



Hygromécanique du matériau bois appliquée à la conservation du patrimoine culturel

Julien Colmars

► To cite this version:

Julien Colmars. Hygromécanique du matériau bois appliquée à la conservation du patrimoine culturel. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2011. Français. NNT: . tel-00765961

HAL Id: tel-00765961

<https://theses.hal.science/tel-00765961>

Submitted on 17 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE

de l'Université Montpellier 2, CNRS

Pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Montpellier 2

Ecole doctorale

Information, Structure, Systèmes (I2S)

Laboratoire - Spécialité

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC)

**HYGROMECHANIQUE DU MATERIAU BOIS
APPLIQUEE A LA CONSERVATION
DU PATRIMOINE CULTUREL :
ETUDE SUR LA COURBURE DES PANNEAUX PEINTS**

Par

JULIEN COLMARS

Soutenue publiquement le 18 Avril 2011 devant le jury composé de :

Frédéric DUBOIS	Pr Université Limoges	Rapporteur
Georges JERONIMIDIS	Pr Université de Reading (UK)	Rapporteur
David DUREISSEIX	Pr INSA Lyon	Examineur
Joseph GRIL	DR CNRS, Montpellier	Directeur de thèse
Emmanuel MAURIN	Ingénieur LRMH, Paris	Examineur
Bernard MAURIN	Pr Université Montpellier 2	Examineur
Romain REMOND	Ingénieur ENGREF, Nancy	Examineur
Luca UZIELLI	Pr université de Florence (IT)	Examineur

au

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil
860 rue de St Priest – 34090 Montpellier

Notes

A. Format du document

Ce mémoire de thèse a été tapé, mis en page, puis édité en format PDF dans Microsoft Word 2007. La mise en forme du présent fichier PDF n'est malheureusement pas garantie pour tout type de visualiseur PDF (notamment sous Mac). Un rendu fidèle au document original est obtenu par exemple dans de multiples versions d'Adobe Acrobat Reader.

Le fichier PDF n'a pas été protégé contre la copie (texte ou images) pour des raisons de partage étendu des connaissances scientifiques. Merci de respecter néanmoins le contenu de ce travail.

Les marges de ce document ont été optimisées pour une impression recto/verso.

Version finale / octobre 2011

B. Mini CV

Colmars Julien

Né le 10 mars 1984 à Cagnes/Mer

Diplômé en 2007 de l'Ecole Nationale Supérieures des Arts et Métiers (ENSAM), spécialité « Bois, matériau et procédés » (Cluny, Bourgogne). Stage de Master-Ingénieur effectué au Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) de Montpellier dans l'équipe Mécanique de l'Arbre et du Bois (MAB), sur le sujet : Comportement hygromécanique du bois – Etude des panneaux peints du Patrimoine.

Thèse de Doctorat effectuée dans l'équipe MAB du LMGC entre février 2008 et avril 2011.

Enseignement : moniteur du département de Mécanique, Faculté des Sciences, Université Montpellier 2. Intervenant en L1, L2, L3, M1 en mécanique, conception industrielle et choix de matériaux.

C. Contact

Pour toute question ou remarque : julien.colmars@imelavi.fr

Remerciements

L'exercice de rédaction d'un manuscrit de thèse apporte ses moments de solitude. Le travail de thèse en revanche s'appuie sur d'innombrables personnes et institutions que je tiens à remercier.

A. Structures et financement

Cette thèse est un travail du **CNRS-Université Montpellier 2**, effectué au **Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de Montpellier (LMGC)**, au sein de l'école doctorale **Information Structure Système (I2S)**. Merci à l'ensemble des services de l'UM2 et du CNRS permettant le bon déroulement de la thèse (service des personnels, DRED, etc.).

Cette thèse a été financée grâce au programme **Mechwood**, programme de collaboration scientifique entre le LMGC-CNRS et l'**Université de Vienne**. La coordinatrice du projet, **Karin Hofstetter**, en est vivement remerciée.

Je remercie le **Laboratoire de Recherche des Monuments Historique** pour son financement du projet d'étude d'un panneau peint dans une église d'Avignon.

Je tiens également à souligner la contribution à ce travail du programme européen de coordination scientifique COST, et notamment l'**action COST IE0601** « Wood science for Conservation of Cultural Heritage » (www.woodculther.org), par le financement de conférences internationales et de missions à court terme dont j'ai bénéficié.

Je remercie la **JSPS**, organe du gouvernement japonais, qui m'a permis d'effectuer un séjour de 2 mois à Kyoto (Japon) dans le cadre de cette thèse.

B. Personnes

Je débute cette longue liste en remerciant le jury, à commencer par mon directeur de thèse, **Joseph Gril**. Je lui suis reconnaissant notamment pour la confiance qu'il m'a manifestée durant ces années, pour sa disponibilité, fragmentée mais incontestable, et pour son goût communicatif de la science, des discussions et des collaborations scientifiques. Ce travail porte incontestablement sa marque, et je ne peux que l'en remercier.

S'il n'était pas officiellement un encadrant, **David Dureisseix** a néanmoins joué un rôle déterminant dans l'évolution de mon travail, ce depuis mon stage de Master en 2007. Merci infiniment David, pour toutes ces informations que tu partages sans hésitation, avec beaucoup de clarté et de simplicité.

Merci à **Emmanuel Maurin**, notre intermédiaire « Patrimoine » et instigateur (entre autres) du projet Avignonnais qui fait l'objet d'un chapitre de ce mémoire. Merci pour ces opportunités de travail et d'échange en bonne compagnie.

Un grand merci à messieurs **Frédéric Dubois** et **Georges Jeronimidis**, rapporteurs de cette thèse. Merci pour cet investissement que l'on sait difficile, et merci de l'intérêt que vous avez manifesté à plusieurs reprises pour mon travail.

Merci à **Romain Rémond** pour son aide durant le travail de thèse ; merci d'avoir accepté cette invitation ; j'ai eu l'occasion de lire, relire et apprécier son travail de thèse, et sa présence dans mon jury a été un grand plaisir.

Merci à **Luca Uzielli** pour son soutien et sa confiance au cours des années de thèses et des échanges multiples. Je lui suis reconnaissant du travail de coordination scientifique qu'il a mené à la direction de l'action COST précédemment citée, et qui a largement contribué à ouvrir mon champ d'horizon scientifique. Merci infiniment.

Merci enfin à **Bernard Maurin** d'avoir complété ce jury de thèse et d'avoir suscité un vif intérêt à la lecture de mon manuscrit.

Merci à mes relecteurs officiels, **Tancrède Almeras**, **Bertrand Marcon**, **Delphine Jullien** et **Alexan Colmars**, les travailleurs de l'ombre, ceux qui ne figurent pas sur les premières de couvertures : merci Tancrède pour ta disponibilité à l'égard des thésards en général, ta méthode, tes idées et l'envie de les partager, et enfin tes encouragements (ou coups de pieds au cul) pour les derniers bouclages. Merci Bertrand de t'être penché sur mon mémoire en pleines vacances de glisse... merci pour ton expertise (et le reste vient plus bas). Merci Delphine d'avoir inséré cette relecture dans ton emploi du temps, et merci pour toutes les discussions personnelles et professionnelles tout au long de la thèse. Merci enfin à Alexan, mon petit frère désormais agrégé (bravo !), d'avoir soumis mon mémoire à l'examen critique du champ littéraire et philosophique, et de m'avoir proposé une lecture de synthèse au-delà de mes espérances.

Merci à **tous les thésards, stagiaires et post-docs** passés dans l'équipe Mécanique de l'Arbre et du Bois. Merci **Bertrand**, l'homme qui grimpe sur les façades des églises, de m'avoir pris sous ton aile. Merci **Karl** pour ta mauvaise humeur anti-conventionnelle, et évidemment les moments de musique partagés sur la scène du JAM. Merci **Jana** pour tes conseils, tes mises en garde (qu'on ne comprend

qu'une fois que la fin de thèse est proche : on appelle cela maturité, non ?) et les bons moments passés à l'extérieur du labo. Merci **Cédric**, bienveillant compagnon de route, et bravo pour ton sérieux, ton intégrité au travail, dans une atmosphère toujours conviviale.

Merci à tous : **Florent, Paul, Mohammed, Arthur, ShanShan, Aida, Mamadou, Pevan, Nicolas, Julien**, et ceux de THM2, **Rodica, Wen, Antoine et Domoina**. Salut aux stagiaires « panneaux peints », **Adrien** et **Agnes**. Une pensée pour **Nadège**...

Merci aux permanents de l'équipe qui assurent la convivialité du « modèle MAB ». Merci **Joseph, Delphine, Olivier, Bruno, Thierry, Sandrine, Tancrede, Bernard(s)**.

Merci au personnel administratif du laboratoire qui nous simplifie la tâche quotidienne : **Gilbert Gobo** et **Reine Causse** qui m'ont souvent aidé, et bien évidemment **Chantal Romano**, secrétaire de l'équipe qui s'occupe de ses petits thésards comme de sa petite famille. Merci Chantal.

Merci à **Katya et Robert Lopez** de rendre le lieu de vie significativement plus agréable.

Merci à tous le personnel des **services communs de documentation, d'informatique, d'atelier (électronique et mécanique)**. Merci également aux collègues du **CIRAD** pour leur aide.

Merci au **Département de Mécanique**, les collègues, et principalement **les étudiants** : merci à ces derniers de nous remettre quotidiennement en question, nous obligeant à réévaluer constamment le niveau de nos connaissances effectives, et à sortir de notre bulle spécialisée. Merci à **Jean-Louis Keirgueme**, responsable de l'atelier du département, sans qui le système de mesure installé à Avignon ne serait resté qu'à l'état de projet.

Merci aux **CIES** et **IUFM**, structures apparemment en voie d'extinction, pour les formations d'enseignements dispensées dans le cadre du monitorat.

A mes collègues italiens de Florence : merci à **Paolo Dionisi-Vici**, qui le premier m'a initié à la science des panneaux peints. Merci à **Paola Mazzanti** qui a partagé ses expériences et ses doutes sur les panneaux peints avec beaucoup de simplicité. Merci à **Giacomo Goli** et **Linda Cocchi**, qui m'ont si bien accueilli dans leur laboratoire. Grazie a tutti.

Merci à **Takato Nakano** et **Hiroyuki Yano** de m'avoir reçu dans leur laboratoire de Kyoto et Uji au Japon. Merci infiniment à chacune des deux équipes, particulièrement aux étudiants (master, doc et post-doc) pour m'avoir réservé un accueil si chaleureux. どうもありがとうございました。

Merci à **Daniel Jaunard**, **Patrick Mandron**, les restaurateurs des projets menés à Avignon. Merci à **M.C. Leonelli**, de la Direction Régionale des Affaires Culturelles (DRAC) en Provence Alpes Côte d'Azur d'avoir facilité l'accès aux œuvres.

Merci à **Hubert Maigre** et **Fabrice Morestin** du **LAMCOS (INSA LYON)** pour les opportunités de mesures optiques 3D sur les panneaux peints et les réunions de travail à Lyon.

Merci à **David Hunt** qui continue de nous enrichir de son expérience bien après sa retraite.

Merci à **Sandy Leconte**, de la Cité de la Musique, de me faire confiance pour la suite.

Merci au **JAM** de Montpellier pour les soirées musicales après le travail.

Un grand merci **aux chimistes du site de la Gallera**, à Montpellier, pour le soutien moral et spécialement à Sandra, Ambra et Pierre pour l'organisation du pot de thèse.

Merci infiniment à **mes parents** pour leur soutien inconditionnel et leurs conseils éclairés tout au long de mes études.

Merci à la petite **Bastarda**, la bête poilue à quatre pattes qui nous manque tant.

Grazie a te, mia cara **Ambra**, di starmi vicina.

Merci à tous les lecteurs de ce manuscrit.

A tous ceux que je n'ai pas cités ou que j'aurais indignement oubliés, j'espère me faire pardonner bientôt.

Table des matières

Table des matières	2
Liste des symboles principaux	6
1. Introduction générale	8
1.1 La thématique des panneaux peints au LMGC	8
1.2 Le bois dans les panneaux peints et le patrimoine culturel	9
1.3 Les sciences dures au service de la conservation/restauration du patrimoine	10
1.4 Objectifs et organisation de la thèse	11
2. Problèmes mécaniques posés par les panneaux peints	14
2.1 Description des objets d'étude : les panneaux peints	14
2.1.1 Généralités	14
2.1.2 Diversité des panneaux peints et centralité du problème de courbure	16
2.2 Origine de la déformation des panneaux peints	17
2.2.1 Origine des déformations transitoires	17
2.2.2 Origine de la déformation permanente	18
2.3 Modélisation mécanique des panneaux peints : quelle physique, quelle échelle ?	19
2.3.1 Mécanique du solide « planche »	19
2.3.2 L'élément de volume représentatif dans le bois	20
2.4 Etat initial du solide de bois : champs de contraintes auto-équilibrés	21
2.4.1 Les contraintes de croissance	21
2.4.2 A propos de la fabrication du support bois pour un panneau peint	22
2.4.3 Les contraintes dans un panneau de bois liées à l'adsorption et désorption d'humidité	23
2.4.3.1 Géométrie du problème, paramètres de l'étude	23
2.4.3.2 Humidité dans le bois	25
2.4.3.3 Retrait et gonflement du bois	26
2.4.3.4 Effet des gradients de propriété	27
2.4.3.5 Effets des gradients d'humidité : contraintes d'origine hydriques	28
2.4.3.6 Synthèse	30
2.4.4 Similarités avec d'autres applications	31
2.5 Enjeux de l'instrumentation des panneaux	33
2.6 Enjeux des simulations : des outils pour la conservation	35
2.7 Quelques études mécaniques récentes sur des objets du patrimoine culturel	36
3. Eléments de rhéologie du bois : lois de comportement	38
3.1 Première approche du comportement mécanique	38
3.1.1 Loi de comportement générale	38
3.1.2 Elasticité	38
3.1.2.1 Orthotropie élastique	38
3.1.2.2 Dépendance de la matrice élastique au taux d'humidité	40

3.1.3	Retrait-Gonflement.....	41
3.1.4	Viscoélasticité linéaire	42
3.1.4.1	Description générale.....	42
3.1.4.2	Fonctions mathématiques et modèles rhéologiques associés	42
3.1.4.3	Orthotropie viscoélastique	45
3.1.4.4	Analyse des données de fluage	46
3.1.4.5	Viscosité et taux d'humidité	46
3.2	Les couplages hygromécaniques.....	47
3.2.1	Mécanosorption	48
3.2.1.1	Généralités	48
3.2.1.2	Modèle rhéologique et représentations graphiques pour les effets mécanosorptifs.....	49
3.2.1.3	Quelques remarques encore sur les modèles de représentation de la mécanosorption	51
3.2.2	Déformations permanentes transversalement aux fibres.....	52
3.2.2.1	Compression set	52
3.2.2.2	Du compression set à la pression de gonflement.....	53
3.2.3	Approches expérimentales et théoriques des couplages hygromécaniques	55
3.2.4	Influence de la contrainte sur le taux d'humidité.....	56
3.2.5	Influence de la contrainte sur le retrait gonflement	56
3.2.6	Autres couplages hygromécaniques : effets transitoires et couplages de structure.....	58
3.3	Synthèse.....	59
4.	Comportement d'un peuplier adapté à la modélisation des panneaux peints	60
4.1	Introduction	60
4.2	Données expérimentales	61
4.2.1	Remarques préliminaires.....	61
4.2.2	Matériel	61
4.2.3	Essais de fluage à humidité constante dans la direction radiale	61
4.2.3.1	Présentation	61
4.2.3.2	Résultats	62
4.2.3.3	Fluage relatif et taux d'humidité à travers la littérature	63
4.2.3.4	Modèle de fluage hygro-activé : Kelvin-Voigt généralisé	64
4.2.4	Essais de retrait-gonflement empêché	67
4.2.4.1	Présentation	67
4.2.4.2	Résultats de Mazzanti.....	68
4.2.4.3	Mise en évidence de l'endommagement	69
4.2.4.4	Note sur la représentation contrainte-déformation	71
4.3	Formulation du comportement	72
4.3.1	Choix d'un modèle rhéologique pour représenter le bois.....	72
4.3.2	Discrétisation de la relation de comportement sur un pas de temps Δt	73
4.3.2.1	Choix du schéma d'intégration	73
4.3.2.2	Discrétisation du comportement : 1ère formulation avec paramètres matériau constants	74
4.3.2.3	Discrétisation avec paramètres matériau variables (dépendants de l'humidité).	75
4.3.2.4	Restrictions thermodynamiques	76
4.3.3	Modélisation du compression set.....	77
4.3.3.1	Mécanisme associé au compression set.....	78
4.3.3.2	Formulation élastoplastique écrouissable et endommageable	78
4.3.3.3	Limite élastique et taux d'humidité.....	82
4.4	Identification des paramètres matériau	83
4.4.1	Paramètres viscoélastiques	83
4.4.2	Autres paramètres	84
4.4.3	A propos du retrait-gonflement « libre » des échantillons A et B	86
4.4.4	Modélisation des essais de Perkitny	88

4.5	A propos de la modélisation de la diffusion	88
4.5.1	TransPore 1D.....	89
4.5.2	Ajout des phénomènes d'hystérésis dans TransPore1D.....	89
4.5.2.1	Courbes d'hystérésis dans le bois	89
4.5.2.2	Modèle d'hystérésis implémenté dans TransPore1D	90
4.5.2.3	Identification des paramètres du modèle d'hystérésis	92
4.6	Conclusion du chapitre 4	92
5.	Proposition d'un modèle multicouche pour l'étude des panneaux peints	94
5.1	Introduction : panneau peint et multicouche : calcul local et calcul de structure	94
5.2	Intérêt des modèles de plaque pour les panneaux peints	95
5.2.1	Éléments finis 3d ou éléments de plaque pour les panneaux peints ?	95
5.2.2	Remarque sur les éléments coques	97
5.2.3	Éléments volumiques dégénérés SHB20.....	97
5.3	Théorie des plaques appliquées au bois massif et produits à base de bois	98
5.4	Cinématique de plaque	99
5.5	Théories de Kirchhoff et théorie de Reissner-Mindlin : importance du cisaillement transversal (CT) dans les panneaux peints.....	100
5.5.1	Le cisaillement transversal (CT) dans les matériaux composites	100
5.5.2	Mise en évidence des cisaillements induits par le retrait gonflement	100
5.5.2.1	Conséquences, discussion.....	101
5.6	Formulation du modèle de plaque pour les panneaux peints	102
5.6.1	Cinématique de plaque	102
5.6.2	Loi de comportement	103
5.6.2.1	Calcul de P et Q dans la base principale (T,L,R)	103
5.6.2.2	Rotation vers la base globale (x,y,z).....	104
5.6.2.3	Synthèse.....	104
5.6.2.4	Equilibre et forces extérieures.....	106
5.6.2.5	Formulation avec restriction de cisaillement	109
5.6.2.6	Retour sur le calcul de courbure avec le DK	111
5.7	Code de plaque élément finis.....	112
5.7.1	Éléments plaque DKT, DST.....	112
5.7.2	Mise en œuvre du code de calcul	113
5.8	Validation du code mécanique de structure	114
5.8.1	Test de cisaillement induit pur.....	115
5.8.2	Test de déformée saisonnière.....	117
6.	Applications des outils mis en place	120
6.1	Principes généraux	120
6.2	Analyse des variations de courbure sur des panneaux en situation d'exposition	120
6.2.1	Cas d'étude : un panneau peint conservé dans une église	120
6.2.1.1	Présentation du cas d'étude	120
6.2.1.2	Mise en évidence du problème de courbure par des techniques optiques	122
6.2.1.3	Hypothèse d'une planche libre	123
6.2.1.4	Recalage entre deux prises de vues.....	123
6.2.1.5	Mesures In-situ	125
6.2.1.6	Résultats : une base de données sur les panneaux peints	125
6.2.1.7	Observation et estimation du débit.....	126
6.2.1.8	Paramètres de la modélisation pour la diffusion.....	127
6.2.1.9	Méthode d'identification et de validation de la perméabilité de la couche picturale.....	128

6.2.2	Calcul local	130
6.2.2.1	Solution locale et solution du problème de structure	130
6.2.2.2	Identification sur les données expérimentales et validation du code	131
6.3	Genèse de la courbure permanente	133
6.3.1	Probabilité des déformations permanentes dans l'église	133
6.3.2	Cas théorique pour la description des déformations permanentes en structure	133
6.3.3	Conclusion sur la courbure permanente	137
6.4	Outils pour la prédiction	138
6.4.1	Enjeux des prédictions	138
6.4.2	Démarche générale.....	138
6.4.3	Effet des chauffages hivernaux.....	140
7.	Conclusion générale.....	142
7.1	Bref retour sur les travaux effectués	142
7.2	Perspectives et projets en cours	143
7.2.1	Données expérimentales	144
7.2.2	Lois de comportement pour le bois.....	144
7.2.3	Les techniques optiques	144
7.2.4	Modèle de plaque.....	145
7.2.4.1	Test et modifications	145
7.2.4.2	Déformation de surface et craquelures.....	146
7.2.5	Collaboration avec les acteurs du patrimoine	146
	Bibliographie	148

Liste des symboles principaux

Cette liste reprend les symboles les plus utilisés dans le mémoire. D'autres pourront être définis au cours du document.

Abréviations

HR	Humidité Relative de l'air (éventuellement RH pour <i>Relative Humidity</i> en anglais).
mc	Taux d'humidité du bois, d'après l'anglais <i>Moisture Content</i>
emc	Taux d'humidité du bois à l'équilibre avec l'environnement (<i>Equilibrium Moisture Content</i>)
PSF	(Dans le texte) Point de saturation des fibres – (en indice) relatif au PSF, ex : h^{PSF} le taux d'humidité au <i>PSF</i> .

Repères

$(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$	Repère local d'orthotropie - orthonormé direct de permutations $(\vec{R}, \vec{T}, \vec{L})$ ou $(\vec{L}, \vec{R}, \vec{T})$
$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Repère du panneau modélisé par une plaque où $\vec{z}$ est la normale à la plaque

Scalars

h	Taux d'humidité interne du bois	[%]
θ	Angle de rotation du repère local (T, L, R) vers le repère global (x, y, z) , $\theta = (\vec{T}, \vec{x})$	[rad]
ζ	Courbure d'une planche homogène ou courbure locale	[m ⁻¹]
J	Complaisance unidirectionnelle	[MPa ⁻¹]
E	Module d'Young unidirectionnel	[Mpa]
G	Module de cisaillement	[Mpa]

Vecteurs

$\vec{U}$	Vecteur des déplacements
$\vec{F}$	Vecteur des forces extérieures

Liste des symboles principaux

Matrices

D	Matrice de comportement de plaque (8x8 ou 6x6 sans les cisaillements transverses)
K	Matrice de rigidité globale de plaque

Tenseurs du 2nd et 4^{ème} ordre

ε	Tenseur du 2 nd ordre des déformations	
σ	Tenseur du 2 nd ordre des contraintes	[MPa]
P	Tenseur du 2 nd ordre de déformations de couplage	
Q	Tenseur du 4 ^{ème} ordre des complaisances	[MPa ⁻¹]
B	Tenseur du 2 nd ordre de contraintes de couplage	[MPa]
C	Tenseur du 4 ^{ème} ordre des rigidités	[MPa]
α	Tenseur des coefficients de retrait-gonflement (3 composantes non nulles dans le repère d'orthotropie local). Les composantes sont notées $\alpha_T, \alpha_L, \alpha_R$	[%/%]

Autres

ΔX	Incrément de la variable X (généralement utilisé sur un pas de temps Δt)
------------	---

Indices

e	Indice relatif aux composantes élastiques
vs	Indice relatif aux composantes viscoélastiques
ms	Indice relatif aux composantes mécanosorptives
p	Indice relatif à la composante de déformation permanente

Principaux instituts et organismes partenaires de cette étude

LRMH	Laboratoire de recherche des monuments historiques (Paris)
DEISTAF	Dipartimento di economia, ingegneria , scienze e tecnologie agrarie e forestali (Firenze)
LAMCOS	Laboratoire de mécanique des contacts et des structures (Lyon)
LERMAB	Laboratoire d'étude et de recherche sur le matériau bois (Nancy)
COST	European Cooperation in Science and Technology

1. Introduction générale

1.1 La thématique des panneaux peints au LMGC

Cette thèse de doctorat s'est déroulée au sein de l'équipe de Mécanique de l'Arbre et du Bois (MAB) du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) de Montpellier. L'intérêt de l'équipe pour la préservation du patrimoine culturel sur support en bois remonte à 2004, date à laquelle l'équipe a été contactée par le Louvre pour une expertise concernant la Joconde, célèbre tableau de Léonard de Vinci peint sur un moins célèbre panneau de peuplier. Les conservateurs impliqués souhaitaient obtenir des informations sur les déformations du support bois engendrées par les variations (même minimales) à l'intérieur du caisson climatique dédié à ce panneau. Une seconde partie de l'étude concernait le risque de propagation de la fissure présente sur la partie supérieure du panneau. En 2006, les premiers résultats de ces travaux ont été regroupés avec d'autres projets scientifiques autour de la Joconde (notamment de nombreuses analyses d'imagerie sur la couche picturale) dans un livre édité par le musée ([Mohen, *et al.* (2006)]).

Cette première expérience avec un panneau peint a permis de construire un réseau de partenaires scientifiques et d'acteurs de la culture : en 2007, le Laboratoire de Recherche des Monuments Historiques (LRMH) propose à l'équipe MAB de financer une étude de cas à long terme sur un panneau peint plus accessible que la Joconde (dont la vitrine est ouverte seulement une journée par an). En collaboration avec la Direction Régionale des Affaires Culturelles (en la personne de Marie-Claude Leonelli), et de restaurateurs de panneaux peints (Daniel Jaunard et Patrice Mandron), un panneau peint conservé dans une église d'Avignon (église St Didier) est choisi pour être instrumenté *in-situ* afin de rendre compte des effets sur le panneau des variations climatiques à l'intérieur de l'église, a priori moins propices que celles exigées par les conservateurs dans les musées.

La collaboration s'est étalée jusqu'à la fin de l'année 2010. Plusieurs rapports d'activité concernant ce cas d'étude ont été produits pour le LRMH, et mis à disposition des personnels conservateurs et restaurateurs impliqués [Colmars et Gril (2007); Colmars, *et al.* (2010); Dureisseix, *et al.* (2009)].

Parallèlement, c'est en 2007 que le Conseil européen pour la recherche (COST) accepte de financer une action de coordination entre le secteur de la recherche et celui de la culture au niveau européen ; l'action COST IE0601 « *Wood science for Cultural Heritage* »¹ rassemble conservateurs, restaurateurs, ingénieurs et chercheurs en groupes de travail tournés vers les objets en bois du patrimoine culturel. Les colloques organisés dans le cadre de ce financement européen ont évidemment contribué à renforcer les collaborations déjà évoquées et à en créer de nouvelles.

Entre 2006 et 2009, Bertrand Marcon a effectué la première thèse de l'équipe MAB sur le sujet des panneaux peints, en cotutelle avec l'université de Florence : son travail couvre différents aspects de l'étude des panneaux peints, de l'instrumentation *in-situ* et en laboratoire à la modélisation numérique. Tout comme la présente thèse assure la continuité thématique avec la précédente, un nouveau doctorant devra avoir la tâche en 2011 de prendre le relai, notamment sur les aspects expérimentaux, nous aurons l'occasion d'y revenir.

¹ www.woodculther.com

Les travaux abordés dans ce mémoire ont pour double objectif d'apporter des réponses aux problèmes soulevés par les acteurs de la conservation, et de contribuer à éclaircir des problèmes mécaniques fondamentaux posés par le matériau bois dans son utilisation comme support de peinture.

1.2 Le bois dans les panneaux peints et le patrimoine culturel

Le bois est le matériau produit par l'arbre duquel il constitue l'essentielle partie du tronc, que les artisans et les industriels transforment, et sur lequel les scientifiques se penchent aujourd'hui encore pour en comprendre la genèse, les fonctions biologiques ou anthropologiques, ou encore le comportement mécanique dont il sera question ici. Délaissé progressivement à la faveur des matériaux modernes conçus et fabriqués par l'homme, les enjeux environnementaux de notre époque contribuent (de manière modérée) à le replacer dans l'actualité industrielle et scientifique. On l'apprécie dans la construction pour ses bonnes propriétés mécaniques spécifiques (propriétés mécaniques rapportées à la masse volumique), ses vertus écologiques (stockage du carbone) et son esthétique naturelle, mais également pour ses extractibles aux exploitations diverses (coloration, arômes), et plus important encore pour ses fibrilles de cellulose dont on exploite les excellentes propriétés mécaniques² en concevant de nouveaux composites après extraction ou par bio-mimétisme. Toutes ces applications restent marginales au regard des enjeux économiques qui sont rattachés à son utilisation dans l'industrie papetière, la production d'emballage et la valorisation énergétique qui doivent être relégués dans la mesure du possible en bout de cycle de vie du matériau pour en minimiser l'impact écologique.

Le bois est également un matériau de mobilier, de sculpture, et a couramment servi de support pictural pour une période qui s'étale du XIII au XVIII^{ème} siècle. C'est sous cette dernière forme qu'il nous intéresse ici. C'est un matériau léger et de disponibilité courante, mais dont on attend néanmoins des qualités spécifiques (usinabilité, état de surface, stabilité dimensionnelle) dans la préparation qui le conduit de l'artisan à l'artiste. La préparation du panneau relevait probablement d'un savoir faire très apprécié : les artisans travaillaient au préalable ce support, l'aplanissaient et cherchaient à le stabiliser (voir §2.4.2), pour le rendre utilisable en tant que support de peinture.

Il est assez difficile d'estimer le nombre de peintures qui ont été peintes sur des panneaux de bois : le fait qu'un tableau ait été peint sur toile ou sur bois n'a, semble-t-il, pas été toujours un sujet d'intérêt pour les conservateurs ([Bomford (1995)]). La question est parfois même très complexe puisque que certaines peintures peintes originellement sur bois auraient été transférées ultérieurement sur des toiles : cette méthode, réservée généralement aux cas pour lesquels la conservation du support bois devenait trop incertaine, consiste à prélever la couche picturale sur une couche de bois la plus fine possible et de l'appliquer sur le nouveau support. Le caractère second de cette discussion pour les spécialistes a déteint sur l'amateur d'art moyen qui se doute rarement de la présence d'une planche de bois au revers des tableaux. Remarquons à ce sujet que le département peinture du Louvre ne fait pas mention du support des œuvres ; la Joconde sur ce point comme sur bien d'autres fait exception à la règle, puisqu'on peut lire sur le cartel fixé au mur : « peinture sur bois (peuplier) ».

Si nous parlons des qualités du bois qui en ont fait un matériau chargé d'histoire, il faut également rappeler ses inconvénients majeurs. L'un des principaux est l'instabilité dimensionnelle associée au

² Le module élastique en traction de la cellulose est d'environ 140 GPa, à comparer aux quelques 200 GPa de l'acier, à celui des fontes situées entre 80 et 170 GPa, et de l'aluminium à 70 GPa. Si nous rapportons ces valeurs à la masse volumique des matériaux respectifs pour obtenir les propriétés spécifiques (celle de la cellulose, ou de composites à base de cellulose, étant de l'ordre de 1.5g/cm³), alors la cellulose remonte à la première place.

départ et à l'arrivée d'eau qui se fixe sur le bois comme sur tout matériau hygroscopique. L'histoire du matériau bois, c'est aussi l'histoire des méthodes ingénieuses déployées pour le réduire à la volonté de son utilisateur, pour l'empêcher de bouger, le libérer de l'incertitude propre aux objets livrés par la nature. Anticiper les mouvements du bois avant de réaliser un meuble, un parquet, limiter ses déformations pour préserver la couche de peinture qui a été apposée sur un support destiné à se déformer indéfiniment : c'est une histoire de savoir-faire avant d'être une histoire de savants.

Notre travail ici n'est pas de figer le bois support des panneaux, mais d'en comprendre le comportement mécanique afin d'apporter des réponses aux acteurs de la conservation. Malheureusement notre champ d'action est très limité : pour ces tableaux dont le support avait été mal conçus, ou ceux qui ont connu des conditions de conservation défavorables, le mal est fait. Pour ceux qui ont connus des actes de restauration trop invasifs qui ont provoqué par la suite des fissurations, nous dirons également que le mal est fait.

Qu'entendons-nous donc faire sur ces panneaux ? Etudier leur support bois avec le recul des sciences des matériaux pour tenter d'en effleurer la complexité. Enfin pour mettre en exergue cette application originale des sciences du bois en lien avec notre patrimoine culturel, il s'agira de montrer l'intérêt scientifique des questions de mécaniques posées par la conservation des panneaux de bois peints, et leurs interactions possibles avec les champs de la recherche moderne (mécanique des matériaux).

Dans ce mémoire nous adopterons tantôt le point de vue du conservateur en essayant d'évaluer le risque associé aux modifications de l'ambiance de conservation, et tantôt celui des restaurateurs en procédant au diagnostic technique de l'œuvre en vue d'éventuelles interventions.

1.3 Les sciences dures au service de la conservation/restauration du patrimoine

La contribution des sciences « dures » à la conservation du patrimoine n'est pas un phénomène nouveau, et si besoin est, les travaux cités dans la suite en apporteront les preuves. On peut penser, en revanche, que la dialogue entre ces disciplines a toujours été aussi difficile qu'aujourd'hui.

Sensibiliser les scientifiques à la déontologie de la conservation est une tâche laborieuse. Il arrive très souvent que dans le cadre des activités liées au patrimoine culturel, le scientifique n'ait pas accès, ou partiellement (dans l'espace et dans le temps), à son objet d'étude. En acceptant de travailler sur des objets du patrimoine plutôt que sur des répliques de laboratoires, nous prenons le risque de manquer d'information et d'avoir à résoudre des problèmes aux données incomplètes, des problèmes « mal posés ». L'ordre logique (habituel) dans lequel les protocoles expérimentaux sont conçus et les questions formulées s'en trouve souvent modifié. Néanmoins le fait de travailler sur des objets du patrimoine est un moyen de rapprocher, non pas les sciences et l'art, mais plus simplement les sciences physiques et les sciences de la conservation ou restauration du patrimoine, en nous recentrant sur les préoccupations de nos interlocuteurs.

Réciproquement, effectuer le transfert de connaissance de la recherche fondamentale vers les acteurs chargés des applications requiert du temps, et une grande maîtrise des concepts utilisés. Lorsqu'il s'agit d'un sujet de recherche encore jeune (ce que nous pensons être le cas ici), l'exercice de communication devient périlleux : les décalages entre les cheminements de pensée et le vocabulaire employé par les différents corps de métier qui collaborent peuvent être vertigineux. Pour le traduire en exemple, nous dirons que les deux concepts fondamentaux du mécanicien que sont la contrainte (σ) et la déformation (ϵ), ne font évidemment pas partie de la boîte à outils des acteurs du patrimoine. Ainsi une grande part de notre travail consiste à faire le lien entre les grandeurs physiques manipulées habituellement en milieu de conservation (humidité relative de l'air, courbure ou flèche des panneaux, géométrie des fissures ou autres défauts), et celles souvent plus abstraites que nous utiliserons pour la modélisation mécanique des problèmes associés.

Les multiples programmes scientifiques développés à l'échelle nationale ou européenne ont pu favoriser l'interdisciplinarité ou la communication entre les sciences dures et les sciences de l'art, permettant ainsi de mieux appréhender ces problèmes de dialogue et de collaboration en attendant de les résoudre. Certains de ces programmes ont pour mission directe la préservation du patrimoine culturel (ICOM-ICOMOS)³ et font régulièrement appel aux laboratoires de recherche, d'autres sont réciproquement des actions ponctuelles d'ouverture du monde de la recherche à celui de la culture (action COST IE0601 citée précédemment).

Le cadre de travail qui vient d'être décrit a été pour moi très stimulant. J'ai apprécié de collaborer et d'échanger avec des spécialistes divers, de la conservation à la mécanique des solides. Mon immersion dans le milieu de la culture m'a permis de repenser mon rapport à ce fameux « patrimoine culturel », qu'il ait la forme classique d'un tableau, d'un instrument de musique, d'un bâtiment, ou celle plus intangible d'un savoir-faire ou d'un paysage.

1.4 Objectifs et organisation de la thèse

Dans le cadre de cette thèse nous proposons donc de mettre en œuvre les outils et les concepts développés dans le cadre des sciences du bois et de la mécanique des matériaux sur l'objet d'étude que constitue le support bois des panneaux peints. Les objectifs de ce travail sont multiples, ils vont de la formulation mathématique des comportements hygromécaniques du support bois et leur mise en œuvre sous forme de schémas numériques adaptés, à la simulation de cas d'étude ou de cas génériques de sollicitations mécanique des panneaux. Ces outils doivent à la fois expliquer les phénomènes mécaniques mis en jeu, faciliter les transferts de connaissances à destination des spécialistes de l'application et proposer des méthodologies pour la conservation ou la restauration futures des œuvres.

Bien qu'étant souvent contactés au titre d'experts du matériau bois, nous avons été souvent mis en échec devant les problèmes mécaniques posés par la conservation des panneaux peints. Il nous a fallu donc nous rendre à l'évidence suivante : les outils actuels de mécanique du bois sont insuffisants à démêler l'ensemble du problème. La description des phénomènes de couplages hygromécaniques dans le bois, résultants des interactions entre l'humidité présente dans le matériau, le comportement mécanique de ce dernier et les conditions environnantes, constitue encore de réelles difficultés théoriques et expérimentales : l'anisotropie (multiplicité des directions pour la description mécanique et les essais expérimentaux), la diversité des chargements pour lesquels il faut caractériser ces comportements, les effets d'échelle et la diversité propre à ce matériau font qu'il n'existe pas encore d'outil assez complet pour en faire la synthèse. Ainsi l'objectif de notre travail n'est pas « seulement » d'appliquer des outils existants à une application qui ne serait finalement qu'un cas particulier des connaissances théoriques actuelles, mais plutôt d'évaluer les limites de l'approche courante confrontée au problème des panneaux peints, puis de la compléter si nécessaire par de nouveaux outils utiles aux deux disciplines, et enfin de définir les besoins de recherche complémentaires.

C'est probablement pour cette même raison, à savoir l'insuffisance des outils mécaniques actuels à décrire des phénomènes complexes, que la hiérarchie entre « savoir » et « savoir-faire » bascule souvent, et c'est pourquoi tout au long de ce mémoire, nous nous efforcerons de montrer l'intérêt des problèmes mécaniques posés par les panneaux peints aux sciences du bois, et que nous défendrons la pertinence de notre démarche pour apporter des réponses aux acteurs de la conservation.

Nous proposons pour ce faire d'articuler notre propos de la manière suivante : le chapitre 2 sera entièrement consacré à l'étape de modélisation du problème mécanique général auquel nous avons été

³ ICOM : international council of museums, ICOMOS : international council of monuments and sites

confrontés. Cette étape de modélisation est destinée à fournir un cadre compréhensible par tous et adapté à l'utilisation des outils de la mécanique des solides et des sciences du bois.

Les trois chapitres suivant constituent le développement de l'outil (ou des outils) de calcul répondant au problème modélisé. Le chapitre 3 sera l'occasion de confronter l'état actuel des connaissances sur le comportement hygromécanique du matériau bois, leur pertinence au regard de notre application, et les besoins encore nombreux à combler. L'étape suivante (chapitre 4) proposera une mise en équation de certains de ces mécanismes. Nous procéderons également à l'identification des paramètres alimentant nos modèles, en partie grâce à des essais menés durant la thèse. Devant l'étendue de la tâche expérimentale nécessaire à ce travail, nous nous appuierons très largement sur des données obtenues par des collaborateurs de ce projet en tentant d'y apporter notre contribution en termes de modélisation.

Dans le chapitre 5, nous dépasserons l'échelle du matériau pour arriver à l'échelle de la structure, représentée au minimum par une planche de panneau peint isolée, avec pour objectif à long terme l'étude d'assemblages plus complexes : nous reviendrons largement sur l'intérêt d'une telle approche en nous appuyant aussi souvent que possible sur des éléments de mathématique simples, et de manière plus pragmatique en faisant le lien avec les instrumentations ou les restaurations pratiquées aujourd'hui sur les panneaux peints.

Nous terminerons évidemment par un chapitre tourné vers les applications (chapitre 6). Une large partie sera consacrée au cas d'étude proposé par le LRMH, faisant l'inventaire des outils techniques (*in-situ* et en laboratoire) qui ont été appliqués à ce panneau. Ce « compte-rendu d'intervention » sera complété par l'utilisation de l'outil numérique au service d'une compréhension plus générale des mécanismes mis en jeu dans les panneaux de bois peints.

2. Problèmes mécaniques posés par les panneaux peints

2.1 Description des objets d'étude : les panneaux peints

2.1.1 Généralités

Les panneaux en bois peints sont généralement composés d'un support de bois (une planche ou plusieurs reliées entre elles) dont une des faces est recouverte d'une ou plusieurs couches de préparation destinées à recevoir la peinture et le vernis final. La préparation de ces panneaux peints, leur conservation et leur restauration font appel à différents métiers : jadis métiers du bois, peintre, doreur... auxquels viennent s'ajouter aujourd'hui ceux de conservateurs, restaurateurs, chercheurs et ingénieurs. Cette grande diversité dans la constitution et la mise en œuvre de ces objets rend leur conservation extrêmement complexe, comme cela a été mis en évidence lors du colloque qui s'est tenu au Getty Museum de Los Angeles en 1995 (cf. [Dardes et Rothe (1995)]).

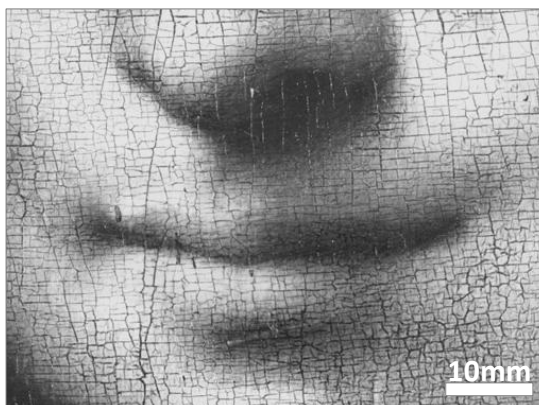


Figure 2-1: craquelures sur face peinte⁴ : le sourire de Mona Lisa.

Après plusieurs siècles d'existence, les panneaux peints présentent des signes visibles, caractéristiques, liés en partie au comportement hygromécanique du support bois. Les « pathologies » des panneaux peints sont tantôt observables sur la couche picturale où des réseaux de craquelures orientés se développent en surface⁵ (Figure 2-1), tantôt sur le support. Par exemple, chaque planche de bois constituant le support d'un panneau peint, et dont on peut supposer qu'elle était plate au moment

⁴ La Joconde et d'autres œuvres des musées parisiens sont visibles sur le site du C2RMF (Centre de recherche et de restauration des musées de France), à l'adresse : <http://www.c2rmf.fr/>

⁵ Voir par exemple le travail de caractérisation des craquelures sur la Joconde ([Ravaud (2006)]). Les différences entre les craquelures développées sur les supports bois et celles apparaissant sur les peintures sur toile ont été discutées par [Mecklenburg (2010)] : certaines fissures dans les huiles sur toile sont dues aux propriétés des composants de la peinture (température de transition vitreuse, fragilité).

de l'application de la peinture, présente aujourd'hui un tuilage (plus ou moins accentué selon les œuvres) : on considère généralement que cette courbure est permanente. L'aspect visuel du tableau s'en trouve souvent dégradé, par la courbure elle-même ou plus indirectement parce que cette même courbure peut accentuer le problème de fissuration et de décollement de la couche picturale.

Dans le cas de supports comprenant plusieurs planches, la couche picturale se fissure aux jointures, et cela nécessite de combler ces nouveaux espaces avant de pouvoir la restaurer (repeindre). Là encore, sous l'action combinée d'efforts extérieurs et de variations de l'environnement, les couplages hygromécaniques propres au bois conduisent à des déformations permanentes (du panneau comme des cales qui ont été insérées). Pour cette raison, ce type de restauration n'est généralement que temporaire, et les restaurateurs sont contraints de répéter régulièrement l'opération.

L'objectif des conservateurs a longtemps été de préserver la peinture en négligeant totalement les propriétés du support. Ainsi, jusque dans les années 60-70, les restaurations ont consisté à maintenir la planéité des panneaux à l'aide d'autres éléments de bois (de type poutre), sous la forme de traverses ou de parquetages⁶ (Figure 2-2). On sait bien aujourd'hui qu'empêcher les déformations du bois est une solution très rarement viable car celui-ci va développer des efforts (contraintes) importants lorsqu'il est empêché de gonfler, de fléchir, etc., avec pour conséquence plausibles des fissurations du support menaçant la conservation des œuvres (fissuration et/ou décollement de la peinture). C'est précisément ce qui s'est produit sur le panneau de la Figure 2-2 : le parquetage posé dans les années 70 s'est révélé trop rigide, menant à une fissuration du support ([Dureisseix, *et al.* (2011)]).

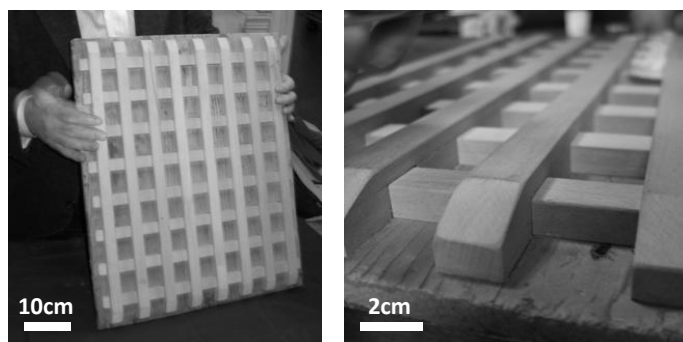


Figure 2-2 : un parquetage à la française, posé au revers d'un panneau peint, chargé d'empêcher la courbure du panneau : photo générale à gauche, détail à droite. Sur ce parquetage les montants (verticaux, sens du fil du bois) sont collés au panneau tandis que les traverses (horizontales, perpendiculaires au fil) ont été glissées dans les montants (vue de détail). Cette solution est prévue pour limiter la flexion du panneau tout en autorisant le retrait gonflement dans la direction perpendiculaire au fil (cf. §2.4.3.2).

L'évolution naturelle des pratiques de restauration (par simple retour d'expérience sur les cas traités) et l'apport progressif des sciences des matériaux ont participé à généraliser la notion de compromis entre un état plan des panneaux (critère esthétique) et l'intégrité du support nécessaire à celle de la peinture : [Buck (1972)] parlera de courbure « acceptable », comme pour illustrer la concession faite sur la déformation pour tendre vers un état « relaxé ». Les châssis à ressorts, constitués d'un châssis rigide (par rapport au panneau) et de ressorts chargés de limiter les déformations du support, sont la traduction en termes techniques de ce compromis. [Marcon (2009)] a proposé une première analyse numérique des ces châssis à ressorts, en complément d'une approche

⁶ Un parquetage est une technique de restauration. Il s'agit d'un quadrillage de traverses et de montants assemblé au revers d'un panneau peint pour en garantir la planéité. Généralement seuls les montants posés dans la direction du fil sont collés à même le panneau, car dans cette direction le retrait-gonflement du bois est faible (cf. §2.4.3.3). Perpendiculairement au fil les traverses sont assemblées dans les montants mais non collées.

expérimentale sur une réplique schématisée à la Figure 2-3. Bien qu'étant largement pratiquées, ces techniques sont rarement dimensionnées (c'est-à-dire calculées au cas par cas) dans le cadre des activités de restauration. Pour effectuer ce dimensionnement, l'approche du mécanicien sera de proposer un ou plusieurs modèles adaptés à l'objet d'étude et aux questions associées ; c'est sur ces modèles (comme représentation de la réalité) qu'il pourra développer ses outils et réaliser les calculs.

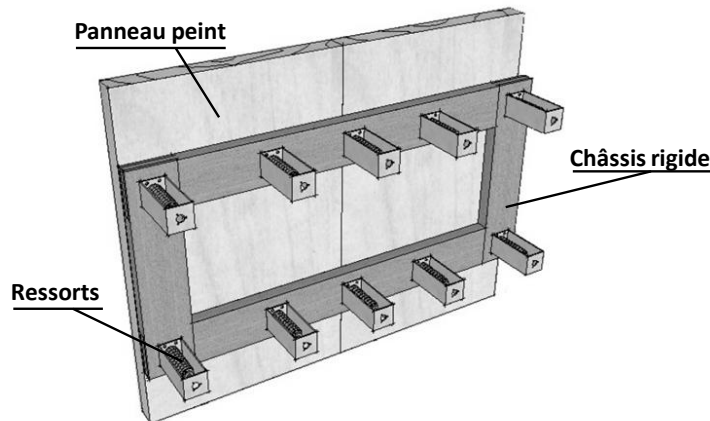


Figure 2-3 : modèle CAO du châssis à ressort expérimental de [Marcon (2009)] représentant un châssis rigide devant les planches constituant le panneau – dimensions totales d'environ 1.2m x 0.6m.

2.1.2 Diversité des panneaux peints et centralité du problème de courbure

Une des principales difficultés de la conservation des panneaux peints réside probablement dans leur diversité, qui est telle que les solutions développées par les restaurateurs correspondent souvent à du cas par cas. Il existe des panneaux peints constitués d'une planche, d'autres constitués de plusieurs planches assemblées par des traverses, des clous, parfois contraintes par un cadre, un châssis, un parquetage... Ces panneaux ont tous des épaisseurs différentes, des débits différents, et leur couche picturale se caractérise par une épaisseur et une composition très variables ; certains panneaux ont même été peints sur leurs deux faces. Les lieux d'exposition sont à l'origine de climats de conservation très divers, et la variabilité du bois (entre essences ou entre arbres) couronne ce constat. Cet état de fait est une difficulté majeure pour la conservation des panneaux peints, mais pourrait s'avérer être un avantage à terme pour comprendre les phénomènes liés au support bois dans leur généralité.

En effet, au milieu de cette diversité, la courbure des panneaux s'est imposée comme une pathologie de référence, celle commune à pratiquement tous les panneaux. A tel point que les spécialistes s'étonnent aujourd'hui de trouver des panneaux non courbés. Plus troublant encore, il semblerait que les panneaux courbés le soient le plus souvent dans le même sens⁷, avec le centre du rayon de courbure orienté du côté non peint.

C'est la raison pour laquelle nous avons fait de cette courbure la question centrale de nos travaux, et que nous avons travaillé à l'élaboration d'outils spécifiques capables de reproduire les scénarios mécaniques plausibles expliquant ce type de déformations.

⁷ On trouvera parfois des panneaux courbés dans le sens contraire, ce qui n'apparaîtra pas impossible au regard des explications données par la suite (sur la déformation due au débit notamment, voir §2.4.3.4). Cette analyse sur le sens de la courbure est modifiée dans le cas des panneaux fortement contraints, par exemple par un parquetage.

2.2 Origine de la déformation des panneaux peints

Pour être plus précis, la question de la courbure des panneaux peints doit être traitée en deux parties couplées. Première question que l'on peut poser après le constat qui vient d'être fait : pourquoi les panneaux peints, tels qu'on les observe aujourd'hui, sont-ils courbés de manière permanente ? Mais la question (plus simple) par laquelle nous allons commencer est la suivante : comment et pourquoi les panneaux continuent-ils à se déformer (se courber) aujourd'hui ?

2.2.1 Origine des déformations transitoires

Les artisans chargés de la préparation des panneaux savaient que le débit choisi pour le support influençait la courbure due aux variations d'humidité. Ainsi la valeur marchande qu'il associaient aux supports débités sur quartier (Figure 2-4) était plus grande que celle des prélèvements sur dosse [Uzielli (1995)], les premiers n'ayant théoriquement pas de déformation due au séchage (cf. §2.4.3.3). Néanmoins, sur un arbre donné, la largeur maximale d'un débit sur quartier sera plus petite que celle d'une dosse ; c'est une des raisons probables qui conduisait souvent à choisir des dosses ou des faux quartiers pour les plus grands panneaux qu'on souhaitait d'un seul tenant. Mais la déformation caractéristique due au débit des planches, et que nous expliquerons plus loin grâce à l'orthotropie matérielle, n'est pas la seule à rentrer en jeu dans le processus de déformation des panneaux peints.

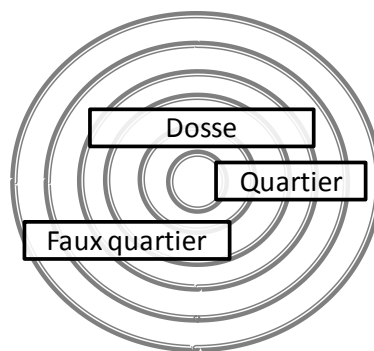


Figure 2-4 : désignation de quelques débits positionnés sur des cernes de croissance concentriques dans le plan perpendiculaire aux fibres.

Certains panneaux peints ont été, dès leur exécution, recouverts de préparation et/ou de peinture de chaque côté du support bois (notamment les volets des retables peints sur deux faces), et généralement ces panneaux peints sont très peu courbés par rapport à ceux qui ont été peints d'un côté seulement [Uzielli (1995)]. Dès lors que l'on avait fait ce constat (bien avant l'apparition de l'idée de conservation), il existait un lien manifeste entre la cause, c'est-à-dire l'asymétrie du panneau, et la conséquence, sa courbure. Nous serons amenés par la suite à établir une analogie entre ce phénomène et d'autres applications utilisant du bois et d'autres matériaux, bien au delà du domaine de l'art et de la culture (§2.4.4).

Les premiers travaux de mécanique publiés à propos de la courbure des panneaux peints expliquaient que la présence de la peinture (il faut entendre peinture + couche de préparation + vernis) constituait une barrière efficace contre les échanges d'humidité entre le bois du support et son environnement (Figure 2-5). [Buck (1963)] illustre ainsi les gradients d'humidité dans l'épaisseur d'un panneau peint qui sèche ou s'humidifie avec son environnement, ces gradients étant le résultat de la présence unilatérale de la peinture. En considérant l'hétérogénéité des retrait-gonflements induits par ces gradients d'humidité, il décrit le phénomène mécanique qui d'après lui conduira à la déformation permanente du support. A cette époque il ne dispose pas des connaissances suffisantes sur la diffusion et le comportement mécanique du bois pour étayer sa thèse de démonstrations mathématiques.

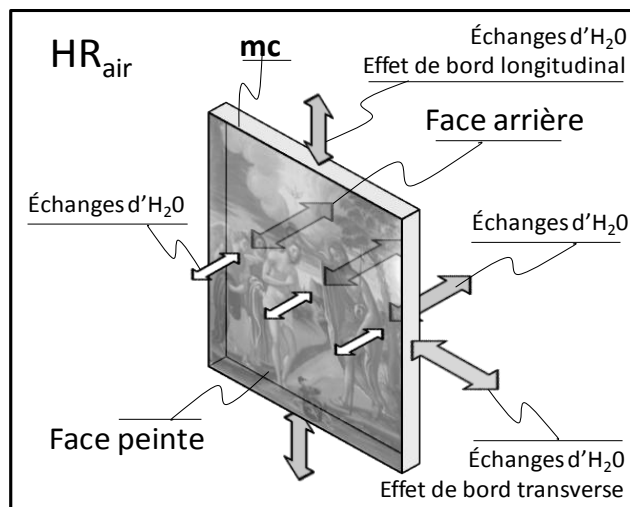


Figure 2-5 : la couche picturale, barrière pour les échanges d'eau entre le panneau (de taux d'humidité mc , cf. §2.4.3.2) et l'air environnant (d'humidité relative HR).

Des méthodes de conservation qui consistaient à badigeonner la contre face des œuvres avec différents produits (badigeons, cires) ont dans certains cas permis de préserver les faces peintes : ces méthodes visaient essentiellement à rendre les contre faces des œuvres aussi imperméables à l'eau que leurs faces peintes⁸. Si l'on traite le problème du point de vue de la conservation, ces traitements sont généralement proscrits en premier lieu (par les conservateurs), notamment parce qu'ils sont souvent irréversibles et qu'ils rendent invisibles les traces d'outils et les marques de fabrique qui renseignent l'histoire de l'œuvre. D'un point de vue mécanique, en ne considérant que la courbure du support comme problème à résoudre, il est tentant d'avoir recours à ce procédé. Toutefois il est difficile de créer une barrière conforme à la couche picturale ([Buck (1963)]), c'est-à-dire sans imperméabiliser trop ou trop peu la face arrière : en inversant les gradients d'humidité et leurs effets, on inverse le problème sans le résoudre. Aujourd'hui, ces constats ayant été fait, il n'est plus question de recouvrir les contre faces des œuvres et les restaurateurs ne contraignent plus les supports dans une planéité illusoire.

2.2.2 Origine de la déformation permanente

Plusieurs hypothèses pourraient être explorées pour expliquer la courbure permanente des panneaux peints, dont certaines ne sont pas d'origine mécanique : le vieillissement chimique ou physique peut contribuer à modifier les propriétés du matériau, et influencer indirectement la réponse mécanique du système.

Imaginons à titre d'exemple que le bois de la face arrière ait subi une fatigue hydrique, justifiée par le fait que les cycles d'humidité y ont été beaucoup plus fréquents que sur le bois situé sous la face peinte, et que ses propriétés mécaniques, par exemple le retrait-gonflement (décrit en détail au §2.4.3.3), en soit diminuées : sous ce genre d'hypothèse il est alors probable d'obtenir des déformations permanentes.

L'hypothèse d'un vieillissement n'a pas été explorée dans le cadre de notre travail. Nous nous sommes concentrés sur le comportement du bois moderne et sur les sollicitations climatiques classiques des panneaux peints, et nous proposerons des scénarios mécaniques susceptibles de

⁸ Ces méthodes visaient dans certains cas à protéger le panneau d'attaques par les insectes, de l'accumulation de saletés, ou encore pour en préserver l'aspect esthétique.

produire de telles déformations de courbure permanente, en lien avec les essais expérimentaux réalisés sur du matériau de type peuplier.

2.3 Modélisation mécanique des panneaux peints : quelle physique, quelle échelle ?

Pour poser le problème mécanique des panneaux peints sur bois, nous proposerons une approche traitant à la fois des questions « matériau » (c'est-à-dire le problème local) et des questions de structure (problème global ou planche de panneau peint soumise à des actions extérieures). La mise en équations de chacune de ces échelles est au départ identique : elle repose sur une approche classique de mécanique des milieux continus, dans laquelle nous allons considérer l'équilibre des solides. Pour autant il est indispensable de revenir aux particularités de chacune de ces échelles caractéristiques, en relation avec le matériau bois.

2.3.1 Mécanique du solide « planche »

Considérons l'équilibre mécanique d'une planche de panneau peint, définie par un solide Ω de frontière fermée $\delta\Omega$ sur laquelle sont appliqués des efforts ou pressions extérieures $\vec{F}$, et/ou sur laquelle sont imposés des déplacements $\vec{U}$ (Figure 2-6). Ceci est l'échelle de description de l'objet panneau peint : ces conditions aux limites sur la frontière (en forces et déplacements) sont liées aux différentes interactions avec des éléments d'origine (un cadre, des traverses servant à l'assemblage), ou encore des éléments ajoutés durant des restaurations (parquetage, traverses à ressorts) ; la seconde catégorie d'actions extérieures est volontairement mise en place dans le but déjà évoqué de maintenir le panneau dans un état plan, néanmoins la première, constituée d'éléments présents avant restauration, a souvent des interactions mécaniques indésirables avec la planche et des conséquences non négligeables sur la forme actuelle de l'œuvre.

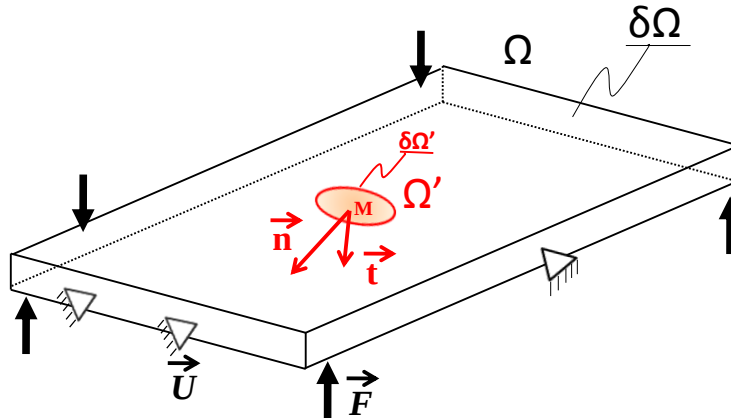


Figure 2-6: schématisation du problème mécanique global établi pour une planche de panneau peint (solide Ω de frontière $\delta\Omega$) sur laquelle sont imposés des déplacements $\vec{U}$ et des efforts extérieurs $\vec{F}$.

L'énoncé du principe fondamental de la mécanique appliqué à Ω nous permet d'écrire la relation entre l'état de contrainte (représenté par le tenseur des contraintes noté σ), et les efforts extérieurs volumiques, $\vec{f}_v$ (force de pesanteur) et $\rho\vec{\gamma}$ (accélération):

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}}(\sigma) dv + \int_{\Omega} \vec{f}_v dv = \int_{\Omega} \rho\vec{\gamma} dv \quad (2-1)$$

Dans le cas des panneaux peints, nous négligerons toujours le terme d'accélération pour nous intéresser à l'équilibre statique. Les effets volumiques de la pesanteur seront généralement négligés⁹ ; les panneaux sont rarement exposés ou stockés à plat, ce qui constituerait la situation la plus défavorable. Suivant l'orientation des planches dans le panneau (planches horizontales ou verticales), la pesanteur exerce des efforts de compression dans le sens des fibres ou transversalement aux fibres : dans le premier cas son influence sera supposée négligeable devant les autres contraintes, et dans le second elles pourront être évaluées au cas par cas. Si ces deux termes (efforts extérieurs volumiques) sont nuls, nous sommes ramenés au cas suivant :

$$\overrightarrow{\text{div}(\sigma)} = \vec{0} \quad (2-2)$$

A partir de cette étape nous distinguerons les panneaux peints sur lesquels s'exercent des efforts extérieurs ($\vec{F} \neq \vec{0}$) des panneaux peints sans efforts extérieurs imposés ($\vec{F} = \vec{0}$), appelées planches libres. L'objet des paragraphes suivants est de montrer l'intérêt de traiter le cas des planches libres. Ce cas « simplifié » pose plusieurs problèmes fondamentaux, comme l'origine des champs de contrainte auto-équilibrés dans la structure ; il nous servira de base pour traiter ultérieurement le cas statique général.

Nous serons également amenés à considérer l'équilibre mécanique de la matière à une échelle inférieure, l'échelle dite locale pour laquelle nous définirons le comportement du matériau bois : ceci revient à isoler une partie Ω' du domaine Ω , pour laquelle la même équation d'équilibre (eq.(2-2)) est vérifiée ; ce sous-domaine a pour l'instant une géométrie quelconque que nous allons définir en lien avec le matériau bois (§2.3.2). Les forces exercées par le solide environnant $\Omega - \Omega'$ sont représentées sur la Figure 2-6 par le vecteur contrainte $\vec{t}(M, \vec{n})$ où $\vec{n}$ est la normale extérieure à la surface frontière $\delta\Omega'$ de Ω' au point M.

2.3.2 L'élément de volume représentatif dans le bois

Pour une application directe de la mécanique des milieux continus au matériau bois, nous prenons en général la précaution de définir un volume élémentaire représentatif (VER), qui est l'unité volumique élémentaire (minimale) sur laquelle est défini le comportement moyen du matériau. Cette unité représentative doit contenir les principales hétérogénéités géométriques et mécaniques présentes aux échelles inférieures, assurant que ce VER est « grand » devant ces hétérogénéités ; dans le même temps le VER doit être de dimensions « petites » devant l'échelle supérieure de la structure.

Pour mieux appréhender la taille du VER, nous rappelons les principaux étages de description du matériau bois (Figure 2-7) qui se distinguent dans notre application par :

- l'échelle de la structure macroscopique [m] (billon, planche),
- le bois clair (sans défauts) [cm] (planche, échantillons pour les essais expérimentaux),
- les cernes de croissance [mm],
- les cellules [0,1 mm],
- les parois cellulaires, échelle microscopique [1µm].

⁹ Les effets du poids propre sont en général moindres pour le bois que pour d'autres matériaux, du fait de son module spécifique élevé (rapport de rigidité sur la masse volumique, donc le poids).

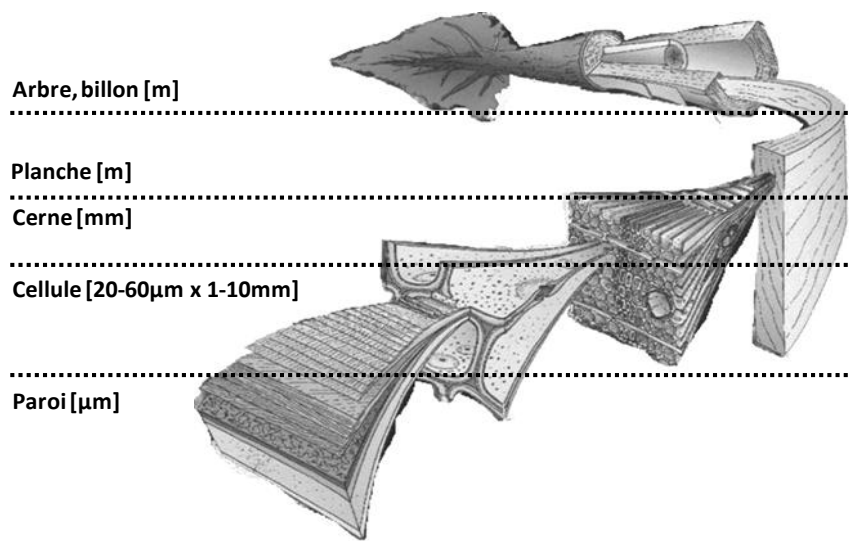


Figure 2-7 : structure du bois à différentes échelles et leur ordre de grandeur– adapté de [Harrington, *et al.* (1998)]

L'hétérogénéité due aux cernes de croissance laisse supposer que le VER adapté doive en intégrer un certain nombre (5-10) dans la direction radiale (direction d'alternance des cernes de croissance) ; le problème est différent dans la direction tangentielle aux cernes de croissance où l'assemblage de quelques cellules devrait suffire. On commence à entrevoir que le VER du bois n'a probablement pas une forme cubique. En effet dans la direction longitudinale (direction des fibres) on peut considérer que le VER doit intégrer plusieurs fibres (et les interfaces entre les fibres). Ceci nous conduit donc à un VER de plusieurs millimètres dans la direction longitudinale, quelques millimètres dans la direction radiale, et enfin quelques dixièmes dans la direction tangentielle pour englober quelques cellules.

En moyennant sur quelques cernes, nous serions censés englober approximativement les rayons ligneux et les vaisseaux des feuillus. Pour conclure nous pourrions remarquer que dans la configuration des panneaux peints, le VER ne sera pas toujours petit devant l'épaisseur du support (de l'ordre du centimètre dans la direction radiale suivant le débit).

2.4 Etat initial du solide de bois : champs de contraintes auto-équilibrés

Nous disposons d'un cadre général pour nos modèles. Par la suite, la définition d'une géométrie et d'un matériau nous obligeront à définir un état initial. Suivant l'état initial choisi (planche à un instant quelconque de la vie du panneau en exposition, planche avant que l'œuvre ne soit peinte, ou encore planche dans l'arbre avant qu'elle ne soit débitée...), il nous faudra régler la question du champ de contrainte à l'instant zéro. C'est pourquoi nous allons revenir brièvement sur l'origine des champs de contrainte dans un solide de bois depuis sa création dans l'arbre jusqu'au moment où il deviendra un panneau peint.

2.4.1 Les contraintes de croissance

Parce que le bois est un matériau qui a été généré dans l'arbre, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'état de contrainte auto-équilibré qui existe dans l'arbre sur pied, ainsi qu'à la fonction biologique des profils de contraintes caractéristiques observés ([Kubler (1987)]). Les arbres produisent un matériau non équivalent en compression et en traction, et développent parallèlement des méthodes

de croissance adaptatives pour assurer leur résistance aux chargements récurrents, la sollicitation dominante pour les arbres étant la flexion (qui produit simultanément de la compression et de la traction) : flexion du tronc sous l'effet du vent ou flexion des branches sous le poids des feuilles. L'arbre trouve des solutions multiples (excentrement des cernes de croissance, création de tissus spécifiques appelés bois de réaction) aux différentes sollicitations extérieures (la gravité en premier lieu, mais aussi le vent ou l'inclinaison du terrain). A ces contraintes de chargement viennent s'ajouter des contraintes de maturation : après que les cellules périphériques de l'arbre se sont divisées pour assurer la croissance de ce dernier, elles subissent une étape de maturation (lignification) au cours de laquelle se mettent en place des contraintes associées dites aussi « de maturation ». Ces différents phénomènes additionnés, contraintes de chargement et contraintes de maturation, constituent les contraintes de croissance qui contribuent peu à peu à l'état de contrainte auto-équilibré qui existera dans l'arbre (et dans l'arbre entier seulement) jusqu'à son abatage et le débit du bois.

L'intégrité de l'arbre est rompue à l'abatage, et il n'est pas garanti que le nouvel état d'équilibre trouvé par la matière en préserve la continuité originelle : le chemin vers l'équilibre statique engendre des contraintes parfois si élevées (au regard de la ténacité du matériau) que le bois se fend ; la grume « éclate » pour restituer l'énergie de déformation qu'elle ne peut absorber. Les fentes en bout caractéristiques sont particulièrement visibles sur certaines espèces comme l'eucalyptus ou le hêtre ([Jullien (1995); Laghdir (2000)]).

L'existence des contraintes de croissance, auxquelles viendront s'ajouter des contraintes de séchage (dont l'amplitude dépend des conditions aux limites imposées), ainsi que leur éventuelle maîtrise représentent des enjeux économiques certains, principalement liés à la perte de matière et la qualité du produit dans la valorisation du bois d'œuvre ([Thibaut et Gril (2003)]). Les questions de biomécanique de l'arbre associées concernent notamment les moyens développés par l'arbre comme la création de tissus spécifiques ([Barnett et Jeronimidis (2003)]).

Bien qu'ayant choisi de ne pas passer ce point sous silence, nous allons négliger les contraintes de croissance et leurs conséquences dans les supports de panneaux peints à la faveur d'autres sources de contrainte dans le matériau. On supposera donc que le matériau débité pour la fabrication du support de panneau peint est vierge de contraintes internes.

2.4.2 A propos de la fabrication du support bois pour un panneau peint

Si nous traitons le problème des champs de contrainte internes dans le support de panneau peint d'une manière chronologique, l'étape suivant les contraintes de croissance devrait être celle de la fabrication du support lui-même, la question principale étant : la fabrication du support ajoute-t-elle un champ de contraintes interne ?

Il est raisonnable de penser que l'artiste, ou la personne qui commandait ce panneau à l'artiste, préférerait un support plat qu'un support courbé. Pour ce faire il a été rapporté ([Walker (1995)]) que les artisans passaient par une première étape de séchage à l'air des planches au terme de laquelle le support était plus ou moins déformé (voir §2.4.3.3 et §2.4.3.5) ; ensuite le panneau était vraisemblablement aplani à l'aide d'outils manuels de menuiserie (Figure 2-8). Une fois aplani, le support pouvait être retaillé aux dimensions exactes de la commande. De cette manière, il est possible que les champs de contraintes induits soient négligeables.

En revanche on peut imaginer d'autres méthodes d'aplanissement du support, et envisager qu'elles aient été utilisées. Si l'on se place dans la problématique d'économie de la matière, on peut imaginer le séchage du support, déjà taillé aux dimensions finales, sous déformations empêchées depuis l'état vert. Dans ce cas des déformations et contraintes sont alors stockées dans le matériau, et il faut s'attendre à ce qu'elles s'expriment de nouveau lors des nombreux cycles hydriques auxquels le support sera soumis.

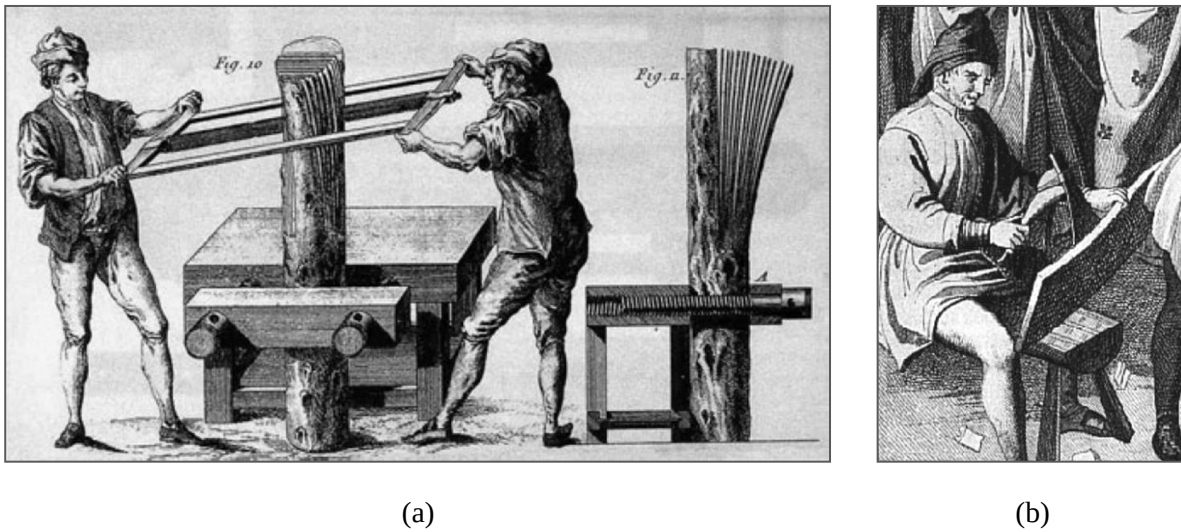


Figure 2-8 : préparation d'un support de panneau peint, extrait de [Walker (1995)] ; (a) sciage des planches (originellement tiré de Roubo, J. A. (1769) *L'art du menuisier*. Paris: Académie Royale des Sciences) ; (b) aplanissement de la surface du support au moyen d'une herminette (fin XIVème siècle).

L'évolution de l'état de contrainte dans le panneau, et l'interprétation des déformations résultantes (notamment la courbure permanente), peuvent varier fortement suivant les hypothèses retenues sur la préparation du support. Le peu d'information dont nous disposons nous obligera à faire l'hypothèse d'un support initialement plat et vierge de contraintes. Cet état de référence est associé à une humidité de référence (humidité à laquelle le support a été retailé) qui aura son importance dans la suite.

2.4.3 Les contraintes dans un panneau de bois liées à l'adsorption et désorption d'humidité

Afin de considérer les effets mécaniques induits par le séchage dans une planche de bois, nous allons commencer par modéliser plus en détail notre support de panneau peint et paramétrer notre problème : ce travail nous sera utile pour la suite.

2.4.3.1 Géométrie du problème, paramètres de l'étude

Du fait de la nature composite multi-échelle du bois, nous avons vu (§2.3.2) qu'il existe différentes échelles caractéristiques pour le décrire, de la grume à la paroi des cellules. Nous adopterons essentiellement le point de vue macroscopique (celui de la grume), dans lequel l'orientation matérielle est définie par rapport au cœur de l'arbre. Le matériau bois peut être considéré comme orthotrope cylindrique défini par rapport au centre des cernes concentriques : la direction longitudinale (ou direction des fibres, notée $\vec{L}$), la direction radiale (du cœur vers l'écorce, notée $\vec{R}$) et la direction tangentielle (direction tangente aux cernes de croissance, notée $\vec{T}$). Cette représentation idéalisée est reprise à la Figure 2-9.

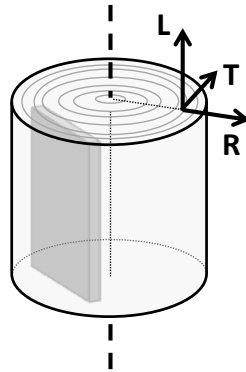


Figure 2-9 : représentation idéalisée de la grume avec les cernes en surface et les axes d'orthotropie locale L , T et R avec (T, L, R) repère direct. L'axe L est donné par la direction des fibres, R est la direction de croissance perpendiculaire à L et T complète le repère direct. Un débit commun de panneau (dosse) est également repositionné dans la grume.

Pour des raisons multiples liées à la dimension des panneaux en relation avec la taille des arbres d'origine, les supports de panneaux peints sont généralement des planches dont la plus grande longueur coïncide avec le fil du bois (direction $\vec{L}$), et dont la section est incluse dans le plan transverse (radial-tangentiel). L'écart à cette configuration idéale, dû à une inclinaison du débit de la planche ou aux irrégularités du matériau original (défaut de fil ou conicité de la grume), devrait évidemment modifier les résultats qui seront présentés dans la suite. Dans le cadre de cette thèse nous n'évoquerons les effets que dans le cas de déformations à contrainte nulle.

Nous modélisons donc une planche de panneau peint par un solide Ω de volume $(LARG * LONG * h)$ (cf. Figure 2-10(a)) dans une base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié aux arrêtes du solide. La direction $\vec{y}$ est confondue avec la direction principale longitudinale ($\vec{L}$). La rotation de la base matérielle (ou globale) $(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$ ¹⁰ par rapport à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ se fait d'un angle θ autour de l'axe $\vec{y} = \vec{L}$. L'orientation du repère global $(P; \vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$ en chaque point P de la planche est définie grâce à sa position par rapport au cœur théorique de l'arbre, le centre de la planche étant repéré par les coordonnées (x_p, z_p) dans le repère lié à l'arbre : ces deux coordonnées suffisent donc à décrire l'orientation du repère matériel en tout point de la planche.

A la différence de nombreux composites à fibres, le matériau bois n'est pas « seulement » orthotrope, mais est caractérisé par un repère matériel tournant dans le plan transverse $(\vec{R}, \vec{T})$ (cf. Figure 2-10 (a)). Nous aurons l'occasion dans la suite de discuter des problèmes de modélisation mécanique qui en découlent.

¹⁰ Ce choix de repère paraîtra incongru aux habitués du matériau bois qui lui préfèrent ses deux permutations $(\vec{R}, \vec{T}, \vec{L})$ ou $(\vec{L}, \vec{R}, \vec{T})$. Nous maintiendrons cette notation en rapport avec la géométrie définie pour la plaque tout au long du mémoire. Pour $\theta = 0$ on a $(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R}) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

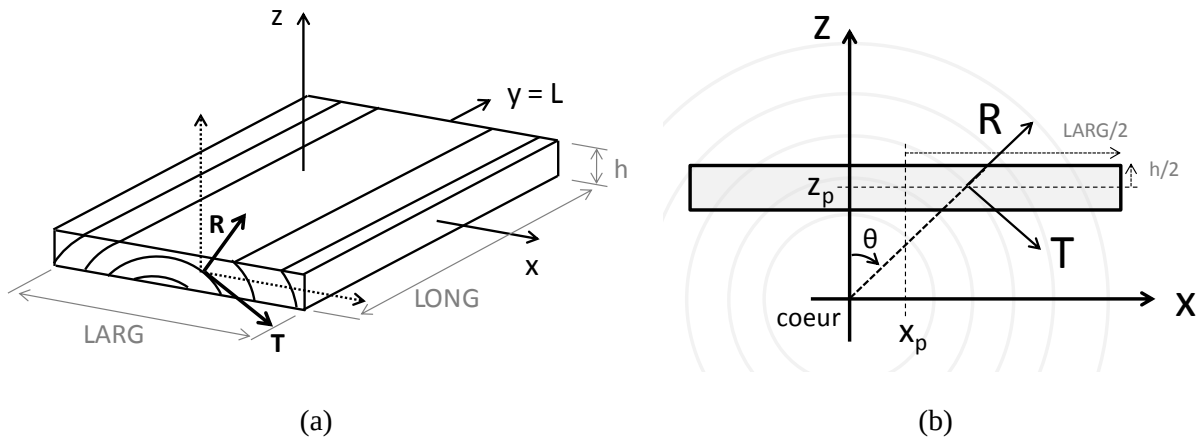


Figure 2-10 : modélisation d'une planche de panneau peint (a) orientation du repère matériel dans la planche (b) paramètres géométriques utilisés pour l'orientation locale dans le plan transverse.

2.4.3.2 Humidité dans le bois

Le bois est un matériau hygroscopique : il peut absorber et libérer de l'eau présente dans son environnement, sous forme liquide ou gazeuse, jusqu'à un possible état d'équilibre si l'environnement lui-même se stabilise. Le taux d'humidité du bois est la grandeur physique généralement utilisée pour définir l'état (transitoire ou d'équilibre) du bois en rapport avec l'eau environnante ; cette grandeur nous sera indispensable par la suite pour décrire les phénomènes de diffusion et préciser les caractéristiques mécaniques du matériau. Le taux d'humidité d'un échantillon de bois, exprimé généralement en pourcent et noté en abrégé *mc* d'après le nom anglais *moisture content*, sera défini ici par la variable h qui est le rapport de la masse d'eau présente dans un échantillon à la masse anhydre¹¹ du même échantillon.

Il est important de distinguer l'eau dite « libre » remplissant les cavités de la matière ligneuse (lumens ou micropores), de l'eau « liée » par des liaisons physiques aux différents sites de sorption localisés sur les macromolécules constituant le bois, et qui sont (dans l'ordre décroissant d'affinité avec l'eau) : les hémicelluloses, la cellulose amorphe, la lignine. Du fait des énergies mises en jeu [Navi et Heger (2005)], l'eau est accumulée préférentiellement sous forme liée depuis l'état anhydre jusqu'au point de saturation des fibres (*PSF*) au-delà duquel l'eau libre peut théoriquement exister ; inversement à la désorption l'eau libre est cédée avant l'eau liée. La plage de taux d'humidité dans laquelle seule l'eau liée existe, c'est-à-dire entre l'état anhydre ($h=0$) et le *PSF* (environ 30 % pour de nombreuses espèces), est appelée domaine hygroscopique.

Dans la suite nous nous placerons dans le domaine hygroscopique seulement, l'eau libre étant réservée aux applications concernant les bois gorgés d'eau ou le bois dans l'arbre (appelé bois vert, dont le taux d'humidité peut atteindre plusieurs centaines de pourcents pour des bois peu denses). A l'intérieur du domaine hygroscopique et à température donnée, l'état d'équilibre hydrique entre l'eau liée et l'eau présente dans l'environnement, c'est-à-dire le lien entre le taux d'humidité du bois et l'humidité relative de l'air (*HR*), est modélisé par les isothermes de sorption. Les différentes formes

¹¹ La définition de la masse anhydre n'est pas si évidente : elle repose essentiellement sur des protocoles normalisés (séchage à 103°C jusqu'à obtention d'une masse « constante »), qui coexistent avec d'autres protocoles (séchage à 60-70°C sous vide partiel par exemple). L'énergie de désorption associée au séchage complet d'un bois tendrait vers l'infini pour certains modèles de sorption ([Merakeb, *et al.* (2009a)]) traduisant l'idée qu'il existe toujours une quantité minimale d'eau non extractible.

mathématiques choisies pour ces isothermes de sorption, en accord avec différentes théories de la sorption et recalées par rapport à des données expérimentales, permettent de calculer l'équivalence entre les deux grandeurs physiques concernées, *emc* (*equilibrium moisture content*) et *HR*.

Fait très important pour la suite, il n'existe pas d'application directe reliant ces deux grandeurs physiques (*emc* et *HR*) : l'évolution de l'état d'équilibre du bois dépend non seulement de l'évolution de l'humidité relative imposée, mais également de l'état hydrique présent du matériau. Toutefois la réponse du bois est bornée par deux isothermes d'adsorption et de désorption, qui représentent respectivement les états d'équilibres successifs depuis l'état anhydre jusqu'au *PSF* pour un taux d'humidité strictement croissant, et inversement du *PSF* à $h = 0$ pour un taux d'humidité strictement décroissant. Le lecteur pourra se reporter à la Figure 2-11 pour une schématisation d'ensemble de ces phénomènes.

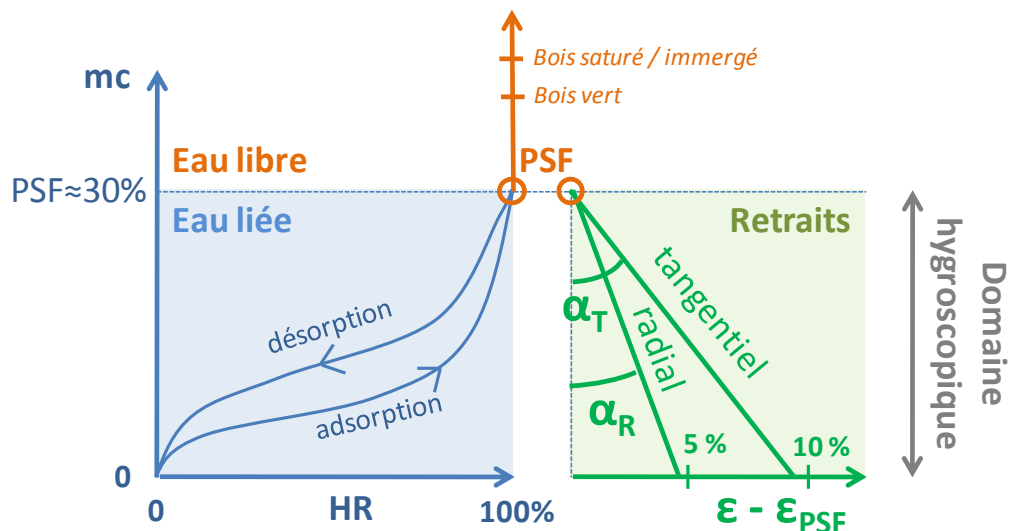


Figure 2-11: l'eau dans le bois, particularités du domaine hygroscopique – La courbe d'hystérésis qui lie le taux d'humidité du bois (*mc*) à l'humidité relative de l'air (*HR*) montre la différence entre adsorption et désorption complète (de 0 au *PSF*), sans montrer toutefois les effets intermédiaires – Les courbes de retrait transverses (radial/tangentiels) sont modélisées par une relation linéaire en déformation depuis l'état saturé ($\epsilon - \epsilon_{PSF}$), les pentes des droites correspondent aux coefficients de retrait-gonflement (α).

2.4.3.3 Retrait et gonflement du bois

Lors de l'adsorption ou de la désorption d'eau à l'intérieur du domaine hygroscopique, le bois observé à l'échelle des cernes se dilate et se contracte respectivement. La variation dimensionnelle associée à une perte ou un gain d'eau dépend de l'espèce de bois utilisée, mais plus important encore pour notre étude, elle dépend de la direction matérielle considérée. En effet, les propriétés du matériau bois (structurelles, mécaniques...) sont gouvernées par d'importants ratios d'anisotropie, et le retrait gonflement ne fait pas exception.

Le coefficient d'expansion hydrique (noté dans la suite α_i pour la direction matérielle *i*, exprimé en pourcentage de déformation par pourcent de taux d'humidité) a été quantifié pour de nombreuses espèces, dans les différentes directions d'orthotropie (exemple [Guitard (1987)]). On admet communément pour un grand nombre d'espèces que les rapports d'anisotropie de retrait-gonflement sont tels que :

$$\begin{aligned}\alpha_T &> \alpha_R \gg \alpha_L \\ \alpha_T &\approx 2 \alpha_R \approx 0.3 \%/\%\end{aligned}\quad (2-3)$$

Ce qui signifie que le retrait-gonflement est plus important dans la direction $\vec{T}$ que dans la direction $\vec{R}$, lui-même beaucoup plus grand que le retrait-gonflement longitudinal, souvent négligé pour cette raison.

2.4.3.4 Effet des gradients de propriété

Nous venons d'établir la description de l'échelle locale. A l'échelle de la structure (planche), le retrait gonflement anisotrope combiné à l'effet du repère tournant produisent dans le plan $(\vec{R}, \vec{T})$ des déformations de la géométrie au séchage. C'est l'effet des gradients de propriétés, bien connu de tous les gens qui manipulent le bois et qui savent que la déformation d'un débit sur quartier est négligeable devant celle d'un débit sur dosse (Figure 2-12(a)). Nous allons chercher à quantifier cet effet.

Pour cela on considère une section de planche dans le plan $(\vec{z}, \vec{x})$. Dans ce plan on considère que le matériau est continu, orthotrope, et que l'orientation de la base matériau est cylindrique centrée sur le cœur (0,0) : ce point est une singularité où l'orientation du matériau n'est pas définie.

Faisons l'hypothèse d'une variation de mc entre deux états homogènes, l'un état initial et le second intervenant dès que l'on a atteint de nouveau l'équilibre hygroscopique. Dans ce cas théorique qui ne fait pas intervenir les cinétiques transitoires on suppose qu'il existe, malgré le retrait-gonflement anisotrope, une déformation de la planche qui se fait à contraintes nulles. Le problème à résoudre pour trouver une déformation induite de structure à contraintes nulles est posé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{div}(\sigma) &= \vec{0} \\ grad(\vec{U}) &= \varepsilon \\ \sigma &= C(\varepsilon - \alpha \Delta h) = 0\end{aligned}\quad (2-4)$$

Où le vecteur $\vec{U}$ représente le champ de déplacement, (ε, σ) sont les tenseurs de déformation et de contrainte, C est le tenseur de rigidité, et Δh la variation d'humidité homogène induisant le retrait ou le gonflement. Il existe une solution unique à ce problème (à un déplacement de solide rigide près). Cette solution est valable en tout point du repère orthotrope cylindrique à l'exception du cœur théorique. Parce qu'on suppose que le champ de mc est homogène la solution est indépendante du comportement :

$$\varepsilon = \alpha \Delta h \quad (2-5)$$

La solution équivalente en déplacements (toujours à un mouvement de corps rigide près), est obtenue en intégrant l'expression des déformations en coordonnées polaires. Le résultat est ramené dans le plan $(\vec{z}, \vec{x})$ (Figure 2-10 et Figure 2-12(b)) sous la forme :

$$\begin{aligned}U_x &= r \Delta h (\sin(\theta) \alpha_R + (\alpha_T - \alpha_R) \theta \cos(\theta)) \\ U_z &= r \Delta h (\cos(\theta) \alpha_R - (\alpha_T - \alpha_R) \theta \sin(\theta)) \\ r &= \sqrt{(x^2 + z^2)} \\ \theta &= atan(x/z)\end{aligned}\quad (2-6)$$

Sur la Figure 2-12(b), nous avons tracé les configurations initiale et déformée d'une planche fine en fonction de sa position relative au cœur, pour une humidification correspondant à une variation de taux

d'humidité du bois $\Delta h = 0.1$, et des coefficients de retrait de 0.15 %/% et 0.3 %/% pour les directions $\vec{R}$ et $\vec{T}$ respectivement.

La solution de l'équation de l'équation (2-6) est périodique en θ , indiquant qu'elle n'est pas valable pour une structure contenant un cerne entier, et ce même si le cœur n'y est pas inclus (billon dont le cœur est évidé par exemple). Cela revient à dire que pour une structure incluant un cerne entier, le champ de déplacement induit au séchage n'est pas cinématiquement admissible.

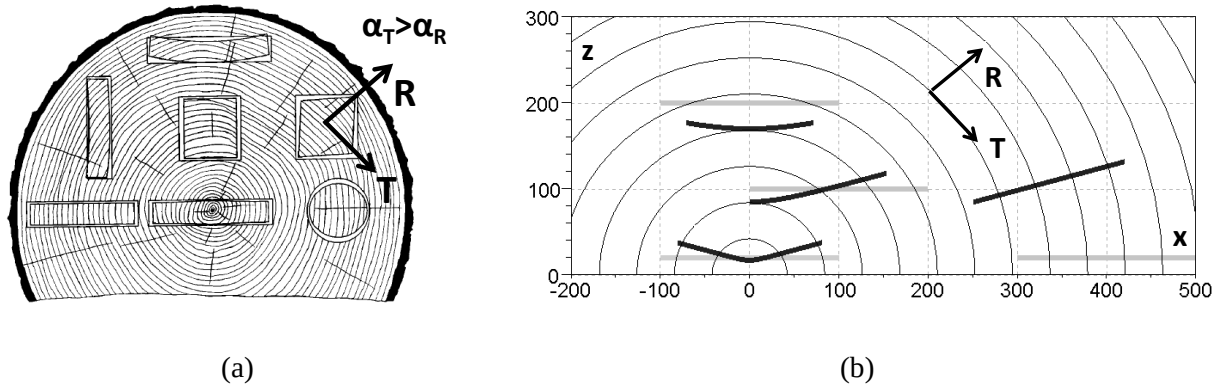


Figure 2-12: (a) retrait de différentes pièces de bois après séchage suivant leur prélèvement dans la grume, d'après [Green, *et al.* (1999)] ; (b) solution analytique en déplacements donnée par l'équation (2-6) lors d'un séchage correspondant à une variation du taux d'humidité de $\Delta h = -0.1$, avec des retraits radial et tangentiel de 0.15 et 0.3 %/% respectivement ; planche initialement plate (gris) et déformées amplifiées 10 fois (noir) ; pour des raisons de clarté, les déplacements de corps solide sont aussi représentés (cas notamment du débit sur quartier).

2.4.3.5 Effets des gradients d'humidité : contraintes d'origine hydriques

On sait donc calculer la déformation d'une planche à l'équilibre en fonction seulement des propriétés de retrait-gonflement du matériau et du débit considéré. Malheureusement, dans un environnement climatique qui change continuellement, l'état homogène de taux d'humidité dans la planche n'existe jamais. Pour un champ de mc hétérogène les déformations induites ne sont pas forcément cinématiquement compatibles et il faut donc introduire le comportement et la géométrie : nous apporterons un type de solution dans le chapitre 5 par un calcul de structure. Maintenant nous allons nous intéresser aux déformations dues aux gradients d'humidité dans la planche.

Dans le cas des panneaux peints sur une face uniquement, les échanges d'eau entre le bois et l'environnement ne sont pas symétriques : les échanges d'eau sont plus importants du côté non peint, et les gradients d'humidité dans la planche évoluent avec l'environnement extérieur. Ces gradients d'humidité dans l'épaisseur de la planche sont responsables d'une partie importante des déformations transitoires du support bois. Dans le cas simplifié d'un repère orthotrope d'orientation constante, et pour une cinématique de flexion qui suppose la conservation des sections droites, il existe des gradients d'humidité qui conduisent à des courbures sans contraintes : on en donne une illustration à la Figure 2-13(a). Ce type de gradient n'a pas de réalité physique : la réalité est plus proche de gradients du type Figure 2-13(b), qui est le résultat combiné de la diffusion de l'eau dans la planche et des variations hygrométriques à proximité du panneau.

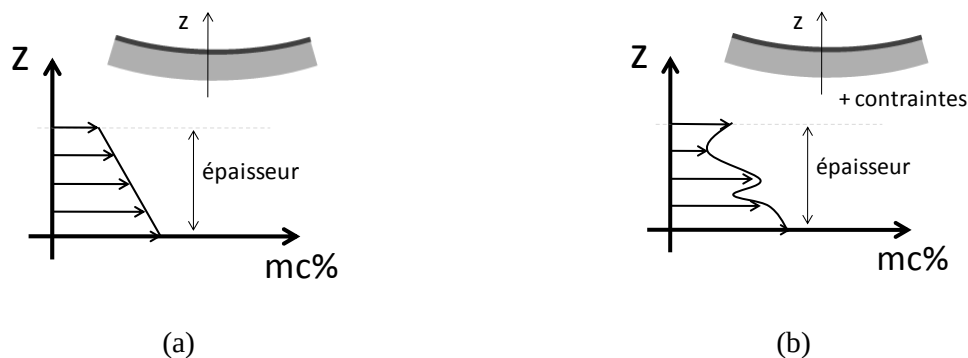


Figure 2-13 : gradient d'humidité générant de la courbure sans contraintes (a) ou avec contraintes (b) dans un matériau homogène (qui fait abstraction de l'anisotropie transverse) et dont on suppose la conservation des sections droites en flexion.

Pourtant ces gradients d'humidité ne suffisent pas à expliquer qu'à l'équilibre hydrique (tout du moins dans une situation proche d'un état homogène) les panneaux restent courbés. Pour ce faire il faut s'intéresser au comportement mécanique différé du matériau lui-même. La courbure résiduelle après un test d'humidification et/ou de séchage est mise en évidence dans le test du « *flying wood* » proposé par [Brandao et Perre (1996)], schématisé à la Figure 2-14 pour un matériau homogène. Ce test dont la procédure est relativement simple met en œuvre des effets mécaniques et diffusifs couplés sur une structure. Lors d'un échange dissymétrique d'humidité, des contraintes de traction et de compression se mettent en place dans la planche ; certaines de ces contraintes sont exercées sur des zones où les mouvements d'humidité sont importants, d'autres se situent là où les échanges sont moindres. En fonction du niveau d'échange hydrique de la zone concernée, les mécanismes de couplages hygromécaniques laissent s'exprimer ou bloquent les déformations. La cinétique de diffusion permet de bloquer une partie des déformations au cours de la phase d'équilibrage hydrique, ce qui explique qu'après retour à l'équilibre hygroscopique on conserve une partie de ces déformations. Les détails sur la formulation de ces couplages et leur influence dans l'inversion de courbure seront expliqués dans la suite, après que le comportement différé du bois aura été abordé.

Pour l'instant on se contentera de remarquer que le bois est un matériau viscoélastique : cela signifie par exemple que les déformations (ici le tuilage) d'une planche générées par des efforts extérieurs (ici un chargement hydrique) dépendent du facteur temps. L'illustration quotidienne de ces mécanismes liés au temps, nous la trouvons dans nos bibliothèques où le fléchissement des étagères en bois augmente avec le temps, bien que le poids des livres soit constant. On sait par ailleurs que les phénomènes différés sont accentués par les échanges d'humidité (couplage hygromécanique §3.2).

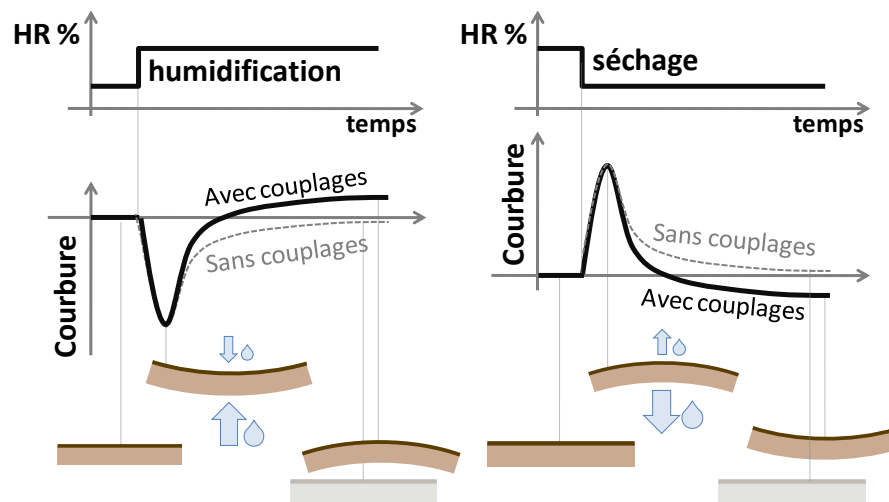


Figure 2-14 : effet (qualitatif) du test de *flying wood* (inversion de la courbure) lors d'une humidification ou d'un séchage. Le comportement hygromécanique couplé du bois est comparé à la réaction d'un matériau théorique sans couplages revenant à un état d'équilibre plat.

2.4.3.6 Synthèse

Nous venons de distinguer deux effets qui contribuent à la courbure transitoire des panneaux peints. Le premier est dû à un gradient de propriétés (anisotropie du plan RT) (section 2.4.3.3), le second est dû à des gradients d'humidité (chargement) (section 2.4.3.5).

Une des questions importantes est de déterminer de quelle manière ces effets contribuent à la déformation finale. Ils ne respectent pas de principe de superposition (ils ne peuvent s'additionner), car nous verrons que le comportement est dépendant de l'humidité, donc que les champs de déformation et de contrainte dépendent de la cinétique de diffusion.

Nous proposons une synthèse qualitative illustrée à la Figure 2-15 dans le cas d'une dosse et d'un quartier, dans laquelle nous distinguons les états transitoires des états d'équilibre pour un simple essai de séchage ou humidification, analogue à celui montré dans la Figure 2-14.

Dans le cas du débit « classique » (Figure 2-15), les deux contributions s'opposent en signe. Dans ce cas il faut discuter de l'amplitude de chacun des phénomènes : le retrait-gonflement a été explicité précédemment, mais son amplitude dépendra du taux d'humidité initial du panneau (humidité à laquelle il a été aplani) et du taux d'humidité actuel ; l'amplitude de l'effet des gradients d'humidité sera largement détaillée dans la suite. Bien entendu, on aura compris que la conclusion sera différente pour chaque panneau et chaque ambiance de conservation.

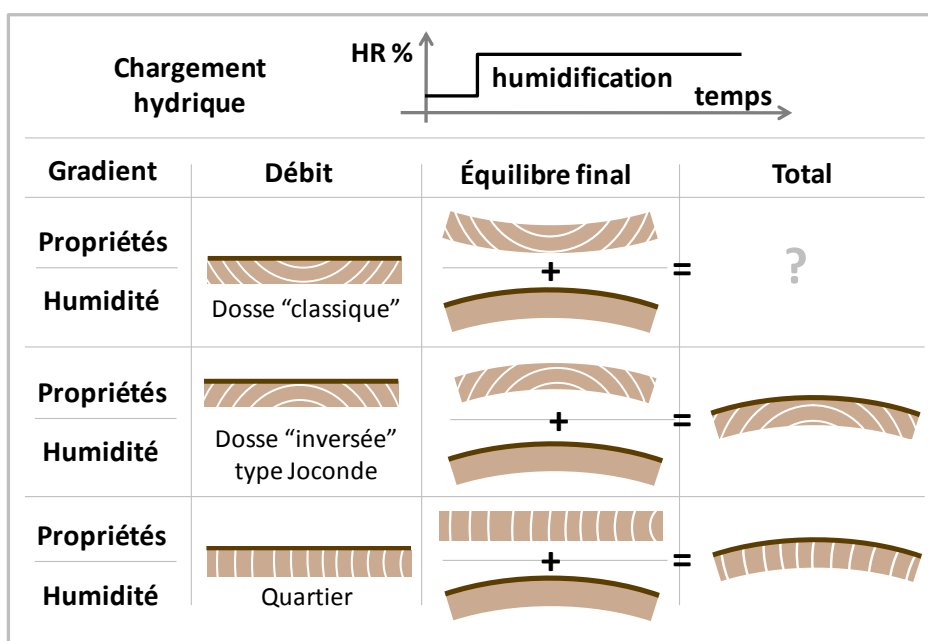
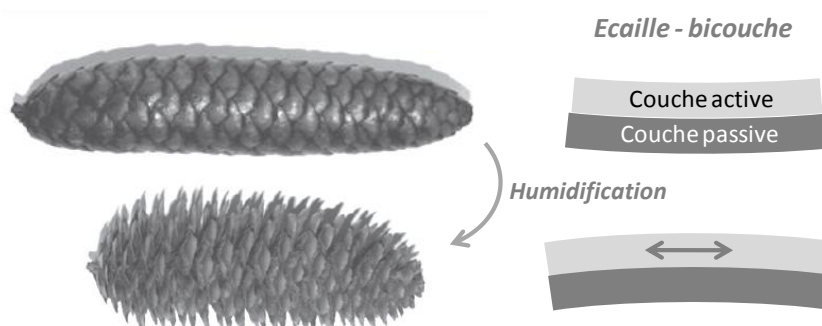


Figure 2-15 : Synthèse des deux contributions à la déformation des panneaux peints lors d'une humidification. Certains cas sont auto-conclusifs ; le cas de la dosse « classique » oblige à évaluer quantitativement les phénomènes.

2.4.4 Similarités avec d'autres applications

Nous venons d'interpréter le phénomène de courbure transitoire des planches de panneaux peints comme une double conséquence des gradients d'humidité et des gradients de propriétés le long de l'épaisseur d'un panneau : on peut trouver de nombreuses analogies à chacun de ces aspects.

L'influence des gradients de propriétés sous l'effet d'un changement uniforme d'humidité a été étudiée sur les pommes de pin dont les écailles sont assimilées à des bicouches, dont une est dite « active » (l'autre étant passive) à cause de son retrait gonflement qui provoque l'ouverture des écailles lors d'un changement d'humidité. Ce type de bicouche hygro-activé est utilisé par la nature pour créer des systèmes moteurs à faible coût, et a inspiré des créations de systèmes biomimétiques ([Reyssat et Mahadevan (2009)]).



Les déformations liées aux gradients d'humidité (problème analogue aux gradients de température dans d'autres matériaux possédant une dilatation thermique du même ordre), sont illustrées dans différentes applications liées au bois.

De nombreux produits à base de bois sont concernés par des problèmes d'échanges dissymétriques et de gradients d'humidité dans l'épaisseur : ils font d'ailleurs l'objet de travaux de modélisation récents, tels [Ganev, *et al.* (2005)] sur les panneaux MDF, [Blanchet, *et al.* (2005); Blumer (2006)] sur des parquets, et plus original chez [Smittakorn et Heyliger (2000)] qui s'intéressent aux plaques composites bois-piézoélectrique, dans lequel la couche de matériau piezoélectrique joue le rôle d'activateur de courbure sous l'effet d'un champ électrique (à l'image de la couche hygroscopique de la pomme de pin).

Les analogies les plus parlantes avec les panneaux peints concernent logiquement les applications sur bois massif. [Virta (2005); Virta, *et al.* (2005)] montrent que les panneaux utilisés pour le bardage des maisons nordiques présentent des courbures très importantes du fait des gradients d'humidité (et de température) imposés entre une face exposée aux intempéries, et une face protégée du côté construction (Figure 2-16). Le revêtement prévu du côté extérieur ne joue pas un rôle déterminant du point de vue de l'asymétrie, mais se dégrade, à l'image de la couche picturale des panneaux peints, lors des cycles de courbure ; la protection de ce revêtement est un enjeu pour la durabilité de ces bardages. Enfin, la fixation rigide de ces bardages sur la façade limite les déformations de retrait gonflement, ce qui a pour effet d'accentuer les contraintes mécaniques à l'intérieur du matériau et d'accentuer la dégradation du produit. Nous aurons l'occasion de reparler de ces travaux au moment de la discussion sur le *compression set* (§3.2.2.1).

Mais ce sont probablement les recherches appliquées au séchage du bois dans l'industrie qui ont le plus contribué à expliciter (outre les phénomènes de diffusion) la distorsion du bois d'œuvre sous des gradients d'humidité. Notre étude s'est inspiré très largement des travaux de [Mauget (1996)] et [Rémond (2004)] sur la courbure des planches (transitoire et permanente) lors de leur passage dans les conduites industrielles de séchage. En s'appuyant sur les capacités de modélisation en diffusion offertes par le code *TransPore* ([Perre et Turner (1999)]), ces deux auteurs ont proposé des approches théoriques, numériques et expérimentales couplées pour décrire mécaniquement les phénomènes de tuilage des planches au séchage dans le plan transverse du bois.

A la différence de notre application, les études sur le séchage du bois s'intéressent au matériau depuis son état vert (avant séchage), considérant l'eau à l'intérieur comme en dehors du domaine hygroscopique ; d'autre part les niveaux de température nécessaires au séchage diffèrent complètement de ceux observés près des panneaux. Ce sont quelques différences, mais nous expliquerons dans quelle mesure nous avons utilisé ces travaux, et de quelle manière nous les avons adaptés à l'étude des panneaux peints.

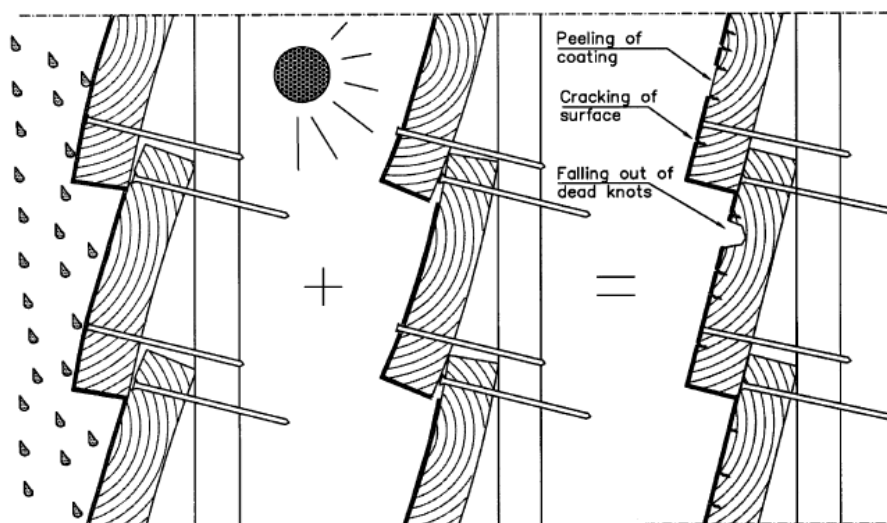


Figure 2-16 : problèmes de courbure dus aux gradients d'humidité et de température sur des bardages bois, extrait de [Virta, *et al.* (2005)].

2.5 Enjeux de l'instrumentation des panneaux

Comme cela a déjà été évoqué, la diversité des panneaux peints constitue une difficulté majeure pour leur conservation, mais également une grande richesse pour celui qui cherche à comprendre les phénomènes physiques dans leur généralité. Nous inviterons le lecteur ainsi que la communauté (certes réduite) des mécaniciens du bois à considérer le patrimoine culturel, sous sa forme panneaux peints notamment, comme une immense base de données de laquelle se dégagent les tendances à reproduire pour nos modèles mais aussi des données importantes sur l'amplitude des phénomènes. Ces informations, d'autant plus précieuses qu'elles sont parfois obtenues sur des périodes de plusieurs années (cf. §6.2.1.6), sont rendues accessibles grâce à l'instrumentation des panneaux peints *in-situ*.

De ce point de vue il faut reconnaître l'apport précieux de nos collaborateurs du DEISTAF de Florence, qui développent et mettent en œuvre des systèmes de mesure sur les panneaux en conditions d'exposition, et ce depuis plus de quinze ans, en collaboration étroite avec des ateliers des musées et ateliers de restauration (notamment le laboratoire de restauration florentin de *l'Opificio delle Piettre Dure*).

Plutôt que de dresser un inventaire exhaustif des différentes techniques d'instrumentation sur panneaux peints réalisées ces dernières années, nous redirigerons le lecteur vers une récente publication sur le sujet [Dionisi Vici, *et al.* (2009)]. Nous consacrerons néanmoins quelques lignes à la description du système baptisé « *Deformometric Kit* » (DK).

Basé sur une géométrie originale de L. Uzielli, ce système a été mis en œuvre par P. Dionisi Vici qui l'a rendu « autoalimenté » (fonctionnant sur une unique pile 3V), permettant d'envisager l'instrumentation des panneaux sans raccordement au secteur, et ce sur de longues durées. Le même principe d'alimentation a été utilisé dans notre cas d'étude décrit au §6.2.1.5.

Basé sur un principe géométrique simple, le DK (Figure 2-17) mesure en continu la courbure d'un panneau et les déformations de surface associées (sous réserve de l'hypothèse de conservation des sections droites dans une plaque en flexion) : nous verrons dans la suite combien la combinaison de ces deux informations s'avère déterminante dans la compréhension et la modélisation des phénomènes de tuilage des panneaux peints.

Ce système a été utilisé dans de nombreuses études et par d'autres auteurs, soit sur des planches uniques pour en mesurer la courbure, soit à cheval entre différentes planches d'un panneau pour en mesurer l'écartement (Figure 2-17(a,b)) : il a servi aussi bien pour répondre à des questions pratiques de conservation ([Dionisi Vici, *et al.* (2009)]) que pour la validation de codes de calcul ([Dionisi Vici, *et al.* (2006); Froidevaux, *et al.* (2010a); Marcon (2009)]). Lorsqu'il est impossible de visser les pattes à l'arrière d'un panneau (trop peu épais ou trop dégradé), on peut envisager de coller une pièce intermédiaire. Lorsque l'espace à l'arrière du panneau est trop réduit (<10cm), l'utilisation du DK n'est pas recommandée.

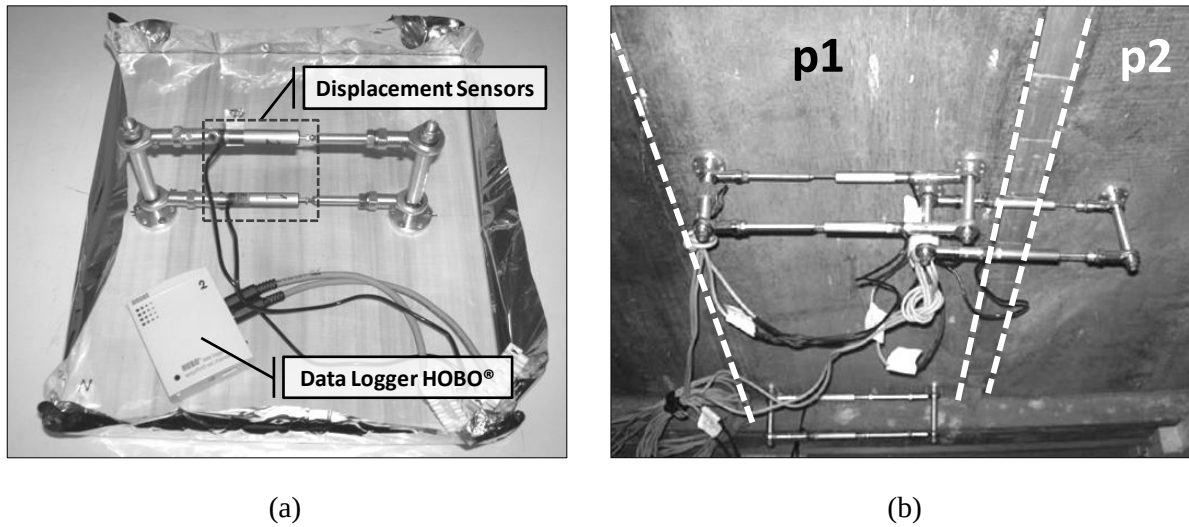


Figure 2-17: *Deformometric Kit* dans deux configurations ; (a) installé sur une réplique isolée sur cinq faces : deux capteurs de déplacement montés sur rotules pour suivre la courbure de la planche en fonction des variations d'humidité ; déplacements, humidité relative et température de l'air sont enregistrés à intervalle régulier par le *data-logger* de marque HOBO® alimenté par une pile 3V ; (b) installé in-situ en trois exemplaires sur un triptyque pour mesurer la courbure de la planche (p1) et l'écartement entre (p1) et (p2) ; images adaptées de [Dionisi Vici, *et al.* (2009)].

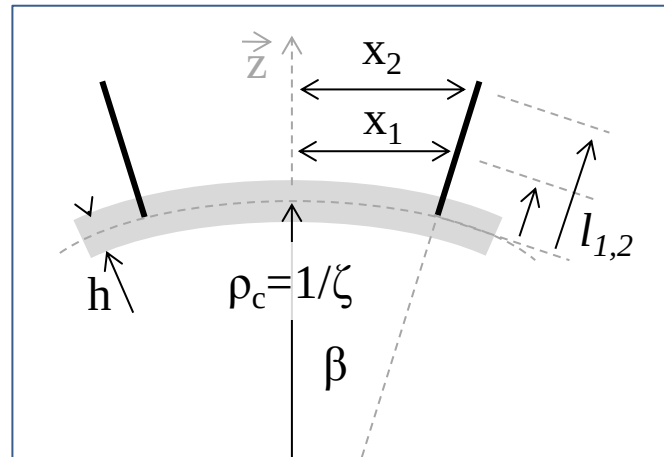


Figure 2-18 : géométrie et principe du *Deformometric Kit* – la position de la couche picturale (non symbolisée mais suggérée par la position des axes) et le signe de la courbure n'ont pas de sens a priori – ρ_c désigne le rayon de courbure, ζ la courbure, β le demi-angle entre les axes, h est l'épaisseur du panneau, $l_{1,2}$ la hauteur de la mesure des capteurs 1 et 2 par rapport à la ligne moyenne, $x_{1,2}$ sont les mesures associées aux deux capteurs.

La géométrie de ce système est représentée à la Figure 2-18. Derrière l'apparente simplicité de ce schéma se cachent un certain nombre d'hypothèses qui, à notre connaissance, n'ont pas été discutées par les auteurs précédemment cités. Ce que nous décrirons de cet appareil doit servir à la fois à comprendre et expliciter ce que l'on mesure effectivement, mais également à préparer au mieux la modélisation de ces phénomènes.

Nous cherchons à caractériser expérimentalement la déformation d'une planche et à la synthétiser sous la forme d'une ou plusieurs variables. Nous pouvons manipuler la courbure (ζ définie en $[m^{-1}]$), le rayon de courbure ($\rho_c [m] = 1/\zeta$), l'angle β (exprimé en d° ou radians), mais aussi les déformations ε : la déformation de la ligne moyenne (ε_{moy}), la déformation de la surface supérieure (ε_+) ou la

déformation de la surface inférieure (ε^-). Les deux mesures (x_1 et x_2) permettent sous certaines hypothèses de remonter à deux grandeurs indépendantes.

Toutes ces grandeurs sont exprimées en moyenne entre les deux axes. Le débit de la planche n'est pas choisi à priori. Le principe géométrique s'appuie sur le principe cinématique de conservation des sections planes (Navier-Bernoulli). De cette manière, on a :

$$\varepsilon_{moy} = \frac{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}{2} \quad (2-7)$$

En flexion pure la déformation à mi-épaisseur de la planche est nulle. Ce n'est pas ce que l'on attend à cause des gradients d'humidité et des retraits gonflements. Il est aisé d'obtenir ε^+ à partir de considérations géométriques ; en revanche pour obtenir ε^- il faut faire l'hypothèse de Bernoulli qui suppose la perpendicularité des sections planes à la ligne moyenne, et qui néglige le cisaillement : nous discuterons des conséquences d'une telle hypothèse au chapitre 5.

Résumé : le Déformetric Kit permet d'obtenir la déformation de surface moyenne du côté de l'instrumentation. La valeur de l'angle entre les deux axes, obtenue à partir des données des deux capteurs, permet d'exprimer une courbure moyenne sous l'hypothèse d'un cisaillement nul.

2.6 Enjeux des simulations : des outils pour la conservation

Un des enjeux majeurs de notre immersion dans le monde de la conservation est de déterminer si possible, au moyen des outils de l'ingénieur et des sciences du bois, les conditions optimales de conservation pour les objets à support bois, dans notre cas les panneaux peints. Pour les conservateurs, la méconnaissance du comportement hygromécanique des panneaux reste encore aujourd'hui préjudiciable. Par exemple, il est régulièrement nécessaire de déplacer certaines œuvres, soit pour une restauration (ou un simple nettoyage), ou encore lors d'un prêt à un autre établissement. Dans ce cas, l'impact des variations (thermo-)hydriques sur le panneau est très mal connu. L'usage est donc de ne pas déplacer les œuvres : la restauration d'un panneau se fait autant que possible *in-situ*. Dans le meilleur des cas, des prescriptions lourdes et coûteuses comme la mise en place d'un caisson climatique conditionnent le déplacement de l'œuvre ([Mervin, *et al.* (1995)]).

Pour pallier ce manque, notre approche a été d'utiliser conjointement l'instrumentation des panneaux *in-situ* et des simulations numériques, approche que l'on pourrait compléter par l'étude de répliques de laboratoire, comme cela a été proposé par ([Froidevaux, *et al.* (2010a); Marcon (2009)]) : le cahier des charges que nous nous sommes fixé pour la partie calcul est relativement ambitieux, notamment au regard des incertitudes liées à l'étude mécanique du bois sur le long terme (qu'est-ce que le vieillissement du bois ? qu'est-ce le comportement mécanique à très long terme ?), mais relève d'une réflexion générale sur les perspectives des simulations dédiées aux objets en bois du patrimoine.

Le modèle idéal qui contribue à la conservation d'un objet d'art en bois serait capable de raconter l'histoire intégrale de cet objet, depuis sa fabrication jusqu'à aujourd'hui, voire de prédire son futur proche. Ce modèle, sur la base d'un temps articulé entre passé, présent et futur, devrait en quelques points :

- Expliquer l'état présent de l'objet, c'est-à-dire produire des scénarios qui expliquent de manière « plausible » ce qui lui est arrivé depuis sa fabrication jusqu'à aujourd'hui, à défaut de connaître l'histoire complète de l'objet et l'ordre chronologique dans lesquels les phénomènes se produisent ;
- Décrire les variations actuelles (déformations) autour de ce nouvel état de référence, telles qu'elles sont observées expérimentalement ;

- Prédire les conséquences d’actions extérieures futures : englobant les variations climatiques futures, les modifications éventuelles du cadre de conservation, le déplacement de l’œuvre, ou l’effet d’éventuels actes de restauration.

Dans le cas des panneaux peints, les trois points ainsi décrits trouvent respectivement leur équivalent dans :

- Les déformations permanentes du support (tuilage ou fissurations), et les réseaux de craquelures sur la face peinte,
- La réaction mécanique du support aux actions extérieures actuelles (forces exercées par le cadre ou les variations climatiques environnantes),
- La modélisation d’évènements liés à des modifications de l’ambiance de conservation (changement de cadre, accident climatique, transport vers un atelier de restauration, etc...).

Après la mise en place des modèles dédiés, nous discuterons chacun de ces points, en gardant à l’esprit la priorité des deux premiers (passé et présent) pour assurer la crédibilité du modèle à prédire les risques liés au futur de l’œuvre.

Dans ce document, de tels modèles seront utilisés à la fois sur des cas d’étude spécifiques et pour décrire des comportements génériques sur l’ensemble des panneaux peints. Lorsque nous aurons explicité les phénomènes dans leur généralité, nous pourrons mieux discuter les précautions liées à l’étude des répliques qui, à défaut de reconstituer l’historique de l’objet du patrimoine, devront en reproduire certains aspects.

2.7 Quelques études mécaniques récentes sur des objets du patrimoine culturel

La modélisation des objets en bois du patrimoine a été abordée suivant différentes techniques et appliquée à un grand nombre d’objets, par exemple : [Dureisseix, *et al.* (2006)], [Chassagne (2006); Chassagne, *et al.* (2006)], [Marcon (2009)] pour des applications de méthodes éléments finis (EF) sur les panneaux peints ; [Leconte, *et al.* (2009)] et [Saft et Kaliske (2009)] (EF également) sur des instruments de musique, [Chassagne, *et al.* (2007); Gallimard et Cointe (2007)] sur d’anciennes structures...

Les études scientifiques sur des objets patrimoniaux en bois ne visent pas toutes à produire des modèles numériques : le vieillissement chimique du bois, le bois archéologique, le bois immergé, les attaques fongiques et d’insectes xylophages, la résistance au feu, etc., sont des sujets qui font l’objet de campagnes d’expérimentations importantes, et dont certains rejoignent nos problématiques mécaniciennes.

Les travaux de [Kohara (1954)] puis de [Yokoyama, *et al.* (2009)] sur le bois ancien (1300-200 ans) des temples japonais, visent à comparer les propriétés mécaniques (module élastique, module de rupture, énergie de rupture) de bois ancien et de bois récent de la même essence locale (Hinoki, *Chamaecyparis obtusa*), dans le but de mettre en place des procédés de vieillissement artificiel (traitements thermiques) pour le remplacement d’éléments détériorés. La dégradation du bois avec le temps, notamment celle des hémicelluloses ([Kohara (1955)]), représente des enjeux non négligeables pour la préservation du patrimoine culturel japonais. Les résultats actuels montrent qu’il est difficile de conclure sur une éventuelle dégradation des modules élastiques avec le temps ; il est montré en revanche que l’énergie de rupture diminue avec le temps (matériau de plus en plus fragile). Le défi de ce type d’étude reste la difficulté d’apparier un matériau ancien et un matériau récent pour pouvoir les comparer.

Dans le cadre de l’étude sur les panneaux peints, nous faisons l’hypothèse que la variation de composition chimique du support bois durant les quelques siècles d’existence du panneau (situé d’ailleurs en intérieur plutôt qu’en extérieur) est un facteur de second ordre devant les effets

mécaniques liés au matériau et à la structure. Les études récentes sur le bois vieux de quelques siècles ne suffisent pas encore à montrer une différence significative de propriétés par rapport aux bois récents [Froidevaux, *et al.* (2010b)].

3. Eléments de rhéologie du bois : lois de comportement

Ce chapitre est consacré à la revue des comportements mécaniques du bois nécessaires pour décrire ce matériau en interaction avec l'humidité environnante et les éventuelles actions extérieures. Il traite des comportements linéaires instantanés (élastique) et différés (viscoélasticité et mécanosorption), ainsi que des phénomènes non-linéaires tels que l'apparition de déformations permanentes dans les directions perpendiculaires aux fibres.

Chacun des phénomènes sera abordé suivant les différents aspects de l'observation empirique et de la modélisation mathématique de ces phénomènes, en relation avec l'application des panneaux peints et leurs sollicitations caractéristiques.

3.1 Première approche du comportement mécanique

3.1.1 Loi de comportement générale

En mécanique des matériaux, la relation mathématique entre le champ de déformations d'un solide (ε) et le champ de contraintes (σ) présent dans celui-ci se fait grâce à la loi de comportement, que l'on manipulera dans le cas du bois sous la forme générale suivante :

$$\sigma = C\varepsilon + B \quad (3-1)$$

C étant le tenseur de rigidité du matériau et B un tenseur (de contraintes) que l'on appellera tenseur de couplage hygromécanique. Pour des raisons explicitées plus loin, nous manipulerons le plus souvent cette relation linéaire sous sa forme réciproque, que l'on notera :

$$\varepsilon = P + Q\sigma \quad (3-2)$$

Q étant cette fois le tenseur des complaisances du matériau, et P un tenseur de déformation, également appelé tenseur de couplage, associé à B ($P = C^{-1}B$).

Le présent chapitre vise à expliciter l'expression des tenseurs de rigidité ou de complaisance pour les différents comportements utiles à la description du bois dans les panneaux peints, au travers d'une analyse bibliographique du domaine de la rhéologie en science du bois.

3.1.2 Elasticité

3.1.2.1 Orthotropie élastique

Le bois est un matériau orthotrope. Sa matrice de comportement élastique comporte 9 termes indépendants, qui sont : les 3 modules d'Young dans les trois directions principales d'orthotropie, les 3 modules de cisaillement principaux, et 3 modules de Poisson indépendants. Ces paramètres nous seront indispensables dans la suite pour décrire le comportement 3D de notre matériau. Malgré le « peu » de paramètres, il est relativement fastidieux de déterminer expérimentalement des matrices

complètes : notamment à cause du nombre et de la variété des essais à réaliser (traction et/ou compression, cisaillement) pour fournir des moyennes significatives au regard de l'hétérogénéité et de la diversité du matériau (inter espèces, intra espèces, intra arbre). Des méthodes basées sur l'excitation en fréquence et la détection de pics de résonance de géométries cubiques (de l'ordre du cm³) taillées suivant les axes d'anisotropie permettent aujourd'hui de reconstituer plus rapidement cette matrice de comportement élastique ([Delaunay, *et al.* (2008)]).

A l'attention des modélisateurs (toujours en recherche de paramètres pour alimenter leurs simulations), et grâce à la synthèse de nombreuses campagnes expérimentales répertoriées dans la littérature (notamment effectuées au CTBA¹² pour les valeurs du Tableau 3-1), [Guitard (1987)] propose des matrices élastiques standard pour de nombreuses espèces ligneuses ; par exemple pour différents peupliers de densité donnée et à taux d'humidité donné :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_T \\ \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \varepsilon_{LR} \\ \varepsilon_{TR} \\ \varepsilon_{TL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{-\nu_{RT}}{E_R} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{RL}}{E_R} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TR}}{E_T} & \frac{-\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TR}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_T \\ \sigma_L \\ \sigma_R \\ \sigma_{LR} \\ \sigma_{TR} \\ \sigma_{TL} \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

Populus	mc(%)	ρ (g/cm ³)	Er (MPa)	Et (MPa)	El (MPa)	Grt (MPa)	Gtl (MPa)	Grl (MPa)	vtr	vlt	vrl	vrt	vtl	vlr
Tremoloides	12.0	0.30	743	264	7850	83	447	601	0.452	0.309	0.048	1.272	0.010	0.510
Tremoloides	12.0	0.31	712	281	9540	99	432	674	0.627	0.558	0.062	1.589	0.016	0.837
Alba	13.7	0.40	1190	493	6830	200	900	1000	0.365	0.449	0.041	0.881	0.032	0.234
Tremuloides	12.0	0.29	722	252	8900	102	429	647	0.410	0.795	0.031	1.174	0.023	0.379
Feuillu standard	12.0	0.65	1810	1030	14400	366	971	1260	0.384	0.462	0.049	0.675	0.033	0.386
Peuplier standard*	12.0	0.39	932	423	8509	178	556	790	0.301	0.488	0.061	0.662	0.024	0.555

Tableau 3-1: matrices élastiques pour différents peuplier et pour un feuillu standard, d'après [Guitard (1987)]. *Le peuplier standard est calculé à partir du feuillu standard et des corrections des modules par la densité (équation (3-4)), ici pour une densité donnée de 0.39 à un mc de 12 % (valeur utilisée par la suite).

¹² Centre Technique du Bois et de l'Ameublement (www.ctba.fr) fusionné avec L'AFOCEL (Association Forêt Cellulose), depuis le 1er juin 2007 pour donner naissance à FCBA, l'Institut Technologique Forêt Cellulose Bois-construction Ameublement (www.fcba.fr).

D'une manière générale, en mécanique des milieux cellulaires, il est classique d'avoir des coefficients de poisson supérieurs à 0.5 ; toutefois les valeurs supérieures à 1 sont rares pour le bois. Les valeurs de coefficient de poisson RT proposées par Guitard sont à mettre en relation avec la valeur élevée des ratios d'anisotropie E_r/E_t .

En collectant le même type de données sur un grand nombre d'espèces, le même auteur est en mesure de fournir la matrice élastique d'un feuillu standard et d'un résineux standard. Il propose enfin des lois de corrections par la densité pour recalculer ces matrices standards pour différents bois. Concernant les feuillus, la corrélation qu'il propose est de la forme :

$$X_\rho = X_{0.65} \left(\frac{\rho}{0.65} \right)^n \quad (3-4)$$

Avec X un module (inverse d'une composante de la matrice de complaisance) pour une direction donnée et n la puissance associée à la propriété X dans cette même direction (Guitard définit donc 9 valeurs de n issues de régressions pour chaque composante indépendante de la matrice de complaisance). Parce que les puissances n sont différentes dans chaque direction, les ratios d'anisotropie sont également des propriétés dépendantes de la densité. Toujours pour les feuillus, les valeurs de n associées aux modules d'Young dans les axes sont comprises entre 1 et 1.7.

3.1.2.2 Dépendance de la matrice élastique au taux d'humidité

Le taux d'humidité interne joue un rôle important sur les propriétés mécaniques du matériau bois : par exemple un bois à l'état humide est un matériau plus compliant (moins rigide) que le même bois à l'état sec. On admet que les modules d'élasticité du bois varient linéairement avec le taux d'humidité (à l'équilibre), ce pour une plage allant à peu près de 5 % d'humidité interne jusqu'au PSF (au-delà duquel la variation d'humidité n'a que peu d'influence sur les propriétés mécaniques, voir notamment [Kollmann et Côté (1968)]) pour différentes espèces et dans les différentes directions matérielles. Les panneaux peints étant soumis à des variations climatiques importantes, nous ne pourrions pas nous passer de la prise en compte de ces phénomènes.

Pour une plage allant de 6 % à 20 % de taux d'humidité (et à température ambiante), [Guitard (1987)] propose une approche pratique des corrections linéaires sur les modules élastiques, en fonction du taux d'humidité des bois mis en œuvre et des modules mesurés à 12 % (ou fournies d'après ses matrices élastiques standards) :

$$\begin{aligned} E_L^u &= E_L^{12\%} [1 - 1.5(h - 0.12)] \\ E_{R/T}^u &= E_{R/T}^{12\%} [1 - 3(h - 0.12)] \\ G_{R/T/L}^u &= G_{R/T/L}^{12\%} [1 - 3(h - 0.12)] \end{aligned} \quad (3-5)$$

C'est-à-dire une variation de 1.5 % par pourcent d'humidité pour le module d'Young dans la direction L, et 3 %/% pour les autres modules (Young et cisaillement) dans les autres directions. Si l'on considère la matrice élastique entière, il faut ajouter à la formulation de Guitard l'expression des coefficients de poisson dépendants de l'humidité, ceci pour assurer la symétrie de la matrice de comportement. En effet, dans le cas de coefficients de poisson constants avec l'humidité, la matrice n'est symétrique que pour h valant 12 %.

Ces valeurs simplistes varient évidemment suivant les essences et les directions. Ici nous donnons dans le désordre des valeurs que nous avons calculées (selon la même méthode) à partir de données brutes de la littérature : des variations de 2.7 %/% pour du hêtre dans la direction tangentielle ([Schniewind (1966)]), des valeurs de 3.5 %/% dans la direction radiale pour du « Japanese cypress » (*Chamaecyparis obtusa*) chez [Takahashi, *et al.* (2006a); Takahashi, *et al.* (2006b)], et de 4.5 %/% dans la direction longitudinale pour [Nakano (1999)] sur du « Japanese ash » (*Fraxinus mandshurica*)

Rupr.) ; 1.6 %/% en longitudinal pour [Montero (2010)] sur de l'épicéa. Le même type de résultats avec des preuves d'une anisotropie dans le plan transverse chez [Joyet (1992)] (pin maritimes, 30°C) avec environ 5 %/% pour le radial et 2 %/% pour le tangentiel. L'anisotropie est moins évidente chez [Cariou (1987)] qui donne environ 0.3 %/% pour le radial et le tangentiel confondus, sur du pin maritime également (nous considérons que ces dernières valeurs sont très faibles).

La plupart du temps nous définissons une valeur de module élastique « à l'équilibre », en supposant que cet équilibre que nous nommons, et qui est le plus souvent celui du taux d'humidité moyen dans l'échantillon avec l'air ambiant (mesuré via la grandeur physique moyenne de masse), est le même que l'équilibre des propriétés mécaniques. Or [Ishimaru et Oshima (2001)] montre que le module élastique dans la direction radiale continue de varier (tendance à augmenter) avec la période de conditionnement humide, et ce bien après stabilisation du taux d'humidité.

Lorsque le bois n'est pas à l'équilibre hygroscopique, il devient encore moins évident de déterminer la relation entre taux d'humidité et les modules « instantanés ». Les travaux de [Takahashi, *et al.* (2006b)] complètent l'analyse précédente en effectuant des mesures de module instantané (flexion 3 points) pour des échantillons en cours de séchage ou d'humidification (Figure 3-1).

Ces résultats peuvent suggérer au moins deux interprétations : en dépit d'un taux d'humidité moyen constant dans l'échantillon, des gradients d'humidité (transitoires) peuvent subsister aux échelles inférieures (parois des cellules) et ainsi influencer les propriétés mécaniques globales de la structure en nid d'abeille qui détermine la rigidité mécanique du bois dans le plan transverse ; ils peuvent également suggérer que la matière ligneuse est toujours moins rigide dans un état instable (pendant le départ et l'arrivée d'eau) que dans un état hydrique stabilisé. L'objectif des travaux de Takahashi était de mettre en relation cette chute de module transitoire et les effets du couplage mécanosorptif décrits dans la suite de notre document : leur conclusion tendait à négliger ces effets sur le module élastique. Nous utiliserons néanmoins ces remarques dans notre modélisation.

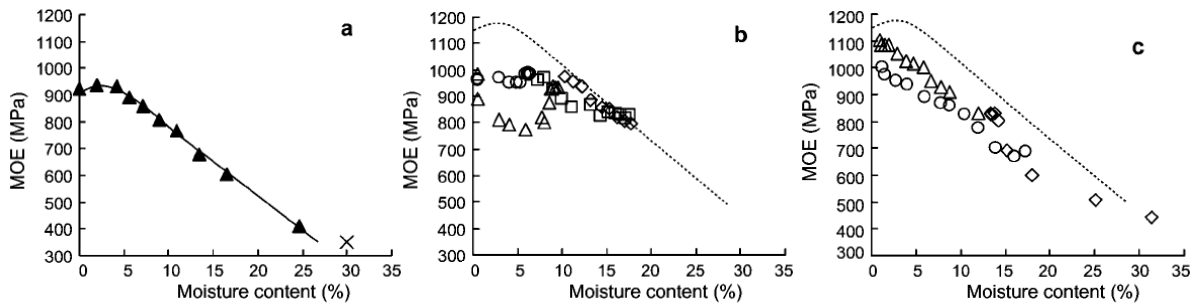


Figure 3-1 : tiré de [Takahashi, *et al.* (2006b)] ; Module d'Young (MOE) dans la direction radiale (E_R) en fonction du taux d'humidité ; (a) tests en flexion à humidité relative constante après stabilisation durant 9 semaines ($\blacktriangle$) et saturé d'eau ($\times$). (b) tests en flexion durant quatre processus d'adsorption différents : 0 % RH $\rightarrow$ 42.6 % RH ($\circ$) ; 0 % RH $\rightarrow$ 65.0 % RH (Δ) ; 42.6 % RH $\rightarrow$ 98.0 % RH ($\square$) ; 65 % RH $\rightarrow$ 98.0 % RH ($\diamond$) ; (c) tests en flexion durant quatre processus de désorption : 98.0 % RH $\rightarrow$ 65.0 % RH ($\diamond$) ; 80.1 % RH $\rightarrow$ 0 % RH ($\circ$) ; 65.0 % RH $\rightarrow$ 0 % RH (Δ). Les lignes en pointillés dans (b) et (c) indiquent les valeurs stabilisées de E_R (ces valeurs diffèrent de celles de (a) parce que le matériel est différent).

3.1.3 Retrait-Gonflement

Cet aspect du comportement ligneux ayant déjà été évoqué, nous allons nous contenter de rappeler la forme qu'il prendra dans la loi de comportement générale énoncée à l'équation (3-1) ou (3-2).

$$\varepsilon_\alpha = \alpha(h - h_{ref}) \quad (3-6)$$

Où ε_a est le retrait dit « induit » par les retraits gonflements, h le taux d'humidité interne de l'élément de volume considéré, et h_{ref} le taux d'humidité de référence (taux d'humidité de l'échantillon au temps de référence, celui de la géométrie initiale non déformée). α est le tenseur des retraits-gonflements, dont la forme (réduite) est la suivante :

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_T \\ \alpha_L \\ \alpha_R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Les termes nuls indiquent qu'il n'y a pas de retrait-gonflement de cisaillement dans le repère matériel $(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$; ce qui ne signifie pas pour autant qu'il n'y a pas de cisaillement induits par le retrait-gonflement dans une pièce de bois, puisqu'en observant à une échelle supérieur à celle de l'élément volumique élémentaire, à l'échelle d'une planche par exemple, il faut considérer également la rotation du repère matériel due aux cernes (cf. §5.5).

La notation en tenseur de retrait-gonflement laisse supposer que les déformations dans les trois directions sont indépendantes les unes des autres : évidemment ces trois valeurs sont liées par la variable taux d'humidité (scalaire) et le retrait-gonflement a lieu simultanément dans les trois directions.

3.1.4 Viscoélasticité linéaire

3.1.4.1 Description générale

Pour un matériau viscoélastique, la matrice de comportement est dépendante du temps ; dans le cas du bois elle dépend également de l'humidité, de la température, du niveau de contrainte et d'autres grandeurs encore. Ces dernières grandeurs étant fixées par ailleurs, la dépendance au temps s'illustre généralement de la manière suivante : à charge constante, la flèche d'une poutre en flexion augmente avec le temps.

A contrainte constante σ_0 (essai de fluage), la déformation du matériau $\varepsilon(t)$ est une fonction du temps (et de σ_0) :

$$\varepsilon(t, \sigma_0) = Q(t) \sigma_0 \quad (3-8)$$

Inversement on peut expliciter le cas viscoélastique à déformation constante (essai de relaxation), dont la contrainte décroît dans le temps :

$$\sigma(t, \varepsilon_0) = C(t) \varepsilon_0 \quad (3-9)$$

3.1.4.2 Fonctions mathématiques et modèles rhéologiques associés

Afin de caractériser le comportement viscoélastique des matériaux, et notamment du bois, les expérimentateurs utilisent généralement des essais statiques de fluage (à charge constante), plutôt que des essais de relaxation plus complexes à mettre en place, ou des essais dynamiques en vibration (charge ou déplacement imposé et mesure du déphasage respectif). Les essais dynamiques permettent d'obtenir des spectres de réponse en fréquence beaucoup plus larges en peu de temps, ce qui permet d'extrapoler les comportements à long terme via des considérations d'équivalence fréquence-temps-température [Dhoula (2009); Genevaux (1989); Le Govic, *et al.* (1987)] sous l'hypothèse que les

mécanismes à long terme sont du même type que ceux observés expérimentalement à court terme ; pour finir les mesures dynamiques sont plus adaptées dans le cadre d'études s'intéressant au comportement vibratoire des éléments de bois (instruments de musique par exemple, voir [Brémaud (2006)]). Dans nos travaux nous nous intéresserons essentiellement aux essais statiques.

Pour approcher les données expérimentales de fluage à court terme à l'aide de fonction paramétrées, les expérimentateurs utilisent des lois puissances (à 3 paramètres : 1 pour la partie élastique, 2 pour la partie différée), dont il a été établi qu'elles représentent de manière satisfaisante un grand nombre de phénomènes viscoélastiques linéaires observés ([Bardet (2001); Dhoulá (2009); Gril, *et al.* (2004); Huet (1988); Le Govic (1988)]). On les trouve sous différentes formes équivalentes :

$$Q(t) = Q_0 + mt^n$$

$$Q(t) = Q_0 \left(1 + \left(\frac{t}{\tau} \right)^n \right) \quad (3-10)$$

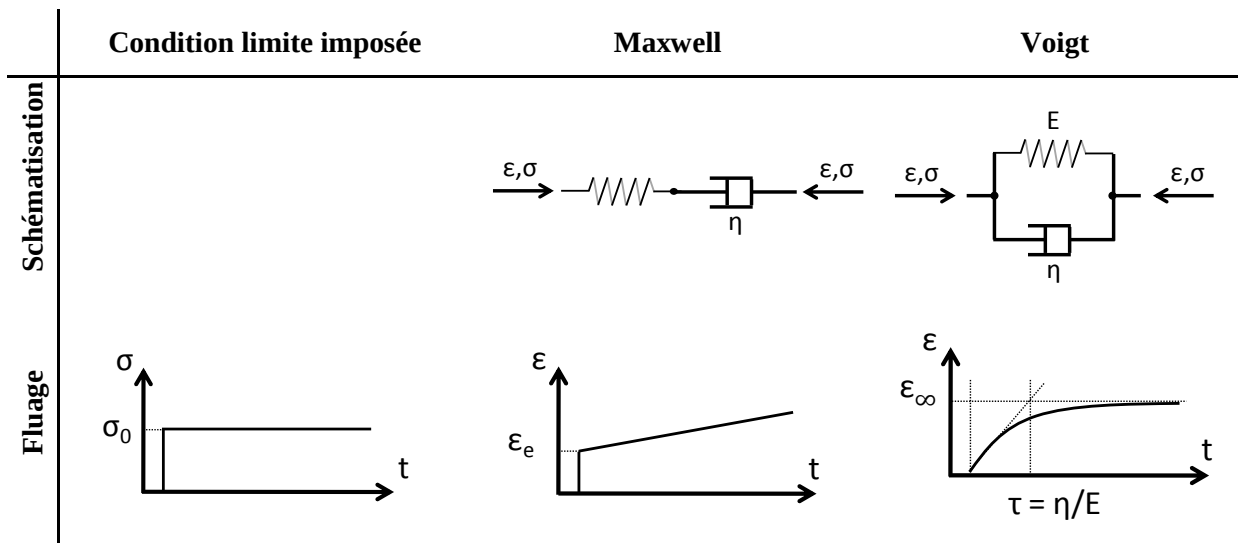
Cette forme d'équation qui tend vers une déformation infinie (pour un temps infini) est évidemment impropre à modéliser les phénomènes à long terme, notamment la présence d'une limite de fluage. Ces fonctions mathématiques sont en revanche très utiles lors du post-traitement des essais courts de fluage, parce qu'elles synthétisent une grande quantité d'information à l'aide de quelques paramètres seulement ; en revanche, elles ne permettent pas de formuler des lois de comportement donnant la relation entre contraintes et déformations. Contrairement aux essais expérimentaux qui sont généralement réalisés à contrainte ou déformation constante, les sollicitations complexes que subit le matériau, notamment dans notre application, sont associées à des états de contrainte et de déformation variables. C'est pourquoi nous avons recours aux modèles rhéologiques qui permettent de formuler des comportements généralisables à tous types de chargements.

En rhéologie, la viscosité est modélisée par un amortisseur dont l'équation de comportement est :

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (3-11)$$

Avec η la viscosité cinématique.

L'association d'un ressort en série ou parallèle de cet amortisseur permet de modéliser respectivement la déformation élastique initiale ou la limite de fluage (fluage lorsque $t \rightarrow \infty$). Les modèles rhéologiques ainsi assemblés, nommés respectivement Maxwell et Voigt, sont schématisés avec leur réponse temporelle à la Figure 3-2.



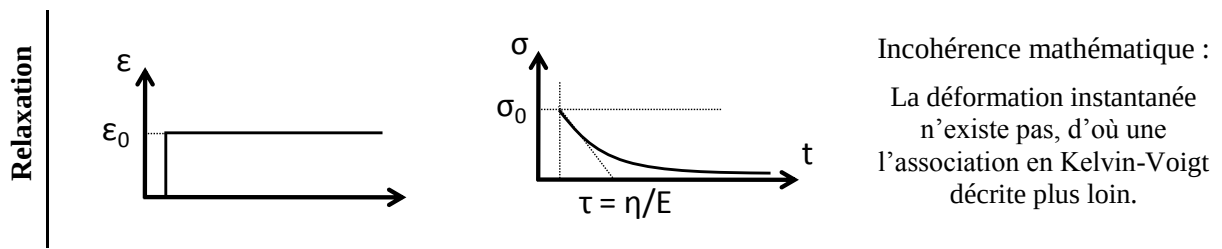


Figure 3-2: éléments rhéologiques utilisés pour la description du fluage ; schématisation et réponse en fluage et relaxation.

Ces assemblages peuvent être combinés sous différentes formes selon la complexité des phénomènes à décrire. Dans la suite nous utiliserons l'association dite de Kelvin-Voigt, qui rend compte à la fois de la déformation instantanée (déformation élastique) et de la valeur de fluage limite.

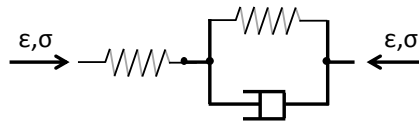


Figure 3-3: assemblage de Kelvin-Voigt pour un comportement élastique et viscoélastique.

Expérimentalement, il est rare d'atteindre une éventuelle limite de fluage viscoélastique (et c'est pourquoi les lois puissances sont souvent applicables). La courbe expérimentale caractéristique du fluage pour le bois (toute direction anatomique confondue) est représentée à la Figure 3-4. Elle ne fait apparaître aucune stabilisation du fluage et semble montrer une seconde partie linéaire en logarithme du temps. Ni l'assemblage de Maxwell, ni celui de Voigt ne permettent à lui seul de représenter une telle courbe. Dans la suite nous utiliserons l'assemblage de Kelvin-Voigt Généralisé (KVG) (Figure 3-5), qui permet ce type de réponse, et que certains auteurs ont justifié par l'existence de plusieurs mécanismes viscoélastiques indépendants, activés pour différents temps caractéristiques (ou différentes températures) [Bardet (2001); Dhoulá (2009); Passard et Perre (2005a); Passard et Perre (2005b)]. Nous aurons l'occasion de revenir plus en détail (§4.2.3) sur le comportement de tels assemblages, et sur leur intérêt dans notre application.

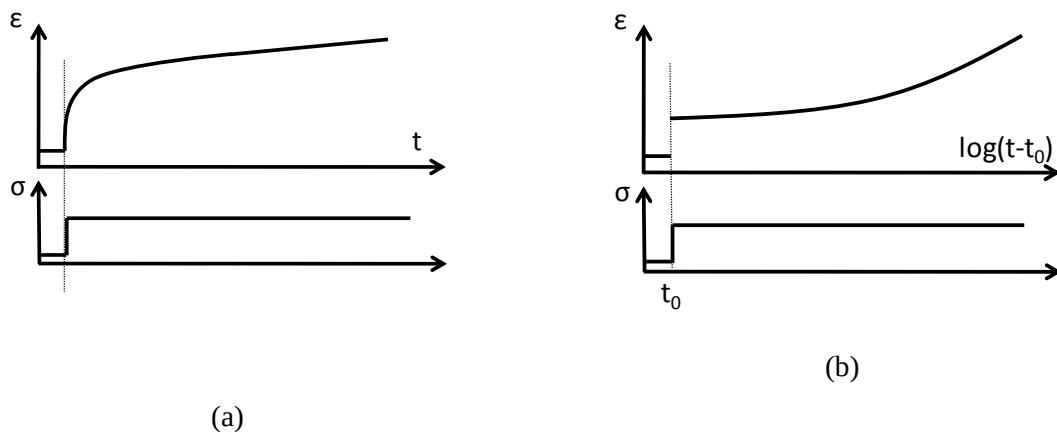


Figure 3-4 : courbes de fluage pour le bois (a) en fonction du temps et (b) en fonction du logarithme du temps.

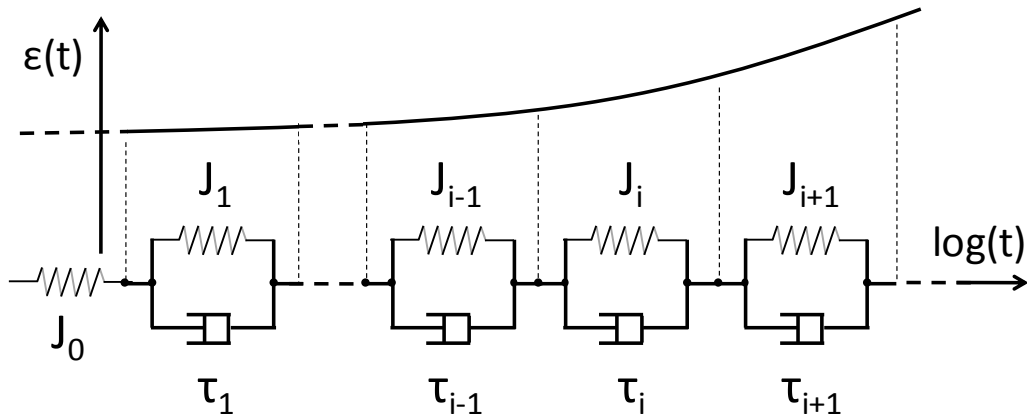


Figure 3-5 : contribution temporelle des différents étages du Kelvin-Voigt Généralisé (inspiré de [Randriambololona (2003)]).

3.1.4.3 Orthotropie viscoélastique

Les modèles présentés jusqu'ici pour représenter le fluage ont été probablement pensés de manière unidimensionnelle. Le travail théorique qui vise à étendre ce type de modèles à une description tridimensionnelle n'est pas immédiat. La démarche générale consiste à construire les tenseurs de comportement viscoélastiques sur les mêmes considérations thermodynamiques qui servent à la simplification des tenseurs élastiques [Chassagne (2006)].

Lorsqu'on s'intéresse expérimentalement au fluage du bois dans ses différentes directions, force est de constater que tous les paramètres qui en décrivent le comportement différé (complaisance différée et temps caractéristique) sont soumis à des rapports d'anisotropie importants, à l'image des rigidités élastiques ou des retraits-gonflements, justifiés par la microstructure. L'analyse de l'anisotropie des complaisances différée peut être ramenée d'un point de vue théorique à l'étude des ratios d'anisotropie élastiques. En revanche l'analyse des temps de relaxation pose des problèmes essentiellement liés à la conservation des volumes.

Dans son travail de thèse, [Chassagne (2006)] applique le second principe de la thermodynamique, sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem, à un solide de Maxwell orthotrope. Le système d'équation à respecter est relativement compliqué pour conclure dans le cas général mais il montre que pour respecter le second principe il suffit (mais il n'est pas nécessaire) que les temps caractéristiques hors diagonale soient inférieurs ou égaux au maximum des temps de relaxation diagonaux (cf. note ci-après et équations (3-13)(3-14)); les temps caractéristiques hors diagonale peuvent être vus comme les temps caractéristiques associés aux coefficients de Poisson (coefficients de Poisson dépendants du temps) tandis que les temps caractéristiques diagonaux sont associés aux directions principales.

Note : la réponse en déformation d'un solide viscoélastique de Voigt s'écrit (cf. §4.3.2.2) :

$$\varepsilon(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right)(Q\sigma^0 - \varepsilon^0) \quad (3-12)$$

Avec Q le tenseur des complaisances et $(\sigma^0, \varepsilon^0)$ l'état initial.

Le tenseur des temps caractéristiques est de la forme :

$$\frac{1}{\tau} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_{TT}} & \frac{1}{\tau_{TTLL}} & \frac{1}{\tau_{TT RR}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_{TTLL}} & \frac{1}{\tau_{LL}} & \frac{1}{\tau_{LL RR}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_{TT RR}} & \frac{1}{\tau_{LL RR}} & \frac{1}{\tau_{RR}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{LR}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{TR}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{LT}} \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

Et [Chassagne (2006)] propose une condition suffisante :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{TTLL} \\ \tau_{TT RR} \\ \tau_{LL RR} \end{Bmatrix} \leq \text{Max}(\tau_{TT}, \tau_{LL}, \tau_{RR}) \quad (3-14)$$

3.1.4.4 Analyse des données de fluage

L'analyse des propriétés élastique des bois, probablement sous l'impulsion des standards issus de l'industrie, est suffisamment normalisée pour comparer des données provenant de sources diverses : ce n'est pas le cas de l'analyse des données de fluage.

Le fluage d'échantillons de bois est analysé par les différents auteurs, tantôt en termes de déformation (ε), tantôt de flèche (f) pour les essais de flexion, ou encore de complaisance différée ou fonction de fluage ($Q(t)$). Il est possible de ramener chacune de ces grandeurs différées à leur équivalent instantané : dans la suite on préférera la notation en complaisances (notées souvent J dans le cas uni-axial), et dans ce cas on peut définir le fluage relatif (*relative creep*) de différentes manières :

$$J_{rel\ creep} = \frac{J(t)}{J_0} \quad (3-15)$$

Ou encore :

$$J_{rel\ creep} = \frac{J(t) - J_0}{J_0} = \frac{J(t)}{J_0} - 1 \quad (3-16)$$

Outre la complexité du comportement en lui-même et la diversité des matériaux testés, c'est la multiplication de ces écritures qui rend difficile la synthèse des résultats disponibles dans la littérature. L'utilisation de seulement trois paramètres à l'aide des lois puissance favorise ce travail de synthèse comme celui de [Navi et Heger (2005)].

3.1.4.5 Viscosité et taux d'humidité

Tout comme la réponse élastique, le comportement viscoélastique à température ambiante est fortement lié au taux d'humidité du bois placé sous chargement : en général on admet que la viscosité du bois augmente avec le taux d'humidité. On peut le constater expérimentalement sur deux

échantillons fluant à deux humidité différentes et à même niveau de charge (ou de déformation), et ce de différentes manières : en comparant le fluage relatif après une même durée de fluage, ou en comparant le temps de fluage des deux échantillons pour atteindre un même fluage relatif (Figure 3-6). Ces deux façons d'illustrer le même effet ont pour équivalent deux façons différentes de modéliser ces phénomènes à partir de l'élément de Voigt. Ainsi on peut choisir respectivement de faire varier les complaisances viscoélastiques avec le taux d'humidité, ou bien le temps de retard associé, voire les deux.

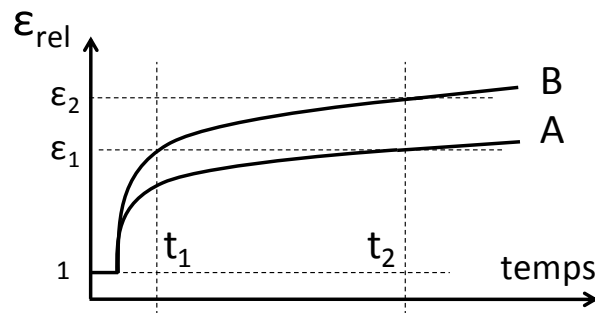


Figure 3-6 : courbe théorique de fluage relatif de deux échantillons identiques fluant sous deux conditions hygrométriques différentes, avec $HR_A < HR_B$; au même temps t_2 , les échantillons A et B ont un fluage relatif différent ; pour atteindre un même niveau de déformation relative (ϵ_1 par exemple) les échantillons A et B mettent deux temps différents t_1 et t_2 .

Si le fluage relatif limite (fluage relatif après un temps très long devant le temps caractéristique) augmente avec le taux d'humidité, ce qui semble être montré par les travaux de [Matar (2003)], il est nécessaire que les modèles intègrent une variation des complaisances du modèle KVG avec l'humidité : avec J_{vs} la complaisance viscoélastique et J_e la complaisance élastique, le rapport J_{vs}/J_e doit être une fonction croissante de l'humidité, alors que J_e est elle-même une fonction croissante de mc . Cette démarche a été appliquée aux assemblages bois-béton par [Bou Saïd (2003)].

La variation du temps caractéristique avec l'humidité permet de décaler le spectre de réponse du matériau. Une apparente accélération du fluage peut être ainsi obtenue, sans modification de l'état limite. [Passard et Perre (2005a); Passard et Perre (2005b)] puis [Rémond (2004); Remond, *et al.* (2007)] utilisent ce genre d'approche par analogie avec les effets « d'accélération » du fluage dus à la température (équivalence temps-température) : cette dernière modifie les états de transitions des polymères constitutifs du bois, modifiant la réponse viscoélastique associée.

Dans le paragraphe 4.2.3.4, en s'appuyant sur des données expérimentales, nous développerons un modèle incluant la variation des complaisances viscoélastiques avec le taux d'humidité du bois. Nous venons de traiter les problèmes d'interaction entre l'humidité et la viscosité (à humidité constante), maintenant nous allons aborder les couplages à humidité variable tels que la mécanosorption.

3.2 Les couplages hygromécaniques

Derrière la problématique des essais expérimentaux de fluage mécanosorptif, ou des essais de retrait-gonflement empêché, se cache la même difficulté de mesurer les couplages hygromécaniques dans le bois (de quelle manière l'état d'humidité d'un échantillon influence-t-il sa réponse mécanique, et réciproquement dans quelle mesure l'état mécanique d'une pièce de bois modifie-t-il son état hydrique ?) et la difficulté (parfois impossibilité) de mesurer expérimentalement ces phénomènes de manière indépendante (comment mesurer l'effet de changements d'humidité, effets mécanosorptifs, sans obtenir d'effet viscoélastique, c'est-à-dire sans faire intervenir le temps ?).

3.2.1 Mécanosorption

3.2.1.1 Généralités

Le terme de « mécanosorption », traduit de l'anglais « *mechanosorption* », a été vraisemblablement introduit par [Grossman (1971)] pour désigner l'augmentation du fluage du bois sous humidité variable, comme manifestation particulière des couplages hygromécaniques caractérisant ce matériau ; ces phénomènes macroscopiques sont à mettre en relation avec les polymères qui composent la matière ligneuse et leur assemblage en composite à fibres.

L'effet mécanosorptif peut être mis en évidence simplement lors d'essais de fluage, par exemple grâce à la procédure schématisée sur la Figure 3-7 : on réalise 3 essais de fluage (à charge constante¹³) sur 3 échantillons appariés (A,B,C). A et B sont maintenus à humidité constante, RH_A et RH_B avec $RH_A < RH_B$: le fluage de B est plus important que celui de A (d'après section 3.1.4). C est chargé de la même manière, mais dans un environnement variable, avec $RH_C \in [RH_A; RH_B]$. De cette manière le fluage de C est (beaucoup) plus important que celui de A et B.

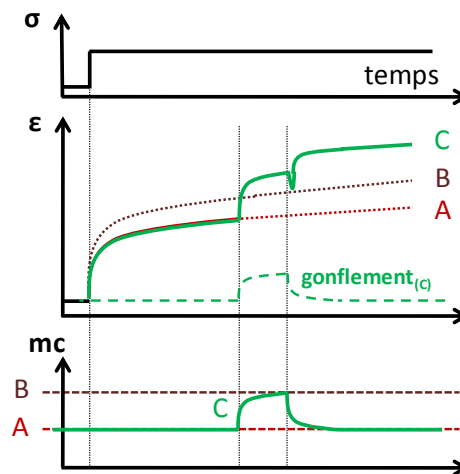


Figure 3-7: illustration des effets mécanosorptifs lors d'un essai de fluage ; les échantillons A et B sont soumis à un fluage viscoélastique à taux d'humidité constant, tandis que C est soumis à un cycle d'humidification puis séchage (entre les humidités de A et B) durant le fluage ; la réponse mécanosorptive excède la réponse en fluage viscoélastique pur de la plus haute humidité (B). La réponse totale de C est un mélange de retraits-gonflements (ε_a), de viscoélasticité et d'effet mécanosorptif.

Ce phénomène tel qu'il vient d'être décrit aurait été observé (d'après [Schniewind (1966)]) dès 1909 par Tiemann, et réaffirmé seulement vers 1952 par Suzuki ; Gril cite également Takeyama 1944. Les travaux ultérieurs [Armstrong et Christensen (1961); Armstrong et Kingston (1960)] et l'appellation donnée par Grossman ont ouvert la porte à nombre d'autres travaux expérimentaux.

¹³ On cherche rarement à réaliser des essais à contrainte constante car dans le bois les variations de sections dues au retrait-gonflement sont importantes et seraient difficiles à compenser durant les essais (ajustement en poursuite pendant que mc varie). Ces variations de section et la variation de contrainte appliquée équivalente sont généralement considérées lors du post-traitement des données. Suivant la direction considérée dans le bois, il n'est par ailleurs pas évident de définir clairement la contrainte effectivement supportée par les cellules : on imagine par exemple qu'une partie du gonflement peut se faire à volume macroscopique constant, alors que les cellules portant effectivement la charge changent de section (en réduisant leur lumen).

[Leicester (1971)] complète ces approches expérimentales en proposant un modèle rhéologique pour décrire ces phénomènes.

Les phénomènes de couplage hygromécanique ne sont pas l'apanage du bois. La mécanosorption se manifeste dans de nombreux matériaux de type composite à fibres, naturels ou non (papier, tissus) et d'autres couplages hygromécaniques se retrouvent dans les matériaux de l'ingénieur (béton et milieux poreux en général). Les enjeux de la caractérisation de ces phénomènes dans le bois sont divers : ils vont, en suivant l'échelle du temps, de la compréhension des phénomènes transitoires (panneaux peints et séchage des avivés par exemple) à la recherche d'états limite de fluage (fluage à 50 ans dans la norme européenne de construction bois *Eurocode 5*) pour la conception des structures chargées en environnement variable.

La caractérisation expérimentale se heurte à de nombreuses difficultés, dont les principales sont la maîtrise des conditions ambiantes, la variabilité due au matériau, l'orthotropie, la durée des essais statiques, etc. L'amplitude des phénomènes mécanosorptifs sur la flexion d'éléments de bois a poussé la communauté à creuser ces questions avec beaucoup d'énergie, parfois au détriment de la compréhension de phénomènes de couplage élémentaires, tels que l'interaction de l'eau et des propriétés mécaniques élastiques et viscoélastiques. L'importance des effets mécanosorptifs peut s'illustrer à l'aide du rapport $\varepsilon_{ms}/\varepsilon_{elast}$ dont l'ordre de grandeur pour le bois est de 2-3 dans la direction des fibres (à mettre en relation avec le $1+k_{def} = 3-4$ de l'*Eurocode 5*, voir [Matar (2003); Montero (2010)]), et jusqu'à 10 perpendiculairement au fil [Svensson et Toratti (2002)] dans des conditions d'essais sévères imposées en laboratoire.

3.2.1.2 Modèle rhéologique et représentations graphiques pour les effets mécanosorptifs

Les analogies et les différences entre la viscoélasticité et la mécanosorption sont toujours au cœur des préoccupations rhéologiques en sciences du bois. On aime à modéliser la mécanosorption comme un fluage viscoélastique qui dépendrait, non pas du temps, mais plutôt des échanges d'humidité. Différents protocoles expérimentaux ont été mis en œuvre pour « prouver » l'indépendance au temps de la mécanosorption, hypothèse qui stipule que la contribution mécanosorptive est influencée uniquement par les amplitudes des variations d'humidité et non par leur vitesse, et sur laquelle sont basés un grand nombre de modèles et théories actuels.

Certains auteurs se demandent par ailleurs jusqu'à quel point ces deux phénomènes, viscoélasticité et mécanosorption, sont différents : la possibilité que les deux phénomènes soient couplés, qu'ils ne soient que deux manières différentes d'arriver à un même état d'équilibre (état limite), a été discuté par [Hanhijärvi et Hunt (1998)], et plus récemment par [Montero (2010)]. Les conclusions dans ce domaine sont encore dures à atteindre, vu la difficulté des mises en œuvre expérimentales, des temps mis en jeu, et probablement à cause des non linéarités du comportement et de la variabilité du matériau considéré.

L'hypothèse d'une mécanosorption indépendante du temps a permis des avancées en termes de représentation graphique des phénomènes, et en termes de modélisation à l'échelle macroscopique. A la différence des représentations des phénomènes viscoélastiques qui intègre le temps sous différentes formes (temps, logarithme du temps,...), [Hunt (1984)] propose une représentation des « trajectoires mécanosorptives » en fonction du taux d'humidité, dans laquelle le temps n'intervient pas de manière explicite (Figure 3-8).

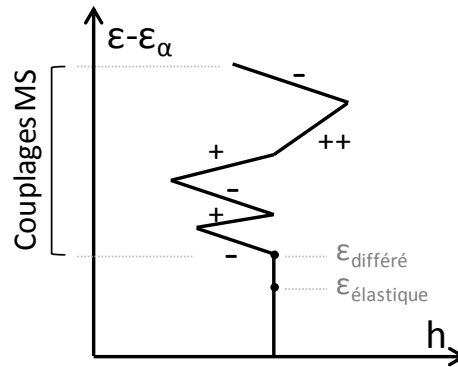


Figure 3-8 : trajectoire mécanosorptive représentant la déformation totale ε (corrigée du retrait gonflement libre ε_α) en fonction du taux d'humidité (h) ; ces trajectoires font apparaître les effets de couplage mécanosorptifs (MS) différents lors du séchage (-), ré-humidification (+), et nouvelle humidification (++) définis par [Ranta-Maunus (1975)].

C'est dans cette même représentation que [Matar (2003)] synthétise les valeurs de fluage à long terme (50 ans) donnés dans l'Eurocode 5, norme européenne utilisée dans le dimensionnement des structures bois ; et c'est ainsi que nous représenterons certaines des données viscoélastiques pour illustrer le lien entre propriétés mécaniques et taux d'humidité.

Toujours de manière analogue à la viscoélasticité, [Leicester (1971)] propose le modèle rhéologique qui servira de base à un grand nombre de modèles actuels. L'élément mécanosorptif, schématisé à la Figure 3-9 est un amortisseur dont le temps caractéristique est substitué par une variation de taux d'humidité caractéristique.

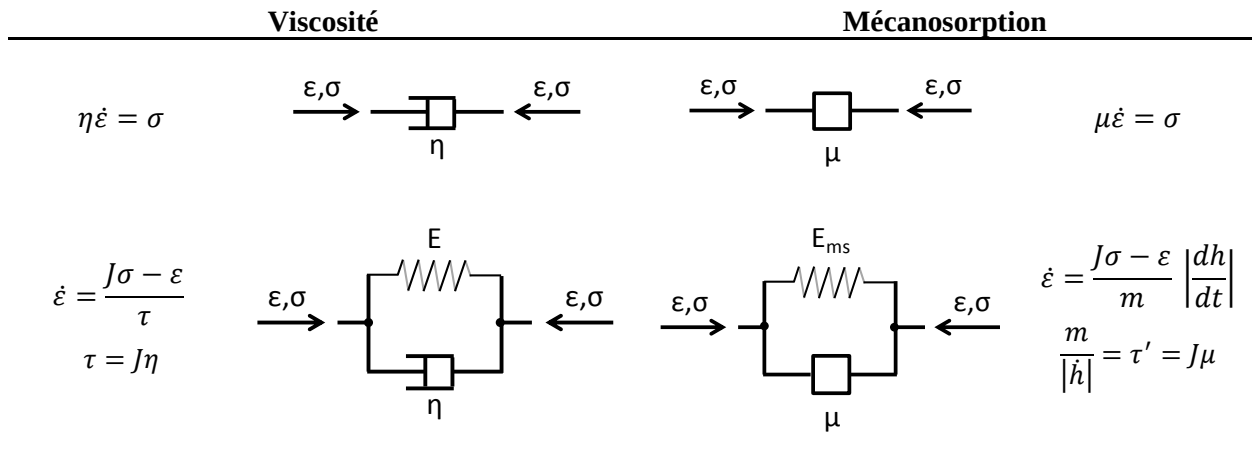


Figure 3-9 : éléments rhéologiques viscoélastiques et mécanosorptifs

[Salin (1992)] complète le modèle de Leicester (souvent associé au nom de Ranta-Manus dans la littérature) en y ajoutant un ressort qui, à l'image du ressort dans l'assemblage viscoélastique de Voigt, introduit la notion de limite mécanosorptive (la déformation pour un nombre infini de cycles d'humidité sous charge). Par la suite de nombreux modèles [Martensson et Svensson (1997a); Martensson et Svensson (1997b)] se sont appuyés sur cette même base créée par Leicester, en jouant sur les assemblages série/parallèle et des éléments non linéaires pour générer des déformations permanentes qui apparaissent effectivement lors des essais expérimentaux (Svensson, Hanijarvi, Montero). Les modèles dits à « activation combinée » ([Bazant et Meiri (1985); Hanhijärvi (1995); Hunt (1999)]) associent viscosité et mécanosorption en série pour traduire les interactions entre ces deux phénomènes. Encore une fois les données actuelles ne permettent pas de conclure sur la

pertinence d'un modèle plutôt qu'un autre ([Hanhijärvi et Hunt (1998); Montero (2010)]) ; nous dirons pour conclure cette discussion que le modèle employé doit être en relation avec les conditions de l'application. [Montero (2010)] montre par exemple qu'à très haute humidité, une partie importante des effets mécanosorptifs s'efface et la prise en compte de la viscosité à haute humidité suffit à modéliser le comportement des échantillons en fluage. Pour une revue historique des modèles mathématiques utilisés pour le bois, nous renverrons le lecteur aux synthèses plus approfondies de [Randriambololona (2003)], [Bou Saïd (2003)] et [Moutee (2006)].

L'indépendance au temps est donc une hypothèse pratique, mais certainement illusoire, puisqu'elle fait abstraction du fait que les variations du taux d'humidité se définissent dans le temps (on calcule d'ailleurs dh/dt dans le modèle de Leicester), et elle a tendance à faire oublier le rôle de la cinétique dans certains cas avec des conditions aux limites complexes, par exemple les essais de retrait empêché dont nous allons parler au §3.2.2.

Afin de reproduire les effets (++)¹⁴ de la mécanosorption ([Ranta-Maunus (1975)]), et après les travaux récents de [Dubois (2004)] et [Husson (2009)] sur la modélisation des effets de verrouillage en déformations sous chargement et taux d'humidité variable, nous avons enrichi la formulation des hygro-verrous proposés par [Gril (1988)] : ce modèle rhéologique alternatif a d'autres objectifs que celui de reproduire l'effet (++) et que nous verrons au §4.3.2.4. Afin de ne pas charger le corps de la thèse, le développement des hygro-verrous sera expliqué dans l'annexe 2.

3.2.1.3 Quelques remarques encore sur les modèles de représentation de la mécanosorption

Les nombreux degrés de libertés associés aux modèles complexes que l'on trouve dans la littérature permettent souvent de trouver des paramètres adaptés pour approcher au mieux la simulation d'un jeu de données expérimentales. Ce qui est plus difficile, c'est de faire fonctionner un seul et même modèle, ainsi qu'un seul jeu de paramètres, sur différentes configurations expérimentales. Le modèle de Leicester a le mérite d'avoir permis une approche unifiée d'un certain nombre de phénomènes empiriques ; cependant il soulève quelques problèmes physiques.

Beaucoup de ces problèmes viennent du fait que ce modèle utilise comme variable interne la valeur absolue des variations d'humidité. Cette idée a probablement été inspirée par les modèles de fluage adaptés au séchage du béton, durant lequel se manifeste l'effet Pickett ([Pickett (1942)]). Durant le séchage du béton sous charge, on décrit l'état de contraintes interne du matériau à l'aide du taux de variation de l'humidité interne aux pores ([Bazant, *et al.* (1997)]). La transposition de cette équation au bois pour décrire les effets mécanosorptifs à l'aide du taux de variation de taux d'humidité $|dh/dt|$ pose quelques problèmes, dont le principal est que la formulation modifiée doit prendre en compte le séchage et l'humidification en introduisant $|\dot{h}|$.

Ainsi, la réponse du modèle dépend du taux de variation d'humidité minimal utilisé, autrement dit de la résolution de la mesure expérimentale d'humidité. En effet, supposons qu'on mesure le taux d'humidité d'échantillons en fluage à 1% près, et dans un autre cas à 0.1% près. En simulant la réponse du matériau, dans le premier cas on ne voit que l'effet de variations d'au moins 1%, tandis que de nombreuses variations peuvent affecter le comportement dans le second cas (beaucoup de variations en dessous de 1%). La réponse de la simulation en déformations convergera toujours vers la limite de fluage (pour peu que l'élément soit associé à un ressort en parallèle), mais la façon de converger dépend de la résolution imposée par les mesures expérimentales ou choisies a priori pour les simulations.

¹⁴ L'effet (++) de la mécanosorption est une augmentation du fluage pour des taux d'humidité supérieurs aux taux d'humidité précédemment connus sous charge (Figure 3-8), (cf. [Ranta-Maunus (1975)])

Pour résoudre ce genre de problème, il faudrait descendre d'échelle, ou plutôt utiliser une grandeur physique autre que le taux d'humidité qui, comme nous l'avons déjà remarqué, est une grandeur moyennée qui ne tient pas compte des gradients d'humidité présents dans le matériau (cf. §3.1.2.2). C'est probablement ce type de réflexion qui a amené [Habeger (2001)] à expliquer les phénomènes mécanosorptifs comme le résultats de gradients d'humidité au sein des parois cellulaires.

En attendant que des modèles macro émergent des homogénéisations micro-macro proposées dans la littérature ([Hofstetter, *et al.* (2007)]), nous nous proposons d'avancer sur la modélisation des phénomènes macro, en travaillant avec les lois de comportement décrites jusque là pour la modélisation de panneaux peints.

3.2.2 Déformations permanentes transversalement aux fibres

Nous n'avons pas pour ambition de commencer ici une revue exhaustive des phénomènes de « plasticité » dans le bois (déformations permanentes et endommagement) qui prennent des formes très différentes suivant les conditions expérimentales (température, humidité) [Gril et Norimoto (1993)], les directions sollicitées (L, R ou T) [François (1992)], et le sens de la sollicitation (traction ou compression). Le phénomène qui nous intéresse ici est la compression du bois dans le sens transverse aux fibres générée lors d'un retrait-gonflement empêché.

3.2.2.1 *Compression set*

Le « *compression set* » est le terme anglais utilisé par [Hoadley (1995); Hoadley (1969)] pour nommer la déformation permanente en compression générée dans le plan transverse lors d'essais de gonflement empêché suivi d'un retrait, c'est-à-dire sur des échantillons bloqués en déformations lors d'un changement d'ambiance.

De tous les comportements approchés dans ce travail, le *compression set* est celui qui à la fois lui a vu le moins de travaux consacrés dans les sciences du bois, et celui qui est probablement le plus pertinent pour le monde de la conservation. Il se manifeste dans de nombreux cas pratiques, à chaque fois qu'un panneau de bois est bloqué en retrait-gonflement, ce qui arrive notamment à l'interface entre deux planches de panneau peint lorsque celles-ci sont enchâssées dans un cadre rigide.

[Hoadley (1969)] a mis en évidence l'apparition de déformations permanentes dans le plan transverse (R, T et intermédiaire) pendant des essais de gonflement empêché sur peuplier. En vue de l'application pour les déformations empêchées dans les panneaux peints, il propose plus tard ([Hoadley (1995)]) un schéma de principe pour un essai, repris ici à la Figure 3-10(b). Le principe de cet essai est relativement simple : il s'agit de bloquer la déformation dans une direction d'un échantillon soumis à un cycle d'humidité (mc% : 6% → 18% → 6% dans l'exemple de Hoadley). Hoadley propose de comparer trois échantillons assortis qui sont (de gauche à droite sur la Figure 3-10) : un bloqué en retrait-gonflement, un bloqué en gonflement uniquement, et un troisième libre. D'après l'illustration de Hoadley, ce protocole doit mener à deux observations : la compression permanente de l'échantillon bloqué unilatéralement, et la rupture de l'échantillon complètement bloqué (voir Figure 3-10(b)). En l'absence de données expérimentales dans la littérature, nous ne sommes pas en mesure d'affirmer que Hoadley a bien réalisé cet essai. En revanche l'expérience a été effectuée par [Mazzanti (2007)] à l'aide de mesures combinées de déformations et de contraintes : les résultats de ces essais qui seront discutés plus largement au §4.3.3 ne permettent pas de mettre en évidence la rupture du premier échantillon, mais confirment la présence d'un *compression set* (déformation permanente et/ou résiduelle) ; les essais de Mazzanti nous donneront des informations complémentaires sur les cinétiques de déformation des échantillons.

Cette affirmation de l'existence du *compression set* n'est pas si intuitive qu'il n'y paraît. Il paraît trivial d'affirmer que le bois possède une limite élastique dépendante entre autres de la direction de sollicitation. Néanmoins cela est moins évident d'affirmer que lors d'un essai de gonflement empêché,

la différence entre la contrainte imposée par la restriction en déformation et la relaxation propre au comportement hygromécanique suffit à créer des déformations permanentes.

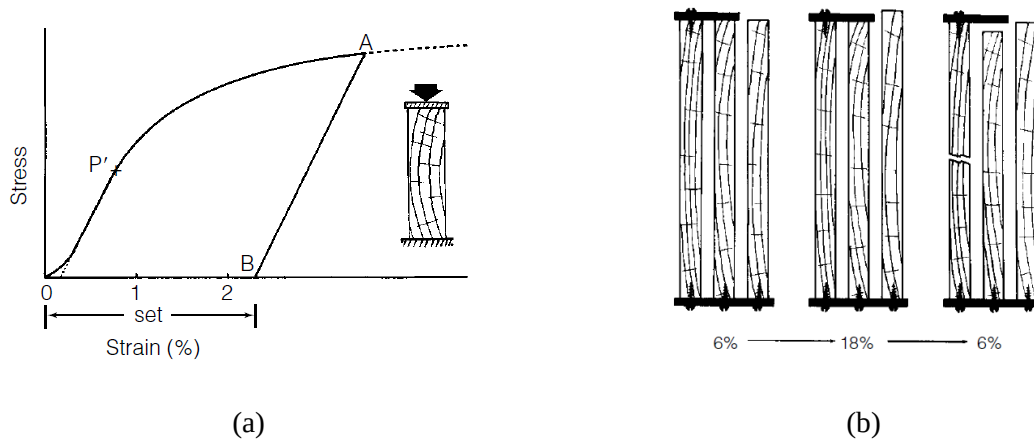


Figure 3-10 : illustration du *compression set* par Hoadley ; (a) courbe contraintes-déformations avec apparitions de déformations permanentes en compression ; (b) procédure expérimentales dans laquelle 3 échantillons appariés sont soumis à un cycle d'humidité relative de l'air (tel que : $mc = 6\% \rightarrow 18\% \rightarrow 6\%$) avec différentes conditions aux limites, de gauche à droite : bloqué en retrait-gonflement, bloqué en gonflement uniquement, libre.

3.2.2.2 Du *compression set* à la pression de gonflement

De nombreux auteurs ([Barkas (1949); Bolton, *et al.* (1974); Mishiro (1988); Molinski et Raczkowski (1988); Perkitny (1961); Perkitny et Kingston (1972); Rybarczik et Ganowicz (1974)]) se sont intéressés parallèlement à la « pression de gonflement » (*swelling pressure* ou *swelling stress*) dont une première définition serait « la pression maximum exercée par un morceau de bois dont les déformations sont empêchées ». Cette contrainte maximale développée par le bois intéressait déjà les égyptiens qui s'en servaient pour extraire des pierres voire les rompre en compression¹⁵. Cet exemple d'application fait référence à des échantillons bloqués dans une direction seulement, mais la pression de gonflement peut être définie pour bien d'autres conditions aux limites. [Perkitny et Kingston (1972)] distinguent de cette manière à l'échelle macro, des pressions de gonflement tri-axiales, bi-axiales, ou uni-axiales, qui concernent respectivement des échantillons bloqués dans trois, deux et une direction, la dernière configuration étant celle qui a fait l'objet du plus grand nombre d'investigations expérimentales, et c'est également celle qui nous intéressera dans la suite.

Toujours focalisé sur la pression maximum développée par le bois, Perkitny s'intéresse à l'effet d'une précontrainte avant variation hydrique. Ses résultats montrés à la Figure 3-11 mettent en évidence le rapport de cinétique entre la contrainte développée par le retrait empêché et la relaxation du matériau, elle aussi activée par les échanges d'humidité (effet mécanosorptif). On notera sur cette même figure que les résultats des essais dans l'eau et dans l'air diffèrent ; il est probable que la circulation d'eau liquide dans les lumens accélère la cinétique de diffusion, et que l'état d'équilibre même soit modifié.

¹⁵ Les sources de cette information sont assez imprécises. Il semblerait que des morceaux de bois étaient coincés à l'aide de maillets, puis gonflés à l'eau pour extraire des pierres de calcaire. La résistance en compression du calcaire étant estimée à 50 MPa, il est probable que cette utilisation de la pression de gonflement ait mis en œuvre des « bons » bois dans la direction longitudinale (dont la résistance en compression est du même ordre).

L'ensemble des travaux qui vient d'être cité présentait la pression de gonflement du bois comme une propriété intrinsèque du matériau dont la valeur serait fonction d'un saut d'humidité donné, et rarement de la cinétique, participant en cela de la même démarche que celle des conservateurs pour les panneaux peints, désirant obtenir une déformation fonction d'une variation d'humidité.

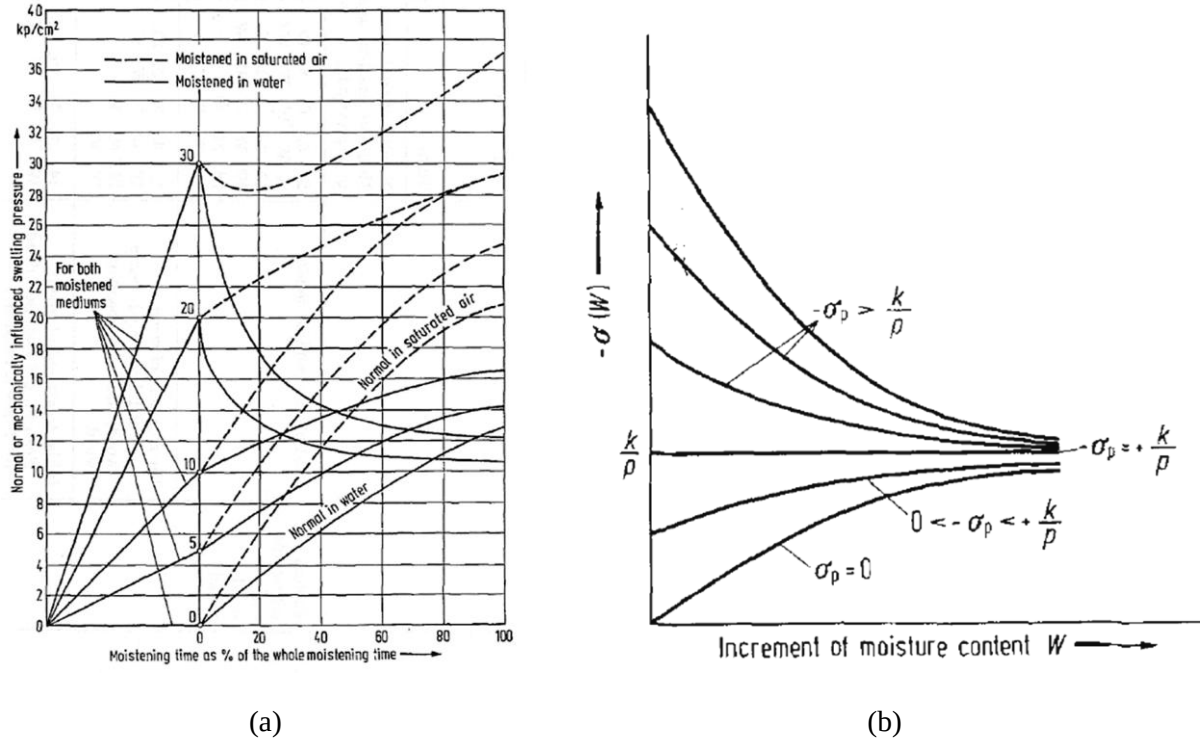


Figure 3-11 : pression de gonflement du pin (Scots Pine) perpendiculairement aux fibres, dans l'eau ou dans l'air, avec ou sans pré-contrainte initiale : (a) résultats expérimentaux de [Perkitny et Kingston (1972)] ; (b) modèle pour représenter les essais dans l'eau ([Rybarczik et Ganowicz (1974)]). Note : $10\text{kp/cm}^2 = 1\text{MPa}$.

Il semble que [Rybarczik et Ganowicz (1974)] aient été les premiers à s'intéresser à la modélisation mathématique de ces essais complexes (notamment en y incluant la variable temps), la littérature sur ce sujet étant restée jusque là très expérimentale. Ils proposent une modélisation adaptée aux résultats de Perkitny, dans laquelle ils décomposent la déformation totale en la somme de trois contributions (notation de la source) :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \varepsilon_e + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_p \\
 \varepsilon_e &= \frac{\sigma(t)}{E} \\
 \varepsilon_\alpha &= kh(t) \\
 \dot{\varepsilon}_p &= p\sigma(h) \\
 \varepsilon_p &= p \int \sigma(t) \left| \frac{dh(t)}{dt} \right| dt
 \end{aligned} \tag{3-17}$$

On y reconnaît la déformation élastique ε_e , le retrait-gonflement induit ε_α , et un terme de « couplage » qui est équivalent au terme mécanosorptif de Leicester ou Ranta-Manus ($mE\dot{\varepsilon} = \sigma|\dot{h}|$), cette paternité n'étant pourtant pas citée dans l'article.

La modélisation qui est ici proposée ne prend pas en compte des effets de cinétique de diffusion et ne se préoccupe pas des différentes phases de l'eau ni de leur vitesse d'accès à la matière ligneuse :

elle se place donc dans une configuration qui n'est ni un test dans l'air humide, ni un test dans l'eau. Elle semble montrer néanmoins que l'état mécanique final (à l'infini) est indépendant de la précharge. Nous proposerons plus loin un autre jeu de simulations (§4.4.4).

Une autre expérience intéressante de Perkitny est citée par [Rybarczik et Ganowicz (1974)] et illustrée à la Figure 3-12. Un échantillon transverse subit un retrait gonflement cyclique empêché sans précontrainte. A chaque cycle d'humidité vient s'ajouter un nouvel incrément de déformation permanente qui ferait tendre l'essai vers une contrainte toujours nulle et une déformation permanente égale au retrait gonflement initial. Elle montre encore l'importance des phénomènes de relaxation qui empêchent la déformation permanente de se produire totalement au premier cycle.

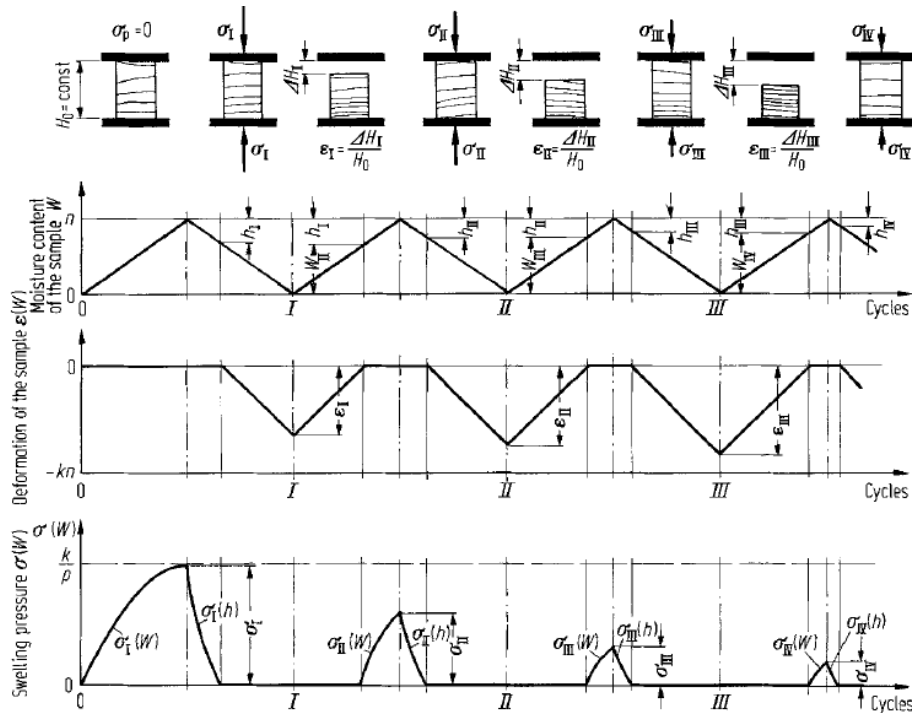


Figure 3-12 : expériences de Perkitny (1960), tiré de [Rybarczik et Ganowicz (1974)]

Plus récemment, [Blomberg (2006); Blomberg et Persson (2007)] ont considéré les effets de la pression de gonflement et des déformations permanentes dans des applications de bois densifié. Plus proche de nos préoccupations sur les panneaux peints, mais dans une application concernant les bardages, [Virta (2006); Virta, *et al.* (2006)] a réalisé des tests de pression de gonflement sur de l'épicéa : la pression de gonflement maximum obtenue dans la direction tangentielle est de l'ordre de 1.2 MPa, et le modèle utilisé pour représenter les courbes expérimentales prend en compte les phénomènes viscoélastiques et mécanosorptifs ; l'auteur conclue qu'il manque au modèle une prise en compte de déformations permanentes pour reproduire la cinétique et les niveaux de contrainte mesurés (relaxation).

Ce qui a intéressé Hoadley, et ce qui nous intéressera dans la suite, c'est plus la quantité de déformation permanente, l'endommagement potentiel du matériau, et les conditions mécaniques de son apparition, que la contrainte maximale développée au cours de ce phénomène.

3.2.3 Approches expérimentales et théoriques des couplages hygromécaniques

Les théories de couplage hygro-élastique développées pour les matériaux poreux isotropes ([Coussy (2004)]) proposent un cadre thermodynamique unifié pour l'approche des phénomènes mettant en jeu

l'interaction de la réponse mécanique et de l'état hydrique (pression de vapeur). Ces mêmes lois de comportement couplées sont parfois généralisées au cas orthotrope et appliquées au bois ([Carmeliet, *et al.* (2009)]). Ce type de couplages se limite pour l'instant au domaine élastique pour la mécanique (pas d'effets différés) et à la sorption pour la partie hydrique (pas d'analyse de la diffusion).

Les couplages hygromécaniques dans le bois ont été historiquement décrits (paradoxalement) de manière fortement découplés, au travers d'analyses phénoménologiques et de lois empiriques créées à posteriori et superposées au fur et à mesure : ainsi la communauté a créé indépendamment les uns des autres des modèles adaptés au retrait-gonflement libre, aux couplages mécanosorptifs, au retrait-gonflement sous charge, etc.

Bien qu'ayant lui aussi adopté une vision découplée de ces phénomènes, Hunt est seul à avoir proposé une procédure expérimentale pour l'identification du retrait-gonflement sous contrainte, en s'affranchissant des phénomènes différés (viscoélasticité et mécanosorption) : l'idée repose sur l'hypothèse d'un couplage entre viscoélasticité et mécanosorption, avec un fluage limite commun au-delà duquel les phénomènes différés ne s'expriment plus (voir [Hunt et Shelton (1987)]). Une procédure spécifique est imaginée pour atteindre l'état limite en flexion à l'aide de surcharges transitoires, après quoi les variations d'humidité n'engendrent plus que des retraits-gonflements sous charge ([Hunt et Shelton (1988)]).

3.2.4 Influence de la contrainte sur le taux d'humidité

Les travaux théoriques de [Barkas (1949)] sur les gels étendus au bois prévoient une diminution du taux d'humidité d'équilibre sous une contrainte de compression, et une augmentation sous une contrainte de traction. [Hunt (1984)] montre expérimentalement que ce phénomène existe dans le bois clair mais reste faible dans la direction longitudinale. [Simpson et Skaar (1968b)] avancent une diminution du taux d'humidité d'équilibre de 0.15% pour une pression radiale et de 0.4% pour une pression tangentielle de compression d'environ 7MPa (sur du chêne). [Merakeb (2006)] analyse également l'influence de la contrainte sur le coefficient de diffusion, mais distingue quant à lui le couplage hygromécanique en adsorption et en désorption : il suggère que l'état mécanique en désorption agit plutôt sur l'équilibre hygroscopique final tandis qu'en adsorption c'est la cinétique de diffusion qui est modifiée.

Nous considérerons que l'effet de la contrainte sur le taux d'humidité à l'équilibre est faible dans le bois, et nous n'en tiendrons pas compte dans notre modélisation.

3.2.5 Influence de la contrainte sur le retrait gonflement

Nous avons évoqué une procédure pour la mise en évidence de l'influence de la contrainte sur le facteur de retrait gonflement, méthode proposée par [Hunt et Shelton (1988)]. Le « *pseudo-creep* » est la manifestation du couplage hydrique sur le retrait-gonflement qui provoque un *fluage apparent* durant un séchage à partir de l'état limite de fluage en flexion. Sur la Figure 3-13 nous proposons une schématisation du couplage entre taux d'humidité et retrait-gonflement sur une poutre homogène avec un champ d'humidité homogène : on y voit un retrait gonflement constant dans l'épaisseur (a, sans couplage) et un retrait-gonflement linéaire dans l'épaisseur au séchage et à l'humidification (b,c, avec couplage).

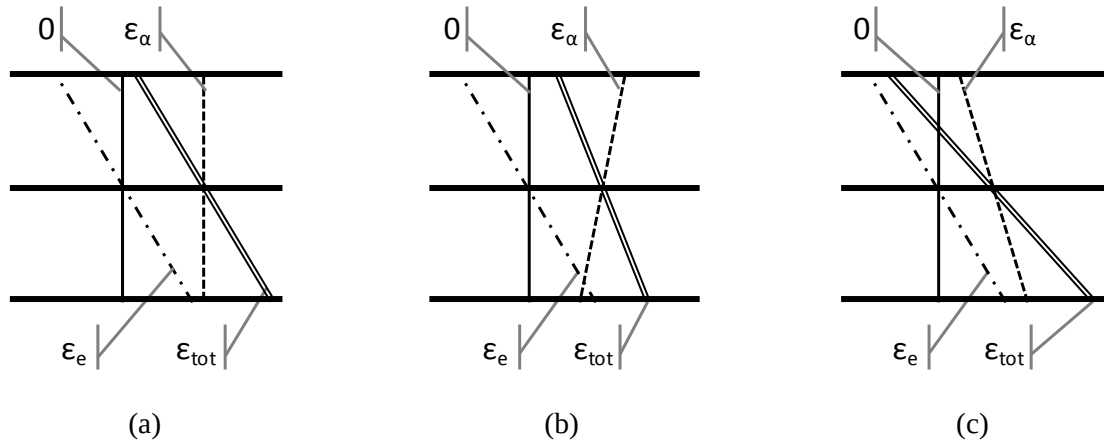


Figure 3-13: état de déformation dans une poutre élastique de section homogène, en flexion sous un champ d'humidité homogène ; les déformations ε sont indicées par α (retrait-gonflement), e (partie élastique), tot (total de $e+\alpha$) ; (a) retrait-gonflement homogène ; (b) retrait-gonflement linéaire dans l'épaisseur lors d'une humidification (diminution du déplacement en flexion) ; (c) retrait-gonflement linéaire dans l'épaisseur lors d'un séchage (augmentation du déplacement en flexion).

En vue de l'écriture d'une loi de comportement associée à ce phénomène de couplage, il faudrait déterminer s'il est plus pertinent de piloter le retrait-gonflement par la contrainte macroscopique, ou par la déformation. La première expression en dépendance par rapport à la contrainte pourrait être de la forme :

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}^0 (1 - k\sigma) \quad (3-18)$$

La seconde expression du retrait-gonflement sous charge dépendant de la déformation « mécanique » (déformation totale moins le retrait-gonflement corrigé) pourrait être de la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \varepsilon_{\alpha}^0 (1 - k(\varepsilon - \varepsilon_{\alpha})) \\ \varepsilon_{\alpha} (1 - k\varepsilon_{\alpha}^0) &= \varepsilon_{\alpha}^0 (1 - k\varepsilon) \\ \varepsilon_{\alpha} &= \frac{\varepsilon_{\alpha}^0 (1 - k\varepsilon)}{(1 - k\varepsilon_{\alpha}^0)} \end{aligned} \quad (3-19)$$

Un des moyens théoriques pour discriminer une forme plutôt qu'une autre est schématisée à la Figure 3-14 : à supposer que la représentation des trajectoires de fluage est réalisée à contrainte constante (et c'est là une des difficultés étant données les variations de section dues aux variations d'humidité, cf. note 13 p.48) alors la pente de *pseudo-creep* doit rester la même quelle que soit le niveau de déformation à l'état limite. En revanche, si l'effet de couplage dépend de la déformation, alors la pente doit varier. La modélisation des phénomènes non-linéaires est ainsi souvent ramenée à un problème de pilotage en contrainte ou déformation.

Les travaux de Hunt concernent essentiellement la direction longitudinale du bois. [Joyet (1992)] a observé le même phénomène de pseudo-fluage en flexion dans la direction radiale et tangentielle du pin maritime, et conclut de même quant à l'augmentation du retrait-gonflement sous une contrainte de compression.

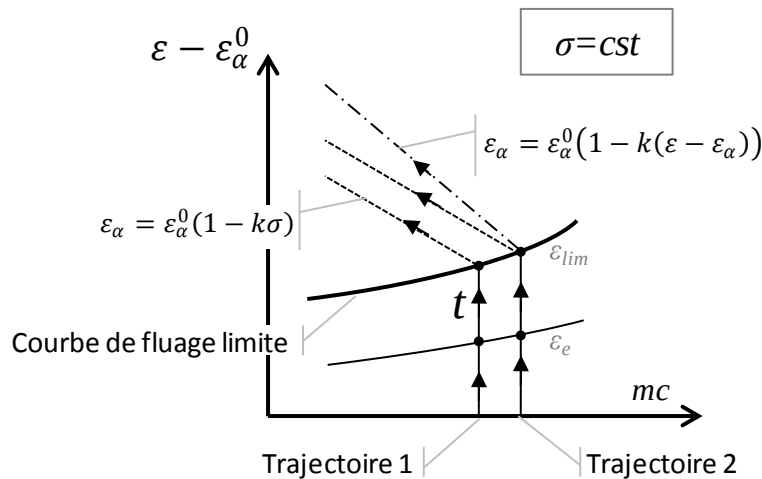


Figure 3-14 : illustration du *pseudo-creep* durant une sollicitation de flexion, dans la représentation de Hunt (déformation corrigée du retrait gonflement à l'état libre ($\sigma=0$), en fonction du taux d'humidité). Le temps est schématisé par des flèches. On suppose que la contrainte est constante durant les changements d'humidité. Deux échantillons identiques fluent à humidité constante jusqu'à leur état limite de fluage (caractérisé par une courbe croissante avec mc) ; à partir de cet état limite, ils subissent un retrait-gonflement sous chargement ; l'effet différentiel en traction-compression produit une augmentation du fluage apparent (effet réversible). Si l'effet sur les retraits-gonflements est dépendant du niveau de déformation, alors les deux échantillons ont deux pentes de pseudo-fluage différentes ; s'il dépend de la contrainte, la pente est la même.

3.2.6 Autres couplages hygromécaniques : effets transitoires et couplages de structure

Nous avons déjà noté que la mécanique avait un effet non négligeable sur les coefficients de diffusion du bois, donc sur la réponse transitoire. Dans l'étude de [Merakeb (2006)] citée au §3.2.4, la contrainte est imposée dans le sens longitudinal (0,5 et 10MPa) et la diffusion analysée dans le sens transverse. Dans les panneaux peints (libres), la solution la plus pertinente est celle d'une compression transverse de quelques MPa, et d'une diffusion transverse également (direction de l'épaisseur). Il serait donc difficile d'estimer, à partir de ces données, l'influence des contraintes transverses sur la diffusion dans le même plan.

Un autre type de couplage est proposé par [Marcon (2009)] : un couplage de structure. Il suppose que les conditions aux limites au niveau de la couche picturale sont modifiées par la présence de craquelures, elles-mêmes supposées liées à la déformation de surface (les craquelures s'ouvrant laissent mieux passer le flux d'eau). Pour produire cet effet il propose de faire dépendre le coefficient d'échange massique (voir §4.5) linéairement par rapport à la déformation de surface.

$$S = S^0(1 + k\varepsilon) \quad (3-20)$$

$$k > 0$$

Ce couplage intéressant relève probablement plus d'un cas test numérique que d'une analyse poussée des interactions existantes entre la couche picturale et les déformations de la surface peinte.

L'intégration numérique de tous les couplages qui viennent d'être décrits pose certains problèmes, notamment de « bouclage » entre la partie solide (S, comportement mécanique) et la partie fluide (F, diffusion, taux d'humidité d'équilibre, etc.) (voir [Marcon (2009)]). La plupart de temps nous admettons que F a une influence sur S (par exemple le mc influence le comportement) et nous l'intégrons dans nos calculs les plus simples ; généralement on résout F puis on calcule S (Figure 3-15(a)).

Réciproquement, si S a une influence sur F (influence de la contrainte sur la diffusion) et que l'on désire garder dans nos calculs l'influence de F sur S , alors il faut effectuer les calculs en boucle (Figure 3-15(b)) jusqu'à atteindre un niveau de convergence prédéfini. Dans la suite nous nous limiterons à la formulation des couplages classiques de type fluide sur solide.

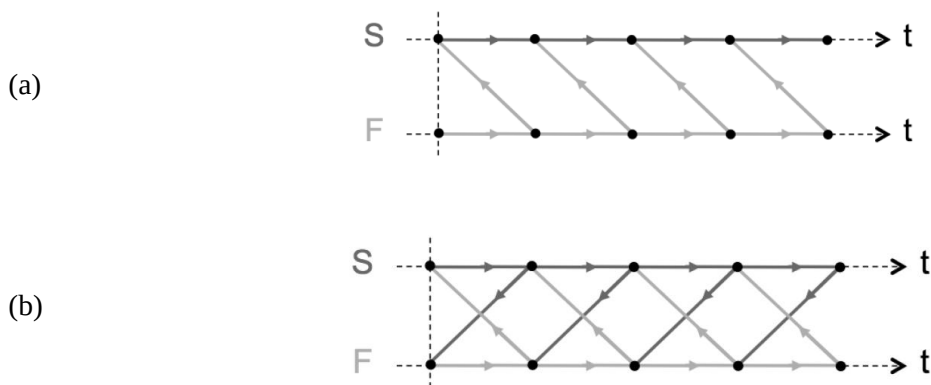


Figure 3-15 : illustration du schéma de calcul des couplages entre la partie structure (S) (bois-comportement) et la partie fluide (F) (diffusion-équilibre hygroscopique) ; (a) couplage faible : influence de la partie fluide sur la partie structure ; (b) couplage fort : influence en retour de la partie structure sur la partie fluide ; extrait de [Marcon (2009)].

3.3 Synthèse

Pour pouvoir traiter le problème des panneaux peints par l'analyse classique de mécanique des matériaux, nous avons expliqué la nécessité d'avoir recours aux lois de comportements. Au travers d'une relecture de la bibliographie en sciences du bois nous avons proposé un panel des comportements couramment associés au bois (élasticité, viscoélasticité, mécanosorption, plasticité, etc.), et des explications sur les modèles rhéologiques adaptés à leur modélisation.

L'application panneaux peints, et plus particulièrement les ambiances de conservation de ces objets nous ont fait insister sur la relation étroite qu'entretiennent ces propriétés avec le taux d'humidité du bois, et plus généralement avec les caractéristiques de l'air environnant.

Enfin nous avons introduit, par la présentation d'essais expérimentaux issus de la littérature, des cas dans lesquels les conditions aux limites mécaniques imposées sur un échantillon sont complexes (différents des essais simples à charge constante ou déformation constante), nécessitant par la suite un travail approfondi d'écriture des lois de comportements et de résolution des schémas numériques.

4. Comportement d'un peuplier adapté à la modélisation des panneaux peints

4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de choisir un modèle de comportement local pour le bois (à l'échelle du cerne ou du VER décrit au §2.3.2), adapté à notre application, et d'en détailler la formulation discrète en vue de son intégration dans un code de calcul de structure (Chapitre 5). La spécificité de l'application patrimoniale pose plusieurs problèmes : le premier, le plus large probablement, est la description des couplages hygromécaniques que nous avons introduits au chapitre précédent, notamment de l'interaction entre le taux d'humidité du bois et du comportement mécanique ; le second concerne l'échelle de temps de l'objet du patrimoine, qui dépasse celui de toutes les autres applications auxquelles s'intéressent les sciences du bois (construction, bois dans l'arbre), mais qui dépasse surtout toutes les tentatives de caractérisation expérimentale que l'on peut en faire (Figure 4-1).

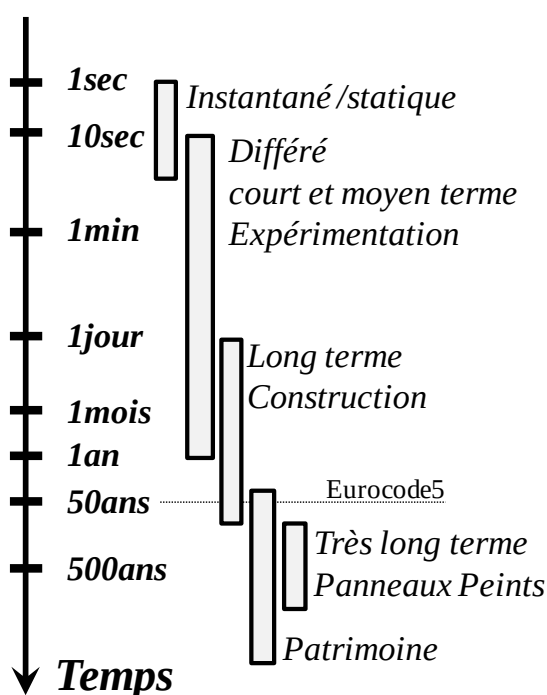


Figure 4-1: le bois matériau et ses applications sur une échelle en logarithme du temps.

Bien que nous ne cherchions pas à modéliser la vie entière d'un panneau peint avec un seul et même modèle, nous utiliserons cette échelle de temps pour discuter la correspondance entre les essais matériau, le modèle de comportement choisi, et les simulations du chapitre 6.

Dans un premier temps nous analyserons des données expérimentales à court et moyen terme sur le comportement différé du peuplier, pour en dégager les tendances à reproduire par nos modèles. Nous proposerons ensuite des lois de comportement associées, dont les paramètres seront identifiés sur les essais matériaux avec un regard critique sur le comportement à long terme. Enfin pour préparer le chapitre suivant, nous expliciterons le travail de discrétisation des lois de comportement sur un pas de temps et les hypothèses associées.

4.2 Données expérimentales

4.2.1 Remarques préliminaires

Notre travail de formulation du comportement s'appuie sur d'importantes données expérimentales obtenues par nos collaborateurs italiens de Florence sur le retrait empêché du bois de peuplier. La permanence des échanges entre nos deux laboratoires nous ont permis de mieux cerner les enjeux expérimentaux associés à ces comportements. Réciproquement, les modèles que nous mettons en place actuellement doivent permettre de discuter en interaction avec nos collègues du design expérimental.

Ces données ont été complétées par des essais de fluage réalisés par nos soins dans le cadre d'une étude portant sur le comportement différé des bois traités thermiquement en collaboration avec nos collègues japonais de Kyoto ([Colmars, *et al.* (2008)]).

4.2.2 Matériel

Les essais présentés dans la suite de ce document ont donc été réalisés par différentes équipes et sur différents sites, obligeant à un travail important de collecte et de traitement des données. Le point commun aux différents essais est le matériel végétal : du peuplier italien d'une densité anhydre d'environ 0.36 g.cm^{-3} .

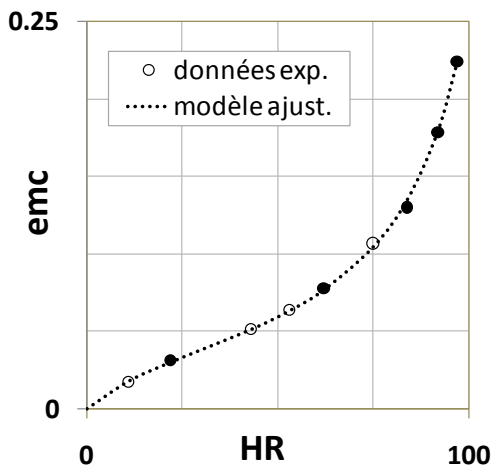
4.2.3 Essais de fluage à humidité constante dans la direction radiale

4.2.3.1 Présentation

Ces essais ont été menés dans le but de caractériser l'influence du taux d'humidité sur le comportement viscoélastique du peuplier, et doivent permettre d'établir un modèle prenant en compte ces variations. Nous avons réalisé des essais de fluage en flexion trois points dans la direction radiale. Aucune information n'a été cherchée sur la direction tangentielle ou hors axe, de sorte que l'anisotropie viscoélastique ne sera pas discutée ici.

Les échantillons pour les essais de flexion ont été taillés dans les dimensions suivantes : 60(R), 10(T), 2(L) mm. Ils ont été séchés sous vide partiel à la température de 60°C pendant 24h, puis conditionnés à humidité constante pendant 12 jours, au moyen de solutions de sels saturées maintenues à température constante (25°C). Des mesures de masse ont été menées pour obtenir une isotherme d'adsorption. Les mesures d'isotherme ont été faites pour 9 conditions en *HR* différentes, parmi lesquelles 5 ont été retenues pour les tests de fluage (voir Figure 4-2); pour chacune de ces 5 conditions, 2 échantillons ont été testés en flexion 3 points à taux d'humidité constant, à 25°C pendant au moins 10h. Le chargement a été déterminé pour une déformation élastique de l'échantillon de 0.2 % (limite supposée de linéarité viscoélastique). Avant chargement, les échantillons sont emballés dans un film plastique (volume fermé) qui les maintient à taux d'humidité constant pendant la durée du test : cette affirmation a été vérifiée par des répétitions de pesée avant et après l'essai, ne montrant

aucune perte significative de masse. La flèche centrale des échantillons a été mesurée par un capteur de déplacement de type LVDT.



(a)

Modèle sorption polymères
([Hailwood et Horrobin (1946)]):

$$emc = \frac{HR}{(A HR^2 + B HR + C)}$$

Paramètres obtenus pour l'adsorption

$$A^+ = 0.169$$

$$B^+ = 16.126$$

$$C^+ = 458.676$$

(b)

Figure 4-2 : (a) isotherme d'adsorption pour le peuplier ; ($\circ, \bullet$) données expérimentales moyennées sur une dizaine d'échantillons ; ($\bullet$) conditions d'HR choisies pour les tests de fluage, assurant une répartition homogène d' emc sur le domaine hygroscopique ; (--) modèle de sorption identifié sur les données ; (b) paramètres du modèle.

4.2.3.2 Résultats

Les résultats des essais de fluage sont présentés à la Figure 4-3 : les complaisances élastique et différée, ainsi que la complaisance relative différée (après 10h de fluage) sont tracées en fonction du taux d'humidité des échantillons. Comme attendu, le module élastique (estimé à partir de l'inverse de la complaisance initiale¹⁶) dépend linéairement du taux d'humidité du bois. La variation relative de module élastique par rapport à la valeur à 12 % a été estimée à 5 % par pourcent d'humidité à 25°C. Pour la direction radiale, la dépendance du module d'élasticité au taux d'humidité semble varier de 2 à 5 %/% suivant l'espèce considérée (cf. §3.1.2.2).

Le fluage relatif augmente entre 7 % et 21 % comme cela a été observé par [Schniewind (1966)] dans la direction transverse aux fibres, et par [Nakano (1999)] dans la direction longitudinale : ce dernier a également rapporté une légère augmentation sous les 6 % de taux d'humidité, comme nos essais peuvent le suggérer. D'autres comparaisons avec des essais issus de la littérature vont être discutées en vue d'une formulation consistante pour notre modèle.

¹⁶ La complaisance initiale est elle-même extrapolée à partir des courbes de fluage.

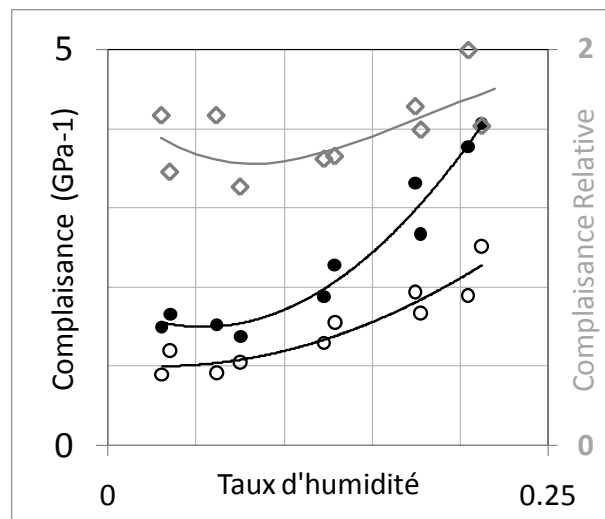


Figure 4-3 : résultats des essais de fluage sur des échantillons de peuplier dans la direction radiale, représentés en complaisance en fonction du taux d'humidité : complaisance au temps $t=0$ (○) ; complaisance différée après 10 heures de fluage (●) ; complaisance relative différée après 10h (◇) ; des courbes du second degré ont été choisies pour représenter les tendances de chaque groupe (la complaisance élastique varie en toute rigueur en $1/mc$).

4.2.3.3 Fluage relatif et taux d'humidité à travers la littérature

Nous avons vu qu'en l'absence d'une écriture de référence pour le comportement différé, il est difficile d'extraire des synthèses sur le comportement viscoélastique des bois à partir des données de la littérature. Toutefois, que l'on vise des applications telles que le dimensionnement des structures bois, que l'on soit intéressé à la détermination de paramètres pertinents pour les modèles numériques, ou que nous cherchions des interprétations physiques du fluage viscoélastique, nous serions tous intéressés à la définition d'un comportement viscoélastique standard. Sans vouloir écarter la question de la diversité, il s'agirait au contraire de trouver des facteurs correctifs liés aux paramètres physiques de chaque bois (densité, qualité de bois,...) pour corriger le comportement standard et obtenir, à l'image de la démarche de Guitard pour le cas élastique explicité au §3.1.2.2, une méthode de calcul rapide pour des matrices de fluage standard.

Le problème tel qu'il vient d'être posé nécessiterait bien plus de travail que celui que nous lui avons consacré. Cependant nous souhaitons introduire ces questions en procédant à une revue bibliographique des données disponibles dans la littérature, et ce afin de voir quelle est la difficulté pratique de définir un fluage relatif généralisé à plusieurs essences (éventuellement séparées en classes de feuillus et résineux), et de regarder ce qu'il en est lorsqu'on compare différentes directions. Ici nous nous focaliserons sur le fluage viscoélastique seulement, et sur sa relation avec le taux d'humidité du bois et les paramètres structuraux.

Au terme d'une campagne importante d'essais de fluage sur de l'épicéa, [Matar (2003)] définit des facteurs correctifs permettant de calculer un fluage relatif à 50 ans pour différentes qualité d'épicéa (module élastique spécifique) et différentes humidités. Ses résultats expérimentaux se basent sur des extrapolations à partir d'un fluage à une semaine et des considérations d'équivalence entre viscoélasticité et mécanosorption (accélération de la viscoélasticité), mais donne peu d'informations sur le fluage court terme à humidité constante.

On trouve dans la littérature très peu de références fournissant ce type d'informations pour différentes essences et différentes directions, et le recoupement dans les choix de matériel et les directions de sollicitations sont quasi nuls. Les références utilisées ici sont : [Cariou (1987); Joyet (1992); Montero (2010); Nakano (1999); Schniewind (1966)]. Pour comparer ces différentes sources,

nous avons choisi de recalculer pour chacune le fluage relatif après 5 heures (par exemple en utilisant les fonctions de loi puissance fournies par les auteurs ou recalculées sur les données brutes). Ces valeurs sont reportées sur la Figure 4-4.

Les différents auteurs s'accordent à dire que le fluage relatif augmente (linéairement) avec l'humidité (au moins entre 5 % et 25 % de taux d'humidité), mais l'amplitude de cet effet peut varier considérablement. D'après [Schniewind (1966)] (direction radiale) ou [Matar (2003)] (direction longitudinale), cet effet s'accroît avec le temps.

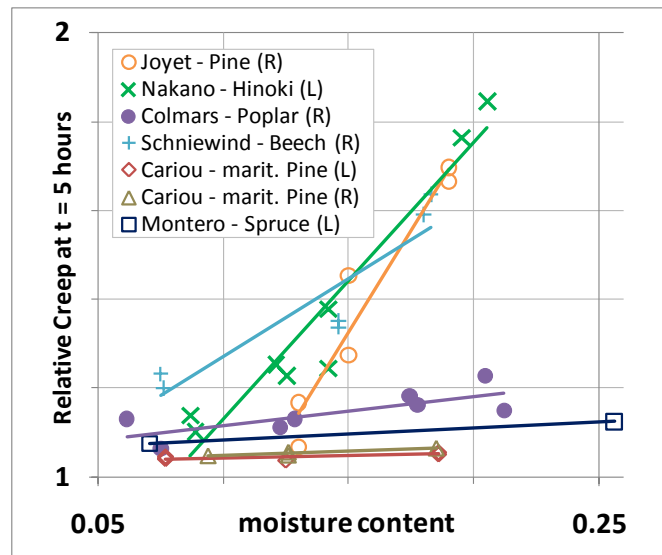


Figure 4-4 : résultats expérimentaux de fluage relatif après 5 heures de chargement, suivant différents auteurs et différentes directions de sollicitation.

Le peu de données que l'on trouve à ce sujet dans la littérature est accentué par le fait que les auteurs donnent très rarement la masse volumique de leur matériel (permettant éventuellement de comparer des fluages relatifs spécifiques). La comparaison de la Figure 4-4 apportera peut-être plus de limitations à ce qui est dit dans la suite (l'extrapolation des résultats de fluage à d'autres échantillons de peuplier) qu'elle n'apporte de réponses. Nous souhaitons néanmoins souligner ici l'importance d'étendre le travail expérimental sur le comportement différé, d'améliorer l'accessibilité des résultats à la communauté, ainsi que la diversité des phénomènes viscoélastiques, dont la compréhension est certainement nécessaire à la description efficace des phénomènes plus complexes de couplage.

4.2.3.4 Modèle de fluage hygro-activé : Kelvin-Voigt généralisé

L'hygro-activation de la réponse élastique a déjà été évoquée. Nous nous contentons de rappeler la forme linéaire qui lie le module d'élasticité au taux d'humidité (h) (eq. (4-1)) pour passer ensuite à la description du modèle de fluage hygro-activé.

$$E(h) = Ah + B \quad (4-1)$$

Pour l'identification des paramètres viscoélastiques, nous allons procéder en deux étapes : le post-traitement des données brutes (mise en forme mathématique) et l'identification des paramètres du KVG associé.

Si les courbes de fluage peuvent être représentées par des lois puissances, alors il est possible de post-traiter les données expérimentales dans des espaces graphiques où ces mêmes courbes de fluage,

relativement complexes lorsqu'on les regarde dans une représentation temporelle (Figure 3-4, p.14), s'approche de géométries simples¹⁷ (droite, cercle). C'est la démarche proposée par [Alfrey (1948)] sur les polymères et utilisée pour le post-traitement des données de fluage sur le bois par différents auteurs ([Bardet (2001); Dhoulá (2009)]).

Ces espaces graphiques sont appelés « plan complexes approximatés »¹⁸ (PCA). Ici nous allons utiliser un PCA représentant l'évolution de $dJ/d\ln(t)$ en fonction de $J(\ln(t))$, avec J la complaisance de fluage dépendant du temps (donc du logarithme népérien du temps).

La représentation de la loi puissance est une droite dans le PCA qui est utilisé ici ; ceci se démontre assez simplement, en écrivant l'expression de la complaisance de fluage (eq. (4-2)), puis en dérivant par rapport au logarithme népérien ($\ln$) (eq. (4-3)).

$$J(t) = J_0 \left(1 + \left(\frac{t}{\tau} \right)^n \right) \quad (4-2)$$

$$\frac{dJ}{d\ln(t)} = \frac{dJ}{dt} \times \frac{dt}{d\ln(t)} = \frac{nJ_0}{\tau} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{n-1} \times \frac{1}{1/t} = nJ_0 \left(\frac{t}{\tau} \right)^n \quad (4-3)$$

Ainsi si l'on trace $dJ/d\ln(t)$ en fonction de $J(\ln(t))$ pour une loi puissance, on obtient une droite de pente n et d'ordonnée à l'origine $-nJ_0$. Sur la Figure 4-5 nous avons tracé les courbes expérimentales obtenues à différents mc et les droites identifiées (lois puissances associées) dans le même PCA. La forme des données expérimentales dans le PCA justifie en elle-même de leur substituer une loi puissance.

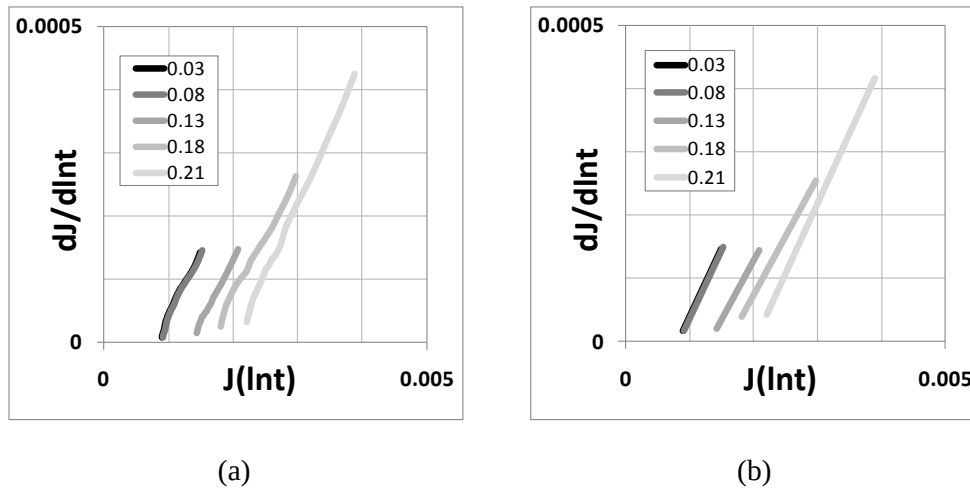


Figure 4-5 : courbes moyennes de fluage pour chaque condition de mc , tracées dans un plan complexe approximaté ; (a) courbes expérimentales ; (b) lois puissances associées (*représenté sur un second graphique pour des raisons de lisibilité*).

Nous avons explicité au §3.1.4.2 l'intérêt d'utiliser les modèles rhéologiques dont on pourra définir la loi de comportement, plutôt que la fonction mathématique (loi puissance) limitée à la description du

¹⁷ Ces géométries simples sont le reflet en termes graphiques de la réduction des courbes expérimentales à des courbes mathématiques définies par quelques paramètres (loi puissance).

¹⁸ C'est [Alfrey (1948)] qui propose une approximation des plans complexes pour les courbes de fluage (voir [Huet (1967)]): les plans complexes étant plus adaptés à l'écriture des comportements dynamiques.

fluage. [Bardet et Gril (2002)], puis [Gril et Hunt (2002)] ont travailler dans ce sens à définir des équivalences entre certains modèles rhéologiques et certaines loi de fluage dérivées des lois puissance.

Pour notre étude, nous allons préciser l'équivalence entre une loi puissance et un KVG : si les temps caractéristiques de l'assemblage de KVG sont choisis uniformément sur une échelle logarithmique du temps (cf. éq. (4-5)), alors l'équivalence avec la loi puissance est réalisée pour une série de complaisances viscoélastiques exponentiellement croissante (cf. eq.(4-6) et Figure 4-6).

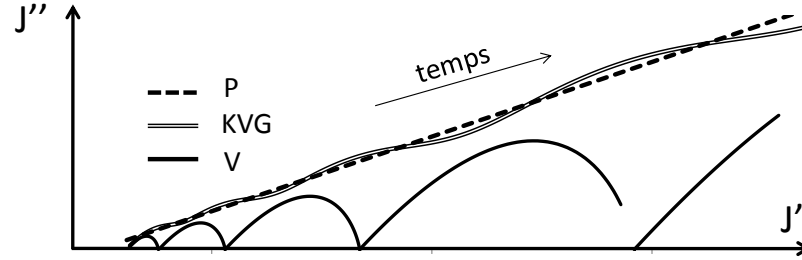


Figure 4-6 : illustration dans le plan complexe approximé (PCA) du principe d'équivalence entre l'élément parabolique (P) et le Kelvin-Voigt généralisé (KVG). Les différents éléments de Voigt (V) constituent des processus de fluage terminés ou en cours (respectivement représentés par des arcs de cercle complets ou interrompus) ; dans notre cas la somme KVG tend vers P lorsque le nombre de cellules V augmente.

D'après les résultats de la Figure 4-5, on cherche un modèle viscoélastique dont le fluage relatif différé dépend du taux d'humidité du bois. Nous avons déjà évoqué les deux manières de procéder (§3.1.4.5) : faire varier les complaisances des cellules de Voigt, ou faire varier la constante de temps associée. La solution de fluage de l'élément de Voigt pourrait s'écrire, en combinant ces deux idées, à l'aide de deux fonctions f et g dépendantes du taux d'humidité :

$$\varepsilon(t) = (J_i f(h) \sigma - \varepsilon) \left(1 - e^{-t/\tau_i g(h)} \right) \quad (4-4)$$

Avant de s'arrêter sur un de ces choix, nous avons préalablement déterminé les KVG équivalents aux courbes expérimentales. On a fait le choix à priori des constantes de temps pour identifier le spectre de complaisances. Les temps caractéristiques τ_i ont été choisis tels que :

$$\log \left(\frac{\tau_{i+1}}{\tau_i} \right) = 1 \quad (4-5)$$

Où i est le numéro du bloc de Voigt dans le KVG.

Cette distribution du KVG et sa réponse sont schématisées dans le plan complexe approximé (Figure 4-6) et dans une représentation temporelle (Figure 3-5, p.45).

Sans fixer de relation à priori entre les complaisances J_i , on procède à leur identification sur les courbes de fluage expérimentales : le nombre de paramètres à identifier augmente avec le nombre d'élément de Voigt. Les résultats de l'identification suggèrent une « simplification » du type :

$$\log(J_i) = A(u) * \log(\tau_i) + B(u) \quad (4-6)$$

Ainsi quel que soit le nombre d'éléments de Voigt nécessaire à la description de la fenêtre expérimentale, on considèrera qu'il suffit de 2 fonctions du taux d'humidité ($A(u)$ et $B(u)$) pour décrire l'ensemble des paramètres nécessaires. [Passard et Perre (2005b)] préfèrent identifier tous les paramètres de 4 cellules de Voigt en série qu'ils associent chacune à un mécanisme de fluage particulier, tous activés par la température.

Les fonctions $A(u)$ et $B(u)$ peuvent être choisies du 1^{er} ou 2nd degré suivant la finesse de description adoptée pour l'évolution du fluage relatif avec l'humidité. Pour conclure, la description proposée pour le modèle de KVG ne requiert que 4 à 6 paramètres pour décrire l'ensemble des phénomènes viscoélastiques.

Résumé : des essais de fluage à humidité constante ont été réalisés sur du peuplier dans la direction radiale. Les résultats montrent une dépendance de la réponse viscoélastique au taux d'humidité des bois testés.

Le modèle viscoélastique hygro-activé utilisé dans la suite est identifié sur les courbes expérimentales : on utilise un modèle de Kelvin-Voigt généralisé dont le spectre discret des temps caractéristiques est fixé, et dont les complaisances sont calculées quel que soit le taux d'humidité grâce à 2 fonctions $A(u)$ et $B(u)$. De cette manière, seuls quelques paramètres (leur nombre dépend du degré des fonctions A et B) suffisent à décrire l'ensemble du comportement viscoélastique avec un spectre large.

4.2.4 Essais de retrait-gonflement empêché

4.2.4.1 Présentation

Les tests de retrait-gonflement empêchés dans la direction tangentielle du peuplier, largement inspirés par les travaux de [Hoadley (1995); Hoadley (1969)], ont été menés par P.Mazzanti durant sa thèse de doctorat au DEISTAF de Florence (cf. [Mazzanti (2007)]) : ces essais vont nous permettre d'identifier des paramètres du peuplier étudié et de discuter la pertinence de nos modèles rhéologiques pour la description de chargement complexes. Pour cette raison nous leur consacrons une section de ce chapitre.

Le retrait-gonflement empêché du peuplier est ici testé simultanément (sous les mêmes conditions d'humidité relative de l'air) sur 3 échantillons appariés avec 3 types de conditions aux limites. La procédure qui est décrite dans la suite concerne une série de 3 échantillons, et a été répétée par Mazzanti sur 5-6 triplets. Comme illustré sur la Figure 4-7, l'échantillon A est libre en déformations ; C est bloqué en retrait et gonflement ; l'échantillon B correspond à la situation intermédiaire où le gonflement initial est empêché et le retrait autorisé.

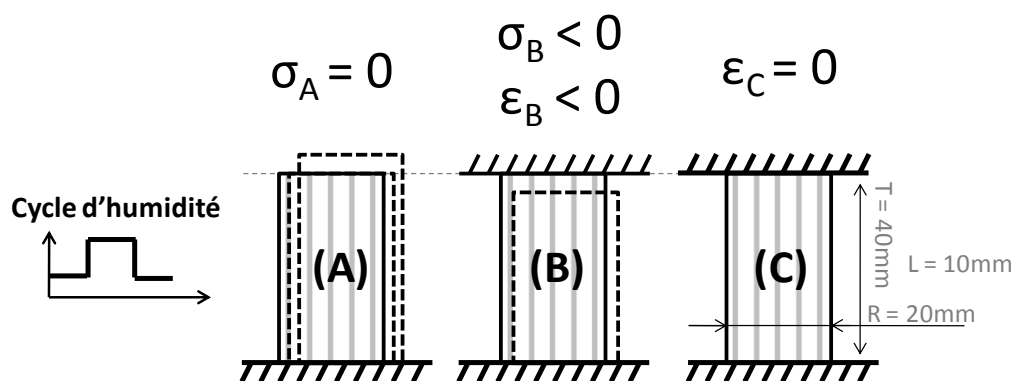


Figure 4-7 : Expériences de *compression set* menées par Mazzanti : 3 échantillons tangentiels soumis aux mêmes variations hygrométriques sont testés sous des conditions aux limites différentes : (A) échantillon libre en retrait-gonflement ; échantillon (B) gonflement initial empêché ; échantillon (C) déformations empêchées.

Les essais sont menés dans une chambre climatique où l'humidité relative de l'air est cyclée entre 30 % et 80 %. Les dimensions des échantillons sont : $T = 40\text{mm}$, $L = 10\text{mm}$, $R = 20\text{mm}$. La forme

presque cubique des échantillons compense les problèmes de flambement mais limite probablement l'approche mécanique unidirectionnelle qui néglige les effets de bords (au niveau des conditions aux limites imposées). Le problème d'homogénéité de mc dans l'échantillon est résolu en partie par une dimension longitudinale faible favorisant les échanges gazeux.

Pour les échantillons A et B, les déformations sont estimées au moyen de capteurs de déplacement ; pour les échantillons B et C, les contraintes sont estimées par des cellules de force. Les trois échantillons sont collés aux deux extrémités sur des lames métalliques afin d'assurer les mêmes conditions de diffusion. Les différentes conditions aux limites sont donc appliquées sur ces lames.

4.2.4.2 Résultats de Mazzanti

En restreignant les déformations de B et C, Mazzanti montre que le *compression set* a lieu lors du premier retrait gonflement empêché : le *compression set* est ainsi visible par la contraction permanente de B, et la tension permanente moyenne dans C. Les résultats d'une série d'essai (1 groupe A,B,C) sont montrés à la Figure 4-8.

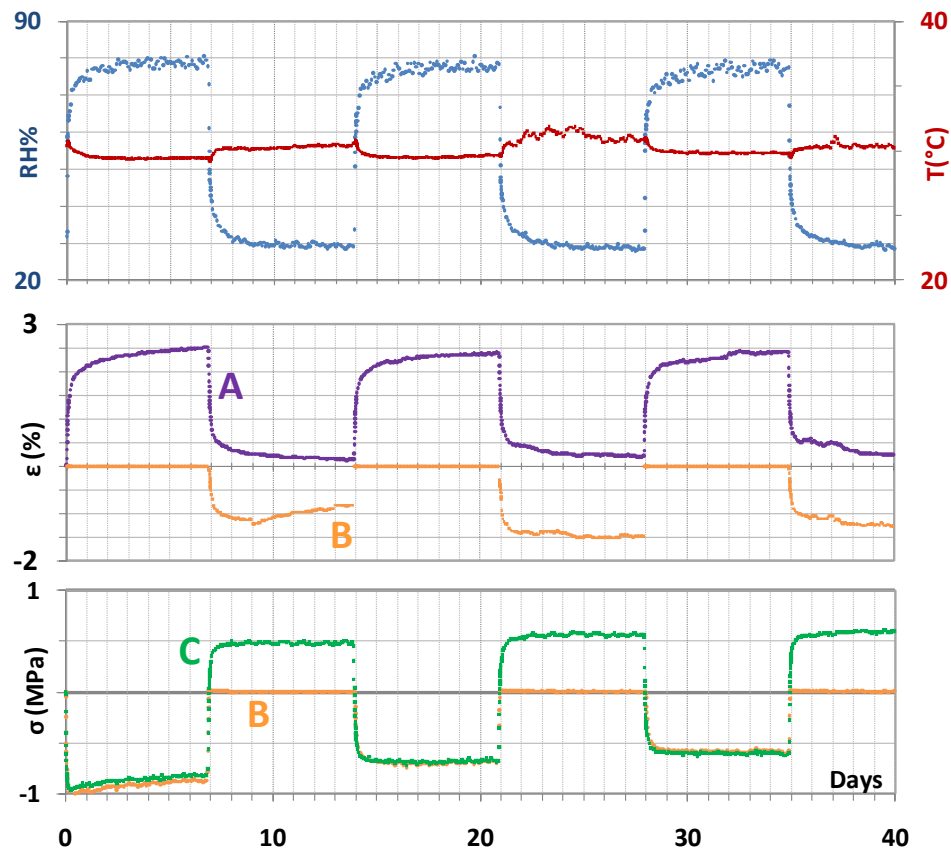


Figure 4-8: essais de retrait-gonflement empêché ; d'après les résultats de [Mazzanti (2007)].

La Figure 4-8 donne une vision d'ensemble de la procédure expérimentale en fonction du temps. Regardons maintenant les essais B et C dans une seconde représentation de la contrainte en fonction du retrait libre estimé d'après l'échantillon A. [Krauss (2004)] a utilisé cette représentation proposée par [Mishiro (1976)] pour mettre en évidence la relaxation du matériau lors du gonflement empêché.

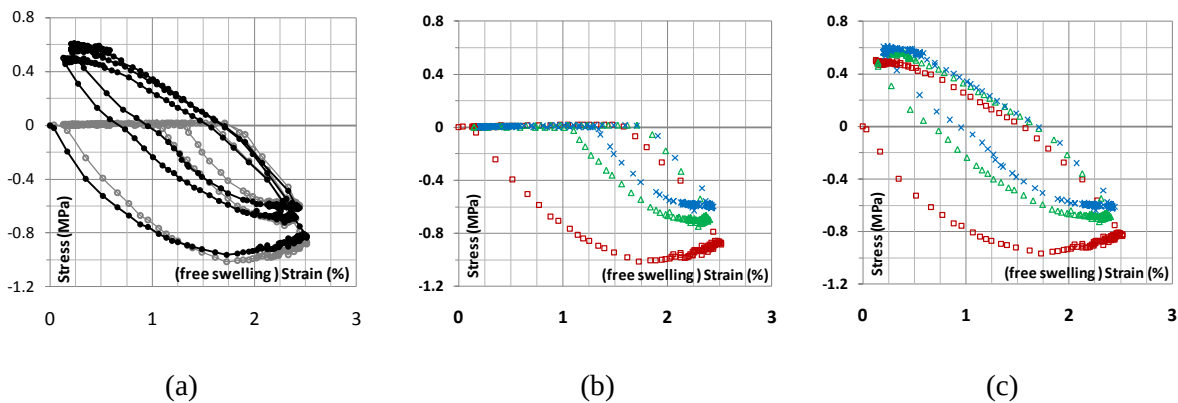


Figure 4-9 : représentations des essais de *compression set* dans un repère contrainte-déformation ; (a) superposition des essais B (gris) et C (noir) ; détail par cycle des essais B (b) et C (c), 1^{er} cycle ($\square$), 2nd cycle (Δ), 3^{ème} cycle ($\times$).

Cette représentation confirme que l'essentiel de la déformation permanente survient durant le premier cycle. Par ailleurs nous voyons nettement mieux d'autres effets que les simulations doivent reproduire :

- Forte relaxation de B et C dès le premier cycle (diminution de la contrainte à déformation croissante).
- Dissipation viscoélastique et/ou mécanosorptive durant les deux cycles suivants (dissipation visible dans les cycles hystérétiques).

4.2.4.3 Mise en évidence de l'endommagement

Dans cette représentation nous sommes en mesure de calculer les modules tangents équivalents (voir à ce sujet §4.2.4.4 et Figure 4-12) lors des différentes charges et décharges survenant durant les 3 cycles d'humidification et de séchage. D'après un autre jeu de données obtenu par l'équipe du DEISTAF sur du matériel apparié, la variation de module élastique tangentiel en fonction du taux d'humidité a été estimée à environ 6 %/% lors d'essais statiques en compression : cette même régression est tracée en pointillés sur la Figure 4-10(b). Ainsi lors de la première décharge on s'attendrait à trouver un module tangent d'environ 130MPa : or nous avons calculé un module tangent d'environ 100MPa. L'endommagement, c'est-à-dire la diminution de module due au *compression set*, est dépendante de l'humidité et vaut environ 10 % à HR=30 % et 20 % à HR=80 % : ce qui semble signifier que la dépendance des modules à l'humidité a varié après endommagement. Dans notre modèle nous allons considérer l'endommagement du matériau en négligeant les modifications de pente de la fonction linéaire liant les modules élastiques au taux d'humidité.

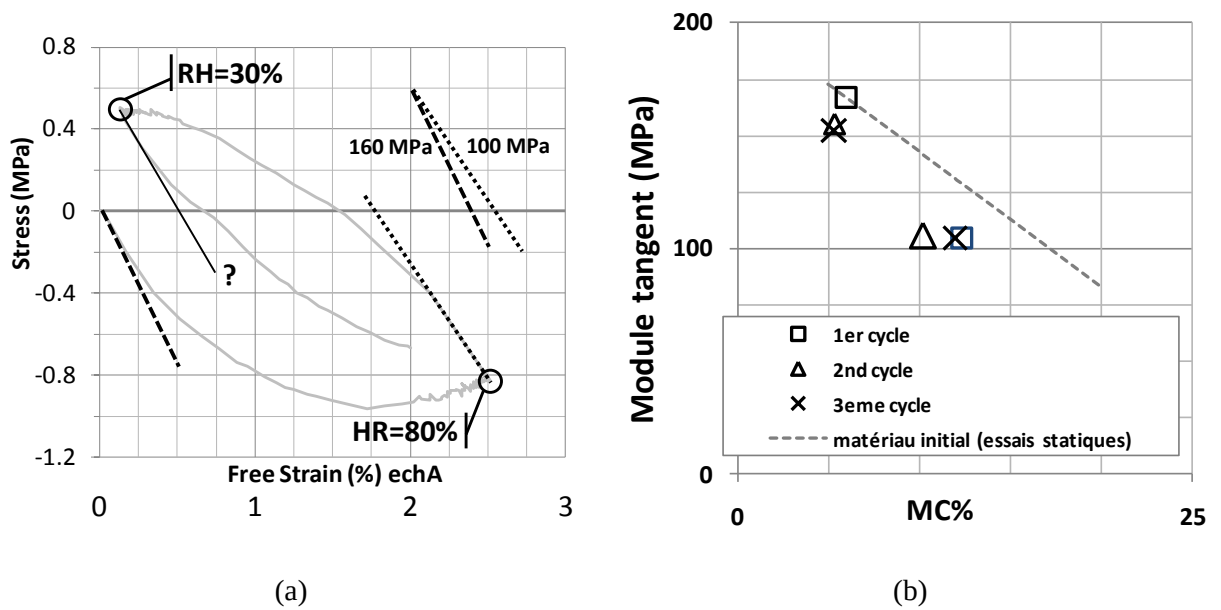


Figure 4-10 : mise en évidence d'un endommagement durant le test de *compression set* par comparaison des modules tangents lors des charges à HR = 30 %, et des décharges à HR = 80 % ; (a) schéma de principe sur le début de l'essai C ; (b) valeurs des modules tangents calculés à la charge et la décharge de chacun des cycles.

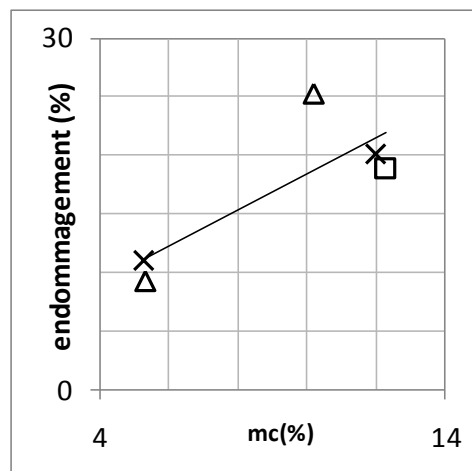


Figure 4-11: endommagement en fonction du taux d'humidité estimé d'après l'échantillon libre (A) ; même légende que la Figure 4-10.

Dans toute cette analyse, nous avons supposé que le taux d'humidité des échantillons B et C était identique à celui de l'échantillon A. Les travaux de [Simpson et Skaar (1968a)] montrent que des échantillons de chêne dont le retrait a été empêché (depuis 1% de taux d'humidité jusqu'à l'équilibre à 50/70/80 % HR à 25°C) atteignent un taux d'humidité d'équilibre inférieur qu'un échantillon libre : 0.1/0.24/0.48 % de réduction du taux d'humidité dans la direction tangentielle, soit une quantité que nous supposons négligeable dans notre analyse.

4.2.4.4 Note sur la représentation contrainte-déformation

Afin de se ramener dans une représentation de type contrainte-déformation chère aux mécaniciens des matériaux, nous avons choisi de tracer les courbes expérimentales en fonction de la déformation libre, estimée identique sur les trois échantillons A, B et C.

Pour être plus précis, l'idée générale est de tracer les contraintes en fonction de la déformation dite « mécanique », qui est la partie de la déformation reliée aux contraintes via la loi de comportement. Dans une représentation en série, la déformation totale est la somme de la déformation « mécanique » (ε_m) et de la déformation de dilatation (ε_α indépendante de la contrainte).

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_\alpha \quad (4-7)$$

Pour l'essai C, nous avons tout le temps $\varepsilon = 0$, soit $\varepsilon_m = -\varepsilon_\alpha$. Cette représentation n'est justifiée que dans le cas où la loi de comportement de l'élément dilatant est indépendante de la contrainte. Dans le cas contraire il faut voir si le retrait-gonflement peut-être modélisé en une partie libre et une partie sous contrainte additives.

Pour l'essai B, la relation $\varepsilon = 0$ est vérifiée durant certaines plages d'humidification. Le reste du temps l'échantillon a une déformation totale libre (retrait) et $\varepsilon_m \neq -\varepsilon_\alpha$. Dans ce cas l'interprétation est plus complexe. En tout cas on s'attend à ce que B et C ne montrent pas exactement le même comportement au séchage dans cette représentation.

Pour être rigoureux, nous dirons donc que nous représentons les courbes dans un plan $(\sigma, \varepsilon - \varepsilon_\alpha)$, c'est-à-dire représentant la contrainte aux bornes de notre modèle associé en fonction de la déformation de l'ensemble (ε) moins la déformation de retrait-gonflement (ε_α). Cette représentation sera reprise plus loin (§6.3.2).

Dans le cas simple (retrait-gonflement indépendant de la contrainte), on définit un module sécant ou un module tangent. Le premier est défini comme la pente de la droite reliant le point courant et le point origine ($\sigma = 0, \varepsilon - \varepsilon_\alpha = 0$). Le second est la dérivée de la courbe $\sigma = f(\varepsilon - \varepsilon_\alpha)$ au point P considéré, soit : $\partial\sigma / \partial(\varepsilon - \varepsilon_\alpha)$.

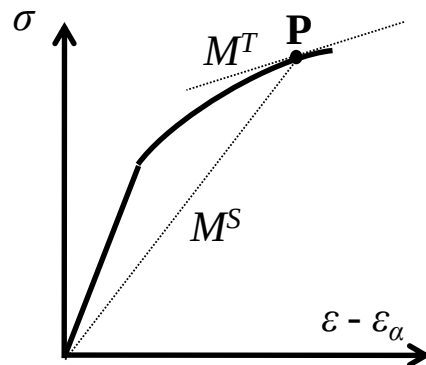


Figure 4-12 : représentation schématique des modules tangent (M^T) et sécant (M^S) au point courant P dans le plan $(\sigma, \varepsilon - \varepsilon_\alpha)$ pour un comportement quelconque (élastique et anélastique).

Dans notre cas les données utilisées pour le calcul des modules tangents sont échantillonnées toutes les minutes. La correspondance entre le module tangent calculé de cette manière avec le modèle de comportement détaillé dans la suite ne donne pas directement la valeur paramètre élastique (ressort), mais fait intervenir les modules (ou complaisances) viscoélastiques et mécanosorptives à court terme : les valeurs de modules ainsi estimées (100-160MPa) sont plus basses que les valeurs de module observées dans des tests complémentaire instantanés (quelques secondes) associées au module élastique du modèle décrit dans la suite (~200MPa).

L'essai de retrait-gonflement empêché réalisé par Mazzanti est un excellent exemple de comportement hygromécanique fortement couplé, notamment parce qu'il est prolongé sur plusieurs cycles. Une analyse supplémentaire des résultats expérimentaux, couplée avec une approche de modélisation rhéologique permet notamment d'avancer l'hypothèse d'un endommagement non négligeable du matériau au cours du premier cycle de gonflement restreint.

4.3 Formulation du comportement

4.3.1 Choix d'un modèle rhéologique pour représenter le bois

Dans le chapitre 3 nous avons rappelé l'intérêt des modèles rhéologiques et nous avons décrit les enjeux propres au bois liés à ces modèles. Puis nous avons discuté la pertinence d'un modèle de fluage viscoélastique sous la forme d'un Kelvin-Voigt Généralisé (KVG).

Dans la suite nous travaillons sur la même base en y ajoutant une partie mécanosorptive et une partie plastique, toujours avec une association en série des éléments schématisée à la Figure 4-13 ; ce choix d'une distribution des éléments en série repose sur l'hypothèse de partition indépendante des déformations, notamment du découplage entre viscoélasticité et mécanosorption pour les phénomènes différés. Ce modèle consiste en l'association en série des comportements élastique, dilatatant, viscoélastique, mécanosorptif, plastique. Le nombre de cellule de Voigt viscoélastiques, ou de leur équivalent mécanosorptif n'est pas fixé pour l'instant.

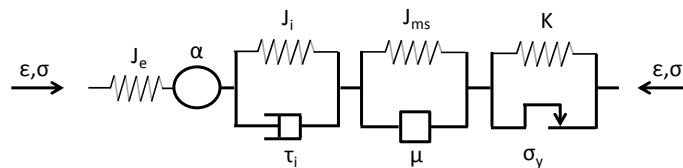


Figure 4-13: modèle rhéologique, base de travail

La déformation totale de la brique de base, notée ε , s'écrit :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_{vs} + \varepsilon_{ms} + \varepsilon_p \quad (4-8)$$

Où les variables internes du modèle sont :

- ε_e : déformation de l'élément élastique,
- ε_α : déformation de l'élément dilatatant,
- ε_{vs} : déformation des éléments de Voigt viscoélastiques,
- ε_{ms} : déformation de l'élément mécanosorptif de type Salin,
- ε_p : déformations permanentes de *compression set* (plasticité, voir §4.3.3).

Les paramètres décrivant chaque élément sont donnés dans le tableau suivant :

Elément	Paramètres matériau
élastique	J_e , complaisance élastique
dilatant	α , coefficient de retrait gonflement (%/%)
Voigt n° i	J_i complaisance viscoélastique τ_i temps caractéristique
Mécanosorptif	J_{ms} complaisance de l'élément de Salin taux d'humidité caractéristique
plastique	σ_y seuil de <i>compression set</i> m , n et λ les paramètres de plasticité et endommagement

Tableau 4-1 : paramètres du modèle

h	Taux d'humidité du bois
Z	Variable d'endommagement $Z \geq 1$
Π	variable de plasticité 0/1
σ_p	seuil plastique

Tableau 4-2 : Nomenclature complémentaire

4.3.2 Discrétisation de la relation de comportement sur un pas de temps Δt

4.3.2.1 Choix du schéma d'intégration

Pour résoudre des problèmes dépendants du temps avec des conditions aux limites variables, les solutions analytiques de fluage associées aux lois de comportement précédemment citées ne sont pas d'un grand recours. Une solution largement utilisée consiste à résoudre ces problèmes de façon itérative. La discrétisation du temps en intervalles Δt , appelés « pas » de temps, est détaillée dans la suite. Inspirés par les travaux de [Linard (2001)], [Randriambololona (2003)] et par leur méthode de discrétisation des lois de comportement appliquées au bois, nous allons établir l'hypothèse suivante :

H1 : la contrainte aux bornes du modèle varie linéairement au cours d'un pas de temps Δt

Nous verrons plus loin que les variations du taux d'humidité du bois et des propriétés mécaniques seront également supposées linéaires sur le pas de temps. L'hypothèse H1 sera écrite de la manière suivante :

$$\sigma(t) = \sigma^0 + \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}(t - t^0), \quad t \in [t^0; t^0 + \Delta t] \quad (4-9)$$

Ici comme dans la suite, l'exposant 0 indique le début du pas de temps.

On cherche la fonction décrivant l'évolution de la déformation ε sur le pas de temps, en fonction de l'état en cours (et de la loi de comportement) :

$$\dot{\varepsilon} = f(\varepsilon^0, \sigma^0, h^0, t^0) \quad (4-10)$$

$$\varepsilon^{t^0+\Delta t} - \varepsilon^{t^0} = \Delta\varepsilon = \int_{t^0}^{t^0+\Delta t} f(\varepsilon, \sigma, h, t) dt \quad (4-11)$$

A ce stade, aucune hypothèse n'est faite sur le schéma d'intégration de cette intégrale ; on écrit les solutions exactes de nos équations différentielles, et on montre que l'équation générale reliant la contrainte à la déformation est de la forme :

$$\Delta \varepsilon = P + Q \Delta \sigma \quad (4-12)$$

Ou pour l'élément n° i :

$$\Delta \varepsilon_i = p_i + q_i \Delta \sigma \quad (4-13)$$

Cette écriture du premier ordre (due à l'hypothèse de variation linéaire sur σ) nous permet de calculer simplement une des deux variables ($\Delta \varepsilon, \Delta \sigma$) en fonction de l'autre. D'autres auteurs ([Randriambololona (2003)]) écrivent la relation d'une autre manière : $\Delta \varepsilon = M \Delta \sigma + \tilde{\varepsilon}$. Ce qui aurait l'avantage de préciser que nos P et p_i sont bien des termes homogènes à des déformations, tandis que Q et q_i sont des termes de complaisance. Ceci étant dit nous maintenons notre notation. Etant donné le choix d'une représentation en série, l'incrément de contrainte $\Delta \sigma$ sera le même pour tous les éléments ($\Delta \sigma_i = \Delta \sigma \forall i$). Dans la suite on cherchera à détailler l'expression de P et Q en fonction des comportements choisis.

4.3.2.2 Discrétisation du comportement : 1ère formulation avec paramètres matériau constants

Lors d'une première étape, nous allons supposer que les paramètres matériau sont constants sur un pas de temps, c'est-à-dire notamment qu'ils sont indépendants du taux d'humidité.

Prenons le cas du comportement élastique linéaire, qui s'écrit en supposant que $\Delta J = 0$:

$$\Delta \varepsilon_e = \Delta(J_e \sigma) = J_e \Delta \sigma \quad (4-14)$$

Comportement de retrait gonflement :

$$\Delta \varepsilon_\alpha = \alpha(\Delta h - \cancel{\Delta h_{ref}}) = \alpha \Delta h \quad (4-15)$$

A contrainte constante (essai de fluage), la solution exacte de l'équation différentielle de la cellule de Voigt (§3.1.4.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) &= \varepsilon_i^0 e^{-t/\tau_i} + J_i \sigma^0 (1 - e^{-t/\tau_i}) \\ \Delta \varepsilon_i(t) &= \varepsilon_i - \varepsilon_i^0 = (1 - e^{-\Delta t/\tau_i}) (J_i \sigma^0 - \varepsilon_i^0) \end{aligned} \quad (4-16)$$

A charge variable, l'équation différentielle à résoudre doit intégrer l'expression de $\sigma(t)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma^0 + \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} (t - t^0) \\ \tau \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon &= J_i \left[\sigma^0 + \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} (t - t^0) \right] \end{aligned} \quad (4-17)$$

La solution de cette équation est donnée sans sa démonstration :

$$\Delta \varepsilon_i = (1 - e^{-\Delta t / \tau_i}) (J_i^0 \sigma^0 - \varepsilon_i^0) + \left[1 - \frac{1 - e^{-\Delta t / \tau_i}}{\Delta t / \tau_i} \right] J_i^0 \Delta \sigma$$

Soit :

$$\Delta \varepsilon_i = \varphi_i (J_i^0 \sigma^0 - \varepsilon_i^0) + \chi_i J_i^0 \Delta \sigma \quad (4-18)$$

avec

$$\varphi_i = (1 - e^{-\Delta t / \tau_i})$$

$$\chi_i = \left[1 - \frac{1 - e^{-\Delta t / \tau_i}}{\Delta t / \tau_i} \right]$$

L'utilisation de l'élément de Salin permet d'écrire rapidement la solution analogue pour le comportement mécanosorptif, ou le temps est substitué par le taux de variation de mc :

$$\tau_{ms} = \frac{m}{|dh|/dt}$$

$$\Delta \varepsilon_{ms} = \varphi_{ms} (J_{ms}^0 \sigma^0 - \varepsilon_{ms}^0) + \chi_{ms} J_{ms}^0 \Delta \sigma$$

$$\varphi_{ms} = (1 - e^{-|\Delta h|/m}) \quad (4-19)$$

$$\chi_{ms} = \left[1 - \frac{1 - e^{-|\Delta h|/m}}{|\Delta h|/m} \right]$$

On identifie alors les termes P et Q de la relation générale contrainte/déformation :

$$\Delta \varepsilon = P + Q \Delta \sigma$$

$$P = \alpha \Delta u + \sum_i \varphi_i (J_i^0 \sigma^0 - \varepsilon_i^0) + \varphi_{ms} (J_{ms}^0 \sigma^0 - \varepsilon_{ms}^0) \quad (4-20)$$

$$Q = J_e^0 + \sum_i \chi_i J_i^0 + \chi_{ms} J_{ms}^0$$

Remarque : lorsque $\Delta t / \tau \ll 1$, φ_i et χ_i peuvent être remplacés par leurs développements limités :

$$si \ \Delta t / \tau \ll 1$$

$$\varphi_i = (1 - e^{-\Delta t / \tau_i}) \sim \Delta t / \tau_i$$

$$\chi_i = \left[1 - \frac{1 - e^{-\Delta t / \tau_i}}{\Delta t / \tau_i} \right] \sim \Delta t / 2 \tau_i$$

4.3.2.3 Discretisation avec paramètres matériau variables (dépendants de l'humidité).

Dans cette partie on complète l'expression de P et Q pour les mêmes comportements lorsqu'on choisit d'avoir des modules/complaisances (élastiques et viscoélastiques) dépendant(e)s du taux d'humidité du bois.

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_e &= \Delta(J_e \sigma) = (J_e^0 + \Delta J_e)(\sigma^0 + \Delta \sigma) - J_e^0 \sigma^0 \\ \Delta \varepsilon_e &= \Delta J_e \sigma^0 + J_e^0 \Delta \sigma + \Delta J_e \Delta \sigma\end{aligned}\quad (4-21)$$

Dans cette notation nous voyons apparaître un terme du second ordre. Dans la mesure du possible nous garderons ces termes pour rester dans le cas général où ΔJ et $\Delta \sigma$ ne sont pas nécessairement des termes petits devant 1.

Pour chaque élément de Voigt viscoélastique n° i (et les éléments mécanosorptifs), la solution exacte de l'équation de comportement avec variation des complaisances durant le pas de temps s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_i &= \left(1 - e^{-\Delta t/\tau_i}\right) (J_i^0 \sigma^0 - \varepsilon_i^0) + \left[1 - \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau_i}}{\Delta t/\tau_i}\right] (\Delta J_i \sigma^0 + J_i^0 \Delta \sigma) \\ &\quad + \left[1 - \frac{2}{\Delta t/\tau_i} \left(1 - \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau_i}}{\Delta t/\tau_i}\right)\right] \Delta J_i \Delta \sigma \\ \Delta \varepsilon_i &= \varphi_i (J_i^0 \sigma^0 - \varepsilon_i^0) + \chi_i (\Delta J_i \sigma^0 + J_i^0 \Delta \sigma) + \psi_i \Delta J_i \Delta \sigma \\ \psi_i &= \left[1 - \frac{2}{\Delta t/\tau_i} \chi\right]\end{aligned}\quad (4-22)$$

D'où l'écriture générale suivante :

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon &= P + Q \Delta \sigma \\ P &= \alpha \Delta h + \left(\Delta J_e + \left[\sum_i \chi_i \Delta J_i \right] + \chi_{ms} \Delta J_{ms} \right) \sigma^0 + \sum_i \varphi_i (J_i^0 \sigma^0 - \varepsilon_i^0) \\ &\quad + \varphi_{ms} (J_{ms}^0 \sigma^0 - \varepsilon_{ms}^0) \\ Q &= (J_e^0 + \Delta J_e) + \left[\sum_i \chi_i J_i^0 + \psi_i \Delta J_i \right] + (\chi_{ms} J_{ms}^0 + \psi_{ms} \Delta J_{ms}) \\ &\quad \text{si } \Delta t/\tau \ll 1 \\ \psi_i &= \left[1 - \frac{2}{\Delta t/\tau_i} \left(1 - \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau_i}}{\Delta t/\tau_i}\right)\right] \sim \Delta t/3\tau_i\end{aligned}\quad (4-23)$$

4.3.2.4 Restrictions thermodynamiques

Plutôt que d'ajouter des éléments mécanosorptifs complexes dans le comportement (type Salin), certains auteurs préfèrent travailler sur la base d'un ressort simple (le ressort étant le lien minimal entre déformation et contrainte) et de faire évoluer sa formulation. Ainsi [Dubois (2004); Husson (2009); Randriambololona (2003)] appliquent le second principe de la thermodynamique à un matériau hygro-élastique, durant un essai théorique d'humidification et séchage à contrainte constante. Lors de l'humidification, le ressort hygro-élastique devient plus complaisant et la déformation augmente. Au séchage en revanche, le second principe n'est vérifié selon ces auteurs qu'à condition que la déformation ne diminue pas, et ce malgré la rigidification du matériau. C'est l'effet de « blocage » au séchage.

C'est bien ce qui est observé expérimentalement pour un échantillon de bois, et cela signifie qu'il faut soit enrichir la formulation du ressort, soit rajouter des comportements. C'est pourquoi les modèles rhéologiques associés au bois ne sont pas uniquement « hygro-élastique » : alors on peut vérifier qu'un modèle hygro-élastique et mécanosorptif respecte le second principe, mais ce n'est pas notre but ici.

Si l'on fait l'hypothèse que le modèle hygro-élastique seul doit satisfaire la thermodynamique, alors cela oblige à choisir une loi de comportement élastique différente selon que l'on se trouve dans une étape d'« adoucissement » (humidification / loi de Hooke) ou en phase de « rigidification » (séchage / loi de Bazant = loi de Hooke tangente). Dans notre écriture, cela revient à éliminer certains termes durant une phase de séchage sous charge, c'est-à-dire à conserver dans les phases d'humidification :

$$\Delta \varepsilon_e = \Delta J_e \sigma^0 + J_e^0 \Delta \sigma + \Delta J_e \Delta \sigma \quad (4-24)$$

Et durant les phases de séchage à modifier la loi par :

$$\Delta \varepsilon_e = J_e^0 \Delta \sigma \quad (4-25)$$

Nous avons choisi de ne pas prendre en compte cette différence pour la suite, considérant que notre modèle inclut également les couplages mécanosorptifs. Néanmoins, suivant le même type d'approche et pour rendre compte de ces effets de blocage, nous avons développé une modélisation de type « hygro-verrou » ([Gril (1988); Husson (2009)]) sous le même formalisme ($\varepsilon = P + Q\sigma$) : les formulations de type hygro-verrou comportent beaucoup plus de variables internes et exigent un découpage complexe de l'histoire hygrométrique du matériau. Pour s'affranchir de ces difficultés, décuplées lorsque le modèle est dérivé en calcul de plaque (multidimensionnel), nous avons développé pour le moment les hygro-verrous sous leur forme unidimensionnelle uniquement. Le principe et les équations de l'hygro-verrou, ainsi qu'une confrontation aux données de fluage de [Montero (2010)] sont développés dans l'annexe 2.

4.3.3 Modélisation du compression set

Cette section est consacrée à la modélisation des effets de déformation permanente et d'endommagement observés lors de l'analyse des tests de retrait-gonflement tangentiel empêché.

Les expérimentateurs qui s'intéressent au *compression set* le « modélisent » (i.e. ils font un parallèle avec telle ou telle représentation rhéologique) soit par un effet de type plasticité (défini par un seuil, indépendant du temps), soit par un effet viscoélastique linéaire non recouvrable (amortisseur linéaire assemblé en série, donc une déformation permanente dépendante du temps ou de la vitesse de déformation). Il est probable que, comme souvent, le modèle adapté à cette échelle se trouve entre les deux (combinaison des deux ou modèle viscoplastique), ou qu'il faille prendre en compte la viscoélasticité non linéaire étant donnés les niveaux de charge. Dans le but d'y voir plus clair sur le lien entre compression-set, limite élastique et temps, nous réfléchissons en collaboration avec nos partenaires à de nouveaux protocoles expérimentaux visant à vérifier la pertinence de ces modèles, par exemple : reproduire les mêmes tests de retrait-gonflement empêchés avec cette fois des cycles d'humidité d'amplitude croissante pour mettre en évidence un éventuel seuil, et préciser le comportement pré et post déformation permanente. Ce travail est en cours et aucune donnée complémentaire ne sera montrée dans la suite. Nous allons pour l'instant nous concentrer sur une description de type plastique qui est relativement adaptée pour piloter l'endommagement observé précédemment.

4.3.3.1 Hypothèses sur les mécanismes associés au *compression set*

Avant de proposer une écriture mathématique de ce comportement, nous allons discuter des mécanismes qui sont d'après nous à l'origine du *compression set*. Dans la direction tangentielle, ou plus généralement dans les directions transverses aux fibres, le comportement mécanique du bois en compression fait apparaître des phénomènes de compression et de flexion de parois, à mettre en relation avec la géométrie de la structure en nid d'abeilles (voir notamment [Farruggia (1998); Gibson et Ashby (1997); Moden (2008)]). L'alternance du bois d'été et de bois de printemps, ainsi que l'irrégularité de leur distribution rend difficile l'interprétation des phénomènes mécaniques mis en jeu.

Nous supposons que les déformations permanentes observées lors de l'essai de *compression set* correspondent à des flambements localisés des parois en compression. Le test de *compression set* est-il un état intermédiaire entre un matériau sec (aux parois peut-être fragiles) et un matériau sous des conditions d'humidité et de température très élevées, comme c'est le cas lors des traitements hygrothermiques utilisés par des chercheurs japonais dans les années 80 pour créer la flèche de Cupidon (Figure 4-14(b)) ([Inoue, *et al.* (1992)])? Ou est-ce un état plus instable encore, produisant plus de déformation?

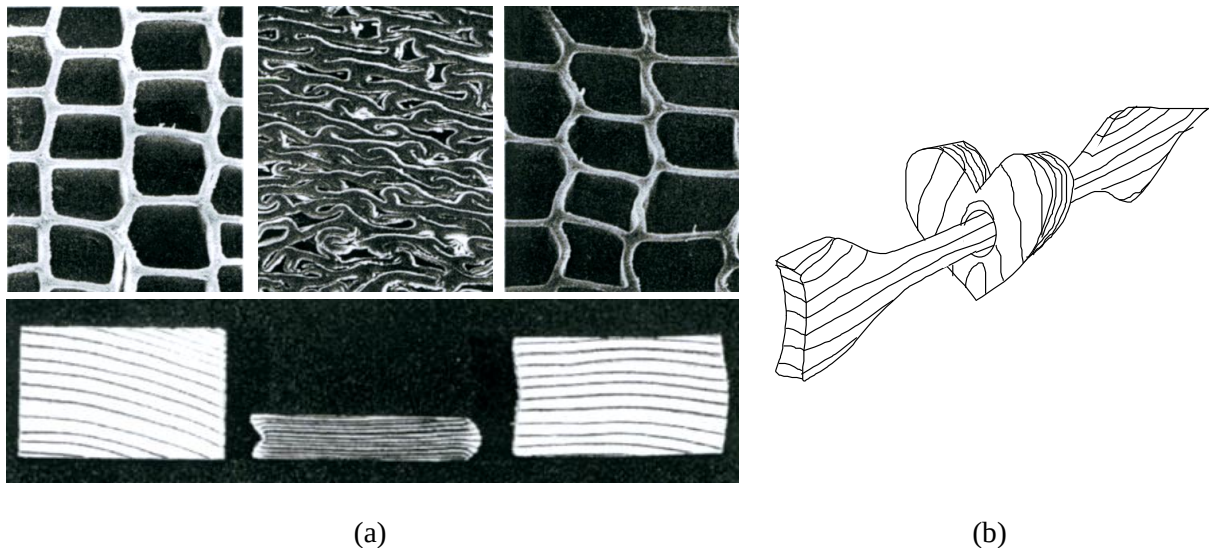


Figure 4-14 : (a) compression transverse des cellules de résineux (Hinoki) et aspect des cellules après recouvrance hygro-thermique (essai haute température et haute humidité) ; vues micro et macro tirées de [Inoue, *et al.* (1992)] ; (b) La « Flèche de Cupidon » (illustration de J.Gril) comme application de l'effet mémoire du bois : la pointe de la flèche est comprimée transversalement aux fibres pour pouvoir passer dans le cœur et retrouve sa forme initiale sous des conditions d'humidité et de températures données.

Pour l'instant nous supposons qu'il existe une limite théorique (de flambement, de rupture), indépendante du temps, mais dépendante du taux d'humidité des parois, qui détermine la déformation permanente sous humidité variable. Pour une première approche nous avons essayé de modéliser ce phénomène par un comportement élastoplastique moyenné sur un VER. Ce choix va nous permettre de prendre en compte l'endommagement observé durant les essais expérimentaux.

4.3.3.2 Formulation élastoplastique écrouissable et endommageable

Nous proposons d'utiliser une formulation élastoplastique écrouissable et endommageable pour décrire les effets du *compression set*. Nous allons décrire les étapes qui permettent d'insérer ce comportement dans notre formalisme discrétisé.

Commençons par définir le critère de plasticité. Notre variable de plasticité est notée Π : c'est une variable binaire qui définit l'état du comportement (élastique / plastique). Le phénomène de plasticité est associé à deux seuils : la propriété du matériau non plastifié σ_y (équivalent de la limite d'élasticité), et le seuil variable avec l'histoire σ_p .

$$\begin{aligned}\sigma_p^{(t=0)} &= \sigma_y \\ \text{tant que } \sigma^0 + \Delta\sigma &\leq \sigma_p \text{ alors } \Pi = 0 \\ \text{si } \sigma^0 + \Delta\sigma &> \sigma_p \text{ alors : } \Pi = 1\end{aligned}\tag{4-26}$$

Note : pour $\Pi = 1$, σ et σ_p sont confondus.

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_p &= \Pi\Delta\sigma \\ \Delta\varepsilon_p &= (K^0\Delta\sigma_p + \Delta K\sigma_p^0) = \Pi(K^0\Delta\sigma + \Delta K\sigma_p^0)\end{aligned}$$

Le comportement élastoplastique est scindé en deux parties : l'une linéaire par rapport à la charge, et la seconde tenant compte des déformations permanentes dans le matériau. La forme générale est la suivante :

$$\varepsilon_e + \varepsilon_p = J_{e0}\sigma + J_{e0}\sigma_y f\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_y}\right)\tag{4-27}$$

Notes : l'indice 0 sur les complaisances indique l'état initial du matériau (non endommagé).

La fonction f est sans dimensions, et dans la suite elle vaut :

$$f\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_y}\right) = m\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_y} - 1\right)^{1+n}\tag{4-28}$$

On introduit l'endommagement (de paramètre λ). La partie élastique de la déformation est réécrite sous la forme :

$$\varepsilon_e = J_{e0}\sigma \left[1 + \lambda \frac{f\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_y}\right)}{\frac{\sigma_p}{\sigma_y}} \right] = J_{e0}\sigma \left[1 + \lambda m \frac{(\sigma_p - \sigma_y)^{1+n}}{\sigma_p \sigma_y^n} \right]\tag{4-29}$$

La déformation élastique est étroitement liée à l'endommagement, comme le montre le schéma de la Figure 4-15. Lorsque le matériau a plastifié, il existe un seul couple de déformations élastique et plastique qui satisfait l'équation (4-27). Cette restriction vient évidemment du choix de la modélisation en série.

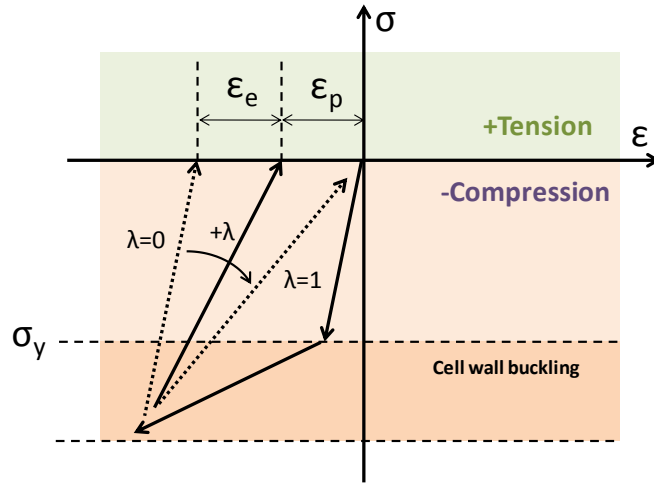


Figure 4-15: endommagement - compatibilité entre déformation permanente et déformation élastique à la décharge.

Les termes restants sont des termes « plastiques » exprimant la déformation résiduelle.

$$\varepsilon_p = (1 - \lambda) J_{e0} \sigma_y f\left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right) = (1 - \lambda) J_{e0} m \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} - 1\right)^{1+n} \quad (4-30)$$

Les équations (4-29) et (4-30), comme la Figure 4-15, montrent un modèle qui, suivant les paramètres, donne une importance majeure aux déformations permanentes ou à l'endommagement, l'un se produisant « à la place » de l'autre.

Durant la phase de plastification, on peut définir le module tangent K et sa variation sur le pas de temps :

$$K = (1 - \lambda) J_{e0} m (1 + n) \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_y} - 1\right)^n \quad (4-31)$$

Et pour $\sigma_p^0 \neq \sigma_y$

$$\Delta K = \frac{n K}{(\sigma_p^0 - \sigma_y)} \Delta \sigma_p \quad (4-32)$$

Rem sur m : pour $n=0$, K est constant et vaut en l'absence d'endommagement : $K = J_{e0} m$

Dans la suite nous ferons l'hypothèse que l'endommagement défini sur les propriétés élastiques affecte de la même manière le comportement viscoélastique et mécanosorptifs (augmentation des complaisances). De cette manière « l'ensemble » du matériau est endommagé, même si le pilotage qui est formalisé reste sur la seule partie élastique. On définit la variable d'endommagement Z qui vaut :

$$Z = \frac{J_e}{J_{e0}} = \frac{J_i}{J_{i0}} = \frac{J_{ms}}{J_{ms0}} = 1 + \lambda m \frac{\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_y} - 1\right)^{1+n}}{\frac{\sigma_p}{\sigma_y}} \quad (4-33)$$

Z est une variable qui vaut initialement 1 et qui est supérieur à 1 s'il y a endommagement. Maintenant les complaisances sont des fonctions de l'humidité et de l'endommagement ; une partie dépendant donc de h , et l'autre de σ .

$$J\sigma = J_0 Z \sigma = J_0(u) Z(\sigma) \sigma \quad (4-34)$$

Pour le ressort par exemple :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_e &= \Delta(J\sigma) \\ \Delta \varepsilon_e &= (Z^0 + \Delta Z)(J_{e0}^0 + \Delta J_{e0})(\sigma^0 + \Delta \sigma) \\ \Delta Z &= \frac{dZ}{d\sigma_p} \Delta \sigma \end{aligned} \quad (4-35)$$

Note : il apparaît ainsi un terme supplémentaire en $\Delta \sigma^2$: ceci rend caduque notre résolution du problème suivant la loi de comportement $\Delta \varepsilon = P + Q \Delta \sigma$. Ce terme apparaît lorsqu'on prend en compte la variation combinée de contrainte et d'endommagement (dépendant de la contrainte) sur un pas de temps.

Hypothèse supplémentaire : cette écriture n'existant que durant l'endommagement (donc durant la plastification), nous ferons l'hypothèse que, au cours de cette phase, les variations de contrainte sont 'petites', et que les termes du second ordre en contrainte sont négligeables. Une attention particulière sera portée sur le choix du pas de temps (voir annexe 3).

On modifie l'expression de la déformation élastique sur le pas de temps :

$$\Delta \varepsilon_e = Z^0 \sigma^0 \Delta J_{e0} + \left(Z^0 + \sigma_p^0 \left(\frac{dZ}{d\sigma_p} \right)_{\sigma_p^0} \right) (J_{e0}^0 + \Delta J_{e0}) \Delta \sigma \quad (4-36)$$

On fournit l'expression de $dZ/d\sigma$ et Z^0 :

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\sigma_p} &= \Pi \frac{\lambda m}{\sigma_y} \left(1 + n \frac{\sigma_p}{\sigma_y} \right) \frac{\left(\sigma_p / \sigma_y - 1 \right)^n}{\left(\sigma_p / \sigma_y \right)^2} \\ Z^0 &= 1 + \lambda m \frac{\left(\sigma_p^0 / \sigma_y - 1 \right)^{1+n}}{\sigma_p^0 / \sigma_y} \end{aligned} \quad (4-37)$$

Pour l'élément de Voigt, on résout l'équation différentielle modifiée :

$$\begin{aligned} \tau \dot{\varepsilon} + \varepsilon &= J\sigma \\ J\sigma &= \left(Z + \frac{\Delta Z}{\Delta t} t \right) \left(J_0 + \frac{\Delta J_0}{\Delta t} t \right) \left(\sigma + \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} t \right) \end{aligned} \quad (4-38)$$

Le détail de cette résolution n'est pas développé ici. A l'expression générale sans endommagement on ajoutera :

$$J_0 \frac{dZ}{d\sigma_p} \Delta \sigma [\chi \sigma + \psi \Delta \sigma] \quad (4-39)$$

Note : une fois encore on suppose que durant les phases de plastification, les variations de contraintes sont petites, et le terme du second ordre négligeable.

Toutes les étapes de calcul intermédiaires ne sont pas détaillées ; nous donnons en synthèse l'expression du comportement global :

$$\begin{aligned}
 P &= \alpha \Delta h + Z^0 \sigma^0 \left[\Delta J_{e0} + \left(\sum_i \chi_i \Delta J_{i0} \right) \right] + \sum_i \varphi_i (Z^0 J_{i0}^0 \sigma^0 - \varepsilon_i^0) \\
 &\quad + \varphi_{ms} (Z^0 J_{ms0}^0 \sigma^0 - \varepsilon_{ms}^0) \\
 Q &= \left[Z^0 + \Pi \sigma_p^0 \left(\frac{dZ}{d\sigma_p} \right)_{\sigma_p^0} \right] \left[(J_e^0 + \Delta J_e) + \left(\sum_i \chi_i J_i^0 \right) + (\chi_{ms} J_{ms}^0) \right] + \left(\sum_i \psi_i Z^0 \Delta J_i \right) \\
 &\quad + \Pi K^0 \left(1 + \frac{n \sigma_p^0}{(\sigma_p^0 - \sigma_y)} \right)
 \end{aligned} \tag{4-40}$$

4.3.3.3 Limite élastique et taux d'humidité

Comme nous l'avons supposé plus haut, la « limite élastique » transverse est atteinte pour une certaine contrainte ou déformation, que l'on peut supposer dépendante du taux d'humidité du bois. Ici nous faisons le lien avec des tests de compression à humidité constante qui ont été menés par [Fukuhara et Yasuda (?)] pour de l'épicéa. A partir des courbes de contrainte-déformation obtenues dans la direction radiale par ces auteurs, nous avons recalculé différentes grandeurs en fonction de l'humidité, qui sont :

- Le module d'Young dans la direction radiale (E_R),
- La contrainte à la limite d'élasticité (σ_y),
- La déformation à la limite d'élasticité (ε_y),
- La déformation permanente observée à la décharge (après compression à maximum $1.5 \cdot \sigma_y$).

Les résultats sont reportés sur la Figure 4-16 où l'on peut voir : que le module d'élasticité varie linéairement avec le taux d'humidité (environ 3 %/% autour de la valeur à 12 %) ; que le taux de déformation permanente et la limite élastique (contrainte) diminuent linéairement avec l'humidité (malgré des tests à 23% qui s'écartent de la tendance linéaire). En revanche la déformation atteinte à la limite élastique reste la même (toujours à l'exception du point à $h=0.23$).

Ces résultats, s'ils sont confirmés, accréditent la thèse d'un mécanisme de flambement au niveau des parois cellulaires. En effet la contrainte limite de flambement d'une poutre dépend de son module d'élasticité (donc de l'humidité pour le bois), alors que la déformation critique équivalente (contrainte divisée par le module) ne dépend plus que des paramètres géométriques de la poutre.

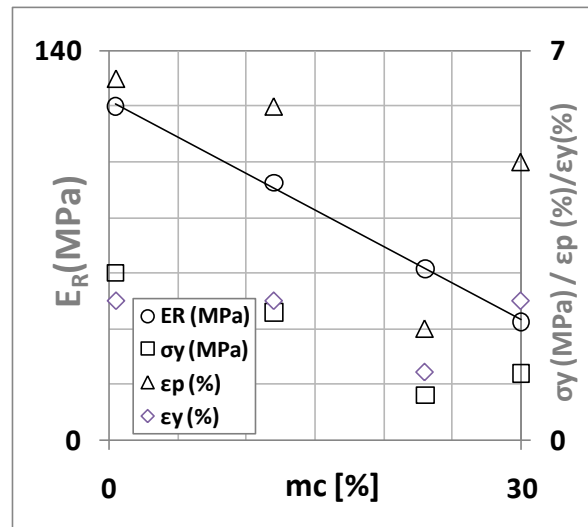


Figure 4-16 : calculs à partir des résultats de compression radiale sur épicéa de [Fukuhara et Yasuda (?)] ;
Module d'Young radial E_R (MPa), limite élastique en contrainte σ_y (MPa) ou en déformation ε_y ,
déformation permanente (ε_p).

Au début du test de retrait-gonflement empêché (premier gonflement), nous assistons à plusieurs phénomènes qui se « croisent » dans le temps : le taux d'humidité et la contrainte de compression augmentent dans le temps, tandis que le module élastique et la limite élastique diminuent.

Nous avons donc deux solutions pour écrire le seuil de *compression set* : l'une en contrainte (celle que nous avons développée) et l'autre en déformation, qui serait une autre solution à explorer. La variation de la contrainte seuil avec mc mène à une écriture complexe, difficile à intégrer dans notre formulation : cela fait partie des points faibles de la formulation à développer pour la suite.

Nous avons proposé une formulation d'un comportement élasto-plastique écrouissable et endommageable en compression. Le problème des contraintes élevées en traction et les conditions complexes de raccord entre les deux comportements n'ont pas été évoquées, notamment de par l'absence de données expérimentales. La formulation actuelle pourrait accueillir quelques améliorations, parmi lesquelles l'influence du taux d'humidité sur la limite élastique.

4.4 Identification des paramètres matériau

4.4.1 Paramètres viscoélastiques

Le modèle de Kelvin-Généralisé a été identifié sur les essais de fluage à humidité constante. Nous avons supposé que l'ensemble des paramètres (complaisances et temps caractéristiques) pouvaient être déterminés à partir des relations et paramètres suivants :

$$J_0(h) = \frac{J_0(12\%)}{(A0h + B0)} \quad (4-41)$$

$$\log(J_i) = (A1h^2 + A2h + A3) * \log(\tau_i) + (B1h + B2)$$

A0	-5
B0	1.6
A1	3.219
A2	-0.928
A3	0.340
B1	3.298
B2	-5.047

Tableau 4-3 : paramètres d'hygroactivation du modèle de Kelvin-Voigt généralisé

4.4.2 Autres paramètres

Les essais à notre disposition sur ce matériau de peuplier ne permettent pas d'identifier tous les paramètres du modèle de façon unique. Nous proposons un jeu de données correspondant aux résultats de la Figure 4-18.

Le module élastique à 12 % dans la direction tangentielle a été estimé (environ 200MPa) à partir d'un jeu de données complémentaires obtenues au DEISTAF (Figure 4-17). Les complaisances viscoélastiques tangentielles sont recalculées à partir des résultats obtenus dans la direction radiale en considérant que le rapport J_{vs}/J_e est constant pour des échantillons prélevés de manière proche (même matériel pour les différents essais).

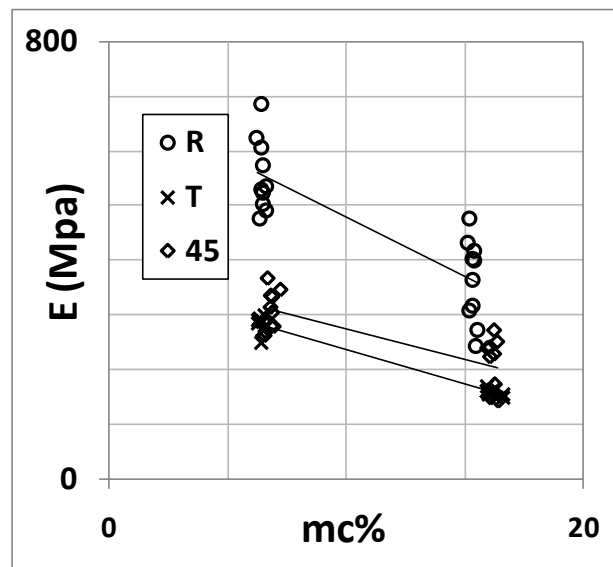


Figure 4-17 : résultats de mesures en compression à humidité constante sur des échantillons de forme analogue à ceux des tests de retrait-gonflement empêché ; résultats obtenus par l'équipe du DEISTAF.

Deux éléments de Salin sont choisis a priori pour reproduire à la fois les effets mécanosorptifs classiques et les effets d'instabilité sur le module élastique transitoire évoqués (§3.1.2.2). Ce dernier effet a été estimé à 15 % de réduction du module élastique transitoire d'après les données de [Takahashi, *et al.* (2006b)]. Nous avons donc fixé la valeur de $J_{ms}^1/J_e = 1.15$, et une « constante de temps mécanosorptive » petite, soit 0.01 (élément sensible à $\sum |h| \sim 1\%$). Le second élément de Salin est fixé pour une constante plus grande de 0.5 et une complaisance telle que $J_{ms}^2/J_e = 6$.

Comme nous l'avons remarqué, la solution du problème d'identification de l'ensemble des paramètres n'est pas unique. Il convient donc de fixer des contraintes sur ces paramètres. La première concerne les complaisances du modèle en série : le fluage limite (à 50 ans) pour une sollicitation de fluage vaut dans notre cas :

$$\frac{(J_e + \sum J_{vs} + \sum J_{ms})}{J_e} \approx 1 + 3 + 7 = 11 \quad (4-42)$$

Nous rappelons que les valeurs de déformation différées peuvent être assez élevées dans les directions transverses ($\varepsilon_{ms}/\varepsilon_e \approx 10$, §3.2.1.1), et que nous n'avons pas d'information sur le fluage à très long terme dans ces axes. On peut tout juste supposer que la somme des complaisances relatives est supérieure à 3 (valeur longitudinale), la borne supérieure n'étant pas connue.

Cette remarque rejoint directement la problématique des effets « très long terme » associés à l'application patrimoniale (cf. Figure 4-1). Il faut cependant bien distinguer deux aspects : l'échelle de temps de vie de l'objet (en centaines d'années) au long de laquelle s'inscrivent probablement des mécanismes complexes de vieillissement, et l'échelle de temps sur laquelle nous prétendons simuler les réactions mécaniques d'un panneau (quelques années, cf. 6.2.2.2).

Une autre contrainte est imposée sur l'endommagement, observé à des valeurs de 10 à 20 % suivant la plage d'humidité (Figure 4-11). La valeur de l'endommagement Z recalculée à partir de l'équation (4-33) vaut dans notre cas 12%. Remarquons qu'avec notre modèle, nous avons reproduit ce taux d'endommagement important, mais une déformation permanente relativement petite (0.1 %), qui est toutefois en adéquation avec la valeur visible au premier point de retour à 30 % d'humidité relative sur la Figure 4-18 (en supposant que le matériau est bien revenu au même taux d'humidité que celui de départ).

En respectant l'ensemble de ces limitations (endommagement, fluage à court terme, fluage limite, etc.) basées sur la synthèse d'un grand nombre de données expérimentales, nous voyons sur les Figure 4-18 et Figure 4-19 que le modèle proposé est capable de reproduire des phénomènes expérimentaux relativement complexes (conditions aux limites mixtes, essais sous HR variables) qui sont adaptés aux types de sollicitations qui existent dans les panneaux peints (cf. chapitre 6). Un travail plus approfondi sur l'identification des paramètres (optimisation) pourrait permettre de mieux « coller » aux valeurs expérimentales, notamment concernant la déformation de l'échantillon B (Figure 4-19).

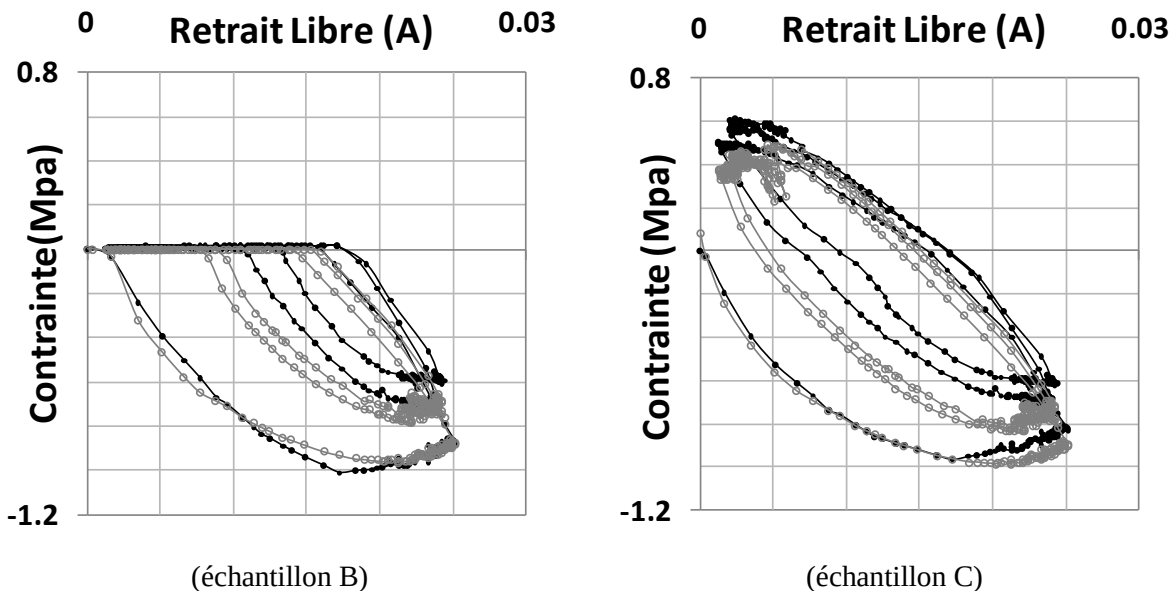


Figure 4-18 : résultats des simulations de retrait empêché (B et C) d'après les paramètres du Tableau 4-4 (trait gris) comparés aux essais expérimentaux (trait noir) ; les points représentent les instants des mesures expérimentales.

$E(12\%)$	240	MPa
Jms/Je	1.15 ; 6	
m_{ms}	0.01 ; 0.5	%
σ_y	-0.65	MPa
md	1.1	
nd	1.2	
λ	0.8	
α_T	0.3	%/%

Tableau 4-4 : paramètres utilisés pour les simulations de la Figure 4-18.

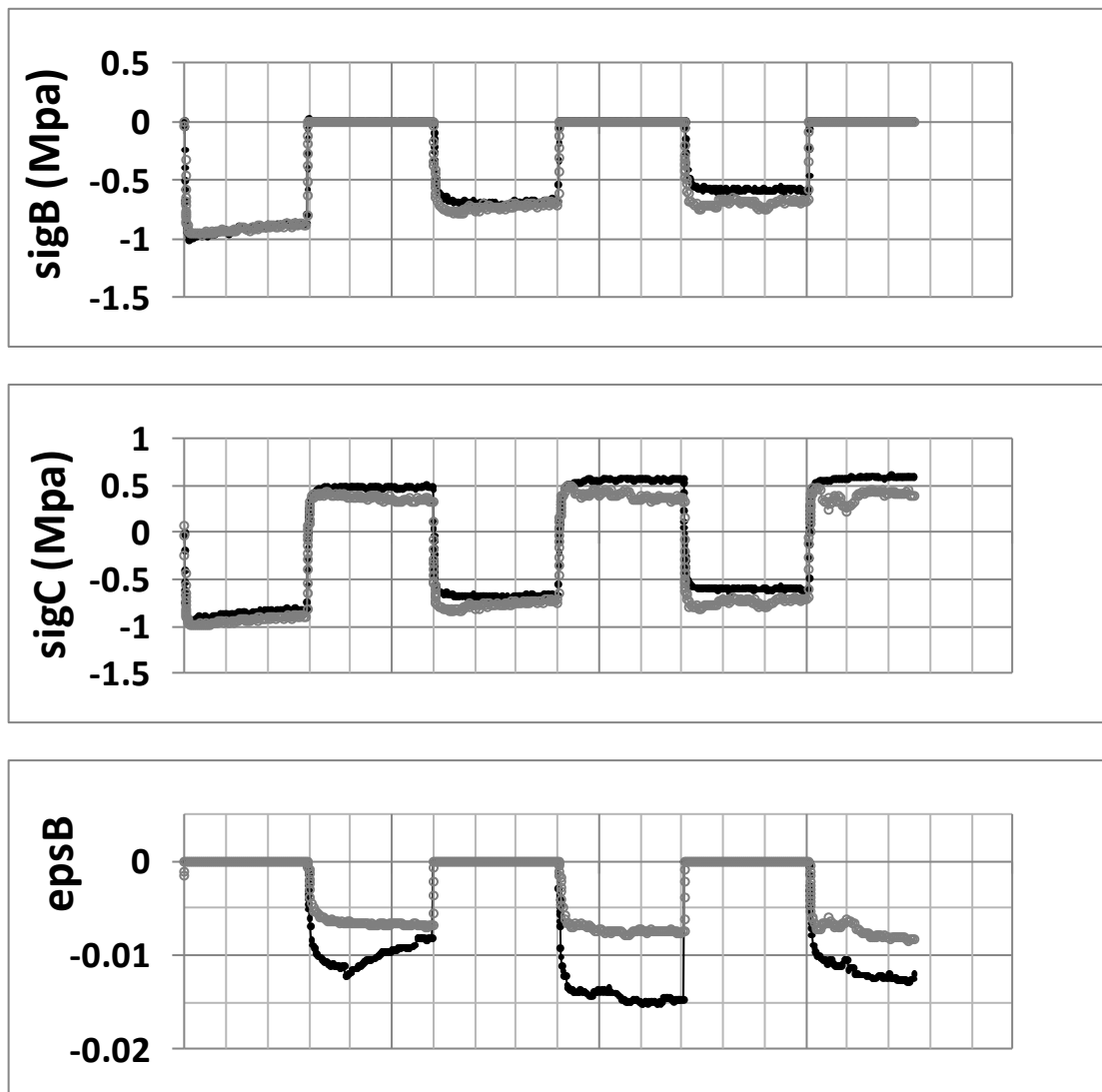


Figure 4-19 : résultats des simulations (traits gris) en fonction du temps comparés aux résultats expérimentaux (traits noirs).

4.4.3 A propos du retrait-gonflement « libre » des échantillons A et B

Dans notre lecture des essais de gonflement-retrait empêché de Mazzanti, nous avons fait l'hypothèse que le taux d'humidité des échantillons A (libre) et B (parfois chargé en compression) était le même, et les données de la bibliographie nous ont incité à négliger cette différence (§3.2.4).

Nous avons également négligé l'effet de la contrainte sur le retrait-gonflement qui mériterait d'avantage notre attention d'après les résultats de [Joyet (1992)] précédemment cités.

Qu'en est-il du retrait-gonflement post-endommagement ? Est-il modifié après apparition d'un *compression set* ? Pour tenter d'illustrer cette question nous allons utiliser les retraits libres de A et de B lors du séchage (et après que l'échantillon B se soit décollé de la condition de blocage) et la ré-humidification (avant contact). Durant cette période l'échantillon B n'est pas tout à fait dans le même état que A puisqu'il subit une relaxation des contraintes. Sa déformation totale (ε) est la somme de deux déformations, l'une de retrait-gonflement (ε_α) et l'autre de recouvrance mécanique (ε_m) (dépendant des contraintes internes). La déformation de retrait-gonflement (ε_α) évolue avec le même signe que mc . En revanche la variation de ε_m lors de la déformation libre de B est strictement positive (recouvrance des contraintes générées lors de la compression).

Ainsi lorsqu'on trace les déformations de B en fonction de celles de A durant le séchage, tout se passe comme si le retrait apparent était diminué (signe opposé à la recouvrance). Au contraire, durant la ré-humidification, le gonflement apparent doit être plus élevé que le gonflement du modèle. Les tendances des deux groupes sont tracées pour deux séchages et deux gonflements après *compression-set* (Figure 4-20).

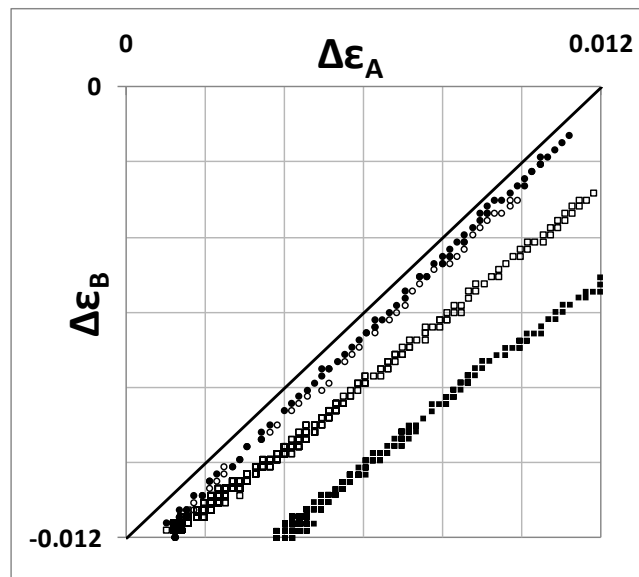


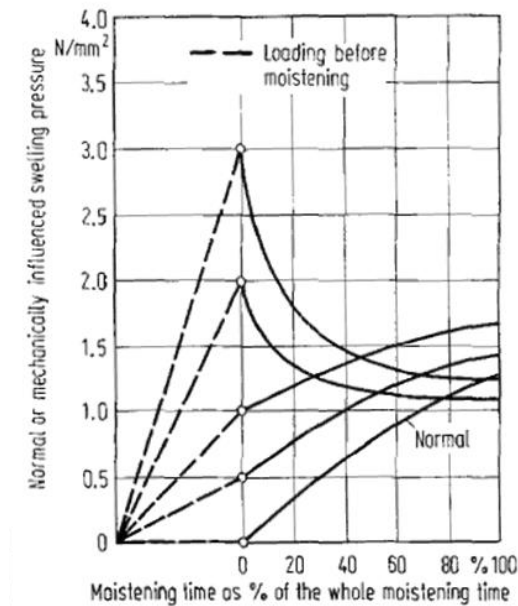
Figure 4-20 : retrait-gonflement libre de l'échantillon B après la phase de *compression set*, en fonction du retrait-gonflement libre de référence (ech. A) au séchage (●,○) et à la ré-humidification (■,□) ; la pente de la régression au séchage est en moyenne de 1.03, et 0.85 à la ré-humidification.

Durant la phase de séchage le retrait-gonflement apparent de B est diminué de 15-20 % par rapport à celui de A, alors qu'à la ré-humidification la pente de la régression est voisine de 1. Il est évident que la recouvrance est plus importante lors du séchage (début de la décharge) que lors du retour à l'état humide (fin de la recouvrance). Alors le retrait-gonflement post-*compression set* que l'on cherche à identifier est plus proche de la courbe d'humidification : on considère donc que le retrait-gonflement n'est pas affecté de manière significative par un endommagement.

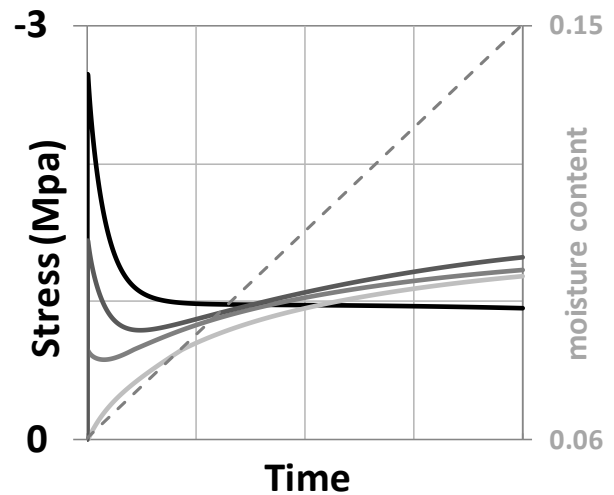
L'idée d'un retrait-gonflement endommagé serait séduisante puisqu'elle conduirait, dans bien des cas que nous verrons au chapitre 6, à de la courbure permanente.

4.4.4 Modélisation des essais de Perkitny

En utilisant le même modèle et les mêmes paramètres, nous proposons de simuler après [Rybarczik et Ganowicz (1974)] les essais de [Perkitny et Kingston (1972)]. Par manque d'information sur le protocole exact des expériences, nous avons simulé la réaction d'un échantillon tangentiel à une rampe de taux d'humidité (la cinétique de diffusion est ainsi simplifiée à l'extrême), et l'effet de différentes précontraintes. La famille de courbes ainsi tracées à la Figure 4-21 est malgré tout en bonne adéquation (qualitativement) avec les résultats expérimentaux obtenus sur le bois humidifié dans l'eau liquide.



(a)



(b)

Figure 4-21 : (a) essais de pression de gonflement dans l'eau par Perkitny sur du *Scot Pine* (extrait de [Rybarczik et Ganowicz (1974)], rappel du §3.2.2.2) (b) simulations de la pression de gonflement lors d'une simple rampe de taux d'humidité (---), d'après les paramètres du Tableau 4-4 ; famille de courbe pour différentes pré-contraintes (instantanées).

4.5 A propos de la modélisation de la diffusion

L'épaisseur des panneaux peints étant supposée faible devant les autres dimensions, nous faisons l'hypothèse que les échanges d'humidité loin des bords se fait de manière prépondérante suivant l'épaisseur (particulièrement dans notre application qui ne met en jeu ni des pressions élevées, ni des températures élevées). Cela signifie par ailleurs que le gradient d'humidité dans l'épaisseur d'un panneau est supposé être le même en tout endroit de la planche (effet local). Pour décrire l'évolution du taux de l'humidité en un point de la planche suivant son épaisseur, il nous faut choisir un modèle de diffusion 1d avec des conditions aux limites variables (conditions climatiques variables à proximité du panneau).

Comme dans les travaux de [Rémond (2004)], nous avons choisi d'utiliser la version 1d du code *TransPore* (partie diffusion uniquement). Cette simplification vers un modèle de diffusion 1d permet non seulement de simplifier des équations aux dérivées partielles à résoudre, mais conjointement de diminuer considérablement les temps de calcul requis (voir Tableau 4-5). Les phénomènes que l'on

veut analyser sur les panneaux peints se déroulent à des échelles de temps bien plus grandes que les applications de séchage industriel. Ainsi la simulation des variations de taux d'humidité d'un panneau peint en fonction des variations des conditions externes est elle aussi beaucoup plus longue. La nécessité de passer à un code 2d ou 3d sur des simulations de long terme doit être évaluée.

	Simulation d'un séchage d'une planche	Simulation des variations de taux d'humidité d'une planche dans un environnement variable pour une durée de mesures expérimentales d'un an environ
1D	Quelques secondes*	Quelques minutes
2D	Quelques minutes*	Quelques heures
3D	Quelques heures*	Quelques jours

Tableau 4-5 : temps de calcul du code de diffusion TransPore sur une machine standard pour les applications de séchage (*d'après [Rémond (2004)]) et pour les applications panneaux peints dont la durée réelle des phénomènes est plus longue.

4.5.1 TransPore 1D

TransPore est un code de calcul de transferts de masse et de chaleur développé par P.Perré et ses collaborateurs dans le cadre de l'étude du séchage des bois. Plusieurs versions de ce code de calcul ont été formulées, implémentées et utilisées en 1D ([Rémond (2004)]), 2D ([Mauget (1996); Perre et Passard (1995)]) et en 3D ([Perré et Turner (1999)]).

La formulation considère un milieu poreux dont on peut extraire un Volume Élémentaire Représentatif (VER) constitué d'une phase gazeuse (air sec et vapeur d'eau), d'une phase liquide (eau libre) et d'une phase solide (bois + eau liée). Les équations de conservation sur les différentes phases sont sommées sur le VER pour obtenir les équations macroscopiques dans un milieu dit « continu fictif ». Les équations de bilan massique (humidité sous différentes formes), le bilan énergétique (température) et l'écriture des transferts (diffusions et convections) permettent de résoudre un système de 3 équations déterminant l'évolution au cours du temps des 3 variables indépendantes du code : température, teneur en eau et pression totale de la phase gazeuse (air sec et vapeur d'eau). Les conditions aux limites sont définies par des flux de chaleur et de masse sur les couches externes. A noter selon [Rémond (2004)] que l'hypothèse d'un VER est mieux adaptée à la structure des résineux qu'à celle des feuillus dont les vaisseaux modifient le chemin de parcours de l'eau.

L'utilisation de ce code de séchage pour des applications en conditions d'humidité, de température et de pression ambiante pourra sembler surdimensionnée ; là où une formulation considérant une ou deux variables indépendantes (humidité et température) pourrait suffire. Cependant l'efficacité des schémas de résolution implémentés dans l'outil *TranPore1d*, les précédentes études basées sur cette même formulation, ainsi que la mise à disposition gracieuse de cet outil par Patrick Perré, en ont fait assurément une solution très satisfaisante pour notre étude.

4.5.2 Ajout des phénomènes d'hystérésis dans TransPore1D

4.5.2.1 Courbes d'hystérésis dans le bois

L'hystérésis de sorption est un des phénomènes non linéaires qui s'insèrent dans la relation physique complexe qui relie l'humidité relative de l'air et la réponse d'un panneau peint (§2.4.3.2) : c'est pourquoi nous allons proposer des solutions inspirées de la littérature pour en tenir compte dans nos simulations, au moins de manière qualitative. La version du code *TransPore1D* utilisée par [Rémond (2004)] ne considérait pas les effets d'hystérésis propres aux isothermes de sorption du bois, ce qui se justifie dans le cadre du séchage qui suit la courbe de désorption depuis le *PSF*.

Dans le domaine hygroscopique, l'hystérésis d'équilibre est caractérisée par les deux courbes d'adsorption et de désorption pure, mais également par des états d'équilibre intermédiaires pour les cycles partiels (cycles d'adsorption ou de désorption qui ne couvrent pas tout le domaine hygroscopique) (cf. Figure 4-22). Ces états d'équilibre intermédiaires (entre les courbes d'adsorption et de désorption pures) ont notamment été mesurés expérimentalement par [Peralta (1995)] sur du « *yellow poplar* »¹⁹ (*Liriodendron tulipifera* L.), et [Merakeb (2006)] sur du Douglas. Le premier n'a déterminé que les états intermédiaires allant de l'isotherme d'adsorption vers l'isotherme de désorption, tandis que le second a alterné le sens de variation de *HR* en réduisant l'amplitude des cycles. Leurs résultats ont été tracés à la Figure 4-22.

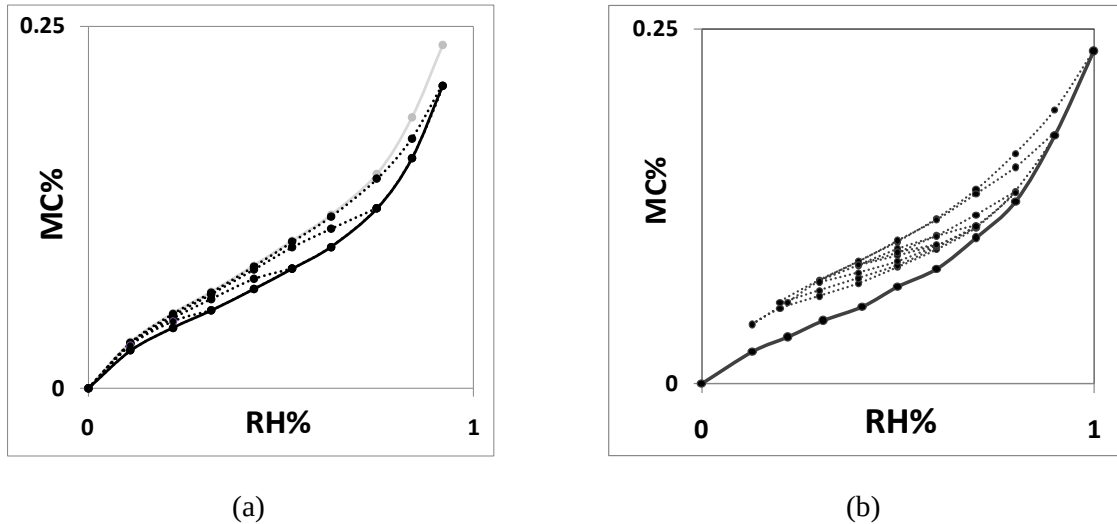


Figure 4-22 : parcours des états intermédiaires entre les courbes d'adsorption et de désorption d'après (a) [Peralta (1995)]; et (b) [Merakeb (2006)]; (●) points expérimentaux ; les isothermes d'adsorption pure indiquées par un trait plein noir, les isothermes de désorption pure par un trait plein gris, les états intermédiaires sont désignés en pointillés.

Une revue des modèles adaptés a été proposée par [Frandsen (2007)] ; cet auteur propose également une formulation basée sur des courbes interpolées entre les deux courbes de référence (adsorption et désorption), approche que nous allons adopter dans la suite. Un autre type de formulation, basée sur des considérations thermodynamiques, est proposée par [Merakeb, *et al.* (2009a); Merakeb, *et al.* (2009b)] : cette dernière méthode considère la capacité de sorption (chaleur de sorption à l'équilibre) comme une variable dépendant de l'état d'équilibre actuel du matériau hygroscopique (teneur en eau) ; cette autre méthode utilise également des fonctions de « raccord » entre les deux courbes d'adsorption et de désorption.

4.5.2.2 Modèle d'hystérésis implémenté dans *TransPore1D*

Le modèle explicité dans la suite a été intégré à notre demande par R.Rémond au code de diffusion *TransPore1D*. Il constitue une formulation alternative du modèle proposé par [Frandsen (2007)], ramenée de 2 paramètres à 1 paramètre seulement.

A température fixée, le taux d'humidité est défini comme une fonction de l'humidité relative de l'air (*HR*) et d'une variable interne définissant l'état courant (γ) relativement aux situations extrêmes définies par les courbes d'adsorption et de désorption pures.

¹⁹ Le « *yellow poplar* » n'est pas un type de peuplier, comme le semble indiquer le nom anglais ; le nom français est le « tulipier de Virginie ».

$$\begin{aligned}
 h &= f(RH, \gamma) \\
 \gamma &\in [0,1] \\
 \gamma &= 0 \text{ pour la courbe de désorption} \\
 \gamma &= 1 \text{ pour la courbe d'adsorption}
 \end{aligned}
 \tag{4-43}$$

On propose que :

$$dh = \frac{\partial h}{\partial RH} dRH + \frac{\partial h}{\partial \gamma} d\gamma \tag{4-44}$$

La fonction reliant le taux d'humidité à l'équilibre et l'humidité relative pour les courbes de référence est choisie selon le modèle de Dent proposé dans les manuels de référence sur le matériau bois ([Navi et Heger (2005)]).

$$h_{\text{équilibre}} = \frac{HR}{A * HR^2 + B * HR + C} \tag{4-45}$$

Où A, B, C sont les paramètres du modèle qui prennent les valeurs A^+, B^+, C^+ pour l'adsorption, et A^-, B^-, C^- pour la désorption.

Nous choisissons un modèle donnant l'expression de $d\gamma$.

$$\text{Si } dH > 0 \quad d\gamma = (1 - \gamma)^n \frac{dHR}{\Delta HR} \tag{4-46}$$

$$\text{Si } dH < 0 \quad d\gamma = \gamma^n \frac{dHR}{\Delta HR} \tag{4-47}$$

Avec $n \geq 1$, et où ΔHR définit l'écart entre HR sur la courbe d'adsorption et sur la courbe de désorption pour un taux d'humidité donné. De cette manière on quitte « rapidement » une isotherme pour rejoindre asymptotiquement l'autre :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0/1} \frac{d\gamma}{dHR} = 0 \tag{4-48}$$

Plutôt que d'écrire complètement l'expression de du de l'équation (4-44), nous adopterons une écriture plus stable, utilisable quel que soit le pas de temps et la variation d'humidité associée :

$$h = \gamma h^+ + (1 - \gamma) h^- \tag{4-49}$$

$$h(\gamma = 0) = h^- = \frac{HR}{A^- HR^2 + B^- HR + C^-} \tag{4-50}$$

$$h(\gamma = 1) = h^+ = \frac{HR}{A^+ HR^2 + B^+ HR + C^+} \tag{4-51}$$

L'unique paramètre décrivant les courbes intermédiaires est donc la puissance n , qui est de l'ordre de 1-2 pour différentes essences. L'identification de ce paramètre a été effectuée sur les deux jeux de données expérimentaux présentés précédemment.

4.5.2.3 Identification des paramètres du modèle d'hystérésis

L'identification du paramètre d'hystérésis a été effectuée sur les essais de Peralta et Merakeb présentés précédemment : les valeurs trouvées sont respectivement de 1.86 et 1.48. Les courbes simulées sont ainsi très proches des valeurs expérimentales.

L'objectif de ce modèle est de fournir une description simple du phénomène d'hystérésis, sans aucune prétention à respecter une vérité physique. Dans la suite nous pourrions utiliser une valeur arbitraire de $n = 1.5$.

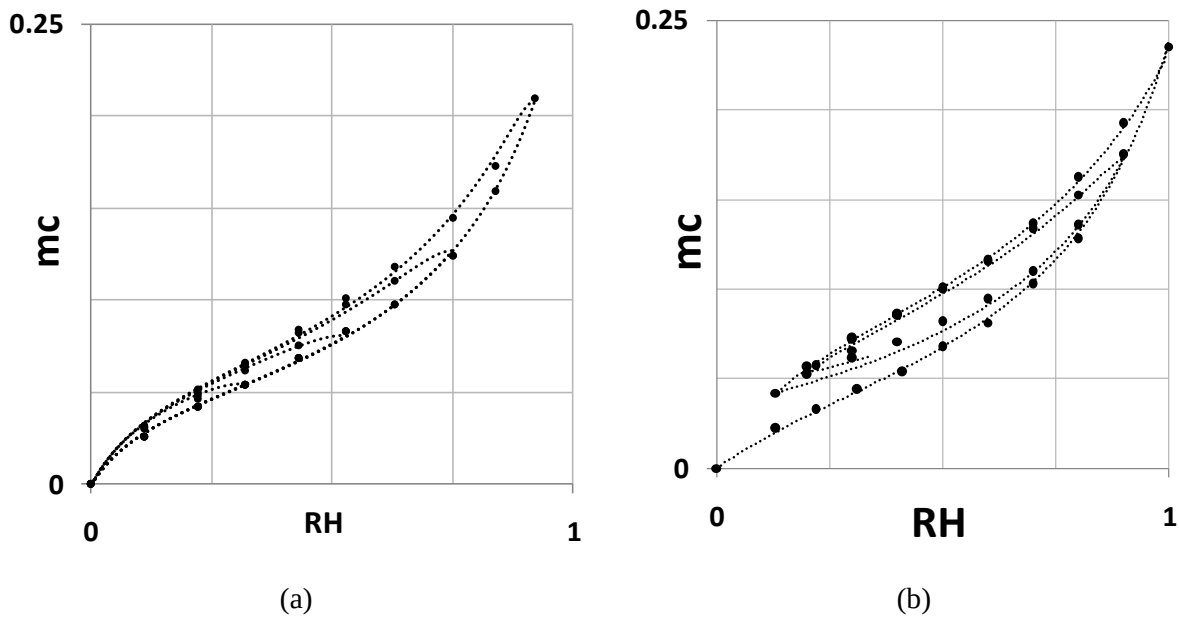


Figure 4-23 : simulation des isothermes intermédiaires sur les données expérimentales de Peralta (a) et de Merakeb (b). Les puissances de n identifiées sont respectivement 1.86 et 1.48.

4.6 Conclusion du chapitre 4

Ce chapitre était consacré principalement à la formulation discrétisée des comportements mécaniques, et la recherche de paramètres associés (principalement dans les directions transverses aux fibres). Pour cela nous avons utilisé :

Nos essais expérimentaux de fluage à court terme (1 jour) dans la direction radiale du peuplier : ces essais ont permis de mettre en évidence l'interaction entre le taux d'humidité du bois et la réponse en fluage viscoélastique.

Les essais de gonflement-retrait empêchés dans la direction tangentielle réalisés par P. Mazzanti au cours de sa thèse : une analyse approfondie de ces résultats a permis de mettre en évidence l'altération des propriétés mécaniques pour les niveaux de charge et de taux d'humidité concerné. La simulation de ces essais complexes au moyen de modèles rhéologiques unidimensionnels a permis d'établir un modèle de comportement sophistiqué pour la prise en compte des phénomènes que l'on observera sur l'échelle de la structure panneau peint (chapitre 6).

Chacun de ces essais n'ayant pas été réalisés dans l'ensemble des directions principales (ou intermédiaires), nous compléterons notre jeu de paramètres manquants en se basant sur les ratios d'anisotropie. Nous avons supposé par exemple que les complaisances viscoélastiques du modèle dans la direction T étaient déductibles des complaisances identifiées dans la direction radiale en posant :

$$J_{vs}^T = \frac{J_e^T}{J_e^R} J_{vs}^R \quad (4-52)$$

On bascule ainsi d'une direction transverse à l'autre en jouant sur les rapports d'anisotropie élastiques (à l'image des retraits-gonflements pour lesquels on a $\alpha_T E_T \sim \alpha_R E_R$, c'est-à-dire une pression de gonflement isotrope).

Les phénomènes « hors équilibre » ont également été abordés du point de vue hygroscopique, avec l'implantation de l'hystérésis de sorption dans le module diffusion de *TransPore1d*, permettant une prise en compte (au moins qualitative) des états intermédiaires entre adsorption et désorption pure.

5. Proposition d'un modèle multicouche pour l'étude des panneaux peints

5.1 Introduction : panneau peint et multicouche : calcul local et calcul de structure

On se propose de modéliser un panneau peint comme un matériau multicouche, chacune des couches étant définie par une orientation matérielle, des propriétés mécaniques qui en dépendent et un taux d'humidité qui lui sont propres. Ce chapitre est consacré à l'écriture de l'équilibre local (sur un ensemble de points répartis suivant l'épaisseur d'axe $\vec{z}$), avec le comportement détaillé au chapitre 4.

Pour calculer la courbure (grandeur locale), [Rémond (2004)] suppose la conservation des sections droites en flexion, et travaille en 1d sur l'épaisseur discrétisée : près de la section concernée, il fait l'hypothèse de petites déformations et de petits déplacements, et néglige le cisaillement (zone en pointillés sur la Figure 5-1(a)). Nous allons utiliser le même principe de discrétisation dans l'épaisseur, conciliable avec l'hypothèse d'échanges hydriques prépondérants suivant la direction $\vec{z}$, et nous adopterons également l'hypothèse de conservation des sections planes pour écrire l'équilibre local (Figure 5-1(b)). Bien qu'il prenne en compte l'incidence de la direction longitudinale sur la réponse transverse, Rémond néglige la courbure suivant le second axe (longitudinal) : nous étendrons cette formulation à une modélisation 2d. Nous consacrerons également une partie importante à la prise en compte des cisaillements et les différences entre le calcul local et le calcul de structure.

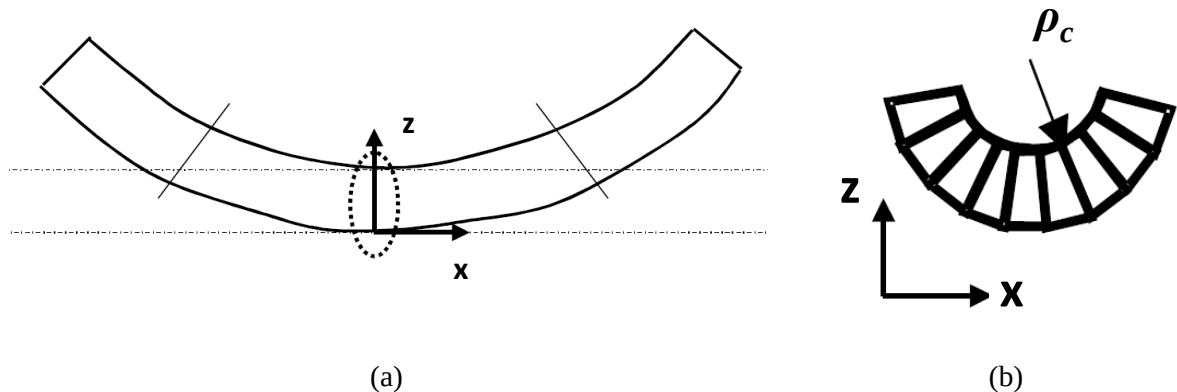


Figure 5-1: courbure d'une planche d'après [Rémond (2004)] ; (a) zone de petits déplacements (zone en pointillés) et grands déplacements sur une partie importante de la planche ; (b) déformation cylindrique d'une planche sous l'action d'échanges massiques monodimensionnels, sous l'hypothèse des sections droites et en l'absence de cisaillements on peut définir le rayon de courbure ρ_c .

Deux types de calcul seront donc détaillés ici, puis utilisés au chapitre 6 : un calcul local utilisé pour la simulation de flèche (voir applications, §6.2 et §6.3), et un calcul de structure appliqué au panneau entier (voir application au chapitre 7.2.4). La Figure 5-2 synthétise les différents étages de la modélisation.

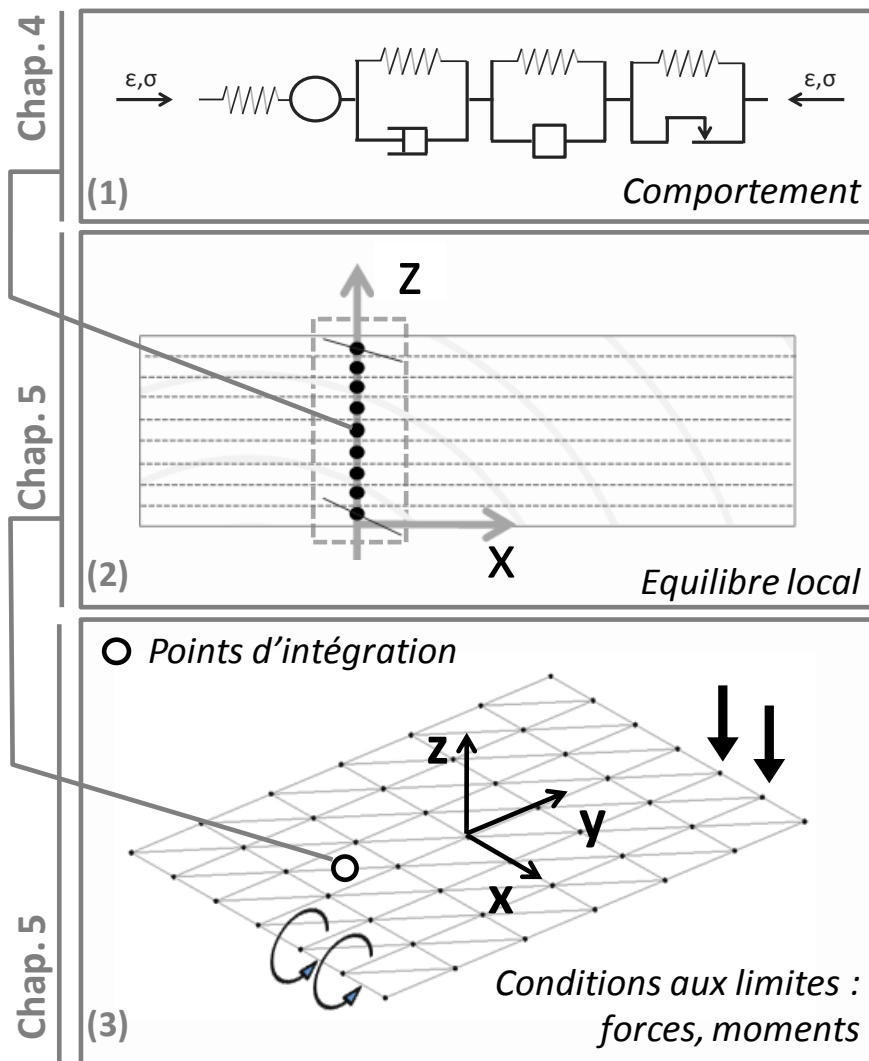


Figure 5-2 : étages du modèle de panneaux peints : (1) modèle de comportement développé au chapitre 4 ; (2) calcul local avec discrétisation dans l'épaisseur : chaque couche possédant son propre repère local (particularité du plan transverse) ; (3) modèle éléments finis de plaque avec des points d'intégration modélisé comme l'étape (2) et des conditions aux limites sur les nœuds.

5.2 Intérêt des modèles de plaque pour les panneaux peints

5.2.1 Éléments finis 3d ou éléments de plaque pour les panneaux peints ?

Avant de rentrer dans les détails de la modélisation d'un panneau peint à l'aide de la théorie des plaques, il convient de discuter l'intérêt de ce choix et de clarifier le cadre dans lequel il s'applique. La formulation locale que nous allons détailler devra s'intégrer dans un code basé sur la méthode des éléments finis. Pour traiter le cas d'une planche orthotrope (panneau de bois) avec des conditions aux limites non nulles (actions mécaniques de contact exercées par un châssis, un cadre, ou un parquetage), on peut réfléchir au choix entre un modèle 3d avec éléments volumiques et un modèle « simplifié » d'éléments plaque ou coque.

L'élément fini 3d est plus évolutif au sens où il pourra être employé sans grande restriction de géométrie, de raccords ou de conditions aux limites applicables : si l'on travaille à l'échelle du cerne où l'on dispose de propriétés matérielles consistantes (matrice élastique standard par exemple, §3.1.2.1), le code 3d peut théoriquement simuler tout type d'action mécanique extérieure et rendre compte de la réaction du matériau dans toutes les directions. Les codes existants fournissent une grande batterie de méthodes numériques de résolution, des facilités de maillage pour les géométries complexes (panneaux fissurés, panneaux parqués, prise en compte des variations d'épaisseur le long d'une planche...), des solutions pour la gestion du contact (contact temporaire d'un panneau avec son cadre ou des éléments du parquetage), etc.

Le calcul 3d complet requiert en théorie de plus grandes puissances de calcul (mémoire et processeurs) ; il nécessite en général d'utiliser des éléments volumiques de dimensions homogènes et de faible distorsion (un contre-exemple sera évoqué au §5.2.3). Lorsque c'est le cas (général), cela implique d'utiliser un grand nombre d'éléments (au moins 5 suivant l'épaisseur d'un panneau pour des éléments de bas degré d'interpolation, plus suivant l'échelle du volume élémentaire représentatif). Pour une plaque simple de dimensions 20 x 500 x 500mm, on peut choisir par exemple des éléments volumiques de dimensions 2*10*10mm, soit $10*50*50 = 25000$ éléments et un nombre de points d'intégrations multiplié par 8 (cas d'un élément cubique à 8 nœuds et 8 points d'intégration par exemple), soit 200 000 points d'intégration. Lorsqu'on envisage des assemblages de panneaux (panneau peint constitué de différentes planches ayant des interactions mécaniques fortes, ou le cas d'un meuble), il est souvent nécessaire de raffiner localement au niveau des assemblages, et le nombre de points d'intégration peut croître de manière inadmissible.

Les éléments plaque et coque sont particulièrement utilisés pour modéliser des structures minces où les rapports entre les dimensions (épaisseur/longueur caractéristique) sont au plus de 1/10 : les panneaux peints répondent en grande majorité à ce critère purement géométrique. Les cas d'étude présentés au chapitre 6 ont pour dimensions 1700 x 400 x 20 mm soit un rapport maximum de 0.5/10 pour la planche supérieure du «Couronnement d'épines», et 792 x 533 x 12.4-13.8 mm, donc un rapport maximum de 0.25/10 pour la Joconde ([Mohen, *et al.* (2006)]). Comme le critère de pertinence du choix « plaque » n'est pas uniquement dépendant de la géométrie, on se demandera dans la suite si le modèle de plaque est la modélisation minimale nécessaire pour répondre à la problématique des panneaux peints.

Les sollicitations extérieures auxquelles sont soumis les panneaux peints sont essentiellement des blocages en rotations (présence d'un parquetage ou blocage aux bords dans un cadre) ou des blocages en compression latérale (ex : gonflement empêché par le cadre dans le plan du panneau). On peut également rencontrer des problèmes de flexion et de traction/compression (voire de flambement) dans le plan du tableau. Respectivement à ces situations, on s'intéressera peu au problème de compression d'un panneau dans la direction de l'épaisseur, et encore moins de traction, qui ne correspond à aucune action mécanique répandue sur les panneaux ; parfois les bords d'un panneau sont glissés dans des rainures (cadre ou châssis) dont on peut supposer qu'elles bloquent les rotations aux bords, sans pour autant menacer le bois en compression. C'est ce type d'analyse des situations mécaniques probables et simulables a priori qui nous a orientés dans un premier temps vers le choix d'une modélisation de plaque : celle-ci se base sur un comportement 2d en contraintes planes, i.e. pour lequel au moins la contrainte normale au plan de la plaque (portée suivant $\vec{z}$, soit σ_{zz}) est supposée négligeable.

Cela ne nous dispensera pas de formuler des matrices de comportement 3d. Pour les raisons évoquées plus tôt, nous avons choisi de généraliser le comportement 3d à partir d'assemblages de modèles 1d : malgré les possibles imprécisions de cette approche, nous espérons faire le pont de manière efficace entre le travail du chapitre 4, c'est-à-dire les lois empiriques déduites des essais matériaux, la modélisation de structure qui fait l'objet de ce chapitre, et les applications aux cas d'étude du chapitre 6.

Autre avantage numérique du calcul de plaque par rapport à son équivalent 3d : puisqu'on restreint le champ des sollicitations mécaniques possibles, on diminue le nombre de calculs, et donc la mémoire requise. Pour le matériau bois avec ses 3 directions d'orthotropie, une loi de comportement incluant de

nombreuses variables internes, et entre autres la dépendance de ces variables au taux d'humidité du bois, chaque économie de degré de liberté ou de variable interne au code de calcul devient intéressante. Au-delà de cette remarque, notre travail ne concerne pas l'optimisation du code de calcul.

Enfin, la géométrie du modèle de plaque s'accorde avec une de nos hypothèses principales : la prédominance des échanges d'humidité dans la direction perpendiculaire à la plaque (et la présence des gradients dominants qui en résultent dans cette même direction), qui justifie de réaliser des calculs de diffusion unidimensionnels suivant l'épaisseur.

Un panneau peint est constitué d'une planche d'épaisseur faible devant les autres dimensions : les échanges d'humidité s'en trouvent favorisés dans cette direction. De forts gradients d'humidité se mettent en place le long de l'épaisseur de la planche et l'équilibre du matériau produit des déformations dans le plan : il en résulte de la flexion (ou courbure) et des déplacements hors plan. Nous posons donc la question de savoir si le modèle de plaque est une modélisation adaptée au problème de courbure des panneaux peints.

5.2.2 Remarque sur les éléments coques

L'utilisation d'éléments de coques permet de rendre compte de manière plus fine des champs de déplacements, tandis qu'en mode plaque on travaille sur des éléments initialement plats (la courbure initiale de l'élément est négligée et les nœuds sont initialement coplanaires) : une des conséquences de l'utilisation d'éléments plaques est la « facétisation » de la géométrie (Figure 5-3), ce qui nécessite un maillage plus fin dans le cas de déformations permanentes importantes (panneau fortement courbé). En pratique la mise en place d'éléments de coques est plus complexe ; le travail qui est présenté ici se limite à l'implémentation d'éléments de plaques.

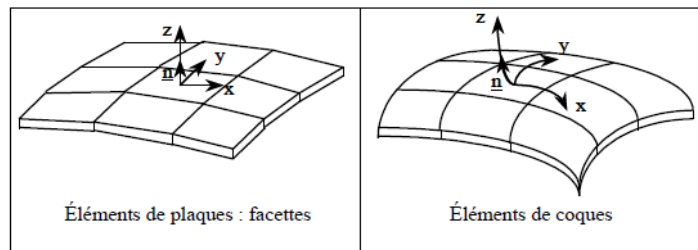


Figure 5-3: modélisation d'un solide 3d quelconque avec des éléments plaque et coque (extrait de [Desroches (2009b)], notice Code Aster).

5.2.3 Éléments volumiques dégénérés SHB20

Nous avons écarté jusque là les éléments finis volumiques, considérant qu'ils nous obligeraient à mailler trop finement dans le plan de la plaque, alors que c'est le maillage dans l'épaisseur qui est déterminant pour notre problème. Un contre-exemple est apporté par le travail récent de [Trinh (2009)] qui a développé des éléments volumiques dégénérés, c'est-à-dire dont certaines dimensions (plan de la plaque) peuvent être grandes devant d'autres dimensions (épaisseur de plaque). Ces éléments répondent à des problèmes de R&D posés par le raccord entre maillages mixtes, 2D et 3D, dont les éléments 2D (plaque et coques) sont utilisés pour modéliser les structures minces tels que les réacteurs nucléaires, les tuyauteries, les tours de refroidissement d'EDF.

Les solutions de coques utilisant des éléments dégénérés existent depuis les années 70. Elles obligeaient néanmoins à modifier le comportement matériau pour qu'il soit compatible avec l'hypothèse de contraintes planes ($\sigma_{zz}=0$), procédé que nous allons utiliser dans la suite. L'élément SHB20 est un des éléments étudié dans la thèse de [Trinh (2009)] pour traiter des problèmes de

solides-coques sans modifier la loi de comportement, c'est-à-dire sans avoir à écrire la cinématique et le comportement équivalent de plaque (§5.6). L'élément SHB20 est schématisé à la Figure 5-4 : la position des points d'intégration serait probablement intéressante pour nos applications puisqu'elle favorise encore une fois le raffinement dans l'épaisseur plutôt que dans le plan de la plaque. Peut-être serait-il possible d'utiliser ces points d'intégration (ce maillage) pour calculer les solutions correspondant à la cinétique de diffusion.

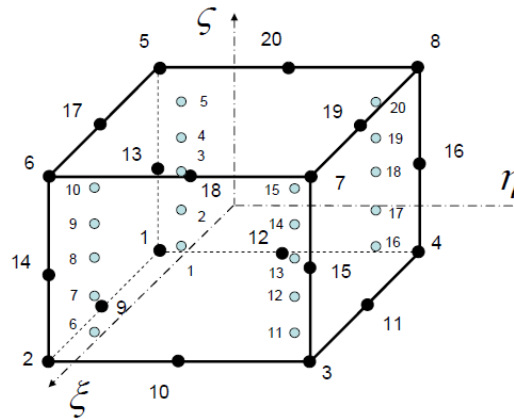


Figure 5-4 : géométrie de l'élément SHB20 avec 20 nœuds et 20 points d'intégration, extrait de [Trinh (2009)].

Cet élément a été implanté et testé dans CODE ASTER (code du département Recherche et Développement de l'entreprise EDF) (voir [Desroches (2009a)]), mais son utilisation pour les matériaux orthotropes et un repère cylindrique (cas du bois) n'a probablement pas été évaluée. Il est certain que ce type d'approche constituerait une option intéressante pour notre application. Dans la suite nous avons développé une approche basée sur une cinématique de plaque avec prise en compte des cisaillements.

5.3 Théorie des plaques appliquées au bois massif et produits à base de bois

Les modèles de plaque ont été utilisés pour l'étude de produits à base de bois, des contreplaqués de faible épaisseur ([Guitard (1987)]) ou des produits stratifiés d'épaisseur quelconque, pour lesquels des théories de plaques « avancées » sont appliquées plus récemment ([Sturzenbecher, *et al.* (2010)]). Ces produits sont caractérisés par de fortes discontinuités d'orientation matérielle entre les couches, ce qui les différencie de notre application dans laquelle la rotation matérielle (dans le plan transverse) est continue entre les couches.

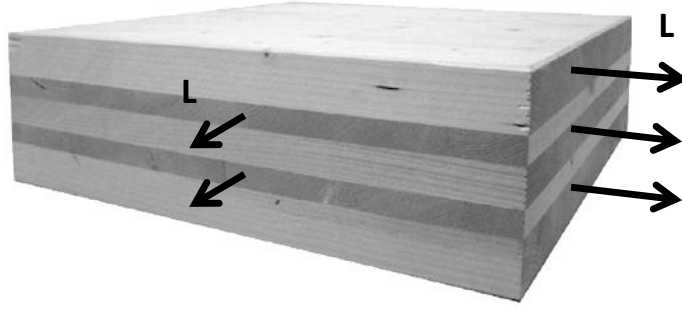


Figure 5-5 : Produit de bois stratifié (Cross Laminated Timber) avec des épaisseurs importantes, adapté de [Sturzenbecher, et al. (2010)] ; discontinuité de l'orientation matérielle (L = sens du fil) d'une couche à l'autre.

5.4 Cinématique de plaque

La théorie des plaques que nous mettons en œuvre dans la suite est basée sur :

- L'hypothèse de petits déplacements et petites déformations (H1)

Les déformations dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ générées par les retraits et les courbures de la planche sont intuitivement « petites », mais les déplacements résultants suivant $\vec{z}$ ne le sont pas forcément ; c'était d'ailleurs l'objet des travaux de [Mauget (1996)] qui traitait le séchage dissymétrique des planches en petites déformations et grands déplacements dans une formulation 2D plane (plan transverse). Comme [Rémond (2004)] par la suite, nous ferons l'hypothèse qu'au voisinage d'un point de la plaque les déplacements sont petits.

- L'hypothèse des sections droites (ou plane) (H2)

Pour laquelle les déplacements suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ d'un point quelconque varient linéairement suivant $\vec{z}$. Cette hypothèse est généralement associée pour les plaques aux noms de Reissner, Henky, Bollé ou Mindlin. Les déformations tridimensionnelles en tout point, sont ainsi données par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= e_{xx} + z\chi_{xx} \\ \varepsilon_{yy} &= e_{yy} + z\chi_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} &= \gamma_{xy} = 2e_{xy} + 2z\chi_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} &= \gamma_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} &= \gamma_{yz} \end{aligned} \tag{5-1}$$

Où e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} sont appelées déformations membranaires de la surface moyenne, γ_{xz} et γ_{yz} sont les déformations associées aux cisaillements transverses, et χ_{xx} , χ_{yy} , χ_{xy} les déformations de flexion de la surface moyenne.

NOTE : Pour la formulation du comportement, nous avons choisi la convention de Voigt avec un coefficient 2 devant la déformation de cisaillement.

- L'hypothèse des contraintes planes (H3)

Pour l'instant nous écrirons que seul σ_{zz} est négligeable devant les autres termes du tenseur des contraintes.

A partir de ces hypothèses communes se développent généralement deux théories de plaque :

- La théorie dite de Kirchhoff, adaptée aux plaques (homogènes isotropes) minces ($l/h > 20$).
- La théorie dite de Reissner-Mindlin, pour les plaques (homogènes isotropes) épaisses ($4 \leq l/h \leq 20$).

La première peut-être pensée comme un cas particulier de la seconde, qui elle prend en compte l'influence du Cisaillement Transversal (noté habituellement CT). La première implique que les cisaillements γ_{xz} et γ_{yz} sont nuls (γ_{xy} est toujours calculé puisque situé dans le plan de la plaque), la seconde les prend en compte : nous arrivons maintenant aux conséquences d'une telle hypothèse.

5.5 Théories de Kirchhoff et théorie de Reissner-Mindlin : importance du cisaillement transversal (CT) dans les panneaux peints.

5.5.1 Le cisaillement transversal (CT) dans les matériaux composites

Dans la théorie des plaques composites multicouches, le rôle des déformations de CT dépend non seulement des caractéristiques géométriques, mais également des caractéristiques mécaniques ([Batoz et Dhett (1990)]), notamment du rapport E/G (module caractéristique de flexion/module de CT). On conçoit assez bien que pour un matériau non homogène, l'influence du cisaillement est en lien avec la propension du matériau à cisailer plutôt qu'à fléchir, et ce en complément de la géométrie. Dans le cadre d'un matériau orthotrope comme le bois, et d'une planche modélisée dans la suite comme un multicouche, il faut probablement tenir compte de l'influence des CT dus à ces rapports de propriétés, mais il faut surtout s'intéresser à la particularité géométrique du plan transverse du bois.

Le coefficient de correction de CT (ϕ) est déterminé en cherchant l'équivalence énergétique entre la solution de plaque de Mindlin et la solution équivalente 3d. Pour notre application il serait intéressant de préciser la valeur de ϕ suivant le matériau orthotrope utilisé dans les panneaux, suivant leur géométrie (épaisseur et débit) tenant compte de l'orthotropie cylindrique. Cela permettrait de mieux définir les limitations des modèles de plaque appliqués aux panneaux peints. La valeur utilisée dans la suite est celle des matériaux isotropes standards, soit 5/6.

Le coefficient de correction de CT est déterminé pour minimiser l'écart entre la solution mécanique 3D et la solution de plaque avec cisaillement. Ce coefficient agit uniquement dans les cas où il y a du cisaillement mécanique (cisaillement non admissible cinématiquement). Dans la suite nous allons revenir sur le cisaillement induit par retrait-gonflement, pour lequel le coefficient de CT n'intervient pas. Evidemment les gradients de mc dans les panneaux de bois feront intervenir des situations mixtes (effets des gradients de propriétés et effets des gradients d'humidité).

5.5.2 Mise en évidence des cisaillements induits par le retrait gonflement

Pour bien comprendre les hypothèses retenues sur les CT dans notre planche, il faut s'attarder sur l'orthotropie cylindrique du bois. Du point de vue des cisaillements, il convient de distinguer ce qui se passe dans le plan $(\vec{z}, \vec{x})$ et dans le plan $(\vec{y}, \vec{z})$. En effet le plan $(\vec{z}, \vec{x})$ a la particularité d'avoir un repère tournant. On rappelle que les variations dimensionnelles associées à une perte ou un gain d'eau (retrait-gonflement), dépendent de la direction matérielle. Sur la Figure 5-6 nous avons repris la solution analytique en déplacement lors d'un gonflement, explicitée dans les équations (2-4) et (2-6) du §2.4.3.4. Pour une section rectangulaire d'une planche initialement plate, on peut mettre en évidence le cisaillement après gonflement : ce cisaillement est dû uniquement à la rotation de la base matérielle dans le plan RT, puisqu'il n'existe pas de gonflement de cisaillement dans la base matériau

$(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$ (voir matrice de retrait-gonflement §3.1.3). Ce cisaillement n'existe pas dans le plan $(\vec{y}, \vec{z})$ où la direction du fil est constante.

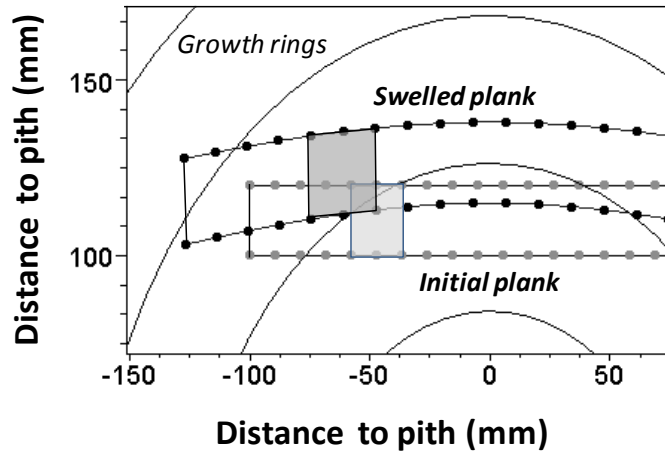


Figure 5-6 : mise en évidence du cisaillement induit par retrait-gonflement dans le plan transverse ; résultat d'un retrait gonflement uniforme calculé par la solution analytique du §2.4.3.3 ; une même section de planche est regardée avant et après humidification (surface grisée).

Ceci peut s'expliquer également de manière tensorielle, en partant d'un exemple de gonflement induit dans la base $(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$ (en négligeant le gonflement longitudinal) :

$$\varepsilon_{\alpha(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})} = \begin{bmatrix} \alpha_T \Delta h \\ 0 \\ \alpha_R \Delta h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

Qui, une fois tourné dans le plan de la plaque (cf. §5.6.2.2) rend compte de la déformation induite de cisaillement γ_{xz} :

$$\varepsilon_{\alpha(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} c^2 \alpha_T \Delta h + s^2 \alpha_R \Delta h \\ 0 \\ s^2 \alpha_T \Delta h + c^2 \alpha_R \Delta h \\ 0 \\ 2sc(\alpha_R - \alpha_T) \Delta h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

Grâce à la même solution analytique (eq.(2-6) §2.4.3.3), nous avons pu constater que le retrait-gonflement libre à contrainte nulle ne respectait pas exactement le principe cinématique de conservation des sections planes. L'écart à cette hypothèse cinématique semble faible en valeur, mais son importance sera évoquée au moment des tests sur les éléments finis de plaque (§5.8.2).

5.5.2.1 Conséquences, discussion

Lorsqu'on envisage de modéliser une planche de bois en hygro-élastique par exemple avec une modélisation type Kirchhoff, et que l'on introduit dans la cinématique de plaque que $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, on a certes un peu rigidifié notre matériau à cause des cisaillements mécaniques (cisaillements mettant

en jeu la matrice de l'opérateur de Hooke, dont l'influence peut être évaluée par le facteur de correction de CT), mais surtout on a bloqué le cisaillement induit, engendrant des contraintes non négligeables ; parallèlement on s'empêche toute détermination de la déformation saisonnière avec notre modèle de plaque. Pour le dire autrement, une augmentation homogène du taux d'humidité provoquera des contraintes de cisaillement. L'autre solution est d'opter pour un modèle type Mindlin, avec prise en compte des CT : c'est la solution qui est décrite dans la suite.

Résumé : le retrait gonflement induit des déformations de cisaillement dans le plan transverse (sans contraintes de cisaillement) qui sont incompatibles avec une modélisation de Kirchhoff classique si l'on veut tenir compte de la rotation du repère matériel et des cisaillement induits par retrait-gonflement. Notre choix se portera sur une modélisation de Mindlin avec prise en compte des CT.

5.6 Formulation du modèle de plaque pour les panneaux peints

On rappelle l'objectif général suivant : modéliser le comportement hygromécanique d'une planche dont la longueur principale coïncide avec la direction longitudinale du bois. Le calcul est de type 1D + 2D : 1D pour la diffusion supposée prépondérante dans l'épaisseur de la planche, et 2D pour le calcul de la plaque contenue dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$. Pour traiter ce problème, on écrira l'équilibre d'un multicouche d'épaisseur orientée suivant $\vec{z}$, le comportement de chaque couche étant donné par un modèle rhéologique décrit au chapitre 4. Les paramètres matériau évoluent dans l'épaisseur (d'une couche à l'autre) suivant l'orientation du repère local et le taux d'humidité de chaque couche est calculé par un code de diffusion 1D (*TransPore*).

Tout l'enjeu de la série des équations suivantes est de convertir la loi de comportement définie et identifiée dans le repère matériel orthotrope, en une loi de comportement de plaque tenant compte de la cinématique associée et permettant les échanges d'information avec un élément fini triangulaire à 5 ddl par nœud (cf. §5.7.1). Pour cela nous passons par plusieurs étapes d'écriture qui sont :

- la cinématique de plaque,
- l'expression de la loi de comportement dans la base principale $(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$,
- la rotation vers la base de la plaque $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- la réduction en notation de plaque,
- l'équilibre global.

5.6.1 Cinématique de plaque

On réécrit l'hypothèse cinématique (H2) des sections planes, explicitée à la section 5.4, dans sa version incrémentale.

$$\begin{aligned}
 \Delta \varepsilon_{xx} &= \Delta e_{xx} + z \Delta \chi_{xx} \\
 \Delta \varepsilon_{yy} &= \Delta e_{yy} + z \Delta \chi_{yy} \\
 2\Delta \varepsilon_{xy} &= \Delta \gamma_{xy} = 2\Delta e_{xy} + 2z \Delta \chi_{xy} \\
 2\Delta \varepsilon_{xz} &= \Delta \gamma_{xz} \\
 2\Delta \varepsilon_{yz} &= \Delta \gamma_{yz}
 \end{aligned} \tag{5-4}$$

La variation des déformations sur un pas de temps est linéaire dans l'épaisseur, et en conséquence les déformations elles-mêmes satisfont toujours l'hypothèse des sections droites.

5.6.2 Loi de comportement

La loi de comportement du modèle dans chaque couche d'indice i s'exprime de façon générale par :

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_{kk}^i &= P_{kk}^i + Q_{kk}^i \Delta \sigma_{kk}^i \\ 2\Delta \varepsilon_{kj}^i &= 2P_{kj}^i + Q_{kj}^i \Delta \sigma_{kj}^i\end{aligned}\quad (5-5)$$

D'où l'écriture générale pour la couche d'exposant i :

$$\begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{xx}^i \\ \Delta \varepsilon_{yy}^i \\ \Delta \gamma_{xy}^i \\ \Delta \gamma_{xz}^i \\ \Delta \gamma_{yz}^i \end{pmatrix} = P^i + Q^i \begin{pmatrix} \Delta \sigma_{xx}^i \\ \Delta \sigma_{yy}^i \\ \Delta \sigma_{xy}^i \\ \Delta \sigma_{xz}^i \\ \Delta \sigma_{yz}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta e_{xx} \\ \Delta e_{yy} \\ \Delta \gamma_{xy} \\ \Delta \gamma_{xz} \\ \Delta \gamma_{yz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \chi_{xx} \\ \Delta \chi_{yy} \\ 2\Delta \chi_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} z^i \quad (5-6)$$

5.6.2.1 Calcul de P et Q dans la base principale (T, L, R)

La base principale directe est $(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$ (cf. §2.4.3.1 et Figure 2-10 p.25). Il nous faut dans un premier temps calculer les tenseurs P et Q correspondant à ces directions principales pour le calcul de plaque $(\vec{x} \text{ et } \vec{y})$. Pour cela on explicite d'abord les tenseurs P et Q dans la base principale d'orthotropie $(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$, puis on utilise les formules de passage.

$$\bar{P}_{(T,L,R)} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ P_{33} \\ 2P_{23} \\ 2P_{13} \\ 2P_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_T \\ P_L \\ P_R \\ 2P_{RL} \\ 2P_{RT} \\ 2P_{TL} \end{vmatrix} \quad (5-7)$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{(T,L,R)} &= \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} Q_{TT} & -v_{LT}Q_{LL} & -v_{RT}Q_{RR} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{TL}Q_{TT} & Q_{LL} & -v_{RL}Q_{RR} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{TR}Q_{TT} & -v_{LR}Q_{LL} & Q_{RR} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5-8)$$

5.6.2.2 Rotation vers la base globale (x,y,z)

Les formules de rotation sont démontrées à l'annexe 1.

$$\Delta \varepsilon_{(x,y,z)} = R^E \Delta \varepsilon_{(T,L,R)} \quad (5-9)$$

$$\bar{P}^\theta = \begin{bmatrix} P_1^\theta \\ P_2^\theta \\ P_3^\theta \\ P_4^\theta \\ P_5^\theta \\ P_6^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^\theta \\ P_{22}^\theta \\ P_{33}^\theta \\ 2P_{23}^\theta \\ 2P_{13}^\theta \\ 2P_{12}^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 P_T + 2sc P_{RT} + s^2 P_R \\ P_L \\ s^2 P_T - 2sc P_{RT} + c^2 P_R \\ 2(c P_{RL} - s P_{TL}) \\ 2(c^2 - s^2) P_{RT} + 2sc(P_R - P_T) \\ 2(c P_{TL} + s P_{RL}) \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

$$\bar{Q}^\theta = \begin{bmatrix} Q_{11}^\theta & Q_{12}^\theta & Q_{13}^\theta & 0 & Q_{15}^\theta & 0 \\ Q_{21}^\theta & Q_{22}^\theta & Q_{23}^\theta & 0 & Q_{25}^\theta & 0 \\ Q_{31}^\theta & Q_{32}^\theta & Q_{33}^\theta & 0 & Q_{35}^\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^\theta & 0 & Q_{46}^\theta \\ Q_{51}^\theta & Q_{52}^\theta & Q_{53}^\theta & 0 & Q_{55}^\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{64}^\theta & 0 & Q_{66}^\theta \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

$$\begin{aligned} Q_{11}^\theta &= c^4 Q_{11} + c^2 s^2 (2 Q_{13} + Q_{55}) + s^4 Q_{33} \\ Q_{22}^\theta &= Q_{22} \\ Q_{33}^\theta &= s^4 Q_{11} + c^2 s^2 (2 Q_{13} + Q_{55}) + c^4 Q_{33} \\ Q_{44}^\theta &= c^2 Q_{44} + s^2 Q_{66} \\ Q_{55}^\theta &= (c^2 - s^2)^2 Q_{55} + 4c^2 s^2 (Q_{11} + Q_{33} - 2Q_{13}) \\ Q_{66}^\theta &= s^2 Q_{44} + c^2 Q_{66} \\ Q_{12}^\theta &= s^2 Q_{23} + c^2 Q_{12} \\ Q_{13}^\theta &= (c^4 + s^4) Q_{13} + c^2 s^2 (Q_{11} + Q_{33} - Q_{55}) \\ Q_{15}^\theta &= -sc^3 (2Q_{11} - 2Q_{13} - Q_{55}) + cs^3 (2Q_{33} - 2Q_{13} - Q_{55}) \\ Q_{23}^\theta &= s^2 Q_{12} + c^2 Q_{23} \\ Q_{25}^\theta &= 2sc(Q_{23} - Q_{12}) \\ Q_{35}^\theta &= +sc^3 (2Q_{33} - 2Q_{13} - Q_{55}) - cs^3 (2Q_{11} - 2Q_{13} - Q_{55}) \\ Q_{46}^\theta &= sc(Q_{44} - Q_{66}) \end{aligned} \quad (5-12)$$

5.6.2.3 Synthèse

Pour chaque couche d'indice i, on a :

$$\begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{xx}^i \\ \Delta \varepsilon_{yy}^i \\ \Delta \gamma_{yz}^i = 2\Delta \varepsilon_{yz} \\ \Delta \gamma_{xz}^i = 2\Delta \varepsilon_{xz} \\ \Delta \gamma_{xy}^i = 2\Delta \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = P^{\theta i} + Q^{\theta i} \begin{pmatrix} \Delta \sigma_{xx}^i \\ \Delta \sigma_{yy}^i \\ \Delta \sigma_{yz}^i \\ \Delta \sigma_{xz}^i \\ \Delta \sigma_{xy}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta e_{xx} \\ \Delta e_{yy} \\ 2\Delta e_{yz} \\ 2\Delta e_{xz} \\ 2\Delta e_{xy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \chi_{xx} \\ \Delta \chi_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 2\Delta \chi_{xy} \end{pmatrix} z^i \quad (5-13)$$

$$P^{\theta i} = \begin{pmatrix} P_{11}^\theta \\ P_{22}^\theta \\ 2P_{23}^\theta \\ 2P_{13}^\theta \\ 2P_{12}^\theta \end{pmatrix} \quad Q^{\theta i} = \begin{pmatrix} Q_{11}^\theta & Q_{12}^\theta & 0 & Q_{15}^\theta & 0 \\ Q_{12}^\theta & Q_{22}^\theta & 0 & Q_{25}^\theta & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}^\theta & 0 & Q_{46}^\theta \\ Q_{15}^\theta & Q_{25}^\theta & 0 & Q_{55}^\theta & 0 \\ 0 & 0 & Q_{46}^\theta & 0 & Q_{66}^\theta \end{pmatrix}$$

On pourra préférer la notation de plaque suivante qui sépare partie plane et partie anti plane, dans ce cas les composantes 4 et 6 sont inversées :

$$\begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{xx}^i \\ \Delta \varepsilon_{yy}^i \\ \Delta \gamma_{xy}^i = 2\Delta \varepsilon_{xy} \\ \Delta \gamma_{xz}^i = 2\Delta \varepsilon_{xz} \\ \Delta \gamma_{yz}^i = 2\Delta \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = P_2^{\theta i} + Q_2^{\theta i} \begin{pmatrix} \Delta \sigma_{xx}^i \\ \Delta \sigma_{yy}^i \\ \Delta \sigma_{xy}^i \\ \Delta \sigma_{xz}^i \\ \Delta \sigma_{yz}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta e_{xx} \\ \Delta e_{yy} \\ 2\Delta e_{xy} \\ 2\Delta e_{xz} \\ 2\Delta e_{yz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \chi_{xx} \\ \Delta \chi_{yy} \\ 2\Delta \chi_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} z^i \quad (5-14)$$

$$P_2^{\theta i} = \begin{pmatrix} P_{11}^\theta \\ P_{22}^\theta \\ 2P_{12}^\theta \\ 2P_{13}^\theta \\ 2P_{23}^\theta \end{pmatrix} \quad Q_2^{\theta i} = \begin{pmatrix} Q_{11}^\theta & Q_{12}^\theta & 0 & Q_{15}^\theta & 0 \\ Q_{12}^\theta & Q_{22}^\theta & 0 & Q_{25}^\theta & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^\theta & 0 & Q_{46}^\theta \\ Q_{15}^\theta & Q_{25}^\theta & 0 & Q_{55}^\theta & 0 \\ 0 & 0 & Q_{46}^\theta & 0 & Q_{44}^\theta \end{pmatrix}$$

Ou réciproquement avec le tenseur des rigidités C :

$$\begin{pmatrix} \Delta \sigma_{xx}^i \\ \Delta \sigma_{yy}^i \\ \Delta \sigma_{xy}^i \\ \Delta \sigma_{xz}^i \\ \Delta \sigma_{yz}^i \end{pmatrix} = B^i + C^i \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{xx}^i \\ \Delta \varepsilon_{yy}^i \\ \Delta \gamma_{xy}^i \\ \Delta \gamma_{xz}^i \\ \Delta \gamma_{yz}^i \end{pmatrix} \quad (5-15)$$

$$B^i = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_6 \\ B_5 \\ B_4 \end{bmatrix} = -Q_2^{\theta i-1} P_2^{\theta i}$$

$$C^i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & C_{15} & 0 \\ & C_{22} & 0 & C_{25} & 0 \\ & & C_{66} & 0 & C_{46} \\ sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & C_{44} \end{bmatrix} = Q_2^{\theta i-1}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta\sigma_{xx}^i \\ \Delta\sigma_{yy}^i \\ \Delta\sigma_{xy}^i \\ \Delta\sigma_{xz}^i \\ \Delta\sigma_{yz}^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & C_{15} & 0 \\ & C_{22} & 0 & C_{25} & 0 \\ & & C_{66} & 0 & C_{46} \\ & sym & & C_{55} & 0 \\ & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{xx}^i \\ \Delta\varepsilon_{yy}^i \\ \Delta\gamma_{xy}^i \\ \Delta\gamma_{xz}^i \\ \Delta\gamma_{yz}^i \end{pmatrix}$$

Note : l'ordre des indices de la matrice C peuvent surprendre : il est maintenu tel quel pour rendre compte de la permutation des indices entre la notation 3d et la notation de plaque, ainsi que de la disparition des termes portés par l'axe $\vec{z}$.

5.6.2.4 Equilibre et forces extérieures

On écrit les équations d'équilibre sur un élément de volume $1 \times 1 \times h$. Ce volume est décomposé en multicouches de hauteur h^i d'altitude z^i . La hauteur totale de la planche est notée h .

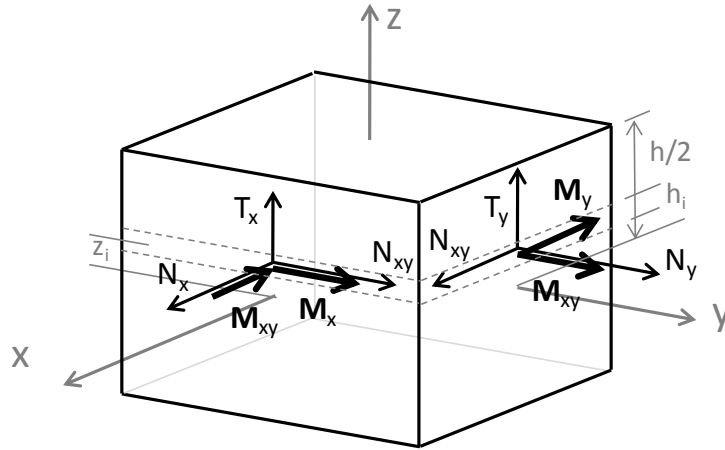


Figure 5-7 : équilibre d'un volume élémentaire de la plaque multicouche ; N_x, N_y, N_{xy} : efforts résultants de membrane (en N/m) ; M_x, M_y, M_{xy} : efforts résultants de flexion ou moments (en N.m/m) ; T_x, T_y : efforts résultants de cisaillement ou efforts tranchants (en N/m).

Remarque : On notera que les moments M_x, M_y, M_{xy} sont associés aux contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$; M_x n'est pas un moment porté par l'axe x . Les moments sur la Figure 5-7 sont représentés positivement par rapport aux axes x, y, z .

Sur chaque couche on fait l'hypothèse que les tenseurs matériels sont constants ; en revanche les déformations et contraintes évoluent suivant l'épaisseur. Ainsi là où C^i désigne le comportement homogène dans une couche, σ^i désigne la contrainte au centre de cette couche.

$$z \in \left[z^i - \frac{h^i}{2}; z^i + \frac{h^i}{2} \right] \quad (5-16)$$

$$\Delta\sigma^i = C^i(\Delta e + z^i \Delta\chi + \Delta\gamma) + B^i$$

$$\Delta e = \begin{pmatrix} \Delta e_{xx}^i \\ \Delta e_{yy}^i \\ 2\Delta e_{xy}^i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Delta \chi = \begin{pmatrix} \Delta \chi_{xx} \\ \Delta \chi_{yy} \\ 2\Delta \chi_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Delta \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\Delta e_{xz} \\ 2\Delta e_{yz} \end{pmatrix}$$

L'équilibre statique de l'élément de plaque s'écrit:

$$\Delta N = \begin{bmatrix} \Delta N_x \\ \Delta N_y \\ \Delta N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{xx} \\ \Delta \sigma_{yy} \\ \Delta \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (5-17)$$

$$\Delta M = \begin{bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{xx} \\ \Delta \sigma_{yy} \\ \Delta \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (5-18)$$

$$\Delta T = \begin{bmatrix} \Delta T_x \\ \Delta T_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{xz} \\ \Delta \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (5-19)$$

Que l'on détaille ci-dessous en vue d'écrire la matrice de comportement de plaque.

$$\begin{aligned} \Delta N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta \sigma_{xx} dz \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} (B_1 + C_{11}(\Delta e_{xx} + z\Delta \chi_{xx}) + C_{12}(\Delta e_{yy} + z\Delta \chi_{yy}) + 2C_{15}\Delta e_{xz}) dz \\ &= \sum_i \int_{z^i - \frac{h}{2}}^{z^i + \frac{h}{2}} (B_1^i + C_{11}^i(\Delta e_{xx} + z\Delta \chi_{xx}) + C_{12}^i(\Delta e_{yy} + z\Delta \chi_{yy}) + 2C_{15}^i\Delta e_{xz}) dz \\ &= \sum_i h^i [B_1^i + C_{11}^i(\Delta e_{xx} + z^i\Delta \chi_{xx}) + C_{12}^i(\Delta e_{yy} + z^i\Delta \chi_{yy}) + 2C_{15}^i\Delta e_{xz}] \end{aligned} \quad (5-20)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \Delta \sigma_{xx} dz \\ &= \sum_i \left[B_1^i z^i h^i + C_{11}^i \left(\Delta e_{xx} z^i h^i + \Delta \chi_{xx} \left(h^i z^{i^2} + \frac{h^{i^3}}{12} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + C_{12}^i \left(\Delta e_{yy} z^i h^i + \Delta \chi_{yy} \left(h^i z^{i^2} + \frac{h^{i^3}}{12} \right) \right) + 2C_{15}^i z^i \Delta e_{xz} \right] \end{aligned} \quad (5-21)$$

$$\begin{aligned}\Delta N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{yy} dz \\ &= \sum_i h^i [B_2^i + C_{12}^i (\Delta e_{xx} + z^i \Delta \chi_{xx}) + C_{22}^i (\Delta e_{yy} + z^i \Delta \chi_{yy}) + 2C_{25}^i \Delta e_{xz}] \end{aligned} \quad (5-22)$$

$$\begin{aligned}\Delta M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z \Delta \sigma_{yy} dz \\ &= \sum_i \left[B_2^i z^i h^i + C_{12}^i \left(\Delta e_{xx} z^i h^i + \Delta \chi_{xx} \left(h^i z^i{}^2 + \frac{h^i{}^3}{12} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + C_{22}^i \left(\Delta e_{yy} z^i h^i + \Delta \chi_{yy} \left(h^i z^i{}^2 + \frac{h^i{}^3}{12} \right) \right) + 2C_{25}^i z^i \Delta e_{xz} \right] \end{aligned} \quad (5-23)$$

$$\Delta N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{xy} dz = \sum_i h^i [B_6^i + 2C_{66}^i (\Delta e_{xy} + z^i \Delta \chi_{xy}) + 2C_{46}^i \Delta e_{yz}] \quad (5-24)$$

$$\begin{aligned}\Delta M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \Delta \sigma_{xy} dz \\ &= \sum_i \left[B_6^i z^i h^i + 2C_{66}^i \left(\Delta e_{xy} z^i h^i + \Delta \chi_{xy} \left(h^i z^i{}^2 + \frac{h^i{}^3}{12} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2C_{46}^i z^i h^i \Delta e_{yz} \right] \end{aligned} \quad (5-25)$$

$$\begin{aligned}\Delta T_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{xz} dz \\ &= \sum_i h^i [B_5^i + C_{15}^i (\Delta e_{xx} + z^i \Delta \chi_{xx}) + C_{25}^i (\Delta e_{yy} + z^i \Delta \chi_{yy}) + 2C_{55}^i \Delta e_{xz}] \end{aligned} \quad (5-26)$$

$$\Delta T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{yz} dz = \sum_i h^i [B_4^i + C_{46}^i (\Delta e_{xy} + z^i \Delta \chi_{xy}) + 2C_{44}^i \Delta e_{yz}] \quad (5-27)$$

L'équilibre et la matrice de rigidité aux points d'intégration [D] s'écrivent :

$$[D] \begin{bmatrix} \Delta e_{xx} \\ \Delta e_{yy} \\ 2\Delta e_{xy} \\ \Delta \chi_{xx} \\ \Delta \chi_{yy} \\ 2\Delta \chi_{xy} \\ 2\Delta e_{xz} \\ 2\Delta e_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta N_x \\ \Delta N_y \\ \Delta N_{xy} \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_{xy} \\ \Delta T_x \\ \Delta T_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h^i B_1^i \\ h^i B_2^i \\ h^i B_6^i \\ z^i h^i B_1^i \\ z^i h^i B_2^i \\ z^i h^i B_6^i \\ h^i B_5^i \\ h^i B_4^i \end{bmatrix} \quad (5-28)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} h^i C_{11}^i & h^i C_{12}^i & 0 & h^i z^i C_{11}^i & h^i z^i C_{12}^i & 0 & h^i C_{15}^i & 0 \\ & h^i C_{22}^i & 0 & h^i z^i C_{12}^i & h^i z^i C_{22}^i & 0 & h^i C_{25}^i & 0 \\ & & h^i C_{66}^i & 0 & 0 & h^i z^i C_{66}^i & 0 & h^i C_{46}^i \\ & & & C_{11}^i \left(h^i z^i{}^2 + \frac{h^i{}^3}{12} \right) & C_{12}^i \left(h^i z^i{}^2 + \frac{h^i{}^3}{12} \right) & 0 & h^i z^i C_{15}^i & 0 \\ & & & & C_{22}^i \left(h^i z^i{}^2 + \frac{h^i{}^3}{12} \right) & 0 & h^i z^i C_{25}^i & 0 \\ & & & & & C_{66}^i \left(h^i z^i{}^2 + \frac{h^i{}^3}{12} \right) & 0 & h^i z^i C_{36}^i \\ & & & & & & h^i C_{55}^i & 0 \\ & & & & & & & h^i C_{44}^i \end{bmatrix} \quad (5-29)$$

sym

Où D représente la matrice de comportement local de plaque (au point d'intégration, cf. §5.7).

5.6.2.5 Formulation avec restriction de cisaillement

Comme nous l'avons déjà entrevu, le cisaillement qui nous intéresse ici est un effet de structure. En effet il s'agit principalement du cisaillement induit par le retrait gonflement, et il dépend donc de l'orientation cylindrique. C'est la raison pour laquelle, lorsqu'on veut traiter la courbure des panneaux peints de manière locale (pour modéliser par exemple un comportement moyen sur une ligne, comme pour modéliser ce qui se passe entre les axes d'un *Deformometric Kit*), il n'est pas nécessaire de traiter le cisaillement.

Sur la Figure 5-8 on illustre le fait que la contribution du cisaillement à la courbure (grandeur locale) est nulle. En revanche si on s'intéresse à la flèche (effet de structure), nous avons montré (§5.5.1) qu'il est nécessaire d'en tenir compte.

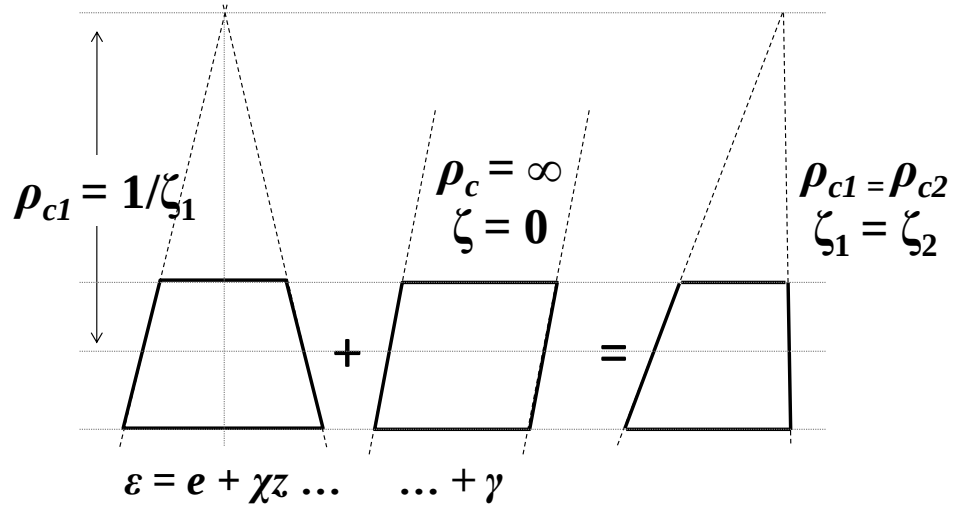


Figure 5-8 : schématisation de la courbure ζ et du rayon de courbure ρ_c pour une poutre avec cisaillement

Dans le cas local, nous proposons une écriture qui impose la restriction de cisaillement dans la cinématique de plaque. Pour cela on reprend la formulation à partir de l'équation (5-14) en imposant :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (5-30)$$

Cette restriction de cisaillement impose des conditions sur les contraintes, et diminue le degré du système à résoudre.

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{xz} &= 2P_{13} + Q_{15}\sigma_{xx} + Q_{25}\sigma_{yy} + Q_{55}\sigma_{xz} = 0 \\ \sigma_{xz} &= -\frac{2P_{13}}{Q_{55}} - \frac{Q_{15}}{Q_{55}}\sigma_{xx} - \frac{Q_{25}}{Q_{55}}\sigma_{yy} \end{aligned} \quad (5-31)$$

De même :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{yz} &= 2P_{23} + Q_{44}\sigma_{yz} + Q_{46}\sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} &= -\frac{2P_{23}}{Q_{44}} - \frac{Q_{46}}{Q_{44}}\sigma_{xy} \end{aligned} \quad (5-32)$$

L'expression des contraintes de cisaillement équivalentes (eq. (5-31) et (5-32)) sont réinjectées dans dans l'expression des déformations planes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= P_1 + Q_{11}\sigma_{xx} + Q_{12}\sigma_{yy} + Q_{15}\sigma_{xz} \\ &= \left(P_1 - 2P_{13}\frac{Q_{15}}{Q_{55}}\right) + \left(Q_{11} - \frac{Q_{15}^2}{Q_{55}}\right)\sigma_{xx} + \left(Q_{12} - \frac{Q_{15}Q_{25}}{Q_{55}}\right)\sigma_{yy} \end{aligned} \quad (5-33)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= P_2 + Q_{12}\sigma_{xx} + Q_{22}\sigma_{yy} + Q_{25}\sigma_{xz} \\ &= \left(P_2 - 2P_{13}\frac{Q_{25}}{Q_{55}}\right) + \left(Q_{12} - \frac{Q_{15}Q_{25}}{Q_{55}}\right)\sigma_{xx} + \left(Q_{22} - \frac{Q_{25}^2}{Q_{55}}\right)\sigma_{yy} \end{aligned} \quad (5-34)$$

$$2\varepsilon_{xy} = 2P_{12} + Q_{46}\sigma_{yz} + Q_{66}\sigma_{xy} \quad (5-35)$$

$$= \left(2P_{12} - 2P_{23} \frac{Q_{46}}{Q_{44}} \right) + \left(Q_{66} - \frac{Q_{46}^2}{Q_{44}} \right) \sigma_{xy}$$

Nous en déduisons les matrices « orthotropisée » équivalentes (tenant compte de la restriction de cisaillement) :

$$P_{\gamma=0} = \begin{bmatrix} P_1 - 2P_{13} \frac{Q_{15}}{Q_{55}} \\ P_2 - 2P_{13} \frac{Q_{25}}{Q_{55}} \\ 2P_{12} - 2P_{23} \frac{Q_{46}}{Q_{44}} \end{bmatrix} \quad (5-36)$$

$$Q_{\gamma=0} = \begin{bmatrix} Q_{11} - \frac{Q_{15}^2}{Q_{55}} & Q_{12} - \frac{Q_{15}Q_{25}}{Q_{55}} & 0 \\ & Q_{22} - \frac{Q_{25}^2}{Q_{55}} & 0 \\ \text{sym} & & Q_{66} - \frac{Q_{46}^2}{Q_{44}} \end{bmatrix}$$

Cette restriction de cisaillement n'est utile que dans le cas où les axes d'orthotropie ne coïncident pas localement avec les axes de la plaque, sans quoi les termes correcteurs sont nuls. C'est-à-dire que pour un calcul local représentant une dosse parfaite ($\theta = 0$ et $\vec{x} = \vec{T}$) ou un quartier parfait ($\theta = \pi/2$ et $\vec{x} = \vec{R}$), les restrictions de cisaillement qui viennent d'être détaillées n'ont pas d'influence.

5.6.2.6 Retour sur le calcul de courbure avec le DK

Nous allons reprendre la géométrie du *Deformometric Kit* établie au §2.5 afin de faire le lien entre les paramètres géométriques et les termes de la cinématique de plaque. Nous avons défini ζ la courbure comme l'inverse du rayon de courbure ρ_c , lui-même lié aux autres paramètres géométriques, par exemple grâce à la relation :

$$\beta \rho_c = L(1 + \varepsilon_{moy}) \quad (5-37)$$

Où L est un paramètre introduit désignant la demi longueur entre les deux axes de mesure (cf. §2.5 Figure 2-18 p.34). On peut maintenant réécrire la déformation de la ligne moyenne (ε_{moy}) comme la déformation membranaire e_{xx} , qui est la valeur de ε pour $z = 0$.

La relation (5-37) reste vraie, en l'absence de cisaillements, pour chaque face du panneau :

$$\begin{aligned} \beta \rho_c^+ &= L(1 + \varepsilon_{xx}^+) \\ \beta \rho_c^- &= L(1 + \varepsilon_{xx}^-) \end{aligned} \quad (5-38)$$

Si l'on soustrait ces deux équations, nous obtenons :

$$\beta(\rho_c^+ - \rho_c^-) = L(\varepsilon_{xx}^+ - \varepsilon_{xx}^-) = L\chi_{xx} \quad (5-39)$$

La valeur de $(\rho_c^+ - \rho_c^-)$ correspond à l'épaisseur h du panneau au retrait-gonflement près ε_{zz} , soit :

$$\beta h(1 + \varepsilon_{zz}) = L\chi_{xx} \quad (5-40)$$

Que l'on réinjecte dans (5-37) pour obtenir la valeur de la courbure ζ :

$$\zeta = \frac{\chi_{xx}}{(1 + \varepsilon_{zz})(1 + e_{xx})} \quad (5-41)$$

En fonction de l'application et des mesures expérimentales effectuées, il pourra être intéressant d'exprimer les résultats en termes de flèche d'un panneau, calculable à partir de la courbure (§6.2.2.2). D'après l'équation (5-41), un calcul complet nécessiterait de calculer le retrait gonflement libre de l'épaisseur de la plaque (ε_{zz}). ε_{zz} et e_{xx} sont néanmoins petits devant 1 ; ils sont du même ordre de grandeur (gonflement moyen radial-tangentiel, soit 0.01).

On retiendra donc qu'en l'absence de cisaillements : $\zeta \sim \chi_{xx}$.

5.7 Code de plaque élément finis

5.7.1 Éléments plaque DKT, DST

Dans cette étude nous avons travaillé sur des éléments de plaque à maillage triangulaire. Les éléments de plaque triangulaires adaptés à la modélisation de Kirchhoff sont les DKT (Discret Kirchhoff Triangle). Ceux adaptés à la modélisation de Mindlin sont des DST (Discret Shear Triangle) qui permettent de modéliser les cisaillements dont on a parlé au §5.5. Ce sont des éléments à 5 degrés de liberté (ddl) par nœud, soit 3 déplacements (U_x, U_y, U_z), et 2 rotations (R_x, R_y). Pour tenir compte des rotations de cisaillement (et de plus éviter les verrouillages numériques), les comportements sont écrits en moyenne sur les arêtes des éléments : ceci justifie l'utilisation de points d'intégration situés sur les arêtes (point d'intégration dits de *Hammer*) (Figure 5-9) plutôt que des points d'intégration situés à l'intérieur de l'élément. Une hypothèse importante qui est faite pour résoudre les équations associées à cet élément est que le comportement ne varie pas le long d'une arête²⁰ : ceci justifiera d'utiliser un maillage plus raffiné dans la direction transverse que dans la direction longitudinale.

De plus amples informations sur ces éléments peuvent être trouvées dans des ouvrages de référence ([Batoz et Dhett (1990)]) ou des notices de codes existants ([Desroches (2009b)] pour CODE ASTER).

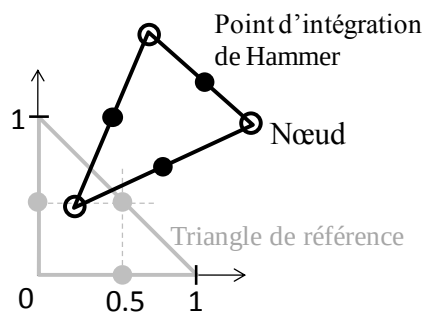


Figure 5-9 : géométrie des éléments de plaque DKT (Kirchhoff) et DST (Mindlin)

²⁰ Communication personnelle [Dureisseix]

5.7.2 Mise en œuvre du code de calcul

L'ensemble du calcul mécanique a été implanté dans un code de calcul interprété, Scilab v5.2.2, qui est un équivalent gratuit et open-source de Matlab avec lequel les échanges de code sont facilités par des applications développées par le consortium Scilab. Il est évident que ce choix ne favorise pas la rapidité des calculs, mais la relative convivialité d'un code interprété a certainement facilité notre travail.

Les éléments finis DKT ont été initialement programmés sous MatLab par D.Dureisseix et les éléments DST sont en cours de validation²¹. Leur passage sous SciLab et leur couplage avec les équations de comportement ont abouti au code mécanique multicouche qui est utilisé dans la suite.

Reprenons pour les décrire toutes les étapes de la Figure 5-10 synthétisant l'ensemble du code de calcul. En l'absence de couplage de la partie mécanique sur la partie fluide (diffusion et équilibre hygroscopique), nous pouvons calculer, indépendamment de la solution mécanique, l'évolution des champs d'humidité dans l'épaisseur de la planche (réalisé au moyen de *TransPore1d*). Ce champ par point est défini sur un maillage de l'épaisseur et une discrétisation du temps qui sont imposées par *TransPore1d* : ces données sont interpolées, sur le maillage géométrique utilisé pour la mécanique et sur les pas de temps réservés au calcul mécanique (voir annexe 3 sur le choix des pas de temps).

La géométrie et le champ de mc étant défini, nous rentrons dans la boucle de pas de temps. Le comportement est défini par la géométrie (orientation du repère local), le taux d'humidité et ses variations. Le comportement du bois est défini nécessairement dans la base matériau $(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$: il est ensuite ramené dans la base de la plaque. A partir du comportement 3D donné dans le repère plaque $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on passe en comportement local de plaque tenant compte des restrictions imposées sur les éléments finis (nombre de degrés de liberté).

Pour un calcul local (sur un point d'intégration) on résout directement le système. Dans le cas d'éléments finis, on procède classiquement au calcul des matrices élémentaires de raideur et d'efforts puis à leur assemblage. Le système à résoudre se ramène toujours à $KU=F$, avec K la matrice de raideur du panneau, U les déplacements recherchés aux nœuds du maillage, et F les efforts généralisés appliqués sur la structure (ici chargement extérieur ou chargement hydrique).

A chaque fin de pas de temps, il faut mettre à jour les variables internes du comportement exprimées dans la base $(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$ (car le comportement sur le pas de temps suivant en est dépendant).

²¹ Les éléments DST utilisés dans les procédures de test (§5.8) devraient être remplacés à terme par une seconde version qui est aujourd'hui en phase de débogage. Leur principal inconvénient est une tendance au verrouillage lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers zéro.

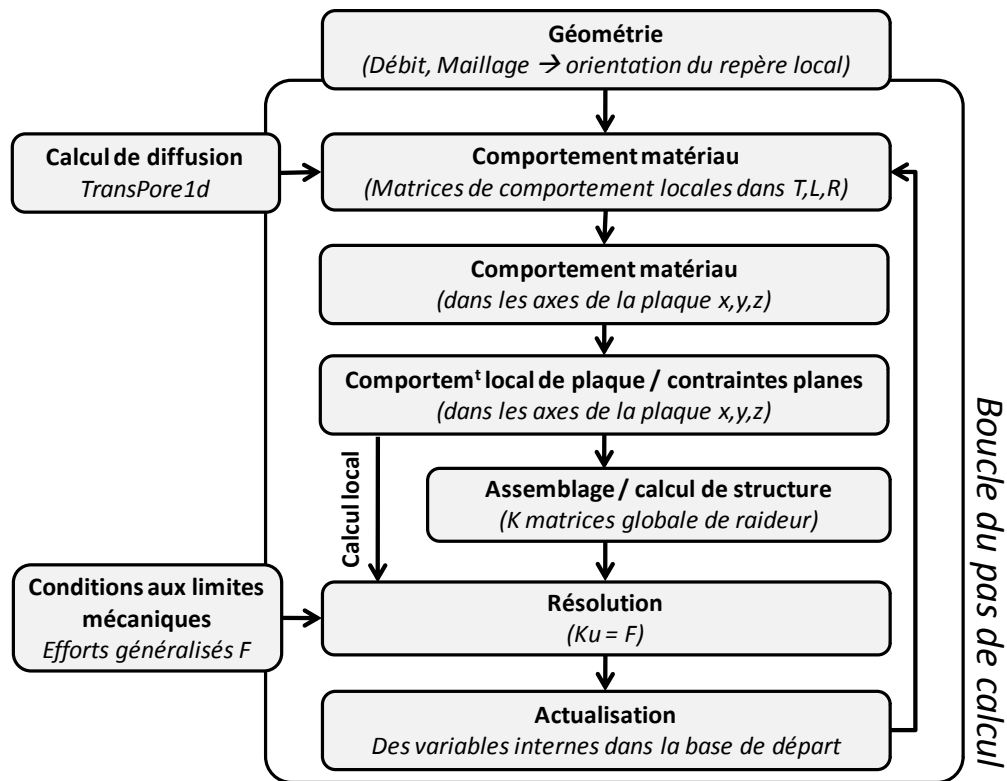


Figure 5-10 : synthèse du code de calcul de transport et de mécanique de plaque.

5.8 Validation du code mécanique de structure

La validation du code (partie mécanique) se fait en plusieurs étapes. La pertinence de la loi de comportement pour représenter des essais matériaux a été discutée au §4.4. La validation de la version locale du code sera discutée plus loin (§6.2.2). Pour l'instant nous nous intéressons à la validation de la partie structure/éléments finis.

Une première étape de validation des éléments DST (version temporaire, voir note 21 p.113) est réalisée sur des cas simples de RDM dans le cas d'un matériau isotrope (ex : flexion d'une plaque encastree, comparée à la solution de poutre, en prenant un coefficient de Poisson nul).

Les déformations induites par retrait-gonflement sont testées dans un premier temps pour des axes d'orthotropie confondus avec les axes de la plaque. Ensuite, lorsqu'on tourne le repère matériau dans la plaque, on obtient des configurations de cisaillements induits (cf. test §5.8.1). Ce test est justifié car on attend des cisaillements induits importants (beaucoup plus que des cisaillements d'origine mécanique).

Pour enfin analyser le modèle sur un cas orthotrope cylindrique (panneau complet), il nous faut trouver un cas test dont on connaît une solution analytique. Nous allons utiliser de nouveau la configuration de retrait ou gonflement homogène dans une planche, dont la solution à contrainte nulle a été explicitée au début du mémoire (§2.4.3.4). Le test ainsi proposé dans la suite (§5.8.2) est une solution originale faisant intervenir à la fois le comportement orthotrope et la rotation du repère matériel dans le plan transverse.

5.8.1 Test de cisaillement induit pur

Le présent test vise à caractériser le comportement d'un unique élément DST pour un cisaillement induit par gonflement anisotrope sur un matériau dont le tenseur des rigidités est isotrope ($E = 1000 \text{ MPa}$, $\nu = 0$; $G = 500 \text{ MPa}$; ce test est normalement indépendant du tenseur des rigidités). Le gonflement anisotrope imposé dans le repère $(\vec{T}, \vec{L}, \vec{R})$ est de la forme :

$$\varepsilon_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_T \Delta h = 0.02 \\ 0 \\ \alpha_R \Delta h = 0.01 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-42)$$

Le champ est imposé uniformément sur l'élément (donc aux points d'intégration), de sorte que la déformation imposée dérive bien d'un champ de déplacements.

Une fois tourné dans le repère de l'élément (repère de plaque) $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, d'après l'équation (5-10) p.104, le tenseur des déformations devient :

$$\varepsilon_\alpha = \begin{bmatrix} c^2 \alpha_T \Delta h + s^2 \alpha_R \Delta h \\ 0 \\ s^2 \alpha_T \Delta h + c^2 \alpha_R \Delta h \\ 0 \\ 2sc(\alpha_R - \alpha_T) \Delta h \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.015 \\ 0 \\ 0.015 \\ 0 \\ -0.01 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-43)$$

Qui fait apparaître du cisaillement induit si $\alpha_R \neq \alpha_T$ (rappel : $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$) : si le matériau est également isotrope en gonflement, alors on observe juste une déformation de type sphérique.

On réalise le cas test pour $\theta = \pi/4$ (Figure 5-11). Les déplacements de corps solides sont bloqués (ddl en déplacement uniquement, et non pas les rotations).

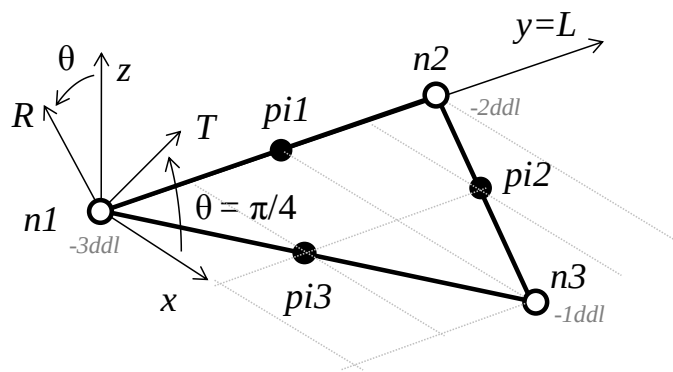


Figure 5-11: élément à 3 nœuds ($n_{1,2,3}$) et 3 points d'intégration ($pi_{1,2,3}$) positionné dans le repère (x,y,z) avec orientation homogène sur l'élément du repère matériel (T,L,R) pour une rotation autour de l'axe $y=L$ d'un angle de $\pi/4$. Les degrés de liberté en déplacements sont réduits aux nœuds pour empêcher les déplacements de corps solides.

On réécrit le terme de déformation imposée dans la notation plaque, distinguant les déformations de membranes (moyennes dans l'épaisseur) et les déformations de flexion :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{xx} \rangle \\ \langle \varepsilon_{yy} \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle \gamma_{xz} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \quad (5-44)$$

On identifie le vecteur de déformation de plaque à rentrer dans l'élément sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{xx} \rangle \\ \langle \varepsilon_{yy} \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \langle \gamma_{xz} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.015 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.01 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-45)$$

L'équation de comportement de plaque à résoudre s'écrit (cf. équation (5-28) p.109) :

$$[D] \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{xx} \rangle \\ \langle \varepsilon_{yy} \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \langle \gamma_{xz} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx}^M \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ T_{xz} \\ T_{yz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \\ T_{xz}^0 \\ T_{yz}^0 \end{bmatrix} \quad (5-46)$$

Dans notre cas test il n'y a pas d'efforts extérieurs imposés $[N,M,T]=[0]$. Il reste seulement le second membre des contraintes induites (par gonflement). La matrice de comportement élémentaire (D) et le second membre (en contraintes) sont calculés à partir des équations (5-28) et (5-29) p.109.

$$\begin{bmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \\ T_{xz}^0 \\ T_{yz}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-47)$$

La routine de l'élément peut calculer les matrices élémentaires :

- K , matrice de rigidité, telle que $KU=F$
- B^σ , matrice de passage reliant les contraintes de plaque aux points d'intégration et les efforts généralisés aux nœuds, telle que : $F = {}^t B^\sigma \{N^0, M^0, T^0\}$
- B^ε , matrice de passage reliant les déformations de plaque aux points d'intégration et les déplacements généralisés aux nœuds, telle que : $\{e, \chi, \gamma\} = B^\varepsilon U$

Dans le tableau suivant nous comparons aux trois points d'intégration de l'élément (cf. Figure 5-11) la déformation de plaque induite (entrée du test) et la déformation après résolution (sortie du test) permettant de conclure que l'élément supporte le cisaillement.

0.015	0.015
0.	0.
0.	0.
0.	2.168D-19
0.	1.263D-22
0.	- 2.154D-19
- 0.01	- 0.01
0.	- 9.255D-21
0.015	0.015
0.	0.
0.	0.
0.	2.168D-19
0.	1.263D-22
0.	- 2.154D-19
- 0.01	- 0.01
0.	4.983D-21
0.015	0.015
0.	0.
0.	0.
0.	2.168D-19
0.	1.263D-22
0.	- 2.154D-19
- 0.01	- 0.01
0.	5.615D-21

Tableau 5-1: comparaison des entrées et sortie du test de cisaillement induit – déformations données aux trois points d'intégration (cf. Figure 5-11) dans l'ordre des composantes donné à l'équation (5-45).

5.8.2 Test de déformée saisonnière

Le test suivant fait intervenir un matériau orthotrope (notamment du point de vue des retraits-gonflements) et un repère matériel tournant. Il s'agit de voir si le modèle élément finis converge, lorsqu'on raffine le maillage, vers la solution analytique en déplacements (§2.4.3.4), et d'analyser également les niveaux de contraintes induits (la solution analytique étant proposée à contrainte nulle).

Une variation de taux d'humidité homogène est imposée sur un pas de temps. On peut alors utiliser deux versions du même test, consistant respectivement à :

- Observer le champ de déplacement calculé par éléments finis en bloquant uniquement les déplacements de solide rigide, et le comparer à la solution analytique.
- Imposer à chaque nœud le champ de déplacement correspondant à la solution analytique, et analyser le champ de contrainte résultant.

On se donne pour géométrie une portion de planche, de largeur 100 mm suivant $\vec{x}$, de longueur courte 5 mm suivant la direction longitudinale, et d'épaisseur 20 mm. Le matériau est orthotrope, de coefficient de retrait-gonflement identique au cas test précédent, soit ($\alpha_T = 2\alpha_R = 0.3\%/%$), le retrait longitudinal étant négligé. Pour simplifier l'interprétation, l'opérateur de Hooke sera supposé isotrope, de module d'Young 500MPa (test focalisé sur le plan transverse), et de coefficient de Poisson nul.

Pour une planche débitée sur dosse à 10 cm du cœur théorique de l'arbre, on obtient d'après la solution analytique une flèche au centre de 0.348 mm.

La solution en déplacements libres tend vers la solution analytique lorsqu'on raffine. La solution de la Figure 5-12 a été obtenue sur un maillage de 800 éléments (nous avons pris 10 couches dans l'épaisseur pour le calcul local) : la flèche au centre vaut 0.347 mm.

La valeur absolue des contraintes de cisaillement générées vaut en moyenne $5 \cdot 10^{-2}$ MPa (les contraintes dans les directions principales sont plus faibles) : ces valeurs semblent faibles mais non négligeable *a priori*. Cependant nous avons réalisé un test pour lequel le saut d'humidité est de 10 %. En imposant les déplacements correspondants à la solution analytique on tombe sur les mêmes ordres de grandeur.

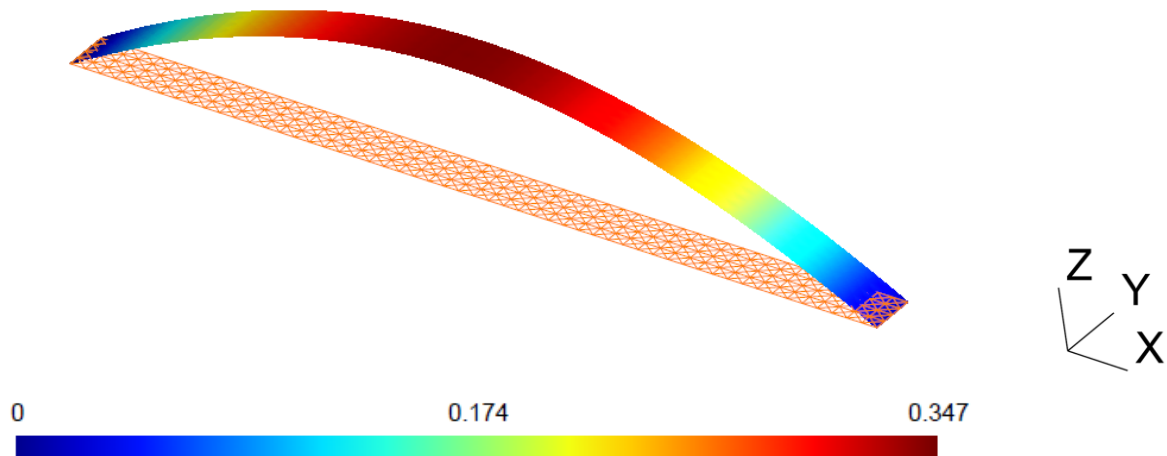


Figure 5-12 : composante verticale (z) d'un test de déformation induite par le repère orthotrope cylindrique dans une portion de panneau (100 mm x 5 mm, épaisseur 20mm). Le maillage dans le plan comporte 800 éléments triangulaires, et l'épaisseur du panneau est maillée par 10 nœuds.

Les contraintes dans les deux tests semblent converger vers des valeurs non nulles. Ceci ne doit pas nous surprendre car nous avons remarqué (§5.5.2) que la solution analytique (à contrainte nulle) correspondant à ce test ne vérifiait pas exactement la cinématique des sections droites, sur laquelle s'appuie notre formulation de plaque. Nous nous attendons donc à ce que le modèle éléments finis converge vers une solution légèrement différente.

Une première version de l'élément DST a été testée sur différentes configurations faisant intervenir l'orthotropie matérielle et la rotation des cernes dans le plan transverse. Pour un panneau modélisé d'une épaisseur de 20 mm, ces éléments montrent un comportement cohérent pour des situations simples, incluant notamment le cisaillement induit par retrait-gonflement. Les tests de déformation due au repère tournant dans le plan transverse donnent une solution approchée de la solution analytique à contrainte nulle. Les tests suivant devront porter sur le verrouillage numérique de ces éléments en vue de leur amélioration. L'analyse du test sur le débit doit être affinée pour que dans la suite l'interaction avec la déformation due aux gradients d'humidité dans la structure soit clarifiée.

6. Applications des outils mis en place

6.1 Principes généraux

Il est grand temps de revenir à notre application que sont les panneaux peints, et d'avancer sur les questions posées au §2.6, lors de la définition des objectifs du modèle. C'est l'objet de ce chapitre, destiné entre autres à l'application des outils numériques décrits dans les paragraphes précédents sur des cas d'étude concernant des panneaux en situation d'exposition ou des répliques de laboratoire.

La section 6.2.1 concerne un panneau exposé dans une église, sur lequel sera appliqué le calcul local (calcul sur un point de la planche) pour le comparer à des données expérimentales in-situ. La section 6.3 utilisera le même outil au service d'une discussion théorique : le *compression set* caractérisé expérimentalement par Mazzanti et analysé au §4.3.3 peut-il être responsable de déformations permanentes dans les panneaux peints en situation d'exposition ? Enfin la section 6.4 reviendra sur l'application du modèle de calcul local destiné à la prédiction. Pour cela nous discuterons les effets probables d'un déplacement du tableau de l'église St Didier (§6.2.1.1) au moyen d'abaques de déformations obtenus par un jeu de simulations numériques. Nous verrons aussi comment analyser au moyen de l'outil numérique l'effet de l'activité humaine à proximité du panneau.

6.2 Analyse des variations de courbure sur des panneaux en situation d'exposition

6.2.1 Cas d'étude : un panneau peint conservé dans une église

6.2.1.1 Présentation du cas d'étude

Le tableau étudié ici, intitulé *le Couronnement d'épines*, est un panneau peint anonyme daté de 1563, conservé dans le cœur de l'église St Didier en Avignon. Il est représenté vu de face et de dos à la Figure 6-1. Cet épisode de la passion du Christ, succédant la condamnation à mort et précédant la crucifixion de Jésus, est raconté dans les évangiles canoniques :

Evangile de l'apôtre saint Mathieu 27, 27-31

« Alors les soldats du gouverneur emmenèrent Jésus dans le prétoire et rassemblèrent autour de lui toute la garde. Ils lui enlevèrent ses vêtements et le couvrirent d'un manteau rouge. Puis, avec des épines, ils tressèrent une couronne, et la posèrent sur sa tête ; ils lui mirent un roseau dans la main droite et, pour se moquer de lui, ils s'agenouillaient en lui disant : « Salut, roi des Juifs ! ». Et, crachant sur lui, ils prirent le roseau, et ils le frappaient à la tête. Quand ils se furent bien moqués de lui, ils lui enlevèrent le manteau, lui remirent ses vêtements, et l'emmenèrent pour le crucifier. »

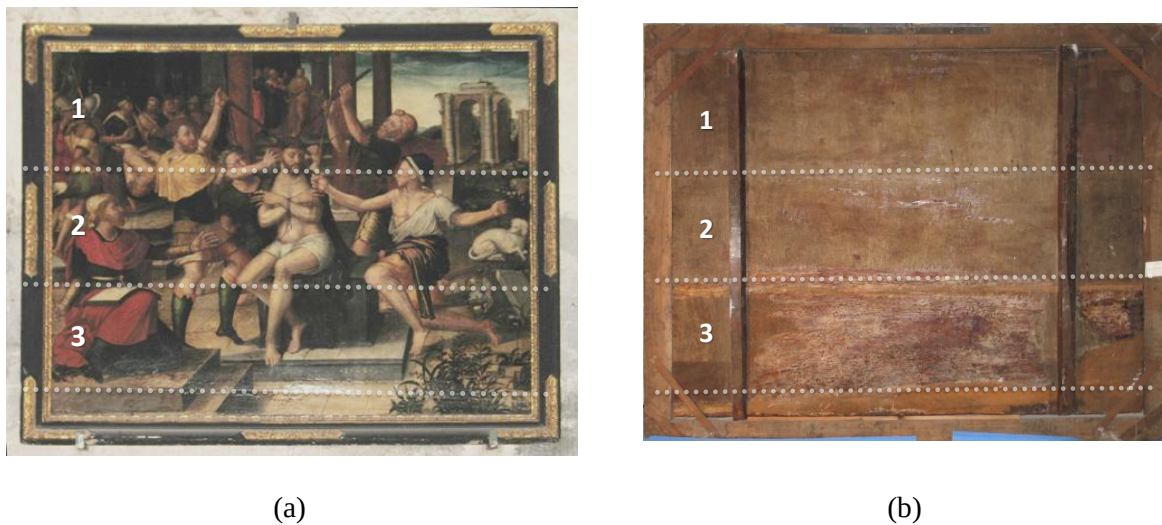


Figure 6-1 : Couronnement d'Epines, Anonyme (1563), peint sur 3 planches de peuplier. Hauteur : 143cm. Largeur : 178cm. Côté peinture (a) et revers du panneau (b) dans son cadre d'exposition.

Ce tableau est situé dans le chœur de l'église (Figure 6-2), loin des entrées publiques du bâtiment où les gradients d'humidité et de température dominent probablement. Néanmoins il est proche du chauffage électrique allumé à l'occasion des offices, comme le montreront les relevés de température de la Figure 6-8.

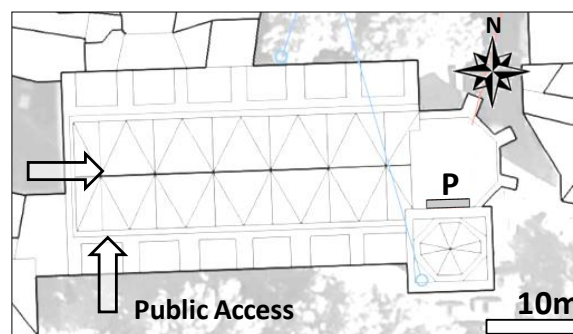


Figure 6-2 : localisation du panneau (P) dans le cœur de l'église Saint Didier ; les accès publics sont signalés par les flèches. Adapté de [Marcon (2009)].

Le panneau peint est constitué de 3 planches de peuplier, avec une direction du fil horizontale ou légèrement inclinée (les planches sont délimitées en blanc sur la Figure 6-1). Un dernier élément de planche complète le panneau dans sa partie inférieure ; ce dernier élément sera négligé dans la suite. L'assemblage des planches est assuré au revers par deux traverses et leur système d'assemblage en queues d'aronde. L'ensemble est monté dans le cadre avec beaucoup de jeu. Le cadre repose sur deux équerres scellées dans le mur ; une troisième équerre le maintient par le haut. De cette manière, les traverses sont plaquées contre le mur, le cadre est maintenu au contact des équerres, et l'ensemble est figé.

La couche picturale est d'un état de conservation satisfaisant (aucune fissuration critique, ni sur chaque planche, ni entre les planches). On note que le support, lui, est altéré par une attaque massive de xylophages. Le *Couronnement d'epines* est donc choisi comme l'exemple d'un panneau peint peu altéré dans une ambiance de conservation a priori peu propice.

La planche supérieure, numérotée (1) sur la Figure 6-1, et sur laquelle nous allons focaliser notre attention, a une épaisseur estimée à 20mm.

6.2.1.2 Mise en évidence du problème de courbure par des techniques optiques

L'histoire des variations d'humidité a imposé à ce panneau peint un tuilage prononcé des trois planches, notamment la planche inférieure qui présente une flèche d'environ 10 mm du côté de la couche picturale. Cette observation peut être faite à l'œil nu, tant les courbures permanentes sont importantes, mais nous proposons ici de l'illustrer à l'aide de méthodes de mesures non invasives.

Une méthode optique de stéréoscopie a été développée et appliquée sur la face avant du panneau par le laboratoire LAMCOS de l'INSA Lyon afin d'obtenir des mesures de forme. Cette méthode repose sur l'utilisation de deux caméras, d'un projecteur et d'une unité d'acquisition. Le principe de stéréoscopie (comme la corrélation d'images) nécessite la présence d'un motif suffisamment fin au regard des grandeurs à observer. Lors de mesures optiques sur des échantillons de laboratoire, on applique généralement un mouchetis : ici il n'est pas question de recouvrir la peinture par un tel procédé. Le vidéoprojecteur est employé pour projeter un mouchetis virtuel sur le panneau. De plus amples détails sur la technique, notamment les solutions apportées pour la correction de luminance sur des panneaux aux contrastes très élevés, sont détaillées par [Maigre et Morestin (2008)].

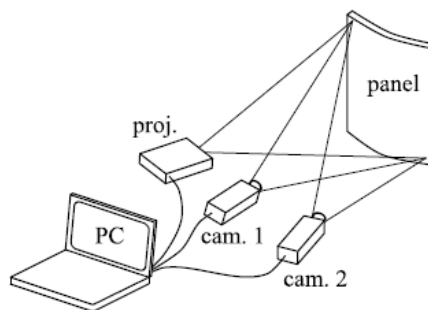


Figure 6-3 : principe de mesure d'un panneau par stéréoscopie, extrait de [Dureisseix, *et al.* (2011)]

La même méthode de mesure 3D a été utilisée sur un second cas d'étude, un panneau parqueté du « Palais du Roure » d'Avignon. Dans cette autre application, les mesures par stéréoscopie ont été utilisées pour comparer différents états mécaniques de la structure, constituée du panneau et de son parquetage. Les déformations hors plan mesurées ont été utilisées pour alimenter un code élément finis visant à déterminer les contraintes résiduelles présentes dans l'œuvre au cours d'une intervention de restauration ([Dureisseix, *et al.* (2011)]). Différentes méthodes optiques ont été appliquées sur des panneaux peints, c'est le cas notamment des méthodes de moiré d'ombre et de projections utilisées sur la Joconde ([Brémand, *et al.* (2006)]), ou sur des panneaux parquetés ([Brewer et Forno (1997)]).

Nous avons post-traité les résultats bruts obtenus par le LAMCOS pour tracer la Figure 6-4. Le traitement de l'image a consisté principalement à effacer les points aberrants (surtout présents sur les bords de la mesure) et à interpoler l'ensemble sur une grille régulière, permettant plus tard la comparaison entre deux images prises à deux instants différents (§6.2.1.4).

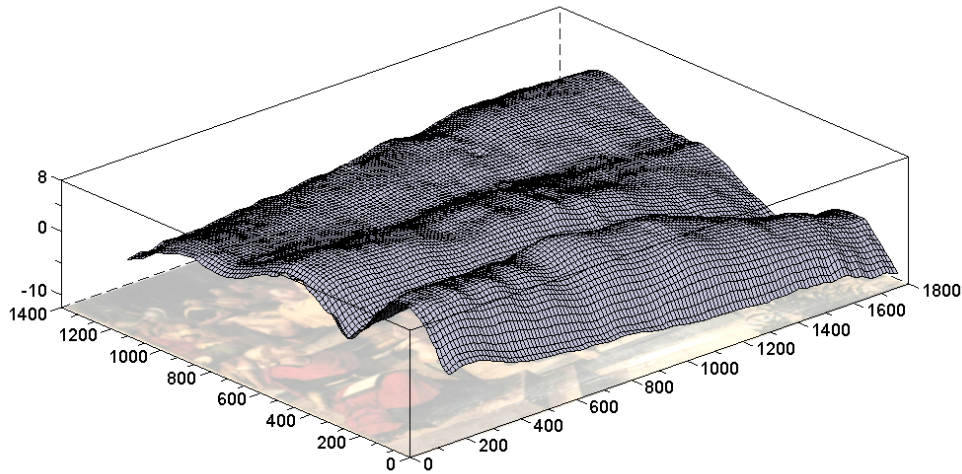


Figure 6-4 : Mesure de forme 3D sur les 3 planches principales du « Couronnement d'Epines » à la date du 12/12/2006 ; les données brutes de stéréo-corrélation obtenues en collaboration avec le laboratoire LAMCOS INSA Lyon sont interpolées sur une grille régulière resituée par rapport à la couche picturale. Axes en millimètres.

6.2.1.3 Hypothèse d'une planche libre

Dans la suite on fera l'hypothèse que les traverses n'ont que très peu d'interaction mécanique avec les planches constituant le panneau : on s'intéresse donc au chargement hydrique provoqué par les seules variations de l'environnement.

La mesure optique nous permet de tirer profit d'une autre information : le vrillage de la planche. En supposant que ce type de déformation est dû uniquement à l'orientation matérielle, on peut remonter à des informations sur l'angle du fil dans la planche. Un calcul analytique analogue à celui du §2.4.3.3 a été étendu au 3D : en supposant que la déformation due aux gradients de propriétés se fait à contrainte nulle, on montre qu'une inclinaison du fil engendre un tel vrillage. Ce calcul a été utilisé pour estimer une légère inclinaison du fil dans la planche étudiée, à peu près 5 % (3°).

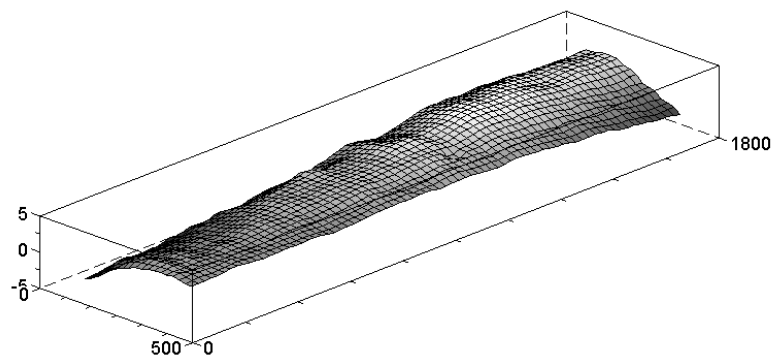


Figure 6-5 : vrillage de la planche supérieure, extrait de la prise de vue de la Figure 6-4.

6.2.1.4 Recalage entre deux prises de vues

Dans la section suivante nous comparons deux images prises à six mois d'intervalle. Ces données correspondent à deux visites à l'église entre lesquelles évidemment le matériel a été déplacé, donc recalibré. Pour comparer ces images il est donc nécessaire de les ramener dans le même repère. La

méthode employée a été validée dans le cadre du travail de [Baldit (2009)], et a été reprise dans [Dureisseix, *et al.* (2011)]. Il s'agit de choisir trois points de référence sur la couche picturale, communs à toutes les vues, et de déterminer les transformations nécessaires pour ramener les différentes images dans le même repère.

Quelques remarques sont toutefois nécessaires sur la comparaison d'image appliquée à notre cas d'étude. Le mouchetis n'étant pas solidaire de l'objet mesuré, la comparaison des deux images obtenues par stéréoscopie ne permet de quantifier que des déformations hors plan. Or dans le cas des panneaux de bois, les variations d'humidité engendrent des déformations de surface non négligeables devant les variations de courbure. On ne peut donc pas remonter au champ de déformation sur la face du panneau.

Par ailleurs, le fait d'utiliser des éléments géométriques de la couche picturale laisse supposer que cette dernière suit parfaitement les mouvements de surface du bois : dans le cadre de cette étude nous ne sommes pas en mesure de valider ou d'invalidier cette hypothèse. L'utilisation des images obtenues par stéréoscopie en vue de la détermination des courbures transitoires est une méthode plus qualitative que quantitative : les résultats de la Figure 6-6 donnent une idée globale de la forme actuelle du panneau et des variations de forme encourues.

Bien que la forme générale montre quelques différences entre les deux prises de vue, le résultat n'est pas très explicite en 3D, principalement parce que le tableau est constitué de plusieurs planches. Sur la Figure 6-6, nous avons tracé le profil central de la planche supérieure aux deux instants différents et la variation de profil associée qui est celle que nous devons mesurer *in-situ*. Il n'a malheureusement pas été possible de comparer le résultat optique et le résultat du montage expérimental (section suivante) car ce dernier a été installé quelques mois après la première image.

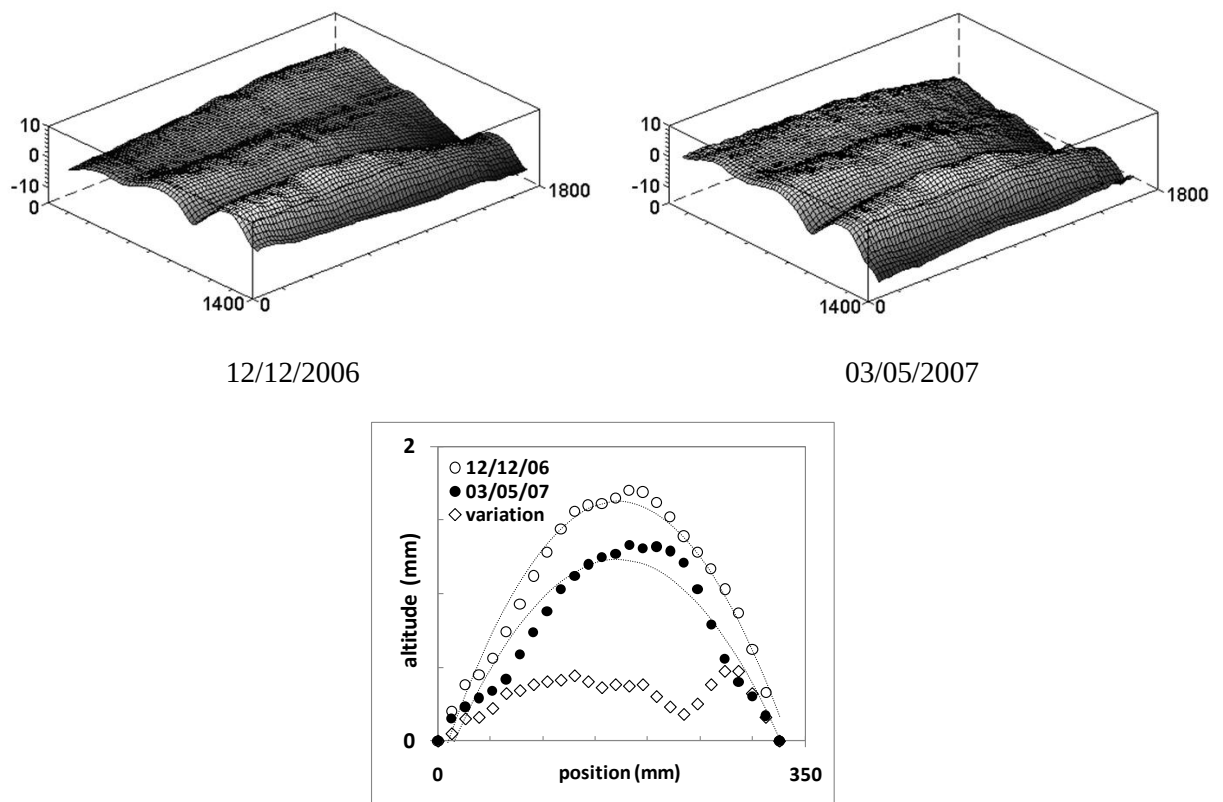


Figure 6-6 : (haut) deux images de stéréo-corrélation, prises à quelques mois d'intervalle et ramenées dans le même repère par repérage des détails de la couche peinte ; (bas) comparaison de la flèche observée au centre de la planche supérieure au 12 décembre 2006 (○), 03 mai 2007 (●) et la variation entre ces deux dates (◇). Les prises de mesures optiques sont à chaque fois approximées par un polynôme du second degré.

6.2.1.5 Mesures In-situ

Les mesures optiques fournissent des informations détaillées sur l'ensemble du panneau, mais ces méthodes sont aussi lourdes à mettre place (2 cameras, un vidéoprojecteur, un ordinateur, calibration à chacune des prises de mesures...), si bien qu'elles ne peuvent pas être utilisées pour de la mesure *in-situ* en continu. C'est pourquoi il faut concevoir des appareils spécifiques, plus discrets, qui peuvent être laissés sur place. L'appareil conçu et utilisé dans le cas du panneau de St Didier a fait l'objet d'un descriptif complet dans plusieurs rapports d'activité (cf. rapport d'activité pour le LRMH [Colmars et Gril (2007)]). Nous rappelons ici les grandes lignes qui permettront de mieux discuter les résultats.

Notre système fourni à intervalle régulier :

- la flèche centrale de la planche supérieure numérotée 1 sur la Figure 6-1, calculée à l'aide de 3 points de contact avec le panneau, et un capteur de déplacement. Le principe est schématisé à la Figure 6-7.
- l'humidité relative de l'air et la température, deux grandeurs mesurées au revers du panneau.

L'ensemble des données est enregistré sur un appareil commercial de marque HOBO®, alimenté par une seule pile de 3V, selon le principe de système autoalimenté évoqué au §2.5. Cette mesure peut sembler dérisoire face à la richesse des informations fournies par la mesure optique. Toutefois cette technique donne l'avantage de mesures en continu : nous allons nous intéresser à la fréquence et la durée totale des mesures.

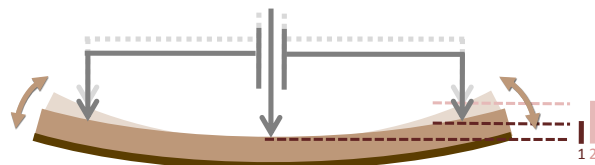


Figure 6-7 : principe de mesure de flèche pour l'instrumentation du cas d'étude

Le système tel qu'il a été conçu et installé en 2007 permettait un gain de place par rapport aux systèmes DK (§2.5), et évitait également de modifier l'état de conservation de la planche en se visant dedans (il y a seulement contact entre l'appareil et le tableau, la fixation étant assurée sur les traverses) ; son inconvénient majeur est l'impossibilité d'obtenir des informations sur le retrait-gonflement de surface.

6.2.1.6 Résultats : une base de données sur les panneaux peints

La Figure 6-8 reprend les données obtenues pour la période allant du 03 mai 2007 au 15 septembre 2009. On retrouve de haut en bas : la mesure de l'humidité relative de l'air (HR), de la température (T) en degré Celsius, et la flèche mesurée par le principe de la Figure 6-7, exprimée en millimètres (mm). Pour une meilleure compréhension des résultats, la flèche a été tracée après changement de signe. De cette manière il est plus évident de voir la corrélation entre les variations d'humidité relative et les variations de flèche. Toujours dans les remarques d'ordre général, on peut constater sur les courbes de température l'importance de la saison et des chauffages ponctuels en hiver, notamment lors des offices du dimanche.

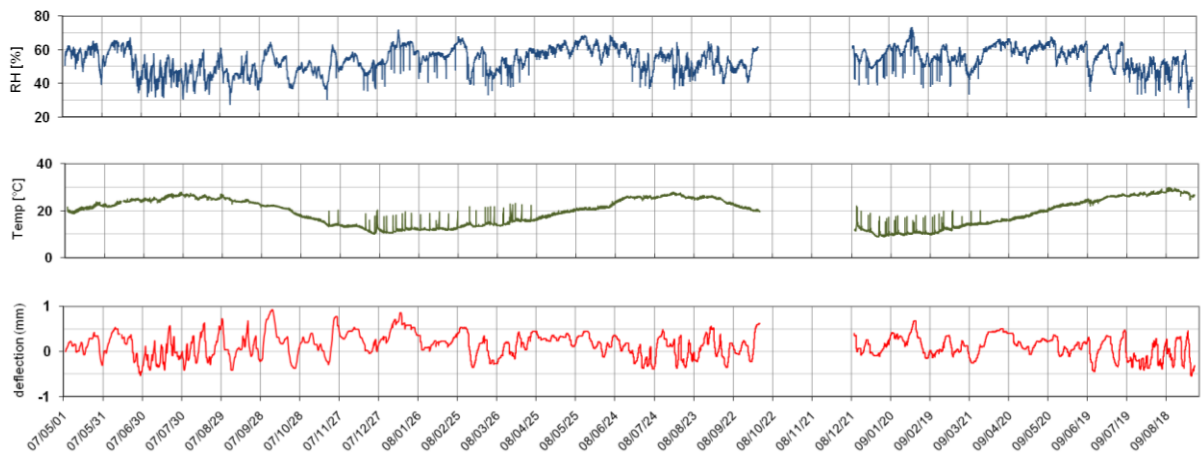


Figure 6-8 : résultats des mesures *in-situ* sur et autour du panneau de l'église St Didier avec, de haut en bas, l'humidité relative et la température de l'air mesurées au revers du panneau et les variations de flèche données par le système de mesure.

Cet ensemble de mesures s'inscrit dans un projet global de base de données sur les panneaux peints et sur leur ambiance de conservation, impliquant plusieurs laboratoires partenaires. Il constitue dans le cadre de ce mémoire notre premier exemple d'application des simulations numériques.

Pour discuter plus en détail la corrélation entre humidité relative et flèche, on a tracé le graphique de la Figure 6-9. L'éloignement des points à la droite de régression montre que le panneau est souvent hors de l'équilibre dans son ambiance (équilibre hydrique et équilibre mécanique). Il n'existe donc pas de relation simple entre l'humidité relative de l'air et la réponse d'un panneau libre, et encore moins pour des panneaux qui seraient contraints dans leurs mouvements. La dispersion des points autour de la droite de régression montre l'importance des phénomènes différés (diffusion et mécanique) sans pour l'instant les distinguer clairement.

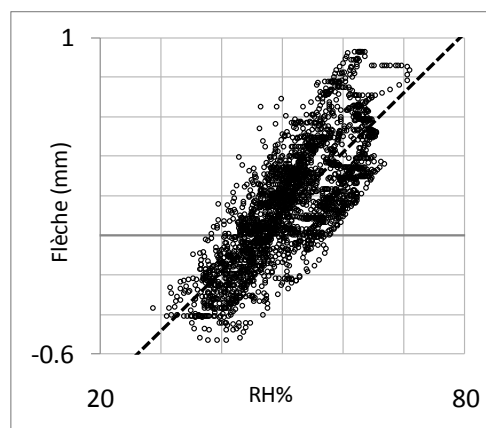


Figure 6-9 : Flèche mesurée *in-situ* en fonction de l'humidité relative de l'air à proximité du panneau – droite de régression linéaire ($R^2 = 0.514$)

6.2.1.7 Observation et estimation du débit

L'état de surface des planches, l'accès restreint au panneau et l'impossibilité d'utiliser les méthodes destructives habituelles empêchent d'avoir une estimation immédiate du débit à prendre en compte pour nos simulations. Il faut alors contourner le problème.

Deux microéchantillons ont été prélevés au revers du panneau, aux endroits signalés par la Figure 6-10 (1). Ces prélèvements et leur observation (par E. Maurin, LRMH) nous fournissent une première information sur le débit de la planche : il s'agirait d'une planche débitée sur faux quartier. L'étape suivante consiste à situer ce débit par rapport à la couche peinte, les deux possibilités étant schématisées dans une section transverse d'un billon (Figure 6-10 (4-5)).

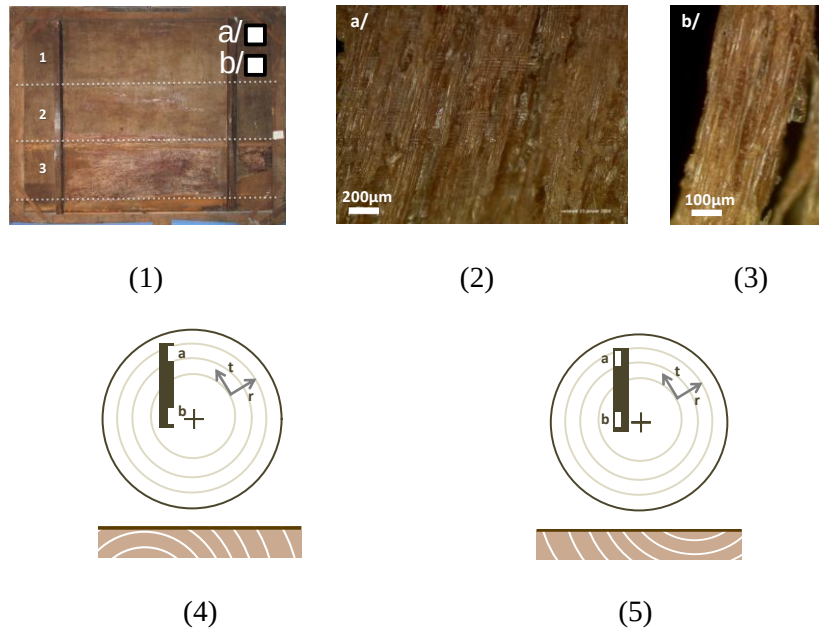


Figure 6-10 : estimation du débit (1) localisation des échantillons ; (2)(3) échantillon a et b ; (4)(5) orientations possibles de la couche picturale par rapport au débit.

Pour choisir entre les deux possibilités de débit, nous raisonnons sur la déformation saisonnière (déformation d'équilibre due aux gradients de propriétés) : la mesure de flèche étant faite au revers, supposons une augmentation de l'humidité moyenne entre deux périodes, alors la flèche moyenne devrait augmenter dans le cas de gauche, et diminuer dans le cas de droite.

En analysant les courbes expérimentales, on déduit que notre cas d'étude est probablement du second type, avec la couche picturale tournée vers le cœur de l'arbre ; on remarquera que ce choix d'orientation a été utilisé pour une grande majorité de débits en dosse et faux quartier. Cette solution empirique fait écho à la Figure 2-15 où l'on a montré que la flèche due au débit et celle due au gradient d'humidité sont de signe opposé dans le cas d'un simple séchage : ainsi on anticipe la déformation attendue du panneau qui « tire à cœur » au premier séchage (depuis l'état vert).

6.2.1.8 Paramètres de la modélisation pour la diffusion

Nous venons de décrire un ensemble de paramètres géométriques estimé suffisant pour la modélisation du panneau de St Didier. Le problème va être traité avec la version locale du code de calcul, la mesure expérimentale réalisée *in-situ* en sera la référence.

Les paramètres matériau ont été estimés à partir d'essais expérimentaux sur du peuplier différent de celui du panneau. Les paramètres de diffusion sont pour la plupart estimés à partir de travaux antérieurs de modélisation utilisant *TransPore* ([Perré, *et al.* (2004)]). Néanmoins une vérification de la cohérence de ces paramètres a été effectuée grâce à des tests de diffusion sur du peuplier récent. Dans ces tests menés par l'équipe du DEISTAF de Florence, des cubes de peuplier ont été isolés sur 4 faces ; la diffusion dans le sens radial et tangentiel a été simulée pour différentes épaisseurs puis confrontée aux mesures de masses effectuées lors d'un saut d'humidité relative de l'air. Les résultats

de la Figure 6-10 nous ont parus suffisants dans un premier temps, surtout compte-tenu de la possible inadéquation matérielle entre le peuplier testé en laboratoire et le peuplier du panneau. Si l'on veut établir des paramètres plus précis, nous devrions recourir à leur identification inverse. Etant donnée la quantité de paramètres, cette question relèverait d'un travail plus approfondi.

Les erreurs entre simulation et expériences visibles sur la Figure 6-11, croissantes avec l'épaisseur, relèvent très probablement d'erreurs sur les paramètres de diffusion. Nous verrons plus loin (§6.2.2.2) quelles en sont les conséquences sur la simulation des déformations d'un panneau peint.

Porosité	0.7	--
Masse volumique	390	kg/m ³
Perméabilité gazeuse (Radiale)	1.5d-16	m ²
Perméabilité liquide (Radial)	1.5d-16	m ²
Résistance à la diffusion (Radial)	0.02	--
Perméabilité gazeuse (Tangentiel)	4.5d-16	m ²
Perméabilité liquide (Tangentiel)	4.5d-16	m ²
Resistance à la diffusion (Tangentiel)	0.01	--

Tableau 6-1: paramètres de diffusion transverse utilisés pour les simulations de panneaux de peuplier. Ces paramètres sont les mêmes (densité à part) que ceux proposés pour la modélisation de la Joconde durant l'étude de 2004 ([Perré, *et al.* (2004)]).

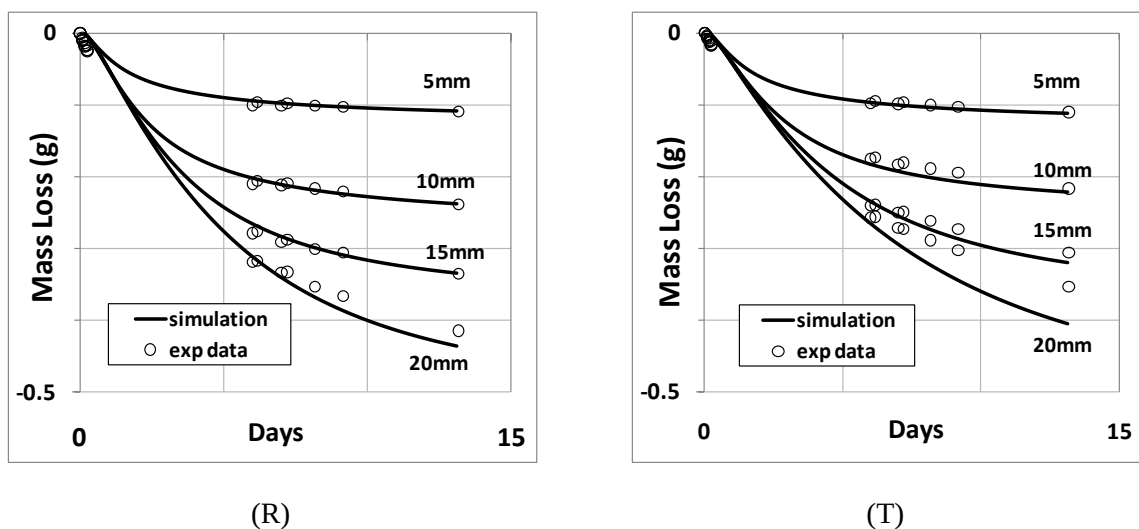


Figure 6-11 : expérience et simulation (TransPore) de perte de masse, exprimée en grammes, durant un séchage de cubes de peuplier isolés sur 4 faces ; (R) diffusion dans le sens radial ; (T) diffusion dans le sens tangentiel.

6.2.1.9 Méthode d'identification et de validation de la perméabilité de la couche picturale

Dans le cadre de notre travail, il n'a pas été envisagé d'estimer de manière quantitative l'influence imperméabilisante de la couche picturale qui dicte l'asymétrie caractéristique de chaque panneau peint. Pour autant il est important de considérer que la peinture n'est pas une barrière totale aux échanges d'humidité et de température. Ceci est montré très clairement par les travaux de [Allegretti et Raffaelli (2008)] qui comparent les propriétés isolantes de différentes couches picturales reconstituée à partir de techniques du Moyen-âge et de la Renaissance.

Nous commencerons par rappeler le modèle qui est utilisé du côté non peint avant de parler du côté peint.

A l'intérieur du matériau, différents modèles de diffusion et de convection sont employés suivant les auteurs et leurs différentes applications (loi de Fick ou diffusion non fickienne, convection par la loi de Darcy, etc.) ; en revanche l'interface air-matériau est presque toujours modélisée par une couche fine caractérisée par des coefficients d'échange pour les flux de chaleur et de vapeur. Ainsi le flux de chaleur surfacique à travers la couche limite est de la forme :

$$q_c = h_c (T_{int} - T_{ext}) \quad [W.m^{-2}] \quad (6-1)$$

Dans *TransPore1D*, le flux de vapeur est défini selon un modèle de film, dont la forme est légèrement plus sophistiquée que l'équation précédente :

$$q_v = h_m c M_v \ln \left(\frac{1 - x_{v,ext}}{1 - x_v} \right) \quad [kg.m^{-2}.s^{-1}] \quad (6-2)$$

Où les coefficients d'échange de chaleur et de masse sont noté h_c et h_m ; M_v est la masse molaire de la vapeur d'eau, c la concentration molaire, x la fraction molaire de la vapeur d'eau. Les valeurs de h_c et h_m adoptées sont : $h_c = 10 W.m^{-2}.K^{-1}$ et $h_m \sim h_c.10^{-3} = 0.01 m.s^{-1}$; dans des conditions de pression ambiante, elles dépendent essentiellement de la vitesse de circulation de l'air à la surface du matériau. Pour la modélisation du côté peint, nous faisons le choix de garder le même principe de couche fine en surface, en négligeant l'épaisseur de la couche picturale dans son ensemble et la diffusion à travers elle, et d'en diminuer les propriétés pour produire l'effet « barrière » attendu. La valeur correspondante des coefficients d'échanges pour la face peinte n'a pas été déterminée. Pour contourner le problème nous avons défini une grandeur adimensionnelle de perméabilité relative (P_{rel}) qui correspond au rapport entre le coefficient d'échange (thermique et massique) entre la face peinte et la face non peinte. Ce rapport peut donc varier entre 0 (face peinte parfaitement imperméable) et 1 (aucune couche picturale). Cette écriture avait déjà été proposée par [Allegretti et Raffaelli (2008)] pour la représentation des résultats expérimentaux. Ces mêmes auteurs montrent que la valeur de P_{rel} pour différentes couches picturales prend des valeurs très diverses, couvrant quasiment toute la plage de 0 à 1.

$$P_{rel} = \frac{h_m^{peinture}}{h_m^{revers}} \quad (6-3)$$

Pour autant cette écriture ne nous en donne pas la valeur. Cette perméabilité relative est l'unique paramètre du modèle qui est identifié grâce aux mesures de flèche sur le panneau : sa valeur est déterminée en minimisant les écarts au carré entre les simulations et les mesures *in-situ*. L'influence du paramètre de perméabilité est illustrée sur la Figure 6-12 sur laquelle nous montrons le résultat de simulations sur une période de vingt jours (prise aléatoirement sur les données climatiques mesurées à St Didier) pour des valeurs de P_{rel} comprises entre 0 et 100 %.

Pour des valeurs de P_{rel} différentes de 0 %, la réponse en termes de flèche est à peu près proportionnelle à P_{rel} . La cinétique des simulations dans le cas d'une imperméabilité parfaite (0 %) est sensiblement différente.

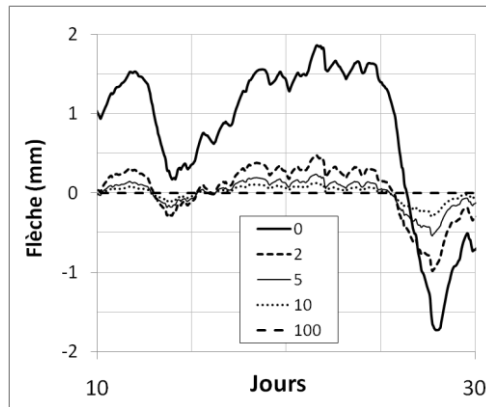


Figure 6-12: influence de la perméabilité relative (P_{rel}) exprimée en [%] sur la flèche calculée par le modèle sur une période de 20 jours prise aléatoirement sur les données climatiques mesurées à St Didier.

Dans la suite nous allons fixer la valeur de P_{rel} en supposant qu'elle ne dépend pas du temps. Nous avons déjà parlé du couplage de structure proposé par [Marcon (2009)] (§3.2.6) qui est un effet à court terme (perméabilité liée à la déformation de surface), mais plusieurs auteurs (voir [Allegretti et Raffaelli (2007)]) avancent l'hypothèse que le vieillissement de la couche picturale à long terme influence la perméabilité (notamment par l'ouverture des craquelures).

6.2.2 Calcul local

6.2.2.1 Solution locale et solution du problème de structure

Peut-on retrouver la solution de structure à partir de calculs locaux ? Peut-on découpler les effets dus au taux d'humidité moyen dans la section et ceux dus aux gradients de taux d'humidité superposés ? Nous avons expliqué que ce n'est pas le cas.

Si l'on s'intéresse uniquement à l'effet des gradients d'humidité le long d'une planche ou l'orientation matérielle varie, peut-on dans ce cas se passer d'un calcul de structure complet ?

C'est ce que nous allons développer ici, en proposant d'intégrer la réponse de deux calculs locaux sur une largeur de planche : le calcul d'une dosse prise très loin du cœur, et celui d'un quartier (respectivement solutions tangentielle et radiale, cf. Figure 6-13).

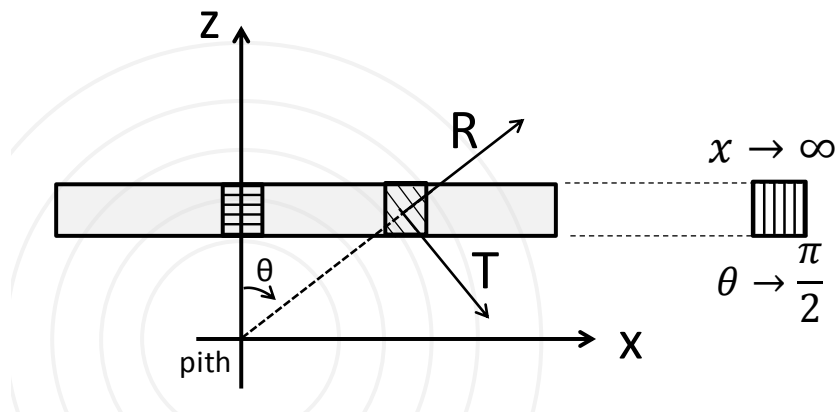


Figure 6-13 : configurations locales extrêmes en fonction de la géométrie de la planche et de son positionnement dans le repère orthotrope cylindrique.

Pour cela on fait l'hypothèse que la solution en courbure est continue (en θ , angle de rotation du repère matériel) et qu'elle vaut :

$$\zeta_\theta = \zeta_T \cos(\theta)^2 + \zeta_R \sin(\theta)^2 \quad (6-4)$$

Pour des problèmes symétriques, une dosse par exemple située à une distance d du cœur, il suffit d'intégrer deux fois la courbure sur une demi-longueur pour obtenir la flèche correspondante.

$$\iint_0^x \zeta dx = \zeta_R \frac{x^2}{2} + (\zeta_T - \zeta_R) d^2 \left(\frac{x}{d} \operatorname{atan}\left(\frac{x}{d}\right) - 0.5 \ln\left(1 + \left(\frac{x}{d}\right)^2\right) \right) \quad (6-5)$$

Pour des situations non symétriques (faux quartier), la flèche est également calculable mais son expression est plus complexe : la flèche d'une planche non symétrique étant de toute façon une grandeur difficile à définir, il faut au cas par cas le faire en correspondance avec le système de mesures expérimentales. Par exemple notre appareil (§6.2.1.5) mesure le différentiel de hauteur entre trois points, et la flèche simulée équivalente est calculée à partir de la connaissance des déplacements de ces points (Figure 6-14).

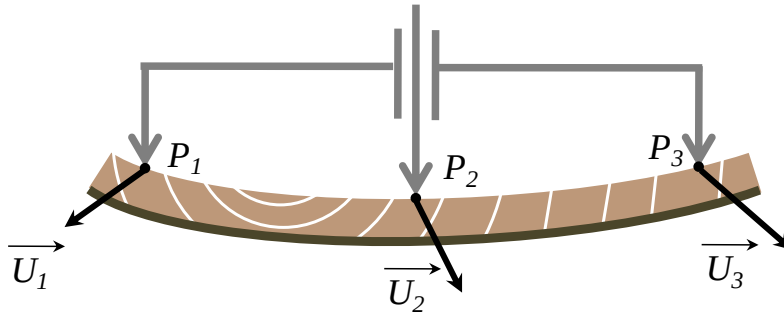


Figure 6-14 : mesure de flèche sur une planche décentrée ; les trois points P1, P2, P3 correspondent aux points de mesure.

Il n'est pas toujours utile d'utiliser un calcul de structure, notamment dans le cas proche d'un quartier, pour lequel la déformation due au débit est nulle : dans ce cas la réponse locale doit donner directement la solution globale (en négligeant le cisaillement mécanique).

Si l'on désire toutefois modéliser de manière qualitative l'effet de la rotation du repère matériel, nous sommes tentés d'ajouter au précédent calcul le calcul analytique de la déformée due aux gradients de propriétés (§2.4.3.3). Pour cela il faudrait déterminer une humidité homogène pertinente pour le calcul, qui n'est pas directement l'humidité moyenne dans l'épaisseur à chaque instant. La réponse au problème de superposition entre la déformation due aux gradients d'humidité et celle due aux gradients de propriétés ne pourra être obtenue, selon nous, que par le calcul de structure complet.

6.2.2.2 Identification sur les données expérimentales et validation du code

Dans la suite nous réalisons un calcul de déformation due aux gradients d'humidité, sans prise en compte l'influence du débit sur l'équilibre. Le calcul est interpolé avec la méthode décrite au §6.2.2.1 en fonction du débit estimé au §6.2.1.7.

Le paramètre de perméabilité a été identifié sur les données expérimentales *in-situ* en minimisant l'écart au carré à la simulation. Cette étape d'identification a été effectuée sur une partie des données expérimentales seulement (1 an environ)(voir Figure 6-15(a)). Une fois le modèle complètement

identifié, nous avons simulé la seconde période de mesures : cette seconde étape, dite de validation, consiste à tester le comportement prévisionnel du modèle sans en modifier les paramètres (Figure 6-15(b)).

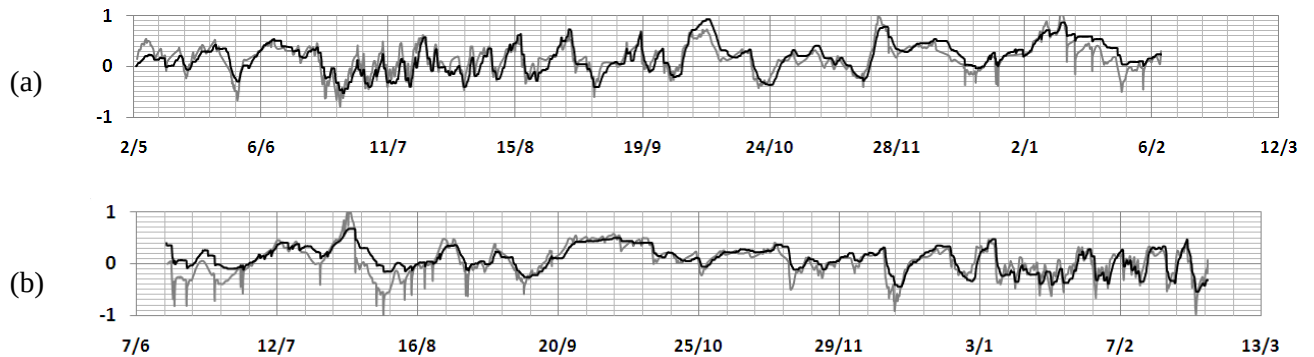


Figure 6-15 : mesures expérimentales (noir) et simulation (gris) des variations de flèche sur le panneau de l'église St Didier ; (a) période de recalage de la perméabilité de couche picturale ; (b) période de prévalidation du code.

En focalisant sur certaines zones des données de la Figure 6-15, nous avons remarqué quelques décalages temporels (parfois de quelques heures) entre les simulations et les valeurs expérimentales de flèche. Ceci est une conséquence certaine de l'erreur commise sur les paramètres de diffusion (cf. § 6.2.1.8). Dans le cadre d'une telle étude nous manquons évidemment d'information pour ajuster tous ces paramètres.

Nous avons reproduit ces simulations en considérant un comportement mécanique hygro-élastique (sans phénomènes différés). Il apparaît que le comportement différé n'a que très peu d'influence sur la flèche d'une planche libre (du moins lorsqu'on l'observe sur une échelle de temps annuelle). En revanche il est évident que le comportement devient déterminant si l'on s'intéresse aux contraintes à l'intérieur de la planche, ou si nous considérons un panneau avec des conditions aux limites non nulles.

Au début de chaque simulation, faute d'information, on fait l'hypothèse de champs de déformation et de contrainte nuls, et d'un champ d'humidité homogène dans toute la planche ; pour cette raison, les simulations de la Figure 6-15 approchent plus difficilement le début des courbes expérimentales.

Pour traiter le problème de courbure d'un panneau libre en déformation, il apparaît donc clairement que le phénomène prédominant (au moins sur 1 an) reste l'asymétrie des conditions aux limites pour les échanges de masse. La valeur de P_{rel} ainsi déterminée dans le cas du « Couronnement d'épines » est de 5 %. Le comportement en revanche est déterminant pour l'estimation des contraintes.

D'après le comportement identifié sur les essais matériaux, les contraintes simulées ne dépassent pas les 0.5 Mpa en valeur absolue, ce qui signifie d'après les essais matériau analysés que l'on n'attend pas de niveau de contrainte critique pour le panneau en situation d'exposition. Pour un matériau hygro-élastique (sans phénomène différé), les simulations prévoiraient des contraintes de compression de l'ordre de 1.3 Mpa.

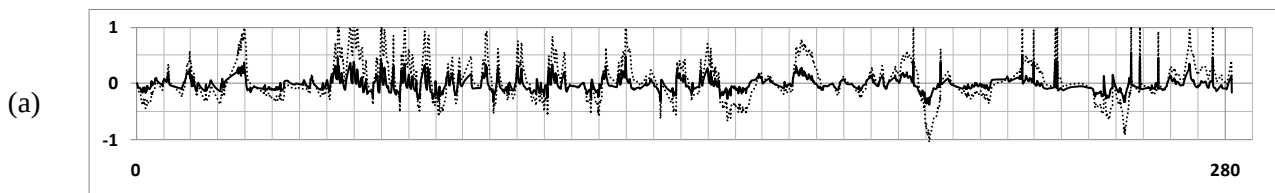


Figure 6-16 : niveaux de contraintes du côté non peint du panneau, simulé sur la période de la Figure 6-15(a) avec un comportement hygro-élastique (pointillés) et avec le comportement total observé sur les essais matériau.

6.3 Genèse de la courbure permanente

Nous disposons d'un modèle de comportement prenant en compte les déformations permanentes et l'endommagement qui peuvent survenir lors d'un gonflement empêché. Ce comportement, une fois intégré dans une structure (multicouche) doit pouvoir rendre compte des effets attendus si le niveau de contrainte en compression atteint les limites déjà établies. Deux questions se posent alors : peut-on reproduire ces niveaux de contrainte critique dans un panneau libre de se déformer ? Quel serait alors l'effet d'une telle modification du comportement sur la structure ?

6.3.1 Probabilité des déformations permanentes dans l'église

Nous avons vu que le niveau des contraintes modélisées dans le cas d'étude ne dépassaient pas les 0.5Mpa en valeur absolue pour une direction matérielle comprise entre T et R, soit entre 75 et 40 % par rapport aux limites estimées dans les deux directions (§4.4.2). Dans la situation d'exposition de l'église, nous n'attendons donc pas des niveaux de contrainte critiques pour le panneau, et ce malgré un environnement extrêmement variable (saisons, chauffages durant les offices...).

Nous pourrions supposer que le niveau de contraintes modélisé dépend de la perméabilité relative établie entre la face peinte et la face arrière. Il est vrai que la perméabilité relative a un effet déterminant pour l'amplitude de la courbure (et de la flèche), comme cela a été montré au §6.2.1.9. En revanche elle influe très peu sur les niveaux de contrainte moyens dans le panneau : la situation la plus défavorable en termes de courbure ($P_{rel} = 0$) n'est pas forcément la plus défavorable en termes de contraintes. Pour illustrer ceci, il faut choisir un point de l'épaisseur (une couche) où l'on exprime les contraintes.

Si l'on s'intéresse à la contrainte σ_{xx} sur la face arrière du panneau (face non peinte), on constate qu'elle augmente avec P_{rel} : cela signifie que contrairement à la flèche, la contrainte sur la face arrière est maximale pour une situation symétrique, et minimale pour une configuration fortement asymétrique.

6.3.2 Cas théorique pour la description des déformations permanentes en structure

Nous proposons d'illustrer les phénomènes de déformation permanente et leur contribution à la courbure permanente sur un cas théorique, un « accident » climatique (modification rapide de l'environnement) sur notre modèle (partant d'un état vierge de contraintes). Cet accident est volontairement exagéré dans son amplitude, et ne prétend pas représenter un climat plausible : il s'agit d'un saut d'humidité de $HR = 50\%$ à $HR = 80\%$ en 10 minutes (à température constante de 20°C). Les conditions d'échanges sur les deux faces du panneau sont maintenues aux valeurs utilisées sur le précédent cas d'étude.

Le saut brusque d'humidité provoque donc des gradients dissymétriques de taux d'humidité dans l'échantillon. L'évolution de ces gradients est représentée à la Figure 6-17.

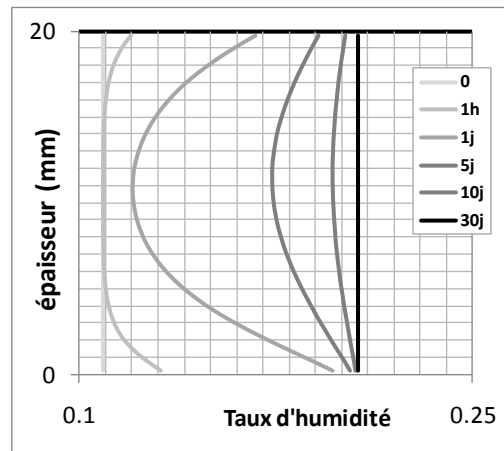


Figure 6-17 : évolution du profil d'humidité dans l'échantillon depuis un taux d'humidité initial de 0.11 jusqu'à un état final d'environ 0.21, pour une valeur de P_{rel} de 0.05 ; la couche pictural est située en haut, schématisée par un trait noir épais. Chaque courbe représente le gradient à un instant donné en heure (« h ») ou jours (« j ») donné sur la légende.

La déformation de flèche qui en résulte est donnée pour une planche parfaitement tangentielle (dosse très loin du cœur) de 300mm de largeur (Figure 6-18(a)). L'utilisation d'une planche théorique dont les axes d'orthotropie sont alignés avec les axes de la plaque permet de ne pas considérer la contribution du débit dans la déformation globale, et par la même de simplifier les commentaires. Sur la Figure 6-18(b) nous montrons les courbes de contrainte en fonction de la déformation corrigée (cf. §4.2.4.2) sur la couche arrière du panneau. Différents modèles sont présentés sur ces deux graphiques :

- (1) le modèle complet (référence) identifié sur les données expérimentales (§4.4),
- (2) le modèle (1) avec un paramètre d'endommagement nul ($\lambda=0$),
- (3) le modèle (1) sans *compression set* ($\sigma_y \rightarrow -\infty$).

Le modèle (1) qui est le modèle de référence, est en quelque sorte un intermédiaire entre le modèle sans critère limite (3) et le modèle avec endommagement total.

Le test qui est réalisé est un test de type *flying wood* (saut d' HR entre 50 et 80 %). Le modèle (3) (sans plasticité) est la référence qui montre l'effet attendu d'inversion de la courbure durant l'humidification asymétrique (effet dû aux couplages mécanosorptifs). Le modèle complet (1) reproduit cette tendance avec une légère augmentation de la flèche finale : cet écart est assimilé à une flèche permanente (de signe positif, c'est-à-dire avec le centre du rayon de courbure du côté non peint).

Le modèle (2) est un modèle pour lequel on a privilégié la déformation permanente par rapport à l'endommagement, et pour lequel le paramètre λ est fixé à la valeur 0 (toute contrainte dépassant la contrainte limite produit dans ce cas de la déformation permanente et non de l'endommagement). Ce dernier modèle montre une déformation finale beaucoup plus élevée, illustrant le rôle effectif des déformations permanentes locales dans la structure de type plaque.

La réponse du modèle (1) est effectivement « intermédiaire » entre (2) et (3) pour l'échelle de la structure, mais localement les niveaux de contrainte et de déformation ne sont pas déductibles des deux autres modèles (Figure 6-18(b)).

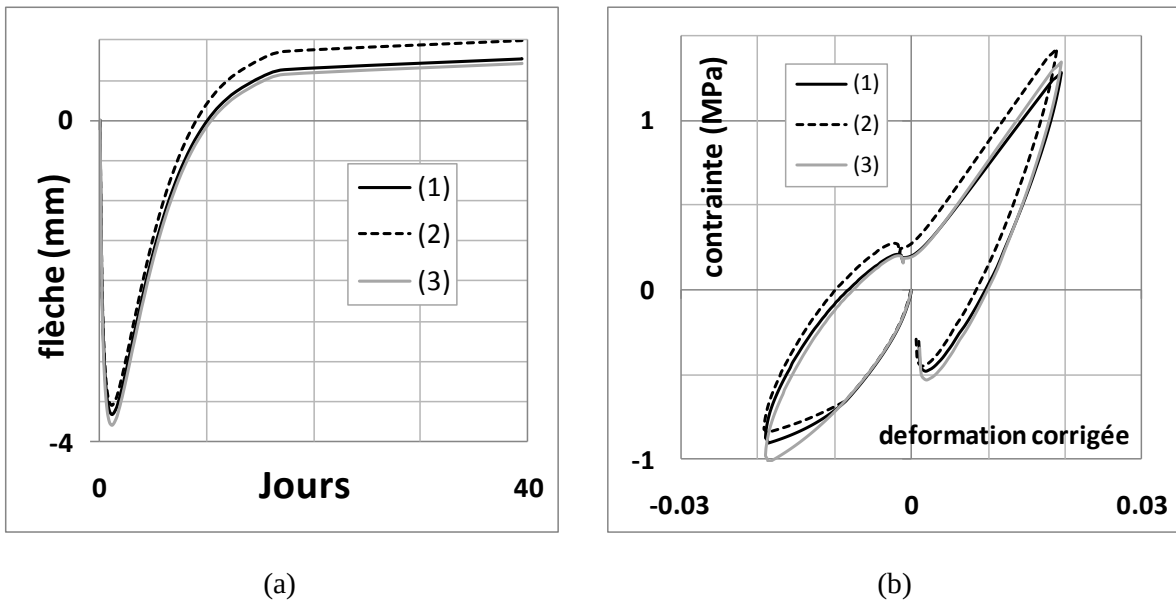


Figure 6-18 : effet de l'accident climatique à proximité du panneau en termes de flèche (a) pour une planche de 300mm de largeur et en termes de contrainte σ_{xx} en fonction des déformations $\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{\alpha xx}$ dans la couche extérieure du côté non peint.

Cette lecture des courbes nous donne plusieurs indications :

- la présence éventuelle de déformations permanentes dans les couches de notre plaque joue un rôle important sur la déformation de structure,
- la localisation des déformations permanentes engendre une courbure positive (du même signe que la courbure permanente couramment observée,

Dans un essai expérimental, il est très difficile de distinguer dans la structure planche les déformations permanentes (contribuant éventuellement à une déformation permanente) et les déformations réversibles. Par exemple dans le cas de l'essai de *flying wood*, il est difficile de quantifier la partie réversible (dans un chargement de structure) des déformations de couplage hygromécaniques (mécanosorption).

Le modèle en série pour lequel nous avons opté permet de manipuler ces concepts indépendamment, car il distingue la partie des déformations de couplage symbolisée par les déformations mécanosorptives ε_{ms} , et la partie des déformations permanentes ε_p , les deux étant purement additives.

Sur la Figure 6-19, on représente les profils de déformations permanentes le long de l'épaisseur ($\varepsilon_p(z)$) à la fin du test : le profil est de nouveau tracé pour les deux modèles comprenant des déformations permanentes, à savoir (1) qui a été estimé sur les essais matériau et (2) son équivalent sans endommagement. Les déformations permanentes sont localisées principalement du côté non peint, mais certaines apparaissent également sous la couche picturale qui n'est pas parfaitement imperméable. Les niveaux de déformations permanentes sont de l'ordre de 0.1 % de déformation, et sont supérieurs dans le cas où le modèle ne contient pas d'endommagement (2).

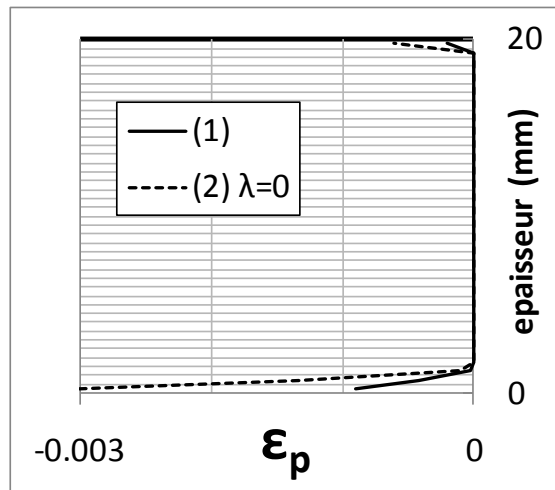


Figure 6-19 : profils de déformations permanentes (ε_p) le long de l'épaisseur de la planche (20mm) ; les couches de discrétisation sont au nombre de 40, elles sont symbolisées par le quadrillage horizontal. Le modèle identifié sur les essais matériau (1) est comparé à son équivalent sans endommagement (2). La couche picturale est située en haut ($z=20\text{mm}$).

Quelle information pouvons-nous tirer de ces profils de contraintes ? Ce champ de déformations à lui seul n'est pas cinématiquement admissible sous l'hypothèse associée des sections planes : il nécessite un champ de contraintes associé qui le rééquilibre. Supposons l'existence de ce champ de contraintes ($\sigma_{xx}(z)$) pour un matériau élastique, alors il vérifie l'équilibre :

$$\begin{aligned} \int \sigma_{xx} dz &= 0 \\ \int \sigma_{xx} z dz &= 0 \end{aligned} \quad (6-6)$$

La relation cinématique sur les déformations est de la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_e + \varepsilon_p(z) &= e + \chi z \\ \sigma_{xx} &= E \varepsilon_e \end{aligned} \quad (6-7)$$

Sur la Figure 6-20 nous avons représenté le champ de déformation élastique satisfaisant la cinématique des sections droites et vérifiant l'équilibre pour un champ de déformations permanentes obtenu à la Figure 6-19. Pour ce matériau élastique, la courbure permanente engendrée est d'environ $3.10^{-5} [\text{m}^{-1}]$ pour le modèle (2) et $1.10^{-5} [\text{m}^{-1}]$ pour le modèle (1), soit pour une planche de 300mm de largeur, des flèches permanentes de 0.3mm et 0.1mm.

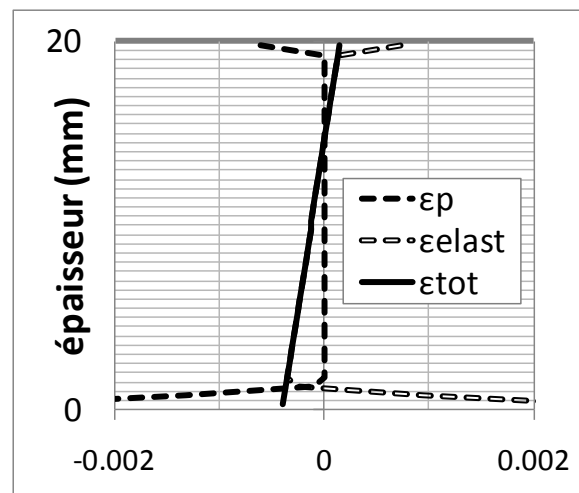


Figure 6-20: profil de déformation dû aux déformations permanentes – profil de déformation permanente (ϵ_p) obtenus Figure 6-19 et profil élastique (ϵ_e) réalisant l'hypothèse cinématique des sections droites et l'équilibre de la structure.

Sous l'hypothèse de complète réversibilité des phénomènes mécanosorptifs (possible pour une couche isolée pour laquelle il suffit de cycliser sans chargement, mais pas évident pour une structure), le profil des déformations permanentes le long de l'épaisseur génère de la courbure permanente à l'équilibre élastique. Néanmoins la courbure permanente ainsi calculée reste faible devant les effets observés sur les panneaux peints.

6.3.3 Conclusion sur la courbure permanente

D'après les essais expérimentaux nous avons identifié un comportement (§4.4) susceptible de modéliser correctement les niveaux de contraintes et de déformations dans un panneau peint instrumenté. Les niveaux de contrainte calculés en situation d'exposition dans l'église suggèrent que l'apparition des déformations permanentes est peu vraisemblable.

Des climats plus critiques sont susceptibles d'être apparus au cours de l'histoire d'un panneau. Pour autant nous ne sommes pas capables de dire de manière pertinente quels sont ces climats. La simulation permet alors de tester un cas théorique d'accident, c'est-à-dire l'effet d'un saut brusque d'humidité à proximité du panneau (ici de HR = 50 % à HR = 80 %).

Dans ces conditions le modèle prédit l'apparition de déformations permanentes de long de l'épaisseur, certaines de ces déformations permanentes apparaissant même sous la couche picturale (Figure 6-18). Ce champ de déformations permanentes impose à l'équilibre une courbure permanente de la structure : ces déformations permanentes correspondent à une flèche permanente de quelques dixièmes de millimètres pour une planche de 300mm de largeur.

Cette analyse remet partiellement en cause l'idée selon laquelle le *compression set* à l'arrière du support (déformations permanentes) cause la courbure permanente des panneaux peints. Néanmoins, la question du blocage des contraintes à l'intérieur de la structure (effets mécanosorptifs dans notre modèle) et l'effet de l'endommagement sur la déformation à long terme doivent être analysés plus en détail.

Dans cette section nous n'avons pas évoqué le rôle mécanique de la couche picturale elle-même dans l'apparition de la déformation permanente. Suivant le type de préparation, la couche picturale peut avoir une rigidité du même ordre de grandeur que le bois ; dans ce cas elle pourrait l'asymétrie des déformations permanentes suivant l'épaisseur et par conséquent augmenter la courbure permanente.

6.4 Outils pour la prédiction

6.4.1 Enjeux des prédictions

Nous espérons avoir montré jusqu'ici en quoi des simulations mécaniques couplées avec des essais expérimentaux peuvent contribuer à la compréhension des phénomènes mis en jeu dans les panneaux peints. Nous allons faire un dernier pas qui n'est certes pas le plus facile : nous allons parler de prédiction du comportement.

A l'interface entre la conservation et la restauration se situe le problème déjà évoqué du transport des panneaux du lieu d'exposition vers des ateliers de restauration. Disposant d'un modèle, nous cherchons à lui appliquer différentes ambiances (modification de l'ambiance), simulant ainsi son déplacement d'un point à un autre. L'objectif à long terme serait de donner un avis favorable ou défavorable au déplacement d'un panneau en vue de sa restauration. Cet objectif ambitieux étant formulé, nous allons proposer une méthode générique pour la prévention de risque à partir de notre cas d'étude et des simulations dont nous disposons.

6.4.2 Démarche générale

L'idée est de simuler des climats typiques, ou accidents climatiques, sur notre panneau modélisé, et d'analyser les résultats en termes de variation de flèche. Evidemment la flèche n'est pas toujours le critère pertinent : par exemple dans le cas de risque associé à la propagation de fissure, c'est plutôt le champ de contraintes qu'il faut analyser.

Connaissant l'histoire des déformations sur ce panneau pendant plus de deux ans, nous connaissons l'amplitude maximale de déformation qu'il a connu ; le tableau étant aujourd'hui en bon état, nous prendrons cette valeur de variation de flèche maximale connue comme une valeur critique qu'il convient de ne pas dépasser.

La seconde étape consiste à choisir des climats typiques qui consistent en une variation d'humidité à température constante. Pour étudier l'effet des cycles journaliers, annuel ou autres, on peut proposer de regarder l'influence de sollicitations sinusoïdales par exemple. En revanche si l'on veut s'intéresser à un événement ponctuel de type déplacement d'œuvre, journée pluvieuse, etc., que l'on a qualifié d'accident, il sera préférable de travailler avec une sollicitation de type créneau.

Chacune de ces sollicitations extérieures est définie par deux paramètres : leur amplitude (A) autour d'une valeur moyenne fixée à 50 % (valeur moyenne observée dans l'église pour notre cas d'étude), et une période (P) définissant la durée de la perturbation dans le cas d'un créneau, et la période du cycle dans le second cas. Par exemple, si l'on choisi de déplacer le panneau pour une période P depuis l'église où règne une humidité moyenne de $HR_{\text{église}}$ vers un atelier où elle vaut HR_{atelier} , on sera dans le cas d'un créneau de période P et d'amplitude $A = (HR_{\text{atelier}} - HR_{\text{église}})$.

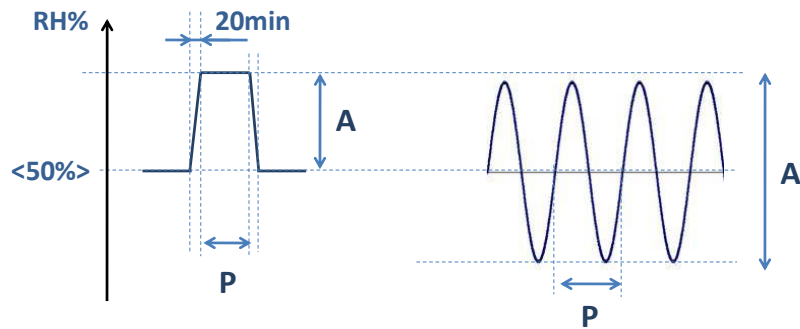


Figure 6-21 : allure des chargements créneau et sinusoïde. A est l'amplitude de la variation d'humidité relative isotherme attendue autour de la valeur moyenne dans l'église (50 %) ; P est la durée de l'évènement dans le cas de l'accident (créneau) et la période du cycle dans le cas de la sinusoïde.

Ici on illustre la démarche par des résultats de la sollicitation type accident sur le panneau d'étude (Figure 6-21). Les résultats des simulations sont présentés sous formes d'iso-flèches (même valeur de variation de flèche entre l'état initial à 50 % et l'état final) pour différentes valeurs de A et P, Figure 6-22. La zone de risque, est délimitée par la courbe iso-flèche correspondant à la valeur critique (1.5mm). Pour éviter d'imposer une variation brutale d'humidité relative lors du créneau, nous avons imposé une rampe entre l'humidité de départ et celle d'arrivée, comme indiqué sur la Figure 6-21.

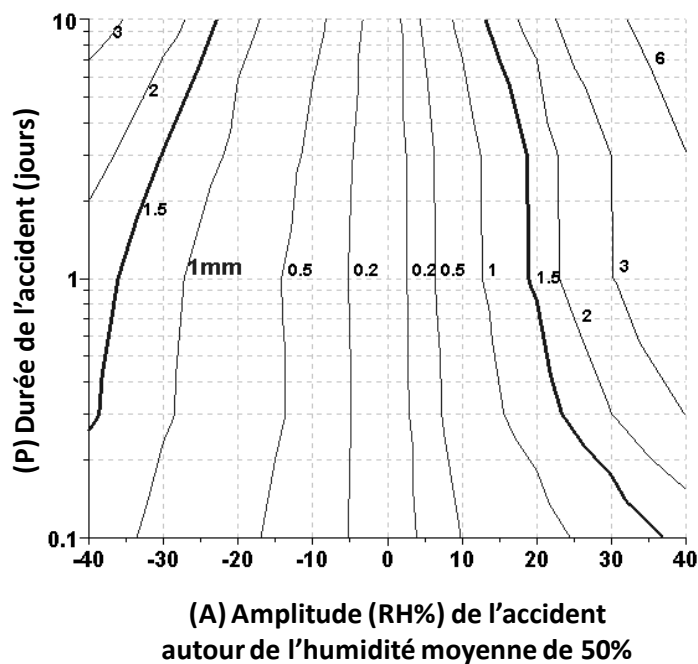


Figure 6-22 : effets simulés d'un accident d'humidité relative à température constante, exprimés en termes de variation de flèche pour la planche supérieure du cas d'étude ; graphique à deux entrées (durée de l'accident en jours (axe logarithmique) et amplitude de la variation de RH en % par rapport à la valeur moyenne dans l'église, les traits représentent des iso-flèche ; la variation maximale (1.5mm) observée sur une période de deux ans grâce aux relevés expérimentaux est reportée en trait épais.

La Figure 6-22 met en avant une dissymétrie entre séchage et humidification par rapport à l'humidité moyenne de référence. Le phénomène d'hystérésis lié à l'état d'équilibre hygroscopique du bois, pris en compte dans nos modèles, est probablement important dans cet effet. Il faut remarquer

toutefois que le jeu de simulations présenté ne prend pas en compte l'historique du panneau, ni en termes d'humidité, ni en termes d'état mécanique.

Sur un cas d'étude donné qui a été suivi au préalable, et pour anticiper un futur déplacement de l'œuvre, il serait particulièrement intéressant d'arriver à caractériser le saut d'humidité attendu, de simuler la réaction du panneau et de la comparer ensuite à la réponse effective.

6.4.3 Effet des chauffages hivernaux

Le modèle numérique associé à un objet du patrimoine permet également de se poser des questions sur des événements de conservation antérieurs. Ici il s'agit de l'effet des chauffages hivernaux à proximité du panneau, signalés lors de l'analyse des données expérimentales (§6.2.1.6). On se propose de recréer numériquement le climat à proximité du panneau s'il n'y avait pas eu de chauffage, et de l'appliquer à notre modèle.

La procédure de simulation de climat est relativement simple : elle consiste à détecter les zones temporelles de chauffage et à les remplacer par un signal interpolé entre les instants sans chauffage situés avant et après. La détection des moments de chauffage et l'interpolation des courbes dépendent de deux paramètres ajustés arbitrairement. Le climat ainsi généré est montré à la Figure 6-23 : les sauts de température, mais également les sauts d'humidité de l'air qui en résultent sont très largement atténués. Les deux climats (avec et sans chauffage) sont appliqués au calcul local utilisé dans les précédents chapitres, et aboutissent aux résultats de la Figure 6-24, montrant l'évolution de la flèche du panneau.

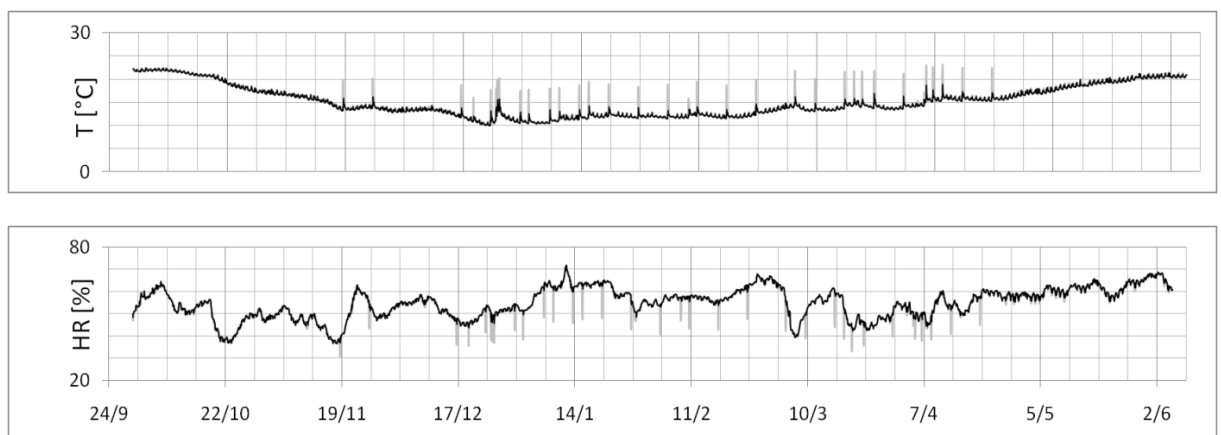


Figure 6-23 : climat durant une période 300 jours ; climat mesuré dans l'église (trait gris), climat hypothétique obtenu en réduisant numériquement l'effet du chauffage (trait noir).

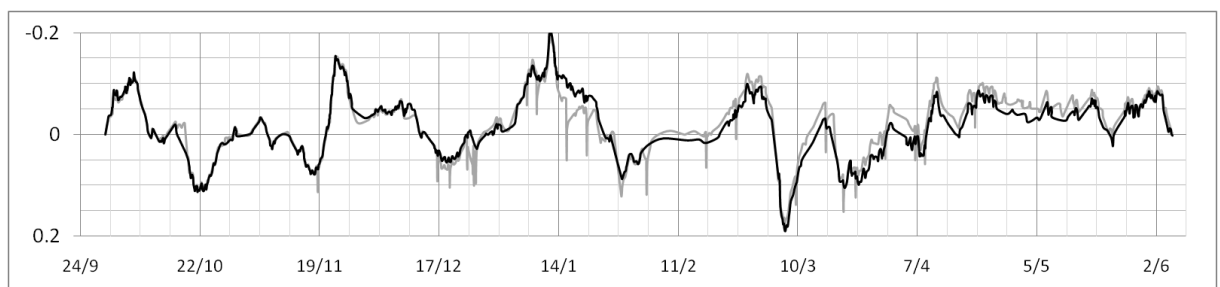


Figure 6-24 : résultats des simulations pour les climats avec et sans chauffage en termes de variation de la flèche du panneau (en mm).

Ce test nous permet de rappeler un point important : ces périodes de séchage provoquent de manière dominante de la traction sur les couches extérieures (face arrière comme face peinte), et de la compression d'amplitude plus faible vers le cœur. Nous avons soutenu que le danger principal pour le matériau était la compression qui a des niveaux suffisants pouvaient produire de l'endommagement et/ou des déformations permanentes ; nous pourrions donc penser que ces interventions (involontaires) n'ont pas d'effet critique pour l'œuvre.

En effet l'amplitude des effets du chauffage (en termes de structure) reste relativement faible (de l'ordre de quelques dixièmes de millimètres pour la planche considérée sur la Figure 6-24). La comparaison montre néanmoins que l'apport des séchages à la déformation n'est pas une contribution superposable, et qu'elle modifie l'histoire hygromécanique du panneau. Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que l'on a soustrait un effet de signe constant (séchages) et que pour autant le différentiel de la réponse n'est pas de signe constant.

Par ce test, nous proposons donc une méthode d'évaluation quantitative des effets d'une intervention sur l'œuvre en termes de climats. Les conséquences de telles modifications sont difficiles à interpréter car la non-linéarité de la réponse est à la fois une fonction de l'histoire passée, mais également de l'histoire à venir. Les problèmes soulevés par ce genre d'analyse numérique permettent toutefois d'approfondir notre compréhension des phénomènes en envisageant des tests inconcevables en pratique.

7. Conclusion générale

7.1 Bref retour sur les travaux effectués

Au début de ce mémoire nous avons constaté le problème de courbure des panneaux peints sur bois, problème familier des professionnels de la conservation et de la restauration de ces œuvres. La « courbure » des panneaux peints a depuis longtemps été reliée à la présence de la couche picturale qui crée une dissymétrie des échanges gazeux avec l'environnement, et donc une dissymétrie de répartition de l'eau dans le support. Nous souhaitons alors analyser de manière quantitative ces phénomènes.

Nous avons délimité le cadre de notre étude à une planche de bois unique, servant de support à une couche picturale. Une géométrie standard a été proposée en vue de lui appliquer les outils théoriques de la mécanique des solides, l'enjeu étant d'expliquer au moins en partie la genèse passée, les variations présentes et l'évolution future de la courbure du support bois des œuvres.

Première difficulté, nous avons souligné la difficulté de définir un état initial pertinent pour notre modèle : cet état initial devant prendre en compte l'histoire passée du bois, dans et hors de l'arbre. Il nous a fallu négliger l'histoire antérieure du support (antérieure à l'existence de la couche picturale) pour simplifier le problème : or on sait que l'histoire du matériau a souvent des conséquences non négligeables sur sa mise en œuvre et sa stabilité à long terme. Il serait intéressant d'analyser ces questions plus en détail.

En centrant notre approche sur la question des panneaux peints, nous avons fait le choix de traiter plusieurs problèmes complexes de manière frontale, à savoir : la formulation du comportement hygromécanique du bois, l'instrumentation *in-situ* des panneaux, le développement de code numérique, etc. A chaque étape nous avons souhaité insister sur le lien qui existait entre ces questions et notre objet d'étude. Devant l'ampleur de la tâche, nous avons favorisé les collaborations avec d'autres laboratoires. Une grande partie de notre travail a donc consisté à faire la synthèse des résultats obtenus par nous et par nos collègues.

L'exploitation des essais expérimentaux et leur synthèse a permis de définir un jeu étendu de paramètres pour un même bois de peuplier (*Populus alba*, d'une densité anhydre de 0.36), essence très représentée dans les panneaux peints de la Renaissance italienne. Le fluage viscoélastique radial et son interaction avec le taux d'humidité du bois a été mesuré expérimentalement, permettant après analyse de modéliser une partie importante des phénomènes différés attendus dans les panneaux de la même essence. L'analyse collaborative des résultats du travail de thèse de [Mazzanti (2007)] a mis en évidence des phénomènes complexes d'endommagement et de déformation permanente du matériau pour des situations de gonflement empêché dans la direction tangentielle du peuplier. Ces observations dans les différentes directions du plan transverse ont été synthétisées pour conduire à un modèle rhéologique adapté au plan transverse, capable de décrire qualitativement et quantitativement des situations mécaniques complexes faisant intervenir des couplages hygromécaniques dans le domaine hygroscopique.

Réciproquement, la formulation des comportements et leur écriture numérique, appliquées aux essais expérimentaux, ont permis d'approfondir notre lecture des résultats. Plus important encore, cela

nous a permis de dresser un pont entre les essais matériau (chapitre 4) et les sollicitations mécaniques dans un support de panneau peint, échelle de la structure modélisée au chapitre 5.

Le travail mené sur les lois de comportements, incluant également le travail sur les hygro-verrous relégué en annexe 2 pour des questions d'articulation du mémoire, nous ont permis d'étendre notre boîte à outils pour la description d'essais en mécanique du bois. Dans l'ensemble de nos activités de modélisation, nous avons insisté sur l'interaction du taux d'humidité et de ses variations dans le domaine hygroscopique avec les propriétés mécaniques du matériau.

Un effort soutenu et original au regard de la littérature a été mis au service de la formulation du problème de plaque orthotrope cylindrique pour des planches de bois. Cette façon de procéder, opposable par exemple à l'utilisation d'un code élément finis 3D existant, a certainement amélioré notre compréhension du problème, distinguant chacun des phénomènes et leur modélisation, à savoir : l'influence des gradients de propriétés, influence des gradients d'humidité, l'effet des cisaillements induits par retrait-gonflement, etc. Deux codes distincts ont émergé de cette approche : une version locale permettant de traiter les courbures homogènes (en négligeant les cisaillements), et une version de structure intégrant l'orientation du repère orthotrope cylindrique et permettant dans le futur d'intégrer des chargements complexes (ex : contacts partiels avec un cadre, contact avec d'autres planches). Les deux versions du code mécanique s'appuient sur un code de transfert de chaleur et de masse préexistant (*TransPore1d*) qui fournit l'évolution 1d du champ de taux d'humidité dans l'épaisseur de la planche. La capacité de calcul de la version locale permet déjà de simuler les variations dimensionnelles d'un panneau peint sur plusieurs années, tandis que la version de structure est aujourd'hui en étape de validation (au niveau des éléments finis).

Les outils numériques mis en place ont été utilisés conjointement avec des mesures expérimentales *in-situ* (montages sur mesure pour les relevés en continu, et mesures optiques ponctuelles) sur un panneau peint conservé dans une église. L'ensemble de l'étude a permis d'établir un diagnostic mécanique original d'une œuvre en situation de conservation. Le jeu de données obtenu sur plusieurs années nous renseigne sur l'ambiance de conservation et la réaction du support bois qui en découle. Ces données nous ont permis de recalibrer un modèle numérique de plaque adapté à l'œuvre étudiée.

L'outil numérique a également été mis au service d'une discussion plus théorique sur la genèse de la courbure permanente dans les panneaux peints sur une face. Seules les hypothèses en rapport avec le comportement mécanique du bois à court terme ont été discutées de manière approfondie : les phénomènes éventuels de fatigue du matériau n'ont par exemple pas été traités, et les propriétés mécaniques de la couche picturale ont été négligées. Dans ce contexte, un regard critique a été porté sur l'influence des déformations permanentes en compression dans la courbure permanente des panneaux peints (hypothèse impliquant la *compression set* largement évoquée dans la littérature).

Enfin, à l'aide du modèle identifié, nous avons proposé une méthodologie pour la prédiction des variations à court terme, notamment pour l'évaluation des risques associés à un éventuel transport de l'œuvre.

A l'issue de ce travail, nous allons proposer quelques pistes pour la poursuite de l'étude, dont certaines sont déjà en cours au laboratoire.

7.2 Perspectives et projets en cours

Au cours du mémoire nous avons laissé entrevoir deux questions distinctes : l'étude des panneaux peints, c'est-à-dire de leur comportement mécanique à court terme, de leur histoire passée et de leur conservation dans le futur, et une seconde question non moins générale qui est le comportement hygromécanique du bois, notamment dans les directions transverses aux fibres. En tant que mécaniciens du bois nous avons proposé une approche basée sur la seconde question pour répondre à

la première. De la même manière les perspectives dont nous allons discuter auront trait, tantôt aux panneaux peints, tantôt aux sciences du bois, et nous l'espérons, aussi souvent que possible aux deux.

7.2.1 Données expérimentales

Pour les raisons évoquées dans ce mémoire, le comportement dans le plan transverse revêt une importance particulière dans l'application panneaux peints (retraits-gonflements, orientation matérielle due aux cernes, etc.). Nous savons aussi que la direction privilégiée pour les essais sur le bois est plutôt la direction longitudinale. Les essais futurs visant à caractériser le plan transverse seraient donc les bienvenus. Devant la difficulté expérimentale qui caractérise les études sur le bois, il est nécessaire de définir quelques priorités en rapport avec notre application.

L'effort de collaboration avec l'équipe du DEISTAF de Florence, tant du point de vue des mesures sur panneaux peints que sur les essais concernant l'échelle du matériau (peuplier), doivent être poursuivis parce qu'ils suscitent des échanges très riches. Les discussions en cours aujourd'hui concernent principalement les points suivants :

- La mise en place de nouveaux essais matériau discriminants pour nos modèle, notamment sur les questions de plasticité et d'endommagement liés au gonflement empêché. Ces essais doivent contribuer également à enrichir la base de données mécanique sur le peuplier (*Populus alba* L.),
- Une nouvelle analyse des systèmes de mesure actuels sur panneaux peints (type *Deformometric Kit*) concernant lesquels nous avons formulé certaines réserves. Ces discussions ne visent pas nécessairement à modifier leur mise en œuvre (et encore moins à les abandonner), mais doivent contribuer en revanche à une meilleure interprétation des résultats déjà collectés (notamment en les confrontant aux différents modèles).

7.2.2 Lois de comportement pour le bois

Nous avons vu que les outils à notre disposition suffisaient pour l'instant à décrire un grand nombre de comportements complexes (au moins à l'échelle matériau). Le travail de confrontation des simulations aux essais expérimentaux doit être étendu dans la mesure du possible à un maximum d'essais sur la même essence. Les hygro-verrous devraient être testés dans des configurations autres que le fluage (notamment sur les essais de gonflement empêché) ; la principale difficulté sur ce point a surtout été un manque de temps.

7.2.3 Les techniques optiques

Les techniques optiques sont utilisées de longue date sur les panneaux peints (§6.2.1.2), et par ailleurs le développement des techniques de corrélation d'image dans les dernières décennies en font des outils très prometteurs.

Pour autant les travaux évoqués sur les panneaux de bois peints (§6.2.1.2), y compris les nôtres (§6.2.1.4 et [Dureisseix, *et al.* (2011)]), se sont limités à l'étude des déplacements hors plan, c'est-à-dire des déplacements perpendiculaires au plan original du panneau, ceux contribuant à la courbure. Or ce n'est pas forcément suffisant pour comprendre l'ensemble du problème. Nombre de mesures optiques sont ainsi réalisées pour obtenir la forme de l'œuvre, et plus rarement pour obtenir les variations de cette forme. Lorsqu'on s'intéresse à la corrélation d'image (comparaison de deux instants différents), alors il faut garder à l'esprit l'importance des retrait-gonflements dans le plan transverse (plusieurs pourcents de déformations), et dans le plan de la plaque, avant de mettre la discussion technique (mesure 3D) à l'ordre du jour. De l'écart d'ordre de grandeur entre les retraits-gonflements en surface et les déplacements hors plan pourraient émerger des difficultés expérimentales dont nous ne sommes pas encore familiers.

A l'issue de notre étude, nous comprenons d'autant mieux l'intérêt d'étendre la mesure optique au 3D que nous sommes désormais en recherche d'outils expérimentaux pour valider le code numérique (lui-même 3D, tout du moins en déplacements), à la fois sur la pertinence de la représentation de type plaque (qui pourrait être mise en cause par des effets de bords importants) et sur la formulation du comportement 3D.

Le développement récent des techniques de corrélation d'images 3D dans le laboratoire (au sein de l'équipe de thermomécanique des matériaux, ThM2) nous invite aujourd'hui à reconsidérer le problème de la mécanique des plaques bois en travaillant sur des panneaux de laboratoire plutôt que sur des objets de musée. En parallèle des avancées en cours sur la modélisation des plaques avec cisaillement, nous proposons donc de mesurer des champs de déplacements et de déformations 2D ou 3D à l'aide d'un système stéréoscopique et d'un logiciel de corrélation d'images (système récemment acquis par les équipes ThM2 et MAB).

Le fait de transposer l'analyse à des répliques de panneaux peints, c'est-à-dire des planches isolées sur une ou plusieurs faces, va nous permettre de contrôler certains paramètres qui sont difficilement accessibles sur les œuvres et qui sont pourtant primordiaux, à savoir : la convection thermique et de masse sur les faces, la géométrie de la planche (débit et dimensions). En outre l'accès au matériau original de la réplique permettra de tester des échantillons appariés sur d'autres configurations (en premier lieu pour des tests de retrait-gonflement).

Enfin, pour revenir aux systèmes de mesure *in-situ* développés par nos collaborateurs, nous proposons de les confronter à l'information expérimentale 3D pour mieux en saisir les qualités et les défauts. Nous avons illustré certaines des questions essentielles (§2.5 et §5.6.2.6) : qu'est-ce que le *Deformometric Kit* mesure par rapport aux déformations 3D (influence du cisaillement induit) ? Comment pouvons-nous faire le lien ? Ces questions sont primordiales car nous savons, malgré la qualité des expériences en laboratoire, que les panneaux peints continueront d'être équipés d'appareils moins sophistiqués dont l'immense avantage est de fournir une information en continu en situation d'exposition. Ce dernier point, à savoir l'étude approfondie des *Deformometric Kit* et leur lien avec des mesures optiques, fera l'objet du stage de Master2 d'Agnès Rouard (Mars-Juillet 2011).

7.2.4 Modèle de plaque

7.2.4.1 Test et modifications

Les modélisations de plaque utilisant des éléments DKT (sans cisaillement) ne sont pas satisfaisantes pour les applications qui nous concernent. Les éléments DST que nous proposons pour la description des cisaillements, bien qu'ils satisfassent les tests présentés (§5.8), sont sujets au verrouillage pour des plaques fines. Pour éviter ces problèmes numériques, il faut travailler sur des éléments dont les fonctions de formes sont dépendantes du comportement²². Pour l'instant ces éléments montrent des problèmes sur tous les cas tests faisant intervenir du cisaillement.

Deux autres points pourraient être approfondis concernant notre formulation de plaque orthotrope :

- Effet des retraits-gonflements suivant l'épaisseur $\bar{z}$, et l'éventuelle nécessité d'actualiser la géométrie si cela influence la réponse du modèle de manière non-négligeable (effet 3d),
- Effet de l'hypothèse d'un comportement constant par couches (§5.6.2.4), plutôt qu'une écriture avec un comportement évoluant de manière continue dans l'épaisseur (comme les variables internes de déformation et de contrainte).

²² Communication [Dureisseix]

Pour le premier point, c'est encore une conséquence du retrait-gonflement non négligeable du bois, les variations d'épaisseur nous intéressant peu du point de vue mécanique. Nous rejoignons à ce stade les discussions ouvertes sur les corrections de section à appliquer à des essais de chargement sous humidité variable (cf. note 13 p.48).

Bien qu'il reste encore à valider notre approche sur un certains nombre de points, nous pourrions d'ores et déjà réfléchir à la réécriture des programmes actuels (langage interprété SciLab) dans des langages plus performants. Une des solutions les plus directes consisterait à réécrire le code en *Python* (dans la librairie d'algèbre linéaire *Numpy*). Ce choix se justifierait par l'importance grandissante de *Python* dans les développements du code local du laboratoire (LMGC90) historiquement destiné à la gestion des contacts, mais incluant également des solutions de calcul pour les éléments finis.

7.2.4.2 Déformation de surface et craquelures

Un des objectifs du calcul de structure par éléments finis appliqué aux panneaux peints serait d'analyser les déformations de surfaces prédites par le modèle de plaque et de relier cette information aux réseaux de craquelures présents sur la couche picturale, analysés parfois en détail par les conservateurs (cf. §2.1.1). Dans le cas de panneaux contraints, des analyses hygro-élastiques par élément finis ([Dureisseix, *et al.* (2006)]) permettent de mettre en évidence le lien entre les déformations de surface et certains profils de craquelures (cisaillement aux coins, retrait-gonflement dominant dans les parties tangentielles). L'apport du comportement différé dans cette approche doit servir à reconstituer des chargements plausibles de couche picturale, qui ne peuvent être réduits aux simples retraits-gonflements.

7.2.5 Collaboration avec les acteurs du patrimoine

Pour finir nous mentionnons très brièvement un cas d'étude mené par un élève restaurateur (Jonathan Graindorge-Lamour), avec qui nous collaborons étroitement. Son étude porte sur un panneau de géométrie très voisine de notre « *Couronnement d'épines* » (§6.2.1), mais sur une essence différente (chêne). Une des planches a été instrumentée avec un *Deformometric Kit*. Le tableau a été ainsi équipé par anticipation d'un futur déplacement : ce sera alors l'occasion, grâce à la mesure en continu, d'analyser directement les effets du déplacement de l'œuvre sur la courbure transitoire d'une des planches, en les comparant aux variations dans les conditions d'exposition. Notre objectif pourrait être pour la suite de compléter l'approche par de nouvelles simulations.

Bibliographie

- Alfrey, T. (1948)** *Mechanical behaviour of high polymers*, New York, Interscience publisher.
- Allegretti, O. et Raffaelli, F. (2008)** *Barrier Effect to Water Vapour of Early European Painting Materials on Wood Panels*, Studies in conservation, vol. 53, p.187-197.
- Allegretti, O. et Raffaelli, F. (2007)** "External resistance to vapour transfer of varnishes on wood", "Annual meeting of COST action IE0601", Firenze, Italy,
- Armstrong, L. et Christensen, G. N. (1961)** *Influence of moisture changes on deformation of wood under stress*, Nature, vol. 191, p.869-&.
- Armstrong, L. D. et Kingston, R. S. T. (1960)** *Effect of moisture changes in creep in wood*, Nature, vol. 185, p.862-863.
- Baldit, A. (2009)**, Master thesis, *Etude de panneaux de bois peints du patrimoine*, Université Montpellier II.
- Bardet, S. (2001)**, PhD thesis, *Comportement thermoviscoélastique transverse du bois humide*, Université Montpellier 2.
- Bardet, S. et Gril, J. (2002)** *Modelling the transverse viscoelasticity of green wood using a combination of two parabolic elements*, Comptes rendus mécanique, vol. 330, p.549-556.
- Barkas, W. W. (1949)** *The swelling of wood under stress - A discussion of its hygroscopic, elastic and plastic properties*, Department of scientific and industrial research - Forest products research,
- Barnett, J. R. et Jeronimidis, G. (2003)**, "Reaction wood", extrait de "Wood quality and its biological basis", Chapitre 5, Blackwell Publishing, ISBN 0-8493-2819-5
- Batoz, J.-L. et Dhatt, G. (1990)** *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermès, 2-86601-259-3.
- Bazant, Z. P., Baweja, S. et F-J, U. (1997)** *Microprestress-Solidification Theory for Concrete Creep. Part I : aging and drying effects*, Journal of engineering Mechanics, vol.
- Bazant, Z. P. et Meiri, S. (1985)** *Measurements of compression creep of wood at humidity changes*, Wood science and technology, vol. 19, p.179-182.
- Blanchet, P., Gendron, G., Cloutier, A. et Beauregard, R. (2005)** *Numerical prediction of engineered wood flooring deformation*, Wood and Fiber Science, vol. 37, p.484-496.
- Blomberg, J. (2006)**, PhD thesis, *Mechanical and Physical Properties of Semi-Isostatically Densified Wood*, Luleå University of Technology.
- Blomberg, J. et Persson, B. (2007)** *Swelling pressure of semi-isostatically densified wood under different mechanical restraints*, Wood science and technology, vol. 41, p.401-415.
- Blumer, S. (2006)**, Diploma thesis, *Moisture induced stresses and deformations in parquet floors - An experimental and numerical study*, Lund University - Sweden.
- Bolton, A. J., Jardine, P., Vine, M. H. et Walker, J. C. F. (1974)** *The swelling of wood under mechanical restraint*, Holzforschung, vol. 28, p.138-145.

- Bomford, D. (1995)** "Introduction: Keynote Address", "Symposium at the Getty Museum : the structural conservation of panel paintings - Part 1", Getty Museum, Los Angeles, p.XIII-XXII.
- Bou Saïd, E. (2003)**, PhD thesis, *Contribution à la modélisation des effets différés du bois et du béton sous conditions climatiques variables. Application aux structures mixtes bois-béton.*, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon.
- Brandao, A. et Perre, P. (1996)** "The Flying Wood - A quick test to characterise the drying behaviour of tropical woods. ", "5th Int. IUFRO Wood Drying Conference ", Quebec, Canada, p.315-324.
- Brémand, F., Doumalin, P., Dupré, J.-C., Hesser, F. et Valle, V. (2006)**, "Des mesures de relief sans contact avec le panneau", extrait de "Au coeur de la joconde", Chapitre II.3 Un panneau de peuplier,
- Brémaud, I. (2006)**, PhD thesis, *Diversité des bois utilisés ou utilisables en facture d'instruments de musique*, Université Montpellier 2.
- Brewer, A. et Forno, C. (1997)** *Moiré fringe analysis of cradled panel paintings*, Studies in conservation, vol. 42, p.211-230.
- Buck, R. D. (1963)** *Some applications of mechanics to the treatment of panel paintings*, Recent advances in conservation - ed. G Thompson, vol. p.6.
- Buck, R. D. (1972)** *Some applications of rheology to the treatment of panel paintings*, Studies in conservation, vol. 17, p.11.
- Cariou, J.-L. (1987)**, PhD thesis, *Caractérisation d'un matériau viscoélastique anisotrope : le bois.*, Université de Bordeaux 1.
- Carmeliet, J., Guyer, R. et Derome, D. (2009)** "Nonlinear elastic and moisture dependant behavior of wood: a first attempt to an adequate thermomechanical modeling", "Sixth Plant Biomechanics conference", Cayenne, French Guyana, p.490-497.
- Chassagne, P. (2006)**, PhD thesis, *Contribution à la prédiction des conséquences mécaniques des phénomènes thermo-hydriques couplés : application au bois.*, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) - Università degli studi di Firenze.
- Chassagne, P., Bou-Saïd, E., Ceccotti, A., Jullien, J. F. et Togni, M. (2007)** *The contribution of numerical simulation for the diagnosis of the conservation of art objects: Application to Antonio Santucci's armillary sphere of the 16th century.*, Journal of Cultural Heritage vol. 8, p.215-222.
- Chassagne, P., Dionisi Vici, P., Vidal-Sallé, E., Uzielli, L. et Jullien, J. F. (2006)**, "Mechanical consequences of hygroscopic variations on wooden panel paintings: development of a predictive model", "4th International Conference of joint meeting of European Society for Wood Mechanics and COST Action E35", Florence, Italy
- Colmars, J. et Gril, J. (2007)**, "Comportement hygromécanique de panneaux en bois peints du patrimoine : compte-rendu intermédiaire pour le Laboratoire des Monuments Historiques (LRMH)", 27 pages.
- Colmars, J., Gril, J. et Dureisseix, D. (2010)**, "Rapport final du programme d'étude « Étude sur la conservation préventive des panneaux de bois peints » ", LMGC, 20 pages.
- Colmars, J., Nakano, T., Yano, H. et Gril, J. (2008)**, "Creep properties of heat treated wood in radial direction", "COST action IE0601 "Wood Science for Conservation of Cultural Heritage" : "
- Coussy, O. (2004)** *Poromechanics*, John Wiley & Sons,
- Dardes, K. et Rothe, A. (1995)** "Symposium at the Getty Museum : the structural conservation of panel paintings", Getty Museum, Los Angeles,
- Delaunay, T., Laux, D. et Ferrandis, J.-Y. (2008)**, "Elastic constants identification of anisotropic composite rectangular parallelepipeds", "Acoustics 2008 ", June 29 - July 4, 2008Paris

- Desroches, X. (2009a)** *Éléments de coque volumique SHB6, SHB15, SHB20. Documentation CODE ASTER.*
- Desroches, X. (2009b)** *Éléments de plaque : modélisations DKT, DST, DKTG et Q4g. Documentation CODE ASTER.*
- Dhoulá (2009)**, PhD thesis, *Comportement viscoélastique longitudinal du bois vert : diversité et prédiction à long terme*, Université Montpellier 2.
- Dionisi Vici, P., Mazzanti, P. et Uzielli, L. (2006)** *Mechanical response of wooden boards subjected to humidity step variations: climatic chamber measurements and fitted mathematical models*, Journal of Cultural Heritage, vol. 7, p.37-48.
- Dionisi Vici, P., Uzielli, L. et Colmars, J. (2009)** *Instrumentation pour le contrôle continu des panneaux peints en bois*, Technè, vol. 29, p.21-27.
- Dubois, F. (2004)**, HdR thesis, *Modélisations numériques des comportements viscoélastiques vieillissants des matériaux du génie civil*, Université de Limoges.
- Dureisseix, D., Colmars, J., Baldit, A., Morestin, F. et Maigre, H. (2011)** *Follow-up of a panel restoration procedure through image correlation and finite element modeling*, International Journal of Solids and Structures, vol. 48, p.1024-1033.
- Dureisseix, D., Gril, J. et Arnould, O. (2006)**, *"Une modélisation mécanique de l'action du châssis-cadre"*, extrait de *"Au coeur de la joconde"*, Chapitre II.6 Un panneau de peuplier, Gallimard / Musée du Louvre éditions,
- Dureisseix, D., Marcon, B., Colmars, J. et Gril, J. (2009)**, *"Rapport intermédiaire du programme d'étude « Étude sur la conservation préventive des panneaux de bois peints »"*, LMGC, 18 pages.
- Farruggia, F. (1998)**, PhD thesis, *Détermination du comportement élastique d'un ensemble de fibres de bois à partir de son organisation cellulaire et d'essais mécaniques sous microscope.*, Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et Forêts (ENGREF).
- François, P. (1992)**, PhD thesis, *Plasticité du bois en compression multiaxiale*, Université Bordeaux 1.
- Frandsen, H. L. (2007)**, PhD thesis, *Selected constitutive models for simulating the hygromechanical response of wood.*, Aalborg University.
- Froidevaux, J., Müller, M., Kühnen, R., Fioravanti, M., Uzielli, L., Gril, J. et Navi, P. (2010a)**, *"3D visco-elastic modeling of hygral deformation of panel paintings and the experiments"*, *"Interaction between Wood Science and Conservation of Cultural Heritage - 4th International Conference of COST action IE0601: "Wood science for cultural heritage"*, October 20-22th 2010 Izmir, Turkey
- Froidevaux, J., Volkmer, T., Anheuser, K. et Navi, P. (2010b)**, *"Viscoelasticity behavior of modern and aged wood"*, *"Interaction between Wood Science and Conservation of Cultural Heritage - 4th International Conference of COST action IE0601: "Wood science for cultural heritage"*, October 20-22th 2010 Izmir, Turkey
- Fukuhara, Y. et Yasuda, S. (?)** *Studies of the compressibility of wood materials. 1. On the deformation in compression perpendicular to grain of wood under repeated load.*, ?, vol.
- Gallimard, P. et Cointe, A. (2007)**, *"Construction et Identification in situ d'un modèle prévisionnel de comportement en service d'un beffroi"*, *"25e rencontres de l'AUGC"*, 23-25 mai Bordeaux
- Ganev, S., Cloutier, A., Gendron, G. et Beauregard, R. (2005)** *Finite element modeling of the hygroscopic warping of medium density fiberboard*, Wood and Fiber Science, vol. 37, p.337-354.
- Genevaux, J.-M. (1989)**, PhD thesis, *Le fluage à température linéairement croissante : caractérisation des sources de viscoélasticité anisotrope du bois.*, Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL).

- Gibson, L. J. et Ashby, M. F. (1997)** *Cellular solids. Structure and properties*, Cambridge University Press, 0521 49560 1.
- Green, D. W., Winandy, J. E. et Kretschmann, D. E. (1999)**, "Mechanical properties of wood", extrait de "Wood handbook - Wood as an engineering material - Gen. Tech. Rep. FPL-GTR-113.", Chapitre 4 : Mechanical properties of wood., US Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory,
- Gril, J. (1988)**, PhD thesis, *Une modélisation du comportement hygro-rhéologique du bois à partir de sa microstructure*, Université Paris 6.
- Gril, J. et Hunt, D. (2002)** "Analysing wood creep at constant moisture content using phase diagrams", "Proceedings of the First international conference of the European Society for wood mechanics, 19th-21st April, 2001 - Lausanne, Switzerland", Lausanne (Suisse), p.73-81.
- Gril, J., Hunt, D. et Thibaut, B. (2004)** *Using wood creep data to discuss the contribution of cell-wall reinforcing material*, Comptes Rendus Biologies, vol. 327, p.881-888.
- Gril, J. et Norimoto, M. (1993)**, "Compression of wood at high temperature", "COST 508 - Wood Mechanics : Workshop on "Wood, plasticity and damage"", April 1-2 Limerick, Ireland
- Grossman, P. U. A. (1971)** *Use of Leicester's "Rheological model for mechano-sorptive deflections of beams"*, Wood science and technology, vol. 5, p.232-235.
- Guitard, D. (1987)** *Mécanique du matériau bois et composites*, Cépaduès-Editions, 2 85428 152 7.
- Habeger, C. C. (2001)** *Influence of Humidity Cycling Parameters on the Moisture-Accelerated Creep of Polymeric Fibers*, Journal of Polymer Science: Part B: Polymer Physics, vol. 39, p.2048-2062
- Hailwood, J. et Horrobin, S. (1946)** *Absorption of water by polymers*, Trans. Faraday Society, vol. 42,
- Hanhijärvi, A. (1995)** *Deformation kinetics based rheological model for the time-dependent and moisture induced deformation of wood*, Wood science and technology, vol. 29, p.191-199.
- Hanhijärvi, A. et Hunt, D. (1998)** *Experimental indication of interaction between viscoelastic and mechano-sorptive creep*, Wood Science and Technology, vol. 32, p.57-70.
- Harrington, J. J., Booker, R. E. et Astley, R. J. (1998)** *Modelling the elastic properties of softwood . Part I : The cell-wall lamellae*, Holz als Roh- und Werkstoff, vol. 56, p.37-41.
- Hoadley, R. B. (1995)** "Chemical and physical properties of wood, in Part 1 : wood science and technology", "The structural conservation of panel paintings", 24-28 April 1995 J. Paul Getty Museum, Los Angeles, U.S, p.2-20.
- Hoadley, R. B. (1969)** *Perpendicular-to-grain compression set induced by restrained swelling*, Wood science, vol. 1, p.6.
- Hofstetter, K., Hellmich, C. et Eberhardsteiner, J. (2007)** *Micromechanical modeling of solid-type and plate-type deformation patterns within softwood materials. A review and an improved approach*, Holzforschung, vol. 61, p.343-351.
- Huet, C. (1967)** *Représentation des modules et complaisances complexes dans les plans complexes arithmétique et logarithmique.*, Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, vol. 5, p.237-258.
- Huet, C. (1988)**, "Some aspects of the thermo-hygro-viscoelastic behaviour of wood. Colloque scientifique européen, 8 et 9 juin 1988, Bordeaux, Groupement scientifique Rhéologie du Bois.", "Colloque scientifique européen, Groupement scientifique Rhéologie du Bois.", June 8-9th Bordeaux, France
- Hunt, D. G. (1984)** *Creep Trajectories for Beech during Moisture Changes under Load*, Journal of Materials Science, vol. 19, p.1456-1467.

- Hunt, D. G. (1999)** *A unified approach to creep of wood*, Proceedings of the Royal Society of London Series a-Mathematical Physical and Engineering Sciences, vol. 455, p.4077-4095.
- Hunt, D. G. et Shelton, C. F. (1988)** *Longitudinal Moisture-Shrinkage Coefficients of Softwood at the Mechano-Sorptive Creep Limit*, Wood Science and Technology, vol. 22, p.199-210.
- Hunt, D. G. et Shelton, C. F. (1987)** *Progress in the Analysis of Creep in Wood during Concurrent Moisture Changes*, Journal of Materials Science, vol. 22, p.313-320.
- Husson, J.-M. (2009)**, PhD thesis, *Loi de comportement viscoélastique avec effet mémoire : application à la mécanosorption dans le bois.*, Université de Limoges.
- Inoue, M., Aoki, T. et Egawa, G. (1992)** *Development of a new teaching material utilizing recovery of compressive set of wood*, Wood research and technical notes, vol. 28, p.59-71.
- Ishimaru, Y. et Oshima, K., I (2001)** *Changes in the mechanical properties of wood during a period of moisture conditioning*, Journal of Wood Science, vol. 47, p.254-261.
- Joyet, P. (1992)**, thesis, *Comportement différé du matériau bois dans le plan transverse sous des conditions hydriques évolutives*,
- Jullien, D. (1995)**, PhD thesis, *Analyse expérimentale et numérique des contraintes résiduelles dans un matériau élastique orthotrope élaboré par couches successives. Cas d'un disque de bois vert.*, Université Montpellier 2.
- Kohara, J. (1954)** *Studies on the permanence of wood VI, the changes of mechanical properties of old timbers*, Bulletin of Kyoto Prefectural University, vol. 6, p.164-174 (in Japanese).
- Kohara, J. (1955)** *Studies on the permanence of wood XV, the influence of age on the components of wood (Zelkova serrata Makino)*, Mokuzai Gakkaishi, vol. 1, p.21-24 (in Japanese).
- Kollmann, F. F. P. et Côté, W. A. J. (1968)** *Principles of wood science and technology*, Springer-Verlag,
- Krauss, A. (2004)** *Swelling pressure of spruce wood along the grains moistened in humid air or water*, Folia Forestalia Polonica, vol. 35,
- Kubler, H. (1987)** *Growth stresses in trees and related wood properties*, Forest products abstracts, vol. 10, p.62-119.
- Laghdar, A. (2000)**, PhD thesis, *Modélisation de la fissuration en bout de grumes liée aux contraintes de croissance - application aux eucalyptus.*, Université Montpellier 2.
- Le Govic, C. (1988)**, *"Le comportement viscoélastique du bois en liaison avec sa constitution polymérique - Rapport bibliographique réalisé avec le concours financier du Ministère de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur"*, CTBA - Centre Technique du Bois et de l'Ameublement, 40 p. pages.
- Le Govic, C., Felix, B., Hadj Hamou, A., Rouger, F. et Huet, C. (1987)** *"Mise en évidence d'une équivalence temps-température et modélisation du fluage du bois - Documents généraux - Thèmes 1 et 2"*, "Actes du 2e colloque Sciences et Industries du Bois, Nancy, 22-24 avril 1987 - tome 1", Nancy, p.349-356.
- Leconte, S., Vion, M. et Clarke, C. (2009)**, *"Attempt to find the ancient sound: from the modelisation to the reconstruction of the Erard Piano in Musée de la musique"*, "International Conference on Wooden Cultural Heritage: Evaluation of Deterioration and Management of Change, COST Action IE0601 Wood Science for Conservation of Cultural Heritage", Hamburg
- Leicester, R. H. (1971)** *A rheological model for mechano-sorptive deflections of beams*, Wood Science and Technology, vol. 5, p.211-220.
- Linard, L. (2001)**, PhD thesis, *Modélisation numérique tridimensionnelle du comportement viscoélastique d'un composite multicouche à bas de bois.*, Université Montpellier 2.

- Maigre, H. et Morestin, F. (2008)**, "Image correlation applied to wood painting", "International conference on full-field measurement techniques and their applications in experimental solid mechanics", 7th - 9th July 2008 Loughborough, UK
- Marcon, B. (2009)**, PhD thesis, *Hygromécanique des panneaux en bois et conservation du patrimoine culturel : des pathologies...aux outils pour la conservation*, Université Montpellier 2 - Università degli studi di Firenze.
- Martensson, A. et Svensson, S. (1997a)** *Stress-strain relationship of drying wood - Part 2: Verification of a one-dimensional model and development of a two-dimensional model*, *Holzforschung*, vol. 51, p.565-570.
- Martensson, A. et Svensson, S. (1997b)** *Stress-strain relationship of drying wood .1. Development of a constitutive model*, *Holzforschung*, vol. 51, p.472-478.
- Matar, A. (2003)**, PhD thesis, *The mechano-sorptive creep of softwood in bending.*, South Bank University.
- Mauget, B. (1996)**, PhD thesis, *Simulation en grands déplacements du comportement mécanique du bois - Application au séchage dissymétrique et séchage sous charge*, Institut national polytechnique de Lorraine.
- Mazzanti, P. (2007)**, PhD thesis, *Studio del comportamento reologico del legno di Pioppo bianco (Populus alba L.) in direzione trasversale alla fibratura*, Università di Firenze.
- Mecklenburg, M. F. (2010)**, "Determining the Acceptable Ranges of Relative Humidity and Temperature in Museums and Galleries", "Allowable microclimatic variations for polychrome wood", 18-19 February 2010 Norwegian Institute for Cultural Heritage Research - NIKU, Oslo
- Merakeb, S. (2006)**, PhD thesis, *Modélisation des structures en bois en environnement variable*, Université de Limoges.
- Merakeb, S., Dubois, F. et Petit, C. (2009a)** *Modeling of the sorption hysteresis for wood*, *Wood Science and Technology*, vol. 43, p.575-589.
- Merakeb, S., Dubois, F. et Petit, C. (2009b)** *Modélisation des hystérésis de sorption dans les matériaux hygroscopiques*, *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 337, p.34-39.
- Mervin, R., Marion, M. et Charles S., T. (1995)** "Technical Considerations for the Transport of Panel Paintings", "Proceedings of a symposium at the Getty Museum : the structural conservation of panel paintings - Part 4", Getty Museum, Los Angeles, p.525-556.
- Mishiro (1988)** *A consideration on the measuring method of swelling stress in wood*, *Bull. Tokyo Univ. For.*, vol. 79, p.113-118.
- Mishiro, A. (1976)** *Studies on the swelling pressure of wood. Part VII : on the swelling pressure and relaxation of wood.*, *Mokuzai Gakkaishi*, vol. 22, p.129-132.
- Moden, C. S. (2008)**, PhD thesis, *Micromechanics of softwoods in the transverse plane - effect on cell and annual ring scales*, KHT engineering sciences.
- Mohen, J.-P., Menu, M. et Mottin, B. (2006)** *Au coeur de la Joconde - Léonard de Vinci Décodé*, Gallimard / Musée du Louvre ed.,
- Molinski, W. et Raczkowski, J. (1988)** *Mechanical stresses generated by water adsorption in wood and their determination by tension creep measurements*, *Wood science and technology*, vol. 22, p.193-198.
- Montero, C. (2010)**, PhD thesis, *Caractérisation du comportement viscoélastique asymptotique du bois*, Université Montpellier 2.
- Moutee, M. (2006)**, PhD thesis, *Modélisation du comportement mécanique du bois au cours du séchage.*, Université Laval.

- Nakano, T. (1999)** *Analysis of creep of wood during water adsorption based on the excitation-response theory*, Journal of Wood Science, vol. 45, p.19-23.
- Navi, P. et Heger, F. (2005)** *Comportement thermo-hygromécanique du bois*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2-88074-620-5.
- Passard, J. et Perre, P. (2005a)** *Viscoelastic behaviour of green wood across the grain. Part I. Thermally activated creep tests up to 120 degrees C*, Annals of Forest Science, vol. 62, p.707-716.
- Passard, J. et Perre, P. (2005b)** *Viscoelastic behaviour of green wood across the grain. Part II. A temperature dependent constitutive model defined by inverse method*, Annals of Forest Science, vol. 62, p.823-830.
- Peralta, P. N. (1995)** *Sorption of moisture by wood within a limited range of relative humidities*, Wood and Fiber Science, vol. 27, p.13-21.
- Perkitny, T. (1961)** *La pression de gonflement du bois*, Bois et forêts des tropiques, vol. 80, p.39-49.
- Perkitny, T. et Kingston, R. S. (1972)** *Review of the Sufficiency of Research on the Swelling Pressure of Wood*, Wood Science and Technology, vol. 6, p.215-229.
- Perre, P. et Passard, J. (1995)** *A control-volume procedure compared with the finite-element method for calculating stress and strain during wood drying*, Drying Technology, vol. 13, p.635-660.
- Perré, P., Rémond, R. et Gril, J. (2004)**, extrait de "Au coeur de la Joconde", Chapitre II.6 Un panneau de peuplier,
- Perré, P. et Turner, I. (1999)** *A 3-D version of TransPore: a comprehensive heat and mass transfer computational model for simulating the drying of porous media.*, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 42, p.4501-4521.
- Perre, P. et Turner, I. W. (1999)** *TransPore: A generic heat and mass transfer computational model for understanding and visualizing the drying of porous media*, Journal Name: Drying Technology; Journal Volume: 17; Journal Issue: 7-8; Conference: 11th International Drying Symposium (IDS'98), Halkidiki (GR), 08/19/1998--08/22/1998; Other Information: PBD: Aug-Sep 1999, vol. p.Medium: X; Size: page(s) 1273-1289.
- Pickett, G. (1942)** *The effect of change in moisture content on the creep of concrete in sustained load*, ACI, vol. 38, p.333-355.
- Randriambololona, H. (2003)**, PhD thesis, *Modélisation du comportement différé du bois en environnement variable.*, Université de Limoges.
- Ranta-Maunus, A. (1975)** *The viscoelasticity of wood at varying moisture content*, Wood Science and Technology, vol. 9, p.189-205.
- Ravaud, E. (2006)**, "Un complexe réseau de craquelures", extrait de "Au coeur de la Joconde - Léonard de Vinci décodé", Chapitre II.6 Un panneau de peuplier, Gallimard / Musée du Louvre éditions,
- Rémond, R. (2004)**, PhD thesis, *Approche déterministe du séchage des résineux de forte épaisseur pour proposer des conduites industrielles adaptées.*, École Nationale du Génie Rural, des Eaux et des Forêts, Centre de Nancy.
- Remond, R., Passard, J. et Perre, P. (2007)** *The effect of temperature and moisture content on the mechanical behaviour of wood: a comprehensive model applied to drying and bending*, European Journal of Mechanics a-Solids, vol. 26, p.558-572.
- Reyssat, E. et Mahadevan, L. (2009)** *Hygromorphs: from pine cones to biomimetic bilayers*, Journal of the Royal Society Interface, vol. 6, p.951-957.
- Rybarczik, W. et Ganowicz, R. (1974)** *A Theoretical Description of the Swelling Pressure of Wood*, Wood Science and Technology, vol. 8, p.233--241.

- Saft, S. et Kaliske, M. (2009)**, "Supporting the restoration of historical pianofortes by numerical simulation", "Int. Conference on Wooden Cultural Heritage : Evaluation of Deterioration and Management of Change, COST Action IE0601 "Wood Science for Conservation of Cultural Heritage"", Hamburg
- Salin, J. G. (1992)** *Numerical prediction of checking during timber drying and a new mechanosorptive creep model*, Holz Als Roh-Und Werkstoff, vol. 50, p.195-200.
- Schniewind, A. P. (1966)** *Über den Einfluss von Feuchtigkeitsänderungen auf das Kriechen von Buchenholz quer zur Faser unter Berücksichtigung von Temperatur und Temperaturänderungen*, Holz als Roh- und Werkstoff, vol. 24, p.87-97.
- Simpson, W. T. et Skaar, C. (1968a)**, "Effect of restrained swelling on wood moisture content", U.S departement of agriculture - Forest service - Forest Product Laboratory, pages.
- Simpson, W. T. et Skaar, C. (1968b)**, "Effect of transverse compressive stress on loss of wood moisture", U.S departement of agriculture - Forest service - Forest Product Laboratory, pages.
- Smittakorn, W. et Heyliger, P. R. (2000)** *A discrete-layer model of laminated hygrothermopiezoelectric plates*, Mechanics of Composite Materials and Structures, vol. 7, p.79-104.
- Sturzenbecher, R., Hofstetter, K. et Eberhardsteiner, J. (2010)** *Structural design of Cross Laminated Timber (CLT) by advanced plate theories*, Composites Science and Technology, vol. 70, p.1368-1379.
- Svensson, S. et Toratti, T. (2002)** *Mechanical response of wood perpendicular to grain when subjected to changes of humidity*, Wood science and technology, vol. 36, p.145-156.
- Takahashi, C., Ishimaru, Y., Iida, I. et Furuta, Y. (2006a)** *The creep of wood destabilized by change in moisture content. Part 3: The influence of changing moisture history on creep behavior*, Holzforschung, vol. 60, p.299-303.
- Takahashi, C., Nakazawa, N., Ishibashi, K., Iida, I., Furuta, Y. et Ishimaru, Y. (2006b)** *Influence of variation in modulus of elasticity on creep of wood during changing process of moisture*, Holzforschung, vol. 60, p.445-449.
- Thibaut, B. et Gril, J. (2003)**, "Growth stresses", extrait de "Wood quality and its biological basis", Chapitre 6, Blackwell Publishing, ISBN 0-8493-2819-5
- Trinh, V.-D. (2009)**, PhD thesis, *Formulation, développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous-intégrés stabilisés utilisables pour des problèmes à cinématique et comportement non linéaires.*, ENSAM, Metz.
- Uzielli, L. (1995)** "Historical Overview of Panel-Making Techniques in Central Italy", "Symposium at the Getty Museum : the structural conservation of panel paintings - Part II : History of panel-making techniques", Getty Museum, Los Angeles, p.110-135.
- Virta, J. (2005)** *Cupping of wooden cladding boards in cyclic conditions - A study of heat-treated and non-heat-treated boards*, Building and Environment, vol. 40, p.1395-1399.
- Virta, J. (2006)**, PhD thesis, *Wooden Cladding Boards in Cyclic Moisture Conditions - Studies of Cupping, Moisture Distribution and Swelling Stress*, Helsinki University of Technology.
- Virta, J., Koponen, S. et Absetz, I. (2005)** *Cupping of wooden cladding boards in cyclic conditions - a study of boards made of Norway spruce (Picea abies) and Scots pine sapwood (Pinus sylvestris)*, Wood Science and Technology, vol. 39, p.431-438.
- Virta, J., Koponen, S. et Absetz, I. (2006)** *Measurement of swelling stresses in spruce (Picea abies) samples*, Building and Environment, vol. 41, p.1014-1018.

Walker, P. (1995) "*The Making of Panels - History of Relevant Woodworking Tools and Techniques*", "Symposium at the Getty Museum : the structural conservation of panel paintings - Part II : History of panel-making techniques", Getty Museum, Los Angeles, p.178-185.

Yokoyama, M., Gril, J., Matsuo, M., Yano, H., Sugiyama, J., Clair, B., Kubodera, S., Mistutani, T., Sakamoto, M., Ozaki, H., Imamura, M. et Kawai, S. (2009) *Mechanical characteristics of aged Hinoki wood from Japanese historical buildings*, Comptes Rendus Physique, vol. 10, p.601–611.

Annexe 1

Rotations des tenseurs dans le plan RT

Changement de base: rotation dans le plan transverse (RT).

On considère l'espace vectoriel E dont la base B est constituée des directions d'orthotropie du matériau bois (T,L,R) (notées 1,2 et 3 respectivement).

Soit f l'endomorphisme de déformation de E et ε sa matrice dans la base $B = (u_T, u_L, u_R)$.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{TT} & \varepsilon_{TL} & \varepsilon_{TR} \\ \varepsilon_{LT} & \varepsilon_{LL} & \varepsilon_{LR} \\ \varepsilon_{RT} & \varepsilon_{RL} & \varepsilon_{RR} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Soit une deuxième base $B' = (u_\theta, u_l, u_{\theta+\pi/2})$ créée par la rotation d'angle θ autour de u_l .

On note ε' la matrice des composantes de déformation dans la base B'.

Notons P la matrice appelée matrice de passage de B à B', c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont formées par les composantes des vecteurs de la base B' dans la base B, soit :

$$(u_\theta, u_l, u_{\theta+\pi/2}) \xrightarrow{P} (u_T, u_L, u_R)$$

$$P = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$

Notation : $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$.

Soit X un vecteur dont les coordonnées sont données dans B ; on note X' ce même vecteur dont les coordonnées sont exprimées dans B'.

$$X' = P^{-1}X$$

Rem : P^{-1} est la matrice de rotation inverse, soit la matrice de rotation d'angle $-\theta$, d'où $P^{-1} = P(-\theta)$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}$$

Pour effectuer le changement de base de l'endomorphisme (application linéaire) ε , on applique la formule :

$$\varepsilon' = P^{-1} \varepsilon P$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
Y &= \varepsilon X \\
Y' &= \varepsilon' X' \\
Y' &= P^{-1}Y = P^{-1}\varepsilon X = P^{-1}\varepsilon PX'
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & \frac{\gamma'_{12}}{2} = \varepsilon'_{12} & \frac{\gamma'_{13}}{2} = \varepsilon'_{13} \\ & \varepsilon'_2 & \frac{\gamma'_{23}}{2} = \varepsilon'_{23} \\ sym & & \varepsilon'_3 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} c^2\varepsilon_{11} + 2sc\varepsilon_{13} + s^2\varepsilon_{33} & c\varepsilon_{12} + s\varepsilon_{32} & (c^2 - s^2)\varepsilon_{13} + sc(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) \\ & \varepsilon_{22} & -s\varepsilon_{12} + c\varepsilon_{23} \\ sym & & s^2\varepsilon_{11} - 2sc\varepsilon_{13} + c^2\varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Dans une réécriture vectorielle de la déformation, on identifie et on obtient :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{33} \\ \gamma'_{23} = 2\varepsilon'_{23} \\ \gamma'_{13} = 2\varepsilon'_{13} \\ \gamma'_{12} = 2\varepsilon'_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c^2 & 0 & s^2 & 0 & +sc & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & 0 & c^2 & 0 & -sc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & -s \\ -2sc & 0 & +2sc & 0 & c^2 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +s & 0 & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{vmatrix} = R^\varepsilon \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c^2 & 0 & s^2 & 0 & +2sc & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & 0 & c^2 & 0 & -2sc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & -s \\ -sc & 0 & +sc & 0 & c^2 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +s & 0 & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{vmatrix} = R^\sigma \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{vmatrix}$$

Note : les matrices de rotations appliquées à ε et σ diffèrent de par la convention (dite de Voigt) utilisant l'angle de cisaillement, soit deux fois la déformation de cisaillement.

Pour trouver les composantes de la matrice des complaisances dans la nouvelle base, on écrit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon' &= R^\varepsilon \varepsilon \\
\varepsilon &= S \sigma \\
\varepsilon' &= S' \sigma' \\
R^\varepsilon \varepsilon &= S' R^\sigma \sigma \\
\varepsilon &= (R^\varepsilon)^{-1} S' R^\sigma \sigma = S \sigma \\
S' &= R^\varepsilon S (R^\sigma)^{-1}
\end{aligned}$$

$$(R^\sigma)^{-1} = \begin{vmatrix} c^2 & 0 & s^2 & 0 & -2sc & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & 0 & c^2 & 0 & +2sc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & +s \\ +sc & 0 & -sc & 0 & c^2 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$S^\theta = \begin{vmatrix} S_{11}^\theta & S_{12}^\theta & S_{13}^\theta & 0 & S_{15}^\theta & 0 \\ S_{21}^\theta & S_{22}^\theta & S_{23}^\theta & 0 & S_{25}^\theta & 0 \\ S_{31}^\theta & S_{32}^\theta & S_{33}^\theta & 0 & S_{35}^\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^\theta & 0 & S_{46}^\theta \\ S_{51}^\theta & S_{52}^\theta & S_{53}^\theta & 0 & S_{55}^\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{64}^\theta & 0 & S_{66}^\theta \end{vmatrix}$$

$$S_{11}^\theta = c^4 S_{11} + c^2 s^2 (2 S_{13} + S_{55}) + s^4 S_{33}$$

$$S_{22}^\theta = S_{22}$$

$$S_{33}^\theta = s^4 S_{11} + c^2 s^2 (2 S_{13} + S_{55}) + c^4 S_{33}$$

$$S_{44}^\theta = c^2 S_{44} + s^2 S_{66}$$

$$S_{55}^\theta = (c^2 - s^2)^2 S_{55} + 4c^2 s^2 (S_{11} + S_{33} - 2S_{13})$$

$$S_{66}^\theta = s^2 S_{44} + c^2 S_{66}$$

$$S_{12}^\theta = s^2 S_{23} + c^2 S_{12}$$

$$S_{13}^\theta = (c^4 + s^4) S_{13} + c^2 s^2 (S_{11} + S_{33} - S_{55})$$

$$S_{15}^\theta = -sc^3 (2S_{11} - 2S_{13} - S_{55}) + cs^3 (2S_{33} - 2S_{13} - S_{55})$$

$$S_{23}^\theta = s^2 S_{12} + c^2 S_{23}$$

$$S_{25}^\theta = 2sc(S_{23} - S_{12})$$

$$S_{35}^\theta = +sc^3 (2S_{33} - 2S_{13} - S_{55}) - cs^3 (2S_{11} - 2S_{13} - S_{55})$$

$$S_{46}^\theta = sc (S_{44} - S_{66})$$

$$\varepsilon' = R^\varepsilon \varepsilon$$

$$C \varepsilon = \sigma$$

$$C' \varepsilon' = \sigma'$$

$$C' R^\varepsilon \varepsilon = R^\sigma \sigma$$

$$(R^\sigma)^{-1} C' R^\varepsilon \varepsilon = \sigma$$

$$C' = R^\sigma C (R^\varepsilon)^{-1}$$

Annexe 2

Formulation hygro-verrou

Elément de base : ressort hygro-verrou

Le ressort hygro-verrou répond à plusieurs problèmes plus ou moins liés entre eux :

- Décrire l'effet ++ de la mécanosorption,
- Proposer un comportement thermodynamiquement admissible,
- Eviter d'utiliser l'élément de Leicester, dont il a été expliqué qu'il est instable (cf. thèse).

Le premier objectif est de reproduire l'effet ++ de la mécanosorption [Ranta-Maunus (1975)] ; ce phénomène se traduit, lors d'un essai de fluage sous humidité variable, par une accentuation de la déformation dans les phases de nouvelle humidification ; on entend par nouvelle humidification une élévation du taux d'humidité au-delà de la plus haute humidité rencontrée jusqu'alors sous charge. L'effet ++ est illustré sur la Figure 1, selon la représentation proposée par [Hunt (1984)] (déformation corrigée du retrait-gonflement en fonction du taux d'humidité, noté mc).

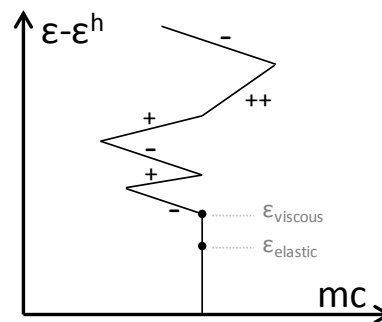


Figure 1: comportement hygro-mécanique du bois sous charge constante dans la représentation proposée par Hunt ; effets du séchage (-), ré-humidification (+), et nouvelle humidification (++) .

Le second objectif, énoncé plus clairement par [Dubois (2004)] et [Husson (2009)], est de proposer une loi de comportement élastique respectant le second principe de la thermodynamique dans les phases de séchage comme dans les phases d'humidification. Le problème vient du fait que la rigidité du matériau est modifiée par le taux d'humidité de ce dernier : le bois voit sa rigidité diminuer avec l'augmentation du taux d'humidité. Ainsi lors d'un séchage sous charge, le modèle de ressort associé devrait recouvrer sa déformation : ceci n'est pas conforme à l'expérience et ne respecte pas le problème thermodynamique (voir également [Chassagne (2006); Randriambololona (2003)]). Dès lors plusieurs solutions sont envisagées : généralement on complète le modèle rhéologique avec d'autres éléments (élément mécanosorptif de Salin par exemple) ; la seconde solution consiste à enrichir le ressort. Pour ce faire, [Dubois (2004)] propose d'adopter un ressort avec un loi de Hooke pour les phases d'humidification, et une loi de Bazant (loi de Hooke tangente) pour les phases de séchage.

Le troisième objectif vise à contourner le problème de l'élément de [Leicester (1971)] qui fait intervenir la valeur absolue des échanges d'humidité : cette formulation est dépendante du choix de la valeur minimale de $|\dot{h}|$ significative pour une augmentation de la déformation sous charge. Ainsi lorsqu'on raffine l'échelle de description du taux d'humidité, ce modèle ne converge pas. Nous allons voir comment les hygro-verrous assemblés dans un Kelvin Voigt généralisé permettent de converger

(toujours lorsqu'on raffine l'échelle de description du taux d'humidité) vers la réponse en fluage à humidité constante.

Le principe général de l'hygro-verrou, tel qu'il a été proposé par [Gril, 1988] est de créer un blocage des déformations lors des phases de séchage et ré-humidification sous charge, donnant ainsi plus d'importance aux phases de nouvelle humidification (Figure 2).

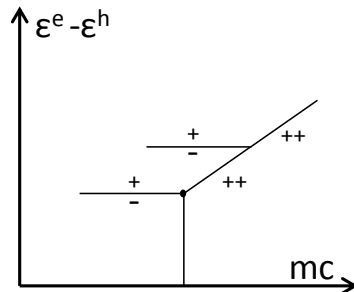


Figure 2: comportement hygro-mécanique du ressort hygro-verrou sous charge constante ; effets du séchage (-), ré-humidification (+), et nouvelle humidification (++)

La représentation rhéologique de l'hygro-verrou proposée par [Husson (2009)] est la suivante :



Figure 3 : représentation rhéologique de l'hygro-verrou par [Husson (2009)]

Dans ce document on propose de modéliser l'hygro-verrou comme une association de ressorts linéaires simples, chacun étant associé à un niveau d'humidité.

Dans notre hygro-verrou, la déformation totale est égale à la somme des déformations de chaque ressort constituant l'hygro-verrou ; il en est de même pour la contrainte totale, égale à la somme des contraintes internes ; ce choix a l'originalité de mener vers une modélisation qui n'est ni en série ni en parallèle. Le domaine hygroscopique (0-psf) est discrétisé en autant de paliers que nécessaire¹, et par conséquent autant d'étage (ou boîtes) dans l'hygro-verrou. Le taux d'humidité d'équilibre à chaque instant détermine quelle est la boîte active de l'hygro-verrou ; le rôle de la boîte active est expliqué dans la suite.

Une première synthèse schématique est proposée Figure 4.

¹ Le nombre de boîtes dans l'hygro-verrou pourra dépendre de l'application et de la précision attendue sur le calcul. Il est montré un peu plus loin que le modèle proposé converge pour un grand nombre de boîtes.

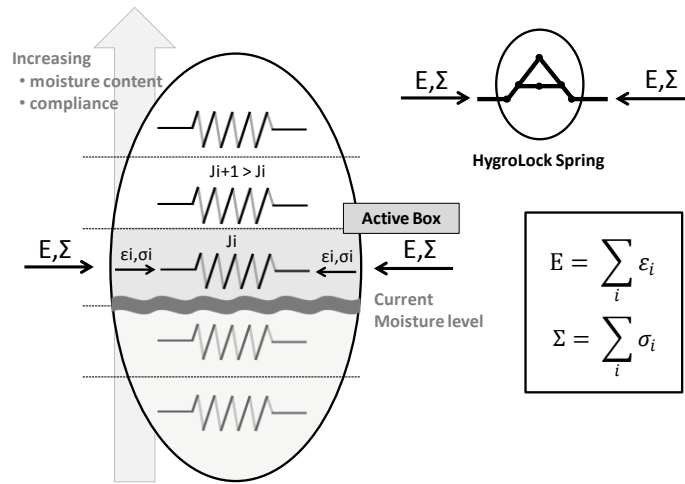


Figure 4 : contenu d'un hygro-verrou et équations constitutives

Les évènements 'humidité' sur un hygro-verrou

Lors d'un nouveau pas de temps, 3 cas peuvent se poser : humidification, séchage ou *statu quo*. La boîte à l'instant i sera notée $n(i)$ ou, par simplification, n . Durant un pas de temps, seules deux boîtes sont concernées par des reports de contraintes : les boîtes $n(i-1)$ et $n(i)$; les autres boîtes gardent leur état précédent.

Cas	Boîte active pour le pas de temps $i-1$ $n(i-1)$	Evènement	Boîte active pour le pas de temps i $n(i)$
1	$n-1$	humidification	n
2	n	<i>statu quo</i>	n
3	$n+1$	séchage	n

Tableau 1 : choix des boîtes actives en fonction de l'évènement

Durant le pas de temps i , on peut écrire :

$$\begin{aligned}\Delta \Sigma_{(i)} &= \Delta \sigma_{n(i-1)} + \Delta \sigma_{n(i)} \\ \Delta E_{(i)} &= J_{n(i-1)} \Delta \sigma_{n(i-1)} + J_{n(i)} \Delta \sigma_{n(i)}\end{aligned}\quad (1.1)$$

Comme dans la formulation générale développée dans le cadre de la thèse, nous cherchons la relation de comportement de l'hygro-verrou sous la forme :

$$\Delta \Sigma = P + Q \Delta E \quad (1.2)$$

Humidification

Durant la phase d'humidification, le contenu de la boîte $n(i-1)$ (boîte de l'instant précédent) est progressivement transféré vers la boîte actuelle $n(i)$.

$$\begin{aligned}
\delta\sigma_{n-1} &= -\sigma_{n-1} \frac{t}{\Delta t} \\
\sigma_{n-1}(t) &= \sigma_{n-1}^0 \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) \\
\delta\sigma_n &= \sigma_{n-1}^0 \frac{t}{\Delta t} + \Delta\Sigma \\
\sigma_n(t) &= \sigma_n^0 + \sigma_{n-1}^0 \frac{t}{\Delta t} + \Delta\Sigma
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n-1} &= J_{n-1}\sigma_{n-1} = J_{n-1}\sigma_{n-1}^0 \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) \\
\varepsilon_n &= J_n\sigma_n = J_n \left(\sigma_n^0 + \sigma_{n-1}^0 \frac{t}{\Delta t} + \Delta\Sigma \right) = \varepsilon_n^0 + J_n \left(\sigma_{n-1}^0 \frac{t}{\Delta t} + \Delta\Sigma \right)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Nous pouvons ainsi écrire la déformation totale $E(t)$, somme des déformations internes :

$$\begin{aligned}
E(t) &= J_{n-1}\sigma_{n-1} + J_n\sigma_n + \left[\sum_{k \neq \{n-1; n\}} J_k\sigma_k \right] \\
&= E^0 + [-J_{n-1}\sigma_{n-1}^0 + J_n\sigma_{n-1}^0] \frac{t}{\Delta t} + J_n\Delta\Sigma \\
&= E^0 + (J_n - J_{n-1})\sigma_{n-1}^0 \frac{t}{\Delta t} + J_n\Delta\Sigma
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Rem :

$$\dot{E} = (J_n - J_{n-1}) \frac{\sigma_{n-1}^0}{\Delta t} + J_n \Delta\dot{\Sigma} = cst \tag{1.6}$$

Nous en déduisons l'expression de ΔE :

$$\begin{aligned}
\Delta E &= (J_n - J_{n-1})\sigma_{n-1}^0 + J_n\Delta\Sigma \\
\Delta E &= P + Q\Delta\Sigma \\
P &= (J_n - J_{n-1})\sigma_{n-1}^0 \\
Q &= J_n
\end{aligned} \tag{1.7}$$

On écrira d'une façon plus générale :

$$\begin{aligned}
\Delta E &= (J_{n(i)} - J_{n(i-1)})\sigma_{n(i-1)}^0 + J_{n(i)}\Delta\Sigma \\
P &= (J_{n(i)} - J_{n(i-1)})\sigma_{n(i-1)}^0 \\
Q &= J_{n(i)}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Séchage

$$\delta\sigma_{n+1} = 0 \tag{1.9}$$

$$\sigma_{n+1}(t) = \sigma_{n+1}^0$$

$$\delta\sigma_n = \Delta\Sigma$$

$$\sigma_n(t) = \sigma_n^0 + \Delta\Sigma$$

$$\varepsilon_n = J_{n-1}\sigma_{n-1} = J_{n-1}\sigma_{n-1}^0$$

$$\varepsilon_n = J_n\sigma_n = J_n(\sigma_n^0 + \Delta\Sigma) = \varepsilon_n^0 + J_n\Delta\Sigma$$

$$E(t) = J_{n+1}\sigma_{n+1} + J_n\sigma_n + \left[\sum_{k \neq \{n-1; n\}} J_k\sigma_k \right] = E^0 + J_n\Delta\Sigma \quad (1.10)$$

$$\dot{E} = J_n\dot{\Delta\Sigma}$$

$$\Delta E = J_{n+1}\Delta\sigma_{n+1} + J_n\Delta\sigma_n = J_n\Delta\Sigma$$

D'où l'expression générale :

$$\Delta E = J_{n(i)}\Delta\Sigma$$

$$\Delta E = P + Q\Delta\Sigma \quad (1.11)$$

$$P = 0$$

$$Q = J_{n(i)}$$

Statu quo

$$\delta\sigma_n = \Delta\Sigma$$

$$\sigma_n(t) = \sigma_n^0 + \Delta\Sigma \quad (1.12)$$

$$\varepsilon_n = J_n\sigma_n = J_n\sigma_n^0$$

$$E(t) = J_n\sigma_n + \left[\sum_{k \neq \{n-1; n\}} J_k\sigma_k \right] = E^0 + J_n\Delta\Sigma \quad (1.13)$$

$$\dot{E} = J_n\dot{\Delta\Sigma}$$

$$\Delta E = J_{n(i)}\Delta\Sigma$$

$$\Delta E = P + Q\Delta\Sigma \quad (1.14)$$

$$P = 0$$

$$Q = J_{n(i)}$$

Résumé : Humidification / Séchage / Statu quo

Expression générale du report des contraintes internes dans le ressort hygro-verrou :

$$\begin{aligned}\sigma_{n(i)}^i &= \sigma_{n(i)}^{i-1} + \psi \sigma_{n(i-1)}^{i-1} + \Delta \Sigma \\ \sigma_{n(i-1)}^i &= (1 - \psi) \sigma_{n(i-1)}^{i-1}\end{aligned}\quad (1.15)$$

Expression générale de la relation de comportement :

$$\Delta E = P + Q \Delta \Sigma$$

$$\begin{aligned}P &= \psi (J_{n(i)} - J_{n(i-1)}) \sigma_{n(i-1)}^0 \\ Q &= J_{n(i)}\end{aligned}\quad (1.16)$$

$$\psi = 0 \quad \text{séchage et statu quo}$$

$$\psi = 1 \quad \text{humidification}$$

Ressort Hygro-Verrou intégré dans un élément de Kelvin-Voigt

Maintenant on veut écrire la relation de comportement d'un élément de Kelvin-Voigt dans lequel le ressort classique est remplacé par un ressort Hygro-Verrou. L'élément de Kelvin-Voigt est soumis à une contrainte σ ; la contrainte dans l'hygro-verrou est toujours notée Σ , et sa déformation E est égale à la déformation de l'élément de Kelvin-Voigt (ε).

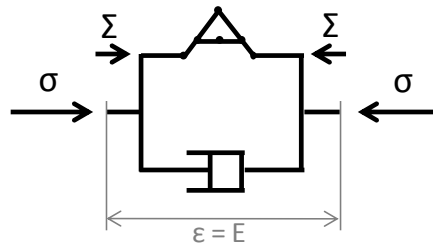


Figure 5 : élément de Kelvin-Voigt avec Hygro-verrou

On reprend l'équation générale de l'élément de Kelvin-Voigt, pour l'appliquer aux différents cas envisageables pour l'hygro-verrou (humidification, séchage et *statu quo*) :

$$\sigma = \Sigma + \eta \dot{E} \quad (1.17)$$

La contrainte aux bornes du Kelvin-Voigt est supposée varier linéairement durant le pas de temps Δt .

$$\sigma(t) = \sigma^0 + \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} (t - t^0), \quad t \in [t^0 : t^0 + \Delta t] \quad (1.18)$$

Humidification

On considère une humidification sous charge du ressort hygro-verrou. A l'instant t^{0-} , le ressort $n - 1$ (de complaisance J_{n-1} était actif. A l'instant t , il y a humidification (changement de boîte) ; la complaisance J_n devient active à t^{0+} , temps auquel on a une redistribution instantanée des contraintes internes.

Pour déterminer cette redistribution 'instantanée' des contraintes, on écrit qu'elle se fait sans incrément instantané de déformation totale (écriture imposée par l'amortisseur) :

$$\delta\varepsilon = \delta E = 0 \Rightarrow \delta\sigma_i \neq 0 \quad (1.19)$$

A t^{0+} , la boîte $n - 1$ est 'déchargée' de sa contrainte, tandis que la boîte n reprend la contrainte transférée, l'incrément extérieur de contrainte à t^0 , noté $(\delta\Sigma)$, et les éventuelles contraintes présentes dans cette même boîte au pas de temps précédent :

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}^{0+} &= 0 \\ \sigma_n^{0+} &= \sigma_n^{0-} + \sigma_{n-1}^{0-} + \delta\Sigma \end{aligned} \quad (1.20)$$

On peut ainsi écrire l'incrément de déformation totale à l'instant t :

$$\begin{aligned} E^{0+} &= J_n[\sigma_{n-1}^{0-} + \sigma_n^{0-} + \delta\Sigma] \\ E^{0-} &= J_n\sigma_n^{0-} + J_{n-1}\sigma_{n-1}^{0-} \\ \delta E &= (J_n - J_{n-1})\sigma_{n-1}^{0-} + J_n\delta\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

On en déduit l'incrément de contrainte extérieure de l'hygro-verrou :

$$\delta\Sigma = -\frac{J_n - J_{n-1}}{J_n}\sigma_{n-1}^{0-} \quad (1.22)$$

D'où l'expression des contraintes internes à l'instant t :

$$\begin{aligned} \sigma_n^{0+} &= \left(1 - \frac{J_n - J_{n-1}}{J_n}\right)\sigma_{n-1}^{0-} + \sigma_n^{0-} = \frac{J_{n-1}}{J_n}\sigma_{n-1}^{0-} + \sigma_n^{0-} \\ \sigma_{n-1}^{0+} &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Dans la suite on écrit ce qui se passe durant le pas de temps Δt :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^0 + \Delta\varepsilon = \varepsilon^0 + J_n\Delta\Sigma \\ \Delta\Sigma &= \Sigma - \Sigma^{0+} = \frac{\varepsilon - \varepsilon^0}{J_n} \\ \Sigma &= \Sigma^{0-} - \frac{J_n - J_{n-1}}{J_n}\sigma_{n-1}^{0-} + \frac{\varepsilon - \varepsilon^0}{J_n} \end{aligned} \quad (1.24)$$

En écrivant la relation générale de l'élément de Kelvin-Voigt, sachant que la contrainte totale varie linéairement, on obtient :

$$\eta\dot{\varepsilon} + \Sigma = \sigma \quad (1.25)$$

$$\eta \dot{\varepsilon} + \Sigma^{0-} - \frac{J_n - J_{n-1}}{J_n} \sigma_{n-1}^{0-} + \frac{\varepsilon - \varepsilon^0}{J_n} = \sigma^0 + \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} t$$

$$\tau \dot{\varepsilon} + \varepsilon = J_n [\sigma^0 - \Sigma^{0-}] + \varepsilon^0 + (J_n - J_{n-1}) \sigma_{n-1}^{0-} + J_n \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} t$$

On résout l'équation différentielle de la forme :

$$\tau \dot{\varepsilon} + \varepsilon = C + Dt$$

$$C = J_n [\sigma^0 - \Sigma^{0-}] + \varepsilon^0 + (J_n - J_{n-1}) \sigma_{n-1}^{0-} \quad (1.26)$$

$$D = J_n \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}$$

Dont la solution est :

$$\varepsilon(t) = (1 - e^{-t/\tau})(C - D\tau) + Dt + \varepsilon_0 e^{-t/\tau} \quad (1.27)$$

$$\varepsilon(t) = (1 - e^{-t/\tau}) \left(J_n [\sigma^0 - \Sigma^{0-}] + \varepsilon^0 + (J_n - J_{n-1}) \sigma_{n-1}^{0-} - J_n \frac{\Delta \sigma}{\Delta t / \tau} \right) + J_n \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} t + \varepsilon_0 e^{-t/\tau} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \varepsilon(\Delta t) - \varepsilon_0 \\ &= (1 - e^{-\Delta t/\tau}) J_n (\sigma^0 - \Sigma^{0-} + (J_n - J_{n-1}) \sigma_{n-1}^{0-}) \\ &\quad + J_n \Delta \sigma \left(1 - \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau}}{\Delta t / \tau} \right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Que l'on écrira sous la forme :

$$\Delta \varepsilon = \varphi J_n (\sigma^0 - \Sigma^{0-} + (J_n - J_{n-1}) \sigma_{n-1}^{0-}) + \chi J_n \Delta \sigma$$

$$\varphi = (1 - e^{-\Delta t/\tau})$$

$$\chi = \left(1 - \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau}}{\Delta t / \tau} \right)$$

Avec :

$$(1.30)$$

$$\Delta \varepsilon = P + Q \Delta \sigma$$

$$P = \varphi J_n (\sigma^0 - \Sigma^{0-} + (J_n - J_{n-1}) \sigma_{n-1}^{0-})$$

$$Q = \chi J_n$$

Séchage / Statu quo

On considère un séchage sous charge du ressort hygro-verrou. A l'instant t^{0-} , le ressort $n + 1$ (de complaisance J_{n+1} était actif. A l'instant t , il y a séchage (changement de boîte active) ; la complaisance J_n devient active à t^{0+} ; contrairement à l'humidification, ici l'hygro-verrou bloque les contraintes dans l'étage $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}^{0+} &= \sigma_{n+1}^{0-} \\
\sigma_n^{0+} &= 0 \\
\Sigma^{0+} &= \Sigma^{0-} = \Sigma^0
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Au cours du pas de temps, la variation de contrainte aux bornes du ressort hygro-verrou est donc égale à l'incrément de contrainte dans l'étage n :

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \Sigma^0 + \Delta\Sigma \\
\Delta\Sigma &= \Delta\sigma_n \\
\Delta\Sigma &= \frac{\Delta\varepsilon_n}{J_n} = \frac{\varepsilon - \varepsilon^0}{J_n}
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Nous reprenons la relation de l'élément de Kelvin-Voigt :

$$\begin{aligned}
\eta\dot{\varepsilon} + \Sigma &= \sigma \\
\eta\dot{\varepsilon} + \Sigma^0 + \frac{\varepsilon - \varepsilon^0}{J_n} &= \sigma^0 + \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} t \\
\tau\dot{\varepsilon} + \varepsilon &= J_n[\sigma^0 - \Sigma^0] + \varepsilon^0 + J_n \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} t
\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\tau\dot{\varepsilon} + \varepsilon = C + Dt$$

$$\begin{aligned}
C &= J_n[\sigma^0 - \Sigma^0] + \varepsilon^0 \\
D &= J_n \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)(C - D\tau) + Dt + \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\
\varepsilon(t) &= (1 - e^{-t/\tau}) \left(J_n[\sigma^0 - \Sigma^0] + \varepsilon^0 - J_n \frac{\Delta\sigma}{\Delta t/\tau} \right) + J_n \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} t + \varepsilon_0 e^{-t/\tau} \\
\Delta\varepsilon &= \varepsilon(\Delta t) - \varepsilon_0 = (1 - e^{-\Delta t/\tau}) J_n(\sigma^0 - \Sigma^0) + J_n \Delta\sigma \left(1 - \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau}}{\Delta t/\tau}\right)
\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\Delta\varepsilon = \varphi J_n(\sigma^0 - \Sigma^0) + \chi J_n \Delta\sigma$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= (1 - e^{-\Delta t/\tau}) \\
\chi &= \left(1 - \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau}}{\Delta t/\tau}\right)
\end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon &= P + Q \Delta \sigma \\ P &= \varphi J_n (\sigma^0 - \Sigma^{0-}) \\ Q &= \chi J_n\end{aligned}$$

Synthèse :

$$\Delta \varepsilon = \varphi J_{n(i-1)} (\sigma^0 - \Sigma^{0-} + \psi (J_{n(i)} - J_{n(i-1)}) \sigma_{n(i-1)}^{0-}) + \chi J_{n(i)} \Delta \sigma$$

$$\begin{aligned}\varphi &= (1 - e^{-\Delta t / \tau}) \\ \chi &= \left(1 - \frac{1 - e^{-\Delta t / \tau}}{\Delta t / \tau}\right)\end{aligned}$$

(1.37)

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon &= P + Q \Delta \sigma \\ P &= \varphi J_{n(i-1)} (\sigma^0 - \Sigma^{0-} + \psi (J_{n(i)} - J_{n(i-1)}) \sigma_{n(i-1)}^{0-}) \\ Q &= \chi J_{n(i)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi &= 0 \text{ séchage et statu quo} \\ \psi &= 1 \text{ humidification}\end{aligned}$$

Synthèse : Kelvin Hygro-Verrou généralisé.

Nous pouvons maintenant écrire la relation de comportement discrétisée sur un pas de temps pour un Kelvin Hygro-Verrou généralisé comportant nbk éléments de Kelvin. L'élément de Kelvin indicé k a un temps caractéristique τ_k .

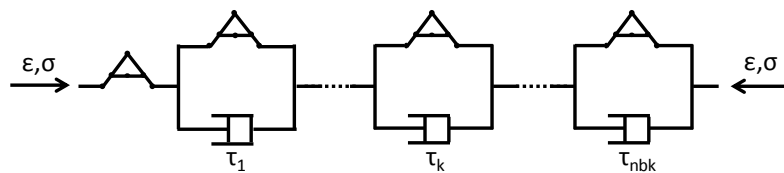


Figure 6 : Kelvin Hygro-Verrou généralisé

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \sum_{k=1}^{nbk} \Delta \varepsilon^{(k)} = P + Q \Delta \sigma \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned}
P &= \psi(J_{n(i)} - J_{n(i-1)})\sigma_{n(i-1)}^0 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{nbk} \varphi^{(k)} J_{n(i-1)} \left(\sigma^0 - \Sigma^{0-(k)} + \psi(J_{n(i)} - J_{n(i-1)})\sigma_{n(i-1)}^{0-(k)} \right) \\
Q &= J_{n(i)} + \sum_{k=1}^{nbk} \chi^{(k)} J_{n(i)} \\
\varphi^{(k)} &= (1 - e^{-\Delta t/\tau_k}) \\
\chi^{(k)} &= \left(1 - \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau_k}}{\Delta t/\tau_k} \right) \\
\psi &= 0 \quad \text{séchage et statu quo} \\
\psi &= 1 \quad \text{humidification}
\end{aligned}$$

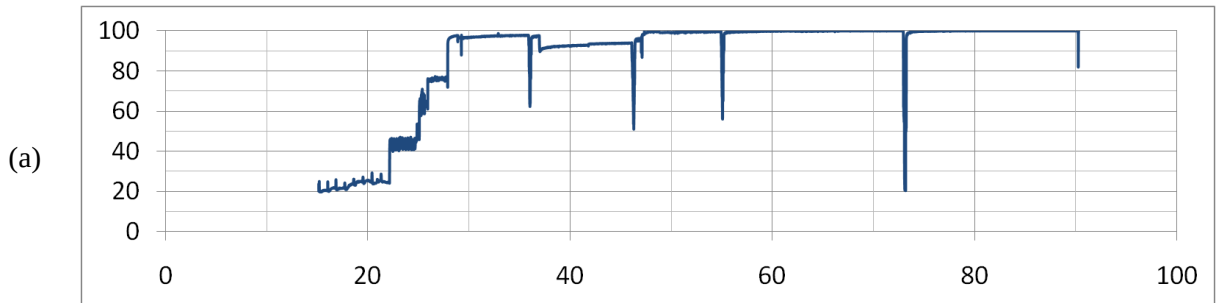
Note :

Les boîtes et les complaisances associées sont les mêmes pour tous les hygro-verrou du modèle.

Application au fluage mécanosorptif

Nous proposons d'appliquer le modèle ainsi développé aux travaux de thèse de [Montero (2010)] sur le fluage long terme d'échantillons d'épicéa en humidité variable dans la direction longitudinale. Les essais modélisés présentent deux lots d'échantillons dont l'un a été chargé à basse humidité puis porté à haute humidité suivant différents cycles, et l'autre a été chargé à haute humidité (chargé un peu plus tard dans le même environnement) puis cyclé à travers les mêmes cycles de séchage et ré-humidification. Les paramètres du modèle hygro-verrou ont été ajustés à partir d'essais de fluage à humidité constante (deux humidité différentes) sur du matériel apparié.

Les résultats des simulations d'hygro-verrous sont confrontés aux valeurs expérimentales sur la Figure 7 qui illustre le comportement de blocage des hygro-verrous lors des phases de séchage. L'écart du modèle aux données expérimentales semble indiquer qu'il existe toujours une part de fluage (15 à 20%) qui n'est pas décrite par le simple effet combiné de l'accélération du fluage à l'humidification et du blocage au séchage. Pour le voir autrement, l'hygro-verrou peut expliquer 80 à 85% de la réponse aux cycles d'humidité complexes à partir de la réponse aux essais de fluage à humidité constante.



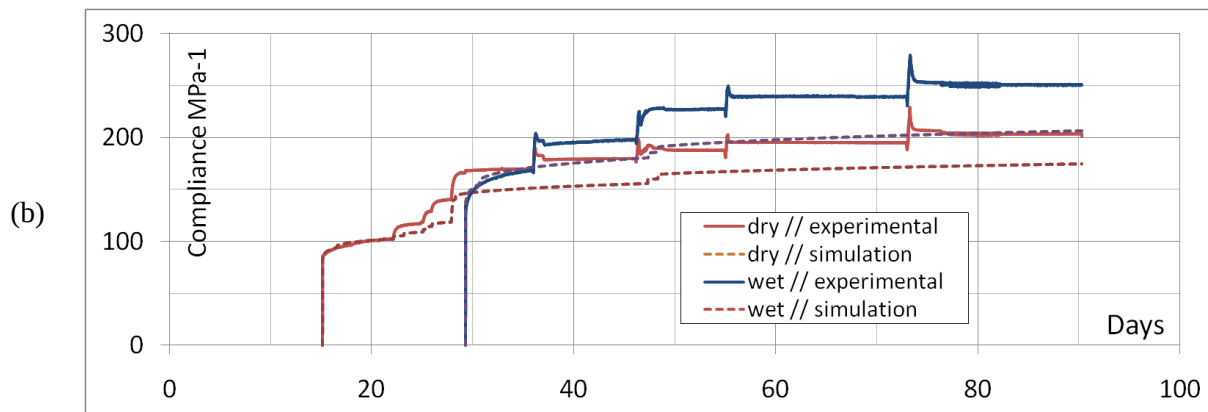


Figure 7 : essais de fluage mécanosorptif sur deux séries d'échantillons chargées à basse et haute humidité et subissant la même histoire hygrométrique par la suite ; (a) humidité relative de l'air (%) durant les essais ; (b) résultats expérimentaux de [Montero (2010)] (ligne continue) et résultats des simulations hygro-verrous (lignes brisées) exprimées en complaisance différée.

Bibliographie de l'annexe Hygro-verrou

- Chassagne, P. (2006)**, PhD thesis, *Contribution à la prédiction des conséquences mécaniques des phénomènes thermo-hydriques couplés : application au bois.*, Institut National des Sciences Appliquées (INSA) - Università degli studi di Firenze.
- Dubois, F. (2004)**, HdR thesis, *Modélisations numériques des comportements viscoélastiques vieillissants des matériaux du génie civil*, Université de Limoges.
- Hunt, D. G. (1984)** *Creep Trajectories for Beech during Moisture Changes under Load*, Journal of Materials Science, vol. 19, p.1456-1467.
- Husson, J.-M. (2009)**, PhD thesis, *Loi de comportement viscoélastique avec effet mémoire : application à la mécanosorption dans le bois.*, Université de Limoges.
- Leicester, R. H. (1971)** *A rheological model for mechano-sorptive deflections of beams*, Wood Science and Technology, vol. 5, p.211-220.
- Montero, C. (2010)**, PhD thesis, *Caractérisation du comportement viscoélastique asymptotique du bois*, Université Montpellier 2.
- Randriambololona, H. (2003)**, PhD thesis, *Modélisation du comportement différé du bois en environnement variable.*, Université de Limoges.
- Ranta-Maunus, A. (1975)** *The viscoelasticity of wood at varying moisture content*, Wood Science and Technology, vol. 9, p.189-205.

Annexe 3

Choix de pas de calcul optimum : un pas d'humidité ?

L'imposition du schéma numérique discrétisé, et l'hypothèse faite sur l'évolution linéaire des contraintes durant le pas de temps nous oblige à choisir une valeur de Δt pertinente pour calcul de la solution à notre problème complet (structure et/ou conditions aux limites).

Dans de nombreux problèmes résolus de façon itérative (parce que ces problèmes sont dépendants du temps), on « raffine » le pas de temps pour converger vers la solution attendue, soit de manière systématique (pas de temps égaux), soit de manière pilotée par des routines adaptées à la convergence des calculs. Ici nous cherchons le choix systématique le plus pertinent, sans recours à des critères de convergence. Dans notre application numérique, nous ferons l'hypothèse que les conditions aux limites sur le panneau sont indépendantes du temps (blocages de déplacements), et par conséquent nous nous intéressons plutôt au chargement d'origine hydrique.

Le chargement hydrique est lui-même dépendant du temps, mais nous allons faire l'hypothèse que la réponse mécanique d'une plaque est moins dépendante au temps qu'elle ne l'est aux variations hydriques. Pour illustrer cette proposition nous avons simulé la réponse locale d'une poutre soumise à des gradients d'humidité variables en faisant varier le type et la quantité des pas de calcul.

Le calcul avec des pas de temps constants est facile à réaliser (ne demande pas de pré-traitement) mais est coûteux en temps machine. Le pas de calcul calé sur l'évolution du taux d'humidité (à supposer évidemment que cette évolution soit calculée préalablement) est lui plus adapté.

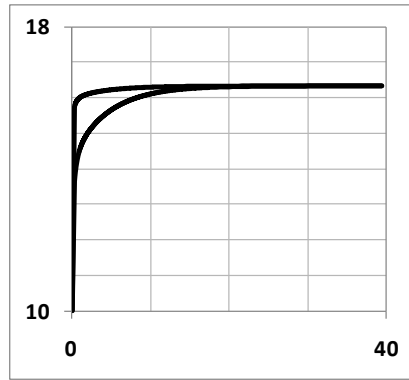
Le principe est de découper le temps de calcul en pas constants de taux d'humidité : cela revient à dire que l'on calcule quand « il se passe quelque chose » (quand est-ce qu'on échange de l'humidité et en quelle quantité). La seconde question, guidée par la structure, est de savoir où il se passe quelque chose.

Le test porte sur un matériau viscoélastique hygro-activé (dont les complaisances instantanées et différées dépendent du temps). Nous faisons le choix délibéré de ne pas utiliser un élément mécanosorptif de Leicester qui n'est pas un élément stable (voir le chapitre sur les modèles rhéologiques adaptés au bois), et qui complique donc quelque peu les discussions sur la convergence.

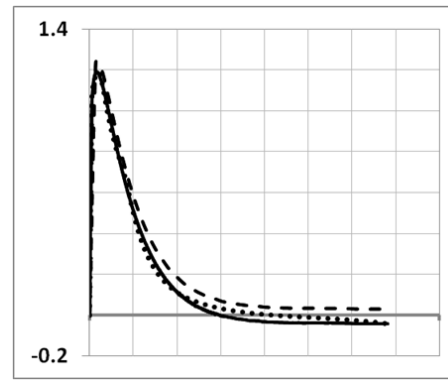
Nous modélisons un test d'humidification asymétrique (une face moins perméable que l'autre), partant de 50% d'humidité relative de l'air vers 80%. Le saut de taux d'humidité correspondant est calculé (Figure 1(a)). La réponse mécanique associée est ensuite calculée et représentée en termes de flèche (mm) pour une planche de 300mm de large (Figure 1(b)). Le test est effectué pour différents pas de calcul : des pas constants en taux d'humidité relevé en surface (celui de la Figure 1(a)), ou des pas de temps constants. La solution finale à l'équilibre dépend du pas de calcul choisi suivant la tendance montrée à la Figure 2 : les résultats sont représentés en fonction du nombre de pas de calcul utilisé (itération).

La solution à pas de taux d'humidité constant converge très vite vers la solution la plus fine pour un critère donné (ex : en pourcentage d'erreur sur la réponse finale par rapport à la solution la plus fine). Nous ne connaissons pas la solution analytique de ce problème. Il semble que la solution à pas d'humidité constant ne tende pas exactement vers la solution à pas de temps constant ; il faut probablement tendre vers un très grand nombre de pas de temps pour tenir en compte les effets du pic de gradient d'humidité (zone de changement de signe pour la dérivée de la courbure).

Ces résultats nous donnent une indication sur le pas d'humidité minimal à utiliser pour prendre en compte l'effet des variations hydriques continues.



(a)



(b)

Figure 1 : (a) saut d'humidité asymétrique imposé sur les deux couches externes en fonction du temps ; (b) réponse résultante en termes de flèche pour une planche de 300mm de largeur avec un calcul de 100 itérations à pas constant (ligne brisée), un calcul de 30 itérations à pas d'humidité constant (ligne pointillés) ; la ligne continue noire représente la solution vers laquelle convergent les calculs plus raffinés en temps ou taux d'humidité.

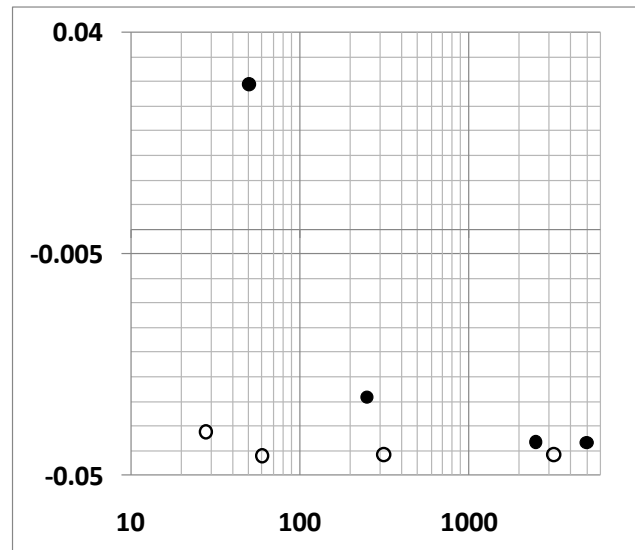


Figure 2 : réponse de la structure viscoélastique modélisée en terme de flèche finale (mm) en fonction du nombre d'itérations utilisées ; calculs à pas de temps constant (●) et calculs à pas d'humidité constant (○) avec trois valeurs différentes (1d-3, 1d-4, 1d-5).

HYGROMECANIQUE DU MATERIAU BOIS APPLIQUEE A LA CONSERVATION DU PATRIMOINE CULTUREL : ETUDE SUR LA COURBURE DES PANNEAUX PEINTS

RESUME

Avant la généralisation des toiles vers le XVI-XVII^{ème} siècle, le bois a servi de support à d'innombrables peintures qui constituent aujourd'hui une part importante, dans les musées et les églises notamment, de notre patrimoine culturel. Après plusieurs siècles d'existence, les planches servant de support aux panneaux peints sont très souvent courbées : cette courbure est généralement imputée à la présence unilatérale de la couche picturale, imposant des échanges asymétriques d'humidité entre le bois, matériau hygroscopique, et son environnement de conservation. Par ailleurs il existe dans ces déformations une forte contribution de l'orthotropie cylindrique du bois qui est une conséquence de la croissance des arbres. Enfin, l'historique des variations hygrométriques à proximité d'un panneau peint renvoie à l'étude plus générale du comportement thermo-hygro-mécanique différé du bois. Une compréhension d'ensemble de ces phénomènes doit permettre d'orienter des décisions difficiles de conservation, notamment celles relatives au déplacement des œuvres ou à la maîtrise des environnements dans les musées. Nous proposons dans ce travail une approche générale de mécanique du matériau et des structures bois appliquée aux panneaux peints. La méthode utilisée intègre des moyens expérimentaux en laboratoire et sur des œuvres *in-situ*, des méthodes numériques, et l'accent est mis sur le lien fort existant entre les aspects « comportement » propres au bois (anisotropie, couplages hygromécaniques, etc.) et les aspects de structure relatifs aux panneaux peints (débit des planches, efforts extérieurs dus à leur assemblage, etc.). Un outil de calcul basé sur la modélisation mécanique des plaques orthotropes est développé. Il prend appui sur un code préexistant de transfert de masse et de chaleur décrivant les mouvements d'eau dans le support. Ce code de calcul complet est utilisé notamment sur un cas d'étude : un panneau peint de 500 ans environ, en situation d'exposition dans une église.

Mots-clés : mécanique du bois, panneau peint, couplages hygromécaniques, plaque orthotrope

WOOD HYGRO-MECHANICAL BEHAVIOR IN RELATION TO THE CONSERVATION OF CULTURAL HERITAGE: DISCUSSION ABOUT PANEL PAINTINGS CUPPING

ABSTRACT

Until canvas became the most popular support medium in the 16th century, wood was used in numerous paintings which represent today a significant part of our cultural heritage, particularly in museums and churches. A few centuries later, wooden panel paintings exhibit cupping deformations: this cupping is generally interpreted as the consequence of asymmetrical moisture exchanges through panel thickness due to the painted layer. It is also known that wood growth rings and orthotropic orientation are possible causes of deformations due to drying. History of the climatic variations near the panel raises the complex question of time-dependant (thermo-hygro-mechanical) behavior of wood. Better understanding of such behavior could help wood scientists and curators in taking decisions relating to panel transport or museum climate regulations. We suggest a general mechanical approach of this problem, dealing with both material (wood) and structure (panel) point of view. The method includes experimental, theoretical and numerical aspects. Particular attention is put on interaction between wood material (anisotropy, hygromechanical couplings) and the structural level (sawing pattern of panel, joints between planks). A numerical calculation tool is developed, based on orthotropic plate theory and existing heat and mass transfer formulation: numerical simulations are performed to discuss the conservation of a 500 years old wooden panel located in a French church.

Key words: wood mechanics, panel painting, hygro-mechanical couplings, orthotropic plate
