'état de contrainte).	105
5.25	Faciès d'endommagement à la première fissure pour le modèle d'endommagement nonlocal original.	105
5.26	Faciès d'endommagement à la première fissure pour le modèle d'endommagement nonlocal basé sur l'état de contrainte.	106
5.27	Principe de fonctionnement de l'élément poutre multifibre.	108
5.28	Description de la localisation des déformations dans une fibre.	110
5.29	Différentes approches pour l'enrichissement de la modélisation.	110
5.30	Schéma de principe du post-traitement du calcul 3D.	113
5.31	Poutre en béton armé en flexion 4 points utilisée pour l'identification de la relation utilisé en post-traitement pour les éléments multifibre	115
5.32	Faciès d'endommagement à la fin du calcul pour la poutre en flexion 4 points avec la zone de localisation utilisée pour le post-traitement.	116
5.33	Evolution au cours du chargement du profil de déformation ((a)) et du profil d'endommagement ((b)) le long de la fibre post-traitée.	116
5.34	Evolution de l'ouverture de fissure en fonction de l'énergie dissipée.	116
5.35	Evolution au cours du chargement du profil de déformation, dans une fibre d'acier traversant une zone de fissuration du calcul 3D volumique.	117
5.36	Evolution de la force en fonction du déplacement imposé. Comparaison modélisation simplifiée/modélisation 3D.	117
5.37	Description des localisations entre le modèle 3D volumique et le modèle poutre multifibre.	118
5.38	Géométrie et armatures de la poutre en flexion 4 points du benchmark Concrack.	118
5.39	Maillage multifibre de la poutre en béton armé.	119

5.40	Evolution de la force par ligne de vérins en fonction de la flèche au centre de la poutre. Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques. . . .	120
5.41	Champ de déformation longitudinale obtenu expérimentalement pour un effort par ligne de vérins de 2250 kN.	120
5.42	Evolution de l'ouverture de fissure expérimentale en fonction de la force par ligne de vérin pour les différentes fissures observées expérimentalement. . . .	121
5.43	Evolution de l'endommagement dans la poutre au cours du chargement (650, 1250 et 2150 kN).	121
5.44	Faciès de fissuration obtenu par posttraitement du calcul multifibre (650, 1250 et 2150 kN).	122
5.45	Evolution de l'ouverture de fissure en fonction de la force par ligne de vérin. Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques.	122
A.1	Maquette SMART.	133
A.2	Damage field.	134
A.3	Damage field.	135
A.4	Exemple d'un signal synthétique utilisé pour le chargement.	136
A.5	Points de mesure en tête de la structure (A, B, C et D).	136
A.6	Damage field.	136
A.7	Damage field.	137
B.2	Barre en traction. Maillage déstructuré.	140
B.3	Comparaison de la réponse globale pour différentes valeurs $l_c(\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})), l_{c0})$ face à une solution référence.	140

4.1	Poutre non entaillée : Force au pic et contrainte nominale pour les 2 méthodes de régularisation.	58
4.2	Poutre non entaillée : Identification de D_b et $f_{r\infty}$ pour les 2 méthodes de régularisation ($\eta = 0,75$).	59
4.3	Poutre entaillée : Force au pic et contrainte nominale pour les 2 méthodes de régularisation.	60
4.4	Poutre entaillée : Identification de D_0 et $Bf_{r\infty}$ pour les 2 méthodes de régularisation.	60
4.5	Comparaison des valeurs de $f_{r\infty}$ obtenues pour les poutres entaillées et non entaillées pour les méthodes nonlocales.	61
5.1	Paramètres matériaux et modèles pour l'essai du tirant armé	88

1.1 Problématique et contexte de l'étude

Les structures en béton occupent de nos jours une place importante dans le paysage de la construction française et plus généralement dans le monde entier. Le béton présente l'avantage d'avoir un faible coût, comparé à d'autres matériaux du Génie Civil, et son élaboration est relativement simple. Les enjeux et demandes actuels dans le domaine du Génie Civil sont forts vis-à-vis de la maîtrise de la durabilité de l'existant et des constructions futures. Les contraintes environnementales et économiques amènent à optimiser la mise en œuvre du matériau, afin de limiter son empreinte carbone élevée et son coût. De plus, les performances mécaniques demandées tendent à s'accroître avec notamment le rehaussement du niveau de sismicité sur une grande partie du territoire français. Enfin, le parc des structures de grande ampleur (e.g. barrages, ponts, centrales nucléaires...) devient vieillissant et nécessite une attention particulière pour maintenir son bon fonctionnement et préparer son possible remplacement.

La sûreté exigée est de plus en plus élevée pour des applications qui tendent à se diversifier. Des problématiques telles que la fuite de produits dangereux au travers d'une paroi en béton ou bien encore la corrosion des armatures dans un bloc en béton armé, nécessitent une expertise et une analyse qui va au-delà de la simple estimation de la résistance globale d'une structure. En effet, pour ce type d'analyse, des valeurs locales relatives à la fissuration doivent pouvoir être déterminées pour mener par la suite des études de perméabilité, par exemple. De plus, toute action de prévention ou de réparation ne peut être optimale qu'en ayant la connaissance de la dégradation à traiter.

De part les enjeux exposés, la problématique de la modélisation de structures en béton est étudiée depuis plusieurs décennies et elle a été l'objet de nombreux développements. Au niveau de l'ingénierie, des codes de calcul (EUROCODE, CEB-FIB...) existent et permettent d'estimer des valeurs locales telles que l'espacement, l'ouverture de fissure... Cependant, bien

que les formules à disposition soient pertinentes pour des structures courantes, elles montrent leurs limites dans le cas d'analyses d'ouvrages exceptionnels, en terme de géométrie ou bien encore de sollicitations appliquées. En effet, les formules à disposition sont généralement semi-empiriques, avec une identification de paramètres, faite avec des essais en laboratoire sur des éléments courants de structure, à petite échelle. Ainsi, la communauté de l'ingénierie en Génie Civil montre une réelle attente, vis-à-vis de cette problématique. Dans ce cadre là, le projet national CEOS.fr (Comportement et Evaluation des Ouvrages Spéciaux Fissuration Retrait) a été mis en place dans le but de faire progresser les outils et les pratiques de l'ingénierie vis-à-vis de l'estimation de la fissuration dans les éléments de structures en béton armé. De plus, les développements proposés pour répondre à cette problématique s'insèrent dans le cadre du projet national MEFISTO (Maîtrise durable de la Fissuration des InfraStructures en béton), soutenu par l'Agence National de la Recherche.

1.2 Approche scientifique et objectifs

Face à la taille des structures à considérer, le développement de modèles pour la réalisation "d'expérimentations numériques" montre tout son sens dans le domaine du Génie Civil, permettant d'être une aide majeure pour la conception d'ouvrages sûrs et durables. Dans ce contexte, le contrôle de la fissuration est un enjeu majeur et les modèles qui lui sont liés définissent le domaine dans lequel s'inscrit ce travail. Face aux attentes exposées précédemment et afin de répondre aux demandes définies par le projet national, des objectifs peuvent être identifiés pour établir un cahier des charges à remplir par le modèle à développer.

- Le modèle proposé doit pouvoir caractériser le comportement global d'une structure, à partir de caractéristiques matériau identifiées sur des essais en laboratoire (i.e. représentation des effets d'échelle).
- Le modèle doit être capable de suivre l'évolution des nonlinéarités au sein de la structure, de l'enclenchement de la microfissuration jusqu'à l'obtention d'une macrofissure.
- Une solution peu coûteuse en terme de temps de calcul doit être également mise en place pour une application en ingénierie.

Le béton, de par sa composition, est un matériau relativement complexe à étudier, avec la présence de diverses échelles (e.g. C-S-H, sable, gravier...). Les limitations des moyens de calcul actuels ainsi que l'échelle des structures à étudier, amènent assez logiquement à considérer le niveau macroscopique comme échelle la plus pertinente pour étudier l'évolution des nonlinéarités au sein de la structure.

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, de nombreux modèles ont été développés pour décrire l'évolution du comportement du matériau béton avec une possibilité de caractériser la fissuration par post-traitement des champs cinématiques. Le caractère adoucissant des matériaux quasi-fragiles nécessite l'utilisation de modèles avec une longueur interne représentative des interactions à l'échelle de la microstructure du matériau (i.e. introduction d'une méthode de régularisation). Ces interactions sont généralement considérées comme isotropes (indépendantes de la direction de la sollicitation) et constantes quel que soit l'état du matériau. Par la suite, on s'intéressera plus particulièrement aux modèles nonlocaux de variables internes.

Ces méthodes de régularisation, bien qu'indispensables pour répondre aux problèmes liés aux

modèles locaux adoucissants, montrent certaines pathologies. La description faite des champs nonlocaux de variables internes dans des zones à fort gradient de contrainte ou bien encore proche d'un bord, aboutit à un mauvais positionnement de l'enclenchement de l'endommagement. De plus, à la rupture, les champs ne sont pas bien décrits car au travers de la zone de fissuration, les interactions, entre points de part et d'autre de la macrofissure, sont maintenues.

Les développements proposés, pour améliorer la description de l'évolution de la localisation des déformations et de la fissuration dans le béton, vont donc s'attacher à répondre à ces différentes pathologies identifiées.

1.3 Organisation du manuscrit

Le présent document s'articule en quatre parties.

Le chapitre 2 présente le cadre mécanique général utilisé, pour les développements et les études proposés par la suite. Les principales caractéristiques expérimentales du béton sont rappelées pour des chargements simples. A la suite, divers modèles matériaux permettant de décrire le comportement nonlinéaire du béton sont présentés, en s'intéressant plus particulièrement à un modèle d'endommagement isotrope. La problématique de la localisation des déformations pour les milieux adoucissants est ensuite rappelée, avant de présenter plusieurs méthodes permettant de régulariser le problème aux conditions limites, avec notamment le modèle nonlocal intégral qui est utilisé par la suite.

Dans le chapitre 3, diverses pathologies du modèle nonlocal intégral sont exposées. Une proposition d'amélioration de ce modèle est développée, en ayant pour objectif, une meilleure description de l'évolution de la localisation des déformations, de l'enclenchement des nonlinéarités jusqu'à la rupture.

Dans le chapitre 4, différents cas tests sont étudiés pour comparer le comportement du modèle nonlocal original à celui du modèle nonlocal modifié. Ces études, en lien avec les pathologies observées pour le modèle nonlocal original, analysent entre autres, l'influence d'un bord, ou bien encore, la description jusqu'à la rupture de l'évolution de la localisation dans la zone de fissuration.

Dans le chapitre 5, le cadre mis en place pour décrire le comportement nonlinéaire du béton est utilisé et étendu à l'étude d'éléments de structures en béton armé. Une approche continue, utilisant un modèle d'endommagement nonlocal modifié, est proposée pour décrire l'interface acier-béton. Enfin, une démarche est développée, afin de permettre une estimation de la fissuration, à partir d'une modélisation simplifiée de type poutre multifibre.

En conclusion, un bilan des travaux est effectué et une mise en parallèle avec les objectifs de départ est proposée. Des pistes d'investigation et d'amélioration possible du modèle sont également mises en perspective.

Description du problème mécanique

Ce chapitre a pour but de définir le cadre général mécanique des travaux qui sont présentés par la suite. Une présentation non exhaustive de modèles parmi les plus couramment utilisés pour décrire le comportement non linéaire de matériaux quasi-fragiles est effectuée avec une description de méthodes numériques mises en œuvre pour piloter l'évolution du comportement de structures utilisant ce type de matériau. La problématique de l'objectivité des résultats pour les milieux adoucissants est abordée, pour s'intéresser par la suite aux modèles régularisés et notamment les modèles non locaux en gradient et intégral.

2.1 Formulation du problème aux conditions limites

Le cadre général des milieux continus est considéré pour définir les problèmes mécaniques étudiés, avant de s'intéresser par la suite à certains points particuliers permettant notamment de décrire le comportement de structures. Un domaine d'étude Ω de contour Γ est considéré avec \mathbf{F} les forces extérieures et \mathbf{g} les forces gravitaires. L'équilibre du solide s'écrit alors :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} d\Omega = 0 \quad (2.1)$$

avec ρ , la masse volumique. En exprimant \mathbf{F} en fonction du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et en utilisant le théorème de la divergence, on doit respecter localement, en tout point de Ω :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (2.2)$$

On multiplie cette équation par un champ de déplacement virtuel \mathbf{u}^* et on intègre sur le domaine Ω afin d'obtenir le principe des travaux virtuels :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^* \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (2.3)$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ le tenseur des déformations associé au champ de déplacement virtuel. Les champs admissibles doivent également respecter les conditions limites imposées sur la surface Γ :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \quad \text{sur } \Gamma_{\mathbf{F}} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{sur } \Gamma_{\mathbf{u}} \quad (2.4)$$

L'équation 2.3 peut se réécrire de manière compacte, en introduisant les travaux virtuels liés aux forces externes W_{ext}^* et aux forces internes W_{int}^* :

$$W_{int}^* = W_{ext}^* \quad (2.5)$$

$$W_{int}^* = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega \quad (2.6)$$

$$W_{ext}^* = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^* \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (2.7)$$

Par la suite, le cadre d'étude se limite à des chargements d'amplitude relativement faible, permettant ainsi de se placer, de manière raisonnable, dans une hypothèse de petites perturbations. Le tenseur des déformations peut alors s'exprimer en fonction du déplacement sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (2.8)$$

Ce cadre d'étude ne présuppose pas du comportement du matériau. Il est donc applicable par la suite, quel que soit le modèle de comportement non linéaire choisi.

Dans ce formalisme général, le comportement du matériau est introduit au travers de relations reliant les contraintes et les déformations : $\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_i, \dots)$, avec α_i des variables intrinsèques associées au matériau et caractérisant son état au cours du temps.

2.2 Description du comportement de matériaux quasi-fragiles

Après avoir défini le cadre général du problème mécanique, la description du comportement de matériaux quasi-fragiles est effectuée. Dans un premier temps, une brève description du comportement relevé expérimentalement pour ce type de matériau est proposée, en s'attachant plus particulièrement au béton. Cette analyse permet d'illustrer, par la suite, des modèles qui ont été développés ces 50 dernières années.

2.2.1 Les matériaux quasi-fragiles vus expérimentalement

Les matériaux quasi-fragiles ont la particularité de présenter de nombreuses échelles (e.g. pour le béton : C-S-H, sable, gravier...), ce qui les rendent relativement complexes à décrire

et étudier dans leur comportement jusqu'à la rupture. Il est donc nécessaire de se définir au préalable une échelle d'étude, permettant ainsi d'obtenir des informations pertinentes pour développer des modèles par la suite. Dans une problématique d'analyse de structure, on se place généralement au niveau macroscopique (i.e. spécimen testé de taille plusieurs fois supérieure à la plus grande hétérogénéité du milieu), en considérant une moyenne des mécanismes qui peuvent se développer aux échelles inférieures. En revanche, si le comportement élastique et microfissuré peut être représenté par des techniques d'homogénéisation, cela n'est pas possible pour la macrofissuration qui est une surface qui se propage dans un volume (i.e. la dimension caractéristique d'une macrofissure est nulle et ne peut donc pas être associée à une échelle donnée). Elle va donc activer des phénomènes jusqu'à la plus petite échelle, qu'il est nécessaire de faire remonter au travers de modèles régularisés. Les essais classiques de caractérisation sur ces tailles d'échantillon (traction simple, traction indirecte, compression simple...) permettent d'identifier le comportement global d'une "mini structure" de béton et montrent notamment une réponse très dissymétrique entre la traction et la compression avec une illustration sur la figure 2.1. La traction directe reste complexe à piloter expérimentalement, avec l'apparition notamment de phénomènes de "snap-back" dus au caractère fragile du matériau (voir partie 2.3). Des tests introduisant de la traction indirecte (e.g. essai de fendage, flexion 3 points) sont le plus souvent utilisés pour identifier le comportement en traction avec des paramètres identifiés qui peuvent différer entre le type de sollicitation (voir analyse en partie 5.1.1).

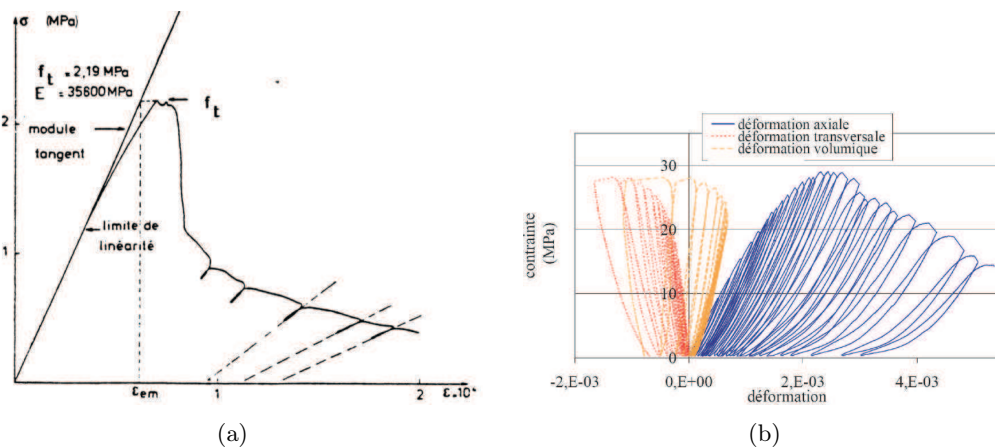


FIGURE 2.1: Comportement du béton sous sollicitations uniaxiales : (a) Traction ([Terrien, 1980]) et (b) Compression cyclique (Choinska [2006]).

Dans le cas de la traction, le pic est atteint pour une contrainte relativement faible à la fin du régime élastique linéaire, pour faire directement place ensuite, à la phase post-pic. Les nonlinéarités se développent dans une zone de fissuration de largeur non nulle avec une microfissuration diffuse autour de la macrofissure. Dans le cas de la compression, après une phase élastique, une première phase nonlinéaire est observée avec un écrouissage positif et une microfissuration diffuse. Dans une deuxième phase nonlinéaire, une diminution de la résistance est observée avec une forte localisation des déformations.

Il est également intéressant pour développer un modèle, de s'intéresser à l'échelle inférieure, pour analyser les mécanismes qui entraînent la dégradation du matériau. Les matériaux quasi-fragiles se caractérisent notamment par une phase de développement diffus des nonlinéarités (microfissuration, décohésion...) sur une certaine largeur définissant la zone de fissuration, avant de présenter une localisation des déformations à la rupture (bande de cisaillement, macrofissure...). Cette évolution à l'échelle microscopique peut notamment être mise en valeur par des essais acoustiques qui permettent de repérer l'apparition de nouvelles microfissures.

La figure 2.2 donne un exemple d'évolution des événements acoustiques dans une poutre en mortier soumise à une flexion 3 points, avec en parallèle, le comportement global pour observer le moment de développement des microfissures au cours du chargement.

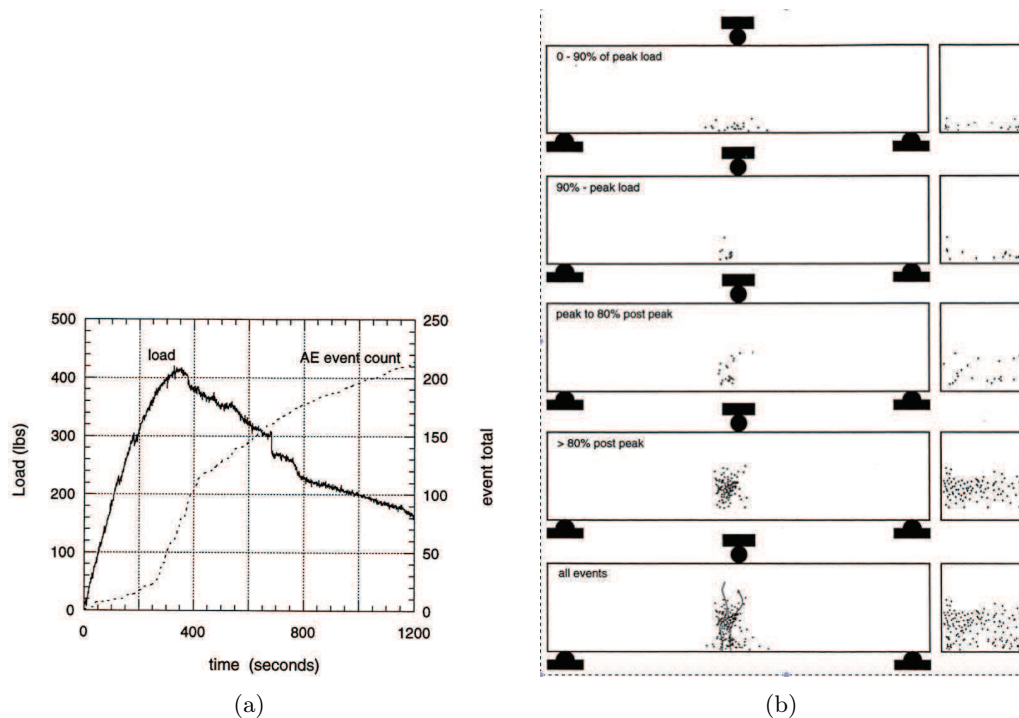


FIGURE 2.2: Analyse du comportement : (a) Niveau macroscopique, évolution force en fonction du déplacement, et (b) Niveau microscopique, évolution des événements acoustiques durant l'essai (Landis [1999]).

Pour un mortier, bien que la réponse globale puisse être différente suivant la sollicitation (e.g. traction, compression...), à l'échelle inférieure le fonctionnement est relativement semblable. Une première phase montre des mécanismes de microfissuration diffuse (i.e. événements acoustiques dispersés sur une certaine largeur) pour ensuite, par coalescence, se localiser en une macrofissure avec une localisation forte des déformations (i.e. densité d'événements acoustiques finale élevée le long de lignes correspondant aux macrofissures observés dans le milieu).

2.2.2 Modélisation des matériaux quasi-fragiles

Les matériaux quasi-fragiles étant largement utilisés, dans la construction notamment, il a été rapidement nécessaire de développer des modèles permettant de prédire ou du moins d'analyser le comportement de structures composées de ces matériaux. La problématique relevée précédemment des échelles d'étude considérées est en fait largement imposée par l'aspect modélisation et la capacité à résoudre un problème décrivant les mécanismes apparaissant à l'échelle microscopique en même temps que ceux à des échelles supérieures. Les moyens de calcul actuels ne permettent pas encore de réaliser une description d'une structure en partant de l'échelle la plus basse. Cependant, l'échelle de calcul considérée (niveau macroscopique dans le cas d'étude présent) peut être identifiée à partir de l'analyse du comportement de cellule à l'échelle inférieure (voir par exemple l'exposé de Nemat-Nasser et Hori [1999] pour l'établissement du lien entre les phénomènes à l'échelle microscopique et le comportement

moyen à l'échelle macroscopique)..

A l'échelle mésoscopique, des approches continues ont été développées, cherchant à suivre le développement de la microfissuration en décrivant explicitement les granulats et la matrice cimentaire, comme par exemple les travaux effectués par La Borderie *et al.* [2007]. Des approches discrètes décrivant de manière similaire le matériau quasi-fragile ont également été proposées par le passé (e.g. D'Addetta et Ramm [2006]). Les approches discrètes permettent sans doute de décrire plus facilement, à des échelles inférieures, les interactions entre particules élémentaires. Cependant, il se pose alors le problème de la description géométrique des éléments considérés.

Les échanges entre les échelles peuvent également être considérés au cours de l'analyse en utilisant des approches multiechelle. La description au niveau microscopique peut se faire avec différentes stratégies. Des approches analytiques telle que celle proposée par Pensée *et al.* [2002] s'intéressent à l'évolution de microfissures dans un milieu microfissuré afin de définir un modèle d'endommagement anisotrope à l'échelle macroscopique. Feyel et Chaboche [2000] proposent la méthode des "éléments finis au carré" qui consiste à modéliser les différentes échelles par des éléments finis. Les équations constitutives sont introduites à l'échelle microscopique et par des méthodes d'homogénéisation, la déformation et la contrainte macroscopiques peuvent être calculées. Ce type d'approche permet d'obtenir une information plus riche, à partir de l'analyse à l'échelle micromécanique, tout en gardant une description macromécanique de la structure.

Pour les applications considérées par la suite, l'échelle macroscopique est considérée comme échelle d'étude, afin de limiter les temps de calcul et en considérant que cette échelle présente un niveau de description suffisant pour les structures étudiées. Une présentation non exhaustive de modèles à l'échelle macroscopique, utilisés pour décrire le comportement du béton, est maintenant proposée, en montrant le lien qu'il peut y avoir avec les mécanismes de fissuration à l'échelle mésoscopique.

Une première classe de modèles peut être défini en rassemblant les approches introduisant explicitement la fissure au travers d'une discontinuité.

2.2.2.1 Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture se place dans un état de la structure où il existe déjà des fissures indépendantes les unes des autres. Le travail consiste alors à déterminer les champs de contrainte en pointe de ces fissures, pour par la suite, calculer l'énergie correspondante emmagasinée dans le milieu continu. Pour analyser l'évolution de ces fissures, cette énergie emmagasinée (taux de restitution d'énergie \mathcal{G}) est comparée à une énergie limite (taux de restitution d'énergie critique \mathcal{G}_c) et lorsque cette valeur limite est atteinte, la propagation de fissure est considérée suivant une certaine distance calculée.

Cette approche permet sur des critères énergétiques d'étudier la propagation des fissures dans le milieu. Néanmoins, les champs sont déterminés à partir de fissures préexistantes qu'il faut pouvoir identifier et dans le cadre de la mécanique de la rupture linéaire élastique, la zone microfissurée qui apparaît expérimentalement avant la propagation de la macrofissure n'est pas pris en compte. Ainsi, cette approche ne permet pas de traiter les problèmes d'amorçage des nonlinéarités, ni d'analyser la ruine de petites structures pour lesquelles leur taille caractéristique est proche de la taille de la zone microfissurée.

Ce type de modèle n'est pas utilisé par la suite pour décrire le comportement du béton. Cependant, il fournit des solutions analytiques du champ de contrainte en pointe d'entaille qui peuvent être avantageusement réutilisées pour étudier l'enclenchement des nonlinéarités en

pointe d'entaille (voir chapitre 3). De plus, dans le cas limite où la structure est infiniment grande par rapport à la zone microfissurée, cette approche donne des résultats satisfaisants qui sont notamment utilisés dans l'analyse d'effets d'échelles.

2.2.2.2 Modèle de fissure fictive

A partir des travaux de Barenblatt [1962] qui considère une zone cohésive en front de fissure, Hillerborg *et al.* [1976] proposent d'introduire la zone microfissurée en front de fissure de manière indirecte. Comme l'illustre la figure 2.3, trois zones sont considérées avec pour première zone, la fissure pour laquelle l'ouverture w augmente à contrainte σ nulle. Une deuxième zone qui peut s'apparenter à la zone microfissurée, avec une loi d'évolution de la contrainte en fonction du saut de déplacement (i.e. une nouvelle interface apparaît avec une contrainte non nulle au travers) : $\sigma(w)$. Enfin, la troisième zone correspond à la zone élastique. La fissure se propage dans le milieu élastique en dehors de la zone de fissuration, en considérant un critère en contrainte avec comme seuil limite pour une fissure en mode I, la résistance à la traction du béton f_t .

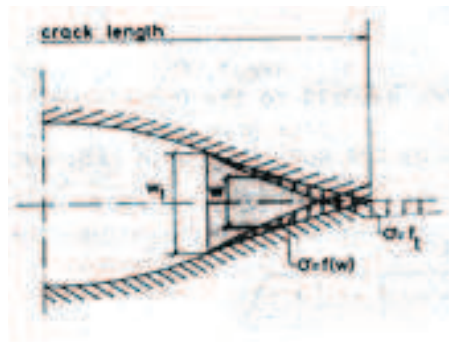


FIGURE 2.3: Modèle de Hillerborg *et al.* [1976].

La dissipation d'énergie qui se produit lors de la dégradation de la structure, à travers l'apparition et la propagation de microfissures, est retranscrite dans la loi d'évolution $\sigma(w)$. Cette méthode permet de décrire explicitement la fissure avec une estimation directe de l'ouverture. Cependant, elle présente également des inconvénients avec la nécessité d'introduire des éléments d'interface pour décrire le saut de déplacement observé, soit en présupposant et donc en imposant initialement le trajet de la fissure, soit en utilisant des techniques de remaillage qui peuvent être lourdes à mettre en place numériquement et coûteuses en temps de calcul. De plus, la définition d'un critère pour le choix de la direction de propagation doit être mise en place car le critère en énergie reste un scalaire et il ne permet pas de prédire la direction de propagation.

2.2.2.3 EXTENDED Finite Element Method (XFEM)

Moes *et al.* [1999] proposent, plus récemment, une méthode d'éléments finis enrichis pour suivre la fissuration, sans avoir recours à un remaillage. La fissure se matérialise par l'introduction d'une level set permettant de décrire la discontinuité en déplacement. Un enrichissement du déplacement est alors introduit pour les noeuds des éléments traversés par la level set. L'approximation du champ de déplacement $u^h(x)$ s'exprime alors (sous une forme simplifiée) :

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} N_i(x)u_i + \sum_{i \in I^*} M_i(x)a_i \quad (2.9)$$

avec I , l'ensemble des noeuds du domaine, I^* , l'ensemble des noeuds de la zone enrichie, $N_i(x)$, les fonctions d'interpolation standards en éléments finis du noeud i , $M_i(x)$, les fonctions enrichies du noeud i , u_i les inconnus en déplacement de la partie relative aux éléments finis au noeud i et a_i les inconnus de l'enrichissement au noeud i . Cette méthode est largement utilisée pour suivre l'évolution d'une fissure dans un milieu. L'implantation de ce type d'approche nécessite néanmoins des changements importants dans le code de calcul pour permettre d'introduire au cours du calcul des degrés de liberté additionnels aux noeuds à enrichir.

Un second groupe de modèles peut être défini, en rassemblant les approches décrivant la fissuration de manière diffuse dans un milieu continu.

2.2.2.4 Théorie de la bande de fissuration

En s'inspirant du modèle d'Hillerborg, Bažant et Oh [1983] proposent de représenter la zone microfissurée et le développement de la macrofissure dans une approche continue, avec le saut de déplacement observé, retranscrit en déformation dans une bande finie de taille non nulle. La figure 2.4 compare l'approche discontinue avec création d'une interface à l'endroit de la zone fissurée et l'approche de la théorie de la bande de fissuration.

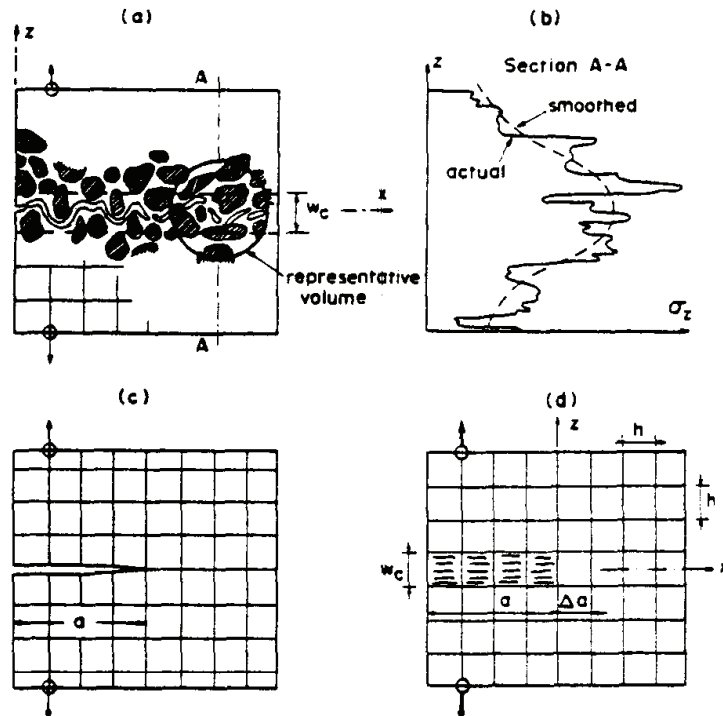


FIGURE 2.4: Comparaison d'approches continue et discontinue pour modéliser la zone de fissuration (Bažant et Oh [1983]).

Dans ce modèle, la loi d'évolution de la zone microfissurée est décrite en contrainte déformation de fissuration : $\sigma(\varepsilon^f)$. En posant l_b , la largeur de la bande de fissuration, l'équivalence avec

le modèle de la fissure fictive est directe avec : $w = l_b \cdot \varepsilon^f$.

2.2.2.5 Modèles de fissuration répartie

Le cadre général des modèles de fissuration répartie considère une décomposition de l'incrément de déformation totale, en une partie liée aux fissures et une autre partie liée au milieu solide entre les fissures : $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^f + \Delta\varepsilon^m$. Depuis les premiers travaux de Rashid [1968], divers développements ont été proposés pour décrire le comportement de matériaux quasi-fragiles avec le modèle de fissuration discrète parmi lesquels on peut citer (Bažant et Gambarova [1980]; Willam *et al.* [1987]; de Borst et Nauta [1985]). Ce type de modèle est largement utilisé avec différentes variantes considérant par exemple une ou plusieurs fissures fixes ou bien encore une fissure tournante (Jirasek et Zimmermann [1998]).

Après avoir passé en revue brièvement plusieurs approches pour décrire le comportement de matériaux quasi-fragiles, des modèles d'endommagement sont présentés plus en détail, étant utilisés par la suite dans les études menées. Ce choix est considéré pour pouvoir modéliser l'enclenchement des nonlinéarités et le développement de la microfissuration qui ne sont pas définis avec des approches discontinues. De plus, bien que les approches continues telles que les modèles de fissuration répartie permettent de décrire ces phases d'évolution des nonlinéarités, elles deviennent relativement complexes à utiliser dans des applications 3D, en considérant une multifissuration ou bien encore des rotations de fissure.

2.2.2.6 Modèles d'endommagement

Les modèles d'endommagement introduisent l'apparition et le développement des nonlinéarités en dégradant la rigidité du matériau. Faisant suite aux travaux de Lemaître et Chaboche [1985] sur les aciers, Mazars [1986] propose d'appliquer la théorie de l'endommagement au béton. Différents types de modèle d'endommagement existent pour représenter divers mécanismes de dégradation apparaissant dans le béton (modèles isotrope, unilatéral, anisotrope, couplé à la plasticité...). Cette partie s'attache à donner un exemple par type de modèle mais ne représente en aucun cas une liste exhaustive des modèles existants.

Modèle d'endommagement isotrope avec critère de Mazars

Le modèle d'endommagement proposé par Mazars correspond à un modèle isotrope avec la représentation de la dégradation de la structure au travers d'une variable scalaire D . La relation contrainte-déformation s'exprime alors de manière générale :

$$\sigma_{ij} = (1 - D)C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.10)$$

avec C_{ijkl} , les composantes du tenseur de rigidité élastique. La variable d'endommagement D évolue au cours du chargement de 0 (matériau sain) à 1 (matériau complètement endommagé) en fonction de la surface de charge dépendant de la déformation notée ε_{eq} : $f(\varepsilon_{eq}, \kappa) = \varepsilon_{eq} - \kappa$. L'évolution de cette surface de charge doit respecter certaines règles et notamment ne croître que lorsque le seuil en déformation actuel est dépassé, c'est à dire que l'endommagement n'évolue pas pendant les phases de décharge ou pendant les phases de charge à des niveaux de déformation inférieurs au niveau maximal κ atteint au cours de l'historique du chargement

($\kappa = \max_t(\kappa, \varepsilon_{eq})$ et $\kappa(t=0) = \varepsilon_{D_0}$ avec ε_{D_0} une valeur seuil) . Ces règles sont retranscrites dans les conditions de Kuhn-Tucker :

$$f \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad \dot{\kappa}f = 0 \quad (2.11)$$

Pour exprimer le critère en fonction de la déformation, diverses expressions peuvent être considérées pour définir une norme avec par exemple, une expression simple ($\varepsilon_{eq} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}}$) ou bien encore en introduisant des fonctions plus complexes de la déformation telles que l'énergie élastique ($\varepsilon_{eq} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}}$).

Dans une application du modèle pour les bétons, Mazars définit un critère en déformation dépendant des déformations d'extension :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (2.12)$$

avec ε_i , les déformations principales et $\langle . \rangle_+$ le symbole de Mac Cauley ($\langle . \rangle_+ = 0$ si $. < 0$ et $\langle . \rangle_+ = .$ si $. > 0$). Ce critère, permettant au travers d'une seule variable de définir un seuil pour les sollicitations en traction et compression simple, est représenté sur la figure 2.5.

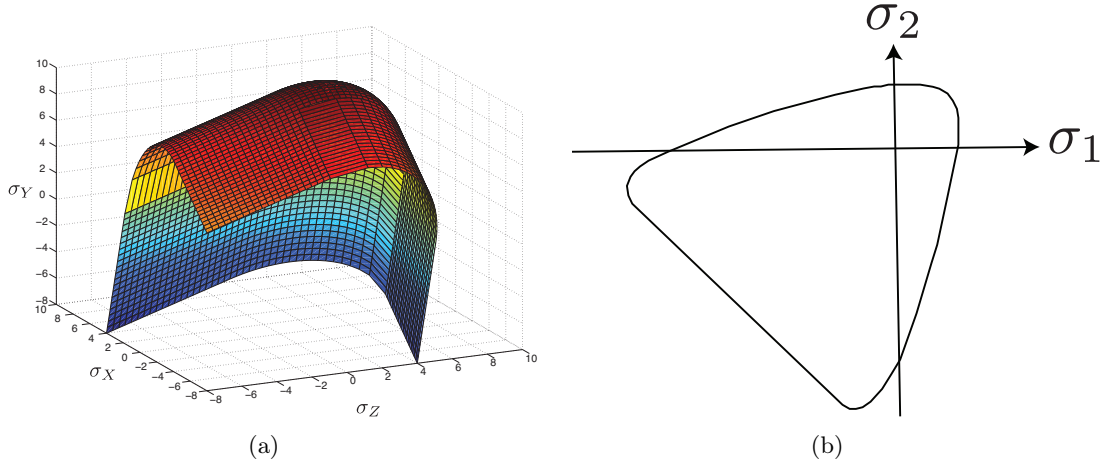


FIGURE 2.5: Critère de Mazars : (a) Surface seuil dans l'espace des contraintes ; (b) Trace dans le plan $\sigma_3 = 0$.

Expérimentalement, il a été montré que les matériaux quasi-fragiles (e.g. céramiques, roches, béton...) présentent un comportement fortement dissymétrique. Pour prendre en compte cet aspect là, Mazars introduit 2 fonctions D_t et D_c retranscrivant respectivement les dégradations liées à la traction et celles liées à la compression. Ces 2 fonctions ont une expression de loi d'évolution similaire avec des paramètres différents :

$$D_{t,c} = 1 - \frac{\varepsilon_{D_0} (1 - A_{t,c})}{\kappa} - A_{t,c} \exp(-B_{t,c}(\kappa - \varepsilon_{D_0})) \quad (2.13)$$

avec ε_{D_0} (la déformation seuil à la première fissuration du béton en traction), $A_{t,c}$ et $B_{t,c}$ les cinq paramètres du modèle où l'indice (t) renvoie à la traction et l'indice (c) à la compression.

Le paramètre A_t permet notamment de contrôler en traction uniaxiale la contrainte résiduelle tandis que le paramètre B_t contrôle la forme de l'évolution post-pic.

La variable d'endommagement D s'exprime alors comme une combinaison linéaire des fonctions D_t et D_c :

$$D = \alpha_t^\beta \cdot D_t + \alpha_c^\beta \cdot D_c \quad (2.14)$$

avec β un facteur introduit historiquement plus tard dans le modèle pour limiter l'évolution rapide de l'endommagement en cisaillement (Pijaudier-Cabot *et al.* [1991]). Les facteurs de combinaison α_t et α_c s'expriment en fonction des déformations principales :

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^3 \frac{\varepsilon_i^t \langle \varepsilon_i \rangle_+}{\varepsilon_{eq}} \quad (2.15)$$

avec ε_i^t , les déformations créées par les contraintes principales positives et $\alpha_c = 1 - \alpha_t$.

Ainsi, pour une sollicitation de traction uniaxiale, $\alpha_t = 1$ et $\alpha_c = 0$ ce qui entraîne $D = D_t$ alors que pour une sollicitation de compression simple, $\alpha_t = 0$ et $\alpha_c = 1$ ce qui entraîne $D = D_c$. Un exemple d'évolution de la contrainte en fonction de la déformation est présenté pour ces 2 cas de chargement sur la figure 2.6.

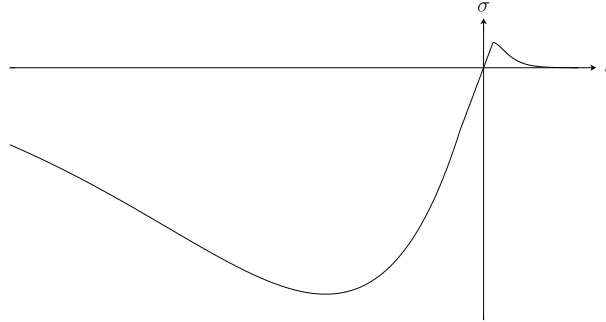


FIGURE 2.6: Loi d'évolution contrainte-déformation de Mazars pour une sollicitation uniaxiale.

Grâce à sa simplicité et sa robustesse, ce modèle a été et est encore largement utilisé pour modéliser le comportement du béton. Certaines pathologies peuvent néanmoins être citées et pour lesquelles des développements sont à considérer :

- le comportement en cisaillement du modèle est trop fragile et l'introduction du paramètre β pour limiter cet effet entraîne à des niveaux de déformation importants, une reprise de rigidité.
- l'effet unilatéral n'est pas pris en compte par le modèle (i.e. expérimentalement, la refermeture des fissures entraîne une reprise de raideur), ne permettant pas au modèle de bien reproduire le comportement sous chargements cycliques.
- sur le plan numérique, l'utilisation de l'opérateur de Mac Cauley dans l'expression des coefficients α_t et α_c entraîne une dérivée non définie de ceux-ci en zéro, empêchant ainsi l'utilisation de l'opérateur tangent dans le schéma de résolution. Seul l'opérateur sécant est utilisé, ce qui limite la vitesse de convergence du schéma de résolution.
- le caractère isotrope de l'endommagement ne permet pas de bien suivre l'évolution des nonlinéarités pour des chargements non radiaux.

Modèle d'endommagement isotrope avec critère de de Vree

A partir d'un cadre similaire à celui exposé précédemment, de Vree *et al.* [1995] propose une autre définition de la déformation équivalente en exprimant le critère de Von Mises en déformation :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2'} \quad (2.16)$$

avec I_1 et J_2' , 2 invariants du tenseur des déformations ε définis par :

$$I_1 = tr(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (2.17)$$

$$J_2' = \frac{1}{6} (3tr(\varepsilon \cdot \varepsilon) - tr^2(\varepsilon)) \quad (2.18)$$

En introduisant l'invariant J_2' , cette définition de la déformation équivalente est plus adaptée que celle proposée par Mazars [1984] pour des chargements complexes introduisant du cisaillement et du confinement. Le paramètre k correspond au ratio entre la résistance en compression f_c et celle en traction f_t du matériau. Sur la figure 2.7, on observe que la dissymétrie de la résistance est directement introduite au niveau du critère, évitant ainsi la nécessité d'introduire 2 fonctions pour traiter séparément la traction et la compression.

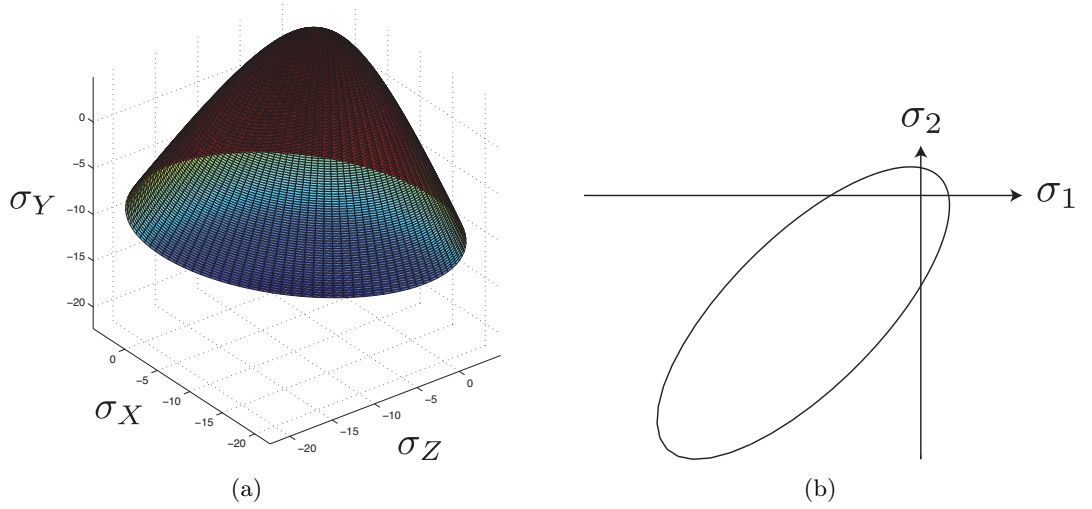


FIGURE 2.7: Critère de de Vree : (a) Surface seuil dans l'espace des contraintes ; (b) Trace dans le plan $\sigma_3 = 0$.

En s'inspirant de la loi d'évolution proposée par Feenstra [1993] pour un modèle de fissure tournante, Peerlings *et al.* [1998] formule une loi d'évolution pour la variable d'endommagement D associée à la déformation équivalente définie par de Vree :

$$D = 1 - \frac{\varepsilon_{D_0}}{\kappa} (1 - \alpha + \alpha \exp(-\beta(\kappa - \varepsilon_{D_0}))) \quad (2.19)$$

avec ε_{D_0} (la déformation seuil à la première fissuration du béton en traction), α et β , trois paramètres du modèle. Un exemple d'évolution contrainte déformation est présenté pour un cas de chargement uniaxial sur la figure 2.8.

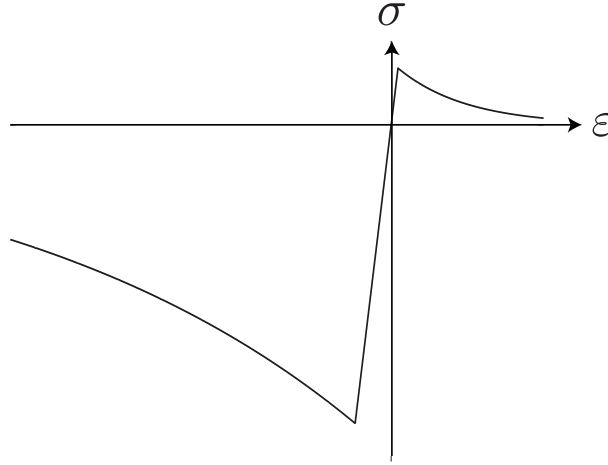


FIGURE 2.8: Loi d'évolution contrainte déformation de Peerlings pour une contrainte uniaxiale.

L'utilisation d'une seule loi d'évolution pour la traction et la compression ne permet pas de bien décrire le comportement non linéaire à écrouissage positif observé, dans un premier temps, pour un chargement en compression. Néanmoins, sur le plan numérique, l'expression de D et de la déformation équivalente permet de calculer l'opérateur tangent dans le schéma global de résolution.

Pour sa robustesse et la simplicité de son expression, le modèle d'endommagement isotrope utilisant soit le critère de Mazars soit celui proposé par de Vree est utilisé par la suite pour les calculs effectués.

Dans le cadre de modèles d'endommagement, de nombreux développements ont été effectués durant ces dernières années, pour des applications diverses sur la modélisation du comportement du béton notamment, parmi lesquels deux sont cités ci-après.

Modèle d'endommagement de La Borderie

Pour des applications de chargements cyclique ou sismique, La Borderie [1991] propose un modèle permettant de reproduire les phénomènes unilatéraux ainsi que d'introduire des déformations anélastiques ou permanentes notées ε^{an} . La reprise de raideur pour une inversion de direction de chargement est obtenue en introduisant deux variables scalaires D_1 (endommagement en traction) et D_2 (endommagement en compression). La déformation totale ε se décompose donc en une partie élastique ε^e et une partie anélastique ε^{an} avec pour expression :

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma^+}{E(1-D_1)} + \frac{\sigma^-}{E(1-D_2)} + \frac{\nu}{E}(\sigma - tr(\sigma)\mathbf{I}) \quad (2.20)$$

$$\varepsilon^{an} = \frac{\beta_1 D_1}{E(1-D_1)} F(\sigma) + \frac{\beta_1 D_2}{E(1-D_2)} \mathbf{I} \quad (2.21)$$

avec β_1 et β_2 , des paramètres du modèle. σ^+ et σ^- représentent respectivement le tenseur des contraintes principales de traction (i.e. tenseur diagonal avec pour termes non nuls les valeurs positives de contraintes principales) et celui de compression (i.e. tenseur diagonal avec

pour termes non nuls les valeurs négatives de contraintes principales). $F(\boldsymbol{\sigma})$ correspond à la fonction permettant de gérer les effets unilatéraux. Enfin, les fonctions seuil pour les variables D_1 et D_2 sont exprimées en énergie. Ce modèle est relativement riche, mais il reste difficile à mettre en œuvre dans des modélisations 2D ou 3D complètes. Il nécessite notamment des itérations à l'intérieur du modèle matériau dû à son caractère implicite et il présente également une complexité dans les expressions liées au couplage de l'endommagement unilatéral aux déformations anélastiques. Cependant, sa formulation uniaxiale est relativement stable et elle est couramment utilisée pour des applications de modélisation sismique par des éléments de type poutre multifibre (voir un exemple d'application dans l'annexe A).

Modèle d'endommagement anisotrope de Desmorat

Expérimentalement, la microfissuration observée dans un matériau quasi-fragile tend à s'orienter perpendiculairement aux extensions. De part sa nature, un modèle d'endommagement isotrope ne permet pas cette distinction. Pour des chargements radiaux, une description isotrope de l'endommagement semble suffisante, en revanche, pour des chemins de chargement plus complexes, l'orientation des fissures existantes peut avoir une influence non négligeable sur la réponse macroscopique de la structure. Pour tenir compte de ce point, l'endommagement doit être traité de manière anisotrope en remplaçant la variable scalaire par un tenseur. Formulé dans un cadre thermodynamique, Desmorat *et al.* [2007] proposent un modèle d'endommagement anisotrope reliant le tenseur de déformation au tenseur de contrainte effective par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{I} \quad (2.22)$$

avec pour expression du tenseur de contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{H} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d \mathbf{H})^d + \frac{1}{3} \left(\frac{\langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_+}{1 - \text{tr} \mathbf{d}} + \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \right) \mathbf{I} \quad (2.23)$$

avec $\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{d})^d$, $(.)^d$ l'opérateur déviatorique, \mathbf{I} le tenseur identité et \mathbf{d} le tenseur d'endommagement. Ce type de modèle reste néanmoins complexe et pour les applications considérées par la suite, un modèle d'endommagement isotrope est suffisant pour caractériser le comportement non linéaire du matériau.

Modèle élasto-plastique endommageable de Jason

Le béton montre pour des chargements spécifiques tels que la tri-compression ou bien encore la compression cyclique, des mécanismes non linéaires qui ne peuvent pas être modélisés simplement par de l'endommagement ou de la plasticité uniquement. Une dégradation de la rigidité est observée pour ce type de chargement ainsi que des déformations permanentes par frottement au niveau des fissures de mode II. Afin de représenter l'ensemble de ces phénomènes dans un même modèle, Jason *et al.* [2006] proposent un couplage entre un modèle d'endommagement scalaire utilisant le critère en déformation de Mazars [1986] et un modèle de plasticité à écrouissage positif.

Dans ce modèle, le critère en déformation utilisé pour piloter l'endommagement, est exprimé en fonction de la partie élastique des déformations. La partie plasticité du modèle est régie par les équations classiques pour ce type de modèle :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\
\boldsymbol{\sigma}' &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^e \\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \dot{\lambda}\mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{k}) \\
\dot{\mathbf{k}} &= \dot{\lambda}\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{k})
\end{aligned} \tag{2.24}$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ respectivement les déformations totales, élastiques et plastiques, \mathbf{C} le tenseur de rigidité élastique, \mathbf{m} le vecteur flux, \mathbf{k} les variables internes et \mathbf{h} le module plastique.

La partie élastique du tenseur des déformations est ensuite utilisée pour calculer la déformation équivalente. Le formalisme de la partie endommagement correspond à celui présenté précédemment pour le modèle de Mazars [1986].

Une version régularisée de ce modèle, avec le méthode nonlocale intégrale, est proposée par Krayani [2007]. Ce modèle semble pertinent pour des applications impliquant des chargements complexes. Cependant, la plasticité introduit un certain nombre de paramètres supplémentaires à identifier et nécessite l'implantation d'un schéma numérique supplémentaire pour la résolution local de la plasticité. Pour les applications considérées par la suite, les modes de rupture sont principalement de mode I. Ainsi, les modèles d'endommagement isotrope restent suffisants.

2.3 Méthode de résolution du problème mécanique

Après avoir défini le cadre général du problème mécanique étudié et présenté des modèles décrivant le comportement nonlinéaire de matériaux quasi-fragiles, cette partie s'intéresse à des méthodes de résolution permettant d'analyser l'évolution d'une structure sous un chargement mécanique donné. Les modèles présentés précédemment ont pour objectif de décrire le plus précisément possible aux niveaux local et global, le comportement d'une structure, de l'enclenchement des nonlinéarités jusqu'à la rupture de celle-ci ou tout du moins de s'en approcher le plus possible. Le caractère adoucissant des matériaux quasi-fragiles amène à observer une décroissance de la capacité portante de la structure. Autour du pic (au pic pour un chargement 1D et juste avant pour un chargement plus complexe), des instabilités au sens de Hill [1958] apparaissent. A partir de ce point, un problème de bifurcation est à considérer avec plusieurs solutions physiquement (et donc numériquement) acceptables, augmentant ainsi la difficulté de convergence de tels modèles. De plus, sur la figure 2.9, les problématiques liées au type de pilotage sont exposées de manière simplifiée, afin d'illustrer le propos et de justifier le choix d'une méthode de pilotage plutôt qu'une autre.

Le pilotage en force permet d'atteindre le pic de force en revanche le comportement adoucissant ne peut être obtenu (i.e. la décroissance de la capacité portante devient incompatible avec une augmentation de la sollicitation en effort). De manière classique, un pilotage en déplacement est utilisé pour suivre l'équilibre de structures composées de matériaux quasi-fragiles. Cependant, lorsque le modèle matériau présente un comportement relativement fragile ou que la taille de la zone de localisation (i.e. zone où le matériau se dégrade et dissipe de l'énergie) est très faible par rapport à la taille de la structure, des phénomènes de "snap-back" peuvent être observés. Au cours du chargement, une structure emmagasine une certaine quantité d'énergie élastique proportionnellement à sa taille. Dans la phase post-pic, la diminution observée de l'effort traduit la dissipation d'une partie de l'énergie élastique au travers du développement

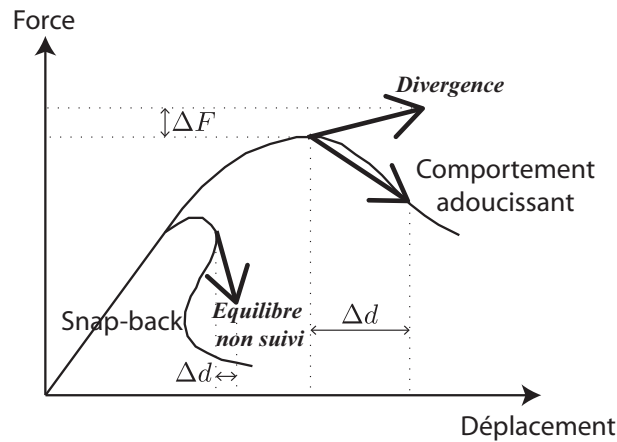


FIGURE 2.9: Illustration des limites du pilotage en force et en déplacement pour des matériaux quasi-fragiles.

de nonlinéarités. Ces dernières se développent dans une zone de taille constante par rapport à la taille de la structure et dépendante du matériau. Ainsi, lorsque la structure est relativement grande, l'énergie élastique emmagasinée devient trop importante par rapport à l'énergie qui peut être potentiellement dissipée par la zone de localisation des déformations et une quantité d'énergie élastique se trouve en surplus par rapport à la capacité de la structure. Dans cette configuration, deux cas de figure sont possibles. Soit ce surplus d'énergie est transféré à l'extérieur de la structure et entraîne une diminution du déplacement aux limites, soit l'énergie élastique se transforme en énergie cinétique et entraîne une rupture dynamique. Dans la suite de ce chapitre, une analyse sur une barre en traction uniaxiale est proposée, pour mettre en valeur l'influence de la taille de la zone de localisation par rapport à la taille de la structure sur l'apparition ou non de "snap-back" dans le comportement global.

Expérimentalement, le pilotage d'un tel phénomène semble relativement complexe à mettre en œuvre, plus particulièrement pour les structures où la zone de localisation des déformations n'est pas prévisible à l'avance. En effet, le pilotage par contrôle de l'ouverture d'une entaille pré-établie peut être facilement mise en place et il permet de considérer un critère local continument croissant pour faire évoluer la dégradation de la structure et éviter une rupture dynamique. En revanche, des essais à sollicitations homogènes tels que des essais de compression, ne permettent pas d'établir au préalable le lieu de la localisation. Il est alors nécessaire, dans ce cas là, d'imaginer des systèmes de chargement permettant de dissiper à l'extérieur le surplus d'énergie élastique emmagasinée dans le système complet (i.e. expérimentalement, le système de chargement emmagasine également une quantité d'énergie importante qui, à la rupture, a tendance à se transférer dans le spécimen testé et accentuer la rupture brutale de ce dernier).

Numériquement, l'application d'un pilotage en déplacement peut fournir un point convergé à la suite du "snap-back". Néanmoins, cet état ne peut être considéré avec confiance comme un état possible accessible par la structure, à partir du moment où le chemin d'équilibre n'a pas été suivi. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes de pilotage plus avancées comme la méthode par longueur d'arc (Wempner [1971]; Riks [1979]; Crisfield [1991]) ou encore la méthode par chargement linéaire séquentiel (Rots [2001]), pour permettre un transfert du surplus d'énergie élastique à l'extérieur du système. Cette dernière approche est intéressante car elle évite l'utilisation de méthodes de pilotage complexes en ne considérant que des chargements élastiques. La loi de comportement utilisée est décrite en "dent de scie" (incrément de dissipation d'énergie) et le chargement évolue de manière séquentielle, en enclenchant à chaque chargement une dissipation dans le premier élément qui atteint sa limite de contrainte ac-

tuelle. Cette technique devient néanmoins très coûteuse en temps de calcul lorsque le nombre d'éléments dans la structure augmente.

Pour décrire la méthode de résolution, la formulation faible générale du problème mécanique est repris avec la condition de Dirichlet sur Γ_d (condition limite en déplacement) et s'écrit :
Trouvez u tel que $\forall u^$:*

$$a(u, u^*) = L(u^*) \quad (2.25)$$

$$u = u_d \text{ sur } \Gamma_d \quad (2.26)$$

avec $a(u, u^*) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega$ et $L(u^*) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^* \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{u}^* d\Gamma$. Les théorèmes de Lax-Milgram et Stampacchia assurent l'équivalence entre le problème exposé ci-dessus et le problème de minimisation de la fonctionnelle $I(u)$ ($= a(u, u) - L(u)$) correspondant à l'énergie potentielle E_p .

La discrétisation spatiale par éléments finis permet d'exprimer l'énergie potentielle et les conditions limites en déplacement sous une forme discrète :

$$\underline{E}_p = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} - \underline{f}_e \quad (2.27)$$

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{b} \text{ sur } \Gamma_d \quad (2.28)$$

avec \underline{u} le vecteur déplacement, \underline{K} la matrice de rigidité globale, \underline{f}_e le vecteur de force extérieure, \underline{b} le vecteur de déplacement imposé et \underline{A} la matrice de correspondance entre \underline{u} et \underline{b} . En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, le problème se réduit à la recherche d'un extremum d'une fonctionnelle introduisant une nouvelle inconnue $\underline{\lambda}$:

Trouvez \underline{u} , $\underline{\lambda}$ qui minimisent :

$$\Phi = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} - \underline{f}_e + (\underline{\lambda}^T (\underline{A} \underline{u} - \underline{b})) \quad (2.29)$$

Le problème de recherche d'extremum revient alors à déterminer \underline{u} et $\underline{\lambda}$ respectant :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{u}} = \underline{K} \underline{u} - \underline{f}_e + \underline{A}^T \underline{\lambda} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{A} \underline{u} - \underline{b} = 0 \quad (2.31)$$

Ce système peut se mettre sous forme matricielle pour ensuite exposer la méthode de résolution incrémentale (par la suite, le soulignement utilisé pour signifier la forme discrète des éléments est omis pour simplifier l'écriture).

$$\begin{bmatrix} K & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_e \\ b \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Ce formalisme reste encore général et ne présuppose pas de la méthode de résolution utilisée. Ainsi, dans un premier temps, une méthode de pilotage classique en déplacement est exposée puis une méthode de pilotage par longueur d'arc est présentée.

2.3.1 Pilotage en déplacement

Le problème incrémental s'écrit pour un incrément de temps virtuel Δt^{n+1} donné :
Trouvez, u^{n+1} , λ^{n+1} qui vérifient :

$$K(u^n + \Delta u^{n+1}) - (f_e^n + \Delta f_e^{n+1}) + A^T(\lambda^n + \Delta \lambda^{n+1}) = 0 \quad (2.33)$$

$$A(u^n + \Delta u^{n+1}) - (b^n + \Delta b^{n+1}) = 0 \quad (2.34)$$

avec $u^{n+1} = u^n + \Delta u^{n+1}$ et $\lambda^{n+1} = \lambda^n + \Delta \lambda^{n+1}$. Pour un chargement en déplacement et en force, les incréments de déplacement imposé et de force imposée sont fixés. En linéarisant l'équation 2.33, les incréments $n+1$ de déplacement et de multiplicateur de Lagrange peuvent être obtenus par itérations, en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{it} & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{k+1} \\ \lambda_{k+1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_e^{n+1} - f_{i_k}^n \\ b^{n+1} - Au_k^n \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

avec K_{it} l'opérateur (tangent ou sécant) utilisé lors du schéma itératif. Une solution pour le déplacement et le multiplicateur de Lagrange est alors obtenue lorsque le critère de convergence fixé est atteint.

Disponible dans le code aux éléments finis Cast3M (Verpeaux *et al.* [1988])(avec double multiplicateurs de Lagrange au lieu d'un seul pour le développement précédent), cette méthode est robuste et elle est utilisée dans la suite de ces travaux pour les différentes modélisations effectuées n'impliquant pas de "snap-back".

2.3.2 Pilotage en longueur d'arc

Le pilotage en longueur d'arc ne considère plus un incrément de temps virtuel fixe Δt^{n+1} pour le chargement, mais plutôt une mesure de longueur d'arc $\Delta \ell^{n+1}$. Ceci permet d'imposer une condition à l'incrément du champ de déplacement, amenant ainsi à considérer l'incrément de temps externe comme une nouvelle inconnue du système. Le problème itératif peut se réécrire :
Trouvez, u^{n+1} , λ^{n+1} et t^{n+1} qui vérifient :

$$K(u_k^n + \delta u_{k+1} + \delta t_{k+1} \dot{u}_{k+1}) - (f_{e_k}^n + \delta f_{e_{k+1}} + \delta t_{k+1} \dot{f}_{e_{k+1}}) +$$

$$A^T(\lambda_k^n + \delta \lambda_{k+1} + \delta t_{k+1} \dot{\lambda}_{k+1}) = 0 \quad (2.36)$$

$$A(u_k^n + \delta u_{k+1} + \delta t_{k+1} \dot{u}_{k+1}) - (b_k^n + \delta b_{k+1} + \delta t_{k+1} \dot{b}_{k+1}) = 0 \quad (2.37)$$

$$c(u_k^n + \delta u_{k+1} + \delta t_{k+1} \dot{u}_{k+1}) = \Delta \ell^{n+1} \quad (2.38)$$

avec $\Delta \ell^{n+1}$ le paramètre de longueur d'arc, \dot{b} et \dot{f}_e des taux de déplacement et de force imposés et $c(\cdot)$ un critère conditionnant l'incrément de déplacement. Pour l'expression de $c(\cdot)$, divers critères globaux existent pour définir la fonction de contrôle, avec notamment des conditions sur l'incrément de déplacement $\Delta U : c(\Delta U) = \Delta U^2$ (Ramm [1980]). Ce type de critère a montré son efficacité pour traiter des problèmes géométriquement nonlinéaires qui montrent des instabilités de flambement. Cependant, pour des instabilités de type matériau, ces critères sont trop globaux et parfois n'arrivent pas à suivre le chemin d'équilibre. En effet, la forte localisation des déformations, induite par les modèles adoucissants, nécessite d'appliquer des critères locaux pour le pilotage. Pegon et Anthoine [1997] proposent notamment pour un milieu adoucissant de considérer l'incrément maximal de déformation comme critère de pilotage. Pour des essais impliquant une déformation localisée dans une zone distincte a priori (e.g. ouverture de l'entaille pour une poutre entaillée en flexion 3 points), un critère en déplacement sur un point caractéristique peut être considéré comme le suggèrent Rodríguez-Ferran et Huerta [2000]. Ces 2 fonctions de contrôle sont retenues par la suite. Plus récemment, Lorentz et Badel [2004] proposent de considérer la valeur maximale de la réponse de la fonction de charge soumise à un incrément élastique. Ce dernier critère se montre efficace sur divers tests et divers modèles de comportement. En revanche il doit être adapté pour chaque modèle (i.e. la fonction de charge est dépendante du modèle utilisé).

La fonction de contrôle introduite par Pegon et Anthoine [1997] s'écrit :

*Maximisez δt_{*k+1} satisfaisant :*

$$\Delta \varepsilon_{ij_{k+1}} + \delta t_{*k+1} s \dot{\varepsilon}_{ij_{k+1}} \leq \delta \ell \quad \text{si} \quad s \dot{\varepsilon}_{ij_{k+1}} \geq 0$$

$$\Delta \varepsilon_{ij_{k+1}} + \delta t_{*k+1} s \dot{\varepsilon}_{ij_{k+1}} \leq -\delta \ell \quad \text{si} \quad s \dot{\varepsilon}_{ij_{k+1}} < 0 \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow \delta t_{k+1} = s \delta t_{*k+1}$$

avec $\Delta \varepsilon_{ij_{k+1}}$, l'incrément de déformation correspondant à l'incrément de déplacement calculé Δu_{k+1} , $\dot{\varepsilon}_{ij_{k+1}}$, le taux de déformation correspondant au taux de déplacement \dot{u}_{k+1} et s le signe du dernier incrément de temps fictif Δt^n (i.e. $s = 1$ lorsque le chargement augmente et $s = -1$ lorsque le chargement diminue). Ce critère permet, dans la plupart des cas de suivre l'évolution de la localisation des déformations. Néanmoins, dans certains cas, lorsque le chemin de décharge et celui correspondant à un accroissement des nonlinéarités dans le milieu sont relativement proches (voir figure 2.10), le critère peut amener à suivre la mauvaise branche.

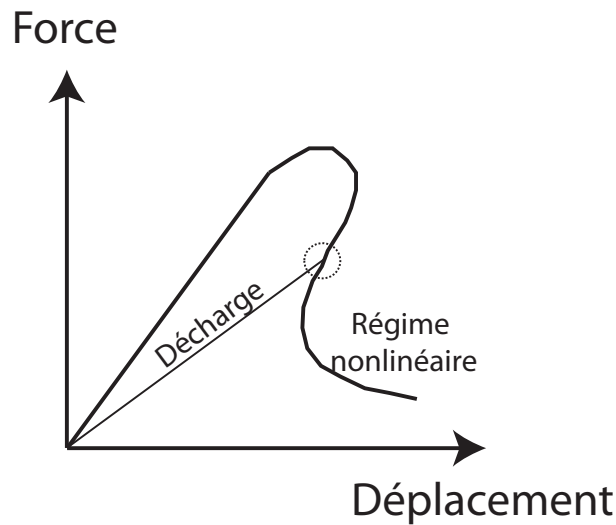


FIGURE 2.10: Illustration d'un point limite charge-décharge sur l'évolution du comportement global.

Dans ce cas de figure, une solution est proposée, consistant à inverser le sens de chargement considéré dans la fonction de contrôle (i.e. changement de signe pour s). Le suivi par l'algorithme de la branche de décharge est détecté pendant le calcul, en contrôlant le nombre de points de Gauss voyant augmenter leur nonlinéarité (i.e. le signe de s est inversé lorsqu'aucune augmentation de nonlinéarité est observée). Lors de mes travaux de thèse, j'ai développé ce dernier point pour le pilotage par longueur d'arc considérant un critère local et je l'ai implanté dans Cast3M. Certes, il ne permet pas de résoudre tous les problèmes de convergence mais certains ont pu être levés et des calculs sont allés à leur terme alors qu'ils échouaient auparavant.

Ainsi, la méthode de pilotage d'un essai sur un matériau adoucissant reste une problématique forte à laquelle il est nécessaire de s'intéresser pour pouvoir modéliser des structures en béton en ingénierie.

2.4 Modélisation objective de la localisation

Cette partie a pour but d'analyser le phénomène de localisation des déformations dans les milieux adoucissants. Les phénomènes de localisation sont présentés, dans un premier temps, de manière générale sur le plan physique et théorique. Dans un deuxième temps, un exemple simplifié d'une barre en traction est considéré, pour illustrer le problème de non-objectivité des résultats pour les milieux adoucissants. Enfin, une présentation de milieux régularisés est effectuée, en se focalisant plus particulièrement sur les méthodes associées aux modèles d'endommagement qui introduisent un enrichissement au niveau des équations constitutives (i.e. régularisation appliquée sur les variables internes).

2.4.1 Localisation dans les milieux adoucissants

Les phénomènes de localisation dans les géomatériaux se manifestent sous diverses formes suivant les matériaux et les sollicitations appliquées à la structure considérée (e.g. macrofis-

suration, bande de cisaillement, zone de dislocation...). La localisation se caractérise par un développement de nonlinéarités dans une zone finie de taille inférieure à la structure et son déclenchement peut être dû à l'hétérogénéité du matériau, de la géométrie ou bien encore de la sollicitation.

Sur le plan théorique, les travaux de Hill [1958] s'attachent à établir les conditions d'unicité et de stabilité de la solution dans un milieu continu et montrent la perte d'ellipticité du problème pour les milieux adoucissants. Par la suite, Rudnicki et Rice [1975] et Rice [1976] proposent un cadre théorique permettant d'identifier l'enclenchement d'une solution localisée pour des modèles de plasticité. En décrivant le problème mécanique sous une forme incrémentale, ils montrent que l'enclenchement de la localisation apparaît lorsque le tenseur acoustique \mathbb{L} devient singulier. Le tenseur acoustique s'écrit : $\mathbb{L} = \mathbf{n}\mathbb{L}\mathbf{n}$, où \mathbf{n} définit la direction normale à la bande de localisation recherchée et \mathbb{L} correspond au tenseur reliant l'incrément de contrainte à l'incrément de déformation.

Dans le paragraphe suivant, le problème d'une barre en traction est étudiée. Dans ce cas simple, la bifurcation s'enclenche au pic de contrainte et on s'intéresse à l'évolution de la réponse globale de la barre suivant la solution localisée suivie, afin de mettre en lumière certaines problématiques liées aux modèles à comportement adoucissant.

2.4.2 Analyse simplifiée de la localisation dans une barre

Pour analyser le phénomène de localisation et les problèmes liés aux modèles avec une phase post-pic, l'exemple classique d'une barre en traction simple est considéré (Fig. 2.11(a)) avec une loi de comportement bilinéaire pour le matériau (Fig. 2.11(b)). La barre est de longueur L et de section A .

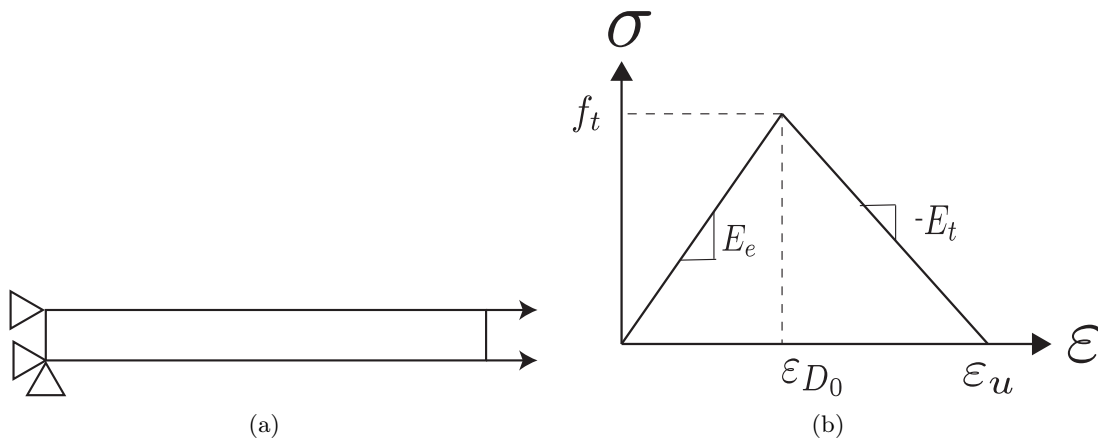


FIGURE 2.11: (a)Essai de traction uniaxiale sur une barre ; (b)Loi de comportement bi-linéaire.

1. Chargement élastique.

L'équilibre statique du milieu implique que la contrainte σ soit constante le long de la barre. Durant la phase élastique, la loi de comportement relie la déformation à la contrainte par $\sigma = E.\epsilon$ impliquant donc une déformation ϵ homogène le long de la barre. On obtient alors $\epsilon = u/L$.

2. Pic de force et bifurcation.

Le pic de force est atteint pour un déplacement imposé $u_{pic} = \epsilon_{D_0}.L$. On a alors la force correspondante $F_{pic} = f_t.A$. Une augmentation du déplacement à ce stade amène une décrois-

sance de la contrainte. Les équations d'équilibre imposent seulement une contrainte constante le long de la barre entraînant ainsi un mauvais conditionnement du problème. En effet, pour un état de contrainte donné correspond deux niveaux de déformation (charge et décharge) (Fig. 2.12(a)).

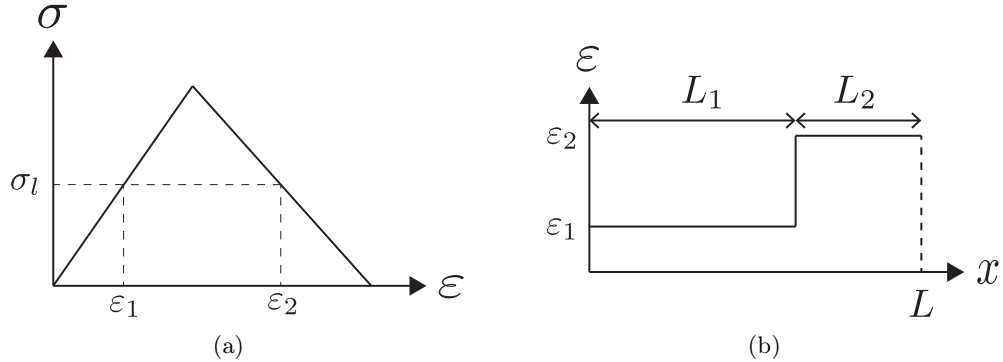


FIGURE 2.12: (a) Etats possibles du matériau à un niveau donné de contrainte (charge ou décharge); (b) Profil de déformation le long de la barre après bifurcation.

A la bifurcation, le profil de déformation le long de la barre présente une infinité de solutions. Notons L_2 la longueur de la zone pour laquelle la déformation augmente et L_1 ($= L - L_2$) la longueur de la zone pour laquelle la déformation diminue (Fig. 2.12(b)). On a alors $u = \epsilon_1.L_1 + \epsilon_2.L_2$.

3. Rupture et non objectivité des résultats.

A la rupture, un état de contrainte nulle est atteint le long de la barre avec des niveaux de déformation égaux à $\epsilon_1 = 0$ et $\epsilon_2 = \epsilon_u$, correspondant à un déplacement maximal $u_{lim} = L_2.\epsilon_u$. La réponse globale de la barre est comprise entre les deux solutions homogènes (1 : décharge élastique complète et 2 : endommagement complet) avec les énergies dissipées ϕ correspondantes (1 : $\phi = 0$ qui est atteignable asymptotiquement et 2 : $\phi = \frac{1}{2}L.A.(f_t.\epsilon_u)$ (Fig. 2.13).

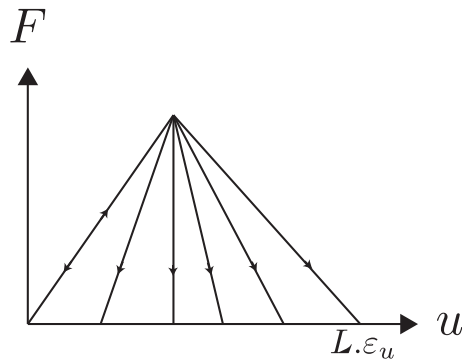


FIGURE 2.13: Exemple de réponses possibles pour la barre en traction.

La réponse globale obtenue dépend de la longueur L_2 de la zone de localisation. Physiquement, la barre n'est pas parfaitement homogène que ce soit géométriquement ou vis-à-vis des propriétés du matériau et la réponse montrant une dégradation homogène n'est jamais obtenue ($L_2 = L$). Ainsi, les nonlinéarités tendent à se localiser dans une zone de taille finie dont la dimension peut être reliée à la longueur caractéristique du matériau.

Analytiquement ou numériquement, la bifurcation sur une solution localisée peut être contrôlée en affaiblissant localement une zone. Lorsque la résistance dans la région la plus faible est

atteinte, la localisation s'enclenche, la contrainte décroît et le reste de la barre en dehors de la zone faible se décharge. Ainsi, la taille de la zone de localisation L_2 est directement liée à la taille de la zone faible et il n'y a plus unicité du problème. Dans cette configuration, il apparaît que lorsque la zone faible introduite tend vers une taille infiniment petite, l'énergie dissipée lors de la rupture tend vers zéro ce qui n'est pas acceptable physiquement. Numériquement, ceci se traduit par une perte d'objectivité avec une dissipation globale d'énergie qui dépend de la taille considérée pour les éléments finis.

Le développement effectué ici reste simplifié pour illustrer le problème de non-objectivité des modèles locaux adoucissants et de manière plus rigoureuse, on peut montrer mathématiquement que la perte d'unicité de la solution (bifurcation) selon le critère de Hill correspond à une perte d'ellipticité de la solution de propagation des ondes élastiques dans le milieu.

4. Illustration du problème de "snap-back"

Sur ce test, le seuil à partir duquel le comportement global montre un phénomène de "snap-back" est identifiable analytiquement. Le cas limite du comportement pour lequel un "snap-back" apparaît ou n'apparaît pas, correspond à une variation nulle du déplacement après bifurcation pour une variation de contrainte non nulle, ce qui amène une première condition au problème :

$$\Delta u = 0 = \Delta \varepsilon_1 L_1 + \Delta \varepsilon_2 L_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta \varepsilon_2} = -\frac{L_2}{L_1} \quad (2.40)$$

L'état de contrainte constant dans la barre implique une égalité des incréments de contrainte dans la zone localisée et la zone déchargée, ce qui amène une deuxième condition au problème.

$$E_e \Delta \varepsilon_1 = -E_t \Delta \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta \varepsilon_2} = -\frac{E_t}{E_e} \quad (2.41)$$

La combinaison des 2 équations entraîne : $-\frac{E_t}{E_e} = -\frac{L_2}{L_1}$. Ainsi, l'évolution post-pic de la loi matériau et la taille de la zone de localisation influent sur l'apparition de "snap-back". A module tangent ($-E_t$) fixé, la taille de zone de localisation minimale est égale à : $L_{2lim} = -\frac{E_e L}{E_t + E_{el}}$. Pour une valeur plus faible, un phénomène de "snap-back" apparaît. Ainsi, ce phénomène est susceptible d'apparaître pour des ratios faibles entre la zone de localisation et une taille caractéristique de la structure.

2.4.3 Méthode de régularisation

2.4.3.1 Régularisation énergétique : Méthode de Hillerborg

Dans le paragraphe précédent, il a été montré que l'énergie dissipée dépendait de la taille de la zone de localisation. Dans un cadre numérique utilisant des éléments finis, la taille de la zone de localisation correspond à la taille de l'élément fini pour les modèles locaux. Ainsi, la méthode de régularisation de Hillerborg *et al.* [1976] consiste à ajuster la partie adoucissante du modèle matériau en fonction de la taille de l'élément, afin d'obtenir une dissipation d'énergie indépendante du maillage.

Pour la loi de comportement utilisée dans l'exemple précédent de la barre en traction uniaxiale, le module tangent ($-E_t$) est ajusté en fonction de la taille de l'élément h et d'une énergie de dissipation intrinsèque au matériau (e.g. pour le béton, l'énergie de fissuration \mathcal{G}_f est considérée). Le module tangent est alors égal à : $E_t = \frac{h \cdot f_t^2}{2 \cdot \mathcal{G}_f - h \cdot f_t \cdot \varepsilon_{D_0}}$.

Cependant, les zones de localisation restent concentrées sur une largeur de la taille d'un élément, cette approche ne permet pas d'empêcher la dépendance au maillage du trajet de la zone de localisation. Les figures 2.14(a) et 2.14(b) illustrent ce problème pour une barre en traction uniaxiale avec des orientations de maillage différentes.

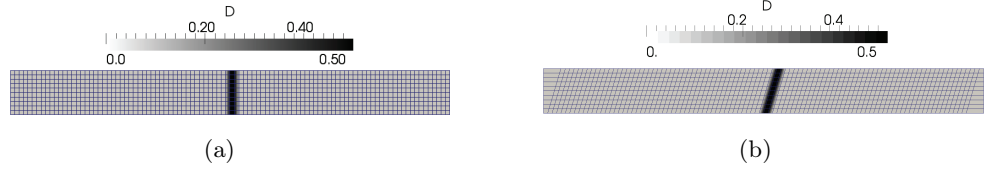


FIGURE 2.14: Dépendance au maillage du trajet d'endommagement. (a) Maillage avec bandes verticales; (b) Maillage avec bandes inclinées

On observe que la bande où se développe l'endommagement suit l'orientation des bandes inclinées du maillage. Ainsi, la méthode d'Hillerborg permet de régulariser localement le problème en imposant une dissipation d'énergie au niveau de l'élément indépendante de la taille de celui-ci, en revanche, globalement, si le trajet et surtout si la longueur de la zone de localisation est dépendante du maillage, l'objectivité vis-à-vis de l'énergie dissipée totale dans le système peut être perdue. Par ailleurs, le fait d'introduire une dépendance entre la loi de comportement et le maillage n'est pas satisfaisant d'un point de vue théorique.

Afin de proposer un cadre plus général permettant de régulariser complètement le problème, des enrichissements du milieu continu ont été développés soit sous la forme de relations cinématiques (e.g. adaptation des théories de milieu continu enrichi à second gradient) soit au travers d'équations constitutives (e.g. modèles avec moyenne pondérée des variables internes). Le lien principal entre tous ces modèles est l'introduction d'un paramètre matériau proportionnel à une longueur. Des essais ont montré que ce paramètre dépend de la longueur caractéristique de la microstructure du matériau (e.g. Bazant et Pijaudier-Cabot [1989]).

2.4.3.2 Régularisation par enrichissement cinématique

Les travaux de Cosserat et Cosserat [1909], puis par la suite ceux de Eringen et Edelen [1972], proposent un enrichissement cinématique du problème mécanique classique en introduisant des degrés de liberté supplémentaires. Plus récemment, en s'inspirant de ces approches, Chambon *et al.* [2001] proposent un modèle de second gradient local pour régulariser les problèmes impliquant des milieux adoucissants, en introduisant le gradient de déformation ($\nabla \nabla u$) aux équations décrivant le problème mécanique. Ce terme est relié à un tenseur de double contrainte χ (tenseur d'ordre 3) par une loi second gradient. L'équation d'équilibre se réécrit alors :

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* + \boldsymbol{\chi} : \nabla \nabla u^*) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^* \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{F} \mathbf{u}^* + \mathbf{F}_{sg} \nabla u^*) d\Gamma \quad (2.42)$$

avec \mathbf{F}_{sg} la condition limite de double force. Pour les milieux granulaires, la théorie de Cosserat propose une approche semblable, en introduisant un enrichissement cinématique sur la partie

rotation des déformations (i.e. cette approche n'est pas utilisable pour les ruptures en mode I). Ces 2 théories introduisent de manière similaire une longueur interne proportionnelle au ratio entre le module de la loi d'évolution second gradient et le module tangent de la loi premier gradient (e.g. de Borst et Sluys [1991]) permettant ainsi de régulariser le problème étudié. Kotronis *et al.* [2005a] montrent également l'apparition d'une longueur interne pour une application du modèle de second gradient local associé au modèle d'endommagement de Mazars sur l'étude d'une barre en traction uniaxiale.

2.4.3.3 Régularisation nonlocale de variables internes

L'idée principale de la régularisation nonlocale de variables internes consiste à considérer en chaque point, à la place de la quantité locale, une quantité prenant en compte l'influence du voisinage. A l'échelle macroscopique, ces approches retranscrivent au niveau des variables internes, les interactions qui se produisent aux échelles inférieures dans une zone de taille proportionnelle à la longueur interne introduite au modèle macroscopique. En plus de leur origine physique s'illustrant par exemple en considérant les interactions entre microfissures (Bažant [1991], ces approches permettent de régulariser les problèmes impliquant des milieux adoucissants. L'introduction de la taille de la zone de fissuration au niveau macroscopique, au travers de la la longueur interne l_c , permet de s'affranchir de la dépendance au maillage. En effet, numériquement, la zone de localisation ne se développe plus sur un élément mais dans une bande de taille finie proportionnelle à l_c . Cette bande contient plusieurs éléments dont la forme et la taille n'ont plus d'influence sur l'énergie dissipée et sur la propagation de cette zone de localisation dans le milieu.

Nonlocal intégral

La régularisation nonlocale intégrale introduit en chaque point l'influence du voisinage en remplaçant la quantité locale par sa valeur nonlocale, moyenne pondérée de chaque point du voisinage. La moyenne nonlocale $\bar{f}(\mathbf{x})$ de la quantité locale $f(\mathbf{x})$ est introduite sous la forme d'un produit de convolution par une fonction poids $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot f(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (2.43)$$

De manière classique, le poids est fonction de la distance entre les points \mathbf{x} (point récepteur) et \mathbf{s} (point émetteur). Différentes formes ont été proposées pour la fonction poids. Généralement, la fonction Gaussienne est utilisée pour décrire les interactions entre points :

$$\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \exp\left(-\left(\frac{4\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2}{l_c^2}\right)\right) \quad (2.44)$$

avec l_c la longueur interne du modèle. Expérimentalement, Bažant et Pijaudier-Cabot [1989] montrent sur une campagne d'essais un lien entre cette longueur et la taille de la plus grande hétérogénéité dans le matériau avec une relation $l_{car} \simeq 2,7\phi_{gmax}$, ϕ_{gmax} étant la taille du plus gros granulat. Néanmoins, ce test a été réalisé sur une configuration donnée et la longueur interne identifiée peut évoluer avec la géométrie et le type de chargement, en plus du matériau. A l'heure actuelle, il n'existe pas de relation explicite entre la longueur interne du modèle et la

longueur caractéristique du matériau et il est sans doute nécessaire d'introduire des facteurs supplémentaires traduisant la configuration dans laquelle est sollicitée le matériau pour établir ce lien.

Afin de ne pas altérer la solution en champ uniforme ($f(\mathbf{x}) = \bar{f}(\mathbf{x})$ dans un champ uniforme), la fonction poids nonlocale est normée :

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\int_{\Omega} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}} \quad (2.45)$$

Ce cadre est relativement général et permet une utilisation pour différents types de modèle matériau en appliquant la régularisation sur une variable liée au comportement adoucissant. La régularisation nonlocale intégrale a notamment été mise en application sur des modèles à fissuration répartie (e.g. Bažant et Lin [1988]), sur des modèles d'endommagement isotrope (e.g. Saouridis et Mazars [1992]) ou anisotrope (e.g. Desmorat *et al.* [2007]), sur des modèles de plasticité (e.g. Jirásek et Rolshoven [2003])...

Classiquement, pour les modèles d'endommagement isotrope introduits dans le paragraphe 2.2.2.6, l'opérateur nonlocal est appliqué sur la déformation équivalente. D'autres choix sont possibles, en considérant par exemple, d'appliquer la régularisation directement sur la variable d'endommagement D . Cependant, Jirásek [1998] montre que certains choix de variable à régulariser entraînent des phénomènes de "locking" avec une contrainte résiduelle non nulle à des niveaux élevés de déformation. La figure 2.15 illustre ce phénomène sur un essai de barre en traction uniaxiale avec comme choix de variable régularisée, l'endommagement D .

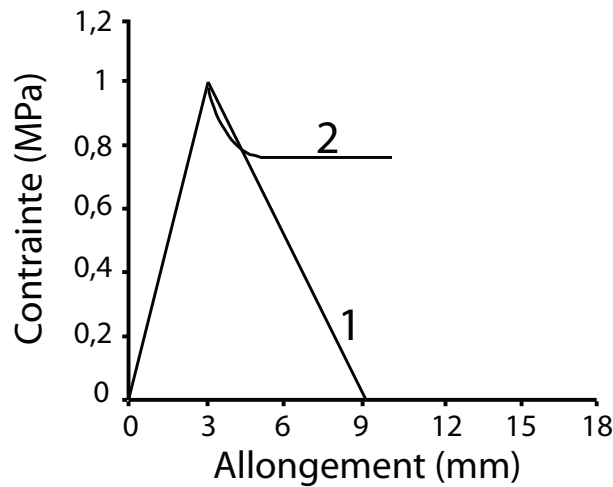


FIGURE 2.15: Barre en traction uniaxiale : phénomène de blocage de la contrainte pour une régularisation nonlocale intégrale sur l'endommagement (1 : réponse homogène ; 2 : réponse régularisée en endommagement.)

Les travaux présentés dans le paragraphe 2.4.1 sur l'étude théorique de la localisation ont été étendus par Pijaudier-Cabot et Benallal [1993] à l'étude de la localisation des déformations pour un milieu continu avec un modèle d'endommagement nonlocal. Dans ce cadre là, la condition de localisation apparaît lorsque le pseudo tenseur acoustique (i.e. l'expression du tenseur acoustique diffère de la formulation locale avec l'introduction de termes supplémentaires dus à la régularisation) devient singulier. Ces travaux permettent de mettre en relation la taille de la zone de localisation à la longueur interne du modèle nonlocal et montrent le rôle de limiteur de localisation de la régularisation nonlocale intégrale.

Régularisation en gradient de variables internes

Introduite initialement par Mühlhaus et Aifantis [1991]; De Borst et Mühlhaus [1992] pour des modèles de plasticité, la régularisation en gradient considère en chaque point l'influence du voisinage en prenant en compte l'influence de gradients des variables internes considérées. Dans sa forme explicite, la régularisation en gradient ajoute à la quantité locale $f(\mathbf{x})$ son Laplacien $\nabla^2 f(\mathbf{x})$:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + l^2 \nabla^2 f(\mathbf{x}) \quad (2.46)$$

avec l homogène à une longueur. Peerlings *et al.* [1996] proposent d'appliquer ce type de régularisation aux modèles d'endommagement en considérant la déformation équivalente ε_{eq} comme variable interne devant respecter l'équation 2.46. Ils montrent également que cette équation découle directement du modèle nonlocal intégral en remplaçant dans l'équation 2.43 la fonction f par son développement en série de Taylor et en négligeant les termes d'ordre supérieur. La forme explicite de la régularisation en gradient introduit une relation directe entre la déformation équivalente nonlocale et le laplacien de la déformation équivalente locale, nécessitant une continuité d'ordre C^1 pour le déplacement et donc l'élaboration d'éléments finis plus riches. Peerlings *et al.* [1996] reformulent l'équation 2.43 pour aboutir à une expression implicite où la déformation équivalente nonlocale est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 :

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) - l^2 \nabla^2 \bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (2.47)$$

Cette formulation permet de traiter indépendamment la déformation équivalente nonlocale en considérant un problème couplé et ainsi réduire l'ordre nécessaire pour les fonctions d'interpolation du déplacement comme l'expliquent Peerlings *et al.* [1996]. De plus, Simone *et al.* [2004a] montrent que l'utilisation de fonctions d'interpolation linéaires pour le déplacement est possible, amenant seulement une oscillation des contraintes qui n'affecte pas la réponse globale.

Cette formulation nécessite également l'introduction de conditions limites dont l'expression correspond à l'imposition d'un flux nul normal au bord :

$$\nabla \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.48)$$

avec \mathbf{n} , le vecteur normal au bord. Cette expression implicite de la régularisation en gradient de variables internes est équivalente à la régularisation nonlocale intégrale pour une fonction de Green comme fonction poids.

Mathématiquement, la régularisation en gradient de variable interne a un formalisme local avec la résolution en chaque point du milieu de l'équation 2.47 indépendamment des points autour. Cette considération permet de conserver numériquement la structure bande de l'opérateur utilisé lors du schéma itératif. Cependant, l'équation 2.47 introduit une nouvelle inconnue et nécessite l'implantation d'un schéma de résolution. Cette approche reste peu intrusive dans un code aux éléments finis.

Par la suite, la formulation nonlocale intégrale est utilisée car elle offre plus de souplesse pour modifier les influences entre points comparée à la forme en gradient pour laquelle les

interactions entre points sont introduites indirectement à l'intérieur de l'équation différentielle (Eq. 2.47).

Modèle nonlocal intégral basé sur l'état de contrainte

Ce chapitre a pour but de présenter une méthode de régularisation basée sur l'approche nonlocale intégrale afin de mieux décrire l'évolution des interactions entre points, depuis l'enclenchement de l'endommagement jusqu'à la rupture. Après un rappel des pathologies liées au modèle nonlocal intégral original, une présentation d'amélioration du modèle est ensuite proposée ainsi que son implantation numérique.

3.1 Pathologies des modèles nonlocaux de variables internes

Les modèles nonlocaux, en considérant un enrichissement au niveau des variables internes, introduisent la notion d'interaction entre points dans un milieu continu. Ces interactions se développent dans une zone autour de chaque point du milieu, avec des dimensions qui peuvent être reliées à la longueur interne introduite au modèle et elles influencent l'évolution des non-linéarités dans le milieu.

Comme cela a été vu au chapitre 2, cette méthode permet de régulariser les milieux adoucissants. Néanmoins, les résultats numériques obtenus vis-à-vis de la description de l'évolution des non-linéarités dans le milieu ne correspondent pas au comportement attendu, que ce soit à l'enclenchement des non-linéarités dans des zones à fort gradient de contrainte ou à la rupture. Dans ce chapitre de thèse, il est uniquement fait référence au modèle nonlocal intégral qui, par abus de langage est simplifié en modèle nonlocal.

3.1.1 Amorçage de l'endommagement en présence de singularité géométrique

Pour analyser le problème de l'enclenchement de l'endommagement dans les zones à fort gradient de contrainte, le cas d'étude simple d'un spécimen entaillé soumis à de la traction (Fig. 3.1) est considéré.

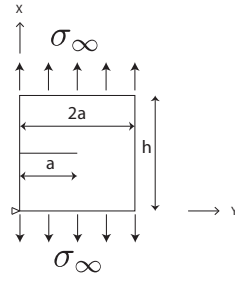


FIGURE 3.1: Spécimen entaillé en traction simple

Ce problème est traité analytiquement dans sa phase élastique en considérant les champs de contrainte et déformation en pointe de fissure, puis numériquement par la méthode des éléments finis pour estimer l'intégrale permettant de calculer les déformations équivalentes nonlocales.

Dans un deuxième temps, une étude purement numérique est menée pour l'enclenchement et la propagation de l'endommagement.

Les travaux originaux de Eringen *et al.* [1977] sur la description du champ de contrainte nonlocale dans un milieu entaillé montrent que le maximum de ce champ n'est pas situé en pointe de l'entaille. Cette analyse a été étendue aux modèles d'endommagement pilotés par une variable nonlocale par Simone *et al.* [2004b]. L'analyse qui suit en expose les principaux résultats.

1. Approche semi-analytique.

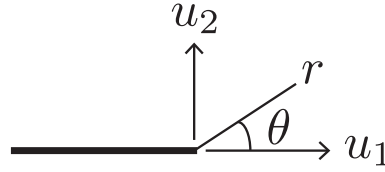


FIGURE 3.2: Repère associé à la pointe de l'entaille

Les solutions de Westergaard, pour un problème avec une fissure chargée en mode I dans un milieu semi-infini, donnent la forme du champ de contrainte en pointe d'entaille (Tada *et al.* [1985]). En considérant un milieu élastique, en se plaçant dans l'hypothèse de contraintes planes, le champ de déformation suivant est obtenu, dans le repère circulaire associé à la pointe de l'entaille (Fig. 3.2) :

$$\varepsilon_{11}(r, \theta) = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \nu - (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{22}(r, \theta) = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \nu + (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{12}(r, \theta) = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{33}(r, \theta) = -\frac{2\nu K_I}{E\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.4)$$

avec K_I , le facteur d'intensité de contrainte en mode I.

A partir de ce champ de déformation, la déformation équivalente associée en chaque point est déterminée (Fig. 3.3(a)). On considère dans cet exemple la déformation équivalente de Von Mises proposée par de Vree *et al.* [1995]. Des conclusions similaires sont obtenues pour d'autres expressions (e.g. déformation équivalente proposée par Mazars [1986]).

$$\varepsilon_{eq}(r, \theta) = -\frac{\sqrt{2}K_I}{4E\sqrt{\pi r}}\sqrt{(1 + \cos \theta)(5 - 3 \cos \theta)} \quad (3.5)$$

Le champ de déformation équivalente locale présente une singularité en pointe d'entaille. En considérant les modèles d'endommagement pilotés par la déformation équivalente, la formulation locale enclenche bien l'endommagement en pointe d'entaille. En revanche, l'endommagement apparaît dès que l'on applique un chargement sur le spécimen, indépendamment du niveau de chargement.

A partir du champ de déformation équivalente locale, on peut calculer le champ nonlocal associé (Fig. 3.3(b)). Numériquement, ce champ est estimé en exprimant l'intégrale dans l'équation 2.43 sous forme d'une somme discrète pondérée sur l'ensemble du domaine.

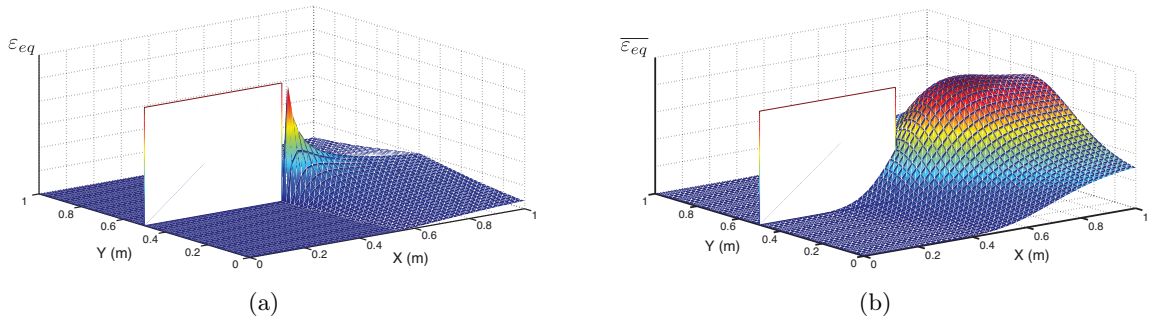


FIGURE 3.3: (a) Champ de déformation équivalente local; (b) Champ de déformation équivalente nonlocale.

Pour le champ nonlocal correspondant, Peerlings *et al.* [2001] et Simone *et al.* [2004b] montrent qu'il n'est plus singulier en pointe d'entaille (i.e. la valeur maximale du champ est finie). Cependant, on observe pour ce champ un décalage vers l'avant de la pointe de fissure du maximum par rapport à la position attendue en pointe de l'entaille. De plus, Simone *et al.* [2004b] montrent que ce décalage est proportionnel à la longueur interne l_c du modèle nonlocal. Ce résultat induit pour les modèles d'endommagement pilotés par la déformation équivalente nonlocale, un décalage du lieu de l'enclenchement de l'endommagement vis-à-vis de la pointe de l'entaille. Ainsi, si ces modèles permettent d'enclencher l'endommagement pour des niveaux réalistes de chargement, ils ne permettent pas de prédire le lieu de l'enclenchement de l'endommagement dans des zones à fort gradient de contrainte (e.g. en pointe d'entaille).

2. Analyse numérique.

On considère un problème similaire traité numériquement par la méthode des éléments finis. Par raison de symétrie, seulement la moitié du spécimen est étudiée. Les dimensions du spécimen sont égales à $h = 0,002$ m et $a = 0,0005$ m. Un déplacement suivant l'axe X est imposé en tête du spécimen et le déplacement suivant X est laissé libre en bas du demi-spécimen de Y égale 0 à a (i.e. déplacement libre introduire l'entaille) et bloqué pour Y supérieure à a. Les paramètres matériau suivants ont été pris pour l'analyse : $E = 1000$ MPa; $\nu = 0,2$. Différentes longueurs internes sont utilisées pour observer l'influence de ce paramètre sur la

distribution du champ de déformation équivalente nonlocale : $l_c = 0,0001$; $0,0002$ ou $0,0005$ m. Le maillage est composé d'éléments triangulaires à interpolation linéaire avec une taille moyenne de côté de triangle de 5.10^{-5} m.

A partir du champ de déformation obtenu sous un déplacement en tête du spécimen tel que le seuil d'endommagement ne soit pas atteint, le champ de déformation équivalente est calculé. Le champ nonlocal correspondant peut alors être déterminé (Fig. 3.4).

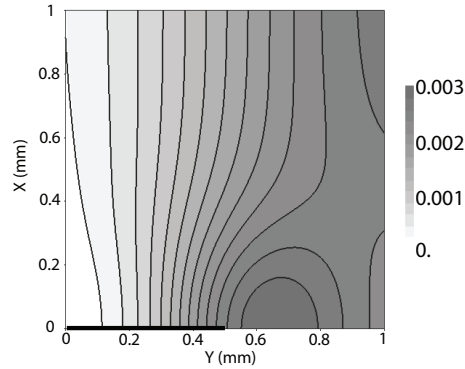


FIGURE 3.4: Champ de déformation équivalente nonlocale

Etant similaire au cas d'étude semi-analytique, la position du maximum du champ de déformation équivalente nonlocale découlant de champs de déformation obtenus numériquement est également décalée par rapport à la pointe de l'entaille. Ce cas-test numérique est repris par la suite et les résultats présentés ici sont utilisés comme point de référence pour observer les possibles améliorations avec un modèle modifié.

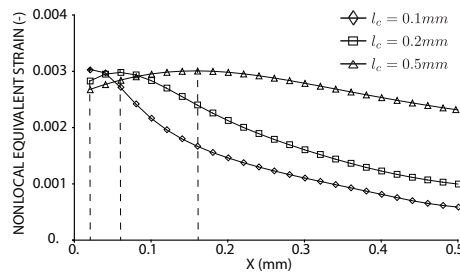


FIGURE 3.5: Influence de la longueur interne sur la position du maximum.

Comme le montrent Simone *et al.* [2004b], ce décalage du maximum dépend de la longueur interne. Plus cette dernière augmente, plus le décalage observé est important.

Le caractère isotrope de la fonction poids entraîne qu'un point en pointe d'entaille subit la même influence des points en amont et aval de la fissure. Ainsi, la participation d'un point en amont de la pointe d'entaille (i.e. produit de la fonction poids par la déformation équivalente locale) dans la déformation équivalente nonlocale des points en pointe d'entaille, a tendance à diminuer fortement cette dernière car sa déformation équivalente locale est quasi-nulle. Or, en pointe d'entaille, le gradient de déformation est plus important en arrière de la fissure qu'en front (voir figure 3.3(a)). Cette dissymétrie est à l'origine du décalage du maximum du produit de convolution entre la fonction poids et le champ de déformation équivalente locale. Ce point est problématique notamment lorsqu'on étudie l'effet d'échelle matériau (voir chapitre 4) car pour les structures fragiles, la force maximale est obtenue à l'amorçage de l'endommagement. De plus, l'effet d'échelle matériau observé à la propagation d'une fissure s'intéresse à l'amorçage de l'endommagement dans des structures pré-entaillées introduisant ainsi une singularité qu'il est nécessaire de bien prendre en compte.

3.1.2 Description des interactions nonlocales proche d'un bord

Les modèles nonlocaux nécessitent des conditions particulières pour calculer les champs nonlocaux aux bords. Il a été vu dans le chapitre 2 que les modèles en gradient de déformation imposent une condition de flux de déformation nul dans la direction normale aux bornes du domaine. Pour le modèle nonlocal intégral, il n'y a pas de condition supplémentaire introduite en terme d'équation, en revanche, la forme de l'équation de pondération (eq. 2.43) entraîne une modification des interactions entre points proches d'un bord. En effet, proche d'un bord, le domaine $\Omega(\mathbf{x})$ associé au point en \mathbf{x} , des interactions nonlocales non négligeables, est tronqué (Fig. 3.6).

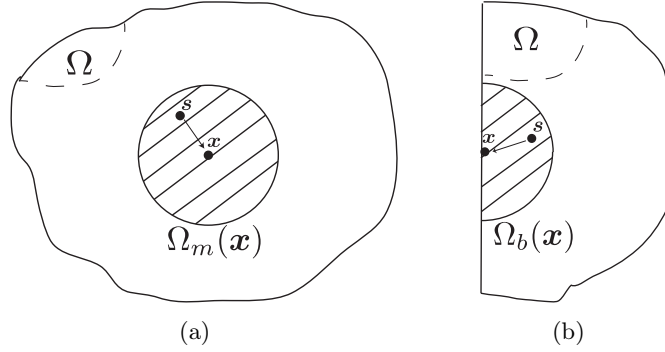


FIGURE 3.6: Domaine d'interaction nonlocal associé au point en \mathbf{x} : (a) dans le milieu ; (b) proche d'un bord.

Considérons un point en \mathbf{x} dans le milieu avec son domaine d'interaction associé $\Omega_m(\mathbf{x})$ (Fig. 3.6(a)). Le poids d'un point en \mathbf{s} sur le point considéré est égal à :

$$\phi_{milieu}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\int_{\Omega_m(\mathbf{x})} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}} \quad (3.6)$$

Dans le cas où le point en \mathbf{x} se situe sur le bord du domaine, on a :

$$\phi_{bord}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\int_{\Omega_b(\mathbf{x})} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}} \quad (3.7)$$

Comme le domaine sur le bord est tronqué de moitié, on a $\Omega_m(\mathbf{x}) = 2\Omega_b(\mathbf{x})$. Cette relation entraîne pour les poids :

$$\phi_{bord}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \phi_{milieu}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \quad (3.8)$$

Ainsi, un point en \mathbf{s} aura plus d'influence sur un point en \mathbf{x} si ce dernier est proche d'un bord. L'influence de ce résultat sur l'enclenchement et l'évolution des nonlinéarités proche d'un bord est analysée au travers d'un test aux barres d'Hopkinson (Fig. 3.7).

Une onde de compression en créneau de longueur l est générée à une extrémité de la barre à un temps t_0 , de vitesse v_0 . À l'autre extrémité de la barre, l'onde de compression se réfléchit

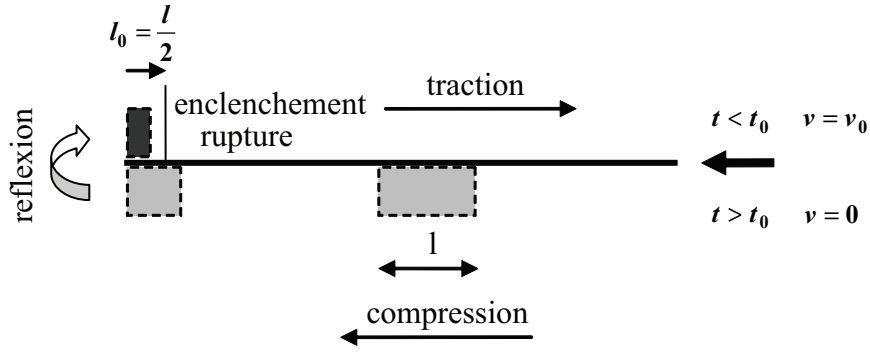


FIGURE 3.7: Essai aux barres d'Hopkinson.

et se transforme en une onde de traction. Elle s'ajoute alors à la partie de l'onde incidente de compression qui n'a pas encore atteint le bord. Si l'amplitude de l'onde de traction est supérieure à la limite en traction du matériau testé, la rupture s'enclenche là où la résultante des deux ondes devient pour la première fois une onde de traction, c'est à dire à une distance l_0 du bord égale à la moitié de la longueur de l'onde de compression incidente. Ainsi, cet essai permet d'enclencher une fissure à une distance contrôlée du bord.

1. Approche analytique.

Analytiquement, on étudie la forme du champ de déformation équivalente nonlocale, au moment de l'apparition de l'onde de traction d'amplitude ε_{signal} en $x = l_0$. On décrit la déformation locale uniaxiale par une fonction Dirac :

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon_{signal}\delta(x - l_0) \quad (3.9)$$

avec $\delta(x)$ la fonction Dirac. La déformation nonlocale correspondante peut alors être calculée :

$$\overline{\varepsilon_x(x)} = \frac{\varepsilon_{signal}\phi_0(x - l_0)}{\int_0^{l_{bar}} \phi_0(x - s)ds} \quad (3.10)$$

En considérant une description discrète du problème pour estimer la déformation nonlocale, le terme au dénominateur de l'équation 3.10 est évalué comme une somme discrète des poids en chaque point.

Pour l'application numérique, on considère une barre de longueur égale à 25 cm. La longueur interne l_c du modèle nonlocal est prise égale à 3 cm. L'influence de la position par rapport au bord l_0 , du point d'apparition de l'onde de traction est étudiée : $l_0 = 0,5 ; 2 ; 3$ ou 12,5 cm.

Sur la figure 3.11, la position du maximum de déformation équivalente nonlocale est confondue avec celle du champ local lorsque le point d'apparition de l'onde de traction est suffisamment loin du bord. En revanche, lorsque l_0 devient inférieure à la longueur interne l_c du modèle, la troncature du volume d'interaction proche du bord provoque une attraction du maximum du champ de déformation équivalente nonlocale par le bord entraînant ainsi un mauvais enclenchement de l'endommagement.

2. Approche numérique.

Numériquement, l'évolution de l'endommagement est étudiée au cours du chargement. Cette

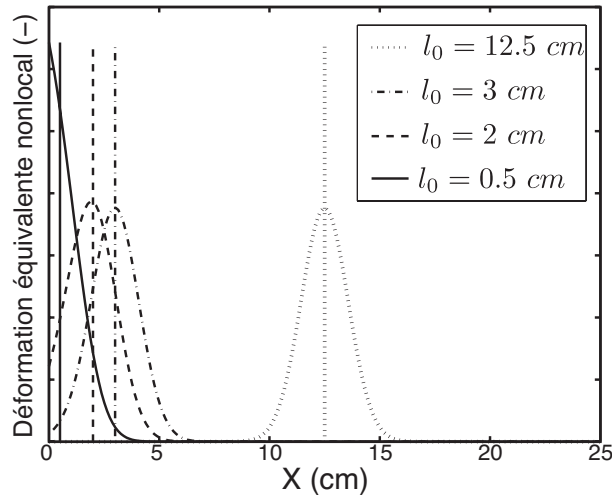


FIGURE 3.8: Barres d'Hopkinson : Influence de l_0 sur la position du maximum du champ de déformation équivalente nonlocale.

étude réutilise la même analyse que celle effectuée par Krayani *et al.* [2009] pour un modèle matériau similaire (Mazars [1986]). Les paramètres utilisés pour le test sont : la masse volumique $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, le module d'Young $E = 1 \text{ MPa}$ et la vitesse imposée v_0 en condition limite à l'extrémité droite de la barre. Les paramètres pour la loi d'évolution de l'endommagement proposée par Peerlings *et al.* [1998] sont : $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\varepsilon_{D_0} = 1$ et la longueur interne l_c est égale à 3 cm.

Le maillage est composé de 250 éléments barre à interpolation linéaire. Le schéma explicite des différences centrées est utilisé pour effectuer la résolution temporelle du problème. La longueur de l'onde de compression est égale à $l = t_0 c$ et son amplitude est de $\frac{v_0}{c}$ avec c , la célérité d'une onde élastique, égale à $\sqrt{E/\rho}$. La longueur choisie est de 3cm pour enclencher l'onde de traction à 1,5 cm du bord.

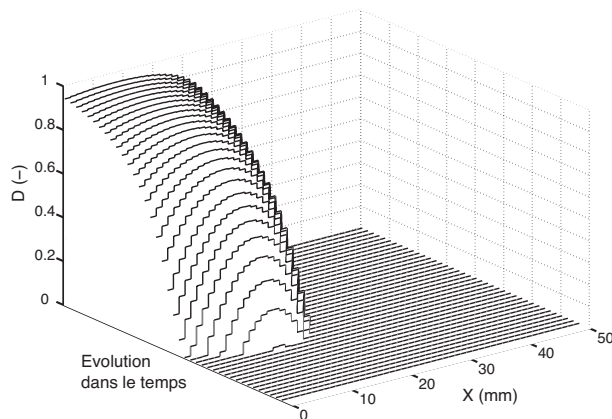


FIGURE 3.9: Barre d'Hopkinson : Evolution du profil d'endommagement au cours de l'essai.

L'endommagement se développe initialement à l'intérieur de la barre mais au fur et à mesure du chargement, une attraction de l'endommagement par le bord est observée. A la fin du test, l'extrémité de la barre est complètement endommagée avec $D = 1$, tandis que l'intérieur de la barre n'est que partiellement endommagé. L'écaïlle obtenue, après la rupture de la barre, est définie comme étant la zone délimitée par le bord de la barre et le point ayant subi l'endommagement maximal et égal à 1. Ainsi, cet exemple simple montre qu'il n'est pas

possible de modéliser un écaillage du spécimen d'épaisseur non nulle avec la régularisation nonlocale lorsque l'endommagement s'enclenche à une distance du bord inférieure à la longueur interne du modèle.

3.1.3 Description des interactions nonlocales à la rupture

La régularisation nonlocale pondère les interactions en fonction de la distance entre points considérés (Eq. 2.44). Par définition, ces interactions sont isotropes et restent fixes au cours du chargement, de l'enclenchement de l'endommagement jusqu'à la rupture. Cette description des nonlocalités atteint ses limites lorsqu'une macrofissure, correspondant à une zone fortement endommagée dans une modélisation continue, traverse le milieu. En effet, d'un point de vue mécanique, une fissure ouverte représente un obstacle aux interactions entre deux points situés de part et d'autre de la fissure (i.e. effet de masque) (Fig. 3.10(a)). Or, dans le cas de la régularisation nonlocale, les interactions ne sont pas influencées par la présence d'une zone de fissuration (Fig. 3.10(b)). Ainsi, un point continue à influencer un autre point de l'autre côté de la zone de fissuration même à la rupture.

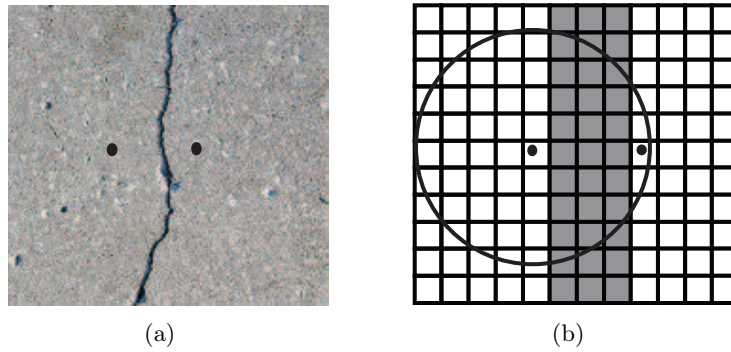


FIGURE 3.10: Interactions dans la zone de localisation à la rupture. (a) Cas réel, pas d'interaction; (b) Milieu nonlocal, interactions au travers de la zone de fissuration.

L'influence de cette description des interactions sur l'évolution de l'endommagement est étudiée sur un cas test de barre en traction. Pour l'étude, une barre avec une géométrie 2D est considérée (longueur : 1m et hauteur : 0.01m), sur laquelle un chargement 1D est appliquée. La barre est fixée à une extrémité. L'essai est piloté en déplacement imposé.

Les paramètres suivants ont été utilisés pour le modèle d'endommagement décrivant le comportement du béton (Eq. 2.19) : $E_b = 33.7$ GPa, $\alpha = 0.99$, $\nu = 0$, $\beta = 1000$ et $l_c = 0.18$ m. Le coefficient ν est pris égal à 0 pour observer dans la barre seulement une déformation uniaxiale (i.e. pas d'effet de Poisson).

Le maillage de la barre est composé d'éléments quadrangles à interpolation linéaire avec un seul élément sur la hauteur. L'élément central est affaibli avec un module d'Young plus faible ($E_{b_{faible}} = 31$ GPa) afin de maîtriser le lieu de l'enclenchement de l'endommagement ainsi que le "mode" d'endommagement avec une seule zone de fissuration (i.e. l'élément faible permet de choisir une solution (lieu et nombre de "process zone") parmi un nombre fini de ce problème de bifurcation).

L'objectivité des résultats est vérifiée avec la méthode de régularisation nonlocale pour un maillage grossier (31 éléments), un maillage moyen (61 éléments) et un maillage fin (121 éléments) (Fig. 3.11).

L'évolution de la déformation et de l'endommagement le long de la barre au cours du charge-

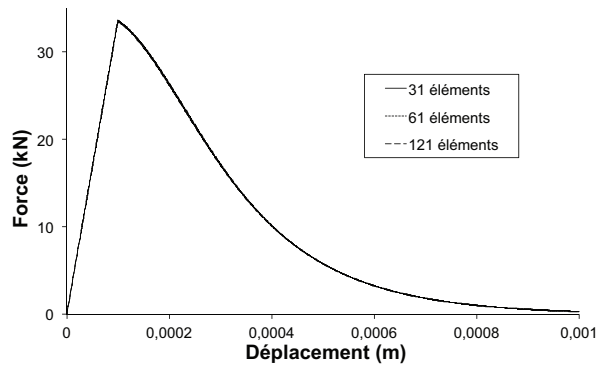


FIGURE 3.11: Barre en traction : Evolution de la force en fonction du déplacement. Objectivité des résultats vis-à-vis du maillage.

ment est maintenant étudiée (Fig. 3.12).

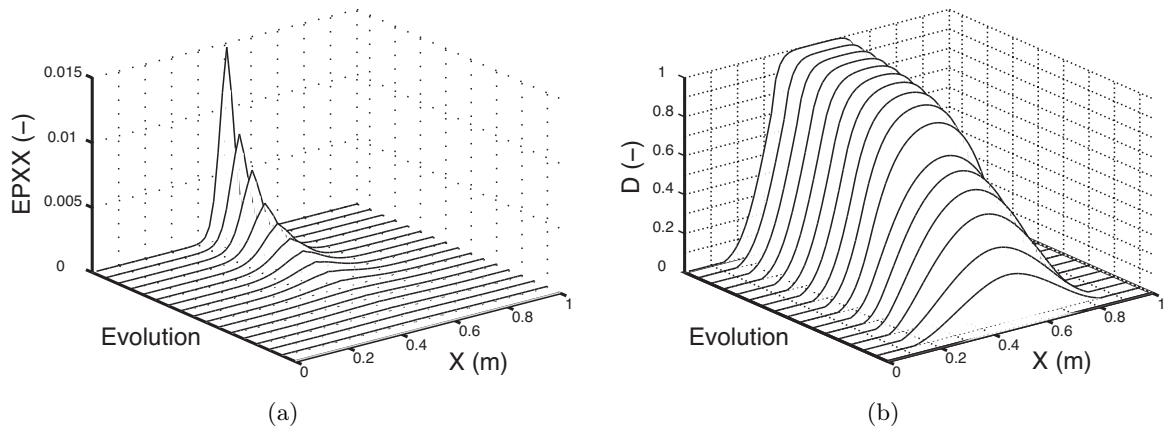


FIGURE 3.12: Barre en traction : Evolution au cours du chargement du profil de déformation ε_{xx} (a) et d'endommagement (b).

Le champ de déformation à la rupture se localise dans une bande de largeur proportionnelle à la longueur interne du modèle (Fig. 3.12(a)). La forme du champ est relativement éloignée de celle correspondant à une macrofissure (i.e. impulsion de Dirac au droit de la fissure).

De plus, sur la figure 3.12(b), on observe à la rupture une zone complètement endommagée étalée sur plusieurs éléments (3.12(b)). Les interactions entre points de Gauss n'évoluant pas au cours du temps, si on continue à charger une zone fortement endommagée, la déformation équivalente nonlocale des points autour de la zone de fissuration continue à augmenter jusqu'à ce qu'ils atteignent eux aussi un endommagement maximal. Un étalement de l'endommagement est alors observé. Physiquement, une seule fissure est attendue pour ce test. Ainsi, numériquement, l'endommagement doit atteindre une valeur de 1 dans un seul élément fini (plus petite entité numérique) et doit rester seulement partiellement endommagé autour.

Pour conclure la partie 3.1, 3 pathologies principales peuvent être identifiées et pour lesquelles des développements doivent être proposés afin de mieux décrire l'enclenchement et l'évolution des nonlinéarités dans le milieu :

- *enclenchement de l'endommagement dans les zones à fort gradient (e.g. en pointe d'entaille)* ;

- description des interactions proche d'un bord ;
- description des champs cinématiques dans la zone de fissuration.

3.2 Vers une évolution du modèle intégral nonlocal

Il vient d'être vu dans le paragraphe précédent que le modèle nonlocal intégral souffrait de diverses pathologies. Afin de palier à certains de ces problèmes, divers développements ont été proposés par le passé. Certains de ces développements sont décrits brièvement et analysés pour en tirer les éléments essentiels qui vont permettre ensuite d'introduire une nouvelle méthode de régularisation nonlocale capable de répondre aux diverses pathologies relevées.

3.2.1 Modification de la régularisation en gradient

Peerlings *et al.* [2001] ont montré l'équivalence de l'approche en gradient et l'approche nonlocale pour une fonction d'interaction de Green. Ainsi, les pathologies citées précédemment sont également observées pour les modèles à gradient (Geers *et al.* [1998]; Simone *et al.* [2004b]). Geers *et al.* [1998] montrent le problème de diffusion de l'endommagement et la mauvaise prise en compte des interactions dans la zone de localisation à la rupture. A partir de considérations phénoménologiques, ils proposent une évolution du terme en gradient c ($c = l^2$ dans l'équation 2.47) en fonction de la déformation équivalente subie par ce point, noté activité de gradient ζ :

$$\zeta = \begin{cases} c \left(\frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_\zeta} \right)^{n_\zeta} & \text{si } \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_\zeta \\ c & \text{si } \varepsilon_{eq} > \varepsilon_\zeta \end{cases} \quad (3.11)$$

avec n_ζ un paramètre du modèle pour contrôler la loi d'évolution de ζ et ε_ζ , une déformation équivalente seuil au delà de laquelle ζ est égale à la valeur c de la régularisation en gradient originale. Ainsi, l'expression proposée aboutit à une augmentation de la longueur interne du modèle avec l'augmentation de la déformation équivalente observée.

Lorsqu'un point se décharge, sa déformation équivalente diminuant, son activité de gradient diminue également. Le point devient ainsi local. En revanche, un point dans la zone de localisation voit son activité de gradient augmenter avec l'augmentation de sa déformation équivalente. Le point est fortement nonlocal avec un domaine d'influence associé maximal. A la rupture, seuls les points dans la zone de localisation sont nonlocaux permettant ainsi une bonne description des champs cinématiques à la rupture. En revanche, cette approche ne permet pas de résoudre les problèmes liés à l'enclenchement de l'endommagement en pointe d'entaille. L'expression de la régularisation en gradient reste isotrope (i.e. c est un scalaire) et n'évite donc pas au point en pointe de l'entaille d'être influencé par les points dans l'ombre de l'entaille.

Plus récemment, Voyiadjis et Abu Al-Rub [2005] ont proposé, dans le cadre de la plasticité, une évolution de la longueur interne du modèle gradient. A partir d'une analyse de la densité de dislocations, ils montrent le caractère évolutif de la longueur interne en fonction de l'évolution du matériau sous chargement. Ils proposent, à partir de ces analyses, et en

confrontant à des essais d'effet d'échelle de micro-flexion et micro-torsion, une expression de la longueur interne :

$$l = \frac{\hbar D d}{D + d p^{\frac{1}{m}}} \quad (3.12)$$

avec \hbar un paramètre provenant de la mécanique de la dislocation, d la taille moyenne de grain, D la taille caractéristique de la structure macroscopique, p la déformation plastique, m le coefficient d'écroutissage. A l'inverse de la proposition précédente, l'expression de la longueur interne décroît avec l'augmentation des nonlinéarités (i.e. la déformation plastique) en partant d'une valeur initiale de la longueur interne égale à $\hbar d$ pour tendre vers 0 lorsque la déformation plastique augmente. Voyiadjis et Abu Al-Rub [2005] montrent avec l'approche proposée une amélioration de la description des effets d'échelle observés expérimentalement sur des spécimens à l'échelle microscopique, comparée à des modèles considérant une longueur interne fixe.

Cependant, la longueur interne reste un scalaire et ne permet donc pas d'introduire une directionnalité des interactions. En effet, comme cela est montré par la suite dans le paragraphe 3.2.3, les interactions s'annulent dans la direction normale à un bord (la direction parallèle au bord n'est pas affectée par celui-ci). Or, la macrofissure orientée introduisant physiquement des nouveaux bords libres, les interactions doivent s'orienter comme pour les problèmes de bord.

Ces 2 modèles montrent, dans le cas de la régularisation en gradient de variable interne, la nécessité d'introduire une variation de la longueur interne du modèle pour mieux reproduire l'évolution des nonlinéarités dans le milieu (i.e. zone de fissuration à la rupture, effet d'échelle...)

3.2.2 Modification de modèles d'endommagement nonlocaux en fonction de l'endommagement

Afin de traiter la dégradation, voir la disparition, des interactions nonlocales au travers d'une zone endommagée, Desmorat et Gatuingt [2007] proposent de modifier la fonction poids du modèle intégral original. En reliant l'interaction entre 2 points au temps de propagation d'une onde acoustique dans le milieu, ils remplacent la notion de longueur dans la fonction poids par la notion de temps (i.e. temps interne τ_c et temps de parcours $\tau_{\mathbf{x}\mathbf{s}}$). La régularisation nonlocale s'écrit alors ;

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\Omega} \phi_0\left(-\frac{\tau_{\mathbf{x}\mathbf{s}}}{\tau_c}\right) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}}{\int_{\Omega} \phi_0\left(-\frac{\tau_{\mathbf{x}\mathbf{s}}}{\tau_c}\right) d\mathbf{s}} \quad (3.13)$$

Ainsi, lorsque le matériau se dégrade, le temps de parcours $\tau_{\mathbf{x}\mathbf{s}}$ entre le point en \mathbf{x} et le point en \mathbf{s} tend à augmenter, entraînant une diminution du poids. A la rupture, ce temps devient infini, annulant ainsi l'interaction entre 2 points de part et autre de la zone de localisation.

Dans le cadre des modèles d'endommagement, Desmorat et Gatuingt [2007] aboutissent à une expression similaire à celle qui est proposée par les modèles nonlocaux basés sur des mesures de distance. Les temps introduits dans l'Eq. 3.13 peuvent s'exprimer en fonction des distances :

$$\tau_c = c l_c \quad (3.14)$$

$$\tau_{\mathbf{x}\mathbf{s}} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}{c_0} \quad (\text{Milieu sain}) \quad (3.15)$$

$$\tau_{\mathbf{x}\mathbf{s}} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}{c_0 \sqrt{1 - D_0}} \quad (\text{Milieu endommagé de manière homogène à } D_0) \quad (3.16)$$

avec c_0 la vitesse du son dans le matériau sain. La fonction poids peut alors s'exprimer en fonction de longueurs, en introduisant l'effet de l'endommagement :

$$\phi_0 \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|_D}{l_c} \right) = \phi_0 \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}{l_c \sqrt{1 - D_0}} \right) \quad (3.17)$$

Pour un milieu endommagé de manière homogène, la méthode nonlocale proposée par Desmorat et Gatingt [2007] donnent une formulation similaire à celle proposée par Pijaudier-Cabot et Dufour [2010] qui remplace la distance entre 2 points $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|$ par une distance intégrant l'endommagement entre les 2 points considérés $u(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ définie par :

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \int_{\Omega} \frac{\|\mathbf{x} - d\mathbf{s}\|}{\Gamma(\mathbf{s})} \quad (3.18)$$

avec $\Gamma(\mathbf{s})$, une fonction quantifiant le niveau d'endommagement du point en \mathbf{s} . Cette fonction est égale à 1 pour un matériau sain et décroît jusqu'à 0 au fur et à mesure de la dégradation de ce matériau. En effectuant un changement de variable de \mathbf{s} à \mathbf{u} dans l'équation 2.43, le terme nonlocal s'écrit alors :

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\Omega} \phi_0(u) f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) d\mathbf{u}}{\int_{\Omega} \phi_0(u) d\mathbf{u}} \quad (3.19)$$

Dans ce modèle aussi, la distance virtuelle entre les points augmente avec l'endommagement, diminuant d'autant les interactions.

Ainsi, ces approches permettent de mieux prendre en compte l'évolution des interactions dans la zone de localisation. En effet, sur l'exemple de la barre 1D en traction, cette méthode amène une meilleure description des champs cinématiques à la rupture et l'étalement de l'endommagement maximal sur plusieurs éléments n'est plus observé (Desmorat et Gatingt [2007]; Pijaudier-Cabot et Dufour [2010]).

Cependant, l'expression de la fonction poids garde pour chaque point, une influence isotrope sur son voisinage. Ainsi, les interactions entre points ne sont pas modifiées tant qu'il n'y a pas d'endommagement. Ainsi, le problème de la position du point d'enclenchement de l'endommagement en pointe d'entaille n'est pas résolu. De plus, ces méthodes deviennent relativement coûteuses en termes de temps de calcul pour des analyses 2D et 3D car elles nécessitent à chaque augmentation d'endommagement dans le milieu, de considérer dans le premier cas le temps de parcours d'ondes et dans le second cas les différents chemins possibles entre 2 points. Dans le cas des ondes acoustiques, il se pose également le choix du type d'onde et le traitement de la réflexion sur les bords.

3.2.3 Modification de modèles d'endommagement nonlocaux à partir de la micromécanique

Divers travaux d'analyse sur la méthode nonlocale montrent que l'on peut expliquer physiquement son origine en considérant un cadre micromécanique (Bažant [1991]). En effet, les termes nonlocaux peuvent être identifiés comme étant des redistributions de contrainte dues à la présence de vides ou de fissures.

A partir d'une analyse micromécanique des interactions entre fissures dans un milieu élastique en utilisant la méthode d'étude proposée par Kachanov [1987], Bažant [1994] développe une formulation nonlocale du problème mécanique aboutissant à l'équation incrémentale en contrainte suivante :

$$\Delta\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_e\Delta\varepsilon(\mathbf{x}) - \Delta\tilde{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (3.20)$$

où \mathbf{C}_e correspond au tenseur élastique et $\Delta\tilde{\sigma}(\mathbf{x})$ est un incrément de contrainte inélastique solution d'une équation de Fredholm du second type :

$$\Delta\tilde{\sigma}(\mathbf{x}) = \Delta\bar{\sigma}(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{s})\Delta\tilde{\sigma}(\mathbf{s}) \quad (3.21)$$

Le premier terme de droite de l'équation 3.21 correspond au terme classique nonlocal avec une moyenne pondérée sur le voisinage. Le second terme décrit les interactions entre zones microfissurées avec $\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ une fonction d'influence d'une zone microfissurée. Ce coefficient correspond à une moyenne statistique de coefficients d'influence d'une microfissure chargée par une pression unitaire sur une microfissure distante considérée fixe. Cette fonction d'interaction dépend non seulement de la distance entre points mais aussi de l'orientation des microfissures par rapport au chargement et de l'orientation de l'une par rapport à l'autre (Fig 3.13).

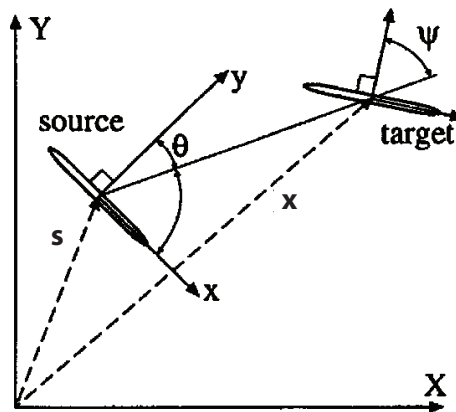


FIGURE 3.13: Interaction entre 2 fissures (Bažant [1994]).

La fonction d'interaction qu'il propose, s'écrit :

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \theta, \psi) \approx -\frac{k(\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|)}{2\ell^2} [\cos 2\theta + \cos 2\psi + \cos 2(\theta + \psi)] \quad (3.22)$$

avec $k(\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|)$ la fonction de redistribution d'une fissure chargée par une pression sur ses lèvres dans un milieu élastique :

$$k(\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|) = \left(\frac{\kappa \ell \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2 + \ell^2} \right)^2 \quad (3.23)$$

avec ℓ une longueur définissant une zone d'interaction principale entre microfissures et κ une constante empirique .

Cette approche a été implantée dans un code aux éléments finis par Ožbolt et Bažant [1996] en l'associant au modèle microplan. Elle permet de mieux reproduire, pour le même jeu de paramètres dont la longueur interne ℓ , des essais sous divers chargements (i.e. traction, cisaillement...). Ce résultat met ainsi en valeur le fait que la taille et l'évolution de la zone d'interaction ne sont pas seulement dépendantes du matériau mais également du type de chargement auquel est soumise la structure étudiée.

Cette méthode est néanmoins coûteuse en temps de calcul car elle nécessite de résoudre à chaque itération l'équation de Fredholm (Eq. 3.21). De plus, le terme nonlocal classique est encore présent dans l'équation à résoudre. Ainsi, la fonction d'interaction peut atténuer dans certaines directions les nonlocalités, mais elle n'empêche pas d'avoir pour d'autres directions des termes nonlocaux qui subsistent à la rupture. Ainsi, on peut voir dans Ožbolt et Bažant [1996] que l'endommagement maximal est étalé sur plusieurs éléments. De plus, l'endommagement remonte le long de l'entaille sur un test d'une éprouvette entaillée soumise à de la traction.

Plus récemment, en se plaçant également dans un cadre micromécanique, Pijaudier-Cabot *et al.* [2004] ont développé une méthode nonlocale avec une longueur interne évolutive. En considérant un milieu chargé à l'infini σ_∞ rempli de vides sphériques (Fig. 3.14), ils retrouvent une formulation nonlocale simplifiée en utilisant la méthode d'analyse proposée par Kachanov [1987].

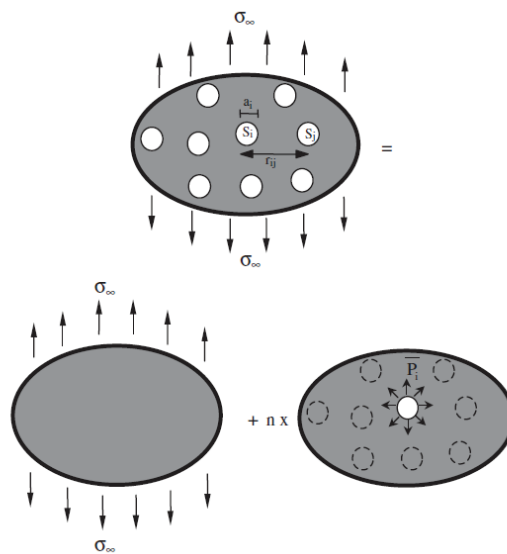


FIGURE 3.14: Analyse micromécanique (Pijaudier-Cabot *et al.* [2004]).

L'expression de la contrainte en un point en \mathbf{x} est égale à :

$$\sigma(\mathbf{x}) \approx \sigma_\infty(\mathbf{x}) + \sum l_{\mathbf{x}\mathbf{s}}^2 \sigma_\infty(\mathbf{s}) \quad (3.24)$$

avec $l_{\mathbf{x}\mathbf{s}}$ un facteur d'interaction issu des solutions d'Eshelby décrivant le champ de contrainte autour d'un vide sphérique soumis à une pression interne. Ce facteur est proportionnel à la distance entre le point considéré en \mathbf{x} et le point en \mathbf{s} où le vide est localisé et au rayon du vide sphérique qui peut s'apparenter à une taille de fissure. Certaines hypothèses sont faites pour passer de l'expression en contrainte à l'expression en déformation afin d'identifier une variable nonlocale en déformation de la même forme que la variable nonlocale utilisée dans le modèle nonlocal original. En parallèle, des expérimentations ont été menées sur des poutres en mortier soumises à de la flexion 3 points avec des densités d'inclusions en polystyrène différentes (i.e. les billes de polystyrène). Par analyse acoustique, il est observé que la largeur de la zone de fissuration augmente avec la densité d'inclusions (i.e. la densité de vides sphériques initiale). A partir de ces études et observations expérimentales, une modification de la longueur interne l_c du modèle nonlocal est proposée :

$$l_c(\varepsilon_{eq}) = l_{c_0} + \alpha f(\varepsilon_{eq}) \quad (3.25)$$

avec l_{c_0} la longueur interne initiale et α une constante. f est une fonction qui croît avec l'augmentation des nonlinéarités et elle est comprise entre 0 (matériau sain) et 1 (matériau endommagé). Bien que la forme soit semblable à l'expression proposée par Geers *et al.* [1998], le terme l_{c_0} dans l'expression de $l_c(\varepsilon_{eq})$ associe une zone d'influence nonlocale initiale au point considéré, quelque soit son niveau de chargement observé. Ainsi, l'étalement de l'endommagement à la rupture reste observable avec cette formulation (Pijaudier-Cabot *et al.* [2004]). Ces approches mettent en lumière le caractère évolutif de la zone d'interaction nonlocale en proposant une évolution de la longueur interne du modèle.

En revanche, en considérant des vides sphériques dans un milieu chargé de manière isotrope, la notion d'orientation du domaine d'interaction n'apparaît pas et cette approche ne permet pas de résoudre les problèmes de mauvaise localisation du maximum de champ de déformation équivalente dans des zones à gradient de contrainte.

Pijaudier-Cabot et Dufour [2010] réutilisent cette base micromécanique pour un milieu semi-infini contenant un vide sphérique afin d'analyser les interactions nonlocales, proche d'un bord. Le développement ci-dessous est fait pour un bord libre mais il peut se retranscrire facilement à un bord chargé.

De la même façon, l'étude peut se décomposer en 2 sous-problèmes (Fig. 3.15) : le milieu semi-infini est chargé à l'infini en fixant les bords du vide sphérique (Sous-problème I), le vide sphérique est mis en pression sans chargement à l'infini (Sous-problème II). Le sous-problème II traite l'interaction entre un vide sphérique \mathbf{S}_1 et un bord libre Γ . Les équations qui en découlent sont :

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_{1,\Gamma} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_\Gamma + \mathbf{p}_{\Gamma,1} \quad (3.27)$$

La pression \mathbf{P}_1 est égale à l'opposé de la pression observée au niveau de \mathbf{S}_1 dans le cas du

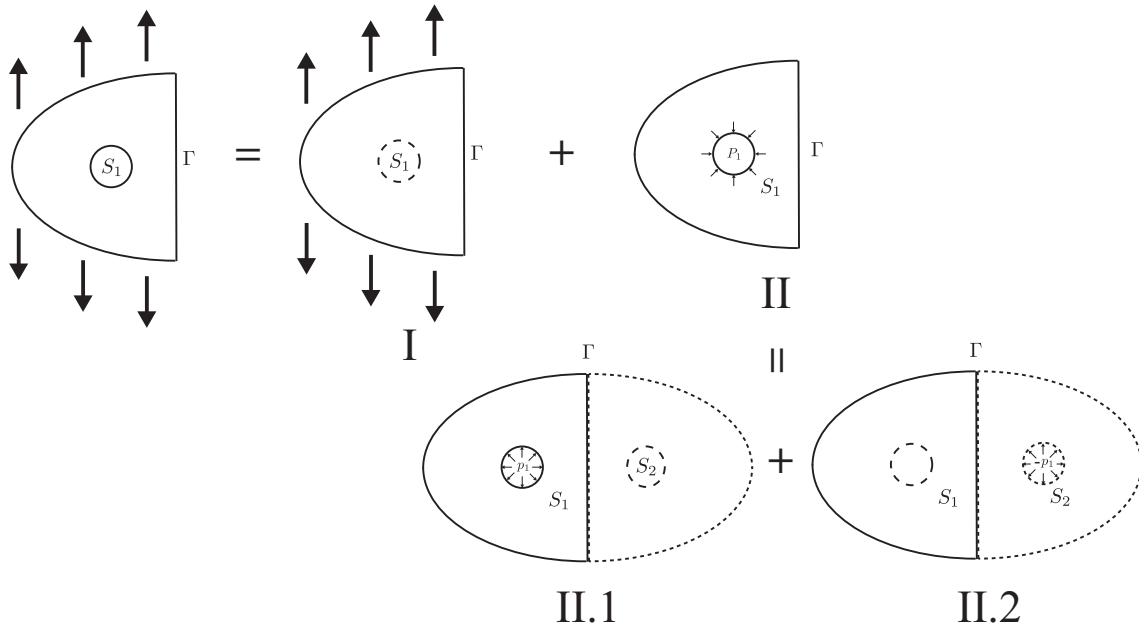


FIGURE 3.15: Analyse micromécanique d'un milieu semi-infini (Pijaudier-Cabot et Dufour [2010]).

sous-problème I afin de retrouver la condition de bord libre du vide sphérique dans le problème global. Elle se décompose en \mathbf{p}_1 , la pression appliquée aux bornes de \mathbf{S}_1 et $\mathbf{p}_{1,\Gamma}$, la pression appliquée par Γ sur \mathbf{S}_1 lorsque celui-ci est bloqué. La condition de bord libre nous donne une contrainte normale à Γ nulle dans le cas du sous-problème II. Cette pression peut se décomposer en \mathbf{p}_Γ , la pression appliquée sur Γ et $\mathbf{p}_{\Gamma,1}$, la pression appliquée par \mathbf{S}_1 sur Γ lorsque celui-ci est bloqué.

Afin de s'affranchir du calcul de la pression \mathbf{p}_Γ sur Γ , le sous-problème II est redécomposé en 2 sous-problèmes en considérant le milieu semi-infini initial auquel lui est juxtaposé son symétrique. Le vide sphérique symétrique \mathbf{S}_2 est chargé avec une pression $-\mathbf{p}_1$ afin de retrouver la condition de bord libre en Γ . L'hypothèse de vides petits par rapport à la distance entre le point considéré et eux est introduite.

La contrainte peut alors s'exprimer en tout point \mathbf{x}_i du milieu :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\sigma}_I(\mathbf{x}_i) + \mathbf{p}_1(\ell_{\mathbf{x}_i,1}^2 - \ell_{\mathbf{x}_i,2}^2) \quad (3.28)$$

avec la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_I(\mathbf{x}_i)$ et la pression \mathbf{p}_1 déterminées à partir du sous-problème I et $\ell_{\mathbf{x}_i,1}$ et $\ell_{\mathbf{x}_i,2}$ des facteurs de redistribution de la pression issus des solutions d'Eshelby. En posant a le rayon du vide sphérique et $r_{\mathbf{x}_i,1}$, $r_{\mathbf{x}_i,2}$ les distances des vides \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 au point \mathbf{x}_i , les facteurs d'interaction sont proportionnels à $\frac{a}{r_{\mathbf{x}_i,1}}$ et $\frac{a}{r_{\mathbf{x}_i,2}}$ respectivement.

Si l'on considère un point \mathbf{x}_i proche du bord libre, on obtient $\ell_{\mathbf{x}_i,1} \simeq \ell_{\mathbf{x}_i,2}$. Ainsi, proche d'un bord, un point devient local et ne perçoit pas d'influence des points voisins perpendiculairement au bord. Pour prendre en compte ce résultat dans la régularisation nonlocale, Krayani *et al.* [2009] proposent une modification du domaine d'intégration du modèle nonlocal en modifiant la fonction poids associée aux points proches du bord. En 3D, cette fonction poids s'exprime sous la forme suivante :

$$\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \exp \left(- \left(4 \left(\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_1)^2}{a^2} + \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{s}_2)^2}{b^2} + \frac{(\mathbf{x}_3 - \mathbf{s}_3)^2}{c^2} \right) \right) \right) \quad (3.29)$$

avec l'indice 1 correspondant à la direction perpendiculaire au bord le plus proche et les indices 2 et 3 correspondant aux directions perpendiculaires à la direction 1 pour former un repère orthogonal. Ainsi, le domaine associé à un point se transforme en une ellipsoïde dont les rayons a , b et c suivant les directions 1, 2 et 3 sont les minimums entre la longueur interne l_c du modèle et la distance du point aux bords considérés (bord dont la normale est la direction considérée). Cette modification permet d'améliorer le traitement des interactions proches d'un bord en décrivant un comportement local perpendiculaire à ce bord. De plus, la description des effets d'échelle est améliorée comme le montrent Krayani *et al.* [2009]. Cependant, le critère de modification reste géométrique et ne varie donc pas au cours du chargement (i.e. cette méthode ne permet pas d'améliorer la description des champs cinématiques à la rupture).

3.3 Modèle nonlocal intégral basé sur l'état de contrainte

Nous venons de voir que le modèle intégral nonlocal souffre de certaines pathologies. Diverses propositions ont été faites par le passé pour palier à certains de ces problèmes et pour lesquelles des points importants peuvent être dégagés et sont à la base de la méthode proposée par la suite.

3.3.1 Analyse des interactions nonlocales

Le cadre d'étude proposé par Pijaudier-Cabot et Dufour [2010] est repris pour le développement du modèle. L'approche nonlocale classique considère pour chaque point les influences qu'il subit de son voisinage. Le développement micromécanique amenait à introduire les modifications sur la méthode nonlocale au niveau du point à régulariser (i.e. point en \mathbf{x}).

Au contraire, les nonlocalités peuvent également être considérées comme étant des quantités redistribuées par chaque point à son voisinage. Dans le problème micromécanique, il faut alors s'intéresser à l'influence d'un bord sur la quantité redistribuée par un vide.

Lorsque le vide tend vers le bord, les distances entre un point en \mathbf{x}_i quelconque et les vides 1 et 2, $r_{\mathbf{x}_i,1}$ et $r_{\mathbf{x}_i,2}$ respectivement, tendent à être égales. Par conséquent, $l_{\mathbf{x}_i,1}$ et $l_{\mathbf{x}_i,2}$ tendent également à être égales quelle que soit la position du point en \mathbf{x}_i . Dans l'équation 3.28, le terme nonlocal $\mathbf{p}_1(\ell_{\mathbf{x}_i,1}^2 - \ell_{\mathbf{x}_i,2}^2)$ dû à la présence du vide, tend vers zéro suivant la direction perpendiculaire au bord lorsque le vide est proche de celui-ci. Ainsi, un vide proche d'un bord n'interagit pas avec le milieu suivant la direction perpendiculaire au bord.

Si l'on considère maintenant une fissure qui se propage dans le milieu étudié, les lèvres de cette fissure correspondent à de nouveaux bords libres qui se créent au sein du spécimen. Ainsi, le résultat précédent implique que les points dans la matière à proximité de la fissure n'influencent plus leur voisinage dû à la présence de ces nouveaux bords libres.

Dans ces deux cas de figure, la présence d'un bord libre modifie le chargement subi par le vide et par conséquent l'influence de celui-ci sur son voisinage. A partir de ces considérations, une modification de la formulation nonlocale originale est proposée. La longueur interne l_c du modèle doit évoluer avec le chargement car les termes nonlocaux s'identifient à une redistribution de contrainte due à la présence de vides et que la dégradation de la structure au

cours du chargement introduit de nouveaux bords libres qui modifient les interactions non-locales. Une directionnalité des interactions doit également être introduite pour tenir compte de l'orientation des redistributions, proche d'un bord.

La variable faisant évoluer la longueur interne l_c ne peut pas être l'endommagement (même anisotrope) car les modifications sur les interactions non-locales ne sont introduites qu'à l'apparition de l'endommagement et ne permettent donc pas de résoudre les erreurs d'amorçages. La déformation ne peut pas être considérée non plus car par effet de Poisson, la déformation perpendiculairement à un bord libre n'est pas nulle et ne permet donc pas d'annuler les termes non-locaux perpendiculairement au bord. En revanche, la contrainte vérifie les différents critères considérés et son influence est introduite dans la définition des interactions non-locales.

3.3.2 Définition d'une longueur interne évolutive

Dans la description nonlocale, le point émetteur (i.e. le point en \mathbf{s} dans l'Eq. 2.43) est considéré pour introduire les modifications. On observe proche d'un bord libre ou d'une fissure que le point considéré subit une contrainte nulle normale à ce bord ou cette fissure. Or, si un vide est placé en un point sans contrainte, il ne redistribue pas de contrainte et donc pas de quantité nonlocale. Ainsi, la direction et l'intensité de l'influence d'un point sont directement reliées à la sollicitation subie par celui-ci.

Pour une direction de contrainte principale donnée, la longueur interne du modèle est définie comme étant le produit de la longueur caractéristique l_{c0} , longueur qui peut être corrélée à la taille des hétérogénéités du matériau, et un facteur ρ dépendant de l'intensité de la contrainte dans cette direction. On suppose qu'une interaction maximale finie existe et elle est prise égale à l_{c0} . Ce choix arbitraire permet par la suite des simplifications numériques majeures (voir 3.3.3). Ainsi, le facteur ρ est positif et est compris entre 0 (e.g. contrainte nulle normale à un bord libre) et 1 (i.e. la longueur de corrélation correspond à l'influence maximale qu'un point peut exercer sur son voisinage). Dans ce travail, pour le développement du nouveau modèle, l'approche s'appuie sur de la fissuration en mode I même si des exemples numériques en mode II ont été réalisés (voir 4.2.2). Ce mode de rupture étant associé à des contraintes de traction, la contrainte limite de traction f_t est considérée pour normer la contrainte subie par le point suivant une direction donnée. En 1D, le facteur ρ_{1D} s'écrit :

$$\rho_{1D}(\mathbf{s}) = \frac{|\sigma_I(\mathbf{s})|}{f_t} \quad (3.30)$$

Pour les contraintes dépassant, en valeur absolue, la contrainte limite en traction (e.g. contrainte de compression) la valeur maximale du facteur ρ est limitée à 1 afin de ne pas dépasser le domaine du modèle nonlocal original initialement utilisé pour calculer la matrice de connectivité (voir 3.3.3). Dans le cadre d'une formulation 3D, on connaît à chaque instant pour tout point du milieu son état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})$ qui peut s'exprimer dans le repère principal :

$$\boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i(\mathbf{s})(\mathbf{u}_i(\mathbf{s}) \otimes \mathbf{u}_i(\mathbf{s})) \quad (3.31)$$

où \otimes correspond au produit tensoriel.

Pour le point en \mathbf{s} , un facteur d'influence $\frac{|\sigma_i(\mathbf{s})|}{f_t}$ est défini, le long de chaque direction principale

de contrainte \mathbf{u}_i . Afin de définir ce facteur d'influence pour toute les directions de l'espace, une forme similaire à celle utilisée par Krayani *et al.* [2009] est considérée pour le traitement des nonlocalités proches d'un bord. On définit une ellipsoïde centrée sur le point en \mathbf{s} de rayon $\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s}))$ dans la direction $(\mathbf{x} - \mathbf{s})$:

$$\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s}))^2 = \frac{1}{f_t^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{\sigma_1^2(\mathbf{s})} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{\sigma_2^2(\mathbf{s})} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_3^2(\mathbf{s})} \right)} \quad (3.32)$$

avec \mathbf{x} un point quelconque de l'espace différent du point en \mathbf{s} (pour le cas spécifique $\mathbf{x} = \mathbf{s}$, voir dans la suite de ce paragraphe). θ définit l'angle entre \mathbf{u}_1 et la projection de $(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ sur le plan défini par \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , et φ l'angle entre \mathbf{u}_3 et $(\mathbf{x} - \mathbf{s})$:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_3 \wedge ((\mathbf{x} - \mathbf{s}) \wedge \mathbf{u}_3))}{\|\mathbf{u}_3 \wedge ((\mathbf{x} - \mathbf{s}) \wedge \mathbf{u}_3)\|} \quad (3.33)$$

$$\sin \theta = \frac{\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_3 \wedge ((\mathbf{x} - \mathbf{s}) \wedge \mathbf{u}_3))}{\|\mathbf{u}_3 \wedge ((\mathbf{x} - \mathbf{s}) \wedge \mathbf{u}_3)\|} \quad (3.34)$$

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|} \quad (3.35)$$

$$\sin \varphi = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{u}_3 \wedge ((\mathbf{x} - \mathbf{s}) \wedge \mathbf{u}_3))}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\| \cdot \|\mathbf{u}_3 \wedge ((\mathbf{x} - \mathbf{s}) \wedge \mathbf{u}_3)\|} \quad (3.36)$$

\wedge correspond au produit vectoriel et “.” au produit scalaire.

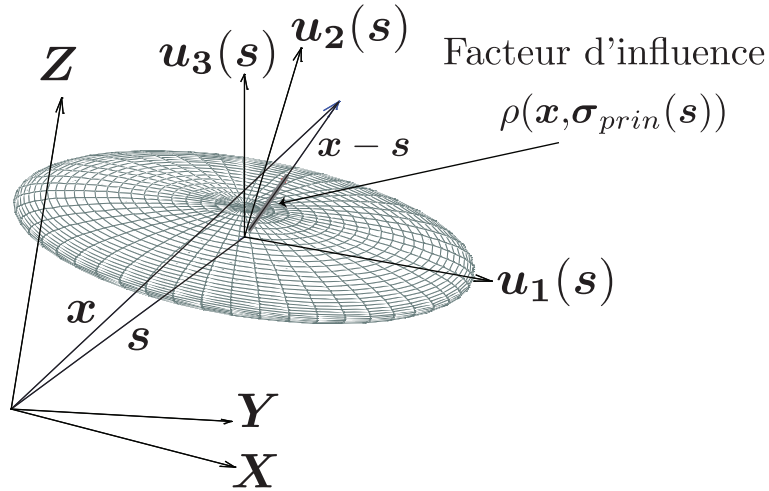


FIGURE 3.16: Représentation 3D d'une surface isovaleur de $\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s}))$ ($\sigma_I(\mathbf{s}) = f_t$, $\sigma_{II}(\mathbf{s}) = 0, 5.f_t$, $\sigma_{III}(\mathbf{s}) = 0, 2.f_t$).

L'expression mathématique complète de la longueur interne l_c s'écrit :

$$l_c(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})) = \rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})) \cdot l_{c0} \quad (3.37)$$

L'équation 3.37 considère ainsi une décroissance de la longueur interne du modèle lorsque les nonlinéarités augmentent, ce qui à première vue peut s'opposer à certaines formulations proposées dans d'autres travaux (Pijaudier-Cabot *et al.* [2004]; Geers *et al.* [1998]). Néanmoins, les définitions se placent dans des cadres différents, avec pour les 2 travaux cités une modification de la taille de la zone qui influe sur le point considéré tandis que dans l'approche proposée ici c'est la zone d'influence d'un point sur son voisinage qui est modifiée. Ainsi, des largeurs de zone de fissuration similaires (i.e. zone ayant observée un endommagement) peuvent être obtenues en ajustant la valeur de la longueur caractéristique l_{c_0} du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte mais le profil d'endommagement à l'intérieur sera différent.

Physiquement, la largeur de la bande de localisation est proportionnelle à la longueur interne. Pijaudier-Cabot et Benallal [1993] montrent ce lien entre la taille de la zone de localisation et la longueur interne du problème, en s'intéressant au problème de bifurcation et localisation d'ondes harmoniques dans un milieu continu avec un modèle d'endommagement nonlocal. Or, la zone de fissuration tend à évoluer au cours d'un chargement d'une microfissuration "diffuse" sur une certaine largeur à une macrofissure de dimension caractéristique nulle (épaisseur du plan). Ainsi, l'évolution proposée pour la longueur interne, avec une valeur tendant vers 0 à la rupture, suit l'évolution de la taille d'une zone de fissuration qui tend vers une valeur nulle avec le développement de la macrofissure.

Pour effectuer la régularisation nonlocale, on remplace la longueur interne du modèle nonlocal original dans la fonction poids (Eq. 2.44) par la longueur interne définie dans l'Eq. 3.37.

Le facteur d'influence ρ n'est pas défini lorsque le point en \mathbf{x} et le point en \mathbf{s} sont confondus. En effet, on ne peut pas définir de direction lorsque 2 points sont confondus. En revanche, si l'on excepte le cas où le tenseur des contraintes principales est nul, la valeur de $\rho(\mathbf{s}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s}))$ étant différente de 0 (dans le paragraphe 3.3.3.2, pour d'autres considérations, la longueur interne est limitée à une valeur non nulle ainsi la valeur de 0 n'est jamais atteinte pour ρ), on obtient une valeur de 1 pour la fonction poids en $\mathbf{x} = \mathbf{s}$. Ainsi la fonction poids est définie pour tout point du milieu par :

$$\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})) = \exp\left(-\left(\frac{4\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2}{l_c(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s}))^2}\right)\right) \quad (3.38)$$

Sur la figure 3.17, dans une analyse en 2D, un exemple de fonction poids est proposé en un point donné du milieu.

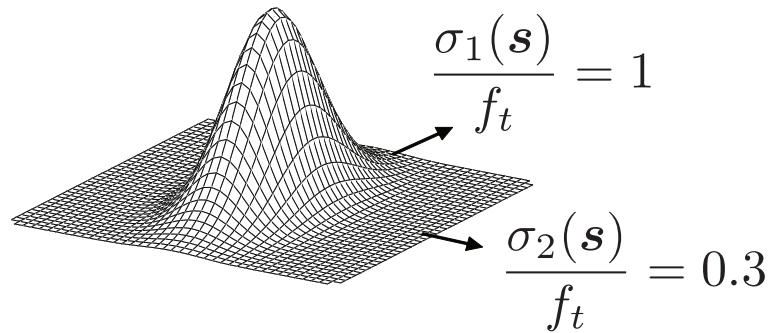


FIGURE 3.17: Exemple de fonction poids modifiée en fonction de l'état de contrainte.

Finalement, l'expression suivante est obtenue pour la régularisation nonlocale :

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\Omega} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})) \cdot f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}}{\int_{\Omega} \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}} \quad (3.39)$$

Ainsi, la modification proposée pour le modèle nonlocal original montre également l'avantage de n'introduire aucun nouveau paramètre au modèle en considérant simplement l'état de contrainte pour changer les interactions dans le milieu.

3.3.3 Implantation numérique du modèle

Des schémas de résolution pour le système global ont été introduits précédemment (2). Dans ce chapitre, la partie du schéma global de résolution où la régularisation nonlocale intégrale est introduite, est détaillée.

3.3.3.1 Introduction de la régularisation nonlocale basée sur l'état de contrainte dans le schéma de résolution

La description de l'algorithme est illustrée avec un modèle d'endommagement scalaire piloté par une variable interne fonction de la déformation équivalente définie au préalable. Néanmoins, les mêmes modifications peuvent être apportées pour tout autre modèle utilisant une régularisation nonlocale.

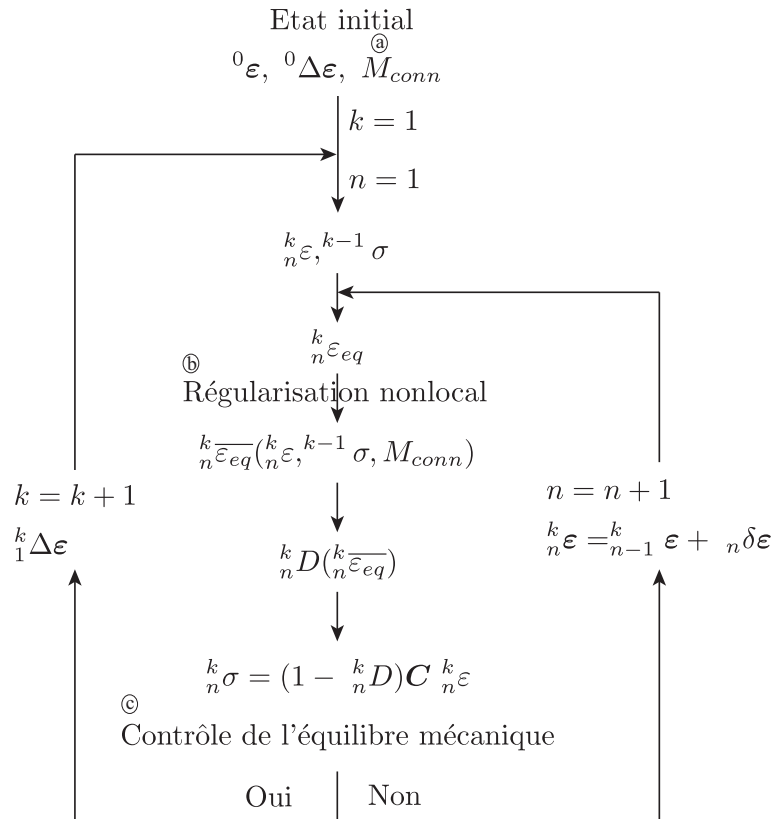


FIGURE 3.18: Schéma d'implémentation du modèle d'endommagement nonlocal basé sur l'état de contrainte (pas k , itération n).

Pour la régularisation nonlocale, un champ de connectivité définissant pour chaque point ses points voisins (point a sur la figure 3.18) est calculé et pendant le calcul, une étape est ajoutée pour calculer la déformation équivalente nonlocale (point b sur la figure 3.18). De plus, la régularisation influe sur le schéma global au niveau de l'opérateur sécant (point c sur la figure 3.18). Ces 3 points sont abordés plus en détail par la suite. L'algorithme utilisé pour la méthode nonlocale basée sur l'état de contrainte conserve le cadre général utilisé pour la méthode nonlocale originale et introduit que de légères modifications. Il peut ainsi facilement être implanté dans un code possédant déjà la méthode originale. Dans les paragraphes suivants, les différences seront signalées au lecteur.

a. Définition du champ de connectivité.

Le modèle nonlocal intégral calcule une moyenne pondérée de la quantité à régulariser en considérant une intégrale sur tout le domaine. Dans un cadre de résolution numérique, cette intégrale est remplacée par une somme discrète sur les points de Gauss du modèle numérique. Afin de réduire le temps de calcul, on considère comme domaine nonlocal associé à chaque point de Gauss, seulement les points de Gauss ayant une influence non négligeable sur lui (i.e. le domaine d'interaction est tronqué). Ces points de Gauss appartiennent aux éléments dont au moins un point de Gauss est compris dans une sphère de rayon $1,5\ell_c$, ce qui correspond environ à une valeur de 10^{-4} pour la fonction poids (Eq. 3.38) avec ρ égale à 1.

Le facteur d'influence ρ restant inférieur ou égale à 1 pendant le calcul, la valeur de 10^{-4} ne sera pas dépassée par la fonction poids nonlocale basée sur l'état de contrainte (i.e. le domaine d'interaction de la méthode nonlocale basée sur l'état de contrainte est inclus dans celui de la méthode nonlocale originale). Ainsi, les domaines d'interaction associés à chaque point au début du calcul sont considérés similaires pour la méthode nonlocale originale et celle basée sur l'état de contrainte et ne nécessite donc aucune intervention.

Dans le code aux éléments finis utilisé Cast3M (Verpeaux *et al.* [1988]), le choix est pris de définir la connectivité au travers d'un champ par élément. Chaque élément possède la liste des éléments qui ont une influence non négligeable sur lui. Afin de réduire le temps de calcul, les valeurs des poids de Gauss ne sont pas stockées (pour la méthode originale également). De plus, afin de limiter les données stockées dans le champ de connectivité, celui-ci n'associe à chaque élément que des listes d'éléments en interaction indépendamment de leur nombre de point de Gauss. Ces différents choix effectués dans le logiciel Cast3M sont sans doute optimaux mais d'autres options peuvent être adoptées comme par exemple un recalcul à chaque pas de la connectivité.

La définition du champ de connectivité est relativement lourde car elle nécessite pour chaque élément d'analyser dans tout le domaine les éléments en interaction. Néanmoins, cette opération est effectuée une seule fois, avant le début de la résolution du problème, et elle permet par la suite de limiter le temps de calcul lors des itérations pour atteindre l'équilibre mécanique. Cette procédure n'est donc pas alourdie avec l'approche proposée ici.

b. Calcul de la déformation équivalente nonlocale.

Au cours du calcul, après avoir estimé la déformation équivalente pour chaque point de Gauss, la régularisation nonlocale de ce champ est effectuée. Dans le cadre d'une résolution numérique, la forme discrète de l'équation 3.39 est considérée en effectuant une somme sur les points de Gauss du voisinage du point de Gauss en \mathbf{x}_i :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}(\mathbf{x}_i) = \frac{\sum_j w_j \phi_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{x}_j)) \cdot \varepsilon_{eq}(\mathbf{x}_j)}{\sum_k w_k \phi_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{x}_k))} \quad (3.40)$$

avec w_j et w_k les poids d'intégration.

Les modèles d'endommagement pilotés par une déformation équivalente présentent un schéma

de résolution explicite au niveau du point de Gauss (i.e. il n'y a pas d'itération pour déterminer l'état de contrainte). La méthode nonlocale originale présente également cet atout. Afin de maintenir cet avantage pour le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte, l'état de contrainte du dernier pas convergé est utilisé pour calculer la déformation équivalente nonlocale.

c. Influence de la régularisation sur le schéma de résolution global.

La régularisation nonlocale influence également le schéma de résolution global. Dans le paragraphe 2.3.1, il est relevé que le schéma de résolution utilise l'opérateur sécant en formulation locale dans le cas du modèle d'endommagement avec le critère en déformation de Mazars alors que l'opérateur tangent peut être utilisé pour le critère de deVree. Avec l'introduction de la régularisation nonlocale intégrale, l'opérateur tangent devient relativement complexe à traiter avec la nécessité de dériver l'endommagement et avec une diagonale beaucoup plus étalée (i.e. beaucoup plus de termes non nuls) que l'opérateur sécant (Pijaudier-Cabot et Huerta [1991]). Ainsi, indépendamment du modèle local utilisé, l'opérateur sécant est généralement choisi dans le schéma de résolution bien que certaines propositions d'améliorations aient été faites pour permettre l'utilisation de l'opérateur tangent (voir Jirásek et Patzák [2002]). Ce choix est effectué pour le modèle nonlocal original et le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte.

Pour les 2 modèles, l'opérateur sécant prend la forme d'une matrice bande avec une largeur de bande proportionnelle au rayon du domaine d'interaction définie par le champ de connectivité. Ainsi, plus l_{c_0} sera grand, plus l'opérateur sécant aura une largeur de bande importante, plus le temps de calcul augmentera.

3.3.3.2 Spécificités numériques liées à la régularisation nonlocale basée sur l'état de contrainte

a. Cas spécifique où $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i$.

Le coefficient ρ est calculé entre chaque point du voisinage \mathbf{x}_j et le point considéré \mathbf{x}_i pour lequel la déformation équivalente nonlocale est calculée. Comme cela a été signalé dans le paragraphe 3.3.2, lorsque $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i$, le coefficient ρ est indéfini car aucune direction ne peut être calculée. Néanmoins, dans l'algorithme, en considérant une valeur non nulle pour ρ , la fonction poids $\phi_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{x}_i))$ est prise égale à 1.

b. Limitation de la longueur interne $l_c(\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})), l_{c_0})$.

Dans le cas d'un chargement uniaxial (i.e. $\sigma_2(\mathbf{x}_i) = \sigma_3(\mathbf{x}_i) = 0$), le domaine d'interaction de forme ellipsoïdale tend vers une ligne avec un volume nul (Fig. 3.19). Si aucune taille minimale est prescrite pour $l_c(\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})), l_{c_0})$ suivant les directions supportant des contraintes nulles, on peut aboutir à une zone qui n'interagit pas avec son voisinage alors qu'elle subit une contrainte importante dans une direction, ce qui n'est pas acceptable car le comportement est alors local.

Afin d'éviter ce problème dans le cas où la contrainte est nulle dans certaines directions, une valeur minimale est imposée pour $l_c(\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})), l_{c_0})$. Cette valeur est prise égale à la taille caractéristique de l'élément $d_{min} : l_{elem}$, en 1D, $\sqrt{aire_{elem}}$, en 2D et $\sqrt[3]{volume_{elem}}$, en 3D. Elle est calculée initialement pour chaque élément et stockée dans un champ de caractéristiques associé à la zone régularisée. Ce choix permet à un point soumis à une contrainte uniaxiale d'influencer son voisinage sur un domaine non vide. De plus, en considérant comme valeur minimale la taille de l'élément, le point de Gauss a ainsi une influence réduite à la taille d'un

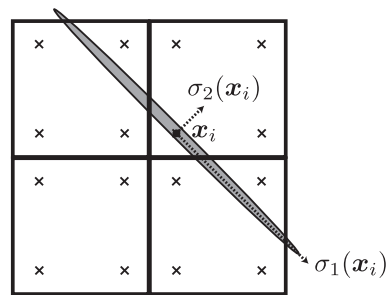


FIGURE 3.19: Zone d'influence d'un point en \mathbf{x}_i pour un état de contrainte quasi-uniaxial ($\sigma_2(\mathbf{x}_i) \simeq 0$).

élément ce qui amène un comportement local à la rupture. L'influence de la valeur minimale a été étudiée sur un cas d'étude simple d'une barre 2D en traction (voir annexe B).

Analyse de la fissuration par le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte

Ce chapitre a pour but de qualifier la méthode de régularisation nonlocale basée sur l'état de contrainte proposée en partie 3.3, en analysant divers cas-tests exposant les pathologies du modèle nonlocal intégral original. Dans un premier temps, les problématiques liées à l'enclenchement de l'endommagement et les conséquences sur la description des effets d'échelle sont traitées. Dans un second temps, une analyse du comportement de la méthode de régularisation proche d'un bord est effectuée. Enfin, la description de l'évolution de l'endommagement jusqu'à la rupture pour divers cas de chargement est étudiée avec en particulier une analyse de la fissuration en termes de trajet et d'ouverture post-analysés.

4.1 Description du champ nonlocal sous fort gradient et conséquence sur les effets d'échelle

La méthode de régularisation nonlocale intégrale originale prédit une mauvaise localisation du lieu de l'enclenchement de l'endommagement en pointe d'entaille (chapitre 3). Cette pathologie est notamment due au caractère isotrope de la description des interactions. Le comportement de la nouvelle méthode proposée est étudié avec notamment l'influence de l'introduction d'une directionnalité dans la description des interactions. Cette analyse est étendue à l'étude des effets d'échelle pour lesquels la description des nonlinéarités peu après leur enclenchement est de première importance.

4.1.1 Description de l'enclenchement de l'endommagement en pointe d'entaille

Pour étudier l'enclenchement de l'endommagement en mode I de rupture, le cas d'étude proposé par Simone *et al.* [2004b] et exposé dans le paragraphe 3.1.1 pour le modèle nonlocal original est repris. L'essai est réalisé sur une éprouvette en traction avec une pré-entaille de

longueur $h = 0.0005m$ (Fig. 4.1). En considérant la symétrie du problème, seule la moitié du spécimen est étudiée.

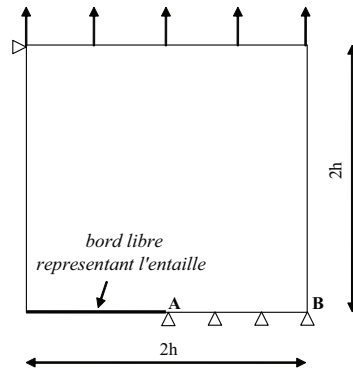


FIGURE 4.1: Eprouvette entaillée en traction

Les paramètres suivants ont été utilisés pour l'analyse : $E = 1000$ MPa, $f_t = 3$ MPa et $\nu = 0,2$. L'influence de la longueur caractéristique l_{c0} sur le champ régularisé a également été étudiée en considérant 3 valeurs différentes : $l_{c0} = 0,1$; $0,2$ et $0,5$ mm.

La déformation équivalente de deVree (Eq. 2.16) est calculée à partir du champ de déformation obtenu sous un déplacement imposé. En se plaçant juste avant l'enclenchement de l'endommagement, le milieu est sain et l'état de contrainte peut ainsi être estimé directement en tout point du milieu par la loi de Hooke. Le champ de déformation équivalente nonlocal peut alors être calculé avec la méthode nonlocal basée sur l'état de contrainte. Le champ obtenu pour $l_{c0} = 0,5$ mm est représenté sur la figure 4.2(a). De plus, les profils de déformation équivalente nonlocal le long du segment AB sont représentés sur la figure 4.2(b) pour les différentes valeurs de l_{c0} .

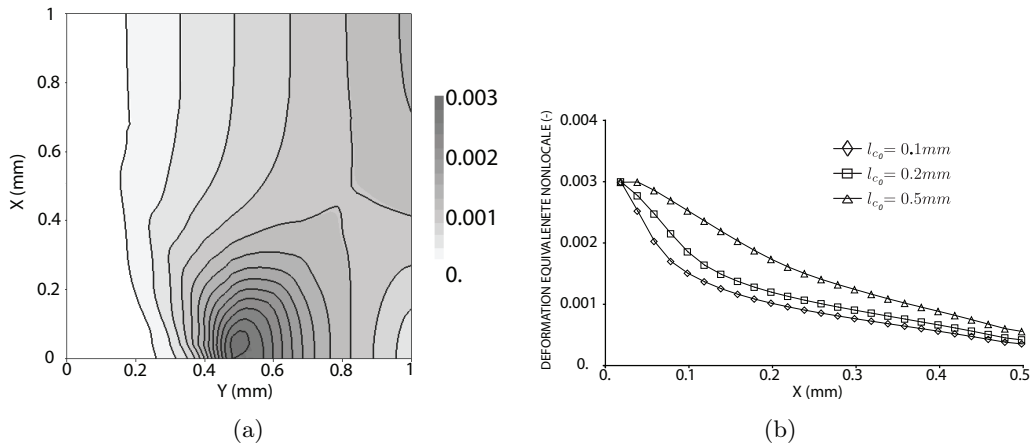


FIGURE 4.2: Eprouvette entaillée en traction : (a) Champ de déformation équivalente nonlocal ($l_c = 0,5mm$) et (b) Evolution de la déformation nonlocal équivalente le long du segment AB à l'enclenchement de l'endommagement.

Comme cela a été exposé par Simone *et al.* [2004b] et rappelé dans le chapitre paragraphe 3.1.1, la régularisation nonlocal originale montre un décalage vis-à-vis de la pointe d'entaille du maximum du champ de déformation nonlocal. Ainsi, la position de l'enclenchement de l'endommagement n'est pas bien prédite avec le modèle original.

Au contraire, ce décalage n'est pas observé avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte

et ce quelle que soit la valeur de l_{c0} . Dans l'ombre de l'entaille, la déformation équivalente locale est faible. Dans l'approche originale, cela diminue la moyenne spatiale au niveau de la pointe d'entaille. Dans l'approche basée sur les contraintes, comme dans l'ombre de l'entaille les contraintes sont aussi faibles, cette zone ne participe pas à la déformation équivalente nonlocale qui reste donc maximale à la pointe.

Ce test est également effectué avec une autre expression de la déformation équivalente. Sur la figure 4.3, les champs de déformation équivalente nonlocale avec l'approche originale et la nouvelle approche proposée (chapitre 3), pour la déformation équivalente proposée par deVree (Eq. 2.16) et celle proposée par Mazars (Eq. 2.12), sont comparés.

Dans le cas de la régularisation originale, un décalage de la déformation équivalente maximale nonlocale est observé quelque soit l'expression de ε_{eq} . En revanche, dans le cas de la régularisation basée sur l'état de contrainte, aucun décalage par rapport à la pointe de l'entaille n'est observé à l'enclenchement de l'endommagement.

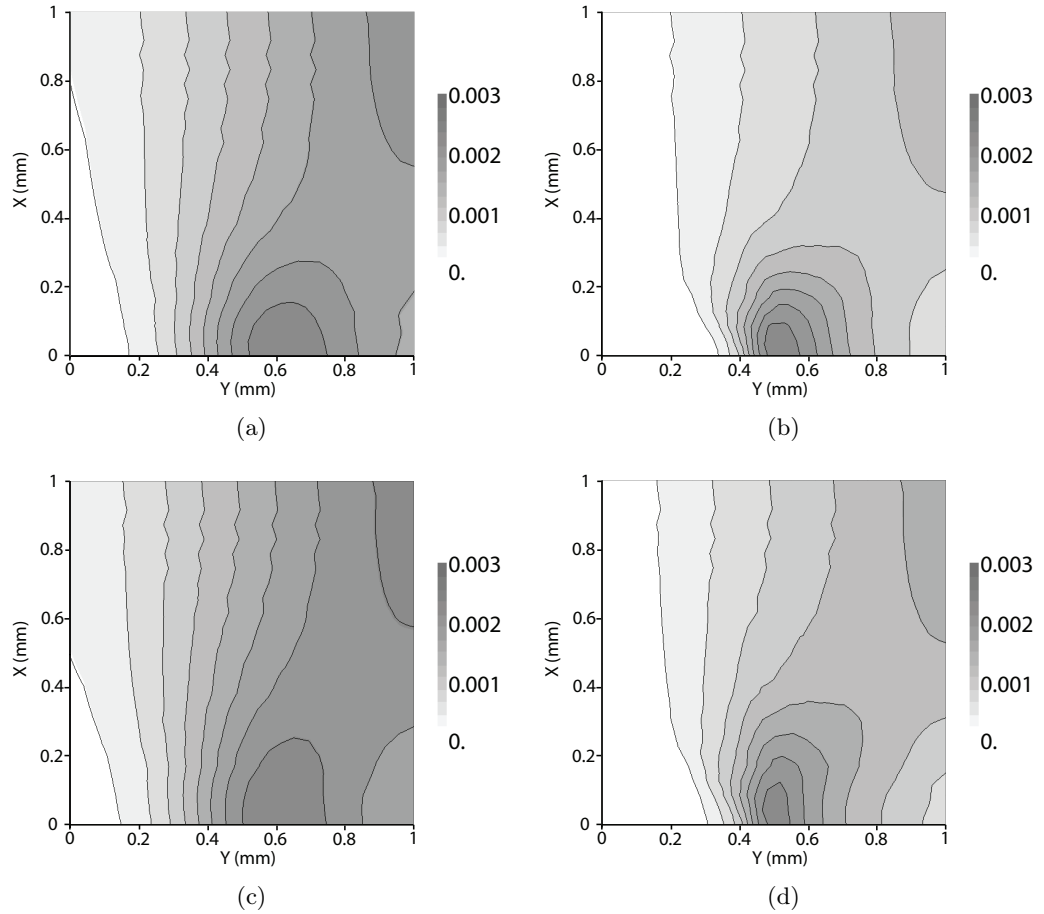


FIGURE 4.3: Eprouvette entaillée en traction. (a) ε_{eq} de Vree - nonlocal original; (b) ε_{eq} de Vree - nonlocal basé sur l'état de contrainte; (c) ε_{eq} Mazars - nonlocal original; et, (d) ε_{eq} Mazars - nonlocal basé sur l'état de contrainte.

Ce résultat montre la capacité du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte à prédire le lieu de l'enclenchement de l'endommagement indépendamment du critère choisi dans un problème de rupture en mode I avec une entaille préexistante. Ce point est de la première importance pour la description des effets d'échelle.

4.1.2 Analyse d'effets d'échelle.

Les effets d'échelle ont été largement étudiés par le passé notamment pour les structures élaborées à partir d'un matériau quasi-fragile comme le béton. Le lecteur pourra trouver un large aperçu des recherches dans ce domaine dans Bažant [2002]. Ces effets caractérisent la dépendance de la résistance d'une structure à sa taille. Expérimentalement, pour une géométrie, un chargement et un matériau semblables, une diminution de la contrainte maximale atteinte au pic de résistance de la structure est observée lorsque la taille de cette structure augmente. Il est donc primordial de savoir modéliser ces effets lorsqu'on étudie une structure réelle. En effet, les matériaux sont généralement décrits à partir de paramètres identifiés sur des essais à l'échelle du laboratoire (i.e. petites structures). Si les modèles utilisés ne prennent pas en compte les effets d'échelle, la résistance d'une grande structure peut être largement surestimée.

Historiquement, cette dépendance de la résistance d'une structure à sa taille fut constatée expérimentalement dès le XV^{me} et XVI^{me} siècle par Léonard de Vinci et Galilée, suivis par de nombreuses autres analyses sur divers matériaux ou types de chargement. Le premier formalisme théorique fut développé par Weibull [1939] en considérant une approche statistique introduisant la notion de "maillon faible". En faisant l'hypothèse d'une rupture de la structure au moment où un point atteint sa résistance, cette approche permet de reproduire l'effet d'échelle structurel observé pour des structures à matériau fragile. Néanmoins, pour des matériaux quasi-fragiles, présentant une microstructure avec une ou des longueurs caractéristiques, l'effet d'échelle matériau vient s'ajouter. Or, la loi d'effet d'échelle de Weibull étant une loi en puissance qui n'introduit aucune longueur caractéristique, elle ne peut pas représenter l'effet d'échelle matériau.

Bažant [1984] propose une explication à l'effet d'échelle matériau en introduisant la notion de transfert de l'énergie élastique des zones saines vers la zone fissurée. A partir de ce cadre, il montre pour une poutre entaillée en flexion 3 points que dans les cas limites de taille du spécimen, on retrouve d'un côté, pour les petites structures, la théorie de la résistance des matériaux avec aucune dépendance de la résistance à la taille caractéristique de la structure et de l'autre côté, pour les très grandes structures, la mécanique de la rupture avec une dépendance de la résistance au carré de la taille caractéristique de la structure. A partir de ces considérations, Bažant propose une loi d'effet d'échelle ajustée asymptotiquement sur les 2 régimes décrits ci-dessus. Cette loi sera exposée dans la suite de ce chapitre.

Plus récemment, Carpinteri [1994] propose, pour expliquer les effets d'échelle, un modèle considérant le caractère fractal des surfaces de rupture. Ce modèle reste néanmoins sujet à discussion et ne sera pas utilisé par la suite.

La caractérisation des effets d'échelle est un critère important dans le choix d'un modèle. Les méthodes de régularisation introduisant une longueur interne (gradient, nonlocal intégral...) permettent cette description. Néanmoins, certaines pathologies liées à ces modèles (Simone *et al.* [2004b]; Krayani *et al.* [2009]) introduisent des erreurs. L'analyse qui suit s'attache donc à étudier l'influence que peuvent avoir les modifications proposées du modèle nonlocal original sur la description des effets d'échelle en utilisant une procédure semblable à celle mise en place par Krayani *et al.* [2009]. L'idée principale de cette procédure est d'estimer la qualité des méthodes de régularisation en s'appuyant sur les lois d'effet d'échelle de Bažant qui sont considérées comme un point de référence car elles permettent de caler avec précision les résultats expérimentaux sur une large gamme de matériaux.

Les méthodes de régularisation nonlocale originale et nonlocale basée sur l'état de contrainte (notées respectivement NLOR et SBNL par la suite) sont comparées au travers de tests sur des poutres de géométrie similaire entaillées et non entaillées en flexion 3 points avec 3 tailles

différentes. Les spécimens avec une profondeur constante ($b = 1\text{m}$), différentes hauteurs ($D = 80, 160, 320\text{ mm}$) et portées correspondantes ($L = 3.D$) sont respectivement référencés par la suite : petite, moyenne et grande poutre. Les simulations sont réalisées en 2D contraintes planes. Par symétrie, seulement la moitié de la poutre est modélisée.

Pour cette étude, le modèle d'endommagement scalaire proposé par Mazars est utilisé (Eq. 2.12). Les paramètres modèle utilisés pour la simulation sont : $E = 3.85 \times 10^4\text{MPa}$, $\nu = 0.24$, $A_t = 0.95$, $A_c = 1.25$, $B_t = 9200$, $B_c = 1000$, $\varepsilon_{D_0} = 3.0 \times 10^{-5}$ et $l_c = 10\text{ mm}$ (modèle nonlocal intégral original) et $l_{c_0} = 10\text{ mm}$ (modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte).

L'analyse des effets d'échelle est effectuée de manière standard, en considérant l'état de la structure au pic de force. L'évolution de la contrainte nominale σ_N (i.e. contrainte maximale dans la hauteur de la partie non entaillée de la poutre) en fonction de la taille caractéristique D de la structure est étudiée.

4.1.2.1 Effet d'échelle sur des poutres non entaillées

L'analyse d'effets d'échelle est effectuée dans cette partie sur des poutres non entaillées en flexion 3 points (Fig. 4.4).

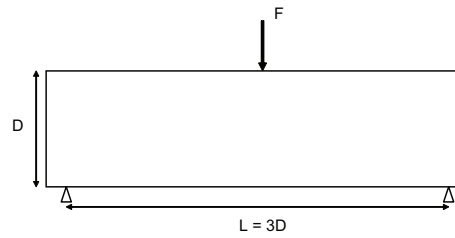


FIGURE 4.4: Poutre non entaillée en flexion 3 points

Le maillage de la grande poutre non entaillée est donné en exemple sur la figure 4.5.

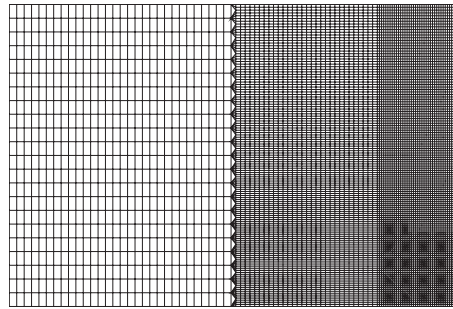


FIGURE 4.5: Maillage de la grande poutre non entaillée.

A partir du pic de force P_u , la contrainte nominale σ_N est estimée en utilisant la théorie de la résistance des Matériaux (Tab. 4.1) :

$$\sigma_N = \frac{9 P_u}{2 b D} \quad (4.1)$$

Les forces au pic sont relativement proches pour une taille donnée entre la méthode originale et la méthode basée sur l'état de contrainte. Pour la seconde méthode, les domaines d'interaction au pic de force sont des ellipses très aplaties parallèles au bord libre bas de la poutre avec

D(mm)	NLOR		SBNL	
	P_u (kN)	σ_N (MPa)	P_u (kN)	σ_N (MPa)
80	64,16	3,61	65,8	3,7
160	121,19	3,41	123,92	3,48
320	235,29	3,31	238,89	3,34

TABLE 4.1: Poutre non entaillée : Force au pic et contrainte nominale pour les 2 méthodes de régularisation.

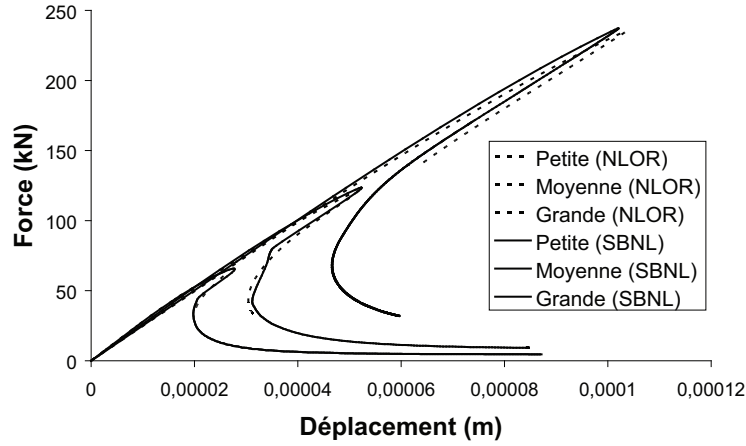


FIGURE 4.6: Flexion 3 points sur poutre non entaillée : Courbe force-déplacement pour les 3 tailles de poutres (Petite, Moyenne et Grande) et les 2 méthodes de régularisation (NLOR et SBNL)

un grand axe proche de la longueur interne du modèle nonlocal original. La différence entre les 2 méthodes est principalement dans la direction perpendiculaire au bord, direction moins influente sur l'effet d'échelle dans ce cas-test. Ainsi peu de variations sont obtenues entre les 2 approches comme le montre la figure 4.6 avec la proximité des pics et de l'évolution post-pic pour une taille donnée.

A partir de ces résultats, on identifie par régression linéaire les paramètres de la loi d'effet d'échelle de Bazant pour les poutres non entaillées (Tab. 4.2) :

$$\sigma_N = f_{r\infty} \left(1 + \frac{D_b}{\eta D_b + D} \right) \quad (4.2)$$

avec D_b , $f_{r\infty}$ et η des constantes. D_b peut s'identifier à la taille effective de la zone microfissurée, $f_{r\infty}$ à la résistance du matériau et le coefficient η est introduit pour obtenir une contrainte finie quand la taille de la structure devient très faible. Ce dernier coefficient est généralement identifié expérimentalement à partir d'un essai sur petite taille (i.e. pour une valeur de D très faible). Dans l'étude réalisée ici, la valeur de η est imposée égale à 0,75 (ordre de grandeur usuel) afin d'obtenir une meilleure stabilité de la procédure d'identification des paramètres de la loi d'échelle. Néanmoins, son influence sur les valeurs de $f_{r\infty}$ et D_b identifiées reste faible.

	NLOR	SBNL
$D_b(mm)$	11,45	13,9
$f_{r_\infty}(MPa)$	3,18	3,2

TABLE 4.2: Poutre non entaillée : Identification de D_b et f_{r_∞} pour les 2 méthodes de régularisation ($\eta = 0,75$).

4.1.3 Effet d'échelle sur des poutres entaillées

L'analyse d'effet d'échelle est maintenant effectuée sur des spécimens avec une entaille de $a_0 = 0.2D$ de hauteur localisée au milieu de la poutre (Fig. 4.7).

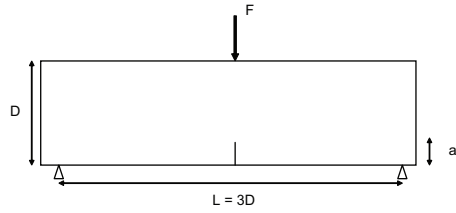


FIGURE 4.7: Poutre entaillée en flexion 3 points

Le maillage de la grande poutre entaillée est donné en exemple sur la figure 4.8. Une attention particulière est portée sur le maillage en pointe d'entaille avec un raffinement permettant de décrire au mieux les gradients de contrainte susceptibles d'apparaître dans cette zone.

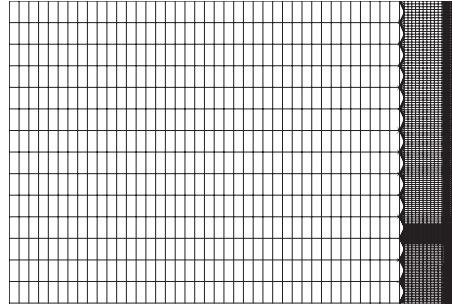


FIGURE 4.8: Maillage de la grande poutre entaillée.

A partir du pic de force P_u , la contrainte nominale σ_N dans le ligament est estimée en utilisant la théorie de la résistance des Matériaux (Tab. 4.3) :

$$\sigma_N = \frac{225}{32} \frac{P_u}{bD} \quad (4.3)$$

Pour des poutres entaillées en flexion 3 points, Bažant propose la loi d'effet d'échelle suivante :

$$\sigma_N = \frac{B(\alpha_0) f_{r_\infty}}{\sqrt{\left(1 + \frac{D}{D_0}\right)}} \quad (4.4)$$

avec B un paramètre adimensionnel dépendant de la géométrie et D_0 une taille caractéris-

D (mm)	NLOR		SBNL	
	P_u (kN)	σ_N (MPa)	P_u (kN)	σ_N (MPa)
80	42.3	3.72	35.6	3.13
160	64.4	2.83	59.1	2.60
320	97.5	2.14	94.4	2.07

TABLE 4.3: Poutre entaillée : Force au pic et contrainte nominale pour les 2 méthodes de régularisation.

tique. D_0 et Bf_{r_∞} sont identifiés par régression linéaire pour les 2 méthodes de régularisation (Tab. 4.4).

	NLOR	SBNL
$D_0(mm)$	42.42	110.87
$Bf_{r_\infty}(MPa)$	6.25	4.08

TABLE 4.4: Poutre entaillée : Identification de D_0 et Bf_{r_∞} pour les 2 méthodes de régularisation.

4.1.4 Identification des paramètres du matériau

Dans les coefficients des lois d'effet d'échelle utilisées pour les poutres entaillées et non entaillées, le terme f_{r_∞} est commun. Ce terme est une caractéristique intrinsèque au matériau (i.e. ce coefficient ne dépend ni de la géométrie ni du type de sollicitation) et une valeur similaire doit donc être identifiée sur les 2 types d'essais en utilisant les mêmes paramètres pour le modèle d'endommagement en formulation nonlocale.

Pour extraire la valeur de f_{r_∞} à partir des résultats sur les éprouvettes entaillées, le coefficient B doit être déterminé. Ce coefficient, dépendant de la géométrie du spécimen et du type de sollicitation, peut être calculé à partir de fonctions de forme $g(\alpha_0)$ avec $\alpha_0 = a_0/D$:

$$B(\alpha_0) = \sqrt{\frac{g'(0)}{g'(\alpha_0)}} \quad (4.5)$$

Bažant et Planas [1998] propose des expressions de $g(\alpha_0)$ issues de travaux de Guinea *et al.* [1998]. Ces fonctions sont valables pour un large spectre de ratio L/D .

$$g(\alpha_0) = \pi\alpha_0 \left(\frac{3L}{2D}\right)^2 (F(\alpha_0))^2 \quad (4.6)$$

$$F(\alpha_0) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{p_\infty(\alpha_0) + \frac{4D}{L}(p_4(\alpha_0) - p_\infty(\alpha_0))}{(1 + 2\alpha_0)(1 - \alpha_0)^{1.5}} \right) \quad (4.7)$$

$$p_\infty(\alpha_0) = 1.989 - \alpha_0(1 - \alpha_0)(0.448 - 0.458(1 - \alpha_0) + 1.226(1 - \alpha_0)^2) \quad (4.8)$$

$$p_4(\alpha_0) = 1.9 - \alpha_0(-0.089 + 0.603(1 - \alpha_0) - 0.441(1 - \alpha_0)^2 + 1.223(1 - \alpha_0)^3) \quad (4.9)$$

Le coefficient B peut également être estimé à partir des recommandations RILEM (Shah [1990]) en réutilisant l'expression $g(\alpha_0)$ de l'équation 4.6. Une autre expression de $F(\alpha_0)$ est proposée en considérant une interpolation linéaire à partir de fonctions $F_{\frac{L}{D}}(\alpha_0)$ identifiées pour des ratios L/D spécifiques :

$$F(\alpha_0) = F_{2.5}(\alpha_0) + \frac{(\frac{L}{D}) - 2.5}{2.5} (F_{2.5}(\alpha_0) - F_4(\alpha_0)) \quad (4.10)$$

$$F_{2.5}(\alpha_0) = \frac{1.0 - 2.5\alpha_0 + 4.49\alpha_0^2 - 3.98\alpha_0^3 + 1.33\alpha_0^4}{(1 - \alpha_0)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.11)$$

$$F_4(\alpha_0) = \frac{1.99 - \alpha_0(1 - \alpha_0)(2.15 - 3.93\alpha_0 + 2.7\alpha_0^2)}{\sqrt{\pi}(1 + 2\alpha_0)(1 - \alpha_0)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.12)$$

On obtient une valeur $B = 1.034$ avec les fonctions de forme proposées par Bažant et de $B = 1.071$ en utilisant les recommandations RILEM. Le tableau 4.5 résume les résultats obtenus pour l'estimation de f_{r_∞} en utilisant les différentes valeurs de B identifiées et compare les erreurs obtenues sur l'estimation de f_{r_∞} à partir des poutres entaillées et non entaillées.

f_{r_∞} (MPa)	NLOR	SBNL
Calculé à partir des poutres entaillées (Bažant)	6,04	3,95
Calculé à partir des poutres entaillées (RILEM)	5,83	3,8
Calibration de la loi d'effet d'échelle sur les poutres non entaillées	3,18	3,2
Erreur relative : $\frac{\ f_{r_\infty ne} - f_{r_\infty e}\ }{f_{r_\infty ne}}$ (%)	NLOR	SBNL
Coefficient B à partir de Bažant	90	23
Coefficient B à partir de RILEM	83	19

TABLE 4.5: Comparaison des valeurs de f_{r_∞} obtenues pour les poutres entaillées et non entaillées pour les méthodes nonlocales.

Le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte montre une différence beaucoup moins importante entre les valeurs de f_{r_∞} estimées sur les poutres entaillées et non entaillées que le modèle nonlocal original. Ainsi, dans une démarche de modélisation en aveugle où la longueur interne est estimée sur une série d'essais expérimentaux considérant un type de géométrie (e.g.

poutre entaillée) de différentes tailles, le résultat obtenu ci-dessus signifie que l'utilisation d'un modèle nonlocal original, avec la longueur interne identifiée, ne pourra pas représenter l'effet d'échelle matériau observé sur une structure subissant un chargement différent (e.g. poutre entaillée). En revanche, l'introduction de l'influence de l'état de contrainte dans la description des interactions nonlocales donne une capacité plus grande à décrire l'effet d'échelle matériau indépendamment de la géométrie et du chargement.

Une autre manière d'estimer la capacité du modèle à décrire les effets d'échelle de manière générale (i.e. sans dépendance au type de géométrie, chargement...) est de considérer la loi d'effet d'échelle universelle de Bažant [2002] :

$$\sigma_N = \frac{Bf_{r_\infty}}{\sqrt{\left(1 + \frac{D}{D_0}\right)}} \cdot \left(1 + \frac{2l_f D_0}{(2\eta l_f + D) + (D_0 + D)}\right) \quad (4.13)$$

Dans cette loi les paramètres identifiés précédemment (f_{r_∞} , η , B et D_0) sont utilisés et le terme D_b (correspondant à $2.l_f$ dans l'équation 4.13), devenant variable avec l'introduction d'une entaille dans la poutre, doit être lui identifié. Le paramètre l_f dépend de α_0 suivant :

$$l_f = \frac{\langle -g''(\alpha_0) \rangle_+}{4g'(0)} \kappa c_f \quad (4.14)$$

avec κ une constante. En imposant que $2l_f$ égale à la valeur de D_b identifiée sur les éprouvettes non entaillées quand α_0 tend vers 0, une valeur de l_f peut être calculée.

Sur la figure 4.9, les valeurs données par la modélisation numérique (gros points) sont comparées à celles données par la loi universelle dont les paramètres proviennent des identifications faites précédemment sur les lois d'effet d'échelle relatives aux poutres entaillées (eq. 4.4).

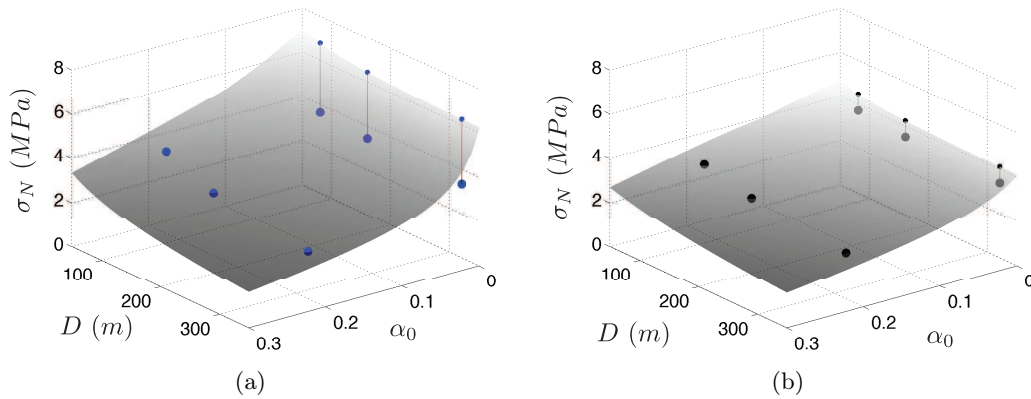


FIGURE 4.9: Comparaison entre les résultats de la modélisation et la loi d'effets d'échelle universelle : (a) modèle nonlocal original, (b) modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte.

Avec des paramètres identifiés sur les modélisations, les valeurs se superposent pour $\alpha_0 = 0, 2$ tandis qu'un écart est observé pour les poutres non entaillées. Un meilleur ajustement de la loi universelle sur les résultats pour le modèle basé sur l'état de contrainte est obtenu. Ce résultat confirme la première analyse faite sur l'estimation du paramètre f_{r_∞} avec les 2 méthodes de régularisation.

Ces résultats correspondent également à des analyses faites dans d'autres travaux de recherche, qui montrent la nécessité d'avoir une longueur interne évolutive et une zone d'interaction modifiée pour reproduire au mieux l'effet d'échelle matériau. Voyiadjis et Abu Al-Rub [2005] montrent qu'en considérant une longueur interne qui évolue au cours du chargement, les effets d'échelle observés sur des tests à l'échelle micro de flexion et torsion sont mieux reproduits. De même, Ožbolt et Bažant [1996] obtiennent une bonne corrélation des résultats avec les lois d'effets d'échelle en considérant un modèle nonlocal avec un domaine d'interaction orienté et évoluant au cours du chargement.

Les 2 méthodes proposées par Krayani *et al.* [2009] permettent d'estimer la capacité d'un modèle à caractériser l'effet d'échelle matériau. Cette analyse montre ainsi qu'une meilleure description peut être obtenue en considérant une longueur interne dépendante de la longueur caractéristique comme cela est défini dans le modèle original mais aussi dépendante de l'état de contrainte comme cela est introduit dans le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte. Des erreurs sont encore observées avec le nouveau modèle proposé dont une partie peut sans doute s'expliquer par les hypothèses prises dans l'analyse d'effets d'échelle avec notamment l'utilisation de la théorie de la résistance des matériaux sur une structure endommagée.

4.2 Propagation de l'endommagement en présence d'un bord

Après avoir étudié la capacité du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte à décrire l'enclenchement de l'endommagement et les effets d'échelle, on s'intéresse maintenant à l'analyse de la propagation de l'endommagement en présence d'un bord. Dans un premier temps, l'influence d'un bord libre sur l'évolution de l'endommagement est étudiée au travers d'un test aux barres d'Hopkinson. Dans un second temps, la formation et la propagation d'une bande de cisaillement en présence d'un bord de symétrie, dans un spécimen en compression, sont analysées. Dans ces différentes études, les 2 méthodes de régularisation sont confrontées afin d'analyser l'influence des modifications apportées au modèle nonlocal sur les résultats.

4.2.1 Test aux barres d'Hopkinson

Afin d'étudier l'influence d'un bord libre sur l'évolution de l'endommagement avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte, le test aux barres d'Hopkinson présenté dans le paragraphe 3.1.2 est repris. Les paramètres du modèle, le maillage et les conditions de chargement utilisés sont similaires à ceux pris pour l'étude avec le modèle nonlocal original. Les résultats obtenus avec le modèle original montrent un phénomène d'attraction de l'endommagement par le bord libre à $x = 0$ (figure 4.10(a)). Le comportement du nouveau modèle proposé est étudié et comparé au modèle original.

L'introduction du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte évite d'observer le phénomène de migration de l'endommagement maximal et égal à $D = 1$ vers le bord. A l'apparition de l'onde de traction, les champs de déformation et de contrainte sont proches d'un Dirac. La déformation équivalente nonlocale présente alors une distribution correspondant à la fonction poids Gaussienne utilisée dans la régularisation, avec une valeur maximale au droit du lieu d'apparition de l'onde de traction, entraînant ainsi un enclenchement de l'endommagement à cet endroit.

Pour les premiers pas après l'enclenchement de l'endommagement, le niveau de contrainte est encore élevé et les points dans la zone de fissuration influencent fortement les points autour.

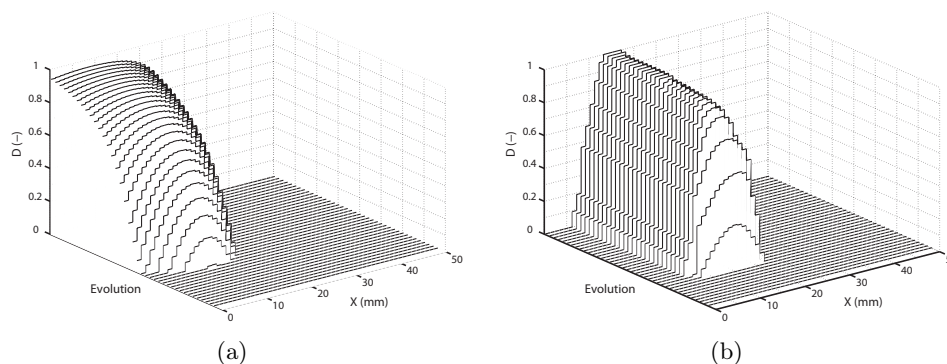


FIGURE 4.10: Evolution du champ d'endommagement proche du bord libre : (a) Modèle nonlocal original ; et, (b) Modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte ;

Ces derniers étant à contrainte nulle, la déformation équivalente nonlocale basée sur l'état de contrainte correspond, pour ces points là, à la somme de termes issus des points de la zone de fissuration (produit entre la fonction poids modifiée et la déformation équivalente locale) normée par la somme des poids. Ainsi, peu après l'enclenchement de l'endommagement, la largeur de la zone de fissuration peut encore évoluer si les redistributions nonlocales amènent à faire dépasser le seuil d'endommagement des points voisins. Néanmoins, la fonction poids restant maximale dans la zone de fissuration, la déformation équivalente nonlocale maximale est également dans la zone de fissuration et par conséquent l'endommagement maximal aussi. Par la suite, le niveau de contrainte baisse pour les points voyant leur endommagement augmenter. Ainsi, ces points tendent à avoir une influence moins importante sur leur voisinage ; cette influence devenant nulle à $D = 1$. La largeur de la zone voyant son endommagement augmenter tend alors à décroître avec la diminution de l'amplitude des fonctions poids modifiées.

En définissant de nouveau, l'écaille obtenue à la rupture du spécimen comme étant la zone entre le bord libre et le point le plus endommagé ($D = 1$), sa taille étant la distance entre ces deux points, le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte permet d'obtenir une écaille de longueur non nulle contrairement au modèle original. La figure 4.11 montre l'influence de la taille du créneau d'onde de compression sur la largeur de l'écaille pour le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte.

Une relation linéaire est observée entre la taille de l'écaille et la largeur du créneau de compression.

Il peut être observé également sur la figure 4.10 que pour le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte, l'endommagement se développe sur plusieurs éléments avant d'atteindre un endommagement maximal sur un seul élément à la rupture de la barre comme cela est analysé dans la partie 4.3 de ce chapitre.

4.2.2 Bande de cisaillement.

La formation de bande de cisaillement est un mécanisme classique de rupture pour de nombreux problèmes impliquant des géomatériaux. Ce mécanisme est notamment observé pour les milieux non cohésifs (e.g. sable) ou pour des chargements à contrainte moyenne de pression. Dans l'analyse qui suit, les bandes de cisaillement sont obtenues dans des spécimens soumis à de la compression simple. Pour ce cas test, Simone *et al.* [2004b] montrent que les méthodes

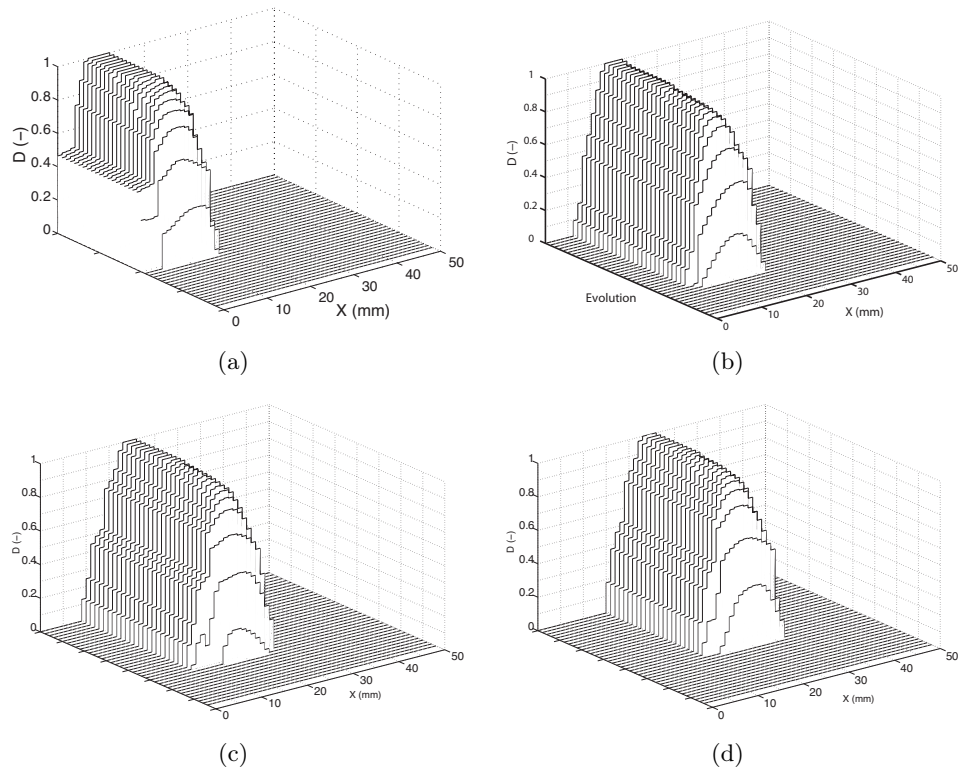


FIGURE 4.11: Evolution de la taille de l'écaillage en fonction de la largeur créneau de l'onde de compression pour le nonlocal basé sur l'état de contrainte : (a) $l_0 = 20$ mm ; (b) $l_0 = 30$ mm ; (c) $l_0 = 40$ mm et (d) $l_0 = 50$ mm.

de régularisation classique en gradient ou nonlocale intégrale ne permettent pas une description correcte de l'évolution d'une bande de cisaillement. Pour analyser la capacité du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte à décrire l'évolution d'une bande de cisaillement, le cas test proposé par Simone et al. (Fig. 4.12) est analysé. Dans un premier temps, les résultats obtenus avec la méthode nonlocale originale sont rappelés, puis dans un second temps, les mêmes tests sont réalisés avec la nouvelle méthode nonlocale.

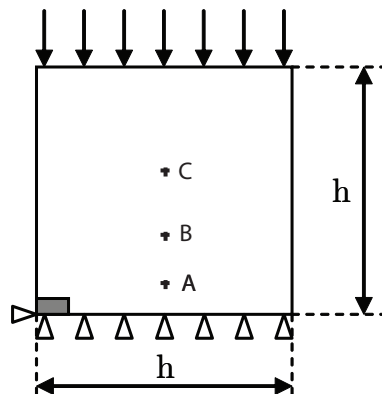


FIGURE 4.12: Géométrie et conditions limites pour le spécimen en compression ($h = 60$ mm ; zone affaiblie : $h/10 \times h/20$)

Pour décrire le matériau, les paramètres suivants de la loi d'évolution proposée par Peerlings et al. (Eq. 2.8) et la déformation équivalente de von Mises introduite par de Vree (Eq. 2.16)

ont été utilisés : $E = 20,000$ MPa, $\nu = 0.2$, $l_c = 2.83$ mm, $\varepsilon_{D_0} = 0.0001$, $\alpha = 0.99$, $\beta = 300$ et $k = 1$.

Excepté le cas test considérant un maillage destructuré, le maillage du spécimen en compression est régulier et composé d'éléments quadrangles à interpolation linéaire. Par la suite, la taille moyenne d'un élément est spécifiée avant chaque test.

Le chargement est piloté par longueur d'arc (voir chapitre 2). Pour éviter des mécanismes de flexion perturbateurs par rapport à la sollicitation étudiée, on bloque la rotation en tête du spécimen. L'état de contrainte dans le spécimen étant homogène, une zone a été affaiblie (partie grisée sur la figure 4.12) avec une déformation seuil d'endommagement plus faible ($\varepsilon_{D_0} = 0.00005$), afin d'enclencher la formation d'une bande de cisaillement. Par des considérations de symétrie, seulement la moitié du spécimen a été modélisée. Néanmoins, des conclusion similaires peuvent être faites en considérant le spécimen en entier.

4.2.2.0.1 Comportement global

La figure 4.15 montre le comportement global du spécimen soumis à un chargement de compression pour la méthode nonlocale originale et nonlocale basée sur l'état de contrainte avec une taille d'élément de 1 mm.

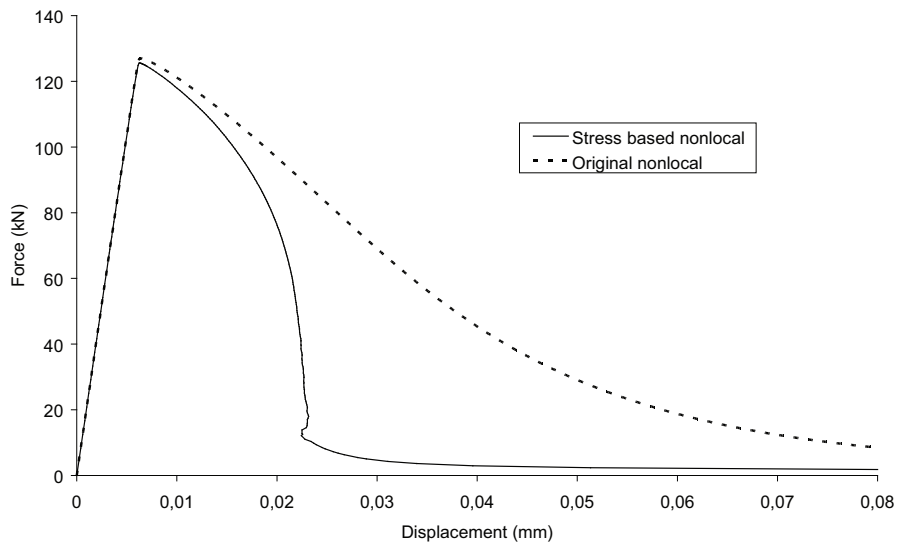


FIGURE 4.13: Comportement global du spécimen en compression pour les 2 méthodes de régularisation.

Le comportement global montre une réponse beaucoup plus fragile pour le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte que pour le modèle nonlocal original. L'endommagement se localisant sur une zone beaucoup plus petite pour le modèle modifié, le comportement global est plus fragile avec le modèle basé sur l'état de contrainte et la rupture est également atteinte plus tôt.

4.2.2.0.2 Evolution de la bande de cisaillement

Les figures 4.14(a), 4.14(b), 4.14(c) et 4.14(d) montrent le champ d'endommagement à différentes étapes du calcul (déplacement en tête : 0.0065 mm ; 0.015 mm ; 0.02 mm ; et, 0.08 mm) pour le modèle nonlocal original.

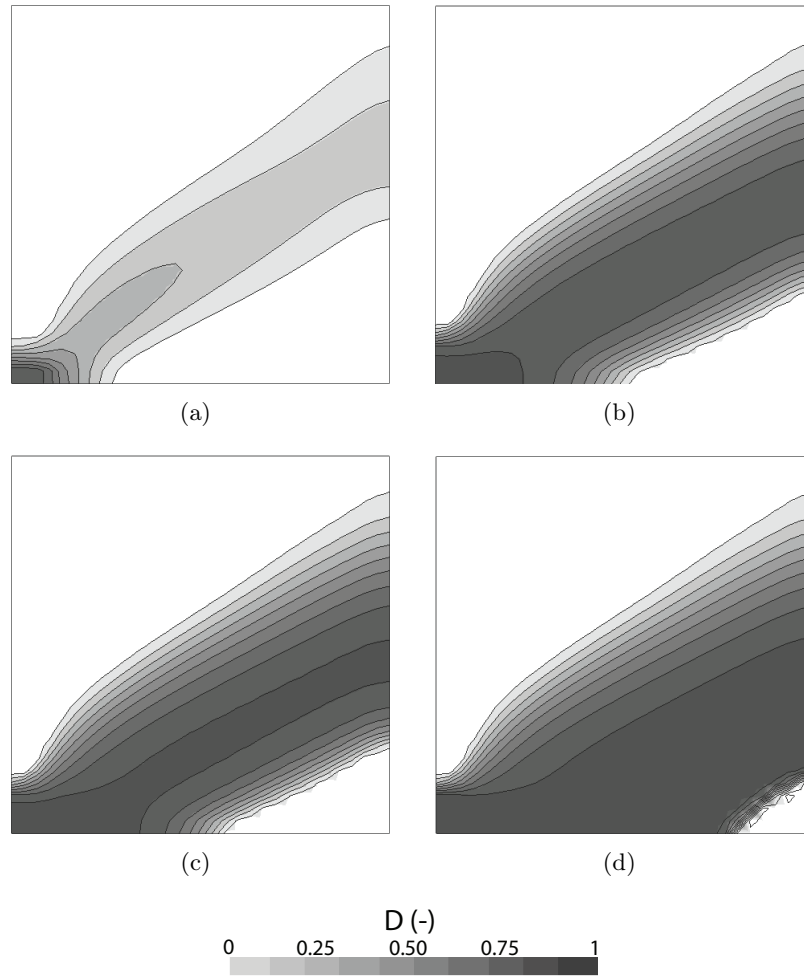


FIGURE 4.14: Evolution de la bande de cisaillement : Champs d'endommagement obtenus avec le modèle nonlocal original pour un déplacement en tête de : 0.0065 mm ((a)) ; 0.015 mm ((b)) ; 0.02 mm ((c)) ; et, 0.08 mm ((d)).

L'introduction d'un point de faiblesse enclenche l'endommagement avant le pic et permet l'évolution d'une zone d'endommagement. Après avoir enclenché l'endommagement, une propagation de la bande de cisaillement est observée le long du bord inférieur du spécimen, comme cela est relevé par Simone *et al.* [2004b]. Ce problème est causé par l'introduction de la méthode de régularisation car il n'est pas observé avec la formulation locale du modèle d'endommagement (Fig. 4.15).

Ce problème est similaire à celui de la pointe d'entaille avec une contribution nonlocale qui tend à perturber fortement la répartition des zones potentiellement endommageables. Un point en \boldsymbol{x} proche de l'axe de symétrie subira une influence double d'un point en \boldsymbol{s} dans la bande de cisaillement (i.e. le point est influencé par les 2 bandes de cisaillement). En captant les déformations équivalentes élevées au niveau de la bande de cisaillement, il peut dépasser sa déformation seuil (Fig. 4.16) et enclencher de l'endommagement. De plus, Simone *et al.* [2004b] montrent que ce décalage est influencé par la longueur interne du modèle, avec une augmentation du décalage pour une augmentation de la longueur interne. En effet, les bandes de cisaillement étant inclinées, lorsqu'on avance le long de l'axe de symétrie, les points s'éloignent de plus en plus de la bande de cisaillement et sont donc de moins en moins influencés par celle-ci. Un point limite est atteint sur l'axe, pour lequel, l'influence

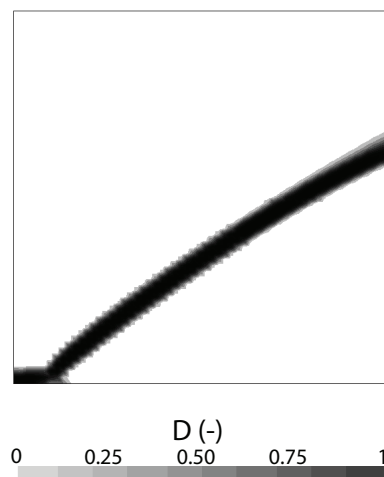


FIGURE 4.15: Bande de cisaillement à la rupture du spécimen avec la formulation locale du modèle d'endommagement.

de la bande de cisaillement est trop faible et ne peut pas enclencher d'endommagement. Le fait d'augmenter la longueur interne va repousser la position de ce point limite sur l'axe de symétrie. Ainsi, plus la longueur interne est grande, plus le point limite est repoussé et plus l'endommagement se propage le long de l'axe de symétrie.

Ce test montre l'incapacité du modèle nonlocal original à décrire la propagation d'une bande de cisaillement en amenant sur le plan global une dissipation d'énergie trop importante due à la diffusion sur le plan local de la bande de cisaillement.

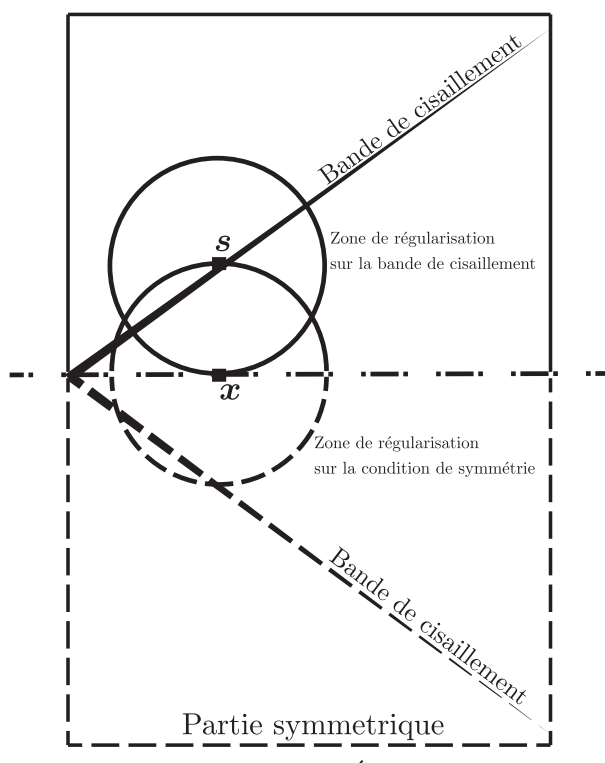


FIGURE 4.16: Domaine de régularisation nonlocal proche de l'axe de symétrie pour le problème de la bande de cisaillement.

Les figures 4.17(a), 4.17(b), 4.17(c) et 4.17(d) représentent le champ d'endommagement à différents niveaux de déplacement en tête du spécimen pour la méthode de régularisation nonlocale basée sur l'état de contrainte.

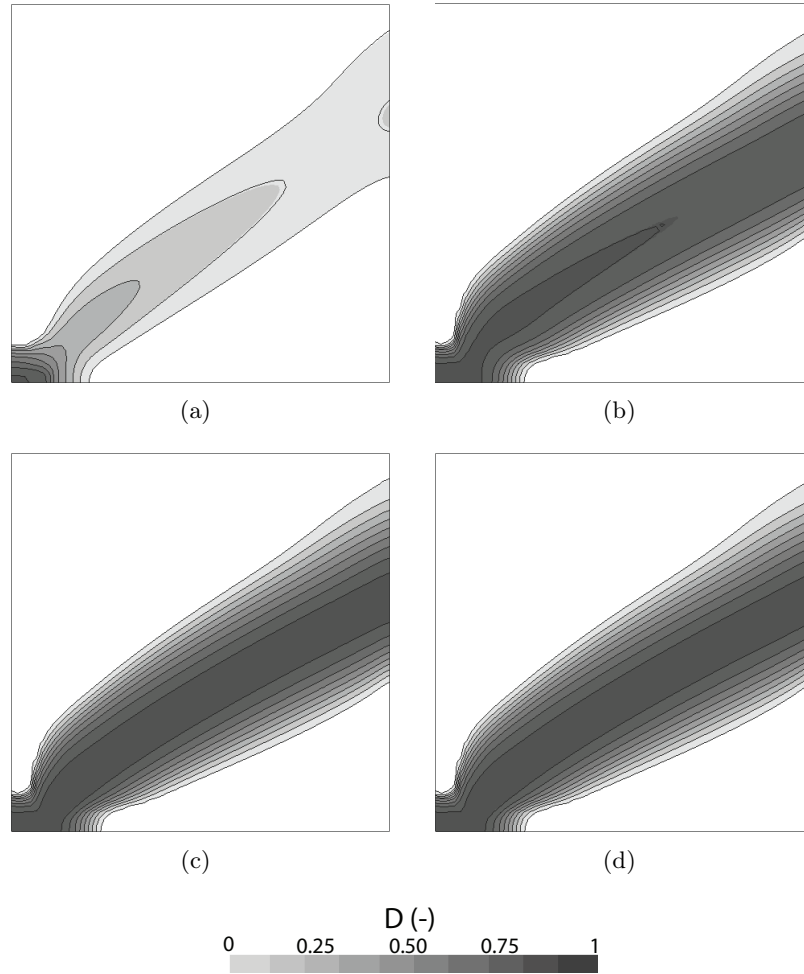


FIGURE 4.17: Evolution de la bande de cisaillement : Champs d'endommagement obtenus avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte pour un déplacement en tête de : 0.0065 mm ((a)); 0.015 mm ((b)); 0.02 mm ((c)); et, 0.08 mm ((d)).

Au cours du chargement, la bande de cisaillement se développe sans être attirée par l'axe de symétrie avec la méthode nonlocale basée sur l'état de contrainte. L'introduction de l'état de contrainte dans la pondération nonlocale permet d'améliorer la description de l'enclenchement et l'évolution de bande de cisaillement dans un spécimen en compression.

Pour analyser l'influence des modifications apportées à la méthode nonlocale, la figure 4.18 montre l'évolution du paramètre $\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s}))$ à différents niveaux de déplacement en tête du spécimen : 0.006mm, 0.016mm, 0.022mm pour 3 points distincts : Point A (0.03;0.005), Point B (0.03;0.02) et Point C (0.03;0.04). Comme cela a été signalé dans le chapitre 3, quand les points en \mathbf{s} et en \mathbf{x} sont confondus, ρ n'est pas défini et la fonction poids est égale à 1, ce qui explique le trou en \mathbf{x} sur les différents graphiques de la figure 4.18.

Le premier pas de chargement considéré pour représenter ρ est proche du pic de force, avec une valeur maximale proche de 1 le long de la direction de chargement. Le chargement étant unidirectionnel, la zone d'influence d'un point est fortement orientée avec aucune redistribution suivant la direction x (i.e. direction perpendiculaire à la direction de chargement). Lorsque le

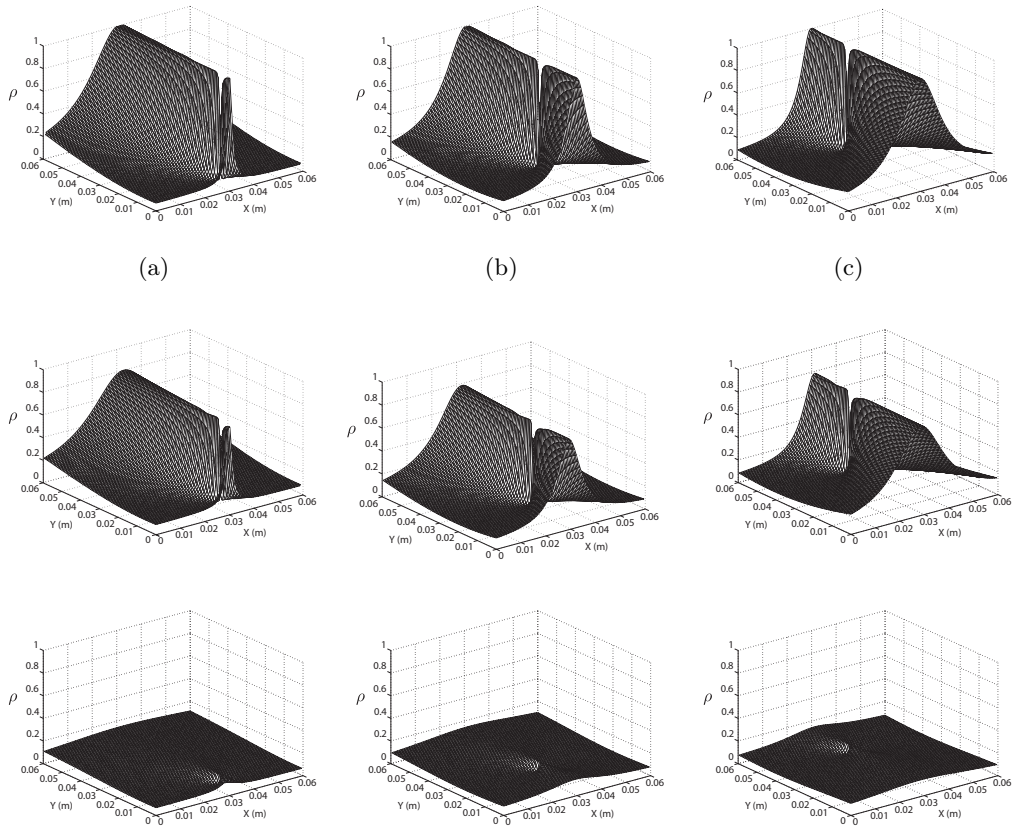


FIGURE 4.18: Evolution de $\rho(\mathbf{x}, \sigma_{prin}(s))$ pendant le chargement. (a) Point A ; (b) Point B ; et, (c) Point C ;

chargement se poursuit, le champ ρ décroît avec la diminution de l'intensité de la contrainte pour finalement être nul à la rupture du spécimen. Les points se comportent alors localement, sans aucune quantité redistribuée à leur voisinage.

Après avoir observé l'amélioration de la description de l'évolution de l'endommagement, plusieurs autres points sont analysés sur cet essai de compression, en utilisant la régularisation nonlocale basée sur l'état de contrainte.

4.2.2.0.3 Analyse de l'objectivité

L'objectivité (Fig. 4.19) du modèle est vérifiée pour différentes tailles de maillage (0.0015 et 0.00075 m) et pour un maillage déstructuré (avec une taille de maille moyenne de 0.001m).

Le comportement global (i.e. courbes force-déplacement) et le comportement local (i.e., emplacement, orientation et largeur de la bande de cisaillement) sont semblables entre les différents maillages.

Sur la figure 4.19(a), un changement brutal de direction apparaît à la rupture du spécimen (i.e. la bande de cisaillement a atteint le bord opposé du spécimen), plus ou moins prononcé suivant la taille des éléments. A ce moment du calcul, l'énergie est presque complètement dissipée. Ainsi, si le chargement est poursuivi, le déplacement augmente sans évolution distincte de la force, entraînant ce changement brutal de direction.

A la rupture, l'endommagement maximal tend à se localiser dans un élément, en considérant

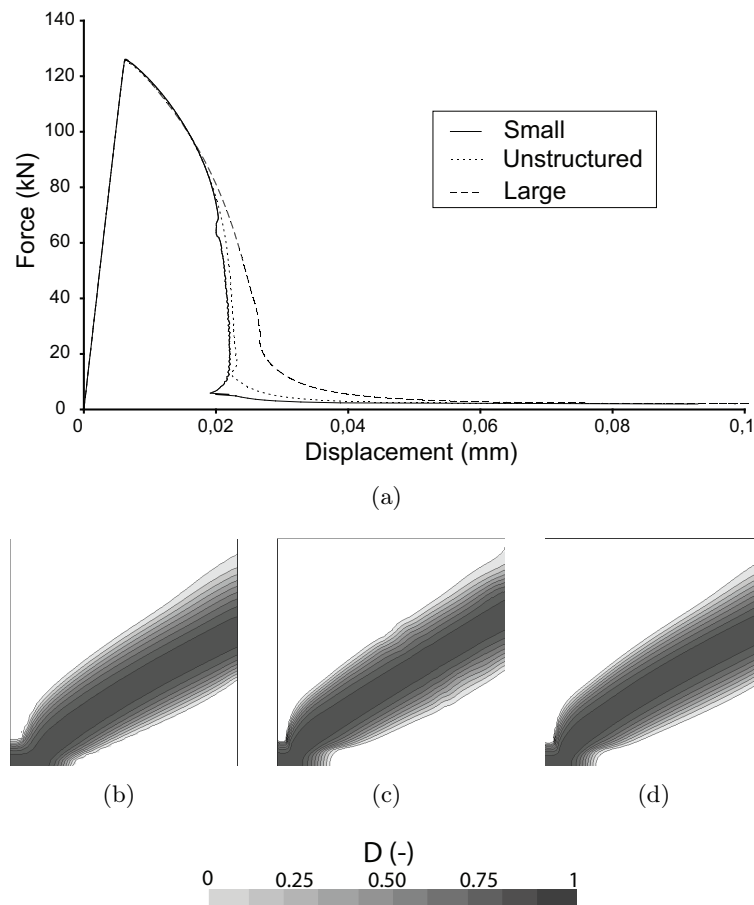


FIGURE 4.19: (a) Comportement global. Champ d'endommagement : (b) Maillage large ; (c) Maillage déstructuré ; et, (d) Maillage fin.

pour valeur minimale de longueur interne, la taille de l'élément. A chaque pas de calcul, l'incrément d'énergie dissipée dans le spécimen correspond à la somme des énergies dissipées dans chaque élément qui voit son endommagement croître. Ainsi, à la rupture, la variation finale de dissipation d'énergie va dépendre de la taille de l'élément. Cet aspect représente une limite du modèle ; néanmoins, cette différence n'est plus discernable quand la taille des éléments est très petite (e.g. la différence entre les 2 maillages les plus fins est très faible dans cet exemple). A la rupture, il est également nécessaire de remarquer que lorsque l'endommagement évolue dans un seul élément, alors le maillage n'est plus suffisant pour décrire les champs cinématiques au travers de la zone de localisation. Ainsi, pour pouvoir continuer à suivre au mieux l'évolution de la dégradation, il devient nécessaire de modifier la description de la zone de fissuration en remaillant par exemple avec des éléments plus fins ou bien encore en passant à une approche discrète (e.g. XFEM) .

4.2.2.0.4 Influence de l'hypothèse plane.

L'influence de la condition de contraintes planes ou déformations planes sur la bande de cisaillement est relevée dans la figure 4.20 pour un déplacement en tête de 0,08 mm.

En accord avec des analyses faites par Rizzi *et al.* [1995] pour un modèle d'endommagement scalaire en formulation locale, le seul changement notable est la différence d'inclinaison de la bande de cisaillement entre la condition de calcul en contraintes planes et celle en déformations

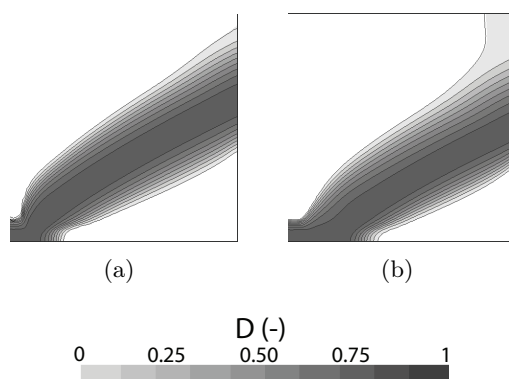


FIGURE 4.20: Champ d'endommagement : (a) Déformations planes ; et, (a) Contraintes planes.

planes. Le changement de condition de calcul impacte peu la régularisation dans le sens où la modification principale est la présence ou non d'une contrainte dans la 3^{ème} direction qui n'influe pas sur les interactions dans le plan. Ce résultat reste néanmoins qualitatif mais montre que le type de condition de calcul n'est pas un facteur limitant sur la résolution du problème d'attraction de la bande de cisaillement par le bord.

4.2.2.0.5 Influence de la longueur caractéristique.

L'influence de la valeur de la longueur caractéristique l_{c0} est également étudiée.



FIGURE 4.21: Décalage vertical de la bande de cisaillement pour une valeur de l_{c0} grande.

Pour des valeurs de longueur caractéristique relativement faibles, la position de la bande de cisaillement n'est pas changée, seule la largeur de la bande et le comportement global sont modifiés. En revanche, lorsque cette valeur devient importante (e.g. $l_c = 0,011$ m), un décalage vertical de l'endommagement est observé au niveau de la zone d'enclenchement de l'endommagement (figure 4.21). Plus la longueur caractéristique augmente, plus l'influence d'un point sur un autre à une distance fixée est importante. L'endommagement s'enclenche dans la zone faible mais par redistribution nonlocale les points au dessus peuvent voir leur déformation équivalente nonlocale augmentée jusqu'à atteindre le seuil. Cette zone est alors

fragilisée et à la rupture, une jonction entre la bande de cisaillement développée dans le spécimen et cette zone affaiblie se crée. La méthode nonlocale développée s'appuie à l'origine sur des considérations de mode I de rupture avec l'utilisation des contraintes principales. Or, dans cet essai, les bandes de cisaillement correspondent à un mode II de rupture où le déviateur est plus important, ce qui peut représenter sans doute une des limites d'application du modèle et représente un point à améliorer.

Pour l'essai de compression étudié, l'approche nonlocale basée sur l'état de contrainte permet d'améliorer considérablement la réponse vis-à-vis de la propagation de la bande de cisaillement comparée à l'approche nonlocale originale en décrivant une bande de cisaillement discernable et ne diffusant pas le long de conditions limites.

4.3 Description de grandeurs locales au travers de la zone de fissuration

Cette partie s'intéresse maintenant plus en détail à l'évolution de la zone de fissuration et la description des champs cinématiques à la rupture. Le test classique de la barre en traction uniaxiale est repris pour suivre l'évolution de l'endommagement et des champs cinématiques dans la zone de fissuration jusqu'à la rupture (voir partie 3.1.3). Enfin, la description de l'évolution de la fissuration dans une poutre entaillée soumise à une flexion 3 points est étudiée. Dans ces différentes études, les 2 méthodes de régularisation sont confrontées afin d'analyser l'influence des modifications apportées au modèle nonlocal sur les résultats.

4.3.1 Description de l'endommagement à la rupture

Après avoir étudié l'évolution de l'endommagement dans le cas de bande de cisaillement, le test suivant analyse l'évolution de la zone de localisation dans le cas d'une rupture en mode I. Pour cette étude, le cas test classique d'une barre en traction en 2D avec un chargement uniaxial, utilisé dans le chapitre 3.1.3 pour illustrer des pathologies du modèle nonlocal original, est mis en oeuvre avec la méthode de régularisation nonlocale basée sur l'état de contrainte. Les points étudiés sont notamment la description de la localisation des déformations et de l'endommagement à la rupture, points pour lesquels des pathologies ont été relevées pour le modèle original.

La géométrie ainsi que les paramètres matériaux sont similaires à ceux de la première étude. La barre est de 1 m de long et 0.01 m de hauteur. Les paramètres utilisés pour le modèle décrivant le béton sont (Eq. 2.19) : $E_b = 33,7$ GPa ; $\alpha = 0,99$; $\nu = 0$; $\beta = 1000$ et $l_{c0} = 0,18$ m.

Le maillage est composé d'éléments quadrangles à interpolation linéaire avec un élément seulement sur la hauteur. L'élément central est affaibli avec un module d'Young plus faible ($E_{b_{faible}} = 31$ GPa) afin d'enclencher l'endommagement dans la barre et obtenir une solution localisée unique à ce problème de bifurcation. L'essai est piloté par longueur d'arc (voir chapitre 2) pour pouvoir passer le "snap-back" qui apparaît, étant donné le caractère relativement fragile du matériau.

4.3.1.1 Comportement global

Le comportement global et l'objectivité des résultats sont analysés au travers de la courbe force-déplacement (Fig. 4.22) et comparés aux résultats obtenus avec la méthode originale. Pour tester l'objectivité des résultats, 3 maillages sont utilisés (maillage grossier : 31 éléments, maillage moyen : 61 éléments et maillage fin : 121 éléments).

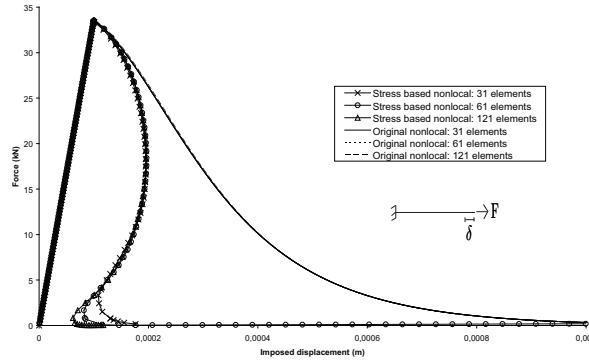


FIGURE 4.22: Barre en traction : Evolution force-déplacement pour les 3 tailles de maille avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte et le modèle nonlocal original.

Pour un même jeu de paramètres, la réponse avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte est plus fragile que celle obtenue avec le modèle original. Le domaine d'interaction associé à chaque point du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte est toujours inclus dans celui du modèle original. Ainsi, l'énergie dissipée au cours du chargement, qui peut être reliée à l'évolution de l'endommagement dans la barre, est pour le modèle modifié au maximum égale (mais le plus souvent inférieure) à celle pour le modèle original.

Globalement, le résultat est objectif avec seulement proche de la rupture de la barre une légère dépendance de la réponse à la taille de maille. L'analyse de ce phénomène est similaire à celle qui a pu être faite pour la dépendance au maillage de la réponse globale proche de la rupture dans le cas de bande de cisaillement. L'endommagement maximal tend à se localiser dans un élément à la rupture (voir Fig. 4.23), entraînant ainsi une variation ultime de l'énergie dissipée dépendante de la taille de maille. Cette différence devient négligeable lorsque la taille de l'élément devient très petite (dans cet exemple à partir de 61 éléments dans la longueur, l'objectivité du calcul jusqu'à la rupture peut être considérée comme valable). Une dépendance similaire de la réponse globale proche de la rupture au maillage est obtenue pour le modèle à gradient (Simone *et al.* [2004a]).

4.3.1.2 Description de l'évolution de la zone de localisation

Fig. 4.23 donne l'évolution de la déformation ε_{xx} et de l'endommagement le long de la barre pour la méthode nonlocale basée sur l'état de contrainte.

Contrairement au modèle original, l'endommagement maximal se localise dans un seul élément (plus petite entité numérique) avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte, sans diffusion à la rupture complète vers les éléments autour qui restent seulement partiellement endommagés. En considérant un endommagement de 1 comme correspondant à une macrofissure, le profil obtenu à la rupture est plus physique dans le sens où la macrofissure se situe dans un élément seulement. Au pic, la contrainte dans la barre est égale à la contrainte

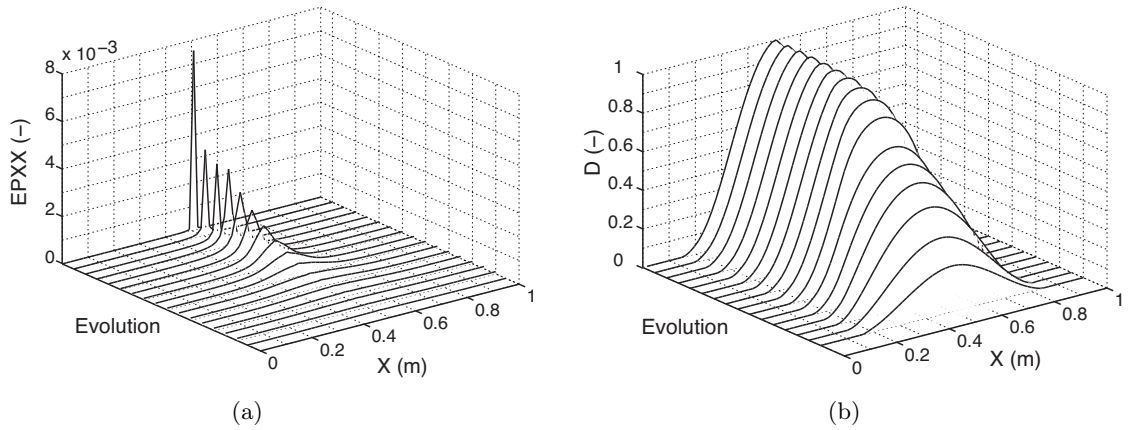


FIGURE 4.23: Barre en traction : Evolution au cours du chargement du profil de déformation ϵ_{xx} (a) et d'endommagement (b).

limite de traction f_t , le coefficient ρ est égale à 1 et la longueur interne du modèle modifié est égale à celle du modèle original. A cet instant, la zone de localisation n'est pas modifiée par la méthode nonlocale basée sur l'état de contrainte. Après le passage du pic, la longueur interne du modèle modifié décroît avec la diminution de la contrainte entraînant une diminution de la zone voyant son endommagement croître. Au cours de la dégradation de la barre, chaque point tend à être plus local (i.e. la part de déformation équivalente dans la moyenne nonlocale due aux points de son voisinage diminue).

La méthode nonlocale basée sur l'état de contrainte amène un profil de déformation beaucoup plus localisé dans la zone de fissuration que le modèle original. Le profil obtenu est également plus représentatif d'une microfissure qui analytiquement se représente par une fonction Dirac (i.e. le champ de déplacement est discontinu au droit de la fissure avec un saut de déplacement égal à l'ouverture de fissure). Dans un cadre de modélisation continue comme la méthode des éléments finis (MEF), un champ de déformation représenté par une fonction Dirac ne peut pas être obtenu contrairement à des approches analytiques considérant une discontinuité forte ou bien encore des approches numériques telle que la méthode X-FEM (Moes *et al.* [1999]). La déformation peut au mieux avec la MEF se localiser à la rupture dans un élément (i.e. la MEF ne peut décrire que des discontinuités faibles) comme cela est le cas avec la méthode nonlocale basée sur l'état de contrainte.

L'objectivité des résultats est également vérifiée pour les profils d'endommagement à la rupture (Fig. 4.24).

Ce résultat est également vérifié pour les profils de déformation jusqu'à la rupture. En revanche, dès qu'un élément a atteint la valeur de D maximale, la contrainte devient nulle. Avec la méthode proposée, les termes nonlocaux disparaissent et le déplacement aux bornes de la barre est directement repris par l'élément le plus endommagé. Ainsi, seul cet élément se déforme avec une valeur de déformation proportionnelle à sa taille.

En notant l_e la longueur de l'élément le plus endommagé dans la barre et par ε le niveau de déformation qu'il subit le long de l'axe de chargement, l'amplitude de la discontinuité faible en déplacement $[U]$, au travers de cet élément, s'écrit :

$$[U] = \varepsilon.l_e \quad (4.15)$$

Ainsi, bien qu'après la rupture de la barre l'objectivité soit perdue pour l'intensité de la défor-

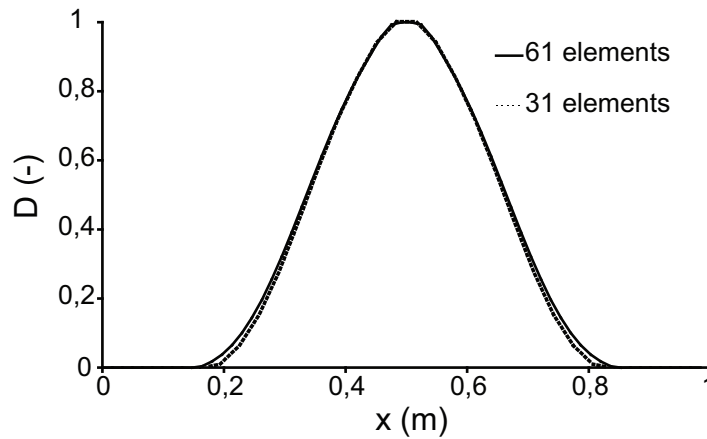


FIGURE 4.24: Barre en traction : Profil d'endommagement à la rupture pour différentes tailles de maille avec le modèle d'endommagement basé sur l'état de contrainte.

mation, avec un niveau de déformation dépendant de la taille de l'élément le plus endommagé en l_e^{-1} (Fig. 4.25), le résultat reste objectif en terme d'amplitude de la discontinuité faible en déplacement. A ce stade du chargement, comme dans le cas des approches discrètes (modèle à fissure cohésive), la déformation n'a plus de sens pour des modèles de rupture.

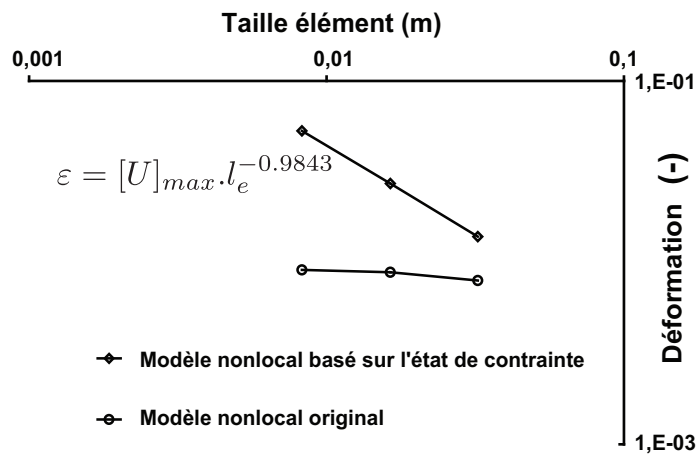


FIGURE 4.25: Barre en traction : Déformation maximale après rupture de la barre pour différentes tailles de maille et les 2 méthodes de régularisation

Pijaudier-Cabot et Dufour [2010], avec une modification de la régularisation nonlocale basée sur l'intégration de l'endommagement le long du chemin entre 2 points, montrent une dépendance similaire de la déformation après rupture en fonction de la taille de l'élément l_e . Cette dépendance a peu d'influence tant que seul le champ de déplacement est important. En revanche, cet aspect peut être plus problématique pour la modélisation béton armé avec un possible changement de l'apparition de la plasticité pilotée par la déformation, suivant la taille des éléments bétons dans lesquels s'est localisée la fissure.

4.3.1.3 Post-analyse continu discret : estimation de la fissuration

L'analyse de la description de la localisation des déformations dans la barre est reconsidérée dans ce paragraphe sur la plan de l'estimation de la fissuration. Dufour *et al.* [2008] ont

développé une méthode permettant d'obtenir une information sur l'ouverture de fissure par post-traitement du calcul continu. Cette méthode consiste à identifier une ouverture de fissure en comparant les champs de déformations régularisés obtenus par le calcul éléments finis et analytiquement en considérant une fissure représentée par une discontinuité forte. Les principaux points de la méthode sont détaillés dans la suite pour le cas unidimensionnel.

Le profil de déplacement U_{sd} de la fissure est représenté analytiquement par une discontinuité forte et mathématiquement par une fonction Heavyside H_Γ (Fig. 4.26), avec un saut de déplacement $[U]$ au niveau de la fissure en $x = x_0$. Le profil de déformation correspond alors à une fonction Dirac δ (Fig. 4.27).

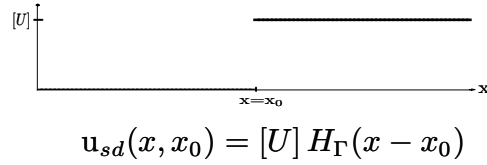


FIGURE 4.26: Profil de déplacement analytique de la discontinuité forte

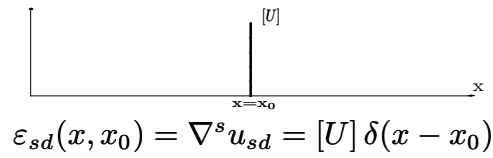


FIGURE 4.27: Profil de déformation analytique de la discontinuité forte

Afin de comparer les profils de déformation analytique ε_{sd} et numérique ε_{FE} , un produit de convolution est effectué entre chaque évolution et une fonction Gaussienne ϕ .

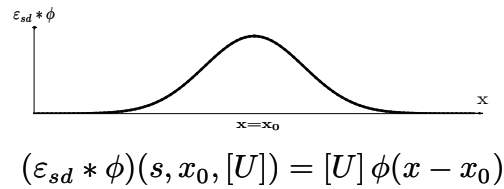


FIGURE 4.28: Produit de convolution du profil de déformation analytique de la discontinuité forte avec une fonction Gaussienne.

Pour avoir une définition complète de la méthode et permettre une estimation de l'ouverture de fissure, une hypothèse doit être faite sur le calage du profil convolué de déformation analytique $(\varepsilon_{SD} * \phi(x))$ par rapport au numérique $(\varepsilon_{FE} * \phi(x))$. L'"approche forte" considère une égalité des profils convolués au niveau de la fissure $x = x_0$ (Eq. 4.16) ce qui entraîne la nécessité d'avoir des profils similaires en tout point pour obtenir une bonne estimation, tandis que l'"approche faible" considère une égalité des intégrales des profils convolués de déformation le long de la barre (Eq. 4.17), ce qui entraîne la nécessité d'avoir des profils similaires en moyenne seulement pour obtenir une bonne estimation.

$$[U]_{forte} = \frac{(\varepsilon_{FE} * \phi)(x_0) \int_{barre} \phi(x_0 - x) dx}{\phi(0)} \quad (4.16)$$

$$[U]_{faible} = \frac{\int_{barre} (\varepsilon_{FE} * \phi)(x) (\int_{barre} \phi(x-s) ds) dx}{\int_{barre} \phi(x_0-x) dx} \quad (4.17)$$

La spécificité de cette méthode par rapport à d'autres (Matallah *et al.* [2010]) est de donner un indicateur d'erreur Δ^γ en intégrant le long de la barre l'écart entre les profils convolués analytique et numérique.

$$\Delta^\gamma(x_0, [U]) = \frac{\int_\Gamma |(\varepsilon_{sd} * \phi)(s, x_0, [U]) - (\varepsilon_{FE} * \phi)(s)| ds}{\int_\Gamma (\varepsilon_{FE} * \phi)(s) ds} \quad (4.18)$$

Cet indicateur permet de contrôler la qualité de la description par éléments finis vis à vis d'une approche par discontinuité forte pour représenter une fissure. Cet indicateur peut donner une idée de l'état de fissuration dans le milieu. Pour une erreur relativement élevée, la macrofissure n'est pas encore enclenchée et la valeur obtenue pour $[U]$ représente seulement un saut de déplacement moyen au travers de la zone microfissurée. En dessous d'une certaine valeur de l'erreur, la macrofissure s'est formée et la valeur obtenue pour $[U]$ peut être alors considérée comme l'ouverture de fissure. De plus, à la rupture, l'erreur obtenue peut être considérée comme un indicateur de la capacité du modèle numérique à décrire une fissure.

La figure 4.29 donne l'évolution de l'ouverture de fissure en fonction du déplacement et la figure 4.30 l'évolution de l'erreur correspondante en fonction de l'ouverture de fissure pour les 2 méthodes de régularisation en considérant l'approche forte pour le calcul de l'ouverture de fissure.

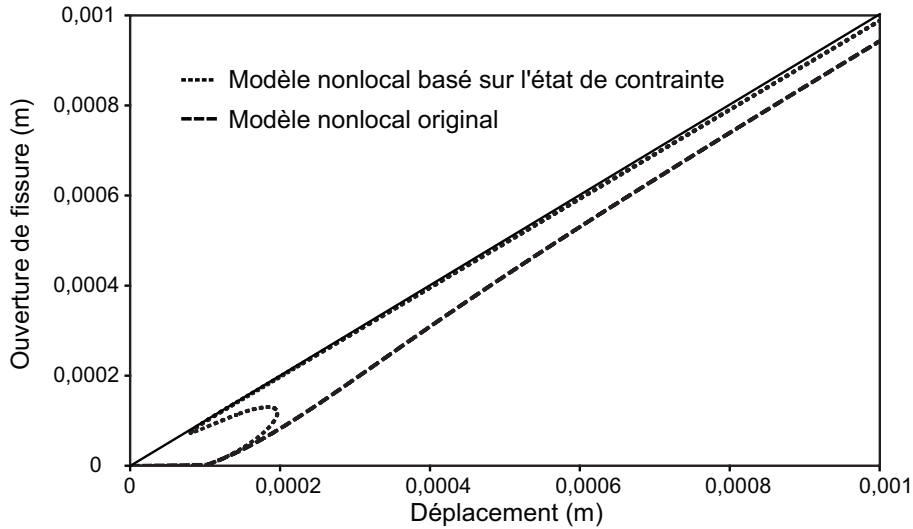


FIGURE 4.29: Ouverture de fissure en fonction du déplacement aux extrémités de la barre.

Physiquement, en dehors de certaines déformations permanentes non prises en compte dans la modélisation, l'ouverture de fissure doit être égale au déplacement aux bornes de la barre à la rupture. Ainsi, dans la figure 4.29, la courbe de l'évolution de l'ouverture de fissure en fonction du déplacement doit rejoindre la bissectrice, ce qui est le cas pour le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte alors qu'un écart est observé pour le modèle original car la déformation n'est pas localisée dans un seul élément.

La macrofissure n'étant pas encore apparue, la première partie de l'évolution de l'erreur en

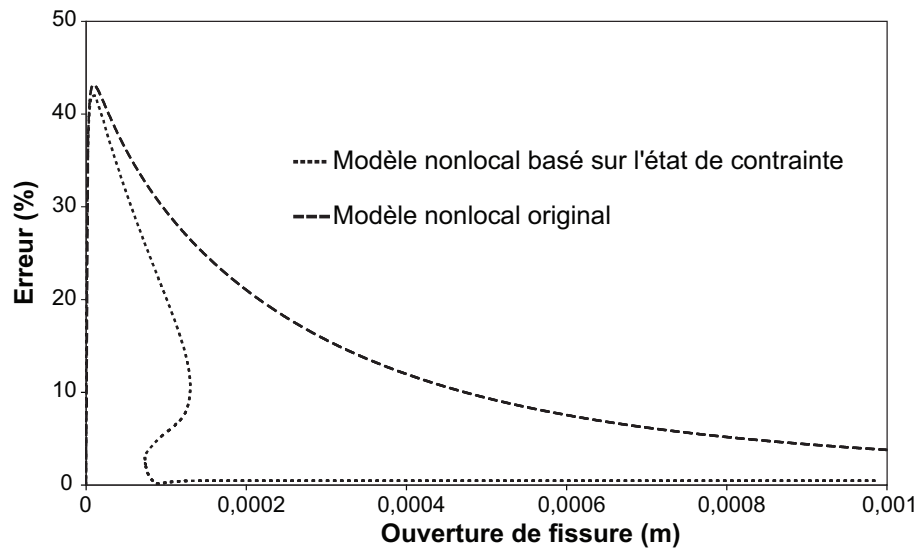


FIGURE 4.30: Erreur relative en fonction de l'ouverture de fissure.

fonction de l'ouverture de fissure donne des valeurs d'erreur relativement élevées pour les 2 modèles. En revanche, lorsque le chargement augmente, l'erreur diminue fortement, indiquant ainsi le développement de la macrofissure. On observe sur la figure 4.29, une erreur plus faible après la rupture de la barre pour le modèle basé sur l'état de contrainte ce qui confirme la meilleure capacité du modèle proposé à décrire une zone de localisation des déformations.

4.3.2 Fissuration

Après avoir analysé la description de la localisation des déformations dans un test purement académique d'une barre en traction, cette partie s'intéresse à un essai sur une poutre entaillée en flexion 3 points pour lequel des résultats expérimentaux sont disponibles. En plus du comportement global, des relevés d'ouverture de fissure sur la hauteur du spécimen ont été effectués sur cette poutre testée au laboratoire GEM de Nantes (Dufour *et al.* [2011]).

Sur la figure 4.31(a), le schéma de l'essai étudié avec le maillage associé pour l'étude numérique est représenté. Ce maillage est composé d'éléments isoparamétriques linéaires. Une attention particulière a été prise pour décrire finement la pointe d'entaille où une concentration de contrainte apparaît.

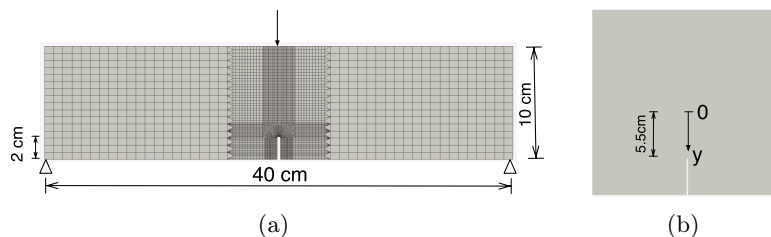


FIGURE 4.31: Poutre entaillée en flexion 3 points : (a) Maillage de la poutre. (b) Axes et position du repère d'étude de la fissuration.

La poutre est modélisée en 2D contraintes planes avec un chargement appliqué par déplacement imposé. La méthode nonlocale originale et la méthode nonlocale basée sur l'état de

contrainte sont comparées avec un jeu de paramètres semblable pour le modèle d'endommagement (voir Eq. 2.13) : $E = 30.000$ MPa ; $\nu = 0,24$; $\varepsilon_{D_0} = 0,00004$; $f_t = 1,2$ MPa ; $\beta = 1,06$; $A_t = 0,9$; $B_t = 4000$; $A_c = 1,25$; $B_c = 1000$ et $l_c = 0,008$ m.

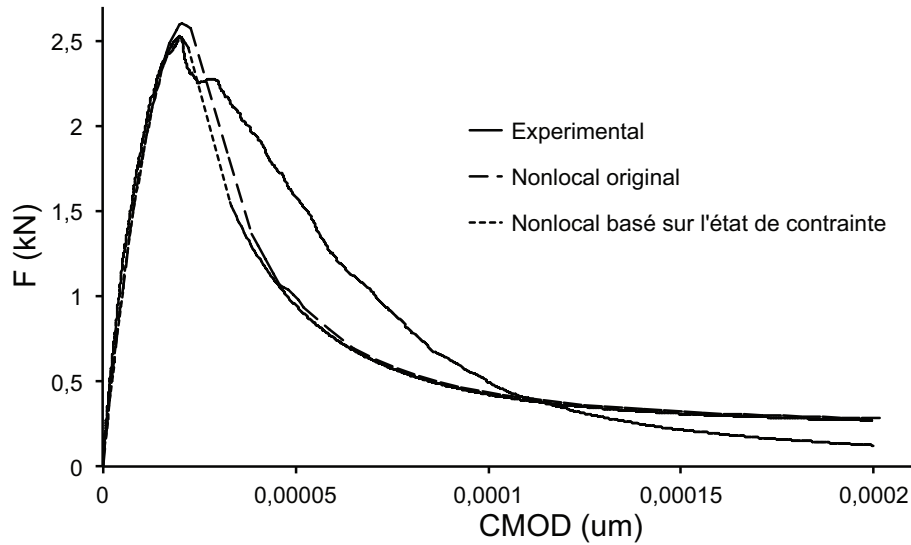


FIGURE 4.32: Flexion 3 points entaillée : Evolution de la force appliquée en fonction du CMOD (Crack Mouth Opening Displacement). Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux.

Le comportement global observé entre les 2 méthodes est relativement proche. Le pic de force est plus élevé avec le modèle nonlocal original comme cela était déjà le cas pour les tests d'effet d'échelle sur les poutres entaillées. Le comportement observé numériquement est également plus fragile qu'expérimentalement. Cela peut être dû à la forme de la loi d'évolution de l'endommagement qui est présente une rupture trop brutale mais également à la différence de comportement entre le 2D qui suppose une fissuration constante dans la profondeur et le 3D qui peut voir la fissuration se développer progressivement dans la 3^{ème} dimension.

Expérimentalement, l'évolution de la localisation des déformations a été suivie en utilisant une technique par corrélation d'images. La zone analysée expérimentalement est restreinte à un rectangle de 55 mm au dessus de la pointe d'entaille avec une orientation du repère lié à la fissure vers le bas (voir Fig. 4.31(b)). La corrélation d'images donne un champ cinématique par pixel à partir duquel est calculé une moyenne du déplacement perpendiculaire à la fissure sur quelques pixels de part et d'autre de la fissure. L'ouverture correspond alors à la différence des déplacements moyens calculés.

Numériquement, l'ouverture de fissure est estimée à partir du calcul continu en utilisant la méthode de post-traitement développée par Dufour *et al.* [2008], présentée précédemment dans le paragraphe 4.3.1.3 pour le test de la barre en traction. Cette technique permet d'obtenir une ouverture de fissure en comparant les champs de déformations numérique et analytique le long d'un profil 1D perpendiculaire à la fissure. Il est donc nécessaire dans un premier temps de déterminer la position de la fissure.

Pour localiser la fissure à partir du résultat d'un calcul continu, Dufour *et al.* [2011] proposent une méthode basée sur la résolution d'un problème thermique équivalent. Dans ce problème, la direction principale de la déformation maximale s'identifie à la direction du flux de chaleur dans le milieu étudié (voir Fig 4.33). En considérant une analyse de la fissuration en mode I, les trajets de fissure possibles s'identifient à des isothermes perpendiculaires à la direction associée à la déformation principale maximale. Au final, l'isotherme correspondant

à la fissure recherchée passe par le point subissant la déformation équivalente maximale. Une limite de cette approche vient du fait que la fissure à identifier doit avoir été développée sous un chargement radial en mode I. Pour l'identification de fissures engendrées sous des chargements plus complexes, des méthodes de recherche topologique comme celle proposée par Bottoni *et al.* [2011] peut être envisagée (voir également le paragraphe 5.1.1.3). Une autre limite de l'approche décrite ci-dessus peut être le fait d'imposer le passage de la fissure par les points de Gauss, néanmoins des résultats satisfaisants sont obtenus sur la localisation de la fissuration.

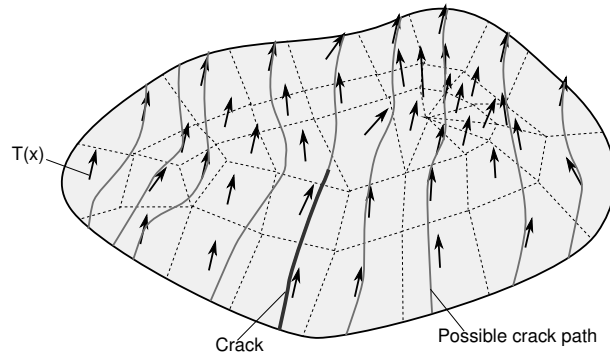


FIGURE 4.33: Méthode de recherche de la position de la fissure.

Des profils 1D, perpendiculaires au trajet, sont alors définis afin d'estimer l'ouverture de fissure en utilisant la méthode exposée précédemment. La figure 4.34 présente des évolutions de l'ouverture de fissure sur la hauteur de la poutre à différents CMOD pour les méthodes numériques nonlocales (calcul de l'ouverture en considérant l'approche forte) et pour les résultats expérimentaux.

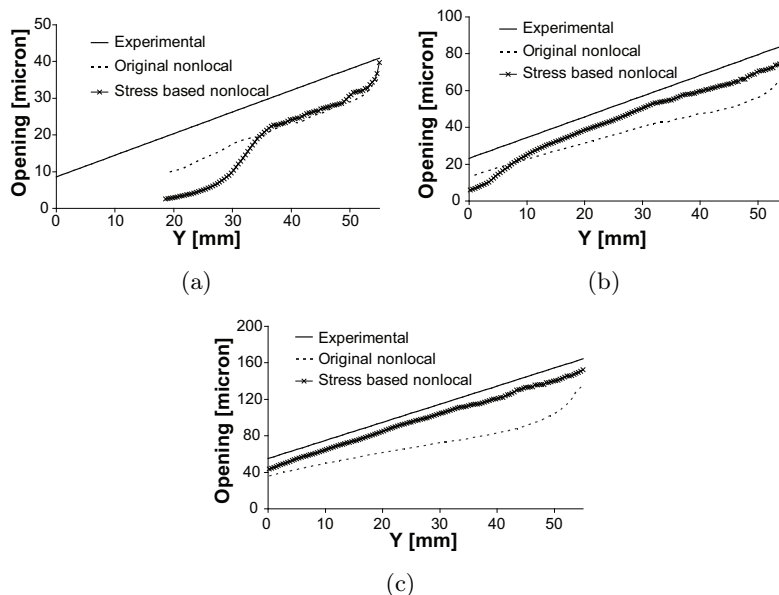


FIGURE 4.34: Flexion 3 points entaillée : Ouverture de fissure sur la hauteur de la poutre pour différents CMOD. (a) $50 \mu m$; (b) $100 \mu m$ et (c) $200 \mu m$

Pour le CMOD le plus faible (Fig. 4.34(a)), la macrofissure n'est pas encore complètement développée (i.e. en dehors de la pointe d'entaille, le champ de déformation n'est pas localisé) et les 2 méthodes nonlocales donnent une estimation de l'ouverture de fissure relativement

proche mais qui reste à 10 microns de l'expérimental car la macrofissure n'est pas formée. En augmentant le chargement, l'endommagement se développe en front d'entaille, entraînant une diminution de la contrainte et par conséquent une diminution de la longueur interne pour le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte.

Comme dans le cas de la barre 1D, le profil de déformation pour le modèle proposé est plus proche de celui d'une discontinuité forte que le profil obtenu avec le modèle original permettant ainsi une meilleure estimation de l'ouverture de fissure (Fig. 4.34(b) et 4.34(c)).

Une raison pour expliquer l'erreur obtenue pour le CMOD final lorsque la macrofissure s'est complètement développée dans la zone d'analyse, peut être, en dehors de la limitation de la description du champ de déformation par des éléments finis, le fait qu'expérimentalement l'ouverture est mesurée en surface et varie sans doute dans la profondeur alors que numériquement l'hypothèse de calcul 2D entraîne une estimation moyenne de l'ouverture de fissure (i.e. l'ouverture de fissure est constante dans la profondeur).

L'approche faible est également utilisée dans ce cas test pour estimer l'ouverture de fissure (Fig. 4.35). Une amélioration significative de la réponse est observée pour le modèle nonlocal original alors que pour le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte le résultat est équivalent à celui de l'approche forte. Ainsi, le modèle nonlocal original montre un profil de déformation éloigné d'une discontinuité forte point par point mais en moyenne le champ cinématique correspond. Pour le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte, le profil de déformation étant déjà proche d'une discontinuité forte point par point, la différence entre les 2 approches pour estimer l'ouverture de fissure n'est pas significative.

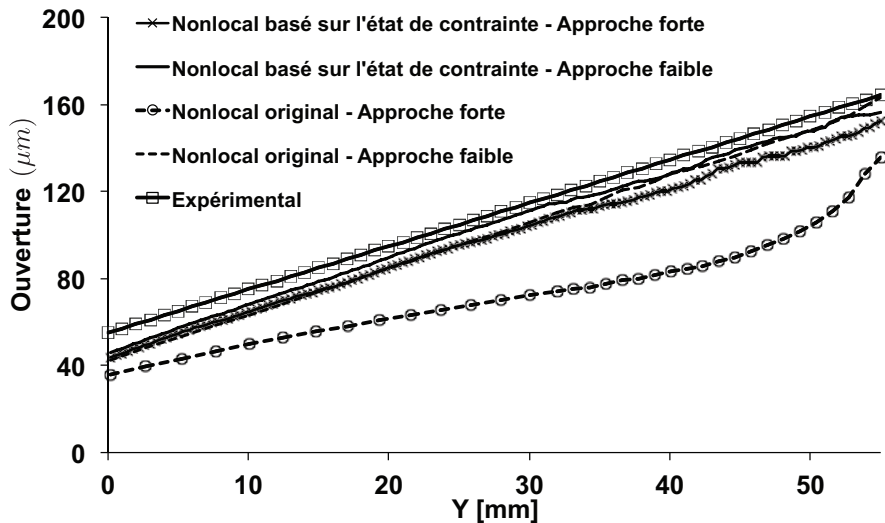


FIGURE 4.35: Flexion 3 points entaillée : Comparaison des approches pour l'estimation de l'ouverture de fissure (CMOD : $200 \mu\text{m}$).

4.3.3 Perspectives sur la transition continu-discret

L'approche considérée dans les différents cas tests reste dans un cadre continu avec seulement une estimation de la fissuration en post-traitement. Une perspective pour ce travail serait d'intégrer une transition continu-discret directement dans le calcul afin de décrire explicitement les discontinuités fortes en déplacement qui peuvent apparaître au droit des fissures créées. Le point clé de cette transition réside dans le choix du critère permettant de passer d'un élément continu (e.g. élément fini) à un élément intégrant une discontinuité (e.g. cohesive crack). Des

travaux de ce type ont pu être réalisés par le passé parmi lesquels on peut citer notamment Simone *et al.* [2003] (passage continu-discontinu en introduisant des éléments finis étendus pour les éléments atteignant une valeur d'endommagement critique), Comi *et al.* [2007] (passage continu-discontinu en introduisant des éléments finis étendus lorsque l'élément fini devient plus grand que la taille de la bande de localisation pour un endommagement donné, identifiée analytiquement). Dans notre cas, un choix pourrait être de considérer que l'élément fini n'est plus capable de décrire le champ cinématique au moment où la longueur interne devient plus petite que sa taille caractéristique et qu'il doit être remplacé par un élément intégrant une discontinuité forte.

Modélisation objective de la localisation des déformations dans les structures en béton armé

Ce chapitre a pour but d'étendre l'analyse et l'utilisation de modèles d'endommagement régularisés à la modélisation de structures en béton armé. Ce type de structure, en introduisant des armatures dans le béton, amène de nouvelles spécificités vis-à-vis de l'analyse de la localisation des déformations. Les armatures influencent l'évolution de la localisation de la déformation en tendant à limiter ce phénomène. De plus, la fissuration (ouverture, espacement des fissures...) est pilotée par l'interface entre l'acier et le béton.

Dans un premier temps, la capacité du modèle nonlocal intégral original à décrire l'évolution des nonlinéarités dans ce type de structure est analysée, en mettant en lumière certaines pathologies du modèle qui peuvent apparaître avec l'introduction des armatures. Dans un second temps, une description simplifiée de la liaison acier-béton en considérant une approche continue mettant en œuvre un modèle d'endommagement régularisé est proposée. Finalement, une méthodologie d'enrichissement d'une approche simplifiée de type poutre multifibre est mise en œuvre afin de permettre à cette approche de fournir une estimation de la fissuration.

5.1 Description de la localisation des déformations dans les structures en béton armé

Les développements proposés dans cette thèse étaient illustrés jusqu'à ce chapitre pour des structures en béton seul. Cependant, une grande partie des applications de Génie Civil associées à ce matériau des barres en acier pour reprendre les efforts appliqués à la structure dans les zones en traction, entraînant ainsi une modification de la sollicitation dans le béton. Pour ce type de structure, un enjeu important est l'analyse de sa durabilité et l'évolution de sa vulnérabilité dans le temps, avec en point clé la caractérisation de la fissuration du béton, facteur influant sur la possibilité de corrosion des éléments aciers (i.e. la perméabilité du milieu est liée à l'état de fissuration du béton) et sur l'apparition de leur plastification.

A l'heure actuelle, des codes (EUROCODES, CEB...) proposent des formules semi-empiriques pour permettre à l'ingénieur d'obtenir des informations sur la fissuration. Néanmoins, ces formules montrent leurs limites dans le cas de structures exceptionnelles en termes de taille et de géométrie et il semble nécessaire de mener une étude plus approfondie de ces problèmes. En se plaçant dans un cadre d'étude similaire aux chapitres précédents, une analyse du modèle d'endommagement nonlocal intégral original utilisant le critère de Mazars est effectuée sur des tirants en béton armé testés dans le cadre de la thèse de Mivelaz [1996]. Cette modélisation s'inscrit dans le cadre du projet national CEOS.fr (*Comportement et Evaluation des Ouvrages Spéciaux Fissuration Retrait*) visant à améliorer la compréhension ainsi que la modélisation de la fissuration dans les structures en béton armé soumises à des chargements divers.

5.1.1 Essai de tirant en béton armé

L'essai sur lequel porte l'étude est extrait des travaux effectués par Mivelaz dans le cadre de sa thèse ayant pour objet la détermination du débit d'air à travers des fuites engendrées par des sollicitations mécaniques dans des tirants en béton armé. Ces travaux présentent l'intérêt de fournir des informations sur la fissuration au cours du chargement. Plusieurs tirants de 5 m de longueur, 1 m de hauteur et 0,42 m d'épaisseur avec des taux de renforcement et deux bétons différents ont été testés. Dans l'étude qui suit, seul un tirant en béton armé est analysé (tirant R3 dans le classement donné par Mivelaz). La section du tirant et la répartition du ferrailage dans celui-ci sont données sur la figure 5.1.

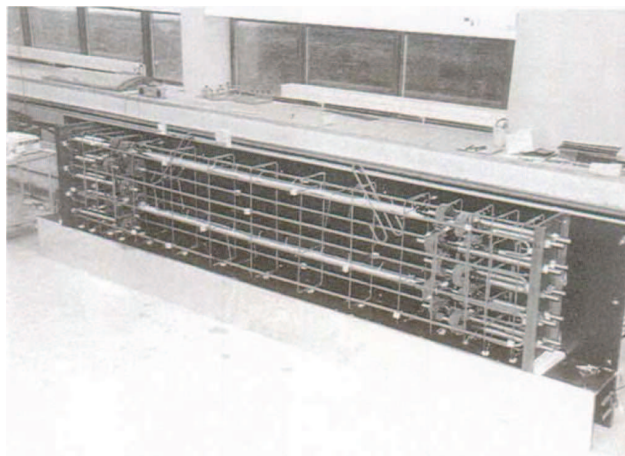
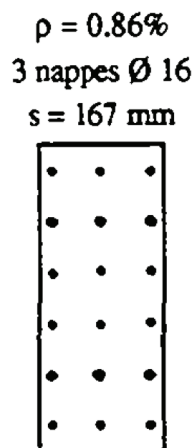


FIGURE 5.1: Répartition des aciers dans le tirant

Expérimentalement, le tirant est soumis à un déplacement imposé par l'intermédiaire d'un système de barres Dywidag. Les résultats obtenus pour la force et l'évolution de l'ouverture de fissure sont donnés sur la figure 5.2 avec des repères 1, 3/4, 4 et 6 correspondant aux différentes fissures qui apparaissent au cours de l'essai jusqu'à une déformation moyenne imposée de 0,3 ‰. Concernant l'étude de la fissuration, seuls les 3 m centraux du tirant ont été instrumentés.

En mettant en parallèle l'évolution de la force et les ouverture de fissure, on observe bien, lorsqu'une fissure apparaît, une chute au niveau de la force et une augmentation de l'ouverture mesurée de cette fissure. Les zones fissurées déjà présentes sont affectées par celle-ci en se déchargeant (diminution de l'ouverture).

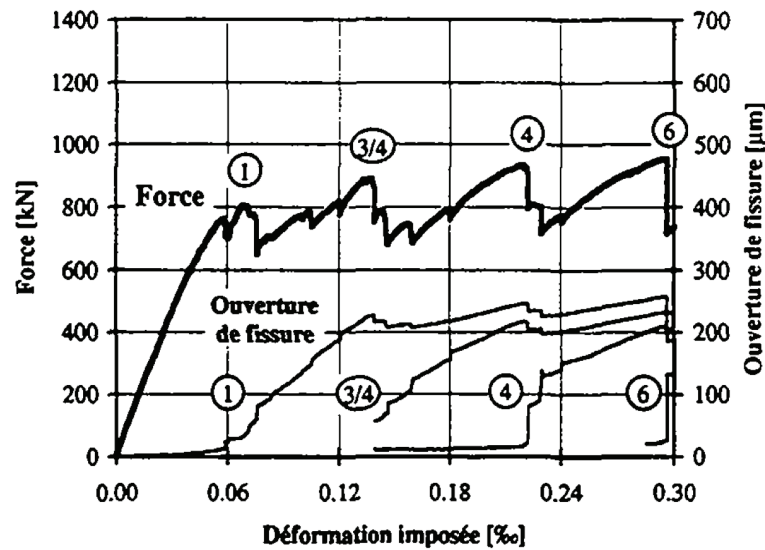


FIGURE 5.2: Résultats expérimentaux : Force et ouverture en fonction de la déformation imposée. (Mivelaz [1996])

Sur la figure 5.3, le faciès de fissuration à un niveau de déformation imposée de $0,30/00$ est présenté.

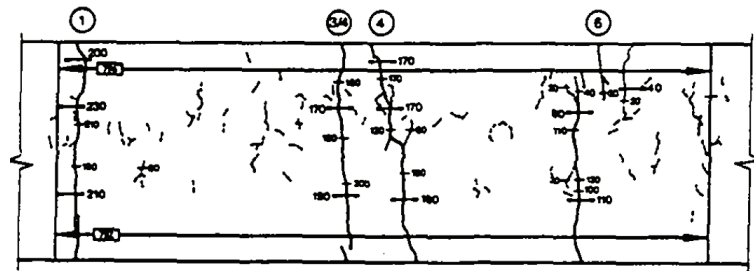


FIGURE 5.3: Résultats expérimentaux : Faciès de fissuration pour une déformation de $0,30/00$. (Mivelaz [1996])

Les caractéristiques fournies pour cet essai lors du benchmark sont données dans le tableau 5.1. Les deux colonnes listent respectivement, les paramètres matériaux obtenus à partir d'essais, les paramètres des modèles correspondant utilisés directement pour une première analyse. Pour le béton, des essais de fendage et de compression simple ont été effectués pour identifier les paramètres. La longueur interne l_c du modèle nonlocal considérée pour la modélisation, est prise égale à 3 fois la taille du plus gros granulat ($\phi_{g_{max}} = 32$ mm).

5.1.1.1 Analyse en aveugle du comportement

Une première analyse est effectuée en considérant les paramètres modèles donnés dans le tableau 5.1. L'objectif est d'analyser la réponse du modèle dans une utilisation "basique" (i.e. modèle d'endommagement nonlocal intégral original) pour modéliser une structure en béton armé. Les résultats obtenus pour cet essai sont donnés sur la figure 5.4 pour le comportement global et sur la figure 5.5 pour le comportement local (i.e. évolution des faciès d'endommagement).

Paramètres matériaux		Paramètres modèles	
Béton		Béton	
$E = 33,4 \text{ GPa}$	$\nu = 0,2$	$E = 33,4 \text{ GPa}$	$\nu = 0,2$
$f_c = 41,8 \text{ MPa}$	$f_t = 3,15 \text{ MPa}$	$A_t = 0,9$	$B_t = 0,9$
		$A_c = 0,85$	$B_c = 1010$
		$\beta = 1,06$	$\varepsilon_{D_0} = 9,43 \cdot 10^{-5}$
		$l_c = 9,6 \text{ cm}$	
Acier		Acier	
$E = 200 \text{ GPa}$	$f_e = 565 \text{ MPa}$	$E = 200 \text{ GPa}$	$f_e = 565 \text{ MPa}$
$\varepsilon_m = 10 \text{ ‰}$	$f_u = 647 \text{ MPa}$	$\varepsilon_m = 10 \text{ ‰}$	$f_u = 647 \text{ MPa}$

TABLE 5.1: Paramètres matériaux et modèles pour l'essai du tirant armé

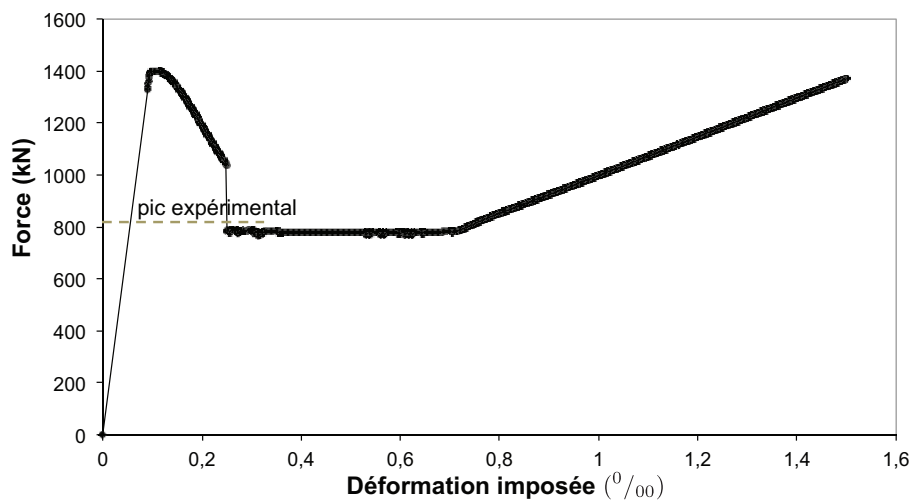


FIGURE 5.4: Première analyse : Force en fonction de la déformation imposée.

L'analyse "brute" en aveugle donne un résultat très éloigné du résultat expérimental obtenu. Le comportement global n'est pas reproduit avec une force au pic trop élevée, l'apparition d'une seule rupture brutale (observation d'un phénomène de snap-back) qui ne retranscrit pas la multifissuration.

Le comportement local n'est pas bien reproduit non plus avec une zone de localisation de l'endommagement qui tend à s'étaler pour aboutir à la fin de l'essai à un endommagement homogène sur tout le tirant sans zone de localisation distincte. Les pathologies observées sont expliquées par la suite et en correspondance des propositions d'amélioration sont exposées pour permettre une meilleure description de la réponse de la structure en utilisant un modèle d'endommagement nonlocal intégral original (voir partie 2.4.3.3).

- *Traitement des bords chargés* Comme le montrent Krayani *et al.* [2009] ou bien encore les tests réalisés à la partie 3.1.2, le tronçage effectué pour traiter les conditions limites en régularisation nonlocale intégrale originale entraîne une "attraction" de l'endommagement par les bords. Pour éviter ce problème, des bandes élastiques peuvent être introduites au niveau des bords (2 zones élastiques de 20 cm de longueur, possédant les mêmes propriétés que la zone centrale de 3 m mais ne pouvant s'endommager, sont mises en place). Le champ de connectivité est alors calculé sur le domaine entier (la zone centrale complétée de ces 2 zones élastiques) évitant ainsi d'avoir des répartitions gaussiennes tronquées pour

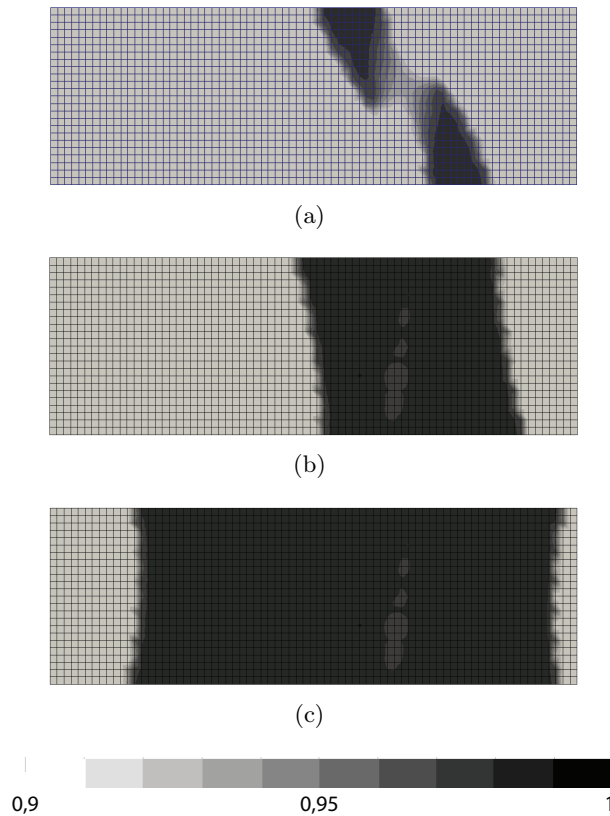


FIGURE 5.5: Première analyse : Faciès d'endommagement pour une déformation imposée de $0,25 \text{ } ^0/_{00}$ ((a)), $0,4 \text{ } ^0/_{00}$ ((b)) et $0,6 \text{ } ^0/_{00}$ ((b)).

les éléments aux extrémités de la zone endommageable.

- *Caractéristiques matériau* La valeur de la résistance en traction fournie par l'essai de fendage est supérieure à celle que l'on peut déduire de l'essai sur tirant comme indiqué dans la thèse de Mivelaz [1996]. Si l'on exclut les erreurs dues à l'expérimentation lors de l'essai de fendage, deux raisons peuvent expliquer ces différences. Le champs de contrainte dans un essai de fendage n'est pas homogène et va donc imposer le lieu de la fissuration. Par conséquent, la rupture se produira non pas au point le plus faible de la structure mais en son centre. Au contraire, dans le cas de l'essai sur un tirant armé, la structure est sollicitée de façon homogène et le lieu de la fissuration est piloté par les points faibles du matériau et entraîne un effet d'échelle de type Weibull. De plus, au regard des dimensions d'une éprouvette de béton pour un essai de fendage et celles du tirant, il y a également un effet d'échelle matériau qui intervient (voir partie 4.1.2). L'essai de caractérisation utilisé est supposé être un essai matériau cependant, dès que la première fissuration apparaît, ce n'est plus le cas (influence de la taille de la structure sur la résistance identifiée). Ainsi, pour caractériser le matériau, il est nécessaire d'analyser des résultats sur plusieurs échelles afin d'obtenir la loi d'effet d'échelle et remonter à des valeurs caractéristiques.

Par conséquent, la valeur du paramètre ε_{D_0} est diminuée à $4,2 \cdot 10^{-5}$ afin d'obtenir un effort au niveau de la première fissure équivalent à celui obtenu expérimentalement. Cette observation, au delà de l'étude en elle-même, pose la question du choix de l'essai de caractérisation d'un matériau vis-à-vis de son utilisation future et la nécessité de mener une étude expérimentale sur plusieurs tailles de spécimen.

- *Bifurcation et champ aléatoire* Pour l’analyse en aveugle, l’endommagement observé est homogène dans le tirant armé, jusqu’à ce qu’une localisation apparaisse tardivement, déclenchée sans doute par un bruit numérique. Afin d’éviter de dépendre d’un bruit numérique pour amorcer une localisation, une perturbation contrôlée peut être introduite au problème à résoudre. Dans le cas d’une sollicitation homogène, une technique simple consiste à affaiblir des éléments imposés plus ou moins arbitrairement. Cette approche permet d’obtenir plusieurs fissures en forçant la localisation mais elle impose le lieu de ces fissures.

Pour enclencher une solution localisée au chargement de bifurcation, Chambon *et al.* [2001] proposent de reprendre le pas de temps instable en prenant pour prédiction du champ de déplacement, le déplacement convergé auquel on ajoute une perturbation qui déstabilise la solution. Cette méthode, appliquée sur un problème 1D avec chargement homogène, permet de retrouver différentes solutions obtenues analytiquement en modifiant le bruit perturbateur introduit. Dans cette approche, la perturbation est ainsi considérée sur un plan numérique.

Sur les résultats expérimentaux, on constate que l’effort évolue de façon non-linéaire (i.e. développement d’une microfissuration) juste avant d’obtenir la première fissure. De plus, les premières fissures sont distribuées de manière aléatoire le long du tirant traduisant le caractère hétérogène du béton. Ces observations amènent à considérer l’introduction d’un champ aléatoire sur les propriétés matériau pour représenter les hétérogénéités du matériau et afin d’enclencher la localisation des déformations et obtenir une solution autre que la solution d’endommagement homogène. En s’inspirant de modèles mésoscopiques d’endommagement (e.g. La Borderie *et al.* [2007]), une répartition aléatoire du seuil de déformation à la première fissuration ε_{D_0} est introduite (figure 5.6), qui suit une distribution gaussienne non corrélée. Le choix de la non-corrélation est fait en considérant que les hétérogénéités sont moyennées à l’échelle macroscopique et que la résistance d’un volume élémentaire représentatif quelconque est indépendante de celle de ses voisins. Néanmoins, une corrélation pourrait être introduite si la définition du champs aléatoire trouvait son origine dans le comportement au jeune âge du béton (e.g. analyse thermo-hydro-mécanique) pour lequel les bords de la structure ou bien encore les armatures ont une influence non négligeable.

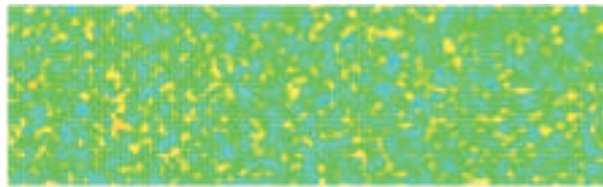


FIGURE 5.6: Distribution aléatoire de la déformation seuil de première fissuration ε_{D_0}

La répartition choisie est tronquée pour éviter d’obtenir des valeurs non physiques négatives ou très proches de 0 (le seuil limite pour ε_{D_0} est fixé arbitrairement à une valeur de $1, 10^{-5}$). La valeur moyenne ($\varepsilon_{D_{0moy}} = 4, 2 \cdot 10^{-5}$) de cette distribution est prise égale à la valeur pour la première fissure observée expérimentalement sur le tirant. Avec une vision 1D, le fait d’ajouter de l’aléa tendrait à faire diminuer la force au pic. Or, en 2D, pour fissurer de part en part, il faut endommager plusieurs éléments, on retombe donc sur une fissuration qui dépend de la valeur moyenne "en valeur" mais dont le lieu dépend de l’aléa.

- *Régularisation nonlocale en présence d’armatures* Pour l’analyse en aveugle, après l’enclenchement d’une localisation des déformations suite à un bruit numérique, l’endommagement s’étale progressivement à partir de la zone de localisation des déformations. La longueur caractéristique utilisée initialement pour l’étude et correspondant à un ordre de grandeur classique (i.e. 3 fois la taille du plus gros granulat) entraîne cet étalement progressif de

l'endommagement qui mène à une valeur maximale de celui-ci sur l'ensemble du tirant, à la rupture complète.

Sachant que sur une modélisation 2D continue la dégradation de l'interface acier-béton apparaît sous forme de bande d'éléments endommagés autour de l'armature (voir le passage 2D/3D pour les armatures dans le paragraphe 5.1.1.3), le choix d'une longueur caractéristique élevée, qui se trouve être proche de l'espacement entre armatures longitudinales, entraîne des valeurs de déformations équivalentes nonlocales importantes. En captant les déformations localisées à l'interface acier-béton (figure 5.7), les points entre les armatures voient leur déformation équivalente nonlocale dépassée le seuil d'enclenchement de l'endommagement et cela conduit à un élargissement progressif de la zone endommagée.

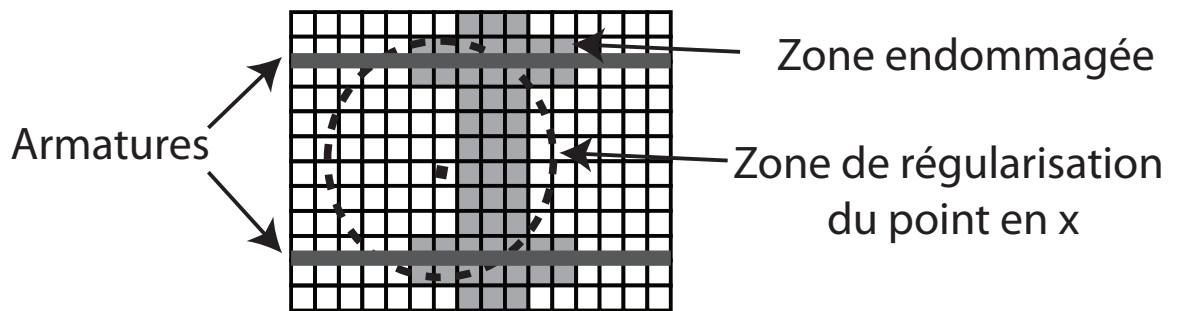


FIGURE 5.7: Zone de moyenne nonlocale proche des armatures

Afin d'observer plusieurs zones endommagées distinctes et par la suite extraire des informations pour calculer des ouvertures de fissures, la longueur interne du modèle nonlocal intégral original est diminuée et ramenée à une fois la taille du plus gros granulats (0,032 m).

5.1.1.2 Analyse globale

Une partie des résultats obtenus pour cette étude est donnée par la suite en considérant les ajustements proposés pour améliorer la réponse des modèles et un pilotage par longueur d'arc pour charger le tirant (voir chapitre 2). Les résultats obtenus pour ce tirant, avec l'approche décrite précédemment, sont exposés par Girya *et al.* [2009] et Jason *et al.* [2010]. Sur la figure 5.8, le comportement global de la structure est représenté et comparé aux résultats expérimentaux. La non-visualisation de l'intégralité des points calculés lors de "snap-back" est seulement due à un choix de limiter les points sauvegardés pour des raisons de coûts de mémoire et non à l'utilisation d'un pilotage en déplacement.

Dans un premier temps, une diminution progressive de la raideur est observée avant la première fissure par endommagement des points les plus faibles dans la structure. Contrairement à la théorie de Weibull qui voit la structure rompre à l'enclenchement de l'endommagement dans l'élément le plus faible, dans ce cas, un régime stable est établi avant l'apparition d'une première fissure, comme cela peut être observé expérimentalement. Dans un second temps, différentes chutes d'effort successives sont observées, correspondant à l'apparition de nouvelles macrofissures.

La figure 5.9 donne l'endommagement pour une déformation imposée de $0,15^0/00$. Les premières zones endommagées traversantes apparaissent successivement en suivant les défauts du matériau (i.e. fissuration primaire pilotée par l'aléa), puis, à travers la diffusion de l'effort des armatures dans le béton (i.e. fissuration régulière de pas constant pilotée par la liai-

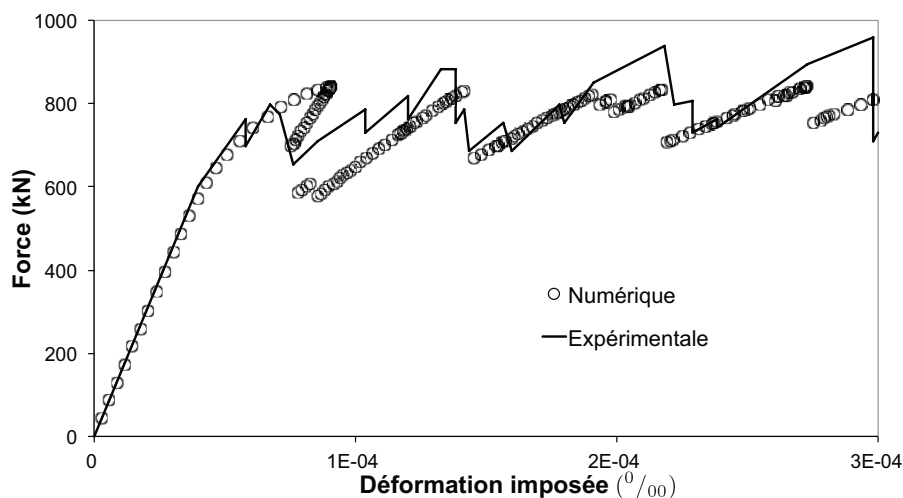


FIGURE 5.8: Seconde analyse : Force en fonction de la déformation imposée.

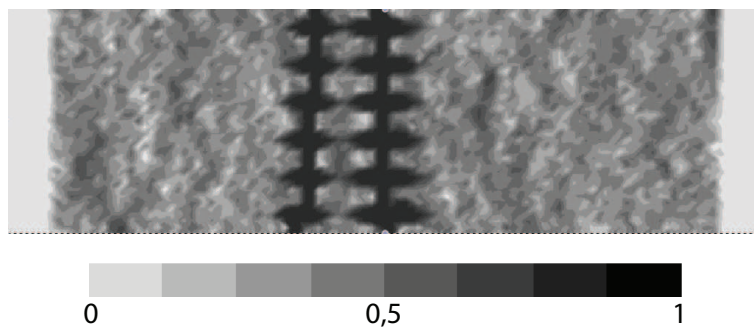


FIGURE 5.9: Seconde analyse : Faciès d'endommagement pour une déformation de $0,15 \text{ ‰}$.

son acier-béton). La comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques s'intéresse maintenant à des valeurs plus locales au travers de l'analyse de la fissuration (ouverture, position des fissures...).

5.1.1.3 Analyse de la fissuration

L'analyse de la fissuration est effectuée en post-traitement du calcul continu en considérant la même approche que celle utilisée pour la poutre entaillée dans la partie 4.3.2. Dans un premier temps la fissure est identifiée, puis l'ouverture de fissure est estimée en effectuant une analyse comparative entre le champ de déformation analytique correspondant à une discontinuité forte et le champ de déformation calculé, projeté sur des profils 1D perpendiculaires à la fissure. La méthode de recherche de la position de la fissure utilisée précédemment (Dufour *et al.* [2011]), développée pour identifier des fissures s'ouvrant en mode I est mise en défaut dans cet essai par les zones de béton cisailées proches des armatures car à l'intersection entre l'armature et la fissure, les directions principales ne sont plus perpendiculaires à la fissures. Afin de permettre l'identification de la position de fissures en présence de localisation en mode II, Bottoni et Dufour [2010] proposent une méthode de recherche topologique pour identifier le lieu de la fissure (détaillée également dans Bottoni *et al.* [2011] (en préparation)).

Procédure de recherche topologique d'une fissure

L'hypothèse de départ est de considérer le champ à post-traiter comme une "montagne" et que la fissure en suit la "crête". Le champ lié à la variable interne κ ($\kappa = \max_t(\kappa, \overline{\varepsilon_{eq}})$) est utilisé par la suite pour le post-traitement. Cependant, cette procédure de recherche étant géométrique, n'importe quelle variable représentative de la fissuration peut être utilisée comme par exemple l'endommagement. La figure 5.10 résume la procédure de recherche d'un nouveau point appartenant à la fissure.

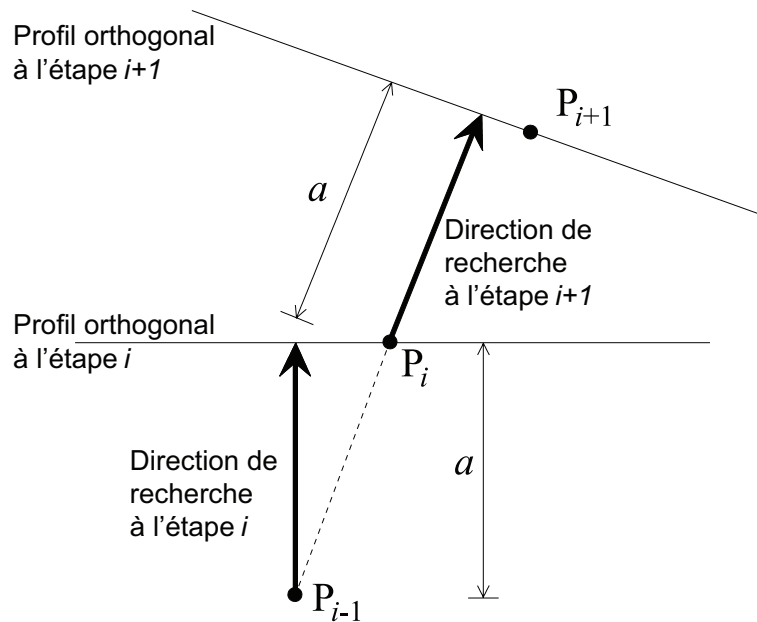


FIGURE 5.10: Procédure de recherche topologique de la position de la fissure

En supposant connus les points P_{i-1} et P_i de la fissure, le point P_{i+1} est identifié sur un profil perpendiculaire à la direction de recherche (direction $P_{i-1}P_i$) à une distance a (pas de recherche le long de la fissure) de P_i . Sur ce profil perpendiculaire, le champ κ est projeté et convolué et le maximum identifié le long du profil est considéré comme étant le point par lequel passe la fissure. Le produit de convolution permet de lisser le champ et d'éliminer les pics locaux dus au maillage. En éléments finis, les maximums d'un champ linéaire sont toujours sur les arêtes des éléments.

L'initialisation de la procédure se fait en considérant comme point initial provisoire P_0 , le point ayant observé la valeur de κ la plus importante au cours du chargement. Le second point P_2 est identifié comme le maximum du champ κ projeté et convolué sur un cercle de centre P_0 et de rayon a . Le point initial P_1 est alors recalculé le long d'un profil perpendiculaire à P_0P_2 en P_0 . A partir de cet étape, 2 points sont identifiés et la procédure incrémentale peut commencer.

La procédure est stoppée lorsque le maximum observé sur le profil perpendiculaire est inférieur à une valeur seuil qui peut être prise égale à ε_{D_0} par exemple.

Cette méthode développée par Bottoni et Dufour [2010] a été implantée dans le code Cast3M pour traiter les applications suivantes et des étapes ont été ajoutées pour traiter la multifissuration (i.e. recherche automatique de plusieurs fissures dans le milieu étudié).

Procédure de traitement de la multifissuration

Les différentes étapes de la méthode proposée pour analyser un milieu multifissuré sont illustrées sur la figure 5.11 pour un spécimen bi-entaillé développant 2 fissures.

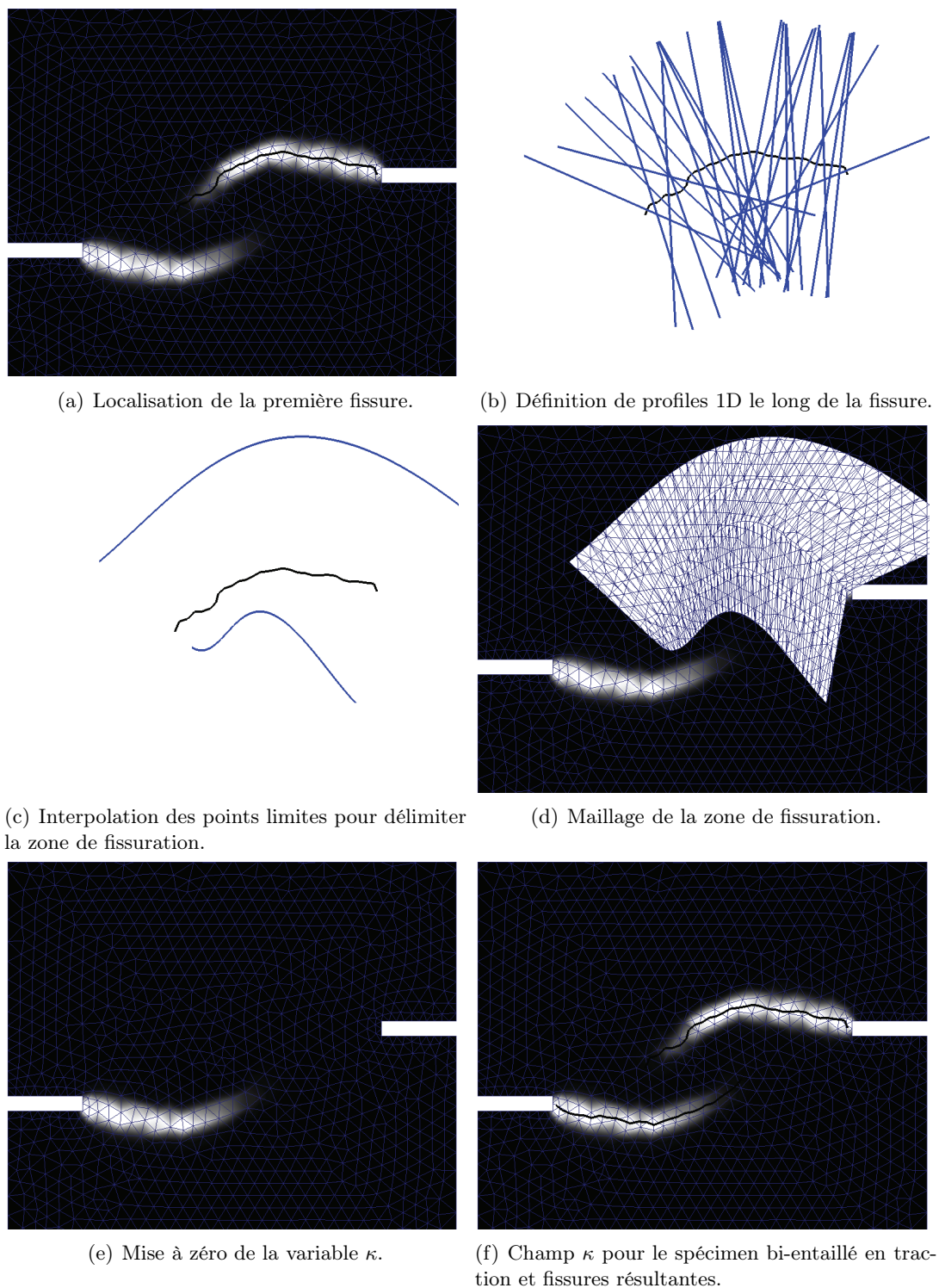


FIGURE 5.11: Etapes de la procédure de recherche pour la multifissuration.

Le point principal de la méthode consiste à identifier la zone de fissuration participant exclusivement à l'ouverture de la fissure détectée. Pour chercher la fissure suivante, le champ post-traité est remis à sa valeur minimale (i.e. $\kappa = \varepsilon_{d0}$). Pour effectuer le post-traitement, les zones endommagées sont supposées distinctes. En effet, la méthode de post-traitement ne permet pas d'identifier le passage de 2 fissures en un même point ou dans une zone très proche

car dans cette configuration seule une fissure est associée à la process zone. Les étapes de la procédure pour le post-traitement de la multifissuration dans un domaine Ω sont décrites ci-dessous.

1. *Enclenchement de la recherche sur le domaine entier Ω .* (Fig. 5.11(a)) La recherche de plusieurs fissures commence par la fissure à laquelle appartient le maximum du champ post-traité sur le domaine complet Ω . La méthode de recherche d'une fissure correspond à celle exposée précédemment (Bottoni et Dufour [2010]).
2. *Définition de profils 1D.* (Fig. 5.11(b)) Dans une approche similaire à celle utilisée pour le calcul de l'ouverture de fissure, des profils 1D perpendiculaires à la fissure sont définis. Le champ considéré pour le post-traitement est alors projeté sur ces profils et convolué pour effectuer un lissage (cette opération permet d'obtenir un champ plus facilement analysable qui devient infiniment dérivable).
3. *Détection de la zone de fissuration.* Pour chaque profil, la position du maximum le plus proche du point d'intersection du profil 1D et de la fissure est détecté et supposé appartenir à la fissure considérée. Dans le cas de fissures rapprochées, il se peut que le profil 1D capte en plus une autre zone de fissuration avec un pic plus important, ainsi la détection du maximum le plus proche du point de croisement permet de sélectionner la bonne zone à analyser. A partir de ce point appartenant à la fissure, les 2 minimums les plus proches sont localisés et définissent les limites de la zone de fissuration le long du profil 1D considéré (voir Fig.5.12). Ces limites sont réutilisées par la suite lors du calcul de l'ouverture de fissure, pour ne prendre en compte dans l'ouverture de fissure que la déformation participant à l'ouverture de la fissure considérée.
4. *Définition de la process zone.* (Fig. 5.11(c) et 5.11(d)) A ce stade, les limites de la zone de fissuration sont définies par un ensemble de points correspondant aux limites identifiées sur chaque profil 1D. Afin de définir le contour \mathcal{C} de la process zone, une régression polynomiale est effectuée sur les coordonnées de ces points exprimées dans un repère associé à la fissure. L'angle θ_{fiss} entre l'axe \mathbf{X}_{fiss} du repère associé à la fissure et l'axe \mathbf{X} du repère principal est défini par :

$$\theta_{fiss} = \frac{\sum_{i=2}^n \theta_{P_i}}{n} \quad (5.1)$$

avec θ_{P_i} l'angle entre le segment délimité par le point initial P_1 et le i^{me} point P_i de la fissure et l'axe \mathbf{X} du repère principal. Une régression polynomiale d'ordre 4 est considérée comme suffisante pour des applications introduisant des fissures avec un nombre de changements de direction faible et d'amplitude de changement d'orientation faible.

5. *Remise à zéro du champ post-traité.* (Fig. 5.11(e)) L'aire obtenue à l'étape précédente et délimitée par son contour \mathcal{C} est définie comme la zone de fissuration associée à la fissure. A l'intérieur de cette zone, le champ est remis à sa valeur minimale ($\kappa = \varepsilon_{d0}$ pour la variable d'histoire). L'hypothèse considérée est que les nonlinéarités créées dans cette zone, avec $\kappa > \varepsilon_{d0}$, participent exclusivement à l'ouverture de la fissure associée à cette zone.
6. *Recherche d'une nouvelle fissure.* (Fig. 5.11(f)) La recherche d'une nouvelle fissure commence à partir du maximum du champ réinitialisé. La procédure se poursuit jusqu'à ce que ce maximum devienne inférieur à une valeur limite qui peut être prise égale à la déformation limite d'enclenchement de l'endommagement ε_{d0} .

Ces différentes procédures présentées pour analyser la fissuration à partir d'un calcul continu sont maintenant mises en application sur le tirant armé étudié. Sur la figure 5.13, les 2 pre-

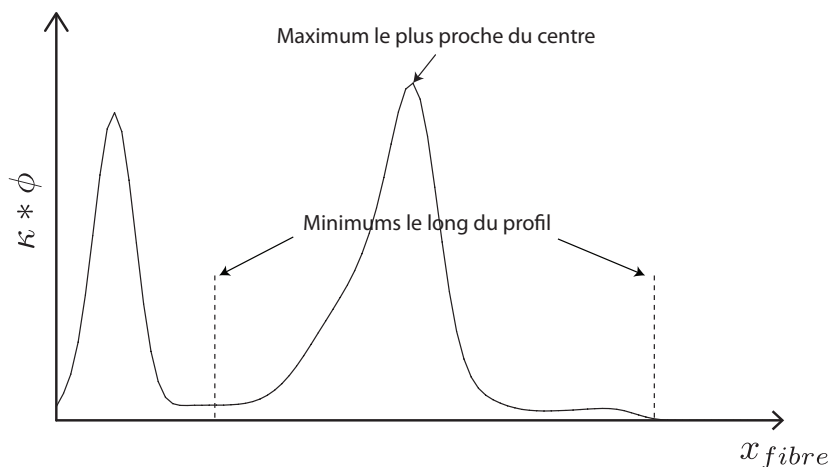


FIGURE 5.12: Recherche des points appartenant à la fissure et aux limites de la zone de fissuration sur le profil orthogonal.

mières fissures apparues dans le tirant en béton armé sont identifiées et superposées au champ d'endommagement.

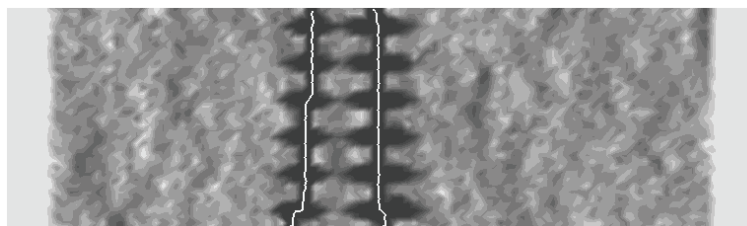


FIGURE 5.13: Tirant armé : Superposition du champ D et des fissures détectées.

La procédure de recherche topologique permet bien de détecter les macrofissures traversantes sans être perturbée par les zones endommagées en cisaillement le long des armatures.

Sur la figure 5.14, l'évolution de l'ouverture de fissure moyenne sur la hauteur du tirant pour les 2 premières fissures identifiées est déterminée en utilisant la méthode de post-traitement exposée précédemment (voir partie 4.3.1.3).

Qualitativement, l'évolution de la fissuration est cohérente avec celle obtenue expérimentalement avec notamment l'observation d'une décharge des fissures existantes à l'apparition de chaque nouvelle fissure. Sur le plan quantitatif, les valeurs moyennes de l'ouverture sont légèrement inférieures aux valeurs mesurées expérimentalement. Cette différence peut s'expliquer par le fait qu'une modélisation 2D implique une fissuration constante dans la profondeur avec une influence plus importante des aciers sur la limitation de l'ouverture de fissure qu'en 3D. En effet, dans le cadre d'une analyse 2D, les armatures limitent l'ouverture de fissure dans toute la profondeur alors que physiquement, elles tendent à diminuer l'ouverture de fissure seulement dans un voisinage limité entraînant ainsi une sous-estimation de la valeur moyenne de l'ouverture (voir figure 5.15).

La figure 5.16 montre l'évolution au cours du chargement des profils d'ouverture de fissure sur la hauteur de la poutre pour la première fissure.

De plus, la valeur de A_t utilisée pour le modèle béton est inférieure à 1 amenant une contrainte

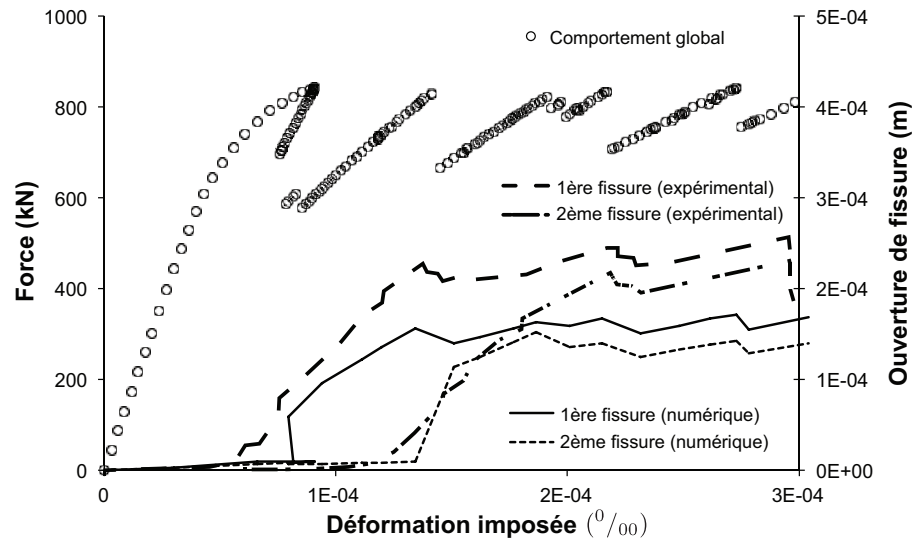


FIGURE 5.14: Evolution de l'ouverture moyenne pour les 2 premières fissures en fonction de la déformation imposée

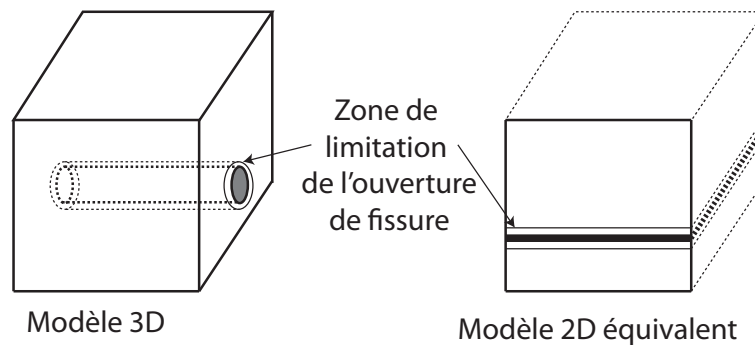


FIGURE 5.15: Représentation de la zone d'influence de l'armature sur la fissure traversante suivant la dimension du calcul.

résiduelle dans le béton non nulle. Ceci entraîne une réduction de la contrainte en dehors de la zone complètement endommagée limitant ainsi la propagation de la fissure.

Cette analyse montre la capacité d'un modèle d'endommagement nonlocal intégral original à décrire l'évolution de la fissuration dans une structure en béton armé. Néanmoins, certains points peuvent être améliorés comme la description de la régularisation proche des armatures et son évolution au cours de la dégradation du béton. De plus, comme les analyses sur des structures en béton l'ont montré précédemment, le champ à la rupture pour le modèle nonlocal intégral original reste éloigné d'une discontinuité forte. L'artifice considéré dans cette étude a donc été de réduire la valeur de la longueur interne du modèle pour limiter l'étalement de l'endommagement au niveau de chargement atteint mais cette option reste à éviter.

Dans la suite du chapitre, une description simplifiée de la liaison acier-béton ainsi que l'application du modèle nonlocal intégral basé sur l'état de contrainte sont proposées pour tenter d'améliorer les problèmes relevés.

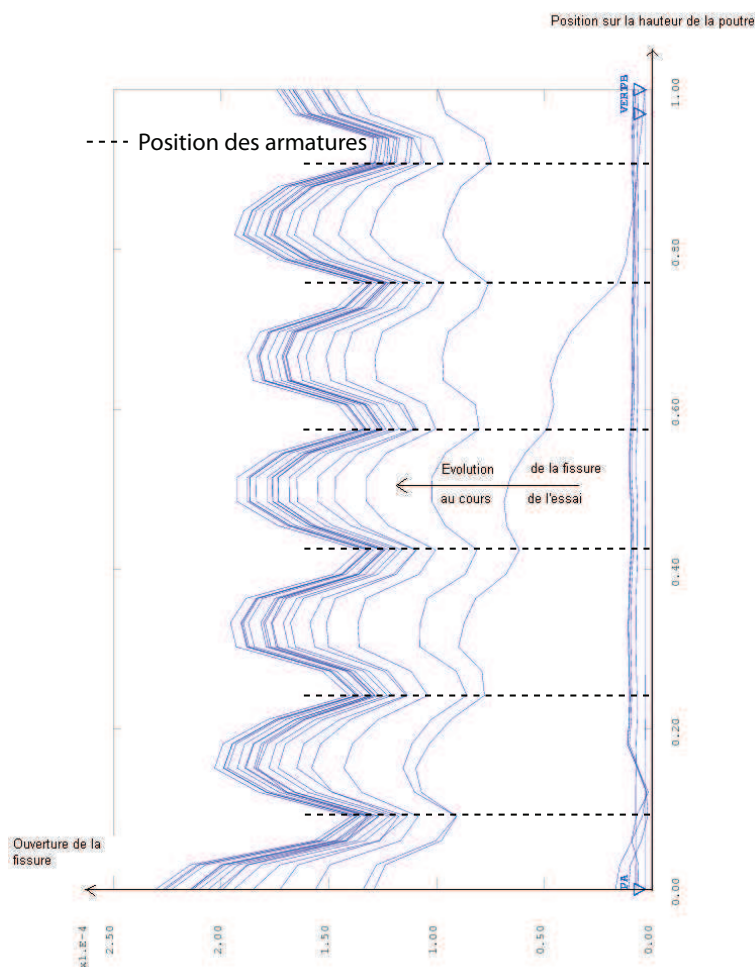


FIGURE 5.16: Exemple d'évolution de la fissuration sur la hauteur de la poutre pour la première fissure.

5.1.2 Description simplifiée de la liaison acier-béton : Application à un essai 3D de tirant armé

La liaison acier-béton dans une structure en béton armé est une zone particulière pour laquelle le chargement et la réponse du béton diffère par rapport à ce qui peut être observé loin des armatures. Une description spécifique doit en être faite pour reproduire au mieux le comportement global de la structure. De nombreuses études expérimentales ont été réalisées par le passé pour étudier cette interface en faisant varier par exemple le confinement, le type et le diamètre de l'armature, la qualité du béton ...

Un essai classique largement utilisé est l'essai d'"arrachement". Il consiste à appliquer un effort de traction à une extrémité de la barre tandis que l'autre partie est ancrée dans du béton. Parmi ce type d'essai, les travaux d'Eligehausen *et al.* [1983] proposent un large panel de tests basés sur l'analyse du comportement d'une armature au niveau d'un noeud d'ossature. Toujours sur des essais d'arrachement, Bažant et Sener [1988] ont montré, en faisant varier la taille de spécimens de type "pull-out" géométriquement similaires, la présence d'effets d'échelle. Pour des essais de tirants à double traction, Goto [1971] ou bien encore Clément [1987] mettent en valeur les mécanismes de transfert des efforts de l'acier au béton aboutissant à la formation

de fissures transverses dans le béton (i.e. fissure perpendiculaire à l'armature).

Sur le plan de la modélisation, diverses approches et modèles ont également été développés durant les 30 dernières années considérant aussi bien des approches continues que discrètes. Eligehausen *et al.* [1983], en s'appuyant sur les résultats obtenus lors de leur campagne expérimentale, proposent un modèle semi-empirique. Cette approche simplifiée permet de décrire le comportement global de la liaison en exprimant l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction du glissement (loi adaptée pour des éléments joints) et est utilisé encore dans des règlements de calcul (e.g. CEB-FIB [1993]).

Clément [1987] montre en application de sa campagne expérimentale, la capacité d'un modèle continu d'endommagement (i.e. modèle d'endommagement de Mazars modifié pour tenir compte d'une contrainte résiduelle) à décrire la dégradation de l'interface acier-béton et l'enclenchement de fissures réparties. Cette approche considère une compatibilité cinématique entre les éléments finis acier et béton (i.e. continuité des déplacements à l'interface) et reste applicable pour des glissements relativement faibles entre l'armature et le béton qui l'entoure. Pijaudier-Cabot *et al.* [1991], en considérant une approche similaire et en introduisant une régularisation nonlocale intégrale, montrent la capacité de ce type d'approche à décrire la dégradation de l'interface sans dépendance au maillage et à reproduire les effets d'échelle observés par Bažant et Sener [1988].

Plus récemment, Dominguez [2005] ou Richard [2010] proposent d'introduire un modèle d'endommagement distinguant les mécanismes de dégradation en mode I et en mode II dans un élément fini dégénéré. Cette approche permet notamment de décrire la dégradation de la liaison et le glissement qui en découle.

5.1.2.1 Modélisation continue de la liaison acier-béton par un modèle d'endommagement

Dans le cadre des travaux réalisés au cours de cette thèse, l'objectif n'est pas de développer une nouvelle méthode permettant de décrire finement les mécanismes en jeu dans la liaison acier-béton mais plutôt de proposer une approche simple restant dans le cadre d'étude formulé jusqu'à présent. Le formalisme utilisé par Pijaudier-Cabot *et al.* [1991] est considéré pour modéliser la liaison acier-béton en intégrant au modèle d'endommagement le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte à la place du modèle original.

Description continue de l'interface

Trois zones peuvent se distinguer dans la liaison acier-béton pour lesquelles un modèle particulier doit être affecté (figure 5.17).

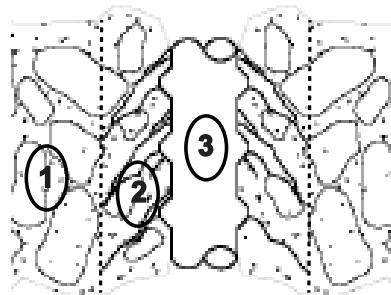


FIGURE 5.17: Définition de zones dans la liaison acier-béton.

La zone 1 correspond à la zone de béton éloignée de l'armature pour laquelle un modèle d'en-

dommagement nonlocal intégral basé sur l'état de contrainte est affecté avec une contrainte résiduelle très faible. Cette zone doit pouvoir s'endommager (i.e. enclenchement de fissure traversante dans une structure) sans reprendre d'effort à la rupture. Le comportement recherché pour cette zone doit être proche de celui identifié pour des structures seulement en béton dans le chapitre 4.

La zone 2 correspond à la zone de béton microfissuré à l'interface. Cette zone peut être condensée dans un élément d'épaisseur nulle (i.e. approche modèle joint) ou répartie dans une gaine d'épaisseur finie (i.e. approche continue). Clément [1987] montre l'équivalence entre ces 2 approches pour un modèle joint utilisant un critère de type Coulomb et le modèle d'endommagement de Mazars avec un jeu de paramètre permettant d'introduire une contrainte résiduelle due au frottement à l'interface. Cette seconde approche est considérée avec une méthode de régularisation nonlocale intégrale basée sur l'état de contrainte.

La zone 3 correspond à l'armature pour laquelle un modèle élasto-plastique est généralement considéré.

Modélisation continue de l'interface

Dans un premier temps, pour valider l'approche considérée pour décrire la zone d'interface, une étude analytique simple et un essai numérique en formulation locale du modèle d'endommagement sont menés.

La description de la liaison acier-béton avec le modèle d'endommagement utilisant la déformation équivalente de Mazars et les lois d'évolution correspondantes est analysée pour déterminer un paramètre du modèle permettant de contrôler le comportement de la zone de transition et l'espacement de fissure résultant (figure 5.18).

Cette analyse se place dans le cas où une fissure est déjà apparue en $x = 0$ et à partir de laquelle une transition d'effort se fait de la fissure (i.e. l'acier reprend tout l'effort) jusqu'à la section où la contrainte maximale dans le béton est atteinte (i.e. distance correspondant à la longueur de transfert) .

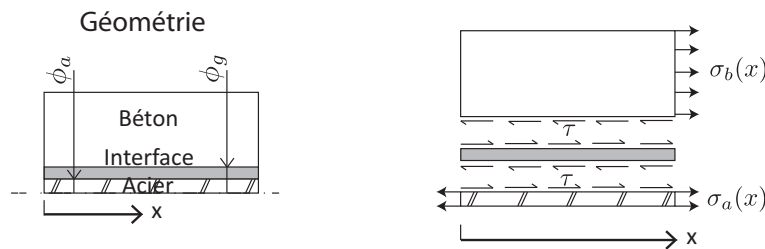


FIGURE 5.18: Equilibre de l'élément béton armé.

Certaines hypothèses sont prises pour permettre une description analytique simplifiée du problème :

- le béton dans l'interface est supposé être sollicité en cisaillement pur et la contrainte correspondante est prise constante le long de l'interface.
- la déformation de cisaillement est supposée élevée entraînant une contrainte de cisaillement égale à la contrainte résiduelle du modèle.
- le cisaillement est supposée constant sur la hauteur de la gaine.

La contrainte en cisaillement pur s'écrit :

$$\tau(x) = (1 - D(x)) \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{12}(x) \quad (5.2)$$

avec un endommagement $D(x)$ combinant les 2 variables D_t et D_c en :

$$D(x) = \alpha_t^\beta \cdot D_t(x) + \alpha_c^\beta \cdot D_c(x) \quad (5.3)$$

Pour du cisaillement pur les coefficients α_t et α_c deviennent :

$$\alpha_t = \left(\frac{1}{1 + \nu} \right) \quad (5.4)$$

$$\alpha_c = \left(\frac{\nu}{1 + \nu} \right)$$

La contrainte de cisaillement résiduelle correspond à la limite de la contrainte de cisaillement quand ε_{12} tend vers l'infini (i.e. les valeurs de D_t et D_c sont égales à 1). L'expression de la contrainte de cisaillement est obtenue en introduisant les expressions de $D(x)$ (Eq.5.3) et de α_t et α_c (Eq. 5.5) dans l'équation 5.2. En prenant $\beta = 1$, la contrainte de cisaillement résiduelle s'écrit :

$$\tau_{res} = \lim_{\varepsilon_{12} \rightarrow \infty} \tau(\varepsilon_{12}) = \frac{E \varepsilon_{D_0}}{(1 + \nu)^2} (-A_t - \nu A_c + 1 + \nu) \quad (5.5)$$

Pour des valeurs de β supérieures à 1, la contrainte résiduelle tend vers l'infini pour une déformation tendant vers l'infini. Ainsi ce paramètre permet de corriger le comportement trop fragile du modèle en cisaillement (Pijaudier-Cabot *et al.* [1991]), mais le domaine d'application du modèle reste à considérer pour des déformations de cisaillement faiblement élevées.

Après avoir enclenché l'endommagement dans la zone d'interface, l'équilibre de la zone béton représentée sur la figure 5.19 est écrit pour définir l'équation exprimant la distance à partir de laquelle la contrainte limite de traction f_t dans le béton est atteinte (i.e. distance à partir de laquelle une nouvelle fissure peut s'enclencher).

$$\pi \cdot \phi_{gaine} \int_0^{x_{max}} \tau_{res} dx - S_b \cdot f_t = 0 \quad (5.6)$$

avec S_b la section transversale de béton, ϕ_{gaine} le diamètre de la gaine. La longueur x_{max} peut se calculer par :

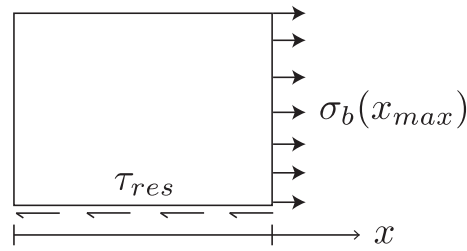
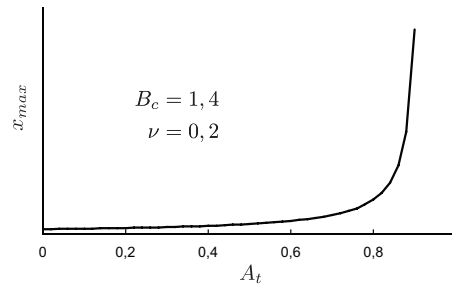


FIGURE 5.19: Equilibre de la zone de béton dans la liaison acier-béton.

$$x_{max} = \frac{S_b}{\pi \cdot \phi_{gain}} \frac{(1 + \nu)^2}{-A_t - \nu A_c + 1 + \nu} \quad (5.7)$$

Dans l'expression de x_{max} apparaît le paramètre A_t qui permet de piloter la contrainte résiduelle en traction simple. Dans une approche similaire, le paramètre A_t peut être ajusté dans la gaine pour définir la valeur de la contrainte résiduelle en cisaillement avec une variation de $A_t = 0$ (i.e contrainte résiduelle élevée amenant une distance entre fissures faible) à $A_t = 1 + \nu - \nu \cdot A_c$ (i.e contrainte résiduelle nulle amenant une distance entre fissures infinie) (figure 5.20).

FIGURE 5.20: Evolution de la distance x_{max} en fonction du paramètre A_t .

Cette approche analytique reste simplifiée dans le sens où la contrainte de cisaillement n'est en réalité pas homogène le long de l'interface et que pour le calcul, une valeur de β supérieure à 1 sera choisie. Cependant, elle permet, à travers l'équation 5.7, d'illustrer l'influence des paramètres A_t , A_c ou bien encore la taille de la gaine ϕ_{gain} sur le comportement de la liaison acier-béton et plus particulièrement ϕ_{gain} sur la distance entre fissures. Parmi ces différents paramètres, A_t est retenu pour ajuster le comportement de la zone d'interface.

5.1.2.2 Analyse 3D d'un essai de tirant à double traction

L'étude analytique précédente a permis d'analyser la représentation de la liaison acier-béton par un modèle d'endommagement et d'identifier des paramètres du modèle influant sur le comportement de cette liaison. L'objectif de l'étude qui suit est de valider numériquement l'approche continue, avec un modèle d'endommagement nonlocal pour décrire l'évolution de la dégradation de la liaison. La liaison acier-béton est décrite au travers d'une gaine définie autour de l'acier, d'épaisseur égale au diamètre de la barre et avec, un modèle d'endommagement utilisant des paramètres matériau modifiés. En particulier, l'étude précédente a montré l'influence du paramètre A_t sur le comportement de la gaine. Dans la suite de ce paragraphe,

pour différencier les caractéristiques relatives à la gaine et au béton autour, le paramètre A_t est noté A_{t_g} pour la gaine.

Pour l'étude considérée, un essai de tirant à double traction réalisé par Clément [1987] est modélisé. Des éprouvettes de béton de forme prismatique de 10 cm de hauteur et profondeur et 68 cm de long sont traversées longitudinalement par une armature en acier haute adhérence de 1 cm de diamètre avec pour la simulation numérique seulement 1/8 du tirant qui est modélisé en 3D en prenant en compte les différentes symétries. La condition de symétrie dans la direction longitudinale permet de réduire le temps de calcul, mais elle force également la symétrie du faciès d'endommagement. Expérimentalement, l'aléa matériau empêche l'enclenchement de la première fissure transversale sur les 2 côtés simultanément.

Les paramètres utilisés pour le modèle d'endommagement en formulation locale sont les suivants : $E = 30\,000$ MPa ; $\nu = 0,2$; $\varepsilon_{D_0} = 9.10^{-5}$; $A_c = 1,4$; $B_c = 1850$; $A_t = 0,99$ (en dehors de la gaine) ; A_{t_g} (dans la gaine) ; $B_t = 20\,000$ et $\beta = 1,06$. La limite élastique en contrainte des aciers n'est pas atteinte pendant l'essai ainsi un modèle élastique est suffisant pour la modélisation avec les paramètres suivants : $E = 210\,000$ MPa ; $\nu = 0,3$.

Le déplacement longitudinal est imposé à une des extrémités de la barre d'acier et bloqué à l'autre extrémité sur toute la face (i.e. béton, acier et gaine) par conditions de symétrie. De plus les points du spécimen appartenant aux autres plans de symétrie ont la composante de leur déplacement suivant la normale à ces plans bloquée. Le maillage est composé d'éléments hexaédriques à interpolation linéaire.

L'essai est arrêté à l'enclenchement de la première fissure, avec un comportement global force-déplacement représenté sur la figure 5.21 pour $A_{t_g} = 0,6$ dans la gaine et une épaisseur de gaine égale au diamètre de l'armature.

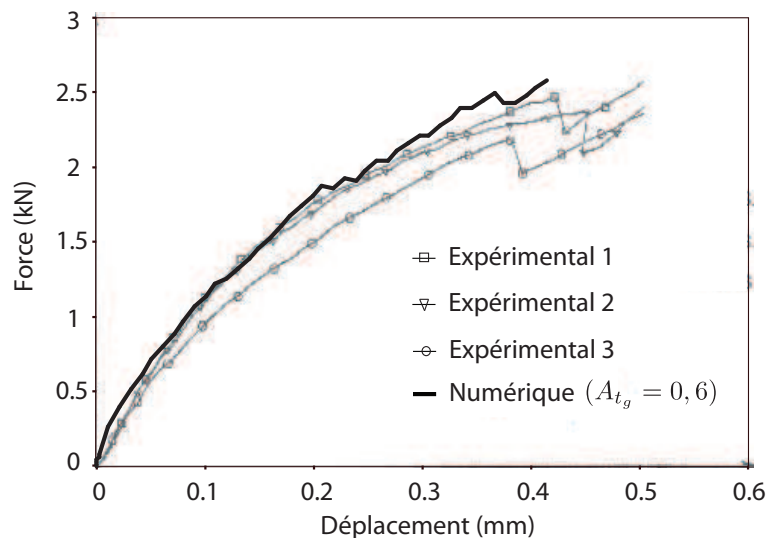


FIGURE 5.21: Evolution de la force en fonction de l'allongement de la barre pour $A_{t_g} = 0,6$.

Comparé aux valeurs expérimentales, le comportement global est bien reproduit avec la description continue adoptée. Sur la figure 5.22, le mécanisme de dégradation progressive de la gaine est observé avec une diminution progressive de la rigidité du tirant, avant l'enclenchement d'une fissure transversale correspondant à une chute de la force (numériquement, l'évolution est donnée jusqu'au pic).

Sur la figure 5.23, une analyse du paramètre A_{t_g} du modèle d'endommagement en formulation locale est effectuée afin d'observer son influence. Quatre valeurs différentes sont prises dans la gaine pour les tests : $A_{t_g} = 0,7$; $0,6$; $0,5$ et $0,4$.

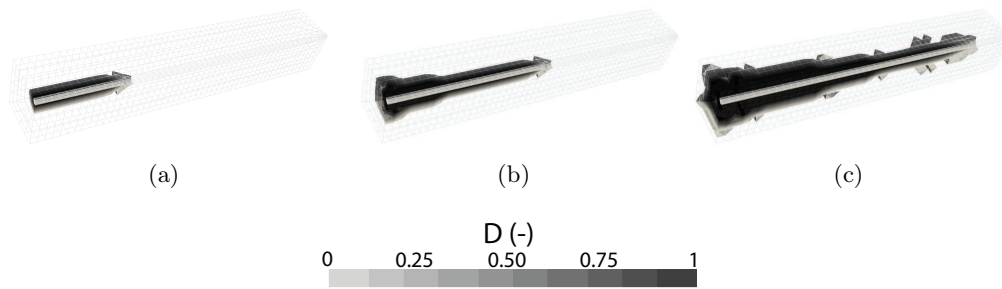


FIGURE 5.22: Dégradation progressive du béton dans l'interface à différents niveaux de déplacement imposé : 0,05 mm ((a)) ; 0,16 mm ((b)) et 0,42 mm ((c)).

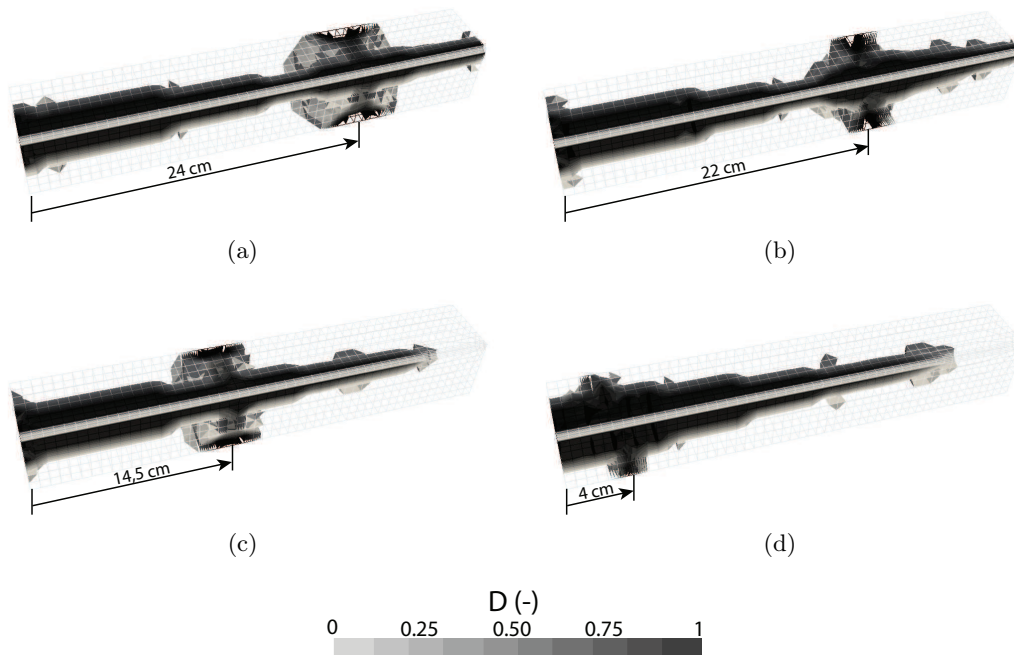


FIGURE 5.23: Influence du paramètre A_t sur le lieu d'apparition de la fissure : $A_t = 0,7$ ((a)) ; $A_t = 0,6$ ((b)) ; $A_t = 0,5$ ((c)) ; et, $A_t = 0,4$ ((d)).

Pour une valeur de A_{t_g} plus faible, la contrainte résiduelle en cisaillement, correspondant à la contrainte de frottement lors du glissement de l'armature et de la gaine de béton dans le reste du béton, est plus forte entraînant une distance entre la condition aux limites imposée sur l'armature (équivalent à une fissure déjà présente où seule l'armature reprend des contraintes) et la nouvelle fissure enclenchée plus faible. Une valeur de A_{t_g} de 0,6 permet de retrouver une distance d'enclenchement de fissure par rapport au bord de l'ordre de grandeur de celle identifiée expérimentalement : 22 cm (numérique, $A_{t_g} = 0,6$) ; 24,2 cm (essai 1) - 23,1 cm (essai 2) et 21,4 cm (essai 3).

L'analyse est maintenant effectuée en considérant une méthode de régularisation associée au modèle d'endommagement : méthode nonlocale intégrale originale et nonlocale intégrale basée sur l'état de contrainte. Les paramètres sont semblables à ceux utilisés précédemment avec $A_{t_g} = 0,8$ et la longueur caractéristique interne des modèles nonlocaux est prise égale 3 cm (3 fois la taille du plus gros granulat). Afin de conserver le même ordre de grandeur de la distance au bord de la première fissure, la valeur de A_{t_g} est prise plus élevée que pour

le modélisation locale car la taille de la zone endommagée autour de l'armature étant plus grande, la section de béton reprenant les contraintes normales diminue. La figure 5.24 donne le comportement global obtenu pour les deux méthodes nonlocales.

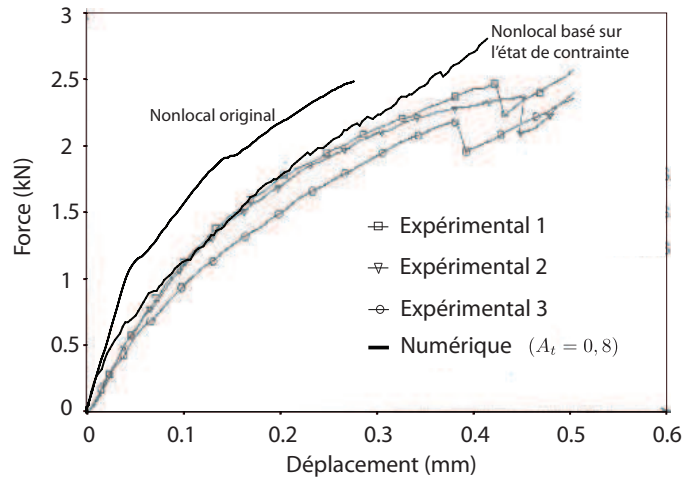


FIGURE 5.24: Evolution de la force en fonction de l'allongement de la barre avec un modèle d'endommagement nonlocal intégral (nonlocal original et nonlocal basé sur l'état de contrainte).

L'introduction du modèle nonlocal a tendance à retarder la dégradation de la structure comparée à la formulation locale en repoussant l'enclenchement de l'endommagement. En effet, la valeur nonlocale de la variable interne de points dans les zones les plus sollicitées est plus faible que la valeur locale car la moyenne nonlocale vient capter des valeurs faibles des zones moins sollicitées.

La figure 5.25 donne le profil d'endommagement à l'enclenchement de la première fissure pour la méthode de régularisation nonlocale originale.

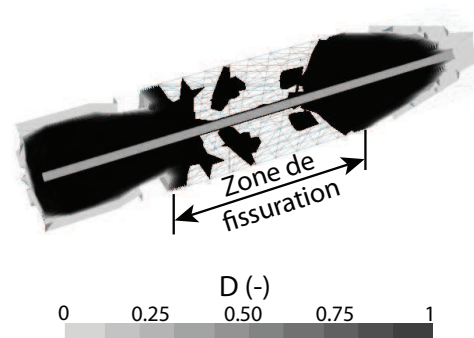


FIGURE 5.25: Faciès d'endommagement à la première fissure pour le modèle d'endommagement nonlocal original.

Comme Pijaudier-Cabot *et al.* [1991] le montrent sur des essais de pullout, le modèle d'endommagement nonlocal intégral original permet d'obtenir une objectivité des résultats pour des modélisations de structure en béton armé et permet également par l'introduction d'une longueur interne de reproduire les effets d'échelle. En revanche, la régularisation entraîne un étalement de l'endommagement autour de l'armature par redistribution des déformations de cisaillement élevées au niveau de l'interface comme cela a été relevé précédemment pour la modélisation des tirants armés testés par Mivelaz [1996] et comme cela est également observé

sur ce test. En effet, Cet aspect là est problématique lors de la détermination de zones endommagées distinctes qui peuvent être utilisées pour effectuer une analyse de la fissuration. Par exemple, pour des structures armées avec des enrobages ou des distances entre armatures de l'ordre de grandeur de la longueur interne du modèle, il devient difficile d'identifier des fissures localisées. On revient ici à la difficulté du modèle nonlocal original à réellement localiser les déformations ainsi qu'à la problématique des interactions persistantes au travers d'une fissure ouverte avec le modèle nonlocal original.

La figure 5.26 donne le profil d'endommagement à l'enclenchement de la première fissure pour la méthode de régularisation nonlocale basée sur l'état de contrainte.

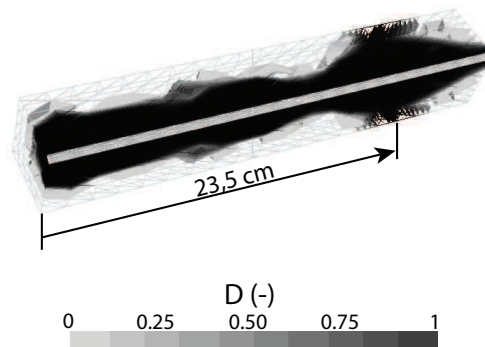


FIGURE 5.26: Faciès d'endommagement à la première fissure pour le modèle d'endommagement nonlocal basé sur l'état de contrainte.

Avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte, une gaine endommagée apparaît le long de l'armature ainsi qu'une zone endommagée traversante qui est distincte comparée au modèle nonlocal original. Ainsi, l'évolution des interactions nonlocales permet d'éviter la diffusion de l'endommagement qui peut apparaître le long de l'interface. La contrainte résiduelle observée dans la gaine continue à maintenir des interactions nonlocales avec les zones voisines, ce qui explique l'épaisseur plus importante de la zone endommagée autour de l'armature. En revanche, les points en dehors de la gaine sont sans contrainte résiduelle et lorsqu'ils sont complètement endommagés, ils n'influent plus sur leur voisinage. Cet aspect là évite la diffusion de l'endommagement jusqu'aux bords du tirant comme cela peut être le cas avec le modèle nonlocal original. La distance d'enclenchement de fissure observée, de l'ordre de 23,5 cm, est proche de celle obtenue expérimentalement.

L'utilisation d'un modèle d'endommagement régularisé permet de décrire de manière simple la liaison acier-béton en demeurant dans un cadre continu. Le comportement global de la liaison peut être contrôlé par les paramètres du modèle associé à la gaine autour de l'acier avec notamment une corrélation entre la contrainte résiduelle en cisaillement de cette zone et l'espacement de fissure. Cette approche a l'avantage de garder un formalisme similaire aux zones en dehors de l'interface et évite ainsi d'introduire des éléments spécifiques (e.g. éléments joints). L'utilisation du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte limite la diffusion de l'endommagement créé à l'interface comparé au modèle nonlocal original, permettant ainsi d'obtenir une zone endommagée distincte qui peut par la suite s'identifier à une fissure traversante.

Néanmoins, cette approche s'applique plutôt pour des déplacements relatifs entre l'acier et le béton faibles et des améliorations peuvent être envisagées pour suivre le comportement de la liaison pour des niveaux de sollicitation élevés. Premièrement, l'hypothèse des petites perturbations atteint ses limites pour des glissements importants et il devient nécessaire de travailler

dans la configuration déformée. Deuxièmement, pour des niveaux de cisaillement important, un remaillage peut être envisagé pour éviter d'avoir des éléments finis trop distordus. Enfin, lorsque le glissement s'effectue sur une surface discontinue (i.e. rupture complète de l'interface) la mécanique des milieux continus ne devient plus adaptée pour décrire le problème mécanique. De plus, les bases de l'approche ont été exposées mais une étude plus approfondie doit être encore menée pour permettre une identification directe des paramètres modèle à introduire dans la gaine en fonction de la qualité du béton, de l'armature...

5.2 Enrichissement d'une méthode simplifiée pour l'estimation de la fissuration

Après avoir montré la capacité d'un modèle d'endommagement nonlocal basé sur l'état de contrainte à modéliser l'évolution de l'endommagement dans une structure en béton armé, une méthodologie est proposée à partir de cette approche pour enrichir un modèle simplifié béton armé afin d'obtenir une information sur la fissuration. Ce développement répond à une problématique rencontrée lorsqu'une analyse 3D d'une structure béton armé est menée, qui est le temps de calcul. En effet, l'introduction d'éléments 3D pour modéliser notamment les armatures engendre une augmentation considérable du nombre total d'éléments dans la structure ce qui entraîne une forte augmentation du temps de calcul. La puissance des calculateurs reste encore une barrière pour des modélisations 3D complètes et il est donc utile et parfois nécessaire d'avoir des approches simplifiées (en terme de description d'un problème) pour effectuer une analyse du comportement de la structure.

De nombreuses structures de génie civil montrent un élancement important et peuvent ainsi être modélisées de manière simplifiée en considérant les hypothèses de la théorie des poutres. Ce type de modèle permet de réduire significativement le nombre d'inconnues du problème et est utilisé par la suite.

Dans un premier temps, les points principaux de la modélisation par éléments poutre multifibre sont rappelés. Dans un second temps, une méthode d'enrichissement est exposée permettant à partir d'un calcul multifibre d'obtenir une information sur la fissuration. Enfin, cette méthode est mise en application sur un essai de flexion 4 points sur une poutre en béton armé et les résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux disponibles.

5.2.1 Élément poutre Timoshenko multifibre

L'élément poutre Timoshenko multifibre développé par Pegon [1994]; Guedes *et al.* [1994] s'appuie sur une cinématique de poutre Timoshenko avec une description des nonlinéarités matériau au niveau de la section. Pour des considérations de coût de calcul en nonlinéaire, Pegon [1994] propose un élément poutre Timoshenko à interpolation linéaire. La figure 5.28 décrit le fonctionnement de l'élément multifibre en décomposant en 2 échelles : l'élément poutre et les éléments au niveau de la section (fibres). Les conventions utilisées sont celles couramment prises pour la théorie des poutres avec x l'axe de la poutre et O le centre élastique de la poutre.

Les termes globaux sont définis au niveau de l'élément poutre, avec pour la cinématique les déplacements et rotations exprimés aux noeuds (U_i et θ_i avec $i = x, y, z$) et les déformations généralisées exprimées au point de Gauss de la poutre ($\varepsilon_x, \beta_y, \beta_z, \phi_i$ avec $i = x, y, z$). Ces

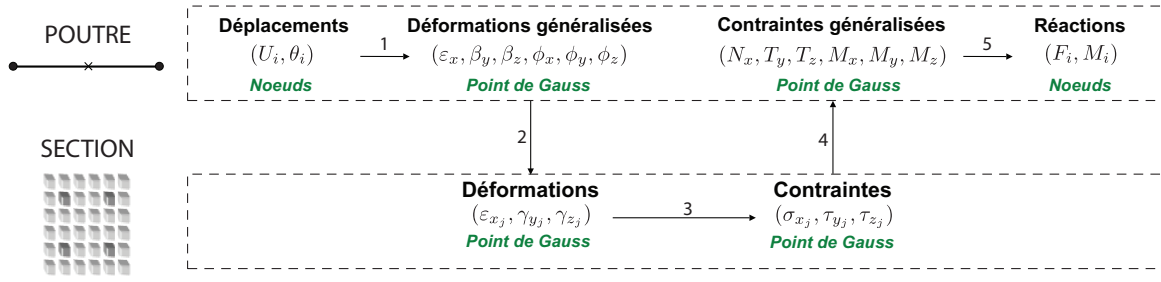


FIGURE 5.27: Principe de fonctionnement de l'élément poutre multifibre.

grandeurs cinématiques sont reliées entre elles par les formules suivantes obtenues à partir de la théorie des poutres (Etape 1) :

$$\varepsilon_x(x) = \frac{dU_x(x)}{dx} \quad (5.8)$$

$$\beta_y(x) = -\theta_z(x) + \frac{dU_y(x)}{dx} \quad (5.9)$$

$$\beta_z(x) = \theta_y(x) - \frac{dU_z(x)}{dx} \quad (5.10)$$

$$\phi_i(x) = \frac{d\theta_i(x)}{dx} \quad (5.11)$$

A l'échelle de la section, les déformations généralisées sont au niveau de l'axe de la poutre, qui est défini au préalable et de coordonnées $(x, 0, 0)$. Pour obtenir les déformations en chaque fibre j de la section, de coordonnées (x, y_j, z_j) , l'hypothèse de section plane est utilisée (Etape 2) :

$$\varepsilon_{x_j}(x) = \varepsilon_x(x) - y_j \cdot \phi_z(x) + z_j \cdot \phi_y(x) \quad (5.12)$$

$$\gamma_{y_j}(x) = \beta_y(x) - z_j \cdot \phi_x(x) \quad (5.13)$$

$$\gamma_{z_j}(x) = \beta_z(x) + y_j \cdot \phi_x(x) \quad (5.14)$$

Les lois de comportement des matériaux sont introduites au niveau de la fibre en reliant les déformations aux contraintes. Pour ce type d'approche, un modèle uniaxial est généralement considéré entre ε_{x_j} à σ_{x_j} (e.g. modèle d'endommagement, de plasticité...), les contraintes de cisaillement étant simplement estimées de manière élastique (Etape 3) :

$$\sigma_{x_j}(x) = f(\varepsilon_{x_j}(x), \dots) \quad (5.15)$$

$$\tau_{y_j}(x) = \alpha_y \cdot G \cdot \gamma_{y_j}(x) \quad (5.16)$$

$$\tau_{z_j}(x) = \alpha_z \cdot G \cdot \gamma_{z_j}(x) \quad (5.17)$$

avec α_i des facteurs correctifs pour prendre en compte la répartition non uniforme dans la section de la contrainte de cisaillement ($\alpha_i = 5/6$ pour des sections rectangulaires). L'intégration des contraintes sur la section permet d'obtenir les efforts internes au niveau du point de Gauss de la poutre (Etape 4) :

$$N_x(x) = \int_{S(x)} \sigma_x(x) dS \quad (5.18)$$

$$T_y(x) = \int_{S(x)} \tau_y(x) dS \quad (5.19)$$

$$T_z(x) = \int_{S(x)} \tau_z(x) dS \quad (5.20)$$

$$M_x(x) = \int_{S(x)} y\tau_z(x) - z\tau_y(x) dS \quad (5.21)$$

$$M_y(x) = \int_{S(x)} z\sigma_x(x) dS \quad (5.22)$$

$$M_z(x) = - \int_{S(x)} y\sigma_x(x) dS \quad (5.23)$$

En utilisant les fonctions d'interpolation, les efforts aux noeuds sont alors calculés (Etape 5). L'élément poutre multifibre permet ainsi d'obtenir des informations globales sur le comportement de la structure (e.g. forces, déplacements...) mais également d'avoir une estimation de l'état local au travers de variables associées aux modèles matériau au niveau de la section (e.g. endommagement, déformation plastique...). Cette approche enrichie par la suite pour diverses applications (e.g. analyse sismique (Kotronis *et al.* [2005b]), prise en compte de la torsion et du cisaillement (Mazars *et al.* [2006]...)) a montré sa pertinence et son efficacité (voir exemple en annexeA un exemple d'analyse sismique utilisant ce type d'élément).

Cependant, comme l'illustre la figure 5.28, ces informations restent qualitatives au niveau local, avec par exemple une déformation constante le long d'une fibre d'un élément poutre pour représenter le cas réel d'une zone fissurée avec une déformation localisée. La problématique de la description d'une zone de localisation par des éléments finis est vraie quel que soit le type d'élément choisi (volumique, poutre...) mais est encore plus vérifiée avec des éléments poutre pour lesquels une discrétisation plus grossière est généralement considérée, comparée à des éléments volumique. En effet, les hypothèses cinématiques de poutre sont valables pour décrire le comportement d'un élément de poutre fissurée en plaçant les bornes de l'élément loin de la fissure, mais ne sont plus adaptées pour décrire la zone de fissuration (e.g. la section n'est plus plane au niveau d'une section avec une fissure sur une partie de la hauteur de la poutre).

Ainsi, l'élément multifibre permet d'avoir en moyenne la cinématique de la structure. En revanche, le profil localisé du champ de déformation, qui peut être utilisé par la suite pour estimer la fissuration ou l'apparition de la plasticité des aciers, n'est pas décrit.

Deux solutions d'enrichissement, représentées schématiquement sur la figure 5.29 et décrites par la suite plus en détail, peuvent être considérées pour améliorer la description de la structure :

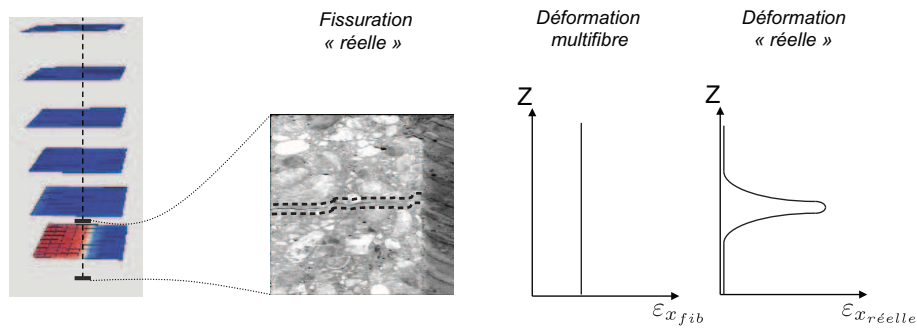


FIGURE 5.28: Description de la localisation des déformations dans une fibre.

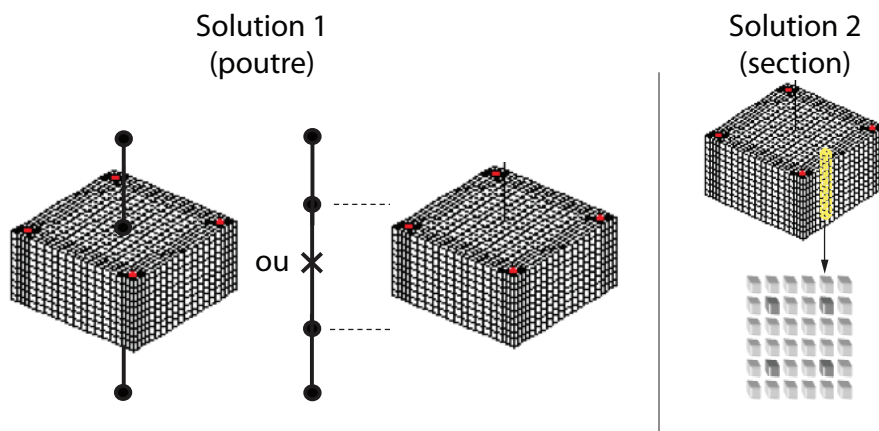


FIGURE 5.29: Différentes approches pour l'enrichissement de la modélisation.

- *Solution 1* : Pour les zones où des nonlinéarités sont susceptibles d'apparaître et pour lesquelles une information détaillée est nécessaire, les éléments de poutre peuvent être directement remplacés par un maillage volumique complet. Il est alors nécessaire d'introduire des conditions aux bornes des 2 domaines (i.e. éléments poutre et éléments volumiques) pour effectuer le couplage. Une approche simple peut être d'imposer la cinématique de poutre (section plane) aux bornes de la zone 3D. Sinon, des approches plus complexes considèrent par exemple l'égalité des travaux internes aux bornes connectées des 2 domaines (e.g. Monaghan *et al.* [2003]). Cette approche égalise le travail engendré par les forces et moments agissant sur le noeud de la poutre relié au bloc 3D et le travail engendré par les contraintes à la surface du bloc 3D reliée à la poutre.

A un niveau similaire, une approche à 2 échelles (globale-locale) peut être considérée en utilisant un élément poutre à l'échelle globale et des éléments 3D à l'échelle locale, se rapprochant ainsi des méthodes proposées par Haidar *et al.* [2003]; Mao et Sun [1991] pour des problèmes 2D. Dans un schéma itératif, les déplacements observés aux bornes de l'élément poutre dans une première analyse globale élastique sont appliqués à un bloc 3D béton armé discrétisé finement avec des modèles matériau nonlinéaires. Les efforts résultants sont alors réinjectés comme efforts extérieurs aux bornes de l'élément poutre, en respectant les fonctions d'interpolation, et l'équilibre de la structure complète est recalculé avec ces nouveaux efforts appliqués. Un schéma itératif doit être mis en place entre l'équilibre du bloc 3D et l'équilibre de la structure avec la correction en effort afin d'atteindre une solution convergée. Ce type de modélisation a l'avantage de fournir une information locale riche. En revanche, elle ne résout pas complètement le problème du temps de calcul dans le sens où certaines

zones de la structure sont toujours décrites de manière fine, avec un nombre d'éléments relativement important. De plus, pour ces méthodes, l'enrichissement se faisant au niveau de la poutre, le potentiel de l'élément multifibre n'est plus utilisé à partir du moment où l'élément présentant des nonlinéarités est remplacé par un bloc 3D. L'augmentation du temps de calcul pour cette solution dépend du ratio entre le nombre d'éléments élastiques (représentés par des éléments poutre) et le nombre d'éléments endommagés (représentés par un bloc 3D). Sachant que dans les structures en béton armé, les armatures redistribuent l'endommagement sur une proportion élevée du volume de la structure, cette solution est coûteuse pour les applications considérées.

- *Solution 2* : Le fonctionnement général de l'élément poutre multifibre est conservé et l'enrichissement est introduit au niveau de la fibre et plus particulièrement au niveau des lois matériau. Ces dernières peuvent être identifiées à partir de calculs 3D complets et sont introduites, au niveau du calcul, pour prendre en compte la présence de zones endommagées localisées et servent en post-traitement pour estimer la fissuration. Ainsi, cette solution remplace la loi de comportement matériau introduite dans la fibre par une loi macroscopique prenant en compte l'hétérogénéité des déformations le long de la fibre. Ce type de modélisation en conservant le cadre général de l'élément multifibre a l'avantage de maintenir un temps de calcul faible comparé à une analyse 3D complète. Néanmoins, ce point est aussi une limite dans le sens où les hypothèses du modèle de base sont maintenues (cinématique de poutre, concentration de contrainte non prise en compte...) et le cisaillement reste mal estimé dans le régime nonlinéaire. Malgré les défauts cités, le temps de calcul est privilégié et cette seconde approche est choisie pour introduire un enrichissement à l'élément poutre multifibre.

5.2.2 Enrichissement de l'élément poutre Timoshenko multifibre pour la détermination de la fissuration

L'objectif de cet enrichissement est d'obtenir une estimation de la fissuration dans un élément poutre multifibre. Cette estimation est obtenue en définissant un outil de passage d'une information continue dans l'élément multifibre (e.g. déformation, endommagement...) à une information discrète (e.g. ouverture de fissure).

Pour une modélisation 2D, Mazars et Pijaudier-Cabot [1996] proposent une méthode permettant le passage de la mécanique de l'endommagement (approche continue) à la mécanique de la rupture (approche discrète) et inversement en utilisant une équivalence en énergie entre une zone endommagée et une fissure. Dans l'approche présentée ici, la notion d'équivalence énergétique est reprise pour la transition continu-discret en considérant une égalité d'énergie dissipée entre une modélisation complète 3D et une modélisation simplifiée multifibre.

Le principe de la méthode décrite par la suite peut se résumer par les 3 points suivants :

- Identification d'une relation $[U] = g(G_f)$ sur une fibre traversant un modèle 3D.
- Calibration de l'énergie dissipée le long de la fibre dans une approche multifibre.
- Estimation de l'ouverture de fissure dans une fibre de la poutre multifibre par équivalence énergétique.

Dans un premier temps, une analyse 3D complète d'une structure en béton armé simple est menée afin d'identifier pour une fibre traversant une zone de localisation l'évolution de l'ouverture de fissure en fonction de l'énergie dissipée (i.e. l'évolution au cours du chargement de la zone de localisation). Un des inconvénients de cette approche, pour cette phase, peut venir du fait que plusieurs modélisations 3D sont nécessaires pour identifier des évolutions

d'ouverture de fissure en fonction de l'énergie dissipée, pour différents types de configurations (propriétés matériau, enrobage, variation des aciers, des sollicitations...). Néanmoins, après avoir établi un "catalogue" d'évolutions en fonction de divers critères, cette phase n'est plus nécessaire. Cette étude exhaustive est en dehors du cadre de ces travaux et seule la démarche sera exposée ici pour un cas spécifique.

Afin d'identifier une relation entre l'énergie dissipée et l'ouverture de fissure d'une zone de fissuration, une des zones de localisation obtenue numériquement est analysée en considérant certaines hypothèses :

- la fissure s'ouvre en mode I et seule la déformation longitudinale est considérée pour calculer l'ouverture de fissure.
- l'évolution "temporelle" de la zone de localisation est similaire quelque soit la fibre prise lorsqu'on se place à une distance suffisamment grande de l'armature, permettant ainsi d'identifier une loi pour toutes les fibres béton à partir d'une seule fibre analysée sur le bloc 3D.

L'expression générale de la dissipation intrinsèque du modèle d'endommagement $d\phi$ s'exprime :

$$d\phi = -YdD \quad (5.24)$$

avec D l'endommagement et Y le taux de restitution de densité d'énergie élastique :

$$Y = -\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad (5.25)$$

L'évolution complète de la dissipation d'énergie dans le milieu Ω pour un endommagement allant de 0 à $D(\mathbf{x})$ pour un point en \mathbf{x} est alors égale à :

$$\Phi = \int_{\Omega} \int_0^{D(\mathbf{x})} -YdDd\mathbf{x} \quad (5.26)$$

L'objectif est alors de calculer l'énergie dissipée par le développement d'une zone de localisation dans une fibre béton. Pour l'analyse 3D, la fibre choisie pour le post-traitement est définie telle que celle-ci traverse complètement toute une zone de localisation et qu'elle soit perpendiculaire à cette zone (fissure en mode I considérée). La position de la fibre vis-à-vis de la section est prise telle que l'endommagement à la fin de l'essai est atteint une valeur de 1 (i.e. la zone de fissuration a traversée la zone étudiée). De plus, le point choisi est pris suffisamment éloigné des armatures pour ne pas prendre en compte l'endommagement dû au cisaillement à l'interface. La déformation est alors principalement orientée le long de la fibre et pour le post-traitement, elle est supposée uniaxiale, suivant l'axe x , ε_x .

A chaque pas de calcul t_i , une projection du champ de déformation longitudinale est effectuée sur une fibre, notée *fibre3D*, traversant entièrement la zone de localisation, afin d'identifier une ouverture de fissure $[U](t_j)$ avec la méthode de post-traitement présentée à la partie 4.3.1.3, ainsi qu'une projection du champ d'endommagement D , afin de déterminer l'énergie dissipée $G_{f_{3D}}(t_j)$ par la zone de localisation le long de la fibre en utilisant (voir la figure 5.30 pour le principe du post-traitement) :

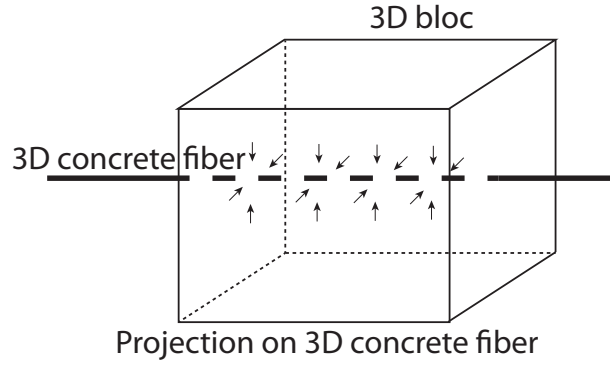


FIGURE 5.30: Schéma de principe du post-traitement du calcul 3D.

$$G_{f_{3D}}(t_j) = \int_{fibre_{3D}} \left(\int_0^{D(x,t_j)} \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 dD \right) dx \quad (5.27)$$

$$[U](t_j) = \frac{(\varepsilon_x(t_j) * \phi)(x_0) \int_{barre} \phi(x_0 - x) dx}{\phi(0)} \quad (5.28)$$

Numériquement, l'énergie totale est calculée de manière incrémentale, en additionnant au cours du chargement les incréments d'énergie dissipée par endommagement.

$$G_{f_{3D}}(t_j) = G_{f_{3D}}(t_{j-1}) + \sum_{i=1}^{nelfib} \frac{1}{2} E \varepsilon_{x_i}^2(t_j) \Delta D_i(t_j) \Delta x_i \quad (5.29)$$

avec $nelfib$, le nombre d'éléments le long de la fibre 3D. Dans cette méthode, le modèle non-local basé sur l'état de contrainte présente un avantage pour la méthode d'enrichissement proposée en ne montrant pas d'étalement de la zone d'endommagement à la rupture (i.e. l'énergie dissipée n'évolue plus à la rupture avec le modèle basé sur l'état de contrainte car le profil d'endommagement reste fixe). Ainsi, à la fin du calcul, la quantité totale d'énergie dissipée par la zone fissurée est obtenue.

Ces informations doivent être retranscrites dans la modélisation multifibre. En considérant certaines hypothèses simplificatrices, le calcul multifibre est effectué en introduisant les paramètres identifiés précédemment :

- chaque élément poutre ne comporte qu'une seule fissure (i.e. il est donc nécessaire au préalable d'identifier l'espacement potentiel entre fissures) et par conséquent, l'énergie dissipée le long d'une fibre traversant perpendiculairement la zone de localisation dans la modélisation 3D complète, correspond à l'énergie que doit dissiper uniaxialement une fibre en s'endommagement complètement dans le modèle poutre multifibre (i.e. produit de l'aire sous la courbe de la loi uniaxiale $\sigma_x(\varepsilon_x)$ par la longueur de la fibre).
- la dissipation d'énergie est supposée suivre la même évolution que le modèle d'endommagement utilisé dans la modélisation 3D complète (i.e. les lois d'évolution du modèle d'endommagement sont conservées pour les fibres béton du modèle multifibre).

De plus, comme l'énergie dissipée est finie, lorsque celle-ci a été consommée dans la fibre, l'ouverture de fissure est considérée comme étant égale à l'allongement de la fibre. Ce choix correspond au résultat observé pour la barre 1D avec l'ouverture de fissure qui tend vers le déplacement aux conditions limites.

Pour illustrer le calcul, la loi d'évolution pour l'endommagement proposée par Peerlings (Eq. 2.19) est utilisée pour décrire l'endommagement en traction. Cette loi est dérivée pour obtenir une expression de $G_{f_{fibre}}(t_j)$:

$$dD = dD_t = \varepsilon_{D_0} \frac{\exp(-B_{t_f}(\varepsilon - \varepsilon_{D_0})) + B_{t_f}\varepsilon \exp(-B_{t_f}(\varepsilon - \varepsilon_{D_0}))}{\varepsilon^2} d\varepsilon \quad (5.30)$$

Cette expression découle de la dérivée de la loi d'évolution de l'endommagement en traction sans contrainte résiduelle ($A_t = 1$). Pour le multifibre, la déformation équivalente $\varepsilon_{eq}(x)$ est directement égale à la déformation uniaxiale $\varepsilon_x(x)$. L'équation 5.27 se simplifie donc et peut s'intégrer facilement avec une variation de la déformation de ε_{D_0} ($D = 0$) à ε_x ($D(x)$) du seuil de déformation pour la première fissuration jusqu'à une déformation correspondant à l'endommagement maximal atteint au point considéré. Enfin, les éléments de poutre étant à interpolation linéaire, la fibre est représentée par un seul point de Gauss. Par conséquent, la déformation est considérée comme homogène le long d'une fibre d'un élément poutre multifibre ($\varepsilon_x(x) = \varepsilon_{x_f}$) et l'énergie dissipée s'écrit :

$$G_{f_{fibre}}(t_j) = l_{fibre} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2 \exp(-B_{t_f}(\varepsilon_{x_f} - \varepsilon_{D_0}))}{B_{t_f}} + \varepsilon_{D_0} - \varepsilon_{x_f} \exp(-B_{t_f}(\varepsilon_{x_f} - \varepsilon_{D_0})) \right) \quad (5.31)$$

Dans une approche semblable à la régularisation de type Hillerborg *et al.* [1976], la partie adoucissante de la loi d'évolution de l'endommagement pour une fibre béton d'un élément poutre est ajustée par l'intermédiaire du paramètre B_{t_f} , pour dissiper une énergie égale à l'énergie identifiée sur le calcul 3D complet pour chaque fibre béton, quelle que soit sa longueur (i.e. $G_{f_{3D}} = G_{f_{fibre}}$) :

$$B_{t_{fib}} = \frac{l_{fibre} f_t}{G_{f_{3D}} - \frac{1}{2} l_{fibre} f_t \varepsilon_{D_0}} \quad (5.32)$$

En post-traitement, une estimation de la fissuration peut alors être obtenue pour chaque pas de calcul par l'intermédiaire de la relation $[U](G_{f_{3D}})$ (Eq. 5.27 et 5.28) en identifiant une ouverture de fissure pour une énergie dissipée dans la fibre de l'élément poutre multifibre considéré.

Cette approche permet une estimation de la fissuration avec un modèle simplifié. Néanmoins, certaines limites apparaissent et pour lesquelles des développements supplémentaires peuvent être mis en perspective :

- l'hypothèse d'une seule fissure (ou d'un nombre déterminé de fissures) par élément poutre multifibre implique la connaissance au préalable de l'espacement de fissure.

- l'évolution de $G_{f_{fibre}}$ étant continument croissante, les décharges et les diminutions d'ouverture de fissure correspondantes ne sont pas observées.
- l'évolution de $G_{f_{fibre}}$ suit la même forme de loi d'évolution de l'endommagement que celle utilisée pour le 3D volumique.
- le type de sollicitation appliquée doit être semblable entre le modèle 3D et l'élément poutre multifibre afin de représenter une dissipation d'énergie correspondant au même type de fissuration entre les 2 approches.

Bien qu'illustrée sur une loi de comportement de type Peerlings (Eq. 2.19), cette approche peut être déclinée sur n'importe quelle loi d'endommagement.

5.2.3 Analyse d'une poutre en béton armé en flexion 4 points par une méthode simplifiée

Identification d'une relation entre l'ouverture de fissure et l'énergie dissipée

La structure 3D considérée pour identifier une évolution de l'ouverture de fissure en fonction de l'énergie dissipée est une poutre en béton armé en flexion 4 points avec une armature en partie basse (figure 5.31). Ce choix permet d'identifier une fissure en mode I (i.e. effort tranchant nul dans la partie centrale entre appuis) évitant ainsi l'effet de contraintes de cisaillement sur le développement de la zone de localisation qui ne sont pas bien prises en compte dans la modélisation multifibre.

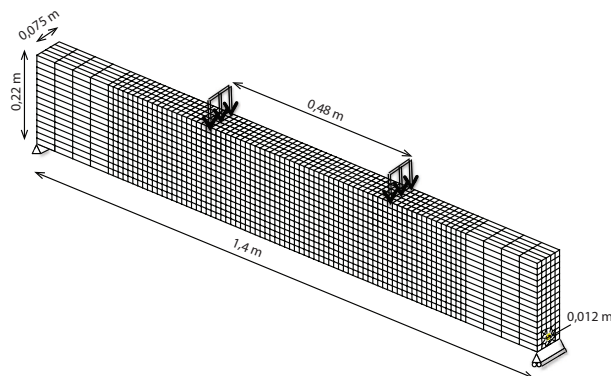


FIGURE 5.31: Poutre en béton armé en flexion 4 points utilisée pour l'identification de la relation utilisé en post-traitement pour les éléments multifibre

Sur la figure 5.32, le faciès d'endommagement obtenu à la fin du chargement (déplacement imposé à 0,003 m) est donné sur le maillage déformé ainsi que sur la zone de localisation sélectionnée pour le post-traitement.

Les évolutions des profils de déformation et d'endommagement au cours du chargement, le long de la fibre, sont représentées sur la figure 5.33.

En utilisant la méthode présentée au paragraphe précédent, une évolution de l'ouverture de fissure en fonction de l'énergie dissipée dans la zone de localisation est identifiée sur la poutre en flexion 4 points (Figure 5.34).

L'énergie dissipée finale dans la process zone est identifiée égale à 90 N/m pour le béton utilisé (i.e. valeur limite en abscisse sur l'évolution de l'ouverture de fissure en fonction de l'énergie

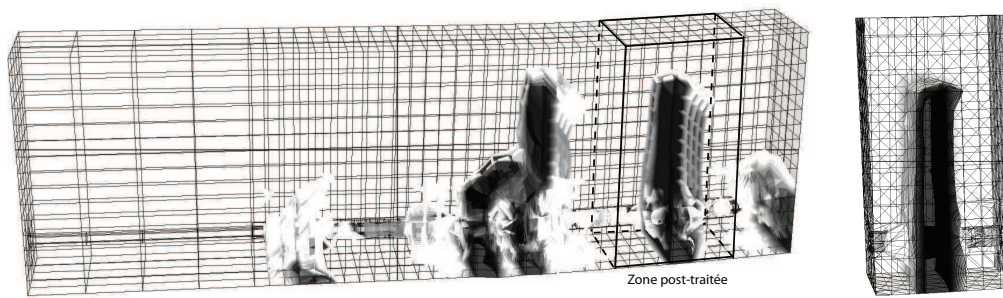


FIGURE 5.32: Faciès d'endommagement à la fin du calcul pour la poutre en flexion 4 points avec la zone de localisation utilisée pour le post-traitement.

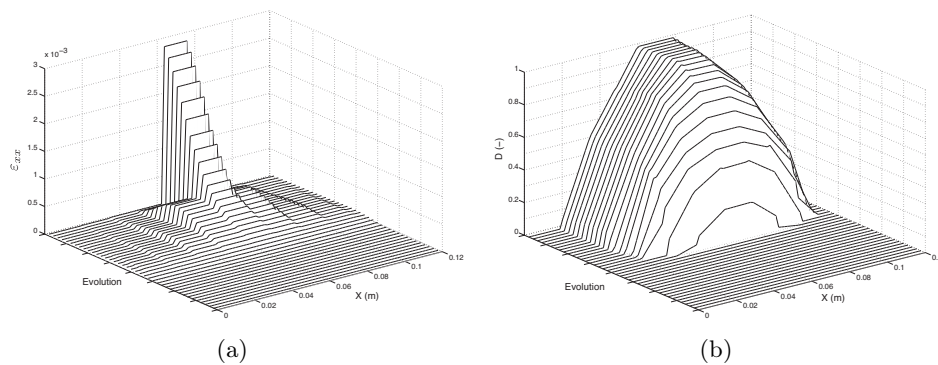


FIGURE 5.33: Evolution au cours du chargement du profil de déformation ((a)) et du profil d'endommagement ((b)) le long de la fibre post-traitée.

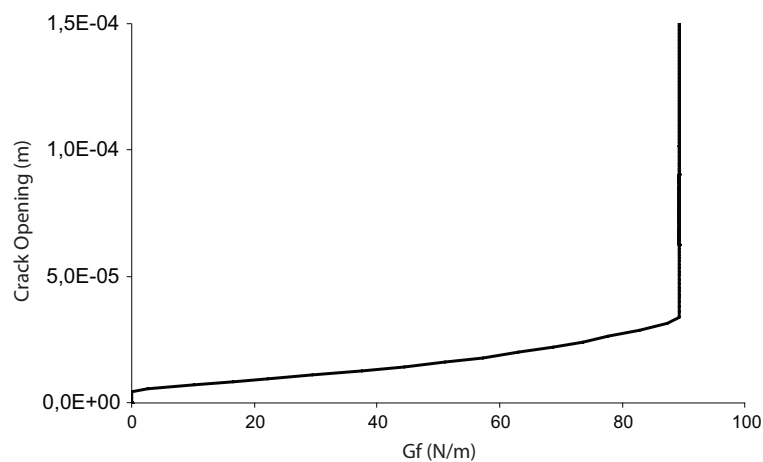


FIGURE 5.34: Evolution de l'ouverture de fissure en fonction de l'énergie dissipée.

dissipée). Cette valeur est utilisée par la suite pour calibrer la loi d'évolution des fibres béton dans les éléments de poutre multifibres.

L'évolution du profil de déformation au cours du chargement, le long d'une fibre d'acier traversant la zone de fissuration post-traitée, est représentée sur la figure 5.35.

Le profil de déformation reste presque homogène, dans la zone de fissuration, montrant ainsi que l'acier a tendance à délocaliser la déformation en dégradant l'interface entre l'acier et le béton. La figure 5.36 compare le réponse globale obtenue avec le modèle 3D volumique et le

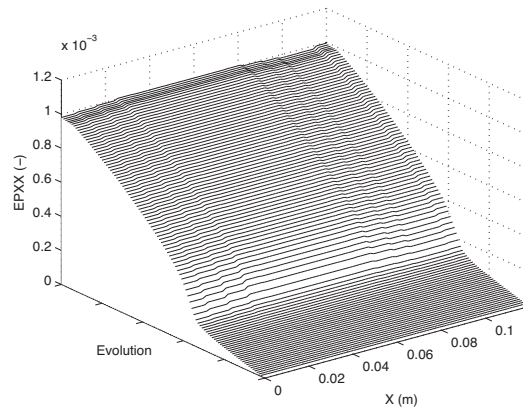


FIGURE 5.35: Evolution au cours du chargement du profil de déformation, dans une fibre d'acier traversant une zone de fissuration du calcul 3D volumique.

modèle multifibre avec un comportement adoucissant des fibres béton ajusté en fonction de l'énergie dissipée identifiée sur le modèle 3D volumique.

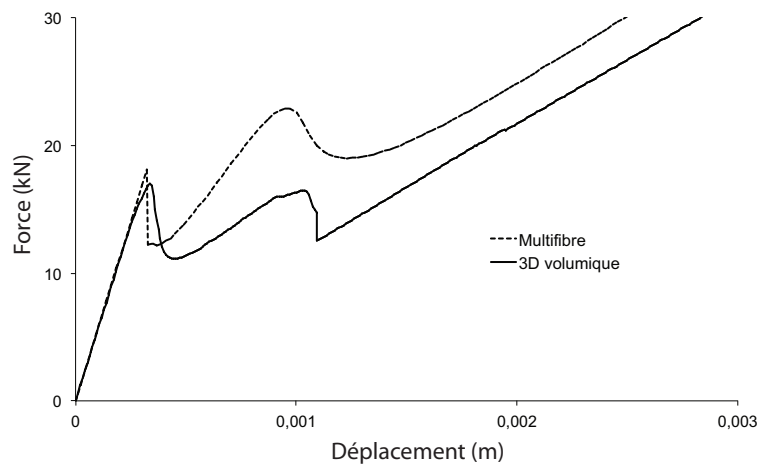


FIGURE 5.36: Evolution de la force en fonction du déplacement imposé. Comparaison modélisation simplifiée/modélisation 3D.

L'évolution du comportement global est similaire entre le modèle 3D volumique de référence et le modèle multifibre. Le comportement asymptotique correspond entre les 2 modélisations, en suivant le comportement de l'acier en équilibre avec la zone supérieure en compression. A la rupture, l'énergie dissipée est similaire, grâce à la calibration de la loi matériau dans les fibres béton.

Néanmoins, un décalage est observé en terme de force lorsque la fissuration se développe, avec pour la modélisation simplifiée, une résistance plus importante. Plusieurs points peuvent expliquer ces différences.

Le choix d'une loi d'évolution semblable entre les éléments 3D volumiques et les fibres des poutres multifibres est sans doute trop restrictive. De plus, le fait de considérer un élément poutre respectant la théorie des poutres pour modéliser une zone de la structure traversée par une macrofissure, amène un comportement plus rigide et limite la rotation à l'endroit de la fissure formée en délocalisant la dégradation de la poutre au niveau de la macrofissure sur toute la longueur de la fibre. La figure 5.37 illustre la différence de mécanisme de rupture entre

les 2 modèles pouvant expliquer en partie la différence obtenue sur le comportement global.

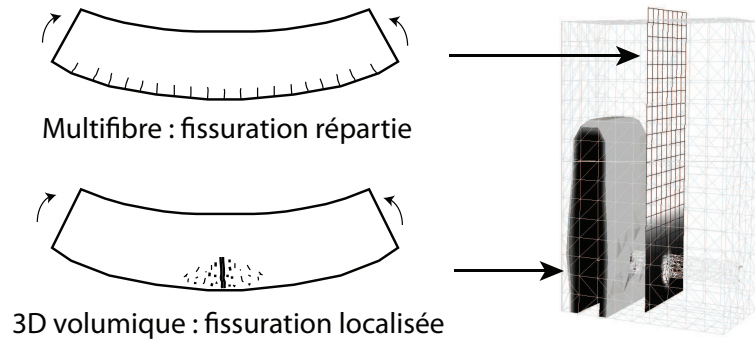


FIGURE 5.37: Description des localisations entre le modèle 3D volumique et le modèle poutre multifibre.

De plus, la théorie des poutres est valable loin de la zone d'introduction des efforts, amenant ainsi une erreur dans la représentation du comportement des éléments proches de ces zones. Enfin, les zones autour de la zone centrale observe un cisaillement. Dans le modèle 3D, l'évolution de l'endommagement (et donc de la fissuration indirectement) diffère de celle observée dans la zone centrale. Ainsi, la calibration des lois d'évolution des fibres des éléments poutre dans les zones cisailées, avec l'énergie dissipée par une zone de fissuration de la partie centrale du modèle 3D, est également à l'origine des différences observées entre l'approche simplifiée et le modèle 3D.

Etude d'une poutre en béton armé soumise à une flexion 4 points à partir d'une approche simplifiée.

Après avoir identifié une évolution de l'ouverture de fissure en fonction de l'énergie dissipée pour une zone de localisation dans une poutre en béton armé, une autre poutre en béton armé testée expérimentalement est analysée en considérant seulement l'approche multifibre.

Ce cas d'étude, dont la géométrie et le ferrailage sont données sur la figure 5.38, est extrait du benchmark international Concrack (Buffo-Lacariere *et al.* [2011]).

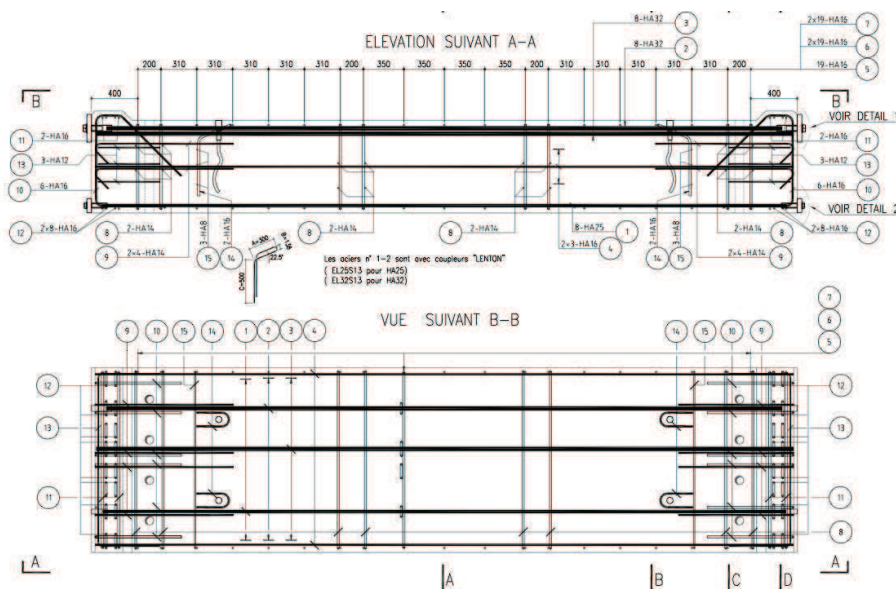


FIGURE 5.38: Géométrie et armatures de la poutre en flexion 4 points du benchmark Concrack.

Les paramètres utilisés pour les différents modèles (modèle élastique pour l'acier et modèle d'endommagement pour le béton) sont identifiés à partir des valeurs fournies, lors du benchmark, sur les caractéristiques matériau : Acier, $E = 210\,000$ MPa ; $\nu = 0,3$; Béton, $E = 40\,000$ MPa ; $\nu = 0,2$; $\varepsilon_{D_0} = 1,1 \cdot 10^{-4}$; $A_c = 1,4$; $B_c = 1850$; $A_t = 0,99$ (fibre en dehors de la gaine) et $0,6$ (fibre dans la gaine) et $B_{t_{fib}}$ (calibré, pour les fibres en dehors de la gaine, en fonction de la longueur de la fibre et $G_{f_{3D}}$ calculée, égale dans ce cas là à 90N/m) et $B_{t_{fib}} = 2000$ (pour les fibres dans la gaine). Ces valeurs correspondent à celles mesurées expérimentalement pour les modules d'Young et les résistances en traction et compression. Les valeurs pour les lois d'évolution correspondent à des valeurs standards pour le comportement post-pic. Le béton dans la gaine est supposé s'endommager sur toute la fibre (i.e. endommagement complet de l'interface) et bien que le mécanisme d'endommagement soit différent suivant la modélisation (endommagement par cisaillement pour le 3D complet et par traction pour le multifibre) l'erreur commise est moins importante en conservant les mêmes paramètres que le modèle 3D (i.e. B_{t_f} n'est pas ajusté dans la gaine). Des approches plus fines ont été développées pour modéliser l'interface acier-béton dans un élément poutre multifibre (Combescure et Wang [2007]; Richard *et al.* [2011]) en décomposant la déformation totale dans la fibre acier en une partie liée à l'allongement de l'acier et une autre liée au glissement entre l'acier et le béton. Ces approches nécessitent néanmoins l'identification de nouveaux paramètres pour décrire l'interface et elles ne sont pas mises en oeuvre pour cette étude.

Le maillage de la structure est fourni sur la figure 5.39. La longueur des éléments de poutre multifibre a été prise égale à l'espacement des cadres (i.e. longueur élément poutre : 35 cm). En effet, les cadres représentent des points durs dans le milieu et sont à l'origine de l'enclenchement de fissures transverses pour cet essai.

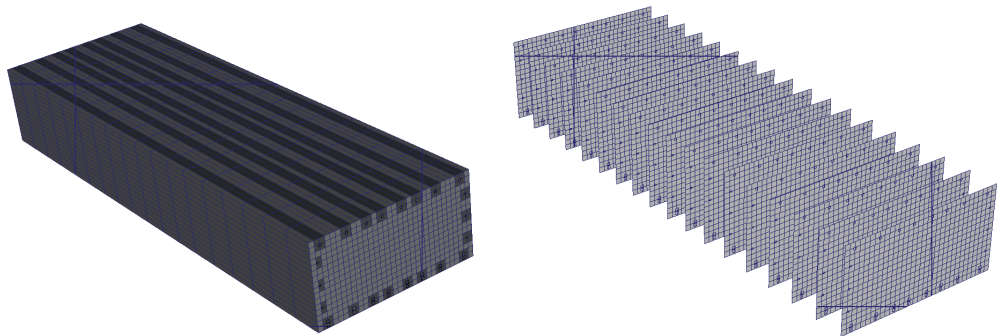


FIGURE 5.39: Maillage multifibre de la poutre en béton armé.

Les résultats globaux sont présentés sur la figure 5.40 avec une comparaison entre l'expérimental, le modèle numérique calibré et le modèle numérique utilisant les paramètres de la loi béton directement, sans calibration. Le déplacement considéré est celui du point central et la force correspond à la force totale par ligne de vérin (i.e. force totale divisée par 2). Le chargement est appliqué par le bas, entraînant un enclenchement de la fissuration dans les fibres supérieures de la poutre. Expérimentalement, un déplacement vertical a été observé au niveau des appuis. Ainsi, ce déplacement parasite est retranché au déplacement mesurée expérimentalement au milieu du spécimen afin de se placer dans le repère lié à la poutre. Cet ajustement explique le fait d'avoir une force non nulle pour une flèche de 0 mm sur la figure 5.40.

Le comportement global observé expérimentalement est bien reproduit avec le modèle multifibre calibré en utilisant les résultats du modèle 3D volumique. En revanche, l'utilisation brute des paramètres de la loi matériau amène une surestimation de l'effort car chaque fibre

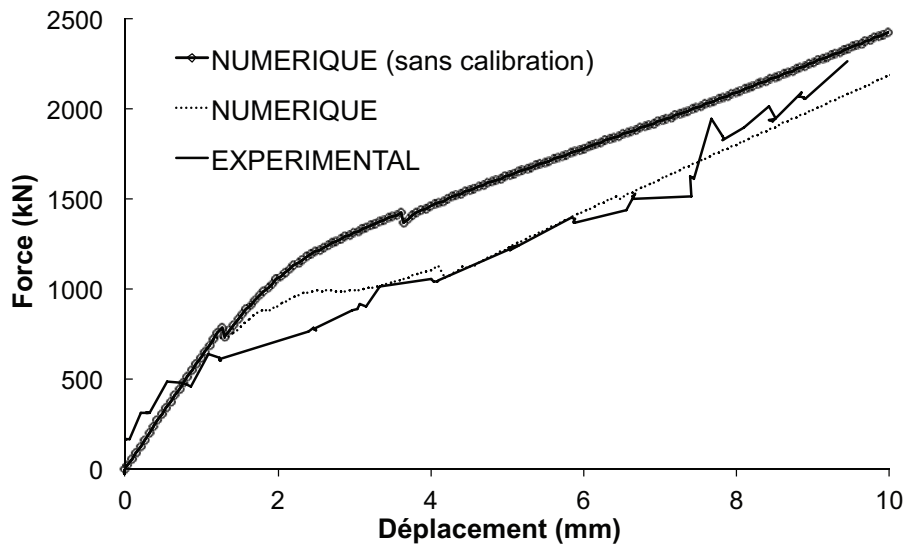


FIGURE 5.40: Evolution de la force par ligne de vérins en fonction de la flèche au centre de la poutre. Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques.

à une énergie à dissiper plus importante que dans le modèle calibré.

Dans ce type de sollicitation (i.e. chargement en flexion), le béton est rapidement endommagé dans les parties tendues et le comportement global est alors piloté par les aciers et le béton en compression. Ainsi, l'ajustement du paramètre B_{t_f} pour les fibres béton influe seulement sur la partie transition entre le régime élastique et le régime piloté par les aciers, avec une dissipation globale d'énergie plus ou moins importante, en fonction du paramètre B_{t_f} choisi ou identifié.

Le comportement local est maintenant étudié en s'intéressant plus particulièrement à la fissuration du béton, pour laquelle des relevés ont été effectués expérimentalement par corrélation d'images (figure 5.44). Comparé au calcul "classique" avec le modèle multifibre, la méthode proposée pour la modélisation permet, en plus d'améliorer la réponse globale, de quantifier une ouverture de fissure dans chaque élément.

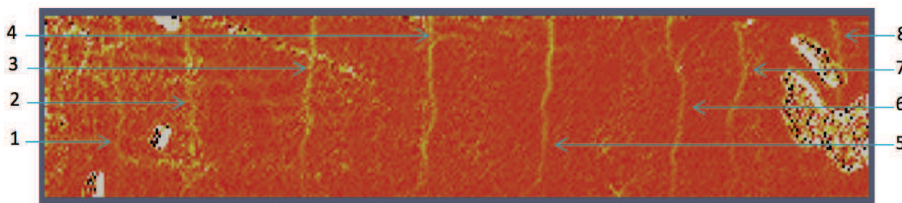


FIGURE 5.41: Champ de déformation longitudinale obtenu expérimentalement pour un effort par ligne de vérins de 2250 kN.

La figure 5.42 fournit l'évolution de l'ouverture de fissure pour les 8 fissures identifiées sur la zone analysée expérimentalement.

Numériquement, l'évolution de l'endommagement permet d'observer qualitativement la dégradation de la structure (figure 5.43).

L'endommagement s'enclenche pour les éléments au niveau des points d'application du déplacement imposé. Par la suite, les éléments dans la zone centrale voient leur endommagement croître de manière similaire (zone à moment constant) avant d'enclencher l'endommagement

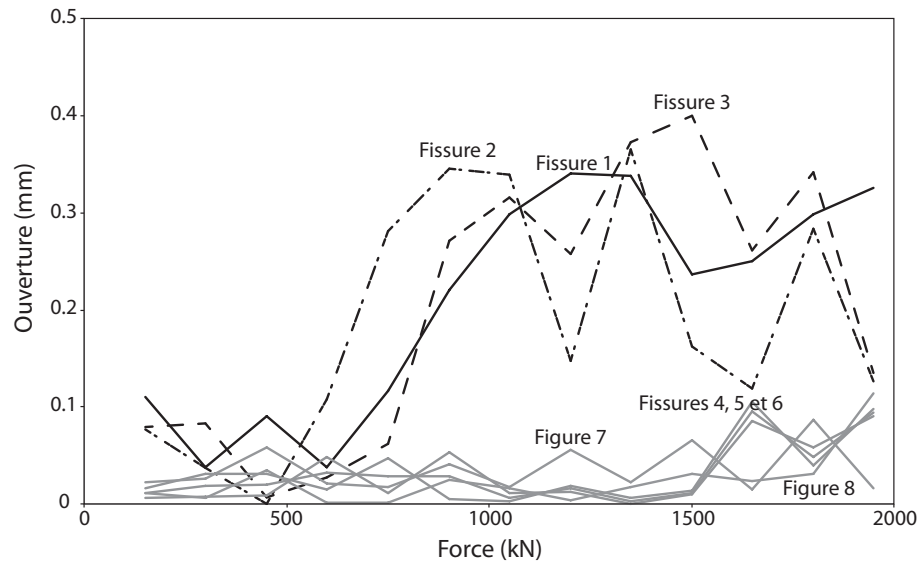


FIGURE 5.42: Evolution de l'ouverture de fissure expérimentale en fonction de la force par ligne de vérin pour les différentes fissures observées expérimentalement.

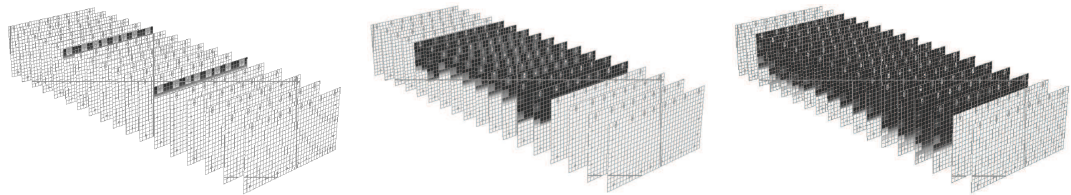


FIGURE 5.43: Evolution de l'endommagement dans la poutre au cours du chargement (650, 1250 et 2150 kN).

dans les éléments des zones extérieures. Ainsi, sans introduire d'aléa sur les propriétés matériau, le comportement est similaire pour les éléments dans la zone centrale (i.e. la différence observée expérimentalement dans la progression des fissures n'est pas représentée).

Une estimation de la fissuration par post-traitement de l'évolution des variables internes dans les fibres est effectuée. Sur la figure 5.44, une représentation du faciès de fissuration dans la poutre est proposée pour des forces par ligne de vérins de 650, 1250 et 2150 kN. Bien que la représentation soit en 2D, l'évolution de l'ouverture de fissure peut être suivie dans chaque fibre en calculant l'énergie dissipée au pas de calcul considéré. Néanmoins, le comportement de la poutre reste lié aux hypothèses du modèle et par conséquent les effets qui pourraient apparaître expérimentalement dans la profondeur de la poutre ne sont pas observés (e.g. fissuration plus importante en peau, fissuration limitée proche des armatures...).

La figure 5.44 illustre l'hypothèse d'une fissure par élément. Cette considération amène une dépendance au maillage de la réponse avec pour chaque nouvel élément poutre introduit, une potentielle dissipation d'énergie supplémentaire, correspondant à la propagation d'une zone de fissuration sur la hauteur de la poutre.

L'évolution de l'ouverture de fissure est également confrontée aux valeurs obtenues expérimentalement (figure 5.45). La fissure expérimentale n° 1 correspond à la fissure sous l'appui et elle est donc confrontée à la fissure identifiée numériquement sur l'élément qui s'endommage en premier sur la figure 5.43. Les fissures expérimentales n°2 et 3 sont comparées à l'évolution des fissures numériques de la zone centrale.

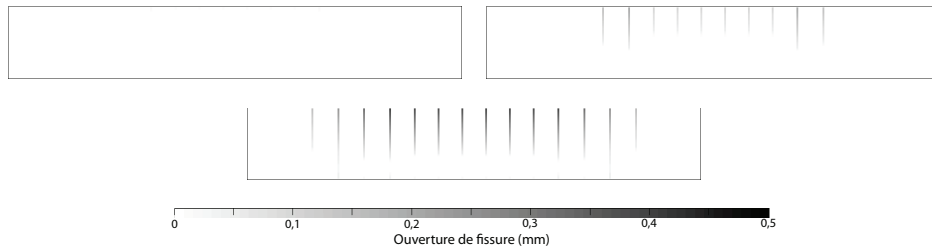


FIGURE 5.44: Faciès de fissuration obtenu par posttraitement du calcul multifibre (650, 1250 et 2150 kN).

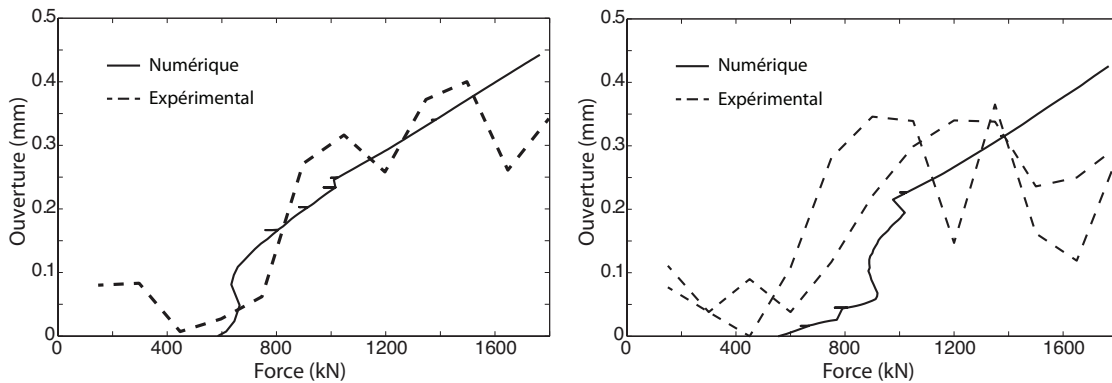


FIGURE 5.45: Evolution de l'ouverture de fissure en fonction de la force par ligne de vérin. Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques.

Le comportement local est également bien caractérisé avec des valeurs d'ouverture dans les mêmes ordres de grandeur que les valeurs observées expérimentalement. Ces résultats confirment également la capacité à reproduire le comportement global car l'ouverture de fissure est relevée à un niveau d'effort donné et non, à une cinématique (i.e. niveau de déplacement imposé), ce qui impose d'avoir une bonne description du comportement nonlinéaire. Comme cela a été relevé pour le comportement global, la phase de transition entre le domaine élastique et le comportement de la poutre piloté par les aciers est courte. Ceci se traduit sur l'évolution de la fissuration, par la zone de transition entre la droite horizontale (ouverture de fissure nulle dans le domaine élastique) et pente inclinée (ouverture de fissure linéaire égale à l'allongement de la fibre). Ainsi, l'enrichissement proposé permet d'estimer la fissuration pendant la phase transitoire, de la microfissuration à la macrofissure. Après avoir validé la méthode et les différentes hypothèses sur d'autres cas-tests simples, une des perspectives de ce travail est d'étendre cette approche à des modèles d'endommagement unilatéraux, afin d'obtenir une information sur la fissuration pour des calculs de structures soumises à des chargements sismiques (voir application en annexe A).

L'enrichissement proposé pour le modèle multifibre conserve les avantages du modèle original avec une bonne reproduction du comportement global pour un temps de calcul très faible comparé à une analyse 3D complète. Cependant, certaines hypothèses, notamment la nécessité d'avoir au préalable une estimation de l'espacement de fissures pour définir le maillage adéquat et avoir qu'une seule fissure par élément, peuvent encore limiter l'utilisation de cet enrichissement et sont à mettre en perspective d'amélioration. Diverses approches peuvent être envisagées pour estimer l'espacement entre fissures. La présence de cadres en acier, dans la structure en béton armé, introduit des points durs qui sont souvent à l'origine de départ de fissures. Leur espacement peut être ainsi considéré comme l'espacement des fissures. Des codes

de dimensionnement tels que l'EUROCODE 2 proposent également des formules pour estimer l'espacement entre fissures pour des structures "classiques" (e.g. poutre en flexion, tirant...). Enfin, le calcul 3D préliminaire peut être également une source d'information vis-à-vis de cette problématique.

6.1 Conclusions

Ce mémoire présente une nouvelle méthode permettant de modéliser la fissuration dans les structures en béton armé. La quantification de la fissuration est un point crucial dans l'étude de la durabilité d'une structure. Sur le plan mécanique, le suivi de la localisation des déformations permet de mieux détecter le passage du seuil de plasticité des aciers. Concernant les transferts au sein de la structure, il permet de développer par la suite des analyses de perméabilité au travers d'un bloc de béton pour des applications telles que l'étude de la corrosion des aciers ou bien encore l'analyse de la fuite de produits dangereux.

Modèle existant pour la description du béton et pathologies

Le suivi de l'évolution de la localisation des déformations dans le béton, est effectué à l'échelle macroscopique, en se plaçant dans un cadre continu. Le choix est fait de considérer la microfissuration de manière diffuse en utilisant la mécanique de l'endommagement, tout en gardant un niveau de description du milieu suffisamment détaillé par rapport à la taille des structures étudiées (i.e. la zone de localisation à l'échelle macroscopique doit contenir plusieurs éléments pour que sa description puisse être considérée comme pertinente). Les sollicitations étudiées dans ces travaux autorisent l'utilisation de modèles simples d'endommagement isotrope pour décrire le comportement nonlinéaire du béton (i.e. la plupart des sollicitations étudiées induisent des ruptures de mode I et les chargements considérés sont radiaux). Ce type de modèle présente un comportement adoucissant et nécessite l'utilisation d'une méthode de régularisation pour obtenir une objectivité des résultats vis-à-vis du maillage. Le modèle nonlocal intégral est retenu pour être associé au modèle d'endommagement car il présente l'avantage d'avoir une expression permettant d'introduire simplement des modifications sur la forme et l'intensité des interactions nonlocales. Dans son expression, intervient une longueur interne qui permet de retranscrire la taille de la zone des interactions entre microfissures (i.e. largeur

de la zone de fissuration) de l'échelle micro à l'échelle macro.

A travers divers cas-tests, il a été montré par le passé que le fait de considérer une zone des interactions nonlocales qui est fixe et isotrope, entraîne plusieurs pathologies pour le modèle nonlocal intégral :

- L'enclenchement de l'endommagement n'est pas bien décrit en pointe d'entaille ou proche d'un bord. Les interactions nonlocales dans le milieu élastique étant considérées comme isotropes, la régularisation nonlocale intégrale tend à prendre en considération dans la moyenne pondérée, l'influence de points qui a priori n'interagissent pas avec leur voisinage (e.g. points à l'arrière d'une pointe d'entaille). Ainsi, le caractère fixe et isotrope des interactions aboutit par exemple à une mauvaise description du champ de déformation équivalente nonlocale en pointe d'entaille et par conséquent, il entraîne un mauvais positionnement du point d'enclenchement de l'endommagement. De plus, cette pathologie amène le fait que le modèle nonlocal original n'arrive pas à reproduire correctement l'effet d'échelle matériau sur un type de sollicitation donnée (e.g. poutre non entaillée en flexion 3 points) en utilisant la valeur de la longueur interne identifiée sur un autre type de sollicitation (e.g. poutre entaillée en flexion 3 points).

Le traitement des bords par le modèle nonlocal intégral, en tronquant le volume des interactions, tend à amplifier l'influence d'un point proche d'un bord libre sur un point au niveau du bord libre. Ainsi, en ne prenant pas en compte les modifications de l'orientation des redistributions induites par la présence du bord libre, une attraction de l'endommagement est observée.

- Au cours de la propagation de la zone de localisation des déformations et à la rupture, le modèle nonlocal original considère des interactions fixes entre points. Ainsi, les champs cinématiques au niveau de la zone de fissuration sont éloignés d'une discontinuité forte (i.e. fissure ouverte) car l'interaction entre points de part et d'autre de la fissure est maintenue. Cette description des interactions induits également à la rupture une diffusion de l'endommagement.

Afin de répondre à la problématique de la quantification de la fissuration, il apparaît nécessaire d'apporter des modifications au modèle nonlocal original en faisant évoluer l'amplitude et la direction des interactions.

Proposition d'un nouveau modèle nonlocal intégral

A partir de l'analyse de travaux précédents proposant des améliorations de méthodes de régularisation ainsi que par une analyse phénoménologique dans un cadre micromécanique simplifié, une modification de la régularisation nonlocale originale est proposée. Les interactions fixes du modèle original sont remplacées par des interactions qui présentent une orientation et dont l'intensité évolue au cours du chargement.

- Le principe du modèle est de considérer qu'un point a intrinsèquement un potentiel d'interaction avec son voisinage, qui s'exprime comme le produit entre un facteur de contrainte normé et la longueur caractéristique du matériau. Au cours du chargement, ce potentiel nonlocal sera plus ou moins activé en fonction de l'état de contrainte auquel est soumis le point. Les fissures observées dans les structures en béton étant majoritairement de mode I, la normalisation du facteur de contrainte s'exprime en fonction des caractéristiques en traction du modèle béton. *La variation de l'état de contrainte induit une évolution de l'intensité des interactions au cours du chargement.*

- Le potentiel d'interaction s'exprime en fonction du tenseur des contraintes observé par le point "émetteur" et forme ainsi une ellipsoïde centrée sur ce point. Il évolue de 0 pour les directions non sollicitées à la longueur caractéristique du matériau pour les directions soumises à une contrainte égale à la contrainte limite en traction du béton. *L'introduction du tenseur des contraintes dans la définition du potentiel d'interaction induit une directionnalité des interactions.*

Comparée au modèle original, l'expression proposée implique qu'il existe une infinité de valeurs possibles pour la longueur interne et qu'elles varient dans l'espace et suivant le chargement. Cette proposition, implantée dans un code aux éléments finis, a l'avantage de n'introduire aucun nouveau paramètre. Sur le plan numérique, cette méthode est peu intrusive, en particulier, pour des codes aux éléments finis intégrant déjà le modèle nonlocal original et n'engendre pas de surcoût systématique de calcul.

Analyse et validation du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte

Le comportement du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte est analysé sur différents cas-tests ayant révélé les pathologies du modèle original.

- Le modèle proposé permet de corriger le problème d'enclenchement de l'endommagement en pointe d'entaille en annihilant l'influence nonlocale des points à déformation équivalente nulle à l'arrière de la pointe d'entaille. De plus, au-delà de cet exemple spécifique, le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte permet de manière générale une meilleure description de l'enclenchement de l'endommagement. En effet, le modèle montre une meilleure capacité à décrire l'effet d'échelle matériau, pour un matériau donné placé dans plusieurs configurations différentes (poutre entaillée, non-entaillée...). Ce résultat est important dans une démarche de dimensionnement d'une structure. Il apparaît indispensable, pour caractériser le plus précisément possible un matériau, d'effectuer des essais sur des spécimens géométriquement similaires avec des tailles différentes afin d'identifier une longueur caractéristique liée au matériau. Comparé au modèle nonlocal original, le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte montre une plus grande capacité à décrire l'effet d'échelle matériau à partir de la longueur caractéristique du matériau, indépendamment de la sollicitation appliquée sur la structure car la forme du champ de contrainte qui varie d'un essai à l'autre est à présent introduite dans les interactions.
- Les pathologies observées proches d'un bord sont également traitées. La présence d'un bord libre modifie l'état de contrainte des points de son voisinage, modifiant ainsi les interactions décrites avec la méthode nonlocale basée sur l'état de contrainte. Avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte, pour un bord libre, la quantité redistribuée par un point proche de ce bord est nulle dans la direction perpendiculaire aux bords. De plus, le formalisme défini pour décrire les interactions nonlocales amène à ne considérer, pour le calcul du terme nonlocal, que les points qui subissent un état de contrainte suffisant pour interagir avec leur voisinage. Ainsi, contrairement au modèle nonlocal original, la troncature du volume d'intégration proche d'un bord n'implique pas que l'interaction d'un point sur un autre soit doublée dans cette zone. Par conséquent, après enclenchement de l'endommagement proche d'un bord, il est possible d'observer une rupture de la structure avec un champ d'endommagement qui ne s'est pas propagé jusqu'à ce bord. Le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte permet donc de mieux décrire les interactions nonlocales proche des bords et apporte une solution aux pathologies relevées pour le modèle original.

- Un des objectifs initiaux de ces travaux est de pouvoir caractériser la fissuration. Ces informations sont obtenues par post-traitement du calcul continu en utilisant des méthodes existantes de recherche du trajet de fissure et d'estimation de l'ouverture de fissure. J'ai implanté dans le code aux éléments finis Cast3M, une méthode de recherche de la position de la fissure en ajoutant un développement pour la recherche automatique de plusieurs fissures. Pour estimer l'ouverture de fissure, le principe de la méthode de post-traitement consiste à comparer, en moyenne pour l'approche faible et au point de fissure pour l'approche forte, le profil de déformation obtenu par le calcul aux éléments finis avec un profil analytique correspondant à une discontinuité forte. Pour des calculs jusqu'à la rupture, le modèle nonlocal original montre des différences au niveau de l'estimation de l'ouverture de fissure entre l'approche forte et l'approche faible, traduisant ainsi le fait que les profils locaux (e.g. déformations) ne sont pas bien décrits. Au contraire, le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte montre une estimation de la fissure semblable entre les 2 approches, ce qui traduit une amélioration de la description des champs locaux à la rupture, notamment dans la zone de fissuration.

Application à des calculs de structures

L'étude de la fissuration est étendue à des calculs sur des structures en béton armé. Les premiers essais avec du béton armé et en utilisant le modèle nonlocal original, montrent une forte diffusion de l'endommagement pour des valeurs de longueur interne de l'ordre de l'espacement entre deux armatures, rendant l'identification d'une quelconque multifissuration impossible. Ainsi, pour mieux prendre en compte l'évolution des localisations dans une structure en béton armé et répondre au problème de diffusion de l'endommagement, l'utilisation du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte est considéré. Les résultats obtenus avec ces modélisations sont ensuite réutilisés pour améliorer la réponse fournie par une modélisation simplifiée de type multifibre.

- Afin de représenter au mieux le comportement de la structure, une attention particulière est portée à la définition de la liaison acier-béton. En s'appuyant sur des propositions faites par le passé pour décrire la liaison acier-béton, une modélisation continue utilisant un modèle d'endommagement avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte est proposée pour représenter l'interface. Cette zone là est définie par une gaine avec une contrainte résiduelle non nulle. Les résultats obtenus sur un tirant à double traction montrent la capacité de cette approche à décrire la dégradation du béton autour des armatures, tout en maintenant une contrainte résiduelle à l'interface. De plus, en accord avec les résultats obtenus sur les tests avec le béton seul (e.g. diminution des interactions au travers de la zone de fissuration...), le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte permet d'établir une fissuration distincte dans le bloc béton armé étudié. En effet, la diminution de l'état de contrainte dans les zones qui s'endommagent entraîne une diminution de la zone d'influence des points dans cette zone et limite ainsi la diffusion de l'endommagement. Cette approche est valable pour des valeurs de "glissement" (i.e. différence de déplacement entre l'armature et le béton en dehors de la gaine) qui restent faibles. Néanmoins, pour une analyse du fonctionnement en service de la structure, cette limite n'est pas atteinte.
- Pour répondre à la demande de modèles peu coûteux en terme de temps de calcul, pour des études en 2D ou en 3D de structures en béton armé, une amélioration d'une modélisation simplifiée de type poutre multifibre est proposée. A travers l'analyse de résultats obtenus sur des modélisations 3D volumiques utilisant le modèle nonlocal intégral basé sur l'état de contrainte, une identification de l'évolution de l'ouverture de fissure ainsi que de l'énergie

dissipée dans une zone de fissuration est effectuée. Ces données sont alors exploitées pour améliorer la réponse mécanique de la modélisation multifibre en calibrant par un critère énergétique la loi uniaxiale associée aux fibres béton ainsi qu'en enrichissant les informations fournies par ce type de modélisation par l'exploitation de l'ouverture de fissure relevée à un niveau d'énergie dissipée dans la zone de fissuration. Bien que des développements sont encore nécessaires pour retranscrire au mieux l'évolution de la zone de fissuration dans une fibre, en accord avec les résultats sur l'analyse 3D volumique, notamment au niveau de la loi d'évolution considérée, les premiers résultats obtenus sont plutôt concluant en les confrontant à des résultats expérimentaux.

6.2 Perspectives

Les différents développements proposés permettent de répondre à la problématique initiale qui est la description de la fissuration. De ces différents travaux, des perspectives générales peuvent être identifiées pour permettre l'amélioration de ce modèle et son utilisation dans le calcul de structures :

- La base de la modification proposée pour le modèle nonlocal s'appuie sur un cadre micromécanique simplifié ainsi que sur des considérations phénoménologiques. Une perspective serait donc de poursuivre ce développement pour formaliser et justifier complètement le modèle proposé à partir d'une approche micromécanique.
- L'analyse d'effet d'échelle matériau a permis sur une campagne d'essais numériques de caractériser la capacité du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte à décrire la zone de fissuration à l'enclenchement de l'endommagement. Pour valider complètement le modèle, une perspective serait de confronter des essais numériques à des résultats obtenus sur une campagne expérimentale d'essais sur des spécimens composés d'un même béton avec des géométries différentes afin d'obtenir des sollicitations différentes. Ce test permettrait de valider l'influence de l'état de contrainte sur le développement de la zone de fissuration.
- Dans une modélisation aux éléments finis standards, la localisation de la déformation reste décrite comme une discontinuité faible. Ainsi, la modélisation atteint ses limites lorsque la longueur interne (i.e. la taille de la zone de localisation) devient inférieure à la taille de l'élément. Une première approche peut être de remailler la zone de fissuration ou au moins l'élément traversé par la fissure. Cependant, ce choix ne fait que repousser la limite de description du maillage car la longueur caractéristique d'une fissure étant nulle, l'évolution de la localisation atteindra toujours une valeur de la longueur interne inférieure à la taille de l'élément.
Une seconde approche consiste à modéliser la partie de microfissuration diffuse par un modèle d'endommagement et d'activer un modèle discret dans la zone de fissuration quand un certain seuil en endommagement est atteint. Ainsi, le modèle d'endommagement régularisé avec la méthode nonlocale basée sur l'état de contrainte permettrait d'avoir la taille et l'évolution des nonlinéarités de leur enclenchement jusqu'à un stade proche de la rupture et le modèle discret permettrait de suivre la propagation d'une fissure dans le milieu étudié.
- La caractérisation de la fissuration n'est pas une finalité en soit et elle doit pouvoir servir à des études annexes s'intéressant par exemple à la diffusion de fluides dans le béton. Des méthodes ont été développées ces dernières années pour estimer la perméabilité dans un

milieu, en fonction de l'endommagement et de l'ouverture de fissure observés . Une étude intéressante à envisager serait de confronter l'évolution de la perméabilité expérimentale avec l'évolution obtenue numériquement en utilisant les méthodes d'estimation de la perméabilité à partir d'un calcul continu avec le modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte.

- Une démarche a été mise en place pour quantifier la fissuration à partir d'une approche simplifiée. Les premiers résultats sont encourageants et un processus de qualification (hypothèses, résultats...) de cette démarche doit être mis en place pour permettre sa validation complète par la suite. Dans un deuxième temps, la quantification de la fissuration à partir d'un calcul multifibre doit être validée pour des chargements plus complexes tels que des sollicitations sismiques. Ce modèle trouverait ainsi parfaitement sa place parmi les outils de l'ingénierie grâce à son coût relativement faible en terme de temps de calcul et sa capacité à modéliser le comportement global tout en ayant une information locale au niveau de la fissuration.
- Pour des approches réglementaires, les modèles complets et l'approche simplifiée développés peuvent permettre d'identifier des paramètres influents (qualité du béton, diamètre des armatures...) sur la fissuration et aboutir à des formules standards permettant la quantification de cette fissuration.

Annexes

Application du multifibre à l'analyse sismique d'une structure en béton armé

Cette annexe présente une application des éléments poutres multifibres portant sur la modélisation d'une structure en béton armé de type nucléaire soumise à des chargements sismiques, dans le cadre du benchmark international SMART (Seismic design and best-estimate Methods Assessment for Reinforced concrete buildings subjected to Torsion and non-linear effects) proposé par le CEA (Commissariat à l'Energie Atomique) et EDF (Electricité de France).

Le benchmark s'est déroulé en 2 phases principales avec en premier lieu une estimation en aveugle du comportement de la structure puis dans un second temps l'ajustement des modèles et la confrontation aux résultats expérimentaux. Les points principaux de la modélisation ainsi que quelques résultats sont présentés dans la suite de cette annexe.

La structure étudiée correspond à un élément représentatif d'infrastructure nucléaire reproduit à l'échelle 1/4 dont une vue est donnée sur la figure A.1.



FIGURE A.1: Maquette SMART.

Au travers de la forte dissymétrie que présente la maquette étudiée, l'objectif est d'observer et d'analyser des sollicitations 3D (e.g. torsion) qui sont susceptibles d'apparaître dans des structures nucléaires, de part leur complexité géométrique, et peuvent être préjudiciables pour

celles-ci.

La maquette SMART est une structure en béton armé de 3 étages, de masse totale environ 12T, sur laquelle sont introduites à chaque étage des masses additionnelles (12T par étages) représentant le poids des équipements présents en utilisation courante de la structure. La structure étant relativement grande, un maillage raffiné 3D complet pour décrire toute la structure est à exclure au niveau temps de calcul. Pour analyser le comportement nonlinéaire, l'utilisation d'approche simplifiée semble être un bon compromis entre le temps de calcul et la richesse des informations obtenues par la modélisation.

A.1 Analyse modale

La première analyse de la structure se fait dans une démarche en aveugle. Afin d'appréhender son comportement général et permettre une première calibration d'un modèle simplifié, une analyse modale est effectuée. Un modèle 3D volumique considérant le béton seul (i.e. les aciers ont très peu d'influence dans la réponse élastique) est mis en place en parallèle d'un modèle simplifié (poutres multifibres pour les éléments verticaux et éléments coques pour les planchers). Certaines hypothèses simplificatrices sont considérées dans cette première phase, avec notamment la non-prise en compte de la table vibrante, ni des semelles en pied de la structure. Les paramètres matériaux utilisés pour le béton sont ceux fournis dans le cadre du benchmark : $E = 32000$ MPa et $\nu = 0,2$. La structure est considérée fixe en pieds.

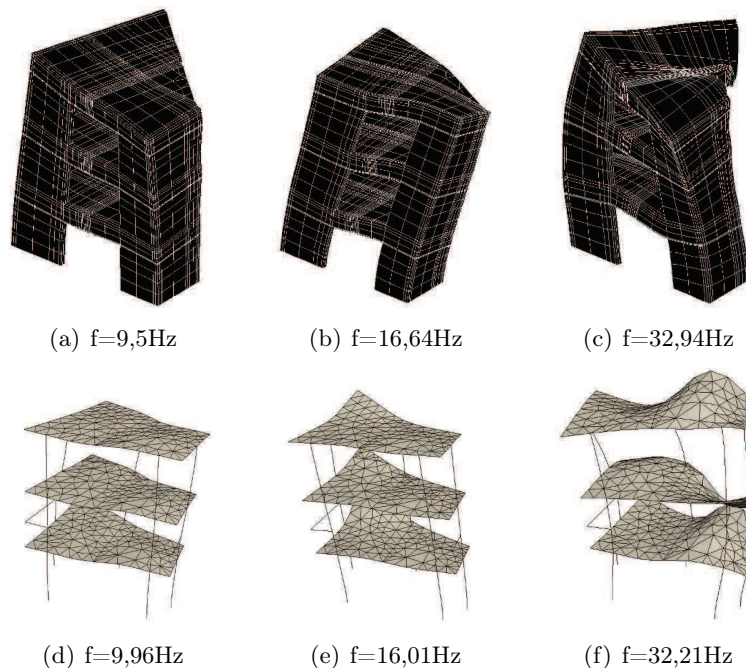


FIGURE A.2: Comparaison entre le modèle 3D volumique et le modèle simplifié, des déformées modales et des fréquences propres pour les 3 premiers modes.

Cette comparaison montre la capacité du modèle simplifié à reproduire les caractéristiques globales dynamiques de la structure au vu du faible écart observé sur les fréquences propres entre les 2 niveaux de modélisation et la bonne concordance des déformées modales. Par la suite, pour limiter le temps de calcul, seul le modèle simplifié est conservé pour mener les différents calculs.

Avant d'effectuer une analyse nonlinéaire de la structure, une comparaison des modes propres observés expérimentalement pour la structure mise en place sur la table sismique, montre une influence non négligeable de la table sur la réponse nécessitant l'introduction de celle-ci dans la modélisation. Afin de s'approcher des conditions expérimentales, la table est modélisée par une plaque dont la rigidité est ajustée pour caler au mieux les fréquences observées expérimentalement et les masses additionnelles sont introduites au travers d'éléments volumiques (voir figure A.3).

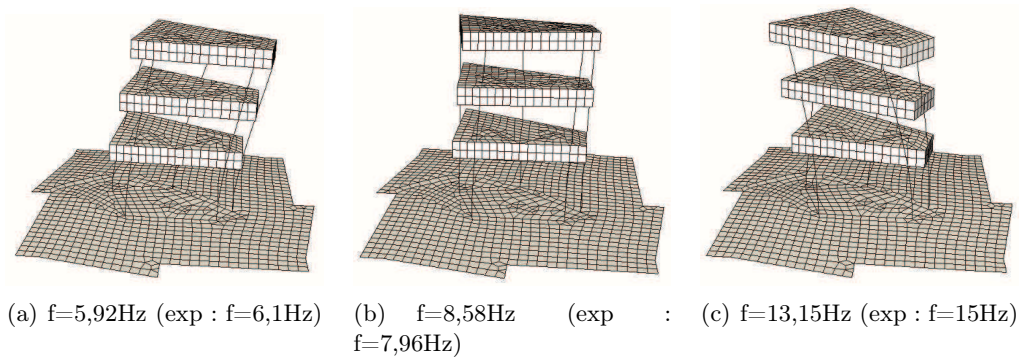


FIGURE A.3: Comparaison entre l'expérimental et le modèle simplifié, fréquences propres pour les 3 premiers modes.

Le modèle simplifié a été validé par la comparaison avec un modèle plus complet de la structure seule et avec des valeurs expérimentales de la structure sur la table sismique. L'analyse qui suit s'intéresse maintenant à la réponse nonlinéaire de la structure sous un chargement de type sismique.

A.2 Analyse dynamique nonlinéaire

Afin de caractériser la réponse de la structure pour des chargements plus complexes, des modèles matériaux introduisant des nonlinéarités (e.g. endommagement, plasticité...) sont associés aux éléments de la structure.

L'hypothèse de fonctionnement élastique est considérée pour les planchers (i.e. les dégradations dans la structure se retrouvent généralement dans les éléments verticaux) et les modèles nonlinéaires sont associés aux éléments poutres multifibres sous leur forme uniaxiale. Un modèle d'endommagement développé par La Borderie [1991] est utilisé pour le béton, et pour les aciers, la loi de Menegotto et Pinto [1973]. Les caractéristiques matériaux fournies pour la modélisation sont résumées : Acier, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, $f_y = 500 \text{ MPa}$, $f_u = 540 \text{ MPa}$, $\varepsilon_u = 0,05$; Béton, $E = 32000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,2$, $f_t = 2,4 \text{ MPa}$, $f_c = 30 \text{ MPa}$. Un amortissement de Rayleigh est également considéré en prenant en compte les modes propres de la structure non dégradée avec un coefficient d'amortissement ξ de 2%.

Durant la campagne expérimentale, la structure a été soumise à diverses sollicitations sismiques d'amplitude croissante de 0,05 à 1g provenant d'un signal réel et d'un signal synthétique (figure A.4).

Numériquement, ce chargement sismique est appliqué par l'intermédiaire des forces d'inertie en se plaçant dans le repère relatif lié à la structure et en bloquant les points où s'appliquent le chargement expérimentalement. Par la suite, la comparaison des résultats est effectuée pour une amplitude du signal de 0,2g.

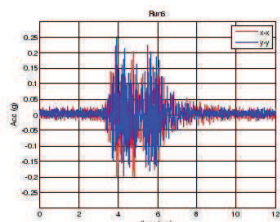


FIGURE A.4: Exemple d'un signal synthétique utilisé pour le chargement.

Divers points de mesure ont été instrumentés expérimentalement (voir figure A.5) avec notamment des relevés des déplacements et des accélérations.

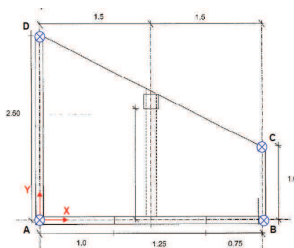


FIGURE A.5: Points de mesure en tête de la structure (A, B, C et D).

La figure A.6 compare l'évolution du déplacement, en toit de la structure, pour les points A et B, suivant les directions x et y.

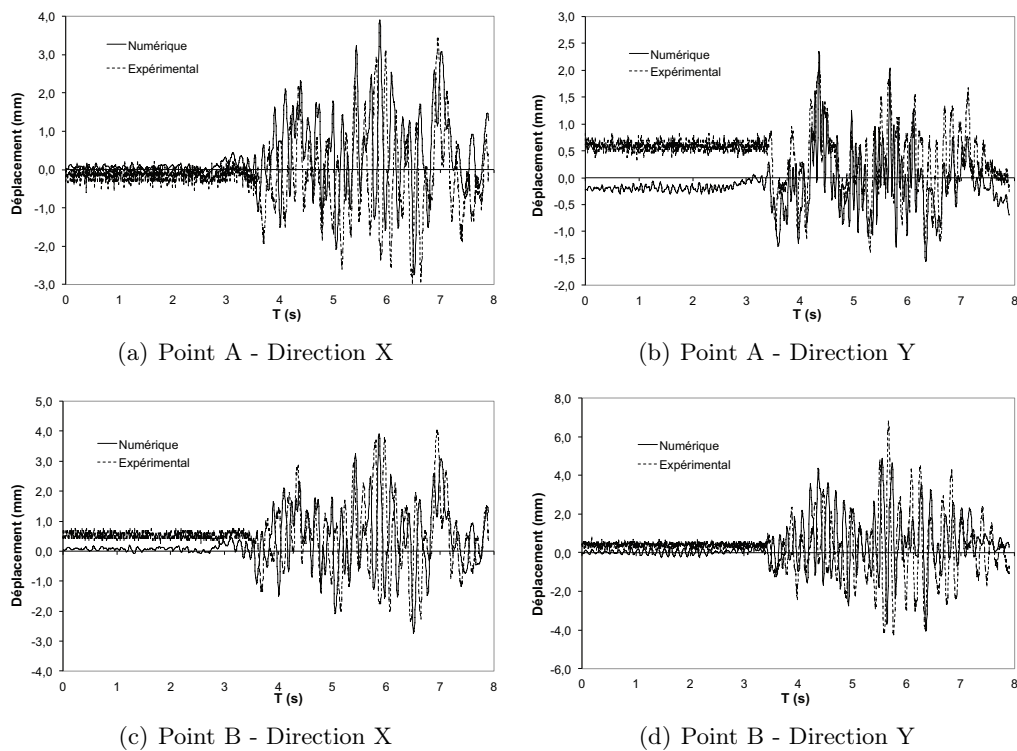


FIGURE A.6: Comparaison entre les résultats numérique et expérimentaux, des déplacements en tête de la structure.

A partir d'une modélisation simplifiée, le comportement global est relativement bien reproduit

lorsqu'on compare les déplacements obtenus en tête. L'amplitude des déplacements est similaire à celle observée expérimentalement et les fréquences sont proches. Le comportement 3D de torsion global de la structure attendu est observé avec le modèle simplifié (i.e. l'évolution des déplacements des points A et B différent suivant x et y à un instant donné du calcul et le 3ème mode montre une déformée modale de torsion).

La modélisation multifibre permet également d'avoir une évaluation des mécanismes de rupture qui apparaissent dans la structure en visualisation notamment l'endommagement dans les fibres. La figure A.7 montre le faciès d'endommagement dû à la traction (variable D_1 dans le modèle de La Borderie) observé dans la structure à la fin de l'essai.

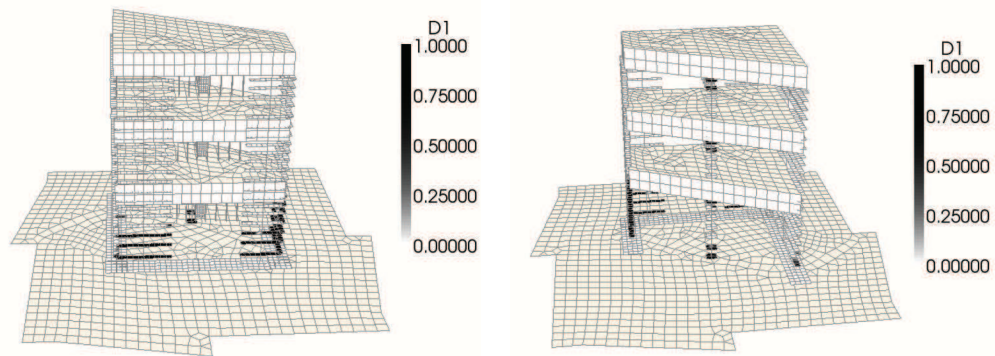


FIGURE A.7: Champ d'endommagement à la fin du chargement.

L'endommagement étant constante sur la hauteur d'un élément, l'estimation de la dégradation de la structure reste qualitatif. Néanmoins, les zones d'apparition de l'endommagement sont cohérentes à ce que l'on peut attendre sur ce type de structure avec un enclenchement de l'endommagement au niveau des jonctions (planchers-éléments verticaux) et plus particulièrement en pied de la structure. De plus, comme pour l'endommagement, une estimation du moment et du lieu d'apparition de la plastification des aciers peut être déterminée avec l'analyse des fibres acier. Pour cet essai, la structure présente un renforcement conséquent et bien réparti ce qui repousse le niveau de chargement nécessaire pour enclencher la plastification (numériquement, la plastification apparaît pour une amplitude du signal de 0,4g).

Cette étude montre à travers quelques résultats la capacité des éléments poutres multifibres à décrire le comportement d'une structure en béton armé soumise à une sollicitation sismique. L'ordre de grandeur des valeurs globales (déplacements, accélérations...) correspond bien à ce qui peut être observé expérimentalement avec la reproduction de mécanisme 3D tel que la torsion et une estimation de la dégradation de la structure peut être obtenue. Cette approche présente également l'avantage considérable de limiter le temps de calcul comparé à une modélisation 3D volumique complète.

Cependant, les informations locales obtenues (endommagement, plasticité des aciers...) restent qualitatives à partir du moment où la déformation est considérée comme constante dans un élément et que la théorie de la résistance des matériaux est considérée (i.e. l'hypothèse de Saint Venant n'est plus valable pour des éléments proches du point d'application des charges et notamment au jonction entre éléments horizontaux et verticaux).

Les travaux rapportés dans le chapitre 5 de cette thèse montre que l'enrichissement proposé pour décrire les localisations au sein d'un élément est susceptible de fournir des estimations réalistes sur l'ouverture des fissures mais une adaptation de la procédure aux modèles unilatéraux reste à faire.

Influence de la longueur minimale imposée sur la réponse mécanique d'une barre en traction

Le test de la barre 2D en traction est maintenant utilisé afin d'analyser l'influence du choix de la valeur minimale imposée à la longueur interne en considérant un maillage avec plusieurs éléments sur la hauteur. Dans cette application, la contrainte étant nulle dans la direction perpendiculaire à la direction de sollicitation, une valeur minimale doit être imposée pour $l_c(\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})), l_{c0})$ durant l'essai.

La figure B.1 illustre la zone d'interaction d'un point avec son voisinage suivant l'alignement des points de Gauss.

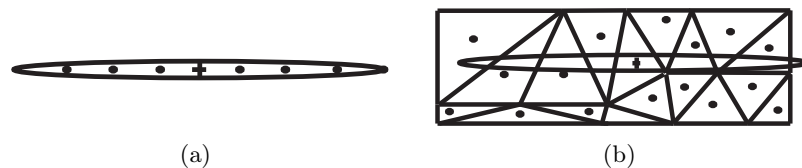


FIGURE B.1: Exemple de zone d'interaction suivant l'alignement des points de Gauss : (a) points de Gauss alignés, (b) maillage déstructuré.

Avec un maillage régulier, on obtient un alignement des points de Gauss parallèle à la direction de chargement. Ainsi, dans cette configuration, l'interaction entre les points proches est maintenue à un niveau de contrainte uniaxiale élevée même si la valeur minimale imposée est faible. On considère cette solution comme solution de référence et on étudie l'influence de la valeur imposée pour un maillage déstructuré (i.e. on rompt l'alignement des points de Gauss) (Fig. B.2).

La barre est de 1m de long et 0.1m de haut ; elle est fixée à une de ses extrémités (Fig. B.2). Les paramètres utilisés pour le modèle d'endommagement sont identiques au précédent cas test sur la barre 2D en traction.

Cinq valeurs minimales imposées ont été testées avec le maillage déstructuré : $5d_{min}$, $2d_{min}$, d_{min} , $0.5d_{min}$ et $0.2d_{min}$ avec d_{min} la taille caractéristique de l'élément ($\sqrt{aire_{elem}}$).

Le chargement est appliqué via un pilotage par longueur d'arc. Le maillage est composé d'éléments quadrangles à interpolation linéaire pour la solution de référence et d'éléments triangle à interpolation linéaire pour le maillage déstructuré. La bande centrale d'éléments (i.e. points de Gauss inclus dans une bande de 2 cm de large et centrée sur le milieu de la barre) est affaiblie avec un module d'Young plus faible ($E_{b_{faible}} = 31$ GPa) afin de contrôler la position de l'enclenchement de l'endommagement dans la barre .

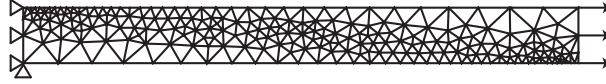


FIGURE B.2: Barre en traction. Maillage déstructuré.

La figure B.3 montre l'évolution de la force en fonction du déplacement pour les différentes valeurs de $l_c(\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})), l_{c_0})$ imposées ainsi que la solution de référence.

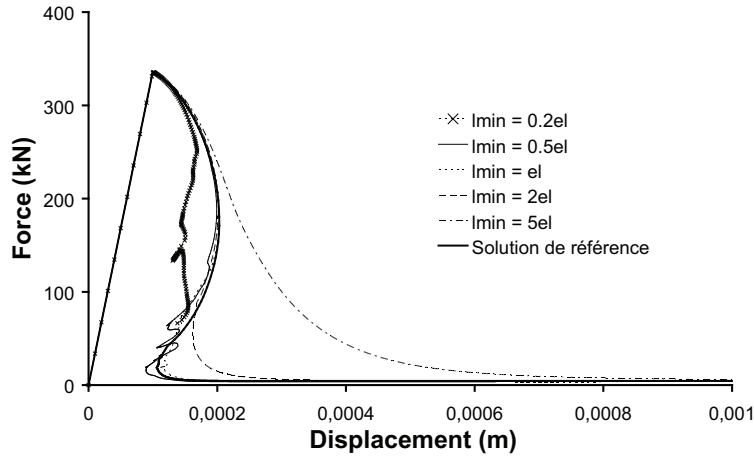


FIGURE B.3: Comparaison de la réponse globale pour différentes valeurs $l_c(\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})), l_{c_0})$ face à une solution référence.

La réponse est similaire au début du comportement post-pic pour des valeurs minimales de $l_c(\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})), l_{c_0})$ supérieures ou égales à $0.5d_{min}$. Cependant, une fois que la valeur minimale est atteinte, la taille de la zone de localisation est imposée. A la rupture, pour une valeur minimale supérieure à d_{min} , l'endommagement maximal n'est plus localisé dans une bande de largeur la taille d'un élément. Ainsi, on obtient une dissipation d'énergie plus importante ce qui entraîne une différence en terme de réponse globale.

Pour $l_c(\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})), l_{c_0}) = 0.5d_{min}$, une réponse similaire à la solution de référence est observée. Cependant, certains points peuvent se trouver en dehors de la zone d'influence de leurs points voisins et se comportent alors de manière locale même à des niveaux de contrainte élevés. Cette tendance est encore plus amplifiée lorsque la taille minimale imposée décroît. Quand la largeur du domaine d'intégration devient trop faible, le nombre de points d'intégration en interaction dépend fortement de leur alignement. Pour le maillage déstructuré, on observe avec la plus petite valeur minimale une réponse non-physique avec des oscillations. Comparé à la solution de référence, une valeur minimale pour $l_c(\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_{prin}(\mathbf{s})), l_{c_0})$ égale à d_{min} permet de localiser l'endommagement maximum à la rupture dans une bande de largeur la taille d'un élément, ce qui est une caractéristique majeure recherchée, tout en conservant les interactions nonlocales entre points voisins à des niveaux de chargement faible dans certaines directions. Cette valeur a été retenue pour la valeur minimale imposée pour l'implantation du modèle nonlocal basé sur l'état de contrainte.

- BARENBLATT, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium crack in the brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7:55–125. 6
- BAŽANT, Z. (1991). Why continuum damage is nonlocal : Micromechanics arguments. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 117 (5):1070–1087. 24, 41
- BAŽANT, Z. (2002). *Scaling of Structural Strength*. Hermes Penton Science, London, 2nd updated ed., elsevier édition. 56, 62
- BAŽANT, Z. et GAMBAROVA, P. (1980). Rough cracks in reinforced concrete. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 106(ST4):819–842. 8
- BAŽANT, Z. et LIN, F. (1988). Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *Journal of Structural Engineering Vol. 114, No. 11*, 114(11):2493–2510. 25
- BAŽANT, Z. et OH, B. H. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and structures*, 16(93):155–177. xi, 7
- BAŽANT, Z. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1989). Measurement of characteristic length of non-local continuum. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(4):755–767. 23, 24
- BAŽANT, Z. et PLANAS, J. (1998). *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC Press. 60
- BAŽANT, Z. P. (1984). Size effect in blunt fracture : Concrete, rock, metal. *Journal of Engineering Mechanics*, 110 (4):518–535. 56
- BAŽANT, Z. P. (1994). Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions. *Journal of Engineering Mechanics*, 120:593–617. xi, 41
- BAŽANT, Z. P. et SENER, S. (1988). Size effects in pullout tests. *Materials Journal*, 83(5):347–351. 98, 99
- BOTTONI, M. et DUFOUR (2010). Topological search of the crack path from a damage-type mechanical computation. *In EURO-C*. 92, 93, 95

- BOTTONI, M., DUFOUR, F. et GIRY, C. (2011). Topological search of the crack path from a damage-type mechanical computation. *Engineering Fracture Mechanics*. In preparation. 81, 92
- BUFFO-LACARRIERE, L., ROSPARS, C., DELAPLACE, A., DUONG, A. V. et JASON, L. (2011). Synthesis of the results. *In 2nd Workshop on Control of Cracking in R.C. structures. ConCrack 2*, Paris. 118
- CARPINTERI, A. (1994). Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties. *Mechanics of Materials*, 18(2):89 – 101. 56
- CEB-FIB (1993). Ceb-fib model code 1990. design code. Rapport technique, Comité Euro-international du béton. 99
- CHAMBON, R., CAILLERIE, D. et MATSUCHIMA, T. (2001). Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials : localization studies. *International Journal of Solids and Structures*, 38(46-47):8503 – 8527. 23, 90
- CHOINSKA, M. (2006). *Effets de la température, du chargement mécanique et de leurs interactions sur la perméabilité du béton des structures*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes. 3
- CLÉMENT, J. L. (1987). *Interface acier-béton et comportement des structures en béton armé : caractérisation - modélisation*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France. 98, 99, 100, 103
- COMBESCURE, D. et WANG, F. (2007). Assesments of existing rc structures under severe dynamic loading using non linear modelling. *In CONSEC 07*, Tours, France. 119
- COMI, C., MARIANI, S. et PEREGO, U. (2007). An extended fe strategy for transition from continuum damage to mode i cohesive crack propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(2):213–238. 83
- COSSERAT, E. et COSSERAT, F. (1909). *Théorie des corps déformables*. Hermann, Paris. 23
- CRISFIELD, M. A. (1991). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1. Wiley, Chichester. 15
- D'ADDETTA, G. A. et RAMM, E. (2006). A microstructure-based simulation environment on the basis of an interface enhanced particle model. *Granular Matter*, 8(3-4):159–174. 5
- DE BORST, R. et MÜHLHAUS, H.-B. (1992). Gradient-dependent plasticity : Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(3):521–539. 26
- de BORST, R. et NAUTA, P. (1985). Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Engineering Computations*, 2:35–46. 8
- de BORST, R. et SLUYS, L. J. (1991). Localisation in a cosserat continuum under static and dynamic loading conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90:805 – 827. 24
- de VREE, J., BREKELMANS, W. et VAN, A. (1995). Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers and Structures*, 55:581–588. 11, 31

- DESMORAT, R. et GATUINGT, F. (2007). Introduction of an internal time in nonlocal integral theories. Internal report LMT-Cachan, number 268, year 2007, ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6/PRES Universud Paris. 39, 40
- DESMORAT, R., GATUINGT, F. et RAGUENEAU, F. (2007). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(10):1539 – 1560. 13, 25
- DOMINGUEZ, N. (2005). *Etude de la liaison acier-béton : De la modélisation du phénomène à la formulation d'un élément fini enrichi Béton armé*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France. 99
- DUFOUR, F., LEGRAIN, G., PIJAUDIER-CABOT, G. et HUERTA, A. (2011). Estimate of crack opening from a 2d continuum-based fe computation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, (in press). 79, 80, 92
- DUFOUR, F., PIJAUDIER-CABOT, G., CHOINSKA, M. et HUERTA, A. (2008). Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. *Computers and Concrete*, 5(4):375–388. 76, 80
- ELIGEHAUSEN, R., POPOV, E. et BERTERO, V. (1983). Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations. Rapport technique, National Science Foundation. 98, 99
- ERINGEN, A. et EDELEN, D. (1972). On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3):233 – 248. 23
- ERINGEN, A. C., SPEZIALE, C. G. et KIM, B. S. (1977). Crack-tip problem in non-local elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25:255–339. 30
- FEENSTRA, P. (1993). *Computational aspects of biaxial stress in plain or reinforced concrete*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology, The Netherlands. 11
- FEYEL, J. et CHABOCHE, J. (2000). Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materiales. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3-4):309 – 330. 5
- GEERS, M. G. D., de BORST, R., BREKELMANS, W. A. M. et PEERLINGS, R. H. J. (1998). Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 160(1-2):133 – 153. 38, 43, 48
- GIRY, C., BOTTONI, M., DUFOUR, F., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2009). Endommagement et fissuration du béton armé : passage continu-discret. In *CFM09 XIXème congrès français de Mécanique*, Marseille, France. 91
- GOTO, Y. (1971). Cracks formed in concrete around bars. *ACI Journal*, 68(4):740–748. 98
- GUEDES, J., PEGON, P. et PINTO, A. (1994). A fibre timoshenko beam element in castem2000. special publication i.94.31., J.R.C., I-21020, Ispra, Italy. 107
- GUINEA, G., PASTOR, J., PLANAS, J. et ELICES, M. (1998). Stress intensity factor, compliance and cmod for a general three-point-bend beam. *International Journal of Fracture*, 89:103–116. 60

- Haidar, K., Dubé, J. F. et Pijaudier-Cabot, G. (2003). Modelling crack propagation in concrete structures with a two scale approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 27(13):1187–1205. 110
- Hill, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 6:236–249. 14, 20
- Hillerborg, A., Modeer, M. et Petersson, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–782. xi, 6, 22, 114
- Jason, L., Huerta, A., Pijaudier-Cabot, G. et Ghavami, S. (2006). An elastic plastic damage formulation for concrete : Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7077 – 7092. 13
- Jason, L., La Borderie, C., Giry, C., Richard, B., Chambart, M. et Thillard, G. (2010). Benchmark on the cracking simulation of reinforced concrete ties. In *FraMCoS'7*, Jeju, KOREA. 91
- Jirásek, M. (1998). Nonlocal models for damage and fracture : Comparison of approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 35(31-32):4133 – 4145. 25
- Jirásek, M. et Patzák, B. (2002). Consistent tangent stiffness for nonlocal damage models. *Computers and Structures*, 80(14-15):1279 – 1293. 51
- Jirásek, M. et Rolshoven, S. (2003). Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain-softening materials. *International Journal of Engineering Science*, 41(13-14):1553 – 1602. 25
- Jirasek, M. et Zimmermann, T. (1998). Analyse of rotating crack model. *ACSE Engineering Mechanics*, 124(8):842–851. 8
- Kachanov, M. (1987). Elastic solids with many cracks—a simple method of analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 23:23–43. 41, 42
- Kotronis, P., Chambon, R., Mazars, J. et Collin, F. (2005a). Local second gradient models and damage mechanics : application to concrete. In *11th international conference on fracture, Turin, Italy*. 24
- Kotronis, P., Ragueneau, F. et Mazars, J. (2005b). A simplified modelling strategy for r/c walls satisfying ps92 and ec8 design. *Engineering Structures*, 27:1197–1208. 109
- Krayani (2007). *Contributions à la modélisation non linéaire du comportement mécanique du béton et des ouvrages en béton armé et précontraint*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes. 14
- Krayani, A., Pijaudier-Cabot, G. et Dufour, F. (2009). Boundary effect on weight function in non-local damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 76:2217–2231. 35, 44, 45, 47, 56, 63, 88
- La Borderie, C. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : Modélisation et Application à l'analyse des structures en béton*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI. 12, 135

- LA BORDERIE, C., LAWRENCE, C. et MENOUE, A. (2007). Approche mésoscopique du comportement du béton. apport de la représentation géométrique. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 11/4:407–421. 5, 90
- LANDIS, E. N. (1999). Micro-macro fracture relationships and acoustic emissions in concrete. *Construction and Building Materials*, 13(1-2):65 – 72. 4
- LEMAÎTRE, J. et CHABOCHE, J. L. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod. 8
- LORENTZ, E. et BADEL, P. (2004). A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(2):499–526. 18
- MAO, K. et SUN, C. (1991). A refined global local finite-element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1):29–43. 110
- MATALLAH, M., LA BORDERIE, C. et MAUREL, O. (2010). A practical method to estimate crack openings in concrete structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 76(15):1615–1633. 78
- MAZARS, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non-linéaire et à la rupture du béton de structure*. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI. Thèse d'état. 11
- MAZARS, J. (1986). A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6):729 – 737. 8, 13, 14, 31, 35
- MAZARS, J., KOTRONIS, P., RAGUENEAU, F. et CASAUX, G. (2006). Using multifiber beams to account for shear and torsion : Applications to concrete structural elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7264–7281. 109
- MAZARS, J. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1996). From damage to fracture mechanics and conversely : A combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):3327 – 3342. 111
- MENEGOTO, M. et PINTO, P. (1973). Method of analysis of cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behaviour of elements under combined normal force and bending. Rapport technique Final report. 328p, Symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on by well-defined repeated loads, Lisbon, Portugal. 135
- MIVELAZ, P. (1996). *Étanchéité des structures en béton armé - fuites au travers d'un élément fissuré*. Thèse de doctorat, EPFL, Lausanne, Switzerland. xiii, 86, 87, 89, 105
- MOES, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150. 6, 75
- MONAGHAN, D., DOHERTY, I., MC COURTE, D. et ARMSTRONG, C. (2003). Coupling 1d beams to 3d bodies. In *Proceedings of the 7th international meshing roundtable.*, pages 285–293, Sandia National Lab. 110
- MÜHLHAUS, H.-B. et AIFANTIS, E. (1991). A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28(7):845 – 857. 26

- NEMAT-NASSER, S. et HORI, M. (1999). *Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Materials*. Elsevier, Amsterdam-Lausanne-New York. 4
- OŽBOLT, J. et BAŽANT, Z. P. (1996). Numerical smeared fracture analysis : Nonlocal micro-crack interaction approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(4):635–661. 42, 63
- PEERLINGS, R. H. J., de BORST, R., BREKELMANS, W. A. M. et de VREE, J. H. P. (1996). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:937–953. 26
- PEERLINGS, R. H. J., de BORST, R., BREKELMANS, W. A. M. et GEERS, M. (1998). Gradient enhanced damage modelling of concrete fracture. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 3:323–342. 11, 35
- PEERLINGS, R. H. J., GEERS, M. G. D., de BORST, R. et BREKELMANS, W. A. M. (2001). A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38:7723–7746. 31, 38
- PEGON, P. (1994). A timoshenko simple beam element in castem 2000. special publication I.94.04, J.R.C., I-21020, Ispra, Italy. 107
- PEGON, P. et ANTHOINE, A. (1997). Numerical strategies for solving continuum damage problems with softening : Application to the homogenization of masonry. *Computers & Structures*, 64:623 – 642. 18
- PENSÉE, V., KONDO, D. et DORMIEUX, L. (2002). Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(8):889–897. 5
- PIJAUDIER-CABOT, G. et BENALLAL, A. (1993). Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 30(13):1761 – 1775. 25, 48
- PIJAUDIER-CABOT, G. et DUFOUR, F. (2010). Nonlocal damage model : boundary and evolving boundary effects. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 14 6-7:729–749. xi, 40, 43, 44, 45, 76
- PIJAUDIER-CABOT, G., HAIDAR, K. et DUBÉ, J. (2004). Non-local damage model with evolving internal length. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(7-8):633–652. xi, 42, 43, 48
- PIJAUDIER-CABOT, G. et HUERTA, A. (1991). Finite element analysis of bifurcation in non-local strain softening solids. *In Computer methods in applied mechanics and engineering.*, volume 90, pages 905–919. 51
- PIJAUDIER-CABOT, G., MAZARS, J. et PUULIKOWSKI, J. (1991). Steel-concrete bond analysis with nonlocal continuous damage. *Journal of Structural Engineering*, 117(3):862–882. 10, 99, 101, 105
- RAMM, E. (1980). Strategies for tracing nonlinear response near limit points. *In W. WUNDERLICH, E. Stein, K.-J. B., éditeur : Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Bochum. 2nd US-Europe Workshop. 18
- RASHID, Y. R. (1968). Analysis prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 7:334–344. 8

- RICE, J. R. (1976). The localization of plastic deformation. *In International Congress of Theoretical and Applied Mechanics.*, volume 1, pages 207–220, Delft, The Netherlands. 20
- RICHARD, B. (2010). *Comportement des éléments de structures en béton armé dégradés par corrosion. La problématique de la modélisation de l'interface acier-béton en présence de corrosion.* Thèse de doctorat, Université Paris Est. 99
- RICHARD, B., RAGUENEAU, F., ADELAÏDE, L. et CREMONA, C. (2011). A multi-fiber approach for modeling corroded reinforced concrete structures. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30(6):950 – 961. 119
- RIKS, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15(7):529 – 551. 15
- RIZZI, E., CAROL, I. et WILLAM, K. (1995). Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(4):541–554. 71
- RODRÍGUEZ-FERRAN, A. et HUERTA, A. (2000). Error estimation and adaptivity for nonlocal damage models. *International Journal of Solids and Structures*, 37(48-50):7501 – 7528. 18
- ROTS, J. G. (2001). Sequentially linear continuum model for concrete fracture. *In Fourth International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, pages 831–839, Cachan, France. 15
- RUDNICKI, J. et RICE, J. (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanic*, 23:371–394. 20
- SAOURIDIS, C. et MAZARS, J. (1992). Prediction of the failure and size effect in concrete via a bi-scale damage approach. *Engineering Computations*, 9:329–344. 25
- SHAH, S. (1990). Size-effect method for determining fracture energy and process zone size of concrete. *Materials and Structures*, 23:461–465. 61
- SIMONE, A., ASKES, H., PEERLINGS, R. H. J. et SLUYS, L. J. (2004a). Interpolation requirements for implicit gradient-enhanced continuum damage models. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 20(2):163–165. 26, 74
- SIMONE, A., ASKES, H. et SLUYS, L. J. (2004b). Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient-enhanced media. *International Journal of Solids and Structures*, 41:351–363. 30, 31, 32, 38, 53, 54, 56, 64, 67
- SIMONE, A., WELLS, G. et SLUYS, L. (2003). From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(41-42):4581 – 4607. 83
- TADA, H., PARIS, P. C. et IRWIN, G. R. (1985). *The Stress Analysis of Cracks Handbook.* ASME Press. 30
- TERRIEN, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post-critique. *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 105:65–72. 3
- VERPEAUX, P., CHARRAS, T. et MILLARD, A. (1988). Castem 2000 une approche moderne du calcul des structures. *In Calcul des structures et intelligence artificielle*, pages 261–271. (Fouet J.M., Ladevèze P., Ohayon R., Eds), Pluralis. 17, 50

-
- VOYIADJIS, G. et ABU AL-RUB, R. (2005). Gradient plasticity theory with a variable length scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*, 42(14):3998–4029. 38, 39, 63
- WEIBULL, W. (1939). A statistical theory of the strength of materials. In *Proceedings of the Royal Swedish Institute for Engineering Research*, numéro 151. 56
- WEMPNER, G. A. (1971). Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(11):1581 – 1599. 15
- WILLAM, K., PRAMONO, E. et STURE, S. (1987). Fundamental issues of smeared crack models. In *International Conference on Fracture of concrete and rock*, pages 192–207, Bethel, USA. 8