



HAL
open science

Outils expérimentaux et de modélisation numérique pour l'étude des transferts : du comportement des milieux poreux à celui des foules

Stefano Dal Pont

► **To cite this version:**

Stefano Dal Pont. Outils expérimentaux et de modélisation numérique pour l'étude des transferts : du comportement des milieux poreux à celui des foules. Autre. UNIVERSITE DE CERGY PONTOISE, 2011. tel-00709751

HAL Id: tel-00709751

<https://theses.hal.science/tel-00709751>

Submitted on 19 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



IFSTTAR-LCPC

Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de
l'Aménagement et des Réseaux

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Présenté par

Stefano Dal Pont

Titre :

**Outils expérimentaux et de modélisation numérique
pour l'étude des transferts : du comportement des
milieux poreux à celui des foules**

Soutenue le 1 Décembre 2011

Devant le jury composé de :

A. Millard	Président
D. Gawin	Rapporteur
H. Dumontet	Rapporteur
M. Hjiaj	Rapporteur
F. Meftah	Examineur
J.M. Torrenti	Examineur

ἔν οἶδα ὅτι οὐδὲν οἶδα

Résumé : Ce mémoire résume sept ans d'activités de recherche, depuis l'obtention de mon titre de docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées en 2004. Ces travaux se sont déroulés d'abord à l'ENPC et à l'Université de Padoue (Italie), ensuite au Commissariat pour l'Energie Atomique et, plus récemment, au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (aujourd'hui Institut Français des Sciences et Technologies des Transports de l'Aménagement et des Réseaux).

Les travaux présentés dans ce mémoire couvrent plusieurs sujets relatifs aux phénomènes de transferts : on passe de la modélisation thermo-hydraulique (intégrée par les aspects mécaniques) des milieux poreux via une approche continue, à l'étude des foules humaines, où chaque individu est pris en examen via une approche discrète. Une attention particulière a été portée aux aspects numériques et chaque sujet est détaillé avec des considérations relatives à l'implémentation et aux algorithmes associés. Dans la démarche présentée, l'expérience en laboratoire joue aussi un rôle important et la symbiose qui existe entre expérience, théorie et numérique est mise en évidence.

Keywords : modélisation numérique, expérimentation, couplages THM, milieux poreux, milieux discrets, comportement d'une foule humaine, synchronisation foule-structure.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Couplages TH dans les milieux poreux	3
2.1	La modélisation thermo-hydraulique	4
2.1.1	Équations de conservation locale	5
2.1.2	Équations constitutives	6
2.1.3	Variables d'état	7
2.1.4	Conditions aux limites	9
2.2	Formulation discrétisée aux éléments finis	10
2.2.1	Formulation faible	10
2.2.2	Discrétisation spatiale	10
2.2.3	Discrétisation temporelle	11
2.2.4	Stratégie de résolution	11
2.3	Formulation discrétisée aux volumes finis	14
2.3.1	Discrétisation spatiale	14
2.3.2	Discrétisation temporelle	16
2.3.3	Stratégie de résolution	16
2.4	Exemples d'application du modèle	19
2.4.1	Comparaison numérique-expérimentale	19
2.4.2	Analyses numériques	20
2.5	Approche probabiliste dans les transferts	23
2.6	Conclusions et perspectives	28
3	Couplages THM dans les milieux poreux	29
3.1	La modélisation mécanique	30
3.1.1	Mécanisme de dégradation du béton	30
3.1.2	Choix des modèles	31
3.2	Formulation implicite de la fissuration	31
3.2.1	Endommagement thermo-chemo-mécanique isotrope	31
3.2.2	Couplage perméabilité-endommagement dans le cadre d'une approche hydro-mécanique	32
3.3	Effets d'échelle dans la perméabilité intrinsèque	33
3.3.1	Campagne expérimentale	34
3.3.2	Proposition d'une loi de changement d'échelle	36
3.3.3	Conclusions	37
3.4	Perspectives : écaillage du béton sous incendie	37
3.4.1	Critère d'écaillage	38
3.4.2	Analyses paramétriques	39
3.5	Formulation explicite de la fissuration	39
3.5.1	Approche probabiliste discrète	39
3.5.2	Validation de l'approche	42
3.5.3	Couplage expérimentale-numérique hydro-mécanique	43
3.5.4	Couplage résistance électrique-fissuration	49
3.6	Perspectives : couplage perméabilité-fissuration	51
3.7	Conclusions et perspectives	54

4	Modélisations multi-physiques des milieux discrets	55
4.1	La modélisation des milieux discrets	55
4.2	Le modèle de collision entre grains	56
4.2.1	Le principe des travaux virtuels	56
4.2.2	Les lois de comportement	58
4.2.3	Un exemple : le cas d'un pseudo-potentiel quadratique	59
4.2.4	Collision simultanée de N solides	60
4.3	Méthode numérique	60
4.3.1	Discrétisation temporelle	61
4.3.2	Algorithme de résolution - cas d'une loi qui dérive d'un pseudo-potentiel	62
4.3.3	Comparaison avec l'élasto-plasticité	63
4.3.4	Algorithme de résolution - cas de la loi de Coulomb	64
4.4	Application au cas des milieux granulaires	66
4.4.1	Loi qui dérive d'un pseudo-potentiel	67
4.4.2	Loi de frottement de type Coulomb	67
4.5	Application au comportement d'une foule humaine	68
4.5.1	Évacuation d'une salle rectangulaire	70
4.5.2	Évacuation d'une salle rectangulaire avec un obstacle devant la sortie	71
4.5.3	Évacuation d'une école primaire	72
4.5.4	Modélisation de sous-groupes	72
4.5.5	Modélisation des voyageurs durant l'échange quai/train : le cas des stations à une seule sortie du métro parisien	73
4.6	Perspectives : interaction couplée foule-structure	76
4.6.1	Modèle couplé	76
4.6.2	Simulations numériques	77
4.7	Conclusions et perspectives	78
5	Conclusions	79
	Bibliographie	81

Introduction

Ce mémoire résume l'ensemble de mes activités de recherche depuis l'obtention de mon titre de docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées en 2004. Ces travaux se sont déroulés en collaboration avec d'autres chercheurs, qui seront cités au fur et mesure, d'abord à l'ENPC et à l'Université de Padoue (Italie), ensuite au Commissariat pour l'Energie Atomique et, plus récemment, au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (aujourd'hui Institut Français des Sciences et Technologies des Transports de l'Aménagement et des Réseaux).

Les actions de recherche menées au cours de ces années se placent dans le double contexte des comportements couplés des milieux poreux, avec une attention particulière au matériau béton, et de la mécanique des milieux discrets. A l'origine, ces travaux ont principalement fait l'objet de développements d'approches numériques et ils ont été par la suite étayés par des aspects théoriques et de modélisation expérimentale. Expérience, théorie et développements numériques constituent, en effet, les différentes facettes du même problème. Chacune de ces facettes établit un domaine d'étude qui ne doit pas rester étanche et isolé des autres mais qui, bien au contraire, doit être perméable, afin de bénéficier de synergies réciproques et d'aboutir à une compréhension plus fine des mécanismes physiques en jeu. Cette démarche n'est pas séquentielle mais oblige plutôt à un redressement continu, ce qui motive à élargir les domaines de compétence ainsi que son propre champs de vision. La multidisciplinarité devient alors un pas à franchir. La capacité à échanger avec des spécialistes d'autres secteurs, la curiosité de s'orienter vers d'autres thématiques et de les intégrer, sont des éléments qui devraient compléter le profil d'un chercheur. Dans ce sens, et au delà de la dimension strictement scientifique, le coté humain et relationnel joue aussi son rôle. Ces aspects permettent, en effet, de créer progressivement des ponts entre disciplines à l'apparence éloignées et d'apporter des solutions et des idées nouvelles. Dans le contexte de mes travaux, ces considérations sont bien présentes : si d'un coté la modélisation numérique constitue le socle de l'ensemble des mes recherches, les échanges et les collaborations sur les aspects théoriques et la symbiose avec l'expérience (quand cela a été possible) trouvent un espace significatif dans le cadre générale de la démarche que j'ai poursuivie.

Ce mémoire est divisée en trois chapitres, consacrés d'une part à la description du comportement couplé thermo-hydro-mécanique (THM) des milieux poreux et d'une autre part à la modélisation discrète des milieux granulaires, avec diverses applications.

Le chapitre 2 est dédié au comportement thermo-hydraulique (TH) des milieux poreux. Ce travail, commencé avec ma thèse de doctorat, a été repris essentiellement sur les aspects théoriques et les développements numériques associés. Dans ce chapitre, on proposera une stratégie d'approche de type chaînée ainsi que les algorithmes de résolution. Une mise en perspective du travail sera aussi abordée. La micro-structure du béton et l'effet de sa nature hétérogène sur le comportement macroscopique sont des aspects rarement pris en compte dans les modélisations TH ; une première proposition dans ce sens sera proposée. Le travail présenté dans ce chapitre constitue le socle pour les développements qui seront abordé dans les pages suivantes, en raison de sa généralité et de la souplesse de la méthode numérique choisie. Des perspectives seront également abordées en conclusion du chapitre.

Le chapitre 3 se déroule autour de l'intégration des aspects mécaniques au modèle thermo-hydrrique, particulièrement lorsqu'un état de fissuration intervient. Selon l'échelle de représentation et le type de réponse souhaitée, plusieurs approches et plusieurs stratégies de couplage sont possibles.

Dans ce même chapitre, on présentera le couplage avec une approche de type endommagement, donnant une représentation lissée de la fissuration, et une approche prenant en compte explicitement la discontinuité introduite par la fissure. Cette deuxième approche sera ainsi caractérisée par une description probabiliste de l'état du matériau, capable de prendre en compte la nature hétérogène du milieu. Dans ces démarches, l'expérimentation est très présente : le couplage hydro-mécanique nécessite l'introduction des nouvelles lois constitutives issues d'expériences conçues ad-hoc. Le chapitre aboutira sur des perspectives visant l'étude des effets d'échelle dans la mesure de la perméabilité. Une première étude exploratoire a été menée et elle a permis de mettre en évidence une relation entre la mesure de la perméabilité à l'air et la taille de l'échantillon testé. Ce résultat reste à confirmer ultérieurement, mais il semble mettre en discussion les procédures actuellement utilisées pour la mesure de la perméabilité dans un béton.

Le chapitre 4 sera consacré à la présentation d'une approche discrète initialement développée pour l'étude des milieux granulaires. Ce travail, développé dans une première phase lors d'un stage post-doctorale, porte sur l'implémentation numérique d'une méthode dite des percussions. Il a été dans un premier temps utilisé pour des applications relativement classiques telles que les chutes des blocs rocheux. Ce même travail a été repris et a été appliqué dans un nouveau contexte, celui du comportement des foules humaines. En effet, un assemblage de personnes peut être représenté comme un milieu discret, où chaque piéton constitue un grain. Cette étude ouvre des nouvelles voies de recherche, allant de l'aménagement d'espaces publiques, à l'optimisation des sorties de sécurité ou, comme on le verra dans les perspectives, aux couplages avec la structure sur laquelle le flux de la foule se déroule.

Un dernier chapitre sera enfin dédié aux conclusions et à la mise en perspective des axes de recherche qui ont été abordés dans ces pages.

Couplages thermo-hydrauliques dans les milieux poreux partiellement saturés

Sommaire

2.1	La modélisation thermo-hydraulique	4
2.1.1	Équations de conservation locale	5
2.1.2	Équations constitutives	6
2.1.3	Variables d'état	7
2.1.4	Conditions aux limites	9
2.2	Formulation discrétisée aux éléments finis	10
2.2.1	Formulation faible	10
2.2.2	Discrétisation spatiale	10
2.2.3	Discrétisation temporelle	11
2.2.4	Stratégie de résolution	11
2.3	Formulation discrétisée aux volumes finis	14
2.3.1	Discrétisation spatiale	14
2.3.2	Discrétisation temporelle	16
2.3.3	Stratégie de résolution	16
2.4	Exemples d'application du modèle	19
2.4.1	Comparaison numérique-expérimentale	19
2.4.2	Analyses numériques	20
2.5	Approche probabiliste dans les transferts	23
2.6	Conclusions et perspectives	28

Dans ce qui suit, une synthèse de mes travaux de recherche orientés vers le comportement couplé des milieux poreux est présentée. Ceci constitue la suite de ma thèse portant sur le comportement à haute température des bétons. L'attention est portée sur les modèles de comportement thermo-hydrauliques couplés et sur les développements numériques associés. Ce travail a fait l'objet de collaborations nationales (CEA, Université de Cergy) et internationales (Université de Cardiff, Université de Padoue), ainsi que de nombreuses publications. Ma contribution sur ce sujet porte essentiellement sur le volet théorique/numérique, l'expérimentation étant essentiellement à la base du couplage avec les aspects mécaniques (développés dans le prochaine chapitre). Des stratégies numériques de résolution du problème TH qui ont été implantées dans des codes de calcul commerciaux (CESAR) et de recherche (CAST3M, FIDES-MP) seront détaillées. Ce travail constitue la base pour les modélisations multi-physiques couplées et la procédure numérique proposée (caractérisée par un algorithme chaîné) se révèle suffisamment souple pour pouvoir facilement étendre le modèle TH à la prise en compte d'autres phénomènes physiques, en introduisant, par exemple, la mécanique, le transport de chlorures ou autres espèces. Ces aspects seront analysés et détaillés tout en prenant en compte des nouvelles applications ainsi que l'hétérogénéité du matériau.

2.1 La modélisation thermo-hydraulique

On présente les éléments nécessaires pour décrire le comportement thermo-hydraulique (TH) d'un milieu poreux (MP). Le MP sera traité comme un milieu multi-phasique partiellement saturé dont la matrice solide est remplie d'eau liquide et de gaz (que l'on considère comme un mélange d'air sec et d'eau vapeur).

La littérature présente un large éventail de théories et modèles sur ce sujet. Sans avoir la prétention de prendre en compte l'ensemble des approches proposées, on peut classer les modèles en deux catégories : ceux qui dérivent des théories issues de travaux de Biot (BT) et les théories dites des mixtures (MT).

Selon la première approche, les relations qui décrivent le comportement d'un milieu continu restent valables (à l'échelle macroscopique) aussi pour le milieu poreux. Les équations constitutives portent sur des quantités mesurables à l'échelle macro. Cette approche phénoménologique a été posée à l'origine par Biot [Biot 1941, Biot 1956a, Biot 1956b] et elle a été reprise par la suite dans le contexte plus générale de la thermodynamique des processus irréversibles (TPI) pour le cas totalement saturé [Biot 1972] ainsi que pour les cas multi-phasiques (Coussy [Coussy 1990, Coussy 2004] et Dormieux [Dormieux 1995, Chateau 1998]). L'utilisation de la TPI passe par l'introduction d'un potentiel, qui, dérivé d'une manière opportune, permet de retrouver les relations qui décrivent le comportement du MP dans sa globalité, d'une manière similaire à ce qu'on fait classiquement en mécanique des milieux continus.

La deuxième approche souvent utilisée pour décrire les matériaux multi-phasiques s'appuie sur la théorie dite des mixtures. Dans ce cadre, le milieu poreux est étudié comme un milieu composé de N constituants, sous l'hypothèse que ces composants occupent simultanément un volume élémentaire représentative (VER). Les bases de cette approche ont été posées par les trois principes formulés par Truesdell (thermodynamique rationnelle -TR- [Truesdell 1957, Truesdell 1965]). Le premier de ces trois principes consiste à supposer que le mouvement d'un constituant peut être décrit en l'isolant du reste à condition de prendre en compte les actions des autres constituants sur celui considéré. Le second principe postule que le comportement moyen s'exprime mathématiquement en fonction des mouvements des constituants. Enfin, le mouvement moyen est régi par les mêmes type de lois que le mouvement de chaque constituant. Dans ce contexte, si les équations de conservation des phases sont posées à l'échelle macroscopique (celle du VER) et qu'on englobe les termes d'échange entre les phases, on parle de théorie de mixtures classique (MT) [Bowen 1976, Bowen 1980, Bowen 1982]. Hassanizadeh & Gray [Gray 1979a, Gray 1979b, Gray 1980] ont ensuite montré que si les équations de conservation à l'échelle microscopique sont moyennés via une procédure de *up-scaling*, les termes d'échange de la MT prennent une signification physique à l'échelle macro du VER. La combinaison entre les procédures de moyenne et la théorie des mixtures est connue sous le nom de théorie des mixtures hybrides (HMT), dont l'utilisation est à l'heure actuelle très répandue (Bear [Bear 1979, Bear 1990, Bear 1991], Lewis & Schrefler [Lewis 1998], Ehlers [Ehlers 1991, Ehlers 2004], Borja [Borja 2006], ...). Dans ces deux formulations, les relations constitutives sont définies à l'échelle macroscopique en exploitant l'inégalité de l'entropie selon la méthode de Coleman-Noll [Coleman 1963].

On peut ainsi démontrer que, sous certaines conditions [Schanz 2003], la BT et la MT/HMT peuvent être dérivées à partir d'un potentiel, ce qui permet d'inscrire les théories présentées ci-dessus dans un cadre thermodynamique très proche [Bennethum 1996, Coussy 1998, Schrefler 2004]. Les différences peuvent être retrouvées au niveau de certaines lois constitutives (e.g. la définition de la pression solide p_s [Gray 2009]) et dans le traitement des interfaces entre les phases [Coussy 1990, Coussy 2004, Gray 2001]. Sur ces sujets, les discussions restent ouvertes mais, malgré leur intérêt, ces thèmes vont au delà des objectifs de ce manuscrit et ne seront pas détaillés.

On retiendra dans la suite le cadre théorique basé sur les travaux de Gray & Schrefler [Gray 2001] et Lewis & Schrefler [Lewis 1998] en raison essentiellement des épreuves en termes de performances numériques que ces modèles ont fait.

L'approche générale choisie pour prendre en compte les transferts de masse et d'énergie, consiste à bâtir un nombre d'équations locales d'équilibre. Celles-ci permettent de décrire l'évolution dans le temps des masses fluides, les échanges entre les phases au sein de la matrice poreuse et l'interaction avec l'environnement externe. Ce système d'équations différentielles est complété par des équations constitutives appropriées, permettant de réduire le nombre de variables indépendantes et de définir les variables d'état du problème [Gawin 1999, Gawin 2002, Gawin 2003]. Le choix de ces dernières est particulièrement important : du point de vue pratique, les variables doivent être mesurables (expérimentalement) tandis que du point de vue théorique, elles doivent décrire de manière unique l'état thermodynamique local du milieu poreux. En plus, du point de vue numérique, elles doivent assurer une bonne performance du code de calcul : ce point sera traité dans la suite dans le cadre d'une modélisation numérique aux Volumes Finis (VF) ; une modélisation aux Éléments Finis (EF) sera aussi présentée dans les détails.

2.1.1 Équations de conservation locale

On présente dans la suite les équations locales de conservation de la masse régissant le transport de phases fluides dans un réseaux poreux connecté. On se place dans le cadre des petites perturbations et, dans un premier temps, on néglige la déformabilité du milieu sur le problème de transport. On peut écrire l'équation générale de conservation sous la forme :

$$\frac{\partial \rho_\pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\pi \mathbf{v}_\pi) = \rho e_\pi \quad (2.1)$$

avec π le symbole utilisé pour la phase (solide, liquide, vapeur, air, gaz) considérée, ρ_π est la densité, \mathbf{v}_π la vitesse.

Ces équations prennent en compte les changements de phase liés à la déshydratation (i.e. la perte d'eau chimiquement liée de la squelette solide [Dal Pont 2004a, Sabeur 2008b]) et les phénomènes d'évaporation et condensation [Lewis 1998] via le terme d'échange ρe_π (termes source, qui correspondent au taux de déshydratation \dot{m}_{dehyd} et aux taux d'évaporation/condensation \dot{m}_{vap}).

Les vitesses de phases fluides \mathbf{v}_π sont séparées en composantes relatives de façon à décrire le transport de masse dans le milieu poreux par les mécanismes de perméation et diffusion liés, respectivement, aux gradients de pression (Darcy) et de concentration (Fick). On obtient donc :

$$\mathbf{v}_l = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_{l-s} \quad , \quad \mathbf{v}_v = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_{g-s} + \mathbf{v}_{v-g} \quad , \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_{g-s} + \mathbf{v}_{a-g} \quad (2.2)$$

où \mathbf{v}_s est la vitesse de la phase solide (normalement ce terme est négligé), $\mathbf{v}_{\pi-s}$ la vitesse de l'eau liquide ($\pi = l$) et du mélange gazeux ($\pi = g$) par rapport à la phase solide, $\mathbf{v}_{\pi-g}$ la vitesse de la vapeur ($\pi = v$) et de l'air sec ($\pi = a$) par rapport au mélange gazeux (air humide).

Classiquement, l'équation d'équilibre de la masse solide (2.1-solide) n'apparaît pas explicitement car elle n'est utilisée que pour déterminer l'évolution de la porosité dans les équations d'équilibre de masses fluides :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\dot{m}_{dehyd}}{\rho_s} \quad (2.3)$$

ou la densité de la phase solide ρ_s est considérée constante.

Pour ce qui concerne l'équation de conservation de l'énergie, la procédure de changement d'échelle porte à la relation suivante [Lewis 1998, Dal Pont 2004a] :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + (m_l C_l \mathbf{v}_{l-s} + m_g C_g \mathbf{v}_{g-s}) \cdot \nabla T + \nabla \cdot \mathbf{q} = -H_{vap} \dot{m}_{vap} + H_{dehyd} \dot{m}_{dehyd} \quad (2.4)$$

avec la capacité thermique du milieu poreux donnée par :

$$\rho C_p = \sum_{\pi=s,l,v,a} (m_\pi C_\pi) \quad (2.5)$$

où C_π est la chaleur spécifique de chaque composante, H_{vap} l'enthalpie d'évaporation, H_{dehyd} l'enthalpie de déshydratation et \mathbf{q} le vecteur flux de chaleur. On remarque que la seconde composante du terme de gauche de l'équation prend en charge les transferts de chaleur par advection et diffusion dans le réseau poreux. Le terme droite de l'équation correspond à la chaleur latente liée aux changements de phase (évaporation condensation, déshydratation).

2.1.2 Équations constitutives

2.1.2.1 Équations d'état des fluides

L'eau liquide est considérée comme incompressible et sa densité ne dépend que de la température. La vapeur, l'air sec et le mélange gazeux sont ainsi considérés comme de gaz parfaits, ce qui donne ($\pi = v, a, g$) :

$$\rho_\pi = \frac{M_\pi}{RT} p_\pi \quad (2.6)$$

où p_π est la pression, M_π la masse molaire et R la constante universelle des gaz. Enfin on peut classiquement écrire :

$$\rho_g = \rho_v + \rho_a \quad , \quad p_g = p_v + p_a \quad (2.7)$$

ce qui donne :

$$M_g = M_a + (M_v - M_a) \frac{p_v}{p_g} \quad (2.8)$$

2.1.2.2 Équilibre liquide-vapeur

Sous l'hypothèse que le processus d'évaporation se fait sans dissipation d'énergie ou, autrement dit, sous l'hypothèse que l'enthalpie libre de l'eau liquide et de la vapeur sont égales, on peut écrire l'équation de Clausius-Clapeyron généralisée [Dal Pont 2004a] :

$$p_v = p_{vs} \exp\left(\frac{M_v}{\rho_l RT} (p_g - p_c - p_{vs})\right) \quad (2.9)$$

avec la pression capillaire :

$$p_c = p_g - p_l \quad (2.10)$$

et p_{vs} la pression de vapeur saturante.

2.1.2.3 Flux de masses

Selon la décomposition des vitesses (Eq.2.2), on peut expliciter les flux de masses :

$$\mathbf{J}_{l-s} = m_l \mathbf{v}_{l-s} = -\mathbf{K} \frac{\rho_l k_{rl}}{\mu_l} \nabla p_l \quad (2.11)$$

$$\mathbf{J}_{v-s} = m_v \mathbf{v}_{g-s} + m_v \mathbf{v}_{v-g} = -\mathbf{K} \frac{\rho_v k_{rg}}{\mu_g} \nabla p_g - \mathbf{D} \rho_g \frac{M_v M_a}{M_g^2} \nabla \left(\frac{p_v}{p_g}\right) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{J}_{a-s} = m_a \mathbf{v}_{g-s} + m_a \mathbf{v}_{a-g} = -\mathbf{K} \frac{\rho_a k_{rg}}{\mu_g} \nabla p_g - \mathbf{D} \rho_g \frac{M_v M_a}{M_g^2} \nabla \left(\frac{p_a}{p_g} \right) \quad (2.13)$$

Dans ces équations on a introduit les lois de Darcy et de Fick, avec \mathbf{K} la perméabilité intrinsèque, $k_{r\pi}$ la perméabilité relative, μ_π la viscosité dynamique, \mathbf{D} la diffusivité. Pour le mélange gazeux, le terme correspondant à Darcy $\mathbf{J}_{\pi-s}$ avec $\pi = v, a$ est contrôlé par la vitesse barycentrique \mathbf{v}_{g-s} tandis que le terme correspondant à la loi de Fick ($m_\pi \mathbf{v}_{\pi-g}$), est relié au gradient de concentration et rend compte de la diffusion de chaque constituant dans le mélange gazeux [Kuiken 1994]. On peut enfin écrire le gradient de concentration :

$$\nabla \left(\frac{p_v}{p_g} \right) = \frac{1}{p_g} \left(\left(\frac{\rho_v}{\rho_l} - \frac{p_v}{p_g} \right) \nabla p_g - \frac{\rho_v}{\rho_l} \nabla p_c \right) = -\nabla \left(\frac{p_a}{p_g} \right) \quad (2.14)$$

et aboutir à la forme généralisée de l'équation décrivant les flux de vapeur et air sec :

$$\mathbf{J}_{\pi-s} = -\mathbf{K} \frac{\rho_\pi k_{rg}}{\mu_g} \nabla p_g \mp \mathbf{D} \frac{M_v M_a}{RT M_g} \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} - \frac{p_v}{p_g} \right) \nabla p_g \pm \mathbf{D} \frac{M_v M_a}{RT M_g} \frac{\rho_v}{\rho_l} \nabla p_c \quad (2.15)$$

ou le signe supérieure correspond à la vapeur ($\pi = v$) et le signe inférieure au flux d'air sec ($\pi = a$).

2.1.2.4 Flux de chaleur

Dans l'équation de bilan de l'énergie (2.4), le processus de conduction thermique peut être décrit au travers d'une loi de Fourier, qui relie la température et le flux de chaleur comme suit :

$$\mathbf{q} = -\lambda(S_l, T) \nabla T \quad (2.16)$$

ou $\lambda(S_l, T)$ est la conductivité thermique effective, fonction de la température et du degré de saturation [Pesavento 2000].

2.1.2.5 Isothermes de sorption-désorption

La solution des équations constitutives présentées jusqu'à ce point permet de déterminer la distribution spatiale et temporelle de la température, des masses des constituants et des leurs pressions dans le milieu poreux. En s'appuyant sur les équations constitutives, le problème est formulé sur les inconnues suivantes : $(S_l, p_c, p_g, T, \dot{m}_{vap})$ ou, en alternative $(S_l, p_v, p_a, T, \dot{m}_{vap})$. Ce jeu de variables peut être réduit ultérieurement en intégrant la relation qui suit [Baroghel-Bouny 1994, Pesavento 2000] :

$$S_l = S_l(p_c, T) \quad (2.17)$$

expression qui correspond à l'isotherme de sorption-désorption qui caractérise d'une manière phénoménologique la micro-structure d'un milieu poreux (ou, autrement dit, la distribution de pores).

2.1.3 Variables d'état

A l'aide de la relation précédente, le jeu réduit de variables devient $(p_c, p_g, T, \dot{m}_{vap})$ ce qui mène pour un problème isotherme à l'utilisation comme variables d'état soit (p_c, p_g) soit (p_v, p_a) ou encore (p_l, p_a) .

Problème I D'une manière désormais classique, [Lewis 1998] propose de sommer l'équation de conservation du liquide et de la vapeur (voir eqs.2.1) de façon telle à éliminer le terme source lié à l'évaporation \dot{m}_{vap} . On introduit alors l'équation d'équilibre pour la masse totale d'eau m_w :

$$\frac{\partial m_w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{w-s} = 0 \quad (2.18)$$

avec :

$$m_w = m_l + m_v \quad (2.19)$$

$$\mathbf{J}_{w-s} = \mathbf{J}_{l-s} + \mathbf{J}_{v-s} \quad (2.20)$$

Cette equation est complétée par l'équation de conservation de l'air sec (Eq.2.1-air) et de l'énergie (Eq.2.4), équations qui s'appuient sur les variables d'état (p_c, p_g, T) , qui sont par conséquent les inconnues principales du problème.

Problème II D'une manière plus originale [Meftah 2010], on peut sommer les relations relatives aux constituants gazeux (air sec et vapeur) de façon telle à éliminer le terme source d'évaporation \dot{m}_{vap} . De cette manière, on peut imposer des conditions aux limites sur l'ensemble du mélange gazeux (flux, pression, densité) au lieu que les imposer sur chaque constituant. Dans ce cas, on obtient l'équation de bilan du mélange gazeux :

$$\frac{\partial m_g}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{J}_{g-s}}{\partial x} = \dot{m}_{vap} \quad (2.21)$$

avec :

$$m_g = m_v + m_a = \rho_g (1 - S_l) \phi \quad (2.22)$$

$$\rho_g = \rho_v + \rho_a \quad (2.23)$$

$$\mathbf{J}_{g-s} = \mathbf{J}_{v-s} + \mathbf{J}_{a-s} = -K \frac{\rho_g k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial p_g}{\partial x} \quad (2.24)$$

On peut facilement noter (voir eqs. 2.12, 2.13 et 2.14) que les termes de Fick relatifs à la vapeur et à l'air sec s'effacent dans l'équation du flux de gaz \mathbf{J}_{g-s} . Par conséquent, ils n'apparaissent pas explicitement dans l'équation (2.21) mais sont présents dans le terme \dot{m}_{vap} donné par la relation de conservation de l'eau liquide ou de la vapeur.

Finalement, afin d'obtenir une élimination symétrique de termes de Fick, la deuxième equation d'équilibre choisie dans le problème II est celle qui donne la conservation de la masse de fluides :

$$\frac{\partial m_l}{\partial t} + \frac{\partial m_g}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{J}_{l-s}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{J}_{g-s}}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

On notera ainsi que ces deux relations (2.21) et (2.25), portent à une forme algébrique plus compacte par rapport au cas du problème I. Cependant, le terme source d'évaporation \dot{m}_{vap} doit être estimé comme un terme source local pendant le processus itératif. An algorithme approprié doit être développé et sera proposé dans la suite. Les aspects numériques seront repris quand on introduira la discrétisation aux Volumes Finis.

2.1.4 Conditions aux limites

Le problème thermo-hydraulique consiste à déterminer la température T et les pressions p_g et p_c , solutions des équations de conservation dans le domaine Ω dont les conditions aux limites sont imposées à la frontière Σ [Lewis 1998] :

$$p_g = \bar{p}_g \quad \text{on } \Sigma_p \quad (2.26)$$

$$p_c = \bar{p}_c \quad \text{on } \Sigma_p \quad (2.27)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{on } \Sigma_T \quad (2.28)$$

$$- \mathbf{J}_{\pi-s} \cdot \mathbf{n} = \bar{q}_\pi - h_g (\rho_\pi - \rho_\pi^\infty) \quad \text{on } \bar{\Sigma}_p \quad (2.29)$$

$$- \mathbf{J}_{l-s} \cdot \mathbf{n} = \bar{q}_l \quad \text{on } \bar{\Sigma}_p \quad (2.30)$$

$$- (\mathbf{q} - H_{vap} \mathbf{J}_{l-s}) \cdot \mathbf{n} = \bar{q}_T - h_T (T - T_\infty) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_\infty^4) \quad \text{on } \bar{\Sigma}_T \quad (2.31)$$

avec Σ_\bullet la partie de la frontière où les pressions et la température sont connues (condition de type Dirichlet) ; $\bar{\Sigma}_\bullet$ est la partie complémentaire (avec vecteur unitaire normal sortant \mathbf{n}) sur laquelle on impose les flux de masse des fluides et le flux de chaleur ; \bar{q}_π sont les flux imposés ; ρ_π^∞ avec $\pi = v, a$ les densités de vapeur et air sec ; T_∞ la température à distance infinie ; h_g et h_T sont, respectivement les coefficients d'échange convectif de masse et d'énergie [Lewis 1998] ; ε est l'émissivité et σ la constante de Stefan-Boltzmann.

Enfin, les conditions initiales $p_g(\mathbf{x}, t = 0)$, $p_c(\mathbf{x}, t = 0)$ et $T(\mathbf{x}, t = 0)$ doivent être aussi définies, avec \mathbf{x} le vecteur des coordonnées spatiales.

On remarque que le terme de convection dans l'équation (2.31) correspond à la loi de refroidissement de Newton et décrit les conditions observables dans nombre de situations pratiques à l'interface entre le milieu poreux et le fluide externe (air humide dans notre cas). Le deuxième terme de gauche donne l'échange d'énergie sur la surface externe liée au processus d'évaporation.

L'introduction des conditions aux limites d'échange convectif de masse de vapeur et air sec demande d'exprimer les densités de masse ρ_π ($\pi = v, a$) en fonction des variables d'état du problème (p_c, p_g, T). Cependant, les relations qui relient les densités aux variables d'état sont fortement non-linéaires ce qui empêche d'obtenir une forme algébrique (adapte à la discrétisation) pour ces conditions aux limites. Les variables à la frontière $\bar{\Sigma}_p$ doivent être factorisées de façon telle que les termes additionnels, associés à ces conditions aux limites, apparaissent dans les opérateurs dans la forme discrétisée afin d'obtenir un problème bien conditionné. On propose ici de linéariser, pour un temps t donné, les relations entre les densités et les variables d'état aux alentours du temps de référence t_{ref} [Meftah 2010] :

$$\rho_\pi \approx \rho_\pi^{ref} + \frac{\partial \rho_\pi}{\partial p_g} (p_g - p_g^{ref}) + \frac{\partial \rho_\pi}{\partial p_c} (p_c - p_c^{ref}) + \frac{\partial \rho_\pi}{\partial T} (T - T^{ref}) \quad (2.32)$$

avec $(p_c, p_g, T)_{ref}$ les valeurs de variables au temps t_{ref} . Le choix du temps de référence dépend de l'algorithme itératif adopté.

2.2 Formulation discrétisée aux éléments finis

2.2.1 Formulation faible

Le problème différentiel posé dans les paragraphes précédents peut maintenant être écrit en forme faible, prenant en compte les conditions initiales ainsi que les conditions aux limites. Dans cette formulation aux éléments finis on prendra en compte le jeu de variables posé dans le problème I. Le traitement du problème II sera proposé dans la suite et restera limité à la formulation aux Volumes Finis. On obtient pour l'eau totale, l'air sec et l'énergie ce qui suit :

$$\int_{\Omega} p^* \frac{\partial m_w}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla p^* \cdot \mathbf{J}_{w-s} d\Omega = \int_{\bar{\Sigma}_p} p^* (\bar{q}_l + \bar{q}_v - h_g (\rho_v - \rho_v^\infty)) d\Sigma - \int_{\Omega} p^* \dot{m}_{dehyd} d\Omega \quad (2.33)$$

$$\int_{\Omega} p^* \frac{\partial m_a}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla p^* \cdot \mathbf{J}_{a-s} d\Omega = \int_{\bar{\Sigma}_p} p^* (\bar{q}_a - h_g (\rho_a - \rho_a^\infty)) d\Sigma \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T^* \left(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + (m_l C_l \mathbf{v}_{l-s} + m_g C_g \mathbf{v}_{g-s}) \cdot \nabla T \right) d\Omega - \int_{\Omega} T^* H_{vap} \frac{\partial m_l}{\partial t} d\Omega \\ + \int_{\Omega} T^* \nabla H_{vap} \cdot m_l \mathbf{v}_{l-s} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla T^* \cdot H_{vap} m_l \mathbf{v}_{l-s} d\Omega \\ - \int_{\Omega} \nabla T^* \cdot \mathbf{q} d\Omega - \int_{\Omega} T^* (H_{vap} + H_{dehyd}) \dot{m}_{dehyd} d\Omega \\ = \int_{\bar{\Sigma}_T} T^* (\bar{q}_T - h_T (T - T_\infty) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_\infty^4)) d\Sigma \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec p^* et T^* des fonctions poids qui s'annulent à la frontière Σ_p et Σ_T , ou les conditions aux limites essentielles (2.29)-(2.31) sont utilisés.

2.2.2 Discrétisation spatiale

On utilise la discrétisation classique de type Galerkin avec la notation de Zienkiewicz et Taylor [Taylor 1988], ce qui porte à écrire les variables en fonction de leur valeurs nodales :

$$p_g = \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}}_g \quad p_c = \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}}_c \quad T = \mathbf{N}_t \bar{\mathbf{T}}$$

La forme faible posée précédemment peut être ainsi discrétisée comme suit :

$$\mathbf{C}_{ij}(\mathbf{Y}) \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{Y}) \mathbf{Y} = \mathbf{f}_i(\mathbf{Y}) \quad (2.36)$$

avec :

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{gg} & \mathbf{K}_{gc} & \mathbf{K}_{gt} \\ \mathbf{K}_{cg} & \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ct} \\ \mathbf{K}_{tg} & \mathbf{K}_{tc} & \mathbf{K}_{tt} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gg} & \mathbf{C}_{gc} & \mathbf{C}_{gt} \\ 0 & \mathbf{C}_{cc} & \mathbf{C}_{ct} \\ 0 & \mathbf{C}_{tc} & \mathbf{C}_{tt} \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_g \\ \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_t \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{Y}^T = \{\bar{\mathbf{p}}_g, \bar{\mathbf{p}}_c, \bar{\mathbf{T}}\}$.

2.2.3 Discrétisation temporelle

La discrétisation dans le temps est obtenue en s'appuyant sur un schéma de type θ -méthode, ce qui mène à :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{cc}\Delta\mathbf{p}_c^{n+1} + \mathbf{K}_{cc}\mathbf{p}_c^n = \mathbf{f}_c^{n+\theta} - \tilde{\mathbf{K}}_{cg}\Delta\mathbf{p}_g^{n+1} - \mathbf{K}_{cg}\mathbf{p}_g^n - \tilde{\mathbf{K}}_{cT}\Delta\mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{K}_{cT}\mathbf{T}^n \quad (2.37)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{gg}\Delta\mathbf{p}_g^{n+1} + \mathbf{K}_{gg}\mathbf{p}_g^n = \mathbf{f}_g^{n+\theta} - \tilde{\mathbf{K}}_{gc}\Delta\mathbf{p}_c^{n+1} - \mathbf{K}_{gc}\mathbf{p}_c^n - \tilde{\mathbf{K}}_{gT}\Delta\mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{K}_{gT}\mathbf{T}^n \quad (2.38)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{TT}\Delta\mathbf{T}^{n+1} + \mathbf{K}_{TT}\mathbf{T}^n = \mathbf{f}_T^{n+\theta} - \tilde{\mathbf{K}}_{Tc}\Delta\mathbf{p}_c^{n+1} - \mathbf{K}_{Tc}\mathbf{p}_c^n - \tilde{\mathbf{K}}_{Tg}\Delta\mathbf{p}_g^{n+1} - \mathbf{K}_{Tg}\mathbf{p}_g^n \quad (2.39)$$

avec :

$$\Delta\mathbf{p}_c^{n+1} = \mathbf{p}_c^{n+1} - \mathbf{p}_c^n \quad ; \quad \Delta\mathbf{p}_g^{n+1} = \mathbf{p}_g^{n+1} - \mathbf{p}_g^n \quad ; \quad \Delta\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{T}^n \quad (2.40)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet} = \frac{\mathbf{C}_{\bullet\bullet}}{\Delta t} + \theta\mathbf{K}_{\bullet\bullet} \quad (2.41)$$

où Δt est le pas de temps, l'exposant n fait référence au pas de temps t_n et $n + \theta$ au pas de temps $t_n + \theta\Delta t$. Par souci de brièveté, les matrices $\mathbf{C}_{\bullet\bullet}$ et $\mathbf{K}_{\bullet\bullet}$ ne seront pas explicitées (voir [Dal Pont 2011, Meftah 2011]).

2.2.4 Stratégie de résolution

Le système d'équations non-linéaires (2.37)-(2.39) est résolu à l'aide d'une procédure itérative de type *staggered* (chainé) avec deux niveaux de boucles imbriquées, présentée pour un problème de ce type dans [Dal Pont 2007]. Le premier niveau (itération locale k), concerne le processus itératif de chacune des trois équations résolue par rapport à une variable tandis que les autres sont figées. Le deuxième niveau (itération globale j) concerne l'interaction entre les trois équations (i.e. les trois boucles locales) avec la prise en compte de toutes les variables mises à jour. Un algorithme de type quasi-Newton est utilisé ; chaque équation est résolue pour l'incrément totale $\Delta\mathbf{x}_{\bullet}^{(n+1)}$ (avec $\Delta\mathbf{x}_c = \Delta\mathbf{p}_c$, $\Delta\mathbf{x}_g = \Delta\mathbf{p}_g$, $\Delta\mathbf{x}_T = \Delta\mathbf{T}$) en fixant le point au pas (précédent) convergé (i.e. au pas de temps t_n) et en cumulant les résidus pendant les itérations. Le système d'équations (2.37)-(2.39) peut être écrit dans la forme générique qui suit :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha}^n \Delta\mathbf{x}_{\alpha}^{n+1,j+1,k+1} &= \mathbf{f}_{\alpha}^{n+\theta} - \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^n \mathbf{x}_{\alpha}^n - \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\beta}^n \Delta\mathbf{x}_{\beta}^{n+1,j} - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^n \mathbf{x}_{\beta}^n \\ &\quad - \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\gamma}^n \Delta\mathbf{x}_{\gamma}^{n+1,j} - \mathbf{K}_{\alpha\gamma}^n \mathbf{x}_{\gamma}^n + \bar{\mathbf{R}}_{\alpha}^{n+\theta,j+1,k} \end{aligned} \quad (2.42)$$

avec $(\alpha = c, g, T)$, $(\beta, \gamma \neq \alpha)$, $(\beta \neq \gamma)$ et où $\bar{\mathbf{R}}_{\alpha}^{n+\theta,j+1,k}$ est la somme des résidus des k itérations précédentes. La résolution de ces équations donne :

$$\mathbf{x}_{\alpha}^{n+1,j+1,k+1} = \mathbf{x}_{\alpha}^{(n)} + \Delta\mathbf{x}_{\alpha}^{n+1,j+1,k+1} \quad ; \quad \mathbf{x}_{\alpha}^{n+\theta,j+1,k+1} = \mathbf{x}_{\alpha}^n + \theta\Delta\mathbf{x}_{\alpha}^{n+1,j+1,k+1} \quad (2.43)$$

ce qui permet de trouver le résidu mis à jour $\mathbf{R}_{\alpha}^{n+\theta,j+1,k+1}$:

$$\mathbf{R}_{\alpha}^{n+\theta,j+1,k+1} = \mathbf{f}_{\alpha}^{n+\theta} - \mathbf{f}_{\alpha}^{n+\theta,j+1,k+1} \quad (2.44)$$

Après quelques manipulations, on obtient le résidu cumulé $\bar{\mathbf{R}}_{\alpha}^{n+\theta,j+1,k+1}$, ce qui permet d'aboutir à la forme finale du système d'équations (2.42) :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha}^n \Delta\mathbf{x}_{\alpha}^{n+1,j+1,k+1} = \mathbf{Y}_{\alpha}^{n+\theta,j+1,k} \quad (2.45)$$

à résoudre à chaque itération locale $k + 1$, avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\alpha^{n+\theta, j+1, k} &= \mathbf{f}_\alpha^{n+\theta} + \left(\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha}^n - \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha}^{n+\theta, j+1, k} \right) \Delta \mathbf{x}_\alpha^{n+1, j+1, k} - \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{n+\theta, j+1, k} \mathbf{x}_\alpha^n \\ &\quad - \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\beta}^{n+\theta, j+1, k} \Delta \mathbf{x}_\beta^{n+1, j} - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{n+\theta, j+1, k} \mathbf{x}_\beta^n \\ &\quad - \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\gamma}^{n+\theta, j+1, k} \Delta \mathbf{x}_\gamma^{n+1, j} - \mathbf{K}_{\alpha\gamma}^{n+\theta, j+1, k} \mathbf{x}_\gamma^n \end{aligned} \quad (2.46)$$

Conditions aux limites de type convectif Dans le cas d'un échange de masse convectif des constituants gazeux entre le milieu poreux et l'environnement externe, la linéarisation proposée (Eq.2.32) peut être exploitée pour l'évaluation du terme de droite $\mathbf{f}_\alpha^{n+\theta}$:

$$\mathbf{f}_\alpha^{n+\theta} = \int_{\bar{\Sigma}_p} \mathbf{N}^T \left(\bar{q}_\alpha^{n+\theta} - h_g^{n+\theta} (\rho_\alpha^{n+\theta} - \rho_\alpha^{\infty-n+\theta}) \right) \quad (2.47)$$

avec $\alpha = v, a$ et $\rho_\alpha^{\infty-n+\theta}$ qui correspondent aux densités de la vapeur et de l'air sec à distance infinie. Les densités correspondantes à la frontière $\bar{\Sigma}_p$ avec $t_{ref} = t_n$ deviennent :

$$\rho_\bullet^{n+\theta} \approx \rho_\bullet^n + \theta \left. \frac{\partial \rho_\bullet}{\partial p_c} \right|^n \Delta p_c^{n+1} + \theta \left. \frac{\partial \rho_\bullet}{\partial p_g} \right|^n \Delta p_g^{n+1} + \theta \left. \frac{\partial \rho_\bullet}{\partial T} \right|^n \Delta T^{n+1} \quad (2.48)$$

En remplaçant l'équation (2.48) dans les relations (2.37)-(2.38), le vecteur $\mathbf{f}_\bullet^{n+\theta}$ se réduit à :

$$\mathbf{f}_c^{n+\theta} = \int_{\bar{\Sigma}_p} \mathbf{N}^T \left(\bar{q}_l^{n+\theta} + \bar{q}_v^{n+\theta} + h_g^{n+\theta} (\rho_v^{\infty-n+\theta} - \rho_v^n) \right) d\Sigma \quad (2.49a)$$

$$\mathbf{f}_g^{n+\theta} = \int_{\bar{\Sigma}_p} \mathbf{N}^T \left(\bar{q}_a^{n+\theta} + h_g^{n+\theta} (\rho_a^{\infty-n+\theta} - \rho_a^n) \right) d\Sigma \quad (2.49b)$$

avec les opérateurs $\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}$ dans les equations (2.37)-(2.38) modifiés de façon telle à prendre en compte les conditions aux limites convectives selon :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\beta}^n = \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\beta}^n + \theta \mathbf{K}_{\alpha\beta-Conv}^n \quad (2.50)$$

avec :

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta-Conv}^n = \int_{\bar{\Sigma}_p} h_g^{n+\theta} \left. \frac{\partial \rho_\pi}{\partial p_\tau} \right|^n \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Sigma \quad (2.51)$$

Les indices sont respectivement $\alpha, \beta = c, g, T$ et $\pi, \tau = v, c, g$ selon la relation prise en compte. Ces termes représentent les termes supplémentaires nécessaires pour régler la singularité des opérateurs $\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}$.

Algorithme de résolution La stratégie de résolution de type *staggered* peut être résumée dans l'algorithme qui suit :

1	Initialisation : $\mathbf{T}^{(0)}, \mathbf{p}_c^{(0)}, \mathbf{p}_g^{(0)}$
2	Début boucle temps (n)
2.1	Calculer : $\mathbf{K}_{\bullet\bullet}^{(k,n)}, \tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(k,n)}$ et $\mathbf{f}_\alpha^{n+\theta}$
2.2	Premier résidu : $\mathbf{Y}_\alpha^{(n+\theta)} = \mathbf{f}_\alpha^{n+\theta} - \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{(n)} \mathbf{p}_\alpha^{(n)} - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(n)} \mathbf{p}_\beta^{(n)} - \mathbf{K}_{\alpha\gamma}^{(n)} \mathbf{p}_\gamma^{(n)}$
2.3	Début boucle d'interaction (j)
2.3.1	Début boucle température (k)
	– Résoudre : $\tilde{\mathbf{K}}_{TT}^{(n)} \Delta \mathbf{T}^{(n+1,j+1,k+1)} = \mathbf{Y}_T^{(n+\theta,j+1,k)}$
	– Update $\mathbf{T}^{(n+1,j+1,k+1)}$ et $\mathbf{T}^{(n+\theta,j+1,k+1)}$
	– Si convergence locale \rightarrow <i>Quitter boucle température</i>
	– Calculer $\mathbf{K}_{\bullet\bullet}^{(n+\theta,j+1,k+1)}$ et $\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(n+\theta,j+1,k+1)}$
	– Nouveau résidu (Eq.2.46) : $\mathbf{f}_T^{(n+\theta,j+1,k+1)} \rightarrow \mathbf{Y}_T^{(n+\theta,j+1,k+1)}$
	– $k = k + 1 \rightarrow$ <i>retour à 2.3.1</i>
2.3.2	Fin boucle température
2.3.3	Update : $\Delta \mathbf{T}^{(n+1,j+1)} = \Delta \mathbf{T}^{(n+1,j+1,k+1)}, \mathbf{T}^{(n+\theta,j+1)} = \mathbf{T}^{(n)} + \theta \Delta \mathbf{T}^{(n+1,j+1)}$
2.3.4	Début boucle capillaire (k)
	– Résoudre : $\tilde{\mathbf{K}}_{cc}^{(n)} \Delta \mathbf{p}_c^{(n+1,j+1,k+1)} = \mathbf{Y}_c^{(n+\theta,j+1,k)}$
	– Update $\mathbf{p}_c^{(n+1,j+1,k+1)}$ et $\mathbf{p}_c^{(n+\theta,j+1,k+1)}$
	– Si convergence locale \rightarrow <i>Quitter boucle capillaire</i>
	– Calculer $\mathbf{K}_{\bullet\bullet}^{(n+\theta,j+1,k+1)}$ et $\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(n+\theta,j+1,k+1)}$
	– Nouveau résidu (Eq.2.46) : $\mathbf{f}_c^{(n+\theta,j+1,k+1)} \rightarrow \mathbf{Y}_c^{(n+\theta,i+1,j+1)}$
	– $k = k + 1 \rightarrow$ <i>retour à 2.3.4</i>
2.3.5	Fin boucle capillaire
2.3.6	Update : $\Delta \mathbf{p}_c^{(n+1,j+1)} = \Delta \mathbf{p}_c^{(n+1,j+1,k+1)}, \mathbf{p}_c^{(n+\theta,j+1)} = \mathbf{p}_c^{(n)} + \theta \Delta \mathbf{p}_c^{(n+1,j+1)}$
2.3.7	Début boucle gaz (k)
	– Résoudre : $\tilde{\mathbf{K}}_{gg}^{(n)} \Delta \mathbf{p}_g^{(n+1,j+1,k+1)} = \mathbf{Y}_g^{(n+\theta,j+1,k)}$
	– Update $\mathbf{p}_g^{(n+1,j+1,k+1)}$ et $\mathbf{p}_g^{(n+\theta,j+1,k+1)}$
	– Si convergence locale \rightarrow <i>Quitter boucle gaz</i>
	– Calculer $\mathbf{K}_{\bullet\bullet}^{(n+\theta,j+1,k+1)}$ et $\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(n+\theta,j+1,k+1)}$
	– Nouveau résidu (Eq.2.46) : $\mathbf{f}_g^{(n+\theta,j+1,k+1)} \rightarrow \mathbf{Y}_g^{(n+\theta,i+1,j+1)}$
	– $k = k + 1 \rightarrow$ <i>retour à 2.3.7</i>
2.3.8	Fin boucle capillaire
2.3.9	Update : $\Delta \mathbf{p}_g^{(n+1,j+1)} = \Delta \mathbf{p}_g^{(n+1,j+1,k+1)}, \mathbf{p}_g^{(n+\theta,j+1)} = \mathbf{p}_g^{(n)} + \theta \Delta \mathbf{p}_g^{(n+1,j+1)}$
2.3.10	Si convergence globale \rightarrow <i>Quitter boucle d'interaction</i>
2.3.11	Calculer $\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(n+\theta,j+1)}$ et $\mathbf{K}_{\bullet\bullet}^{(n+\theta,j+1)}$
2.3.12	Nouveau résidu : $\mathbf{Y}_\alpha^{(n+\theta,j+1)} = \mathbf{f}_\alpha^{(n+\theta)} + \left(\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha}^{(n)} - \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha}^{(n+\theta,j+1)} \right) \Delta \mathbf{p}_\alpha^{(n+1,j+1)} - \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{(n+\theta,j+1)} \mathbf{p}_\alpha^{(n)} - \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\beta}^{(n+\theta,j+1)} \Delta \mathbf{p}_\beta^{(n+1,j+1)} - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(n+\theta,j+1)} \mathbf{p}_\beta^{(n)}$
2.3.13	$j = j + 1 \rightarrow$ <i>retour à 2.3</i>
2.4	Fin interaction boucle
3	Update : $\Delta \mathbf{x}_\bullet^{(n+1)} = \Delta \mathbf{x}_\bullet^{(n+1,i+1)}, \mathbf{x}_\bullet^{(n+1)} = \mathbf{x}_\bullet^{(n)} + \Delta \mathbf{x}_\bullet^{(n+1)}$
4	$n = n + 1 \rightarrow$ <i>goto 2</i>
5	Fin boucle temps

FIGURE 2.1 – Algorithme itérative de type staggered - cas EF

Une procédure de type *staggered*, proposée par [Dal Pont 2007] et reprise par la suite dans [Dal Pont 2011, Meftah 2011], permet de maintenir un couplage fort entre les différents problèmes (la boucle d'interaction permet d'estimer le *feedback* d'un problème sur les autres et vice-versa). En outre, elle peut facilement être adaptée pour introduire des nouveaux problèmes. Il suffit d'intégrer les nouvelles équations discrétisées du nouveau problème tout en intervenant d'une manière minimale sur la structure de l'algorithme. Le système peut facilement évoluer vers des nouveaux couplages et une description plus étendue des problèmes multi-physiques : on peut facilement imaginer, par exemple, le couplage avec des équations de transport d'espèces polluantes -chlorures- ou la mécanique, comme on le verra dans la suite.

2.3 Formulation discrétisée aux volumes finis

On propose dans la suite la discrétisation de problèmes I et II à l'aide de la méthode des Volumes Finis (VF). Par souci de simplicité, seulement la partie hydraulique du problème sera prise en compte. Les VF se basent directement sur la forme forte des équations de conservation et, par rapport aux Éléments Finis, la méthode est conservative et donc parfaitement adaptée à la résolution de problèmes de transport en milieu poreux. Une formulation aux volumes finis est présentée dans [Dal Pont 2004a, Dal Pont 2004b]; toutefois, on gardera ici l'approche proposée dans [Meftah 2010], où le développement du modèle est très proche à celui présenté dans la section précédente.

2.3.1 Discrétisation spatiale

On considère un domaine unidimensionnel $\Omega = \{x / x \in (x_w^b, x_e^b)\}$ avec une frontière x_w^b et x_e^b . Ce domaine est discrétisé aux volumes finis et en utilisant un schéma centré sur les noeuds (Fig.2.2). On définit d'abord la position des noeuds et dans un deuxième temps on construit les faces du volume de contrôle à mi-distance entre les noeuds. Pour chaque volume fini centré (aux noeuds) (k) et de frontière (w, e), on définit les quantités suivantes (Fig.2.2) :

$$\delta x_w = x_k - x_{k-1} \quad ; \quad \delta x_e = x_{k+1} - x_k \quad (2.52)$$

$$x_w = x_k - \frac{\Delta x_k}{2} \quad ; \quad x_e = x_k + \frac{\Delta x_k}{2} \quad (2.53)$$

avec x_k la position du noeud (k), x_w et x_e sont les positions de la frontière ouest (w) et est (e) du volume fini et $\Delta x_k = x_e - x_w$ la taille du volume fini.

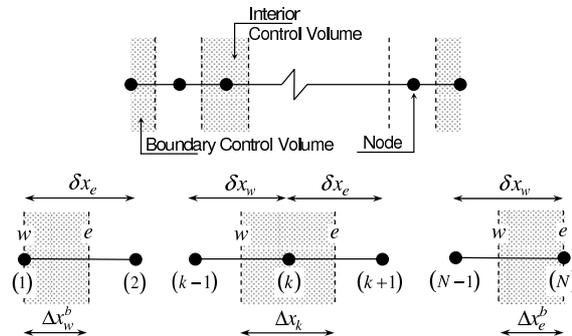


FIGURE 2.2 – Discrétisation aux Volumes Finis - Paramètres géométriques

2.3.1.1 Volume de contrôle interne

Pour un volume fini donné $[x_w, x_e]$ centré au noeud (k) d'abscisse x_k , la procédure de discrétisation prévoit l'intégration des equations de conservations sur le volume :

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{\partial m_\pi}{\partial t} dx + \int_{x_w}^{x_e} \frac{\partial J_{\pi-s}}{\partial x} dx = \int_{x_w}^{x_e} \dot{m}_{\pi-r} dx \quad (2.54)$$

avec $\dot{m}_{\pi-r}$ le terme source, fonction de l'équation considérée. Après l'intégration et la division par Δx_k , on obtient :

$$\frac{d\bar{m}_\pi}{dt} + \frac{J_{\pi-s}^{(e)} - J_{\pi-s}^{(w)}}{\Delta x_k} = \frac{d\bar{m}_{\pi-r}}{dt} \quad (2.55)$$

avec :

$$\frac{d\bar{m}_\pi}{dt} = \frac{1}{\Delta x_k} \int_{x_w}^{x_e} \frac{\partial m_\pi}{\partial t} dx = \frac{1}{\Delta x_k} \int_{x_w}^{x_e} \left(\frac{\partial m_\pi}{\partial p_c} \dot{p}_c + \frac{\partial m_\pi}{\partial p_g} \dot{p}_g \right) dx \quad (2.56)$$

étant la variation de la masse moyenne \bar{m}_π . Ce terme peut être approximé comme suit :

$$\frac{d\bar{m}_\pi}{dt} \approx \left. \frac{\partial m_\pi}{\partial p_c} \right|^{(k)} \dot{p}_c^{(k)} + \left. \frac{\partial m_\pi}{\partial p_g} \right|^{(k)} \dot{p}_g^{(k)} \quad (2.57)$$

le noeud (k) étant centré sur la cellule.

Les flux de masse aux frontières du volume (selon les relations (2.11) et (2.15)), peuvent être explicités comme suit (frontière e , plus de détails dans [Meftah 2010]) :

$$J_{l-s}^{(e)} \approx -K \left. \frac{\rho_l k_{rl}}{\mu_l} \right|^{(e)} \frac{p_l^{(k+1)} - p_l^{(k)}}{\delta x_e}, \quad J_{g-s}^{(e)} \approx -K \left. \frac{\rho_g k_{rg}}{\mu_g} \right|^{(e)} \frac{p_g^{(k+1)} - p_g^{(k)}}{\delta x_e} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} J_{\pi-s}^{(e)} &\approx -K \left. \frac{\rho_\pi k_{rg}}{\mu_g} \right|^{(e)} \frac{p_g^{(k+1)} - p_g^{(k)}}{\delta x_e} \mp D \frac{M_v M_a}{RT M_g} \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} - \frac{p_v}{p_g} \right) \left. \right|^{(e)} \frac{p_g^{(k+1)} - p_g^{(k)}}{\delta x_e} \\ &\pm D \frac{M_v M_a \rho_v}{RT M_g \rho_l} \left. \right|^{(e)} \frac{p_c^{(k+1)} - p_c^{(k)}}{\delta x_e} \end{aligned} \quad (2.59)$$

on note que les termes $\bullet^{(\gamma)}$ avec $\gamma = k$ sont calculés à partir de valeurs de (p_c, p_g) au noeud (k) tandis que $\gamma = w, e$ sont évalués avec (p_c, p_g) aux frontières (w, e) .

Enfin, on fait l'approximation suivante pour le terme source moyen :

$$\frac{d\bar{m}_{\pi-r}}{dt} = \frac{1}{\Delta x_k} \int_{x_w}^{x_e} \frac{\partial m_{\pi-r}}{\partial t} \approx \left. \frac{\partial m_{\pi-r}}{\partial t} \right|^{(k)} \quad (2.60)$$

ce dernier est nécessaire pour le problème II avec $m_{l-r} = -m_{v-r} = m_{vap}$.

2.3.1.2 Volume de contrôle à la frontière

Pour ces volumes de contrôle, les noeuds se trouvent à la frontière du domaine (Fig.2.2). L'intégration des equations de conservation sur ces deux volumes de contrôle prend la forme suivante (frontière e) :

$$\frac{d\bar{m}_\pi}{dt} - \frac{J_{\pi-s}^{(w)} - J_{\pi-s}^{(e-b)}}{\Delta x_e^b} = \frac{d\bar{m}_{\pi-r}}{dt} \quad (2.61)$$

avec les conditions aux limites (2.29)-(2.30) introduite pour expliciter les flux à la frontière $J_{\pi-s}^{(e-b)}$:

$$J_{l-s}^{(e-b)} = -\bar{q}_l^{(e-b)} \quad (2.62)$$

$$J_{\pi-s}^{(e-b)} = -\left(\bar{q}_\pi^{(e-b)} - h_\pi \left(\rho_\pi^{(e-b)} - \rho_\pi^{(e-\infty)}\right)\right) \quad (2.63)$$

On remarque que pour des conditions de type Dirichlet les équations ne doivent pas être résolues car la solution est déjà connue aux noeuds. Dans ce cas, l'équation (2.61) peut être utilisé pour évaluer à posteriori les flux $J_{\pi-s}^{(w-b)}$ et $J_{\pi-s}^{(e-b)}$.

2.3.2 Discrétisation temporelle

D'après l'équation (2.57), on considère, à chaque intervalle $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ (avec Δt le pas de temps), la discrétisation suivante :

$$\frac{d\bar{m}_\pi}{dt} \approx \left. \frac{\partial m_\pi}{\partial p_c} \right|^{(k)} \frac{\Delta p_c^{(k,n+1)}}{\Delta t} + \left. \frac{\partial m_\pi}{\partial p_g} \right|^{(k)} \frac{\Delta p_g^{(k,n+1)}}{\Delta t} \quad (2.64)$$

avec $n+1$ qui fait référence au temps t_{n+1} et $\Delta p_\beta^{(k,n+1)}$ l'incrément de pression ($\beta = c, g$) :

$$\Delta p_\beta^{(k,n+1)} = p_\beta^{(k,n+1)} - p_\beta^{(k,n)} \quad (2.65)$$

Les termes de flux qui englobent de dérivés spatiales sont estimée avec la θ -méthode aux temps $t_{n+\theta} = t_n + \theta\Delta t$ avec les pressions correspondantes ($0 \leq \theta \leq 1$) :

$$p_\beta^{(k,n+\theta)} = p_\beta^{(k,n)} + \theta\Delta p_\beta^{(k,n+1)} \quad (2.66)$$

Les détails peuvent être retrouvés dans [Mefteh 2010].

2.3.3 Stratégie de résolution

Les équations à résoudre : air (2.1-air) et eau (2.18) pour le problème I, fluide (2.25) et gaz (2.21) pour le problème II, peuvent être écrites dans la forme compacte qui suit :

$$\hat{\mathbf{K}}_{cc}\Delta\mathbf{p}_c^{(n+1)} + \hat{\mathbf{K}}_{cg}\Delta\mathbf{p}_g^{(n+1)} = \mathbf{f}_c^{(n+\theta)} - \mathbf{K}_{cc}\mathbf{p}_c^{(n)} - \mathbf{K}_{cg}\mathbf{p}_g^{(n)} \quad (2.67)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{gg}\Delta\mathbf{p}_g^{(n+1)} + \hat{\mathbf{K}}_{gc}\Delta\mathbf{p}_c^{(n+1)} = \mathbf{f}_g^{(n+\theta)} - \mathbf{K}_{gg}\mathbf{p}_g^{(n)} - \mathbf{K}_{gc}\mathbf{p}_c^{(n)} \quad (2.68)$$

avec la matrice creuse $\hat{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}$ définie comme :

$$\hat{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{\bullet\bullet 11}^{(1)} & \hat{K}_{\bullet\bullet 12}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hat{K}_{\bullet\bullet 11}^{(2)} & \hat{K}_{\bullet\bullet 12}^{(2)} & \hat{K}_{\bullet\bullet 13}^{(2)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{K}_{\bullet\bullet 11}^{(k)} & \hat{K}_{\bullet\bullet 12}^{(k)} & \hat{K}_{\bullet\bullet 13}^{(k)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{K}_{\bullet\bullet 11}^{(N-1)} & \hat{K}_{\bullet\bullet 12}^{(N-1)} & \hat{K}_{\bullet\bullet 13}^{(N-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{K}_{\bullet\bullet 11}^{(N)} & \hat{K}_{\bullet\bullet 12}^{(N)} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

et les sous-matrices $\hat{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(\bullet)}$ et le terme de droite $\mathbf{f}_\bullet^{(n+\theta)}$:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(1)} = \frac{\mathbf{C}_{\bullet\bullet}^{(1)}}{\Delta t} + \theta\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(1)} ; \quad \hat{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(N)} = \frac{\mathbf{C}_{\bullet\bullet}^{(N)}}{\Delta t} + \theta\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(N)} , \quad \hat{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(k)} = \frac{\mathbf{C}_{\bullet\bullet}^{(k)}}{\Delta t} + \theta\mathbf{K}_{\bullet\bullet}^{(k)} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{f}_{\bullet}^{(n+\theta)} = \left(f_{\bullet}^{(1,n+\theta)} \quad \dots \quad f_{\bullet}^{(k,n+\theta)} \quad \dots \quad f_{\bullet}^{(N,n+\theta)} \right)^T \quad (2.71)$$

pour $k = 2, \dots, N-1$. On remarque que dans le cas d'une condition aux limites de type convective, l'opérateur globale $\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}$ est bien conditionné grâce à la modification des sous-opérateurs $\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(1)}$ et $\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(N)}$ dans lesquels un terme convective apparait.

Dans le cas du problème II, le calcul du deuxième membre $\mathbf{f}_{\bullet}^{(n+\theta)}$ demande la définition du vecteur taux d'évaporation $\Delta\bar{\mathbf{m}}_{vap}^{(n+\theta)}$. Ce dernier est estimé à partir de la forme discrétisée de l'équation de conservation de la masse liquide (Eq.2.1-liquide) :

$$\frac{\Delta\bar{\mathbf{m}}_{vap}^{(n+\theta)}}{\Delta t} = \tilde{\mathbf{K}}_{vc}\Delta\mathbf{p}_c^{(k,n+1)} + \tilde{\mathbf{K}}_{vg}\Delta\mathbf{p}_g^{(k,n+1)} + \mathbf{K}_{vc}\mathbf{p}_c^{(n)} + \mathbf{K}_{vg}\mathbf{p}_g^{(n)} + \check{\mathbf{f}}_v^{(n+\theta)} \quad (2.72)$$

ou de l'équation de conservation de la vapeur (Eq.2.1-vapeur) :

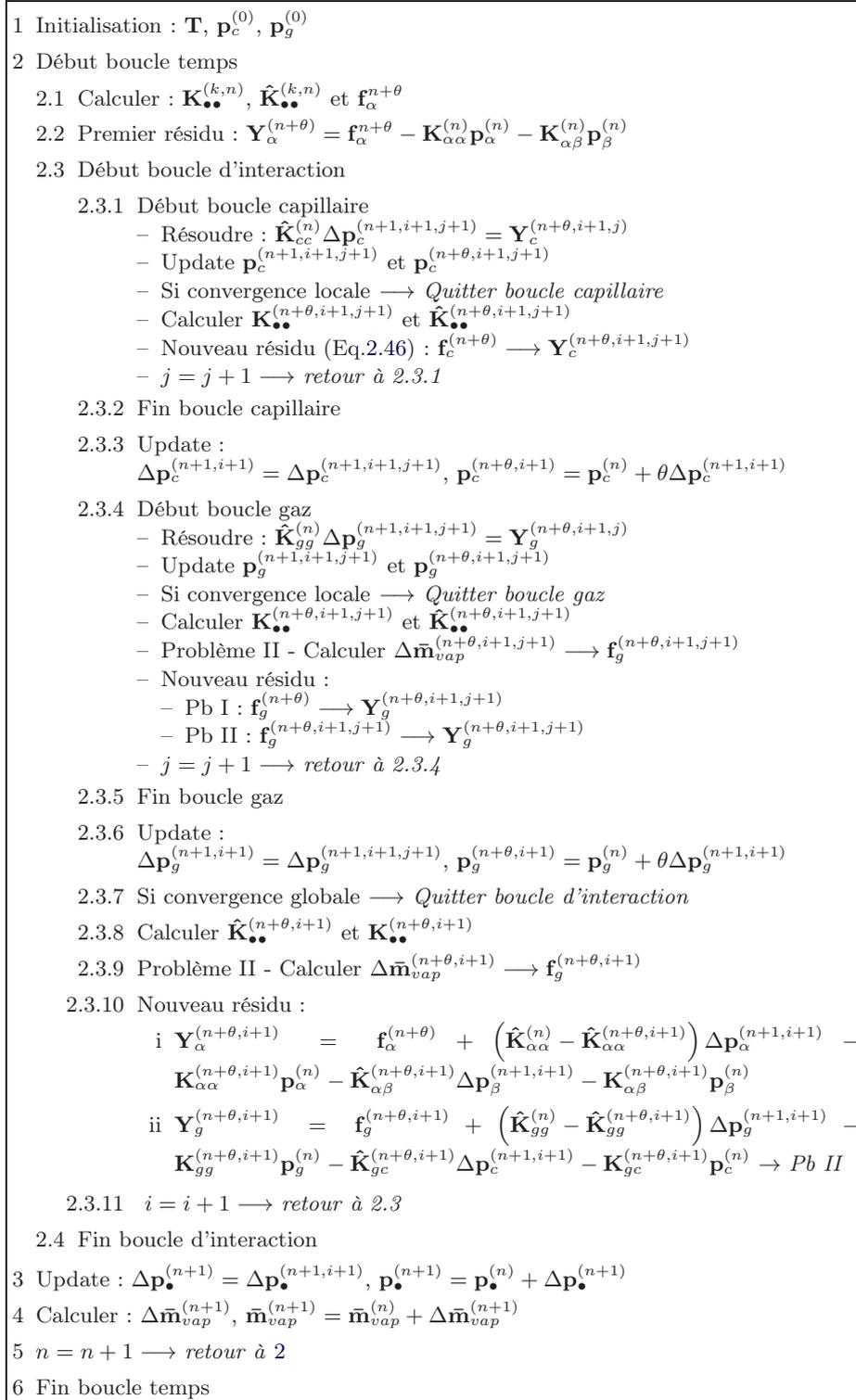
$$\frac{\Delta\bar{\mathbf{m}}_{vap}^{(n+\theta)}}{\Delta t} = -\tilde{\mathbf{K}}_{lc}\Delta\mathbf{p}_c^{(k,n+1)} - \tilde{\mathbf{K}}_{lg}\Delta\mathbf{p}_g^{(k,n+1)} - \mathbf{K}_{lc}\mathbf{p}_c^{(n)} - \mathbf{K}_{lg}\mathbf{p}_g^{(n)} - \check{\mathbf{f}}_l^{(n+\theta)} \quad (2.73)$$

avec les matrices $\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}$ et le vecteur $\check{\mathbf{f}}_{\bullet}$ construites en utilisant, respectivement, les sous-matrices $\mathbf{C}_{\bullet\bullet}^{(k)}$ et $\mathbf{K}_{\bullet\bullet}^{(k)}$ et les composantes $\check{f}_{\bullet}^{(k,n+\theta)}$, dérivés pour chaque volume de contrôle k et en utilisant la même approche de discrétisation (Eqs.2.67-2.68) :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\bullet\bullet}^{(k)} = \frac{\mathbf{C}_{\bullet\bullet}^{(k)}}{\Delta t} + \theta\mathbf{K}_{\bullet\bullet}^{(k)} \text{ pour } k = 1, \dots, N \quad (2.74)$$

$$\check{\mathbf{f}}_{\bullet}^{(n+\theta)} = \left(\check{f}_{\bullet}^{(1,n+\theta)} \quad \dots \quad \check{f}_{\bullet}^{(k,n+\theta)} \quad \dots \quad \check{f}_{\bullet}^{(N,n+\theta)} \right)^T \quad (2.75)$$

Le jeu d'équations non-linéaires (2.67)-(2.68) est résolu à l'aide d'une procédure de type *staggered* identique à celle proposée au paragraphe 2.2.4. La figure 2.3 donne l'algorithme itérative tout en prenant en compte le problèmes I et II.

FIGURE 2.3 – Algorithme itérative de type *staggered* - cas VF

2.4 Exemples d'application du modèle

Dans la suite, on présente des exemples de validation pour les deux modélisations proposées. On présentera d'abord une comparaison numérique-expérimentale, afin de démontrer la capacité reproductrice de l'approche en terme de profils de température, pression du gaz et perte de masse. Ensuite, on posera l'attention sur trois exemples purement numériques : le premier est consacré à la présentation d'un chargement de type LOCA (*Loss-of-Coolant Accident*) et à la validation avec un code de référence. Le deuxième a comme objectif d'explorer l'influence du coefficient d'échange convectif en s'appuyant sur la linéarisation de la condition au limite de type convective proposée précédemment. Le dernier servira pour comparer, dans le cadre de la formulation VF, les problèmes I et II. Enfin, on proposera des perspectives pour ce type de travail, notamment au travers d'une modélisation tri-dimensionnelle prenant en compte l'hétérogénéité du matériau via une distribution aléatoire des propriétés. L'aspect hétérogène du béton est souvent négligé dans les descriptions thermo-hydrauliques du comportement du matériau cimentaire. Cependant, il est bien connu que la physique qui règle le comportement de ce milieu poreux est fortement affectée par l'aléa de sa structure (à différentes échelles). Le travail proposé constitue un premier essai afin d'estimer le rôle de l'hétérogénéité sur les aspects plus liés à la durabilité du matériau. Ce travail sera également abordé dans le chapitre suivant : en effet il nous semble essentiel d'introduire et de coupler la mécanique aux aspects thermo-hydrauliques afin de prendre convenablement en compte la durabilité d'un matériau tel que le béton. Les exemples présentés sont issus des plusieurs publications [Dal Pont 2007, Meftah 2010, Meftah 2011, Dal Pont 2011].

2.4.1 Comparaison numérique-expérimentale

2.4.1.1 Cas d'un séchage isotherme

On présente dans ce qui suit un exemple de séchage 1D dont les résultats de référence sont issus de la littérature. L'objectif est celui d'analyser les capacités reproductrices du modèle. Dans ce cas, on limitera la présentation, compte tenu de la simplicité de la configuration géométrique, à l'approche VF (les résultats issus de l'approche EF se superposent aux résultats VF).

D'après [Mainguy 1999], un spécimen cylindrique de 10 cm de hauteur et 16 cm de diamètre est soumis à un séchage à la face supérieure et inférieure, avec la surface latérale isolée. Le problème est donc mono-dimensionnel sur l'axe du cylindre. La saturation initiale de l'échantillon est $S_{l-0} = 80\%$, la température initiale et l'humidité relative sont $T = 20^\circ C$ et $RH = 60\%$. Les détails des paramètres sont donnés par [Mainguy 1999].

La figure 2.4 donne les résultats en termes d'évolution temporelle de la perte de masse pour une pâte de ciment (CP) et un béton ordinaire (OC), ce qui souligne un très bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux.

2.4.1.2 Cas d'une montée en température

La validation du modèle est complétée par un deuxième exemple issu de la maquette expérimentale proposée par [Kalifa 2000]. Un spécimen prismatique de béton ($30 \times 30 \times 12 \text{ cm}^3$) est chauffé sur un coté tandis que la face opposée est gardée à température ambiante de $20^\circ C$ et les faces latérales sont isolées : on obtient ainsi un flux unidirectionnel. Au cours de l'expérience, la perte de masse, la température et la pression du gaz (ces deux dernières à de distance de 10, 20, 30, 40 and 50 mm de la face chauffée) ont été mesurées.

Le spécimen 1D a été représenté par un maillage EF 1D, à l'aide de 75 éléments de taille progressive.

Les conditions aux limites appliqués sont cohérentes avec l'expérience. La face chauffée est soumise à un chargement convectif et radiatif avec une température externe de $600^\circ C$, l'humidité externe

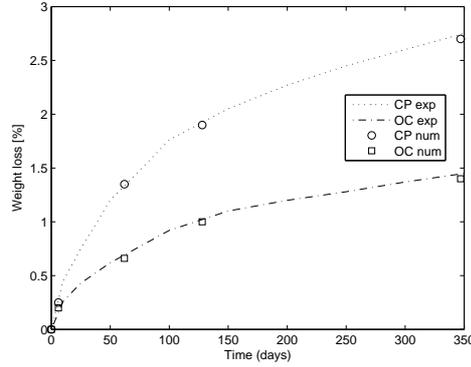


FIGURE 2.4 – Perte de masse numérique et expérimentale pour une pâte de ciment (CP) et un béton ordinaire (OC)

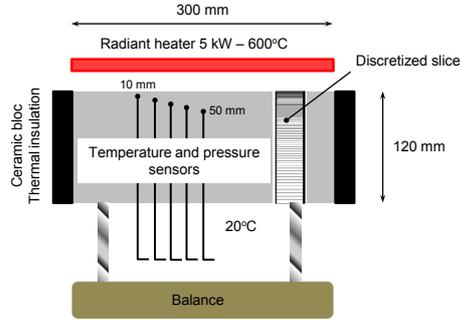


FIGURE 2.5 – Maquette de Kalifa

est du $RH = 50\%$ et la pression du gaz est égale à p_{atm} . Les caractéristiques du béton sont celles typiques d'un béton de type M30 (voir [Mefteh 2011] pour plus de détails).

Les figures 2.6(a), 2.6(b) et 2.6(c) donnent respectivement la comparaison expérimentale-numérique de l'évolution des profils de température, pression du gaz et perte de masse. On remarquera que la comparaison est satisfaisante jusqu'au pic de pression, tandis qu'au delà la comparaison est moins satisfaisante. Ceci est lié au fait qu'au pic de pression on peut associer la formation de microfissures [Dal Pont 2005] et que le modèle TH n'intègre pas cette composante. Cette manque peut aussi expliquer la sous-estimation de la perte de masse (voir fig. 2.6(c)) dans les phases finales de l'expérience.

2.4.2 Analyses numériques

2.4.2.1 Accident de type LOCA

On présente un dernier cas test purement numérique issu d'une situation accidentelle dans un réacteur nucléaire de type LOCA ; on remarquera que l'enceinte de la centrale nucléaire de Fukushima en 2011 a été soumise à une sollicitation de ce type. Toutefois, l'intérêt d'une telle simulation reste purement académique (validation par rapport à un code de référence), d'autant plus que les distributions des températures et pressions dans le béton ne sont pas connues. Ce travail fait partie d'un contrat de recherche en collaboration avec le CEA et l'Université de Padoue pour l'implantation

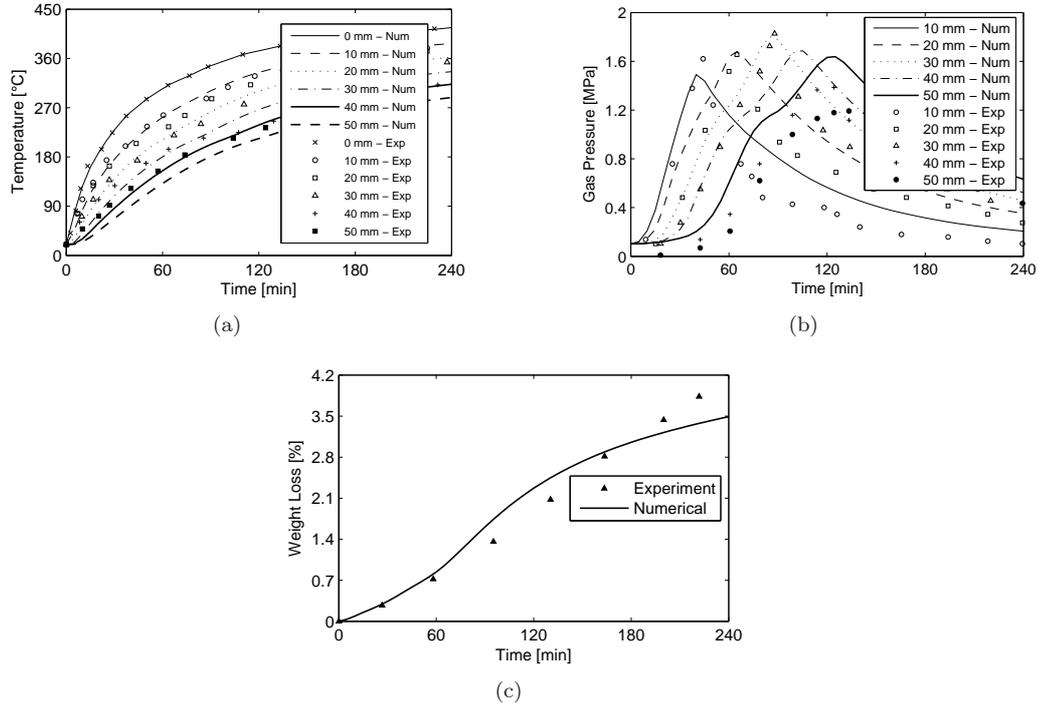


FIGURE 2.6 – Températures (a), pressions du gaz (b) et perte de masse (c) : numérique vs. expérimentale

du modèle TH(M) dans CAST3M [Dal Pont 2006a]; les résultats issus du contrat ont été présentés dans des publications [Dal Pont 2007, Dal Pont 2011].

Une paroi en béton a été soumise sur un côté à un chargement thermique (croissant jusqu'à la température d'environ 160°C , à une vitesse $\dot{\vartheta} \simeq 22.5\text{K}/\text{min}$ jusqu'à $t=300\text{s}$ et ensuite $\dot{\vartheta} \simeq 0.036\text{K}/\text{min}$: voir fig.2.7) et hydraulique (avec une pression finale d'environ 0.8MPa , à une vitesse $\dot{p}_g \simeq 65\text{kPa}/\text{min}$ jusqu'à $t=300\text{s}$ et ensuite $\dot{p}_g \simeq 290\text{Pa}$: voir fig.2.7).

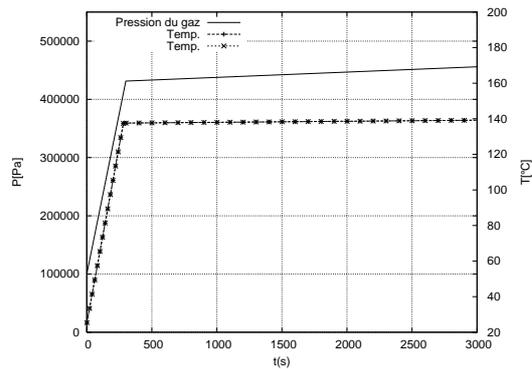


FIGURE 2.7 – Pression de vapeur et température imposées

Dans la suite on donne les résultats numériques et une comparaison entre CAST3M et Hitecosp [Corsi 2006], utilisé ici comme code de référence. Les résultats numériques sont présentés aux pas de temps $t = 300\text{s}, 9000\text{s}, 27000\text{s}, 36000\text{s}$ pour les températures (fig.2.8(a)) et les pressions du gaz

(fig.2.8(b)).

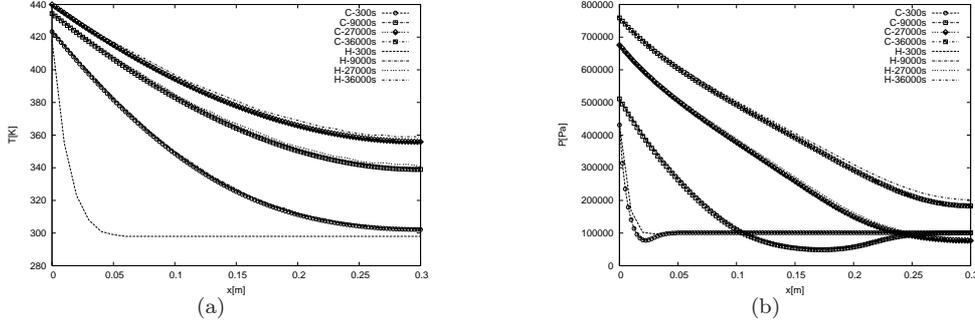


FIGURE 2.8 – Évolution des températures (a) et pressions du gaz (b)

2.4.2.2 Discussion sur les conditions de type convectif

L'analyse qui suit a été menée en utilisant soit la formulation EF [Meftah 2011] soit la formulation VF [Meftah 2010]. Les résultats entre les deux formulations sont strictement identiques. On considère un mur de 60 cm d'épaisseur soumis à un séchage aux deux extrémités. En raison de la géométrie et des conditions aux limites appliquées, on considère que son comportement soit 1D. Pour ces raisons, on ne prend en compte que la moitié du mur, discrétisée à l'aide d'un maillage progressif de 100 éléments. Les conditions aux limites sont détaillées dans [Meftah 2010]. Les résultats issus du modèle sont présentés dans les figures 2.9(a) et 2.9(b).

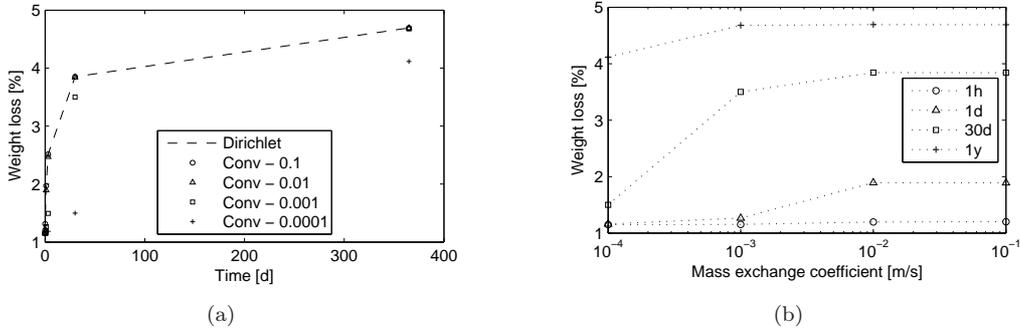


FIGURE 2.9 – Évolution temporelle de la perte de masse (a) et perte de masse vs. h_g à différents temps (b)

- La figure 2.9(a) donne l'évolution temporelle de la perte de masse globale quand on considère :
- des conditions aux limites convectives (vapeur-air) avec différentes valeurs du coefficient d'échange h_g (0.0001, 0.001, 0.01 et 0.1). Les flux imposés sont nuls ($\bar{q}_v = \bar{q}_a = 0$).
 - des conditions de type Dirichlet (Eqs.(2.26)-(2.27)), ce qui est équivalent à imposer $h_g \rightarrow \infty$.

La figure 2.9(b) donne la perte de masse vs. le coefficient h_g à différents temps (1 heure, 1 jour, 30 jours et 1 an).

Ces résultats mettent en évidence l'existence d'un seuil du coefficient h_g au dessus duquel les résultats sont équivalents à l'imposition d'une condition de type Dirichlet. En effet on remarque que la perte de masse dans la figure 2.9(b) est constante pour des valeurs de h_g supérieures à $10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et

que dans la figure 2.9(a) les résultats pour de magnitudes de h_g supérieurs au seuil sont pratiquement coïncidents.

En conclusion, pour un matériau donné, il existe une intervalle assez étendue du coefficient d'échange qui ne permet pas d'obtenir des résultats réalistes. Autrement dit, des valeurs de h_g au dessus de cet intervalle sont pratiquement équivalents à une condition de type Dirichlet, ce qui implique un séchage instantané de la surface. D'autre part, des valeurs trop petits se traduisent par un processus de séchage excessivement long.

2.4.2.3 Comparaison des problèmes I et II

La même configuration du cas précédent est proposée pour comparer les résultats issus de la formulation aux volumes finis, en utilisant les jeux de variables proposés pour le problème I et le problème II. Par souci de breveté, on ne propose ici que le cas de conditions aux limites de type Neumann. Une analyse plus complète est proposée par [Meftah 2010].

Les résultats sont présentés dans les figures 2.10(a) et 2.10(b) pour les pressions capillaire et du gaz. Les figures soulignent que les deux algorithmes donnent de résultats coïncidents, tandis que le problème II est environ 5% plus rapide sur une machine de calcul IA-32. Ceci est probablement lié au fait que les termes de Fick dans le problème II n'apparaissent que dans le terme d'évaporation (voir sec.2.1.3) qui concerne seulement l'équation de conservation de la masse gazeuse (voir fig.2.1). Ce terme est ici traité comme un terme source (terme de droite de l'équation de conservation du gaz). Le jeu des variables issu du problème II n'a pas été pourtant retenu car des problèmes de convergence (qui n'ont pas été explorés ultérieurement) ont été observés.

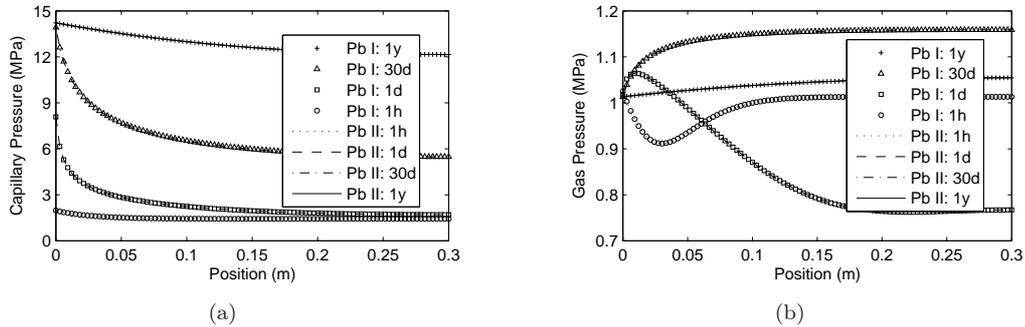


FIGURE 2.10 – Profils de pressions capillaire et du gaz

2.5 Perspectives : introduction d'une approche probabiliste dans les phénomènes de transfert

Les milieux poreux tels que les béton et les sols sont par nature de matériaux hétérogènes caractérisés par une forte dispersion des paramètres qui gèrent le comportement thermo-hydraulique (et mécanique, comme on le verra plus loin). A cause de l'hétérogénéité, le comportement TH(M) est nécessairement tridimensionnel [Boulay 2009], ce qui demande le développement d'outils numériques ad-hoc. On propose donc dans ce qui suit une application 3D du modèle à un cas de séchage à 80 °C d'un spécimen prismatique ($4 \times 4 \times 16 \text{ cm}^3$).

Ce travail a fait l'objet d'une publication [Meftah 2011]. Par souci de bréveté, on présentera dans la suite que les cas d'un séchage appliqué sur toutes les faces de l'éprouvette. Cette dernière est modélisée par un-huitième (à cause de la symétrie de la configuration) avec 31250 éléments cubiques

à 8-noeuds. La simulation est menée jusqu'à la stabilisation de la perte de masse, i.e. 7 heures. Le béton utilisée est un béton ordinaire classique (M30) avec des conditions initiales standard.

Dans ce premier exemple, l'hétérogénéité est prise en compte au travers d'une distribution aléatoire de la perméabilité intrinsèque. D'autres paramètres peuvent être l'objet d'une distribution aléatoire mais, dans un premier temps, on limite l'analyse à la perméabilité intrinsèque, étant parmi les paramètres principaux vis-à-vis des phénomènes de transport [Dal Pont 2004c].

On considère un intervalle de dispersion de deux ordres de grandeur $[K_{min}, K_{max}]$ ce qui peut représenter la variation de mesures de perméabilité pour ce type de matériau. On considère en outre deux fonctions de distribution de probabilité (PDF) $\varphi(K)$ de la perméabilité intrinsèque K : une loi log-uniforme et une loi log-normale, donnés respectivement par :

$$\varphi^{LU}(K) = \frac{1}{(\ln(K_{max}) - \ln(K_{min}))K} \quad (2.76a)$$

$$\varphi^{LN}(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n K} \exp\left(-\frac{(\ln(K) - \ln(\bar{K}_G))^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (2.76b)$$

avec $\bar{K}_G = \sqrt{K_{min}K_{max}}$ la moyenne géométrique et σ_n l'écart type de la distribution normal logarithmique de la perméabilité $\ln(K)$. Les exposants \bullet^{LU} et \bullet^{LN} font référence, respectivement aux cas log-uniforme et log-normale.

Les probabilités $P(K \leq K_p)$ auxquelles les valeurs de K tirés sont inférieurs ou égaux à un valeur fixé K_p , sont obtenus de la fonction de distribution cumulée (CDF) Φ , donnée par :

$$P(K \leq K_p) = \Phi(K_p) = \int_0^{K_p} \varphi(K) dK \quad (2.77)$$

Enfin, la valeur moyenne (*expectation*) \bar{K}_M peut être déterminé à partir de :

$$\bar{K}_M^{LU} = \frac{K_{max} - K_{min}}{\ln(K_{max}) - \ln(K_{min})} \quad (2.78a)$$

$$\bar{K}_M^{LN} = \bar{K}_G \exp\left(\frac{\sigma_n^2}{2}\right) \quad (2.78b)$$

Les deux distributions sont centrés sur \bar{K}_G à l'échelle logarithmique. L'écart type pour la distribution log-normale est choisi de façon telle que le 99.7% de valeurs tirés (dans une fourchette de trois écarts type $3\sigma_n$ de \bar{K}_G , dans l'échelle log) se trouvent dans l'intervalle de la dispersion considérée. L'écart type est donc donné par :

$$\sigma_n = \frac{\ln(K_{max}) - \ln(K_{min})}{6} \quad (2.79)$$

La figure 2.11(b) donne les CDF pour les valeurs numériques présentées précédemment. Pour les deux cas, la valeur moyenne \bar{K}_M de la perméabilité intrinsèque est plus grande de la moyenne géométrique \bar{K}_G . Cette dernière est la valeur médiane par rapport à une distribution aléatoire symétrique : $P(K \leq \bar{K}_G) = P(K \geq \bar{K}_G) = 0.5$.

Il s'en suit que les distributions de type *log*, adaptées à décrire des paramètres physiques aléatoires non-négatifs, mènent intrinsèquement à une dissymétrie (*skewness*) : la valeur moyenne \bar{K}_M est décalée vers K_{max} par rapport à la valeur médiane \bar{K}_G , i.e. une dissymétrie positive (ou droite). Le choix de la fonction de distribution de perméabilité est donc importante dès que l'ensemble du comportement thermo-hydraulique est fortement influencé par l'écart de la moyenne par rapport à la médiane.

Pour ce qui concerne la distribution spatiale des propriétés, dans ce premier cas on limite l'étude aux grandeurs non-corrélées : la valeur aléatoire de tout point matériel \mathbf{x} ne dépend pas des tirages dans son voisinage, i.e. la longueur de corrélation est nulle.

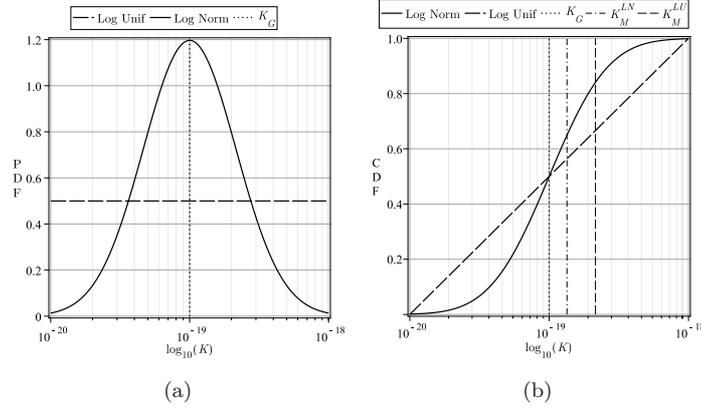


FIGURE 2.11 – Fonction de distribution de probabilité 2.11(a) et fonction de distribution cumulée 2.11(b) pour les cas log-uniforme et log-normale

Le maillage aux éléments finis satisfait le requis que la moyenne spatiale $\langle K(\mathbf{x}) \rangle$ de la perméabilité intrinsèque aléatoire doit être coïncidente avec la moyenne statistique \bar{K}_M :

$$\langle K(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} K(\mathbf{x}) d\Omega \approx \bar{K}_M \quad (2.80)$$

avec une erreur inférieure au 5%.

La figure 2.12 montre les distributions statistiques pour le spécimen, distributions qui satisfaisons aussi la condition de Volume Élémentaire Représentatif (REV) :

- la condition de séparation des échelles [Bouddour 1998] est satisfaite (la non-corrélation spatiale est en effet le cas limite d'une longueur de corrélation qui tend vers zéro [Bal 2008]) i.e., les fluctuations sont suffisamment petites par rapport à la taille caractéristique du spécimen.
- la discrétisation aux EF satisfait la relation (2.80).

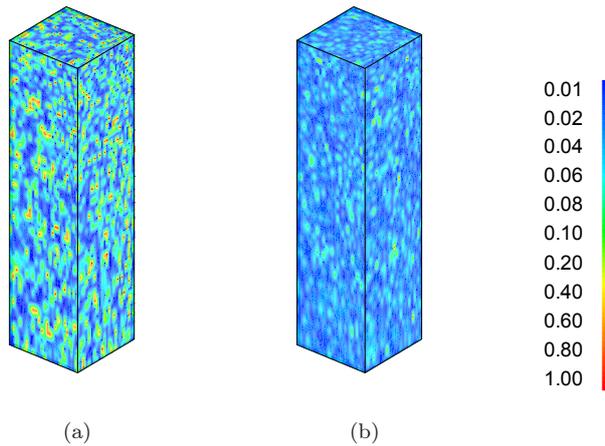


FIGURE 2.12 – Distribution normale gaussienne 2.12(a) et uniforme 2.12(b) de : $K(\mathbf{x})/K_{max}$

L'effet lié au 3D est présenté dans la suite en prenant en compte les profils de saturation à différents temps (30min, 1h, 3h, voir fig. 2.13) pour la distribution log-uniforme. Pour la distribution

log-normale les fluctuations sont similaires.

On observe que les effets locaux sont marqués dans les phases initiales du séchage et disparaissent avec le temps. Ceci est à mettre en relation avec le cas homogène, où les profils de saturation restent lisses (Fig.2.14). Le 3D permet en conséquent de décrire plus proprement les fluctuations spatiales des champs d'intérêt (saturation, pressions, température, ...), fluctuations introduites au travers de propriétés aléatoires. Les effets liés au retrait [Acker 1987, Torrenti 1988], par exemple, pourrait constituer un champ d'application de l'approche proposée.

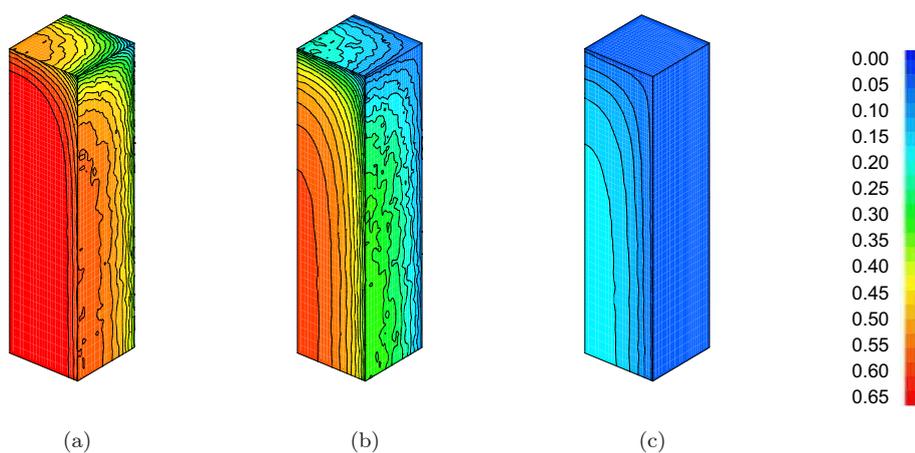


FIGURE 2.13 – Profils de saturation pour la distribution Log-uniforme - 30 minutes 2.13(a), 1 heure 2.13(b) et 3 heures 2.13(c)

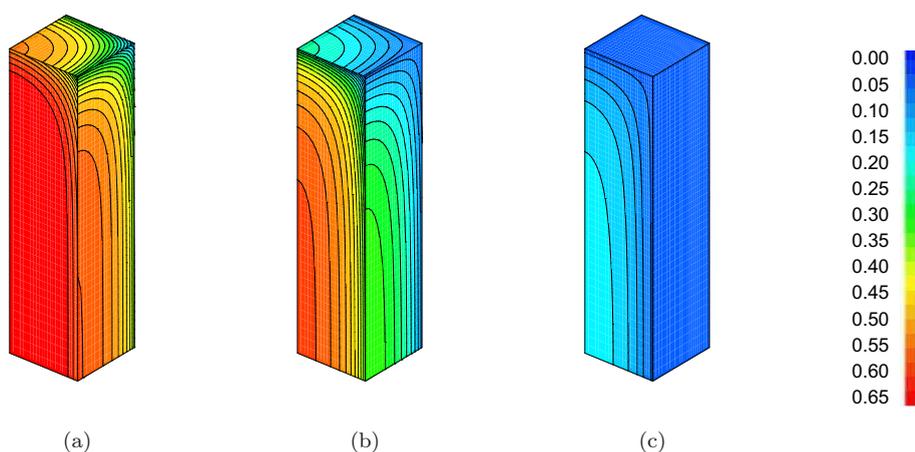


FIGURE 2.14 – Profils de saturation pour la distribution homogène - 30 minutes 2.14(a), 1 heure 2.14(b) et 3 heures 2.14(c)

Pour ce qui concerne la réponse globale du spécimen, la figure 2.15 donne l'évolution dans le temps de la perte de masse. L'évolution est la même pour les distributions log-uniforme/log-normale et les distributions homogènes correspondantes à chaque valeur moyenne (respectivement, MeanLU

pour \bar{K}_M^{LU} et MeanLN pour \bar{K}_M^{LN}). Autrement dit, la solution déterministe moyenne converge vers la solution avec un champs aléatoire non-corrélé, à cause du fait que le spécimen respecte les requis de VER (Eq.2.80).

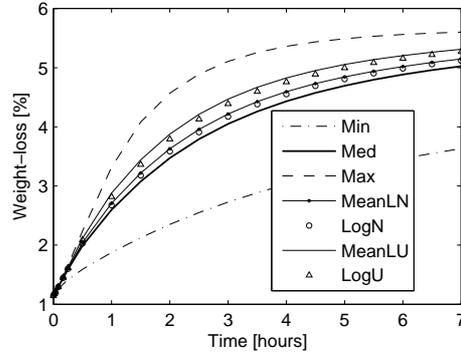


FIGURE 2.15 – Évolution dans le temps de la perte de masse dans les cas homogène (Min pour K_{min} , Max pour K_{max} , Med pour \bar{K}_G , MeanLU pour \bar{K}_M^{LU} , MeanLN pour \bar{K}_M^{LN}) et aléatoires (LogU pour log-uniforme, LogN pour log-normale)

En outre, le figure 2.15 montre que les pertes de masse sont proches à la limite supérieure de l'intervalle de dispersion de la perméabilité intrinsèque. Ceci est confirmé par la figure 2.16. Il apparaît clairement que la dissymétrie des PDFs mène à une déviation de la réponse globale vers la borne supérieure par rapport au cas médian equi-probable. Physiquement, on peut interpréter ces résultats comme si la population des valeurs importants de la perméabilité (dans l'intervalle de dispersion) avait un poids supérieure sur la réponse globale. Ceci suggère que le départ de l'eau liquide est plutôt régi par les régions tridimensionnelles connectés plus perméables.

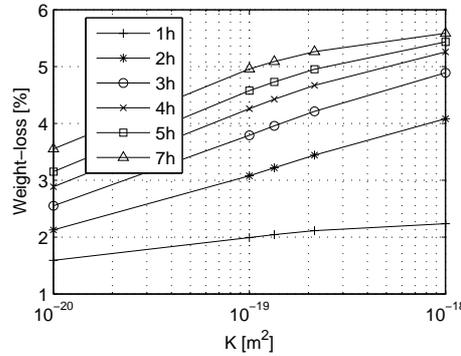


FIGURE 2.16 – Perte de masse vs logarithme decimal de la perméabilité intrinsèque

Ce type d'approche constitue, à l'heure actuelle, un point original sur lequel d'autres travaux sont prévus. L'extension vers des cas avec des longueurs de corrélation finies (ce qui permettra une comparaison avec d'autres approches mesoscopiques [Le 2011]) apparaît comme un premier pas. Les effets d'échelle liés à la taille du volume élémentaire statistique et sa convergence vers un volume élémentaire représentatif (en fonction des corrélations spatiales des paramètres régissant les transferts) pourrait faire aussi l'objet de développements. Ce type de problèmes sont ainsi caractérisés par un très grand nombre de variables et la superposition d'une couche aléatoire sur tous les champs est difficilement réalisable dans la pratique. Il va de soi qu'une étude de sensibilité accompagnera ces

développements. Actuellement, ce projet fait l'objet des demandes de financement pour des collaborations avec d'autres organismes de recherche, ainsi que d'une demande de financement de thèse en collaboration avec l'Université de Cergy. Ces études numériques doivent ainsi être accompagnées par de l'expérimentation afin d'alimenter le modèle avec des lois d'évolution représentatives.

Il existe un lien étroit entre les aspects numériques et l'expérimentation, lien fait par des échanges mutuelles et une orientation et optimisation réciproques visant à cueillir et identifier les phénomènes physiques prépondérants. De ce point de vue, le IFSTTAR-LCPC offre des possibilités remarquables permettant au numéricien un accès direct aux résultats expérimentaux et, encore, donne l'opportunité de contribuer à la conception et à la mise au point des expériences. Ces aspects de corrélation étroite entre le numérique et l'expérience seront présentés dans le prochain chapitre, dans lequel on posera l'accent sur l'extension du modèle TH avec la prise en compte de la mécanique. Cette extension, outre que naturelle, constitue à mon avis un pas nécessaire vers la compréhension du matériau compte tenu du fait qu'un matériau hétérogène est intrinsèquement caractérisé par la présence des fissures.

2.6 Conclusions et perspectives

Le travail présenté dans ce chapitre a permis de porter l'attention sur la modélisation des phénomènes thermo-hydrauliques que l'on peut observer dans les milieux poreux et, plus particulièrement dans le béton. Une attention particulière a été mise sur les aspects numériques de cette problématique et un modèle TH générale, apte à prendre en compte les phénomènes physiques principaux, a été introduit. Les équations régissant le problème ont été résolues à l'aide de la méthode des volumes finis et des éléments finis ; les détails, en termes de discrétisation mais aussi en termes d'algorithme, ont été présentés. Ce travail permet une compréhension assez directe des équations en jeu et une implémentation numérique peut être aisément mise en place par le lecteur. Une discussion sur les conditions aux limites convectives et leur intégration dans l'algorithme est ainsi présentée. La résolution des équations porte sur une procédure de type *staggered* qui a comme avantage une majeure souplesse par rapport aux procédures monolithiques traditionnelles et une moindre lourdeur numérique qui a permis de basculer les analyses vers le 3D. Ce passage est nécessaire lorsqu'on souhaite prendre en compte la nature hétérogène du béton. Dans un premier temps celle-ci a été prise en examen au travers une distribution aléatoire de la perméabilité intrinsèque dans un échantillon tridimensionnel. Cette première étape a permis de souligner la complexité de la physique des phénomènes en jeu, particulièrement dans la phase transitoire, mais aussi la nécessité d'une telle analyse.

Ce travail ouvre assez naturellement des nombreuses perspectives. La prise en compte des champs corrélés semble nécessaire afin de donner une description plus satisfaisante du milieu poreux. D'autres paramètres peuvent aussi être "probabilisés", avec comme objectif final celui de mener des analyses fiabilistes sur l'étanchéité d'une structure, ou au moins d'une partie d'elle. Cette extension nécessite évidemment d'un travail sur le plan théorique (analyses de sensibilité sur les paramètres), sur le plan numérique (réduction des temps de calcul) et sur le plan de l'expérimentation (définition des lois de distributions). La prise en compte des aspects mécaniques est aussi nécessaire : il ne semble pas raisonnable de parler de *durabilité d'une structure* sans parler de mécanique. Ce sujet sera abordé dans le prochain chapitre.

Couplages thermo-hydro-mécaniques dans les milieux poreux partiellement saturés

Sommaire

3.1 La modélisation mécanique	30
3.1.1 Mécanisme de dégradation du béton	30
3.1.2 Choix des modèles	31
3.2 Formulation implicite de la fissuration	31
3.2.1 Endommagement thermo-chemo-mécanique isotrope	31
3.2.2 Couplage perméabilité-endommagement dans le cadre d'une approche hydro-mécanique	32
3.3 Effets d'échelle dans la perméabilité intrinsèque	33
3.3.1 Campagne expérimentale	34
3.3.2 Proposition d'une loi de changement d'échelle	36
3.3.3 Conclusions	37
3.4 Perspectives : écaillage du béton sous incendie	37
3.4.1 Critère d'écaillage	38
3.4.2 Analyses paramétriques	39
3.5 Formulation explicite de la fissuration	39
3.5.1 Approche probabiliste discrète	39
3.5.2 Validation de l'approche	42
3.5.3 Couplage expérimentale-numérique hydro-mécanique	43
3.5.4 Couplage résistance électrique-fissuration	49
3.6 Perspectives : couplage perméabilité-fissuration	51
3.7 Conclusions et perspectives	54

La travail sur les modélisations thermo-hydriques a permis d'établir un cadre théorique général sur les problèmes couplés ainsi qu'une base numérique pour la modélisation. Cependant, il est bien connu que le comportement d'un matériau cimentaire, notamment pour des problèmes de durabilité, est fortement influencé par son comportement mécanique. Il va de soi que l'extension du modèle TH vers un modèle thermo-hydro-mécanique (THM) reste un pas nécessaire dès que l'on souhaite décrire et prédire le comportement d'une structure dans un environnement donné. En d'autres termes, parler de durabilité ou durée de vie d'une structure sans tenir compte d'une éventuelle fissuration ou d'un état de contrainte est peu significatif vis-à-vis de la réalité vécue par le matériau béton intégré dans une structure.

Cette extension du travail a débuté au cours de ma thèse avec la prise en compte d'un couplage endommagement-perméabilité et a été étendue depuis mon arrivée au IFSTTAR-LCPC au travers

d'une prise en compte explicite de la présence d'une fissure. Ces stratégies d'approche sont complémentaires et s'appliquent différemment selon l'échelle à laquelle on s'intéresse et le type de sollicitation externe à laquelle la structure est soumise. Le point commun entre ces approches est toutefois lié au caractère multidisciplinaire et aux échanges entre l'approche théorique/numérique et l'expérimentation. Cette dernière, basée sur des observations sur le corps d'épreuve et des mesures des paramètres apparents à l'échelle macroscopique, est nécessaire afin d'aboutir à une compréhension fine des mécanismes élémentaires agissant au sein du matériau. Le lien étroit ainsi que les échanges mutuelles entre les modèles théoriques et les modèles expérimentaux constituent la base de la recherche présentée dans la suite.

L'ensemble de ces travaux fait l'objet de collaborations universitaires nationales (Université de Cergy, ENPC, ENSA Malaquais) et internationales (Université de Cardiff, Université de Padoue), de collaborations industrielles (Bouygues TP, Matière, CETU) ainsi que de nombreuses publications.

3.1 La modélisation mécanique

3.1.1 Mécanisme de dégradation du béton

Suite à l'application d'un chargement de nature quelconque, un matériau hétérogène tel que le béton est sujet à des phénomènes de dégradation. Quand la contrainte maximale de traction est atteinte, la rupture de l'échantillon n'est pas brutale mais est caractérisée par la formation d'un réseau de fissures plus ou moins diffuses, qui mène vers la formation de microfissures localisées. En augmentant la déformation, la résistance du matériau chute d'une manière (plus ou moins) graduelle et on observe un comportement que l'on définit adoucissant (*softening*). La difficulté liée à ce type de comportement est que, à partir de ce moment, on n'observe plus directement la loi du comportement du matériau et il n'est plus possible de déduire directement de l'essai la loi constitutive du matériau. L'apparition d'une ou de plusieurs fissures dans le milieu conduit au passage d'un comportement de type matériau à un comportement de type structure. Ce changement de comportement entraîne des conséquences :

- d'un point de vue mécanique, le principe de Drucker est violé ($d\sigma : d\varepsilon < 0$ car $d\sigma < 0$ avec $d\varepsilon > 0$). Le postulat de stabilité de Drucker est une condition locale suffisante d'unicité (et non une condition nécessaire).
- d'un point de vue mathématique, le problème différentiel passe d'un problème elliptique (du type équation d'équilibre statique) à un problème hyperbolique (type équation des ondes), i.e. au moment de la bifurcation on a plusieurs points de minimum et plusieurs solutions sont possibles.
- d'un point de vue numérique, le problème est lié à la nature même de l'approximation aux éléments finis. Les champs de déplacements et déformations sont continus dans un élément, ce qui implique que les discontinuités sont repoussées aux frontières de l'élément même [Brancherie 2003]. Une longueur caractéristique apparaît alors naturellement : la taille de l'élément. Ceci entraîne que, lors de l'apparition d'une zone de localisation, on observe une sensibilité pathologique à la finesse du maillage (*mesh sensitivity*, voir [Bazant 1976, De Borst 1993], ...). En outre, la dissipation se trouve confinée dans les éléments ou on observe la déformation post-pic. Il s'en suit que, si on raffine le maillage, la taille de la zone de localisation diminue et la dissipation se trouve concentrée dans une zone à volume tendant vers 0 [Bazant 1976]. Enfin, on observe une sensibilité aussi à l'orientation des éléments, liée au fait que la rupture peut avoir lieu sans dissipation d'énergie quand la taille des éléments tend vers 0.

La littérature propose une large gamme de modèles et d'approches pour décrire l'état de fissuration du matériau. Chacun de ces modèles (ou classe de modèles) a évidemment des points faibles et des points forts et il s'avère très difficile, voir impossible, d'établir une hiérarchie objective entre ces formulations [Dal Pont 2008b]. La qualité et la capacité de donner une réponse de bonne qualité de

la part d'un modèle sera donc fonction des plusieurs paramètres dont il faudra tenir compte. Tout d'abord, il est essentiel d'évaluer quelle est l'échelle à laquelle on s'intéresse et au type de problème que l'on souhaite aborder. Dans notre cas, l'objectif final est essentiellement celui de s'appuyer sur une formulation mécanique adaptée au couplage avec l'approche thermo-hydraulique présentée précédemment et capable de prendre en compte la nature hétérogène du milieu poreux (i.e. le béton). Ces deux pré-requis conditionnent fortement le choix que l'on peut faire sur le modèle mécanique. A titre d'exemple, les modèles à discontinuité forte type GFEM/XFEM (sur lesquels j'ai porté récemment mon attention [Bordas 2011]) ne semblent pas adaptés pour ces objectifs (notamment en termes de prise en compte de la genèse et la propagation d'un réseau complexe de fissures).

3.1.2 Choix des modèles

Compte tenu de l'objectif de coupler la mécanique aux aspects hydriques, on présentera dans la suite deux classes de modèles. On donnera tout d'abord une stratégie de modélisation mécanique portant sur une approche elasto-endommageable. On présentera ensuite une deuxième approche, orientée vers une modélisation explicite de la fissuration via un modèle probabiliste. Le point commun entre les deux modélisations (qui visent l'échelle structurelle, même si les méthodes d'approche sont différentes) porte sur la nécessité d'un complément d'informations qui sera recherché par le billet de l'expérimentation. Les paramètres clés dans les couplages hydro-mécanique, variables selon l'approche choisie, seront identifiés via des analyses inverses issues d'une démarche s'appuyant à la fois sur les résultats numériques et les observations expérimentales.

3.2 Formulation couplée avec prise en compte implicite de la fissuration

3.2.1 Endommagement thermo-chemo-mécanique isotrope

On présente ici une synthèse rapide des mes recherches à la suite de mon travail de thèse. Plus particulièrement, on mettra l'accent sur le couplage hydro-mécanique et la nécessité de mener une analyse inverse basée sur les échanges entre la modélisation numérique et la modélisation expérimentale. La formulation classique décrivant l'endommagement mécanique proposée par [Mazars 1989] a été retenue et étendue pour tenir compte du couplage avec l'endommagement chimique et l'évolution de la structure interne du milieu avec la température [Pesavento 2000].

Pour la partie mécanique on peut simplement écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - V)(1 - D)\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + bp_s\boldsymbol{\delta} \quad (3.1)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte apparente, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ la contrainte effective [Kachanov 1958], $b = 1 - (1 - b_0)(1 - V)(1 - D)$ le coefficient de Biot pour un milieu poreux endommagé [Grasberger 2004, Meftah 2009] et p_s la pression exercée sur la phase solide. La relation prend ainsi en compte le processus de dégradation thermo-chimico-mécanique au travers les deux variables d'endommagement thermo-chimique V et d'endommagement mécanique D [Mazars 1989, Pesavento 2000].

Le tenseur de déformation effective $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est issu de la décomposition de la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ en une partie élastique $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ et une partie plastique $\boldsymbol{\varepsilon}_p$. Une composante prenant en compte le fluage thermique transitoire peut éventuellement faire partie de la formulation mécanique $\boldsymbol{\varepsilon}_{tc}$ [Sabeur 2008a], au même titre que la déformation thermique libre $\boldsymbol{\varepsilon}_{th}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\varepsilon}_{th} - \boldsymbol{\varepsilon}_{tc}) \quad (3.2)$$

La forme finale de la relation mécanique peut être écrite comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - V)(1 - D)\mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\varepsilon}_{th} - \boldsymbol{\varepsilon}_{tc}) + bp_s\boldsymbol{\delta} \quad (3.3)$$

avec p_s [Lewis 1998] (χ étant le coefficient de Bishop) :

$$p_s = (1 - \chi_l)p_g - \chi_l p_c = p_g - \alpha S_l p_c \quad (3.4)$$

Cette équation peut être facilement intégrée dans le schéma *staggered* proposé dans la section 2.2 via un algorithme implicite de projection [Simo 1993]. La procédure consiste à déterminer la contrainte effective σ^{n+1} au temps t_{n+1} à partir de la connaissance de la déformation totale ε^{n+1} , de la température T^{n+1} et de la pression dans les pores p_s^{n+1} (voir [Meftah 2009] pour plus de détails).

3.2.2 Couplage perméabilité-endommagement dans le cadre d'une approche hydro-mécanique

On propose une analyse expérimentale-numérique visant à établir une relation entre la variable endommagement, qui prend en compte la dégradation de la micro structure du matériau, et la perméabilité intrinsèque. Ce dernier paramètre est considéré, dans un premier temps, comme prépondérant vis-à-vis des phénomènes de transport [Dal Pont 2004a].

3.2.2.1 Protocole expérimentale

Description de l'essai Dans le but de mieux comprendre le comportement à haute température du béton, une maquette à échelle réelle a été réalisée. Un cylindre creux, de 1.50m de hauteur, 25cm de diamètre interne, 55cm de diamètre externe, a été chauffé par l'intérieur à la vitesse de $0.1 \text{ }^\circ\text{C}/\text{min}$ jusqu'à la température finale de 250°C . Les températures, ainsi que les pressions du gaz à l'intérieur du béton ont été mesurées et enregistrées pendant l'essai. Après la phase de montée, la température a été gardée constante pendant 30 jours. La géométrie de la maquette a permis d'étudier une paroi d'épaisseur d'environ 30cm tout en bénéficiant de la symétrie axiale du cylindre, i.e. plusieurs capteurs à la même distance radiale ont pu être installés.

3.2.2.2 Analyse inverse

Les évolutions à différents endroits de températures et pressions du gaz peuvent être exploités pour mener une analyse inverse pour identifier l'évolution de la perméabilité intrinsèque. Généralement dans les modèles THM, la loi d'évolution de la perméabilité intrinsèque a la forme suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 \cdot f(\theta) \left(\frac{p^g}{p_0} \right)^{A_p} 10^{A_D D}$$

avec $f(\theta) = 10^{A_\theta^2(\theta - \theta_0)^2 + A_\theta^1(\theta - \theta_0)}$.

Cependant, l'analyse numérique a permis de mettre en évidence qu'une loi plus simple, portant exclusivement sur l'endommagement, permet de décrire le comportement thermo-hydraulique d'une manière convenable :

$$\mathbf{K} \approx \mathbf{K}_0 \times 10^D \quad (3.5)$$

La loi d'évolution de la perméabilité (eq.3.5), fonction du seul l'endommagement, a été ensuite confrontée aux mesures de perméabilité résiduelle sur le béton issu de la maquette. On suppose par conséquent que l'endommagement n'évolue pas après refroidissement et que les fissures ne se referment pas d'une manière significative après la décharge thermique. Cette hypothèse, assez forte, semble être acceptable dans le cas d'une fissuration diffuse. [Colina 2004] montre que pendant la phase de refroidissement le béton n'est pas soumis à un endommagement supplémentaire si l'on peut négliger le fluage thermique transitoire. Cette observation ne semble plus être valable si l'on prend en compte une fissuration localisée [Boulay 2009].

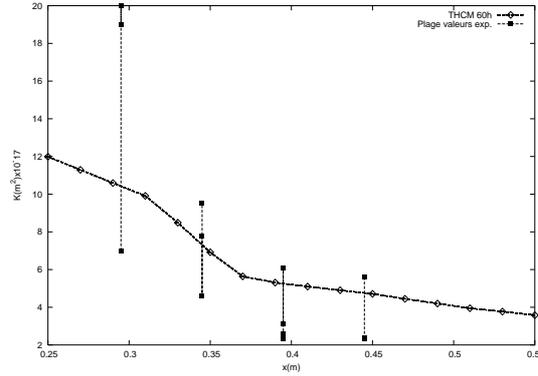


FIGURE 3.1 – Comparaison entre l'évolution de perméabilité intrinsèque numérique et expérimentale ($\times 10^{-17}$)

Les résultats issus des analyses expérimentales sont comparés aux résultats numériques, à 60h, dans la figure 3.1.

L'observation des résultats en figure 3.1 confirme que la formulation simplifiée de la loi d'évolution endommagement-perméabilité n'a pas seulement permis une reproduction correcte des températures et pressions, mais elle donne aussi une bonne prédiction des mesures de perméabilité à froid.

On peut donc proposer une forme généralisée de loi d'évolution de la perméabilité intrinsèque sous la forme suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 \times 10^D \quad (3.6)$$

Il faut souligner que la loi proposée a été mise en évidence expérimentalement pour un seul type de béton. Un travail de validation sur d'autres bétons, ainsi que pour des montées en température différentes, reste nécessaire.

Une généralisation de la relation 3.6 peut être donc proposée :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 \times 10^{\alpha D} \quad (3.7)$$

avec α un coefficient prenant en compte différents types de béton et/ou de montée en température.

3.3 Perspectives : effets d'échelle dans la mesure de la perméabilité intrinsèque

Une des difficultés majeures liées à la définition des propriétés du béton est liée à sa structure hétérogène, ce qui se traduit par une dépendance de certaines propriétés physiques de la taille de l'échantillon sollicité. Cette problématique est bien connue en mécanique (et sera discutée dans les prochains paragraphes) mais elle a été étudiée d'une manière moins attentive quand on l'applique aux propriétés de transport. Cependant, on peut présumer que aussi la perméabilité du béton dépend du volume de matériau sollicité : en effet, le transport de fluides dans le béton est intimement lié au réseau poreux et aux micro-fissures qui se développent. On peut donc s'attendre que plus on augmente le volume de matériau, plus la probabilité de rencontrer un nombre suffisant de vides et de pores connectés augmente, i.e. la percolation des phases fluides augmentera avec la taille de l'échantillon. A l'heure actuelle, la littérature propose un nombre limité d'études : [Verdier 2002] a mis en évidence l'absence des effets d'échelle sur des échantillons d'épaisseur différents, tandis que

[Perraton 1999] a conclu qu'aucun effet d'échelle n'est présent sur des échantillons de petites tailles (diamètres de 38 et 95mm).

Dans l'étude exploratoire que l'on propose, la question fondamentale est de vérifier si les mesures effectués à l'aide d'un perméamètre standard de type Cembureau sont représentatives du comportement du béton dans une structure. On a donc choisi de mener l'étude sur des échantillons endommagés via un traitement thermique et de différentes tailles (en posant l'attention sur la surface de percolation). L'objectif est celui de se rapprocher aux conditions de service d'une structure. Dans la suite, on propose une méthodologie basée sur un étude expérimentale-numérique, l'analyse numérique étant le moyen pour mener une analyse inverse et identifier les caractéristiques du matériau. Plus de détails sur ce travail sont disponible dans [Alarcon-Ruiz 2010] ; actuellement cette recherche fait aussi l'objet d'une collaboration au sein de l'Université Paris-Est entre l'IFSTTAR-LCPC, l'ENPC et l'ENSA-Malaquais.

3.3.1 Campagne expérimentale

3.3.1.1 Utilisation d'un perméamètre standard

La première campagne expérimentale a été menée à l'aide d'un perméamètre de type Cembureau et la procédure de mesure standard [Committees 1999] a été appliquée (en prenant en compte l'effet [Klinkenberg 1941]). Cette campagne a été menée en utilisant le béton issu de l'essai précédemment présenté (voir sec. 3.2.2.1). Pour vérifier la présence d'un effet d'échelle, nous avons modifié la surface de percolation de l'échantillon en réduisant, via des masques en silicone, sa section. Des disques centrés sur l'axe de la cellule et de diamètres différents (130/110/100/50mm) ont été appliqués sur trois échantillons (voir la figure 3.2). De cette manière, on peut facilement adapter l'appareil de mesure standard sans besoin de modifier les autres paramètres de l'essai.



FIGURE 3.2 – Adaptation du perméamètre Cembureau à l'aide d'une masque en silicone ; diamètres de 50mm (gauche) et 110 mm (droite)

On remarque que dans cette situation la relation de Hagen-Poiseuille n'est plus valable, les lignes de flux n'étant plus parallèles. On pose donc l'équation de conservation de la masse gazeuse et on mènera une analyse inverse sur la perméabilité équivalente K^A de manière telle que le débit Q correspond aux mesures :

$$Q = \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d(\text{area}) \quad (3.8)$$

(\mathbf{n} est le vecteur normal à la surface A).

L'analyse inverse a été menée sous CAST3M, en conditions de régime non-permanent et jusqu'à l'établissement de la condition stationnaire (en suivant la procédure AFPC/AFREM [AFREM 1996] utilisée pour l'expérimentation). L'analyse numérique a été d'abord validée en simulant le flux au travers de l'échantillon normalisé de 150mm de diamètre.

Cette campagne expérimentale-numérique a mis en évidence un effet d'échelle sur deux échantillons (sur les trois disponibles). La procédure met clairement en évidence une relation entre la surface de percolation et la perméabilité; cette dépendance ne disparaît pas en se rapprochant de la taille normalisée de 150mm (voir fig.3.3)

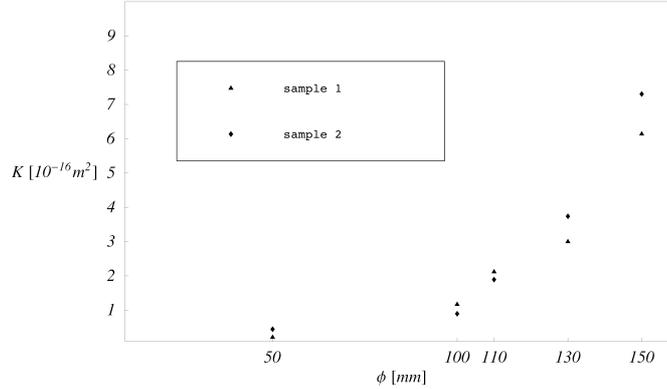


FIGURE 3.3 – Perméabilité intrinsèque vs. diamètre du cylindre creux pour les deux échantillons qui ont mis en évidence un effet d'échelle

La question reste ouverte, la première campagne d'essais n'étant pas suffisante pour établir si la mesure de perméabilité via un perméamètre de type Cembureau est représentative du comportement du béton à grande échelle. Dans ce qui suit, on propose une deuxième campagne sur des échantillons de taille plus importante.

3.3.1.2 Deuxième campagne expérimentale

Les tests sur des échantillons de taille plus importante ont été menés sur des cylindres creux (hauteur 265mm, diamètre externe 350mm, diamètre interne 160mm, béton BHP traité thermiquement, selon les modalités de la section 3.2.2.1), fermés aux extrémités grâce à deux tôles en acier. L'étanchéité acier-béton est assurée au travers d'un collage au silicone et quatre tirants (voir la figure 3.4). Une des deux tôles a été aussi équipée d'un capteur de pression et d'un système permettant le pompage du gaz dans le creux du cylindre. L'essai consiste à vider d'air le centre du cylindre et d'introduire, à une pression donnée, de l'azote. Les fuites ont été vérifiées en utilisant un cylindre en acier au lieu du cylindre en béton. Les surpressions utilisés dans les tests étaient de 253kPa, 355kPa, 415kPa; même après plusieurs jours d'observations, les pertes de charge avec le cylindre métalliques ont été modestes. Après la stabilisation de la pression, on mesure la perte de charge. L'identification de la perméabilité est faite alors en régime transitoire via une analyse inverse.

Pour l'étude numérique, on s'appuie sur la relation de Hagen-Poiseuille en éliminant la condition de régime permanent. Sous l'hypothèse que le réseau poreux est saturé par une seule phase formé par de tuyaux parallèles, que le gaz est un gaz parfait et qu'on se place en conditions isothermes, on peut écrire [Dal Pont 2004a] :

$$\begin{cases} \frac{M\nu}{R\theta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial r} + \frac{J}{r} = 0 \\ \frac{\mu}{\rho K} J = -\nu \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial J}{\partial t} \end{cases} \quad (3.9)$$

La solution numérique de cette équation peut être obtenue par un schéma aux volumes finis dans l'espace et aux différences finies dans le temps.



FIGURE 3.4 – Maquette pour l'identification de la perméabilité à grande échelle.

De cette manière, la perméabilité a été évaluée dans une fourchette comprise entre $0.85 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2$ et $1.5 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2$ pour des porosités entre 0.15 et 0.09. Une comparaison entre les données calculées et les essais est donné dans la figure 3.5.

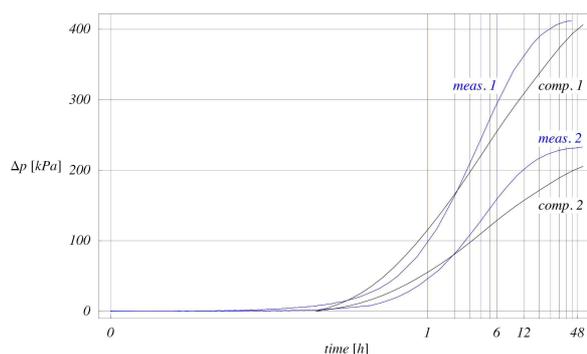


FIGURE 3.5 – Comparaison expérience/numérique sur la perte de charge pur différentes surpressions (meas.1, 519 kPa ; meas.2, 335 kPa)

Ensuite, des cylindres de 150mm de diamètre et 50mm d'épaisseur ont été extraits de la maquette et leur perméabilité a été évaluée via un perméamètre de type Cembureau à $0.95 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2$. Cette mesure est d'environ un ordre de grandeur plus petite par rapport aux essais à grande échelle, ce qui confirme la présence d'un effet de volume.

3.3.2 Proposition d'une loi de changement d'échelle

Les résultats issus de deux campagnes ne peuvent pas être confrontés directement car les conditions d'essai (traitement thermique, préparation du béton, ...) ne sont pas les mêmes. Toutefois, on met en avant une loi de changement d'échelle, même si très qualitative.

En traçant les valeurs issus des campagnes d'essais sur un diagramme log-log (voir fig. 3.6) on obtient une loi de changement d'échelle dont la forme est la suivante :

$$\mathbf{K} = \gamma A^\beta \quad (3.10)$$

ce qui correspond à une loi de type Fréchet avec $\alpha = -1/\beta \approx -1.0$. Contrairement aux application de

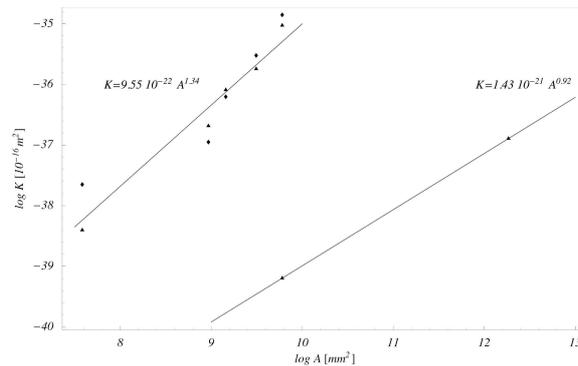


FIGURE 3.6 – Résultats expérimentaux (première campagne à gauche en haut, deuxième à droite).

type mécanique structurelle, où la loi de changement d'échelle est souvent décrite par une distribution de type Weibull, ici la distribution est bornée. Les mesures de perméabilité standard sont bien au dessous du valeur maximale mesurable et généralement sont à peine au dessus de la seuil minimale (milieu imperméable). Dans ces cas, une distribution de type Fréchet est plus adaptée.

3.3.3 Conclusions

Les résultats présentés dans la section précédente n'ont aucune prétention de validité générale. En effet, le nombre des tests effectués est trop faible et les données entre les deux campagnes ne peuvent pas être mis en relation. Cependant, cette recherche a permis de mettre en évidence deux aspects :

- la présence d'un effet d'échelle
- une méthodologie de quantification de cet effet

Le premier point est fondamental car il conditionne la façon actuelle de concevoir la durabilité d'un ouvrage en béton. En effet, si ce résultat sera confirmé par des campagnes expérimentales successives, la validité des mesures de perméabilité à l'échelle du laboratoire est à remettre en question. Comme on le fait en mécanique, les résultats d'essai doivent avoir une validité statistique et une loi de changement d'échelle nécessite d'être prise en compte pour passer de l'échelle de l'échantillon à celle de la structure. La méthodologie présentée permet de s'appuyer sur des appareils de mesure standard qui ont été adaptés d'une manière minimale pour nos besoins.

3.4 Perspectives : écaillage du béton sous incendie

Ces dernières années la thématique du comportement au feu du béton a été un sujet d'actualité suite à un nombre d'incident qui se sont produit dans plusieurs tunnels (Tunnel sous la Manche, 18.11.1996, Mont-Blanc, 24.03.1999- 39 morts, Tauern, 29.05.1999- 12 morts, St.Gotthard 2001, 24.10.2001- 11 morts), avec un impact fort important tant sur la plan économique que social (par exemple la fermeture de 7 mois du tunnel sous la Manche a causé une perte d'environ 300 millions d'euros). La prédiction via un modèle numérique du comportement du béton est une tâche difficile à cause des conditions extrêmes observables lors d'un incendie, avec des températures qui montent bien au delà de 1000°C pendant plusieurs heures. Dans cette situation, l'affaiblissement des caractéristiques mécanique est souvent accompagné par l'écaillage du béton (*spalling*). En effet, la combinaison de contrainte mécanique, haute température et pression élevée dans le milieu poreux génèrent un phénomène physique qui porte au détachement progressif de couches de béton. L'écaillage contribue d'une manière significative à la dégradation de la structure et rend la récupération de l'ouvrage une tâche bien plus complexe et couteuse.

Le modèle THM, présenté auparavant, permet une description fine des conditions à l'intérieur du béton (en termes de contraintes, températures, pressions, ...) et il apparaît naturel d'intégrer cette modélisation avec la prise en compte d'un critère d'écaillage. Ce dernier devra prendre en compte la physique du problème, i.e. le détachement progressif des couches de béton est lié à la fois à l'augmentation de la pression hydraulique et à la génération d'un état de compression qui peut amener au flambement les portions de béton.

Le développement de ce sujet s'inscrit dans le contexte d'une collaboration IFSTTAR-LCPC/ Université de Cergy/ CETU Lyon/ Bouygues Constructions qui a permis de financer une thèse CIFRE [Phan 2011]. Ce travail est à mettre en relation avec des études de caractère essentiellement expérimentale menées par le CETU (études pour la ligne TGV Lyon-Turin) et répond à un besoin exprimé par Bouygues Constructions de disposer d'un outil numérique performant pour ce type de calcul. Pour cette raison, la procédure *staggered*, le modèle THM [Dal Pont 2007] ainsi que le critère d'écaillage proposé dans la thèse [Phan 2011] ont été implantés dans le code de calcul CESAR-LCPC. Ce travail est actuellement en cours et les résultats n'ont pas encore abouti à leur forme finale.

3.4.1 Critère d'écaillage

On considère que l'écaillage est issu de deux phénomènes concomitant : le processus thermohydrique, qui mène à une augmentation de la pression dans les pores, et le processus thermomécanique, associé à la création d'un gradient thermique et à la génération d'une contrainte de compression.

En effet, dès qu'on augmente la température, l'eau vaporise et le mélange eau liquide/eau vapeur migre vers les zones les plus froides. Cependant, la faible perméabilité du béton limite cette percolation tout en formant une barrière que l'on nomme normalement *moisture clog*. Ceci se traduit par une augmentation de la pression du gaz, qui peut générer de la micro-fissuration et contribuer à la formation d'une écaille.

En raison de cela, on propose un premier critère d'écaillage qui relie la résistance à la traction du béton à la pression dans les pores [Meftah 2007] :

$$F_{cri1} = f_t(T) - bp_s < 0 \quad (3.11)$$

Pour ce qui est du processus thermo-mécanique, ceci est associé directement à la température. Avec le réchauffement, on génère des gradients qui provoquent une dilatation et donc un effet de compression dans la direction parallèle à la surface chauffée (voir fig. 3.7-a). Cet effet est ainsi augmenté si on applique une charge extérieure [Kalifa 2000, Zheng 2010]. Le critère d'écaillage intègre alors une approche de type flambement pour l'expulsion de l'écaille.

$$\begin{aligned} F_{cri2} &= \sigma_{cr} - \sigma \\ &= \frac{\pi^2 EI}{Ah} - \sigma \\ &= \frac{\pi^2 e^2}{12h^2} (1 - D) E_0 - \sigma \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec σ_{cr} la contrainte critique d'Euler, σ la contrainte parallèle à la surface chauffée, A est l'aire, h la longueur et e la profondeur de la zone d'écaillage.

Si le premier critère est satisfait et la contrainte de compression est suffisamment élevée, la couche externe écaille.

D'un point de vue numérique, la modification de la surface exposée au feu a été obtenue sans besoin de remaillage. Les couches d'éléments finis concernés par l'écaillage sont désactivés tandis que les conditions aux limites sont transposées sur la nouvelle surface, encore intacte. L'objectivité du critère est assurée par l'introduction d'une longueur caractéristique d'écaillage, corrélée à la taille du granulat le plus grossier d'une manière similaire à ce qui se fait typiquement dans les critères d'endommagement non-local.

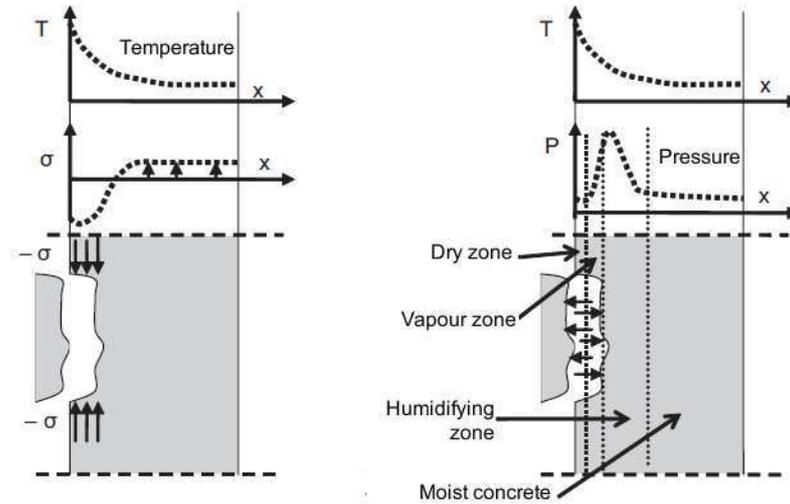


FIGURE 3.7 – Mécanisme d'écaillage : a) Dilatation thermique [Bazant 1997] b) pression hydrique [Anderberg 1997]

3.4.2 Analyses paramétriques

Les résultats sur l'application du critère d'écaillage au béton soumis au feu ne sont pas encore disponibles. Cependant, une première phase de l'étude est en cours et une analyse paramétrique a été menée. Plusieurs paramètres ont été pris en considération : l'épaisseur des écailles, la vitesse d'écaillage, la sollicitation thermique, . . . (plus des détails sont présentés dans [Phan 2010]). Parmi ces paramètres, la perméabilité intrinsèque joue un rôle important sur la migration du mélange air/eau/vapeur et la génération de l'effet "bouchon" (qui rend le milieu encore moins perméable au gaz). Ce dernier génère de forts gradients qui rendent plus sensible le béton à l'écaillage. La figure 3.8 représente, à titre d'exemple, l'évolution de la pression du gaz pour différents valeurs de la perméabilité intrinsèque. En bleu on a la valeur à l'instant de l'écaillage tandis qu'en rouge on représente l'instant successif. On observe assez aisément que l'effet bouchon et le relâchement des pressions après l'écaillage sont plus prononcés avec des faibles perméabilités.

3.5 Formulation couplée avec prise en compte explicite de la fissuration

3.5.1 Approche probabiliste discrète

Les modèles qui portent sur une prise en compte implicite de la discontinuité cinématique donnent une réponse satisfaisante si les fissures sont diffuses au sein du matériau. Dans ce contexte d'utilisation, ces modèles constituent un outil bien adapté pour suivre l'évolution et la dégradation du béton.

Quand le réseau des fissures localise en une macro-fissure, ces modèles se révèlent moins efficaces et il s'avère plus convenable de s'orienter vers des formulations capables de donner une description plus fine de la fissure même. En effet, ils existent des formulations qui prennent en compte d'une manière explicite la discontinuité cinématique et qui sont par conséquent plus appropriés pour décrire la formation et l'évolution des macrofissures localisées.

La littérature propose à ce sujet une fourchette assez large, allant des modèles type [Rashid 1968], aux modèles à cinématique enrichie [Cosserrat 1909, Grioli 1960], aux modèles cohé-

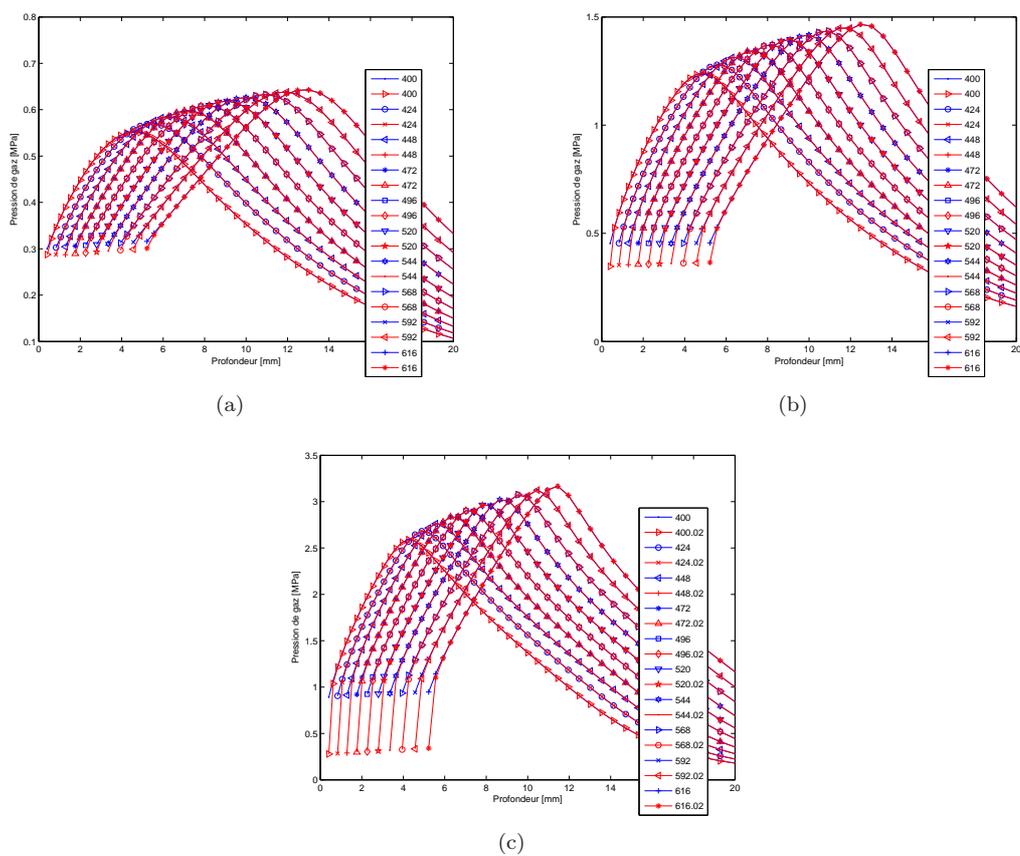


FIGURE 3.8 – Evolution de la pression du gaz (a), $K = 10^{-17} m^2$ (b) $K = 10^{-18} m^2$ (c) $K = 10^{-19} m^2$

sifs [Hillerborg 1976], aux modèles de type lattice [Hrennikoff 1941, Schlangen 1992, Vervuurt 1997, Bolander 1998, Cusatis 2003], aux techniques de remaillage [Ingraffea 1985], sans oublier, plus récemment, les méthodes aux éléments finis enrichis issus du principe de partition de l'unité (PU-FEM) [Belytschko 1999, Babuska 1997, Moës 1999], ...mais dont l'application à un matériau hétérogène tel que le béton est discutable. Une analyse critique de ces modèles peut être retrouvée en [Dal Pont 2008b].

Dans ce qui suit, on retiendra une approche probabiliste discrète, à l'origine proposé par [Rossi 1992a]. Cette approche a fait l'objet de développements qui ont abouti vers une formulation continue/macro du modèle, plus orientée à l'échelle structurelle [Tailhan 2010]. L'utilisation d'une approche probabiliste semble être bien adaptée pour un matériau hétérogène tel que le béton, particulièrement quand l'on souhaite décrire la genèse et la propagation des fissures. Les principes de l'approche seront rapidement présentés dans les paragraphes suivants.

3.5.1.1 Du modèle probabiliste discret vers un modèle probabiliste continu

Le modèle probabiliste discret (PROB) développé à l'origine par [Rossi 1992a] aborde la fissuration du béton à travers une approche aux éléments finis. L'approche prend en compte de façon explicite les discontinuités cinématiques en introduisant des éléments de contact à l'interface entre les éléments finis massifs. Ce modèle se distingue de ceux du même type par le fait que les hétérogénéités du béton sont prises en compte au travers de distributions aléatoires des caractéristiques mécaniques (essentiellement le module de Young E et la résistance à la traction σ_t). Le point de force du modèle est que les fonctions de distribution des propriétés sont issues d'une campagne expérimentale. L'expérience donne un fondement physique au modèle et pilote le jeu des paramètres d'entrée. La distribution des propriétés dépend de la taille du matériau sollicité, via le rapport entre le volume de l'éprouvette et le volume du plus gros granulat V_T/V_g , ce qui permet d'inclure les effets d'échelle.

Cette modélisation s'avère bien adaptée quand l'on souhaite obtenir des informations locales sur la fissuration (i.e. ouvertures et pas de fissuration). Cependant, l'approche discrète est moins adaptée par rapport à une formulation continue quand on passe à l'échelle de la structure et/ou on souhaite coupler l'approche avec l'analyse TH. La stratégie proposé par [Rossi 1992a] a été donc déclinée vers un modèle continu, ce qui permet de bénéficier d'un nombre d'avantages. Les tests de tractions sont réalisés sur un nombre important d'échantillons de différents rapports V_T/V_g et différentes résistances à la compression. Ceci permet de donner un sens physique aux distributions probabilistes des propriétés qui alimentent le modèle. Ces observations se traduisent par l'hypothèse que le volume d'un élément fini correspond au même volume de matériau sollicité, avec toutes les propriétés associés à sa taille, ce qui permet de prendre naturellement en compte les effets de volume typiques du matériau béton. Il va de soi qu'il est impossible d'identifier le comportement d'un volume de la taille d'un élément fini : une analyse inverse est alors nécessaire.

Les propriétés de chaque élément fini dans un maillage sont distribuées d'une manière aléatoire en fonction de la taille de chaque élément (rapport entre sa taille et le volume du plus gros granulat, V_e/V_g) et de la résistance à la compression du béton choisi. Au travers de l'analyse inverse, il est possible d'identifier les paramètres de chaque élément, dont le comportement est décrit par une loi constitutive type matériau équivalent au comportement réel. Il est bien connu que, avant le pic, le matériau s'endommage au travers la formation de micro-fissures sans localisation (comportement matériau). La localisation a lieu seulement après le pic de contrainte : on observe à ce moment le passage d'un comportement de type matériau à un comportement de type structure [Rossi 1998]. A partir de ce constat, on définit un comportement (local) de type matériau pour chaque élément fini, équivalent au comportement réel en termes d'énergie de déformation (voir fig.3.9). La loi de comportement est une simple loi d'élasto-plasticité parfaite. En effet, cette loi permet de prendre en compte la dissipation (au travers du plateau plastique) et simplifie la tâche d'identification des paramètres par rapport à une loi de plasticité avec écrouissage. On bénéficie d'un cadre théorique/numérique

bien établi [Simo 1987a]. On rappelle enfin que les lois avec adoucissement ne représentent pas un comportement type matériau. Les détails de l'analyse inverse sont présentés dans [Tailhan 2010].

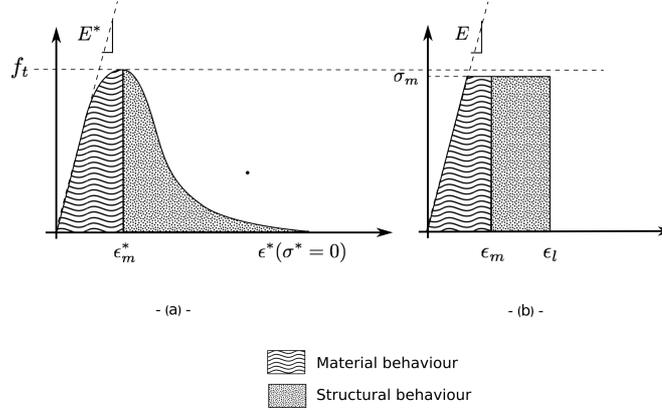


FIGURE 3.9 – Équivalence en termes d'énergie de déformation pour un test de traction uniaxiale

Il est intéressant de remarquer que la distribution aléatoire des propriétés permet de prendre en compte la genèse de fissures (i.e. la première fissure se génère sur l'élément le plus faible issu de la distribution des propriétés) et que, par conséquent, aucun critère de propagation n'est requis. En d'autres termes, la progression de la fissuration dans le maillage se fait par une génération successive des fissures qui, à un moment donné, localisent en traduisant le comportement post-pic globale de type structure. Ce point est extrêmement important car les techniques actuellement utilisés pour décrire un état de fissuration dans un milieu continu, telles que la mécanique linéaire de la rupture et les GFEM [Belytschko 1988, Bordas 2011]) ne sont pas adaptées aux matériaux hétérogènes ou demandent des adaptations importantes [Simone 2003]. On remarquera enfin que, comme toutes approches probabilistes type Monte-Carlo, une seule analyse n'a aucune validité et que plusieurs tirages (i.e. plusieurs calculs avec différentes distributions) sont nécessaires afin d'obtenir un résultat significatif. Cet aspect constitue évidemment une limite de l'approche en termes de temps de calcul. Par contre, il ne faut pas oublier que l'expérimentation demande aussi un nombre importants d'essais (mais avec un coût économique bien plus important). En outre, la dispersion diminue avec la taille de la structure, i.e. en augmentant le volume, on tend vers une réponse déterministe [Bazant 2000], ce qui se traduit par un nombre réduit de calculs.

3.5.2 Validation de l'approche

On présente dans ce qui suit le support numérique choisi et un exemple de validation de l'approche au travers d'une comparaison avec une expérience menée au IFSTTAR-LCPC.

3.5.2.1 Choix du support numérique

Plusieurs solutions sont disponibles pour décrire la discontinuité cinématique dans un élément fini. Dans ce cadre, on a retenu la formulation proposée par [Rashid 1968], qui consiste à réduire à zéro la raideur de l'élément fini en question dès qu'un certain seuil est atteint. D'autres approches (ex. type *fixed crack* [Droz 1987] ou E-FEM [Alfaiate 2003]) se traduisent par un blocage des contraintes et des techniques numériques sont nécessaires (techniques qui mènent à un conditionnement de la solution). Cependant, il est bien connu [Bazant 1998] qu'un modèle type [Rashid 1968] mène vers une manque d'objectivité de la solution, i.e. la solution est conditionnée par le maillage. La couche probabiliste

joue alors le rôle de régulariser la réponse, ce qui est mis en évidence par des analyses numériques [Dal Pont 2009, Tailhan 2010].

3.5.2.2 Comparaison numérique-expérimentale

Une première validation de cette approche est présentée dans la suite au travers d’une comparaison numérique-expérimentale, en s’appuyant sur un essai mis au point au IFSTTAR-LCPC. L’expérimentation est un essai classique de flexion 4 point d’une poutre en béton ($E=35\text{GPa}$, $f_c=50\text{MPa}$, $f_t=3\text{MPa}$), avec la particularité que 6 LVDT ont été mis en place pour le suivi des déplacements et la détermination des ouvertures de fissures. Une attention particulière est portée sur le contrôle des déplacements imposés et une phase post-pic particulièrement nette a été obtenue.

Pour le béton en question, le comportement expérimentale en traction n’est pas connu. Par conséquent, l’identification des paramètres nécessaires pour alimenter le modèle probabiliste continu a été basé sur le modèle probabiliste discret [Rossi 1992b], qui est bien adapté pour mener des analyses sur des échantillons de taille de laboratoire. A partir des résultats issus de cette expérimentation numérique (voir fig.3.10) les paramètres de la loi matériau-équivalent du modèle continu ont été identifiés. Ces mêmes paramètres sont enfin exploités pour mener le test de flexion. Pour chaque essai numérique, 30 tirages sont nécessaires pour obtenir une réponse moyenne convenable.

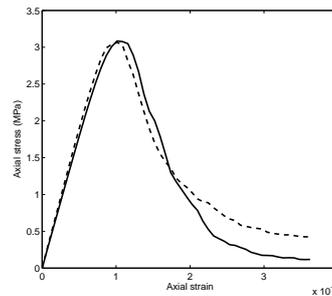


FIGURE 3.10 – Test de traction pour l’identification de paramètres

La réponse globale numérique-expérimentale sur la poutre en flexion est présentée dans la fig.3.11. La réponse est satisfaisante, quoique la phase post-pic est plus raide par rapport à la réponse expérimentale en raison, essentiellement, du caractère 2D de l’analyse EF (i.e. les ponts de matière ne sont pas pris en compte). Il est bien connu que la fissuration a un caractère essentiellement tridimensionnel et, en perspective, des analyses de ce type restent nécessaires.

Précédemment on a mis l’accent sur le fait que le modèle permet d’obtenir des informations locales sur les fissures. Les figures 3.12 montrent une faciès typique de fissuration expérimentale-numérique ainsi qu’une comparaison sur les ouvertures de fissures. Ceci permet de mettre en évidence que le modèle et la stratégie de modélisation proposés sont plutôt satisfaisants.

3.5.3 Couplage expérimentale-numérique hydro-mécanique

Comme on l’a vu précédemment, le couplage entre le modèle thermo-hydraulique et le modèle mécanique passe par la définition d’un protocole expérimentale capable d’alimenter convenablement la modélisation numérique choisie. L’objectif dans ce cas est celui de décrire l’état thermo-hydraulique d’un élément de structure en présence d’une ou plusieurs fissures localisés. Comme dans le cas de la relation endommagement-perméabilité, il s’avère nécessaire de faire dialoguer le modèle TH avec le modèle mécanique précédemment décrit. La passerelle entre les deux approches porte sur la réalisation d’essais expérimentaux bien ciblés qui serviront à alimenter la modélisation.

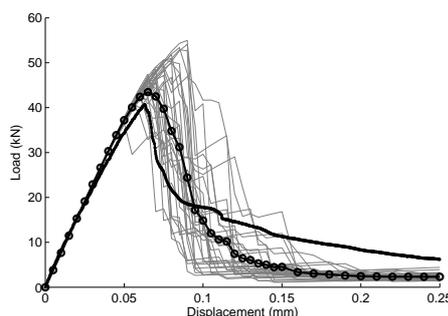


FIGURE 3.11 – Comportement globale : expérimentale (gras), numérique (gris) et moyenne (cercles)

Il convient aussi de souligner que l'utilisation d'un modèle THM à l'échelle de la structure reste difficile à cause de la complexité des phénomènes en jeu, ce qui se traduit par la prolifération des paramètres qui gèrent le modèle. Dans ce sens, le couplage avec un modèle comme PROB (géré par un nombre minimale des paramètres) apparaît, du moins du point de vue philosophique, incohérent. Le protocole d'essai qui sera présenté dans la suite et la recherche d'une relation fissuration-perméabilité vont donc dans la direction d'une simplification du modèle THM, en essayant de cueillir les paramètres principaux qui règlent la physique du problème après la genèse d'une fissure. Objectif ultime de ce travail est par conséquent celui de simplifier la modélisation et de revenir dans un cadre "ingénieur", certainement plus aisément applicable à l'échelle structurelle.

Un travail de ce type comporte plusieurs difficultés à niveau expérimentale. Tout d'abord, la maîtrise de l'état de fissuration reste difficile. La littérature propose plusieurs types d'essais pour générer soit un état multi-fissuré [Saito 1995, Lepech 2005, Charron 2007], soit un état à une seule fissure [Wang 1995, Aldea 1999, Rodriguez 2003]. Compte tenu de nos objectifs et du fait qu'un état multi-fissuré reste difficile à caractériser, une attention particulière a été portée à l'essai Brésilien qui permet de générer, sous certaines conditions, une fissure unique. Cet essai est apte au couplage avec le protocole de mesure des propriétés de transfert. La volonté de mener des mesures en temps réel sur les propriétés de transfert rajoute une ultérieure difficulté. Cependant, la corrélation hydro-mécanique en temps réel reste à notre avis nécessaire : un stage réalisé au IFSTTAR-LCPC [Aubriet 2008] a permis de mettre en évidence que les protocoles utilisés normalement dans la littérature (mesure de propriétés de transfert sur des échantillons déchargés, i.e. propriétés résiduelles) sont peu représentatifs car la fissure se referme avec le temps (soit par relaxation de contraintes, soit par cicatrisation).

Dans ce qui suit, le protocole couplé hydro-mécanique sera présenté. Ce sujet de recherche, dont je me suis occupé depuis mon arrivé au IFSTTAR-LCPC, a fait l'objet d'une publication [Boulay 2009] et il est poursuivi dans le cadre d'une thèse [Rastiello 2013].

3.5.3.1 Description de l'essai mécanique

Dans un premier temps, les tests ont été menés sur des échantillons cylindriques de diamètre 11cm et épaisseur 5cm, i.e. la taille des échantillons utilisés pour la mesure de la perméabilité. Les échantillons sont coulés dans des moules en acier pour assurer une géométrie optimale. Les essais ont été réalisés au IFSTTAR-LCPC en utilisant une presse hydraulique (capacité de $\pm 500kN$), permettant un contrôle en déplacement et en force, ainsi que l'élaboration du signal en temps réel pour gérer le contrôle de l'essai.

Les détails du test sont présentés dans [Boulay 2009] et la mise en place de l'échantillon est présenté dans la figure 3.13. Il convient toutefois de mettre en évidence l'attention particulière portée sur les conditions aux limites de l'essai : l'utilisation d'un joint sphérique (ref.2) sous la cellule de chargement

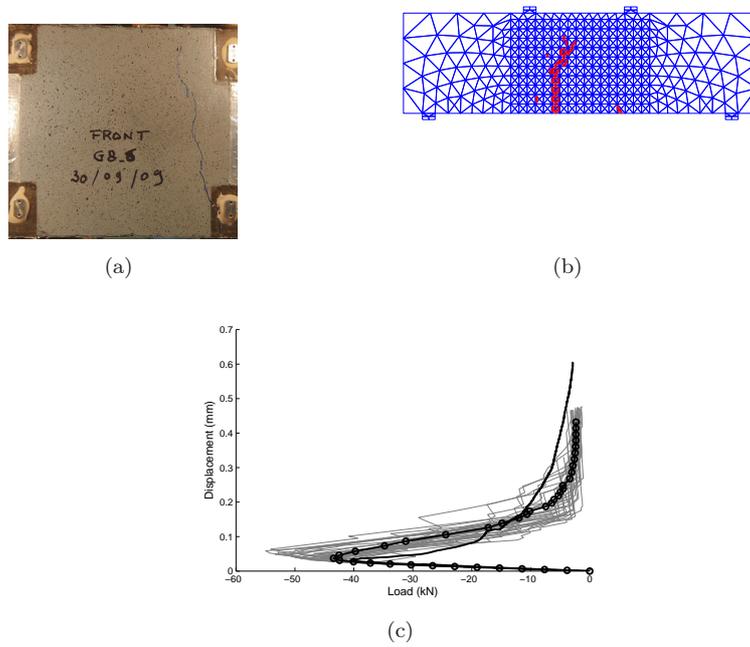


FIGURE 3.12 – Faciès de fissuration expérimentale (a), numérique (b) et ouvertures numérique/expérimentale (c)

(ref.3) et l'utilisation d'un film très mince entre l'échantillon (ref.4) et les plats de la presse (ref.1) permettent de diffuser la charge dans l'échantillon d'une manière convenable et de générer un état de fissuration particulièrement propre et bien maîtrisé. On remarquera que [Wang 1995] et [Aldea 1999] ont proposé un essai similaire sans arriver, par contre, à générer un état de fissuration comparable. Des fissures secondaires sont présentes depuis les premiers instants de leur essai.

La nécessité de coupler le système de mesure avec un essai de perméation fait en sorte qu'aucun capteur de déplacement peut être collé aux faces de l'éprouvette. On utilise 4 LVDTs (ref.5) fixés à la presse à l'aide d'un cadre rigide (ref.6) dont le coefficient de dilatation thermique est connu, pour effectuer les mesures de déplacement et, au même temps, contrôler l'essai. Les LVDTs ne touchent pas directement l'échantillon mais s'appuient sur des lames en verre (ref.7) collées au béton.

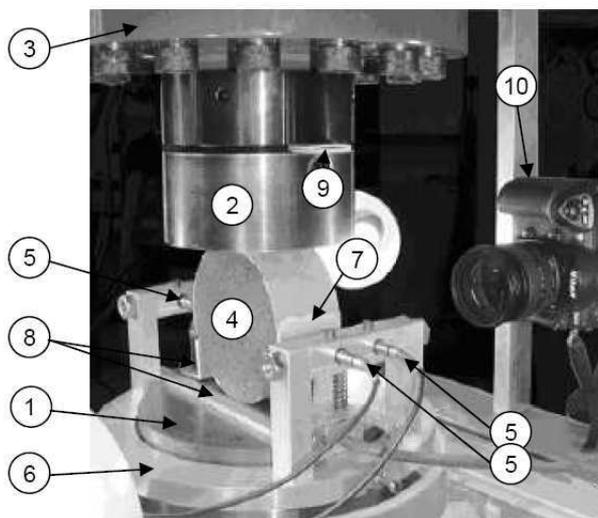


FIGURE 3.13 – Test settings

L'hétérogénéité du béton fait en sorte que l'ouverture des fissures sur les deux faces de l'échantillon n'est pas symétrique et donc la fissure traverse l'échantillon en se propageant d'une face à l'autre. Le contrôle de l'essai se fait alors sur le déplacement moyen des 4 LVDTs. Des appareils photo (ref.10) font aussi parti du montage et seront exploités pour intégrer les mesures avec une technique de corrélation d'image.

3.5.3.2 Analyse expérimentale avec les LVDTs

En raison du comportement asymétrique, les résultats doivent être reportés pour les deux faces de l'échantillon, respectivement la face avant et la face arrière. L'analyse de la variation du diamètre sur la position des LVDTs mène typiquement à un résultat comme celui présenté dans la fig.3.14(a). La présence de *snap-backs* confirme la nécessité de faire un contrôle de l'essai sur les déplacements (en effet, un contrôle en force serait impossible).

L'ouverture de la fissure ($COD=Crack\ Opening\ Displacement$) peut enfin être calculée à partir de la variation diamétrale sur les faces (mesurés en correspondance des LVDTs sous l'hypothèse que les sections planes restent planes) et ensuite en enlevant la composante élastique de la déformation. L'observation des résultats sur la COD (voir fig.3.14(b)) confirme le caractère asymétrique du comportement et la présence de *snap-backs* dans les premières phases (les *snap-backs* sont le résultat des

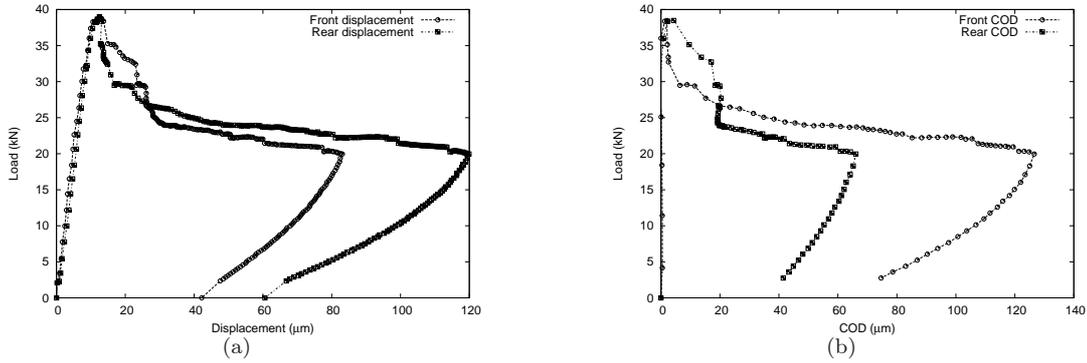


FIGURE 3.14 – Variations de diamètre via les LVDTs

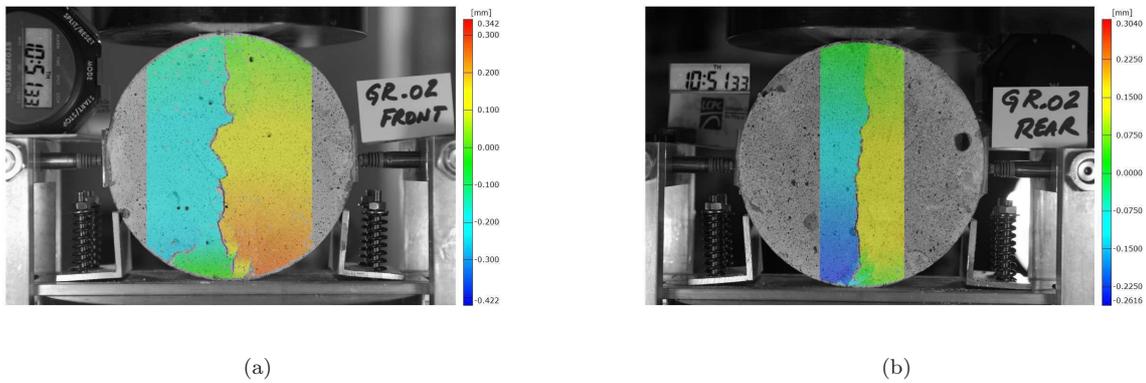


FIGURE 3.15 – Champs de déplacement sur la face avant (a) et arrière (b)

frictions internes granulats/pâtes de ciment [Acker 1987, Torrenti 1988, Ismail 2008]). Ces observations soulignent à nouveau la nécessité de mener des analyses numériques 3D pour tenir compte des phénomènes qui ont lieu dans la direction transversale de l'échantillon.

3.5.3.3 Analyse expérimentale avec la DIC

Il apparaît clairement que la mesure ponctuelle fournie par les LVDTs ne constitue pas une information complète sur l'état de fissuration, spécialement si l'on souhaite coupler par la suite une analyse de percolation. On a donc équipé l'essai avec des appareils photo (fig.3.13, ref.10) afin de compléter l'étude sur le comportement mécanique à l'aide d'une technique de corrélation d'image (*DIC=Digital Image Correlation*). Cette technique permet, en pixelisant l'image et en comparant les différents clichés, de reconstituer le champ de déplacements sur toute la face de l'échantillon (voir fig.3.15) et de retrouver la COD.

La figure 3.16 montre la pertinence de la mesure diamétrale offerte par les LVDTs au travers d'une comparaison avec les résultats issus de la DIC.

Il est ainsi évident que la DIC permet d'obtenir des informations supplémentaires concernant l'allure de la fissure. La figure 3.17 montre l'ouverture de la fissure à différents instants (voir aussi fig.3.16). Il est intéressant de remarquer comme la fissure ne s'ouvre pas d'une manière symétrique dans la direction longitudinale, i.e. l'ouverture maximale n'est pas au centre. Cette observation a été confirmée par d'autres tests et peut être expliquée par l'hétérogénéité du béton mais aussi par une

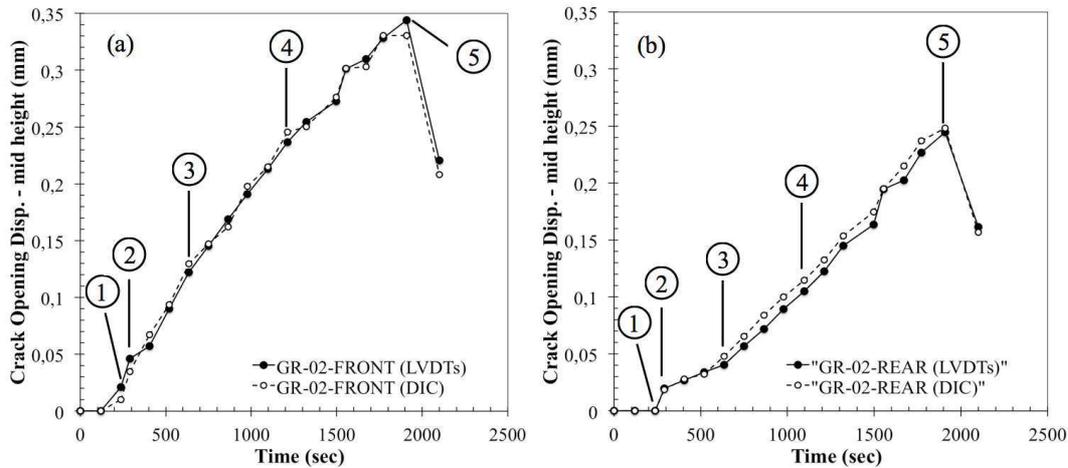


FIGURE 3.16 – Comparaison des résultats issus de la DIC et des LVDTs

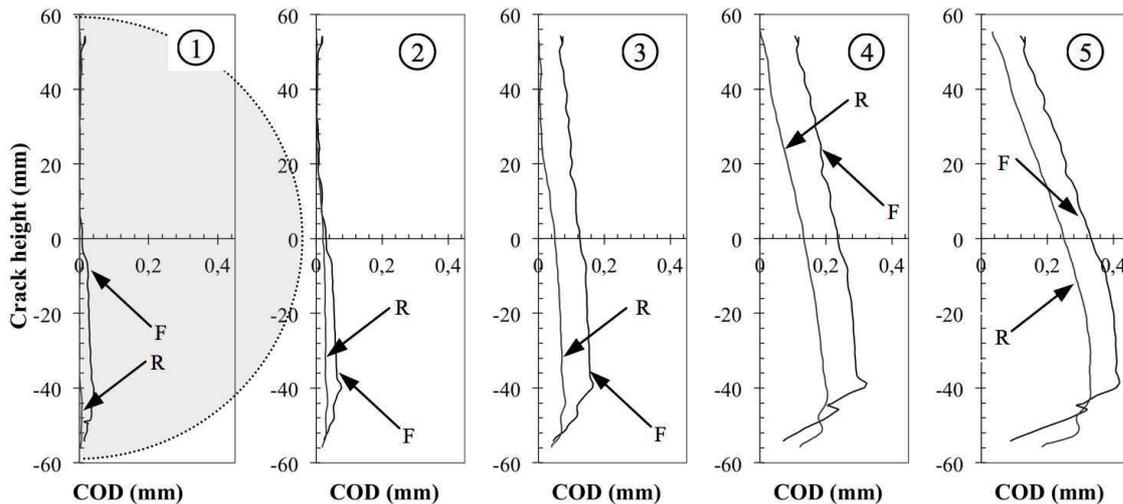


FIGURE 3.17 – Allure de la fissure à différentes étapes (voir fig.3.16)

influence non négligeable des conditions d'appui. Ce résultat partiel reste à confirmer au travers d'une campagne d'essais actuellement en cours sur des éprouvettes de diamètres différents, afin d'évaluer l'influence des conditions aux limites.

Cette observation est aussi questionnant sur la pertinence des mesures effectuées au centre de l'éprouvette via les LVDTs. On rappelle que le couplage avec la mesure de propriétés de transfert cache les deux faces de l'éprouvette et la DIC n'est pas utilisable. Toutefois, une corrélation entre la surface totale de la fissure (surface de percolation) et son ouverture diamétrale semble répondre à la question. La corrélation, menée sur un nombre suffisamment grand d'échantillons et donc d'une validité statistique, donne typiquement une relation comme celle présentée dans la fig.3.18. Ce résultat reste cependant à vérifier sur des échantillons de taille différente, mais il ne remet pas en cause la pertinence de la mesure diamétrale.

Ce travail fait partie de la thèse de G. Rastiello et les premiers résultats ont été présentés [Rastiello 2011b, Rastiello 2011a].

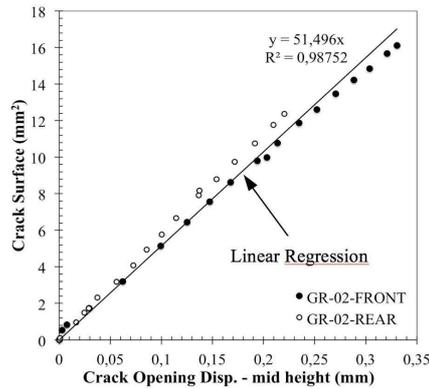


FIGURE 3.18 – Relation surface de pércolation vs mesure diamétrale

3.5.4 Couplage résistance électrique-fissuration

Dans un premier temps, le protocole mécanique a été couplé avec une mesure en temps réel de la résistivité électrique. Ce choix a été fait car la résistivité constitue un indicateur de durabilité [Baroghel-Bouny 2002, Baroghel-Bouny 2004, Torrenti 1999] et que sa mesure est moins problématique que celle d'un débit d'eau/gaz. Sur le sujet, la littérature propose des protocoles de mesures sur du béton caractérisé par une fissuration résiduelle [Sirieix 2002, Andrade 2004], ce qui nous semble peu représentatif de l'état réel du matériau.

Les détails du protocole sont présentés dans [Boulay 2009].

Pour ce qui concerne l'expérimentation, l'échantillon, après un phase de pre-conditionnement, est mis en place sous la presse et deux réservoirs remplis de solution ionique (NaOH/6.01g/l-KOH/8.94g/l) sont collés sur les deux faces. Une photo de l'appareil est présentée dans la figure 3.19.

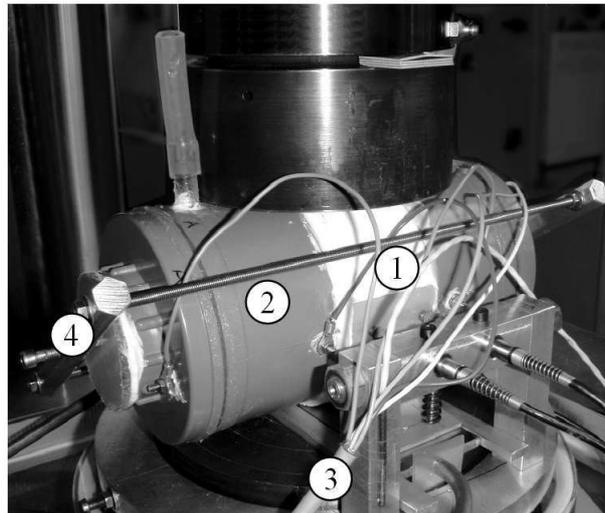


FIGURE 3.19 – Configuration finale du montage. 1.Echantillon ; 2.Reservoirs 3.Cablage 4.Système de blocage

Le protocole mécanique précédemment décrit a été ensuite appliqué en limitant l'ouverture de

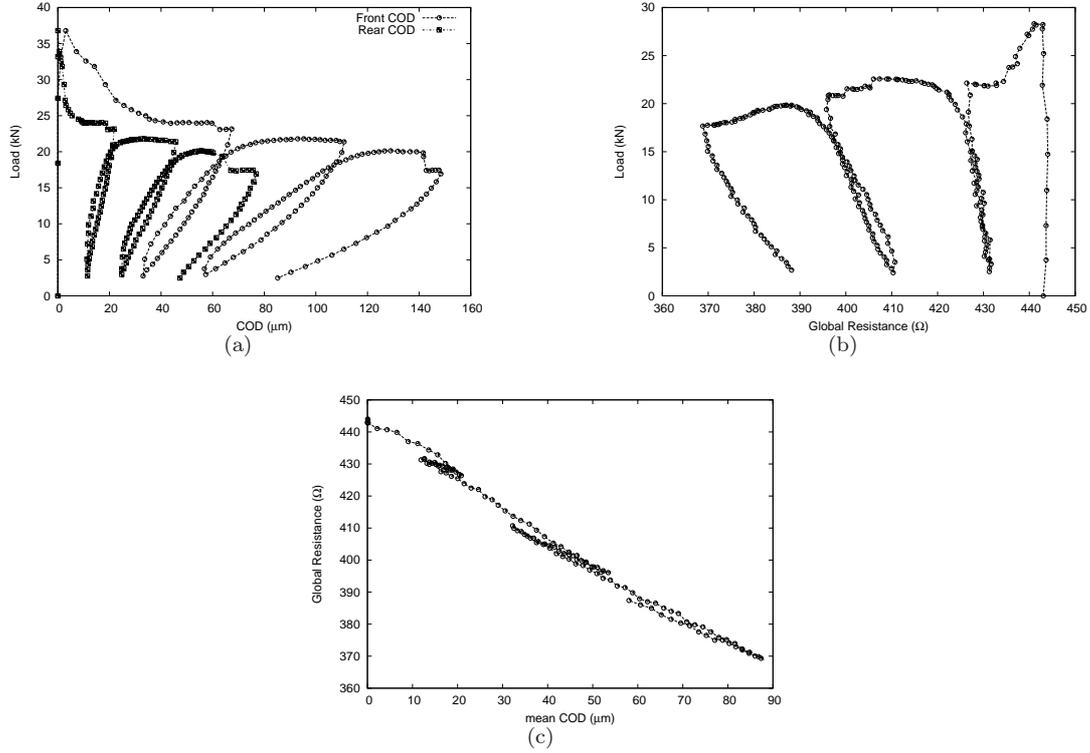


FIGURE 3.20 – Evolution du COD moyen et de la résistance totale

fissure à $100\mu m$ afin d'éviter la formation de fissures secondaires. Cette limite a été corrigé dans la suite et, comme on le verra, des ouvertures de fissures plus importantes ont été obtenues.

L'évolution de la COD et de la résistance électrique pendant le chargement sont présentées dans les figs.3.20(a) et 3.20(b). La COD ainsi que la résistance électrique évoluent après le pic de chargement, aucun décalage ni effet de seuil n'est observé (voir aussi la figure 3.20(c) qui corrèle la résistance électrique et le COD). L'absence d'un effet de seuil (réel ou apparent) est un résultat en contradiction avec les observations menées sur la perméabilité à l'eau ([Aldea 1999] mais voir aussi la section 3.6) ce qui souligne les difficultés que l'on rencontre dans ces types d'essais, soit sur la définition d'une fissure traversante (une fissure ouverte sur les deux faces est aussi ouverte au coeur de l'échantillon?), soit sur la sensibilité des mesures (la mesure d'une résistance électrique est sûrement plus fine de la mesure d'un débit d'eau).

Un modèle très simplifié de la fissure a été ensuite proposé afin de vérifier si, même en négligeant la rugosité et la tortuosité de la fissure réelle, un simple dièdre de surface équivalente (sur les deux faces avant/arrière) est suffisant pour décrire l'évolution de la résistivité électrique.

Cette dernière, R_c , est modélisée sous l'hypothèse que la somme des résistances élémentaires dr_c d'épaisseur dy et surface $S(y) = h \times o(y)$ avec $o(y)$ une fonction qui donne l'ouverture :

$$o(y) = \alpha y + \beta \quad (3.13)$$

avec $\alpha = \frac{o_2 - o_1}{b}$, $\beta = o_1$, o_1 et o_2 les ouvertures respectives de la face avant et de la face arrière.

R_c est obtenue par intégration $dr_c = \rho \frac{dy}{S(y)}$ entre 0 et l'épaisseur b :

$$R_c = \frac{\rho}{\alpha h} [\ln(\alpha b + \beta) - \ln(\beta)] \quad (3.14)$$

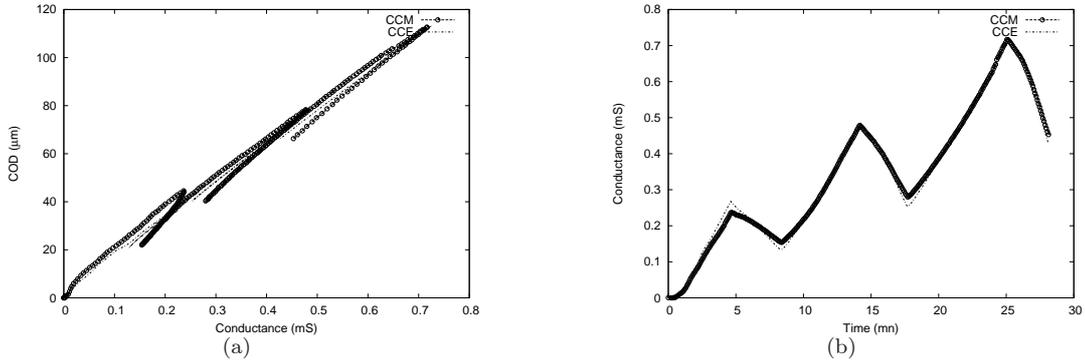


FIGURE 3.21 – Conductivités du modèle (CCM) et expérimentale (CCE)

On obtient la conductance, avec α , β et b issus de mesures expérimentales et la résistivité de l'électrolyte ρ obtenue en mesurant la conductivité, $\sigma = \frac{1}{\rho}$, de la solution au début et à la fin du test ($\sigma = 5S/m$). La hauteur, h , du prisme reste un paramètre à caler.

Un résultat typique est donné dans les figs.3.23(a) et 3.23(d), avec une hauteur $h = 0.066m$.

Ce résultat reste bien évidemment assez qualitatif car si on passe à des ouvertures sur les deux faces moins symétriques, la corrélation modèle/expérience est moins satisfaisante. Toutefois, il suggère le fait qu'un modèle de fissure très simple (on néglige la tortuosité et la géométrie de la fissure est très schématisée) est suffisant pour décrire la percolation dans un milieu poreux dès qu'une fissure traversante se forme. Autrement dit, l'impact d'une fissure sur un réseau poreux est tellement important que même une schématisation très grossière est suffisante pour décrire le phénomène. Une considération de ce type pose la base pour la modélisation hydro-mécanique, tout en tenant compte du type de modèle choisi pour la représentation de l'état de fissuration.

3.6 Perspectives : couplage perméabilité-fissuration

Le protocole de mesure en temps réel de la résistivité électrique a été dans un deuxième temps adapté pour évaluer la percolation de l'eau au travers d'une éprouvette fissurée. Ce travail est actuellement en cours et fait partie de la thèse de G. Rastiello, avec comme objectif celui d'alimenter le code THM-fissuration explicite pour tenir compte du changement de régime dès qu'une fissure s'ouvre dans un élément fini.

Le protocole choisi pour cet essai prévoit 4 ouvertures de fissure (50, 100, 150, 200 μm) et un plateau à chaque ouverture afin de stabiliser le débit d'eau (régime permanent). On remarquera que le protocole mécanique a été entre-temps peaufiné et que des ouvertures supérieures au 100 μm sont désormais possibles sans apparition de fissures secondaires. A chaque ouverture de fissure, on impose 3 gradients de pression (25, 50, 75kPa) jusqu'à la stabilisation. Un résultat typique est présenté dans la fig.3.22.

La figure 3.23 montre plus dans les détails les mesures. On remarque comme il est possible d'estimer le débit à chaque palier de pression, après l'établissement du régime permanent.

On peut finalement observer les débits mesurés pour chaque ouverture et gradient de pression en fonction de la COD (voir fig.3.24). On remarquera comme au dessous de 50 μm le débit est très faible, ce qui laisse supposer l'existence d'un seuil (apparent ?) [Aldea 1999, Wang 1995]. Cette observation reste objet de discussion, compte tenu aussi des observations sur la résistivité électrique.

Ces premiers résultats nécessitent, bien évidemment, d'être reproduits sur d'autres échantillons, d'un côté pour confirmer les observations faites, d'un autre côté pour leur donner une validité sta-

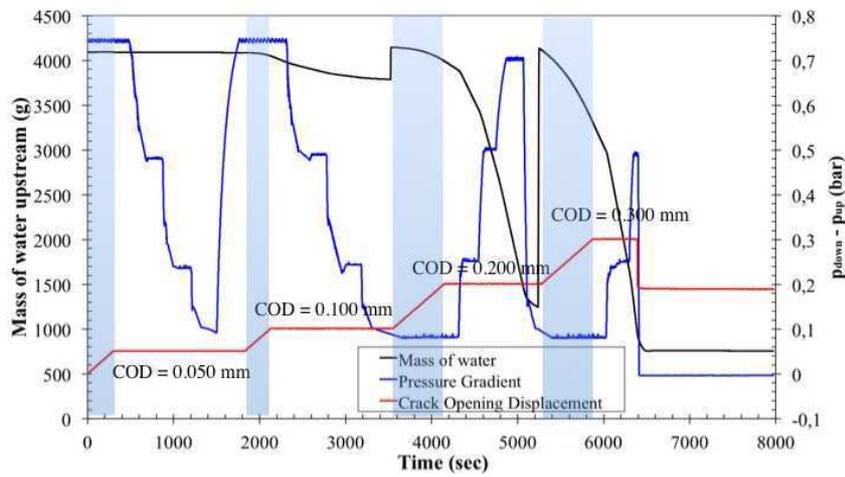


FIGURE 3.22 – Débit d'eau vs temps pour différentes ouvertures et Δp

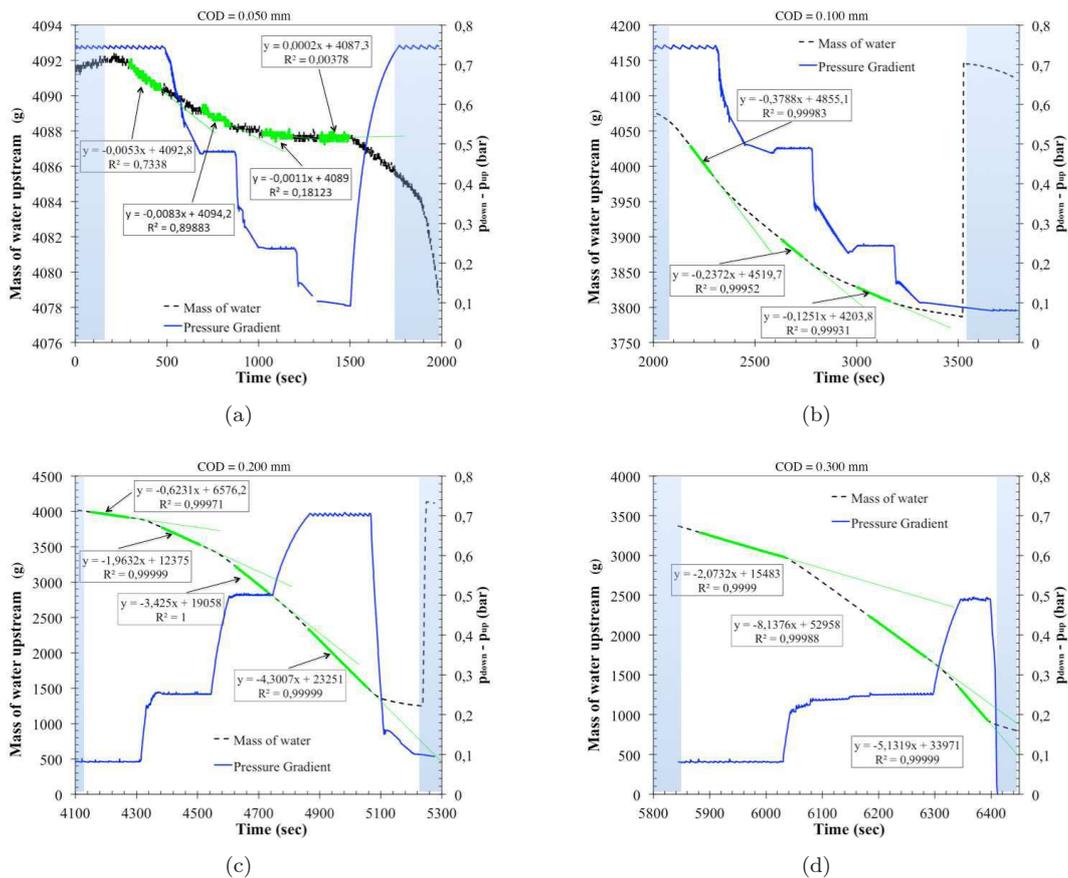


FIGURE 3.23 – Débit à 50 (a) 100 (b) 150 (c) 200 (d) μm

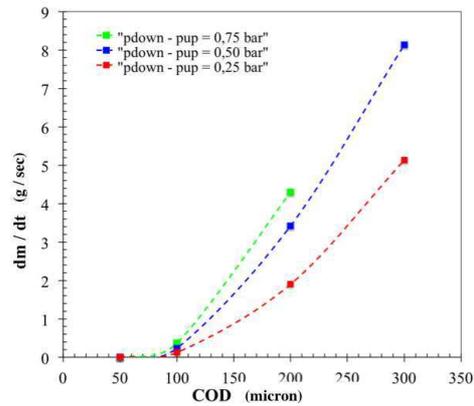


FIGURE 3.24 – Débit d'eau vs COD

FIGURE 3.25 – Nouveau dispositif pour la mesure du débit (éprouvette de $\phi = 25\text{cm}$)

tistique et pouvoir les intégrer dans l'esprit probabiliste du modèle mécanique. En perspective, les mesures du débit d'eau devraient être étendues aux mesures de débit de gaz. Les éventuels effets d'échelle devraient être aussi pris en compte, afin d'avoir une vision plus complète sur les phénomènes de percolation dans un milieu poreux (voir fig.3.25). L'objectif final reste celui d'alimenter d'une manière convenable la formulation numérique en présence d'une fissure localisée.

3.7 Conclusions et perspectives

Le travail présenté dans ce chapitre a été essentiellement orienté sur l'intégration du comportement mécanique au comportement thermo-hydraulique présenté dans la chapitre précédent. Deux stratégies d'approche au problème ont été présentées, en fonction de la façon choisie pour représenter la fissuration du matériau. Les deux approches, implicite et explicite, sont complémentaires et applicables selon le type de problème et la qualité de l'information requise en termes de taille de la structure, ouverture des fissures, espacements, . . . Une attention particulière a été portée sur le couplage entre les différentes physiques en jeu : dans ce contexte, la modélisation expérimentale offre les éléments en termes de compréhension de la physique et de lois constitutives nécessaires pour franchir ce pas. Les protocoles expérimentaux présentés dans ces pages permettent en outre de mesurer plusieurs champs au même temps (ouverture de fissure, flux d'eau, résistance électrique, . . .) ce qui est bien plus adapté que la simple mesure sur des propriétés résiduelles. Il a été ainsi souligné la nécessité de s'appuyer sur des formulations probabilistes, effort qui semble nécessaire pour tenir compte de la nature hétérogène du matériau béton et de sa sensibilité aux problèmes de changement d'échelle. Cette thématique a été à l'occasion étendue aux thématiques classiquement liées à la durabilité. On a observé une relation entre les mesures de perméabilité intrinsèque et la taille de l'échantillon. Ces premiers résultats sont à confirmer et à creuser par la suite, mais l'enjeu sur la façon actuelle de concevoir les problèmes de durabilité est évident. Une extension à d'autres propriétés, outre que la perméabilité intrinsèque, semble ainsi nécessaire. L'objectif final reste l'analyse d'une structure dans sa globalité et l'évaluation de sa fiabilité au cours du temps.

A ce propos, le thème portant sur le comportement au feu des bétons ouvre une autre thématique en termes de durabilité et fiabilité d'une structure. Cependant, la prévision d'un phénomène complexe comme l'écaillage reste difficile. L'augmentation importante de la température entraîne plusieurs difficultés à niveau de la physique du problème (dépassement de la température critique) et du traitement numérique des équations (passage de trois à deux phases fluides). Le caractère aléatoire de l'écaillage suggère aussi d'intégrer au modèle les considérations faites sur la démarche probabiliste. Un effort vers ces directions reste alors à faire par la suite.

Modélisations multi-physiques des milieux discrets

Sommaire

4.1	La modélisation des milieux discrets	55
4.2	Le modèle de collision entre grains	56
4.2.1	Le principe des travaux virtuels	56
4.2.2	Les lois de comportement	58
4.2.3	Un exemple : le cas d'un pseudo-potentiel quadratique	59
4.2.4	Collision simultanée de N solides	60
4.3	Méthode numérique	60
4.3.1	Discrétisation temporelle	61
4.3.2	Algorithme de résolution - cas d'une loi qui dérive d'un pseudo-potentiel	62
4.3.3	Comparaison avec l'élasto-plasticité	63
4.3.4	Algorithme de résolution - cas de la loi de Coulomb	64
4.4	Application au cas des milieux granulaires	66
4.4.1	Loi qui dérive d'un pseudo-potentiel	67
4.4.2	Loi de frottement de type Coulomb	67
4.5	Application au comportement d'une foule humaine	68
4.5.1	Évacuation d'une salle rectangulaire	70
4.5.2	Évacuation d'une salle rectangulaire avec un obstacle devant la sortie	71
4.5.3	Évacuation d'une école primaire	72
4.5.4	Modélisation de sous-groupes	72
4.5.5	Modélisation des voyageurs durant l'échange quai/train : le cas des stations à une seule sortie du métro parisien	73
4.6	Perspectives : interaction couplée foule-structure	76
4.6.1	Modèle couplé	76
4.6.2	Simulations numériques	77
4.7	Conclusions et perspectives	78

4.1 La modélisation des milieux discrets

Dans ce qui suit, une synthèse de mes travaux de recherche menés sur la mécanique des milieux discrets est présentée. Ce travail a débuté en 2006 lors d'un stage post-doctorale au IFSTTAR-LCPC et trouve sa source d'inspiration dans le modèle de collisions entre grains proposé par Frémond [Frémond 1995] (voir la section 4.2). Cette formulation a fait l'objet d'un nombre de développements numériques et a abouti à la présentation d'un modèle dit A-CD² (*Atomized Contact Dynamics respecting Clausius-Duhem inequality*, voir section 4.3) [Dal Pont 2006b, Dal Pont 2008a].

La formulation A-CD² a été ensuite reprise et adaptée pour la modélisation du comportement des piétons et des foules, particulièrement dans des situations d'évacuation d'urgence (section 4.5). Ce travail, qui a fait aussi l'objet d'un sujet de thèse [Pécol 2011a], a été décliné sous plusieurs formes allant de l'optimisation et l'aménagement d'espaces publics aux couplages foule-structure légère. Plusieurs communications sont disponibles sur ce sujet [Pécol 2010, Pécol 2011b, Pécol 2011c].

4.2 Le modèle de collision entre grains

La modélisation du comportement collisionnel entre particules à l'aide d'une méthode discrète (par opposition à la méthode des éléments finis) est classiquement liée au nom de P.A. Cundall [Cundall 1979], qui a proposé une modélisation de blocs rocheux comme un assemblage de blocs rigides connectés par des ressorts et des amortisseurs. Ainsi, plusieurs modélisations ont été proposées avec différents façon de traiter le contact et les collisions multiples. Pour ce qui concerne la loi de contact, on fait généralement appel à deux classes de modèles : les modèles réguliers, qui régularisent la discontinuité issue du contact, et les modèles non-réguliers. Les premiers autorisent une légère interpénétration entre les particules, interpénétration qui permet de gérer le mécanisme de restitution et donc le comportement des particules après le contact. Ces méthodes sont connues sous le nom de dynamique moléculaire. Les méthodes non-régulières sont plus rigoureuses, prennent en compte la discontinuité et modélisent le contact en introduisant les concepts de fonction convexe et de calcul sous-différentiel. Dans cette classe des modèles, J.J. Moreau [Moreau 1968, Moreau 1970, Moreau 1971] introduit l'idée de pseudo-potential, fonction convexe et semi-définie positive qui permet de résoudre d'une manière physiquement rigoureuse le problème (i.e. aucune interpénétration est requise). Cette méthode est connue sous le nom de dynamique des contacts [Jean 1995, Moreau 1994]. Dans ce cadre, M. Frémond [Frémond 1995, Frémond 2001] propose, à partir du formalisme de la mécanique des milieux continus, une modélisation du contact multiple pour des particules de forme polyédrique ([Moreau 1994] ne traite que de particules circulaires). Dans cette démarche, le système est considéré déformable dans son ensemble mais constitué par des corps indéformables. Le contact est traité au travers l'introduction des efforts intérieurs au système, qui sont des forces ou des percussions définies par leur travail. L'approche s'appuie sur le principe des travaux virtuels et sur la thermodynamique des milieux continus, ce qui rend la démarche assez proche aux usages de la mécanique classique. Pour ces raisons, un choix a été fait en faveur de cette formulation.

La modélisation mécanique des collisions entre particules est présentée à partir de la description de la collision entre un point matériel et un plan rigide et fixe. Ce système simplifié permet de réduire le nombre de degrés de liberté et de se focaliser sur le phénomène collisionnel. Les équations du mouvement sont étudiées sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ (Fig.4.1) à l'intérieur duquel se trouve l'instant t_c auquel survient une collision. La collision est supposée instantanée, ce qui a pour effet de concentrer toutes les forces de contact dans le temps pour les exercer à l'instant de la collision. L'effort ainsi obtenu est une percussion de contact [Frémond 1995, Frémond 2001]. La vitesse du point est discontinue à l'instant de collision t_c . Ses limites à gauche et à droite sont désignées par les exposants - et +.

4.2.1 Le principe des travaux virtuels

On considère que le système est soumis à deux types d'actions, les forces et les percussions. Les forces sont de quantités régulières (*smooth*) fonctions du temps tandis, que les percussions sont concentrées dans un instant (i.e. des Diracs) et sont par conséquent des quantités non-régulières. Les efforts intérieurs (forces et percussions) sont définis à partir de leur travail.

Le principe des travaux virtuels conduit à écrire pour les efforts intérieurs [Dal Pont 2006b, Dimnet 2003, Dimnet 2004] :

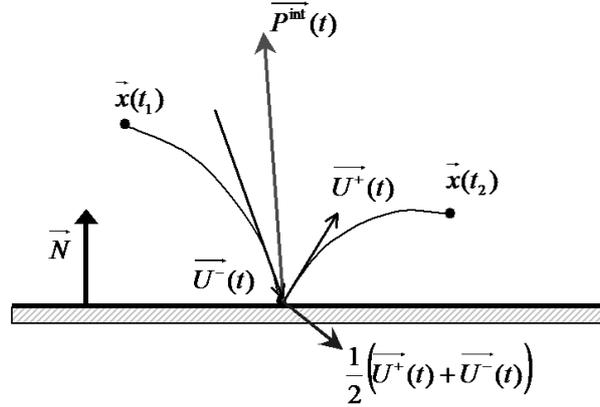


FIGURE 4.1 – Collision instantanée entre un plan fixe et une particule

$$W^{int}(t_1, t_2, t_c, \mathbf{v}) = - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r}^{int}(\tau) \mathbf{v} d\tau - \mathbf{p}^{int}(t_c) \frac{\mathbf{v}^-(t_c) + \mathbf{v}^+(t_c)}{2} \quad (4.1)$$

où \mathbf{v} est une vitesse virtuelle du point, t_c est l'instant virtuel de la collision et \mathbf{r} la force régulière. En particulier, l'éq.4.1 permet d'établir la dualité entre la percussion intérieure \mathbf{p}^{int} et la quantité $\frac{\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+}{2}$, qui peut de ce fait être désignée comme la vitesse de déformation à l'instant de la collision du système constitué du point et du plan.

Le travail virtuel des efforts d'accélération est [Frémond 1995] :

$$W^{acc}(t_1, t_2, t_c, \mathbf{v}) = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{u}(\tau)}{d\tau} \mathbf{v}(\tau) d\tau + m(\mathbf{u}^+(t_c) - \mathbf{u}^-(t_c)) \frac{\mathbf{v}^-(t_c) + \mathbf{v}^+(t_c)}{2} \quad (4.2)$$

où m est la masse du point et \mathbf{u} est la vitesse réelle.

Enfin, le travail virtuel d'une percussion extérieure au système est [Frémond 1995] :

$$W^{ext}(t_1, t_2, t_c, \mathbf{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r}^{ext}(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau + \mathbf{p}^{ext}(t_c) \frac{\mathbf{v}^-(t_c) + \mathbf{v}^+(t_c)}{2} \quad (4.3)$$

Le terme \mathbf{p}^{ext} désigne un effort qui se manifeste à l'instant de la collision mais externe au contact. Un exemple de percussion extérieure concomitant à une collision est offert par le flipper, où une impulsion est appliquée à la bille dès qu'elle heurte certains obstacles.

Le principe des travaux virtuels implique que pour toute vitesse virtuelle \mathbf{v} et tout instant t_c , on a :

$$W^{acc}(t_1, t_2, t_c, \mathbf{v}) = W^{int}(t_1, t_2, t_c, \mathbf{v}) + W^{ext}(t_1, t_2, t_c, \mathbf{v}) \quad (4.4)$$

Selon ce principe, les équations du mouvement du point dans l'intervalle $[t_1, t_2]$:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = -\mathbf{r}^{int} + \mathbf{r}^{ext} \quad \text{presque partout} \quad (4.5)$$

et

$$m(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) = -\mathbf{p}^{int} + \mathbf{p}^{ext} \quad \text{partout} \quad (4.6)$$

Ces deux équations décrivent l'évolution libre (via l'éq.4.5 qui fait intervenir la mesure de Lebesgue) et l'évolution irrégulière (via l'éq.4.6 qui fait intervenir la mesure de Dirac). Cette dernière équation peut être interprétée de deux manières : s'il y a une percussion intérieure ou extérieure il y a une discontinuité de vitesse et s'il y a une discontinuité de vitesse il y a une percussion intérieure ou extérieure. Quand l'éq.4.5 n'est plus vérifiée, les éléments de l'éq.4.6 ne sont plus identiquement nuls. Cela se produit essentiellement s'il y a une contrainte cinématique, i.e. le point rencontre le plan [Frémond 2001]. Cette équation exprime aussi une dualité au sens du travail des efforts intérieurs entre \mathbf{p}^{int} et $\frac{\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+}{2}$ ce qui invite à exprimer les lois de comportement par l'expression de \mathbf{p}^{int} en fonction de $\frac{\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+}{2}$ conformément aux usages de la mécanique.

4.2.2 Les lois de comportement

Les lois de comportement décrivent la façon dont le système se déforme et elles traduisent les différents comportements collisionnels, tout en assurant la non-interpénétration des différentes particules lors d'une collision. Afin de distinguer ces deux aspects, la percussion intérieure est divisée en deux parties : la percussion dissipative \mathbf{p}^d , qui traduit le comportement des objets en examen à l'instant de la collision, et la percussion réactive \mathbf{p}^{reac} , qui assure la non-interpénétration des particules, soit :

$$\mathbf{p}^{int} = \mathbf{p}^d + \mathbf{p}^{reac} \quad (4.7)$$

La percussion dissipative La percussion dissipative décrit les interactions (que l'on exige dissipatives) entre les particules qui s'entrechoquent. [Frémond 1995] fait le choix de dériver les efforts dissipatifs à partir d'un pseudo-potentiel de dissipation. Ce choix n'est pas le plus général mais permet de décrire un large nombre de comportements. Cependant, le principal problème qui ne relève pas d'un pseudo-potentiel est le frottement. Ce type de problème est pourtant assez central lorsqu'on parle de contact. Cette limite s'explique par le fait que la théorie des collisions proposée par Frémond est seulement une déclinaison d'un cadre théorique bien plus large (qui couvre de problèmes tels que les changements de phase, l'endommagement, ...). Toutefois, on verra plus loin que même le cas d'un frottement de type Coulomb peut être traité par la théorie proposée. Il convient de souligner que cette approche n'est pas la seule disponible dans la littérature, particulièrement lorsqu'on parle de frottement. En effet, à partir du concept de bipotentiel, [de Saxcé 1991, de Saxcé 1998] a proposé une modélisation du contact unilatéral avec frottement qui abouti à un bipotentiel de contact. Cette formulation élargit le champs d'action du pseudo-potentiel tout en permettant de conserver les avantages d'une écriture de loi d'évolution à l'aide d'une fonction à variables scalaires et d'une loi de sous-normalité.

Dans le cas qui nous intéresse, la percussion dissipative est définie à partir d'un pseudo-potentiel de dissipation Φ^d , qui est une fonction positive, convexe et nulle à l'origine [Moreau 1966, Frémond 1995, Dimnet 2002a, Pfeiffer 2001] :

$$\mathbf{p}^d \in \partial \Phi^d\left(\frac{\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-}{2}\right) \quad (4.8)$$

où l'opérateur ∂ désigne le sous-différentiel. De très nombreux comportements peuvent être décrits de cette manière, l'exception étant le frottement de Coulomb.

La percussion réactive La percussion réactive \mathbf{p}^{reac} est la réaction à la condition de non-interpénétration. La non-interpénétration est assurée si la vitesse normale après la collision est dirigée vers le haut (voir fig.4.1), ce qui s'écrit $u_N^+ \geq 0$ (avec $u_N^+ = \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{N}$). Cette percussion est égale à 0 si $u_N^+ > 0$, est non-nulle si $u_N^+ = 0$ et assure que la condition $u_N^+ < 0$ ne soit pas vérifiée. Ces propriétés peuvent être énoncées à l'aide des fonctions indicatrices [Moreau 1966, Frémond 1995] de la manière suivante (voir fig.4.2) :

$$\mathbf{p}^{reac} \in \partial I_K \left(\frac{\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-}{2} \cdot \mathbf{N} \right), K = \left[\frac{u_N^-}{2}, +\infty \right] \quad (4.9)$$

Cette fonction traduit le fait que les efforts sont bien nuls s'il n'y a pas contact. La percussion réactive est normale au plan et est active uniquement si $u_N^+ = 0$, c'est à dire si la vitesse normale après le contact est nulle ou encore s'il y a un risque d'interpénétration. On remarquera alors que la percussion réactive n'apparaît que lorsque les autres efforts sont insuffisants pour assurer cette condition.

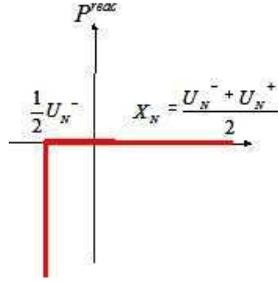


FIGURE 4.2 – Fonction indicatrice

On remarquera enfin que, comme K est un ensemble convexe contenant l'origine, la fonction indicatrice I_K est aussi un pseudo-potential de dissipation [Frémond 1995, Dimnet 2002a, Pfeiffer 2001]. La percussion intérieure peut ainsi être exprimée en fonction d'un seul pseudo-potential :

$$\mathbf{p}^{int} \in \partial \Phi \left(\frac{\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-}{2} \right) \quad \text{avec} \quad \Phi = \Phi^d + I_K \quad (4.10)$$

i.e. la percussion intérieure dérive d'un pseudo-potential de dissipation. A la rigueur, le pseudo-potential de dissipation dépend aussi de la distance entre particules, nulle à l'instant du contact quand le pseudo-potential est actif.

4.2.3 Un exemple : le cas d'un pseudo-potential quadratique

A titre d'exemple, on considère la loi constitutive la plus simple : $\Phi^d = \frac{1}{2}kX^2$, ce qui correspond à une percussion dissipative linéaire. L'équation du choc s'écrit :

$$\begin{aligned} (m+k)\mathbf{X} + \mathbf{p}^{reac} &= 2m\mathbf{u}^- \\ \mathbf{p}^{reac} &\in \partial I_{K_{[u^-, \infty[}}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec $\mathbf{X} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-$. Selon la valeur de k on obtient la solution :

- si $k \geq m$, le solide n'est pas lourd ou le système point-plan est fortement dissipatif, on a un rebond et $\mathbf{p}^{reac} = 0$ et $\mathbf{u}^+ = \frac{m-k}{m+k}\mathbf{u}^-$
- si $k \leq m$, le solide est lourd ou le système point-plan est peu dissipatif, on n'a pas de rebond et $\mathbf{u}^+ = 0$ et $\mathbf{p}^{reac} = (m-k)\mathbf{u}^-$

Dans le cas d'une collision binaire, on peut aussi introduire la notion de coefficient de restitution $e = \mathbf{u}^+ / \mathbf{u}^-$, couramment utilisée lorsqu'on parle de collisions.

4.2.4 Collision simultanée de N solides

La théorie des collisions présentée à partir du cas simple que constitue la collision d'un point et d'un plan peut être généralisée à la collision simultanée de N solides. Les contacts entre solides sont supposés ponctuels. On considère des solides qui s'entrechoquent à l'instant t .

On peut démontrer [Frémond 1995, Dimnet 2002b, Dal Pont 2006b] que dans le cas des lois de comportement exprimées via un pseudo-potential de dissipation, Φ , le problème peut être exprimé de la manière suivante :

$$2\mathbf{u}^- + \mathbf{T}^{ext} \in 2\mathbf{X} + \partial\Phi(\mathbf{X}) \quad (4.12)$$

en notant $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-}{2}$. Cette inclusion est équivalente au problème de minimisation :

$$\inf \{ \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle + \Phi(\mathbf{Y}) - \langle 2\mathbf{u}^- + \mathbf{T}^{ext}, \mathbf{Y} \rangle \mid \mathbf{Y} \in R^{6N} \} \quad (4.13)$$

où on introduit la notation $\langle \bullet, \bullet \rangle$, produit scalaire.

Cette dernière expression du problème est celle effectivement utilisée dans les schémas numériques.

L'existence et l'unicité de la solution ainsi que le respect de l'inéquation de Clausius-Duhem peuvent aussi être démontrés (voir, par exemple, [Dal Pont 2006b]).

4.2.4.1 Cas de la loi de frottement de Coulomb

Certains comportements (roches, bétons, céramiques, ...) ne dérivent pas d'un pseudo-potential de dissipation ; c'est le cas du frottement de Coulomb (non-associé). Des expériences de collisions bidimensionnelles [Cholet 1997] de particules angulaire sèches avec un bloc massif de marbre montrent que le comportement normal peut être modélisé grâce à un pseudo-potential (même quadratique). Cependant cela n'est pas valable pour le comportement tangentiel, i.e. le comportement tangentiel dépend aussi de la percussion normal. Ceci se traduit par le fait qu'il n'existe pas un pseudo-potential de dissipation tel que $\mathbf{p}^d \in \partial\Phi^d$. Si \mathbf{p} est la percussion exercée en un point de contact où la normale est \mathbf{N} , sa composante tangentielle \mathbf{p}_T appartenant au plan perpendiculaire à \mathbf{N} et sa composante normale $p_N = \mathbf{p} \cdot \mathbf{N}$ vérifient :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{p}_T\| \leq \mu p_N \quad \text{ou} \quad \mu > 0 \quad \text{et} \\ & \text{si} \quad \|\mathbf{p}_T\| < \mu p_N \quad \text{alors} \quad \mathbf{X}_T = \mathbf{0} \\ & \text{si} \quad \|\mathbf{p}_T\| = \mu p_N \quad \text{alors} \quad \exists \lambda \quad \text{tel que} \quad \mathbf{X}_T = \lambda \mathbf{p}_T \end{aligned} \quad (4.14)$$

En dimension 2, si on représente sur l'axe de abscisse la composante tangentielle et sur les ordonnées la composante normale, on obtient un cône (de Coulomb) que l'on peut considérer comme un critère $|\mathbf{p}_T| - \mu |p_N| \leq 0$ au sens de l'emploi que l'on fait en plasticité.

Il est toutefois possible de démontrer l'existence et l'unicité de la solution à partir d'une suite dont les termes sont les solutions du problème obtenu lorsque la loi de frottement utilisée est une loi de Tresca, dotée d'un seuil de glissement indépendant de l'effort normal (loi associée, voir fig.4.3). Il a été montré que cette suite des solutions converge vers la solution unique du problème avec frottement de Coulomb, si les coefficients de frottement sont petits [Dimnet 2002b]. Dans [Dimnet 2002b] on démontre aussi le caractère dissipatif de la loi de frottement de Coulomb.

4.3 Méthode numérique

Dans la suite on présentera la méthode numérique ainsi qu'un algorithme de résolution adapté pour les équations décrivant l'évolution régulière et non régulière du système de particules en collision. La difficulté liée à la résolution numérique porte sur le fait que plusieurs collisions peuvent se produire dans le milieu granulaire, particulièrement en présence d'un milieu dense. Une première façon de

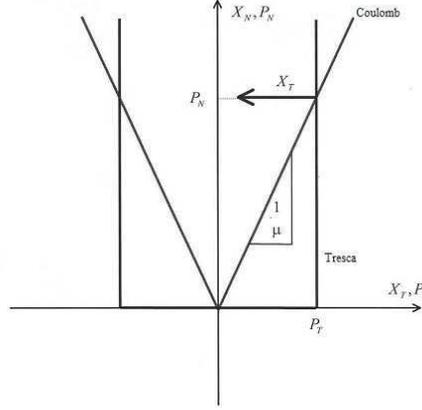


FIGURE 4.3 – Lois de frottement : Tresca vs. Coulomb

résoudre le problème est proposée par les méthodes gérées par les événements (*event-driven methods*). Ces méthodes consistent à identifier l'instant de la prochaine collision, à faire avancer le système jusqu'à cet instant et à calculer les vitesses des particules après ce contact. Elles deviennent rapidement inefficaces d'un point de vue numérique lorsqu'on augmente le nombre de particules et une grande précision du calcul de l'instant de la collision est demandée. Une deuxième façon de faire porte sur l'approche proposée par J.J. Moreau et M. Jean [Jean 1995, Moreau 1994], dite de *time-stepping*. Dans ce cas, le pas de temps ne dépend pas des événements, et l'ensemble des forces de contact du système est déterminé d'une manière itérative.

Dans notre cas, une approche de ce type est retenue. La méthode proposée a été nommée A-CD² (*Atomized Contact Dynamics respecting Clausius-Duhem inequality*) et consiste à approcher tous les forces (régulières) par une succession de percussions, de façon telle à décrire tous les efforts dans le système comme des percussions. La conséquence de l'atomisation des forces est de représenter l'évolution du système comme une succession de vitesses discontinues.

4.3.1 Discrétisation temporelle

Entre l'instant 0 et t , les efforts cumulés \mathbf{R}^{int} et \mathbf{R}^{ext} s'expriment comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{int}(t) &= \int_0^t \mathbf{f}^{int}(\tau) d\tau + \int_0^t \sum_{t_i} \mathbf{p}^{int}(t_i) \delta_{t_i}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \mathbf{f}^{int}(\tau) d\tau + \sum_{t_i} \mathbf{p}^{int}(t_i) H(t - t_i), \text{ et} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{ext}(t) &= \int_0^t \mathbf{f}^{ext}(\tau) d\tau + \int_0^t \sum_{t_j} \mathbf{p}^{ext}(t_j) \delta_{t_j}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \mathbf{f}^{ext}(\tau) d\tau + \sum_{t_j} \mathbf{p}^{ext}(t_j) H(t - t_j) \end{aligned} \quad (4.16)$$

où t_i et t_j sont les instants auxquels des percussions intérieures et extérieures sont exercées et \mathbf{f} désigne le cumul des efforts réguliers.

La méthode des percussions (PM) consiste à approcher les éléments réguliers de \mathbf{R}^{int} et de \mathbf{R}^{ext} par des percussions, ce qui est appelé atomisation des efforts. Une évolution approchée est alors obtenue, évolution qui se caractérise par une succession de discontinuités de vitesse séparées par des évolutions à vitesse constante. Lorsqu'elle est appliquée à des systèmes de solides, cette méthode porte le nom de méthode A-CD². D'un point de vue pratique, l'application de la méthode consiste :

- à découper la durée de la simulation $[0, T]$ en n intervalles $[t_k, t_{k+1}]$ de longueur $h = \frac{T}{N_{int}}$. Sur chacun de ces intervalles, les efforts réguliers (forces et moments) sont atomisés, c'est-à-dire remplacés par une percussion exercée à l'instant $\theta_k = t_k + \frac{1}{2}h$
- à considérer que toutes les efforts irréguliers (percussions exercés à l'occasion des collisions) que subit le système pendant l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1}]$ sont exercés à l'instant θ_k . Il en découle que les vitesses sont discontinues aux instants θ_k (quand les percussions sont exercées) et qu'elles sont constantes partout ailleurs.

Ces aspects sont mis en évidence dans la figure 4.4.

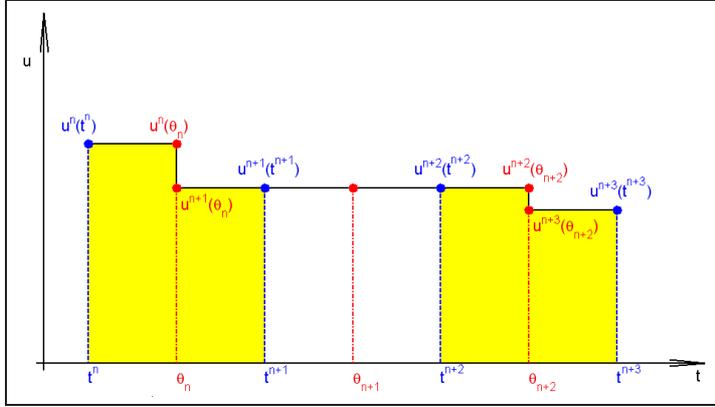


FIGURE 4.4 – Schéma de discrétisation temporelle

4.3.2 Algorithme de résolution - cas d'une loi qui dérive d'un pseudo-potentiel

En termes d'algorithme de résolution, on nomme $\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}(0)$ et $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(0)$ respectivement les positions et les vitesses initiales et on suppose que \mathbf{q}^n et \mathbf{u}^n (i.e. \mathbf{u}^-) au temps t^n soient connus. L'objectif ultime devient celui de trouver \mathbf{q}^{n+1} et \mathbf{u}^{n+1} (i.e. \mathbf{u}^+) au temps t^{n+1} . L'équation en forme discrétisée qui gouverne la discontinuité devient alors $[t^n, t^{n+1}]$:

$$\mathbf{u}^{n+1}(\theta_n) - \mathbf{u}^n(\theta_n) = \mathbf{m}^{-1} \left(-\mathbf{p}^{int} \left(\frac{\Delta(\mathbf{u}^{n+1}(\theta_n)) + \Delta(\mathbf{u}^n(\theta_n))}{2} \right) + \mathbf{p}^{ext}(\theta_n) \right) \quad (4.17)$$

avec $\Delta(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$ la vitesse de déformation relative entre les particules i et j (on néglige la rotation). Si on rappelle que $\mathbf{X}^{n+1} = \frac{\mathbf{u}^{n+1}(\theta_n) + \mathbf{u}^n(\theta_n)}{2}$, l'eq.(4.17) devient :

$$2\mathbf{X}^{n+1} + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{p}^{int}(\Delta(\mathbf{X}^{n+1})) = 2\mathbf{u}^n(\theta_n) + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{p}^{ext}(\theta_n) \quad (4.18)$$

Quand un contact est détecté, l'équation à résoudre devient équivalent au problème de minimisation sous contrainte suivant (voir eq.4.13) :

$$\mathbf{X}^{n+1} = \underset{\mathbf{Y}^{n+1} \in \mathbf{R}^{2N}}{\arg \min} \left[{}^t\mathbf{Y}^{n+1} \mathbf{m} \mathbf{Y}^{n+1} + \Phi(\Delta(\mathbf{Y}^{n+1})) - {}^t(2\mathbf{u}^n(\theta_n) + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{p}^{ext}(\theta_n)) \mathbf{m} \mathbf{Y}^{n+1} \right] \quad (4.19)$$

avec $\mathbf{Y}^{n+1} = \frac{\mathbf{u}^{n+1}(\theta_n) + \mathbf{u}^n(\theta_n)}{2}$.

Par souci de breveté, le problème de la détection du contact (particulièrement lorsqu'on traite de particules de forme polygonale) ne sera pas détaillé (voir [Dal Pont 2006b]).

Si on utilise une loi qui découle d'un pseudo-potential de dissipation quadratique, on obtient :

$$\Phi^d(\Delta(\mathbf{Y}^{n+1})) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{2} K_T ({}^t \Delta_{ij}(\mathbf{Y}^{n+1}) \mathbf{T}_{ji})^2 + \frac{1}{2} K_N ({}^t \Delta_{ij}(\mathbf{Y}^{n+1}) \mathbf{N}_{ji})^2 \quad (4.20)$$

\mathbf{T}_{ji} est la tangente au contact $j-i$, \mathbf{N}_{ji} la normale, K_N et K_T sont les coefficients de dissipation pour les composantes normales et tangentielle. K_N prend en compte le caractère inélastique de la collision tandis que K_T peut être associé aux effets de type visqueux. Une collision est parfaitement élastique pour $K_N \rightarrow \infty$ [Frémond 1995]. D'un point de vue pratique, une valeur de $K_N > 10^4 \text{ kg}$ est suffisant. On remarque que l'inégalité suivante doit être respectée lorsqu'on détecte un contact entre une particule i et une particule j :

$$- {}^t \Delta_{ij}(\mathbf{Y}^{n+1}) \mathbf{N}_{ji} + {}^t \Delta_{ij}\left(\frac{\mathbf{u}^n(\theta_n)}{2}\right) \mathbf{N}_{ji} \leq 0 \quad (4.21)$$

Comme

$$\Phi^r(\Delta(\mathbf{Y}^{n+1})) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij}^{n+1} \left[- {}^t \Delta_{ij}(\mathbf{Y}^{n+1}) \mathbf{N}_{ji} + {}^t \Delta_{ij}\left(\frac{\mathbf{u}^n(\theta_n)}{2}\right) \mathbf{N}_{ji} \right] \quad (4.22)$$

où μ_{ij}^{n+1} est le multiplicateur de Lagrange ; μ_{ij}^{n+1} et \mathbf{u}^{n+1} satisfaisons les conditions de Karush-Kuhn-Tucker :

$$\begin{cases} \mu_{ij}^{n+1} \geq 0 \\ {}^t \Delta_{ij}(\mathbf{Y}^{n+1}) \mathbf{N}_{ji} - {}^t \Delta_{ij}\left(\frac{\mathbf{u}^n(\theta_n)}{2}\right) \mathbf{N}_{ji} \geq 0 \\ \mu_{ij}^{n+1} \left[{}^t \Delta_{ij}(\mathbf{Y}^{n+1}) \mathbf{N}_{ji} - {}^t \Delta_{ij}\left(\frac{\mathbf{u}^n(\theta_n)}{2}\right) \mathbf{N}_{ji} \right] = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Le problème de minimisation (4.19) peut être résolu en utilisant l'algorithme d'Uzawa (voir [Ciarlet 1989]). D'une manière succincte, l'algorithme peut être écrit comme suit :

1. $\mu^0 \in R_+^p$ est choisi à l'étape 0
2. A chaque étape n , $\mathbf{X}_{n+1} = \arg \min \{ \mathcal{F}(\mathbf{Y}) + \sum_{i=1}^p \mu_i^n \varphi_i(\mathbf{Y}), \mathbf{Y} \in R^{6N} \}$
3. μ^{n+1} est réactualisé selon $\mu_i^{n+1} = \max\{0, \rho \varphi_i(X_{\mu^n})\}$

On obtient in-fine les vitesses et les positions à la fin de l'intervalle du temps :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1}(\theta_n) = \mathbf{u}^{n+1}(\theta_{n+1}) = 2\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{u}^n(\theta_n) \\ \mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + h \frac{\mathbf{u}^{n+1}(\theta_n) + \mathbf{u}^n(\theta_n)}{2} \end{cases} \quad (4.24)$$

4.3.3 Comparaison avec l'élasto-plasticité

Sous certaines conditions, le modèle présenté précédemment peut être écrit avec le même formalisme que l'on utilise pour la plasticité. On rappelle que le problème de minimisation dans le cas d'une loi de plasticité classique peut être écrit comme suit [Ortiz 1986, Simo 1987b] :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\sigma}} \left[\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{trial}\|_{C^{-1}}^2 + \Delta \lambda f(\boldsymbol{\sigma}) \right] \\ \boldsymbol{\sigma}_{trial} = \boldsymbol{\sigma}_n + C \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad (4.25)$$

$\|\mathbf{X}\|_{\mathbf{C}^{-1}}^2 = {}^t\mathbf{X} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{X}$; \mathbf{C} est le tenseur d'élasticité; $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ l'incrément de déformation totale; $\Delta\lambda$ est le multiplicateur plastique; $f(\boldsymbol{\sigma})$ est le domaine élastique; $\Delta\lambda$ et $f(\boldsymbol{\sigma})$ satisfaisaient l'inégalité :

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}) \leq 0 \\ \Delta\lambda \geq 0 \\ \Delta\lambda f(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

La relation 4.19 peut être ré-écrite en négligeant les rebonds ($K_N = K_T = 0$) ce qui mène, après quelques manipulations à [Pécol 2011c] :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \underset{\mathbf{v}^{n+1} \in \mathbf{R}^{2N}}{\arg \min} \left[\frac{1}{2} \|\mathbf{v}^{n+1} - (\mathbf{u}^n(\theta_n) + \mathbf{m}^{-1} \mathbf{p}^{ext}(\theta_n))\|_{\mathbf{m}}^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij}^{n+1} {}^t\boldsymbol{\Delta}_{ij}(\mathbf{u}^{n+1}(\theta_n)) \mathbf{N}_{ji} \right] \quad (4.27)$$

On peut finalement proposer une comparaison entre les relations (4.27) et (4.25), ce qui permet de souligner que les deux modèles bénéficient d'un formalisme identique, tout en traitant deux problèmes dont la physique diffère.

	A-CD ²	Plasticité
Inconnue	$\mathbf{u}^{n+1}(\theta_n)$	$\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$
Valeur trial	$\mathbf{v}^{n+1}_{trial} = \mathbf{u}^n(\theta_n) + \mathbf{m}^{-1} \mathbf{p}^{ext}(\theta_n)$	$\boldsymbol{\sigma}_{trial} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$
Force externe	$\mathbf{p}^{ext}(\theta_n)$	$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^n$
Critère	${}^t\boldsymbol{\Delta}_{ij}(\mathbf{u}^{n+1}(\theta_n)) \mathbf{N}_{ji} \geq 0$	$f(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}) \leq 0$
Multiplicateur de Lagrange	μ_{ij}^{n+1}	$\Delta\lambda$

TABLE 4.1 – Analogies entre le problème de minimisation A-CD² et la plasticité classique

4.3.4 Algorithme de résolution - cas de la loi de Coulomb

La résolution du problème avec frottement de Coulomb se fait selon le même principe utilisé pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution [Dal Pont 2008a]. En partant d'une première approximation des percussions normales, $G^0 \in R^p$, on calcule la solution correspondant à la loi de Tresca (qui est une loi de type associé dont les seuils de glissement -fixes- sont calculés à partir des éléments de G^0) :

$$\mathbf{X}_{G_0} = \underset{\mathbf{Y} \in R^{6N}}{\operatorname{arg\,inf}} \{ \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle + \Phi(G_0, \mathbf{Y}) - \langle 2\mathbf{u}^- + \mathbf{p}^{ext}, \mathbf{Y} \rangle \} \quad (4.28)$$

où $\Phi(G_0, \mathbf{Y})$ est le pseudo-potential de la loi de Tresca associé. La résolution de ce problème permet, à partir des percussions normales de réactualiser les seuils de glissement pour l'itération suivante.

Chacun des problèmes avec une loi de Tresca est un problème de minimisation sous contraintes. La méthode utilisée pour les résoudre est, à priori celle décrite dans la partie précédente pour les lois de type associé. Cela conduirait à un algorithme constitué de deux boucles imbriquées de minimisations, une pour l'actualisation des seuils de glissement et l'autre constituée de la suite des problèmes de minimisation sous contraintes (issus de la méthode d'Uzawa), ce qui conduirait à des temps de calcul prohibitifs. La solution qui est proposée ici consiste à ne faire qu'une seule boucle dans laquelle les seuils de glissement ainsi que les valeurs des réactions aux contraintes sont réactualisés simultanément. Afin d'alléger les écritures, la méthode est décrite pour le cas bidimensionnel, ce qui a l'avantage de réduire la tangente au contact à une seule dimension. Le problème 4.28 est d'abord modifié par l'ajout de contraintes de non-glissement à chaque contact :

$$\psi(\mathbf{X}) = 0, s_l(X) = \boldsymbol{\Delta}_{i,j}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{T}_l \quad l = 1, p \quad (4.29)$$

avec \mathbf{T} la direction tangentielle :

$$\mathcal{F}(Y) = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle + \Phi^d(\mathbf{Y}) - \langle 2\mathbf{v}^- + P^e, \mathbf{Y} \rangle \quad (4.30)$$

$$\text{où } \mathbf{Y} \in \Omega, \Omega = \mathbf{Y} \in R^{6N} / \left\{ \begin{array}{l} \varphi_l(\mathbf{Y}) = -d_l(Y) + d_l(\frac{\mathbf{v}^-}{2}) \leq 0 \quad l = 1, p \\ \psi_l(\mathbf{Y}) = -s_l(\mathbf{Y}) + s_l(\frac{\mathbf{v}^-}{2}) = 0 \quad l = 1, p \end{array} \right\}$$

Les nouvelles contraintes ont pour effet de forcer la solution à se trouver dans la branche I de la fig.4.5 pour cette première étape.

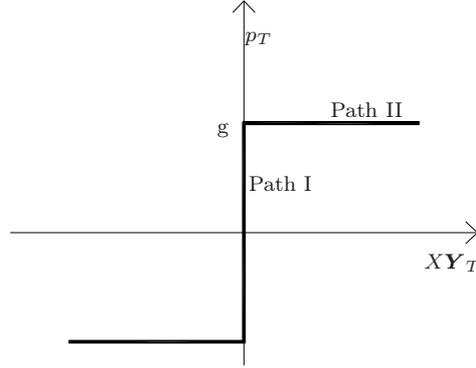


FIGURE 4.5 – Schema de la loi de Coulomb

La solution est calculée par la méthode précédemment décrite, modifiée pour tenir compte des contraintes supplémentaires d'égalité. La résolution consiste à rechercher le point selle du Lagrangien [Ciarlet 1989] :

$$L(\mathbf{Y}, \mu, \zeta) \in \Omega \times R_+^p \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y}) + \sum_{l=1}^p \mu_l \varphi_l(\mathbf{Y}) + \sum_{l=1}^p \zeta_l \psi_l(\mathbf{Y}) \quad (4.31)$$

L'algorithme présenté à la section 4.3.2 est alors modifié (ρ est le pas correspondant aux contraintes d'inégalité et ϱ celui correspondant aux contraintes d'égalité) :

1. $\mu^0 \in R_+^p$ et $\zeta^0 \in R^p$ sont choisis à l'étape 0
2. A chaque étape n , $\mathbf{X}^{n+1} = \arg \min \{ \mathcal{F}(\mathbf{Y}) + \sum_{l=1}^p \mu_l^n \varphi_l(\mathbf{Y}) + \sum_{l=1}^p \zeta_l \psi_l(\mathbf{Y}), Y \in R^{6N} \}$ est calculé
3. μ^{n+1} est réactualisé $\mu_l^{n+1} = \max\{0, \rho \varphi_l(\mathbf{X}_{\mu^n})\}$
4. ζ^{n+1} est réactualisé $\zeta_l^{n+1} = \varrho \psi_l(\mathbf{X}_{\zeta^n})$

Les vecteurs λ et ξ contiennent les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes φ et ψ . Leurs composantes sont les valeurs de la percussion tangentielle et de la percussion normale à chaque contact. Aussi, ces termes sont comparés à l'issue du calcul précédent :

$$\begin{array}{ll} \text{si } |\xi| \leq \mu |\lambda| & \text{alors } \mathbf{X}_T = 0 \\ \text{si } |\xi| > \mu |\lambda| & \text{alors } \mathbf{X}_T \neq 0 \end{array} \quad (4.32)$$

Si $|\xi| > \mu |\lambda|$, la condition de non-glissement ne peut plus être maintenue en ce contact et la solution se trouve dans la branche II de la fig.4.5. Pour l'étape suivante, le problème est reformulé en tenant compte de la valeur des percussions obtenues à chaque contact. En effet, pour chaque contact où la condition de non-glissement est violée, la contrainte correspondante est abandonnée, les percussions tangentielles en ces points ne pouvant plus être obtenues comme réactions à cette contrainte.

On ajoute à la fonction à minimiser le pseudo-potentiel correspondant à la loi de frottement, c'est-à-dire le terme :

$$\Phi^{df} = \sum_i \mu_i |\lambda_i| \| \mathbf{X}_{T_i} \| \quad (4.33)$$

Ce nouveau pseudo-potentiel s'applique aux $l = 1, k$ contacts "glissants", tandis que la condition de non-glissement Ψ est maintenue sur les restants $j = k + 1, p$ contacts (p étant le nombre totale de contacts). La condition de non-interpénétration est bien évidemment maintenue sur tous les contacts.

La seconde étape de la résolution consiste alors en la minimisation de la fonction :

$$\mathcal{J}(\mathbf{Y}) = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle + \Phi^{df}(\mathbf{Y}) + \Phi^d(\mathbf{Y}) - \langle 2\mathbf{v}^- + \mathbf{p}^e, \mathbf{Y} \rangle \quad (4.34)$$

$$\text{où } Y \in \Upsilon, \Upsilon = \mathbf{Y} \in R^{6N} / \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_l(\mathbf{Y}) = -d_l(\mathbf{Y}) + d_l(\frac{\mathbf{v}^-}{2}) \leq 0 & l = 1, p \\ \psi_j(\mathbf{Y}) = -s_j(\mathbf{Y}) + s_j(\frac{\mathbf{v}^-}{2}) = 0 & j = k + 1, p \end{array} \right\}$$

Ce qui mène au schéma de résolution suivant (ou, par rapport au schéma précédent, les contraintes ne sont pas appliquées sur tous les contacts) :

1. $\mu^0 \in R_+^p$ and $\zeta^0 \in R^{p-k}$ sont choisis à l'étape 0
2. A chaque étape n , $\mathbf{X}^{n+1} = \arg \min \{ \mathcal{J}(\mathbf{Y}) + \sum_{l=1}^p \mu_l^n \varphi_l(\mathbf{Y}) + \sum_{i=k+1}^p \zeta_j^n \psi_j(\mathbf{Y}), \mathbf{Y} \in R^{6N} \}$ est calculée
3. μ^{n+1} est réactualisé $\mu_l^{n+1} = \max\{0, \rho \varphi_l(\mathbf{X}_{\mu^n})\}$
4. ζ^{n+1} est réactualisé $\zeta_j^{n+1} = \rho \psi_j(\mathbf{X}_{\zeta^n})$

A l'issue de cette étape, il faut vérifier si, pour chaque contact, la loi de comportement est respectée. Pour les contacts auxquels une contrainte de non-glissement a été associée, il faut vérifier que la percussion tangentielle n'excède pas le seuil de glissement permis par la loi de Coulomb, autrement il faut procéder comme précédemment indiqué et refaire un nouveau calcul.

La procédure de calcul ainsi qu'un exemple numérique sont présentés plus dans les détails dans [Dal Pont 2008b]. Pour la suite, on fera le choix de se limiter à des lois constitutives associées, la procédure numérique de résolution dans le cas de frottement de Coulomb étant excessivement lourde d'un point de vue numérique (i.e. une implémentation outre que sous Matlab serait nécessaire).

4.4 Application au cas des milieux granulaires

On présente quelques exemples numériques parus dans des publications [Dal Pont 2006b, Dal Pont 2008a]. Comme le montrent les exemples qui suivent, la méthode A-CD² se révèle particulièrement efficace dans les simulations numériques, tant en statique qu'en dynamique.

Les méthodes de type dynamique moléculaire pénalisent les interpénétrations entre les particules par le biais d'une loi de compliance [Nardin 2004, Cundall 1979, Oden 1986, Zavarise 1992],... Les schémas d'intégration sont de type explicite, ce qui en fait des méthodes faciles d'accès et relativement efficaces pour réaliser des simulations en statique. Par contre, du fait de l'emploi de lois de compliance, de nombreuses difficultés apparaissent en dynamique [Kane 1999].

A l'heure actuelle, une re-écriture du code Matlab [Dal Pont 2006b] en C++ est en cours. Le passage vers un environnement de programmation de ce type devrait permettre de réduire d'une manière significative les temps de calcul (qui à l'heure actuelle limitent les simulations à quelques milliers de particules).

4.4.1 Loi qui dérive d'un pseudo-potentiel

La méthode a été appliquée à la simulation d'un écoulement granulaire sur plan incliné. Le matériau qui s'écoule est constitué de 300 grains rigides de forme polyédrique, dont le nombre de côtés est issu d'un tirage aléatoire afin de prendre en compte la nature hétérogène du milieu granulaire. L'intérêt de cette simulation est d'avoir une variété de forme parmi les grains. Ces derniers ont été choisis avec le même rayon. La méthode présentée n'a aucune restriction sur la forme, la taille ou la densité des grains. Elle peut tout aussi bien être employée pour des systèmes où les grains présentent en plus des tailles et des densités variées. Des simulations similaires avec plus de 1200 grains sont présentées dans [Dal Pont 2006b]. Les lois de comportement utilisées sont le frottement visqueux pour les forces de frottement entre les particules et une loi linéaire pour les percussions. Une des particularités du mouvement simulé est que les efforts réguliers (i.e. les forces de contact) exercés sur les particules sont accompagnés de nombreuses percussions qui surviennent à l'occasion des fréquentes collisions. Dans ce genre de situation la méthode A-CD² présente le plus d'avantages.

La mise en place est effectuée à partir d'une position et d'une orientation quelconque des grains ainsi que d'une attribution aléatoire d'un nombre de côtés à chacune des particules. Ces particules sont ensuite soumises à la gravité et un obstacle vertical est ajouté pour retenir les grains. A l'équilibre, la disposition obtenue constitue la condition initiale de l'éboulement qui se produit après la suppression de la retenue (voir fig.4.6).

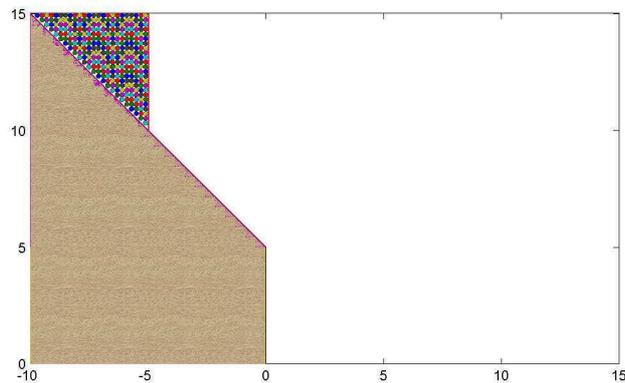
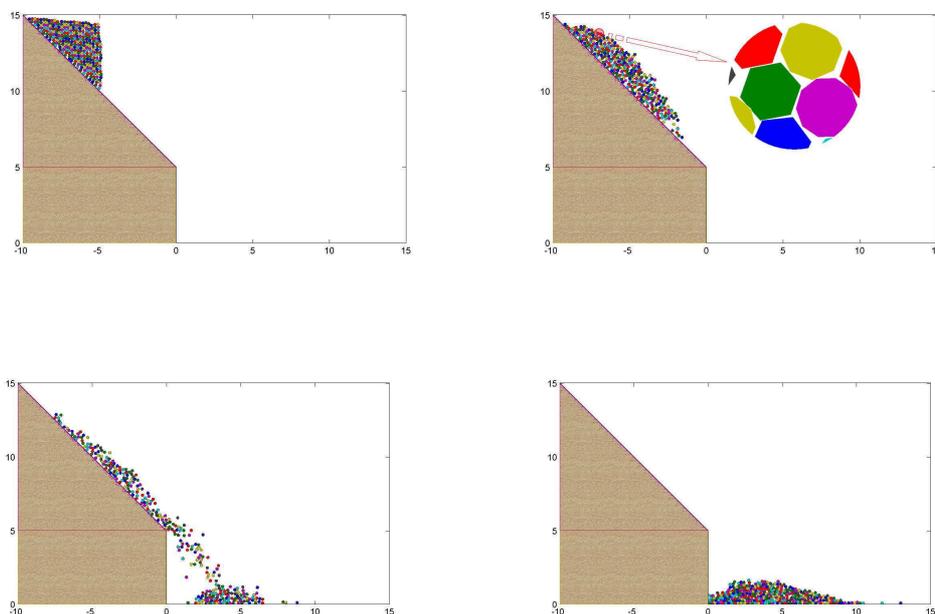


FIGURE 4.6 – Phase de tassement initiale derrière une retenue

Après la suppression de la retenue, le système évolue pendant une dizaine de secondes avant de retrouver une nouvelle position d'équilibre. Le déroulement de cet éboulement est montré dans la fig.4.7.

4.4.2 Loi de frottement de type Coulomb

La simulation présentée est la compression d'un milieu granulaire dans les conditions d'un essai triaxial. La phase de mise en place est réalisée selon le même principe que dans la simulation précédente : les particules sont disposées selon des positions obtenues par perturbation aléatoire d'un réseau régulier. Elles sont au nombre de 200 et leur orientation ainsi que le nombre des côtés est

FIGURE 4.7 – Evolution du système $t=1s, 2.5s, 5s, 10s$

aléatoire. Ces particules sont ensuite soumises à la gravité et à l'action d'une gaine latérale qui assure leur confinement. La disposition obtenue à l'équilibre constitue la configuration initiale de l'essai. La simulation de l'essai se fait en imposant le déplacement vers le bas de l'obstacle supérieur et en maintenant l'obstacle inférieur immobile (fig.5). Sur les deux bords latéraux de l'échantillon, une force élastique est exercée pour simuler l'action de la membrane utilisée pour les essais triaxiaux. Cette force est exercée sur chacune des particules constituant les colonnes de gauche et de droite de l'échantillon.

Ce résultat constitue un premier exemple d'application de la méthode avec une loi de type Coulomb. Il va de soi que le nombre de particules utilisés est insuffisant et que le résultat n'est pas exploitable d'un point de vue pratique. Ceci est essentiellement lié à l'approche numérique qui reste assez lourd (voir sec.4.3.4) et qui devrait passer par une implémentation numérique outre que sous Matlab. Toutefois l'intérêt de la méthode A-CD² porte sur le fait que, à différence des méthodes de type CD son application peut se faire tant sur des cas dynamique que sur des cas quasi-statiques.

4.5 Application au comportement d'une foule humaine

Le modèle A-CD² peut être adapté pour la description du comportement d'un piéton qui se déplace dans un espace, qui interagit avec d'autres piétons ou qui marche sur une structure avec une interaction réciproque. Cette application de la méthode fait partie de la thèse de P. Pécol [Pécol 2011a], thèse issue d'une collaboration avec l'ENPC.

Un piéton peut être schématisé comme une particule circulaire avec une volonté, i.e. la souhait de se diriger vers une certaine direction et avec une certaine vitesse, éventuellement variable dans le temps et dans l'espace. Dans la suite on négligera la composante de rotation de la vitesse et l'étude

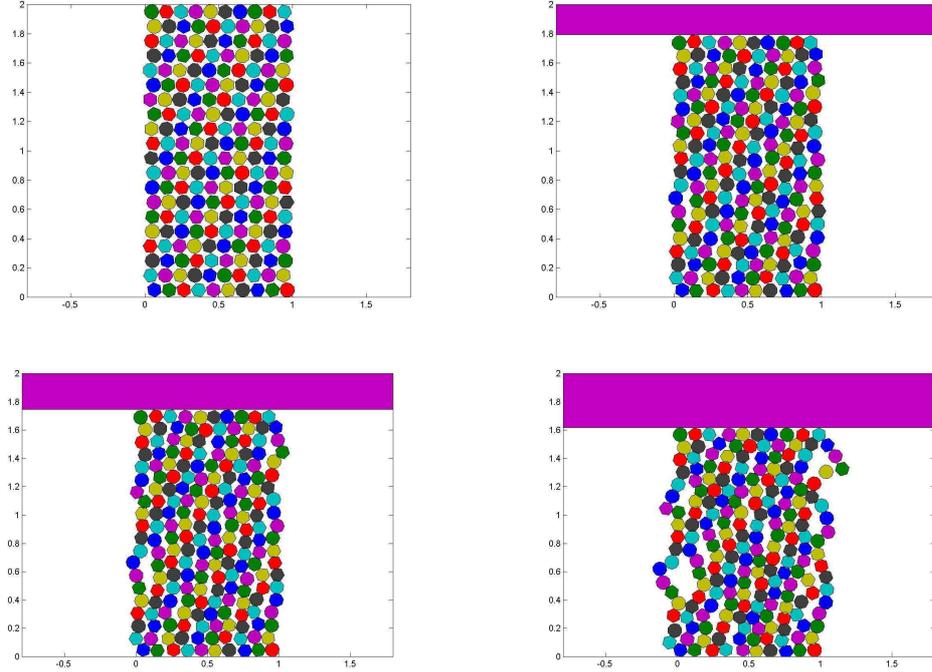


FIGURE 4.8 – Essai bi-axial

sera réduite aux particules de forme circulaire (ce qui correspond à une simplification courante dans le domaine). Plusieurs définitions de la trajectoire/vitesse souhaitée sont possibles : on peut en effet choisir soit la trajectoire la plus confortable (qui, par exemple, permet d'éviter des escaliers), soit le chemin le plus court, soit le plus rapide [Hoogendoorn 2001]. Il est évidemment possible de choisir une combinaison de ces stratégies de déplacement ou de changer de stratégie au cours de la simulation.

Dans le cas qui nous concerne, un choix est fait en faveur de la stratégie du chemin le plus court, ce qui permet de faire référence à une méthode de calcul de la trajectoire dite du *Fast Marching* [Kimmel 1996]. La direction $\mathbf{e}_{d,i}$ dépendra donc de l'espace dans lequel le piéton se déplace (obstacles, sorties,...), du temps et des caractéristiques individuelles de chaque piéton (age, genre, attitude,...) On définit $\mathbf{e}_{d,i}(t) = \frac{\mathbf{u}_{d,i}(t)}{\|\mathbf{u}_{d,i}\|}$, où $\mathbf{u}_{d,i}$ est la vitesse souhaitée du i^{eme} piéton.

L'amplitude $\|\mathbf{u}_{d,i}\|$ de la vitesse souhaitée représente la vitesse à laquelle le piéton i^{eme} souhaite se déplacer dans l'espace (sans tenir compte des autres piétons) et est pris en charge comme paramètre aléatoire, avec une distribution normale (moyenne 1.34 m.s^{-1} , écart type 0.26 m.s^{-1} [Henderson 1971]).

La vitesse souhaitée obtenue au travers de la méthode de *Fast Marching* est ensuite introduite dans le modèle A-CD² comme une force d'accélération externe définie comme $\mathbf{f}^{ext}(t) = \mathbf{f}_a^{ext}(t)$, où la force d'accélération externe $\mathbf{f}_a^{ext}(t)$ [Helbing 1995] permet à chaque individu d'acquérir la direction et la vitesse qu'il souhaite avoir.

Chaque composante $\mathbf{f}_{a,i}^{ext}(t)$ du vecteur force de dimension $2N$: $t\mathbf{f}_a^{ext} = (t\mathbf{f}_{a,1}^{ext}, t\mathbf{f}_{a,2}^{ext}, \dots, t\mathbf{f}_{a,N}^{ext})$, est associée à chaque piéton i (i.e. chaque piéton peut avoir une stratégie personnalisée) et peut être exprimée comme :

$$\mathbf{f}_{a,i}^{ext}(t) = m_i \frac{\|\mathbf{u}_{d,i}\| \mathbf{e}_{d,i}(t) - \mathbf{u}_i(t)}{\tau_i} \quad (4.35)$$

où \mathbf{u}_i est la vitesse réelle et τ_i est un temps de relaxation (qui permet au piéton de reprendre plus

ou moins rapidement sa vitesse souhaitée après un contact). Plus la valeur de τ_i est petite, plus le piéton sera "nerveux". Typiquement on fait référence à une valeur de $\tau = 0.5$ s. A ce point il est ainsi important de comprendre la différence entre la vitesse souhaitée et la vitesse réelle. En effet, la vitesse qu'un piéton souhaite avoir en se déplaçant n'est pas toujours possible à cause de la présence d'autres piétons qu'il peut heurter ou qui peuvent boucher une sortie. Dans ce cas on parle alors de vitesse réelle, i.e. la vitesse effective du piéton compte tenu des conditions environnementales.

Le comportement peut ainsi être enrichi par l'introduction d'autres effets qui se traduisent par des forces appliquées à chaque particule. Ces forces, dite sociales [Helbing 2002, Moussaïd 2010] en raison du fait qu'elles règlent l'attitude d'un individu vers les autres, rendent le comportement des particules plus proche au comportement d'un piéton. Par exemple, on peut imaginer une force (socio-psychologique) d'écartement qui fait légèrement changer de trajectoire à deux piétons qui avancent l'un vers l'autre ou encore une force qui reflète la tendance d'un piéton à garder une certaine distance des autres piétons. Cette dernière peut être exprimée (entre un piéton i et un piéton j) comme :

$$\mathbf{f}_{ij}^{soc}(t) = A_i \exp\left(\frac{-D_{ij}(\mathbf{q}(t))}{B_i}\right) \left(\Lambda_i + (1 - \Lambda_i) \frac{1 + \cos \varphi_{ij}}{2}\right) \mathbf{e}_{ij} \quad (4.36)$$

où A_i représente la force de l'interaction, B_i sa distance, $\Lambda_i < 1$ prend en compte la position réciproque de piétons (la force d'interaction de deux piétons en face est plus forte que celle de deux piétons qui se suivent) φ_{ij} est l'angle entre les direction souhaitées $\mathbf{e}_{d,i}(t)$ et la direction $-\mathbf{e}_{ij}$ du piéton qui exerce la force répulsive.

D'autres actions peuvent évidemment être appliquées à chaque particule : des exemples sont disponibles dans la littérature [Helbing 1995] ou [Helbing 2002] ou dans des publications récentes [Pécol 2011b, Pécol 2011c]. Il est ainsi intéressant de remarquer que la méthode A-CD² se révèle bien adaptée à traiter des cas de ce type : en effet elle garantit la non-interpénétration entre les grains (ce qui n'est pas garanti par l'approche type [Helbing 1995]), permet d'appliquer aisément des forces externes qui gèrent le comportement d'un piéton (avec une personnalisation de chaque individu) et tient compte des éventuels rebonds avec des obstacles ou d'autres piétons (contrairement à [Maury 2006, Venel 2008]).

On présente dans la suite un nombre d'exemples numériques afin de démontrer l'application du modèle A-CD² au cas des piétons. La littérature propose des essais expérimentaux sous la forme d'exercices d'évacuation d'une salle ou d'un bâtiment. On posera donc l'attention sur ces études afin de valider l'approche proposée. Le modèle se prête aussi à l'étude et à l'optimisation d'espaces publics tels que les issues de sécurité. Des exemples seront présentés dans ce sens.

4.5.1 Évacuation d'une salle rectangulaire

On considère une salle rectangulaire de $5\text{ m} \times 5\text{ m}$, avec 20 personnes à l'intérieure qui essaient de s'échapper par une porte de 82 cm de large. Les paramètres de la simulations sont dans le tableau 4.2.

Paramètres		Symbole	Valeur	Unité
personne i	vitesse *	$\ \mathbf{u}_{d,i}\ $	[1.5, 2]	$m.s^{-1}$
	rayon *	r_i	[0.2, 0.25]	m
	masse *	m_i	[60, 100]	kg
	temps de réponse	$t_{r,i}$	0	s
	temps de relaxation *	τ_i	[0.1, 0.5]	s
	time step	h	$10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$	s

TABLE 4.2 – Évacuation d'une salle : le temps de réponse correspond au temps pour initier l'évacuation

Les paramètres \bullet^* sont générés d'une manière aléatoire dans la plage indiquée dans le tab.4.2. L'analyse est alors menée sur 50 simulations (Fig. 4.9) avec des pas de temps h différents afin d'évaluer la dépendance du pas pour les modèles A-CD² et le modèle type DEM [Helbing 1995] (qui a été implémenté pour comparaison). On fixe alors $h = 10^{-2} s$, $h = 10^{-3} s$ et $h = 10^{-4} s$ (voir [Pécol 2010] pour plus de détails).

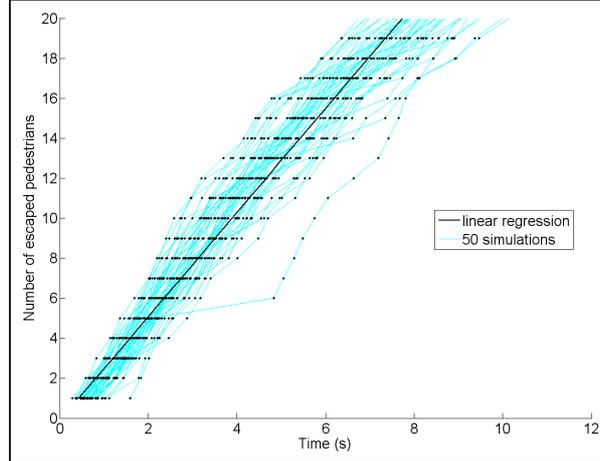


FIGURE 4.9 – Temps de sortie (50 simulations et moyenne, $h = 10^{-2} s$)

A partir de ces résultats, on peut estimer un débit moyen Q (piéton/min) traversant la sortie. Le tableau 4.3 compare les résultats issus des deux modèles avec l'observation d'un exercice d'évacuation réelle.

Simulations or expérience	Q (piéton/min)		
	$h = 10^{-2} s$	$h = 10^{-3} s$	$h = 10^{-4} s$
Modèle type DEM	182	182	181
Modèle A-CD ²	156	154	155
Exercice d'évacuation [Helbing 2005]	160		

TABLE 4.3 – Comparaison de différents modèles et d'un exercice d'évacuation

On remarquera que l'influence du pas de temps est négligeable (les h choisis sont en effet petits par rapport à la vitesse de déplacement/temps de réaction d'une personne) tandis que la différence entre l'approche DEM et A-CD² peut être expliquée par la légère interpénétration dont le modèle DEM nécessite, ce qui porte à une augmentation artificielle du débit.

4.5.2 Évacuation d'une salle rectangulaire avec un obstacle devant la sortie

On présente le même exemple du cas précédent, cette fois avec la présence d'un obstacle devant la sortie. La présence d'un poteau placé d'une manière opportune devant une porte, sépare le flux des gens et facilite la sortie en diminuant la pression exercée par la foule. On mène donc un étude paramétrique afin d'estimer la taille de l'obstacle et sa distance de la sortie afin de maximiser le débit sortant.

On exprime le flux moyen Q (piéton/min) en fonction du temps de réaction τ et des caractéristiques de l'obstacle (position, distance de la sortie, forme, et taille, voir la fig.4.10). Pour chaque configuration on mène 50 simulations.

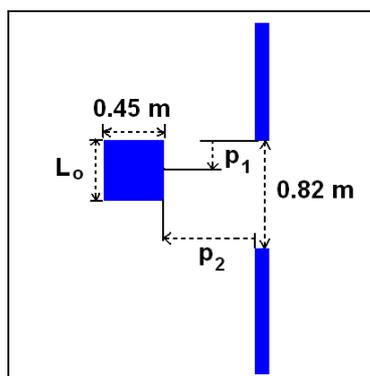


FIGURE 4.10 – Différentes positions de l'obstacle

τ		0.1 s			0.5 s			
p_1		0.41 m		0 m	0.41 m		0 m	
p_2		0.7 m	0.9 m	0.7 m	0.7 m	0.9 m	0.7 m	
Q (pié/min)	sans obstacle	230	230	230	116	116	116	
	rectangulaire $L_o =$	0.45 m	231	213	212	115	115	111
		0.636 m	247	217	206	109	116	107
		0.8 m	251	223	203	102	116	106
		1 m	264	222	200	101	112	106
	circulaire $D_o =$	0.45 m	202	222	222	112	114	110
0.636 m		238	207	208	122	107	112	

TABLE 4.4 – Débit moyen Q (piéton/min) fonction de τ , p_1 , p_2 , de la forme (rectangulaire et circulaire) et de sa taille (L_o ou D_o)

On peut finalement conclure que la présence d'un poteau en face de la sortie facilite l'évacuation des piétons. Ces résultats sont détaillés dans un papier récemment soumis [Pécol 2011c].

4.5.3 Évacuation d'une école primaire

On présente d'une manière succincte la comparaison du modèle avec un exercice d'évacuation d'une école [Klupfel 2003]. Le bâtiment est constitué de 3 étages, 6 salles, 130 élevés qui quittent les locaux d'une manière ordonnée au déclenchement d'une alarme sonore. On remarquera comme le modèle est aussi capable de traiter des situations 3D.

Les paramètres de la simulation sont présentés dans le tableau 4.5, les caractéristiques des élèves sont issues d'un tirage aléatoire et, d'une manière similaire que dans les cas précédents, 100 calculs sont proposés.

Des images de la simulations sont donnés dans la fig. 4.11. La figure 4.12 donne le temps de sortie issu de la simulation numérique et de l'exercice d'évacuation. A nouveau, la comparaison est plutôt satisfaisante.

4.5.4 Modélisation de sous-groupes

[Singh 2009] présente des observations sur le comportement des sous-groupes des piétons dans des situations de flux des gens qui se croisent. En effet, la présence de groupes formés par 2-4 personnes, qui ont la tendance a se comporter comme un piéton unique (le groupe reste unis et a la tendance

Paramètre		Symbole	Value	Unit
Piéton i	vitesse *	$\ \mathbf{u}_{d,i}\ $	[1.2, 2]	$m.s^{-1}$
	vitesse sur les escalier *	$\ \mathbf{u}_{d,i}\ $	[0.5, 1]	$m.s^{-1}$
	rayon *	r_i	[0.2, 0.25]	m
	masse *	m_i	[30, 50]	kg
Force sociale distance d'interaction répulsive	force d'interaction	A_i	2000	N
	B_i	0,08	m	
	caractère anisotrope des interactions	Λ_i	0	
	angle entre $\mathbf{e}_{d,i}(t)$ et $-\mathbf{e}_{ij}$	φ_{ij}	90	$degree$
	time step	h	0.01	s

TABLE 4.5 – Paramètres de l'exercice d'évacuation d'une école

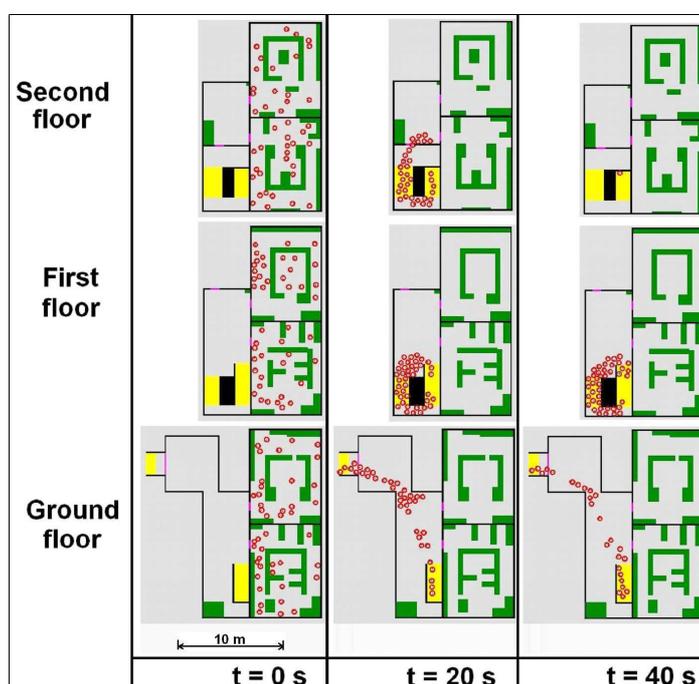


FIGURE 4.11 – Évacuation d'une école primaire

à éviter les personnes externes au groupe) peut être facilement observée et peut avoir une certaine influence sur la gestion des flux. Cet effet peut être intégré dans l'analyse (voir fig.4.13).

4.5.5 Modélisation des voyageurs durant l'échange quai/train : le cas des stations à une seule sortie du métro parisien

Cette application est issue d'une collaboration informelle avec l'ENSA Malaquais pour la présentation à la RATP d'un projet visant la diminution du temps d'évacuation d'une voiture de métro dans les gares à une seule sortie. La proposition consistait à installer dans ces gares une flèche clignotante, complètement invisible quand éteinte, indiquant la direction de la sortie pendant la phase d'arrêt du train (voir fig.4.14).

Ce système est censé diminuer le temps de permanence des usagers sur l'échangeur train-quai (voir fig.4.15), l'analyse numérique étant un outil pour optimiser le dispositif. Il convient de signaler que,

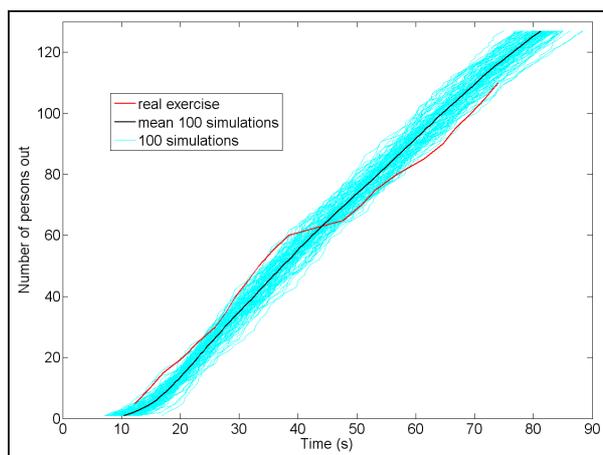


FIGURE 4.12 – Temps d'évacuation

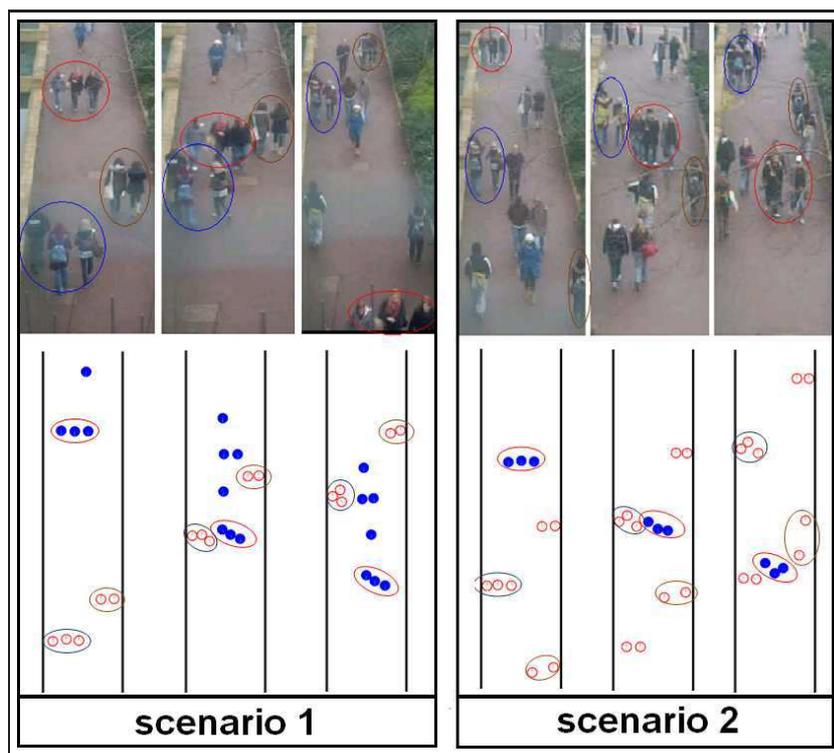


FIGURE 4.13 – Des images issues d'une vidéo et des simulations numériques montrent une bonne correspondance dans les comportements

afin d'estimer les flux de personnes dans les gares et dans les voitures du métro, la RATP s'appuie, à l'heure actuelle, sur un logiciel dédié.

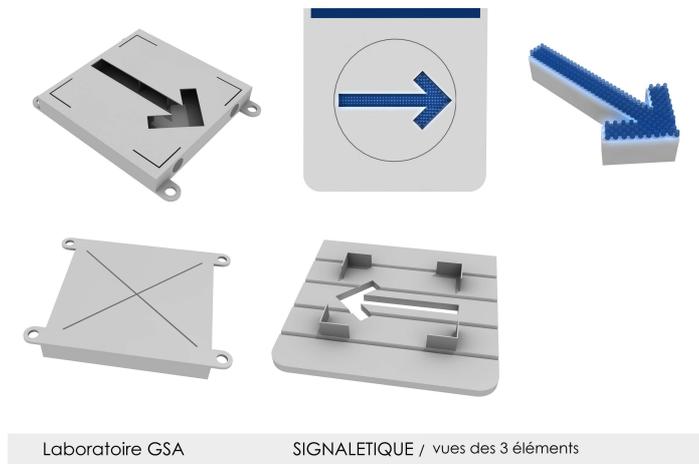


FIGURE 4.14 – Schéma de la flèche utilisée pour la réalisation d'un prototype

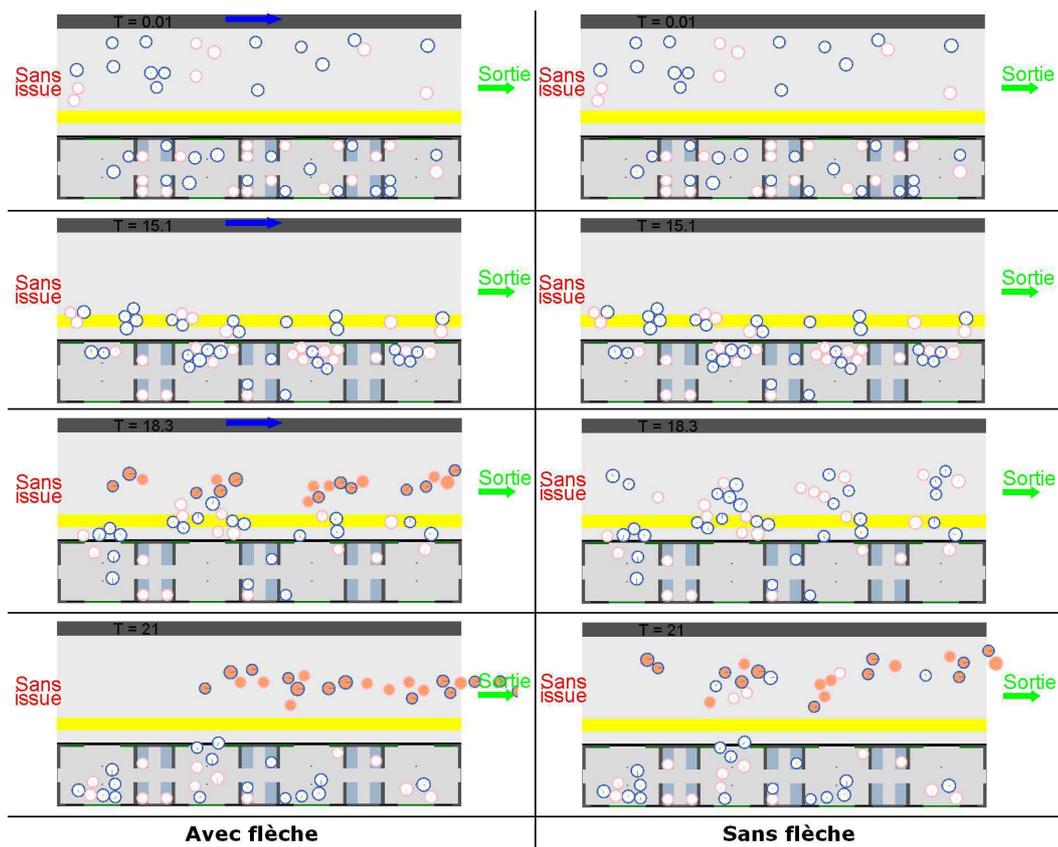


FIGURE 4.15 – Évacuation du métro dans les cas avec (gauche) et sans la flèche de signalisation (droite)

4.6 Perspectives : interaction couplée foule-structure

Un axe de recherche émergeant dans le domaine du génie civil est l'analyse et la modélisation des effets de la foule sur les ouvrages. Les structures particulièrement concernées sont les passerelles piétonnes, qui oscillent lors du passage d'un groupe de personnes, ou les gradins des stades/ salles de concert, qui vibrent à cause du mouvement rythmé du public. Récemment on a pu observer les cas de la passerelle de Solferino à Paris et le Millennium Bridge à Londres. Des campagnes de mesures expérimentales ont permis de mettre en évidence qu'une foule qui marche sur une structure impose une fréquence d'oscillation latérale à une fréquence d'environ 1Hz. Si la passerelle a une fréquence propre de vibration proche de cette valeur, un phénomène de résonance se déclenche et l'amplitude des oscillations latérales de la passerelle augmente. Au-dessous d'un certain nombre critique de piétons le phénomène reste limité tandis qu'au-delà de ce numéro critique, caractéristique de chaque ouvrage, les piétons changent leur façon de marcher pour ne pas perdre l'équilibre et on observe une synchronisation entre les piétons et la passerelle. Un modèle discret, comme celui présenté auparavant, peut alors être couplé avec un modèle décrivant la dynamique de la passerelle, tout en prenant en compte la force transmise de la foule à la structure et vice-versa.

Ce travail fait partie de la thèse de P. Pécol [Pécol 2011a] et s'inscrit à la suite du travail de thèse de J. Bodgi [Bodgi 2007] qui avait couplé un modèle continu de foule au modèle décrivant le comportement dynamique de la structure.

4.6.1 Modèle couplé

Dans la suite on portera l'attention sur la modélisation des piétons et l'interaction avec la structure qui vibre. Les aspects qui concernent la dynamique de la structure ne seront pas traités ici mais peuvent être retrouvés dans [Bodgi 2007]. Le modèle complet prenant en compte l'approche proposée peut être retrouvé dans [Pécol 2010]. On fait encore référence à une procédure de type *staggered*, mais, à différence de la procédure présentée dans le chapitre 2, l'enchaînement est simple (sans *feedback* comme dans les modèles THM). Ce choix respecte en effet la physique du problème : les piétons transmettent une force à la passerelle qui influence le pas successive (au temps $n + 1$) des usagers et vice-versa.

On présente d'abord l'action de la passerelle sur la marche des piétons. La vitesse souhaitée de chaque piéton est modifiée de la manière suivante [Pécol 2011a] :

$$\|\mathbf{u}_{d,j}\|_{mod}(t) = \frac{L_{step,j}(t)}{\pi} \dot{\phi}_j(t) \quad (4.37)$$

avec $\dot{\phi}_j(t)$ la fréquence angulaire instantanée de chaque piéton et $L_{step,j}(t)$ la longueur instantanée d'un pas, définie comme :

$$L_{step,j}(t) = L_{step,0,j} \max\left(1 - \frac{A(t)}{A_{max,j}}, 0\right) \quad (4.38)$$

avec $A(t)$ et $A_{max,j}$ respectivement l'amplitude et l'amplitude maximale de l'oscillation de la structure. Si A est égale à $A_{max,j}$, les oscillations sont trop importantes et le piéton j est obligé à s'arrêter. L'évolution de la fréquence d'oscillation latérale de chaque piéton est donnée par une équation de type Kuramoto Par exemple, [Strogatz 2005] propose :

$$\dot{\phi}_j(t) = \omega_j + C A(t) \sin\left(\psi_{str}(t) - \phi_j(t) + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.39)$$

avec ω_j la fréquence angulaire propre à chaque piéton (avec sol fixe), C un paramètre qui quantifie la sensitive de chaque piéton aux vibrations de la passerelle, $\psi_{str}(t)$ et $\phi_j(t)$ les phases, respectivement, de la structure et de chaque piéton.

A partir de cette nouvelle définition (couplée) de la vitesse souhaitée, on peut définir la force d'accélération (voir eq.4.35) qui agit sur la passerelle comme force externe.

4.6.2 Simulations numériques

On présente dans la suite une application au Millennium Bridge à Londres. Le tablier de la passerelle fait 81m de long et 4m de large. Les paramètres utilisés dans la simulation sont détaillés dans [Pécol 2010] : on garde l'idée d'une distribution aléatoire des propriétés de chaque piéton ce qui implique une analyse statistique des résultats. On introduit un paramètre $\Gamma(t)$ (*order parameter*), proposé à l'origine par [Strogatz 2005] qui traduit le degré de synchronisation foule-structure. Pour des valeurs petits, la fonction $\Gamma(t)$ reste proche de 0, tandis qu'en cas de synchronisation d'un grand nombre de piétons avec la structure $\Gamma \rightarrow 1$

Un exemple avec 180 piétons sur la passerelle est donné dans la fig.4.16. Dans le cas du Millennium Bridge, le nombre critique de piéton varie entre 160 et 180, i.e. à partir de ce nombre d'utilisateurs on observe le déclenchement d'un phénomène de synchronisation. Ce résultat est en accord avec les observations expérimentales [Dallard 2001b], [Dallard 2001a] et numériques [Bodgi 2008], [Strogatz 2005].

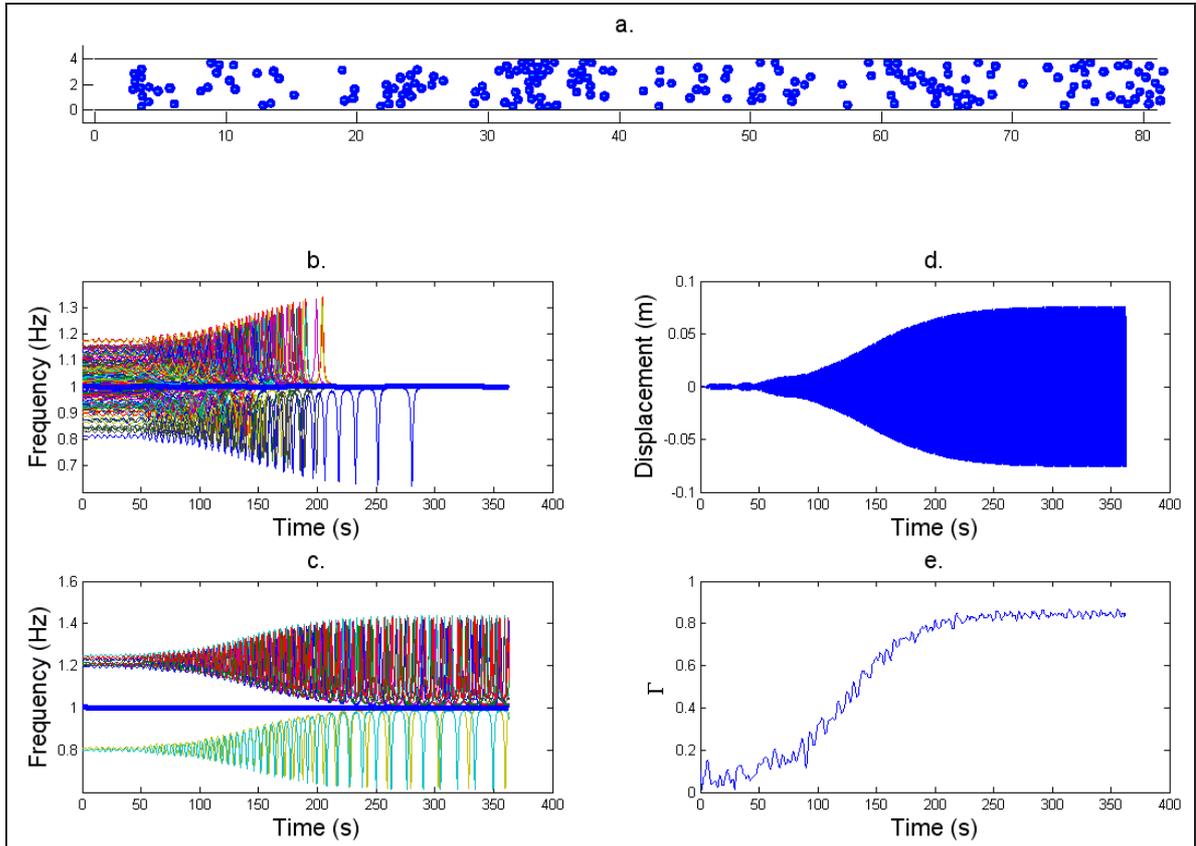


FIGURE 4.16 – a. Représentation de 180 usagers ; b. évolution de la fréquence instantanée $\frac{\dot{\phi}_j(t)}{2\pi}$ des piétons synchronisés (170) avec la structure. La courbe bleu représente la fréquence instantanée de la structure ; c. évolution de la fréquence instantanée $\frac{\dot{\phi}_j(t)}{2\pi}$ des piétons non-synchronisés(10) ; d. évolution du déplacement latérale $U(t)$; e. évolution du paramètre $\Gamma(t)$

4.7 Conclusions et perspectives

Ce chapitre a été centré sur mes travaux concernant le comportement des milieux granulaires au travers d'une approche de type non-régulier. La modélisation présentée permet de respecter la physique du contact (non-interpénétration entre les particules) et se révèle suffisamment souple pour être étendue vers d'autres problématiques. Les premiers résultats présentés dans ce chapitre sont en effet classiques (écoulements granulaires). Le modèle a été par la suite étendu pour décrire le comportement d'une foule humaine dans des situations d'urgence, avec des résultats satisfaisants. Une attention majeure a été portée sur les aspects algorithmiques et une comparaison avec les schémas classiques de l'elasto-plasticité a permis de mettre en évidence un parallèle entre ces deux approches. Des nombreuses perspectives peuvent être envisagées. L'implémentation actuelle du code peut être significativement améliorée pour prendre en compte un nombre plus important des piétons et aboutir à des simulations dans des situations particulières en termes de nombre de personnes (manifestation dans un environnement urbain donné, pèlerinages, ...) et d'environnement (bâtiments très élevés, présence d'ascenseurs, environnements urbains complexes, ...). L'utilisation d'une loi de contact de type Coulomb pourrait ainsi être envisagée afin de prendre en compte naturellement l'écartement entre particules après un contact. D'autres situations de panique mériteraient ainsi d'être traitées : en effet dans certaines situations (sortie d'urgence d'un avion, par exemple) la position des sorties n'est pas connue et les piétons ne suivent pas une trajectoire optimale telle qu'on la préconise dans nos exemples.

Au cours du chapitre on a aussi présenté une stratégie de couplage foule-structure pour décrire le phénomène de synchronisation. Si l'extension vers d'autres passerelles avec des géométries plus complexes apparaît naturelle, il ne faut pas oublier que ce travail pourrait se révéler utile aussi pour la conception d'une structure. Une comparaison avec les normes actuelles (l'AFGC et la BS - British Standard- proposent des consignes pour la conception des passerelles de ce type) reste ainsi un travail à envisager. In-fine, le phénomène de synchronisation entre particules est présente dans d'autre domaines : à titre d'exemple, la synchronisation neuronale est bien connue par les biologistes et les physiciens et une extension de la modélisation présentée dans ce chapitre pourrait être développée.

Conclusions

Les travaux présentés dans ce mémoire couvrent plusieurs sujets relatifs aux phénomènes de transferts : on passe de la modélisation thermo-hydraulique (intégrée par la suite par les aspects mécaniques) des milieux poreux via une approche continue, à l'étude des foules humaines, où chaque individu est pris en examen via une approche discrète. Une attention particulière a été portée aux aspects numériques et chaque sujet a été détaillé avec des considérations relatives à l'implémentation numérique et aux algorithmes associés. Dans la démarche présentée, l'expérience en laboratoire joue aussi un rôle important et la symbiose qui existe entre expérience, théorie et numérique a été mise en évidence. En effet, l'un sert de guide à l'autre, la modélisation ayant un rôle d'outil pour étudier des phénomènes inconnus et pour identifier des paramètres inaccessibles approchant le mieux les résultats connus, l'expérience étant nécessaire pour comprendre la physique d'un phénomène et bâtir un modèle (d'abord) théorique approprié.

Sur les différents sujets, le travail présenté a permis de soulever un nombre de questions dont certaines ont trouvé une réponse au cours de ces années de recherche, d'autres restent pour l'instant sans réponse définitive mais contribuent à stimuler l'intellect pour les années à venir. On résume dans la suite les points principaux qui ont été soulevés au cours de ces pages et les nouvelles voies que ceux-ci ont permis d'ouvrir.

Le chapitre 2 a porté sur la modélisation des phénomènes thermo-hydrauliques que l'on peut observer dans les milieux poreux et, plus particulièrement dans le béton. L'ensemble des équations qui régissent les phénomènes de transport a été présenté d'une manière assez intuitive et les détails nécessaires pour l'implémentation numérique ont été donnés. Ce travail a été l'occasion pour introduire une discussion au sujet des conditions aux limites, de leur intégration dans l'algorithme et de l'estimation des coefficients à utiliser dans un calcul. L'utilisation d'une procédure chaînée, qui a comme avantage une majeure souplesse par rapport aux procédures monolithiques traditionnelles et une moindre lourdeur numérique, a ainsi permis de mener des analyses tridimensionnelles. Le passage vers le 3D semble en effet nécessaire pour tenir proprement compte de la nature hétérogène du béton. Des perspectives s'ouvrent naturellement dans ce sens : une première analyse, portée sur une distribution aléatoire de la perméabilité intrinsèque, a souligné la complexité des phénomènes physiques en jeu particulièrement dans la phase transitoire. D'autres paramètres méritent d'être pris en compte et l'extension de la méthode vers des champs corrélés semble nécessaire afin de mieux se rapprocher à la physique du problème. L'objectif final reste celui de la prédiction de la durée de vie d'une structure. Cependant, cet objectif ne peut pas être atteint sans tenir compte du comportement structurel et, par conséquent, des aspects mécaniques du problème.

Le chapitre 3 a été donc consacré à l'intégration de la mécanique au modèle TH. Deux approches ont été utilisées, permettant de donner une représentation implicite et explicite de la fissuration. Dans les deux cas, une importance particulière est portée à la façon dont on couple les aspects TH aux aspects mécaniques. La modélisation expérimentale offre les réponses que l'on cherche et permet de retrouver, via des analyses inverses, le jeu des paramètres ou les lois nécessaires pour compléter le couplage THM. Compte tenu des considérations faites, des nouvelles questions se posent. Comment tenir compte de la nature hétérogène du béton ? La taille de l'échantillon a-t-elle une influence ? Comment bâtir une expérimentation adéquate ? Si les pages de ce mémoire n'offrent pas

une réponse complète à ces questions, elle permettent, du moins, d'ouvrir des pistes concrètes pour y arriver. L'utilisation des formulations probabilistes semble être une voie prometteuse dans ce sens. Les expériences actuellement en cours pour estimer la présence d'un effet d'échelle dans les mesures de la perméabilité intrinsèque sont ainsi susceptibles d'ouvrir des nouvelles pistes dans la compréhension de la physique d'un matériau complexe et méconnu comme le béton. Ces aspects mériteraient ainsi d'être intégrés, dans le futur, au dernier thème introduit dans ce chapitre : le comportement au feu et, plus particulièrement, la prise en compte de l'écaillage du béton sous sollicitation extrême.

Le dernier chapitre présente, enfin, un sujet plutôt à part, qui a été abordé je dirais grâce ou à cause des difficultés qu'un jeune chercheur rencontre aujourd'hui pour décrocher une position permanente. La nécessité de se plonger sur des sujets (apparemment) éloignés demande une capacité d'adaptation qui doit nécessairement faire partie du bagage intellectuel du chercheur moderne. Pour ce qui me concerne, cette souplesse s'est manifestée sous le nom de milieux granulaires analysés au travers d'une approche de type non-régulier. La présentation de cette thématique suit la démarche des chapitres précédents : les aspects théoriques sont introduit d'une manière assez intuitive et une attention particulière a été portée sur l'implémentation numérique et l'algorithmique. Cette thématique a été ensuite déclinée d'une manière plutôt originale vers les flux des piétons et le comportement d'une foule lorsqu'une situation d'urgence se présente. Ce travail constitue un sujet de recherche très stimulant pour les différents aspects que cela concerne : du formalisme mathématique de l'approche originale aux aspects socio-psychologiques qui règlent le comportement d'une personne ou d'un groupe dans certaines situations, sans oublier le couplage avec la structure et les aspects normatifs que cela entraîne.

Bibliographie

- [Acker 1987] P. Acker, C. Boulay et P. Rossi. *On the importance of initial stresses in concrete and of the resulting mechanical effects*. Cement and Concrete Research, no. 17, pages 755–764, 1987. (Cité en pages 26 et 47.)
- [AFREM 1996] AFREM. Durabilité des bétons : méthodes recommandées pour la mesure des grandeurs associées à la durabilité. LMDC, Toulouse, 1996. (Cité en page 34.)
- [Alarcon-Ruiz 2010] L. Alarcon-Ruiz, M. Brocato, S. Dal Pont et A. Feraille. *Size Effect in Concrete Intrinsic Permeability Measurements*. Transport in Porous Media, vol. 85, pages 541–564, 2010. (Cité en page 34.)
- [Aldea 1999] C.M. Aldea, S.P. Shah et A. Karr. *The permeability of cracked concrete*. Materials and Structures, vol. 32, pages 370–376, 1999. (Cité en pages 44, 46, 50 et 51.)
- [Alfaiate 2003] J. Alfaiate, A. Simone et L.J. Sluys. *Non-homogeneous displacement jumps in strong embedded discontinuities*. Int.J.Solids Struct., vol. 40, no. 21, pages 5799–5817, 2003. (Cité en page 42.)
- [Anderberg 1997] Y. Anderberg. Spalling phenomena of hpc. 1997. (Cité en page 39.)
- [Andrade 2004] C. Andrade. *Calculation of initiation and propagation periods of service life of reinforcements by using the electrical resistivity*. RILEM Symposium on Concrete Science and Engineering : A Tribute to Arnon Bentur, 2004. (Cité en page 49.)
- [Aubriet 2008] J. Aubriet. *Essais de perméabilité d’un échantillon fissuré de béton sous chargement post-pic*. Rapport technique, Rapport de stage LCPC, 2008. (Cité en page 44.)
- [Babuska 1997] T. Babuska et J.M. Melenk. *The partition of unity method*. Int.J.Numer.Meth.Eng., vol. 40, pages 727–758, 1997. (Cité en page 41.)
- [Bal 2008] G. Bal, J. Garnier, S. Motsch et V. Perrier. *Random integrals and correctors in homogenization*. Asymptotic Analysis, vol. 59(1-2), pages 1–26, 2008. (Cité en page 25.)
- [Baroghel-Bouny 1994] V. Baroghel-Bouny. *Caractérisation microstructurale et hydrique des p tes de ciment et des bétons ordinaires et à très hautes performances*. PhD thesis, ENPC, Paris, 1994. (Cité en page 7.)
- [Baroghel-Bouny 2002] V. Baroghel-Bouny. *Which toolkit for durability evaluation as regards chloride ingress into concrete ? Part II : Development of a performance approach based on durability indicators and monitoring parameters*. pages 137–163. 3rd Int. RILEM workshop : testing and modelling chloride ingress into concrete, 2002. (Cité en page 49.)
- [Baroghel-Bouny 2004] V. Baroghel-Bouny. *Durability indicators : a basic tool for performance-based evaluation and prediction of RC durability*. pages 13–22. Seminar on durability and life-cycle evaluation of concrete structures, Hiroshima, Japan, 2004. (Cité en page 49.)
- [Bazant 1976] Z.P. Bazant. *Instability, ductility and size effect in strain softening concrete*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, vol. 102, pages 144–331, 1976. (Cité en page 30.)
- [Bazant 1997] Z.P. Bazant et Y.N. Li. *Cohesive crack model with rate dependent crack opening and viscoelasticity*. Int.J.Fract., vol. 86, pages 247–265, 1997. (Cité en page 39.)
- [Bazant 1998] Z.P. Bazant et J. Planas. Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials. Boca Raton, CRC press, 1998. (Cité en page 42.)
- [Bazant 2000] Z.P. Bazant. *Size effect*. Int.J.Sol.Struct., no. 37, pages 69–80, 2000. (Cité en page 42.)
- [Bear 1979] J. Bear. Dynamics in fluids in porous media. Dover, New York, 1979. (Cité en page 4.)

- [Bear 1990] J. Bear et Y. Bachmat. *Introduction to modeling of transport in porous media*. Kluwer, 1990. (Cité en page 4.)
- [Bear 1991] J. Bear et J.M. Buchlin. *Modelling and application of transport phenomena in porous media*. Kluwer, Academic Publisher, 1991. (Cité en page 4.)
- [Belytschko 1988] T. Belytschko, J. Fish et B.E. Engleman. *A finite element with embedded localization zones*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 70, no. 1, pages 59–89, 1988. (Cité en page 42.)
- [Belytschko 1999] T. Belytschko et T. Black. *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*. *Int.J.Numer.Meth.Eng.*, no. 45, pages 601–620, 1999. (Cité en page 41.)
- [Bennethum 1996] L.R. Bennethum, J.H. Cushman et M.A. Murad. *Clarifying mixture theory and the macroscale chemical potential for porous media*. *Int.J.Eng.Sci.*, vol. 14, pages 1611–1621, 1996. (Cité en page 4.)
- [Biot 1941] M.A. Biot. *General theory of three-dimensional consolidation*. *J.App.Phys.*, vol. 12, pages 155–164, 1941. (Cité en page 4.)
- [Biot 1956a] M.A. Biot. *Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. Part I : low frequency range*. *J.Ac.Soc.Am.*, vol. 28, pages 168–178, 1956. (Cité en page 4.)
- [Biot 1956b] M.A. Biot. *Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. Part II : higher frequency range*. *J.Ac.Soc.Am.*, vol. 28, pages 179–191, 1956. (Cité en page 4.)
- [Biot 1972] M.A. Biot. *Theory of finite deformations of porous solids*. *Indiana Univ.Math.*, vol. 21, pages 597–620, 1972. (Cité en page 4.)
- [Bodgi 2007] J. Bodgi, S. Erlicher et P. Argoul. *Lateral vibration of footbridges under crowd - loading : continuous crowd modelling approach*. *Key Engineering Materials*, vol. 347, pages 685–690, 2007. (Cité en page 76.)
- [Bodgi 2008] J. Bodgi. *Synchronisation piétons-structure : Application aux vibrations des passerelles souples*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008. (Cité en page 77.)
- [Bolander 1998] J.E. Bolander et S. Saito. *Fracture analysis using spring networks with random geometry*. *Engng. Fracture Mech.*, vol. 61, pages 569–591, 1998. (Cité en page 41.)
- [Bordas 2011] S.P.A. Bordas, S. Natarajan, P. Kerfriden, C.E. Augarde, D.R. Mahapatra, T. Rabczuk et S. Dal Pont. *On the performance of strain smoothing for quadratic and enriched finite element approximations (XFEM/GFEM/PUFEM)*. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, vol. 86, no. 4/5, pages 637–666, 2011. (Cité en pages 31 et 42.)
- [Borja 2006] R.I. Borja. *On the mechanical energy and effective stress in saturated and unsaturated porous continua*. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, no. 6, pages 1764 – 1786, 2006. (Cité en page 4.)
- [Bouddour 1998] A. Bouddour, J.-L. Auriault, M. Mhamdi-Alaoui et J.-F. Bloch. *Heat and mass transfer in wet porous media in presence of evaporation-condensation*. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 41, no. 15, pages 2263–2277, 1998. (Cité en page 25.)
- [Boulay 2009] C. Boulay, S. Dal Pont et P. Belin. *Real-time evolution of electrical resistance in cracking concrete*. *Cement and Concrete Research*, vol. 39, no. 9, pages 825–831, 2009. (Cité en pages 23, 32, 44 et 49.)
- [Bowen 1976] R.M. Bowen. *Continuum physics. Theory of mixtures*, 1976. (Cité en page 4.)
- [Bowen 1980] R.M. Bowen. *Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures*. *Int.J.Eng.Sc.*, vol. 18, pages 1129–1148, 1980. (Cité en page 4.)
- [Bowen 1982] R.M. Bowen. *Compressible porous media models by use of the theory of mixtures*. *Int.J.Eng.Sc.*, vol. 20, pages 697–735, 1982. (Cité en page 4.)

- [Brancherie 2003] D. Brancherie. *Modèles continus et "discrets" pour les problèmes de localisation et de rupture fragile et/ou ductile*. PhD thesis, ENS Cachan, 2003. (Cité en page 30.)
- [Charron 2007] J.P. Charron, E. Denarié et E. Bruehwiler. *Permeability of ultra high performance fiber reinforced concretes (UHPFRC) under high stresses*. Materials and structures, vol. 40, pages 269–277, 2007. (Cité en page 44.)
- [Chateau 1998] X. Chateau et L. Dormieux. *Approche micromécanique du comportement d'un milieu poreux non saturé*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, vol. 326, no. 9, pages 533–538, 1998. (Cité en page 4.)
- [Cholet 1997] C. Cholet, E. Dimnet, F. Chevoir, P. Moucheron et M. Fremond. *Experimental study of the collision of angular particles*. Balkema, 1997. Powders and grains. (Cité en page 60.)
- [Ciarlet 1989] P.G. Ciarlet. Introduction to numerical linear algebra and optimisation. Cambridge Univ. Pr., 1989. (Cité en pages 63 et 65.)
- [Colemann 1963] B.D. Coleman et W. Noll. *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*. Arch.Rational Mech.Anal, no. 13, pages 168–178, 1963. (Cité en page 4.)
- [Colina 2004] H. Colina et J. Sercombe. *Transient thermal creep of concrete in service conditions at temperatures up to 300°C*. Mag.Conc.Res., vol. in press, 2004. (Cité en page 32.)
- [Committees 1999] Rilem Technical Committees. *RILEM TC116-PCD : Permeability of concrete as a criterion of its durability -Recommendations-*. Materials and Structures, vol. 32, pages 174–179, 1999. (Cité en page 34.)
- [Corsi 2006] F. Corsi, B.A. Schrefler, G.M. Giannuzzi, C. Majorana, A. Miliozzi et F. Pesavento. *Software simulazione effetti d'incendio e analisi strutturale calcestruzzi (*hitecosp2*)*. Studio Ferrario (Brevetti di Invenzione), SIAE, ENEA / Università degli Studi di Padova, 2006. (Cité en page 21.)
- [Cosserat 1909] E. Cosserat et F. Cosserat. *Théorie des corps déformables*. Herman, Paris, 1909. (Cité en page 39.)
- [Coussy 1990] O. Coussy. *Mécanique des milieux poreux*. Editions Technip, 1990. (Cité en page 4.)
- [Coussy 1998] O. Coussy, L. Dormieux et E. Detournay. *From mixture theory to Biot's approach for porous media*. Int.J.Sol.Struct., vol. 34-35, pages 4619–35, 1998. (Cité en page 4.)
- [Coussy 2004] O. Coussy. *Poromechanics*. Wiley, 2004. (Cité en page 4.)
- [Cundall 1979] P.A. Cundall et D.L. Strack. *A discrete numerical model for granular assemblies*. Geotechnique, no. 29, pages 47–65, 1979. (Cité en pages 56 et 66.)
- [Cusatis 2003] G. Cusatis, Z.P. Bazant et L. Cedolin. *Confinement shear lattice model for concrete damage in tension and compression : I. Theory II. Computations and validation*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, vol. 129, pages 1439–1458, 2003. (Cité en page 41.)
- [Dal Pont 2004a] S. Dal Pont. *Lien entre la perméabilité et l'endommagement dans les bétons à haute température*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2004. (Cité en pages 5, 6, 14, 32 et 35.)
- [Dal Pont 2004b] S. Dal Pont et A. Ehrlacher. *Numerical and experimental analysis of chemical dehydration, heat and mass transfer in a concrete hollow cylinder submitted to high temperatures*. Int.J.Heat and Mass transfer, vol. 1, no. 47, pages 135–147, 2004. (Cité en page 14.)
- [Dal Pont 2004c] S. Dal Pont, B.A. Schrefler et A. Ehrlacher. *Experimental and finite element analysis of a hollow cylinder submitted to high temperatures*. Materials and Structures, 2004. (Cité en page 24.)
- [Dal Pont 2005] S. Dal Pont, H. Colina, A. Dupas et A. Ehrlacher. *An experimental relationship between complete liquid saturation and brutal damage in concrete submitted to high temperature*. Mag.Conc.Res., vol. 8, no. 57, pages 455–461, 2005. (Cité en page 20.)

- [Dal Pont 2006a] S. Dal Pont. *Introduction d'un modèle thermo-hydro-chemo-mécanique dans Cast3m*. Rapport technique, CEA, 2006. (Cité en page 21.)
- [Dal Pont 2006b] S. Dal Pont et E. Dimnet. *Theory and numerical simulation of instantaneous collisions of solids*. Int.J.Solids Struct., vol. 43, no. 20, pages 6100–6114, 2006. (Cité en pages 55, 56, 60, 63, 66 et 67.)
- [Dal Pont 2007] S. Dal Pont, S. Durand et B.A. Schrefler. *A multiphase thermo-hydro-mechanical model for concrete at high temperatures - finite element implementation and validation under LOCA load*. Nuclear Engineering and Design, vol. 237, no. 22, pages 2137–2150, 2007. (Cité en pages 11, 14, 19, 21 et 38.)
- [Dal Pont 2008a] S. Dal Pont et E. Dimnet. *Theoretical approach to instantaneous collisions and numerical simulation of granular media using the $A - CD^2$ method*. Com.App.Math.Comput.S., vol. 3, pages 1–24, 2008. (Cité en pages 55, 64 et 66.)
- [Dal Pont 2008b] S. Dal Pont et J.L. Tailhan. Etude bibliographique sur la modélisation de l'endommagement des bétons. APPLLET, 2008. (Cité en pages 30, 41 et 66.)
- [Dal Pont 2009] S. Dal Pont, J.L. Tailhan et P. Rossi. *Probabilistic modeling of concrete cracking*. page 121. Crack Path, 2009. (Cité en page 43.)
- [Dal Pont 2011] S. Dal Pont, F. Meftah et B.A. Schrefler. *Modeling concrete under severe conditions as a multiphase material*. Nuclear Engineering and Design, vol. 241/3, pages 562–572, 2011. (Cité en pages 11, 14, 19 et 21.)
- [Dallard 2001a] P. Dallard, A.J. Fitzpatrick, A. Flint, A. Low et R.M. Ridsdill-Smith. *The millenium bridge london*. The Structural Engineer, vol. 79(22), pages 17–33, 2001. (Cité en page 77.)
- [Dallard 2001b] P. Dallard, A.J. Fitzpatrick, A. Flint, A. Low et R.M. Ridsdill-Smith. *The millenium bridge london - problems and solutions*. The Structural Engineer, vol. 79(8), pages 15–17, 2001. (Cité en page 77.)
- [De Borst 1993] R. De Borst, L.J. Sluys, H-B. Mühlhouse et J. Pamin. *Fundamental issues in finite element analysis of localisation of deformation*. Engng.Comput., vol. 10, pages 99–122, 1993. (Cité en page 30.)
- [de Saxcé 1991] G. de Saxcé et Z.Q. Feng. *New inequality and functional for contact with friction : The implicit standard material approach*. Mech.Struct.Mach., vol. 19, pages 301–325, 1991. (Cité en page 58.)
- [de Saxcé 1998] G. de Saxcé et Z.Q. Feng. *The bipotentiel method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms*. Mech.Struct.Mach., vol. 28, pages 225–245, 1998. (Cité en page 58.)
- [Dimnet 2002a] E. Dimnet. *Evolution of systems of multiple solids. International conference on nonsmooth/nonconvex mechanics with applications in engineering*. In Aristotle University of Thessaloniki, Athens, Greece, 2002. (Cité en pages 58 et 59.)
- [Dimnet 2002b] E. Dimnet. *Mouvement et collisions de solides rigides ou déformables*. PhD thesis, ENPC, 2002. (Cité en page 60.)
- [Dimnet 2003] E. Dimnet, M. Frémond, R. Gormaz et J. San Martin. *Collisions of rigid bodies, deformable bodies and fluids*. Second M. I. T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Boston, 2003. (Cité en page 56.)
- [Dimnet 2004] E. Dimnet. *Collision in an incompressible fluid*. APCOM04, Beijing, 2004. (Cité en page 56.)
- [Dormieux 1995] L. Dormieux, P. Barboux, O. Coussy et P. Dangla. *A macroscopic model of the swelling phenomenon of a saturated clay*. Eur.J.Mech.A/Solids, vol. 14, pages 981–1004, 1995. (Cité en page 4.)

- [Droz 1987] P. Droz. *Modèle numérique du comportement non-linéaire d'ouvrages massifs en béton non armé*. PhD thesis, EPFL, Lausanne, 1987. (Cité en page 42.)
- [Ehlers 1991] W. Ehlers. *Toward finite theories of liquid-saturated elasto-plastic porous media*. International Journal of Plasticity, vol. 7, no. 5, pages 433 – 475, 1991. (Cité en page 4.)
- [Ehlers 2004] W. Ehlers, T. Graf et M. Ammann. *Deformation and localization analysis of partially saturated soil*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 193, no. 27-29, pages 2885 – 2910, 2004. (Cité en page 4.)
- [Frémond 1995] M. Frémond. *Rigid bodies collisions*. Physics Letters, no. 204, pages 33–41, 1995. (Cité en pages 55, 56, 57, 58, 59, 60 et 63.)
- [Frémond 2001] M. Frémond. *Non-smooth thermo-mechanics*. Springer Verlag Heidelberg, 2001. (Cité en pages 56 et 58.)
- [Gawin 1999] D. Gawin, C.E. Majorana et B.A. Schrefler. *Numerical analysis of hygro-thermal behaviour and damage of concrete at high temperature*. Mech.Cohes.-Frict.Mater, pages 37–74, 1999. (Cité en page 5.)
- [Gawin 2002] D. Gawin, B.A. Schrefler et F. Pesavento. *Modelling of hygro-thermal behavior and damage of concrete at temperature above the critical point of water*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 26, no. 6, pages 537–562, 2002. (Cité en page 5.)
- [Gawin 2003] D. Gawin, F. Pesavento et B.A. Schrefler. *Modelling of hygro-thermal behaviour of concrete at high temperature with thermo-chemical and mechanical material degradation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, no. 13-14, pages 1731–1771, 2003. (Cité en page 5.)
- [Grasberger 2004] S. Grasberger et G. Meschke. *Thermo-hydro-mechanical degradation of concrete : Form coupled 3D material modelling to durability oriented multifield structural analyses*. Materials and Structures, vol. 37, no. 1, pages 244–256, 2004. (Cité en page 31.)
- [Gray 1979a] W.G. Gray et S.M. Hassanizadeh. *General conservation equations for multiphase systems : 1. averaging technique*. Adv.Water.Res, vol. 2, pages 131–144, 1979. (Cité en page 4.)
- [Gray 1979b] W.G. Gray et S.M. Hassanizadeh. *General conservation equations for multiphase systems : 2. mass, momenta, energy and entropy transfer*. Adv.Water.Res, vol. 2, pages 191–203, 1979. (Cité en page 4.)
- [Gray 1980] W.G. Gray et S.M. Hassanizadeh. *General conservation equations for multiphase systems : 3. constitutive theory for porous media*. Adv.Water.Res, vol. 3, no. 1, pages 25–40, 1980. (Cité en page 4.)
- [Gray 2001] W.G. Gray et B.A. Schrefler. *Thermodynamic approach to effective stress in partially saturated porous media*. Eur. J. Mech. A/Solids, vol. 20, pages 521–538, 2001. (Cité en page 4.)
- [Gray 2009] W.G. Gray et B.A. Schrefler. *The solid phase stress tensor in porous media mechanics and the Hill-Mandel condition*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 57, no. 3, pages 539 – 554, 2009. (Cité en page 4.)
- [Grioli 1960] G. Grioli. *Elasticità asimmetrica*. Annali di matematica pura ed applicata, no. Ser.IV-50, pages 389–417, 1960. (Cité en page 39.)
- [Helbing 1995] D. Helbing et P. Molnar. *Social force model for pedestrian dynamics*. Physical Review E, vol. 51, no. 5, pages 4282–4286, 1995. (Cité en pages 69, 70 et 71.)
- [Helbing 2002] D. Helbing. *Traffic and related self-driven many-particle systems*. Reviews of Modern Physics, vol. 73, pages 1067–1141, 2002. (Cité en page 70.)
- [Helbing 2005] D. Helbing, L. Buzna, A. Johansson et T. Werner. *Self-Organized Pedestrian Crowd Dynamics : Experiments, Simulations, and Design Solutions*. Transportation Science, vol. 39, pages 1–24, 2005. (Cité en page 71.)

- [Henderson 1971] L.F. Henderson. *The statistics of crowd fluids*. Nature, vol. 229, pages 381–383, 1971. (Cité en page 69.)
- [Hillerborg 1976] A. Hillerborg, M. Modeer et P.E. Petersson. *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics*. Cement and concrete research, vol. 6, pages 773–782, 1976. (Cité en page 41.)
- [Hoogendoorn 2001] S.P. Hoogendoorn, P.H.L. Bovy et W. Daamen. *Microscopic pedestrian wayfinding and dynamics modelling*. Pedestrian and Evacuation Dynamics, pages 123–154, 2001. (Cité en page 69.)
- [Hrennikoff 1941] A. Hrennikoff. *Solution of problems of elasticity by the framework method*. J.Appl.Mech., pages A169–A175, 1941. (Cité en page 41.)
- [Ingraffea 1985] A.R. Ingraffea et V. Saouma. *Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete*. pages 171–222. Fracture mechanics of concrete : structural application and numerical calculation, 1985. (Cité en page 41.)
- [Ismail 2008] M. Ismail, A. Tourni, R. Francois et R. Gagne. *Effect of crack opening on the local diffusion of chloride in cracked mortar samples*. Cement and concrete research, vol. 38, pages 1106–1111, 2008. (Cité en page 47.)
- [Jean 1995] M. Jean. *Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterial motions*. Mech.Geom.Interf., pages 463–486, 1995. (Cité en pages 56 et 61.)
- [Kachanov 1958] L.M. Kachanov. *Time of the rupture process under creep conditions*. Izv Akad S.S.R. Otd Tech Nauk, vol. 8, pages 26–31, 1958. (Cité en page 31.)
- [Kalifa 2000] P. Kalifa, F.D. Menneteau et D. Quenard. *Spalling and pore pressure in HPC at high temperatures*. Cement and Concrete Research, vol. 30, no. 12, pages 1915–1927, 2000. (Cité en pages 19 et 38.)
- [Kane 1999] C. Kane, A. Repetto, M. Ortiz et J.E. Marsden. *Finite element analysis of nonsmooth contact*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 109, no. 1-2, pages 1–26, 1999. (Cité en page 66.)
- [Kimmel 1996] R. Kimmel et J.A. Sethian. *Fast marching methods for computing distance maps and shortest paths*. Technical Report 669, CPAM, University of California, Berkeley, 1996. (Cité en page 69.)
- [Klinkenberg 1941] L.J. Klinkenberg. *The permeability of porous media to liquid and gases*. American Petroleum Institute, Drilling and production practice, pages 200–213, 1941. (Cité en page 34.)
- [Klupfel 2003] H. Klupfel. *A Cellular Automaton Model for Crowd Movement and Egress Simulation*. PhD thesis, Universitat Duisburg - Essen, 2003. (Cité en page 72.)
- [Kuiken 1994] G.D.C. Kuiken. *Thermodynamics of irreversible processes. applications to diffusion and rheology*. J.Wiley&Sons, 1994. (Cité en page 7.)
- [Le 2011] T.T.H. Le. *Etude multi-échelle du comportement thermo-hydro-mécanique des matériaux cimentaires. Approche morphologique pour la prise en compte de la mésostructure*. PhD thesis, Universit  Paris-Est, 2011. (Cité en page 27.)
- [Lepech 2005] M. Lepech et C.L. Victor. *Water permeability of cracked cementitious composites*. ICF11, Turin, Italy, March 2005. (Cité en page 44.)
- [Lewis 1998] R.W. Lewis et B.A. Schrefler. *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. J.Wiley&Sons, 1998. (Cité en pages 4, 5, 8, 9 et 32.)
- [Mainguy 1999] M. Mainguy, O. Coussy et R. Eymard. *Modélisation des transferts hydriques isothermes en milieu poreux. application au séchage des matériaux à base de ciment*. LCPC, 1999. (Cité en page 19.)

- [Maury 2006] B. Maury. *A time-stepping scheme for inelastic collisions*. Numerische Mathematik, vol. 102, no. 4, pages 649–679, 2006. (Cité en page 70.)
- [Mazars 1989] J. Mazars et G. Pijaudier-Cabot. *Continuum damage theory -Application to concrete-*. J.Eng.Mech. ASCE, vol. 115, no. 2, pages 345–365, 1989. (Cité en page 31.)
- [Meftah 2007] F. Meftah, T.T.H. Le, G. Bonnet et H. Sabeur. *Simulations paramétriques du comportement THM du béton d’une zone courante d’un mur de tranchée couverte soumise à un feu iso 834 : analyse des contraintes d’origine thermique et d’origine hydraulique*. Rapport technique, LaM-CETU-ATILH, 2007. (Cité en page 38.)
- [Meftah 2009] F. Meftah. *Contribution à la modélisation du comportement fissurant différé et au feu des matériaux cimentaires par des approches thermo-hygro-mécaniques couplées*. PhD thesis, HDR UMLV, 2009. (Cité en pages 31 et 32.)
- [Meftah 2010] F. Meftah et S. Dal Pont. *Staggered finite volume modeling of transport phenomena in porous materials with convective boundary conditions*. Transport in Porous Media, vol. 82, no. 2, pages 275–298, 2010. (Cité en pages 8, 9, 14, 15, 16, 19, 22 et 23.)
- [Meftah 2011] F. Meftah, S. Dal Pont et B.A. Schrefler. *A three-dimensional staggered finite element approach for random parametric modeling of thermo-hygral coupled phenomena in porous media*. Num.An.Meth.Geomechanics, vol. DOI :10.1002/nag.1017, 2011. (Cité en pages 11, 14, 19, 20, 22 et 23.)
- [Mo s 1999] N. Mo s, J. Dolbow et T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*. Int.J.Numer.Meth.Eng., no. 46, pages 131–150, 1999. (Cité en page 41.)
- [Moreau 1966] J.J. Moreau. *Fonctionnelles convexes- séminaire sur les équations aux dérivées partielles*. Collège de France - Paris, 1966. (Cité en page 58.)
- [Moreau 1968] J.J. Moreau. *La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastoplastique*. C.R.Acad.Sc.Paris, vol. 267, 1968. (Cité en page 56.)
- [Moreau 1970] J.J. Moreau. *Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité*. C.R.Acad.Sc.Paris, vol. 271, pages 608–11, 1970. (Cité en page 56.)
- [Moreau 1971] J.J. Moreau. *Sur l’ évolution d’un système elasto-visco-plastique*. C.R.Acad.Sc.Paris, vol. 273, 1971. (Cité en page 56.)
- [Moreau 1994] J.J. Moreau. *Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials*. Eur.J. Mech, A/Solids, vol. 13, pages 93–114, 1994. (Cité en pages 56 et 61.)
- [Moussaid 2010] M. Moussaid, N. Perozo, S. Garnier, D. Helbing et G. Theraulaz. *The Walking Behaviour of Pedestrian Social Groups and Its Impact on Crowd Dynamics*. PLoS ONE, vol. 5, no. 4, 2010. e10047. DOI :10.1371/journal.pone.0010047. (Cité en page 70.)
- [Nardin 2004] A. Nardin et B.A. Schrefler. *Numerical simulation of rock behaviour through a discrete model*. Int. J. Solids Struct., vol. 41, no. 21, pages 5945–5965, 2004. (Cité en page 66.)
- [Oden 1986] J. Oden et T. Lin. *On the general rolling-contact problem for finite deformations of a visco-elastic cylinder*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 57, no. 3, pages 297–367, 1986. (Cité en page 66.)
- [Ortiz 1986] M. Ortiz et J.C. Simo. *A new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations*. Int.J.Num.Meth.Engng., vol. 21, pages 1561–1576, 1986. (Cité en page 63.)
- [P col 2010] P. P col, S. Dal Pont, S. Erlicher et P. Argoul. *Modelling crowd-structure interaction*. Mécanique & Industries, EDP Sciences, vol. 11, no. 6, pages 495–504, 2010. DOI :10.1051/meca/2010057. (Cité en pages 56, 71, 76 et 77.)
- [P col 2011a] P. P col. *Modélisation 2D discrète du mouvement des piétons - Application à l’ évacuation des structures du génie civil et à l’interaction foule-passerelle*. PhD thesis, ENPC, 2011. (Cité en pages 56, 68 et 76.)

- [Pécol 2011b] P. Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher et P. Argoul. *Discrete approaches for crowd movement modelling*. European Journal of Computational Mechanics, vol. Volume special issue "Structure and System Dynamics", accepted for publication, 2011. (Cité en pages 56 et 70.)
- [Pécol 2011c] P. Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher et P. Argoul. *Smooth/non-smooth modelling of human crowds : numerical aspects and application to emergency evacuations*. Annals of Solid and Structural Mechanics, vol. submitted, 2011. (Cité en pages 56, 64, 70 et 72.)
- [Perraton 1999] D. Perraton, P.C. Aitcin et A. Carles Gibergues. *Mesure de la perméabilité au gaz des bétons : Partie 2. Étude de l'influence de la taille des éprouvettes et de la variabilité des résultats dans le cas d'un BHP*. Bull.LCPC, vol. 221, pages 69–87, 1999. (Cité en page 34.)
- [Pesavento 2000] F. Pesavento. *Non linear modelling of concrete as multiphase material in high temperature conditions*. PhD thesis, Università degli Studi di Padova, 2000. (Cité en pages 7 et 31.)
- [Pfeiffer 2001] F. Pfeiffer. Non smooth mechanics. P. T. R. S. London, 2001. (Cité en pages 58 et 59.)
- [Phan 2010] M.T. Phan, S. Dal Pont, F. Meftah, S. Rigobert, C. Feron et P. Auturori. *Elaboration de modèle de calcul des structures en béton armé soumises au feu vis-à-vis du risque d'écaillage*. Rapport technique, Rapport d'avancement, 2010. (Cité en page 39.)
- [Phan 2011] M.T. Phan. *Modélisation thermo-hydro-mécanique du comportement du béton en température. Validation comparative CAST3M - CESAR et calcul béton armé*. PhD thesis, Université de Cergy, 2011. (Cité en page 38.)
- [Rashid 1968] Y.R. Rashid. *Analysis of prestressed concrete pressure vessels*. Nucl.Eng.Des., vol. 7, pages 334–344, 1968. (Cité en pages 39 et 42.)
- [Rastiello 2011a] G. Rastiello, C. Boulay, S. Dal Pont, J.L. Tailhan et S. Ramanich. *Real time evolution of water-permeability in cracking concrete*. Advances in Construction Materials Through Science and Engineering, September 2011. RILEM. (Cité en page 48.)
- [Rastiello 2011b] G. Rastiello, C. Boulay, S. Dal Pont, J.L. Tailhan et P. Rossi. *Mise au point d'un essai permettant d'étudier le couplage entre fissuration et transfert liquide au sein du béton*. Séminaire MAT - IFSTTAR, March 2011. (Cité en page 48.)
- [Rastiello 2013] G. Rastiello. *Etude du couplage entre fissuration et transfert liquide au sein du béton*. PhD thesis, LCPC, 2013. (Cité en page 44.)
- [Rodriguez 2003] O.G. Rodriguez et R.D. Hooton. *Influence of Cracks on Chloride Ingress into Concrete*. ACI materials journal, vol. March-April, pages 120–126, 2003. (Cité en page 44.)
- [Rossi 1992a] P. Rossi et X. Wu. *Probabilistic model for material behavior analysis and appraisalment of concrete structures*. Mag.Conc.Res., vol. 44, pages 271–280, 1992. (Cité en page 41.)
- [Rossi 1992b] P. Rossi, X. Wu, F. Le Maou et A. Belloc. *Effet d'échelle sur le comportement du béton en traction*. BLPC, vol. 182, pages 11–20, 1992. (Cité en page 43.)
- [Rossi 1998] P. Rossi. *Réflexions sur l'utilisation des modèles continus non linéaires pour la prise en compte de la fissuration des structures en béton*. BLPC, vol. 217, pages 85–89, 1998. (Cité en page 41.)
- [Sabeur 2008a] H. Sabeur et F. Meftah. *Dehydration creep of concrete at high temperatures*. Materials and Structures, vol. 41, no. 1, pages 17–30, 2008. (Cité en page 31.)
- [Sabeur 2008b] H. Sabeur, F. Meftah, H. Colina et G. Plateret. *Correlation between transient creep of concrete and its dehydration*. Magazine of Concrete Research, vol. 60, no. 3, pages 157–163, 2008. (Cité en page 5.)
- [Saito 1995] M. Saito et H. Ishimori. *Chloride permeability of concrete under static and repeated compressive loading*. Cement and Concrete Research, vol. 4, no. 25, pages 803–808, 1995. (Cité en page 44.)

- [Schanz 2003] M. Schanz et S. Diebels. *A comparative study of Biot's theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems*. Acta Mechanica, vol. 161, pages 213–235, 2003. (Cité en page 4.)
- [Schlangen 1992] E. Schlangen et J.G. van Mier. *Experimental and numerical analysis of micromechanics of fracture of cement based composites*. Cem.Conc. Composites, vol. 14, pages 105–118, 1992. (Cité en page 41.)
- [Schrefler 2004] B.A. Schrefler et F. Pesavento. *Multiphase flow in deforming porous material*. Computers and Geotechnics, vol. 31, no. 3, pages 237–250, 2004. (Cité en page 4.)
- [Simo 1987a] J.C. Simo et T.J.R. Hughes. *General return mapping algorithms for rate independent plasticity*. pages 221–231. Constitutive laws for engineering materials : theory and applications, 1987. (Cité en page 42.)
- [Simo 1987b] J.C. Simo et J.W. Ju. *Strain- and stress-based continuum damage models-II. Computational aspects*. Int.J.Solids and Structures, vol. 23, pages 841–869, 1987. (Cité en page 63.)
- [Simo 1993] J.C. Simo, J. Oliver et F. Armero. *An analysis of strong discontinuity induced by strain softening solutions in rate-independent solids*. J.Comp.Mech., vol. 12, pages 277–296, 1993. (Cité en page 32.)
- [Simone 2003] A. Simone, G.N. Wells et L.J. Sluys. *From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, no. 41-42, pages 4581–4607, 2003. (Cité en page 42.)
- [Singh 2009] H. Singh, R. Arter, L. Dodd et J. Drury. *Modelling subgroup behavior in crowd dynamics DEM simulation*. Applied Mathematical Modelling, no. 33, pages 5508–23, 2009. (Cité en page 72.)
- [Sirieix 2002] C. Sirieix, J.F. Lataste, D. Breisse et M. Frappa. *Caractérisation de l'endommagement du béton par mesures électriques*. Materials and structures, vol. 35, pages 204–210, 2002. (Cité en page 49.)
- [Strogatz 2005] S. Strogatz, D. Abrams, A. McRobie, B. Eckhardt et E. Ott. *Theoretical mechanics : Crowd synchrony on the Millenium bridge*. Nature, vol. 438, pages 43–44, 2005. (Cité en pages 76 et 77.)
- [Tailhan 2010] J.L. Tailhan, S. Dal Pont et P. Rossi. *From local to global probabilistic modeling of concrete cracking*. Annals of Solid and Structural Mechanics, vol. 1, pages 103–105, 2010. (Cité en pages 41, 42 et 43.)
- [Taylor 1988] O.C. Taylor R.L. amd Zienkiewicz. The finite element method, volume 1 and 2. 1988. (Cité en page 10.)
- [Torrenti 1988] J.M. Torrenti, P. Acker, C. Boulay et D. Lejeune. *Contraintes initiales dans le béton*. BLPC, vol. 158, pages 39–44, 1988. (Cité en pages 26 et 47.)
- [Torrenti 1999] J.M. Torrenti, O. Didry, J.P. Ollivier et F. Plas. La dégradation des bétons. Hermes, 1999. (Cité en page 49.)
- [Truesdell 1957] C. Truesdell. *Sulle basi della termomeccanica*. Rend. Accad. Naz. Lincei, vol. 8, pages 158–166, 1957. (Cité en page 4.)
- [Truesdell 1965] C. Truesdell. *The rational mechanics of material*. Continuum Mechanics II, pages 293–305, 1965. (Cité en page 4.)
- [Venel 2008] J. Venel. *Modélisation mathématique des mouvements de foule*. PhD thesis, Laboratoire de Mathématiques, Universit  Paris XI, Orsay, France, 2008. (Cité en page 70.)
- [Verdier 2002] J. Verdier, M. Carcasses et J.P. Ollivier. *Modelling of a gas flow measurement. Application to nuclear containment vessels*. Cem.Conc.Res., vol. 32, pages 1331–1340, 2002. (Cité en page 33.)

- [Vervuurt 1997] A. Vervuurt. *Interface fracture in concrete*. PhD thesis, TU Delft, The Netherlands, 1997. (Cité en page 41.)
- [Wang 1995] K. Wang, C. Daniel, S. Jansen, P. Shah et A. Karr. *Permeability study of cracked concrete*. Cement and Concrete Research, vol. 3, no. 27, pages 381–393, 1995. (Cité en pages 44, 46 et 51.)
- [Zavarise 1992] G. Zavarise, P. Wriggers, B. Stein et B.A. Schrefler. *Real contact mechanism and finite element formulation - a coupled thermomechanical approach*. Int. J. Numer. Methods, vol. 35, pages 767–785, 1992. (Cité en page 66.)
- [Zheng 2010] W.Z. Zheng, X.M. Hou, D.S. Shi et M.X. Xu. *Experimental study on concrete spalling in prestressed slabs subjected to fire*. Fire Safety Journal, vol. 45, pages 283–297, 2010. (Cité en page 38.)