



HAL
open science

Développement de modèles graphiques probabilistes pour analyser et remailler les maillages triangulaires 2-variétés

Vincent Vidal

► **To cite this version:**

Vincent Vidal. Développement de modèles graphiques probabilistes pour analyser et remailler les maillages triangulaires 2-variétés. Autre. INSA de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ISAL0142 . tel-00708530

HAL Id: tel-00708530

<https://theses.hal.science/tel-00708530>

Submitted on 15 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Développement de modèles graphiques probabilistes pour analyser et remailler les maillages triangulaires 2-variétés

délivrée par

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

présentée et soutenue publiquement le 9 décembre 2011 pour l'obtention du

grade de Docteur

spécialité informatique

par

Vincent Vidal

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	M. Pierre Alliez	Directeur de Recherche INRIA Sophia-Antipolis
	M. Georges-Pierre Bonneau	Professeur des Universités INRIA Rhône-Alpes
<i>Examineurs :</i>	M. Loïc Denis	Maître de Conférences Université de Saint-Etienne
	M. Frédéric Payan	Maître de Conférences Université de Nice - Sophia Antipolis
	M. William Puech	Professeur des Universités Université de Montpellier 2
<i>Directeurs de thèse :</i>	M. Florent Dupont	Professeur des Universités Université Lyon 1
	M. Christian Wolf	Maître de Conférences INSA de Lyon

*Je dédie mon travail de thèse à ma famille et à toutes les personnes qui m'ont soutenu tout au long
de mes études.*

Remerciements

Je remercie mes directeurs de thèse, Messieurs Christian Wolf et Florent Dupont, qui ont partagé leur savoir et savoir-faire, et ont su me guider dans les moments difficiles.

J'ai apprécié de travailler au sein de l'équipe M2DisCo du laboratoire LIRIS, et je souhaite saluer tous les membres, avec lesquels j'ai pu avoir des échanges scientifiques fructueux.

J'ai participé aux projets scientifiques ANR-MADRAS et région-LIMA ainsi qu'aux journées GDR ISIS - Action 3D, et je suis très reconnaissant envers les membres et responsables de ces projets et journées scientifiques, car ils m'ont permis de leurs exposer mes travaux de recherche.

Je souhaite remercier le directeur du laboratoire LIRIS, Monsieur Atilla Baskurt, pour avoir contribué au bon déroulement de ma thèse.

Finalement, je souhaite remercier les rapporteurs de cette thèse, Messieurs Pierre Alliez et Georges-Pierre Bonneau, pour leurs remarques pertinentes qui ont permis d'améliorer ce manuscrit.

Résumé

Ce travail de thèse concerne l'analyse structurelle des maillages triangulaires surfaciques, ainsi que leur traitement en vue de l'amélioration de leur qualité (remaillage) ou de leur simplification.

Dans la littérature, le repositionnement des sommets d'un maillage est soit traité de manière locale, soit de manière globale mais sans un contrôle local de l'erreur géométrique introduite, i.e. les solutions actuelles ne sont pas globales ou introduisent de l'erreur géométrique non contrôlée. Les techniques d'approximation de maillage les plus prometteuses se basent sur une décomposition en primitives géométriques simples (plans, cylindres, sphères etc.), mais elles n'arrivent généralement pas à trouver la décomposition optimale, celle qui optimise à la fois l'erreur géométrique de l'approximation par les primitives choisies, et le nombre et le type de ces primitives simples.

Pour traiter les défauts des approches de remaillage existantes, nous proposons une méthode basée sur un modèle global, à savoir une modélisation graphique probabiliste, intégrant des contraintes souples basées sur la géométrie (l'erreur de l'approximation), la qualité du maillage et le nombre de sommets du maillage. De même, pour améliorer la décomposition en primitives simples, une modélisation graphique probabiliste a été choisie. Les modèles graphiques de cette thèse sont des champs aléatoires de Markov, ces derniers permettant de trouver une configuration optimale à l'aide de la minimisation globale d'une fonction objectif.

Nous avons proposé trois contributions dans cette thèse autour des maillages triangulaires 2-variétés : (i) une méthode d'extraction statistiquement robuste des arêtes caractéristiques applicable aux objets mécaniques, (ii) un algorithme de segmentation en régions approximables par des primitives géométriques simples qui est robuste à la présence de données aberrantes et au bruit dans la position des sommets, (iii) et finalement un algorithme d'optimisation de maillages qui cherche le meilleur compromis entre l'amélioration de la qualité des triangles, la qualité de la valence des sommets, le nombre de sommets et la fidélité géométrique à la surface initiale.

Mots-clés : Maillages triangulaires - 2-variété - Optimisation de maillage - Remaillage - Extraction de caractéristiques - Segmentation de maillage - Modèles graphiques probabilistes - Optimisation discrète - Coupe de graphe

Abstract

The work in this thesis concerns structural analysis of 2-manifold triangular meshes, and their processing towards quality enhancement (remeshing) or simplification.

In existing work, the repositioning of mesh vertices necessary for remeshing is either done locally or globally, but in the latter case without local control on the introduced geometrical error. Therefore, current results are either not globally optimal or introduce unwanted geometrical error. Other promising remeshing and approximation techniques are based on a decomposition into simple geometrical primitives (planes, cylinders, spheres etc.), but they generally fail to find the best decomposition, i.e. the one which jointly optimizes the residual geometrical error as well as the number and type of selected simple primitives.

To tackle the weaknesses of existing remeshing approaches, we propose a method based on a global model, namely a probabilistic graphical model integrating soft constraints based on geometry (approximation error), mesh quality and the number of mesh vertices. In the same manner, for segmentation purposes and in order to improve algorithms delivering decompositions into simple primitives, a probabilistic graphical modeling has been chosen. The graphical models used in this work are Markov Random Fields, which allow to find an optimal configuration by a global minimization of an objective function.

We have proposed three contributions in this thesis about 2-manifold triangular meshes : (i) a statistically robust method for feature edge extraction for mechanical objects, (ii) an algorithm for the segmentation into regions which are approximated by simple primitives, which is robust to outliers and to the presence of noise in the vertex positions, (iii) and lastly an algorithm for mesh optimization which jointly optimizes triangle quality, the quality of vertex valences, the number of vertices, as well as the geometrical fidelity to the initial surface.

Key-words : Triangular meshes - 2-manifold - Mesh optimization - Remeshing - Feature extraction - Mesh segmentation - Probabilistic graphical models - Discrete optimization - Graph cuts

Table des matières

Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xix
Liste des Algorithmes	xxi
Introduction générale	1
1 Contexte des travaux de recherche	2
2 Problématiques et objectifs	3
3 Présentation du contenu de la thèse	4
Partie I Définitions et état de l'art	7
Chapitre 1 Maillages 2-variétés et techniques de remaillage surfacique	9
1.1 Introduction	9
1.1.1 Définition d'un maillage surfacique triangulaire	9
1.1.2 Justifications du choix des maillages triangulaires 2-variétés	11
1.1.3 Utilisation des maillages et émergence de techniques de remaillage	11
1.1.4 Difficultés et verrous scientifiques du remaillage	14
1.1.5 Critères de qualité d'un maillage et applications du remaillage	14
1.1.6 Catégories des algorithmes de remaillage	17
1.2 Remaillage basé sur du ré-échantillonnage explicite	19
1.2.1 Approches gloutonnes par insertion d'un sommet à la fois	19
1.2.2 Approches gloutonnes par suppression d'un sommet à la fois	21
1.3 Remaillage basé sur une paramétrisation sur le plan	22
1.3.1 Remaillage structuré	23
1.3.2 Remaillage compatible : paramétrisation jointe	24
1.3.3 Remaillage de haute qualité : paramétrisation, remaillage dans l'espace des paramètres et retour sur le maillage surfacique	25

1.4	Remaillage basé sur un repositionnement explicite des sommets	25
1.4.1	Approches basées sur du repositionnement local de sommets	26
1.4.2	Approches basées sur du repositionnement global de sommets	30
1.5	Remaillage basé sur une optimisation explicite de la connectivité	33
1.5.1	Modification locale de la connectivité	34
1.5.2	Modification globale de la connectivité	36
1.6	Discussion sur la forme des fonctions objectifs à optimiser	37
1.6.1	Sur les méthodes présentées	38
1.6.2	Sur les garanties des méthodes présentées	39
 Chapitre 2 Les champs aléatoires de Markov et champs aléatoires condition-		
nels		41
2.1	Introduction sur les modèles graphiques probabilistes	41
2.1.1	Étiquetage et espace des configurations	44
2.1.2	Réseaux bayésiens	45
2.1.3	Champs aléatoires de Markov	45
2.1.4	Distribution jointe et graphe de dépendance	45
2.2	Utilisation pratique des champs aléatoires de Markov	48
2.2.1	Variables cachées et variables observées	48
2.2.2	Avantages des champs aléatoires de Markov	50
2.2.3	Sous-problèmes liés à l'utilisation des champs aléatoires de Markov	50
2.3	Modèles génératifs et discriminants	51
2.3.1	Cadre des modèles génératifs	51
2.3.2	Cadre des modèles discriminants	54
2.3.3	Différences entre les MRF et les CRF	55
2.4	Apprentissage des paramètres	56
2.4.1	Estimation des paramètres d'un champ aléatoire de Markov	56
2.4.2	Estimation des paramètres d'un champ aléatoire de Markov conditionnel	58
2.5	Optimisation : estimation de la configuration optimale	58
2.5.1	Minimisation de fonctions sous-modulaires par coupe de graphe	59
2.5.2	Minimisation de fonctions non sous-modulaires par optimisation pseudo-booléenne quadratique	63
2.5.3	Autres algorithmes	65
2.6	Conclusion	67

Chapitre 3 Extraction robuste de lignes composées d'arêtes caractéristiques 71

3.1	Introduction	71
3.1.1	Notions de base	71
3.1.2	Description du problème	72
3.1.3	Motivations et applications	72
3.1.4	Difficultés	73
3.2	État de l'art de l'extraction de lignes caractéristiques	74
3.2.1	Extraction par calcul des extrema de courbures principales	75
3.2.2	Extraction par détection d'arêtes caractéristiques	75
3.3	Modèle graphique probabiliste pour l'extraction d'arêtes caractéristiques globalement cohérentes	77
3.3.1	Description du modèle graphique probabiliste	78
3.3.2	Définition de la fonction objectif	79
3.4	Estimation basée sur l'angle dièdre	80
3.4.1	Première version	80
3.4.2	Deuxième version	80
3.5	Estimation basée sur l'apprentissage automatique	82
3.5.1	Choix d'un classifieur : Séparateurs à Vaste Marge	85
3.5.2	Définition des potentiels énergétiques	86
3.5.3	Extraction de caractéristiques	87
3.5.4	Estimateur de l'angle entre les normales des deux plans tangents à une arête	88
3.6	Résultats expérimentaux	91
3.6.1	Base de données d'arêtes de modèles mécaniques	91
3.6.2	Comparaisons des performances par courbes ROC	92
3.6.3	F-score	92
3.6.4	Détails d'implantation et discussions	94
3.7	Conclusion et travaux futurs	99

Chapitre 4 Segmentation robuste en régions approximées par des primitives géométriques simples 101

4.1	Introduction	101
4.1.1	Motivations et applications	103
4.1.2	Difficultés	105

4.2	État de l'art de la segmentation en régions approximées par des primitives simples	105
4.2.1	Généralités	105
4.2.2	Extraction robuste de primitives géométriques simples	106
4.2.3	Agglomération hiérarchique gloutonne	109
4.2.4	Agglomération variationnelle	110
4.2.5	Extraction de plusieurs modèles géométriques dans un nuage de points basée sur une fonction d'énergie - algorithme PEaRL	111
4.3	Notre algorithme de segmentation en régions associées à des primitives géométriques simples	114
4.3.1	Objectifs	114
4.3.2	Modèle graphique probabiliste proposé	114
4.3.3	Définition de la fonction objectif	116
4.3.4	Définition des différents potentiels énergétiques	118
4.4	Minimisation de la fonction objectif	119
4.4.1	Description de l'algorithme de segmentation des triangles	120
4.4.2	Estimation de la meilleure partition possible à partir d'un ensemble de proxys : <i>expansion</i>	121
4.4.3	Amélioration des proxys à partir de la partition : <i>meilleur proxy de forme sur sa région</i>	122
4.5	Résultats expérimentaux	123
4.5.1	Maillages utilisés	123
4.5.2	Performances	123
4.5.3	Détails d'implantation	124
4.5.4	Discussions	126
4.6	Conclusion et travaux futurs	129
4.6.1	Travaux futurs	129
 Chapitre 5 Remaillage de haute qualité par régularisation de maillages triangulaires 2-variétés		131
5.1	Introduction	131
5.1.1	Description du problème	132
5.1.2	Formulation du problème de régularisation de maillage sous la forme d'une fonction objectif à minimiser	133
5.2	Système d'optimisation de maillages triangulaires 2-variétés	134
5.2.1	Modèle graphique probabiliste associé	135
5.2.2	Définition de la fonction objectif	136

5.2.3	Définition des différents potentiels énergétiques	137
5.3	Minimisation de la fonction objectif	138
5.3.1	Optimisation globale de la position des sommets	139
5.3.2	Optimisation gloutonne de la connectivité	142
5.4	Résultats expérimentaux	144
5.4.1	Détails d'implémentation	145
5.4.2	Résultats et discussions	146
5.4.3	Simplification de maillage	148
5.5	Conclusion et travaux futurs	149
5.5.1	Travaux futurs	151
Conclusion générale		155
1	Résumé de nos contributions	155
2	Discussion sur les faiblesses de nos approches	156
3	Travaux futurs	156
Liste de publications		159
Bibliographie		161
Annexes		171
1	Rappels de probabilité	171
1.1	Probabilité marginale	171
1.2	Probabilité jointe	171
1.3	Probabilité conditionnelle	171
1.4	Indépendance conditionnelle	171
1.5	Quelques règles de base en probabilité	172
2	Rappels sur l'entropie	173
3	Réduction d'une fonction binaire de \mathcal{F}^n ($n > 2$) à une fonction de \mathcal{F}^2	173

Table des figures

1	Deux maillages triangulaires issus de deux domaines différents : un maillage de foie employé dans un domaine médical et un maillage d'une pièce mécanique utilisé dans un domaine industriel.	3
1.1	Exemples de maillages triangulaires 2-variétés sans bord : à gauche le modèle Vache (maillage d'un objet naturel lisse) et à droite le modèle Casting (maillage d'un objet mécanique).	9
1.2	Illustration de la notion de 2-variété sur les maillages.	10
1.3	De gauche à droite : modèle Vache représenté par différent maillages. Ces maillages sont des remaillages ou modèles remaillés du modèle Vache présenté dans la figure 1.1. Image reproduite de [SG03].	13
1.4	De gauche à droite : modèle Venus représenté par un maillage irrégulier, semi-régulier et régulier. Image reproduite de [AUGA08].	23
1.5	De gauche à droite : modèle Cheval représenté par un maillage irrégulier, et extrêmement régulier. Image reproduite de [SG03].	24
1.6	Illustration des variables de l'équation (1.4).	28
1.7	Illustration des variables de l'équation (1.6).	29
1.8	Opérations locales de base sur les arêtes. De haut en bas : (a) Découpe d'arête ; (b) Contraction d'arête ; (c) Basculement d'arête. Image reproduite de [YGZW07].	34
2.1	Modèle graphique associé aux sommets d'un maillage triangulaire. Les sites i et i' sont des sites voisins ($i' \in \mathcal{N}_i$) et la notion de voisinage est celle induite par les arêtes du maillage.	43
2.2	Modèle graphique associé aux arêtes d'un maillage triangulaire. Les sites i et i' sont des sites voisins ($i' \in \mathcal{N}_i$) et la notion de voisinage est celle induite par les sommets du maillage.	43
2.3	Modèle graphique associé aux triangles d'un maillage triangulaire. Les sites i et i' sont des sites voisins ($i' \in \mathcal{N}_i$) et la notion de voisinage est celle induite par les arêtes du maillage.	44
2.4	Les trois types de cliques qui sont issus du modèle graphique associé aux sommets d'un maillage présenté dans la figure 2.1.	44

2.5	Modèle graphique orienté	47
2.6	Modèle graphique non-orienté	47
2.7	Différence fondamentale entre les modèles génératifs, dans lesquels une observation est produite à partir d'informations cachées, et les modèles discriminants, qui se servent directement des observations pour étiqueter les variables cachées.	49
2.8	Champ aléatoire de Markov pour la segmentation des triangles d'un maillage triangulaire 2-variété. Chaque variable cachée en rouge est associée, par une arête noire, à son triangle géométrique du maillage à segmenter, représenté par une variable observée en bleu. Ici, il y a deux sites par indice i : un site X_i représentant une variable cachée, et un site Y_i associé à une variable observée. x_i et y_i dénotent la réalisation de leur variable respective.	49
2.9	Modèle graphique non-orienté	55
2.10	Modèle graphique non-orienté	62
3.1	Graphe de dépendance associé à un maillage : les sommets rouges sont les variables cachées associées aux arêtes du maillage, et les sommets bleus sont les variables observées associées aux arêtes du maillage. Les arêtes noires du graphe de dépendance représentent les termes unaires du modèle graphique et les arêtes vertes représentent les termes par paire. Pour des raisons de lisibilité, les dépendances des variables cachées sur les variables observées ont été ébauchées. Une variable cachée peut accéder aux autres observations que les siennes.	78
3.2	Arêtes caractéristiques extraites du (a) modèle fandisk et du (b) modèle shark, en utilisant le premier modèle d'extraction globalement cohérente des arêtes caractéristiques (cf. équations 3.2 et 3.3). Les arêtes caractéristiques noires sont préservées tout au long de notre algorithme d'optimisation de maillages présenté dans le chapitre 5.	81
3.3	Estimateur de l'angle entre les normales des plans tangents : les lignes en pointillés représentent la surface du maillage avec des triangles supports, non-supports, et en dehors de la région. Le plan de séparation est colinéaire à la direction de l'arête et à la normale de l'arête. La normale d'une arête est calculée comme la moyenne des normales unitaires des triangles incidents à l'arête.	89
3.4	Résultats de la convergence des triangles supports des plans tangents pour les modèles fandisk et tasse. L'arête adjacente à deux triangles verts est l'arête pour laquelle on cherche à estimer les deux plans tangents et les triangles bleus sont les triangles de la région à gauche de l'arête et les triangles rouges sont à droite de l'arête. Le rayon de la sphère de délimitation (échelle) a été choisie arbitrairement.	90
3.5	Modèles mécaniques avec vérité terrain : les arêtes caractéristiques sont les arêtes noires épaisses. La vérité terrain a été déterminée à la main.	93

3.6	Modèle fandisk bruité artificiellement : lignes d'arêtes caractéristiques obtenues pour un taux de faux positifs fixé à 10^{-4} : comme il peut être remarqué, notre méthode est capable d'extraire la plupart des véritables lignes d'arêtes caractéristiques avec presque aucun faux positif. Les triangles verts sont adjacents à une arête caractéristique et les jaunes à deux.	96
3.7	Résultat de notre méthode d'extraction de lignes composées d'arêtes caractéristiques basée SVM sur le modèle scanné rockerArm. Aucune vérité terrain n'est connue, au moment de la rédaction de la thèse, pour les arêtes caractéristiques du rockerArm, et donc le terme de biais du SVM est un biais par défaut non optimisé.	98
4.1	Exemples de décomposition en primitives géométriques simples : la décomposition est basée sur des plans pour VSA (<i>Variational Shape Approximation</i>) [CSAD04] et des plans, sphères et cylindres pour HFC (<i>Hierarchical Face Clustering</i>) [AFS06].	102
4.2	Illustration de l'intérêt de l'algorithme RANSAC : avant de faire une estimation des paramètres d'une droite au sens des moindres carrés sur un ensemble de points, RANSAC permet d'extraire le meilleur - le plus grand - ensemble de points supports sur lesquels l'estimation peut avoir lieu.	106
4.3	Illustration de la robustesse liée à une estimation globale des paramètres de tous les proxies, qui tient compte des contraintes d'alignement détectées.	109
4.4	Modèle graphique proposé pour la segmentation des triangles couplée à l'extraction d'arêtes caractéristiques. Les variables cachées associées aux triangles du maillage sont non seulement dépendantes de celles des triangles voisins, mais aussi de celles associées aux arêtes de leur triangle.	115
4.5	Résultats de notre méthode de segmentation sur des objets mécaniques bruités simples. Dans la visualisation des types, les plans apparaissent en bleu et les cylindres en vert. Les arêtes épaisses sont les arêtes caractéristiques extraites par notre méthode d'extraction d'ensembles cohérents d'arêtes caractéristiques présentée dans le chapitre 3, section 3.5. Le seuil de faux positifs de la prédiction du SVM est celui appris par défaut, et il est différent pour chaque modèle.	125
4.6	Résultats de notre méthode de segmentation sur le modèle vis bruité. Dans la visualisation des types, les plans apparaissent en bleu et les cylindres en vert. Les arêtes épaisses sont les arêtes caractéristiques extraites par notre méthode d'extraction d'ensembles cohérents d'arêtes caractéristiques présentée dans le chapitre 3, section 3.5. Le seuil de faux positifs de la prédiction du SVM est celui appris par défaut.	126

4.7	Résultats de notre méthode de segmentation sur le modèle fandisk bruité, avec des coûts différents pour le proxy de type sphère. Dans la visualisation des types, les plans apparaissent en bleu, les sphères en rouge et les cylindres en vert. Les arêtes épaisses sont les arêtes caractéristiques extraites par notre méthode d'extraction d'ensembles cohérents d'arêtes caractéristiques présentée dans le chapitre 3, section 3.5. Le seuil de faux positifs de la prédiction du SVM est celui appris par défaut.	127
4.8	Résultats de la segmentation du modèle sphère bruitée en 42 régions approximées par des plans : (a) notre méthode, basée sur la métrique \mathcal{L}^2 , et (b) une implantation de VSA, basée sur la métrique $\mathcal{L}^{1,2}$ avec une initialisation aléatoire des graines. Les seuils de RANSAC de notre méthode ont été assouplis à un seuil de distance $\epsilon = 8.10^{-2}\text{MinBE}$ et un seuil de déviation $\alpha = 19.95$ degrés afin que RANSAC soit capable de détecter des plans avec suffisamment de triangles supports.	128
5.1	Le pipeline de remaillage : à chaque itération i , les nouvelles positions des sommets sont choisies en utilisant une approximation du minimum global de l'énergie ; moins fréquemment, la connectivité du maillage est améliorée pour favoriser des meilleures configurations globales de sommets.	134
5.2	Modèle graphique utilisé pour la génération du modèle remaillé : chaque sommet du maillage optimisé x_s est lié à son actuel plus proche sommet initial $y_{s'}$ et a accès à la totalité des informations du maillage initial si nécessaire : c'est un champ de Markov conditionnel.	136
5.3	Une étape de repositionnement des sommets : prendre la meilleure décision globale pour chaque sommet entre la position courante (en bleu) et la nouvelle position candidate (en orange) située dans la sphère de liberté.	140
5.4	Résultats obtenus avec notre méthode. Du haut vers le bas : fandisk, cow, shark. A gauche : modèle d'entrée, à droite : modèle remaillé.	143
5.5	Résultats obtenus avec notre méthode. Du haut vers le bas : bimba, egea, triceratops. A gauche : modèle d'entrée, à droite : modèle remaillé.	144
5.6	Comparaisons entre (a) le modèle hand original, (b) Valette et al. [VCP08] (c) Liu et al. [LTJW07] et (d) notre méthode.	149
5.7	Comparaisons pour le modèle triceratops (en haut) et le modèle egea (en bas) : le modèle original (à gauche), notre version remaillée (au milieu), et la version remaillée de Surazhsky et Gotsman [SG03] (à droite). Les caractéristiques autour de l'œil du triceratops sont bien conservées par notre méthode.	150

5.8	Comparaisons entre (a) le modèle CAO original et (b) notre version remaillée. Remarquez que nous obtenons des angles Amin et Amax plus proches de 60° . Un plus petit nombre de sommets signifie une distribution des triangles optimisée, puisque moins de triangles sont requis pour couvrir la même surface tout en introduisant une erreur géométrique insignifiante.	151
5.9	Évolution de l'énergie totale (cf. equation 5.1) pendant 170 itérations pour le maillage CAO présenté dans la figure 5.8.	152
5.10	Résultats obtenus pour des simplifications : (a) modèle fandisk original; (b) modèle fandisk simplifié (933 sommets; $Er_{Haus} (10^{-3}) = 3.0$; $Er_{RMS} (10^{-3}) = 0.2$); (c) modèle hand original; (d) modèle hand simplifié (1518 sommets; $Er_{Haus} (10^{-3}) = 4.5$; $Er_{RMS} (10^{-3}) = 0.7$).	153
5.11	Résultats obtenus pour un modèle de genre 3 : (a) le modèle de genre 3 original et (b) notre version remaillée.	153
5.12	Complexité empirique de notre méthode : les 8 points les plus à gauche (resp. les 4 points les plus à droite) représentent les temps de calcul pour notre base de données sans le modèle de genre 3 (resp. 4 maillages supplémentaires obtenus par 1 ou 2 subdivisions des triangles des modèles fandisk, bimba et egea). La ligne en pointillé est une approximation linéaire des points au sens des moindres carrés.	154

Liste des tableaux

3.1	Le terme d'attache aux données $0 \leq E_d$ choisi dans le cas de la présence de bruit sur la position des sommets : il suit la réponse du SVM, i.e. il est proche de zéro si l'étiquette est consistante avec la réponse du SVM.	87
3.2	Minimum, maximum, moyenne et écart-type de la moyenne des f-scores (cf. section 3.6.3) calculés comme suit : en premier, les f-scores de tous les attributs sont calculés pour chaque maillage. Ensuite, les moyennes sur un attribut des f-scores sont calculées pour les maillages non-bruités et bruités. Finalement, quelques statistiques (min, max, moyenne et écart-type) sont calculées sur des sous-ensembles d'attributs similaires (i.e. les estimateurs θ_i^r pour l'angle entre les normales des deux plans tangents, les courbures, et les quatre premiers attributs dans F_i). Les modèles sphère et tore n'ont pas été utilisés.	94
3.3	Statistiques sur la classification des arêtes caractéristiques pour les modèles de notre base de données (a : modèles non-bruités ; b : modèles avec du bruit gaussien BG) : nombre d'arêtes, nombre d'arêtes caractéristiques, Aire Sous la Courbe (en pourcentage) pour 4 méthodes : seuillage simple, seuillage par hystérésis, détection d'arête caractéristiques globalement cohérentes avec le terme d'attache aux données basé sur l'angle dièdre, et avec un terme d'attache aux données basé sur un modèle statistique appris par SVM.	95
5.1	Statistiques sur les modèles remaillés : nombre de sommets, pourcentage de sommets irréguliers, angle minimal moyen, angle maximal moyen, distance de Hausdorff, maximum entre les 2 distances RMS mesurées par Metro normalisées par la diagonale de la boîte englobante, et le temps d'exécution. Liu, Val, Sur1, et Sur2 correspondent respectivement à [LTJW07], [VCP08], [SAG03], et [SG03]. Les temps affichés pour Sur2 ont été calculés sur un Pentium 4 PC (2.4 GHz) avec 512 de RAM [SG03], tandis que les autres l'ont été sur un Intel Core 2 Duo P8400 (2.26 GHz) avec 4 Go de RAM.	147

Liste des Algorithmes

- 1 Pseudo-code de RANSAC : extraction d'une forme simple unique. p , n , N , ϵ , α , d sont, respectivement, le nuage de points initial, les normales des points, le nombre d'itérations d'échantillonnage des données, la distance orthogonale jusqu'à laquelle un point est un point support, la déviation de normale jusqu'à laquelle un point est un point support, le type de la forme géométrique simple (i.e. plan, sphère, cylindre. . .), et le nombre minimal de points supports pour qu'une forme géométrique soit un bon modèle. Ω et \mathcal{P} sont, respectivement, l'ensemble des points supports et son modèle géométrique simple associé (les deux peuvent être vides). 107
- 2 Pseudo-code de notre algorithme de segmentation robuste de maillages triangulaires 2-variétés : g , ϵ , α , et d sont, respectivement, les triangles géométriques, la distance orthogonale jusqu'à laquelle le barycentre d'un triangle g_i est un point support, la déviation de normale jusqu'à laquelle un triangle est un triangle support, et le nombre minimal de triangles pour qu'une forme géométrique soit un bon modèle. \mathcal{E}^0 est l'ensemble des arêtes du maillage, il permet de connaître les arêtes voisines. y , θ , et ϕ sont les observations associées aux arêtes. t et \mathcal{P} sont, respectivement, les étiquettes des triangles et leurs modèles géométriques simples associés. x est la configuration d'arêtes associée à la segmentation des triangles. 121
- 3 La méthode globale, incluant une solution continue-discrète au problème du repositionnement des sommets. M , y et \mathcal{E}^0 correspondent, respectivement, au maillage initial, aux positions initiales et aux arêtes initiales. M' , x et \mathcal{E} signifient, respectivement, le maillage optimisé, les positions et les arêtes du maillage optimisé. $K^{(0)}$, C et i_{max} sont, respectivement, la température de départ, la vitesse de refroidissement et le nombre d'itérations. L'algorithme de coupe de graphe prend la décision globale minimisant l'énergie de l'équation (5.1) pour l'ensemble des sommets, en considérant pour chaque sommet du modèle remaillé la position courante x_s et une nouvelle position x_s^{new} 135

Introduction générale

Les maillages triangulaires surfaciques sont une représentation discrète de surfaces ou d'objets, et ils sont composés de sommets, d'arêtes et de triangles. Ils sont très utilisés dans des domaines aussi variés que les jeux vidéo, l'animation, l'archéologie, l'imagerie médicale, la visualisation scientifique, la réalité augmentée, et la conception assistée par ordinateur. Deux exemples de maillage triangulaire sont donnés dans la figure 1. Grâce aux outils de modélisation de surfaces et d'objets mécaniques, mais aussi à l'utilisation de scanner, de plus en plus de maillages triangulaires surfaciques sont générés. Mais souvent, ces maillages issus de cette première production, ne sont pas totalement satisfaisants, ils ont amené à :

- **des besoins de compression et de simplification de maillages :** d'un côté la recherche de la précision a généré des maillages volumineux, mais d'un autre côté, les problèmes de bandes passantes limitées sur les réseaux de télécommunication, et l'émergence d'applications évoluées sur les téléphones mobiles intelligents, dont la capacité en termes de mémoire vive reste limitée, ont nécessité l'adaptation de ces maillages existants aux contraintes d'utilisation, sous la forme d'apparition de méthodes de représentation multi-résolutions et de techniques de simplification. Par exemple, des méthodes multi-résolutions permettent de transmettre un maillage grossier, puis de communiquer au fur et à mesure les détails. Des techniques de simplifications offrent la possibilité d'enlever des sommets, des arêtes et des triangles du maillage en essayant de préserver sa topologie, mais aussi sa géométrie.
- **des besoins d'amélioration de la qualité des maillages :** beaucoup de maillages triangulaires produits ont une qualité insatisfaisante pour l'application finale, par exemple une simulation numérique 2D sera plus précise si les triangles utilisés sont les plus équilatéraux possibles. Plus généralement, la qualité d'un maillage triangulaire surfacique est liée au positionnement de ses sommets, mais aussi au nombre de primitives géométriques utilisées et à la forme triangles qui le composent. Ainsi, des méthodes de remaillage et plus généralement d'optimisation de maillage, c'est-à-dire d'amélioration de la qualité des maillages, ont vu le jour.
- **des besoins de méthodes robustes au bruit et aux données aberrantes :** les positions 3D des points obtenus par un laser, un scanner 3D ou par une méthode de reconstruction multi-vues sont généralement soumises à un bruit, voire à la présence de données aberrantes. Les données aberrantes sont trop éloignées de la surface réelle de l'objet et ne sont pas utiles dans la modélisation de la surface de l'objet. Il y a plusieurs types de bruit,

le bruit interne propre aux capteurs utilisés, le bruit externe qui modifie la visibilité de l'objet, par exemple les conditions atmosphériques et d'illumination, et le bruit propre à l'algorithme d'estimation des positions 3D.

Les modèles graphiques probabilistes sont un outil utilisé à la fois pour modéliser un problème, par exemple un problème de segmentation, mais aussi pour estimer une bonne solution à ce problème. En particulier, ils offrent la possibilité de modéliser des contraintes molles entre les variables du problème, des contraintes qui peuvent donc être localement non respectées, l'objectif étant bien entendu d'en respecter le plus possible. Les modèles graphiques probabilistes ont connu un franc succès dans le domaine de la vision par ordinateur. Leur succès est en partie lié à leur aptitude à :

- **modéliser la génération de données par un processus physique connu** : comme la génération d'une donnée par un capteur, ou l'évolution de l'encre sur un papier en fonction du type du papier et du type de l'encre.
- **modéliser des interactions entre un grand nombre de variables** : les dépendances entre les variables, mais aussi le type des interactions désirées sont fixés pour des petits groupes de variables. Ces groupes de variables partagent des variables entre eux, ce qui permet de construire des interactions complexes entre un grand nombre de variables.
- **séparer les données sans modéliser leur génération** : lorsque les informations sur le processus de génération des données sont inconnues, alors certains modèles graphiques probabilistes permettent de faire de la classification supervisée, c'est-à-dire de séparer des nouvelles données automatiquement, après un apprentissage sur des données étiquetées par un expert.

mais aussi à l'existence d'algorithmes efficaces d'estimation des valeurs optimales des variables du problème d'optimisation.

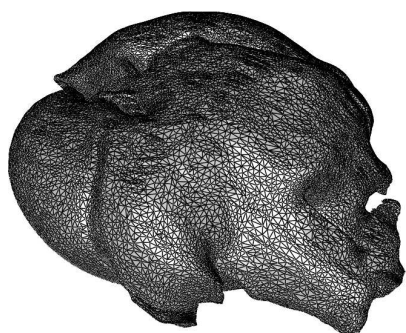
Cette thèse propose de modéliser des problèmes d'optimisation liés aux maillages triangulaires surfaciques, par des modèles graphiques probabilistes. En particulier, les problèmes suivants sont traités :

- l'extraction d'arêtes saillantes robustes au bruit sur la position des sommets ;
- la segmentation d'un maillage en régions approximées par des primitives géométriques simples, segmentation qui est robuste au bruit sur la position des sommets ;
- le remaillage, la simplification de maillage et plus généralement l'optimisation de maillage.

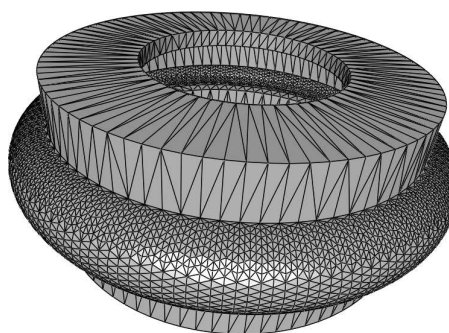
1 Contexte des travaux de recherche

Ces travaux de thèse se sont déroulés dans le cadre d'une allocation ministérielle fléchée attribuée au laboratoire LIRIS (Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Systèmes d'information) par l'intermédiaire de l'INSA de Lyon.

J'ai effectué mes recherches au sein de l'équipe M2DisCo (Modèles Multirésolution, Discrets et Combinatoires) du laboratoire LIRIS. Les compétences et intérêts scientifiques de l'équipe



Maillage de foie



Maillage d'une pièce mécanique

FIGURE 1 – Deux maillages triangulaires issus de deux domaines différents : un maillage de foie employé dans un domaine médical et un maillage d'une pièce mécanique utilisé dans un domaine industriel.

M2DisCo sont : la géométrie discrète, la programmation par contraintes, l'optimisation par les colonies de fourmis, le traitement du signal, la théorie de l'information, l'analyse d'images, le traitement et l'analyse des maillages. En particulier, l'équipe M2DisCo a une bonne expertise dans la résolution des problèmes d'optimisation combinatoire basés sur des graphes, sur des cartes combinatoires ou sur des problèmes d'optimisation par contraintes. Ces travaux de thèse s'inscrivent à la fois dans les problématiques de la géométrie discrète, de l'optimisation combinatoire, et du traitement et de l'analyse des maillages de l'équipe M2DisCo.

La partie implémentation de ces travaux de thèse a été réalisée en C++ sur la plateforme MEPP (*MESH Processing Platform* en anglais) (<http://liris.cnrs.fr/mepp>) du laboratoire LIRIS. C'est une plateforme en langage C++, basée sur CGAL et QT, fonctionnant sous Linux, MacOS et Windows. Elle est dédiée au partage de composants, de codes et de fonctionnalités diverses entre les chercheurs de l'équipe M2DisCo. Elle est une vitrine des savoir-faire de l'équipe et du laboratoire LIRIS. Cette plateforme offre aussi la possibilité de faire tester notre composant par les autres membres, et cela permet d'avoir des retours rapidement : des bogues, des problèmes et suggestions sont remontés aux développeurs. Pendant ma thèse, j'ai développé un module de remaillage pour MEPP avec des fonctionnalités de remaillage, mais aussi d'analyse de maillage.

2 Problématiques et objectifs

Cette thèse s'articule autour de deux problématiques complémentaires :

- **l'analyse de la surface d'un maillage** : l'analyse de maillage consiste en l'extraction automatique des informations importantes telles que :
 - les arêtes saillantes et les coins ;
 - la décomposition de la surface en un ensemble de primitives géométriques simples telles que des plans, des sphères, des cylindres, etc.
- **et l'optimisation de maillage** : l'optimisation de maillage inclut le remaillage et la simplification de maillage et se décompose en :

- un problème d’optimisation continue de la position des sommets du maillage ;
- et un problème d’optimisation discrète de la connectivité du maillage, mais aussi de la suppression et de l’insertion de sommets.

L’optimisation de maillage prend en compte les informations obtenues par l’analyse de maillage, par exemple afin de garantir que certaines propriétés extraites par l’analyse seront bien conservées. Ainsi, les lignes composées d’arêtes saillantes, ainsi que les coins extraits par l’étape d’analyse, vont être préservés par l’optimisation. Il est aussi envisageable d’améliorer l’analyse de la surface grâce à un remaillage. Par exemple, si les frontières entre les régions d’une segmentation du maillage ne sont pas lisses à cause de la discrétisation actuelle de la surface, alors un algorithme de remaillage pourra rajouter, supprimer ou déplacer des sommets, mais aussi modifier la connectivité pour lisser cette frontière.

Les objectifs scientifiques liés aux problématiques précédentes sont :

- l’analyse de maillages triangulaires surfaciques robuste au bruit sur la position des sommets ;
- le repositionnement global des positions des sommets d’un maillage triangulaire surfacique avec un fort contrôle local des modifications ;
- la recherche de solutions globalement cohérentes pour les problèmes d’analyse et de repositionnement des sommets : cela inclut la modélisation des solutions désirées par l’intermédiaire d’un modèle graphique.

3 Présentation du contenu de la thèse

État de l’art : Les chapitres 1 et 2 constituent l’état de l’art principal de la thèse :

- le chapitre 1 présente les techniques de remaillage adaptées au remaillage de grande qualité ; le ré-échantillonnage, le remaillage basé sur une paramétrisation, ainsi que les modifications explicites du maillage sont explorés ;
- le chapitre 2 met en évidence les intérêts pratiques liés à l’utilisation des modèles graphiques que sont les champs aléatoires de Markov et les champs aléatoires conditionnels ; les différences entre les champs aléatoires de Markov et les champs conditionnels sont commentées ; le chapitre se termine par l’apprentissage et l’estimation des meilleures configurations associées à ces modèles graphiques ;

Contributions : Les chapitres 3, 4, et 5 regroupent les contributions de la thèse :

- le chapitre 3 présente une méthode d’extraction de lignes composées d’arêtes caractéristiques, qui est robuste au bruit sur la position des sommets ; la détection des arêtes caractéristiques combine la réponse d’un modèle statistique des arêtes avec une régularisation globale des configurations locales d’arêtes caractéristiques ;
- le chapitre 4 détaille une technique de segmentation de maillage en régions approximées par des primitives simples, qui est conjointe à l’extraction d’arêtes caractéristiques ; la segmentation combine une extraction robuste de primitives géométriques dans des données bruitées avec une régularisation des configurations locales de triangles et d’arêtes,

- tout en cherchant une décomposition globalement compacte grâce à la prise en compte d'un coût de présence d'une primitive simple ;
- le chapitre 5 développe un système d'optimisation de maillage, qui inclut une manière originale d'optimiser globalement la position des sommets par coupes de graphes, mais aussi une optimisation gloutonne de la connectivité.

Première partie

Définitions et état de l'art

Chapitre 1

Maillages 2-variétés et techniques de remaillage surfacique

Résumé - Le développement du champ du traitement de la géométrie pendant ces 20 dernières années a généré une profusion de techniques de remaillage. Ce chapitre présente les méthodes de l'état de l'art qui s'attaquent au problème du remaillage de haute qualité de maillages triangulaires 2-variétés avec ou sans bords.

1.1 Introduction

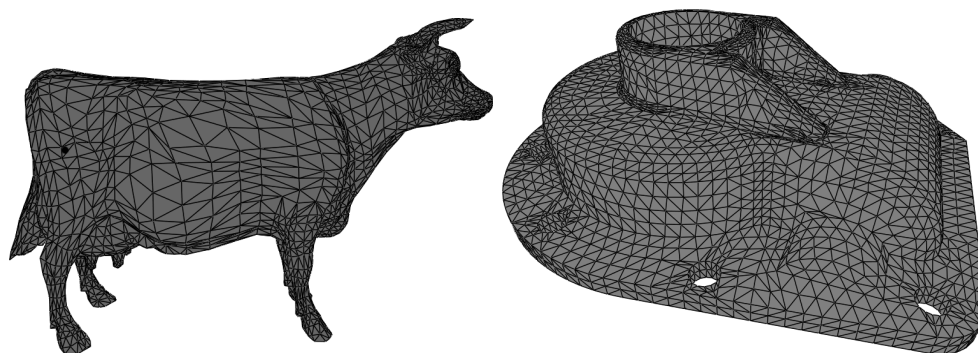


FIGURE 1.1 – Exemples de maillages triangulaires 2-variétés sans bord : à gauche le modèle Vache (maillage d'un objet naturel lisse) et à droite le modèle Casting (maillage d'un objet mécanique).

1.1.1 Définition d'un maillage surfacique triangulaire

Définition 1. *D'un point de vue géométrique, un **maillage** est une représentation discrète (une approximation linéaire par morceaux) d'un objet, d'une surface ou d'un volume. Cette représentation est composée d'un ensemble de cellules ou briques de base. D'un point de vue informatique,*

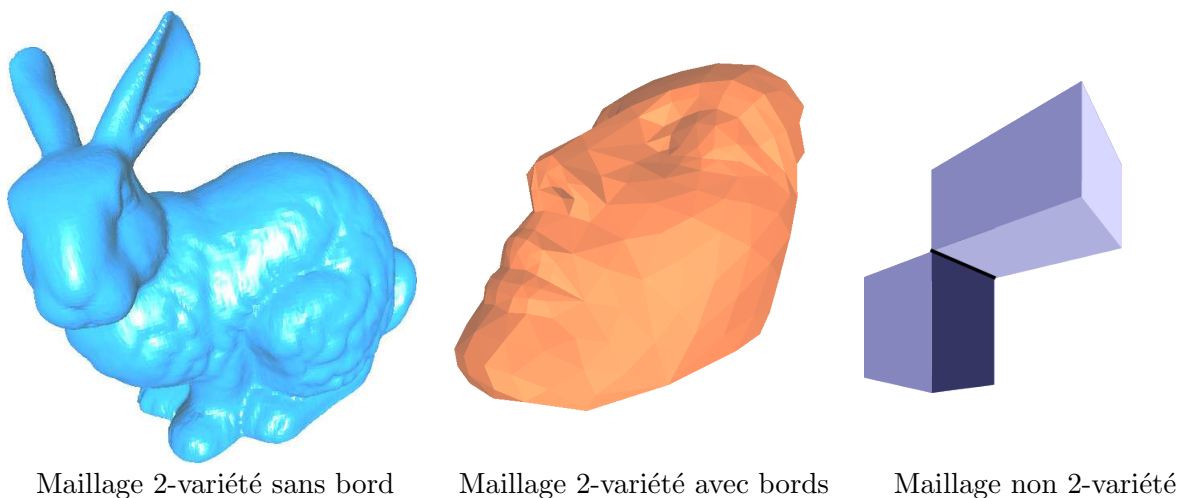


FIGURE 1.2 – Illustration de la notion de 2-variété sur les maillages.

un maillage est une structure de données pour représenter les surfaces et les volumes à l'aide d'un ensemble de polygones ou polyèdres. Les types de base de cette structure de données sont les sommets, les arêtes, et les facettes.

Dans cette thèse, les travaux présentés porteront sur les maillages triangulaires 2-variétés (cf. figures 1.1 et 1.2). Nous allons donc définir ce qu'est un maillage triangulaire 2-variété, ensuite nous donnerons des explications sur le choix des triangles comme cellule de base.

Définition 2. Une *variété de dimension d* ou *d -variété* est un espace topologique tel que chacun de ses points admette un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^d .

Cette définition d'une d -variété ne permet pas de prendre en compte les bords. Pour autoriser la présence de bords de dimension $d-1$, il faut ajouter la contrainte qu'un point du bord admette un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$.

Définition 3. Une *surface* est une variété topologique de dimension 2.

Une surface sans bord est une *surface fermée*, elle sépare l'espace \mathbb{R}^3 en 2 zones correspondant à l'intérieur et l'extérieur. Une *surface est ouverte*, s'il est possible, à partir de n'importe quel côté de la surface d'aller de l'autre côté de la surface sans jamais la traverser. Un côté de la surface est défini par son orientation.

Définition 4. Un *maillage surfacique* est un maillage représentant une surface. Un *maillage volumique* est un maillage représentant un volume ou une variété topologique de dimension 3.

Définition 5. Un *maillage 2-variété* est un maillage surfacique qui est homéomorphe à un disque en chaque point intérieur et à un demi-disque aux points sur les éventuels bords.

Des exemples de maillages 2-variétés sans-bord, avec bords, et d'un maillage non 2-variété sont donnés dans la figure 1.2.

Définition 6. Un **maillage triangulaire** est un maillage dont les facettes de plus grand codegré sont des triangles. Le modèle original est alors approximé par une surface linéaire par morceaux constituée d'un ensemble de triangles.

1.1.2 Justifications du choix des maillages triangulaires 2-variétés

Nous allons d'abord donner les motivations derrière le choix des triangles comme cellules de base, puis celles liées au choix de la 2-variété.

Le choix d'un maillage triangulaire est motivé par les points suivants :

- les maillages triangulaires sont omniprésents ;
- on peut convertir les autres types de maillages, basés sur des quadrangles, des hexagones ou autres polygones, en un maillage triangulaire ;
- beaucoup d'opérateurs et d'algorithmes ont été développés pour les maillages triangulaires sans pour autant être définis pour d'autres types de cellule ;
- la coplanarité des 3 points d'un triangle permet de calculer la normale d'un triangle par un simple produit vectoriel, ce qui facilite le rendu (e.g. en OpenGL), on peut alors en déduire la normale associée à chaque sommet s du maillage par la formule $(1/\sum_k |g_k^s|) \sum_k |g_k^s| n_{g_k^s}$ où $|\cdot|$ est l'aire en valeur absolue, g_k^s est le k -ième triangle incident au sommet s et $n_{g_k^s}$ est la normale du triangle g_k^s ; ici la lettre g fait référence à la géométrie du triangle ; il n'est donc pas nécessaire d'avoir l'information sur les normales des sommets d'un maillage triangulaire, elle peut être facilement calculée, et cela est un avantage car la plupart du temps les maillages que l'on trouve n'ont pas d'information sur les normales.

Le choix de se restreindre aux maillages 2-variétés est motivé par les points suivants :

- les maillages 2-variétés sont omniprésents ;
- beaucoup d'algorithmes de remaillage fonctionnent sur des maillages 2-variétés, mais pas sur d'autres topologies, ainsi ce choix facilite la réutilisation d'outils existants, et la comparaison avec d'autres algorithmes de l'état de l'art ;
- en général un algorithme de remaillage surfacique est d'abord développé pour des maillages 2-variétés, puis il est étendu par la suite pour faire face à des topologies plus complexes ;
- les méthodes de remaillage développées au cours de cette thèse ont été portées sur la plateforme MEPP (*MEsh Processing Platform*, <http://liris.cnrs.fr/mepp>) qui utilise la bibliothèque CGAL et son constructeur incrémental qui n'accepte que des maillages 2-variétés.

1.1.3 Utilisation des maillages et émergence de techniques de remaillage

Les maillages surfaciques sont couramment utilisés dans beaucoup d'applications informatiques graphiques afin de représenter des formes ou objets 3 dimensionnels. Citons des exemples de secteurs d'activité qui utilisent intensivement les maillages : les jeux vidéos, le cinéma d'animation, l'archéologie, l'imagerie médicale, l'animation physique/réaliste pour des simulations

numériques, la visualisation scientifique, la réalité augmentée, et la conception assistée par ordinateur (bâtiments, pièces industrielles, robots, voitures...).

Les maillages originaux peuvent être générés par différents processus, dont les principaux sont :

- l'utilisation d'un scanner : un ensemble de points 3D est obtenu et il faut alors utiliser un algorithme de reconstruction de surface pour obtenir le maillage final ;
- des algorithmes de génération d'isosurface à partir d'une représentation implicite de la surface ;
- la modélisation d'objets, généralement non-mécaniques, pour les industries du film d'animation et des jeux vidéos ;
- des algorithmes de génération d'objets mécaniques (modèles dit CAO - Conception Assistée par Ordinateur) à partir de formes simples représentables sous forme paramétrique (plan, sphère, cylindre, tore, surface spline, surface de Bézier, etc.).

Malheureusement, les méthodes brutes employées pour générer des maillages ont tendance à produire des maillages de qualité insatisfaisante en termes d'échantillonnage de la surface (répartition des sommets), de régularité de la connectivité et de la qualité des éléments de base (triangle ou quadrangle en surfacique, tétraèdre en volumique). Par exemple, la densité des points 3D sur un objet scanné peut varier de manière importante et il est possible d'avoir à la fois des points redondants et des trous. Un problème courant dans l'assemblage de primitives géométriques simples est la faible qualité des mailles le long des coutures, ou l'apparition de plusieurs composantes connexes. Cela a poussé les communautés de l'informatique graphique et de la géométrie algorithmique à développer des techniques :

- de *ré-échantillonnage* des sommets ;
- de *régularisation* de la connectivité ;
- d'*amélioration de la qualité des éléments* ;
- mais aussi à développer des techniques pour *débruiter/lisser* et *réparer* les maillages.

De plus, pour des causes de mémoire et de bande passante limitées, si le nombre de sommets est trop important, le maillage deviendra difficile à stocker, à modifier et à transmettre sur le réseau. Cela a poussé les communautés de l'informatique graphique et de la compression de maillages à développer des méthodes :

- de *simplification* de maillage pour diminuer le nombre de sommets, d'arêtes et de triangles ;
- de *compression* de maillages ;
- et de *représentation progressive* des maillages : un maillage grossier est d'abord transmis, puis le maillage se raffine au fur et à mesure que les détails arrivent et que l'utilisateur se rapproche du maillage par un zoom.

Toutes les méthodes qui améliorent la qualité du maillage, sans pour autant créer de la nouvelle information comme dans la reconstruction ou la réparation de maillages, sont des méthodes de remaillage (cf. figure 1.3).

Définition 7. *Le remaillage consiste en la génération d'un nouveau maillage représentant*

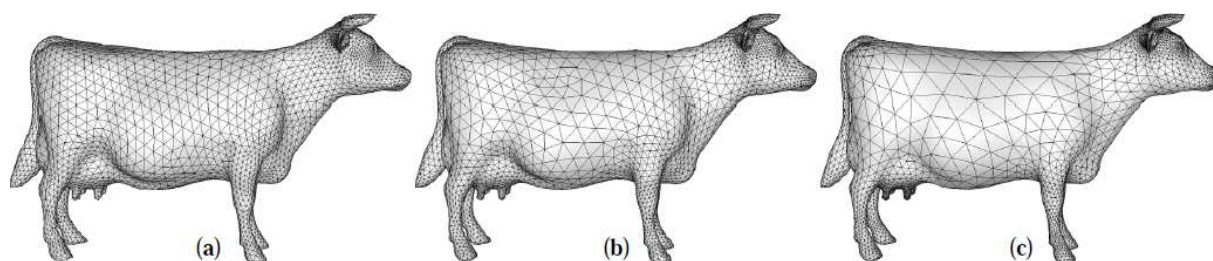


FIGURE 1.3 – De gauche à droite : modèle Vache représenté par différents maillages. Ces maillages sont des remaillages ou modèles remaillés du modèle Vache présenté dans la figure 1.1. Image reproduite de [SG03].

le même maillage qu'un maillage de départ (échelle préservée, une approximation acceptable de la surface de départ), mais sur lequel la qualité de l'échantillonnage (densité et position des sommets), ou/et celle des mailles (régularité des sommets et forme des cellules) ont été améliorées pour répondre aux besoins applicatifs. Ainsi un algorithme de remaillage se doit de produire un maillage de meilleure qualité. Le remaillage est donc une étape fondamentale pour traiter de manière efficace les défauts des maillages par rapport aux besoins applicatifs.

Cette définition du remaillage souligne que le terme remaillage ne doit être employé que si parmi les objectifs de la méthode en question, un échantillonnage cible doit être atteint ou l'échantillonnage actuel doit être amélioré. Cela est attesté par plusieurs titres d'articles associant le mot remaillage avec les mots isotrope ou anisotrope. L'échantillonnage isotrope, pour lequel la densité désirée dépend seulement de la position, est défini dans la définition 9. Pour l'échantillonnage anisotrope, la densité désirée dépend de la position et de la direction d'échantillonnage.

Maintenant que la notion de remaillage a été approfondie, nous précisons pourquoi le débruitage/lissage de maillage et la simplification de maillage ne sont généralement pas considérés comme du remaillage. Les lissages Laplacien ou angulaire (cf. section 1.4.1) sont des méthodes de débruitage qui peuvent améliorer la qualité de l'échantillonnage. Mais comme certains auteurs, nous préférons bien séparer la classe des méthodes de lissage de celle des méthodes de remaillage car elles n'ont pas les mêmes objectifs : enlever du bruit versus fidélité au maillage initial. Le cas de la simplification est un peu plus compliqué. Si une méthode de simplification de maillage supprime des sommets sans déplacer les sommets restants, elle n'améliorera pas la qualité de l'échantillonnage dans la majorité des cas et elle ne sera pas considérée comme une méthode de remaillage. Par contre, une méthode qui supprime des sommets et qui améliore aussi la position des sommets restants peut être considérée comme du remaillage. Pour résumer, un algorithme de remaillage doit améliorer l'échantillonnage de la surface, la qualité du pavage, tout en restant fidèle à la surface initiale.

1.1.4 Difficultés et verrous scientifiques du remaillage

Les difficultés principales du remaillage sont liées au maillage de départ, en particulier au fait que le maillage de départ est déjà une approximation d'une surface inconnue :

- on ne connaît pas en général la surface de départ à laquelle il faut être fidèle, en particulier ses caractéristiques ;
- le processus d'échantillonnage est généralement inconnu, en particulier on ne sait pas s'il y a du bruit sur la position des sommets et si une caractéristique sur le maillage de départ représente une caractéristique sur la surface continue représentée.

Les autres difficultés du remaillage sont algorithmiques :

- qualité : le contrôle de l'échantillonnage : position des sommets, suppression et ajout de certains sommets ;
- échantillonnage : la distribution d'un ensemble de points sur la surface selon une fonction de densité ;
- topologie du maillage initial : la préservation de la topologie, i.e. pas d'ajout d'auto-intersection ou de repli ;
- complexité : l'obtention d'un algorithme de remaillage de complexité quasi-linéaire ;
- gros maillages : traitement d'un maillage qui ne tient pas en entier en mémoire vive (méthode "mémoire externe" ou *out-of-core* en anglais) ;
- correspondance : retrouver rapidement la position "initiale" d'un sommet du nouveau maillage dans le maillage de départ ;
- en fonction des applications, des fonctionnalités difficiles à implanter sont requises : gestion des niveaux de détails, obtenir des garanties théoriques sur les résultats.

1.1.5 Critères de qualité d'un maillage et applications du remaillage

Dans cette section, des critères de qualité sur les triangles, puis sur les maillages sont présentés. Ensuite, des applications du remaillage sont listées.

Qualité d'un triangle

Dans cette thèse, un triangle de bonne qualité sera un triangle équilatéral. Il faut garder à l'esprit que les triangles équilatéraux ne sont pas toujours souhaités, mais pour la majorité des applications graphiques ou numériques, les triangles équilatéraux sont préférés aux triangles plats ou allongés. Par exemple, dans l'étude d'un choc supersonique, il faut avoir des triangles allongés le long d'un choc. Pour une analyse plus détaillée de la qualité d'un triangle avec des exemples de mesure de qualité, le lecteur est renvoyé à [She02, PB03].

La forme des éléments a un impact direct sur :

- la stabilité numérique des calculs numériques (équations aux dérivées partielles) utilisés par la méthode des éléments finis et donc sur la fiabilité des analyses des résultats (voir [BE92, She02]) ;
- le rendu efficace du maillage ;

- la modélisation interactive par des formes libres (*free-form shape* en anglais) ;
- d'autres traitements comme la compression ou le lissage, qui peuvent être plus efficaces en présence de triangles bien formés.

Ainsi, par la suite, chaque fois qu'une méthode de remaillage présentée améliorera la forme des triangles, elle pourra être motivée par un de ces points.

Un triangle de qualité est un triangle bien formé, i.e. le plus proche possible d'un triangle équilatéral. Un triangle g_i bien formé a :

- un *ratio d'aspect* $|e_i|_\infty / (2\sqrt{3}r_i)$ le plus proche de 1 possible [AUGA08] ; $|e_i|_\infty$ est la longueur de l'arête la plus longue du triangle g_i et r_i est le rayon du cercle inscrit au triangle g_i ; plus le ratio d'aspect est petit, mieux c'est ; un mauvais ratio d'aspect impliquera un mauvais conditionnement des matrices Méthode des Éléments Finis - MEF ; un bon ratio d'aspect améliore le rendu lisse (*smooth shading* en anglais) [TMMY04] ; il existe dans la littérature d'autres définitions du ratio d'aspect, en particulier [HG99] ;
- un *facteur de forme* $4\pi \frac{|g_i|}{\text{Perimètre}(g_i)^2}$, qui mesure la circularité de la forme, proche de $\pi / (3\sqrt{3})$; plus ce facteur est grand, mieux c'est ; le maximum est obtenu pour une cellule ou un triangle bien formé ;
- un *ratio de rayons* $2r_i/R_i$ proche de 1 [NISA06] où R_i et r_i sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle g_i ; plus ce facteur est grand, mieux c'est ; 0 (resp. 1) indique un triangle dégénéré (resp. bien formé) ; un ratio de rayons < 0.7 (resp. > 0.9) est mauvais (resp. bon) [TMMY04] ;
- son plus petit angle en radians proche de $\frac{\pi}{3}$; l'angle minimal détermine le conditionnement des matrices MEF [She02] ;
- son plus grand angle en radians proche de $\frac{\pi}{3}$.

Par opposition à un triangle de qualité, un triangle de mauvaise qualité est souvent caractérisé par un des points suivants :

- son plus petit angle en radians est inférieur à $\frac{\pi}{6}$;
- son plus grand angle en radians est supérieur à $\frac{\pi}{2}$.

Un triangle dégénéré a une aire nulle. Pour obtenir un triangle équilatéral par une approche minimisation d'une fonction objectif, il suffit dans la pratique de minimiser une fonction dont le minimum est atteint lorsque tous les 3 angles sont égaux à $\frac{\pi}{3}$ [PB03].

Qualité d'un maillage

D'après Alliez et al. [AUGA08], la qualité d'un maillage peut faire référence à un ou à une combinaison des points suivants :

- *échantillonnage de la surface* : un bon échantillonnage permet de conserver les caractéristiques intrinsèques de la surface, en particulier les hautes fréquences ; la régularité, voire le type de l'échantillonnage est aussi un critère de qualité : un échantillonnage isotrope est souvent demandé (cf. définition 9) ;
- *gradation lisse de l'échantillonnage* : si la densité de l'échantillonnage n'est pas uniforme

(cf. définition 9), alors elle ne doit pas varier brusquement ;

- *régularité du pavage* : valence des sommets proche de la valence optimale (6 à l'intérieur et 4 aux bords) et angles minimaux et maximaux des 2-simplices proches de la valeur optimale ;
- *taille des arêtes et des triangles* : compacité de la représentation, on cherche à minimiser le nombre d'éléments géométriques utilisés tout en restant fidèle à la surface ; par exemple, la longueur des arêtes peut être liée à la courbure locale ;
- *forme des éléments* : triangle équilatéral versus triangle plat pour un maillage triangulaire.

La compacité est liée à l'échantillonnage, puisque moins il y a de points, plus la représentation est compacte. Elle est aussi associée à la taille des éléments, car plus les éléments utilisés ont une aire importante, moins il en faut pour recouvrir la surface. Finalement, la compacité est attachée à la forme des éléments, parce que la représentation la plus compacte a souvent des éléments allongés ou anisotropes. La combinaison de la fidélité à la surface initiale et de la compacité est liée au choix de l'échantillonnage le mieux adapté à la géométrie, celui qui permet de préserver toute la géométrie, et dont la triangulation associée est la plus compacte possible.

Dans la pratique, pour évaluer la régularité d'un maillage triangulaire, les informations suivantes peuvent être calculées :

- angles minimal et maximal ;
- angles minimal et maximal moyens des triangles ;
- longueurs minimale, maximale et moyenne des arêtes ;
- aires minimale, maximale et moyenne des triangles ;
- pourcentage de sommets extraordinaires ou de degré irrégulier ;
- histogrammes ou histogrammes cumulatifs des angles, des ratios d'aspect des triangles, de la longueur des arêtes, de l'aire des triangles : en plus de permettre l'évaluation de la qualité, ces derniers montrent la variation de la qualité.

Par contre, dans la littérature les auteurs s'intéressent moins à évaluer la qualité de l'échantillonnage.

Les applications du remaillage

Les applications principales du remaillage sont :

- la visualisation : la simplification, les niveaux de détails, le lissage du champ de normales permet un rendu plus joli, le remaillage peut faciliter le plaquage de textures ;
- les simulations numériques basées sur la méthode des éléments finis : simulateurs chirurgicaux, animation 2D et 3D ;
- la compression ;
- et la rétro-conception : le débruitage, le lissage, la récupération de caractéristiques perdues.

Les applications du remaillage sont, comme vous l'aurez constaté, liées aux domaines utilisant les maillages présentés en début de section 1.1.3.

1.1.6 Catégories des algorithmes de remaillage

Cette section énumère les différentes classes de méthodes de remaillage qui ont été élaborées en fonction des objectifs finaux et non en fonction des outils mathématiques utilisés.

L'état de l'art sur les avancées du remaillage surfacique en 2008 de Alliez et al. [AUGA08] (dans le domaine graphique) avait fait état de 5 catégories de techniques de remaillage, basées sur leur objectif final :

- *structuré ou régulier* : motifs réguliers dans le graphe de connectivité, par exemple les sommets intérieurs sont entourés par le même nombre constant d'élément ;
- *compatible* : plusieurs maillages sont modifiés afin de partager une structure de connectivité commune ;
- *haute qualité* : optimisation de la qualité des éléments et de la distribution des sommets ;
- *guidé par les caractéristiques du maillage* : préservation ou restauration de caractéristiques propres au maillage ;
- et *guidé par l'erreur commise* : minimisation de la distance entre le modèle remaillé et le maillage original lors du processus de remaillage.

Clairement, plusieurs des avantages de ces catégories peuvent être partagés au sein d'une même méthode de remaillage, pour par exemple obtenir une technique de remaillage de haute qualité, qui préserve les caractéristiques du maillage de départ tout en contrôlant la fidélité géométrique à la surface initiale. Ce genre d'approche est généralement appelée *optimisation de maillage* : une fonction objectif à minimiser est proposée et plusieurs approches existent pour rechercher un bon minimum local (et un minimum global lorsque cela est possible) de cette fonction objectif en modifiant la position des sommets, la connectivité et en supprimant ou ajoutant des sommets et des arêtes.

Notre direction de recherche : le problème d'optimisation de maillages surfaciques

L'optimisation à la fois du choix des triangles, du choix des arêtes, du choix de l'insertion/suppression de sommets et du choix de la position des sommets, est un problème très difficile, qui mélange un problème de nature continue, l'optimisation de la position des sommets dans \mathbb{R}^3 , et un problème discret combinatoire, l'optimisation de la connectivité. Ce problème d'optimisation va consister à minimiser une fonction objectif qui devra améliorer la qualité du maillage, donc en particulier corriger la forme des triangles, la valence des sommets, la compacité de la représentation, tout en essayant de rester le plus fidèle au maillage initial. Il faudra aussi être capable de contrôler l'uniformité et l'isotropie de l'échantillonnage pour qu'une méthode de remaillage soit de haute qualité. Par contre, notre direction de recherche n'est clairement pas orientée restauration/réparation de maillage (i.e. remplir un trou, améliorer la saillance des caractéristiques...), et les algorithmes de remaillage qui sont développés dans cette thèse utilisent le maillage initial comme référence géométrique de la surface sous-jacente. Ce choix se justifie, car dans la majorité des cas, la véritable surface représentée par un maillage n'est pas connue et il faut alors avoir recours à des heuristiques pour réparer la surface. Néanmoins, les algorithmes

développés pourront lisser la position des sommets si ce choix permet de faire décroître l'énergie associée à la fonction objectif retenue.

Définition 8. *Le remaillage de haute qualité est un algorithme de remaillage qui va générer une nouvelle discrétisation de la géométrie représentée par le maillage initial telle que le maillage obtenu vérifie les propriétés suivantes : ses éléments sont bien formés, son échantillonnage est uniforme ou isotrope et peut être dépendant d'une carte de densité, et la variation de la densité de son échantillonnage n'est pas brusque [AUGA08].*

En fonction des besoins applicatifs, l'importance d'un critère est diminuée ou augmentée. Dans cette thèse, le problème d'optimisation de maillages surfaciques est abordé par une approche par modification explicite du maillage (cf. chapitre 5) sous le contrôle d'un champ aléatoire de Markov (cf. chapitre 2). Il faut, en partant du maillage initial, repositionner les sommets mais aussi optimiser la connectivité et cela de manière explicite.

Dans cet état de l'art, nous explorons les méthodes existantes de remaillage de haute qualité et d'optimisation de maillages. Les méthodes de simplification de maillage, qui incluent les méthodes guidées par l'erreur commise, ne sont pas détaillées dans cet état de l'art, car même si elles sont des méthodes pour optimiser la compacité d'un maillage, elles ne produisent généralement pas de maillage de haute qualité. Néanmoins, certaines opérations de simplification sont présentées lorsqu'elles présentent un intérêt dans le cadre plus général de l'optimisation de la connectivité et du nombre de primitives géométriques. Le lecteur est renvoyé à [HG97, CMS98, Lue01, Tal04] pour une comparaison approfondie des méthodes de simplification.

Le remaillage de haute qualité se traite par trois types d'approches :

- par *ré-échantillonnage depuis le début*, par exemple, avec le choix du point le plus loin des autres points présents ou le long de lignes de courant ;
- par *paramétrisation* pour travailler en partie dans l'espace planaire des paramètres ;
- et finalement par *modifications explicites* et progressives du maillage d'entrée à l'aide d'opérations élémentaires, telles que le déplacement de sommets, jusqu'à ce que les critères d'arrêt soient atteints.

Remarquons que la séparation des approches qui travaillent dans le domaine des paramètres de celles qui modifient directement les maillages n'est pas nouvelle [AdVDI05]. Les approches basées uniquement sur du ré-échantillonnage explicite, nécessitent généralement une relaxation de la position des sommets en plus de l'échantillonnage, en particulier lorsque les sommets initiaux sont conservés ou à la jointure de deux fronts avançant. Les procédures de relaxation sans prise en compte de la connectivité ne fournissent pas de garantie en termes de qualité des triangles, contrairement à l'insertion gloutonne de points mais pour laquelle il sera impossible d'obtenir une densité spécifiée par un utilisateur. Les approches basées sur une paramétrisation souffrent des problèmes de déformation pour les paramétrisations globales à cause de l'aplatissement, et des problèmes de post-traitement des coutures (*stitching* en anglais) entre patches paramétrés voisins. Le problème des coutures est moins important dans le cas des paramétrisations locales se chevauchant. Pour les approches qui modifient explicitement le maillage d'entrée, les temps

de calcul sont généralement plus importants que pour les autres approches, en particulier pour les opérations topologiques à cause des vérifications géométriques telles que la non-inversion de la normale d'un triangle.

Dans la suite de ce chapitre, le remaillage basé sur le ré-échantillonnage, sur une paramétrisation, et sur l'optimisation de maillage sont approfondis, car ces approches sont les plus proches de nos travaux de thèse, dans le sens où elles permettent d'obtenir des modèles remaillés plus réguliers que ceux de départ. La partie optimisation de maillage est séparée en deux sous-parties : le repositionnement explicite des sommets et l'optimisation de la connectivité comme dans l'article de Hoppe et al. [HDD⁺93].

1.2 Remaillage basé sur du ré-échantillonnage explicite

Les travaux sur le remaillage basé sur du ré-échantillonnage explicite sont dans une très large majorité associés à l'obtention d'un échantillonnage uniforme ou d'au moins un échantillonnage isotrope. Cela s'explique en partie par la difficulté de produire un échantillonnage anisotrope avec un maillage de départ dont l'échantillonnage est très irrégulier et avec les contraintes usuelles sur la qualité des cellules du modèle remaillé. En fait, l'échantillonnage anisotrope est généralement associé à au moins une procédure de repositionnement des sommets pour faciliter et accélérer le remaillage anisotrope. C'est pourquoi dans cette section sur le ré-échantillonnage explicite, les méthodes présentées traiteront soit de l'échantillonnage uniforme ou isotrope, soit de l'adaptation pour être plus fidèle à la surface. Les objectifs du ré-échantillonnage explicite sont l'adaptation d'un échantillonnage initial à une carte de densité et/ou l'obtention de garanties de qualité des éléments géométriques dont des garanties de fidélité pour être du remaillage. Nous commençons par préciser la différence entre les échantillonnages uniforme et isotrope, puis nous présentons les approches existantes.

Définition 9. *Un échantillonnage uniforme (resp. isotrope) est obtenu en distribuant globalement (resp. localement) les points sur le maillage d'entrée de la même façon dans toutes les zones du maillage et dans toutes les directions autour d'un point du maillage pour du remaillage isotrope. L'échantillonnage uniforme est donc plus restrictif que l'échantillonnage isotrope.*

Il faut être conscient que pour une surface générique, un maillage triangulaire l'approximant qui soit parfaitement uniforme (toutes ses arêtes ont la même longueur) peut ne pas exister [AFSW03]. Donc lorsqu'on parle d'échantillonnage uniforme ou isotrope, il sera sous-entendu quasi-uniforme ou quasi-isotrope.

1.2.1 Approches gloutonnes par insertion d'un sommet à la fois

Stratégie de l'échantillonnage du point le plus loin

La stratégie de l'échantillonnage du point le plus loin, qui consiste à insérer un point à un moment donné aussi loin possible des autres points déjà placés, i.e. au centre du plus grand trou,

permet de maintenir l'uniformité d'un échantillonnage tout en augmentant la densité des points. De plus, en fixant un critère d'arrêt, par exemple sur la distance entre les points, cette stratégie se termine en un nombre fini d'étapes. La distance entre les échantillons peut être bornée et donc cette approche permet de garantir l'uniformité ou de garantir la conformité de l'échantillonnage à un champ de tailles des cellules fixé qui sera typiquement isotrope et avec une gradation lisse. Certaines garanties sur la forme des cellules peuvent être aussi obtenues. Pour calculer le point le plus éloigné sur un maillage, une distance géodésique peut être utilisée [PC06].

Il existe deux algorithmes principaux pour insérer un nouveau point basés sur le maintien d'une triangulation de Delaunay, l'*insertion dans la fosse* (*sink insertion*) [LW01, EG02] et le *raffinement de Delaunay* [Che93, Rup95, CDRR04, PW04, DLR05].

Définition 10. *En 2D : Une arête ou un triangle est **localement Delaunay** si son cercle circonscrit ne contient pas d'autres sommets en son intérieur. Une triangulation est une **triangulation de Delaunay** si et seulement si toutes ses arêtes et triangles sont localement Delaunay.*

Les deux méthodes sont compétitives en 2D, mais le raffinement de Delaunay a plus de garanties théoriques en 3D. Pour maintenir une triangulation de Delaunay initiale après chaque insertion de point, chaque arête non-localement Delaunay est basculée jusqu'à ce que toutes les arêtes soient localement Delaunay. Pour les détails des algorithmes, le lecteur est renvoyé aux références indiquées.

Stratégie d'échantillonnage par propagation de fronts

Lorsqu'on résout un puzzle, on commence par une pièce, puis on ajoute autour de cette pièce les pièces voisines. Maintenant, imaginez que le puzzle soit le maillage d'une surface et que les pièces soient des triangles. L'objectif est de terminer le puzzle, i.e. de recouvrir complètement de triangles la surface initiale. La manière de continuer le pavage depuis la zone déjà recouverte est abordée d'une manière différente en fonction de la méthode choisie, mais elle est fixe pour chaque technique.

Dans le cadre du ré-échantillonnage de maillage, cette propagation de front peut se faire en utilisant les triangles [TOC98, Har98, AFSW03], ou à l'aide de lignes de courant soit grâce à une approximation de la distance géodésique [SSG03], soit avec une fonction de Morse harmonique [DKG05]. Le ré-échantillonnage du maillage peut se faire dans l'espace des paramètres [TOC98] ou directement sur la surface [Har98, AFSW03, SSG03]. Un front est l'ensemble des sommets courant sur le bord du pavage. Et comme les fronts "avancent", on parle de méthodes par propagation de fronts.

Les deux problèmes majeurs de ce type d'approche sont les coutures (genre 0 fermé ou genre élevé découpé en patchs de genre 0 avec bords) et la rencontre de 2 fronts, car :

- l'échantillonnage n'a aucune raison d'être cohérent de part d'autre d'une couture, puisque 2 domaines ont été pavés, indépendamment, et ensuite ces 2 domaines se sont rejoints le long d'une couture ;

- lorsque 2 fronts avançant se rencontrent, soit il y aura localement du sur-échantillonnage, soit du sous-échantillonnage en fonction des approches choisies.

Les lignes de courant de topologie complexe [SSG03] sont responsables d’artefacts similaires. Tous ces problèmes nécessitent une étape de post-traitement qui peut être coûteuse.

Un autre problème de ce type d’approche est le contrôle local du processus d’échantillonnage. En effet, échantillonner une surface régulièrement de telle sorte que la distance entre chaque “ligne” d’échantillons soit la même, en avançant depuis les zones déjà échantillonnées vers les zones non-explorées, n’est pas forcément adapté au signal en train d’être échantillonné, plus précisément des détails hautes fréquences peuvent être perdus. Il serait intuitivement préférable de fixer la distance entre les échantillons dans le cas d’une surface relativement plane, puis de faire diminuer la distance entre les échantillons en fonction de l’augmentation de la courbure. Cela peut être vu comme le contrôle de la vitesse de propagation du front [PC06].

Stratégie d’échantillonnage par adaptation locale

Cette stratégie a été très utilisée pour l’approximation d’une carte de hauteurs, qui représente un terrain 3D sans repli lorsqu’on le projette sur le plan perpendiculaire à l’axe des hauteurs, en particulier avec des arbres quaternaires (*quadtrees* en anglais). L’idée est de raffiner localement tant qu’un critère d’erreur d’approximation n’est pas atteint. Pour l’arbre quaternaire, une case sera divisée en 4 tant que la variation des valeurs rangées dans la case sera considérée trop grande. Ensuite, les coins des cases du quad-tree formeront l’ensemble des sommets initiaux du maillage. Pour les maillages, deux critères d’adaptation sont généralement utilisés, le premier concerne l’erreur géométrique et l’autre l’erreur d’estimation de la courbure.

Cette stratégie d’échantillonnage ne permet pas de contrôle de sa qualité, mais elle permet de respecter des contraintes de fidélité demandées par un utilisateur telles que la bonne approximation des courbures de la surface. Lorsqu’on doit ré-échantillonner depuis le début (*from scratch* en anglais), c’est une première étape nécessaire pour s’assurer que le maillage final sera fidèle à la surface initiale. Après avoir fait cet échantillonnage adaptatif, d’autres techniques d’échantillonnage d’insertion et de suppression de sommet peuvent être utilisées pour améliorer les propriétés globales de l’échantillonnage.

1.2.2 Approches gloutonnes par suppression d’un sommet à la fois

Définition 11. La *décimation* d’un maillage consiste à supprimer des sommets, des arêtes et des facettes de manière à créer un maillage plus grossier que le maillage initial.

L’idée ici est de supprimer un sommet qui remplit tous les critères requis par l’algorithme de décimation, puis de re-trianguler le trou résultant de la suppression du sommet et des arêtes et triangles qui partageaient ce sommet, sans introduire de nouveau sommet. La suppression du sommet peut améliorer la compacité et même parfois la qualité des triangles utilisés pour remplir le patch autour du sommet. Les critères de sélection sont différents en fonction du type du sommet :

- un sommet *simple*, qui est entouré par un cycle complet de triangles, où chaque arête utilisée par deux triangles y est non saillante, peut être supprimé si l’erreur géométrique introduite par sa suppression est la plus petite ; pour cela une file de priorité sur l’erreur géométrique est utilisée ; cette erreur peut être calculée par rapport au maillage courant ou par rapport au maillage initial, et elle est soit exacte (volume), soit approximée (e.g. la distance du sommet au plan moyen des sommets de son 1 voisinage [SZL92]) ;
- un sommet sur un bord ou adjacent à deux arêtes caractéristiques peut être supprimé si la distance à l’arête de remplacement est la plus petite.

Pour retriangler le trou résultant de la suppression d’un sommet, il y a 2 approches rapides :

- choisir un sommet parmi les voisins directs du sommet supprimé temporairement et “tourner” autour de lui pour ajouter les triangles : cela ne produira pas toujours une triangulation valide, comme dans le cas où des triangles que l’on ajoute sortent de la zone à retriangler ;
- une méthode plus efficace consiste à ajouter une arête qui divise le trou en deux zones approximativement égales, sans sortir de la zone à trianguler, en répartissant le même nombre de sommets à gauche et à droite de l’arête à un sommet prêt, puis de répéter récursivement cet algorithme sur les deux trous, à gauche et à droite de l’arête, et de s’arrêter lorsqu’un trou contient exactement 3 sommets, car dans ce cas il suffit de boucher le trou avec un triangle [SZL92].

Si avec une approche rapide de re-triangulation, la triangulation n’est plus valide, alors la re-triangulation ainsi que la suppression du point sont annulées. L’annulation de la re-triangulation et de la suppression du sommet peuvent être généralisées à d’autres critères. Par exemple, si la triangulation introduit un triangle de plus mauvaise qualité que le plus mauvais triangle adjacent au sommet temporairement supprimé, alors on peut annuler l’opération.

Il faut être conscient qu’une telle approche de suppression gloutonne ne permet pas un contrôle global de l’échantillonnage, mais elle peut être utile pour supprimer ponctuellement un sommet à l’aide d’une analyse locale pour voir si la suppression améliore l’échantillonnage, ou pour l’alterner avec l’insertion de sommet qui, elle, permet un meilleur contrôle : avec cette combinaison, des sommets peuvent être transférés d’une zone du maillage à une autre pour respecter certains critères utilisateurs. Remarquons aussi qu’une autre façon de supprimer un sommet est la contraction d’arête (cf. section 1.5.1), mais cette approche est associée à l’optimisation de la connectivité, tandis que l’approche présentée ici est associée à l’amélioration de l’échantillonnage pour respecter des besoins utilisateurs.

1.3 Remaillage basé sur une paramétrisation sur le plan

Il est possible de paramétriser globalement des patchs surfaciques homéomorphes à un disque sur un plan 2D (domaine des paramètres).

Définition 12. Une *paramétrisation* est une bijection de sorte que l’on puisse associer un

point du maillage à un point du domaine des paramètres et vice versa.

Il existe plusieurs paramétrisations possibles d'une même surface, ou dit autrement, une surface peut être représentée par plusieurs applications (*mappings* en anglais) de l'espace des paramètres vers l'espace de la surface. Chaque paramétrisation engendre de la distorsion géométrique à cause de l'aplatissement du patch. C'est pourquoi une *bonne paramétrisation* minimise une erreur de distorsion. Il existe différents types de paramétrisation dont les principaux sont les paramétrisations *conformes* qui préservent les angles, les paramétrisations *isométriques* qui préservent les longueurs, et les paramétrisations *authaliques* qui préservent les aires. Il est nécessaire de découper les surfaces de genre 0 sans bord ou de découper les surfaces de genre élevé (>0), ce qui génère des problèmes d'optimisation de coutures. Il est cependant possible d'éviter le problème des coutures, grâce à l'utilisation de paramétrisations locales se chevauchant [SG03]. La notion de *bonne paramétrisation* englobe plus de contraintes que celles liées à la distorsion géométrique [AFSW03]. Si le lecteur souhaite des compléments de lecture en paramétrisation surfacique, il est renvoyé à [FH05, SPR06, HLS07, HPS08, LZX+08].

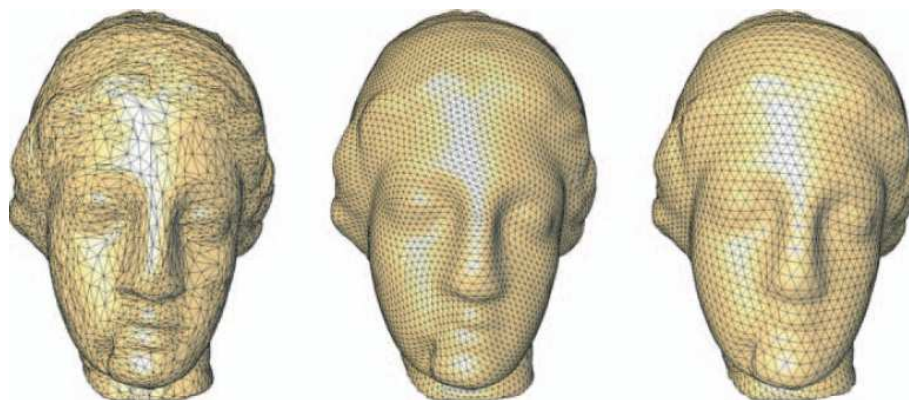


FIGURE 1.4 – De gauche à droite : modèle Venus représenté par un maillage irrégulier, semi-régulier et régulier. Image reproduite de [AUGA08].

1.3.1 Remaillage structuré

Définition 13. *Le **remaillage structuré** est un algorithme de remaillage qui va générer un maillage structuré en partant d'un maillage non-structuré. Un maillage structuré est un maillage pour lequel la vaste majorité des sommets a un nombre constant de voisins (ces sommets sont appelés des sommets réguliers) sauf en quelques sommets (ces sommets sont appelés sommets extraordinaires) [AUGA08]. Le remaillage structuré regroupe trois catégories de remaillage, qui sont le remaillage régulier, le remaillage semi-régulier et le remaillage extrêmement régulier.*

Le *remaillage structuré* a été mis dans la catégorie basée sur une paramétrisation, car la plupart du temps il faut essayer de plaquer là où cela est possible une structure régulière sur le maillage de départ, ce qui revient à de la paramétrisation.

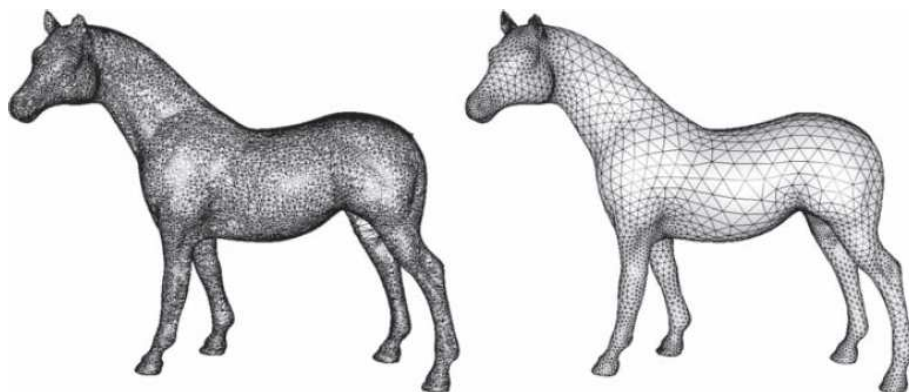


FIGURE 1.5 – De gauche à droite : modèle Cheval représenté par un maillage irrégulier, et extrêmement régulier. Image reproduite de [SG03].

Le *remaillage régulier* (cf. figure 1.4, à droite) est intéressant pour des applications telles que le rendu (pas d'indirection du cache), le mapping de textures, la compression (la connectivité est implicite et on peut appliquer des opérations issues du traitement du signal) ou l'analyse multi-résolution.

Le *remaillage semi-régulier* (cf. figure 1.4, au milieu) consiste à subdiviser un maillage grossier, obtenu à partir du maillage initial, avec des règles de subdivisions qui n'introduisent pas de nouveau sommet extraordinaire. Le remaillage semi-régulier est très utilisé en tant que technique de compression, en particulier pour la transmission de maillages sur le réseau. De plus, le fait d'avoir une connectivité de subdivision est nécessaire pour l'analyse multi-résolution.

Le *remaillage extrêmement régulier* (cf. figure 1.5), qui consiste à générer un maillage dont le nombre de sommets réguliers est largement dominant par rapport aux sommets extraordinaires, est de deux formes. La première forme est le remaillage régulier par patch, qui consiste à segmenter un maillage puis à remplacer les segments par les patchs réguliers. Les sommets extraordinaires sont alors seulement présents le long des coutures entre patchs adjacents. La deuxième forme de remaillage extrêmement régulier est le remaillage par modifications locales [SG03], et qui reste basé sur un processus semi-global pour diminuer le nombre de sommets extraordinaires. En fait, sans optimisation semi-globale [SG03] ou globale telle que le recuit simulé [YGZW07], il n'est pas possible de faire du remaillage extrêmement régulier.

1.3.2 Remaillage compatible : paramétrisation jointe

Définition 14. *Étant donné un ensemble de maillages 3D avec des correspondances partielles entre eux, le **remaillage compatible** revient à générer un nouvel ensemble de maillages qui sont des objets remaillés de l'ensemble de départ, de telle sorte qu'ils aient une structure de connectivité commune, des polygones bien formés, et que les correspondances partielles soient respectées [AUGA08].*

Les applications principales du remaillage compatible sont le morphing, le transfert de pro-

priétés (textures, couleurs) entre les maillages, l'édition multiple, et l'ajustage d'un modèle template sur un autre modèle. A première vue, le remaillage compatible ne se situe pas dans le cadre de nos travaux de thèse qui ne s'intéressent pas à une entrée sous la forme d'un ensemble de maillages. Mais, comme il est possible d'utiliser un maillage de référence en parallèle (e.g. une sphère), le remaillage compatible peut tout de même être utilisé pour remailler un seul maillage d'entrée. En fait, le remaillage compatible prend tout son intérêt lorsque il est utilisé pour remailler un objet d'une catégorie clairement identifiée (un humanoïde, un animal quadrupède, une tête, etc.), car dans ce cas on peut utiliser un maillage de référence particulier, avec une connectivité spécifique intéressante et des sommets caractéristiques propres : les points de repère (*landmarks* en anglais). Pour une tête, on peut par exemple utiliser le bout du nez, les 2 extrémités des lèvres, les extrémités des 2 yeux, etc. Dans une optique de remaillage par région, où des régions d'un certain type sont identifiées sur un maillage, on pourrait faire du remaillage par paramétrisation jointe sur les régions identifiées en utilisant des maillages de référence pour chaque type de région.

1.3.3 Remaillage de haute qualité : paramétrisation, remaillage dans l'espace des paramètres et retour sur le maillage surfacique

Plusieurs algorithmes de remaillage de haute qualité [AMD02, AdVDI03, AdVDI05] utilisent une paramétrisation globale de la surface sur un plan 2D, puis optimisent le maillage plaqué sur le plan de paramétrisation (optimisation dans le domaine des paramètres) et finalement utilisent la paramétrisation inverse pour revenir sur la surface du maillage initial. Les motivations sont d'accélérer et de simplifier le processus de remaillage. En effet, les algorithmes de remaillage sont plus simples et plus rapides sur un plan que sur une surface plongée dans \mathbb{R}^3 . Il y a aussi des garanties théoriques en 2D qui ne sont plus forcément vraies en 3D. De plus, le besoin de spécifier une carte de contrôle 2D de l'échantillonnage désiré sur le modèle remaillé nécessite déjà une paramétrisation 2D entre cette carte de contrôle et le maillage, et il est alors normal de vouloir ré-utiliser cette paramétrisation pour accélérer le remaillage. Néanmoins, les surcoûts engendrés par une paramétrisation globale et par l'optimisation des coutures, en particulier pour les surfaces de topologie complexe, doivent être inférieurs aux gains liés à l'optimisation du maillage en 2D pour qu'une telle approche soit attractive.

Alliez et al. [AMD02] ont proposé un des premiers algorithmes de remaillage qui offre un haut niveau de contrôle de l'échantillonnage des sommets tout en étant étant rapide : quelques secondes en 2002 pour des maillages de quelques dizaines de milliers de triangles.

1.4 Remaillage basé sur un repositionnement explicite des sommets

Le repositionnement des sommets sur un maillage est une approche très répandue dans le cadre du remaillage de grande qualité, pour améliorer la qualité du maillage en modifiant

la position des sommets. Le repositionnement de sommets permet d'améliorer la qualité des éléments géométriques, d'améliorer l'échantillonnage pour qu'il soit adapté à une mesure sur le maillage (e.g. sa courbure) ou à un champ de taille défini par un utilisateur, et il permet de débruiter le signal géométrique. Dans cette thèse, nous nous restreignons volontairement à la distribution de sommets sur une surface, bien que d'autres primitives géométriques, telles que des lignes ou des cellules, peuvent être distribuées sur la surface [AUGA08]. Ce choix permet un contrôle fin de l'échantillonnage sans ajouter de modèle géométrique, e.g. une ligne déformable, pour échantillonner.

Dans la littérature, il y a deux catégories d'approches pour le repositionnement des sommets, une basée sur du repositionnement local de sommets qui utilise la position des voisins directs donnés par la connectivité actuelle du maillage, et une autre qui utilise du repositionnement global de sommets pour optimiser la répartition des sommets sur la surface. La vitesse de convergence de ces méthodes de repositionnement, ainsi que le contrôle de l'erreur introduite sont deux des problèmes les plus importants : le premier lorsqu'on traite des maillages de plusieurs centaines de milliers de points et l'autre pour que l'algorithme soit considéré comme un algorithme de remaillage, i.e. qui préserve le plus possible la forme globale du maillage original.

L'utilisation d'une connectivité fixe va forcer la position des sommets à rester dans un voisinage proche des positions des sommets voisins directs. Même si des groupes importants de sommets peuvent se déplacer ensemble, cette restriction sur la connectivité va rendre les optimisations de la forme des triangles et de l'échantillonnage très limitées. C'est pourquoi les méthodes de repositionnement local des sommets sont généralement alternées avec des étapes d'optimisation de la connectivité.

1.4.1 Approches basées sur du repositionnement local de sommets

Dans cette section, le repositionnement des sommets est vu comme un problème d'optimisation continue locale. Local signifie ici que le calcul de la position d'un sommet lors d'une seule application d'une méthode locale dépend seulement de ses voisins directs, ceux de son premier anneau.

Lissage Laplacien avec différentes pondérations

L'opérateur parapluie \mathcal{U} (*umbrella operator* en anglais) est une approche populaire pour égaliser les angles des faces adjacentes d'un sommet ou pour lisser/débruiter un maillage. Cette opérateur est une approximation linéaire uniforme du Laplacien Δ . Il consiste à calculer un vecteur de déplacement vers le barycentre de ses sommets voisins directs :

$$\mathcal{U}(p_i) = \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (p_j - p_i) = \left(\frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} p_j \right) - p_i \quad (1.1)$$

où \mathcal{N}_i est l'ensemble des sommets voisins (premier anneau ou *one-ring*, $i \notin \mathcal{N}_i$) du sommet i , $|\mathcal{N}_i|$ est le nombre de voisins de i . $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U} \circ \mathcal{U}$ a été utilisé plusieurs fois dans la littérature

[Tau95, KCVS98, DMSB99], a de meilleures propriétés de lissage, et se trouve être un bon compromis entre le nombre de calculs et les propriétés de lissage.

Le lissage Laplacien (*Laplacian smoothing* en anglais) consiste à déplacer chaque sommet p_i dans la direction $\mathcal{U}(p_i) : p_i \leftarrow p_i + \lambda \mathcal{U}(p_i)$, où λ est un facteur d'amortissement [Tau95]. Lorsque la triangulation initiale est une triangulation de Delaunay, le déplacement d'un sommet peut faire perdre la propriété d'être une triangulation de Delaunay. Si cela n'est pas souhaité, il faut mettre à jour la connectivité avec des basculements d'arêtes de Delaunay (cf. figure 1.8) pour retrouver cette propriété. Le lissage Laplacien avec maintien d'une triangulation de Delaunay produit des arêtes globalement uniformes, et localement uniformes (i.e. échantillonnage isotrope).

Le lissage Laplacien peut être vu comme l'intégration sur le temps de l'équation de la chaleur par le schéma Euler explicite :

$$p^{n+1} = (I + \lambda dt \times \mathcal{U})(p^n) = p^n + \lambda dt \times \mathcal{U}(p^n), \quad (1.2)$$

où p^n représente l'ensemble des sommets du maillage à l'étape n ; $p^0 = p$ est l'ensemble des points initiaux.

Pour un maillage avec des sommets en position générale dans \mathbb{R}^3 , le lissage Laplacien mène à des artefacts bien connus qui sont :

- la *distorsion géométrique* : rétrécissement, apparition de bosses, perte des vraies caractéristiques si pas de contraintes globales, et sommets qui sortent de leur voisinage si pas de mise à jour de la connectivité ;
- un *problème de contrôle sur le repositionnement global des sommets* [DMSB99] ;
- des *problèmes d'instabilité numérique* à cause du schéma d'intégration utilisé ;
- et des *problèmes de convergence lente* pour des gros maillages : convergence linéaire en le nombre de sommets dans le meilleur des cas.

Le problème du rétrécissement a été abordé par Taubin [Tau95] qui propose un filtrage Gaussien basé sur une combinaison linéaire de \mathcal{U} et $\mathcal{U} \circ \mathcal{U}$, $(\lambda + \mu)\mathcal{U} - \lambda\mu\mathcal{U}^2$ où λ et μ sont choisis de manière à obtenir un filtre stable, qui minimise l'effet de rétrécissement en amplifiant les basses fréquences. Cependant, le choix des paramètres pour obtenir un lissage stable et non-amincissant est fortement dépendant du maillage traité. Desbrun et al. [DMSB99] ont proposé une méthode automatique, de complexité linéaire en le nombre de triangles, pour lisser en préservant le volume du maillage, qui consiste à amplifier les basses fréquences pour exactement compenser l'atténuation des hautes fréquences.

Le problème de la perte de certains détails et du contrôle de la position de certains sommets a été traité dans la littérature : un point p_i peut rester fixe simplement en imposant $\mathcal{U}(p_i) = 0$; d'autres contraintes dures plus complexes peuvent être prises en compte, comme fixer un sommet à rester le long d'un segment ou sur un plan [BW98, DMSB99]. Il est possible de fixer des contraintes souples, comme choisir un facteur d'amortissement par sommet du maillage, pour par exemple moins lisser certaines zones du maillages, en particulier celles qui contiennent des détails importants [DMSB99].

Les problèmes d'instabilité numérique et de convergence lente peuvent être traités grâce à un schéma d'intégration implicite. La condition de stabilité pour un schéma d'intégration Euler explicite présenté dans l'équation (1.2) est $\lambda dt < 1$ [DMSB99]. Quand le maillage est gros cette restriction sur le pas de temps demande des centaines d'intégrations pour que le lissage soit apparent. Le lissage Laplacien implicite, $(I - \lambda dt \times \mathcal{U})(p^{n+1}) = p^n$, est stable inconditionnellement et converge plus vite : des pas de temps plus larges que pour le schéma Euler explicite peuvent être utilisés, ce qui est très intéressant pour de gros maillages et pour de grands facteurs d'amortissement. La matrice à inverser $(I - \lambda dt \times \mathcal{U})$ est creuse, chaque sommet intervenant environ 6 fois sur un maillage surfacique triangulaire, et cela peut être réalisé efficacement par une méthode de gradient bi-conjugué pré-conditionné [DMSB99].

Le problème principal de l'opérateur parapluie, c'est qu'il traite similairement les hautes et basses fréquences. Cela peut être corrigé en utilisant l'opérateur parapluie dépendant de l'échelle [Fuj95, DMSB99] :

$$\mathcal{U}_e(p_i) = \frac{2}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} |e_{ij}|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{(p_j - p_i)}{|e_{ij}|} \quad (1.3)$$

où $|e_{ij}|$ est la longueur de l'arête e_{ij} entre les sommets i et j . Expérimentalement, pour un maillage extrêmement régulier, cela diminue les distorsions géométriques, mais en cas de maillage irrégulier, voire fortement irrégulier contenant beaucoup de sommets extraordinaires avec une variation brutale de la longueur des arêtes, l'opérateur parapluie dépendant de l'échelle est plus instable que celui qui est indépendant de l'échelle.

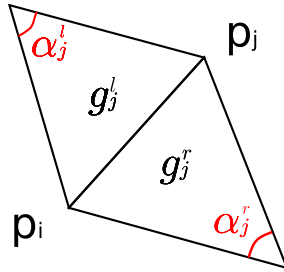


FIGURE 1.6 – Illustration des variables de l'équation (1.4).

Les opérateurs présentés jusqu'à présent ne permettent pas de contrôler l'échantillonnage de la surface. Si un lissage Laplacien est désiré pour débruiter, améliorer la forme des triangles et obtenir un échantillonnage uniforme, alors Alliez et al. [ADM02] ont proposé :

$$\mathcal{U}_u(p_i) = \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} |g_j^l|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(|g_j^l| \cot \alpha_j^l + |g_j^r| \cot \alpha_j^r \right) (p_j - p_i) \quad (1.4)$$

qui minimise la distorsion d'aires. Soit e_{ij} l'arête entre les sommets i et j . g_j^l et g_j^r sont, respectivement, les triangles à gauche et à droite de l'arête e_{ij} . α_j^l et α_j^r sont, respectivement, les angles opposés à l'arête e_{ij} , à gauche et à droite de l'arête e_{ij} . La figure 1.6 présente un schéma explicatif. Il est possible de contrôler plus finement la distribution des sommets sur la surface, en remplaçant les aires par des poids dépendants d'une carte de contrôle. Par exemple, il est

possible de faire du remaillage sensible à la courbure en intégrant une quantité de courbure sur les triangles.

Autres opérateurs locaux

Il existe deux autres variantes d'opérateurs locaux souvent utilisés dans la littérature, un *opérateur de flot de courbure* [DMSB99, MDSB02] conçu pour lisser/débruiter en préservant la forme du maillage sans déplacer pour "rien" les sommets dans les zones plates :

$$K(p_i) = \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\cot \alpha_j^l + \cot \alpha_j^r)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\cot \alpha_j^l + \cot \alpha_j^r) (p_i - p_j), \quad (1.5)$$

et un *opérateur de lissage basé angle* [SG04], conçu pour égaliser les angles des triangles :

$$A(p_i) = \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} 1/\beta_j^2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{\beta_j^2} p'_i \quad (1.6)$$

où α_j^l et α_j^r sont les angles présentés dans la figure 1.6. β_j est l'angle $\angle p_{j-1}p_jp_{j+1}$ et p'_i représente le point p_i ayant subi une rotation autour de p_j de telle sorte qu'il se trouve maintenant sur la droite bissectrice de l'angle β_j . La longueur de l'arête entre les sommets i et j est conservée. La figure 1.7 est un schéma explicatif. La version présentée du lissage basé angle est celle pondérée par les angles β_j de telle sorte à donner plus d'importance aux plus petits angles ; cela permettra d'obtenir plus fréquemment une position $A(p_i)$ valide, c'est-à-dire qui n'inverse pas localement la normale d'un triangle. L'opérateur de flot de courbure ne nous intéresse pas dans cette thèse, car il ne permet pas d'améliorer la qualité des triangles et il peut même parfois la dégrader, alors que nous recherchons des opérateurs qui permettent à la fois l'amélioration de la qualité des triangles et le contrôle de l'échantillonnage résultant.

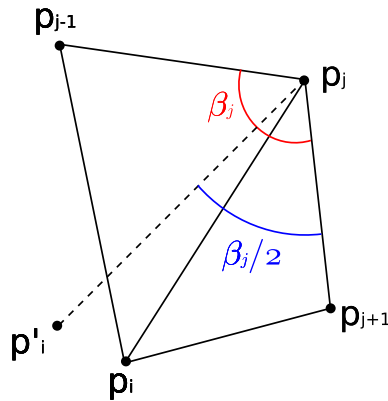


FIGURE 1.7 – Illustration des variables de l'équation (1.6).

Pour terminer cette section sur les opérateurs locaux, il est important d'insister sur le fait que les opérateurs locaux présentés ont des propriétés différentes, et en particulier lorsqu'un opérateur local n'arrive pas à améliorer localement la forme des triangles (e.g. parce qu'il inversera des

triangles ou qu'il diminuera l'angle minimal des triangles en jeux), un autre opérateur local peut le faire. Dans cet ordre d'idées, Surazhsky et Gotsman [SG04] ont proposé d'appliquer sur un sommet le lissage Laplacien lorsque le lissage basé angle n'arrive pas à améliorer la forme des triangles adjacents au sommet. Et de plus, cette combinaison permet, expérimentalement, d'accélérer la convergence de l'algorithme de relaxation.

Égalisation d'aires

L'idée est d'utiliser l'aire des triangles comme un des critères d'optimisation du maillage pour essayer d'avoir des triangles avec une aire la plus proche possible d'une aire de triangle moyenne [SG04]. L'égalisation locale d'aire est un processus itératif, au cours duquel à chaque itération chaque sommet est repositionné de telle sorte que ses triangles incidents aient des aires les plus égales possibles. Cette approche peut donner des maillages avec des triangles bien formés (équilatéraux) uniquement lorsque la valence des sommets est la plupart du temps de 6 à l'intérieur et de 4 aux bords (maillages extrêmement réguliers). Dans le cas d'un maillage irrégulier, cette approche produira beaucoup de triangles longs et aplatis, elle ne peut donc être utilisée seule.

Surazhsky et Gotsman [SG04] ont découvert que des triangulations 2D avec des triangles ayant des aires égales ont une distribution des sommets sur leur domaine qui est globalement uniforme. Ils ont proposé un algorithme de remaillage dans l'espace des paramètres basé sur une alternance d'égalisation d'aire avec des basculements d'arête (cf. figure 1.8) améliorant l'angle minimal parmi les 6 angles en jeux. Ils ont aussi montré dans leurs résultats expérimentaux que cet algorithme est meilleur que l'algorithme qui consiste à alterner le lissage basé angle avec des basculements d'arête. Cette technique a été étendue à l'égalisation locale des aires de Voronoï des sommets [BK04a].

Ces techniques d'égalisation locale d'aire, bien qu'efficaces, ne sont pas un moyen facile pour distribuer globalement un ensemble d'échantillons selon une fonction de densité, contrairement à l'opérateur local présenté dans l'équation (1.4).

1.4.2 Approches basées sur du repositionnement global de sommets

Dans cette section, le repositionnement des sommets est vu comme un problème d'optimisation continue globale. Le repositionnement global signifie ici que le calcul de la nouvelle position d'un sommet dépend de plus de sommets que ses voisins directs. Cela se traduit généralement par la minimisation d'une fonction objectif mettant en jeu les positions de tous les sommets du maillage.

Système de particules

Une des premières méthodes de remaillage avec contrôle de l'échantillonnage a été proposée par [Tur92]. L'algorithme est basé sur un système de particules fonctionnant par attraction-répulsion, et demande la propagation d'un ensemble de particules - les nouveaux sommets - sur

le maillage original jusqu'à convergence. Pour des questions de rapidité, seuls les voisins compris dans un petit voisinage du sommet en question, défini par un rayon, sont utilisés pour calculer la nouvelle position du sommet à partir des forces d'attraction-répulsion exercées par ses voisins.

Optimisation globale basée sur des systèmes d'équations

Les méthodes présentées ici supposent que le nombre de sommets ainsi que la connectivité du maillage ne changent pas. Seules les positions des sommets "libres", certains sommets étant interdits de se déplacer, peuvent être modifiées. En prenant en compte des contraintes de positions relatives entre les sommets, par exemple un sommet doit exactement être le barycentre de ses voisins, et des contraintes de distances à la surface initiale pour chaque sommet, le problème de repositionnement des sommets peut être formulé comme un problème d'optimisation linéaire creux résolvable au sens des moindres carrés [NISA06, LTJW07, WHG08].

Diagramme de Voronoï centroïdal

Définition 15. *Étant donné un ensemble de n points $p = \{p_1, \dots, p_n\}$ appartenant à un fermé $\bar{\Omega}$ de \mathbb{R}^d , la **région de Voronoï** $Vor(i)$ d'un sommet p_i est composée de l'ensemble des points de l'ouvert Ω plus proche de p_i que de tous les autres points p_j , $j \neq i$.*

$$Vor(i) = \{p \in \Omega \mid \|p_i - p\|_k < \|p_j - p\|_k, \forall j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i\} \quad (1.7)$$

où $\|\cdot\|_k$ est la norme L_k . La norme généralement utilisée est la norme L_2 (distance Euclidienne).

Il est aussi possible d'utiliser la distance géodésique à la place des normes L_k pour les maillages surfaciques, mais cette possibilité est peu utilisée dans la pratique, car très coûteuse en calculs, et nous préférons donc la définition réduite aux normes L_k .

Définition 16. *Étant donné un ouvert Ω de \mathbb{R}^d , l'ensemble $Vor = \{Vor(i)\}_{i=1}^n$ est appelé **diagramme de Voronoï** d' Ω si $Vor(i) \subset \bar{\Omega} \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $Vor(i) \cap Vor(j) = \emptyset$ si $j \neq i$, et $\bigcup_{i=1}^n \overline{Vor(i)} = \bar{\Omega}$.*

Définition 17. *Un **diagramme de Voronoï centroïdal** est un diagramme de Voronoï dans lequel les générateurs p_i des cellules de Voronoï sont confondus avec leur centre de masse de leur région correspondante.*

Un diagramme de Voronoï centroïdal a la propriété suivante : lorsque toutes les cellules de Voronoï ont une masse uniformément répartie, la distribution des générateurs sur le domaine est uniforme et isotrope. Dans le cas général avec une fonction de densité ρ définie sur le domaine Ω , il peut être montré que le diagramme de Voronoï centroïdal minimise l'énergie suivante :

$$F = \sum_i \int_{Vor(i)} \rho(p) \|p_i - p\|_k^k dp. \quad (1.8)$$

La norme L_k permet de contrôler la forme des cellules de Voronoï : généralement $k \geq 2$ et plus k est grand plus la forme de la cellule de Voronoï devient "carrée". La fonction de densité

ρ permet de contrôler la taille des cellules de Voronoï. L'énergie de l'équation (1.8) représente pour une seule cellule de Voronoï $Vor(i)$ l'énergie d'un ressort, de longueur de repos nulle et de constante $\rho(p)$, accroché au point p_i pour tous les points de la cellule de Voronoï (intégrale sur la cellule de Voronoï associée au point p_i). Ainsi, lors de la minimisation les points dans $Vor(i)$ les plus éloignés de p_i vont tirer vers eux le point p_i . Un diagramme de Voronoï centroïdal optimise donc la compacité des cellules de Voronoï et est associé à un échantillonnage isotrope. La première question que l'on peut se poser avec cette énergie à minimiser est "pourquoi une cellule de Voronoï ne pourrait-elle pas s'écraser sur elle-même?". Cela s'explique par la présence de plusieurs cellules et par la contrainte de paver le domaine sur lequel se trouve les points p .

La construction d'un diagramme de Voronoï centroïdal peut se faire en utilisant un algorithme d'agglomération (*clustering* en anglais) de type *k-moyennes*, l'*algorithme de relaxation de Lloyd* [Llo82]. Une variante de ce type d'algorithme a été plus récemment utilisée dans le cadre de la segmentation de maillages surfaciques avec la méthode d'approximation de formes VSA (*Variational Shape Approximation* en anglais) [CSAD04, WK05]. Cet algorithme alterne un partitionnement de Voronoï avec le repositionnement des générateurs, les p_i , vers leur centre de masse b_i de leur cellule de Voronoï respective. Il s'agit d'une descente de gradient, car le gradient de F par rapport à un générateur p_i , $\nabla F|_{p_i} = 2m_i(p_i - b_i)$ s'annule lorsque $p_i = b_i$, m_i étant la masse de $Vor(i)$. Cette procédure de relaxation génère, après convergence, un diagramme de Voronoï centroïdal (point stationnaire de F), dans lequel les générateurs sont confondus avec les centroïdes de leur cellule de Voronoï [DFG99]. La relaxation de Lloyd usuelle utilise comme métrique la distance euclidienne (norme L_2), ce qui fait d'elle un processus applicable seulement sur des plans. Pour utiliser la relaxation de Lloyd comme algorithme intermédiaire d'une méthode de remaillage surfacique, Alliez et al. [AdVDI03] se servent d'une paramétrisation planaire globale et conforme (qui conserve les angles), appliquent la relaxation dans l'espace des paramètres avec une fonction de densité conçue pour compenser les distorsions d'aires dues à l'aplatissement du maillage sur un domaine planaire. Pour éviter les problèmes de fortes distorsions isopérimétriques, ainsi que le problème des découpes artificielles des maillages fermés ou de genre élevé (>0), Surazhsky et al. [SAG03] passent par un ensemble de paramétrisations locales qui se chevauchent. Toujours à cause des paramétrisations conformes, l'approche de Surazhsky et al. [SAG03] n'est pas équivalente à la vraie relaxation, i.e. celle qui est basée sur des distances géodésiques. Peyré et Cohen [PC04] ont proposé une approximation du *diagramme de Voronoï géodésique* directement sur la surface, en particulier grâce au calcul du barycentre intrinsèque d'une cellule de Voronoï sur la surface. Cependant, le calcul exact du diagramme de Voronoï géodésique est encore un problème difficile et les algorithmes d'approximation existants sont trop coûteux pour être utilisés dans des applications temps-réel [YLL⁺09]. Le *diagramme de Voronoï restreint* [ES97] est une approximation du diagramme de Voronoï géodésique, qui consiste à utiliser la distance Euclidienne à la place de la distance géodésique, à calculer le diagramme de Voronoï 3D, et à l'intersecter avec la surface du maillage surfacique. Cette approximation est assez bonne en particulier lorsque la densité des sommets est importante. Le diagramme de Voronoï restreint a longtemps été calculé de manière approchée, e.g. par *clustering* [VC04, VCP08],

puis a été calculé récemment de manière exacte [YLL⁺09].

Une fois qu'un diagramme de Voronoï centroïdal (2D, ou 3D approché ou 3D géodésique) est obtenu pour un maillage, il suffit de calculer la triangulation duale de ce diagramme, la triangulation de Delaunay centroïdale (restreinte ou pas en fonction de l'algorithme utilisé) pour obtenir un maillage isotrope avec des triangles très bien formés. Ainsi les méthodes CVT (*pour Centroidal Voronoi Tessellation* en anglais) permettent d'avoir un contrôle fin de la distribution des sommets grâce à une fonction de densité bien choisie et d'obtenir un maillage de grande qualité (sans considérer l'erreur géométrique d'approximation) au regard de la qualité moyenne des triangles et de la valence de sommets. Il est aussi possible de préserver les caractéristiques d'un maillage avec une méthode CVT, en fixant des poids qui pénalisent le déplacement d'un sommet sur une caractéristique saillante (e.g. un coin). Néanmoins, des problèmes subsistent avec les petits angles sur les arêtes vives. Les méthodes CVT font donc partie des méthodes de haute qualité et elles permettent d'optimiser la position des sommets tout en améliorant fortement la qualité de la connectivité d'un maillage irrégulier. Cependant, la vitesse de convergence de la relaxation de Lloyd est lente ce qui pose problème lorsque des maillages de plusieurs millions de sommets doivent être traités. Récemment, une approche quasi-Newton pour minimiser l'énergie de l'équation (1.8) pour calculer le diagramme de Voronoï restreint [YLL⁺09] a été prouvée beaucoup plus rapide que la relaxation de Lloyd : vitesse de convergence quadratique en le nombre de sommets pour l'approche quasi-Newton, et en général atteint la précision numérique de la machine ; vitesse de convergence linéaire en le nombre de sommets pour la relaxation de Lloyd, et n'atteint pas en général la précision numérique de la machine.

Les approches CVT sont très puissantes en pratique, mais elles souffrent d'un manque de contrôle local des modifications, sans lequel il n'est pas possible d'obtenir des garanties théoriques sur le maillage triangulaire obtenu à la fin, par exemple une garantie d'amélioration de la qualité en terme d'angles, de valence des sommets, ou une garantie en terme de fidélité à la surface initiale. De plus, l'obtention d'un échantillonnage bien adapté à la surface passe par l'utilisation d'une carte de densité spécifiant la taille désirée des éléments. Les approches CVT ne sont pas capables d'adapter automatiquement le nombre de points dans une zone du maillage en fonction, par exemple, de la courbure. Cela est dû au fait que l'énergie (1.8) à minimiser ne prend pas en compte de terme de budget de sommets et d'erreur par rapport à la surface initiale.

1.5 Remaillage basé sur une optimisation explicite de la connectivité

Lorsque le repositionnement des sommets préserve la connectivité initiale, par exemple en utilisant des opérateurs locaux, il peut être intéressant de régulariser la connectivité, i.e. essayer d'obtenir des sommets de degré 6 à l'intérieur et de degré 4 aux bords. Cela permet en effet d'aller plus loin dans l'amélioration de la qualité du maillage, notamment pour obtenir plus de triangles équilatéraux. Lorsque la qualité d'un maillage doit être améliorée dans des durées

acceptables, quelques secondes pour un maillage de quelques dizaines de milliers de triangles, les algorithmes gloutons sont une approche intéressante, car ils prennent des décisions locales qu'ils ne remettent jamais en cause.

Dans cette section, l'optimisation explicite de la connectivité est vue comme un problème d'optimisation discrète ou combinatoire.

1.5.1 Modification locale de la connectivité

Opérations de base

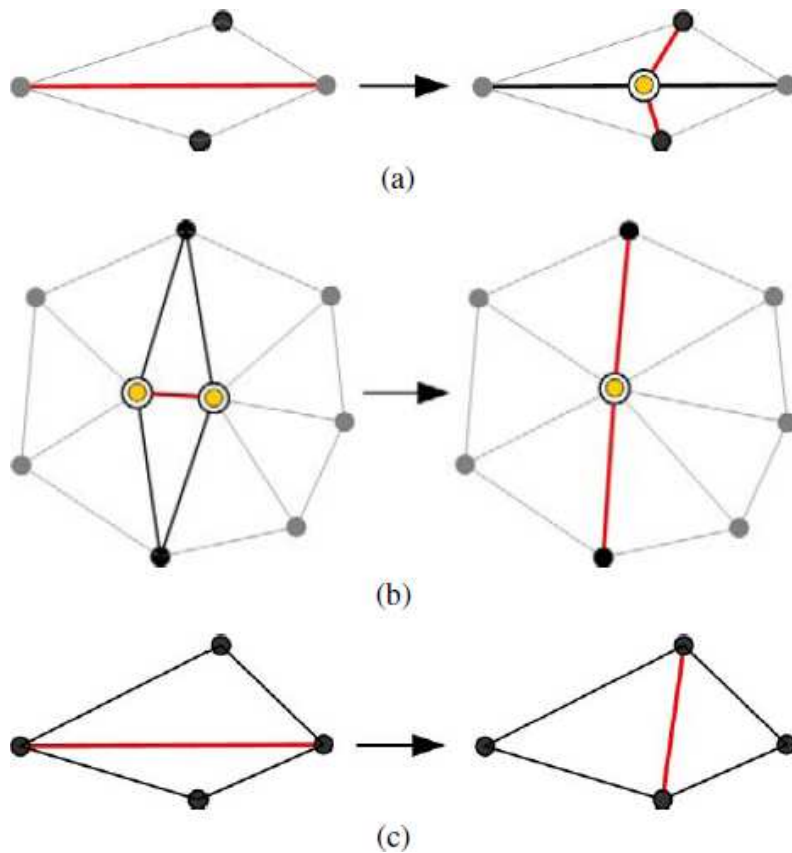


FIGURE 1.8 – Opérations locales de base sur les arêtes. De haut en bas : (a) Découpe d'arête ; (b) Contraction d'arête ; (c) Basculement d'arête. Image reproduite de [YGZW07].

Le *basculement d'arête* (*edge flip* ou *edge swap* en anglais) est certainement l'opération la plus utilisée. Elle consiste à “faire tourner” une arête partagée par deux triangles pour former 2 nouveaux triangles qui remplacent les 2 anciens. Voici quelques critères gloutons de basculement d'arête qui sont très utilisés :

- faire un basculement d'arête s'il améliore l'angle minimal parmi les 6 angles (car 2 triangles) en jeu (en 2D on parle de basculement de Delaunay) ;
- faire un basculement d'arête s'il améliore le plus mauvais ratio d'aspect parmi les 2 tri-

angles ;

- faire un basculement d’arête s’il améliore le plus mauvais ratio de rayons parmi les 2 triangles.

Une *contraction d’arête* (*edge collapse* en anglais) consiste à fusionner en un seul sommet les deux sommets d’une arête : le ou les triangles qui partageaient cette arête sont détruits et il faut choisir la position du sommet ainsi obtenu. Cette position peut être choisie de manière à optimiser une fonction objectif. S’il n’y a pas de fonction objectif à optimiser, la position du milieu de l’arête est choisie, sauf si un des deux sommets est un coin, car dans ce cas la position du coin est préférée pour moins dégrader la géométrie. Voici quelques critères gloutons de contraction d’arête très utilisés :

- faire une contraction d’arête si le degré des deux sommets est strictement inférieur au degré optimal [SG03] ;
- faire une contraction d’arête sur une arête qui minimise la variation des normales [CKL08] des triangles en jeux dans la contraction ;
- faire une contraction d’arête sur une arête qui introduit le moins d’erreur géométrique (e.g. *Quadric Error Metric - QEM* [GZ05]).

Pour le basculement d’arête et la contraction d’arête, il y a aussi des critères sémantiques :

- faire un basculement ou une contraction d’arête seulement si la topologie est préservée ;
- faire un basculement seulement si l’arête n’est pas une arête caractéristique ;
- faire un basculement d’arête seulement si l’angle dièdre de l’arête à basculer n’augmente pas trop (seuil à fixer) [HDD⁺93] ;
- faire une contraction d’arête seulement si l’angle dièdre maximal sur toutes les arêtes adjacentes à l’arête contractée n’augmente pas trop (seuil à fixer) [HDD⁺93].

Une *découpe d’arête* (*edge split* en anglais) consiste à découper une arête d’un maillage en deux ; un sommet est ajouté et le ou les triangles qui partageaient l’arête découpée sont découpés en deux triangles. Une découpe d’arête n’introduit pas d’erreur géométrique, mais introduit un sommet de valence 4 à l’intérieur et de valence 3 aux bords. Voici un critère glouton de découpe d’arête très utilisé : faire une découpe d’arête si le degré des deux sommets est strictement supérieur au degré optimal [SG03].

Pour contrôler l’échantillonnage, il est possible d’utiliser des contractions d’arêtes et des découpes d’arêtes, mais il est difficile de contrôler la répartition des sommets par ce procédé, car les critères gloutons utilisés sont restrictifs et parce que l’on ne veut pas introduire trop de sommets extraordinaires, l’objectif final étant en partie de diminuer le nombre de sommets extraordinaires.

Dans quel ordre tester les opérations locales ?

Une fois que l’on connaît toutes les opérations locales autorisées, ainsi que leurs conditions d’application, se pose la question d’ordonner les opérations locales sur un ensemble d’arêtes candidates. Hoppe et al. [HDD⁺93] appliquent les contractions d’arête, puis les basculements

d'arêtes et finalement les découpes d'arêtes dans cet ordre. Chaque fois qu'une opération locale est rejetée, on propose la suivante sauf si la liste des opérations locales a été parcourue complètement, auquel cas on passe à une autre arête dans la liste des arêtes candidates. Il faut bien comprendre que cet ordre a été choisi pour favoriser les contractions d'arêtes, car l'objectif de [HDD⁺93] est d'obtenir un maillage le plus compact possible. En général, lorsqu'on cherche à régulariser la connectivité sans trop changer le nombre de sommets (e.g. [SG03]), les basculements d'arête sont testés en premier. Lorsqu'une opération locale est acceptée, ses arêtes voisines sont mises à jour dans la file de priorité des arêtes candidates.

Approche aléatoire

Alliez et al. [AMD02] proposent de choisir aléatoirement une arête non caractéristique et de faire un basculement d'arête si ce dernier permet de diminuer strictement la dispersion de la valence (cf. équation 1.9). Cette approche permet de diminuer le nombre de sommets extraordinaires. De plus, avec les basculements aléatoires il est possible d'utiliser d'autres critères comme faire un basculement qui améliore le ratio d'aspect du plus mauvais triangle ou qui améliore l'angle minimal parmi les 6 angles en jeu ; ce critère peut même être la diminution d'une fonction d'énergie.

1.5.2 Modification globale de la connectivité

Triangulation de Delaunay

Le fait de transformer une triangulation quelconque en une triangulation de Delaunay est considéré comme de l'optimisation globale de l'angle minimal présent dans le maillage. Il est bien connu que parmi toutes les triangulations possibles de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points dans \mathbb{R}^2 , la triangulation de Delaunay maximise l'angle minimal [Raj94] et cela globalement. Cette propriété est généralement considérée comme un critère de qualité, et cette propriété avec l'existence d'un algorithme de construction incrémental très efficace a rendu la triangulation de Delaunay très populaire. En fait, la triangulation de Delaunay est garantie de maximiser en moyenne la longueur du rayon des cercles inscrits aux triangles [Lam94], ce qui est en soit une garantie sur le faible nombre de triangles allongés.

Approche semi-globale

Surazhsky et Gotsman [SG03] proposent, dans le cadre de la régularisation du degré des sommets, une stratégie semi-globale pour minimiser l'énergie suivante :

$$\mathcal{R}(M) = \sum_{s \in \mathcal{S}} (d(x_s) - d_{opt}(x_s))^2 \quad (1.9)$$

où M est un maillage triangulaire 2-variété, et $d(x_s)$ et $d_{opt}(x_s)$ sont, respectivement, le degré et degré optimal du sommet x_s . Le degré optimal est 4 aux bords et 6 à l'intérieur.

Un *basculement d'arête élémentaire* est un basculement d'arête (cf. figure 1.8) qui fait diminuer strictement l'énergie (1.9). Afin d'obtenir une configuration dans laquelle plus aucun basculement d'arête élémentaire n'est possible, des basculements élémentaires sont effectués, dans un ordre aléatoire, jusqu'à ce que plus aucun basculement élémentaire ne soit possible [AMD02]. Cette configuration se révèle être un mauvais minimum local de l'énergie (1.9), et Surazhsky et Gotsman [SG03] arrivent, à partir d'une configuration sans basculement d'arête élémentaire possible, à trouver un meilleur minimum de (1.9) avec la stratégie suivante :

- découpe des arêtes dont les deux sommets ont un degré strictement supérieur au degré optimal ;
- contraction des arêtes dont les deux sommets ont un degré strictement inférieur au degré optimal ;
- et déplacement par basculements successifs des arêtes, ayant un sommet de degré supérieur au degré optimal et un autre de degré inférieur au degré optimal, vers les sommets irréguliers du maillages.

A la fin de l'algorithme, il reste peu de sommets extraordinaires et ces derniers sont entourés de sommets réguliers.

Recuit simulé

Yue et al. [YGZW07] ont utilisé le recuit simulé pour minimiser l'énergie de l'équation (1.9). De temps en temps, avec une certaine probabilité qui décroît au cours de l'optimisation, une opération locale qui augmente l'énergie est autorisée. Cela permet d'atteindre des minima locaux meilleurs que la méthode de [SG03]. Néanmoins, la convergence du recuit simulé est très lente, ce qui le rend peu utilisable dans la pratique, car la norme est de traiter des maillages de plusieurs centaines de milliers de sommets. De plus, même si la convergence théorique du recuit simulé vers le minimum global a été prouvée, dans la pratique on obtient seulement un bon minimum local.

1.6 Discussion sur la forme des fonctions objectifs à optimiser

Dans ce chapitre, il a été fait mention à plusieurs reprises d'optimisation de fonction objectif pour améliorer un maillage. De plus, nos travaux sur le remaillage, présentés dans le chapitre 5, traitent du remaillage à l'aide de la minimisation d'une fonction objectif. La fonction objectif contient un terme de fidélité à la surface initiale et des termes énergétiques liés à la connaissance a priori sur ce qu'est un bon maillage. Cette formulation du problème de remaillage est intéressante en particulier pour trouver les meilleurs compromis entre les différentes demandes d'un utilisateur en termes de nombre de primitives géométriques, d'échantillonnage, de régularité, de gradation et de qualité. C'est pourquoi, nous pensons qu'il est nécessaire de faire le point sur ce qu'est un problème d'optimisation de maillage bien posé.

Tout d'abord, le minimum de la fonction objectif doit être bien défini. Hoppe et al. [HDD⁺93]

présentent un exemple d'optimisation d'une fonction où le minimum n'existe pas, ce qui donne des résultats déplaisants sur le maillage optimisé. Il faut parfois ajouter des termes énergétiques de régularisation pour que le minimum soit bien défini. Un exemple de terme énergétique régularisateur est l'énergie TP (*Thin Plate energy* en anglais) utilisée en reconstruction de surface ou réparation de trous.

Un autre problème est d'obtenir des résultats invariants à l'échelle. Cela peut se traiter par deux approches. Soit les termes énergétiques utilisés dans la fonction d'énergie sont sans unité, soit le maillage d'entrée est normalisé pour tenir dans le cube unité et dé-normalisé à la fin de l'optimisation.

Pour que la minimisation d'une fonction objectif soit facile, c'est-à-dire pour laquelle une descente de gradient peut donner un minimum global, il faut qu'elle soit continue, différentiable et convexe dans le cas d'une minimisation, et concave dans le cadre d'une maximisation.

1.6.1 Sur les méthodes présentées

En ce qui concerne les méthodes de remaillage surfacique présentées, les modifications des maillages, qui ont lieu explicitement sur le maillage ou dans l'espace des paramètres, sont de deux formes. Il y a des approches gloutonnes et des approches globales (variationnelles et par résolution d'un système linéaire). L'avantage des approches gloutonnes est que l'on peut obtenir des garanties grâce au contrôle local des modifications. D'un autre côté, les approches globales plus gourmandes en calculs ne permettent pas d'obtenir de garanties (e.g. sur l'angle min), à cause de la perte du contrôle local des modifications sur les sommets sans contrainte dure. Elles donnent néanmoins des résultats visuellement plaisants, d'où leur succès dans la communauté de l'informatique graphique.

Les problèmes des approches existantes soulèvent plusieurs questions, qui sont énumérées ci-dessous.

- Serait-il possible de faire de l'optimisation globale en contrôlant localement les modifications ?
- Qu'est-ce qu'on peut dire de la qualité du minimum trouvé pour une fonction objective non-restreinte à être convexe 2 fois différentiables ?
- Puisque les méthodes de relaxation globale des positions des sommets sont coûteuses en calculs et ne permettent pas d'avoir un contrôle précis de la position d'un sommet ainsi que de sa connectivité, pourquoi ne pas échantillonner directement la surface de manière à respecter les besoins utilisateur, puis appliquer des méthodes d'optimisation gloutonnes pour aller vers le minimum local le plus proche ?
- Dans le même ordre d'idées, pourquoi ne pas échantillonner un maillage avec une densité uniforme élevée, tout en respectant la longueur minimale d'une arête d'un triangle et la capacité mémoire de la machine, puis mixer une optimisation de la connectivité et la suppression gloutonne de sommets jusqu'à obtenir le même nombre de sommets que le maillage initial ou un nombre de sommets donné par un utilisateur ? Bien entendu, il

faudrait échantillonner de telle sorte à éviter le problème d'aliasing [VRKS01] : lorsqu'on retriangule, il faut faire attention à bien obtenir des arêtes alignées le long de chaque caractéristique.

- Serait-il possible de contrôler la forme des triangulations autorisées ?

Nous tentons de répondre à ces questions dans le chapitre 5.

1.6.2 Sur les garanties des méthodes présentées

Dans ce chapitre, les garanties qualitatives de chaque méthode n'ont pas été mises en valeur, et en particulier aucun état de l'art sur les méthodes de remaillage triangulaire 2-variété avec garanties (e.g. [ND96, BOG02]) n'a été effectué. Ce choix se justifie, car ce chapitre a été orienté optimisation de maillage plus dans le cadre de la communauté du graphique que de la communauté de l'analyse numérique des maillages.

Chapitre 2

Les champs aléatoires de Markov et champs aléatoires conditionnels

Résumé - Ce chapitre introduit un modèle graphique probabiliste qui sera utilisé dans les chapitres suivants, les champs aléatoires de Markov. Les thématiques suivantes sont développées : une introduction générale sur les modèles graphiques probabilistes, l'utilisation des champs aléatoires de Markov, les différences fondamentales entre les modèles génératifs et discriminants, l'apprentissage des paramètres d'un champ aléatoire, ainsi que l'estimation de la configuration optimale associée à un champ aléatoire.

2.1 Introduction sur les modèles graphiques probabilistes

Les notions de probabilité élémentaires sont rappelées en annexes, section 1.

Les modèles graphiques probabilistes sont des représentations graphiques de distributions de probabilité, qui ont des propriétés très utiles et qui rendent la manipulation algébrique des modèles probabilistes plus facile. L'intérêt de l'utilisation des graphes est double :

- les graphes permettent de construire des systèmes complexes basés sur la combinaison de sous-graphes simples qui sont reliés par des relations ;
- les graphes sont une structure de données associée à plusieurs algorithmes efficaces.

Dans le reste de cette section, tous les concepts importants liés aux modèles graphiques probabilistes sont introduits.

Définition 18. Une *variable aléatoire* est une application d'un univers de cas possibles \mathcal{L} vers le corps des réels. Elle est caractérisée par une mesure de probabilité associée à tous ses états possibles.

Définition 19. Une *étiquette* est une valeur admissible pour une variable aléatoire d'un modèle graphique. L'ensemble des étiquettes possibles est noté \mathcal{L} .

Définition 20. Un *site* est un sommet qui représente une variable aléatoire ou un groupe de variables aléatoires. \mathcal{S} désigne l'ensemble des sites ou sommets d'un modèle graphique.

Par exemple, pour un problème de détection d'arêtes saillantes sur un maillage (chapitre 3), les sites sont associés aux arêtes d'un maillage (cf. figure 2.2) et l'ensemble des étiquettes possibles est $\mathcal{L} = \{\text{saillante}; \text{non - saillante}\}$.

Définition 21. Soit $X = \{X_1, \dots, X_{|\mathcal{S}|}\}$ une famille de variables aléatoires définie sur l'ensemble \mathcal{S} dans laquelle chaque variable aléatoire prend une valeur $x_i \in \mathcal{L}$. La famille X est appelée un **champ aléatoire**.

Les notations suivantes sont utilisées :

- une lettre majuscule indicée X_i représente une variable aléatoire et une lettre minuscule indicée x_i une réalisation de la variable aléatoire X_i ;
- une lettre majuscule X désigne une famille de variables aléatoires et une lettre minuscule x une réalisation de la famille de variables aléatoires X ;
- $X_i = x_i$ signifie l'évènement X_i prend la valeur x_i ;
- $X = x$, avec $x = \{x_1, \dots, x_{|\mathcal{S}|}\}$ une configuration possible de X , correspond à cette réalisation du champ ;
- la probabilité qu'une variable aléatoire X_i prenne la valeur x_i est notée $P(X_i = x_i)$ ou $P(x_i)$ pour simplifier ;
- la probabilité jointe du choix d'une configuration est notée $P(X = x)$ ou $P(x)$ pour alléger la notation.

Définition 22. Un **arc** est un lien directionnel, ou encore à un seul sens, entre deux sites ou sommets dans un graphe orienté. Un **graphe orienté** contient des sommets et des arcs.

Définition 23. Une **arête** est un lien sans direction, ou encore à double sens, entre deux sites ou sommets dans un graphe non-orienté. Un **graphe non-orienté** contient des sommets et des arêtes.

Les liens (arc et arête) entre les nœuds font ressortir des relations de dépendance conditionnelle entre les variables associées. Il existe deux grandes classes de modèles graphiques probabilistes, les *modèles graphiques orientés*, basés sur un graphe orienté tels que les réseaux bayésiens ou réseaux de croyance, et les *modèles graphiques non-orientés*, basés sur un graphe non-orienté tels que les champs aléatoires de Markov. Puisque nous nous intéressons aux champs aléatoires de Markov dans ce chapitre, la grande majorité des modèles graphiques présentés utilisent des arêtes pour connecter les sites, et la notion de voisinage introduite ci-dessous, est basée sur les arêtes.

Les sites dans \mathcal{S} sont liés les uns aux autres par un système de voisinage.

Définition 24. Un **système de voisinage** \mathcal{N} pour \mathcal{S} est défini comme :

$$\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_i | \forall i \in \mathcal{S}\} \tag{2.1}$$

où \mathcal{N}_i désigne l'ensemble des sites voisins du site i , c'est-à-dire les sites qui sont reliés à i par une arête. La **relation de voisinage** a les propriétés suivantes :

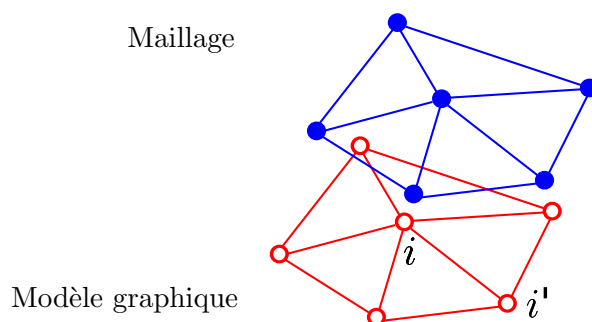


FIGURE 2.1 – Modèle graphique associé aux sommets d’un maillage triangulaire. Les sites i et i' sont des sites voisins ($i' \in \mathcal{N}_i$) et la notion de voisinage est celle induite par les arêtes du maillage.

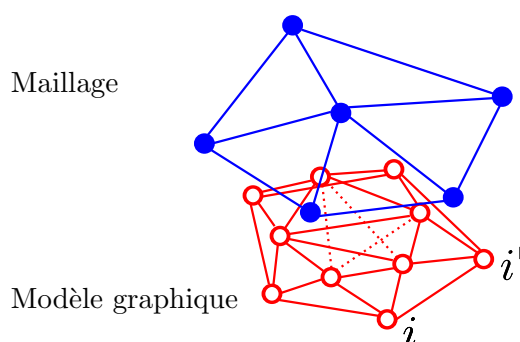


FIGURE 2.2 – Modèle graphique associé aux arêtes d’un maillage triangulaire. Les sites i et i' sont des sites voisins ($i' \in \mathcal{N}_i$) et la notion de voisinage est celle induite par les sommets du maillage.

1. un site n’est pas voisin de lui-même : $i \notin \mathcal{N}_i$;
2. la relation de voisinage est réciproque : $i \in \mathcal{N}_{i'} \Leftrightarrow i' \in \mathcal{N}_i$.

Trois exemples de modèle graphique avec leur voisinage sont présentés :

- un modèle graphique associé aux sommets d’un maillage triangulaire dans la figure 2.1 ;
- un modèle graphique associé aux arêtes d’un maillage triangulaire dans la figure 2.2 ;
- et un modèle graphique associé aux triangles d’un maillage triangulaire dans la figure 2.3.

Définition 25. La paire $(\mathcal{S}, \mathcal{N})$ est un **graphe** dans le sens usuel ; \mathcal{S} contient les nœuds et \mathcal{N} détermine les liens entre les nœuds selon la relation de voisinage.

Définition 26. Un **graphe complet** est un graphe pour lequel chaque sommet est relié à tous les autres : il existe une arête entre chaque paire de sommets.

Définition 27. Dans la théorie des graphes, une **clique** est un graphe non-orienté sur un sous-ensemble de sommets d’un graphe non-orienté tel qu’il existe une arête entre chaque paire de sommets de ce sous-ensemble : une clique est donc un sous-graphe non-orienté complet.

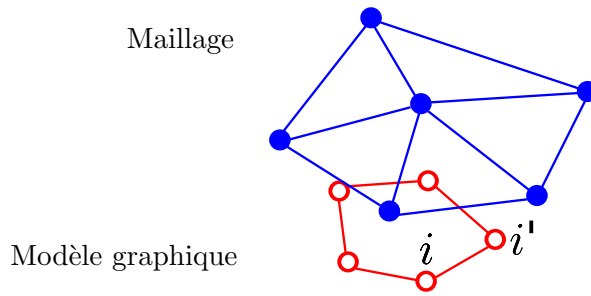


FIGURE 2.3 – Modèle graphique associé aux triangles d’un maillage triangulaire. Les sites i et i' sont des sites voisins ($i' \in \mathcal{N}_i$) et la notion de voisinage est celle induite par les arêtes du maillage.

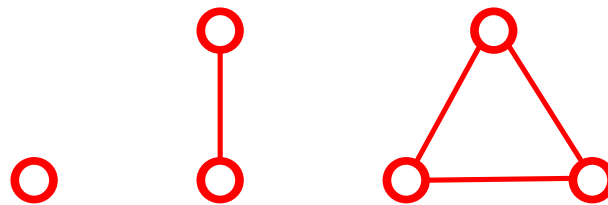


FIGURE 2.4 – Les trois types de cliques qui sont issus du modèle graphique associé aux sommets d’un maillage présenté dans la figure 2.1.

Une clique c pour $(\mathcal{S}, \mathcal{N})$ est définie comme un sous-ensemble de sites voisins : un seul site $c = \{i\}$, une paire de sites voisins $c = \{i, i'\}$, un triplet de sites voisins $c = \{i, i', i''\}$, etc. L’ensemble des cliques contenant n sites est noté \mathcal{C}_n . Les cliques du modèle graphique associé aux sommets d’un maillage sont présentées dans la figure 2.4.

2.1.1 Étiquetage et espace des configurations

L’étiquetage est le processus d’affectation de chaque site $i \in \mathcal{S}$ du champ aléatoire à une étiquette $x_i \in \mathcal{L}$. Nous nous restreignons dans cette thèse au cas où chaque site est affecté à une seule étiquette, ce qui permet de concevoir l’étiquetage comme une fonction de domaine \mathcal{S} et d’image \mathcal{L} ($x_i = x(i)$).

Définition 28. L’ensemble $x = \{x_1, \dots, x_{|\mathcal{S}|}\}$ est appelé **étiquetage** des sites de \mathcal{S} en fonction des étiquettes de \mathcal{L} . x est aussi appelé **coloriage** en informatique ou **configuration** dans la terminologie des champs aléatoires.

Nous supposons dans cette thèse que l’ensemble des étiquettes possibles est le même pour chaque site associé à un objet de même type. Par exemple deux sites associés à des arêtes d’un maillage auront le même domaine d’étiquetage \mathcal{L} , mais pas forcément un site associé à une arête et un autre associé à un triangle. Ainsi l’ensemble de tous les étiquetages possibles, l’espace des configurations, dans le cas où tous les sites sont associés à un objet de même type, est le produit Cartésien $\mathcal{L}^{|\mathcal{S}|}$. Si \mathcal{L} est un espace discret, la taille de l’espace $\mathcal{L}^{|\mathcal{S}|}$ est combinatoire :

$|\mathcal{L}|^{|\mathcal{S}|}$ configurations possibles. Dans le cas général où les étiquettes possibles pour chaque site ne sont pas forcément les mêmes, l'espace de toutes les configurations possibles sera noté \mathbb{L} .

2.1.2 Réseaux bayésiens

Définition 29. *Les réseaux bayésiens sont un modèle graphique orienté et sans circuit.*

Les réseaux bayésiens (*Bayesian networks* en anglais) sont utiles pour exprimer des relations de cause à effet entre les variables du modèle graphique, et ils sont souvent utilisés pour faire du raisonnement à partir d'informations incomplètes. Le raisonnement à partir de données incomplètes est l'étape d'inférence. Les réseaux bayésiens représentent graphiquement les indépendances conditionnelles entre les variables.

2.1.3 Champs aléatoires de Markov

Les champs aléatoires de Markov (*Markov Random Fields - MRF* en anglais) sont un modèle graphique non-orienté défini comme suit.

Définition 30. *X est un champ aléatoire de Markov défini sur \mathcal{S} respectant le système de voisinage \mathcal{N} , si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- $P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{L}$: positivité ;
- $P(x_i | x_{\mathcal{S} \setminus \{i\}}) = P(x_i | x_{\mathcal{N}_i})$: Markovianité.

où $\mathcal{S} \setminus \{i\}$ désigne l'ensemble des sites sauf le site i , $x_{\mathcal{S} \setminus \{i\}}$ est l'ensemble des étiquettes associées à ces sites, et $x_{\mathcal{N}_i}$ est l'ensemble des étiquettes associées aux sites voisins du site i .

La positivité est requise pour des besoins techniques, par exemple, lorsqu'elle est satisfaite, la probabilité jointe $P(x)$ de tout champ aléatoire est déterminée de manière unique par ses probabilités conditionnelles locales. La Markovianité décrit la caractéristique de localité d'un processus Markovien. Chaque site d'un champ aléatoire de Markov est conditionnellement indépendant de tous les autres nœuds en étant seulement conditionné sur ses sites voisins (sa **couverture de Markov**).

Un champ aléatoire de Markov peut avoir d'autres propriétés intéressantes que la Markovianité, comme l'homogénéité et l'isotropie. Il est *homogène* si $P(x_i | x_{\mathcal{N}_i})$ est indépendant de la position du site i dans \mathcal{S} : si $x_i = x_j$ et $x_{\mathcal{N}_i} = x_{\mathcal{N}_j}$ alors $P(x_i | x_{\mathcal{N}_i}) = P(x_j | x_{\mathcal{N}_j}) \forall i, j \in \mathcal{S}$. Il est *isotrope* si la probabilité jointe est indépendante de l'orientation des cliques.

2.1.4 Distribution jointe et graphe de dépendance

Distribution jointe associée à un modèle graphique orienté

Dans les graphes orientés, les variables sont conditionnées sur l'ensemble de leurs parents. La relation entre un graphe orienté donné et la distribution sur les variables correspondantes est donnée par la **propriété de factorisation** [Bis06] qui dit : *La distribution jointe définie par un graphe orienté est donnée par le produit, sur tous les nœuds du graphe, de la distribution*

conditionnelle pour chaque nœud conditionné sur les variables qui correspondent aux parents du nœud dans le graphe :

$$P(x) = \prod_{k=1}^n P(x_k | x_{k_1}, \dots, x_{k_j}, \dots) \quad (2.2)$$

où n désigne le nombre total de nœuds dans le graphe et X_{k_j} désigne la variable associée au j -ième parent du nœud associé à la variable X_k . Si les probabilités conditionnelles individuelles sont bien normalisées, alors la probabilité $P(X = x)$ est automatiquement normalisée. Un exemple de modèle graphique orienté avec sa distribution jointe est donné dans la figure 2.5.

Distribution jointe associée à un modèle graphique non-orienté

Avant de pouvoir expliciter la distribution jointe associée à un modèle graphique non-orienté, nous avons besoin de définir les concepts de *clique maximale*.

Définition 31. Une *clique maximale* est un ensemble de nœuds d'un graphe non-orienté qui sont complètement connectés (i.e. c'est une clique), dans lequel aucun autre nœud ne peut être ajouté sans que la propriété d'être une clique ne soit perdue.

La distribution jointe s'exprime comme un produit de fonctions de potentiel $\psi_c(x_c) \geq 0$ définies sur les cliques maximales c :

$$P(x) = \frac{1}{Z} \prod_{c \in \mathcal{C}} \psi_c(x_c) \quad (2.3)$$

où \mathcal{C} est l'ensemble des cliques maximales, et X_c est l'ensemble des variables contenues dans la clique maximale c . Le dénominateur Z est une constante de normalisation, et il s'appelle la *fonction partition* et il est donné par :

$$Z = \sum_x \prod_{c \in \mathcal{C}} \psi_c(x_c). \quad (2.4)$$

Un exemple de modèle graphique non-orienté avec sa distribution jointe est donné dans la figure 2.6. La positivité des fonctions de potentiel ainsi que la normalisation par Z assurent que $1 \geq P(x) \geq 0$. Remarquons que dans l'équation (2.4), il a été implicitement sous-entendu que les variables X étaient discrètes, mais le cadre présenté ici est aussi valable pour des variables continues ou des combinaisons de variables discrètes et de variables continues. Dans le cas d'une variable continue, il faut remplacer le symbole de la somme par celui de l'intégrale.

Les fonctions de potentiel $\psi_c(x_c)$ n'ont pas obligatoirement d'interprétation probabiliste, elles sont arbitraires sous la contrainte d'être positives, au contraire des facteurs présents dans les modèles graphiques orientés. En particulier, elles peuvent être choisies de manière à favoriser certaines configurations de variables locales, ce que nous appelons des *contraintes souples*. Les fonctions de potentiel $\psi_c(x_c)$ sont définies sur des cliques maximales, mais cela n'empêche pas de définir des fonctions positives sur des sous-ensembles d'une clique maximale, puis de définir la fonction de potentiel comme un produit de fonctions positives sur tous les sous-ensembles

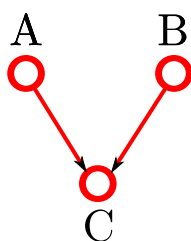


FIGURE 2.5 – Modèle graphique orienté

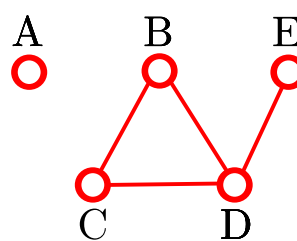


FIGURE 2.6 – Modèle graphique non-orienté

Distribution jointe associée :

$$P(A, B, C) = P(A) \times P(B) \times P(C|A, B) \quad P(A, B, C, D, E) = \frac{\psi_1(A) \times \psi_3(B, C, D) \times \psi_2(D, E)}{Z}$$

possibles d'une clique maximale. Le prix de cette généralité ou de ce grand pouvoir d'expression est d'être obligé de normaliser par la constante Z , qui est très coûteuse à calculer (complexité exponentielle en la taille du modèle) et constitue une des limitations majeures des modèles graphiques non-orientés. Cependant, pour évaluer des distributions conditionnelles locales, il n'est pas nécessaire de calculer la fonction de partition, parce qu'une distribution conditionnelle est le rapport de deux distributions marginales, et donc la fonction de partition du numérateur est annulée par la fonction de partition du dénominateur. Similairement, pour évaluer des probabilités marginales locales, il est possible de travailler avec la distribution jointe non-normalisée et de normaliser les marginales à la fin.

Énergie totale d'un champ aléatoire de Markov

Selon le **théorème de Hammersley et Clifford** [HC71, Bes74], qui prouve l'équivalence entre les champs aléatoires de Markov (définition 30) et les champs aléatoires de Gibbs, la distribution jointe de l'équation (2.3), associée à un champ aléatoire de Markov, peut toujours être exprimée à l'aide de fonctions de potentiel de Gibbs $\psi_c(x_c) > 0$ strictement positives :

$$\psi_c(x_c) = \exp \{-U_c(x_c)\} \quad (2.5)$$

où $U_c(x_c)$ est une fonction d'énergie définie sur les variables de la clique maximale c . Ainsi, dans la suite de cette thèse, la distribution associée à un champ aléatoire de Markov est représentée par une distribution de Gibbs.

La distribution jointe étant définie comme un produit de potentiels et donc d'exponentielles, l'énergie totale d'un champ aléatoire de Markov se calcule en sommant les énergies associées aux cliques maximales :

$$E(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(x_c). \quad (2.6)$$

Comme il a été mentionné précédemment, une fonction de potentiel définie sur une clique maximale peut être calculée par produit de fonctions positives sur tous les sous-ensembles possibles d'une clique maximale, en particulier si on utilise la représentation exponentielle pour ces fonctions. L'énergie totale s'exprimera très souvent comme une somme d'énergies sur des cliques de

taille 1 \mathcal{C}_1 , de taille 2 \mathcal{C}_2 , etc. jusqu'à la taille n \mathcal{C}_n , taille de la clique la plus grande :

$$E(x) = \sum_{\{i\} \in \mathcal{C}_1} U_i(x_i) + \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{C}_2} U_{ij}(x_i, x_j) + \dots + \sum_{c \in \mathcal{C}_n} U_c(x_c). \quad (2.7)$$

La recherche d'une configuration de probabilité maximale d'un champ aléatoire de Markov selon l'équation 2.3 pourra donc se faire par la recherche d'une configuration d'énergie minimale selon l'équation 2.7.

Un champ aléatoire de Markov homogène a des énergies associées aux cliques indépendantes des sites choisis, ce qui permet d'alléger les notations de l'équation (2.7) :

$$E(x) = \sum_{\{i\} \in \mathcal{C}_1} U_1(x_i) + \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{C}_2} U_2(x_i, x_j) + \dots + \sum_{c \in \mathcal{C}_n} U_n(x_c) \quad (2.8)$$

où U_n est l'énergie pour toutes les cliques de taille n.

2.2 Utilisation pratique des champs aléatoires de Markov

Les champs aléatoires de Markov sont très utilisés dans le domaine de la vision par ordinateur [Li09]. La plupart des champs aléatoires de Markov développés l'ont été pour des problèmes bas-niveau (avec sites réguliers) qui incluent la restauration d'images (débruitage...), la segmentation d'images, la reconstruction de surfaces, la détection d'arêtes, l'analyse de textures, les flots optiques, les contours actifs, les modèles déformables, le mélange de données, etc. Certains champs aléatoires de Markov ont été utilisés pour des problèmes de haut-niveau (avec sites irréguliers) comme la correspondance d'objets et la reconnaissance.

Le reste de cette section a pour objectifs :

- d'introduire les concepts de variables cachées et observées, qui sont inhérents à la modélisation par un champ aléatoire de Markov ;
- de lister les avantages liés à l'emploi des champs aléatoires de Markov ;
- et finalement d'expliquer les sous-problèmes dans lesquels les champs aléatoires de Markov peuvent être exploités.

2.2.1 Variables cachées et variables observées

Jusqu'à présent, nous avons parlé de variables aléatoires associées à un modèle graphique probabiliste, sans préciser si ces variables avaient une interprétation physique ou pas. Plus précisément, les modèles graphiques probabilistes sont employés pour résoudre des problèmes réels. Dans le *cadre des modèles génératifs* (cf. section 2.3.1) ils cherchent à expliquer un processus physique par lequel les données auraient pu être produites. Les variables cachées et observées d'un modèle graphique vont jouer des rôles différents : les variables observées établissent la connexion avec la réalité, tel un capteur récupérant des informations physiques ; et les variables cachées vont tenter de modéliser le processus ayant mené à une ou plusieurs des observations. Dans le *cadre des modèles discriminants* (cf. section 2.3.2) les modèles graphiques probabilistes

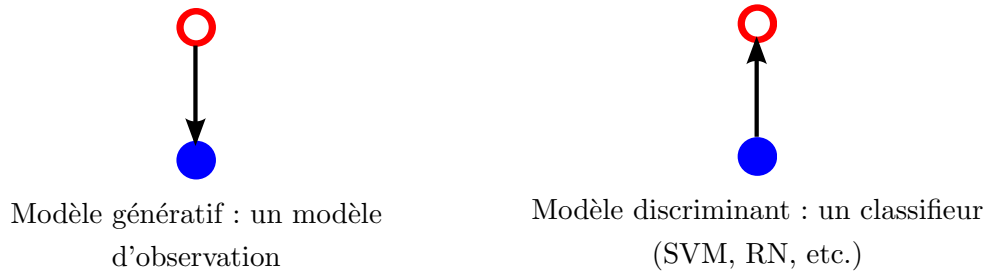


FIGURE 2.7 – Différence fondamentale entre les modèles génératifs, dans lesquels une observation est produite à partir d’informations cachées, et les modèles discriminants, qui se servent directement des observations pour étiqueter les variables cachées.

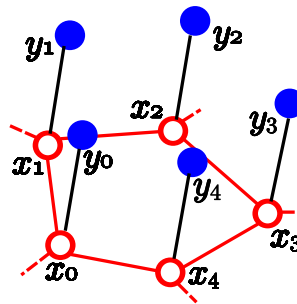


FIGURE 2.8 – Champ aléatoire de Markov pour la segmentation des triangles d’un maillage triangulaire 2-variété. Chaque variable cachée en rouge est associée, par une arête noire, à son triangle géométrique du maillage à segmenter, représenté par une variable observée en bleu. Ici, il y a deux sites par indice i : un site X_i représentant une variable cachée, et un site Y_i associé à une variable observée. x_i et y_i dénotent la réalisation de leur variable respective.

cherchent à caractériser la séparation des étiquettes, et les variables observées vont conditionner les interactions entre les variables cachées. Une simplification à l’extrême des modèles génératifs et discriminants est présentée dans la figure 2.7.

Afin d’illustrer les notions de variables cachées et de variables observées, nous présentons dans la figure 2.8 un champ aléatoire de Markov conçu pour segmenter les triangles d’un maillage triangulaire 2-variété :

- à chaque triangle i du maillage, deux variables sont associées X_i et Y_i ; une variable observée Y_i a pour seul voisin la variable cachée X_i liée au triangle i ; deux sites représentant des variables cachées, X_i et X_j , sont voisins si et seulement si leurs triangles associés du maillage partagent une arête ;
- et l’ensemble des étiquettes possibles \mathcal{L} pour étiqueter chaque site est fini.

Les *variables observées* en bleu dans la figure 2.8, sont symbolisées par un sommet rempli et elles regroupent pour chaque triangle toutes les informations directes sur le triangle, par exemple la position de ses sommets, sa normale, et d’autres attributs tels que sa couleur.

Les *variables cachées* en rouge dans la figure 2.8, sont symbolisées par un sommet creux et elles constituent avec toutes les arêtes rouges le processus caché par lequel une ou plusieurs

observations contenues dans le sommet bleu peuvent être expliquées. Expliquons la nature des liens :

- un lien entre une variable cachée et une variable observée, représenté par une arête noire dans la figure 2.8, indique que des informations de l’observation sont injectées dans le modèle graphique ; comme une observation est associée à un seul triangle du maillage, uniquement des informations concernant ce triangle sont utilisables ;
- un lien entre deux variables cachées, illustré par une arête rouge dans la figure 2.8, exprime une contrainte souple, par exemple, dans le cas de la segmentation, cette contrainte peut être la régularisation spatiale, c’est-à-dire d’essayer d’obtenir la même réalisation entre deux variables cachées voisines.

2.2.2 Avantages des champs aléatoires de Markov

Grâce au théorème de Hammersley et Clifford [HC71, Bes74], il est possible d’exprimer la probabilité jointe d’un champ aléatoire de Markov simplement en spécifiant les énergies associées aux cliques, qui encodent la connaissance a priori et les interactions désirées. Cela constitue un avantage majeur des champs aléatoires de Markov, car il est possible de modéliser un comportement global à l’aide d’interactions locales. En théorie, il n’y a pas de limite sur le choix des fonctions d’énergie et donc un grand pouvoir d’expression est possible, mais en pratique les algorithmes de minimisation globale de l’énergie fonctionnent mieux sur une classe particulière de fonctions d’énergie (cf. section 2.5), et les énergies associées à des cliques de taille strictement supérieure à 7 sont difficilement minimisables car trop coûteuses en mémoire et calculs. Le deuxième aspect intéressant des champs aléatoires de Markov est la possibilité d’un modèle multi-résolution.

2.2.3 Sous-problèmes liés à l’utilisation des champs aléatoires de Markov

Les champs aléatoires de Markov sont généralement utilisés dans trois sous-problèmes de nature différente :

1. la *modélisation d’un problème* :
 - la proposition d’un modèle graphique : définition des sites, des dépendances, des étiquettes possibles et des informations observables ;
 - la définition d’une fonction objectif : choix des potentiels énergétiques associés aux cliques ;
2. l’*apprentissage des paramètres* d’un champ aléatoire modélisé : cet apprentissage permet de trouver le meilleur ensemble de paramètres associés aux potentiels énergétiques à partir d’une vérité terrain ;
3. et l’*optimisation* : le champ aléatoire est complètement défini et on cherche à estimer la meilleure configuration globale de ses variables cachées.

La modélisation d’un problème est séparée en deux sous-parties bien distinctes, qui sont la proposition d’un modèle graphique fixant les dépendances entre les variables, et le choix de la

forme des interactions entre les variables aux sein d'une clique maximale, interactions guidées par les potentiels énergétiques choisis. Les potentiels énergétiques choisis vont favoriser certaines configurations locales d'étiquette, et ils jouent donc le rôle de contraintes molles. Il est intéressant de remarquer que la représentation graphique ne fait pas d'hypothèse sur le domaine des variables aléatoires (variables discrètes, continues) et que donc un seul modèle graphique probabiliste peut être utilisé pour modéliser une large classe de problèmes similaires.

L'apprentissage des paramètres à partir d'une vérité terrain est lié à trois points :

- la forme de la probabilité jointe et de la fonction d'énergie à minimiser ;
- la difficulté de fixer à la main plus de trois ou quatre paramètres continus, à cause de la richesse des interactions possibles ;
- le caractère générique d'un modèle : un modèle est capable de traiter plusieurs types de données, et afin d'augmenter ses performances sur des données particulières, un apprentissage est réalisé sur un ensemble d'apprentissage particulier.

Les énergies associées aux cliques sont souvent de la forme $U_c(x_c) = \lambda \times U'_c(x_c)$ afin d'offrir une plus grande richesse de comportements possibles au champ aléatoire de Markov. Ainsi, grâce à la connaissance d'une vérité terrain, la fonction d'énergie $E(x)$ peut être vue comme une fonction de n paramètres $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1..n}$. La détermination des meilleures valeurs Λ est abordée dans la section 2.4.

L'optimisation, c'est-à-dire l'estimation de la meilleure configuration des variables cachées à partir d'un champ aléatoire de Markov complètement défini, est l'étape applicative : on a modélisé un champ aléatoire de Markov, fixé ses paramètres, et maintenant on l'utilise sur des jeux de données différents de ceux utilisés pour fixer les paramètres. L'estimation de la meilleure configuration des variables cachées est traitée dans la section 2.5.

2.3 Modèles génératifs et discriminants

Cette section introduit le cadre des modèles génératifs et discriminants, mais aussi les différences entre une modélisation générative et une modélisation discriminante d'un problème.

2.3.1 Cadre des modèles génératifs

Dans le cadre de la modélisation bayésienne, on suppose que la nature produit des observations y à partir des informations cachées x . Un modèle graphique génératif capture tout le processus physique causal par lequel des données observées ont été générées : il tente d'imiter la nature. Il est donc possible avec un tel modèle de générer des observations synthétiques. Ce type de modèle est adapté si on a des informations sur le processus de génération de l'observation. Par exemple, on peut connaître le type du bruit des informations relevées par un capteur.

Approche bayésienne - Champ aléatoire de Markov

On recherche la meilleure configuration de variables cachées x étant données les variables observées y , associée à la probabilité a posteriori, i.e. $\arg \max P(x|y)$. Le cadre bayésien consiste à inverser la probabilité $P(x|y)$ par la règle de Bayes, $P(x|y) = P(y|x)P(x)/P(y)$, puis de modéliser explicitement la vraisemblance $P(y|x)$, et la distribution a priori $P(x)$. Puisque $P(x, y) = P(y|x)P(x)$, l'approche bayésienne modélise la distribution jointe du modèle graphique.

Afin de concrétiser ce que représentent la vraisemblance et la distribution a priori, deux modèles sont présentés :

- un modèle d'observation $P(y|x)$: e.g. un bruit gaussien additif et indépendant ;
- et un a priori de régularité spatiale $P(x)$.

Un exemple de modèle d'observation : le bruit gaussien additif et indépendant

- Une hypothèse simplificatrice courante dans le cas d'un problème de débruitage des données observées, où le MRF représente le signal non-bruité caché x et les observations y représentent le signal bruité observé est de poser $y_i = x_i + e_i$, où e_i est un bruit gaussien additif et indépendant qui suit une distribution normale de moyenne nulle et de variance σ_i^2 . Dans ce cas, la vraisemblance, la distribution de probabilité des données observées y conditionnées sur les variables cachées est :

$$P(y|x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{|\mathcal{S}|} \sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\sum_{i \in \mathcal{S}} (x_i - y_i)^2 / [2\sigma_i^2]\right). \quad (2.9)$$

Une variante est le bruit gaussien additif, indépendant et uniforme, dans ce cas la variance est la même pour tous les sites $\sigma_i^2 = \sigma^2$. Signalons que l'approche bayésienne utilise souvent, comme dans l'exemple précédent, un modèle d'observation simplifié dans lequel chaque observation Y_i conditionnée sur sa variable cachée associée X_i , est indépendante des autres, et donc $P(y|x)$ a habituellement une forme factorisée $P(y|x) = \prod_{i \in \mathcal{S}} P(y_i|x_i)$.

A priori de régularité - L'a priori de régularité (*smoothness prior* en anglais) est basé sur l'hypothèse que les propriétés physiques d'un objet (d'une image, d'une surface, etc.) ne changent pas brusquement dans un intervalle de temps ou dans un voisinage spatial. Cet a priori est très populaire en vision par ordinateur bas-niveau. Il peut s'exprimer sous deux formes, l'une consiste à préférer les étiquettes identiques au sein d'une même clique et s'applique dans le cas d'un espace d'étiquettes discret, et l'autre met des contraintes sur la variation de la fonction sous-jacente, en utilisant les dérivées de la fonction, et s'applique généralement dans le cas d'un espace d'étiquettes continu.

Dans la suite de cette section, un exemple de modèle de régularisation dans le cas d'un espace d'étiquettes discret et un exemple de régularisation dans le cas continu sont donnés.

A priori d'homogénéité spatiale (espace des étiquettes discret) - Dans ce cas on cherche à obtenir une solution constante par morceaux. Le modèle de Potts ou modèle de Ising [GG84] est une énergie définie sur des cliques de taille 2 qui pénalise la différence d'étiquettes entre 2 variables voisines. L'homogénéité spatiale est une régularisation standard en vision par

ordinateur, et elle est basée sur le principe que les observations voisines doivent être encouragées à être associées à une même étiquette. L'énergie par paire de Potts dans le cadre d'une distribution non-homogène est définie par :

$$U_2^p(x) = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{C}_2} \lambda_{ij} \delta(x_i \neq x_j) \quad (2.10)$$

où $\lambda_{ij} \geq 0$ est une constante positive qui contrôle la force de la régularisation et δ est le symbole de Kronecker qui est égal à un si la condition est satisfaite et à zéro sinon. Dans le cas d'une distribution homogène, la constante λ_{ij} est la même pour chaque couple de site, $\lambda_{ij} = \lambda$. Si $\lambda_{ij} = \lambda = 0.5$, alors l'interprétation géométrique ou visuelle de l'énergie de Potts est le nombre total d'arêtes séparant des régions homogènes, dont tous les sites sont associés à la même étiquette, et elle représente de manière intuitive la complexité de la segmentation.

A priori sur le type d'une surface (espace des étiquettes continus) - Prenons le cas d'une fonction 1D constante f , la variation de cette fonction doit être quasi-nulle, ce qui se traduit par la nullité de la dérivée première et se traduit par la minimisation de

$$U^{seg}(f) = \int [f'(x)]^2 dx. \quad (2.11)$$

Cette énergie peut aussi s'exprimer en termes de différences finies lorsque la fonction est échantillonnée, ce qui donne dans le cas 1D :

$$U^{seg}(f) = \sum_i [f_i - f_{i-1}]^2. \quad (2.12)$$

Ces résultats peuvent être étendus au cas d'une surface 2D, et aux cas des fonctions à gradient constant (nullité de la dérivée seconde) et à courbure constante (nullité de la dérivée troisième). Le lecteur peut lire à ce sujet le livre [Li09], p. 34-37. Remarquons que l'énergie liée à l'a priori de régularité n'est pas suffisante en elle-même, car il existe des infinités de solutions, et il manque un terme de proximité ou d'attache aux données pour finalement obtenir une solution qui soit un compromis entre les deux contraintes.

Une fois que la modélisation est terminée, on cherche à estimer la meilleure configuration de variables cachées. Les deux sous-sections suivantes présentent des estimateurs.

Estimation à partir d'un modèle partiel de la réalité

Lorsque la connaissance de la distribution des données observées y est acquise, $P(y|x)$, mais que l'information sur la distribution a priori du modèle $P(x)$ est inconnue, le critère du **maximum de vraisemblance** (*maximum likelihood* - ML en anglais) peut être utilisé, $x^* = \arg \max P(y|x)$. Si cette fois, seule l'information a priori est accessible, le critère de l'**entropie maximale** peut être choisi, $x^* = \arg \max \left[- \sum_{i=1}^{|S|} P(x_i) \ln P(x_i) \right]$. Les configurations avec la plus grande entropie sont plus vraisemblables, parce que la nature peut les générer de plus de manières différentes.

Estimation bayésienne

Lorsque les distributions du prior $P(x)$ et de la vraisemblance $P(y|x)$ sont connues, le meilleur résultat est obtenu en maximisant le critère de Bayes, souvent selon le principe du **maximum a posteriori** (MAP) où $x^* = \arg \max P(x|y) = \arg \max P(y|x)P(x)$. Pour un champ aléatoire de Markov, l'estimateur MAP est trouvé de manière équivalente en minimisant l'énergie a posteriori :

$$U(x|y) = U(y|x) + U(x), \quad (2.13)$$

qui est la somme de l'énergie de vraisemblance $U(y|x)$ et de l'énergie a priori $U(x)$. L'énergie de vraisemblance contient des termes d'attache aux données, i.e. qui explicitent la génération physique des données observées depuis les données cachées. L'énergie a priori contient les termes de régularisation de la solution globale sous la forme de contraintes souples qui favorisent certaines configurations locales par rapport à d'autres. Remarquons que si $P(x)$ (ou $U(x)$) est liée à la longueur de la description du modèle utilisé et $P(y|x)$ (ou $U(y|x)$) est liée à l'erreur commise par la description, alors le critère MAP est équivalent au critère de la Longueur de Description Minimale - LDM (*Minimum Description Length* - MDL en anglais) [Li09].

Faiblesses de l'approche bayésienne

L'approche bayésienne demande de modéliser tout le processus de génération de toutes les observations. Un modèle bayésien est donc très riche, avec un grand nombre de paramètres, ce qui n'est pas forcément nécessaire pour estimer les variables cachées. En effet, dans un cas général, seule une partie des observations devrait suffire pour estimer les variables cachées. Ainsi, si on ne souhaite pas générer des données synthétiques, et si l'on ne dispose pas d'information sur le processus physique de génération des observations, une approche bayésienne ne sera pas appropriée.

Un autre inconvénient, mineur, de l'approche bayésienne est l'étape supplémentaire d'inversion du modèle par la règle de Bayes $P(x|y) = P(y|x)P(x)/P(y)$.

2.3.2 Cadre des modèles discriminants

Une approche discriminante ne cherche pas à savoir comment la nature a créé les observations. Elle modélise directement le processus d'estimation des variables cachées.

Champs aléatoires conditionnels

Les champs aléatoires conditionnels (*Conditional Random Fields* - CRF en anglais) modélisent la probabilité a posteriori $P(x|y)$ directement en tant que champ aléatoire de Markov sans modéliser les priors $P(x)$ et la vraisemblance $P(y|x)$ individuellement. En particulier, il est possible d'utiliser des potentiels énergétiques qui ont des propriétés intéressantes pour notre problème d'optimisation. Il est donc plus simple de modéliser un problème avec un CRF, qu'avec un MRF, car aucune hypothèse sur la distribution des données observées n'a besoin d'être faite,



FIGURE 2.9 – MRF et CRF proposés pour l'étiquetage des sommets d'un maillage triangulaire 2-variété : le MRF essaie d'expliquer chaque observation individuellement, tandis que le CRF se sert de toutes les observations pour conditionner le choix des étiquettes des variables cachées.

en particulier aucune hypothèse réductrice comme le fait que $P(y|x)$ ait une forme factorisée $P(y|x) = \prod_{i \in \mathcal{S}} P(y_i|x_i)$. De plus, s'il n'est pas utile de calculer explicitement $P(y|x)$ et $P(x)$, lorsqu'on recherche seulement le maximum a posteriori, alors un modèle CRF est moins coûteux à déterminer qu'un modèle MRF.

Un ensemble d'étiquettes x est dit être un CRF, si étant données les observations y , chaque étiquette x_i satisfait la Markovianité (la positivité est supposée acquise) :

$$P(x_i|y, x_{\mathcal{S} \setminus \{i\}}) = P(x_i|y, x_{\mathcal{N}_i}). \quad (2.14)$$

La probabilité a posteriori $P(x|y)$ a la forme suivante dans le cas d'un CRF homogène :

$$P(x|y) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ - \sum_{i \in \mathcal{S}} U_1(x_i|y) - \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dots \sum_{k \in \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j \cap \dots} U_n(x_i, x_j, \dots, x_k|y) \right\}. \quad (2.15)$$

Les notations utilisées sont équivalentes aux notations basées sur les cliques (et les énergies U_m s'appliquent bien sur les variables associées aux cliques).

2.3.3 Différences entre les MRF et les CRF

La figure 2.9 présente un MRF et un CRF pour étiqueter les sommets d'un maillage triangulaire 2-variété. En plus des différences philosophique et pratique entre les modèles génératifs et les modèles discriminants, il y a trois grosses différences entre les CRF et les MRF :

- dans un CRF, le potentiel énergétique unaire, associé à une seule variable cachée, peut dépendre de toutes les données observées alors que dans un MRF il dépend seulement des données observées associées au site (cf. figure 2.9) ;
- dans un CRF, les potentiels énergétiques associés à au moins deux variables cachées, peuvent dépendre de toutes les données observées alors que dans un MRF ils sont indépendants des données observées ;
- les algorithmes d'apprentissage associés aux MRF et CRF sont différents, et l'apprentissage est plus difficile pour les CRF (voir section 2.4).

2.4 Apprentissage des paramètres

La majorité des champs aléatoires de Markov comportent un ensemble de paramètres de cliques continus pour régler l'influence globale de chaque potentiel énergétique dans la décision finale. Par exemple, une fonction d'énergie U_c a souvent une forme $U_c(x_c) = \lambda \times U'_c(x_c)$. Il faut donner une valeur à ces paramètres $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1..n}$ pour définir complètement la probabilité a posteriori associée au MRF.

Comment trouver des bonnes valeurs pour ces paramètres ? Pour 3 ou 4 paramètres à fixer, il est envisageable de les choisir en évaluant visuellement la qualité des solutions obtenues. Au delà, il devient difficile de justifier des choix basés sur l'observation. L'approche générale consiste à étiqueter un ensemble de données par un expert, i.e. avoir une base de données de référence, appelée "vérité terrain", qui servira de base d'apprentissage et de base de test, les bases d'apprentissage et de test étant disjointes. Si les données de référence sont sans bruit et sont bien une réalisation possible du MRF, alors le problème d'estimation est *supervisé*.

Ainsi, pour l'estimation supervisée les paramètres d'un MRF, il faut :

1. *créer une base d'apprentissage* (données+étiquetage d'un expert) avec suffisamment de jeux de données différents ;
2. *estimer les meilleurs paramètres* à partir de cette base d'apprentissage, avec une des techniques présentées par la suite ;
3. *tester la validité du MRF (la distribution supposée) avec ses paramètres* trouvés à l'étape 2.

L'étape 3 est optionnelle, mais elle permet de valider le MRF avec ses paramètres.

Dans le reste de cette section, nous nous intéressons exclusivement à l'étape 2, l'apprentissage des paramètres d'un champ aléatoire de Markov et d'un champ aléatoire de Markov conditionnel.

2.4.1 Estimation des paramètres d'un champ aléatoire de Markov

L'estimation des paramètres d'un MRF, donc dans un cadre génératif, se fait généralement en optimisant un critère statistique, tel que le maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood* - *ML* en anglais), le maximum de pseudo-vraisemblance (*Maximum pseudo-likelihood* - *MPL* en anglais), et le codage (*coding* - *C* en anglais) [Li09]. Ces trois méthodes sont donc présentées.

Maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance maximise la probabilité conditionnelle $P(x|\Lambda)$, qui est la vraisemblance de Λ , ou de manière équivalente la log-vraisemblance $\ln P(x|\Lambda)$. Il est égal à $\Lambda^* = \arg \max_{\Lambda} P(x|\Lambda)$. Remarquons que si la distribution du prior des paramètres est connue, alors au lieu de chercher l'estimateur du maximum de vraisemblance, une meilleure approche consiste à chercher l'estimateur du maximum a posteriori.

La difficulté principale avec l'estimation du maximum de vraisemblance est due à la fonction de partition Z (cf. équation 2.4) dans la distribution du champ aléatoire $P(x|\Lambda)$. Z est aussi

fonction des paramètres Λ et doit donc être évaluée. Or Z se calcule en sommant sur toutes les configurations possibles et donc la maximisation de $P(x|\Lambda)$ n'est pas faisable même pour des problèmes de petites tailles. Pour cette raison, ce critère est généralement approximé par les critères présentés dans les deux sous-sections suivantes.

Maximum de pseudo-vraisemblance conditionnelle

L'idée derrière le maximum de pseudo-vraisemblance est de conserver l'approche Maximum de vraisemblance, sans avoir à faire face à ses limitations. En particulier, la fonction de partition complète Z ne devra pas être évaluée.

La pseudo-vraisemblance conditionnelle $PL(x)$ est le produit des distributions conditionnelles de Gibbs en chaque site, c'est une approximation de $P(x|\Lambda)$ définie par :

$$PL(x|\Lambda) = \prod_i P(x_i|x_{\mathcal{N}_i}, \Lambda) = \prod_i \frac{P(x_i, x_{\mathcal{N}_i}|\Lambda)}{P(x_{\mathcal{N}_i}|\Lambda)}. \quad (2.16)$$

Une méthode standard dans la littérature est l'estimateur du maximum de pseudo-vraisemblance [Bes77]. Elle consiste à traiter chaque site i comme si son voisinage $x_{\mathcal{N}_i}$ était fixé à partir des données d'apprentissage. Alors les $P(x_{\mathcal{N}_i}|\Lambda) = 1$, et l'on obtient :

$$PL(x|\Lambda) = \prod_i \frac{e^{-U_i(x_i, x_{\mathcal{N}_i}|\Lambda)}}{\sum_{x_i \in \mathcal{L}} e^{-U_i(x_i, x_{\mathcal{N}_i}|\Lambda)}} \quad (2.17)$$

où $U_i(x_i, x_{\mathcal{N}_i}|\Lambda)$ est la somme des potentiels énergétiques impliquant le site i . Le maximum de pseudo-vraisemblance peut être trouvé en maximisant la log pseudo-vraisemblance, et pour éviter un problème bien connu de sur-estimation des paramètres, il est parfois nécessaire d'ajouter un a priori gaussien pour tous les paramètres Λ [KH03].

Maximum de pseudo-vraisemblance par codage

Besag [Bes74] a proposé de partitionner les sites de \mathcal{S} en plusieurs ensembles disjoints $\mathcal{S}^{(k)}$ de telle sorte qu'aucun couple de nœuds dans un $\mathcal{S}^{(k)}$ ne soit voisin. Bien entendu, le nombre de $\mathcal{S}^{(k)}$ différents est choisi de telle sorte à être minimal. Grâce à l'hypothèse de Markovianité, les variables associées avec les sites dans un $\mathcal{S}^{(k)}$ sont mutuellement indépendantes et la vraisemblance peut s'écrire sous la forme :

$$PL^{(k)}(x|\Lambda) = \prod_{i \in \mathcal{S}^{(k)}} P(x_i|x_{\mathcal{N}_i}, \Lambda). \quad (2.18)$$

Ainsi, cette méthode présentée, appelée méthode de codage, produit une estimation par ensemble $\mathcal{S}^{(k)}$ en maximisant la vraisemblance ou la log-vraisemblance. La question sur la combinaison optimale des estimateurs pour n'obtenir qu'un seul estimateur reste ouverte. Néanmoins, un choix courant est la moyenne arithmétique des estimateurs des sous-ensembles [Li09].

Autres approches

D'autres techniques d'estimation existent, par exemple les moindres carrés [Li09] ou l'appariement de pseudo-moment [WJW03], le lecteur est renvoyé aux références pour plus de détails.

2.4.2 Estimation des paramètres d'un champ aléatoire de Markov conditionnel

Jusqu'à présent, des méthodes d'apprentissage pour des MRFs ont été présentées, mais qu'en est-il pour les CRF ? L'apprentissage sur les CRF est plus difficile que sur les MRF, car les paramètres peuvent être influencés par les observations. En particulier la fonction de partition Z dépend non seulement des paramètres, mais aussi des observations.

Une idée peut être de diviser le champ conditionnel complet en plusieurs morceaux, qui sont entraînés indépendamment, puis de combiner les poids appris : cette approche s'appelle l'apprentissage par morceaux [SM05]. Pour les détails techniques le lecteur est renvoyé à [SM05].

2.5 Optimisation : estimation de la configuration optimale

Maintenant que nous sommes capables de modéliser un MRF ou un CRF et d'apprendre ses paramètres, il reste à estimer la meilleure configuration, c'est-à-dire le meilleur étiquetage possible des variables cachées.

Dans cette section, nous parlons d'estimation, et non pas de la détermination de la solution globalement optimale. En fait, dans la plupart des problèmes d'optimisation discrète associés aux MRF et CRF dans lesquels l'espace des étiquettes est discret, l'espace des configurations possibles est combinatoire. Par exemple, si $|\mathcal{S}|$ désigne le nombre de sites d'un champ aléatoire, et $|\mathcal{L}|$ représente le nombre d'étiquettes possibles par site, le nombre de configurations possibles est $|\mathcal{L}|^{|\mathcal{S}|}$. En considérant un cas simple, celui de variables cachées binaires, nous avons $|\mathcal{L}| = 2$. Avec seulement 20 sites différents, le million de configurations possibles est dépassé. Avec 30 sites, le milliard de configurations est franchi... Il n'est donc quasiment jamais possible de faire une recherche exhaustive parmi toutes les configurations pour trouver la meilleure, car une recherche linéaire n'est clairement pas envisageable, sauf pour un très petit nombre de sites.

Heureusement, il existe des techniques d'optimisation, principalement développées dans le domaine de la vision par ordinateur, qui trouvent une bonne solution dans le cas multi-étiquettes $|\mathcal{L}| > 2$ et une solution exacte dans le cas binaire $|\mathcal{L}| = 2$, pour une certaine forme de fonction d'énergie. Parmi les différentes techniques d'optimisation associées aux MRF et CRF [SZS+06, RKLS07], nous développons seulement les approches utilisées pendant la thèse et présentons brièvement d'autres méthodes connues.

Rappelons qu'il est équivalent de minimiser l'énergie globale $E(x)$ ou de maximiser la probabilité jointe $P(x) = 1/Z \exp \{-E(x)\}$ décrite par le champ aléatoire de Markov. Dans le reste de cette section, nous parlerons de minimisation de fonctions d'énergie associées à des champs aléatoires discrets, dont les sites ont un ensemble fini d'étiquettes possibles \mathcal{L} . Plus précisément, :

- la section 2.5.1 présente les énergies pour lesquelles un bon minimum local peut être trouvé, et donne les algorithmes de minimisation, basés sur des coupes de graphe, utilisés pour cette classe de fonction ;
- la section 2.5.2 expose les algorithmes de minimisation, basés sur des coupes de graphe, employés dans les autres cas ;
- et la section 2.5.3 liste d'autres approches existantes pour minimiser ces énergies.

2.5.1 Minimisation de fonctions sous-modulaires par coupe de graphe

Cette section commence par un cas plus commode, celui du choix entre deux étiquettes 0 et 1 ($|\mathcal{L}| = 2$).

Définition 32. Sous-modularité ou régularité [KZ04] :

- toute fonction binaire d'une seule variable est sous-modulaire ;
- une fonction binaire U_{ij} de deux variables est sous-modulaire si et seulement si

$$U_{ij}(0,0) + U_{ij}(1,1) \leq U_{ij}(0,1) + U_{ij}(1,0) ; \quad (2.19)$$

- une fonction binaire U de n variables (n strictement supérieur à 2) est sous-modulaire si toutes les projections sur U de deux variables ($n-2$ variable(s) fixée(s) et on a donc une fonction de 2 variables) sont sous-modulaires.

De plus, une somme finie de fonctions binaires sous-modulaires est encore sous-modulaire. Intuitivement, la sous-modularité d'une fonction signifie que la fonction préfère les étiquettes homogènes aux étiquettes différentes. Il y a beaucoup de problèmes qui peuvent se traiter avec des fonctions sous-modulaires, en particulier l'a priori de régularité spatiale présenté dans la section 2.3.1. Afin d'illustrer la sous-modularité, voici des exemples de fonctions sous-modulaires :

- une constante k ;
- $k \times \delta(x_i \neq x_j)$, où $k \geq 0$ et $\delta(x_i \neq x_j) = 1$ si la condition $x_i \neq x_j$ est vérifiée et 0 sinon ;
- $f(x, y) = k \times x + m \times y$, où k et m sont des constantes ;
- $f(x, y) = |x - y|$;
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- $f(x, y, z) = |x - y + z|$.

et des exemples de fonctions non sous-modulaires :

- $k \times \delta(x_i = x_j)$, où $k > 0$ et $\delta(x_i = x_j) = 1$ si la condition $x_i = x_j$ est vérifiée et 0 sinon ;
- $f(x, y) = x \times y$;
- $f(x, y) = \min(|x|, |y|)$;
- $f(x, y) = (x + y)^2$;
- $f(x, y, z) = xy - 2xz - 2yz + 3z$.

Par exemple, $f(x, y, z) = xy - 2xz - 2yz + 3z$ n'est pas sous-modulaire, car sa projection sur $z = 1$, $f(x, y, 1)$, n'est pas sous-modulaire : $f(0, 0, 1) + f(1, 1, 1) = 3 > f(0, 1, 1) + f(1, 0, 1) = 2$.

Théorème 1. *La classe des fonctions sous-modulaires peut être optimisée en temps polynomial en calculant une coupe de poids minimum dans un st-graphe [KZ04].*

Le **st-graphe** est un graphe orienté, donc un ensemble de sommets et d'arcs, à construire à partir :

- du graphe de dépendance du modèle graphique ;
- de l'énergie à minimiser.

Pour les fonctions binaires et sous-modulaires, le st-graphe construit par la méthode décrite dans [KZ04], contient :

- deux sommets particuliers appelés nœuds terminaux, la source S et le puits T (*sink* en anglais) ;
- un sommet par variable binaire cachée ; si l'énergie initiale contient seulement des termes unaires ou par paire, alors le nombre total de sommets est égal au nombre de variables binaires de l'énergie plus deux ;
- des arcs avec des poids positifs :
 - un arc entre la source S et un sommet symbolisant une variable binaire représente un terme unaire ;
 - un arc entre un sommet symbolisant une variable binaire et le puits T représente un terme unaire ;
 - un arc entre deux variables binaires représente un terme par paire.

La construction du st-graphe [KZ04] est réalisée de telle sorte que :

- le flot maximal (ou la coupe de poids minimum) du st-graphe, partant de la source et arrivant au puits, soit calculable en temps polynomial, ce qui nécessite en pratique des poids positifs pour chaque arc du st-graphe ;
- la coupe de poids minimum dans ce graphe correspond au minimum de la fonction binaire ;
- la coupe de poids minimum sépare les nœuds représentant les variables binaires du problème de minimisation, en deux ensembles connexes, un ensemble étant relié au nœud source S et l'autre au nœud puits T ; les variables qui sont reliées à la source prennent la valeur 0 et celles qui sont connectées au puits sont affectées à la valeur 1.

Un exemple de st-graphe, avec sa fonction binaire associée, est illustré dans la figure 2.10. La construction du st-graphe est difficile, et propre au problème d'optimisation.

Une **coupe** est un ensemble d'arêtes du st-graphe que l'on retire, de telle sorte à séparer l'ensemble des sommets du graphe reliés à la source S de ceux reliés au puits T . Le coût d'une coupe est la somme du poids des arêtes enlevées pour couper le st-graphe. Le calcul d'une coupe de poids minimum est réalisé de manière efficace à l'aide d'un algorithme recherchant le *flot maximal* dans ce st-graphe. Plusieurs algorithmes de calcul du flot maximal existent et tous ont une complexité polynomiale.

Définition 33. Une fonction d'énergie $E(x)$ appartient à la classe \mathcal{F}^n si elle contient des potentiels énergétiques impliquant des cliques jusqu'à la taille n (il y a au moins une clique de taille n) [KZ04].

Kolmogorov et Zabih [KZ04] ont démontré qu'une fonction d'énergie binaire appartenant à une des classes \mathcal{F}^1 , \mathcal{F}^2 ou \mathcal{F}^3 , qui est sous-modulaire, est représentable par un st-graphe, de telle

sorte qu'une coupe de poids minimum de ce graphe donne le minimum global (donc l'étiquetage optimal) de la fonction d'énergie. Ils ont donné la construction du st-graphe correspondant. Pour plus de précision sur les fonctions d'énergie minimisables par coupe de graphe, nous invitons le lecteur à lire [KZ04, FD05].

En théorie, il est possible d'optimiser en temps polynomial les fonctions de la classe \mathcal{F}^n qui sont sous-modulaires. En pratique, l'optimisation a été limitée à la classe \mathcal{F}^3 jusqu'en 2009, date d'apparition de la méthode générale de réduction des fonctions de la classe \mathcal{F}^n à la classe \mathcal{F}^2 [Ish09]. Sans rentrer dans les détails, une méthode de réduction d'un potentiel énergétique consiste à rajouter une variable binaire extérieure supplémentaire, de telle sorte à garantir que le minimum global ne change pas tout en enlevant une variable du potentiel. La réduction est développée en annexes, section 3. La méthode de réduction d'Ishikawa n'est applicable, expérimentalement, que jusqu'aux fonctions de la classe \mathcal{F}^7 [Ish09].

Cas multi-étiquettes $|\mathcal{L}| > 2$

Définition 34. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}$ des étiquettes :

1. $V(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$;
2. $V(\alpha, \beta) = V(\beta, \alpha) \geq 0$;
3. $V(\alpha, \beta) \leq V(\alpha, \gamma) + V(\gamma, \beta)$: inégalité triangulaire.

V est appelé une **semi-métrique** sur l'espace des étiquettes \mathcal{L} si (1) et (2) sont vérifiées $\forall \alpha, \beta$.
 V est appelé une **métrique** sur l'espace des étiquettes \mathcal{L} si (1), (2) et (3) sont vérifiées $\forall \alpha, \beta, \gamma$.

Soit $k > 0$ une constante strictement positive, alors $\min(k, \|\alpha - \beta\|)$ est un exemple de métrique, tandis que $\min(k, \|\alpha - \beta\|^2)$ est un exemple de semi-métrique.

Théorème 2. Si l'énergie à minimiser est composée d'une somme de termes unaires et d'une somme de termes par paire dont les potentiels énergétiques sont des métriques, alors un minimum local fort peut être trouvé grâce à l'algorithme α -expansion [BVZ01].

Un minimum local fort signifie que le minimum est de très bonne qualité. Pour l' α -expansion, le minimum est démontré être à un facteur constant près du minimum global [BVZ01]. L'algorithme α -expansion procède par coupes de graphes à des minimisations binaires successives entre conserver l'étiquette courante, ou choisir l'étiquette α pour chaque site. Ainsi, il est possible d'utiliser les techniques de réduction vers \mathcal{F}^2 [Ish09] pour minimiser avec l'algorithme α -expansion des fonctions de la classe \mathcal{F}^n avec $n > 2$.

Algorithme α -expansion

L'algorithme α -expansion est un algorithme itératif qui modifie l'étiquetage courant du champ aléatoire de Markov vers un meilleur étiquetage (énergie associée inférieure) jusqu'à convergence. Plus précisément, l'algorithme itère sur chaque étiquette α possible parmi toutes

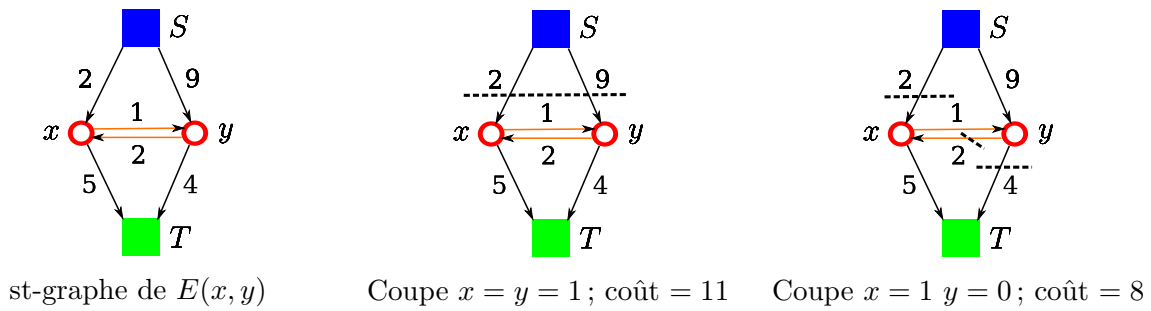


FIGURE 2.10 – Minimisation de la fonction binaire $E(x, y) = 2x + 5\bar{x} + 9y + 4\bar{y} + 2x\bar{y} + \bar{x}y$ par une coupe de poids minimum dans sa représentation sous la forme d'un st-graphe. Le flot part de la source S et arrive au puits T . Les arcs noirs représentent des termes unaires et les arcs oranges des termes par paire. Les variables binaires dont les sommets sont au-dessus de la coupe sont associées au nœud source S et prennent la valeur 0. Les autres sont liées au nœud puits T et se voient attribuer la valeur 1. La coupe de poids minimum est 8. Si le coût du terme par paire $2x\bar{y}$ devient $4x\bar{y}$, ce qui revient à pénaliser plus une solution non-homogène, alors la meilleure coupe serait $x = y = 0$ pour un coût de 9 : cela illustre l'aptitude du st-graphe à favoriser des étiquettes égales pour des variables voisines, donc à minimiser des fonctions binaires sous-modulaires.

les étiquettes possibles \mathcal{L} , et lors d'une itération un **mouvement d'expansion** entre l'étiquette α courante et la configuration actuelle du champ aléatoire de Markov a lieu. Un mouvement d'expansion vers l'étiquette α consiste à faire le choix binaire, pour chaque site du modèle graphique, entre conserver son étiquette courante ou choisir l'étiquette α . Si l'énergie à minimiser est composée d'une somme de termes unaires et d'une somme de termes par paire dont les énergies sont des métriques, alors un mouvement d'expansion peut être calculé de manière optimale par une seule coupe de graphe dans un st-graphe dont la construction est donnée dans [BVZ01].

Cette optimisation binaire est appelée *expansion* car après la décision de garder l'étiquette courante ou de passer à l'étiquette α pour chaque site, le nombre total de sites associés à l'étiquette α est supérieur ou égal à celui de la configuration précédente, donc il croît. La condition de convergence est satisfaite lorsque plus aucune expansion ne peut faire décroître strictement l'énergie, i.e. l'énergie reste inchangée pendant une boucle complète sur toutes les étiquettes α possibles.

Remarquons que l'ordre des étiquettes α a une influence sur le minimum trouvé et donc il faudrait aussi optimiser l'ordre des étiquettes de l'algorithme. Néanmoins, sans optimiser l'ordre des étiquettes, l'algorithme α -expansion est prouvé trouver un minimum à un facteur constant près du minimum global, qui est 2 pour le modèle de Potts, le meilleur cas (lire [BVZ01] pour les détails). L'inconvénient majeur de l'algorithme α -expansion, est qu'il est linéaire en la taille de l'espace des étiquettes $|\mathcal{L}|$, puisqu'il faut balayer tout l'espace des étiquettes.

α -expansion avec coût des étiquettes

Le mouvement d'expansion vers l'étiquette α a été étendu pour optimiser simultanément des coûts de présence d'une étiquette par une seule coupe de graphe. La construction du st-graphe est donnée dans [DOIB10]. Si au moins une variable est affectée à une étiquette l , alors l'énergie totale se trouve augmentée d'une constante positive β_l . Il est aussi possible d'associer un coût à la présence d'une seule étiquette parmi un sous-ensemble des étiquettes possibles, cela permettant de pénaliser un type d'étiquette. Le cas particulier le plus simple est de pénaliser le nombre d'étiquettes différentes qui apparaissent dans une solution. Cela est attrayant d'un point de vue description des données lorsque plusieurs modèles peuvent être utilisés, car pénaliser la présence d'une étiquette va permettre d'obtenir une description des données compacte, ce que l'on cherche par exemple en segmentation de maillages lorsque chaque segment est associé à une primitive géométrique simple (ce point sera abordé dans le chapitre 4). Un cas particulier encore plus intéressant est d'augmenter la pénalité associée à la présence d'une étiquette en fonction de la complexité du modèle associé. Si un modèle géométrique utilise plus de paramètres qu'un autre modèle géométrique, par exemple un cylindre contre une sphère, alors il devra être pénalisé davantage. Cela est dans le même esprit que les approches basées sur la Longueur de Description Minimale - LDM, qui sont fondées sur l'idée que les descriptions les plus compactes, en termes de bits pour encoder l'erreur commise avec l'approximation choisie et du nombre de paramètres du modèle géométrique, sont les meilleures.

Pour la segmentation finale, la prise en compte du coût des étiquettes permet la combinaison de segments non-adjacents, ce qui est complémentaire au terme de régularisation spatiale présenté dans l'équation (2.10).

En résumé, il est possible de calculer :

- une solution globale exacte par coupe de graphe pour les fonctions binaires sous-modulaires ;
- et une bonne solution approchée par l'algorithme α -expansion pour les fonctions composées de termes unaires et de termes par paire dont les potentiels énergétiques sont des métriques ;
- et grâce aux techniques de réduction vers \mathcal{F}^2 [Ish09], les fonctions de la classe \mathcal{F}^n peuvent être aussi minimisées, avec en pratique $n \leq 7$.

2.5.2 Minimisation de fonctions non sous-modulaires par optimisation pseudo-booléenne quadratique

Après avoir traité l'approche coupe de graphe dans le cas des fonctions sous-modulaires, il est naturel de se demander quelle est l'approche "similaire", basée sur la représentation graphique de la fonction d'énergie, dans le cas des fonctions non sous-modulaires, qui soit en particulier plus performante que la troncature d'énergie proposée par [RKKB05]. De plus, n'est-il pas envisageable de faire des mouvements plus généraux que le mouvement d'expansion vers une étiquette α ? En particulier, est-il possible de proposer une nouvelle étiquette pour chaque site qui ne soit pas forcément la même, même si le problème d'optimisation binaire alors posé n'est plus

sous-modulaire? Dans cette section nous allons répondre à ces questions.

Minimisation de fonctions binaires non sous-modulaires

Nous nous intéressons au problème généralement NP-difficile de la minimisation de fonctions binaires non sous-modulaires [RKLS07]. Une approche pour résoudre ce problème est la *roof duality* [HHS84, KR07]. Sans rentrer dans les détails, cette approche produit une solution dont seulement une partie a été optimisée, et pour cette partie optimisée les étiquettes trouvées sont globalement optimales. Cette approche peut être vue comme une généralisation de l'algorithme standard de coupe de graphe utilisé pour les fonctions sous-modulaires : en effet, dans le cas d'une fonction sous-modulaire les résultats des deux algorithmes sont identiques, mais il y a un surcoût linéaire dans le cas de la *roof duality*. Cet algorithme pour optimiser les fonctions binaires non sous-modulaires est appelé QPBO (*Quadratic Pseudo-Boolean Optimization - QPBO*) dans la littérature. QPBO va étiqueter les potentiels de cliques sous-modulaires et pour les potentiels non sous-modulaires, il va soit les étiqueter, soit dire qu'il ne peut pas se décider. Une solution optimale partielle est donc obtenue. Le nombre de nœuds non-étiquetés va dépendre de la structure du problème à optimiser, en particulier du nombre de contraintes de sous-modularité non respectées. QPBO garantit que l'énergie de la nouvelle configuration obtenue ne croît pas. Ainsi, en partant d'une configuration initiale fixée arbitrairement ou selon un autre algorithme d'optimisation, la nouvelle configuration obtenue, composée de l'ensemble des nouvelles affectations lorsque QPBO connaît la réponse et des anciennes affectations lorsque QPBO ne sait pas répondre, aura une énergie inférieure ou égale à celle de la configuration de départ.

Deux extensions de QPBO, pouvant se combiner, existent [RKLS07] :

- QPBOP : simplification de l'énergie par des contractions de sommets du graphe représentant l'énergie ne modifiant pas le minimum global ;
- et QPBOI : amélioration d'un étiquetage initial.

Les performances de QPBO dépendent du pourcentage de nœuds non-étiquetés. C'est-à-dire qu'il n'y a pas de garantie théorique sur la qualité du minimum obtenu. Cela est dû au fait que le problème auquel nous nous attaquons est beaucoup plus difficile que celui de la minimisation des fonctions binaires sous-modulaires. C'est comme si on compare, dans le cas continu, la minimisation des fonctions non-convexes avec celle des fonctions convexes. En pratique, QPBO donnera de bonnes solutions dans les cas suivants :

- si le pourcentage de sites non-étiquetés est inférieur à 10% du nombre total de nœuds ;
- ou si le pourcentage de sites non-étiquetés est inférieur à 50% du nombre total de nœuds, et si à chaque itération de QPBO les nœuds étiquetés ne sont pas les mêmes, ce qui se produit souvent lorsque les étiquettes sont dynamiques, e.g. en optimisation continue-discrète comme [LRR08].

Signalons que les techniques de réduction vers \mathcal{F}^2 [Ish09] s'appliquent aussi pour les fonctions binaires non sous-modulaires.

Mouvement de mélange (*fusion move*)

Grâce à l'algorithme QPBO, pour optimiser un problème multi-étiquettes, avec au moins 3 étiquettes différentes par site, nous ne sommes plus limités à des algorithmes de mouvement avec une formulation sous-modulaire tels que l' α -expansion. Il est en effet possible de proposer une nouvelle étiquette différente par site, puis de choisir entre l'étiquette courante et la nouvelle étiquette, pour l'ensemble des sites avec QPBO. Ce mouvement s'appelle le **mouvement de mélange** (*fusion move* en anglais) [LRRB10] et a été utilisé la première fois dans [LRR08].

Le mouvement de mélange est une avancée significative, car il permet de combiner des étiquetages ou configurations, donc de paralléliser l'optimisation des MRF/CRF, mais aussi d'optimiser des fonctions d'énergie non-convexes [LRRB10]. De plus, il offre la possibilité de générer des étiquettes à la volée qui sont localement intéressantes pour un site, ce qui évite les artefacts de discrétisation des espaces, et permet d'utiliser moins de mémoire vive.

Encore une fois, puisque notre problème d'optimisation est très difficile, il n'y a pas de garantie théorique de qualité sur le minimum trouvé.

2.5.3 Autres algorithmes

Minimisation par mode conditionnel itéré (*Iterated Conditional Mode - ICM*)

ICM [Bes86] utilise une stratégie déterministe gloutonne pour trouver un minimum local. Il commence à partir d'une estimation de l'étiquetage (il faut donc proposer une étiquette pour chaque site au départ), puis il choisit pour chaque site l'étiquette engendrant la plus grande diminution d'énergie. Ce processus est répété jusqu'à convergence, qui est garantie et qui est rapide en pratique. Les résultats sont très sensibles à l'estimation initiale des étiquettes, en particulier dans le cas de fonctions d'énergie non-convexes. L'estimation initiale, qui donne les meilleurs résultats en général, consiste à associer chaque site à l'étiquette donnant la plus petite énergie en ne considérant que les termes unaires (cliques de taille 1).

Minimisation par recuit simulé (*simulated annealing*)

Le recuit simulé est un algorithme assimilable à de l'optimisation stochastique : tandis qu'une descente de gradient est appliquée (itération sur l'ensemble des sites jusqu'à convergence : maximisation des probabilités conditionnelles locales ou minimisation des énergies conditionnelles locales) et que la solution se dirige vers le minimum local le plus proche, l'algorithme autorise quelques sauts de temps en temps pour sortir de ces minima locaux en acceptant ponctuellement une solution qui augmente l'énergie globale. La probabilité de ces sauts est élevée au début, puis elle décroît suivant un processus proche de celui du refroidissement d'un matériau. Cette probabilité est habituellement paramétrée par un paramètre appelé température. Geman et Geman [GG84] ont rendu populaire cet algorithme dans le cadre d'un problème de restauration d'images avec une approche MAP-MRF, grâce au théorème sur la convergence du recuit simulé, qui dit que si la température décroît comme $1/(\ln(1+t))$ où t est le temps, l'algorithme est

garanti trouver la solution du maximum a posteriori, même si le temps est infini. En pratique, une décroissance géométrique est utilisée, car elle accélère notablement la convergence sans pour autant dégrader significativement les résultats.

Le recuit simulé a déjà été utilisé pour résoudre certains problèmes posés sous la forme d'un MRF, mais il reste extrêmement lent. Il reste néanmoins intéressant pour comparer son résultat (visuel+minimum de l'énergie) avec une autre méthode d'optimisation.

Programmation dynamique

La programmation dynamique est un outil général de résolution d'un problème, dont la solution est basée sur la solution de sous-problèmes, par un ensemble de règles à suivre. Elle est donc similaire à une approche diviser pour régner. Mais, contrairement à une approche diviser pour régner, dans la programmation dynamique, la solution d'un sous-problème peut être utilisée dans d'autres sous-problèmes différents.

La programmation dynamique a déjà été employée pour minimiser des énergies semblables à celle des MRF dans le cadre de la détection de contours [AWJ90], et elle est adoptée dans des approches par transition, dans lesquelles l'état du système évolue sans jamais se bloquer dans un circuit : l'état du système est donc modélisable par une chaîne ou par un graphe orienté sans circuit. Elle est souvent utilisée pour optimiser des sommes de fonctions monotones non décroissantes sous contraintes, par exemple dans le calcul du plus court chemin dans un graphe orienté sans circuit absorbant. Elle est populaire, car tout problème de programmation dynamique peut se ramener à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe [Mar76], et il est possible de gagner énormément de temps de calcul en utilisant l'algorithme A* (recherche basée sur des heuristiques) en utilisant les propriétés spécifiques d'un problème.

Minimisation par propagation de croyance par produit maximal (*Max-Product Belief Propagation - MPBP*)

Maintenant, nous présentons une extension de la programmation dynamique des chaînes dédiée aux graphes sans cycles. MPBP ([WF01] et références à l'intérieur) est un algorithme de passage local de messages et converge vers un point fixe lorsque que le graphe est un arbre (sans cycle), ce dernier correspondant à l'estimateur MAP des variables cachées étant données les variables observées (toujours pour un arbre). L'algorithme peut être aussi appliqué sur des graphes contenant des cycles, mais cette fois la solution obtenue sera une approximation. Les performances empiriques sur les graphes contenant des boucles restent bonnes, mais le MPBP peut ne pas converger. D'autres algorithmes ont été développés, qui sont une évolution du MPBP et ont des garanties d'optimalité sous certaines conditions, les TRW (*Tree-ReWeighted max-product message passing*) et les TRW convergents (cf. [Kol06] et références à l'intérieur).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux modèles graphiques probabilistes non-orientés, les champs aléatoires de Markov et les champs aléatoires conditionnels. Nous avons insisté sur leurs différences conceptuelles et pratiques, puis nous avons abordé l'apprentissage de leur paramètres, et exposé les algorithmes d'estimation de la meilleure configuration cachée de ces champs.

Les champs aléatoires de Markov essaient de modéliser le processus physique à l'origine des observations obtenues, ce qui peut s'avérer utile pour générer des données synthétiques ou lorsque le processus physique est connu. Les champs aléatoires conditionnels permettent de directement modéliser la distribution a posteriori des variables cachées étant données les variables observées, en particulier cela offre la possibilité de contrôler la forme et de type des configurations locales obtenues.

Les chapitres suivants, qui constituent nos contributions, vont montrer l'aptitude de ces champs aléatoires de Markov et champs aléatoires conditionnels à résoudre des problèmes aussi variés que :

- l'extraction d'arêtes caractéristiques dans le chapitre 3;
- la segmentation en régions approximables par des primitives simples dans le chapitre 4;
- et l'optimisation globale de la position des sommets dans le chapitre 5.

Deuxième partie

Contributions

Chapitre 3

Extraction robuste de lignes composées d'arêtes caractéristiques

Résumé - Ce chapitre constitue, avec le chapitre suivant sur la segmentation de maillages, nos travaux sur l'analyse robuste de la surface de maillages 2-variétés triangulaires. Ce chapitre s'intéresse aux arêtes caractéristiques des maillages, en s'attachant à les extraire de manière statistiquement robuste, mais aussi globalement cohérente. Ces arêtes jouent un rôle important à la fois dans la segmentation surfacique, où elles guident l'évolution de la segmentation de telle sorte que la segmentation préférée n'ait pas de segment coupé par une telle arête, et dans le remaillage, où elles limitent les déplacements de points et les opérations topologiques autorisées. Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle méthode d'extraction d'arêtes caractéristiques formulée comme un problème de minimisation d'une fonction d'énergie, une sélection d'attributs pour apprendre un modèle statistique des arêtes, ainsi qu'une nouvelle mesure géométrique discriminante pour les arêtes intérieures : l'estimateur de l'angle entre les deux plans tangents.

3.1 Introduction

Dans cette section, après avoir défini les notions clés du chapitre, la problématique des travaux présentés va être détaillée, ainsi que les difficultés associées.

3.1.1 Notions de base

Définition 35. Une arête e d'un maillage triangulaire 2-variété avec ou sans bords est une **arête caractéristique** si e est une arête du bord ou s'il y a une discontinuité notable de la direction des normales le long de e .

Définition 36. Une arête e d'un maillage triangulaire 2-variété avec ou sans bords est une **arête normale** (ordinaire) si e n'est pas une arête caractéristique.

Ainsi, chacune des arêtes d'un maillage triangulaire 2-variété est soit caractéristique, soit

normale. Le problème d'extraction d'arêtes caractéristiques présenté dans ce chapitre est donc un problème de classification binaire.

Définition 37. *Un sommet s d'un maillage triangulaire 2-variété avec ou sans bords est un coin si s se trouve sur un bord en ayant 2 arêtes adjacentes du bord non alignées (en tenant compte d'un intervalle de tolérance) ou si s a au moins 3 arêtes caractéristiques adjacentes.*

Définition 38. *Une ligne caractéristique est une ligne perceptuellement importante pour l'œil humain. Elle n'est pas forcément une ligne au sens mathématique, elle est une discrétisation d'une courbe coïncidant avec les caractéristiques géométriques d'une surface.*

3.1.2 Description du problème

La problématique des travaux présentés dans ce chapitre est l'extraction automatique de lignes composées d'arêtes caractéristiques sur des maillages mécaniques 2-variétés avec ou sans bords. Les lignes composées d'arêtes caractéristiques d'un maillage sont une représentation discrète de ses caractéristiques qui capturent la structure d'arrangement des triangles.

La restriction aux maillages mécaniques est liée aux raisons suivantes :

- l'analyse sémantique de la surface des maillages est plus adaptée aux maillages mécaniques qu'aux surfaces naturelles lisses, en particulier la décomposition en primitives géométriques simples a du sens pour de tels modèles, alors que pour un modèle naturel, une décomposition basée sur les articulations d'un squelette serait plus adaptée ;
- les hautes fréquences de la surface d'un objet mécanique sont en général localisées et spatialement cohérentes, ce qui doit faciliter leur extraction, en particulier en présence de bruit sur la position des sommets.

Tant le cas des maillages non-bruités avec des arêtes caractéristiques détectables par un seuil sur l'angle dièdre paraît facile, tant le problème, plus général, de l'extraction de lignes composées d'arêtes caractéristiques sur des maillages mécaniques 2-variétés dont les positions des sommets sont bruités, se révèle difficile. Non seulement le bruit sur la position des sommets nécessite une méthode robuste, dont la décision n'est pas basée sur une seule mesure géométrique, mais en plus la connectivité irrégulière du maillage demande un processus d'extraction global des arêtes caractéristiques.

3.1.3 Motivations et applications

Motivations

Les objectifs finaux de l'extraction de lignes composées d'arêtes caractéristiques sont l'*obtention de contraintes fortes* pour la segmentation de maillage (cf. chapitre 4) et la *préservation des lignes caractéristiques et des coins* dans le cadre du remaillage (cf. chapitre 5). Les contraintes fortes sont en effet une approche permettant de diriger une segmentation variationnelle et d'accélérer sa convergence. Elles permettent aussi de contrôler les modifications ayant lieu lors d'un remaillage explicite.

Il y a aussi un intérêt scientifique, l’approfondissement des interactions possibles entre l’extraction de lignes caractéristiques, la segmentation en régions approximables par des primitives simples et le remaillage. Nous pensons en effet que les trois classes de méthodes peuvent s’améliorer mutuellement/s’entre-aider, i.e. bénéficier des deux autres. Ainsi, en optimisant les trois successivement, et en mettant à jour un ensemble de contraintes dures et souples obtenues par les deux autres approches, on devrait à la fois avoir des bons résultats et une garantie de convergence. En particulier, il devrait être possible d’améliorer la qualité des lignes caractéristiques extraites à partir des résultats de la segmentation et de la régularisation du maillage.

Applications

L’extraction de lignes composées d’arêtes vives a plusieurs applications :

- description, analyse, reconnaissance et appariement de formes 3D, détection des symétries : les lignes composées d’arêtes caractéristiques sont plus discriminantes que des points clés pris avec leur région localement adjacente : elles forment des réseaux de lignes composées d’arêtes caractéristiques ;
- segmentation surfacique : les lignes composées d’arêtes caractéristiques peuvent servir de frontières partielles entre les régions ;
- recherche de formes 3D dans une base de données d’objets : les lignes composées d’arêtes caractéristiques peuvent être utilisées comme requête ;
- traitement de la géométrie “sensible” aux caractéristiques extraites : les lignes composées d’arêtes caractéristiques vont contraindre les modifications du maillage ;
- rendu non-photoréaliste : les lignes composées d’arêtes caractéristiques sont mises en avant.

3.1.4 Difficultés

Similairement au problème de la détection d’arêtes de contour en image, l’extraction de lignes composées d’arêtes caractéristiques est un problème mal posé à cause du manque d’information sur le processus d’échantillonnage, sur le processus de bruitage des données et sur le véritable signal géométrique. La même discontinuité géométrique peut être due à une vraie caractéristique de l’objet, à un échantillonnage insuffisant dans une région de forte courbure, à la présence de bruit sur la position des sommets, à un mauvais choix d’un algorithme de reconstruction à partir d’un nuage de points, ou à une modification du maillage initial.

Souvent l’extraction de lignes composées d’arêtes caractéristiques doit faire face au problème de la fragmentation de ces dernières : des petits trous déconnectent certaines lignes.

Par définition, les lignes que l’on cherche à extraire sont composées d’arêtes du maillage. Ainsi, le processus d’extraction est sensible à la connectivité irrégulière et aux triangles plats. Ce choix d’extraire des lignes composées d’arêtes caractéristiques à la place d’autres approches, basées sur un modèle paramétrique comme les *snakes*, est volontaire. Cela facilitera une segmentation surfacique en régions composées de triangles, qui utilise les résultats de l’extraction de lignes composées d’arêtes caractéristiques. Cela permettra aussi d’obtenir directement des

contraintes dures sur les arêtes du maillage pour le remaillage.

La dernière difficulté est reliée au choix de la bonne échelle des caractéristiques. Est-ce que les caractéristiques extraites ont du sens pour l'échelle choisie ? Comment choisir une échelle significative automatiquement ? Il faut en effet être capable d'extraire seulement ce qui est important pour l'œil humain. Par exemple, les motifs répétitifs sont monotones pour l'œil humain [LVJ05].

Maintenant que les bases des travaux de ce chapitre ont été énumérées, nous allons présenter les approches de l'état de l'art concurrentes à notre méthode que nous présentons ensuite.

3.2 État de l'art de l'extraction de lignes caractéristiques

La majorité des approches aborde le problème de l'extraction de lignes caractéristiques sur les maillages triangulaires denses, ce qui n'est pas forcément le cas lors de l'extraction d'arêtes caractéristiques seules. Les maillages utilisés sont denses pour pouvoir être le plus précis possible sur le calcul d'une caractéristique géométrique, tout en limitant l'instabilité des mesures géométriques, telles que les courbures moyennes discrètes, dues aux variations brusques de la densité des sommets sur la surface. Ensuite, les méthodes d'extraction de lignes caractéristiques, basées sur une ou plusieurs mesures géométriques, fonctionneront mieux sur des maillages denses pour les mêmes raisons.

Signalons que l'extraction de lignes caractéristiques sur les maillages triangulaires n'est généralement pas réalisée de manière multi-échelle, car il est difficile de modéliser une hiérarchie de lignes caractéristiques. L'extraction multi-échelle de lignes caractéristiques sur les maillages triangulaires s'est plus développée autour de la reconnaissance de sommets caractéristiques multi-échelles que de modèles multi-échelles des lignes caractéristiques [PKG03, LVJ05].

Pour les maillages naturels variant de manière progressive (*smoothly varying* en anglais), la majorité des approches d'extraction de lignes caractéristiques sont basées sur des calculs plus ou moins robustes des extrema de courbures principales le long des directions principales correspondantes [OBS04, HPW05, YBS05, ZGM09], afin d'obtenir des lignes le long des plis de la surface, appelées crêtes pour les maxima et vallées pour les minima. Pour les maillages CAO (Conception Assistée par Ordinateur) ou mécaniques, l'extraction de lignes caractéristiques implique souvent l'identification de toutes les arêtes caractéristiques, en utilisant soit la théorie des tenseurs de normales votant [KCL09], soit des angles dièdres, ou encore l'angle entre les meilleures approximations polynomiales dans un voisinage de l'arête [HMG00]. Ce type d'approches pour les objets mécaniques se justifie essentiellement par deux points : 1) les arêtes caractéristiques des objets mécaniques sont le plus souvent des arêtes saillantes bien marquées ; et 2) la densité des sommets sur la surface varie fortement sur ce type de maillage.

Récemment, une méthode d'apprentissage de caractéristiques géométriques en ligne [SJW⁺11] et une méthode d'apprentissage des lignes frontières entre les segments d'une segmentation de maillage [BLVD11] ont été proposées. Elles s'inscrivent dans la suite d'un algorithme d'apprentissage des segmentations de maillage [KHS10]. Les travaux [KHS10, SJW⁺11, BLVD11] n'étaient

pas publiés au moment de nos recherches sur les lignes composées d'arêtes caractéristiques. Sunkel et al. [SJW⁺11] proposent une méthode qui recherche des lignes de caractéristiques géométriques similaires dans le maillage après avoir appris quelques exemples donnés par l'utilisateur, leur approche est donc plus apparentée à de l'appariement souple de formes 3D, qu'à une méthode générale d'extraction de lignes caractéristiques. Benhabiles et al. [BLVD11] utilisent un apprentissage des caractéristiques des lignes frontières entre les segments de plusieurs segmentations de maillages, et donc les résultats obtenus dépendront des segmentations utilisées pour l'apprentissage, sans être directement liés à l'extraction de lignes caractéristiques.

Remarques : les méthodes proposées ici essaient d'extraire des lignes caractéristiques composées d'arêtes du maillage, et donc nous avons volontairement omis des approches paramétriques de modèle de lignes caractéristiques indépendants de la connectivité du maillage telles que les snakes ou les contours actifs [LL02, PKG03].

Nous allons approfondir les approches d'extraction directe de lignes caractéristiques dans la suite de cette section.

3.2.1 Extraction par calcul des extrema de courbures principales

Cette approche est certainement la plus répandue [OBS04, HPW05, YBS05, ZGM09], en particulier pour les surfaces lisses. Elle nécessite le calcul des dérivées, voire des dérivées secondes, des courbures principales. Le calcul de dérivées sur des surfaces discrètes, linéaires par morceaux, n'est pas un concept direct. En conséquence, l'approche standard a longtemps été d'approximer localement la surface par un patch surfacique lisse, souvent polynomial, et de calculer les dérivées et courbures à partir de ce patch. Cela a tendance à lisser les vraies caractéristiques de la surface, en plus du surcoût introduit par l'approximation polynomiale. Il est aussi possible d'utiliser des opérateurs différentiels discrets [HPW05], mais il y a alors un problème de sensibilité aux bruits sur la position des sommets, et une étape de post-traitement des lignes extraites est nécessaire.

3.2.2 Extraction par détection d'arêtes caractéristiques

Le principe est d'extraire des lignes caractéristiques en tant qu'ensemble connexe d'arêtes caractéristiques. Cette approche a l'avantage de ne pas introduire de calcul de dérivée de la surface qui est généralement coûteux soit à cause de l'ajustement polynomial, soit à cause des post-traitements de lignes à la fin, à cause de la sensibilité au bruit sur la position des sommets. Par contre, un ensemble connexe d'arêtes caractéristiques ne sera pas forcément visuellement agréable à cause de la sensibilité de l'extraction à l'irrégularité de la connectivité.

Seuillage simple sur l'angle dièdre

Intuitivement, en l'absence de bruit sur la position des sommets, une arête i de discontinuité ou arête caractéristique peut être détectée par un seuillage sur son angle dièdre θ_i , grâce à un seuil $\theta_{Th} \in [0, \pi]$. On seuille $|\theta_i|$ pour traiter de la même façon les concavités et les convexités. Pour résumer le seuillage simple :

- si $|\theta_i| \in [\theta_{Th}, \pi]$, l'arête i est classifiée caractéristique ;
- si $|\theta_i| \in [0, \theta_{Th}[$, l'arête i est classifiée normale.

Cependant, à cause de la présence de bruit, les arêtes caractéristiques peuvent être difficiles, voire impossibles à caractériser de manière déterministe. En fait, même en l'absence de bruit, certains modèles géométriques n'ont aucun seuil sur l'angle dièdre qui soit capable de distinguer toutes les arêtes caractéristiques des autres arêtes du maillage. On peut aussi imaginer un seuil sur d'autres mesures, comme la courbure moyenne, mais le problème lié à l'utilisation d'un seul seuil reste le même.

Seuillage par hystérésis sur l'angle dièdre

Le principe du seuillage par hystérésis est d'utiliser deux seuils θ_{Th}^{inf} et θ_{Th}^{sup} sur l'angle dièdre au lieu d'un seul : un seuil $\theta_{Th}^{inf} \in [0, \theta_{Th}^{sup}[$ en dessous duquel la réponse est toujours négative, cas d'une arête normale, et un seuil $\theta_{Th}^{sup} \in]\theta_{Th}^{inf}, \pi]$ au-dessus duquel la réponse est toujours positive, cas d'une arête caractéristique, on parle alors de positif fort. Pour un angle $|\theta_i| \in]\theta_{Th}^{inf}, \theta_{Th}^{sup}[$ la réponse est positive s'il existe au moins 2 positifs forts parmi les voisins de l'arête i , et négative sinon. Pour résumer le seuillage par hystérésis :

- si $|\theta_i| \in [\theta_{Th}^{sup}, \pi]$, l'arête i est classifiée caractéristique ;
- si $|\theta_i| \in [0, \theta_{Th}^{inf}]$, l'arête i est classifiée normale ;
- si $|\theta_i| \in]\theta_{Th}^{inf}, \theta_{Th}^{sup}[$, l'arête i est classifiée caractéristique si $\exists j, k \in \mathcal{N}_i, j \neq k$, avec $|\theta_j| \geq \theta_{Th}^{sup}$ et $|\theta_k| \geq \theta_{Th}^{sup}$. Sinon i est classifiée normale.

Angle entre les 2 meilleurs polynômes tangents

Hubeli et al. [HMG00] proposent d'utiliser une approximation polynomiale des points obtenus comme intersections entre un plan orthogonal à l'arête passant en son milieu et les arêtes du maillage. Un polynôme est utilisé à gauche de l'arête et un autre à sa droite, ensuite on calcule les 2 vecteurs tangents à l'arête, et finalement l'angle qui nous intéresse est celui entre ces deux vecteurs tangents ; cet angle étant égal à l'angle entre les deux normales unitaires de ces vecteurs tangents si elles sont orientées vers l'extérieur. Plus on augmente la taille du support, c'est-à-dire le nombre de points, plus on diminue la sensibilité au bruit sur la position des sommets d'un processus d'extraction des arêtes caractéristiques basé sur un seuillage de cet angle. Le degré du polynôme peut aussi être augmenté, mais plus la complexité du polynôme augmente, plus le processus de seuillage de l'angle est sensible au bruit.

Théorie des tenseurs de normales votant

La théorie des tenseurs de normales s'est montrée efficace dans l'identification des faces, des arêtes saillantes, et des coins. Ces derniers ont, respectivement, une valeur propre dominante, deux valeurs propres dominantes ou trois valeurs propres approximativement égales (cf. [KCL09] et références à l'intérieur). Elle a été utilisée pour classier automatiquement les caractéristiques de la surface, mais aussi dans des problèmes d'approximation géométrique.

L'extraction des caractéristiques d'une surface n'est pas limitée à l'information de forme, elle peut prendre en compte d'autres attributs tels que les couleurs. En fait, Kim et al. [KCL09] montrent qu'on peut extraire des caractéristiques globales, les triangles et plusieurs ensembles d'arêtes saillantes, par une agglomération de type k-moyennes se basant à la fois sur les valeurs propres des tenseurs de normales et sur d'autres attributs. Ceci nous renvoie à l'apprentissage non-supervisé abordé plus tard dans le chapitre.

Dans le reste de ce chapitre, notre méthode pour détecter les arêtes caractéristiques va être détaillée, selon la structuration suivante :

- la section 3.3 présente les objectifs de notre contribution, notre modèle graphique probabiliste, ainsi que la fonction objectif à minimiser ;
- les sections 3.4 et 3.5 proposent un choix de potentiels énergétiques pour la fonction objectif ;
- la section 3.6 montre des résultats expérimentaux ;
- et la section 3.7 conclut le chapitre et donne des perspectives de recherche.

3.3 **Modèle graphique probabiliste pour l'extraction d'arêtes caractéristiques globalement cohérentes**

Dans cette section, nous proposons une méthode d'extraction des caractéristiques d'un maillage. Dans une première étape, une classification binaire des arêtes d'un maillage triangulaire 2-variété a lieu : en sortie de l'algorithme de classification, chaque arête du maillage est associée à une étiquette : soit "caractéristique", soit "normale". Ensuite, dans une deuxième étape, les sommets du maillage sont étiquetés : soit "coin", soit "normal" en utilisant les résultats de la première étape et la définition 37 d'un coin. L'extraction des coins est directe, et donc dans le reste de ce chapitre, seule l'extraction des lignes composées d'arêtes caractéristiques sera traitée.

Pour savoir si une arête est caractéristique ou normale, deux types d'information sont pris en compte dans notre approche :

- *des mesures géométriques* sur ou autour de l'arête, qui sont des indices sur la confiance d'être une arête caractéristique ou une arête normale indépendamment des autres arêtes ;
- *les étiquettes des arêtes voisines*, qui donnent des indications sur le meilleur choix entre étiqueter l'arête actuelle caractéristique ou normale au regard de la configuration d'arêtes caractéristiques engendrée ; certaines configurations locales d'arêtes sont favorisées, tandis que d'autres sont pénalisées.

Les mesures géométriques sont sensibles aux bruits dans la position des sommets, et la prise en compte des configurations locales à favoriser, va permettre de rendre robuste l'extraction d'arêtes caractéristiques.

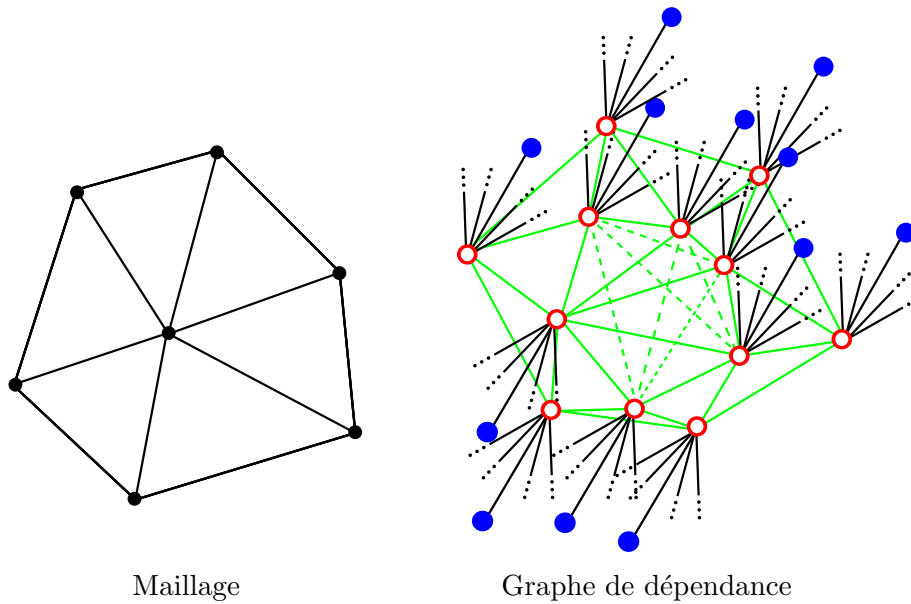


FIGURE 3.1 – Graphe de dépendance associé à un maillage : les sommets rouges sont les variables cachées associées aux arêtes du maillage, et les sommets bleus sont les variables observées associées aux arêtes du maillage. Les arêtes noires du graphe de dépendance représentent les termes unaires du modèle graphique et les arêtes vertes représentent les termes par paire. Pour des raisons de lisibilité, les dépendances des variables cachées sur les variables observées ont été ébauchées. Une variable cachée peut accéder aux autres observations que les siennes.

3.3.1 Description du modèle graphique probabiliste

L'objectif final du modèle graphique proposé est de classifier les arêtes d'un maillage en arêtes caractéristiques et arêtes normales. Les sites $\mathcal{S}^{(x)}$ du modèle graphique probabiliste correspondent aux arêtes du maillage, et la notion de voisinage correspond à celle induite par la connectivité du maillage : soient $i \in \mathcal{S}^{(x)}$ et $j \in \mathcal{S}^{(x)}$, $j \in \mathcal{N}_i$ si et seulement si les deux arêtes correspondantes du maillage sont adjacentes, i.e. elles ont un sommet du maillage en commun. Le graphe de dépendance du modèle graphique est donné dans la figure 3.1. Pour un maillage général, le nombre de voisins de chaque site est irrégulier et est susceptible de varier fortement.

Les variables de décisions binaires, les variables cachées de notre modèle graphique, sont associées aux sites et donc aux arêtes du maillage. L'ensemble de leurs étiquettes possibles est $\mathcal{L}^{(x)} = \{\text{normale}; \text{caractéristique}\} = \{0; 1\}$. 0 signifie arête normale et 1 arête caractéristique. Les performances de la classification des arêtes en arêtes caractéristiques et arêtes normales peuvent être significativement améliorées en prenant la décision pour l'ensemble des arêtes conjointement, i.e. globalement. Cela peut être réalisé grâce à l'utilisation d'un modèle qui complète l'information résidant dans le terme d'attache aux données associé aux arêtes, lié aux mesures géométriques, par des termes additionnels favorisant des lignes caractéristiques consistantes, i.e. des étiquettes des arêtes voisines cohérentes entre elles. Et cette approche permet de trouver les vraies dépendances circulaires entre les arêtes caractéristiques, ce que ne permet pas un simple

post-traitement. Bien que la dépendance entre les variables cachées associées aux arêtes soit limitée à des couples d'arêtes voisines (cf. figure 3.1), elle intègre des mesures géométriques, ce qui la rend plus robuste au bruit sur la position des sommets. Puisque les interactions entre les arêtes sont influencées par la géométrie du maillage, le modèle graphique utilisé pour l'extraction de lignes composées d'arêtes caractéristiques est un champ aléatoire de Markov conditionnel.

Maintenant que l'aspect graphique de notre modélisation a été présenté, la fonction objectif associée au modèle graphique, qui doit être minimisée afin d'obtenir la meilleure configuration d'arêtes caractéristiques et normales, va être définie.

3.3.2 Définition de la fonction objectif

La forme spécifique de notre fonction d'énergie $\Upsilon(x; y) = -\ln P(x; y) - \ln(Z)$ donnée dans l'équation (3.1), est définie comme une combinaison scalaire de sommes de potentiels énergétiques invariants à l'échelle. X et Y correspondent, respectivement, à une famille de variables aléatoires et à une famille de variables observées, et sont définies sur l'ensemble $\mathcal{S}^{(x)}$. Z est une constante de normalisation, et il s'appelle la fonction partition (cf. définition 2.4). Il y a deux types de potentiels énergétiques :

- un potentiel énergétique E_d appelé *preuve locale* ou terme d'attache aux données, qui sera plus petit pour le choix le meilleur localement au vue des données localement observées ; un exemple de terme d'attache aux données basé sur l'angle dièdre d'une arête est donné dans l'équation (3.2) ;
- un potentiel énergétique de régularisation E_h appelé modèle de Ising/Potts amélioré, connus de la restauration d'images [GG84], qui sera plus petit pour le choix localement le plus cohérent ; *amélioré* signifie simplement que la régularisation dépend des données observées et pas seulement des couples d'étiquettes ; intuitivement, le terme de régularisation permet dans notre cas de connecter certains fragments de lignes caractéristiques entre eux, afin de corriger des faux négatifs, et d'essayer d'enlever certaines arêtes caractéristiques non cohérentes avec le reste des décisions, pour corriger des faux positifs.

$$\begin{aligned} \Upsilon(x; y, \theta, \phi) = & \sum_{i \in \mathcal{S}^{(x)}} E_d(x_i; \theta, y) & \left| \begin{array}{l} \text{Attache à la géométrie} \\ \text{Homogénéité spatiale} \end{array} \right. & (3.1) \\ & - \mu \sum_{i \in \mathcal{S}^{(x)}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} E_h(x_i, x_j; \theta, \phi) & \end{aligned}$$

Ici μ est un scalaire positif représentant la force de régularisation des termes d'homogénéité spatiale : plus μ est grand, plus la régularisation sera importante. Les potentiels énergétiques E_d et E_h vont être définis plus tard, dans les deux prochaines sections. θ est l'ensemble des angles dièdres θ_i mesurés sur les arêtes, et ϕ est l'ensemble des angles de virage ou angles tangentiels ϕ_{ij} mesurés sur toutes les paires d'arêtes adjacentes. Les observations θ interviennent dans les deux termes E_d et E_h , c'est-à-dire qu'elles sont des preuves locales et qu'elles guident la régularisation des étiquettes associées aux arêtes. Dans le terme d'attache aux données, E_d , les observations y complètent l'information donnée par θ : elles contiennent toutes les autres mesures géométriques locales de l'arête y_i , mais elles renferment aussi les informations des autres arêtes.

Puisque notre modèle graphique probabiliste est un champ aléatoire de Markov conditionnel E_d n'est pas restreint à utiliser les informations liées à un seul site, et toutes les observations sur le maillage peuvent être utilisées. Cette possibilité sera utilisée dans notre approche basée sur l'apprentissage automatique.

Dans la suite, nous proposons deux approches différentes pour estimer la meilleure configuration du modèle graphique, une estimation basée sur l'angle dièdre en section 3.4, et une estimation basée sur l'apprentissage automatique en section 3.5.

3.4 Estimation basée sur l'angle dièdre

Dans cette section, deux versions des termes E_d et E_h de l'équation (3.1) sont présentées. Ces deux versions sont dédiées aux maillages mécaniques sans bruit sur la position de leurs sommets.

3.4.1 Première version

Nous avons proposé une première version définie comme suit. Le terme d'attache aux données $E_d(x_i; y)$ prend seulement en compte l'angle dièdre de l'arête i sous la forme d'un seuillage atténué avec un seuil θ_{Th} ($\pi > \theta_{Th} \geq 0$) et d'une dépendance linéaire de l'énergie sur le cosinus des angles dièdres :

$$E_d(x_i; \theta_i) = \begin{cases} \cos(\theta_i) & \text{si } x_i = 1 \Leftrightarrow \text{caractéristique} \\ 2\cos(\theta_{Th}) - \cos(\theta_i) & \text{sinon } x_i = 0 \Leftrightarrow \text{normale} \end{cases} \quad (3.2)$$

Remarquons que $E_d(x_i = 0; \theta_i = \theta_{Th}) = E_d(x_i = 1; \theta_i = \theta_{Th})$. Le terme de régularisation spatiale $E_h(x_i, x_j; \theta, \phi)$ dépend seulement de l'angle tangentiel ϕ_{ij} et favorise les mêmes étiquettes pour deux arêtes adjacentes si elles ont approximativement la même direction :

$$E_h(x_i, x_j; \phi_{ij}) = \exp \{-50 \cdot (1 - \cos(\phi_{ij}))\} \delta(x_i = x_j). \quad (3.3)$$

δ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si la condition $x_i = x_j$ est satisfaite et 0 autrement : cette fonctionnelle favorise donc les mêmes étiquettes.

Avec ces définitions de E_d et E_h , la fonction d'énergie (3.1) est sous-modulaire (cf. définition 32). Ainsi, le minimum global de (3.1) peut être facilement calculé en utilisant l'algorithme de coupe de graphe et la construction du st-graphe de Kolmogorov et al. [KZ04].

3.4.2 Deuxième version

La première version de la section précédente souffre d'un terme d'attache à la géométrie ne discriminant pas suffisamment les cas des arêtes normales et caractéristiques, et d'un terme de régularisation ne prenant pas en compte l'angle dièdre des arêtes, ce qui peut favoriser l'alignement de vraies arêtes caractéristiques avec de fausses arêtes caractéristiques. Par la suite, nous avons proposé d'autres potentiels énergétiques pour la détection d'arêtes caractéristiques globalement cohérentes basé sur l'angle dièdre. Le terme d'attache aux données $E_d(x_i; y)$ prend

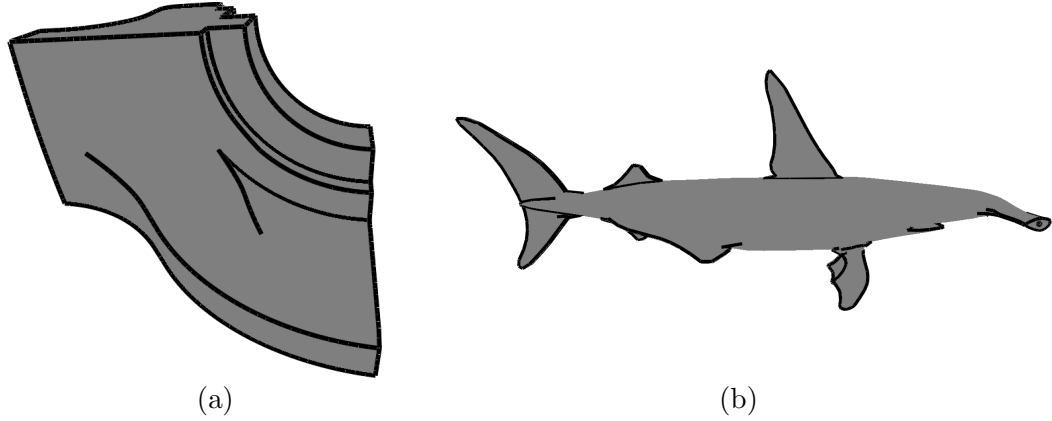


FIGURE 3.2 – Arêtes caractéristiques extraites du (a) modèle fandisk et du (b) modèle shark, en utilisant le premier modèle d'extraction globalement cohérente des arêtes caractéristiques (cf. équations 3.2 et 3.3). Les arêtes caractéristiques noires sont préservées tout au long de notre algorithme d'optimisation de maillages présenté dans le chapitre 5.

seulement en compte l'angle dièdre de l'arête i sous la forme d'un seuillage atténué avec un seuil θ_{Th} ($\pi > \theta_{Th} \geq 0$) et d'une dépendance quadratique de l'énergie sur les angles dièdres :

$$E_d(x_i; \theta_i) = \begin{cases} (2\theta_{Th} - |\theta_i|)^2 & \text{si } x_i = 1 \Leftrightarrow \text{caractéristique} \\ (\theta_i)^2 & \text{sinon } x_i = 0 \Leftrightarrow \text{normale} \end{cases} \quad (3.4)$$

Remarquons que $E_d(x_i = 0; \theta_i = \theta_{Th}) = E_d(x_i = 1; \theta_i = \theta_{Th})$. Le terme de régularisation spatiale $E_h(x_i, x_j; \theta, \phi)$ dépend des angles dièdres θ_i et θ_j et de l'angle tangentiel ϕ_{ij} et est défini par les équations (3.5) et (3.6) :

$$E_h(x_i, x_j; \theta_i, \theta_j, \phi_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \neq x_j \\ \eta \geq 0 & \text{si } x_i = x_j = 0 \\ \Gamma(\theta_i, \theta_j, \phi_{ij}) \geq 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5)$$

η est une constante positive qui contrôle l'homogénéité des arêtes normales. Γ est une fonction positive qui favorise les étiquetages cohérents d'arêtes voisines quasiment alignées, si elles ont des angles dièdres similaires.

$$\Gamma(\theta_i, \theta_j, \phi_{ij}) = \exp \left\{ -\nu \left(\underbrace{\frac{|\cos(\theta_i) - \cos(\theta_j)|}{\sigma}}_{\text{similarité}} + \underbrace{1 - \cos(\phi_{ij})}_{\text{alignement}} \right) \right\} \quad (3.6)$$

Dans l'équation (3.6), ν est une constante positive qui contrôle la tolérance à l'alignement entre deux arêtes voisines : plus ν est grand, plus 2 arêtes voisines doivent être alignées. σ est aussi une constante positive, qui s'occupe de la variance tolérée du terme $\nu |\cos(\theta_i) - \cos(\theta_j)|$ le long des lignes caractéristiques. Le terme de similarité de (3.6) permet d'éviter de détecter des arêtes caractéristiques adjacentes avec des angles dièdres très différents. En particulier, ce terme permet

d'empêcher la détection de vraies arêtes normales comme des arêtes caractéristiques, lorsque ces arêtes normales sont alignées avec de vraies arêtes caractéristiques. Le terme d'alignement de (3.6) est là afin d'éviter de détecter des lignes caractéristiques en dent de scie, lorsque les arêtes du maillage le permettent. Le terme d'alignement domine le terme de similarité afin de favoriser la détection de lignes contenant le plus d'arêtes caractéristiques alignées en premier.

Avec ces définitions de E_d et E_h , la fonction d'énergie (3.1) est sous-modulaire (cf. définition 32). Ainsi, le minimum global de (3.1) peut être facilement calculé en utilisant l'algorithme de coupe de graphe et la construction du st-graphe de Kolmogorov et al. [KZ04].

3.5 Estimation basée sur l'apprentissage automatique

Dans cette section, nous présentons une définition des termes de l'équation (3.1) qui intègre un modèle statistique des arêtes appris par une méthode d'apprentissage automatique. Cette version est dédiée aux maillages mécaniques avec du bruit sur la position de leurs sommets.

Pour rendre le processus de classification des arêtes plus robuste, il est intéressant de le baser sur plusieurs mesures géométriques ou attributs, et sur des relations complexes entre ces attributs. Par exemple, des mesures cohérentes à différentes échelles peuvent augmenter la confiance dans le fait qu'une arête est une arête normale ou caractéristique. En fait, la vraie nature d'une arête peut dépendre :

- de plusieurs mesures géométriques sur l'arête ;
- des mesures géométriques sur les arêtes adjacentes ;
- du contexte : des mesures contextuelles à différentes échelles sur un voisinage centré sur l'arête ;
- de l'échantillonnage de la surface et de la connectivité du maillage ;
- de la présence de bruit sur la position des sommets ;
- de la classification des arêtes voisines ; certaines configurations locales d'arêtes caractéristiques sont plus probables que d'autres ;
- du type de maillage, naturel versus mécanique : les mesures les plus discriminantes ne seront pas forcément les mêmes pour chaque catégorie de maillage.

L'apprentissage automatique permet de faire cela : il permet de trouver un modèle de prédiction représentatif des données d'apprentissage, en capturant les caractéristiques et les relations entre attributs les plus significatives.

Les difficultés de l'apprentissage résident dans :

- le nombre et le choix des caractéristiques utilisées dans le vecteur de caractéristiques F_i d'une arête i ; s'il n'y a pas assez de caractéristiques, alors il ne sera pas possible de capturer la diversité des données présentes ; s'il y a trop de caractéristiques, alors on peut faire face au problème de la malédiction de la dimension (*curse of dimensionality* en anglais) ;
- la présence de données aberrantes (*outliers* en anglais), atypiques et bruitées ; si un type d'arête n'est pas assez présent dans les données, pour ne pas l'assimiler à des données aberrantes, il faudra soit sélectionner moins d'arêtes des autres types, soit associer un

poids de compensation dans le calcul de l'erreur de prédiction ;

- le nombre fini des données d'apprentissage : rien ne garantit que les résultats sur des nouvelles données futures sur le modèle appris aujourd'hui seront corrects ; lorsque le nombre de données d'apprentissage est petit, on peut utiliser des techniques de validation croisée ;
- si le modèle d'apprentissage est trop complexe, i.e. avec un nombre élevé de paramètres, il risque de trop coller aux données d'apprentissage et de donner de mauvais résultats sur d'autres données (problème du sur-apprentissage ou *overfitting* en anglais) ;
- si le modèle d'apprentissage est trop simple, i.e. avec un petit nombre de paramètres, il ne pourra pas capter la richesse de la diversité des données (problème du sous-apprentissage ou *underfitting* en anglais) ;
- l'inexistence d'un algorithme d'apprentissage qui est supérieur à tous les autres pour toutes les distributions possibles de données : théorème de l'impossibilité du déjeuner gratuit (*no-free lunch* en anglais) [Wol96].

Lorsqu'on parle d'apprentissage, il y a deux approches générales, les méthodes *supervisées* et *non-supervisées*. Les premières vont chercher à identifier les bons paramètres à partir de données étiquetées, tandis que les deuxièmes vont chercher une structure ou une dépendance cachée dans des données non-étiquetées.

Les approches d'apprentissage supervisées nécessitent l'étiquetage par un expert des arêtes des maillages d'une base de données d'apprentissage et d'une base de données de tests. L'évaluation quantitative est nécessaire afin de valider une méthode de classification : cela est possible grâce à la vérité terrain qui permet de tracer des courbes rappel-précision ou des courbes ROC (*Receiver Operating Characteristic*) [Faw06]. Les méthodes de classification supervisée qui nous concernent sont :

- les *k plus proches voisins* : nécessite le choix d'une distance et le choix du nombre k de voisins avec qui se comparer, si k est grand l'évaluation peut être longue ;
- la *classification bayésienne* : choix de la classe ayant la plus grande probabilité sachant le vecteur caractéristique, mais nécessite de bonnes hypothèses sur la distribution des données ou l'utilisation d'un modèle de mixture de gaussiennes ; l'évaluation est en temps constant ;
- les *Séparateurs à Vaste Marge - SVM* : dans un espace où les données sont linéairement séparables, la méthode SVM (*Support Vector Machine* en anglais) cherche un hyperplan séparateur entre les 2 classes de données : un nouvel échantillon de données sera classé en fonction du côté de l'hyperplan où il se trouve ; cette méthode ne suppose pas que les descripteurs sont indépendants ; la plupart des problèmes ne peuvent pas être séparés linéairement, mais si l'on projette les vecteurs caractéristiques dans un espace de très grande dimension à l'aide d'une fonction noyau, souvent les données deviennent linéairement séparables ; l'apprentissage est polynomial en le nombre de données d'apprentissage et l'évaluation est en temps constant ;
- les *réseaux de neurones* : un neurone est une petite unité de calcul, les neurones sont

- connectés entre eux par des liens avec des poids; un réseau de neurones se compose de plusieurs couches de neurones; leur fonctionnement est inspiré de la biologie;
- les *arbres de décision* : chaque nœud de l'arbre représente un test sur un ou plusieurs attributs et le résultat du test va déterminer où on descend ensuite dans l'arbre; une feuille de l'arbre est étiquetée par une classe; par exemple l'algorithme ID3 de Quinlan, 1986;
- et les *méthodes d'ensemble* : plusieurs classifieurs sont entraînés et ils sont combinés en un seul classifieur plus efficace, e.g. par un vote; AdaBoost est une méthode d'ensemble très populaire [FS95].

Les approches d'apprentissage non-supervisé n'ont pas d'oracle qui explicite les étiquettes d'une vérité terrain et peuvent être vue comme une approche automatique d'analyse des structures intrinsèques des données. La recherche d'une structure optimale dans des données est très difficile, et le plus souvent c'est un problème NP-complet, c'est pourquoi les techniques développées trouvent des structures optimales seulement localement et non-globalement. De plus, les algorithmes de regroupement existants sont assez sensibles aux points aberrants, ce qui nécessite une étape de filtrage ou nettoyage des données d'apprentissage non-étiquetées. Il faut aussi vérifier la stabilité des structures obtenues par certains algorithmes, c'est-à-dire vérifier que de faibles variations dans les données telles que du bruit ne changent pas totalement la structure obtenue. Les approches de classification non-supervisée qui nous intéressent sont :

- l'*agglomération des éléments* à classifier (*clustering* en anglais);
- et la *découpe et l'agglomération hiérarchique* des données : les données sont partitionnées au sein d'un arbre de classes et une classification particulière s'obtient en coupant l'arbre à un niveau donné.

Les méthodes hiérarchiques demandent la sélection d'un niveau particulier dans l'arbre des groupes de données, ce qui peut être assez difficile, sans connaissance a priori sur les données. Nous allons donner plus de détails seulement pour les méthodes d'agglomération.

L'agglomération se fait généralement en utilisant certaines caractéristiques communes. L'idée est que les objets au sein d'un même groupe d'objets sont similaires et ceux dans des groupes différents sont dissimilaires. L'idéal est d'utiliser les informations ou les dimensions du vecteur de caractéristiques les plus pertinentes, ce qui fait que l'agglomération de données est généralement précédée d'une étape de réduction de dimensionnalité telle que l'*Analyse en Composantes Principales - ACP* ou l'*Analyse en Composantes Indépendantes - ACI*. Dans l'ACI, les axes sont statistiquement décorrélés, mais pas forcément orthogonaux comme dans l'ACP. Parmi les méthodes d'agglomération qui nous regardent, citons :

- les *k-moyennes* (*k-means* en anglais); le critère de similarité est l'erreur quadratique entre un exemple et son centre; un nouvel objet appartient à la classe dont le centre de gravité lui est le plus proche; le calcul du centre de gravité est sensible au bruit et aux données aberrantes;
- les *k-medoids* : similaire aux k-moyennes, mais le centre d'un groupe est un medoid - objet le plus central d'un groupe, et la distance utilisée est plus robuste au bruit et aux données

aberrantes ;

- les *k-moyennes floues* : recouvrement possible entre les classes ;
- et l'*agglomération à base de mixtures de gaussiennes* : k gaussiennes et apprentissage avec l'algorithme Espérance-Maximisation ; rejoint aussi l'estimation de la distribution sous-jacente aux données.

Un grand problème avec les approches par agglomération est le choix du nombre de classes finales. Par exemple, on souhaite faire de la classification binaire, mais la structure naturelle des données n'est pas forcément de deux groupes si les objets d'une même classe sont situés à plusieurs endroits dans l'espace des caractéristiques, alors quel nombre de groupes choisir ? De même, à partir de quand un groupe a une taille significative, e.g. en présence de classes non-équiprobables ? Comment peut-on déterminer la qualité d'un groupe ? En fait, les approches de classification non-supervisées sont généralement moins performantes que les approches supervisées, mais elles restent utiles pour des approches d'annotation automatique des données lorsque l'ensemble des données est trop important pour être traité à la main, et dans quelques rares cas elles donnent des résultats meilleurs que les approches supervisées.

Dans le reste de cette section, nous présentons :

- le choix du classifieur SVM (3.5.1) ;
- les définitions des potentiels énergétiques, avec un terme d'attache aux données prenant en compte la prédiction du SVM (3.5.2) ;
- les caractéristiques extraites pour l'apprentissage (3.5.3) ;
- et une nouvelle caractéristique utilisée pour l'apprentissage, l'estimateur de l'angle entre les normales des deux plans tangents à une arête (3.5.4).

3.5.1 Choix d'un classifieur : Séparateurs à Vaste Marge

Les difficultés liées au choix du nombre de groupes des approches par agglomération, nous ont mené à chercher du côté des méthodes de classification supervisée, qui sont adaptées lorsqu'on connaît déjà des couples d'entrées - sorties par l'intermédiaire d'une base de données d'apprentissage. Pour choisir un classifieur parmi tous ceux présentés dans la sous-section précédente, dans le paragraphe sur l'apprentissage supervisé, il faut regarder les caractéristiques des classifieurs telles que le temps d'apprentissage, le temps de classification, le nombre de paramètres à mémoriser, comment est calculée la confiance dans la réponse du classifieur, et l'intuition sur les paramètres appris, mais aussi les spécificités du problème de classification telles que nombre de classes, et le nombre de caractéristiques. Nous voulons un temps de classification des arêtes en temps constant, afin de classifier de nouvelles données en temps réel.

Le nombre d'attributs d'un vecteur de caractéristiques est 43 (cf. section 3.5.3) et la majeure partie des points de données sont associés à des arêtes normales avec la présence de données bruitées. Pour la méthode des k plus proches voisins, il y a donc un risque de biais vers les arêtes normales et le problème de la malédiction des dimensions qui va rendre la recherche optimisée des k plus proches voisins comparable en temps de calculs à une recherche linéaire et donc totalement

insatisfaisante. Nous avons donc écarté la méthode des k plus proches voisins. La classification bayésienne est une approche générative, et elle consacre beaucoup de paramètres pour modéliser toutes les données, mais la majeure partie des données n'est pas intéressante d'un point de vue discrimination : on cherche seulement à séparer le groupe des arêtes caractéristiques de celui des arêtes normales. De plus, dans le cadre de la classification des arêtes, plusieurs observations peuvent être dépendantes de plusieurs variables cachées, ce qui complique l'apprentissage. La classification bayésienne a donc été abandonnée. Les réseaux de neurones semblent être une approche valide, mais ils sont sensibles au problème de la malédiction de la dimension. Nous les avons donc écartés. Les arbres de décision sont plutôt sensibles au seuil de chaque attribut pour aller vers le fils gauche ou le fils droit, en particulier pour des données bruitées ce qui est notre cas, nous les avons donc exclus. Nous avons finalement retenu les Séparateurs à Vaste Marge - SVM comme méthode d'apprentissage d'un modèle statistique représentatif des données.

Un SVM standard est conçu pour répondre à un problème de classification binaire, ce qui est notre cas avec les arêtes. A partir d'un ensemble d'échantillons d'apprentissage étiquetés par un expert, avec un vecteur de mesures pour chaque échantillon, appelé vecteur de caractéristiques, l'algorithme d'apprentissage SVM construit un modèle, à base d'hyperplans, pour séparer les échantillons des deux classes, en maximisant l'espace entre ces deux classes dans l'espace des caractéristiques. Les échantillons ne sont pas forcément séparables linéairement, et donc l'apprentissage peut utiliser une fonction de noyau pour arriver à mieux séparer les échantillons. Une fois le modèle de prédiction SVM construit, un nouvel échantillon va se voir appliquer le même mapping que les échantillons d'apprentissage, et la prédiction du SVM dépendra de quel côté de l'hyperplan le plus proche se trouve le point dans l'espace des caractéristiques. Plus de détails sur les SVM peuvent être trouvés dans [Vap98, Bis06].

3.5.2 Définition des potentiels énergétiques

Le terme d'attache aux données $E_d(x_i; y)$ regroupe les résultats de classification d'un SVM (*Support Vector Machine*) et la confiance dans cette dernière - qui dépendent du modèle de prédiction obtenu - au travers de la distance signée $d(F_i)$ du vecteur de mesures F_i associé avec l'arête i à l'hyperplan de séparation dans l'espace des caractéristiques. Cette distance $d(F_i)$ est positive pour des arêtes prédites caractéristiques et négative dans le cas contraire. $E_d(x_i; y)$ est défini comme suit :

$$E_d(x_i) = \exp((-1)^{x_i} d(F_i)) \quad (3.7)$$

et précisé dans le tableau 3.1. $E_d(x_i)$ a été choisi de telle sorte à pénaliser un choix d'étiquette qui ne serait pas concordant avec la prédiction du SVM, cette pénalité augmentant de manière exponentielle avec l'accroissement de la distance à l'hyperplan, i.e. avec l'augmentation de la confiance dans la réponse du SVM.

Le terme de régularisation spatiale $E_h(x_i, x_j; \theta, \phi)$ dépend des angles dièdres θ_i et θ_j et de l'angle tangentiel ϕ_{ij} et est défini par les équations (3.5) et (3.6) de la sous-section précédente, à la page 81.

	$d(F_i) > 0$ Caractéristique	$d(F_i) < 0$ Normale
Étiquette arête caractéristique $x_i = 1$	$0 \leq E_d < 1$	$E_d > 1$
Étiquette arête normale $x_i = 0$	$E_d > 1$	$0 \leq E_d < 1$

TABLE 3.1 – Le terme d’attache aux données $0 \leq E_d$ choisi dans le cas de la présence de bruit sur la position des sommets : il suit la réponse du SVM, i.e. il est proche de zéro si l’étiquette est consistante avec la réponse du SVM.

Avec ces définitions de E_d et E_h , la fonction d’énergie (3.1) présentée à la page 79 est sous-modulaire (cf. définition 32). Ainsi, le minimum global de (3.1) peut être facilement calculé en utilisant l’algorithme de coupe de graphe et la construction du st-graphe de Kolmogorov et al. [KZ04].

3.5.3 Extraction de caractéristiques

F_i désigne le vecteur de caractéristiques ou attributs associé à l’arête i pour l’apprentissage automatique. Le nombre de caractéristiques peut affecter les performances et le choix de la méthode d’apprentissage. Un nombre trop élevé d’attributs et donc de dimensions dans l’espace des caractéristiques augmente la complexité, et à cause du problème de la malédiction de la dimension, cela peut en même temps dégrader les performances de classification. Nous avons sélectionné une quarantaine d’attributs, choisis selon leur pouvoir de discrimination entre les deux classes en utilisant la mesure *f-score* définie dans la section 3.6.3, à la page 92.

Les quatre premiers attributs de F_i sont des mesures liées au pliage (*bending* en anglais) de la surface :

- cosinus de l’angle dièdre de l’arête i : $\cos(\theta_i)$; -1 est pris pour les arêtes aux bords ;
- cosinus de l’angle entre les normales des deux sommets opposées à l’arête i ; -1 est pris pour les arêtes aux bords ; parfois appelé angle dièdre étendu dans la littérature ;
- moyenne des cosinus minimaux d’angles dièdres mesurés sur les arêtes adjacentes de chacun des 2 sommets de l’arête i ;
- moyenne des variations des normales (*normal variation* [LL02]) mesurées sur les deux sommets de l’arête i ; la variation des normales d’un sommet est le minimum des cosinus des angles entre la normale du sommet et les normales des triangles adjacents au sommet.

Toutes ces mesures sont dans l’intervalle $[-1; 1]$ et ne nécessitent pas de normalisation.

Ensuite, trois caractéristiques dépendantes d’une échelle, un rayon r , sont ajoutées à F_i :

- cosinus de l’angle entre les normales unitaires des deux plans tangents à l’arête i ; le calcul de ces plans tangents est présenté dans la section 3.5.4 ; -1 est pris pour une arête sur les bords ;
- cinq mesures de courbure sous la forme de la moyenne des mesures de courbure sur les deux sommets adjacents à l’arête i : les courbures principales $Kmin$ et $Kmax$ calculées avec [CSM03], la courbure gaussienne : $Kmin \times Kmax$, la courbure moyenne : $0.5(Kmin + Kmax)$, et $Kmin - Kmax$;

- moyenne de la mesure de similarité [LVJ05] des deux sommets adjacents à l'arête i ; la mesure de similarité est basée sur la variation locale d'une version filtrée des courbures principales maximales : elle utilise un filtre gaussien qui dépend d'un paramètre d'échelle et ensuite la différence entre des courbures filtrées à différentes échelles permet d'identifier les caractéristiques dépendantes d'une échelle.

Chacun de ces attributs est normalisé sur l'intervalle $[-1; 1]$. La normalisation sur cet intervalle permet d'éviter des problèmes tels que des débordements numériques et améliore les performances de classification, car chaque attribut est numériquement comparable aux autres. r est fixé comme un pourcentage de la dimension minimale de la boîte englobante BE du maillage, et les attributs dépendants de r sont calculés pour plusieurs r :

- estimateur de l'angle entre les normales des plans tangents : $r = 4 + 3 \times m$ % de la dimension min de la BE, pour chaque entier $m \in [0; 8]$;
- courbures principales et la mesure de similarité : $r = 1 + 4 \times m$ % de la dimension min de la BE, pour chaque entier $m \in [0; 4]$.

F_i est donc composé de 43 attributs ou mesures géométriques ($43 = 4 + 9 + 5 \times 5 + 5$). L'utilisation de cosinus a plusieurs avantages : ils sont déjà dans l'intervalle $[-1; 1]$, ils peuvent être calculés directement depuis le produit scalaire entre deux normales unitaires, et ils sont pairs, ce qui signifie qu'ils traitent similairement les caractéristiques concaves et convexes. Toutes les estimations à différentes échelles de l'angle entre les normales des plans tangents à l'arête robustifient la détection d'arêtes caractéristiques en présence de bruit sur la position des sommets. L'utilisation de mesures de courbure se justifie en partie par la définition mathématique des lignes caractéristiques qui dit que le long des lignes caractéristiques une courbure principale en valeur absolue est maximale et l'autre est minimale, mais aussi par l'expérience qui montre que les lignes caractéristiques suivent des valeurs importantes de courbure moyenne et que les coins sont généralement identifiables par la courbure gaussienne. Finalement, la mesure de similarité, dont le calcul est basé sur la variation locale entre des courbures principales filtrées par un filtre gaussien à différentes échelles, doit permettre d'identifier des caractéristiques indépendantes de l'échelle.

3.5.4 Estimateur de l'angle entre les normales des deux plans tangents à une arête

Cette sous-section introduit le calcul d'un estimateur de l'angle entre les normales des deux plans tangents à une arête, calculé par l'angle entre les normales unitaires des deux plans tangents à une arête intérieur. Pour une arête frontière sur le bord, cet estimateur est fixé à π , ce qui correspond à l'angle le plus grand possible ; cela est un choix concordant avec le fait qu'une arête frontière est une arête caractéristique. Dans la suite de cette sous-section, nous allons expliquer l'algorithme pour calculer les deux plans tangents d'une arête intérieure.

L'idée pour calculer un plan tangent, celui à gauche ou à droite de l'arête, est de déterminer le meilleur ensemble de triangles supports du plan tangent, puis de calculer la normale du plan

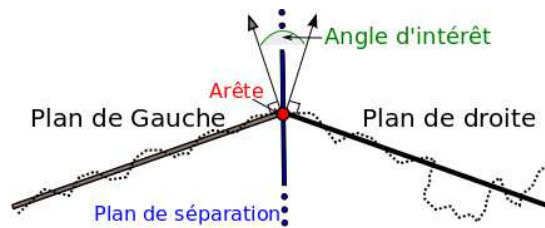


FIGURE 3.3 – Estimateur de l’angle entre les normales des plans tangents : les lignes en pointillés représentent la surface du maillage avec des triangles supports, non-supports, et en dehors de la région. Le plan de séparation est colinéaire à la direction de l’arête et à la normale de l’arête. La normale d’une arête est calculée comme la moyenne des normales unitaires des triangles incidents à l’arête.

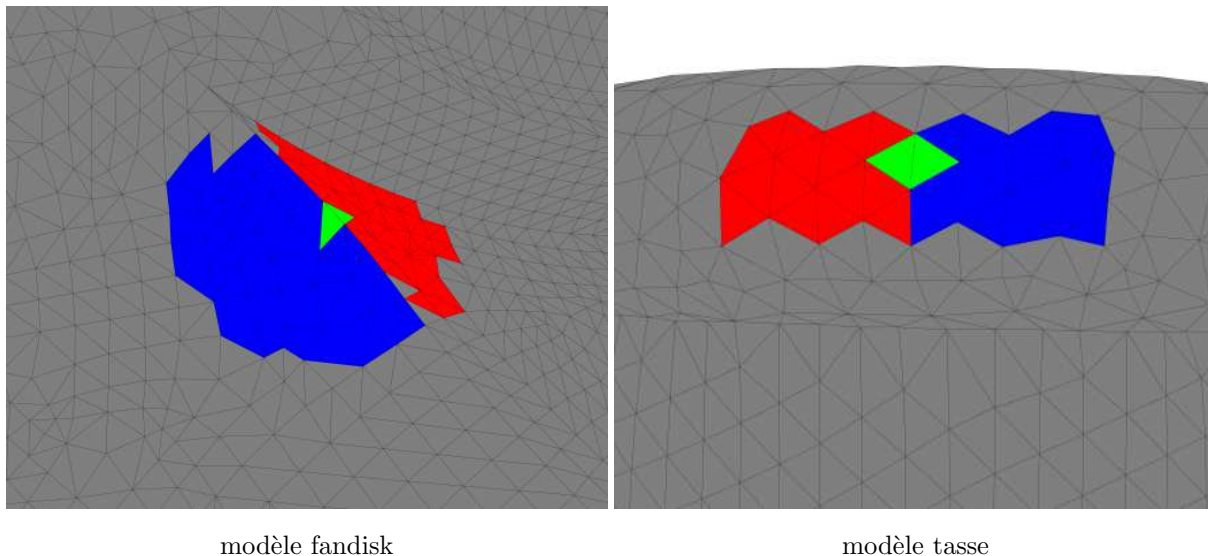
comme la somme des normales des triangles pondérées par leur aire. Un plan tangent passe par le milieu de l’arête et il ne reste donc qu’à calculer la normale du plan. Ensuite la normale d’un plan tangent est normalisée.

Inspiré par Hubeli et al. [HMG00], qui utilisent une approximation polynomiale et calculent un angle entre les vecteurs tangents des 2 polynômes, nous proposons une approximation linéaire des deux plans tangents (approximation du premier ordre). La méthode d’Hubeli et al. ne permettait que d’augmenter le support le long des deux polynômes, tandis que nous proposons d’augmenter aussi le support dans les directions orthogonales à ces polynômes. L’avantage principal de notre approche est de diminuer l’influence du bruit sur la position des sommets sur la détection de faux positifs, et donc d’augmenter la précision de l’information portée par notre estimateur.

Similairement à [CSAD04], la détermination des plans tangents est gouvernée par une croissance de région, bien que contrôlée par une fonction d’erreur d’approximation différente. Cependant, il ne s’agit pas d’une croissance de région classique dans le sens où un triangle peut être ajouté à une région même si aucun de ses triangles adjacents ne font partie de la région : un support d’un plan tangent est donc constitué d’un ou plusieurs “morceaux” déconnectés des autres. De plus, une fois qu’un triangle fait partie d’un support, il y reste jusqu’à la fin de l’algorithme d’estimation du plan tangent. Ce dernier choix se justifie par la nature gloutonne de l’algorithme.

L’estimation robuste des deux plans tangents implique :

- le choix d’un paramètre d’échelle : cela nous a amené à choisir ce paramètre comme le rayon d’une sphère de délimitation centrée au milieu de l’arête : cette sphère délimite l’ensemble des triangles utilisables pour l’estimation du meilleur support pour chaque plan tangent ;
- le choix des triangles au sein de cette sphère de délimitation : un “bon” triangle sera un triangle support et un “mauvais” triangle sera un triangle non-support ; un triangle non-support est un triangle dont la normale est trop éloignée de la normale du plan tangent actuel ;



modèle fandisk

modèle tasse

FIGURE 3.4 – Résultats de la convergence des triangles supports des plans tangents pour les modèles fandisk et tasse. L'arête adjacente à deux triangles verts est l'arête pour laquelle on cherche à estimer les deux plans tangents et les triangles bleus sont les triangles de la région à gauche de l'arête et les triangles rouges sont à droite de l'arête. Le rayon de la sphère de délimitation (échelle) a été choisie arbitrairement.

- l'identification de discontinuités additionnelles, au sein de la sphère de délimitation, qui sont dues à la proximité de deux zones contenant des caractéristiques saillantes.

Comme dans les problèmes classiques d'approximation de primitives géométriques au sens des moindres carrés, les paramètres des plans tangents, e.g. leurs normales, dépendent de la classification des triangles en triangles supports et triangles non-supports, et cette classification dépend de l'estimation actuelle des paramètres des plans. L'estimation des plans tangents est un problème de type "œuf et poule" et donc la première estimation des plans tangents ainsi que l'ordre de parcours des triangles sont des choix critiques.

Description de l'algorithme - Au début de l'algorithme l'ensemble des triangles supports à gauche (resp. à droite) de l'arête (par rapport au plan de séparation, cf. figure 3.3) est initialisé par le triangle à gauche (resp. à droite) de l'arête. Ainsi, quoi qu'il arrive, si le rayon de la sphère de délimitation est trop court pour permettre d'accepter d'autres triangles potentiels, l'estimateur de l'angle le moins robuste au bruit correspond à l'angle dièdre usuel de l'arête. Ensuite, tous les autres triangles présents dans la sphère de délimitation vont être testés pour ajout dans un des ensembles supports. L'ordre de traversée de l'ensemble de ces triangles est géré par une notion de proximité, les triangles testés à une étape suivante font partie des voisins directs de l'ensemble des triangles déjà testés, et par une file de priorité : les triangles proches du plan de séparation (cf. figure 3.3) sont testés en premier. Cela permet d'obtenir une estimation

des plans tangents qui dépend de l'ordre "du plus proche au plus éloigné". Les triangles candidats dont la distance signée au plan de séparation est positive (resp. négative) sont des candidats pour la région de droite (resp. de gauche). Si la normale d'un triangle candidat est suffisamment proche (par rapport à un seuil) de celle actuellement estimée du plan tangent, alors le triangle est ajouté à l'ensemble des triangles supports correspondants. Après chaque ajout d'un triangle support, la normale du plan tangent correspondant est mise à jour : moyenne pondérée par les aires des normales des triangles et normalisation à la fin. Après convergence, tous les triangles non-supports au sein de la sphère de délimitation sont testés une nouvelle fois pour acceptation, avec cette fois un ordre de parcours des triangles aléatoire.

Pour la priorité de la file, la valeur absolue de la distance Euclidienne d'un sommet du maillage au plan de séparation (cf. figure 3.3) a été prise au lieu de la valeur absolue de la distance entre le barycentre des triangles et le plan de séparation. Ainsi, le sommet le plus proche est sorti de la file de priorité et ses triangles voisins non-encore parcourus sont testés pour ajout dans un ensemble support, puis on ajoute les sommets non encore vus dans la file de priorité. Cette approche s'est révélée plus robuste que l'approche basée uniquement sur la distance des triangles au plan de séparation, car une étape de mise à jour de la normale d'un plan tangent est gouvernée par l'ajout de triangles proches des derniers triangles testés.

Puisque cet algorithme dépend de la qualité du plan de séparation et donc de la normale de l'arête, il est envisageable d'utiliser la moyenne des normales des deux plans tangents comme normale de l'arête et d'itérer l'algorithme précédent jusqu'à la convergence de ce dernier et la convergence de la normale de l'arête. Cependant, pour les maillages traités dans notre base d'exemples, cette approche n'a pas été nécessaire.

3.6 Résultats expérimentaux

Dans cette section, la base de données d'apprentissage et la méthode choisie pour comparer différents résultats de classification sont présentées, ainsi que les détails d'implantation. Finalement, des résultats expérimentaux sont exposés et analysés.

3.6.1 Base de données d'arêtes de modèles mécaniques

Notre base de données est composée de 181380 arêtes groupées en 18 modèles mécaniques (9 maillages et leurs 9 versions bruitées obtenues en ajoutant un bruit gaussien d'intensité 0.5% aux positions des sommets du maillage ; 0.5% fait référence à la dimension maximale de la boîte englobante du maillage). Les 9 modèles non-bruités sont présentés avec leur vérité terrain dans la figure 3.5. La vérité terrain a été fixée à la main sur les maillages non-bruités, puis déduite sur les maillages bruités. Parmi les 181380 arêtes, 4468 sont des arêtes caractéristiques (cf. tableau 3.3).

Pour les maillages présentés dans le tableau 3.3, les temps d'extraction des arêtes caractéristiques globalement cohérentes sont sur un Intel Core 2 Duo P8400 (2.26 GHz) avec 4 Go de

RAM :

- de quelques millisecondes pour les modèles d'extraction d'arêtes basés sur l'angle dièdre (cas non-bruité) ; environ 75% des temps de calculs sont utilisés pour la construction du st-graphe et le reste est dédié au calcul du flot maximal ;
- de quelques dizaines de secondes pour le modèle d'extraction d'arêtes basé sur l'apprentissage statistique (cas bruité) ; les temps vont de 2 s pour le cône coupé bruité à 41 s pour le fandisk bruité ; plus de 99% du temps est dédié au calcul de la prédiction du SVM pour chacune des arêtes du maillage.

3.6.2 Comparaisons des performances par courbes ROC

Il est possible de comparer quantitativement différentes méthodes de classification des arêtes caractéristiques en calculant les courbes ROC moyennées verticalement [Faw06]. Une courbe ROC décrit les compromis relatifs entre les bénéfices (les vrais positifs sur l'axe des ordonnées Oy) et les coûts (les faux positifs sur l'axe des abscisses Ox). Cela permet de comparer le taux de vrais positifs de deux méthodes pour un taux de faux positif donné. De plus, la meilleure méthode sur un intervalle de taux de faux positifs n'est pas nécessairement la meilleure méthode sur d'autres intervalles. Pour déterminer la meilleure méthode en moyenne sur un intervalle, on calcule habituellement l'Aire Sous la Courbe (*Area Under Curve - AUC* en anglais). Cependant cette méthode de comparaison ne peut pas être utilisée pour comparer des résultats sur des maillages sans arête caractéristique dans leur vérité terrain, car le taux de vrai positif sera toujours égal à zéro pourcent : l'aire sous la courbe associée aux modèles sphère et tore n'ont donc pas été calculées dans le tableau 3.3.

3.6.3 F-score

La mesure F-score [CL06], une mesure indépendante du classifieur choisi, est utilisée pour évaluer le pouvoir discriminant d'une caractéristique dans le cas d'un problème de classification binaire entre la classe des positifs (+) et la classe des négatifs (-). Cette mesure est donc adaptée à notre problème de classification entre les arêtes caractéristiques et arêtes normales. Le F-score de la k-ième caractéristique d'un vecteur de caractéristiques F est calculé comme suit :

$$F - score(k) = \frac{\left(\overline{F(k)}^{(+)} - \overline{F(k)}\right)^2 + \left(\overline{F(k)}^{(-)} - \overline{F(k)}\right)^2}{\frac{1}{n_+ - 1} \sum_{j=1}^{n_+} \left(F^j(k)^{(+)} - \overline{F(k)}^{(+)}\right)^2 + \frac{1}{n_- - 1} \sum_{j=1}^{n_-} \left(F^j(k)^{(-)} - \overline{F(k)}^{(-)}\right)^2} \quad (3.8)$$

où $\overline{F(k)}$, $\overline{F(k)}^{(+)}$ et $\overline{F(k)}^{(-)}$ sont la moyenne de la k-ième caractéristique sur la totalité, sur les cas positifs, et sur les cas négatifs des données d'apprentissage. n_+ et n_- sont le nombre d'instances positives et négatives. $F^j(k)^{(+)}$ est la k-ième caractéristique du j-ème échantillon positif, et $F^j(k)^{(-)}$ est la k-ième caractéristique du j-ème échantillon négatif.

Plus le F-score est grand, plus une caractéristique est vraisemblablement discriminante.

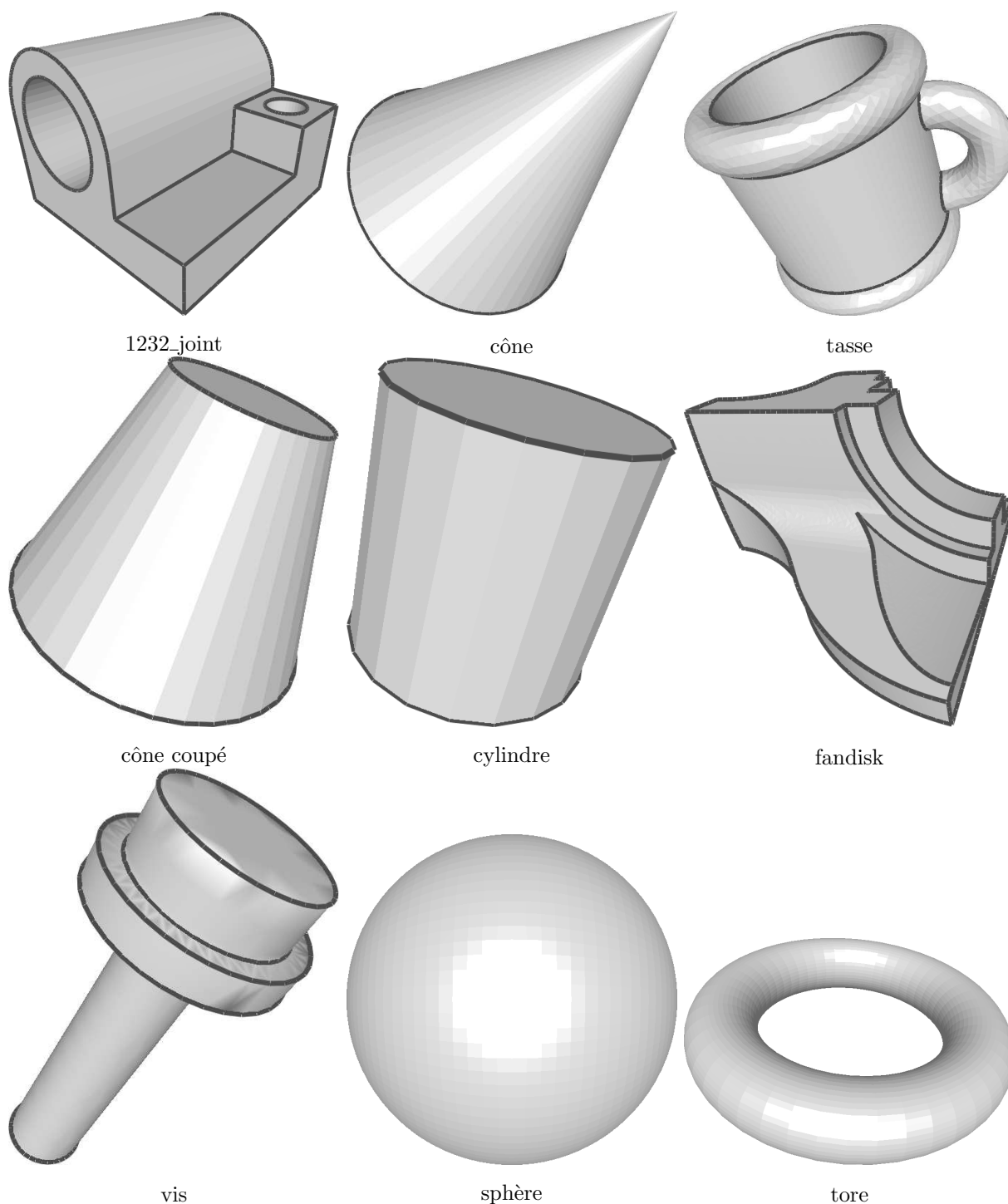


FIGURE 3.5 – Modèles mécaniques avec vérité terrain : les arêtes caractéristiques sont les arêtes noires épaisses. La vérité terrain a été déterminée à la main.

Carac. de F_i	Modèles	Min	Max	Moy.	sdev
$\hat{\theta}_i^r$	non-bruités	9.196	1249.950	277.934	523.248
$\hat{\theta}_i^r$	bruités	2.618	3.202	2.910	0.208
courb.	non-bruités	0.143	0.699	0.360	0.152
courb.	bruités	0.056	0.456	0.238	0.127
4 lers	non-bruités	0.533	1428.810	357.705	714.068
4 lers	bruités	0.405	2.569	0.969	1.068

TABLE 3.2 – Minimum, maximum, moyenne et écart-type de la moyenne des f-scores (cf. section 3.6.3) calculés comme suit : en premier, les f-scores de tous les attributs sont calculés pour chaque maillage. Ensuite, les moyennes sur un attribut des f-scores sont calculées pour les maillages non-bruités et bruités. Finalement, quelques statistiques (min, max, moyenne et écart-type) sont calculées sur des sous-ensembles d'attributs similaires (i.e. les estimateurs θ_i^r pour l'angle entre les normales des deux plans tangents, les courbures, et les quatre premiers attributs dans F_i). Les modèles sphère et tore n'ont pas été utilisés.

3.6.4 Détails d'implantation et discussions

Estimateur de l'angle entre les normales des deux plans tangents

Un triangle est accepté dans l'ensemble des triangles supports d'un plan tangent si l'angle entre sa normale et la normale actuellement estimée du plan tangent est moindre que 23 degrés.

L'estimateur de l'angle entre les normales des deux plans tangents a un grand pouvoir discriminant comme il peut être observé dans le tableau 3.2. Selon les mesures de f-score (cf. section 3.6.3), pour des données bruitées, il est beaucoup plus discriminant que les quatre premiers attributs ou les mesures de courbures d'un vecteur de caractéristiques. Cependant, pour des données non-bruitées, les quatre premiers attributs sont légèrement plus discriminants. Ainsi, en augmentant la taille du support d'un angle, notre estimateur est devenu plus robuste en présence de bruit sur la position des sommets, mais moins sensible aux petites caractéristiques dans les données non-bruitées.

Apprentissage des arêtes caractéristiques

Pour l'apprentissage avec SVM, la bibliothèque LIBSVM [CL01] a été utilisée avec le noyau RBF. Les meilleurs hyperparamètres du modèle sont sélectionnés en utilisant une recherche par grille avec une validation croisée et maximisation de l'aire sous la courbe, qui est capable de traiter des échantillons d'apprentissage non-équilibrés.

Toutes les données dupliquées ont été supprimées de l'ensemble d'apprentissage et un sous-échantillonnage prenant au maximum 5000 échantillons de données par maillage a été réalisé. Le processus de sous-échantillonnage conserve la distribution des classes. Pour compenser la sous-représentation des arêtes vives dans les données d'apprentissage, le poids de l'erreur associé avec la classe des arêtes caractéristiques a été fixé 9 fois plus grand que le poids utilisé pour la

Modèle	#t.e.	#f.e.	Seuil.	Hys.	diè+G	SVM+G
1232_joint	9024	660	100.0	100.0	100.0	100.0
cône	14850	50	100.0	100.0	99.8	100.0
tasse	17010	381	99.7	99.7	99.7	98.2
cône coupé	864	144	100.0	100.0	100.0	100.0
cylindre	3540	40	100.0	100.0	100.0	100.0
fandisk	19479	743	99.9	99.9	100.0	97.3
vis	3723	216	100.0	100.0	100.0	100.0
sphère	14700	0	-	-	-	-
tore	7500	0	-	-	-	-
total	90690	2234	99.9	99.9	99.9	99.4

a - Maillages non-bruités

Modèle+BG	#t.e.	#f.e.	Seuil.	Hys.	diè+G	SVM+G
1232_joint	9024	660	93.1	92.5	90.3	96.9
cône	14850	50	93.0	92.8	94.1	93.9
tasse	17010	381	98.2	98.8	97.3	95.0
cône coupé	864	144	100.0	100.0	99.3	100.0
cylindre	3540	40	99.8	99.8	99.8	100.0
fandisk	19479	743	99.4	99.6	99.1	98.3
vis	3723	216	97.8	97.9	100.0	98.6
sphère	14700	0	-	-	-	-
tore	7500	0	-	-	-	-
total	90690	2234	97.3	97.3	97.1	97.5

b - Maillages bruités

TABLE 3.3 – Statistiques sur la classification des arêtes caractéristiques pour les modèles de notre base de données (a : modèles non-bruités; b : modèles avec du bruit gaussien BG) : nombre d’arêtes, nombre d’arêtes caractéristiques, Aire Sous la Courbe (en pourcentage) pour 4 méthodes : seuillage simple, seuillage par hystérésis, détection d’arête caractéristiques globalement cohérentes avec le terme d’attache aux données basé sur l’angle dièdre, et avec un terme d’attache aux données basé sur un modèle statistique appris par SVM.

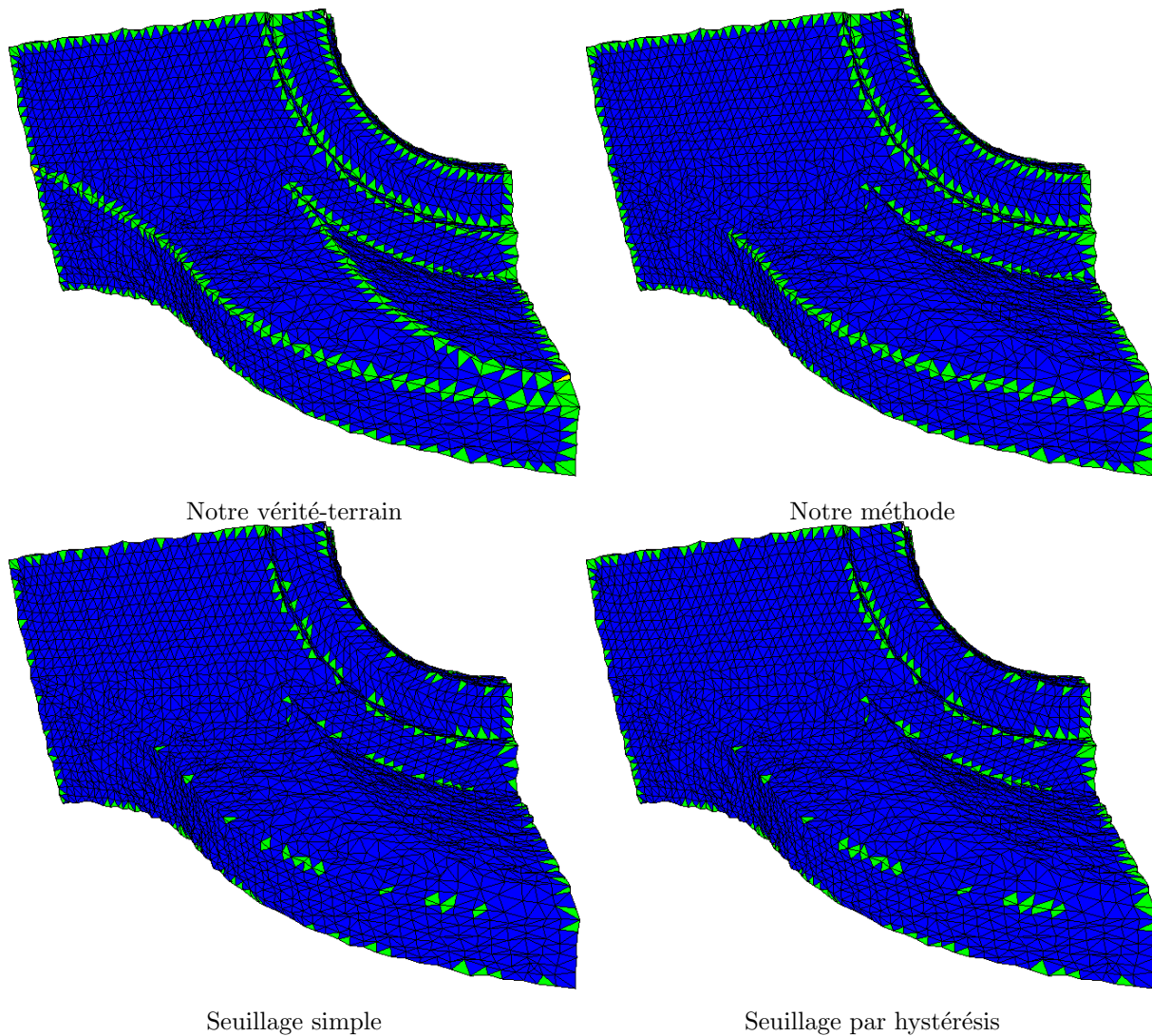


FIGURE 3.6 – Modèle fandisk bruité artificiellement : lignes d'arêtes caractéristiques obtenues pour un taux de faux positifs fixé à 10^{-4} : comme il peut être remarqué, notre méthode est capable d'extraire la plupart des véritables lignes d'arêtes caractéristiques avec presque aucun faux positif. Les triangles verts sont adjacents à une arête caractéristique et les jaunes à deux.

classe des arêtes normales.

Paramétrage des modèles d'extraction d'arêtes caractéristiques

Quatre méthodes sont utilisées et comparées (en utilisant l'aire sous la courbe ROC, cf. tableau 3.3) pour l'extraction d'arêtes caractéristiques :

1. un seuillage simple sur l'angle dièdre (1ère colonne du tableau 3.3) ; pour générer les courbes ROC, θ_{Th} varie dans $[0, \pi]$ à des pas réguliers (200 échantillons en tout) ;
2. un seuillage par hystérésis sur l'angle dièdre (2ème colonne du tableau 3.3) ; θ_{Th}^{inf} a été fixé

à $\theta_{Th}^{sup}/2$); pour générer les courbes ROC, θ_{Th}^{sup} varie dans $[0, \pi]$ à des pas réguliers (200 échantillons en tout);

3. une détection globalement cohérente des arêtes caractéristiques (cf. équation 3.1 page 79) utilisant le terme d'attache aux données de l'équation (3.4) page 81 et le terme de régularisation de l'équation (3.5) page 81 (3ème colonne du tableau 3.3); expérimentalement, nous avons fixé μ à 2.0 (cf. équation 3.1), η à 10^{-3} (cf. équation 3.5), ν à 15 (cf. équation 3.6), σ à 10 (cf. équation 3.6); pour générer les courbes ROC, θ_{Th} varie dans $[0, \pi]$ à des pas réguliers (200 échantillons en tout);
4. une détection globalement cohérente des arêtes caractéristiques (cf. équation 3.1 page 79) basée sur le modèle statistique appris par SVM utilisant le terme d'attache aux données de l'équation (3.7) page 86 et le terme de régularisation de l'équation (3.5) page 81 (4ème colonne du tableau 3.3); expérimentalement, nous avons fixé μ à 0.1 (cf. équation 3.1), η à 0.0 (cf. équation 3.5), ν à 15 (cf. équation 3.6), σ à 10 (cf. équation 3.6); pour générer les courbes ROC, le terme de biais du modèle de prédiction varie dans l'intervalle $[-2, 1]$ (200 échantillons en tout).

Analyse des résultats du tableau 3.3 et de la figure 3.6

Les méthodes de seuillages basées sur l'angle dièdre fonctionnent bien sur les modèles mécaniques non-bruités. Cependant, elles sont très sensibles à la présence de bruit sur la position des sommets, comme il peut être observé pour les modèles cône bruité et 1232_joint bruité.

Les résultats obtenus pour le modèle global avec le terme d'attache aux données défini par l'équation (3.4) page 81 sont similaires à ceux des méthodes de seuillage. Les résultats obtenus pour le modèle global avec le terme d'attache aux données défini par l'équation (3.7) page 86 sont meilleurs que toutes les autres méthodes pour les maillages bruités. Cependant, ils sont légèrement moins bons que les autres techniques pour les modèles non-bruités : la robustesse envers le bruit sur la position des sommets résulte en une sensibilité moindre envers de véritables petites caractéristiques géométriques.

Un résultat non-supervisé sur un modèle mécanique scanné

Actuellement, notre base d'apprentissage ne contient pas de modèle scanné. Nous avons néanmoins appliqué notre méthode d'extraction d'arêtes caractéristiques globalement cohérente et robuste au bruit (basée SVM) sur un maillage obtenu après numérisation et reconstruction surfacique, et les résultats peuvent être observés dans la figure 3.7. Visuellement, il semblerait que notre méthode soit très précise sur les modèles scannés, en commettant relativement peu de faux positifs. Néanmoins, notre méthode est un peu trop restrictive, c'est-à-dire qu'elle filtre beaucoup d'arêtes caractéristiques isolées.

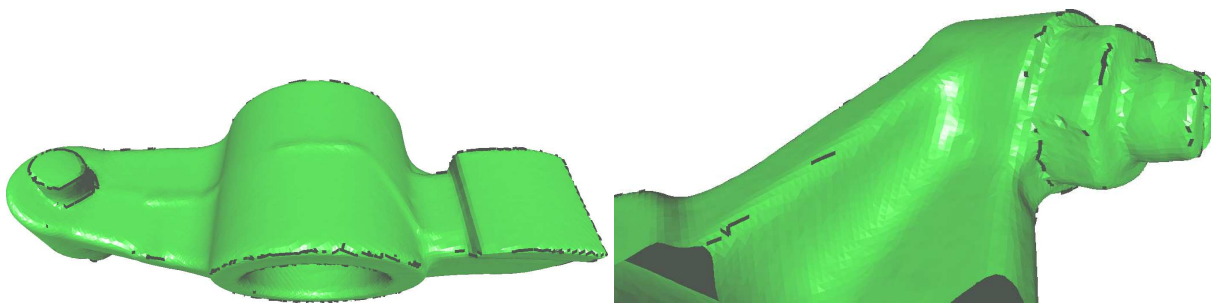


FIGURE 3.7 – Résultat de notre méthode d'extraction de lignes composées d'arêtes caractéristiques basée SVM sur le modèle scanné rockerArm. Aucune vérité terrain n'est connue, au moment de la rédaction de la thèse, pour les arêtes caractéristiques du rockerArm, et donc le terme de biais du SVM est un biais par défaut non optimisé.

Limitations du modèle actuel

La longueur des arêtes n'est pas prise en compte, alors qu'un processus d'extraction de lignes doit intuitivement favoriser l'extraction de lignes avec le moins de cisaillement possible (e.g. [KHS10]) : la prise en compte de la longueur des arêtes au sein de notre approche devrait améliorer la robustesse face à des densités de points fortement variables.

Avantages du modèle actuel

Notre modèle de ligne composée d'arêtes caractéristiques favorise l'obtention d'une description simplifiée/compacte du graphe de caractéristiques :

- les arêtes caractéristiques faiblement saillantes ne sont pas extraites, car elles pourraient provenir de bruit sur la position des sommets ;
- les arêtes caractéristiques isolées et les couples d'arêtes caractéristiques isolés ont tendance à être enlevés, à cause de la régularisation opérée par les arêtes normales ;
- finalement, les petites ramifications le long des plus longues lignes d'arêtes caractéristiques auront tendance à être supprimées, parce qu'elles ne seront pas favorisées, car elles ne sont pas alignées avec la ligne d'arêtes caractéristiques principale et qu'elles seront régularisées par les arêtes normales les entourant.

Tout cela concorde à l'obtention d'un nombre restreint, mais sémantiquement important de lignes composées d'arêtes caractéristiques. D'ailleurs, tant que la variation du bruit reste raisonnable, les lignes de caractéristiques pour un maillage mécanique et sa version bruitée restent proches. Par contre, lors d'une modification d'une position ou de la connectivité, il n'est pas possible de mettre à jour dynamiquement et localement le graphe de caractéristiques, puisqu'il faut recalculer la décision globale pour toutes les arêtes du maillage à chacune de ses modifications. Néanmoins, puisque les lignes extraites sont sémantiquement importantes, il est envisageable de les supposer stables, et dans ce cas se sont les modifications du maillage qui doivent les préserver :

par exemple, il ne faudra pas basculer une arête caractéristique.

3.7 Conclusion et travaux futurs

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs approches pour détecter les arêtes caractéristiques sur les maillages triangulaires 2-variétés avec ou sans bord. En particulier, nous avons détaillé une nouvelle approche d'extraction d'arêtes caractéristiques globalement cohérentes : elle trouve la meilleure solution globale en prenant en compte toutes les dépendances des arêtes et le terme d'attache aux données des arêtes. Ce dernier est basé sur l'angle dièdre en l'absence de bruit sur la position des sommets ou appris par SVM en présence de bruit sur la position des sommets. La cohérence permet de favoriser les configurations d'arêtes caractéristiques les plus probables, tandis que le modèle statistique appris robuste le terme d'attache aux données. Dans le cadre de l'apprentissage et du choix des attributs des vecteurs de mesures associés aux arêtes, nous avons proposé un estimateur de l'angle entre les normales des plans tangents à l'arête. Ce dernier a un pouvoir discriminant significatif, en particulier en présence de bruit sur la position des sommets.

Comme travaux futurs, nous envisageons l'apprentissage automatique des paramètres de l'équation (3.1) page 79 depuis une base de données avec la vérité terrain donnée. Nous ajouterons aussi des informations contextuelles dans le vecteur d'attributs telles que la distribution des types de primitives simples (plans, cylindres...) associés à des segmentations variationnelles autour des arêtes caractéristiques (e.g. [CSAD04], ses variantes, ainsi que notre méthode présentée dans le chapitre 4), des informations obtenues par d'autres algorithmes de segmentation (e.g. [KHS10]) et par des algorithmes d'extraction de lignes caractéristiques, et tout cela à plusieurs échelles. Afin d'améliorer les résultats sur des modèles mécaniques scannés, nous aimerions construire une base de vérité terrain avec des modèles scannés. De plus, une dépendance sur des cliques de taille supérieure à deux devrait être envisagée, tout en conservant la contrainte sur la directionnalité. Il faudrait aussi étudier si les caractéristiques choisies pour notre base de données initiale doivent être en partie révisées pour les maillages scannés, qui ont des caractéristiques légèrement différentes des objets mécaniques artificiellement bruités.

Chapitre 4

Segmentation robuste en régions approximées par des primitives géométriques simples

Résumé - Dans ce chapitre, l'analyse de la surface des maillages 2-variétés triangulaires est poussée plus loin que la simple extraction de lignes composées d'arêtes caractéristiques, sujet abordé au chapitre précédent. Le principe est de décomposer un maillage surfacique en primitives géométriques simples, en étant robuste au bruit sur la position des sommets du maillage. L'objectif est d'améliorer les approches VSA (*Variational Shape Approximation*) [CSAD04, WK05, YLW06, LSJK09] sur la robustesse au bruit, sur la convergence des modèles géométriques simples et sur la cohérence avec les lignes d'arêtes caractéristiques. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre du remaillage, car la connaissance d'une décomposition d'un maillage permet de simplifier le maillage, de ré-échantillonner la surface à partir d'une paramétrisation des primitives simples (qui sont toutes paramétrables), et finalement de distribuer un budget de sommets sur les zones associées aux primitives simples en fonction de leur aire et de leur type.

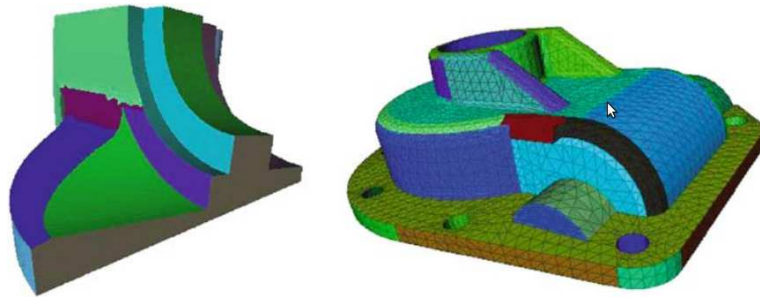
4.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'objectif est de segmenter un maillage triangulaire 2-variété, de telle sorte que chaque région de la partition obtenue soit approximée par une primitive géométrique simple (plan, cylindre, sphère...). Des exemples d'une telle décomposition sont donnés dans la figure 4.1.

Plus précisément, notre problème de segmentation en régions approximées par des primitives simples est le suivant : en entrée, un maillage triangulaire 2-variété avec ou sans bruit sur la position de ses sommets ; en sortie, on souhaite obtenir une partition de la surface initiale, avec une classification des triangles en triangles supports (*inliers* en anglais) et non-supports (*outliers* en anglais), et où chaque région de la partition composée de triangles supports est associée à une primitive géométrique simple appelée *proxy de forme*. **Le nombre de régions**



VSA - Image reproduite de [CSAD04]



HFC - Image reproduite de [AFS06]

FIGURE 4.1 – Exemples de décomposition en primitives géométriques simples : la décomposition est basée sur des plans pour VSA (*Variational Shape Approximation*) [CSAD04] et des plans, sphères et cylindres pour HFC (*Hierarchical Face Clustering*) [AFS06].

n'est pas un paramètre d'entrée de notre problème de segmentation : il s'adaptera automatiquement à la surface. Une *approximation partielle de la surface initiale* est souhaitée, puisque pour les triangles non-associés, aucune primitive géométrique n'est sélectionnée. Le choix de l'approximation partielle plutôt que de l'approximation totale se justifie par les 2 points suivants :

- tous les triangles ne sont pas forcément issus d'un modèle géométrique simple : un triangle non-support considéré comme bon va faire dévier la convergence de la segmentation vers une mauvaise approximation ;
- il est possible de ne pas pouvoir approximer une région du maillage : si une zone apparemment bonne n'est pas approximée par une primitive géométrique, cela signifie simplement qu'aucune des primitives simples dont dispose le système ne permet de bien approximer cette région, et pour y remédier il faudra inclure des surfaces approximantes plus générales (quadriques, patches de Bézier...).

Dans notre problème de partitionnement, une région sera composée d'un ensemble pas forcément connexe de triangles. Il est important de signaler qu'une région n'est pas forcément connexe, car usuellement elles le sont, comme dans [CSAD04]. Cela se justifie par les points

suivants :

- un ensemble de triangles non-supports peut couper une région ;
- sur certains maillages, en particulier certains objets mécaniques, des plans sont prolongeables sur plusieurs endroits disjoints de l’objet.

Pour résumer, l’algorithme de segmentation désiré doit être robuste à la présence de données aberrantes et de bruit sur la position des sommets, et chaque région du partitionnement obtenu, pas forcément connexe, est soit approximée par une primitive géométrique simple, soit non-associée.

D’après Li et al. [LSJK09], l’approximation d’une surface par des primitives simples est composée de trois sous-problèmes :

1. *trouver une partition du maillage d’entrée* : associer une étiquette à chaque triangle du maillage ;
2. *ajuster un modèle géométrique simple à chaque région* composée de triangles : trouver le meilleur modèle géométrique, le plus représentatif de la région selon une mesure d’erreur choisie ;
3. *sélectionner le meilleur ensemble de modèles géométriques simples* associés à une partition du maillage d’entrée ; intuitivement, la solution désirée est liée au meilleur compromis entre la complexité de la partition finale, i.e. nombre de régions, la complexité des proxies de forme utilisés, i.e. le nombre de paramètres du proxy choisi pour une région, et l’erreur d’approximation ; cela se traduit dans la littérature par le principe de la Longueur de Description Minimale ou LDM (*Minimum Description Length* - MDL en anglais).

4.1.1 Motivations et applications

Motivations

Alliez et al. [AUGA08] ont souligné que l’analyse géométrique d’un maillage, i.e. sa décomposition en primitives simples (plans, sphères, cylindres...), mais aussi la recherche de ses symétries sont très importantes pour les applications comme l’ingénierie inverse, où on cherche la structure sémantique d’un objet mécanique. D’ailleurs, c’est un domaine de recherche actif comme en témoignent les récentes publications [CSAD04, WK05, YLW06, AFS06, LSJK09, LWC⁺11]. De plus, cette décomposition est particulièrement adaptée aux maillages mécaniques, car elle correspond à l’ensemble des pièces mécaniques utilisées pour construire l’objet, ou aux étapes dans le processus d’usinage (fraisage, tournage mécanique...).

Il y a d’une part des intérêts pratiques et scientifiques de la décomposition en primitives simples :

- pour un utilisateur qui souhaite obtenir une segmentation surfacique, il n’aura ni besoin de spécifier le nombre de régions, qui nécessite la connaissance de la structure intrinsèque de la surface, ni de donner un seuil d’erreur globale tolérée, qui est assez difficile à estimer ;
- l’obtention de la structure sémantique d’un maillage permet de remailler de manière (i) plus intuitive, par exemple de remailler des parties symétriques de manière à ce que la

symétrie soit aussi conservée dans les mailles, (ii) plus régulière, en remaillant avec les mêmes règles toutes les zones associées à un proxy de forme de même type, et (iii) de contrôler de manière précise l'échantillonnage de la surface ; ainsi, grâce à la description de la surface, une véritable stratégie de remaillage peut être mise en place.

Et d'autre part, les approches existantes ne sont pas totalement satisfaisantes :

- la plupart des approches existantes de décomposition en primitives simples [CSAD04, WK05, YLW06, AFS06, LSJK09] échouent dans l'extraction globalement cohérente, par exemple elles n'arrivent pas à extraire des approximations géométriques préservant les symétries ; la raison de cet échec est principalement due à la non-prise en compte de contraintes globales [LWC⁺11] qui guident la convergence de la segmentation, mais aussi à l'utilisation d'algorithmes d'optimisation gloutons [AFS06] ;
- la plupart des approches existantes sont peu robustes au bruit sur la position des sommets [CSAD04, WK05, YLW06, AFS06] ; la robustesse au bruit passe par une proposition d'un proxy d'une région basée sur l'algorithme RANSAC [LSJK09, LWC⁺11], présenté dans la section 4.2.2 ; en particulier, avec les méthodes [CSAD04, WK05, YLW06, AFS06], un contrôle intuitif de la finesse de la segmentation, lorsqu'il y a du bruit sur la position des sommets, est difficile ;
- les contraintes globales (alignement, même orientation, coplanarité, etc.) introduites dans [LWC⁺11] rendent le calcul des paramètres de tous les proxies de forme coûteux, puisqu'ils doivent être tous calculés en même temps en prenant en compte toutes les contraintes.

Applications

Il existe plusieurs applications directes de la segmentation en régions approximées par des primitives simples :

- ingénierie inverse ;
- description, analyse et reconnaissance de formes 3D ;
- extraction de certaines des lignes caractéristiques à la frontière entre les régions ;
- compression de formes 3D : encoder les erreurs de chaque sommet par rapport à leur modèle géométrique associé ;
- réparation de maillage (e.g. [SDK09]) : reboucher les trous grâce à la ou les primitives géométriques associées aux triangles autour du trou ; renforcer/réparer certaines lignes composées d'arêtes caractéristiques ;
- reconstruction de surface si on travaille avec des nuages de points ;
- remaillage : ré-échantillonner la surface, la paramétrer en utilisant la décomposition de la segmentation et remailler dans l'espace des paramètres, distribuer ou répartir un budget de sommets sur les différentes régions en fonction du type de leur modèle géométrique associé, mais aussi de leur aire et de leur courbure totale.

4.1.2 Difficultés

La décomposition d'un maillage 2-variété en régions approximées par des primitives simples soulève les difficultés suivantes :

- la globalité de la solution obtenue : la sélection du meilleur ensemble de proxies de forme, à partir de tous les proxies de formes possibles, est un problème combinatoire, ce qui rend difficile la recherche de la solution optimale ;
- les contraintes de cohérence globale de la segmentation ne sont généralement pas connues au départ : il faut donc les détecter automatiquement et de manière robuste ; par exemple, la cohérence de la décomposition avec les éventuelles lignes caractéristiques est un problème de cohérence globale ;
- robustesse au bruit et aux données aberrantes dans la position des sommets, et cela lorsque l'échantillonnage de la surface est très irrégulier ou uniforme ;
- la non-connaissance de la variance du bruit de la position des sommets pose problème : en fonction de cette dernière plus ou moins de sommets doivent être regroupés ensemble ;
- le contrôle de la finesse de l'approximation d'une région par une primitive simple (sous la contrainte d'être robuste au bruit).

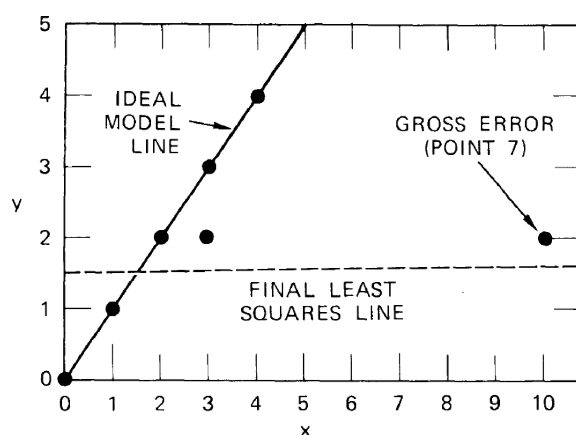
4.2 État de l'art de la segmentation en régions approximées par des primitives simples

Cette section donne un aperçu au lecteur des approches existantes d'approximation par des primitives simples d'un nuage de points et d'un maillage triangulaire 2-variété avec ou sans bord, en particulier des méthodes robustes aux données aberrantes et au bruit sur la position des sommets sont présentées.

4.2.1 Généralités

Le problème de la segmentation en régions approximées par des primitives simples d'un maillage triangulaire peut être traité de deux façons :

- il peut être vu comme un problème d'optimisation dans lequel on cherche à maximiser les scores de tous les proxies en interdisant le partage des triangles supports entre les différents proxies candidats ; le score d'un proxy est une mesure de confiance d'être un bon proxy, et est généralement égal au nombre de triangles bien approximés par le proxy ; idéalement, tous les ensembles minimaux de points (barycentres des triangles) pour chaque type de proxy (e.g. 3 points pour un plan) doivent être utilisés pour générer un ensemble de proxies candidats ; puis, l'algorithme d'optimisation trouve le meilleur ensemble de proxies décrivant la soupe de triangles ;
- il peut être vu comme un problème de recherche de la meilleure structure cachée dans les données auxquelles on fait face dans l'apprentissage non-supervisé (présenté dans le chapitre 3, section 3.5) ; il faut en effet déterminer les ensembles de triangles susceptibles



RANSAC - Image reproduite de [FB81]

FIGURE 4.2 – Illustration de l’intérêt de l’algorithme RANSAC : avant de faire une estimation des paramètres d’une droite au sens des moindres carrés sur un ensemble de points, RANSAC permet d’extraire le meilleur - le plus grand - ensemble de points supports sur lesquels l’estimation peut avoir lieu.

d’être regroupés au sein d’une même région, cette dernière étant approximée par un proxy de forme ; c’est un problème de type “œuf et poule” : les triangles doivent être regroupés en se basant sur la proximité géométrique à des proxies de forme dont les paramètres inconnus doivent être estimés en même temps.

Dans la suite, une technique d’extraction directe et robuste des primitives géométriques, RANSAC, est présentée. Ensuite, trois stratégies usuelles de segmentation en régions approximées par des primitives simples sont introduites : l’agglomération hiérarchique ascendante gloutonne, l’agglomération k-moyennes, et la minimisation d’une fonction objectif associée à un champ aléatoire de Markov.

4.2.2 Extraction robuste de primitives géométriques simples

RANSAC séquentiel

L’algorithme RANSAC (*RAN*d*om SA*mple *Co*nsensus en anglais) [FB81] (cf. figure 4.2) est une approche permettant de trouver le meilleur modèle géométrique dans un nuage de points¹ en étant robuste à la présence de bruit et jusqu’à 50% de données aberrantes. Sa version adaptée à l’extraction de modèles géométriques surfaciques, avec une normale en plus, est présentée dans l’algorithme 1. Les étapes d’une itération de RANSAC sont : (i) le choix aléatoire d’un ensemble de points minimal pour le type de proxy considéré (e.g. 3 points ou 1 point avec 1 normale pour un plan), (ii) le calcul des paramètres du proxy à partir des points sélectionnés, (iii) l’extraction de l’ensemble des points supports à ce proxy, et (iv) la décision de garder temporairement ou non le proxy trouvé.

1. le nuage de points associé à un maillage triangulaire est constitué des barycentres des triangles

Algorithme 1 : Pseudo-code de RANSAC : extraction d'une forme simple unique. $p, n, N, \epsilon, \alpha, \text{type}$, et d sont, respectivement, le nuage de points initial, les normales des points, le nombre d'itérations d'échantillonnage des données, la distance orthogonale jusqu'à laquelle un point est un point support, la déviation de normale jusqu'à laquelle un point est un point support, le type de la forme géométrique simple (i.e. plan, sphère, cylindre...), et le nombre minimal de points supports pour qu'une forme géométrique soit un bon modèle. Ω et \mathcal{P} sont, respectivement, l'ensemble des points supports et son modèle géométrique simple associé (les deux peuvent être vides).

Input : $p = \{p_0, \dots, p_{k-1}\}, n = \{n_0, \dots, n_{k-1}\}, N, \epsilon, \alpha, \text{type}, d$
Output : Ω, \mathcal{P}

```

1 begin
2    $i \leftarrow 0; \Omega_{best} \leftarrow \emptyset; \mathcal{P}_{best} \leftarrow \emptyset;$ 
3   while  $i < N$  do
4      $\Omega_{tmp} \leftarrow \text{SélectionnerEnsembleMinimalAléatoirement}(p, n, \text{type})$ 
5      $\mathcal{P}_{tmp} \leftarrow \text{EstimationParamètres}(\Omega_{tmp}, \text{type})$ 
6      $\Omega_{tmp} \leftarrow \text{SélectionnerInliers}(p, n, \mathcal{P}_{tmp}, \epsilon, \alpha)$ 
7     if  $|\Omega_{tmp}| > d$  and  $\text{Score}(\Omega_{tmp}) > \text{Score}(\Omega_{best})$  then
8        $\Omega_{best} \leftarrow \Omega_{tmp}$ 
9        $\mathcal{P}_{best} \leftarrow \text{EstimationParamètres}(\Omega_{best}, \text{type})$ 
10     $i \leftarrow i + 1$ 
11   $\Omega \leftarrow \Omega_{best}; \mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P}_{best};$ 
12 end

```

La mesure de la qualité d'un proxy candidat, donnée par la fonction *Score* (cf. algorithme 1), est généralement son nombre de points supports. Mais d'autres mesures peuvent être utilisées, comme donner un meilleur score si l'erreur géométrique d'approximation est plus petite, tout en respectant la contrainte du nombre minimal de points supports. Lorsque l'ensemble de points supports est plus grand que l'ensemble des points nécessaires, le meilleur proxy de forme est obtenu par une estimation de ses paramètres au sens des moindres carrés, selon la norme L_2 pour minimiser l'erreur géométrique entre le proxy et son ensemble de points supports.

Détecter un seul proxy de forme sur un nuage de points n'a trop d'intérêt dans le cadre de l'approximation d'un maillage, car plusieurs proxies doivent être extraits. L'algorithme RANSAC séquentiel consiste à appliquer séquentiellement l'algorithme RANSAC sur l'ensemble des points non encore associés avec un proxy de forme. L'algorithme s'arrête si aucun nouveau groupe de points supports n'est trouvé dans les points restants. Le problème majeur de l'algorithme RANSAC séquentiel, c'est qu'une détection non précise/fausse à la première ou une des itérations suivantes va contribuer à l'instabilité des étapes d'extraction suivantes. Pour faire face à ce problème, il a été proposé dans la littérature de lancer plusieurs RANSAC séquentiels en parallèle

et de fusionner leurs ensembles de points supports de sorte à obtenir des ensembles de points supports disjoints ordonnés par taille décroissante [ZKM05]. Bien que plus performante en matière de qualité des proxies de forme trouvés, cette approche n'est pas totalement satisfaisante, car le nombre de recherches de proxy de forme explose.

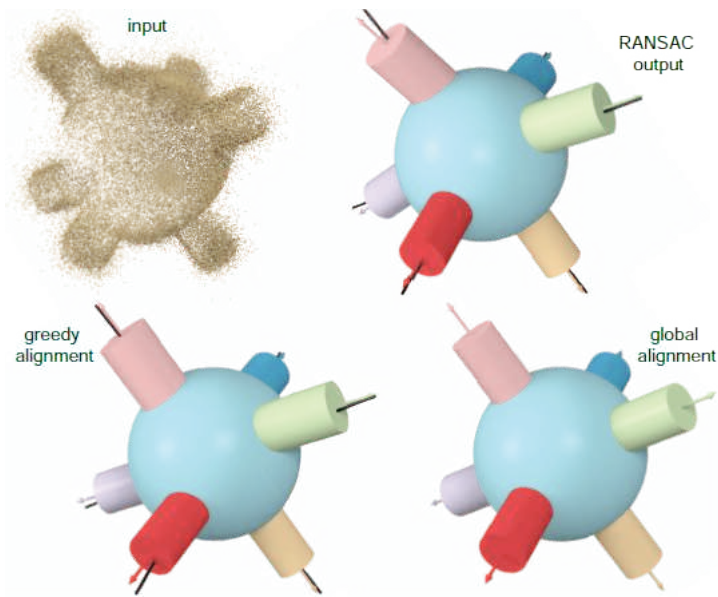
Signalons que les approches RANSAC ne fonctionnent plus très bien lorsque le niveau de bruit sur la position des sommets est assez important dans le cadre de la détection de plusieurs modèles géométriques : des points supports d'un modèle géométrique ont une probabilité importante d'être associés à un autre modèle par l'algorithme, ce qui rend l'algorithme instable. Il faut aussi souligner que les primitives géométriques extraites par une approche de type RANSAC ne sont pas stables lorsque le nombre de points supports est petit [LWC⁺11], ce qui arrive de temps en temps sur les modèles mécaniques.

RANSAC efficace

Le RANSAC efficace (*Efficient RANSAC - ERANSAC* en anglais) [SWK07] est une méthode pour l'extraction robuste de formes dans des nuages de points, qui utilise un algorithme randomisé et automatique de détection de formes, et fonctionne sur le même principe que le RANSAC séquentiel de la sous-section précédente, bien que beaucoup plus efficace. Cet algorithme est robuste au bruit et à des données aberrantes, et il est très rapide grâce à une stratégie d'échantillonnage localisé, basée sur le principe que deux points proches ont plus de probabilité d'appartenir la même forme sous-jacente, et une évaluation rapide de la qualité des proxies de forme candidats, basée sur une évaluation paresseuse efficace. Cela permet à l'algorithme de traiter des millions de points, ce qui n'était pas possible avec les versions de RANSAC précédentes.

RANSAC hiérarchique et contraintes géométriques

Toutes les méthodes RANSAC précédentes produisent des proxies de forme estimés localement, i.e. que seul l'ensemble de points supports bruités est utilisé afin d'estimer les paramètres du proxy. Li et al. [LWC⁺11] insistent à raison dans leurs travaux qu'il est inutile, d'un point de vue industriel, d'essayer de segmenter un objet mécanique, si on ne tient pas compte des relations globales entre les différentes parties de l'objet. En effet, un objet mécanique contient des faces coplanaires, parallèles, orthogonales, des segments de droite de même longueur, des angles égaux, etc. Ce sont toutes ces relations qui rendent l'objet "utilisable" par la suite, i.e. par rapport à sa fonctionnalité pour laquelle il a été conçu. Ils proposent un algorithme qui apprend progressivement les relations globales existantes entre les différentes parties d'un objet, ces dernières étant encodées dans un graphe de relations entre parties où un nœud représente une paire de primitives liée par une relation, et qui contraint l'estimation des primitives géométriques à respecter les contraintes trouvées. Ces relations globales sont interprétées comme des a priori globaux (dans le même esprit qu'un a priori de régularité spatiale), et ces derniers rendent l'estimation des paramètres des primitives géométriques encore plus résistante au bruit qu'un simple RANSAC (cf. figure 4.3). Li et al. [LWC⁺11] ont proposé un algorithme itératif qui



RANSAC avec estimation globale des paramètres de tous les proxies - Image reproduite de [LWC⁺11]

FIGURE 4.3 – Illustration de la robustesse liée à une estimation globale des paramètres de tous les proxies, qui tient compte des contraintes d’alignement détectées.

s’attache à extraire les primitives géométriques importantes avant les plus petites : un seuil sur la taille, par exemple l’aire couverte, permet d’extraire à une précédente itération des primitives géométriques plus conséquentes avant celles de l’itération actuelle.

4.2.3 Agglomération hiérarchique gloutonne

L’agglomération hiérarchique de facettes (*Hierarchical Face Clustering* - *HFC* en anglais) [AFS06] est une approche gloutonne pour obtenir une hiérarchie d’amas de triangles et leurs proxies de forme associés. Au début de l’algorithme, un groupe contient un seul triangle. Ensuite, deux groupes de triangles voisins sont fusionnés au sein d’un nouveau groupe si ce dernier peut être approximé par une des primitives simples proposées. Le coût de fusion de deux amas est l’intégrale de la distance L_2 entre les triangles du nouveau groupe et la meilleure primitive simple approximante. Plus précisément, dans une première étape les paramètres des meilleures primitives simples sont calculés, puis dans une seconde étape on ne retient que la primitive simple engendrant le moins d’erreur. Une file de priorité, qui prend en compte tous les couples de groupes fusionnables, est utilisée. Sa priorité la plus élevée correspond au coût de fusion de deux amas le plus bas, de telle sorte que les deux groupes les plus similaires soient fusionnés en premier. En fixant le coût maximal de fusion autorisé au-delà duquel on ne peut plus fusionner, le nombre de régions est déterminé automatiquement.

L’approche HFC semble être bonne pour des maillages non-bruités et sans donnée aberrante, puisque les paramètres des primitives simples qui sont estimés au sens des moindres carrés sont

sensibles au bruit sur la position des sommets et à la présence de données aberrantes.

4.2.4 Agglomération variationnelle

Approximation variationnelle de formes

L'algorithme populaire VSA (*Variational Shape Approximation* en anglais) proposé par Cohen-Steiner et al. [CSAD04] permet de trouver un bon partitionnement d'une surface d'entrée, tel que chaque partie puisse être bien représentée par un proxy planaire. Il est basé sur l'algorithme de Lloyd [Llo82] (k-moyennes) afin de trouver un partitionnement qui minimise localement une mesure de distorsion géométrique entre chaque proxy et leur région associée. Le représentant d'une région est un proxy de forme et une région associée à un proxy est un ensemble de triangles. L'algorithme VSA consiste à alterner les étapes de partitionnement et de ré-estimation des paramètres des proxies de forme jusqu'à convergence de la segmentation et des proxies.

Les avantages connus de VSA [CSAD04] et de ses extensions [WK05, YLW06] sont :

- la croissance de région depuis un proxy garantit, grâce à une technique appelée *flooding*, l'obtention d'une partition complète du maillage, c'est-à-dire que tout le maillage est bien segmenté ; de plus les régions ainsi obtenues sont garanties d'être connexes ;
- en l'absence de donnée aberrante et de bruit sur la position des sommets, l'estimation des paramètres d'un proxy au sens des moindres carrés sur une région constitue une *bonne approximation* ;
- en l'absence de donnée aberrante et de bruit sur la position des sommets, la partition obtenue est *insensible à la variation de l'échantillonnage de la surface* - ne varie que très légèrement le long des frontières, grâce à la prise en compte de l'aire des triangles dans l'estimation des paramètres d'un proxy.

Les défauts connus de VSA [CSAD04] et de ses extensions [WK05, YLW06] sont :

- *le choix du nombre de proxies de forme est peu intuitif* : il faut que l'utilisateur précise soit le nombre de segments de la segmentation finale, soit l'erreur d'approximation maximale autorisée (pour l'approche d'insertion incrémentale) ; cependant, ces deux choix peuvent nécessiter plusieurs tentatives infructueuses ou une intervention manuelle de l'utilisateur ;
- *le choix initial des graines et le choix des types de proxy de formes utilisés pour la première segmentation* vont influencer la convergence globale de l'algorithme ; par exemple Wu et Kobbelt [WK05] utilisent des proxies planaires pour la première segmentation ;
- ces méthodes sont toutes *sensibles aux données aberrantes et au bruit* dans la position des sommets ;
- *les frontières entre les régions* [CSAD04, WK05] *peuvent être en zigzag* : Yan et al. [YLW06] ont proposé de corriger ce problème avec un post-traitement pour lisser les frontières ;
- *le type de primitive* [WK05, YLW06] *n'est pas inclus dans la fonction de coût globale* : la complexité d'un proxy de forme, son nombre de paramètres, n'est pas prise en compte dans

le coût d'approximation ; pour choisir le type de modèle les approches [WK05, YLW06] utilisent une stratégie gloutonne sur chaque proxy indépendamment des autres proxies, et donc la sélection des proxies n'est pas globalement cohérente.

Pour faire face aux défauts des approches de type VSA, tout en conservant leur avantage principal, le partitionnement, Li et al. [LSJK09] ont proposé une nouvelle procédure d'initialisation, mais aussi une étape de sélection globale des proxies pour optimiser leur nombre et leur type. Cela est expliqué dans la sous-section suivante.

Approches variationnelles combinées avec sélection des modèles utilisés

Les travaux de Li et al. [LSJK09] abordent le problème de l'approximation d'une surface avec un ensemble prédéfini de primitives surfaciques, et ils se distinguent des approches VSA [CSAD04, CSAD04, WK05, YLW06] en proposant d'optimiser le type de primitive de chaque proxy avec une extraction robuste à la présence de données aberrantes et de bruit sur la position des sommets tout au long de l'optimisation, mais aussi en optimisant la complexité de la représentation et l'erreur d'approximation commise.

Les étapes principales de leur algorithme sont : une proposition d'un ensemble d'hypothèses initiales *région - proxy* $\{\Omega, \mathcal{P}\} = \bigcup_i \{\Omega_i, \mathcal{P}_i\}$ en utilisant le RANSAC efficace [SWK07], puis une boucle d'optimisation dans laquelle : (i) un sous-ensemble de couples est sélectionné selon le critère de la Longueur de Description Minimale, (ii) pour chaque région le meilleur proxy de forme, celui associé à la plus petite erreur géométrique, est trouvé par un RANSAC, (iii) un nouveau partitionnement de type VSA est généré à partir de ces proxies mis à jour, et (iv) les nouvelles hypothèses obtenues remplacent les hypothèses sélectionnées à l'étape (i). Les hypothèses initiales sont nombreuses et se chevauchent, puis dans la boucle d'optimisation on itère sur chaque hypothèse jusqu'à la convergence de l'ensemble des hypothèses. Lorsque l'ensemble des hypothèses a convergé, une dernière étape de sélection de la meilleure partition est appliquée. Li et al. autorisent l'étiquette "données aberrantes", s'il est moins coûteux d'étiqueter un triangle comme une donnée aberrante que de l'étiqueter par un des modèles géométriques simples présents dans l'ensemble des hypothèses.

La convergence de l'ensemble des hypothèses n'est théoriquement pas garantie, ni la qualité de la solution en terme de proximité à l'optimum global. De plus, les auteurs ne proposent pas de créer de temps en temps des nouvelles hypothèses, par exemple en "découpant" une hypothèse ou en "fusionnant" certaines hypothèses voisines. Cela présuppose que l'on a été capable de générer toutes les hypothèses intéressantes à l'initialisation de l'ensemble des hypothèses, ce qui n'est pas prouvé dans leur article.

4.2.5 Extraction de plusieurs modèles géométriques dans un nuage de points basée sur une fonction d'énergie - algorithme PEaRL

Le problème de la segmentation en régions approximées par des primitives simples peut être traité comme un problème de recherche conjointe de plusieurs modèles géométriques dans un

nuage de points, formulé sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonction objectif.

Un système d'extraction robuste de primitives géométriques dans un nuage de points p est présenté [IB11]. L'extraction de primitives y est basée sur une minimisation d'une fonction objectif, associée à un champ aléatoire de Markov, dans lequel les sites sont associés aux points de p . Dans l'algorithme de Isack et Boykov [IB11], la première étape consiste à générer un ensemble de proxies candidats par un algorithme de type RANSAC. Ici, on ne raisonne pas sur un ensemble de couples *région - proxy* comme dans [LSJK09], mais on a un ensemble d'étiquettes $\mathcal{L}^{(t)} = \{\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{m-1}\}$ qui représentent m proxies de forme potentiels pour chaque point p_i d'un nuage de points. Isack et Boykov proposent alors de minimiser la fonction d'énergie suivante (le terme de nombre total de proxies est optionnel) :

$$\begin{aligned}
 E_{PEaRL}(\mathcal{P}; p) &= \sum_{i \in \mathcal{S}} E_{approx}(\mathcal{P}_i; p_i) && \text{Erreur résiduelle} \\
 &+ \lambda \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \delta(\mathcal{P}_i \neq \mathcal{P}_j) && \text{Complexité - Régularité spatiale} \\
 &+ \beta |\mathcal{L}^{(L)}| && \text{Complexité - Coût des proxies}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $E_{approx}(\mathcal{P}_i; p_i)$ est la distance orthogonale entre le point p_i et son proxy de forme \mathcal{P}_i . $\mathcal{L}^{(L)}$ désigne l'ensemble des étiquettes ou primitives géométriques utilisées par la configuration courante L . $|\mathcal{L}^{(L)}|$ correspond au nombre de proxies de forme utilisés par la configuration L . λ et β sont des constantes positives qui contrôlent, respectivement, la force de la régularisation spatiale et la force de la régularisation de compacité de la représentation. δ est le symbole de Kronecker, égal à un chaque fois que la condition $\mathcal{P}_i \neq \mathcal{P}_j$ est satisfaite et à zéro sinon. Un seul type de proxies est utilisé, et donc si β est lié au nombre de paramètres d'un proxy et $\lambda = 0$, l'énergie de l'équation (4.1) a une interprétation Longueur de Description Minimale.

La notion de voisinage pour un nuage de points est définie dans PEaRL de manière usuelle comme par la triangulation des points, si elle existe, ou par les points compris dans une sphère de voisinage. Le terme de régularité spatiale dans l'équation (4.1) va permettre d'obtenir un meilleur ensemble de points supports selon le principe que des points proches ont une plus grande probabilité d'être approximés par le même proxy de forme. Le terme de coût des proxies va permettre de contrôler la consistance des ensembles de points supports ayant un proxy de forme avec des paramètres très proches, par exemple deux plans approximativement coplanaires vont être poussés à être effectivement coplanaires en fusionnant. Le terme de coût des proxies présents permet de trouver des cohérences globales dans un nuage de points, tandis que le terme de régularité spatiale permet seulement de converger vers des solutions cohérentes localement. Les termes de complexité dans l'équation (4.1) vont donc orienter la convergence du partitionnement vers une segmentation statistiquement cohérente. Sans ces termes, la segmentation optimale est celle obtenue avec un proxy de forme par triplet de points si des plans sont utilisés, ce qui n'est pas intéressant d'un point de vue analyse structurelle des données.

La minimisation de (4.1) est un problème d'étiquetage, i.e. les points doivent être associés à leur meilleure étiquette. Ce problème est résolu ici de manière approchée par un algorithme

basé sur des coupes de graphes successives, l'algorithme α -expansion, avec coût d'étiquette si le nombre de proxies est pris en compte, présenté dans le chapitre 2, en section 2.5.1. Rappelons que cette approximation dans le cas multi-étiquettes, exacte pour deux étiquettes, est d'une excellente qualité, car elle est théoriquement proche de l'optimum global. Une fois la convergence de α -expansion atteinte - plus aucun changement d'étiquette n'a été opéré pendant un tour complet sur toutes les étiquettes, les proxies sont mis à jour par une estimation de leurs paramètres au sens des moindres carrés. Puis, une nouvelle boucle d'expansion est réalisée, suivie d'une nouvelle mise à jour, etc.

Puisque chaque boucle d'expansion ainsi que chaque mise à jour de proxy font décroître l'énergie (4.1), la convergence de l'algorithme est garantie. Un autre gros avantage de l'algorithme PEaRL est qu'il nécessite moins d'étapes d'échantillonnage des données pour trouver de bons proxies qu'un algorithme RANSAC classique, bien qu'aucune comparaison avec le RANSAC efficace n'ait été faite à ce jour. Cela signifie simplement, qu'avec une estimation grossière d'un proxy, PEaRL est capable de converger vers le bon proxy, dit autrement PEaRL est statistiquement robuste. L'étiquette "données aberrantes" peut être prise en compte par l'algorithme PEaRL, mais dans la version originale, elle n'y est pas explicitement ajoutée.

Signalons, que PEaRL peut autoriser l'ajout de nouveaux proxies candidats dans l'ensemble des étiquettes possibles de temps en temps par des opérations de fusion ou de découpe : cela permet d'améliorer la qualité de l'approximation géométrique finale, et peut être aussi interprété comme une compensation envers le petit nombre de proxies candidats proposés à l'initialisation. Un inconvénient de l'algorithme PEaRL est qu'à la convergence de l'algorithme, des proxies avec seulement quelques points supports peuvent être obtenus. Il faut donc déterminer le nombre minimal de points supports pour accepter un proxy et supprimer les proxies ne respectant pas cette contrainte.

Les limites de l'algorithme PEaRL [IB11] sont :

- *l'utilisation de l' α -expansion est très coûteuse*, chaque proxy candidat étant proposé à tous les points une fois : on propose une étiquette α à des points très éloignés des points actuellement associés à α (à la fois en termes de distance et de déviation des normales), alors qu'intuitivement on ne devrait proposer α qu'à des points susceptibles d'être des supports de α ; mais d'un autre côté la prise en compte du coût de présence d'un proxy n'est possible que pour un α -expansion et pas pour un mouvement de mélange ;
- *nécessite un post-traitement* pour enlever les proxies avec trop peu de points supports ; il suffit de supprimer automatiquement un proxy de forme qui n'a plus assez de points supports après une étape de ré-estimation de ses paramètres ;
- *une seule complexité de proxy de forme*, alors qu'on désire une complexité différente par type de proxy ;
- à la fin d'une seule boucle d' α -expansion, Isack et Boykov [IB11] proposent de supprimer des proxies non-utilisés, sans justification théorique ou expérimentale, alors que Li et al. [LSJK09] avaient proposé de supprimer des proxies non-utilisés pendant deux boucles successives de sélection de la meilleure partition ; et expérimentalement, la deuxième stratégie

appliquée sur l'algorithme PEaRL est plus performante.

4.3 Notre algorithme de segmentation en régions associées à des primitives géométriques simples

Notre méthode de segmentation de maillages triangulaires 2-variétés consiste à :

- étiqueter les triangles du maillage par des étiquettes associées à des primitives géométriques simples (plans, sphères et cylindres) tout en gardant la possibilité d'obtenir un ensemble de triangles non-associés parmi tous les triangles du maillage ;
- et à étiqueter les arêtes du maillage par les étiquettes “normale” ou “caractéristique”.

La segmentation finale est obtenue, comme pour l'algorithme PEaRL [IB11], par la minimisation d'une fonction d'énergie.

4.3.1 Objectifs

Nous proposons les contributions suivantes :

1. la modélisation jointe de la segmentation des triangles et de l'extraction des arêtes caractéristiques ; concrètement, cela signifie que le modèle graphique proposé modélise la meilleure configuration d'étiquettes associées aux triangles, non seulement, en fonction des étiquettes des triangles, mais aussi en fonction du placement des arêtes caractéristiques, qui intuitivement devraient seulement se trouver à la frontière de deux régions différentes ; plus précisément, un modèle d'extraction d'arêtes caractéristiques interagit avec un modèle de segmentation des triangles au travers de contraintes souples basées à la fois sur les étiquettes des triangles et celles des arêtes ;
2. une généralisation du modèle de régularisation spatiale de Potts, prenant en compte des contraintes souples incluant non seulement les étiquettes de deux triangles voisins, mais aussi le type de l'arête les séparant ;
3. l'adaptation de l'algorithme PEaRL [IB11] à la segmentation de maillages triangulaires 2-variétés ; mais aussi l'extension de PEaRL à plusieurs modèles géométriques différents, en particulier nous incluons un coût spécifique par type de proxy de forme ;
4. des stratégies de propositions d'ajout de proxies candidats au cours de la segmentation : appliquer un RANSAC séquentiel sur les triangles actuellement non-associés, et proposer des nouveaux proxies pour diminuer la variance intra-région d'un proxy.

4.3.2 Modèle graphique probabiliste proposé

Nous souhaitons un modèle graphique probabiliste pour étiqueter à la fois les triangles et les arêtes d'un maillage triangulaire 2-variété. Les sommets de ce modèle graphique sont séparés en deux catégories :

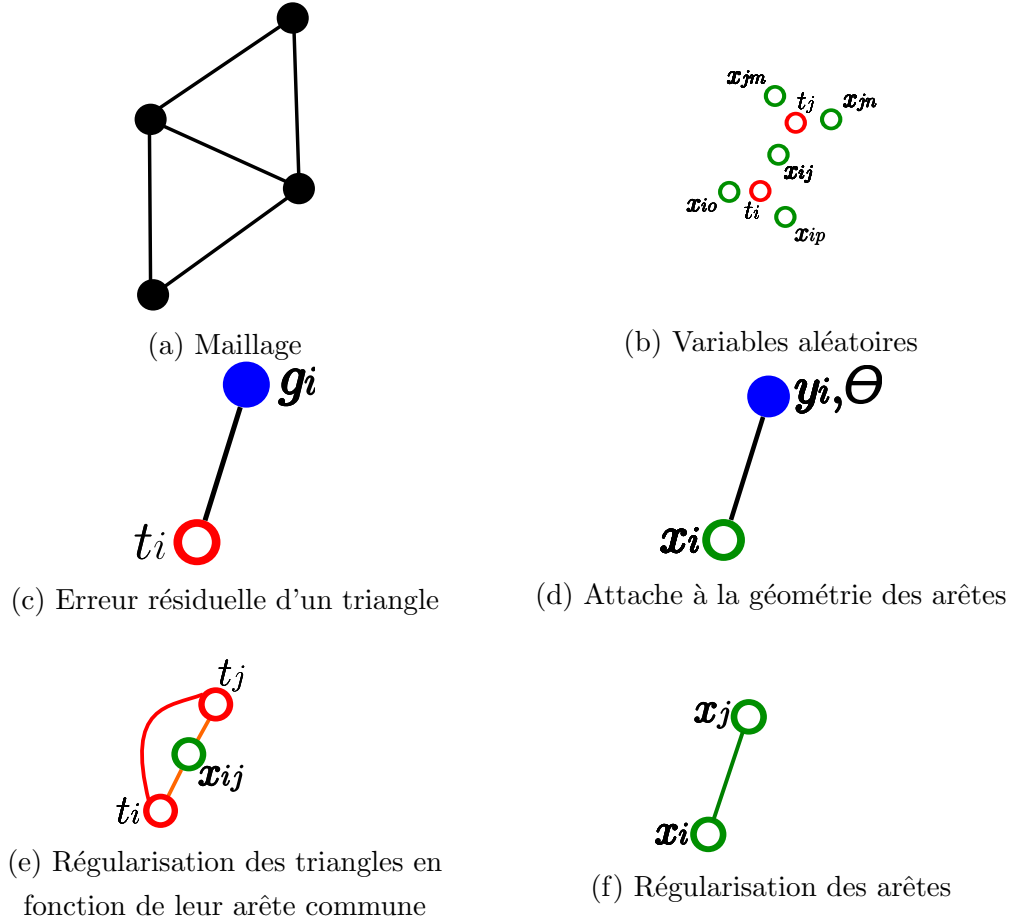


FIGURE 4.4 – Modèle graphique proposé pour la segmentation des triangles couplée à l'extraction d'arêtes caractéristiques. Les variables cachées associées aux triangles du maillage sont non seulement dépendantes de celles des triangles voisins, mais aussi de celles associées aux arêtes de leur triangle.

- les sites $\mathcal{S}^{(t)}$ qui sont associés aux triangles du maillage ; la notion de voisinage pour $\mathcal{S}^{(t)}$ correspond à celle induite par le maillage : soient deux sites $i \in \mathcal{S}^{(t)}$ et $j \in \mathcal{S}^{(t)}$, $j \in \mathcal{N}_i$ si et seulement si les deux triangles associés du maillage partagent une arête ;
- et les sites $\mathcal{S}^{(x)}$ qui sont associés aux arêtes du maillage ; la notion de voisinage pour $\mathcal{S}^{(x)}$ correspond à celle induite par le maillage : soient deux sites $i \in \mathcal{S}^{(x)}$ et $j \in \mathcal{S}^{(x)}$, $j \in \mathcal{N}_i$ si et seulement si les deux arêtes associées du maillage partagent un sommet.

En ce qui concerne les dépendances, nous proposons un modèle graphique adapté à la segmentation de maillages triangulaires 2-variétés, sous la forme d'un champ aléatoire conditionnel qui inclut :

- une dépendance entre l'étiquette d'un triangle, représentant le proxy choisi pour approximer le triangle, et la géométrie du triangle g_i sous la forme d'une erreur d'approximation ; cette dépendance constitue le terme d'attache aux données des triangles ; la clique correspondante est illustrée dans la figure 4.4 (c) ;

- un modèle de régularisation spatiale des étiquettes des triangles, plus général que le modèle de Potts défini dans l'équation (2.10) page 53, dans le sens où il prend en compte le type de l'arête entre les triangles voisins ; la clique correspondante est illustrée dans la figure 4.4 (e) ;
- un modèle d'extraction robuste des arêtes présenté dans le chapitre 3, section 3.5.2, qui incorpore :
 - une dépendance entre l'étiquette d'une arête, représentant le type de l'arête, et la prédiction d'un modèle statistique des arêtes caractéristiques ; cette dépendance constitue le terme d'attache aux données des arêtes ; la clique correspondante est illustrée dans la figure 4.4 (d) ;
 - un modèle de régularisation spatiale directionnelle des arêtes, prenant en compte la géométrie du maillage, donc les observations ; la clique correspondante est illustrée dans la figure 4.4 (f).

Les étiquettes possibles pour les sites du modèle graphique sont :

- pour les triangles, donc les sites $\mathcal{S}^{(t)}$, les étiquettes sont $\mathcal{L}^{(t)} = \{-1\} \cup \{0, \dots, m-1\}$; m représente le nombre de proxies de forme actuellement disponibles ; l'étiquette -1 signifie *non-associé à un proxy de forme* ; les étiquettes $\mathcal{L}^{(t)}$ correspondent une à une aux primitives géométriques $\mathcal{P} = \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{m-1}\}$; ainsi, le proxy de forme associé au site $i \in \mathcal{S}^{(t)}$ est \mathcal{P}_{t_i} ;
- pour les arêtes, donc pour les sites $\mathcal{S}^{(x)}$, les étiquettes sont $\mathcal{L}^{(x)} = \{\text{normale;caractéristique}\} = \{0; 1\}$; les notions d'arêtes caractéristiques et d'arêtes normales sont expliquées dans les définitions 35 et 36 page 71.

Les contraintes souples de notre modèle graphique sont fixées par la fonction objectif, définie dans la section suivante.

4.3.3 Définition de la fonction objectif

La forme spécifique de notre fonction d'énergie $E(t; x; g; y; \mathcal{P}) = -\ln P(t; x; g; y; \mathcal{P}) - \ln(Z)$ donnée dans l'équation (4.2), est définie comme une combinaison scalaire de sommes de potentiels énergétiques invariants à l'échelle. T et X correspondent, respectivement, à une famille de variables aléatoires sur les sites $\mathcal{S}^{(t)}$, et à une famille de variables aléatoires sur les sites $\mathcal{S}^{(x)}$. G et Y sont des familles de variables observées et constituent, respectivement, les triangles géométriques du maillage à segmenter et les mesures géométriques nécessaires au modèle d'extraction des arêtes caractéristiques. $\mathcal{P} = \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{m-1}\}$ est un ensemble de proxies de forme, qui peut évoluer au cours du temps, et auxquels les triangles ont la liberté être associés par l'intermédiaire de leur étiquette. Z est une constante de normalisation, la fonction partition (cf. définition 2.4).

Dans la fonction objectif (4.2), il y a cinq types de potentiels énergétiques, les deux premiers issus du modèle d'extraction des arêtes caractéristiques présenté dans l'équation (3.1), et les trois suivants choisis pour la segmentation des triangles du maillage conjointement à celle des

arêtes :

- un potentiel énergétique $E_{approx}(t_i; g_i; \mathcal{P})$, appelé *erreur résiduelle*, qui mesure l’erreur entre le triangle géométrique g_i du site $i \in \mathcal{S}^{(t)}$ et son proxy de forme \mathcal{P}_{t_i} , et est défini dans l’équation (4.3) ;
- un potentiel énergétique $\varphi(t_i, t_j, x_{ij})$ qui évalue la cohérence locale des configurations de triplets de valeurs prises par les étiquettes t_i et t_j de deux triangles voisins et l’étiquette x_{ij} de leur arête commune, et est défini dans l’équation (4.5) ; l’indice ij est un encodage unique de la position d’une arête en fonction des indices des sites des deux triangles la partageant ; dans le cas d’une arête au bord d’un maillage, l’indice associé au triangle non-défini est remplacé par -1 ;
- et un potentiel énergétique $\beta_k |\mathcal{L}^{(L_k)}|$ qui pénalise la présence de proxies de forme du type $k \in \{\text{plan, sphère, cylindre}\}$ par le coût positif β_k ; $\mathcal{L}^{(L_k)}$ désigne l’ensemble des indices de primitives géométriques du type k utilisées dans la configuration courante $L = \bigcup_k L_k$, et $|\mathcal{L}^{(L_k)}|$ indique le nombre de proxies du type k de la configuration courante ; la constante β_k contrôle donc le nombre de proxies de forme du type k .

$$\begin{aligned}
 E(t; x; g; y, \theta, \phi; \mathcal{P}) &= \kappa \sum_{i \in \mathcal{S}^{(x)}} E_d(x_i; \theta, y) && \text{Attache géométrie arêtes} \\
 &- \mu \sum_{i \in \mathcal{S}^{(x)}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} E_h(x_i, x_j; \theta, \phi) && \text{Homogénéité spatiale arêtes} \\
 &+ \sum_{i \in \mathcal{S}^{(t)}} E_{approx}(t_i; g_i; \mathcal{P}) && \text{Erreur résiduelle triangles} \\
 &+ \sum_{i \in \mathcal{S}^{(t)}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \varphi(t_i, t_j, x_{ij}) && \text{Cohérence configurations} \\
 &+ \sum_k \beta_k |\mathcal{L}^{(L_k)}| && \text{Complexité - Coût proxies}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

où κ est une constante réglant la force des termes d’attache aux données des arêtes par rapport à ceux des triangles. Les autres termes ont été définis avec l’équation (3.1) page 79. Les termes $\varphi(t_i, t_j, x_{ij})$ n’ont pas de poids visible dans l’équation (4.2), car leurs poids sont paramétrés en interne. L’influence mutuelle entre les variables cachées associées aux arêtes et celles associées aux triangles du maillage est gérée par les termes de cohérence des configurations locales. Sans ces termes, les choix des étiquettes des triangles seraient indépendants de ceux des arêtes.

La cardinalité du domaine d’un ensemble de variable intervient dans la fonction d’énergie (4.2). En particulier, elle va offrir un contrôle sur le nombre de primitives géométriques de chaque type, mais aussi permettre une description plus compacte des données avec des fusions de proxies de formes ayant des paramètres proches.

4.3.4 Définition des différents potentiels énergétiques

Terme d'attache aux données

Le terme d'attache aux données $E_{approx}(t_i; g_i; \mathcal{P})$ dépend de l'étiquette t_i d'un site $i \in \mathcal{S}^{(t)}$, du triangle du maillage g_i associé au site i , et d'un proxy de forme \mathcal{P}_{t_i} parmi tous les proxies de forme \mathcal{P} mis à disposition :

$$E_{approx}(t_i; g_i; \mathcal{P}) = \begin{cases} \mathcal{L}^2(g_i, \mathcal{P}_{t_i}) & \text{si } \mathcal{P}_{t_i} \neq \emptyset \\ \gamma \times |g_i| & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

où $\mathcal{L}^2(g_i, \mathcal{P}_{t_i}) = \iint_{p \in g_i} \|p - \Pi_i(p)\|^2 dp$ est une métrique qui mesure l'erreur entre le triangle géométrique g_i et son proxy de forme associé \mathcal{P}_{t_i} , et $\Pi_i(p)$ désigne la projection orthogonale du point p sur le proxy \mathcal{P}_{t_i} . La normalisation par l'aire de la région associée au proxy, et la racine carrée ont été enlevées comme dans VSA [CSAD04], car elles ne sont d'aucune utilité pour l'optimisation. Par contre, pour obtenir des résultats invariants à l'échelle, le maillage d'entrée est normalisé afin que la dimension la plus grande de sa boîte englobante soit 1, puis dénormalisé à la fin de la segmentation. $|g_i|$ dénote l'aire du triangle g_i . $\gamma \times |g_i|$ est le coût d'un triangle non-associé à un proxy, il dépend de l'aire du triangle comme notre métrique \mathcal{L}^2 , et γ est une constante contrôlant l'éloignement au proxy de ses triangles supports : si γ est suffisamment grande, tous les triangles auront intérêt à être associés à un proxy présent dans la liste des proxies candidats. Inversement, si γ est petite, beaucoup de triangles risquent de rester non-associés.

Soient d_1, d_2 et d_3 les trois distances orthogonales des sommets p_1, p_2 et p_3 du triangle g_i , alors :

$$\mathcal{L}^2(g_i, \mathcal{P}_i) = 1/6(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)|g_i|. \quad (4.4)$$

Ce calcul est exact pour un proxy planaire [CSAD04] et est une approximation pour un proxy sphérique ou cylindrique [WK05].

Une autre métrique pourrait être utilisée, par exemple $\mathcal{L}^{2,1}$ qui est liée à la déviation des normales des triangles par rapport à leur proxy, définie dans VSA [CSAD04] et étendue dans [WK05]. Mais, expérimentalement en présence de données bruitées, la métrique \mathcal{L}^2 a donné de meilleurs résultats. De plus, nous ne souhaitons pas que deux plans parallèles, mais éloignés, soient considérés comme identiques d'un point de vue énergétique : cela introduit un risque de fusion de deux plans parallèles, mais éloignés, à cause de la prise en compte du coût des proxies.

Termes de cohérence des configurations locales

Le terme de cohérence ne favorise l'égalité de deux étiquettes de deux triangles t_i et t_j que dans le cas où l'arête partagée n'est pas une arête caractéristique :

$$\varphi(t_i, t_j, x_{ij}) = \begin{cases} \mu & \text{si } t_i \neq t_j \text{ et } x_{ij} = 0 \\ \nu & \text{si } t_i \neq t_j \text{ et } x_{ij} = 1 \\ \zeta & \text{si } t_i = t_j \text{ et } x_{ij} = 0 \\ \eta & \text{si } t_i = t_j \text{ et } x_{ij} = 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

où μ , ν , ζ , et η sont des constantes positives qui pénalisent, respectivement, la différence d'étiquettes de deux triangles partageant une arête normale, la différence d'étiquettes de deux triangles partageant une arête caractéristique, l'égalité d'étiquettes de deux triangles partageant une arête normale, et l'égalité d'étiquettes de deux triangles partageant une arête caractéristique. Remarquons que si $\mu = \nu$ et $\zeta = \eta = 0$, alors nous retombons sur le modèle de régularisation spatiale de Potts, indépendant du type d'une arête, qui est utilisé par l'algorithme PEaRL [IB11]. Ainsi, le type de contraintes souples liées à la fonctionnelle $\varphi(t_i, t_j, x_{ij})$ est plus riche que le modèle de Potts. Intuitivement, les configurations suivantes doivent être favorisées :

- les configurations avec des triangles voisins de même étiquette, pour régulariser spatialement : il faut donc fixer $\mu > 0$ et $\nu > 0$;
- une arête normale entre deux triangles de même étiquette : il faut donc fixer $\eta > \zeta = 0$, $\eta > \mu$, et $\eta > \nu$;
- une arête caractéristique entre deux triangles d'étiquettes différentes si la saillance de l'arête est bien marquée : dans ce cas il faut $\mu \geq \nu$;
- et une arête normale entre deux triangles d'étiquettes différentes si la saillance de l'arête est peu marquée : dans ce cas il faut $\nu \geq \mu$; ce cas arrive souvent à la jonction d'un plan et d'un cylindre.

Pour résumer les deux derniers points, pour être une arête caractéristique, les deux triangles la partageant doivent être nécessairement étiquetés différemment, mais cette condition n'est pas suffisante, elle dépendra à la fois de la saillance de l'arête et de la force de régularisation locale.

4.4 Minimisation de la fonction objectif

La fonction objectif (4.2) est difficile à minimiser. Si l'on considère le cas binaire où seules deux étiquettes 0 et 1 sont possibles pour chaque triangle, alors la fonction $\varphi(t_i, t_j, x_{ij})$ n'est pas sous-modulaire selon la définition 32 page 59, c'est-à-dire qu'il existe au moins une projection sur φ de deux variables telle que la somme des deux cas d'égalité soit supérieure à celle des deux cas d'inégalité. En effet, une projection sur $x_{ij} = 1$ donne

$$\varphi(0, 0, 1) + \varphi(1, 1, 1) = 2 \times \eta > \varphi(0, 1, 1) + \varphi(1, 0, 1) = 2 \times \nu$$

puisque $\eta > \nu$. Hélas, il n'existe pas de technique d'optimisation avec des garanties sur la qualité du minimum obtenu pour des fonctions non sous-modulaires. En pratique, l'algorithme d'optimisation pour les fonctions binaires non sous-modulaires présenté dans le chapitre 2, section 2.5.2, QPBO, va avoir des difficultés à étiqueter des zones avec beaucoup de termes non sous-modulaires, à proximité des vraies arêtes caractéristiques du maillage.

Cela nous a amené à approximer la meilleure configuration de triangles t et d'arêtes x par un découpage de l'optimisation en deux étapes :

1. une première étape d'étiquetage des arêtes : les lignes composées d'arêtes caractéristiques sont extraites par la minimisation globale de l'énergie (3.1) page 79 avec les potentiels énergétiques décrits dans la section 3.5.2 du chapitre 3 ;

2. une deuxième étape de segmentation des triangles est réalisée par la minimisation de la fonction objectif (4.2), en fixant les étiquettes des arêtes par celles trouvées à l'étape 1 ; ainsi, le modèle de détection des arêtes caractéristiques disparaît de l'équation (4.2) et les cliques de taille 3 liées à la régularisation des triangles en fonction de leur arête commune deviennent des cliques de taille 2.

Cette approche peut être vue comme une segmentation des triangles sous des contraintes globales souples, liées à la présence d'arêtes caractéristiques sur le maillage. Et s'il y a très peu de faux positifs parmi les arêtes étiquetées caractéristiques, ce qui est le cas avec notre méthode basée SVM présentée dans le chapitre 3, section 3.5, alors la présence d'arêtes caractéristiques va rendre plus globalement cohérente la segmentation des triangles.

Dans le reste de cette section, nous nous intéressons à l'algorithme de minimisation de l'énergie (4.2) :

- la section 4.4.1 présente les grandes lignes de l'algorithme de minimisation de (4.2) ;
- et les sections 4.4.2 et 4.4.3 détaillent les deux étapes principales de l'algorithme, à savoir une étape de sélection du meilleur ensemble de proxys de forme pour approximer le maillage, et une étape de mise à jour de l'ensemble des proxys candidats.

4.4.1 Description de l'algorithme de segmentation des triangles

Le pseudo-code de notre notre algorithme de minimisation de la fonction objectif (4.2) est donné dans l'algorithme 2.

Dans une phase d'initialisation de l'algorithme, après une extraction robuste des arêtes caractéristiques avec notre méthode présentée dans le chapitre 3, section 3.5, un ensemble de proxys candidats non-redondants est proposé par plusieurs RANSAC séquentiels. L'estimation des paramètres des proxys est la même que celle développée dans le RANSAC efficace [SWK07]. Le premier choix des étiquettes des triangles n'est pas très influant sur la qualité de la segmentation finale obtenue, et il est possible soit de choisir l'étiquette "non-associé" pour tous les triangles, soit de choisir une étiquette existante aléatoirement, ou soit de conserver le choix des étiquettes associé au dernier RANSAC séquentiel. Dans notre implantation, c'est la dernière hypothèse qui a été retenue. Puis, l'énergie associée à la configuration initiale est calculée.

L'algorithme rentre ensuite dans une boucle d'optimisation, dans laquelle une seule fonction d'énergie (4.2) est minimisée. La boucle se termine lorsque l'énergie de la configuration courante ne peut plus être diminuée. Lors d'un passage dans la boucle d'optimisation, la minimisation de l'énergie s'effectue lors de l'étape de sélection du meilleur ensemble de proxys de forme parmi les proxys candidats, c'est l'étape d'expansion de l'algorithme 2. Si l'étape de sélection a modifié la configuration actuelle, i.e. a modifié au moins une étiquette d'un triangle, alors une deuxième étape de ré-estimation des paramètres des proxys utilisés a lieu, qui consiste à proposer un nouveau proxy par un RANSAC à partir de l'ensemble des triangles étiquetés de la région. Plus de détails sur ces deux étapes sont donnés dans les sections 4.4.2 et 4.4.3.

Algorithme 2 : Pseudo-code de notre algorithme de segmentation robuste de maillages triangulaires 2-variétés : g , ϵ , α , et d sont, respectivement, les triangles géométriques, la distance orthogonale jusqu'à laquelle le barycentre d'un triangle g_i est un point support, la déviation de normale jusqu'à laquelle un triangle est un triangle support, et le nombre minimal de triangles pour qu'une forme géométrique soit un bon modèle. \mathcal{E}^0 est l'ensemble des arêtes du maillage, il permet de connaître les arêtes voisines. y , θ , et ϕ sont les observations associées aux arêtes. t et \mathcal{P} sont, respectivement, les étiquettes des triangles et leurs modèles géométriques simples associés. x est la configuration d'arêtes associée à la segmentation des triangles.

Input : $g = \{g_0, \dots, g_{k-1}\}$, ϵ , α , d , \mathcal{E}^0 , y , θ , ϕ
Output : $t = \{t_0, \dots, t_{k-1}\}$, $\mathcal{P} = \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{m-1}\}$, x

```

1 begin
2    $x \leftarrow \text{detectionArêtes}(\mathcal{E}^0, y, \theta, \phi)$ 
3    $(t, \mathcal{P}) \leftarrow \text{proposerProxiesRANSACSéquentiels}(t; g; \epsilon, \alpha, d)$ 
4    $E^{new} \leftarrow E(t; x; g; y, \theta, \phi; \mathcal{P}); E^{old} \leftarrow +\infty$ 
5   while  $E^{new} < E^{old}$  do
6      $E^{old} \leftarrow E^{new}$ 
7     if  $|\text{trianglesNonAssociés}(t)| > d$  then
8        $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup$ 
9          $\text{proposerProxiesRANSACSéquentiels}(\text{trianglesNonAssociés}(t); g; \epsilon, \alpha, d)$ 
10       $(t, E^{new}, \text{modification}) \leftarrow \text{Expansion}(t; x; g; y, \theta, \phi; \mathcal{P}; E)$ 
11      if  $\text{modification}$  then
12         $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \text{ApproximationsGéométriques}(t; g; d; \mathcal{P})$ 
13     $(t, \mathcal{P}) \leftarrow \text{SupprimerProxies}(t; d; \mathcal{P})$ 
14 end
```

4.4.2 Estimation de la meilleure partition possible à partir d'un ensemble de proxies : *expansion*

Une étape d'expansion consiste à procéder à un mouvement expansion vers l'étiquette α avec coût des étiquettes, présenté dans le chapitre 2 à la section 2.5.1, sur toutes les étiquettes présentes, c'est-à-dire sur toutes les approximations possibles par les proxies candidats actuels; chaque fois qu'au moins une étiquette d'un triangle a été modifiée pendant une boucle complète, une nouvelle boucle complète est lancée. A cause de la présence de termes non sous-modulaires dans l'énergie (4.2), une version de l' α -expansion avec coût des étiquettes, basée sur une coupe de graphe avec QPBO a été implantée. Après une expansion, l'énergie (4.2) est garantie de ne pas croître, ce qui garantit la convergence de notre algorithme 2. L'étape d'expansion ne consiste pas seulement à sélectionner le meilleur ensemble de proxies de forme, en étiquetant les triangles : c'est pendant une expansion que sont supprimés certains proxies non utilisés, grâce à

une heuristique.

L'heuristique de suppression des proxies que nous utilisons est celle de la suppression des proxies de forme non-sélectionnés par au moins un triangle pendant deux boucles complètes successives d' α -expansion. Expérimentalement, elle a permis un gain de temps de calcul considérable, sans véritablement dégrader les résultats finaux. Cette heuristique a déjà été utilisée par Li et al. [LSJK09], et elle donne expérimentalement de meilleurs résultats, en termes de minima d'énergie, que la suppression des proxies non-sélectionnés pendant une seule boucle, choix de Isack et Boykov [IB11].

4.4.3 Amélioration des proxies à partir de la partition : *meilleur proxy de forme sur sa région*

L'étape d'amélioration de l'approximation géométrique basée sur un proxy de forme n'est pas une simple ré-estimation des paramètres du proxy de forme sur sa nouvelle région, avec remplacement de l'ancien proxy par sa mise à jour, dans le seul but de minimiser l'erreur géométrique L_2 . En effet, une telle estimation pose le problème de l'accroissement de la variance intra-région, car on ne fait pas de l'estimation au sens des moindres carrés sur des vrais triangles supports, mais sur des triangles étiquetés ; c'est pourquoi nous proposons d'utiliser la stratégie suivante :

Estimation des paramètres du proxy au sens des moindres carrés Les meilleurs paramètres du proxy sont trouvés au sens des moindres carrés en tenant compte de son type (plan, sphère, cylindre), en minimisant l'erreur L_2 entre les barycentres des triangles et le proxy. Pour obtenir une estimation des paramètres robuste à l'échantillonnage, l'aire des triangles est utilisée afin de pondérer les erreurs.

Vérification de la plausibilité des paramètres Si un cylindre ou une sphère se retrouvent avec un rayon supérieur au rayon maximal autorisé, nous considérons qu'il s'agit d'un plan bruité, et alors, avec un RANSAC, le meilleur plan extrait est ajouté à la liste des proxies candidats.

Vérification de la précision de l'estimation Si la variance intra-région associée au proxy est inférieure à la variance maximale autorisée, alors ce proxy est ajouté à la liste des proxies candidats. Sinon on considère que l'estimation actuelle du type du proxy n'est pas assez précise. En conséquences, on cherche avec un RANSAC le meilleur modèle de chaque type avec une estimation de leurs paramètres au sens des moindres carrés à la fin, et on ajoute tous ces proxies à la liste des proxies candidats. Dans le cas d'un plan associé à une variance trop importante, nous ajoutons si possible un deuxième proxy planaire candidat, grâce à un deuxième RANSAC sur les triangles restants : si un proxy planaire n'est pas bien adapté aux données, peut-être que deux proxies planaires le seront.

Ce sera l'étape d'expansion suivante qui sélectionnera ou pas un des nouveaux proxies. Cette prochaine expansion aura lieu seulement si l'expansion précédente avait fait décroître l'énergie, ce qui arrive expérimentalement à chaque modification d'une étiquette. Cela est lié au fait que

la liste des proxies candidats ne contient pas de doublon, et que le coût de présence de chaque type de primitive est différent.

Signalons, qu'il est théoriquement possible de ne pas avoir assez de points supports pour estimer un proxy dans l'étape d'amélioration de l'approximation géométrique. Dans ce cas, s'il est possible d'estimer une primitive géométrique basée sur moins de paramètres, alors elle est ajoutée à la liste des candidats. Sinon aucun nouveau proxy n'est ajouté. S'il n'est pas possible d'estimer une primitive géométrique, par manque de points supports, le proxy peut être supprimé et ses anciens triangles supports sont étiquetés par l'étiquette "non-associé". Ce choix peut faire augmenter l'énergie. Heureusement, grâce aux termes de régularisation de l'énergie (4.2) page 117, cette situation ne s'est pas produite dans notre base de maillages de test.

En plus des stratégies de mise à jour de la liste des proxies candidats décrites dans les deux sous-sections précédentes, notre algorithme 2 offre la possibilité :

- de proposer des nouveaux proxies par des RANSAC séquentiels lorsqu'il y a suffisamment de triangles non-associés ;
- de supprimer les proxies de formes n'ayant pas assez de points supports à la fin de l'algorithme, comme suggéré dans [IB11] ; n'ayant pas assez de confiance dans ces modèles, il est souhaitable de ne pas les prendre en compte.

4.5 Résultats expérimentaux

Dans cette section, nous présentons les décompositions obtenues à l'aide de contraintes sur les arêtes caractéristiques extraites. Les primitives simples choisies sont les plans, les sphères et les cylindres. D'autres primitives géométriques peuvent être ajoutées dans notre système, sans que les fondements de base ne changent. Pour montrer l'efficacité de notre méthode de segmentation, nous l'avons appliquée à des maillages triangulaires 2-variétés avec du bruit sur la position de leurs sommets. Des résultats visuels sont montrés dans les figures 4.5 à 4.8.

4.5.1 Maillages utilisés

Notre base de données de maillages triangulaires 2-variétés est composée des maillages présentés dans le chapitre précédent, sauf le cône, le cône coupé et le tore : 12 modèles mécaniques, 6 maillages et leurs 6 versions bruitées obtenues en ajoutant un bruit gaussien d'intensité 0.5% aux positions des sommets du maillage ; 0.5% fait référence à la dimension maximale de la boîte englobante du maillage. Les cônes et le tore n'ont pas été sélectionnés, simplement parce que les primitives géométriques simples cône et tore ne sont pas encore prises en compte dans notre système de segmentation.

4.5.2 Performances

La complexité de l'algorithme de segmentation dépend principalement :

- du nombre de proxies de forme échantillonnés/proposés initialement, mais aussi au cours de l'algorithme ;
- de l'étape d'expansion avec coût des étiquettes, cette étape dépendant à la fois du nombre de proxies candidats, du temps de construction du graphe représentant l'énergie, et finalement du temps de calcul du flot maximal à partir de ce graphe.

Une fois les arêtes caractéristiques extraites, les temps de calcul des segmentations des triangles des maillages bruités des figures 4.5, 4.6 et 4.7 vont, sur un Intel Core 2 Duo P8400 (2.26 GHz) avec 4 Go de RAM, de 7 s pour le modèle cylindre bruité à 4 min 36 s pour le fandisk bruité. En moyenne, plus de 50% des temps de calculs sont liés à l'échantillonnage par RANSAC et aux stratégies de proposition de nouveaux proxies au cours de la segmentation.

Notre code source n'est pas optimisé, en particulier :

- l'échantillonnage par RANSAC n'est pas un RANSAC Efficace ;
- à chaque mouvement d'expansion vers une étiquette α , le graphe représentant la fonction d'énergie à minimiser est reconstruit depuis le début ;
- la liste des triangles non-associés n'est pas mise à jour dynamiquement.

L'optimisation principale qui nous reste à faire dans l'échantillonnage initial par RANSAC, est de savoir quand s'arrêter de proposer de nouveaux proxies. Bien que la représentation graphique de l'énergie à minimiser change d'une itération à l'autre dans l'étape d'expansion, il devrait y avoir un moyen de mettre à jour la représentation graphique précédente, ou du moins de partir d'un graphe commun à toutes les itérations, qui serait mis à jour par un nombre minimal de modifications. Nous nous attendons à au moins 50% de gain avec une version optimisée à la fois de RANSAC et de la construction de la représentation graphique de l'énergie. Finalement, une liste chaînée contenant les triangles non-associés doit nous permettre d'accélérer la recherche de ces derniers.

4.5.3 Détails d'implantation

Sachant que MinBE et DiagonaleBE sont les longueurs de la dimension minimale et de la diagonale de la boîte englobante du maillage, nous avons fixé expérimentalement :

- les seuils de RANSAC (cf. algorithme 1) pour la recherche d'un modèle : $\epsilon = 4.10^{-2}\text{MinBE}$, $\alpha = 14.07$ degrés, $d = \max(10; 0.01 \times \#points)$;
- les seuils de RANSAC pour l'étape d'amélioration de l'approximation : $\epsilon = 8.10^{-3}\text{MinBE}$, $\alpha = 11.48$ degrés, $d = 10$, variance maximale fixée à $2.10^{-3}\text{DiagonaleBE}$;
- la constante contrôlant l'éloignement des triangles étiquetés comme supports d'un proxy : $\gamma = 10^{-2}$;
- les termes de cohérence des configurations locales : $\mu = \nu = 3.10^{-3}$, $\zeta = 0$ et $\eta = 4.10^{-3}$;
- les termes de coût des proxies usuels : $\beta_{\text{plan}} = 0.07$, $\beta_{\text{sphère}} = 0.12$ et $\beta_{\text{cylindre}} = 0.13$; même si une sphère a le même nombre de paramètres qu'un plan, il est souvent plus apprécié d'avoir un proxy planaire qu'une sphère de très grand rayon : c'est pourquoi le coût d'une sphère a été choisi supérieur à celui d'un plan.

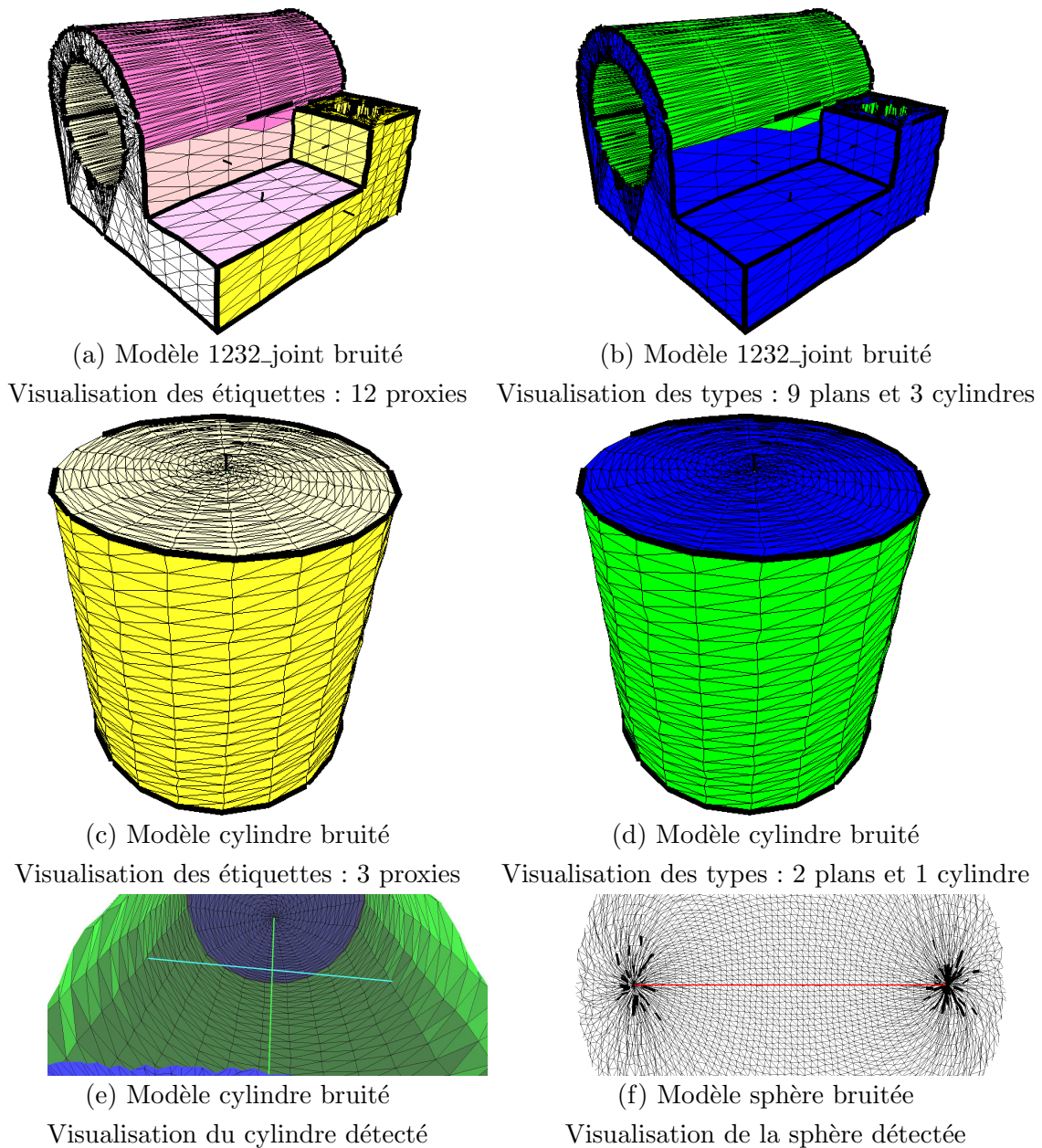
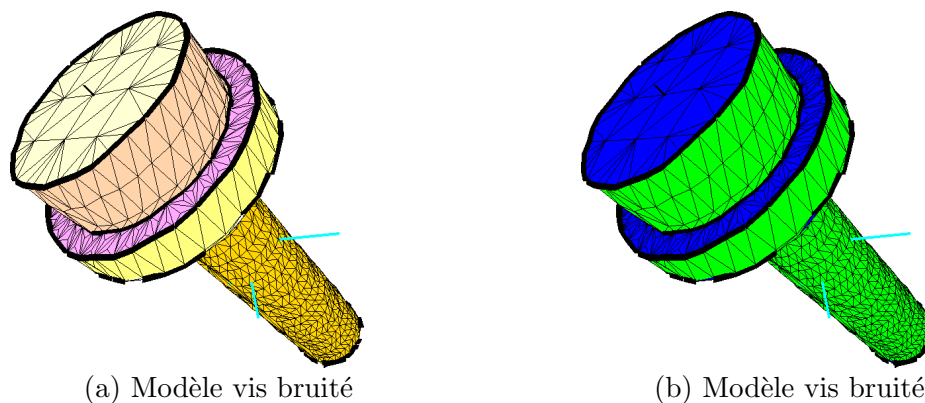


FIGURE 4.5 – Résultats de notre méthode de segmentation sur des objets mécaniques bruités simples. Dans la visualisation des types, les plans apparaissent en bleu et les cylindres en vert. Les arêtes épaisses sont les arêtes caractéristiques extraites par notre méthode d'extraction d'ensembles cohérents d'arêtes caractéristiques présentée dans le chapitre 3, section 3.5. Le seuil de faux positifs de la prédiction du SVM est celui appris par défaut, et il est différent pour chaque modèle.

Puisque les termes de cohérence des configurations locales de l'énergie (4.2) page 117 peuvent être non sous-modulaires, l'algorithme d'optimisation basé sur QPBO a été utilisé pour résoudre les étapes d' α -expansion avec coût des étiquettes. Pour cela nous avons utilisé l'implantation de



(a) Modèle vis bruité (b) Modèle vis bruité
Visualisation des étiquettes : 7 proxies Visualisation des types : 4 plans et 3 cylindres

FIGURE 4.6 – Résultats de notre méthode de segmentation sur le modèle vis bruité. Dans la visualisation des types, les plans apparaissent en bleu et les cylindres en vert. Les arêtes épaisses sont les arêtes caractéristiques extraites par notre méthode d'extraction d'ensembles cohérents d'arêtes caractéristiques présentée dans le chapitre 3, section 3.5. Le seuil de faux positifs de la prédiction du SVM est celui appris par défaut.

QPBO donnée dans [RKLS07], qui est accessible en ligne², et nous avons implanté l' α -expansion avec coût des étiquettes de DeLong et al. [DOIB10].

4.5.4 Discussions

Pour évaluer qualitativement notre méthode de segmentation, des maillages mécaniques simples, c'est-à-dire pour lesquels on peut compter le nombre effectif de primitives de chaque type, ont été utilisés dans les figures 4.5 et 4.6. Comme il peut être observé, notre méthode est capable d'extraire le bon nombre de primitives géométriques simples de chaque type, en présence de bruit sur la position des sommets. Bien qu'il y ait parfois des erreurs de classification des arêtes :

- des arêtes caractéristiques au milieu d'une zone homogène, associée à un seul proxy de forme ;
- et des arêtes normales à une intersection marquée de deux régions associées à deux proxies différents.

la segmentation des triangles est bien guidée par la majorité des arêtes caractéristiques bien classifiées. C'est l'avantage principal d'utiliser des contraintes souples, plutôt que des contraintes dures : la segmentation finale est celle qui respecte le plus de contraintes locales globalement, donc c'est une segmentation statistiquement robuste.

Les résultats de la segmentation en régions de notre méthode dépendent du coût de chaque type de primitive géométrique simple. Dans la figure 4.7, en diminuant le coût associé à la présence d'une sphère, le nombre total de sphères utilisées pour approximer la surface augmente.

2. <http://www.cs.ucl.ac.uk/staff/V.Kolmogorov/software.html>

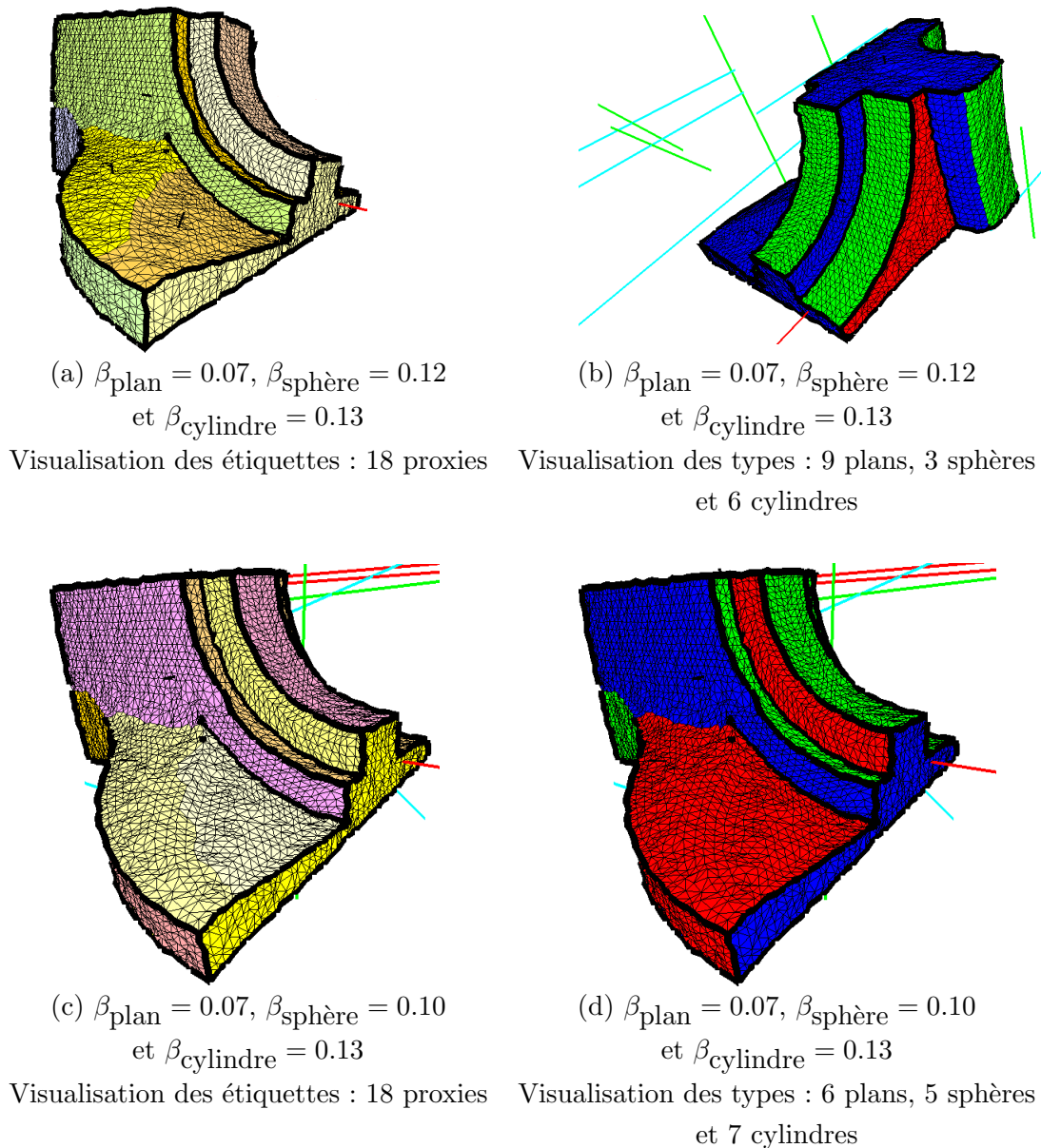


FIGURE 4.7 – Résultats de notre méthode de segmentation sur le modèle fan disk bruité, avec des coûts différents pour le proxy de type sphère. Dans la visualisation des types, les plans apparaissent en bleu, les sphères en rouge et les cylindres en vert. Les arêtes épaisses sont les arêtes caractéristiques extraites par notre méthode d'extraction d'ensembles cohérents d'arêtes caractéristiques présentée dans le chapitre 3, section 3.5. Le seuil de faux positifs de la prédiction du SVM est celui appris par défaut.

Comparaisons avec VSA

Notre système peut aussi être utilisé pour approximer seulement par des plans des maillages bruités, comme dans la figure 4.8 (a), afin de les simplifier par la suite. L'approximation donnée

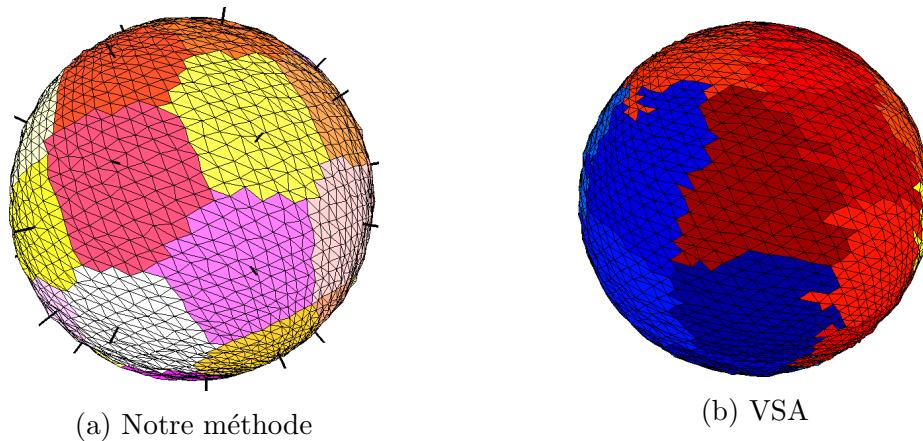


FIGURE 4.8 – Résultats de la segmentation du modèle sphère bruitée en 42 régions approximées par des plans : (a) notre méthode, basée sur la métrique \mathcal{L}^2 , et (b) une implantation de VSA, basée sur la métrique $\mathcal{L}^{1,2}$ avec une initialisation aléatoire des graines. Les seuils de RANSAC de notre méthode ont été assouplis à un seuil de distance $\epsilon = 8.10^{-2}\text{MinBE}$ et un seuil de déviation $\alpha = 19.95$ degrés afin que RANSAC soit capable de détecter des plans avec suffisamment de triangles supports.

par notre méthode dans la figure 4.8 (a), peut être comparée avec celle donnée par l’algorithme VSA dans la figure 4.8 (b). Dans le cas de la méthode VSA, le périmètre des régions n’est pas optimisé, tandis que pour notre méthode, les contours des régions sont améliorés grâce aux termes de cohérence locale, présentés dans l’équation (4.5) page 118, qui pénalisent la différence d’étiquettes, ce qui tend à diminuer la longueur du périmètre des régions.

Obtention d’un maillage à partir de la décomposition en primitives simples

En l’absence de triangle aberrant, et en supposant qu’un maillage choisi peut effectivement être décomposé à l’aide des primitives géométriques simples du système, c’est-à-dire que tous ses triangles sont bien associés à un seul proxy, nous pourrions envisager un algorithme de maillage, similaire à celui de VSA [CSAD04], à partir d’un ensemble de points obtenus par intersections des proxies de formes à leur frontière et insertions de sommets sur les zones de courbure non-nulle afin de diminuer l’erreur géométrique. Une autre approche plus directe, pourrait consister à simplifier ou remailler le maillage initial, en utilisant les proxies de forme comme référence géométrique afin de calculer l’erreur entre un triangle du maillage optimisé et son proxy. De plus, cette approche pourrait s’intégrer dans le terme d’erreur géométrique de notre système de remaillage et de simplification de maillage présenté dans le chapitre 5, ce qui permettrait de contrôler la qualité de l’échantillonnage en plus du niveau d’approximation.

4.6 Conclusion et travaux futurs

Dans ce chapitre, une méthode de segmentation robuste de maillages triangulaires 2-variétés en régions approximées par des primitives géométriques simples a été présentée. Elle est basée sur un modèle graphique probabiliste qui modélise la segmentation des triangles conjointement à celle de l'extraction des arêtes caractéristiques. En particulier, ce modèle propose une généralisation du modèle de régularisation spatiale de Potts, en prenant en compte des contraintes souples incluant non seulement les étiquettes de deux triangles voisins, mais aussi le type de l'arête les séparant.

Les résultats expérimentaux ont montré que notre méthode est capable de bien décomposer des maillages dont les positions des sommets sont bruitées, grâce à l'utilisation combinée :

- de l'extraction robuste de primitives géométriques par l'algorithme RANSAC ;
- et de la recherche d'une segmentation statistiquement probable et compacte, grâce la minimisation d'une fonction objectif qui inclut des potentiels énergétiques favorisant des configurations de triangles localement cohérentes avec les arêtes caractéristiques, et des termes énergétiques liés au nombre de proxys présents dans la segmentation.

Notre approche permet un contrôle du choix du type des proxys, grâce aux termes de coût de présence d'un proxy, avec un coût différent pour chaque type de proxy.

Finalement, afin de limiter la variance intra-région, mais aussi de favoriser la convergence de l'algorithme de segmentation vers une décomposition de meilleure qualité, nous avons mis en place des stratégies de proposition de nouveaux proxys candidats, tout en faisant le choix final de conserver ou pas un proxy sans faire croître la fonction objectif.

4.6.1 Travaux futurs

Nous envisageons de nous comparer avec les méthodes de l'état de l'art, mais pour cela nous devons d'abord :

- créer une base de données de maillages bruités, et la faire étiqueter par un expert ;
- implanter les méthodes de l'état de l'art, afin d'utiliser les mêmes distances et outils d'estimation des paramètres des primitives simples ;
- et inclure le cône et le tore dans notre système de segmentation.

Les travaux présentés dans ce chapitre ouvrent les perspectives suivantes :

- dans notre algorithme de segmentation, il serait intéressant d'utiliser le mouvement de mélange, présenté dans le chapitre 2 en section 2.5.2, à la place du mouvement d'expansion vers l'étiquette α ; cela doit permettre de proposer seulement des étiquettes appropriées pour chaque triangle, au lieu de tester toutes les étiquettes ; mais dans ce cas il faudra être capable d'étendre la prise en compte du coût des étiquettes à un mouvement de mélange ;
- apprendre les poids de la fonction objectif (cf. équations 4.2, 4.3 et 4.5 pages 117 et 118) ; il est envisageable d'utiliser une vérité terrain artificielle, dans laquelle des proxys de forme dont les paramètres sont connus seraient mélangés, par exemple en utilisant des opérations booléennes sur les maillages, puis de bruitez les données avec du bruit gaussien additif ;

on pourrait envisager un algorithme d'apprentissage des coûts des proxies qui essaierait de coller seulement aux nombres de proxies de chaque type, donnés par la vérité terrain, basé sur le principe simple, que si une primitive est sur-représentée par rapport à la vérité, alors il faut augmenter son coût, et diminuer son coût dans le cas inverse, cela jusqu'à la convergence de l'algorithme d'apprentissage ;

- améliorer l'apprentissage des arêtes caractéristiques (cf. chapitre 3) : l'information contextuelle extraite de la segmentation en régions approximées par des primitives simples peut être insérée dans le vecteur de caractéristiques utilisé pour l'apprentissage SVM ;
- proposer une version étendue de notre algorithme de segmentation : un algorithme, qui extrait conjointement la segmentation en régions et la classification des arêtes en arêtes caractéristiques et normales, qui commence comme notre algorithme actuel, puis va itérer entre de nouvelles étapes successives d'extraction d'arêtes vives et de segmentation des triangles jusqu'à convergence ; pour cela il faudra prendre en compte les étiquettes des triangles pour améliorer l'extraction des arêtes caractéristiques ;
- prendre en compte un bruit gaussien additif dans le terme d'attache aux données des triangles : cela doit nous permettre de générer des échantillons synthétiques, par exemple pour générer d'autres échantillonnages de la surface décomposée en primitives simples ;
- la prise en compte d'un bruit gaussien additif dans le terme d'attache aux données des triangles devrait aussi nous permettre d'avoir un contrôle sur le raffinement de la segmentation, car le paramètre d'échelle dans le bruit gaussien permet de contrôler l'éloignement des points du proxy associé ; ainsi, en augmentant la variance autorisée des points, moins de proxies devraient être nécessaires pour recouvrir la surface, et donc un moyen intuitif du contrôle du raffinement de la segmentation serait disponible ;
- et obtenir un algorithme de simplification ou de remaillage d'un maillage bruité, sans passer par une étape de débruitage sensible aux caractéristiques.

Chapitre 5

Remaillage de haute qualité par régularisation de maillages triangulaires 2-variétés

Résumé - Dans ce chapitre, nos travaux sur le remaillage explicite de maillages triangulaires 2-variétés sont présentés. Le remaillage est traité sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonction objectif, de telle sorte que si une modification explicite du maillage permet de faire décroître l'énergie, alors le modèle remaillé est de meilleure qualité, dans le même esprit que Hoppe et al. [HDD⁺93]. Le nouveau système d'optimisation de maillages détaillé dans ce chapitre permet d'avoir un contrôle local des modifications tout en optimisant globalement la position des sommets pour une connectivité fixée, et permet aussi de régulariser la connectivité du maillage de manière gloutonne. Les propriétés désirées du modèle remaillé/optimisé sont contrôlées par l'intermédiaire des termes énergétiques suivants : un terme de forme des triangles qui favorise les triangles équilatéraux, un terme de valence des sommets qui favorise les sommets de valences optimales, un terme de compacité qui favorise la simplification ou le raffinement, et un terme de contrôle de l'erreur géométrique introduite. Finalement, grâce à des choix judicieux de poids pour ces 4 termes, notre méthode peut régulariser, simplifier ou raffiner un maillage d'entrée.

5.1 Introduction

Le remaillage, ses motivations, ses applications et difficultés ont été présentés dans le chapitre 1. En particulier, les approches de remaillage explicite y ont été expliquées, et donc ce chapitre se basera en partie sur les notions, méthodes et références présentées dans le chapitre 1.

5.1.1 Description du problème

Un maillage triangulaire 2-variété (avec ou sans bord) est donné. Ce maillage peut représenter un objet naturel ou mécanique. Sa géométrie est une très bonne approximation de la vraie surface représentée, en particulier une caractéristique du maillage, n'est pas liée au bruit sur la position des sommets, ni au sous-échantillonnage de la surface. Cette dernière restriction va permettre d'utiliser la géométrie du maillage initial comme référence pendant l'optimisation du maillage final. S'il y a du bruit sur la position des sommets, alors une méthode de filtrage anisotropique préservant les caractéristiques du maillage devra être appliquée avant d'utiliser notre approche présentée dans ce chapitre (e.g. [HP04]). Si le modèle est abîmé (e.g. trous ou certaines caractéristiques sont dégradées), alors des méthodes de remplissage de trous (e.g. [SDK09]) et/ou de renforcement des caractéristiques (e.g. [AFRS03]) devront être appliquées.

Ce maillage triangulaire 2-variété nécessitant un remaillage a en général un ou plusieurs des défauts suivants :

- la majorité des triangles ont une qualité médiocre, i.e. les angles minimaux (resp. maximaux) moyens en radians sont inférieurs à $\frac{\pi}{6}$ (resp. supérieurs $\frac{\pi}{2}$) ;
- la répartition des sommets n'est pas optimale : l'échantillonnage de la surface varie sur des zones relativement similaires et au sein d'une zone clairement approximable par une primitive géométrique simple (e.g. un plan, un cylindre...); la densité de l'échantillonnage peut varier brusquement ;
- il y a des sommets extraordinaires (i.e. de valence $\neq 6$ à l'intérieur et $\neq 4$ aux bords) à supprimer par une opération de modification de la connectivité présentée dans la figure 1.8 ;
- le nombre de primitives géométriques n'est pas optimisé, en particulier des zones plates ont beaucoup de triangles, sans que cela ne soit nécessaire pour représenter la géométrie.

La problématique des travaux présentés dans ce chapitre, est de régulariser le maillage d'entrée tout en optimisant le nombre de primitives géométriques, et en restant le plus fidèle possible à la surface initiale, tout cela en fonction des besoins de l'utilisateur. La fidélité à la surface initiale se traduit par le contrôle de l'erreur géométrique introduite par une modification, mais aussi par la préservation des caractéristiques intrinsèques de la surface initiale (e.g. les lignes caractéristiques et les coins, cf. chapitre 3). La régularisation avec fidélité à la surface initiale est clairement l'objectif principal de nos travaux, par opposition aux travaux de [HDD⁺93] dont le premier objectif est l'obtention de la représentation la plus compacte possible. Notre algorithme de remaillage devra aussi permettre de contrôler la longueur des arêtes, ce qui peut être utile pour simplifier ou raffiner un maillage.

Définition 39. *La régularisation de maillage est un algorithme de remaillage qui va générer une nouvelle discrétisation de la géométrie représentée par le maillage initial telle que le maillage obtenu vérifie les propriétés suivantes : ses éléments sont bien formés, le nombre de sommets réguliers est dominant (par rapport aux sommets extraordinaires), et la variation de la densité de son échantillonnage n'est pas brusque.*

La régularisation de maillage peut être assimilée à du remaillage extrêmement régulier si le nombre de sommets réguliers est largement dominant. Mais ça ne sera pas toujours le cas, puisque parfois il faut sacrifier la qualité de certains triangles ou la fidélité à la géométrie initiale pour régulariser un sommet, un choix qui, dans notre approche, dépendra des poids d'une fonction d'énergie à optimiser. Pour obtenir un algorithme de remaillage de haute qualité par régularisation de maillage, il faut rajouter la contrainte de l'obtention d'un échantillonnage uniforme ou isotrope. Cela peut se faire en repositionnant les sommets sur le maillage de manière judicieuse (e.g. en utilisant un opérateur local avec des poids judicieux, cf. chapitre 1, section 1.4.1).

Les sommets extraordinaires ne sont pas toujours évitables, ou ne sont pas toujours vus de manière négative. Par exemple, les sommets saillants, généralement à la jonction d'au moins trois régions régulières ou situés au sommet d'un cône sont souvent irréguliers, car la somme des angles sur eux est généralement différente de 2π , et donc il n'est pas possible de les entourer de 6 triangles équilatéraux. Les sommets irréguliers peuvent aussi permettre de couvrir des patches réguliers de triangles, en particulier dans le cas de topologies complexes. Ainsi, le rôle des sommets extraordinaires est double. D'une part ils permettent d'adapter le maillage à la géométrie de la surface, et d'autre part ils facilitent les coutures entre patches réguliers.

5.1.2 Formulation du problème de régularisation de maillage sous la forme d'une fonction objectif à minimiser

Les différents objectifs désirés et listés dans la sous-section précédente sont tous exprimables à l'aide d'un potentiel énergétique, tel que si ce potentiel est minimal, alors l'objectif est totalement accompli. Considérons par exemple la méthode de Surazhsky et Gotsman [SG03] présentée dans le chapitre 1. Pour diminuer le nombre de sommets extraordinaires, la méthode de Surazhsky et Gotsman va minimiser le potentiel présenté dans l'équation (1.9) page 36, et si ce dernier atteint son minimum global, alors quasiment tous les sommets sont réguliers. Si tous les objectifs désirés par un utilisateur sont en compétition au sein d'une fonction objectif, alors il ne sera plus question d'obtenir le minimum pour tous les potentiels énergétiques individuels, mais de trouver le meilleur compromis global parmi tous les objectifs en compétition.

La fonction objectif peut en particulier intégrer des critères contradictoires. Par exemple, l'obtention à la fois de triangles équilatéraux et d'une représentation compacte. En effet, la représentation la plus efficace aura tendance à être anisotrope et ne sera donc que très rarement composée de triangles équilatéraux. Chaque ajout ou suppression de sommet remet en question l'ensemble des positions pour améliorer le critère d'isotropie, et même il faut parfois rajouter des sommets pour améliorer l'isotropie, alors que le critère de représentation efficace aura tendance à enlever des sommets. Ainsi, la formulation d'un problème d'optimisation de maillage sous la forme d'une fonction d'énergie peut permettre de trouver des meilleurs compromis entre différents critères contradictoires.

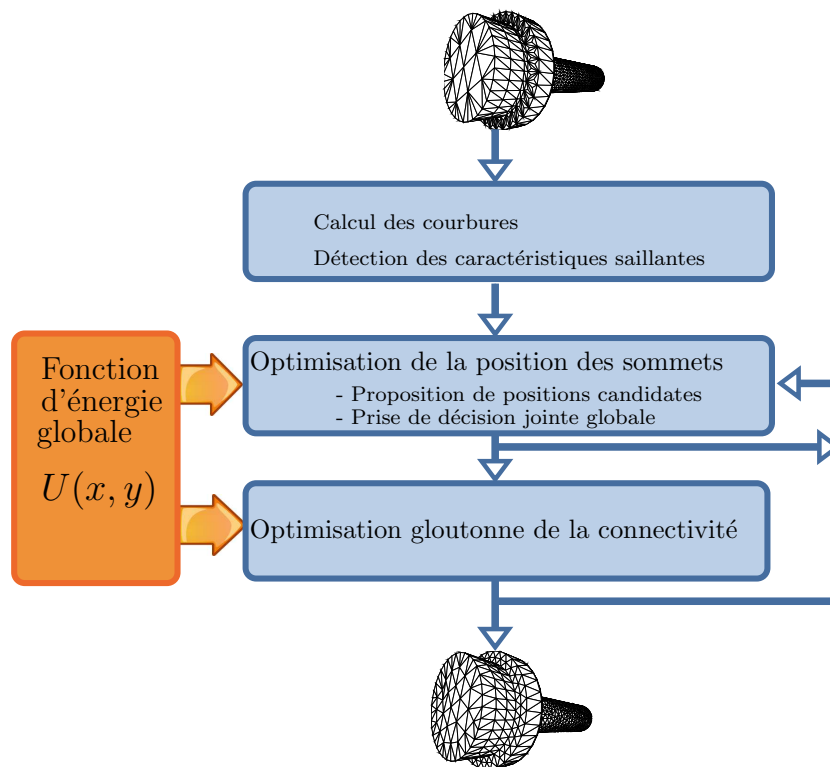


FIGURE 5.1 – Le pipeline de remaillage : à chaque itération i , les nouvelles positions des sommets sont choisies en utilisant une approximation du minimum global de l'énergie ; moins fréquemment, la connectivité du maillage est améliorée pour favoriser des meilleures configurations globales de sommets.

5.2 Système d'optimisation de maillages triangulaires 2-variétés

Le schéma global de notre méthode pour optimiser les maillages triangulaires 2-variétés est illustré dans la figure 5.1 et l'algorithme 3. Dans une phase d'initialisation, les courbures principales du maillage sont calculées et les caractéristiques géométriques importantes extraites. Le calcul des courbures principales est basé sur les cycles de normale [CSM03]. Les caractéristiques extraites sont les lignes composées d'arêtes caractéristiques et les coins, en utilisant la méthode présentée dans le chapitre 3, avec la fonction d'énergie spécifiée par les équations (3.2) et (3.3) page 80. Ces caractéristiques sont préservées tout au long de la régularisation du maillage (l'algorithme de remaillage est donc guidé par les caractéristiques du maillage initial).

Après l'initialisation, l'algorithme est guidé par une seule fonction d'énergie objectif (définie dans l'équation 5.1) qui est minimisée par deux étapes différentes. Les positions des sommets sont optimisées à chaque itération, tandis que la connectivité du maillage est optimisée moins fréquemment (toutes les 5 itérations dans nos expériences). L'intérêt d'optimiser la connectivité moins souvent est de diminuer de manière significative le temps de calcul sans dégrader la qualité du résultat final. Il faut aussi remarquer qu'une modification de la connectivité peut changer complètement la direction actuelle suivie par un sommet, car cette direction est la

Algorithme 3 : La méthode globale, incluant une solution continue-discrète au problème du repositionnement des sommets. M , y et \mathcal{E}^0 correspondent, respectivement, au maillage initial, aux positions initiales et aux arêtes initiales. M' , x et \mathcal{E} signifient, respectivement, le maillage optimisé, les positions et les arêtes du maillage optimisé. $K^{(0)}$, C et i_{max} sont, respectivement, la température de départ, la vitesse de refroidissement et le nombre d'itérations. L'algorithme de coupe de graphe prend la décision globale minimisant l'énergie de l'équation (5.1) pour l'ensemble des sommets, en considérant pour chaque sommet du modèle remaillé la position courante x_s et une nouvelle position x_s^{new} .

Input : $M(y, \mathcal{E}^0)$, $K^{(0)}$, C , i_{max}

Output : $M'(x, \mathcal{E})$

```

1 Calculer les courbures et les arêtes caractéristiques
2  $x \leftarrow y$ ;  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}^0$ ;  $K \leftarrow K^{(0)}$ ;
3 for  $i \leftarrow 0$  to  $i_{max} - 1$  do
4   if  $i \bmod 5 = 0$  then
5     Régulariser la connectivité
6   for  $s \in \mathcal{S}$  do
7      $r_{lib} \leftarrow \frac{0.5}{1 + e^{-K}} \cdot \|x_s, x_{N_s}\|_g \cdot \min(1, \rho_{max})$ 
8      $x_s^{new} \leftarrow$ 
           1er avec  $\Delta_s U < 0$ 
           et dans sphère, parmi
           les candidats :
           { Lissage basé angle.
             Lissage Laplacien.
             guidé ou uniforme
             aléatoire
9    $x \leftarrow \text{optimiser\_globalement\_QPBO-P}(x, x^{new}, y)$ 
10   $K \leftarrow K \cdot C$ 

```

plupart du temps calculée en utilisant la position des sommets du voisinage direct du sommet. Il est intuitivement préférable de laisser évoluer un peu les sommets pour ne pas faire trop de modifications inutiles. Le repositionnement des sommets et l'amélioration de la connectivité sont détaillés, respectivement, dans les sections 5.3.1 et 5.3.2.

5.2.1 Modèle graphique probabiliste associé

Le maillage de départ M est copié et conservé comme référence géométrique du maillage optimisé M' (cf. algorithme 3). Le maillage M' commence avec la même connectivité que M , ainsi que les mêmes positions des sommets. Au cours de l'optimisation de M' , l'ensemble des positions de tous les sommets x de M' peut varier. De même, le nombre de sommets évolue par des opérations d'ajout/suppression de sommets, et la connectivité, donc l'ensemble des arêtes, se modifie par des opérations locales préservant la topologie du maillage. Il n'y a plus forcément de correspondance une à une entre les sommets de M' et les sommets de M une fois que

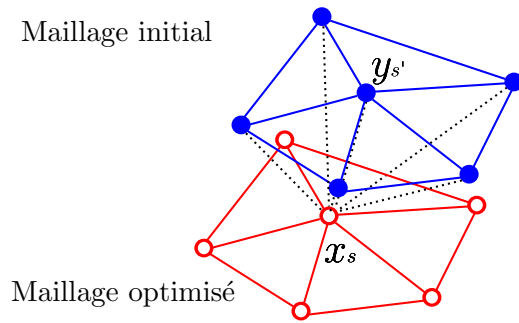


FIGURE 5.2 – Modèle graphique utilisé pour la génération du modèle remaillé : chaque sommet du maillage optimisé x_s est lié à son actuel plus proche sommet initial $y_{s'}$ et a accès à la totalité des informations du maillage initial si nécessaire : c'est un champ de Markov conditionnel.

l'optimisation a commencé. Pour suivre l'évolution de l'erreur géométrique introduite, chaque sommet du maillage optimisé est lié au sommet du maillage initial dont la position est la plus proche (cf. figure 5.2). Ainsi, chaque sommet du maillage M' est lié à la totalité des données observées (la géométrie et la connectivité du maillage initial), ce qui se traduit par un modèle graphique probabiliste bien connu, le champ aléatoire de Markov conditionnel.

5.2.2 Définition de la fonction objectif

La forme spécifique de notre fonction d'énergie $U(x; y) = -\ln P(x; y) - \ln(Z)$ est définie comme une combinaison scalaire de sommes de potentiels énergétiques positifs et sans unité. Chaque potentiel, appelé aussi *fonction caractéristique*, mesure localement un critère correspondant à une erreur géométrique ou une mesure de qualité, et décroît lorsque le critère est localement plus respecté. Les potentiels énergétiques sans unité ont l'avantage d'être invariants à l'échelle. Les sites \mathcal{S} du champ de Markov aléatoire conditionnel ainsi défini par $U(x; y)$ et le graphe de la figure 5.2 sont les sommets d'un maillage à optimiser/remailer. Contrairement aux chapitres 3 et 4, X correspond aux positions cachées des sommets du maillage optimisé, et Y est l'ensemble des positions initiales observées des sommets du maillage. A ce stade, il faut proposer des nouvelles positions x et un ensemble de positions initiales y pour pouvoir évaluer la qualité de la configuration x par $U(x; y)$. $U(x; y)$ affecte une énergie scalaire à chaque solution possible, i.e. à chaque maillage résultat possible, et est définie par :

$$\begin{aligned}
 U(x; y) &= \lambda_f \sum_{\{s,r,q\} \in \mathcal{C}_3} \psi_f(x_s, x_r, x_q) && \text{Forme} \\
 &+ \lambda_d \sum_{\{s,r,q\} \in \mathcal{C}_3} \psi_d(x_s, x_r, x_q, y) && \text{Fidélité} \\
 &+ \lambda_v \sum_{s \in \mathcal{C}_1} \psi_v(x_s) && \text{Valence} \\
 &+ \lambda_p \sum_{s \in \mathcal{C}_1} 1 && \text{Pénalité}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ici λ_f , λ_d , λ_v et λ_p sont des scalaires positifs. Leurs indices respectifs f , d , v , et p signifient qualité de la forme, fidélité aux données, qualité de la valence d'un sommet, et la pénalité de présence d'un sommet. Les potentiels énergétiques ψ sont définis dans la section 5.2.3. \mathcal{C}_n représente l'ensemble des cliques de taille n (cf. définition 27 page 43).

Pour rendre l'équation plus facile à lire, nous avons simplifié de manière abusive la dépendance sur la connectivité du maillage dans les notations ; en particulier, il n'y a pas de variable associée à l'information de connectivité. Néanmoins, il devrait être clair que la fonction d'énergie dépend de la position des sommets ainsi que de la connectivité du maillage.

Ainsi, à chaque repositionnement de sommet ou à chaque modification de la connectivité, $U(x; y)$ peut varier. En fixant les paramètres λ , un utilisateur peut efficacement et facilement créer des maillages avec les propriétés désirées.

5.2.3 Définition des différents potentiels énergétiques

Notre modèle contient quatre types de potentiels énergétiques positifs différents : une fonction de forme mesurant la qualité des triangles du maillage, une fonction d'attache aux données qui encode la qualité d'approximation de la nouvelle surface, un potentiel de valence qui encode la régularité en termes de degré des sommets du maillage, ainsi qu'un terme de contrôle du budget de sommets du modèle remaillé.

Le rôle du premier type de potentiel énergétique est de favoriser les triangles équilatéraux (ψ_f atteint son unique minimum lorsque le triangle est équilatéral [PB03]) :

$$\psi_f(x_s, x_r, x_q) = \frac{R(x_s, x_r, x_q)}{\min(\|x_s - x_r\|, \|x_s - x_q\|, \|x_r - x_q\|)} \quad (5.2)$$

où $R(x_s, x_r, x_q)$ dénote le rayon du cercle circonscrit au triangle (x_s, x_r, x_q) et $\|\cdot\|$ est la distance Euclidienne usuelle. Cette fonction ne dépend pas des positions initiales y et elle est invariante à l'échelle. Elle est automatiquement étendue à $+\infty$ lorsque le triangle (x_s, x_r, x_q) est dégénéré.

La fonction caractéristique d'attache aux données $\psi_d(x_s, x_r, x_q, y)$ mesure l'erreur géométrique entre un triangle (x_s, x_r, x_q) du modèle optimisé et le maillage initial. Idéalement, il faudrait prendre en compte dans le calcul de l'erreur géométrique globale la distance symétrique, mesurée entre les triangles du maillage initial et la surface du maillage optimisé. Cela permettrait de s'assurer que le maillage optimisé reste une bonne approximation globale de la surface initiale. Néanmoins, afin d'accélérer les calculs, seule l'erreur géométrique entre les triangles du maillage optimisé et la surface du maillage initial est calculée, sous la forme du volume en valeur absolue entre le triangle et sa projection orthogonale sur la surface initiale. Expérimentalement cette approximation n'a pas posé de problème, car les caractéristiques géométriques préalablement extraites vont permettre de conserver la forme globale de la surface initiale. ψ_d devrait donc être égale à la valeur absolue de l'erreur volumique produite par une opération locale (e.g. le repositionnement de sommets ou une opération topologique sur les arêtes). Cependant, les calculs exacts des erreurs volumiques pourraient ajouter un coût supplémentaire au processus global itératif de minimisation de l'énergie, en particulier pour le repositionnement des sommets

où nous calculons le minimum entre 2 positions candidates pour chaque sommet (voir section 5.3.1), ce qui donne 8 possibilités à vérifier pour chaque triangle. L'erreur volumique exacte est donc seulement calculée pour les opérations de modification de la connectivité, et entre le maillage avant et après l'opération (et non entre le maillage après l'opération et le maillage initial). Plus précisément, l'erreur volumique associée avec un basculement d'arête (resp. une contraction d'arête, et une découpe d'arête) est le volume du tétraèdre induit par les 4 points des 2 triangles adjacents à l'arête (resp. la somme des volumes de tétraèdres induit par chaque arête du voisinage direct - 1er-anneau et la position ancienne et nouvelle de leur nouveau sommet central, et zéro).

Pendant l'optimisation de la position des sommets, le terme de fidélité ψ_d est approximé par une distance point-à-surface, dont l'avantage principal est d'être calculé par sommet :

$$\psi_d(x_s, x_r, x_q, y) = F(x_s, y) + F(x_r, y) + F(x_q, y) \quad (5.3)$$

où $F(x_s, y)$ est le carré de la plus courte distance entre x_s et le maillage initial, i.e. la distance géométrique L_2 . La distance F pourrait être approximée jusqu'à l'ordre 2 avec la distance de Pottmann [PH03, WPL06], qui permet un calcul direct du gradient de l'énergie. Puisque le gradient n'est pas nécessaire dans notre algorithme de minimisation (bien qu'il puisse être pris en compte), un calcul direct de F en tant que projection orthogonale sur le maillage initial est réalisé, ce qui est légèrement plus rapide et plus robuste en présence de caractéristiques saillantes.

L'approximation de ψ_d proposée précédemment fonctionne bien, étant donné un facteur λ_d élevé, ce qui est le cas pour les applications ciblées, i.e. la régularisation de maillage avec une haute fidélité géométrique.

La fonction de potentiel de valence ψ_v est calculée sur les sommets optimisés par

$$\psi_v(x_s) = [d(x_s) - d_{opt}(x_s)]^2 \quad (5.4)$$

où, comme dans l'équation (1.9) page 36, d et d_{opt} sont, respectivement, le degré actuel du sommet x_s et son degré optimal.

Le coût énergétique du budget de sommets est linéaire en le nombre de sommets du modèle remaillé, et comme il peut être remarqué dans l'équation (5.1), il est égal à λ_p . En général, λ_p contrôle la quantité désirée de sommets.

5.3 Minimisation de la fonction objectif

Dans cette section, nous allons détailler comment l'unique fonction d'énergie de l'équation (5.1) est minimisée au travers de deux étapes différentes, une de repositionnement des sommets et une autre de modification de la connectivité. Pour rappel, les méthodes d'optimisation utilisées dans cette thèse avec leurs garanties ont été présentées dans le chapitre 2, section 2.5.

5.3.1 Optimisation globale de la position des sommets

La mise à jour des positions des sommets du maillage courant nécessite la minimisation de (5.1) sur toutes les variables de positions des sommets $X_s \in \mathbb{R}^3$, un problème d'optimisation continu. Les potentiels énergétiques associés avec la valence des sommets et avec le budget de sommets sont constants pendant l'optimisation de la position des sommets et sont donc omis dans cette section.

Malheureusement, la fonction $U(x; y)$ n'est pas convexe en général (i.e. pour toutes les fonctions de potentiels possibles) et une descente de gradient standard retournera en général une solution sous-optimale, c'est-à-dire un minimum local. De plus, une formulation du problème de repositionnement des sommets au sens des moindres carrés ou sous la forme d'un système d'équations linéaires retournera un maillage trop lissé, même si quelques contraintes sont ajoutées [NISA06, LTJW07, WHG08]. Tout cela suggère une approche discrète pour obtenir des maillages très fidèle à la géométrie du maillage initial.

Nos travaux bénéficient d'avancées récentes dans la théorie de l'optimisation pour les champs aléatoires de Markov discrets [KZ04] en transformant un problème d'optimisation continu en un problème discret, similairement à la technique proposée pour les flots optiques par Lempitsky et al. [LRR08]. Cependant, au lieu d'employer un optimiseur discret global pour fusionner plusieurs solutions obtenues par différentes approches avec différents paramètres, dans notre cas l'optimiseur discret global prend les décisions sur les candidats calculés à chaque étape dans un processus itératif. A chaque itération de repositionnement des sommets et pour chaque sommet du modèle remaillé, une nouvelle position candidate est proposée et la décision optimale pour l'ensemble des sommets est calculée, i.e. la décision minimisant le potentiel (5.1). Dans les sous-sections suivantes, nous expliquons comment les nouvelles positions candidates sont calculées et nous rappelons les propriétés du minimum obtenu.

Conditions préalables pour les nouvelles positions candidates

Avant de proposer une position candidate pour chaque sommet, il est important de savoir si on autorise tout l'espace \mathbb{R}^3 ou si on limite l'espace des positions possibles à une sphère de liberté, centrée sur la position courante et de rayon r_{lib} . En fait, si on autorise de trop grands mouvements pour les sommets, les problèmes suivants peuvent surgir :

- introduction de bruit hautes fréquences sur la surface (des petites bosses) ;
- grosse erreur géométrique dans les zones de fortes courbures ;
- création de replis géométriques responsables de nouvelles caractéristiques.

Il faut donc une sphère de liberté, telle que si une position candidate est en dehors de cette sphère, elle sera rejetée (le sommet conservera alors sa position courante). Pour calculer ce rayon de liberté r_{lib} , nous avons pris en compte la liste des problèmes précédents, et nous avons aussi décidé, comme pour la largeur du pas dans une descente de gradient, de faire décroître ce rayon avec le temps afin d'éviter des mouvements trop importants à la fin du processus d'optimisation. Similairement aux techniques du recuit simulé [GG84], un facteur de température K décroît

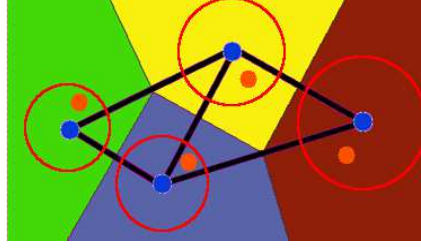


FIGURE 5.3 – Une étape de repositionnement des sommets : prendre la meilleure décision globale pour chaque sommet entre la position courante (en bleu) et la nouvelle position candidate (en orange) située dans la sphère de liberté.

à chaque itération (introduit dans l'algorithme 3). Le rayon r_{lib} est lié à cette température K au moyen d'une fonction sigmoïdale, au rayon géodésique local du voisinage direct de x_s , et au rayon de courbure localement maximal mesuré sur le maillage initial :

$$r_{lib}(x_s, x_{N_s}, y) = \frac{0.5}{1 + e^{-K}} \cdot \|x_s, x_{N_s}\|_g \cdot \min(1, \rho_{max}) \quad (5.5)$$

où ρ_{max} est le rayon de courbure maximale (en valeur absolue) calculé au sommet $y_{s'}$ du maillage initial le plus proche de x_s (σ_{lib} dépend donc de y). $\|x_s, x_{N_s}\|_g$ est le rayon maximal tel qu'une sphère centrée en x_s avec ce rayon n'intersecte pas l'ensemble des arêtes du premier anneau de voisins de x_s . Il s'agit des arêtes partagées par 2 sommets voisins de x_s qui ne sont pas adjacentes à x_s . En d'autres termes, c'est un rayon géodésique local, calculé en tant que distance minimale depuis x_s à son premier anneau d'arêtes :

$$\|x_s, x_{N_s}\|_g = \sup_{\rho \in \mathbb{R}^+} \left\{ \begin{array}{l} \rho : \rho < \|x_s, u\| \\ \forall u \text{ on } (r, q) \in \mathcal{E}, \\ \forall r \in \mathcal{N}_s, \forall q \in \mathcal{N}_s \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

Il est facile de voir que ce rayon de liberté est strictement inférieur à $0.5\|x_s, x_{N_s}\|_g$ pour chaque sommet x_s du maillage optimisé, ce qui évite la création de replis géométriques (cf. figure 5.3). Pour la même raison, le facteur $\min(1, \rho_{max})$ dans l'équation (5.5) limite le rayon à la valeur décrite au-dessus. Puisque le maillage initial est normalisé, ses coordonnées sont divisées par la longueur de la diagonale de la boîte englobante du maillage, avant tout traitement et dénormalisé à la fin de l'optimisation, la longueur de la diagonale de la boîte englobante n'apparaît pas dans l'équation impliquant le rayon de courbure.

Une bonne position candidate x_s^{new} pour remplacer x_s doit faire décroître l'énergie. La variation locale d'énergie $\Delta_s U$ due à la nouvelle position x_s^{new} peut être calculée rapidement à partir du sommet x_s et de son voisinage x_{N_s} . A cause de la forme de la fonction d'énergie (5.1),

$$\Delta_s U = U\left((x \setminus \{x_s\}) \cup \{x_s^{new}\}; y\right) - U(x; y) \quad (5.7)$$

peut aussi être calculé beaucoup plus rapidement en utilisant seulement un petit nombre de termes :

$$\Delta_s U = U\left(\{x_s^{new}, x_{N_s}\}; y\right) - U(\{x_s, x_{N_s}\}; y) \quad (5.8)$$

où la preuve locale (*local evidence* en anglais) $U(\{x_s, x_{N_s}\}; y) = U(x; y)_{|\{x_s, N_s\}}$ contient seulement les termes de $U(x; y)$ qui impliquent le sommet modifié du maillage optimisé x_s et son voisinage direct x_{N_s} .

Proposition de nouvelles positions

La vitesse de convergence de l'algorithme d'optimisation va dépendre de la qualité des nouvelles positions candidates. Cela nous a amené à choisir une position candidate parmi plusieurs calculées par différentes méthodes. Plus précisément, le candidat retenu est celui qui le premier satisfait aux deux conditions suivantes : la position proposée est bien dans la sphère de liberté et elle permet de faire décroître l'énergie (cf. équations 5.5, 5.7 et 5.8). Si aucun candidat valide n'est trouvé, alors la position du sommet reste inchangée.

Les techniques utilisées pour proposer les candidats sont, par ordre décroissant de convergence empirique mesurée, le lissage basé angle (cf. chapitre 1, équation 1.6 page 29), le lissage Laplacien permettant d'obtenir un échantillonnage uniforme (cf. chapitre 1, équation 1.4 page 28), un candidat uniforme ou guidé par le gradient (lorsque le gradient est calculable), et finalement un échantillonnage aléatoire. Toutes ces méthodes calculent un vecteur de déplacement \vec{d} (ou une direction vers laquelle se déplacer) et une nouvelle position x_s^{new} est déterminée par la formule suivante : $x_s^{new} = x_s + A \times \vec{d}$, avec A un facteur d'amortissement (ou encore le pas d'intégration dans un schéma numérique). Pour les directions des candidats uniformes et aléatoires, \vec{d} est restreint à être sur le plan localement tangent à x_s , et bien entendu \vec{d} correspond à la direction du gradient pour les candidats guidés par le gradient.

Une attention particulière est prise pour les sommets le long d'arêtes caractéristiques ou pour les coins : les premiers peuvent se déplacer sur une arête caractéristique s'ils ne changent pas sa direction, et les positions des coins restent inchangées.

Meilleure décision globale

La décision globale, i.e. garder la position actuelle ou prendre la nouvelle position candidate, sur l'ensemble des sommets du modèle remaillé est prise par coupe de graphe (*graph cut* en anglais). Cela implique la construction d'un st-graphe représentant la fonction d'énergie (5.1) page 136 de telle manière que la coupe de poids minimal / le flot maximal dans ce graphe donne la solution qui minimise globalement l'énergie. Puisque notre problème est un choix binaire, par exemple 0 pour la position courante x_s et 1 pour la nouvelle position x_s^{new} pour chaque site s , notre problème de minimisation peut être résolu par une seule coupe de graphe. Hélas, la fonction (5.1) n'est pas sous-modulaire (cf. définition 32 page 59), car le critère de sous-modularité n'est pas forcément vérifié pour le potentiel de forme $\psi_f(x_s, x_r, x_q)$ pour une partie des triangles (x_s, x_r, x_q) . Ainsi, le minimum global exact ne peut pas être garanti pour tous les sommets du maillage. Heureusement, la méthode de coupe de graphe choisie, *QPBO - P* (cf. chapitre 2, section 2.5.2), qui garantit de ne pas faire croître l'énergie (5.1) même en présence de termes non sous-modulaires, est capable de trouver une excellente solution partielle, c'est-à-dire

que les sommets pour lesquels $QPBO - P$ a été capable de trouver la réponse, sont garantis de faire partie du véritable minimum global. De plus, $QPBO - P$ est capable de trouver la réponse pour la quasi-totalité des sommets si le nombre de termes non sous-modulaires est petit, ce qui a toujours été le cas expérimentalement (au moins 99% des sommets sont étiquetés). Finalement, puisque $QPBO - P$ garantit de ne pas faire croître l'énergie, la convergence de notre algorithme est ainsi garantie.

5.3.2 Optimisation gloutonne de la connectivité

L'objectif ici est de minimiser la fonction d'énergie (5.1) page 136 en modifiant la connectivité et le nombre de sommets du maillage, tout en préservant les caractéristiques saillantes du maillage. Pour cela nous disposons des opérations de base de modification de la connectivité : basculement d'arête, découpe d'arête et contraction d'arête (voir section 1.5.1 et figure 1.8 page 34). Malheureusement une optimisation globale de la connectivité n'est pas envisageable, puisque le calcul de l'ordonnancement optimal de toutes les opérations locales à effectuer est combinatoire et ne peut pas être calculé dans des temps raisonnables. Il faut donc limiter les choix des opérations, et nous avons donc choisi une approche gloutonne de la minimisation de l'énergie (5.1), i.e. une opération locale ne sera appliquée que si elle fait décroître (5.1) et elle ne sera plus remise en cause. Mais là encore, le problème est assez difficile, car il faut ordonner des opérateurs différents. Le calcul de l'ordre optimal de toutes les opérations locales permettant de faire décroître l'énergie n'est généralement pas faisable. Nous avons donc choisi une approche classique, qui consiste à appliquer un type d'opérations locales avant un autre et d'ordonner les opérations locales d'un même type à l'aide d'une file de priorité. Cependant, contrairement aux approches usuelles qui n'utilisent qu'un seul critère de priorité, e.g. l'amélioration de l'angle minimal ou la dispersion de la valence, notre algorithme glouton est guidé par la fonction d'énergie (5.1) au travers d'une priorité de la file liée à la décroissance de l'énergie. Ainsi, tous les critères de la fonction d'énergie sont pris en compte dans la priorité.

Intuitivement, il faut ordonner les opérations locales de telle sorte à mettre en premier celles qui sont plus à même de nous faire atteindre nos objectifs de régularisation de maillage : les basculements d'arête en premier (car ils ont un grand pouvoir régularisateur, i.e. ils peuvent permettre d'améliorer à la fois la forme des triangles et la valence des sommets), les découpes d'arête en deuxième (car elles ne dégradent pas la géométrie) et les contractions d'arête en troisième (car elles sont susceptibles de dégrader la géométrie et leur pouvoir d'amélioration de la forme des triangles est souvent limité). Les tests expérimentaux ont confirmé cette intuition, et nous ont donc amené à donner une plus grande priorité aux basculements, puis aux découpes et enfin aux contractions d'arête.

Chacune des trois files de priorité est modifiable, c'est-à-dire qu'après l'application d'une opération locale, chaque arête voisine qui est déjà dans la file de priorité est mise à jour : elle est enlevée de la file si elle n'est plus applicable (i.e. elle ne fait plus décroître l'énergie ou elle induirait un repli géométrique ou la destruction d'une caractéristique saillante), et sinon

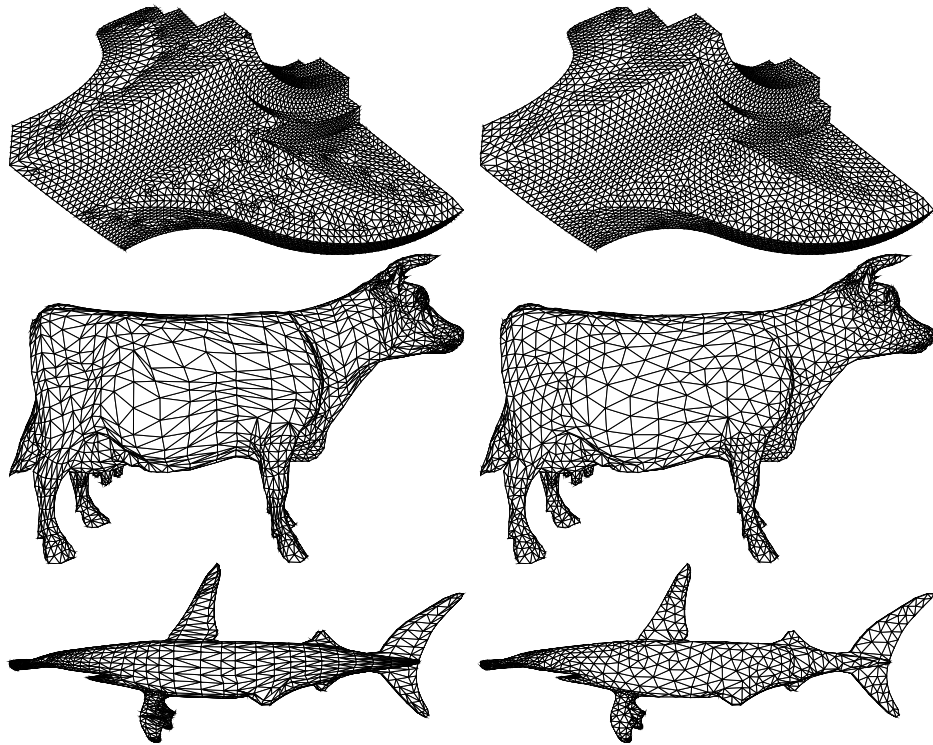


FIGURE 5.4 – Résultats obtenus avec notre méthode. Du haut vers le bas : fandisk, cow, shark. A gauche : modèle d’entrée, à droite : modèle remaillé.

sa priorité est mise à jour. Pour être sûr que l’optimisation de la connectivité se terminera en un nombre fini d’étapes, nous limitons le nombre maximal d’opérations successives d’un même type. En effet, en fonction des poids λ choisis par un utilisateur, il est possible que ce nombre soit trop élevé pour donner des temps de calculs raisonnables, sans pour autant améliorer quantitativement les résultats finaux (plus d’explications sont données dans le paragraphe 3 de la section 5.4.1).

Les contractions et découpes d’arête changent le nombre de triangles du maillage et donc le nombre de termes dans la fonction d’énergie (5.1). Par conséquent, un changement de la fonction d’énergie par contraction ou découpe d’arête n’est pas seulement une image de l’amélioration de la qualité des triangles ou de la fidélité géométrique, mais aussi une image de la différence du nombre d’éléments géométriques dans le maillage. Le terme de budget ou de pénalité a été conçu pour compenser ce problème. Son rôle est double :

- compenser pour les termes énergétiques perdus pendant une contraction ou une découpe d’arête : pour une contraction il faudrait un λ_p positif et pour une découpe un λ_p négatif ; dans notre algorithme nous avons choisi de compenser les contractions d’arête, car les maillages de la base de données sont tous suffisamment échantillonnés ;
- contrôler le budget de sommets si désiré. En augmentant suffisamment λ_p , on peut obtenir un algorithme de simplification de maillages et en diminuant suffisamment λ_p , on peut obtenir un algorithme de raffinement de maillages.

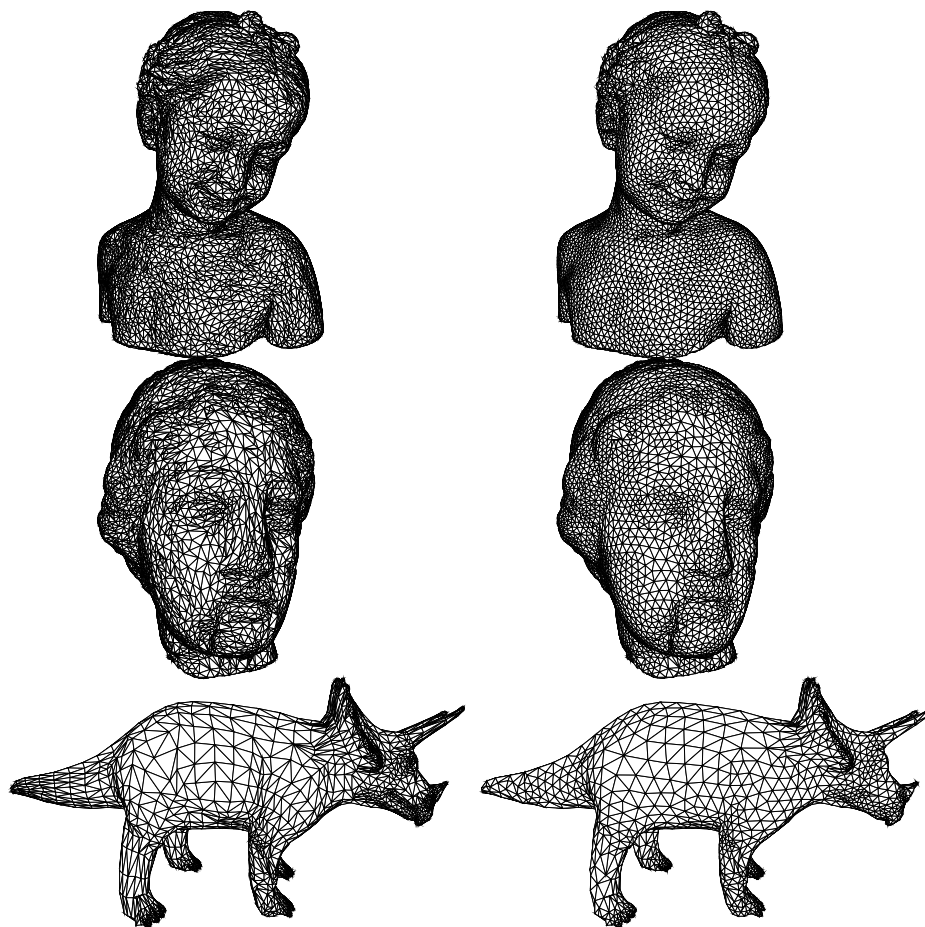


FIGURE 5.5 – Résultats obtenus avec notre méthode. Du haut vers le bas : bimba, egea, triceratops. A gauche : modèle d'entrée, à droite : modèle remaillé.

5.4 Résultats expérimentaux

Pour montrer l'efficacité de notre méthode, nous l'avons appliquée à différents maillages avec des échantillonnages non-adaptés et une connectivité très irrégulière, et qui contiennent à la fois des zones lisses et des caractéristiques saillantes. Quelques résultats visuels sont montrés dans les figures 5.4 à 5.8 et 5.11. Les résultats présentés ont été obtenus sur un Intel Core 2 Duo P8400 (2.26 GHz) avec 4 Go de RAM avec des temps d'exécution entre 31 s et 3 min 56 s. L'optimisation de la connectivité et le repositionnement des sommets prennent environ la moitié des temps de calculs chacun. La complexité de l'optimisation de la connectivité est linéaire en le nombre d'arêtes du maillage initial, s'il y a très peu de coupes d'arête au cours de l'optimisation, ce qui est le cas avec le terme de budget choisi, tandis que la complexité de l'étape de repositionnement des sommets est directement reliée à la complexité de la méthode de coupe de graphe choisie. La méthode de coupe de graphe sélectionnée est basée sur une version chemins augmentants (*augmenting paths*) de l'algorithme du flot maximal avec une complexité polynomiale dans le pire des cas. Heureusement, la complexité moyenne est quasi-linéaire en fonction de la taille de

l'entrée [BK04b]. La complexité moyenne de notre méthode est donc quasi-linéaire en fonction de la taille du maillage d'entrée, ce qui a été confirmé par nos expériences. Sur la figure 5.12 nous observons que la complexité empirique de notre méthode est linéaire en le nombre de sommets.

5.4.1 Détails d'implémentation

Les paramètres de température et de refroidissement mentionnés dans la section 5.3.1 page 139 et l'algorithme 3 page 135 permettent de faire décroître le rayon de la sphère de liberté associé avec un sommet quand le nombre d'itérations/le temps écoulé augmente. Leurs noms sont empruntés de la physique, plus précisément de la solidification d'un métal en fusion. Pour le processus de refroidissement, nous utilisons les suggestions données dans [DHS01] (page 356), en fixant la température K à $K^{(i)} = K^{(0)} \times C^i$ où i est l'itération courante. La température initiale $K^{(0)}$ a été fixée à 100 et la constante contrôlant la vitesse du processus de refroidissement C a été fixée à 0.95. Le nombre total d'itérations i_{max} a été fixé à 170 : un nombre plus élevé d'itérations n'améliore pas significativement les résultats tout en ajoutant du temps d'exécution supplémentaire pour les maillages de notre base (cf. figure 5.9). Si le gradient de la fonction d'énergie (5.1) page 136 est calculable, nous avons trouvé expérimentalement qu'il est intéressant de faire une descente de gradient pendant les 20 dernières itérations pour la position des sommets : cela a tendance à améliorer la solution finale trouvée, en particulier si le terme de fidélité à la surface est important, alors cela permettra de faire "coller" les sommets à la surface représentée par le maillage initial.

Le compromis entre la qualité et la fidélité du modèle remaillé de notre méthode a été choisi en fixant les paramètres de pondération de la fonction objectif avec les valeurs suivantes : $\lambda_f = 1$, $\lambda_d = 10^5$, $\lambda_v = 0.1$ et $\lambda_p = 1$. Dans le cadre de la proposition de nouvelles positions dans l'étape de repositionnement des sommets, le facteur d'amortissement A a été fixé à 0.1 pour les méthodes du lissage basé angle et du lissage Laplacien. Pour les autres méthodes de proposition d'une position (uniforme ou aléatoire sur le plan tangent ou le long du gradient), les candidats sont forcés à être dans la sphère de liberté : A peut être interprété dans ce cas comme un pourcentage du rayon de la sphère de liberté.

Dans l'étape d'optimisation de la connectivité, le nombre maximal de boucles successives d'un opérateur topologique est fixé à 10 : on lance au maximum 10 optimisations successives sur les basculements d'arête, les découpes d'arête ou les contractions d'arête sur le maillage. En fait, au lieu de mettre à jour toutes les arêtes d'une file de priorité qui sont affectées par une opération locale que l'on vient de réaliser, nous avons recours à une heuristique : la mise à jour de la file de priorité se limite aux arêtes dont la forme des triangles adjacents est susceptible de changer par l'opération locale, et donc certaines arêtes pour lesquelles seule la valence d'un sommet est affectée sont seulement supprimées de la file de priorité et non ré-injectées : il faut donc reconstruire une autre file de priorité avec ces arêtes-là, ce qui rajoute une itération globale sur cette nouvelle file de priorité, et le maximum 10 concerne donc le nombre maximal de nouvelles itérations de ce type. Ce choix se justifie dans nos travaux car le poids du potentiel énergétique

associé à la valence des sommets est faible, ce qui peut amener à faire beaucoup trop d'opérations locales, on peut rester bloqué plusieurs minutes sur un opérateur local, et de plus les résultats obtenus avec cette heuristique sont bons : l'amélioration de la forme des triangles a tendance à être réalisée avant l'amélioration de la valence des sommets, ce qui expérimentalement améliore la convergence de l'optimisation de la connectivité.

Pour l'étape de repositionnement des sommets et l'approche de minimisation associée, nous avons utilisé l'implémentation de QPBO-P donnée dans [RKLS07], qui est accessible en ligne³. Nous avons aussi effectué des tests avec d'autres approches de coupe de graphe donnant des approximations du minimum dans le cas des fonctions d'énergie non sous-modulaires : le QPBO classique, QPBO-I, QPBO-PI (cf. [RKLS07]), et la troncature d'énergie [RKKB05]. Les résultats sont moins bons avec ces méthodes alternatives. La propagation de croyance (*Belief Propagation*, BP) [Pea88] est aussi une méthode alternative aux approches coupes de graphe telle que QPBO-P. Tandis que ces deux approches donnent des approximations de minimum global comme résultats sur des fonctions non sous-modulaires, leurs forces et faiblesses sont différentes. La BP peut être appliquée aux fonctions non sous-modulaires dans le cas multi-étiquette, sa complexité étant $O(|\mathcal{L}|^{|C|})$, où \mathcal{L} est l'ensemble des étiquettes et $|C|$ est la taille de clique maximale (3 dans notre cas). L'exactitude de la BP dépend de l'absence de cycle dans le graphe, tandis que l'exactitude de QPBO-P dépend de la sous-modularité de la fonction d'énergie. Notre choix en faveur de QPBO-P, plutôt que la BP, est motivé par le fait que QPBO-P donne une solution exacte si la fonction est sous-modulaire et une solution de grande qualité si le nombre de termes non sous-modulaires est petit, ce qui est expérimentalement le cas, alors que le nombre de cycles est extrêmement élevé. De plus, les nœuds pour lesquels QPBO-P est capable de trouver une solution, sont optimaux, i.e. font partie du minimum global. Dans notre problème, à chaque étape plus de 99% des décisions de repositionnement des sommets sont globalement optimales, ce qui donne en pratique d'excellents résultats, en plus de l'avantage de complexité de la méthode. Finalement, QPBO-P garantit que l'énergie globale ne croît pas après chaque étape de repositionnement des sommets, ce point n'étant pas garanti avec la BP en présence de cycles, même la convergence de la minimisation de l'énergie n'est pas garantie dans ce cas [SZS⁺08].

La figure 5.9 montre l'évolution de l'énergie totale pendant les 170 itérations pour un maillage mécanique.

5.4.2 Résultats et discussions

Pour illustrer la qualité des maillages en terme de qualité des triangles, les angles minimaux et maximaux moyens sont présentés dans le tableau 5.1. La qualité des triangles est primordiale dans plusieurs applications, et nous renvoyons le lecteur au chapitre 1, section 1.1.5 qui liste les impacts de la qualité des triangles. Selon le tableau 5.1 et la figure 5.8, et par rapport aux angles minimaux et maximaux moyens, les maillages régularisés obtenus par notre méthode sont des maillages de haute qualité. De plus, cela est confirmé par les figures 5.4, 5.5, 5.6, 5.8 et

3. <http://www.cs.ucl.ac.uk/staff/V.Kolmogorov/software.html>

Modèle	#v	Irreg (%)	Amin (deg)	Amax (deg)	Er_{Haus} (10^{-3})	Er_{RMS} (10^{-3})	Durée (sec)
Fandisk (init)	6495	20	43.4	86.1	-	-	-
Fandisk (Liu)	6495	20	44.7	82.0	3.3	0.8	n.c.
Fandisk (notre)	5905	12	49.0	75.9	1.6	0.03	232
Cow (init)	2904	53	30.2	93.7	-	-	-
Cow (Liu)	2904	53	35.1	88.2	5.3	0.9	n.c.
Cow (notre)	2695	39	41.0	81.0	5.5	0.5	59
Shark (init)	2560	32	20.8	97.4	-	-	-
Shark (Liu)	2560	32	26.2	107.5	3.0	0.3	n.c.
Shark (Sur1)	2560	31	50.6	71.1	6.8	0.8	n.c.
Shark (notre)	1719	47	36.2	84.8	4.0	0.6	42
Hand (init)	7950	58	32.4	94.1	-	-	-
Hand (Liu)	7950	58	34.3	92.2	8.8	0.4	n.c.
Hand (Val)	6802	45	46.1	77.5	2.6	0.2	9
Hand (notre)	5847	33	50.2	72.3	1.7	0.2	193
Bimba (init)	8857	62	34.2	92.8	-	-	-
Bimba (Liu)	8857	62	38.1	87.0	4.9	0.5	n.c.
Bimba (Sur1)	8857	20	53.6	67.6	6.0	0.5	n.c.
Bimba (Val)	8143	48	45.2	78.1	6.0	0.4	10
Bimba (notre)	7986	41	47.6	75.3	3.0	0.2	232
Egea (init)	8268	75	34.7	93.5	-	-	-
Egea (Liu)	8268	75	38.2	88.3	2.6	0.2	n.c.
Egea (Sur2)	8705	7	52.4	69.1	2.7	0.2	15
Egea (notre)	7783	43	48.8	74.1	2.6	0.2	236
Triceratops (init)	2832	59	29.6	95.5	-	-	-
Triceratops (Sur2)	2758	13	42.2	82.5	8.4	1.1	12
Triceratops (notre)	2412	44	41.5	81.0	3.6	0.5	55

TABLE 5.1 – Statistiques sur les modèles remaillés : nombre de sommets, pourcentage de sommets irréguliers, angle minimal moyen, angle maximal moyen, distance de Hausdorff, maximum entre les 2 distances RMS mesurées par Metro normalisées par la diagonale de la boîte englobante, et le temps d'exécution. Liu, Val, Sur1, et Sur2 correspondent respectivement à [LTJW07], [VCP08], [SAG03], et [SG03]. Les temps affichés pour Sur2 ont été calculés sur un Pentium 4 PC (2.4 GHz) avec 512 de RAM [SG03], tandis que les autres l'ont été sur un Intel Core 2 Duo P8400 (2.26 GHz) avec 4 Go de RAM.

5.11. Remarquez que l'échantillonnage du maillage régularisé est similaire à l'échantillonnage du maillage original, la densité est modifiée à minima pour améliorer la forme des triangles et obtenir un échantillonnage le plus isotrope possible. Cela est un atout pour régulariser les maillages dont la densité de l'échantillonnage initial doit être préservée autant que possible. Le tableau 5.1 montre aussi que la valence des sommets est légèrement améliorée par notre méthode, i.e. quand cela ne dégrade ni la forme des triangles, ni la fidélité géométrique. Le nombre de sommets irréguliers peut être réduit de manière significative en augmentant le poids λ_v (e.g. à 0.6). Cependant, l'amélioration de la valence peut dégrader la fidélité à la surface originale, et peut rajouter d'autres itérations globales (en plus des 170 itérations actuelles) pour conserver la qualité des triangles à un niveau élevé.

Pour évaluer la fidélité des modèles remaillés, la distance de Hausdorff et le maximum entre les deux distances RMS (*Root Mean Square*) normalisées par la diagonale de la boîte englobante, sont présentés dans le tableau 5.1. Ces distances ont été calculées en utilisant l'outil Metro [CRS98]. Selon ces distances, le tableau 5.1 et la figure 5.8, l'erreur géométrique introduite par notre méthode est petite.

Notre méthode conserve les détails hautes fréquences, tout en améliorant considérablement la forme des triangles. En effet, dans la figure 5.7 nous remarquons que les caractéristiques autour de l'œil du triceratops sont bien conservées par notre méthode. Remarquez que le nombre de sommets du maillage remaillé ne doit pas être choisi par l'utilisateur, il s'adapte tout seul à la géométrie du maillage tout en maintenant le même ordre de grandeur, étant donnés les paramètres proposés (en particulier le terme de budget λ_p).

Nous avons comparé notre méthode avec celles de Valette et al. [VCP08], de Surazhsky et al. [SAG03, SG03], et de Liu et al. [LTJW07]. Comme il peut être observé dans le tableau 5.1, notre méthode donne de meilleurs résultats en termes de forme des triangles et de fidélité à la surface initiale lorsqu'on la compare à celles de Valette et al. et Liu et al. ; la méthode de Surazhsky et al. génère des triangles mieux formés (meilleurs angles minimal et maximal moyens), mais notre méthode approxime mieux la géométrie à la surface initiale. Par exemple, dans [SG03], leur méthode lisse l'œil du triceratops (cf. figure 5.7), et des détails importants sont donc perdus.

Notre méthode peut traiter des maillages triangulaires 2-variétés de genre élevé (i.e. >1), comme l'atteste la figure 5.11, et aussi les problèmes de coutures qui apparaissent dans les optimisations de maillages basées sur des paramétrisations (e.g. [AdVDI03]) peuvent être évités par notre méthode.

5.4.3 Simplification de maillage

Notre système d'optimisation de maillage permet aussi de simplifier les maillages, simplement en changeant les paramètres de la fonction objectif (5.1) page 136, dans le but de favoriser les contractions d'arêtes. Cela est réalisé en fixant le terme de pénalité λ_p à des valeurs plus grandes ($\lambda_p = 25$ dans les exemples de simplification montrés). Quelques maillages simplifiés sont présentés dans la figure 5.10. Ces résultats montrent une grande fidélité à la surface du maillage

original, tout en diminuant de manière significative le nombre de sommets utilisés. Cependant, en favorisant la suppression de triangles, la qualité moyenne des triangles est diminuée.

Dans le même esprit, il est possible de raffiner un maillage grossier par notre méthode en changeant le terme de pénalité λ_p à des valeurs négatives. Pour éviter des problèmes de variation importante de la densité des sommets (à cause des sommets insérés), les étapes de raffinement doivent être alternées avec des étapes de régularisation.

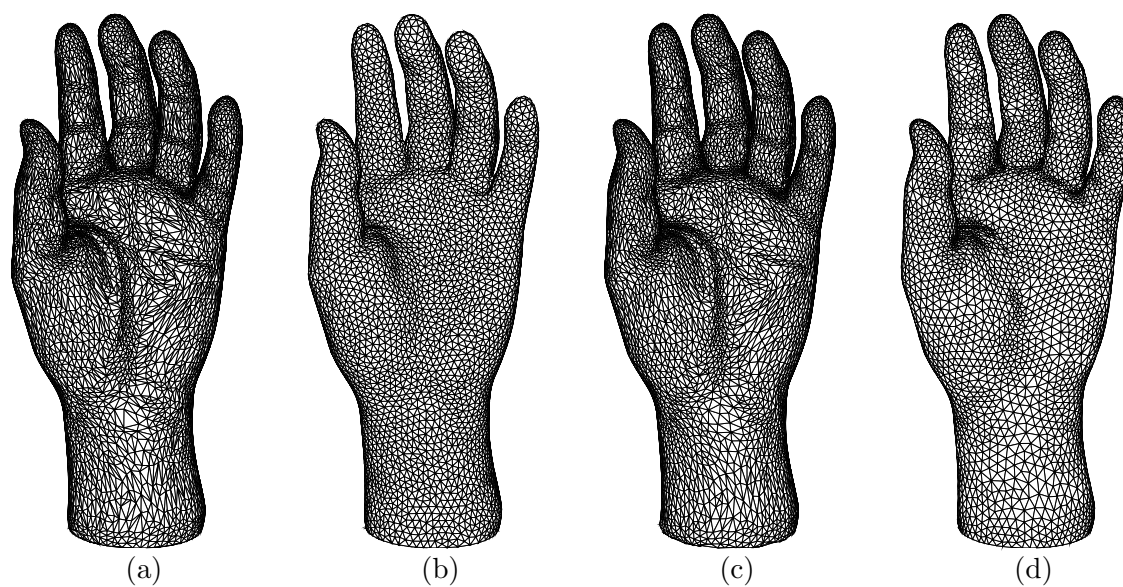


FIGURE 5.6 – Comparaisons entre (a) le modèle hand original, (b) Valette et al. [VCP08] (c) Liu et al. [LTJW07] et (d) notre méthode.

5.5 Conclusion et travaux futurs

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode d’optimisation de maillages triangulaires 2-variétés. Cette méthode inclut une manière originale de traiter le repositionnement global des sommets :

- avec une garantie de globalité sur la solution obtenue ;
- avec un fort contrôle local des modifications, en particulier en préservant les caractéristiques saillantes du maillage d’entrée ;
- en évitant les problèmes d’oscillations qui arrivent généralement avec des approches purement locales.

Les avantages principaux de notre méthode sont sa capacité à être fidèle à la surface initiale tout en améliorant la qualité des triangles, en particulier le compromis qualité des triangles par rapport à l’erreur géométrique introduite est meilleur que pour des approches similaires. La méthode est assez générale, parce qu’en choisissant les poids de la fonction objectif en fonction des besoins, un utilisateur peut améliorer la valence des sommets, la compacité de la représentation ou la qualité des triangles.

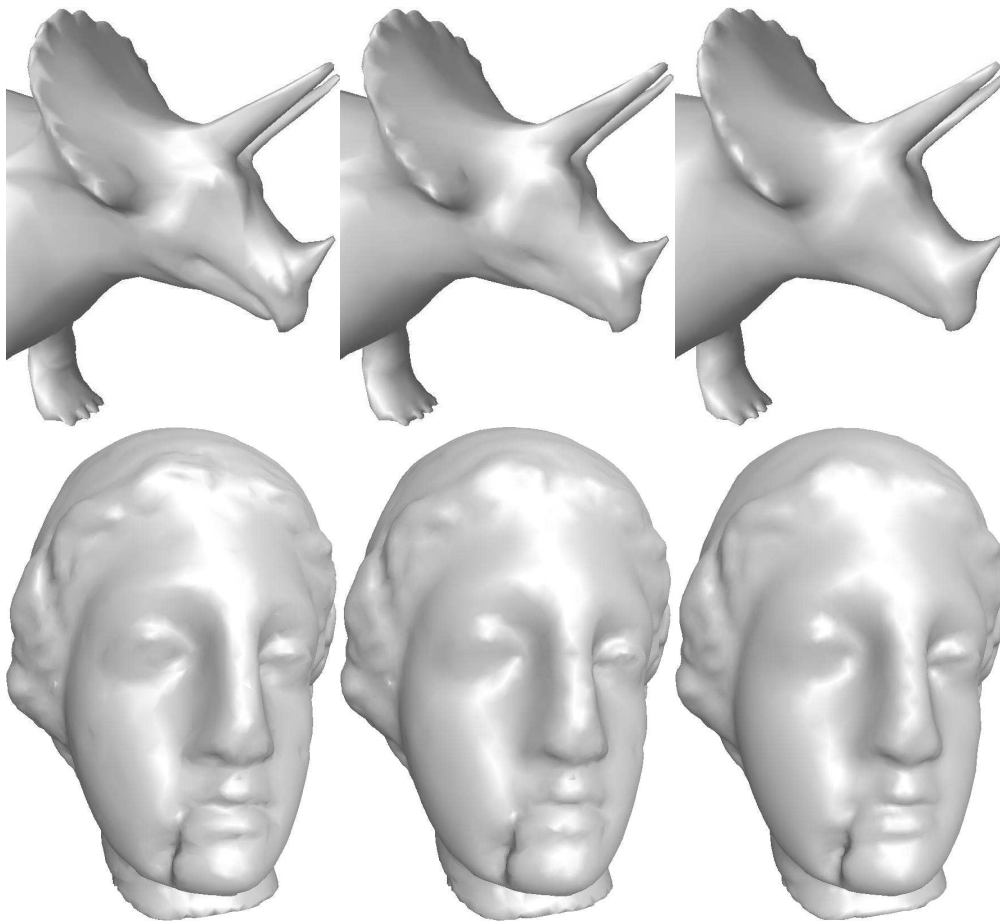


FIGURE 5.7 – Comparaisons pour le modèle triceratops (en haut) et le modèle egea (en bas) : le modèle original (à gauche), notre version remaillée (au milieu), et la version remaillée de Surazhsky et Gotsman [SG03] (à droite). Les caractéristiques autour de l’œil du triceratops sont bien conservées par notre méthode.

Même si notre code source n’a pas été optimisé, en particulier le st-graphe n’est pas mis à jour à la volée, mais reconstruit à chaque repositionnement des sommets, notre méthode, dans le cas d’un code optimal, restera plus lente que les approches globales existantes. Cela est dû à la nature itérative de notre algorithme et aux vérifications locales effectuées avant chaque opération. Notre méthode est utilisable pour des maillages de plusieurs centaines de milliers de sommets, et elle permet à un utilisateur un bon niveau de contrôle sur les modifications effectuées.

Notre méthode d’optimisation peut être utilisée dans d’autres cas que la régularisation, la simplification et le raffinement de maillages : dans le post-traitement des maillages (par exemple pour régulariser les coutures, voir améliorer les résultats d’une première méthode de régularisation), dans la compression de maillage (essayer de repositionner les sommets de manière à augmenter leur prédictibilité, e.g. par la règle du parallélogramme) ou dans le débruitage de maillage. Ainsi, notre système d’optimisation de maillage ouvre des perspectives intéressantes

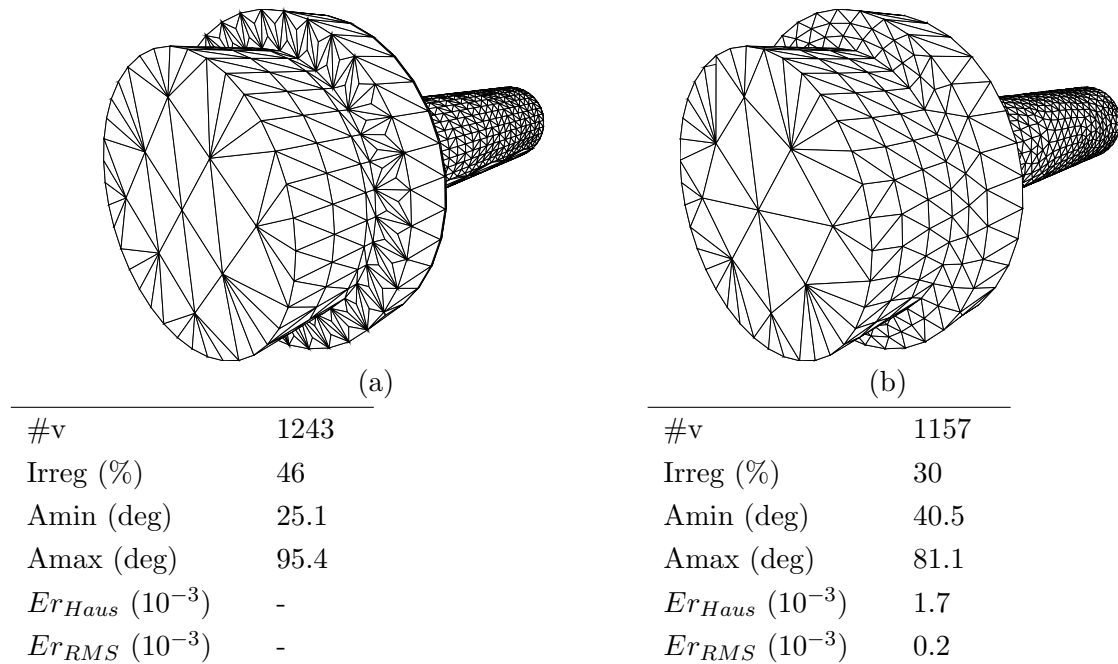


FIGURE 5.8 – Comparaisons entre (a) le modèle CAO original et (b) notre version remaillée. Remarquez que nous obtenons des angles Amin et Amax plus proches de 60° . Un plus petit nombre de sommets signifie une distribution des triangles optimisée, puisque moins de triangles sont requis pour couvrir la même surface tout en introduisant une erreur géométrique insignifiante.

d'optimisation par contraintes souples.

5.5.1 Travaux futurs

Comme travaux futurs, il y a l'*apprentissage des paramètres* λ de la fonction d'énergie (cf. équation 5.1 page 136). Il y a clairement trop de paramètres pour un utilisateur non-spécialiste, et même s'il est possible d'aider interactivement l'utilisateur dans ses choix de paramètres, il est plus simple d'envisager des maillages de référence à choisir à partir desquels les paramètres seraient automatiquement fixés. Il faudra aussi *améliorer la qualité des minima locaux dans l'optimisation de la connectivité*, i.e. essayer d'optimiser les choix successifs d'opérations locales, peut-être en utilisant des cliques de tailles supérieures à trois. Il serait aussi intéressant d'aborder le problème du remaillage anisotropique et du remaillage quadrangulaire. Enfin, il serait intéressant d'intégrer la prise en compte d'un champ de tailles, i.e. être capable de contrôler finement la longueur des arêtes en fonction des zones du maillage et des besoins utilisateurs.

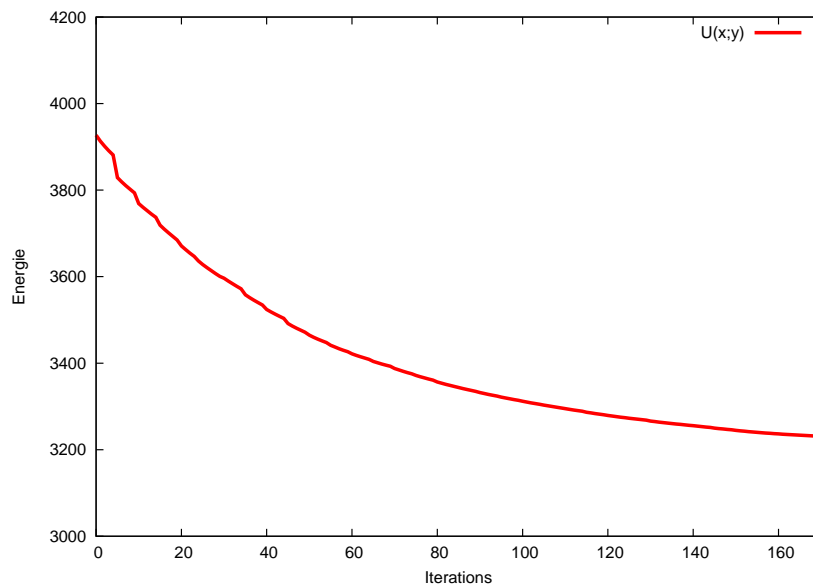


FIGURE 5.9 – Évolution de l'énergie totale (cf. equation 5.1) pendant 170 itérations pour le maillage CAO présenté dans la figure 5.8.

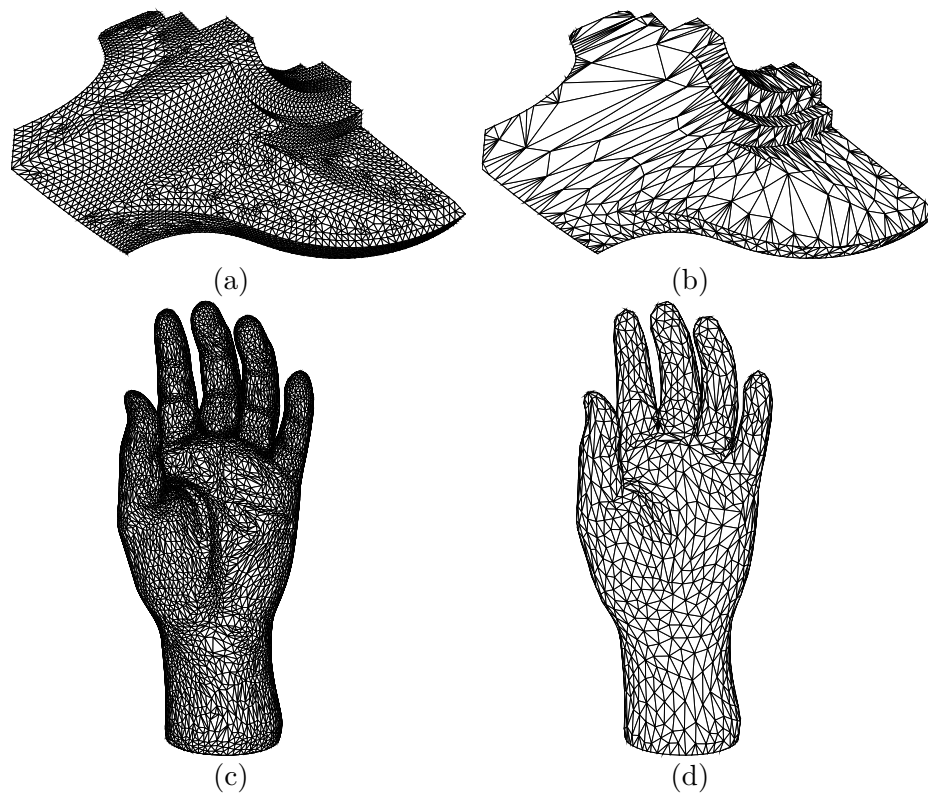


FIGURE 5.10 – Résultats obtenus pour des simplifications : (a) modèle fandisk original ; (b) modèle fandisk simplifié (933 sommets ; $Er_{Haus} (10^{-3}) = 3.0$; $Er_{RMS} (10^{-3}) = 0.2$) ; (c) modèle hand original ; (d) modèle hand simplifié (1518 sommets ; $Er_{Haus} (10^{-3}) = 4.5$; $Er_{RMS} (10^{-3}) = 0.7$).

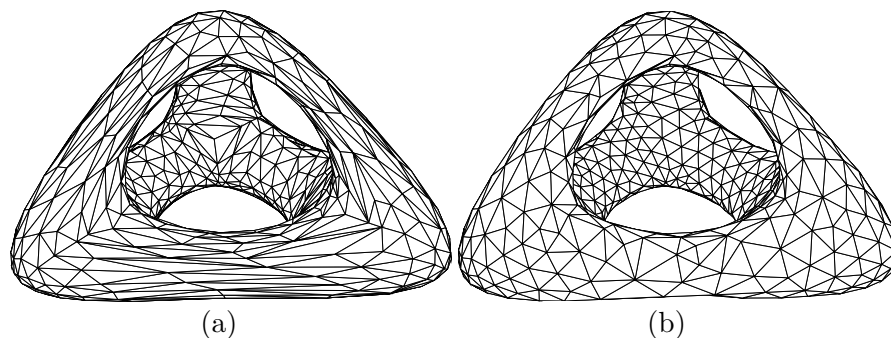


FIGURE 5.11 – Résultats obtenus pour un modèle de genre 3 : (a) le modèle de genre 3 original et (b) notre version remaillée.

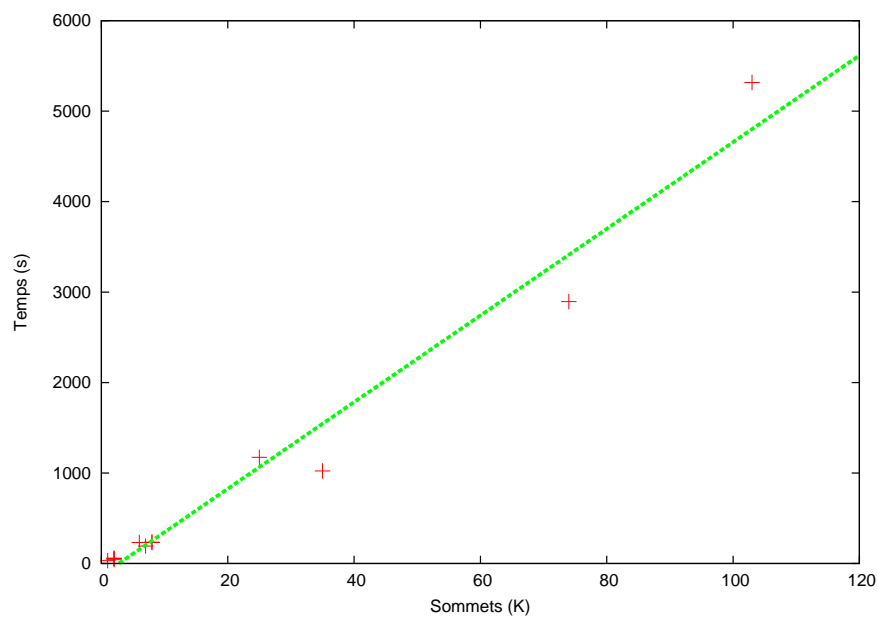


FIGURE 5.12 – Complexité empirique de notre méthode : les 8 points les plus à gauche (resp. les 4 points les plus à droite) représentent les temps de calcul pour notre base de données sans le modèle de genre 3 (resp. 4 maillages supplémentaires obtenus par 1 ou 2 subdivisions des triangles des modèles fandisk, bimba et egea). La ligne en pointillé est une approximation linéaire des points au sens des moindres carrés.

Conclusion générale

Dans ce chapitre final, nous rappelons nos contributions principales. Ensuite, nous discutons des améliorations à apporter à nos méthodes, ainsi que des perspectives de recherche.

1 Résumé de nos contributions

Dans le chapitre 3 : nous avons détaillé une nouvelle approche d'extraction d'arêtes caractéristiques globalement cohérentes pour les maillages triangulaires 2-variétés. Elle est construite sur un modèle graphique probabiliste, qui représente la meilleure solution globale à travers des dépendances directionnelles entre les arêtes voisines, basées sur un modèle de Potts amélioré, et des dépendances liées au terme d'attache aux données des arêtes. Ce dernier est basé sur l'angle dièdre en l'absence de bruit sur la position des sommets ou appris par SVM en présence de bruit sur la position des sommets. La cohérence locale, liée au modèle de Potts, permet de favoriser les configurations d'arêtes caractéristiques les plus probables, tandis que le modèle statistique appris robustifie le terme d'attache aux données. Dans le cadre de l'apprentissage et du choix des attributs des vecteurs de mesures associés aux arêtes, nous avons proposé un estimateur de l'angle entre les normales des plans tangents à l'arête. Ce dernier a un pouvoir discriminant significatif, en particulier en présence de bruit sur la position des sommets.

Dans le chapitre 4 : une méthode de segmentation robuste de maillages triangulaires 2-variétés en régions approximées par des primitives géométriques simples a été présentée. Elle est basée sur un modèle graphique probabiliste qui modélise la segmentation des triangles conjointement à celle de l'extraction des arêtes caractéristiques. En particulier, ce modèle propose une généralisation du modèle de régularisation spatiale de Potts, en prenant en compte des contraintes souples incluant non seulement les étiquettes de deux triangles voisins, mais aussi le type de l'arête les séparant. L'algorithme de segmentation développé permet un contrôle du choix du type des proxies, grâce aux termes de coût de présence d'un proxy pris en compte dans la fonction objectif à minimiser. Finalement, afin de limiter la variance intra-région, mais aussi de favoriser la convergence de l'algorithme de segmentation vers une décomposition de meilleure qualité, nous avons mis en place des stratégies de proposition de nouveaux proxies candidats, tout en faisant le choix final de conserver ou pas un proxy sans faire croître la fonction objectif.

Dans le chapitre 5 : nous avons proposé une méthode générale d'optimisation de maillages triangulaires 2-variétés, qui offre la possibilité d'améliorer la forme des triangles, la valence des sommets, mais aussi la compacité de la représentation tout en restant fidèle à la surface initiale. Elle permet un fort contrôle local des modifications, pour par exemple conserver les arêtes caractéristiques et les coins détectés, tout en optimisant globalement la position des sommets par coupes de graphes. Afin de repositionner globalement les sommets, un modèle graphique probabiliste associé aux positions du maillage optimisé a été présenté. Les résultats obtenus sont meilleurs que les approches de l'état de l'art, en termes de compromis qualité des triangles par rapport à l'erreur géométrique introduite. Grâce à des choix de poids particuliers, notre système d'optimisation de maillage peut aussi bien régulariser un maillage que le simplifier.

2 Discussion sur les faiblesses de nos approches

Concernant notre modèle de ligne composée d'arêtes caractéristiques : les dépendances sur seulement deux arêtes voisines sont insuffisantes pour éviter le problème des lignes d'arêtes caractéristiques proches et parallèles. Hélas, en pratique, nous sommes limités à des dépendances sur sept arêtes voisines, ce qui reste insuffisant pour traiter complètement ce problème.

Concernant notre modèle de segmentation jointe à la détection d'arêtes caractéristiques : le mouvement d'expansion n'est intuitivement pas optimal dans le sens où l'on propose toutes les étiquettes possibles pour tous les triangles, alors qu'on souhaiterait proposer un candidat par forcément identique par triangle, à l'aide par exemple d'un mouvement de mélange. Mais le mouvement de mélange ne se fait pas avec le coût des étiquettes. Un autre inconvénient de notre méthode, c'est qu'elle ne permet pas en l'état actuel un contrôle simple du raffinement de la segmentation.

Concernant notre système d'optimisation de maillages : Actuellement, les sommets ne peuvent pas sauter par dessus une ligne composée d'arêtes caractéristiques, ce qui peut bloquer la convergence vers une solution de bonne qualité, car on ne peut pas favoriser d'un côté de la ligne la suppression de sommets et de l'autre côté de la ligne favoriser l'insertion de sommets pour simuler un transfert de sommets.

Dans la section suivante, nous discutons de pistes de recherches pour traiter les faiblesses de nos méthodes, mais aussi pour étendre nos travaux.

3 Travaux futurs

Pour tous les champs aléatoires conditionnels proposés dans cette thèse, nous envisageons de faire une étape d'apprentissage automatiquement afin de fixer leur meilleure pondération. Pour

cela une technique d'apprentissage conditionnel présentée dans la section 2.4 du chapitre 2, sur l'apprentissage, pourrait être utilisée.

Concernant notre modèle de ligne composée d'arêtes caractéristiques : puisqu'il est difficile de prendre en compte des interactions de 7 variables, afin de traiter le problème des lignes parallèles, mais proches, il serait possible d'améliorer notre vecteur de caractéristiques, utilisé pour l'apprentissage supervisé des arêtes, en rajoutant des informations contextuelles sur un voisinage de taille à déterminer. En effet, en présence de bruit sur la position des sommets, avoir plus d'informations sur le contexte pourrait s'avérer utile. On pourrait par exemple prendre en compte les étiquettes ou le type des triangles adjacents à une arête, obtenus par notre algorithme de segmentation surfacique.

Concernant notre modèle de segmentation jointe à la détection d'arêtes caractéristiques : nous souhaiterions proposer un modèle graphique d'extraction des arêtes caractéristiques qui serait construit à la fois sur le modèle actuel et sur les résultats de la dernière segmentation des triangles, pour corriger en conséquences les termes d'attache aux données des arêtes. A partir de là, un algorithme de segmentation conjointe des triangles et des arêtes, qui alternerait entre la segmentation des triangles à partir des résultats de la dernière extraction d'arêtes caractéristiques, et la segmentation des arêtes en fonction du dernier résultat de la segmentation des triangles, jusqu'à convergence des configurations des triangles et des arêtes, serait proposé.

Dans l'algorithme de segmentation, il serait intéressant de pouvoir utiliser le mouvement de mélange avec un coût des étiquettes, pour pouvoir accélérer la convergence de l'algorithme, en ne perdant pas de temps à proposer des étiquettes inutiles, comme nous le faisons actuellement avec le mouvement d'expansion. Il serait donc intéressant d'étudier si le mouvement de mélange pourrait être réalisé tout en prenant en compte le coût des étiquettes.

Finalement, la prise en compte de la variance des points autorisée autour de leur proxy de forme, par l'intermédiaire d'une hypothèse de bruit gaussien, devrait permettre un contrôle de la finesse de la segmentation du maillage.

Concernant notre système d'optimisation de maillages : nous aimerions intégrer la décomposition en primitives simples dans le processus global de remaillage, afin de proposer un modèle de débruitage des positions ou de ré-échantillonnage, par exemple à l'aide d'un champ aléatoire de Markov modélisant la génération de points bruités à partir des proxies. Le modèle de ré-échantillonnage pourrait être utilisé pour transférer un ensemble de sommets d'une zone d'un maillage vers une autre, en calculant des nouvelles positions plausibles dans la zone d'arrivée.

Dans cette thèse, nous avons montré que les modèles graphiques probabilistes tels que les champs aléatoires de Markov et les champs aléatoires conditionnels pouvaient être utilisés pour modéliser la structure sémantique d'un maillage triangulaire 2-variété ainsi que sa triangulation. Ils permettent d'intégrer une grande quantité de contraintes de types différents dans un problème

d'optimisation, et de trouver un bon compromis global entre ces contraintes. Cela ouvre des perspectives de recherche dans un autre domaine que l'optimisation de maillage, dans lequel on cherche à optimiser une représentation sous-jacente de la surface, par exemple en compression de maillage.

Liste de publications

- Vincent Vidal, Christian Wolf, and Florent Dupont. Combinatorial mesh optimization. *The Visual Computer*, 2011 (*A paraître*).
- Vincent Vidal, Christian Wolf, and Florent Dupont. Robust feature line extraction on CAD triangular meshes. In *International Conference on Computer Graphics Theory and Applications*, pages 106-112, Algarve, Portugal, 2011.
- Vincent Vidal, Christian Wolf, Florent Dupont, and Guillaume Lavoué. Global triangular mesh regularization using conditional Markov random fields. In *Symposium on Geometry Processing*, Poster session, Berlin, Germany, 2009.

Bibliographie

- [ADM02] P. Alliez, M. Desbrun, and M. Meyer. Efficient surface remeshing by error diffusion. Technical report, INRIA Sophia Antipolis, 2002.
- [AdVDI03] P. Alliez, É.C. de Verdière, O. Devillers, and M. Isenburg. Isotropic surface remeshing. In M.S. Kim, editor, *Proceedings of shape modeling international*, pages 49–58, Los Alamitos, 2003. IEEE Computer Society.
- [AdVDI05] Pierre Alliez, É.C. de Verdière, Olivier Devillers, and Martin Isenburg. Centroidal Voronoi diagrams for isotropic surface remeshing. *Graphical Models*, 67(3) :204–231, 2005.
- [AFRS03] Marco Attene, Bianca Falcidieno, Jarek Rossignac, and Michela Spagnuolo. Edge-sharpener : recovering sharp features in triangulations of non-adaptively re-meshed surfaces. In *Proceedings of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, pages 62–69. Eurographics Association, 2003.
- [AFS06] Marco Attene, Bianca Falcidieno, and Michela Spagnuolo. Hierarchical mesh segmentation based on fitting primitives. *The Visual Computer*, 22(3) :181–193, February 2006.
- [AFSW03] M. Attene, B. Falcidieno, M. Spagnuolo, and G. Wyvill. A mapping-independent primitive for the triangulation of parametric surfaces. *Graphical models*, 65(5) :260–273, September 2003.
- [AMD02] Pierre Alliez, Mark Meyer, and Mathieu Desbrun. Interactive geometry remeshing. *ACM Transactions on Graphics*, 21(3) :347–354, July 2002.
- [Asa06] Tetsuo Asano. Aspect-Ratio Voronoi Diagram with Applications. In *Proceedings of the 3rd International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD '06)*, pages 32–39. IEEE, December 2006.
- [AUGA08] Pierre Alliez, Giuliana Ucelli, Craig Gotsman, and Marco Attene. Recent advances in remeshing of surfaces. *Shape Analysis and Structuring*, pages 53–82, 2008.
- [AWJ90] A.A. Amini, T.E. Weymouth, and R.C. Jain. Using dynamic programming for solving variational problems in vision. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, pages 855–867, 1990.
- [BE92] M. Bern and D. Eppstein. *Mesh generation and optimal triangulation*, volume 1. World Scientific, 1992.

- [Bes74] J. Besag. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 36(2) :192–236, 1974.
- [Bes77] Julian Besag. Efficiency of pseudolikelihood estimation for simple Gaussian fields. *Biometrika*, 64(3) :616–618, December 1977.
- [Bes86] J. Besag. On the statistical analysis of dirty pictures. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 48(3) :259–302, 1986.
- [Bis06] Christopher .M. Bishop. *Pattern recognition and machine learning (Information Science and Statistics)*, volume 4. Springer-Verlag New York, 2006.
- [BK01] Mario Botsch and Leif Kobbelt. Resampling feature and blend regions in polygonal meshes for surface anti-aliasing. *Computer Graphics Forum*, 20(3) :402–410, September 2001.
- [BK04a] Mario Botsch and Leif Kobbelt. A remeshing approach to multiresolution modeling. In *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing*, pages 185–192, Nice, France, 2004. ACM.
- [BK04b] Yuri Boykov and Vladimir Kolmogorov. An experimental comparison of min-cut/max- flow algorithms for energy minimization in vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(9) :1124–1137, 2004.
- [BLVD11] Halim Benhabiles, Guillaume Lavoué, Jean-Philippe Vandeborre, and Mohamed Daoudi. Learning Boundary Edges for 3D-Mesh Segmentation. *Computer Graphics Forum*, June 2011.
- [BOG02] Charles Boivin and Carl Ollivier-Gooch. Guaranteed-quality triangular mesh generation for domains with curved boundaries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(10) :1185–1213, December 2002.
- [BS97] Randolph E. Bank and R. Kent Smith. Mesh Smoothing Using A Posteriori Error Estimates. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(3) :979, 1997.
- [BVZ98] Yuri Boykov, Olga Veksler, and Ramin Zabih. Markov Random Fields with Efficient Approximations. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 648–655, 1998.
- [BVZ01] Y. Boykov, O. Veksler, and R. Zabih. Fast approximate energy minimization via graph cuts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(11) :1222–1239, 2001.
- [BW98] David Baraff and Andrew Witkin. Large steps in cloth simulation. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH '98*, pages 43–54, New York, USA, 1998. ACM Press.
- [CDRR04] Siu-Wing Cheng, Tamal K. Dey, Edgar a. Ramos, and Tathagata Ray. Quality meshing for polyhedra with small angles. In *Proceedings of the twentieth annual Symposium on Computational Geometry - SCG '04*, pages 290–299, New York, USA, 2004. ACM.

-
- [CH09] Peter Carr and Richard Hartley. Solving multilabel graph cut problems with multilabel swap. *2009 Digital Image Computing : Techniques and Applications*, pages 532–539, 2009.
- [Che93] L. Paul Chew. *Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces*. ACM, New York, USA, July 1993.
- [CKL08] H. Choi, H. Kim, and K. Lee. A mesh simplification method using noble optimal positioning. *Advances in Geometric Modeling and Processing*, pages 512–518, 2008.
- [CL01] Chih-Chung Chang and Chih-Jen Lin. LIBSVM : a Library for Support Vector Machines, 2001.
- [CL06] Yi-wei Chen and Chih-jen Lin. *Combining SVMs with various feature selection strategies*, pages 315–324. Springer, 2006.
- [CMS98] P. Cignoni, C. Montani, and R. Scopigno. A comparison of mesh simplification algorithms. *Computers & Graphics*, 22(1) :37–54, 1998.
- [CRS98] Paolo Cignoni, Claudio Rocchini, and Roberto Scopigno. Metro : Measuring error on simplified surfaces. *Computer Graphics Forum*, 17(2) :167–174, 1998.
- [CSAD04] David Cohen-Steiner, Pierre Alliez, and Mathieu Desbrun. Variational shape approximation. In *Proceedings of the 31st Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH)*, volume 23, pages 905–914, Los Angeles, California, 2004. ACM.
- [CSM03] David Cohen-Steiner and Jean-Marie Morvan. Restricted delaunay triangulations and normal cycle. In *Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 312–321, 2003.
- [DFG99] Qiang Du, Vance Faber, and Max Gunzburger. Centroidal Voronoi tessellations : applications and algorithms. *SIAM review*, 41(4) :637–676, 1999.
- [DHS01] Richard Duda, Peter Hart, and David Stork. *Pattern Classification (2nd Edition)*. Wiley-Interscience, 2 edition, 2001.
- [DKG05] S. Dong, S. Kircher, and M. Garland. Harmonic functions for quadrilateral remeshing of arbitrary manifolds. *Computer Aided Geometric Design*, 22(5) :392–423, July 2005.
- [DLR05] T.K. Dey, G. Li, and T. Ray. Polygonal surface remeshing with Delaunay refinement. In *Proceedings of the 14th International Meshing Roundtable*, volume 26, pages 343–361. Springer, January 2005.
- [DMSB99] Mathieu Desbrun, Mark Meyer, Peter Schröder, and A.H. Barr. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 317–324, New York, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.

- [DOIB10] Andrew Delong, Anton Osokin, Hossam N. Isack, and Yuri Boykov. Fast approximate energy minimization with label costs. In *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 2173–2180. IEEE, 2010.
- [EG02] Herbert Edelsbrunner and Damrong Guoy. Sink-insertion for mesh improvement. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 13(2) :223–242, 2002.
- [ES97] Herbert Edelsbrunner and Nimish R. Shah. Triangulating topological spaces. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 7(4) :365–378, 1997.
- [Faw06] Tom Fawcett. An introduction to ROC analysis. *Pattern Recognition Letters*, 27(8) :861–874, June 2006.
- [FB81] Martin A. Fischler and Robert C. Bolles. Random sample consensus : A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 24(6) :381–395, June 1981.
- [FD05] Daniel Freedman and Petros Drineas. Energy Minimization via Graph Cuts : Settling What is Possible. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05)*, pages 939–946. Ieee, 2005.
- [FH05] M.S. Floater and K. Hormann. Surface parameterization : a tutorial and survey. *Advances in multiresolution for geometric modelling*, pages 157–186, 2005.
- [FS95] Yoav Freund and Robert E. Schapire. A Decision-Theoretic Generalization of on-Line Learning and an Application to Boosting. In *Proceedings of the Second European Conference on Computational Learning Theory*, pages 23–37, London, UK, 1995. Springer-Verlag.
- [Fuj95] K. Fujiwara. Eigenvalues of laplacians on a closed riemannian manifold and its nets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(8) :2585–2594, 1995.
- [GG84] Stuart Geman and Donald Geman. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6) :721–741, 1984.
- [GZ05] Michael Garland and Yuan Zhou. Quadric-based simplification in any dimension. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 24(2) :209–239, April 2005.
- [Har98] Erich Hartmann. A marching method for the triangulation of surfaces. *The Visual Computer*, 14(3) :95–108, July 1998.
- [HC71] J.M. Hammersley and P. Clifford. Markov fields on finite graphs and lattices. 1971.
- [HDD⁺93] Hugues Hoppe, Tony DeRose, Tom Duchamp, John McDonald, and Werner Stuetzle. Mesh optimization. In *Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH '93*, pages 19–26, New York, USA, 1993. ACM Press.
- [HG97] P.S. Heckbert and M. Garland. Survey of polygonal surface simplification algorithms. In *SIGGRAPH 97 course notes*, volume 25. Citeseer, 1997.

-
- [HG99] P.S. Heckbert and M. Garland. Optimal triangulation and quadric-based surface simplification. *Computational Geometry*, 14(1-3) :49–65, November 1999.
- [HHS84] P. L. Hammer, P. Hansen, and B. Simeone. Roof duality, complementation and persistency in quadratic 0–1 optimization. *Mathematical Programming*, 28(2) :121–155, February 1984.
- [HLS07] K. Hormann, B. Lévy, and A. Sheffer. Mesh parameterization : Theory and practice. In *SIGGRAPH Course Notes*. Citeseer, 2007.
- [HMG00] Andreas Hubeli, Kuno Meyer, and Markus Gross. Mesh edge detection. In *Proceedings of the Workshop Lake*, Tahoe City, California, USA, 2000.
- [HP04] Klaus Hildebrandt and Konrad Polthier. Anisotropic Filtering of Non-Linear Surface Features. *Computer Graphics Forum*, 23(3) :391–400, September 2004.
- [HPS08] Kai Hormann, Konrad Polthier, and Alla Sheffer. Mesh parameterization : Theory and practice. In *SIGGRAPH Asia Course Notes*. Citeseer, 2008.
- [HPW05] Klaus Hildebrandt, Konrad Polthier, and Max Wardetzky. Smooth feature lines on surface meshes. In *Proceedings of the third Eurographics symposium on Geometry processing*, Vienna, Austria, 2005. Eurographics Association.
- [IB11] Hossam Isack and Yuri Boykov. Energy-based Geometric Multi-Model Fitting. *International Journal of Computer Vision*, pages 1–25, 2011.
- [IG98] Hiroshi Ishikawa and Davi Geiger. Occlusions, Discontinuities, and Epipolar Lines in Stereo. In *In European Conference on Computer Vision (ECCV)*, pages 232–248, 1998.
- [Ish03] Hiroshi Ishikawa. Exact optimization for markov random fields with convex priors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(10) :1333–1336, October 2003.
- [Ish09] Hiroshi Ishikawa. Higher-order clique reduction in binary graph cut. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 2993–3000. IEEE, 2009.
- [Ish10] Hiroshi Ishikawa. Transformation of General Binary MRF Minimization to the First Order Case. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 1–16, March 2010.
- [KCL09] Hyun Soo Kim, Han Kyun Choi, and Kwan H. Lee. Feature detection of triangular meshes based on tensor voting theory. *Computer-Aided Design*, 41(1) :47–58, 2009.
- [KCVS98] Leif Kobbelt, Swen Campagna, Jens Vorsatz, and Hans-Peter Seidel. Interactive multi-resolution modeling on arbitrary meshes. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 105–114, New York, USA, 1998. ACM.

- [KH03] Sanjiv Kumar and Martial Hebert. Discriminative fields for modeling spatial dependencies in natural images. In *In Neural Information Processing Systems (NIPS)*, volume 16, pages 1531–1538. MIT Press, 2003.
- [KHS10] Evangelos Kalogerakis, Aaron Hertzmann, and Karan Singh. Learning 3D mesh segmentation and labeling. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 29(4), 2010.
- [Kol06] Vladimir Kolmogorov. Convergent Tree-reweighted Message Passing for Energy Minimization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(10), 2006.
- [KR07] Vladimir Kolmogorov and Carsten Rother. Minimizing nonsubmodular functions with graph cuts - a review. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(7), July 2007.
- [KZ04] Vladimir Kolmogorov and Ramin Zabih. What Energy functions can be Minimized via Graph Cuts? *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(2) :147–159, 2004.
- [Lam94] Timothy Lambert. The Delaunay triangulation maximizes the mean inradius. In *Proceedings of the 6th Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 201–206. Citeseer, 1994.
- [Li09] S.Z. Li. *Markov random field modeling in image analysis*. Springer-Verlag New York Inc, 2009.
- [LL02] Y. Lee and S. Lee. Geometric Snakes for Triangular Meshes. *Computer Graphics Forum*, 21(3) :229–238, September 2002.
- [Llo82] S. Lloyd. Least squares quantization in PCM. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2) :129–137, March 1982.
- [LRR08] Victor Lempitsky, Stefan Roth, and Carsten Rother. FusionFlow : Discrete-Continuous Optimization for Optical Flow Estimation. In *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*, 2008.
- [LRRB10] Victor Lempitsky, Carsten Rother, Stefan Roth, and Andrew Blake. Fusion moves for Markov random field optimization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 32(8) :1392–405, August 2010.
- [LSJK09] Bao Li, Ruwen Schnabel, Shiyao Jin, and Reinhard Klein. Variational Surface Approximation and Model Selection. In *Computer Graphics Forum*, volume 28, pages 1985–1994. Wiley Online Library, October 2009.
- [LTJW07] Ligang Liu, Chiew-Lan Tai, Zhongping Ji, and Guojin Wang. Non-iterative approach for global mesh optimization. *Computer-Aided Design*, 39(9) :772–782, September 2007.
- [Lue01] D.P. Luebke. A developer’s survey of polygonal simplification algorithms. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 21(3) :24–35, 2001.

-
- [LVJ05] Chang Ha Lee, Amitabh Varshney, and David W. Jacobs. Mesh saliency. In *International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH)*, volume 24, pages 659–666, 2005.
- [LW01] X.Y. Li and Y. Wang. How good is sink insertion? *Computing and Combinatorics*, pages 181–190, 2001.
- [LWC⁺11] Yangyan Li, Xiaokun Wu, Y. Chrysanthou, Andrei Sharf, D. Cohen-Or, and N.J. Mitra. GlobFit : Consistently Fitting Primitives by Discovering Global Relations. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH'11)*, 30(4) :”to appear”, 2011.
- [LZX⁺08] Ligang Liu, Lei Zhang, Yin Xu, Craig Gotsman, and S.J. Gortler. A local/global approach to mesh parameterization. *Computer Graphics Forum*, 27(5) :1495–1504, 2008.
- [Mar76] Alberto Martelli. An application of heuristic search methods to edge and contour detection. *Communications of the ACM*, 19(2) :73–83, February 1976.
- [MDSB02] Mark Meyer, Mathieu Desbrun, Peter Schröder, and Alan H. Barr. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. *Visualization and mathematics*, 3(7) :34–57, 2002.
- [ND96] Friedhelm Neugebauer and Ralf Diekmann. Improved mesh generation : Not simple but good. In *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable*, volume 20244, pages 257–270. Citeseer, 1996.
- [NISA06] Andrew Nealen, Takeo Igarashi, Olga Sorkine, and Marc Alexa. Laplacian mesh optimization. In *Proceedings of the 4th international conference on Computer graphics and interactive techniques in Australasia and Southeast Asia - GRAPHITE '06*, pages 381–389, New York, New York, USA, 2006. ACM Press.
- [OBS04] Yutaka Ohtake, Alexander Belyaev, and Hans-Peter Seidel. Ridge-valley lines on meshes via implicit surface fitting. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 23(3) :609–612, 2004.
- [PB03] Philippe P. Pébay and Timothy J. Baker. Analysis of triangle quality measures. *Mathematics of Computation*, 72(244) :1817–1840, January 2003.
- [PC04] Gabriel Peyré and Laurent Cohen. Surface segmentation using geodesic centroidal tessellation. In *Proceedings of the 3D Data Processing, Visualization, and Transmission (3DPVT), 2nd International Symposium*, pages 995–1002. IEEE, 2004.
- [PC06] Gabriel Peyré and L.D. Cohen. Geodesic remeshing using front propagation. *International Journal of Computer Vision*, 69(1) :145–156, May 2006.
- [Pea88] J. Pearl. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems*. Morgan Kaufman, San Mateo, 1988.
- [PH03] H. Pottmann and M. Hofer. Geometry of the squared distance function to curves and surfaces. In H.-C. Hege and K. Polthier, editors, *Visualization and mathematics III*, pages 223–244. Springer, 2003.

- [PKG03] Mark Pauly, Richard Keiser, and Markus Gross. Multi-scale Feature Extraction on Point-Sampled Surfaces. *Computer Graphics Forum*, 22(3) :281–289, September 2003.
- [PW04] S.E. Pav and N.J. Walkington. Robust three dimensional Delaunay refinement. In *Thirteenth International Meshing Roundtable*, pages 145–156. Citeseer, 2004.
- [Raj94] V. T. Rajan. Optimality of the Delaunay triangulation in \mathbb{R}^d . *Discrete & Computational Geometry*, 12(1) :189–202, December 1994.
- [RKKB05] C. Rother, S. Kumar, V. Kolmogorov, and A. Blake. Digital tapestry. In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05)*, pages 589–596. IEEE Computer Society, 2005.
- [RKLS07] Carsten Rother, Vladimir Kolmogorov, Victor Lempitsky, and Martin Szummer. Optimizing Binary MRFs via Extended Roof Duality. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1–8. IEEE, June 2007.
- [Rup95] Jim Ruppert. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. *Journal of Algorithms*, 18(3) :548–585, May 1995.
- [SAG03] Vitaly Surazhsky, Pierre Alliez, and Craig Gotsman. Isotropic remeshing of surfaces : a local parameterization approach. In *Proceedings of the 12th International Meshing Roundtable*, number Sandia National Laboratories, pages 215–224, 2003.
- [SDK09] Ruwen Schnabel, Patrick Degener, and Reinhard Klein. Completion and reconstruction with primitive shapes. *Computer Graphics Forum*, 28(2) :503–512, April 2009.
- [SG03] Vitaly Surazhsky and Craig Gotsman. Explicit Surface Remeshing. In *Symposium on Computational Geometry*, pages 20–30, 2003.
- [SG04] Vitaly Surazhsky and Craig Gotsman. High quality compatible triangulations. *Engineering with Computers*, 20(2) :147–156, November 2004.
- [She02] Jonathan Richard Shewchuk. What is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures. In *In 11th International Meshing Roundtable*, 2002.
- [SJW⁺11] M. Sunkel, S. Jansen, M. Wand, E. Eisemann, and H.P. Seidel. Learning Line Features in 3D Geometry. *Computer Graphics Forum*, 30(2) :267–276, 2011.
- [SM05] Charles Sutton and Andrew McCallum. Piecewise Training for Undirected Models. In *Proceedings of the 21st Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, 2005.
- [SPR06] Alla Sheffer, Emil Praun, and Kenneth Rose. Mesh parameterization methods and their applications. *Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*, 2(2) :105–171, 2006.
- [SSG03] Oren Sifri, Alla Sheffer, and Craig Gotsman. Geodesic-based surface remeshing. In *In Proceedings of the 12th International Meshing Roundtable*, pages 189–199. Citeseer, 2003.

-
- [SWK07] Ruwen Schnabel, Roland Wahl, and Reinhard Klein. Efficient RANSAC for Point-Cloud Shape Detection. *Computer Graphics Forum*, 26(2) :214–226, June 2007.
- [SZL92] William J. Schroeder, Jonathan A. Zarge, and William E. Lorensen. Decimation of triangle meshes. In *Proceedings of the 19th annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH*, volume 26, pages 65–70. ACM, 1992.
- [SZS⁺06] Richard Szeliski, Ramin Zabih, Daniel Scharstein, Olga Veksler, Vladimir Kolmogorov, Aseem Agarwala, Marshall Tappen, and Carsten Rother. A comparative study of energy minimization methods for markov random fields. In *Proceedings of the European Conference in Computer Vision (ECCV)*, pages 16–29. Springer-Verlag, 2006.
- [SZS⁺08] Richard Szeliski, Ramin Zabih, Daniel Scharstein, Olga Veksler, Vladimir Kolmogorov, Aseem Agarwala, Marshall Tappen, and Carsten Rother. A comparative study of energy minimization methods for Markov random fields with smoothness-based priors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 30(6) :1068–1080, June 2008.
- [Tal04] Jerry O. Talton. A short survey of mesh simplification algorithms. Number October, pages 1–8, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2004. Citeseer.
- [Tau95] Gabriel Taubin. A signal processing approach to fair surface design. In *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 351–358, New York, USA, 1995. ACM.
- [TMMY04] T. Takahashi, Y. Mekada, H. Murase, and T. Yonekura. High quality isosurface generation from volumetric data and its application to visualization of medical CT data. In *Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, volume 3, pages 734–737. Ieee, 2004.
- [TOC98] J.R. Tristano, S.J. Owen, and S.A. Canann. Advancing front surface mesh generation in parametric space using a Riemannian surface definition. In *7th International Meshing Roundtable Proceedings*, pages 429–445. Citeseer, 1998.
- [Tur92] Greg Turk. Re-tiling polygonal surfaces. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 26(2) :55–64, July 1992.
- [Vap98] Vladimir Vapnik. *Statistical Learning Theory*. Wiley-Interscience, 1998.
- [VC04] Sébastien Valette and Jean-Marc Chassery. Approximated centroidal Voronoi diagrams for uniform polygonal mesh coarsening. *Computer Graphics Forum*, 23(3) :381–389, 2004.
- [VCP08] Sebastien Valette, Jean Marc Chassery, and Rémy Prost. Generic remeshing of 3D triangular meshes with metric-dependent discrete voronoi diagrams. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 14(2) :369–381, 2008.
- [VRKS01] J. Vorsatz, C. Rossl, L. P. Kobbelt, and H.-P. Seidel. Feature Sensitive Remeshing.

- In *Computer Graphics Forum*, volume 20, pages 393–401. Wiley Online Library, September 2001.
- [WF01] Y Weiss and W T Freeman. On the Optimality of Solutions of the Max-Product Belief-Propagation Algorithm in Arbitrary Graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(2) :736–744, 2001.
- [WHG08] Tim Winkler, Kai Hormann, and Craig Gotsman. Mesh Massage : A Versatile Mesh Optimization Framework. *The Visual Computer*, 24(7-9) :775–785, 2008.
- [WJW03] Martin J Wainwright, Tommi S Jaakkola, and Alan S Willsky. Tree-reweighted belief propagation algorithms and approximate ML estimation by pseudo-moment matching. In *In Workshop on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS)*, volume 21. Citeseer, 2003.
- [WK05] Jianhua Wu and Leif Kobbelt. Structure recovery via hybrid variational surface approximation. *Computer Graphics Forum*, 24(3) :277–284, September 2005.
- [Wol96] David H. Wolpert. The Lack of A Priori Distinctions Between Learning Algorithms. *Neural Computation*, 8(7) :1341–1390, October 1996.
- [WPL06] W. Wang, H. Pottmann, and Y. Liu. Fitting B-spline curves to point clouds by curvature-based squared distance minimization. *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, 25(2) :214–238, 2006.
- [YBS05] Shin Yoshizawa, Alexander Belyaev, and Hans-Peter Seidel. Fast and robust detection of crest lines on meshes. *ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*, pages 227–232, 2005.
- [YGZW07] Weining Yue, Qingwei Guo, Jie Zhang, and Guoping Wang. 3D triangular mesh optimization in geometry processing for CAD. In *Proceedings of the 2007 ACM symposium on Solid and physical modeling - SPM '07*, volume 1, pages 23–33, Beijing, China, 2007. ACM.
- [YLL⁺09] Dong-Ming Yan, Bruno Lévy, Yang Liu, Feng Sun, and Wenping Wang. Isotropic Remeshing with Fast and Exact Computation of Restricted Voronoi Diagram. *Computer Graphics Forum*, 28(5) :1445–1454, July 2009.
- [YLW06] D.M. Yan, Yang Liu, and Wenping Wang. Quadric surface extraction by variational shape approximation. *Geometric Modeling and Processing-GMP 2006*, pages 73–86, 2006.
- [ZGM09] Mao Zhihong, Cao Guo, and Zhao Mingxi. Robust detection of perceptually salient features on 3D meshes. *The Visual Computer : International Journal of Computer Graphics*, 25(3) :289–295, 2009.
- [ZKM05] M. Zuliani, C.S. Kenney, and B.S. Manjunath. The multiransac algorithm and its application to detect planar homographies. In *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), 2005*, volume 3, pages 153–156. IEEE, 2005.

Annexes

1 Rappels de probabilité

1.1 Probabilité marginale

Soit 1 seul évènement A, la probabilité individuelle ou marginale de A est notée $P(A)$.

1.2 Probabilité jointe

Soit 2 évènements A et B, la probabilité jointe de A et B est notée $P(A,B)$.

Un cas particulier intéressant de la probabilité jointe de 2 évènements A et B est lorsque ces 2 évènements sont indépendants. Dans ce cas $P(A, B) = P(A) \times P(B)$.

1.3 Probabilité conditionnelle

Définition 40. Soit 2 évènements A et M, on suppose que M s'est produit (donc $P(M) \neq 0$). Alors s'il existe un lien (de cause et effets) entre A et M, cette information va modifier la probabilité de A. $P(A|M)$ est la probabilité de A conditionnellement à M ou sachant M et elle est définie comme suit :

$$P(A|M) = \frac{P(A, M)}{P(M)} \quad (1)$$

$P(A|M)$ définit bien une probabilité.

Remarquons que si A et M sont indépendants, alors la connaissance de M n'apporte rien sur la connaissance de A.

1.4 Indépendance conditionnelle

L'indépendance conditionnelle est un concept très important pour les distributions de probabilités portant sur plusieurs variables. Elle permet de simplifier la structure d'un modèle graphique et les calculs nécessaires pour faire de l'inférence ou de l'apprentissage. La propriété d'indépendance conditionnelle d'une distribution jointe peut être directement lue sur le modèle graphique.

Définition 41. Soit 3 variables aléatoires A , B et C , on suppose que la distribution conditionnelle de A sachant B et C est telle, qu'elle ne dépend pas de la valeur de B :

$$P(A|B, C) = P(A|C) \quad (2)$$

On dit que A est **conditionnellement indépendant** de B étant donné C .

Si A est conditionnellement indépendant de B étant donné C , alors la distribution jointe de A et B conditionnées sur C vaut :

$$P(A, B|C) = P(A|B, C)P(B|C) = P(A|C)P(B|C) \quad (3)$$

Cela signifie que conditionnées sur C , les variables A et B sont statistiquement indépendantes.

1.5 Quelques règles de base en probabilité

Définition 42. Soient N événements M_1, \dots, M_N complets et mutuellement exclusifs. La **règle de la somme** est définie par

$$P(A) = \sum_{k=1}^N P(A, M_k) \quad (4)$$

Définition 43. La **règle du produit** est définie par

$$P(A, B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A) \quad (5)$$

Définition 44. La **règle de Bayes** est définie par

$$P(M_i|A) = \frac{P(M_i, A)}{P(A)} = \frac{P(A|M_i) \times P(M_i)}{P(A)} \quad (6)$$

- $P(M_i)$ est la **probabilité a priori** de M_i
- $P(A|M_i)$ est la **probabilité de A conditionnellement à M_i** (vraisemblance)
- $P(M_i|A)$ est la **probabilité a posteriori** de M_i (conditionnellement à A)

$$\text{posterior} \propto \text{vraisemblance} \times \text{prior} \quad (7)$$

Théorème 3. Probabilités totales : Soient N événements M_1, \dots, M_N complets et mutuellement exclusifs, alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(A|M_i) \times P(M_i) \quad (8)$$

Théorème 4. Bayes : Soient N événements M_1, \dots, M_N complets et mutuellement exclusifs, alors :

$$P(M_i|A) = \frac{P(A|M_i) \times P(M_i)}{\sum_k P(A|M_k) \times P(M_k)} \quad (9)$$

2 Rappels sur l'entropie

L'entropie $H(A)$ d'une variable aléatoire A ayant un ensemble combinatoire de valeur possible est définie par :

$$H(A) = - \sum_a P(a) \ln P(a) \quad (10)$$

L'entropie de A conditionné par B est :

$$H(A|B) = - \sum_{a,b} P(a,b) \ln P(a|b) \quad (11)$$

L'entropie croisée de A et B est :

$$I(A, B) = H(A) - H(A|B) \quad (12)$$

3 Réduction d'une fonction binaire de \mathcal{F}^n ($n > 2$) à une fonction de \mathcal{F}^2

Les cliques de taille 3 et plus ne peuvent pas être directement associées à un st-graphe particulier sans introduire de nouvelles variables, au contraire des cliques de tailles 2 et 1. La réduction des champs de Markov aléatoires d'ordre 2, associés à une fonction d'énergie appartenant à \mathcal{F}^3 , grâce à l'introduction de variables supplémentaires, a été très utilisée depuis 2004 avec l'article [KZ04]. L'approche a été restreinte aux fonctions de \mathcal{F}^3 jusqu'en 2009, à cause de l'inexistence d'algorithmes efficaces pour optimiser des cliques de taille supérieure. En 2009, la publication de l'article [Ish09] généralise la réduction à n'importe quel ordre, le code source étant public.

Le minimum global de la forme réduite à une énergie ne faisant intervenir que des dépendances entre paires de sites est le même que celui de la forme initiale dans le cas d'un problème de minimisation binaire à deux étiquettes [Ish09], et il reste une bonne approximation dans le cas d'un problème de minimisation multi-étiquettes [Ish10].

Ainsi, la première étape d'un problème de minimisation énergétique associé à un champ de Markov aléatoire consiste à réduire notre énergie pour que tous ses potentiels énergétiques aient des dépendances unaires ou des dépendances mettant en jeu une paire de variables cachées (*pairwise* en anglais).

Nous allons présenter quelques techniques de réduction dans le cas binaire pour familiariser le lecteur. La première approche de réduction est la **réduction par la sélection du minimum**. Soit x, y et $z \in \mathbb{B}$ des variables booléennes et $E(x, y, z)$ un potentiel de clique de taille 3 (il dépend de 3 variables binaires). $E(x, y, z)$ peut être représentée par sa forme pseudo-booléennes correspondantes ($\bar{x} = 1 - x$) :

$$E(x, y, z) = E_{000}\bar{x}\bar{y}\bar{z} + E_{001}\bar{x}\bar{y}z + E_{010}\bar{x}y\bar{z} + E_{011}\bar{x}yz + E_{100}x\bar{y}\bar{z} + E_{101}x\bar{y}z + E_{110}xy\bar{z} + E_{111}xyz \quad (13)$$

$E_{xyz} = E(x, y, z)$. En remplaçant les $\bar{\cdot}$ par $1 - \cdot$ et en regroupant les coefficients des variables booléennes, on obtient :

$$\begin{aligned}
 E(x, y, z) = & E_{000} + (E_{100} - E_{000})x + (E_{010} - E_{000})y + (E_{001} - E_{000})z + \\
 & (E_{110} + E_{000} - E_{100} - E_{010})xy + \\
 & (E_{011} + E_{000} - E_{010} - E_{001})yz + \\
 & (E_{101} + E_{000} - E_{001} - E_{100})zx + \\
 & (E_{111} + E_{100} + E_{010} + E_{001} - E_{110} - E_{011} - E_{101} - E_{000})xyz \quad (14)
 \end{aligned}$$

$E(x, y, z)$ est donc composée d'une constante (dont on n'a pas besoin lorsqu'on cherche la valeur des variables qui réalisent le minimum), de trois termes unaires, de trois termes quadratiques et d'un terme cubique. Pour prendre en compte la constante E_{000} pour des besoins de calcul exact d'énergie, il suffit de l'ajouter à un des termes unaires (e.g. la prendre en compte dans les cas zéro et un). Seul le terme cubique doit être réduit pour pouvoir minimiser $E(x,y,z)$.

Soit αxyz , $\alpha \in \mathbb{R}$ et x, y et $z \in \mathbb{B}$. Alors, nous avons [Ish09] :

$$\alpha xyz = \begin{cases} \min_{w \in \mathbb{B}} \alpha w(x + y + z - 2) & \text{si } \alpha < 0 \\ \alpha \left\{ \min_{w \in \mathbb{B}} w(x + y + z - 1) + (xy + yz + zx) - (x + y + z) + 1 \right\} & \text{sinon} \end{cases} \quad (15)$$

Le symbole min peut disparaître en incluant la variable binaire w dans le problème de minimisation globale :

$$\alpha xyz = \begin{cases} \alpha w(x + y + z - 2) & \text{si } \alpha < 0 \\ \alpha \{w(x + y + z - 1) + (xy + yz + zx) - (x + y + z) + 1\} & \text{sinon} \end{cases} \quad (16)$$

Tous les termes cubiques peuvent être remplacés par des termes quadratiques. Et le potentiel de clique de taille 3 $E(x, y, z)$ peut donc être minimisé par coupe de graphe. L'extension de la réduction par la sélection du minimum aux cliques de taille d est donnée dans l'article [Ish09]. Hélas, le nombre de variables additionnelles par clique est dans le pire cas exponentiel en d . Cela s'explique par le fait qu'il n'y a pas seulement le terme de degré le plus élevé à réduire, mais aussi les termes de degré inférieur qui ont besoin de leurs propres variables. En pratique, la clique de taille maximale que l'on peut traiter de nos jours est d'environ 7 pour un problème de vision par ordinateur.

Une autre technique de réduction est la **réduction par substitution** : on introduit une nouvelle variable booléenne qui va remplacer un produit de deux variables booléennes (e.g. w remplace xy dans xyz) et on ajoute une très grosse pénalité si la valeur de la nouvelle variable booléenne est différente de la valeur du produit des deux variables (dans l'exemple, la minimisation porte sur $wz + \lambda D(x, y, w)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $D(x, y, w) = xy - 2xw - 2yw + 3w$). Ainsi, comme dans la technique de réduction précédente, le degré global est abaissé de 1 et une nouvelle variable est introduite. Par contre cette technique est très peu utilisée dans la pratique car le résultat d'une réduction par substitution est toujours une fonction non sous-modulaire, ce qu'on cherche à éviter.