



**HAL**  
open science

# Comportement dynamique d'un redresseur de turbomachine aéronautique : effets du désaccordage

Amadou Ciré Sall

► **To cite this version:**

Amadou Ciré Sall. Comportement dynamique d'un redresseur de turbomachine aéronautique : effets du désaccordage. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ECDL0045 . tel-00755391

**HAL Id: tel-00755391**

**<https://theses.hal.science/tel-00755391>**

Submitted on 21 Nov 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**MÉMOIRE DE THÈSE**

Présentée pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

**DE**

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

**SPÉCIALITÉ GÉNIE MÉCANIQUE**

**ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL/INSA/ECL)**

par

**Amadou Ciré SALL**

**COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN REDRESSEUR DE  
TURBOMACHINE AÉRONAUTIQUE :  
EFFETS DU DÉSACCORDAGE**

Présentée et soutenue publiquement le 8 Décembre 2011 devant le jury d'examen :

<b>L. BLANC</b> , Maître de Conférences, LTDS, École Centrale de Lyon	Co-encadrant
<b>J. C. CHASSAING</b> , Maître de Conférences, UPMC Paris 6	Examineur
<b>J. F. DEU</b> , Professeur, CNAM, Paris	Rapporteur
<b>E. FOLTETE</b> , Professeur, FEMTO, ENSMM Besançon	Rapporteur
<b>E. JACQUELIN</b> , Professeur, UCBL, Lyon	Président
<b>P. JEAN</b> , Ingénieur, SNECMA	Examineur
<b>X. OTTAVY</b> , Chargé de Recherche au CNRS, LMFA, École Centrale de Lyon	Examineur
<b>F. THOUVEREZ</b> , Professeur, LTDS, École Centrale de Lyon	Directeur



**Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon**

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	professeur	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SCORLETTI Gérard	professeur	AMPERE	ECL
SIMONET Pascal	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
VOLLAIRE Christian	professeur	AMPERE	ECL

**Nbre Ampère 9**

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
---------------	-----------------------	---------	-----

**Nbre DER EEA 1**

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

**Nbre DER STMS 2**

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

**Nbre ICJ 7**

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
----------------	------------	------	-----

**Nbre ICTT 1**

CALLARD Anne-Ségolène	professeur	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
O'CONNOR Ian	professeur	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL



ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

**Nbre INL 18**

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
-------------	------------	-------	-----

**Nbre LIRIS 1**

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT geneviève	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	professeur	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAULT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

**Nbre LMFA 23**

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	professeur	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL

<i>SIDOROFF François</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>SINOUE Jean-Jacques</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>STREMSDOERFER Guy</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>THOUVEREZ Fabrice</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>TREHEUX Daniel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>VINCENS Eric</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL

**Nbre LTDS 25**

*Total HdR ECL*

91



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Fabrice Thouverez, qui, en plus de sa confiance, a su m'accorder de son temps et partager avec moi l'étendue de sa science des roues aubagées. Je remercie également mon co-encadrant, Laurent Blanc, qui m'a beaucoup accordé de son temps, notamment pour une relecture approfondie de mes différents rapports et de ce présent mémoire.

Je suis reconnaissant de Jean-François Deü et d'Emmanuel Foltête pour avoir accepté de rapporter mon travail avec une minutie exemplaire. J'adresse aussi mes remerciements à Xavier Ottavy et Pascale Kulisa pour nos différents échanges qui se révélaient être quelques fois des dialogues de sourds tant nos jardins scientifiques sont différents, mais qui restaient ô combien intéressants et enrichissants.

Je continue mon tour du monde des remerciements en passant par Villaroche où mes anciens collègues de l'unité Méthodes Mécaniques m'ont chaleureusement accueilli et où il a toujours été agréable de discuter de la pluie et du beau temps autour de cafés et croissants, mais pas que...

Je remercie sincèrement tous les membres de l'équipe D2S du LTDS et plus particulièrement tous mes camarades de l'Aquarium, qui ont partagé avec moi leur sympathie et amitié, mais aussi toute l'étendue de leurs connaissances scientifiques. Une mention spéciale va à Isabelle qui a toujours été présente dès que le besoin s'y prêtait et qui conforte jour après jour son statut d'indispensable au sein du laboratoire.

Un grand merci à tous mes amis proches et à ma douce qui ont su être patients et compréhensifs avec moi lorsque j'étais en mode "autiste", merci d'avoir été constamment des oreilles attentives quand j'en avais le plus besoin, et de m'avoir aidé souvent à me libérer l'esprit à travers nos différentes sorties parisiennes !

Je finirai en remerciant ma famille au sens large, mais plus particulièrement mes parents, mes frères et ma deuxième maman (qui se reconnaitra certainement) sans qui je n'aurais rien atteint de ce que je peux prétendre avoir accompli aujourd'hui. Ils ont constamment su me donner la motivation et la force pour ne jamais rien lâcher ; c'est la raison pour laquelle je leur dédie sans concession le fruit de ce présent travail.



# Résumé

Le dimensionnement en fatigue des composants de moteurs d'avions tels que les roues aubagées passe nécessairement par leur analyse dynamique. Pour être davantage prédictif, les dispersions géométriques et matérielles dues aux tolérances de fabrication, sources de désaccordage, sont prises en compte et font que les hypothèses de symétrie cyclique ne sont plus applicables.

Le désaccordage a une influence non-négligeable sur le comportement vibratoire des roues aubagées en localisant une partie de l'énergie sur un nombre restreint d'aubes, ce qui peut conduire à une fatigue vibratoire prématurée de la pièce. Ce phénomène de localisation modale est conditionné d'une part, par la raideur de couplage entre les aubes et le disque et d'autre part, par le taux de désaccordage.

Les redresseurs se situent sur les différents étages statoriques des moteurs d'avions. Leur rôle est de redresser le flux d'air en provenance des rotors situés en amont afin d'obtenir une poussée maximale en sortie du turboréacteur. Une nouvelle technologie consiste à considérer un redresseur comme un assemblage de plusieurs secteurs multiples monobloc indépendants. Les conditions de symétrie cyclique ne peuvent donc plus être employées, même dans le cas accordé. Le comportement vibratoire d'un secteur de redresseur accordé est caractérisé par une forte densité modale dans certaines plages de fréquences, correspondant à des modes de flexion et de torsion d'aube. De ce phénomène découle une forte sensibilité de ces modes au désaccordage présent au sein du redresseur.

Le principal objectif de la thèse est de développer une stratégie permettant de prédire de façon robuste le comportement vibratoire des redresseurs sectorisés monobloc désaccordés. En effet, en déterminant les zones les plus sensibles d'un secteur donné avec une précision maximale, les bureaux d'études pourront optimiser le positionnement des jauges d'extensométrie sur les redresseurs prototypes. Afin d'atteindre cet objectif, diverses études numériques de sensibilité au désaccordage ainsi que des essais sur une pièce ont été faits. Ils ont permis d'avoir des premiers résultats quant aux erreurs relatives prévisibles qui pouvaient être faites, en fonction du désaccordage.

Ensuite, la méthode des éléments finis stochastiques spectraux a été développée sur un modèle simplifié en vue d'en déterminer les modes propres aléatoires projetés sur une base de polynômes orthogonaux et d'en déduire la réponse forcée aléatoire par superposition modale. La base du chaos polynomial a été retenue principalement pour son gain en temps de calcul par rapport à des simulations de Monte Carlo classiques et à la précision des résultats obtenus.

Enfin, la méthodologie stochastique a été validée sur un modèle éléments finis industriel de redresseur sectorisé fourni par SNECMA moyennant des méthodes de réduction de modèle de type Craig-Bampton. Une stratégie de positionnement optimal de jauges a été proposée ; elle constituait le principal livrable industriel attendu en fin de thèse.





# Abstract

The fatigue design of aircraft engines components such as bladed disks passes necessarily by their dynamic analysis. In order to be more predictive, the geometric and material dispersions due to the manufacturing tolerances, sources of mistuning, are taken into account and make the assumptions of cyclic symmetry be not applicable anymore.

The mistuning has a non-negligible effect on the vibratory behavior of the bladed disks by localizing an important part of the energy on a reduced number of blades which can lead to a premature vibratory fatigue of the component. This phenomenon of modal localization is conditioned on the one hand, by the coupling stiffness between the blades and the disk and on the other hand, by the rate of the mistuning.

The stator vanes are located in the various stator stages of the aircraft engines. Their role is to straighten the air flow from the rotors located upstream to obtain the maximum thrust at the engine output. A new technology consists in considering a stator vane as an assembly of many independent monoblock multi-blades sectors. So, the cyclic symmetry conditions cannot be employed anymore even in the tuned case. The vibratory behavior of a tuned stator vane sector is characterized by a high modal density in some frequency ranges, which corresponds to the blade bending and torsion modes. This phenomenon results in a high sensitivity of these modes to the mistuning within the stator vane.

The main objective of this thesis is to develop a strategy allowing to predict the vibratory behavior of monoblock sectored mistuned stator vanes in a robust way. Indeed, by determining the most sensitive areas of a given sector with the maximum accuracy, the engineering departments will be able to optimize the strain gauges positioning on the prototypes stator vanes.

In order to reach this objective, several sensitivity to mistuning numerical studies and some component tests were performed. They allowed to have first results about the relative predictable errors that could be done, depending on the mistuning.

Then, the spectral stochastic finite element method has been implemented on a simplified model in order to determine its random eigen modes projected on a basis composed by orthogonal polynomials and to deduce the random forced response by modal superposition. The polynomial chaos basis has been chosen thanks mainly to the low computation time in comparison to Monte Carlo simulations and to the accuracy of the obtained results.

At last, the stochastic methodology has been validated on an industrial finite element model of a sectored stator vane provided by SNECMA by means of model reduction methods such as Craig-Bampton. An optimum gauge positioning strategy has been proposed ; it represented the main industrial deliverable expected at the end of the thesis.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur le comportement dynamique des roues aubagées</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction	8
1.2 Origines des vibrations dans les roues aubagées	8
1.2.1 Excitations d'origine aérodynamique	9
1.2.2 Excitations d'origine mécanique	11
1.2.3 Périmètre d'étude	11
1.3 Dynamique des roues aubagées	11
1.3.1 Caractéristiques des structures à symétrie cyclique	12
1.3.2 Outils d'aide à la conception des roues aubagées	13
1.3.3 Effets du désaccordage sur les roues aubagées	18
1.4 Conclusions	19
<b>2 Etude phénoménologique du comportement dynamique des redresseurs sectorisés</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction	22
2.2 Présentation du compresseur CREATE	22
2.3 Etudes de sensibilité au désaccordage	24
2.3.1 Caractéristiques générales du modèle	25
2.3.2 Sensibilité au désaccordage	25
2.3.3 Conclusions sur les études de sensibilité	31
2.4 Essais de caractérisation modale d'un secteur	33
2.4.1 Principe des essais	33
2.4.2 Appariement en fréquence	36
2.4.3 Appariement en forme	36
2.4.4 Identification de l'amortissement modal	37
2.4.5 Conclusions sur les essais vibratoires	38
2.5 Essais sur le compresseur CREATE	39
2.5.1 Instrumentation	40
2.5.2 Etudes et post-traitements	42

2.5.3	Conclusions sur les essais CREATE . . . . .	45
2.6	Conclusion . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Proposition d'une stratégie de modélisation à partir de la Méthode des</b>	
	<b>Eléments Finis Stochastiques Spectraux</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	48
3.2	Etat de l'art des méthodes d'éléments finis stochastiques . . . . .	48
3.2.1	Simulation de Monte Carlo . . . . .	48
3.2.2	Méthode des perturbations . . . . .	49
3.2.3	Méthode des éléments finis stochastiques spectraux . . . . .	50
3.2.4	Approche probabiliste non paramétrique . . . . .	51
3.3	Présentation de la méthodologie retenue . . . . .	52
3.3.1	Développement de modèles basés sur des treillis de poutres . . . . .	53
3.3.2	Application directe de la méthode du chaos polynomial au calcul de la réponse forcée aléatoire . . . . .	53
3.3.3	Détermination des modes propres aléatoires par projection sur la base du chaos polynomial . . . . .	59
3.4	Développement d'une stratégie ad hoc de réduction de modèle . . . . .	70
3.4.1	Etat de l'art des méthodes de réduction . . . . .	71
3.4.2	Choix de la méthode de réduction . . . . .	71
3.4.3	Sous-structuration du modèle poutres 10 pales . . . . .	74
3.5	Conclusions . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Application industrielle</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	90
4.2	Sous-structuration du modèle 3D . . . . .	90
4.2.1	Les interfaces . . . . .	92
4.2.2	Réduction du nombre de ddls d'interfaces . . . . .	92
4.2.3	Etudes de convergence du superélément . . . . .	93
4.3	Application industrielle de la méthode stochastique . . . . .	96
4.3.1	Calcul des modes propres aléatoires . . . . .	99
4.3.2	Calcul de la réponse forcée aléatoire . . . . .	107
4.3.3	Stratégie de positionnement de jauges . . . . .	109
4.4	Conclusion . . . . .	112
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>112</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>117</b>
	<b>Publications personnelles</b>	<b>125</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>126</b>

# Introduction générale

## Contexte industriel et scientifique

Les turbomachines aéronautiques (cf. figure 1) sont des composants majeurs des avions dont elles assurent la propulsion. Si de nombreuses architectures existent, ces systèmes possèdent tous des composants communs tels que les compresseurs, les turbines et la chambre de combustion. Ces organes sont contraints à être performants et sûrs tout en tenant compte des paramètres liés à la facilité de fabrication et à la limitation des coûts de mise en œuvre. En guise d'illustration, il est intéressant de noter que près de 90% des problèmes de fatigue à haut nombre de cycles (HCF pour High Cycle Fatigue) causés par les phénomènes vibratoires sont traités durant la phase de développement ; les 10% restants constituent près de 30% du coût de développement total et sont à l'origine de près de 25% des principaux accidents rencontrés dans les moteurs d'avions [32]. Ces chiffres montrent donc la nécessité de prédire la durée de vie des composants aéronautiques afin d'éviter de lourdes contraintes a posteriori, liées notamment à des surcoûts à cause des boucles de re-conception.

Pour mieux cerner les causes de ces modes de défaillance, il importe de décrire d'abord les principales phases de fonctionnement d'un turboréacteur qui sont :

1. l'admission d'air en entrée de la turbomachine par le fan ;
2. la compression de l'air lors de son passage dans les compresseurs Basse Pression (BP) et Haute Pression (HP) ;
3. la combustion qui s'effectue dans la chambre de combustion par l'injection de kérosène qui se mélange à l'air comprimé ;
4. la détente qui prend effet lors du passage de l'air respectivement dans les turbines HP et BP ;
5. l'éjection qui se fait au niveau de la tuyère en sortie du turboréacteur et qui engendre une partie de la poussée axiale.

Les performances d'un turboréacteur dépendent en grande partie de ses modules de compression via les taux de compression qu'ils peuvent assurer. Le rendement d'un compresseur est lui-même dépendant de sa vitesse de rotation qui reste technologiquement



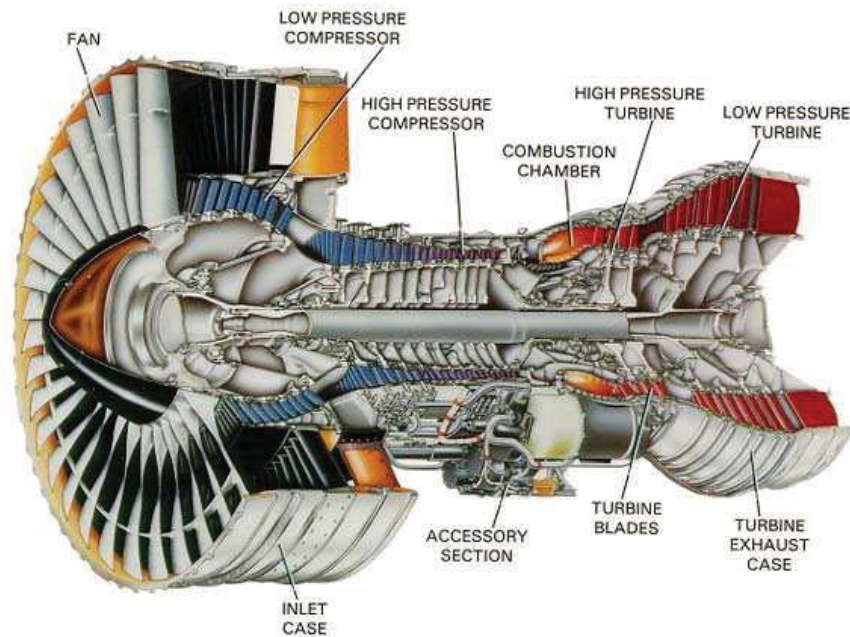


FIGURE 1 – Représentation en coupe d’une turbomachine aéronautique [45]

limitée (pour des raisons aérodynamiques en particulier). C’est pour cette raison que la majorité des turboréacteurs modernes intègrent maintenant plusieurs cores (le “core” est l’ensemble composé du compresseur, de la chambre de combustion et de la turbine) entraînés à des vitesses différentes ; le core haute pression (HP) est ainsi entouré d’un core basse pression (BP). On parle dans ce cas de moteurs double core.

Tout au long de ce cycle de fonctionnement, les différents composants des turbomachines sont soumis à des sollicitations de sources diverses (aérodynamiques, vibratoires, chocs dus à l’ingestion de corps étrangers) qui engendrent la fatigue et l’usure de ces composants. Notre intérêt se portera principalement sur le comportement dynamique des stators redresseurs des compresseurs axiaux qui sont principalement excités par des chargements de type aérodynamiques. Les compresseurs axiaux (cf. Figure 2) peuvent être vus comme une succession d’étages de roues aubagées, dont chaque étage est composé d’un rotor, partie tournante autour de l’axe principal du moteur, et d’un stator ou redresseur, partie fixe dont le but est de redresser le flux d’air provenant de la roue mobile en amont en le dirigeant vers la roue mobile en aval.

La réponse dynamique des redresseurs est en grande partie due aux sillages provenant de la roue mobile située en amont et potentiellement de celle située en aval, même si ce dernier est relativement plus faible. Chaque sillage est une interaction instationnaire entre rotor et stator dont la fréquence d’excitation est un multiple de la vitesse de rotation du rotor. L’harmonique d’excitation dépend donc du nombre d’aubes qui composent la roue

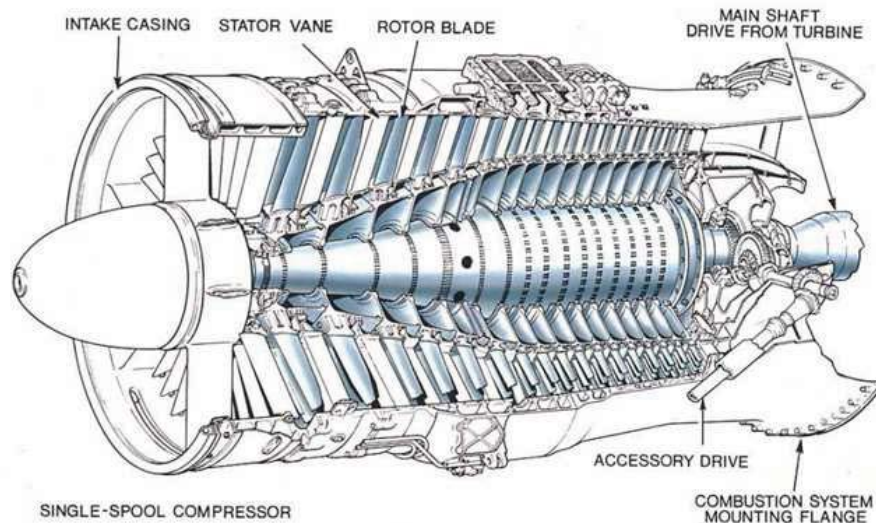


FIGURE 2 – Compresseur axial multiétages d'un moteur Rolls Royce [81]

excitatrice (mobile ou fixe) et peut faire entrer une aube en résonance dans le cas où elle croiserait une fréquence propre de celle-ci.

L'amplitude de la réponse dynamique des roues aubagées est fortement conditionnée par des propriétés intrinsèques de la pièce telles que l'amortissement structural. En effet, l'assemblage d'aubes individuelles pour former une roue aubagée de stator se fait classiquement au niveau de la liaison encastrement aube-virole (ou aube-disque lorsqu'il s'agit d'un rotor), ce qui a tendance à rajouter de l'amortissement par friction de contact à la structure assemblée. Cependant, afin de réduire la masse et les coûts de maintenance et d'allonger la durée de vie en service, une nouvelle technologie de redresseurs sectorisés monobloc a été développée (cf. Figure 3). Cette dernière consiste à concevoir des secteurs monobloc multiples et à les encastrent indépendamment les uns des autres sur le carter du compresseur par leur virole extérieure. Les pièces de nature monobloc sont usinées dans la masse, ce qui fait que la liaison aube-virole n'existe plus et que la pièce est globalement beaucoup moins amortie. Une autre propriété à prendre en considération est le désaccordage qui est dû aux différences géométriques et/ou matérielles qu'il peut y avoir entre les aubes du fait des tolérances de fabrication. La prise en compte de ce paramètre a pour conséquence, d'une part, de rompre la symétrie cyclique de la roue aubagée et d'autre part, d'amplifier la réponse dynamique vue par la pièce du fait de l'apparition du phénomène de localisation spatiale de l'énergie. Par ailleurs, des modes propres très proches en fréquence apparaissent et ils ont tendance à se coupler ce qui augmente considérablement les niveaux vibratoires. Il faut aussi remarquer que la sectorisation entraîne une perte de la symétrie cyclique même si l'on considère la pièce comme étant parfaitement accordée; la sectorisation peut être assimilée à un niveau de désaccordage supplémentaire.

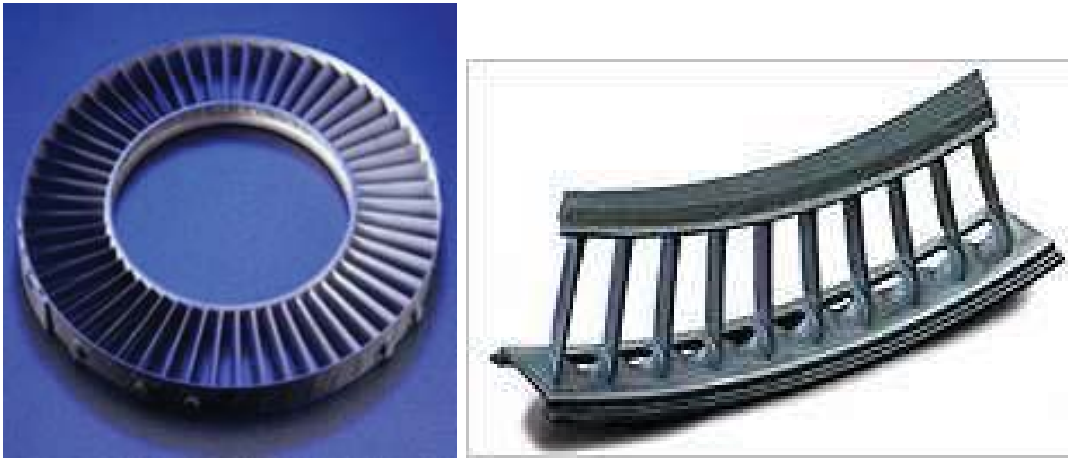


FIGURE 3 – Représentation d'un redresseur complet (à gauche) et d'un secteur de redresseur (à droite) [47, 46]

Du point de vue des bureaux d'études en charge de prédire le comportement dynamique, ces différentes caractéristiques sont associées à des difficultés de modélisation et de calcul. Le principal problème du comportement dynamique d'un secteur réside dans la sensibilité des redresseurs au désaccordage intrinsèque ou lié à la sectorisation, particulièrement dans les zones à forte densité modale. La prédiction des niveaux vibratoires devient en effet difficile par les méthodes déterministes classiques.

En faisant l'hypothèse de symétrie cyclique, l'étude dynamique d'un seul secteur suffit pour connaître le comportement de la roue complète moyennant une décomposition de la réponse en séries de Fourier [91, 42, 92, 97]. Cela a pour conséquence d'alléger considérablement les calculs. Or les calculs dynamiques devraient en théorie se faire sur l'ensemble des secteurs de redresseur composés de toutes leurs pales étant donné qu'il n'est plus possible d'utiliser les conditions de symétrie cyclique. Cela rend les calculs évidemment plus coûteux en ressources.

De plus, les déformées modales d'un secteur de redresseur associent de manière spécifique à chaque mode des mouvements de flexion et de torsion d'aubes dans des plages de fréquences très restreintes du fait de la rupture de la symétrie cyclique. A cause de cette forte proximité modale, le couplage inter-modes est important et doit être considéré dans le calcul de la réponse forcée. La prise en compte du désaccordage complexifie encore la problématique : pour un secteur de redresseur donné, des comportements dynamiques différents sont attendus selon le niveau de désaccordage. En effet, la prédictibilité de la réponse vibratoire des disques aubagés monobloc en tenant compte du désaccordage a déjà fait l'objet de diverses études [84, 65] et de développements de techniques d'identification du désaccordage [79, 43]. Elles confirment que d'un secteur désaccordé à un autre,

les aubes susceptibles d'être excitées ainsi que les niveaux de réponse associés peuvent être complètement différents pour une même excitation.

## Objectifs des travaux

Tout au long de ce mémoire, nous étudions le comportement dynamique des redresseurs sectorisés monobloc dans le but de proposer au bureau d'études SNECMA une méthode robuste de prédiction des niveaux vibratoires maximaux ainsi que leur probable localisation dans un secteur de redresseur donné.

L'un des premiers objectifs de la thèse est donc d'étudier la sensibilité au désaccordage des redresseurs sectorisés afin de juger de la complexité de la problématique et de choisir la méthode appropriée pour la résoudre. L'opportunité nous a été offerte d'effectuer des essais partiels sur un secteur de redresseur dans l'optique d'obtenir un ordre de grandeur de données physiques telles que l'amortissement et le taux de désaccordage. Les objectifs suivants se veulent offrir aux bureaux d'études SNECMA un outil de prédiction des niveaux vibratoires maximaux qui peuvent être atteints pour des niveaux de désaccordage représentatifs et à un coût de calcul raisonnable. La mise en place d'une méthodologie stochastique est envisagée pour le développement d'un tel outil. La suite logique de cette démarche est d'aboutir sur une proposition de stratégie de placement optimal de jauges d'extensométrie lors d'essais moteurs. Le but de cette stratégie est de pouvoir prédire statistiquement et de façon robuste quelle aube sera la plus sollicitée et d'y positionner une jauge car il subsiste des problèmes d'encombrement et de coûts lors de tels essais et il est souvent très difficile d'instrumenter toutes les aubes par des jauges.

## Organisation du document

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres qui, dans leur chronologie, permettent d'appréhender la problématique abordée, présentent les méthodes employées et mettent en évidence les résultats obtenus.

Le chapitre un présente un état de l'art relatif à la dynamique des roues aubagées de manière générale et des phénomènes physiques qui lui sont associés. Différents outils servant à l'étude du comportement dynamique de ce type de pièces sont présentés ainsi que les résultats d'études portant sur les effets du désaccordage. Le but en est d'introduire efficacement la problématique liée à la sectorisation des redresseurs.

Le chapitre deux est dédié à l'étude déterministe du comportement dynamique des redresseurs sectorisés. La problématique qui est propre à ce type de structure y est abordée. Des simulations numériques préliminaires d'étude de sensibilité au désaccordage sont

détaillées ainsi qu'une comparaison des résultats obtenus avec ceux issus des essais de caractérisation modale faits sur un secteur de redresseur. En outre, des mesures effectuées sur un secteur de redresseur en fonctionnement moteur et les interprétations issues de leur dépouillement sont présentées.

Dans le troisième chapitre, la question de la méthodologie stochastique la plus adaptée à la prédiction des niveaux vibratoires des redresseurs sectorisés est abordée. Un état de l'art des principales méthodes stochastiques utilisées dans le cadre de la méthode des éléments finis est présenté. Ensuite, nous présentons plus en détails la Méthode des Eléments Finis Stochastiques Spectraux qui a été retenue. Un modèle académique dont le comportement dynamique se rapproche de celui observé sur une pièce industrielle à été développé et a servi de base au développement de la méthodologie de prédiction. La stratégie de réduction de modèles a également été mise en place sur ce modèle simplifié en vue de l'application industrielle.

Le quatrième et dernier chapitre est dédié à l'application industrielle de la méthode présentée dans le chapitre trois. Toute la démarche de prédiction proposée au chapitre précédent a été mise en œuvre sur un modèle éléments finis 3D de secteur de redresseur. Le modèle 3D réduit développé sur la base de la stratégie de réduction mise en place sur le modèle simplifié est présenté et validé en comparaison à un modèle de référence. La méthodologie stochastique lui est ensuite appliquée. Nous proposons enfin une méthode de détermination de l'enveloppe des niveaux vibratoires maximaux ainsi qu'une stratégie de positionnement optimal de jauges d'extensométrie.

# Chapitre 1

## Généralités sur le comportement dynamique des roues aubagées

*Ce chapitre est un état de l'art des principaux facteurs qui interviennent lors de l'étude en fatigue vibratoire des roues aubagées des turbomachines aéronautiques. Outre l'aspect relatif aux origines des excitations auxquelles sont sujets ces composants, il est notamment fait état des outils actuellement utilisés dans le cadre de leur dimensionnement en vibrations. Le désaccordage et ses effets y sont également abordés.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Origines des vibrations dans les roues aubagées</b>	<b>8</b>
1.2.1	Excitations d'origine aérodynamique	9
1.2.2	Excitations d'origine mécanique	11
1.2.3	Périmètre d'étude	11
<b>1.3</b>	<b>Dynamique des roues aubagées</b>	<b>11</b>
1.3.1	Caractéristiques des structures à symétrie cyclique	12
1.3.2	Outils d'aide à la conception des roues aubagées	13
1.3.3	Effets du désaccordage sur les roues aubagées	18
<b>1.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>19</b>

---



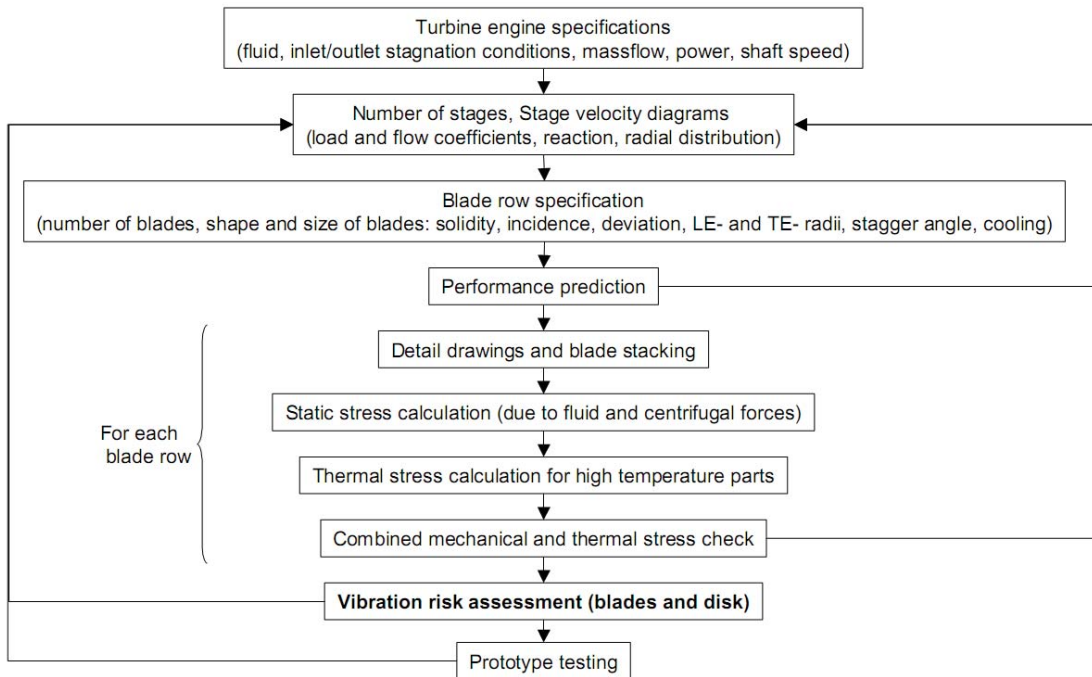


FIGURE 1.1 – Les grandes étapes dans la démarche de conception des roues aubagées [51]

## 1.1 Introduction

La conception des composants des turbomachines aéronautiques fait intervenir des domaines pluri-disciplinaires qui se doivent d'être en harmonie pour atteindre l'objectif commun. En effet, le caractère itératif du processus de conception fait que la non-validation d'une de ses étapes peut entraîner des modifications de modélisation qui contraignent à valider de nouveau les étapes qui l'auraient déjà été auparavant. La phase liée au dimensionnement à la fatigue vibratoire qui va particulièrement nous intéresser intervient en fin de boucle de conception comme le montre la figure 1.1.

Ce chapitre a donc pour vocation d'apporter davantage de lumière sur cette étape cruciale de la conception des composants aéronautiques que sont les roues aubagées, afin de préciser les hypothèses de travail retenues dans la suite du mémoire. Nous justifierons donc les choix qui ont été faits en accord avec les attentes de SNECMA.

## 1.2 Origines des vibrations dans les roues aubagées

Les phénomènes vibratoires dans les roues aubagées sont de nature complexe et tirent leur origine de sources diverses. En effet, la variabilité importante de ces sources fait que les phénomènes qui en résultent sont souvent difficiles à prédire. C'est la raison pour laquelle

cette section a pour vocation de présenter les principales sources des vibrations des roues aubagées qui sont d'origines aérodynamique et mécanique.

### 1.2.1 Excitations d'origine aérodynamique

Les phénomènes aéroélastiques dans les turbomachines se manifestent au travers de deux problématiques majeures que sont les phénomènes de réponse forcée et les phénomènes auto-entretenus. En effet, l'intérêt de l'industriel se porte en majorité sur la prédiction de ces phénomènes qui conditionnera par la suite les critères de conception. Cependant, si les excitations forcées arrivent de manière générale à être correctement prédites, tel n'est pas le cas des phénomènes auto-entretenus dont la prédiction s'avère plus délicate. Or l'optimisation de la conception des pièces aéronautiques qui passe par une réduction de masse et inversement, par une augmentation des chargements aérodynamiques des aubages fait que ces phénomènes auto-entretenus tendent à devenir plus importants et doivent donc faire l'objet d'une étude approfondie. Marshall et Imregun [67] présentent une synthèse quant aux aspects phénoménologiques et méthodologiques de ces phénomènes dans les turbomachines. Dans cette section sont présentées succinctement les principales problématiques de l'aéroélasticité dans les turbomachines.

#### La réponse forcée

Les variations des caractéristiques de l'écoulement fluide engendrent des excitations aérodynamiques qui s'appliquent sur les roues aubagées (rotor et stator). La réponse forcée vue par un redresseur (respectivement un rotor) provient des sillages générés par la roue mobile (respectivement le redresseur) située en amont et potentiellement des roues situées en aval. Du point de vue d'une aube fixe, ces excitations sont stationnaires dans le repère fixe et par conséquent, les fréquences d'excitation sont des multiples entiers de la fréquence de passage des aubes ; on parle alors d'excitations synchrones de la vitesse de rotation du rotor. Les excitations forcées sont de nos jours généralement bien prédites soit théoriquement soit expérimentalement et posent donc moins de problèmes que les phénomènes asynchrones et auto-entretenus.

#### Les phénomènes auto-entretenus, asynchrones et de flottement

Dans le cas des phénomènes autoentretenus, les forces aérodynamiques sont liées aux vibrations des aubes. Le fluide et l'aube vibrent ensemble à l'unisson. Les fréquences de vibrations ne sont généralement plus des multiples du régime de rotation ; on parle ainsi de phénomènes asynchrones. Ces phénomènes sont assez variés, souvent mal maîtrisés et difficiles à prendre en compte dans les processus de conception puisqu'ils n'apparaissent, dans le développement des moteurs, que lors des phases d'essais. Ils peuvent donc conduire à des boucles de re-conceptions onéreuses.

Le phénomène de flottement est une instabilité dynamique d'origine aérodynamique qui apparaît au voisinage d'une fréquence propre de la roue aubagée. La vibration des aubes fixes et les forces aérodynamiques instationnaires s'auto-entretiennent. D'un point de vue de la structure, le flottement se caractérise par un amortissement aérodynamique "négatif" supérieur (en valeur absolue) à l'amortissement structural de telle sorte que l'énergie apportée par le fluide est supérieure à celle dissipée dans la structure. Ce phénomène est très dangereux pour les structures puisque les niveaux vibratoires sont incontrôlables. Il nécessite donc de sortir de la zone d'instabilité en modifiant le point de fonctionnement du moteur. Ce phénomène fait l'objet de nombreuses recherches, principalement du point de vue aérodynamique [40].

D'autres phénomènes asynchrones de vibration, qui ne rentrent pas dans les catégories précédentes, peuvent apparaître, en particulier sur les premiers étages de compresseurs haute pression et parfois sur les soufflantes. Ces phénomènes, regroupés sous l'appellation "vibrations asynchrones", possèdent quelques similitudes avec le flottement bien qu'aucune instabilité ne soit observée. On suppose généralement que la source de ces phénomènes n'est pas liée à la vibration des aubes. Ils sont encore mal compris et difficilement prévisibles mais font l'objet de nombreuses recherches [6, 54].

### **Les instabilités d'écoulement tournant**

La principale source d'instabilité d'écoulement tournant est le phénomène de décollement tournant. Il se caractérise par la présence de poches de fluide décollé qui se déplacent à une vitesse inférieure à celle du rotor. Il en résulte généralement de fortes différences de pression entre les différentes aubes d'une roue mobile ce qui génère de forts niveaux de vibration. Ces instabilités aérodynamiques tournantes peuvent parfois être à l'origine d'instabilités plus importantes comme le pompage.

### **Le phénomène de pompage**

Le pompage est un phénomène d'instabilité du fluide se manifestant par des oscillations basses fréquences de l'écoulement, et survenant lorsque les conditions de débit, d'alimentation, de pression ou de température s'éloignent du domaine de fonctionnement normal de la turbomachine. Ce phénomène instable étant généralement très énergétique, il fait endurer à la turbomachine de fortes sollicitations mécaniques [39].

### **Instabilité aéroacoustique**

Les phénomènes de résonances acoustiques engendrent des fluctuations de pression qui se propagent à la vitesse du son (dans le fluide) et peuvent générer des niveaux vibratoires importants dans les structures mécaniques. Il s'agit d'un phénomène aéroélastique assez méconnu bien qu'il soit communément admis que son origine est principalement aérody-

namique. Dans les turbomachines, ces résonances acoustiques, aussi appelées modes de fluide, sont excitées par des décollements tourbillonnaires dans les aubages.

### 1.2.2 Excitations d'origine mécanique

Bien que les interactions aéroélastiques soient les principales sources de vibration dans les turbomachines, il existe des sources d'origine mécanique. Deux des principaux critères de certification des turbomachines aéronautiques sont l'ingestion de corps étrangers de taille plus ou moins importante (oiseaux, glace ...) lors des phases de décollage ou d'atterrissage principalement et la perte d'une aube mobile. Ces deux cas génèrent des phénomènes transitoires (chocs) très violents et le second génère en plus des balourds mécaniques de grande ampleur. D'autre part, les phénomènes de contact rotor-stator prennent une importance grandissante du fait de la réduction des jeux aubes-carter pour augmenter le rendement des compresseurs. L'utilisation d'un abrasable sur le carter rend le contact plus souple mais cet abrasable s'use pendant le service du moteur modifiant l'interaction rotor-stator. De nombreuses études portent sur les divers aspects de ce sujet comme l'interaction modale [59, 4], les phénomènes d'instabilités [60] mais aussi des caractérisations expérimentales [78].

### 1.2.3 Périmètre d'étude

Dans le cadre de la thèse, nous nous limiterons uniquement à l'étude de la réponse forcée d'un redresseur sectorisé à des sollicitations aérodynamiques de type sillages et en présence de désaccordage. Le phénomène de flottement ne sera pas pris en compte, de même que les non-linéarités induites par le contact entre le redresseur et le carter. Cependant, les phénomènes d'origine accidentelle tels que le flottement ou le pompage pourront constituer des perspectives intéressantes pour enrichir les méthodes et modèles développés au cours de la thèse.

## 1.3 Dynamique des roues aubagées

Le dimensionnement en fatigue des composants de turbomachines aéronautiques tels que les roues aubagées passe nécessairement par leur analyse dynamique. Considérant donc une roue aubagée parfaitement cyclique, l'étude dynamique d'un seul secteur suffit pour connaître le comportement de la roue complète moyennant une décomposition de la réponse en séries de Fourier [92]. Cette technique assure un gain en temps de calcul considérable mais également en précision car l'on peut se permettre d'utiliser des maillages très fins. C'est alors qu'intervient la notion de modes à diamètres afin de caractériser la cyclicité des déformées propres de ce type de structure ainsi que la notion de désaccordage qui désigne les dispersions géométriques et matérielles au sein d'une même pièce et qui font que les propriétés de symétrie cyclique sont difficilement exploitables. On pourra se référer

aux publications de Srinivisan [89] et Slater [86, 87] pour un état de l'art sur la dynamique des roues aubagées de manière générale.

### 1.3.1 Caractéristiques des structures à symétrie cyclique

Une roue aubagée de turbomachine est formée de  $N$  secteurs aube-disque répétitifs. Elle possède alors les propriétés mathématiques particulières des structures dites à symétrie cyclique. Ces propriétés permettent de mettre en évidence que les déplacements peuvent être obtenus comme la superposition de mouvements indépendants à déphasage inter-aubes constant. On a :

$$x_k^n = x_1^n e^{i(k-1)\beta_n} \quad (1.1)$$

où  $x_k^n$  représente le vecteur des déplacements de l'ensemble des degrés de liberté du  $k$ -ième secteur pour un déphasage inter-aube  $\beta_n$ . La structure se refermant sur elle-même, la somme des déphasages sur toute la structure est un multiple de  $2\pi$ . Le plus petit déphasage valant  $\frac{2\pi}{N}$  et le plus grand  $2\pi$ , on a donc  $N$  déphasages possibles notés par la suite  $\beta_n = \frac{2\pi n}{N}$  pour  $0 \leq n \leq N - 1$ .

Ainsi :

- lorsque le déphasage est nul, c'est à dire pour  $n=0$ , tous les secteurs vibrent en phase ;
- pour un déphasage de  $\pi$ , atteint seulement lorsque  $N$  est pair (pour  $n = N/2$ ), deux secteurs adjacents vibrent en opposition de phase ;
- Dans les autres cas, on peut regrouper les déphasages par deux, égaux et de signe opposé,  $\beta_{N-i} = -\beta_i[2\pi]$ .

Ainsi pour un  $\beta_n$ , la connaissance de deux champs de déplacement indépendants est nécessaire sur un secteur de base pour reconstituer les déplacements sur toute la structure.

On peut alors introduire la notion de modes à diamètres nodaux. Le paramètre  $n$  qui fixe la valeur du déphasage  $\beta_n$  est caractéristique de la périodicité spatiale de la vibration. On l'appelle nombre d'onde, car on peut interpréter le mode de vibration comme une onde se propageant à la vitesse  $\omega/n$ , où  $\omega$  est la pulsation du mode. Les modes à déphasage inter-secteurs constant peuvent également être caractérisés par leur nombre de diamètres nodaux  $p$ , sur lesquels le déplacement est nul au cours du temps. La valeur maximum de  $p$  est  $\frac{N}{2}$ . La Figure 1.2 représente deux modes à diamètres pour une même roue composée de 24 aubes.

En pratique, le diagramme zig-zag (Wildheim, 1979) est très employé pour établir un lien entre le nombre de diamètres nodaux excités et l'ordre de l'harmonique d'excitation qui correspond au nombre d'obstacles vus à chaque tour de moteur par l'aubage considéré. Un exemple de diagramme zig-zag est observable sur la Figure 1.3. Sur cette figure, le nombre d'aubes qui composent la roue étudiée est 36 (ce qui explique que l'on ne peut pas aller au delà de 18 diamètres excités). Ce graphe montre que si la roue située en amont de la roue étudiée est composée de 4, 36 ou 40 aubes, les modes susceptibles d'être

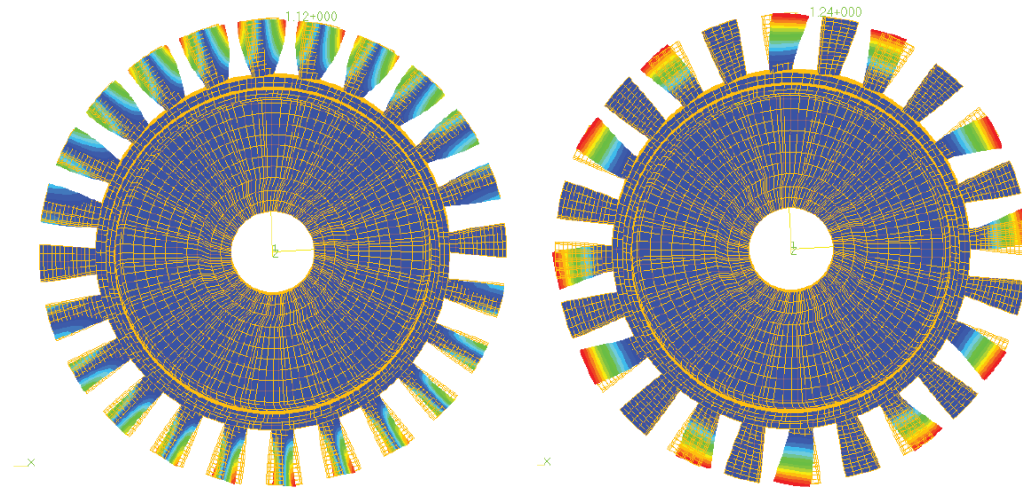


FIGURE 1.2 – Exemples de modes à diamètres nodaux : mode à 1 diamètre à gauche, mode à 6 diamètres à droite

excités seraient des modes à 4 diamètres. C'est cette condition d'excitation associée à la condition de coïncidence fréquentielle détaillée dans la section suivante avec la présentation du diagramme de Campbell, qui conduit à la résonance du système aubagé.

### 1.3.2 Outils d'aide à la conception des roues aubagées

La prédiction et la maîtrise des niveaux vibratoires des aubes fixes et mobiles excitées par des écoulements fluides constituent un enjeu de première importance pour les constructeurs de turbomachines. En effet, leur durée de vie conditionne indirectement celle de la machine toute entière. La démarche visant l'étude de la fatigue vibratoire de ce type de composants est détaillée sur la Figure 1.4.

Différents outils sont à la disposition des industriels pour leur permettre d'atteindre leurs objectifs en minimisant les éventuels surcoûts dus aux imprévus et d'être le plus prédictif possible. Ce sont ces différents outils que nous présentons dans ce qui suit.

#### Diagramme de Campbell

Les aubages sont soumis à des contraintes alternées à fréquence élevée qui peuvent entraîner de la fatigue. Lors de la conception d'une roue aubagée, on cherche à éviter les situations de résonance. Le diagramme de Campbell est particulièrement adapté pour visualiser les risques de résonance. Il permet de représenter l'évolution des fréquences propres d'une aube ou d'une roue aubagée en fonction du régime de rotation  $N$ . Dans le cas d'un stator, on a une indépendance vis-à-vis de la vitesse de rotation étant donné que ce sont des pièces fixes, ce qui rend le Diagramme de Campbell inutilisable dans ce cas. Cependant, les excitations harmoniques qui proviennent des rotors voisins font que des



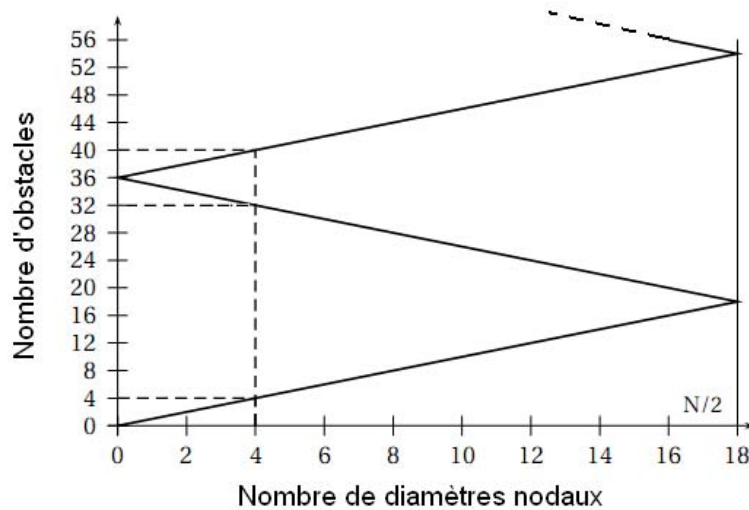


FIGURE 1.3 – Diagramme zig-zag

Fonctions de Réponse en Fréquence glissantes peuvent être tracées en fonction du régime de rotation du moteur afin de déterminer les zones de coïncidence pour les stators.

Si l'on se replace dans le cas du rotor, les coïncidences entre les fréquences propres et les ordres d'excitation moteur ou leurs harmoniques correspondent aux intersections des lignes "horizontales" qui correspondent à l'évolution des fréquences propres en fonction du régime et les droites des harmoniques du régime moteur. La Figure 1.5 montre un exemple de diagramme de Campbell dans lequel on peut relever des coïncidences entre différents modes propres et harmoniques moteur. Cette étape est très importante dans la phase de conception et de validation des aubages d'un point de vue vibratoire. En effet, lorsqu'une coïncidence est relevée à un régime de fonctionnement donné, il est important de s'assurer que le mode susceptible d'être excité n'est pas dangereux pour le système (par exemple en utilisant le diagramme zig-zag présenté en 1.3.1 et en effectuant des calculs de réponse forcée). Dans le cas contraire, il peut s'avérer nécessaire de reconsidérer la modélisation de certaines pièces afin de sortir de la zone de coïncidence (il est évidemment probable que de nouvelles zones de coïncidence apparaissent ; il faudra alors s'assurer qu'elles ne sont pas dangereuses). On peut donc voir que ce processus peut être long et très onéreux, c'est la raison pour laquelle les industriels réfléchissent à des solutions qui consisteraient à utiliser des amortisseurs non-linéaires pour éviter les surcoûts résultant d'éventuelles boucles de re-conception.

### Courbe de Wöhler

Dans les études de fatigue vibratoire, les composants sont soumis de manière générale à des contraintes alternées relativement importantes. De l'amplitude et de la fréquence de ces

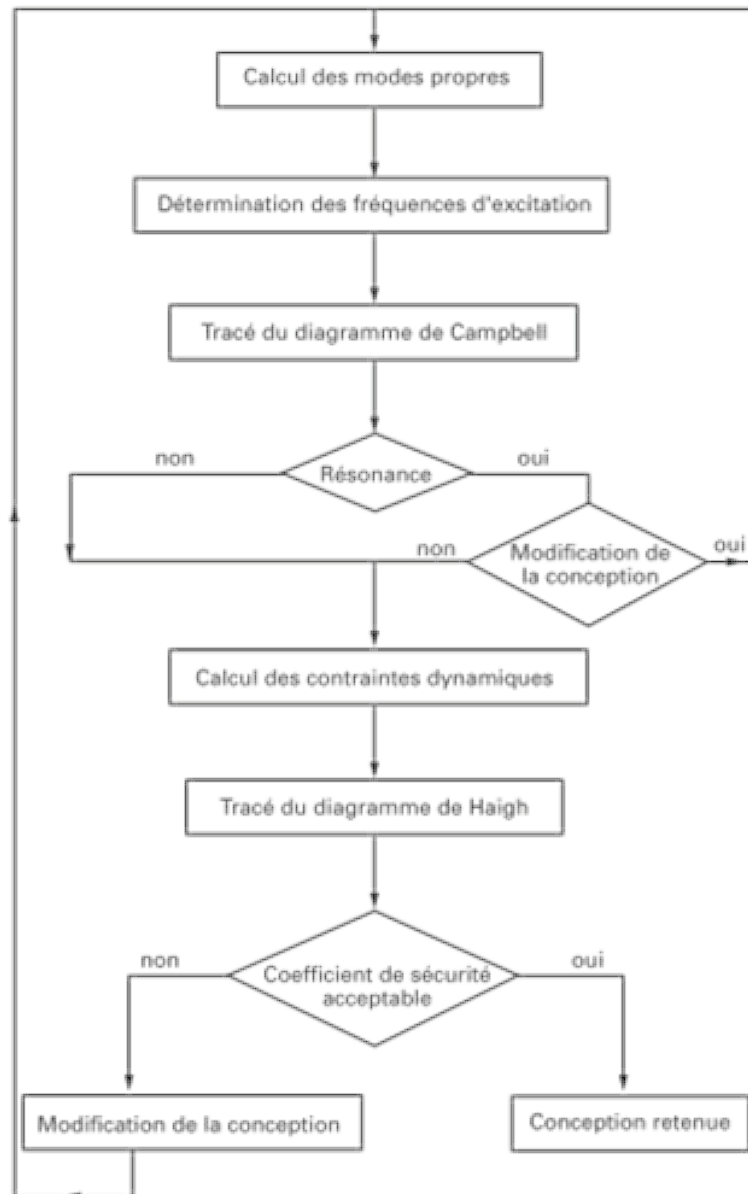


FIGURE 1.4 – Principe de la démarche de conception au regard de la tenue en fatigue vibratoire [27]

contraintes dépend la durée de vie de la pièce étudiée. Il est donc important de déterminer statistiquement la durée de vie de composants à partir de leur données matériaux et des sollicitations qu'ils subissent. C'est l'objet de la courbe de Wöhler qui permet de caractériser expérimentalement le phénomène de fatigue vibratoire à l'aide d'une courbe  $\sigma - N$  (contraintes - nombre de cycles). Cette courbe représente l'évolution de la contrainte alternée  $\sigma$  d'amplitude  $\sigma_a$  en fonction du nombre de cycles  $N_R$ , où  $N_R$  correspond au

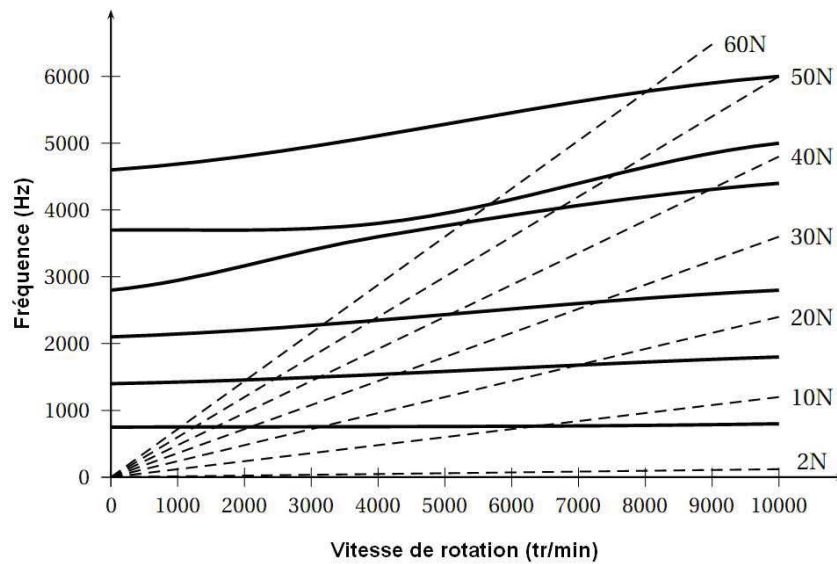


FIGURE 1.5 – Diagramme de Campbell

nombre de cycles au bout duquel un amorçage de fissure est observé. Ainsi, en pratique, des essais standardisés sont faits sur un certain nombre d'éprouvettes afin de déterminer la limite d'endurance de certains matériaux. Par exemple, sur la Figure 1.6, nous pouvons être presque sûrs qu'il n'y aura pas rupture pour une contrainte alternée d'amplitude inférieure à  $\sigma_e$ , la limite d'endurance du matériau.

### Diagramme de Haigh

En plus de la contrainte alternée  $\sigma_a$  dont il a été fait mention dans le paragraphe précédent, les composants de turbomachines sont généralement soumis à une contrainte moyenne  $\sigma_m$  relativement importante qui n'a pas été considérée par Wöhler dans ses travaux (il considérait une contrainte moyenne nulle). Ainsi, divers modèles tels que les diagrammes de Goodman, Soderberg, Gerber etc... ont été proposés afin d'estimer l'effet de cette contrainte moyenne sur la durée de vie en fatigue vibratoire. Le modèle de Haigh qui est l'un des plus utilisés permet de relier les niveaux de contrainte alternée à la contrainte moyenne pour un nombre de cycles donné. La Figure 1.7 représente la courbe de Haigh, par dessus laquelle sont représentés les modèles de Goodman et Soderberg (droites) ainsi que le modèle de Gerber (parabole). Un point de fonctionnement est considéré comme acceptable lorsqu'il se situe en dessous de la courbe du modèle considéré. Pour s'assurer une marge supplémentaire, les industriels rajoutent un coefficient de sécurité en plus de ce critère.

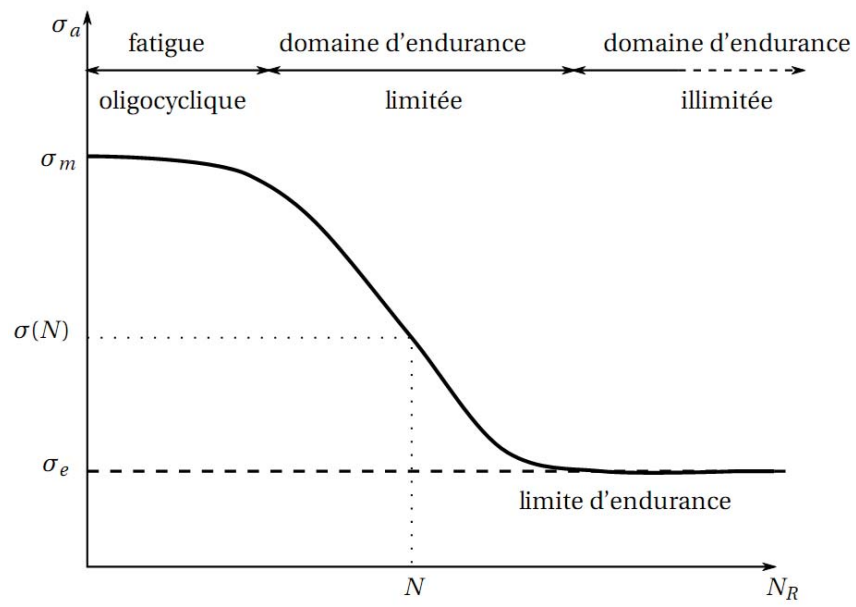


FIGURE 1.6 – Courbe de Wöhler

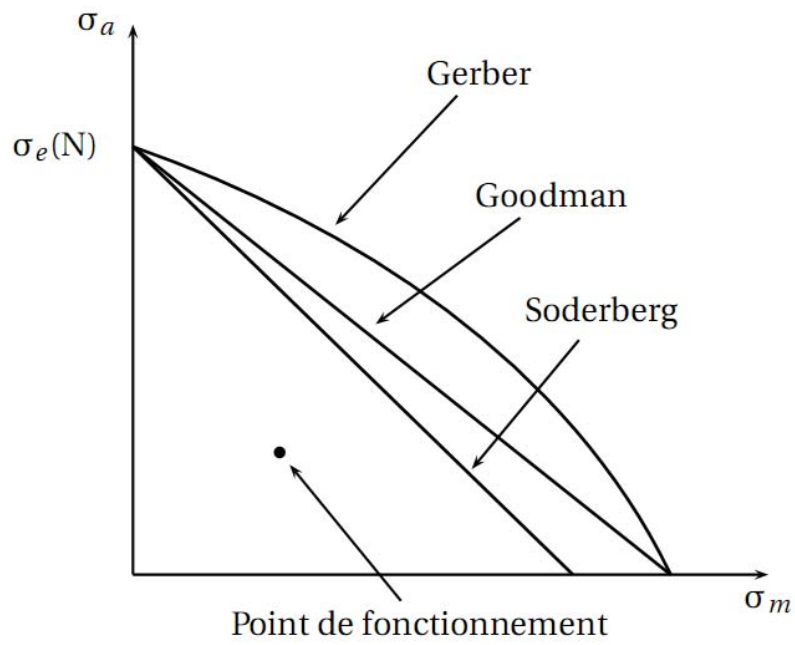


FIGURE 1.7 – Diagramme de Haigh

### 1.3.3 Effets du désaccordage sur les roues aubagées

L'existence de petites variations dimensionnelles et/ou matérielles entre les aubes d'un même rotor ou stator est connu sous le terme de désaccordage involontaire. C'est un phénomène qui peut radicalement changer le comportement vibratoire d'un assemblage aubagé désaccordé par rapport au système accordé correspondant. C'est la raison pour laquelle il intéresse davantage les constructeurs aéronautiques qui, de jour en jour, sont tenus d'en tenir compte lors de la phase de conception des composants pour une fiabilité mécanique accrue. Il existe trois principales sources de désaccordage involontaire dans les systèmes type roues aubagées :

1. le désaccordage mécanique qui se traduit par la présence de petites différences sur les caractéristiques géométriques et matérielles intrinsèques des aubes qui sont principalement dues aux tolérances de fabrication ;
2. le désaccordage lié à l'amortissement qui résulte des variations sur les propriétés amortissantes des aubes qui peuvent provenir de défauts suite à de la fatigue en service ;
3. le désaccordage aérodynamique qui résulte de variations sur l'amplitude et la phase des efforts aérodynamiques extérieurs qui s'appliquent sur les aubes.

Dans le cadre de la thèse, nous n'avons considéré que le désaccordage mécanique qui correspond à celui qui a un impact direct sur le comportement modal d'un système mécanique.

L'influence du désaccordage sur la réponse dynamique des roues aubagées est conditionnée d'une part, par le taux de désaccordage qui peut être défini comme l'écart-type des fréquences des aubes, et d'autre part, par la raideur de couplage inter-aubes. Wagner [93], Dye et Henry [31], et Ewins [33] ont été parmi les premiers à considérer le désaccordage et le couplage des aubes par le disque ou les viroles dans les simulations numériques. Il est ressorti de leurs études que certaines aubes pouvaient répondre de façon plus importante que d'autres à une excitation périodique donnée. Cela traduit donc une amplification de la réponse maximale observable sur une roue aubagée désaccordée par rapport à celle observée sur un modèle accordé, ce qui constitue la conséquence la plus importante du désaccordage. La Figure 1.8 montre l'évolution de l'amplification de la réponse en fonction du taux de désaccordage involontaire.

Il est intéressant de noter que pour un désaccordage élevé, l'amplitude de la réponse n'est que 1.2 fois supérieure à celle du modèle accordé. C'est ce constat qui a suggéré l'emploi du désaccordage intentionnel [19, 22, 62, 70] qui consiste à volontairement modifier une ou plusieurs aubes afin de se situer dans la partie de la courbe où l'amplification est la plus basse et ainsi, de ne plus subir l'effet du désaccordage involontaire en imposant un désaccordage maîtrisé.

Une autre conséquence du désaccordage est la localisation des modes propres et de la réponse forcée qui a particulièrement intéressé C. Pierre [80, 56, 55]. Evidemment, ces deux conséquences du désaccordage sont liées car l'amplification de la réponse peut résulter

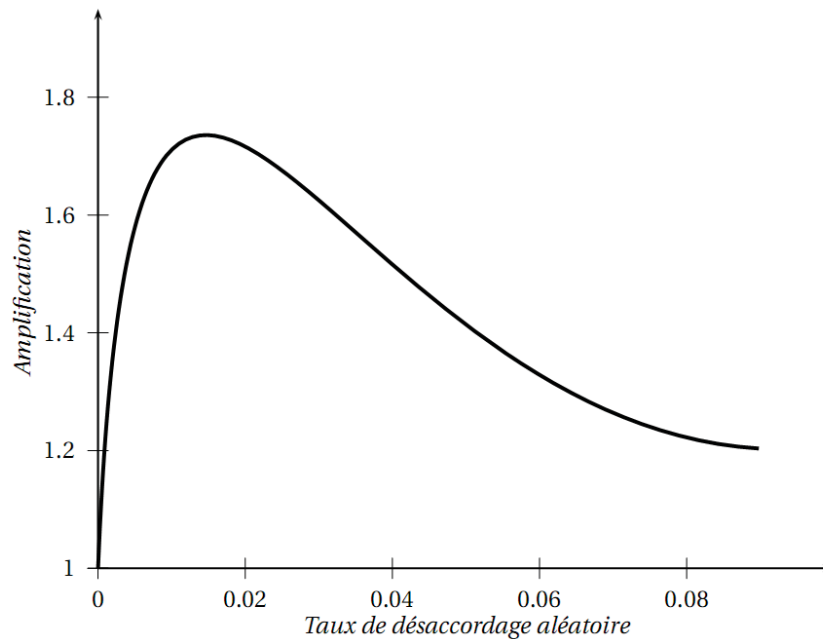


FIGURE 1.8 – Courbe représentant l'évolution de l'amplification dynamique de la réponse avec le taux de désaccordage pour une roue aubagée mobile [20]

d'une localisation de la réponse forcée. Diverses études à l'image de [76, 95] se sont attelées à montrer le lien qui existe entre la raideur de couplage inter-aubes et la localisation de la réponse forcée pour un taux de désaccordage relativement faible. Il en est ressorti que lorsque cette raideur est trop faible ou trop forte, les aubes ont tendance à être découplées et ont du mal à se transmettre de l'énergie, ce qui confère au système un comportement proche d'un système accordé. Cependant, pour une raideur de couplage intermédiaire, les aubes ont la possibilité de communiquer de l'énergie vibratoire ce qui rend possible le confinement de l'énergie sur une aube en particulier. C'est ce qu'Ottarson montre dans [76] au travers de la Figure 1.9 qui représente l'allure de la courbe de l'amplification de la réponse forcée en fonction de la raideur de couplage inter-aubes.

## 1.4 Conclusions

Ce chapitre a permis de mettre en avant le contexte industriel actuel des roues aubagées. Les principaux phénomènes qui interviennent dans l'étude vibratoire des roues aubagées (stator et rotor) ont été abordés. Nous avons pu voir que les excitations subies par les roues aubagées sont d'origines diverses et ont un impact important sur leur comportement dynamique, parfois même difficilement prévisible comme dans le cas des phénomènes d'origine accidentelle (flottement, pompage ...); les excitations sont cependant majoritairement d'origine aérodynamique.

Nous avons ensuite présenté les différentes méthodes employées à ce jour dans le cadre

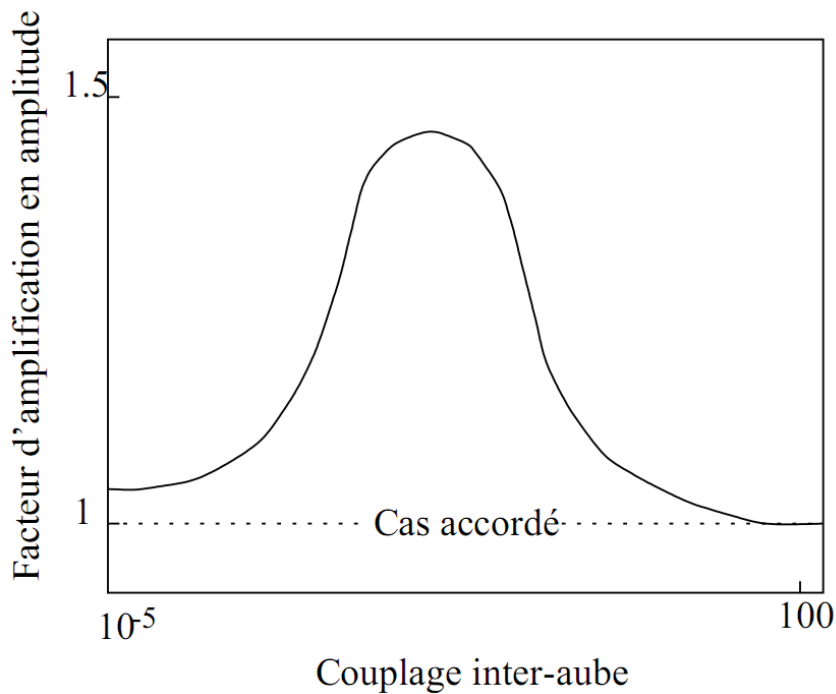


FIGURE 1.9 – Courbe représentant l'évolution de l'amplification dynamique de la réponse en fonction du couplage inter-aubes [76]

de la tenue en fatigue des roues aubagées. Les industriels se doivent en effet de garantir une certaine durée de vie en fatigue vibratoire de leurs pièces tout en limitant les boucles de re-conception qui s'avèrent onéreuses. C'est là que réside tout l'intérêt de mettre en place des méthodes robustes de prédiction du comportement vibratoire de ces pièces.

Enfin, nous avons abordé la problématique liée au désaccordage qui intéresse davantage les industriels car le prendre en considération, c'est se rapprocher de plus en plus de la réalité. Nous avons donc mis en évidence l'impact du désaccordage sur le dimensionnement des roues aubagées. En effet, des phénomènes tels que la localisation modale et l'amplification dynamique de la réponse peuvent avoir des conséquences importantes sur le bon fonctionnement des pièces en service. Ces phénomènes ont donc un impact direct sur le dimensionnement des pièces et sont difficilement prévisibles.

Au travers de ce chapitre, nous voulions donc introduire les différentes notions qui seront employées tout au long de ce mémoire et dont la compréhension s'avère importante pour appréhender au mieux la suite.

# Chapitre 2

## Etude phénoménologique du comportement dynamique des redresseurs sectorisés

*Dans ce chapitre, la phénoménologie des redresseurs sectorisés est abordée. Les effets de la sectorisation ainsi que ceux du désaccordage sont traités au travers de divers simulations numériques et essais préliminaires. Le but est d'étudier la sensibilité des redresseurs sectorisés à ces paramètres afin de bien en déterminer les caractéristiques dynamiques et ainsi de proposer une modélisation pertinente.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>22</b>
<b>2.2</b>	<b>Présentation du compresseur CREATE</b>	<b>22</b>
<b>2.3</b>	<b>Etudes de sensibilité au désaccordage</b>	<b>24</b>
2.3.1	Caractéristiques générales du modèle	25
2.3.2	Sensibilité au désaccordage	25
2.3.3	Conclusions sur les études de sensibilité	31
<b>2.4</b>	<b>Essais de caractérisation modale d'un secteur</b>	<b>33</b>
2.4.1	Principe des essais	33
2.4.2	Appariement en fréquence	36
2.4.3	Appariement en forme	36
2.4.4	Identification de l'amortissement modal	37
2.4.5	Conclusions sur les essais vibratoires	38
<b>2.5</b>	<b>Essais sur le compresseur CREATE</b>	<b>39</b>
2.5.1	Instrumentation	40
2.5.2	Etudes et post-traitements	42
2.5.3	Conclusions sur les essais CREATE	45
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>45</b>

---



## 2.1 Introduction

Pour assurer la tenue mécanique des secteurs de redresseurs face aux sollicitations aérodynamiques auxquelles ils sont sujets, il est important de maîtriser la réponse dynamique de ce type de structure quel que soit le désaccordage présent. Cependant, le problème est rendu délicat par la présence d'un amortissement structural faible dans la pièce qui a pour conséquence d'amplifier considérablement les niveaux de réponse vibratoire ainsi que la criticité des phénomènes de localisation spatiale des modes dus au désaccordage [96, 31, 34, 16, 85, 68]. Il est donc primordial d'étudier la phénoménologie de ce type de structures. D'ailleurs R. Corral [23] s'est attelé à l'étude de la stabilité aéroélastique de ce type de structure à partir de modèles simplifiés de type masse-ressort. Notre étude se fera donc à la fois dans une configuration de couplage aéromécanique d'une part, et de façon purement mécanique d'autre part.

Dans un premier temps, nous présenterons le compresseur CREATE qui est un compresseur de recherches Haute Pression ainsi que la phénoménologie d'un secteur de redresseur constitué de 10 pales issu de ce même compresseur. Pour ce faire, des simulations numériques ont été faites sur le modèle de la Figure 2.2 dans le but de connaître l'influence du désaccordage sur le comportement dynamique de telles structures. Ces études feront l'objet de la première partie de ce chapitre.

Dans une deuxième partie seront présentés des essais partiels de caractérisation modale qui ont été effectués sur une pièce physique, constituée de 20 pales cette fois-ci. Ils ont permis de mettre en évidence la sensibilité des redresseurs sectorisés vis-à-vis du désaccordage involontaire et d'obtenir des données physiques d'entrée pour le développement des modèles académiques à venir (amortissement, taux de désaccordage...). Une corrélation calculs/essais a été tentée en considérant un modèle numérique d'un secteur de 20 pales. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présenterons les campagnes d'essais qui ont été effectuées en conditions de fonctionnement moteur et les résultats qui en ont découlés.

## 2.2 Présentation du compresseur CREATE

Le Groupe "Turbomachines" du Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique (LMFA) s'intéresse à l'analyse, la modélisation et au calcul des écoulements dans les turbomachines, dans les domaines de la propulsion aéronautique et de la production d'énergie. Mis en place conjointement par le LMFA et SNECMA, CREATE (Compresseur de Recherche pour l'étude des effets Aérodynamiques et TEchnologiques) est un compresseur de recherche tri-étage spécialement conçu pour la validation de méthodes de simulation [77]. Ce grand instrument d'essai, qui permet des études paramétriques de natures aérodynamique et mécanique, devrait conduire à une conception et une fabrication optimales des compresseurs haute pression des moteurs d'avion. La Figure 2.1 montre une photo ainsi qu'une vue en coupe de la machine.

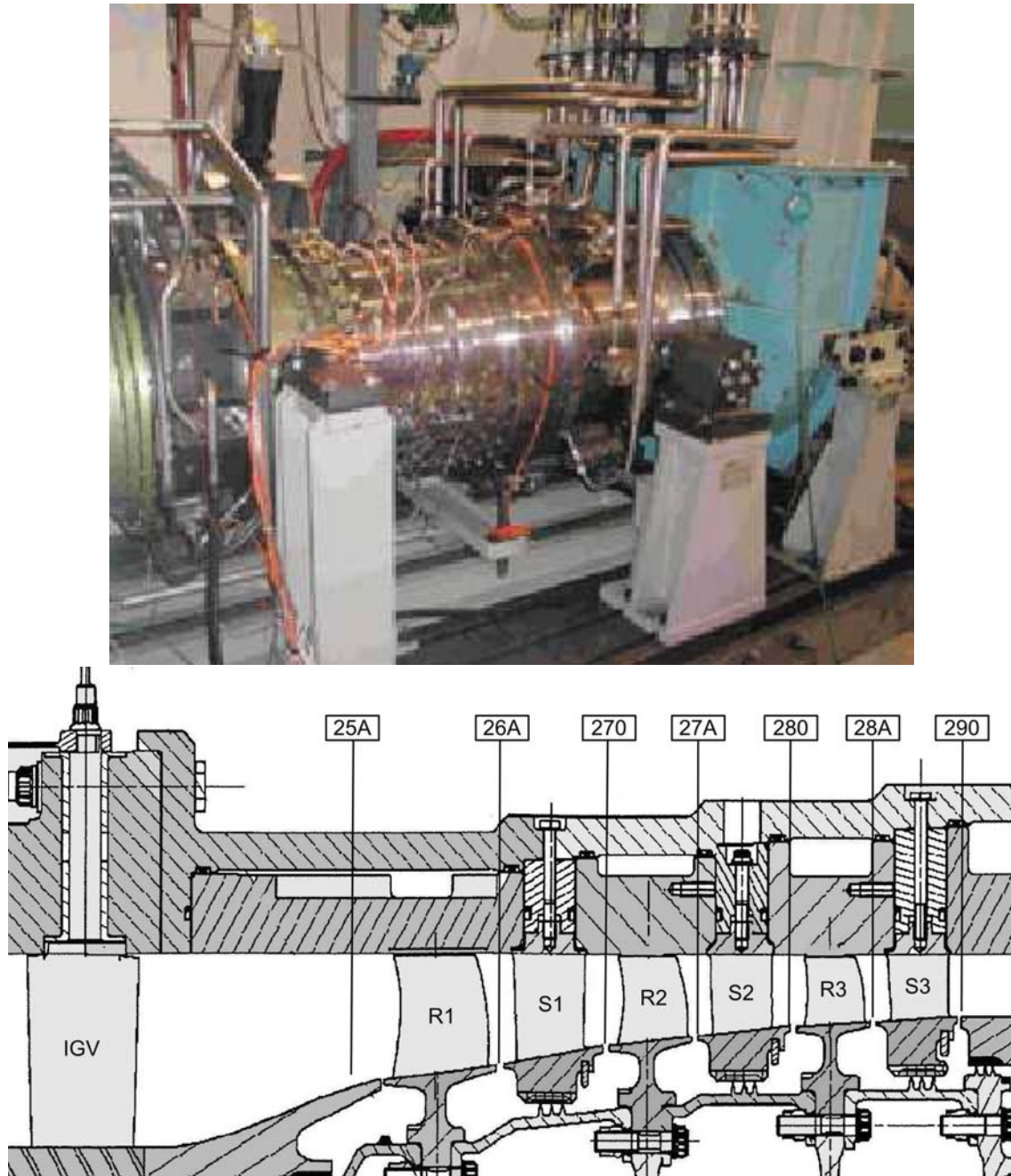


FIGURE 2.1 – Photo et vue en coupe du compresseur CREATE [source LMFA]



FIGURE 2.2 – Redresseur sectorisé de 10 pales du 1er étage du compresseur CREATE (version 2-bis)

Le programme CREATE s'inscrit dans une démarche d'appui au développement des turboréacteurs de la société SNECMA pour les avions civils, tels que les moteurs CFM56 ou leurs successeurs. En effet, les compresseurs haute pression multi-étages sont des composants critiques du turboréacteur ; leurs performances (en matière de rendement et de taux de compression) ont des conséquences directes importantes sur la consommation spécifique de carburant, le rapport poussée/masse et le coût d'acquisition du moteur. De plus, les instabilités potentielles de fonctionnement du compresseur influent fortement sur le pilotage du moteur. Il a donc été jugé intéressant d'utiliser ce véhicule pour effectuer des mesures vibratoires en fonctionnement moteur et en tirer des données physiques réalistes ainsi que les niveaux de réponse vibratoire attendus. Le secteur de redresseur étudié dans la suite de ce mémoire provient du premier étage de CREATE et sera nommé RD1.

### 2.3 Etudes de sensibilité au désaccordage

Dans le cas de pièces à faible amortissement telles que les roues aubagées monobloc sectorisées ou pas, il est important d'étudier au préalable leur sensibilité au désaccordage. Une méthode visant à introduire un désaccordage volontaire pour réduire le facteur d'amplification de la réponse dû au désaccordage involontaire a été présentée dans [71, 70]. Ces méthodes s'appuient en général sur des méthodes de réduction de modèles pour alléger les coûts de calculs [18, 35, 36, 11, 71]. Nous nous sommes intéressés ici à l'influence du désaccordage involontaire sur le comportement vibratoire des redresseurs sectorisés. Nous avons donc désaccordé un modèle numérique de secteur de redresseur en fréquence en effectuant des tirages de modules d'Young sur les pales en vue de simulations numériques.

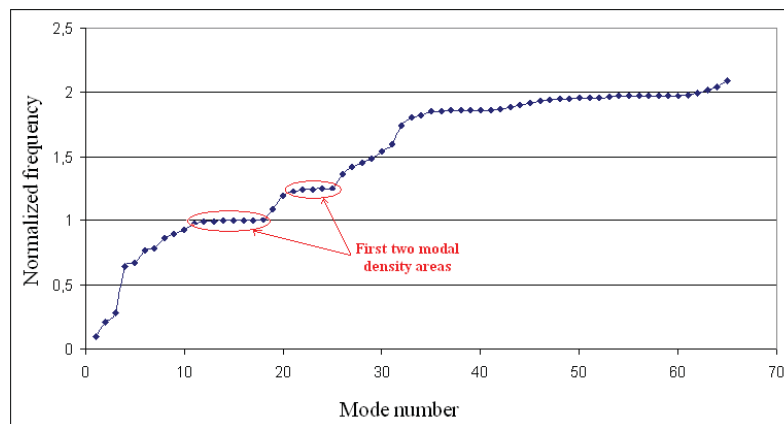


FIGURE 2.3 – Diagramme représentant l'évolution des fréquences propres en fonction du numéro du mode

### 2.3.1 Caractéristiques générales du modèle

La Figure 2.2 représente le modèle numérique éléments finis du RD1 qui a servi pour les différentes simulations qui ont été faites. Le redresseur complet est divisé en plusieurs secteurs indépendants qui possèdent chacun des nombres de pales différents. Nous avons choisi pour le RD1 un secteur de 10 pales, entièrement instrumenté en jauges de déformation. Ainsi, lors des essais moteurs, il sera possible de suivre le comportement dynamique de chaque pale. En condition de fonctionnement moteur, la virole supérieure du RD1 est encastrée sur le carter du compresseur ; nous avons donc considéré cette condition limite dans tous les calculs qui ont été faits. Les simulations ont été effectuées sur le modèle éléments finis après validation de la convergence du maillage.

Nous avons effectué un calcul de modes propres sur le modèle parfaitement accordé présenté précédemment. Nous avons voulu visualiser comment évoluait la fréquence propre du secteur en fonction du mode propre. C'est l'objet de la Figure 2.3. On relève des zones de forte densité modale susceptibles de favoriser le couplage entre les modes propres voisins concernés.

### 2.3.2 Sensibilité au désaccordage du comportement dynamique d'un secteur de redresseur

Nous avons fait deux tirages de dix modules d'Young afin de créer arbitrairement des motifs de désaccordage pour le secteur de redresseur. Les modules d'Young tirés suivent une loi uniforme de moyenne le module d'Young du modèle accordé et d'écart-type 5%.

La Figure 2.4 montre les différents tirages de désaccordage qui ont été étudiés et comment leurs valeurs de modules d'Young se situent par rapport à la valeur nominale. Deux tirages de 10 modules d'Young distincts ont été faits pour être distribués à chacune des pales du secteur et pour constituer les différents motifs de désaccordage à étudier.

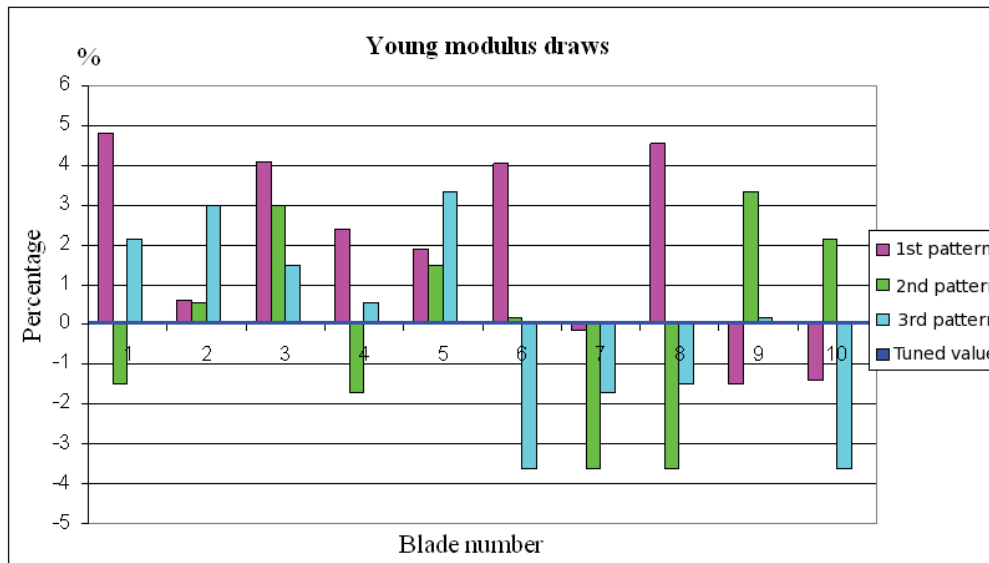


FIGURE 2.4 – Diagramme montrant la répartition des modules d’Young le long du secteur pour différents tirages de désaccordage

Trois motifs ont été étudiés. Le premier motif a été créé à partir du premier tirage et les deux autres motifs à partir du second tirage. Il faut donc noter que les mêmes modules d’Young composent les motifs 2 et 3 mais c’est la distribution spatiale de ces modules d’Young qui diffère ; le but étant de montrer l’influence de la répartition sur la réponse modale du secteur de redresseur. Il a donc été effectué des calculs de modes propres qui ont permis d’une part, de comparer les fréquences propres du redresseur issues des différentes configurations étudiées et d’autre part, de comparer les déformées modales moyennant l’utilisation d’un critère de MAC (Modal Assurance Criterion). Le critère de MAC est un produit scalaire fait entre deux déformées propres qui permet de vérifier le degré de corrélation qui existe entre celles-ci. Il peut s’écrire ainsi :

$$MAC(\phi, \psi) = \frac{\|\{\phi\}^T \{\psi\}\|^2}{\|\{\phi\}\|^2 \|\{\psi\}\|^2} \quad (2.1)$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont les deux déformées modales à comparer. Ainsi, plus le MAC se rapproche de 1, plus la corrélation tend vers la perfection. Une corrélation est généralement jugée acceptable à partir d’une valeur de MAC de 0.7.

### Appariement en fréquence

La Figure 2.5 montre que les fréquences propres du redresseur ne sont pas particulièrement sensibles au désaccordage. En effet, on ne note pas de différences importantes vis-à-vis de l’évolution des fréquences propres et de la densité modale. On peut cependant remarquer que la répartition des modules d’Young le long du redresseur conditionne en

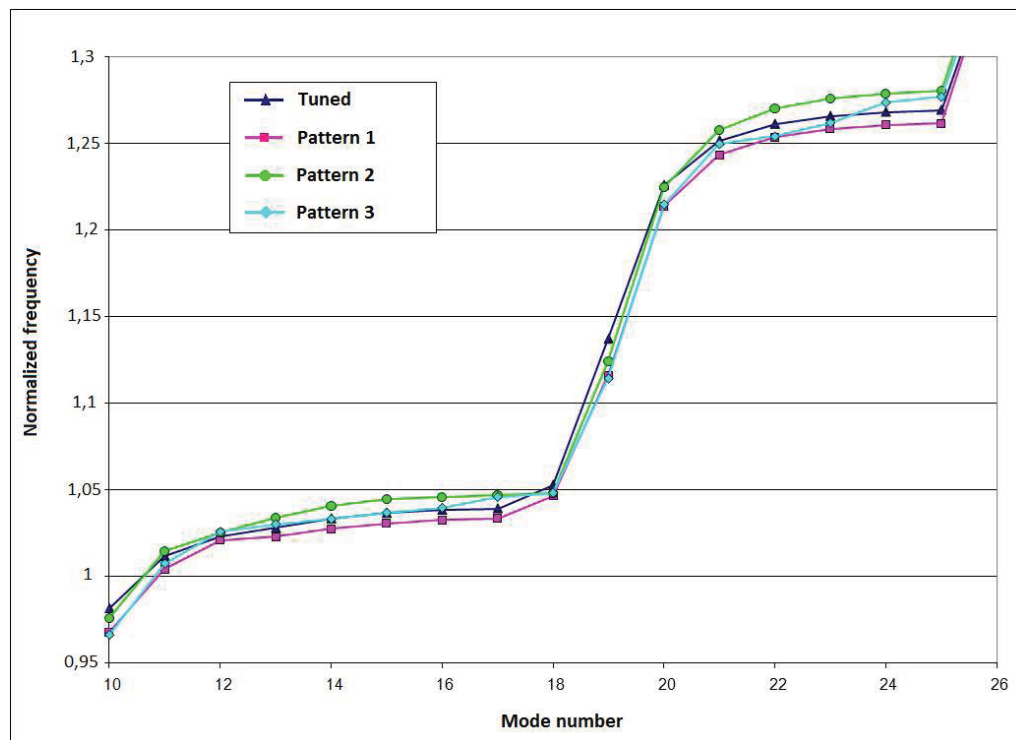


FIGURE 2.5 – Sensibilité en fréquence : Diagramme fréquences propres/numéro du mode

partie l'étalement fréquentiel des zones à forte densité modale (cf. 3e tirage de la Figure 2.5).

### Appariement en forme

Les Figures 2.6, 2.8 et 2.7 montrent une comparaison des déformées propres entre modèles accordés et les trois modèles désaccordés, respectivement les motifs 1, 2 et 3 présentés sur la Figure 2.4.

Sur les trois matrices de MAC qui ont été tracées, on voit que les dix premiers modes propres sont quasi-parfaitement représentés ce qui montre qu'ils ne sont pas vraiment sensibles aux différents désaccordages qui ont été testés. Cela nous confirme que les déformées propres des modes d'ensemble qui font beaucoup intervenir la virole inférieure ne changent pas beaucoup avec le désaccordage. Sur les Figures 2.6 et 2.7, à partir du dixième mode, la corrélation n'est pas particulièrement mauvaise mais elle laisse apparaître des écarts liés à des décalages de modes (par exemple une corrélation extradiagonale). Cela est dû à la forte proximité fréquentielle des modes propres concernés et du couplage qui en résulte ce qui rend l'identification mode à mode difficile. En effet, le mode 11 d'un motif donné peut correspondre au mode 15 d'un autre motif car tous les modes qui se retrouvent dans les paliers à forte densité modale ont des allures globalement similaires mais nous ne sommes pas en mesure de prédire l'évolution de chacun de ces modes avec le désaccordage.



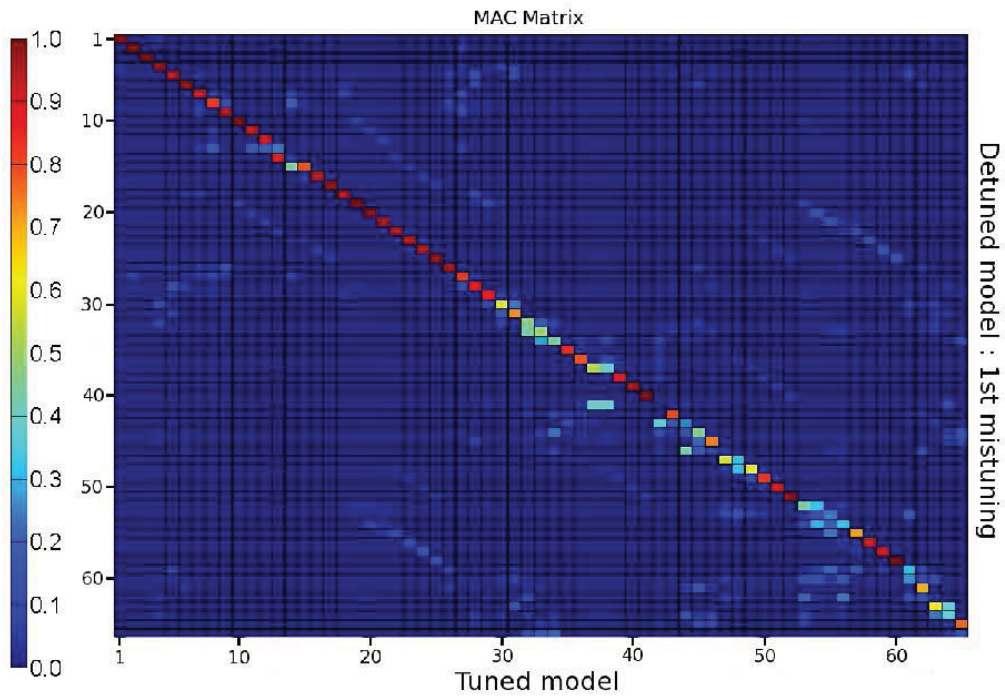


FIGURE 2.6 – MAC entre modèle accordé et modèle désaccordé 1

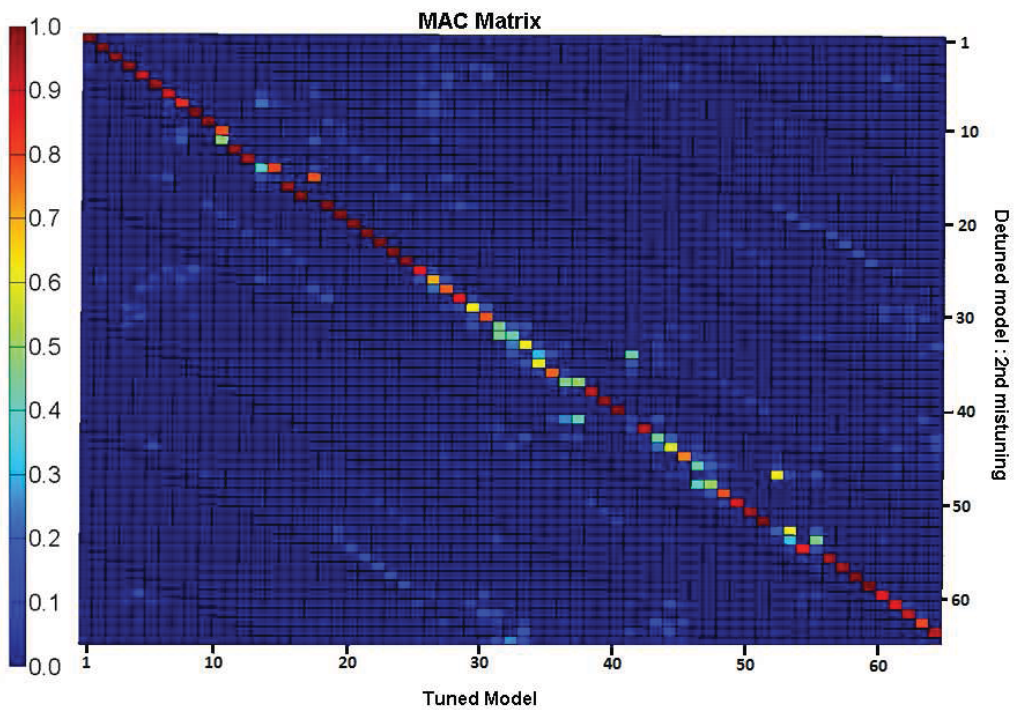


FIGURE 2.7 – MAC entre modèle accordé et modèle désaccordé 2



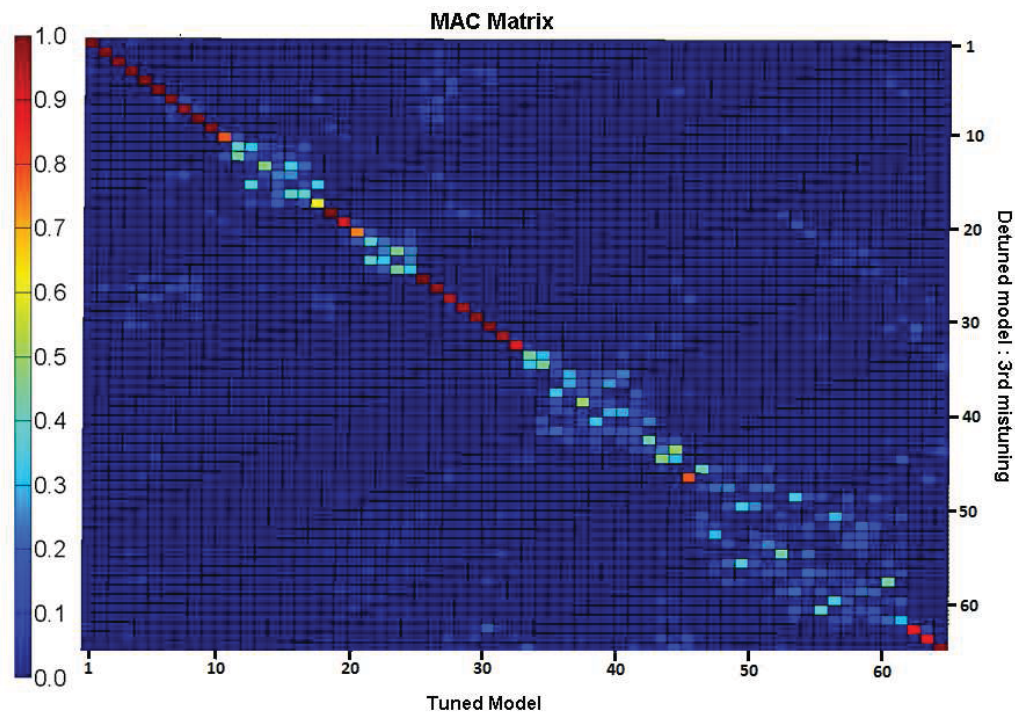


FIGURE 2.8 – MAC entre modèle accordé et modèle désaccordé 3

Par contre, sur la Figure 2.8, on note que la corrélation est mauvaise principalement au niveau des zones à fortes densité modale car il ne s’agit même plus de permutations ou de décalages de modes, mais les modes en question ne sont pas du tout appariés. Comme nous l’a montré la Figure 2.5, le motif 3 dont il est ici question a tendance à casser la forme des paliers à cause de la répartition des modules d’Young qui a tendance à créer une dissymétrie structurale au centre du redresseur. Cet effet se répercute donc sur l’allure globale des modes situés dans ces zones. On peut également noter qu’à partir d’un certain seuil qui correspond principalement aux modes propres de plus hautes fréquences dont l’allure des déformées est plus complexe, les modes en question sont difficilement appariables avec ceux du modèle accordé (à savoir qu’il s’agit également de modes à forte proximité fréquentielle comme le montre la Figure 2.3). Ces études montrent donc l’importance de l’influence de l’allure des motifs de désaccordage sur les modes propres d’un secteur de redresseur.

### Calcul de la réponse forcée à une excitation aérodynamique

Nous avons ensuite voulu étudier la sensibilité du secteur de redresseur à une réponse forcée aérodynamique pour différents motifs de désaccordage. Nous disposons de pressions aérodynamiques calculées par le LMFA lors de précédents essais qui avaient été effectués sur la machine CREATE 1, version antérieure à la machine CREATE 2-bis. Notre objectif était de développer toute la procédure d’intégration de pressions aérodynamiques

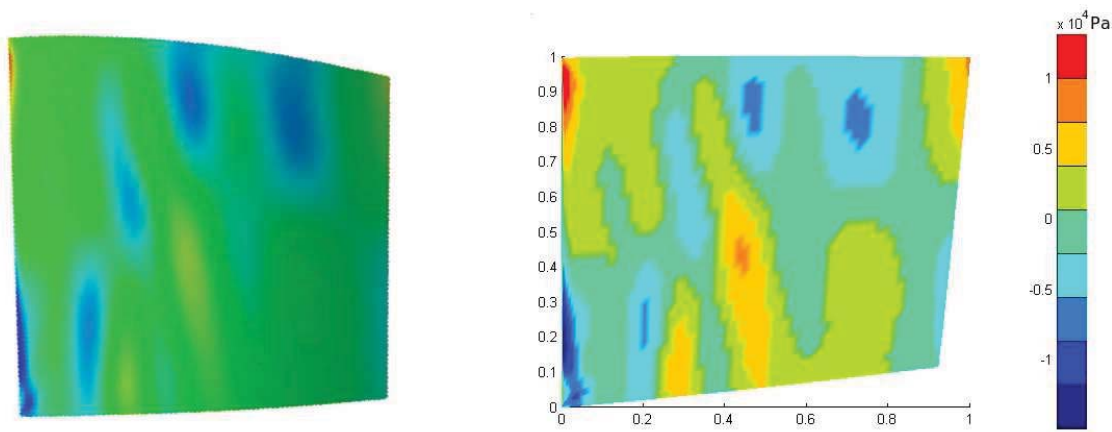


FIGURE 2.9 – Partie réelle du champ de pressions de référence (à gauche) et interpolé (à droite) sur l'extrados de l'aube

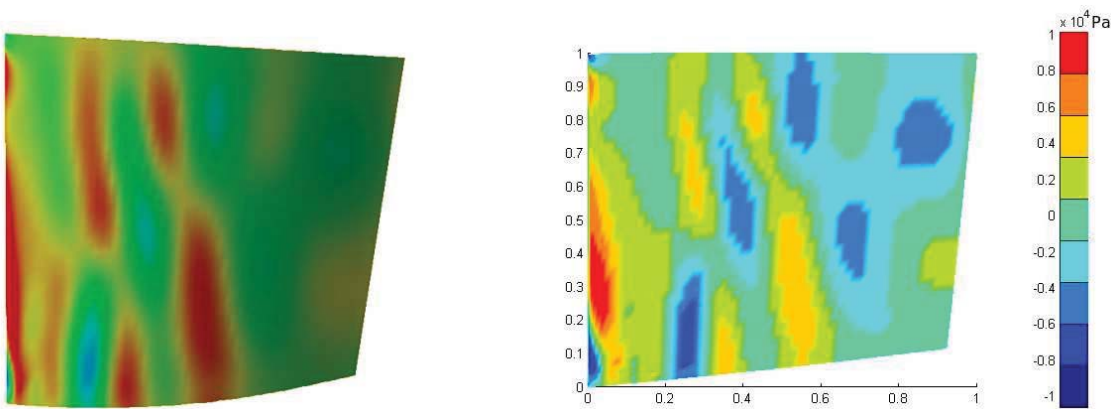


FIGURE 2.10 – Partie imaginaire du champ de pressions de référence (à gauche) et interpolé (à droite) sur l'extrados de l'aube

instationnaires sous AEROMECA (logiciel de calcul aéromécanique interne à Snecma) en les interpolant sur le maillage mécanique d'une pale du RD1. Ces pressions ont été calculées sur un maillage aérodynamique spécifique. L'incompatibilité entre les deux maillages provient du fait que le maillage aérodynamique est beaucoup plus fin que le maillage mécanique d'où la nécessité d'effectuer une interpolation. Suite à cela, nous avons pu visualiser le champ interpolé sur la pale et le comparer à celui fourni par le LMFA en guise de référence. Les Figures 2.9 et 2.10 montrent respectivement les parties réelles et imaginaires des champs de pressions de référence et interpolés sur la face extrados de l'aube.

Ce que l'on observe est globalement satisfaisant. En effet, l'évolution des gradients de pressions est similaire entre les deux modèles car dans les deux cas, les zones de l'aube les plus sollicitées sont les mêmes. L'interpolation peut être donc considérée comme étant

globalement bonne ce qui est de bon augure pour de futurs calculs de réponse forcée avec des excitations aérodynamiques. C'est là aussi que résidait tout l'intérêt de mettre en place une telle méthodologie qui pourrait faciliter d'éventuelles corrélations calculs/essais (par exemple dans le cas où on aurait identifié le désaccordage au préalable et qu'on dispose des efforts aérodynamiques réalistes).

Nous avons donc pu effectuer un calcul de réponse forcée sur le secteur de redresseur en considérant comme excitation les champs de pressions interpolés via AEROMECA. Le nombre d'obstacles en amont est spécifié à ce moment pour prendre en compte le déphasage de l'excitation sur les différentes pales du secteur qui correspond aux sillages. Nous arrivons donc à tracer pour chaque pale le déplacement maximal relevé pour une plage de fréquences d'excitation qui couvre les basses fréquences et les deux premiers paliers à forte densité modale. C'est ce que met en évidence la Figure 2.11.

Comme l'on pouvait s'y attendre, la majorité des pales ont un comportement faiblement sensible au désaccordage pour les 10 premiers modes propres. C'est ce qui avait été observé sur les matrices de MAC présentées dans les Figures 2.6, 2.7 et 2.8. Cependant, dès que l'on excite des zones à forte densité modale, on note des écarts significatifs sur la réponse dynamique d'une même pale pour différents motifs de désaccordage ; cela provient des phénomènes de permutation et de décalages de modes dont nous avons fait mention plus haut. Nous pouvons aussi remarquer que le motif 3 est le motif de désaccordage qui a apporté le plus d'incertitudes quant à la prédiction des niveaux vibratoires car c'est le seul des trois motifs qui perturbait totalement les modes des deux premiers paliers à forte densité modale. Cela nous montre qu'il faut tenir compte de l'effet de plusieurs motifs de désaccordage différents pour espérer prédire de façon robuste le comportement dynamique d'un secteur de redresseur désaccordé quelconque.

### 2.3.3 Conclusions sur les études de sensibilité

Les différentes simulations numériques qui ont été faites sur les modèles de secteur de redresseur accordé puis désaccordés ont permis de mettre en évidence la problématique. En effet, la sensibilité des déformées propres au désaccordage dans les zones à forte densité modale montre la difficulté à prédire la réponse forcée pour une même excitation. Ceci confirme la nécessité d'avoir recours à des méthodes stochastiques comme cela a été le cas dans bon nombre d'études de roues aubagées désaccordées. Afin d'obtenir des données physiques provenant d'une pièce réelle en vue du développement de modèles prédictifs, des essais de caractérisation modale ont été faits sur un secteur de redresseur fourni par SNECMA et font l'objet de la section suivante.

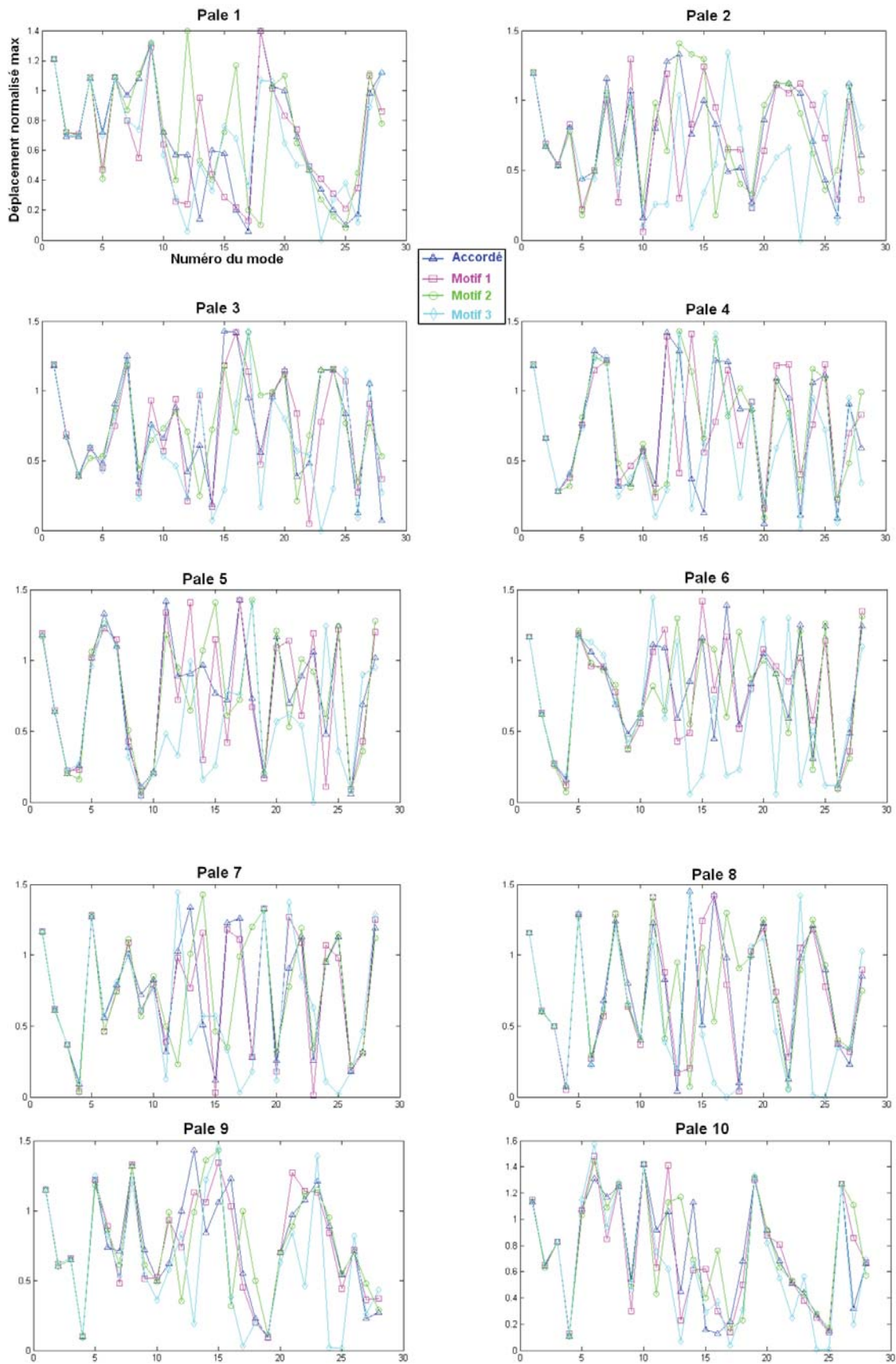


FIGURE 2.11 – Réponse forcée AEROMECA : déplacement maximal relevé pour chaque pale et pour les différents motifs de désaccordage étudiés





FIGURE 2.12 – Redresseur RD1 à 20 pales suspendu au bâti par des élastiques

## 2.4 Essais de caractérisation modale d'un secteur

Nous disposons d'un secteur de RD1 constitué de 20 pales. Nous avons effectué des essais sur cette pièce pour en déterminer les fréquences propres et les formes propres et comparer qualitativement les résultats avec ceux issus de calculs de modes propres sur un modèle numérique d'un secteur de redresseur de 20 pales accordé. La pièce étant de facto désaccordée, cela nous a permis de comparer des résultats issus d'un modèle accordé à ceux d'un modèle désaccordé réaliste. Après avoir présenté les essais qui ont été effectués, nous montrerons les résultats de la corrélation calculs/essais en fréquence et en déformées propres.

### 2.4.1 Principe des essais

L'étude a porté sur le redresseur sectorisé RD1 de la machine CREATE. Ce redresseur doté de 20 pales a été suspendu à l'aide d'élastiques pour se placer en conditions libre-libre (cf. Figure 2.12). Pour exciter la structure, nous nous sommes servis d'un pot piézoélectrique pour pouvoir atteindre des fréquences élevées (de l'ordre de quelques dizaines de kHz). Il a donc été positionné au niveau de la virole inférieure. L'excitation s'est faite par l'intermédiaire d'une tige métallique liant de manière rigide le pot au redresseur.

Lorsque le redresseur est excité, nous relevons le déplacement axial à l'aide d'un vi-

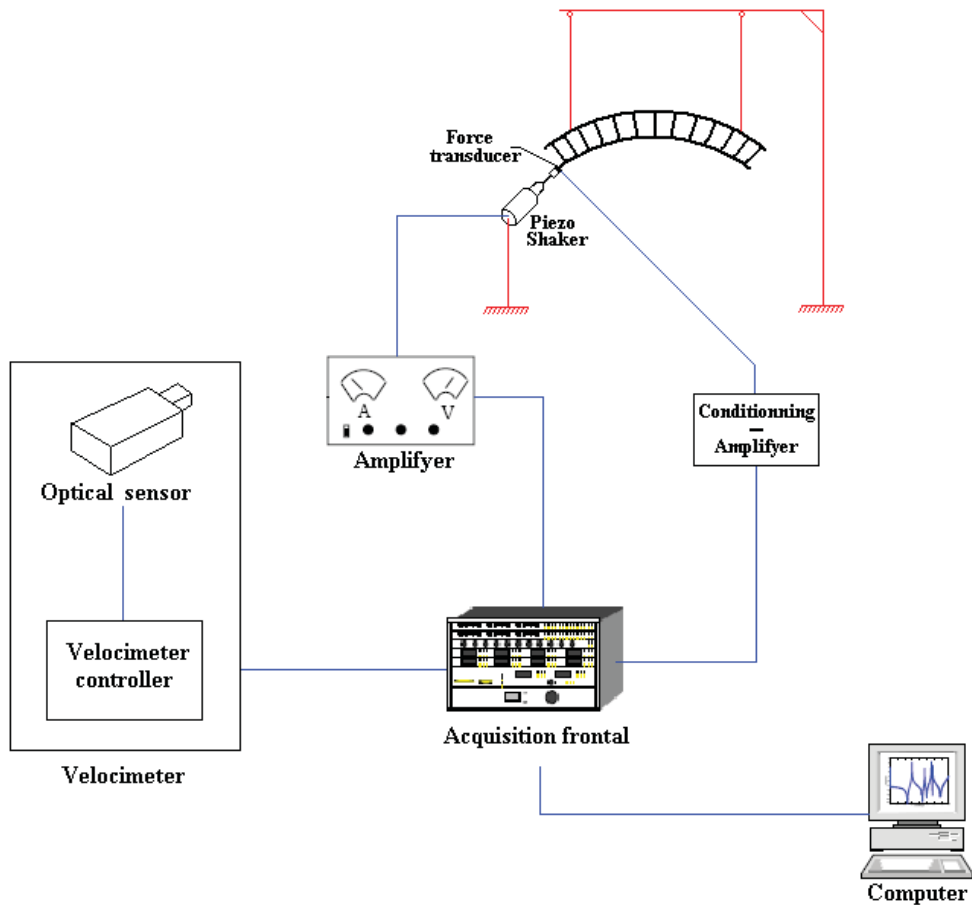


FIGURE 2.13 – Schéma synoptique de principe de la manipulation

bromètre laser. Pour ce faire, nous avons disposé des pastilles réfléchissantes sur les pales du redresseur. Etant donné la prédominance des modes de pales et surtout la forme des modes qui nous intéressent (premiers modes de flexion et de torsion), nous avons choisi comme points de mesure, pour chaque pale, le milieu du bord d'attaque et du bord de fuite, soit deux points de mesure par pale et quelques points supplémentaires situés sur les deux viroles (cf. Figure 2.14). En plus de cela, l'utilisation d'un capteur de force nous permet de mesurer l'intensité de l'excitation introduite. Nous obtenons ainsi en sortie les Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) relatives aux points de mesures préalablement choisis. Sur la Figure 2.13 est représenté le schéma synoptique du principe de l'essai.

La Figure 2.15 montre une FRF pour un point de mesure et une plage de fréquence donnés. L'identification modale qui a été effectuée au voisinage des pôles via le logiciel SDT [2, 3] a permis d'extraire d'une part, les fréquences propres des FRF pour pouvoir les comparer à celles issues de la simulation numérique et d'autre part, les taux d'amortissement qui sont très faibles (de l'ordre de 0.1%) comme c'est le cas des pièces de type monobloc.

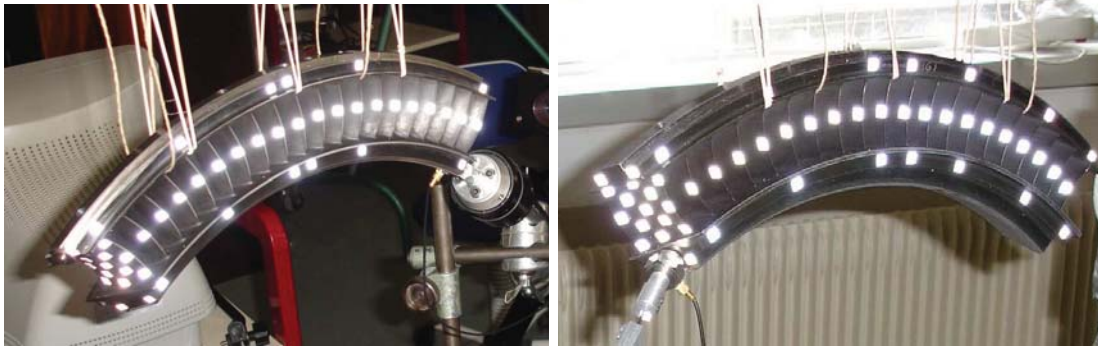


FIGURE 2.14 – Points de mesures vus du bord d'attaque (gauche) et du bord de fuite (droite)

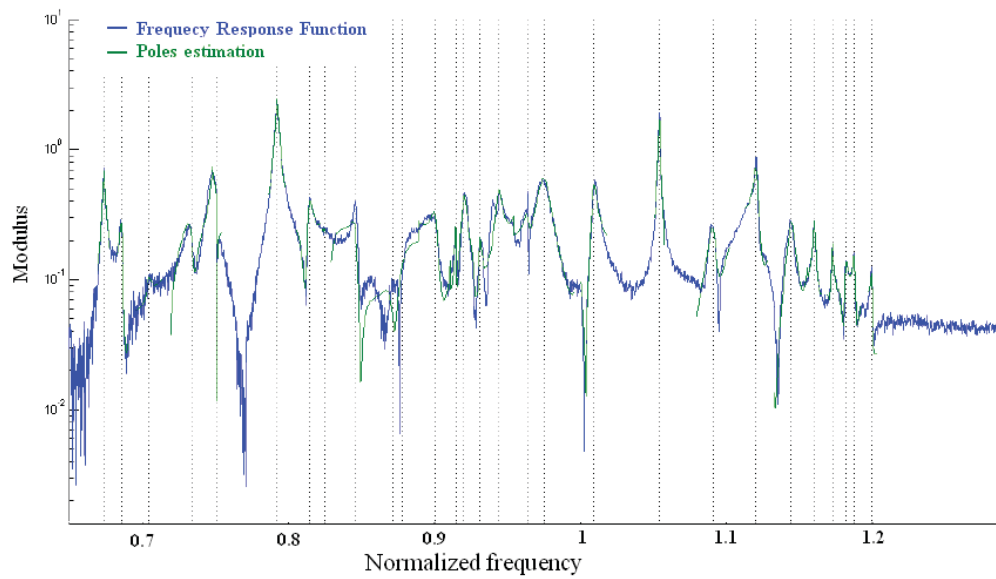


FIGURE 2.15 – Essais partiels sur RD1 20 pales : exemple de FRF



### 2.4.2 Appariement en fréquence

Les simulations numériques ont été faites sur un secteur du RD1 constitué de 20 pales et parfaitement accordé. Nous avons comparé les fréquences propres issues des essais à celles calculées numériquement (2.16). Lorsque nous observons les deux courbes de la Figure 2.16, nous retrouvons un comportement fréquentiel similaire avec la présence des paliers, conséquences d'une densité modale importante. Ce constat est intéressant car il montre que pour une pièce désaccordée involontairement comme c'est le cas pour la pièce mesurée, les zones à forte densité modale se situent dans les mêmes plages fréquentielles qu'un modèle parfaitement accordé. Par conséquent, le désaccordage présent dans la pièce étudiée n'a pas une influence notable sur la position fréquentielle des paliers. Cependant, on remarquera que les deux courbes sont décalées au regard de l'axe des abscisses, la courbe issue des simulations numériques faisant ressortir plus de modes propres. Ce décalage s'explique par le fait qu'il n'a pas été possible d'identifier tous les modes propres à partir des essais, soit parce qu'ils n'ont pas été excités, soit parce que les résonances ne se distinguent pas aisément dans la courbe de réponse du fait de la forte densité modale ; par conséquent tous les modes n'ont pas pu être identifiés lors du post-traitement.

On peut aussi noter que les paliers à forte densité modale ont une pente plus marquée dans le cas des essais, ce qui montre un étalement fréquentiel plus marqué et permet donc d'avoir une estimation du taux de désaccordage. Le taux de désaccordage peut être défini comme étant l'écart-type des fréquences propres des pales. Ainsi, lorsque les pales ont toutes le même module d'Young comme c'est le cas du modèle accordé, les modes à forte densité modale sont beaucoup plus proches et la seule raison pour laquelle on obtient des écarts en fréquence au sein des paliers est l'existence de la raideur de couplage via les viroles. Il en ressort un taux de désaccordage en fréquence maximal de l'ordre de quelques %. L'appariement en fréquence est donc satisfaisant dans la mesure où l'on ne perd pas la trace des modes d'intérêt qui sont situés dans les paliers à forte densité modale.

### 2.4.3 Appariement en forme

Nous nous sommes ensuite attelés à la comparaison des déformées modales issues des essais et des simulations numériques. La Figure 2.17 représente l'amplitude des déplacements aux différents points de mesures situés sur les pales du redresseur (bord d'attaque en bleu, bord de fuite en rouge) pour cinq fréquences propres différentes situées dans le premier palier à forte densité modale et quasi-similaires entre calculs et essais. Lorsque le bord d'attaque et le bord de fuite sont en phase, alors c'est un mode de flexion de pales, et dans le cas contraire, il s'agit d'un mode de torsion. Pour rappel, les calculs ont été effectués sur un modèle accordé car une identification préalable du désaccordage présent dans la pièce étudiée n'a pas été effectuée. On constate que d'un point de vue global, calculs et essais font ressortir des modes de torsion de pales. Cependant, comme on peut le voir, il est beaucoup plus difficile de trouver une bonne corrélation entre calculs et essais du

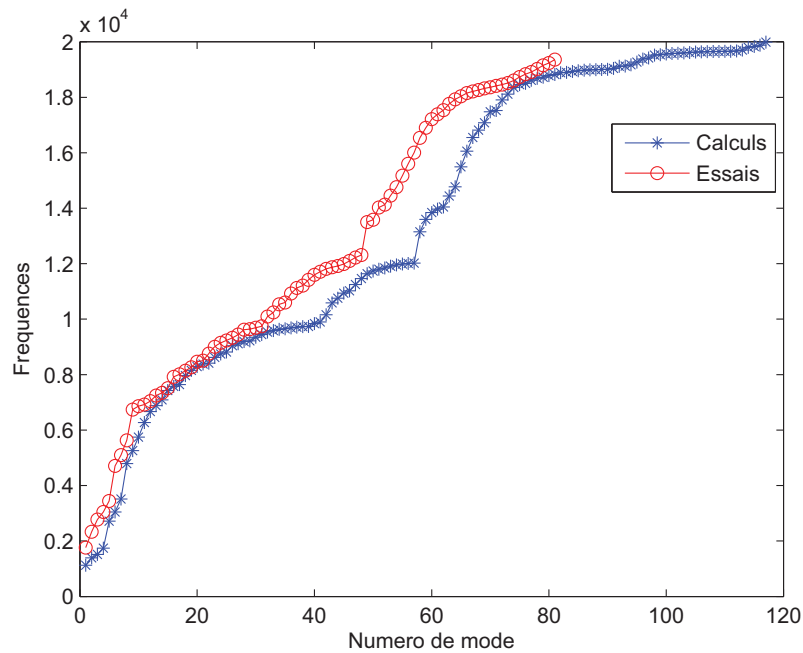


FIGURE 2.16 – Corrélation Calculs/Essais : Diagramme Fréquences propres/Numéro du mode

point de vue des déformées propres. En effet, les résultats issus des calculs montrent une certaine continuité de “l’onde” qui se propage dans le redresseur (le problème n’étant pas pour autant périodique) contrairement aux essais qui laissent apparaître des localisations de modes sur certaines pales à l’image de ce que l’on observe sur les fréquences 3 et 5. Ce phénomène de localisation modale est une conséquence directe du désaccordage et a pour effet d’entraîner une amplification locale des niveaux vibratoires. Cette corrélation calculs/essais nous montre donc que pour être prédictif, il faut maîtriser le désaccordage et bien caractériser le niveau de couplage que l’on peut définir comme le rapport entre la raideur caractéristique de l’aube et la raideur de couplage inter-aubes.

#### 2.4.4 Identification de l’amortissement modal

Lors de ces essais, il a été possible d’avoir une estimation des taux d’amortissement modaux lors de l’identification des modes propres. Les valeurs obtenues sont représentées sur la Figure 2.18.

Cette figure montre l’évolution de l’amortissement modal en fonction du numéro du mode identifié. Il en ressort que les premiers modes qui sont des modes d’ensemble sont les plus amortis avec un amortissement qui atteint une valeur de 1.6 à 1.7 % pour le deuxième et le troisième mode propre. Cependant, on s’aperçoit très vite que les valeurs d’amortissement sont très faibles pour les modes suivants. L’amortissement moyen est de l’ordre de 0.2% ce qui est relativement faible et il va falloir en tenir compte lors du

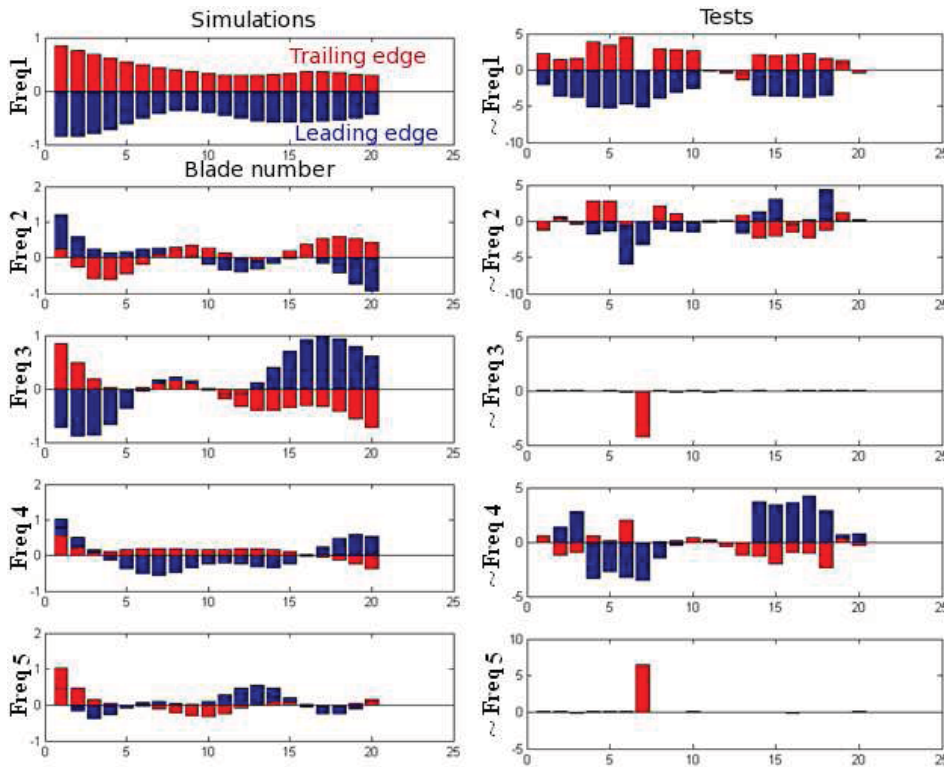


FIGURE 2.17 – Corrélation Calculs/Essais : déplacements normalisés aux points de mesures

développement des différents modèles.

### 2.4.5 Conclusions sur les essais vibratoires

Les essais partiels qui ont été effectués ont été riches en informations nous permettant d'avoir une meilleure compréhension du comportement dynamique d'un secteur de redresseur naturellement désaccordé. Des comparaisons entre calculs et essais ont été faites pour mettre en évidence l'impact du désaccordage. Ces études ont permis de constater que l'évolution fréquentielle des modes propres reste cohérente qu'il s'agisse d'un modèle accordé (simulations) ou désaccordé (essais). En effet, les zones à forte densité modale sont toujours présentes et sont situées dans les mêmes bandes fréquentielles. La corrélation entre les déformées propres quant à elle, était beaucoup moins évidente du fait de l'influence du désaccordage. On note l'apparition de localisation modale qui est une conséquence directe du désaccordage. La preuve en est que ce phénomène ne peut être observé sur un modèle accordé. C'est là que réside toute la problématique du sujet car pour une même excitation, des secteurs de redresseurs avec des désaccordages différents ne répondront pas de la même façon ce qui rend la prédiction de la réponse forcée des redresseurs difficile par les méthodes de résolution déterministes. C'est la raison pour laquelle c'est la piste des méthodes de résolution stochastiques qui a été abordée dans le chapitre suivant. Ces essais partiels nous ont aussi permis d'avoir des données d'entrée réalistes pour alimenter

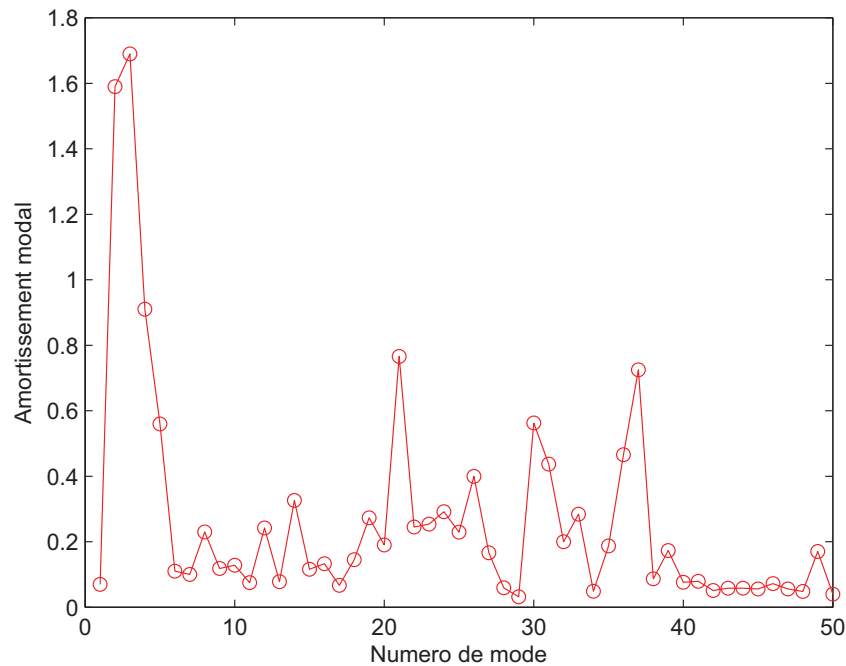


FIGURE 2.18 – Essais vibratoires : évolution de l’amortissement modal avec le numéro du mode identifié lors des essais

les modèles que nous allons développer. En effet, ils nous ont confirmé que les pièces monobloc sont par nature très faiblement amorties et les redresseurs sectorisés ne dérogent pas à cette règle. Nous avons donc considéré un amortissement structural de l’ordre de 0.1% (au lieu de 0.2% pour se placer dans un cas un peu plus critique) suite à l’identification modale qui a été faite sur la pièce et un taux de désaccordage de l’ordre de quelques % (approximativement 1 à 3%) au vu de l’étalement fréquentiel des paliers à forte densité modale qui est plus important dans le cas des essais et nous permet d’avoir une estimation du taux de désaccordage. La prise en compte de ces données sera primordiale lors de la validation des méthodologies mises en place par la suite.

## 2.5 Essais sur le compresseur CREATE

La mise en rotation de la version 2-bis de la machine CREATE a permis d’effectuer diverses mesures pour étudier le comportement aérodynamique et mécanique du compresseur. En particulier, nous nous sommes intéressés à la réponse dynamique d’un secteur de redresseur en condition de fonctionnement moteur. Les principaux objectifs de ces mesures sont d’une part, de cibler les plages de modes excités et d’autre part, de déterminer le point de fonctionnement aérodynamique d’intérêt pour l’étude. Un secteur du RD1 constitué de 10 pales a donc été instrumenté avec des jauges d’extensométrie, à raison d’une jauge par

pale dans le but d'optimiser nos chances de relever les plus forts niveaux. En effet, comme l'ont montré les études présentées plus haut, il est difficile d'être prédictif du point de vue de la réponse forcée étant donné que le comportement modal d'un secteur de redresseur est très sensible au désaccordage. Ce qui nous intéresse dans ces essais du point de vue vibratoire est d'identifier les modes qui répondent le plus ainsi que les régimes correspondants afin de déterminer numériquement les efforts aérodynamiques les plus réalistes possibles et, à terme, de valider les niveaux vibratoires prédits. En théorie, compte tenu de la roue mobile de 64 aubes située en amont du redresseur étudié, nous devrions obtenir des coïncidences sur l'harmonique 64N (pour rappel, 64 désigne le nombre d'aubes que comporte la roue mobile excitatrice amont et N la vitesse de rotation de la machine) ; les essais devraient nous le confirmer.

Afin de réaliser ces mesures, un dispositif d'acquisition a été mis en place ; il va permettre de réaliser différentes mesures à la fois aérodynamiques et mécaniques. Les mesures ainsi faites ont servi de point de départ aux calculs du LMFA pour la détermination numérique des pressions aérodynamiques instationnaires et ont fourni les réponses dynamiques du redresseur sous chargement fluide.

### 2.5.1 Instrumentation

Dans cette section, nous présentons l'instrumentation qui a été mise en place en vue des mesures. Pour instrumenter le secteur, nous disposons de jauges issues de deux fabricants différents : Vishay et Kulite. Ces deux types de jauges se différencient surtout par l'écart entre leur facteur de jauge qui est conséquent (2.09 pour les Vishay et 73.7 pour les Kulite). On rappelle que plus le facteur de jauge est grand, plus la jauge est sensible.

Les jauges Kulite sont donc beaucoup plus sensibles que les Vishay et cela s'en est ressenti dans les différentes acquisitions qui ont été faites. Les jauges étaient reliées à un dispositif d'acquisition qui ne comportait que 13 voies ; pour certaines mesures (les accélérations lentes en l'occurrence), il a fallu faire un choix de jauges pour pouvoir acquérir simultanément des données sur le RD1 et le RD3. Cependant, dans le cadre de la thèse, nous nous sommes uniquement intéressés au RD1 ; les données mesurées sur RD3 ont été archivées pour une éventuelle future exploitation par SNECMA.

Les plans de la Figure 2.19 montrent l'instrumentation du RD1 qui a été retenue pour la campagne de déverminage de CREATE2-bis.

L'emplacement privilégié des jauges a été le bord de fuite et en pied de pale. Ce choix a été en grande partie conditionné par le fait que les contraintes maximales sont relevées au niveau des congés de raccordement. Donc même s'il est techniquement déconseillé de placer des jauges au niveau des congés, s'en rapprocher devrait augmenter nos chances de visualiser une réponse significative du redresseur.

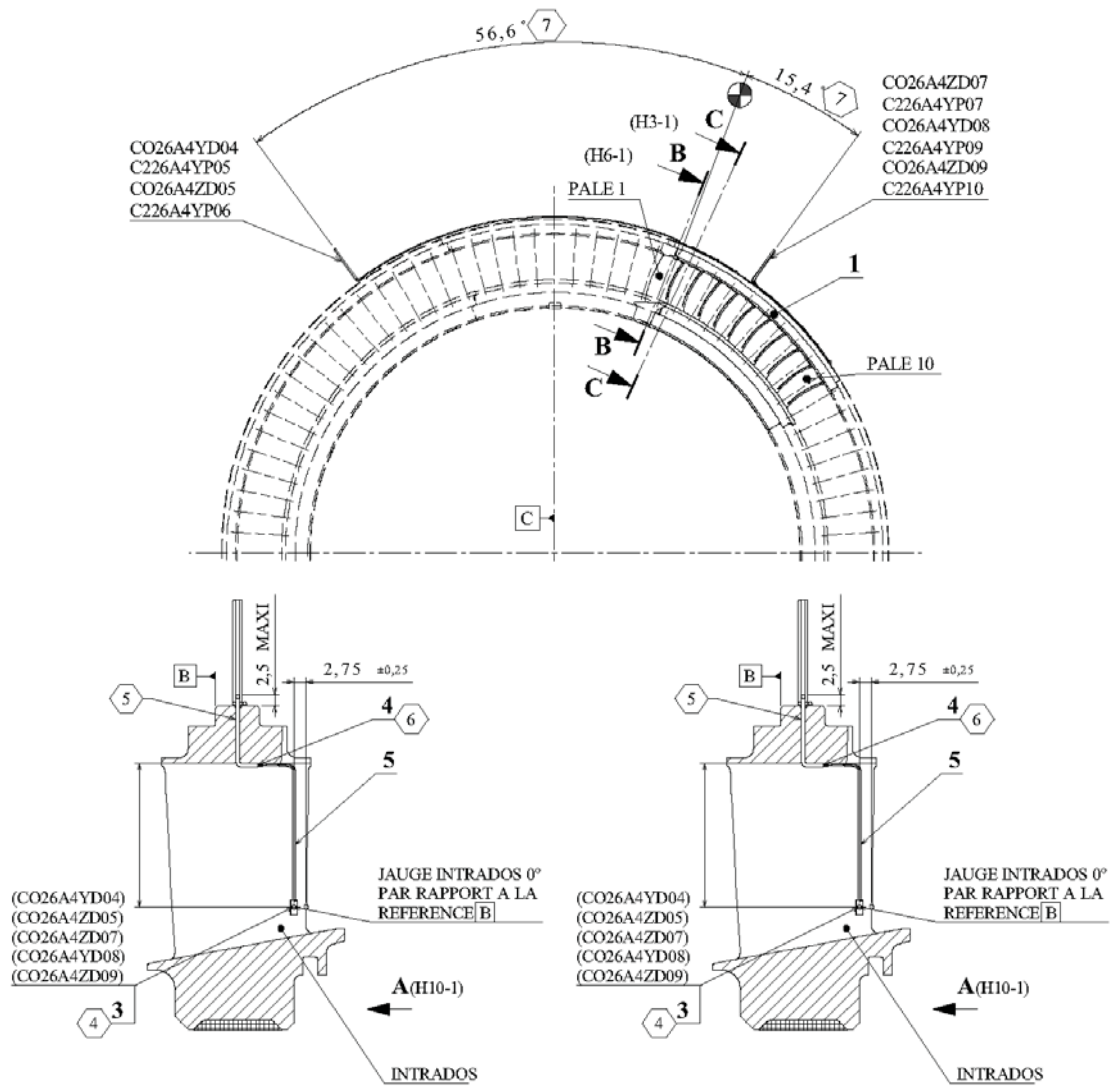


FIGURE 2.19 – Instrumentation du redresseur - Positionnement des jauges

## 2.5.2 Etudes et post-traitements

### Etudes

La détermination des régimes de rotation critiques permettra de spécifier les points de fonctionnement aérodynamiques d'intérêts ; le but est de disposer des conditions aérodynamiques les plus cohérentes possibles avec les niveaux vibratoires mesurés sur les redresseurs lors de ces essais. Pour atteindre ces objectifs, nous avons mis en place un plan d'acquisitions de mesures qui consiste à faire une montée en régime lente (à raison de 55 rpm/s) dans une plage de régimes susceptibles d'exciter les modes qui nous intéressent (2 premiers paliers à forte densité modale). Cette opération a été faite pour trois différents niveaux d'efforts dans la machine qui sont caractérisés par ce que l'on appelle le vannage. Plus le pourcentage de vannage est faible, plus le niveau d'efforts est haut. Le plan d'acquisition adopté peut être résumé comme suit :

- 1 accélération lente entre 8500 et 11800 rpm (vannage ouvert à 80%)
- 1 accélération lente entre 9350 et 11800 rpm (vannage ouvert à 43%)
- 1 accélération lente entre 9350 et 11800 rpm (vannage ouvert à 32%)

Par mesure de précaution, les montées en régime effectuées avec les vannages à 43% et 32% ont débuté volontairement à 9350 rpm pour éviter tout risque d'endommagement de la machine souligné par les aérodynamiciens. L'ensemble de ces mesures a donc été post-traité afin d'analyser le comportement dynamique du redresseur.

### Post-traitements

L'ensemble du RD1 est excité par les sillages générés par la roue mobile située en amont. L'acquisition des accélérations lentes effectuées pour différents points vannage nous ont permis de tracer des FFT glissantes telles que celle présentée sur la Figure 2.20 et de déterminer les fréquences propres des modes excités ainsi que les régimes de coïncidence.

La réponse de la jauge équipant la 6<sup>e</sup> aube est tracée sur la Figure 2.20 sous la forme d'une FFT glissante en fonction du régime moteur, lors d'une accélération lente couvrant la bande de fréquences d'excitation cible. Elle nous permet de cibler le régime et la plage de fréquences où il y a coïncidence pour le pourcentage de vannage de 32%, qui correspond à la configuration où la machine est la plus chargée en terme d'efforts.

Ainsi, le premier constat qui est fait est que l'harmonique d'excitation correspond à du 64N (ou 64 excitations par tour), N étant la vitesse de rotation de la roue mobile située en amont du secteur de redresseur étudié ; il s'agit donc bien de l'excitation due aux sillages provenant de la roue mobile située en amont du RD1 et qui possède 64 pales. De plus, il n'apparaît pas d'harmonique 80N qui correspondrait à des réflexions de sillages dus à la roue aval, ce qui confirme l'effet négligeable de celle-ci sur le RD1.

Le second constat est que la plage fréquentielle qui ressort le plus se situe dans le second palier à forte densité modale (autour de 11500 Hz). Les simulations numériques nous permettent d'affirmer que ce palier ne comporte que des modes de torsion de pales



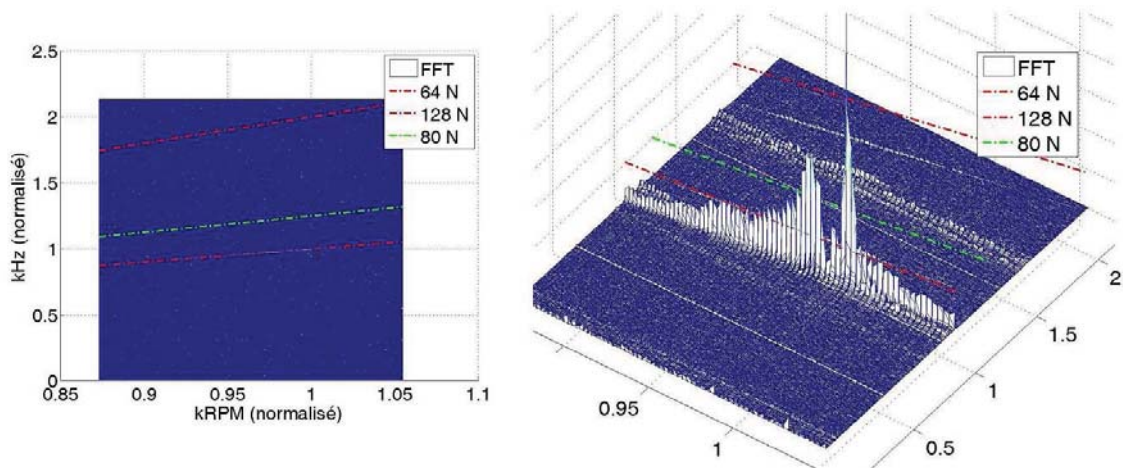


FIGURE 2.20 – FFT glissante du signal mesuré sur la 6<sup>e</sup> aube (amplitudes non calibrées)

(modes 1T). Les modes 1T sont connus pour être plus énergétiques que les premiers modes de flexion de pale (modes 1F) ; ce constat est d'ailleurs conforté par l'amplitude des pics de la Figure 2.20, le pic relatif au second palier étant beaucoup plus marqué. Cela confirme que les niveaux vibratoires les plus élevés se situent globalement dans les zones à forte densité modale.

Les données ainsi collectées seront fournies au LMFA pour obtenir les sollicitations aérodynamiques calculées numériquement les plus réalistes possibles qui seront ensuite intégrées au développement et à la validation des futurs modèles.

### Détermination numérique des sollicitations aérodynamiques

Les principales excitations dynamiques que subissent les pales des redresseurs sectorisés trouvent leur source dans le flux d'air qui provient de l'entrée du compresseur. En effet, les sillages issus de la roue mobile située en amont du redresseur vont avoir un impact important sur la dynamique de ce dernier. Cela est dû au rapprochement des rangées aubagées successives qui fait que les sillages n'ont pas le temps de se dissiper dans l'espace inter-roues.

La Figure 2.21 représente d'une part, une vue en coupe du compresseur CREATE2-bis dont le RD1 de 10 pales a fait l'objet de notre étude, et d'autre part, une vue simplifiée de l'interaction rotor/stator de façon générale. L'excitation subie par une pale du secteur de redresseur est cyclique et défilante car elle dépend du nombre d'aubes de la roue mobile amont et du régime de rotation. Ainsi, en un tour, une aube de redresseur subira autant d'excitations que d'aubes de roue mobile qui auront défilé devant elle. C'est donc là toute l'importance d'avoir un nombre d'aubes différent entre les roues aubagées successives afin d'éviter que chacune des pales du redresseur (ou de la roue aubagée) soient excitées en même temps.

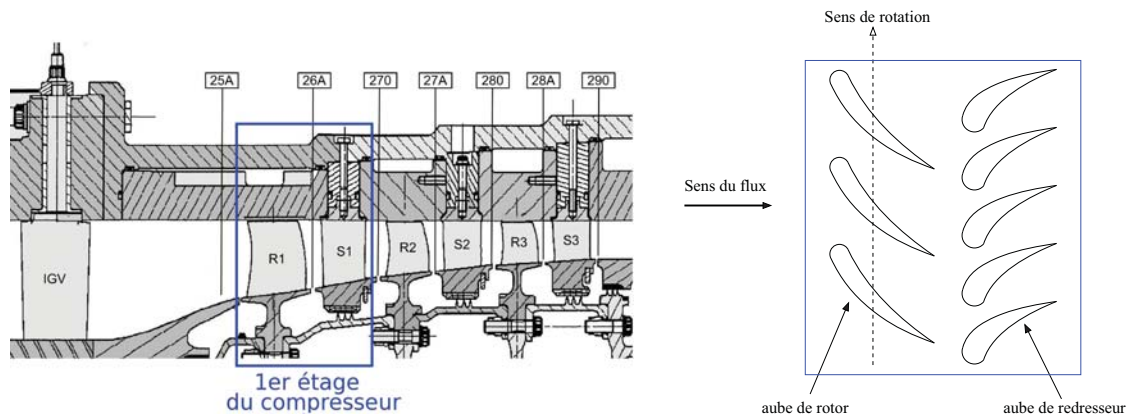


FIGURE 2.21 – Coupe du compresseur CREATE - Interaction rotor/stator

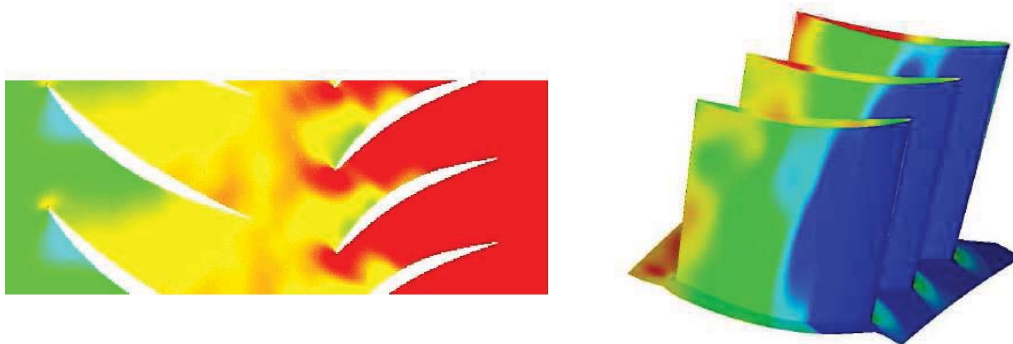


FIGURE 2.22 – Champ des pressions aérodynamiques qui s'applique sur les aubes du RD1 de CREATE2-bis [83]

### 2.5.3 Conclusions sur les essais CREATE

Cette campagne d'essais moteur a permis d'étudier la réponse forcée d'un secteur de redresseur à une excitation aérodynamique réaliste. En effet, il est principalement ressorti de cette étude que les modes les plus sensibles à cette excitation sont situés dans les zones à forte densité modale que l'on avait ciblées auparavant. Cette déduction est possible grâce aux essais partiels qui nous ont confirmé que malgré le désaccordage, les fréquences propres d'un secteur de redresseur ne sont pas particulièrement affectées de même que la nature de la famille de modes concernée. Un intérêt particulier sera porté à la corrélation calculs/essais lorsque des excitations aérodynamiques instationnaires réalistes seront intégrées dans les calculs de réponse forcée sur un modèle de pièce industrielle. Le but sera de valider la méthode de prédiction qui aura été mise en place. Les excitations aérodynamiques instationnaires à intégrer dans le modèle ont été calculées par le LMFA en s'appuyant sur des données d'entrées que nous avons ressorties de cette campagne d'essais.

## 2.6 Conclusion

Ce deuxième chapitre a traité du comportement dynamique complexe des redresseurs sectorisés désaccordés. Au travers d'études numériques de sensibilité et d'essais sur la pièce isolée et dans son environnement moteur, nous avons voulu caractériser le comportement des redresseurs sectorisés qui n'a été que très peu exploré dans la littérature ouverte. Les études de sensibilité au désaccordage qui ont été effectuées ont mis en évidence l'importance de la répartition de pales de constitution différente le long d'un même secteur. En effet, même si l'on ne dénotait pas de différences flagrantes au regard de l'évolution des fréquences propres des différents modèles désaccordés, il s'avérait que les déformées propres changeaient radicalement, principalement dans les zones à forte densité modale où le couplage inter-aubes est d'autant plus marqué. De ce fait, pour une même excitation, des secteurs désaccordés répondent différemment, et il est difficile de prédire l'emplacement des zones de contraintes maximales par des méthodes déterministes. C'était l'une des principales motivations de SNECMA qui désirait disposer d'une stratégie robuste de positionnement optimal de jauges lors de campagnes d'essais moteurs. Afin d'obtenir les données d'entrées les plus réalistes possibles, des essais partiels de caractérisation modale ont été faits sur un secteur de redresseur. Il en est ressorti une bonne corrélation fréquentielle entre calculs et essais ce qui montre que le comportement fréquentiel d'un secteur de redresseur est bien retranscrit par les simulations numériques. En revanche, la corrélation en forme a montré les effets du désaccordage avec notamment l'apparition du phénomène de localisation modale qui augmente la criticité du problème. Cependant, nous avons pu déduire de cette étude une valeur moyenne d'amortissement (de l'ordre de 0.1%) qui confirmait le caractère faiblement amorti de ce type de pièce, et un ordre de grandeur du taux de désaccordage qui s'avérait être de l'ordre de quelques %. Notre tentative de corrélation calculs/essais partiels a été vaine et n'a fait que confirmer qu'il était nécessaire de passer

par des méthodes stochastiques. Ensuite, une campagne d'essais moteurs a été réalisée sur le compresseur CREATE qui disposait d'un secteur de redresseur de dix pales, toutes instrumentées. Ces essais nous ont confirmé que la principale source d'excitations était la roue mobile située en amont du redresseur et qui était composée de 64 aubes. En effet, le tracé d'une FFT glissante a fait apparaître une harmonique 64 N ; nous avons donc pu en déduire les modes les plus susceptibles d'être excités, ainsi que le point de fonctionnement critique de la machine (régime de rotation, pourcentage de vannage ...). C'est grâce à ces données que le LMFA a pu calculer des pressions aérodynamiques instationnaires réalistes en vue d'applications industrielles à venir.

Dans ce contexte, nous avons choisi de développer une approche stochastique du problème lié au désaccordage. Ainsi, dans le chapitre suivant, nous présenterons un état de l'art du domaine et la stratégie retenue afin de prédire les niveaux vibratoires des redresseurs sectorisés désaccordés.

# Chapitre 3

## Proposition d'une stratégie de modélisation à partir de la Méthode des Eléments Finis Stochastiques Spectraux

*Au delà d'un état de l'art des méthodes stochastiques utilisées dans les éléments finis à l'heure actuelle, ce chapitre présente la méthode qui a été retenue pour la prédiction du comportement dynamique des redresseurs sectorisés. Des modèles simplifiés mais représentatifs du comportement propre aux redresseurs sectorisés ont été développés pour valider la méthode.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>48</b>
<b>3.2</b>	<b>Etat de l'art des méthodes d'éléments finis stochastiques</b>	<b>48</b>
3.2.1	Simulation de Monte Carlo	48
3.2.2	Méthode des perturbations	49
3.2.3	Méthode des éléments finis stochastiques spectraux	50
3.2.4	Approche probabiliste non paramétrique	51
<b>3.3</b>	<b>Présentation de la méthodologie retenue</b>	<b>52</b>
3.3.1	Développement de modèles basés sur des treillis de poutres	53
3.3.2	Application directe de la méthode du chaos polynomial au calcul de la réponse forcée aléatoire	53
3.3.3	Détermination des modes propres aléatoires par projection sur la base du chaos polynomial	59
<b>3.4</b>	<b>Développement d'une stratégie ad hoc de réduction de modèle</b>	<b>70</b>
3.4.1	Etat de l'art des méthodes de réduction	71
3.4.2	Choix de la méthode de réduction	71
3.4.3	Sous-structuration du modèle poutres 10 pales	74
<b>3.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>87</b>

---

### 3.1 Introduction

Les différentes études qui ont été menées jusqu'ici sur les redresseurs sectorisés ont mis en évidence les difficultés rencontrées lorsqu'il s'agit de prédire leur comportement vibratoire ; le désaccordage en est la principale cause. Afin de pouvoir prédire la réponse vibratoire de façon robuste, il est nécessaire de passer par des méthodes stochastiques plus ou moins coûteuses en temps de calculs. Il faut donc faire un choix de méthode judicieux pour obtenir les performances escomptées. L'objet de ce chapitre est de présenter la méthodologie stochastique que nous avons retenue pour notre problématique. Une première partie est consacrée à un état de l'art des méthodes utilisées dans le cadre des éléments finis stochastiques. Une deuxième partie présente le principe de la méthode stochastique qui a été retenue ainsi que son application sur des modèles poutres simplifiés qui ont été créés pour avoir un comportement dynamique proche de celui des secteurs de redresseurs. Dans la dernière partie de ce chapitre, une stratégie de réduction de modèles compatible avec la méthode stochastique retenue est proposée en vue de l'application industrielle.

### 3.2 Etat de l'art des méthodes d'éléments finis stochastiques

Dans le but de prendre en compte l'aléa dans la résolution des problèmes mécaniques, de nombreuses méthodes ont été développées au cours de ces dernières années. Parmi ces méthodes, on retrouve surtout la méthode des éléments finis stochastiques dont la particularité est d'intégrer l'aléa directement dans la méthode des éléments finis classique comme étant une dimension supplémentaire du problème.

#### 3.2.1 Simulation de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo [5, 82, 10] reste à ce jour la méthode stochastique la plus employée et est souvent utilisée comme référence lorsqu'il est question de valider des méthodes approchées. Elle consiste à effectuer des calculs déterministes pour un grand nombre de tirages des paramètres considérés comme aléatoires et qui suivent une loi de probabilité donnée. Pour rester dans notre problématique de recherche, considérons le problème suivant à résoudre :

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F\} \quad (3.1)$$

où  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système,  $\{x\}$  est le vecteur déplacement recherché et  $\{F\}$  est le vecteur d'effort. En mettant de l'aléa sur  $[K]$ , on obtient une matrice de raideur aléatoire  $[\widetilde{K}]$  qui s'écrit :

$$[\widetilde{K}] = [K] + \xi \left( \frac{\sigma}{m} [K] \right) \quad (3.2)$$



où  $\xi$  est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite,  $\sigma$  et  $m$  sont respectivement l'écart-type et la moyenne de  $\widetilde{[K]}$ . Les déplacements aléatoires  $\{\widetilde{x}\}$  sont obtenus pour toutes les valeurs de  $\xi$  pour lesquelles une résolution déterministe de  $[M]\{\widetilde{\ddot{x}}\} + [C]\{\widetilde{\dot{x}}\} + \widetilde{[K]}\{\widetilde{x}\} = \{F\}$  a été faite. On obtient donc autant de résultats que de tirages effectués, résultats à partir desquels pourront être aisément déduits les premiers moments statistiques tels que la moyenne et l'écart-type. Cependant, la méthode de Monte Carlo est très coûteuse en moyens et en temps de calculs d'où la réticence des industriels à employer cette technique vu que les modèles étudiés sont souvent de très grande taille. De ce fait, on a souvent recours à des techniques d'approximation qui nécessitent moins de ressources.

### 3.2.2 Méthode des perturbations

La méthode des perturbations [63, 64, 7, 72, 41] qui est une méthode très employée dans le domaine des éléments finis stochastiques, se base sur un développement en séries de Taylor des paramètres considérés comme aléatoires. Dans la pratique, ces développements sont tronqués à l'ordre deux, ce qui a l'avantage de ne faire appel qu'aux deux premiers moments statistiques des paramètres stochastiques. Considérons par exemple un problème dynamique classique à résoudre  $[K]\{U\} = \{F\}$ . Les développements à l'ordre deux de  $[K]$  et  $\{U\}$  par rapport au variables aléatoires  $\{\xi_i\}_{i=1\dots n}$  peuvent s'écrire :

$$[K] = [K]^0 + \sum_{i=1}^n [K]_i^I \xi_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [K]_{ij}^{II} \xi_i \xi_j \quad (3.3)$$

$$\{U\} = \{U\}^0 + \sum_{i=1}^n \{U\}_i^I \xi_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{U\}_{ij}^{II} \xi_i \xi_j \quad (3.4)$$

où  $[K]$ ,  $[K]_i^I$ ,  $[K]_{ij}^{II}$  désignent respectivement la moyenne, la dérivée première et la dérivée seconde de la matrice  $[K]$  par rapport aux variables aléatoires  $\xi_i$ . Il en est de même pour les quantités  $\{U\}$ ,  $\{U\}_i^I$ ,  $\{U\}_{ij}^{II}$  relatives au champ de déplacement  $\{U\}$  qui est la principale inconnue du problème.

La résolution se fait alors ordres par ordres successifs. Ci-dessous sont données les équations qui permettent la détermination des ordres zéro, un et deux,  $i$  et  $j$  allant de 1 à  $n$  :

$$[K]^0 \{U\}^0 = \{F\} \quad (3.5)$$

$$[K]^0 \{U\}_i^I = -[K]_i^I \{U\}^0 \quad (3.6)$$

$$[K]^0 \{U\}_{ij}^{II} = -[K]_i^I \{U\}_j^I - [K]_j^I \{U\}_i^I - [K]_{ij}^{II} \{U\}^0 \quad (3.7)$$

La complexité de résolution du problème augmente fortement avec l'ordre de développement choisi, ce qui limite considérablement son domaine d'application. De plus, elle est sujette à des problèmes avérés de convergence au voisinage des résonances. Ce sont

les principales raisons pour lesquelles nous ne l'avons pas retenue dans le cadre de notre étude.

### 3.2.3 Méthode des éléments finis stochastiques spectraux

La méthode des éléments finis stochastiques spectraux (MEFSS) proposée par Ghanem et Spanos [37] permet de caractériser la réponse aléatoire d'un système mécanique dont une propriété matériau (par exemple le module d'Young) est représentée par un champ aléatoire gaussien. Elle fournit un développement polynomial du vecteur aléatoire des déplacements nodaux en  $n$  variables aléatoires centrées réduites,  $n$  étant fonction de la dimension du champ stochastique. Afin de réduire la dimension d'un champ stochastique donné, on utilise des techniques de discrétisation de type Karhunen-Loève par exemple [37].

#### Méthodes de discrétisation d'un champ stochastique

Un champ stochastique peut être défini comme un ensemble de variables aléatoires indépendantes permettant de représenter une quantité aléatoire complexe faisant souvent référence à un processus stochastique spatial. Par exemple, si l'on considère un maillage éléments finis quelconque, à chaque élément peut être associée une variable aléatoire. La dimension du champ stochastique dépend donc fortement de la taille du maillage éléments finis associé. Soit  $E(x, \theta)$  un champ stochastique gaussien lié au module d'Young par exemple et qui s'écrit :

$$E(x, \theta) = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} E_i(x) \xi_i(\theta) \quad (3.8)$$

où  $\mu$  est la moyenne du champ stochastique, les  $E_i(x)$  sont des fonctions déterministes liées à l'espace et les  $\xi_i$  sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites (v.a.g.c.r.) indépendantes. Le but des méthodes de discrétisation est d'obtenir une troncature du développement du champ stochastique à un certain ordre  $Q$  afin de réduire considérablement sa dimension. Cela revient à écrire :

$$E(x, \theta) = \mu + \sum_{i=1}^Q E_i(x) \xi_i(\theta) \quad (3.9)$$

Les méthodes les plus employées à ce jour sont, entre autres, l'expansion de Karhunen-Loève (KL) proposée par Ghanem et Spanos [37], l'Expansion Optimal Linear Estimation (EOLE) présentée dans [61] et l'Orthogonal Series Expansion (OSE) proposée par Zhang et Ellingwood dans [100]. L'avantage de l'expansion de KL par rapport aux deux autres méthodes est qu'elle nécessite un développement à un ordre plus bas ce qui aboutit à une dimension du champ stochastique plus petite. En revanche, l'expansion de KL contraint à résoudre un problème intégral lié à la détermination des valeurs et fonctions propres de sa fonction de covariance [37]. Il est possible de se référer à [90] pour obtenir une étude exhaustive de ces méthodes de discrétisation.

### Présentation du chaos polynomial

Nous allons à présent définir le chaos polynomial qui est très souvent utilisé dans le cadre des méthodes des éléments finis stochastiques spectraux. Le chaos polynomial de dimension  $Q$  et d'ordre  $C$  est défini comme l'ensemble des polynômes d'Hermite multidimensionnels en  $\{\xi_1, \dots, \xi_Q\}$  et de degré inférieur ou égal à  $C$ ; les  $\xi_i$  étant des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites [37]. Les polynômes d'Hermite multidimensionnels sont obtenus par la formule :

$$\Psi_m(\xi_1, \dots, \xi_Q) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}\{\xi\}^T\{\xi\}} \frac{\partial^n}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_Q} e^{-\frac{1}{2}\{\xi\}^T\{\xi\}} \quad , \quad n = \{0, \dots, C\} \quad (3.10)$$

Cependant, dans la pratique, les polynômes  $\Psi_m$  constituant la base du chaos polynomial sont complètement définis par les polynômes d'Hermite unidimensionnels et la liste des  $Q$  entiers positifs ou nuls  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_Q\}$  de la manière suivante :

$$\Psi_m = \prod_{i=1}^Q H_{\alpha_i}(\xi_i) \quad (3.11)$$

où  $H_j(\xi)$  est le  $j$ -ième polynôme d'Hermite unidimensionnel en  $\xi$ . La génération de toutes les listes  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_Q\}$  est détaillée dans [90, 9]. Le nombre  $N$  de polynômes constituant la base est fonction de la dimension  $Q$  du chaos et de son ordre  $C$ . Il est défini par :

$$N = \frac{(Q + C)!}{Q! C!} \quad (3.12)$$

Dans le tableau 3.1 est présenté un exemple de chaos polynomial de dimension 3 et d'ordre 2 (soient 10 polynômes).

Le chaos polynomial que nous avons présenté et qui utilise les polynômes d'Hermite est préconisé pour les distributions de type gaussiennes. Cependant, des études [99, 98, 94] ont été faites sur l'extension du chaos polynomial à d'autres distributions (il s'agit du gPC - generalized Polynomial Chaos). Ces travaux montrent par exemple que pour une distribution uniforme, la base des polynômes de Legendre semble plus adaptée. L'application du gPC à la dynamique non-linéaire des systèmes aéroélastiques fait également l'objet de recherches poussées [58, 21].

#### 3.2.4 Approche probabiliste non paramétrique

Toutes les méthodes qui ont été présentées auparavant sont des approches probabilistes dites paramétriques car elles prennent en compte les incertitudes sur des grandeurs précises du modèle (masse, raideur ...). On peut donc considérer que différents paramètres du modèle sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes ou par des champs

$i$	$\Psi_i$
0	1
1	$\xi_1$
2	$\xi_2$
3	$\xi_3$
4	$\xi_1^2 - 1$
5	$\xi_1 \xi_2$
6	$\xi_1 \xi_3$
7	$\xi_2^2 - 1$
8	$\xi_2 \xi_3$
9	$\xi_3^2 - 1$

TABLE 3.1 – Polynômes constituant un chaos de dimension  $Q = 3$  et d'ordre  $C = 2$ 

stochastiques. C'est la raison pour laquelle dans le cas particulier d'un désaccordage que l'on veut fidèlement représenter, il est important d'identifier les paramètres responsables de ce désaccordage par le biais d'essais de caractérisation adéquats [73, 52, 53, 79, 57]. Des développements plus récents ont vu naître des approches probabilistes dites non paramétriques [88, 15, 17, 70]. Ce sont des approches qui permettent de prendre en compte à la fois les incertitudes du modèle liées à ses paramètres et à sa modélisation, la rendant ainsi plus complète que l'approche probabiliste paramétrique. Elle consiste à introduire l'aléa directement dans les matrices généralisées issues de la réduction du modèle matriciel de départ, permettant d'appliquer un désaccordage global au modèle étudié. Le principal inconvénient de cette méthode est par conséquent la difficulté à spécifier les grandeurs physiques qui pilotent les effets du désaccordage en cohérence avec les mesures dynamiques observées.

### 3.3 Présentation de la méthodologie retenue

Dans le cadre de notre étude qui consiste à étudier la réponse aléatoire d'un système mécanique, nous avons choisi d'utiliser la MEFSS proposée dans [37]. Plus précisément, il s'agit d'étudier le comportement vibratoire des redresseurs sectorisés en considérant le désaccordage comme un aléa du système afin de prédire les niveaux vibratoires dus à l'amplification de la réponse [68, 65, 15]. Le principe de cette méthode consiste à projeter un champ stochastique sur une base de polynômes orthogonaux appelée chaos polynomial et d'obtenir un développement de la réponse sur cette même base de polynômes. L'avantage est qu'elle devrait nous permettre d'obtenir les premiers moments statistiques de la réponse de manière analytique, ce qui nous affranchirait d'utiliser la méthode de Monte Carlo classique qui est très coûteuse en temps de calculs. Un modèle poutres simplifié dont la

structure se rapproche de celle d'un secteur de redresseur a été mis en place pour servir de base au développement de la méthodologie stochastique.

### 3.3.1 Développement de modèles basés sur des treillis de poutres

Les modèles simplifiés développés (cf. Figure 3.1) sont constitués de poutres de type Euler-Bernoulli (cf. Figure 3.1). Ils ont été construits pour retrouver un comportement globalement similaire à celui observé sur un redresseur sectorisé industriel, avec des zones à forte densité modale. Les viroles qui assurent le transfert vibratoire inter-aubes ont été considérées plus raides que les pales, ce qui a pour effet de rapprocher fréquemment les modes de flexion de pales visibles sur la Figure 3.2 et d'avoir un étalement fréquentiel cohérent avec ce qui a été observé. Deux modèles différents seront considérés dans la suite :

- le premier modèle constitué de 2 pales servira de support à la mise en place de la méthodologie stochastique (cf. Figure 3.3) ;
- le second modèle constitué de 10 pales servira de support au développement de la stratégie de réduction du modèle couplée à la méthode stochastique validée au préalable sur le modèle 2 pales.

Le modèle à deux pales est constitué de 10 noeuds (3 ddls par noeud, 2 translations et 1 rotation) et de 10 éléments. Nous avons considéré des poutres en acier (module de d'Young de 210 GPa et masse volumique de 7800 kg/m<sup>3</sup>), de section carrée de côté 10<sup>-2</sup>m. La longueur d'un élément est de 0.5 m. Nous avons également défini les viroles comme étant 100 fois plus raides que les aubes pour assurer un découplage inter-aubes qui permettra d'avoir une densité modale représentative.

Nous nous sommes intéressés à la simulation du désaccordage en fréquence (module d'Young aléatoire) ainsi qu'à l'évolution des deux premiers modes propres qui sont des modes de flexion de pale (cf. Figure 3.4). Pour tous les calculs de réponse forcée, nous avons appliqué un effort unitaire comme indiqué sur la Figure 3.3 de façon à exciter la flexion de la pale ; seuls les résultats relatifs au ddl excité ont été présentés dans la suite.

Le module d'Young aléatoire de chacune des pales s'écrit :

$$\tilde{E}_i = \bar{E}(1 + \frac{\sigma_E}{\bar{E}}\xi_i) = \bar{E}(1 + \delta\xi_i) \quad (3.13)$$

où  $\bar{E}$  est le module d'Young moyen,  $\sigma_E$  est l'écart-type et  $\xi_i$  est la variable aléatoire gaussienne centrée réduite relative à la pale  $i$ .

### 3.3.2 Application directe de la méthode du chaos polynomial au calcul de la réponse forcée aléatoire

La première méthode pressentie pour simuler le désaccordage a été la projection directe de la matrice de raideur et de la réponse forcée aléatoire sur la base du chaos polynomial

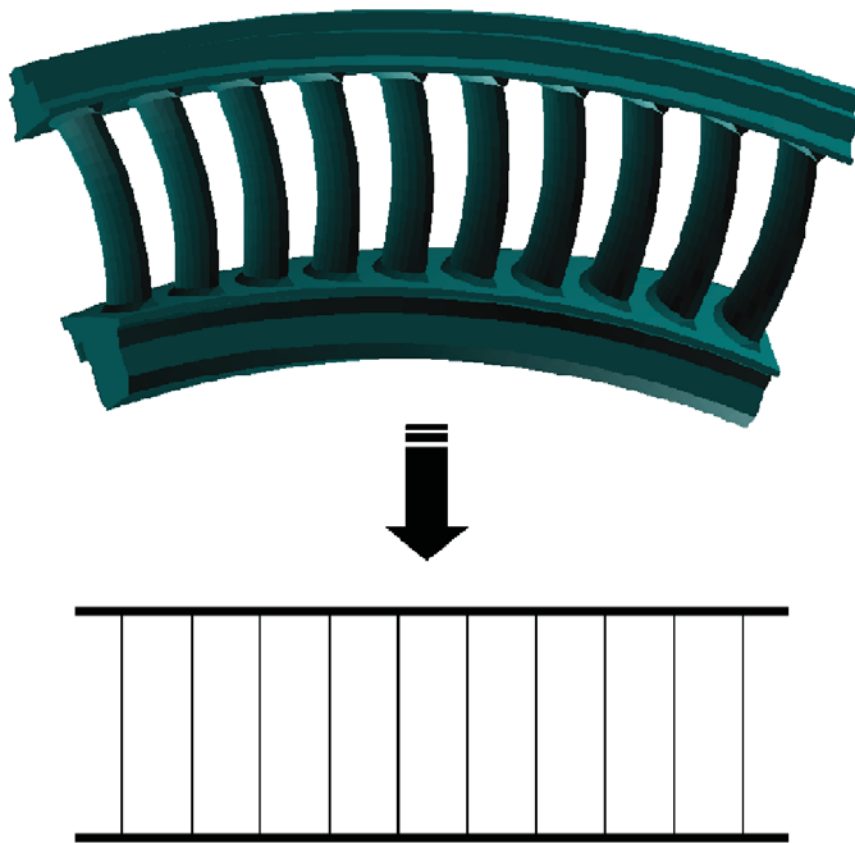


FIGURE 3.1 – Modèle de secteur de redresseur : simplification du modèle numérique 3D à un modèle poutres 2D

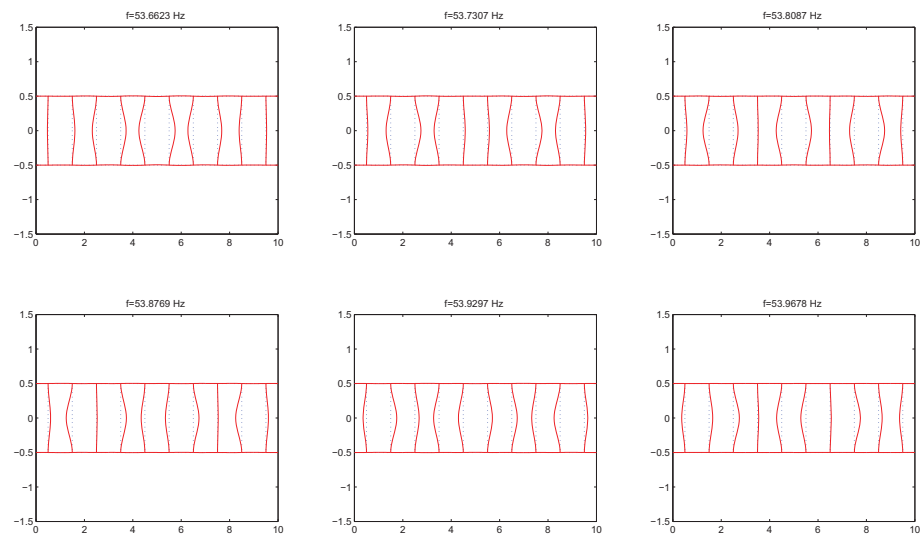


FIGURE 3.2 – Six premiers modes 1F à fréquences propres très proches

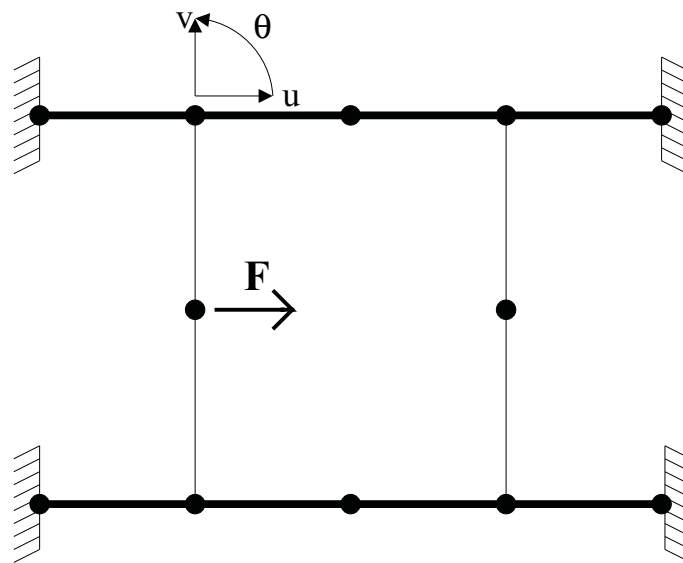


FIGURE 3.3 – Modèle poutres étudié



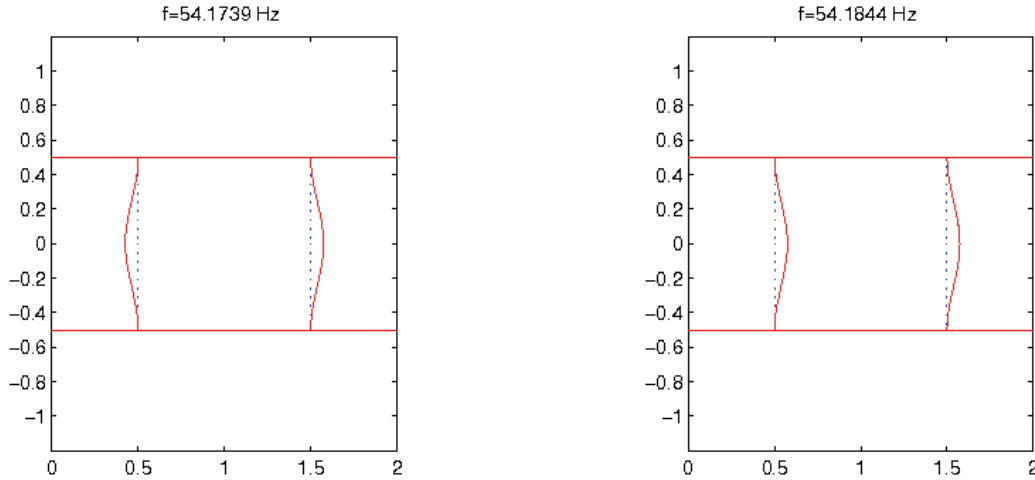


FIGURE 3.4 – Deux premiers modes propres du modèle - flexions de pale

constituée des polynômes d’Hermite dans le cas de variables aléatoires gaussiennes. Il s’agit d’une application directe de la méthode des éléments finis stochastiques proposée dans [37]. Pour cette méthode, nous nous limiterons au cas du chaos polynomial unidimensionnel (i.e. une seule variable aléatoire  $\xi$  est considérée).

### Mise en équation de la méthode

Le problème à résoudre est de la forme :

$$[Z(\xi)] \{u(\xi)\} = \{F\} \quad (3.14)$$

où  $[Z(\xi)]$  et  $\{u(\xi)\}$  sont respectivement la matrice de raideur dynamique ( $[Z] = (1 + i\eta)[K] - \omega^2[M]$ ,  $\eta$  étant l’amortissement hystérétique) et le vecteur déplacement projetés sur la base du chaos polynomial et  $\xi$  est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Nous pouvons décomposer  $[Z(\xi)]$  et  $\{u(\xi)\}$  sur la base des polynomes d’Hermite :

$$[Z(\xi)] = \sum_{i=0}^P [Z_i] \Psi_i(\xi) \quad (3.15)$$

$$\{u(\xi)\} = \sum_{k=0}^P \{u_k\} \Psi_k(\xi) \quad (3.16)$$

où  $P$  est l’ordre du chaos polynomial (dans le cas du chaos polynomial unidimensionnel).

Ainsi, l'équation à résoudre s'écrit :

$$\left( \sum_{i=0}^P [Z_i] \Psi_i(\xi) \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^P \{u_k\} \Psi_k(\xi) \right) = \{F\} \quad (3.17)$$

La distributivité de l'opérateur "somme" nous permet d'écrire :

$$\sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^P \Psi_i(\xi) \Psi_k(\xi) [Z_i] \{u_k\} = \{F\} \quad (3.18)$$

En multipliant l'équation de part et d'autres par  $\Psi_l(\xi)$ , on obtient :

$$\Psi_l(\xi) \sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^P \Psi_i(\xi) \Psi_k(\xi) [Z_i] \{u_k\} = \Psi_l(\xi) \{F\} \quad (3.19)$$

On peut réécrire l'équation précédente de la manière suivante :

$$\sum_{l=0}^P \sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^P E [\Psi_l(\xi) \Psi_i(\xi) \Psi_k(\xi)] [Z_i] \{u_k\} = \sum_{l=0}^P E [\Psi_l(\xi)] \{F\} \quad (3.20)$$

où  $E [\Psi_l(\xi) \Psi_i(\xi) \Psi_k(\xi)]$  est l'espérance mathématique du produit de trois polynômes d'Hermite.

On aboutit ainsi à l'équation :

$$\sum_{l=0}^P \sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^P c_{ilk} [Z_i] \{u_k\} = \sum_{l=0}^P \delta_{0l} \{F\} \quad (3.21)$$

où  $\delta_{0l}$  est le symbole de Kronecker et les  $c_{ilk}$  correspondent à l'espérance du produit de trois polynômes d'Hermite et ne nécessitent d'être calculés qu'une seule fois. Dans le cas d'un chaos polynomial unidimensionnel, les  $c_{ilk}$  sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{ilk} = \frac{i! l! k!}{\left(\frac{i+l-k}{2}\right)! \left(\frac{l+k-i}{2}\right)! \left(\frac{k+i-l}{2}\right)!}, \text{ si } i+l+k \text{ est pair et } k \in [|i-j|, i+j] \\ c_{ilk} = 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Nous pouvons ainsi présenter l'équation (3.21) sous forme matricielle nous permettant de déterminer les blocs de vecteurs  $\{u_k\}$  moyennant une unique inversion de la matrice de raideur assemblée au sens du chaos qui est de dimension  $(P+1)n_{ddl} \times (P+1)n_{ddl}$ .

$$\begin{bmatrix} [Z^{(00)}] & \dots & [Z^{(0k)}] & \dots & [Z^{(0P)}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [Z^{(l0)}] & \dots & [Z^{(lk)}] & \dots & [Z^{(lP)}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [Z^{(P0)}] & \dots & [Z^{(Pk)}] & \dots & [Z^{(PP)}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u_0\} \\ \vdots \\ \{u_k\} \\ \vdots \\ \{u_P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \vdots \\ \{0\} \\ \vdots \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

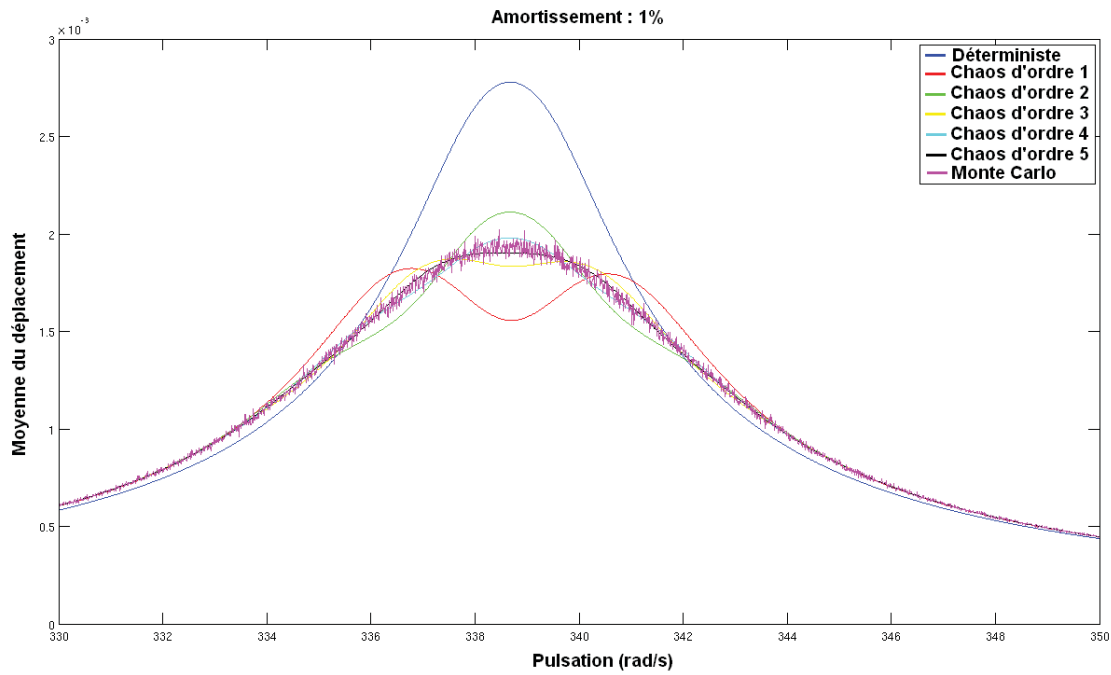


FIGURE 3.5 – Convergence du chaos polynomial pour un amortissement de 1%

avec 
$$[Z^{(lk)}] = \sum_{i=0}^P c_{ilk} [Z_i]$$

Une fois les  $\{u_k\}$  déterminés, on peut reconstruire la réponse du système pour tous les tirages de  $\xi$  :

$$\{u(\xi)\} = \sum_{k=0}^P \{u_k\} \Psi_k(\xi) \quad (3.24)$$

### Application au modèle poutres 2 pales

La méthode de projection sur le chaos polynomial présentée précédemment a été appliquée sur le modèle poutres à 2 pales pour un écart-type normalisé  $\delta$  de 1%. Nous avons ainsi comparé la moyenne des déplacements d'un ddl obtenue par le chaos à celle obtenue suite à des tirages de Monte Carlo, nous permettant de juger de la convergence de la méthode selon l'ordre du chaos. Par ailleurs, la sensibilité à l'amortissement a été testée.

La Figure 3.5 représente l'amplitude du déplacement d'un ddl donné lorsque l'on excite le ddl de flexion de la première pale avec un effort unitaire, que l'on balaie une plage de pulsations dans laquelle se trouvent les deux premières pulsations propres qui sont très proches (cf. Figure 3.4) et pour un amortissement hystérétique  $\eta$  de 1%. On constate que la moyenne du déplacement pour un chaos d'ordre 5 est très proche de celle obtenue par simulations de Monte Carlo. De plus, on note que plus on augmente l'ordre, plus on se rapproche de la moyenne de Monte Carlo ce qui est cohérent. Cependant, il existe une

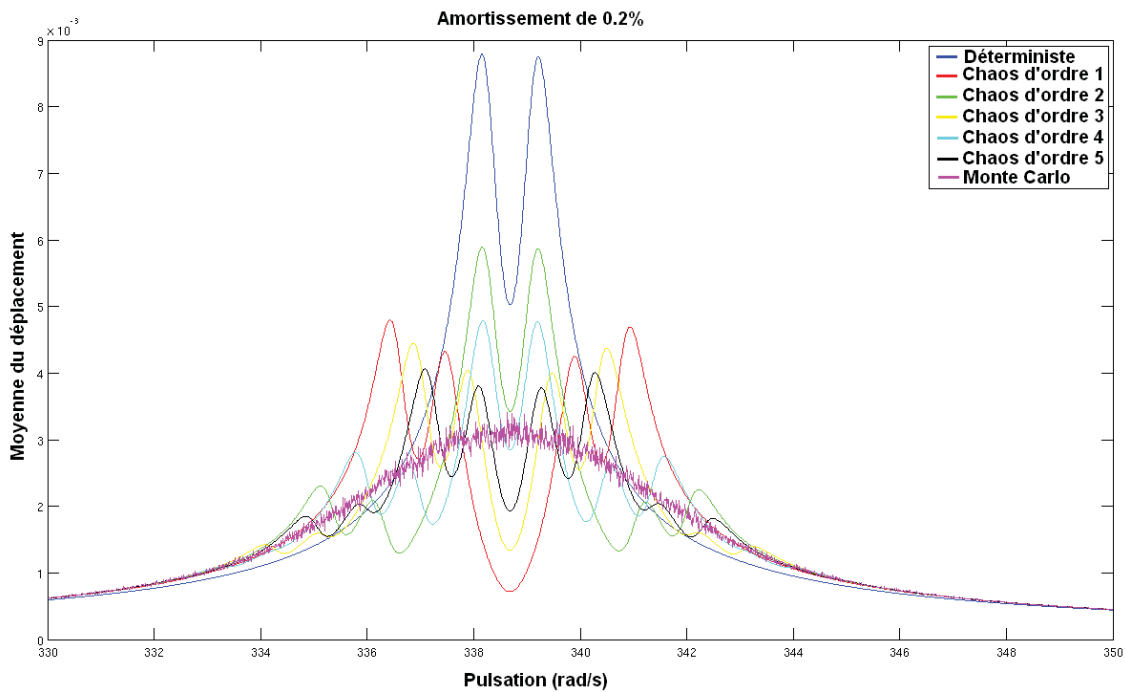


FIGURE 3.6 – Convergence du chaos polynomial pour un amortissement de 0.2%

forte sensibilité à l'amortissement qui est mise en évidence sur la Figure 3.6. Cette figure représente les mêmes données que la Figure 3.5 sauf que l'amortissement  $\eta$  utilisé est de 0.2%. On observe que, contrairement au cas précédent, la convergence n'est pas atteinte même si l'on pressent qu'elle le sera pour un ordre du chaos beaucoup plus élevé. De tels ordres enlèveraient très vite à la méthode tout son intérêt car la taille du système à inverser deviendrait rapidement rédhibitoire. On voit ainsi qu'à l'ordre 5, la moyenne obtenue par le chaos oscille beaucoup autour de la moyenne de Monte Carlo. La méthode est donc très sensible à l'amortissement. Les essais partiels effectués sur un redresseur sectorisé constitué de 20 pales ont montré que l'amortissement modal pour ce genre de pièces est de l'ordre de 0.1%, ce qui est très faible et nous place dans la configuration où la méthode converge très difficilement. Nous nous sommes alors orientés vers une piste qui consisterait à suivre l'évolution des modes propres en fonction du désaccordage de manière à s'affranchir de cette sensibilité à l'amortissement ; c'est l'objet de la section suivante.

### 3.3.3 Détermination des modes propres aléatoires par projection sur la base du chaos polynomial

Le but de cette méthode [28] est de déterminer les vecteurs et pulsations propres aléatoires projetés sur la base du chaos polynomial en vue d'obtenir les premiers moments statistiques (moyenne et écart-type). Cette méthode est basée sur une double projection :

une projection des modes aléatoires sur la base modale déterministe suivie d'une projection sur l'espace aléatoire du chaos polynomial. Dans le cas de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, la projection se fait sur la base des polynômes d'Hermite ; c'est le choix qui a été fait dans la suite.

### Mise en équation du problème

Le problème déterministe s'écrit :

$$([K] - \omega_k^2 [M]) \{\phi_k\} = 0 \quad (3.25)$$

où  $[K]$  et  $[M]$  sont respectivement les matrices de raideur et de masse du modèle accordé ;  $\omega_k$  et  $\{\phi_k\}$  sont respectivement les pulsations et les vecteurs propres déterministes. Les vecteurs propres déterministes sont normalisés par rapport à la matrice de masse :

$$\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_k\} = 1 \quad (3.26)$$

$$\{\phi_k\}^T [K] \{\phi_k\} = \omega_k^2 \quad (3.27)$$

Soit le problème aléatoire aux valeurs propres suivant :

$$([K] + [\widetilde{K}] - \widetilde{\omega}_k^2 [M]) \{\widetilde{\phi}_k\} = 0 \quad (3.28)$$

où les quantités surmontées d'un tilde sont considérées comme aléatoires. La masse reste donc déterministe dans le cadre de cette étude. Les  $\widetilde{\omega}_k^2$  peuvent être décomposés sur la base des polynômes d'Hermite  $\Psi_n(\xi)$  :

$$\widetilde{\omega}_k^2 = \omega_k^2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Psi_n(\xi) \quad (3.29)$$

où  $N$  correspond au nombre de polynômes qui interviennent dans la décomposition et qui s'exprime en fonction de l'ordre  $C$  du chaos polynomial et du nombre  $Q$  de variables aléatoires de la manière suivante :

$$N = \frac{(Q + C)!}{Q! C!} \quad (3.30)$$

On peut décomposer  $\{\widetilde{\phi}_k\}$  sur la base modale déterministe en faisant l'hypothèse qu'elle ne contient aucun mode propre de multiplicité supérieure à un :

$$\{\widetilde{\phi}_k\} = \sum_{p=1}^P \widetilde{\lambda}_p \{\phi_p\} \quad (3.31)$$

où  $P$  correspond au nombre de modes de la base modale déterministe retenus pour la projection et  $\widetilde{\lambda}_p$  peut être projeté sur la base du chaos polynomial :

$$\widetilde{\lambda}_p = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n(\xi) \quad (3.32)$$

Suite à la double projection, les vecteurs propres aléatoires peuvent donc s'écrire :

$$\{\widetilde{\phi}_k\} = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n(\xi) \{\phi_p\} \quad (3.33)$$

Enfin, par le biais d'une décomposition de type Karhunen-Loève, on peut exprimer la partie aléatoire  $[\widetilde{K}]$  de la matrice de raideur globale de la manière suivante :

$$[\widetilde{K}] = \sum_{q=1}^Q [K_q] \Psi_q(\xi_q) \quad (3.34)$$

où Q correspond au nombre total de variables aléatoires ; il en résulte que les  $\Psi_q(\xi_q)$  sont les premiers polynômes d'Hermite.

Tous les paramètres ayant été définis, le problème aléatoire aux valeurs propres à résoudre peut s'écrire :

$$\left( \left( [K] + \sum_{q=1}^Q [K_q] \Psi_q(\xi_q) \right) - \omega_k^2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Psi_n(\xi) [M] \right) \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n(\xi) \{\phi_p\} = 0 \quad (3.35)$$

Les coefficients à déterminer sont donc les  $a_n$  et les  $\lambda_p^n$ . Nous allons maintenant rechercher le k-ième mode propre aléatoire moyennant la détermination de ces coefficients. Dans un premier temps, on impose une condition de normalisation sur les  $\{\widetilde{\phi}_k\}$  :

$$\begin{aligned} \{\phi_k\}^T [M] \{\widetilde{\phi}_k\} = 1 &\Rightarrow \{\phi_k\}^T [M] \left( \sum_{p=1}^P \widetilde{\lambda}_p \{\phi_p\} \right) = 1 \\ &\Rightarrow \{\phi_k\}^T [M] \left( \widetilde{\lambda}_k \{\phi_k\} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \widetilde{\lambda}_p \{\phi_p\} \right) = 1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec  $\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_p\}_{p \neq k} = 0$  et  $\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_k\} = 1$  d'où  $\widetilde{\lambda}_k = 1$ .

Etant donné que  $\{\phi_k\}^T [K] \{\phi_p\} = \delta_{kp}$ , on déduit aisément de la relation précédente que :

$$\{\phi_k\}^T [K] \{\widetilde{\phi}_k\} = \omega_k^2 \widetilde{\lambda}_k = \omega_k^2 \quad (3.37)$$

Ensuite, le principe de la méthode consiste à multiplier l'équation du problème aléatoire d'une part par le mode déterministe correspondant au mode recherché et d'autre part, par les autres modes retenus, et de projeter toutes les équations obtenues sur la base des polynômes du chaos.

## Résolution du problème

### Multiplication à gauche par $\{\phi_k\}^T$

En multipliant l'équation (3.28) à gauche par  $\{\phi_k\}^T$  et en distribuant les termes, on a :

$$\{\phi_k\}^T [K] \{\widetilde{\phi}_k\} + \{\phi_k\}^T [\widetilde{K}] \{\widetilde{\phi}_k\} - \widetilde{\omega}_k^2 \{\phi_k\}^T [M] \{\widetilde{\phi}_k\} = 0 \quad (3.38)$$

Développons les termes indépendamment les uns des autres.

La condition de normalisation imposée nous donne :

$$\{\phi_k\}^T [K] \{\widetilde{\phi}_k\} = \omega_k^2 \quad (3.39)$$

Suite au développement des expressions de  $[\widetilde{K}]$  et de  $\{\widetilde{\phi}_k\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \{\phi_k\}^T [\widetilde{K}] \{\widetilde{\phi}_k\} &= \{\phi_k\}^T \left( \sum_{q=1}^Q [K_q] \Psi_q \right) \left( \{\phi_k\} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n \{\phi_p\} \right) \\ &= \sum_{q=1}^Q \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=0}^{N-1} \left( \{\phi_k\}^T [K_q] \{\phi_k\} + \{\phi_k\}^T [K_q] \{\phi_p\} \lambda_p^n \Psi_n \right) \Psi_q \\ &= \sum_{q=1}^Q \{\phi_k\}^T [K_q] \{\phi_k\} E[\Psi_q] + \sum_{q=1}^Q \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=0}^{N-1} \{\phi_k\}^T [K_q] \{\phi_p\} \lambda_p^n E[\Psi_q \Psi_n] \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

La condition de normalisation imposée et le développement de  $\widetilde{\omega}_k^2$  permettent d'écrire :

$$-\widetilde{\omega}_k^2 \{\phi_k\}^T [M] \{\widetilde{\phi}_k\} = -\omega_k^2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Psi_n \quad (3.42)$$

En remplaçant ces différentes expressions dans l'équation de départ et en projetant successivement l'équation obtenue sur les polynômes  $\{\Psi_m\}_{m=0 \dots N-1}$  on obtient l'expression générale suivante :

$$\begin{aligned} \omega_k^2 E[\Psi_m] &+ \sum_{q=1}^Q \{\phi_k\}^T [K_q] \{\phi_k\} E[\Psi_q \Psi_m] \\ &+ \sum_{q=1}^Q \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=0}^{N-1} \{\phi_k\}^T [K_q] \{\phi_p\} \lambda_p^n E[\Psi_q \Psi_n \Psi_m] - \omega_k^2 a_m E[\Psi_m^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$



**Multiplication à gauche par  $\{\phi_j\}^T$ ,  $j = 1 \dots P$ ,  $j \neq k$**

En multipliant l'équation (3.28) à gauche par  $\{\phi_j\}^T$  et en distribuant les termes, on a :

$$\{\phi_j\}^T [K] \{\widetilde{\phi}_k\} + \{\phi_j\}^T [\widetilde{K}] \{\widetilde{\phi}_k\} - \widetilde{\omega}_k^2 \{\phi_j\}^T [M] \{\widetilde{\phi}_k\} = 0 \quad (3.44)$$

Le développement de l'expression de  $\{\widetilde{\phi}_k\}$  associé aux conditions de normalisation imposées permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \{\phi_j\}^T [K] \{\widetilde{\phi}_k\} &= \{\phi_j\}^T [K] \left( \{\phi_k\} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n \{\phi_p\} \right) \\ &= \{\phi_j\}^T [K] \{\phi_k\} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=0}^{N-1} \{\phi_j\}^T [K] \{\phi_p\} \lambda_p^n \Psi_n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \omega_j^2 \lambda_j^n \Psi_n \\ \text{car } \{\phi_j\}^T_{j \neq k} [K] \{\phi_k\} &= \omega_k^2 \delta_{jk} = 0 \quad \text{et} \quad \{\phi_j\}^T_{j \neq k} [K] \{\phi_p\} = \omega_p^2 \delta_{jp} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Le développement des expressions de  $[\widetilde{K}]$  et de  $\{\widetilde{\phi}_k\}$  nous donne :

$$\begin{aligned} \{\phi_j\}^T [\widetilde{K}] \{\widetilde{\phi}_k\} &= \sum_{q=1}^Q \{\phi_j\}^T [K_q] \{\widetilde{\phi}_k\} \Psi_q \\ &= \sum_{q=1}^Q \left( \{\phi_j\}^T [K_q] \{\phi_k\} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=0}^{N-1} \{\phi_j\}^T [K_q] \{\phi_p\} \lambda_p^n \Psi_n \right) \Psi_q \\ &= \sum_{q=1}^Q \{\phi_j\}^T [K_q] \{\phi_k\} E[\Psi_q] + \sum_{\substack{q=1 \\ p \neq k}}^Q \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^{N-1} \{\phi_j\}^T [K_q] \{\phi_p\} \lambda_p^n E[\Psi_q \Psi_n] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Les conditions de normalisation imposées et le développement de  $\widetilde{\omega}_k^2$  permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} -\widetilde{\omega}_k^2 \{\phi_j\}^T [M] \{\widetilde{\phi}_k\} &= -\omega_k^2 \sum_{n_1=0}^{N-1} a_{n_1} \Psi_{n_1} \left( \{\phi_j\}^T [M] \{\phi_k\} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n_2=0}^{N-1} \{\phi_j\}^T [M] \{\phi_p\} \lambda_p^{n_2} \Psi_{n_2} \right) \\ &= -\omega_k^2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} a_{n_1} \lambda_j^{n_2} E[\Psi_{n_1} \Psi_{n_2}] \end{aligned} \quad (3.47)$$

car  $\{\phi_j\}^T_{j \neq k} [M] \{\phi_k\} = \delta_{jk} = 0$  et  $\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_p\} = \delta_{jp}$

En remplaçant ces différentes expressions dans l'équation de départ et en projetant successivement l'équation obtenue sur les polynômes  $\{\Psi_m\}_{m=0\dots N-1}$  on obtient l'expression générale suivante :

$$\begin{aligned} \omega_j^2 \lambda_j^m E[\Psi_m^2] + \sum_{q=1}^Q \{\phi_j\}^T [K_q] \{\phi_k\} E[\Psi_q \Psi_m] + \sum_{q=1}^Q \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=0}^{N-1} \{\phi_j\}^T [K_q] \{\phi_p\} \lambda_p^n E[\Psi_q \Psi_n \Psi_m] \\ - \omega_k^2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} a_{n_1} \lambda_j^{n_2} E[\Psi_{n_1} \Psi_{n_2} \Psi_m] = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ainsi, la combinaison des  $N$  équations issues de l'expression (3.43) et des  $N(P-1)$  équations issues de l'expression (3.48) nous donne un système non-linéaire de  $N \times P$  équations à  $N \times P$  inconnues à résoudre par un algorithme itératif dédié de type Newton-Raphson. Après la résolution du système, les coefficients ainsi déterminés permettent de calculer les pulsations et les vecteurs propres aléatoires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega}_k^2 = \omega_k^2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Psi_n(\xi) \\ \{\widetilde{\phi}_k\} = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n(\xi) \{\phi_p\} \end{array} \right. \quad (3.49)$$

Un premier avantage de la méthode est que les modes propres aléatoires sont à ne déterminer qu'une seule fois ce qui est un avantage certain par rapport aux simulations de Monte Carlo qui nécessitent un nombre conséquent de calcul déterministes. Un second avantage, et pas des moindres, est qu'elle permet d'obtenir directement les premiers moments statistiques sans avoir à effectuer une multitude de tirages. L'on notera que cette méthode fournit des vecteurs propres aléatoires qui ne sont pas normalisés par rapport à la matrice de masse ; il faudra prendre soin de les normaliser par rapport à la matrice de masse pour pouvoir les comparer avec les simulations de Monte Carlo.

### Détermination des premiers moments statistiques

Comme il a été dit plus haut, une fois les modes propres aléatoires déterminés, il est possible de déterminer leur moyenne et leur écart-type sans avoir à effectuer de tirages, ce qui constitue un avantage certain par rapport à Monte Carlo. Ces moments statistiques s'expriment en fonction des coefficients qui ont été déterminés lors du calcul des modes propres aléatoires.

On obtient donc, d'une part, la moyenne et l'écart-type de la pulsation propre aléatoire :

$$\begin{cases} E[\tilde{\omega}_k^2] = \omega_k^2 a_0 \\ \sigma_{\tilde{\omega}_k^2} = \omega_k^2 \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} a_n^2 E[\Psi_n^2]} \end{cases} \quad (3.50)$$

et d'autre part, la moyenne et l'écart-type du vecteur propre aléatoire (l'écart-type étant calculé au ddl  $i$ ) :

$$\begin{cases} E[\{\tilde{\phi}_k\}] = \{\phi_k\} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \lambda_p^0 \{\phi_p\} \\ \sigma_{\{\tilde{\phi}_k\}_i}^2 = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_p^n \{\phi_p\}_i)^2 E[\Psi_n^2] + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{P-1} \sum_{j=p+1}^P \sum_{n_1=1}^{N-1} \lambda_p^{n_1} \lambda_j^{n_1} E[\Psi_{n_1}^2] \{\phi_p\}_i \{\phi_j\}_i \end{cases} \quad (3.51)$$

car on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{\{\tilde{\phi}_k\}_i}^2 &= E \left[ \left( \{\tilde{\phi}_k\}_i - E[\{\tilde{\phi}_k\}_i] \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \left( \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n \{\phi_p\}_i \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \left( \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n \{\phi_p\}_i \right)^2 + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{P-1} \sum_{j=p+1}^P \left( \sum_{n_1=1}^{N-1} \lambda_p^{n_1} \Psi_{n_1} \{\phi_p\}_i \right) \left( \sum_{n_2=1}^{N-1} \lambda_j^{n_2} \Psi_{n_2} \{\phi_j\}_i \right) \right] \\ &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^P \sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_p^n \{\phi_p\}_i)^2 E[\Psi_n^2] + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{P-1} \sum_{j=p+1}^P \sum_{n_1=1}^{N-1} \lambda_p^{n_1} \lambda_j^{n_1} E[\Psi_{n_1}^2] \{\phi_p\}_i \{\phi_j\}_i \end{aligned}$$

Il est ainsi possible de déterminer analytiquement la dispersion des modes propres aléatoires sans faire de tirages. Il n'est donc plus question d'estimer une convergence qui dépendrait du nombre de tirages comme c'est le cas pour les simulations de Monte Carlo qui nécessitent de faire un nombre important de calculs pour être sûr d'avoir convergé.

### Application au modèle poutres 2 pales

En s'appuyant sur le modèle décrit sur la Figure 3.3 de la section 3.3.1, nous allons présenter les résultats issus de la détermination des modes propres aléatoires par la méthode qui a été présentée plus haut, qui seront comparés à des résultats issus de simulations de Monte Carlo qui nous serviront de référence.

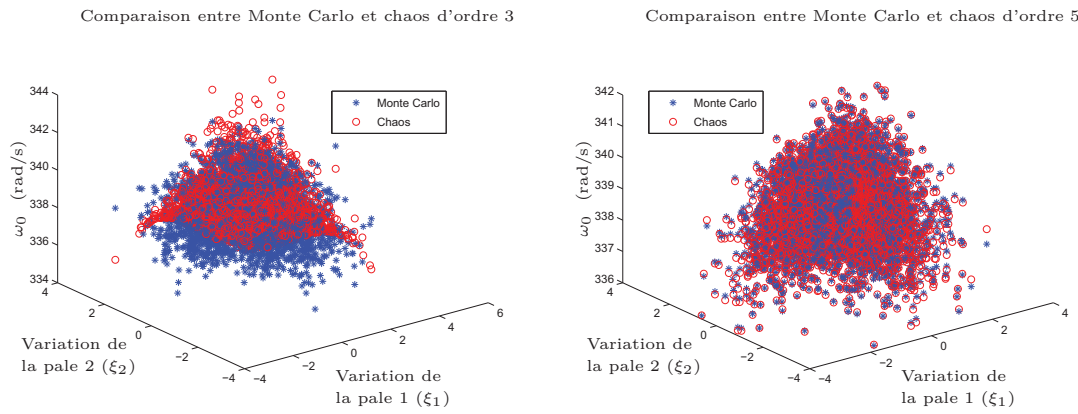


FIGURE 3.7 – Surface de réponses des pulsations propres - Influence de l'ordre du chaos polynomial

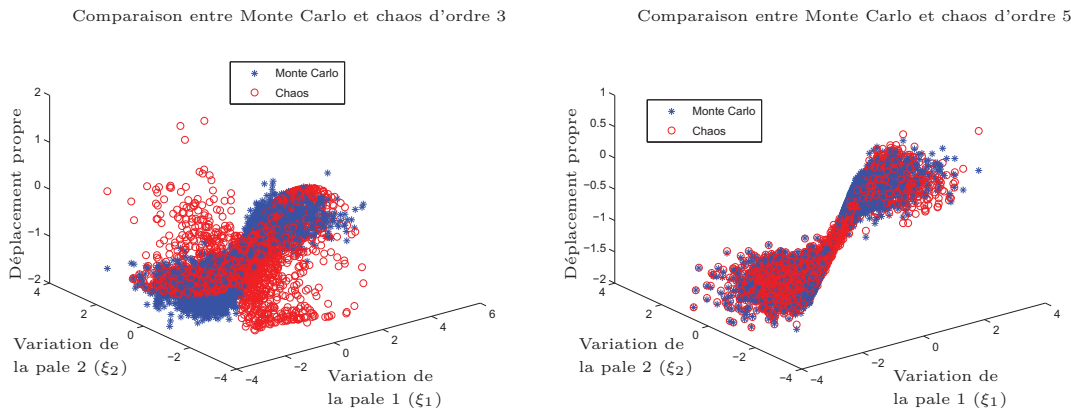


FIGURE 3.8 – Surface de réponses du déplacement propre aléatoire du ddl de flexion de la pale 1 - Influence de l'ordre du chaos polynomial

### Calcul des modes propres aléatoires

Nous avons tracé les surfaces de réponse associées à la pulsation propre et au déplacement propre d'un ddl (en l'occurrence le ddl de flexion de la pale 1 du modèle) pour différents tirages du module d'Young de chaque pale. La base modale déterministe de projection des modes propres aléatoires est constituée des deux premiers modes de flexion de pales de la Figure 3.4. Nous avons comparé les résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo et par la méthode du chaos présentée dans cette section pour 5000 tirages de  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . Les résultats sont donnés sur les Figures 3.7 et 3.8 pour  $\delta = 0.5\%$ . Cette faible valeur de  $\delta$  est conditionnée par la raideur des viroles que nous avons considérées comme 100 fois plus raides que les pales afin d'obtenir des modes très proches en fréquence.

On note globalement un effet de convergence lorsque l'on passe d'un chaos d'ordre 3

à un chaos d'ordre 5. En effet, tant dans le cas de l'évolution des pulsations propres (qui est la conséquence première du désaccordage en module d'Young) que dans celui de l'évolution des déplacements propres, la convergence est plutôt satisfaisante étant donné que les champs de points obtenus par la méthode de Monte Carlo et par la méthode du chaos sont très proches. L'amélioration est d'autant plus marquante dans le cas des vecteurs propres où la surface de réponses à approcher montre une évolution brutale pour des valeurs seuils de  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . On voit clairement qu'à l'ordre 3, le chaos a du mal à être prédictif tandis qu'à l'ordre 5, le résultat est très satisfaisant (cf. Figure 3.8). Nous arrivons donc à suivre de manière assez fine l'évolution d'un mode propre donné en fonction du désaccordage.

### Calcul des premiers moments de la réponse forcée aléatoire

L'obtention des modes propres aléatoires par la méthode qui vient d'être présentée nous a permis de déterminer les premiers moments (moyenne et écart-type) de la réponse forcée du modèle. Le déplacement est donné par l'expression :

$$\{U\} = \sum_j \frac{\{\widetilde{\Phi}_j\} \left( \{\widetilde{\Phi}_j\}^T \{F\} \right)}{-\omega^2 + \widetilde{\omega}_j^2 (1 + i\eta)} \quad (3.52)$$

où  $j$  correspond aux différents modes retenus lors de la détermination des modes propres aléatoires,  $\{F\}$  est le vecteur force et  $\eta$  est l'amortissement modal. Les modes propres aléatoires  $\{\widetilde{\Phi}_i\}$  sont projetés sur la base du chaos polynomial, ce qui nous permet de déterminer le vecteur propre correspondant à un tirage donné. Ainsi, pour un grand nombre de tirages et en employant la méthode de Monte Carlo sur l'équation 3.52, il est possible de déterminer la moyenne et l'écart-type de la réponse de façon directe (pas d'inversion de système) et par conséquent moins coûteuse en ressources. Pour valider les résultats, nous avons comparé la moyenne et l'écart-type du déplacement obtenus par la méthode présentée avec ceux obtenus précédemment par la méthode de Monte Carlo qui correspond à la résolution de :

$$\left( (1 + i\eta) \sum_{q=0}^Q [K_q] \Psi_q - \omega^2 [M] \right) \{U\} = \{F\} \quad (3.53)$$

où  $Q$  correspond au nombre total de variables aléatoires,  $[K_0]$  correspond au cas  $q = 0$  et représente la matrice de raideur déterministe.

L'étude a été faite sur le modèle de la Figure 3.3 avec les conditions suivantes :

- Force unitaire appliquée sur le ddl de flexion de la première pale
- Ecart-type relatif  $\delta$  de 0.5%

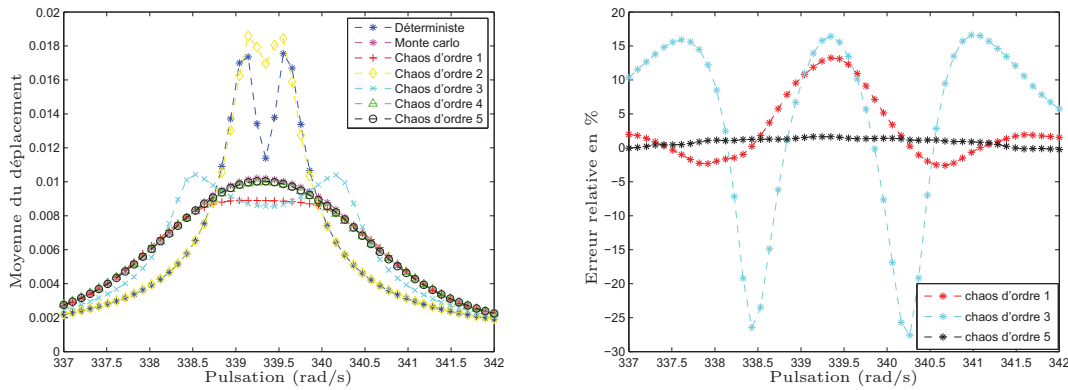


FIGURE 3.9 – Réponse forcée : Moyenne du déplacement du ddl de flexion de la 1ère pale (gauche) et erreur relative par rapport à Monte Carlo (droite) - Influence de l'ordre du chaos polynomial

- Amortissement modal de 0.1%
- 20000 tirages

Les résultats obtenus sont visibles sur les Figures 3.9 et 3.10.

La Figure 3.9 représente la moyenne du déplacement du ddl de flexion de la 1ère pale pour une succession de pulsations proches des deux premières pulsations propres du modèle et l'erreur relative commise. La courbe déterministe fait apparaître les 2 pics correspondant aux deux premiers modes propres (cf. Figure 3.4). Cependant, selon le désaccordage introduit, les pulsations propres changent et les amplitudes de vibration des deux pales varient, ce qui explique que lorsque l'on balaie la plage de pulsations comprenant les 2 premières pulsations propres, les moyennes de Monte Carlo et du chaos obtenues ne laissent pas apparaître les 2 pics. On visualise aisément la convergence du chaos polynomial qui est obtenue à partir de l'ordre 4, ordre à partir duquel l'écart entre le Monte Carlo et le chaos est globalement très faible. En effet, l'écart relatif max est de 1.6% à l'ordre 5 ce qui est raisonnable (cf. tableau 3.2).

Sur la Figure 3.10 qui représente l'écart-type du déplacement du même ddl pour les mêmes pulsations ainsi que l'erreur relative correspondante, la convergence est visible mais est moins marquée que dans le cas de la moyenne. En effet, il y a un écart entre les courbes relatives aux chaos d'ordre 4 et 5, la courbe relative au chaos d'ordre 5 se rapprochant globalement plus du Monte Carlo que les autres courbes. L'erreur maximale commise à l'ordre 5 est de 8.2% (cf. tableau 3.2) et se situe autour de 342 rad/s. Même si cet écart semble relativement important, rappelons que l'amortissement modal utilisé est assez faible (0.1%) ce qui rend la convergence plus difficile. Ainsi, la Figure 3.10 à travers les différentes erreurs relatives pour les ordres 1, 3 et 5 du chaos nous montre la convergence de la méthode proposée dans le cas de la réponse forcée du système.

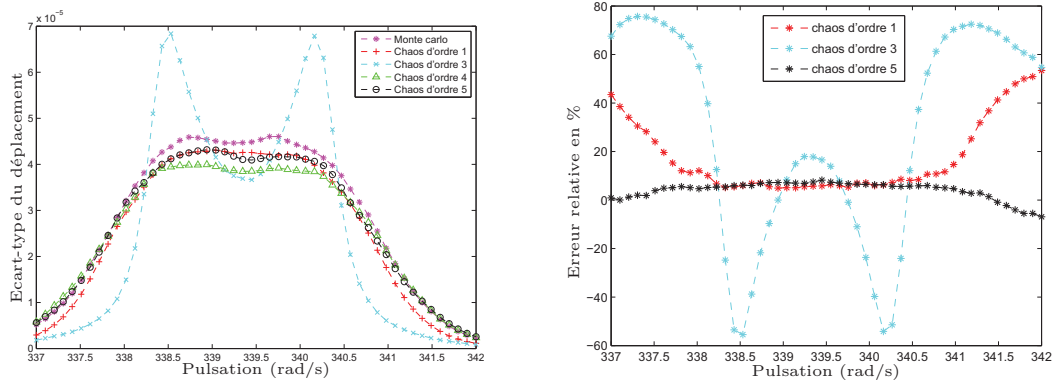


FIGURE 3.10 – Réponse forcée : Ecart-type du déplacement du ddl de flexion de la 1ere pale (gauche) et erreur relative par rapport à Monte Carlo (droite) - Influence de l'ordre du chaos polynomial

Ordre du chaos	Erreur relative max (en %)	
	Moyenne	Ecart-type
1	13.2	53.39
3	27.6	75.68
5	1.6	8.22

TABLE 3.2 – Réponse forcée - Erreurs relatives max du chaos par rapport au Monte Carlo

### Influence de la raideur de couplage

Il est aussi intéressant d'étudier l'influence de la raideur de la virole qui joue un rôle important dans la convergence de la méthode qui a été proposée. En effet, nous savons que les transferts vibratoires inter-aubes sont assurés par les viroles et sont conditionnés par la raideur de celles-ci. Par exemple, si les viroles étaient infiniment rigides, les deux pales du modèle seraient totalement découplées et on aurait un mode double or on rappelle que la méthode proposée peine à converger lorsque la base modale déterministe contient des modes à multiplicité supérieure à 1. Ainsi, dans tous les calculs qui ont été présentés dans la section précédente, nous avons considéré que les viroles étaient 100 fois plus raides que les pales ce qui est malgré tout assez contraignant en terme de proximité des modes même si la validité de la méthode a pu être démontrée. Nous avons cependant voulu voir l'influence qu'aurait sur les résultats le fait de considérer des viroles 25 fois plus raides que les pales.



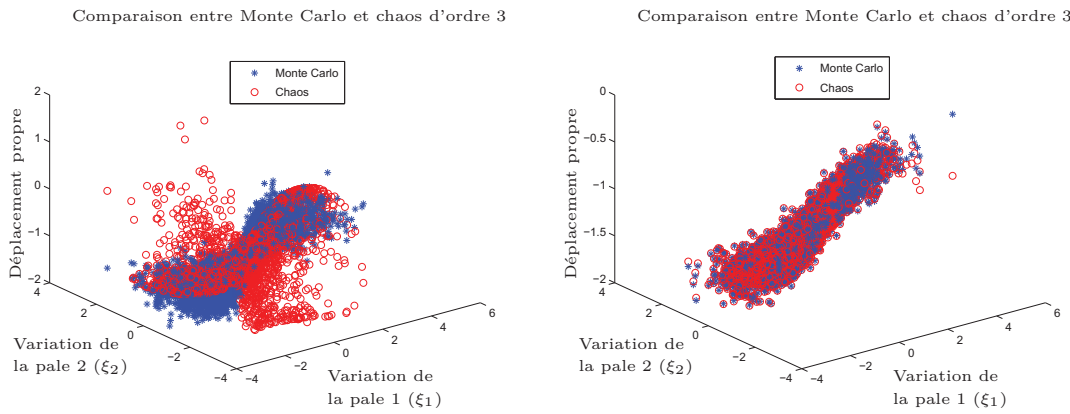


FIGURE 3.11 – Surface de réponses des vecteurs propres - Influence de la raideur des viroles : Comparaison entre viroles 100 fois plus raides (à gauche) et viroles 25 fois plus raides (à droite)

Sur la Figure 3.11, on note que la convergence est quasiment atteinte à l'ordre 3. Cela est dû au fait que le couplage entre les modes étudiés est plus marqué, les fréquences propres correspondantes étant moins proches. En effet, on note que plus les viroles sont raides, plus la variation du vecteur propre en fonction du désaccordage se fait de façon brutale et plus la convergence est difficile. Cependant, étant donné que le facteur 100 entre viroles et pales que nous avons utilisé pour les simulations a été surestimé par rapport au cas réel, l'application de la méthode sur un modèle réaliste pourrait s'avérer concluante, même pour un écart-type beaucoup plus important.

### 3.4 Développement d'une stratégie ad hoc de réduction de modèle

Les résultats présentés dans les paragraphes précédents permettent de valider en grande partie la méthodologie stochastique mise en place et appliquée au modèle académique de la Figure 3.3. Ce modèle étant censé se rapprocher de la structure d'un secteur de redresseur constitué de 2 pales, nous voulions pousser un peu plus le réalisme en appliquant la méthode à une modélisation académique d'un secteur de 10 pales. Cela multiplierait donc par cinq la taille du modèle éléments finis de départ. Cela ne rend certes pas la simulation beaucoup plus lourde dans le cas du modèle poutres, mais envisager l'application de la présente méthode à un modèle industriel nous a amené à réfléchir à une méthode de réduction de modèle adaptée à notre problématique. Ci-après est présenté un état de l'art des méthodes de sous-structuration habituellement utilisées pour la réduction de gros modèles éléments finis ainsi que la justification du choix de la méthode qui a été retenue pour notre cas académique.

### 3.4.1 Etat de l'art des méthodes de réduction

Lors de l'étude dynamique de gros modèles, on fait très souvent appel aux méthodes de sous-structuration pour réduire la taille du problème et, par conséquent, pour réduire de manière significative les durées des simulations numériques. Elles consistent à diviser une structure en plusieurs sous-structures auxquelles sont appliquées des méthodes de synthèse modale avant de les réassembler pour obtenir un modèle réduit. La synthèse modale de chaque sous-structure passe par la détermination de ses modes normaux (qui correspondent aux modes propres de la sous-structure pour des conditions aux limites particulières aux interfaces selon la méthode de synthèse modale retenue) auxquels s'ajoutent d'éventuels modes statiques de liaison. La réduction du problème se fait lors de la troncature de la base des modes normaux. Ces méthodes sont d'une efficacité moindre lorsque l'on est en présence d'interfaces avec beaucoup de degrés de liberté, auquel cas tous ces ddl doivent être retenus lors de la synthèse modale et l'on obtient un modèle de taille élevée. Pour pallier à ce problème, des méthodes de double synthèse modale [49, 50] ont été mises en place. Elles se basent sur une première synthèse modale qui consiste à déterminer des modes de branches qui peuvent décrire toute singularité de la structure, particulièrement au niveau des grandes interfaces et qui est suivie de la seconde synthèse modale qui permet de réduire la base modale de chaque sous-structure et de les assembler ensuite. Les méthodes de synthèse modale les plus employées à ce jour sont les méthodes avec interfaces fixes introduites par Hurty en 1965 [48] et améliorées par Craig et Bampton en 1968 [26], et les méthodes à interfaces libres initiées par Goldman [38] et Hou [44] en 1969.

Les méthodes à interface fixe [26, 1, 8, 74, 75] utilisent comme base :

- les modes normaux à interface fixe qui sont les modes de la sous-structure lorsque toutes les frontières sont encastrées et dont le nombre de ces modes retenus sera déterminant pour une réduction optimale du modèle.
- les modes statiques de liaison qui sont les déformées statiques de la sous-structure lorsqu'un déplacement unitaire est imposé sur un ddl de frontière, tous les autres ddl de la frontière étant encastrés. On se retrouve alors avec autant de modes statiques de liaison que de ddl de frontière.

La méthode proposée par Craig et Bampton est à ce jour la référence des méthodes de synthèse modale à interfaces fixes.

Les méthodes à interface libre [66, 24, 25, 69] quant à elles utilisent les modes normaux à interface libre, et tout comme les méthodes à interface fixe, leur efficacité dépend de la troncature de la base des modes normaux. Il faut cependant souvent enrichir cette base de modes d'attache pour obtenir une meilleure convergence.

### 3.4.2 Choix de la méthode de réduction

Dans le cadre de notre étude, la méthode de Craig-Bampton semblait appropriée à la problématique étant donnée sa simplicité de mise en œuvre et sa qualité de convergence.

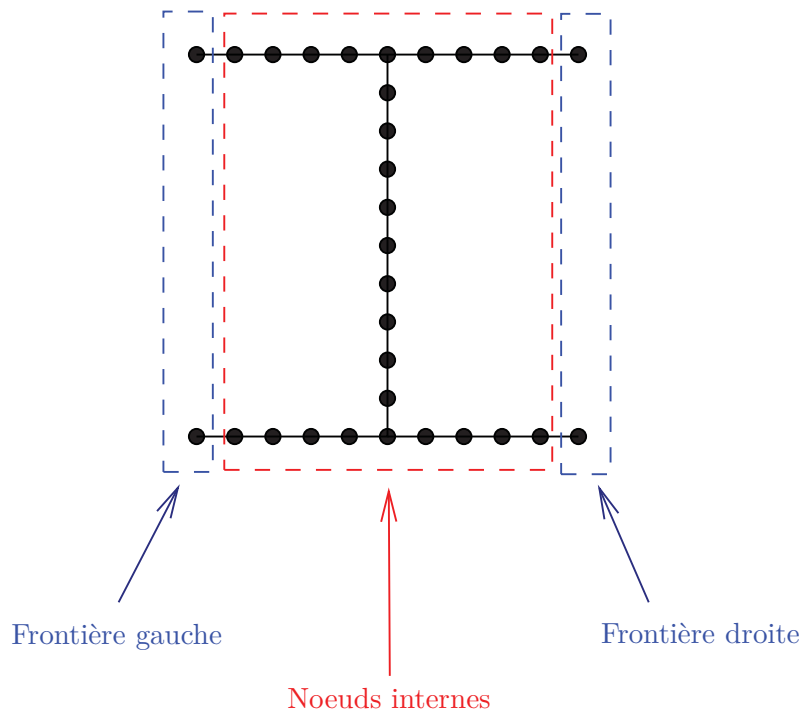


FIGURE 3.12 – Sous-structure élémentaire

Dans tout ce qui suit, nous appellerons “super-élément” le résultat de la réduction d’une sous-structure donnée. Nous avons considéré le modèle académique de la Figure 3.12 comme sous-structure pour la création de notre super-élément de référence. Nous avons volontairement choisi d’augmenter le nombre de ddls internes pour que la réduction de la sous-structure élémentaire ait plus de sens physique. Il s’agit toujours de poutres de type Euler-Bernoulli, en acier ( $E = 210$  GPa,  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>), avec une section carrée de côté  $10^{-2}$  m et de longueur élémentaire égale à 0.1 m. Les viroles sont toujours considérées comme étant plus raides que les aubes. Ce modèle élémentaire est constitué de 31 noeuds et 30 éléments ; la taille du modèle augmentera donc en conséquence si l’on considère un assemblage de 10 secteurs équivalents à ce modèle élémentaire, d’où l’intérêt de la sous-structuration.

Soient  $[M]$  et  $[K]$  les matrices de masse et de raideur du modèle. La première étape a été de réorganiser les matrices de façon à séparer les ddls de frontières et les ddls internes ; au final, seuls les ddls de frontières resteront physiques, les ddls internes seront condensés et réduits à quelques ddls généralisés. C’est la raison pour laquelle moins on aura de ddls de frontière, plus la réduction sera efficace.

Dans l’optique d’un assemblage plus aisé de la structure finale que l’on veut obtenir,

nous avons réorganisé les matrices  $[K]$  et  $[M]$  de la manière suivante :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{gg}] & [K_{ig}] & [K_{dg}] \\ [K_{gi}] & [K_{ii}] & [K_{di}] \\ [K_{gd}] & [K_{id}] & [K_{dd}] \end{bmatrix} \text{ et } [M] = \begin{bmatrix} [M_{gg}] & [M_{ig}] & [M_{dg}] \\ [M_{gi}] & [M_{ii}] & [M_{di}] \\ [M_{gd}] & [M_{id}] & [M_{dd}] \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

où  $g$ ,  $i$  et  $d$  désignent respectivement les ddl de frontière gauche, les ddl internes et les ddl de frontière droite. Ceci étant, il faut à présent déterminer les modes qui vont constituer la base de réduction de Craig-Bampton à savoir les modes statiques de liaison et les modes à interfaces fixes. Pour rappel, la matrice des modes statiques de liaison notée  $[\Phi_s]$  correspond aux déformées statiques de la sous-structure lorsqu'un déplacement unitaire est imposé sur un ddl de frontière, tous les autres ddl de la frontière étant encastés. Pour les déterminer, il faut résoudre le système statique suivant :

$$\begin{bmatrix} [K_{gg}] & [K_{ig}] & [K_{dg}] \\ [K_{gi}] & [K_{ii}] & [K_{di}] \\ [K_{gd}] & [K_{id}] & [K_{dd}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] \\ [\Phi_s] \\ [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Ce qui revient à résoudre l'équation matricielle suivante :

$$[[K_{gi}] + [K_{di}]] [I] + [K_{ii}] [\Phi_s] = [0] \quad (3.56)$$

$$(3.57)$$

On en déduit l'expression des modes statiques de liaison calculés sur les ddl internes :

$$[\Phi_s] = -[K_{ii}]^{-1} [[K_{gi}] + [K_{di}]] \quad (3.58)$$

On a donc autant de modes statiques de liaison que de ddl de frontière.

Pour déterminer les modes à interfaces fixes  $[\Phi_{enc}]$ , il faut résoudre le problème aux valeurs propres du modèle lorsque l'on considère ses interfaces totalement encastées, ce qui revient à résoudre :

$$([K_{ii}] - \omega^2 [M_{ii}]) [\Phi_{enc}] = [0] \quad (3.59)$$

On peut alors construire la matrice de Craig-Bampton  $[T]$  grâce au modes à frontières fixes  $[\Phi_{enc}]$  et aux modes statiques de liaison aux ddl de la frontière gauche  $[\Phi_s^g]$  et aux ddl de la frontière droite  $[\Phi_s^d]$  :

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [\Phi_s^g] & [\Phi_{enc}] & [\Phi_s^d] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

On peut voir que la taille de la matrice ainsi constituée dépend fortement du nombre de modes à interfaces fixes qui la constitue. La réduction se fait en ne retenant qu'un certain nombre de modes à interfaces fixes, disons les  $n$  premiers modes lorsque l'on fait l'hypothèse qu'ils ont été classés dans l'ordre croissant de leurs fréquences propres. Cela revient à ne garder que les  $n$  premières colonnes de la matrice  $[\Phi_{enc}]$ ; notons la nouvelle matrice  $[\Phi_{enc}^n]$ . La nouvelle matrice de passage de Craig-Bampton  $[T_{CB}]$  s'écrit :

$$[T_{CB}] = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [\Phi_s^g] & [\Phi_{enc}^n] & [\Phi_s^d] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Nous obtenons ainsi une matrice rectangulaire avec un nombre réduit de colonnes (nombre équivalent au nombre de ddls de frontière auquel s'ajoute le nombre de modes à interfaces fixes retenus) mais qui reste malgré tout en cohérence avec la réorganisation des matrices  $[M]$  et  $[K]$  qui a été faite au départ. Les matrices réduites de masse  $[M_{CB}]$  et de raideur  $[K_{CB}]$  peuvent alors s'écrire :

$$[K_{CB}] = [T_{CB}]^T [K] [T_{CB}] \quad \text{et} \quad [M_{CB}] = [T_{CB}]^T [M] [T_{CB}] \quad (3.62)$$

Les matrices ainsi obtenues sont normalement de taille très réduite car il n'est pas nécessaire de retenir un nombre important de modes normaux pour converger. Il est cependant nécessaire d'effectuer une étude de convergence du super-élément selon le nombre de modes normaux à retenir pour s'assurer que les modes susceptibles de nous intéresser sont bien retranscrits tant en fréquences qu'en déformées propres. L'assemblage des différents super-éléments peut être fait en reliant les différents ddls de frontières entre eux.

### 3.4.3 Application de la méthode de sous-structuration au modèle poutres 10 pales

La sous-structuration a été appliquée au modèle de la Figure 3.13 qui est encasté à ses extrémités. Le modèle élémentaire considéré est celui de la Figure 3.12 avec la même finesse de discrétisation. Le but est d'obtenir un modèle réduit qui soit aussi prédictif que le modèle de référence.

#### Validation de la stratégie de réduction du modèle

Soit  $[K_{CB}^{10p}]$  la matrice de raideur réduite du modèle poutres 10 pales suite à l'assemblage des 10 sous-structures identiques de matrice de raideur réduite  $[K_{CB}]^i$ ,  $i$  étant le numéro du super-élément considéré.

La matrice  $[K_{CB}^{10p}]$  peut alors être assemblée de la manière suivante :



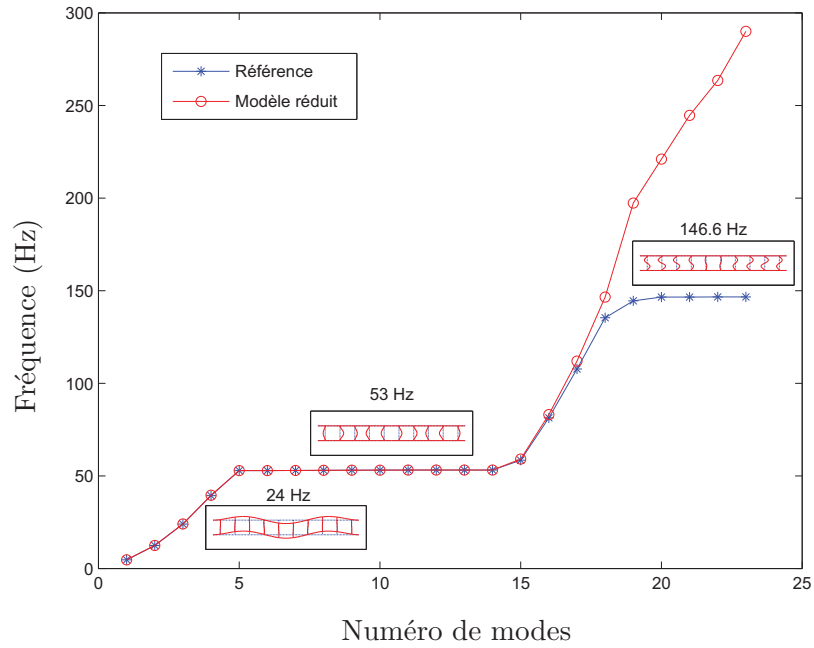


FIGURE 3.14 – Comparaison des fréquences propres du modèle de référence et du modèle réduit

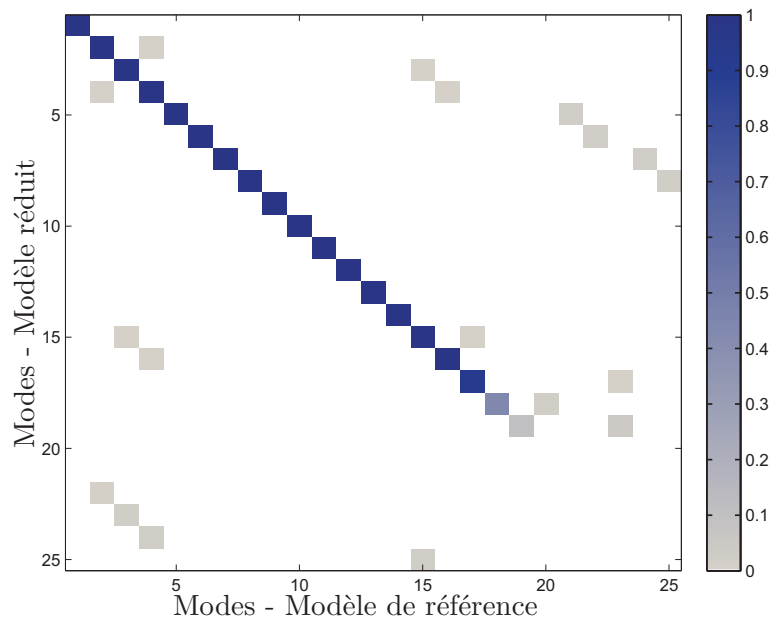


FIGURE 3.15 – MAC entre les déformées propres du modèle de référence et celles du modèle réduit



modale de Craig-Bampton n'est pas assez riche pour permettre de retranscrire les autres modes ce qui explique que notre modèle réduit est subitement beaucoup plus raide. Pour pousser l'analyse un peu plus loin, nous avons représenté l'allure des déformées propres du modèle de référence pour trois valeurs de fréquences particulières.

- Le premier mode à 24 Hz montre un mode d'ensemble qui fait principalement intervenir les viroles. C'est le cas des 4 premiers modes propres qui ont globalement le même type de déformée ; seul le nombre de ventres change. Ces modes sont bien représentés par le modèle réduit car ils proviennent des modes statiques de liaison qui ont servi à la construction de la base de Craig-Bampton.
- Le deuxième mode à 53 Hz est situé dans une zone à forte densité modale comme neuf autres modes. Cette zone à forte densité modale rappelle la phénoménologie que l'on a sur les redresseurs sectorisés industriels. Il s'agit de modes de flexion de pale 1F. En fait, tout se passe comme si chacune des pales vibrait à sa fréquence propre mais du fait de la raideur de couplage induite par les viroles, on obtient des modes très proches en fréquence et où plusieurs pales vibrent en même temps à des amplitudes différentes. Le modèle réduit arrive à représenter parfaitement ces modes grâce au mode à frontière fixe qui a été retenu et qui est un mode de flexion de pale.
- Le troisième mode à 147 Hz est un mode de flexion de pale avec deux ventres (2F) et est situé dans une zone à forte densité modale. Cependant, notre modèle réduit n'est pas parvenu à être prédictif à ce niveau fréquentiel du fait du nombre limité de modes à frontière fixe retenus. Si l'on avait rajouté dans la base de Craig-Bampton le deuxième mode à frontières fixes qui est un mode 2F, alors nous serions mieux arrivés à étendre le domaine de convergence de notre modèle réduit.

Cette étude nous permet de valider le modèle réduit mis en place dans la mesure où les modes que l'on souhaite étudier sont bien représentés. La validité du modèle est donc conditionnée par un choix judicieux des modes à frontières fixes à retenir qui dépend de l'allure des modes d'intérêt. L'avantage de la méthodologie de réduction qui vient d'être présentée est que, d'une part, elle permet de retenir un minimum de modes à frontières fixes car la dynamique de la structure complète qui est constituée essentiellement de modes de pales résulte d'une combinaison des modes à frontières fixes des super-éléments qui ont été assemblés, et d'autre part, elle nous permettra d'appliquer directement le désaccordage sur les super-éléments que l'on souhaite affecter. Cela n'aurait pas été possible si dès le départ, le super-élément avait été construit à partir du modèle poutres de 10 pales car on perdrait les données physiques relatives aux différents secteurs. De plus, il aurait été indispensable de retenir un nombre important de modes à frontières fixes pour pouvoir reproduire fidèlement la dynamique de la structure si l'on souhaitait réduire directement la structure complète.

### **Exploitation dans le cadre du calcul des modes propres aléatoires**

Il est à présent question de valider la méthodologie stochastique sur le modèle poutres

10 pales qui a été réduit par sous-structuration. L'idée est de se rapprocher au mieux du cas industriel de sorte à ce que l'application sur le modèle 3D se fasse dans le même esprit. Nous nous sommes intéressés au calcul des 10 modes propres aléatoires situés dans le premier palier à forte densité modale visible sur la Figure 3.14. Cependant, comme on peut le voir sur cette figure, le palier est très plat ce qui témoigne d'une forte proximité fréquentielle des modes. C'est dû au fait que l'on y a considéré les viroles 100 fois plus raides que les pales. Pour se rapprocher davantage de la réalité et obtenir une dispersion fréquentielle du palier proche de celle observable sur le cas 3D (cf. Figure 2.3), nous avons réduit le facteur de raideur entre viroles et pales à 10. Cela nous donne l'étalement fréquentiel visible sur la Figure 3.16. On rend donc la zone de forte densité modale moins

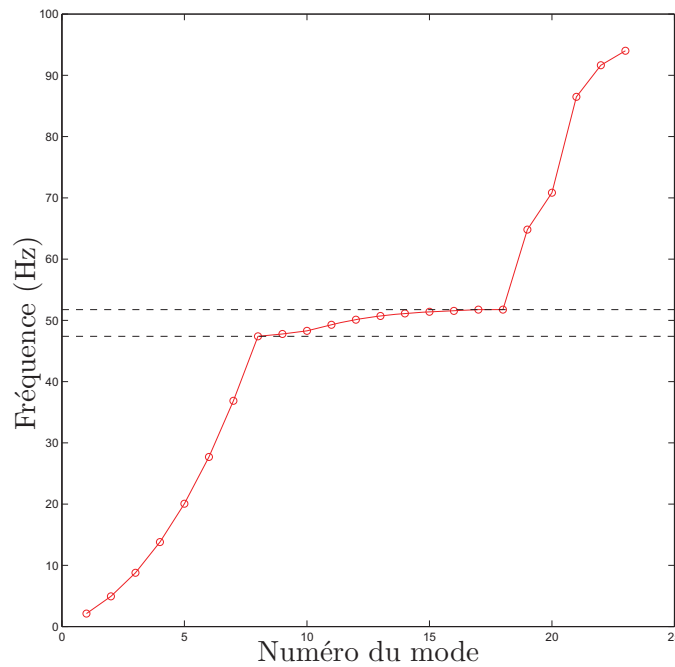


FIGURE 3.16 – Etalement fréquentiel du modèle réduit pour un facteur 10 entre raideurs de pale et de virole

plate que dans le cas de facteur de raideur élevé entre viroles et pales (cf. Figure 3.14) même si on voit que les deux derniers modes du paliers sont les plus proches en fréquence.

Une étude de convergence du modèle réduit a montré qu'il faut retenir au moins deux modes à frontières fixes pour être prédictif dans le cas où les viroles sont 10 fois plus raides que les pales. Les 10 modes propres aléatoires à calculer ont été projetés sur un chaos polynomial d'ordre 3, sur une base modale déterministe constituée de ces mêmes 10 modes propres et pour un écart-type d'entrée  $\delta$  de 1%. Pour que le système reste de taille raisonnable, seules deux variables aléatoires ont été retenues et le désaccordage étudié est

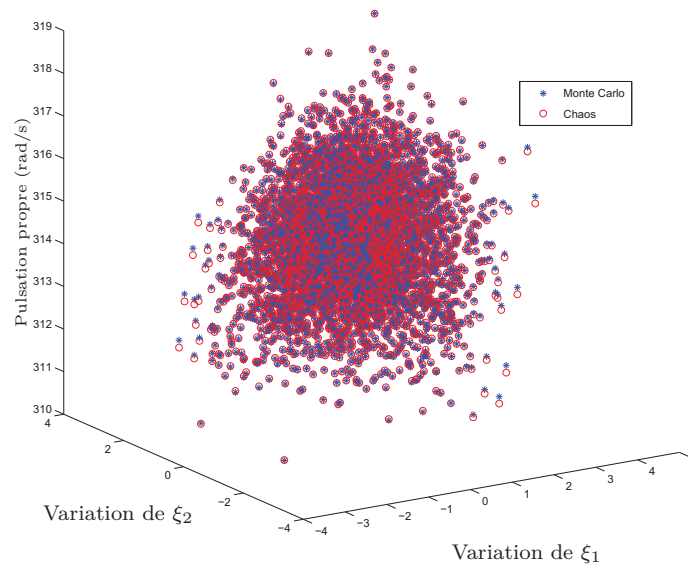


FIGURE 3.17 – Surfaces de réponse des pulsations propres aléatoires relatives au mode 12 - Comparaison entre Monte Carlo et chaos d'ordre 3

de type ABAB ( $\xi_1$  étant la variable aléatoire associée à A et  $\xi_2$  celle associée à B). Il serait évidemment très coûteux de considérer autant de variables que d'aubes, raison pour laquelle il est préférable d'étudier des motifs de désaccordage. Les pulsations propres et les vecteurs propres aléatoires ont pu être déterminés et évalués pour 5000 tirages. Nous avons ainsi pu tracer les surfaces de réponse correspondant aux pulsations propres aléatoires et aux vecteurs propres aléatoires afin de juger de la convergence de la méthode du chaos vis à vis des simulations de Monte Carlo. Nous avons arbitrairement choisi de montrer les résultats relatifs au mode 12 et l'évolution correspondante du déplacement propre du ddl de flexion des pales 1 et 2 avec le désaccordage. Ces résultats sont visibles sur les Figures 3.17 et 3.18.

Lorsque l'on observe les surfaces de réponse des pulsations propres aléatoires et des vecteurs propres aléatoires obtenues pour les mêmes tirages des v.a.g.c.r.  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , on s'aperçoit que la méthode du chaos tend à se rapprocher au maximum de Monte Carlo. L'allure polynomiale des surfaces de réponse obtenues par Monte Carlo semble être en adéquation avec la base du chaos et la base modale déterministe du fait de l'allure des déformées propres qui restent du même type malgré le désaccordage. En effet, sur ce modèle simplifié, les modes aléatoires étudiés qui sont des modes de flexion de pale restent des modes de flexion avec le désaccordage ce qui fait que dans ce cas, une base modale de projection constituée uniquement des modes de flexion déterministes concernés suffit pour la convergence de la méthode. Cela peut s'avérer ne pas être le cas pour un modèle

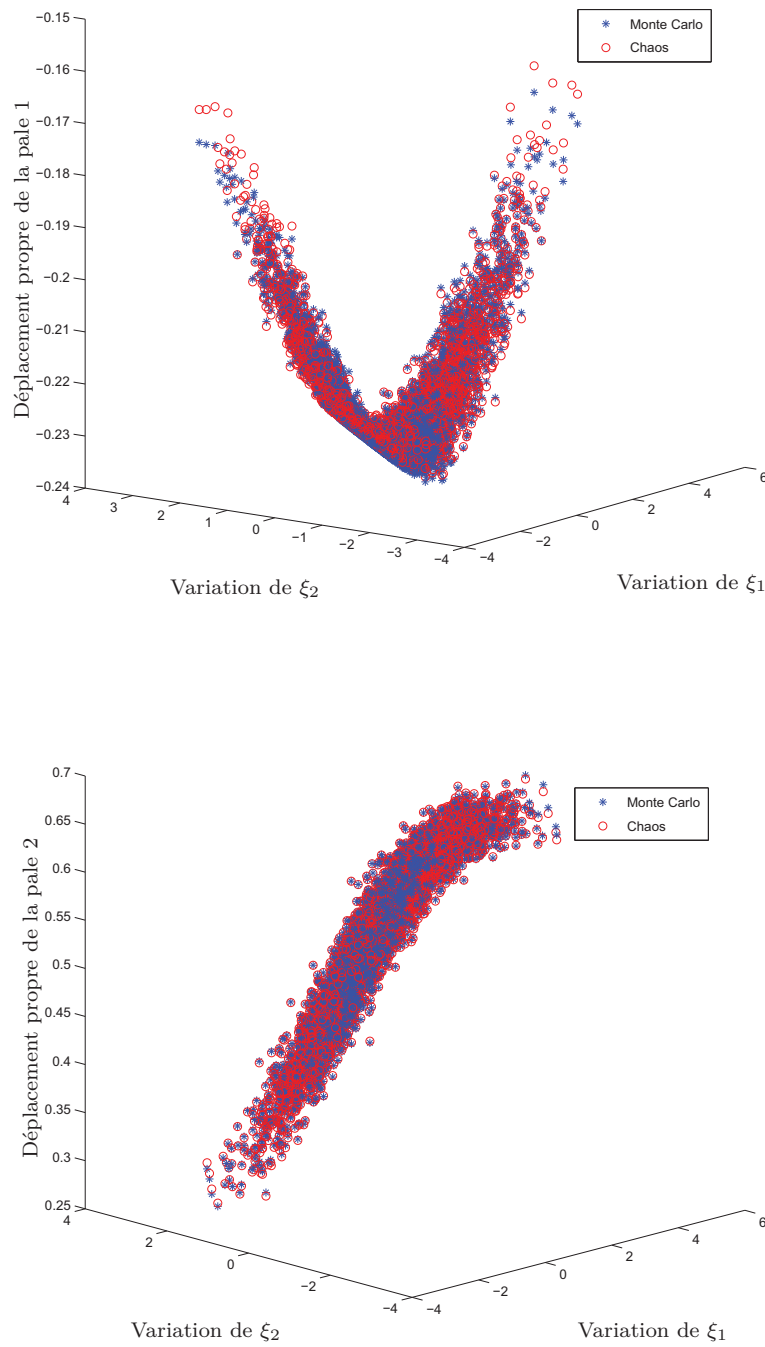


FIGURE 3.18 – Surfaces de réponse des vecteurs propres aléatoires relatifs au mode 12 et aux pales 1 et 2 - Comparaison entre Monte Carlo et chaos d'ordre 3

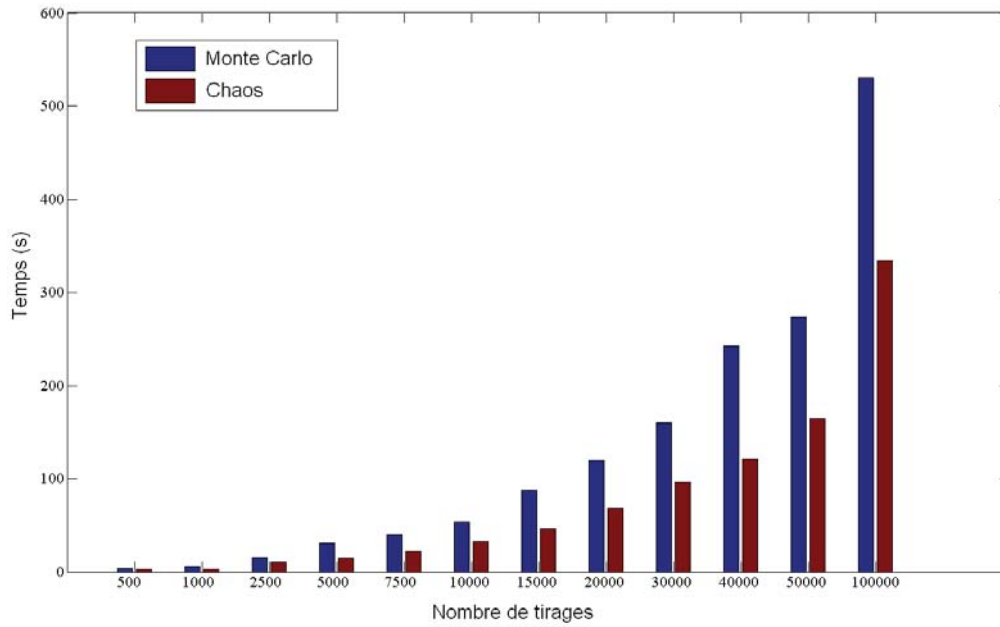


FIGURE 3.19 – Evolution des durées de simulations pour différents nombres de tirages

3D composé de beaucoup plus de ddl et donc, de possibilités d'évolution pour un mode donné.

Nous avons ensuite voulu comparer les durées de calculs entre les simulations de Monte Carlo et la méthode de calcul des modes propres aléatoires par le chaos pour différents nombre de tirages. Nous obtenons la Figure 3.19. On note évidemment un temps de résolution plus court pour la méthode du chaos qui ne nécessite que le calcul de l'expression 3.52 afin d'estimer les valeurs de déplacement pour chaque tirage, ce qui est l'un des principaux avantages de la méthode. On relève globalement un facteur moyen de 1.8 entre les temps de calculs des deux méthodes. Le système étant très petit suite à la réduction de Craig-Bampton, c'est ce qui explique que les simulations de Monte Carlo ne paraissent pas du tout coûteuses en temps de calcul. Cependant, sur un modèle de plus grande dimension même après la sous-structuration comme ce sera le cas lors de l'application industrielle, on pourra s'attendre à un gain de temps beaucoup plus conséquent.

Comme on peut s'en douter, il n'est pas commode de juger de la convergence de la méthode en s'attachant à dépouiller les surfaces de réponse pour chaque mode propre aléatoire. Pour ce faire, nous avons établi deux critères d'erreurs pour avoir un indicateur robuste quant à la convergence de la méthode vis-à-vis des pulsations propres aléatoires mais surtout, des vecteurs propres aléatoires. Le premier critère d'erreur a été mis en place pour vérifier que les pulsations propres ont été bien approchées. Il est défini par :

$$\varepsilon_{k,i}^{\omega} = \frac{|\omega_{k,i}^{mc} - \omega_{k,i}^{pc}|}{|\omega_{k,i}^{mc}|} \quad (3.63)$$

où  $\omega_{k,i}^{mc}$  et  $\omega_{k,i}^{pc}$  sont les pulsations propres aléatoires calculées respectivement par simula-

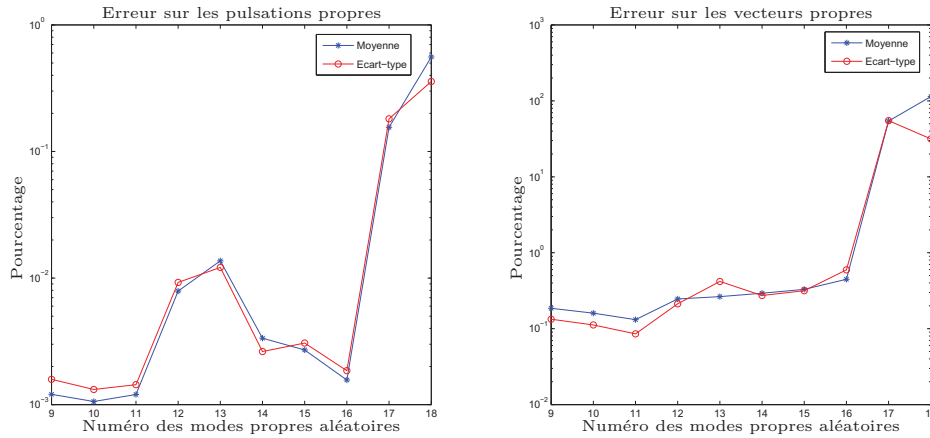


FIGURE 3.20 – Moyenne et écart-type des erreurs commises sur les pulsations propres aléatoires (à gauche) et sur les vecteurs propres aléatoires (à droite) aléatoires

tions de Monte Carlo et par projection sur la base des polynômes du chaos pour le  $k$ -ième mode propre aléatoire et correspondant au  $i$ -ème tirage. Il s’agit donc de calculer l’erreur relative entre deux pulsations propres aléatoires calculées à chaque tirage.

Le second critère relatif à l’erreur commise sur les vecteurs propres a été défini de manière analogue pour le  $k$ -ième mode et pour le  $i$ -ème tirage par :

$$\varepsilon_{k,i}^{\Phi} = \frac{\| \{\Phi\}_{k,i}^{mc} - \{\Phi\}_{k,i}^{pc} \|}{\| \{\Phi\}_{k,i}^{mc} \|} \quad (3.64)$$

Le principal avantage de ce second critère est qu’il permet d’avoir un estimateur global de convergence des vecteurs propres aléatoires. En effet, le fait de calculer l’erreur à partir de la norme des vecteurs permet de prendre en compte l’erreur sur chaque ddl au travers d’un indicateur unique. Nous obtenons alors pour chaque mode  $k$  des erreurs pour tous les tirages qui ont été faits ce qui nous permet d’en estimer une moyenne et un écart-type afin de juger de la convergence de l’approche. C’est l’objet de la Figure 3.20.

On commet globalement une erreur inférieure à 1% sur les pulsations propres aléatoires quel que soit le mode étudié ce qui est très satisfaisant. Par contre, au regard des vecteurs propres aléatoires, le calcul des 8 premiers modes propres donne une erreur également inférieure à 1% sauf pour les deux derniers modes où l’on commet une erreur de l’ordre de dizaines de %. Cela est dû au fait que ces deux modes (en l’occurrence les modes 17 et 18) sont très proches en fréquence avec un écart relatif de 0.5% , ce qui est très faible étant donné que les fréquences propres des modes étudiés sont très basses (de l’ordre de 50 Hz). Ces deux modes ont donc tendance à être confondus, et il est d’autant plus difficile de les approcher par la méthode du chaos. Ce cas de figure “extrême” ne devrait pas être rencontré dans le cas industriel où, même si l’on avait relevé une forte

proximité modale, les modes concernés se distinguent assez de leurs voisins d'un point de vue fréquentiel. En guise d'exemple, la Figure 3.21 montrent les surfaces de réponse des déplacements propres aléatoires des pales 1 et 3 obtenues pour le mode 17. On s'aperçoit que les surfaces de réponse obtenues par Monte Carlo ont une allure plus complexe que celles que l'on a pu montrer auparavant dans la Figure 3.18 par exemple et que le chaos a beaucoup de mal à les approcher. L'allure du Monte Carlo qui laisse apparaître une zone où l'évolution de la surface de réponse semble être linéaire à pente très forte montre une grande sensibilité à une faible variation de module d'Young ce qui explique la difficulté d'approximation par le chaos. Le même constat a pu être fait sur les autres pales et pour le mode 18 également. Cependant, ces différents constats montrent la pertinence du critère d'erreur que nous avons défini étant donné qu'il nous a permis de cibler les modes qui ont été bien représentés et ceux qui ne l'ont pas été.

### Résultats relatifs au calcul de la réponse forcée

Nous avons ensuite voulu étudier la prédiction de la réponse forcée du modèle à une excitation unitaire sur les pales par superposition modale des modes propres aléatoires qui ont été calculés. Nous avons choisi d'appliquer une excitation unitaire répartie sur six pales situées au centre du redresseur comme le montre la Figure 3.22. Le calcul a été effectué pour des régimes visant à exciter les modes du palier et pour 5000 tirages.

Nous avons comparé la moyenne et l'écart-type du déplacement du ddl de flexion de chaque pale (qui coïncide en position avec le nœud où est appliqué l'effort) entre simulations de Monte Carlo classique (cf. équation 3.53) et des évaluations de la réponse forcée calculée de manière analytique grâce au calcul des modes propres aléatoires par le chaos (cf. équation 3.52) pour les mêmes tirages. Nous obtenons les Figures 3.23 et 3.24.

Nous avons volontairement choisi de représenter avec la même couleur les courbes correspondant au déplacement des pales "symétriques" par rapport au centre du redresseur (la pale 1 avec la pale 10, la pale 2 avec la pale 9 etc...). Le premier constat global que l'on peut faire est qu'il y a une symétrie dans la réponse forcée obtenue étant donné que les pales "symétriques" ont des réponses très proches sur toute la plage de pulsations balayée. Ce constat est net sur les graphes de la moyenne (Figure 3.23) et de l'écart-type (Figure 3.24) de la réponse.

Le second constat est que lorsque l'on compare les résultats obtenus par les deux méthodes, on obtient une évolution globalement similaire sur toute la plage de pulsations et ce sur toutes les pales que ce soit en moyenne ou en écart-type. Plus précisément, en terme de niveaux de réponse, les ordres de grandeurs sont similaires même si l'on note que les déplacements obtenus par la méthode du chaos sont un peu plus importants. Cependant, la méthode de Monte Carlo étant la référence, on peut en déduire que la méthode du chaos est prédictive des niveaux vibratoires car on obtient exactement la même hiérarchie de la



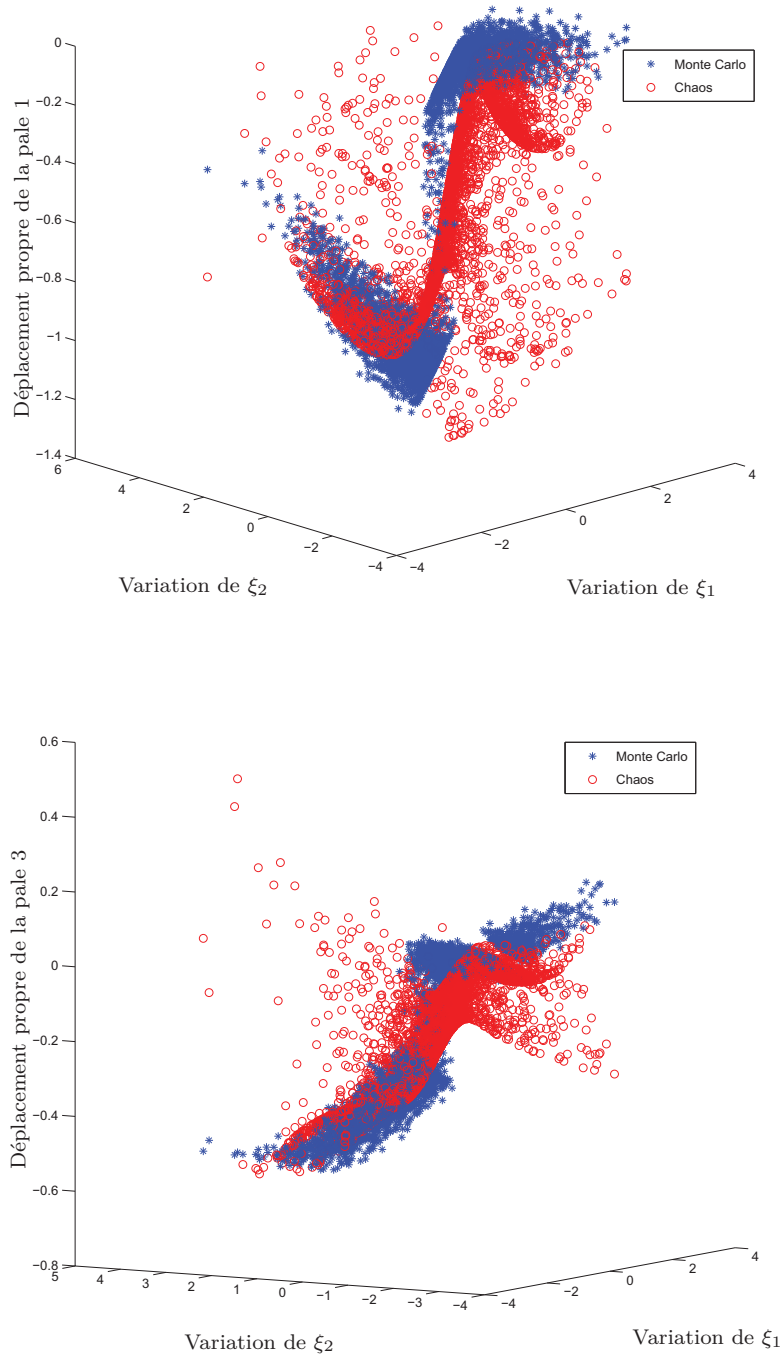


FIGURE 3.21 – Surfaces de réponse des vecteurs propres aléatoires relatifs au mode 17 et aux pales 1 et 3 - Comparaison entre Monte Carlo et chaos d'ordre 3

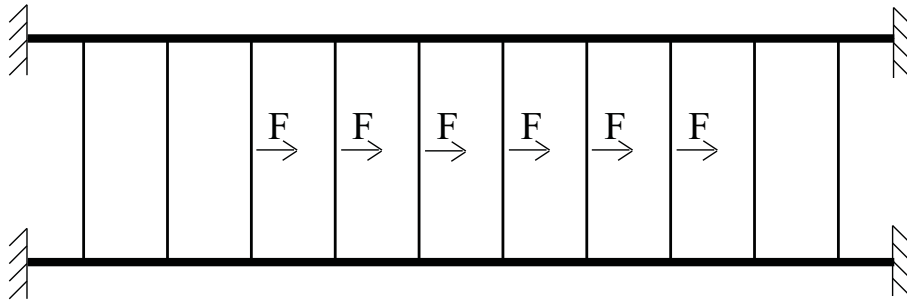


FIGURE 3.22 – Application des efforts unitaires sur le modèle

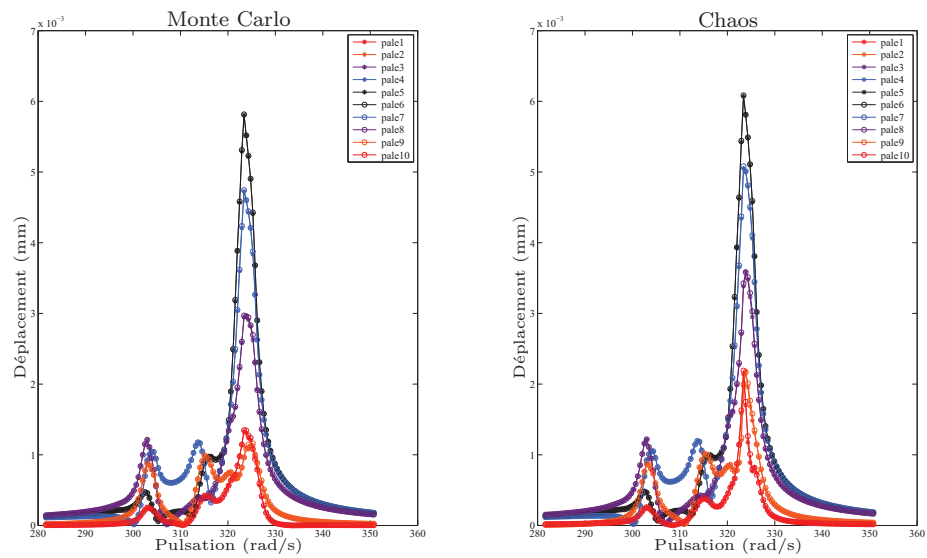


FIGURE 3.23 – Comparaison de la moyenne de la réponse forcée entre Monte Carlo (à gauche) et chaos (à droite)

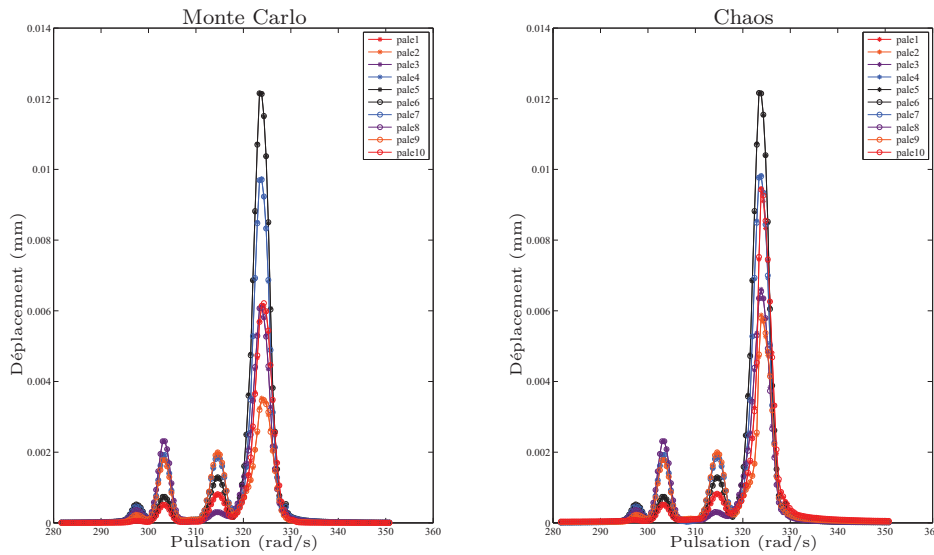


FIGURE 3.24 – Comparaison de l'écart-type de la réponse forcée entre Monte Carlo (à gauche) et chaos (à droite)

réponse dynamique des pales en terme de moyenne et d'écart-type. L'intérêt de ce constat est qu'il conditionnera très fortement la stratégie de placement de jauges qui intéresse particulièrement les bureaux d'études. Dans le cas particulier qui vient d'être traité par exemple, la réponse maximale en moyenne et en écart-type est relevée sur les pales 5 et 6 suivies des pales 4 et 7. Il semblerait donc statistiquement plus judicieux de disposer des jauges sur les pales 5 et 6 s'il s'avérait que l'on ait deux jauges d'extensométrie à notre disposition.

On peut ensuite noter que les pales 1, 2, 9, et 10 sont celles où on a le plus d'écart en moyenne et surtout en écart-type entre les deux méthodes. Cela s'explique par le fait que les deux derniers modes propres aléatoires qui ont été calculés n'ont pas convergé et font intervenir principalement ces quatre pales là .

Enfin, en terme de durée de calculs, on note un facteur 7 en faveur de la méthode du chaos qui s'appuie sur une simulation de Monte Carlo de l'équation 3.52 qui est très rapide car il s'agit d'un calcul simple fonction des modes propres aléatoires qui ont déjà été calculés au préalable. Ce facteur 7 augmente alors fortement selon le nombre de calculs de réponse forcée à faire à supposer que l'on veuille changer d'effort par exemple. C'est un des gros avantages de la méthode. Il est aussi à noter que le temps de détermination des modes propres aléatoires est relativement faible d'autant plus que cette étape n'est à effectuer qu'une seule fois. Sur un serveur à 8 cœurs et 32 Go de RAM, le calcul d'un

mode aléatoire du modèle poutres de 10 pales est de l'ordre de la minute.

## 3.5 Conclusions

Ce troisième chapitre a été consacré à la mise en place d'une méthodologie stochastique en vue d'atteindre notre objectif de pouvoir prédire à moindres coûts de calculs les niveaux vibratoires les plus critiques que l'on puisse relever sur un secteur de redresseur désaccordé. Après un état de l'art succinct des principales méthodes stochastiques qui sont principalement employées à ce jour, nous avons présenté une méthode stochastique qui vise à modéliser et à prédire les effets du désaccordage sur la réponse d'un secteur de redresseur.

Notre stratégie a été d'employer la Méthode des Eléments Finis Stochastiques Spectraux proposée par Ghanem et Spanos [37] et qui consiste globalement à décomposer les paramètres aléatoires de notre système mécanique sur la base du chaos polynomial. Dans le cas de variables aléatoires gaussiennes comme nous l'avons considéré dans tous nos développements, le chaos polynomial est composé des polynômes d'Hermite multidimensionnels fonctions des variables aléatoires considérées et dont la dimension est le nombre de variables aléatoires. Dans toutes les études qui ont été effectuées, seul le module d'Young a été considéré comme aléatoire pour modéliser le désaccordage.

La première méthode qui a été mise en place consistait donc à résoudre un problème de type  $(1 + i\eta)KU = F$  avec  $K$  et  $U$  aléatoires et décomposés sur la base du chaos polynomial. Cette méthode, dont le principal avantage était de résoudre une seule fois un système de taille plus grande que le système déterministe plutôt que de résoudre plusieurs fois le système déterministe comme c'est le cas pour les simulations de Monte Carlo, a vu son efficacité se limiter au cas d'un amortissement relativement élevé (de l'ordre de 1%). Pour des amortissements plus faibles (0.2% par exemple), l'effet de convergence est bien visible mais la convergence à proprement parler ne peut être atteinte que pour un ordre de chaos très élevé ce qui retire à la méthode tout son intérêt.

Etant donné que la pièce étudiée est très faiblement amortie (de l'ordre de 0.1%), il fallu mettre en place une autre méthodologie qui nous permettrait de nous affranchir de ce problème lié à l'amortissement. Cette méthodologie, qui est une variante de la MEFSS de Ghanem et Spanos, consiste à déterminer les modes propres aléatoires par une résolution d'un problème aux valeurs propres aléatoire, en considérant que les modes propres aléatoires peuvent être décomposés sur la base du chaos polynomial au travers d'une double projection :

- une première projection sur une base modale constituée d'un certain nombre de modes propres déterministes judicieusement choisis ;

- une seconde projection sur la base des polynômes orthogonaux du chaos.

L'avantage de la méthode est qu'une fois que les modes propres aléatoires sont déterminés et considérés comme convergés, la réponse forcée de facto aléatoire peut être déterminée de façon analytique en utilisant la formule de calcul de la fonction de transfert. Dans ce cas, il n'y a donc plus de problème de convergence qui serait dû à un amortissement trop faible. Le développement de cette méthode sur un modèle de treillis de poutres de type Euler-Bernoulli dont la structure s'apparente à celle d'un secteur de redresseur de 2 pales a montré la pertinence de la méthode vis-à-vis de l'objectif recherché tout en montrant ses limites. Le calcul des modes propres aléatoires a montré que dans la limite d'un désaccordage raisonnable et d'un couplage inter-aubes "réaliste", les modes peuvent effectivement être approchés par des polynômes. En effet, le tracé de leurs surfaces de réponse par la méthode du chaos mise en place s'est avéré être très proche de celui obtenu par la méthode de Monte Carlo qui servait de référence. La conséquence a donc été la bonne prédiction de la réponse forcée aléatoire par la méthode du chaos avec des gains en temps de calculs considérables.

Pour se rapprocher du modèle 3D à étudier, nous avons étendu le modèle poutres à 10 pales et mis en place une stratégie de réduction de modèle qui nous permettrait de le désaccorder. Les résultats obtenus sont satisfaisants dans la mesure où ils montrent que le chaos permet de suivre l'évolution des modes propres aléatoires avec le désaccordage de façon fiable. Le calcul de réponse forcée qui a suivi a montré que l'on arrive à prédire de façon robuste et avec un temps de calcul acceptable la hiérarchie des pales qui répondent le plus à l'excitation appliquée. La principale limite de la méthode est que, dans le cas de modes multiples, il est difficile d'en obtenir une approche polynomiale du fait de surfaces de réponse beaucoup plus imprévisibles. Cependant, ce cas de figure est conditionné par une raideur de couplage peu réaliste mais que nous avons observé dans le cas de notre modèle académique censé représenter un modèle de redresseur à dix pales. Ce constat n'est donc pas un frein à une application industrielle de la méthode car le modèle numérique à étudier ne possède pas de modes multiples.

Ainsi, l'objet du chapitre suivant est d'appliquer la méthodologie stochastique à un cas industriel de secteur de redresseur et de proposer une stratégie de positionnement optimal de jauges en s'affranchissant des effets du désaccordage.

# Chapitre 4

## Application de la méthodologie à un cas industriel de secteur de redresseur

*Dans ce chapitre, il est question de valider sur un modèle industriel la méthode stochastique développée sur des modèles simplifiés. Comme précédemment, une approche par sous-structuration a été déployée afin de réduire les temps de calculs. Une méthodologie complète de prédiction est appliquée à un modèle industriel de secteur de redresseur. Une stratégie de prédiction des niveaux vibratoires et de positionnement optimal de jauges est ensuite proposée.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>4.2</b>	<b>Sous-structuration du modèle 3D</b>	<b>90</b>
4.2.1	Les interfaces	92
4.2.2	Réduction du nombre de ddls d'interfaces	92
4.2.3	Etudes de convergence du superélément	93
<b>4.3</b>	<b>Application industrielle de la méthode stochastique</b>	<b>96</b>
4.3.1	Calcul des modes propres aléatoires	99
4.3.2	Calcul de la réponse forcée aléatoire	107
4.3.3	Stratégie de positionnement de jauges	109
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>112</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous nous intéressons à la prédiction du comportement dynamique d'un secteur monobloc de redresseur composé de 10 pales. Le principal objectif est d'appliquer la méthodologie de prédiction développée sur un modèle poutres simplifié qui a été présentée dans le chapitre précédent à une configuration 3D industrielle. Le modèle numérique utilisé est le même que celui employé lors des simulations qui ont servi à caractériser la phénoménologie des redresseurs sectorisés dans le chapitre 2.

La première partie de ce chapitre sera consacrée au processus de sous-structuration du modèle qui a permis, d'une part, de réduire considérablement la taille du modèle, et d'autre part, de faire en sorte qu'il s'adapte facilement à la méthodologie stochastique proposée. Les différentes hypothèses faites seront explicitées.

La seconde partie de ce chapitre traitera des différentes études et résultats obtenus suite à l'application de la méthode stochastique sur le modèle 3D sous-structuré. Nous présenterons donc les avantages et les limites de la méthode et nous proposerons une stratégie de placement optimal de jauges visant à faciliter l'instrumentation des secteurs de redresseurs pour les essais futurs.

## 4.2 Sous-structuration du modèle 3D

La sous-structuration du modèle 3D a été effectuée de manière analogue à celle du modèle poutres 10 pales présentée dans le chapitre précédent. Le modèle de secteur unitaire considéré est celui représenté sur la Figure 4.1.

L'objectif est de créer un superélément de ce modèle par le logiciel Samcef, d'en extraire les matrices de masse, de raideur et de Craig-Bampton via un programme Matlab dédié à cette opération et de suivre la même procédure d'assemblage de superéléments et de calcul des modes propres aléatoires que sur le modèle simplifié. La première étape a donc été d'étudier la convergence du superélément associé à la sous-structure élémentaire présentée en Figure 4.1.

Le module de sous-structuration de Samcef utilise la méthode de Craig-Bampton par défaut. La logique de création du superélément est donc la même que celle présentée à la section 3.4.2. Comme nous l'avons souligné, la principale difficulté vient du choix des noeuds de frontière qui doivent être impérativement retenus pour que l'assemblage des superéléments se rapproche au maximum du modèle de référence. En effet, plus le nombre de noeuds retenus est grand, plus la taille du système reste importante. Il peut donc arriver des situations où la réduction est moins efficace à cause d'un nombre important de noeuds retenus.



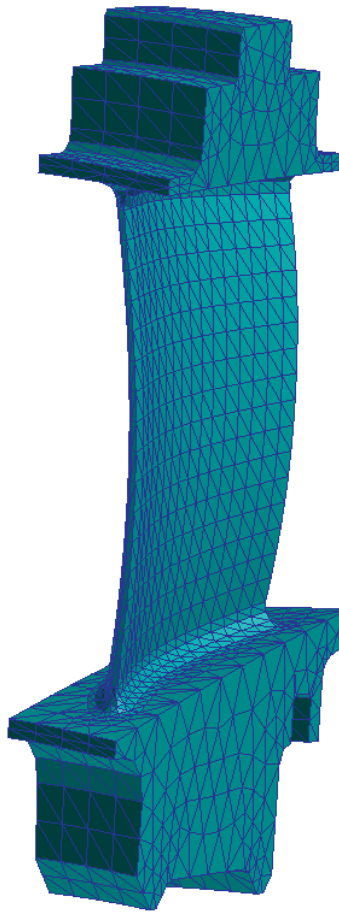


FIGURE 4.1 – Sous-structure élémentaire 3D

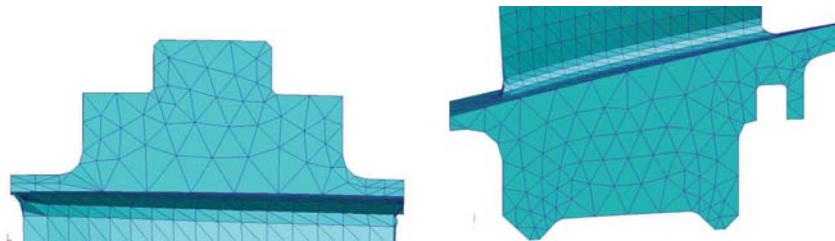


FIGURE 4.2 – Noeuds de frontière de la virole supérieure (à gauche) et de la virole inférieure (à droite)

### 4.2.1 Les interfaces

La Figure 4.2 montre les interfaces des viroles supérieure et inférieure par lesquelles les différents secteurs unitaires sont assemblés pour constituer le secteur de redresseur à 10 pales que nous voulons étudier. Il y a donc une interface gauche et une interface droite pour chaque virole.

Nous avons créé dans un premier temps un superélément en retenant la totalité des noeuds des interfaces puis effectué un calcul de modes propres en assemblant 10 superéléments identiques via Samcef. L'assemblage s'effectue par une méthode de "collage" des noeuds de frontières des différents superéléments qui consiste à raccorder les ddls des noeuds en vis-à-vis. Le problème posé par cette technique d'assemblage est qu'il aurait fallu avoir un modèle numérique beaucoup plus fin (en degré 2 explicite par exemple) pour que le calcul soit le plus précis possible. Si le modèle était en degré 2 explicite, cela signifierait que des noeuds intermédiaires auraient été créés entre deux noeuds sommets d'un élément ce qui rendrait le maillage beaucoup plus fin. Seulement, toutes les simulations qui ont été faites jusque là étaient en degré 2 implicite, ce qui signifie que les noeuds intermédiaires sont créés pendant le calcul et ceux qui sont spatialement très proches sont raccordés afin d'obtenir un modèle monobloc. Cependant, dans le cas des superéléments, il nous est impossible de les assembler en degré 2 implicite étant donné que les noeuds intermédiaires n'ont pas été créés physiquement et par conséquent, n'ont pas pu être retenus lors de la création de ces superéléments. Cela a pour effet d'assouplir globalement la structure.

Il nous faut donc construire un modèle de référence dont les conditions d'études se rapprochent au mieux de celles imposées par la technique d'assemblage des sous-structures. Le modèle de référence a donc été créé en assemblant les secteurs unitaires uniquement sur les noeuds définis par le superélément en degré 2 implicite.

### 4.2.2 Réduction du nombre de ddls d'interfaces

Pour que la réduction soit la plus effective possible, il peut être intéressant de réduire le nombre de ddls d'interfaces. Des méthodes de synthèse modale dédiées sont souvent utilisées dans ce but, parmi lesquelles on peut citer la méthode de double synthèse modale [49, 50] et la méthode d'approximation de l'opérateur de Steklov [13, 12, 14]. Cependant, nous avons voulu employer une méthode qui s'adapte facilement à l'environnement SNECMA et qui ne nécessite pas de développement supplémentaire. C'est la raison pour laquelle la piste envisagée a été la création d'éléments "MEAN" via le logiciel Samcef.

L'élément MEAN est utilisé dans le but de déterminer le déplacement et la rotation moyens d'un groupe de noeuds. On peut le définir comme étant l'opposé de l'élément rigide. En effet, dans l'élément rigide, à un noeud maître est associé un groupe de noeuds esclaves qui sont au final rigidement liés au noeud maître. Par contre, dans le cas de l'élément MEAN, à un noeud esclave est associé un groupe de noeuds maîtres. Chaque

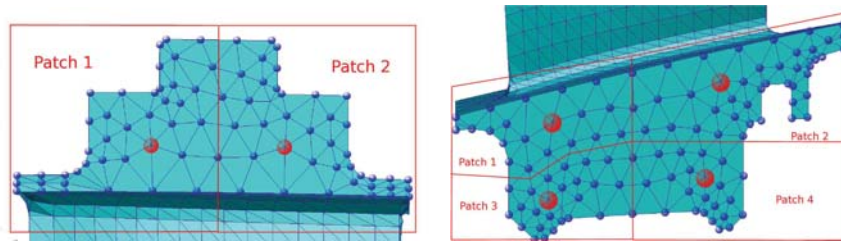


FIGURE 4.3 – Division des interfaces en patches : éléments MEAN de la virole supérieure (à gauche) et éléments MEAN de la virole inférieure (à droite)

noeud esclave donne la moyenne du déplacement du groupe de noeuds maîtres qui lui est associé. De manière générale, les noeuds esclaves disposent de 6 ddls quel que soit le nombre de noeuds maîtres qui leur sont associés. Le but de la création d'éléments MEAN au niveau de nos interfaces est de condenser les ddls des noeuds en un nombre limité de noeuds esclaves afin de réduire le nombre de noeuds à retenir tout en conservant la dynamique des interfaces. Cela devrait nous permettre de retranscrire fidèlement le comportement du secteur de redresseur lors de l'assemblage des différents superéléments.

Nous avons subdivisé les interfaces en patches (cf. Figure 4.3) dont un seul noeud par patch sera considéré comme étant le noeud esclave des autres noeuds du patch. Un élément MEAN sera créé au niveau de ce noeud esclave et sera caractérisé par 6 ddls. Evidemment, moins l'on considérera d'éléments MEAN, plus la réduction sera effective.

La Figure 4.3 montre les patches que nous avons arbitrairement choisis pour créer les éléments MEAN aux interfaces. Les noeuds en rouge sont les noeuds esclaves et les noeuds en bleu sont les noeuds maîtres. Nous avons choisi de créer deux éléments MEAN sur la virole supérieure car étant donné qu'elle est encastrée sur le carter du compresseur, le déplacement des noeuds d'interface est très faible ce qui fait qu'il n'est pas nécessaire de retranscrire finement la dynamique aux interfaces de la virole supérieure. Cependant, pour la virole inférieure, nous avons préféré créer quatre éléments MEAN pour être plus fins dans la transmission des déplacements d'un secteur unitaire à l'autre lors de l'assemblage des superéléments. On aboutit alors à la création 6 éléments MEAN pour une interface (gauche ou droite). En considérant les deux interfaces de jonction, on obtient 12 éléments MEAN à 6 ddls chacun soient 72 ddls à retenir contre 1167 ddls à retenir si l'on considère tous les ddls d'interface (389 noeuds d'interface au total pour le modèle considéré, 3 ddls par noeuds étant donné qu'il s'agit d'éléments tétraédriques). Cela fait donc une réduction considérable en vue d'une exploitation optimale du modèle industriel.

### 4.2.3 Etudes de convergence du superélément

A présent, on s'attache à vérifier que le modèle de superélément que nous avons choisi est assez robuste pour représenter la dynamique d'un secteur de redresseur composé de dix pales. Le modèle de référence est celui qui a été décrit à la section 4.2.1. Nous avons

comparé les modes propres de différents modèles sous-structurés à ce modèle de référence.

### Comparaison entre modèle de référence et modèle 1

Le modèle 1 correspond à l'assemblage de 10 superéléments créés à partir de 200 modes à frontières fixes et en ayant retenus tous les ddls d'interfaces (nous n'avons pas eu recours à la création d'éléments MEAN pour ce premier modèle). Le but de retenir 200 modes à frontières fixes est d'être quasiment certain que l'on a assez de modes dans la base de réduction pour reconstituer la dynamique du secteur complet. Les écarts observés seront donc exclusivement dus aux erreurs commises lors de la création du superélément et non au fait que la base modale de réduction n'était pas assez riche. Ce modèle est comparé au modèle de référence défini précédemment.

La Figure 4.4 met en évidence cette comparaison avec, à gauche, l'évolution des fréquences propres et à droite, le critère de MAC entre les déformées propres des deux modèles. Les graphes ont été subdivisés en trois zones pour voir et analyser plus aisément ce qui se passe dans les zones d'intérêt (zones à forte densité modale par exemple). Au regard de l'évolution fréquentielle des modes propres, le comportement est bien représenté par le modèle sous-structuré avec une évolution globalement similaire à celle du modèle de référence et des écarts relativement faibles. Les écarts maximaux sont obtenus entre les deuxième et troisième paliers à forte densité modale mais cela reste dans l'ensemble acceptable. Du point de vue des déformées propres, le MAC affiche, de loin, une bonne corrélation entre les deux modèles via la diagonale qui montre globalement un appariement satisfaisant. Regardons cependant ce qui se passe zone par zone :

- La première zone située avant le premier palier à forte densité modale est composée de modes d'ensemble mettant à contribution la virole inférieure. La corrélation est quasi-parfaite, seule une interversion de modes fait son apparition.
- La deuxième zone est celle constituée des deux premiers paliers à forte densité modale qui nous intéresseront particulièrement lors des différentes études. On constate qu'au niveau du premier palier, les modes sont assez sensibles car on n'obtient pas une diagonale de MAC parfaite à cause du décalage de certains modes. Cela n'est pas forcément critique en soi car lors de l'utilisation de la MEFSS, tous les modes (dans cette zone à forte densité modale) sont retenus par défaut pour constituer la base modale déterministe de projection. Au niveau du deuxième palier, la corrélation est quasi-parfaite ce qui est de bon augure pour la suite.
- La troisième zone quant à elle est caractérisée par beaucoup de modes décalés entre les deux modèles mais laisse transparaître un appariement globalement acceptable. Les modes constituant cette zone ne nous intéresseront pas lors de la validation de la MEFSS sur le modèle (ils ne seront donc pas considérés ultérieurement comme aléatoires), par contre, ils seront susceptibles de faire partie de la base modale déterministe de projection des modes propres aléatoires.

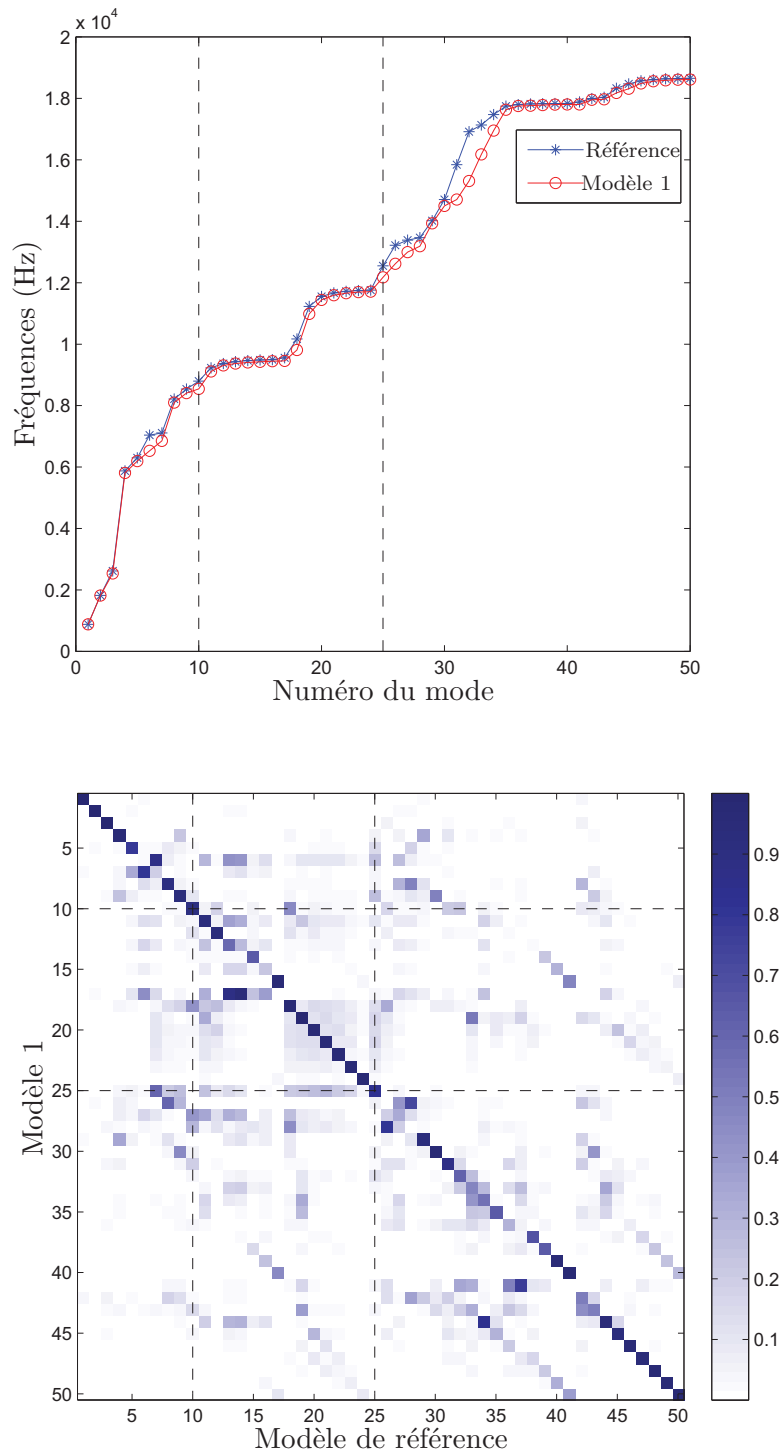


FIGURE 4.4 – Comparaison des modes propres entre le modèle de référence et le modèle 1

Ce premier modèle permet donc de valider la méthode de sous-structuration utilisée dans le cas présent.

### Comparaison entre modèle 1 et modèle 2

Il est maintenant question de comparer ce modèle 1 à un modèle qui utilise la méthode des éléments MEAN présentée plus haut.

Le modèle 2 correspond à l'assemblage de 10 superéléments créés à partir de 200 modes à frontières fixes et en considérant comme ddls d'interfaces les éléments MEAN qui sont présentés sur la Figure 4.3. Ce modèle est comparé au modèle 1 présenté précédemment afin de juger de la pertinence d'utiliser des éléments MEAN pour réduire la dimension des interfaces.

On n'observe pas d'écart en fréquences entre les deux modèles au regard de la Figure 4.5. Il en est de même pour le MAC qui est globalement très satisfaisant si l'on fait abstraction des quelques interversions de modes au niveau du premier palier à forte densité modale. Cela nous permet donc de valider la méthode des éléments MEAN qui nous permet de réduire davantage la taille du système.

### Comparaison entre modèle 2 et modèle 3

Le modèle 3 quant à lui est identique au modèle 2 à la différence que seuls 5 modes à frontières fixes ont été retenus afin d'obtenir un modèle acceptable de taille plus faible. Les modèles 2 et 3 sont comparés pour montrer qu'un nombre limité de modes à frontières fixes est suffisant pour reconstituer la dynamique du secteur au moins jusqu'au fréquences d'intérêt.

La corrélation tant en fréquences qu'en déformées propres montre que 5 modes à frontières fixes suffisent amplement à reproduire la dynamique du secteur étudié pour la plage de fréquences qui nous intéresse. Nous avons donc retenu le superélément unitaire qui a permis de mettre en place le modèle 3 pour toutes les simulations qui ont été faites par la suite. Nous avons pu extraire les matrices de masse, de raideur et de Craig-Bampton correspondantes via une routine Matlab. L'assemblage des superéléments sous Matlab donne des résultats identiques en tous points à ceux obtenus via Samcef.

## 4.3 Application industrielle de la méthode stochastique

Le modèle 3D réduit retenu a été présenté ainsi que l'origine des efforts aérodynamiques réalistes qui lui seront appliqués. Les matrices réduites de masse et de raideur,  $[M_{CB}]$  et  $[K_{CB}]$ , ont été extraites ainsi que la matrice de Craig-Bampton  $[T_{CB}]$  qui est capitale car elle nous permettra de revenir sur les ddls physiques à étudier.

Nous avons donc considéré deux variables aléatoires  $\xi_1$  et  $\xi_2$  pour piloter les modules

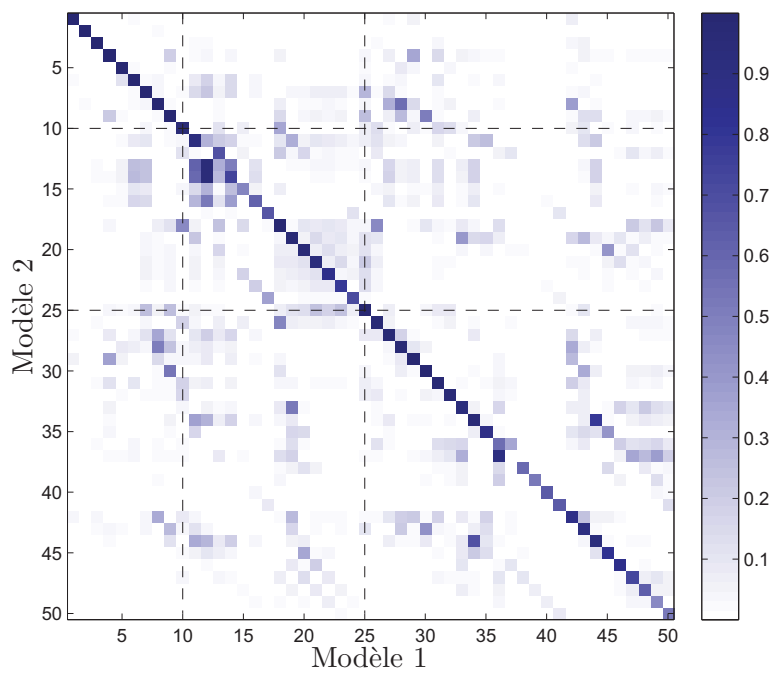
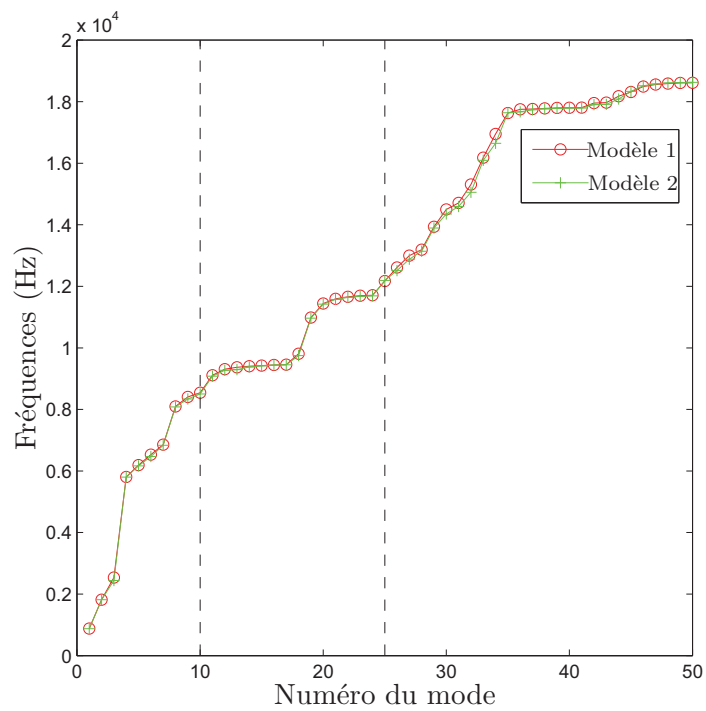


FIGURE 4.5 – Comparaison des modes propres entre le modèle 1 et le modèle 2

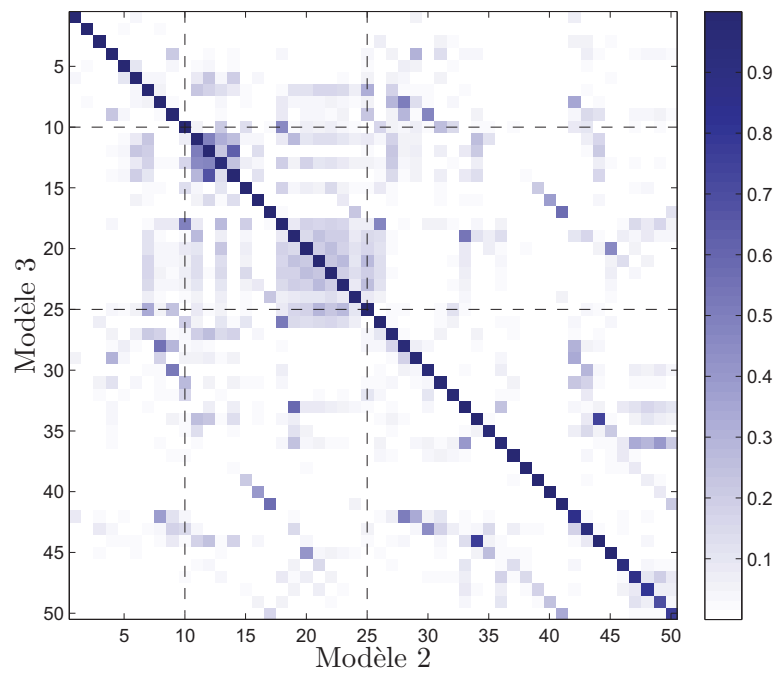
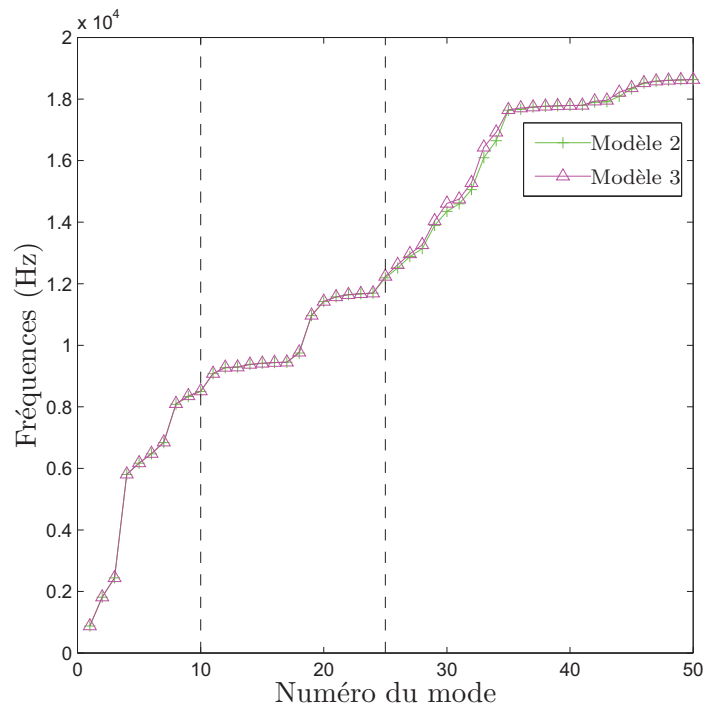


FIGURE 4.6 – Comparaison des modes propres entre le modèle 2 et le modèle 3



d'Young des pales A et B. La distribution de ces deux variables aux 10 pales du secteur de façon alternée nous permet de décrire un motif de type ABAB à l'image de ce qui a été fait sur le modèle académique 3.4.3. Nous avons calculé les modes propres aléatoires de ce modèle (pour différentes configurations d'étude) par la méthode du chaos et par simulations de Monte Carlo qui serviront une fois de plus de référence. Après cette première étape, des calculs de réponse forcée avec des excitations aérodynamiques tournantes réalistes ont été réalisées et ont permis de proposer une stratégie de positionnement optimal de jauges.

### 4.3.1 Calcul des modes propres aléatoires

Nous savons que la sensibilité au désaccordage du comportement modal d'un secteur de redresseur est due en grande partie à la raideur de couplage par les viroles et au taux de désaccordage ce qui se traduit par une sensibilité forte à l'écart-type d'entrée choisi pour les variables aléatoires. De ce fait, nous avons jugé intéressant d'étudier la convergence des modes propres aléatoires par le chaos en fonction de l'écart-type d'entrée choisi pour  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . Nous avons fixé l'écart-type  $\delta_B$  de  $\xi_2$  (pale B) à 1% et donné différentes valeurs à l'écart-type  $\delta_A$  de  $\xi_1$  (pale A) pour ensuite calculer les modes propres aléatoires. Les modes propres aléatoires à calculer ont été projetés sur une base modale composée des 35 premiers modes propres déterministes du modèle.

Afin de faciliter la comparaison entre les différents résultats, les critères d'erreurs des équations 3.63 et 3.64 respectivement sur les pulsations propres aléatoires et sur les vecteurs propres aléatoires, qui ont été mis en place et utilisés sur le modèle simplifié ont été retenus. Pour rappel, l'avantage du critère relatif à la convergence des vecteur propres aléatoires par le chaos est qu'il tient compte de l'erreur commise sur tous les ddls au travers d'un indicateur unique. Nous avons fait 5000 tirages et nous pouvons ainsi déterminer la moyenne et l'écart-type de l'erreur commise sur les pulsations propres aléatoires et sur les vecteurs propres aléatoires de manière analogue à ce qui a été fait sur le modèle poutres.

### Influence de l'écart-type d'entrée

Les Figures 4.7 et 4.8 montrent la moyenne et l'écart-type de l'erreur commise entre les simulations de Monte Carlo et l'approche utilisée respectivement sur les pulsations propres aléatoires et sur les vecteurs propres aléatoires pour les 17 modes propres aléatoires calculés (modes 10 à 26). Au regard des pulsations propres aléatoires, l'erreur commise est très faible car moyenne et écart-type tournent autour de  $10^{-3}\%$ . Cela signifie qu'il n'y a quasiment pas d'écarts entre les valeurs de pulsations propres prédites par Monte Carlo et par le chaos. Cela conforte les tous premiers constats selon lesquels les pulsations propres des secteurs de redresseurs ne sont pas particulièrement sensible au désaccordage étant donné que l'on retrouve globalement le même comportement que pour le modèle accordé.

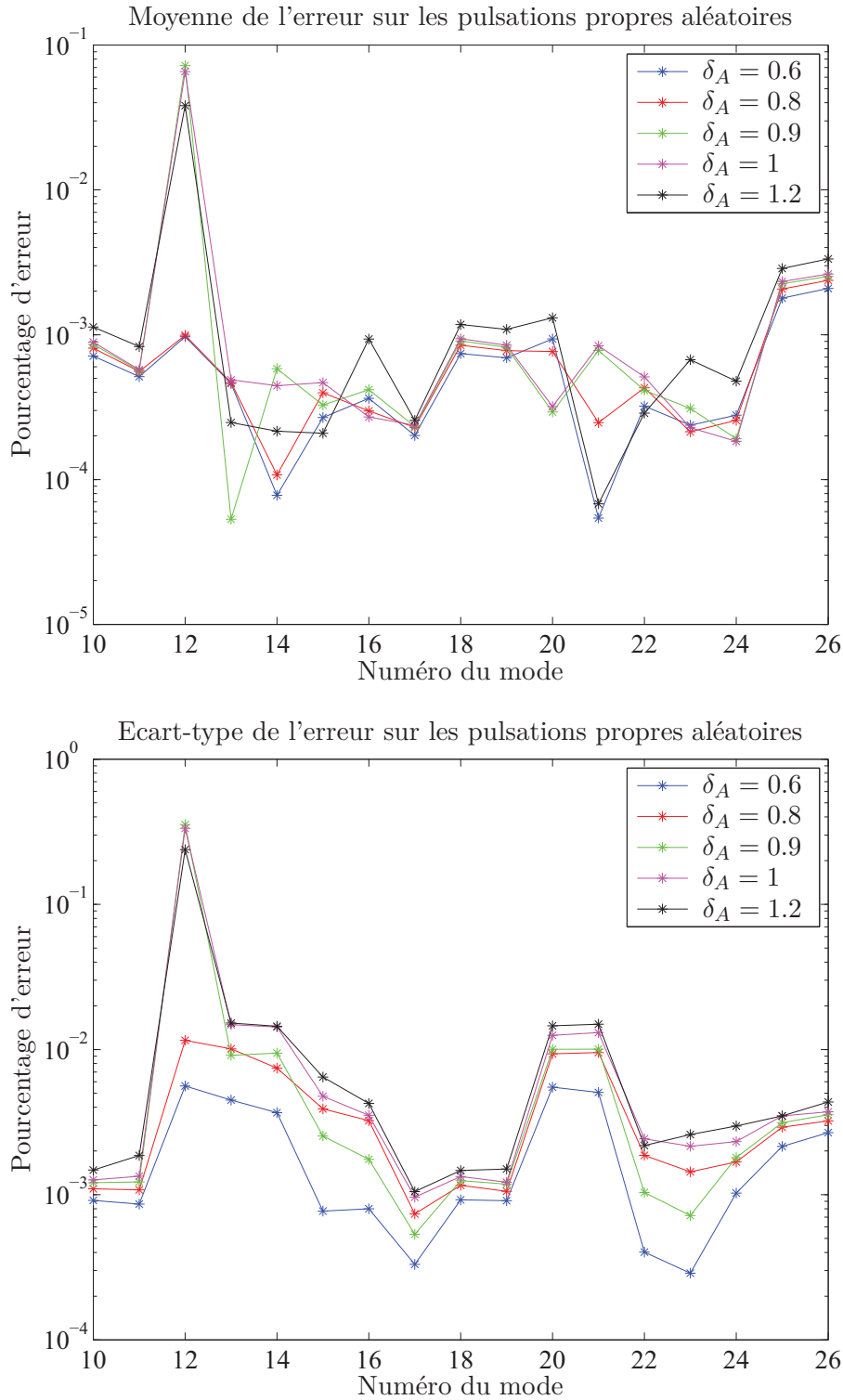


FIGURE 4.7 – Moyenne et écart-type de l'erreur commise sur les pulsations propres aléatoires pour différentes valeurs de  $\delta_A$

Il n'est donc pas difficile d'approcher les pulsations propres aléatoires par des polynômes car l'allure de la surface de réponse correspondante est assez commune et varie peu avec le désaccordage. Cependant, on remarque que l'erreur en pulsation sur le mode 12 est beaucoup plus élevée pour les 3 valeurs de  $\delta_A$  les plus élevées.

Regardons à présent les erreurs sur les vecteurs propres aléatoires. On relève une erreur moyenne globalement inférieure à 2% (sauf pour  $\delta_A = 1.2\%$ ) ce qui est satisfaisant dans l'ensemble. Cependant, on remarque que pour  $\delta_A \geq 0.9\%$ , le mode 12 n'est plus du tout convergé étant donné que l'on relève une moyenne et un écart-type d'erreur allant jusqu'à 14%. Il est également intéressant de noter que même si l'erreur commise sur le mode 12 tourne autour de 8% pour  $\delta_A = 1.2\%$ , elle est plus petite que pour  $\delta_A = 0.9$  ou 1%. Ceci permet de mettre en évidence le fait que ce n'est pas parce que le désaccordage est plus faible que l'on pourra mieux suivre un mode propre aléatoire donné. En effet, en passant de 0.8 à 0.9% pour la valeur de  $\delta_A$ , il devient difficile d'approcher le mode propre aléatoire 12 par les polynômes du chaos, peut-être dû au fait que la base modale de projection n'est pas assez riche pour permettre d'approcher des déformées modales induites par certains types de désaccordage. Ce graphe nous montre également que les modes situés hors des paliers à forte densité modale sont moins sensibles au désaccordage. Il s'agit entre autres des modes extrêmes (10 et 26) ainsi que les modes situés entre les deux premiers paliers (18, 19 et 20) qui affichent une erreur qui est faible (<1%) et qui varie très peu avec  $\delta_A$ .

### **Influence du nombre de modes composant la base modale déterministe de projection**

Dans ce qui suit, nous avons retenu  $\delta = 0.8\%$  pour avoir un modèle qui n'est certes pas parfait aux vues des erreurs commises, mais que nous supposons assez prédictif pour servir de base au calcul de la réponse forcée. Nous avons voulu étudier l'influence du nombre de modes qui composent la base modale déterministe de projection. En effet, on serait intuitivement tentés de projeter les modes aléatoires à calculer sur les modes déterministes "équivalents" étant donné qu'il s'agit, en principe, du même type de mode (on peut effectivement espérer qu'un mode de torsion de pale restera un mode de torsion de pale malgré le désaccordage). Cependant, les modes d'ensemble peuvent apporter des informations supplémentaires pour faciliter la convergence des modes aléatoires. Le but de la présente étude est donc de montrer l'importance que peuvent avoir certains types de modes lors du calcul des modes propres aléatoires. Pour ce faire nous avons calculé les mêmes 17 modes propres aléatoires que précédemment mais en les projetant sur 4 différentes bases modales :

1. la première base modale (BM1) est celle constituée des 17 modes propres déterministes "équivalents" aux modes aléatoires à déterminer ;
2. la deuxième base modale (BM2) part de la précédente à laquelle on ajoute de part

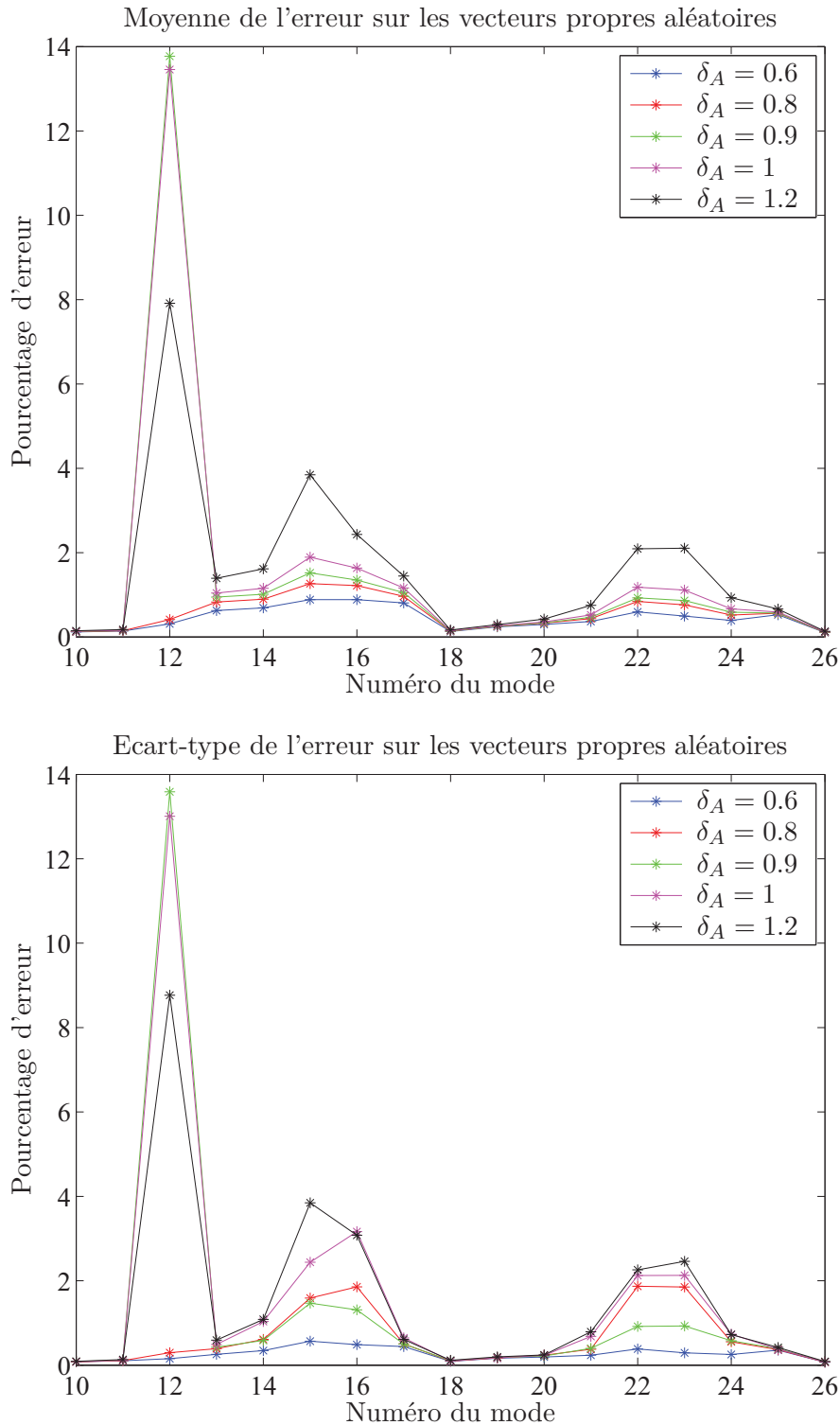


FIGURE 4.8 – Moyenne et écart-type de l'erreur commise sur les vecteurs propres aléatoires pour différentes valeurs de  $\delta_A$

- et d'autres de ses extrémités 4 modes propres consécutifs, ce qui en fait une base composée de 25 modes propres ;
3. la troisième base modale (BM3) part toujours de la première base modale à laquelle on ajoute tous les modes de plus basses fréquences qui précèdent son premier mode. Cette nouvelle base est composée donc de 26 modes propres déterministes ;
  4. la quatrième et dernière base modale (BM4) n'est autre que celle qui a été utilisée dans les précédentes simulations et qui est composée des 35 premiers modes propres déterministes.

Etant donné que les écarts relatifs observés sur les pulsations propres aléatoires étaient faibles globalement, nous avons choisi de ne montrer que les résultats observés sur les vecteurs propres aléatoires. Une fois de plus, le critère d'erreur 3.64 mis en place pour l'étude de convergence des vecteurs propres aléatoires a été utilisé et donne lieu aux résultats de la Figure 4.9.

La Figure 4.9 montre la moyenne et l'écart-type de l'erreur commise entre Monte Carlo et chaos pour le calcul des modes propres aléatoires projetés sur des bases modales globalement différentes. D'abord, on note que la BM1 qui n'est constituée que des modes déterministes correspondants aux modes aléatoires calculés ne suffit clairement pas au calcul des modes en question. En effet, sur le calcul des 9 premiers modes propres aléatoires (modes 10 à 18), l'erreur ne cesse de croître et on relève une moyenne d'erreur maximale de l'ordre de 4.5%. Et pourtant, dès que l'on rajoute des modes dans la BM1 pour obtenir les bases modales BM2 et BM3 que l'on a défini plus haut, on s'aperçoit que l'on réduit considérablement l'erreur commise sur ces modes en passant cette erreur de 4.5% à une erreur inférieure à 2%. L'erreur minimale pour ces modes est obtenue pour la BM4 qui est constituée des 35 premiers modes propres aléatoires et qui, par conséquent, englobe les trois autres bases modales déterministes.

Ensuite, si l'on s'intéresse aux 8 modes propres aléatoires suivants (modes 19 à 26), on remarque que les modes de plus basse fréquence qui composent la BM3 n'ont pas d'effet sur le calcul de modes aléatoires étant donné que l'on commet la même erreur que lorsque l'on les projette sur la BM1. Cependant, les modes plus haute fréquence qui composent la BM2 et la BM4 semblent permettre d'améliorer la représentation de ces modes étant donné que l'erreur diminue de façon non négligeable. Nous pouvons donc déduire de cette étude que le choix de la base modale de projection est déterminant pour avoir les meilleurs résultats possibles. Cette étude nous montre qu'un choix judicieux de base modale déterministe peut induire des gains en temps de calcul car comme on a pu l'observer, les 9 premiers modes déterministes n'ont pas d'influence sur le calcul des modes propres aléatoires 18 à 26.

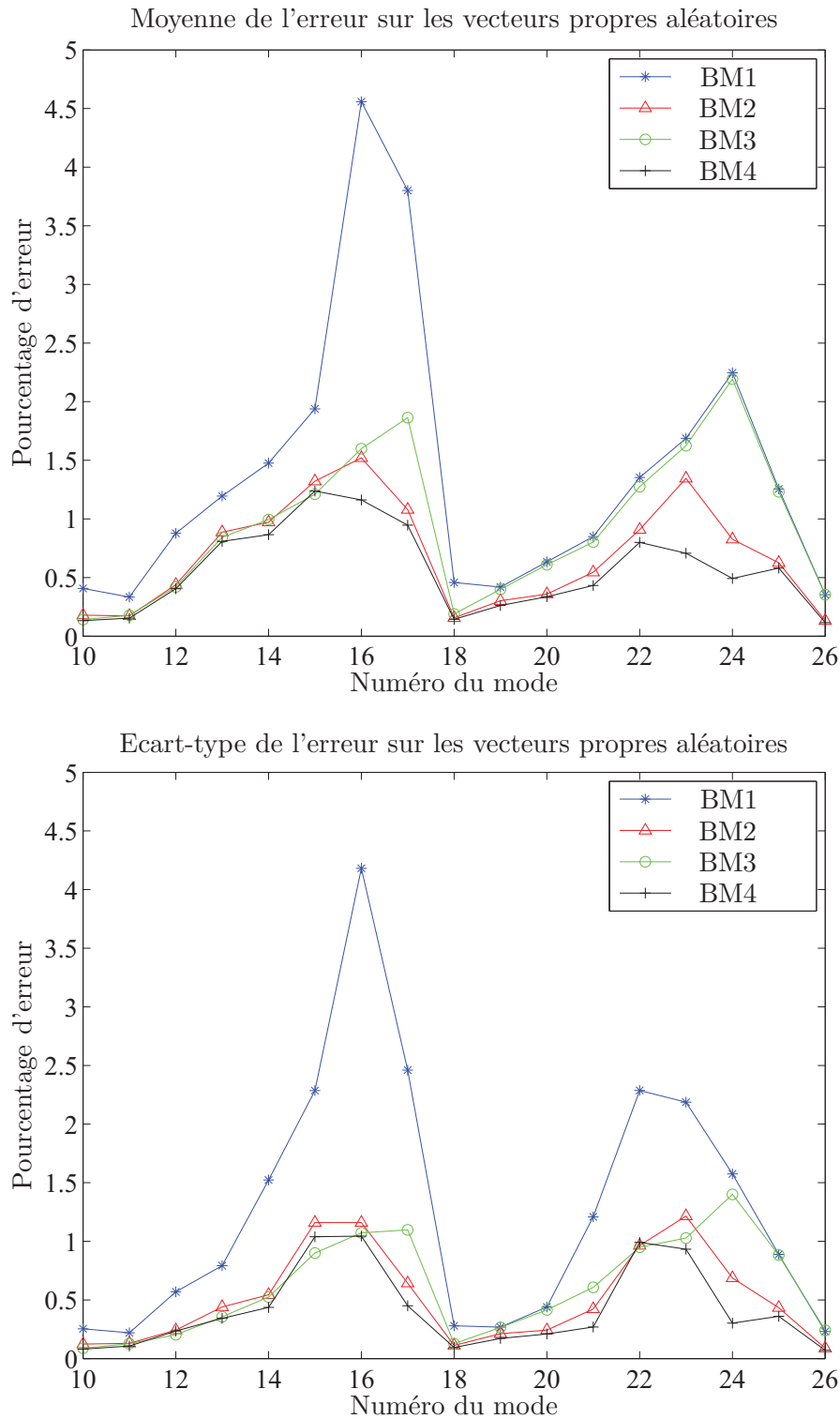


FIGURE 4.9 – Moyenne et écart-type de l'erreur commise sur les vecteurs propres aléatoires pour différents nombres de modes retenus pour la base modale déterministe de projection

Dans tout ce qui suit, nous avons utilisé les résultats obtenus par projection sur la BM4 afin d'avoir les résultats les plus fiables possibles.

Sur les Figures 4.10 et 4.11, nous montrons les surfaces de réponses de quelques modes aléatoires pour lesquels le pourcentage d'erreur le plus élevé a été relevé (cf. figure 4.9). Ces erreurs sont de l'ordre de 2%. Nous avons arbitrairement choisi de regarder l'évolution du déplacement propre de la pale 1. Du point de vue des pulsations propres, la forme des surfaces de réponses est simple et fait qu'il n'est pas difficile pour le chaos de les approcher. Ce constat est en accord avec les très faibles erreurs que nous avons relevées vis-à-vis du calcul des pulsations propres aléatoires par Monte Carlo et par le chaos. Au regard du vecteur propre aléatoire relatif à la pale 1, on voit que la forme de la surface de réponse peut radicalement changer d'un mode à l'autre, ce qui est logique. Les résultats sont globalement très satisfaisants.

Pour le mode 6, l'allure de la surface de réponses nous fait vraiment penser à des polynômes d'Hermite et c'est donc à juste titre que la méthode du chaos parvient à très bien retranscrire cette surface de réponses. On remarquera que c'est pour les tirages extrêmes  $\xi_i$  qu'il y a le plus d'écart mais leur occurrence est très faible dans le cas de variables aléatoires gaussiennes.

Pour le mode 7, on obtient une surface de réponses dont l'allure est scindée en deux parties continues. Cela signifie qu'il y a une ligne seuil de valeurs de  $\xi_1$  et  $\xi_2$  à partir de laquelle le déplacement propre de la pale 1 change subitement. La méthode du chaos arrive à être prédictive malgré tout grâce au fait que la rupture est brutale et que l'évolution de part et d'autre de cette rupture est continue et d'allure assez simple. Cela n'était pas le cas pour la surface de réponse de la Figure 3.21 lors de l'étude du modèle poutres simplifié où l'on voit que la partie à pente quasi-infinie de la surface de réponse fait que la méthode du chaos a beaucoup de mal à suivre cette évolution.

Nous avons ensuite voulu comparer les écarts en temps de calculs observés entre Monte Carlo et chaos lors de la détermination des surfaces de réponses et voir comment ils évoluaient avec le nombre de tirages. C'est l'objet de la Figure 4.12.

On note que l'évolution des durées de calculs est identique entre Monte Carlo et chaos. L'écart est déjà creusé dès 1000 tirages ce qui met en évidence la différence entre les deux méthodes même à faible nombre de tirages. Lorsque l'on observe l'évolution du facteur temps, on atteint un facteur 142 en faveur de la méthode du chaos à 10000 tirages. Il est donc intéressant de noter que le facteur temps augmente globalement avec le nombre de tirages, ce qui rend la méthode du chaos encore plus attractive en terme de durées de calculs.

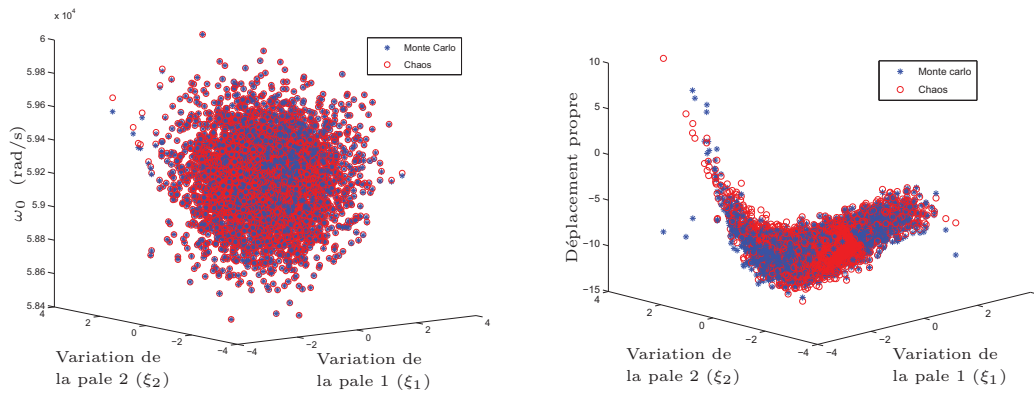


FIGURE 4.10 – Surfaces de réponses relatives au 6ème mode propre aléatoire calculé (mode 15) pour un chaos d'ordre 3 : pulsations propres à gauche et vecteur propre de la pale 1 à droite

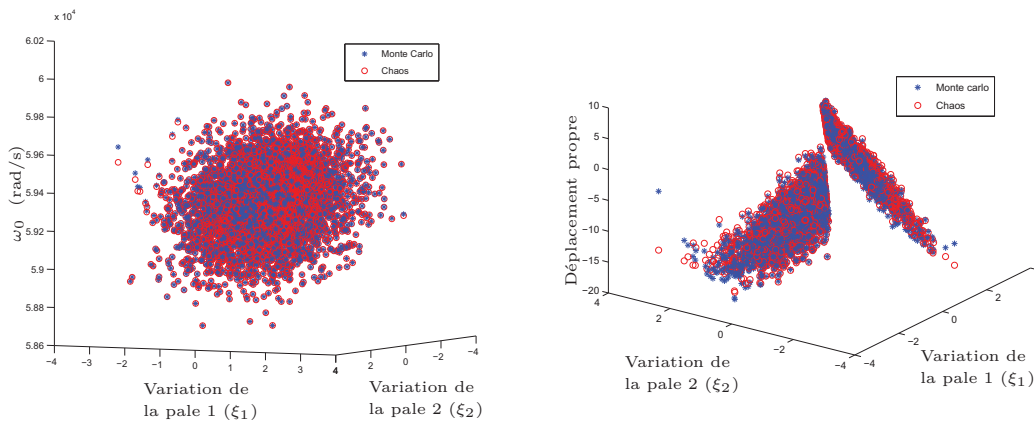


FIGURE 4.11 – Surfaces de réponses relatives au 7ème mode propre aléatoire calculé (mode 16) pour un chaos d'ordre 3 : pulsations propres à gauche et vecteur propre de la pale 1 à droite



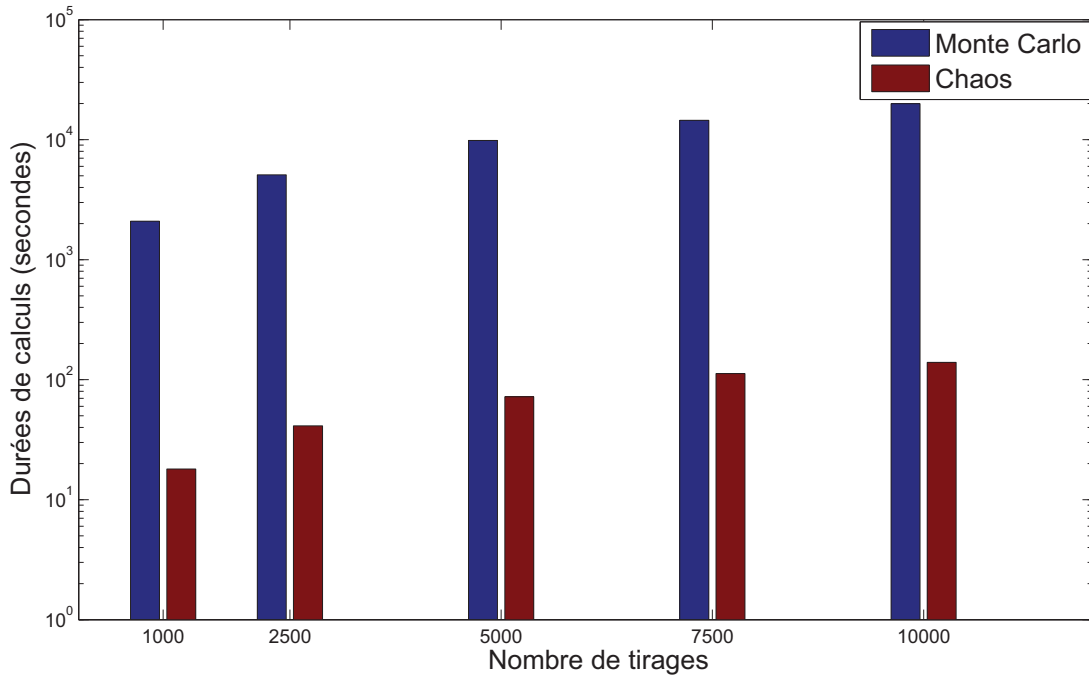


FIGURE 4.12 – Comparaison entre Monte Carlo et chaos des durées de calculs relatives à la détermination des surfaces de réponses pour différents nombres de tirages.

### 4.3.2 Calcul de la réponse forcée aléatoire

Le calcul de la réponse forcée aléatoire se base sur le même principe que celui effectué sur le modèle académique. Le déplacement est défini par :

$$\{U\} = \sum_j \frac{\{\widetilde{\Phi}_j\} \left( \{\widetilde{\Phi}_j\}^T \{F\} \right)}{-\omega^2 + \widetilde{\omega}_j^2 (1 + i\eta)} \quad (4.1)$$

Cette opération est très avantageuse en terme de temps de calcul car les modes propres aléatoires ont été calculés au préalable et par conséquent, pour un tirage donné, le déplacement est obtenu par un calcul direct. Il s'agira donc d'effectuer un Monte Carlo sur ce déplacement aléatoire qui sera calculé, pour chaque tirage, à l'aide des modes propres aléatoires déterminés par le chaos. Notre référence restera le déplacement aléatoire calculé par simulations de Monte Carlo appliquées directement au problème :

$$\left( (1 + i\eta) \sum_{q=0}^Q [K_q] \Psi_q - \omega^2 [M] \right) \{U\} = \{F\} \quad (4.2)$$

Le vecteur d'efforts  $\{F\}$  appliqué aux noeuds du modèle provient des pressions aérodynamiques instationnaires (présentées dans la section 2.5.2) qui nous ont été fournies par le LMFA et que nous avons interpolées sur notre maillage mécanique afin de récupérer

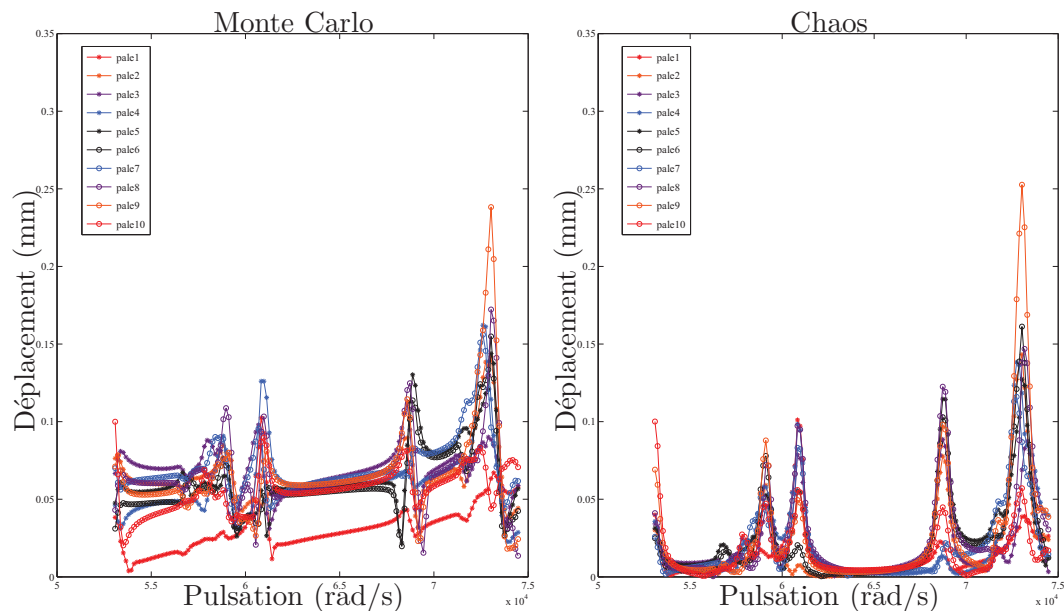


FIGURE 4.13 – Moyenne du déplacement : comparaison entre MC (à gauche) et PC (à droite)

les résultantes d'efforts aux noeuds. La matrice de Craig-Bampton  $[T_{CB}]$  nous permet de déterminer le vecteur d'effort généralisé  $\{F_{gen}\}$  défini par :

$$\{F_{gen}\} = [T_{CB}]^T \{F\} \quad (4.3)$$

Nous nous sommes en particulier intéressés au noeud situé à mi-hauteur de pale et situé sur le bord de fuite car c'est celui qui se déplace le plus pour les modes étudiés. Ainsi, à l'image de ce qui a été fait sur le modèle simplifié, nous avons tracé sur les Figures 4.13 et 4.14 la moyenne et l'écart-type du déplacement du noeud étudié relatif à chaque pale et comparé les résultats obtenus entre Monte Carlo et chaos.

Les Figures 4.13 et 4.14 représentent respectivement la moyenne et l'écart-type du déplacement relevé à chaque pale et pour une plage de fréquences d'excitation réaliste vis à vis de la machine CREATE et des essais moteurs qui ont été faits. Pour s'affranchir des temps de calculs qui peuvent vite s'avérer prohibitifs dans le cas de simulations de Monte Carlo, nous nous sommes limités cette fois à 500 tirages. On remarque que l'on a globalement des pics aux mêmes pulsations entre Monte Carlo et chaos et avec des déplacements du même ordre de grandeur ce qui est satisfaisant. D'ailleurs, on s'aperçoit presque immédiatement que le déplacement maximal est relevé à la même pulsation et sur la même pale entre les deux méthodes.

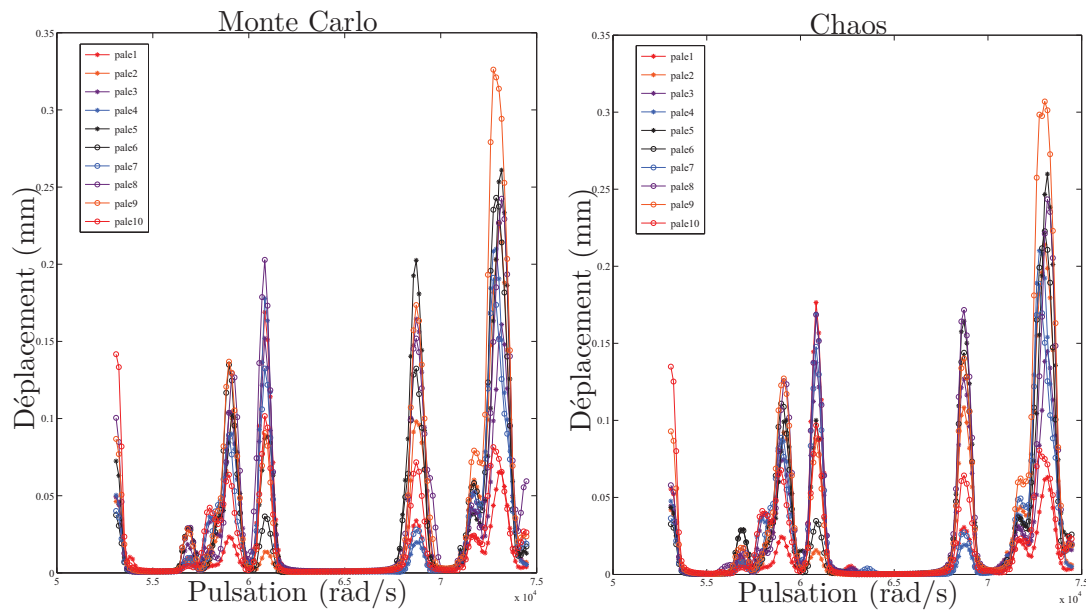


FIGURE 4.14 – Ecart-type du déplacement : comparaison entre MC (à gauche) et PC (à droite)

### 4.3.3 Proposition d'une stratégie de positionnement optimal de jauges d'extensométrie

Afin de mettre en place notre stratégie de positionnement optimal de jauges, nous nous sommes intéressés à la hiérarchie des niveaux de réponses relevés entre les deux méthodes, principalement aux pics de résonance. Les Figures 4.15, 4.16 et 4.17 représentent la réponse forcée relevée aux trois derniers pics de résonance visibles sur les Figures 4.13 et 4.14 et laissent apparaître les niveaux de déplacement les plus élevés. Pour chacune de ces trois fréquences est tracée la moyenne du déplacement de chaque pale (il s'agit toujours du noeud situé à mi-hauteur du bord de fuite de la pale) à laquelle on ajoute et on retranche l'écart-type du déplacement correspondant.

Le comportement observé est globalement satisfaisant car il n'y a pas d'écart significatif entre Monte Carlo et chaos, et lorsque l'écart peut paraître important (cf. Figure 4.16), c'est au niveau de pales dont la réponse est relativement faible par rapport à la réponse maximale relevée sur tout le redresseur. En effet, on peut remarquer que pour les niveaux de déplacements les plus élevés, la méthode du chaos prédit des niveaux proches de ceux prédits par Monte Carlo. On remarquera que les Figures 4.15 et 4.17 correspondent à une excitation de modes situés respectivement dans le premier palier et le second palier à forte densité modale, et c'est donc dans ces zones qu'il est important d'être prédictif. Les niveaux maximaux sont donc observés autour de 11600 Hz, fréquence située dans le second palier à forte densité modale. Ce calcul de réponse forcée aléatoire qui, rappelons-le, a employé des efforts aérodynamiques réalistes, montre bien la cohérence qu'il y a entre les

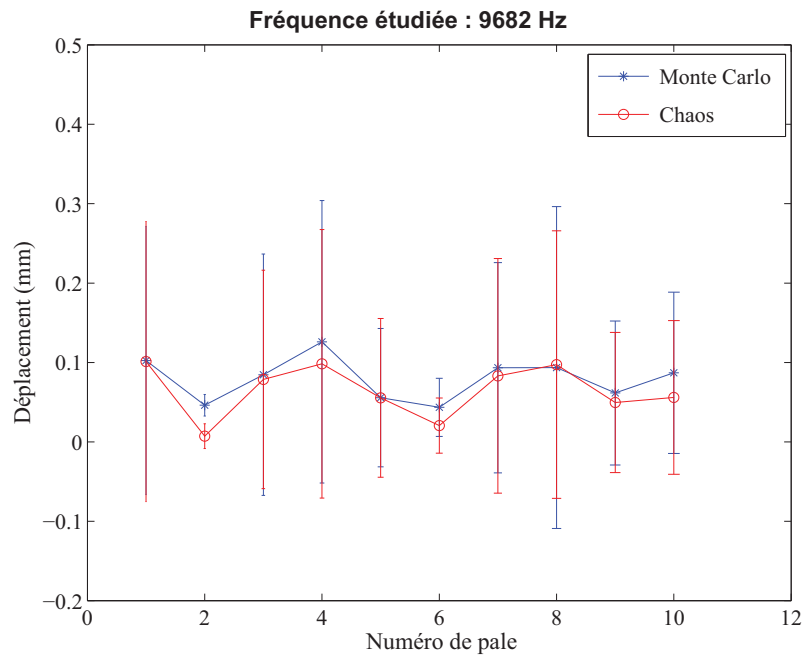


FIGURE 4.15 – Moyenne +/- l'écart-type du déplacement à chaque pale pour le 1er pic : comparaison entre MC et PC

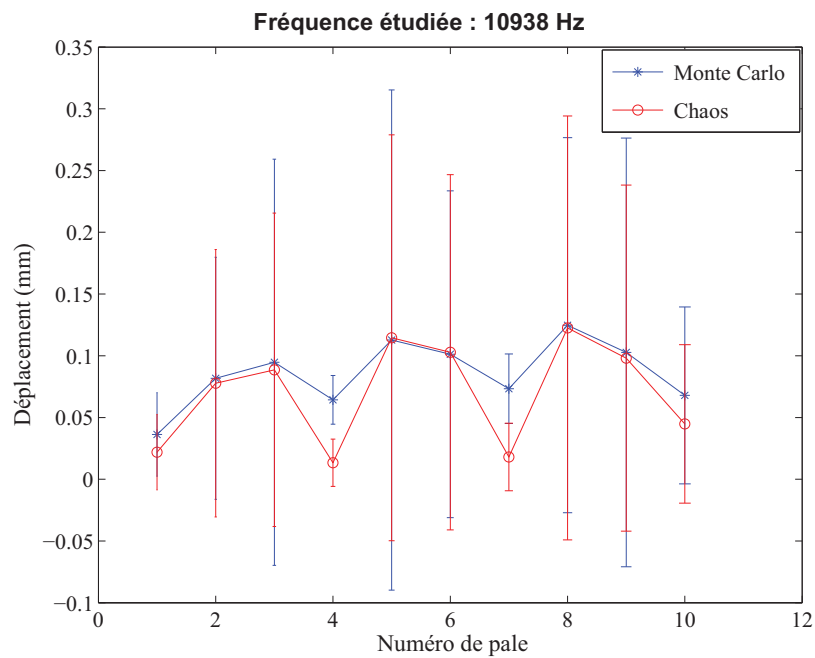


FIGURE 4.16 – Moyenne +/- l'écart-type du déplacement à chaque pale pour le 2ème pic : comparaison entre MC et PC

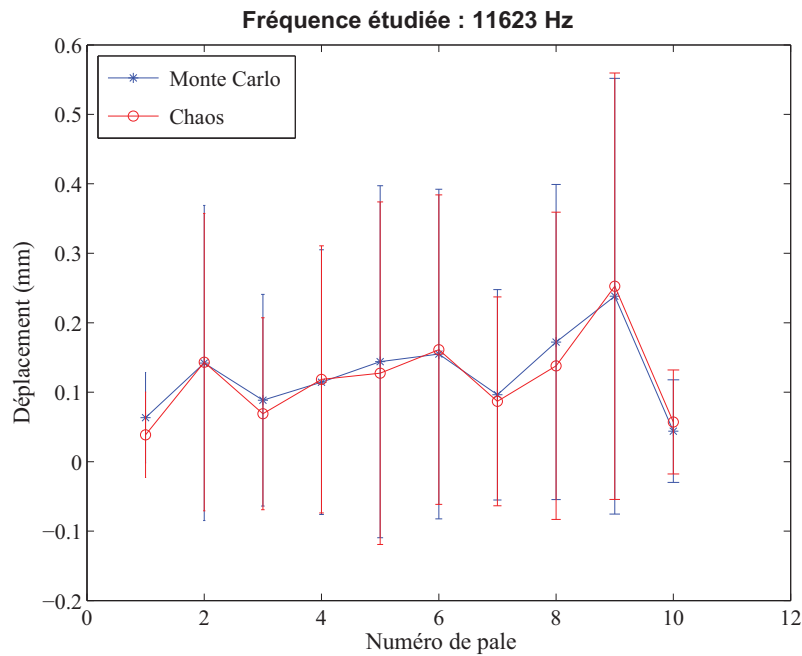


FIGURE 4.17 – Moyenne +/- l'écart-type du déplacement à chaque pale pour le 3ème pic : comparaison entre MC et PC

efforts qui avaient été calculés par le LMFA afin d'exciter le second palier et les résultats que nous obtenons. De plus, la corrélation est très bonne entre Monte Carlo et chaos à cette fréquence d'excitation (cf. Figure 4.17).

Le positionnement optimal de jauge correspond à l'endroit où l'on a statistiquement le plus de risques de relever les niveaux maximaux. Pour mettre en place ce critère de choix de placement de jauge, nous disposons de la moyenne et de l'écart-type du déplacement relevé sur chaque pale suite à la méthodologie présentée plus haut. Nous admettons qu'étant donné la forme des modes qui nous intéressent (flexion et torsion de pale), l'aube sur laquelle sera relevé le déplacement maximal en milieu de pale sera celle où l'on relèvera la contrainte maximale en pied de pale. Ainsi, si l'on s'intéresse aux modes de torsion situés dans le second palier (autour de 11500 Hz), il faudrait placer la jauge prioritairement sur la pale 9 au regard de la Figure 4.17. En effet, on y relève la plus forte moyenne du déplacement ainsi que l'écart-type le plus grand ce qui laisse présager que c'est sur cette aube que seront mesurés les niveaux vibratoires les plus élevés pour le désaccordage considéré. Dans le même temps, en considérant cette même figure, il est clair que les jauges ne seront pas placées sur les pales 1, 3, 4, 7 ou 10 sur lesquelles l'écart-type du déplacement est relativement bas. Enfin, sur les pales 2, 5, 6 et 8, les déplacements relevés sont proches en moyenne et en écart-type et pourront donc être instrumentées au même titre selon le nombre de jauges à disposition.

Ainsi, étant donné qu'en moyenne et en écart-type nous sommes en mesure d'être assez proche de ce que prédit la méthode de Monte Carlo pour les niveaux vibratoires de chaque pale, la méthode du chaos mise en place est donc robuste en terme de prédiction des niveaux et avantageuse au regard des écarts de durées de calculs observés. Cependant, l'étape la plus importante de cette méthode est la détermination des modes propres aléatoires qui doit obligatoirement être satisfaisante pour que la prédiction du positionnement optimal de jauges soit optimale et quasi-systématique.

## 4.4 Conclusion

L'objet de ce chapitre était de présenter la démarche de prédiction de la réponse dynamique de telles structures sur un cas industriel. L'idée était de déterminer la réponse forcée aléatoire du modèle industriel d'un secteur de dix pales à une excitation aérodynamique réaliste afin de proposer un positionnement optimal de jauges d'extensométrie. Pour ce faire, la première étape a été de créer un modèle réduit par la méthode de Craig-Bampton et de le valider. L'application de la méthode de calcul des modes propres aléatoires sur ce modèle réduit a été satisfaisante en montrant une erreur moyenne globalement inférieure à 2%, Monte Carlo étant toujours la référence. Ensuite, l'application d'efforts issus de pressions aérodynamiques instationnaires réalistes calculées par le LMFA nous a permis de mettre en place une stratégie de positionnement optimal de jauges moyennant la détermination de la moyenne et de l'écart-type du déplacement forcé de chaque pale aux fréquences d'excitation d'intérêt. En comparaison aux simulations de Monte Carlo, le résultat obtenu par le chaos est très satisfaisant, d'autant plus que l'on note un facteur de l'ordre de 30 entre les durées de calculs des deux méthodes. Sur un serveur de calcul à 8 coeurs et à 32 Gigaoctets de RAM, le calcul de la réponse forcée moyenne par le chaos est de l'ordre de quelques minutes tandis qu'il est de l'ordre de quelques heures par simulations de Monte Carlo. L'intérêt de la méthode prend davantage de sens si, par exemple, un champ d'efforts différent doit être appliqué, ce qui contraindrait à relancer des calculs. Nous avons donc proposé une méthode robuste et rapide de prédiction du comportement dynamique des redresseurs sectorisés, applicable à des cas industriels.

# Conclusion et perspectives

Le présent mémoire traite de la problématique du comportement dynamique complexe des redresseurs sectorisés monobloc. Cette nouvelle technologie de redresseurs mise en place à des fins économiques et pratiques oblige lors des simulations numériques à considérer chaque secteur multiples indépendamment de son voisin du fait de la perte des conditions de symétrie cyclique. De plus, une densité modale accrue et une forte sensibilité au désaccordage ne font qu'augmenter la criticité du problème. Nous nous sommes donc intéressés tout au long de cette thèse au comportement dynamique d'un secteur de redresseur en présence de désaccordage ; elle a abouti au développement d'une méthodologie stochastique de prédiction des niveaux vibratoires critiques d'un secteur de redresseur induits toujours par ce désaccordage.

Un état de l'art des différents phénomènes qui agissent directement sur le comportement vibratoire des roues aubagées a été présenté dans le premier chapitre. Outre la présentation des différentes sources d'excitation qui peuvent être aérodynamiques ou mécaniques, nous avons mis en évidence la difficulté rencontrée à l'heure actuelle par les industriels pour être prédictif quant à la réponse dynamique de ce type de pièces. Les effets du désaccordage ont également été traités. Ils conditionnent en grande partie cette difficulté de prédiction des niveaux vibratoires dans les roues aubagées. Ce chapitre a ainsi permis de mettre en place les hypothèses d'études retenues pour la suite de la thèse.

La principale problématique de la thèse est liée au caractère aléatoire de la réponse des redresseurs sectorisés induit par une forte sensibilité au désaccordage ; elle est introduite dans le deuxième chapitre. Pour une meilleure compréhension des phénomènes, des études numériques de sensibilité au désaccordage ont été faites et ont montré que pour une même excitation, la réponse dynamique de différents secteurs désaccordés varie beaucoup. Les essais vibratoires sur pièce isolée qui ont suivi ont permis de caractériser des paramètres d'entrée tels que l'amortissement (de l'ordre de 0.1%) et le taux de désaccordage (de l'ordre de quelques %) en vue de l'alimentation des modèles. Les essais de la pièce dans son environnement moteur en fonctionnement ont, quant à eux, fait ressortir les fréquences d'excitation critiques qui ont servi au calcul numérique des pressions aérodynamiques instantanées qui excitent le secteur.

La forte sensibilité de la réponse dynamique des redresseurs sectorisés au désaccordage nous a obligé à considérer une approche stochastique pour appréhender le problème. Ainsi, un état de l'art des méthodes stochastiques les plus utilisées dans le cadre des éléments finis est présenté au début du troisième chapitre. La Méthode des Eléments Finis Stochastiques Spectraux proposée par Ghanem et Spanos [37] a été retenue et développée sur un modèle poutres simplifié dont la structure s'apparente à celle d'un secteur de redresseur de deux pales. La méthode se base sur une décomposition des paramètres aléatoires du problème à résoudre sur une base de polynômes orthogonaux ; dans le cas de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, la base du chaos polynomial est souvent retenue. Le principal problème de la méthode était lié à l'amortissement qui est très faible pour le type de pièce étudiée. En effet, plus l'amortissement est faible, plus l'est également la vitesse de convergence de la méthode qui nécessite un ordre de développement sur la base du chaos polynomial beaucoup plus élevé. Afin de pallier à ce problème, nous avons implémenté la méthode de calcul des modes propres aléatoires présentée dans [28] et qui est une variante de la MEFSS de Ghanem et Spanos. Cette nouvelle méthode s'est avérée concluante en comparaison aux résultats obtenus par simulations de Monte Carlo qui plus est, avec des gains en temps de calculs conséquents.

Dans le quatrième et dernier chapitre, il a été question de l'application industrielle de la méthode proposée dans le chapitre trois. Pour ce faire, nous avons mis en place une stratégie de réduction et d'assemblage du modèle que nous avons validée par rapport à un modèle de référence. Les résultats obtenus ont été globalement satisfaisants pour un taux de désaccordage involontaire réaliste. En effet, nous avons noté une difficulté de convergence des résultats pour certains taux de désaccordage liée à la base modale déterministe choisie comme base de projection qui n'est pas assez riche ou aux surfaces de réponse obtenues qui ne peuvent plus être approchées via la base de polynômes choisie. Cependant, dans le cas où les résultats sont satisfaisants, on note un facteur 30 entre les durées de calculs observées par le chaos et par Monte Carlo, pour le calcul de la réponse forcée aléatoire avec des excitations aérodynamiques réalistes. Suite à cela, nous avons proposé une stratégie de placement optimal de jauges à laquelle l'industriel portait un intérêt particulier et était, par conséquent, le principal livrable attendu en fin de thèse.

## Perspectives

La méthodologie mise en place tout au long de ce mémoire ouvre la voie à des perspectives d'évolution afin d'étendre son applicabilité à des cas plus généraux et plus complexes.

Pour l'optimisation de la méthode, une piste intéressante serait de mettre en place un estimateur d'erreur sur le calcul des modes propres aléatoires indépendant des simulations de Monte Carlo qui nous ont toujours servi de référence. En effet, nous avons montré que



l'efficacité de la méthode dépend en grande partie de la convergence des modes propres aléatoires. Il serait donc très coûteux de devoir faire beaucoup de simulations de Monte Carlo pour avoir une référence et pouvoir statuer sur la convergence des modes propres aléatoires calculés par le chaos.

Un autre point dur qui a été rencontré concerne la modélisation du secteur de redresseur lors de l'application industrielle. En effet, étant donné que la pièce étudiée est monobloc, et que sa modélisation résulte d'un assemblage de plusieurs secteurs indépendants afin de simuler le désaccordage, il faudrait considérer un nombre important de ddls de frontières pour représenter plus fidèlement le caractère monobloc de cette pièce. Pour mettre en place un modèle davantage réaliste, il serait donc intéressant de considérer une première synthèse modale qui aurait pour but de condenser les interfaces avant de condenser le modèle global. Cette technique de double synthèse modale a été présentée dans [49, 50]. L'avantage de cette technique est qu'elle permettrait de réduire considérablement le nombre de ddls d'interfaces tout conservant leurs caractéristiques physiques. On aura donc un assemblage de superéléments capable de modéliser le caractère monobloc de la structure.

Une piste de développement supplémentaire serait de faire une identification du motif de désaccordage qui ressort de la fabrication des redresseurs sectorisés. En effet, les motifs de désaccordage que l'on a testés lors des différentes études ont été arbitrairement choisis et ont été conditionnés par le fait que nous soyons limités en nombre de variables aléatoires. Cependant, on peut légitimement penser que le motif de désaccordage le plus réaliste serait de considérer une variable aléatoire par aube. Il pourrait donc s'avérer intéressant de faire une identification de désaccordage sur une famille de secteurs de redresseur quelconques afin de faire ressortir des motifs de désaccordage particuliers.

Il serait ensuite pertinent de prendre en compte les incertitudes sur l'excitation, tant au niveau de la fréquence de rotation imposée que de l'évolution des profils de pression associée. D'ailleurs, les calculs aérodynamiques qui ont servi lors de l'application industrielle font actuellement l'objet d'une campagne de validation par des mesures de pression au voisinage des zones d'intérêt. Il est également envisagé de simuler la réponse forcée en présence d'un couplage fluide-structure fort pour rendre compte des variations des paramètres modaux occasionnées par la présence du fluide. En effet, même si elles sont à priori faibles, ces variations pourraient avoir un effet important en présence de désaccordage sur des modes faiblement amortis.

Enfin, nous avons considéré notre problème comme linéaire, nous affranchissant donc des contacts non-linéaires existant entre le secteur de redresseur et le carter du compresseur et qui ont certainement une influence non négligeable sur le couplage inter-aubes.

Cependant, les recherches continuent sur le couplage entre méthodes non-linéaires (telles que l'harmonic Balance Method - HBM) et les méthodes stochastiques [29, 30].

# Références bibliographiques

- [1] R. L. Bajan, C. C. Feng, and I. J. Jaszlics. Vibration analysis of complex structural systems by modal substitution. *Shock and Vibration Bulletin*, 39(3), 1969.
- [2] E. Balmes. *Viscoelastic vibration toolbox, User Manual*. SDTools, 2004.
- [3] E. Balmes, J. Bianchi, and J. Leclere. *Structural Dynamics Toolbox 6.2 (for use with MATLAB)*, SDTools, Paris, France. 2009.
- [4] A. Batailly. *Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2008.
- [5] WF Bauer. The monte carlo method. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 6(4) :438–451, 1958.
- [6] M. Baumgartner, F. Kameier, and J. Hourmouziadis. Non-engine order blade vibration in a high pressure compressor. *ISABE, Melbourne, Australia*, 1995.
- [7] H. Benaroya and M. Rehak. Finite element methods in probabilistic structural analysis : a selective review. *Applied Mechanics Reviews*, 41 :201, 1988.
- [8] W. A. Benfield and R. F. Hruda. Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal*, 9 :1255–1261, 1971.
- [9] Marc Berveiller. *Eléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité*. PhD thesis, Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, October 2005.
- [10] K. Binder. Applications of the monte carlo method in statistical physics. In *Applications of the Monte Carlo method in statistical physics*, volume 1, 1984.
- [11] J. R Bladh. *Efficient predictions of the vibratory response of mistuned bladed disks by reduced order modeling*. PhD thesis, The University of Michigan, 2009.
- [12] F. Bourquin. Component mode synthesis and eigenvalues of second order operators : discretization and algorithm. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 26(3) :385–423, 1992.
- [13] F. Bourquin and F. d'HENNEZEL. Application of domain decomposition techniques to modal synthesis for eigenvalue problems. In *Proceedings of the Fifth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, 1992.

- [14] F. Bourquin and F. d’Hennezel. Intrinsic component mode synthesis and plate vibrations. *Computers & structures*, 44(1-2) :315–324, 1992.
- [15] E. Capiez-Lernout. *Dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique en présence d’incertitudes aléatoires. Application au désaccordage des roues aubagées*. PhD thesis, Université de Marne-La-Vallée, Ile-de-France, FR, October 2004.
- [16] E. Capiez-Lernout and C. Soize. Specifying manufacturing tolerances for a given amplification factor : a nonparametric probabilistic methodology. 2003.
- [17] E. Capiez-Lernout, C. Soize, J.-P. Lombard, C. Dupont, and E. Seinturier. Blade manufacturing tolerances definition for a mistuned industrial bladed disk. In *ASME Conference Proceedings*, volume 5 of *Proceedings of ASME Turbo Expo 2004*, pages 307–316, June 2004.
- [18] M. P. Castanier, G. Ottarson, and C. Pierre. Reduced order modeling technique for mistuned bladed disks. In *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, pages 439–447, March 1997.
- [19] M. P. Castanier and C. Pierre. Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors. In *AIAA Journal*, pages 2077–2086, October 2002.
- [20] M.P. Castanier and C. Pierre. Consideration on the benefits of intentional blade mistuning for the forced response of turbomachinery rotors. *Analysis and design issues for modern aerospace vehicles - 1997*, pages 419–425, 1997.
- [21] J.C. Chassaing and D. Lucor. Stochastic investigation of flows about airfoils at transonic speeds. *AIAA journal*, 48(5) :938–950, 2010.
- [22] B. K Choi, J. Lentz, A. J. Rivas-Guerra, and M. P. Mignolet. Optimization of intentional mistuning patterns for the reduction of the forced response effects of unintentional mistuning : Formulation and assessment. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125 :131, 2003.
- [23] R. Corral, J.M. Gallardo, and C. Martel. A conceptual flutter analysis of a packet of vanes using a mass-spring model. ASME, 2007.
- [24] R. R. Craig. Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 14 :1633–1635, 1976.
- [25] R. R. Craig. A review of substructure coupling methods for dynamic analysis. *NASA. Langley Res. Center Advan. in Eng. Sci.*, 2, 1976.
- [26] R. R. Craig and M. C. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 6(7) :1313 – 1319, July 1968.
- [27] Techniques de l’Ingénieur. Bm 4 175.
- [28] O. Dessombz. *Analyse Dynamique de Structures comportant des Paramètres Incertains*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, FR, December 2000.

- [29] J. Didier, J-J. Sinou, and B. Faverjon. Réponse dynamique non-linéaire sous excitations multi-fréquentielles en présence d'incertitudes : Application à un rotor excité par son support. 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon.
- [30] J. Didier, J-J. Sinou, and B. Faverjon. Etude de la réponse dynamique non-linéaire d'un rotor en présence de défauts et d'incertitudes. Dixième Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 2011.
- [31] R. C. F. Dye and T. A. Henry. Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies. *ASME Journal of Engineering for Power*, 91(3) :182–188, 1969.
- [32] El-Aini et al, 1997.
- [33] D. J. Ewins. The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 9(1) :65–72, 1969.
- [34] D. J. Ewins. Vibration characteristics of bladed disc assemblies. *ARCHIVE : Journal of Mechanical Engineering Science 1959-1982 (vols 1-23)*, 15(3) :165–186, 1973.
- [35] D. M. Feiner and J. H. Griffin. A fundamental model of mistuning for a single family of modes. *Journal of Turbomachinery*, 124 :597, 2002.
- [36] D. M. Feiner and J. H. Griffin. Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model-part i : theory. *Journal of turbomachinery*, 126 :150, 2004.
- [37] R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
- [38] R. L. Goldman. Vibration analysis by dynamic partitioning. *AIAA Journal*, 7 :1152–1154, 1969.
- [39] Nicolas Gourdain. *Simulation Numérique des Phénomènes de Décollement Tournant dans les Compresseurs Axiaux*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, FR, October 2005.
- [40] K.C. Hall, R.E. Kielb, and J.P. Thomas. *Unsteady aerodynamics, aeroacoustics and aeroelasticity of turbomachines*. Kluwer Academic Pub, 2006.
- [41] J. H. He. A new perturbation technique which is also valid for large parameters. *Journal of sound and vibration*, 229(5) :1257–1263, 2000.
- [42] R. Henry. Calcul des fréquences et modes propres des structures répétitives circulaires. 4 :61–82, 1980.
- [43] Darren E. Holland, Steven L. Ceccio, Sergio Filippi, Matthew P. Castanier, and Bogdan P. Epureanu. Testing and calibration procedures for mistuning identification and traveling wave excitation of blisks. Proceedings of ASME Turbo Expo 2009, June 2009.
- [44] S. N. Hou. Review of modal synthesis techniques and a new approach. *Shock and Vibration Bulletin*, 40(Part 4) :25–39, 1969.

- [45] <http://www.epower-propulsion.com>.
- [46] <http://www.lufthansa-technik.com>.
- [47] <http://www.sulzernetco.com>.
- [48] W. C Hurty. Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA journal*, 3(4) :678–685, 1965.
- [49] L. Jézéquel and H. D. Setio. Component modal synthesis methods based on hybrid models, part i : Theory of hybrid models and modal truncation methods. (61) :100–108, 1994.
- [50] L. Jézéquel and H. D. Setio. Component modal synthesis methods based on hybrid models, part ii : Numerical tests and experimental identification of hybrid model. (61) :109–116, 1994.
- [51] M. Jöcker. *Numerical Investigation of the Aerodynamic Vibration Excitation of High-Pressure Turbine Rotors*. PhD thesis, Kungl Tekniska Högskolan, 2002.
- [52] J. Judge, C. Pierre, and S. L Ceccio. Experimental validation of mistuning identification techniques and vibration predictions in bladed disks. In *CEAS International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Madrid, Spain*, pages 87–98, 2001.
- [53] J. A. Judge, C. Pierre, and S. L. Ceccio. Mistuning identification in bladed disks. In *Proceedings of the International Conference on Structural Dynamics Modeling*, 2002.
- [54] R.E. Kielb, J.W. Barter, J.P. Thomas, and K.C. Hall. Blade excitation by aerodynamic instabilities—a compressor blade study. *Proceedings of ASME Turbo Expo, Atlanta, Georgia, USA*, 2003.
- [55] MJ Kruse and C. Pierre. 1997, 'an experimental investigation of vibration localization in bladed disks, part ii : Forced response. in *Proceedings of the 42 nd ASME Gas Turbine & Aeroengine Congress*.
- [56] M.J. Kruse and C. Pierre. An experimental investigation of vibration localization in bladed disks, part i : Free response. *ASME Paper*, 1997.
- [57] D. Laxalde, F. Thouverez, J. J Sinou, J. P. Lombard, and S. Baumhauer. Mistuning identification and model updating of an industrial blisk. *International Journal of Rotating Machinery*, 2007(1) :17289, 2007.
- [58] J. Le Meitour, D. Lucor, and J.C. Chassaing. Prediction of stochastic limit cycle oscillations using an adaptive polynomial chaos method. *Journal of Aeroelasticity and Structural Dynamics*, 2(1), 2010.
- [59] M. Legrand. *Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion*. PhD thesis, Université de Nantes, 2005.
- [60] N. Lesaffre. *Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor-stator*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.

- [61] C. Li and A. Der Kiureghian. Optimal discretization of random fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(6) :1136–54, 1993.
- [62] Sang-Ho Lim, Matthew P. Castanier, and C. Pierre. Intentional mistuning design space reduction based on vibration energy flow in bladed disks. Proceedings of ASME Turbo Expo 2004, June 2004.
- [63] W. K. Liu, T. Belytschko, and A. Mani. Random field finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 23(10) :1831–45, 1986.
- [64] W. K. Liu, G. Besterfield, and T. Belytschko. Transient probabilistic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1) :27–54, 1988.
- [65] Jean-Pierre Lombard, J. Dupeux, C. Dupont, F. Garcin, and S. Baumhauer. Mistuning phenomena on bladed disks : Industrial methods and applications. In *ASME Conference Proceedings*, volume 5 of *Proceedings of ASME Turbo Expo 2006*, pages 809–819, May 2006.
- [66] R. H. MacNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4) :581–601, 1971.
- [67] JG Marshall and M. Imregun. A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications. *Journal of Fluids and Structures*, 10(3) :237–267, 1996.
- [68] C. Martel and R. Corral. Asymptotic description of maximum mistuning amplification of bladed disk forced response. In *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, volume 131, March 2009.
- [69] D. R. Martinez, T. G. Carne, D. L. Gregory, and A. K. Miller. Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (USA), 1984.
- [70] M. Mbaye. *Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues aubagées de turbomachines*. PhD thesis, Paris-Est, Ile-de-France, FR, October 2009.
- [71] M. Mbaye, C. Soize, J.-P. Ousty, and E. Capiez-Lernout. Robust analysis of design in vibration of turbomachines. Proceedings of ASME Turbo Expo 2009, June 2009.
- [72] M. P. Mignolet and C. C. Lin. The combined closed form-perturbation approach to the analysis of mistuned bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 115 :771, 1993.
- [73] M. P. Mignolet, C. C. Lin, and B. H. LaBorde. A novel limit distribution for the analysis of randomly mistuned bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123 :388, 2001.
- [74] J. A. Morgan, C. Pierre, and G. M. Hulbert. Calculation of component mode synthesis matrices from measured frequency response functions, part 1 : Theory. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120 :503, 1998.
- [75] J. A. Morgan, C. Pierre, and G. M. Hulbert. Calculation of component mode synthesis matrices from measured frequency response functions, part 2 : Application. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120 :509, 1998.



- [76] G. Ottarson and C. Pierre. On the effects of interblade coupling on the statistics of maximum forced response amplitudes in mistuned bladed disks. In *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 36 th, and AIAA/ASME Adaptive Structures Forum, New Orleans, LA*, pages 3070–3078, 1995.
- [77] X. Ottavy, N. Gourdain, and A. Vouillarmet. Experimental and numerical investigation of unsteady flows in a high speed three stages compressor. *Proceedings of European Turbomachinery Conference*, pages 247–266, 2009.
- [78] C. Padova, J. Barton, M.G. Dunn, S. Manwaring, G. Young, M. Adams Jr, and M. Adams. Development of an experimental capability to produce controlled blade tip/ shroud rubs at engine speed. *Journal of turbomachinery*, 127 :726–735, 2005.
- [79] F. Pichot, D. Laxalde, J.-J. Sinou, F. Thouverez, and J.-P. Lombard. Mistuning identification for industrial blisks based on the best achievable eigenvector. In *Computer and Structures*, volume 84, pages 2033–2049, November 2006.
- [80] C. Pierre. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, 126(3) :485–502, 1988.
- [81] Rolls Royce. The jet engine.
- [82] R.Y. Rubinstein and D.P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*, volume 707. Wiley-interscience, 2008.
- [83] A. C. Sall, F. Thouverez, L. Blanc, and P. Jean. Comportements dynamique et stochastique des redresseurs monobloc de turbomachines aéronautiques. *Dixième Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, 2011.
- [84] Eric Seinturier, J.-P. Lombard, M. Dumas, C. Dupont, V. Sharma, and J. Dupeux. Forced response prediction methodology for the design of HP compressors bladed disks. In *ASME Conference Proceedings*, volume 6 of *Proceedings of ASME Turbo Expo 2004*, pages 317–326, June 2004.
- [85] S. H Shin, S. J Lee, and H. H Yoo. Statistical approach to analyze vibration localization phenomena in periodic structural systems. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 19(7) :1405–1413, 2005.
- [86] J.C. Slater. Modelling, analysis, and design of bladed disks for alleviation of high cycle fatigue in gas turbine engines. *AFOSR SFRP Final Report, Bollong Air Force Base*, 1995.
- [87] J.C. Slater, G.R. Minkiewicz, and A.J. Blair. Forced response of bladed disk assemblies - a survey. *The Shock and Vibration Digest*, 31.
- [88] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3) :277–294, 2000.
- [89] AV Srinivasan. Vibrations of bladed-disk assemblies- a selected survey. *ASME, Transactions, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 106 :165–168, 1984.



- [90] B. Sudret and A. Der Kiureghian. Stochastic finite elements and reliability : A state-of-the-art report. technical report no UCB/SEMM-2000/08. 2000.
- [91] D. L. Thomas. Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(1) :81–102, 1979.
- [92] R. Valid and R. Ohayon. Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques. In *La Recherche Aérospatiale*, volume 4, pages 251–263, August 1985.
- [93] JT Wagner and American Society of Mechanical Engineers. Coupling of turbomachine blade vibrations through the rotor. ASME, 1966.
- [94] X. Wan and G.E. Karniadakis. An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations. *Journal of Computational Physics*, 209(2) :617–642, 2005.
- [95] S. T Wei and C. Pierre. Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry. i- free vibrations. II- forced vibrations. *Bladed disk assemblies*, pages 61–79, 1987.
- [96] D. S. Whitehead. Effect of mistuning on the vibration of turbo-machine blades induced by wakes. *ARCHIVE : Journal of Mechanical Engineering Science 1959-1982 (vols 1-23)*, 8(1) :15–21, 1966.
- [97] F. W. Williams, D. Kennedy, G. Wu, and J. Zhou. Exact calculation of natural frequencies of repetitive structures. *Structural Engineering and Mechanics*, 4(5) :553–568, 1996.
- [98] D. Xiu and G.E. Karniadakis. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 187(1) :137–167, 2003.
- [99] D. Xiu, D. Lucor, C.H. Su, and G.E. Karniadakis. Stochastic modeling of flow-structure interactions using generalized polynomial chaos. *Journal of Fluids Engineering*, 124 :51, 2002.
- [100] J. Zhang and B. Ellingwood. Orthogonal series expansions of random fields in reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(12) :2660–77, 1994.



# Publications personnelles

- [1] A. C. Sall, F. Thouverez, L. Blanc, P. Jean and X. Ottavy. *Prediction of the Vibratory Behaviour of Monoblock Sectorised Stator Vanes*. Proceedings of ASME Turbo Expo, ASME Paper GT2010-22698, Glasgow, UK, 2010.
  
- [2] A. C. Sall, F. Thouverez, L. Blanc, P. Jean and X. Ottavy. *Prévision du Comportement Vibratoire des Redresseurs Sectorisés Monobloc*. XVII<sup>e</sup> Symposium Vibrations, Chocs et Bruit, Ecully, France, 15-17 Juin 2010.
  
- [3] A. C. Sall, F. Thouverez, L. Blanc and P. Jean. *Comportements Dynamique et Stochastique des Redresseurs Monobloc de Turbomachines Aéronautiques*. Dixième Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, 9-13 Mai, 2011.
  
- [4] A. C. Sall, F. Thouverez, L. Blanc and P. Jean. *Stochastic Behaviour of Mistuned Stator Vane Sectors : an Industrial Application*. Proceedings of International Conference on Structural Engineering Dynamics, ICEDyn 2011, Tavira, Portugal.
  
- [5] A. C. Sall, F. Thouverez, L. Blanc, C. Gibert, X. Ottavy, P. Kulisa and P. Jean. *Etude du Comportement Vibratoire des Redresseurs Sectorisés Monobloc : Approches Numérique et Expérimentale*. Vingtième Congrès Français de Mécanique, CFM 2011, Besançon, France.



# Table des figures

1	Représentation en coupe d'une turbomachine aéronautique [45] . . . . .	2
2	Compresseur axial multiétages d'un moteur Rolls Royce [81] . . . . .	3
3	Représentation d'un redresseur complet (à gauche) et d'un secteur de redresseur (à droite) [47, 46] . . . . .	4
1.1	Les grandes étapes dans la démarche de conception des roues aubagées [51]	8
1.2	Exemples de modes à diamètres nodaux : mode à 1 diamètre à gauche, mode à 6 diamètres à droite . . . . .	13
1.3	Diagramme zig-zag . . . . .	14
1.4	Principe de la démarche de conception au regard de la tenue en fatigue vibratoire [27] . . . . .	15
1.5	Diagramme de Campbell . . . . .	16
1.6	Courbe de Wöhler . . . . .	17
1.7	Diagramme de Haigh . . . . .	17
1.8	Courbe représentant l'évolution de l'amplification dynamique de la réponse avec le taux de désaccordage pour une roue aubagée mobile [20] . . . . .	19
1.9	Courbe représentant l'évolution de l'amplification dynamique de la réponse en fonction du couplage inter-aubes [76] . . . . .	20
2.1	Photo et vue en coupe du compresseur CREATE [source LMFA] . . . . .	23
2.2	Redresseur sectorisé de 10 pales du 1er étage du compresseur CREATE (version 2-bis) . . . . .	24
2.3	Diagramme représentant l'évolution des fréquences propres en fonction du numéro du mode . . . . .	25
2.4	Diagramme montrant la répartition des modules d'Young le long du secteur pour différents tirages de désaccordage . . . . .	26
2.5	Sensibilité en fréquence : Diagramme fréquences propres/numéro du mode .	27
2.6	MAC entre modèle accordé et modèle désaccordé 1 . . . . .	28
2.7	MAC entre modèle accordé et modèle désaccordé 2 . . . . .	28
2.8	MAC entre modèle accordé et modèle désaccordé 3 . . . . .	29
2.9	Partie réelle du champ de pressions de référence (à gauche) et interpolé (à droite) sur l'extrados de l'aube . . . . .	30

2.10	Partie imaginaire du champ de pressions de référence (à gauche) et interpolé (à droite) sur l'extrados de l'aube . . . . .	30
2.11	Réponse forcée AEROMECA : déplacement maximal relevé pour chaque pale et pour les différents motifs de désaccordage étudiés . . . . .	32
2.12	Redresseur RD1 à 20 pales suspendu au bâti par des élastiques . . . . .	33
2.13	Schéma synoptique de principe de la manipulation . . . . .	34
2.14	Points de mesures vus du bord d'attaque (gauche) et du bord de fuite (droite)	35
2.15	Essais partiels sur RD1 20 pales : exemple de FRF . . . . .	35
2.16	Corrélation Calculs/Essais : Diagramme Fréquences propres/Numéro du mode . . . . .	37
2.17	Corrélation Calculs/Essais : déplacements normalisés aux points de mesures	38
2.18	Essais vibratoires : évolution de l'amortissement modal avec le numéro du mode identifié lors des essais . . . . .	39
2.19	Instrumentation du redresseur - Positionnement des jauges . . . . .	41
2.20	FFT glissante du signal mesuré sur la 6 <sup>e</sup> aube (amplitudes non calibrées) .	43
2.21	Coupe du compresseur CREATE - Interaction rotor/stator . . . . .	44
2.22	Champ des pressions aérodynamiques qui s'applique sur les aubes du RD1 de CREATE2-bis [83] . . . . .	44
3.1	Modèle de secteur de redresseur : simplification du modèle numérique 3D à un modèle poutres 2D . . . . .	54
3.2	Six premiers modes 1F à fréquences propres très proches . . . . .	55
3.3	Modèle poutres étudié . . . . .	55
3.4	Deux premiers modes propres du modèle - flexions de pale . . . . .	56
3.5	Convergence du chaos polynomial pour un amortissement de 1% . . . . .	58
3.6	Convergence du chaos polynomial pour un amortissement de 0.2% . . . . .	59
3.7	Surface de réponses des pulsations propres - Influence de l'ordre du chaos polynomial . . . . .	66
3.8	Surface de réponses du déplacement propre aléatoire du ddl de flexion de la pale 1 - Influence de l'ordre du chaos polynomial . . . . .	66
3.9	Réponse forcée : Moyenne du déplacement du ddl de flexion de la 1 <sup>ère</sup> pale (gauche) et erreur relative par rapport à Monte Carlo (droite) - Influence de l'ordre du chaos polynomial . . . . .	68
3.10	Réponse forcée : Ecart-type du déplacement du ddl de flexion de la 1 <sup>ère</sup> pale (gauche) et erreur relative par rapport à Monte Carlo (droite) - Influence de l'ordre du chaos polynomial . . . . .	69
3.11	Surface de réponses des vecteurs propres - Influence de la raideur des viroles : Comparaison entre viroles 100 fois plus raides (à gauche) et viroles 25 fois plus raides (à droite) . . . . .	70
3.12	Sous-structure élémentaire . . . . .	72
3.13	Modèle académique 10 pales étudié . . . . .	75

3.14	Comparaison des fréquences propres du modèle de référence et du modèle réduit . . . . .	76
3.15	MAC entre les déformées propres du modèle de référence et celles du modèle réduit . . . . .	76
3.16	Etalement fréquentiel du modèle réduit pour un facteur 10 entre raideurs de pale et de virole . . . . .	78
3.17	Surfaces de réponse des pulsations propres aléatoires relatives au mode 12 - Comparaison entre Monte Carlo et chaos d'ordre 3 . . . . .	79
3.18	Surfaces de réponse des vecteurs propres aléatoires relatifs au mode 12 et aux pales 1 et 2 - Comparaison entre Monte Carlo et chaos d'ordre 3 . . . . .	80
3.19	Evolution des durées de simulations pour différents nombres de tirages . . . . .	81
3.20	Moyenne et écart-type des erreurs commises sur les pulsations propres aléatoires (à gauche) et sur les vecteurs propres (à droite) aléatoires . . . . .	82
3.21	Surfaces de réponse des vecteurs propres aléatoires relatifs au mode 17 et aux pales 1 et 3 - Comparaison entre Monte Carlo et chaos d'ordre 3 . . . . .	84
3.22	Application des efforts unitaires sur le modèle . . . . .	85
3.23	Comparaison de la moyenne de la réponse forcée entre Monte Carlo (à gauche) et chaos (à droite) . . . . .	85
3.24	Comparaison de l'écart-type de la réponse forcée entre Monte Carlo (à gauche) et chaos (à droite) . . . . .	86
4.1	Sous-structure élémentaire 3D . . . . .	91
4.2	Noeuds de frontière de la virole supérieure (à gauche) et de la virole inférieure (à droite) . . . . .	91
4.3	Division des interfaces en patches : éléments MEAN de la virole supérieure (à gauche) et éléments MEAN de la virole inférieure (à droite) . . . . .	93
4.4	Comparaison des modes propres entre le modèle de référence et le modèle 1 . . . . .	95
4.5	Comparaison des modes propres entre le modèle 1 et le modèle 2 . . . . .	97
4.6	Comparaison des modes propres entre le modèle 2 et le modèle 3 . . . . .	98
4.7	Moyenne et écart-type de l'erreur commise sur les pulsations propres aléatoires pour différentes valeurs de $\delta_A$ . . . . .	100
4.8	Moyenne et écart-type de l'erreur commise sur les vecteurs propres aléatoires pour différentes valeurs de $\delta_A$ . . . . .	102
4.9	Moyenne et écart-type de l'erreur commise sur les vecteurs propres aléatoires pour différents nombres de modes retenus pour la base modale déterministe de projection . . . . .	104
4.10	Surfaces de réponses relatives au 6ème mode propre aléatoire calculé (mode 15) pour un chaos d'ordre 3 : pulsations propres à gauche et vecteur propre de la pale 1 à droite . . . . .	106

---

4.11 Surfaces de réponses relatives au 7ème mode propre aléatoire calculé (mode 16) pour un chaos d'ordre 3 : pulsations propres à gauche et vecteur propre de la pale 1 à droite . . . . .	106
4.12 Comparaison entre Monte Carlo et chaos des durées de calculs relatives à la détermination des surfaces de réponses pour différents nombres de tirages.	107
4.13 Moyenne du déplacement : comparaison entre MC (à gauche) et PC (à droite)	108
4.14 Ecart-type du déplacement : comparaison entre MC (à gauche) et PC (à droite) . . . . .	109
4.15 Moyenne +/- l'écart-type du déplacement à chaque pale pour le 1er pic : comparaison entre MC et PC . . . . .	110
4.16 Moyenne +/- l'écart-type du déplacement à chaque pale pour le 2ème pic : comparaison entre MC et PC . . . . .	110
4.17 Moyenne +/- l'écart-type du déplacement à chaque pale pour le 3ème pic : comparaison entre MC et PC . . . . .	111



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

Monsieur E. FOLTETE  
Professeur - Université de Franche-Comté - FEMTO ST - 24 chemin de l'épitaphe  
25000 BESANCON cedex

Et de

Monsieur J-F. DEU  
Professeur - Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés  
Conservatoire National des Arts et Métiers - Cnam/SITI/ISME/LMSSC - Case courrier # 353  
292 rue Saint Martin - 75141 PARIS cedex 03

**Monsieur SALL Amadou**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 1<sup>er</sup> décembre 2011

P/Le directeur de l'E.C.L.  
La directrice des Etudes

