

Vers la forme générale du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch

Bertrand Duma

▶ **To cite this version:**

Bertrand Duma. Vers la forme générale du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2012. Français. NNT : . tel-00741782

HAL Id: tel-00741782
https://theses.hal.science/tel-00741782

Submitted on 15 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris VII -
Denis Diderot

École Doctorale Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Bertrand Duma

Vers la forme générale du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch

---

dirigée par Damian Rössler

Soutenue le 26 septembre 2012 devant le jury composé de :

M. Antoine Ducros	Université Pierre et Marie Curie	examinateur
M. Dennis Eriksson	Göteborgs Universitet	examinateur
M. Bernhard Köck	University of Southampton	examinateur
M. Damian Rössler	IMT, CNRS	directeur
M. Bertrand Toën	I3M, CNRS	examinateur
M. Joseph Tapia	Université Paul Sabatier	rapporteur
Absent à la soutenance :		
M. Klaus Künnemann	Universität Regensburg	rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du chevaleret
75 013 Paris

École doctorale Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

Es gibt zwei menschliche Hauptsünden, aus welchen sich alle andern ableiten : Ungeduld und Lässigkeit. Wegen der Ungeduld sind sie aus dem Paradiese vertrieben worden, wegen der Lässigkeit kehren sie nicht zurück. Vielleicht aber gibt es nur eine Hauptsünde : die Ungeduld. Wegen der Ungeduld sind sie vertrieben worden, wegen der Ungeduld kehren sie nicht zurück.

F. Kafka

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Damian Rössler d'avoir accepté d'encadrer cette thèse. Son soutien a compté pour l'achèvement de ce travail dont le déroulement a connu quelques péripéties. Je souhaite également exprimer ma reconnaissance à Klaus Künnemann et Joseph Tapia qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse : j'ai pu pleinement profiter de leurs remarques pour améliorer mon manuscrit. Enfin Antoine Ducros, Dennis Eriksson, Bernhard Köck et Bertrand Toën me font l'honneur de participer à mon jury : je les en remercie vivement.

Je remercie également tous les mathématiciens avec lesquels j'ai eu l'occasion de m'entretenir au cours de cette thèse. Je pense notamment à Frédéric Déglise et Bruno Klingler qui ont été disponibles pour répondre à mes questions. Une mention spéciale pour Ofer Gabber : je lui avais écrit sur les conseils de Bruno Klingler et sa réponse m'a permis de gagner un temps précieux à la fin de ma rédaction ; je lui en suis extrêmement reconnaissant. En marge du sujet de cette thèse, je garde également un excellent souvenir du groupe de travail sur les cohomologies p-adiques organisé en 2009 à l'ENS par Alexis Bouthier et Luc Illusie – j'ai passé de très agréables après-midi à discuter de mathématiques avec ce dernier.

Cette thèse a également été l'aboutissement de mes études de mathématiques qui n'auraient pas été ce qu'elles ont été sans mes divers professeurs. Je pense notamment à Yves Laszlo, qui avait encadré mon mémoire de M1 et avec qui j'ai beaucoup discuté lors de mon année de M2, ainsi qu'à Marc Hindry sous la supervision duquel j'ai réalisé mon mémoire de M2. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie également Michèle Wasse, Alice Dupouy et Régine Guittard pour leur efficacité dans la gestion des aspects administratifs de cette thèse, des premières inscriptions à la soutenance finale.

Ces années passées à l'Institut de Mathématiques de Jussieu furent rendues plus agréables par l'ambiance du plateau 7C de Chevaleret et la présence de tous ses doctorants : Alexandre, Arnaud, Christophe, Daniel, Dragos, Elodie, Hoël, Louis-Hadrien, Lukas, Olivier, Paloma, Robert, Victoria, Yohan...

Je tiens aussi à remercier tous mes amis pour leur présence et leur patience au cours de ces années. J'ai notamment en mémoire un dîner à trois un soir de novembre 2010, du côté de la rue des Ciseaux, qui sut me donner une impulsion nécessaire à un moment décisif – ce soir-là nous avons beaucoup ri.

Enfin mes remerciements vont, pour leur soutien constant, à ma famille. En particulier, au moment de conclure ces lignes, j'ai une pensée pour mon grand-père.

Résumé

Résumé

On s'intéresse dans ce travail au théorème de Grothendieck-Riemann-Roch. Grothendieck et son école en ont démontré une forme très générale dans les années 60 tout en conjecturant l'existence d'une forme encore plus générale. Nous posons une conjecture intermédiaire entre les résultats connus et les conjectures les plus générales de Grothendieck, puis nous la démontrons dans deux cas particuliers.

Plus précisément on conjecture que le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch est vrai pour un morphisme propre localement d'intersection complète entre deux schémas divisoriels d'égale caractéristique. On démontre des cas particuliers de cette conjecture, dans le cas de la caractéristique positive d'une part, dans le cas où les schémas sont supposés réguliers et tels que le polynôme $T^k - 1$ y ait k racines distinctes d'autre part.

Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch étant équivalent au théorème d'Adams-Riemann-Roch modulo torsion, on démontre des résultats de type Adams-Riemann-Roch pour en déduire des résultats de type Grothendieck-Riemann-Roch.

Mots-clefs

Grothendieck-Riemann-Roch, Adams-Riemann-Roch, Lefschetz-Riemann-Roch, K-théorie.

Towards the most general form of the Grothendieck-Riemann-Roch theorem

Abstract

The aim of this work is the study of the Grothendieck-Riemann-Roch-theorem. Grothendieck and his school has proven a quite general form of this theorem in the sixties and also conjectured a much more general form of it. We state a conjecture intermediate between the known results and Grothendieck's most general conjectures. We then prove it in two special cases.

More precisely, the conjecture is that Grothendieck-Riemann-Roch theorem is true for a proper and locally complete intersection morphism between two divisorial schemes of equal characteristic. We prove some special cases of this conjecture, in the case of positive characteristic on the one hand, in the case of regular schemes for which the polynomial $T^k - 1$ has k roots on the other hand.

Grothendieck-Riemann-Roch theorem being equivalent mod. torsion to Adams-Riemann-Roch theorem, we prove Adams-Riemann-Roch type results and deduce from them Grothendieck-Riemann-Roch type results.

Keywords

Grothendieck-Riemann-Roch, Adams-Riemann-Roch, Lefschetz-Riemann-Roch, K-theory.

Table des matières

Introduction **11**

Notations **15**

1 Rappels et notations **17**
1.1 Propriétés générales des λ-anneaux 17
1.2 Quelques résultats de K-théorie 27
1.3 Immersions régulières 37

2 Enoncés des principaux résultats **43**
2.1 Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch dans SGA6 43
2.2 Conjectures et résultats 44

3 Preuve du théorème 2.8 **51**
3.1 La déformation au cône normal 51
3.2 Preuve du théorème 62

4 Preuve des théorèmes 2.7 et 2.9 **65**
4.1 Un résultat d'invariance 65
4.2 Preuve des théorèmes 67

5 Preuve du théorème 2.10 **71**
5.1 Schémas en groupes et action de groupe 71
5.2 K-théorie équivariante et formule de Lefschetz 77
5.3 Preuve du théorème 5.1 84

A Le théorème d'Adams-Riemann-Roch **95**
A.1 Compatibilité à la composition 95
A.2 Preuve du théorème A.1 96

B Une équivalence **99**
B.1 Espaces propres des opérateurs d'Adams 100
B.2 Preuve de l'implication i)⇒ii) du théorème B.1 101
B.3 Preuve de l'implication ii)⇒i) du théorème B.1 103

C Compatibilité au changement de base **105**

Bibliographie **107**

Introduction

Le problème de Riemann-Roch – dont le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch constitue l'un des aboutissements – fait partie des problèmes centraux de la géométrie algébrique. Il compte parmi ceux qui ont contribué de manière essentielle à l'élaboration de ce domaine des mathématiques depuis la seconde moitié du XIX^{e} siècle.

Le problème original était celui de l'existence de fonctions méromorphes à pôles prescrits sur une surface de Riemann. Il fut d'abord résolu par Riemann (1857), sous forme d'une inégalité, avant d'être précisé par l'élève de Riemann Gustav Roch (1865, cf. [25]). C'est Max Noether qui donna à ce résultat le nom de théorème de Riemann-Roch.

Plus généralement, et sans se limiter au cas des surfaces de Riemann, on peut formuler un problème de Riemann-Roch pour une variété algébrique non singulière X sur un corps algébriquement clos k de la manière suivante : soit D un diviseur sur X, on considère le système linéaire associé $|D|$. La question est alors de déterminer $\dim |D|$, et plus généralement d'estimer le comportement de $\dim |nD|$ comme fonction de n pour n un entier strictement positif.

Le théorème de Riemann-Roch initial répondait bien à cette question pour une surface de Riemann. Soit D un diviseur sur une surface de Riemann S de diviseur canonique K et de genre g. On note $l(D) = \dim H^0(X, \mathscr{O}(D))$ où $\mathscr{O}(D)$ est le faisceau associé à D. La forme moderne du théorème de Riemann-Roch s'énonce alors comme l'égalité

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

La majoration grossière du terme « surabondant » $l(K - D) \geqslant 0$ permet de retrouver l'inégalité originelle de Riemann $l(D) \geqslant \deg D + 1 - g$. Le théorème de Riemann-Roch fournit également une réponse au problème de Riemann-Roch : dès que $n \deg D > \deg K$, $l(K - D) = 0$ et on déduit que

$$\dim |nD| = n \deg D - g$$

Le résultat initial de Riemann-Roch fut ensuite généralisé au cas des courbes algébriques. L'étape suivante était de s'occuper des surfaces algébriques – c'est l'école italienne qui s'illustra pour l'essentiel dans cette tâche : après des résultats partiels de Noether ([21]) et de Enriques ([11]) la première solution complète fut donnée par Castelnuovo ([6], [7]) avant d'être simplifiée par Severi dans [27]. Néanmoins le théorème de Riemann-Roch prouvé dans ce cas-là prenait encore la forme d'une inégalité, le terme « surabondant » correctif n'étant pas connu. Ce terme surabondant est déterminé par Zariski dans [35] où il résout également le problème de Riemann-Roch dans le cas des surfaces algébriques.

L'expression moderne du théorème de Riemann-Roch pour un diviseur D sur une surface algébrique X de diviseur canonique K et de genre arithmétique p_a prend la forme d'une égalité

$$l(D) - s(D) + l(K - D) = \frac{1}{2} D \cdot (D - K) + 1 + p_a$$

$s(D)$ est le terme surabondant déjà évoqué et $s(D) = \dim H^1(X, \mathscr{O}(D))$ – il aura donc fallu l'invention de la cohomologie pour exprimer précisément ce terme surabondant.

On remarque qu'en vertu de la dualité de Serre, $l(K-D) = \dim H^2(X, \mathscr{O}(D))$. Ainsi le membre de gauche peut s'interpréter comme la caractéristique d'Euler $\chi(X, \mathscr{O}(D))$. Il en est de même pour le théorème de Riemann-Roch dans le cas des courbes.

Résoudre le problème de Riemann-Roch amène en fait à combiner trois éléments : des théorèmes d'annulations comme le théorème de Kodaira, pour ne garder que le terme $l(nD)$, la dualité de Serre et un calcul de caractéristique d'Euler. C'est dans cette dernière direction – un calcul de caractéristique d'Euler – que l'on a grandement généralisé le théorème de Riemann-Roch.

Le premier pas dans cette direction fut le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch.

Soit X une variété algébrique projective non singulière de dimension n sur un corps k algébriquement clos, de fibré tangent $\mathscr{T}_X$. Pour $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur X on note $\mathrm{ch}(\mathscr{E})$ le caractère de Chern de $\mathscr{E}$, c'est un élément de l'anneau de Chow de X tensorisé par $\mathbf{Q}$, soit $\mathrm{ch}(\mathscr{E}) \in A(X) \otimes \mathbf{Q}$. On note également $\mathrm{td}(\mathscr{E}) \in A(X) \otimes \mathbf{Q}$ la classe de Todd de $\mathscr{E}$.

Si on note enfin $\int_X : A(X) \otimes \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ l'application qui à un cycle algébrique associe le degré de sa composante d'ordre n, le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch affirme alors que

$$\chi(X, \mathscr{E}) = \int_X \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{td}(\mathscr{T}_X) \tag{1}$$

Ce théorème fut démontré sur $\mathbf{C}$ par Hirzebruch ([18]) et le cas d'un corps quelconque k fut obtenu par Grothendieck ([4] ou [2] Exp. 0 App.).

A son habitude, Grothendieck proposait en fait une forme nettement plus générale du théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch. Il se plaçait dans un cadre relatif et considérait un morphisme propre $f : X \to Y$ avec X et Y des schémas quasi-projectifs et lisses sur un corps k. La donnée de f lui permettait de définir un morphisme image directe de cycles $f_* : A(X) \otimes \mathbf{Q} \to A(Y) \otimes \mathbf{Q}$.

Plutôt que de considérer les faisceaux localement libres sur X, Grothendieck regardait les faisceaux cohérents et plus exactement le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents sur X – sous les hypothèses de régularité faites sur X ce groupe est isomorphe au groupe de Grothendieck des faisceaux localement libres. Comme le morphisme f était supposé propre on pouvait définir un morphisme image directe $f_* : K(X) \to K(Y)$ par la formule $f_*(\mathscr{E}) = \sum_i (-1)^i R^i f_*(\mathscr{E})$ pour $\mathscr{E}$ un faisceau cohérent.

Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch étudiait alors le défaut de commutativité entre le caractère de Chern et f_*, ce défaut prenant la forme de l'égalité

$$\mathrm{td}(\mathscr{T}_Y)\,\mathrm{ch}(f_*(E)) = f_*(\mathrm{td}(\mathscr{T}_X)\,\mathrm{ch}(E)) \tag{2}$$

pour $E \in K(X)$. En introduisant le fibré tangent relatif de f, $\mathscr{T}_f = \mathscr{T}_X - f^*(\mathscr{T}_Y)$, cette égalité se réécrit

$$\mathrm{ch}(f_*(E)) = f_*(\mathrm{td}(\mathscr{T}_f)\,\mathrm{ch}(E)) \tag{3}$$

Le cas particulier $Y = \mathrm{Spec}(k)$ redonne alors l'égalité (1).

Grothendieck ne voulait pas s'arrêter en si bon chemin et une plus vaste généralisation de (3) fit l'objet d'une année (1966-67) de son séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie dont compte est rendu dans [2].

Dans ce séminaire, le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch est prouvé sous des hypothèses beaucoup plus faibles : on se contente de supposer que le morphisme f est

projectif d'intersection complète et que Y est un schéma quasi-compact ayant un faisceau ample.

Le premier problème dans un cadre aussi général est de donner un sens à la formule (3) : cela n'a a priori rien d'évident.

Tout d'abord, en l'absence d'un corps de base k, on ne dispose plus d'une théorie de l'anneau de Chow convenable. Il faut remplacer alors cet anneau par un nouvel anneau : la solution est d'introduire un anneau gradué associé à une filtration adéquate de l'anneau $K(X)$ – encore faut-il que l'on dispose d'une structure d'anneau sur $K(X)$.

Précisons cela : en l'absence d'hypothèses de régularité le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents ne s'identifie plus au groupe de Grothendieck des faisceaux localement libres et il faut distinguer entre les deux : on notera le premier $G_0(X)$ – il a un caractère covariant en X pour les morphismes propres - et le second $K_0(X)$ - il a un caractère contravariant en X pour les morphismes quelconques. $K_0(X)$ a bien une structure d'anneau mais ce n'est pas le cas de $G_0(X)$ qui ne dispose plus en général que d'une structure de $K_0(X)$-module. On travaille donc exclusivement avec $K_0(X)$.

Sur $K_0(X)$ il existe une λ-structure donnée par les opérations de puissances extérieures. Cette λ-structure permet de définir une filtration sur $K_0(X)$, la γ-filtration, telle que, si l'on considère l'anneau gradué associé $\mathrm{Gr}(K_0(X))$, on dispose d'une théorie des classes de Chern $c_i : K_0(X) \to \mathrm{Gr}(K_0(X))$, qui permet de définir un caractère de Chern et une classe de Todd à valeurs dans $\mathrm{Gr}(K_0(X))_{\mathbf{Q}}$.

Le problème reste de définir un morphisme image directe $f_* : K_0(X) \to K_0(Y)$. On travaille désormais avec des faisceaux localement libres et on ne peut donc plus utiliser la formule précédente $f_*(\mathscr{E}) = \sum_i (-1)^i R^i f_*(\mathscr{E})$: les faisceaux $R^i f_*(\mathscr{E})$ n'ont aucune raison d'être localement libres. La bonne manière de faire est de travailler au niveau de la catégorie dérivée où l'on définit une notion de complexe parfait qui est l'extension naturelle de celle de faisceau localement libre en termes de complexe : un complexe parfait est localement isomorphe dans la catégorie dérivée à un complexe borné localement libre de type fini en chaque degré. La catégorie des complexes parfaits est une sous-catégorie triangulée de la catégorie dérivée de X et elle se comporte agréablement, elle est stable par image directe. Notons désormais $K_0^{\mathrm{naïf}}(X)$ le groupe de Grothendieck des faisceaux localement libres et $K_0(X)$ le groupe de Grothendieck des complexes parfaits. On dispose alors d'un morphisme image directe

$$f_* : K_0(X) \to K_0(Y)$$

Cette nouvelle définition de $K_0(X)$, si elle permet de définir une image directe, soulève un autre problème : on ne dispose pas en général d'une λ-structure sur $K_0(X)$, contrairement à $K_0^{\mathrm{naïf}}(X)$. Cette question n'est toujours par résolue de manière générale à l'heure actuelle. C'est pour obvier à cette difficulté que l'on suppose f projectif et Y muni d'un fibré ample. Il en est alors de même pour X et la présence d'un fibré ample implique que le morphisme naturel

$$K_0^{\mathrm{naïf}}(X) \to K_0(X)$$

est un isomorphisme. On peut alors définir une λ-structure sur $K_0(X)$ par transfert de structure.

Cela fait on récupère notre anneau $\mathrm{Gr}(K_0(X))$.

C'est alors qu'interviennent les hypothèses sur f, savoir f est projectif et localement d'intersection complète. En ce cas, le morphisme image directe tensorisé par $\mathbf{Q}$, $f_* : K_0(X)_{\mathbf{Q}} \to K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$ respecte la filtration de ces anneaux, à un décalage près par la dimension relative de f. On en déduit donc un morphisme $f_* : \mathrm{Gr}(K_0(X))_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Gr}(K_0(Y))_{\mathbf{Q}}$.

Il ne reste plus qu'un point à éclaircir quand nous en sommes là : comment définir le fibré tangent relatif $\mathscr{T}_f$? On le définit en fait pour un morphisme $f : X \to Y$ quelconque.

On considère un morphisme de faisceaux d'ensemble $\mathscr{E} \to \mathscr{O}_X$ qui engendre $\mathscr{O}_X$ comme $f^{-1}(\mathscr{O}_Y)$-algèbre, i.e. le morphisme $g : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{O}_X$, où $\mathscr{E}_1 = f^{-1}(\mathscr{O}_Y)[\mathscr{E}]$, est un épimorphisme. On note $\mathscr{J}$ le noyau de g. On considère alors le complexe de chaînes de longueur 1 défini par la flèche naturelle

$$\mathscr{J} / \mathscr{J}^2 \xrightarrow{d} \Omega^1_{\mathscr{E}_1/f^{-1}(\mathscr{O}_Y)} \otimes \mathscr{O}_X$$

Ce complexe ne dépend pas du morphisme $\mathscr{E} \to \mathscr{O}_X$ choisi, on le note $\mathscr{C}_f$, c'est le complexe cotangent de f. Le complexe tangent $\mathscr{T}_f$ est par définition le dual du complexe cotangent.

Sous l'hypothèse que f est localement d'intersection complète, on montre que $\mathscr{T}_f$ est un complexe parfait et définit donc un élément de $K_0(X)$.

Ainsi, Grothendieck et son école, tout ce travail de définition mené à bien, étaient capables de démontrer le théorème de Riemann-Roch pour f un morphisme projectif localement d'intersection complète et Y un schéma quasi-compact muni d'un fibré ample.

En fait, le travail mené dans [2] permettait à Grothendieck de donner un sens à son énoncé du théorème de Riemann-Roch en supposant f propre localement d'intersection complète, pourvu que l'on sache définir une λ-structure sur $K_0(X)$ en ce cas. Dans [2] Exp. XIV 2 un tel résultat est effectivement conjecturé.

La conjecture la plus générale de Grothendieck semble à l'heure actuelle encore hors d'atteinte.

Dans ce travail, bien plus modestement, nous énonçons une conjecture intermédiaire entre les résultats démontrés dans [2] et les conjectures les plus générales. C'est une conjecture que l'on peut attribuer à Grothendieck, bien qu'elle n'apparaisse nulle part explicitement dans [2].

Nous la démontrons ensuite dans trois cas particuliers.

De manière plus détaillée, dans le chapitre 1 nous rappelons touts les éléments nécessaires à la formulation du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch. Le choix d'une présentation exhaustive a été fait afin de proposer au lecteur un texte autonome sans renvois excessifs à la littérature classique de ce domaine. On rappelle également quelques résultats de K-théorie supérieure dont on se sert dans la suite.

Dans le chapitre 2, outre le rappel des principaux résultats de [2], on énonce précisément la conjecture que nous posons ainsi que deux cas particuliers dans lesquels elle est démontrée. Nous rappelons également l'équivalence entre les théorèmes de Grothendieck-Riemann-Roch et Adams-Riemann-Roch ce qui permet d'énoncer les trois résultats démontrés sous la forme de théorèmes du type Adams-Riemann-Roch plutôt que sous celle de la forme d'égalités du type Grothendieck-Riemann-Roch.

Chacun des trois chapitres suivants est consacré à la démonstration d'un de ces résultats. Le premier propose pour seule originalité de se débarrasser de l'hypothèse noethérienne dont est habituellement encombrée la construction de la déformation au cône normal utilisée pour démontrer le théorème d'Adams-Riemann-Roch dans le cas d'une immersion régulière. Le deuxième repose pour l'essentiel sur un résultat de K-théorie de [32] qui permet de se ramener à des cas connus. Le dernier, enfin, généralise une remarque et un résultat de Nori au cas d'une base quelconque, plutôt qu'un corps, en interprétant l'égalité du théorème d'Adams-Riemann-Roch comme un calcul de trace, mené au moyen d'une formule de Lefschetz-Riemann-Roch adéquate.

Enfin en annexe on trouve rappelé la preuve du cas classique du théorème d'Adams-Riemann-Roch, ainsi que le détail de la preuve de l'équivalence entre les théorèmes de Grothendieck-Riemann-Roch et Adams-Riemann-Roch et une propriété de compatibilité au changement de base dont nous avons besoin à un moment.

Notations

Pour A un $\mathbf{Z}$-module, on note $A_{\mathbf{Q}} := A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

Pour $A = \bigoplus_i A_i$ une algèbre graduée on note son complété $\widehat{A} := \prod_i A_i$.

Pour X un schéma on notera $\mathrm{D}(X)$ la catégorie dérivée des $\mathscr{O}_X$-modules. On note $\mathrm{D}^-(X)$ (resp. $\mathrm{D}^+(X)$, $\mathrm{D}^b(X)$) la sous-catégorie de $\mathrm{D}(X)$ formée des complexes bornés supérieurement (resp. bornés inférieurement, bornés). On note $\mathbf{R}f_*$ et $\mathbf{L}f^*$ les morphismes image directe et image réciproque dans la catégorie dérivée. Le produit tensoriel total est noté $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$.

On note $\mathbf{A}^n_X$ et $\mathbf{P}^n_X$ les espaces affine et projectif de dimension n sur X.

Si $\mathscr{E}$ est un faisceau sur X les fibrés vectoriels et projectifs associés sont notés respectivement $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ et $\mathbf{P}(\mathscr{E})$.

Si $f : Y \to X$ est un morphisme lisse de schémas on note Ω_f ou $\Omega_{Y/X}$ son faisceau des différentielles.

Pour n un entier naturel non nul on note $\mathbf{Q}(\mu_n)$ l'extension cyclotomique de $\mathbf{Q}$ d'ordre n et $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_n)}$ son anneau des entiers.

Chapitre 1

Rappels et notations

1.1 Propriétés générales des λ-anneaux

On commence par rappeler toutes les propriétés des λ-anneaux dont nous aurons besoin par la suite. Pour plus de détails on pourra consulter [13] ou bien [2] Exp. V – dans cette dernière référence le point de vue adopté est nettement plus fonctoriel que la présentation retenue ici.

1.1.1 Premières définitions

Soit K un anneau commutatif avec unité.

On dit que K est un pré-λ-anneau si l'on s'est donné une famille d'applications

$$\lambda^i : K \to K$$

pour $i \geqslant 0$ qui vérifie

$$\lambda^0(x) = 1,\ \lambda^1(x) = x \text{ et } \lambda^n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(x)\lambda^{n-i}(y) \text{ pour } x,\, y \in K. \tag{1.1}$$

Cette dernière condition signifie juste que, si l'on considère la série formelle $\lambda_t(x) = \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n(x)t^n$, $x \mapsto \lambda_t(x)$ est un morphisme du groupe additif K dans le groupe multiplicatif $1 + K[[t]]^+$, avec $K[[t]]^+ := tK[[t]]$. La notion de λ-homomorphisme est alors claire, de même que celle de λ-idéal et de sous-pré-λ-anneau, etc.

Exemple: Se donner une structure de pré-λ-anneau sur $\mathbf{Z}$ revient à se donner $\lambda_t(1)$ qui sera une série formelle à coefficients entiers commençant par $1 + t$. En particulier il existe une unique pré-λ-structure sur $\mathbf{Z}$ telle que $\lambda_t(1) = 1 + t$. Alors $\lambda_t(n) = (1+t)^n$, soit $\lambda_i(n) = \binom{n}{i}$. On appellera cette structure la λ-structure canonique de $\mathbf{Z}$.

Soit A un anneau commutatif avec unité. On considère $\Lambda(A) = 1 + A[[t]]^+$ le groupe des séries formelles à coefficients dans A, d'augmentation 1. On cherche à définir une structure de pré-λ-anneau sur $\Lambda(A)$.

Pour la loi additive, on prendra la multiplication des séries formelles.

La loi multiplicative, que l'on notera $\circ$, est définie au moyen de polynômes universels : les coefficients de $f \circ g$, pour $f,\ g \in \Lambda(A)$, sont donnés au moyen de polynômes universels en les coefficients de f et g .

Soient $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ deux familles d'indéterminées indépendantes. On définit également des indéterminées $U_1, \ldots, U_n$ et $V_1, \ldots, V_m$ au moyen des factorisations formelles

$$1 + X_1 t + \ldots + X_n t^n = \prod_{i=1}^{n} (1 + U_i t) \text{ et } 1 + Y_1 t + \ldots + Y_m t^m = \prod_{j=1}^{m} (1 + V_j t) \qquad (1.2)$$

Pour $k \leqslant n$ et $k \leqslant m$, on définit alors des polynômes P_k de poids k en les indéterminées X_i et Y_j – où les indéterminées X_i et Y_j sont respectivement de poids i et j – par la formule

$$\sum_{k \geqslant 0} P_k(X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots Y_k) t^k = \prod_{i,j} (1 + U_i V_j t)$$

En annulant les indéterminées de poids supérieur à k, on vérifie que les polynômes P_k ainsi définis sont indépendants de n et de m – c'est là la théorie des « suites multiplicatives de polynômes » de Hirzebruch, exposée par son auteur dans [18] chap. 1 §1.

Soient donc $f,\ g \in \Lambda(A)$ écrits sous la forme $f = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ et $g = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots$, on définit $f \circ g = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$ par la formule

$$c_n = P_n(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$$

Il est alors immédiat de vérifier au moyen de la définition des polynômes P_k que cette multiplication est distributive par rapport à l'addition sur $\Lambda(A)$ – on rappelle qu'il s'agit du produit usuel fg – et que pour des facteurs linéaires

$$(1 + at) \circ (1 + bt) = 1 + abt$$

Ces propriétés déterminent entièrement la loi de multiplication sur $\Lambda(A)$.

On définit également une λ-structure sur $\Lambda(A)$. De même que pour la loi multiplicative, pour $f \in \Lambda(A)$, les coefficients de $\lambda^n(f)$ sont donnés par des polynômes universels en les coefficients de f.

Soit donc à nouveau notre famille d'indéterminées $X_1, \ldots, X_n$ et les indéterminées $U_1, \ldots, U_n$ associées. Pour $kj \leqslant n$ on définit alors des polynômes $(P_{k,j})$ de poids kj par la formule

$$\sum_{k \geqslant 0} P_{k,j}(X_1, \ldots, X_{kj}) t^k = \prod_{i_1 < \ldots < i_j} (1 + U_{i_1} \ldots U_{i_j} t)$$

Si $f \in \Lambda(A)$ s'écrit $f = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$, $\lambda^j(f) = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$ est alors défini par la formule

$$c_n = P_{n,j}(a_1, \ldots, a_{nj})$$

En particulier

$$\lambda_u(1 + at) = \{1 + t\} + \{1 + at\} u$$

On vérifie que cela définit bien une λ-structure sur $\Lambda(A)$.

On est alors en mesure de définir la notion de λ-anneau : un λ-anneau est un pré-λ-anneau K tel que la flèche $x \mapsto \lambda_t(x)$ de K dans $\Lambda(K)$ soit un λ-homomorphisme, $\Lambda(K)$ étant muni de la pré-λ-structure que l'on vient de définir.

Plus concrètement, cela signifie que l'on dispose des relations supplémentaires

$$\lambda_t(1) = 1 + t,\ \lambda^k(xy) = P_k(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^k(x), \lambda^1(y), \ldots, \lambda^k(y)) \text{ et}$$

$$\lambda^k(\lambda^j(x)) = P_{k,j}(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^{kj}(x))$$

Exemples: Sur $\mathbf{Z}$ l'unique structure de λ-anneau est la λ-structure canonique. Dans la suite, sans plus de précisions, $\mathbf{Z}$ sera toujours supposé muni de cette λ-structure canonique.

Si A est un anneau, $\Lambda(A)$ est un λ-anneau, et non un simple pré-λ-anneau – cf. [1] I §1 pour les détails.

Soit alors K un λ-anneau. On dit que K est un λ-*anneau augmenté* s'il est muni d'un morphisme de λ-anneaux $\varepsilon : K \to \mathbf{Z}$.

On note alors $I = \operatorname{Ker}\varepsilon$, c'est un λ-idéal.

Remarquons que tout sous λ-anneau contient un sous-anneau isomorphe à $\mathbf{Z}$: si ce n'est pas le cas, 1 est de torsion et

$$1 = \lambda_t(0) = \lambda_t(m \cdot 1) = (1+t)^m$$

ce qui est absurde. On voit alors que tout élément de notre λ-anneau augmenté K s'écrit de manière unique $x = \varepsilon(x) + (x - \varepsilon(x))$ avec $\varepsilon(x) \in \mathbf{Z}$ et $x - \varepsilon(x) \in I$, de sorte qu'en tant que groupes abéliens $K = \mathbf{Z} \oplus I$. L'existence d'une telle décomposition caractérise en fait les λ-anneaux augmentés.

Revenons maintenant à K un λ-anneau, non nécessairement augmenté.

Pour $x \in K$, si $\lambda_t(x)$ est un polynôme, on dit que x est de λ-dimension finie et on définit sa λ-dimension – notée $\dim(x)$ – comme égale au degré du polynôme $\lambda_t(x)$.

L'ensemble des éléments de λ-dimension finie de K est un monoïde puisque $\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y)$.

On dit qu'un λ-anneau est de dimension finie si tout élément s'écrit comme la différence de deux éléments de λ-dimension finie.

Dans le cas où K est muni d'une augmentation $\varepsilon : K \to \mathbf{Z}$, si $x \in K$ est de λ-dimension finie, alors $0 \leqslant \varepsilon(x) \leqslant \dim(x)$. En effet : $\varepsilon(\lambda_t(x)) = \lambda_t(\varepsilon(x)) = (1+t)^{\varepsilon(x)}$. $\varepsilon(\lambda_t(x))$ est un polynôme de degré au plus $\dim(x)$. On en déduit que $(1+t)^{\varepsilon(x)}$ est un polynôme, d'où $\varepsilon(x) \geqslant 0$ puis que $\varepsilon(x) \leqslant \dim(x)$. On n'a pas d'égalité en général et il existe des exemples de λ-anneaux où $\varepsilon(x)$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et $\dim(x)$ - cf. [1] I §1 p. 257 à ce propos.

Le principal intérêt des éléments de λ-dimension finie est qu'ils vérifient un « principe de scindage » qui donne une forme plus explicite à la théorie des suites multiplicatives de Hirzebruch et permet de se ramener à des facteurs linéaires dès que l'on manipule des polynômes universels.

Théorème 1.1. *Soient K un λ-anneau et $x \in K$ un élément de λ-dimension finie égale à n. Alors il existe un λ-anneau K' tel que $K \subset K'$ et que $x = x_1 + \ldots + x_n$ dans K' avec $\dim(x_i) = 1$ pour tout i.*

De plus, si K est muni d'une augmentation $\varepsilon : K \to \mathbf{Z}$ avec $\varepsilon(x) = m \leqslant n$, on peut étendre ε à K' de sorte que

$$\varepsilon(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant m \\ 0 & \text{pour } m < i \leqslant n \end{cases}$$

Preuve: cf. [1] I §6. ■

En particulier, on déduit de ce théorème que, si K est un λ-anneau de dimension finie, on peut le plonger, en utilisant le lemme de Zorn, dans un λ-anneau où tous les éléments se décomposent en sommes finies d'élément de λ-dimension égale à 1.

En pratique les λ-anneaux que nous rencontrerons dans la suite sont tous de λ-dimension finie. Dans cette présentation on aurait pu ainsi se limiter à de tels anneaux – c'est par exemple le choix qui est fait dans [13] chap. I – mais c'est une restriction superflue : comme déjà signalé elle ne fait que donner une forme plus explicite, et ainsi parfois d'une présentation plus agréable, à l'usage des factorisations formelles dans la théorie de Hirzebruch. Dans la suite de ces rappels généraux nous ne ferons donc pas appel à un tel principe de scindage.

1.1.2 Le λ-anneau associé à un anneau gradué – caractère de Chern et classe de Todd

Soit $A = \oplus_{i \geqslant 0} A_i$ un anneau gradué, avec $A_0 = \mathbf{Z}$. On dispose d'une procédure pour associer à un tel anneau un λ-anneau augmenté. Rappelons la manière dont est construit ce λ-anneau.

On commence par introduire le groupe $\Lambda^0(A)$ des séries formelles $1 + \sum_{i \geqslant 1} a_i t^i$ avec $a_i \in A_i$ pour tout $i \geqslant 0$. On va définir une structure d'anneau sur ce groupe, légèrement différente de celle introduite sur $\Lambda(A)$.

Comme loi additive on prend encore le produit de deux séries formelles. La définition de la loi multiplicative se fait à nouveau au moyen de polynômes universels : si $f = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \in \Lambda^0(A)$ et $g = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots \in \Lambda^0(A)$, leur produit $f * g = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$, c_k s'écrit

$$c_k = Q_k(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k)$$

où Q_k est un polynôme de poids k. En utilisant des factorisations formelles par des facteurs linéaires de la forme $1 + at$ comme précédemment, on remarque que cette loi est entièrement déterminée par le fait qu'elle est distributive par rapport à la loi « additive » de $\Lambda^0(A)$ et par la valeur du produit $(1 + at) * (1 + bt)$. On pose alors

$$(1 + at) * (1 + bt) = \frac{1 + (a + b)t}{(1 + at)(1 + bt)}$$

Cela achève de définir une structure d'anneau sur $\Lambda^0(A)$.

Cette structure conserve néanmoins un défaut : elle n'est pas unitaire. Pour obvier à cet inconvénient on introduit le nouvel anneau $\tilde{A} := \mathbf{Z} \times \Lambda^0(A)$. Sur ce nouvel anneau, l'addition et la multiplication sont alors entièrement définies par les formules

$$(n, f) + (m, g) = (n + m, fg) \text{ et } (n, f)(m, g) = (nm, f^m g^n (f * g))$$

En particulier,

$$(1, 1 + at)(1, 1 + bt) = (1, 1 + (a + b)t) \tag{1.3}$$

On peut définir une filtration sur l'anneau $\tilde{A}$ par $\tilde{A}_0 = \mathbf{Z}$ et $\tilde{A}_n = \{(0,f) \in \tilde{A} | f = 1 + a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \ldots\}$ pour $n \geqslant 1$. Cette filtration est compatible avec le produit car

$$(1 + a_n t^n + \ldots) * (1 + b_m t^m + \ldots) = 1 - \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!} a_n b_m t^{n+m} + \ldots \tag{1.4}$$

Pour une preuve de ce calcul, on pourra consulter [2] Exp. V 6.5.

Par ailleurs, l'anneau $\tilde{A}$ est muni d'une augmentation naturelle $\varepsilon : \tilde{A} \to \mathbf{Z},\ (n,f) \mapsto n$.

Il ne reste donc plus qu'à définir une λ-structure sur $\tilde{A}$. Sur le facteur $\{0\} \times \Lambda^0(A)$ de $\tilde{A}$ la λ-structure est définie au moyen de polynômes universels $Q_{k,j}$ de poids k : si $f = 1 + a_1 t + \ldots \in \Lambda^0(A)$, $\lambda^j(0,f) = (0, \lambda^j(f))$ et en notant $\lambda^j(f) = 1 + b_1 t + \ldots$

$$b_n = Q_{n,j}(a_1, \ldots, a_n)$$

Cela posé, la λ-structure est entièrement déterminée par la donnée des $\lambda^j(1, 1+at)$ pour $j \geqslant 2$ en vertu des axiomes (1.1) – toujours en usant de factorisations formelles comme précédemment. On impose

$$\lambda^j(1, 1+at) = 0 \text{ pour } j \geqslant 2 \tag{1.5}$$

On vérifie alors que l'on obtient de la sorte une structure de λ-anneau sur $\tilde{A}$, et non une simple structure de pré-λ-anneau. Par ailleurs, la filtration définie sur $\tilde{A}$ est stable par les opérations λ^j ainsi définies.

La proposition suivante rend plus claire l'origine de certains calculs menés dans la suite.

Proposition 1.2. *Soit $x = (n, 1 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) \in \tilde{A}$. Alors $\lambda^i(x) = 0$ pour $i > n$, $\lambda^n(x) = (1, 1 + a_1 t)$ et*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda^i(x) = (0, 1 - (n-1)! a_n t^n + \ldots) \tag{1.6}$$

Preuve: Au moyen d'une factorisation formelle, on écrit $1 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i t)$, d'où

$$x = (n, \prod_{i=1}^{n} (1 + \alpha_i t)) = \sum_{i=1}^{n} (1, 1 + \alpha_i t)$$

et

$$\lambda_u(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 + (1, 1 + \alpha_i t) u)$$

On en déduit que $\lambda^i(x) = 0$ pour $i > n$ et que $\lambda^n(x) = \prod_{i=1}^n (1, 1+\alpha_i t) = (1, 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i t) = (1, 1 + a_1 t)$. Par ailleurs

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda^i(x) = \lambda_{-1}(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - (1, 1 + \alpha_i t)) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (0, 1 + \alpha_i t)$$

En utilisant alors la formule (1.4) on voit que $\prod_i (0, 1 + \alpha_i t) = (0, 1 + (-1)^{n-1} (n-1)! (\prod_i \alpha_i) t^n$ et donc $\lambda_{-1}(x) = (0, 1 - (n-1)! a_n t^n + \ldots)$. ∎

La formule (1.6) est vraie plus généralement pour tout élément d'augmentation n. Cela vient de ce que les $\tilde{A}_i$ ne sont pas de simples idéaux, mais des λ-idéaux – car la λ-structure est définie au moyen de polynômes universels. Ainsi, que $x = (n, 1 + a_1 t + \ldots)$ soit congru à $(n, 1 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)$ modulo $\tilde{A}_{n+1}$ implique que $\lambda_{-1}(x)$ est congru à $(0, 1 - (n-1)! a_n t^n + \ldots)$ modulo $\tilde{A}_{n+1}$, soit $\lambda_{-1}(x) = (0, 1 - (n-1)! a_n t^n + \ldots)$

Le caractère de Chern. Le caractère de Chern est un morphisme d'anneaux augmentés

$$\mathrm{ch} : \tilde{A} \to \widehat{A}_{\mathbf{Q}}$$

Il est défini comme un morphisme additif transformant 1 en 1 tel que les composantes de degré strictement positifs de $\mathrm{ch}(x)$ soient données par des polynômes universels isobares à coefficients rationnels en les coefficients de x. Cela fixé, il suffit alors, comme précédemment, de se donner l'image de $(1, 1 + at) \in \tilde{A}$ pour entièrement déterminer le caractère de Chern. On pose

$$\mathrm{ch}(1, 1 + at) = \exp(a)$$

Pour vérifier la compatibilité de cette définition avec la structure multiplicative, il suffit de considérer des facteurs de la forme $(1, 1+at)$, et c'est alors évident : $\mathrm{ch}((1, 1+at)(1+bt)) = \mathrm{ch}(1, 1 + (a+b)t) = \exp(a+b) = \mathrm{ch}(1, 1 + at)\,\mathrm{ch}(1, 1 + bt)$. De même pour la vérification de la compatibilité aux augmentations.

La classe de Todd. La classe de Todd est un morphisme

$$\mathrm{td} : \Lambda^0(A) \to \widehat{A}_{\mathbf{Q}}$$

Comme le caractère de Chern, il est défini comme un morphisme additif envoyant 1 sur 1 et tel que les composantes de degré strictement positives de $\mathrm{td}(x)$, pour $x \in \Lambda^0(A)$, soient données par des polynômes universels isobares à coefficients rationnels en les coefficients de x. Il suffit donc à nouveau de se donner l'image de $1 + at$, et on pose

$$\mathrm{td}(1 + at) = \frac{a}{1 - \exp(-a)}$$

1.1.3 La γ-filtration et l'anneau gradué associé – les classes de Chern

Soit K un λ-anneau augmenté, d'augmentation ε.

On définit des opérations $\gamma^i : K \to K$ par la formule

$$\gamma^i(x) = \lambda^i(x + i - 1) = (-1)^i \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \lambda^k(x + i)$$

La deuxième égalité se déduit de la structure de λ-anneau de K, qui impose $\lambda^j(-1) = (-1)^j$.

Si on pose $\gamma_t(x) = \sum_i \gamma^i(x) t^i$, on vérifie facilement – cf. [2] Exp. V 3.2 – que

$$\gamma_t(x) = \lambda_{t/(1-t)}(x) = \sum \lambda^i(x) \left(\frac{t}{1-t}\right)^i$$

d'où

$$\lambda_t(x) = \gamma_{t/(1+t)}(x)$$

La connaissance des opérations γ^i est donc équivalente à celle des opérations λ^i.

Par ailleurs, de la définition des opérations γ^i on déduit les relations

$$\gamma^0(x) = 1,\ \gamma^1(x) = x \text{ et } \gamma^n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \gamma^i(x)\gamma^{n-i}(y) \text{ pour } x,\ y \in K. \tag{1.7}$$

Les opérations γ^i définissent donc une pré-λ-structure sur K, mais ce n'est pas en général une λ-structure – pour l'étude de cette question on pourra consulter [2] Exp. V 3.4-3.7.

Sur K on définit une filtration décroissante à l'aide des opérations γ^i. Pour $n \geqslant 0$ on définit F^nK comme l'idéal engendré par les produits de la forme

$$\gamma^{i_1}(x_1)\dots\gamma^{i_k}(x_k) \text{ avec } \sum_j i_j \geqslant n \text{ et } x_j \in \operatorname{Ker}\varepsilon$$

En particulier

$$F^0K = K \text{ et } F^1K = \operatorname{Ker}\varepsilon$$

Cette filtration est la γ-*filtration* de K.

On remarque que si K est engendré comme $\mathbf{Z}$-module par une famille d'éléments $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, alors, en tant que $\mathbf{Z}$-module, F^nK est engendré par les éléments de la forme

$$\gamma^{i_1}(x_{\alpha_1} - \varepsilon(x_{\alpha_1}))\dots\gamma^{i_k}(x_{\alpha_k} - \varepsilon(x_{\alpha_k})) \text{ avec } \sum_j i_j \geqslant n \text{ et } \alpha_j \in I$$

En effet, si $x \in K$ est d'augmentation nulle et s'écrit $x = \sum_i x_{\alpha_i}$, alors $\sum_i \varepsilon(x_{\alpha_i}) = 0$ et $x = \sum_i (x_{\alpha_i} - \varepsilon(x_{\alpha_i}))$. De même si $x \in K$, $x = (x - \varepsilon(x)) + \varepsilon(x) = \gamma^1(x - \varepsilon(x)) + \varepsilon(x)$, et les formules (1.7) prouvent l'assertion.

Une fois que cet anneau K est muni d'une filtration, on peut considérer l'anneau gradué associé

$$\operatorname{Gr}(K) := \oplus_{i\geqslant 0} F^iK/F^{i+1}K$$

Le complété de ce gradué sera noté, en léger désaccord avec les notations établies

$$\widehat{\operatorname{Gr}}(K) := \prod_{i\geqslant 0} F^iK/F^{i+1}K$$

On peut alors appliquer les résultats de la section 1.1.2 à l'anneau gradué nouvellement introduit. On note ainsi $\widetilde{\operatorname{Gr}}(K)$ le λ-anneau associé à $\operatorname{Gr}(K)$.

Soit alors $x \in K$. Par définition de la γ-filtration $\gamma^i(x - \varepsilon(x)) \in F^iK$. On peut donc regarder son image dans $\operatorname{Gr}_i(K)$. On pose donc

$$c_i(x) := \gamma^i(x - \varepsilon(x)) \mod F^{i+1}K \in \operatorname{Gr}_i(K)$$

$c_i(x)$ est la i-ème classe de Chern de x.

Pour $i = 0$ on obtient $c_0(x) = 1$. On introduit alors la série formelle

$$c_t(x) = \sum_{i\geqslant 0} c_i(x)t^i = 1 + \sum_{i\geqslant 1} c_i(x)t^i$$

qui définit un morphisme

$$c : K \to \Lambda^0(\mathrm{Gr}(K))$$

$$x \mapsto c_t(x)$$

$c(x)$ sera appelé la *classe de Chern* de x. C'est un morphisme de groupe, ce qui ne fait que traduire le fait évident que

$$c_i(x+y) = \sum_{k=0}^{i} c_k(x) c_{i-k}(y)$$

On introduit également une flèche

$$\tilde{c} : K \to \widetilde{\mathrm{Gr}}(K)$$

$$x \mapsto (\varepsilon(x), c_t(x))$$

$\tilde{c}(x)$ sera appelé la *classe de Chern complétée* de x.

La classe de Chern complétée $\tilde{c}$ ainsi définie est un λ-homomorphisme de λ-anneaux augmentés – on a tout fait pour : les formules (1.3) et (1.5) sont précisément celles qui permettent de calculer les classes de Chern d'un produit de deux éléments et des puissances extérieures d'un élément dans la théorie classique, non axiomatisée, par exemple en topologie. Pour une preuve dans ce cadre axiomatique on pourra consulter [2] Exp. V 6.8.

On peut remarquer que pour $x \in F^n K$,

$$c_1(x) = \ldots = c_{n-1}(x) = 0 \tag{1.8}$$

ce qui est une conséquence immédiate des définitions, et que

$$c_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x + F^{n+1}K \tag{1.9}$$

Cette dernière égalité est essentiellement une conséquence de la proposition 1.2 : pour $y = (\varepsilon(y), 1 + a_1 t + \ldots) \in \widetilde{\mathrm{Gr}}(K)$

$$\gamma^n(y - \varepsilon(y)) = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda^i(y + n - \varepsilon(y)) = (0, 1 + (-1)^{n-1}(n-1)! a_n t^n + \ldots)$$

car $y + n - \varepsilon(y)$ est un élément d'augmentation n. De cette égalité, on déduit le résultat annoncé – pour le détail du calcul on pourra consulter [2] Exp. V 6.9.

On conclut en définissant dans ce cadre un caractère de Chern et une classe de Todd. On dispose d'après la section 1.1.2 d'un morphisme d'anneaux $\mathrm{ch} : \widetilde{\mathrm{Gr}}(K) \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)_{\mathbf{Q}}$ et d'un endomorphisme de groupes $\mathrm{td} : \Lambda^0(\mathrm{Gr}(K)) \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)_{\mathbf{Q}}$.

Pour $x \in K$, on pose alors $\mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(\tilde{c}(x))$ et $\mathrm{td}(x) = \mathrm{td}(c(x))$. On définit ainsi deux flèches, toujours notées ch et td

$$\mathrm{ch} : K \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)_{\mathbf{Q}} \text{ et } \mathrm{td} : K \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)_{\mathbf{Q}}$$

ch est encore un morphisme d'anneaux, tandis que td n'est qu'un morphisme de groupes.

1.1.4 Les opérateurs d'Adams et la classe de Bott

Avant de conclure sur cette présentation générale des λ-anneaux, on va définir les opérateurs d'Adams et la classe de Bott dont nous aurons besoin dans la suite.

Soit donc K un λ-anneau. On définit les opérateurs d'Adams $\psi^k : K \to K$ pour $k \geqslant 1$ par la formule

$$\frac{d}{dt}(\lambda_t(x))/\lambda_t(x) = \sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}\psi^k(x)t^{k-1} \tag{1.10}$$

On commence par remarquer que pour un élément x de λ-dimension 1 l'égalité $\psi^k(x) = x^k$ est vérifiée pour tout k. En effet, en ce cas, $\lambda_t(x) = 1 + xt$ et donc

$$\frac{d}{dt}(\lambda_t(x))/\lambda_t(x) = \frac{x}{1+xt} = \sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}x^k t^{k-1}$$

d'où la formule annoncée.

En particulier $\psi^k(1) = 1$ pour tout k.

Les opérateurs d'Adams sont additifs : cela vient de ce que $\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y)$ et de ce que la dérivée logarithmique transforme produits en sommes.

Ce sont en fait même des morphismes d'anneaux. Pour le voir, on remarque que la formule (1.10) implique que $\psi^k(x)$ est un polynôme isobare de poids k en les $\lambda^i(x)$ pour $i = 1, \ldots, k$ – en l'occurrence le k-ème polynôme de Newton défini par $N_k(s_1, \ldots, s_k) = x_1^k + \cdots + x_k^k$, où $s_1, \ldots, s_k$ sont les fonctions symétriques en $x_1, \ldots, x_k$.

On note alors ϕ^k l'application qui à une série formelle associe le k-ème coefficient de sa dérivée logarithmique multiplié par $(-1)^{k-1}$ – de sorte que $\psi^k(x) = \phi^k(\lambda_t(x))$. Pour prouver que ψ^k est un morphisme d'anneau, en vertu de la remarque ci-dessus, il suffit de prouver que ϕ^k est multiplicatif pour des facteurs de degré 1. Ce qui ne pose pas de difficulté :

$$\phi^k(1+at) = a^k,\ \phi^k(1+bt) = b^k \text{ et } \phi^k((1+at)\circ(1+bt)) = \phi^k(1+abt) = (ab)^k$$

et donc $\phi^k((1+at)\circ(1+bt)) = \phi^k(1+at)\phi^k(1+bt)$.

Enfin la formule (1.10) prouve également que les ψ^k commutent aux λ-homomorphismes $f : K \to K'$, où K' désigne un second λ-anneau.

On remarque alors que, pour $k,\ k' \geqslant 1$ $\psi^k \circ \psi^{k'} = \psi^{kk'}$.

En effet, on remarque que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} 1+K[[t]] & \xrightarrow{\lambda_u} & 1+\{1+K[[t]]\}[[u]] \\ {\scriptstyle \phi^{kk'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_u^{k'}} \\ K & \xleftarrow{\quad\phi^k\quad} & 1+K[[t]] \end{array}$$

Il suffit de le prouver pour des éléments de degré 1 et en ce cas

$$\phi_u^{k'}(\lambda_u(1+at)) = \phi_u^{k'}(\{1+t\} + \{1+at\}u) = (1+at)^{\circ k'} = 1 + a^{k'}t$$

et

$$\phi^k(1+a^{k'}t) = a^{kk'} = \phi^{kk'}(1+at)$$

On en déduit ensuite que $\psi^{kk'} = \phi^k \phi_u^{k'} \lambda_u \lambda_t = \phi^k \psi^{k'} \lambda_t = \phi^k \lambda_t \psi^{k'}$ car λ_t commute avec $\psi^{k'}$ en tant que λ-homomorphisme.

On obtient donc bien l'égalité annoncé $\psi^k \psi^{k'} = \psi^{kk'}$.

Un autre résultat nous sera utile dans la suite. Il concerne le comportement des opérateurs d'Adams vis-à-vis du caractère de Chern.

Proposition 1.3. *Soit K un λ-anneau augmenté. On considère le caractère de Chern* $\mathrm{ch} : K \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)_{\mathbf{Q}}$. *Alors pour $x \in K$ et $j \geqslant 1$*

$$\mathrm{ch}^k \psi^j(x) = j^k \, \mathrm{ch}^k(x)$$

où ch^k *désigne la composante de degré k de* ch.

Preuve: En revenant à la définition de ch on écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}^k(\psi^j(x)) &= \mathrm{ch}^k(\tilde{c}(\psi^j(x)) \\ &= \mathrm{ch}^k \psi^j(\tilde{c}(x)) \text{ car } \tilde{c} \text{ est un } \lambda\text{-homomorphisme.} \end{aligned}$$

Par l'argument habituel, il suffit de prouver cette égalité pour un élément de la forme $(1, 1+at) \in \widetilde{\mathrm{Gr}}(K)$ en lieu et place de $\tilde{c}(x)$. On calcule alors

$$\mathrm{ch}^k(\psi^j(1, 1+at)) = \mathrm{ch}^k((1, 1+at)^{*j}) = \mathrm{ch}^k(1, 1+jat) = \frac{j^k a^k}{k!} = j^k \, \mathrm{ch}^k(1, 1+at)$$

d'où $\mathrm{ch}^k \psi^j(\tilde{c}(x)) = j^k \, \mathrm{ch}^k(\tilde{c}(x)) = j^k \, \mathrm{ch}^k(x)$. ∎

La classe de Bott. Soit K un λ-anneau et $M \subset K$ le monoïde des éléments de λ-dimension finie. Pour k un entier naturel $\geqslant 1$ on va définir un morphisme

$$\theta^k : M \to K$$

θ^k est la k-ème classe cannibale de Bott.

Soit donc $x \in M$ avec $\dim(x) = n$. On considère l'anneau $K[T]$ où T est une indéterminée de λ-dimension égale à 1. Soient $L(T, x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda^i(x) T^{n-i}$ et I_x l'idéal de $K[T]$ engendré par $L(T, x)$. Alors tout élément de I_x s'écrit de manière unique $P(T)L(T, x)$ avec $P(T) \in K[T]$.

On remarque par ailleurs que $\psi^k(L(T, x)) \in I_x$ car I_x est un λ-idéal – cf. [1] pour une preuve de ce fait.

On peut alors définir $\theta^k(T, x)$ par la formule

$$\theta^k(T, x) L(X, x) = \psi^k(L(T, x))$$

On pose alors

$$\theta^k(x) = \theta^k(1, x)$$

En particulier, pour $x \in M$ on dispose de la relation

$$\psi^k(\lambda_{-1}(x)) = \lambda_{-1}(x) \theta^k(x) \tag{1.11}$$

De manière évidente, pour x, $y \in M$ $L(T, x+y) = L(T,x)L(T,y)$ et donc, comme ψ^k est un morphisme d'anneaux on en déduit que

$$\theta^k(x+y) = \theta^k(x)\theta^k(y) \tag{1.12}$$

Soit $x \in K$. Si x s'écrit $x = x_1 - x_2$ avec x_1 et x_2 dans M tels que $\theta(x_2)$ soit inversible, on pose

$$\theta(x) = \theta(x_1)\theta(x_2)^{-1}$$

Cela ne dépend pas du choix de x_1 et de x_2.

Enfin, pour $x \in M$ tel que $\dim(x) = 1$, $L(T,x) = T - x$, $\psi^k(T-x) = T^k - x^k$ d'où $\theta^k(T,x) = T^{k-1} + T^{k-2}x + \ldots + x^{k-1}$ et donc

$$\theta^k(x) = 1 + x + \ldots + x^{k-1} \tag{1.13}$$

1.2 Quelques résultats de K-théorie

Dans cette section nous rappelons les résultats de K-théorie qui nous seront utiles. Pour énoncer le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch nous avons besoin de la théorie du K_0 telle que développée par Grothendieck et son école dans [2] Exp. I-IV. Nous évoquerons ensuite quelques résultats de K-théorie supérieure, auxquels il sera fait appel dans la suite.

1.2.1 La théorie du K_0 d'après Grothendieck

On commence par rappeler certaines des définitions de [2] Exp. I.

Soit X un schéma fixé.

Définition 1.4. Soit $\mathscr{E}^\cdot$ un complexe de $\mathscr{O}_X$-modules. On dit que $\mathscr{E}^\cdot$ est strictement n-pseudo-cohérent si $\mathscr{E}^i$ est localement libre de type fini pour $i \geqslant n$ et si $\mathscr{E}^i = 0$ pour i suffisamment grand.

On dit que $\mathscr{E}^\cdot$ est strictement pseudo-cohérent si il est strictement n-pseudo-cohérent pour tout n.

Définition 1.5. Soit $\mathscr{E}^\cdot$ un complexe de $\mathscr{O}_X$-modules. On dit que $\mathscr{E}^\cdot$ est strictement parfait si il est strictement pseudo-cohérent et $\mathscr{E}^i = 0$ pour presque tout i.

Dans une catégorie abélienne quelconque, on dit d'un morphisme de complexes $f : E^\cdot \to F^\cdot$ que c'est un n-quasi-isomorphisme si $H^k(f) : H^k(E^\cdot) \to H^k(F^\cdot)$ est un isomorphisme pour $k > n$ et un épimorphisme pour $k = n$.

Lemme 1.6. *Soit $\mathscr{E}^\cdot$ un complexe de $\mathscr{O}_X$-modules. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x, un complexe $\mathscr{F}^\cdot$ strictement n-pseudo-cohérent sur U et un quasi-isomorphisme $\mathscr{F}^\cdot \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}^\cdot_{|U}$.

ii) Pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x, un complexe $\mathscr{F}^\cdot$ strictement parfait sur U et un n-quasi-isomorphisme $\mathscr{F}^\cdot \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}^\cdot_{|U}$.

iii) Pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x, un complexe $\mathscr{F}^{\cdot}$ strictement n-pseudo-cohérent sur U et un isomorphisme de $\mathscr{F}^{\cdot}$ sur $\mathscr{E}^{\cdot}_{|U}$ dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(U)$.

iv) Pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x, un complexe $\mathscr{F}^{\cdot}$ strictement parfait sur U et un morphisme $f : \mathscr{F}^{\cdot} \to \mathscr{E}^{\cdot}_{|U}$ dans $\mathrm{D}(U)$ tel que $\underline{H}^k(f)$ est un isomorphisme pour $k > n$ et un épimorphisme pour $k = n$.

Preuve: cf. [2] Exp. I 2.2 ou [32] 2.2.5. ■

Définition 1.7. Soit $\mathscr{E}^{\cdot}$ un complexe de $\mathscr{O}_X$-modules. On dit que $\mathscr{E}^{\cdot}$ est n-pseudo-cohérent s'il vérifie une des assertions équivalente du lemme 1.6.

On dit que $\mathscr{E}^{\cdot}$ est pseudo-cohérent s'il est n-pseudo-cohérent pour tout n.

Lemme 1.8. *Soit $\mathscr{E}^{\cdot}$ un complexe de $\mathscr{O}_X$-modules. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x, un complexe $\mathscr{F}^{\cdot}$ strictement parfait sur U et un quasi-isomorphisme $\mathscr{F}^{\cdot} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}^{\cdot}_{|U}$.

ii) Pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x, un complexe $\mathscr{F}^{\cdot}$ strictement parfait sur U et un isomorphisme de $\mathscr{F}^{\cdot}$ sur $\mathscr{E}^{\cdot}_{|U}$ dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(U)$.

Preuve: cf. [2] Exp. I 4.7 ou [32] 2.2.9. ■

Définition 1.9. Soit $\mathscr{E}^{\cdot}$ un complexe de $\mathscr{O}_X$-modules. On dit que $\mathscr{E}^{\cdot}$ est parfait s'il vérifie une des assertions équivalentes du lemme 1.8. Autrement dit, $\mathscr{E}^{\cdot}$ est parfait s'il est localement quasi-isomorphe à un complexe strictement parfait.

Ces définitions posées, on note $\mathrm{D}(X)_{\mathrm{coh}}$ la catégorie des complexes pseudo-cohérents et $\mathrm{D}(X)_{\mathrm{parf}}$ la catégorie des complexes parfaits.

D'après [2] Exp. I 2.5, $\mathrm{D}(X)_{\mathrm{coh}}$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathrm{D}(X)$, et il en est de même de $\mathrm{D}(X)_{\mathrm{parf}}$ d'après [2] Exp. I 4.10.

Le produit tensoriel total $\overset{\mathrm{L}}{\otimes} : \mathrm{D}^-(X) \times \mathrm{D}^-(X) \to \mathrm{D}^-(X)$ induit des foncteurs

$$\overset{\mathrm{L}}{\otimes} : \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{coh}} \times \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{coh}} \to \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{coh}} \text{ et } \overset{\mathrm{L}}{\otimes} : \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{parf}} \times \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{parf}} \to \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{parf}}$$

d'après [2] Exp. I 2.16.1 et 4.19.1.

De même si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas la flèche $\mathbf{L}f^* : \mathrm{D}^-(Y) \to \mathrm{D}^-(X)$ induit des foncteurs

$$\mathbf{L}f^* : \mathrm{D}^-(Y)_{\mathrm{coh}} \to \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{coh}} \text{ et } \mathbf{L}f^* : \mathrm{D}^-(Y)_{\mathrm{parf}} \to \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{parf}}$$

toujours d'après [2] Exp. I 2.16.1 et 4.19.1.

La définition d'un morphisme image directe est plus délicate. Elle nécessite de définir les notions de pseudo-cohérence et de perfection dans un cadre relatif. Pour ce faire, on commence par rappeler le lien entre perfection et pseudo-cohérence.

On rappelle qu'un objet de $\mathrm{D}^-(X)$ est dit de *Tor-dimension finie* s'il est isomorphe, dans $\mathrm{D}^-(X)$, à un complexe borné à composantes plates. La sous-catégorie pleine de

$\mathrm{D}^-(X)$ formée des objets de Tor-dimension finie est une sous-catégorie triangulée – cf. [2] Exp. I 5.3 – on la note $\mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{Tor-f}}$. On dispose encore des foncteurs

$$\overset{\mathrm{L}}{\otimes} : \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{Tor-f}} \times \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{Tor-f}} \to \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{Tor-f}} \text{ et } \mathbf{L}f^* : \mathrm{D}^-(Y)_{\mathrm{Tor-f}} \to \mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{Tor-f}}$$

d'après [2] Exp. I 5.6.1. Le lien entre perfection et pseudo-cohérence est alors le suivant.

Proposition 1.10. *Un complexe est parfait si et seulement si il est pseudo-cohérent et localement de Tor-dimension finie.*

Preuve: cf. [2] Exp. I 5.8 & 5.8.1. ∎

Cette proposition incite à introduire la sous-catégorie de $\mathrm{D}(X)$ formée des complexes parfaits et de Tor-dimension (globalement) finie. On la note $\mathrm{D}(X)_{\underline{\mathrm{parf}}}$. On dispose encore d'un produit tensoriel et de foncteurs image inverse sur $\mathrm{D}^-(X)_{\underline{\mathrm{parf}}}$, puisque c'est le cas sur $\mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{parf}}$ et $\mathrm{D}^-(X)_{\mathrm{Tor-f}}$.

On remarque que si X est quasi-compact $\mathrm{D}(X)_{\underline{\mathrm{parf}}} = \mathrm{D}(X)_{\mathrm{parf}}$ – dans ce cas tout complexe localement de Tor-dimension finie est de Tor-dimension finie.

Considérons maintenant le cas relatif et soit donc $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On dit que f est de Tor-dimension finie si $\mathscr{O}_X$ vu comme $f^{-1}(\mathscr{O}_Y)$-module est de Tor-dimension finie.

Définition 1.11. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas localement de type fini.

On dit que f est n-pseudo-cohérent en $x \in X$ s'il existe un voisinage U de x dans X et un ouvert $V \subset Y$ avec $f : U \to V$ se factorisant sous la forme $f = gi$ où $i : U \to Z$ est une immersion fermée telle que $i_*\mathscr{O}_U$ soit un complexe n-pseudo-cohérent sur Z, et $g : Z \to V$ est un morphisme lisse.

On dit que f est n-pseudo-cohérent si f est n-pseudo-cohérent en x pout tout x de X.

On dit que f est pseudo-cohérent si f est n-pseudo-cohérent pour tout n.

On dit que f est parfait si f est pseudo-cohérent et localement de Tor-dimension finie.

Dans cette définition, le fait que $i_*\mathscr{O}_U$ soit n-pseudo-cohérent est indépendant du choix de Z sous les autres hypothèses faites, d'après [2] Exp. III 1.1.4. La notion de n-pseudo-cohérence en un point est ainsi bien définie, ne dépendant que de f.

On est alors en mesure de définir des foncteurs image directe.

Proposition 1.12. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et pseudo-cohérent.*

On suppose en outre que, ou bien Y est localement noethérien, ou bien f est projectif.

Alors si $\mathscr{E}^\cdot$ est un complexe pseudo-cohérent, il en est de même de $\mathbf{R}f_*\mathscr{E}^\cdot$. De plus, si on suppose Y quasi-compact, le foncteur $\mathbf{R}f_*$ induit un foncteur

$$\mathbf{R}f_* : \mathrm{D}^b(X)_{\mathrm{coh}} \to \mathrm{D}^b(Y)_{\mathrm{coh}}$$

Preuve: cf. [2] Exp. III 2.5. ∎

Proposition 1.13. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et parfait.*

On suppose en outre que, ou bien Y est localement noethérien, ou bien f est projectif.

Alors si $\mathscr{E}^\cdot$ est un complexe parfait, il en est de même de $\mathbf{R}f_*\mathscr{E}^\cdot$. De plus, si on suppose Y quasi-compact, le foncteur $\mathbf{R}f_*$ induit un foncteur

$$\mathbf{R}f_* : \mathrm{D}(X)_{\underline{\mathrm{parf}}} \to \mathrm{D}(Y)_{\underline{\mathrm{parf}}}$$

Preuve: cf. [2] Exp. III 4.8.1. ∎

Remarquons que Grothendieck a conjecturé que ces résultats restaient valides plus généralement sans supposer Y localement noethérien ou f projectif : c'est la conjecture de finitude de [2] Exp. III 2.1.

Conjecture 1.14. *Les propositions 1.12 et 1.13 restent vraies en enlevant les hypothèses Y localement noethérien et f projectif.*

Dans la suite de cette section, quand cela sera utile, on supposera toujours que l'image directe est définie pour les morphismes propres et pseudo-cohérents (resp. parfaits) que l'on aura à considérer, c'est-à-dire que la conjecture 1.14 est vérifiée.

On dispose alors d'une formule de projection.

Proposition 1.15. *Soient Y un schéma quasi-compact et $f : X \to Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé. Soit $\mathscr{E}^{\cdot}$ (resp. $\mathscr{F}^{\cdot}$) un complexe de $\mathscr{O}_X$-modules (resp. $\mathscr{O}_Y$-modules) cohomologiquement borné et à cohomologie cohérente.*

On suppose que, ou bien $\mathscr{E}^{\cdot}$ est de Tor-dimension finie sur X, ou bien $\mathscr{F}^{\cdot}$ est de Tor-dimension finie sur $\mathscr{O}_Y$.

Alors la flèche canonique est un isomorphisme dans $\mathrm{D}(Y)$

$$\mathbf{R}f_*(\mathscr{E}^{\cdot}) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{F}^{\cdot} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}f_*(\mathscr{E}^{\cdot} \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathbf{L}f^*\mathscr{F}^{\cdot})$$

Preuve: cf. [2] Exp. III 3.7 ou [32] 2.5.5. ∎

Pour une catégorie $\mathcal{C}$ exacte au sens de Quillen (resp. triangulée) – cf. [24] §2 – on note $K_0(\mathcal{C})$ le groupe de Grothendieck associé. Comme cas particuliers de catégories exactes on considérera notamment les catégories abéliennes.

On définit alors

$$K_0(X) := K_0(\mathrm{D}(X)_{\underline{\mathrm{parf}}}) \text{ et } G_0(X) := K_0(\mathrm{D}^b(X)_{\mathrm{coh}})$$

Le premier groupe est noté $K^{\bullet}(X)$ par Grothendieck dans [2] et le second $K_{\bullet}(X)$.

Par fonctorialité le produit tensoriel sur $\mathrm{D}(X)_{\underline{\mathrm{parf}}}$ définit une structure d'anneau sur $K_0(X)$

$$K_0(X) \otimes K_0(X) \to K_0(X)$$

On dispose également, pour $f : X \to Y$ un morphisme de schémas d'une flèche

$$f^* : K_0(Y) \to K_0(X)$$

induite par l'image inverse $\mathbf{L}f^*$. C'est un morphisme d'anneaux.

Pour $f : X \to Y$ un morphisme de schémas qui vérifie la conjecture 1.14, on obtient enfin un morphisme image directe

$$f_* : K_0(X) \to K_0(Y)$$

On dispose alors du résultat suivant qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 1.16. *On considère un carré cartésien de schémas.*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

avec Y et Y' quasi-compacts. On suppose que X et Y' sont transverses sur Y et que f est un morphisme propre et parfait. On suppose enfin que les images directes $f_* : K_0(X) \to K_0(Y)$ et $f'_* : K_0(X') \to K_0(Y')$ existent.

Alors, pour $E \in K_0(X)$

$$h^* f_*(E) = f'_* g^*(E)$$

Preuve: cf. [2] Exp. IV 3.1.1. ∎

En ce qui concerne le groupe $G_0(X)$, ce n'est pas un anneau mais il est muni d'une structure de $K_0(X)$-module – cf. [2] Exp. IV 2.10 – et dans le cas où X est un schéma régulier, l'inclusion $\mathrm{D}(X)_{\underline{\mathrm{parf}}} \hookrightarrow \mathrm{D}^b(X)_{\mathrm{coh}}$ induit un isomorphisme $K_0(X) \xrightarrow{\sim} G_0(X)$ – cf. [2] Exp. IV 2.5.

Pour $f : X \to Y$ qui vérifie les hypothèses de la conjecture 1.14 on obtient à nouveau un morphisme image directe

$$f_* : G_0(X) \to G_0(Y)$$

Avant de conclure introduisons, pour notre schéma X, la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules localement libres de type fini $\mathrm{Loclib}(X)$, et la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents $\mathrm{Coh}(X)$. On pose alors

$$K_0^{\mathrm{naïf}}(X) := K_0(\mathrm{Loclib}(X)) \text{ et } G_0^{\mathrm{naïf}}(X) := K_0(\mathrm{Coh}(X))$$

On dispose sur $K_0^{\mathrm{naïf}}(X)$ et $G_0^{\mathrm{naïf}}(X)$ de tous les résultats cités sur $K_0(X)$ et $G_0(X)$ à une exception près : on ne sait pas définir de morphisme image directe sur $K_0^{\mathrm{naïf}}(X)$, c'est d'ailleurs la principale motivation pour l'introduction de $K_0(X)$. Sur $G_0^{\mathrm{naïf}}(X)$ on n'a pas ce problème : pour $f : X \to Y$ un morphisme propre et $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent les faisceaux image directe supérieure $R^i f_*(\mathscr{E})$ pour $i > 0$ restent cohérents et on pose alors $f_*(\mathscr{E}) = \sum_i (-1)^i R^i f_*(\mathscr{E})$.

Dans [2] Grothendieck note $K^\bullet(X)_{\mathrm{naïf}}$ ce que nous notons $K_0^{\mathrm{naïf}}(X)$ et $K_\bullet(X)_{\mathrm{naïf}}$ ce que nous notons $G_0^{\mathrm{naïf}}(X)$.

1.2.2 Structure de λ-anneau sur $K_0(X)$

On va rappeler ici à quelles conditions on peut définir une structure de λ-anneau sur $K_0(X)$.

Dans la suite, pour $\mathscr{E}^\cdot$ (resp. $\mathscr{E}$) un complexe parfait (resp. un module localement libre de type fini), on note $[\mathscr{E}^\cdot]$ (resp. $[\mathscr{E}]$) sa classe dans $K_0(X)$ (resp. $K_0^{\mathrm{naïf}}(X)$). On omettra parfois ses crochets.

Intéressons nous d'abord à $K_0^{\mathrm{naïf}}(X)$.

La structure de λ-anneau ne fait qu'axiomatiser les opérations puissances extérieures dont on dispose pour des modules localement libres de type fini et l'on définit donc une λ-structure sur $K_0^{\text{naïf}}(X)$ en posant

$$\lambda^i([\mathscr{E}]) := [\Lambda^i \mathscr{E}]$$

pour $\mathscr{E}$ un module localement libre de type fini. L'additivité des λ^i – c'est la formule $\oplus_{i=0}^n \Lambda^i \mathscr{E}' \otimes \Lambda^{n-i} \mathscr{E}'' = \Lambda^n \mathscr{E}$ pour une suite exacte courte $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$ – permet d'étendre cette définition à $K_0^{\text{naïf}}(X)$.

On obtient bien de la sorte une structure de λ-anneau, et non simplement de pré-λ-anneau, pourvu que l'on suppose X quasi-compact – cf. [2] Exp. VI 3.2.

Le cas de $K_0(X)$ est plus délicat : on ne dispose pas en général d'une structure de λ-anneau. C'est une des questions laissées ouvertes dans [2] Exp. XIV §1.

Au moins peut-on résoudre la question en caractéristique nulle. En ce cas, pour $\mathscr{E}^\cdot$ un complexe parfait on peut poser

$$\lambda^i([\mathscr{E}^\cdot]) := (\mathscr{E}^{\cdot \overset{\mathrm{L}}{\otimes} i})^{\text{alt}}$$

où l'on considère la puissance tensorielle i-ème $\mathscr{E}^{\cdot \overset{\mathrm{L}}{\otimes} i}$ comme un complexe de $\mathscr{O}_{X,i}$-modules, $\mathscr{O}_{X,i}$ désignant l'algèbre du groupe symétrique $\mathfrak{S}_i$ à coefficients dans $\mathscr{O}_X$. Quant à l'exposant alt il désigne la « partie alternée sous l'action de $\mathfrak{S}_i$ ».

Cette formule n'est malheureusement plus valable en caractéristique positive et il ne semble pas y avoir de solution aussi triviale à ce problème.

Une autre voie pour définir une λ-structure sur $K_0(X)$ est alors de chercher à le comparer à $K_0^{\text{naïf}}(X)$: la notion de complexe parfait n'est en effet rien d'autre que l'extension naturelle de la notion de module libre à la catégorie dérivée.

On va ainsi exhiber toute une classe de schémas pour lesquels $K_0(X)$ et $K_0^{\text{naïf}}(X)$ sont isomorphes.

Lemme 1.17. *Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé et $\{\mathscr{L}_i\}_{i\in I}$ une famille de faisceaux inversibles sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) On considère l'ensemble de sections $f \in H^0(X, \mathscr{L}_i^{\otimes n})$ pour i parcourant I et n parcourant $\mathbf{N}^*$. Alors la famille formée des ouverts $X_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ est une base de la topologie de Zariski sur X.

ii) On peut choisir un ensemble d'entiers $n \geqslant 1$, un ensemble de faisceaux inversibles $\mathscr{L}_i$ dans la famille et un ensemble de sections $f \in H^0(X, \mathscr{L}_i^{\otimes n})$ tels que l'ensemble des X_f forme une base de la topologie de Zariski de X et que tous les X_f soient affines.

iii) On peut choisir un ensemble d'entiers $n \geqslant 1$, un ensemble de faisceaux inversibles $\mathscr{L}_i$ dans la famille et un ensemble de sections $f \in H^0(X, \mathscr{L}_i^{\otimes n})$ tels que l'ensemble des X_f forme un recouvrement de X par des schémas affines.

iv) Pour tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, la flèche d'évaluation

$$\bigoplus_{i\in I, n\geqslant 1} H^0(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_i^{\otimes n}) \otimes \mathscr{L}_i^{-\otimes n} \to \mathscr{F}$$

est un épimorphisme.

Preuve: cf. [2] Exp. II 2.2.3. ∎

Définition 1.18. Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Soit $(\mathscr{L}_i)_{i\in I}$ une famille de faisceaux inversibles sur X. On dit que les $\mathscr{L}_i$ forment une famille de fibrés amples s'ils vérifient l'une des assertions équivalentes du lemme 1.17.

Définition 1.19. On dit qu'un schéma X est divisoriel s'il est quasi-compact, quasi-séparé et qu'il possède une famille de fibrés amples.

Exemple: Tout schéma muni d'un faisceau inversible ample au sens de [15] II 4.5.3 et IV 1.7 a une famille de fibrés amples – à savoir la famille formée de ce faisceau inversible ample. En particulier, un schéma affine et un schéma quasi-projectif sur un schéma affine possèdent une famille de fibrés amples.

Le grand avantage des schémas divisoriels est de permettre une définition globale des complexes parfaits :

Proposition 1.20. *Soit X un schéma divisoriel. Soit $\mathscr{E}^\cdot$ un complexe parfait de $\mathscr{O}_X$-modules.*

Alors il existe un complexe strictement parfait $\mathscr{F}^\cdot$ et un isomorphisme $\mathscr{E}^\cdot \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^\cdot$ dans $\mathrm{D}(X)$.

Preuve: cf. [32] 2.3.1. ∎

L'existence de telles résolutions globales implique immédiatement

Proposition 1.21. *Soit X un schéma divisoriel. Alors l'inclusion canonique*

$$K_0^{\text{naïf}}(X) \hookrightarrow K_0(X)$$

est un isomorphisme.

Ainsi, dans le cas d'un schéma divisoriel, on peut par transfert de structure définir une λ-structure sur $K_0(X)$.

Nous considérons dans la suite un schéma divisoriel X et identifions désormais, sans autre précision, $K_0(X)$ et $K_0^{\text{naïf}}(X)$.

Remarquons tout de suite que $K_0(X)$ est un λ-anneau augmenté dans le sens défini précédemment, pourvu que X soit supposé connexe [1]. L'augmentation $\varepsilon : K_0(X) \to \mathbf{Z}$ est alors donnée par le rang : si $\mathscr{E}$ est un module localement libre de rang n on pose $\varepsilon(\mathscr{E}) = n$.

On est alors en mesure d'appliquer tout ce qui a été vu dans la section précédente sur les λ-anneaux augmentés à $K_0(X)$.

Une première chose à remarquer est que $K_0(X)$ est un λ-anneau de dimension finie : si $\mathscr{E}$ est un module localement libre de rang n, $\Lambda^k\mathscr{E} = 0$ pour $k > n$, et tout élément de $K_0(X)$ peut s'écrire comme la différence de deux modules localement libres.

On dispose donc du principe de scindage du théorème 1.1. Sous sa forme explicite l'extension de $K_0(X)$ où un module localement libre $\mathscr{E}$ est entièrement décomposé est $K_0(X')$

1. Si X n'est pas supposé connexe, il faut considérer une augmentation à valeurs dans $H^0(X, \mathbf{Z})$. En cohérence avec les définitions adoptées, on suppose désormais X connexe, ce qui ne change rien aux résultats ultérieurs.

avec X' la variété de drapeaux associée à $\mathscr{E}$. En effet, en ce cas le morphisme $f : X' \to X$ induit bien une flèche injective $f^* : K_0(X) \hookrightarrow K_0(X')$ – cf. [2] Exp. VI 3.1.

On munit également $K_0(X)$ de sa γ-filtration, d'où le gradué associé $\mathrm{Gr}(K_0(X))$.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas, la flèche $f^* : K_0(Y) \to K_0(X)$ est un morphisme de λ-anneaux et non simplement d'anneaux, en particulier il respecte la γ-filtration et induit donc une flèche $f^* : \mathrm{Gr}(K_0(Y)) \to \mathrm{Gr}(K_0(X))$.

On dispose également de la classe de Chern complétée

$$\tilde{c} : K_0(X) \to \widetilde{\mathrm{Gr}}(K_0(X))$$

On remarque que pour $x \in K_0(X)$ $f^* c_i(x) = c_i(f^* x)$ - c'est une conséquence triviale des définitions.

Pour $\mathscr{L}$ un fibré en droites, un calcul élémentaire prouve que $\gamma_t([\mathscr{L}] - [\mathscr{O}_X]) = 1 + ([\mathscr{L}] - [\mathscr{O}_X])t$ et donc

$$c_t([\mathscr{L}]) = 1 + [\mathscr{L}]t$$

L'additivité de la classe de Chern est par ailleurs évidente, de par les définitions.

On retrouve bien ainsi les axiomes usuels d'une théorie des classes de Chern, tels qu'exposés dans [14] §3.

Associés à la classe de Chern complétée, on retrouve le caractère de Chern et la classe de Todd

$$\mathrm{ch} : K_0(X) \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K_0(X)) \text{ et } \mathrm{td} : K_0(X) \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K_0(X))$$

Comme les classe de Chern, ils sont compatibles aux images réciproques.

Enfin on dispose des opérateurs d'Adams

$$\psi^k : K_0(X) \to K_0(X)$$

et l'on peut définir la classe cannibale de Bott pour un élément de $K_0(X)$ de λ-dimension finie. Si l'on note $K_{0,f}(X)$ l'ensemble des éléments de $K_0(X)$ de λ-dimension finie on a donc un morphisme

$$\theta^k : K_{0,f}(X) \to K_0(X)$$

1.2.3 Groupes de K-théorie supérieurs

Dans [2] Grothendieck et ses élèves avaient construit une théorie du K_0 pour la catégorie dérivée. Dans les recherches pour définir de manière générale les groupes de K-théorie supérieurs, la première solution complète fut apportée par D. Quillen dans [24]. Néanmoins sa construction ne permettait pas de construire des groupes de K-théorie dans les catégories dérivées, s'éloignant ainsi des idées de [2]. Ce n'est que plus tard dans [33] que Waldhausen proposa une construction au niveau de la catégorie dérivée. Cela permit alors de renouer avec certaines des idées et concepts introduits par Grothendieck. Cette approche permit à Thomason et Trobaugh de démontrer un théorème de localisation qui faisait alors cruellement défaut dans [32]. C'est à l'aide de ce théorème que l'on obtient certains résultats dont nous aurons besoin dans la suite.

Dans cette rapide présentation des résultats dont nous aurons besoin nous suivrons essentiellement [32].

Nous n'allons qu'esquisser rapidement la construction – assez lourde – des groupes de K-théorie, car elle ne nous sera pas utile dans la suite.

Dans [32] 1.2.11 les auteurs décrivent un procédé qui à toute catégorie abélienne $\mathscr{A}$ dont on s'est donné une sous-catégorie pleine et additive $\mathbf{A}$ de la catégorie des complexes de chaînes associe ce qu'ils appellent une catégorie biWaldhausen saturée extensible – cf. *loc. cit.* 1.2.4, 1.2.5 & 1.2.6 pour une définition précise de cette notion. A cette catégorie il associe une nouvelle catégorie, simpliciale, suivant le procédé explique en *loc. cit.* 1.5.1. Suivant un processus standard on associe alors à cette catégorie simplicale un ensemble bisimplicial $N(\mathbf{A})$. Pour finir on associe à cet ensemble bisimplicial sa réalisation géométrique, notons-là $|N(\mathbf{A})|$.

Une première idée serait de définir un espace $K^W(\mathbf{A})$ comme l'espace des lacets de cette réalisation géométrique, $K^W(\mathbf{A}) = \Omega|N(\mathbf{A}|$. En fait, les points 1.3.3 et 1.5.3 de [33] montrent que cet espace est le premier d'une suite d'espaces qui forment un spectre – i.e. une suite d'espaces tel que chacun est homotopiquement équivalent par une application donnée à l'espace des lacets de l'espace suivant ; pour une définition précise de cette notion, cf. [17] 4.3 & 4.F ainsi que [28] §5. Pour des raisons techniques il est préférable de travailler avec le spectre complet.

On définit donc $K^W(\mathbf{A})$ comme le spectre associé à $\Omega|N(\mathbf{A})|$ suivant [33] 1.3.3 & 1.5.3 - d'où le W pour Waldhausen. Les groupes de K-théorie de $\mathbf{A}$ sont alors les groupes d'homotopie de $K^W(\mathbf{A})$, $K_n^W(\mathbf{A}) = \pi_n(K(\mathbf{A}))$. On remarque que $K_n^W(\mathbf{A}) = 0$ pour $n < 0$, et pour $n \geqslant 0$ ce sont les groupes d'homotopie de $\Omega|N(\mathbf{A})|$.

Revenons maintenant au cas qui nous intéresse. Soit donc X un schéma. On applique la construction précédente en considérant comme catégorie abélienne $\mathscr{A}$ la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules et comme sous-catégorie de la catégorie des complexes de $\mathscr{O}_X$-modules la catégorie des complexe parfaits de Tor-amplitude finie – qui donne $\mathrm{D}(X)_{\underline{\mathrm{parf}}}$ au niveau de la catégorie dérivée.

On note $K^W(X)$ le spectre ainsi obtenu et on parle de la K-théorie de X.

En vertu de [32] 1.5.6 on a un isomorphisme $K_0(X) \xrightarrow{\sim} K_0^W(X))$. Cette K-théorie constitue donc bien une extension de la théorie du K_0 de Grothendieck.

A nouveau pour des raisons techniques les auteurs de [32] introduisent assez rapidement un spectre $K^B(X)$ – l'exposant B est pour Bass – tel que l'on dispose d'une application canonique $K^W(X) \to K^B(X)$ qui induit des isomorphismes $K_n^W(X) \xrightarrow{\sim} K_n^B(X)$ pour $n \geqslant 0$. Pour une définition précise de cet objet cf. [32] 6.4.

Ce nouveau spectre est introduit car il se comporte mieux en degrés négatifs et permet ainsi d'avoir des théorèmes plus satisfaisants – cf. à ce propos [32] 6.0. Les principaux résultats de [32] sont ainsi démontrés pour les spectres K^B.

Le résultat central de [32] est le théorème de localisation 7.4 p. 365. Ce théorème de localisation permet alors de démontrer des théorèmes de Mayer-Vietoris, qui nous seront utiles dans la suite.

Théorème 1.22 (Mayer-Vietoris 1)**.** *Soit X un schéma quasi-séparé. Soient U et V des*

sous-schémas ouverts et quasi-compacts de X. Alors le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K^B(U \cup V) & \longrightarrow & K^B(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^B(V) & \longrightarrow & K^B(U \cap V) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien d'où des suites exactes longues de Mayer-Vietoris.

$$\ldots \xrightarrow{\partial} K_n^B(U \cup V) \to K_n^B(U) \oplus K_n^B(V) \to K_n^B(U \cap V) \xrightarrow{\partial} K_{n-1}^B(U \cup V) \to \ldots$$

Preuve: cf. [32] 8.1. ■

Pour formuler un théorème de Mayer-Vietoris dans le cas où l'on considère un recouvrement par plus de deux ouverts, il faut introduire le spectre d'hypercohomologie de Čech associé à un recouvrement donné. La construction de ce spectre est assez technique, sans grand intérêt pour la suite de ce mémoire, aussi n'allons-nous que l'esquisser : le lecteur intéressé pourra consulter [28] §1 pour plus de détails.

On considère toujours un schéma X et soit F un préfaisceau de spectres pour la topologie de Zariski sur X. Soit $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de Zariski de X. On peut alors considérer le complexe de Čech

$$F^{\cdot}_{\mathscr{U}} := \prod_{i_0 \in I} F(U_{i_0}) \rightrightarrows \prod_{(i_0,i_1) \in I^2} F(U_{i_0} \times U_{i_1}) \ldots$$

C'est un objet cosimplicial.

Quand le préfaisceau est en outre un préfaisceau de spectres fibrants – cf. [28] 5.2 pour une définition précise – on définit alors le spectre d'hypercohomologie de Čech comme la limite homotopique de ce complexe par rapport à la catégorie simpliciale Δ,

$$\check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, F) := \operatorname*{holim}_{\Delta} F^{\cdot}_{\mathscr{U}}$$

On dispose alors d'une flèche d'augmentation naturelle $F(X) \to \check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, F)$.

Ces définitions vont être utilisées pour le spectre K^B afin d'énoncer plus généralement le théorème de Mayer-Vietoris.

Théorème 1.23 (Mayer-Vietoris 2)**.** *Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Soit $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts de Zariski quasi-compacts. Alors la flèche d'augmentation est une équivalence d'homotopie*

$$K^B(X) \xrightarrow{\sim} \check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, K^B)$$

et l'on a une suite spectrale de Mayer-Vietoris qui converge fortement

$$E_2^{p,q} = \check{\mathbf{H}}^p(\mathscr{U}, K_q^B) \Rightarrow K_{q-p}^B(X) \tag{1.14}$$

Le principal intérêt du théorème de Mayer-Vietoris est de permettre de se ramener au cas affine pour démontrer bon nombre de résultats.

Plus précisément soient des objets $F(X)$ et $F'(X)$ qui sont des limites homotopiques de diagrammes avec des $K^B(Z)$ pour des schémas Z sur X. On suppose que l'on dispose d'une flèche naturelle $F(X) \to F(X')$ et l'on veut montrer que c'est une équivalence

d'homotopie. Alors si l'on connaît le résultat pour X affine, on l'obtient automatiquement pour X quasi-compact et quasi-séparé.

Commençons par le cas où X es supposé quasi-compact et séparé. X possède alors un recouvrement fini par des ouverts affines $\mathscr{U} = \{U_0, \dots U_n\}$, et les intersections finies $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$ sont encore des schémas affines. Ainsi $F(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) \to F'(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k})$ est une équivalence d'homotopie, d'où une équivalence d'homotopie $\check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, F) \xrightarrow{\sim} \check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, F')$. Par ailleurs, les limites homotopiques commutent entre elles, et donc $\check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, F)$ est une limite homotopique des $\check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, K^B() \times_X Z)$ pour les $K^B(Z)$ qui interviennent dans la définition de $F(X)$. On en déduit donc d'après le théorème de Mayer-Vietoris 1.23 une équivalence d'homotopie $F(X) \xrightarrow{\sim} \check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, F)$. De même, une équivalence d'homotopie $F'(X) \xrightarrow{\sim} \check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, F')$. Et donc $F(X) \to F'(X)$ est bien une équivalence d'homotopie.

Dans le cas général où l'on suppose X quasi-compact et quasi-séparé, on dispose encore d'un recouvrement fini $\mathscr{U}$ pour la topologie de Zariski mais les intersections $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$ ne sont plus affines, elles sont néanmoins quasi-affines, donc en particulier quasi-compactes et séparées. Par le même raisonnement que précédemment on a donc une équivalence d'homotopie $\check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, F) \xrightarrow{\sim} \check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, F')$ suivie de l'équivalence d'homotopie recherchée $F(X) \xrightarrow{\sim} F'(X)$.

1.3 Immersions régulières

La première définition de la notion d'immersion régulière que l'on trouve est dans [15] IV 16.9.2. Elle se fait alors en termes de suites régulières. Le défaut de cette définition est de ne pas s'adapter au cas non noethérien. Il faut donc la remplacer dans le cas non noethérien, c'est ce qui est fait dans [2] Exp. VII §1.

1.3.1 Le complexe de Koszul

Rappelons la définition du complexe de Koszul en algèbre commutative.

Soit donc A un anneau et E un A-module libre de type fini, de rang n. On se donne un homomorphisme

$$d_0 : E \to A$$

dont on note I l'image, c'est un idéal de A.

Le complexe de Koszul est alors le complexe de l'algèbre extérieure

$$0 \longrightarrow \Lambda^n E \xrightarrow{d_{n-1}} \Lambda^{n-1} E \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^1 E \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

avec

$$d_{r-1}(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} d_0(x_i) x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_i} \wedge \dots \wedge x_r$$

Soient $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $f_i = d_0(e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Le complexe de Koszul sera noté indifféremment $\mathrm{K}.(d_0)$ ou $\mathrm{K}.(f_1, \dots, f_n)$, selon que l'on s'est donné une base de E ou non.

On remarque alors que

$$\mathrm{K}.(f_1, \dots, f_n) = \mathrm{K}.(f_1, \dots, f_{n-1}) \otimes \mathrm{K}.(f_n)$$

Le complexe de Koszul est scindé et on aurait très bien pu le définir à partir de la dimension 1 en posant ensuite $\mathrm{K}.(f_1, \dots, f_n) = \mathrm{K}.(f_1) \otimes \dots \otimes \mathrm{K}.(f_n)$.

De manière plus générale on peut définir un complexe de Koszul à valeurs dans n'importe quel A-module M en posant

$$\mathrm{K}.(d_0, M) = \mathrm{K}.(d_0) \otimes_A M$$

On le note également $\mathrm{K}.(f_1, \ldots, f_n; M)$. Cet objet est fonctoriel en M, en particulier pour toute suite exacte courte de A-modules

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

on obtient une suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{K}.(d_0, M_1) \to \mathrm{K}.(d_0, M_2) \to \mathrm{K}.(d_0, M_3) \to 0$$

d'ou une suite exacte longue d'homologie

$$\ldots \to H_i(\mathrm{K}.(d_0; M_1)) \to H_i(\mathrm{K}.(d_0, M_2)) \to H_i(\mathrm{K}.(d_0, M_3)) \to H_{i-1}(\mathrm{K}.(d_0, M_1)) \to \ldots$$

Pour plus de détails à ce propos, cf. [5] §9 no 2.

Si on note I l'idéal de A engendré par $f_1, \ldots, f_n$, on considère parfois le complexe de Koszul augmenté

$$0 \longrightarrow \Lambda^n E \xrightarrow{d_n} \Lambda^{n-1} E \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^1 E \xrightarrow{d_1} A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

Rappelons également la notion de suite régulière.

Définition 1.24. Soient A un anneau et $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. On note I l'idéal engendré par $a_1, \ldots, a_n$. On dit que $(a_1, \ldots, a_n)$ est une suite régulière si $I \neq A$, que a_1 n'est pas diviseur de zéro dans A, et que l'image de a_i n'est pas un diviseur de zéro dans $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$.

Une suite régulière $(a_1, \ldots, a_n)$ définit un complexe de Koszul $\mathrm{K}.(a_1, \ldots, a_n)$ pour lequel on dispose du résultat classique suivant, qui permet de faire le lien entre la définition de la régularité dans le cas noethérien et dans le cas non noethérien.

Proposition 1.25. *a) Soit $a_1, \ldots, a_n$ une suite régulière. Alors le complexe de Koszul associé est acyclique en degrés stricement positifs et fournit donc une résolution de A/I.*

b) Soit A un anneau local et noethérien. On suppose que $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de l'idéal maximal de A et que le complexe de Koszul associé est acyclique en degrés strictement positifs. Alors $(a_1, \ldots, a_n)$ est une suite régulière.

Preuve: cf. [13] chap. IV 2.1. ∎

Dans un anneau local noethérien, un des intérêts de la notion de suite régulière est qu'elle est invariante par permutation des éléments de la suite. Ce n'est plus le cas dans un anneau local non noethérien – [10] fournit un contre-exemple – alors que par exemple l'acyclicité du complexe de Koszul, vérifiée par une suite régulière, est elle invariante par permutation des éléments de la suite qui définit le complexe.

C'est ce fait qui a motivé l'introduction d'une définition plus générale de la notion d'immersion régulière dans le cas non noethérien.

On déduit immédiatement de ce qui précéde la version faisceautique sur un schéma X du complexe de Koszul. Pour $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang n un homomorphisme

$$d_0 : \mathscr{E} \to \mathscr{O}_X$$

définit le complexe $\mathrm{K}.(d_0)$

$$0 \longrightarrow \Lambda^n\mathscr{E} \xrightarrow{d_{n-1}} \Lambda^{n-1}\mathscr{E} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^1\mathscr{E} \xrightarrow{d_0} \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

Un cas particulier nous intéresse. Soit $\mathscr{E}$ un faisceau localement libre de rang n et s une section de $\mathscr{E}$. La section s définit alors un morphisme $s^\vee : \mathscr{E}^\vee \to \mathscr{O}_X$ d'où le complexe de Koszul associé

$$0 \longrightarrow \Lambda^n\mathscr{E}^\vee \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^1\mathscr{E}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

La section s de $\mathscr{E}$ définit de la sorte un idéal de $\mathscr{O}_X$ et donc un sous-schéma fermé de X. On le note $Z(s)$ et on l'appelle schéma des zéros de s.

1.3.2 Immersions régulières

Nous adopterons la notion d'immersion régulière de [2].

Définition 1.26 ([2] Exp. VII 1.4)**.** Soient X un schéma et $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de type fini. Soit $d : \mathscr{E} \to \mathscr{O}_X$ un morphisme de $\mathscr{O}_X$-modules. On dit que d est régulier si le complexe de Koszul associé $\mathrm{K}.(d)$ est acyclique en degrés strictement positifs.

Soit $\mathscr{I}$ un idéal de $\mathscr{O}_X$. On dit que $\mathscr{I}$ est régulier si il existe localement un $\mathscr{O}_X$module localement libre de type fini $\mathscr{E}$ et un homomorphisme régulier surjectif $\mathscr{E} \to \mathscr{I}$.

Soit $f : X \to Y$ une immersion de schémas. On dit que f est une immersion régulière si elle est définie par un idéal régulier.

Dans le cas noethérien, la proposition 1.25 assure que l'on retrouve la définition de [15] IV 16.9.2 en termes de suite régulière.

La proposition suivante nous sera utile dans la suite.

Proposition 1.27. *Soient X un schéma et $\mathscr{I}$ un idéal de $\mathscr{O}_X$. On suppose que $\mathscr{I}$ est un idéal régulier.*

Alors $\mathscr{I}$ est un idéal quasi-régulier au sens de [15] IV 16.9.7, c'est-à-dire

i) $\mathscr{I}$ est localement de type fini.

ii) $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ est un $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$-module localement libre de type fini.

iii) l'homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$-modules

$$\mathrm{Sym}^{\cdot}_{\mathscr{O}_X/\mathscr{I}}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) \to \oplus_{n\geqslant 0}\mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1}$$

est un isomorphisme.

Preuve: cf. [2] Exp. VII 1.3. ∎

Remarquons également que la composée de deux immersions régulières est une immersion régulière – [2] Exp. VII 1 – et que c'est une notion stable par changement de base plat – [2] Exp. VII 1.5. On dispose également de la proposition suivante.

Rappelons également la définition du faisceau conormal.

Définition 1.28. Soit $i : Y \to X$ une immersion définie par un idéal $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_X$. On pose $\mathscr{C}_{Y/X} := \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$. Alors $\mathscr{C}_{Y/X}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_Y$-modules. On l'appelle le faisceau conormal de l'immersion.

Si i est une immersion régulière $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ est localement libre de type fini. Son rang s'appelle codimension de Y dans X, ou encore codimension de i.

1.3.3 Morphismes d'intersection complète

Définition 1.29. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On dit que f est un morphisme d'intersection complète si pour tout point x de X il existe un voisinage ouvert U de x tel que f se factorise sous la forme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ i\ } & Y_1 \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & Y & \end{array}$$

avec i une immersion régulière et g un morphisme lisse.

On parlera en abrégé de morphisme lci – pour *locally complete intersection* – plutôt que d'intersection complète.

Comme pour les immersions régulières, cette notion est stable par composition et par changement de base plat.

On définit une notion de dimension relative pour un morphisme lci.

Proposition 1.30. *Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'intersection complète et $x \in X$. On suppose que l'on dispose d'une factorisation au voisinage de x*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ i\ } & Y_1 \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & Y & \end{array}$$

avec i une immersion régulière et g un morphisme lisse. Alors l'entier $d_x = \mathrm{rg}((\Omega^1_{Y_1/Y})_{i(x)}) - \mathrm{rg}((\mathscr{C}_{U/Y_1})_x)$ ne dépend pas de la factorisation choisie de f.

Preuve: cf. [2] Exp. VIII 1.8. ∎

Définition 1.31. L'entier d_x de la proposition 1.30 s'appelle la dimension relative virtuelle de X sur Y (ou de f) au point x.

C'est une fonction localement constante.

Il nous reste à définir le complexe cotangent d'un morphisme lci. Nous nous contenterons de le faire dans le cas où le morphisme est globalement d'intersection complète – i.e. quand on dispose d'une factorisation globale comme composée d'une immersion régulière et d'un morphisme lisse – cela nous suffira dans la suite.

Soit donc $f : X \to Y$ globalement d'intersection complète et

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ i\ } & Y_1 \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & Y & \end{array} \tag{1.15}$$

une factorisation avec i une immersion régulière et g un morphisme lisse.

Si $\mathscr{I}$ désigne l'idéal qui définit X dans Y_1, la différentielle $d : \mathscr{O}_{Y_1} \to \Omega^1_{Y_1/Y}$ induit une flèche, encore notée d

$$d : \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to \Omega^1_{Y_1/Y} \otimes \mathscr{O}_X$$

cf. [16] II 8.4A.

On peut donc définir un complexe L_f par

$$L_f := \ldots \to 0 \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{d} \Omega^1_{Y_1/Y} \otimes \mathscr{O}_X \to 0 \to \ldots$$

avec $\Omega^1_{Y_1/Y} \otimes \mathscr{O}_X$ placé en degré 0.

La notation L_f est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 1.32. *Le complexe L_f ne dépend pas, à un isomorphisme canonique près dans* $\mathrm{D}(X)$*, de la factorisation choisie pour f.*

Preuve: cf. [2] Exp. VIII 2.2. ∎

Définition 1.33. Soit $f : X \to Y$ un morphisme globalement d'intersection complète. Le complexe L_f est appelé complexe cotangent de f.

Le dual de ce complexe sera appelé complexe tangent de f et noté T_f, $T_f = L_f^\vee$.

La construction précédente est en fait valable dès que le morphisme f est lissifiable, i.e. que l'on dispose d'une factorisation du type de (1.15) avec i une immersion non nécessairement régulière. Néanmoins dans le cadre d'un morphisme globalement d'intersection complète, on dispose d'une propriété supplémentaire sur ce complexe.

Proposition 1.34. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme globalement d'intersection complète. Alors le complexe L_f est un complexe strictement parfait.*

Preuve: On considère une factorisation de f sous la forme (1.15). Les faisceaux intervenant dans la définition de L_f sont alors tous localement libres de type fini : $\Omega^1_{Y_1/Y} \otimes \mathscr{O}_X$ car g est lisse et $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ car i est une immersion régulière. L_f est donc bien un complexe strictement parfait. ∎

Si on suppose uniquement f (localement) d'intersection complète, le complexe cotangent n'est plus qu'un complexe parfait, et non strictement parfait – à ce propos cf. [2] Exp. 0 4.4.

Dans le cas d'un morphisme globalement d'intersection complète on continuera, de manière un peu abusive, à noter L_f la classe de L_f dans $K_0(X)$. De même pour T_f.

Chapitre 2

Enoncés des principaux résultats

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer précisément le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch.

Nous commençons d'abord par rappeler en toute rigueur le résultat démontré par Grothendieck et ses élèves dans [2]. En particulier on fera bien attention aux divers endroits où interviennent les hypothèses faites. Nous énonçons ensuite une conjecture qui va vers les conjectures les plus générales de Grothendieck dans *loc. cit.* Exp. XIV avant de préciser dans quels cas nous sommes en mesure de démontrer entièrement cette conjecture. Enfin, dans une dernière partie nous rappelons l'équivalence classique qui existe entre le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch et le théorème d'Adams-Riemann-Roch modulo torsion. Dans la suite les résultats annoncés seront en fait démontrés pour le théorème d'Adams-Riemann-Roch, d'où nous déduirons automatiquement le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch.

2.1 Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch dans SGA6

Le résultat démontré sous le nom de théorème de Riemann-Roch dans [2] Exp. VIII 3.6 cache en fait plusieurs résultats dont certains ont déjà été rappelés dans le chapitre 1. Ces résultats sont éparpillés dans plusieurs exposés de [2]. Pour plus de clarté nous allons tous les rassembler dans un seul énoncé, quitte à en reprendre certains déjà évoqués précédemment.

Théorème 2.1 (Grothendieck-Riemann-Roch)**.** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas.*

On suppose que f est projectif d'intersection complète et que sa dimension relative virtuelle est constante, égale à d.

On suppose que Y est quasi-compact et muni d'un fibré ample.

Alors

a) Les flèches canoniques

$$K_0^{\text{naïf}}(Y) \to K_0(Y) \text{ et } K_0^{\text{naïf}}(X) \to K_0(X)$$

sont des isomorphismes.

b) Les γ-filtrations sur $K_0(Y)$ et $K_0(X)$ sont localement nilpotentes.

c) Le complexe cotangent de f, L_f, est strictement parfait.

d) $f_*(F^k K_0(X)_{\mathbf{Q}}) \subset F^{k-d} K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$, *d'où*

$$f_* : \mathrm{Gr}(K_0(X))_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Gr}(K_0(Y))_{\mathbf{Q}}$$

e) Pour tout $E \in K_0(X)$

$$\mathrm{ch}(f_*(E)) = f_*(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(E))$$

Le point a) résulte du théorème 1.21 : Y possède un fibré ample, et l'hypothèse de projectivité sur f assure qu'il en est de même pour X.

Le point b) résulte du fait que $F^1K_0(Y)$ et $F^1K_0(X)$ sont des nilidéaux. Cela est prouvé dans [2] Exp. VI 6.1. L'hypothèse d'existence d'un fibré ample est utilisée de manière cruciale au cours de la démonstration de ce résultat.

Le point c) a été rappelé dans le chapitre 1 : c'est la proposition 1.34. Remarquons que le morphisme f est bien globalement d'intersection complète car il est projectif – cela nécessite [2] Exp. VIII 1.2.

Le point d) est la combinaison de deux résultats du même type : le décalage induit sur la filtration du K_0 par l'image directe d'un morphisme lisse dans [2] Exp. VI 5.8 et par l'image directe d'une immersion régulière dans [2] Exp. VII 4.6.

Le point e), le dernier, est enfin le résultat que l'on désigne habituellement sous le nom de théorème de Grothendieck-Riemann-Roch.

2.2 Conjectures et résultats

Dans [2] Exp. XIV, Grothendieck énonce toute une série de conjectures et cherche notamment à donner la forme la plus générale au théorème de (Grothendieck-)Riemann-Roch.

Le problème de l'existence d'une λ-structure sur $K_0(X)$ en toute généralité a déjà été soulevé en 1.2.2. Une réponse satisfaisante n'a pas encore été donnée. Au moins peut-on encore en définir une au moyen de $K_0^{\mathrm{naïf}}(X)$ pour X divisoriel.

Dans la suite, on considère donc le cas d'un schéma X divisoriel.

Il ne semble alors pas y avoir de difficultés à énoncer un théorème de Riemann-Roch pour un morphisme propre d'intersection complète – on garde l'hypothèse d'intersection complète pour s'assurer que le complexe cotangent est parfait, l'hypothèse propre pour pouvoir définir une image directe, sous couvert là encore de la validité du théorème de finitude conjecturé dans [2] Exp. III 2.1.

Il faut également examiner la nilpotence des γ-filtrations. En l'absence d'un fibré ample sur Y rien n'assure a priori que cette nilpotence locale soit vérifiée. De plus, pour obtenir le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch au sens strict il suffit de savoir que la filtration de $K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$ induite par la γ-filtration de $K_0(Y)$ est localement nilpotente – on parlera désormais de la γ-filtration de $K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$ pour cette filtration induite.

Cela nous amène à poser une première conjecture.

Conjecture 2.2. *Soit X un schéma divisoriel. Alors la γ-filtration sur $K_0(X)$ est localement nilpotente.*

Nous sommes maintenant en mesure d'en venir au coeur du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch. Compte tenu des remarques précédentes, il semble raisonnable de poser la conjecture suivante. C'est une conjecture que l'on peut attribuer à Grothendieck, même si elle n'apparaît pas explicitement dans [2] Exp. XIV.

Conjecture 2.3. *Soient X et Y deux schémas divisoriels et $f : X \to Y$ un morphisme propre d'intersection complète.*

On suppose que la conjecture 1.14 est vérifiée pour f.

On suppose que les schémas X et Y vérifient la conjecture 2.2.

On suppose en outre que f est de dimension relative virtuelle constante égale à d.

Alors

a) $f_*(F^k K_0(X)_{\mathbf{Q}}) \subset F^{k-d} K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$, *d'où un morphisme de degré $-d$*

$$f_* : \mathrm{Gr}(K_0(X))_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Gr}(K_0(Y))_{\mathbf{Q}}$$

b) Pour tout $E \in K_0(X)$

$$\mathrm{ch}(f_*(E)) = f_*(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(E))$$

Cette conjecture énoncée, il est temps de rappeler le lien qui existe entre le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch et le théorème d'Adams-Riemann-Roch.

Le théorème d'Adams-Riemann-Roch fait intervenir les opérateurs d'Adams et la classe cannibale de Bott. Rappelons son énoncé pour un morphisme projectif et d'intersection complète – i.e. les conditions sous lesquelles est démontré le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch dans [2].

Théorème 2.4. *Soient X et Y deux schémas et $f : X \to Y$ un morphisme projectif d'intersection complète.*

On suppose que f est de dimension relative virtuelle constante égale à d et que Y est quasi-compact muni d'un fibré ample.

Soit $k \geqslant 2$ un entier. Alors la formule

$$\psi^k(f_*(E)) = f_*(\theta^k(L_f)^{-1} \cdot \psi^k(E))$$

est vérifiée dans $K_0(Y)[\frac{1}{k}]$ pour tout E dans $K_0(X)$.

Dans ce théorème, c'est la nilpotence de la γ-filtration, conséquence de l'existence d'un fibré ample, qui permet d'assurer que l'élément $\theta^k(L_f)$ est inversible dans $K_0(Y)[\frac{1}{k}]$, et c'est parce qu'il faut pouvoir inverser cet élément que l'égalité n'est vraie que dans $K_0(Y)[\frac{1}{k}]$, et non $K_0(Y)$.

Le théorème 2.4, de manière étonnante, ne figure à notre connaissance nulle part dans la littérature. On trouve au mieux sa démonstration sur un corps mais jamais sur une base quelconque, bien que ce cas général se traite de la même manière que celui d'un corps. Nous en rappelons donc la démonstration générale dans l'annexe A.

Les théorèmes de Grothendieck-Riemann-Roch et Adams-Riemann-Roch sont en fait équivalents modulo torsion. Dans le cas qui nous intéresse, ce résultat se formule de la manière suivante.

Théorème 2.5. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre d'intersection complète entre schémas divisoriels. On suppose en outre que :*

- *La conjecture 1.14 est vérifiée pour f, ce qui permet de définir un morphisme image directe $f_* : K_0(X) \to K_0(Y)$.*
- *Les schémas X et Y vérifient la conjecture 2.2.*
- *Le morphisme f est de dimension relative virtuelle constante égale à d.*

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que la formule

$$\psi^k(f_*(E)) = f_*(\theta^k(L_f)^{-1} \cdot \psi^k(E))$$

soit vérifiée dans $K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$ pour tout E dans $K_0(X)$.

(ii) a) Pour tout $n \geqslant 0$ $f_*(F^n K_0(X)_{\mathbf{Q}}) \subset F^{n-d} K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$, d'où un morphisme de degré $-d$

$$f_* : \mathrm{Gr}(K_0(X))_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Gr}(K_0(Y))_{\mathbf{Q}}$$

b) Pour tout $E \in K_0(X)$

$$\mathrm{ch}(f_*(E)) = f_*(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(E))$$

La preuve du théorème 2.5 est donnée en détail dans l'annexe B. Le fait essentiel au coeur de ce résultat est que le caractère de Chern définit un isomorphisme $\mathrm{ch} : K_0(X)_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Gr}(K_0(X))_{\mathbf{Q}}$, pourvu que la γ-filtration de $K_0(X)$ soit localement nilpotente.

Au vu du théorème 2.5 il semble donc naturel de poser la conjecture suivante.

Conjecture 2.6. *Soient X et Y deux schémas divisoriels et $f : X \to Y$ un morphisme propre d'intersection complète.*

On suppose que la conjecture 1.14 est vérifiée pour f.

On suppose que, si f n'est pas une immersion régulière, le schéma X vérifie la conjecture 2.2.

On suppose en outre que f est de dimension relative virtuelle constante égale à d.

Soit $k \geqslant 2$ un entier. Alors la formule

$$\psi^k(f_*(E)) = f_*(\theta^k(L_f)^{-1} \cdot \psi^k(E))$$

est vérifiée dans $K_0(Y)[\frac{1}{k}]$ pour tout E dans $K_0(X)$.

Comme déjà remarqué, le fait que la γ-filtration de X soit localement nilpotente n'est utile que pour pouvoir inverser l'élément $\theta^k(L_f)$ dans $K_0(X)[1/k]$. Or si f est une immersion régulière de faisceau conormal égal à $\mathscr{C}_{X/Y}$, on a $\theta^k(L_f)^{-1} = \theta^k(\mathscr{C}_{X/Y})$ et cet élément est inversible sans avoir à supposer la γ-filtration de X localement nilpotente. Dans ce cas-là on n'a donc pas besoin de supposer que X vérifie la conjecture 2.2.

Enfin il résulte du théorème 2.5 que la conjecture 2.6 implique la conjecture 2.3. C'est donc désormais à la conjecture 2.6 que nous allons nous intéresser.

Les résultats de cette thèse concernent les conjectures 2.2 et 2.6.

En ce qui concerne la conjecture 2.2, nous sommes en mesure de traiter le cas de la caractéristique positive.

Théorème 2.7. *Soit X un schéma divisoriel de caractéristique $p > 0$.*

Alors la γ-filtration sur $K_0(X)[\frac{1}{p}]$ est localement nilpotente.

Nous sommes également en mesure de démontrer la conjecture 2.6 dans trois cas particuliers.

Théorème 2.8. *La conjecture 2.6 est vraie sous l'hypothèse supplémentaire suivante :*

– f est une immersion régulière

Théorème 2.9. *La conjecture 2.6 est vraie sous les hypothèses supplémentaires suivantes :*
- *f est un morphisme lisse.*
- *Y est un schéma de caractéristique $p > 0$ et $k = p$.*

Théorème 2.10. *La conjecture 2.6 est vraie sous les hypothèses supplémentaires suivantes :*
- *f est un morphisme lisse.*
- *Il existe un morphisme $Y \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k])$.*
- *Y est régulier, noethérien et séparé.*

Corollaire 2.11. *La conjecture 2.6 est vraie sous les hypothèses supplémentaires suivantes :*
- *f est la composition d'une immersion fermée régulière et d'un morphisme propre et lisse.*
- *Y est un schéma régulier noethérien et séparé.*
- *Soit il existe un morphisme $Y \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k])$, soit Y est de caractéristique $p > 0$ et $k = p$.*

Le théorème 2.8 ne s'éloigne pas de résultats bien connus. La seule petite originalité que nous proposons est de se débarrasser de l'hypothèse noethérienne. Nous n'avons pas trouvé dans la littérature de preuve qui se passe de cette hypothèse. Nous procédons de manière classique par déformation au cône normal, et en l'absence de l'hypothèse noethérienne, il faut faire bien attention au fait que toutes les propriétés attendues sont vérifiées.

Si nous nous passons de l'hypothèse noethérienne dans la preuve de ce théorème, remarquons qu'elle reste néanmoins présente implicitement. Dans la conjecture 2.6 on est effectivement amené à supposer la conjecture 1.14 vérifiée afin de pouvoir définir une image directe sur les groupes de K-théorie. Sous l'hypothèse que le morphisme f est propre, une condition suffisante pour que cette conjecture soit vérifiée est le fait que les schéma soient noethériens.

Les théorèmes 2.7 et 2.9 sont montrés conjointement. Leur preuves reposent à chaque fois sur un résultat d'invariance de la K-théorie en caractéristique positive démontré dans [32] et qui permet de se ramener à des cas connus. Pour effectuer cette réduction l'hypothèse de schémas divisoriels intervient de manière cruciale.

Le théorème 2.9 était démontré dans le cas où l'on supposait Y muni d'un fibré ample dans [23]. Nous proposons donc ici une hypothèse plus faible en supposant les schémas seulement divisoriels.

En ce qui concerne le théorème 2.10, supposer que Y (et donc X) est un schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k])$ est équivalent à exiger que k y soit inversible et que le polynôme $t^k - 1$ y ait k racines distinctes.

Le théorème 2.10 est obtenu en généralisant une méthode proposée par Nori dans [22]. On calcule la caractéristique d'Euler au moyen d'une formule des traces de Lefschetz adéquate. Une telle formule est valable pour des groupes diagonalisables comme le groupe des racines k-èmes de l'unité. Le fait que X et Y soient des schémas sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k])$ nous assure que le groupe des racines k-èmes de l'unité est un groupe constant cyclique d'ordre k, ce qui permet de définir facilement une action de ce groupe sur les schémas considérés, action à laquelle on applique ensuite la formule de Lefschetz pour obtenir le résultat voulu. Enfin, on suppose Y régulier afin de pouvoir identifier la K-théorie des fibrés cohérents, pour laquelle est valable la formule de Lefschetz, et celle des fibrés localement libres, qui intervient dans le théorème d'Adams-Riemann-Roch.

Nori démontrait le théorème 2.10 dans le cas où Y est un corps. Nous avons donc étendu son résultat au cas relatif.

Le corollaire 2.11 est une conséquence directe des théorèmes 2.9 et 2.10 : si $f : X \to Y$ vérifie les hypothèses de ce corollaire, on peut le factoriser sous la forme

$$X \xrightarrow{g} Y_1 \xrightarrow{f_1} Y$$

avec g une immersion régulière et f_1 un morphisme propre et lisse. De plus, comme Y est régulier et f_1 lisse, on en déduit que Y_1 est régulier. L'hypothèse de propreté sur f_1 permet d'assurer que Y_1 est séparé. Il est bien sûr noethérien et on peut donc en conclure que c'est un schéma divisoriel d'après [2] Exp. II 2.2.7.1. On est alors ramené au cas des théorèmes 2.9, 2.10 et 2.11. On conclut grâce à la compatibilité du théorème d'Adams-Riemann-Roch à la composition – c'est un fait d'essence formelle, dont on peut trouver une preuve dans l'exposé systématique de [13] ; on en rappelle par ailleurs la démonstration dans l'annexe A.

Remarquons qu'il est essentiel que Y_1 soit séparé pour assurer qu'il est divisoriel. C'est la raison pour laquelle on suppose f_1 propre. Cela nous empêche d'avoir plus généralement le cas d'un morphisme propre globalement d'intersection. Au moins peut-on conjecturer qu'un tel morphisme peut s'écrire comme la composition d'une immersion fermée régulière et d'un morphisme propre et lisse.

Les trois chapitres qui suivent sont consacrés, le premier à la démonstration du théorème 2.8, le deuxième à la preuve des théorèmes 2.7 et 2.9, le dernier enfin à celle du théorème 2.10.

De même que la conjecture 2.6 implique la conjecture 2.3, les théorèmes 2.8, 2.9 et 2.10 impliquent respectivement les trois résultats suivants et leur corollaire.

Théorème 2.12. *La conjecture 2.3 est vraie sous l'hypothèse supplémentaire suivante :*
- *f est une immersion fermée régulière.*

Théorème 2.13. *La conjecture 2.3 est vraie sous les hypothèses supplémentaires suivantes :*
- *f est un morphisme lisse.*
- *Y est un schéma de caractéristique $p > 0$.*

En outre, en ce cas les γ-filtrations sur $K_0(Y)[\frac{1}{p}]$ et $K_0(X)[\frac{1}{p}]$ sont localement nilpotentes.

Théorème 2.14. *La conjecture 2.3 est vraie sous les hypothèses supplémentaires suivantes :*
- *f est un morphisme lisse.*
- *Il existe un morphisme $Y \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[1/k])$ pour un entier $k > 1$.*
- *Y est régulier, noethérien et séparé.*

Corollaire 2.15. *La conjecture 2.3 est vraie sous les hypothèses supplémentaires suivantes :*
- *f est la composition d'une immersion fermée régulière et d'un morphisme propre et lisse.*
- *Y est un schéma régulier noethérien et séparé.*
- *Soit il existe un morphisme $Y \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[1/k])$ pour un entier $k > 1$, soit Y est de caractéristique $p > 0$.*

Dans l'énoncé du théorème 2.14 on ne considère que des schémas sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[1/k])$ et non $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k])$. Cela provient du fait que le changement de base $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[1/k])$ est fini et plat. Or le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch, du fait qu'il est énoncé dans $K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$ et non $K_0(Y)[1/k]$ comme le théorème d'Adams-Riemann-Roch, est compatible à un tel changement de base. La preuve de ce fait est rappelée dans l'annexe C.

Remarquons également que dans le cas où Y est lisse sur un corps les théorèmes 2.13 et 2.14 peuvent également se déduire de [12] 18.3 p. 353.

Chapitre 3

Preuve du théorème 2.8

Comme signalé au chapitre 2, la seule originalité de ce chapitre est de proposer une preuve du théorème d'Adams-Riemann-Roch par déformation au cône normal, en se passant de l'hypothèse noethérienne.

On commence par rappeler la construction de la déformation au cône normal, puis on démontre ses propriétés. Dans un second temps on prouve le théorème 2.8 de manière classique.

3.1 La déformation au cône normal

Soit $f : X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée régulière de faisceau conormal $\mathscr{C}_{X/Y}$ – cf. la définition 1.28. On rappelle ici la construction de la déformation au cône normal, i.e. d'une famille de plongements $X \hookrightarrow Y_t$ paramétrés par $t \in \mathbf{P}^1$ tel que pour $t = 0$ l'on retrouve l'immersion initiale f et que pour $t = \infty$ on ait le plongement $X \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ défini par la section nulle.

Le point délicat dans ce qui suit est que l'on veut se passer de l'hypothèse noethérienne. Bien que dans la littérature existante on trouve la plupart du temps cette hypothèse – par exemple [13] IV §5 – elle n'est pas nécessaire. La principale conséquence de ce choix est de ne pas pouvoir manipuler les immersion régulières en termes de suites régulières.

Nous commencerons par quelques lemmes cruciaux sur les immersions régulières avant de passer à la construction de la déformation à proprement parler.

3.1.1 Quelques résultats préliminaires

Soit X un schéma et $\mathscr{E}$ un faisceau localement libre de rang n. On considère le fibré projectif associé $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ et la projection $p : \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$. A ce fibré projectif est associé une suite exacte universelle

$$0 \to \mathscr{Q} \to p^*\mathscr{E} \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1) \to 0$$

où $\mathscr{Q}$ est un faisceau localement libre de rang $n-1$. Cette suite exacte est universelle au sens suivant : si $f : Y \to X$ est un morphisme et $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur Y tel que $f^*\mathscr{E} \to \mathscr{L}$ soit une surjection, alors il existe un unique morphisme $g : Y \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ tel que

$f = p \circ g$ et un isomorphisme de $g^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$ sur $\mathscr{L}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} g^*p^*\mathscr{E} & \longrightarrow & g^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ f^*\mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{L} \end{array}$$

commute. En particulier, toute surjection de $\mathscr{E}$ sur un faisceau inversible de X définit une section $X \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ de p.

On applique ce qui précède au fibré $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_X)$. On a donc une projection $p : \mathbf{P}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_X) \to X$ et une suite exacte courte universelle

$$0 \to \mathscr{Q} \to p^*(\mathscr{E}) \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{P}} \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) \to 0$$

La projection $\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_X \twoheadrightarrow \mathscr{O}_X$ définit alors une section $f : X \to \mathbf{P}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_X)$ de p. On appelle cette section la section nulle.

Le noyau de la projection $\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_X \twoheadrightarrow \mathscr{O}_X$ est égal à $\mathscr{E}$ et cela implique l'égalité

$$f^*\mathscr{Q} = \mathscr{E} \tag{3.1}$$

On dispose alors de la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soient X un schéma et $\mathscr{E}$ un faisceau localement libre de rang n sur X. Alors la section nulle*

$$f : X \to \mathbf{P}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_X)$$

est une immersion régulière, de faisceau conormal égal à $\mathscr{E}$.

Preuve: L'assertion est de nature locale sur X, on peut donc le supposer affine, $X = \mathrm{Spec}(A)$. On note en ce cas $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathscr{E}$. On note également e_0 une variable indépendante supplémentaire. Alors $\mathbf{P}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_X) = \mathrm{Proj}(A[e_0, e_1, \ldots, e_n])$ et $\mathbf{V}(\mathscr{E}) = \mathrm{Spec}(A[e_1, \ldots, e_n])$.

f se factorise sous la forme

$$X \hookrightarrow \mathbf{V}(\mathscr{E}) \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_X)$$

où la première flèche est l'immersion fermée induite par la projection $A[e_1, \ldots, e_n] \twoheadrightarrow A$, et la seconde l'immersion ouverte de l'ouvert standard de $\mathbf{P}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_X)$ défini par $e_0 \neq 0$. Il suffit donc de prouver que l'immersion $X \hookrightarrow \mathbf{V}(\mathscr{E})$ est définie par un idéal régulier. Cet idéal n'est rien d'autre que l'idéal $(e_1, \ldots, e_n)$ de $A[e_1, \ldots, e_n]$, qui est régulier car les e_i sont une famille d'indéterminées indépendantes. A partir de cette description explicite il est également immédiat que $(e_1, \ldots, e_n)/(e_1, \ldots, e_n)^2 = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n$, ce qui prouve l'assertion sur le faisceau conormal. ∎

On remarque également que le morphisme $\mathscr{Q} \to p^*\mathscr{E} \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{P}}$ de la suite exacte courte universelle définit dualement un morphisme $\mathscr{O}_{\mathbf{P}} = \mathscr{O}_{\mathbf{P}}^\vee \to \mathscr{Q}^\vee$ qui définit donc une section s de $\mathscr{Q}^\vee$. Le schéma des zéros de s n'est rien d'autre que $f(X)$ si bien que le complexe de Koszul associé

$$0 \to \Lambda^n\mathscr{Q} \to \ldots \to \Lambda^1\mathscr{Q} \xrightarrow{s} \mathscr{O}_{\mathbf{P}} \to f_*\mathscr{O}_X \tag{3.2}$$

est exact en vertu de la proposition précédente.

Passons maintenant à l'étude de l'intersection de deux schémas plongés régulièrement dans un troisième.

Proposition 3.2. *Soient Z un schéma et $X \hookrightarrow Z$, $Y \hookrightarrow Z$ deux immersions régulières. On suppose que X et Y sont transverses dans Z.*

Alors les immersions canoniques i, j et k de $X \cap Y$ dans X, Y et Z sont régulières et

$$\mathscr{C}_{X\cap Y/Z} \cong \mathscr{C}_{X\cap Y/X} \oplus \mathscr{C}_{X\cap Y/Y} \cong i^*\mathscr{C}_{Y/Z} \oplus j^*\mathscr{C}_{X/Z}$$

Preuve: L'assertion est locale sur Z, on peut donc le supposer affine. Quitte à localiser à nouveau, on peut supposer en outre que X et Y sont fermés dans Z. On a alors $Z = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(C)$ avec $B = A/I$ et $C = A/J$. En ce cas $X \cap Y = \mathrm{Spec}(A/I \otimes A/J) = \mathrm{Spec}(A/(I+J))$.

I et J sont des idéaux réguliers. Soient donc $e_1, \ldots, e_n$ (resp. $f_1, \ldots, f_m$) dans A qui relèvent une base de I/I^2 (resp. J/J^2). Quitte à localiser de nouveau on peut supposer que $e_1, \ldots, e_n$ (resp. $f_1, \ldots, f_m$) engendrent I (resp. J). En ce cas $e_1, \ldots, e_n$ (resp. $f_1, \ldots, f_m$) forment un système minimum de générateurs de I (resp. J). On note $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ (resp. $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m$) les images de $e_1, \ldots, e_n$ (resp. $f_1, \ldots, f_m$) dans A/J (resp. A/I).

Comme X et Z sont transverses, $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m$ forment un système minimum de générateurs de $I + J$. De même $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ (resp. $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m$) forment un système minimum de générateurs de l'idéal de $X \cap Y$ dans Y (resp. X).

Prouver la proposition revient alors à étudier l'acyclicité des complexes $\mathrm{K}_\cdot(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$, $\mathrm{K}_\cdot(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m)$ et $\mathrm{K}_\cdot(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m) = \mathrm{K}_\cdot(e_1, \ldots, e_n) \otimes \mathrm{K}_\cdot(f_1, \ldots, f_m)$. Or

$$\mathrm{K}_\cdot(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = \mathrm{K}_\cdot(e_1, \ldots, e_n) \otimes A/J$$

et, comme $\mathrm{K}_\cdot(e_1, \ldots, e_n)$ est une résolution libre de A/I, l'homologie de ce complexe en degré i n'est rien d'autre que $\mathrm{Tor}_i^A(A/I, A/J)$ qui est nul car X et Y sont transverses. $\mathrm{K}_\cdot(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ est donc acyclique et j est une immersion régulière.

Le même raisonnement prouve que $\mathrm{K}_\cdot(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m)$ est acyclique et donc que i est une immersion régulière.

L'immersion k est alors une immersion régulière comme composée d'immersions régulières.

La dernière assertion sur les faisceaux conormaux est immédiate à partir de la description explicite au moyen de générateurs. ∎

Rappelons enfin une conséquence de la propriété universelle des éclatements dont nous aurons besoin dans la suite.

On considère la situation suivante. Soient $X \hookrightarrow Y$ et $Y \hookrightarrow Z$ deux immersions fermées. On considère l'éclatement de Z le long de X, $\widetilde{Z} := \mathrm{Bl}_X(Z)$, de diviseur exceptionnel E, et l'éclatement de Y le long de X, $\widetilde{Y} := \mathrm{Bl}_X(Y)$, de diviseur exceptionnel $\widetilde{X}$. On dispose donc de deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \longrightarrow & \widetilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \widetilde{Z} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

La propriété universelle des éclatements nous assure alors de l'existence d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \longrightarrow & \widetilde{Z} \\ {\scriptstyle \eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

où la flèche $\widetilde{Y} \to \widetilde{Z}$ est une immersion fermée et $\widetilde{X} = E \cap \widetilde{Y}$.

3.1.2 Construction de la déformation

On considère une immersion fermée régulière $f : X \hookrightarrow Y$ de faisceau conormal $\mathscr{C}_{X/Y}$. On note $f' : X \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ le plongement défini par la section nulle. C'est une immersion régulière d'après la proposition 3.1.

On considère la droite projective sur Y, $p : \mathbf{P}^1_Y = \mathbf{Proj}(\mathscr{O}_Y[T_0, T_1]) \to Y$. Associées à p on dispose des deux sections $s_0 : Y \to \mathbf{P}^1_Y$ et $s_\infty : Y \to \mathbf{P}^1_Y$ définies respectivement par $T_0 \mapsto 1$, $T_1 \mapsto 0$ et $T_0 \mapsto 0$, $T_1 \mapsto 1$. D'après la proposition 3.1 ces deux sections définissent à chaque fois Y comme un diviseur de Cartier sur $\mathbf{P}^1_Y$ avec un faisceau conormal trivial.

On note $Y(0) = s_0(Y)$ et $Y(\infty) = s_\infty(Y)$.

De même, on pose

$$X(0) = s_0(f(X)) \text{ et } X(\infty) = s_\infty(f(X))$$

On définit alors l'espace de notre déformation W comme l'éclatement de $\mathbf{P}^1_Y$ le long de $X(\infty)$, soit

$$W := \mathrm{Bl}_{X(\infty)}(\mathbf{P}^1_Y)$$

On note $\phi : W \to \mathbf{P}^1_Y$ le morphisme canonique.

Remarquons que l'immersion $X(\infty) \hookrightarrow \mathbf{P}^1_Y$ est régulière.

En effet $X(\infty) = \mathbf{P}^1_X \cap Y(\infty)$. Or $\mathbf{P}^1_X \hookrightarrow \mathbf{P}^1_Y$ est régulière, ainsi que $Y(\infty) \hookrightarrow \mathbf{P}^1_Y$.

Par ailleurs $\mathbf{P}^1_X$ et $Y(\infty)$ sont transverses. Il suffit de faire le calcul localement pour $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(A/I)$ avec I un idéal régulier. On remarque que $Y(\infty)$ est dans l'ouvert standard $D_+(T_1)$ de $\mathbf{P}^1_Y$, et en se restreignant à cet ouvert le problème est donc de calculer les groupes $\mathrm{Tor}^j_{A[T_0]}(A[T_0]/(T_0), A/I[T_0])$. Comme T_0 est une indéterminée indépendante, une résolution de $A/I[T_0]$ est fournie par le complexe de Koszul de l'idéal I, régulier, tensorisé par $A[T_0]$. Quand on tensorise ce complexe par $A[T_0]/(T_0)$ on retrouve le complexe de Koszul initial associé à I qui est acyclique puisque I est régulier. Les groupes $\mathrm{Tor}^j_{A[T_0]}(A[T_0]/(T_0), A/I[T_0])$ sont donc nuls pour $j > 0$.

La proposition 3.2 s'applique donc et prouve bien que $X(\infty) \hookrightarrow \mathbf{P}^1_Y$ est régulière. On en déduit également que le faisceau conormal est donné par la formule

$$\mathscr{C}_{X/\mathbf{P}^1_Y} = \mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X$$

Remarquons que l'on peut faire exactement le même raisonnement pour l'immersion $X(0) \hookrightarrow \mathbf{P}^1_Y$ en inversant les indéterminées T_1 et T_0.

Quoi qu'il en soit la proposition 1.27 nous assure alors que le diviseur exceptionnel de l'éclatement $W \to \mathbf{P}^1_Y$ est égal à $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$. On en déduit un carré cartésien associé à l'éclatement

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X) & \xrightarrow{g'} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ X & \xrightarrow[s_\infty \circ f]{} & \mathbf{P}^1_Y \end{array}$$

avec g' qui plonge $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ comme un diviseur de Cartier sur W. En particulier g' est une immersion fermée régulière.

On définit également $\pi : W \to Y$ comme la composée

$$W \xrightarrow{\phi} \mathbf{P}^1_Y \xrightarrow{p} Y$$

Il en découle immédiatement, de par les définitions, que $\pi \circ g' \circ f' = f$.

Par ailleurs, ϕ est un isomorphisme sur le complément de $X(\infty)$, et comme $Y(0)$ est disjoint de $Y(\infty)$ la section s_0 définit une section $g : Y \to W$ de π qui fait de Y un diviseur de Cartier sur W.

On considère également l'éclatement de Y le long de X, $\widetilde{Y} := \mathrm{Bl}_X(Y)$. L'immersion $f : X \hookrightarrow Y$ étant régulière, le diviseur exceptionnel de cet éclatement est égal à $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y})$, toujours d'après la proposition 1.27. On dispose donc d'un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y}) & \longrightarrow & \widetilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

De plus, la composition des immersions fermées $X \xhookrightarrow{f} Y \xhookrightarrow{s_\infty} \mathbf{P}^1_Y$ nous place exactement dans la situation rappelée à la fin de la section 3.1.1 et l'on dispose donc d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ Y & \xrightarrow{s_\infty} & \mathbf{P}^1_Y \end{array}$$

avec $\widetilde{Y} \to W$ une immersion fermée et $\widetilde{Y} \cap \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X) = \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y})$.

J'affirme que l'immersion fermée $\widetilde{Y} \hookrightarrow W$ fait de $\widetilde{Y}$ un diviseur de Cartier sur W – en particulier l'immersion fermée $\widetilde{Y} \hookrightarrow W$ est régulière – et que $\widetilde{Y}$ et $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ sont transverses dans W.

Pour prouver le premier point on va étudier plus généralement $\phi^*(Y(\infty))$ et prouver que

$$\phi^*(Y(\infty)) = \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X) + \widetilde{Y} \tag{3.3}$$

Faisons une étude locale sur Y. Soit donc $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(A/I)$ avec I un idéal régulier. Dans cette étude, on peut se limiter à l'ouvert $D_+(T_1) = \mathrm{Spec}(A[T_0])$ de $\mathbf{P}^1_Y$ car il contient $X(\infty)$ et $Y(\infty)$. Dans cet ouvert l'idéal de définition de $X(\infty)$ est alors (I, T_0), et donc $W = \mathrm{Proj}(\oplus_n (I, T_0)^n)$. Par ailleurs, $\widetilde{Y} = \mathrm{Proj}(\oplus I^n)$.

On note $S^\cdot = \oplus_n (I, T_0)^n$ et soit $a_1, \ldots, a_d$ un système minimum de générateurs de I. Alors W est recouvert par les ouverts affines $\mathrm{Spec}(S^\cdot_{(a_i)})$ auquel on ajoute l'ouvert $\mathrm{Spec}(S^\cdot_{(T_0)})$ – dans ces notations $S^\cdot_{(a_i)} = \{s/a_i^n, s \in S^n\}$ de même que $S^\cdot_{(T_0)} = \{s/T_0^n, s \in S^n\}$, a_i et T_0 étant regardés comme éléments de S^1.

Remarquons que $\widetilde{Y}$ est disjoint de $\mathrm{Spec}(S^\cdot_{(T_0)})$. On commence par regarder ce qui se passe sur les ouverts $\mathrm{Spec}(S^\cdot_{(a_i)})$.

Sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(S^\cdot_{(a_i)})$ l'anneau de $\widetilde{Y}$ est égal à

$$B_i = \left\{ \frac{s}{a_i^n}, s \in I^n \right\}$$

tandis que l'anneau de $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ est égal à

$$C_i = A/I\left[\frac{T_0}{a_i}, \frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_d}{a_i}\right]$$

$\widetilde{Y}$ est donc défini par l'équation $T_0/a_i = 0$ tandis que $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ est défini par la relation $a_i/1 = 0$ (on regarde a_i comme élément de $S^0 = A$). Par ailleurs $\phi^*(Y(\infty))$ est défini par l'équation $T_0/1 = 0$. Comme $T_0/1 = (T_0/a_i)\cdot(a_i/T_0)$ on en déduit l'égalité (3.3). De plus la description explicite de $\widetilde{Y}$ prouve bien que c'est un diviseur de Cartier sur W, comme annoncé.

Terminons par l'étude locale sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(S^{\cdot}_{(T_0)})$. On remarque que

$$\begin{aligned} S^{\cdot}_{(T_0)} &= \ldots \oplus I^n T_0^{-n} \oplus \ldots \oplus I T_0^{-1} \oplus A \oplus A T_0 \oplus \ldots \\ &= A[a_1 T_0^{-1}, \ldots, a_d T_0^{-1}, T_0] \end{aligned}$$

$\phi^*(Y(\infty)$ est défini par l'équation $T_0 = 0$, son anneau sur $\mathrm{Spec}(S^{\cdot}_{(T_0)})$ n'est donc rien d'autre que A/I, et c'est également l'anneau de $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ sur cet ouvert – cet anneau est donné par les mêmes formules que sur $\mathrm{Spec}(S^{\cdot}_{(a_i)})$, il suffit de remplacer a_i par T_0.

Passons maintenant à l'assertion sur la transversalité de $\widetilde{Y}$ et $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$.

Le résultat découle là encore d'une étude locale : en gardant les mêmes notations, il s'agit de montrer que

$$\mathrm{Tor}_j^{S^{\cdot}_{(a_i)}}(B_i, C_i) = 0 \tag{3.4}$$

pour $j > 0$ et $1 \leqslant i \leqslant d$.

La suite exacte courte associé au diviseur de Cartier $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ fournit une résolution de C_i.

$$0 \to S^{\cdot}_{(a_i)} \to S^{\cdot}_{(a_i)} \to C_i \to 0$$

où la flèche $S^{\cdot}_{(a_i)} \to S^{\cdot}_{(a_i)}$ est la multiplication par $a_i/1$. En tensorisant par B_i on obtient la suite exacte

$$B_i \to B_i \to B_i \otimes C_i \to 0$$

et il est immédiat, de par la définition de B_i, que la flèche $B_i \to B_i$ de multiplication par $a_1/1$ reste injective. La suite reste donc une suite exacte courte

$$0 \to B_i \to B_i \to B_i \otimes C_i \to 0$$

ce qui prouve l'égalité (3.4).

Comme $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y}) = \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X) \cap \widetilde{Y}$, la transversalité de $\widetilde{Y}$ et $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ implique d'après la proposition 3.2 que l'immersion fermée $k : \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y}) \hookrightarrow W$ est régulière.

Remarquons encore que les diviseurs de Cartier $Y(0)$ et $Y(\infty)$ sur $\mathbf{P}^1_Y$ sont linéairement équivalents. On en déduit donc un isomorphisme $\mathscr{O}(Y(0) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(Y(\infty))$ d'où un isomorphisme $\mathscr{O}(\phi^*(Y(0)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(\phi^* Y(\infty))$. Par ailleurs, $\phi^* Y(0) = Y$, d'où en combinant cela avec (3.3) l'égalité

$$\mathscr{O}(Y) = \mathscr{O}(\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X) + \widetilde{Y}) \tag{3.5}$$

On dispose également d'une série d'immersions fermées $X \overset{s_\infty}{\hookrightarrow} \mathbf{P}^1_X \hookrightarrow \mathbf{P}^1_Y$ d'où une immersion fermée $j : \mathrm{Bl}_X(\mathbf{P}^1_X) \hookrightarrow W$. X est un diviseur de Cartier sur $\mathbf{P}^1_X$ donc $\mathrm{Bl}_X(\mathbf{P}^1_X) = \mathbf{P}^1_X$, et on dispose en fait d'une immersion fermée

$$j : \mathbf{P}^1_X \hookrightarrow W$$

J'affirme que cette immersion fermée est une immersion fermée régulière.

Pour le prouver, procédons à nouveau à une étude locale sur Y, soit $Y = \mathrm{Spec}(A)$, et par suite $X = \mathrm{Spec}(A/I)$ avec I un idéal régulier.

Sur l'ouvert $D_+(T_0)$ de Y, l'immersion j n'est rien d'autre que le morphisme $\mathbf{A}^1_X \hookrightarrow \mathbf{A}^1_Y$ qui est régulier car $X \hookrightarrow Y$ est une immersion régulière et $\mathbf{A}^1_Y \to Y$ est plat.

Considérons maintenant l'ouvert $D_+(T_1)$. Sur cet ouvert l'immersion j est le morphisme

$$\mathbf{A}^1_X = \mathrm{Bl}_X(\mathbf{A}^1_X) \hookrightarrow W$$

On a déjà remarqué que sur cet ouvert W est égal à $\mathrm{Proj}(\oplus_n(I, T_0)) = \mathrm{Proj}(S^\cdot)$. L'immersion j correspond alors au morphisme d'algèbres graduées sur $A[T_0]$

$$\oplus_n(I, T_0)^n \twoheadrightarrow \oplus_n(T_0 \cdot A/I[T_0])^n$$

et $\mathrm{Proj}(\oplus_n(T_0 \cdot A/I[T_0])^n) = \mathrm{Spec}(A/I[T_0]) = \mathbf{A}^1_X$.

On note à nouveau $a_1, \ldots, a_d$ un système minimum de générateurs de I. Quitte à remplacer A par un localisé convenable on peut supposer que I/I^2 est un A/I-module libre de rang d et que les images $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_d$ de $a_1, \ldots, a_d$ dans I/I^2 en forment une base. En ce cas les A/I-modules I^n/I^{n+1} pour $n \geqslant 2$ sont également des modules libres et des bases en sont données par les monômes de degré n en les a_i.

On considère alors à nouveau le recouvrement de W par les ouverts $\mathrm{Spec}(S^\cdot_{(a_i)})$ auquel on joint l'ouvert $\mathrm{Spec}(S^\cdot_{(T_0)})$.

Comme les éléments a_i sont nuls dans l'anneau de $\mathbf{A}^1_X$, on peut se limiter à l'ouvert $\mathrm{Spec}(S^\cdot_{(T_0)})$. On rappelle que

$$S^\cdot_{(T_0)} = A[a_1 T_0^{-1}, \ldots, a_d T_0^{-1}, T_0]$$

Sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(S^\cdot_{(T_0)})$ l'immersion j correspond au morphisme d'anneaux

$$S^\cdot_{(T_0)} \to A/I[T_0]$$

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n T^n \mapsto \sum_{n \geqslant 0} \bar{x}_n T^n$$

où $\bar{x}_n$ est la classe de $x_n \in A$ dans A/I. Le noyau de ce morphisme est donc

$$J = \ldots \oplus I^n T_0^{-n} \oplus \ldots \oplus I T_0^{-1} \oplus I \oplus I T_0 \oplus \ldots$$

J est engendré comme $S^\cdot_{(T_0)}$-module par les éléments $a_1 T_0^{-1}, \ldots, a_d T_0^{-1}$.

Nous allons montrer qu'en ce cas le complexe de Koszul $\mathrm{K}_\cdot(a_1 T_0^{-1}, \ldots, a_d T_0^{-1})$ est acyclique [1]. Cela prouvera que J est un idéal régulier.

Notons $R = A[a_1 T_0^{-1}, \ldots, a_d T_0^{-1}, T_0]$ afin d'alléger les notations. On va également noter, comme défini en 1.3.1, $\mathrm{K}_\cdot(a_1 T_0^{-1}, \ldots, a_d T_0^{-1}; R)$ plutôt que $\mathrm{K}_\cdot(a_1 T_0^{-1}, \ldots, a_d T_0^{-1})$, l'anneau de base jouant un rôle crucial dans ce qui suit.

1. La preuve de ce fait m'a été communiquée par O. Gabber. Je l'en remercie.

On remarque que l'on dispose d'un isomorphisme de A/I-algébres

$$R/T_0R \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\geqslant 0} I^n/I^{n+1}$$

qui envoie la classe de $a_iT_0^{-1}$ dans R/T_0R sur la classe $\bar{a}_i$ de a_i dans I/I^2. Or, par hypothèse, $\bigoplus_{n\geqslant 0} I^n/I^{n+1}$ n'est rien d'autre que l'algèbre symétrique de I/I^2 sur A/I. On en déduit donc que R/T_0R est une algèbre polynomial en les $a_iT_0^{-1}$ et donc le complexe de Koszul $\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1},R/T_0R)$ est acyclique.

Considérons maintenant la suite exacte courte définie par la mulitplication par T_0 sur R

$$0 \to R \xrightarrow{T_0} R \to R/T_0R \to 0$$

On considère la suite exacte longue de cohomologie associée, dont on a rappelé l'existence en 1.3.1.

$$\dots \to H_{i+1}(\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1};R/T_0R)) \to H_i(\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1};R)) \xrightarrow{T_0}$$
$$H_i(\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1};R)) \to H_i(\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1};R/T_0R)) \to \dots$$

L'acyclicité de $\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1};R/T_0R)$ entraîne alors que la multiplication par T_0 est un isomorphisme sur $H_i(\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1};R))$ pour tout $i>0$. Le support de ce groupe d'homologie est donc entièrement dans l'ouvert de $\mathrm{Spec}(R)$ sur lequel T_0 est inversible. Or cet ouvert n'est rien d'autre que $\mathrm{Spec}(A[T_0,T_0^{-1}]$. On en déduit donc que pour $i>0$

$$H_i(\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1};R)) = H_i(\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1};A[T_0,T_0^{-1}]))$$

Or $\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1};A[T_0,T_0^{-1}])$ est acyclique car le complexe $\mathrm{K}.(a_1,\dots,a_d;A)$ est acyclique par hypothèse et que $A[T_0,T_0^{-1}]$ est un A-module libre.

On en déduit donc que $\mathrm{K}.(a_1T_0^{-1},\dots,a_dT_0^{-1};R)$ est acyclique et cela achève de prouver que j est une immersion fermée régulière.

Considérons donc maintenant les deux immersions fermées $j:\mathbf{P}^1_X \hookrightarrow W$ et $g:Y\hookrightarrow W$. J'affirme que Y et $\mathbf{P}^1_X$ sont transverses dans W.

Le résultat est de nature locale sur Y, on suppose à nouveau $Y=\mathrm{Spec}(A)$, et $X=\mathrm{Spec}(A/I)$ avec I un idéal régulier. De plus g est induit par la section $s_0:Y\to\mathbf{P}^1_X$. On peut donc se limiter à l'ouvert $D_+(T_0)$ de $\mathbf{P}^1_Y$. Alors le morphisme g correspond au morphisme d'anneaux

$$A[T_1] \to A[T_1]/(T_1)$$

et j au morphisme

$$A[T_1] \to A/I[T_1]$$

La question est donc de calculer les groupes $\mathrm{Tor}_j^{A[T_1]}(A[T_1]/(T_1),A/I[T_1])$, calcul déjà mené quand nous avons montré que l'immersion $X(\infty)\hookrightarrow\mathbf{P}^1_Y$ était régulière. On a bien

$$\mathrm{Tor}_j^{A[T_1]}(A[T_1]/(T_1),A/I[T_1]) = 0 \text{ pour } j>0$$

ce qui prouve l'assertion.

Considérons enfin les deux immersion régulières $j:\mathbf{P}^1_X\hookrightarrow W$ et $g':\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y}\oplus\mathscr{O}_X)$. J'affirme que $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y}\oplus\mathscr{O}_X)$ et $\mathbf{P}^1_X$ sont transverses dans W.

Encore une fois le résultat est de nature locale et l'on suppose $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(A/I)$ avec I un idéal régulier de A.

Cette fois, on peut se limiter à l'ouvert $D_+(T_1)$. Sur cet ouvert, avec toujours les mêmes notations, $W = \mathrm{Proj}(\oplus_n (I, T_0)^n)$ et j est le morphisme $\mathbf{A}^1_X \hookrightarrow W$.

$\mathbf{A}^1_X$ est inclus dans l'ouvert $\mathrm{Spec}(S^{\cdot}_{(T_0)})$ de W, on se limite donc à cet ouvert.

Sur cet ouvert $\mathbf{A}^1_X$ est défini par l'anneau $A/I[T_0]$ tandis que $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ correspond à l'anneau A/I. On cherche donc à prouver que

$$\mathrm{Tor}_j^{S^{\cdot}_{(T_0)}}(A/I[T_0], A/I) = 0$$

pour $j > 0$.

$\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ est un diviseur de Cartier défini par l'équation $T_0 = 0$ sur $\mathrm{Spec}(S^{\cdot}_{(T_0)})$. La suite exacte courte correspondante est donc

$$0 \to S^{\cdot}_{(T_0)} \xrightarrow{T_0} S^{\cdot}_{(T_0)} \to A/I \to 0$$

En tensorisant par $A/I[T_0]$ sous $S^{\cdot}_{(T_0)}$ on obtient encore une suite exacte courte

$$0 \to A/I[T_0] \xrightarrow{T_0} A/I[T_0] \to A/I \otimes_{S^{\cdot}_{(T_0)}} A/I[T_0] \to 0$$

En effet la multiplication par T_0 reste injective sur $A/I[T_0]$. On obtient donc une résolution de $A/I \otimes A/I[T_0]$ dont on en déduit immédiatement la nullité des groupes Tor annoncée.

La construction obtenue est résumée par le diagramme suivant. On note $\mathbf{P} := \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$.

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{f'} & \mathbf{P} \;+\; \tilde{Y} & \longrightarrow & Y \\
\downarrow & & \searrow^{g'} \quad \swarrow_{h} & & \downarrow{\scriptstyle s_\infty} \\
\mathbf{P}^1_X & \xrightarrow{j} & W & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{P}^1_Y \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} & & \uparrow{\scriptstyle s_0} \\
X & \xrightarrow{f} & Y & = & Y
\end{array} \tag{3.6}$$

Le théorème suivant récapitule les propriétés de ce diagramme utiles dans la suite.

Théorème 3.3. *Le diagramme (3.6) vérifie les propriétés suivantes.*

a) Le diagramme est à carrés cartésiens.

b) Y, $\mathbf{P}$ et $\tilde{Y}$ sont des diviseurs de Cartier sur W.

c) j est une immersion régulière de même codimension que f.

d) f' est une immersion régulière de même codimension que f.

3.1.3 Propriétés de la déformation

Les notations sont celles de la section précédente.

Proposition 3.4. *On note en abrégé $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ et $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y})$.*

Dans le groupe $K_0(W)$ on a l'égalité

$$g_*(\mathscr{O}_Y) = g'_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}}) + h_*(\mathscr{O}_{\tilde{Y}}) - k_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1})$$

Preuve: Y, $\mathbf{P}$ et $\widetilde{Y}$ sont des diviseurs de Cartier sur W. On dispose donc des suites exactes courtes suivantes, qui ne sont rien d'autre que des résolutions de Koszul.

$$0 \to \mathscr{O}(-Y) \to \mathscr{O}_W \to g_*(\mathscr{O}_Y) \to 0$$

$$0 \to \mathscr{O}(-\mathbf{P}) \to \mathscr{O}_W \to g'_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}}) \to 0$$

$$0 \to \mathscr{O}(-\widetilde{Y}) \to \mathscr{O}_W \to h_*(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}) \to 0$$

En faisant le produit tensoriel des deux dernières suites exactes on obtient le complexe de Koszul de l'intersection $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P} \cap \widetilde{Y}$:

$$0 \to \mathscr{O}(-\mathbf{P} - \widetilde{Y}) \to \mathscr{O}(-\mathbf{P}) \oplus \mathscr{O}(-\widetilde{Y}) \to \mathscr{O}_W \to k_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}) \to 0$$

De plus $\mathscr{O}(-\mathbf{P} - \widetilde{Y}) = \mathscr{O}(-Y)$ et ce complexe de Koszul est exact car k est une immersion fermée régulière.

On calcule alors dans $K_0(W)$

$$\begin{aligned} k_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}) &= \mathscr{O}_W - (\mathscr{O}(-\mathbf{P}) \oplus \mathscr{O}(-\widetilde{Y})) + \mathscr{O}(-Y) \\ &= (\mathscr{O}_W - \mathscr{O}(-\mathbf{P})) + (\mathscr{O}_W - \mathscr{O}(-\widetilde{Y})) - (\mathscr{O}_W - \mathscr{O}(-Y)) \\ &= g'_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}}) + h_*(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}) - g_*(\mathscr{O}_Y) \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau les suites exactes courtes des diviseurs de Cartier. Cela conclut la preuve. ∎

Pour la propriété suivante de la déformation au cône normal, on commence par une proposition générale. La preuve de cette proposition nécessitant l'usage de résolutions globales, on se place dans les groupes $K_0^{\text{naïf}}$ et non K_0. Pour les applications que nous avons en vu cela n'a pas d'importance car l'on travaille avec des schémas divisoriels.

Proposition 3.5. *Soit $j : P \to W$ une immersion fermée régulière et $\phi : Y \to W$ un morphisme. On forme le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ P & \xrightarrow{j} & W \end{array}$$

On suppose que f est une immersion fermée régulière de même codimension que j. Alors pour $E \in K_0^{\text{naïf}}(P)$

$$\phi^* j_* = f_* \psi^*$$

dans $K_0^{\text{naïf}}(Y)$.

De plus si Z est un sous-schéma de Y disjoint de $f(X)$ et $h : Z \to W$ le morphisme induit par ϕ, alors

$$h^* j_* = 0$$

Preuve: Soient $E \in K_0^{\text{naïf}}(P)$ un faisceau localement libre et

$$0 \to \mathscr{E}_n \to \ldots \to \mathscr{E}_0 \to j_* E \to 0$$

une résolution de j_*E par des faisceaux localement libres. Les morphismes j et f sont des immersions régulières donc les foncteurs j_* et f_* sont les extensions par zéros. On en déduit que $\phi^* j_* E = f_* \psi^* E$.

Pour prouver le premier point de la proposition il suffit donc de prouver que le complexe

$$0 \to \phi^* \mathscr{E}_n \to \ldots \to \phi^* \mathscr{E}_0 \to \phi^* j_* E \to 0 \tag{3.7}$$

est exact.

Localement le foncteur ϕ^* revient à faire un certain produit tensoriel. On en déduit par le formalisme de l'algèbre homologique que l'homologie du complexe (3.7) est indépendant du choix de la résolution de j_*E par des faisceaux localement libres.

L'assertion est alors de nature locale sur W. On peut donc le supposer affine, $W = \mathrm{Spec}(A)$, et P défini par un idéal régulier I dont un système minimum de générateurs est noté $a_1, \ldots, a_d$. Par ailleurs, E étant localement libre, il suffit de prouver le résultat pour $E = \mathscr{O}_P$. En ce cas le faisceau $j_*\mathscr{O}_P$ correspond à l'anneau A/I dont une résolution libre est fournie par le complexe de Koszul $\mathrm{K}_\cdot(a_1, \ldots, a_d)$ puisque j est régulière.

Le foncteur ϕ^* revient à tensoriser $\mathrm{K}_\cdot(a_1, \ldots, a_d)$ par l'anneau de Y. Localement, si $Y = \mathrm{Spec}(B)$, en notant $\bar{I} = IB$ et $\bar{a}_i$ l'image de a_i dans B, on étudie donc l'acyclicité du complexe

$$0 \to \mathrm{K}_d(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_d) \to \ldots \to \mathrm{K}_0(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_d) \to B/\bar{I} \to 0$$

On a supposé que f était une immersion régulière de même codimension que $j : \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_d$ est donc un système minimum de générateurs de l'idéal $\bar{I}$ de X dans Y. Et donc, comme f est supposée régulière, le complexe de Koszul associé est exact.

Cela prouve le premier point de la proposition. Le second en est alors une conséquence immédiate. ∎

Pour les deux corollaires suivants on reprend les notations de 3.1.2.

Corollaire 3.6. *Soit $E \in K_0^{\mathrm{naïf}}(X)$. Alors il existe $F \in K_0^{\mathrm{naïf}}(W)$ tel que*

$$f_*(E) = g^*(F) \text{ et } f'_*(E) = g'^*(F)$$

Preuve: On note $p_X : \mathbf{P}^1_X \to X$ la projection et on pose $F = j_*(p_X^*(E))$ On applique la proposition 3.5 aux deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle s_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbf{P}^1_X & \xrightarrow{j} & W \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X) \\ {\scriptstyle s_\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ \mathbf{P}^1_X & \xrightarrow{j} & W \end{array}$$

On en déduit que $g^*(F) = g^*(j_*(p_X^*E)) = f_*(s_0^*p_X^*E) = f_*(E)$, et de même pour l'autre carré cartésien. ∎

Corollaire 3.7. *Soient $E \in K_0^{\mathrm{naïf}}(X)$ et $F \in K_0^{\mathrm{naïf}}(W)$ donnés par le corollaire 3.6. Alors*

$$h^*(F) = 0 \text{ et } k^*(F) = 0$$

Preuve: L'immersion fermée régulière $f' : X \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ se factorise par $\mathbf{V}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$ et le résultat est alors une application de la deuxième partie de la proposition 3.5. ∎

3.2 Preuve du théorème

Soit $f : X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée régulière.

On commence par traiter le cas de l'immersion régulière définie par la section nulle $f' : X \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$. On note en abrégé $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X)$.

On rappelle qu'à $\mathbf{P}$ est associée la suite exacte courte universelle

$$0 \to \mathscr{Q} \to p^*(\mathscr{C}_{X/Y}) \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{P}} \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1) \to 0$$

où p est la projection $\mathbf{P}(\mathscr{C}_{X/Y} \oplus \mathscr{O}_X) \to X$.

Proposition 3.8. *Soit $E \in K_0(X)$. Alors, pour $k \geqslant 2$*

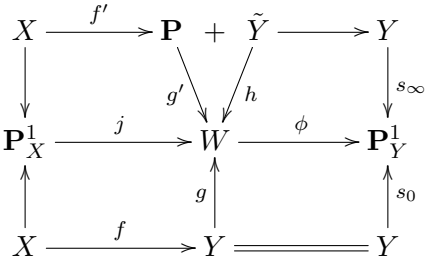
$$\psi^k(f'_*(E)) = f'_*(\theta^k(\mathscr{C}_{X/Y})\psi^k(E))$$

Preuve: Soit donc $E \in K_0(X)$. Comme f' est une section de p, f'^* est surjectif et il existe donc $F \in K_0(\mathbf{P})$ tel que $E = f'^*(F)$. On calcule alors, pour $k \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
\psi^k(f'_*(E)) &= \psi^k(f'_*(f'^*F)) \\
&= \psi^k(F \cdot f'_*(\mathscr{O}_X)) \text{ d'après 1.15.} \\
&= \psi^k(F)\psi^k(f'_*(\mathscr{O}_X)) \\
&= \psi^k(F)\psi^k(\Lambda_{-1}(\mathscr{Q})) \text{ car le complexe (3.2) est exact.} \\
&= \psi^k(F)\Lambda_{-1}(\mathscr{Q})\theta^k(\mathscr{Q}) \text{ d'après 1.11.} \\
&= \psi^k(F)f'_*(\mathscr{O}_X)\theta^k(\mathscr{Q}) \\
&= f'_*(f'^*(\psi^k(F))f'^*(\theta^k(\mathscr{Q}))) \text{ d'après 1.15.} \\
&= f'_*(\psi^k(f'^*F)\theta^k(f'^*\mathscr{Q})) \\
&= f'_*(\psi^k(E)\theta^k(\mathscr{C}_{X/Y})) \text{ par définition de } F \text{ et d'après 3.1.}
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ∎

Revenons maintenant à notre immersion fermée régulière initiale $f : X \hookrightarrow Y$. On considère le diagramme de la déformation au cône normal construit dans la section 3.1.



Pour éviter une confusion au niveau des notations, dans la proposition suivante on note i l'entier que l'on avait jusqu'alors noté k.

Théorème 3.9. *Soit $E \in K_0(X)$. Alors pour $i \geqslant 2$*

$$\psi^i(f_*(E)) = f_*(\theta^i(\mathscr{C}_{X/Y})\psi^i(E))$$

Preuve: Soit $E \in K_0(X)$. D'après le corollaire 3.6, comme $K_0(X) = K_0^{\text{naïf}}(X)$ car X est divisoriel, il existe $F \in K_0^{\text{naïf}}(W)$ tel que $f_*(E) = g^*(F)$ et $f'_X(E) = g'^*(F)$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
g_*\psi^i(f_*(E)) &= g_*\psi^i(g^*(F)) \\
&= g_*g^*(\psi^i(F)) \\
&= \psi^i(F)g_*(\mathscr{O}_Y) \text{ d'après 1.15.} \\
&= \psi^i(F)(g'_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}}) + h_*(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}) - k_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1})) \text{ d'après la prop. 3.4.} \\
&= g'_*(g'^*\psi^i(F)) + h_*(h^*\psi^i(F)) - k_*(k^*\psi^i(F)) \text{ d'après 1.15.} \\
&= g'_*(\psi^i(g'^*F)) + h_*(\psi^i(h^*F)) - k_*(\psi^i(k^*F)) \\
&= g'_*(\psi^i(g'^*F)) \text{ d'après 3.7.} \\
&= g'_*\psi^i(f'_*(E)) \text{ par définition de } F.
\end{aligned}$$

On applique alors la section π de g. On calcule

$$\begin{aligned}
\psi^i(f_*(E)) &= \pi_*g_*\psi^i(f_*(E)) \\
&= \pi_*g'_*\psi^i(f'_*(E)) \\
&= \pi_*g'_*f'_*(\theta^i(\mathscr{C}_{X/Y})\psi^i(E)) \text{ d'après la prop. 3.8.} \\
&= f_*(\theta^i(\mathscr{C}_{X/Y})\psi^i(E)) \text{ car } \pi g' f' = f.
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ∎

Chapitre 4

Preuve des théorèmes 2.7 et 2.9

La preuve des théorèmes 2.7 et 2.9 repose pour l'essentiel sur un résultat d'invariance de la K-théorie.

On commence par énoncer ce résultat avant de passer aux preuves des théorèmes proprement dits.

4.1 Un résultat d'invariance

Dans [32] Thomason et Trobaugh démontrent le résultat d'invariance suivant pour la K-théorie – il s'agit du théorème 9.6 de [32].

Théorème 4.1 (Thomason-Trobaugh)**.** *Soit Z un schéma quasi-compact et quasi-séparé de caractéristique $p > 0$. Alors*

1. *La projection $\pi : X[T] \to X$ induit une équivalence d'homotopie*

$$K^B(Z)\left[\frac{1}{p}\right] \xrightarrow{\sim} K^B(Z[T])\left[\frac{1}{p}\right]$$

2. *Pour $\mathscr{S}^{\cdot}$ un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_Z$-algèbres graduées avec $\mathscr{S}^0 = \mathscr{O}_Z$ la projection induit une équivalence d'homotopie*

$$K^B(Z)\left[\frac{1}{p}\right] \xrightarrow{\sim} K^B(\mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot}))\left[\frac{1}{p}\right]$$

3. *Si $\pi : W \to Z$ est un torseur pour un fibré vectoriel sur Z, alors π induit une équivalence d'homotopie*

$$\pi^* : K^B(Z)\left[\frac{1}{p}\right] \xrightarrow{\sim} K^B(W)\left[\frac{1}{p}\right]$$

Esquisse de preuve: On commence par prouver le point 1). Suivant la méthode expliquée à la suite du théorème 1.23 on peut se ramener au cas affine – cela vient de ce que la formation de $\check{\mathbf{H}}^{\cdot}(\mathscr{U}, \ )$ commute avec le produit tensoriel par $\mathbf{Z}[1/p]$. Le résultat découle alors de [34] 5.2.

Le point 2) se déduit alors de 1). On va montrer que la section nulle $X \to \mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot})$ induite par $\mathscr{S}^{\cdot} \twoheadrightarrow \mathscr{S}^0 = \mathscr{O}_X$ définit un inverse à l'équivalence d'homotopie de 2). On

considère la flèche $\mathscr{S}^{\cdot} \to \mathscr{S}^{\cdot}[T]$ qui envoie $s \in \mathscr{S}^n$ sur sT^n, et la flèche induite au niveau des spectres $\mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot}[T]) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot})$. Quand on compose cette flèche avec la section pour $T = 1$ $\mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot}[T])$ on obtient l'identité de $\mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot})$, tandis que composée avec la section pour $T = 0$ on obtient la composée $\mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot}) \to X \to \mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot})$ où la première flèche est la projection, et la seconde la section nulle. Par ailleurs, les deux sections considérées, pour $T = 0$ et pour $T = 1$, définissent des applications homotopes $K^B(\mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot}[T]))[1/p] \to K^B(\mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot}))[1/p]$ car elles définissent toutes deux des inverses pour l'équivalence d'homotopie de 1) appliquée à $\mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot})$. Ainsi la composée $K^B(\mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot}))[1/p] \to K^B(X)[1/p] \to K^B(\mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot}))[1/p]$ est homotope à l'identité. Par ailleurs la composée $X \to \mathrm{Spec}(\mathscr{S}^{\cdot}) \to X$, où la première flèche est la section nulle et la seconde la projection, est égale à l'identité, ce qui achève de prouver le point 2).

Pour prouver 3) on se ramène au cas affine. Les torseurs sous un fibré vectoriel $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ sont classifiés par le groupe de cohomologie $H^1(X, \mathscr{E}^{\vee})$. Pour X affine ce groupe est nul et donc W est le torseur trivial, $W = \mathbf{V}(\mathscr{E}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}^{\cdot}(\mathscr{E}))$ et le résultat découle du point 2. ∎

Dans le cas d'un schéma divisoriel ce résultat va pouvoir se combiner avec la variante suivante de l'astuce de Jouanolou, due à Thomason.

Proposition 4.2 (Thomason)**.** *Soit X un schéma divisoriel. Alors il existe un torseur affine sur X pour un fibré vectoriel sur X.*

Preuve: X étant divisoriel il existe des sections globales $s_0, \ldots, s_N$ de faisceaux inversibles $\mathscr{L}_0, \ldots, \mathscr{L}_N$ telles que les X_{s_i} soient affines et recouvrent X. Notons alors s l'application

$$s = (s_0, \ldots, s_N) : \mathscr{O}_X \to \mathscr{E}$$

avec $\mathscr{E} = \oplus_i \mathscr{L}_i$. Sur chaque X_{s_i} on peut définir une application $p_i : \mathscr{E} \to \mathscr{O}_X$, $(l_0, \ldots, l_n) \mapsto l_i s_i^{-1}$ telle que $p_i \circ s = \mathrm{id}_{X_{s_i}}$, i.e. s est un monomorphisme scindé sur chaque X_{s_i}. On en déduit l'existence d'une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_X \xrightarrow{s} \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0$$

avec $\mathscr{F}$ le conoyau de s qui est alors un faisceau localement libre de rang N.

Soit donc $W = \mathbf{P}(\mathscr{E}) - \mathbf{P}(\mathscr{F})$ et $\pi : W \to X$.

W est alors un torseur sur X pour le fibré vectoriel $\mathbf{V}(\mathscr{F})$.

En effet, en se restreignant à un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}\, A$ de X

$$W = \mathrm{Spec}(A[s_0, \ldots, s_N]/(s-1)) \text{ et } \mathbf{V}(\mathscr{F}) = \mathrm{Spec}(A[s_0, \ldots, s_N]/(s))$$

L'action de $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ sur W est alors donnée par $W \times \mathbf{V}(\mathscr{F}) \to W$, $(x_0, \ldots, x_N, y_0, \ldots, y_N) \mapsto (x_0 + y_N, \ldots, x_N + y_N)$ et cette action est clairement libre et transitive.

Par ailleurs, la description de W comme $W = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}^{\cdot}(\mathscr{E})/(s))$ implique que π est affine.

Pour finir, le caractère affine de W découle alors du critère [16] II §2 Ex. 2.17 : les sections $s_0, \ldots, s_N$ définissent des éléments $f_0, \ldots, f_N$ de $\Gamma(W, \mathscr{O}_W)$ qui vérifient $f_0 + \ldots + f_N = 1$ et les schémas $W_{f_i} = \pi^{-1}(X_{s_i})_{f_i}$ sont tous affines – ce sont des localisés des schémas affines $\pi^{-1}(X_{s_i})$. ∎

En combinant le théorème 4.1 avec la proposition 4.2 on en déduit que tout schéma de caractéristique positive a la même K-théorie lorsque l'on inverse p qu'un schéma affine :

Proposition 4.3. *Soit X un schéma divisoriel de caractéristique $p > 0$. Alors il existe un schéma affine X_0 tel que l'on a un isomorphisme*

$$K_0(X)\left[\frac{1}{p}\right] \xrightarrow{\sim} K_0(X_0)\left[\frac{1}{p}\right]$$

4.2 Preuve des théorèmes

4.2.1 Le théorème 2.7

La démonstration du 2.7 est immédiate à partir de la proposition 4.3.

Soient donc X un schéma de caractéristique $p > 0$ et X_0 un schéma affine tel que $K_0(X)[1/p] \xrightarrow{\sim} K_0(X_0)[1/p]$, donné par la proposition 4.3.

Un schéma affine est muni d'un fibré ample donc en vertu de [2] Exp. VI 6.1 l'idéal $F^1K_0(X_0)$ est un nil-idéal. Cela implique que la γ-filtration de $K_0(X_0)$ est localement nilpotente.

On en déduit alors que la γ-filtration de $K_0(X)[1/p]$ est également localement nilpotente. Cela prouve le théorème 2.7.

4.2.2 Le théorème 2.9

On considère un morphisme propre et lisse $f : X \to Y$ entre deux schémas divisoriels de caractéristique $p > 0$.

On va prouver l'égalité

$$\psi^p(f_*(E)) = f_*(\theta^p(\Omega_f)^{-1} \cdot \psi^p(E)) \tag{4.1}$$

dans $K_0(Y)[\frac{1}{p}]$ et pour $E \in K_0(X) - \Omega_f$ désigne le faisceau des différentielles du morphisme f.

Remarquons que pour prouver cette égalité il est nécessaire de pouvoir inverser l'élément $\theta^p(\Omega_f)$ dans $K_0(X)[1/p]$. Cela est le cas dès que la γ-filtration est localement nilpotente dans $K_0(X)[1/p]$ en vertu du lemme – classique – suivant.

Lemme 4.4. *Soit X un schéma quasi-compact et $z \in K_0(X)$ de λ-dimension finie égale à n. Si $F^1K_0(X)[1/n]$ est un nil-idéal, alors z est inversible dans $K_0(X)[1/n]$.*

Preuve: On calcule formellement

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{n-(z-n)} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{z-n}{n} + \frac{(z-n)^{\otimes 2}}{n^2} + \dots\right)$$

et la somme entre parenthèse est finie puisque $(z-n)/n$ est dans $F^1K_0(X)[1/n]$, qui est un nil-idéal. ∎

Sous les hypothèses du théorème 2.9, le schéma X vérifie effectivement le théorème 2.7 et nous avons en fait vu que $F^1K_0(X)[1/p]$ est un nil-idéal. Quand à $\theta^p(\Omega_f)$, son rang est une puissance de p...

Une fois cette remarque faite, nous pouvons appliquer la méthode proposée par les auteurs de [23]. En effet la seule différence entre notre situation et la situation considérée dans cet article est la présence d'un fibré ample sur Y. Mais cette hypothèse n'est faite que dans le but de pouvoir inverser l'élément $\theta^p(\Omega_f)^{-1}$. On vient de voir que l'on pouvait inverser cet élément sans la présence d'un fibré ample.

Rappelons les principales étapes du raisonnement dans [23].

La preuve repose sur un calcul direct pour établir la formule (4.1), en construisant explicitement un fibré localement libre représentant l'élément $\theta^p(\Omega_f)$ dans $K_0(X)$.

En effet, pour tout faisceau cohérent localement libre $\mathscr{E}$ sur un schéma Z de caractéristique $p > 0$, on considère l'algèbre symétrique de $\mathscr{E}$, $\mathrm{Sym}^{\cdot}(\mathscr{E})$, et le faisceau d'idéaux $\mathscr{J}_{\mathscr{E}}$ engendré par les sections e^p de $\mathrm{Sym}^p(\mathscr{E})$ pour toutes les sections e de $\mathscr{E}$, et l'on pose

$$\tau(\mathscr{E}) := \mathrm{Sym}^{\cdot}(\mathscr{E})/\mathscr{J}_{\mathscr{E}}$$

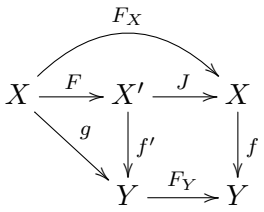
Alors

$$\tau(\mathscr{E}) = \theta^p(\mathscr{E}) \text{ dans } K_0(Z) \tag{4.2}$$

La preuve de cette égalité se base sur la description locale de $\mathscr{J}_{\mathscr{E}}$: si $e_1, \ldots, e_r$ est une base locale de $\mathscr{E}$, $\mathscr{J}_{\mathscr{E}}$ est engendré par les sections $e_1^p, \ldots, e_r^p$. Muni de cette description il est facile de voir que τ vérifie les trois propriétés qui déterminent θ^p uniquement, d'où l'identification des deux.

Une fois cela remarqué, on revient à notre morphisme propre et lisse $f : X \to Y$ où Y est un schéma de caractéristique $p > 0$ muni d'un fibré ample.

On considère alors le diagramme commutatif



où F_Y (resp. F_X) désigne le morphisme de Frobenius absolu de Y (resp. X) et F le morphisme de Frobenius relatif de X sur Y.

On note $\mathscr{I}$ le noyau du morphisme naturel $F^*F_*\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ et $\mathrm{Gr}(F^*F_*\mathscr{O}_X) := \oplus_{k\geqslant 0}\mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1}$.

Par ailleurs, comme le morphisme f est lisse, le faisceau Ω_f est localement libre. On note r son rang.

Le résultat clé de [23] est alors (Proposition 3.2 dans [23])

Proposition 4.5. *a) Il y a un isomorphisme naturel de $\mathscr{O}_X$-modules*

$$\Omega_f \xrightarrow{\sim} \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$$

b) Il y a un isomorphisme naturel d'$\mathscr{O}_X$-algèbres graduées

$$\tau(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) \xrightarrow{\sim} Gr(F^*F_*\mathscr{O}_X)$$

Preuve: On se contente de rappeler la définition des deux flèches. Pour la première, on dispose d'une flèche naturelle $\Omega_f \twoheadrightarrow \Omega_F$ (cf. par exemple [16] II Proposition 8.3). Par ailleurs, le morphisme F est affine – c'est un morphisme fini, cf. [8] 1.1 p. 249 – d'où un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Spec}(F^*F_*\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\sim} X \times_{X'} X$$

En particulier le morphisme naturel $F^*F_*\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ correspond via l'isomorphisme précédent au plongement diagonal $X \hookrightarrow X \times_{X'} X$ et donc $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ est naturellement isomorphe à Ω_F, d'où la flèche annoncée $\Omega_f \twoheadrightarrow \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$.

Pour la deuxième flèche, le plongement $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \hookrightarrow \mathrm{Gr}(F^*F_*\mathscr{O}_X)$ se prolonge, par propriété universelle de l'algèbre symétrique, en une flèche $\mathrm{Sym}^{\cdot}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) \to \mathrm{Gr}(F^*F_*\mathscr{O}_X)$. On vérifie alors par un petit calcul que cette flèche se factorise par $\mathscr{J}_{\mathscr{I}/\mathscr{I}^2}$ et on obtient la flèche annoncée $\tau(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) \to \mathrm{Gr}(F^*F_*\mathscr{O}_X)$

Pour les détails et le fait que ces deux flèches sont des isomorphismes, cf. [23] Proposition 3.2. ∎

Pour conclure la preuve de l'égalité (4.1) il n'y a plus qu'à mener un petit calcul. Remarquons au préalable que l'élément $F_*\mathscr{O}_X$ est inversible dans $K_0(X')[1/p]$ d'après [23] Lemmes 3.1 et 3.3.

Soit donc $E \in K_0(X)$, alors

$$\begin{aligned}
\psi^p(f_*(E)) &= F_Y^* f_*(E) \text{ car } \psi^p = F_Y^* \text{ dans } K_0(Y) \\
&= f'_*(J^*(E)) \text{ d'après la proposition 1.16} \\
&= f'_*((F_*\mathscr{O}_X)\cdot(F_*\mathscr{O}_X)^{-1} \otimes J^*(E)) \\
&= f'_*F_*(F^*(F_*\mathscr{O}_X)^{-1}\cdot F^*J^*(E)) \text{ d'après la prop. 1.15.} \\
&= f_*((F^*F_*\mathscr{O}_X)^{-1}\cdot F_X^*(E)) \text{ en simplifiant}
\end{aligned}$$

Alors, on calcule dans $K_0(X)$, en combinant la proposition 4.5 et l'égalité (4.2) $F^*F_*\mathscr{O}_X = \mathrm{Gr}(F^*F_*\mathscr{O}_X) = \tau(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) = \theta^p(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) = \theta^p(\Omega_f)$ et cela achève la preuve de la formule annoncée

$$\psi^p(f_*(E)) = f_*(\theta^p(\Omega_f)^{-1}\cdot\psi^p(E))$$

Cela conclut la preuve du théorème 2.9.

Chapitre 5

Preuve du théorème 2.10

On rappelle, pour la convenance du lecteur, l'énoncé du théorème dont la preuve fait l'objet du présent chapitre.

Théorème 5.1. *Soient X et Y deux schémas divisoriels.*

On suppose que Y est un schéma régulier noethérien et séparé et qu'il existe une flèche $Y \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k])$.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et lisse. On note Ω_f son faisceau des différentielles.

Alors la formule

$$\psi^k(f_*(E)) = f_*(\theta^k(\Omega_f)^{-1} \cdot \psi^k(E)) \tag{5.1}$$

est vérifiée dans $K_0(Y)[\frac{1}{k}]$ pour tout E dans $K_0(X)$.

Notre preuve va suivre la méthode proposée par Nori dans [22]. Dans cet article Nori considère des schémas sur un corps tandis que nous considérons ici le cas d'une base beaucoup plus générale.

5.1 Schémas en groupes et action de groupe

Dans ces rappels, on adopte assez souvent le point de vue fonctoriel développé dans [9] que l'on utilise comme principale référence.

Dans tout ce qui suit on fixe un schéma de base S.

5.1.1 Schémas en groupes

Soit G un S-schéma. On dit que G est un schéma en groupes si pour tout schéma S' sur S l'ensemble $G(S')$ des points de G à valeurs dans S' est muni d'une structure de groupe, fonctoriellement en S'.

Il revient au même de se donner des morphismes de S-schémas

$$\mu : G \times_S G \to G \text{ et } e_G : S \to G \tag{5.2}$$

qui vérifient les axiomes habituels – cf. [9] Exp. I 2.1.1.

Si H est un deuxième schéma en groupes, on dit qu'un morphisme $H \to G$ est un morphisme de schémas en groupes si $H(S') \to G(S')$ est un morphisme de groupes pour tout schéma S' sur S.

On dit que H est un sous-groupe fermé de G s'il existe une immersion fermée $H \to G$ qui soit un morphisme de schémas en groupe.

Dans le cas où G est affine sur S, on dispose d'une description supplémentaire de la structure de schéma en groupes.

Si T est un schéma affine sur S, en notant $f : T \to S$ le morphisme structural, la $\mathscr{O}_S$-algèbre $\mathscr{A}(T) = f_*(\mathscr{O}_T)$ est quasi-cohérente. On définit ainsi une équivalence de catégories $T \mapsto \mathscr{A}(T)$ de la catégorie des schémas affines sur S sur la catégorie des $\mathscr{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes – un quasi-inverse est fourni par $\mathscr{A} \mapsto \mathbf{Spec}(\mathscr{A})$.

Le fait que G soit un schéma en groupes affine sur S se traduit par le fait supplémentaire que la $\mathscr{O}_S$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}(G)$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf commutative, c'est-à-dire de trois morphismes, une application diagonale, une augmentation et un antipode

$$\Delta : \mathscr{A}(G) \to \mathscr{A}(G) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G),\ \varepsilon : \mathscr{A}(G) \to \mathscr{O}_S \text{ et } \iota : \mathscr{A}(G) \to \mathscr{A}(G)$$

correspondant aux morphismes (5.2) et à l'inverse. En particulier Δ et ε vérifient des propriétés équivalentes à celles de μ et e_G – cf. [9] Exp. I 4.2.

Dans la suite on s'intéressera particulièrement à deux types de groupes : les groupes constants et les groupes diagonalisables.

Groupes constants. Pour tout ce qui suit la référence est [9] Exp. I 1.8 & 4.1.

Soit E un ensemble. On définit E_S comme la somme directe d'une famille d'objets $(S_i)_{i\in E}$ avec S_i isomorphe à S pour tout i. On dispose d'une projection canonique $E_S \to S$ définie par la propriété universelle de la somme directe.

Pour S' un schéma sur S, $E'_S = (E_S) \times_S S'$. Plus généralement le foncteur $E \mapsto E_S$ commute aux limites projectives finies.

E_S représente le foncteur qui à un schéma S' sur S associe les applications localement constantes de l'espace topologique S' dans l'ensemble E. En particulier, pour S' connexe, $E_S(S') = E$.

De la description schématique de E_S on déduit que $\mathscr{A}(E_S) = \mathscr{O}_S^{(E)}$. En particulier, quand E est un ensemble fini de cardinal n on a $\mathscr{A}(E_S) = \mathscr{O}_S^n$.

Dans le cas où $E = G$ est un groupe on voit, du fait que $E \mapsto E_S$ commute aux limites projectives finies ou de la description du foncteur des points de E_S, que G_S est un schéma en groupes.

Groupes diagonalisables. Pour tout ce qui suit la référence est [9] Exp. I 4.4.

Soit M un groupe abélien dont la loi sera notée additivement. Pour S un schéma on définit

$$D(M)(S) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{groupes}}(M, \mathbf{G}_m(S))$$

C'est un foncteur de la catégorie des schémas dans la catégorie des groupes et il est représentable par un schéma en groupes, encore noté $D(M)$. En effet,

$$D(M)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{groupes}}(M, \Gamma(S, \mathscr{O}_S)^\times) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg.}}(\mathbf{Z}[M], \Gamma(S, \mathscr{O}_S))$$

par propriété universelle de l'algèbre $\mathbf{Z}[M]$.

Le schéma $D(M)$ est affine sur $\mathbf{Z}$, et on en déduit pour tout schéma S l'existence d'un schéma en groupes affine sur S

$$D_S(M) = D(M) \times_{\mathbf{Z}} S$$

On définit ainsi un foncteur $D_S : M \to D_S(M)$ de la catégorie des groupes abéliens dans la catégorie des schémas en groupes affines sur S. Un schéma en groupes de la forme $D_S(M)$ pour M un groupe abélien est appelé groupe diagonalisable sur S.

Le schéma en groupe $D_S(M)$ est associé à la $\mathscr{O}_S$-bigèbre $\mathscr{O}_S[M]$. L'application diagonale et l'augmentation sont définies par

$$\Delta(x) = x \otimes x \text{ et } \varepsilon(x) = 1 \text{ pour } x \in M$$

Par ailleurs, les sous-groupes fermés de G sont des groupes diagonalisables en correspondance biunivoque avec les quotients M/M' de M. A un tel quotient correspond le groupe $D_S(M/M')$. Pour plus de détails à ce propos, cf. [9] Exp. VII 1.4 & 3.2.

Un exemple de groupe diagonalisable essentiel dans la suite est le groupe des racines n-ièmes de l'unité. On pose

$$\boldsymbol{\mu}_n = D(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

soit pour un schéma S

$$\boldsymbol{\mu}_n(S) = \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \Gamma(S, \mathscr{O}_S)^\times) = \{f \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S) | f^n = 1\}$$

Le groupe $\boldsymbol{\mu}_{n,S}$ correspond donc à la $\mathscr{O}_S$-algèbre $\mathscr{O}_S[\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}] = \mathscr{O}_S[T]/(T^n - 1)$.

5.1.2 G-modules

Soit G un schéma en groupes sur S.

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module. Une structure de G-$\mathscr{O}_S$-module sur $\mathscr{F}$ est la donnée pour tout schéma S' sur S d'un morphisme de groupes

$$G(S') \to \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{S'}}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S'})$$

fonctoriellement en S'. Pour d'autres définitions équivalentes on pourra consulter [9] Exp. I 4.7.1.

En particulier, quand G est affine sur S, la donnée de tels morphismes, fonctoriellement en S', est équivalente à la donnée d'un morphisme de $\mathscr{O}_S$-modules

$$\mu : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G)$$

qui définit sur $\mathscr{F}$ une structure de comodule à droite sur la bigèbre $\mathscr{A}(G)$. Pour la définition exacte de cette structure, cf. [9] Exp. I 4.7.2.

On a également une notion de morphisme qui permet de définir la catégorie des G-$\mathscr{O}_S$-modules et la sous-catégorie des G-$\mathscr{O}_S$-modules quasi-cohérents.

Un cas particulier important dans la suite est celui où $G = G_S$ est un groupe constant.

Pour se donner la famille de morphismes

$$G_S(S') \to \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{S'}}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S'})$$

on peut, sans perte de généralité, supposer que S' est connexe. Alors $G_S(S') = G$ et se donner une structure de G-module sur $\mathscr{F}$ revient à se donner des morphismes naturels en S'

$$G \to \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{S'}}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S'})$$

Cela revient, d'après le lemme de Yoneda, à se donner pour tout $g \in G$ des isomorphismes

$$g_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$$

qui vérifient $(gh)_{\mathscr{F}} = g_{\mathscr{F}} h_{\mathscr{F}}$ et $1_{\mathscr{F}} = \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$.

Dans la suite, quand on travaillera avec un tel groupe constant G_S, on définira le plus souvent des structures de G_S-modules de cette façon.

Si G est un groupe diagonalisable, $G = D_S(M)$, la structure des G-modules est particulièrement agréable. En ce cas

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(G) = \bigoplus_{m \in M} \mathscr{F} \otimes m\mathscr{O}_S$$

et se donner un morphisme

$$\mu : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(G)$$

revient à se donner une famille d'endormorphismes $(\mu_m)_{m \in M}$ de $\mathscr{F}$ qui pour toute section x de $\mathscr{F}$ sur un ouvert de S définit une section $(\mu_m(x))$ de $\bigoplus_{m \in M} \mathscr{F} \otimes m\mathscr{O}_S$ par

$$\mu(x) = \sum_{m \in M} \mu_m(x) \otimes m$$

Le fait que μ définisse une structure de $\mathscr{A}(G)$-comodule sur $\mathscr{F}$ revient à dire que les μ_m sont des projecteurs deux-à-deux orthogonaux. En notant $\mathscr{F}_m$ l'image de μ_m on en déduit donc que

$$\mathscr{F} = \bigoplus_{m \in M} \mathscr{F}_m$$

Cela prouve que si $G = D_S(M)$ est un groupe diagonalisable, la catégorie des G-$\mathscr{O}_S$-modules est équivalente à la catégorie des $\mathscr{O}_S$-modules gradués de type M.

Module induit. On suppose que G est affine sur S – cette hypothèse est en fait inutile mais simplifie la présentation tout en couvrant les cas rencontrés dans la suite. Pour plus de détails, cf. [9] Exp. I 5.2.

On va définir un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_S$-modules quasi-cohérents dans la catégorie des G-$\mathscr{O}_S$-modules quasi-cohérents.

Soit donc $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent. On pose

$$\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) := \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G)$$

et on définit une structure de G-$\mathscr{O}_S$-module sur $\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F})$ par

$$\mathrm{id}_{\mathscr{F}} \otimes \Delta : \mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) \to \mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G)$$

(On rappelle que $\Delta : \mathscr{A}(G) \to \mathscr{A}(G) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G)$ est la comultiplication de $\mathscr{A}(G)$.)

Suivant le contexte et si le groupe G avec lequel on travaille est clair, on écrira $\mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ au lieu de $\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F})$.

Le foncteur Ind^G ainsi défini est adjoint à droite du foncteur d'oubli de la catégorie des G-$\mathscr{O}_S$-modules quasi-cohérents dans la catégorie des $\mathscr{O}_S$-modules, c'est-à-dire que pour tout G-$\mathscr{O}_S$-module $\mathscr{F}'$ quasi-cohérent la flèche

$$\mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathscr{O}_S\text{-Mod.}}(\mathscr{F}', \mathrm{Ind}^G(\mathscr{F})) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}', \mathscr{F})$$

est bijective.

Regardons une fois de plus ce que donne cette opération dans le cas d'un groupe constant et dans le cas d'un groupe diagonalisable.

Si $G = G_S$ est un groupe constant, alors, pour $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module

$$\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) = \bigoplus_{g \in G} \mathscr{F}_g \tag{5.3}$$

avec $\mathscr{F}_g = \mathscr{F}$ pour tout g. G_S agit alors sur $\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F})$ par permutation des facteurs : $h \in G$ définit un morphisme

$$h_{\mathscr{F}} : \mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) \to \mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) \tag{5.4}$$

qui envoie le facteur $\mathscr{F}_g$ identiquement dans $\mathscr{F}_{gh^{-1}}$.

Soit maintenant $G = D_S(M)$ un groupe diagonalisable. Pour $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module, la flèche

$$\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) \to \mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{A}(G)$$

envoie $x \otimes m$ sur $x \otimes m \otimes m$ et donc pour tout $m \in M$

$$\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F})_m = \mathscr{F} \otimes m\mathscr{O}_S \tag{5.5}$$

5.1.3 Actions de groupe et modules G-équivariants

Soit X un schéma sur S.

Une G-action sur X est la donnée d'un S-morphisme

$$\lambda : G \times_S X \to X$$

qui vérifie les axiomes habituels d'une action de groupe : associativité et action triviale de l'unité. On note $p_X : G \times_S X \to X \to X$ la seconde projection.

Une manière équivalente de définir une telle action est de se donner, pour tout schéma S' sur S un morphisme de groupes

$$G(S') \to \mathrm{Aut}_{S'}(X_{S'})$$

de manière fonctorielle en S'.

Une fois de plus considérons en particulier le cas d'un schéma en groupes constants $G = G_S$. Comme précédemment on peut sans perte de généralité se limiter aux schémas S' connexes et cela revient à se donner une famille de morphismes de groupes

$$G = G_S(S') \to \mathrm{Aut}_{S'}(X_{S'})$$

Se donner une telle action revient donc, à nouveau, à se donner pour tout $g \in G$ un isomorphisme de S-schémas

$$g_X : X \to X \tag{5.6}$$

qui vérifie $1_X = \mathrm{id}_X$ et $(gh)_X = g_X h_X$ pour g, $h \in G$.

Dans les cas particuliers que nous rencontrerons par la suite nous procéderons toujours ainsi pour définir l'action d'un groupe constant sur X.

Si Y est un autre S-schéma muni d'une action de G, on dira qu'un S-morphisme $f : X \to Y$ est équivariant s'il commute à l'action de G.

En particulier, dans le cas où X et Y sont deux schémas munis de l'action d'un groupe constant définis par des morphismes g_X et g_Y comme en (5.6) $f : X \to Y$ est un morphisme équivariant si et seulement si $f \circ g_X = g_Y \circ f$.

On va maintenant définir la notion de $\mathscr{O}_X$-module G-équivariant en suivant [9] Exp. I 6.5.

Soit donc $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module. Une structure de $\mathscr{O}_X$-module G-équivariant sur $\mathscr{F}$ est la donnée pour tout morphisme $(g, x) : U \to G \times_S X$ d'un isomorphismes de $\mathscr{O}_U$-modules

$$\Lambda_x(g) : x^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} (gx)^*\mathscr{F}$$

qui vérifie $\Lambda_x(1) = \mathrm{id}$ et $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$ – on note gx le morphisme $\lambda \circ (g, x) : U \to X$.

En particulier si l'on applique cela au morphisme identité de $G \times_S X$ on en déduit l'existence d'un isomorphisme

$$\theta : \lambda^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} p_X^*(\mathscr{F}) \tag{5.7}$$

qui vérifie la condition de cocycle sur $G \times_S G \times_S X$

$$(p_{23}^*\theta) \cdot ((1 \times \lambda)^*\theta) = (m \times 1)^*\theta \tag{5.8}$$

où $m : G \times_S G \to G$ est la multiplication de G et $p_{23} : G \times_S G \times_S X \to G \times_S X$ et $p_2 : G \times_S X \to X$ les projections évidentes.

Cette définition, par l'isomorphisme θ est en particulier celle que l'on trouve dans [20] chap. 1 §3.

Encore une fois, on s'intéresse au cas d'un schéma en groupes constant, soit $G = G_S$ pour G un groupe. L'action sur X est donc définie par la donnée d'isomorphismes

$$g_X : X \to X$$

pour tout g dans G.

Alors, définir une structure de $\mathscr{O}_X$-module G-équivariant sur $\mathscr{F}$ revient à se donner des isomorphismes

$$\Lambda(g) : \mathscr{F} \xrightarrow{\sim} g_X^*\mathscr{F} \tag{5.9}$$

qui vérifient $\Lambda(1) = \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$ et $\Lambda(gh) = h_X^*\Lambda(g) \circ \Lambda(h)$. Pour U un schéma, que l'on peut supposer connexe sans perte de généralité, et un U-point $x : U \to X$ de X on définit alors $\Lambda_x(g)$ comme $x^*\Lambda(g)$.

En particulier quand l'action de G sur X est triviale, c'est-à-dire $g_X = \mathrm{id}_X$ pour tout g, on retrouve la construction que l'on avait donnée en ce cas d'un G-$\mathscr{O}_X$-module, avec $\Lambda(g) = g_{\mathscr{F}}$.

Module équivariant induit. On va proposer dans ce qui suit une construction ad hoc de module équivariant induit.

On se place dans le cas d'un schéma en groupes constant $G = G_S$ et d'une G-action sur X définie par la donnée de morphismes g_X comme en (5.6).

Soit alors $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module. On pose

$$\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) = \bigoplus_{g\in G} g_X^*\mathscr{F} = \bigoplus_{g\in G} g_X^*\mathscr{F}_g \text{ avec } \mathscr{F}_g = \mathscr{F} \text{ pour tout } g$$

Dans le cas où l'action de G sur X est triviale on retrouve la définition 5.3 d'où le choix de la notation.

On définit alors une structure G-équivariante sur $\mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ en se donnant des morphismes $\Lambda(g)$ comme en (5.9) :

$$\Lambda(h) : \bigoplus_{g\in G} g_X^*\mathscr{F} = \mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} h_X^*\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) = \bigoplus_{g\in G}(gh)_X^*\mathscr{F}_g = \bigoplus_{g\in G} g_X^*\mathscr{F}_{gh^{-1}}$$

$\Lambda(h)$ permute les facteurs et envoie identiquement $g_X^*\mathscr{F}_g$ dans $g_X^*\mathscr{F}_{gh^{-1}}$. En particulier quand l'action sur X est triviale on retrouve la structure de G-module (5.4).

De même que précédemment, si le groupe G avec lequel on travaille ne prête pas à confusion, on notera $\mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ plutôt que $\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F})$.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme G-équivariant entre deux espaces munis d'actions de G définies par des morphismes g_X et g_Y, et si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_Y$-module, il est évident à partir de la définition que

$$\mathrm{Ind}^G(f^*\mathscr{F}) = f^*\mathrm{Ind}^G(\mathscr{F}) \tag{5.10}$$

5.2 K-théorie équivariante et formule de Lefschetz

Notation 5.2. Dans ce paragraphe on va construire des groupes de K-théorie équivariante en termes de fibrés. Pour que ces groupes soient compatibles avec les groupes de K-théorie habituels, il faut donc travailler avec ce que nous avons noté jusqu'à présent $K_0^{\text{naïf}}$ et $G_0^{\text{naïf}}$. Afin d'alléger les notations et en rupture avec les notations établies jusqu'à présent nous noterons désormais, et ce jusqu'à la fin du chapitre, ces groupes K_0 et G_0 respectivement.

Cet abus de notations n'est pas gênant pour le résultat que nous voulons démontrer : les schémas X et Y du théorème 5.1 sont supposés divisoriels d'où des isomorphismes $K_0^{\text{naïf}}(X) \xrightarrow{\sim} K_0(X)$ et $K_0^{\text{naïf}}(Y) \xrightarrow{\sim} K_0(Y)$.

Dans tout ce qui suit on se place sur un schéma de base S supposé noethérien et séparé.

Soient G un schéma en groupes plat, séparé et de type fini sur S et X un schéma séparé et de type fini sur S muni d'une action de G.

On considère la catégorie abélienne des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents G-équivariants. La méthode de Quillen – cf [24] – lui associe alors un spectre dont on notera $G_*(G, X)$ le groupe gradué abélien associé : ce sont les G-groupes équivariants algébriques de (G, X).

Si on considère la catégorie abélienne des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents localement libres, on obtient de la même manière les K-groupes équivariants algébriques de (G, X) et on note $K_*(G, X)$ le groupe abélien gradué correspondant.

Pour connaître les principales propriétés de ces constructions on peut consulter [30] et [29] §1. On retrouve peu ou prou les principales propriétés de la K-théorie classique dans un cadre équivariant.

Le produit tensoriel muni $K_*(G, X)$ d'une structure d'anneau et $G_*(G, X)$ est un module sur cet anneau. Le groupe $K_*(G, X)$ définit un foncteur contravariant en le couple (G, X) tandis que $G_*(G, X)$ est contravariant en G et covariant en X relativement aux morphismes propres G-équivariants – remarquons que pour définir l'image directe pour un morphisme propre on est obligé d'utiliser les technique de Waldhausen [33] pour définir la K-théorie ; elle coïncide alors avec celle définie par Quillen du fait de l'hypothèse noethérienne, cf [29] 1.13 pour les détails. Pour un tel morphisme propre et G-équivariant $f : X \to X'$ l'image directe est définie par l'image dérivée des faisceaux cohérents, c'est alors un morphisme de $K_*(G, X')$-modules en vertu de la formule de projection. Par ailleurs, $G_*(G, X)$ est également un foncteur contravariant en X relativement aux morphismes plats G-équivariants.

Un théorème fondamental pour ces groupes équivariants est le théorème de localisation suivant.

Théorème 5.3. *Soit S un schéma noethérien et séparé.*

Soient G un schéma en groupes plat, séparé et de type fini sur S et X un schéma séparé et de type fini sur S muni d'une action de G.

Si $i : Y \hookrightarrow X$ est une immersion fermée G-équivariante dont le complément ouvert est $j : U \to X$ alors il existe une suite exacte de $K_*(G, X)$-modules

$$\ldots G_n(G, Y) \xrightarrow{i_*} G_n(G, X) \xrightarrow{j^*} G_n(G, U) \xrightarrow{\partial} G_{n-1}(G, Y) \to \ldots$$

Preuve: cf. [30] 2.7 p. 548. ∎

Quand le schéma X est régulier on dispose du résultat classique suivant qui nous servira dans la suite.

Théorème 5.4. *Soit S un schéma noethérien et séparé.*

Soien G un schéma en groupes plat, séparé et de type fini sur S et X un schéma séparé et de type fini sur S muni d'une action de G.

On suppose en outre que G est un groupe diagonalisable et que X est un schéma régulier.

Alors l'inclusion de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents localement libres G-équivariants dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents G-équivariants induit un isomorphisme

$$K_*(G, X) \xrightarrow{\sim} G_*(G, X)$$

Preuve: cf. [30] 5.7 & 5.8 p. 560. ∎

Nous aurons également besoin d'un autre résultat classique de K-théorie qui reste valable dans le cas équivariant.

Théorème 5.5. *Soit S un schéma noethérien et séparé.*

Soient G un schéma en groupes plat, séparé et de type fini sur S et X un schéma séparé et de type fini sur S muni d'une action de G.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent localement libre de rang r et G-équivariant sur X. On pose $Y = \mathbf{P}(\mathscr{F})$. Le schéma Y est muni d'une G-action induite par celle sur X. Alors le morphisme structural $f : Y \to X$ fait de $K_0(G,Y)$ une $K_0(G,X)$-algèbre par $f^* : K_0(G,X) \to K_0(G,Y)$ et $K_0(G,Y)$ est un $K_0(G,X)$-module libre de base $\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y(1), \ldots, \mathscr{O}_Y(r-1)$.

Preuve: cf. [30] 3.1. p. 549. ∎

Comme cela est remarqué dans *loc. cit.* ce théorème s'accompagne de toutes ses conséquences habituelles : existence d'une λ-structure, principe de scindage, etc. Pour plus de détails à ce propos, cf. [2] Exp. VI.

On va maintenant démontrer une formule de Lefschetz-Riemann-Roch qui nous sera utile dans la suite. On se place désormais dans le cas où G est un groupe diagonalisable sur S, $G = D_S(M)$.

Pour X séparé et de type fini sur S on commence par définir l'espace des points fixes de X sous G. On le définit par son foncteur des points : on définit un foncteur $\mathbf{X}^G$ de la catégorie des schémas sur S dans la catégorie des ensembles par la formule

$$\mathbf{X}^G(S') = \{x \in X(S') | x_{S''} \text{ est invariant sous } G(S'') \text{ pour tout } S'' \to S' \text{ au dessus de } S\}$$

Ce foncteur est représentable par un sous-schéma fermé de X car G est un groupe diagonalisable et X est séparé sur S – cf. [9] Exp. VIII 6.3, 6.4 & 6.5 d. On note X^G le sous-schéma fermé de X qui représente le foncteur $\mathbf{X}^G$ et $i : X^G \hookrightarrow X$ l'immersion fermée associée.

La proposition suivante résume certaines des propriétés de cette immersion dont nous aurons besoin dans la suite.

Proposition 5.6. *Soit $G = D_S(M)$ un groupe diagonalisable de type fini sur un schéma S et X un schéma noethérien séparé régulier sur S muni d'une action de G. On note $i : X^G \hookrightarrow X$ l'immersion fermée des points fixes et $\mathscr{C}_{X^G/X}$ son faisceau conormal. Le faisceau $\mathscr{C}_{X^G/X}$ est muni d'une structure de G-$\mathscr{O}_{X^G}$-module. En particulier, comme l'action de G sur X^G est triviale, $\mathscr{C}_{X^G/X}$ se décompose en la somme directe de ses sous-modules propres indexée par M, $\mathscr{C}_{X^G/X} = \oplus_m \mathscr{C}_m$ et G agit sur $\mathscr{C}_m$ par le caractère $m \in M$.*

Alors le schéma X^G est régulier et l'immersion $i : X^G \hookrightarrow X$ est une immersion régulière. De plus, $\mathscr{C}_{X^G/X}$ est localement libre de type fini sur $\mathscr{O}_{X^G}$ et son sous-faisceau propre fixe $\mathscr{C}_0$ est nul.

Preuve: cf. [31] 3.1 p. 455. ∎

La formule de Lefschetz-Riemann-Roch n'est pas vraie directement dans le groupe de K-théorie équivariante cohérente. On est obligé de considérer un localisé bien choisi de ce groupe.

On considère d'abord l'algèbre du groupe G sur $\mathbf{Z}$, $R(G) = \mathbf{Z}[M]$. Dans $\mathbf{Z}[M]$ on considère l'ensemble multiplicatif engendré par les éléments de la forme $1 - [m]$ pour $m \in M$ non nul – $[m]$ désigne l'image d'un élément m de M dans $\mathbf{Z}[M]$. On note alors le localisé par cet ensemble $\mathbf{Z}[M]_{\{1-[m]\}}$.

Maintenant, pour X un schéma séparé et de type fini sur S muni d'une G-action, on considère le localisé du groupe $G_0(G,X)$ par cet ensemble multiplicatif, on le note à nouveau $G_0(G,X)_{\{1-[m]\}}$:

$$G_0(G,X)_{\{1-[m]\}} = G_0(G,X) \otimes_{\mathbf{Z}[M]} \mathbf{Z}[M]_{\{1-[m]\}}$$

De même on peut considérer le groupe $K_0(G,X)_{\{1-[m]\}}$.

En pratique nous rencontrerons toujours le cas $G = \boldsymbol{\mu}_{p,S}$ avec p un nombre premier. On va donc en ce cas décrire plus précisément le localisé dans lequel on travaille.

Alors $R(G) = \mathbf{Z}[T]/(T^p-1)$, l'élément i de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ s'identifiant à T^i. En ce cas on notera donc plutôt $G_0(\boldsymbol{\mu}_{p,S},X)_{\{1-T^i\}}$ et $K_0(\boldsymbol{\mu}_{p,S},X)_{\{1-T^i\}}$ les localisés précédents.

Lemme 5.7. *Soit ζ une racine primitive p-ème de l'unité dans le corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\mu_p)$. Alors on a un isomorphisme*

$$\mathbf{Z}[T]/(T^p-1)_{\{1-T^i\}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}[\zeta][1/p]$$

Preuve: Le lemme chinois fournit un isomorphisme de $\mathbf{Z}$-algèbres $\mathbf{Z}[T]/(T^p-1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}[\zeta]$ donné par $P \mapsto (P(1),P(\zeta))$. En particulier le polynôme $1-T^i$ pour $1 \leqslant 1 < p$ s'envoie sur l'élément $(0,1-\zeta^i)$. Le localisé de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}[\zeta]$ par rapport à l'ensemble multiplicatif engendré par les éléments de la forme $(0,1-\zeta^i)$ pour $1 \leqslant 1 < p$ est exactement le localisé de $\mathbf{Z}[\zeta]$ par rapport à l'ensemble multiplicatif engendré par les éléments $1-\zeta^i$ pour $1 \leqslant 1 < p$. Or ces éléments sont tous conjugués entre eux et de norme égale à p – cf. par exemple [26] 2.9 p. 51. Le localisé que l'on considère n'est donc rien d'autre que $\mathbf{Z}[\zeta][1/p]$. L'isomorphisme annoncé se déduit donc par localisation de l'isomorphisme fourni par le lemme chinois. ∎

Proposition 5.8. *Soit S un schéma noethérien et séparé et X un schéma séparé et de type fini sur S muni d'une $\boldsymbol{\mu}_{p,S}$-action triviale. On fixe ζ une racine primitive p-ème de l'unité dans le corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\mu_p)$.*

Alors on a un isomorphisme

$$G_0(\boldsymbol{\mu}_{p,S},X)_{\{1-T^i\}} \xrightarrow{\sim} G_0(X)[\zeta][1/p]$$

Preuve: L'action de $\boldsymbol{\mu}_{p,S}$ étant triviale sur X, $G_0(\boldsymbol{\mu}_{p,S},X) \xrightarrow{\sim} G_0(X)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}[T]/(T^p-1)$, et donc $G_0(\boldsymbol{\mu}_{p,S},X)_{\{1-T^i\}} \xrightarrow{\sim} G_0(X)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}[T]/(T^p-1)_{\{1-T^i\}}$. L'isomorphisme annoncé se déduit alors du lemme 5.7. ∎

Corollaire 5.9. *La flèche canonique $G_0(X)[1/p] \to G_0(\boldsymbol{\mu}_{p,S},X)_{\{1-T^i\}}$ qui à un fibré cohérent $\mathscr{F}$ sur X associe $\mathscr{F}\otimes 1$ est injective.*

Preuve: Via l'isomorphisme de la proposition 5.8, cette flèche s'identifie à la flèche canonique $G_0(X)[1/p] \to G_0(X)[\zeta][1/p]$ qui est clairement injective. ∎

Corollaire 5.10. *Pour $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent*

$$\mathrm{Ind}^{\boldsymbol{\mu}_{p,S}}(\mathscr{F}) = 0$$

dans $G_0(\boldsymbol{\mu}_{p,S},X)_{\{1-T^i\}}$.

Preuve: Par définition de la représentation induite $\mathrm{Ind}^{\boldsymbol{\mu}_{p,S}}(\mathscr{F}) = \mathscr{F}\otimes(1+T+\ldots+T^{p-1})$. Via l'isomorphisme de la proposition 5.8 cet élément est égal à $\mathscr{F}\otimes(1+\zeta+\ldots+\zeta^{p-1})$ et $1+\zeta+\ldots+\zeta^{p-1}=0$. ∎

La proposition précédente ainsi que ses deux corollaires sont bien entendues vraies également pour $K_0(\boldsymbol{\mu}_{p,S}, X)$ en lieu et place de $G_0(\boldsymbol{\mu}_{p,S}, X)$.

Une fois précisés les groupes de K-théorie dans lesquels on travaille, on peut passer à la démonstration de la formule de Lefschetz-Riemann-Roch.

De manière classique on commence par prouver un théorème de concentration, le théorème 5.14, qui est un théorème d'isomorphisme entre groupes de K-théorie. La connaissance explicite de l'inverse de cet isomorphisme donne alors la formule attendue.

Proposition 5.11. *Soient S un schéma noethérien séparé et $G = D_S(M)$ un groupe diagonalisable de type fini. Soit X un schéma régulier séparé et de type fini sur S muni d'une action de G. On note $i : X^G \hookrightarrow X$ l'immersion des points fixes de X et $\mathscr{C}_{X^G/X}$ son faisceau conormal.*

Alors la classe $\Lambda_{-1}(\mathscr{C}_{X^G/X})$ est inversible dans $K_0(G, X^G)_{|\{1-[m]\}}$.

Preuve: L'action de G sur X^G étant triviale on dispose d'un isomorphisme

$$K_0(G, X^G)_{|\{1-[m]\}} \xrightarrow{\sim} K_0(X^G) \otimes \mathbf{Z}[M]_{\{1-[m]\}}$$

Par ailleurs, $K_0(X^G)$ est le produit des $K_0(Y)$ pour Y parcourant les composantes connexes de X^G. On peut donc, sans perte de généralité, supposer X^G connexe. Alors, pour montrer que $\Lambda_{-1}(\mathscr{C}_{X^G/X})$ est inversible dans $K_0(G, X^G)_{|\{1-[m]\}}$ il suffit de voir qu'il l'est dans le quotient de cet anneau par son nilradical. Or, d'après la preuve de [31] 1.6 p. 451, ce nilradical est isomorphe à $\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}[M]_{\{1-[m]\}}$, c'est-à-dire à $K_0(k(x)) \otimes \mathbf{Z}[M]_{\{1-[m]\}}$, où $k(x)$ est le corps résiduel de n'importe quel point x de X^G. Il suffit donc de prouver que $\mathscr{C}_{X^G/X} \otimes k(x)$ est inversible dans $K_0(k(x)) \otimes \mathbf{Z}[M]_{\{1-[m]\}}$.

On écrit alors comme dans la proposition 5.6 $\mathscr{C}_{X^G/X} = \oplus_m \mathscr{C}_m$, d'où $\mathscr{C}_{X^G/X} \otimes k(x) = \oplus_m(\mathscr{C}_m \otimes k(x))$. En choisissant une base de chacun des sous-espaces vectoriels propres $\mathscr{C}_m \otimes k(x)$, on voit que $\mathscr{C}_{X^G/X} \otimes k(x)$ s'écrit comme une somme de représentations de rang 1 sur lesquels G agit à chaque fois par un caractère donné $m \in M$. Si on écrit donc $\mathscr{C}_{X^G/X} \otimes k(x) = \oplus \mathscr{L}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \Lambda_{-1}(\mathscr{C}_{X^G/X} \otimes k(x)) &= \Lambda_{-1}(\oplus \mathscr{L}) \\ &= \prod \Lambda_{-1}(\mathscr{L}) \\ &= \prod (1 - [\mathscr{L}]) = \prod (1 - [m_{\mathscr{L}}]) \end{aligned}$$

où $m_{\mathscr{L}} \in M$ est le caractère par lequel G agit sur $\mathscr{L}$. Or d'après la proposition 5.6 $\mathscr{C}_0 = 0$ et donc tous les caractères $m_{\mathscr{L}}$ qui apparaissent sont non nuls. Ils sont donc inversibles dans $\mathbf{Z}[M]_{\{1-[m]\}}$ par définition de ce localisé, et la proposition s'en suit. ∎

Proposition 5.12. *Soient S un schéma noethérien séparé et $G = D_S(M)$ un groupe diagonalisable de type fini. Soit X un schéma régulier séparé et de type fini sur S muni d'une action de G. On note $i : X^G \hookrightarrow X$ l'immersion des points fixes de X et $\mathscr{C}_{X^G/X}$ son faisceau conormal. On dispose également de deux flèches $i_* : G_0(G, X^G) \to G_0(G, X)$ et $i^* : G_0(G, X) \to G_0(G, X^G)$.*

Pour $F \in G_0(G, X^G)$ on a alors l'égalité

$$i^* i_* F = F \otimes \Lambda_{-1}(\mathscr{C}_{X^G/X})$$

dans $G_0(G, X^G)$.

Preuve: Les deux membres de l'égalité étant additifs et compte tenu du théorème 5.4, il suffit de prouver le résultat pour $\mathscr{F}$ un fibré localement libre.

On considère le complexe obtenu en prenant une résolution équivariante finie par des fibrés localement libres du complexe $i_*\mathscr{F}$ et en la tensorisant par $\mathscr{O}_{X^G}$. Par définition, les faisceaux d'homologie de ce complexe sont les groupes $\underline{\mathrm{Tor}}_j^{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_{X^G})$ de [15] III 6.5. On en déduit donc que

$$i^*i_*\mathscr{F} = \sum_j (-1)^j \underline{\mathrm{Tor}}_j^{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_{X^G})$$

dans $G_0(G, X^G)$.

Par ailleurs d'après [2] Exp. VII 2.4 on dispose d'un isomorphisme naturel, donc G-équivariant, $\underline{\mathrm{Tor}}_j^{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_{X^G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{X^G}} \underline{\mathrm{Tor}}_j^{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_{X^G}, \mathscr{O}_{X^G})$. Enfin, comme l'immersion i est régulière d'après la proposition 5.6, on dispose d'après [2] Exp. VII 2.5 d'un autre isomorphisme naturel, donc une fois de plus G-équivariant, $\underline{\mathrm{Tor}}_j^{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_{X^G}, \mathscr{O}_{X^G}) \xrightarrow{\sim} \Lambda^i(\mathscr{C}_{X^G/X})$, d'où

$$\begin{aligned} i^*i_*\mathscr{F} &= \mathscr{F} \otimes \sum_j (-1)^j \underline{\mathrm{Tor}}_j^{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_{X^G}, \mathscr{O}_{X^G}) \\ &= \mathscr{F} \otimes \sum_j (-1)^j \Lambda^i(\mathscr{C}_{X^G/X}) \\ &= \mathscr{F} \otimes \Lambda_{-1}(\mathscr{C}_{X^G/X}) \end{aligned}$$

dans $G_0(G, X^G)$, ce qui conclut la preuve. ∎

Nous somme maintenant en mesure d'énoncer le théorème de concentration dont nous allons déduire la formule de Lefschetz dont nous avons besoin. Au cours de la preuve de ce théorème on aura besoin du lemme suivant, un résultat classique de descente galoisienne.

Lemme 5.13. *Soit S un schéma, $G \to S$ un schéma en groupes et $X \to S$ un G-torseur sur S.*

Alors la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents G-équivariants est équivalente à la catégorie des $\mathscr{O}_S$-modules cohérents.

Preuve: Cela résulte de la théorie de la descente fidèlement plate : il suffit de remarquer qu'une structure G-équivariante sur un $\mathscr{O}_X$-module cohérent est équivalent à la donnée d'une structure de descente. Soit donc $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module G-équivariant. $\mathscr{F}$ est donc muni d'un isomorphisme $\theta : \lambda^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} p_X^*(\mathscr{F})$ qui vérifie la condition de cocycle sur $G \times_S G \times_S X$: $(p_{23}^*\theta) \cdot ((1 \times \lambda)^*\theta) = (m \times 1)^*\theta$ On reprend les notations de (5.7) et (5.8).

Par ailleurs X est un G-torseur sous S, d'où un isomorphisme $G \times_S X \xrightarrow{\sim} X \times_S X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$. Sous cet isomorphisme, $p_X : G \times_S X \to X$ s'identifie à la seconde projection $p_2 : X \times_S X \to X$, $\lambda : G \times_S X \to X$ à la première projection $p_1 : X \times_S X \to X$, $1 \times \lambda : G \times_S G \times_S X \to G \times_S X$ à la projection $p_{12} : X \times_S X \times_S X \to X \times_S X$, $m \times 1 : G \times_S G \times_S X \to G \times_S X$ s'identifie à la projection $p_{13} : X \times_S X \times_S X \to X \times_S X$, et $p_{23} : G \times_S G \times_S X \to G \times_S X$ à $p_{23} : X \times_S X \times_S X \to X \times_S X$.

Ainsi, la donnée d'une structure G-équivariante sur $\mathscr{F}$ n'est rien d'autre que la donnée d'un isomorphisme $\theta' : p_1^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} p_2^*\mathscr{F}$ qui vérifie la condition de cocycle $p_{13}^*\theta' = p_{23}^*\theta' \cdot p_{12}^*\theta'$, soit exactement une donnée de descente sur $\mathscr{F}$. Comme $X \to S$ est fidèlement plat et quasi-compact – X est un G-torseur sous S – le lemme est prouvé. ∎

Théorème 5.14. *Soit S un schéma noethérien séparé. On suppose que sur S on dispose d'un isomorphisme de schémas en groupes $\boldsymbol{\mu}_{p,S} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}_S$ pour p un nombre premier. On note $G = \boldsymbol{\mu}_{p,S}$.*

Soit X un schéma régulier séparé et de type fini sur S muni d'une action de G. On note $i : X^G \hookrightarrow X$ l'immersion des points fixes de X et $\mathscr{C}_{X^G/X}$ son faisceau conormal.

Alors la flèche

$$i_* : G_0(G, X^G)_{|\{1-T^i\}} \to G_0(G, X)_{|\{1-T^i\}}$$

est un isomorphisme. De plus son inverse est donné par $F \mapsto i^*F \otimes (\Lambda_{-1}(\mathscr{C}_{X^G/X}))^{-1}$.

Preuve: Soit $F \in G_0(G, X^G)_{\{1-T^i\}}$. En combinant les propositions 5.11 et 5.12 on obtient l'égalité

$$F = i^*i_*(F) \otimes (\Lambda_{-1}(\mathscr{C}_{X^G/X}))^{-1}$$

dans $G_0(G, X^G)_{\{1-T^i\}}$. Cela prouve déjà que i_* est injective et que l'inverse annoncé est un inverse à gauche. Pour démontrer le théorème il suffit donc de prouver que i_* est surjective. On écrit la fin de la suite exacte du théorème 5.3 après localisation

$$G_0(G, X^G)_{\{1-T^i\}} \xrightarrow{i_*} G_0(G, X)_{\{1-T^i\}} \to G_0(G, X - X^G)_{\{1-T^i\}}$$

Il suffit donc de montrer que $G_0(G, X - X^G)_{\{1-T^i\}} = 0$. On va montrer plus généralement le fait suivant, pour un schéma Y séparé et de type fini sur S muni d'une action de G :

$$\text{Si } Y^G = \varnothing \text{ alors } G_0(G, Y)_{\{1-T^i\}} = 0$$

On procède par récurrence noethérienne sur les sous-schémas fermés Y' G-invariants de Y. Le cas où $Y = \varnothing$ est immédiat. On suppose maintenant que $Y \neq \varnothing$ et que pour tout sous-schéma fermé strict Y' G-équivariant de Y, $G_0(G, Y')_{\{1-T^i\}} = 0$. Si l'on peut trouver un ouvert U non vide de Y et G-équivariant tel que $G_0(G, U)_{\{1-T^i\}} = 0$ alors, en posant $Y' = X - U$, Y' admet une structure de sous-schéma fermé G-équivariant d'après [30] 2.5 p. 546 et $Y' \neq Y$, et l'hypothèse de récurrence combinée à la suite exacte de localisation

$$G_0(G, Y')_{\{1-T^i\}} \xrightarrow{i_*} G_0(G, Y)_{\{1-T^i\}} \to G_0(G, U)_{\{1-T^i\}}$$

permet alors de conclure que $G_0(G, Y)_{\{1-T^i\}} = 0$. Il suffit donc de trouver un ouvert U non vide et G-équivariant de Y tel que $G_0(G, U)_{\{1-T^i\}} = 0$.

Remarquons d'abord que si U est un ouvert non vide et G-équivariant de Y, G opère librement sur U : U ne contient pas de points fixes sous l'action de G par hypothèse et donc les stabilisateurs de ses points sont toujours des sous-groupes propres de G. Or $G \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}_S$ par hypothèse, donc ces stabilisateurs sont tous nuls.

Cela dit, d'après [9] Exp. V 10.3.1 p. 285 il existe un ouvert non vide et G-équivariant U de Y tel que le quotient $V = G\backslash U$ existe dans la catégorie des S-schémas. De plus, comme G opère librement sur U, U est un G-torseur sous V. En particulier, d'après le lemme 5.13, le foncteur π^* défini par la projection $\pi : U \to V$ induit une équivalence de catégorie entre les faisceaux cohérents G-équivariants sur U et les faisceaux cohérents sur V.

Pour prouver la nullité de $G_0(G, U)_{\{1-T^i\}}$, il suffit de prouver que $\mathscr{O}_U = 0$ dans cet anneau, ou encore, que $p \cdot \mathscr{O}_U = \mathscr{O}_U^{\oplus p} = 0$ car p est inversible dans cet anneau d'après le lemme 5.7. On note $f : U \to S$ le morphisme structural.

On considère alors le G-faisceau $\mathscr{F} = \mathrm{Ind}^G(\mathscr{O}_U)$ – il est bien défini car G est isomorphe au groupe constant $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}_S$. D'après 5.10, $\mathscr{F} = \mathrm{Ind}^G(f^*\mathscr{O}_S) = f^*\mathrm{Ind}^G(\mathscr{O}_S)$. De plus S est

muni d'une $G = \boldsymbol{\mu}_{p,S}$-action triviale donc, d'après le corollaire 5.10, $\mathrm{Ind}^G(\mathscr{O}_S) = 0$ dans $G_0(G,U)_{\{1-T^i\}}$, et donc $\mathscr{F} = 0$ dans $G_0(G,U)_{\{1-T^i\}}$.

Par ailleurs, $\mathscr{F}$ est un faisceau cohérent G-équivariant. D'après le lemme 5.13 il existe donc un faisceau $\mathscr{F}_1$ sur V tel que l'on ait un isomorphisme de faisceaux G-équivariants $\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \pi^*\mathscr{F}_1$. De plus, $\mathscr{F}$ est un faisceau localement libre de rang p, il en est donc de même pour $\mathscr{F}_1$ sur V. Quitte à se restreindre à un ouvert non vide bien choisi V_1 de V et à remplacer U par $\pi^{-1}(V_1)$ on peut donc supposer que $\mathscr{F}_1 \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_V^p$. Alors on obtient un isomorphisme de faisceaux G-équivariants $\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_U^p = p \cdot \mathscr{O}_U$.

On en déduit donc que $p \cdot \mathscr{O}_U = 0$ dans $G_0(G,U)_{\{1-T^i\}}$ et cela conclut la preuve du théorème. ∎

Théorème 5.15. *Soit S un schéma noethérien séparé. On suppose que sur S on dispose d'un isomorphisme de schémas en groupes $\boldsymbol{\mu}_{p,S} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}_S$ pour p un nombre premier. On note $G = \boldsymbol{\mu}_{p,S}$.*

Soient X et Y deux schémas réguliers séparés et de type fini sur S munis d'une action de G.

On note $i : X^G \hookrightarrow X$ l'immersion régulière des points fixes de X sous l'action de G fournie par la proposition 5.6 et $\mathscr{C}_{X^G/X}$ son faisceau conormal.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et G-équivariant. On note $f' : X^G \to Y^G$ le morphisme induit sur les points fixes de X et Y sous l'action de G.

Alors pour $F \in G_0(G, X^G)_{\{1-T^i\}}$, l'image directe $f_*(F)$ est donnée par la formule

$$f_*(F) = f'_*(\Lambda_{-1}(\mathscr{C}_{X^G/X})^{-1} \cdot i^*F)$$

Preuve: Il suffit de remarquer que $f' = f \circ i$, d'où l'égalité $f'_* = f_* i_*$. Le morphisme i_* est un isomorphisme de $G_0(G, X^G)_{\{1-T^i\}}$ dans $G_0(G, X)_{\{1-T^i\}}$ d'après le théorème 5.14. En composant à droite par l'inverse de cet isomorphisme on obtient l'égalité $f_*(\ ) = f'_*(\Lambda_{-1}(\mathscr{C}_{X^G/X})^{-1} \cdot i^*(\ ))$, ce qui conclut la preuve. ∎

5.3 Preuve du théorème 5.1

On passe maintenant à la preuve du théorème 5.1 à proprement parler.

Soient donc X et Y deux schémas divisoriels avec Y régulier noethérien et séparé et $f : X \to Y$ un morphisme propre et lisse.

On suppose en outre que Y est un schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k])$.

Remarquons tout de suite que X est également un schéma régulier car f est lisse.

Dans la suite, c'est le schéma Y qui va nous servir de base (il vérifie bien toutes les hypothèses exigées par le schéma de base S de la section 5.2).

5.3.1 Deux remarques préliminaires

Les deux remarques que l'on trouve ici préparent la preuve du théorème : la première va permettre de se ramener à un cas plus simple, la seconde exploite le fait que l'on travaille au dessus $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k])$.

Dans l'énoncé du théorème 5.1 on veut démontrer la formule d'Adams-Riemann-Roch pour l'entier k. En vertu de la proposition suivante, il suffit en fait de démontrer la formule d'Adams-Riemann-Roch pour les diviseurs premiers de k.

Proposition 5.16. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux schémas. On suppose que des conditions suffisantes pour énoncer le théorème d'Adams-Riemann-Roch sont réunies.*

Soient deux entiers p_1 et p_2 tels que pour tout $E \in K_0(X)$

$$\psi^{p_i}(f_*(E)) = f_*(\theta^{p_i}(\Omega_f)^{-1} \cdot \psi^{p_i}(E))$$

dans $K_0(Y)[\frac{1}{p_i}]$ pour $i = 1, 2$.

Alors

$$\psi^{p_1p_2}(f_*(E)) = f_*(\theta^{p_1p_2}(\Omega_f)^{-1} \cdot \psi^{p_1p_2}(E))$$

dans $K_0(Y)[\frac{1}{p_1p_2}]$ pour tout E dans $K_0(X)$.

Preuve: Cela résulte d'un petit calcul. Soit donc $E \in K_0(X)$. Alors, dans $K_0(Y)[\frac{1}{p_1p_2}]$

$$\begin{aligned}
\psi^{p_1p_2}(f_*(E)) &= \psi^{p_1}(f_*(\theta^{p_2}(\Omega_f)^{-1} \cdot \psi^{p_2}(E))) \\
&= f_*(\theta^{p_1}(\Omega_f)^{-1} \cdot \psi^{p_1}(\theta^{p_2}(\Omega_f)^{-1} \cdot \psi^{p_2}(E))) \\
&= f_*((\theta^{p_1}(\Omega_f) \cdot \psi^{p_1}(\theta^{p_2}(\Omega_f)))^{-1} \cdot \psi^{p_1p_2}(E))
\end{aligned}$$

Pour conclure la preuve il suffit donc de montrer que $\theta^{p_1}(\Omega_f) \cdot \psi^{p_1}(\theta^{p_2}(\Omega_f)) = \theta^{p_1p_2}(\Omega_f)$.

Pour $F \in K_0(X)$ on pose $\kappa(F) = \theta^{p_1}(F) \cdot \psi^{p_1}(\theta^{p_2}(F))$ et l'on va montrer plus généralement que

$$\kappa(F) = \theta^{p_1p_2}(F) \tag{5.11}$$

pour tout F dans $K_0(X)$.

On a de manière évidente la relation $\kappa(F_1 + F_2) = \kappa(F_1) \cdot \kappa(F_2)$ pour F_1 et F_2 dans $K_0(X)$. De même, κ est compatible avec l'image réciproque. Pour prouver l'égalité (5.11) il suffit donc de la prouver pour des fibrés de rang 1. Soit donc $\mathscr{L}$ un tel fibré. Alors

$$\begin{aligned}
\kappa(\mathscr{L}) &= \theta^{p_1}(\mathscr{L}) \cdot \psi^{p_1}(\theta^{p_2}(\mathscr{L})) \\
&= \frac{1 - \mathscr{L}^{\otimes p_1}}{1 - \mathscr{L}} \cdot \psi^{p_1}\left(\frac{1 - \mathscr{L}^{\otimes p_2}}{1 - \mathscr{L}}\right) \\
&= \frac{1 - \mathscr{L}^{\otimes p_1}}{1 - \mathscr{L}} \cdot \frac{1 - \mathscr{L}^{\otimes p_1p_2}}{1 - \mathscr{L}^{\otimes p_1}} \\
&= \frac{1 - \mathscr{L}^{\otimes p_1p_2}}{1 - \mathscr{L}} = \theta^{p_1p_2}(\mathscr{L})
\end{aligned}$$

Cela prouve que $\kappa(F) = \theta^{p_1p_2}(\mathscr{F})$ pour tout F dans $K_0(X)$. En appliquant cela à $F = \Omega_f$ on en déduit que

$$\psi^{p_1p_2}(f_*(E)) = f_*(\theta^{p_1p_2}(\Omega_f)^{-1} \cdot \psi^{p_1p_2}(E))$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. ∎

La proposition suivante prouve que pour S' un schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k])$ le groupe des racines k-èmes de l'unité sur S' s'identifie au groupe constant cyclique d'ordre k. Cela va nous permettre dans la suite de définir des action de groupe de manière aisée.

Proposition 5.17. *Soit S un schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k])$.*

Alors, on a un isomorphisme de schémas en groupes

$$\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}_S \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_{k,S}$$

Preuve: On note $R = \mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_k)}[1/k]$.

Pour prouver le résultat, il suffit de prouver que $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}_R$ et $\boldsymbol{\mu}_{k,R}$ sont isomorphes en tant que schémas en groupes. La proposition découle alors de cet isomorphisme par changement de base.

La R-algèbre associée à $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}_R$ est R^k, tandis que $\boldsymbol{\mu}_{k,R}$ correspond à $R[T]/(T^k-1)$. D'après le lemme chinois

$$R[T]/(T^k-1) \xrightarrow{\sim} R^k$$

d'où, déjà, un isomorphisme de schémas

$$\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}_R \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_{k,R} \tag{5.12}$$

Cet isomorphisme de schémas est en fait un isomorphisme de schémas en groupes. Pour le voir il suffit de considérer les foncteurs des points. Soit donc R_1 une R-algèbre. On peut, sans perte de généralité, se limiter au cas où $\mathrm{Spec}(R_1)$ est connexe, de sorte que $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}(R_1) = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$. Alors la flèche (5.12) induit une flèche

$$\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}(R_1) = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \to \mu_k(R_1)$$

$$i \mapsto \xi^i$$

qui est trivialement un morphisme de groupes. Cela prouve donc que la flèche (5.12) est bien un isomorphisme de schémas en groupes et conclut la preuve. ∎

Remarque 5.18. L'isomorphisme de la proposition 5.17 n'est pas canonique car il dépend du choix d'une racine primitive k-ème de l'unité.

Corollaire 5.19. *Pour tout nombre premier p divisant k, on a $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}_S \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_{p,S}$.*

5.3.2 Preuve du théorème 5.1

On revient à notre schéma Y donné dans le théorème 5.1 et on fixe un nombre premier p divisant k. Avant d'étudier spécifiquement le morphisme propre et lisse $f : X \to Y$ on indique une construction générale.

Soit donc Z un schéma séparé et de type fini sur Y. On note $g : Z \to Y$ le morphisme structural.

On introduit alors le Y-schéma

$$Z_1 := \underbrace{Z \times_Y \ldots \times_Y Z}_{p \text{ fois}}$$

et on note $g_1 : Z_1 \to Y$ le morphisme structural induit par g.

On considère le groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$.

Soit alors $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ le cycle $\sigma = (1, 2, \ldots, p)$. C'est un cycle d'ordre p et on note G le groupe qu'il engendre. Le groupe G s'identifie à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ via l'isomorphisme qui envoie σ sur la classe de 1. Alors d'après la proposition 5.17 et le corollaire 5.19

$$G_Y = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_{p,Y} \tag{5.13}$$

D'après la remarque 5.18 cet isomorphisme n'est pas canonique et dépend du choix d'une racine primitive p-ème de l'unité dans $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\mu_p)}$. On fixe désormais une telle racine ζ.

Le groupe constant G_Y agit alors par permutation des facteurs sur Z_1 : σ définit un isomorphisme

$$\sigma_{Z_1} : Z_1 \to Z_1$$
$$(x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = (x_2, \ldots, x_p, x_1)$$

qui vérifie bien $\sigma_{Z_1}^p = \mathrm{id}_{Z_1}$. On omettra souvent l'indice Z_1 dans la suite, quand la situation est claire.

On munit Y d'une G_Y-action triviale. Alors $g_1 : Z_1 \to Y$ est un morphisme G_Y-équivariant.

Les points fixes de Z_1 sous l'action de G_Y s'identifient à Z plongé dans Z_1 par le plongement diagonal

$$\Delta : Z \hookrightarrow Z_1$$

et $g = g_1 \circ \Delta$.

On note $\mathscr{C}_\Delta$ le faisceau conormal de l'immersion Δ.

Soit alors $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_Z$-module cohérent localement libre. On définit

$$S\mathscr{E} = \underbrace{\mathscr{E} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathscr{E}}_{p \text{ fois}} = q_1^*\mathscr{E} \otimes \ldots \otimes q_p^*\mathscr{E}$$

où $q_i : Z_1 \to Z$ est la i-ème projection.

Remarquons tout de suite que $q_i \circ \sigma^j = q_{i+j}$, où l'addition est calculée modulo p. En particulier, si l'on note $E = q_1^*\mathscr{E}$

$$S\mathscr{E} = E \otimes \sigma^* E \otimes \ldots \otimes (\sigma^{p-1})^* E$$

A partir de cette écriture on voit immédiatement que $S\mathscr{E}$ est muni d'une structure G_Y-équivariante par permutation des facteurs.

On pose alors

$$\chi(\mathscr{E}) = \Delta^* S\mathscr{E}$$

Lemme 5.20. *Soient Z et Z' deux schémas séparés et de type fini sur Y.*
Soit alors $h : Z' \to Z$ un Y-morphisme.
Alors pour tout $\mathscr{O}_Z$-module cohérent localement libre $\mathscr{E}$

$$\chi(h^*\mathscr{E}) = h^*\chi(\mathscr{E})$$

Preuve: Le morphisme $h : Z' \to Z$ induit une flèche $h_1 : Z'_1 \to Z_1$ qui vérifie, avec des notations évidentes, $h \circ q'_i = q_i \circ h_1$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $\Delta \circ h = h_1 \circ \Delta'$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\chi(h^*\mathscr{E}) &= \Delta' S(h^*\mathscr{E}) \\
&= \Delta'^*(q_1'^* h^*\mathscr{E} \otimes \ldots \otimes q_p'^* h^*\mathscr{E}) \\
&= \Delta'^*(h_1^* q_1^*\mathscr{E} \otimes \ldots \otimes h_1^* q_p^*\mathscr{E}) \\
&= \Delta'^* h_1^* S\mathscr{E} \\
&= h^*\Delta^* S\mathscr{E} = h^*\chi(\mathscr{E})
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ∎

Lemme 5.21. *Soit Z un schéma séparé et de type fini sur Y.*

Soient $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ deux $\mathscr{O}_Z$-modules cohérents localement libres. On pose $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$. Alors

$$\chi(\mathscr{E}) = \chi(\mathscr{E}_1) \oplus \chi(\mathscr{E}_2) \oplus \mathscr{E}_3$$

où $\mathscr{E}_3$ est une somme de G_Y-modules induits.

Preuve: On note $E = q_1^*\mathscr{E}$, $E_1 = q_1^*\mathscr{E}_1$ et $E_2 = q_1^*\mathscr{E}_2$, de sorte que $S\mathscr{E} = E \otimes \sigma^*E \otimes \ldots \otimes (\sigma^{p-1})^*E$, $S\mathscr{E}_1 = E_1 \otimes \sigma^*E_1 \otimes \ldots \otimes (\sigma^{p-1})^*E_1$ et $S\mathscr{E}_2 = E_2 \otimes \sigma^*E_2 \otimes \ldots \otimes (\sigma^{p-1})^*E_2$.

On calcule alors

$$\begin{aligned} S\mathscr{E} &= E \otimes \sigma^*E \otimes \ldots \otimes (\sigma^{p-1})^*E \\ &= (E_1 \oplus E_2) \otimes \sigma^*(E_1 \oplus E_2) \otimes \ldots \otimes (\sigma^{p-1})^*(E_1 \oplus E_2) \\ &= \oplus(E_{i_1} \otimes \sigma^*E_{i_2} \otimes \ldots \otimes (\sigma^{p-1})^*E_{i_p}) \end{aligned}$$

où la dernière somme directe porte sur tous les p-uplets $(i_1, \ldots, i_p)$ avec $i_j \in \{1, 2\}$. Il y a donc exactement 2^p termes dans cette somme. Soit P l'ensemble de ces 2^p termes. On peut faire agir G sur P par

$$\sigma \cdot (E_{i_1} \otimes \sigma^*E_{i_2} \otimes \ldots \otimes (\sigma^{p-1})^*E_{i_p}) = E_{i_{\sigma(1)}} \otimes \sigma^*E_{i_{\sigma(2)}} \otimes \ldots \otimes (\sigma^{p-1})^*E_{i_{\sigma(p)}}$$

Pour $M \in P$ on note Ω_M l'orbite de M sous l'action de P.

Seulement deux éléments ont un stabilisateur égal à G – et donc une orbite réduite à eux-mêmes – ce sont précisément les termes $E_1 \otimes \sigma^*E_1 \otimes \ldots \otimes (\sigma^{k-1})^*E_1$ et $E_2 \otimes \sigma^*E_2 \otimes \ldots \otimes (\sigma^{k-1})^*E_2$, soit $S\mathscr{E}_1$ et $S\mathscr{E}_2$.

Si maintenant M est un élément de P distinct de $S\mathscr{E}_1$ et de $S\mathscr{E}_2$, son stabilisateur est nécessairement réduit à $\{0\}$, puisque c'est le seul sous-groupe propre de G. Alors

$$\bigoplus_{N \in \Omega_M} N = \bigoplus_{i=0}^{p-1} (\sigma^i)^*M = \mathrm{Ind}^{G_Y}(M)$$

d'après la définition de la section 5.1.3.

Soit alors $M_1, \ldots, M_r$ des représentants des orbites non-triviales de P sous l'action de G. Les orbites $\Omega_{M_1}, \ldots, \Omega_{M_r}$ auxquelles on adjoint les deux orbites triviales $\{S\mathscr{E}_1\}$ et $\{S\mathscr{E}_2\}$ forment une partition de P d'où

$$\begin{aligned} S\mathscr{E} &= S\mathscr{E}_1 \oplus S\mathscr{E}_2 \oplus_{i=1}^r (\oplus_{N \in \Omega_{M_i}} N) \\ &= S\mathscr{E}_1 \oplus S\mathscr{E}_2 \oplus_{i=1}^r \mathrm{Ind}^{G_Y}(M_i) \end{aligned}$$

En prenant l'image inverse par Δ on obtient alors

$$\begin{aligned} \chi(\mathscr{E}) &= \chi(\mathscr{E}_1) \oplus \chi(\mathscr{E}_2) + \oplus_{i=1}^r \Delta^*\mathrm{Ind}^{G_Y}(M_i) \\ &= \chi(\mathscr{E}_1) \oplus \chi(\mathscr{E}_2) + \oplus_{i=1}^r \mathrm{Ind}^{G_Y}(\Delta^*M_i) \text{ d'après (5.10).} \\ &= \chi(\mathscr{E}_1) \oplus \chi(\mathscr{E}_2) \oplus \mathscr{E}_3 \end{aligned}$$

et $\mathscr{E}_3$ est bien une somme de modules induits comme annoncé. ∎

Afin de traiter le cas non scindé on aura besoin du lemme de déformation suivant.

Lemme 5.22. *Soit Z un schéma quasi-compact et*

$$0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}_2 \to 0$$

une suite exacte de faisceaux cohérents localement libres sur Z.

On note $p_Z : \mathbf{P}^1_Z \to Z$ la projection, $s_0 : Z \to \mathbf{P}^1_Z$ la section nulle, $s_\infty : Z \to \mathbf{P}^1_Z$ la section à l'infini, $E_1 = p_Z^* \mathscr{E}_1$ et $E_2 = p_Z^* \mathscr{E}_2$.

Alors il existe un faisceau cohérent localement libre E sur $\mathbf{P}^1_Z$ tel que l'on ait une suite exacte courte

$$0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$$

et que $s_0^* E \cong \mathscr{E}$ et $s_\infty^* E \cong \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$.

Preuve: cf. [3] p. 74. ∎

On rappelle que, du fait de l'isomorphisme $G_Y \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_{p,Y}$, l'algèbre de G_Y est

$$R(G_Y) = \mathscr{O}_Y[T]/(T^p - 1)$$

Proposition 5.23. *Soient Z un schéma séparé et de type fini sur Y.*

La fonction qui à un $\mathscr{O}_Z$-module cohérent localement libre $\mathscr{E}$ associe $\chi(\mathscr{E})$ définit un morphisme de groupes

$$\chi : K_0(Z) \to K_0(G_Y, Z)_{\{1-T^i\}}$$

Preuve: Il suffit de prouver que pour toute suite exacte courte de $\mathscr{O}_Z$-modules cohérents localement libres

$$0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}_2 \to 0$$

$\chi(\mathscr{E}) = \chi(\mathscr{E}_1) + \chi(\mathscr{E}_2)$ dans $K_0(G_Y, Z)_{\{1-T^i\}}$.

Soit donc la suite exacte courte sur $\mathbf{P}^1_Z$ donnée par le lemme 5.22 :

$$0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$$

Alors $s_0^* \chi(E) = \chi(s_0^* E) = \chi(\mathscr{E})$ et $s_\infty^* \chi(E) = \chi(s_\infty^* E) = \chi(\mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2)$ dans $K_0(G_Y, Z)$ d'après le lemme 5.20.

Par ailleurs, d'après le théorème 5.5, $K_0(G_Y, \mathbf{P}^1_Z)$ est un $K_0(G_Y, Z)$-module libre engendré par les puissances de $\mathscr{O}(1)$. On en déduit que s_0 et s_∞ induisent les mêmes applications de $K_0(G_Y, \mathbf{P}^1_Z)$ dans $K_0(G_Y, Z)$. En particulier $s_0^* \chi(E) = s_\infty^* \chi(E)$ et donc

$$\chi(\mathscr{E}) = \chi(\mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2) = \chi(\mathscr{E}_1) + \chi(\mathscr{E}_2) + \mathscr{E}_3$$

où $\mathscr{E}_3$ est une somme finie de représentations induites d'après le lemme 5.21, c'est-à-dire $\mathscr{E}_3 = \oplus_i \mathrm{Ind}^{G_Y}(\mathscr{F}_i)$ pour $\mathscr{F}_i$ des faisceaux cohérents localement libres sur Z.

Du fait de l'isomorphisme $G_Y \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_{p,Y}$ on a l'égalité $\mathrm{Ind}^{G_Y}(\mathscr{F}_i) = \mathrm{Ind}^{\boldsymbol{\mu}_{p,Y}}(\mathscr{F}_i)$ et ces représentations induites sont donc nulles dans $K_0(G_Y, Z)_{\{1-T^i\}}$ d'après le corollaire 5.10, puisque Z est muni d'une G_Y-action triviale. Dans ce groupe on a donc l'égalité

$$\chi(\mathscr{E}) = \chi(\mathscr{E}_1) + \chi(\mathscr{E}_2)$$

C'est l'égalité que nous voulions prouver. ∎

Nous somme maintenant en mesure de démontrer la proposition suivante.

Proposition 5.24. *Soit Z un schéma séparé de type fini sur Y.*
Alors, pour $E \in K_0(Z)$

$$\Delta^* SE = \psi^p(E)$$

dans $K_0(G_Y, Z)_{\{1-T^i\}}$

Preuve: L'opérateut ψ^p est entièrement déterminé par trois propriétés : il commute à l'image réciproque, c'est un morphisme additif et pour $\mathscr{L}$ un fibré de rang 1 $\psi^p(\mathscr{L}) = \mathscr{L}^{\otimes p}$. Pour prouver la proposition il suffit donc de vérifier que χ satisfait également ces trois conditions.

La compatibilité aux images réciproques n'est rien d'autre que le lemme 5.20 et l'additivité la proposition 5.23.

Soit maintenant $\mathscr{L}$ un fibré de rang 1 sur Z. Alors l'action de G_Y est trivial sur $S\mathscr{L}$ qui ne contient donc pas de sous-module induit. Cela assure que l'on a bien $\chi(\mathscr{L}) = \Delta^* S\mathscr{L} = \mathscr{L}^{\otimes^p}$ dans $G_0(G_Y, Z)_{\{1-T^i\}}$, ce qui conclut la preuve de la proposition. ∎

Proposition 5.25. *Soient Z un schéma propre et lisse sur Y. On note $g : Z \to Y$ le morphisme structural de Z et $g_1 : Z_1 \to Y$ le morphisme de Z_1 induit par g.*
Alors, pour $E \in K_0(Z)$

$$g_{1*}(SE) = \psi^p(g_*(E))$$

dans $K_0(G_Y, Y)_{\{1-T^i\}}$.

Preuve: Pour prouver la proposition, il suffit de prouver l'égalité

$$g_{1*}(SE) = \Delta^* S(g_* E) \tag{5.14}$$

dans $K_0(G_Y, Y)$: en combinant cette égalité avec la proposition 5.24 on obtient $g_{1*}(SE) = \psi^p(g_*(E))$ dans $K_0(G_Y, Y)_{\{1-T^i\}}$, ce qui est le résultat souhaité. Prouvons donc l'égalité (5.14).

Remarquons que $\Delta^* S(g_* E) = (g_* E)^{\otimes k}$. Il suffit de prouver l'égalité (5.14) pour $k = 2$, le résultat pour k quelconque s'en déduisant par une récurrence immédiate. Dans le cas où $k = 2$ on dispose du carré cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{q_2} & Z \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec $g_1 = g \circ q_1 = g \circ q_2$.

On calcule alors

$$\begin{aligned} g_1^*(SE) &= g_* q_{1*}(q_1^* E \cdot q_2^* E) \\ &= g_*(E \cdot q_{1*} q_2^* E) \text{ d'après 1.15} \\ &= g_*(E \cdot g^* g_* E) \text{ d'après 1.16} \\ &= g_* E \cdot g_* E \text{ d'après 1.15} \\ &= \Delta^* S(g_* E) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ∎

On se place toujours dans un cas général et l'on considère un schéma Z séparé et de type fini sur Y. On le munit d'une G_Y-action triviale.

Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_Z$-module cohérent localement libre. Le module $\mathrm{Ind}^{G_Y}(\mathscr{E})$ est isomorphe à $\mathscr{E}^{\oplus p}$ muni de l'action par permutation des facteurs et l'on peut définir un morphisme de G_Y-module – on voit $\mathscr{E}$ comme un G_Y-module trivial

$$\mathscr{E}^{\oplus p} \to \mathscr{E}$$

$$(s_1, \ldots, s_p) \mapsto s_1 + \ldots + s_p$$

C'est un morphisme surjectif, de telle sorte que si on note note $\mathscr{E}_0$ son noyau, qui est muni d'une structure de G_Y-module induite par celle de $\mathscr{E}^{\oplus p}$, on obtient une suite exacte courte de G_Y-modules

$$0 \to \mathscr{E}_0 \to \mathscr{E}^{\oplus p} \to \mathscr{E} \to 0$$

On pose alors

$$\eta(\mathscr{E}) = \Lambda_{-1}(\mathscr{E}_0)$$

La fonction η ainsi définie transforme les sommes directes en produits : pour $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux $\mathscr{O}_Z$-modules cohérents localement libres

$$\eta(\mathscr{E} \oplus \mathscr{F}) = \eta(\mathscr{E}) \otimes \eta(\mathscr{F})$$

Cela résulte d'un petit calcul. Ecrivons les trois suites exactes courtes associées respectivement à $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{E} \oplus \mathscr{F}$.

$$0 \to \mathscr{E}_0 \to \mathscr{E}^{\oplus p} \to \mathscr{E} \to 0$$

$$0 \to \mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}^{\oplus p} \to \mathscr{F} \to 0$$

$$0 \to (\mathscr{E} \oplus \mathscr{F})_0 \to \mathscr{E}^{\oplus p} \oplus \mathscr{F}^{\oplus p} \to \mathscr{E} \oplus \mathscr{F} \to 0$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} \Lambda_t((\mathscr{E} \oplus \mathscr{F})_0) &= \Lambda_t(\mathscr{E}^{\oplus p} \oplus \mathscr{F}^{\oplus p})\Lambda_t(\mathscr{E} \oplus \mathscr{F})^{-1} \\ &= \Lambda_t(\mathscr{E}^{\oplus p})\Lambda_t(\mathscr{E})^{-1}\Lambda_t(\mathscr{F}^{\oplus p})\Lambda_t(\mathscr{F})^{-1} \\ &= \Lambda_t(\mathscr{E}_0)\Lambda_t(\mathscr{F}_0) \end{aligned}$$

et donc $\eta(\mathscr{E} \oplus \mathscr{F}) = \Lambda_{-1}((\mathscr{E} \oplus \mathscr{F})_0) = \Lambda_{-1}(\mathscr{E}_0)\Lambda_{-1}(\mathscr{F}_0) = \eta(\mathscr{E})\eta(\mathscr{F})$.

On peut donc étendre η en une application

$$\eta : K_0(Z) \to K_0(G_Y, Z)$$

Avant de passer à la proposition suivante on rappelle un lemme trivial.

Lemme 5.26. *Soit K un corps sur lequel le polynôme $T^p - 1$ est scindé à racines simples. Soit alors ζ une racine primitive p-ème de l'unité dans K. On note $P_p \in K[T]$ le polynôme $P_p(T) = (1 - \zeta T)(1 - \zeta^2 T) \ldots (1 - \zeta^{p-1} T)$.*

Alors $P_p(T) = 1 + T + \ldots + T^{p-1}$.

Preuve: On calcule $P_p(T) = T^{p-1}(T^{-1} - \zeta) \ldots (T^{-1} - \zeta^{p-1}) = T^{p-1}(1 + T^{-1} + \ldots + T^{-(p-1)}) = 1 + T + \ldots + T^{p-1}$. ∎

Proposition 5.27. *Soit Z un schéma séparé et de type fini sur Y.*

Soit $E \in K_0(Z)$. Alors

$$\eta(E) = \theta^p(E)$$

dans $K_0(G_Y, Z)$.

Preuve: La classe cannibale de Bott est caractérisée par trois propriétés : elle commute à l'image inverse, elle transforme sommes en produits et pour $\mathscr{L}$ un fibré de rang 1 $\theta^p(\mathscr{L}) = 1 + \mathscr{L} + \ldots + \mathscr{L}^{\otimes p-1}$. On va donc vérifier que η possède ces trois propriétés.

On a déjà remarqué que η transformait sommes directes en produits. La compatibilité à l'image inverse est évidente une fois remarqué que l'on travaille avec des $\mathscr{O}_Z$-modules localement libres, donc plats.

Reste à calculer $\eta(\mathscr{L})$ pour $\mathscr{L}$ un fibré de rang 1. On écrit la suite exacte correspondante

$$0 \to \mathscr{L}_0 \to \mathscr{L}^{\oplus p} \to \mathscr{L} \to 0$$

Alors $\Lambda_t(\mathscr{L}_0) = \Lambda_t(\mathscr{L}^{\oplus p})\Lambda_t(\mathscr{L})$.

$\mathscr{L}$ est muni d'une G_Y-structure triviale, et donc $\Lambda_t(\mathscr{L}) = 1 + \mathscr{L}t$.

En ce qui concerne $\mathscr{L}^{\oplus p}$, ce n'est rien d'autre que $\mathrm{Ind}^{G_Y}(\mathscr{L})$. Une fois de plus, du fait de l'isomorphisme $G_Y \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_{p,Y}$ on a l'égalité $\mathrm{Ind}^{G_Y}(\mathscr{L}) = \mathrm{Ind}^{\boldsymbol{\mu}_{p,Y}}(\mathscr{L})$. Par ailleurs, on avait noté ζ la racine primitive p-ème de l'unité qui permet de définir l'isomorphisme (5.13). Alors on a en ce cas

$$\mathrm{Ind}^{\boldsymbol{\mu}_{p,Y}}(\mathscr{L}) = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathscr{L} \otimes \zeta^i$$

d'après (5.5). Alors

$$\Lambda_t(\mathscr{L}^{\oplus p}) = \Lambda_t(\oplus_i (1 + (\mathscr{L} \otimes \zeta^i)t) = \prod_{i=0}^{p-1} \Lambda_t(\mathscr{L} \otimes \zeta^i) = (1 + \mathscr{L}t)(1 + \zeta\mathscr{L}t) \ldots (1 + \zeta^{p-1}\mathscr{L}t)$$

et donc $\Lambda_t(\mathscr{L}_0) = (1 + \zeta\mathscr{L}t) \ldots (1 + \zeta^{p-1}\mathscr{L}t) = P_p(-\mathscr{L}t)$ avec les notations du lemme 5.26.

Finalement, $\Lambda_{-1}(\mathscr{L}_0) = P_p(\mathscr{L}) = 1 + \mathscr{L} + \ldots + \mathscr{L}^{p-1}$ d'après le lemme 5.26, ce qui prouve bien que dans ce cas $\eta(\mathscr{L}) = \theta^p(\mathscr{L})$. Cela conclut la preuve. ∎

On va maintenant utiliser cette fonction η dans le cas d'un schéma régulier Z sur Y. Avant cela, on rappelle le résultat classique suivant.

Lemme 5.28. *Soient Z_1 et Z_2 deux schémas sur Y. On considère le produit fibré $Z_1 \times_Y Z_2$ et on note p_1 et p_2 les deux projections. Alors les deux flèches naturelles $p_1^*\Omega_{Z_1/Y} \to \Omega_{Z_1 \times_Y Z_2/Y}$ et $p_2^*\Omega_{Z_2/Y} \to \Omega_{Z_1 \times_Y Z_2/Y}$ induisent une flèche*

$$p_1^*\Omega_{Z_1/Y} \oplus p_2^*\Omega_{Z_2/Y} \to \Omega_{Z_1 \times_Y Z_2/Y}$$

qui est un isomorphisme.

Preuve: cf. [15] IV 16.4.23. ∎

Proposition 5.29. *Soient Z un schéma séparé et lisse sur Y. On note $h : Z \to Y$ le morphisme structural. On note $h_1 : Z_1 \to Y$ le morphisme induit et $\mathscr{C}_\Delta$ le faisceau conormal de l'immersion diagonale $\Delta : Z \hookrightarrow Z_1$.*

Alors on a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{C}_\Delta \to \Omega_{Z/Y}^{\oplus p} \to \Omega_{Z/Y} \to 0$$

et la flèche $\Omega_{Z/Y}^{\oplus p} \to \Omega_{Z/Y}$ est $(s_1, \ldots, s_p) \mapsto s_1 + \ldots + s_p$.

Preuve: D'après [15] IV 17.2.5 on a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{C}_\Delta \to \Delta^*\Omega_{Z_1/Y} \to \Omega_{Z/Y} \to 0$$

car $h = h_1 \circ \Delta$ est lisse.

Par ailleurs, le lemme 5.28 implique, par une récurrence évidente, que $\Omega_{Z_1/Y} \cong \oplus_i q_i^*\Omega_{Z/Y}$. Alors $\Delta^*\Omega_{Z_1/Y} \cong \oplus_i \Delta^* q_i^*\Omega_{Z/Y} = \Omega_{Z/Y}^{\oplus p}$. L'assertion sur la flèche $\Omega_{Z/Y}^{\oplus p} \to \Omega_{Z/Y}$ est évidente à partir de la construction de l'isomorphisme du lemme 5.28. ∎

Corollaire 5.30. *On a dans $K_0(G_Y, Z)$ l'égalité*

$$\Lambda_{-1}(\mathscr{C}_\Delta) = \theta^p(\Omega_{Z/Y})$$

Preuve: La proposition 5.29 dit précisément que $\mathscr{C}_\Delta = (\Omega_{Z/Y})_0$ avec les notations de la proposition 5.27. Le résultat s'en déduit aussitôt de cette proposition. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer très simplement le théorème 5.1 : il suffit d'appliquer tout ce que l'on vient d'établir à notre situation particulière. Nous allons appliquer tout ce que l'on vient de voir au schéma $Z = X$.

Soit donc $f : X \to Y$ le morphisme propre et lisse donné par le théorème 5.1. En particulier X est bien séparé et de type fini sur Y.

On introduit comme précédemment le schéma X_1 muni de sa G_Y-structure. On note $f_1 : X_1 \to Y$ le morphisme déduit de f, ainsi que $\Delta : X \hookrightarrow X_1$ l'immersion des points fixes sous l'action de G_Y.

On est alors exactement dans la situation d'application de la formule de Lefschetz-Riemann-Roch du théorème 5.15.

Soit donc F un élément de $G_0(G_Y, X_1)_{\{1-T^i\}}$. On a l'égalité, dans $G_0(G_Y, Y)_{\{1-T^i\}}$

$$f_{1*}(F) = f_*(\Lambda_{-1}(\mathscr{C}_\Delta)^{-1} \cdot \Delta^* F)$$

On écrit cette formule pour un élément F de la forme $F = SE$ pour $E \in K_0(X)$. On obtient donc

$$f_{1*}(SE) = f_*(\Lambda_{-1}(\mathscr{C}_\Delta)^{-1} \cdot \Delta^* SE)$$

Par ailleurs, d'après la proposition 5.25 $f_{1*}(SE) = \psi^p(f_*(E))$ dans $K_0(G_Y, Y)_{\{1-T^i\}}$.

La proposition 5.24 nous assure de son côté que $\Delta^* SE = \psi^p(E)$ dans $K_0(G_Y, X)_{\{1-T^i\}}$.

Enfin d'après le corollaire 5.30, comme f est lisse, $\Lambda_{-1}(\mathscr{C}_\Delta) = \theta^p(\Omega_{X/Y}) = \theta^p(\Omega_f)$.

Après identification de tous ces termes on obtient donc l'égalité

$$\psi^p(f_*(E)) = f_*(\theta^p(\Omega_f)^{-1} \cdot \psi^p(E)) \tag{5.15}$$

C'est exactement l'égalité voulue. Il reste juste à vérifier qu'on l'a obtenue dans l'espace adéquat.

L'égalité (5.15) est vraie dans $K_0(G_Y, Y)_{\{1-T^i\}}$. Par ailleurs E est un élément de $K_0(X)$ donc chacun des deux membre de cette égalité est un élément de $K_0(Y)[1/p]$. Il suffit alors de remarquer que, comme Y est muni d'une G_Y-action triviale, la flèche canonique $K_0(Y)[1/p] \to K_0(G_Y, Y)_{\{1-T^i\}}$ est injective en vertu du corollaire 5.9.

L'égalité (5.15) est donc vérifiée dans $K_0(Y)[1/p]$ et cela conclut la preuve du théorème 5.1.

Annexe A

Le théorème d'Adams-Riemann-Roch

Le but de cette annexe est de fournir une preuve complète du résultat suivant, absent, semble-t-il, de la littérature :

Théorème A.1. *Soient X et Y deux schémas et $f : X \to Y$ un morphisme projectif d'intersection complète.*

On suppose que f est de dimension relative virtuelle constante égale à d et que Y est quasi-compact muni d'un fibré ample.

Soit $k \geqslant 2$ un entier. Alors la formule

$$\psi^k(f_*(E)) = f_*(\theta^k(L_f)^{-1} \cdot \psi^k(E)) \tag{A.1}$$

est vérifiée dans $K_0(Y)\left[\frac{1}{k}\right]$ pour tout E dans $K_0(X)$.

On va d'abord montrer que le théorème A.1 est compatible à la composition avant de passer à sa preuve à proprement parler.

A.1 Compatibilité à la composition

Le théorème A.1 est compatible à la composition au sens donné par la proposition suivante.

Proposition A.2. *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes vérifiant les hypothèses du théorème A.1. Alors $g \circ f$ vérifie les hypothèses du théorème A.1.*

De plus si E est un élément de $K_0(X)$ tel que E vérifie l'égalité (A.1) pour f et $\mathbf{R}f_*(E)$ vérifie l'égalité A.1 pour g, alors E vérifie l'égalité (A.1) pour $g \circ f$.

Preuve: La première assertion de la proposition, sur $g \circ f$, est immédiate. Soit $E \in K_0(X)$ fourni par la proposition. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\psi^k((g \circ f)_*(E)) &= \psi^k(g_* f_*(E)) \\
&= g_*(\theta^k(L_g)^{-1} \cdot \psi^k(f_* E)) \text{ par hypothèse} \\
&= g_*(\theta^k(L_g)^{-1} \cdot f_*(\theta^k(L_f)^{-1} \cdot \psi^k(E))) \text{ par hypothèse} \\
&= g_* f_*(f^*\theta^k(L_g)^{-1} \cdot \theta^k(L_f)^{-1} \cdot \psi^k(E)) \text{ d'après la prop. 1.15} \\
&= (g \circ f)_*(\theta^k(f^* L_g + L_f)^{-1} \cdot \psi^k(E)) \\
&= (g \circ f)_*(\theta^k(L_{g \circ f})^{-1} \cdot \psi^k(E))
\end{aligned}$$

et cela prouve la proposition. ∎

Remarquons que le calcul mené au cours de preuve de la proposition A.1, essentiellement formel, prouve plus généralement que les théorèmes de type Adams-Riemann-Roch sont compatibles à la composition. En particulier, la conjecture 2.6 est compatible à la composition.

A.2 Preuve du théorème A.1

Soit donc $f : X \to Y$ le morphisme donné par le théorème A.1. On peut le factoriser sous la forme

$$X \xrightarrow{g} \mathbf{P}^n_Y \xrightarrow{h} Y$$

où g est une immersion fermée régulière – cela découle de [2] Exp. VIII 1.2. Comme Y est quasi-compact muni d'un fibré ample, il en est de même de $\mathbf{P}^n_Y$. On est donc exactement dans le cas de la proposition A.1. Il suffit donc de démontrer le théorème A.1 pour les morphismes g et h.

Le cas d'une immersion fermée régulière est en fait un cas particulier du théorème 2.8 : les hypothèses de ce théorème sont toutes bien vérifiées, en particulier X et $\mathbf{P}^n_Y$ vérifient la conjecture 2.2 car ils sont munis d'un fibré ample et g vérifie la conjecture 1.14 car c'est un morphisme projectif.

Le résultat souhaité pour g a donc déjà été prouvé dans le chapitre 3.

On considère donc maintenant le morphisme $h : \mathbf{P}^n_Y \to Y$.

La preuve du théorème A.1 pour h repose sur un calcul direct. Ce calcul repose, pour toute une partie, sur le résultat classique suivant, qui permet de calculer le K_0 d'un espace projectif.

Théorème A.3. *Soit S un schéma quasi-compact, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang $r+1$, $X = \mathbf{P}(\mathscr{E})$ le fibré projectif associé ; le morphisme structural $p : X \to S$ définit un homomorphisme d'anneaux $p^* : K_0(S) \to K_0(X)$ munissant $K_0(X)$ d'une structure de $K_0(S)$-algèbre.*

De plus, $K_0(X)$ est un $K_0(S)$-module libre admettant pour base $\mathscr{O}_X$, $\mathscr{O}_X(1), \ldots, \mathscr{O}_X(r)$.

Preuve: cf. [2] Exp. VI 1.1 p. 365. ∎

En notant $\mathbf{P} = \mathbf{P}^n_Y$, $K_0(\mathbf{P})$ est donc un module libre de rang n sur $K_0(Y)$, et de base $\mathscr{O}_\mathbf{P}$, $\mathscr{O}_\mathbf{P}(1), \ldots, \mathscr{O}_\mathbf{P}(n)$.

On remarque que pour $E \in K_0(Y)$, en vertu de la proposition 1.15, on a, pour $0 \leqslant i \leqslant n$

$$\psi^k(h_*(h^*E \cdot \mathscr{O}_\mathbf{P}(i))) = \psi^k(E \cdot h_*(\mathscr{O}_\mathbf{P}(i))) = \psi^k(E)\psi^k(h_*(\mathscr{O}_\mathbf{P}(i)))$$

ainsi que

$$\begin{aligned} h_*(\theta^k(L_h)^{-1} \cdot \psi^k(h^*E \cdot \mathscr{O}_\mathbf{P}(i))) &= h_*(\theta^k(L_h)^{-1} \cdot h^*\psi^k(E) \cdot \psi^k(\mathscr{O}_\mathbf{P}(i))) \\ &= \psi^k(E) h_*(\theta^k(L_h)^{-1} \cdot \psi^k(\mathscr{O}_\mathbf{P}(i))) \end{aligned}$$

Pour prouver le théorème A.1 pour h il suffit donc de prouver l'égalité (A.1) pour $\mathscr{O}_\mathbf{P}$, $\mathscr{O}_\mathbf{P}(1), \ldots, \mathscr{O}_\mathbf{P}(n)$.

Par ailleurs d'après [2] Exp. VI 5.2.3 p. 402 on a

$$h_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(i)) = \begin{cases} \mathscr{O}_{\mathbf{P}} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

et donc

$$\psi^k(h_*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(i))) = \begin{cases} \mathscr{O}_{\mathbf{P}} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Pour conclure il suffit donc de montrer que

$$h_*(\theta^k(L_h)^{-1} \cdot \psi^k(\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(i))) = \begin{cases} \mathscr{O}_{\mathbf{P}} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Comme h est lisse on peut déjà remarquer que $L_h = \Omega_{\mathbf{P}/Y}$. Par ailleurs on dispose d'une suite exacte courte

$$0 \to \Omega_{\mathbf{P}/Y} \to h^*(\mathscr{O}_Y^{n+1}) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}} \to 0$$

C'est un cas particulier de la suite exacte universelle associée à un fibré projectif, que nous avons écrite au début du chapitre 3. L'existence de cette suite exacte dans ce cas particulier est prouvée dans [2] Exp. VIII 5.2.

On en déduit que

$$\theta^k(L_h)^{-1} = \theta^k(h^*\mathscr{O}_Y^{n+1} \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(-1) - \mathscr{O}_{\mathbf{P}})^{-1} = k\theta^k(h^*\mathscr{O}_Y^{n+1} \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(-1))^{-1}$$

et donc il suffit de montrer que

$$h_*(\theta^k(h^*\mathscr{O}_Y^{n+1} \cdot \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(-1))^{-1} \cdot \psi^k(\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(i))) = \begin{cases} \frac{1}{k}\mathscr{O}_{\mathbf{P}} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Ce calcul, technique, est essentiellement formel : on le trouve dans [13] II §3 p. 39. L'élément e de *loc. cit.* correspond à $\mathscr{O}_Y^{n+1}$, l'élément ℓ à $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}$ et les éléments u_i sont tous égaux à $\mathscr{O}_Y$.

En particulier le calcul mené dans *loc. cit.* prouve bien que l'égalité d'Adams-Riemann-Roch est valable dans $K_0(Y)[\frac{1}{k}]$.

Cela conclut la preuve du théorème A.1.

Annexe B

Une équivalence

Nous rappelons ici l'équivalence qu'il y a entre les théorèmes d'Adams et de Grothendieck-Riemann-Roch

On veut donc démontrer le théorème 2.5 énoncé au chapitre 2. Rappelons son énoncé.

Théorème B.1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre d'intersection complète entre schémas divisoriels. On suppose en outre que :*

- *La conjecture 1.14 est vérifiée pour f, ce qui permet de définir un morphisme image directe $f_* : K_0(X) \to K_0(Y)$.*
- *Les schémas X et Y vérifient la conjecture 2.2.*
- *Le morphisme f est de dimension relative constante égale à d.*

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que la formule

$$\psi^k(f_*(E)) = f_*(\theta^k(L_f)^{-1} \cdot \psi^k(E))$$

soit vérifiée dans $K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$ pour tout E dans $K_0(X)$.

(ii) a) Pour tout $n \geqslant 0$ $f_*(F^n K_0(X)_{\mathbf{Q}}) \subset F^{n-d} K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$, d'où un morphisme de degré $-d$

$$f_* : \mathrm{Gr}(K_0(X))_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Gr}(K_0(Y))_{\mathbf{Q}}$$

b) Pour tout $E \in K_0(X)$

$$\mathrm{ch}(f_*(E)) = f_*(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(E))$$

La plupart des hypothèses faites dans ce théorème ont pour but de pouvoir donner un sens aux énoncés des théorèmes de Grothendieck-Riemann-Roch et Adams-Riemann-Roch. La seule hypothèse cruciale dans la preuve de l'équivalence est le fait que X et Y vérifient la conjecture 2.2 : la nilpotence de la γ-filtration permet en effet d'obtenir, via le caractère de Chern, un isomorphisme de $K_0(X)_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathrm{Gr}(K_0(X))_{\mathbf{Q}}$ au lieu de $\widehat{K_0}(X)_{\mathbf{Q}}$ sur $\widehat{\mathrm{Gr}}(K_0(X))_{\mathbf{Q}}$.

Nous commençons d'abord par étudier les espaces propres des opérateurs d'Adams dans un λ-anneau quelconque, étape nécessaire pour ensuite pouvoir prouver l'équivalence annoncée.

B.1 Espaces propres des opérateurs d'Adams

Le résultat clé dans l'étude des espaces propres des opérateurs d'Adams est un lemme général isolé par B. Köck – lemme 5.2 de [19].

Lemme B.2. *Soit K un anneau commutatif muni d'une filtration décroissante par des idéaux $(F^nK)_{n\geqslant 0}$ avec $F^0K = K$ et $F^nK \cdot F^mK \subset F^{n+m}K$ pour n, $m \geqslant 0$.*

Soit

$$f = (f^n)_{n\geqslant 0} : K \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)$$

un homomorphisme d'anneaux qui vérifie $f^n(x) = x + F^{n+1}K$ pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in K$. Alors f induit un isomorphisme

$$\widehat{f} : \widehat{K} \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)$$

où $\widehat{K}$ désigne le complété de K associé à la filtration $(F^nK)_{n\geqslant 0}$.

Preuve: L'anneau $\widehat{\mathrm{Gr}}(K)$ est séparé et complet pour sa topologie naturelle. Par ailleurs, comme $f^n(F^kK) = 0$ pour $k > n$, le morphisme f s'étend en un homomorphisme continu $\widehat{f} : \widehat{K} \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)$.

Prouvons que $\widehat{f}$ est injective. Soit donc $x \in \widehat{K}$ tel que $\widehat{f}(x) = 0$. Soit alors une suite de K (x_n) telle que $\lim_n x_n = x$. Le morphisme $\widehat{f}$ étant continue, $\lim_n \widehat{f}(x_n) = 0$. On peut donc supposer, quitte à remplacer (x_n) par une sous-suite adéquate, que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $f^0(x_n) = \ldots = f^{n-1}(x_n) = 0$. On en déduit que $x_n \in F^nK$ et donc $\lim_n x_n = 0$, i.e. $x = 0$.

Prouvons maintenant que $\widehat{f}$ est surjective. Soit donc $(b_n)_{n\geqslant 0} \in \widehat{\mathrm{Gr}}(K)$. On construit de manière inductive une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$: pour a_0 on relève $b_0 \in K/F^1K$ dans K, puis pour a_n on relève $b_n - f^n(a_0 + \ldots + a_{n-1}) \in F^nK/F^{n+1}K$ dans F^nK. On obtient de la sorte un élément de $\prod_{n\geqslant 0} F^nK$. La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est donc convergente dans $\widehat{K}$ et, comme pour $k \geqslant n \geqslant 0$, $f^n(a_0 + \ldots + a_k) = b_n$, elle définit un antécédent à $(b_n)_{n\geqslant 0}$ pour $\widehat{f}$. ∎

On va maintenant appliquer le lemme précédent au caractère de Chern.

Proposition B.3. *Soit K un λ-anneau augmenté, d'augmentation ε. Alors le caractère de Chern* $\mathrm{ch} : K \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{ch} : \widehat{K_{\mathbf{Q}}} \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)_{\mathbf{Q}}$$

où $\widehat{K_{\mathbf{Q}}}$ désigne le complété de $K_{\mathbf{Q}}$ associé à la γ-filtration.

Preuve: Il suffit de vérifier que le caractère de Chern vérifie les hypothèses du lemme B.2 pour la γ-filtration.

Par définition du caractère de Chern, ch^0 est l'augmentation de K, d'où $\mathrm{ch}^0(x) = \varepsilon(x) = x + (\varepsilon(x) - x)$ avec $\varepsilon(x) - x \in F^1K$.

Pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{ch}^n(x)$ est un polynôme isobare en les classes de Chern de x, $c_1(x) \ldots, c_n(x)$. A partir de la définition du caractère de Chern on vérifie facilement que

$$\mathrm{ch}^n(x) = \frac{1}{n!} N_n(c_1(x), \ldots, c_n(x))$$

où l'on rappelle que N_n est le n-ème polynôme de Newton – cf. la définition des opérateurs d'Adams en 1.1.4. De plus, pour $x \in F^nK$ on avait remarqué en (1.8) et (1.9) que

$$c_1(x) = \ldots = c_{n-1}(x) = 0 \text{ et } c_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x + F^{n+1}K$$

Par ailleurs, $N_n(0,\dots,0,a) = (-1)^{n-1}na$, d'où, pour $x \in F^nK$, $\mathrm{ch}^n(x) = x + F^{n+1}K$. On est donc en mesure d'appliquer le lemme précédent, ce qui conclut la preuve. ∎

Cette proposition permet de déterminer les espaces propres des opérateurs d'Adams. Il suffit de nous rappeler la proposition 1.3 du chapitre 1, à savoir

$$\mathrm{ch}^n \psi^j(x) = j^n \,\mathrm{ch}^n(x) \text{ pour } x \in K$$

En notant $\phi^j_n : F^nK_{\mathbf{Q}}/F^{n+1}K_{\mathbf{Q}} \to F^nK_{\mathbf{Q}}/F^{n+1}K_{\mathbf{Q}}$ la multiplication par j^n et $\phi^j = \prod_n \phi^j_n : \widehat{\mathrm{Gr}}(K)_{\mathbf{Q}} \to \widehat{\mathrm{Gr}}(K)_{\mathbf{Q}}$ cela revient à dire que le carré

$$\begin{array}{ccc} \widehat{K}_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & \widehat{\mathrm{Gr}}(K) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^j} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^j} \\ \widehat{K}_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & \widehat{\mathrm{Gr}}(K) \end{array} \tag{B.1}$$

est commutatif.

Si on note $\widehat{K}^{(j)}_{\mathbf{Q}}(n)$ l'espace propre de ψ^j associé à la valeur propre j^n, la proposition B.3 implique immédiatement le résultat suivant.

Proposition B.4. *a) L'espace $\widehat{K}^{(j)}_{\mathbf{Q}}(n)$ ne dépend pas de j pour $j > 1$. On le note $\widehat{K}_{\mathbf{Q}}(n)$.*
b) $\widehat{F^mK}_{\mathbf{Q}} = \prod_{n\geqslant m} \widehat{K}_{\mathbf{Q}}(n)$. En particulier $\widehat{K}_{\mathbf{Q}} = \prod_{n\geqslant 0} \widehat{K}_{\mathbf{Q}}(n)$.

B.2 Preuve de l'implication i)⇒ii) du théorème B.1

Soit donc $f : X \to Y$ un morphisme de schémas qui vérifie les hypothèses du théorème B.1. On suppose en outre que le complexe cotangent de f, L_f, est de rang d.

Avant toute chose, commençons par un lemme qui nous sera utile pour prouver chacune des deux implications.

Lemme B.5. *Pour $j \geqslant 2$,*

$$\mathrm{ch}(\theta^j(L_f)^{-1}) = j^{-d}\mathrm{td}(T_f)^{-1}\phi^j(\mathrm{td}(T_f))$$

Preuve: T_f est défini comme le dual de L_f, ces deux fibrés sont de rang d. Quitte à passer à une extension convenable, on peut supposer que T_f et L_f sont scindés, et il suffit alors de montrer le résultat pour un fibré inversible $\mathscr{E}$. Le lemme s'écrit alors, en ce cas,

$$\mathrm{ch}(\theta^j(\mathscr{E})^{-1}) = j^{-1}\mathrm{td}(\mathscr{E}^\vee)^{-1}\phi^j(\mathrm{td}(\mathscr{E}^\vee))$$

On note $a = c_1(\mathscr{E})$. Alors $c_1(\mathscr{E}^\vee) = -a$ et donc

$$\mathrm{ch}(\theta^j(\mathscr{E})^{-1}) = \mathrm{ch}(\theta^j(\mathscr{E}))^{-1} = \mathrm{ch}(1+\mathscr{E}+\ldots+\mathscr{E}^{\otimes j-1})^{-1} = \frac{1}{1+e^a+\ldots+e^{(j-1)a}} = \frac{1-e^a}{1-e^{ja}}$$

De même

$$\mathrm{td}(\mathscr{E}^\vee) = \frac{-a}{1-e^a} \text{ et } \phi^j\mathrm{td}(\mathscr{E}^\vee) = \frac{-ja}{1-e^{ja}}$$

et donc

$$\mathrm{ch}(\theta^j(\mathscr{E})^{-1}) = \frac{1-e^a}{1-e^{ja}} = j^{-1}\frac{1-e^a}{-a}\frac{-ja}{1-e^{ja}} = j^{-1}\mathrm{td}(\mathscr{E}^\vee)^{-1}\phi^j\mathrm{td}(\mathscr{E}^\vee)$$

ce qui conclut la preuve du lemme. ■

Cela dit, on suppose maintenant qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que

$$\psi^k(f_*(E)) = f_*(\theta^k(L_f)^{-1} \cdot \psi^k(E)) \tag{B.2}$$

pour tout $E \in K_0(X)_{\mathbf{Q}}$.

Commençons par montrer le premier point de ii).
On veut donc prouver que

$$f_*(F^n K_0(X)_{\mathbf{Q}}) \subset F^{n-d} K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$$

On introduit $F \in K_0(X)_{\mathbf{Q}}$ tel que $\mathrm{ch}(F) = \mathrm{td}(T_f)^{-1}$.
F est bien défini puisque ch est un isomorphisme de $K_0(X)_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathrm{Gr}(K_0(X))_{\mathbf{Q}}$ d'après la proposition B.3, en tenant compte de la nilpotence de la γ-filtration. De plus F est inversible et $F \notin F^1 K_0(X)_{\mathbf{Q}}$. La multiplication par F induit donc un isomorphisme de $F^n K_0(X)_{\mathbf{Q}}$ sur lui-même.

Soit donc $E \in F^n K_0(X)_{\mathbf{Q}}$, on l'écrit $E = F \cdot E_1$ avec $E_1 \in F^n K_0(X)_{\mathbf{Q}}$.
On veut donc montrer que $f_*(F \otimes E_1) \in F^{n-d} K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$.
D'après la proposition B.4 b) – du fait à nouveau de la nilpotence des γ-filtrations on considère directement les groupes et non leurs complétés

$$F^n K_0(X)_{\mathbf{Q}} = \prod_{m \geqslant n} K_0(X)_{\mathbf{Q}}(m) \text{ et } F^{n-d} K_0(Y)_{\mathbf{Q}} = \prod_{m \geqslant n-d} K_0(Y)_{\mathbf{Q}}(m)$$

Il suffit donc de montrer que pour $E_1 \in K_0(X)_{\mathbf{Q}}(m)$, $f_*(F \otimes E_1) \in K_0(Y)_{\mathbf{Q}}(m-d)$. Cela résulte d'un petit calcul :

$$\begin{aligned}
\psi^k f_*(F \cdot E_1) &= f_*(\theta^k(L_f)^{-1} \psi^k(F \cdot E_1)) \text{ d'après B.2.} \\
&= f_*(\mathrm{ch}^{-1}(k^{-d}\mathrm{td}(T_f)^{-1}\phi^k(\mathrm{td}(T_f)))\psi^k(\mathrm{ch}^{-1}(\mathrm{td}(T_f)^{-1}))\psi^k(E_1)) \\
&= f_*(k^{-d} F \psi^k(\mathrm{ch}^{-1}(\mathrm{td}(T_f)))\psi^k(\mathrm{ch}^{-1}(\mathrm{td}(T_f)^{-1}))\psi^k(E_1)) \\
&= f_*(k^{-d} F \cdot k^m E_1) \text{ car } E_1 \in K_0(X)_{\mathbf{Q}}(m). \\
&= k^{m-d} f_*(F \cdot E_1)
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. Pour la deuxième égalité on a utilisé le lemme B.5 ainsi que la définition de F. Pour la troisième on a utilisé à nouveau la définition de F ainsi que le carré commutatif (B.1).

Prouvons maintenant le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch à proprement parler.
On veut donc montrer, pour $E \in K_0(X)_{\mathbf{Q}}$

$$\mathrm{ch}(f_*(E)) = f_*(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(E))$$

En écrivant comme précédemment $E = F \cdot E_1$, cela revient, de par la définition de F, à montrer

$$\mathrm{ch}(f_*(F \cdot E_1)) = f_*(\mathrm{ch}(E_1))$$

Comme $K_0(X)_{\mathbf{Q}} = \prod_{n\geqslant 0} K_0(X)_{\mathbf{Q}}(n)$, il suffit de prouver cette égalité pour $E_1 \in K_0(X)_{\mathbf{Q}}(n)$ avec $n \geqslant 0$.

En ce cas, comme ch envoie $K_0(X)_{\mathbf{Q}}(n)$ sur $F^n K_0(X)_{\mathbf{Q}}/F^{n+1}K^0(X)_{\mathbf{Q}}$, cela revient à prouver que

$$\mathrm{ch}(f_*(F\cdot E_1)) = f_*(\mathrm{ch}(E_1)) + F^{n-d+1}K_0(X)_{\mathbf{Q}}$$

On a $E_1 \in K_0(X)_{\mathbf{Q}}(n)$, en particulier $E_1 \in F^n K_0(X)_{\mathbf{Q}}$ donc

$$\mathrm{ch}(E_1) = E_1 + F^{n+1}K_0(X)_{\mathbf{Q}}$$

d'où

$$f_*(\mathrm{ch}(E_1)) = f_*(E_1) + F^{n-d+1}K_0(X)_{\mathbf{Q}} \tag{B.3}$$

De même, $f_*(F\cdot E_1) \in K_0(X)_{\mathbf{Q}}(n-d)$ d'où

$$\mathrm{ch}(f_*(F\cdot E_1)) = f_*(F\cdot E_1) + F^{n-d+1}K_0(X)_{\mathbf{Q}}$$

Par ailleurs comme F est d'augmentation égale à 1,

$$E_1 = F\cdot E_1 + F^{n+1}K_0(X)_{\mathbf{Q}}$$

et donc

$$f_*(E_1) = f_*(F\cdot E_1) + F^{n-d+1}K_0(X)_{\mathbf{Q}}$$

d'où

$$\mathrm{ch}(f_*(F\cdot E_1)) = f_*(E_1) + F^{n-d+1}K_0(X)_{\mathbf{Q}} \tag{B.4}$$

Les équations (B.3) et (B.4) nous donnent alors le résultat attendu :

$$\mathrm{ch}(f_*(F\cdot E_1)) = f_*(\mathrm{ch}(E_1)) + F^{n-d+1}K_0(X)_{\mathbf{Q}}$$

Cela achève la preuve de l'implication i)⇒ii).

B.3 Preuve de l'implication ii)⇒i) du théorème B.1

On suppose que

$$f_*(F^n K_0(X)_{\mathbf{Q}}) \subset F^{n-d}K_0(Y)_{\mathbf{Q}} \tag{B.5}$$

et que

$$\mathrm{ch}(f_*(E)) = f_*(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(E)) \tag{B.6}$$

pour $E \in K_0(X)$ et l'on veut montrer que

$$\psi^k(f_*(E)) = f_*(\theta^k(L_f)^{-1}\cdot\psi^k(E))$$

ch étant un isomorphisme de $K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathrm{Gr}(K_0(Y))_{\mathbf{Q}}$, il revient au même de prouver

$$\mathrm{ch}\,\psi^k(f_*(E)) = \mathrm{ch}\,f_*(\theta^k(L_f)^{-1}\cdot\psi^k(E))$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,f_*(\theta^k(L_f)^{-1}\cdot\psi^k(E)) &= f_*(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(\theta^k(L_f)^{-1}\cdot\psi^k(E))) \text{ d'après (B.6).}\\
&= f_*(\mathrm{td}(T_f)k^{-d}\mathrm{td}(T_f)^{-1}\phi^k(\mathrm{td}(T_f))\,\mathrm{ch}(\psi^k(E))) \text{ d'après le lemme B.5.}\\
&= f_*(k^{-d}\phi^k(\mathrm{td}(T_f))\,\mathrm{ch}(\psi^k(E)))\\
&= f_*(k^{-d}\phi^k(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(E))) \text{ en utilisant le carré commutatif (B.1).}\\
&= \phi^k f_*(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(E)) \text{ en vertu de (B.5).}\\
&= \phi^k\,\mathrm{ch}(f_*(E)) \text{ en utilisant à nouveau (B.6).}\\
&= \mathrm{ch}(\psi^k f_*(E)) \text{ d'après (B.1).}
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de l'implication ii)⇒i).

Annexe C

Compatibilité au changement de base

Le but de cette section est de démontrer la compatibilité du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch aux changements de base plats et finis. Ce résultat avait été évoqué en commentaire de l'énoncé du théorème 2.14.

Plus précisément, on se place dans le cadre de la conjecture 2.3 où l'on va démontrer le résultat suivant.

Théorème C.1. *Soit $g : S' \to S$ un morphisme de schémas plat et fini.*

Soient X et Y deux schémas sur S et $f : X \to Y$ un S-morphisme propre et d'intersection complète. On note $f' : X' \to Y'$ le morphisme qui s'en déduit par le changement de base $g : S' \to S$.

On suppose que X et Y sont divisoriels et qu'ils vérifient la conjecture 2.2.

On suppose que la conjecture 1.14 est vérifiée par f et f'.

On suppose que f est de dimension relative virtuelle constante égale à d.

On suppose enfin que l'on peut définir des images directes $f_* : \mathrm{Gr}(K_0(X))_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Gr}(K_0(Y))_{\mathbf{Q}}$ et $f'_* : \mathrm{Gr}(K_0(X'))_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Gr}(K_0(Y'))_{\mathbf{Q}}$, qui sont des morphismes de degré $-d$.

Alors, si pour tout $E' \in K_0(X')$

$$\mathrm{ch}(f'_*(E')) = f'_*(\mathrm{td}(T_{f'})\,\mathrm{ch}(E')) \tag{C.1}$$

dans $K_0(Y')_{\mathbf{Q}}$, on a également, pour tout $E \in K_0(X)$

$$\mathrm{ch}(f_*(E)) = f_*(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(E)) \tag{C.2}$$

dans $K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$.

Preuve: Avant de passer à la preuve proprement dite, remarquons que le morphisme f' est également un morphisme localement d'intersection complète, de même dimension relative virtuelle d que f, en vertu de [2] Exp. VIII 1.6 p. 472. De même, les schémas X' et Y' sont divisoriels car c'est le cas de X et Y et ils vérifient la conjecture 2.2 car le morphisme $g : S' \to S$ est plat et fini.

Cela étant dit, soit $E \in K_0(X)$. On note

$$F = \mathrm{ch}(f_*(E)) - f_*(\mathrm{td}(T_f)\,\mathrm{ch}(E)) \in K_0(Y)_{\mathbf{Q}}$$

On dispose d'un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g_X} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g_Y} & Y \end{array}$$

à partir duquel on calcule

$$\begin{aligned} g_Y^* F &= g_Y^* \operatorname{ch}(f_*(E)) - g_Y^* f_*(\operatorname{td}(T_f)\operatorname{ch}(E)) \\ &= \operatorname{ch}(g_Y^* f_*(E)) - g_Y^* f_*(\operatorname{td}(T_f)\operatorname{ch}(E)) \\ &= \operatorname{ch}(f'_*(g_X^* E)) - f'_* g_X^*(\operatorname{td}(T_f)\operatorname{ch}(E)) \text{ en utilisant la proposition 1.16} \\ &= \operatorname{ch}(f'_*(g_X^* E)) - f'_*(\operatorname{td}(T_{f'})\operatorname{ch}(g_X^* E)) \\ &= 0 \text{ d'après (C.1)} \end{aligned}$$

On a donc $g_Y^* F = 0$ dans $\mathrm{Gr}(K_0(Y'))_{\mathbf{Q}}$. Mais comme le morphisme g est plat, on en déduit que $F = 0$ dans $\mathrm{Gr}(K_0(Y))_{\mathbf{Q}}$, ce qui prouve l'égalité (C.2). ∎

Bibliographie

[1] M. Atiyah & D. Tall – « Group representations, λ-rings and the j-homomorphism », *Topology* **8** (1969), p. 253–297.

[2] P. Berthelot, A. Grothendieck & L. Illusie – *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966-1967 (SGA6)*, Lecture Notes in Mathematics 225, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[3] J.-M. Bismut, H. Gillet & C. Soulé – « Analytic torsion and holomorphic determinan bundles I. bott-chern forms and analytic torsion », *Comm. Math. Phys* **115** (1988), no. 1, p. 49–78.

[4] A. Borel & J.-P. Serre – « Le théorème de Riemann-Roch », *Bull. Soc. Math. de France* **86** (1958), p. 97–136.

[5] N. Bourbaki – *Algèbre X*, Masson, Paris, 1980.

[6] G. Castelnuovo – « Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica », *Mem. Soc. Ital. Sci.* **10** (1896), no. III.

[7] — , « Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie algebrica », *Ann. Mat. Pura ed Appl.* **25** (1897), no. II.

[8] P. Deligne & L. Illusie – « Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham », *Invent. Math.* **89** (1987), no. 2, p. 247–270.

[9] M. Demazure & A. Grothendieck – *Schémas en groupe (SGA3)*, réédition de Philippe Gille et Patrick Polo , disponible en ligne à l'adresse `http://www.math.jussieu.fr/ polo/SGA3/`.

[10] J. Dieudonné – « On regular sequences », *Nagoya Math. J.* **27** (1966), no. 1, p. 355–356.

[11] F. Enriques – « Ricerche di geometria sulle superficie algebriche », *Mem. Accad. Sci. Torino* **44** (1894), no. II.

[12] W. Fulton – *Intersection theory, second edition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.

[13] W. Fulton & S. Lang – *Riemann-Roch algebra*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 277, Springer-Verlag, New York, 1985.

[14] A. Grothendieck – « La théorie des classes de Chern », *Bull. Soc. Math. de France* **86** (1958), p. 137–154.

[15] A. Grothendieck & J. Dieudonné – « Eléments de géométrie algébrique », *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** (1960-1967).

[16] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

[17] A. Hatcher – *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[18] F. HIRZEBRUCH – *Topological methods in algebraic geometry, third enlarged edition*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 131, Springer-Verlag, New York, 1956.

[19] B. KÖCK – « The Grothendieck-Riemann-Roch theorem for group scheme actions », *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **31** (1998), no. 4, p. 415–458.

[20] D. MUMFORD, J. FOGARTY & F. KIRWAN – *Geometric invariant theory, third enlarged edition*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[21] M. NOETHER – « Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques », *C. R. Acad. Sci. Paris* **103** (1886).

[22] M. NORI – « The Hirzebruch-Riemann-Roch theorem », *Michigan Math. J.* **48** (2000), p. 473–482.

[23] R. PINK & D. ROESSLER – « On the Adams-Riemann-Roch theorem in positive characteristic », disponible en ligne à l'adresse `http://www.math.univ-toulouse.fr/~rossler/mypage/publi.html` (2010).

[24] D. QUILLEN – « Higher algebraic K-theory I », in *Higher K-theories (Seattle 1972)* (H. Bass, éd.), Lecture Notes in Mathematics 341, Springer-Verlag, Berlin, 1973, p. 85–147.

[25] G. ROCH – « Ueber die Anzahl der willkurlichen Constanten in algebraischen Functionen », *J. Reine Angew. Math.* **64** (1865), p. 372–376.

[26] P. SAMUEL – *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Paris, 1967.

[27] F. SEVERI – « Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenenti ad una superficie algebrica », *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend.* **12** (1903), no. V.

[28] R. W. THOMASON – « Algebraic K-theory and etale cohomology », *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **18** (1985), no. 3, p. 437–552.

[29] — , « Lefschetz-Riemann-Roch theorem and coherent trace formula », *Invent. Math.* **85** (1986), p. 515–543.

[30] — , « Algebraic K-theory of group schemes actions », in *Algebraic topology and algebraic K-theory*, Ann. of Math. Stud. 113, Princeton Univ. Press, Princeton, 1987, p. 539–563.

[31] — , « Une formule de Lefschetz en K-théorie équivariante », *Duke Math. J.* **68** (1992), no. 3, p. 447–462.

[32] R. THOMASON & T.TROBAUGH – « Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories. », in *The Grothendieck Festschrit* (Boston), Progr. Math. 88, no. III, Birkhäuser Boston, 1990, p. 247–345.

[33] F. WALDHAUSEN – « Algebraic K-theory of spaces », in *Algebraic and geometric topology (New Brunswick, NJ, 1983)*, Lecture Notes in Mathematics 1126, Springer-Verlag, Berlin, 1985, p. 318–419.

[34] C. WEIBEL – « Mayer-Vietoris sequences and module structrure on NK », in *Algebraic K-theory, Evanston, 1980*, Lecture Notes in Mathematics 854, Springer-Verlag, Berlin, 1981, p. 466–493.

[35] O. ZARISKI – « The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface », *Ann. Math.* **76** (1962), p. 560–615.