



**HAL**  
open science

# Modèle de représentation géométrique intégrant les états physiques du produit

Guillaume Mandil

► **To cite this version:**

Guillaume Mandil. Modèle de représentation géométrique intégrant les états physiques du produit. Autre. Ecole Centrale Paris; Université de Sherbrooke (Québec, Canada), 2011. Français. NNT : 2011ECAP0058 . tel-00714559

**HAL Id: tel-00714559**

**<https://theses.hal.science/tel-00714559>**

Submitted on 5 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
Faculté de génie  
Département de génie mécanique

En co-tutelle avec :

ÉCOLE CENTRALE PARIS  
Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Mécaniques et des MAériaux

# Modèle de représentation géométrique intégrant les états physiques du produit

Thèse de doctorat  
Spécialité : génie mécanique

Guillaume MANDIL

Jury : François VILLENEUVE (président)  
Luc LAPERRIÈRE (rapporteur)  
Jean-Marc LINARÈS (rapporteur)  
Alain DESROCHERS (co-directeur)  
Alain RIVIÈRE (co-directeur)  
Philippe SERRÉ (examineur)  
Jean-Marc DROUET (examineur)  
André CLÉMENT (invité)



À mon père,



# RÉSUMÉ

Cette thèse introduit le concept de *comportement géométrique* d'un assemblage mécanique. Cette notion permet de rendre compte du caractère assemblable ou mobile d'un mécanisme sous la forme d'un système de relations algébriques entre les paramètres géométriques permettant de le décrire.

Dans un premier temps, cette thèse montre l'intérêt de ce concept pour traiter des problèmes faisant intervenir plusieurs effets physiques et plusieurs scénarios d'utilisation. Le premier chapitre propose l'étude de l'assemblabilité d'un treillis pyramidal à 4 barres décrit par un modèle géométrique non cartésien issu de la littérature.

Dans un second temps, après avoir constaté le manque de modèles adaptés permettant de représenter des mécanismes mobiles, ce travail en propose un non cartésien. Il détaille aussi une méthode de mise en équation afin de traduire la mobilité d'un mécanisme. Une application de ce modèle et de la méthode est également faite. Elle permet de résoudre localement le problème de la mobilité d'un mécanisme de Bennett.

Enfin, la dernière partie de ce travail expose une solution pour associer et comparer deux objets décrits par des représentations non cartésiennes. Cette technique est utile pour comparer deux états physiques du même objet utilisé dans différents scénarios pour assurer le suivi d'une exigence géométrique. Elle peut également être utilisée pour associer des objets réels et des objets idéalisés pour traiter des problèmes de tolérancement.

**Mots-clés :** états physiques, *comportement géométrique*, assemblabilité, mobilité, géométrie non cartésienne, conception préliminaire



# REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ici mes plus sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail de thèse.

En premier lieu, je voudrais remercier Alain Desrochers de m'avoir accueilli à l'université de Sherbrooke pour débiter cette thèse. Je tiens également à le remercier pour la vision positive des choses et les encouragements qu'il m'a apportés dans les moments difficiles.

Je remercie également Alain Rivière, d'avoir accepté de m'accueillir en co-tutelle au LISMMA, pour l'encadrement qu'il a assuré et pour les rencontres avec d'autres chercheurs qu'il m'a permis de faire.

Tout ce travail n'aurait sans doute jamais vu le jour sans l'aide de Philippe Serré que je tiens à remercier particulièrement pour sa gentillesse, sa disponibilité, l'attention qu'il a portée à l'encadrement de ces travaux, et la qualité scientifique de ses interventions.

Ma gratitude va également à André Clément, pour la quantité d'idées et de pistes qu'il a partagées avec moi et qu'il m'a proposées d'explorer afin d'aboutir à ce résultat. Je le remercie également pour la qualité des très nombreux exposés qu'il a présenté lors de nos réunions d'équipe. Qu'il soit aussi remercié ici pour nos débats politiques lors des pauses déjeuner, pour sa joie de vivre et son énergie de jeune homme.

Une pensée ira aussi à Mireille Moinet et Ruixan Liu ; je les remercie pour nos nombreux échanges lors de mes séjours au LISMMA.

Je remercie également tous les membres du jury et particulièrement Luc Laperrière et Jean-Marc Linarès qui ont accepté la tâche de rapporter ce travail de thèse.

Je dis encore merci à tous les chercheurs du LISMMA, du GRT et à tous les membres du département Recherche & Développement chez Dassault Systèmes pour nos échanges et/ou pour l'aide qu'ils m'ont fournie.

Je n'oublie pas le personnel administratif et technique des deux entités d'accueil à qui je dis merci pour tous les services rendus au cours de ces quatre années.

Pour tous les bons moments, passés et à venir, je remercie également, Pierre, Éric, Cédric, Chantale, Marie-Hélène, Camille, Ilia, Mélody, Emilien, Manu, Jean, Sébastien, Sonia, Benji, Agathe, Amélie, Emilie, Laurent, tous les membres des *Elvis Platinés*, de *La rue du milieu*, tous les rugbymen des *Abenakis de Sherbrooke* et des *Gaillards parisiens*.

Je remercie également mon père - qui n'aura pas eu le temps et le plaisir de lire cette thèse - et ma mère pour l'éducation qu'ils m'ont transmis et leur amour inconditionnel ; mes frères et ma sœur, ma grand mère, mes cousins et cousines, mon oncle et ma tante, pour leur soutien et leurs encouragements .

Ces remerciements ne seraient pas complets sans une "*spéciale cace-dédi*" à Nathalie qui, en plus d'avoir corrigé mes nombreuses fautes d'orthographe, me supporte au quotidien.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1	Problématique . . . . .	1
1.1.1	Conditions géométriques . . . . .	2
1.1.2	Comportement thermique . . . . .	2
1.1.3	Lien thermique - géométrique . . . . .	3
1.1.4	Axe de recherche . . . . .	4
1.2	Vocabulaire . . . . .	4
1.2.1	Ingénierie de produits . . . . .	5
1.2.2	Approches de modélisation . . . . .	6
1.3	État de l'art . . . . .	7
1.3.1	Modèles géométriques . . . . .	8
1.3.2	Problèmes multiphysiques . . . . .	11
1.3.3	Méthodologie de conception . . . . .	12
1.4	Originalités et objectifs . . . . .	15
<b>2</b>	<b>LE CONCEPT DE COMPORTEMENT GÉOMÉTRIQUE</b>	<b>17</b>
2.1	Définition . . . . .	17
2.1.1	Paramètres . . . . .	17
2.1.2	Caractères géométriques . . . . .	18
2.2	Intérêt pour concevoir des produits multi-physiques . . . . .	19
2.3	Application à une structure pyramidale . . . . .	20
2.3.1	Présentation du cas . . . . .	20
2.3.2	Comportement géométrique . . . . .	21
2.3.3	Comportements physiques . . . . .	25
2.3.4	Intégration et résolution . . . . .	28
2.3.5	Bilan . . . . .	29
2.4	Conclusion . . . . .	30
<b>3</b>	<b>COMPORTEMENT GÉOMÉTRIQUE POUR LES MÉCANISMES MO- BILES</b>	<b>31</b>
3.1	Squelette géométrique pour les mécanismes mobiles . . . . .	31
3.1.1	Modèle topologique . . . . .	33
3.1.2	Modèle géométrique élémentaire . . . . .	33
3.1.3	Cas d'une liaison quelconque . . . . .	34
3.1.4	Cas d'un solide à plus de 2 liaisons . . . . .	37
3.1.5	Déclaration d'une boucle cinématique quelconque . . . . .	37
3.2	Représentation mathématique . . . . .	38
3.2.1	Paramétrisation par une matrice de Gram . . . . .	38
3.2.2	Propriétés intéressantes . . . . .	39
3.3	Expression algébrique des contraintes . . . . .	40
3.3.1	Notations . . . . .	40

---

3.3.2	Contrainte d'assemblage . . . . .	40
3.3.3	Fermeture angulaire . . . . .	42
3.3.4	Fermeture périmétrique . . . . .	44
3.3.5	Contrainte de mobilité . . . . .	48
3.4	Modèle physique . . . . .	49
3.5	Application au mécanisme de Bennett . . . . .	50
3.5.1	Présentation du cas . . . . .	50
3.5.2	Fermeture angulaire . . . . .	53
3.5.3	Fermeture périmétrique . . . . .	56
3.5.4	Comportement géométrique . . . . .	59
3.5.5	Application à un problème thermique . . . . .	65
3.5.6	Bilan . . . . .	70
3.6	Conclusion . . . . .	71
<b>4</b>	<b>ASSOCIATION DE DEUX REPRÉSENTATIONS</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction . . . . .	75
4.2	Notations . . . . .	76
4.3	Models . . . . .	76
4.3.1	Topological Model . . . . .	77
4.3.2	Geometrical Model . . . . .	77
4.3.3	Mathematical tools . . . . .	78
4.3.4	General discussion . . . . .	79
4.4	Association of objects . . . . .	79
4.4.1	Calculation of the global connection matrix . . . . .	80
4.4.2	Calculation of the global Gram matrix . . . . .	81
4.4.3	Calculation of the $G_{\alpha\beta}$ Matrix . . . . .	82
4.5	Case study . . . . .	85
4.5.1	Topological association . . . . .	87
4.5.2	Vectorial association . . . . .	88
4.5.3	Exemple of the mapping of the evolution of a geometrical parameter . . . . .	89
4.6	Conclusion and perspective . . . . .	90
4.7	Bibliography . . . . .	90
<b>5</b>	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>93</b>
5.1	Conclusion . . . . .	93
5.2	Discussion . . . . .	94
5.3	Perspectives . . . . .	95
<b>A</b>	<b>RAPPORTS D'ÉVALUATION</b>	<b>97</b>
A.1	Rapport de soutenance . . . . .	98
A.2	Rapport de Luc Laperrière . . . . .	101
A.3	Rapport de Jean-Marc Linarès . . . . .	107
A.4	Rapport de François Villeneuve . . . . .	111
A.5	Rapport de Jean-Marc Drouet . . . . .	113
A.6	Rapport d'Alain Desrochers . . . . .	115

---

---

A.7 Rapport d'Alain Rivière . . . . .	117
<b>LISTE DES RÉFÉRENCES</b>	<b>119</b>

---



# LISTE DES FIGURES

1.1	Exemple 1D . . . . .	1
2.1	Méthodologie générale . . . . .	20
2.2	Structure pyramidale à quatre barres . . . . .	21
2.3	Squelette associé à la structure pyramidale à quatre barres. . . . .	22
2.4	Pyramide initiale . . . . .	23
3.1	Paramètres de Denavit et Hartenberg pour positionner deux droites en 3D	34
3.2	Mise en évidence de l'axe d'une pièce . . . . .	34
3.3	Représentation schématique d'un mécanisme à 4 liaisons mono-axiales . . .	38
3.4	Composition de $2 \cdot p$ rotations suivant une boucle fermée. . . . .	41
3.5	Mécanisme de Bennett . . . . .	51
3.6	Graphe cinématique du mécanisme de Bennett . . . . .	52
3.7	Squelette associé au mécanisme de Bennett . . . . .	53
3.8	Mesure des paramètres qualifiant un jeu . . . . .	69
3.9	Evolution de la distance dans la liaison entre les barres 1 et 2 . . . . .	70
3.10	Evolution de l'angle dans la liaison entre les barres 1 et 2 . . . . .	70



# LISTE DES TABLEAUX

1.1	Valeur des paramètres dimensionnels à 20°C . . . . .	2
1.2	Frontières de l'étude . . . . .	14
2.1	Variables définies pour chaque barre . . . . .	22
2.2	Exemple de valeurs formant une pyramide à 4 barres assemblables . . . . .	23
2.3	Matrice de Gram correspondante aux longueurs du tableau 2.2 . . . . .	24
2.4	Longueur libre des barres à 100°C . . . . .	26
2.5	Longueur des barres de la structure assemblée à 100°C . . . . .	29
3.1	les 20 classes d'équivalence des 64 combinaisons possible des 6 degrés de liaisons [Cailliau, 2010] . . . . .	36
3.2	Construction des liaisons usuelles par des combinaisons de liaisons mono-axiales (pivot-glissant) [Cailliau, 2010] . . . . .	37
3.3	Valeur des produits scalaires par composition de $2 \cdot p - 1$ rotations . . . . .	43
3.4	matrice de Gram fonctions exprimée avec les fonctions $F_p$ . . . . .	45
3.5	Paramètres pour décrire le squelette d'un mécanisme de Bennett . . . . .	51
3.6	Valeur d'une instance de mécanisme de Bennett mobile . . . . .	53
3.7	Matrice de Gram unitaire pour un mécanisme de Bennett . . . . .	54
3.8	Valeurs d'une instance de mécanisme de Bennett mobile . . . . .	56
3.9	Matrice de Gram unitaire symétrique pour un mécanisme de Bennett . . . . .	57
3.10	Matrice de Gram pour un mécanisme de Bennett . . . . .	58
3.11	Sous-matrice associée aux écarts sur les paramètres de liaisons . . . . .	61
3.12	Dimension du mécanisme de Bennett à 100°C . . . . .	66
3.13	Dimensions du mécanisme de Bennett mobile idéal . . . . .	68



# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

Ce travail propose de développer un principe de solution pour intégrer les différents états physiques d'un produit mécanique à ses représentations topologiques et géométriques durant les phases de pré-conception. Le but premier de cette étude est de fournir au concepteur des ordres de grandeur sur les variations d'une condition géométrique, un jeu par exemple, lorsque l'environnement et les chargements multi-physiques que le produit supporte, subissent des variations.

En effet, les divers chargements physiques (mécanique, thermique, électromagnétique) auxquels est soumis le produit varient en fonction des conditions d'utilisation. Ces variations de chargements induisent à leur tour des variations dimensionnelles du système qui impactent les conditions géométriques permettant d'assurer le fonctionnement du mécanisme. Par exemple, dans le cas d'un turbo-moteur, on admet facilement que le jeu fonctionnel entre le bout des aubes de la turbine et le stator va fortement varier entre la situation de vol, où la température et la force centrifuge sont élevées, et la situation à l'arrêt où ces chargements sont absents.

### 1.1 Problématique

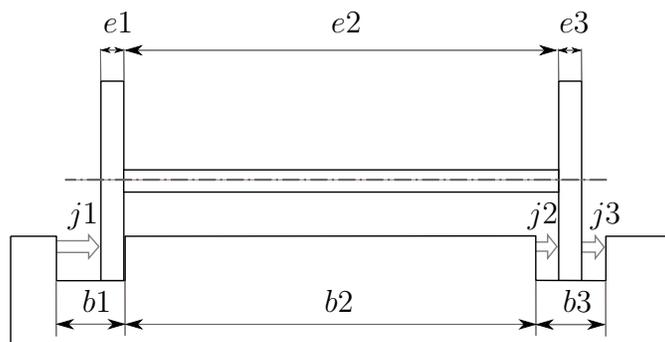


Figure 1.1 Exemple 1D

A partir des constatations précédentes, il est apparu utile de proposer une approche pour intégrer dans un modèle commun le comportement physique du système et l'évaluation des conditions géométriques qui assurent son fonctionnement souhaité. Ainsi, pour trouver une solution de conception à un problème géométrique et physique, cette approche propose

de résoudre simultanément les relations traduisant les conditions géométriques du système et celles traduisant son comportement physique.

Pour illustrer ce propos, cette section présente un exemple 1D qui a été traité dans l'article [Mandil *et al.*, 2009] au début de ces travaux doctoraux. Cet exemple s'appuie sur une représentation simplifiée de l'essieu d'un chariot, telle que représentée à la figure 1.1, dont les roues sont guidées dans un bâti présentant deux rainures. La description de la géométrie est effectuée grâce aux six paramètres de longueur :  $\{e1, e2, e3, b1, b2, b3\}$  et aux trois conditions géométriques :  $\{j1, j2, j3\}$ . De plus, il est supposé que ce système est soumis à des dilatations thermiques linéaires. Les valeurs nominales des paramètres dimensionnels sont données à 20°C dans le tableau 1.1. Pour ce problème, les dilatations thermiques peuvent être vues comme une source de variation des paramètres de longueurs mis en jeu pour qualifier les conditions géométriques du système.

Tableau 1.1 Valeur des paramètres dimensionnels à 20°C

Paramètre	Valeur à 20°C	Paramètre	Valeur à 20°C
$e1$	60 mm	$b1$	60,3 mm
$e2$	1440 mm	$b2$	1439,7 mm
$e3$	60 mm	$b3$	60,8 mm

### 1.1.1 Conditions géométriques

Dans l'article [Mandil *et al.*, 2009] l'auteur a établi que les conditions géométriques de ce système étaient données par les trois chaînes de cotes unidirectionnelles de l'équation 1.1. Afin d'assurer le bon fonctionnement du chariot, il faudra s'assurer que les valeurs de ces trois conditions demeurent positives.

$$\begin{cases} j1 = b1 - e1 \\ j2 = e2 - b2 \\ j3 = b3 - e3 + b2 - e2 \end{cases} \quad (1.1)$$

### 1.1.2 Comportement thermique

Le comportement thermique du système est décrit par la loi de comportement thermoélastique 1.2 présentée dans [Salençon, 2007]. Dans cette relation,  $L_0$  désigne la longueur du solide à l'état libre,  $L$  la longueur du solide sous chargement,  $\alpha$  désigne le coefficient de dilatation thermique et  $\Delta T$  l'élévation de température.

$$L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T + L_0 \quad (1.2)$$

Ce comportement appliqué à l'exemple donne le système de relations 1.3 dans lequel  $\alpha_b$  désigne le coefficient de dilatation thermique du bâti et  $\alpha_e$  celui de l'essieu. De la même manière,  $T_b$  désigne la température du bâti et  $T_e$  celle de l'essieu.

$$\left\{ \begin{array}{l} b1 = \alpha_b \cdot 60 \cdot (T_b - 20) + 60 \\ b2 = \alpha_b \cdot 1440 \cdot (T_b - 20) + 1440 \\ b3 = \alpha_b \cdot 60 \cdot (T_b - 20) + 60 \\ e1 = \alpha_e \cdot 60,3 \cdot (T_e - 20) + 60,3 \\ e2 = \alpha_e \cdot 1439,7 \cdot (T_e - 20) + 1439,7 \\ e3 = \alpha_e \cdot 60,8 \cdot (T_e - 20) + 60,8 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

### 1.1.3 Lien thermique - géométrique

L'élimination des six longueurs dans les deux systèmes d'équations 1.1 et 1.3 permet d'obtenir trois relations reliant les conditions géométriques  $\{j1, j2, j3\}$  aux paramètres thermiques  $\{\alpha_b, \alpha_e, T_b, T_e\}$ . Dans la suite, on considèrera que les paramètres  $\alpha_b$  et  $\alpha_e$  sont constants, tels que  $\alpha_b = 1,20 \cdot 10^{-6} K^{-1}$  et  $\alpha_e = 2,38 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ . Ces relations sont résolues de deux manières différentes.

Premièrement, en fixant une température pour chaque pièce, il est possible de calculer les valeurs correspondantes des conditions géométriques. Pour cette première approche, l'application numérique faite dans [Mandil *et al.*, 2009] conclut que pour une température de  $50^\circ C$  les conditions géométriques auront les valeurs suivantes :  $j1 = 0,279mm$  ;  $j2 = 0,810mm$  et  $j3 = -0,031mm$ . La valeur négative de la condition  $j3$  indique qu'une interférence entre les deux pièces apparaîtrait si le contact initial était maintenu comme présenté dans la figure 1.1.

Deuxièmement, en choisissant une valeur minimale pour chaque condition géométrique, il est possible de déterminer la température maximale d'utilisation du système. Dans ce cas de figure, en considérant que le bâti et l'essieu sont à la même température, il a été montré dans [Mandil *et al.*, 2009] que la température maximale permettant d'éviter une interférence au niveau de la condition  $j3$  est de  $22,8^\circ C$ .

### 1.1.4 Axe de recherche

D'une manière générale, les attentes d'un utilisateur en termes de fonctionnalités d'un mécanisme sont traduites sous formes d'exigences géométriques. Celles-ci sont représentées par des relations algébriques entre les paramètres utilisés pour décrire la géométrie. L'exemple précédent a montré que les valeurs des paramètres géométriques sont sujettes à des variations suivant les chargements physiques que le mécanisme subit. Ainsi, les chargements physiques qui agissent sur un mécanisme peuvent être vus comme des effets qui gouvernent les valeurs des paramètres dimensionnels mis en jeu pour les exigences géométriques à respecter. C'est pourquoi ce travail propose d'utiliser un modèle commun intégrant les effets physiques et les conditions géométriques pour évaluer l'impact d'un effet physique sur les exigences géométriques.

Pour le cas 1D présenté dans cette introduction, les relations de sur-contraintes géométriques proviennent des 3 chaînes de cotes unidirectionnelles associées à chacune des exigences  $j_1$ ,  $j_2$  et  $j_3$ . Cet exemple montre que lorsque les paramètres géométriques utilisés pour décrire un effet physique sont les mêmes que ceux qui servent à exprimer les conditions géométriques de fonctionnement, il est alors possible de déterminer l'influence de l'effet physique (ici les dilatations thermiques) sur les conditions géométriques à respecter.

Dans le cas plus général, les paramètres géométriques utiles à la description de plusieurs phénomènes physiques diffèrent d'un phénomène à un autre. Ainsi, pour pouvoir intégrer plusieurs effets physiques, il faut que le modèle géométrique permette, d'une part, d'introduire tous les paramètres utilisés par chacun des effets physiques pris en considération ; d'autre part, d'exhiber les relations de sur-contraintes qui existent entre tous ces paramètres. Cette approche permet de modéliser chaque effet physique avec les paramètres géométriques adéquats et d'assurer le lien entre eux par les relations de sur-contraintes géométriques. Cela permettrait, par exemple, de faire collaborer plusieurs équipes d'ingénieries ayant chacune une compétence pour modéliser un effet physique. Dès lors, la charge de l'intégration de tous les effets physiques et de la cohérence entre les paramètres géométriques est assurée par les relations de sur-contraintes géométriques du modèle.

## 1.2 Vocabulaire

Avant toute chose supplémentaire, il est apparu nécessaire de préciser différents termes du vocabulaire qui sera employé dans la suite de ce document.

---

### 1.2.1 Ingénierie de produits

Le terme de "**processus de développement du produit**" désigne l'ensemble des méthodes utilisées pour aider un inventeur à mettre sur le marché un nouveau produit. Ces méthodes sont généralement composées de plusieurs grandes phases telles que :

1. Le recueil du besoin
2. La traduction de ce besoin en spécifications techniques (analyse fonctionnelle, cahier des charges, etc..)
3. La conception du produit répondant à ces spécifications techniques
4. La réalisation et les tests sur un prototype
5. La production pour une commercialisation

De plus, le terme de "**processus de conception**" qualifiera le regroupement des étapes deux et trois.

Le terme de "**méthodologie de conception**" désigne les méthodes permettant d'aider un concepteur à réaliser une maquette numérique ou les plans d'un objet, répondant à des spécifications techniques formulées en amont. Ces méthodes sont développées pour mener à bien la troisième phase du processus de développement du produit décrit ci-avant. Il existe plusieurs familles de méthodes pour assister le concepteur dans cette démarche : les méthodes en cascade permettent de hiérarchiser les étapes ; le cycle en V a été imaginé pour pallier au manque de réactivité de ces dernières. Généralement le choix d'une méthode particulière dépend de la nature de l'objet (ou service) à concevoir : électronique, mécanique, mécatronique, logiciel, ... Ces méthodes sont habituellement découpées en trois grandes phases telles que :

1. Une pré-conception ou conception architecturale
2. Une conception détaillée des composants (à laquelle on peut appliquer la méthode récursivement)
3. Une agrégation ou assemblage des composants conçus

Le terme de "**cycle de vie**" d'un produit désigne les différentes phases qu'il traverse depuis sa conception jusqu'à sa destruction ou son recyclage. Parmi les phases les plus communes du cycle de vie, on retrouve : la conception, le prototypage, la fabrication, l'assemblage, la distribution, l'utilisation, la maintenance et la fin de vie.

---

Le terme de "**Product Life-cycle Management**" (PLM) est défini ici avec une connotation ayant trait à la gestion de la production. Dans ce domaine, qui n'est pas lié à cette étude, ce terme est habituellement utilisé pour gérer les différents cycles de vie, tel qu'entendus par le paragraphe précédent. Plus particulièrement, les outils de gestion du PLM s'attachent à établir des liens entre les configurations du produit dans ces différentes phases.

De plus, durant la phase d'utilisation du cycle de vie du produit, il existe généralement plusieurs **scénarios d'utilisation** (*use cases* en anglais) qui correspondent aux diverses situations que le produit peut rencontrer pendant son utilisation. Ces scénarios sont souvent caractérisés par différentes conditions environnementales (température, pression, hygrométrie, champs électromagnétiques, etc.) mais également par différents chargements sur le produit (efforts, transferts thermiques, sollicitations fréquentielles, etc.). Ces différentes conditions font intervenir divers effets physiques. Chacun d'eux se traduit à son tour par des déformations des pièces ou composants du produit pouvant être vues comme des sources de variations de sa géométrie.

## 1.2.2 Approches de modélisation

Il est aussi apparu nécessaire de définir deux approches de modélisation largement utilisées dans les outils de CAO<sup>1</sup>.

Tout d'abord, la **modélisation procédurale** d'un objet décrit les formes de ce dernier par une liste hiérarchisée de constructions élémentaires. On commence par extruder un profil, puis sur une certaine face on perce un trou, etc. Chaque construction élémentaire peut être localisée par rapport aux éléments construits lors des étapes antérieures de la liste. D'une manière générale, lorsqu'un concepteur utilise une méthode procédurale pour décrire un objet, il spécifie à la fois les objets élémentaires qu'il utilise mais surtout la procédure selon laquelle il les combine pour obtenir le résultat souhaité. Cette méthode présente l'avantage de permettre la modification simple des formes élémentaires utilisées. La mise à jour de la forme géométrique finale est ensuite obtenue en parcourant de nouveau la procédure décrite. Toutefois, il est impossible de modifier la position relative de deux éléments qui ne sont pas situés sur une même branche hiérarchique. Dans ce cas-là, la seule solution permettant d'atteindre ce but consiste à modifier la procédure elle-même.

Le pendant à la modélisation procédurale est la **modélisation déclarative** dont D. Le Goff donne la définition suivante dans sa thèse [Le Goff, 1990]. La modélisation déclarative

---

<sup>1</sup>Conception Assistée par Ordinateur

*"repose sur l'idée que nous pouvons appréhender le monde autrement que par sa caractéristique géométrique : nous pouvons le percevoir pas ses propriétés, par ses caractéristiques, c'est à dire non pas seulement par l'apparence qu'il nous présente mais par les mécanismes et les contraintes qui font qu'il nous apparait sous cette forme. Ainsi nous nous plaçons à un plus haut niveau d'abstraction".* Afin d'utiliser cette méthode pour décrire un objet en CAO, le concepteur utilise deux listes non ordonnées. La première est constituée par l'ensemble des objets élémentaires utilisés pour construire l'objet final. La seconde contient l'ensemble des contraintes géométriques qui portent sur les entités élémentaires (dimensions, distances, orientations, etc.). L'objet géométrique final est alors obtenu par un solveur qui se charge de trouver une solution à l'ensemble de ces contraintes. Avec cette méthode il est facile de modifier n'importe quelle caractéristique de l'objet final : il suffit d'ajouter ou supprimer les éléments correspondants dans les deux listes décrites précédemment. Cependant, il arrive parfois que le solveur ne trouve pas la solution attendue par le concepteur pour plusieurs raisons. Il se peut, par exemple, qu'il existe plusieurs solutions au problème décrit et que le solveur ne "choisisse" pas celle que le concepteur souhaite ; qu'il n'existe aucune solution au problème ; etc.

### 1.3 État de l'art

L'étude des assemblages mécaniques fait l'objet de recherches depuis la révolution industrielle : la fabrication en série de pièces interchangeables étant à la base de la production de masse et des chaînes de montage. Originellement, la fabrication de pièces interchangeables était basée sur une standardisation de méthodes artisanales [Peaucelle, 2005] et sur la maîtrise à la fois de la géométrie des pièces grâce à des gabarits, mais aussi des jeux grâce à des cales étalons. Il est donc compréhensible que les outils permettant la maîtrise des méthodes et des géométries évoluent avec la numérisation des processus de conception et de production.

À cet état de fait, viennent s'ajouter les déformations que subissent les pièces suivant leurs conditions d'utilisation. Ces déformations entraînent une variation des jeux ou autres conditions géométriques qui ont à leur tour un impact sur les fonctionnalités des mécanismes. Ces déformations proviennent, dans le cas général, de plusieurs effets physiques (mécanique, thermique, électromagnétisme) qui se combinent [Néron, 2004].

L'objectif de cette revue bibliographique est de montrer, dans un premier temps, les outils, modèles et méthodes actuellement disponibles pour spécifier et analyser les éléments géométriques en CAO 3D dans le but de décrire un système mécanique. Deuxièmement,

il s'agit de présenter les principales méthodes permettant de décrire les différents états d'un produit mécanique suivant les chargement et sollicitations auxquels il est soumis. Enfin une dernière partie mettra en évidence les différentes étapes du cycle de conception [McDermid et Ripken, 1984] auxquels ces différents outils et méthodes se rapportent.

### 1.3.1 Modèles géométriques

Le dessin technique est l'un des premiers outils modernes, régi par une norme, qui permette de décrire la géométrie d'un objet. Il est basé sur les principes de la géométrie projective ou descriptive, définie au début du XIXe siècle par Gaspard Monge. Avec l'avènement de l'ère informatique, de nombreux outils logiciels sont apparus pour aider le dessinateur industriel dans sa tâche. Ces logiciels de conception assistée par ordinateur sont souvent associés à d'autres outils permettant de simuler numériquement le fonctionnement du mécanisme conçu.

D'une manière générale, les outils et représentations utilisés pour une tâche d'ingénierie ne sont pas adaptés pour une autre. Ainsi, suivant la tâche à effectuer, le modèle utilisé pour décrire la géométrie diffère. A titre d'exemple, les outils de CAO utilisent généralement un modèle géométrique mixte B-Rep<sup>2</sup> - CSG<sup>3</sup> alors que les outils de calcul par la méthode des éléments finis font, pour leur part, appel à une géométrie représentée sous la forme d'un maillage discret.

#### Définition des assemblages

La suite de cette section fait état des recherches menées dans le domaine de la représentation d'assemblages mécaniques. Historiquement, l'étude des assemblages s'est faite en modélisant les liaisons entre les pièces.

Tout d'abord, pour décrire les relations entre les pièces et les liaisons, l'ensemble des modèles proposés dans la littérature pour décrire des mécanismes fait appel à des graphes. Dans la majorité des cas, les nœuds du graphe représentent une pièce et les arêtes une liaison. A ce sujet, la théorie des «liens virtuels» (*virtual link* en anglais) proposée par Lee [Lee et Gossard, 1985] qui permet de décrire la relation (*i.e.* bloqué, avec jeu, ...) entre chaque paire de composants (pièce ou sous-assemblage) d'un assemblage apparaît comme une des fondations de la description d'assemblages par des graphes. Cette proposition a d'ailleurs été utilisée historiquement par Turner [Turner, 1990] dans le but de réaliser une étude de synthèse des zones de tolérances.

---

<sup>2</sup>Boundary Representation

<sup>3</sup>Constructive Solid Geometry

---

Après quoi, il reste encore à définir la position et l'orientation des pièces et des liaisons dans l'espace. La première technique employée a été de positionner ces éléments dans un repère absolu. Cette technique est peu adaptée aux phases de conception car elle ne permet pas de faire évoluer facilement les paramètres utiles pour décrire un assemblage. Elle demeure par contre employée dans les systèmes d'informations utilisés pour gérer des configurations d'assemblages dans le domaine du PLM. Pour les tâches de conception, les pièces et les liaisons sont généralement positionnées et orientées en utilisant des repérages relatifs.

Comme le souligne Cailliau dans sa thèse [Cailliau, 2010], lorsque l'on s'intéresse aux propriétés cinématiques des mécanismes, la convention de Denavit et Hartenberg [Hartenberg et Denavit, 1964] apparaît très utile. Cette notation permet de positionner de manière minimale deux axes de liaisons dans l'espace. Pour cela, la convention propose de mesurer la distance entre les deux axes selon leur perpendiculaire commune, et de mesurer l'angle formé par ceux-ci autour de cette même perpendiculaire commune. Avec cette convention il est possible de décrire trois types de liaisons élémentaires : les liaisons pivots qui comportent un seul degré de liberté en rotation autour de leur axe ; les liaisons glissières, qui ont un degré de liberté en translation le long de leur axe ; les liaisons pivots glissants, qui autorisent la rotation et la translation suivant le même axe. Les autres liaisons usuelles utilisées en mécanique peuvent être modélisées par une combinaison de ces liaisons comme l'explique Cailliau dans sa thèse.

Desrochers [Desrochers, 1991] présente dans sa thèse de doctorat une théorie séduisante basée sur le groupe des déplacements [Hervé, 1976, 1994, 1999; Rivière, 1993] permettant de décrire fonctionnellement des assemblages mécaniques. Cette théorie sera, par la suite, utilisée aussi bien pour générer des chaînes de cotes 3D, que pour spécifier la géométrie d'un assemblage 3D [Clément *et al.*, 1996]. Ce modèle se base sur deux concepts : les SATT<sup>4</sup> et les EGRM<sup>5</sup> ainsi que sur le parcours de graphes des liaisons pour modéliser la topologie des assemblages. Le modèle SATT est basé sur l'association binaire et récursive de deux surfaces fonctionnelles (ou groupe de surfaces) entre elles. Le but poursuivi est d'associer entre elles toutes les surfaces fonctionnelles d'un assemblage. Cette association peut se représenter sous forme d'un arbre hiérarchique. Par ailleurs, dans le but de représenter mathématiquement chaque SATT, il lui est associé un EGRM (parmi plusieurs possibilités parfois) qui est en fait un référentiel partiel permettant de positionner le SATT en prenant en compte les déplacements qui le laissent invariant. La constitution de l'arbre hiérarchique

---

<sup>4</sup>Surfaces Associées Technologiquement et Topologiquement

<sup>5</sup>Éléments Géométriques de Référence Minimum

---

des SATT est réalisée par le parcours des cycles indépendants dans le graphe des liaisons de l'assemblage. Il est important de signaler que le choix des cycles, leur ordre de parcours ainsi que le choix des EGRM peuvent conduire à des descriptions (et donc des cotations) différentes du mécanisme. Desrochers, dans sa thèse de doctorat, et Clément [Clément *et al.*, 1997] décrivent d'ailleurs les 13 associations que l'on peut faire entre deux EGRM et les façons de coter chacune d'elles. Desrochers présente aussi un exemple de tolérancement grâce à cette théorie dans [Desrochers *et al.*, 2003].

Ainsi, un couple SATT/EGRM peut être vu comme un objet élémentaire permettant de décrire un mécanisme par une méthode procédurale ou déclarative. Le travail de thèse de Desrochers permet de décrire de manière exhaustive le positionnement et l'orientation relative de deux EGRM. Cette description peut ensuite être utilisée pour spécifier une procédure de conception par une méthode procédurale ou bien servir pour spécifier des contraintes dans une méthode déclarative.

Enfin, afin d'offrir plus de possibilités aux concepteurs, l'équipe de recherche du LISMMA<sup>6</sup> a proposé d'utiliser un solveur de contraintes géométriques dans une approche déclarative. Le modeler déclaratif s'appuie sur une représentation géométrique non cartésienne [Clément *et al.*, 1999, 2004; Serré, 2000; Serré *et al.*, 2002, 2004]. Par la suite, une fois les éléments géométriques et l'ensemble des contraintes entre ces éléments déclarés, plusieurs stratégies de résolution ont été développées dans les travaux de Moinet et Serré [Moinet, 2008; Moinet *et al.*, 2007, 2008, 2010]. Les bases mathématiques utilisées pour traiter ces problématiques sont rappelées dans la thèse de Serré [Serré, 2000] et détaillées dans les ouvrages suivants : [Bass, 1977; Cartan, 1946; Lichnerowicz, 1956].

### Tolérancement des assemblages

Afin d'assurer l'interchangeabilité des pièces tout en assurant un fonctionnement acceptable d'un assemblage, l'étude du jeu dans les liaisons se révèle incontournable. La plupart des méthodes d'analyse ou de synthèse d'une zone de tolérance sont basées sur le torseur des petits déplacements introduit par Bourdet et Clément [Bourdet et Clément, 1976; Bourdet *et al.*, 1996]. Dans son application à l'analyse ou la synthèse des zones de tolérances, les variables de description du torseur correspondent aux degrés de libertés bloqués (*i.e.* égales à 0) du torseur cinématique. Les degrés de liaisons libres sont toujours affectés de la valeur 1. Avec cet outil, Anselmetti [Anselmetti, 2002, 2006; Anselmetti *et al.*, 2003] a mis en place la méthode CLIC<sup>7</sup> qui permet de générer et d'optimiser le tolérancement d'un mécanisme. D'autres comme Ghie [Ghie, 2004; Ghie *et al.*, 2007a, 2003, 2007b] avec

---

<sup>6</sup>Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Mécaniques et des MATériaux

<sup>7</sup>Cotation en Localisation avec Influence des Contacts

l'aide de Desrochers [Desrochers *et al.*, 2003] et Laperrière [Laperrière *et al.*, 2002] ont étendu ces techniques dans le but d'optimiser les dimensions géométriques, soit pour faire l'analyse ou la synthèse d'une zone de tolérance. Les recherches, présentées dans ce paragraphe, pour le calcul de zones des tolérances utilisent un modèle mathématique qui leur est spécifique. Dans le cas général, le modèle utilisé pour décrire un mécanisme n'est pas celui qui est utilisé pour effectuer les calculs de tolérancement.

### 1.3.2 Problèmes multiphysiques

Le travail exposé dans cette thèse ambitionne de proposer une solution pour lier les états physiques d'un objet à ses représentations topologiques et géométriques. De ce fait, il apparaît nécessaire de présenter ici les outils permettant à un concepteur d'appréhender ces questions. En plus d'une présentation de l'outil à proprement parler, lorsque cela est possible, ses domaines d'applications et ses limitations seront évoqués. On distingue principalement deux familles parmi l'offre faite au concepteur [Devalan, 2009] :

- Les méthodes de résolution discrète d'une forme faible d'un problème régi par des équations aux dérivées partielles (éléments finis, volumes finis, etc.)
- Les méthodes basées sur des fonctions de transfert permettant de simuler des systèmes dynamiques, continus ou discrets (représentations dans le domaine de Laplace, diagrammes de Bodes, Langage Modelica, etc.)

D'une part, les méthodes de résolution par discrétisation [Ohayon, 2004] utilisent une représentation géométrique spécifique qui est générée pour chaque résolution du problème physique (ou multi-physiques). Elle porte généralement le nom de maillage et il arrive que ce maillage soit recalculé plusieurs fois au cours de la résolution pour raffiner ou "dé-raffiner" certaines zones. Cette représentation de la géométrie est parfaitement adaptée à la résolution de la forme faible d'une équation aux dérivées partielles. Cependant, du fait du grand nombre d'éléments mis en jeu dans un maillage, elle n'est actuellement pas adaptée à une démarche déclarative. D'autre part, il semble également difficile de la rattacher à une spécification fonctionnelle du mécanisme telle que le couple SATT/EGRM par exemple.

D'autre part, les outils permettant de simuler des systèmes dynamiques [Nasser *et al.*, 2010] utilisent généralement très peu de représentations géométriques. Dans la majorité des cas, la mise en équations fait intervenir les paramètres géométriques directement dans l'expression de la fonction de transfert. Il n'y a quasiment jamais de représentation géo-

---

métrique du système. Il arrive cependant que des modèles géométriques apparaissent dans certains cas pour visualiser les résultats obtenus.

### 1.3.3 Méthodologie de conception

Les outils mentionnés au paragraphe précédent se rapportent tous à la phase de conception pour répondre à des spécifications techniques dans le processus de développement d'un produit. Toutefois, comme mentionné au début de l'introduction, cette phase de choix techniques se décompose souvent en plusieurs étapes.

Habituellement, les premières actions engagées en ingénierie (voir section 1.2.1) sont :

- Spécification technique du besoin
- Pré-conception et recherche de principes de solutions technologiques
- Conception détaillée

De nombreux outils et modèles existent pour aider les concepteurs dans la première et dernière phase décrites ci-avant.

Pour la phase de spécification du besoin ou de spécifications techniques, l'ingénieur est habitué à utiliser diverses méthodes ou outils suivant son métier (mécanique, électronique, mécatronique, ...). On peut citer, par exemple, la méthode de l'analyse de la valeur [Association française pour l'analyse de la valeur, 1989] qui permet de spécifier les fonctions qu'un produit doit réaliser pour répondre aux besoins de son (futur) utilisateur. Cette méthode a généralement pour objectif la rédaction d'un cahier des charges pour les tâches suivantes de conception. Le cahier des charges a pour objectif d'énumérer des paramètres et de leur associer des critères pour indiquer qu'un objectif de fonctionnalité est atteint. Il existe également l'outil SysML [EIA, 1998], utilisé par les ingénieurs systèmes, qui permet de spécifier dans un langage commun (et standardisé) le fonctionnement d'un système complexe au travers de paramètres clés (*Key Parameters*) dans plusieurs scénarios d'utilisations.

Vient ensuite la phase de pré-conception. Elle doit servir à créer un premier modèle du produit défini par un nombre réduit de paramètres. Ce modèle doit permettre de valider les exigences de la phase de spécification au moyen de simulations virtuelles. Ces simulations permettent de valider le fonctionnement et les performances du système suivant les scénarios d'utilisation qui ont été spécifiés. Dans le cas général, le comportement du produit (fonctionnement, performances, etc.) est régi par plusieurs effets physiques. Afin de

---

réaliser des simulations de ce comportement, il est donc nécessaire d'attribuer au modèle du mécanisme (ou produit) des lois de comportement pour chacun des effets physiques auquel il est soumis. Ces lois de comportement sont des relations algébriques entre des paramètres du modèle. Le modèle de comportement physique des éléments du mécanisme sera décrit au paragraphe 3.4.

Dans la première étape de choix architecturaux (ou pré-conception), les modèles géométriques utilisés sont souvent très simples. Ils définissent, en général et au plus, un squelette du mécanisme permettant d'orienter les différentes liaisons et parfois ses interfaces entre elles. Parallèlement à cela, lors de cette même étape de pré-conception, les méthodes pour traiter les problèmes de comportement physique du modèle sont généralement des méthodes de simulation de systèmes dynamiques. Dans cette phase de conception, on constate que les représentations géométriques utilisées pour la description et pour la prise en compte des phénomènes physiques sont très sensiblement différentes, et qu'il est difficile actuellement d'utiliser le modèle géométrique de l'un des deux points de vue pour traiter la problématique de l'autre.

Enfin, la tâche de conception détaillée consiste à implémenter de façon détaillée les choix faits pendant la pré-conception. D'un point de vue géométrique, les modeleurs géométriques 3D actuels sont particulièrement adaptés et performants pour définir les formes détaillées des pièces constituant un mécanisme (ou système). Ces outils utilisent un modèle extrêmement complexe contenant à la fois une description nominale des formes et les défauts des formes réelles acceptables par rapport à cette définition nominale. Il est de plus en plus fréquent que cette représentation géométrique soit construite à partir du squelette défini lors de la conception préliminaire, mais ce n'est pas une généralité absolue. De plus, du point de vue de la prise en compte des effets physiques, lors de cette phase de conception, la méthode la plus souvent utilisée est la résolution discrète d'une forme faible du problème (méthode des éléments finis par exemple). Le modèle géométrique utilisé pour cette méthode de calcul, appelé maillage, est calculé par simplification à partir du modèle géométrique de définition des formes. On le voit encore ici, le modèle géométrique utilisé pour ces deux tâches de conception est inadapté à la seconde. Le modèle de spécification des formes est trop complexe pour envisager de l'utiliser pour faire un calcul numérique. En outre, les maillages sont trop simplistes pour permettre de spécifier la très grande diversité des formes géométriques utilisées par les concepteurs.

La problématique de la concordance des modèles géométriques, utilisés par les différents acteurs et/ou métiers pour la phase de conception détaillée, a déjà fait l'objet de plusieurs recherches. Louhichi propose dans sa thèse [Louhichi, 2008] une méthode pour reconstruire

---

un modèle CAO continu à partir d'un résultat de calcul par éléments finis. D'autre part, Souaissa [Souaissa *et al.*, 2009] propose de comparer des modèles CAO pour limiter les calculs aux seules zones ayant subi des modifications de géométrie. Enfin, il faut aussi noter la présence d'outils [Cuillère *et al.*, 2010] pour créer des maillages optimisés à partir des modèles CAO.

Les interactions entre les différents modèles utilisés dans ces trois phases de développement sont résumées dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2 Frontières de l'étude

Phase du cycle de conception	Existant	Contribution de ce travail
Spécification technique	<p>Modèle de gestion des exigences et de spécification des paramètres clés.</p> <p>Cahier des charges : scénarios d'utilisations (Températures, Efforts, Champs électromagnétiques), description d'un mouvement à réaliser, etc.</p>	
Conception préliminaire	<p>Comportement multi-physiques simplifié</p> <p>Outils de simulation basés sur des fonctions de transfert.</p>	<p><i>Comportement géométrique</i> associé à une représentation géométrique squelettique.</p> <p>Un état du squelette = Un scénario d'utilisation.</p>
Conception détaillée	<p>Modèle CAO détaillé</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Définition détaillée de la forme de chaque solide.</li> <li>- Définition détaillée des surfaces constituant les liaisons.</li> <li>- Outils de simulations détaillés : éléments finis, etc.</li> </ul>	

## 1.4 Originalités et objectifs

Les sections précédentes de ce chapitre ont montré que les outils, mis à la disposition du concepteur pour simuler les comportements physiques d'un mécanisme, sont partiellement disponibles pour la phase de conception de détail (voir 1.2). Elles ont aussi montré que durant les phases de pré-conception, il n'existe pas de méthode et de modèle géométrique adaptés pour simuler conjointement les comportements physiques (et multidisciplinaires) d'un produit mécanique, et s'assurer que les exigences fonctionnelles et géométriques sont atteintes. L'objectif principal de ce travail de thèse est de fournir une solution pour mener à bien de telles simulations lors de cette phase de conception.

Pour atteindre cet objectif principal, cette thèse propose de représenter la structure et le squelette du mécanisme en utilisant une représentation simplifiée. Pour cela, il a été nécessaire de définir une solution pour exprimer mathématiquement les exigences géométriques relatives à un mécanisme assemblable ou mobile. Il a également fallu développer des modèles et outils mathématiques appropriés.

Cette thèse propose donc d'introduire le concept original de *comportement géométrique* d'un système mécanique qui exprime les sur-contraintes géométriques - issues de la prise en compte de plusieurs effets physiques - à partir d'un modèle géométrique unique. Il sera exprimé à l'aide d'une représentation géométrique (et topologique) des mécanismes adaptée pour la pré-conception. Le terme de *comportement géométrique* a été délibérément choisi afin de faire écho à celui de *comportement physique*. En effet, une loi de *comportement physique* se traduit par une expression mathématique entre des paramètres physiques et des paramètres géométriques. Par exemple, la loi de Hooke traduit le caractère élastique d'un milieu : elle relie la force (grandeur physique) et l'allongement (grandeur géométrique). De la même manière, une loi de *comportement géométrique* se traduit par une relation entre des paramètres géométriques. Cette loi permet, *in fine*, de garantir le caractère assemblable ou mobile de l'objet en donnant des valeurs cohérentes aux paramètres géométriques. Ainsi, l'approche proposée considère la géométrie comme une discipline au même titre que les autres physiques mises en jeu dans la conception d'un mécanisme.

---



# CHAPITRE 2

## LE CONCEPT DE COMPORTEMENT GÉOMÉTRIQUE

Ce chapitre va introduire le concept de *comportement géométrique*. Il expose également le champ d'application de ce concept et propose une méthodologie pour l'utiliser. Enfin, ce chapitre montre, sur un exemple, comment exprimer le comportement géométrique et résoudre un problème d'assemblage faisant intervenir plusieurs effets physiques.

### 2.1 Définition

Le *comportement géométrique* est un système de contraintes entre des paramètres géométriques permettant de traduire certains caractères d'un système mécanique.

Il est destiné à traduire les relations de sur-contraintes qui apparaissent entre les paramètres géométriques utilisés pour décrire un système mécanique ayant le caractère souhaité. Ces sur-contraintes sont exprimées sous la forme d'un système de relations algébriques entre les paramètres géométriques utiles à la description de l'objet que l'on souhaite étudier et/ou concevoir.

L'expression du *comportement géométrique* d'un assemblage apporte la garantie que tous les paramètres géométriques, utilisés pour le décrire, sont cohérents entre eux et avec le caractère géométrique considéré. L'expression du *comportement géométrique* change si l'on modifie le caractère qui est spécifié, ou les paramètres du modèle.

#### 2.1.1 Paramètres

L'expression du *comportement géométrique* d'un mécanisme suppose l'existence de paramètres permettant de décrire sa géométrie. La liste de ces paramètres n'est pas figée, et elle est constituée de tous ceux que l'ensemble des concepteurs va spécifier pour décrire le problème. Pour que ces paramètres aient un sens, il faut qu'il fassent partie d'un modèle de représentation. Le modèle choisi devra permettre d'ajouter facilement de nouveaux paramètres géométriques qui seraient nécessaires pour prendre en considération un nouvel effet physique. L'ajout du nouveau paramètre implique nécessairement d'introduire les re-

lations algébriques qui relient ce nouveau paramètre à ceux déjà présents dans le modèle. Pour cela, il faut nécessairement que le modèle de représentation utilisé soit déclaratif (voir définition en section 1.2). En effet, l'utilisation d'un modèle procédural ne permet pas de modifier, à coup sur, la liste des paramètres du modèle. Dans certains cas, l'introduction ou la modification d'un paramètre dans un modèle procédural nécessite de revoir la procédure elle-même. A contrario, l'utilisation d'un modèle déclaratif est adapté : pour ajouter un paramètre, il suffit de l'ajouter à la liste des paramètres du modèle et d'écrire l'ensemble des contraintes qui s'y rapportent.

### 2.1.2 Caractères géométriques

Le *comportement géométrique* a pour but d'assurer la cohérence de l'ensemble des paramètres géométriques utilisés pour décrire le caractère d'un assemblage. Un assemblage géométrique présente quatre caractères :

- L'existence
- Le plongement dans un espace euclidien de dimension  $d \leq 3$
- L'assemblabilité
- La mobilité

D'une manière générale, le caractère existentiel est toujours sous-entendu : si l'on décrit un objet géométrique, c'est que l'on souhaite pouvoir le réaliser, il faut donc qu'il existe ! De la même façon, les objets que l'on souhaite représenter seront généralement décrits dans un espace euclidien à trois dimensions. De nombreux détails sur le caractère existentiel et la dimension de l'espace de représentation sont donnés dans les thèses de Serré [Serré, 2000] et Moinet [Moinet, 2008]. Ainsi, les deux caractères qui vont nous intéresser dans ce travail concernent l'assemblabilité et la mobilité. Un caractère géométrique pourra, le cas échéant, se traduire par des relations de sur-contraintes qui lient des paramètres géométriques du modèle. Ces sur-contraintes constituent également le *comportement géométrique* dans la mesure où elles vont permettre de s'assurer que le caractère assemblable ou mobile de l'assemblage est obtenu.

---

## 2.2 Intérêt pour concevoir des produits multi-physiques

Afin d'utiliser le *comportement géométrique* de façon efficace, il faut que celui-ci s'intègre aisément dans le processus de conception. Cette partie va permettre d'identifier à quel moment de ce processus il sera utilisé.

Selon les pratiques actuelles, les conditions d'assemblabilité et de mobilité sont vérifiées à posteriori après la phase de conception détaillée mais ne font pas l'objet d'une spécification antérieure. Cet état de fait semble davantage lié à un manque d'outils et de méthodes pour permettre une telle spécification, plutôt qu'à un manque d'intérêt des concepteurs pour ce problème. C'est pourquoi ce chapitre propose d'utiliser le *comportement géométrique*, dans ce but, lors de la phase de préconception. Il est traduit sous la forme de relations algébriques entre les paramètres du modèle qui permettent de conférer le caractère souhaité (assemblable, mobile, ... ) au mécanisme.

De plus, le *comportement géométrique* peut introduire des relations de sur-contraintes qui apparaissent entre tous les paramètres géométriques, et notamment ceux qui servent à décrire des effets physiques auxquels le mécanisme est soumis. Ainsi, si on souhaite utiliser le *comportement géométrique* durant la phase de préconception, il faut également disposer d'un modèle pour traduire le comportement physique du mécanisme lors de cette phase du développement. Parmi les deux méthodes de résolution de problèmes multiphysiques (voir paragraphe 1.3.2) seules les méthodes basées sur des fonctions de transfert semblent adaptées. En effet, elles permettent d'établir directement une relation algébrique entre divers paramètres du modèle représentant le produit. Pour de nombreuses physiques (déformations mécaniques, thermique, électromagnétisme, ...) des lois physiques existent. Elles sont utilisées pour décrire le comportement du produit. Suivant le niveau de détail du modèle et des résultats attendus, ces lois de comportement sont plus ou moins simplifiées.

C'est pourquoi ce travail propose d'utiliser le *comportement géométrique* pour décrire un mécanisme dans plusieurs états physiques lors de la phase de pré-conception suivant la méthodologie présentée dans la figure 2.1. Dans un premier temps il faut décrire la géométrie (en 3D) du mécanisme dans un modèle simplifié adapté à la conception préliminaire. Deuxièmement, à partir de cette description, un système d'équations traduisant le *comportement géométrique* (les conditions d'assemblage et de mobilité) du mécanisme pourra être généré. Conjointement, les autres lois de comportements physiques seront introduites. Ensuite, toutes ces équations seront intégrées dans un système d'équation unique qui traduira l'ensemble des contraintes géométriques et physiques auxquelles le produit est soumis. En-

fin, ce système sera résolu pour trouver une solution au problème faisant intervenir à la fois des contraintes géométriques et des contraintes liées aux autres lois physiques.

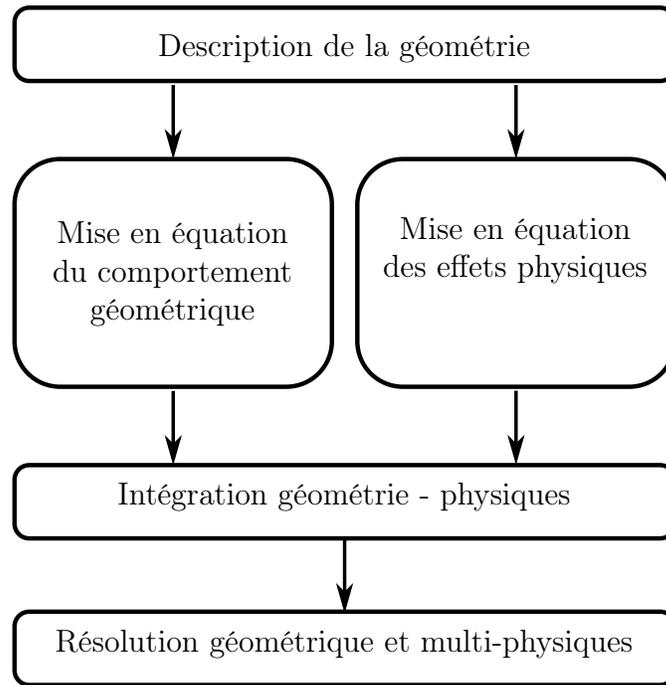


Figure 2.1 Méthodologie générale

Cette méthodologie sera illustrée sur l'exemple d'un treillis pyramidal à quatre barres. Il sera utilisé pour sa simplicité de résolution qui permettra de comparer les résultats obtenus avec d'autres méthodes de calculs analytiques ou numériques. Cet exemple permettra d'illustrer simplement les applications supposées du modèle géométrique proposé.

## 2.3 Application à une structure pyramidale

Cette section va montrer comment utiliser la méthodologie générale exposée dans les parties précédentes de ce chapitre. Elle montre en particulier comment obtenir le *comportement géométrique* d'un assemblage et comment coupler ce dernier avec les autres comportements physiques pour traiter un problème multi-physiques. Enfin, elle présente une stratégie de résolution locale du problème ainsi posé.

### 2.3.1 Présentation du cas

L'exemple traité est celui d'une structure pyramidale composée d'un socle muni de quatre points d'accrochage et de quatre barres rotulées assemblées suivant la configuration de la figure 2.2. Même en considérant que les quatre points d'accrochage ne sont pas coplanaires

(cas qui sera traité plus loin), la géométrie de ce cas est simple car chaque barre a une géométrie 2D. Ce cas introduit deux difficultés : tout d'abord il est constitué de plusieurs boucles interdépendantes. Ensuite, il prend en compte deux effets physiques distincts : des déformations mécaniques et des dilatations thermiques.

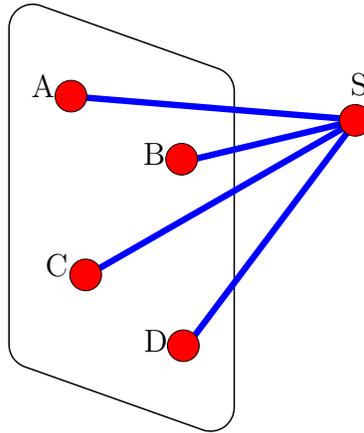


Figure 2.2 Structure pyramidale à quatre barres

La structure pyramidale à quatre barres définie par cinq points, peut être modélisée par un ensemble de dix vecteurs représenté en figure 2.3. Chaque vecteur du modèle est défini par une paire de points choisis parmi les cinq définissant la structure ( $C_5^2 = 10$ ). Les vecteurs  $\vec{v}_1$  à  $\vec{v}_4$  représentent chacun une barre de la figure 2.2, alors que les vecteurs  $\vec{v}_5$  à  $\vec{v}_{10}$  servent à définir les quatre points d'accrochage. La géométrie de cet exemple peut alors être complètement définie en spécifiant la norme de chacun de ces dix vecteurs. Pour cet exemple, il sera également supposé que seules les barres, représentées par les vecteurs  $\vec{v}_1$  à  $\vec{v}_4$  sont sujettes à subir des déformations. Ainsi, les paramètres mis en jeu pour mettre en équation le caractère assemblable du *comportement géométrique* de la pyramide sont les normes  $\|\vec{v}_1\|$ ,  $\|\vec{v}_2\|$ ,  $\|\vec{v}_3\|$  et  $\|\vec{v}_4\|$ . Pour représenter mathématiquement l'orientation relative des dix vecteurs, il est possible de leur associer une matrice de Gram<sup>1</sup>  $G$  définie par  $G_{i,j} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$ . Pour mener à bien ce travail, les variables du tableau 2.1 sont définies pour chaque barre  $i$  de la structure.

### 2.3.2 Comportement géométrique

Les travaux de Michelucci, Serré, Yang [Michelucci et Foufou, 2004; Serré *et al.*, 2006; Yang, 2004] indiquent que le déterminant de Cayley-Menger est un outil mathématique approprié pour spécifier un problème d'assemblage géométrique défini uniquement par des

<sup>1</sup>Une définition et les principales propriétés sont données dans la section 3.2

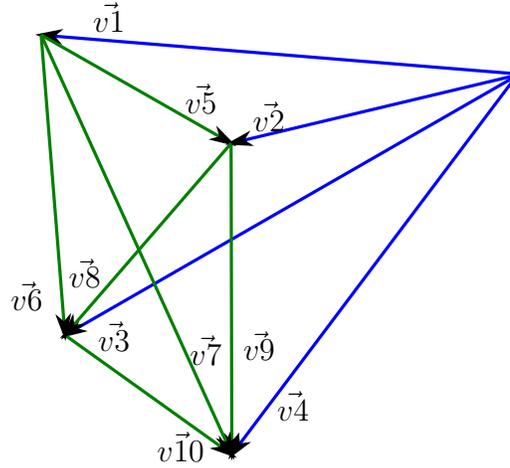


Figure 2.3 Squelette associé à la structure pyramidale à quatre barres.

Tableau 2.1 Variables définies pour chaque barre

Nom de variable	Désignation
$L_i$	Longueur de la barre $i$ dans la configuration finale ( $L_i = \ \vec{v}_i\ $ )
$L0_i$	Longueur de la barre $i$ dans la configuration initiale (voir tableau 2.2)
$dt_i$	Dilatation thermique de la barre $i$ (voir tableau 2.4)
$dm_i$	Allongement mécanique de la barre
$dg_i$	Allongement total de la barre $i$ ( $dg_i = dt_i + dm_i = L_i - L0_i$ )
$\vec{F}_i$	Effort dans la barre $i$ (la norme de l'effort est noté $F_i$ )
$E$	Module d'Young de chaque barre (valeur choisie à $2,1 \cdot 10^{11} Pa$ )
$S$	Section de la barre (valeur choisie à $2,5 \cdot 10^{-5} m^2$ )
$\Delta T$	Échauffement (valeur choisie à $80^\circ C$ )
$\alpha$	Coefficient de dilatation thermique (valeur choisie à $6 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ )

longueurs de segments de droites. Cela en fait un outil adapté pour trouver le *comportement géométrique* de cette structure permettant d'assurer son caractère assemblable. En effet, les travaux sur les déterminants de Cayley-Menger indiquent que pour que cinq points (donc dix vecteurs) définissent un objet de l'espace 3D, il faut que le déterminant de Cayley-Menger  $|C|$ , présenté en équation 2.1, soit nul. Ce déterminant  $|C|$  peut être vu comme la fonction  $H_c$ , de dix variables, définie par l'expression 2.2. Cette relation décrit le *comportement géométrique* de la structure pyramidale à quatre barres car elle garantit son assemblabilité. Le tableau 2.2 donne un jeu de valeurs qui respecte cette relation. Ce jeu de valeurs a été obtenu en mesurant les dix dimensions sur l'instance de la pyramide représentée en figure 2.4.

Tableau 2.2 Exemple de valeurs formant une pyramide à 4 barres assemblables

Paramètre	Valeur (m)
$\ \vec{v}_1\ $	4.317696
$\ \vec{v}_2\ $	4.527405
$\ \vec{v}_3\ $	4.516912
$\ \vec{v}_4\ $	4.058632
$\ \vec{v}_5\ $	1.207021
$\ \vec{v}_6\ $	1.600000
$\ \vec{v}_7\ $	1.529705
$\ \vec{v}_8\ $	2.004220
$\ \vec{v}_9\ $	1.490268
$\ \vec{v}_{10}\ $	0.860232

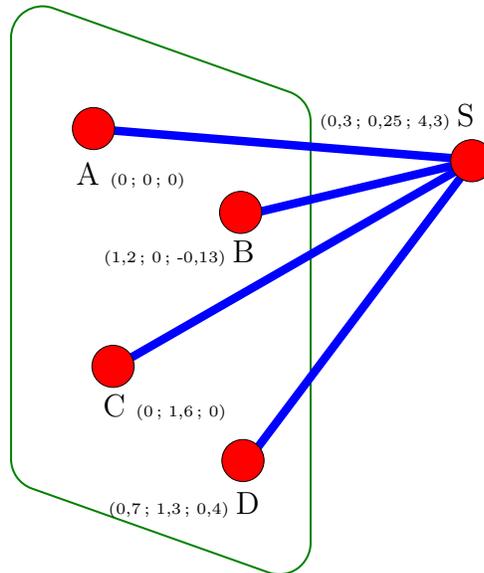


Figure 2.4 Pyramide initiale

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \|\vec{v}_1\|^2 & \|\vec{v}_2\|^2 & \|\vec{v}_3\|^2 & \|\vec{v}_4\|^2 \\ 1 & \|\vec{v}_1\|^2 & 0 & \|\vec{v}_5\|^2 & \|\vec{v}_6\|^2 & \|\vec{v}_7\|^2 \\ 1 & \|\vec{v}_2\|^2 & \|\vec{v}_5\|^2 & 0 & \|\vec{v}_8\|^2 & \|\vec{v}_9\|^2 \\ 1 & \|\vec{v}_3\|^2 & \|\vec{v}_6\|^2 & \|\vec{v}_8\|^2 & 0 & \|\vec{v}_{10}\|^2 \\ 1 & \|\vec{v}_4\|^2 & \|\vec{v}_7\|^2 & \|\vec{v}_9\|^2 & \|\vec{v}_{10}\|^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

$$H_c(\|\vec{v}_1\|, \|\vec{v}_2\|, \|\vec{v}_3\|, \|\vec{v}_4\|, \|\vec{v}_5\|, \|\vec{v}_6\|, \|\vec{v}_7\|, \|\vec{v}_8\|, \|\vec{v}_9\|, \|\vec{v}_{10}\|) = |C| \quad (2.2)$$

La matrice de Gram, permettant de rendre compte de la configuration (longueurs et angles) des dix vecteurs constituant la structure, peut s'obtenir à partir d'une liste de dix valeurs cohérentes spécifiant la norme de chaque vecteur. En effet, il est possible de remplir toutes les cases de la matrice de Gram associée à la pyramide en utilisant la relation de Chasles et la linéarité du produit scalaire. Par exemple, en remarquant sur la figure 2.3 que les vecteurs  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_5$  forment une boucle ( $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_5$ ), on peut calculer le produit scalaire  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$  par la formule 2.3. Ainsi, à partir des valeurs du tableau 2.2, il est possible de calculer la matrice de Gram représentant la structure. Les valeurs numériques de ce calcul sont présentées dans le tableau 2.3.

Tableau 2.3 Matrice de Gram correspondante aux longueurs du tableau 2.2

	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$	$\vec{v}_5$	$\vec{v}_6$	$\vec{v}_7$	$\vec{v}_8$	$\vec{v}_9$	$\vec{v}_{10}$
$\vec{v}_1$	18,643	18,842	18,243	16,388	0,199	-0,400	-2,255	-0,599	-2,454	-1,855
$\vec{v}_2$	18,842	20,497	18,442	17,375	1,656	-0,400	-1,467	-2,056	-3,123	-1,067
$\vec{v}_3$	18,243	18,442	20,403	18,068	0,199	2,160	-0,175	1,961	-0,374	-2,335
$\vec{v}_4$	16,388	17,375	18,068	16,473	0,987	1,680	0,085	0,693	-0,902	-1,595
$\vec{v}_5$	0,199	1,656	0,199	0,987	1,457	0,000	0,788	-1,457	-0,669	0,788
$\vec{v}_6$	-0,400	-0,400	2,160	1,680	0,000	2,560	2,080	2,560	2,080	-0,480
$\vec{v}_7$	-2,255	-1,467	-0,175	0,085	0,788	2,080	2,340	1,292	1,552	0,260
$\vec{v}_8$	-0,599	-2,056	1,961	0,693	-1,457	2,560	1,292	4,017	2,749	-1,268
$\vec{v}_9$	-2,454	-3,123	-0,374	-0,902	-0,669	2,080	1,552	2,749	2,221	-0,528
$\vec{v}_{10}$	-1,855	-1,067	-2,335	-1,595	0,788	-0,480	0,260	-1,268	-0,528	0,740

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle - 2 \cdot \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_5, \vec{v}_5 \rangle \quad (2.3)$$

Avec les notations définies à la table 2.1 on peut écrire la fonction  $H_c$  sous la forme linéarisée définie par l'équation 2.4. On sait, par construction, que  $H_c(L0_1, \dots, L0_{10}) = 0$ . Par hypothèse, on a également  $dg_i = L_i - L0_i = 0$  pour  $i > 4$ . On peut donc remplacer les variables  $L_i$  par la valeur  $L0_i + dg_i$  dans l'expression de  $H_c$  avant d'en calculer ses dérivées partielles. Finalement on obtient l'équation linéarisée 2.5. Remarque : les termes  $dg_5, dg_6, \dots, dg_{10}$  sont tous nuls. L'application numérique du calcul des dérivées partielles de l'équation 2.5 donne l'expression de la condition d'assemblabilité linéarisée 2.6.

$$H_c(L_1, \dots, L_{10}) = H_c(L0_1, \dots, L0_{10}) + \sum_i \frac{\partial H_c}{\partial L_i}(L0_1, \dots, L0_{10}) \cdot (L_i - L0_i) = 0 \quad (2.4)$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial H_c}{\partial L_1}(L_{01}, \dots, L_{010}) & \frac{\partial H_c}{\partial L_2}(L_{01}, \dots, L_{010}) & \frac{\partial H_c}{\partial L_3}(L_{01}, \dots, L_{010}) & \frac{\partial H_c}{\partial L_4}(L_{01}, \dots, L_{010}) \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} dg_1 \\ dg_2 \\ dg_3 \\ dg_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} -484.1060 & 612.0308 & 873.6550 & -987.0193 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} dg_1 \\ dg_2 \\ dg_3 \\ dg_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.6)$$

### 2.3.3 Comportements physiques

Il est supposé ici que chaque composant de cette structure est soumis à deux effets physiques. Le premier effet physique pris en compte sera la dilatation thermique : on supposera que chaque barre s'allonge suivant la relation 1.2 (présentée au chapitre 1). Ce cas prendra également en compte des déformations mécaniques. On supposera cette fois que la relation entre l'allongement et la force est donnée par la relation 2.7. Dans cette équation,  $L_0$  désigne la longueur du solide à l'état libre,  $L$  la longueur du solide sous chargement.  $F$  désigne l'effort auquel est soumise la barre,  $E$  le module d'Young, et  $S$  la section de la barre. Ces deux lois permettent de décrire le comportement de chaque barre soumise à ces deux effets physiques. D'autre part, en ce qui concerne les déformations mécaniques, il faudra aussi s'assurer que la structure soit à l'équilibre. Pour faciliter la résolution de ce problème, il sera supposé ici que l'on connaît une instance initiale qui respecte toutes les contraintes précédentes et que l'on souhaite trouver une nouvelle solution au problème en faisant varier, par exemple, la température des quatre barres. Ainsi, si les variations de température des barres sont faibles, il sera possible d'utiliser la configuration initiale du système pour résoudre l'équilibre mécanique de la structure. On fera alors l'hypothèse simplificatrice que la déformation vectorielle de chaque barre demeure colinéaire à la barre initiale.

$$L = \frac{L_0}{E \cdot S} \cdot F + L_0 \quad (2.7)$$

#### Comportement thermique

---

Pour traiter un exemple, il sera supposé que les valeurs numériques données dans les tableaux 2.2 et 2.3 définissent la configuration de la structure à 20°C. Cette étude propose de trouver la configuration de cette structure pyramidale à 100°C (ce qui correspond bien à  $\Delta T = 80^\circ\text{C}$ ). Pour cela, il sera également supposé que seules les barres 1, 2, 3 et 4 (représentées par les vecteurs  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_3$  et  $\vec{v}_4$ ) de la figure 2.2 sont soumises à une dilatation thermique. Pour ces barres, le coefficient de dilatation thermique est donné dans le tableau 2.1. Ainsi, la longueur à l'état libre des barres à 100°C et les dilatations thermiques correspondantes ( $dt_i$ ) peuvent être calculées par la formule 1.2. Les résultats sont donnés dans le tableau 2.4.

Tableau 2.4 Longueur libre des barres à 100°C

Paramètre	Longueur Libre (m)	Dilatation ( $dt_i$ ) (m)
$\ \vec{v}_1\ $	4.33842	0.0207
$\ \vec{v}_2\ $	4.54913	0.0217
$\ \vec{v}_3\ $	4.53859	0.0217
$\ \vec{v}_4\ $	4.07811	0.0195
$\ \vec{v}_5\ $	1.20702	0
$\ \vec{v}_6\ $	1.60000	0
$\ \vec{v}_7\ $	1.52970	0
$\ \vec{v}_8\ $	2.00422	0
$\ \vec{v}_9\ $	1.49026	0
$\ \vec{v}_{10}\ $	0.86023	0

### Comportement mécanique

Du point de vue mécanique, on supposera que les barres 1, 2, 3 et 4 du treillis vont s'allonger suivant la relation 2.7. On supposera également que le tableau 2.2 donne les longueurs des barres à l'état libre. Grâce à cette relation, aux variables définies dans le tableau 2.1 et aux hypothèses simplificatrices formulées précédemment, il est possible de calculer l'effort dans chaque barre par la formule 2.8.

$$F_i = \frac{E \cdot S}{L0_i} \cdot dm_i \quad (2.8)$$

On supposera également que les six barres qui servent à représenter le socle ne subiront aucune déformation mécanique. De ce fait, l'effort dans les barres 5 à 10 sera nul. Ainsi, pour assurer que le système soit à l'équilibre, il faut que la somme vectorielle  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$  soit nulle. Avec les hypothèses simplificatrices évoquées au début de cette section, et en définissant les vecteur  $\vec{e}_i$  par la formule 2.9 cette relation peut s'écrire sous la forme 2.10.

Pour pouvoir résoudre cette équation de façon algébrique, il sera possible de la projeter suivant trois vecteurs indépendants : par exemple,  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ .

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|} \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^4 F_i \cdot \vec{e}_i = \vec{0} \quad (2.10)$$

En substituant les expressions 2.8 et 2.9 dans la relation 2.10, et en supposant que les déformations dans les barres sont assez petites pour évaluer  $\|\vec{v}_i\|$  avec la valeur  $L0_i$ , on obtient la relation 2.11. Cette relation peut alors être projetée sur le vecteur  $\vec{e}_p$  ( $1 \leq p \leq 3$ ). En utilisant la relation 2.9 cette projection donne l'expression 2.12.

$$\sum_{i=1}^4 \frac{E \cdot S}{L0_i^2} \cdot dm_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \frac{E \cdot S}{L0_i^2} \cdot dm_i \cdot \langle \vec{v}_i, \vec{e}_p \rangle &= 0 \\ \sum_{i=1}^4 \frac{E \cdot S}{L0_p \cdot L0_i^2} \cdot dm_i \cdot \langle \vec{v}_i, \vec{v}_p \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Toutes simplifications et projections faites, en projetant la relation 2.10 sur les trois vecteurs  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  selon la relation 2.12 on obtient le système 2.13. Les produits scalaires  $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$  peuvent être directement déduits de la matrice de Gram présentée au tableau 2.3. Les valeurs numériques obtenues sont données en relation 2.14.

$$\begin{bmatrix} \frac{E \cdot S}{L0_1} \cdot \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle}{L0_1^2} & \frac{E \cdot S}{L0_1} \cdot \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle}{L0_2^2} & \frac{E \cdot S}{L0_1} \cdot \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}_1 \rangle}{L0_3^2} & \frac{E \cdot S}{L0_1} \cdot \frac{\langle \vec{v}_4, \vec{v}_1 \rangle}{L0_4^2} \\ \frac{E \cdot S}{L0_2} \cdot \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{L0_1^2} & \frac{E \cdot S}{L0_2} \cdot \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle}{L0_2^2} & \frac{E \cdot S}{L0_2} \cdot \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}_2 \rangle}{L0_3^2} & \frac{E \cdot S}{L0_2} \cdot \frac{\langle \vec{v}_4, \vec{v}_2 \rangle}{L0_4^2} \\ \frac{E \cdot S}{L0_3} \cdot \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle}{L0_1^2} & \frac{E \cdot S}{L0_3} \cdot \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle}{L0_2^2} & \frac{E \cdot S}{L0_3} \cdot \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}_3 \rangle}{L0_3^2} & \frac{E \cdot S}{L0_3} \cdot \frac{\langle \vec{v}_4, \vec{v}_3 \rangle}{L0_4^2} \\ \frac{E \cdot S}{L0_4} \cdot \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_4 \rangle}{L0_1^2} & \frac{E \cdot S}{L0_4} \cdot \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_4 \rangle}{L0_2^2} & \frac{E \cdot S}{L0_4} \cdot \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle}{L0_3^2} & \frac{E \cdot S}{L0_4} \cdot \frac{\langle \vec{v}_4, \vec{v}_4 \rangle}{L0_4^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dm_1 \\ dm_2 \\ dm_3 \\ dm_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} 1,2159 \cdot 10^6 & 1,1177 \cdot 10^6 & 1,0872 \cdot 10^6 & 1,2097 \cdot 10^6 \\ 1,1720 \cdot 10^6 & 1,1596 \cdot 10^6 & 1,0481 \cdot 10^6 & 1,2231 \cdot 10^6 \\ 1,1374 \cdot 10^6 & 1,0457 \cdot 10^6 & 1,1623 \cdot 10^6 & 1,2748 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dm_1 \\ dm_2 \\ dm_3 \\ dm_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

### 2.3.4 Intégration et résolution

Si l'on suppose que les allongements thermiques et mécaniques sont superposables, on peut alors écrire que  $dg_i = dt_i + dm_i$ . L'utilisation des variables  $dm_i$  comme inconnues permet d'intégrer le comportement géométrique avec les comportements physiques. En appliquant cette relation à l'équation 2.6 on peut alors déduire l'expression 2.15. L'application numérique de 2.15 donne alors la relation 2.16. Cette dernière peut être combinée aux trois relations du système 2.14 pour donner le système 2.17 qui constitue alors le système "complet".

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial H_c}{\partial L_1}(L_{01}, \dots, L_{010}) & \frac{\partial H_c}{\partial L_2}(L_{01}, \dots, L_{010}) & \frac{\partial H_c}{\partial L_3}(L_{01}, \dots, L_{010}) & \frac{\partial H_c}{\partial L_4}(L_{01}, \dots, L_{010}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dm_1 \\ dm_2 \\ dm_3 \\ dm_4 \end{bmatrix} \\ & = \\ & - \begin{bmatrix} \frac{\partial H_c}{\partial L_1}(L_{01}, \dots, L_{010}) & \frac{\partial H_c}{\partial L_2}(L_{01}, \dots, L_{010}) & \frac{\partial H_c}{\partial L_3}(L_{01}, \dots, L_{010}) & \frac{\partial H_c}{\partial L_4}(L_{01}, \dots, L_{010}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dt_1 \\ dt_2 \\ dt_3 \\ dt_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} -484.1060 & 612.0308 & 873.6550 & -987.0193 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dm_1 \\ dm_2 \\ dm_3 \\ dm_4 \end{bmatrix} = -2.9806 \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} 1,2159 \cdot 10^6 & 1,1177 \cdot 10^6 & 1,0872 \cdot 10^6 & 1,2097 \cdot 10^6 \\ 1,1720 \cdot 10^6 & 1,1596 \cdot 10^6 & 1,0481 \cdot 10^6 & 1,2231 \cdot 10^6 \\ 1,1374 \cdot 10^6 & 1,0457 \cdot 10^6 & 1,1623 \cdot 10^6 & 1,2748 \cdot 10^6 \\ -484,1060 & 612,0308 & 873,6550 & -987,0193 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dm_1 \\ dm_2 \\ dm_3 \\ dm_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.9806 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

La matrice du système 2.17 est inversible, ce système admet donc une solution. Tous calculs faits, on obtient les valeurs présentées dans le tableau 2.5. Pour s'assurer de la validité de ces résultats, il est possible de calculer le déterminant de Cayley-Menger par la formule 2.1. On constate alors que sa valeur est nulle (aux erreurs d'arrondis près). Cela nous indique que la structure est assemblable. D'autre part, pour valider les valeurs des déformations mécaniques, une simulation par éléments finis a été réalisée. Elle a donné les mêmes valeurs que la méthode proposée ici.

Tableau 2.5 Longueur des barres de la structure assemblée à 100°C

Barre	Longueur à 20°C : $L0_i$ (m)	Dilatation : $dt_i$ (m)	Déformation Mécanique : $dm_i$ (m)	Longueur à 100°C : $L_i$ (m)
1	4.31770	0.0207	0.0021	4.3405
2	4.52741	0.0217	-0.0023	4.5468
3	4.51691	0.0217	0	4.5386
4	4.05863	0.0195	0.0006	4.0787
5	1.20702	0	0	1.2070
6	1.60000	0	0	1.6000
7	1.52970	0	0	1.5297
8	2.00422	0	0	2.0042
9	1.49026	0	0	1.4903
10	0.86023	0	0	0.8602

### 2.3.5 Bilan

Le traitement de cet exemple a permis de mettre en oeuvre le *comportement géométrique* afin de traiter des problèmes faisant intervenir plusieurs comportements physiques pour différents composants. Pour cela, il a montré une méthode d'écriture du *comportement géométrique* pour caractériser un assemblage. Enfin, il a également montré comment l'ajout de la relation algébrique de *comportement géométrique* aux autres équations décrivant les phénomènes physiques auxquels le système est soumis, permettait de résoudre un problème multi-physiques. Dans ce cas-là, comme dans la majorité des cas, les éléments géométriques constituent les paramètres qui sont communs aux différentes physiques. Dès lors, il est

rassurant de voir que l'introduction du *comportement géométrique* d'une structure permet de décrire de façon déclarative son comportement lorsqu'elle est soumise à plusieurs effets physiques.

## 2.4 Conclusion

Ce chapitre a défini le terme de *comportement géométrique*. Il a expliqué son utilité pour introduire des caractères d'assemblabilité et de mobilité, en plus des sur-contraintes entre les paramètres géométriques. De plus, ce chapitre a également montré comment le *comportement géométrique* pouvait être utile pour traiter des problèmes de pré-conception faisant intervenir à la fois des questions de géométrie et plusieurs autres effets physiques.

Ce dernier point a été illustré, à la fin de ce chapitre, sur un cas d'application. Une façon d'obtenir le *comportement géométrique* pour une structure assemblable simple a été présentée. De plus, quelques pistes ont été proposées pour traduire les comportements physiques de cette dernière sous forme algébrique. Pour finir, l'exemple traité a montré qu'il était possible de résoudre ces contraintes en linéarisant le système d'équations autour d'une instance connue.

---

# CHAPITRE 3

## COMPORTEMENT GÉOMÉTRIQUE POUR LES MÉCANISMES MOBILES

Le chapitre précédent a montré comment utiliser le *comportement géométrique* pour traiter le cas de l'assemblabilité d'un treillis en utilisant le déterminant de Cayley-Menger pour le mettre en équation. Or, à l'heure actuelle, il n'existe pas de critère permettant de mettre en équation de façon générique le caractère mobile de l'objet. C'est pourquoi, ce chapitre propose à la fois, un modèle géométrique pour représenter des mécanismes mobiles, et également une façon de mettre en équation ce caractère. Afin d'utiliser ce modèle pour exprimer le *comportement géométrique* d'un mécanisme mobile, la démarche est illustrée sur l'exemple du mécanisme de Bennett (présenté au paragraphe 3.5). Ce mécanisme a l'avantage d'être largement sur-contraint à la fois pour son assemblage et encore plus pour assurer sa mobilité. Cet exemple d'application permettra donc de montrer l'intérêt de ce modèle et de la mise en équation associée pour assurer tour à tour ces deux caractères.

### 3.1 Squelette géométrique pour les mécanismes mobiles

Le modèle géométrique proposé dans cette section doit répondre à trois enjeux principaux. Il doit permettre de générer des équations algébriques permettant de rendre compte de la mobilité (et de l'assemblabilité) du mécanisme. C'est sa fonction principale. Celle-ci doit être atteinte avec deux contraintes majeures. Tout d'abord le modèle doit être adapté à la phase de préconception, ensuite il doit s'intégrer dans les méthodologies de conception habituellement utilisées dans les métiers de l'ingénierie système.

Cet objectif et ces deux contraintes ont conduit à des choix pour le modèle utilisé. Premièrement, l'utilisation de cet outil en phase de préconception a conduit à l'utilisation d'un modèle déclaratif pour décrire la géométrie du système. En effet, durant la phase de préconception, la représentation géométrique du système est encore mal connue. De plus, parmi les paramètres qui seront utilisés pour décrire le système il est impossible de distinguer lesquels seront "utiles" ou "intéressants" de ceux qui n'interviendront pas dans les relations algébriques qui vont finalement être créées. Pour ces deux raisons, il paraît

beaucoup plus judicieux d'utiliser un modèle déclaratif (voir section 1.2) plutôt qu'un modèle basé sur une procédure de construction. Un problème déclaratif est constitué de deux principaux éléments :

- Des entités (des pièces et des liaisons pour les mécanismes) dont il faut déclarer le type et les connections
- Des contraintes entre ces entités.

Deuxièmement, la phase de préconception nécessite un faible nombre de paramètres pour décrire le système dans le but d'obtenir des résolutions rapides même si elles sont très largement approximées. Du point de vue de la géométrie, cette recherche d'une représentation minimale est relativement ancienne. Afin de pouvoir décrire un mécanisme il convient de s'attarder un peu plus sur la définition des solides et des liaisons. Le modèle que ce travail propose d'utiliser se base très largement sur les travaux de Cailliau [Cailliau, 2010]. Ce modèle a été imaginé pour synthétiser des mécanismes que l'on sait déjà mobiles. Ce travail propose de l'utiliser dans un but tout autre : générer les contraintes géométriques qui confèrent le caractère mobile à un mécanisme. Cailliau donne deux définitions duales pour qualifier les pièces et les liaisons :

- Une liaison met en relation deux pièces
- Une pièce permet de mettre en relation deux liaisons (pour des mécanismes comportant une seule boucle fermée)

De plus, les solides et les liaisons sont caractérisés par deux types d'éléments. Premièrement, on trouve les entités qui décrivent la nature du solide ou de la liaison. Il s'agit par exemple du nombre de degrés de liberté dans une liaison, de la nature du degré de liberté : rotation ou translation, etc. On peut facilement rendre compte de l'organisation de ces éléments par une structure topologique. Deuxièmement, il existe des contraintes entre les entités. Ce sont des relations algébriques qui permettent de rendre compte des positions et orientations des éléments géométriques dans un espace vectoriel (ou affine). Il conviendra donc de rendre compte à la fois de la partie topologique du modèle, ainsi que de sa réalisation géométrique. Il est également important de garder à l'esprit, d'une part, que les paramètres permettant de rendre compte des dimensions d'une pièce sont des grandeurs constantes pendant un mouvement du mécanisme, et, d'autre part, que les paramètres de liaisons sont être des grandeurs qui, généralement, varient au cours de ce(s) même(s) mouvement(s).

---

### 3.1.1 Modèle topologique

À partir de ces définitions, Cailliau propose d'utiliser une représentation sous forme de graphe topologique permettant de déclarer les éléments constitutifs d'un système mécanique. Il représente les pièces du système mécanique par les arcs d'un graphe cinématique adjoint. Les liaisons sont, quant à elles, représentées par les nœuds du même graphe. Cependant, il précise également que pour le cas des mécanismes bouclés, qui seront le centre d'intérêt de ce chapitre, l'utilisation du graphe cinématique (les nœuds sont cette fois les solides et les arcs les liaisons) ou du graphe cinématique adjoint est équivalent. Ce graphe permet de rendre compte du nombre de pièces et de liaisons qui constituent le système ainsi que de la nature de ces liaisons.

### 3.1.2 Modèle géométrique élémentaire

Afin de choisir un petit nombre de paramètres algébriques, le modèle interne de Cailliau [Cailliau, 2010] a été utilisé. Ce modèle est basé sur la convention de Denavit et Hartenberg [Hartenberg et Denavit, 1964]. Il permet de paramétrer les positions et orientations des différentes entités constituant les pièces et les liaisons définies par un graphe topologique. La convention de Denavit et Hartenberg permet de positionner deux droites dans l'espace par seulement deux paramètres et deux contraintes fixes. En effet, la convention propose de mesurer la distance entre deux droites suivant leur perpendiculaire commune et d'évaluer l'angle qu'elles forment autour de cette même perpendiculaire commune (voir figure 3.1). Les deux paramètres sont donc la longueur et l'angle précédemment cités, les deux contraintes fixes sont les deux angles droits permettant de construire la perpendiculaire commune aux deux droites.

Ainsi, si l'on considère simplement la famille de mécanismes constitués de liaisons à un axe : pivot (une rotation autour de l'axe), glissière (une translation le long de l'axe) et pivot-glissant (translation et rotation autour du même axe), et dont les pièces ne mettent en relation que deux liaisons ; il devient possible de représenter chaque pièce et chaque liaison par ses deux paramètres de Denavit-Hartenberg. Une pièce sera donc représentée par la distance et l'angle selon la perpendiculaire commune des deux axes des deux liaisons qu'elle met en relation. Il est utile de remarquer ici que la perpendiculaire commune aux deux axes précédents est également une droite. De cette observation on peut déduire qu'une pièce, telle que la définit Cailliau, possède également un axe (voir figure 3.2). Par la suite, une liaison mono-axiale sera donc représentée par la distance et l'angle selon la perpendiculaire commune des deux axes des deux pièces qu'elle met en relation. La section suivante va

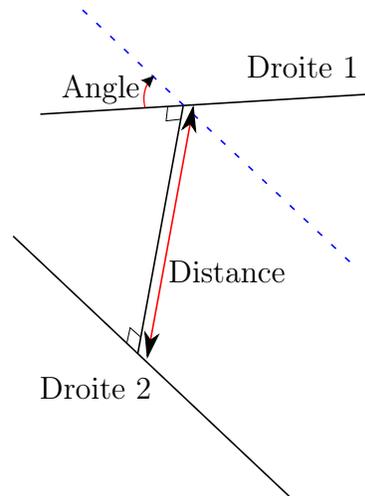


Figure 3.1 Paramètres de Denavit et Hartenberg pour positionner deux droites en 3D

montrer comment la totalité des liaisons mécaniques usuelles peuvent se déduire à partir de liaisons mono-axiales. Il paraît donc utile de remarquer, d'une part, que les deux droites de la figure 3.1 sont des axes de liaisons lorsque l'on définit les paramètres d'une pièce ; d'autre part que ces deux droites sont des axes de pièces lorsque l'on cherche à définir les paramètres d'une liaison.

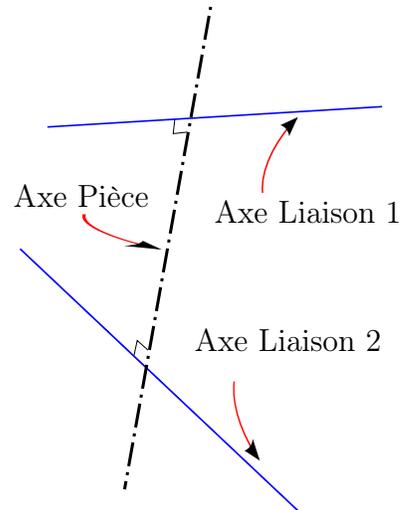


Figure 3.2 Mise en évidence de l'axe d'une pièce

### 3.1.3 Cas d'une liaison quelconque

Tout d'abord, il convient de remarquer que la liaison glissière et la liaison pivot sont en fait des liaisons pivot-glissant particulières. En effet une liaison glissière correspond à une

liaison pivot-glissant dont on a bloqué le degré de rotation. Ensuite, la liaison pivot peut être vue comme une liaison pivot-glissant pour laquelle le degré de translation est bloqué.

Afin de construire l'ensemble des liaisons usuelles, il est nécessaire de pouvoir combiner plusieurs degrés de liberté à la fois en rotation et en translation sur des axes qui peuvent être distincts. Il est bien connu des mécaniciens qu'une liaison est définie par 3 degrés de rotation et 3 degrés de translation. Certains de ces degrés sont libres (degrés de liberté), d'autres sont bloqués. Comme on dispose de 6 degrés de liaisons qui sont soit bloqués soit libres indépendamment, il y a donc théoriquement  $2^6 = 64$  combinaisons possibles pour ces degrés afin qu'ils forment une liaison. Ces 64 combinaisons regroupées en 20 classes d'équivalence, décrivant chacune un type de liaison différent, sont présentées dans le tableau 3.1. La colonne identifiée  $\#$  du tableau contient le numéro de la combinaison parmi les 64 possibilités. Cailliau a montré dans sa thèse comment combiner, au maximum, trois liaisons pivot-glissant et deux pièces virtuelles, et quels degrés de liaisons bloquer pour chacune des trois liaisons pivot-glissant pour obtenir l'ensemble des 64 combinaisons possibles. Pour cela il convient d'identifier pour chacune de ces 20 liaisons (regroupées par classe d'équivalence) le nombre d'axes distincts qu'elle possède et de créer une pièce virtuelle (de longueur nulle et d'angle  $\pi/2$ ) pour chaque axe supplémentaire (nombre de pièces virtuelles = nombre d'axes de liaison - 1). Il faudra bien entendu déclarer les valeurs constantes des paramètres de liaison de telle sorte que les différents axes soient distincts et correctement orientés.

Ainsi pour obtenir les liaisons usuelles à partir de liaisons pivot-glissant, il faudra ajouter le bon nombre de pièces virtuelles (en fonction du nombre d'axes de la liaison) puis déclarer les paramètres des liaisons comme des grandeurs constantes ou variables suivant le cas présenté dans le tableau 3.2.

Il faut également noter que cette approche permet d'obtenir l'ensemble des 64 liaisons du tableau 3.1. Par exemple pour obtenir la liaison identifiée "11" qui possède deux axes il faudra commencer par déclarer une pièce virtuelle (longueur nulle, angle droit) pour mettre en relation les deux axes de la liaison. On peut ensuite remarquer que la rotation et la translation sont libres suivant le premier axe (colonnes  $x$  et  $\alpha$  du tableau 3.1). La première liaison sera donc une liaison pivot-glissant complète (longueur et distance sont des grandeurs variables). De la même façon, suivant le deuxième axe (colonnes  $y$  et  $\beta$  du tableau 3.1) seule la translation est libre, il conviendra donc de déclarer la deuxième liaison pivot-glissant avec un angle constant et une longueur variable.

---

Tableau 3.1 les 20 classes d'équivalence des 64 combinaisons possible des 6 degrés de liaisons [Cailliau, 2010]

Nom	#	axes	x	y	z	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Encastrement	00	0	0	0	0	0	0	0
Glissière	01	1	1	0	0	0	0	0
	02		0	1	0	0	0	0
	04		0	0	1	0	0	0
-	03	2	1	1	0	0	0	0
	05		0	1	1	0	0	0
	06		1	0	1	0	0	0
-	07	3	1	1	1	0	0	0
Pivot	08	1	0	0	0	1	0	0
	16		0	0	0	0	1	0
	32		0	0	0	0	0	1
Pivot-Glissant	09	1	1	0	0	1	0	0
	18		0	1	0	0	1	0
	36		0	0	1	0	0	1
-	10	2	0	1	0	1	0	0
	12		0	0	1	1	0	0
	17		1	0	0	0	1	0
	20		0	0	1	0	1	0
	33		1	0	0	0	0	1
	34		0	1	0	0	0	1
-	11	2	1	1	0	1	0	0
	13		1	0	1	1	0	0
	19		1	1	0	0	1	0
	22		0	1	1	0	1	0
	37		1	0	1	0	0	1
	38		0	1	1	0	0	1
Appui Plan	14	3	0	1	1	1	0	0
	21		1	0	1	0	1	0
	35		1	1	0	0	0	1
-	15	3	1	1	1	1	0	0
	23		1	1	1	0	1	0
	39		1	1	1	0	0	1
Rotule à doigt	24	2	0	0	0	1	1	0
	40		0	0	0	1	0	1
	48		0	0	0	0	1	1
-	25	2	1	0	0	1	1	0
	26		0	1	0	1	1	0
	41		1	0	0	1	0	1
	44		0	0	1	1	0	1
	50		0	1	0	0	1	1
	52		0	0	1	0	1	1
-	27	2	1	1	0	1	1	0
	45		1	0	1	1	0	1
	54		0	1	1	0	1	1
-	27	3	0	0	1	1	1	0
	45		0	1	0	1	0	1
	54		1	0	0	0	1	1
Linéaire rectiligne	29	3	1	0	1	1	1	0
	30		0	1	1	1	1	0
	43		1	1	0	1	0	1
	46		0	1	1	1	0	1
	51		1	1	0	0	1	1
	53		1	0	1	0	1	1
-	31	3	1	1	1	1	1	0
	47		1	1	1	1	0	1
	55		1	1	1	0	1	1
Rotule	56	3	0	0	0	1	1	1
Linéaire Anulaire	57	3	1	0	0	1	1	1
	58		0	1	0	1	1	1
	60		0	0	1	1	1	1
Ponctuelle	59	3	1	1	0	1	1	1
	61		1	0	1	1	1	1
	62		0	1	1	1	1	1
Libre	63	3	1	1	1	1	1	1

Tableau 3.2 Construction des liaisons usuelles par des combinaisons de liaisons mono-axiales (pivot-glissant) [Cailliau, 2010]

Liaison Usuelle	Pivot-Glissant 1		Pivot-Glissant 2		Pivot-Glissant 3	
	Distance	Angle	Distance	Angle	Distance	Angle
Encastrement	Pas de liaison		Pas de liaison		Pas de liaison	
Glissière	Variable	Constant	Pas de liaison		Pas de liaison	
Pivot	Constant	Variable	Pas de liaison		Pas de liaison	
Pivot-Glissant	Variable	Variable	Pas de liaison		Pas de liaison	
Rotule à doigt	Constant	Variable	Constant	Variable	Pas de liaison	
Appui Plan	Constant	Variable	Variable	Constant	Variable	Constant
Rotule	Constant	Variable	Constant	Variable	Constant	Variable
Linéaire Annulaire	Variable	Variable	Constant	Variable	Constant	Variable
Linéaire Rectiligne	Variable	Variable	Variable	Constant	Constant	Variable
Ponctuelle	Variable	Variable	Variable	Variable	Constant	Variable
Libre	Variable	Variable	Variable	Variable	Variable	Variable

### 3.1.4 Cas d'un solide à plus de 2 liaisons

Pour qu'un solide mette en relation plus de deux liaisons, il faut nécessairement que ce dernier intervienne dans plusieurs chaînes cinématiques. Ce travail se limite au traitement d'une boucle cinématique fermée seulement. Pour les mécanismes à plusieurs chaînes, deux cas de figure se présentent alors. Le premier permet d'être traité avec les outils présentés dans cette thèse ; il s'agit du cas où les deux chaînes sont indépendantes. Il convient alors de traiter chacune d'elle de façon séquentielle. Malheureusement le deuxième cas, celui de plusieurs chaînes interdépendantes, ne sera pas traité complètement par ces travaux. L'approche proposée permet de traiter la contrainte d'assemblabilité d'un système constitué de plusieurs boucles interdépendantes. Pour cela il faudra simplement résoudre les équations générées pour chaque boucle simultanément en les regroupant dans un seul système. Par contre, il n'est pas certain que cela puisse s'appliquer pour les contraintes de mobilité. Il sera simplement possible d'étudier chaque boucle de manière indépendante, ce qui pourra toutefois donner quelques informations utiles sur le système : dans le cas où au moins une boucle n'est pas mobile, on pourra conclure que la contrainte n'est pas satisfaite. Cependant, même si chaque boucle est mobile de façon indépendante, cela ne sera pas suffisant pour conclure sur la mobilité générale du système.

### 3.1.5 Déclaration d'une boucle cinématique quelconque

Les parties précédentes de cette section, se sont attachées à expliquer comment il est possible d'englober au mieux tous les cas de mécanismes en se basant sur une seule boucle

cinématique fermée dont les liaisons entre les pièces comportent seulement un axe. Dans le cadre d'une utilisation industrielle il serait sûrement judicieux de disposer d'une bibliothèque de liaisons usuelles avec leur représentations équivalentes sous forme de liaisons mono-axiales et de pièces virtuelles. Cependant cette problématique n'est pas abordée dans ce travail de thèse.

Ainsi pour déclarer un mécanisme (boucle unique) il suffira de déclarer la longueur et l'angle de chaque pièce. Ensuite il faudra déclarer les longueurs et les angles de chaque paramètre de liaison constant. Il restera enfin à définir un nom pour les paramètres variables des liaisons.

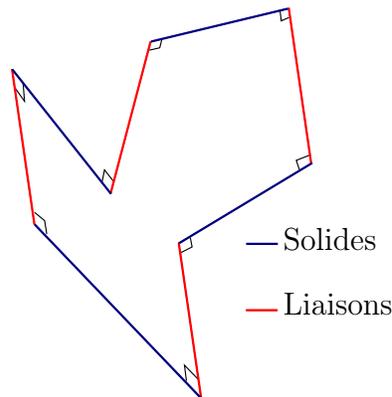


Figure 3.3 Représentation schématique d'un mécanisme à 4 liaisons mono-axiales

Une fois que toutes les pièces et liaisons sont déclarées, le mécanisme peut se représenter schématiquement sous la forme d'une boucle constituée de segments de droites. Chaque segment est perpendiculaire à ses deux segments adjacents. Par exemple un mécanisme constitué de 4 solides et 4 liaisons peut être représenté par la boucle de la figure 3.3.

## 3.2 Représentation mathématique

### 3.2.1 Paramétrisation par une matrice de Gram

Afin de rendre compte des différents paramètres de distance et d'angles (constants ou variables) affectés aux pièces et aux liaisons du modèle de mécanisme présenté ci-avant, il est nécessaire d'associer une représentation vectorielle au mécanisme. Une méthode de représentation non cartésienne a été choisie afin de décrire le système par ses paramètres intrinsèques (ceux déclarés dans les parties antérieures de ce document) et de s'affranchir de la projection de ces paramètres dans un quelconque système de coordonnées. Pour ces

fins, la modélisation non cartésienne basée sur les matrices de Gram utilisée par Serré et Moinet dans leurs travaux [Moinet, 2008; Serré, 2000] a été retenue.

*Définition :* La matrice de Gram  $[G]$  associée à un ensemble de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  sur un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est définie par l'équation 3.1.

$$G_{i,j} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle \quad (3.1)$$

Vue la définition de la matrice de Gram, il est nécessaire de pouvoir représenter un mécanisme par une famille de vecteurs. A partir de la représentation schématique sous forme de segments de droite présentée au paragraphe 3.1.5, il a été choisi d'orienter la boucle dans un sens arbitraire et de représenter chaque segment par un vecteur dont le sens est le même que celui de la boucle. A partir de ces vecteurs il est alors possible de construire une matrice de Gram représentant le mécanisme.

Les termes de la matrice de Gram permettent de retrouver les longueurs des vecteurs et les angles entre ces derniers par les formules 3.2 et 3.3. On constate donc que la matrice de Gram d'un système contient tous les paramètres (longueurs, angles) de liaisons et de solide du modèle géométrique choisi pour représenter le mécanisme durant la phase de préconception.

$$\|\vec{v}_i\| = \sqrt{G_{i,i}} \quad (3.2)$$

$$\cos(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \frac{G_{i,j}}{\sqrt{G_{i,i}} \cdot \sqrt{G_{j,j}}} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Propriétés intéressantes

A partir de l'expression classique du produit scalaire (voir expression 3.4) on peut remarquer qu'il est possible d'écrire n'importe quelle matrice de Gram associée à l'ensemble de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  comme le produit exprimé par la relation 3.5.

On constate que la matrice  $[Gu]$  de l'expression 3.5 est la matrice de Gram associée à l'ensemble  $\{\vec{v}_1/\|\vec{v}_1\|, \dots, \vec{v}_n/\|\vec{v}_n\|\}$ . De plus, la matrice  $[G]$  sera symétrique si et seulement si  $[Gu]$  est symétrique. Enfin comme la matrice diagonale  $[L]$  est nécessairement de rang maxi, on peut déduire immédiatement que le rang de la matrice  $[G]$  et celui de  $[Gu]$  sont identiques. A ce sujet, il est utile de remarquer que le rang d'une matrice de Gram associée à un ensemble  $\{E\}$  ne peut pas être supérieur à la dimension de l'espace dans lequel sont plongés les éléments de  $\{E\}$ . Ainsi, dans le cas de vecteurs issus de l'espace euclidien 3D,

le rang d'une matrice de Gram ne peut pas être supérieur à 3. Dans la suite de ce mémoire le terme de "Matrice de Gram unitaire" désignera l'ensemble des matrices  $[Gu]$ .

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \|\vec{v}_i\| \cdot \|\vec{v}_j\| \cdot \cos(\vec{v}_i, \vec{v}_j) \quad (3.4)$$

$$[G] = [L] \cdot [Gu] \cdot [L] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \|\vec{v}_i\| & \text{si } i = j \end{cases} \\ \text{et} \\ Gu_{i,j} = \cos(\vec{v}_i, \vec{v}_j) \end{cases} \quad (3.5)$$

### 3.3 Expression algébrique des contraintes

#### 3.3.1 Notations

On appellera :

- Les vecteurs unitaires le long des solides  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p$
- Les vecteurs unitaires le long des liaisons  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_p$
- Les angles dans les solides  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$
- Les longueurs dans les solides  $ls_1, ls_2, \dots, ls_p$
- Les angles dans les liaisons  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$
- Les longueurs dans les liaisons  $ll_1, ll_2, \dots, ll_p$

#### 3.3.2 Contrainte d'assemblage

Cette section va s'attacher à détailler quelles sont les conditions à imposer entre les paramètres du modèle d'un mécanisme pour que celui-ci soit assemblable. Cette contrainte n'a de sens que pour les mécanismes comportant une boucle fermée : en effet une boucle ouverte est toujours assemblable. De plus, pour les raisons expliquées au paragraphe 3.1.4 on s'intéressera au cas où le mécanisme présente une seule boucle. Pour qu'un mécanisme soit assemblable, il faut faire coïncider dans l'espace 3D deux repères. Sans perte de généralité on peut considérer que ces deux repères sont d'une part le repère attaché à la liaison "avant" la première pièce de la boucle et d'autre part, le repère associé à la liaison suivie "après" la dernière pièce de la boucle. Pour faire coïncider ces deux repères il faut

---



### 3.3.3 Fermeture angulaire

Si on considère trois vecteurs successifs de la boucle vectorielle (voir exemple de la figure 3.3) on peut constater que le troisième vecteur est toujours l'image du premier par une rotation autour du second vecteur. L'angle de cette rotation est précisément celui défini par la convention de Denavit et Hartenberg. Ainsi, déclarer la fermeture de la boucle angulaire représentée sur la figure 3.4 revient à dire que le vecteur  $\vec{e}_1$  est l'image du vecteur  $\vec{e}_p$  par la rotation  $R_{\vec{n}_1}^{\theta_1}$ .

#### Rotation unique

Ces rotations peuvent être exprimées par la relation d'Olindes Rodrigues [Rodrigues, 1840] 3.7 suivante :

*Formule d'Olindes Rodrigues* : On désigne par  $R_{\Delta}^{\omega}$  la rotation d'angle  $\omega$  autour de la droite  $\Delta$  dans l'espace vectoriel à 3 dimensions. Soient,  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la droite  $\Delta$ , et  $\vec{V}$  un vecteur unitaire différent de  $\vec{n}$ . L'expression du vecteur unitaire  $\vec{V}'$ , résultat de la transformation du vecteur unitaire  $\vec{V}$  par la rotation  $R_{\Delta}^{\omega}$ , est donné par la formule 3.7

$$\vec{V}' = (\cos \omega) \vec{V} + (1 - \cos \omega) \langle \vec{V} \cdot \vec{n} \rangle \vec{n} + (\sin \omega) (\vec{n} \wedge \vec{V}) \quad (3.7)$$

Avec l'équation 3.7, et en se rappelant que  $\vec{V}$  et  $\vec{n}$  sont orthogonaux, on peut remarquer aisément que le produit scalaire  $\langle \vec{V} \cdot \vec{V}' \rangle$  est égal à  $\cos \omega$  dans le cas où la norme des deux vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{V}'$  vaut 1.

#### Composition de plusieurs rotations

Afin de représenter l'orientation des vecteurs de cette boucle dans une matrice de Gram de rang trois, Serré [Serré *et al.*, 2002] a calculé formellement le produit scalaire entre deux vecteurs de la chaîne (de  $2 \cdot p$  rotations) représentée sur la figure 3.4 en utilisant la formule 3.7. Les valeurs formelles de ces produits scalaires sont présentées en table 3.3. Le long de cette chaîne deux vecteurs adjacents (représentés sur un même nœud) sont orthogonaux.

Pour exprimer simplement ces produits scalaires Serré a donné dans [Serré *et al.*, 2002] les expressions de fonctions notées  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  et  $F_6$ . L'expression de ces fonctions est dans le système d'équations 3.8. Ces fonctions ont été calculées avec le module de calcul formel de Matlab<sup>®</sup>. Ces expressions se calculent à partir de deux vecteurs unitaires orthonormaux fixés arbitrairement qui seront  $\vec{n}_1$  et  $\vec{e}_1$  (par exemple  $\vec{n}_1 = [1 \ 0 \ 0]$  et  $\vec{e}_1 = [0 \ 1 \ 0]$ ) en appliquant récursivement la formule d'Olindes Rodrigues 3.7 et en effectuant le produit scalaire du vecteur résultat avec  $\vec{n}_1$ .

Tableau 3.3 Valeur des produits scalaires par composition de  $2 \cdot p - 1$  rotations

	$\vec{n}_i$		$\vec{e}_i$
$\vec{n}_i$	1	$\vec{e}_i$	1
$\vec{e}_i$	0	$n_{i+1}^{\vec{}}$	0
$n_{i+1}^{\vec{}}$	$F_1(\alpha_i)$	$e_{i+1}^{\vec{}}$	$F_1(\theta_{i+1})$
$e_{i+1}^{\vec{}}$	$F_2(\alpha_i, \theta_{i+1})$	$n_{i+2}^{\vec{}}$	$F_2(\theta_{i+1}, \alpha_{i+1})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n_{i+p-1}^{\vec{}}$	$F_{2 \cdot p - 3}(\alpha_i, \theta_{i+1}, \dots, \alpha_{i+p-2})$	$e_{i+p-1}^{\vec{}}$	$F_{2 \cdot p - 3}(\theta_{i+1}, \alpha_{i+1}, \dots, \theta_{i+p-1})$
$e_{i+p-1}^{\vec{}}$	$F_{2 \cdot p - 2}(\alpha_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_{i+p-1})$	$n_{i+p}^{\vec{}}$	$F_{2 \cdot p - 2}(\theta_{i+1}, \alpha_{i+1}, \dots, \theta_{i+p-1}, \alpha_{i+p-1})$

$$\left. \begin{aligned}
 & F_1(\alpha_1) = \cos(\alpha_1) \\
 & F_2(\alpha_1, \theta_2) = \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_2) \\
 & F_3(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) \\ -\sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \\
 & F_4(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} \sin(\theta_3) \cdot (\cos(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2)) \\ + \cos(\alpha_2) \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_2) \\ + \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_3) \cdot \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \\
 & F_5(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2, \theta_3, \alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_3) \cdot (\cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2)) \\ - \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_2) \\ - \sin(\alpha_3) \cdot (\cos(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_3)) \\ - \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3) \\ + \cos(\alpha_2) \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_2) \cdot \cos(\theta_3) \end{pmatrix} \\
 & F_6(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2, \theta_3, \alpha_3, \theta_4) = \begin{pmatrix} \sin(\theta_4) \cdot (\cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \sin(\alpha_3)) \\ + \cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_3) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot \cos(\theta_3) \\ - \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot \sin(\alpha_3) \cdot \cos(\theta_2) \\ - \cos(\alpha_3) \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3) \\ + \cos(\alpha_2) \cdot \cos(\alpha_3) \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_2) \cdot \cos(\theta_3) \\ + \cos(\theta_4) \cdot (\sin(\theta_3) \cdot (\cos(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2)) \\ + \cos(\alpha_2) \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_2)) \\ + \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\theta_3) \cdot \sin(\theta_2) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

### Écriture des relations algébriques

La composition des rotations mise en évidence au paragraphe 3.3.3 a été utilisée pour écrire les relations de fermeture angulaire. Ainsi, il devient possible de calculer formellement une matrice de Gram unitaire à partir du tableau 3.3. Pour calculer chaque ligne de la matrice unitaire formelle, il convient de partir d'un nœud de la figure 3.4. Il faut ensuite choisir de s'intéresser au deuxième vecteur de la paire associée au nœud afin de choisir la colonne dans le tableau 3.3 et d'évaluer la valeur du paramètre  $i$ . Par exemple, si on décide de partir du nœud contenant la paire  $(\vec{e}_2, \vec{n}_3)$ , il faut alors choisir la colonne  $\vec{n}_i$  du tableau 3.3. Dans cet exemple le paramètre  $i$  aura pour valeur 3. Enfin pour calculer la valeur de l'indice de chaque vecteur, il faut se rappeler que la variable d'indice  $p$  désigne le nombre de solides (ou de liaisons) dans la boucle et que ces indices sont calculés à  $p + 1$  près. Avec cette procédure, il devient possible de calculer la matrice de Gram unitaire comprenant toutes les compositions de rotations possibles. Le résultat de ce calcul est donné dans le tableau 3.4.

On peut remarquer que la matrice ainsi calculée n'est pas symétrique, ce qui devrait être le cas puisqu'il s'agit d'une matrice de Gram. Ainsi, pour assurer la fermeture angulaire de la boucle vectorielle, il faudra écrire l'égalité des termes diagonalement opposés de la matrice présentée dans le tableau 3.4. De plus, comme l'espace euclidien de travail est de dimension 3, le rang de cette matrice ne peut pas être supérieur à 3. De ce fait, pour écrire la fermeture angulaire de la boucle, il suffira d'écrire trois égalités des termes diagonalement opposés. Les autres relations issues des autres égalités possibles seront nécessairement dépendantes de ces trois-là.

Finalement, la composition des rotations le long de la boucle permet de générer 3 relations algébriques nécessaires pour assurer l'assemblage du mécanisme.

#### 3.3.4 Fermeture périmétrique

Pour finir d'assurer l'assemblage du mécanisme, il faut aussi assurer que la relation vectorielle 3.6 soit vérifiée. Cette section va présenter une technique mathématique pour générer trois relations algébriques (traduisant l'équation vectorielle 3.6) à partir de la matrice de Gram "complète" (par comparaison à la matrice de Gram unitaire utilisée pour écrire la fermeture angulaire). Cette technique est basée sur le concept de coupe métrique [Serré *et al.*, 2006] qui sera également introduit ici.

Tableau 3.4 Matrice de Gram fonctions exprimée avec les fonctions  $F_p$

	$\vec{n}_1$	$\vec{e}_1$	$\vec{n}_2$	$\vec{e}_2$	$\dots$	$\vec{n}_p$	$\vec{e}_p$
$\vec{n}_1$	1	0	$F_1(\alpha_1)$	$F_2(\alpha_1, \theta_2)$	$\dots$	$F_{2,p-3}(\alpha_1, \dots)$	$F_{2,p-2}(\alpha_1, \dots)$
$\vec{e}_1$	$F_{2,p-2}(\theta_2, \dots)$	1	0	$F_1(\theta_2)$	$\dots$	$F_{2,p-4}(\theta_2, \dots)$	$F_{2,p-3}(\theta_2, \dots)$
$\vec{n}_2$	$F_{2,p-3}(\alpha_2, \dots)$	$F_{2,p-2}(\alpha_2, \dots)$	1	0	$\dots$	$F_{2,p-5}(\alpha_2, \dots)$	$F_{2,p-4}(\alpha_2, \dots)$
$\vec{e}_2$	$F_{2,p-4}(\theta_3, \dots)$	$F_{2,p-3}(\theta_3, \dots)$	$F_{2,p-2}(\theta_3, \dots)$	1	$\dots$	$F_{2,p-6}(\theta_3, \dots)$	$F_{2,p-5}(\theta_3, \dots)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vec{e}_{p-1}$	$F_2(\theta_p, \alpha_1)$	$F_3(\theta_p, \alpha_1, \theta_2)$	$F_4(\theta_p, \alpha_1, \theta_2, \alpha_2)$	$F_5(\theta_p, \alpha_1, \theta_2, \alpha_2, \theta_3)$	$\dots$	0	$F_1(\theta_p)$
$\vec{n}_p$	$F_1(\alpha_p)$	$F_2(\alpha_p, \theta_p)$	$F_3(\alpha_p, \theta_p, \alpha_1)$	$F_4(\alpha_p, \theta_p, \alpha_1, \theta_2)$	$\dots$	1	0
$\vec{e}_p$	0	$F_1(\theta_1)$	$F_2(\theta_1, \alpha_1)$	$F_3(\theta_1, \alpha_1, \theta_2)$	$\dots$	$F_{2,p-2}(\theta_1, \dots)$	1

### Coupes métriques

*Définition :* Soient, un ensemble  $\{E\}$  formé par des vecteurs de l'espace euclidien 3D et la paire de sous ensembles  $(\{E1\}, \{E2\})$  formant une partition dans  $\{E\}$  (tels que  $\{E1\} \cup \{E2\} = \{E\}$  et  $\{E1\} \cap \{E2\} = \emptyset$ ). La coupe métrique notée  $C_{(E1,E2)}$  définie par  $(\{E1\}, \{E2\})$  est donnée par l'expression 3.9.

$$C_{(E1,E2)} = \left( \sum_{\vec{u} \in \{E1\}} \vec{u} \right)^2 - \left( \sum_{\vec{v} \in \{E2\}} \vec{v} \right)^2 \quad (3.9)$$

### Théorème<sup>1</sup>

Pour qu'une somme de quatre vecteurs de l'espace euclidien 3D formant un ensemble  $\{E\}$  soit nulle il faut et il suffit que trois coupes métriques définies sur trois paires distinctes de sous-ensembles formant une partition dans  $\{E\}$  soient nulles.

### Démonstration de la condition nécessaire

Soient quatre vecteurs formant l'ensemble  $\{E\}$  tels que la somme des vecteurs de  $\{E\}$  soit nulle. Soit  $C_{(E1,E2)}$  la coupe métrique quelconque définie par la paire de sous-ensembles  $(\{E1\}, \{E2\})$  formant une partition dans  $\{E\}$ . De la définition 3.9 on peut déduire l'expression équivalente 3.10 pour  $C_{(E1,E2)}$ . Comme  $(\{E1\}, \{E2\})$  forme une partition dans  $\{E\}$  le premier terme de la relation 3.10 est strictement égal à la somme des éléments de  $\{E\}$  qui est nulle par hypothèse. Par conséquent la coupe métrique quelconque  $C_{(E1,E2)}$  est nulle. CQFD.

$$C_{(E1,E2)} = \left( \sum_{\vec{u} \in E1} \vec{u} + \sum_{\vec{v} \in E2} \vec{v} \right) \cdot \left( \sum_{\vec{u} \in E1} \vec{u} - \sum_{\vec{v} \in E2} \vec{v} \right) \quad (3.10)$$

### Démonstration de la condition suffisante

Soit un ensemble  $\{E\} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$  formé de quatre vecteurs de l'espace euclidien 3D. Soient trois paires  $P1$ ,  $P2$  et  $P3$  de sous-ensembles de  $\{E\}$  formant une partition dans  $\{E\}$ . Prenons par exemple les trois paires telles que :  $P1 = (\{\vec{a}\}, \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\})$ ,  $P2 = (\{\vec{a}, \vec{b}\}, \{\vec{c}, \vec{d}\})$  et  $P3 = (\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}, \{\vec{d}\})$ . La nullité des trois coupes métriques  $C_{P1}$ ,  $C_{P2}$  et  $C_{P3}$  écrites sous la forme de l'équation 3.10 donne le système 3.11. Comme le vecteur  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$  a une projection nulle sur 3 vecteurs indépendants  $\vec{e}_1 = (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d})$ ,  $\vec{e}_2 = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d})$  et

<sup>1</sup>Selon mes informations ce théorème appartient au professeur émérite du LISMMA, Mr André Clément, qui a collaboré activement à cette recherche

$\vec{e}_3 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d})$  on peut en déduire qu'il est égal au vecteur nul. CQFD.

$$\begin{cases} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}) = 0 \\ (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}) = 0 \\ (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

### Remarque

Pour une somme comportant  $n$  ( $n > 4$ ) vecteurs il est toujours possible de se ramener au cas où il y aurait 4 vecteurs en sommant  $n - 3$  vecteurs de l'ensemble de départ.

### Écriture des relations algébriques

Afin de pouvoir calculer une coupe métrique à partir de matrices de Gram, il est possible de réécrire l'équation 3.9 sous la forme 3.12 qui peut encore être mise sous la forme 3.13 en utilisant la linéarité du produit scalaire de l'espace euclidien 3D.

$$C_{(E1,E2)} = \left\langle \left( \sum_{\vec{u}_1 \in \{E1\}} \vec{u}_1 \right), \left( \sum_{\vec{u}_2 \in \{E1\}} \vec{u}_2 \right) \right\rangle - \left\langle \left( \sum_{\vec{v}_1 \in \{E2\}} \vec{v}_1 \right), \left( \sum_{\vec{v}_2 \in \{E2\}} \vec{v}_2 \right) \right\rangle \quad (3.12)$$

$$C_{(E1,E2)} = \left( \sum_{\vec{u}_1 \in \{E1\}} \sum_{\vec{u}_2 \in \{E1\}} \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle \right) - \left( \sum_{\vec{v}_1 \in \{E2\}} \sum_{\vec{v}_2 \in \{E2\}} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \right) \quad (3.13)$$

On peut alors remarquer dans l'équation 3.13 que le premier terme est la somme de tous les termes de la matrice de Gram associée à l'ensemble  $\{E1\}$  et que le second terme est la somme de tous les termes de la matrice de Gram associée à l'ensemble  $\{E2\}$ . Il est donc très facile de calculer des coupes métriques à partir de matrices de Gram.

Il vient d'être montré que, pour exprimer algébriquement la condition vectorielle 3.6, il faut écrire que trois coupes métriques appliquées à la matrice de Gram complète (non unitaire) sont nulles.

Cette matrice de Gram peut être calculée formellement à partir de la matrice unitaire présentée dans le tableau 3.4 en utilisant la formule 3.5. Cependant, avant d'effectuer des coupes métriques sur cette matrice, il est possible d'opérer des simplifications de son expression. En effet, l'application directe de la formule 3.5 à la matrice unitaire du tableau 3.4 va donner une matrice résultante qui ne sera pas symétrique. Néanmoins, la commutativité du produit scalaire assure que toutes les matrices de Gram soient symétriques. Or cette contrainte de symétrie est déjà prise en compte dans la fermeture angulaire de

la boucle, il n'est donc pas utile ici de retraiter cette contrainte. Par conséquent, avant d'appliquer la formule 3.5 à la matrice de Gram unitaire du tableau 3.4 il est judicieux de la rendre symétrique en utilisant parmi les deux expressions possibles pour un même produit scalaire, celle qui est la plus simple.

### Propriétés intéressantes

Soit un ensemble  $\{E\}$  formé de vecteurs de l'espace euclidien 3D. Soit  $G$  la matrice de Gram associée à  $\{E\}$ . Soit la paire de sous-ensembles  $(\{E1\}, \{E2\})$  formant une partition dans  $\{E\}$  et  $G1$  et  $G2$  les matrices de Gram associées respectivement à  $\{E1\}$  et  $\{E2\}$ . Soit la matrice  $G12$  telle que définie par l'équation 3.14. Supposons enfin que la somme vectorielle de tous les éléments de  $\{E\}$  soit nulle.

$$G = \begin{bmatrix} G1 & G12 \\ G12^T & G2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Propriété 1 : La somme de tous les termes de la matrice  $G$  est nulle ( $\sum G = 0$ ).

Propriété 2 : En application directe de la coupe métrique  $C_{E1,E2}$  on peut dire que la somme de tous les termes de la matrice  $G1$  est égale à la somme de tous les termes de la matrice  $G2$  ( $\sum G1 = \sum G2$ ).

Propriété 3 : La conséquence des deux propriétés précédentes est que la somme de tous les termes de  $G1$  (ou de  $G2$ ) est égale à l'opposé de la somme de tous les termes de  $G12$  ( $\sum G = \sum G1 + \sum G2 + 2 \cdot \sum G12$ ).

Propriété 4 : L'application de la propriété 3 à un ensemble  $\{E1\}$  composé d'un seul vecteur revient à écrire que la projection de la somme vectorielle des éléments de  $\{E\}$  selon le vecteur constituant  $\{E1\}$  est nulle.

La propriété 4 énoncée ci-dessus permet de mettre en évidence le fait que la technique des coupes métriques est en fait une généralisation de la projection sur des vecteurs indépendants pour exprimer sous forme algébrique la nullité d'une somme vectorielle.

### 3.3.5 Contrainte de mobilité

Une boucle cinématique est dite mobile avec un degré de mobilité de 1, s'il existe un paramètre de liaison parmi tous ceux de la chaîne qui permet de calculer chacun des autres paramètres (qui seront alors dits pilotés) par une fonction réelle appelée loi de commande ou loi entrée-sortie. Chaque paramètre piloté possède sa propre loi de commande, il y

a donc autant de fonctions réelles différentes qu'il y a de paramètres pilotés. La loi de commande d'un paramètre donné dépend du paramètre de commande et des paramètres de solides ( $l_{s_i}$  et  $\alpha_i$ ).

Ainsi, pour qu'un mécanisme soit mobile, il faut qu'il puisse s'assembler dans toutes les configurations que lui permet la variation de son paramètre de commande. Autrement dit, si la solution trouvée à la contrainte d'assemblage ne dépend pas du paramètre de commande, le mécanisme sera mobile. En effet, sous cette condition, peu importe la valeur que prendra le paramètre de commande, on pourra toujours trouver une solution pour assembler le mécanisme. Il sera donc mobile.

On peut dès lors remarquer que la capacité à résoudre cette contrainte de mobilité dépendra en premier lieu de la capacité à résoudre la contrainte d'assemblage. On peut également remarquer que pour qu'un système avec plusieurs boucles imbriquées soit mobile, il faut en premier lieu résoudre la mobilité de chaque boucle en choisissant un paramètre de commande commun à chaque boucle. Il faut ensuite s'assurer que la solution pour chaque boucle conduite à la même loi de commande (il y a une loi de commande par boucle distincte) pour tous les paramètres qui sont communs à plusieurs boucles.

## 3.4 Modèle physique

Cette section présente rapidement quelques pistes permettant d'obtenir des lois de comportements physiques pour des composants (ou pièces) d'un mécanisme. La génération de ces lois ne fait pas partie du domaine de compétences couvert par cette thèse. Par conséquent, les éléments présentés ici paraîtront sûrement simplistes pour des spécialistes. Cependant, l'objectif de cette partie est de montrer que des lois existantes peuvent être intégrées simplement dans la modélisation proposée.

Tout d'abord il convient de donner une définition de ce qu'est une loi de comportement. On trouve dans le cours de mécanique des milieux continus de Jean Garrigues [Garrigues, 2002] la définition suivante :

*On appelle loi de comportement, une relation qui exprime le tenseur des contraintes actuel en une particule en fonction du mouvement passé et des changements d'état que la particule a subi. Les lois de comportement se traduisent par une expression mathématique du tenseur des contraintes en fonction de grandeurs mécaniques et thermodynamiques. Elle est suggérée par des essais expérimentaux sur le milieu qu'on étudie.*

---

D'une façon un peu plus particulière, pour les problèmes relatifs à cette étude qui font intervenir des milieux solides (les pièces des mécanismes), une loi de comportement mettra en relation des grandeurs permettant de décrire un effet physique (contraintes mécaniques, efforts, température, champs électromagnétiques, etc.) auquel le solide est soumis et des grandeurs géométriques permettant de qualifier l'évolution de la forme des solides considérés.

Ainsi, au regard du modèle géométrique proposé dans les sections précédentes de ce chapitre, une loi de comportement physique devra mettre en relation des paramètres utiles pour décrire l'effet physique avec la longueur et l'angle d'une pièce solide (voir paragraphe 3.1.2). Par exemple, pour décrire un solide élastique soumis à des efforts il est possible d'utiliser la loi de comportement de Hooke 2.7. De la même manière, pour les dilatations thermiques il est possible d'utiliser la loi 1.2.

Ces deux exemples montrent qu'il existe des expressions de loi de comportement physique qui sont utilisables avec l'approche géométrique proposée. Toutefois, il sera sûrement utile de chercher d'autres lois pour décrire de façon plus réaliste le comportement physique de certains composants. Cependant, ces études ne font pas partie des objectifs de ce document et devront être réalisées par des chercheurs spécialisés dans ces domaines.

## 3.5 Application au mécanisme de Bennett

Cette section présente une application de la mise en équation du caractère mobile du *comportement géométrique* en utilisant le squelette géométrique présenté dans ce chapitre. Elle montre également comment le *comportement géométrique* est utilisé pour traiter un problème faisant intervenir des variations de température. Enfin, elle indique comment résoudre localement ce problème.

### 3.5.1 Présentation du cas

Cet application est illustrée avec le mécanisme de Bennett présenté en figure 3.5. Ce mécanisme a déjà fait l'objet de nombreuses études comme le montre la littérature abondante à ce sujet [Bennett, 1903; Bricard, 1926; Perez et Mc Carthy, 2003]. Il est intéressant à étudier car la géométrie de chacune de ses pièces est réellement en 3D. De plus, malgré son faible nombre de pièces (4 seulement), ce mécanisme peut être mobile (avec un degré de mobilité de 1) à condition que 5 équations reliant les paramètres de son squelette soient respectées. De ce fait, si le concepteur souhaite spécifier tous les paramètres dimensionnels

---

de ce mécanisme (il y en a 8 en tout), le problème géométrique sera très fortement sur-contraint. Du point de vue du comportement physique, cet exemple sera simplifié et seule l'influence de dilatations thermiques simples sur les pièces sera étudiée. Enfin, il convient aussi de remarquer que ce mécanisme comporte une seule boucle cinématique, ce qui allègera également les difficultés qu'il représente. Du fait des caractéristiques précédentes, la mise en équation avec le modèle du chapitre 3 est bien adaptée à la modélisation de ce système.

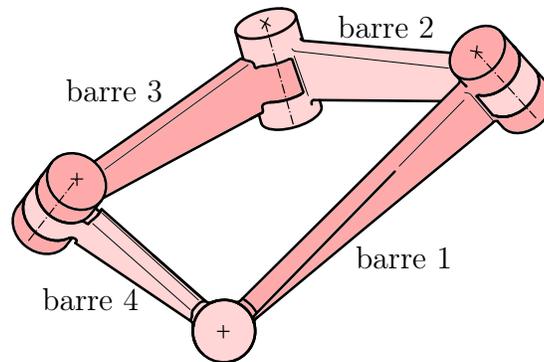


Figure 3.5 Mécanisme de Bennett

Afin d'obtenir la représentation squelettique du mécanisme de Bennett, il convient de suivre la méthode de Cailliau [Cailliau, 2010] et de tracer dans un premier temps son graphe cinématique. Ce graphe cinématique est présenté en figure 3.6. Comme le mécanisme de Bennett est constitué de quatre liaisons pivots qui sont mono-axiales, il n'est pas nécessaire d'introduire de pièces virtuelles pour le représenter avec le modèle de Cailliau. Il faut aussi remarquer que les paramètres de longueur des quatre liaisons pivot ne varient pas au cours du mouvement. De plus, par construction, ces paramètres ont une valeur nulle. Ainsi, le graphe cinématique de la figure 3.6 correspond directement au graphe des liaisons du modèle de Cailliau. De ce graphe, on peut déduire la représentation squelettique de la figure 3.7.

Les paramètres cinématiques définis dans le graphe 3.6 ont aussi une expression donnée en fonction des vecteurs du squelette 3.7. Ces expressions sont données dans le tableau 3.5.

Tableau 3.5 Paramètres pour décrire le squelette d'un mécanisme de Bennett

Angle (liaison)	Angle (solide)	Longueur (solide)
$\theta_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$	$\alpha_1 = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$	$ls_1 = \ \vec{e}_1\ $
$\theta_2 = (\vec{e}_2, \vec{e}_3)$	$\alpha_2 = (\vec{n}_2, \vec{n}_3)$	$ls_2 = \ \vec{e}_2\ $
$\theta_3 = (\vec{e}_3, \vec{e}_4)$	$\alpha_3 = (\vec{n}_3, \vec{n}_4)$	$ls_3 = \ \vec{e}_3\ $
$\theta_4 = (\vec{e}_4, \vec{e}_1)$	$\alpha_4 = (\vec{n}_4, \vec{n}_1)$	$ls_4 = \ \vec{e}_4\ $

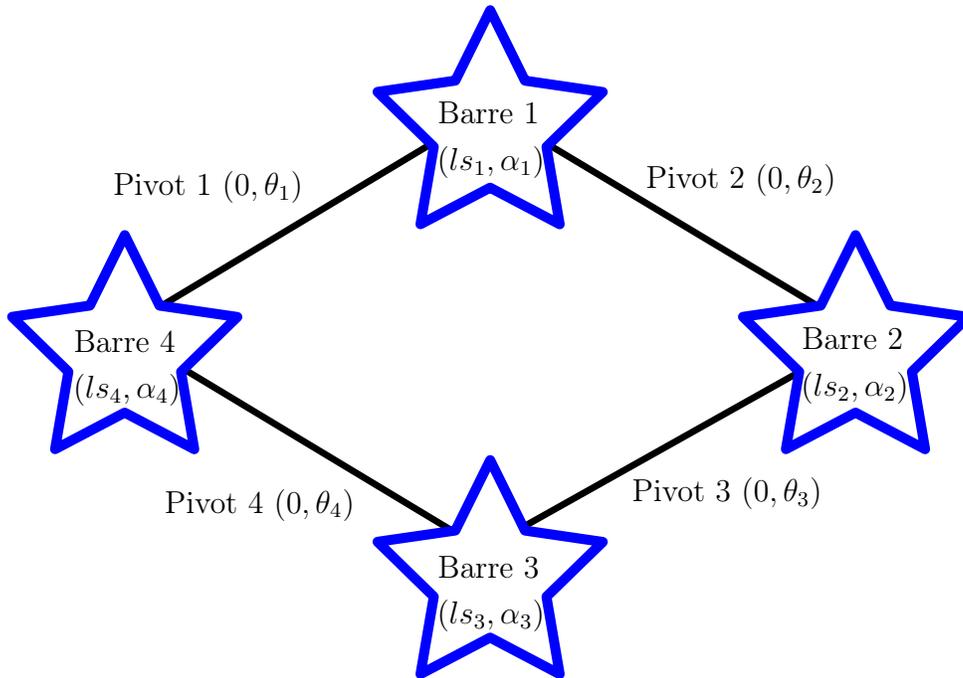


Figure 3.6 Graphe cinématique du mécanisme de Bennett

D'autre part, la section 3.3.5 a montré que le caractère mobile du *comportement géométrique* est complexe à exprimer. De manière générale, pour le caractère mobile, le *comportement géométrique* est plus difficile à exprimer qu'un comportement physique. En effet, l'expression du caractère mobile doit se faire indépendamment de la valeur du paramètre de commande cinématique. Pour ces raisons, c'est le modèle de représentation géométrique utilisé ici pour traiter les mécanismes mobiles qui a été choisi pour permettre de trouver une expression du caractère mobile du *comportement géométrique*. D'autre part, ce paramétrage est également adapté au modèle physique choisi pour représenter les effets thermiques pris en considération.

Il faut également garder en mémoire que les équations générées grâce à la technique présentée antérieurement dans ce chapitre, sont non linéaires (elle font intervenir des fonctions trigonométriques en grand nombre). Vu leur complexité, il n'existe pas de méthode générale pour les résoudre. Toutefois, comme cela est le cas dans une majorité de problèmes d'ingénierie, l'hypothèse sera faite ici que l'on dispose d'une instance initiale du mécanisme à étudier qui respecte les contraintes géométriques et physiques. Les équations traduisant le comportement géométrique seront alors linéarisées autour de cette configuration, et leur résolution permettra de mettre en évidence le comportement géométrique linéarisé au voisinage de cette instance initiale. Il est facile de trouver dans la littérature des exemples de mécanismes de Bennett qui sont mobiles. On trouve par exemple, dans la thèse de

M'Henni [M'henni, 2010] et dans les travaux de Serré [Serré *et al.*, 2009], le jeu de valeurs du tableau 3.6 qui rend le mécanisme mobile.

Tableau 3.6 Valeur d'une instance de mécanisme de Bennett mobile

	Longueur (unité de longueur)	Angle (degrés)
Barre 1	$ls_1 = 1$	$\alpha_1 = 30$
Barre 2	$ls_2 = \sqrt{3}$	$\alpha_2 = -60$
Barre 3	$ls_3 = 1$	$\alpha_3 = 30$
Barre 4	$ls_4 = \sqrt{3}$	$\alpha_4 = -60$

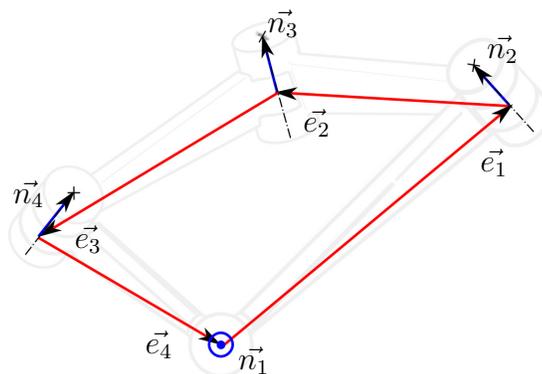


Figure 3.7 Squelette associé au mécanisme de Bennett

### 3.5.2 Fermeture angulaire

La génération des équations de fermeture angulaire est basée sur la symétrie de la matrice présentée dans le tableau 3.4. Dans le cas du mécanisme de Bennett qui est composé de quatre bielles, il est possible de l'instancier pour un nombre de solides  $p = 4$ . Le résultat de cette instanciation est présenté dans le tableau 3.7. Dans cette matrice, on peut remarquer que les produits scalaires du type  $\langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle$  font intervenir au maximum deux angles de liaisons ( $\theta_i$ ). Pour traduire la fermeture angulaire, il est par exemple possible d'écrire le système d'équations 3.15 en utilisant les termes encadrés.

$$\begin{cases} F_3(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2) = F_3(\alpha_3, \theta_4, \alpha_4) \\ F_3(\alpha_4, \theta_1, \alpha_1) = F_3(\alpha_2, \theta_3, \alpha_3) \\ F_1(\alpha_3) = F_5(\alpha_4, \theta_1, \alpha_1, \theta_2, \alpha_2) \end{cases} \quad (3.15)$$

L'analyse du système d'équations 3.15 donne quelques informations intéressantes. Premièrement, comme on souhaite résoudre ce système au voisinage d'une instance connue, on peut instancier la matrice 3.7 avec les valeurs numériques du tableau 3.6. En procédant de

Tableau 3.7 Matrice de Gram unitaire pour un mécanisme de Bennett

	$\vec{n}_1$	$\vec{e}_1$	$\vec{n}_2$	$\vec{e}_2$	$\vec{n}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{n}_4$	$\vec{e}_4$
$\vec{n}_1$	1	0	$F_1(\alpha_1)$	$F_2(\alpha_1, \theta_2)$	$F_3(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2)$	$F_4(\alpha_1, \theta_2, )$	$F_5(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2, )$	$F_6(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2, )$
$\vec{e}_1$	$F_6(\alpha_3, \theta_4, \alpha_4)$	1	0	$F_1(\theta_2)$	$F_2(\theta_2, \alpha_2)$	$F_3(\theta_2, \alpha_2, \theta_3)$	$F_4(\theta_2, \alpha_2, )$	$F_5(\theta_2, \alpha_2, \theta_3, )$
$\vec{n}_2$	$F_5(\alpha_2, \theta_3, \alpha_3, )$	$F_6(\alpha_2, \theta_3, \alpha_3, )$	1	0	$F_1(\alpha_2)$	$F_2(\alpha_2, \theta_3)$	$F_3(\alpha_2, \theta_3, \alpha_3)$	$F_4(\alpha_2, \theta_3, )$
$\vec{e}_2$	$F_4(\theta_3, \alpha_3, )$	$F_5(\theta_3, \alpha_3, \theta_4, )$	$F_6(\theta_3, \alpha_3, \theta_4, )$	1	0	$F_1(\theta_3)$	$F_2(\theta_3, \alpha_3)$	$F_3(\theta_3, \alpha_3, \theta_4)$
$\vec{n}_3$	$F_3(\alpha_3, \theta_4, \alpha_4)$	$F_4(\alpha_3, \theta_4, )$	$F_5(\alpha_3, \theta_4, \alpha_4, )$	$F_6(\alpha_3, \theta_4, \alpha_4, )$	1	0	$F_1(\alpha_3)$	$F_2(\alpha_3, \theta_4)$
$\vec{e}_3$	$F_2(\theta_4, \alpha_4)$	$F_3(\theta_4, \alpha_4, \theta_1)$	$F_4(\theta_4, \alpha_4, )$	$F_5(\theta_4, \alpha_4, \theta_1, )$	$F_6(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2)$	1	0	$F_1(\theta_4)$
$\vec{n}_4$	$F_1(\alpha_4)$	$F_2(\alpha_4, \theta_1)$	$F_3(\alpha_4, \theta_1, \alpha_1)$	$F_4(\alpha_4, \theta_1, )$	$F_5(\alpha_4, \theta_1, \alpha_1, )$	$F_6(\alpha_2, \alpha_2, \theta_3)$	1	0
$\vec{e}_4$	0	$F_1(\theta_1)$	$F_2(\theta_1, \alpha_1)$	$F_3(\theta_1, \alpha_1, \theta_2)$	$F_4(\theta_1, \alpha_1, )$	$F_5(\theta_1, \alpha_1, \theta_2)$	$F_6(\alpha_2, \theta_3, \alpha_3)$	1

cette manière, le système 3.15 devient alors un système de trois équations à quatre inconnues. De plus, comme on sait que ce système est mobile avec une mobilité de un, cela veut dire qu'il existe une relation algébrique qui permet de calculer l'ensemble des paramètres de liaisons dès lors que l'on en connaît un parmi les 4 (voir définition au paragraphe 3.3.5). Or, dans ce cas, les seuls paramètres de liaisons qui varient au cours du mouvement du mécanisme sont les quatre angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  et  $\theta_4$ . Par conséquent, la solution du système 3.15 en fonction de  $\theta_2$  permettra de déduire la loi de commande de ce système. Cette loi de commande permettra ensuite de calculer la matrice de Gram représentant le système dans différentes positions suivant la valeur que l'on affectera à l'angle  $\theta_2$ .

Cette solution s'obtient facilement en effectuant, pour chaque variable angulaire, le changement de variable proposé par l'expression 3.16 dans les équations trigonométriques du système 3.17. On obtient ainsi l'expression 3.18 pour le cosinus et le sinus de chaque angle qui permet ensuite d'écrire les équations du système 3.15 sous forme polynomiale.

$$\Gamma_i = \tan\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \cos(\gamma_i) = \frac{1 - \tan\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)^2}{1 + \tan\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)^2} \\ \sin(\gamma_i) = \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)^2} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \cos(\gamma_i) = \frac{1 - \Gamma_i^2}{1 + \Gamma_i^2} \\ \sin(\gamma_i) = \frac{2 \cdot \Gamma_i}{1 + \Gamma_i^2} \end{cases} \quad (3.18)$$

La solution du système 3.15 donne alors les expressions présentées dans le système 3.19 que l'on retrouve dans la littérature du mécanisme de Bennett (voir [Serré *et al.*, 2009]).

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_4 \\ \theta_1 = \theta_3 \\ \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = -\frac{\tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) - 1}{\tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) + 1} \end{cases} \quad (3.19)$$

Avec les résultats de la fermeture angulaire des expressions 3.19, il est alors possible, en utilisant le jeu de valeurs du tableau 3.6, et en fixant, par exemple, une valeur de l'angle  $\theta_2$  (qui sera alors l'angle de commande de la boucle cinématique), de déterminer complètement l'ensemble des paramètres permettant de décrire une instance du mécanisme de Bennett. Ainsi, il est possible de calculer numériquement tous les termes de la matrice présentée dans le tableau 3.7. Trois exemples de jeux de valeurs pour les angles de liaisons sont présentés dans le tableau 3.8. Les valeurs présentées dans ce tableau assurent uniquement la fermeture de la boucle angulaire, pour assurer que le mécanisme soit assemblable, il faut ajouter les conditions relatives à la fermeture périmétrique qui fait l'objet du prochain paragraphe.

Tableau 3.8 Valeurs d'une instance de mécanisme de Bennett mobile

	$\theta_2$ (degrés)	$\theta_1$ (degrés)	$\theta_4$ (degrés)	$\theta_3$ (degrés)
Position 1	20	165,290	20	165,290
Position 2	30	157,804	30	157,804
Position 3	40	150,161	40	150,161

### 3.5.3 Fermeture périmétrique

Les équations permettant de rendre compte de la fermeture périmétrique vont être écrites ici en utilisant la technique des coupes métriques présentée dans la section 3.3.4. Cependant, avant d'écrire ces relations, il est nécessaire d'effectuer quelques simplifications dans la matrice de Gram, qui va permettre de les écrire. Pour cela, avant d'effectuer le produit décrit par la relation 3.5 en page 40, il est possible de rendre la matrice de Gram unitaire symétrique en choisissant, pour chaque produit scalaire, son expression la plus simple.

Ainsi, pour rendre la matrice de Gram symétrique, chaque produit scalaire exprimé par une fonction  $F_6$  sera remplacé par la valeur 0 ; chaque fonction  $F_5$  sera remplacé par l'expression correspondante avec une fonction  $F_1$  ; enfin chaque fonction  $F_4$  sera remplacé par la fonction  $F_2$  qui lui est symétrique (voir tableau 3.7). Après ces simplifications, la matrice n'est toutefois pas encore symétrique. Sur les quatrièmes diagonales se trouvent des fonctions  $F_3$  qui n'ont pas les mêmes expressions de part et d'autre de la diagonale (leurs paramètres d'entrée sont différents). Afin de rendre la matrice unitaire symétrique il existe donc deux possibilités : soit conserver la 4<sup>ème</sup> diagonale du haut, soit conserver celle du bas. Pour écrire des relations linéarisées, le choix de l'une ou l'autre de ces deux possibilités n'a aucune importance. La suite de cette section sera traitée avec la matrice de Gram du tableau 3.9. Dans ce cas, c'est la 4<sup>ème</sup> diagonale du haut qui a été conservée.

Tableau 3.9 Matrice de Gram unitaire symétrique pour un mécanisme de Bennett

	$\vec{n}_1$	$\vec{e}_1$	$\vec{n}_2$	$\vec{e}_2$	$\vec{n}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{n}_4$	$\vec{e}_4$
$\vec{n}_1$	1	0	$F_1(\alpha_1)$	$F_2(\alpha_1, \theta_2)$	$F_3(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2)$	$F_2(\theta_4, \alpha_4)$	$F_1(\alpha_4)$	0
$\vec{e}_1$	0	1	0	$F_1(\theta_2)$	$F_2(\theta_2, \alpha_2)$	$F_3(\theta_2, \alpha_2, \theta_3)$	$F_2(\alpha_4, \theta_1)$	$F_1(\theta_1)$
$\vec{n}_2$	$F_1(\alpha_1)$	0	1	0	$(\alpha_2)$	$F_2(\alpha_2, \theta_3)$	$F_3(\alpha_2, \theta_3, \alpha_3)$	$F_2(\theta_1, \alpha_2)$
$\vec{e}_2$	$F_2(\alpha_1, \theta_2)$	$F_1(\theta_2)$	0	1	0	$F_1(\theta_3)$	$F_2(\theta_3, \alpha_3)$	$F_3(\theta_3, \alpha_3, \theta_4)$
$\vec{n}_3$	$F_3(\alpha_1, \theta_2, \alpha_2)$	$F_2(\theta_2, \alpha_2)$	$F_1(\alpha_2)$	0	1	0	$F_1(\alpha_3)$	$F_2(\alpha_3, \theta_4)$
$\vec{e}_3$	$F_2(\theta_4, \alpha_4)$	$F_3(\theta_2, \alpha_2, \theta_3)$	$F_2(\alpha_2, \theta_3)$	$F_1(\theta_3)$	0	1	0	$F_1(\theta_4)$
$\vec{n}_4$	$F_1(\alpha_4)$	$F_2(\alpha_4, \theta_1)$	$F_3(\alpha_2, \theta_3, \alpha_3)$	$F_2(\theta_3, \alpha_3)$	$F_1(\alpha_3)$	0	1	0
$\vec{e}_4$	0	$F_1(\theta_1)$	$F_2(\theta_1, \alpha_1)$	$F_3(\theta_3, \alpha_3, \theta_4)$	$F_2(\alpha_3, \theta_4)$	$F_1(\theta_4)$	0	1

Une fois la matrice de Gram unitaire simplifiée, il est possible d'effectuer le produit décrit par la relation 3.5 en page 40. Dans le cas du mécanisme de Bennett, la matrice  $[L]$  utilisée pour ce produit est présentée par l'équation 3.20. Le résultat obtenu après avoir effectué le produit est présenté dans le tableau 3.10.

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ls_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ls_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ls_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ls_4 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Tableau 3.10 Matrice de Gram pour un mécanisme de Bennett

	$\vec{n}_1$	$\vec{e}_1$	$\vec{n}_2$	$\vec{e}_2$	$\vec{n}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{n}_4$	$\vec{e}_4$
$\vec{n}_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vec{e}_1$	0	$ls_1^2$	0	$ls_1 \cdot ls_2$ $\cdot F_1(\theta_2)$	0	$ls_1 \cdot ls_3$ $\cdot F_3(\theta_2, \alpha_2, \theta_3)$	0	$ls_1 \cdot ls_4$ $\cdot F_1(\theta_1)$
$\vec{n}_2$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vec{e}_2$	0	$ls_1 \cdot ls_2$ $\cdot F_1(\theta_2)$	0	$ls_2^2$	0	$ls_2 \cdot ls_3$ $\cdot F_1(\theta_3)$	0	$ls_2 \cdot ls_4$ $\cdot F_3(\theta_3, \alpha_3, \theta_4)$
$\vec{n}_3$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vec{e}_3$	0	$ls_1 \cdot ls_3$ $\cdot F_3(\theta_2, \alpha_2, \theta_3)$	0	$ls_2 \cdot ls_3$ $\cdot F_1(\theta_3)$	0	$ls_3^2$	0	$ls_3 \cdot ls_4$ $\cdot F_1(\theta_4)$
$\vec{n}_4$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vec{e}_4$	0	$ls_1 \cdot ls_4$ $\cdot F_1(\theta_1)$	0	$ls_2 \cdot ls_4$ $\cdot F_3(\theta_3, \alpha_3, \theta_4)$	0	$ls_1 \cdot ls_3$ $\cdot F_1(\theta_4)$	0	$ls_4^2$

Dans la matrice présentée dans le tableau 3.10, on remarque qu'il est facile d'effectuer trois coupures métriques (voir section 3.3.4) après les colonnes et les lignes représentant les vecteurs  $\vec{n}_2$ ,  $\vec{n}_3$  et  $\vec{n}_4$ . Ces trois coupures métriques permettent d'écrire les trois équations de fermeture périmétrique du mécanisme présentées dans le système 3.21. Ces équations

s'écrivent en utilisant la propriété 2 de la page 48. Par exemple, pour écrire la première équation du système 3.21, on commencera par sommer tous les termes de la sous-matrice délimitée en haut et à gauche des pointillés (qui délimitent la coupure) du tableau 3.10. À cette première somme, il faudra ensuite retrancher tous les termes de la sous-matrice délimitée en bas et à droite des mêmes pointillés. Les deux autres équations sont obtenues de la même façon en déplaçant la coupure.

$$\begin{cases} ls_1^2 - ls_2^2 - ls_3^2 - ls_4^2 - 2 \cdot ls_2 \cdot ls_3 \cdot F_1(\theta_3) - 2 \cdot ls_3 \cdot ls_4 \cdot F_1(\theta_4) - 2 \cdot ls_2 \cdot ls_4 \cdot F_3(\theta_3, \alpha_3, \theta_4) & = 0 \\ ls_1^2 + ls_2^2 - ls_3^2 - ls_4^2 + 2 \cdot ls_1 \cdot ls_2 \cdot F_1(\theta_2) - 2 \cdot ls_3 \cdot ls_4 \cdot F_1(\theta_4) & = 0 \\ ls_1^2 + ls_2^2 + ls_3^2 - ls_4^2 + 2 \cdot ls_1 \cdot ls_2 \cdot F_1(\theta_2) + 2 \cdot ls_2 \cdot ls_3 \cdot F_1(\theta_3) + 2 \cdot ls_1 \cdot ls_3 \cdot F_3(\theta_2, \alpha_2, \theta_3) & = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

### 3.5.4 Comportement géométrique

En cherchant une solution simultanée aux systèmes 3.15 et 3.21 on confèrera la caratère assemblable au mécanisme. La combinaison de ces deux systèmes peut être écrite sous la forme présentée dans le système global 3.22. De plus, pour assurer la mobilité de la chaîne cinématique, il faut que la solution trouvée au système traduisant l'assemblage soit indépendante du paramètre de commande de la boucle cinématique.

$$\begin{cases} H_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ls_1, ls_2, ls_3, ls_4, \theta_2, \theta_1, \theta_3, \theta_4) & = 0 \\ H_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ls_1, ls_2, ls_3, ls_4, \theta_2, \theta_1, \theta_3, \theta_4) & = 0 \\ H_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ls_1, ls_2, ls_3, ls_4, \theta_2, \theta_1, \theta_3, \theta_4) & = 0 \\ H_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ls_1, ls_2, ls_3, ls_4, \theta_2, \theta_1, \theta_3, \theta_4) & = 0 \\ H_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ls_1, ls_2, ls_3, ls_4, \theta_2, \theta_1, \theta_3, \theta_4) & = 0 \\ H_6(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ls_1, ls_2, ls_3, ls_4, \theta_2, \theta_1, \theta_3, \theta_4) & = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Comme il n'est pas possible de résoudre formellement le système 3.22, cette section propose de linéariser les équations de ce système autour d'une instance connue du mécanisme afin de pouvoir trouver une expression approchée de la solution autour de cette instance. Les valeurs des paramètres d'une telle instance sont données dans les tableaux 3.6 et 3.8.

Ainsi, en utilisant l'expression du système 3.22, il est possible de calculer les dérivées partielles des fonctions  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ ,  $H_5$  et  $H_6$  par rapport aux douze variables  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ls_1, ls_2, ls_3, ls_4, \theta_2, \theta_1, \theta_3, \theta_4\}$ . Ce calcul conduit directement à l'écriture du système sous une forme linéarisée autour d'une instance définie par douze valeurs numériques  $\{\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{40}, ls_{10}, ls_{20}, ls_{30}, ls_{40}, \theta_{20}, \theta_{10}, \theta_{30}, \theta_{40}\}$ . La forme de

ce système est présenté par l'expression 3.23. C'est sous cette forme que les équations de fermetures angulaires seront résolues dans cette section.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} \cdot (\alpha_i - \alpha_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_1}{\partial l s_i} \cdot (l s_i - l s_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_1}{\partial \theta_i} \cdot (\theta_i - \theta_{i0}) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_i} \cdot (\alpha_i - \alpha_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_2}{\partial l s_i} \cdot (l s_i - l s_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_2}{\partial \theta_i} \cdot (\theta_i - \theta_{i0}) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_i} \cdot (\alpha_i - \alpha_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_3}{\partial l s_i} \cdot (l s_i - l s_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_3}{\partial \theta_i} \cdot (\theta_i - \theta_{i0}) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_4}{\partial \alpha_i} \cdot (\alpha_i - \alpha_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_4}{\partial l s_i} \cdot (l s_i - l s_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_4}{\partial \theta_i} \cdot (\theta_i - \theta_{i0}) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_5}{\partial \alpha_i} \cdot (\alpha_i - \alpha_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_5}{\partial l s_i} \cdot (l s_i - l s_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_5}{\partial \theta_i} \cdot (\theta_i - \theta_{i0}) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_6}{\partial \alpha_i} \cdot (\alpha_i - \alpha_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_6}{\partial l s_i} \cdot (l s_i - l s_{i0}) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_6}{\partial \theta_i} \cdot (\theta_i - \theta_{i0}) = 0 \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Avec les notations précédentes, si l'on pose  $d\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i0}$ ,  $dl s_i = l s_i - l s_{i0}$  et  $d\theta_i = \theta_i - \theta_{i0}$ , les deux systèmes (fermeture angulaire et fermeture périmétrique) mis ensemble peuvent être écrits sous la forme matricielle 3.24.

$$\left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & A1 & M1 & K1 \\ \hline & & & \\ \hline & A2 & M2 & K2 \\ \hline \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ d\alpha_4 \\ dl s_1 \\ dl s_2 \\ dl s_3 \\ dl s_4 \\ d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Dans le système 3.24, on peut remarquer que les sous-matrices [A1] et [A2] font intervenir les dérivées partielles relatives aux paramètres de solides. Il faut également remarquer que les deux sous-matrices [M1] et [M2] font intervenir les dérivées partielles par rapport à la

---

variable  $\theta_2$  qui sert de commande à la chaîne cinématique. Enfin, les sous-matrices  $[K1]$  et  $[K2]$  font intervenir les dérivées partielles par rapport aux autres variables de liaisons. Toutes ces matrices sont évaluées avec les valeurs des paramètres et des variables de la configuration initiale (voir tableaux 3.6 et 3.8). On peut évaluer une matrice différente pour chaque position du tableau 3.8.

Le *comportement géométrique* local définit des relations entre les variations des paramètres de solides qui permettent d'assurer que le mécanisme demeurera mobile (dans le cas qui nous intéresse ici). Ainsi, ces relations ne doivent pas faire intervenir les paramètres  $d\theta_1$ ,  $d\theta_2$ ,  $d\theta_3$  et  $d\theta_4$ . Pour s'assurer de ce fait, la résolution du système sera effectuée en deux temps. Premièrement, les paramètres  $d\theta_1$ ,  $d\theta_3$  et  $d\theta_4$  seront résolus en fonction de  $d\theta_2$  et des écarts sur les paramètres de solides. Deuxièmement, le système sera exprimé en fonction de tous les paramètres de solides et de  $d\theta_2$ . À ce moment il conviendra de vérifier que  $d\theta_2$  n'intervient pas dans ces relations. Si cela est le cas, on pourra alors dire que ces relations traduisent le comportement géométrique local du mécanisme. De plus, Serré a montré dans [Serré *et al.*, 2009] que les relations fournies par une position de l'instance initiale permettaient d'assurer l'assemblage autour de cette position. Il a aussi montré que si l'on souhaitait assurer la mobilité pour  $\theta_2 \in [0, 2\pi]$  au voisinage des dimensions initiales, il fallait alors écrire les relations d'assemblage pour au moins deux configurations (i.e. deux valeurs de  $\theta_2$ ).

Tableau 3.11 Sous-matrice associée aux écarts sur les paramètres de liaisons

$M1$	$K1$
$M2$	$K2$

Ce paragraphe va maintenant détailler la première partie de la méthodologie présentée précédemment pour exprimer  $d\theta_1$ ,  $d\theta_3$  et  $d\theta_4$  en fonction de  $d\theta_2$  et des écarts sur les paramètres de solides. Pour cela, on peut calculer pour chaque position, le rang de la matrice du sous-système associé aux écarts des variables de liaisons, présentée dans le tableau 3.11. On se rend compte que le rang de cette matrice est toujours égal à 3, quelle que soit la position choisie (i.e. quelle que soit la valeur de l'angle  $\theta_2$ ). Cela signifie qu'il est toujours possible de trouver une expression de  $d\theta_1$ ,  $d\theta_3$  et  $d\theta_4$  en fonction de  $d\theta_2$  et des écarts sur les paramètres de solides à partir de trois équations du système 3.24. Ces équations peuvent être choisies sans critère particulier car la matrice 3.24 est de rang 6. Pour la suite, ce problème sera traité avec le sous-système composé des trois

premières lignes de l'équation 3.24. Ce sous-système peut s'écrire sous la forme présentée dans l'équation 3.25. Dans cette équation, la matrice  $[K1]$  est inversible, ce qui permet de déduire les expressions souhaitées pour  $d\theta_1$ ,  $d\theta_3$  et  $d\theta_4$  qui sont présentées dans l'équation 3.26.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A1 & M1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ d\alpha_4 \\ dl_{s_1} \\ dl_{s_2} \\ dl_{s_3} \\ dl_{s_4} \\ \hline d\theta_2 \end{bmatrix} + [K1] \cdot \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \end{bmatrix} = -[K1]^{-1} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline A1 & M1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ d\alpha_4 \\ dl_{s_1} \\ dl_{s_2} \\ dl_{s_3} \\ dl_{s_4} \\ \hline d\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Pour effectuer la deuxième étape de résolution, il faut exprimer la deuxième partie du système (celle composée des sous-matrices  $[A2]$ ,  $[M2]$  et  $[K2]$ ) sous la forme 3.25. Dans ce système, il est possible de substituer les expressions de  $d\theta_1$ ,  $d\theta_3$  et  $d\theta_4$  par celles trouvées dans 3.26. Finalement, ce sous-système s'exprime par l'équation 3.27 ou sous la forme simplifiée 3.28. Ces trois relations traduisent la caractère assembleable de la boucle autour de la position choisie pour  $\theta_2$ .

$$[A2 \quad M2] \cdot \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ d\alpha_4 \\ \dots \\ ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \\ ds_4 \\ \dots \\ d\theta_2 \end{bmatrix} + [K2] \cdot \left( -[K1]^{-1} \cdot [A1 \quad M1] \cdot \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ d\alpha_4 \\ \dots \\ ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \\ ds_4 \\ \dots \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$([A2 \quad M2] - [K2] \cdot [K1]^{-1} \cdot [A1 \quad M1]) \cdot \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ d\alpha_4 \\ \dots \\ ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \\ ds_4 \\ \dots \\ d\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Suivant les conclusions de Serré dans [Serré *et al.*, 2009], l'équation 3.28 appliquée à une position du système (voir tableau 3.8) permet d'écrire le *comportement géométrique* d'assemblage du mécanisme autour de cette position. Le calcul numérique de la matrice  $([A2 \quad M2] - [K2] \cdot [K1]^{-1} \cdot [A1 \quad M1])$  donne le système 3.29. On peut remarquer que la dernière colonne indique bien que ces relations sont indépendantes de  $d\theta_2$ . Il s'agit donc bien de relations traduisant le caractère mobile du *comportement géométrique* de la boucle étudiée autour de la position choisie (ici  $\theta_2 = 20^\circ$ ). Ces trois relations sont indépendantes.

$$\begin{bmatrix} 2,000 & 1,879 & -2,165 & -1,934 & 2,000 & 1,879 & -1,905 & -1,934 & 0 \\ -3,638 & -4,121 & 3,638 & 4,121 & 5,255 & 5,343 & -5,255 & -5,343 & 0 \\ -5,803 & -6,055 & 5,638 & 6,000 & 3,351 & 3,409 & -3,255 & -3,464 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ d\alpha_4 \\ dl s_1 \\ dl s_2 \\ dl s_3 \\ dl s_4 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

D'après les résultats présentés par Serré dans [Serré *et al.*, 2009], pour garantir la mobilité d'un mécanisme de Bennett au voisinage de ses dimensions initiale et pour un angle de commande  $\theta_2 \in [0; 2\pi]$ , il faut que celui-ci soit assemblable dans deux positions distinctes. La méthode précédente a donc été appliquée pour la position  $\theta_2 = 40^\circ$ . Ces conditions locales d'assemblage sont données par les trois relations 3.30.

$$\begin{bmatrix} 2,000 & 1,532 & -2,608 & -1,735 & 2,000 & 1,532 & -1,649 & -1,735 & 0 \\ -2,596 & -4,468 & 2,596 & 4,468 & 4,654 & 4,996 & -4,654 & -4,996 & 0 \\ -5,205 & -6,203 & 4,596 & 6,000 & 3,005 & 3,261 & -2,654 & -3,464 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ d\alpha_4 \\ dl s_1 \\ dl s_2 \\ dl s_3 \\ dl s_4 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Ainsi, pour assurer la mobilité, il faut résoudre simultanément les systèmes 3.29 et 3.30. La matrice de ce système étant de rang cinq, il est possible d'exprimer cinq relations de *comportement géométrique*. Par exemple, les trois relations du système 3.29 et les deux premières relations du système 3.30 sont indépendantes. Le système obtenu est présenté dans le système 3.31. Ces relations indiquent au concepteur les contraintes géométriques qu'il se doit de respecter si il souhaite conserver la mobilité de la boucle. Dans ce cas, le concepteur pourra fixer arbitrairement la valeur de trois paramètres parmi les huit

---

disponible :  $dl_{s_1}$ ,  $dl_{s_2}$ ,  $dl_{s_3}$ ,  $dl_{s_4}$ ,  $d\alpha_1$ ,  $d\alpha_2$ ,  $d\alpha_3$  et  $d\alpha_4$ . La valeur des cinq autres étant obtenue par la résolution du système 3.31.

$$\begin{bmatrix} 2,000 & 1,879 & -2,165 & -1,934 & 2,000 & 1,879 & -1,905 & -1,934 & 0 \\ -3,638 & -4,121 & 3,638 & 4,121 & 5,255 & 5,343 & -5,255 & -5,343 & 0 \\ -5,803 & -6,055 & 5,638 & 6,000 & 3,351 & 3,409 & -3,255 & -3,464 & 0 \\ 2,000 & 1,532 & -2,608 & -1,735 & 2,000 & 1,532 & -1,649 & -1,735 & 0 \\ -2,596 & -4,468 & 2,596 & 4,468 & 4,654 & 4,996 & -4,654 & -4,996 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ d\alpha_4 \\ dl_{s_1} \\ dl_{s_2} \\ dl_{s_3} \\ dl_{s_4} \\ d\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Comparaison des Résultats :

Pour comparer les résultats avec ceux exposés dans [Serré *et al.*, 2009], ces cinq relations ont été utilisées pour exprimer  $dl_{s_1}$ ,  $dl_{s_2}$ ,  $d\alpha_1$  et  $d\theta_2$  en fonction de  $dl_{s_3}$ ,  $dl_{s_4}$ ,  $d\alpha_2$ ,  $d\alpha_3$  et  $d\alpha_4$ . Le résultat, identique à celui de Serré, est présenté dans l'équation 3.32.

Remarque : On constate, encore une fois, que ces cinq relations ne dépendent pas de  $d\theta_2$ .

$$\begin{bmatrix} dl_{s_3} \\ dl_{s_4} \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_3 \\ d\alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,000 & 0,000 & 0 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 & 0 \\ 1,732 & -1,000 & -3,000 & 0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0 \\ 1,732 & -1,000 & -3,000 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dl_{s_1} \\ dl_{s_2} \\ d\alpha_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

### 3.5.5 Application à un problème thermique

Cette partie va proposer un cas d'utilisation du *comportement géométrique* du mécanisme de Bennett. Pour ce cas, il sera supposé que les quatre solides du mécanisme vont subir une dilatation thermique suivant la loi 1.2. Il sera également supposé que les quatre angles des solides demeureront inchangés avec les variations de température. Comme ces dilatations thermiques ne respectent par les relations de *comportement géométrique* exprimées plus tot, ni pour le caractère assemblable et encore moins pour le caractère mobile, le mécanisme va perdre sa mobilité avec l'élévation de température. L'objectif de cette partie est d'assister le concepteur en lui fournissant des critères permettant d'assurer le fonctionne-

ment du mécanisme sur une plage de température. Dans ce cas précis, le résultat fourni sera la valeur minimale du jeu qu'il faut assurer aux températures qui délimitent la plage d'utilisation pour que le mécanisme continue d'être mobile sur la plage de température choisie.

Le calcul du jeu a été effectué grâce aux travaux de Serré et M'Henni [M'henni, 2010; Serré *et al.*, 2009]. Leur méthode suppose que l'on dispose à la fois des paramètres dimensionnels des pièces réelles, mais également d'un mécanisme mobile idéal qui minimise, selon un critère laissé au choix de l'utilisateur, les écarts entre les pièces réelles et les pièces de ce mécanisme mobile idéal. Cette section va s'attacher à montrer comment le comportement géométrique permet de trouver un mécanisme mobile idéal afin d'appliquer la méthode de Serré et M'Henni.

### Calcul du mécanisme mobile idéal

Supposons que les dimensions spécifiées dans le tableau 3.6 soient celles du mécanisme à 20°C et que l'on souhaite calculer les dimensions des barres, prises séparément, pour une utilisation à 100°C. Ces dimensions calculées des barres, pour une température de 100°C, ne permettent pas d'assembler le mécanisme et, a fortiori de le rendre mobile. Les paramètres et les résultats de l'application de la formule 1.2 sont fournis dans le tableau 3.12.

Tableau 3.12 Dimension du mécanisme de Bennett à 100°C

Paramètre	Valeur à 20°C	Coeff. de dilatation thermique	Valeur à 100°C
$\alpha_1$	30°	—	30°
$\alpha_2$	-60°	—	-60°
$\alpha_3$	30°	—	30°
$\alpha_4$	-60°	—	-60°
$ls_1$	1,0000 m	$15 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	1,0012 m
$ls_2$	1,7321 m	$30 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	1,7362 m
$ls_3$	1,0000 m	$30 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	1,0024 m
$ls_4$	1,7321 m	$30 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	1,7362 m

Pour la suite, on peut définir deux jeux de paramètres. Le premier, qui représente les écarts dimensionnels entre le mécanisme mobile à 20°C et le mécanisme réel à 100°C, sera noté  $\{ ea_1, ea_2, ea_3, ea_4, els_1, els_2, els_3, els_4 \}$ . Cet ensemble d'écarts représente en pratique les dilatations thermiques. Le second représente les écarts entre d'une part, le mécanisme mobile à 20°C et d'autre part, le mécanisme mobile idéal qui est le plus proche du mécanisme réel à 100°C  $\{ oa_1, oa_2, oa_3, oa_4, ols_1, ols_2, ols_3, ols_4 \}$ . Pour que le mécanisme idéal soit mobile, il faut que les écarts  $\{ oa_1, oa_2, oa_3, oa_4, ols_1, ols_2, ols_3,$

$ols_4$  } vérifient la relation 3.32. Comme cette relation est indépendante de  $d\theta_2$  on peut la réécrire sous la forme 3.33.

$$\begin{bmatrix} ols_1 \\ ols_2 \\ o\alpha_1 \\ ols_3 \\ ols_4 \\ o\alpha_2 \\ o\alpha_3 \\ o\alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 \\ 1,732 & -1,000 & -3,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \\ 1,732 & -1,000 & -3,000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ols_1 \\ ols_2 \\ o\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Avec la forme de l'équation 3.33, le problème revient à trouver les trois écarts  $ols_1$ ,  $ols_2$  et  $o\alpha_1$  qui minimisent l'écart entre la structure réelle à 100°C et le mécanisme mobile idéalisé. Si on veut minimiser cet écart au sens des moindres carrés, on peut alors calculer la pseudo-inverse de Moore-Penrose [Penrose, 1955] de la matrice de l'équation 3.33 et calculer les trois écarts  $ols_1$ ,  $ols_2$  et  $o\alpha_1$  par la formule 3.34.

$$\begin{bmatrix} ols_1 \\ ols_2 \\ o\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 \\ 1,732 & -1,000 & -3,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \\ 1,732 & -1,000 & -3,000 \end{bmatrix}^+ \cdot \begin{bmatrix} els_1 \\ els_2 \\ e\alpha_1 \\ els_3 \\ els_4 \\ e\alpha_2 \\ e\alpha_3 \\ e\alpha_4 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Finalement, en combinant les relations 3.33 et 3.34, il est possible d'obtenir l'expression 3.35 permettant de calculer les écarts entre le mécanisme mobile à 20°C et le mécanisme mobile idéal à 100°C (au sens des moindres carrés) et la valeur des dilatations thermiques réelles.

$$\begin{bmatrix} ols_1 \\ ols_2 \\ o\alpha_1 \\ ols_3 \\ ols_4 \\ o\alpha_2 \\ o\alpha_3 \\ o\alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 \\ 1,732 & -1,000 & -3,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \\ 1,732 & -1,000 & -3,000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 \\ 1,732 & -1,000 & -3,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \\ 1,732 & -1,000 & -3,000 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} els_1 \\ els_2 \\ e\alpha_1 \\ els_3 \\ els_4 \\ e\alpha_2 \\ e\alpha_3 \\ e\alpha_4 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

L'application numérique effectuée avec les valeurs du tableau 3.12 donne les valeurs présentées en 3.36 pour les écarts définissant le mécanisme mobile idéal à 100°C. Les dimensions de ce mécanisme sont données dans le tableau 3.13.

$$\begin{bmatrix} ols_1 \\ ols_2 \\ o\alpha_1 \\ ols_3 \\ ols_4 \\ o\alpha_2 \\ o\alpha_3 \\ o\alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,9286 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 4,0827 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2,2269 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 1,9286 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 4,0827 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -7,4231 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \\ -2,2269 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -7,4231 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Tableau 3.13 Dimensions du mécanisme de Bennett mobile idéal

Paramètre	Mécanisme réel à 100°C	Mécanisme idéal mobile
$\alpha_1$	30°	29,9872°
$\alpha_2$	-60°	-60,0043°
$\alpha_3$	30°	29,9872°
$\alpha_4$	-60°	-60,0043°
$ls_1$	1,0012 m	1,0019 m
$ls_2$	1,7362 m	1,7361 m
$ls_3$	1,0024 m	1,0019 m
$ls_4$	1,7362 m	1,7361 m

### Calcul du jeu

À partir du mécanisme mobile idéal, obtenu grâce aux écarts de la formule 3.36, il est possible de calculer le jeu minimal que doit permettre chaque liaison pour assurer la mobilité du système. Le calcul de ce jeu minimum peut être effectué grâce à la technique présentée dans les travaux de Serré et M'Henni [M'henni, 2010; Serré *et al.*, 2009].

La méthode de Serré et M'Henni suppose que chaque pièce du mécanisme réel (à 100°C) soit associée rigidement à une pièce du mécanisme idéal (le chapitre 4 indique une façon d'associer deux pièces). Ensuite, pour chaque liaison, on dispose de trois axes : l'axe de la liaison du mécanisme idéal, et l'axe de cette même liaison défini par chacune des deux pièces du mécanisme réel. Le jeu nécessaire sera alors qualifié en mesurant l'angle ( $\gamma$ ) et la distance ( $d$ ) entre les deux axes des pièces réelles lors d'un mouvement du mécanisme mobile idéal (voir figure 3.8 ).

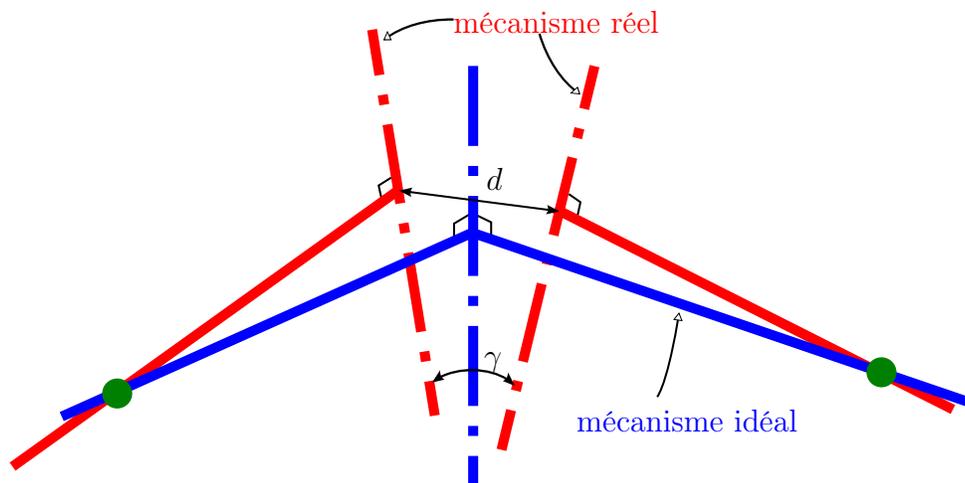


Figure 3.8 Mesure des paramètres qualifiant un jeu

Les calculs d'angle et de distance effectués avec les valeurs numériques du tableau 3.13 donnent les résultats présentés dans les figures 3.9 et 3.10. La figure 3.10 représente l'évolution de l'angle entre les axes des deux pièces réelles au cours du mouvement du mécanisme idéal. Ainsi pour assurer la mobilité du mécanisme réel à 100°C il faudra que la liaison pivot entre les barres 1 et 2 permette aux pièces réelles d'avoir un angle au moins égal à  $0.4874^\circ$  lorsque la température est de 100°C. De la même manière, la figure 3.9 représente l'évolution de la distance entre les deux axes au cours du mouvement du mécanisme idéal. Pour que le mécanisme réel soit mobile, la distance minimale entre les deux axes doit être de  $4.0140 \cdot 10^{-7} m$  à 100°C.

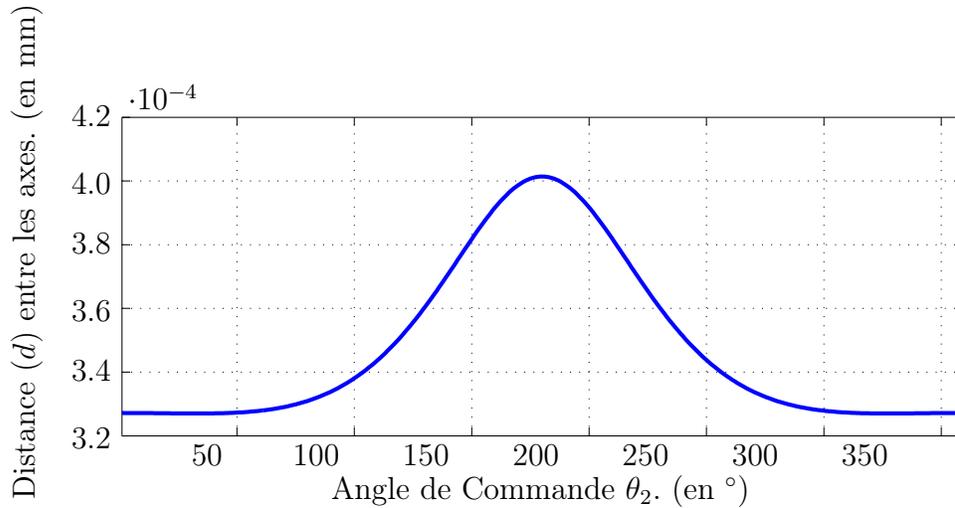


Figure 3.9 Evolution de la distance dans la liaison entre les barres 1 et 2

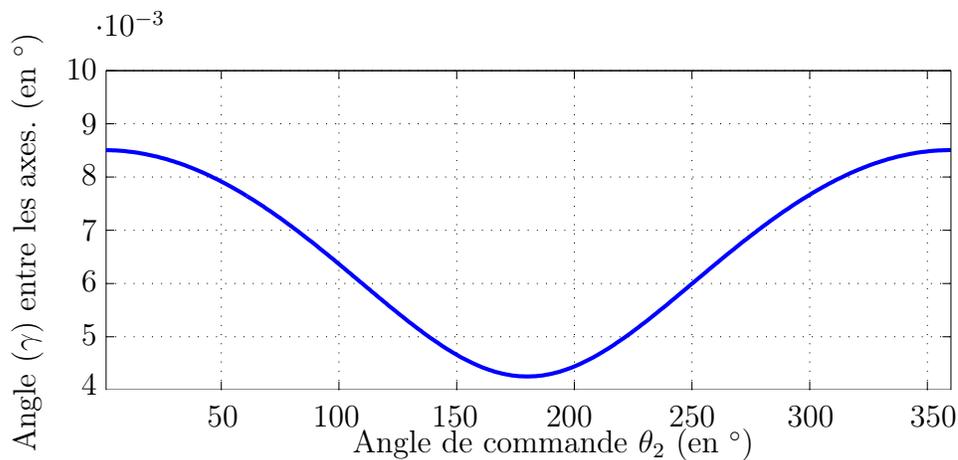


Figure 3.10 Evolution de l'angle dans la liaison entre les barres 1 et 2

### 3.5.6 Bilan

Cet exemple a permis de montrer comment le modèle de représentation présenté au début de ce chapitre peut servir pour trouver le comportement géométrique local d'un mécanisme mobile surcontraint. De plus, il a également servi à montrer comment ce comportement géométrique pouvait servir pour calculer un mécanisme mobile idéal qui serait le plus proche d'une configuration réelle non mobile. Enfin, comment à partir de ce mécanisme mobile idéal et de la configuration réelle, il était possible de spécifier les jeux que doivent permettre les liaisons pour la phase de conception détaillée.

---

## 3.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté un modèle géométrique simplifié pour représenter des mécanismes mobile en phase de préconception. En effet, ce modèle propose de représenter la géométrie de chaque solide par seulement deux paramètres et celle de chaque liaison mono-axiale par deux autres paramètres. Par la suite, une représentation mathématique de ce modèle permettant de spécifier des contraintes sur les paramètres du modèle géométrique a été proposée. Il a également été proposé d'introduire deux contraintes pour des mécanismes en boucle fermée : l'assemblabilité et la mobilité. Enfin, il a été montré comment exprimer ces deux nouvelles contraintes sous la forme de relations algébriques entre les paramètres du modèle. On peut donc dire que ces relations représentent le comportement géométrique du mécanisme.

Enfin, l'exemple traité dans ce chapitre a de nouveau mis en évidence l'intérêt des relations de comportement géométrique pour résoudre algébriquement, en utilisant des représentations géométriques simplifiées, un problème de mobilité d'un mécanisme faisant intervenir un effet physique. Les solutions alors obtenues pour ce problème de pré-conception peuvent ensuite servir de spécifications pour les phases suivantes du cycle de conception - comme la phase de conception détaillée.



# CHAPITRE 4

## ASSOCIATION DE DEUX REPRÉSENTATIONS

### Introduction

Ce chapitre est constitué de l'article "Geometrical tools for the description and control of functional specifications at the conceptual design phase.<sup>1</sup>" publié dans la revue *International Journal of Design and Innovation Research* parue en 2010 [Mandil *et al.*, 2010].

Cet article présente une technique permettant d'associer les représentations sans coordonnées de deux composants dans un assemblage. Le modèle géométrique utilisé dans cet article est exactement le même que celui présenté dans ce mémoire de thèse. Il est aussi basé sur l'utilisation des matrices de Gram (voir section 3.2.1). Cette association est basée sur la déclaration d'une coïncidence de deux repères orthonormaux. Cet article montre comment déclarer l'association de deux composants en utilisant un critère d'association basé sur la factorisation de Cholesky.

#### Auteurs :

Guillaume Mandil : Étudiant au doctorat à l'université de Sherbrooke et au LISMMA

Philippe Serré : Maître de conférences au LISMMA

Mireille Moinet : Ingénieur de recherches au LISMMA

Alain Desrochers : Professeur à l'université de Sherbrooke

---

<sup>1</sup>Outils pour description et la spécification d'exigences géométriques et fonctionnelles en pré-conception

## 4. Geometrical tools for the description and control of functional specifications at the conceptual design phase.

Guillaume MANDIL<sup>1,2</sup>, Philippe SERRÉ<sup>2</sup>, Mireille MOINET<sup>2</sup>,  
Alain DESROCHERS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université de Sherbrooke, Département de génie mécanique,  
2500 boulevard de l'université,  
Sherbrooke Québec, Canada J1K 2R1

<sup>2</sup> LISMMA – Supméca Paris  
3 rue Fernand Hainaut  
F-93407 Saint-Ouen Cedex, France

Guillaume.Mandil@Usherbrooke.ca

---

**RÉSUMÉ.** Cet article présente un modèle géométrique à base de points et de segments de droites utilisé pour représenter des mécanismes dans les phases de préconception. Ce modèle est traduit sous forme mathématique par une matrice d'incidence qui représente la topologie et une matrice de Gram qui représente les informations métriques de l'objet. Il est ensuite indiqué comment assembler deux objets représentés par ce modèle. Enfin, un exemple permet de montrer l'intérêt de ce modèle pour réaliser le suivi d'une exigence géométrique au cours du cycle de vie du produit.

**ABSTRACT.** This paper presents a geometrical model that uses points and line segments to describe mechanisms at the early phases of the product design process. This model allows the description of an object with a topological matrix and another matrix that contains the metric information about the object. The paper also indicates how to associate two objects represented using this model. Finally, the interest of this model for the mapping of a geometrical requirement along the product life-cycle is shown on a case study.

**MOTS-CLÉS :** Exigence géométrique, Cycle de vie, Tenseur métrique, Matrices de Gram, Géométrie non Cartésiennes.

**KEYWORDS:** Geometrical requirement; Life Cycle; Metric tensor; Gram matrices; coordinate free geometry.

---

### 4.1. Introduction

During the design process of a mechanical product, functional requirements are translated into geometrical requirements. For instance the functional requirement saying that: “part A must follow a given face of part B along the movement” can be translated as: “The clearance between the two surfaces of part A and B must remain inferior to  $x$  mm”. This translation could also be applied to the definition of kinematic joints. The technique developed by M’Henni [M’henni, 2010] allows the accurate calculation of the geometrical parameters of the joint. Moreover, a mechanical product is subjected to dimensional variations along its life cycle due to mechanical strains. These variations affect the dimensions of parts that in turn influence the value of the geometrical requirements. Generally there exist several useful values of a requirement depending on the use-case or the user. For instance, the manufacturer is interested in the value of the geometrical requirements at the assembly stage of the life-cycle to perform the assembly of the parts and components. From another point of view, the final user is interested in the values of the same requirement but under operating conditions.

As a matter of fact, considering the designer’s point of view, it becomes necessary to link (or to compare) the values of a geometrical requirement at several stages of the product life-cycle. In particular, for the designer, several problems appear: “Does the chosen dimension for manufacturing (or assembly) allow the geometrical requirements under operating conditions to be met?” or “Which dimensions must be specified on the drawing to ensure a given value of the geometrical requirement in operation?”

In order to compare the geometric configuration of an object (or product) at two distinct stages of its life-cycle, this paper proposes a technique to combine the two mathematical representations of the same object under different use-cases in a unique and common representation.

Authors noticed that there exist various tools to manage the detailed design of a product. For instance the Computer Aided Design (CAD) tools help designers define the detailed and nominal 3D geometry of a product. From this nominal geometrical model it becomes possible to use a Finite Element Analysis (FEA) to calculate the dimension variations due to mechanical strains [Pierre *et al.*, 2009] and to rebuild a geometrical model [Louhichi, 2008]. From the nominal model, there also exists several methods [Ghie, 2004], [Anselmetti, 2006], to deal with the tolerancing problem. This addresses the issue of the real versus nominal dimensions of the parts. These methods help the mechanical designer in the specification of tolerances zones and the management and control of dimensional uncertainties due to manufacturing.

On the other hand, there are few tools available for geometry management at the early design phases. Consequently this work proposes a geometrical model dedicated to preliminary design that allows the calculation of the evolution of geometrical parameters or requirements along the product life-cycle. In consequence, this work includes the proposition of a simplified coordinate free representation to represent objects. Coordinate free approaches allow the direct specification of intrinsic properties of geometrical objects that avoid the artificial dependence with a reference frame induced by the coordinates.

The first part of this paper will detail the topological and vectorial model used for representing the object. Then the second part will detail how to associate two

topological models. Finally, the third part of the paper will explicit the association of two vectorial models.

#### 4.2. Notations

This paper will use the following conventions:

Matrices will be noted with capital bold letters:  $\mathbf{M}$  ;

Vectors will be noted with bold letters:  $\mathbf{u}$  ;

Scalar number will be noted with italic letters:  $x$ .

Scalar product of vectors  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  is noted  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

$\otimes$  represent the product of two matrices.

#### 4.3. Models

The model used to represent objects is based on simplified geometries that describe a skeleton of the object. It includes points and line segments (or pairs of points). From the authors point of view, this representation is sufficient for the description of geometrical objects during the preliminary design phase. The example of an object that can be represented using this model is presented in figure 4.1. In this example, points are noted P1, P2, P3 and P4. Segment lines are noted S1, S2, S3, S4, S5 and S6.

In addition to this graphical and geometrical representation, the model is composed of two matrices. The first one is used to represent the topology of the object while the second gives the metric to measure the length and orientation of the elements.

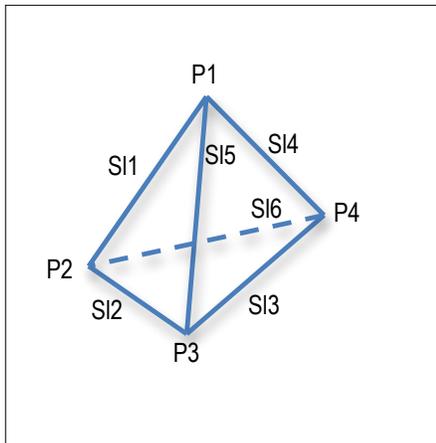


Figure 4.1: Example of object represented by the model.

#### 4.3.1. Topological Model

The topological model contains the points and the line segments used to describe the object. It also describes how points and segments are connected. This information is represented in a topological graph constituted of oriented simplexes. The points  $\{P1, P2, P3, P4\}$  of figure 4.1 are represented in the topological graph (figure 4.2) by the vertices  $\{V1, V2, V3, V4\}$ . In the same way, the line segments  $\{S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$  are represented by the arcs  $\{E1, E2, E3, E4, E5, E6\}$ . Consequently, the topological model must contain the list of the vertices and arcs that describes the object. This description is completed by the information on the incidence of vertices on arcs. This information indicates from which vertex the arc starts and at which vertex it ends. The topological graph associated to the object drawn in figure 4.1 is represented in figure 4.2.

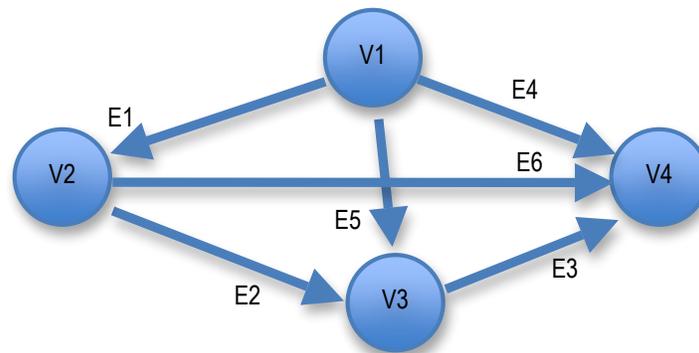


Figure 4.2: Topological graph associated to the example object.

#### 4.3.2. Geometrical model.

The geometrical model is one realization of the topological oriented graph. To perform this realization a vector is associated to each arc. The vector will take the same orientation as the arc.

This geometrical or vectorial model provides the lengths of all the segments and their relative orientation. It is coordinate free in the sense that the mathematical representation used to store this information does not depend on any coordinate system. In concrete terms, a given geometry described in two different coordinate systems would have a common, unique description if a coordinate free system were used. From there it becomes possible for the designer to describe the intrinsic geometric properties of an object using a compact mathematical model without paying attention to the coordinate system in which the object is defined.

During the preliminary design phase, the geometrical parameters are subjected to a lot of changes. Consequently, a tool for the comparison of two representations of an object at this stage of the design process should be based on a mathematical model that allows the efficient solving of geometric constraints in order to quickly rebuilt an object as some parameters are updated. From there, the choice of using Gram Matrices as vectorial model has been motivated by the existence of generic constraints specification techniques (as in [Serré *et al.*, 2006]) and solvers (cf. in [Moinet *et al.*, 2010]).

For the example of figure 4.1 the set of vectors  $\mathbf{Su}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_6\}$  is associated to the set of arcs  $\{E1, E2, E3, E4, E5, E6\}$  in the topological graph (figure 4.2).

### 4.3.3. Mathematical tools

#### 4.3.3.1 Tools for the topological model

Topological informations are stored in a matrix that contains vertices in its columns and arcs in its rows. For each line of the matrix (representing an arc) a -1 indicates from which vertex the arc starts, a +1 indicates at which vertex the arc ends, all other terms of the line being equal to zero. For example the matrix relative to figure 4.2 is shown in table 4.1.

C	V1	V2	V3	V4
E1	-1	1	0	0
E2	0	-1	1	0
E3	0	0	-1	1
E4	-1	0	0	1
E5	-1	0	1	0
E6	0	-1	0	1

**Table 4.1:** Connection matrix  $\mathbf{C}$  relative to the example object of figure 4. 1.

#### 4.3.3.2 Tools for the vectorial model

The following definition of a Gram matrix is found in [Gentle, 2007] : "the Gram matrix  $\mathbf{G}$  (or Gramian matrix or Gramian) of a set of vectors  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$  in an inner product space is the Hermitian matrix of inner products, whose entries are given by equation [4.1]".  $G_{lm}$  represents the term of the row  $l$  and column  $m$  of the  $\mathbf{G}$  matrix. In this paper the names of all Gram matrices start with a capital "G". Gram matrices are positive semidefinite.

$$G_{pq} = \langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q \rangle \quad [4.1]$$

Remark: a metric tensor is a particular case of a Gram matrix which has its rank equal to its dimension. For example, in the 3D Euclidian space, a 3 by 3 Gram matrix which has a nonzero determinant (which is equivalent to being constituted of 3 independent vectors) is called a metric tensor. In this paper, the names of all the metric tensors start with a capital "M".

For the example object of figure 4.1 the corresponding Gram matrix is shown in table 4.2

G	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_4$	$\mathbf{u}_5$	$\mathbf{u}_6$
$\mathbf{u}_1$	$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_1 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_1 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_6, \mathbf{u}_1 \rangle$
$\mathbf{u}_2$	$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_2 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_2 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_6, \mathbf{u}_2 \rangle$
$\mathbf{u}_3$	$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_3 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_3 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_6, \mathbf{u}_3 \rangle$
$\mathbf{u}_4$	$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_4 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_4 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_6, \mathbf{u}_4 \rangle$
$\mathbf{u}_5$	$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_5 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_5 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_5 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_5 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_6, \mathbf{u}_5 \rangle$
$\mathbf{u}_6$	$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_6 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_6 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_6 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_6 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_6 \rangle$	$\langle \mathbf{u}_6, \mathbf{u}_6 \rangle$

**Table 4.2:** Gram matrix relative to the example object.

From the Gram matrices it is immediately possible to obtain the scalar product between two vectors. From there, it is easy to deduce the norm of a vector with relation [4.2] and the angle between two vectors with relations [4.2] and [4.3].

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_p\| &= \sqrt{\langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_p \rangle} \\ \|\mathbf{u}_p\| &= \sqrt{G_{p,p}} \end{aligned} \quad [4.2]$$

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q) &= \langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q \rangle / (\|\mathbf{u}_p\| \|\mathbf{u}_q\|) \\ \cos(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q) &= G_{pq} / (\sqrt{G_{p,p}} \sqrt{G_{q,q}}) \end{aligned} \quad [4.3]$$

#### 4.3.4. General discussion

Thanks to the connection matrix, the topological model describes the points, line segments, and the way they are connected. The vectorial model provides the lengths and the relative orientation of the line segments using the Gram matrix. These two models contain all the necessary information for the description of an object. Consequently, the specification of the list of points and line segments, along with the connection matrix and the Gram matrix is sufficient to describe the skeleton of the object. This model can either describe an elementary skeleton object or the association of two objects.

#### 4.4. Association of objects

As mentioned in the introduction (section 4.1), the aim of this work is the association of the two mathematical representations of the same object (at two stages of its life-cycle under different use-cases) in a unique and common representation. To perform such an association it is necessary to aggregate the topological connection matrices, and to associate the vectorial Gram matrix as shown in figure 4.3.

For the two representations, it is crucial that the result of the association remains describable with the connection and Gram matrices. To ensure this condition, authors use a declarative approach. One declaration is available for each association. The topology association is declared with the coincidence of two vertices. The vectorial model association is declared by the coincidence of two orthonormal reference frames. These reference frames are constituted by primary, secondary and tertiary datum elements from tolerancing. Hence for tolerancing applications no other constraints are needed. However, it is being envisioned to add other constraints for the declaration of the association of two objects to extend this approach to other fields of product design.

In any case, this paper considers that a complete representation of the elementary objects to be associated already exists, thanks to a connection matrix and a Gram matrix. For this application it is assumed that a model of the object exists. This model is instanced at two distinct stages “ $\alpha$ ” and “ $\beta$ ” of the life-cycle. The reader is advised that the letters  $\alpha$  and  $\beta$  always refer to the life cycle stages in all the following variable names. For the stage “ $\alpha$ ” of the life cycle two matrices are available :  $\mathbf{G}\alpha$  and  $\mathbf{C}\alpha$ . The elements of the  $\mathbf{G}\alpha$  Gram matrix are scalar products between vectors from the set  $\mathbf{S}\mathbf{u}\alpha = \{\mathbf{u}\alpha_1, \mathbf{u}\alpha_2, \dots, \mathbf{u}\alpha_q\}$ . The  $\mathbf{C}\alpha$  connection matrix indicates the relations between the arcs  $\{E\alpha_1, E\alpha_2, \dots, E\alpha_q\}$  and the vertices  $\{V\alpha_1,$

$V\alpha_2, \dots, V\alpha_s$ . The index  $q$  is used to count arcs and vectors and the index  $s$  is used to count vertices. For the stage “ $\beta$ ” of the life cycle, the matrix  $G\beta$  represents the set  $Su\beta = \{u\beta_1, u\beta_2, \dots, u\beta_q\}$  and the matrix  $C\beta$  indicates the connection between the arcs  $\{E\beta_1, E\beta_2, \dots, E\beta_q\}$  and the vertices  $\{V\beta_1, V\beta_2, \dots, V\beta_s\}$ .

In our case, there are no changes in the topology of the object; consequently  $C\alpha = C\beta$ . Moreover, at the stage “ $\alpha$ ” of the life cycle, the  $C\alpha$  and  $G\alpha$  matrices can be obtained with the technique developed by Moinet [Moinet, 2008]. The  $C\beta$  and  $G\beta$  matrices are calculated using the same approach.

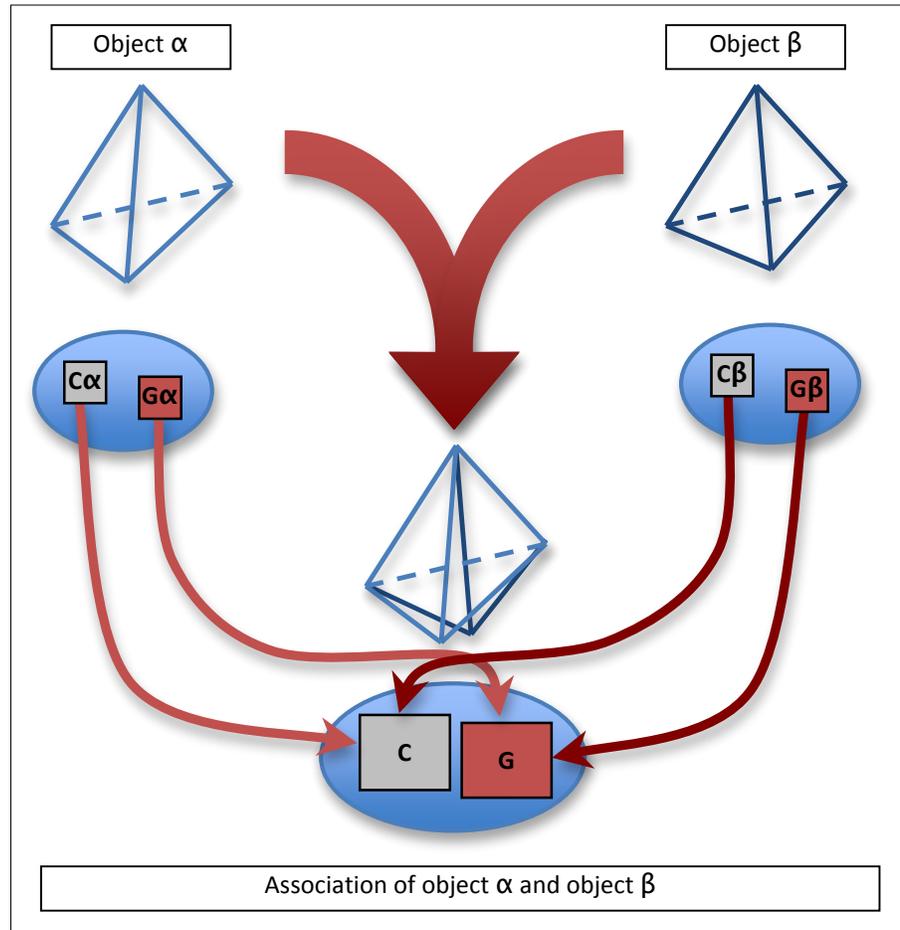


Figure 4.3: Association of two representations at phase “ $\alpha$ ” and “ $\beta$ ” of the life-cycle.

#### 4.4.1. Calculation of the global connection matrix

The calculation of the global connection matrix  $C$  (see figure 4.3) is based on the declaration of the coincidence of two vertices. This calculation supposes that the  $C\alpha$  and  $C\beta$  matrices relative to each life-cycle stage are available. The generic term of  $C\alpha$  is noted  $C\alpha_{q,s}$  and the generic term of  $C\beta$  is noted  $C\beta_{q,s}$ . Without loss of generality, we also assume that the user has declared the coincidence of the first vertices of each set  $V\alpha_1$  and  $V\beta_1$ . If the user declares another constraint (i.e.  $V\alpha_2$  coincident with  $V\beta_4$ ), it is possible to meet the previous hypothesis by renaming vertices and rearranging the corresponding  $C$  matrices.

At the first stage of this procedure, the  $\mathbf{C}\alpha$  and  $\mathbf{C}\beta$  matrices are associated in a global  $\mathbf{C}$  matrix presented in table 4.3. Initially, the vertices of configuration “ $\beta$ ” have no relation with the arcs of configuration “ $\alpha$ ”; consequently the up-right terms of the global  $\mathbf{C}$  matrix are all set to zero. In the same way, the bottom-left terms are also set to zero because vertices of configuration “ $\alpha$ ” have no incidence on the arcs of configuration “ $\beta$ ”.

In the second stage, a new vertex noted  $V\gamma$  is created and added in the last column of  $\mathbf{C}$ . Accordingly, the vertices  $V\alpha_1$  and  $V\beta_1$  are removed from the global connection matrix  $\mathbf{C}$ . The incidence of vertex  $V\gamma$  on all the arcs is expressed in the last column of table 4.3. The global  $\mathbf{C}$  matrix obtained is presented in table 4.3.

	$V\alpha_2$	...	$V\alpha_s$	$V\beta_2$	...	$V\beta_s$	$V\gamma$
$E\alpha_1$	$C\alpha_{1,2}$	...	$C\alpha_{1,s}$	0	...	0	$C\alpha_{1,1}$
$E\alpha_2$	$C\alpha_{2,2}$	...	$C\alpha_{2,s}$	0	...	0	$C\alpha_{2,1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$E\alpha_q$	$C\alpha_{q,2}$	...	$C\alpha_{q,s}$	0	...	0	$C\alpha_{q,1}$
$E\beta_1$	0	...	0	$C\beta_{1,2}$	...	$C\beta_{1,s}$	$C\beta_{1,1}$
$E\beta_2$	0	...	0	$C\beta_{2,2}$	...	$C\beta_{2,s}$	$C\beta_{2,1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$E\beta_q$	0	...	0	$C\beta_{q,2}$	...	$C\beta_{q,s}$	$C\beta_{q,1}$

Table 4.3: Global connection matrix  $\mathbf{C}$

#### 4.4.2. Calculation of the global Gram matrix

This calculation is based on the declaration of coincidence of two orthonormal reference frames. In order to declare this coincidence, the user declares an ordered list of 3 independent vectors for each of the two objects (or configurations) to be assembled. These lists are noted  $\{\mathbf{d}\alpha_1, \mathbf{d}\alpha_2, \mathbf{d}\alpha_3\}$  and  $\{\mathbf{d}\beta_1, \mathbf{d}\beta_2, \mathbf{d}\beta_3\}$ . This declaration ensures that after the association; vectors  $\mathbf{d}\alpha_1$  and  $\mathbf{d}\beta_1$  will first be collinear; secondly vectors  $\mathbf{d}\alpha_1, \mathbf{d}\alpha_2$  and  $\mathbf{d}\beta_1, \mathbf{d}\beta_2$  will be coplanar; and finally the axis systems  $\{\mathbf{d}\alpha_1, \mathbf{d}\alpha_2, \mathbf{d}\alpha_3\}$  and  $\{\mathbf{d}\beta_1, \mathbf{d}\beta_2, \mathbf{d}\beta_3\}$  will have the same orientation.

This kind of declaration fits the tolerancing problem. For tolerancing purposes, the relative position of two parts or components is generally specified using some primary, secondary, and tertiary datum elements defined by the standards ISO 286-X. From these datum elements, it becomes possible to deduce the relevant vectors and their order in the declared list.

The global matrix is noted  $\mathbf{G}$  and presented in table 4.4.

$\mathbf{G} =$	$\mathbf{G}\alpha$	$\mathbf{G}\alpha\beta$
	$\mathbf{G}\alpha\beta^T$	$\mathbf{G}\beta$

Table 4.4: Global Gram matrix of the two configurations “ $\alpha$ ” and “ $\beta$ ”.

#### 4.4.2.1 Principle

In order to calculate the relative orientation between vectors from these two sets  $\mathbf{Su}\alpha$  and  $\mathbf{Su}\beta$  (at stages “ $\alpha$ ” and “ $\beta$ ”), the generic term of the  $\mathbf{G}\alpha\beta$  (see table 4.4) matrix expressed in equation [4.4] has to be calculated. Note that  $\mathbf{G}\alpha\beta$  is not a Gram matrix because it is not symmetrical. As the approach is coordinate free, the coordinates of the vectors included in the sets are not directly available. Consequently, the direct application of equation [4.4] is impossible. The following paragraphs present a technique to perform this calculation.

$$G\alpha\beta_{p,s} = \langle \mathbf{u}\alpha_p, \mathbf{u}\beta_s \rangle \quad [4.4]$$

Authors propose to use matrix factorization techniques to express any  $\mathbf{G}\alpha$  and  $\mathbf{G}\beta$  as the product specified in equation [4.5]. It is supposed that the size of  $\mathbf{G}\alpha$  and  $\mathbf{G}\beta$  are  $q$  (the number of line segments) and their rank is 3 because the problem is described in 3D Euclidian space. The calculation and the size of the  $\mathbf{F}\alpha$  matrix will be detailed later on.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\alpha &= \mathbf{F}\alpha^T \otimes \mathbf{F}\alpha && \text{and} \\ \mathbf{G}\beta &= \mathbf{F}\beta^T \otimes \mathbf{F}\beta && [4.5] \end{aligned}$$

#### 4.4.2.2 Calculation of the $\mathbf{G}\alpha\beta$ Matrix

Equation [4.5] can be modified with the addition of the identity matrix  $\mathbf{Id}$  as presented in equation [4.6]

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\alpha &= \mathbf{F}\alpha^T \otimes \mathbf{Id} \otimes \mathbf{F}\alpha && \text{and} \\ \mathbf{G}\beta &= \mathbf{F}\beta^T \otimes \mathbf{Id} \otimes \mathbf{F}\beta && [4.6] \end{aligned}$$

In equation [4.6],  $\mathbf{Id}$  matrices can be viewed as the metric tensors of two orthonormal reference frames  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  (3 vectors in 3D Euclidian space). From there  $\mathbf{F}\alpha$  and  $\mathbf{F}\beta$  can be viewed as the transformation matrix defined in [4.7]. The size of  $\mathbf{F}\alpha$  and  $\mathbf{F}\beta$  is 3 by  $q$ . As  $\mathbf{G}\alpha$  and  $\mathbf{G}\beta$  are Gram matrices that are positive semidefinite, the terms of  $\mathbf{F}\alpha$  and  $\mathbf{F}\beta$  remain real numbers.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\alpha_p &= \sum_n F\alpha_{n,p} \mathbf{e}_n && 1 \leq n \leq 3 && \text{and} \\ \mathbf{u}\beta_s &= \sum_q F\beta_{q,s} \mathbf{e}_q && 1 \leq q \leq 3 && [4.7] \end{aligned}$$

The application of relation [4.7] on the terms of relation [4.4] gives the expression [4.8] that allows the calculation of  $\mathbf{G}\alpha\beta$ . In relation [4.8]  $\delta_{n,q}$  represents the Kronecker symbol. The relation [4.9] gives the matrix expression of  $\mathbf{G}\alpha\beta$ .

$$\begin{aligned} G\alpha\beta_{p,s} &= \langle \mathbf{u}\alpha_p, \mathbf{u}\beta_s \rangle \\ &= \sum_{n,q} \langle F\alpha_{n,p} \mathbf{e}_n, F\beta_{q,s} \mathbf{e}_q \rangle \\ &= \sum_{n,q} F\alpha_{n,p} F\beta_{q,s} \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_q \rangle \\ &= \sum_{n,q} F\alpha_{n,p} F\beta_{q,s} \delta_{n,q} \\ G\alpha\beta_{p,s} &= \sum_n F\alpha_{n,p} F\beta_{n,s} && [4.8] \end{aligned}$$

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}^T \otimes \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \quad [4.9]$$

From there it becomes possible to calculate the global  $\mathbf{G}$  matrix with the relations [4.5] and [4.9] and to associate these results as presented in table 4.5.

$$\mathbf{G} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}^T \otimes \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}^T \otimes \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \\ \hline \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}^T \otimes \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}^T \otimes \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \\ \hline \end{array}$$

**Table 4.5:** Global Gram matrix

The previous paragraphs have shown that factorization is suitable for the calculation of the global Gram matrix. The following subsections will detail the technique used by the authors to factorize Gram matrices. It will be illustrated by the calculation of  $\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}$  from the  $\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}$  Gram matrix. The same factorization technique is to be applied for the calculation of  $\mathbf{F}\boldsymbol{\beta}$  from  $\mathbf{G}\boldsymbol{\beta}$ .

Currently, authors have looked into the use of the Cholesky factorization. This technique appears to be appropriate because it builds an orthonormal reference frame from an ordered list of 3 independent vectors.

However, the Cholesky factorization has a limitation. This method is only available for square matrices that have a non-zero determinant. This means that the matrix to be factorized has to be a metric tensor and so its size has to be equal to the dimension of the Euclidian space. In the general case, Gram matrices sizes are bigger than the dimension of the Euclidian space. Consequently, for the application of the Cholesky factorization, it first becomes necessary to be able to obtain one metric tensor from the Gram matrix and secondly to rebuild the original Gram matrix from the metric tensor.

#### 4.4.2.3 Mathematical tools

The first conversion is obvious: it is simply necessary to choose the subset of independent vectors as declared by the user and extract the corresponding columns and rows of the Gram matrix to obtain the resulting metric tensor. For the “ $\alpha$ ” configuration, the metric tensor  $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}$  is extracted from  $\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}$ . Once the  $\mathbf{M}\boldsymbol{\beta}$  metric tensor is obtained, it is factorized with the Cholesky technique [Gentle, 2007] as presented in equation [4.10].

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{L}\boldsymbol{\alpha}^T \otimes \mathbf{L}\boldsymbol{\alpha} \quad [4.10]$$

The following paragraphs will present the two concepts of covariant and contravariant coordinates used in the conversion from metric tensor to Gram matrix [Lichnerowicz, 1956]. The covariant coordinates noted  $u\alpha_k$  of a vector  $u\boldsymbol{\alpha}$  with respect to the reference frame  $\{\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_3\}$  are the scalar products of equation [4.11]. These coordinates are those that are commonly used in engineering and science. One can notice that Gram matrices are constituted of covariant coordinates.

$$u\alpha_k = \langle u\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_k \rangle \quad [4.11]$$

Moreover the covariant coordinates lead to the definition of the metric tensor  $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}$  for the reference frame  $\{\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_3\}$ . The term  $M\alpha_m$  of the row  $l$  and

column  $m$  of  $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}$  is defined by [4.12]. By construction  $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}$  is symmetrical.  $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}$  is invertible and its inverse matrix is noted  $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1}$  and remains symmetrical.

$$M\alpha_{l,m} = \langle \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_l, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_m \rangle \quad [4.12]$$

The contravariant coordinates define the  $u\alpha^k$  coefficients used to obtain a vector  $\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}$  as a unique linear combination of the vectors  $\{\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_3\}$  defining the reference frame [4.13].

$$\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha} = \sum_p u\alpha^p \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_p \quad [4.13]$$

The conversion from covariant to contravariant coordinates is achieved through a combination of relations [4.11], [4.12], [4.13]. From there, it is easy to deduce equations [4.14] and [4.15].

$$u\alpha_m = \sum_p u\alpha^p M\alpha_{m,p} \quad [4.14]$$

$$u\alpha^p = \sum_m u\alpha_m M\alpha^{-1}_{mp} \quad [4.15]$$

#### 4.4.2.4 Factorization of Gram matrices

The calculation of  $\langle \mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}\boldsymbol{\alpha} \rangle$ , that leads to the calculation of any term of the Gram matrix  $\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}$ , is given by equation [4.16]. The metric tensor  $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}$  of the reference frame  $\{\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_3\}$  is given with two vectors  $\mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}$  and  $\mathbf{w}\boldsymbol{\alpha}$  from the set  $\mathbf{S}\mathbf{u}\boldsymbol{\alpha}$ . The contravariant coordinates of these vectors are defined with respect to relation [4.13].

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}\boldsymbol{\alpha} \rangle &= \sum_{r,p} \langle v\alpha^r \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_r, w\alpha^p \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_p \rangle \\ &= \sum_{r,p} v\alpha^r \langle \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_r, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_p \rangle w\alpha^p \\ \langle \mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}\boldsymbol{\alpha} \rangle &= \sum_{r,p} v\alpha^r M\alpha_{r,p} w\alpha^p \end{aligned} \quad [4.16]$$

Using relation [4.15] it is possible to express equation [4.16] in its covariant form such as presented in equation [4.17] that leads to the calculation of the terms of the  $\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}$  gram matrix (defined by equation [4]). Reminding that  $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1}$  is symmetrical ( $M\alpha^{-1}_{m,n} = M\alpha^{-1}_{n,m}$ ), and  $\delta_{m,p}$  represents the Kronecker symbol, we have:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}\boldsymbol{\alpha} \rangle &= \sum_{r,p} v\alpha^r M\alpha_{r,p} w\alpha^p \\ &= \sum_{r,p,m,n} (v\alpha_m M\alpha^{-1}_{mr}) M\alpha_{r,p} (w\alpha_n M\alpha^{-1}_{n,p}) \\ &= \sum_{p,m,n} v\alpha_m \delta_{m,p} M\alpha^{-1}_{n,p} w\alpha_n \\ \langle \mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}\boldsymbol{\alpha} \rangle &= \sum_{m,n} v\alpha_m M\alpha^{-1}_{m,n} w\alpha_n \end{aligned} \quad [4.17]$$

The covariant coordinates are directly extracted from  $\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}$ . They are stored in the  $\mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}$  matrix that contains all the columns of  $\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}$  and only the 3 rows corresponding to  $\{\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}_3\}$ . The size of  $\mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}$  is 3 by  $q$ . The inverse matrix of the  $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}$  metric tensor is to be computed. From relations [4.17] it is possible to deduce expression [4.18] of  $\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}^T \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}^T \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \quad [4.18]\end{aligned}$$

#### 4.4.2.5 Conclusion.

The substitution of relation [4.10] in relation [4.18] gives the expression [4.19] for  $\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}$ . Reminding that  $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1}$  is symmetrical ( $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} = (\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1})^T$ ):

$$\begin{aligned}\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}^T \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \\ &= \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}^T \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \otimes (\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha}^T \otimes \mathbf{L}\boldsymbol{\alpha}) \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} &= (\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha})^T \otimes (\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}) \quad [4.19]\end{aligned}$$

The identification of the terms of relation [4.19] and relation [4.5] leads to the definition of the factorization of the Gram matrices that are given by relation [4.20].

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{L}\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \quad [4.20]$$

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{M}\boldsymbol{\beta}^{-1} \otimes \mathbf{P}\boldsymbol{\beta} \quad [4.21]$$

The  $\mathbf{G}\boldsymbol{\beta}$  matrix can be factorized using the same approach and  $\mathbf{F}\boldsymbol{\beta}$  is given by relation [4.21]. From there the global matrix  $\mathbf{G}$  representing the assembly of the two configurations can be calculated such as described in table 4.5. The  $\mathbf{G}$  Gram matrix allows the mapping of the evolution of the geometrical parameters. This will be briefly illustrated on the case study presented in the following section.

### 4.5. Case Study

This section presents the application of the method on a simple 3D case. The proposed object for this case study is composed of three articulated bars arranged as a tetrahedron on a wall, as presented in figure 4.4. This case is comprised of 4 points  $\{A, B, C, D\}$  and 6 line segments  $\{AB, AC, BC, SA, SB, SC\}$ . This object is supposed to have a topological and geometrical (or vectorial) representation at two stages “ $\alpha$ ” and “ $\beta$ ” of its life-cycle.  $A^\alpha$  designate point A at stage “ $\alpha$ ”.  $A^\beta$  is used for the stage “ $\beta$ ”. Here it is assumed that the topology remains unchanged between the two stages of the life-cycle. This means that the topological matrices for the representation of the object are the same ( $\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$ ).

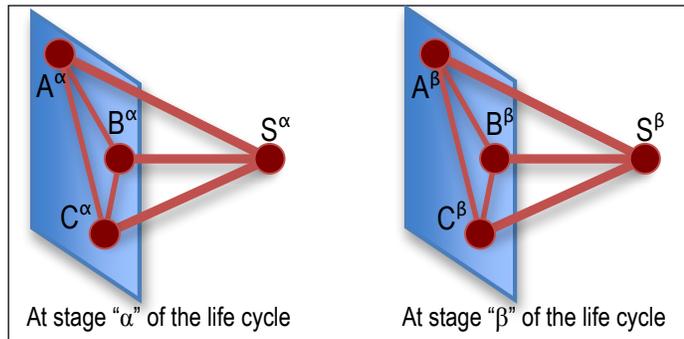


Figure 4.4: Objects for the case study

The object of the case study has for topological model the  $\mathbf{C}\alpha$  ( $=\mathbf{C}\beta$ ) connection matrix presented in table 4.6.

$\mathbf{C}\alpha$	$A^\alpha$	$B^\alpha$	$C^\alpha$	$S^\alpha$
$A^\alpha B^\alpha$	-1	1	0	0
$B^\alpha C^\alpha$	0	-1	1	0
$A^\alpha C^\alpha$	-1	0	1	0
$S^\alpha A^\alpha$	1	0	0	-1
$S^\alpha B^\alpha$	0	1	0	-1
$S^\alpha C^\alpha$	0	0	1	-1

$\mathbf{C}\beta$	$A^\beta$	$B^\beta$	$C^\beta$	$S^\beta$
$A^\beta B^\beta$	-1	1	0	0
$B^\beta C^\beta$	0	-1	1	0
$A^\beta C^\beta$	-1	0	1	0
$S^\beta A^\beta$	1	0	0	-1
$S^\beta B^\beta$	0	1	0	-1
$S^\beta C^\beta$	0	0	1	-1

Table 4.6: Connection matrices for the case study

Moreover, from the works of Serré [Serré, 2000] and Moinet [Moinet, 2008], two Gram matrices are calculated with the specifications presented in table 4.7. The two Gram matrices are presented in table 4.8 and table 4.9. Stage “ $\alpha$ ” and stage “ $\beta$ ” are two different states of the product life cycle. Stage “ $\alpha$ ” is for nominal values of temperature and loads. Stage “ $\beta$ ” is when temperature and loads have changed.  $\mathbf{a}^\alpha \mathbf{b}^\alpha$  is the vector associated to line segment AB at stage “ $\alpha$ ”.  $\mathbf{a}^\beta \mathbf{b}^\beta$  is the vector associated to line segment AB at stage “ $\beta$ ”.

	Length at stage	Length at stage
AB	1.00000	1.1198
BC	1.00000	1.0898
AC	1.00000	1.2375
SA	1.41421	1.5836
SB	1.41421	1.5412
SC	1.41421	1.7501

Table 4.7: Length specification

$G^\alpha$	$a^\alpha b^\alpha$	$b^\alpha c^\alpha$	$a^\alpha c^\alpha$	$s^\alpha a^\alpha$	$s^\alpha b^\alpha$	$s^\alpha c^\alpha$
$a^\alpha b^\alpha$	1	0	0	-1	-1	0
$b^\alpha c^\alpha$	0	1	0	1	0	-1
$a^\alpha c^\alpha$	0	0	1	0	1	1
$s^\alpha a^\alpha$	-1	1	0	2	1	-1
$s^\alpha b^\alpha$	-1	0	1	1	2	1
$s^\alpha c^\alpha$	0	-1	1	-1	1	2

Table 4.8: Gram matrix for the object at stage “ $\alpha$ ”.

$G^\beta$	$a^\beta b^\beta$	$b^\beta c^\beta$	$a^\beta c^\beta$	$s^\beta a^\beta$	$s^\beta b^\beta$	$s^\beta c^\beta$
$a^\beta b^\beta$	1.2539	-0.0331	0.2050	-1.2869	-1.0489	0.2380
$b^\beta c^\beta$	-0.0331	1.1877	-0.1719	1.2208	-0.1388	-1.3596
$a^\beta c^\beta$	0.2050	-0.1719	1.5315	-0.3768	1.3265	1.7033
$s^\beta a^\beta$	-1.2869	1.2208	-0.3768	2.5077	0.9101	-1.5976
$s^\beta b^\beta$	-1.0489	-0.1388	1.3265	0.9101	2.3754	1.4653
$s^\beta c^\beta$	0.2380	-1.3596	1.7033	-1.5976	1.4653	3.0629

Table 4.9: Gram matrix for the object at stage “ $\beta$ ”

In order to associate these two configurations, the following declarations are made by the user. First, he declares that vertex  $A^\alpha$  and vertex  $A^\beta$  are coincident. Second, he also declares the following ordered lists of independent vectors for the geometrical association:  $\{a^\alpha b^\alpha, a^\alpha c^\alpha, s^\alpha a^\alpha\}$  and  $\{a^\beta b^\beta, a^\beta c^\beta, s^\beta a^\beta\}$ .

#### 4.5.1. Topological association

In order to associate the  $C^\alpha$  and  $C^\beta$  connection matrices (see table 4.6) using the coincidence of vertices  $A^\alpha$  and  $A^\beta$ , it is necessary to create a third vertex termed  $A^\gamma$ . The application of the procedure of section 4.4.1 finally gives the global connection matrix  $C$  presented in table 4.10.

$C$	$B^\alpha$	$C^\alpha$	$S^\alpha$	$B^\beta$	$C^\beta$	$S^\beta$	$A^\gamma$
$A^\gamma B^\alpha$	1	0	0	0	0	0	-1
$B^\alpha C^\alpha$	-1	1	0	0	0	0	0
$A^\gamma C^\alpha$	0	1	0	0	0	0	-1
$S^\alpha A^\gamma$	0	0	-1	0	0	0	1
$S^\alpha B^\alpha$	1	0	-1	0	0	0	0
$S^\alpha C^\alpha$	0	1	-1	0	0	0	0
$A^\gamma B^\beta$	0	0	0	1	0	0	-1
$B^\beta C^\beta$	0	0	0	-1	1	0	0
$A^\gamma C^\beta$	0	0	0	0	1	0	-1
$S^\beta A^\gamma$	0	0	0	0	0	-1	1
$S^\beta B^\beta$	0	0	0	1	0	-1	0
$S^\beta C^\beta$	0	0	0	0	1	-1	0

Table 4.10: Global connection matrix for the case study

#### 4.5.2. Vectorial association

In accordance with the previous section the vertices  $A^\alpha$  and  $A^\beta$  have been replaced by vertex  $A^\gamma$ . Consequently, the ordered lists have been changed in the same way. To perform the association of Gram matrices, the methodology of section 4.4.2 is applied with the declaration of the following ordered lists:  $\{a^\gamma b^\alpha, a^\gamma c^\alpha, s^\alpha a^\gamma\}$  and  $\{a^\gamma b^\beta, a^\gamma c^\beta, s^\beta a^\gamma\}$ . From these lists the metric tensors  $\mathbf{M}\alpha$  and  $\mathbf{M}\beta$  presented in table 4.11 are extracted.

$\mathbf{M}\alpha$	$a^\gamma b^\alpha$	$a^\gamma c^\alpha$	$s^\alpha a^\gamma$	$\mathbf{M}\beta$	$a^\gamma b^\beta$	$a^\gamma c^\beta$	$s^\beta a^\gamma$
$a^\gamma b^\alpha$	1	0	-1	$a^\gamma b^\beta$	1.2539	0.2050	-1.2869
$a^\gamma c^\alpha$	0	1	0	$a^\gamma c^\beta$	0.2050	1.5315	-0.3768
$s^\alpha a^\gamma$	-1	0	2	$s^\beta a^\gamma$	-1.2869	-0.3768	2.5077

Table 4.11: Metric tensors for the application case

The application of the Cholesky factorization technique on the  $\mathbf{M}\alpha$  and  $\mathbf{M}\beta$  metric tensors gives the  $\mathbf{L}\alpha$  and  $\mathbf{L}\beta$  matrices presented in table 4.12.

$\mathbf{L}\alpha$				$\mathbf{L}\beta$			
	1	0	-1		1.1198	0.1830	-1.1493
	0	1	0		0	1.2239	-0.1360
	0	0	1		0	0	1.0809

Table 4.12:  $\mathbf{L}\alpha$  and  $\mathbf{L}\beta$  factorized matrices

In parallel, the covariant coordinates of the vectors are extracted from  $\mathbf{G}\alpha$  and  $\mathbf{G}\beta$ . The  $\mathbf{P}\alpha$  and  $\mathbf{P}\beta$  matrices are presented in table 4.13 and table 4.14.

$\mathbf{P}\alpha$	$a^\gamma b^\alpha$	$b^\alpha c^\alpha$	$a^\gamma c^\alpha$	$s^\alpha a^\gamma$	$s^\alpha b^\alpha$	$s^\alpha c^\alpha$
$a^\gamma b^\alpha$	1	0	0	-1	-1	0
$a^\gamma c^\alpha$	0	0	1	0	1	1
$s^\alpha a^\gamma$	-1	1	0	2	1	-1

Table 4.13: Covariant coordinates of vectors for configuration "α"

$\mathbf{P}\beta$	$a^\gamma b^\beta$	$b^\beta c^\beta$	$a^\gamma c^\beta$	$s^\beta a^\gamma$	$s^\beta b^\beta$	$s^\beta c^\beta$
$a^\gamma b^\beta$	1.2539	-0.0331	0.2050	-1.2869	-1.0489	0.2380
$a^\gamma c^\beta$	0.2050	-0.1719	1.5315	-0.3768	1.3265	1.7033
$s^\beta a^\gamma$	-1.2869	1.2208	-0.3768	2.5077	0.9101	-1.5976

Table 4.14: Covariant coordinates of vectors for configuration "β"

With the elements presented in table 4.11, table 4.12, table 4.13 and table 4.14 it now becomes possible to calculate the  $\mathbf{F}\alpha$  and  $\mathbf{F}\beta$  matrices using relations [4.20] and [4.21]. The expression of  $\mathbf{F}\alpha$  and  $\mathbf{F}\beta$  are given in table 4.15 and table 4.16.

$F\alpha$						
	1	0	0	-1	-1	0
	0	0	1	0	1	1
	0	1	0	1	0	-1

Table 4.15: Factorization of the  $G\alpha$  Gram matrix

$F\beta$						
	1.1198	-0.0295	0.1830	-1.1493	-0.9367	0.2126
	0	-0.1360	1.2239	-0.1360	1.2239	1.3599
	0	1.0809	0	1.0809	0	-1.0809

Table 4.16: Factorization of the  $G\beta$  Gram matrix

From there the global  $G$  matrix of the system is computable 4.using Table 4.5. The result of this computation is presented in table 4.17.

$G$	$a^Y b^\alpha$	$b^\alpha c^\alpha$	$a^Y c^\alpha$	$s^\alpha a^Y$	$s^\alpha b^\alpha$	$s^\alpha c^\alpha$	$a^Y b^\beta$	$b^\beta c^\beta$	$a^Y c^\beta$	$s^\beta a^Y$	$s^\beta b^\beta$	$s^\beta c^\beta$
$a^Y b^\alpha$	1	0	0	-1	-1	0	1.1198	-0.0295	0.1830	-1.1493	-0.9367	0.2126
$b^\alpha c^\alpha$	0	1	0	1	0	-1	0	1.0809	0	1.0809	0	-1.0809
$a^Y c^\alpha$	0	0	1	0	1	1	0	-0.1360	1.2239	-0.1360	1.2239	1.3599
$s^\alpha a^Y$	-1	1	0	2	1	-1	-1.1198	1.11040	-0.1830	2.2302	0.9367	-1.2935
$s^\alpha b^\alpha$	-1	0	1	1	2	1	-1.1198	-0.1065	1.0409	1.0133	2.1606	1.1474
$s^\alpha c^\alpha$	0	-1	1	-1	1	2	0	-1.2169	1.2239	-1.2169	1.2239	2.4408
$a^Y b^\beta$	1.1198	0	0	-1.1198	-1.1198	0	1.2539	-0.0331	0.2050	-1.2869	-1.0489	0.2380
$b^\beta c^\beta$	-0.0295	1.0809	-0.1360	1.1104	-0.1065	-1.2169	-0.0331	1.1877	-0.1719	1.2208	-0.1388	-1.3596
$a^Y c^\beta$	0.1830	0	1.2239	-0.1830	1.0409	1.2239	0.2050	-0.1719	1.5315	-0.3768	1.3265	1.7033
$s^\beta a^Y$	-1.1493	1.0809	-0.1360	2.2302	1.0133	-1.2169	-1.2869	1.22080	-0.3768	2.5077	0.9101	-1.5976
$s^\beta b^\beta$	-0.9367	0	1.2239	0.9367	2.1606	1.2239	-1.0489	-0.1388	1.3265	0.9101	2.3754	1.4653
$s^\beta c^\beta$	0.2126	-1.0809	1.3599	-1.2935	1.1474	2.4408	0.23800	-1.3596	1.7033	-1.5976	1.4653	3.0629

Table 4.17: Global Gram matrix for the case study

#### 4.5.3. Example of the mapping of the evolution of a geometrical parameter.

In this section, the interest of the global representation of the association of two objects (or configurations) for the mapping of the evolution of a geometrical parameter is briefly shown. To this end, it is proposed, first to measure the angle between the vectors  $s^\alpha a^Y$  and  $s^\beta a^Y$  and second to calculate the length of the vector  $s^\alpha s^\beta$ .

The application of relation [4.3] directly gives the value of  $\cos(s^\alpha a^Y, s^\beta a^Y) = G_{4,10} / (\sqrt{G_{4,4}} \sqrt{G_{10,10}}) = 0.995836$  which correspond to an angle of 0.091287 radian.

From matrix  $C$  (see table 4.10), a possible path to go from vertex  $S^\alpha$  to vertex  $S^\beta$  is deduced as going through vertex  $A^Y$ . Consequently the scalar product  $\langle s^\alpha s^\beta, s^\alpha s^\beta \rangle$  is expressed by relation [4.22].

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{s}^\alpha \mathbf{s}^\beta, \mathbf{s}^\alpha \mathbf{s}^\beta \rangle &= \langle \mathbf{s}^\alpha \mathbf{a}^\gamma, \mathbf{s}^\alpha \mathbf{a}^\gamma \rangle + 2 \langle \mathbf{s}^\alpha \mathbf{a}^\gamma, \mathbf{a}^\gamma \mathbf{s}^\beta \rangle + \langle \mathbf{a}^\gamma \mathbf{s}^\beta, \mathbf{a}^\gamma \mathbf{s}^\beta \rangle \\
\langle \mathbf{s}^\alpha \mathbf{s}^\beta, \mathbf{s}^\alpha \mathbf{s}^\beta \rangle &= \langle \mathbf{s}^\alpha \mathbf{a}^\gamma, \mathbf{s}^\alpha \mathbf{a}^\gamma \rangle - 2 \langle \mathbf{s}^\alpha \mathbf{a}^\gamma, \mathbf{s}^\beta \mathbf{a}^\gamma \rangle + \langle \mathbf{s}^\beta \mathbf{a}^\gamma, \mathbf{s}^\beta \mathbf{a}^\gamma \rangle \\
\langle \mathbf{s}^\alpha \mathbf{s}^\beta, \mathbf{s}^\alpha \mathbf{s}^\beta \rangle &= G_{4,4} - 2 G_{4,10} + G_{10,10}
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

The combination of relations [4.2] and [4.22] allows the calculation of  $\|\mathbf{s}^\alpha \mathbf{s}^\beta\|$  from the elements available in the global Gram matrix  $\mathbf{G}$  presented in table 4.17. After calculation, the result obtained is  $\|\mathbf{s}^\alpha \mathbf{s}^\beta\| = 0.217565$  length unit.

#### 4.6. Conclusion and perspectives

This paper has first presented a generic model for representing objects using points and line segments exclusively. That description proved to be suitable for the representation of the skeleton of a mechanical product at the early stages of the design process. Secondly a means for representing objects, thanks to two matrices, was introduced. A connection matrix was used to indicate how points and line segments were connected and a Gram matrix is used to provide the user with lengths and orientation information about the line segments. In the third part, the paper showed how to perform an assembly with two objects represented with these two matrices. Finally, the interest of this model for the mapping of the evolution of a geometrical parameter has been exhibited on a case study.

In terms of future work, the authors propose first to consider the addition of surface elements such as triangles to enhance the possibilities for modelling complex objects. Secondly, it is also envisaged to implement additional constraints, such as topological coincidence between two lines segments, for the declaration of the assembly of the two objects.

#### 4.7. Bibliography

- Anselmetti B., Generation of functional tolerancing based on positioning features. *Computer-Aided Design*, 38(8):902–919, Aug 2006.
- Gentle J. E., *Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics*. Springer, 2007.
- Ghie W., Modèle unifié jacobien-torseur pour le tolérancement assisté par ordinateur, 2004.
- Lichnerowicz A., *Algèbre et analyse linéaires*. Masson Paris, second edition, 1956.
- Louhichi B., *Intégration CAO/Calcul par reconstruction du modèle CAO à partir des résultats éléments finis*. PhD thesis, 2008.
- M'henni F., *Effet des tolérances géométriques qualitatives et quantitatives sur le comportement d'un mécanisme : critères d'évaluation*. PhD thesis, Tunisie, 2010.
- Moinet M., Serré P., Rivière A., Clément A., A new approach to transform a constrained geometric object. In *Proceedings of the 20th CIRP Design Conference*, Nantes, France, April 19–21, 2010. Best paper award.
- Moinet M., *Descriptions non cartésiennes et résolution de problèmes géométriques sous contraintes*. PhD thesis, École Centrale Paris, December 2008.
- Pierre L., Teissandier D., Nadeau J.-P., Integration of multiple physical behaviours into a geometric tolerancing approach. 2009.

Serré P., Ortuzar A., Rivière A., Non-cartesian modelling for analysis of the consistency of a geometric specification for conceptual design. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 16(5/6):549–565, 2006.

Serré P., *Cohérence de la spécification d'un objet de l'espace euclidien à n dimensions*. PhD thesis, École Centrale Paris, April 2000.

---

## Conclusion

Ce chapitre a présenté une technique pour associer les représentations sans coordonnées de deux composants dans celle d'un assemblage. Ce type d'association présente deux applications dans le cadre de ce travail. Premièrement, comme cela a été annoncé au chapitre 3 dans la section 3.5.5, cette technique permet d'associer des pièces d'un mécanisme réel à celles d'un mécanisme idéal dans le but de spécifier des exigences géométriques. Deuxièmement, cette technique permet également de comparer deux états distincts du même composant dans deux états physiques distincts.

Dans le deuxième cas, l'utilisation d'une approche déclarative de l'association est particulièrement adaptée. En effet, elle permet à l'utilisateur de spécifier comment associer deux représentations d'une même pièce qui n'ont jamais d'existence simultanée. Cette hypothèse (qui n'est pas toujours triviale) serait complètement masquée par une approche comportant un repère cartésien : on supposerait alors que le repère choisi est invariant entre les deux états ; ce qui n'est pas nécessairement le cas. Ainsi, en utilisant l'approche déclarative, l'utilisateur spécifie les repères qui sont invariants et qu'il faut associer. Cela lui permettra, le cas échéant, de pouvoir vérifier par la suite que cette hypothèse est valide.

Enfin, il faut noter que la factorisation de Cholesky n'est pas la seule technique de factorisation de matrices qu'il est possible d'utiliser pour appliquer la méthode présentée dans ce chapitre. En effet, il est possible d'utiliser la décomposition en valeurs singulières (SVD) pour obtenir directement la factorisation de n'importe quelle matrice de Gram. Une application de cette technique peut être trouvée dans la thèse de M'Henni [M'henni, 2010] ainsi que dans les travaux de Serré [Serré *et al.*, 2009]. Il faut noter que lorsqu'on utilise une factorisation basée sur SVD, la déclaration des vecteurs servant à la construction des repères qu'il faut faire coïncider est directement déduite des valeurs singulières de la matrice de Gram. Par conséquent, elle ne nécessite pas de choix de l'utilisateur. Compte tenu de la remarque faite au paragraphe précédent, cette caractéristique implique la nécessité de rester prudent quant à l'utilisation de SVD pour comparer deux états d'une même pièce : il n'est pas facile de vérifier la validité de l'hypothèse d'association. Par contre, cette technique de factorisation est utile pour associer une pièce réelle à une pièce idéale comme cela a été fait à la section 3.5.5.

---

# CHAPITRE 5

## CONCLUSION GÉNÉRALE

### 5.1 Conclusion

Ce travail a introduit le concept de *comportement géométrique* pour permettre à plusieurs acteurs de traiter en collaboration des problèmes multi-physiques durant la phase de pré-conception. Il a aussi montré quel est le champ d'application de ce concept au cours du processus de développement d'un produit. Enfin, il a défini un modèle pour traduire le comportement sous une forme mathématique et des outils pour l'utiliser de façon adéquate.

Ce mémoire a mis en évidence l'utilité du *comportement géométrique* pour traiter des problèmes de pré-conception faisant intervenir un ou plusieurs effets physiques sur une structure ou un mécanisme. Il a aussi montré comment lier les paramètres dimensionnels (et fonctionnels) d'un objet avec l'état physique dans lequel il se trouve. En outre, il a démontré la possibilité d'assurer le caractère assemblable ou mobile d'un système mécanique.

Ce mémoire a utilisé deux modèles pour traduire mathématiquement le *comportement géométrique*. Le premier, le déterminant de Cayley-Menger, a servi à exprimer le caractère assemblable d'une structure décrite par des paramètres de longueur. Le second a été élaboré au cours de cette thèse en s'appuyant les travaux de Cailliau. Il permet de traduire le caractère mobile d'un assemblage décrit par les paramètres de Denavit et Hartenberg. Pour finir, un outil permettant d'associer deux représentations a été développé dans le but de les comparer ou d'évaluer l'évolution d'une caractéristique géométrique.

L'utilisation de tous ces éléments a été présentée sur deux cas d'illustration. Premièrement, une application sur une structure pyramidale à quatre barres a permis de constater la variation d'une caractéristique géométrique lorsque l'état physique de l'assemblage change. La deuxième application a montré, quant à elle, quelle dimension minimale il faut imposer à un jeu pour conserver le caractère mobile d'un mécanisme de Bennett lorsque ses composants subissent une dilatation thermique. L'expression du *comportement géométrique* du mécanisme de Bennett a enrichi des éléments présentés dans les travaux de Serré [Serré, 2000; Serré *et al.*, 2002, 2009]. Plus précisément, le traitement de ces exemples a montré comment résoudre les deux problèmes à partir d'une instance initiale connue dont le

*comportement géométrique* assure l'assemblage ou la mobilité. Pour trouver une nouvelle solution voisine de l'instance initiale, le système d'équation traduisant le *comportement géométrique* a été linéarisé. Cette linéarisation des équations au voisinage d'une solution déjà connue est, pour le moment, la seule méthode générale (mais contraignante) de résolution de ces équations.

## 5.2 Discussion

La première constatation qui a été faite dans ce travail de thèse - concernant l'utilisation du comportement géométrique pour traiter des problèmes de pré-conception - est la difficulté de formuler et résoudre les équations de façon générale. Cet état de fait a d'ailleurs conduit à la linéarisation du système d'équations pour en trouver des solutions. Cette voie a d'ailleurs été formulée de façon plus générale par Chen [Chen, 2011]. Dans d'autres cas, pour traiter les exemples notamment, un choix judicieux de variables et/ou de stratégies de résolution a été nécessaire pour mener les résolutions à leur terme. Le travail présenté dans cette thèse ne propose pas de méthode généralisable pour appréhender ces problématiques. Il se contente de mettre en évidence l'intérêt de la méthode et du modèle proposés en traitant avec une résolution ad-hoc des exemples.

Deuxièmement, cette thèse propose un modèle géométrique et une méthodologie permettant de traiter des problèmes multi-physiques. Cependant, les modèles utilisés pour représenter des effets physiques dans ce mémoire sont souvent très généraux et simplifiés (loi de Hooke, dilatation thermique simple). Ce travail pré-suppose l'existence de modèles (lois de comportement) permettant de rendre compte du ou des effets physiques utiles pour le problème traité.

Enfin, l'expression de la contrainte de mobilité faite dans la section 3.3.5 ne se traduit pas sous la forme d'une simple équation. En effet, ce que l'on peut lire dans cette section (3.3.5) : "si la solution trouvée à la contrainte d'assemblage ne dépend pas du paramètre de commande [de la chaîne cinématique], le mécanisme sera mobile" indique qu'il faut que la contrainte d'assemblage soit respectée, quelle que soit la valeur du paramètre de commande. Le fait que cette contrainte ne puisse pas s'exprimer par une équation explique pour une majeure partie la difficulté de traiter de façon générale le problème de la mobilité. En outre, cela est secondé par le fait que la littérature ne propose, actuellement, aucune méthode pour aborder cette question. Dans ce travail de thèse l'indépendance de la solution vis à vis du paramètre de commande a été vérifiée a posteriori une fois les solutions

---

d'assemblage obtenues. Dans cette mesure, il est difficile d'envisager la généralisation de cette méthode de résolution à l'ensemble des mécanismes.

## 5.3 Perspectives

Afin de valider l'utilisation du *comportement géométrique* pour concevoir des produits soumis à plusieurs effets physiques, il reste à introduire les sur-contraintes générées dans des outils de simulation par fonction de transfert habituellement utilisés dans la phase de pré-conception.

Ensuite, afin de généraliser l'utilisation du *comportement géométrique* à une large variété de problèmes de pré-conception, plusieurs pistes peuvent être suivies.

Comme cela à été évoqué dans la section précédente, ce travail ne propose pas de stratégie générale pour formuler et résoudre les équations générées. Bien que la démarche de linéarisation des équation entreprise puisse être satisfaisante dans de nombreux cas, un effort pourrait être produit pour trouver une méthode plus générale.

Enfin, pour généraliser la résolution du caractère mobile du comportement géométrique, il sera nécessaire de fournir un effort pour trouver une méthode de résolution assurant l'indépendance de la solution avec le paramètre de commande de la chaine cinématique.

Pour avancer sur ces problématiques, il paraît utile de simplifier formellement les relations traduisant le *comportement géométrique*. La section 3.5.2 présente une solution pour transformer ces équations sous forme polynomiale. Une fois mise sous cette forme, il devient alors envisageable d'utiliser la théorie des bases de Groëbner [Buchberger, 1998, 2006] pour simplifier ces expressions.



# ANNEXE A

## RAPPORTS D'ÉVALUATION

Cette annexe contient la copie du rapport de soutenance et l'ensemble des rapports d'évaluation qui ont été produits par les membres du jury.

## A.1 Rapport de soutenance

ÉCOLE CENTRALE PARIS

ÉCOLE DOCTORALE 0287 Sciences pour l'ingénieur - Diplôme de Doctorat

RAPPORT DE SOUTENANCE (arrêté du 7 août 2006)



Thèse présentée par M.MANDIL Guillaume ..... Né le : 13 Décembre 1982 à : Nîmes (30)

Spécialité de la thèse : Génie Industriel

Soutenu le : 12 Décembre 2011

Titre de la thèse (*avant corrections éventuelles*) : **Modèle de représentation géométrique intégrant les états physiques du produit.**

**RAPPORT DE SOUTENANCE** (*ci-après ou joint, daté et signé par tous les membres du jury*)

Le travail présenté par M. Guillaume Mandil est une étude formelle des spécifications géométriques d'assemblage et de mobilité d'un mécanisme. L'objectif est de fournir un cadre conceptuel pour traiter simultanément les influences géométriques et physiques d'un système en conception préliminaire. Il s'agit d'un projet ambitieux qui met en œuvre des outils de modélisation déclaratifs dont le maniement est complexe.

Afin de rendre clairement accessible le travail dans le temps imparti à la présentation, le candidat a fait le choix pertinent de restreindre la présentation à une partie

Le grade de « DOCTEUR » est conféré avec la mention : *T.H.*

*L'École doctorale de l'ECP ne délivre plus les félicitations à compter du 10 mars 2003.*

Les Membres du jury\* :

	Nom	Prénom	Signature
Président du Jury :	VILLENEUVE	François	
Directeur de thèse :	DESROCHERS	Alain	(vide scgf.)
Codirecteur de thèse :	RIVIERE	Alain	
Examineur :	SERRE	Philippe	
Examineur (rap.) :	LINARES	Jean Marc	
Examineur (rap.) :	LAPERRIERE	Luc	(vide scgf.)
Examineur :	DROUET	Jean Marc	(vide scgf.)

\*Les invités ne figurent pas sur le rapport de soutenance

**Avis du jury sur la reproduction de la thèse**

de sa contribution de thèse. La présentation a été menée avec de réelles qualités pédagogiques.

Guillaume Mandil a répondu avec beaucoup de pertinence aux questions nombreuses et pointues du jury et a montré, à cette occasion, sa grande maîtrise du sujet, une grande honnêteté scientifique, ainsi qu'une bonne capacité de prise de recul sur les apports de son travail.

Les membres du jury ont donc particulièrement apprécié cette soutenance et proposent de décerner à M. Guillaume Mandil le titre de docteur de l'École Centrale Paris conjointement au titre de docteur de l'Université de Sherbrooke dans la spécialité Génie Mécanique. Ils sont d'autre part unanimes à féliciter le candidat.

Thèse pouvant être reproduite en l'état

Thèse ne pouvant être reproduite

Thèse pouvant être reproduite après corrections\* qui seront contrôlées par :



**Signature du Président du Jury :**

F. VILLENEUVE

oooooooooooooooooooooooooooo

**\*Corrections contrôlées le :** .....

**Signature :**

**Si la thèse est confidentielle, durée de la confidentialité :**

## A.2 Rapport de Luc Laperrière



Université du Québec à Trois-Rivières  
Département de génie mécanique  
École d'ingénierie

C.P. 500, Trois-Rivières, Québec, Canada / G9A 5H7  
Téléphone: (819) 376-5072  
Télécopieur/Fax: (819) 376-5152

**Objet : évaluation de la thèse de doctorat de Guillaume Mandil**

### 1. Fond

#### *1.1 Contribution*

Cette thèse élabore la notion de « comportement géométrique » défini sous forme d'un système d'équations mettant en relation des paramètres géométriques d'une représentation simplifiée d'un mécanisme en boucle fermée. Cette représentation de type squelettique vectorielle, adéquate pour la phase de pré-conception, permet entre autre d'établir si une configuration (combinaison particulière de longueurs et angles des liaisons et des solides) résulte en un mécanisme assemblable et/ou mobile. La beauté de l'approche réside dans le fait que d'autres types de comportements (thermique ou mécanique) faisant utilisation des mêmes variables géométriques peuvent alors être incluses dans le même système d'équation, permettant ainsi la résolution intégrée de problèmes de nature multi-physique dans la phase de pré-conception, par un choix plutôt judicieux tant des inconnues apparaissant dans ces équations que dans la méthode de résolution.

#### *1.2 Quantité de travail*

La thèse présentée par le candidat représente une quantité de travail plutôt modeste, si on en juge par son nombre de pages et par l'utilisation répétée des résultats de travaux de chercheurs prédécesseurs. On devine cependant que le travail présenté en est un de synthèse, et qu'une quantité considérable de travail « non-écrit », liée à l'étude et la compréhension des nombreux éléments mathématiques exploités dans cette synthèse, a sûrement été faite au préalable. De plus la thèse fait état d'un article portant sur une application partielle du modèle développé, pour lequel le candidat est premier auteur. Ceci fait en sorte qu'au final la quantité de travail de cette thèse est jugée acceptable.

#### *1.3 Revue de la littérature scientifique*

La thèse est fortement inspirée des travaux de Cailliau, Serré et M'Henni. Elle représente une contribution incrémentale et originale aux contributions déjà reconnues de ces auteurs. Ces contributions sont d'ailleurs bien référencées tout au long de la thèse, au point que les contributions originales sont parfois confondues. Pour le reste, le recensement des écrits dans les domaines de modélisation géométrique (section 1.3.1), de problèmes multi-physiques (section 1.3.2), et de méthodologie de conception (section 1.3.3) est pertinent. Pour ce dernier cas cependant, bien que la motivation de la thèse semble en découler (voir section suivante), il est plutôt surprenant de voir que le candidat n'y dénombre que quatre articles entre les pages 12 et 14 inclusivement...

#### ***1.4 Description du problème***

Selon le candidat la motivation du travail prend sa source dans l'absence de modèles adéquats dans la phase de pré-conception d'un mécanisme. C'est à cette étape que le concepteur doit analyser les interactions entre les différents comportements des pièces et de l'assemblage qu'elles constituent. Le modèle de comportement géométrique proposé est au dire de l'auteur une solution à ce problème important : des simulations du comportement géométrique qui intègrent des comportements multi-physiques seraient un outil de grande valeur en pré-conception.

#### ***1.5 Méthodes***

La convention D-H, fortement utilisée en robotique, sert de base à la représentation vectorielle simplifiée d'un mécanisme en boucle cinématique fermée, dans laquelle les longueurs et angles des pièces et liaisons sont exploitées. Cette représentation simplifiée (squelettique) du mécanisme, adéquate en pré-conception, permet le calcul de fermeture vectorielle périmétrique et de fermeture angulaire de la boucle cinématique.

Les équations de fermeture angulaire prennent appui sur les propriétés de symétrie de la matrice de Gram unitaire. Il en résulte un système d'équations non-linéaires faisant intervenir les variables angulaires et dont la solution à partir d'une configuration angulaire connue du mécanisme permet d'en déterminer l'assemblabilité dans d'autres configurations angulaires.

La fermeture périmétrique utilise le concept de coupe métrique appliquée aux éléments de la matrice de Gram complète et symétrique, pour ainsi former un autre système d'équations faisant cette fois intervenir les longueurs physiques du mécanisme.

La solution simultanée des équations trigonométriques de fermeture périmétrique et angulaire est obtenue par leur linéarisation autour d'une solution déjà connue. Selon l'auteur il en résulte des équations du « comportement géométrique » du mécanisme autour de la solution connue.

Le critère de mobilité est ensuite calculé par solution simultanée de deux jeux d'équations de linéarisation autour de deux solutions connues. Cette stratégie prend appui sur l'observation que pour qu'un mécanisme soit mobile il faut que celui-ci soit assemblable dans deux configurations distinctes.

Les concepts de mécanisme mobile idéal et d'association de représentations (détaillée dans un article au chapitre 4) sont finalement utilisés pour calculer les jeux que doivent permettre les liaisons afin de continuer à assurer la mobilité du mécanisme à l'étude sous l'effet d'éventuelles contraintes physiques (un cas de contraintes thermiques est présenté dans la thèse).

### 1.6 Résultats

La thèse fait état de deux séries de résultats pour deux mécanismes distincts : une structure pyramidale non mobile et un mécanisme de Bennett mobile. Le premier mécanisme est introduit en début de thèse et sert à démontrer les capacités de la méthode à traiter des problèmes multi-physiques. Il sert également à mettre en lumière le concept d'assemblabilité dans « comportement géométrique », sans que cet objectif ne soit atteint pour autant.

La majeure partie de la thèse utilise ensuite le mécanisme de Bennett pour mettre en application les méthodes décrites en section 1.5 de ce rapport. Le candidat réussit bien à démontrer l'utilité de sa méthode pour ce mécanisme particulier. Il est de plus très prudent en comparant (et du même coup en validant) continuellement certains de ses résultats avec ceux de ses prédécesseurs.

Bien que les étapes d'obtention de chacun des résultats du mécanisme de Bennett soit bien détaillées, le lecteur est souvent confronté à diverses « affirmations » non-démonstrées, ou du moins dont l'explication détaillée est manquante. C'est premièrement le cas de l'utilisation des équations de fermetures angulaire et périmétrique, dont on affirme qu'elles sont toutes les deux nécessaires pour vérifier l'assemblabilité d'un mécanisme (page 41). Pourquoi les deux fermetures prises séparément ne formeraient-elles pas une condition suffisante? Comment interpréter physiquement que ces deux fermetures soient toutes deux nécessaires? Quel est le rôle de chacune des deux fermetures? Avec la seule utilisation des équations de fermeture angulaire, ne conclut-on pas que les trois instances du mécanisme de Bennett obtenues au tableau 3.8 de la page 56 sont effectivement assemblables?

Dans le même ordre d'idées, en page 41 on affirme que la solution des équations résultant des deux fermetures permet de vérifier l'assemblabilité, alors qu'en page 59 on affirme que la solution simultanée de ces mêmes équations assure la mobilité. Ceci soulève une des plus grandes lacunes de cette thèse : la grande confusion entre la définition formelle des critères d'assemblabilité et de mobilité, et surtout la précision de leur rôle dans la définition même du concept de « comportement géométrique ». Il faut attendre en conclusion (page 91) pour lire comment, selon l'auteur, ces deux concepts auraient dû être différenciés (l'un par la pyramide, l'autre par le mécanisme de Bennett). Pourtant, même après relecture de la thèse la confusion entre les deux critères demeure entière, et par le fait même le concept de « comportement géométrique » demeure obscur.

Une autre affirmation concerne une définition particulière de la mobilité (page 63): pour qu'un mécanisme soit mobile il faut que celui-ci soit assemblable dans deux configurations distinctes. Bien qu'il existe une certaine intuition logique derrière cette affirmation, et bien que le candidat précise que cette affirmation découle des travaux d'un autre chercheur, il n'en demeure pas moins que son utilisation pour le mécanisme de Bennett présenté dans la thèse est déroutante. En effet en page 63 l'équation (3.29) donne un premier jeu d'équations de la solution autour de la configuration  $\theta_2 = 20^\circ$ . On formule ensuite une autre solution autour de la configuration  $\theta_2 = 40^\circ$  (équation 3.30) et

on stipule que pour assurer la mobilité il faut résoudre simultanément ce double système d'équations linéarisées (à noter qu'on a encore ici une définition différente de la mobilité). Or, une très grande amplitude de mouvement, d'un ordre de grandeur incompatible avec la linéarisation, a dû être effectuée par le mécanisme pour passer de  $20^\circ$  à  $40^\circ$ . Quelle est donc l'interprétation de la solution du nouveau système (3.31) (dont il manque d'ailleurs deux zéros dans la matrice de droite)? Est-ce que le mécanisme est mobile entre  $\theta_2 = 20^\circ$  et  $40^\circ$ ? Ou est que le mécanisme est seulement localement mobile autour de  $\theta_2 = 20^\circ$  et  $40^\circ$ ? Quelle est l'interprétation du système final (éq. 3.31 ou éq. 3.32) et comment peut-on l'utiliser en pré-conception? Il semble crucial de mieux expliquer le rôle essentiel du paramètre de commande pour formuler une définition claire et précise de la mobilité et de son rôle dans le concept du « comportement géométrique ».

On présente ensuite une application des plus intéressantes : le calcul du jeu nécessaire à assurer un caractère mobile du mécanisme sous l'effet de dilatations thermiques. La méthode de calcul est bien détaillée mais le fondement derrière cette méthode mérite de plus amples explications. En effet, deux instances du mécanisme de Bennett sont premièrement calculées pour des températures de  $20^\circ$  et  $100^\circ$  respectivement. Sans même préciser le caractère assemblable ou mobile de la nouvelle instance à  $100^\circ$ , on poursuit avec le calcul d'écart entre le mécanisme mobile à  $20^\circ$  et « un mécanisme mobile idéal le plus près du mécanisme réel à  $100^\circ$  ». Ces écarts sont ensuite rapportés dans l'équation linéarisée (3.32) dans laquelle les différentielles obtenues de la linéarisation sont remplacées par les écarts en question. On termine en posant un problème de moindres carrés entre les valeurs de dilatations thermiques disponibles et les valeurs de ces écarts. Une explication du fondement logique derrière cette méthode est premièrement nécessaire : en quoi les mécanismes idéal et réel sont-ils distincts, et pourquoi désire-t-on en rapprocher les instances?

Ensuite, par association du mécanisme réel à  $100^\circ$  au mécanisme idéal, on procède au calcul d'un jeu nécessaire entre les deux axes de liaison du mécanisme réel lors d'un mouvement du mécanisme idéal. La valeur de ce jeu peut être développée pour toute la plage de valeurs du paramètre de commande. Encore ici, explication du fondement logique derrière cette méthode est absolument nécessaire : pourquoi le mécanisme réel à  $100^\circ$  comporte-t-il un jeu? Il est plutôt dommage de constater que cette application des plus intéressantes de la méthode proposée est également la moins bien décrite.

## 2. Format

Le format de la thèse est adéquat. Les figures et tableaux sont clairs, les équations sont bien expliquées dans le texte, le style est clair et concis, et les chapitres s'enchaînent de façon logique, à l'exception peut-être du chapitre 4 qui semble sorti de nulle part. Conformément au reste de la thèse la notion d'association de deux représentations aurait dû être présentée avant son utilisation plutôt que l'inverse. Le chapitre de conclusion est

court (2 pages) mais cela est en toute compatibilité avec l'aspect « synthétique » de cette thèse.

### 3. Conclusions

La thèse présente une contribution importante et originale. La méthode proposée permet à un concepteur de traiter de plusieurs aspects distincts (multi-physiques) lors de la pré-conception d'un mécanisme et ce, à partir d'équations faisant intervenir toutes les variables d'intérêt dans un même modèle intégré. La notion originale de « comportement géométrique » y est définie tant bien que mal, mais somme toute le travail accompli est de très bonne qualité.

Le style de rédaction est clairement orienté vers la présentation de plusieurs résultats tirés d'exemples (mécanismes) concrets. Cette stratégie facilite en général la compréhension des concepts mathématiques exploités tout au long de la thèse. Par contre, la spécificité des exemples s'oppose à une généralisation des résultats. Par exemple, que peut-on dire de la relation entre le nombre d'équations, le nombre de pièces et/ou de liaisons, le nombre de solutions connues (configurations initiales), et leur effet sur la facilité (ou la difficulté) de résoudre un problème multi-physique? Tout au long de la thèse des problèmes très intéressants n'ont pu être résolus que par un choix judicieux du nombre de pièces, des inconnues, et des contraintes de mise en équation...

La notion très intéressante de calcul de jeu nécessaire à la mobilité sous l'effet de contraintes apporte une confusion supplémentaire quant à l'étude de la mobilité tout au long de la thèse. En effet, on peut supposer que la mobilité nécessite d'emblée l'existence d'un jeu entre les pièces. Or dans le cas de vérification de la mobilité effectué par l'équation (3.32) en page 65, il n'est nullement question de l'existence de jeux dans les liaisons entre les pièces. Cette notion de jeu n'apparaît qu'en page 68 lors du traitement d'une autre application possible du modèle.

Professeur Luc Laperrière

Évaluation de la thèse de Guillaume Mandil

Novembre 2011

En conclusion, bien que les exemples développés dans cette thèse suscitent parfois des questionnements, il est clair pour cet évaluateur qu'elle mérite d'être soutenue et aucune modification majeure au texte déposé ne sera demandée, si ce n'est que de prendre en considération les divers éléments décrits dans ce rapport pour en bonifier le contenu.



Luc Laperrière  
Professeur et Directeur  
Département de génie mécanique  
Directeur  
Laboratoire de Mécanique et Éco-Matériaux  
UQTR

## A.3 Rapport de Jean-Marc Linarès



**Rapport** de Monsieur Jean Marc Linarès, Professeur des Universités à l'Université de la Méditerranée,  
**sur le mémoire de thèse** de Monsieur Guillaume Mandil,  
**pour l'obtention du titre de Docteur de l'École Centrale de Paris et de L'Université de Sherbrooke.**

-----

Monsieur Guillaume Mandil présente un mémoire de thèse ayant pour titre : « Modèle de représentation géométrique intégrant les états physiques du produit ». Ce travail de thèse a été effectué au sein du laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Mécanique et des MATériaux (LISMMA) en collaboration avec l'Université de Sherbrooke dans le cadre d'une cotutelle de thèse. La direction de thèse a été assurée par le Professeur Alain Rivière et le Professeur Alain Desrochers. L'encadrement de la thèse a été réalisé par Philippe Serré au LISMMA.

Pour exposer son travail de recherche, Monsieur Guillaume Mandil présente un mémoire de thèse d'une centaine de pages articulé en quatre chapitres et une conclusion avec des perspectives.

Monsieur Guillaume Mandil propose, dans son premier chapitre, la mise en place de la problématique traitée durant sa thèse. Elle est constituée par la proposition du concept de « comportement géométrique » dans le cadre de l'ingénierie simultanée. Ce dernier doit permettre des modélisations croisées multi-physiques dans la phase de préconception. Avant d'approfondir son concept de comportement géométrique, Monsieur Guillaume Mandil présente une bibliographie basée sur une soixantaine de références. Cette étude de l'art se focalise sur:

- les modèles géométriques,
- le tolérancement des assemblages,
- les problèmes multi-physiques,
- la méthodologie de conception.

Par un exemple uniaxial, Monsieur Guillaume Mandil montre les liens entre le comportement physique de l'objet étudié (comportement thermique) et le comportement géométrique de l'objet dans le cadre de son assemblabilité et sa montabilité. Monsieur Guillaume Mandil conclut ce chapitre en définissant le contour des travaux de recherche menés dans le cadre de sa thèse: Proposer un concept original de comportement géométrique.

Dans le second chapitre, Monsieur Guillaume Mandil définit le comportement géométrique comme étant : « un système de contraintes entre des paramètres géométriques permettant de traduire certains caractères d'un système mécanique ». Il doit caractériser, via des relations algébriques, les sur-contraintes qui apparaissent entre les paramètres géométriques du modèle durant son montage, sa mise en mouvement et lors d'une variation des conditions physiques de fonctionnement (température, effort,...). Pour mettre en évidence le concept de comportement mécanique, Monsieur Guillaume Mandil propose de traiter le cas



d'une structure pyramidale de quatre barres rotulées. Sur la base des travaux de Michelucci, de Serré et de Yang, la fonction  $H_c$  est obtenue en égalant le déterminant de Cayler-Menger à 0. En la linéarisant, Monsieur Guillaume Mandil obtient le Jacobien de cette fonction. Il lui permet de calculer les coefficients de sensibilité de la structure à une évolution de longueur de chacune des barres ( $dg_i$ ). La condition d'assemblabilité est déduite de ces calculs. Le comportement de la structure dans le voisinage immédiat sera modélisé par cette équation linéarisée. La matrice de Gram est utilisée pour définir la clique topologique de la structure en termes d'angles et de longueurs. Après avoir décrit le comportement de l'assemblage, Monsieur Guillaume Mandil s'intéresse au comportement physique de la structure. Il se focalise, principalement, sur la dilatation de la structure après une élévation de température et aux contraintes mécaniques engendrées dans les quatre barres assemblées. Par l'utilisation de la loi de Hooke et de la loi de dilatation linéaire, Monsieur Guillaume Mandil écrit l'équation d'équilibre de la structure avec déformation des barres ( $dm_i$ ) et l'équation du comportement de la structure sous des variations thermiques ( $dt_i$ ). Les produits scalaires nécessaires aux calculs sont directement récupérés dans la matrice de Gram de la structure. Sous l'hypothèse de superposition des effets ( $dg_i = dt_i + dm_i$ ) et en ajoutant l'équation d'assemblabilité aux équations précédentes, Monsieur Guillaume Mandil obtient un système linéaire qui lui permet de calculer en fonction d'une élévation de température et de la déformation des barres, une nouvelle instance assemblable de l'objet représentant la structure étudiée.

*Ce chapitre met en évidence l'application du concept de comportement géométrique de Monsieur Guillaume Mandil à une structure rotulée. Dans ce cadre et sous l'hypothèse d'adhérence nulle, les déformations en translation se traduisent, uniquement, par des compressions ou des extensions. Dans cette situation, la loi de comportement ( $\sigma, \epsilon$ ) de Hooke trouve son domaine d'application.*

*Dans le cadre de structures usuelles, les liaisons utilisées ne sont pas des rotules et, la structure, un simple segment. Dans ce cas, l'effet des déformations peut se transformer en contraintes de flexion ou de torsion, généralement, couplées à un déversement de l'élément sollicité (rotation). Comment le concept de comportement géométrique pourrait prendre en compte cette remarque ? Ce questionnement sera d'actualité dans le troisième chapitre où Monsieur Guillaume Mandil expose son travail sur un mécanisme tridimensionnel 4 barres avec des liaisons pivots à axes de rotation non colinéaires.*

Dans son troisième chapitre et sous l'hypothèse de dilatation thermique simple (translation), Monsieur Guillaume Mandil propose l'application de sa méthode au traitement du mécanisme de Bennett (système articulé à 4 barres dont les axes de rotations ne sont pas colinéaires). En reprenant à son compte une grande partie des travaux réalisés durant ces dix dernières années au sein du LISMMA, Monsieur Guillaume Mandil a réalisé :

- la représentation schématique du mécanisme de Bennett,
- le modèle géométrique élémentaire en s'appuyant sur les travaux de la thèse de Cailleau basés sur la modélisation d'Hartenberg et Denavit,
- le paramétrage du modèle géométrique par une matrice de Gram en s'appuyant sur les travaux d'A. Clément et de P. Serré,



- l'écriture des équations algébriques de contraintes (fermeture angulaire, mobilité,...) et recherche de la loi E/S basées sur le concept de coupes métriques et la généralisation de l'enchaînement de plusieurs rotations vectorielles, basées sur le résultat des travaux de recherche d'A. Clément et de P. Serré,
- l'écriture des modèles physique et du comportement géométrique (variation thermique) suivant la méthode proposée dans le deuxième chapitre,
- le calcul des jeux au niveau des pivots pour que le mécanisme de Bennett fonctionne à une autre température. Ce travail utilise la méthode de calcul de jeux proposée par P. Serré et F. M'Henni

De part cette modélisation du mécanisme de Bennett, Monsieur Guillaume Mandil arrive à appliquer son concept de comportement géométrique à un mécanisme tridimensionnel. Pour un jeu de paramètres à 20°C, la modélisation de la partie géométrique a été comparée à celle publiée en 2009 par Philippe Serré. Dans un environnement dont la température est de 100°C, Monsieur Guillaume Mandil trouve un nouveau jeu de paramètres garantissant la mobilité du mécanisme à cette température.

*Le travail accompli dans ce chapitre a demandé la maîtrise d'une grande partie des travaux de recherche réalisés depuis plus d'une dizaine d'années au Laboratoire LISMMA dans le domaine de la modélisation déclarative appliquée à la géométrie. Durant une partie de sa thèse, Monsieur Guillaume Mandil a dû acquérir les compétences qui lui ont permis de venir, en fin de chapitre, prendre en compte les effets thermiques sur le comportement du mécanisme.*

*Etant donné la simplicité géométrique du mécanisme étudié, une étude expérimentale aurait pu être menée afin de confirmer les résultats obtenus.*

*Le travail de Monsieur Guillaume Mandil ouvre des perspectives dans la maîtrise de la préconception de mécanismes qui évoluent en ambiance surchauffée (boîte à vitesses, ...).*

Le quatrième chapitre se focalise sur une nouvelle méthode de connexion de deux instances ( $\alpha$  et  $\beta$ ) d'un même objet géométrique caractérisé par un ensemble de points et de segments (modélisation filaire) dans le cycle de préconception. L'hypothèse d'existence de l'objet est posée par Monsieur Guillaume Mandil comme une condition initiale. Par le passé, les travaux de l'équipe du LISMMA, sur la connexion de deux objets, étaient basés sur une matrice de connexion  $C$  qui liait localement les points et les vecteurs des deux graphes topologiques des objets à connecter. Dans la méthode de Monsieur Guillaume Mandil, chaque instance  $\alpha$  et  $\beta$  est modélisée par une matrice de Gram (notées  $G\alpha$  et  $G\beta$ ) et une matrice de connexion propre (notées  $C\alpha$  et  $C\beta$ ). Chaque matrice de connexion relie les segments et les vertex de chaque graphe topologique d'une instance, ainsi, si la topologie de l'objet n'a pas évolué alors  $C\alpha = C\beta$ . Dans cette modélisation, la connexion est obtenue par l'association de deux référentiels issus de deux instances de l'objet. Monsieur Guillaume Mandil propose par l'utilisation de la méthode de factorisation de Cholesky de trouver un repère commun aux instances  $\alpha$  et  $\beta$  de l'objet. Ce dernier permet de projeter les deux modélisations des objets dans un même référentiel ceci sans lier leurs points et les vecteurs constitutifs localement. Ce



chapitre est présenté comme l'article publié par Monsieur Guillaume Mandil dans une revue en langue anglaise.

*La proposition de Monsieur Guillaume Mandil amène un outil complémentaire pour la connexion de deux instances d'un même objet. Le lecteur aurait aimé trouver un comparatif qualitatif et quantitatif entre la méthode de connexion développée par le LISMMA, il y a quelques années et cette proposition.*

En résumé, le document de Monsieur Guillaume Mandil est agréable à lire ce qui permet de suivre sans trop de difficulté les explications et les démonstrations proposées dans les chapitres 2, 3 et 4. Durant sa thèse, Monsieur Guillaume Mandil a publié en tant que premier auteur un article dans la revue « International Journal of Design and Innovation Research ». Cet article constitue, dans son manuscrit de thèse, le quatrième chapitre. La binationalité de cette thèse : franco-canadienne a du influencer le mode de rédaction de Monsieur Guillaume Mandil. La problématique arrive très tôt dans le manuscrit et le lecteur est plongé, très rapidement, dans le sujet par un exemple pédagogique constitué par une structure pyramidale à 4 barres soumises à une élévation de température. Cette structuration est souvent remarquée dans les thèses ou ouvrages anglo-saxons.

Suite à lecture de son manuscrit, je déclare que la thèse de Monsieur Guillaume Mandil mérite d'être soutenue pour l'obtention du titre de docteur de l'Ecole Centrale de Paris et de l'Université de Sherbrooke.

Jean Marc Linares  
Professeur des Universités.  
Aix en Provence, 21/11/2011

## A.4 Rapport de François Villeneuve



- Centre National de la Recherche Scientifique
- Institut National Polytechnique de Grenoble
- Université Joseph Fourier

### RAPPORT d'examinateur

de M. **François VILLENEUVE**, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, examinateur au jury de thèse de M. **Guillaume MANDIL**, sur la thèse intitulée

#### Modèle de représentation géométrique intégrant les états physiques du produit

préparée sous la direction de Alain Desrochers et Alain Rivière et la coencadrement de Philippe Serré.

Le document présenté par M. Mandil a pour objet la proposition d'un modèle géométrique commun pour étudier simultanément, en conception préliminaire, les influences physiques et géométriques. Le document est organisé en 4 chapitres hors conclusion générale. Il comporte de plus une liste de références bibliographiques.

Le **chapitre 1** situe le contexte de la thèse et les problématiques soulevées. Il aborde la littérature existante selon 3 points de vue :

- les outils, modèles et méthodes de définition des objets géométriques en CAO 3D
- les méthodes de résolution des problèmes multiphysiques
- les méthodologies de conception

L'ambition principale de la thèse consiste à valider le concept de « comportement géométrique » par analogie avec le comportement physique, dans l'idée d'offrir une modélisation permettant de proposer des lois de comportement géométrique pour garantir le caractère assemblable ou mobile d'un mécanisme.

*Ce chapitre de 16 pages situe bien le contexte des travaux et les attendus du travail sont clairement exprimés. On peut regretter que la partie bibliographique soit assez légère et très centrée sur les travaux de l'équipe avec lequel a travaillé le doctorant.*

*Il conviendrait à ce propos de reprendre les références citées en fin de document afin qu'elles soient exploitables simplement. Beaucoup de références sont incomplètes : manque par exemple les dates et lieu des conférences citées, parfois l'ouvrage ou la revue d'où est tiré l'article (Anselmetti, B. (2002)., Bourdet 1996, Bass 77, Bricard 26, ...)*

Le **chapitre 2** définit le concept de Comportement géométrique, en l'illustrant sur le cas d'un système pyramidal à 4 barres. L'approche géométrique est couplée avec l'étude du comportement thermique et mécanique. La modélisation proposée est déclarative et utilise la matrice de Gram pour représenter la géométrie du mécanisme simplifié. Le comportement géométrique (assemblabilité) est résolu avec le déterminant de Cayley Menger et il est montré que l'on peut intégrer dans l'approche les comportements physiques.

*Ce chapitre de 14 pages est très intéressant, car avec un exemple simple il montre bien les possibilités du modèle envisagé. Le déterminant de Cayley Menger est-il applicable dans des cas plus généraux que celui-ci ?*

Le **chapitre 3** est le plus conséquent de la thèse. Il contient l'essentiel de la contribution de l'auteur. Il propose un modèle permettant à la fois l'étude de l'assemblabilité et de la mobilité d'un mécanisme, tout en intégrant des phénomènes physiques du type mécanique ou thermique. Le travail est limité aux boucles cinématiques fermées et donc chaque pièce possède 2 liaisons. L'auteur modélise les mécanismes sous formes de combinaisons de liaisons pivot glissant (thèse de Cailliau).

#### ■ Laboratoire G-SCOP

- 46, avenue Félix Viallet  
38031 GRENOBLE Cedex 1
- Tél. : +33 4 76 57 43 20  
Fax : + 33 4 76 57 46 95

## ● Page 2

L'assemblabilité est montrée par une fermeture angulaire et une fermeture périmétrique. La matrice de Gram permet de générer les équations de fermeture. La mobilité est vue comme une assemblabilité pour différentes valeurs du(des) paramètre(s) d'entrée. Si les équations produites ne dépendent pas de ce paramètre, le système est mobile. L'ensemble est illustré sur le mécanisme de Bennet, avec intégration d'un facteur thermique et recherche de jeux pour garantir la mobilité du mécanisme après déformation thermique

*Ce chapitre de 40 pages constitue la contribution majeure de l'auteur. Il est très bien rédigé et les concepts et propositions introduites sont très séduisantes. 2 remarques toutefois. Il est difficile de bien distinguer ce qui constitue l'apport spécifique du doctorant vis-à-vis en particulier des contributions antérieures de Serré et Moinet en particulier. On aurait aimé un exemple ne comportant pas que des liaisons pivot afin de comprendre la validité de l'hypothèse qu'un mécanisme peut toujours se ramener à une combinaison de liaisons pivot glissant.*

Le **chapitre 4** reprend un article publié dans la revue *IJ of Design and Innovation Research* en langue anglaise. Il vise à montrer comment associer deux représentations d'un objet. L'application dans le contexte de la thèse pourrait être de comparer deux états physiques distincts du même composant ou d'associer un mécanisme réel à un mécanisme idéal.

*Ce chapitre est atypique puisqu'il reprend un article publié. On aurait aimé plus de développement sur les deux applications envisageables citées ci-dessus.*

Une conclusion et des perspectives closent le document. Sont soulignées dans les perspectives les difficultés du modèle dès qu'il s'agit de résoudre les équations de manière générale, ainsi que le besoin d'apporter des outils de résolution pour la mobilité.

**Conclusion**

Le document présenté par M. Guillaume MANDIL est assez compact (92 pages hors références) et d'une très bonne qualité rédactionnelle. Il est complété par une bibliographie relativement légère qu'il conviendra de corriger sur la forme comme je l'indique dans mon commentaire sur le chapitre 1.

De plus quelques coquilles mineures pourront être corrigées dans le document (voir document de thèse joint, pages 7, 8, 12, 21, 30, 40, 47, 61).

La thèse propose un modèle de comportement géométrique original, et montre son applicabilité sur 2 exemples détaillés. Des développements sont encore à mener pour envisager l'utilisabilité du modèle et il serait important de publier en revue les résultats de ces travaux.

Les développements menés couvrent bien les attendus d'un travail de thèse. Pour ces raisons, je donne un avis favorable à ce travail et déclare que la thèse de M. Guillaume MANDIL mérite d'être soutenue.

Fait à Grenoble, le 8 décembre 2011,



François VILLENEUVE  
Professeur à l'université Joseph Fourier (Grenoble 1), laboratoire G-SCOP, Grenoble

## A.5 Rapport de Jean-Marc Drouet

### Rapport d'évaluation d'une thèse de doctorat

#### Examineur

Jean-Marc Drouet  
Département de génie mécanique  
Université de Sherbrooke

#### Candidat

Guillaume Mandil

#### Titre de la thèse

Modèle de représentation géométrique intégrant  
les états physiques du produit

---

#### I Appréciation globale

##### *Appréciation quant au fond*

Ce travail apporte une contribution de recherche pertinente en conception mécanique en introduisant le concept de comportement géométrique d'un assemblage mécanique. Le candidat développe son propos en trois temps forts (chapitres 2, 3 et 4), soit (1) en détaillant le concept de comportement géométrique ; (2) en étendant ce concept aux mécanismes mobiles ; (3) en présentant une solution pour associer et comparer deux objets décrits par des représentations non cartésiennes. La qualité et la rigueur du travail réalisé par le candidat à l'intérieur de ces chapitres est à souligner.

La composition de cette thèse m'apparaît cependant comme une juxtaposition de développements distincts regroupés en chapitres, un fil conducteur fort ne s'en dégage pas. D'autre part, dans cette thèse, on y entend peu le candidat discuter de sa recherche. Cela vient, à mon avis, surtout du fait qu'il n'y ait pas de section « Discussion » dans cette thèse mis à part la section 5.2 qui ne représente pas vraiment l'idée que je me fais d'une discussion dans une thèse. La discussion constitue un élément essentiel d'une thèse de la nature de celle présentée par le candidat et doit y figurer comme un chapitre à part entière, c'est le dernier chapitre à être présenté avant la conclusion. Elle offre au candidat un espace pour qu'il puisse porter un regard critique sur sa recherche, élaborer sur ce qui a marché ou pas, bref nous parler de son travail à nous lecteurs.

##### *Appréciation quant à la forme*

La qualité du français est très bonne et à souligner. Le nombre de figures est adéquat pour un travail de cette nature. La présentation générale de la thèse est excellente.

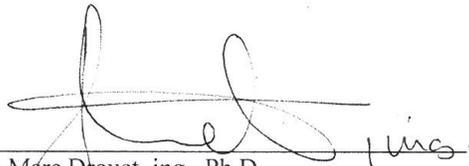
## II Décision

Sous condition que le candidat effectue la correction demandée (voir section III), ma décision est d'accepter ce mémoire avec corrections mineures quant au fond et à la forme.

La mention attribuée quant au fond est « Très bien ».

## III Corrections demandées

Il y en a qu'une : ajouter une section « Discussion » en bonne et due forme dans laquelle le candidat porte un regard critique sur sa recherche, élabore sur ce qui a marché ou pas, etc.



Jean-Marc Drouet, ing., Ph.D.  
Professeur  
Département de génie mécanique  
Faculté de génie  
Université de Sherbrooke  
Téléphone: (819) 821-8000 poste 61345  
Courriel: Jean-Marc .Drouet@USherbrooke.ca

## A.6 Rapport d'Alain Desrochers

Rapport d'évaluation de la thèse de Guillaume Mandil par Alain Desrochers

---

Rapport d'évaluation de la thèse de doctorat intitulée:

**Modèle de représentation géométrique intégrant les états physiques du produit**

Nom du candidat : Guillaume MANDIL

### I. Appréciation globale

L'objectif du travail de doctorat est de définir et introduire le concept de comportement géométrique d'un assemblage mécanique en fonction de ses états physiques. De manière alternative, la thèse propose une représentation géométrique du produit adaptée aux différentes phases de son cycle de vie et en particulier les phases de conception et d'utilisation. À cette fin, le candidat élabore des outils mathématiques permettant de lier les états physiques du produit à ses dimensions (géométrie).

La thèse est présentée sous le format combiné et inclus donc un article en guise de chapitre. Autrement, elle comprend un premier chapitre introduisant la problématique, le vocabulaire, l'état de l'art, et enfin les originalités et les objectifs du travail. La problématique est illustrée à travers un exemple unidirectionnel simple mais représentatif. Le vocabulaire aurait toutefois logiquement pu être intégré dans l'état de l'art, avec des références bibliographiques appropriées. Quant à l'état de l'art lui-même, il s'étant sur huit pages et exploite une bibliographie relativement complète avec des articles allant jusqu'en 2010. Les originalités et objectifs sont formulés sur une seule page.

Le second chapitre poursuit avec la présentation du concept de comportement géométrique associé à celui de produits multi-physiques. La présentation est plutôt conceptuelle et ne prend un sens réel qu'avec son application à une structure pyramidale à quatre barres soumise à un écart de température et des chargements mécaniques. Le traitement est très mathématique et fait intervenir le déterminant de Cayley-Menger pour la mise en équation du treillis pour lequel on vérifie l'assemblabilité dans des conditions de température et d'effort différentes.

Le troisième chapitre, avec ses quarante pages, constitue le cœur du travail et aborde le comportement géométrique pour des mécanismes mobiles. L'objectif ici n'est plus simplement d'assurer l'assemblabilité du mécanisme mais de vérifier également si sa mobilité est préservée lors d'un changement multiphysique. À cette fin, un squelette est construit dans le but de représenter les degrés de liberté du mécanisme. Ce squelette s'appuie sur la représentation de Denavit-Hartenberg et les travaux de Cailliau. Une paramétrisation par une matrice de Gram complète la modélisation et l'assemblabilité est vérifiée par des conditions de fermeture angulaire et périmétrique. L'ensemble est soigneusement validé sur le cas d'un mécanisme de Bennett (à quatre barres) soumis à un changement de température.

Le chapitre 4 présente un article paru en 2010 dans la revue « International Journal of Design and Innovation Research ». L'article expose une approche originale permettant d'associer les représentations géométriques sans coordonnées de deux composants dans un assemblage. Ces représentations permettent de comparer les états idéal et réel d'une pièce, ou encore deux états physiques d'un même composant. Le tout est illustré sur l'exemple d'un prisme à quatre sommets.

La thèse s'achève au chapitre 5 par une courte conclusion de deux pages qui revient sur les développements présentés puis élabore sur les perspectives de travaux futurs. La thèse ne comprend pas d'annexes.

D'un point de vue scientifique, le travail est d'une bonne qualité, bien que relativement court, et il se distingue particulièrement par la rigueur des développements proposés et la qualité des

---

Rapport d'évaluation de la thèse de Guillaume Mandil par Alain Desrochers

---

exemples qui y sont présentés. Chaque chapitre étant relativement autonome, le lien entre chacun est parfois un peu difficile à établir et cela s'avère particulièrement vrai pour le quatrième chapitre (article). Le choix de la revue est discutable puisqu'il s'agit d'une revue numérique fondée en 2008 et bénéficiant d'un faible facteur d'impact. Le fait qu'un article ait été publié constitue néanmoins une forme de validation par les pairs.

Globalement, le travail propose une contribution utile à la recherche théorique en conception assistée par ordinateur (CAO).

Au niveau de sa rédaction, la thèse est très bien écrite, le français est vraiment excellent et les coquilles sont pratiquement inexistantes. La présentation correspond à ce qui est attendu pour une thèse. Les figures, bien que peu nombreuses, sont adéquates et permettent de bien supporter le texte et les développements mathématiques. Pour terminer, quelques remarques plus spécifiques, associées à la forme, sont indiquées directement dans le manuscrit.

Par ailleurs, les corrections suivantes devraient être réalisées :

- Page 15 : L'objectif principal devrait être énoncé plus explicitement et davantage mis en valeur et il n'y a pas non plus d'objectifs spécifiques.
- Page 58-59 : Le principe de calcul des coupures métriques devrait être présenté avec plus de détail, ne serait-ce qu'en annexe, ou encore il pourrait être supporté par une référence.
- Il faut éviter de référer aux couleurs (rouge) dans les figures, au cas où la thèse serait reproduite ou numérisée en noir et blanc (ce qui était le cas de ma copie).
- Les rares coquilles orthographiques sont identifiées dans la copie annotée de la thèse.

## II. Décision

Au vu de ce qui précède, je recommande que le mémoire soit accepté avec corrections mineures. En plus des commentaires formulés ci-haut, plusieurs corrections et interrogations mineures sont directement indiquées dans le manuscrit.

## III. Évaluation

Compte tenu de ce qui précède et de la somme de travail réalisée, je recommande la **cote B**.



Alain DESROCHERS  
Professeur titulaire  
Département de génie mécanique  
Université de Sherbrooke

Fait à Sherbrooke, le 30 novembre 2011

## A.7 Rapport d'Alain Rivière

### Rapport de Thèse de Monsieur Guillaume MANDIL

Dan son mémoire de thèse Monsieur Guillaume MANDIL expose clairement son travail novateur; le dernier chapitre du document est relatif à un article publié dans une revue américaine.

L'innovation majeure de ce travail consiste en la proposition et la démonstration d'une intégration du comportement géométrique et des comportements physiques d'un système.

De nombreuses perspectives sont ouvertes par ce travail.

Je donne donc un avis très favorable à la soutenance de cette thèse pour l'obtention des titres de docteur de l'École Centrale Paris et de l'Université de Sherbrooke.

Pr. Alain RIVIERE

---



# LISTE DES RÉFÉRENCES

- Anselmetti, B. (2002). Tolérancement fonctionnel d'un mécanisme : identification de la boucle de contacts. volume Proceedings of IDMME.
- Anselmetti, B. (2006). Generation of functional tolerancing based on positioning features. *Computer-Aided Design*, volume 38, numéro 8, p. 902–919.
- Anselmetti, B., Mejbri, H. et Mawussi, K. (2003). Synthesis of tolerances starting from a fuzzy expression of the functional requirements. *Geometric Product Specification and Verification : Integration of Functionality*, p. 155–164.
- Association française pour l'analyse de la valeur, A. (1989). *Exprimer le besoin : applications de la démarche fonctionnelle*. AFNOR gestion, AFNOR.
- Bass, J. (1977). *Algèbre linéaire intégrales simples. Fonctions définies par des séries et des intégrales*. Cours de mathématiques, Masson.
- Bennett, G. T. (1903). A new mechanism. *Engineering*, volume 76, p. 777–778.
- Bourdet, P. et Clément, A. (1976). Controlling a complex surface with a 3 axis measuring machine. *Annals of the CIRP - Manufacturing Technology*, volume 25, p. 359–361.
- Bourdet, P., Mathieu, L., Lartigue, C. et Ballu, A. (1996). The concept of the small displacement torsor in metrology. volume Proceedings of Euroconference Advanced Mathematical Tools in Metrology. p. 110–22.
- Bricard, R. (1926). *Cinématique appliquée*. Leçons de cinématique, Gauthier-Villars.
- Buchberger, B. (1998). *An Algorithmic Criterion for the Solvability of Algebraic Systems of Equations*, London Mathematical Society Lecture Note Series, volume 251. Cambridge University Press, 535-545 p.
- Buchberger, B. (2006). *An Algorithm for Finding the Basis Elements in the Residue Class Ring Modulo a Zero Dimensional Polynomial Ideal*. Thèse de doctorat, 475-511 p.
- Cailliau, P.-É. (2010). *Modélisation et résolution de problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- Cartan, É. (1946). *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, 2<sup>e</sup> édition. Gauthier-Villars.
- Chen, C. (2011). The order of local mobility of mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, volume 46, numéro 9, p. 1251 – 1264.
- Clément, A., Rivière, A. et Serré, P. (1996). Les satt : un modèle déclaratif commun pour le paramétrage, le tolérancement et l'assemblage. *Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique*, volume 11, numéro 1/2, p. 149–164.
- Clément, A., Rivière, A. et Serré, P. (1999). A Declarative Approach for Geometry and Topology : a New Paradigm for CAD/CAM Systems. Dans ed. Kluwer Academic,

- International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*. p. 199–206.
- Clément, A., Rivière, A. et Serré, P. (2004). New technology for solving large-scale geometrical networks. Dans *Proceeding of ISICAD 2004*.
- Clément, A., Valade, C. et Rivière, A. (1997). The ttrss : 13 oriented constraints for dimensioning, tolerancing and inspection. volume *Proceedings of Euroconference : Advanced Mathematical Tools in Metrology III*. p. 24–42.
- Cuillière, J.-C., Bournival, S. et François, V. (2010). A mesh-geometry-based solution to mixed-dimensional coupling. *Computer-Aided Design*, volume 42, numéro 6, p. 509 – 522.
- Desrochers, A. (1991). *Modèle conceptuel du dimensionnement et du tolérancement des mécanismes. Représentation dans les systèmes CFAO*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.
- Desrochers, A., Ghie, W. et Laperriere, L. (2003). Application of a unified jacobian-torsor model for tolerance analysis. *Journal of Computing and Information Science in Engineering (Transactions of the ASME)*, volume 3, numéro 1, p. 2–14.
- Devalan, P. (2009). *Simulation Numerique dans le Processus de Conception de Systemes Mecaniques*. Techniques Ingénieur.
- EIA, E. (1998). *ANSI/EIA-632 Standard, Processes for Engineering a System*. EIA.
- Garrigues, J. (2002). *Mécanique des milieux continus*, école supérieure de mécanique de marseille édition.
- Ghie, W. (2004). *Modèle unifié Jacobien-Torseur pour le tolérancement assisté par ordinateur*. Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke.
- Ghie, W., Desrochers, A. et Laperriere, L. (2007a). Assessment of design parameter space using tolerance analysis. Dans *10th International Seminar On Computer Aided Tolerancing*.
- Ghie, W., Laperriere, L. et Desrochers, A. (2003). A unified jacobian-torsor model for analysis in computer aided tolerancing. volume *Proceedings of IDMME*. p. 63–72.
- Ghie, W., Laperriere, L., Nadeau, D. et Desrochers, A. (2007b). Allocation tolerance by jacobian-torsor model. volume *Proceedings of the 18th IASTED International Conference*. p. 191–196.
- Hartenberg, R. S. et Denavit, J. (1964). *Kinematic Synthesis of Linkages (Mechanical Engineering Series)*. McGraw-Hill Inc.,US.
- Hervé, J.-M. (1976). *La géométrie du groupe des déplacements appliquée à l'analyse cinématique des mécanismes*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.
- Hervé, J.-M. (1994). The mathematical group structure of the set of displacements. *Mechanism and Machine Theory*, volume 29, numéro 1, p. 73 – 81.
-

- Hervé, J.-M. (1999). The lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design. *Mechanism and Machine Theory*, volume 34, numéro 5, p. 719 – 730.
- Laperriere, L., Ghie, W. et Desrochers, A. (2002). Statistical and deterministic tolerance analysis and synthesis using a unified jacobian-torsor model. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, volume 51, numéro 1, p. 417–420.
- Le Goff, D. (1990). *Modélisation déclarative et morphologie urbaine*. Mémoire de maîtrise, Université de Nantes.
- Lee, K. et Gossard, D. C. (1985). A hierarchical data structure for representing assemblies. i. *Computer Aided Design*, volume 17, numéro 1, p. 15–19.
- Lichnerowicz, A. (1956). *Algèbre et analyse linéaires*, 2<sup>e</sup> édition. Masson Paris.
- Louhichi, B. (2008). *Intégration CAO/Calcul par reconstruction du modèle CAO à partir des résultats éléments finis*. Thèse de doctorat, ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE MONASTIR.
- Mandil, G., Desrochers, A. et Rivière, A. (2009). Computational methodology for the prediction of functional requirement variations across the product life-cycle. volume 11th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing.
- Mandil, G., Serré, P., Moinet, M. et Desrochers, A. (2010). Geometrical tools for the description and control of functional specifications at the conceptual design phase. *International Journal of Design and Innovation Research*, volume 5, numéro 1, p. 23–40.
- McDermid, J. et Ripken, K. (1984). *Life cycle support in the Ada environment*. Ada companion series, Published on behalf of the Commission of the European Communities by Cambridge University Press.
- M'henni, F. (2010). *Effet des tolérances géométriques qualitatives et quantitatives sur le comportement d'un mécanisme : critères d'évaluation*. Thèse de doctorat, Tunisie.
- Michelucci, D. et Foufou, S. (2004). Using cayley-menger determinants for geometric constraint solving. Dans *Proceedings of the ninth ACM symposium on Solid modeling and applications*. SM '04. Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, p. 285–290.
- Moinet, M. (2008). *Descriptions non cartésiennes et résolution de problèmes géométriques sous contraintes*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- Moinet, M., Serré, P., Rivière, A. et Clément, A. (2007). Modelling of the transformation of an object defined by geometric constraints,. Dans *Proceedings of Conception et Production Intégrée*.
- Moinet, M., Serré, P., Rivière, A. et Clément, A. (2008). Modélisation déclarative et transformation d'un objet géométrique sous contraintes. Dans *Proceedings of 7ème Conférence Internationale de MODélisation et SIMulation*.
-

- Moinet, M., Serré, P., Rivière, A. et Clément, A. (2010). A new approach to transform a constrained geometric object. Dans *Proceedings of the 20th CIRP Design Conference*.
- Nasser, H., M'sirdi, N. K. et Naamane, A. (2010). Modélisation et simulation dynamique d'un kart électrique. Dans *8ème conférence internationale de Modélisation et Simulation*.
- Néron, D. (2004). *Sur une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.
- Ohayon, R. (2004). *Encyclopedia of Computational Mechanics*, book chapter Fluid-structure interaction problems, *volume Solids and Structures*. John Wiley and Sons, p. 683–693.
- Peaucelle, J.-L. (2005). Du concept d'interchangeabilité à sa réalisation, le fusil des xviii<sup>e</sup> et xix<sup>e</sup> siècle. *Les annales des mines - Gérer et comprendre*, , numéro 80, p. 58–75.
- Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 51, numéro 03, p. 406–413.
- Perez, A. et Mc Carthy, J. M. (2003). Dimensional synthesis of bennett linkages. *Transaction of the ASME*, p. 98 – 104.
- Rivière, A. (1993). *La géométrie du groupe des déplacements appliquée à la modélisation du tolérancement*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- Rodrigues, O. (1840). Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, volume 5, p. 380 – 440.
- Salençon, J. (2007). *Mécanique des milieux continus : Thermoélasticité*. Mécanique des milieux continus, les Éd. de l'École polytechnique.
- Serré, P. (2000). *Cohérence de la spécification d'un objet de l'espace euclidien à n dimensions*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- Serré, P., Clément, A. et Rivière, A. (2002). Vers une approche déclarative en CFAO. Application au mécanisme de Bennett. Dans *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (IDMME 2002)*. p. 11.
- Serré, P., M'henni, F. et Clément, A. (2009). A parametric approach to determine minimum clearance in overconstrained mechanisms. Dans *Proceedings of 11<sup>th</sup> CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*.
- Serré, P., Ortuzar, A. et Rivière, A. (2006). Non-cartesian modelling for analysis of the consistency of a geometric specification for conceptual design. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, volume 16, numéro 5/6, p. 549–565.
- Serré, P., Rivière, A., Malgras, É. et Clément, A. (2004). Toward a declarative approach for CAD-CAM systems. Dans *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (IDMME 2004)*. p. 9.
-

- 
- Souaissa, K., Cuillière, J.-C., François, V., Benamara, A. et Belhadjsalah, H. (2009). Automatic modification retrieval between cad parts.
- Turner, J. U. (1990). Relative positioning of parts in assemblies using mathematical programming. *Computer Aided Design*, volume 22, numéro 7, p. 394–400.
- Yang, L. (2004). Distance coordinates used in geometric constraint solving. Dans Winkler, F., *Automated Deduction in Geometry*, Lecture Notes in Computer Science, volume 2930. Springer Berlin / Heidelberg, p. 216–229.
-





