



HAL
open science

Théorie Générale Planétaire. Eléments orbitaux des planètes sur 1 million d'années

Jacques Laskar

► **To cite this version:**

Jacques Laskar. Théorie Générale Planétaire. Eléments orbitaux des planètes sur 1 million d'années. Planétologie et astrophysique de la terre [astro-ph.EP]. Observatoire de Paris, 1984. Français. NNT : . tel-00702723

HAL Id: tel-00702723

<https://theses.hal.science/tel-00702723v1>

Submitted on 31 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée

A L' OBSERVATOIRE DE PARIS

pour l'obtention du

Doctorat de 3^e cycle

Spécialité : ASTRONOMIE ET TECHNIQUES SPATIALES

par

JACQUES LASKAR

Sujet de thèse : THEORIE GENERALE PLANETAIRE :
ELEMENTS ORBITAUX DES PLANETES
SUR 1 MILLION D'ANNÉES.

Soutenue le 19 juin 1984 devant le jury composé de :

M : A. BRAHIC

Président

MM : A. BERGER

Examineurs

P. BRETAGNON

J. CHAPRONT

L. DURIEZ

J. HENRARD

J. KOVALEVSKY

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur A. Brahic d'avoir accepté si volontiers de présider ce jury. Je remercie aussi Messieurs A. Berger, J. Henrard et J. Kovalevsky pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, et l'honneur qu'ils me font en participant à ce jury.

Le sujet de cette thèse m'a été proposé en janvier 1983 par Monsieur J. Chapront auquel j'exprime ici toute ma gratitude.

Cette thèse est le prolongement des travaux de Monsieur L. Duriez à qui va ma reconnaissance pour son aide durant ces 18 mois.

La complexité des théories planétaires impose des comparaisons nombreuses et fréquentes avec des résultats dont l'authenticité ne fait pas de doutes. Les discussions fréquentes avec Monsieur P. Bretagnon et son expérience irremplaçable des théories planétaires m'ont grandement facilité la tâche dans cette étape délicate. Je tiens à le remercier ici pour sa disponibilité à mon égard.

Je remercie aussi Monsieur B. Morando et toute l'équipe de chercheurs et techniciens du Bureau des Longitudes où j'ai pu trouver un environnement propice au travail.

TABLE DES MATIERES

	page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I. CALCUL DU SYSTEME AUTONOME	9
I.1. Notations. Equations	10
I.2. Intégration des équations	16
I.3. Réduction du nombre de variables et de paramètres	19
I.4. Organisation des séries et des produits	21
I.4.1. Organisation des produits	21
I.4.2. Listes des monômes	28
I.4.3. Inégalités et monômes	29
I.5. Précision dans le calcul des coefficients C_A	35
I.5.1. Convergence de la série d'ordre 2 $\Sigma C_A(\mathcal{L})$	38
I.5.2. Précision sur le calcul des coefficients $C_A(\mathcal{L})$	43
I.6. Calcul des constantes p_{0i}	45
I.6.1. Approximation 1	47
I.6.2. Approximation 2	49
I.6.3. Approximation 3	57
I.7. Le système autonome	59
I.7.1. Organisation du système autonome	59
I.7.2. Calcul de l'ordre 1	61
I.7.3. Calcul de l'ordre 2	61
I.7.4. Conclusions du chapitre I	63

CHAPITRE II. RESOLUTION ANALYTIQUE	65
II.1. Solution de Lagrange	66
II.2. Normalisation du système autonome	72
II.2.1. Normalisation d'un système polynomial	72
II.2.2. Application au système autonome	73
II.2.3. Résolution du système normalisé	76
II.3. Mise en oeuvre de la théorie	77
II.3.1. Calcul de $\Psi(\beta, \bar{\beta})$	77
II.3.2. Calcul de la solution de degré 3	81
II.3.3. Problèmes de petits diviseurs	86
II.3.4. Conclusions du chapitre II	90
 CHAPITRE III. RESOLUTION NUMERIQUE	 91
III.1. Intégration numérique	92
III.2. Perturbations relativistes et effet de la Lune	94
III.3. Intégration sur 10 000 ans	97
III.4. Prolongement des théories à variations séculaires par la théorie générale	111
III.5. Intégration numérique sur 1 million d'années	119
III.6. Conclusions du chapitre III	137
 CONCLUSION	 139
 ANNEXE : Rapidité du NAS 9080	 145
 BIBLIOGRAPHIE	 147

INTRODUCTION

A) THEORIES PLANETAIRES. SOLUTIONS ANALYTIQUES, SOLUTIONS NUMERIQUES.

Les équations du mouvement de N corps soumis à la loi d'attraction universelle ne sont pas intégrables dès que N est supérieur à 2. On est alors obligé d'utiliser des méthodes approchées pour obtenir des solutions du mouvement des planètes.

Le système solaire, limité aux 8 planètes principales (on exclut Pluton), possède des caractéristiques spécifiques : corps central massif, excentricités et inclinaisons faibles, ce qui permet d'utiliser des méthodes de perturbations pour obtenir des solutions planétaires. Ces méthodes sont développées depuis près de deux siècles, à la suite des travaux fondamentaux de Le Verrier et de Newcomb. Actuellement, avec le développement des ordinateurs, elles ont atteint une très grande précision, de l'ordre du centième de seconde d'arc sur les longitudes (Bretagnon 1982, Simon 1983). Dans ces solutions, dites classiques, ou à variations séculaires, les termes à longue période (ou termes séculaires), sont obtenus sous la forme de polynômes du temps, ce qui entraîne une détérioration rapide de leur précision après 1 millier d'années.

L'apparition des ordinateurs a aussi permis d'effectuer des intégrations numériques directes des équations du mouvement, qui fournissent actuellement les solutions les plus précises possibles; les écarts avec les observations ne proviennent quasiment plus que de la détermination des constantes initiales. Actuellement, les intégrations numériques ne sont limitées que par la vitesse de calcul des ordinateurs et par la très grande quantité de résultats qu'il faut ensuite traiter pour en retirer une information exploitable.

La plus longue intégration numérique du système solaire complet incluant la Lune, DE102 (qui est beaucoup plus qu'une simple intégration du problème des N corps), a été effectuée sur 44 siècles avec un pas de quelques heures, et a pris 9 jours de calcul sur UNIVAC 1100/81 (Newhall et al. 1983).

Si on se limite aux seules planètes extérieures (Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, et éventuellement Pluton), le pas d'intégration peut être beaucoup plus important. Cohen, Hubbard et Oesterwinter (1973) ont effectué une intégration numérique des 5 planètes extérieures sur 500 000 ans de part et d'autre de l'époque 1950. avec un pas de 40 jours. Le perfectionnement des ordinateurs et l'intérêt pour l'étude des résonances séculaires dans le système solaire suscitent actuellement de nouvelles intégrations numériques, comme celle effectuée par Kinoshita et Nakai (1984) sur 5 millions d'années pour les 5 planètes extérieures.

Par contre, il est actuellement impossible d'étendre ces résultats à l'ensemble des planètes, et d'obtenir par intégration numérique directe, une solution pour la Terre (par exemple) sur une durée équivalente. On est alors obligé d'avoir recours à des solutions analytiques à longues périodes.

Ce sont les solutions du système des équations différentielles du mouvement, que l'on a moyenné pour en isoler la partie séculaire. On peut ainsi obtenir les termes séculaires sous forme quasi-périodique, ce qui fournit une solution dont la durée de validité est beaucoup plus grande que dans les théories classiques. Cette solution sera cependant moins précise sur quelques milliers d'années autour de l'origine car elle ne comprend pas les termes à courte période (on pourrait les inclure partiellement dans la solution, mais cela engendre un très grand nombre de termes dont l'utilité n'est pas évidente pour une solution planétaire au delà de 10 000 ans).

B) HISTORIQUE DES SOLUTIONS A LONGUES PERIODES.

Il y a eu de nombreuses études sur les variations à très longues périodes des éléments orbitaux des planètes. Les premières approches ne tenaient compte que des termes linéaires: Le Verrier (1855), et ensuite Stockwell (1873) et Harzer (1895). Les théories développées par ces auteurs

diffèrent essentiellement par leur choix de variables, et les améliorations successives qu'elles apportent proviennent de déterminations plus précises des masses planétaires.

Hill (1897) fut le premier à introduire les termes de degré 3 et 5 en excentricité dans les perturbations du second ordre par rapport aux masses du couple Jupiter-Saturne, à partir du travail de Le Verrier. Ses travaux furent ensuite repris par Brouwer et Van Woerkom (1950), qui ont calculé une solution de Lagrange pour les 8 planètes (c'est-à-dire une solution de la partie linéaire) ; ils ont alors développé le cas du couple Jupiter-Saturne, en tenant compte des termes de Le Verrier, déjà utilisés par Hill. Néanmoins, les valeurs initiales qu'ils ont utilisé pour Vénus et la Terre étaient erronées, et le calcul fut repris ensuite par Sharaf et Boudnikova (1967) avec des valeurs plus correctes.

Récemment, Bretagnon (1974) a calculé une solution pour les termes à très longue période, jusqu'au degré 3 en excentricité-inclinaison, et à l'ordre 2 par rapport aux masses planétaires. Il a amélioré ensuite cette solution en tenant compte des effets de la relativité et de la Lune, et en ajustant les fréquences principales de sa solution sur les résultats de sa théorie à variations séculaires (Bretagnon, 1984a). Néanmoins, on peut considérer que la durée de validité de cette théorie ne dépasse pas 10^6 ans à cause de l'incertitude qui subsiste dans la détermination des fréquences.

Pour étendre la validité des solutions, il est nécessaire d'utiliser les méthodes des théories générales planétaires qui conservent la forme analytique du système d'équations différentielles initiales. Il y a eu de nombreux travaux sur ce sujet, mais la complexité des calculs algébriques nécessaires à l'élaboration de ces théories en a toujours limité les résultats. Le travail le plus avancé jusqu'à présent, sur lequel nous avons basé notre étude, est sans doute celui de Duriez (1979) qui a considéré les contributions du degré 5 en excentricité, et même 7 pour le couple Jupiter-Saturne, mais seulement dans le cas des 4 planètes extérieures.

C) INTERET D'UNE SOLUTION PLANETAIRE SUR PLUSIEURS MILLIONS D'ANNEES.

Parmi toutes les théories expliquant l'origine des variations climatiques importantes que la Terre a connu dans les derniers millions d'années de son histoire et qui ont donné lieu, en particulier, aux périodes glaciaires du quaternaire, la théorie astronomique des paléoclimats de Milankovitch est sans doute actuellement la moins controversée. Elaborée au début du siècle, cette théorie explique les variations climatiques de la Terre par des variations de son obliquité et de la géométrie de son orbite qui induisent alors des variations de l'énergie solaire reçue à sa surface aux différentes latitudes. Longtemps tenue pour invérifiable, cette théorie a reçu une confirmation récente grâce aux nouvelles méthodes isotopiques permettant une datation plus précise des sédiments géologiques qui ont alors permis d'établir une meilleure chronologie des périodes glaciaires (Hays et al. 1976).

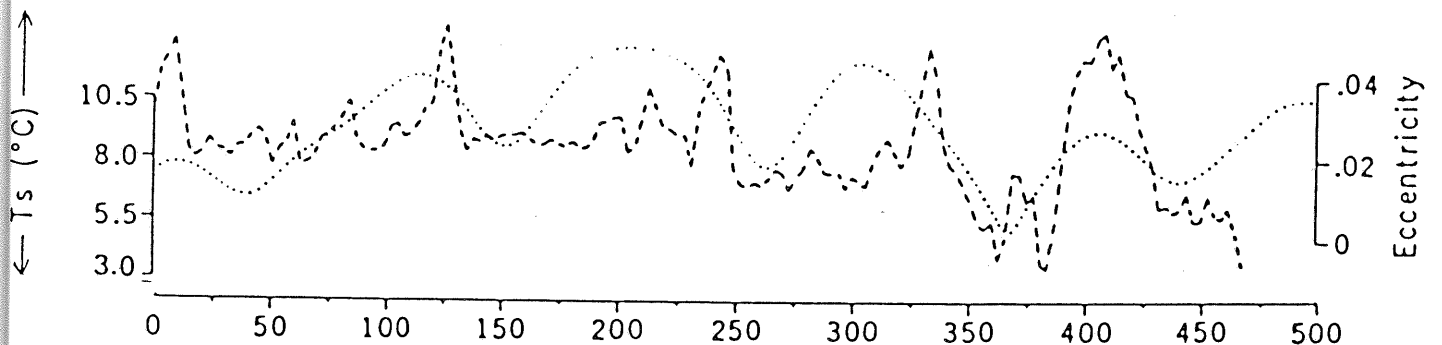


Figure 0. Corrélation entre les variations de la température moyenne de la mer, fournie par les données paléontologiques (courbe en tirets), et les variations de l'excentricité de la Terre (pointillés), sur 500 000 ans (Hays et al. 1976).

Actuellement, ces études suscitent de très nombreux travaux (Berger et al. 1984), en particulier sur l'élaboration de modèles climatiques répondant au forçage des données orbitales. La qualité croissante de ces études

rend alors nécessaire le calcul d'une solution plus précise pour les variations séculaires des éléments orbitaux de la Terre sur plusieurs millions d'années.

L'existence simultanée d'une théorie planétaire suffisamment précise et de moyens fiables de datation géologique, liés à des modèles éprouvés de réponse climatique au forçage orbital pourrait même peut-être permettre d'utiliser les données paléontologiques comme des observations datant de plusieurs millions d'années, ce qui apporterait des éléments nouveaux dans l'étude du système solaire.

D) METHODE DE CALCUL.

La méthode de calcul utilisée consiste à isoler le système différentiel autonome régissant les variations à très longues périodes des éléments orbitaux des planètes en étendant le travail de Duriez (1979) aux 8 planètes, tout en recherchant une plus grande précision dans les calculs.

L'obtention du système autonome est une étape très longue car elle nécessite de nombreuses manipulations algébriques sur des séries très volumineuses. Afin de rendre possible toutes ces opérations, nous avons développé un algorithme de manipulation algébrique implicite, directement adapté au problème, et qui permet un calcul très rapide des termes du second ordre. (Chapitre I).

Cet algorithme a permis d'obtenir un système autonome complet à l'ordre 2 des masses, et jusqu'au degré 5 en excentricité-inclinaison, avec une précision relative de 10^{-6} . Ce système comprend environ 150 000 termes polynomiaux organisés en tableaux tous identiques, ce qui permet une élaboration très aisée des programmes de traitement du système différentiel (Laskar 1984).

1) Intégration analytique (Chapitre II).

Nous avons cherché, dans un premier temps, à intégrer analytiquement le système différentiel obtenu, en utilisant la méthode de normalisation développée par Brumberg (1980). Nous avons ainsi construit un algorithme qui a permis d'obtenir une solution analytique du système de degré 3, et qui pourrait aussi traiter le système complet de degré 5.

L'analyse des résultats obtenus nous a alors convaincus de la difficulté, voire de l'impossibilité d'obtenir des résultats de grande précision par cette méthode dans le cas du système des 8 planètes à cause de la présence constante de petits diviseurs qui dégradent considérablement la solution, sans tenir compte du fait que si la solution de degré 3 nécessite le calcul de 25 000 termes environ, celle de degré 5 en nécessite 3 000 000.

2) Intégration numérique (Chapitre III).

Devant cette difficulté d'obtenir une solution dont la précision est de l'ordre de celle avec laquelle le système autonome est calculé, nous avons décidé d'intégrer numériquement celui-ci. Contrairement à une intégration numérique directe des équations différentielles du mouvement où il est nécessaire de prendre un pas d'intégration très court, l'intégration numérique du système autonome peut s'effectuer avec un pas de l'ordre de 500 à 1000 ans, tout en gardant une très grande précision. On peut alors rajouter assez aisément quelques termes qui traduisent les effets de la relativité et de la Lune sans accroître la complexité du système qui comprend déjà environ 150 000 termes. Ici encore, l'organisation très stricte des termes en tableaux permet une évaluation très rapide du second membre.

CHAPITRE I

CALCUL DU SYSTEME AUTONOME

I.1. NOTATIONS. EQUATIONS.

L'orbite d'une planète P est représentée par ses éléments osculateurs elliptiques héliocentriques :

- a : demi grand axe
- e : excentricité
- i : inclinaison
- Ω : longitude du noeud ascendant
- $\tilde{\omega}$: longitude du périhélie
- ϵ : longitude moyenne à l'instant initial.

On utilisera le même système de variables $(p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta)$ que celui de Duriez (1979) défini par :

$$\begin{aligned}
 a &= A(1 + p)^{-2/3} && \Leftrightarrow && n &= N(1 + p) \\
 \lambda &= Nt - \sqrt{-1} q = nt + \epsilon \\
 z &= e \exp\sqrt{-1} \tilde{\omega} \\
 \zeta &= \sin \frac{i}{2} \exp\sqrt{-1} \Omega
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Les variables \bar{z} et $\bar{\zeta}$ sont les variables complexes conjuguées de z et ζ ; A et N sont des constantes fixées une fois pour toutes, qui représentent le demi grand axe et le moyen mouvement d'un mouvement circulaire de référence. Les mouvements seront alors recherchés au voisinage de cette orbite de référence. La variable p traduit alors l'écart au moyen mouvement de référence, et la variable q l'écart à la longitude moyenne.

On prendra pour N la valeur donnée par le moyen mouvement moyen des théories à variations séculaires (VSOP82, Bretagnon 1982) , et A est obtenu par la loi de Kepler :

$$N^2 A^3 = G M_{\odot} (1 + m/M_{\odot}) = n^2 a^3 \quad (1.2)$$

où G est la constante de la gravitation, M_{\odot} la masse solaire et m la masse de la planète considérée. On notera que cette définition est différente de celle de Duriez (1979) qui choisit des éléments de référence d'ordre zéro par rapport aux masses, définis par $N^2 A^3 = G M_{\odot}$.

On utilisera aussi les variables :

$$\begin{aligned} X &= e \exp \sqrt{-1} (\lambda - \bar{\omega}) = \bar{z} \exp \sqrt{-1} \lambda \\ Y &= \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} (\lambda - \bar{\Omega}) = \bar{\zeta} \exp \sqrt{-1} \lambda \\ \phi &= \sqrt{1 - z\bar{z}} \quad ; \quad \psi = 1/(1 + \phi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Avec ces notations, les variations des éléments (p, q, z, ζ) définissant l'orbite osculatrice de la planète P sont obtenues au moyen des équations de Lagrange classiques. On a alors (Duriez 1982) :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{-3\sqrt{-1}}{NA^2} (1+p)^{4/3} \frac{\partial R}{\partial q} \\ \frac{dq}{dt} &= \sqrt{-1} Np + \frac{\sqrt{-1}(1+p)^{1/3}}{NA^2} \left[3(1+p) \frac{\partial R}{\partial p} + \right. \\ &\quad \left. + \phi\psi \left(z \frac{\partial R}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{1}{2\phi} \left(\zeta \frac{\partial R}{\partial \zeta} + \bar{\zeta} \frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}} \right) \right] \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\sqrt{-1}(1+p)^{1/3}}{NA^2} \left[2\psi \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} - \phi\psi z \frac{\partial R}{\partial q} + \frac{z}{2\phi} \left(\zeta \frac{\partial R}{\partial \zeta} + \bar{\zeta} \frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}} \right) \right] \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\sqrt{-1}(1+p)^{1/3}}{2\phi NA^2} \left[\frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}} - \zeta \frac{\partial R}{\partial q} + \zeta \left(-z \frac{\partial R}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

On considère le système solaire, comprenant le Soleil et les 8 planètes principales. Pluton est exclu à cause de sa très faible masse, et aussi parce que son traitement nécessite une formulation spéciale. La fonction perturbatrice R_i de la planète P_i est alors :

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^8 R_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^8 Gm_j \left(1/\Delta_{ij} - \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j / r_j^3 \right) \quad (1.5)$$

r_i désigne le module du rayon vecteur \vec{r}_i reliant le Soleil à la planète P_i . Δ_{ij} désigne la distance de P_i à P_j .

On utilise aussi le développement des seconds membres de (1.4) obtenus par Duriez (1977) au moyen du développement de l'inverse de la distance donné par Abu El Ata et Chapront (1975). Le système différentiel est alors représenté sous la forme suivante, rassemblant $6 \times 8 = 48$ équations :

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \sqrt{-1} L_i^{(p)}(p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta) \\ \frac{dq_i}{dt} &= \sqrt{-1} L_i^{(q)}(p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta) + \sqrt{-1} N_i p_i \\ \frac{d\bar{z}_i}{dt} &= \sqrt{-1} L_i^{(\bar{z})}(p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta) \\ \frac{d\bar{\zeta}_i}{dt} &= \sqrt{-1} L_i^{(\bar{\zeta})}(p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta) \\ \frac{dz_i}{dt} &= \sqrt{-1} L_i^{(z)}(p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta) \\ \frac{d\zeta_i}{dt} &= \sqrt{-1} L_i^{(\zeta)}(p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dans tout ce qui suit, et sans aucune confusion possible avec l'excentricité, la lettre (e) désignera l'une des équations (1.6) relative à l'une des variables $p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta$. L'indice (σ) désignera l'une des variables $p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta$. L'expression d'un second membre $L_i^{(e)}$ de (1.6) en série de Fourier est alors :

$$L_i^{(e)}(p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta) = N_i \sum_{j \neq i} m_j / M_\Theta (1 + m_i / M_\Theta) \times$$

$$\times \sum_{n_{10} \in \mathbb{N}^{10}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} C_{n_{10}, l}^{(e)}(\alpha_{ij}) p_i^{g_i} \bar{z}_i^{\bar{n}_i} \bar{\zeta}_i^{\bar{v}_i} z_i^{n_i} \zeta_i^{v_i} \times \quad (1.7)$$

$$\times p_j^{g_j} \bar{z}_j^{\bar{n}_j} \bar{\zeta}_j^{\bar{v}_j} z_j^{n_j} \zeta_j^{v_j} \times \exp(k_i q_i + k_j q_j + \sqrt{-1} (k_i N_i + k_j N_j) t)$$

avec

$$n_{10} = (g_i, \bar{n}_i, \bar{v}_i, n_i, v_i, g_j, \bar{n}_j, \bar{v}_j, n_j, v_j) \in \mathbb{N}^{10}$$

$$\alpha_{ij} = \text{Min}(A_i, A_j) / \text{Max}(A_i, A_j)$$

et où $C_{n_{10}, l}^{(e)}(\alpha_{ij})$ est un coefficient numérique réel, calculé pour une valeur donnée de α_{ij} . Pour toute équation (e), les relations classiques de d'Alembert donnent :

$$k_i = \bar{n}_i + \bar{v}_i - n_i - v_i + l + \tau(e)$$

$$k_j = \bar{n}_j + \bar{v}_j - n_j - v_j - l \quad (1.8)$$

$$k_i + k_j = \bar{n}_i + \bar{v}_i + \bar{n}_j + \bar{v}_j - n_i - v_i - n_j - v_j + \tau(e)$$

avec

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \tau(q) = 0 \\ \tau(\bar{z}) &= \tau(\bar{\zeta}) = -1 \\ \tau(z) &= \tau(\zeta) = +1 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Les séries $L^{(p)}$, $L^{(q)}$, $L^{(\bar{z})}$, $L^{(z)}$, sont paires par rapport aux variables $\bar{\zeta}$, ζ (variables inclinaisons) ; alors que $L^{(\bar{\zeta})}$, et $L^{(\zeta)}$ sont impaires par rapport à $\bar{\zeta}$, ζ .

Pour toute série L , on désignera par $\langle L \rangle$ la somme des termes ne dépendant pas explicitement de t , ou *partie autonome*, et par $\{ L \}$ la somme des termes dépendant explicitement de t . On a alors

$$L = \langle L \rangle + \{ L \} \tag{1.10}$$

Les valeurs numériques prises par les différentes variables ne sont pas du même ordre de grandeur ; on peut les ranger en deux catégories :

- variables excentricité-inclinaison $(\bar{z}_i, \bar{\zeta}_i, z_i, \zeta_i)$ qui ont pour ordre de grandeur 0.1.

- variables p_i traduisant l'écart des demi grand axes aux demi-grands axes de référence (ou bien l'écart des moyens mouvements moyens, par la relation de Kepler (1.2)). Elles sont de l'ordre de grandeur des masses, soit 0.001 .

Si T est un terme d'une série L , on désignera par *grade* de T le degré total de T par rapport aux variables p_i , et par *degré* de T , le degré total de T par rapport aux variables excentricité-inclinaison, $\bar{z}_i, \bar{\zeta}_i, z_i, \zeta_i$. Le terme *ordre* sera réservé au numéro de l'approximation

dans le processus de moyennisation ; cela ne correspond pas tout à fait à l'ordre des masses utilisé par Duriez qui a choisi des orbites de référence différentes des nôtres . Dans nos termes d'ordre n , on retrouvera aussi une partie de l'ordre $n+1$ des masses.

I.2 INTEGRATION DES EQUATIONS .

On rassemble les variables $(p_i, q_i, \bar{z}_i, \bar{\zeta}_i, z_i, \zeta_i)_{i=1,8}$ dans un unique vecteur V de dimension $6 \times 8 = 48$. Le système différentiel (1.6) peut alors s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\frac{dV}{dt} = \Lambda(V, t) \quad (1.11)$$

Pour intégrer (1.11), on transforme le système différentiel de manière à isoler un système autonome (i.e. ne dépendant pas explicitement de t) régissant les variations séculaires des éléments orbitaux. On effectue le changement de variable dépendant de t :

$$V = V_0 + \Delta V(V_0, t) \quad (1.12)$$

ΔV est une fonction dépendant de t qui sera choisie de manière à ce que le système différentiel vérifié par V_0 soit autonome. Si on développe $\Lambda(V, t)$ en série de Taylor au voisinage de V_0 , l'équation (1.11) devient alors formellement :

$$\begin{aligned} \frac{dV_0}{dt} + \frac{\partial \Lambda}{\partial V_0}(V_0, t) \cdot \frac{dV_0}{dt} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}(V_0, t) &= \Lambda(V_0, t) + \frac{\partial \Lambda}{\partial V_0}(V_0, t) \cdot \Delta V(V_0, t) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial V_0^2}(V_0, t) \cdot \Delta V^2(V_0, t) + \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

On exige que V_0 soit la solution de la partie autonome de (1.13), c'est à dire :

$$\frac{dV_0}{dt} = \langle \Lambda(V_0, t) \rangle + \langle \frac{\partial \Lambda}{\partial V_0}(V_0, t) \cdot \Delta V(V_0, t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial V_0^2}(V_0, t) \cdot \Delta V^2(V_0, t) \rangle + \dots$$

Il suffit alors que $\Delta V(V_0, t)$ comprenne les termes à courtes périodes, et soit une solution particulière, sans constantes additives de l'équation

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial t}(V_0, t) = - \frac{\partial \Delta V}{\partial V_0} \cdot \frac{dV_0}{dt} + \{ \Lambda(V_0, t) \} + \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial V_0}(V_0, t) \cdot \Delta V(V_0, t) \right\} + \dots \quad (1.15)$$

Pour effectuer les identifications par ordre, on introduit un petit paramètre ε , de l'ordre de grandeur des masses planétaires, et on pose

$$\begin{aligned} \Lambda(V, t) &= \varepsilon \Lambda_\varepsilon(V, t) \\ \Delta V(V_0, t) &= \varepsilon \Delta_\varepsilon V(V_0, t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Le report de ces expressions dans (1.14) et (1.15) permet alors d'effectuer des identifications par ordre, selon les puissances du paramètre ε . L'identification stricte à l'ordre 1 de ε fournit une première approximation de la solution à courtes périodes, donnée par :

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial t} = \{ \Lambda(V_0, t) \} \quad (1.17)$$

En pratique, on préfère améliorer la première approximation de ΔV en calculant la solution plus complète $\Delta_1 V$ du système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_1 p_i}{\partial t} &= \sqrt{-1} \{ L_i^{(p)}(p_0, q_0, \bar{z}_0, \bar{\zeta}_0, z_0, \zeta_0, t) \} \\ \frac{\partial \Delta_1 q_i}{\partial t} &= \sqrt{-1} \{ L_i^{(q)}(p_0, q_0, \bar{z}_0, \bar{\zeta}_0, z_0, \zeta_0, t) \} + \sqrt{-1} N_i \Delta_1 p_i \\ \frac{\partial \Delta_1 \bar{z}_i}{\partial t} &= \sqrt{-1} \{ L_i^{(\bar{z})}(p_0, q_0, \bar{z}_0, \bar{\zeta}_0, z_0, \zeta_0, t) \} \\ \frac{\partial \Delta_1 \bar{\zeta}_i}{\partial t} &= \sqrt{-1} \{ L_i^{(\bar{\zeta})}(p_0, q_0, \bar{z}_0, \bar{\zeta}_0, z_0, \zeta_0, t) \} \end{aligned} \quad (1.18)$$

La substitution de $\Delta_1 V$ dans (1.14) fournit alors le système autonome rassemblant l'ordre 1 et 2 par rapport à ϵ :

$$\frac{dV_0}{dt} = \langle \Lambda(V_0, t) \rangle + \left\langle \frac{\partial \Lambda}{\partial V_0}(V_0, t) \cdot \Delta_1 V(V_0, t) \right\rangle \quad (1.19)$$

L'ordre 1 du système autonome étant fourni par le seul terme $\langle \Lambda(V_0, t) \rangle$.

Le but de notre travail est de construire et de résoudre le système d'ordre 2 (1.19). Sa solution V_0 fournira une bonne approximation des variations séculaires des éléments orbitaux des planètes.

Le système (1.18) est facilement intégrable dès que l'on connaît le développement en séries de Fourier des expressions des seconds membres $L_i^{(e)}$ ($e = p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta$). On obtient aussi aisément la partie du premier ordre du système autonome, $\langle \Lambda(V_0, t) \rangle$. Par contre, la partie du second ordre $\left\langle \frac{\partial \Lambda}{\partial V_0} \cdot \Delta_1 V \right\rangle$ nécessite le calcul de dérivées partielles de séries de Fourier de la forme (1.7) ainsi que leurs produits avec des séries du même type, rassemblant de très nombreux termes.

Une des difficultés principales des calculs en mécanique céleste consiste dans la manipulation de ces énormes séries. Dans une première étape, nous avons donc développé un algorithme qui permet une manipulation aisée et rapide de ces séries. Celui-ci permet en outre d'effectuer les calculs avec une précision que l'on peut contrôler de manière à ce qu'elle atteigne une valeur souhaitée.

I.3 REDUCTION DU NOMBRE DE VARIABLES ET DE PARAMETRES.

Le but de notre théorie générale n'est pas de déterminer les masses m_i , ni les moyens mouvements moyens N_i des planètes, mais d'obtenir le plus aisément possible l'évolution à long terme de leurs éléments orbitaux. Nous ferons donc confiance aux théories classiques, dites à variations séculaires, quant à la détermination des masses et des moyens mouvements moyens, que nous supposerons être, en première approximation, les mêmes que ceux de la théorie générale.

Nous ne chercherons donc pas à garder la forme la plus analytique possible dans les développements : Les masses et les moyens mouvements moyens seront toujours inclus numériquement dans les coefficients.

D'autre part, d'après le théorème de Poisson (Duriez 1978), il n'existe pas de variations séculaires des demi-grands axes à l'ordre 2 des masses. On aura donc numériquement :

$$\frac{dp_{0i}}{dt} = 0 \quad ; \quad \text{c'est à dire} \quad p_{0i} = \text{cte} \quad (1.20)$$

Il faut cependant remarquer que comme notre identification ne s'effectue pas strictement à l'ordre 2 des masses, les variables p_{0i} ne seront constantes qu'à des termes à l'ordre 3 des masses près. Néanmoins, nous les considérerons comme constantes dans une première approximation, et elles seront remplacées par leurs valeurs numériques dans les équations, ce qui permet de diminuer le nombre de variables et de tenir compte de la contribution de ces constantes p_{0i} à tous les grades.

La longitude moyenne λ est donnée par

$$\lambda = Nt - \sqrt{-1} q \quad (1.21)$$

Si on suppose que N est le moyen mouvement moyen de la planète considérée, on aura

$$N = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(t)}{t} \quad (1.22)$$

La partie constante de $\frac{dq}{dt}$ doit donc être nulle. Les constantes p_{0i} seront choisies de manière à vérifier cette condition. Nous calculerons donc les valeurs des constantes p_{0i} à une précision suffisante, pour ensuite les remplacer par leur valeur numérique dans tous les calculs. Cette méthode permet d'obtenir une grande précision dans le calcul des termes du second ordre.

Les expressions du second membre $\Lambda(V_0, t)$ et de la solution du premier ordre $\Delta_1 \sigma$ ($\sigma = p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta$) sont alors de la forme :

$$L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^8 L_{ij}(q_0, \bar{z}_0, \bar{\zeta}_0, z_0, \zeta_0) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^8 \sum_{n_8 \in \mathbb{N}^8} \sum_{l \in \mathbb{Z}} C_{n_8, l} \frac{\bar{n}_i}{z_{0i}} \frac{\bar{v}_i}{\zeta_{0i}} \frac{n_i}{z_{0i}} \frac{v_i}{\zeta_{0i}} \frac{\bar{n}_j}{z_{0j}} \frac{\bar{v}_j}{\zeta_{0j}} \frac{n_j}{z_{0j}} \frac{v_j}{\zeta_{0j}} \quad \times \quad (1.23)$$

$$\times \exp(k_i q_{0i} + k_j q_{0j} + \sqrt{-1} (k_i N_i + k_j N_j) t)$$

où $n_8 = (\bar{n}_i, \bar{v}_i, n_i, v_i, \bar{n}_j, \bar{v}_j, n_j, v_j) \in \mathbb{N}^8$

et $C_{n_8, l}$ est un coefficient numérique calculé pour les valeurs données de m_i, N_i, p_{0i} .

I.4 ORGANISATION DES SERIES ET DES PRODUITS.

Nous allons maintenant développer la structure particulière des séries qui va nous permettre d'optimiser les calculs, et d'atteindre une grande précision dans le calcul des termes du second ordre.

I.4.1 Organisation des produits.

Si on dérive ou multiplie entre elles des séries de la forme (1.23), on obtient des séries semblables où chaque terme possède la forme générale :

$$T = C \prod_{i=1}^8 \frac{\bar{n}_i}{\bar{z}_i} \frac{\bar{v}_i}{\bar{\zeta}_i} \frac{n_i}{z_i} \frac{v_i}{\zeta_i} \exp \left(\sum_{i=1}^8 k_i q_i + \sqrt{-1} k_i N_i t \right) \quad (1.24)$$

On n'écrit plus ici les indices (0) car il n'y a pas de confusion possible entre une variable σ_i et sa partie séculaire σ_{0i} . Nous allons tout d'abord introduire une terminologie et des notations qui se sont révélées utiles dans la manipulation de ces termes. Pour un terme T de la forme (1.24), on notera par $\delta(T)$ son degré total par rapport à $\bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta$; $\delta^+(T)$ son degré par rapport à $\bar{z}, \bar{\zeta}$; et $\delta^-(T)$ son degré par rapport à z, ζ . On a donc :

$$\begin{aligned} \delta(T) &= \sum_{i=1}^8 \bar{n}_i + \bar{v}_i + n_i + v_i \\ \delta^+(T) &= \sum_{i=1}^8 \bar{n}_i + \bar{v}_i \\ \delta^-(T) &= \sum_{i=1}^8 n_i + v_i \end{aligned} \quad (1.25)$$

D'autre part, pour faciliter la manipulation des séries, on décompose tout terme T (1.24) sous la forme d'un triplet :

$$T = (C, M, I) \tag{1.26}$$

où C, M, I sont respectivement le coefficient, le monôme, et l'inégalité du terme T .

C : coefficient

$$M = \prod_{i=1}^8 \frac{\bar{n}_i}{z_i} \frac{\bar{v}_i}{\zeta_i} \frac{n_i}{z_i} \frac{v_i}{\zeta_i} \tag{1.27}$$

: monôme

$I = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8)$: inégalité

Si on se fixe le monôme M et l'inégalité I , dans une série donnée, le coefficient C est uniquement déterminé. On le notera

$$C = \mathcal{C}(M, I) \tag{1.28}$$

Avec ces notations, le produit du terme $T = (C, M, I)$ par le terme $T' = (C', M', I')$ est donné par

$$T.T' = (C.C', M.M', I + I')$$

En dehors de la notion classique de caractéristique d'une inégalité, notée c_I , nous introduisons la nouvelle notion de caractéristique de monôme c_M qui s'est révélée pratique. Pour un terme donné T , on pose

$$c_I(T) = \sum_{i=1}^8 k_i \tag{1.30}$$

$$c_M(T) = \delta^+(T) - \delta^-(T)$$

On a

$$\begin{aligned}\delta &= \delta^+ + \delta^- \\ c_M &= \delta - 2\delta^-\end{aligned}\tag{1.31}$$

Le degré δ et la caractéristique d'un monôme c_M ont donc toujours la même parité. De plus :

$$0 \leq \delta^- \leq \delta\tag{1.32}$$

Pour un degré donné δ , c_M ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs :

$$c_M \in \{-\delta, -\delta+2, \dots, \delta-2, \delta\}\tag{1.33}$$

Avec ces notations, les relations de d'Alembert (1.8), étendues aux 8 planètes et appliquées à un terme T d'un développement $L^{(e)}$ impliquent la relation suivante sur les caractéristiques :

$$c_I(T) = c_M(T) + \tau(e)\tag{1.34}$$

Remarquons que dans (1.34) l'indice $l \in \mathbb{Z}$ des séries initiales n'apparaît plus. Un monôme M ne peut être associé qu'aux seules inégalités vérifiant (1.34), et qui forment alors une famille infinie indexée par l .

Comme (1.34) est vérifié par tous les termes d'une même série $L^{(e)}$, on peut aussi écrire par extension :

$$c_I(L^{(e)}) = c_M(L^{(e)}) + \tau(e)\tag{1.35}$$

D'autre part, les séries $\Delta_1 \sigma$ sont obtenues par intégration directe des séries $L^{(\sigma)}$ par rapport au temps t . On aura alors aussi :

$$c_I(\Delta_1 \sigma) = c_M(\Delta_1 \sigma) + \tau(\sigma) \quad (1.36)$$

On peut aussi obtenir facilement les égalités suivantes, vérifiées pour deux termes quelconques T et T' :

$$\begin{aligned} c_I\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right) &= c_I(T) \\ c_I(T.T') &= c_I(T) + c_I(T') \\ c_M\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right) &= c_M(T) + \tau(\sigma) \\ c_M(T.T') &= c_M(T) + c_M(T') \end{aligned} \quad (1.37)$$

Pour montrer l'intérêt de ces notations, nous allons vérifier que tous les termes d'un produit $\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \sigma} \cdot \Delta_1 \sigma$ vérifient la relation de d'Alembert (1.34) :

$$\begin{aligned} c_I\left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \sigma} \Delta_1 \sigma\right) &= c_I\left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \sigma}\right) + c_I(\Delta_1 \sigma) \\ &= c_I(L^{(e)}) + c_I(\Delta_1 \sigma) \\ &= c_M(L^{(e)}) + \tau(e) + c_M(\Delta_1 \sigma) + \tau(\sigma) \\ &= c_M\left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \sigma}\right) - \tau(\sigma) + \tau(e) + c_M(\Delta_1 \sigma) + \tau(\sigma) \\ &= c_M\left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \sigma}\right) + c_M(\Delta_1 \sigma) + \tau(e) \\ &= c_M\left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \sigma} \cdot \Delta_1 \sigma\right) + \tau(e) \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Les inégalités de tous les termes T_A du système autonome sont égales à $I = (0,0,0,0,0,0,0,0)$. On a donc $c_I(T_A) = 0$, et donc pour toute équation (e) :

$$c_M(T_A) = -\tau(e) \quad (1.38)$$

ce qui donne, pour les différentes valeurs de e :

$$\begin{aligned} c_M(L_A^{(p)}) &= c_M(L_A^{(q)}) = 0 \\ c_M(L_A^{(\bar{z})}) &= c_M(L_A^{(\bar{\zeta})}) = +1 \\ c_M(L_A^{(z)}) &= c_M(L_A^{(\zeta)}) = -1 \end{aligned} \quad (1.39)$$

On obtient ainsi la condition nécessaire suivante :

Proposition 1 . Soit T un terme de $\frac{\partial L}{\partial \sigma}(e)$, T' un terme de $\Delta_1 \sigma$.

Si $T.T'$ est de degré d et appartient au système autonome, alors :

$$\begin{aligned} \delta(T) + \delta(T') &= d \\ c_M(T) + c_M(T') &= -\tau(e) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Cette proposition qui résulte immédiatement de la définition de c_M et de la relation de d'Alembert (1.34) est très importante pour l'organisation que nous allons donner aux produits. Elle nous permettra d'établir une fois pour toute la liste de tous les produits de monômes que nous allons rencontrer dans la construction du système autonome d'ordre 2.

Exemple : Nous voulons construire les termes du second ordre dans les équations $d\bar{z}/dt$ et $d\bar{\zeta}/dt$ du système autonome, jusqu'au degré 5 en excentricité-inclinaison. Le tableau 1 donne alors toutes les valeurs possibles pour la caractéristique et le degré des monomes intervenant dans les produits $T.T'$, selon la proposition 1.

\mathcal{L}_1		\mathcal{L}_2		\mathcal{L}_3	
$c_M(T)$	$\delta(T)$	$c_M(T')$	$\delta(T')$	$c_M(T.T')$	$\delta(T.T')$
0	0	1	1	1	1
0	0	1	3	1	3
0	0	1	5	1	5
-1	1	2	2	1	3
-1	1	2	4	1	5
1	1	0	0	1	1
1	1	0	2	1	3
1	1	0	4	1	5
-2	2	3	3	1	5
0	2	1	1	1	3
0	2	1	3	1	5
2	2	-1	1	1	3
2	2	-1	3	1	5
-1	3	2	2	1	5
1	3	0	0	1	3
1	3	0	2	1	5
3	3	-2	2	1	5
0	4	1	1	1	5
2	4	-1	1	1	5
1	5	0	0	1	5

Tableau 1. Caractéristique et degré des termes $T \in \frac{\partial L}{\partial \sigma}(e)$ et $T' \in \Delta_1 \sigma$ tels que $T.T'$ appartienne au système autonome ($e = \bar{z}$ ou $e = \bar{\zeta}$). La liste de I.4.3. est la liste $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ des 4-uplets (c, d, c', d') .

$ c \backslash d$	0	1	2	3	4	5
0	1	-	8	-	52	-
1	2	-	20	-	100	-
2	-	6	-	40	-	-
3	-	-	10	-	70	-
4	-	-	-	19	-	-
5	-	-	-	-	-	28

2a. Monômes pairs par rapport à $\bar{\zeta}$, ζ ($p = 0$).

$ c \backslash d$	0	1	2	3	4	5
0	0	-	8	-	48	-
1	2	-	20	-	100	-
2	-	4	-	40	-	-
3	-	-	10	-	70	-
4	-	-	-	16	-	-
5	-	-	-	-	-	28

2b. Monômes impairs par rapport à $\bar{\zeta}$, ζ ($p = 1$).

Tableau 2. Nombre de monômes dans le bloc $\mathcal{M}_{(c,d)}^{(2,p)}$

p est la parité, c la caractéristique et d le degré.

$ c \backslash d$	0	1	2	3	4	5
0	1	-	18	-	225	-
1	3	-	63	-	588	-

3a. Monômes pairs par rapport à $\bar{\zeta}$, ζ ($p = 0$).

$ c \backslash d$	0	1	2	3	4	5
0	0	-	18	-	216	-
1	3	-	63	-	588	-

3b. Monômes impairs par rapport à $\bar{\zeta}$, ζ ($p = 1$).

Tableau 3. Nombre de monômes dans le bloc $\mathcal{M}_{(c,d)}^{(3,p)}$

p est la parité, c la caractéristique et d le degré.

I.4.2 Listes des monomes.

Nous allons maintenant dresser les listes de tous les monômes d'une caractéristique c donnée et d'un degré d donné, pour tous les couples (c,d) . Comme les séries $L^{(p)}$, $L^{(q)}$, $L^{(\bar{z})}$, $L^{(z)}$ sont paires par rapport aux variables inclinaison $\bar{\zeta}$, ζ , alors que $L^{(\bar{\zeta})}$, $L^{(\zeta)}$ sont impaires par rapport aux mêmes variables, pour tout couple (c,d) on distinguera les monômes pairs en $\bar{\zeta}$, ζ ($p = 0$) et les monômes impairs en $\bar{\zeta}$, ζ ($p = 1$) (i.e. p désigne la parité).

Les monômes des séries $\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \sigma}$ ou $\Delta_1 \sigma$ ne contiennent que les éléments de deux planètes, mais dans les produits $\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \sigma} \cdot \Delta_1 \sigma$, les monômes peuvent contenir les éléments de trois planètes.

Définition. On appelle bloc l'ensemble $\mathcal{M}_{(c,d)}^{(n,p)}$ des monômes M tels que :

- i) M contient les éléments orbitaux $\bar{z}_i, \bar{\zeta}_i, z_i, \zeta_i$, de n planètes au plus.
- ii) La parité de M est p .
- iii) $c_M(M) = c$ (1.41)
- iv) $\delta(M) = d$

Pour les indices donnés n, p, c, d on engendre sur ordinateur le bloc de monômes correspondant $\mathcal{M}_{(c,d)}^{(n,p)}$. Les tableaux 2 et 3 donnent le nombre de monômes dans chaque bloc pour les différentes valeurs des indices. Le tableau 1 montre alors qu'il y a 309 monômes dans les listes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 pour $p=0$ et 296 pour $p=1$. Bien qu'il y ait des redondances dans ces listes, il est plus facile de garder tous les termes de \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 car cela facilite l'organisation des programmes. Par contre, dans la

liste \mathcal{L}_3 on n'autorisera pas les répétitions, et elle comprendra donc 122 monômes si $n=2$ et 654 si $n=3$, pour n'importe quelle valeur de p .

Les produits de monômes sont alors effectués par blocs, en accord avec le tableau 1 :

$$\mathcal{M}_{(c,d)}^{(2,p)} \times \mathcal{M}_{(c,d)}^{(2,p)} \quad (1.42)$$

Comme on effectue les produits toujours dans le même ordre, donné par le tableau 1 et par la structure interne de chaque bloc, on peut établir à l'avance un tableau d'adressage dans lequel on met les adresses dans \mathcal{L}_3 des résultats de tous les produits du tableau 1. On tient compte des différentes valeurs possibles de la parité p et de l'ordre respectif des planètes.

Ce tableau d'adressage, établi une fois pour toute, évite la recherche fastidieuse de l'endroit où mettre le résultat d'un produit, que l'on doit faire quand on utilise un manipulateur de séries de Fourier classique. Cela nous permet d'améliorer énormément la rapidité des calculs.

I.4.3 Inégalités et monômes.

Dans la section précédente, nous avons déterminé les monômes qui interviennent dans les produits du second ordre. Nous allons rechercher maintenant quelles sont les inégalités que l'on doit associer à ces monômes pour obtenir les termes de la partie du second ordre du système autonome, $\langle \frac{\partial \Lambda}{\partial V_0} \cdot \Delta_1 V \rangle$.

Les produits de séries à effectuer sont du type :

$$\frac{\partial L_{ij}^{(e)}}{\partial \sigma_k} \cdot \Delta_1^{\sigma_{kl}} \quad (1.43)$$

où $L_{ij}^{(e)}$ est donné en (1.22) et où $\Delta_1^{\sigma_{kl}}$ désigne la partie de $\Delta_1^{\sigma_k}$ concernant les perturbations de la planète P_k par la planète P_l .

On doit avoir $k = i$ ou $k = j$; dans un produit (1.43) n'interviennent donc que les éléments de trois planètes au plus.

Soit $T = (C, M, I)$ un terme de $\frac{\partial L_{ij}^{(e)}}{\partial \sigma_k}$ et $T' = (C', M', I')$ un terme de $\Delta_1^{\sigma_{kl}}$, avec $I = (k_1, k_2, \dots, k_8)$ et $I' = (k'_1, k'_2, \dots, k'_8)$.

Une condition nécessaire sur les monômes pour que le produit $T.T'$ appartienne au système autonome est donnée par la proposition 1. Une condition nécessaire et suffisante pour que $T.T'$ appartienne au système autonome est que $I + I' = 0_8$ ($0_8 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$). Les seuls indices de I et I' éventuellement non nuls sont k_i, k_j, k'_k, k'_l . On a alors les seuls cas possibles suivants :

a) Produits à 2 planètes :

$$(i, j) = (k, l) \quad \text{ou} \quad (i, j) = (l, k)$$

On a alors :

$$k_i + k'_i = 0 \quad (1.44)$$

$$k_j + k'_j = 0$$

b) Produits à trois planètes :

$$\begin{cases} i \neq j = k \neq l \\ i \neq l \end{cases} \quad \text{ce qui implique} \quad \begin{cases} k_i = k'_l = 0 \\ k_j + k'_j = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} j \neq i = k \neq l \\ j \neq l \end{cases} \quad \text{ce qui implique} \quad \begin{cases} k_j = k'_l = 0 \\ k_i + k'_i = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

Pour simplifier les notations, on supposera toujours par la suite que $k = i$; il est cependant nécessaire dans les calculs de traiter les deux cas $k = i$ et $k = j$.

Soit T et T' deux termes vérifiant (1.40) et tels que :

$$T = (C, M, I) \in \frac{\partial L_{ij}^{(e)}}{\partial \sigma_k} ; M \in \mathcal{M}_{(c,d)}^{(2,p)} \quad (1.46)$$

$$T' = (C', M', I') \in \Delta_1 \sigma_{kl} ; M' \in \mathcal{M}_{(c',d')}^{(2,p')}$$

Nous allons examiner toutes les valeurs possibles pour I et I' dans (1.46) dans le cas des produits à 2 planètes et dans le cas des produits à 3 planètes.

A) Produits à 2 planètes.

Soit

$$\begin{aligned} c_0 &= c_I(T) = k_i + k_j \\ &= -c_{I'}(T') = -k'_i - k'_j \end{aligned} \quad (1.47)$$

D'après (1.44), et si on pose $l = -k'_j$, on a :

$$\begin{aligned} (k_i, k_j) &= (c_0 + l, -l) \\ (k'_i, k'_j) &= (-c_0 - l, +l) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Quand une inégalité (k_1, k_2, \dots, k_8) ne comprend que quelques termes éventuellement non nuls, on pourra la noter sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$I = (k_i, k_j) \quad (\text{avec } k_i = a \text{ et } k_j = b)$$

ou

$$I = (0, \dots, \underset{i}{a}, \dots, \underset{j}{b}, \dots, 0)$$

Les indices i et j désignent ici le rang du coefficient placé au-dessus dans le 8-uplet I .

Nous voulons maintenant relier directement les inégalités $I = (k_i, k_j)$ et $I' = (k'_i, k'_j)$ aux caractéristiques respectives c et c' des monômes M et M' des termes T et T' .

Les relations (1.35), (1.36), (1.37) et (1.40) donnent alors :

$$c_I \left(\frac{\partial L_{ij}^{(e)}}{\partial \sigma_k} \right) = c_M \left(\frac{\partial L_{ij}^{(e)}}{\partial \sigma_k} \right) - \tau(\sigma) + \tau(e) \quad (1.49)$$

$$c_I(\Delta_1 \sigma_k) = c_M(\Delta_1 \sigma_k) + \tau(\sigma)$$

(1.47) devient alors :

$$\begin{aligned} c_0 &= c - \tau(\sigma) + \tau(e) \\ c_0 &= -c' - \tau(\sigma) \end{aligned} \quad (1.50)$$

et les inégalités I et I' sont alors données par :

$$\begin{aligned} I = (k_i, k_j) &= (c - \tau(\sigma) + \tau(e) + l, -l) \\ I' = (k'_i, k'_j) &= (c' + \tau(\sigma) - l, +l) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Les inégalités I et I' dans les produits (1.43) sont alors directement déterminés par la liste \mathcal{L} des 4-uplets (c, d, c', d') définie par la proposition 1, dès que les valeurs de l sont données dans (1.51). Ces valeurs peuvent être les mêmes dans tous les produits par blocs (1.42) déterminés par \mathcal{L} . On a alors :

Proposition 2. Dans un produit $\frac{\partial L_{ij}^{(e)}}{\partial \sigma_i} \cdot \Delta_1 \sigma_{ij}$, le coefficient C_A d'un terme $T_A = (C_A, M_A, 0_8)$ du système autonome est donné par :

$$C_A = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{(c,d,c',d') \in \mathcal{E}} \sum_{\substack{M, M' = M_A \\ M \in \mathcal{M}_{(c,d)}^{(2,p)} ; M' \in \mathcal{M}_{(c',d')}^{(2,p')}}} \dots \dots \dots$$

$$\dots \mathcal{E}(M, (0, \dots, c - \tau(\sigma) + \tau(e) + l, \dots, -l, \dots, 0)) \times \quad (1.52)$$

$$\times \mathcal{E}'(M', (0, \dots, +c' + \tau(\sigma) - l, \dots, +l, \dots, 0))$$

où $\mathcal{E}(M, I)$ est le coefficient de (M, I) dans $\frac{\partial L_{ij}^{(e)}}{\partial \sigma_i}$
 $\mathcal{E}'(M', I')$ est le coefficient de (M', I') dans $\Delta_1 \sigma_{ij}$

p et p' sont des indices de parité par rapport aux variables $\bar{\tau}_i, \tau_i$, qui dépendent des valeurs prises par e et σ .

Les sommes indicées par (c, d, c', d') et (M, M') sont finies. On peut alors rassembler les termes de (1.52) en termes dépendants uniquement de $l \in \mathbb{Z}$, notés $C_A(l)$. On a alors :

$$C_A = \sum_{l \in \mathbb{Z}} C_A(l) \quad (1.53)$$

La précision atteinte dans le calcul de C_A ne dépend alors que des deux faits suivants :

- La précision du calcul de $C_A(l)$ pour $l \in \mathbb{Z}$ quelconque.
- La rapidité de la convergence de la série $\sum_l C_A(l)$.

Avant d'examiner ces deux points importants, nous devons jeter un coup d'oeil sur le problème des produits à 3 planètes.

B) Produits à 3 planètes.

Avec les mêmes notations que précédemment, nous considérons maintenant un produit faisant intervenir les éléments de 3 planètes. Ce cas est plus facile à traiter que le précédent et les relations (1.45), avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 2 donnent :

Proposition 3. Dans un produit $\frac{\partial L_{ij}^{(e)}}{\partial \sigma_i} \cdot \Delta_{\lambda \sigma_{ik}} \quad (j \neq k)$, le coefficient C_A d'un terme $T_A = (C_A, M_A, 0_8)$ du système autonome est donné par :

$$C_A = \sum_{(c,d,c',d') \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{M, M' = M_A \\ M \in \mathcal{M}_{(c,d)}^{(2,p)} \\ M' \in \mathcal{M}_{(c',d')}^{(2,p')}}} \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \mathcal{G}(M, (0, \dots, c - \tau(\sigma) + \tau(e), \dots, 0, \dots, 0)) \times \quad (1.54)$$

$$\times \mathcal{G}'(M', (0, \dots, c' + \tau(\sigma), \dots, 0, \dots, 0))$$

Dans ce cas, il n'y a plus de sommation sur l'indice $\lambda \in \mathbb{Z}$. C_A est donné par le seul terme $C_A(0)$ et nous n'avons plus de problème de convergence comme dans le cas précédent.

Remarque : Les propositions 2 et 3 fournissent une expression analytique des coefficients du système autonome. Elles pourraient être généralisées pour obtenir les coefficients du second ordre de n'importe quelle inégalité, différente de 0_8 . C'est ce que nous serions amenés à faire si nous voulions calculer le troisième ordre.

I.5. PRECISION DANS LE CALCUL DES COEFFICIENTS C_A .

D'après la discussion du chapitre précédent, il suffit de considérer les produits faisant intervenir les éléments de deux planètes P_i et P_j . Le coefficient C_A d'un monôme M_A du système autonome est alors donné par la série (1.52) . La précision de $C_A(l)$ dépend de celle des coefficients $\mathcal{C}(M, I)$ avec, (1.51) :

$$I = (k_i, k_j) = (c_I + l, -l) \quad (1.55)$$

Les coefficients $\mathcal{C}(M, I)$ sont ceux des développements des seconds membres (1.23) . Ils sont obtenus à l'aide des équations de Lagrange (1.4) à partir des développements de la fonction perturbatrice R_{ij} (1.5) .

Parmi toutes les opérations effectuées sur les développements R_{ij} , les seules qui modifient de manière notable l'ordre de grandeur des coefficients sont les intégrations d'un terme par rapport au temps en présence de petits diviseurs $k_i.N_i + k_j.N_j$. Plus précisément, soit T un terme de R_{ij} :

$$T = C.M(\bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta) \exp(k_i.q_i + k_j.q_j + \sqrt{-1}(k_i.N_i + k_j.N_j)t) \quad (1.56)$$

Ce qui donne par intégration :

$$\int T dt = \frac{C}{k_i.N_i + k_j.N_j} M \exp(k_i.q_i + k_j.q_j + \sqrt{-1}(k_i.N_i + k_j.N_j)t) \quad (1.57)$$

Lorsque $k_i.N_i + k_j.N_j$ est petit par rapport à N_i , le coefficient $C/(k_i.N_i + k_j.N_j)$ peut devenir très grand après intégration; on parle alors de petit diviseur.

Ces petits diviseurs apparaissent donc dans le calcul de $\Delta_1 \sigma_i$. Dans le calcul de $\Delta_1 q_i$ on a même des diviseurs de la forme $(k_i N_i + k_j N_j)^2$ qui peuvent être encore plus petits ; ces diviseurs proviennent de l'intégration de $\Delta_1 p_i$ (1.18).

Si on garde à l'esprit cette éventualité, on peut raisonner directement sur les coefficients de la fonction perturbatrice R_{ij} , comme nous allons le faire maintenant.

Dans cette étude, le couple de planètes étant fixé, on notera $(p, q, \bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta)$ les éléments de la planète perturbée et $(p', q', \bar{z}', \bar{\zeta}', z', \zeta')$ les éléments de la planète perturbante. On suppose aussi que $A' > A$. L'expression de la fonction perturbatrice R est alors :

$$R = Gm' \left(1/\Delta - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right) \quad (1.58)$$

On utilise les développements de la partie directe Gm'/Δ et de la partie indirecte $Gm' \cdot \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3}$ obtenus par Duriez (1979) à partir du développement analytique de l'inverse de la distance élaboré par Abu El Ata et Chapront (1975). Avec les notations de la section (I.1), on peut alors écrire :

$$Gm' \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} = K (1+p)^{-2/3} (1+p')^{4/3} \times \sum_{j=-1}^1 \mathcal{F}_j(X, X', \bar{X}, \bar{X}', Y, Y', \bar{Y}, \bar{Y}') \exp \sqrt{-1} j(\lambda' - \lambda) \quad (1.59)$$

où \mathcal{F}_j est une série entière à coefficients rationnels, et K une constante qui ne dépend que des valeurs de m, m', N, N', G .

La partie directe est donnée par :

$$\frac{Gm'}{\Delta} = \frac{Gm'}{A'} \cdot \frac{a'}{r'} \cdot (1+p')^{2/3} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (-1/2)_k}{(1)_k} \Phi_{2k+1, m}^{(|j|)}(\alpha) \times$$

$$\times (\rho U)^k (\rho^2/\alpha^2 - 1)^m (\rho/\alpha)^{|j|} \theta^j \bar{\theta}^j \exp \sqrt{-1} j (\lambda - \lambda') \quad (1.60)$$

avec

$$\rho/\alpha = ((1 + p')/(1 + p))^{2/3} (r/a)(a'/r') \quad (1.61)$$

$(\rho^2/\alpha^2 - 1)$ est une série entière de $p, p', X, \bar{X}, X', \bar{X}'$, de degré au moins égal à 1 tandis que ρU est une série entière en $p, p', X, X', \bar{X}, \bar{X}', Y, Y', \bar{Y}, \bar{Y}'$, de degré pair, au moins égal à 2, par rapport aux variables inclinaison Y, Y', \bar{Y}, \bar{Y}' . r/a et θ possèdent des développements en série entière par rapport à X, \bar{X} , à coefficients rationnels. Il en est de même pour a'/r' et $\bar{\theta}'$ pour les variables X' et \bar{X}' .

$\Phi_{s, m}^{(j)}(\alpha)$ est un coefficient numérique dépendant de $\alpha = A/A'$.

En substituant dans (1.59) et (1.60) les variables X, X', \bar{X}, \bar{X}' , Y, Y', \bar{Y}, \bar{Y}' par leur expression en fonction des variables $\bar{z}, \bar{z}', z, z', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}', \zeta, \zeta', q, q'$ on obtient :

$$R = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n_{10} \in \mathbb{N}^{10}} C_{n_{10}, j} p^q p'^{q'} \bar{z}^{\bar{n}} \bar{\zeta}^{\bar{v}} z^n \zeta^v \bar{z}'^{\bar{n}'} \bar{\zeta}'^{\bar{v}'} z'^{n'} \zeta'^{v'} \times$$

$$\times \exp (kq + k'q' + \sqrt{-1}(kN + k'N')t) \quad (1.62)$$

avec $n_{10} = (g, g', \bar{n}, \bar{v}, n, v, \bar{n}', \bar{v}', n', v') \in \mathbb{N}^{10}$

Les relations entre k, k' et j sont données par les relations de d'Alembert de la fonction perturbatrice :

$$k = \bar{n} + \bar{v} - n - v + j$$

$$k' = \bar{n}' + \bar{v}' - n' - v' - j \quad (1.63)$$

1.5.1. Convergence de la série d'ordre 2 $\Sigma C_A(l)$.

La relation (1.55) sur les inégalités des termes dans le calcul du coefficient C_A du monôme M_A du système autonome donne avec (1.63) :

$$-l = \bar{n}' + \bar{v}' - n' - v' - j \quad (1.64)$$

d'où :

$$l - \delta \leq j \leq l + \delta \quad (1.65)$$

où δ est le degré du terme considéré, qui est de toute manière inférieur au degré δ_A de M_A . Etudier le comportement de $C_A(l)$ lorsque $l \rightarrow +\infty$ revient donc à étudier le comportement des coefficients des monômes dans (1.62) lorsque $j \rightarrow +\infty$; ou même le comportement des coefficients des monômes dans (1.60) lorsque $j \rightarrow +\infty$, $2k$ et m restant majorés par le degré δ , lui-même majoré par δ_A . On peut écrire (1.60) sous la forme :

$$Gm' / \Delta = \sum_j \mathcal{Y}_j \quad (1.66)$$

Le problème est de savoir comment évaluer le coefficient $\mathcal{E}_{j+1}^{(M)}$ d'un monome M de \mathcal{Y}_{j+1} , connaissant les coefficients de \mathcal{Y}_j . La grande complexité de l'expression de la fonction perturbatrice ne nous a pas permis d'obtenir une expression rigoureuse utilisable, mais on peut néanmoins estimer l'ordre de grandeur des variations des coefficients des monômes entre \mathcal{Y}_j et \mathcal{Y}_{j+1} .

On a (Abu El Ata et Chapront 1974) :

$$\begin{aligned} \phi_{s,m}^{(j)}(\alpha) &= \frac{(s/2)_j (s/2)_m (s/2 + j)_m}{(1)_j (1)_m (1+j)_m} \alpha^{2m+j} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s/2 + m)_k (s/2 + m + j)_k}{(1 + j + m)_k} \frac{\alpha^{2k}}{(1)_k} \end{aligned} \quad 1.67$$

Un calcul sans difficulté particulière montre alors que lorsque $j \gg s$ et $j \gg m$, c'est à dire lorsque j est grand par rapport au degré du monôme considéré, on a :

$$\phi_{s,m}^{(j+1)}(\alpha) / \phi_{s,m}^{(j)}(\alpha) \approx \alpha \quad (1.68)$$

On peut alors espérer raisonnablement que lorsque $j \rightarrow +\infty$, les coefficients de la partie directe Gm'/Δ (1.60) soient quasiment proportionnels à α^j , et que par conséquent les coefficients $\mathcal{C}(M, (c_0+l, -l))$ des termes $\frac{\partial L^{(e)}_{ij}}{\partial \sigma_i}$ des produits (1.52) soient quasiment proportionnels à α^l lorsque l est grand devant le degré. D'autre part, on a :

$$kN + k'N' = c_I N + l(N - N') \quad (1.69)$$

donc, lorsque $l \rightarrow +\infty$, $kN + k'N' \sim l(N - N')$ et on ne peut pas avoir de petits diviseurs car $N - N' \neq 0$; et même $|kN + k'N'| \rightarrow +\infty$ lorsque $l \rightarrow +\infty$. Pour les valeurs de l suffisamment grandes, les coefficients $\mathcal{G}'(M', c-c_0-l, +l)$ de $\Delta_1 \sigma_{ij}$ seront donc aussi quasiment proportionnels à α^l .

Finalement, $C_A(l)$ sera quasiment proportionnel à α^{2l} lorsque $l \gg \delta(M_A)$.

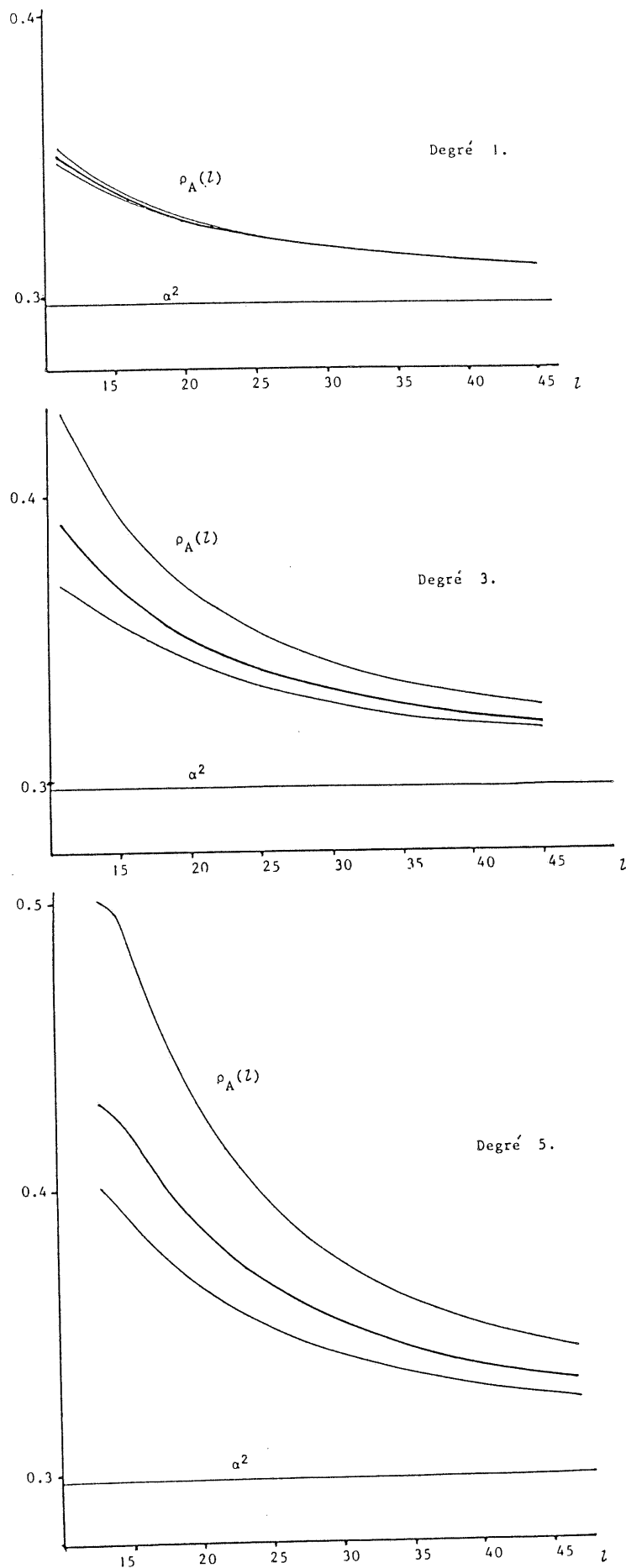


Figure 1. Convergence de la série $\sum C_A(l)$ pour les produits du couple Jupiter - Saturne. On a représenté le minimum, la moyenne, et le maximum des rapports $\rho_A(l) = C_A(l+1)/C_A(l)$. α est le rapport A_5/A_6 des demi-grands axes de référence.

Nous avons vérifié numériquement cette convergence en utilisant les méthodes développées au chapitre I.5. pour calculer les 122 monomes des seconds membres des équations $d\bar{z}_5/dt$ du couple Jupiter-Saturne pour $10 \leq l \leq 45$. On évite ainsi le problème des variations importantes des coefficients dues à la présence du petit diviseur $2N_5 - 5N_6$ obtenu pour $l = 5$.

Pour chaque valeur de l , et pour chaque monôme M_A , nous avons calculé le rapport $\rho_A(l) = C_A(l+1) / C_A(l)$. Sur la figure 1, on a représenté la valeur moyenne des valeurs $\rho_A(l)$ obtenues pour les 122 monômes, répartis par monômes de même degré. On a aussi reporté la valeur maximale et la valeur minimale de $\rho_A(l)$ pour chaque valeur de l . Nous pouvons alors en tirer plusieurs conclusions :

- a) Le rapport $\rho_A(l) = C_A(l+1) / C_A(l)$ converge régulièrement vers une valeur de l'ordre de α^2 .
- b) La dispersion des valeurs de $\rho_A(l)$ autour de la valeur moyenne décroît lorsque $l \rightarrow +\infty$.
- c) La convergence vers la limite est d'autant plus rapide que le degré est faible.

La figure 1 ne représente que le cas Jupiter-Saturne, mais des conclusions identiques peuvent être données pour tous les couples, et nous avons constamment vérifié cette convergence lors de la construction du système autonome.

Les séries $\sum C_A(l)$ se comportent donc comme des séries géométriques de rapport α^2 à partir d'un certain rang. On peut donc trouver aisément un majorant du reste de ces séries. Si on désire atteindre une précision relative de 10^{-n} dans le calcul des coefficients C_A , on doit calculer $C_A(l)$ jusqu'au rang l_0 tel que :

$$10^{-n} > \sum_{k=l_0+1}^{\infty} (\alpha^2)^k \quad (1.70)$$

C'est à dire :

$$l_0 > (-n + \log(1 - \alpha^2))/2 \log \alpha - 1 \quad (1.71)$$

Ceci nous permet de connaître à l'avance, pour chaque couple de planètes, la valeur de l qui doit être atteinte en fonction de la précision désirée. Nous devons cependant considérer (Fig.1) que les rapports $\rho_A(l)$ sont toujours supérieurs à α^2 ; et nous devons majorer systématiquement la valeur de l_0 donnée par (1.71). Pratiquement, si on effectue le calcul jusqu'au rang l , on obtient un coefficient $C_A(l)$. La somme des termes négligés est alors :

$$R = C_A(l) \alpha^2 / (1 - \alpha^2) \quad (1.72)$$

Comme $\alpha < 0.7234$ (couple Vénus-Terre), on aura toujours $R < C_A(l) \times 1.1$ et on considérera que la précision de C_A est donnée par la valeur $C_A(l_0)$ du dernier terme calculé (Tableau 15) .

I.5.2. Précision sur le calcul des coefficients $C_A(l)$. Influence des constantes p_{0i} .

Dans l'expression de la fonction perturbatrice (1.62), les coefficients $C_{n_{10},j}$ sont calculés à partir des expressions (1.59) et (1.60) avec une grande précision ($\approx 10^{-12}$) (Duriez 1977). Les coefficients $\mathcal{G}(M,I)$ utilisés dans (1.54) sont obtenus en remplaçant les constantes p_{0i} par leur valeur numérique dans (1.59) et (1.60). La précision de ces coefficients dépend donc de la précision avec laquelle les constantes p_{0i} sont déterminées.

Pour une valeur fixée de j , le coefficient d'un monôme des variables $X, X', \bar{X}, \bar{X}', Y, Y', \bar{Y}, \bar{Y}'$, de degré δ dans la partie directe de la fonction perturbatrice (1.60) a en facteur une expression de la forme :

$$K(p) = ((1 + p')/(1 + p))^{|j| + 2n + k} \times 2/3 \quad (1.73)$$

avec $0 \leq n \leq m \leq \delta$

$0 \leq k \leq \delta/2$ (k et m sont les indices de sommation dans (1.60)).

Dans le système autonome, la solution p_0 est une constante qui est de l'ordre de grandeur des masses planétaires, et donc petit devant 1 . On a donc :

$$K(p_0) \approx 1 + 2/3(|j| + 2n + k)(p'_0 - p_0) \quad (1.74)$$

Cette expression nous permet d'estimer la précision obtenue dans le calcul de $\mathcal{G}(M,I)$ et donc sur les coefficients $C_A(l)$ de (1.53) ; ceci donne aussi la précision sur les coefficients C_A du système autonome d'ordre 2, en fonction de la précision avec laquelle on a obtenu les

constantes p_{0i} . En particulier, nous pourrions estimer l'erreur commise en négligeant les termes de grade non nul dans le système autonome d'ordre 2.

Si on considère par exemple la grande inégalité $2N_5 - 5N_6$, on aura $l = -5$ dans le coefficient de $\Delta_1 \sigma$ (1.52) et avec (1.65), pour les termes de degré 5 ; $-10 \leq j \leq 0$. Dans les cas extrêmes, on aura aussi $n = 5$, $k = 0$, et (1.74) donnera alors $K(p_0) \approx 1 + 40/3(p_{06} - p_{05})$; ce qui donne (Tableau 12) $K(p_0) \approx 1.034$.

Nous voyons donc que, bien que les valeurs des constantes p_{0i} soient de l'ordre des masses, l'erreur commise en les négligeant dans le calcul des termes d'ordre 2, $K(p_0)$, peut être beaucoup plus importante, et atteindre jusqu'à 3.4 % dans la contribution de certains termes de la grande inégalité. Nous avons vérifié ces résultats en comparant par la suite les résultats obtenus au grade zéro avec les résultats obtenus en considérant la contribution des constantes p_{0i} (Section I.6).

En conséquence, si nous voulons conserver une grande précision dans les calculs, nous devons garder les contributions des grades ≥ 1 dans le calcul du système autonome du second ordre. Pour éviter d'obtenir des calculs trop complexes, nous avons choisi d'inclure numériquement les valeurs des p_{0i} dans le calcul des fonctions perturbatrices, en effectuant dans les programmes le simple changement de variables :

$$(1 + p_i) = (1 + p_{0i})(1 + \tilde{p}_i) \quad (1.75)$$

Ceci nous a permis d'utiliser sans trop de modifications le programme de Duriez (1979) pour le calcul des seconds membres des équations (1.6) ; et les coefficients C_A seront alors calculés en tenant compte des contributions des constantes p_{0i} à tous les grades.

I.6. CALCUL DES CONSTANTES p_{0i} .

Comme nous l'avons déjà signalé en (1.4), les valeurs des constantes p_{0i} sont déterminées de manière à éliminer les termes constants dans les équations dq_i/dt . Nous allons donc les calculer par approximations successives, en calculant à chaque étape les coefficients des développements avec les p_{0i} déterminés à l'étape précédente.

Cette détermination sera effectuée en tenant compte des termes d'ordre 2 et de degré 2 dans les équations dq_i/dt .

Pour tenir compte des termes de degré 2, nous avons besoin d'une approximation de la solution pour les variables $\bar{z}_i, \bar{\zeta}_i$, laquelle sera donnée par la solution de Lagrange du système d'ordre 2. Nous rappelons que la solution de Lagrange est la solution de la partie linéaire du système autonome, c'est à dire la solution du système :

$$\dot{\alpha} = \sqrt{-1} A \alpha \tag{1.76}$$

où $\alpha = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_8, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \dots, \bar{\zeta}_8)$ est un vecteur à 16 composantes, $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$, et

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

avec A_1 et A_2 deux matrices réelles 8×8 .

Les coefficients des seconds membres $L^{(e)}$ de (1.6) sont calculés par le programme de calcul du premier ordre de Duriez, que l'on a légèrement modifié en raison de la structure particulière de nos séries (section I.4). D'autres modifications ont été apportées pour tenir compte du changement d'orbite de référence, et surtout de la contribution à tous les grades des constantes p_{0i} .

Planète	Ordre 1	Ordre 2	$p_{0i}^{(1)}$
Mercure	0.11794931	0.00000190	0.11795121
Vénus	0.49816236	- 0.00000793	0.49815442
Terre	- 0.15434293	0.00004371	- 0.15429922
Mars	1.20339804	- 0.00035123	1.20304680
Jupiter	5.72650949	- 0.02053531	5.70597419
Saturne	- 249.61150773	0.02732474	- 249.58418298
Uranus	- 271.26870327	- 0.59385871	- 271.86256199
Neptune	- 270.85398498	- 0.92653552	- 271.78052050

Tableau 4. $p_{0i}^{(1)} \times 10^5$. Ordre 1 et 2, degré 0 dans $L_i^{(q)}$.

I.6.1. Approximation 1.

Dans toute cette section, les calculs sont effectués en prenant pour les p_{0i} : $p_{0i} = p_{0i}^{(0)} = 0$

Dans les équations dq_i/dt , $c_M(T) = 0$ pour tous les termes, et donc tous les termes sont de degré pair. On a alors :

$$dq_i/dt = \sqrt{-1} N_i(p_{0i} + K_{0i}^{(0)}(p_0) + K_{0i}^{(2)}(p_0, \bar{z}_0, \bar{\zeta}_0, z_0, \zeta_0) + \dots \quad (1.77)$$

Où $K_{0i}^{(n)}$ est la somme des termes homogènes de degré n dans l'expression des seconds membres des équations dq_i/dt .

Pour calculer les termes constants dans $K_{0i}^{(n)}$, nous devons avoir une approximation de la solution $(\bar{z}_{0i}, \bar{\zeta}_{0i}, z_{0i}, \zeta_{0i})$, $i = 1, 8$ du système autonome. Dans cette première étape, nous ne tiendrons compte que de $K_{0i}^{(0)}$, ce qui revient à prendre des valeurs nulles pour les variables $\bar{z}_{0i}, \bar{\zeta}_{0i}$, $i = 1, 8$; mais dans les étapes suivantes, nous tiendrons compte de $K_{0i}^{(2)}$ en utilisant l'approximation des solutions données par la solution de Lagrange (1.76). Cette approximation sera suffisante car la contribution des termes de degré 2, $K_{0i}^{(2)}$, est beaucoup plus petite que $K_{0i}^{(0)}$.

Pour annuler les termes constants dans (1.77), on a donc pour la première approximation :

$$p_{0i} = -K_{0i}^{(0)}(p_0) \quad (1.78)$$

On peut résoudre (1.78) par approximations successives, en commençant avec $p_{0i}^{(0)} = 0$. Pour cette première approximation $p_{0i}^{(1)}$, on tiendra compte des termes linéaires en p_{0i} dans $K_{0i}^{(0)}$, ce qui permet d'aller un peu plus vite. Les résultats de cette étape sont donnés dans le tableau 4. On remarquera que les $p_{0i}^{(1)}$ sont de l'ordre des masses planétaires.

A cette approximation, qui correspond au grade 0, nous avons calculé les valeurs des matrices A_1 et A_2 de (1.76) au premier ordre. Les valeurs propres de ces matrices sont les fréquences $(g_i)_{i=1,8}$ et $(s_i)_{i=1,8}$ de la solution de Lagrange du premier ordre (Tableau 5). Les résultats obtenus sont alors très proches de ceux de Brumberg (1973) ; les petites différences entre les deux solutions peuvent s'expliquer par un choix différent de variables et de constantes. En particulier la masse de Saturne utilisée par Brumberg est $1/3501.6 M_\odot$ contre $1/3498.5 M_\odot$ pour la nôtre.

I.6.2. Approximation 2 .

Dans toute cette section $p_{0i} = p_{0i}^{(1)}$.

A) Solution de Lagrange d'ordre 1.

Nous calculons maintenant une nouvelle solution de Lagrange d'ordre 1, à l'aide des constantes $p_{0i}^{(1)}$ que l'on vient de déterminer. Les fréquences obtenues g_i, s_i sont comparées à celles de Bretagnon (1974) obtenues avec un système équivalent (Tableau 6). La comparaison des tableaux 5 et 6 nous montre que la contribution des grades ≥ 1 est très importante, et peut atteindre 0.2 dans le cas de la fréquence g_6 .

B) Solution de Lagrange d'ordre 2.

A l'aide des méthodes développées dans les sections précédentes, nous avons calculé la solution de Lagrange d'ordre 2 (incluant les termes d'ordre 1 et 2) à la première approximation ($p_{0i} = p_{0i}^{(0)} = 0$) et à la seconde approximation ($p_{0i} = p_{0i}^{(1)}$).

	I	II	I - II	I	II	III
	$P_{0i} = P_{0i}(1)$	$P_{0i} = P_{0i}(0)$		$P_{0i} = P_{0i}(1)$	Brumberg 1973	Duriez 1979
g_1	- 0.001238	- 0.001242	0.000004	- 5.462703	- 5.464363	
g_2	- 0.005956	- 0.005960	0.000004	- 7.351887	- 7.350573	
g_3	- 0.072885	- 0.071502	- 0.001383	- 17.403632	- 17.402211	
g_4	- 0.061696	- 0.063084	0.001388	- 18.065928	- 18.063412	
g_5	- 0.416909	- 0.416507	- 0.000401	- 4.127907	- 4.142585	- 4.1414
g_6	- 0.927556	- 0.956545	0.028989	- 23.214361	- 23.220655	- 23.2281
g_7	- 0.268341	- 0.270484	0.002143	- 2.969719	- 2.977217	- 2.9784
g_8	- 0.019388	- 0.019602	0.000214	- 0.652693	- 0.656973	- 0.6578
s_1	0.000119	0.000122	- 0.000003	5.200865	5.200782	
s_2	0.000175	0.000178	- 0.000003	6.570265	6.570882	
s_3	- 0.001016	- 0.001009	- 0.000007	18.744530	18.742930	
s_4	- 0.001236	- 0.001229	- 0.000007	17.634591	17.632342	
s_5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00005
s_6	- 0.066806	- 0.068872	0.002066	25.674315	25.667997	25.6430
s_7	0.005025	0.005195	- 0.000170	2.908845	2.915718	2.9134
s_8	0.005052	0.005188	- 0.000136	0.682763	0.682281	0.6815

Tableau 8. Contribution de l'ordre 2 dans les fréquences de la solution de Lagrange ("'/an).

Tableau 9. Ordre 2. Fréquences de la solution de Lagrange ("'/an).

Les différences sur les fréquences entre les deux approximations sont données dans le Tableau 8 , et nous pouvons remarquer que la contribution des termes de grade non nul est loin d'être négligeable. Elle peut atteindre 3% dans le cas de g_6 , comme nous l'avions estimé dans la section I.5. . Les valeurs finales des fréquences incluant l'ordre 1 et 2 à cette approximation ($p_{0i} = p_{0i}(1)$) sont données dans le Tableau 9, et sont comparées aux résultats de Brumberg (1973) et de Duriez (1979).

Les comparaisons à ce stade ne sont pas très faciles . Les constantes de Brumberg ne sont pas les mêmes que les nôtres, ni ses variables ; les identifications par ordre ne sont pas non plus les mêmes.

Il est relativement plus facile d'analyser les différences avec les valeurs obtenues par Duriez car nous avons utilisé les mêmes variables que lui . Comme les orbites de référence ne sont pas les mêmes, les solutions à l'ordre 2 ne devraient différer que de termes d'ordre 3. Les différences que l'on constate dans le Tableau 9 viennent probablement du fait que Duriez n'a conservé que le grade 0 dans les contributions de l'ordre 2.

Cependant, comme ses orbites de référence ne sont pas les mêmes que les nôtres, les valeurs des p_{0i} qu'il trouve ne sont pas non plus les mêmes, et les contributions des termes de grade ≥ 1 (1.74) ne sont pas les mêmes que dans le Tableau 8 . Si on effectue une interpolation des résultats du Tableau 8, en utilisant (1.74) et les valeurs des p_{0i} données par Duriez (1979), on trouve un excès de 1.5 % dans les contributions de l'ordre 2 de g_6 pour les valeurs obtenues par Duriez qui deviennent alors très proches des nôtres .

Planète	l/m	N (Rd/millier d'années)	k_0	h_0	q_0	P_0
Mercuré	6 023 600	26 087.903 141 574 2	+ 0.044 660 597 60	+ 0.200 723 313 68	+ 0.040 615 633 84	+ 0.045 635 504 61
Vénus	408 523.5	10 213.285 546 211 0	- 0.004 492 821 33	+ 0.005 066 847 26	+ 0.006 824 101 42	+ 0.028 822 857 75
Terre	328 900.5	6 283.075 849 180 0	- 0.003 740 816 50	+ 0.016 284 476 63	0	0
Mars	3 098 710	3 340.612 431 492 3	+ 0.085 365 602 52	- 0.037 899 732 36	+ 0.010 470 425 74	+ 0.012 284 493 07
Jupiter	1 047.355	529.690 965 094 6	+ 0.046 985 721 24	+ 0.012 003 857 48	- 0.002 065 610 98	+ 0.011 183 771 57
Saturne	3 498.5	213.299 095 438 0	- 0.002 960 035 95	+ 0.055 429 642 54	- 0.008 717 474 36	+ 0.019 891 473 01
Uranus	22 869	74.781 598 567 3	- 0.045 951 323 76	+ 0.005 637 913 07	+ 0.001 859 150 75	+ 0.006 486 170 08
Neptune	19 314	38.133 035 637 8	+ 0.005 999 775 71	+ 0.006 692 424 13	- 0.010 291 478 19	+ 0.011 516 839 85

Tableau 7. Constantes d'intégration J2000 (2 451 545) de la solution VSOP82 (Bretagnon 1982).

On a : $z_0 = k_0 + ih_0$; $\zeta_0 = q_0 + P_0$.

C) Calcul des constantes $p_{0i}(2)$.

Nous avons calculé une solution de Lagrange d'ordre 2 avec les valeurs $p_{0i} = p_{0i}(1)$ et les constantes d'intégration J2000 de la solution VSOP82 obtenue par Bretagnon (1982) (Tableau 7). Nous pouvons alors calculer la contribution des termes de degré 2 dans les équations dq_i/dt .

Les termes de degré 2 des équations dq_i/dt sont calculés à l'ordre 1 et 2 avec les méthodes de la section (I.4). les monômes sont tous de caractéristique $c_M = 0$, donc de la forme $\alpha_i \bar{\alpha}_j$, où α_i désigne l'une des variables z_i, ζ_i (1.76) ; et $i, j \in [1,16]$.

La solution de Lagrange (1.76) est de la forme :

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{16} \lambda_{ik} \exp \sqrt{-1}(c_k t + \phi_k) \quad (1.79)$$

Les constantes $(c_k)_{k=1,16}$ sont les valeurs propres de la matrice de Lagrange A du système linéaire (1.76) , que nous avons noté par ailleurs $(g_i)_{i=1,8}$ et $(s_i)_{i=1,8}$ pour distinguer les systèmes en excentricité et inclinaison. Les constantes λ_{ik} et ϕ_k sont les amplitudes et les phases de la solution, déterminées par la donnée des constantes d'intégration J2000 . On a :

$$\alpha_i \bar{\alpha}_j = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} \exp \sqrt{-1}((c_k - c_l)t + \phi_k - \phi_l) \quad (1.80)$$

Comme toutes les valeurs propres $(c_i)_{i=1,16}$ sont distinctes, le terme constant de $\alpha_i \bar{\alpha}_j$ sera :

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{16} \lambda_{ik} \lambda_{jk} \quad (1.81)$$

Planète	ordre 1		ordre 2	
	degré 0	degré 2	degré 0	degré 2
Mercure	0.11794931	0.00971144	0.00000188	0.00000172
Vénus	0.49816235	-	0.00000807	0.00004772
Terre	- 0.15434301	0.00443399	0.00004338	- 0.00006771
Mars	1.20339777	0.01151913	- 0.00035243	0.00006616
Jupiter	5.72663819	0.09050364	- 0.01998642	0.01146931
Saturne	- 249.61287923	- 0.78450576	0.01564154	- 0.16196843
Uranus	- 271.26702879	- 0.21212230	- 0.59752769	0.00239242
Neptune	- 270.85137122	- 0.02868982	- 0.93184489	- 0.03732943

Tableau 10. $p_{0i}(2) \times 10^5$. Contribution des différentes parties de $L_i^{(q)}$.

Planète	Ordre 1	
	Degré 0	Degré 2
Mercure	0.11794934	0.00971144
Venus	0.49816273	- 0.00354931
Terre	- 0.15434231	0.00443399
Mars	1.20340062	0.01151914
Jupiter	5.72645262	0.09049993
Saturne	- 249.60928421	- 0.78447246
Uranus	- 271.26657224	- 0.21212471
Neptune	- 270.85125058	- 0.02869011

Tableau 11. $p_{0i}(3) \times 10^5$. Contribution de l'ordre 1.
 Les contributions de l'ordre 2 sont celles de la 2ème approximation (Tableau 10).

Planète	$P_{0i}(1)$	$P_{0i}(2)$	$P_{0i}(3)$	Bretagnon	$P_{0i}(3) - \text{Bretagnon}$
Mercure	0.1179512	0.1276643	0.1276644	0.12608	0.00158
Vénus	0.4981544	0.4946527	0.4946531	0.49124	0.00341
Terre	- 0.1542992	- 0.1499333	- 0.1499326	- 0.14179	- 0.00814
Mars	1.2030468	1.2146306	1.2146335	1.21075	0.00388
Jupiter	5.7059742	5.8086247	5.8084354	5.82227	- 0.01394
Saturne	- 249.5841830	- 250.5437028	- 250.5400836	- 250.65087	0.11079
Uranus	- 271.8625620	- 272.0742864	- 272.0738322	- 272.10660	0.03277
Neptune	- 271.7805205	- 271.8492354	- 271.8491150	- 271.90905	0.05994

Tableau 12. $P_{0i} \times 10^5$. Approximations successives. Comparaison avec les valeurs de Bretagnon (1984b).

La partie de degré 2 de dq/dt étant de la forme :

$$D2 = \sum_{i,j=1}^{16} C_{ij} \alpha_i \bar{\alpha}_j \quad (1.82)$$

La partie constante de cette expression sera :

$$CD2 = \sum_{i,j=1}^{16} C_{ij} \gamma_{ij} \quad (1.83)$$

La contribution des termes de degré 2 ainsi calculée est donnée dans le tableau 10 . Les valeurs résultantes $p_{0i}(2)$ sont données dans le tableau 12 .

I.6.3. Approximation 3 .

Pour obtenir une précision interne absolue d'environ 10^{-8} sur les valeurs des constantes p_{0i} , nous avons calculé une troisième approximation de la contribution de l'ordre 1 avec les valeurs $p_{0i} = p_{0i}(2)$ (Tableaux 11 et 12).

Dans la Théorie à variations séculaires VSOP82, Bretagnon (1982) a calculé les valeurs moyennes des demi-grands axes au voisinage de l'origine, ainsi que l'expression Δa des courtes périodes. A l'aide de la loi de Kepler (1.2), on peut alors en déduire les valeurs moyennes des moyens mouvements au voisinage de l'origine, $\langle n \rangle = N(1 + p_0)$. La théorie à variations séculaires VSOP82 est très précise au voisinage de l'origine, car elle contient les contributions de tous les degrés à l'ordre 3 des masses (ce n'est pas une théorie générale, et elle n'est valable que sur un millier d'années au voisinage de l'origine). Les valeurs des p_{0i} que nous pouvons

déduire de cette théorie sont donc très précises, et nous pouvons les utiliser comme référence, ce qui nous permet d'avoir dès à présent une estimation de la précision de nos calculs.

Dans le tableau 12, nous avons rassemblé les valeurs des constantes p_{0i} obtenues aux différentes approximations. Elles sont comparées aux valeurs déduites des calculs de Bretagnon (1984b). Les différences $p_{0i}^{(3)} - \text{Bretagnon}$ sont toujours inférieures à 10^{-6} . Cette valeur est atteinte dans le cas de Saturne et est sans doute due à la contribution des termes de degré 4 de l'ordre 2 dans le couple Jupiter-Saturne, que l'on pourrait aussi calculer en utilisant les méthodes de la section I.4. Ces valeurs sont néanmoins satisfaisantes ; elles nous permettent d'atteindre une précision relative meilleure que 10^{-6} sur les coefficients du système autonome.

Ce sont ces valeurs $p_{0i}^{(3)}$ que l'on utilisera dans la suite pour effectuer le calcul du système autonome.

I.7. LE SYSTEME AUTONOME .

Ayant déterminé les constantes p_{0i} avec une précision suffisante, nous pouvons maintenant calculer le système autonome complet (1.19). Les résultats de la section (I.6.) nous assurent alors une précision relative de 10^{-6} sur les coefficients de ce système. Nous allons uniquement nous intéresser au système rassemblant les 16 équations donnant les variations séculaires des variables z_i et ζ_i ($i=1,8$), à l'ordre 2, et jusqu'au degré 5 en excentricité-inclinaison.

I.7.1. Organisation du système autonome.

Pour les variables \bar{z} , $\bar{\zeta}$, on a $\tau(\bar{z}) = \tau(\bar{\zeta}) = -1$ (1.9). La caractéristique de tous les monômes du système autonome considéré sera donc $c_M = +1$.

Les monômes intervenant dans les équations $d\bar{z}_i/dt$ sont ceux des blocs $\mathcal{M}_{(1,1)}^{(3,0)}$, $\mathcal{M}_{(1,3)}^{(3,0)}$, $\mathcal{M}_{(1,5)}^{(3,0)}$ (pairs en inclinaison).

Les monômes intervenant dans les équations $d\bar{\zeta}_i/dt$ sont ceux des blocs $\mathcal{M}_{(1,1)}^{(3,1)}$, $\mathcal{M}_{(1,3)}^{(3,1)}$, $\mathcal{M}_{(1,5)}^{(3,1)}$ (impairs en inclinaison).

Ces monômes font intervenir les éléments de 1,2 ou 3 planètes. Pour faciliter l'organisation du système autonome complet, on les dissocie en trois groupes, faisant intervenir les éléments de exactement 1,2 ou 3 planètes. Le nombre de monômes dans chaque groupe est donné par les tableaux 13 et 14a, ainsi que le nombre total de monômes dans chaque équation $d\bar{z}_i/dt$ ou $d\bar{\zeta}_i/dt$. Dans les tableaux 13 et 14a, un bloc est l'ensemble des monômes engendré par une combinaison de 1,2 ou 3 planètes.

Remarquons qu'il n'y a que 21 triplets de planètes par équation, car chaque triplet doit contenir la planète de l'équation considérée (section I.4).

Nombre de planètes	Degré 1	Degré 3	Degré 5	Total
1	1	3	6	10
2	0	14	88	102
3	0	12	306	318

Tableau 13. Nombre de monômes faisant intervenir exactement 1,2, ou 3 planètes dans chaque bloc du système autonome pour les équations $d\bar{z}_i/dt$ et $d\bar{\zeta}_i/dt$.

Nombre de planètes	Nombre de blocs par équation	Nombre de monômes par bloc	Nombre total de monômes
1	8	10	80
2	28	102	2856
3	21	318	6678
			<u>9614</u>

Tableau 14a. Nombre total de monômes pour chaque équation $d\bar{z}_i/dt$ ou $d\bar{\zeta}_i/dt$ du système autonome d'ordre 2.

Nombre de planètes	Nombre de blocs par équation	Nombre de monômes par bloc	Nombre total de monômes
1	8	10	80
2	7	102	714
			<u>794</u>

Tableau 14b. Nombre de monômes dans chaque équation $d\bar{z}_i/dt$ ou $d\bar{\zeta}_i/dt$ du système autonome d'ordre 1.

Le système autonome complet à l'ordre 2, et jusqu'au degré 5 en excentricité-inclinaison comprend donc $16 \times 9614 = 153\,824$ termes polynomiaux.

Un des avantages essentiels de l'organisation que nous avons donnée à ce système est que la totalité de l'information concernant les monômes est contenue dans la liste des $2 \times (10 + 102 + 318) = 860$ monômes de base ; le facteur 2 provenant de la distinction entre les monômes pairs et impairs par rapport aux variables $\bar{\zeta}_i, \zeta_i$.

I.7.2. Calcul de l'ordre 1.

Dans le calcul de l'ordre 1, tous les monômes n'interviennent pas. Le nombre de monômes du système d'ordre 1 est donné par le tableau 14b.

Cela fait $16 \times 794 = 12\,704$ monômes dans le système complet.

Le calcul des termes à l'ordre 1 est très rapide, et ne prend que quelques secondes sur le NAS9080 du CIRCE.

I.7.3. Calcul de l'ordre 2.

Le système d'ordre 2 est beaucoup plus important ; il contient tous les $153\,824$ termes. D'autre part, chaque terme est obtenu sous forme de sommes de produits des termes d'ordre 1 à l'aide des formules (1.45) et (1.47) et des propositions 2 et 3 de la section I.4.

Le calcul des termes faisant intervenir les éléments de 3 planètes (proposition 3) est exact ; la précision sur les coefficients est alors donnée par la précision du calcul des constantes p_{0i} .

Dans les produits à 2 planètes (proposition 2), la précision interne du calcul est fonction de la valeur maximale l_0 , atteinte dans le calcul

i	j	3	4	5	6	7	8
1	$23 / 10^{-11}$	$17 / 10^{-11}$	$14 / 10^{-9}$	$10 / 10^{-10}$	$10 / 10^{-15}$	$10 / 10^{-18}$	$10 / 10^{-21}$
2	-	$40 / 10^{-9}$	$20 / 10^{-8}$	$10 / 10^{-8}$	$10 / 10^{-11}$	$10 / 10^{-14}$	$10 / 10^{-16}$
3	-	-	$30 / 10^{-8}$	$13 / 10^{-11}$	$10 / 10^{-9}$	$10 / 10^{-12}$	$10 / 10^{-14}$
4	-	-	-	$15 / 10^{-10}$	$13 / 10^{-13}$	$10 / 10^{-11}$	$10 / 10^{-13}$
5	-	-	-	-	$25 / 10^{-10}$	$15 / 10^{-9}$	$13 / 10^{-10}$
6	-	-	-	-	-	$23 / 10^{-10}$	$16 / 10^{-10}$
7	-	-	-	-	-	-	$31 / 10^{-9}$

Tableau 15. Valeur maximale de l_0 , et précision relative atteinte dans le calcul des coefficients $C_A = \sum_{l \in Z} C_A(l)$, pour chaque couple de planètes P_i, P_j .

de $C_A = \sum C_A(l)$. Les valeurs maximales de l_0 utilisées, ainsi que la précision relative obtenue dans le calcul de C_A , selon (1.72) sont données dans le tableau 15.

La précision interne est toujours meilleure que 10^{-8} , et la précision relative des termes est alors donnée par la précision des constantes p_{0i} .

Le calcul complet de l'ordre 2 a duré environ 45 mn sur le NAS 9080 au CIRCE.

I.7.4. Conclusions du chapitre I.

- i) Nous avons développé un nouvel algorithme de calcul du système autonome d'ordre 2, basé sur une écriture explicite des coefficients des termes d'ordre 2 en fonction des termes de l'ordre 1 (proposition 2 et 3).
- ii) Nous avons calculé le système d'ordre 2 pour les 8 planètes en conservant tous les termes, jusqu'au degré 5 en excentricité-inclinaison.
- iii) Le système complet d'ordre 2 donnant les variations séculaires des variables excentricité \bar{z}_i et inclinaison $\bar{\zeta}_i$ ($i=1,8$) comporte 153 824 termes ; chacun étant déterminé avec une précision relative de 10^{-6} . Il se présente sous la forme :

$$\dot{\alpha} = \sqrt{-1} (A \alpha + \Phi_3(\alpha, \bar{\alpha}) + \Phi_5(\alpha, \bar{\alpha})) \quad (1.84)$$

où $\alpha = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_8, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \dots, \bar{\zeta}_8)$

A est une matrice réelle à coefficient constants

Φ_3 et Φ_5 rassemblent respectivement les termes de degré 3 et 5.

CHAPITRE II

RESOLUTION ANALYTIQUE

II.1. SOLUTION DE LAGRANGE.

Le calcul de la solution de Lagrange du système autonome (1.84) ne présente pas de difficultés ; c'est la solution du système linéaire :

$$\dot{\alpha} = \sqrt{-1} A \alpha \quad (2.1)$$

Nous avons déjà effectué ces calculs dans la section (I.6), mais ici nous allons calculer la version définitive, et développer un peu plus les calculs. Les coefficients de la matrice A sont calculés avec la dernière approximation $p_{0i}^{(3)}$ des constantes p_{0i} .

Soit C la matrice diagonale des valeurs propres $(c_i)_{i=1,16}$ de A (Tableau 16), que nous avons aussi notées $((g_i)_{i=1,8}, (s_i)_{i=1,8})$. Soit S la matrice des vecteurs propres de A, normés pour la norme euclidienne ($\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{16}^2)^{1/2}$); S s'écrit sous la forme :

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

où S_1 et S_2 sont deux matrices réelles 8×8 (Tableau 17)

On a :

$$C = S^{-1} A S \quad (2.3)$$

Si on effectue le changement de variables :

$$\alpha = S \beta \quad (\beta = (\beta_i)_{i=1,16}) \quad (2.4)$$

Le système (2.1) devient :

$$\dot{\beta}_i = \sqrt{-1} c_i \beta_i \quad (i = 1,16) \quad (2.5)$$

qui a pour solution :

$$\beta_i = \beta_i(0) \exp\sqrt{-1} c_i t \quad (i = 1, 16) \quad (2.6)$$

Les constantes $\beta_i(0) = \rho_i \exp\sqrt{-1} \phi_i$ (Tableau 18) sont calculées par (2.4) à partir des constantes d'intégration J2000 de VSOP82 (Tableau 7). La solution de Lagrange est alors donnée par (2.4) et (2.6). Elle est de la forme :

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{16} \lambda_{ik} \exp\sqrt{-1} (c_i t + \phi_i) \quad (2.7)$$

La matrice $L = (\lambda_{ij})_{i,j=1,16}$ des amplitudes de la solution de Lagrange (2.7) est de la forme :

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

où L_1 et L_2 sont deux matrices carrées 8×8 (Tableau 19). Elle est donnée par :

$$L = S \rho \quad (\rho = (\rho_i)_{i=1,16}) \quad (2.9)$$

j	c_j ("/an)
1	-5.4630085376
2	-7.3519051620
3	-17.4035318518
4	-18.0658694877
5	-4.1278217095
6	-23.2129139274
7	-2.9697193879
8	-0.6526906250
9	5.2008675663
10	6.5702698896
11	18.7445351564
12	17.6346083082
13	0.0000000000
14	25.6734516789
15	2.9088596077
16	0.6827668810

Tableau 16. Fréquences c_j de la solution de Lagrange.

S_1	0.9991482080	0.6885259578	0.0426216936	-0.0239844295	0.4177990142	0.0019660728	0.0204257999	0.0007686464
	0.0345808154	-0.5684745687	-0.3506132142	0.2114236305	0.2228864335	-0.0077442103	0.0185062502	0.0011659170
	0.0222246909	-0.4433925112	0.2893197437	-0.2090558299	0.2164329564	0.0456746046	0.0192900844	0.0013500918
	0.0036172329	-0.0785589123	0.8896897269	0.9544739108	0.2305005384	0.2759990713	0.0247328613	0.0021520962
	-0.0000473607	0.0003409174	-0.0000299398	-0.0000090921	0.5098713767	-0.3156525046	0.0609708463	0.0062440466
	-0.0000427277	0.0003524097	-0.0001998489	-0.0000948825	0.4337147597	0.9060458021	0.0601445909	0.0075942246
	0.0000200806	-0.0000894638	0.0000121587	0.0000054137	-0.4766497639	-0.0333806610	0.9876883274	0.1781475983
	-0.0000002060	-0.0000016162	0.0000007443	0.0000003306	0.0227944674	-0.0021765324	-0.1240702853	0.9839503892
S_2	0.9932486697	0.9383790468	-0.0799346637	0.0227870640	0.3535533906	0.0141554703	-0.1818420826	-0.1189129165
	0.0934064395	-0.2664892367	0.5239692560	-0.1345126864	0.3535533906	0.0056533559	-0.1045376974	-0.1087225072
	0.0672913111	-0.2148040169	-0.4773321538	0.0885794976	0.3535533906	0.1432330915	-0.0944153083	-0.1065547608
	0.0142862542	-0.0478233349	0.7008713677	0.9866816249	0.3535533906	0.4925978456	-0.0684640549	-0.1008994619
	-0.0001646846	0.0003468164	0.0000032877	-0.0000348193	0.3535533906	-0.3196810348	-0.0521231028	-0.0959560554
	-0.0002072084	0.0004826259	0.0000952483	-0.0003581051	0.3535533906	0.7957290110	-0.0425065404	-0.0924699267
	0.0001719459	-0.0002467648	-0.0000079026	0.0000333241	0.3535533906	-0.0346935301	0.9616279274	0.0932704739
	0.0000042725	-0.0000138888	-0.0000009117	0.0000038058	0.3535533906	-0.0038784351	-0.1146815376	0.9623132978

Tableau 17. Matrices S_1 et S_2 des vecteurs propres du système linéaire, normés avec la norme euclidienne (2.2).

i	ρ_i	ϕ_i ($^{\circ}$)
1	0.1740310209	267.1011548839
2	0.0364569502	342.4202167422
3	0.0371178722	24.3731281607
4	0.0723591188	41.1129486523
5	0.0836739102	328.3027533721
6	0.0528622853	226.4096409697
7	0.0299582798	242.4233511934
8	0.0095811629	285.8635507781
9	0.0632192200	339.9094044641
10	0.0190317423	221.6880688574
11	0.0256062583	284.3757339558
12	0.0255930577	62.9413437643
13	0.0389607940	252.4095488840
14	0.0098858770	232.6620646122
15	0.0091704518	44.1904621009
16	0.0061042494	156.7778973022

Tableau 18. Constantes d'intégration de la solution de Lagrange (2.6).

$$\beta_i(0) = \rho_i \exp \sqrt{-1} \phi_i .$$

17388278	2510156	158203	-173549	3495888	10393	61192	736
601813	-2072485	-1301402	1529843	1864978	-40938	55442	1117
386779	-1616474	1073893	-1512710	1810979	241446	57790	1294
62951	-286402	3302339	6906489	1928688	1458994	74095	2062
-824	1243	-111	-66	4266293	-1668611	182658	5983
-744	1285	-742	-687	3629061	4789565	180183	7276
349	-326	45	39	-3988315	-176458	2958944	170686
-4	-6	3	2	190730	-11506	-371693	942739
6279241	1785899	-204683	58319	1377472	13994	-166757	-72587
590508	-507175	1341689	-344259	1377472	5589	-95866	-66367
425410	-408809	-1222269	226702	1377472	141598	-86583	-65044
90317	-91016	1794669	2525220	1377472	486976	-62785	-61592
-1041	660	8	-89	1377472	-316033	-47799	-58574
-1310	919	244	-917	1377472	786648	-38980	-56446
1087	-470	-20	85	1377472	-34298	881856	56935
27	-26	-2	10	1377472	-3834	-105168	587420

Tableau 19. Matrices L_1 et L_2 de la solution de Lagrange (2.8). Unité 10^{-8} .

II.2. NORMALISATION DU SYSTEME AUTONOME.

Dans cette section, nous suivons de près l'algorithme de résolution d'un système polynomial sous forme trigonométrique par la méthode de normalisation de Birkhoff, exposé par Brumberg (1980).

II.2.1. Normalisation d'un système polynomial.

Soit un système différentiel polynomial

$$\dot{X} = P X + R(X) \quad (2.10)$$

où X est un vecteur de dimension n , P une matrice diagonale $n \times n$ à coefficients constants, et R un vecteur polynomial de degré > 2 .

On recherche un changement de variable sous la forme d'une série formelle :

$$X = Y + \Gamma(Y) \quad (2.11)$$

qui transforme le système (2.10) en un nouveau système plus facilement intégrable :

$$\dot{Y} = P Y + F(Y) \quad (2.12)$$

Si Γ_Y désigne la matrice jacobienne des dérivées partielles de Γ par rapport aux variables Y , on aura donc

$$P \cdot (Y + \Gamma) + R(Y + \Gamma) = P Y + F + \Gamma_Y \cdot (P Y + F) \quad (2.13)$$

Soit

$$R(Y + \Gamma) - \Gamma_Y F - F = \Gamma_Y P Y - P \Gamma \quad (2.14)$$

Il faut déterminer les séries formelles Γ et F de manière à ce que (2.14) soit vérifiée et que l'équation transformée (2.12) soit facilement intégrable. Pour ce faire, on opère par approximation successives en construisant Γ et F par termes de degré croissant. On pose :

$$U = R(Y + \Gamma) - \Gamma_Y F \quad (2.15)$$

$$U' = U - F$$

(2.14) est alors équivalent à :

$$U' = -P\Gamma + \Gamma_Y PY \quad (2.16)$$

On suppose que Γ et F sont déterminés jusqu'au degré m , et vérifient (2.15) et (2.16) jusqu'au degré m . Comme R est de degré minimum $m_0 > 2$, $R(Y + \Gamma)$ est déterminé jusqu'au degré $m + 1$ au moins.

De même, si Γ est de degré > 2 , par (2.15) U sera déterminé jusqu'au degré $m + 1$.

Les termes de F de degré $m + 1$ sont alors déterminés arbitrairement en fonction des termes de U . On obtient alors U' au degré $m + 1$, et par (2.16), on calcule Γ au degré $m + 1$. Lorsqu'on a atteint un degré suffisant, il reste à intégrer le système $\dot{Y} = PY + F(Y)$. On amorce le processus en prenant $\Gamma = 0$, soit $U = R_{m_0}(Y)$, où R_{m_0} est la partie de R homogène de degré minimum m_0 .

II.2.2. Application au système autonome.

Le système autonome d'ordre 2 calculé au chapitre I (1.84) se présente sous la forme :

$$\dot{\alpha} = \sqrt{-I} (A \alpha + \Phi(\alpha, \bar{\alpha})) \quad (2.17)$$

où $\Phi = \Phi_3 + \Phi_5$ rassemble les monômes de degré 3 et 5. On garde par ailleurs les mêmes notations que dans (1.84) et dans la section II.1.

Si on effectue le changement de variable (2.4), $\alpha = S\beta$; le système (2.17) devient :

$$\dot{\beta} = \sqrt{-1} (C\beta + \Psi(\beta, \bar{\beta})) \quad (2.18)$$

avec

$$\Psi(\beta, \bar{\beta}) = S^{-1} \Phi(S\beta, S\bar{\beta}) \quad (2.19)$$

On obtient alors un système de la même forme que le système polynomial (2.10) en posant :

$$X = \begin{bmatrix} \beta \\ \bar{\beta} \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} C & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} C \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} \Psi \\ -\sqrt{-1} \bar{\Psi} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Nous pouvons alors appliquer l'algorithme de normalisation de Birkhoff (section II.2.1.) que l'on restreint au système (2.18). Le changement de variables recherché (2.11) est alors de la forme :

$$\beta = u + \Gamma(u, \bar{u}) \quad (2.21)$$

et le système transformé devient :

$$\dot{u} = \sqrt{-1} (C u + F(u, \bar{u})) \quad (2.22)$$

Les équations (2.15) et (2.16) qui déterminent Γ et F sont alors :

$$U = \Psi - \frac{\partial \Gamma}{\partial u} F + \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{u}} \bar{F} \quad (2.23)$$

$$U' = U - F$$

$$U' = -C\Gamma + \frac{\partial \Gamma}{\partial u} C u - \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{u}} C \bar{u} \quad (2.24)$$

Chaque composante U_i ($i = 1, 16$) de U , déterminée par (2.23) est une série entière

$$U_i = \sum_{(n, \bar{n})} U_{n\bar{n}}^{(i)} \prod_{j=1}^{16} u_j^{n_j} \bar{u}_j^{\bar{n}_j} \quad (2.25)$$

n et \bar{n} sont des multi-indices de composantes n_j et \bar{n}_j ($j = 1, 16$); $U_{n\bar{n}}^{(i)}$ est un coefficient numérique réel, tout comme ceux de ψ .

On rassemble alors dans la composante F_i de F tous les termes de U_i , résonnants avec u_i , c'est à dire les termes de la somme (2.25) vérifiant :

$$n_j = \bar{n}_j + \delta_{ij} \quad (2.26)$$

δ_{ij} désigne le symbole de Kroneker. On a alors :

$$F_i = u_i \sum_{(n, \bar{n})}^* U_{n\bar{n}}^{(i)} \prod_{j=1}^{16} (u_j \bar{u}_j)^{\bar{n}_j} \quad (2.27)$$

L'astérisque sur le signe somme indique que la sommation s'effectue sur tous les indices résonnants (2.26). Γ s'obtient ensuite par identification polynomiale formelle dans (2.24). Γ est une série formelle de la même forme que U (2.25), et ses coefficients sont donnés par :

$$\Gamma_{n\bar{n}}^{(i)} = U_{n\bar{n}}^{(i)} / \left(\sum_{j=1}^{16} (n_j - \bar{n}_j) c_j - c_i \right) \quad (2.28)$$

On a exclu de U' les termes résonnants (2.26), (2.27) :

Si les fréquences propres de la partie linéaire c_j sont incommensurables, le dénominateur de (2.28) n'est jamais nul et Γ est bien défini.

II.2.3. Résolution du système normalisé.

F et Γ étant déterminés au degré voulu, le système normalisé (2.22) est de la forme :

$$\dot{u}_i = \sqrt{-1} u_i \left\{ c_i + \sum_{(n, \bar{n})}^* U_{n\bar{n}}^{(i)} \prod_{j=1}^{16} (u_j \bar{u}_j)^{\bar{n}_j} \right\} \quad (2.29)$$

Si on tient compte de l'équation conjuguée, on trouve alors que pour tout $i \in [1, 16]$, on a l'intégrale :

$$u_i \bar{u}_i = \theta_i^2 = \text{cte} \quad (2.30)$$

Le système (2.29) devient alors le système linéaire très simple :

$$\dot{u}_i = \sqrt{-1} (c_i + \delta c_i) u_i \quad (2.31)$$

avec

$$\delta c_i = \sum_{(n, \bar{n})}^* U_{n\bar{n}}^{(i)} \prod_{j=1}^{16} \theta_j^{2\bar{n}_j} \quad (2.32)$$

La solution u_i de (2.29) est alors :

$$u_i = \theta_i \exp^{\sqrt{-1} ((c_i + \delta c_i) t + \tau_i)} \quad (2.33)$$

θ_i et τ_i sont des constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales $\beta_i(0)$ à l'aide de (2.21).

II.3. MISE EN OEUVRE DE LA THEORIE.

Nous avons suivi l'algorithme de la section II.2. pour construire une solution analytique de degré 3 en tenant compte de tous les termes de degré 3 du système autonome d'ordre 2 (1.84), calculé au chapitre I. La plupart des programmes ont été construits pour pouvoir aussi traiter le système de degré 5.

II.3.1. Calcul de $\psi(\beta, \bar{\beta})$.

La première étape consiste à effectuer la transformation linéaire (2.4) pour calculer $\psi(\beta, \bar{\beta}) = S^{-1} \phi(S\beta, S\bar{\beta})$. Cette transformation est une des phases les plus délicates de l'algorithme. En effet, la substitution de chaque variable α_i par une combinaison linéaire des variables β_i ($i=1,16$) dans ϕ nécessite de très nombreux produits et engendre beaucoup plus de termes que dans les séries initiales.

Dans la série $\phi(\alpha, \bar{\alpha})$ du système autonome d'ordre 2, chaque monôme ne fait intervenir que les éléments de certaines combinaisons de 3 planètes au plus (Chapitre I). Par contre, après la substitution (2.4), on obtient des monômes faisant intervenir toutes les combinaisons des planètes. Pour pouvoir calculer $\psi(\beta, \bar{\beta})$ rapidement, il est nécessaire de réduire au maximum les opérations algébriques sur les monômes qui nécessitent des tris de monômes ou de codes de monômes, très gourmands en temps de calcul.

Nous avons adopté une nouvelle organisation pour les monômes de $\psi(\beta, \bar{\beta})$ qui permet de supprimer tout problème d'adressage dans le calcul de $S^{-1} \phi(S\beta, S\bar{\beta})$. On décompose $\beta = (\beta_i)_{i=1,16}$ en deux vecteurs à 8 composantes $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i=1,8}$ et $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_i)_{i=1,8}$. On a donc :

$$\beta = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Les variables excentricité \bar{z}, z sont transformées par (2.4) en nouvelles variables \bar{x}, x . Les variables inclinaison $\bar{\zeta}, \zeta$ sont transformées en nouvelles variables $\bar{\xi}, \xi$. On conservera alors les mêmes dénominations de variables excentricité et inclinaison pour les nouvelles variables.

Soit alors :

$$M = \prod_{i=1}^8 \frac{\bar{n}_i}{\bar{x}_i} \frac{\bar{v}_i}{\bar{\xi}_i} \frac{n_i}{x_i} \frac{v_i}{\xi_i} \quad (2.35)$$

un monôme quelconque de $\Psi(\beta, \bar{\beta})$. On appellera *type* du monôme M le monôme formel :

$$\mathcal{G}(M) = \bar{X}^{\bar{n}} \bar{Y}^{\bar{v}} X^n Y^v \quad (2.36)$$

$$\text{où } \bar{n} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \dots + \bar{n}_8$$

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_8$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_8$$

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_8$$

(2.37)

On utilisera aussi cette notion pour les monômes en $\bar{z}, \bar{\zeta}, z, \zeta$ du système autonome.

Dans les types de monômes, on peut aussi distinguer les variables excentricité \bar{X}, X , et les variables inclinaison \bar{Y}, Y . D'autre part, les notions de caractéristique et de parité en inclinaison s'étendent sans peine aux monômes en $\bar{x}, \bar{\xi}, x, \xi$ et aux types de monômes. Les relations suivantes sont encore vérifiées :

- La caractéristique des monômes de Ψ est +1 .
- Les monômes sont pairs en inclinaison dans les équations $d\bar{x}_i/dt$ et impairs en inclinaison dans les équations $d\bar{\xi}_i/dt$.

Ces relations vont nous permettre de déterminer les monômes qui interviennent dans chaque équation du système autonome transformé (2.18) .

L'algorithme de calcul de (2.18) est alors basé sur la constatation suivante :

Proposition 4. Le changement de variables linéaire $\alpha = S\beta$ (2.4) transforme les monômes des variables $\bar{z}_i, \bar{\zeta}_i, z_i, \zeta_i$, d'un type donné \mathcal{G} en des monômes des variables $\bar{x}_i, \bar{\xi}_i, x_i, \xi_i$, du même type.

On peut alors décomposer le système autonome en blocs de monômes du même type, et effectuer les calculs (2.18) par blocs. Les différents types de monômes possibles dans les équations en excentricité et en inclinaison sont donnés dans le tableau 20 pour les différents degrés.

Dans chaque équation, à un type \mathcal{G} de monôme de degré 3 correspond un tableau $T_{\mathcal{G}}(8,8,8)$ de dimension $8^3 = 512$, et à un type de monôme de degré 5, un tableau $T_{\mathcal{G}}(8,8,8,8,8)$ de dimension $8^5 = 32\ 768$. Le tableau 21 donne alors le nombre total de monômes dans chacune des 16 équations du système autonome transformé (2.18) .

Le système total de degré 3 comprend 24 704 termes double précision et occupe environ 200 K octets. Le système de degré 5 comprendrait plus de 3 000 000 termes et occuperait 25 Méga octets. On comprend donc ici la limitation qui existe quand on essaie d'atteindre des degrés élevés en conservant tous les termes. Le système de degré 5 peut néanmoins se calculer,

Excentricité	Inclinaison
\bar{X}	\bar{Y}
$\bar{Y} \bar{Y} X$	$\bar{Y} \bar{Y} Y$
$\bar{X} \bar{Y} Y$	$\bar{X} \bar{Y} X$
$\bar{X} \bar{X} X$	$\bar{X} \bar{X} Y$
$\bar{Y} \bar{Y} \bar{Y} X Y$	$\bar{Y} \bar{Y} \bar{Y} Y Y$
$\bar{X} \bar{Y} \bar{Y} Y Y$	$\bar{Y} \bar{Y} \bar{Y} X X$
$\bar{X} \bar{Y} \bar{Y} X X$	$\bar{X} \bar{Y} \bar{Y} X Y$
$\bar{X} \bar{X} \bar{Y} X Y$	$\bar{X} \bar{X} \bar{Y} Y Y$
$\bar{X} \bar{X} \bar{X} Y Y$	$\bar{X} \bar{X} \bar{Y} X X$
$\bar{X} \bar{X} \bar{X} X X$	$\bar{X} \bar{X} \bar{X} X Y$

Tableau 20 . Différents types de monômes dans les équations en excentricité et inclinaison du système autonome d'ordre 2 et de degré 5.

Degré	Nombre de types	Nombre de monomes par type	Nombre total de monomes
1	1	8	8
3	3	512	1 536
5	6	32 768	196 608

Tableau 21. Nombre de types de monômes et nombre total de monômes dans chaque équation du système autonome (2.18).

car si on décompose le système en types de monômes, il suffit de disposer de $32 \times 8 = 256$ K octets pour stocker temporairement les coefficients des monômes en mémoire centrale.

L'adressage des monômes est par contre très simple ; par exemple, le coefficient du monôme $\bar{x}_i \bar{x}_j \bar{\xi}_k x_l \xi_m$ dans une équation donnée est tout simplement l'élément $T_{\bar{X}\bar{X}\bar{Y}XY}(i, j, k, l, m)$ du tableau du type $\bar{X}\bar{X}\bar{Y}XY$ correspondant.

Le calcul de $\Psi(\beta, \bar{\beta})$ est alors très rapide, car limité au seul produit des coefficients. De plus il est vectorisable, ce qui nous a permis de gagner un facteur 3 supplémentaire en utilisant le processeur vectoriel du NAS 9080 du CIRCE. Pour le degré 3, nous avons effectué le calcul complet, qui n'a pris que quelques secondes. Les essais sur les programmes de degré 5 ont montré que le calcul complet du degré 5 prendrait environ 20 mn avec la version vectorisée.

II.3.2. Calcul de la solution de degré 3.

L'organisation du système (2.18) en tableaux correspondant chacun à un type de monôme permet aussi une recherche très facile des termes résonnants (2.26) ; ce qui permet de construire F et U' (2.27).

Le calcul de la solution de degré 3 s'effectue sans difficultés particulières à partir de la formule (2.28). Nous avons alors obtenu une solution de degré 3 comprenant environ 25 000 termes rangés par tableaux, de la même manière que U.

Par contre, le calcul des nouvelles constantes d'intégration $u_i(0)$ (2.33) nécessite certaines précautions. Une itération simple dans (2.21) ne permet pas de trouver les nouvelles constantes $u_i(0)$ en fonction de $\beta_i(0)$: le procédé diverge quand on traite le système complet des 8 planètes.

i	ρ_i	ϕ_i (°)	θ_i	τ_i (°)
1	0.1740310209	267.1011548839	0.1905498123	262.6305622933
2	0.0364569502	342.4202167422	0.0391169650	343.5584039616
3	0.0371178722	24.3731281607	0.0337732578	40.4083776214
4	0.0723591188	41.1129486523	0.0636079466	50.3848273187
5	0.0836739102	328.3027533721	0.0838751909	329.3006996943
6	0.0528622853	226.4096409697	0.0525029371	230.1802254496
7	0.0299582798	242.4233511934	0.0296413795	240.9681824245
8	0.0095811629	285.8635507781	0.0093281151	286.2045782295
9	0.0632192200	339.9094044641	0.0329858944	350.4461321618
10	0.0190317423	221.6880688574	0.0123694322	34.3040931114
11	0.0256062583	284.3757339558	0.0207402922	291.1397565741
12	0.0255930577	62.9413437643	0.0332135080	79.2028769824
13	0.0389607940	252.4095488840	0.0389579878	252.4086753873
14	0.0098858770	232.6620646122	0.0098644528	233.1956402097
15	0.0091704518	44.1904621009	0.0092811200	41.8830507775
16	0.0061042494	156.7778973022	0.0060192440	156.3341183648

Tableau 22. Constantes d'intégration de la solution de degré 3 (2.33).

$$u_i(0) = \theta_i \exp\sqrt{-\Gamma} \tau_i$$

On a aussi rappelé dans les colonnes 2 et 3 les constantes d'intégration de la solution de Lagrange (Tableau 18).

Nous avons alors calculé les dérivées partielles des seconds membres et utilisé une méthode de Newton qui converge très rapidement. Ici encore, l'organisation des monômes par types et tableaux nous a facilité grandement le travail.

Les nouvelles constantes d'intégration $u_i(0) = \theta_i \exp\sqrt{-1} \tau_i$ sont données dans le tableau 22.

Les modifications δc_i sur les fréquences, provenant de la contribution des termes de degré 3 (2.32) sont données dans le tableau 23. Dans ce tableau, on trouvera aussi les nouvelles fréquences $\tilde{c}_i = c_i + \delta c_i$, ainsi que les valeurs de ces fréquences obtenues par Bretagnon (1974) et Duriez (1979) pour des systèmes de degré 3.

Ici encore, on peut considérer que les résultats de Duriez ont des incertitudes de quelques % dans la contribution de l'ordre 2, ce qui rend sans doute excessif la valeur $-26''.5060$ de \tilde{c}_6 (voir les sections I.5 et I.6).

Les différences avec les valeurs obtenues par Bretagnon sont très variables suivant les fréquences. Les écarts sont particulièrement importants pour les fréquences $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_9, \tilde{c}_{10}$, qui correspondent essentiellement aux planètes Mercure et Vénus. Ces écarts s'expliquent par la présence de petits diviseurs dans le calcul de la solution (2.28), ce qui rend assez aléatoire la contribution des termes correspondants (section II.3.3).

Finalement, la solution du système de degré 3 par rapport aux variables \bar{z} et $\bar{\zeta}$ est donnée par :

$$\alpha = S\beta = Su + S\Gamma(u, \bar{u}) \quad (2.38)$$

Les amplitudes de la partie linéaire Su , correspondant à la solution de Lagrange (tableau 19) sont données dans le tableau 24.

i	c_i	δc_i	(I) $c_i + \delta c_i$	(II) Bretagnon (1974)	(III) Duriez (1979)
1	-5.463008	0.087238	-5.375769	-5.199079	
2	-7.351905	-0.014297	-7.366202	-7.346091	
3	-17.403531	0.173627	-17.229904	-17.220546	
4	-18.065869	0.214832	-17.851036	-17.857263	
5	-4.127821	-0.101037	-4.228859	-4.207205	-4.2387
6	-23.212913	-3.185522	-26.398435	-26.216758	-26.5060
7	-2.969719	-0.101263	-3.070983	-3.065181	-3.0856
8	-0.652690	-0.015109	-0.667799	-0.667863	-0.6739
9	5.200867	0.529191	5.730058	5.610937	
10	6.570269	0.293023	6.863293	6.771027	
11	18.744535	0.104273	18.848808	18.829299	
12	17.634608	0.183755	17.818863	17.818769	
13	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0000
14	25.673451	0.617872	26.291323	26.267070	26.2499
15	2.908859	0.081483	2.990342	2.999837	2.9928
16	0.682766	0.009803	0.692570	0.691431	0.6905

Tableau 23. Modification δc_i sur les fréquences dues aux termes de degré 3. Nouvelles fréquences (I), $\tilde{c}_i = c_i + \delta c_i$, et comparaison avec les valeurs obtenues par Bretagnon (II) et Duriez (III).

19038750	2693305	143947	-152560	3504297	10322	60545	717
658937	-2223700	-1184135	1344822	1869464	-40659	54855	1088
423491	-1734417	977127	-1329761	1815336	239805	57178	1259
68926	-307299	3004772	6071213	1933328	1449076	73312	2008
-902	1334	-101	-58	4276556	-1657268	180726	5825
-814	1379	-675	-604	3637791	4757007	178277	7084
383	-350	41	34	-3997909	-175258	2927644	166178
-4	-6	3	2	191189	-11427	-367761	917840
3276320	1160722	-165787	75684	1377373	13964	-168770	-71577
308109	-329632	1086728	-446764	1377373	5577	-97023	-65443
221966	-265700	-990001	294204	1377373	141292	-87628	-64138
47124	-59155	1453628	3277116	1377373	485921	-63542	-60734
-543	429	7	-116	1377373	-315348	-48376	-57758
-683	597	198	-1189	1377373	784943	-39451	-55660
567	-305	-16	111	1377373	-34223	892498	56142
14	-17	-2	13	1377373	-3826	-106437	579240

Tableau 24. Amplitude des termes de la partie linéaire de la solution de degré 3. Ce Tableau est à comparer au tableau 1
Unité 10^{-8} .

Nous n'avons pas reproduit ici la partie non-linéaire de la solution, $S\Gamma(u, \bar{u})$, qui est très volumineuse. De plus, l'analyse de cette solution et la comparaison à l'intégration numérique du système autonome (chapitre III) nous ont montré la difficulté d'obtenir une solution très précise par l'application stricte de la méthode que nous venons de développer au système autonome des 8 planètes (1.84).

II.3.3. Problème des petits diviseurs

L'algorithme de résolution du système autonome exposé dans la section II.2. fournit une solution formelle au système autonome, donnée par (2.21) et (2.22). Dans cette solution, même si le système initial ne comporte que des termes de degré 3, $\Gamma(u, \bar{u})$ et $F(u, \bar{u})$ sont des séries formelles infinies. La solution obtenue, limitée au degré 3, n'a donc de sens que si ces séries convergent suffisamment rapidement pour que le reste soit négligeable.

Pour évaluer la partie négligée dans la solution, on peut calculer la différence \mathcal{D} entre les deux membres de (2.18) quand on remplace β par l'expression que nous avons calculée (2.21), où $\Gamma(u, \bar{u})$ contient les éléments de degré 3, définis par (2.28). On trouve alors :

$$\mathcal{D} = \Psi(u, \bar{u}) - \Psi(u + \Gamma, \bar{u} + \bar{\Gamma}) + \frac{\partial \Gamma}{\partial u} F - \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{u}} \bar{F} \quad (2.39)$$

Soit :

$$\mathcal{D} = \mathcal{R}_5 + \tilde{\mathcal{R}}_7 \quad (2.40)$$

avec

$$\mathcal{R}_5 = - \frac{\partial \Psi}{\partial u} \Gamma - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{u}} \bar{\Gamma} + \frac{\partial \Gamma}{\partial u} F - \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{u}} \bar{F} \quad (2.41)$$

et où $\tilde{\mathcal{R}}_7$ rassemble les termes de degré ≥ 7 . \mathcal{R}_5 ne contient alors que des termes de degré 5.

Les termes de \mathcal{R}_5 auront tous en facteur un coefficient de la forme $\Gamma_{nn}^{(i)}$. On comprend que s'il existe des petits diviseurs dans les combinaisons des fréquences c_j dans (2.28), ce coefficient peut être grand et la partie de degré 5, \mathcal{R}_5 est alors loin d'être négligeable.

Une autre manière de considérer les choses est de dire que les fréquences c_j sont de l'ordre de quelques secondes d'arc par an (Tableau 16 ou 23); si le dénominateur de (2.28) est très petit, des variations infimes des valeurs des fréquences c_j engendrent de très grandes variations du coefficient $\Gamma_{nn}^{(i)}$ correspondant qui se trouve alors indéterminé dans la solution. Le calcul des constantes θ_i et τ_i se trouve donc aussi modifié, et par conséquent les accroissements des fréquences δc_i aussi.

Nous avons calculé tous les petits diviseurs dans (2.28), inférieurs à 0".1/an. Ils sont rassemblés dans les tableaux 25a et 25b et rangés par équation. Nous avons aussi noté la valeur du coefficient $\Gamma_{nn}^{(i)}$ correspondant et l'amplitude du terme, après multiplication par la combinaison adéquate des constantes θ_i (tableau 22).

On peut y constater la présence de termes de forte amplitude, en particulier dans les équations $d\bar{x}_i/dt$ et $d\bar{\xi}_i/dt$ qui se rapportent essentiellement à Mercure. Il en résulte une grande indétermination dans le calcul de la solution et des constantes θ_i, τ_i . Des petites modifications des fréquences peuvent diviser ou multiplier l'amplitude de ces termes par des facteurs allant de 2 à 10 et plus; ce qui modifie la solution de manière substantielle.

Pour obtenir une solution correcte de degré 3, sans termes exagérément grossis par la présence d'un petit diviseur, il serait nécessaire de traiter

Equation (i)	Monôme	Diviseur (" / an)	$\Gamma_{nn}^{(i)}$	Amplitude
1	$\bar{x}_5 \bar{\xi}_1 \xi_2$	- 0.034 215	- 690.346 988	- 0.023 625 390
2	$\bar{x}_6 \bar{\xi}_3 \xi_7$	- 0.025 333	4.143 469	0.000 041 876
3	$\bar{x}_4 \bar{\xi}_8 \xi_5$	0.020 429	0.000 971	0.000 000 014
3	$\bar{x}_6 \bar{\xi}_2 \xi_8$	0.078 120	0.444 282	0.000 000 737
4	$\bar{x}_6 \bar{\xi}_1 \xi_5$	0.053 823	- 0.000 547	- 0.000 000 037
4	$\bar{x}_3 \bar{\xi}_5 \xi_8$	- 0.020 429	- 0.001 369	- 0.000 000 011
5	$\bar{x}_1 \bar{\xi}_2 \xi_1$	0.034 215	0.089 630	0.000 006 969
5	$\bar{x}_6 \bar{\xi}_6 \xi_2$	0.018 089	0.309 498	0.000 001 983
5	$\bar{x}_7 \bar{\xi}_4 \xi_3$	0.048 175	0.011 699	0.000 000 239
6	$\bar{x}_4 \bar{\xi}_5 \xi_1$	- 0.053 823	0.000 002	0.000 000 000
6	$\bar{x}_3 \bar{\xi}_8 \xi_2$	- 0.078 120	- 0.000 422	- 0.000 000 001
6	$\bar{x}_2 \bar{\xi}_7 \xi_3$	0.025 333	- 0.007 400	- 0.000 000 056
6	$\bar{x}_5 \bar{\xi}_2 \xi_6$	- 0.018 089	- 0.223 253	- 0.000 002 285
7	$\bar{x}_8 \bar{\xi}_7 \xi_1$	0.025 020	- 0.019 732	- 0.000 000 056
7	$\bar{x}_5 \bar{\xi}_3 \xi_4$	- 0.048 175	- 0.044 466	- 0.000 002 569
7	$\bar{x}_8 \bar{\xi}_8 \xi_7$	0.090 936	152.280 631	0.000 079 356
8	$\bar{x}_7 \bar{\xi}_1 \xi_7$	- 0.025 020	0.013 764	0.000 000 125
8	$\bar{x}_7 \bar{\xi}_7 \xi_8$	- 0.090 936	- 108.530 522	- 0.000 179 718

Tableau 25a. Petits diviseurs inférieurs à 0".1/an dans le calcul de la solution de degré 3 de $\frac{d\bar{x}_z}{dt}$ (2.28). Coefficient du monôme après intégration $\Gamma_{nn}^{(i)}$ et amplitude du terme correspondant.

Equation (i)	Monôme	Diviseur	(i) Γ_{nn}	Amplitude
1	$\bar{\xi}_7 \bar{\xi}_7 \bar{\xi}_8$	- 0.065 915	- 6.631 537	- 0.000 003 438
1	$\bar{x}_1 \bar{\xi}_2 x_5$	0.034 215	138.015 604	0.027 284 752
1	$\bar{x}_4 \bar{\xi}_5 x_6$	- 0.053 823	0.000 000	0.000 000 000
1	$\bar{x}_8 \bar{\xi}_7 x_7$	0 025 020	- 7.847 837	- 0.000 020 139
2	$\bar{x}_5 \bar{\xi}_1 x_1$	- 0.034 215	- 48.559 550	- 0.025 600 295
2	$\bar{x}_6 \bar{\xi}_6 x_5$	0.018 089	156.787 021	0.006 810 833
2	$\bar{x}_3 \bar{\xi}_8 x_6$	- 0.078 120	- 0.240 056	- 0.000 002 562
3	$\bar{x}_7 \bar{\xi}_4 x_5$	0 048 175	1.543 303	0.000 127 438
3	$\bar{x}_2 \bar{\xi}_7 x_6$	0.035 333	- 0.938 128	- 0.000 017 882
4	$\bar{x}_5 \bar{\xi}_3 x_7$	- 0.048 175	- 5.014 039	- 0.000 258 544
5	$\bar{x}_4 \bar{\xi}_8 x_3$	0.020 429	- 0.000 019	- 0.000 000 000
5	$\bar{x}_6 \bar{\xi}_1 x_4$	0.053 823	- 0.000 004	- 0.000 000 001
6	$\bar{x}_5 \bar{\xi}_2 x_6$	- 0.018 089	- 0.065 375	- 0.000 003 561
7	$\bar{\xi}_8 \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_7$	0.065 915	- 0.016 927	- 0.000 000 031
7	$\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_8 \bar{\xi}_7$	0.065 915	0.025 962	0.000 000 048
7	$\bar{x}_6 \bar{\xi}_3 x_2$	- 0.025 333	0.007 376	0.000 000 314
7	$\bar{x}_8 \bar{\xi}_8 x_7$	0.090936	40.980 772	0.000 068 205
7	$\bar{x}_7 \bar{\xi}_1 x_8$	- 0.025 020	0.005 298	0.000 000 048
8	$\bar{\xi}_7 \bar{\xi}_7 \bar{\xi}_1$	- 0.065 915	- 0.002 845	- 0.000 000 008
8	$\bar{x}_6 \bar{\xi}_2 x_3$	0.078 120	0.000 324	0.000 000 007
8	$\bar{x}_3 \bar{\xi}_5 x_4$	- 0.020 429	0.000 000	0.000 000 000
8	$\bar{x}_7 \bar{\xi}_7 x_8$	- 0.090 936	- 26.118 070	- 0.000 067 025

Tableau 25b. Petits diviseurs inférieurs à 0".1/an dans le calcul de la solution de degré 3 de $d\bar{\xi}_i/dt$ (2.28). Coefficient du monôme après intégration Γ_{nn} et amplitude du terme correspondant.

séparément les termes critiques (Tableau 25a et 25b), en les incluant, par exemple, dans les termes résonnants.

On se trouve alors confronté à un autre problème : où situer la limite entre les termes critiques et les termes que l'on traite par la méthode classique ? Dans tous les cas, on ne peut pas espérer dépasser un certain degré de précision dans la solution.

De plus, si on recherche une solution de degré 5, on trouve des diviseurs qui sont combinaisons de 5 fréquences au lieu de 3, ce qui fournit beaucoup plus de termes critiques, sans pour cela espérer atteindre une précision de l'ordre de celle avec laquelle nous avons obtenu le système autonome.

Confronté à ces problèmes, qui de plus engendrent des monstres de quelques 3 000 000 de termes pour une solution de précision moyenne, nous avons préféré utiliser une autre méthode et intégrer numériquement le système autonome, ce qui fait l'objet du chapitre III.

II.3.4. Conclusions du chapitre II.

- i) Nous avons mis au point un algorithme permettant le calcul effectif d'une solution analytique de degré 5 en suivant la méthode de normalisation exposée par Brumberg (1980) ; et nous avons calculé une solution de degré 3 incluant tous les termes .
- ii) Nous avons montré la limitation de l'application stricte de cette méthode analytique, à cause de la présence de petits diviseurs dans les combinaisons des fréquences des longues périodes.

CHAPITRE III

RESOLUTION NUMERIQUE

III.1. INTEGRATION NUMERIQUE.

L'intégration numérique directe des équations de Newton du système solaire fournit une solution de très bonne qualité comprenant à la fois les longues périodes et les courtes périodes, sur une durée limitée à quelques milliers d'années. Il est par contre totalement impossible actuellement de prolonger cette intégration de l'ensemble du système solaire sur des durées très longues, de l'ordre du million d'années, à cause de la taille réduite du pas d'intégration que l'on doit utiliser. Une taille courante de pas d'intégration est de 40 jours pour Jupiter, 1/2 jour pour Mercure, et même quelques heures quand on veut aussi intégrer le mouvement de la Lune. Actuellement, l'intégration numérique du système solaire complet sur la plus longue durée est DE102, effectuée sur 44 siècles, de 1411 avant J.C. à 3002 après J.C. (Newhall et al, 1983).

L'intégration numérique du système autonome (1.84) est une chose totalement différente. Elle fournit directement une approximation des variations à très longues périodes des éléments orbitaux des planètes. Le système différentiel est très volumineux, mais nous pouvons utiliser un très grand pas d'intégration. En effet, les périodes principales du système étant supérieures à 50 000 ans, nous obtiendrons une solution numérique très précise en utilisant un pas d'intégration de l'ordre de 500 à 1000 ans.

L'intégration numérique permet aussi de tenir compte facilement des perturbations relativistes et de l'effet de la Lune sur le mouvement du barycentre Terre-Lune, car il suffit alors de rajouter des termes du premier ordre dans le système différentiel (1.84) .

La méthode d'intégration numérique utilisée est une méthode d'Adams avec ordre et pas variable et sortie intermédiaire tous les 500 ans. Le programme utilisé est le programme NAG D02CBF de la bibliothèque du CIRCE, avec une tolérance demandée de 10^{-12} , ce qui est largement suffisant pour les calculs que nous avons effectués.

III.2. PERTURBATIONS RELATIVISTES ET EFFET DE LA LUNE.

Pour tenir compte des perturbations relativistes dans l'étude des variations séculaires, il nous suffit de considérer les termes du premier ordre dans le mouvement du périhélie, donnés par Brumberg (1972) ou Lestrade et Bretagnon (1982). Ces termes sont limités à l'approximation post-newtonienne en $1/c^2$ (c est la vitesse de la lumière). Cela se traduit dans notre système de variables par l'addition d'un terme :

$$\left. \frac{d\bar{z}}{dt} \right|_R = -\sqrt{-1} \delta_R \bar{z} \quad (3.1)$$

avec

$$\delta_R = 3 \frac{n_0^3 a_0^2}{c^2 (1 + m/M)} \times \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \times \langle a^2 / r^2 \rangle \quad (3.2)$$

a_0 est la valeur moyenne du demi-grand axe de la planète considérée, et n_0 est lié à a_0 par la relation de Kepler (1.2). Les valeurs de a_0 et n_0 sont les valeurs obtenues par Bretagnon (1982), données dans le tableau 26; c est la vitesse de la lumière, exprimée en unités astronomiques (A) par année julienne. Si on utilise les constantes de l'U.A.I. (Grenoble 1976), on a :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$$

$$A = 1.495\,978\,70 \times 10^{11} \text{ m}$$

d'où

$$c = 63\,241.077\,4 \text{ A/an} \quad (3.3)$$

Si on développe $\langle a^2/r^2 \rangle$ en fonction de l'excentricité, on obtient :

$$\delta_R = \kappa_R \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 + \dots \right) \quad (3.4)$$

La valeur du paramètre κ_R est donnée dans le tableau 26 pour les différentes planètes :

Planète	n_0 (Rd/an)	a_0	$\kappa_R \times 10^{12}$
Mercure	26.087 936 033 902 4	0.387 098 350 584 818	1 995 650
Vénus	10.213 335 716 286 9	0.723 439 859 446 194	418 116
Terre	6.283 066 228 785 2	1.000 001 057 266 65	186 053
Mars	3.340 652 869 858 9	1.523 679 381 647 2	64 924
Jupiter	0.592 721 788 732 6	5.202 603 230 909	3 015
Saturne	0.212 761 894 973 4	9.554 909 635 329	659
Uranus	0.074 576 802 004 3	19.218 446 101 3	114
Neptune	0.038 028 430 760 2	30.110 386 908 9	37

Tableau 26. Contribution de la relativité pour les différentes planètes.

Dans les programmes, nous avons rajouté au système (1.84) l'expression (3.1) où δ_R est développée jusqu'au degré 6 en excentricité (3.4).

Les perturbations dues à l'effet de la Lune sont réduites à un seul terme, communiqué par Bretagnon (1984b) :

$$\left. \frac{d\bar{z}_3}{dt} \right|_L = -\sqrt{-1} \delta_L \bar{z}_3 \quad (3.5)$$

avec

$$\delta_L = 3.192 472 \times 10^{-7}$$

Remarque : Si nous voulions prolonger notre intégration sur des durées beaucoup plus longues, il serait sans doute nécessaire d'obtenir une expression analytique pour les perturbations de la Lune, comme nous l'avons fait pour la relativité.

III.3. INTEGRATION SUR 10 000 ANS .

Pour faciliter les discussions et les comparaisons avec la théorie classique à variations séculaires VSOP82 (Bretagnon, 1984a), et aussi pour manipuler des variables réelles plutôt que complexes, nous utiliserons librement à partir de maintenant les notations de VSOP82 :

$$\begin{aligned}k &= \operatorname{Re}(z) = e \cos \tilde{\omega} \\h &= \operatorname{Im}(z) = e \sin \tilde{\omega} \\q &= \operatorname{Re}(\zeta) = \sin(i/2) \cdot \cos \Omega \\p &= \operatorname{Im}(\zeta) = \sin(i/2) \cdot \sin \Omega\end{aligned}\tag{3.6}$$

Nous avons tout d'abord intégré numériquement le système autonome complet (1.84), complété par les termes relativistes (3.1) et lunaires (3.5), sur une durée réduite à 10 000 ans, en obtenant un point tous les 500 ans pour chaque variable k_i , h_i , q_i , p_i , ($i=1,8$). Nous avons ensuite fait passer par ces points un polynôme d'interpolation de degré 20. Nous obtenons ainsi le développement des variations séculaires de chaque variable sous la forme d'un polynôme du temps de degré 20, que nous pouvons comparer directement aux termes séculaires de VSOP82 (Tableaux 27-1 à 27-8).

VSOP82 est une théorie à variations séculaires du 3ème ordre pour l'ensemble des planètes, et prolongée jusqu'à l'ordre 6 dans certains cas pour les grosses planètes par une méthode itérative (Bretagnon, 1982). Le coefficient de T des éléments séculaires de cette solution est donc connu à l'ordre 3 des masses pour l'ensemble des variables. Nous pouvons donc considérer qu'il fournit une solution de référence, et que la précision de notre solution à longues périodes est donnée par la différence entre le coefficient de T que nous avons obtenu et le coefficient correspondant de VSOP82 (Tableau 29a). Cela revient à comparer les valeurs obtenues pour les dérivées à l'origine, qui est ici la date J2000.

MERCURE				
	T	T ²	T ³	T ⁴
k×10 ⁶	- 5 521.146 24	- 18.603 97	+ 0.633 62	
	- 5 523.975 64	- 18.640 83	+ 0.791 23	+ 0.005 89
	- 5 481.151 69	- 19.702 78	+ 0.795 21	+ 0.006 22
	- 5 115.709 65	- 16.369 71	+ 0.652 60	+ 0.005 21
	- 5 040.125 00	- 23.957 64	+ 0.646 87	+ 0.009 44
h×10 ⁶	+ 1 437.501 18	- 79.746 89	- 0.263 09	
	+ 1 438.230 65	- 79.818 21	- 0.304 59	+ 0.008 12
	+ 1 419.454 95	- 81.088 50	- 0.185 39	+ 0.009 55
	+ 1 346.935 33	- 68.688 60	- 0.269 81	+ 0.006 62
	+ 1 126.196 19	- 70.613 57	- 0.058 18	+ 0.001 58
q×10 ⁶	+ 654.331 17	- 10.712 15	+ 0.211 49	
	+ 654.455 17	- 10.712 23	+ 0.224 58	- 0.003 76
	+ 666.259 22	- 10.745 58	+ 0.217 77	- 0.002 31
	+ 658.091 54	- 10.895 16	+ 0.208 29	- 0.003 22
	+ 795.681 12	- 11.195 67	+ 0.082 42	- 0.004 27
p×10 ⁶	- 1 276.336 57	- 9.133 50	+ 0.180 04	
	- 1 275.992 38	- 9.133 96	+ 0.189 92	- 0.006 40
	- 1 317.477 39	- 9.910 55	+ 0.144 56	- 0.004 19
	- 1 263.960 82	- 8.569 21	+ 0.171 17	- 0.006 64
	- 1 477.686 92	- 3.417 21	+ 0.307 37	- 0.010 26

Tableau 27-1. Comparaison des différentes théories. T est en milliers d'années.

- I) VSOP82.
- II) Degré 5 + relativité + Lune (int. numérique).
- III) Degré 3 Bretagnon (1982) (analytique + relativité + Lune).
- IV) Degré 3 (int. numérique).
- V) Degré 3 (analytique).

VENUS

	T	T ²	T ³	T ⁴
k×10 ⁶	+ 312.590 19	+ 6.059 13	- 0.692 39	
	+ 312.625 27	+ 6.604 69	- 0.683 50	+ 0.004 93
	+ 296.626 85	+ 6.620 65	- 0.577 25	+ 0.001 83
	+ 314.824 81	+ 5.835 02	- 0.682 10	+ 0.005 75
	+ 304.578 67	+ 7.132 29	- 0.599 18	+ 0.001 99
h×10 ⁶	- 361.212 39	+ 18.396 27	+ 0.009 71	
	- 361.238 08	+ 18.470 20	+ 0.032 80	- 0.006 13
	- 358.018 84	+ 19.165 77	+ 0.015 98	- 0.012 43
	- 359.491 40	+ 18.263 19	+ 0.023 39	- 0.005 66
	- 360.123 60	+ 18.008 70	+ 0.055 12	- 0.006 56
q×10 ⁶	+ 1 381.338 26	- 10.909 42	- 1.859 20	
	+ 1 381.391 36	- 10.911 35	- 1.864 17	+ 0.006 01
	+ 1 392.011 18	- 10.734 00	- 1.901 06	+ 0.005 09
	+ 1 380.568 14	- 10.900 09	- 1.858 21	+ 0.000 74
	+ 1 365.679 16	- 10.694 26	- 1.888 31	+ 0.005 16
p×10 ⁶	- 403.847 91	- 62.328 91	+ 0.251 37	
	- 403.879 70	- 62.329 19	+ 0.247 30	+ 0.042 28
	- 410.759 75	- 63.203 83	+ 0.249 51	+ 0.042 70
	- 404.083 92	- 62.295 76	+ 0.250 08	+ 0.042 25
	- 399.151 66	- 62.589 48	+ 0.228 58	+ 0.043 06

Tableau 27-2 . Comparaison des différentes théories. T est en milliers d'années.

- I) VSOP82.
- II) Degré 5 + relativité + Lune (int. numérique).
- III) Degré 3 Bretagnon (1982) (analytique + relativité + Lune).
- IV) Degré 3 (int. numérique).
- V) Degré 3 (analytique).

TERRE.

	T	T ²	T ³	T ⁴
k×10 ⁶	- 822.666 99	+ 27.489 39	+ 1.042 17	
	- 822.735 35	+ 27.632 11	+ 1.169 55	- 0.026 96
	- 836.038 47	+ 27.801 43	+ 1.221 62	- 0.025 56
	- 814.071 45	+ 27.237 40	+ 1.127 35	- 0.024 73
	- 804.450 90	+ 25.737 51	+ 1.048 25	- 0.021 46
h×10 ⁶	- 620.302 59	- 33.538 88	+ 0.711 85	
	- 620.333 67	- 33.841 56	+ 0.851 01	- 0.027 70
	- 615.148 92	- 35.530 53	+ 0.915 04	- 0.033 92
	- 618.214 58	- 33.034 15	+ 0.814 83	- 0.025 77
	- 606.544 14	- 32.211 49	+ 0.768 03	- 0.024 28
q×10 ⁶	- 1 134.690 02	+ 12.373 14	+ 1.270 50	
	- 1 134.621 50	+ 12.373 39	+ 1.265 41	- 0.013 72
	- 1 134.151 74	+ 12.255 64	+ 1.267 24	- 0.014 67
	- 1 133.938 15	+ 12.387 62	+ 1.263 60	- 0.014 05
	- 1 158.625 34	+ 12.237 26	+ 1.300 95	- 0.013 76
p×10 ⁶	+ 101.803 91	+ 47.019 98	- 0.538 29	
	+ 101.835 98	+ 47.019 38	- 0.541 74	- 0.025 08
	+ 95.527 18	+ 46.956 00	- 0.511 84	- 0.024 51
	+ 101.564 03	+ 46.950 58	- 0.537 92	- 0.024 82
	+ 102.691 89	+ 48.010 04	- 0.518 67	- 0.025 87

Tableau 27-3 . Comparaison des différentes théories. T est en milliers d'années.

- I) VSOP82.
- II) Degré 5 + relativité + Lune (int. numérique).
- III) Degré 3 Bretagnon (1982) (analytique + relativité + Lune).
- IV) Degré 3 (int. numérique).
- V) Degré 3 (analytique).

MARS.

	T	T ²	T ³	T ⁴
k×10 ⁶	+ 3 763.301 52	- 246.574 16	- 3.952 41	
	+ 3 762.950 28	- 246.525 93	- 3.676 05	+ 0.111 12
	+ 3 833.018 00	- 244.805 83	- 3.872 29	+ 0.095 11
	+ 3 759.135 09	- 246.438 24	- 3.749 94	+ 0.118 64
	+ 3 880.883 04	- 252.044 84	- 4.519 14	+ 0.126 91
h×10 ⁶	+ 6 246.574 65	+ 155.272 32	- 6.719 40	
	+ 6 246.152 83	+ 155.237 43	- 6.348 79	- 0.065 93
	+ 6 278.783 61	+ 155.105 13	- 6.595 72	- 0.042 08
	+ 6 237.963 04	+ 155.579 88	- 6.434 44	- 0.069 51
	+ 6 281.265 37	+ 164.883 95	- 6.772 44	- 0.084 65
q×10 ⁶	+ 171.385 26	- 40.775 91	- 1.386 00	
	+ 171.311 29	- 40.767 02	- 1.388 34	- 0.009 16
	+ 148.678 26	- 38.657 62	- 1.178 44	- 0.042 08
	+ 169.501 76	- 40.676 34	- 1.371 70	- 0.069 51
	+ 144.723 17	- 40.012 37	- 1.217 46	- 0.084 65
p×10 ⁶	- 1 080.200 83	- 19.221 95	+ 0.883 73	
	- 1 079.965 27	- 19.223 05	+ 0.871 85	+ 0.030 90
	- 1 065.930 57	- 21.018 68	+ 0.820 41	+ 0.042 58
	- 1 078.648 29	- 19.215 60	+ 0.872.11	+ 0.031 39
	- 1 051.162 20	- 19.702 05	+ 0.727 12	+ 0.038 41

Tableau 27-4 . Comparaison des différentes théories. T est en milliers d'années.

- I) VSOP82.
- II) Degré 5 + relativité + Lune (int. numérique).
- III) Degré 3 Bretagnon (1982) (analytique + relativité + Lune).
- IV) Degré 3 (int. numérique).
- V) Degré 3 (analytique).

JUPITER.

	T	T ²	T ³	T ⁴
k×10 ⁶	+ 1 130.103 77	- 109.301 26	- 4.287 48	+ 0.205 39
	+ 1 119.770 37	- 107.308 35	- 4.283 50	+ 0.186 29
	+ 1 137.829 75	- 110.298 78	- 4.767 29	+ 0.172 87
	+ 1 044.724 61	- 97.152 40	- 3.858 79	+ 0.135 83
	+ 1 037.650 00	- 97.303 15	- 3.758 26	+ 0.145 53
h×10 ⁶	- 2 171.493 60	+ 98.585 39	- 5.131 09	- 0.090 07
	- 2 161.860 91	+ 97.412 86	- 4.995 46	- 0.101 92
	- 2 233.602 53	+ 102.328 97	- 4.922 17	- 0.141 81
	- 2 112.462 85	+ 88.883 92	- 4.091 84	- 0.099 53
	- 2 102.244 41	+ 87.773 27	- 4.204 93	- 0.092 74
q×10 ⁶	- 313.401 56	- 16.673 92	+ 0.769 26	
	- 313.511 74	- 16.648 98	+ 0.799 42	- 0.035 67
	- 313.524 30	- 16.244 27	+ 0.813 95	- 0.029 02
	- 314.877 36	- 16.319 90	+ 0.825 58	- 0.029 92
	- 313.934 48	- 16.319 98	+ 0.812 35	- 0.029 84
p×10 ⁶	- 234.275 62	+ 20.867 60	+ 0.507 21	
	- 234.375 71	+ 20.825 05	+ 0.534 21	- 0.033 97
	- 234.198 57	+ 20.456 29	+ 0.569 38	- 0.031 10
	- 235.395 58	+ 20.555 51	+ 0.578 72	- 0.031 49
	- 235.300 15	+ 20.632 16	+ 0.576 15	- 0.032 81

Tableau 27-5 . Comparaison des différentes théories. T est en milliers d'années.

- I) VSOP82.
- II) Degré 5 + relativité + Lune (int. numérique).
- III) Degré 3 Bretagnon (1982) (analytique + relativité + Lune).
- IV) Degré 3 (int. numérique).
- V) Degré 3 (analytique).

SATURNE

	T	T ²	T ³	T ⁴
k×10 ⁶	- 5 296.026 26	+ 309.284 05	+ 12.962 15	- 0.599 59
	- 5 243.232 51	+ 301.658 81	+ 12.794 66	- 0.591 22
	- 5 247.211 48	+ 301.595 29	+ 14.201 30	- 0.527 65
	- 4 937.693 73	+ 264.377 54	+ 11.413 12	- 0.415 98
	- 4 950.224 91	+ 267.079 17	+ 11.201 12	- 0.450 78
h×10 ⁶	- 3 755.938 87	- 319.902 36	+ 15.986 33	+ 0.324 51
	- 3 716.236 50	- 314.855 47	+ 15.343 92	+ 0.307 89
	- 3 795.635 14	- 325.978 29	+ 14.652 51	+ 0.432 18
	- 3 516.862 67	- 285.200 50	+ 12.178 93	+ 0 303 54
	- 3 501.711 22	- 284.275 34	+ 12.621 36	+ 0.286 68
q×10 ⁶	+ 801.714 99	+ 41.422 82	- 1.960 49	- 0.094 39
	+ 801.652 71	+ 41.304 34	- 2.001 60	- 0.087 28
	+ 801.441 23	+ 40.342 60	- 2.030 31	- 0.071 39
	+ 804.865 26	+ 40.519 91	- 2.065 13	- 0.073 28
	+ 803.065 69	+ 40.491 70	- 2.034 02	- 0.072 96
p×10 ⁶	+ 594.397 66	- 52.351 17	- 1.272 19	+ 0.082 95
	+ 594.601 61	- 52.230 81	- 1.316 49	+ 0.085 46
	+ 594.752 59	- 51.296 03	- 1.404 61	+ 0.078 66
	+ 597.289 43	- 51.555 34	- 1.428 79	+ 0.079 35
	+ 596.917 76	- 51.779 53	- 1.421 76	+ 0.082 77

Tableau 27-6 . Comparaison des différentes théories. T est en milliers d'années.

- I) VSOP82.
- II) Degré 5 + relativité + Lune (int. numérique).
- III) Degré 3 Bretagnon (1982) (analytique + relativité + Lune).
- IV) Degré 3 (int. numérique).
- V) Degré 3 (analytique).

URANUS

	T	T ²	T ³	T ⁴
k×10 ⁶	+ 183.440 50	- 0.808 49	- 0.453 96	+ 0.021 85
	+ 181.458 52	- 0.672 37	- 0.437 72	+ 0.015 67
	+ 191.434 26	- 1.248 83	- 0.497 85	+ 0.016 79
	+ 181.467 35	- 0.283 97	- 0.399 29	+ 0.012 50
	+ 179.238 96	- 0.214 13	- 0.387 29	+ 0.013 24
h×10 ⁶	- 749.643 50	+ 12.102 00	- 0.420 88	- 0.017 14
	- 746.631 58	+ 11.836 99	- 0.404 90	- 0.011 77
	- 756.998 35	+ 12.697 75	- 0.434 07	- 0.015 51
	- 746.621 70	+ 11.235 67	- 0.352 19	- 0.010 69
	- 747.517 55	+ 11.175 09	- 0.359 63	- 0.010 06
q×10 ⁶	- 124.493 82	- 2.073 73	+ 0.076 21	
	- 123.755 88	- 2.050 96	+ 0.077 81	+ 0.001 59
	- 125.324 76	- 2.037 21	+ 0.083 38	+ 0.001 26
	- 123.736 94	- 2.071 79	+ 0.079 51	+ 0.001 64
	- 124.567 51	- 2.013 18	+ 0.078 69	+ 0.001 34
p×10 ⁶	- 117.447 33	+ 3.177 99	+ 0.073 17	
	- 116.879 69	+ 3.134 97	+ 0.070 60	- 0.004 88
	- 117.625 23	+ 3.192 47	+ 0.076 03	- 0.004 65
	- 116.848 86	+ 3.120 90	+ 0.070 84	- 0.004 72
	- 117.017 17	+ 3.169 03	+ 0.072 83	- 0.004 96

Tableau 27-7 . Comparaison des différentes théories. T est en milliers d'années.

- I) VSOP82.
- II) Degré 5 + relativité + Lune (int. numérique).
- III) Degré 3 Bretagnon (1982) (analytique + relativité + Lune).
- IV) Degré 3 (int. numérique).
- V) Degré 3 (analytique).

NEPTUNE

	T	T ²	T ³	T ⁴
k×10 ⁶	+ 8.712 79	- 1.199 02	- 0.040 34	
	+ 8.153 71	- 1.138 64	- 0.029 06	+ 0.001 12
	+ 9.346 68	- 1.238 02	- 0.035 16	+ 0.001 05
	+ 8.152 83	- 1.105 37	- 0.026 09	+ 0.000 87
	+ 8.353 44	- 1.102 68	- 0.025 38	+ 0.000 92
h×10 ⁶	+ 78.243 36	+ 0.808 01	- 0.039 55	
	+ 75.595 90	+ 0.767 68	- 0.032 56	- 0.000 83
	+ 80.915 29	+ 0.851 23	- 0.033 51	- 0.001 20
	+ 75.589 82	+ 0.717 29	- 0.028 61	- 0.000 74
	+ 75.797 60	+ 0.711 42	- 0.029 05	- 0.000 69
q×10 ⁶	- 0.727 27	- 0.065 68	+ 0.016 68	
	- 0.784 72	- 0.064 00	+ 0.008 99	+ 0.000 24
	- 0.904 23	- 0.068 25	+ 0.010 13	+ 0.000 24
	- 0.788 56	- 0.064 85	+ 0.008 92	+ 0.000 25
	- 0.755 38	- 0.063 00	+ 0.008 80	+ 0.000 24
p×10 ⁶	+ 25.755 36	+ 0.193 77	+ 0.013 31	
	+ 25.708 35	+ 0.194 21	+ 0.007 47	- 0.000 42
	+ 25.689 42	+ 0.187 88	+ 0.007 58	- 0.000 33
	+ 25.707 68	+ 0.194 96	+ 0.007 38	- 0.000 42
	+ 25.707 85	+ 0.194 81	+ 0.007 47	- 0.000 43

Tableau 27-8. Comparaison des différentes théories. T est en milliers d'années.

- I) VSOP82.
- II) Degré 5 + relativité + Lune (int. numérique).
- III) Degré 3 Bretagnon (1982) (analytique + relativité + Lune).
- IV) Degré 3 (int. numérique).
- V) Degré 3 (analytique).

	B1 (1974)	B2 (1984)	B2 - B1	
			R: relativité	L: Lune
			A: ajustement sur VSOP82	
g_1	- 5.1991	- 5.6136	R: - 0.413 126	L: - 0.001 432
g_2	- 7.3461	- 7.4559	R: - 0.080 274	L: - 0.029 533
g_3	- 17.2205	- 17.2852	R: - 0.044 674	L: - 0.019 945
g_4	- 17.8573	- 17.9025	R: - 0.029 861	L: - 0.015 376
g_5	- 4.2072	- 4.3080	A: - 0.100 8	
g_6	- 26.2168	- 28.1483	A: - 1.931 5	
g_7	- 3.0652	- 3.1534	A: - 0.088 2	
g_8	- 0.6679	- 0.6735	A: - 0.005 6	
s_1	5.6109	5.6109		
s_2	6.7710	6.7710		
s_3	18.8293	18.8293		
s_4	17.8188	17.8188		
s_5	0.0000	0.0000		
s_6	26.2671	26.2090	A: - 0.058 1	
s_7	2.9998	2.9998		
s_8	0.6914	0.6914		

Tableau 28. Modification des fréquences entre les solutions B1 (1974) et B2 (1984) de Bretagnon. Unité : "/an .

Dans les tableaux 27-1 à 27-8, nous avons reporté les développements en polynômes du temps des termes séculaires de différentes solutions. Toutes les solutions sont rapportées à l'époque initiale J2000 et à l'écliptique et l'équinoxe de la même date pour pouvoir effectuer des comparaisons directes.

I) VSOP82. Ce sont les développements en polynômes du temps des variations séculaires tels qu'ils sont donnés par Bretagnon (1982). Pour les planètes inférieures, le terme en T est connu à l'ordre 3 des masses, le terme en T^2 à l'ordre 2 des masses, et le terme en T^3 à l'ordre 1 des masses. Pour les planètes extérieures, les termes sont connus à un ordre un peu plus élevé. Les contributions de la relativité sont incluses à l'ordre 2 et celles de l'effet de la Lune à l'ordre 1.

II) Intégration numérique du système de degré 5, comprenant aussi les perturbations relativistes et l'effet de la Lune. Tous les termes sont connus à l'ordre 2 qui est la précision avec laquelle nous avons obtenu le système autonome (1.84). Les contributions de la relativité et de la Lune seront aussi connues avec cette précision.

III) Théorie analytique de degré 3 de Bretagnon (1984a), notée B2. Les amplitudes des termes de cette solution quasi-périodique sont celles qui ont été calculées dans sa solution initiale de degré 3 notée B1 (Bretagnon 1974). Les fréquences correspondant aux planètes inférieures dans B2 sont complétées par l'apport des termes relativistes et lunaires (Tableau 28). Les fréquences correspondant aux planètes extérieures de B2 sont obtenues par ajustement à la théorie à variations séculaires VSOP82. Il n'est donc pas possible dans ce cas d'effectuer de véritables comparaisons.

IV) Intégration numérique du système autonome (1.84), limité au degré 3. Nous avons calculé une intégration numérique du système de degré 3 pour pouvoir effectuer des comparaisons directes avec notre solution analytique du même système. Cette solution ne comprend pas les perturbations relativistes ou lunaires. Cette solution permet aussi d'estimer dans certains cas la

Planète	k	h	q	p
Mercure	2.829 40	0.729 47	0.124 00	0.344 19
Vénus	0.035 08	0.025 69	0.053 10	0.031 79
Terre	0.068 36	0.031 08	0.068 52	0.032 07
Mars	0.351 24	0.421 82	0.073 97	0.235 56
Jupiter	10.333 40	9.632 69	0.110 18	0.100 09
Saturne	52.793 75	39.702 37	0.062 28	0.203 95
Uranus	1.981 98	3.011 92	0.737 94	0.567 64
Neptune	0.559 08	2.647 46	0.057 43	0.047 01

Tableau 29a. Précision obtenue dans la solution de l'intégration numérique, par comparaison aux termes séculaires de VSOP82 .
Unité : 10^{-6} /1000 ans.

Planète	k	h	q	p
Mercure	39.994 55	18.046 23	11.928 05	41.140 82
Vénus	15.963 34	3.193 55	10.672 92	6.911 84
Terre	13.371 48	5.153 67	0.538 28	6.276 73
Mars	69.716 48	32.208 96	22.707 00	14.270 26
Jupiter	7.725 98	62.108 93	0.122 74	0.077 05
Saturne	48.814 78	39.696 27	0.273 76	0.354 93
Uranus	7.993 76	7.354 85	0.830 94	0.177 90
Neptune	0.633 89	2.671 93	0.176 96	0.065 94

Tableau 29b. Ecart entre le coefficient de T des termes séculaires de VSOP82 et celui de la solution de Bretagnon (B2); ce n'est une estimation de la précision de B2 que dans le cas des planètes inférieures.
Unité : 10^{-6} /1000 ans .

contribution du degré 5.

V) Solution analytique de degré 3. C'est le développement de Taylor en polynômes du temps de la solution complète de degré 3 telle que nous l'avons obtenue au chapitre II. Aucune correction n'a été apportée; en particulier, on retrouve dans cette solution les problèmes de petits diviseurs.

Les comparaisons de ces différentes solutions nécessitent alors plusieurs commentaires :

A) La précision de notre solution numérique (II), estimée par la différence des coefficients de T avec VSOP82, est environ 100 fois meilleure que celle de la solution analytique (III) dans le cas des planètes inférieures (Tableaux 29a et 29b). La comparaison n'a pas de sens dans le cas des planètes extérieures car les fréquences de (III) correspondantes ont été ajustées directement sur les termes séculaires de VSOP82. On pourra cependant remarquer que même dans ce cas, les différences (II)-VSOP82 et (III)-VSOP82 restent comparables.

B) Il y a souvent de gros écarts entre la solution numérique (IV) et analytique (V) du même système de degré 3. Ces écarts sont dus à une mauvaise convergence de la solution analytique, causée par la présence de petits diviseurs, comme nous l'avons signalé au chapitre II. C'est le même phénomène, avec éventuellement d'autres diviseurs qui affecte la solution (III).

La comparaison entre les solutions (III) et (V) est difficile, car (III) contient des termes relativistes et lunaires. Nous pouvons cependant remarquer que les écarts sont très variables; les petits diviseurs n'apparaissent en effet pas de la même manière dans les deux solutions. La solution (V) de Mercure est particulièrement mauvaise; cela est dû aux petits diviseurs rencontrés dans le calcul de la solution qui ont fournis des termes artificiels de très grande amplitude (Tableaux 25a et 25b). Dans le cas d'Uranus et de Neptune où nous n'avons pas eu de gros problèmes de petits diviseurs, notre solution analytique (V) est en général meilleure que la solution (III). Plus généralement, la solution analytique (V) se comporte bien dans le cas des

planètes extérieures.

C) La comparaison des solutions (II) et (IV) permet de prévoir les prolongements à effectuer pour améliorer encore la solution (II). Comme la solution (II) contient aussi les effets relativistes et lunaires, il est préférable de ne comparer que les termes en inclinaison (q , p). Nous pouvons alors voir que si dans le cas des planètes inférieures, le degré 7 devrait améliorer la solution; dans le cas des planètes Uranus et Neptune il est nécessaire d'aborder l'ordre 3 pour obtenir une solution plus précise. Pour Jupiter et Saturne, le degré 7 doit améliorer la solution, mais l'ordre 3 sera sans doute aussi nécessaire.

III.4. PROLONGEMENT DES THEORIES A VARIATIONS SECUAIRES
PAR LA THEORIE GENERALE.

Le tableau 29 montre que notre théorie générale fournit, grâce à l'intégration numérique du système autonome, une solution de grande précision (sur plus de 10 000 ans) pour les variations séculaires des éléments orbitaux des planètes inférieures. Nous pouvons alors espérer prolonger de quelques milliers d'années la théorie de Bretagnon en introduisant dans celle-ci nos termes séculaires, les termes à courte période restant par ailleurs les mêmes.

Nous avons alors déterminé des termes séculaires à partir de ceux de VSOP82 et de ceux de notre intégration numérique pour les planètes inférieures (Tableau 30). Le terme en T de VSOP82 est connu à l'ordre 3 des masses; nous l'avons donc toujours conservé. Le terme en T^2 de VSOP82 est connu à l'ordre 2 des masses, comme le nôtre, mais notre solution est limitée au degré 5. Par contre, nous calculons plus facilement les effets relativistes et lunaires. Nous avons aussi essayé de faire des choix qui soient homogènes pour une même planète. Pour Mercure, nous avons utilisé le terme de VSOP82, complété par la contribution de l'effet de la lune. Pour Vénus et la Terre, la partie Newtonienne provient de VSOP82 et les corrections relativistes et lunaires proviennent de notre solution. Le terme en T^2 de Mars est celui de notre solution. Pour les quatre planètes, le terme en T^3 est celui de notre solution; et nous avons rajouté nos termes en T^4 , T^5 , T^6 , qui n'existent pas dans VSOP82.

On appellera VSOP82 + NTS la solution comprenant les termes à courte période de VSOP82 et nos termes séculaires (Tableau 30). Nous avons alors reporté dans les figures 2-1 à 2-4 les écarts entre VSOP82 et DE102, puis entre VSOP82 + NTS et DE102, pour les variables k, h, q, p , des différentes planètes Mercure, Vénus, Terre, Mars, sur tout le domaine de DE102.

		$k \times 10^{12}$	$h \times 10^{12}$	$q \times 10^{12}$	$p \times 10^{12}$
Mercure	T	-5 521 146 240	1 437 501 180	654 331 170	-1 276 336 570
	T ²	-18 605 682	-79 741 195	-10 712 150	-9 133 500
	T ³	791 235	-304 591	224 589	189 930
	T ⁴	5 898	8 120	-3 770	-6 400
	T ⁵	-156	-78	-31	-25
	T ⁶	-5	3	1	4
Venus	T	+312 590 190	-361 212 390	+1 381 338 260	-403 847 910
	T ²	6 041 768	18 469 205	-10 916 770	-62 319 956
	T ³	-683 504	32 809	-1 864 179	247 303
	T ⁴	4 939	-6 137	6 017	42 288
	T ⁵	597	-168	746	-57
	T ⁶	-11	-12	-4	-11
Terre	T	-822 666 990	-620 302 590	-1 134 690 020	+101 803 910
	T ²	27 626 344	-33 829 737	12 372 084	+47 022 979
	T ³	1 169 556	851 011	1 265 416	-541 737
	T ⁴	-26 957	27 705	-13 718	-25 079
	T ⁵	-715	-467	-320	463
	T ⁶	21	-6	0	6
Mars	T	3 763 301 520	6 246 574 650	171 385 260	-1 080 200 830
	T ²	-246 525 937	155 237 432	-40 767 024	-19 223 051
	T ³	-3 673 053	-6 348 790	-1 388 344	871 850
	T ⁴	111 125	-65 929	+9 162	30 901
	T ⁵	258	730	1 759	37
	T ⁶	1	11	11	1

Tableau 30. Termes séculaires utilisés dans la solution VSOP82 + NTS . Les coefficients de T et T² proviennent en général de VSOP82. Les coefficients de T³, T⁴, T⁵, T⁶ sont ceux de notre intégration numérique.

MERCURE.

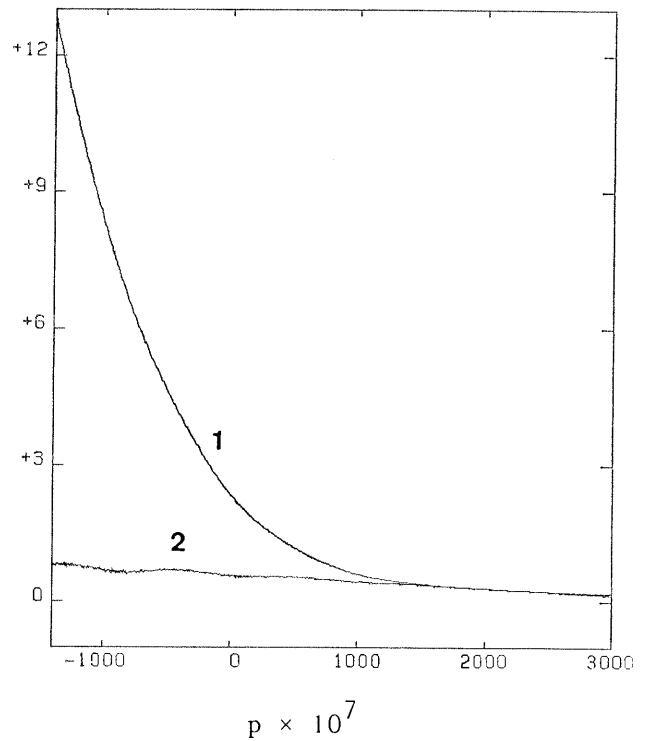
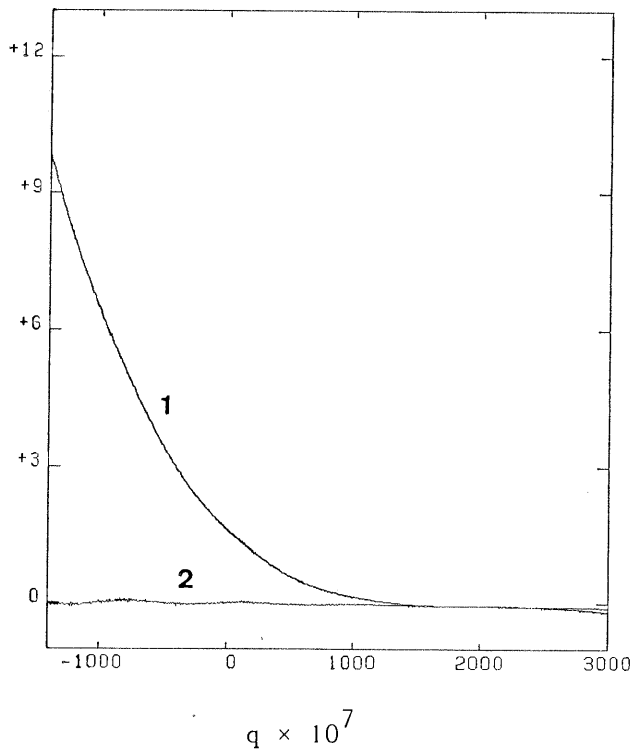
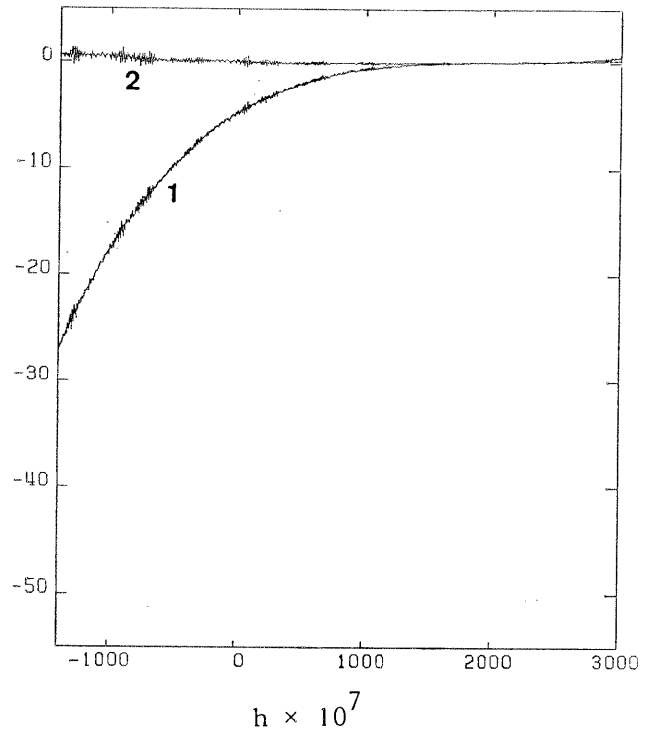
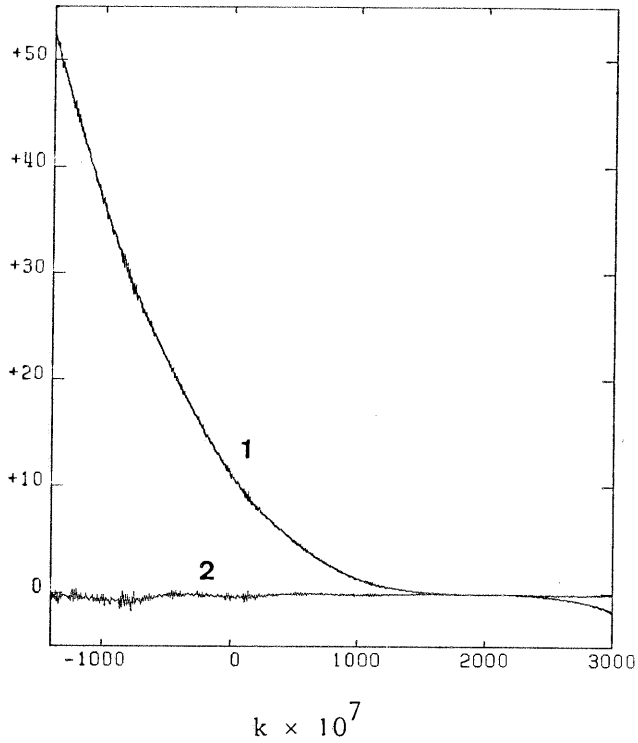


Figure 2-1. Comparaison avec DE102. En abscisse figure la date en années juliennes.

1 VSOP82 - DE102.

2 VSOP82 + NTS - DE102.

VENUS.

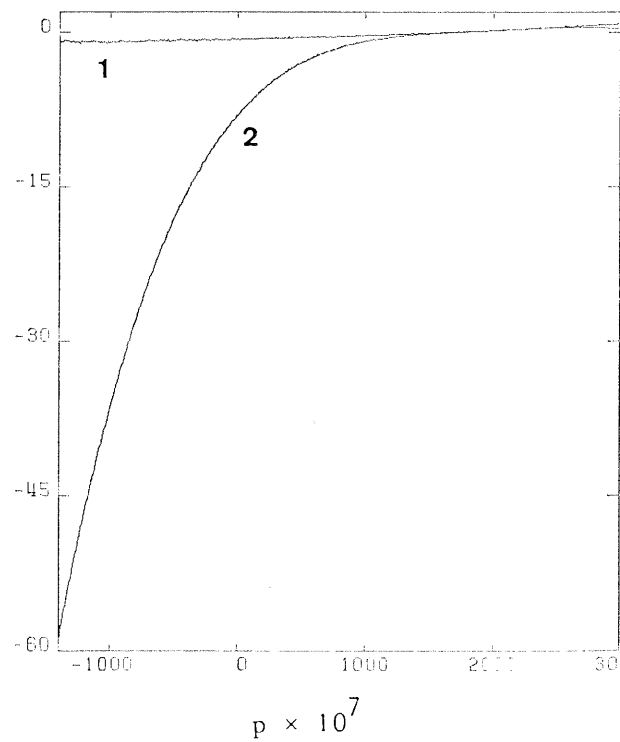
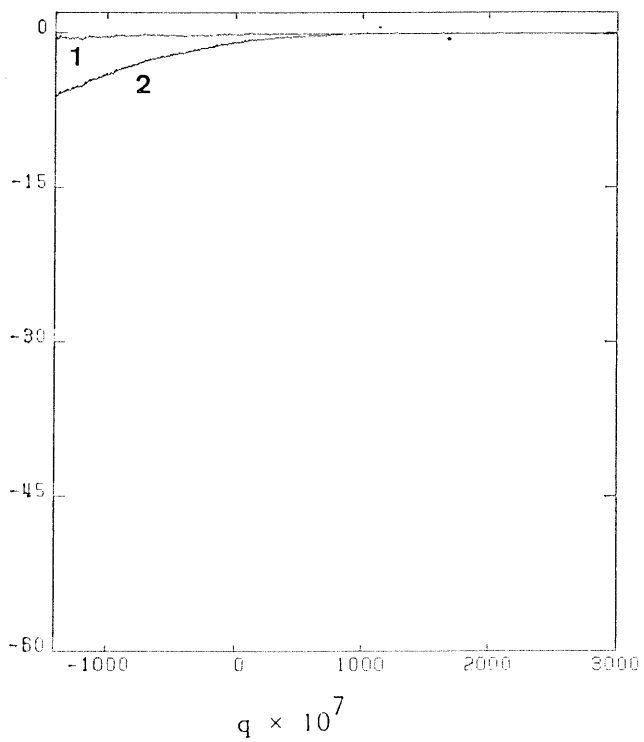
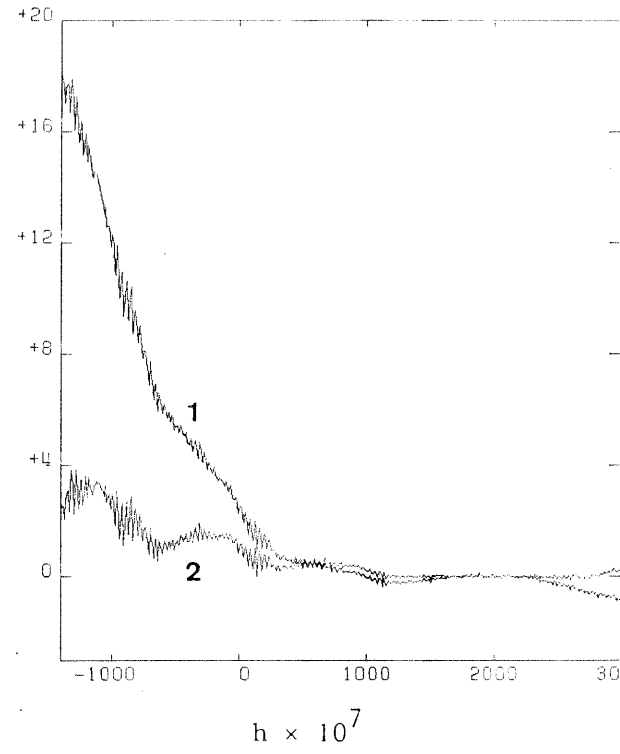
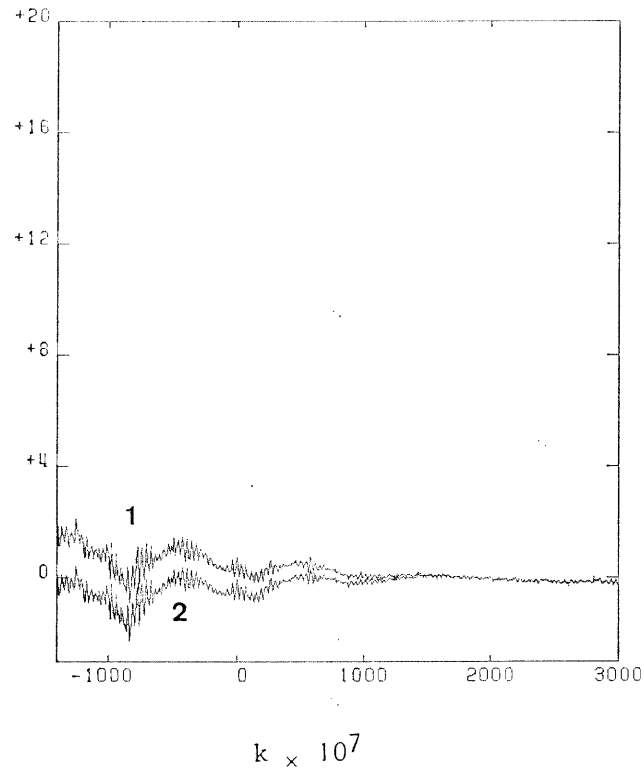


Figure 2-2. Comparaison avec DE102. En abscisse figure la date en années juliennes.

1 VSOP82 - DE102.

TERRE.

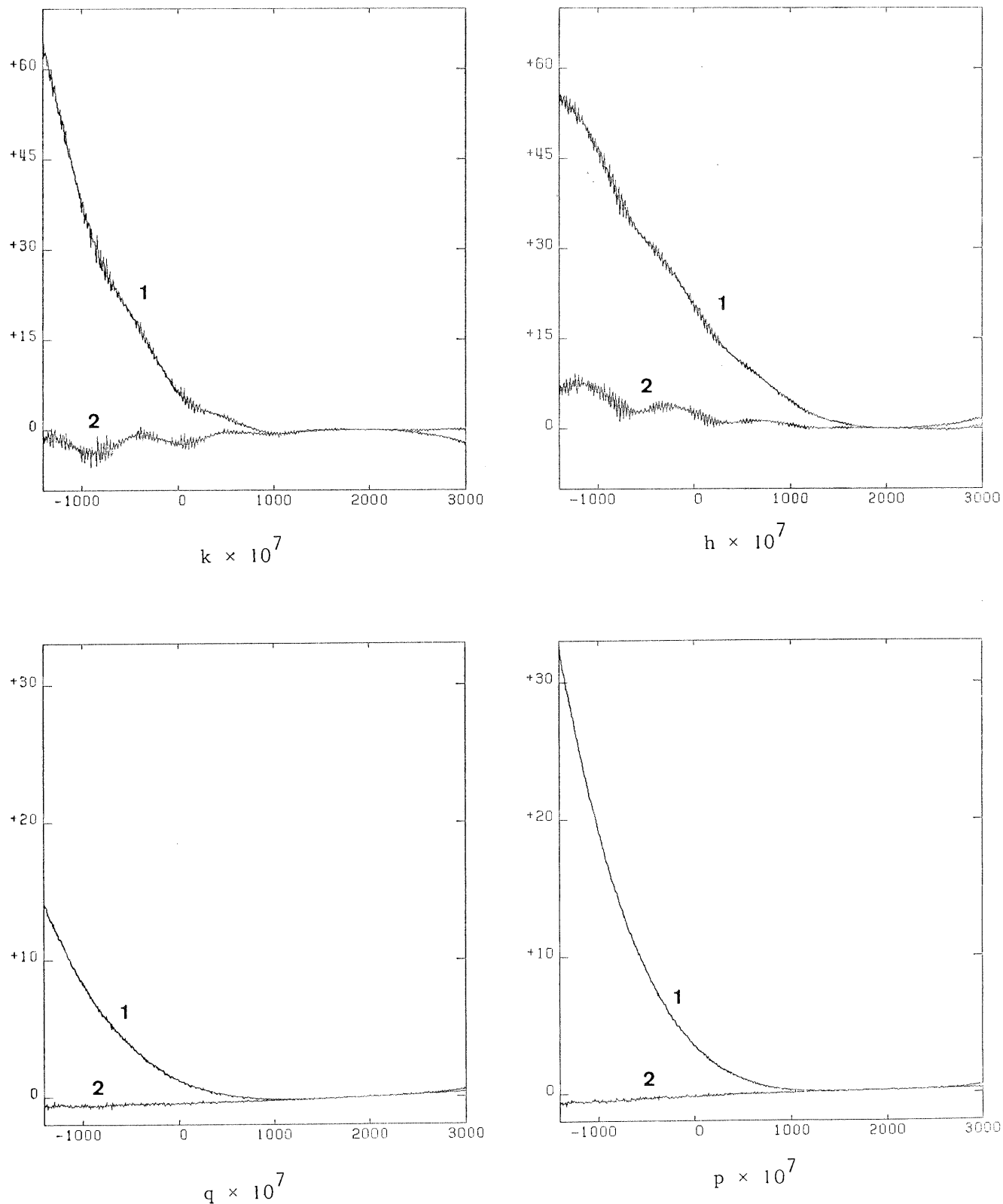


Figure 2-3. Comparaison avec DE102. En abscisse figure la date en années juliennes.

1 VSOP82 - DE102.

2 VSOP82 + NTS - DE102.

MARS.

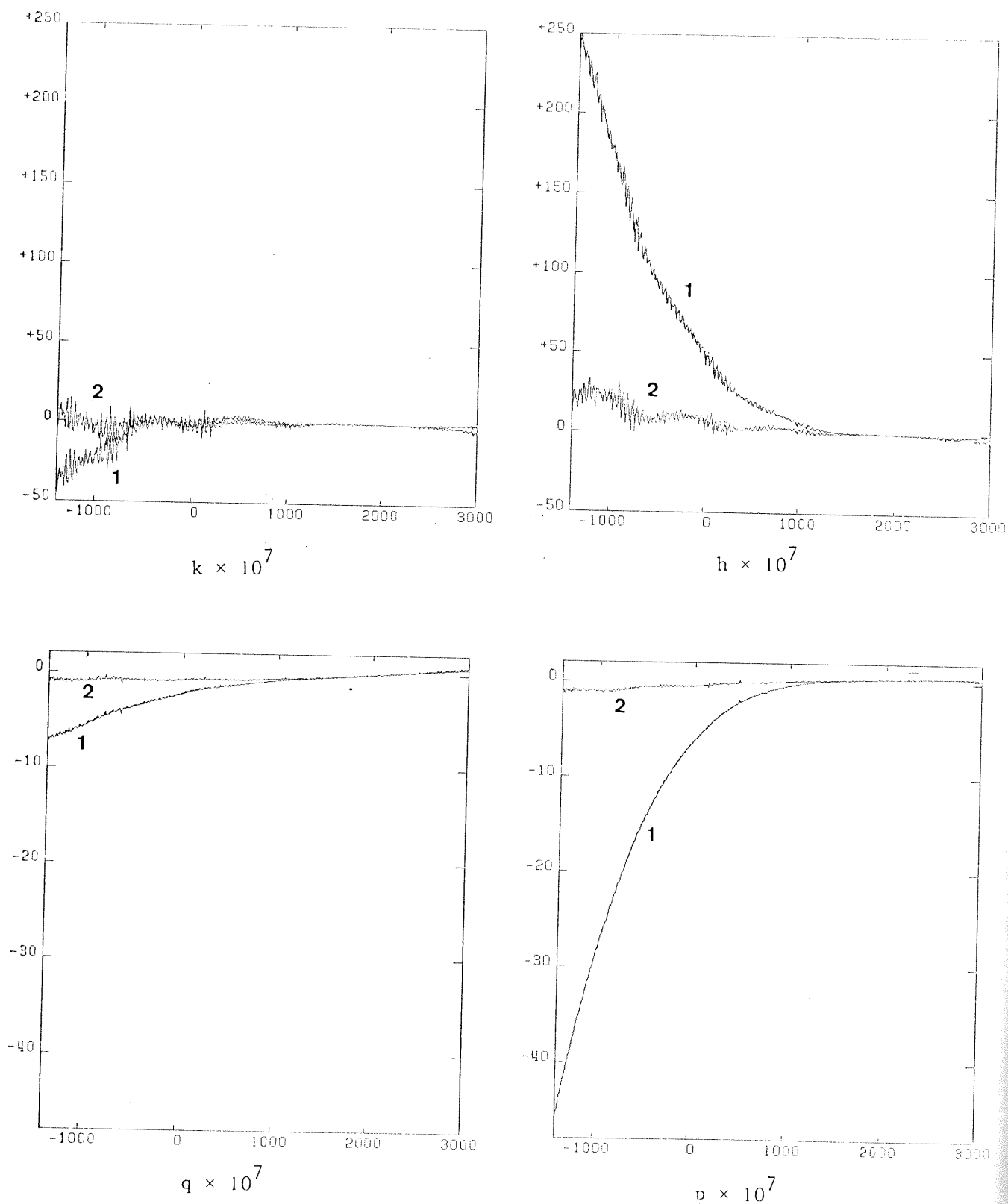


Figure 2-4. Comparaison avec DE102. En abscisse figure la date en années juliennes.

1 VSOP32 - DE102.

2 VSOP82 + NTS - DE102.

Nous pouvons noter une diminution spectaculaire des écarts entre l'intégration numérique directe des équations, DE102, et la solution analytique, sur tout l'intervalle de comparaison, lorsque l'on utilise nos termes séculaires (VSOP82 + NTS). La coïncidence des deux solutions est particulièrement frappante pour les variables en inclinaison dans lesquelles les termes à courte période sont de plus faible amplitude. Il est nécessaire de souligner à ce sujet, que la comparaison avec l'intégration numérique DE102 n'est possible que parce que VSOP82 comprend presque tous les termes à courte période, qui n'apparaissent alors plus dans les différences VSOP82 - DE102 ou VSOP82 + NTS - DE102. A titre d'indication, nous donnons l'ordre de grandeur de l'amplitude des termes à courte période dans le tableau 31.

Variable	Me	Vé	Te	Ma	Ju	Sa	Ur	Ne
$k \times 10^7, h \times 10^7$	72	224	198	822	6500	15500	27500	34400
$q \times 10^7, p \times 10^7$	5	7	5	9	85	200	66	100

Tableau 31. Ordre de grandeur des termes à courte période.

Les irrégularités qui apparaissent principalement dans les courbes en excentricité (k, h) proviennent des termes à courte période et des termes mixtes en $t \sin t$, $t^2 \sin t$, etc... de VSOP82 qui se dégradent pour des trop grandes valeurs du temps. Pour améliorer encore la solution VSOP82 + NTS, il faudrait alors traiter quelques inégalités à courte période de la même manière que l'inégalité séculaire 0_8 , afin d'obtenir des développements des termes mixtes valables sur une plus grande durée, comme nous l'avons fait pour les termes séculaires.

Nous pouvons affirmer, en conclusion, que grâce à la précision avec laquelle nous avons calculé le système autonome (1.84), nous avons obtenu une solution numérique des variations séculaires des éléments des planètes inférieures (Tableau 30), qui permet de prolonger la théorie classique VSOP82 sur une durée d'environ 5000 ans, tout en gardant une grande précision ; celle-ci peut-être estimée par l'extrapolation des courbes 2-1 à 2-4 .

III.5. INTEGRATION NUMERIQUE SUR 1 MILLION D'ANNEES.

L'intégration numérique sur 10 000 ans a permis de déterminer une estimation de la précision avec laquelle nous avons obtenu les seconds membres des équations différentielles donnant les variations séculaires des éléments orbitaux des planètes, et donc la précision de la solution que nous pouvons obtenir par intégration numérique (Tableau 29a).

Nous avons alors effectué une intégration numérique du système complet incluant les termes relativistes et lunaires sur 1 million d'années. La méthode d'intégration est une méthode d'Adams à pas et ordre variable avec sortie intermédiaire tous les 500 ans et tolérance de 10^{-12} . Chaque évaluation du second membre du système différentiel dure 0.95 seconde, et le calcul complet a pris 48 mn sur le NAS 9080 du CIRCE, ce qui fait environ 3000 évaluations du second membre; ceci est assez peu et permet de considérer que nous n'avons pas introduit d'erreurs dues à l'intégration numérique elle-même.

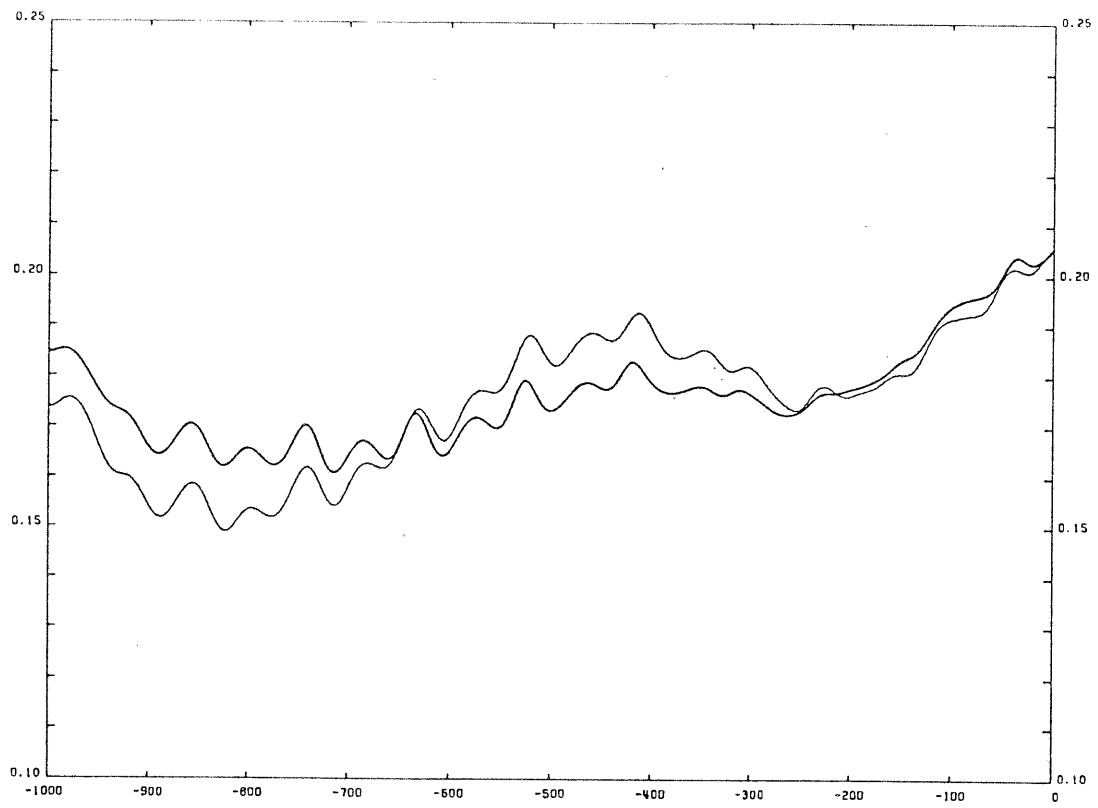
Pour chaque planète, nous avons tracé sur les figures 3-1 à 3-16, les variations des variables excentricité (e), longitude du périhélie ($\bar{\omega}$), inclinaison (i), et longitude du noeud (Ω), sur 1 million d'années dans le passé à partir de l'époque J2000 (Trait gras). Pour les mêmes variables, nous avons aussi tracé la solution de Bretagnon (1984a) (Trait fin). Les solutions de Vénus et de la Terre obtenues par Bretagnon et les nôtres sont assez semblables; dans ce cas, la solution analytique fournit une représentation acceptable de la solution. Par contre, pour Mercure et Mars, les différences entre les deux solutions sont très importantes. Ceci est sans doute dû à la présence des petits diviseurs dans le calcul de la solution analytique de Bretagnon, comme nous l'avons signalé pour notre solution analytique au chapitre II. Une estimation de la précision de chaque solution est donnée dans les tableaux 29a et 29b pour les planètes inférieures. Cette estimation est parfois pessimiste car les solutions sont quasi-périodiques, et ne divergent pas de manière linéaire, mais elle fournit néanmoins une bonne indication.

Dans le cas de Jupiter ou de Saturne, la situation est différente; sur 1 million d'années, la qualité de la solution dépend essentiellement de la valeur de la fréquence g_6 dans la solution analytique, à cause de la très grande régularité de la solution (Fig. 3-5 et 3-6). Dans la solution de Bretagnon, cette fréquence est ajustée aux termes séculaires de VSOP82, et ne provient pas d'un calcul direct. On notera la bonne correspondance des deux solutions, mais l'écart avec VSOP82 (Tableau 29) reste important.

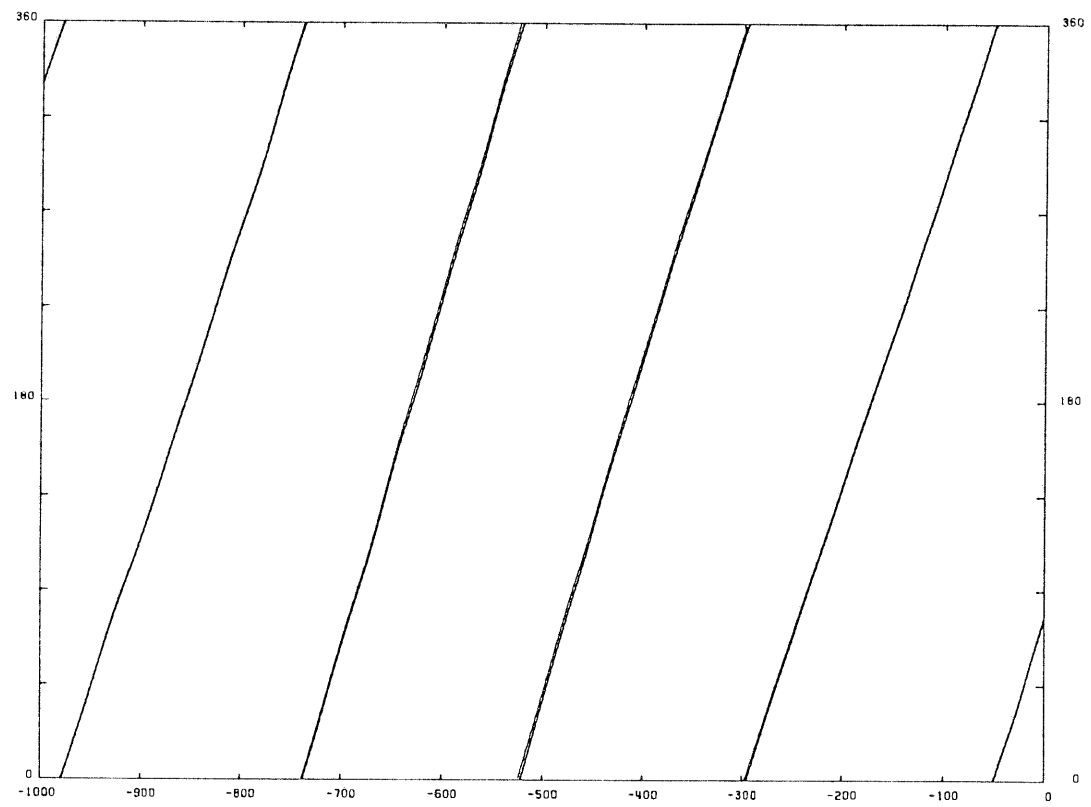
Toutes les courbes des figures 3-1 à 3-16 sont représentées par rapport à l'écliptique dynamique J2000; seule la courbe donnant l'excentricité est intrinsèque et ne dépend pas du repère. Nous avons fait ce choix pour faciliter les comparaisons avec les travaux de Bretagnon, mais il faut reconnaître que dans le cas d'une théorie générale, un repère lié au plan invariant du système solaire est sans doute plus adapté, surtout pour les planètes extérieures.

Remarque: Les décrochages dans les courbes donnant la longitude du noeud ou du périhélie sont dus à des indéterminations sur leurs valeurs lorsque l'inclinaison ou l'excentricité devient très petite ou même s'annule.

Figures 3-1 à 3-6. Variations séculaires des éléments orbitaux des 8 planètes. En abscisse, la date est repérée par rapport à J2000 en millier d'années juliennes. En ordonnée, la longitude du périhélie, l'inclinaison, et la longitude du noeud sont exprimées en degrés.

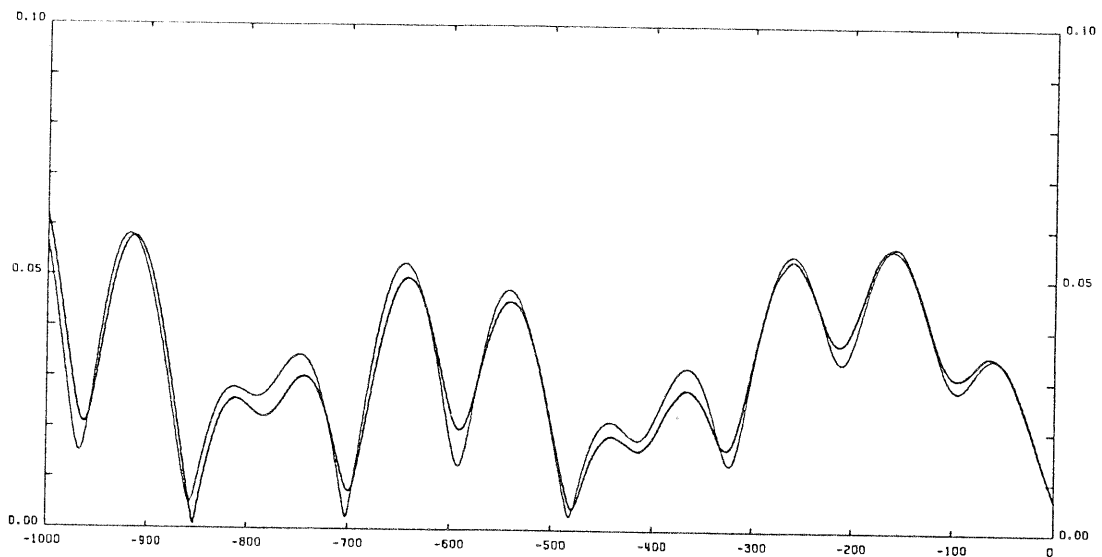


EXCENTRICITE DE MERCURE

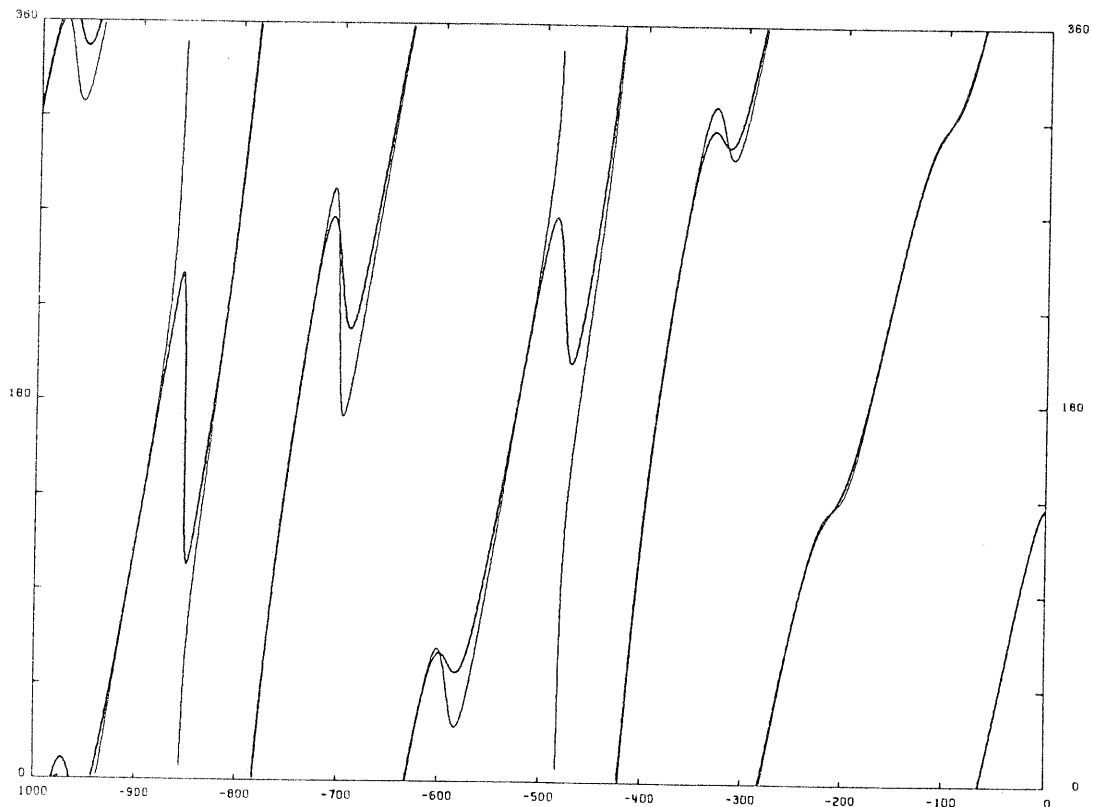


LONGITUDE DU PERIHELIE MERCURE ECLIPTIQUE 2000

Fig.3-1.

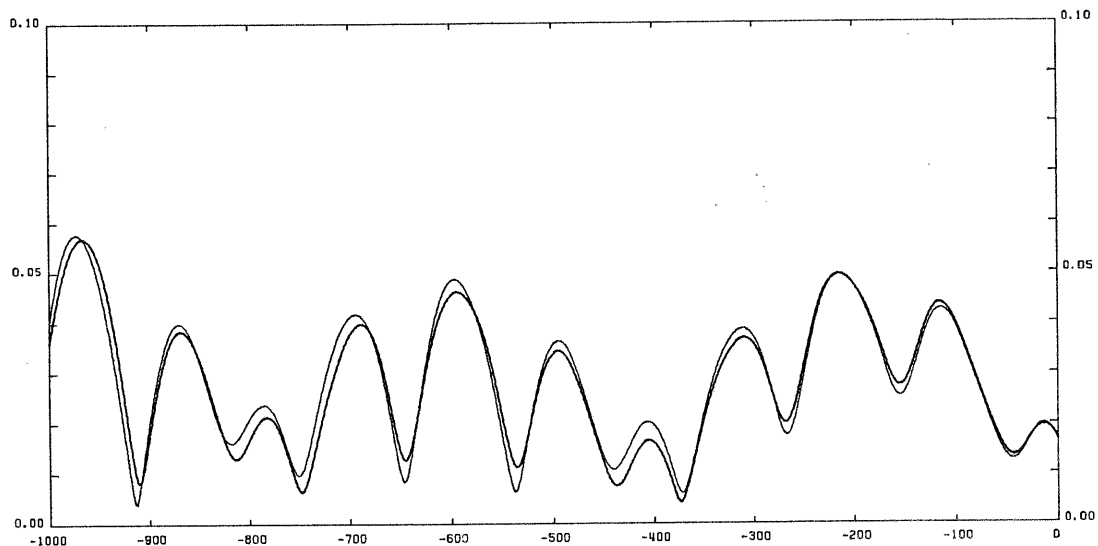


EXCENTRICITE DE VENUS

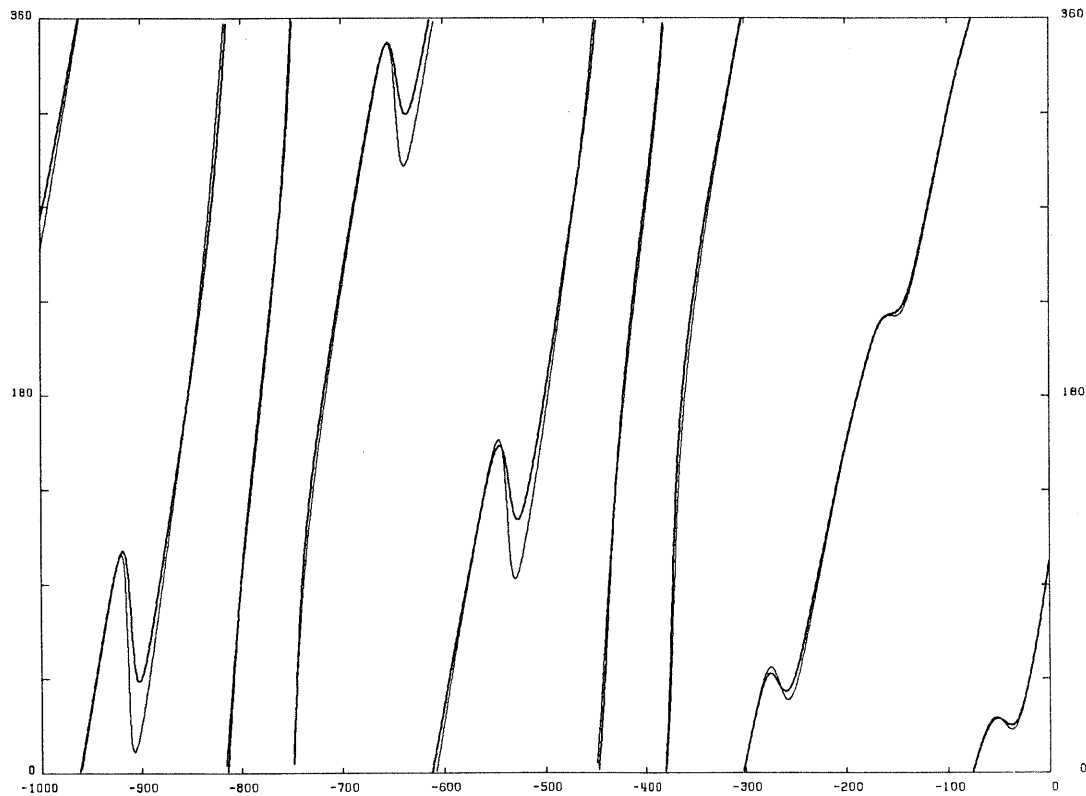


LONGITUDE DU PERIHELIE VENUS ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-2.

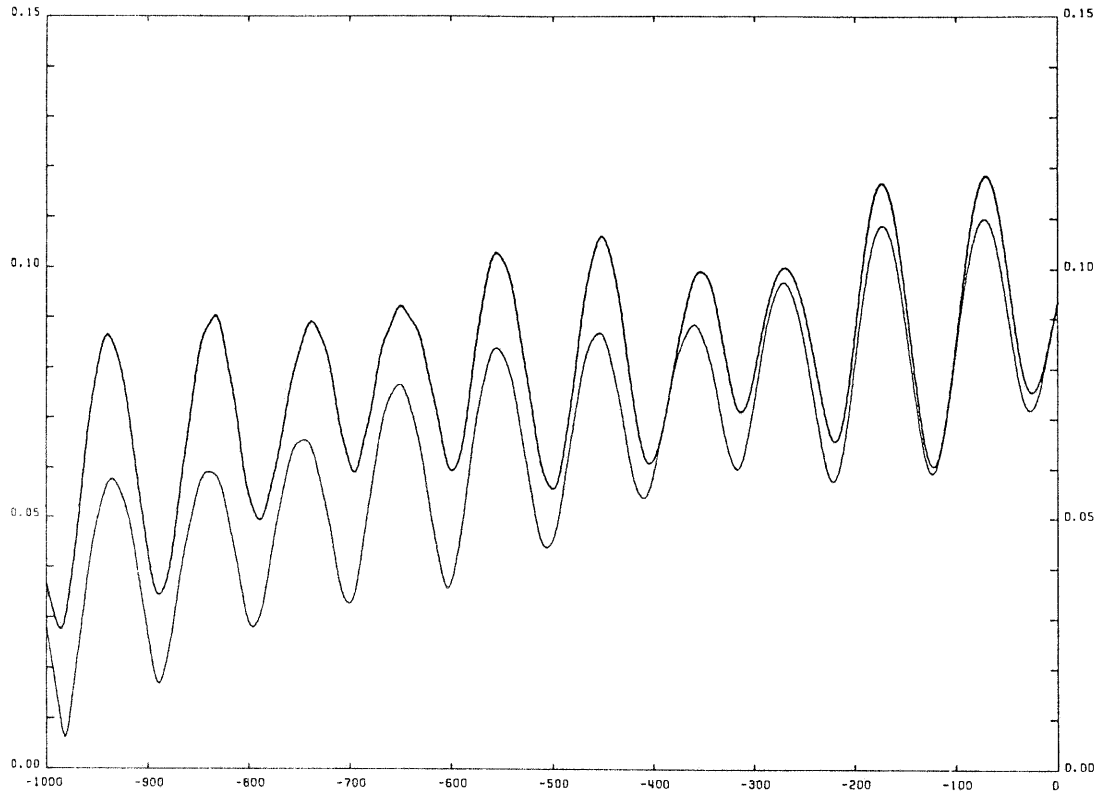


EXCENTRICITE DE LA TERRE

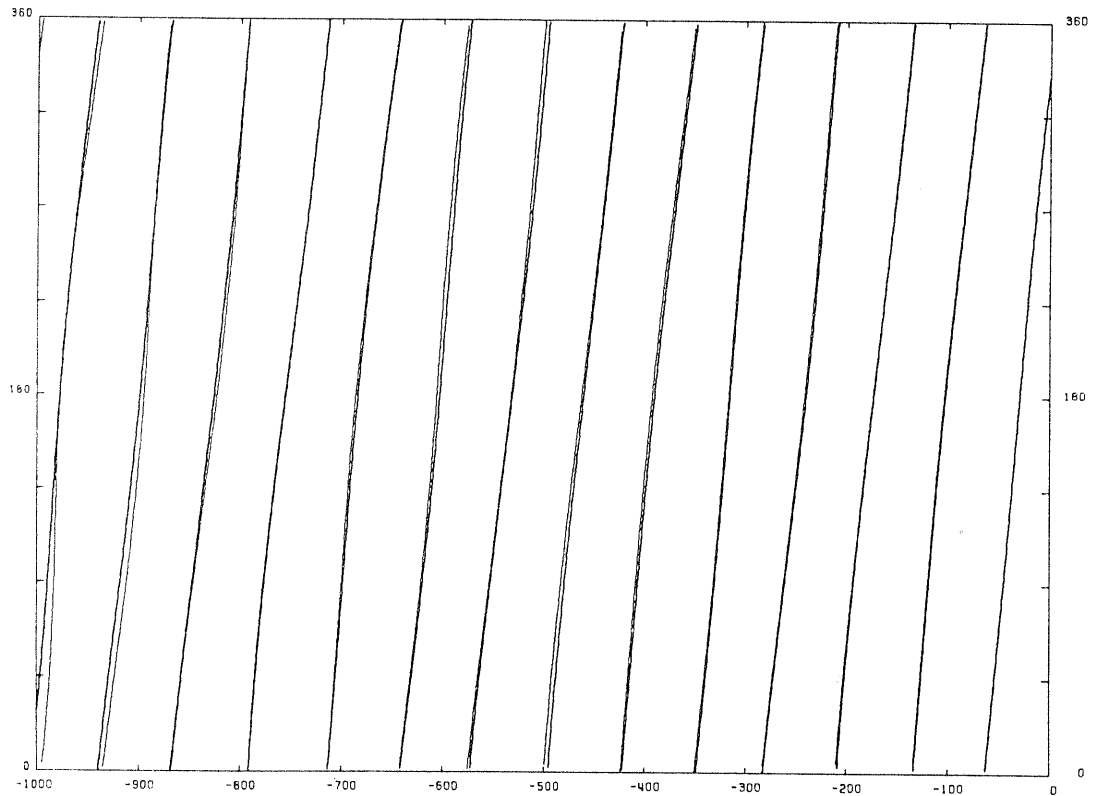


LONGITUDE DU PERIHELIE TERRE ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-3.

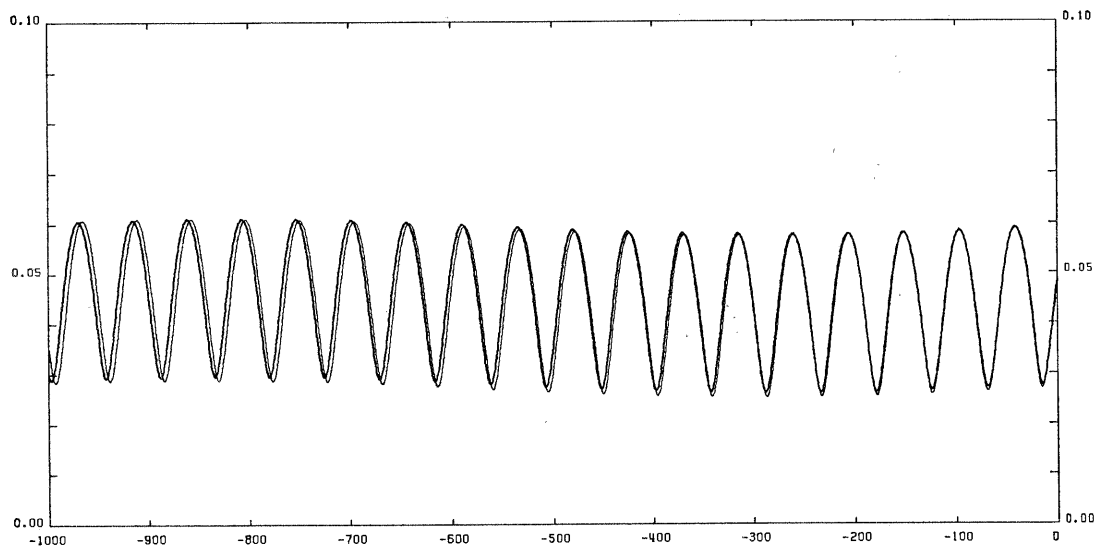


EXCENTRICITE DE MARS

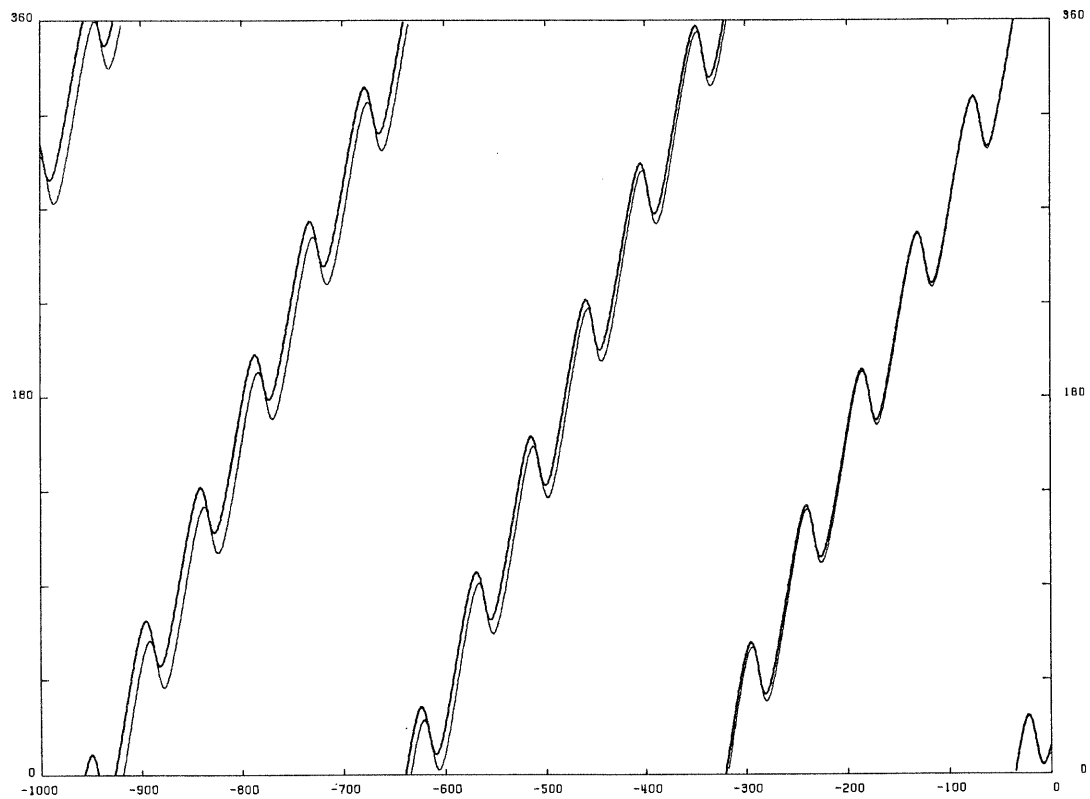


LONGITUDE DU PERIHELIE MARS ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-4.

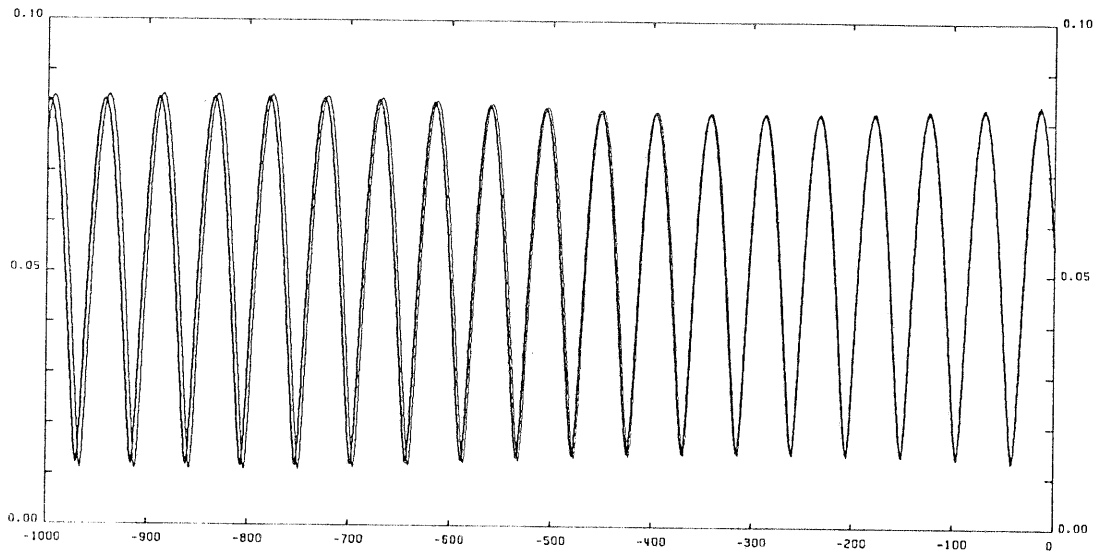


EXCENTRICITE DE JUPITER

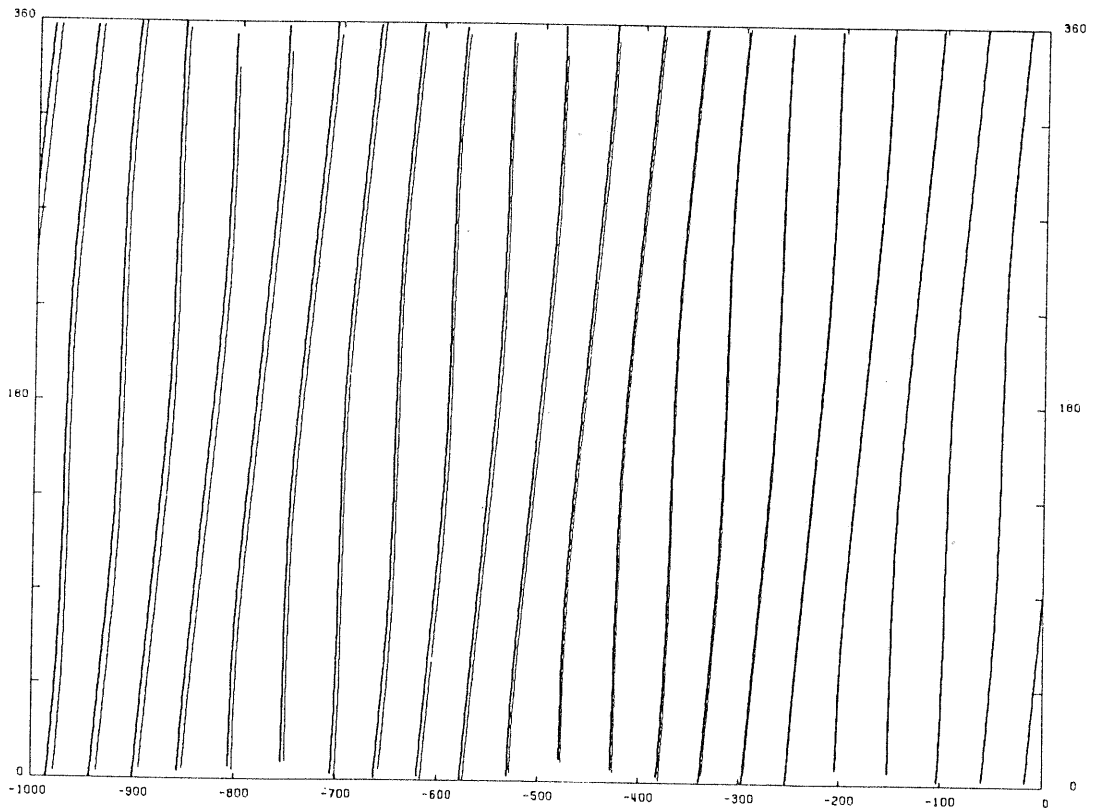


LONGITUDE DU PERIHELIE JUPITER ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-5.

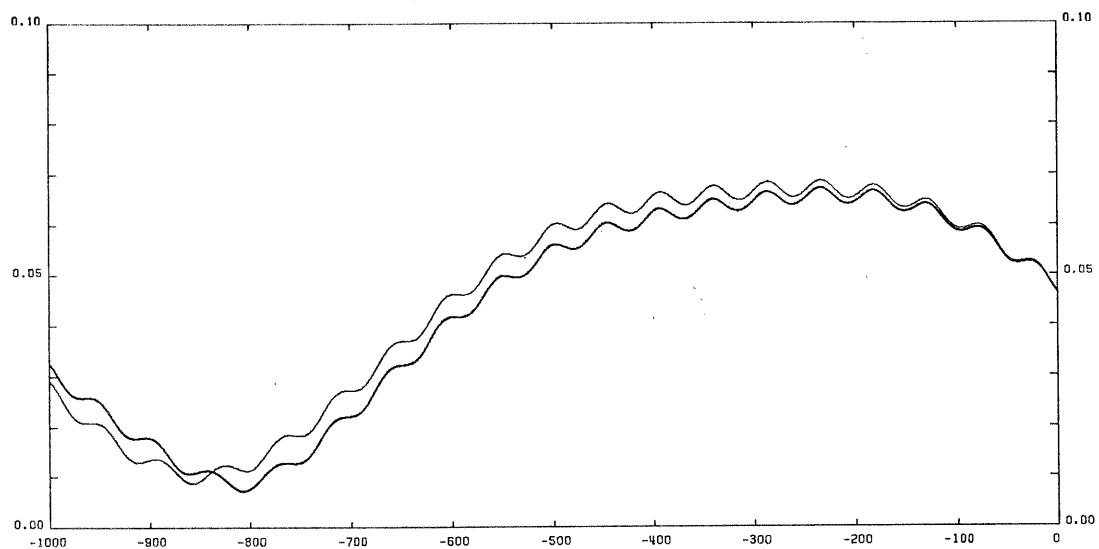


EXCENTRICITE DE SATURNE

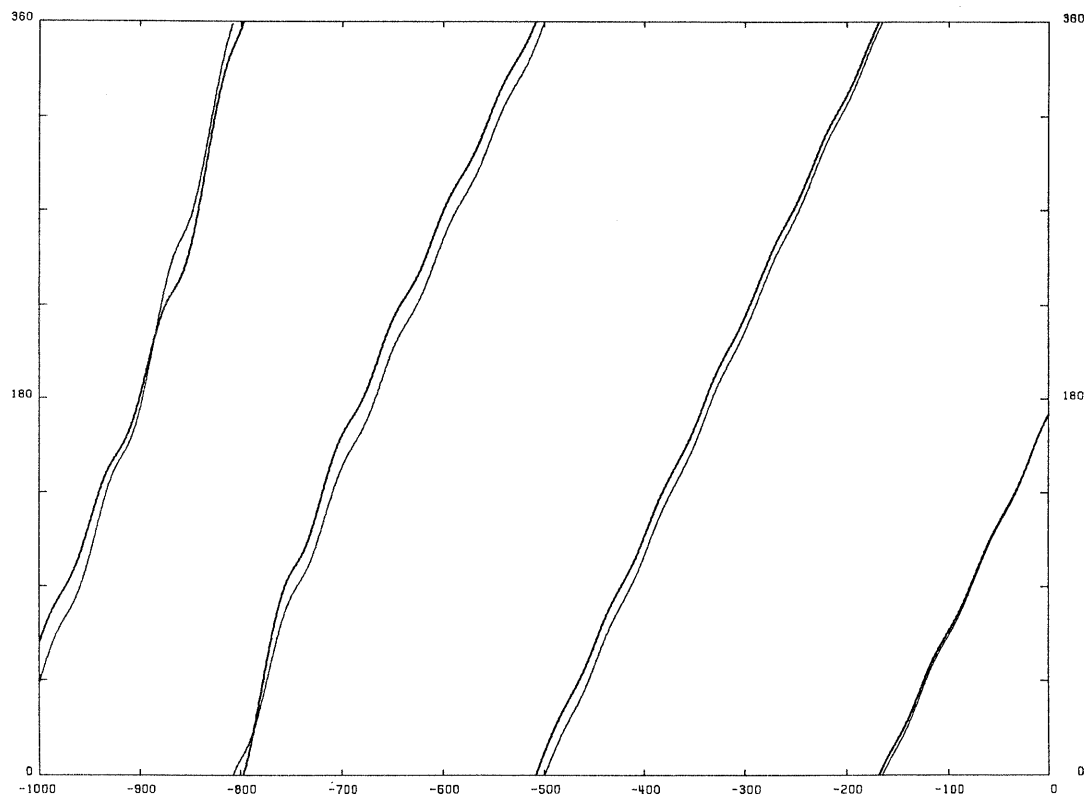


LONGITUDE DU PERIHELIE SATURNE ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-6.

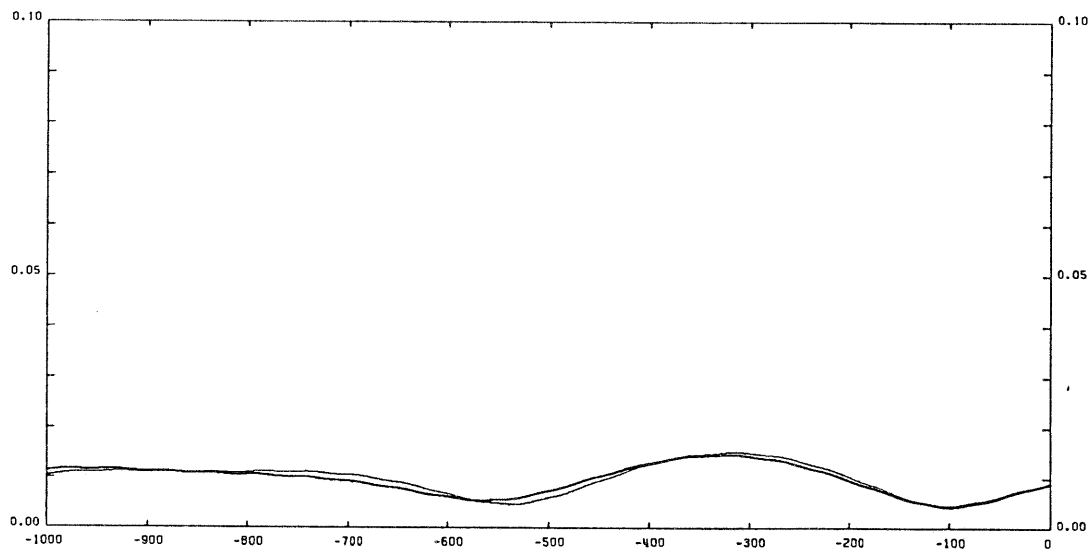


EXCENTRICITE DE URANUS

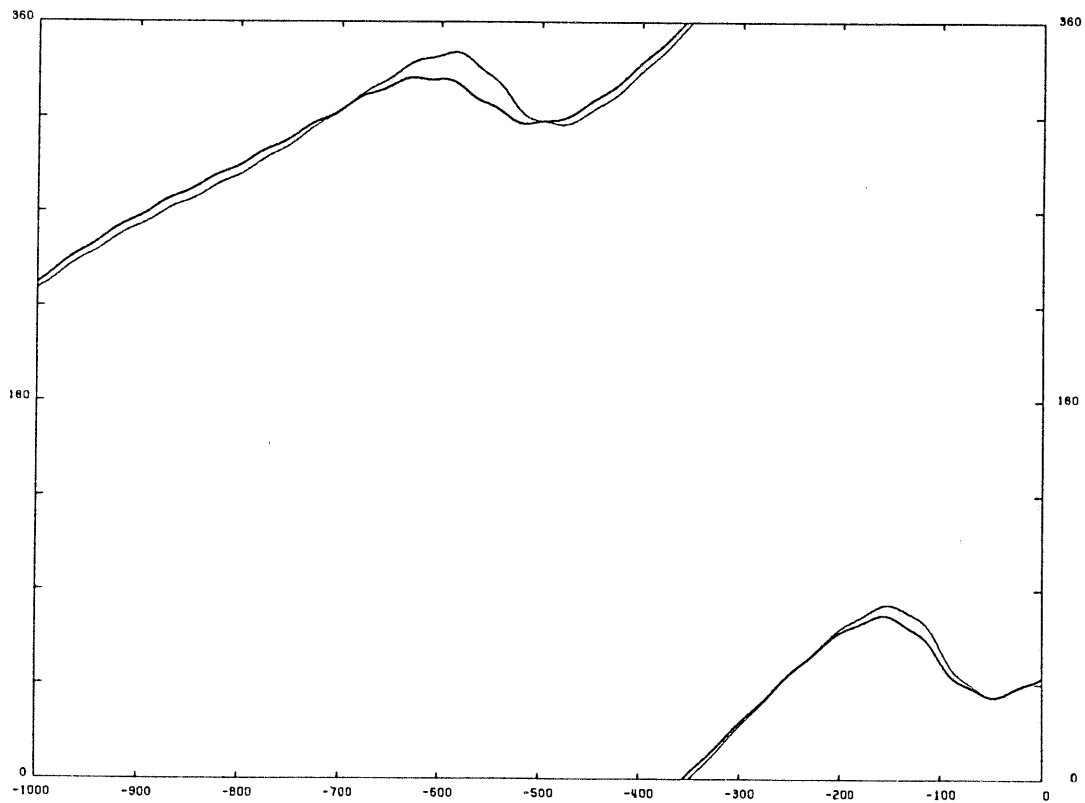


LONGITUDE DU PERIHELIE URANUS ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-7.

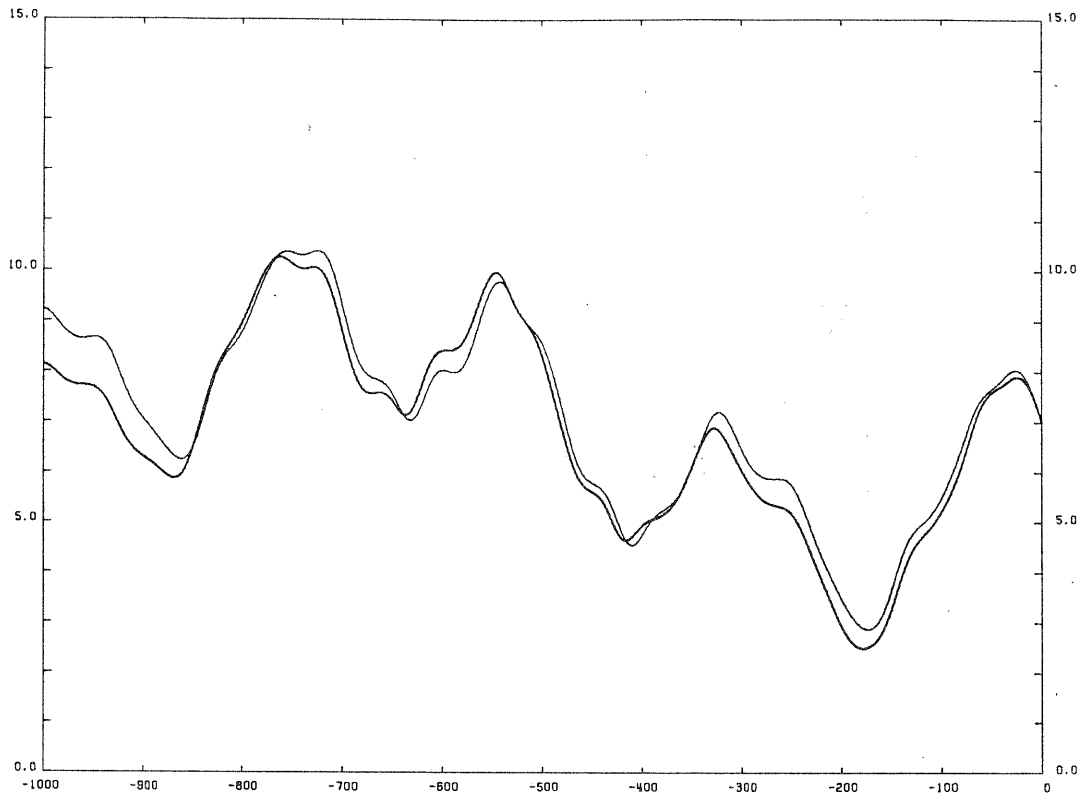


EXCENTRICITE DE NEPTUNE

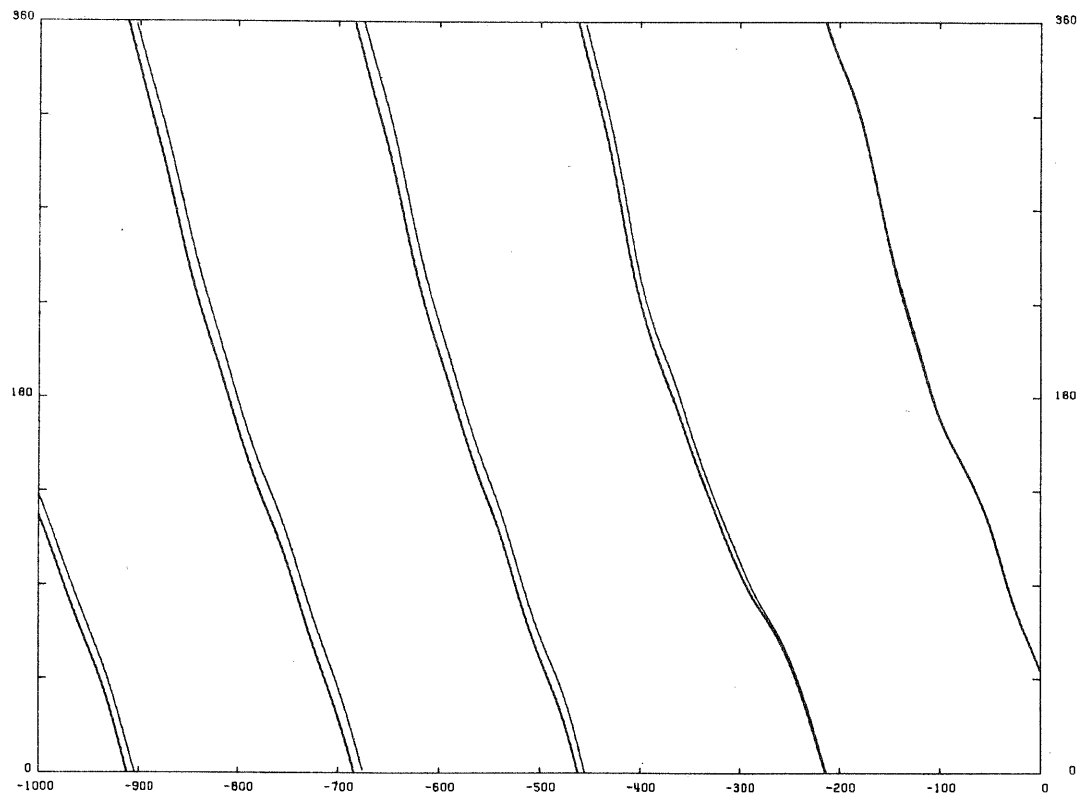


LONGITUDE DU PERIHELIE NEPTUNE ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-8.

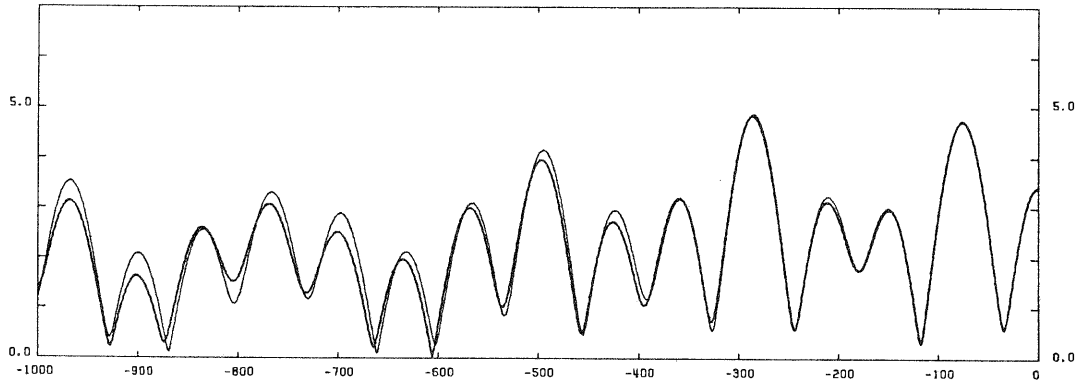


INCLINAISON DE MERCURE ECLIPTIQUE 2000

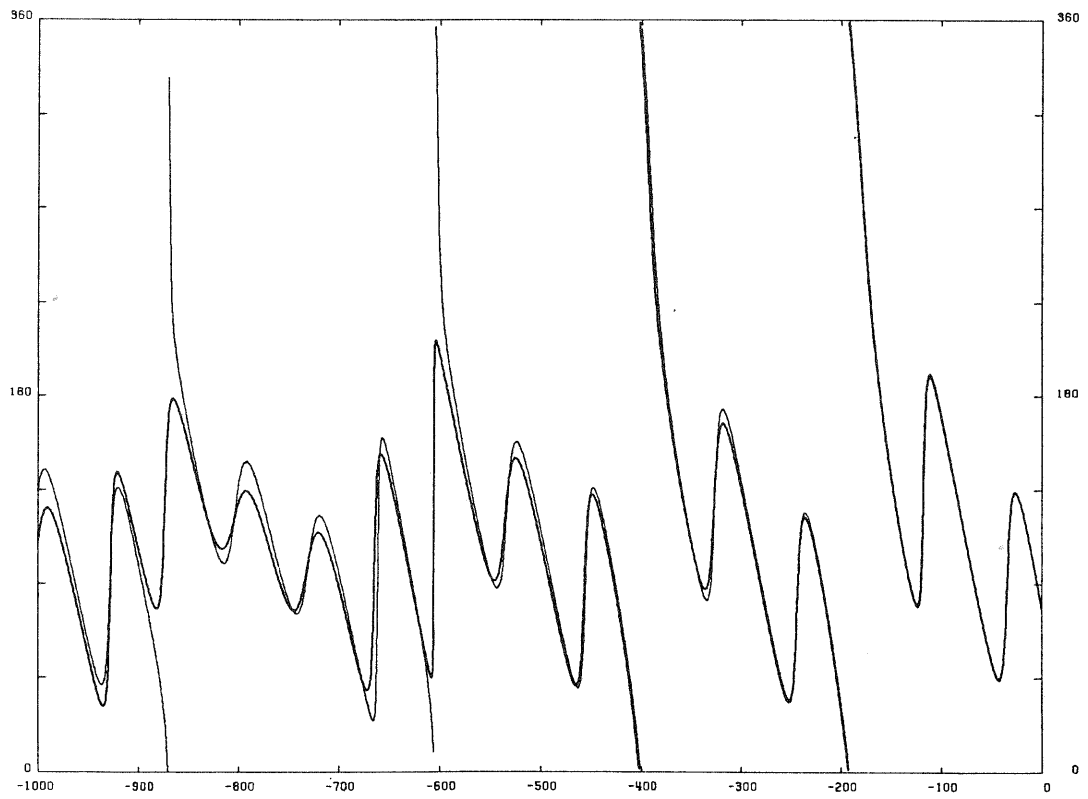


LONGITUDE DU NOEUD MERCURE ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-9.

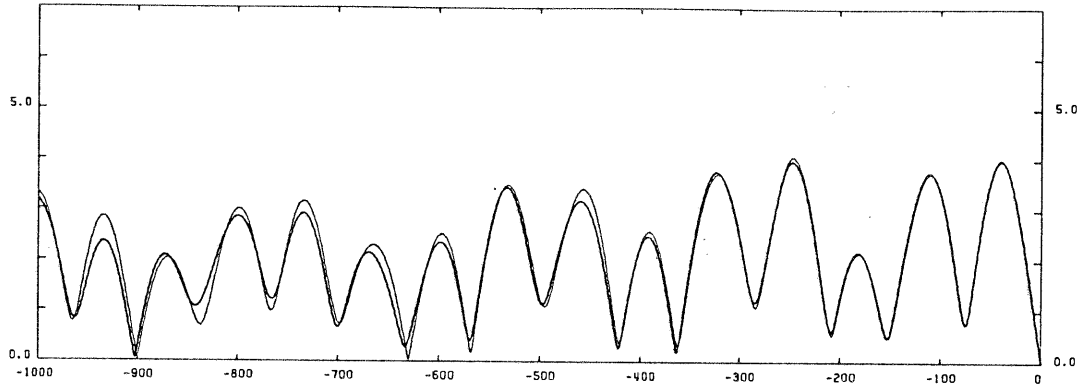


INCLINAISON DE VENUS ECLIPTIQUE 2000

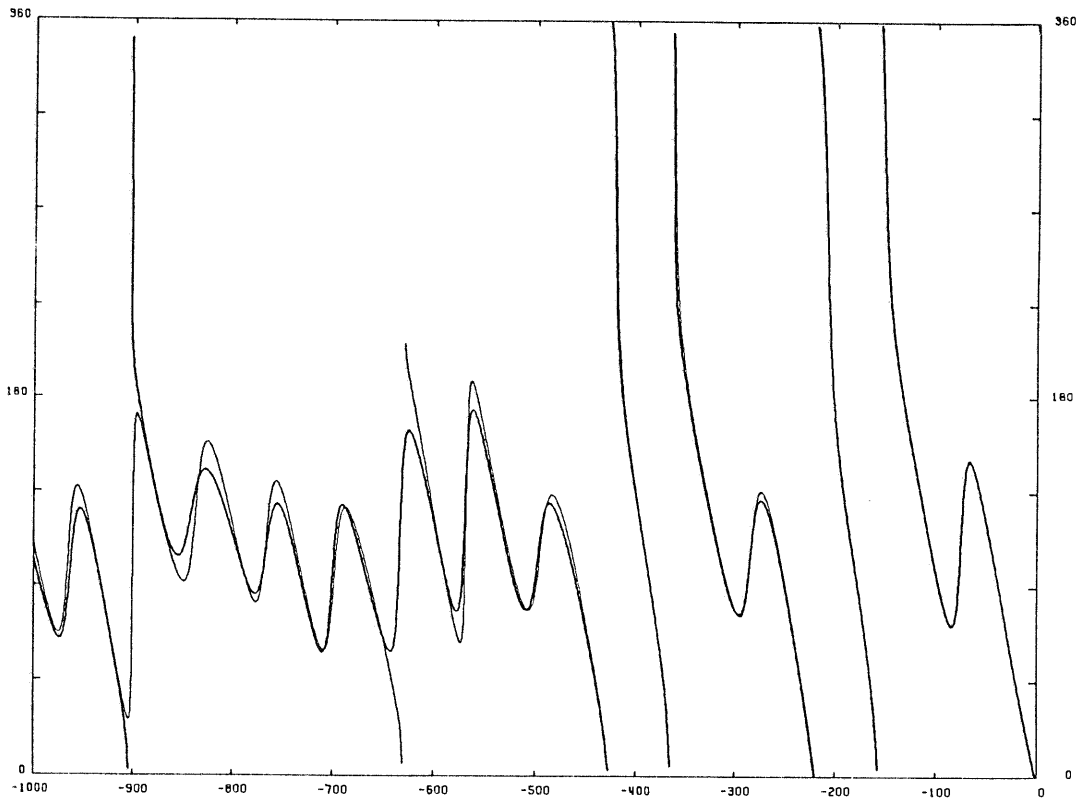


LONGITUDE DU NOEUD VENUS ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-10.

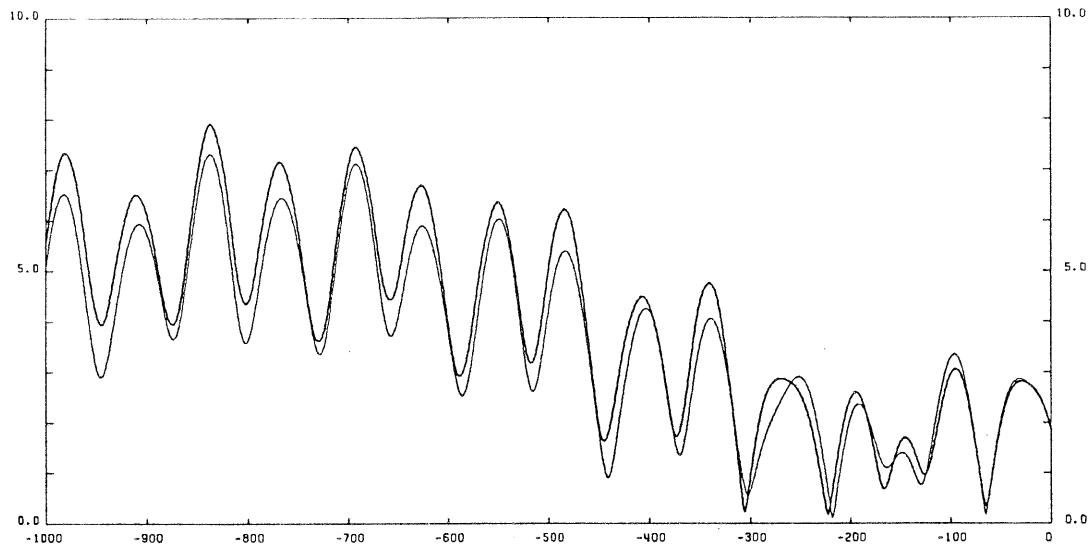


INCLINAISON DE LA TERRE ECLIPTIQUE 2000

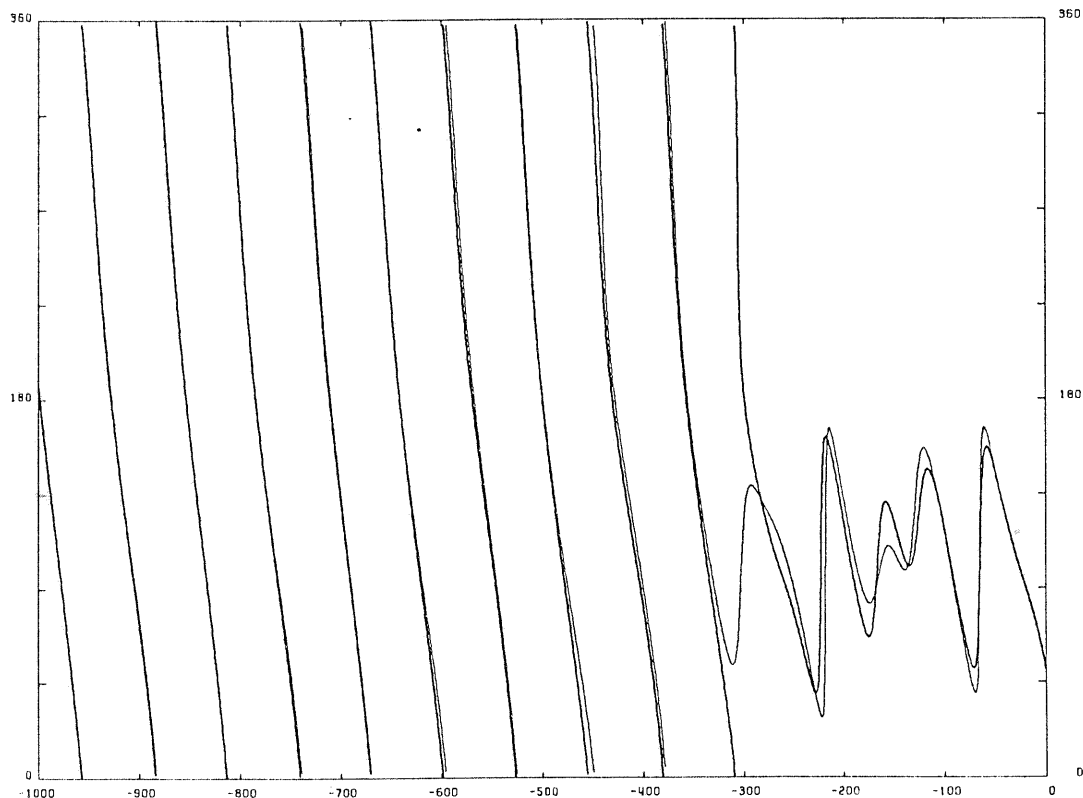


LONGITUDE DU NOEUD TERRE ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-11.

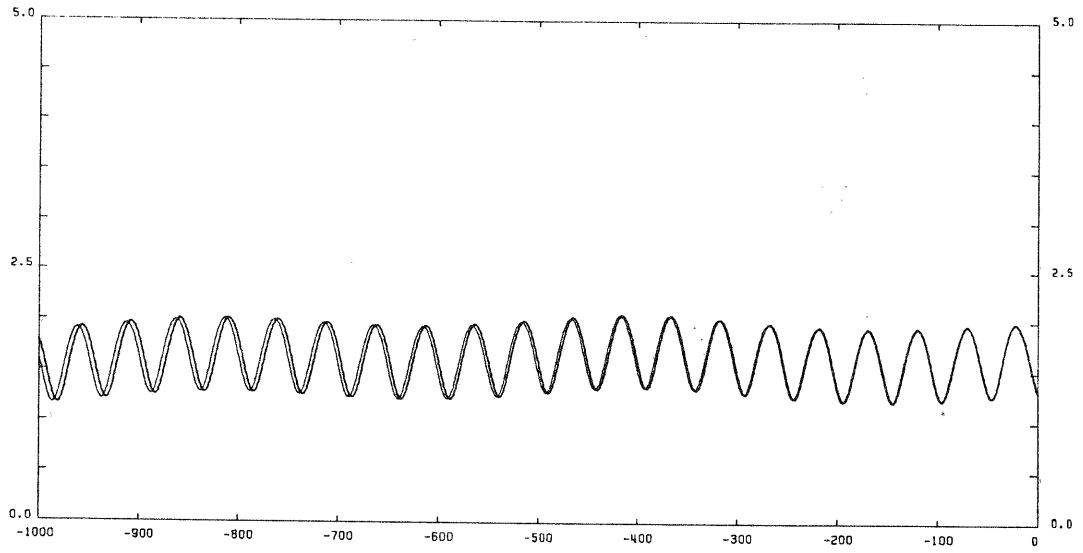


INCLINAISON DE MARS ECLIPTIQUE 2000

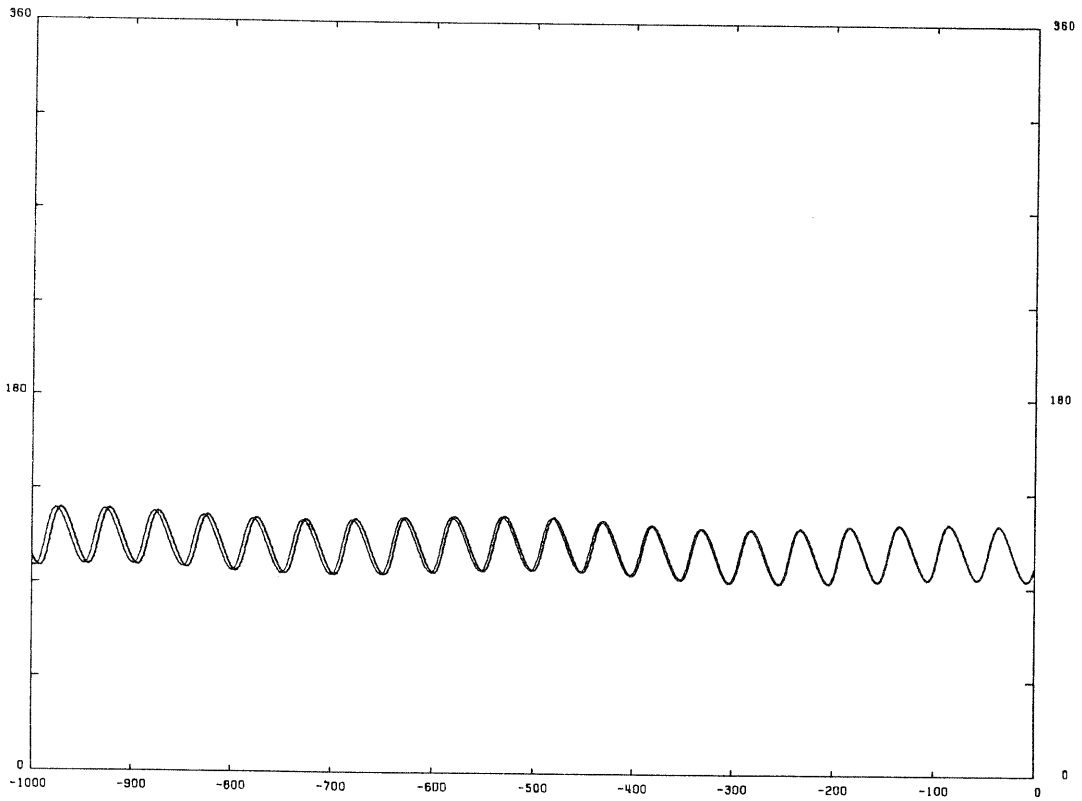


LONGITUDE DU NOEUD MARS ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-12.

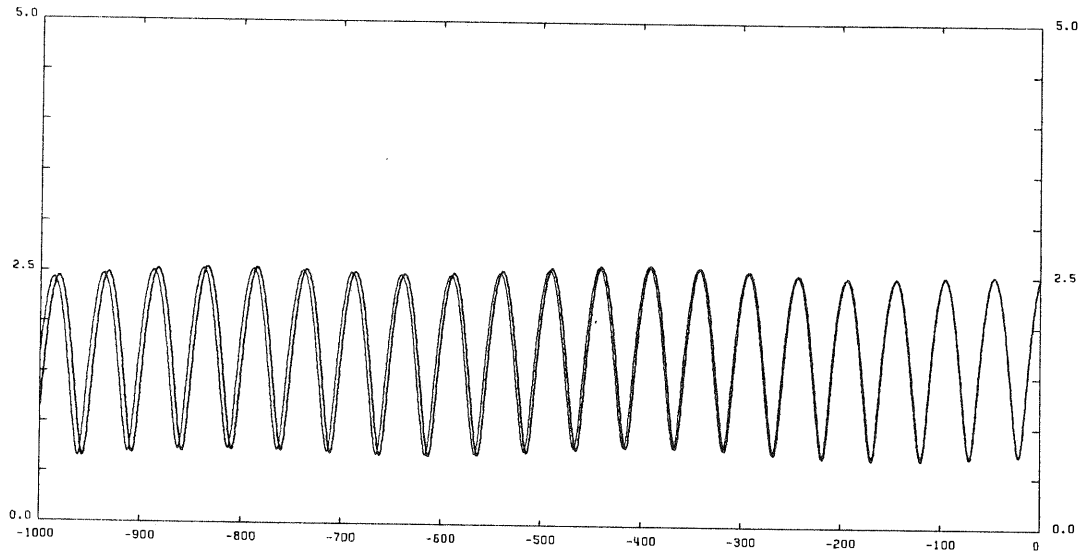


INCLINAISON DE JUPITER ECLIPTIQUE 2000

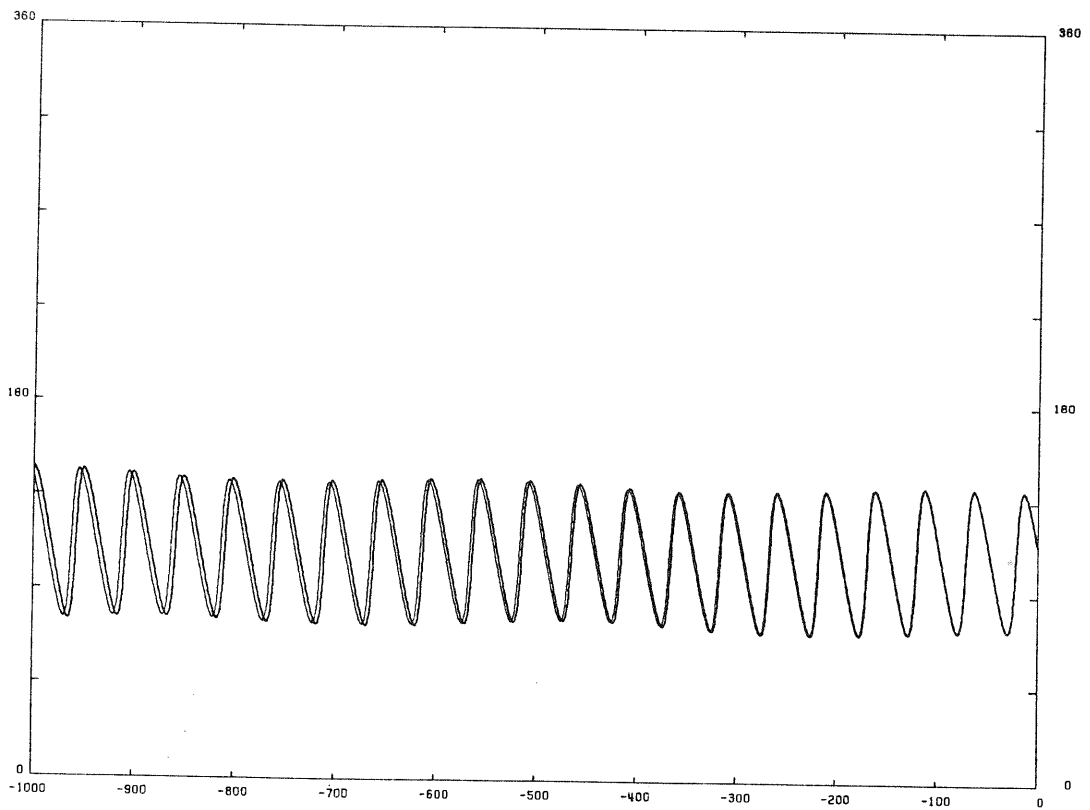


LONGITUDE DU NOEUD JUPITER ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-13.

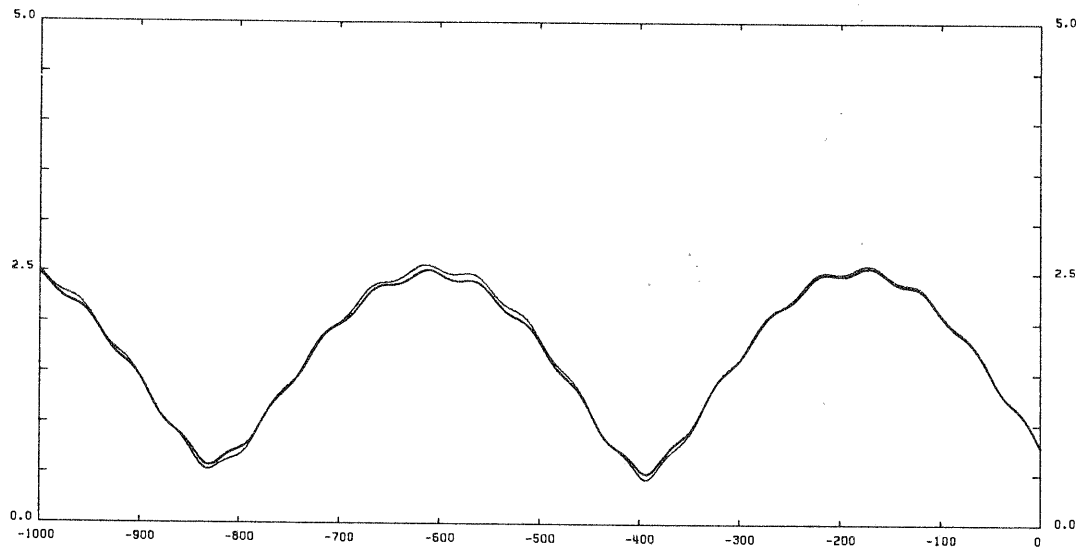


INCLINAISON DE SATURNE ECLIPTIQUE 2000

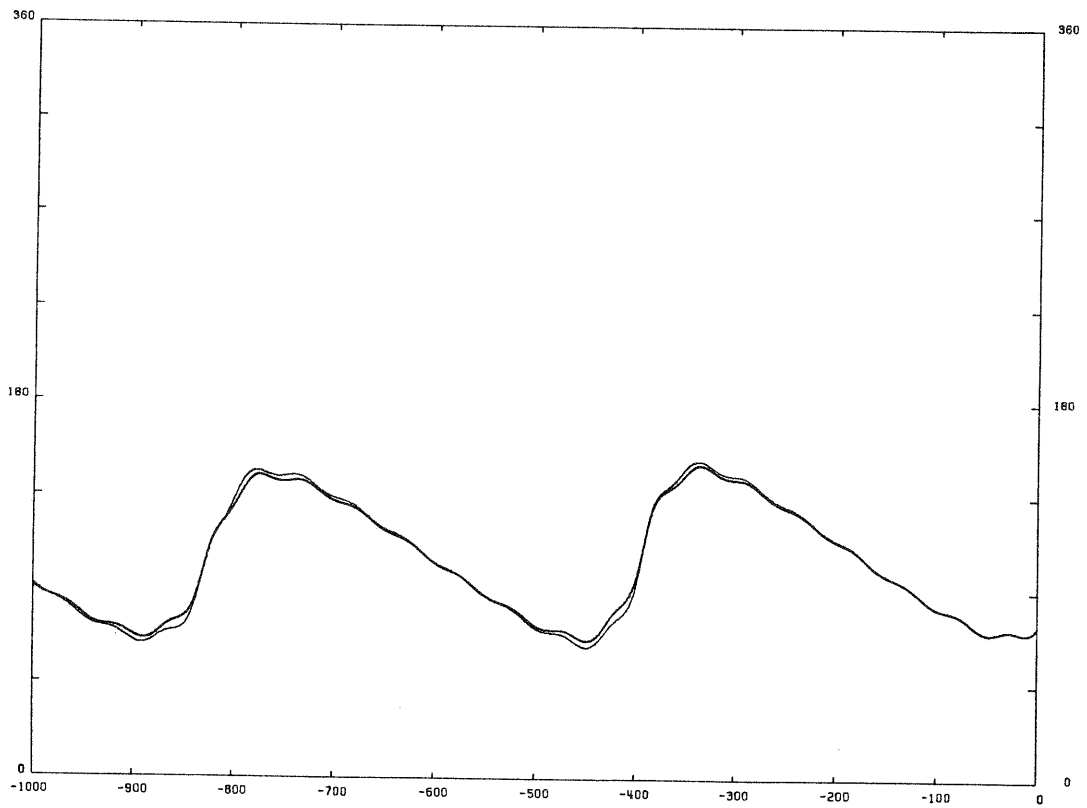


LONGITUDE DU NOEUD SATURNE ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-14.

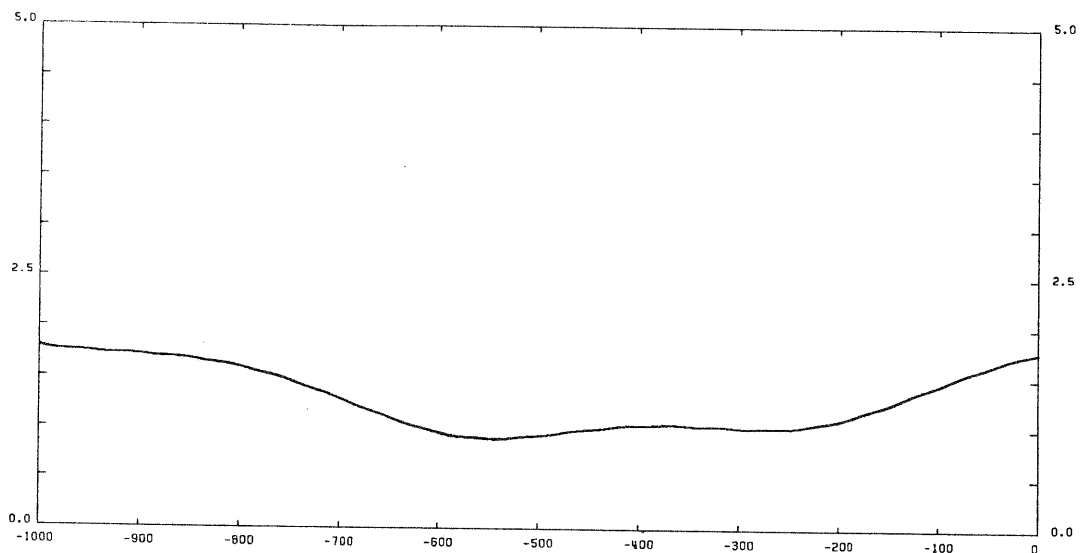


INCLINAISON DE URANUS ECLIPTIQUE 2000

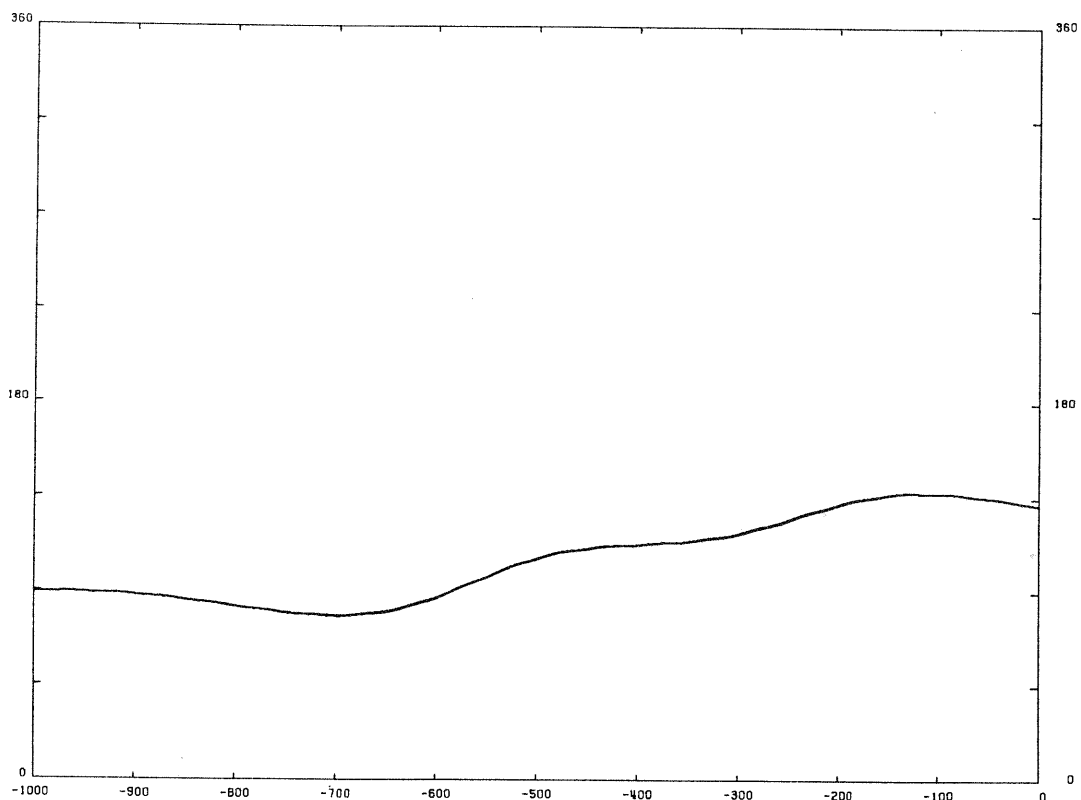


LONGITUDE DU NOEUD URANUS ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-15.



INCLINAISON DE NEPTUNE ECLIPTIQUE 2000



LONGITUDE DU NOEUD NEPTUNE ECLIPTIQUE 2000

Fig. 3-16.

III.6. CONCLUSIONS DU CHAPITRE III.

- i) L'intégration numérique du système autonome fournit une solution beaucoup plus précise que l'intégration analytique qui ne converge pas toujours très bien à cause des problèmes de petits diviseurs (Tableau 29a et 29b).
- ii) La précision atteinte dans le calcul des termes séculaires des planètes inférieures permet de prolonger la théorie classique sur plus de 5000 ans (Fig. 2-1 à 2-4).
- iii) Nous avons effectué une intégration numérique du système autonome (1.84) complété par les termes relativistes et lunaires. Nous avons ainsi obtenu les variations séculaires des éléments orbitaux des 8 planètes sur 1 million d'années, avec une précision donnée par le Tableau 29a.

CONCLUSION

Nous rappelons tout d'abord ici les conclusions que nous avons énoncées à la fin de chacun des chapitres I, II, et III.

1) Conclusions du chapitre I.

- i) Nous avons développé un nouvel algorithme de calcul du système autonome d'ordre 2, basé sur une écriture explicite des coefficients des termes d'ordre 2 en fonction des termes de l'ordre 1 (proposition 2 et 3).
- ii) Nous avons calculé le système d'ordre 2 pour les 8 planètes en conservant tous les termes, jusqu'au degré 5 en excentricité-inclinaison .
- iii) Le système complet d'ordre 2 donnant les variations séculaires des variables excentricité \bar{z}_i et inclinaison $\bar{\zeta}_i$ ($i=1,8$) comporte 153 824 termes ; chacun étant déterminé avec une précision relative de 10^{-6} . Il se présente sous la forme :

$$\dot{\bar{\alpha}} = \sqrt{-1} (A \alpha + \Phi_3(\alpha, \bar{\alpha}) + \Phi_5(\alpha, \bar{\alpha}))$$

où $\alpha = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_8, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \dots, \bar{\zeta}_8)$

A est une matrice réelle à coefficient constants

Φ_3 et Φ_5 rassemblent respectivement les termes de degré 3 et 5.

2) Conclusions du chapitre II.

- i) Nous avons mis au point un algorithme permettant le calcul effectif d'une solution analytique de degré 5 en suivant la méthode de normalisation exposée par Brumberg (1980) ; et nous avons calculé une solution de degré 3 incluant tous les termes .
- ii) Nous avons montré la limitation de l'application stricte de cette méthode analytique, à cause de la présence de petits diviseurs dans les combinaisons des fréquences des longues périodes.

3) Conclusions du chapitre III.

- i) L'intégration numérique du système autonome fournit une solution beaucoup plus précise que l'intégration analytique qui ne converge pas toujours très bien à cause des problèmes de petits diviseurs (Tableau 29a et 29b).
- ii) La précision atteinte dans le calcul des termes séculaires des planètes inférieures permet de prolonger la théorie classique sur plus de 5000 ans (Fig. 2-1 à 2-4).
- iii) Nous avons effectué une intégration numérique du système autonome (1.84) complété par les termes relativistes et lunaires. Nous avons ainsi obtenu les variations séculaires des éléments orbitaux des 8 planètes sur 1 million d'années, avec une précision donnée par le Tableau 29a.

Dès à présent, la solution que nous avons calculée sur 1 million d'années est directement utilisable pour les planètes inférieures, et devrait permettre un nouvel examen de l'évolution climatique de Mars au cours du dernier million d'années, en raison des écarts importants avec la solution de Bretagnon utilisée lors des études précédentes (Ward, 1979 ; Borderies, 1980).

La précision atteinte pour les solutions sur 1 million d'années montre qu'il est possible de les prolonger sur des durées plus importantes, dans le but de fournir une solution fiable de l'évolution orbitale de la Terre, utile aux paléoclimatologues. Pour atteindre des durées de l'ordre de 10 à 100 millions d'années, il sera cependant nécessaire d'apporter de nombreuses améliorations à nos calculs :

- Les solutions de Jupiter et de Saturne n'ont pas actuellement la même précision que celles des planètes inférieures. Il sera donc nécessaire d'augmenter la taille du système autonome en y ajoutant les termes de degré 7, et surtout une partie des termes à l'ordre 3 des masses, ce qui n'a pas été fait jusqu'à présent, mais que nos techniques de manipulation algébrique des séries, et le développement des ordinateurs peuvent peut-être rendre possible.

- Il faudra affiner les représentations des effets de la relativité, et surtout de l'action de la Lune, pour laquelle nous n'avons pas encore d'expression analytique très développée.

- Il sera sans doute aussi utile de tenir compte de l'action des satellites galiléens de Jupiter sur le mouvement de son périhélie.

- On pourra éventuellement tenir compte de la perte de masse du soleil, et de son aplatissement si des mesures précises venaient le confirmer.

- L'intégration numérique elle-même peut être améliorée, en augmentant l'ordre de la méthode d'Adams utilisée. D'autre part, l'organisation du

systeme autonome rend efficace l'utilisation d'un ordinateur vectoriel qui permettrait de reduire encore la duree des calculs.

- Il est aussi important d'evaluer la limite de tels calculs, en fonction de la precision avec laquelle sont determinees les masses et les conditions initiales.

ANNEXE

Rapidité de l'ordinateur utilisé pour effectuer les calculs, le NAS 9080 du CIRCE. Les opérations sont en double précision, avec codage des nombres sur 64 bits.

DUREE DE 1 MILLION D'OPERATIONS SUR SY1 (NAS9080)

1 MILLION DE MULTIPLICATIONS	=	0.243 SECONDES	0
1 MILLION D' ADDITIONS	=	0.182 SECONDES	0
1 MILLION DE SINUS	=	4.048 SECONDES	0
1 MILLION DE DSQRT	=	4.505 SECONDES	0
1 MILLION DE **2	=	0.243 SECONDES	0
1 MILLION DE **8	=	0.483 SECONDES	0
1 MILLION DE ** (0.5DO)	=	8.898 SECONDES	0
1 MILLION DE MUL COMPLEXES	=	0.823 SECONDES	0
1 MILLION D' ADD COMPLEXES	=	0.277 SECONDES	0

BIBLIOGRAPHIE

- ABU EL ATA, N. et CHAPRONT, J. : 1975, *Astron. Astrophys.* 38, 57.
- BERGER, A. : 1973, 'Théorie Astronomique des Paléoclimats', dissertation doctorale, Université Catholique de Louvain.
- BERGER, A., IMBRIE, J., HAYS, J., KUKLA, G., SALTZMAN, B. : 1984, 'Milankovitch and Climate', Reidel Publ. Company.
- BORDERIES, N. : 1980, 'La Rotation de Mars. Théorie Analytique. Analyse d'Observations de l'Expérience Viking', Thèse, Toulouse.
- BRETAGNON, P. : 1974, *Astron. Astrophys.* 30, 141.
- BRETAGNON, P. : 1982, *Astron. Astrophys.* 114, 278.
- BRETAGNON, P. : 1984a, 'Accuracy of Long Term Planetary Theory', in 'Milankovitch and Climate', Berger *et al.* eds, Reisel Publ. Company.
- BRETAGNON, P. : 1984b, communication privée.
- BROUWER, D., et VAN WOERKOM, A. J. J. : 1950, A.P.A.E., vol. XIII, 2.
- BRUMBERG, V. A. : 1972, 'Mécanique Céleste relativiste', Naouka, Moscou (en russe).
- BRUMBERG, V. A. : 1973, in BRUMBERG, V.A. et CHAPRONT, J., *Celest. Mech.* 8, 335.
- BRUMBERG, V.A. : 1980, 'Algorithmes Analytiques de la Mécanique Céleste', Naouka, Moscou, (en russe).
- COHEN, C.J., HUBBARD, E.C., et OESTERWINTER, C. : 1973, A.P.A.E. vol. XXII, 2.
- DURIEZ, L. : 1977, *Astron. Astrophys.*, 54, 93.
- DURIEZ, L. : 1978, *Astron. Astrophys.*, 68, 199.
- DURIEZ, L. : 1979, 'Approche d'une Théorie Générale Planétaire en Variables Elliptiques Héliocentriques', Thèse, Lille.
- DURIEZ, L. : 1982, *Celest. Mech.* 26, 231.
- HARZER, P. : 1895, Die Säkularen Veränderungen der Bahnen der Grossen Planeten, Leipzig, Preisschrift.

- HAYS, J.D., IMBRIE, J, et SHAKLETON, N.J. : 1976, *Science*, 194, 1121.
- HILL, G.W. : 1897, *Astron. J.* 17,11.
- KINOSHITA, H et NAKAI, H : 1984, *Celest. Mech.* (à paraître).
- LASKAR, J. : 1984, *Astron. Astrophys.* (à paraître).
- LESTRADE, J.F. et BRETAGNON, P. : 1982, *Astron. Astrophys.* 105, 42.
- LE VERRIER, U.J.J. : 1855, *Annales de l'Observatoire de Paris.*
- NEWHALL, E.M., STANDISH, J., et WILLIAMS, J.G. : 1983, *Astron. Astrophys.*
125, 150.
- SHARAF, S.G. et BOUDNIKOVA, N.A. : 1967, *Trudy Inst. Theor. Astron. Lenin.*
11,231 (en russe).
- STOCKWELL, J.N. : 1873, *Smith. Contr. Knowledge*, Washington, vol 18(3).
- WARD, W.R. : 1979, *J. Geophys. Res.* 84, 237.