



**HAL**  
open science

# Contribution à l'identification, l'estimation et la commande de Moteurs Synchrones à Aimants Permanents (MSAP)

Romain Delpoux

► **To cite this version:**

Romain Delpoux. Contribution à l'identification, l'estimation et la commande de Moteurs Synchrones à Aimants Permanents (MSAP). Autre. Ecole Centrale de Lille, 2012. Français. NNT : 2012ECLI0022. tel-00771113v2

**HAL Id: tel-00771113**

**<https://theses.hal.science/tel-00771113v2>**

Submitted on 18 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ECOLE CENTRALE DE LILLE**

**THESE**

Présentée en vue  
d'obtenir le grade de

**DOCTEUR**

En

Spécialité : Automatique, Génie Informatique, Traitement du Signal et Image

Par

**Romain DELPOUX**

**DOCTORAT DELIVRE PAR L'ECOLE CENTRALE DE LILLE**

Titre de la thèse :

# Contribution à l'identification, l'estimation et la commande de Moteurs Synchrones à Aimants Permanents (MSAP)

Soutenue le 22 novembre 2012 devant le jury :

<b>Président :</b>	Mme. F. Lamnabhi-Lagarrigue	Directeur de Recherche CNRS au L2S-Supélec Paris Sud
<b>Rapporteur :</b>	M. A. Glumineau	Professeur des Universités à l'École Centrale de Nantes
<b>Rapporteur :</b>	M. H. Sira-Ramírez	Directeur de Recherche au CINVESTAV de Mexico City
<b>Membre :</b>	M. V. Cocquempot	Professeur des Universités à l'Université Lille 1
<b>Membre :</b>	M. F. Gillon	Maître de Conférence à l'École Centrale de Lille, HDR
<b>Directeur de thèse :</b>	M. T. Floquet	Chargé de Recherche CNRS au LAGIS, HDR

Thèse préparée au  
Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal  
L.A.G.I.S.- École Centrale de Lille  
Projet Non-A - INRIA Lille-Nord Europe  
Ecole Doctorale SPI 072 (Lille I, Lille II, Artois, ULCO, UVHC, EC Lille)



## Remerciements

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique Génie Informatique et Signal (LAGIS) sous la direction de Monsieur Thierry Floquet, Chargé de Recherche au CNRS, Habilité à Diriger des Recherches dans ce laboratoire de l'École Centrale de Lille.

Je tiens à remercier très vivement Thierry pour avoir accompagné mon travail durant ces trois années de thèse au cours desquelles, au-delà de quelques difficultés, il a toujours été présent au bon moment et m'a toujours prodigué de très bons conseils. Je tiens à lui exprimer toute mon amitié et ma reconnaissance.

Je remercie très chaleureusement Marc Bodson, Professeur à l'Université de l'Utah (U.S.A.), pour sa fructueuse collaboration. Sa sympathie, sa disponibilité et sa connaissance des moteurs électriques m'ont permis de faire des progrès considérables dans le domaine. Ce travail de thèse ne se serait pas passé dans les conditions dont j'ai bénéficié, sans cette rencontre.

Les résultats expérimentaux n'auraient pu être obtenus sans l'entière disponibilité et la compétence de Bernard Szukala, technicien au LAGIS. Je le remercie pour son aide et sa sympathie.

J'adresse mes remerciements à Messieurs Alain Glumineau, Professeur à l'Université de Nantes et Herbett Sira-Ramirez, Directeur de Recherche au CINESTAV de Mexico, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant : (i) d'être les rapporteurs de ce mémoire et (ii) de participer au jury de soutenance. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mes travaux.

Mes remerciements vont également à Madame Françoise Lamnabhi-Lagarrigue, Directrice de Recherche au L2S-Supélec, Présidente du jury de thèse, Messieurs Vincent Cocquempot et François Gillon, respectivement Professeur l'Université Lille I et Maître de Conférence HDR à l'École Centrale de Lille, d'avoir accepté d'être membres du même jury.

Mes remerciements s'adressent à tous les membres des équipes SyNer et Non-A, en

commençant par Jean-Pierre Richard pour son soutien, ses conseils, sa pertinence et sa sympathie. Laurentiu et Alexandre pour toutes les discussions quotidiennes. Ils ont toujours été ouverts à mes multiples questions quand je les sollicitais dans leur bureau.

Merci à tous les doctorants et post-doctorants et plus particulièrement mes quatre collègues de bureau Christophe, Bo, Manu et Hassan. Ces trois années de thèse n'auraient pas été aussi agréables sans eux, autant pour les discussions scientifiques que pour les cafés.

C'est avec sympathie que je remercie tous les membres du LAGIS et de l'Inria. Je pense particulièrement à Philippe Vanheeghe, directeur du LAGIS notamment pour ses nombreuses signatures, mais également Christine, Brigitte, Marie-Bénédicte, Hilaire, Gilles, Jacques et Patrick toujours disponibles.

Enfin, je termine en remerciant Solveig, mon amie, pour m'avoir soutenu et encouragé pendant ces trois années, mes parents, Christophe et Blandine, mes sœurs, Pauline, Alice, Justine et Clémence pour m'avoir accompagné tout au long de ses années d'études et mon grand-père, Marcel, pour ses conseils et ses corrections. Je remercie également tous mes amis.

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>9</b>
<b>Notations</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>Chapitre 1 Outils et Méthodes</b>	<b>19</b>
1.1 Introduction . . . . .	19
1.2 Généralités sur la méthode algébrique . . . . .	20
1.2.1 Structure générale des estimateurs . . . . .	21
1.2.1.1 Perturbations . . . . .	21
1.2.1.2 Construction de l'estimateur . . . . .	22
1.2.2 Mise en œuvre . . . . .	25
1.3 Généralités sur les modes glissants . . . . .	26
1.3.1 Généralités . . . . .	27
1.3.2 Algorithmes glissants d'ordre supérieur . . . . .	28
1.4 Méthodes d'identification . . . . .	31
1.4.1 Méthodes d'identification hors ligne . . . . .	32
1.4.1.1 Méthode par moindres carrés . . . . .	32
1.4.1.2 Théorie de l'élimination . . . . .	33
1.4.2 Méthodes d'identification en ligne . . . . .	36
1.4.2.1 Identification algébrique . . . . .	36
1.4.2.2 Une application originale aux paliers magnétiques . . . . .	38
1.4.2.3 Identification par modes glissants . . . . .	48
1.5 Conclusion . . . . .	49
<b>Chapitre 2 Modélisation des moteurs synchrones à aimants permanents</b>	<b>51</b>
2.1 Introduction . . . . .	52

2.2	Principe de fonctionnement . . . . .	52
2.3	Équations dynamiques des moteurs à aimants permanents . . . . .	53
2.3.1	Équations électriques . . . . .	53
2.3.2	Équations mécaniques . . . . .	54
2.3.3	Équations de puissance . . . . .	55
2.4	Différents repères pour la modélisation . . . . .	56
2.4.1	Rappel sur le modèle dans le repère $d - q$ . . . . .	56
2.4.2	Modèle dans le nouveau repère $f - g$ . . . . .	58
2.4.3	Modélisation dans le cas où $L_2$ est négligeable . . . . .	60
2.5	Analyse du système . . . . .	61
2.5.1	Commandabilité et observabilité . . . . .	61
2.5.2	Platitude . . . . .	64
2.6	Planification de la trajectoire . . . . .	67
2.6.1	Position $\theta_r$ . . . . .	67
2.6.2	Courant direct $i_{dr}$ . . . . .	69
2.7	Présentation du banc d'essai . . . . .	70
2.8	Conclusion . . . . .	72

**Chapitre 3 Identification et commande en présence de capteurs mécaniques** **75**

3.1	Introduction . . . . .	76
3.2	Identification hors ligne . . . . .	77
3.2.1	Estimation des paramètres sur la base des mesures en régime permanent . . . . .	77
3.2.2	Estimation de l'inertie sur la base de mesures en régime transitoire	80
3.2.3	Détection de l'angle de décalage du codeur (offset) . . . . .	81
3.2.3.1	Procédure d'identification . . . . .	82
3.2.3.2	Identification rapide de l'offset : . . . . .	85
3.3	Commande . . . . .	89
3.3.1	Définition de l'erreur de poursuite . . . . .	90
3.3.2	Commande par modes glissants d'ordre 2 . . . . .	90
3.3.2.1	Suivi du courant direct . . . . .	91
3.3.2.2	Suivi de position . . . . .	92
3.3.3	Estimations de l'accélération et du couple résistant . . . . .	93
3.3.4	Stabilité de la boucle fermée basée sur l'observateur . . . . .	95

---

3.3.5	Résultats expérimentaux . . . . .	97
3.4	Identification en ligne . . . . .	100
3.4.1	Paramètres électriques . . . . .	100
3.4.1.1	Méthode algébrique . . . . .	100
3.4.1.2	Modes glissants . . . . .	102
3.4.1.3	Résultats expérimentaux . . . . .	103
3.4.2	Paramètres mécaniques . . . . .	105
3.4.2.1	Méthode algébrique . . . . .	106
3.4.2.2	Modes glissants . . . . .	108
3.4.2.3	Résultats expérimentaux . . . . .	108
3.5	Conclusion . . . . .	110
<b>Chapitre 4 Identification et commande sans capteur mécanique</b>		<b>113</b>
4.1	Introduction . . . . .	113
4.2	Identification hors ligne . . . . .	114
4.2.1	Identification des paramètres en utilisant les mesures en régime per- manent . . . . .	115
4.2.1.1	Première méthode . . . . .	117
4.2.1.2	Deuxième méthode . . . . .	119
4.2.2	Identification de l'inertie en régime transitoire . . . . .	121
4.3	Commande sans capteur mécanique . . . . .	124
4.3.1	Observateur par modes glissants sans capteur mécanique . . . . .	124
4.3.1.1	Observateur basé sur les équations électriques . . . . .	124
4.3.1.1.1	Construction de l'observateur . . . . .	124
4.3.1.1.2	Reconstruction de la position et de la vitesse . . . . .	127
4.3.1.2	Reconstruction de $\dot{\omega}$ en utilisant l'équation mécanique	129
4.3.2	Commande basée sur l'observateur . . . . .	130
4.3.2.1	Synthèse de la commande dans le repère $f - g$ . . . . .	130
4.3.2.2	Stabilité en boucle fermée . . . . .	132
4.3.3	Stratégie en boucle ouverte . . . . .	135
4.3.4	Résultats Expérimentaux . . . . .	135
4.3.4.1	Convergence de l'observateur basé sur les équations électriques . . . . .	136
4.3.4.2	Reconstruction de la position et de la vitesse . . . . .	138
4.4	Conclusion . . . . .	141



<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>143</b>
<b>Annexe A Modes glissants d'ordre 1</b>	<b>147</b>
A.1 Définition . . . . .	147
A.2 Condition d'invariance de la surface de glissement . . . . .	148
A.3 Dynamiques en régime de glissement idéal . . . . .	149
A.4 Exemple . . . . .	149
<b>Annexe B Théorie de l'élimination</b>	<b>155</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>

# Table des figures

1.1	Banc d'essai du palier magnétique. . . . .	39
1.2	Schéma du palier magnétique à trois phases. . . . .	39
1.3	Estimation expérimentale des paramètres. . . . .	44
1.4	Evolution de la trajectoire le long des axes $y$ et $z$ avant identification. . . . .	45
1.5	Evolution de la trajectoire le long des axes $y$ et $z$ après identification. . . . .	46
1.6	Position dans le plan $y - z$ avant et après identification. . . . .	47
2.1	Principe de fonctionnement du moteur à aimants permanents. . . . .	52
2.2	Transformations des variables dans les différents repères. . . . .	60
2.3	Trajectoire de référence . . . . .	69
2.4	Banc d'essai du moteur pas-à-pas. . . . .	70
2.5	Schéma global du moteur. . . . .	71
2.6	Principe de magnétisation. . . . .	71
3.1	Représentation de l'identification des paramètres électriques dans le repère $d - q$ . . . . .	79
3.2	Représentation de l'identification des paramètres mécaniques dans le repère $d - q$ . . . . .	80
3.3	Estimation de l'inertie dans le repère $d - q$ . . . . .	81
3.4	Représentation du moteur à l'alimentation. . . . .	82
3.5	Représentation de l'identification des paramètres électriques et de l'offset. . . . .	85
3.6	Représentation de l'identification de l'angle $\delta$ sans couple additionnel. . . . .	87
3.7	Suivi de trajectoire sans couple additionnel. . . . .	88
3.8	Représentation de l'identification de l'angle $\delta$ avec couple additionnel. . . . .	89
3.9	Suivi de trajectoire avec couple additionnel. . . . .	89
3.10	Position de référence et position mesurée (haut), erreur de position (bas). . . . .	97
3.11	Vitesse de référence et vitesse mesurée (haut), erreur de vitesse (bas). . . . .	98
3.12	Accélération de référence et accélération estimée. . . . .	99
3.13	Courants de références et courants mesurés. . . . .	99
3.14	Estimation en ligne par méthode algébrique des paramètres $R$ , $L$ et $K$ sans variation. . . . .	105
3.15	Estimation en ligne par méthode algébrique des paramètres $R$ , $L$ et $K$ avec variations. . . . .	106
3.16	Estimation en ligne par modes glissants des paramètres $R$ et $K$ sans variation. . . . .	107

3.17	Estimation en ligne par modes glissants des paramètres $R$ et $K$ avec variations. . . . .	107
3.18	Estimation en ligne de l'inertie par la méthode algébrique. . . . .	109
3.19	Estimation en ligne du couple par modes glissants. . . . .	109
4.1	Suivi de vitesse en boucle ouverte. . . . .	116
4.2	Représentation de l'identification des paramètres électriques dans le repère $f - g$ . . . . .	118
4.3	Représentation de l'identification des paramètres mécaniques dans le repère $f - g$ . . . . .	119
4.4	Représentation de l'identification de la puissance dans le repère $f - g$ en utilisant la seconde méthode. . . . .	120
4.5	Représentation de l'identification des paramètres électriques dans le repère $f - g$ en utilisant la seconde méthode. . . . .	121
4.6	Expérimentation d'identification de l'inertie. . . . .	123
4.7	Résultat de l'identification de l'inertie. . . . .	124
4.8	Schéma de commande global. . . . .	136
4.9	Le courant $i_f$ et son estimation (haut), l'erreur d'observation $\epsilon_f = i_f - \hat{i}_f$ (bas). . . . .	136
4.10	Le courant $i_g$ et son estimation (haut), l'erreur d'observation $\epsilon_g = i_g - \hat{i}_g$ (bas). . . . .	137
4.11	$d_f, d_g$ et leurs estimations. . . . .	137
4.12	Erreur de position et leurs estimations. . . . .	138
4.13	Position de référence, position mesurée et position estimée (haut), erreur de suivi de position et erreur d'observation de la position (bas). . . . .	139
4.14	(haut) Vitesse de référence, vitesse mesurée et vitesse estimée, (bas) erreur de suivi de vitesse et erreur d'observation de vitesse. . . . .	140
4.15	Accélération de référence et accélération observée. . . . .	140
A.1	Trajectoire dans le plan de phase ( $u = -U \text{sgn}(x_1)$ ). . . . .	150
A.2	Trajectoire dans le plan de phase ( $u = -U \text{sgn}(x_1 + kx_2)$ ). . . . .	150
A.3	Fréquence des commutations. . . . .	151
A.4	Phénomène de réticence. . . . .	153
B.1	Comparaison entre les trois solutions candidates. . . . .	157

# Notations

- $\mathbf{0}_{m \times n}$  est la matrice nulle de dimension  $m \times n$ .
- $\mathbf{I}_{n \times n}$  est la matrice identité de dimension  $n \times n$ .
- $M^T$  représente la transposée de la matrice  $M$ .
- $\det(M)$  est le déterminant de la matrice  $M$ .
- $\text{tr}(M)$  est la trace de la  $M$ .
- $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  est l'estimation du vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- $\text{sgn}(x)$  désigne le signe de la fonction  $x$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{sgn}(x) \triangleq \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0. \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .
- $L_f h$  est la dérivée de Lie définie par  $L_f h \triangleq \nabla h \cdot f = \frac{\partial h}{\partial x} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i$  où  $h$  est une fonction différentiable de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $f$  est un champ vectoriel sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $[f, g]$  est le crochet de Lie défini par  $[f, g] \triangleq L_f g - L_g f = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$ , où  $f$  et  $g$  sont deux champs vectoriels sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $f = O(g)$  signifie que le taux de croissance de  $f$  est dominé par  $g$ , c'est-à-dire qu'il existe  $K \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $|f| < K|g|$ .
- $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  est le coefficient binomial, défini pour tout entier naturel  $n$  est tout entier naturel  $k$  inférieur ou égal à  $n$ .
- $m = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$  renvoie le plus grand nombre de la série de nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- $n = \text{MOY}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  renvoie la valeur moyenne de la série de nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- $d = \text{deg}(f)$  renvoie le degré de la fonction  $f$ .
- $s$  est l'opérateur de Laplace.
- $\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$  est la transformée de Laplace de la fonction  $f$ .



# Introduction

## Contexte

Ce travail de doctorat a été préparé à l'École Centrale de Lille, au sein de l'équipe SyNer (Systèmes Non linéaires et à Retards) du Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS - UMR CNRS 8219). Il s'inscrit dans le cadre du projet Non-A (Non-Asymptotic estimation for online systems) soutenu par l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique). Ce travail a été réalisé sous la direction de M. Thierry Floquet, Chargé de recherche au CNRS, habilité à diriger des recherches au LAGIS.

Les activités de recherche des équipes SyNer et Non-A se situent dans le cadre général de l'estimation et de la commande des processus. Elles développent notamment une théorie de l'estimation bâtie autour de l'algèbre différentielle et du calcul opérationnel, pour une grande part, mais aussi de techniques à grands gains (modes glissants, commutations...). Ces deux approches conduisent notamment à l'estimation en temps fini.

Les travaux de cette thèse concernent les systèmes non linéaires plats. En considérant cette classe de systèmes, des algorithmes d'identification, d'observation et de commande ont été développés. Nous nous sommes alors intéressés à l'application de tels algorithmes sur des systèmes électromécaniques tels qu'un palier magnétique et plus particulièrement un Moteur Synchrone à Aimants Permanents (MSAP). Les deux bancs d'essais étant disponibles au laboratoire, tous les résultats présentés ont été appliqués expérimentalement.

## Problématique

Les MSAP sont largement utilisés dans l'industrie pour le suivi de trajectoires, spécialement dans les applications de fabrication pour les machines-outils ou encore en robo-

tique. Ce type de machines présentent de nombreux avantages pour les asservissements de position et de vitesse (simplicité d'installation, souplesse d'emploi, robustesse, gamme de produits très large). Ces moteurs ont une plage de vitesses étendue. Ils ont un couple à l'arrêt important, et un bon rendement. De plus, la mise en œuvre et la commande en boucle ouverte est très simple. Cependant, les opérations en boucle ouverte sont limitées par la potentielle perte de synchronisme. Le MSAP fonctionne loin des fréquences de résonances et pour des trajectoires particulières, sans accélérations élevées.

Afin d'améliorer les performances de tels moteurs, la commande en boucle fermée avec un capteur de position ayant une précision suffisante a été introduite. Celle-ci permet de remédier aux inconvénients cités ci-dessus. Le modèle du MSAP est un système possédant la propriété de platitude, c'est-à-dire que toutes les variables d'états et les entrées peuvent être exprimées en fonction des sorties plates et de leurs dérivées successives. Un système plat est équivalent à un système linéaire commandable, cette propriété facilitant notamment la planification de trajectoire hors ligne. En contre partie, la commande en boucle fermée nécessite une bonne connaissance du modèle du moteur [Goedel 1984] et [Engelmann 1995], ainsi que ses paramètres. En présence d'un capteur de position, on peut citer les articles de [Blauch 1993], [Kim 2002] et [Nahid Mobarakeh 2001] concernant l'identification des paramètres. Dans la littérature, on trouve également différentes lois de commande pour des asservissements en position ou en vitesse. On citera par exemple les méthodes de linéarisation entrée/sortie [Bodson 1993], de passivité associée à la platitude [Sira-Ramírez 2000] et par modes glissants [Zribi 2001], [Laghrouche 2003], [Nollet 2008], [Defoort 2009].

La commande en boucle fermée en présence de capteurs présente de nombreux avantages par rapport à la boucle ouverte. Cependant, les capteurs représentent un coût élevé, leur mise en place n'est pas toujours possible et ceux-ci peuvent également poser des problèmes de fiabilité. De récentes recherches tentent ainsi d'obtenir des performances similaires à la commande en boucle fermée avec capteurs, mais sur des systèmes sans capteur. Dans ce cas, *sans capteur* fait référence à des systèmes qui n'ont ni capteur de position ni de vitesse, mais conservant cependant les capteurs de courants. Ces méthodes s'appuient également sur la connaissance du modèle. Bien que la commande sans capteur ait été largement développée dans la littérature, la question de l'identification des paramètres sans capteur a reçu peu d'intérêt. On peut citer par exemple des méthodes utilisant des signaux particulier à l'arrêt ou avec des conditions de charges dans [Nee 2000],

---

seulement pour l'identification des réactances  $d$  et  $q$ . D'autres méthodes d'identification en ligne sont présentées dans [Bolognani 1997] et [Lee 2004]. Cependant [Bolognani 1997] fournit uniquement des simulations, alors que dans [Lee 2004], la résistance du stator et la constante contre-FEM sont identifiées. Dans [Ichikawa 2004], [Ichikawa 2006] et [Yoshimi 2010], l'identification est réalisée dans le repère  $d - q$ . La position nécessaire pour la transformation  $d - q$  est estimée sur la base des paramètres identifiés. Ce type de structure peut fonctionner en pratique, mais les garanties de stabilité et de convergence sont absentes. En ce qui concerne les lois de commande sans capteur, différentes approches ont été traitées. On peut, par exemple, mentionner les vues d'ensemble de [Johnson 1999] et [Schroedl 2004] traitant respectivement des moteurs "brushless" et des MSAP. Parmi les approches les plus courantes, on trouve la méthode d'injection de hautes fréquences ([Jang 2004] et [Zhu 2009]), les approches basées sur des observateurs, comme le filtre de Kalman étendu, ([Bolognani 2001] et [Bendjedja 2012]), les observateurs linéaires ([Son 2002]), ou non linéaires ([Poulain 2008], [Ortega 2011] et [Khlaief 2011]), les observateurs interconnectés adaptatifs ([Hamida 2012]) ou encore les observateurs par modes glissants [Ezzat 2010], [Kim 2011] et [Fiter 2010].

## Objectif de la thèse

Le travail présenté dans ce manuscrit traite de l'identification, l'estimation et la commande de MSAP basées sur les méthodes développées au sein des équipes SYNER et Non-A. Nous étudierons la méthode algébrique pour l'identification des paramètres ainsi que les modes glissants pour l'identification des paramètres, l'estimation des états du système et la commande. Ces techniques seront alors appliquées au MSAP pour différents objectifs.

Dans un premier temps, le problème du MSAP est traité en présence de capteurs. Ensuite, nous supposerons que les mesures des capteurs de position et de vitesse ne sont plus disponibles. Dans les deux cas, des algorithmes d'identification des paramètres hors ligne seront développés afin de valider le modèle et d'obtenir les paramètres nominaux du système pour la commande.

La commande et l'observation seront traitées en utilisant des modes glissants d'ordre supérieur. Le banc d'essai disposant d'un capteur de position et d'un capteur de vitesse, des expérimentations seront réalisées en présence ou non de ces capteurs. Dans chacun des cas, il sera important de proposer des lois de commandes robustes aux variations de



paramètres et aux perturbations afin de garantir la stabilité en boucle fermée du système.

Finalement, le problème de l'identification des paramètres en ligne sera traité en présence de capteurs.

L'objectif est alors de comparer le comportement du moteur en présence de capteurs et sans capteur, en utilisant des techniques similaires. Ceci permettra d'évaluer si en l'absence de capteurs le moteur peut atteindre des performances équivalentes à celles obtenues en boucle fermée, avec capteurs.

## Organisation

Ce mémoire est organisé de la façon suivante :

**Chapitre 1 : Outils et Méthodes :** Ce premier chapitre présente l'ensemble des outils nécessaires au développement du travail réalisé. Nous présentons ici des concepts d'identification, de commande et d'estimation pour une classe de systèmes non linéaires plats. Dans un premier temps, les généralités sur la méthode algébrique et les modes glissants sont introduites. Nous énonçons alors leurs fondements et leurs utilisations (avantages et inconvénients). Par la suite, le problème de l'identification est présenté. Pour cela, nous traitons l'identification hors ligne, afin d'avoir une meilleure connaissance du modèle nécessaire à la commande et l'estimation. Basé sur la méthode algébrique et les modes glissants, nous présentons des techniques d'identification dites en ligne, c'est-à-dire capables de fonctionner en temps réel sur le système. Dans ce chapitre, nous présentons également une application d'identification des paramètres d'un palier magnétique en ligne par la méthode algébrique. Tous les algorithmes d'identification présentés dans ce chapitre s'appliquent également à ce système. Toutefois, une comparaison des méthodes par moindres carrés, algébriques et modes glissants sera présentée sur le MSAP.

**Chapitre 2 : Présentation des moteurs synchrones à aimants permanents :** Le fonctionnement du MSAP est présenté. Par la suite, le modèle dynamique dans le repère fixe  $a - b$  est rappelé, ainsi que le modèle dans le repère tournant  $d - q$ . Ce second modèle est couramment employé dans les machines tournantes car plus simple à utiliser. Cependant, dans le cadre d'applications sans capteur mécanique, la position n'étant pas mesurée, ce dernier n'est pas adapté. Nous introduisons alors un nouveau repère appelé  $f - g$ , repère tournant de référence. Ce repère possède les mêmes propriétés que le repère

---

$d-q$ , mais dans ce cas, la position mesurée n'est pas nécessaire pour l'obtenir. Finalement, le banc d'essai utilisé pour les expérimentations est présenté.

**Chapitre 3 : Identification et commande en présence de capteurs mécaniques :** Dans ce chapitre, le repère  $d-q$  est manipulé pour l'identification, la commande et l'estimation. Nous présenterons une approche permettant d'identifier les paramètres nominaux du moteur. La question de l'initialisation du capteur de position est également traitée. Ensuite, une loi de commande par modes glissants est introduite, ainsi qu'un observateur nécessaire à l'application de cette loi. Finalement, les techniques d'identification en ligne sont développées permettant de ré-évaluer les paramètres pouvant varier au cours du temps.

**Chapitre 4 : Identification et commande sans capteur mécanique :** Il semble intéressant d'être capable d'identifier les paramètres du moteur en l'absence de capteurs. L'utilisation du repère  $f-g$  a permis de mettre au point une technique d'identification des paramètres du moteur hors ligne sans capteur mécanique. Sur la base de ces paramètres, des observateurs par modes glissants sont développés afin de reconstruire la position, la vitesse et l'accélération. Finalement, la commande développée dans le chapitre précédant est appliquée dans le cadre de la commande sans capteur mécanique, à l'aide uniquement des courants mesurés et des tensions d'entrées.

La conclusion fait état des thèmes abordés dans ce manuscrit, permettant de dégager des axes de recherches pouvant contribuer à compléter les travaux présentés dans cette thèse.

## Liste des publications

La recherche exposée dans cette thèse peut être trouvée dans les publications suivantes :

### Journaux

- R. Delpoux, M. Bodson et T. Floquet - *Parameter estimation of permanent magnet stepper motors without position or velocity sensors* - IEEE Transaction on Control Systems Technology (soumis).
- R. Delpoux et T. Floquet - *On-line parameter estimation of a magnetic bearing* - Asian Journal of Control (soumis).

### Conférences internationales

- R. Delpoux, M. Bodson et T. Floquet - *Parameter estimation of permanent magnet stepper motors without position or velocity sensors* - 2012 American Control Conference, Montreal, Canada, Juin 2012.
- R. Delpoux, M. Bodson et T. Floquet - *Joint identification of stepper motor parameters and of initial encoder offset* - 16th IFAC Symposium on System Identification, Bruxelles, Belgique, Juin 2012.
- R. Delpoux et T. Floquet - *On-line parameter estimation of a magnetic bearing* - 19th Mediterranean Conference on Control and Automation, Corfu, Grèce, Juin 2011.

### Conférences nationales

- R. Delpoux, M. Bodson et T. Floquet - *Estimation des paramètres d'un moteur pas-à-pas sans capteur mécanique* - 7ième Conférence internationale Francophone d'Automatique, Grenoble, France, Juillet 2012.
- R. Delpoux et T. Floquet - *Estimation en ligne de paramètres d'un palier magnétique* - 4èmes Journées Doctorales MACS, Marseille, France, Juin 2011.

# Chapitre 1

## Outils et Méthodes

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>1.2</b>	<b>Généralités sur la méthode algébrique</b>	<b>20</b>
1.2.1	Structure générale des estimateurs	21
1.2.2	Mise en œuvre	25
<b>1.3</b>	<b>Généralités sur les modes glissants</b>	<b>26</b>
1.3.1	Généralités	27
1.3.2	Algorithmes glissants d'ordre supérieur	28
<b>1.4</b>	<b>Méthodes d'identification</b>	<b>31</b>
1.4.1	Méthodes d'identification hors ligne	32
1.4.2	Méthodes d'identification en ligne	36
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>

---

### 1.1 Introduction

L'objectif de ce premier chapitre est de définir toutes les notions nécessaires à la compréhension de ce travail. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons aux problèmes d'identification, d'estimation, et de commande de systèmes électromécaniques non linéaires. Cette thématique demande l'utilisation d'outils spécifiques dans le domaine de l'Automatique.

Les deux principaux outils utilisés sont la méthode algébrique et les modes glissants. Ce sont des outils "non asymptotiques", au sens où la convergence des algorithmes utilisés est obtenue en temps fini, contrairement aux notions asymptotique et exponentielle, qui

impliquent la convergence des trajectoires du système vers un état d'équilibre stable sur un horizon infini.

Ces outils seront utilisés pour l'identification des paramètres, permettant d'affiner le modèle utilisé et le rendre le plus proche possible du système réel. L'estimation des états du système permet d'obtenir des variables inconnues, voire même de supprimer des capteurs, entraînant un gain de place et de coût. Finalement, nous montrons des techniques de commandes de systèmes non linéaires robustes vis-à-vis de perturbations.

## 1.2 Généralités sur la méthode algébrique

La méthode algébrique développée dans le projet Non-A est un outil non-asymptotique initialement introduit par M. Fliess et H. Sira-Ramirez [Fliess 2003b] dans le cadre de l'identification des paramètres pour des systèmes linéaires. Des outils similaires ont été développés en traitement du signal [Fliess 2003a], ou pour aboutir à l'estimation des dérivées [Fliess 2005a], [Mboup 2007b], [Liu 2008], [Mboup 2009], [Riachy 2010], etc. En pratique, un large éventail d'information n'est pas directement obtenu par la mesure. Des paramètres (constante d'actionneurs électriques, retards de transmission, etc.), ou des variables internes (position, vitesse, couple, etc.) sont inconnus ou non mesurés. De plus, les signaux des capteurs sont fréquemment faussés et entachés par le bruit. Afin de commander, superviser, etc., un système et d'extraire les informations véhiculées par les signaux, on a souvent recours à l'estimation des paramètres ou des variables.

Contrairement aux méthodes traditionnelles, les estimateurs définis sont "non-asymptotiques" : les solutions sont obtenues par des formules algébriques explicites. Ces techniques aboutissent en l'absence de bruits à une estimation en temps fini. Le problème se traduit par des formules algébriques exactes, dépendantes d'intégrales des signaux mesurés. Dans le cas où les signaux sont bruités, ces intégrales produisent un effet de filtrage intéressant [Fliess 2003a], [Fliess 2006].

Les fondements mathématiques apportés dans cette approche proviennent entre autres de [Fliess 1990], [Fliess 1995], [Fliess 2003a], [Fliess 2008a]. Ces outils sont basés sur l'algèbre différentielle et le calcul opérationnel. L'algèbre différentielle fournit un moyen puissant et élégant de développer des structures linéaires cachées en permettant aux coefficients d'appartenir à un anneau/domaine plus riche. Les détails et définitions de l'algèbre différentielle ne sont pas rappelés dans ce manuscrit, ils sont largement décrits dans les articles cités précédemment. Nous nous intéresserons davantage aux opérations réalisables dans le domaine opérationnel.

Dans le domaine de l'automatique, ces méthodes ont permis de traiter les problèmes suivants :

- estimation des paramètres [Mboup 2007a], [Morales 2010],
- estimation des retards [Belkoura 2009], [Ibn Taarit 2011]
- différentiation numérique [Mboup 2009], [Riachy 2010], [Riachy 2011]
- détection de changements brusques [Belkoura 2010], [Fliess 2010b], [Tiganj 2010],
- commande sans modèle [Fliess 2009], [Fliess 2010a]
- ...

Les techniques algébriques ont également montré leur efficacité dans divers domaines industriels. On citera notamment :

- commande de véhicules [Villagra 2009], [Yu 2009], [Join 2008a], [D'Andrea Novel 2010],
- application aux systèmes électromécaniques [Gédouin 2009], [Eckhardt 2008], [Del-poux 2011], [Michel 2010],
- communication sécurisée [Zheng 2008], [Neves 2006], [Sira-Ramírez 2006],
- traitement d'images et de vidéos [Yu 2010a], [Yu 2010b], [Join 2008b], [Fliess 2005a], [Fliess 2005b],
- ...

## 1.2.1 Structure générale des estimateurs

L'estimation pose problème dans les situations réelles en présence de signaux bruités ou autres entrées inconnues vues comme des perturbations. Cette section décrit comment la méthode algébrique permet d'aboutir à des estimateurs performants dans de telles situations. Avant tout, il est alors important d'introduire la notion de perturbations.

### 1.2.1.1 Perturbations

Les perturbations peuvent se décomposer en perturbations *structurées* et *non structurées* [Fliess 2008b]. Les perturbations sont dites structurées s'il existe un générateur différentiel  $\Pi$  défini dans [Fliess 2008b], tel que ce dernier annihile cette perturbation. Dans la plupart des cas les perturbations non structurées sont vues comme des variations hautes fréquences, autrement dit du bruit pouvant être atténuée par des filtres passe-bas tels que des intégrales.

**Exemple :** Une perturbation de la forme  $\frac{\gamma}{s^\nu}$ , avec  $\gamma$  constant est une perturbation

structurée. La multiplication à gauche par l'opérateur  $\nu s^{\nu-1} + s^\nu \frac{d}{ds} \in k(s) \left[ \frac{d}{ds} \right]$ , indépendant de  $\gamma$ , annihile cette perturbation.

### 1.2.1.2 Construction de l'estimateur

Dans le contexte de systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI), en dépit du fait que les signaux contiennent des perturbations, l'objectif est de se ramener à un système entrée/sortie de la forme

$$\sum_j a_j y^{(j)}(t) = \sum_i b_i u^{(i)}(t), \quad (1.1)$$

où  $u$  est l'entrée et  $y$  est la sortie.

Le modèle opérationnel obtenu en appliquant la transformée de Laplace à la relation (1.1), permet d'éliminer les perturbations structurées. Les conditions initiales sont aussi considérées comme des perturbations indésirables à éliminer. Ces perturbations sont éliminées en multipliant les deux membres de l'équation par  $s^i$ , puis en menant une dérivation d'ordre  $j$  par rapport à  $s$ . Ceci est équivalent à appliquer l'opérateur différentiel linéaire

$$\Pi = \frac{d^j}{ds^j} s^i,$$

où  $i$  et  $j$  sont des entiers.

On rappelle la formule de Leibniz :

$$\frac{d^h(x(s)y(s))}{ds^h} = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{d^{h-j}(x(s))}{ds^{h-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j}, \quad (1.2)$$

et la relation :

$$\frac{d^k(s^l)}{ds^k} = \begin{cases} \frac{l!}{(l-k)!} s^{l-k}, & \text{si } 0 < k \leq l, \\ 0, & \text{si } 0 < l < k, \\ \frac{(-1)^k (k-l-1)!}{(-l-1)!} s^{l-k}, & \text{si } l < 0 < k. \end{cases} \quad (1.3)$$

La dérivation par rapport à  $s$  dans le domaine opérationnel se traduit par une multiplication par  $-t$  dans le domaine temporel, et la multiplication par  $s$  correspond à la dérivation dans le domaine temporel. Un estimateur constitué de multiplications par  $s^i$  ou  $i$  est un entier positif n'est pas désirable. En effet, la dérivation amplifie les composantes hautes fréquences, donc la contribution du bruit. Une solution est de rendre l'estimateur

propre, en multipliant les deux membres de l'expression par  $s^{-\nu}$  où  $\nu$  est un entier plus grand que  $i$ . Dans ce cas, la mise en œuvre peut se faire avec le seul opérateur intégral.

Il reste alors à revenir dans le domaine temporel pour réaliser l'algorithme d'estimation. Pour cela, on utilise les formules suivantes :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^l} \frac{d^k Y(s)}{ds^k} \right) = \int \dots \int (-\tau_1)^k y(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_l, l \geq 1, \quad (1.4)$$

$$\int \dots \int y(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_l = \int_0^t \frac{(t - \tau_1)^{l-1} y(\tau_1)}{(l-1)!} d\tau_1. \quad (1.5)$$

L'association de ces deux équations donne :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^i} \frac{d^j F(s)}{ds^j} \right) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{i-1} (-\tau)^j f(\tau)}{(i-1)!} d\tau. \quad (1.6)$$

**Exemple :** Les manipulations algébriques décrites dans ce paragraphe sont illustrées par l'exemple simple suivant. On considère la dérivée temporelle d'ordre  $n$  d'un signal :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n},$$

où seulement  $x(t)$  est mesuré. On compare en parallèle les transformations dans le domaine temporel et dans le domaine opérationnel.



Temporel	Opérationnel
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{n-1}(0)$
Multiplication par une fonction $C^{n+1}$ : $\times t^n \rightarrow t^n \frac{d^n x(t)}{dt^n}$	Elimination des conditions initiales : $\frac{d^n}{ds^n} \rightarrow \frac{d^n}{ds^n} s^n X(s)$
Algorithme non explicite	Manipulations algébriques : Application de la formule de Leibniz (1.2) : $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{d^{n-j}(s^n)}{ds^{n-j}} \frac{d^j(X(s))}{ds^j}$
	Application des relations (1.3) : $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} (s^j) \frac{d^j(X(s))}{ds^j}$
	Rendre l'expression strictement propre $\times s^{-(n+1)} \rightarrow \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} \frac{1}{s^{n+1-j}} \frac{d^j(X(s))}{ds^j}$
	Retour dans le domaine temporel (1.4) : $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} (-\tau)^j x(\tau) d\tau \dots d\tau_n$
Application de la transformation d'intégrales multiples en intégrales simples (1.5) : $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-j} (-\tau)^j}{(n-j)!} x(\tau) d\tau$	

Le développement de cet algorithme dans le domaine opérationnel est explicite. En revanche, dans le domaine temporel, la procédure pour l'obtenir est moins évidente, voire impossible. Notamment, le choix de la fonction  $C^{n+1}$  dans le domaine temporel, qui anihile les conditions initiales, est très simple dans cette exemple, mais peut se révéler plus compliquée dans certains cas. Les opérations permettant d'obtenir cet estimateur ne sont pas uniques. De récents travaux [Ushirobira 2011], [Ushirobira 2012] tentent de systématiser cette procédure, en proposant une méthodologie pour trouver des annihilateurs minimaux ainsi que des numérateurs différentiels ayant de bonnes propriétés une fois de retour dans le domaine temporel.

L'expression de l'estimateur final est une expression dépendante du signal mesuré, utilisant seulement l'opérateur intégral.

### 1.2.2 Mise en œuvre

Dans le paragraphe précédent, nous avons décrit les étapes permettant d'obtenir des estimateurs algébriques. Il est important d'apporter certains éléments afin de mettre en œuvre ce genre d'algorithme. Les estimateurs algébriques s'expriment systématiquement sous la forme d'une combinaison d'expression (1.6). Leur expression est une intégrale sur l'intervalle  $[0, t]$ . Sur un long intervalle de temps la contribution du bruit de mesures et des termes non modélisés ont un effet néfaste sur le calcul des intégrales. On peut notamment citer [Liu 2011] concernant une étude sur la contribution du bruit sur les estimateurs. Afin de minimiser cet effet, les intégrales sont calculées sur une fenêtre glissante. L'idée est de calculer ces intégrales sur une fenêtre  $[t - T_f, t]$ , où  $T_f$  représente la taille de la fenêtre. Le choix de la longueur de la fenêtre permettra effectivement de minimiser cette erreur [Liu 2008].

Dans la littérature, on peut trouver différentes méthodes de mise en œuvre de ces estimateurs. Dans [Gensior 2007], à chaque instant d'échantillonnage, le résultat de l'intégrale sur cet échantillon est mis en mémoire. L'intégrale sur la fenêtre est égale à la somme des résultats de chaque échantillon de l'instant  $t - T_f$  à  $t$ . Afin d'évoluer le long du signal, une solution serait de recalculer cette somme à chaque instant. Afin de minimiser le temps de calcul, la solution proposée est de mettre à jour l'intégrale calculée à l'échantillon précédent en soustrayant le premier élément de la fenêtre et en y ajoutant le nouvel élément entrant. Cette méthode est très efficace en temps réel. Cependant, on remarque que l'intégrale (1.6) étant un produit de convolution, tous les points de la fenêtre changent à chaque instant.

L'approche utilisée pour calculer cette intégrale, est issue de [Mboup 2009]. L'intégrale sur l'intervalle  $[0, t]$  est réécrite sur un intervalle  $[0, T_f]$ . Il faut noter que le "zéro" de ces deux intervalles est différent. Dans le second cas, il représente le début de la fenêtre, et évolue donc en même temps que celle-ci. Enfin on utilise un changement de variables pour normaliser l'intervalle d'estimation  $\mathcal{J}_0^{T_f} = [0, T_f]$  à  $[0, 1]$ .

$$\begin{aligned}
 \text{L'expression } \int_0^t \frac{(t - \tau)^{i-1} (-\tau)^j f(\tau)}{(i-1)!} d\tau \text{ devient :} \\
 & \int_0^{T_f} \frac{(T_f - \tau)^{i-1} (-\tau)^j f(t - T_f + \tau)}{(i-1)!} d\tau \\
 & = \int_0^1 \underbrace{\frac{T_f^{i+j-1} (1 - \tau)^{i-1} (-\tau)^j}{(i-1)!}}_{g(\tau)} f(t - T_f(1 - \tau)) d\tau \\
 & = \int_0^1 g(\tau) f_{T_f}(1 - \tau) d\tau,
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

où  $f_{T_f}(u) = f(t - T_f u)$ . Il est important de noter que la fonction  $g(\tau)$  est indépendante du temps  $t$ . Par conséquent, cette fonction peut être calculée hors ligne, ce qui est appréciable dans les applications en temps réel. De plus, l'intégrale sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$  est un filtre entrée-sorties classique très facile à programmer.

Nous supposons ici que les procédés sont cadencés à une fréquence d'échantillonnage régulière ayant une période d'échantillonnage  $T_s$  telle que  $T_f = MT_s$  avec  $M$  le nombre de points de la fenêtre. De plus,  $W_m$  et  $t_m = mT_s/T_f$ ,  $m = 0, \dots, M$ , sont les poids et les abscisses associées. On utilise la méthode numérique suivante :

$$\int_0^1 h(t) dt \approx \sum_{m=0}^M W_m h(t_m).$$

L'équation (1.7) donne :

$$\int_0^1 g(\tau) f_{T_f}(1 - \tau) d\tau \approx \sum_{m=0}^M W_m g_m f_{M-m}, \quad (1.8)$$

où  $g_m = g(mT_s/T_f)$  et  $f_{M-m} = f_{T_f}(1 - mT_s/T_f)$ .

L'intégrale est obtenue à partir de la sortie d'un filtre numérique FIR classique, avec une réponse impulsionnelle  $c_m = W_m g_m$ , où l'entrée est le signal échantillonné. Les calculs utilisent la méthode des trapèzes, correspondant à :

$$W_0 = W_M = \frac{T_s}{2}, \text{ et } W_m = T_s, m = 1, \dots, M - 1.$$

### 1.3 Généralités sur les modes glissants

La commande par modes glissants est une technique initialement développée dans les années 1950, et popularisée par l'article précurseur de V.-I. Utkin [Utkin 1977]. Sa caractéristique essentielle est le choix d'une surface de commutation de l'espace d'état (appelée surface de glissement) en fonction des spécifications dynamiques désirées du système en boucle fermée. Le système est alors contraint à converger en temps fini et à rester sur cette surface. Les modes glissants sont très utilisés en automatique non linéaire que ce soit pour la commande, l'observation ou l'estimation de paramètres. Pour plus de détails, on pourra se reporter aux ouvrages [Edwards 1998], [Perruquetti 2002].

Les principaux avantages des modes glissants sont :

- la robustesse face à une large classe de perturbations ou d'incertitudes du modèle,

- le besoin d’une quantité réduite d’information en comparaison avec les techniques de commandes classiques,
- la possibilité de stabilisation de certains systèmes non linéaires qui ne sont pas stabilisable par loi de commande par retour d’état continu.

Les inconvénients de cette méthode sont :

- le phénomène de chattering ou de réticence,
- la brutalité de la commande,
- la sensibilité au bruits de mesures.

Ces inconvénients ont été minimisés par l’introduction de commandes par modes glissants d’ordre supérieur dans les années 80 [Emel’yanov 1986a], [Emel’yanov 1986b], qui sont des commandes discontinues agissant sur les dérivées d’ordre supérieur de la variable de glissement. De plus la discontinuité de la commande réalisée par la fonction “signe” de la surface de glissement, peut être remplacée par des fonctions “sigmoïdes”. Ces fonctions sont définies par  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}$ , où le paramètre  $\lambda$  permet de faire varier la pente de la fonction, et donc de la rendre plus lisse. Dans cette section, nous traiterons les modes glissants d’ordre supérieur. Pour plus de compréhension, le lecteur pourra se reporter à l’annexe A pour une description des modes glissants d’ordre un.

### 1.3.1 Généralités

Le phénomène de réticence est un inconvénient majeur des modes glissants d’ordre un. Il est difficile dans de telles conditions d’envisager des développements pour des applications pratiques, la réticence impliquant une usure accélérée des organes de commandes. Afin de remédier à ce problème, les modes glissants d’ordre supérieur ont été introduits [Emel’yanov 1986b], [Levant 1993], [Fridman 1996].

On considère le système non linéaire, affine en l’entrée :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{1.9}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l’état,  $f$  et  $g$  sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables, et  $u \in \mathbb{R}^m$  représente l’entrée de commande du système. La variable  $S(t, x)$  est la fonction de *glissement* ou de *commutation*.

La surface de glissement est définie par  $S(t, x) = 0$  sur laquelle nous souhaitons faire évoluer les trajectoires du système au bout d’un temps fini. L’ensemble de glissement

d'ordre  $r$  est défini comme suit :

$$\mathcal{S}_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : S(x) = \dot{S}(x) = \dots = S^{(r-1)}(x) = 0 \right\}.$$

Cet ensemble de glissement suppose que la surface et ses dérivées successives s'annulent exactement : on dit que le glissement est idéal. Dans ce cas, contrairement aux modes glissants d'ordre un, on souhaite annuler la surface  $S(t, x)$ , mais aussi les  $r - 1$  premières dérivées successives. En pratique, étant donné les imperfections, le régime de glissement n'est obtenu que dans un proche voisinage de la surface de glissement, on parle alors de régime de glissement réel. Un mode glissant réel permettra, si le pas de calcul est à pas variable majoré par  $\tau$ , d'obtenir la précision de convergence suivante [Emel'yanov 1996] :

$$|S| = O(\tau^r), |\dot{S}| = O(\tau^{r-1}), \dots, |S^{r-1}| = O(\tau),$$

soit un régime de glissement réel d'ordre  $r$  par rapport à  $\mathcal{S}_r$ .

Cette technique comporte plusieurs avantages par rapport aux modes glissants du premier ordre :

- la précision de convergence pour un mode glissant d'ordre  $r$  est de l'ordre de  $\tau^r$ , donc meilleure pour  $r > 1$ .
- dans le cas où le système est de degré relatif  $p$  par rapport à la variable de glissement (on trouvera la définition de la notion de degré relatif dans [Isidori 1995]), tel que  $p \leq r - 1$ , un mode glissant d'ordre supérieur permet de réduire le phénomène de réticence. L'algorithme discontinu générant le mode glissant d'ordre  $r$  est appliqué sur la dérivée  $(r - p)$ -ième de l'entrée au lieu de l'entrée directement. Par conséquent, l'entrée réelle du système est continue par intégration.

### 1.3.2 Algorithmes glissants d'ordre supérieur

Une large gamme d'applications utilisant les modes glissants, pour l'observation, la commande ou l'identification, pour des applications en mécanique, robotique ou machines électriques peut être trouvée dans la littérature : [Bartolini 2003], [Butt 2008], [Canale 2008], [Defoort 2008], [Drakunov 2005], [Floquet 2003], [Martinez 2008], [Pisano 2008], [Riachy 2008].

Dans la littérature, les algorithmes "glissants" sont principalement d'ordre 2. L'en-

semble de glissement d'ordre 2 s'écrit :

$$\mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : S = \dot{S} = 0\}.$$

La dérivée seconde de la surface de glissement peut s'écrire :

$$\ddot{S} = \phi(t, S, \dot{S}) + \varphi(t, S, \dot{S})U, \quad (1.10)$$

où

- $U = u$  si le système est de degré relatif 2 par rapport à  $S$ ,
- $U = \dot{u}$  si le système est de degré relatif 1 par rapport à  $S$ .

Il est supposé qu'il existe des constantes positives  $S_0, k_m, K_M, C_0$  telles que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $|S(t, x) < S_0|$ , les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} 0 < k_m \leq |\varphi(t, S, \dot{S})| \leq K_M, \\ |\phi(t, S, \dot{S})| < C_0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Les conditions ci-dessus sont peu restrictives, elles supposent seulement que les fonctions sont bornées et que la fonction en facteur de la commande doit être suffisamment loin de zéro (il existe un voisinage autour de zéro ne contenant aucune valeur de  $\varphi(t, S, \dot{S})$ ). Ces conditions sont systématiquement vérifiées sur un ensemble compact avec des fonctions  $\phi$  et  $\varphi$  continues, où  $\varphi$  est non nul.

### Algorithme du Super Twisting

Les systèmes de degré relatif égal à 1 peuvent être traités à l'aide de l'algorithme du Super Twisting [Levant 1993], [Levant 2001]. Cet algorithme d'ordre 2 est très couramment utilisé car la loi de commande est continue et ne requiert aucune information sur la dérivée de  $S$ . La loi de commande est définie comme suit :

$$u_{st}(S) = u_1(S) + u_2(S), \quad (1.12)$$

avec :

$$\begin{cases} \dot{u}_1(S) = -\alpha \text{sgn}(S), \\ u_2(S) = -\lambda |S|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(S). \end{cases} \quad (1.13)$$

Les conditions de convergence en temps fini sur l'ensemble de glissement  $\mathcal{S}$  ont tout d'abord

été données dans [Levant 1993] :

$$\alpha > \frac{C_0}{k_m} \text{ et } \lambda^2 \geq \frac{4C_0}{k_m^2} \frac{\alpha K_M + C_0}{\alpha k_m - C_0}. \quad (1.14)$$

Nous démontrons ici une preuve de stabilité en temps fini de l'algorithme basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov. Pour les systèmes de degré relatif égal à 1, on a :

$$\dot{S} = u_{st}. \quad (1.15)$$

À partir de la loi de commande définie équation (1.12) l'équation précédente peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \xi - \lambda |S|^{1/2} \text{sgn}(S), \\ \dot{\xi} &= \Pi - \alpha \text{sgn}(S), \end{aligned} \quad (1.16)$$

où  $\Pi$  est une perturbation bornée,  $\alpha$  et  $\lambda$  sont des gains positifs à définir. La stabilité en temps fini de cet algorithme est inspirée de la preuve présentée dans [Barbot 2010].

On considère les équations du système (1.16) et on note  $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |S|^{1/2} \text{sgn}(S) \\ \xi \end{bmatrix}$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= |\psi_1|^{-1} \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \psi + \begin{bmatrix} 0 \\ \Pi \end{bmatrix} \\ &= |\psi_1|^{-1} \left( M\psi + \begin{bmatrix} 0 \\ |\psi_1| \Pi \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

On définit la fonction de Lyapunov candidate  $V = \psi^T P \psi$  où  $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}$  est une matrice définie positive. La dérivée temporelle le long des solutions de (1.17) est donnée par :

$$\dot{V} = |\psi_1|^{-1} \left( \psi^T (M^T P + P M) \psi + 2\psi^T P \begin{bmatrix} 0 \\ |\psi_1| \Pi \end{bmatrix} \right). \quad (1.18)$$

On sait que :

$$2\psi^T P \begin{bmatrix} 0 \\ |\psi_1| \Pi \end{bmatrix} \leq k_1 \psi_1^2 + k_2 \psi_2^2,$$

avec  $k_1 = \Pi(2|p_3| + \epsilon)$  et  $k_2 = \Pi \frac{p_2^2}{\epsilon}$ , pour tout  $\epsilon > 0$ .

Donc :

$$\dot{V} \leq |\psi_1|^{-1} \psi^T \left( M^T P + P M + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \right) \psi. \quad (1.19)$$

Les gains  $\alpha$ ,  $\lambda$  doivent être choisis de telle sorte que la matrice :

$$-Q = M^T P + P M + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix},$$

soit définie négative. Par application du théorème de LaSalle, la convergence en temps fini de  $\psi$  vers zéro est prouvée [Barbot 2010], c'est-à-dire la convergence en temps fini  $S$  et  $\xi$  vers zéro en temps fini. Ainsi après un temps fini on a  $\xi = 0$  menant à  $\dot{S} = 0$ .

Dans certains cas, notamment les observateurs, nous avons recours à un terme stabilisant linéaire. Ce terme ajouté dans les observateurs a pour effet entre autres de réduire le bruit et d'accélérer la convergence vers la surface de glissement. L'approche donnée dans [Shen 2009] permet d'étendre le résultat précédent à ce cas.

#### Algorithme du Twisting

L'algorithme du Twisting permet de traiter les systèmes de degré relatif égal à 2. La loi de commande se construit de la manière suivante :

$$w \triangleq w_t(S, \dot{S}) = \begin{cases} -\lambda_M \text{sgn}(S) & \text{si } S\dot{S} < 0, \\ -\lambda_m \text{sgn}(S) & \text{si } S\dot{S} \geq 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

On a les conditions suffisantes :

$$\begin{aligned} \lambda_m &> 4 \frac{K_M}{S_0}, \\ \lambda_m &> \frac{C_0}{k_m}, \\ \lambda_M &> \frac{K_M \lambda_m}{k_m} + 2 \frac{C_0}{k_m}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

où

$$0 < k_m \leq |\varphi(t, S, \dot{S})| \leq K_M \text{ and } |\phi(t, S, \dot{S})| < C_0,$$

qui garantissent la convergence en temps fini vers l'ensemble de glissement  $S_2$  [Levant 1993]. La convergence en temps fini de cet algorithme basée sur une fonction de Lyapunov est donnée dans [Orlov 2009].

## 1.4 Méthodes d'identification

Les modèles phénoménologiques font intervenir les paramètres physiques du système à commander. Une bonne connaissance de ces paramètres permet d'évaluer avec plus de



précision l'évolution du système. Elle permet notamment de minimiser les erreurs lors du calcul de la commande. Les paramètres nominaux sont généralement fournis par le constructeur du processus, mais ne sont pas forcément précis. Il se peut aussi que ces paramètres varient avec le temps (par exemple en cas d'usure). Ces paramètres sont alors identifiés sur la base des mesures obtenues et du modèle (statique ou dynamique) du processus. Il est donc important en fonction des données disponibles d'adapter la stratégie à utiliser, en considérant le bruit affectant les mesures.

Il existe des techniques basées sur la minimisation d'une erreur, en utilisant les méthodes par moindres carrés (LS, RLS...), ou des observateurs. On se référera à [Söderström 1989], [Landau 1993] pour un état de l'art sur la question. Ces observateurs peuvent être à convergence asymptotique (observateur de Luenberger étendu, et observateur de Kalman étendu...), ou en temps fini (observateurs par modes glissants...). Une alternative est l'identification par la méthode algébrique. Dans le cadre de ce travail, nous utilisons la méthode d'identification par moindres carrés pour identifier les paramètres hors ligne. La convergence de tels algorithmes est garantie, et permet d'identifier une valeur initiale des paramètres pour la commande. Afin d'évaluer les paramètres en temps réel, nous avons comparé les méthodes d'identification basées sur la méthode algébrique et sur les observateurs par modes glissants. Dans ce paragraphe, nous présentons seulement les outils que nous utiliserons dans la suite de ce manuscrit.

## 1.4.1 Méthodes d'identification hors ligne

### 1.4.1.1 Méthode par moindres carrés

Les méthodes d'identification par moindres carrés sont classiques. L'objet de ce paragraphe est de définir les notations utilisées dans les chapitres suivants. L'estimation par moindres carrés est une méthode de régression linéaire. C'est un concept commun en statistique. Son origine est attribuée à Gauss (1809), qui a utilisé de telles techniques pour calculer les orbites des planètes [Söderström 1989].

La régression linéaire est le type de modèle paramétrique le plus simple. Elle correspond à une équation du type :

$$y[n] = W^T[n]P_{nom}, \quad (1.22)$$

où  $y$  est le vecteur de sortie,  $W$  est la matrice de régression, et  $P_{nom}$  est le vecteur de paramètres nominaux (inconnus). À partir des mesures de  $y$  et  $W$ , l'objectif est d'obtenir  $P$ , une estimation du vecteur de paramètres  $P_{nom}$ .

Une solution pour trouver  $P$  à partir de (1.22) serait de choisir le nombre de mesures  $N$ , égal au nombre de paramètres à déterminer. On obtient  $W$ , une matrice carrée. Si cette matrice est non singulière, le système d'équation (1.22) est facilement résolu pour  $P$ .

En pratique, le bruit, les perturbations et les erreurs de modélisation donnent de bonnes raisons d'utiliser un nombre de données supérieur au nombre d'inconnues. Quand  $W > n$ , le système d'équations linéaires (1.22) devient surdéterminé (il existe donc une infinité de solutions).

L'équation de l'erreur (1.23) est formée en soustrayant les sorties mesurées aux sorties estimées en utilisant :

$$e[n] = W^T[n]P - y[n]. \quad (1.23)$$

Par définition, l'erreur résiduelle  $R_e$  est égale à la somme des normes au carré sur un intervalle  $[N_0, N_1]$  :

$$\begin{aligned} R_e(K) &= \sum_{n=N_0}^{N_1} ||e[n]||^2 \\ &= \sum_{n=N_0}^{N_1} (W^T[n]P - y[n])^T (W^T[n]P - y[n]). \end{aligned} \quad (1.24)$$

L'estimation par moindres carrés vise à minimiser l'erreur résiduelle. L'estimée est obtenue en posant la dérivée de  $R_e$  par rapport à  $P$  égale à zéro, entraînant :

$$P = \left( \sum_{n=N_0}^{N_1} W[n]W^T[n] \right)^{-1} \left( \sum_{n=N_0}^{N_1} W[n]y[n] \right). \quad (1.25)$$

Cette méthode simple est très souvent utilisée en expérimentation.

#### 1.4.1.2 Théorie de l'élimination

Dans certains cas, une paramétrisation linéaire peut être obtenue, mais seulement avec un ensemble de paramètres  $P$  qui ne sont pas indépendants les uns des autres. Dans ce cas, on définit un vecteur minimal de paramètres indépendants générant le vecteur  $P$ . Bien qu'on puisse identifier le vecteur  $P$  en utilisant un algorithme par moindres carrés, le problème est souvent mal conditionné et les éléments du vecteur ne répondent pas aux contraintes entre les paramètres.

Lorsque les paramètres dans le modèle non défini sont *rationnellement* liés à l'ensemble minimal de paramètres, la sur-paramétrisation peut être traitée à l'aide de la théorie de

l'élimination [Chiasson 2011], [Wang 2005a], [Wang 2005b].

Plus précisément, l'erreur résiduelle est :

$$\begin{aligned} R_e(P_{\min}) &= \sum_{n=N_0}^{N_1} \left\| y(n) - W^T(n)P \right\|_{\text{contraintes}}^2 \\ &= R_y - 2R_{W_y}^T P|_{\text{contraintes}} + (P^T R_W P)|_{\text{contraintes}} , \end{aligned} \quad (1.26)$$

où

$$R_y \triangleq \sum_{n=N_0}^{N_1} y^T(n)y(n), \quad (1.27)$$

$$R_{W_y} \triangleq \sum_{n=N_0}^{N_1} W^T(n)y(n), \quad (1.28)$$

$$R_W \triangleq \sum_{n=N_0}^{N_1} W^T(n)W(n), \quad (1.29)$$

l'indice «contraintes» indiquant que les contraintes liées aux éléments de  $P$  doivent être utilisées pour éliminer les variables supplémentaires de la sur-paramétrisation. Le minimum de (1.26) est obtenu en résolvant l'équation :

$$\pi_i(P_{\min}) \triangleq \frac{\partial R_e(P_{\min})}{\partial P_{\min, i}} = 0, \quad (1.30)$$

pour  $i = 1 \dots m$ , où  $m$  est le nombre de paramètres inconnus dans  $P_{\min}$ , et  $\pi_i(P_{\min})$  sont des polynômes dépendant des éléments de  $P_{\min}$ . Pour un problème des moindres carrés standard, les dérivées de  $R_e$  sont linéaires par rapport à  $P_{\min}$ , de telle sorte que la résolution de (1.30) est simple. Dans le cas plus général considéré ici, les  $\pi_i$  sont des polynômes dépendant des  $m$  paramètres inconnus. Par conséquent, la solution du problème des moindres carrés sur-paramétrisés nécessite la résolution de  $m$  équations polynomiales avec  $m$  variables.

*Résoudre des équations polynomiales par l'intermédiaire des résultantes* : une procédure systématique pour résoudre les équations polynomiales peut être obtenue par une théorie de l'élimination qui utilise la notion de résultant. Un ensemble de polynômes est obtenu, où chaque équation a un paramètre de moins que la précédente. A la fin, un polynôme est obtenu avec un seul paramètre et ses racines peuvent être calculées (numériquement). La solution est alors insérée dans l'équation polynomiale précédente et le paramètre suivant peut être calculé. Chaque paramètre est ainsi obtenu étape par étape,

bien que généralement de multiples solutions existent à chaque étape. Néanmoins, un nombre fini de solutions candidates est déterminé de cette manière. La solution donnant la plus petite erreur résiduelle est considérée comme étant l'estimation.

Pour éliminer un paramètre  $P_{\min,\alpha}$  de deux équations polynomiales  $\pi_j$  and  $\pi_k$ , les polynômes sont écrits comme des polynômes en  $P_{\min,\alpha}$  avec :

$$\begin{aligned}\pi_j(P_{\min}) &= \sum_{i=0}^n P_{\min,\alpha}^i \pi_{j,i}(\{P_{\min}\} \setminus \{P_{\min,\alpha}\}), \\ \pi_k(P_{\min}) &= \sum_{i=0}^m P_{\min,\alpha}^i \pi_{k,i}(\{P_{\min}\} \setminus \{P_{\min,\alpha}\}).\end{aligned}\tag{1.31}$$

Alors, la *matrice de Sylvester*  $p \times p$ , où  $p = \deg_{P_{\min,\alpha}} \{\pi_j(P_{\min})\} + \deg_{P_{\min,\alpha}} \{\pi_k(P_{\min})\} = n + m$ , est définie par :

$$M_{Sylvester} \triangleq \begin{bmatrix} \pi_{j,0} & 0 & \dots & 0 & \pi_{k,0} & 0 & \dots & 0 \\ \pi_{j,1} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \pi_{j,0} & \pi_{k,m-1} & & & \pi_{k,0} \\ \pi_{j,n} & & & \pi_{j,1} & \pi_{k,m} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \pi_{k,m-1} \\ 0 & \dots & 0 & \pi_{j,n} & 0 & \dots & 0 & \pi_{k,m} \end{bmatrix}.\tag{1.32}$$

Le polynôme résultant est défini par :

$$r(\{P_{\min}\} \setminus \{P_{\min,\alpha}\}) = \text{Res}(\pi_j, \pi_k, P_{\min,\alpha}) \triangleq \det(M_{Sylvester}).\tag{1.33}$$

Ce polynôme résultant est nul pour l'ensemble optimal de paramètres et est indépendant de  $P_{\min,\alpha}$ . La procédure est répétée pour tous les polynômes et tous les paramètres jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un polynôme avec un seul paramètre. Les calculs requis pour réaliser ces opérations sont simples, mais deviennent rapidement lourds. Dans le cadre de ce travail, les calculs sont réalisés symboliquement à l'aide de Maple. La procédure à suivre est expliquée pour un cas concret dans l'Annexe B.

## 1.4.2 Méthodes d'identification en ligne

### 1.4.2.1 Identification algébrique

L'identification des paramètres pour des systèmes linéaires invariants dans le temps à l'aide de l'approche algébrique introduite dans le paragraphe 1.2 a fait l'objet de plusieurs publications. On citera par exemple [Ushirobira 2011], [Mboup 2009], [Gensior 2008], [Rudolph 2008], [Tian 2008], [Trapero 2007]. Les expressions analytiques obtenues ne sont pas uniques. Dans ce paragraphe, une forme générale est décrite pour des systèmes ayant une perturbation de forme polynomiale par rapport au temps. D'autres perturbations structurées (sinusoïdales par exemple) peuvent être considérées, mais nous nous limiterons à ce type de perturbations. Dans [Fliess 2003b], [Fliess 2008b] la notion d'identifiabilité est révisée du point de vue de l'algèbre différentielle pour des systèmes ayant des perturbations structurées.

On considère la relation entrée/sortie avec perturbations :

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)} + \Pi, \quad (1.34)$$

avec  $a_n = 1$  et  $m < n$ .  $y$  et  $u$  sont respectivement la sortie et l'entrée du système.  $\Pi = \sum_{i=1}^{\kappa} c_i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}$  représente des perturbations qui seront supposées polynomiales sur un court intervalle de temps. Il est fréquent que les perturbations structurées puissent être approximées par des polynômes. Cette approximation est valable seulement sur une fenêtre donnée.

**Théorème 1.1** *L'expression des paramètres inconnus  $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_m$  de l'équation (1.34) est donnée par :*

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \\ \hat{b}_0 \\ \vdots \\ \hat{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{1a} & -\mathbb{F}_{1b} \\ \mathbb{F}_{2a} & -\mathbb{F}_{2b} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -F_{n,1}[y(t)] \\ \vdots \\ -F_{n,n}[y(t)] \\ -F_{n,n+1}[y(t)] \\ \vdots \\ -F_{n,n+m+1}[y(t)] \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

avec

$$\mathbb{F}_{1a} = \begin{bmatrix} F_{0,1}[y(t)] & \dots & F_{n-1,1}[y(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n}[y(t)] & \dots & F_{n-1,n}[y(t)] \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_{1b} &= \begin{bmatrix} F_{0,1}[u(t)] & \dots & F_{m,1}[u(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n}[u(t)] & \dots & F_{m,n}[u(t)] \end{bmatrix}, \\
 \mathbb{F}_{2a} &= \begin{bmatrix} F_{0,n+1}[y(t)] & \dots & F_{n-1,n+1}[y(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n+m,1}[y(t)] & \dots & F_{n-1,n+m+1}[y(t)] \end{bmatrix}, \\
 \mathbb{F}_{2b} &= \begin{bmatrix} F_{0,n+1}[u(t)] & \dots & F_{m,n+1}[u(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n+m+1}[u(t)] & \dots & F_{m,n+m+1}[u(t)] \end{bmatrix}, \\
 F_{i,p}[f(t)] &= \sum_{j=n-i}^{\kappa+n} \frac{c_{i,j} \int_0^t (t-\tau)^\gamma (-\tau)^j f(\tau) d\tau}{\gamma!}, \\
 \gamma &= \kappa + 2n + p - i - j - 1, \\
 c_{i,j} &= \binom{\kappa+n}{j} \frac{(\kappa+i)!}{(i+j-n)!},
 \end{aligned}$$

où  $p \in [1, P]$  et  $P \in [1, n+m+1]$  représente le nombre de paramètres inconnus.

**Preuve** Les expressions obtenues dans le théorème 1.1 sont construites comme suit :

1. On considère la transformation de Laplace de (1.34) :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=0}^n a_i (s^i y(s) - s^{i-1} y(0) - \dots - y(0)^{(i-1)}) \\
 &= \sum_{i=0}^m (s^i u(s) - s^{i-1} u(0) - \dots - u(0)^{(i-1)}) + \sum_{i=0}^{\kappa} \frac{c_i}{s^i}.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

2. Manipulations algébriques : les perturbations, étant structurées, elles sont annihilées en multipliant chaque partie de (1.36) par  $s^\kappa$ , puis en dérivant à l'ordre  $\kappa$  par rapport au temps. Les conditions initiales sont éliminées en différentiant  $n$  fois de plus (1.36). Ceci conduit à l'opérateur différentiel linéaire :

$$\Pi = \frac{d^{\kappa+n}}{ds^{\kappa+n}} s^\kappa. \tag{1.37}$$

En utilisant les formules (1.2) et (1.3), on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n a_i \left( \sum_{j=n-i}^{\kappa+n} \binom{\kappa+n}{j} \frac{(\kappa+i)! s^{i+j-n}}{(i+j-n)!} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} \right) \\ &= \sum_{i=0}^m b_i \left( \sum_{j=n-i}^{\kappa+n} \binom{\kappa+n}{j} \frac{(\kappa+i)! s^{i+j-n}}{(i+j-n)!} \frac{d^j(u(s))}{ds^j} \right). \end{aligned} \quad (1.38)$$

L'estimateur est rendu propre en multipliant chaque membre de (1.38) par  $s^{-(\kappa+n+p)}$  ( $p \in [1, P]$ ) :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n a_i \left( \sum_{j=n-i}^{\kappa+n} \frac{c_{i,j}}{s^{\kappa+2n+p-i-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} \right) \\ &= \sum_{i=0}^m b_i \left( \sum_{j=n-i}^{\kappa+n} \frac{c_{i,j}}{s^{\kappa+2n+p-i-j}} \frac{d^j(u(s))}{ds^j} \right), \end{aligned} \quad (1.39)$$

où

$$c_{i,j} = \binom{\kappa+n}{j} \frac{(\kappa+i)!}{(i+j-n)!}.$$

La formule (1.6) permet d'avoir la relation suivante dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n a_i \left( \sum_{j=n-i}^{\kappa+n} \frac{c_{i,j} \int_0^t (t-\tau)^{\kappa+2n+p-i-j-1} (-\tau)^j y(\tau) d\tau}{(\kappa+2n+p-i-j-1)!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^m b_i \left( \sum_{j=n-i}^{\kappa+n} \frac{c_{i,j} \int_0^t (t-\tau)^{\kappa+2n+p-i-j-1} (-\tau)^j u(\tau) d\tau}{(\kappa+2n+p-i-j-1)!} \right). \end{aligned} \quad (1.40)$$

On obtient alors  $P$  relations liées aux paramètres qui conduisent à la forme (1.35).

**Remarque 1.2** *Ce théorème regroupe des résultats présents dans l'article [Mboup 2009] et l'article [Tian 2008].*

**Remarque 1.3** *On rappelle que les manipulations algébriques permettant d'obtenir (1.35) ne sont pas uniques. Une méthodologie pour trouver des annulateurs minimaux ainsi que des numérateurs différentiels ayant de bonnes propriétés une fois de retour dans le domaine temporel est décrite dans [Ushirobira 2012].*

#### 1.4.2.2 Une application originale aux paliers magnétiques

Afin de montrer les performances de cet algorithme, on présente dans ce paragraphe une application expérimentale originale réalisée sur un palier magnétique. Le palier magnétique utilisé est celui du LAGIS représenté sur la Figure. 1.1. Il est composé d'un palier

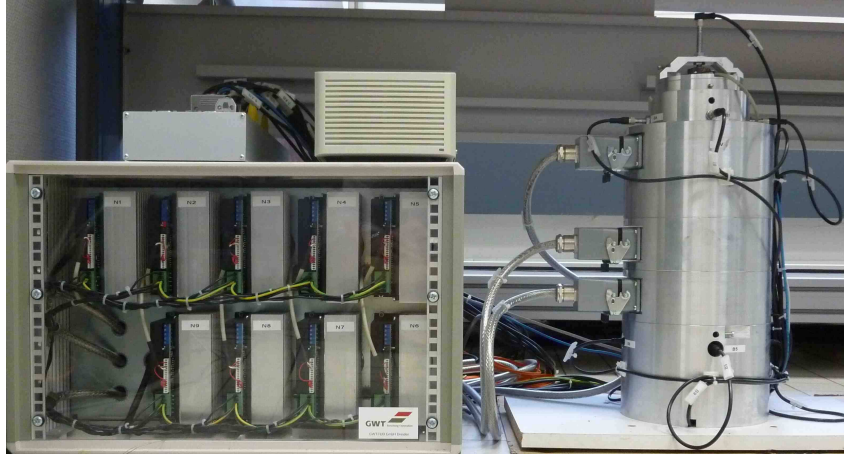


FIGURE 1.1 – Banc d'essai du palier magnétique.

radial et de deux paliers axiaux. Il est similaire à celui présenté dans [Eckhardt 2004]. C'est un système intrinsèquement instable avec des dynamiques fortement non linéaires. Pour ce qui concerne la commande d'un tel processus on se référera aux travaux [Hsu 2003], [Eckhardt 2004], [Grochmal 2009], [Lévine 1996], [Löwis 2000] concernant la commande de paliers magnétiques. Ceux-ci se fondent tous sur un modèle de fonctionnement précis, ce qui justifie le besoin d'identification. Dans cette partie, nous présentons l'estimation de paramètres du palier radial (Fig. 1.2).

### Présentation du problème

Les paramètres recherchés dépendent de la géométrie et des matériaux du palier. Leur estimation est importante car ils sont difficiles à calculer et sont susceptibles de varier sensiblement au cours du temps. Le modèle mathématique s'appuie sur l'hypothèse d'un corps rigide. Les équations dynamiques, peuvent s'écrire comme suit :

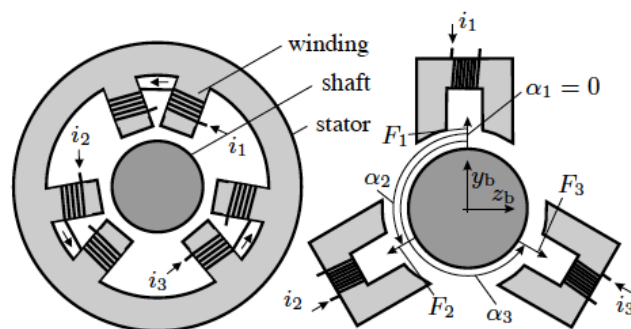


FIGURE 1.2 – Schéma du palier magnétique à trois phases.



$$m\ddot{Y} = F_y, \quad (1.41)$$

$$m\ddot{Z} = F_z, \quad (1.42)$$

où  $Y$  et  $Z$  représentent les positions dans le plan du palier radial (avec les axes  $y$  et  $z$ ). Les forces  $F_y$  et  $F_z$  représentent respectivement la résultante des forces appliquées dans les directions  $y$  et  $z$ . L'arbre a une masse  $m$ . Les forces résultantes dans le plan  $(y, z)$  sont données par la superposition des forces générées par les électro-aimants :

$$\begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 & \sin \alpha_3 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

Les angles qui apparaissent dans (1.43) indiqués sur la Figure 1.2. Les forces magnétiques individuelles peuvent être modélisées par ( $k \in \{1, 2, 3\}$ ) :

$$F_k = \lambda_k \frac{i_k^2}{\left( \sigma - \begin{bmatrix} \sin \alpha_k \\ \cos \alpha_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} \right)^2}, \quad (1.44)$$

où  $\sigma$  est la longueur de l'entrefer et les  $\lambda_k$  sont des paramètres dépendant de la géométrie et des matériaux du palier.

Les équations ci-dessus reflètent les dynamiques du modèle non perturbé. Les simplifications et les erreurs de modèle (1.41)-(1.42) sont supposées avoir le même effet qu'une perturbation. La rotation du rotor est aussi une source de perturbations, introduisant notamment des composantes harmoniques. Lorsque l'arbre se déplace suivant une trajectoire ellipsoïdale, les positions dans les directions  $y$  et  $z$  sont des fonctions sinusoïdales. Ce mouvement génère une erreur significative dans la relation entre les courants et les forces, qui peut, elle aussi, changer de façon sinusoïdale. Ces perturbations doivent être rejetées dans l'algorithme d'identification des  $\lambda_k$  (ou doivent être estimées afin d'être compensées dans la commande).

Le modèle perturbé peut s'écrire :

$$m\ddot{Y} = F_y + p_y(t), \quad (1.45)$$

$$m\ddot{Z} = F_z + p_z(t), \quad (1.46)$$

où  $p_*(t)$  représentent les perturbations sur chaque axe. En utilisant les équations (1.45),

(1.46), (1.43) et (1.44), on obtient une relation de la forme :

$$\ddot{Y} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k u_{y,k} + \frac{p_y(t)}{m}, \quad (1.47)$$

$$\ddot{Z} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k u_{z,k} + \frac{p_z(t)}{m}, \quad (1.48)$$

avec :

$$u_{y,k} = \frac{\sin(\alpha_k) i_k^2}{m \left( \sigma - \begin{bmatrix} \sin \alpha_k \\ \cos \alpha_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} \right)^2},$$

et :

$$u_{z,k} = \frac{\cos(\alpha_k) i_k^2}{m \left( \sigma - \begin{bmatrix} \sin \alpha_k \\ \cos \alpha_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} \right)^2}.$$

Ces deux équations dépendent des entrées mesurées et des accélérations dans le plan. Les paramètres  $\lambda_k$  sont les paramètres à identifier à partir des mesures de  $Y$  et  $Z$ , ceci malgré les perturbations  $p_y$  et  $p_z$ .

### Estimation des paramètres $\lambda_k$

Les trois paramètres inconnus  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  peuvent être estimés en utilisant l'équation (1.48). Bien que les perturbations soient sinusoïdales, donc structurées, nous considérons dans le développement des estimateurs que celle-ci sont constantes.

Les équations (1.47) et (1.48) sont des relations entrées/sorties similaires à (1.34). Les trois paramètres à estimer étant présents dans (1.48), on utilisera cette équation pour les estimer. Cette relation a trois entrées,  $n = 2$ ,  $m = 0$ . Le choix d'une perturbation constante implique  $\kappa = 1$ . Le théorème 1.1 est appliqué à l'équation (1.48) pour ces trois paramètres inconnus (c'est-à-dire  $P = 3$ ), menant à :

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{F}_{b_1} & -\mathbb{F}_{b_2} & -\mathbb{F}_{b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{2,1}[Z(t)] \\ -F_{2,2}[Z(t)] \\ -F_{2,3}[Z(t)] \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

avec

$$\mathbb{F}_{b_*} = \begin{bmatrix} F_{0,1}[u_{Z,*}(t)] \\ F_{0,2}[u_{Z,*}(t)] \\ F_{0,3}[u_{Z,*}(t)] \end{bmatrix},$$

$$F_{i,p}[f(t)] = \sum_{j=2-i}^3 \frac{c_{i,j} \int_0^t (t-\tau)^\gamma (-\tau)^j f(\tau) d\tau}{\gamma!},$$

$$\gamma = 4 + p - i - j,$$

$$c_{i,j} = \binom{3}{j} \frac{(1+i)!}{(i+j-2)!},$$

où  $p \in \{1, 2, 3\}$ .

On définit le vecteur :  $\Lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$ . L'équation (1.49) permet d'obtenir les expressions des estimations des paramètres  $\hat{\lambda}_1$ ,  $\hat{\lambda}_2$  et  $\hat{\lambda}_3$  :

$$\Delta P \hat{\Lambda} = \Delta Q, \tag{1.50}$$

les matrices  $\Delta P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et  $\Delta Q \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  étant données par :

$$\Delta P = \begin{bmatrix} -F_{0,1}[u_{Z,1}(t)] & -F_{0,1}[u_{Z,2}(t)] & -F_{0,1}[u_{Z,3}(t)] \\ -F_{0,2}[u_{Z,1}(t)] & -F_{0,2}[u_{Z,2}(t)] & -F_{0,2}[u_{Z,3}(t)] \\ -F_{0,3}[u_{Z,1}(t)] & -F_{0,3}[u_{Z,2}(t)] & -F_{0,3}[u_{Z,3}(t)] \end{bmatrix}, \tag{1.51}$$

$$\Delta Q = \begin{bmatrix} -F_{2,1}[Z(t)] \\ -F_{2,2}[Z(t)] \\ -F_{2,3}[Z(t)] \end{bmatrix}. \tag{1.52}$$

Si  $\Delta P$  est inversible, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \Delta P^{-1} \Delta Q. \tag{1.53}$$

**Remarque 1.4** On peut noter qu'au temps  $t = 0$ , les matrices et les vecteurs utilisés pour calculer les estimations sont nuls. Les paramètres sont alors indéterminés. Par conséquent la formule doit être calculée, non pas au temps  $t = 0$ , mais plus tard, pour  $t = \epsilon$  avec

$\epsilon > 0$  et petit.

Ainsi, le vecteur de paramètres est estimé comme suit :

$$\hat{\Lambda} = \begin{cases} \text{“valeur arbitraire”} & \text{pour } t \in [0, \epsilon[, \\ \Delta P^{-1} \Delta Q & \text{pour } t \in [\epsilon, \infty[. \end{cases}$$

### Mise en œuvre

Dans le paragraphe précédent, les expressions des estimations ont été développées en supposant les perturbations constantes. Néanmoins, ce n'est physiquement pas réaliste. On a vu qu'il y avait deux sources de perturbations :

- la première est due aux simplifications et aux erreurs de modélisation, peut être considérée comme constante si les signaux sont intégrés sur une courte fenêtre glissante. Pour cela, la méthode d'intégration présentée dans la section 1.2.2 est appliquée.
- les perturbations harmoniques avec une fréquence proche de la fréquence de rotation sont rejetées en utilisant un filtre passe-bas. Le filtre utilisé est similaire à celui présenté dans [Trapero 2007]. Le numérateur et le dénominateur résultant de chaque estimation de paramètres sont filtrés comme suit :

$$\hat{\lambda}_{k,f}(t) = \frac{F(s)n(t)}{F(s)d(t)}, \quad (1.54)$$

$$\text{où } F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

### Résultats expérimentaux

Le palier magnétique considéré a quelques paramètres connus qui sont : la masse du rotor  $m = 6.7(kg)$  et la longueur de l'entrefer nominal  $\sigma = 5 \cdot 10^{-4}[m]$ . La commande est réalisée avec une commande de courant dans la boucle interne, et une commande de position dans la boucle extérieure. La boucle interne s'appuie sur le modèle électrique des bobines du palier, la boucle extérieure sur le modèle mécanique d'un corps rigide (1.45)-(1.46). La commande choisie est une commande de suivi de trajectoire basée sur la platitude, comme décrit dans [Löwis 2000]. La trajectoire de référence est ellipsoïdale avec  $Y^* = r_Y \cos(\omega t)$  et  $Z^* = r_Z \sin(\omega t)$ ,  $r_Y = 30 \cdot 10^{-6}(m)$  et  $r_Z = 70 \cdot 10^{-6}(m)$ . L'arbre tourne à une vitesse angulaire autour de 3000 tours/min, c'est-à-dire  $\omega = 100\pi(rad/s)$ . L'estimateur est programmé de façon discrète, avec une période d'échantillonnage de  $1 \cdot 10^{-4}(s)$ . Le choix de la fenêtre de glissement n'est pas direct. La fenêtre doit être

suffisamment longue pour atténuer le bruit, mais pas trop longue pour que l'hypothèse d'une perturbation constante reste vraie. L'expérience montre qu'une fenêtre de glissement  $T_f = 0.02s$  donne de bons résultats. La valeur initiale de  $\lambda_{k,0} = 4.0 \cdot 10^{-6} (Nm^2/A^2)$  est fixée arbitrairement. Le filtre  $F(s)$  est choisi avec  $\zeta = 0.707$  et  $w_n = 15rad/s$ .

Au départ de l'expérimentation, la commande utilise la valeur initiale et arbitraire  $\lambda_{k,0}$  de  $t = 0$  à  $t = t_e$ ,  $t_e$  étant l'instant où les paramètres sont identifiables. L'estimateur, connecté en parallèle avec le système, estime les paramètres  $\hat{\lambda}_k$  en temps réel sur l'intervalle  $(\epsilon, t_e]$ . Lorsque les valeurs estimées deviennent constantes, les valeurs initiales  $\lambda_{k,0}$  sont remplacées par les valeurs estimées.

Le matériel informatique est une carte dSpace 1103. La loi de commande est programmée en C et est connectée à l'unité électro-mécanique à travers le logiciel Control Desk. Les courants sont générés par trois amplificateurs linéaires à courant continu qui génèrent les trois entrées de commande indépendantes.

Les paramètres à estimer sont donc d'abord fixés à  $\lambda_{k,0} = 4.0 \cdot 10^{-6} Nm^2/A^2$  (valeur no-

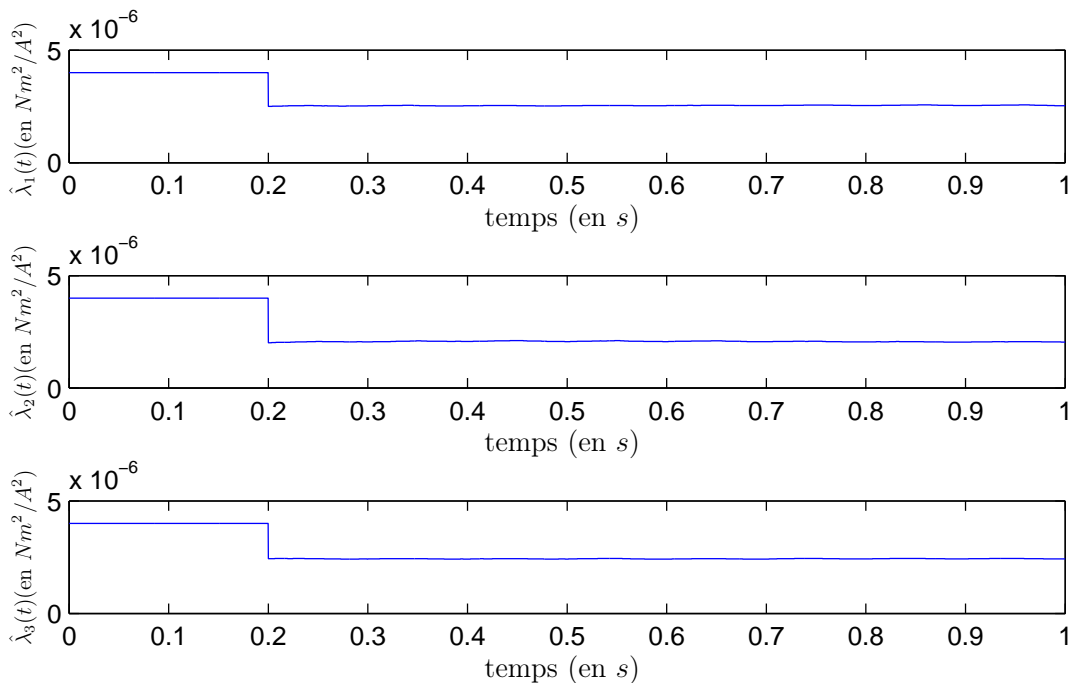
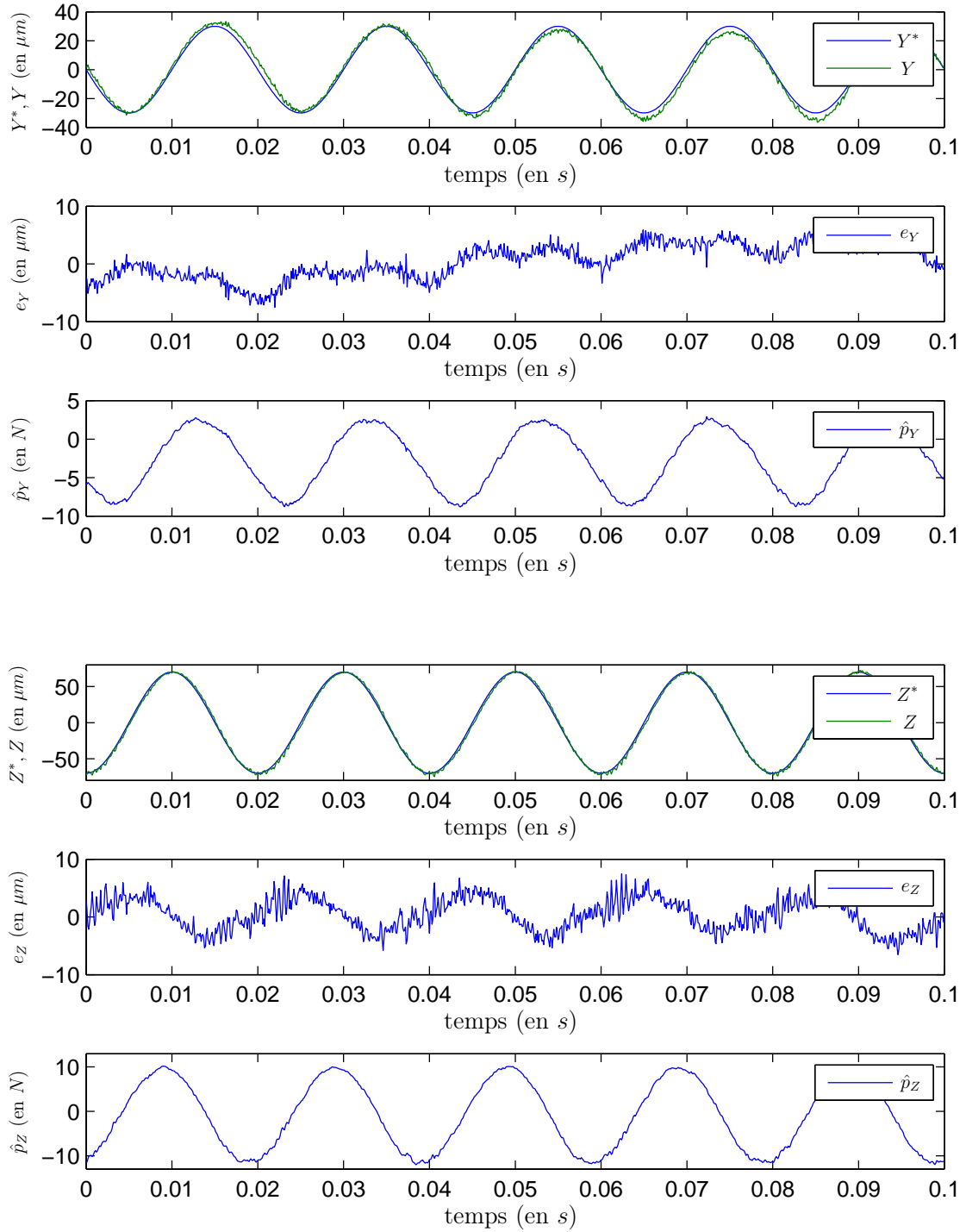


FIGURE 1.3 – Estimation expérimentale des paramètres.

minale). Lorsque l'algorithme d'identification commence, la Figure 1.3 montre qu'après 0.2 secondes, les paramètres sont constants. On obtient trois valeurs constantes des paramètres : ( $\hat{\lambda}_1 = 2.53 \cdot 10^{-6} Nm^2/A^2$ ,  $\hat{\lambda}_2 = 2.04 \cdot 10^{-6} Nm^2/A^2$  et  $\hat{\lambda}_3 = 2.42 \cdot 10^{-6} Nm^2/A^2$ ).

FIGURE 1.4 – Evolution de la trajectoire le long des axes  $y$  et  $z$  avant identification.

Afin de vérifier la précision des estimations, on observe les trajectoires et les per-

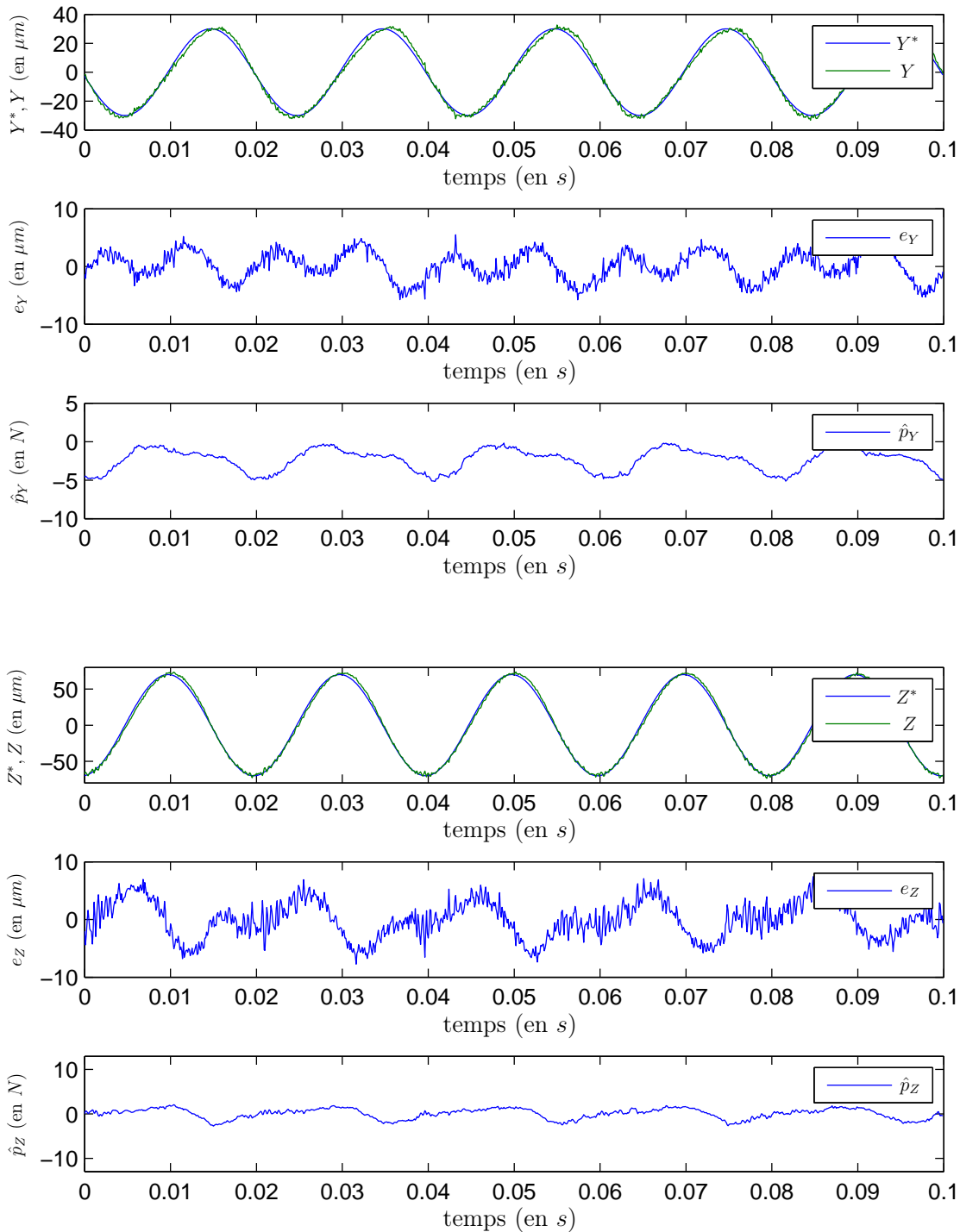
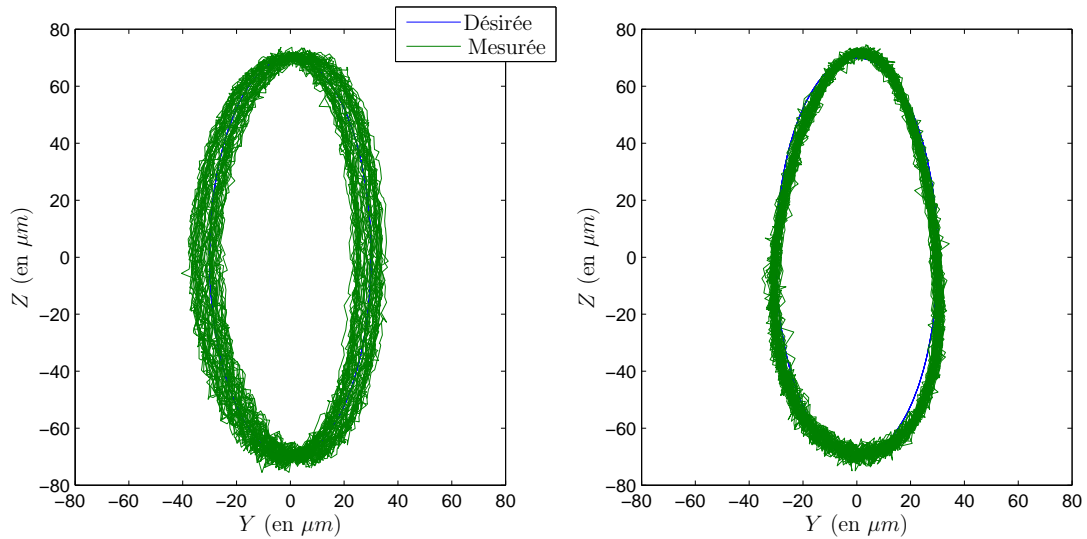


FIGURE 1.5 – Evolution de la trajectoire le long des axes  $y$  et  $z$  après identification.

turbations avant et après estimation. La Figure 1.4 montre l'évolution des axes  $y$  et  $z$  avant l'identification, tandis que la Figure 1.5 montre l'évolution après l'identification.

FIGURE 1.6 – Position dans le plan  $y - z$  avant et après identification.

Le résultat le plus évident est sur la perturbation. Une estimation de cette dernière est obtenue en utilisant l'observateur de perturbation donné dans [Löwis 2000]. L'amplitude de la perturbation est au moins trois fois plus petite après identification qu'avant. Ceci traduit une réduction conséquente des incertitudes de modélisation et montre l'efficacité de l'algorithme. On peut remarquer également le bon comportement de ce dernier malgré la faible grandeur des paramètres recherchés. Concernant le suivi de trajectoire, l'amélioration est relativement remarquable. Les erreurs sur le suivi de trajectoire sont légèrement inférieures et plus régulières lorsque les paramètres sont bien estimés. Le comportement n'est pas réellement différent mais ce n'est pas surprenant : la loi de commande compense les perturbations, elles-même estimées par un observateur. En estimant la perturbation, l'observateur prend en considération les erreurs de modélisation. Finalement, le dernier graphe (Figure 1.6) donne une idée du suivi de trajectoire le long des axes  $(y, z)$  avant et après identification.

Cet exemple illustre la théorie, ainsi que la mise en œuvre d'une procédure d'identification par la méthode algébrique. En effet, les résultats expérimentaux montrent l'efficacité et la possibilité d'appliquer ce genre d'identification sur des procédés réels malgré un faible temps de calcul disponible, la période d'échantillonnage étant de  $0.1ms$ .



### 1.4.2.3 Identification par modes glissants

L'identification des paramètres en ligne peut aussi être réalisée à partir d'observateurs par modes glissants. Cette approche a fait l'objet de plusieurs publications, notamment [Alwi 2008], [Floquet 2006], [Iqbal 2011], [Spurgeon 2008].

On considère un système non linéaire de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u, p, t), \quad (1.55)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'entrée,  $p \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des paramètres inconnus.

**Hypothèse 1** *La fonction  $f(x, u, p, t)$  peut être décomposée sous la forme suivante :*

$$f(x, u, p, t) = \alpha^T(p)\xi(x, u, t) + \zeta(x, u, t), \quad (1.56)$$

$$\alpha^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q], \xi^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q] \text{ et } \zeta^T = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q],$$

où  $\xi_i = \xi_i(x, u, t) \neq 0$  et  $\zeta_i = \zeta_i(x, u, t)$  sont des fonctions connues et linéairement indépendantes.  $\alpha_i = \alpha_i(p)$  sont des fonctions rationnelles de  $p$ .

Pour le système (1.55), un observateur par modes glissants est défini par :

$$\dot{\hat{x}} = \zeta(x, u, t) + \chi(x - \hat{x}), \quad (1.57)$$

où la fonction  $\chi$  est une injection de sortie discontinue par modes glissants d'ordre deux. Le degré relatif du système détermine le choix de l'algorithme par modes glissants utilisé. On a vu précédemment par exemple que l'algorithme du Super Twisting pouvait être utilisé pour les systèmes de degré relatif à 1.

Il est important de noter que l'observateur ne dépend pas des paramètres à estimer. Les dynamiques des erreurs d'observation  $e = x - \hat{x}$  sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= \alpha^T(p)\xi(x, u, t) - \chi(x - \hat{x}). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Les algorithmes utilisés garantissent la convergence en temps fini vers la surface de glissement, entraînant  $e = \dot{e} = 0$  et donc :

$$\hat{\alpha}^T(p)\xi(x, u, t) = \chi(x - \hat{x}). \quad (1.59)$$

L'estimation des fonctions  $\alpha_i$  est alors exprimée en fonction des états et des paramètres connus :

$$\hat{\alpha}^T(p) = \xi(x, u, t)^{-1} \chi(x - \hat{x}). \quad (1.60)$$

Conformément à l'hypothèse 1, les fonctions  $\alpha_i$  étant des fonctions rationnelles de  $p$ , le vecteur  $\hat{p}$ , estimation du vecteur  $p$ , est déterminé.

Dans ce paragraphe, nous avons présenté de façon très succincte l'estimation en ligne de paramètres utilisant les modes glissants. Cette méthode sera utilisée et plus détaillée pour déterminer en ligne les paramètres du MSAP.

## 1.5 Conclusion

Le cadre théorique de ce travail a été présenté dans ce chapitre. Nous avons montré différentes approches permettant d'aboutir à l'identification, l'estimation et la commande de systèmes non linéaires.

Nous avons présenté les généralités concernant la méthode algébrique. Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressés à cette méthode pour l'identification des paramètres. Un exemple d'application aux paliers magnétiques présenté dans ce chapitre montre l'efficacité de ces méthodes. En ce qui concerne l'estimation des dérivées, le lecteur pourra s'intéresser aux travaux publiés dans [Liu 2008], [Mboup 2009] et [Riachy 2010] entre autres. Concernant les modes glissants, cet outil est utilisé pour l'identification de paramètres et l'estimation des états du système en utilisant des observateurs, mais également pour la commande. Les performances de ces techniques seront montrées expérimentalement sur le MSAP. Nous avons également traité l'identification par moindres carrés, celle-ci permet d'obtenir une identification hors ligne des paramètres du système. Ces paramètres pourront servir de valeurs de référence ou nominales.

Il faut noter que dans ce chapitre, seule la méthode algébrique est présentée sur le palier magnétique. L'identification par moindres carrés ainsi que l'identification par modes glissants auraient pu être appliquées sur cet exemple, mais une comparaison plus détaillée des trois méthodes sera réalisée dans les chapitres suivants sur le MSAP.

Avant cela, le moteur à aimants permanents utilisé est présenté dans le chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Modélisation des moteurs synchrones à aimants permanents

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>52</b>
<b>2.2</b>	<b>Principe de fonctionnement</b>	<b>52</b>
<b>2.3</b>	<b>Équations dynamiques des moteurs à aimants permanents</b>	<b>53</b>
2.3.1	Équations électriques	53
2.3.2	Équations mécaniques	54
2.3.3	Équations de puissance	55
<b>2.4</b>	<b>Différents repères pour la modélisation</b>	<b>56</b>
2.4.1	Rappel sur le modèle dans le repère $d - q$	56
2.4.2	Modèle dans le nouveau repère $f - g$	58
2.4.3	Modélisation dans le cas où $L_2$ est négligeable	60
<b>2.5</b>	<b>Analyse du système</b>	<b>61</b>
2.5.1	Commandabilité et observabilité	61
2.5.2	Platitude	64
<b>2.6</b>	<b>Planification de la trajectoire</b>	<b>67</b>
2.6.1	Position $\theta_r$	67
2.6.2	Courant direct $i_{dr}$	69
<b>2.7</b>	<b>Présentation du banc d'essai</b>	<b>70</b>
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>72</b>

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de rappeler quelques fondamentaux sur les MSAP. Une fois le principe de fonctionnement présenté, nous nous attarderons sur la modélisation du moteur. Nous présenterons ici une approche de modélisation assez détaillée prenant en compte les harmoniques du moteur dans le repère tournant  $a - b$ . Une fois ce modèle obtenu, il sera réécrit dans deux repères différents. Le premier changement de repère est le changement classique utilisé pour les machines tournantes, c'est-à-dire le modèle dans le repère tournant  $d - q$ . Nous introduirons ensuite un nouveau repère, qui a l'avantage d'avoir les mêmes propriétés que le repère  $d - q$ , sans la nécessité de la mesure de position. Nous nommerons ce repère le repère tournant de référence  $f - g$ . À partir de ce modèle, et des différents repères, certaines propriétés du moteur seront rappelées, telles que la commandabilité, l'observabilité et la platitude. Basé sur ces propriétés, une trajectoire de référence pour le moteur sera proposée. Finalement, la dernière partie sera dédiée à la présentation du banc d'essai utilisé pour les expérimentations.

## 2.2 Principe de fonctionnement

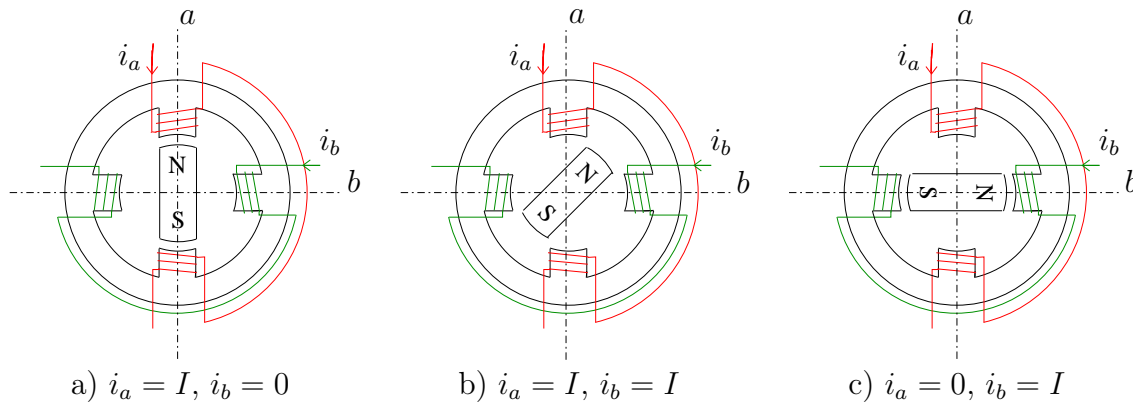


FIGURE 2.1 – Principe de fonctionnement du moteur à aimants permanents.

Le principe des moteurs à aimants permanents est assez simple. Seules les bobines sont alimentées. Le champ créé par les enroulements oriente le rotor qui est constitué par des aimants. La Figure 2.1 représente un moteur ayant un rotor bipolaire et un stator comportant une paires de pôles. Les phases  $a$  et  $b$  sont portées par des enroulements opposés. La présence de courants dans les phases oriente le rotor. On définit un “pas” élémentaire  $\theta_p$  comme étant le déplacement angulaire du rotor lorsque l'alimentation est

commutée d'une phase à la suivante. Nous obtenons pour cette structure  $\theta_p = 90^\circ$ . Ceci correspond au passage de la Figure 2.1.a à la Figure 2.1.c. Les demi-pas sont obtenus en alimentant deux phases à la fois (Figure 2.1.b). De nombreux moteurs sur le marché utilisent ce genre de structure.

## 2.3 Équations dynamiques des moteurs à aimants permanents

La modélisation des moteurs à aimants permanents est basée sur les propriétés des machines synchrones à aimants permanents et à pôles saillants. La modélisation du moteur présentée dans ce paragraphe est issue de [Engelmann 1995, Goedel 1984].

### 2.3.1 Équations électriques

Les dynamiques électriques des deux enroulements  $a$  et  $b$  du moteur à aimants permanents sont décrites par les équations :

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_a}{dt} = v_a - Ri_a, \\ \frac{d\Psi_b}{dt} = v_b - Ri_b, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\Psi_a$  et  $\Psi_b$  sont les flux magnétiques dans les enroulements  $a$  et  $b$ ,  $v_a$  et  $v_b$  sont les tensions appliquées aux enroulements,  $i_a$  et  $i_b$  sont les courants, et  $R$  est la résistance totale de l'enroulement. En considérant un rotor à  $n_p$  paires de pôles, les flux magnétiques totaux sont supposés être de la forme :

$$\begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix} = L(\theta) \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} + \Psi_0 D(\theta), \quad (2.2)$$

où :

$$L(\theta) = \begin{bmatrix} L_0 + L_2 \cos(2n_p\theta) & L_2 \sin(2n_p\theta) \\ L_2 \sin(2n_p\theta) & L_0 - L_2 \cos(2n_p\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

et :

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(n_p\theta) \\ \sin(n_p\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$\theta$  est la position angulaire du rotor,  $L_0$  est l'inductance moyenne d'un enroulement, étant donné que le moteur tourne,  $L_2$  est la variation moyenne-à-crête de l'inductance, et  $\Psi_0$  est la contribution de l'aimant permanent au flux de la phase  $a$  quand  $\theta = 0$ .

Les équations électriques obtenues à partir de l'expression des flux deviennent :

$$L(\theta) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_a - Ri_a \\ v_b - Ri_b \end{bmatrix} - \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \omega \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} - \Psi_0 \omega \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta}, \quad (2.5)$$

où  $\omega = d\theta/dt$  est la vitesse angulaire du rotor et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} &= 2n_p L_2 \begin{bmatrix} -\sin(2n_p\theta) & \cos(2n_p\theta) \\ \cos(2n_p\theta) & \sin(2n_p\theta) \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} &= n_P \begin{bmatrix} -\sin(n_p\theta) \\ \cos(n_p\theta) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

On obtient alors :

$$L(\theta) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_a - Ri_a \\ v_b - Ri_b \end{bmatrix} - \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \omega \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} - K\omega \begin{bmatrix} -\sin(n_p\theta) \\ \cos(n_p\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

où  $K \triangleq n_p \Psi_0$  est la constante de couple électromoteur (ou aussi la constante de force contre-électromotrice (contre-fem)).

### 2.3.2 Équations mécaniques

Le principe fondamental de la dynamique de rotation permet d'écrire :

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_T, \quad (2.8)$$

où  $J$  est le moment d'inertie total des masses en rotation ramené sur l'arbre moteur et  $C_T$  représente l'ensemble des couples appliqués au moteur (frottements visqueux, couple de charge, couple électromagnétique). Soit :

$$C_T = -f_v \omega - C_r \operatorname{sgn}(\omega) + \tau_e,$$

avec  $f_v$  le coefficient de frottement visqueux et  $C_r$  le coefficient de friction de Coulomb, fonction du temps. Son signe varie en fonction de la vitesse pour qu'il soit toujours résistant.

Par conservation de l'énergie mécanique,  $\tau_e$ , le couple électromécanique est donné par :

$$\tau_e = \Psi_0 \begin{bmatrix} i_a & i_b \end{bmatrix} \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_a & i_b \end{bmatrix} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \tau_e = & -K i_a \sin(n_p \theta) + K i_b \cos(n_p \theta) \\ & + n_p L_2 \left( (-i_a^2 + i_b^2) \sin(2n_p \theta) + 2i_a i_b \cos(2n_p \theta) \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

### 2.3.3 Équations de puissance

– Puissance électrique :

On pose :

$$(\cdot)_{ab} = \begin{bmatrix} (\cdot)_a \\ (\cdot)_b \end{bmatrix},$$

et :

$$[R] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

La puissance électrique est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} P_{el} &= v_{ab}^T i_{ab} \\ &= \left( [R] i_{ab} + \frac{d\Psi_{ab}}{dt} \right)^T i_{ab} \\ &= i_{ab}^T [R] i_{ab} + \left( \frac{di_{ab}}{dt} \right)^T L(\theta)^T i_{ab} + i_{ab}^T \left( \frac{dL(\theta)}{dt} \right)^T i_{ab} \\ &\quad + \Psi_0 \omega \left( \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} \right)^T i_{ab}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} P_{el} &= i_{ab}^T [R] i_{ab} + \left( \frac{di_{ab}}{dt} \right)^T L(\theta)^T i_{ab} + \frac{1}{2} i_{ab}^T \left( \frac{dL(\theta)}{dt} \right)^T i_{ab} \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega i_{ab}^T \left( \frac{\partial L(\theta)}{\partial t} \right)^T i_{ab} + K \omega \left( \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} \right)^T i_{ab} \\ &= i_{ab}^T [R] i_{ab} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (i_{ab}^T L(\theta) i_{ab}) + \omega \tau_e. \end{aligned} \quad (2.12)$$



– Puissance électrique convertie en puissance mécanique :

$$\begin{aligned} P_{em} &= \tau_e \omega \\ &= v_{ab}^T i_{ab} - i_{ab}^T [R] i_{ab} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (i_{ab}^T L(\theta) i_{ab}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

## 2.4 Différents repères pour la modélisation

Le modèle décrit par les équations (2.7) et (2.9) montre que les signaux  $i_a$  et  $i_b$  varient à  $n_p$  fois la fréquence de rotation. À haute vitesse, les tensions et les courants varient à haute fréquence. Afin de s'affranchir des termes sinusoïdaux, on utilise la transformée de Park [Park 1929], appelée aussi “Direct-Quadrature” ( $d - q$ ) Transformation. Cette transformation change le repère de référence des axes de phases fixes à des axes tournant avec le rotor.

### 2.4.1 Rappel sur le modèle dans le repère $d - q$

Cette transformation s’applique aux variables électriques en utilisant une matrice de la forme :

$$U(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(n_p \theta) & \sin(n_p \theta) \\ -\sin(n_p \theta) & \cos(n_p \theta) \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Les flux dans le repère tournant s’exprime :

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} = U(\theta) \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

La transformation inverse est :

$$\begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix} = U^T(\theta) \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

La dérivée par rapport au temps de (2.16) est :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix} = U^T(\theta) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} + \omega \frac{\partial U^T(\theta)}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

où :

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = n_P \begin{bmatrix} -\sin(n_p \theta) & \cos(n_p \theta) \\ -\cos(n_p \theta) & -\sin(n_p \theta) \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} &= U(\theta) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix} - \omega U(\theta) \frac{\partial U^T(\theta)}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} \\ &= U(\theta) \begin{bmatrix} v_a - Ri_a \\ v_b - Ri_b \end{bmatrix} - n_p \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_d - Ri_d + n_p \omega \Psi_q \\ v_q - Ri_q - n_p \omega \Psi_d \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

tandis que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} &= U(\theta) L(\theta) U^T(\theta) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \Psi_0 U(\theta) D(\theta) \\ &= L(0) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

où :

$$L(0) = \begin{bmatrix} L_0 + L_2 & 0 \\ 0 & L_0 - L_2 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Le modèle  $d - q$  du moteur à aimants permanents devient :

$$\begin{aligned} L_d \frac{di_d}{dt} &= v_d - Ri_d + n_p \omega L_q i_q, \\ L_q \frac{di_q}{dt} &= v_q - Ri_q - n_p \omega L_d i_d - K\omega, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où :

$$L_d = L_0 + L_2, \quad L_q = L_0 - L_2. \quad (2.23)$$

Le couple est :

$$\begin{aligned} \tau_e = & \Psi_0 \begin{bmatrix} i_d & i_q \end{bmatrix} U(\theta) \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_d & i_q \end{bmatrix} U(\theta) \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} U^T(\theta) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Après simplifications :

$$\tau_e = K i_q + n_p (L_d - L_q) i_d i_q. \quad (2.25)$$

Le deuxième terme de l'équation 2.25 est le couple de réluctance.

Les équations du moteur synchrone à aimants permanents dans le repère  $d - q$  sont :

$$\begin{cases} L_d \frac{di_d}{dt} = v_d - R i_d + n_p L_q \omega i_q, \\ L_q \frac{di_q}{dt} = v_q - R i_q - n_p L_d \omega i_d - K \omega, \\ J \frac{d\omega}{dt} = K i_q + n_p (L_d - L_q) i_d i_q - f_v \omega - C_r \text{sgn}(\omega), \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega. \end{cases} \quad (2.26)$$

Les moteurs synchrones à réluctances sont tels que  $K = 0$ . Le modèle considéré ici englobe tout ces cas. La transformation ( $d - q$ ) est avantageuse car les tensions et les courants sont constants à vitesse constante.

### 2.4.2 Modèle dans le nouveau repère $f - g$

Le modèle dans le repère  $d - q$  présenté précédemment est basé sur la position  $\theta$  mesurée. Dans certaines applications, la position mesurée peut être biaisée en raison d'un offset sur le capteur, ou indisponible dans le cas d'applications sans capteur mécanique. Pour cela, on introduit ici un nouveau repère, nommé repère  $f - g$ . Ce repère se rapproche du repère présenté dans [Zheng 2007]. Ici, on applique la transformée de Park (2.14), mais on ajoute un terme  $\delta$  :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Psi_f \\ \Psi_g \end{bmatrix} &= U(\theta + \delta) \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix} \\ &= U(\delta) \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Le terme  $\delta$  peut être interprété de différentes manières. Il peut représenter un offset de calibration, lorsque le capteur n'est pas correctement initialisé.  $\delta$  peut aussi être interprété comme l'erreur entre la position mesurée et la position de référence que le moteur est supposé suivre :  $\delta = \theta - \theta_r$ . Finalement  $\delta$  peut être défini comme l'erreur d'estimation de  $\theta$ . Le modèle  $f - g$  se rapproche du modèle  $d - q$ , avec l'avantage d'être valide même si la position n'est pas exactement connue.

En utilisant les mêmes manipulations que la transformation  $d - q$  :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_f \\ \Psi_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_f - Ri_f + n_p\omega\Psi_g \\ v_g - Ri_g - n_p\omega\Psi_f \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

tandis que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Psi_f \\ \Psi_g \end{bmatrix} &= U(\delta) \begin{bmatrix} L_d i_d + \Psi_0 \\ L_q i_q \end{bmatrix} \\ &= U(\delta) \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} U^T(\delta) \begin{bmatrix} i_f \\ i_g \end{bmatrix} + \Psi_0 \begin{bmatrix} \cos(n_p\delta) \\ -\sin(n_p\delta) \end{bmatrix} \\ &= L(-\delta) \begin{bmatrix} i_f \\ i_g \end{bmatrix} + \Psi_0 D(-\delta). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Il s'ensuit que les équations électriques du modèle  $f - g$  du moteur sont :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ i_g \end{bmatrix} = L^{-1}(-\delta) \left( \begin{bmatrix} v_f - Ri_f + n_p\omega\Psi_g \\ v_g - Ri_g - n_p\omega\Psi_f \end{bmatrix} + \frac{d\delta}{dt} \frac{\partial D(-\delta)}{\partial \theta} \right), \quad (2.30)$$

et le couple est :

$$\begin{aligned} \tau_e &= K (i_f \sin(n_p\delta) + i_g \cos(n_p\delta)) \\ &+ n_p(L_d - L_q) \left( \frac{1}{2} \sin(2n_p\delta) (i_f^2 - i_g^2) + \cos(2n_p\delta) i_f i_g \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

On remarque bien que, si  $\delta$  est nul, on obtient le modèle  $d - q$ .

Dans cette section, nous avons présenté le modèle du MSAP dans trois repères différents. Ces trois repères sont représentés schématiquement sur la Figure 2.2.

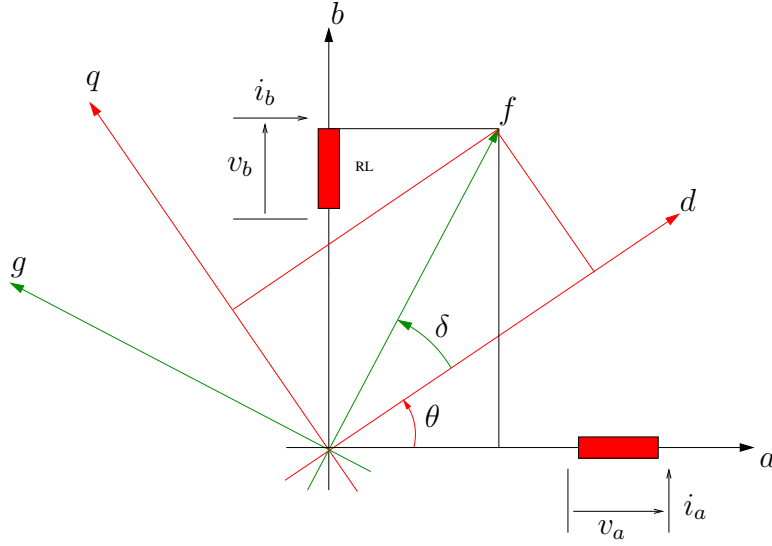


FIGURE 2.2 – Transformations des variables dans les différents repères.

### 2.4.3 Modélisation dans le cas où $L_2$ est négligeable

Sur certains moteurs, notamment les moteurs à pôles lisses, on suppose que la variation de l'inductance  $L_2$  est négligeable par rapport à  $L_0$  et on pose  $L = L_0$ . À partir des équations (2.7) et (2.9), on obtient le modèle du MSAP dans le repère fixe ( $a - b$ ) couramment utilisé :

$$\begin{cases} L \frac{di_a}{dt} = v_a - Ri_a + K\omega \sin(n_p\theta), \\ L \frac{di_b}{dt} = v_b - Ri_b - K\omega \cos(n_p\theta), \\ J \frac{d\omega}{dt} = K(-i_a \cos(n_p\theta) + i_b \sin(n_p\theta)) - f_v\omega - C_r \text{sgn}(\omega), \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega. \end{cases} \quad (2.32)$$

Dans le repère tournant  $d - q$ , le modèle dans ce cas là devient :

$$\begin{cases} L \frac{di_d}{dt} = v_d - Ri_d + n_p L \omega i_q, \\ L \frac{di_q}{dt} = v_q - Ri_q - n_p L \omega i_d - K\omega, \\ J \frac{d\omega}{dt} = K i_q - f_v\omega - C_r \text{sgn}(\omega), \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega. \end{cases} \quad (2.33)$$

Finalement, dans le repère tournant de référence  $f - g$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{di_f}{dt} = v_f - Ri_f + K\omega \sin(n_p\delta) + n_p L \left( \omega + \frac{d\delta}{dt} \right) i_g, \\ L \frac{di_g}{dt} = v_g - Ri_g - K\omega \cos(n_p\delta) - n_p L \left( \omega + \frac{d\delta}{dt} \right) i_f, \\ J \frac{d\omega}{dt} = K(i_f \sin(n_p\delta) + i_g \cos(n_p\delta)) - f_v \omega - C_r \operatorname{sgn}(\omega), \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

## 2.5 Analyse du système

Dans ce paragraphe, nous détaillons quelques propriétés du MSAP, telles que la commandabilité, l'observabilité et la platitude. Ces propriétés sont présentées dans le cas où  $L_2$  est négligeable.

### 2.5.1 Commandabilité et observabilité

La commandabilité et l'observabilité du MSAP sont écrites dans cette section dans le repère fixe  $a - b$ . On a donc le modèle du moteur dans le repère  $a - b$  (2.32) avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = [i_a, i_b, \theta, \omega]^T, \quad \text{les états,} \\ u = [v_a, v_b]^T, \quad \text{les entrées.} \end{array} \right.$$

Le modèle du moteur dans ce repère peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + gu + p, \quad (2.35)$$

avec

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} (-Ri_a + K\omega \sin(n_p\theta)) \\ \frac{1}{L} (-Ri_b - K\omega \cos(n_p\theta)) \\ \omega \\ \frac{1}{J} (K(-i_a \sin(n_p\theta) + i_b \cos(n_p\theta)) - f_v \omega) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{C_r}{J} \operatorname{sgn}(\omega) \end{bmatrix}.$$

### Commandabilité

La commandabilité locale des systèmes non linéaires est définie dans [Hermann 1977]. Si l'algèbre d'accessibilité de Lie du système est de rang plein, alors le système est localement commandable.

À partir de l'équation (2.35), on décompose la matrice  $g$  de la manière suivante :

$$g_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On calcule alors :

$$g_3 \triangleq [f, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R}{L^2} \\ 0 \\ -\frac{K}{JL} \cos(n_p \theta) \end{bmatrix},$$

et :

$$g_4 \triangleq [f, g_3] = \begin{bmatrix} \frac{K^2}{L^2 J} \sin(n_p \theta) \cos(n_p \theta) \\ \frac{R^2}{L^3} - \frac{K^2}{L^2 J} \cos(n_p \theta)^2 \\ \frac{K}{JL} \cos(n_p \theta) \\ \frac{K n_p}{JL} \omega \sin(n_p \theta) - \frac{KR}{JL^2} \cos(n_p \theta) - \frac{f_v K}{J^2 L} \cos(n_p \theta) \end{bmatrix},$$

on a alors :

$$[g_1, g_2, g_3, g_4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{K^2}{L^2 J} \sin(n_p \theta) \cos(n_p \theta) \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{R}{L^2} & \frac{R^2}{L^3} - \frac{K^2}{L^2 J} \cos(n_p \theta)^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K}{JL} \cos(n_p \theta) \\ 0 & 0 & -\frac{K}{JL} \cos(n_p \theta) & \frac{K n_p}{JL} \omega \sin(n_p \theta) - \frac{KR}{JL^2} \cos(n_p \theta) - \frac{f_v K}{J^2 L} \cos(n_p \theta) \end{bmatrix},$$

qui est de rang 4,  $\forall x \in \mathbb{R}^4$ , donc de rang plein. Le système est localement commandable.

### Observabilité

L'observabilité est montrée dans ce paragraphe dans le but de réaliser la commande sans capteurs. On souhaite observer la position et la vitesse du moteur à partir des équations

tions électriques. Dans ce cas, les sorties sont les mesures des capteurs disponibles soit  $i_a$  et  $i_b$ . Les entrées sont les tensions appliquées au moteur  $v_a$  et  $v_b$ .

On a donc le modèle du moteur dans le repère  $a - b$  avec :

$$\begin{cases} x = [i_a, i_b, \theta, \omega]^T, & \text{les états,} \\ y = [i_a, i_b]^T, & \text{les sorties,} \\ u = [v_a, v_b]^T, & \text{les entrées.} \end{cases}$$

Le modèle du moteur dans ce repère peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + gu + p, \\ y = h(x). \end{cases}$$

avec :

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}(-Ri_a + K\omega \sin(n_p\theta)) \\ \frac{1}{L}(-Ri_b - K\omega \cos(n_p\theta)) \\ \omega \\ \frac{1}{J}(K(-i_a \sin(n_p\theta) + i_b \cos(n_p\theta)) - f_v\omega) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{C_r}{J} \text{sgn}(\omega) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}.$$

Le système est observable si l'algèbre des dérivées de Lie est de rang plein (de rang 4 dans ce cas) [Hermann 1977].

Dans le cas de notre système, on pose :

$$\begin{cases} h_1 = i_a, \\ h_2 = i_b, \\ h_3 \triangleq L_f h_1 = \frac{1}{L}(-Ri_a + K\omega \sin(n_p\theta)), \\ h_4 \triangleq L_f h_2 = \frac{1}{L}(-Ri_b - K\omega \cos(n_p\theta)). \end{cases}$$



On calcule alors :

$$\begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dh_3 \\ dh_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{R}{L} & 0 & \frac{Kn_p\omega}{L} \cos(n_p\theta) & K \sin(n_p\theta) \\ 0 & -\frac{R}{L} & \frac{Kn_p\omega}{L} \sin(n_p\theta) & -K \cos(n_p\theta) \end{bmatrix}.$$

qui est de rang plein si la vitesse  $\omega$  est non nulle. Par conséquent, le système ayant comme sorties  $i_a$  et  $i_b$  est observable à condition que la vitesse soit non nulle. Il est donc possible d'observer la position  $\theta$  et la vitesse  $\omega$  à partir des tensions d'entrée et des courants mesurés, si la vitesse est non nulle.

## 2.5.2 Platitude

L'objectif de commande du MSAP est la poursuite d'une trajectoire de référence. Pour cela, nous utilisons la notion de platitude [Fliess 1995], définie comme suit.

**Définition 2.1** *Le système :*

$$\dot{x} = f(x, u), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \quad (2.36)$$

*est dit plat s'il existe un vecteur à  $m$  composantes indépendantes*

$$z = z(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(p)}), z \in \mathbb{R}^m,$$

*appelée sortie plate, telle que l'état et l'entrée du système s'expriment en fonction de celle-ci et de ses dérivées en nombre fini sous la forme :*

$$\begin{cases} x &= \phi(z, \dot{z}, \dots, z^{(q)}), \\ u &= \phi(z, \dot{z}, \dots, z^{(q+1)}). \end{cases}$$

Le nombre de sorties plates est égal au nombre de variables de commande indépendantes. La notion de platitude a de multiples avantages. Un système plat est commandable, observable et linéarisable par découplage entrées/états. De plus, la platitude facilite la planification de trajectoires. A partir de la trajectoire de référence des entrées plates, on peut calculer les états de référence du système ainsi que les entrées à appliquer au système. Cependant, il n'existe pas de méthode systématique permettant de montrer la

platitude d'un système.

### Platitude dans le repère $d - q$

La platitude du système a été montré dans [Sira-Ramírez 2000] dans le repère tournant  $d - q$ .

Le MSAP est différentiellement plat lorsqu'il n'est pas perturbé (c'est-à-dire  $C_r = 0$ ), puisque toutes les variables peuvent être entièrement paramétrées en fonction de dérivées des variables indépendantes constituées par le courant direct  $i_d$  et la position angulaire du moteur  $\theta$ . Les sorties plates, notées  $Y_{dq} = (y_{dq,1}, y_{dq,2}) = (\theta, i_d)$ , donnent :

$$\begin{cases} \theta &= y_{dq,1}, \\ \omega &= \dot{y}_{dq,1}, \\ i_d &= y_{dq,2}, \\ i_q &= \frac{1}{K} (J\ddot{y}_{dq,1} + f_v\dot{y}_{dq,1}), \\ v_d &= L\dot{y}_{dq,2} + Ry_{dq,2} - \frac{n_p L}{K} \dot{y}_{dq,1} (J\ddot{y}_{dq,1} + f_v\dot{y}_{dq,1}), \\ v_q &= \frac{JL}{K} y_{dq,1}^{(3)} + \frac{1}{K} (Lf_v + RJ) \ddot{y}_{dq,1} + \left( \frac{Rf_v}{K} + K + n_p Ly_{dq,2} \right) \dot{y}_{dq,1}. \end{cases} \quad (2.37)$$

La trajectoire de référence est alors définie simplement en imposant les sorties plates de références, toutes les autres variables étant alors définies par :

$$\begin{cases} \omega_r &= \frac{d\theta_r}{dt}, \\ i_{qr} &= \frac{1}{K} \left( J \frac{d^2\theta_r}{dt^2} + f_v \frac{d\theta_r}{dt} \right), \\ v_{dr} &= L \frac{di_{dr}}{dt} + Ri_{dr} - n_p L \omega_r i_{qr}, \\ v_{qr} &= L \frac{di_{qr}}{dt} + Ri_{qr} + n_p L \omega_r i_{dr} + K \omega_r. \end{cases} \quad (2.38)$$

On a ainsi le modèle de référence dans le repère tournant  $d - q$  :

$$\begin{cases} L \frac{di_{dr}}{dt} &= v_{dr} - Ri_{dr} + n_p L \omega_r i_{qr}, \\ L \frac{di_{qr}}{dt} &= v_{qr} - Ri_{qr} - n_p L \omega_r i_{dr} - K \omega_r, \\ J \frac{d\omega_r}{dt} &= K i_{qr} - f_v \omega_r, \\ \frac{d\theta_r}{dt} &= \omega_r. \end{cases} \quad (2.39)$$

### Platitude dans le repère $f - g$

La platitude dans le repère  $f - g$  est déduite du repère  $d - q$ . On suppose dans cette section que  $\theta_r$  est la position de référence du moteur. Afin d'effectuer le changement de repère  $d - q$  au repère  $f - g$ , on rappelle la transformation (2.27) selon laquelle :

$$\begin{aligned} [i_f, i_g]^T &= U(\delta) [i_d, i_q]^T, \\ [v_f, v_g]^T &= U(\delta) [v_d, v_q]^T, \end{aligned} \quad (2.40)$$

où

$$U(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(n_p \delta) & -\sin(n_p \delta) \\ \sin(n_p \delta) & \cos(n_p \delta) \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

On déduit de cette transformation que les sorties plates du MSAP dans le repère  $f - g$  sont  $Y_{fg} = (y_{fg,1}, y_{fg,2}) = (\theta, i_f \cos(n_p \delta) + i_g \sin(n_p \delta))$ . On réécrit toutes les variables du système en fonction des variables plates. Les variables  $\theta$  et  $\omega$  restent inchangées :

$$\begin{cases} \theta = y_{fg,1}, \\ \omega = \dot{y}_{fg,1}, \end{cases} \quad (2.42)$$

Les courants  $i_f$  et  $i_g$  sont exprimés de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} i_f \\ i_g \end{bmatrix} = U(\theta - \theta_r) \begin{bmatrix} y_{fg,2} \\ \frac{1}{K}(J\ddot{y}_{fg,1} + f_v \dot{y}_{fg,1}) \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

et les tensions  $v_f$  et  $v_g$  donnent :

$$\begin{bmatrix} v_f \\ v_g \end{bmatrix} = U(\theta - \theta_r) \begin{bmatrix} L\dot{y}_{fg,2} + Ry_{fg,2} - \frac{n_p L}{K} \dot{y}_{fg,1} (J\ddot{y}_{fg,1} + f_v \dot{y}_{dq,1}) \\ \frac{JL}{K} y_{fg,1}^{(3)} + \frac{1}{K} (Lf_v + RJ) \ddot{y}_{fg,1} + \left( \frac{Rf_v}{K} + K + n_p Ly_{fg,2} \right) \dot{y}_{fg,1} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

La trajectoire de référence est alors définie. En posant  $\theta = \theta_r$ , on se retrouve dans le cas où  $\delta$  est nul, ce qui correspond au modèle dans le repère  $d - q$ . En effet, on observe que la matrice de transformation (2.41) est égale à la matrice identité  $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ . Ainsi les variables de référence sont alors calculées de la même façon que dans le repère  $d - q$  (2.38) :

$$\begin{cases} \omega_r &= \frac{d\theta_r}{dt}, \\ i_{gr} &= \frac{1}{K} \left( J \frac{d^2\theta_r}{dt^2} + f_v \frac{d\theta_r}{dt} \right), \\ v_{fr} &= L \frac{di_{fr}}{dt} + Ri_{fr} - n_p L \omega_r i_{gr}, \\ v_{gr} &= L \frac{di_{gr}}{dt} + Ri_{gr} + n_p L \omega_r i_{fr} + K \omega_r. \end{cases} \quad (2.45)$$

Le modèle de référence dans le repère tournant de référence  $f - g$  est également identique :

$$\begin{cases} L \frac{di_{fr}}{dt} &= v_{fr} - Ri_{fr} + n_p L \omega_r i_{gr}, \\ L \frac{di_{gr}}{dt} &= v_{gr} - Ri_{gr} - n_p L \omega_r i_{fr} - K \omega_r, \\ J \frac{d\omega_r}{dt} &= K i_{gr} - f_v \omega_r, \\ \frac{d\theta_r}{dt} &= \omega_r. \end{cases} \quad (2.46)$$

Dans la section suivante, une trajectoire de référence est proposée, étant donné que la trajectoire de référence est identique dans les deux repères, on proposera la trajectoire de référence dans le repère  $d - q$ .

## 2.6 Planification de la trajectoire

Dans la section précédente, nous avons montré que le MSAP était un système plat ayant comme sorties plates la position  $\theta$  et le courant direct  $i_d$ . La trajectoire de référence du moteur est ainsi définie complètement à partir de ces deux sorties. Dans ce paragraphe, nous définissons la trajectoire de la position de référence et du courant direct de référence. Afin d'assurer un meilleur suivi de trajectoire, il est important que la trajectoire de référence soit conçue de telle sorte que les dynamiques soient lisses. C'est-à-dire, sans discontinuité, sans pic électrique ou ondulation de couple.

### 2.6.1 Position $\theta_r$

L'asservissement du moteur est réalisé notamment à partir de la position, la vitesse et l'accélération du moteur. Afin de générer une trajectoire lisse, il est suffisant que la trajectoire de référence de ces trois variables aient une pente nulle à l'origine et à l'extrémité. Dans ce but, il faut choisir les huit contraintes de bord, sur la position, la vitesse, l'accélération, mais également sur la dérivée de l'accélération. L'objectif étant faire tour-

ner le moteur d'une position initiale  $\theta_r(t_i) = \theta_{ri}$  à une position finale  $\theta_r(t_f) = \theta_{rf}$ , en garantissant les dynamiques sur la vitesse et l'accélération désirées, les contraintes sont donc choisies telles que :

$$\begin{cases} \theta_r(t_i) = \theta_{ri}; & \theta_r(t_f) = \theta_{rf}; \\ \dot{\theta}_r(t_i) = 0; & \dot{\theta}_r(t_f) = 0; \\ \ddot{\theta}_r(t_i) = 0; & \ddot{\theta}_r(t_f) = 0; \\ \theta_r^{(3)}(t_i) = 0; & \dot{\theta}_r^{(3)}(t_f) = 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Ayant huit contraintes, le polynôme minimal doit être de degré 7 :

$$\begin{aligned} \theta_r(t) = \theta_{ri} + (\theta_{rf} - \theta_{ri}) & ( a_0\Delta(t)^7 + a_6\Delta(t)^6 + a_2\Delta(t)^5 + a_3\Delta(t)^4 \\ & + a_4\Delta(t)^3 + a_5\Delta(t)^2 + a_6\Delta(t) + a_7), \end{aligned} \quad (2.48)$$

avec :

$$\Delta(t) = \frac{t - t_i}{t_f - t_i}.$$

Afin d'obtenir les coefficients de ce polynôme, il faut dériver l'équation (2.48) trois fois pour obtenir l'équation de la vitesse, l'accélération et la dérivée de l'accélération. On a alors quatre équations à résoudre à chaque bord, soit huit équations, pour huit coefficients. Ce système de huit équations pour huit inconnues est résolu à l'aide de Maple. On obtient les huit coefficients suivants :

$$\begin{aligned} a_0 = 20, & \quad a_1 = -70, & \quad a_2 = 84, & \quad a_3 = -35, \\ a_4 = 0, & \quad a_5 = 0, & \quad a_6 = 0, & \quad a_7 = 0. \end{aligned}$$

Tous les asservissements dans ce manuscrit suivront une telle position de référence. Afin de montrer au mieux les performances des lois de commande proposées, nous définissons une trajectoire de référence dont la vitesse sera d'abord positive puis négative, ce qui aura pour effet d'illustrer les performances des algorithmes lorsque la vitesse est très faible et nulle. Pour cela, l'équation (2.48) est appliquée deux fois avec des contraintes de positions initiale et finale différentes donnant la trajectoire de référence représentée sur la Figure 2.3. La première partie de la trajectoire démarre avec une position nulle ( $\theta_i$  sur la Figure), pour atteindre une position intermédiaire positive ( $\theta_m$  sur la Figure). La vitesse sera alors positive. Afin de générer une vitesse négative, l'équation (2.48) est appliquée une nouvelle fois afin de ramener la position du moteur à zéro ( $\theta_f$  sur la Figure). La trajectoire de référence utilisée dans ce mémoire montre effectivement qu'il n'y a ni

discontinuités ni pics.

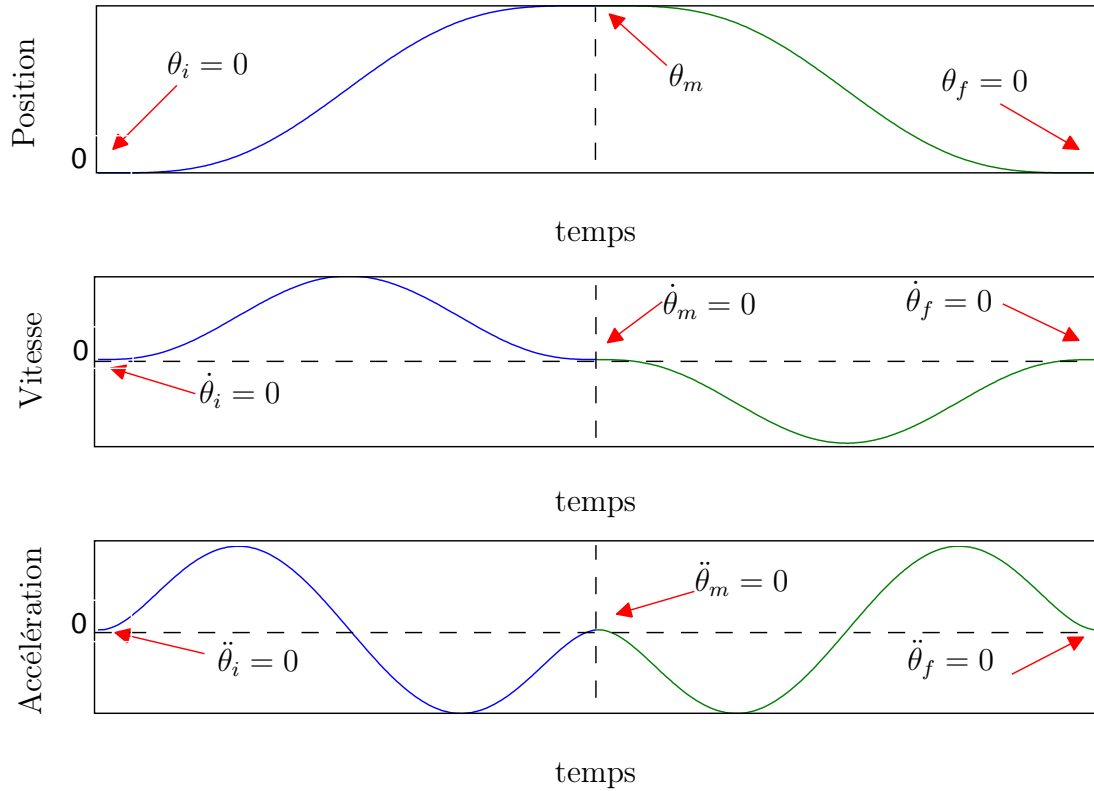


FIGURE 2.3 – Trajectoire de référence

### 2.6.2 Courant direct $i_{dr}$

Dans le repère  $d - q$ , le modèle met en évidence le rôle du courant de quadrature  $i_q$  pour la détermination du couple, on rappelle l'équation mécanique dans le repère  $d - q$  donnée par le système (2.33) :

$$J \frac{d\omega}{dt} = K i_q - f_v \omega - C_r \operatorname{sgn}(\omega). \quad (2.49)$$

Le couple peut être commandé en fonction de  $i_q$ . Afin d'obtenir un couple maximal, c'est-à-dire  $i_q$  maximal, il est souhaitable de choisir un courant direct inférieur ou égale à 0. Le courant direct sera alors choisi nul, sauf lors de l'identification en ligne, car un courant

direct nul pose des problèmes d'inversion de matrices. À ce propos, on pourra se référer à [Verl 1998] où une trajectoire est définie afin de maximiser le couple.

## 2.7 Présentation du banc d'essai

Les expérimentations présentées dans les chapitres suivants sont réalisées sur un banc d'essai développé au sein de l'équipe SyNeR du LAGIS. Le banc d'essai est composé d'un moteur pas-à-pas, alimenté en tension par deux amplificateurs linéaires. Un frein à poudre est connecté à l'arbre du moteur permettant de générer un couple de charge. Les courants sont mesurés à l'aide de capteurs à effet hall. La position est mesurée par un codeur absolu. La vitesse est mesurée par une dynamo tachymétrique. Le banc est relié à un ordinateur à l'aide d'une carte d'interface dSpace 1104. La vue d'ensemble du banc moteur est représentée Figure 2.4, ainsi que le schéma synoptique Figure 2.5.



FIGURE 2.4 – Banc d'essai du moteur pas-à-pas.

**Le moteur :** celui utilisé est un moteur Turbo Disc P850 - Portescap. Son rotor est composé d'un aimant ayant la forme d'un disque fin qui est magnétisé de façon axiale (voir la Figure 2.6). Les caractéristiques données par le constructeur avec les enroulements branchés en série sont les suivantes :

**Le codeur de position :** la position est mesurée avec un codeur GA 240 de IVO industries. C'est un codeur optique absolu monté en bout d'arbre. Il a une précision 13 bits - 8192 points soit de l'ordre de  $7.67 \cdot 10^{-4} rad$ . Il est codé en code binaire.

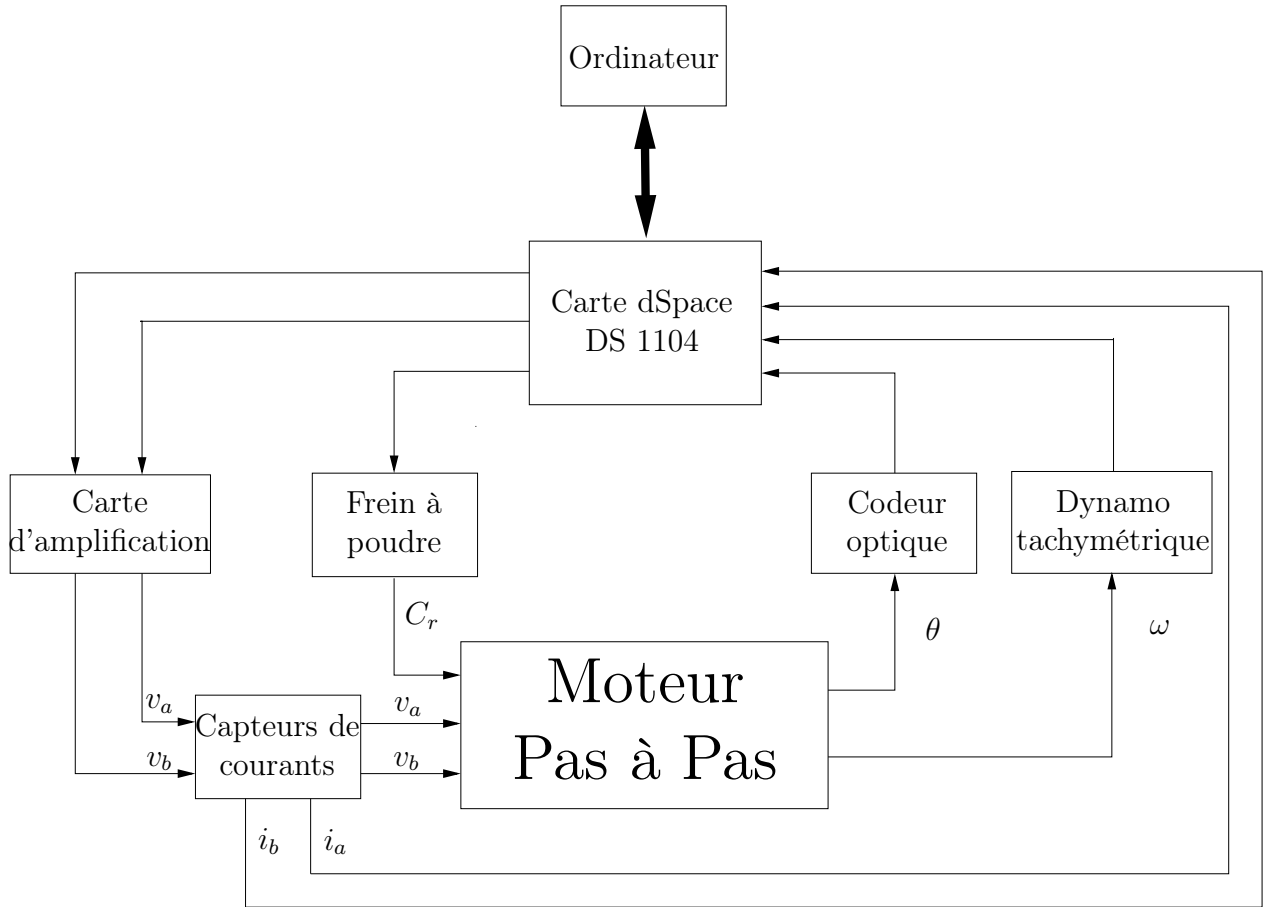


FIGURE 2.5 – Schéma global du moteur.

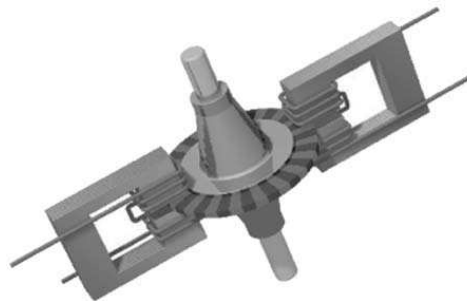


FIGURE 2.6 – Principe de magnétisation.

**Le banc de charge / dynamo tachymétrique :** le banc de charge du moteur est un banc FR-DYN90 de la marque Langlois. Il est équipé d'une dynamo tachymétrique permettant de mesurer la vitesse angulaire, avec une sensibilité de  $101.5 \text{ rad.s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ . Le banc est également constitué d'un frein à poudre alimenté par une tension entre 0 – 10V



Courant nominal : $I_n = 1.8A$	Précision : 1.8 (200 pas)
Inertie : $J = 150.10^{-7}kg.m^2$	Paires de dents : $n_p = 50$
Couple de maintien : $C_m = 780.10^{-3}N$	Résistance : $R = 2.6\Omega$
Frottements visqueux : $f_v = 10^{-3}N.m.s/rad$	Inductance : $L = 6.4mH$

fournissant un couple de charge.

**L'alimentation du moteur :** les tensions de chaque phases du moteur sont amplifiées par deux amplificateurs opérationnels OPA 541 de Burr-Brown ( $\pm 40V - 10A$ ). Chaque carte possède quatre entrées à gains variables.

**Les capteurs de courant :** les capteurs de courant utilisent le principe de mesure par effet hall. Les deux capteurs de courant sont des transducteurs de courant de type HX 03-P de LEM Components. Ils ont une précision de 1%, et une sensibilité de  $7.5A.V^{-1}$

**Matériel et logiciels :** le matériel utilisé pour les expérimentations est une carte dSpace 1104. Cette carte permet la communication entre le PC et le banc moteur. Elle peut être programmée soit à l'aide du logiciel Matlab/Simulink, soit en C. Le logiciel Control Desk permet la communication en temps réel avec le banc. Les expérimentations sont réalisées avec une période d'échantillonnage  $\tau = 10^{-4}s$ .

## 2.8 Conclusion

Le modèle du moteur à aimants permanents décrit dans ce chapitre a été donné dans différents repères. Une fois les équations établies dans le repère fixe  $a - b$ , nous avons rappelé le modèle dans le repère  $d - q$ . Cette transformation est couramment utilisée pour les moteurs à aimants permanents (et moteurs synchrones en général), car les tensions et les courants sont constants à vitesse constante (plutôt que les hautes fréquences des variables de phase). De plus, ce modèle reflète le rôle du courant de quadrature  $i_q$  pour déterminer le couple. Cependant la transformation  $d - q$ , basée sur la position n'est pas utilisable dans le cadre d'applications sans capteur mécanique. Pour cela, nous avons mis au point un nouveau repère. Ce repère utilise une position de référence au lieu de la position mesurée. Lorsque cette position de référence tend vers la position réelle, ce repère tend vers le repère  $d - q$ . Nous avons donc les propriétés avantageuses du repère  $d - q$ , sans avoir besoin de la position. De plus, ce repère a l'avantage d'être valide même si la position de référence n'est pas exactement égale à la position réelle. Ces différents modèles nous permettront de développer des algorithmes utilisant les capteurs mécaniques dans un premier temps, puis sans capteur mécanique ensuite. Ces résultats seront respectivement

présentés dans les chapitres 3 et 4.



# Chapitre 3

## Identification et commande en présence de capteurs mécaniques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>76</b>
<b>3.2</b>	<b>Identification hors ligne</b>	<b>77</b>
3.2.1	Estimation des paramètres sur la base des mesures en régime permanent	77
3.2.2	Estimation de l'inertie sur la base de mesures en régime transitoire	80
3.2.3	Détection de l'angle de décalage du codeur (offset)	81
<b>3.3</b>	<b>Commande</b>	<b>89</b>
3.3.1	Définition de l'erreur de poursuite	90
3.3.2	Commande par modes glissants d'ordre 2	90
3.3.3	Estimations de l'accélération et du couple résistant	93
3.3.4	Stabilité de la boucle fermée basée sur l'observateur	95
3.3.5	Résultats expérimentaux	97
<b>3.4</b>	<b>Identification en ligne</b>	<b>100</b>
3.4.1	Paramètres électriques	100
3.4.2	Paramètres mécaniques	105
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>110</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous développons des techniques d'identification, d'estimation et de commande pour le MSAP en présence de capteurs mécaniques.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'identification hors-ligne des paramètres. En utilisant le modèle dans le repère  $d-q$  (2.26), une procédure d'identification de tous les paramètres du moteur en utilisant la technique par moindres carrés sera réalisée. Cette identification permettra ainsi d'obtenir un jeu de paramètres pour le MSAP qui sera considéré comme étant le jeu de paramètres de référence du moteur.

Cette identification est réalisable seulement si le codeur de position est correctement calibré. Cependant, la plupart des applications industrielles utilisent des codeurs incrémentaux. Ces codeurs sont remis à zéro chaque fois qu'ils sont mis sous tension. Ceci pose la question de l'initialisation de la position initiale. En général, de tels codeurs sont initialisés en alignant une dent du moteur à la phase  $a$  en appliquant une tension  $v_a$ , mais cette technique pose des problèmes en présence d'un couple résistant trop élevé. On donnera dans ce chapitre une solution permettant l'identification conjointe des paramètres du moteur et de l'angle d'offset du moteur. Des expérimentations montreront la robustesse de cette technique en présence d'un couple résistant. Ces identifications montreront aussi que l'inductance  $L_2$  est très inférieure à  $L_0$ , qui pourra donc être négligée par la suite.

Disposant des paramètres nominaux du moteur, nous discuterons de la commande du moteur en boucle fermée. Nous présenterons une commande par modes glissants d'ordre supérieur basée sur la propriété de platitude du moteur. Cette commande nécessite la connaissance de l'accélération, alors que celle-ci n'est pas mesurée. On définira alors un observateur permettant d'accéder à cette information. Les résultats expérimentaux seront présentés dans le cas du suivi de position, avec la trajectoire de référence définie dans le chapitre 2.

La dernière partie de ce chapitre présentera les résultats d'estimation en ligne. En effet, les paramètres du moteur sont susceptibles de varier au cours du temps, en raison de l'usure ou de la chauffe du moteur, par exemple. Dans cette partie, nous appliquerons et comparerons les algorithmes d'identification en ligne décrits dans le chapitre 1. On discutera des avantages et des inconvénients de chaque méthode.

## 3.2 Identification hors ligne

Nous développons ici des algorithmes permettant l'identification hors ligne de tous les paramètres du MSAP en présence de capteurs mécaniques. En présence de tels capteurs, le repère  $d-q$  est intéressant pour réaliser l'identification hors ligne. La plupart des variables peuvent être identifiées à partir de mesures en régime permanent. À vitesse constante, les tensions et les courants sont constants. Il est alors possible de relever les mesures sur un certain intervalle de temps et d'en faire la moyenne. Les effets du bruit et des erreurs de modélisation sont alors réduits. De tels effets comprennent le couple de détente, les biais des amplificateurs de tensions, les biais de mesures des courants, et les distorsions des amplificateurs. L'inertie seulement n'est pas identifiable en régime permanent, une approche en régime transitoire est alors décrite par la suite pour identifier ce paramètre.

### 3.2.1 Estimation des paramètres sur la base des mesures en régime permanent

En régime permanent, nous utilisons les équations du modèle  $d-q$  (2.26). Pour identifier les paramètres, les expérimentations sont réalisées en appliquant différents couples de tensions  $v_d$  et  $v_q$  au moteur. Chaque couple de tensions est appliqué au moteur jusqu'à ce que le régime permanent soit atteint, on obtient alors des vitesses et des courants (approximativement) constants. On calcule alors la moyenne de ces variables sur un court intervalle de temps, ce qui donne un point de données pour l'algorithme des moindres carrés. L'opération est répétée pour chaque couple de tensions, couvrant toute la gamme de vitesse du moteur, jusqu'à l'obtention d'un ensemble de données suffisant pour identifier les paramètres.

En régime permanent, les équations électriques dans le repère  $d-q$  deviennent :

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_d & 0 & -n_p \omega i_q & 0 \\ i_q & n_p \omega i_d & 0 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ L_d \\ L_q \\ K \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

qui sont linéaires par rapport aux paramètres, de sorte que l'algorithme standard des moindres carrés est applicable afin d'identifier les paramètres  $R$ ,  $L_d$ ,  $L_q$  et  $K$ . On considère l'équation (1.22) :

$$y_1[n] = W_1^T[n] P_{nom,1}, \quad (3.2)$$

où le vecteur de sortie est défini par

$$y_1[n] = \begin{bmatrix} v_d[n] \\ v_q[n] \end{bmatrix},$$

la matrice de régression par

$$W_1^T[n] = \begin{bmatrix} i_d[n] & 0 & -n_p\omega[n]i_q[n] & 0 \\ i_q[n] & n_p\omega[n]i_d[n] & 0 & \omega[n] \end{bmatrix},$$

et le vecteur de paramètres nominaux par :

$$P_{nom,1} = \begin{bmatrix} R \\ L_d \\ L_q \\ K \end{bmatrix}.$$

Alors,  $L_0 = (L_d + L_q)/2$  et  $L_2 = (L_d - L_q)/2$ .

Les estimations de  $\hat{R}$ ,  $\hat{L}_d$ ,  $\hat{L}_q$  et  $\hat{K}$  obtenues dans la première étape sont alors utilisées dans l'équation mécanique afin d'identifier les deux paramètres restant  $f_v$  et  $C_r$ , avec :

$$\underbrace{\left[ \hat{K}i_q[n] + n_p(\hat{L}_d - \hat{L}_q)i_d[n]i_q[n] \right]}_{y_2} = \underbrace{\left[ \omega[n] \quad \text{sgn}(\omega[n]) \right]}_{W_2} \underbrace{\begin{bmatrix} f_v \\ C_r \end{bmatrix}}_{P_{nom,2}}. \quad (3.3)$$

À nouveau, l'équation (3.3) est linéaire par rapport aux paramètres, tel que l'algorithme des moindres carrés peut être appliqué pour obtenir l'estimation de  $f_v$  et  $C_r$ .

Les résultats de l'identification en utilisant cette procédure à deux étapes sont donnés dans la Table 3.1. Afin de vérifier la cohérence des résultats, la Figure 3.1 décrit l'évolution du vecteur de sortie de (3.1) en fonction de  $\omega$ , ainsi que l'ajustement de l'algorithme des moindres carrés (c'est-à-dire  $W_1^T(n)P_1$ , où  $P_1$  est l'estimation des paramètres par les moindres carrés). On utilise le jeu de données décrit ci-dessus. Les composantes du vecteur de sortie (les tensions  $v_d$  and  $v_q$ ) ont un aspect déchiqueté dû au fait que différents couples de tensions peuvent donner la même vitesse en régime permanent. Ces valeurs multiples sont volontairement appliquées pour augmenter la richesse des données. La correspondance des moindres carrés avec les données sur la figure est très bonne.

Le résultat de l'ajustement de l'équation mécanique équation (3.3) est montré sur la

Figure 3.2. Dans ce cas, la variable de sortie est le couple noté  $y_2$ . La figure montre de très bons résultats bien que quelques effets non modélisés soient visibles. Ces effets n'ont pas une très grande importance car ils sont généralement compensés en boucle fermée.

Paramètres	Identification
$R(\omega)$	2.86
$L_0(mH)$	10.2
$L_2(mH)$	-0.52
$K(Nm.A^{-1})$	0.26
$f_v(Nms/rad)$	$2.37.10^{-4}$
$C_r$	0.0752
$J(kg.m^2)$	$3.18.10^{-4}$

TABLE 3.1 – Résultat de l'estimation des paramètres dans le repère  $d - q$ .

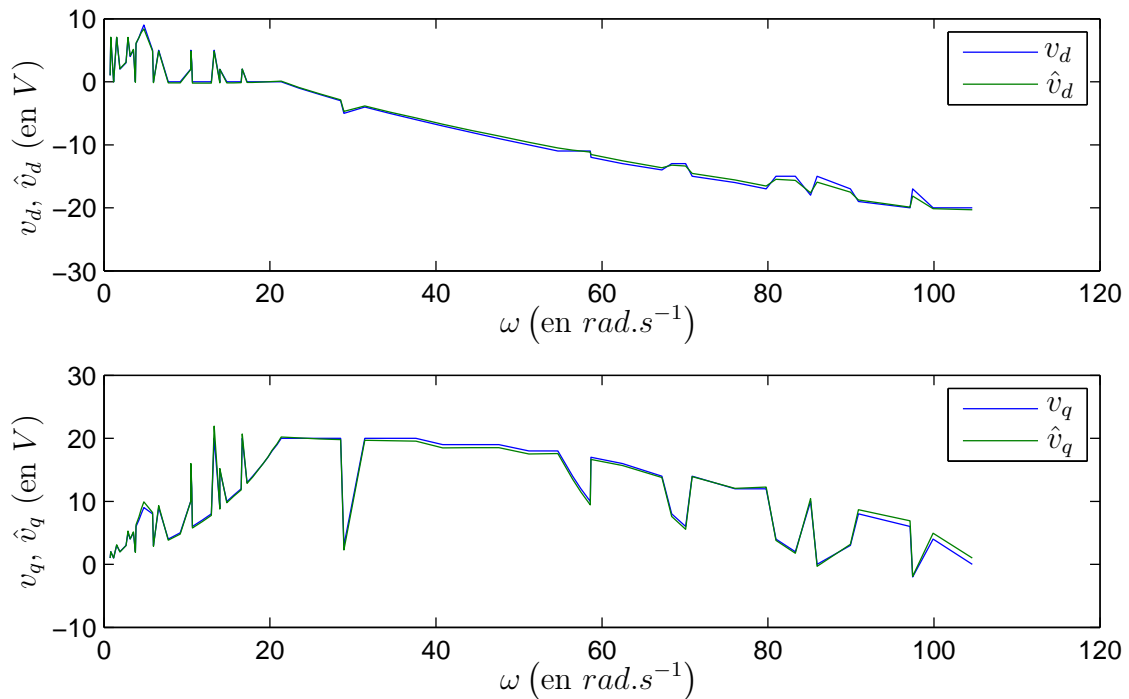


FIGURE 3.1 – Représentation de l'identification des paramètres électriques dans le repère  $d - q$ .



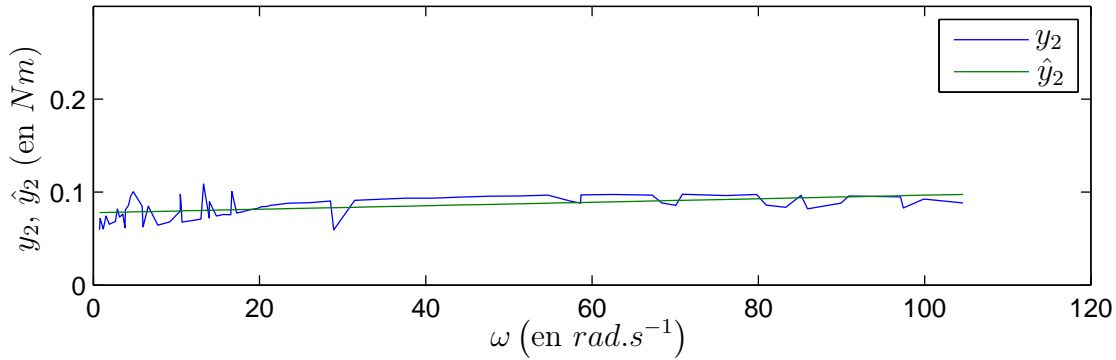


FIGURE 3.2 – Représentation de l'identification des paramètres mécaniques dans le repère  $d - q$ .

### 3.2.2 Estimation de l'inertie sur la base de mesures en régime transitoire

L'inertie  $J$  n'affecte pas les dynamiques en régime permanent et est le seul paramètre qui nécessite la mesure d'une réponse en régime transitoire. À partir des estimations  $\hat{K}$ ,  $\hat{f}_v$ , et  $\hat{C}_r$  obtenues en régime permanent, l'équation mécanique dans le repère  $d - q$  peut s'écrire sous la forme :

$$\underbrace{\left[ \hat{K}i_q + n_p(\hat{L}_d - \hat{L}_q)i_d i_q - \hat{f}_v \omega - \hat{C}_r \operatorname{sgn}(\omega) \right]}_{y_3} = \underbrace{\left[ \frac{d\omega}{dt} \right]}_{W_3} \underbrace{\left[ J \right]}_{P_{nom,3}}, \quad (3.4)$$

qui est linéaire par rapport au paramètre  $J$  à identifier. Un échelon de tension est appliqué au moteur pour obtenir une accélération significative  $d\omega/dt$ , qui est nécessaire pour obtenir l'inertie. L'accélération angulaire peut être reconstruite de différentes manières. On pourrait utiliser par exemple des différentiateurs algébriques ou par modes glissants. Cependant, dans ce cas, les calculs sont réalisés hors ligne, l'accélération angulaire peut être reconstruite à partir de la vitesse en utilisant l'équation aux différences (la différence de vitesse sur une période d'échantillonnage) :

$$\dot{\Omega}(k) = \frac{\Omega(k) - \Omega(k-1)}{T}. \quad (3.5)$$

Le signal résultant est filtré à l'aide d'un filtre passe-bas pour réduire le bruit causé par cette méthode de dérivation. Expérimentalement, un filtre Butterworth du troisième ordre est utilisé avec une fréquence de coupure à  $500\text{Hz}$ . La fonction `filtfilt` de Matlab

est utilisée pour ne pas introduire de retards. Notons qu'en général, la vitesse doit être reconstruite à partir de la position en utilisant une méthode similaire. Cependant, le banc d'essai utilisé pour les expériences présentées dans ce travail possède un tachymètre en plus du codeur. Il n'est donc pas nécessaire de procéder ainsi.

Lorsque l'échelon de tension change, la vitesse varie rapidement, ce qui donne le profil d'accélération représenté sur la Figure 3.3. La réponse présente des pics correctement atteints par l'ajustement par moindres carrés. La valeur de l'inertie est reportée dans la Table 3.1.

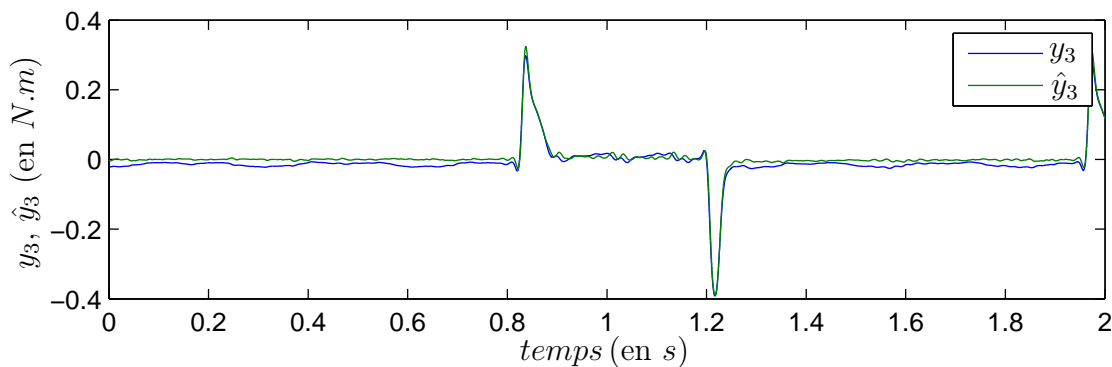


FIGURE 3.3 – Estimation de l'inertie dans le repère  $d - q$ .

Ce paragraphe présente une classique approche permettant l'identification hors-ligne des paramètres du moteur en présence d'un capteur de position. Les paramètres obtenus sont validés expérimentalement et donnent un jeu de valeurs de référence pour la suite de ce manuscrit. Cependant, cette approche suppose que le codeur soit correctement calibré. Dans la section suivante, une approche est proposée lorsque le codeur n'est pas calibré.

### 3.2.3 Détection de l'angle de décalage du codeur (offset)

Dans les applications industrielles, les capteurs de position typiquement utilisés sont des codeurs incrémentaux. Avec de tels capteurs, la position initiale est la position du moteur à l'instant où le capteur est alimenté. Cependant, les méthodes de commande utilisant la transformation  $d - q$  exigent que la position zéro soit alignée avec un aimant permanent. Une procédure initiale doit donc être mise en œuvre pour annuler le décalage de la position initiale. Généralement, celle-ci est réalisée en appliquant un courant important à une phase du moteur, imposant à la dent du rotor la plus proche de l'enroulement de s'aligner sur celui-ci. Dans ce qui suit, on nommera cette procédure "méthode par alignement". Cependant, cette technique suppose que la charge et le couple de friction

soient suffisamment faibles de telle sorte que la position se cale à la valeur désirée. Dans la littérature, la calibration de l'angle a été traitée de différentes façons. On citera par exemple [Jung 1998], où la procédure proposée ne permet pas d'identifier les paramètres en même temps que l'offset. Dans [Konghirun 2005] l'approche proposée utilise un QEP (Quadrature Encoder Pulse) mais elle ne s'applique pas à tous les codeurs. Dans ce paragraphe, nous montrons qu'une estimation jointe des paramètres du moteur de l'offset est possible en utilisant un algorithme simple, les moindres carrés.

### 3.2.3.1 Procédure d'identification

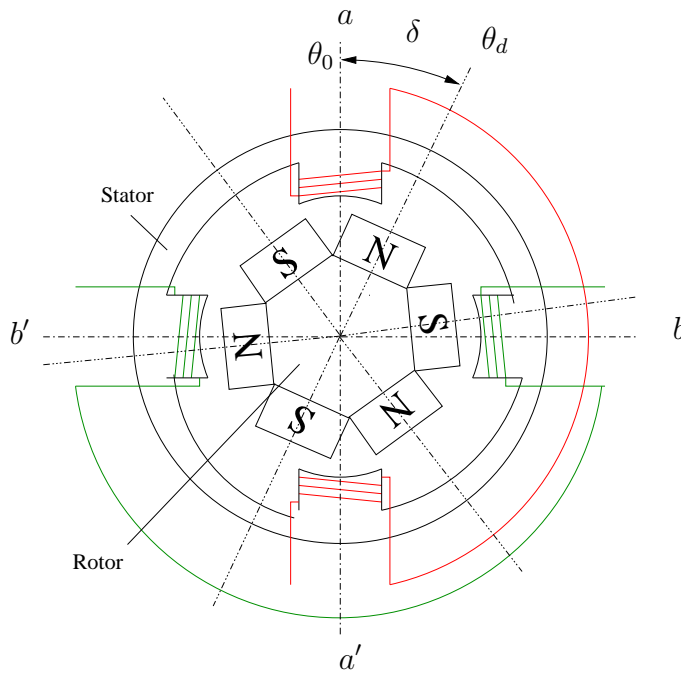


FIGURE 3.4 – Représentation du moteur à l'alimentation.

La Figure 3.4 représente la situation du moteur lors de l'alimentation.  $\theta_0$  et  $\theta_d$  représentent respectivement l'angle initial du moteur et l'angle initial désiré,  $\delta = \theta_d - \theta_0$  représente l'offset entre les deux angles. En appliquant la transformée de Park (2.14) à partir de l'angle désiré, on obtient :

$$U(\theta_d) = U(\theta_0 + \delta) = \begin{bmatrix} \cos(n_p(\theta_0 + \delta)) & \sin(n_p(\theta_0 + \delta)) \\ -\sin(n_p(\theta_0 + \delta)) & \cos(n_p(\theta_0 + \delta)) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Ceci nous amène à la transformation (2.27) avec  $\delta$  constant. On obtient alors les équations électriques du moteur en présence d'un offset dans le repère  $f - g$  (2.30). En régime

permanent, les variables dans le repère  $f - g$  se ramènent à :

$$\begin{bmatrix} v_f \\ v_g \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} i_f \\ i_g \end{bmatrix} + n_p \omega \begin{bmatrix} -\Psi_f \\ \Psi_g \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

où :

$$\begin{bmatrix} \Psi_f \\ \Psi_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 + L_2 \cos(2n_p \delta) & -L_2 \sin(2n_p \delta) \\ -L_2 \sin(2n_p \delta) & L_0 - L_2 \cos(2n_p \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_g \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \sin(n_p \delta) \\ \cos(n_p \delta) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

On peut réécrire l'équation (3.8) sous la forme (1.22) :

$$y_4[n] = W_4^T[n] P_{nom,4}, \quad (3.9)$$

avec :

$$y_4[n] = \begin{bmatrix} v_f[n] \\ v_g[n] \end{bmatrix},$$

$$W_4[n] = \begin{bmatrix} i_f[n] & i_g[n] \\ n_p \omega[n] i_f[n] & -n_p \omega[n] i_g[n] \\ -n_p \omega[n] i_g[n] & 0 \\ 0 & n_p \omega i_f[n] \\ \omega[n] & 0 \\ 0 & \omega[n] \end{bmatrix},$$

$$P_{nom,4} = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6]^T.$$

À partir de l'estimation du vecteur  $P_4$ , l'estimation des paramètres originaux peut être déduite en utilisant  $R = p_1$ ,  $L_0 = (p_3 + p_4)/2$ ,  $K = \sqrt{p_5^2 + p_6^2}$ ,  $L_2 = (p_5^2 + p_6^2)p_2/(2p_5p_6)$ ,

et

$$\delta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{p_5}{p_6}\right)/n_p & \text{si } \hat{c} > 0, \\ \pi/2n_p & \text{si } \hat{s} = 1, \\ -\pi/2n_p & \text{si } \hat{s} = -1, \\ \left(\arctan\left(\frac{p_5}{p_6}\right) - \pi\right)/n_p & \text{si } \hat{c} < 0, \\ & \text{et } \hat{s} > 0, \\ \left(\arctan\left(\frac{p_5}{p_6}\right) + \pi\right)/n_p & \text{si } \hat{c} < 0, \\ & \text{et } \hat{s} < 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $\hat{c} = p_6/\sqrt{p_5^2 + p_6^2}$ ,  $\hat{s} = p_5/\sqrt{p_5^2 + p_6^2}$  sont respectivement les estimations de  $\cos(n_p\delta)$  et  $\sin(n_p\delta)$ .

### Résultats expérimentaux

Les expérimentations sont réalisées de la même façon que pour l'identification dans le repère  $d-q$  à la différence que la position réelle n'étant pas connue, les tensions appliquées sont les tensions  $v_f$  et  $v_g$ . En raison de la stabilité du moteur en boucle ouverte, la vitesse converge malgré l'offset de position. Afin d'évaluer les résultats, l'identification est réalisée d'abord sans considérer l'offset, ce qui nous ramène à l'identification réalisé dans la section 3.2.1, puis en considérant cet offset.

La Figure 3.5 décrit l'évolution du vecteur de sortie en fonction de la vitesse  $\omega$ , qui est le même dans les deux cas. Les composantes du vecteur de sortie sont les tensions  $v_f$  and  $v_g$ . Les courbes vertes montrent l'ajustement par moindres carrés lorsque l'offset n'est pas estimé, tandis que les courbes rouges représentent l'ajustement en considérant l'estimation de l'offset. La figure montre que les données collent parfaitement lorsque l'offset est inclus mais pas dans l'autre cas. Les valeurs estimées sont données dans la Table 3.2. Celle-ci montre également que l'identification sans considérer l'offset est mauvaise, tandis que les résultats de l'identification utilisant l'estimation de l'offset sont proches de ceux obtenus dans le repère  $d-q$ . L'angle estimé lors de cette expérience est  $\delta = \frac{-1.08}{50}rad = -1.24^\circ$ , soit 62 degrés électriques.

**Remarque 3.1** *Les identifications réalisées précédemment montrent que l'inductance  $L_2$  est très faible par rapport à l'inductance  $L_0$ . Par conséquent, l'inductance  $L_2$  sera négligée dans la suite du manuscrit. Les équations du moteur dans le repère  $d-q$  sont alors représentés par le système (2.33) et dans le repère  $f-g$  par le système (2.34).*

Paramètres	Sans $\delta$	Avec $\delta$
$R(\Omega)$	3.69	2.80
$L_0(mH)$	10.2	9.8
$L_2(mH)$	-0.36	-0.59
$K(Nm.A^{-1})$	0.088	0.29
$\delta(rad)$	X	$-21.7.10^{-3}$

TABLE 3.2 – Résultat de l'estimation des paramètres en présence de l'offset.

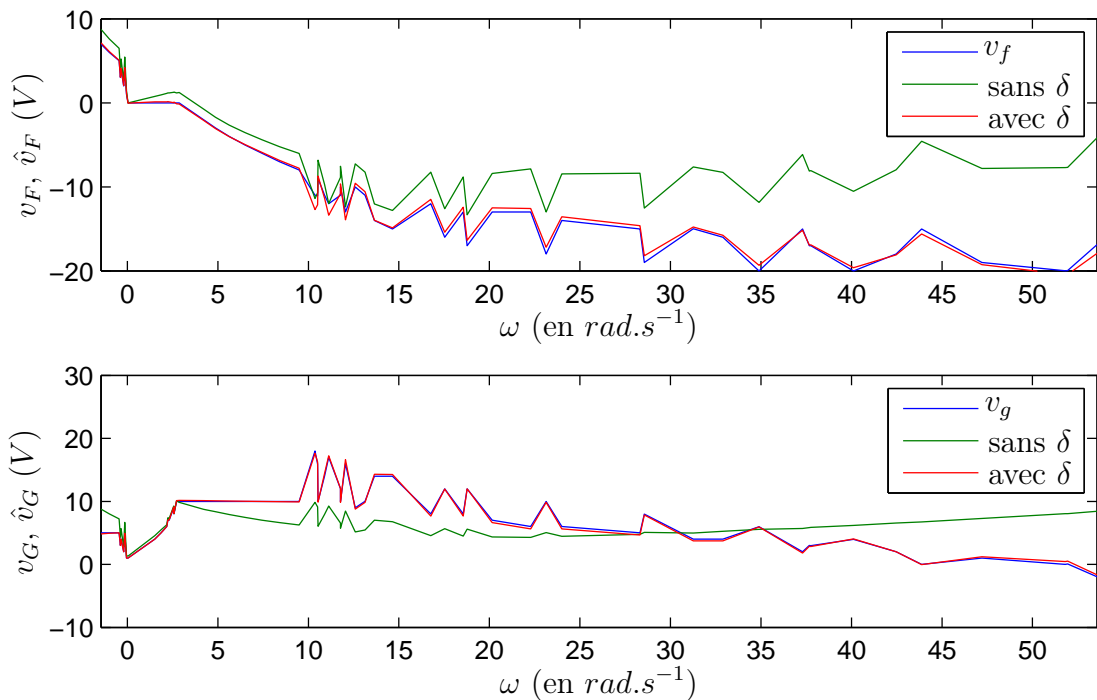


FIGURE 3.5 – Représentation de l'identification des paramètres électriques et de l'offset.

### 3.2.3.2 Identification rapide de l'offset :

L'identification conjointe des paramètres du moteur et de l'offset a été présentée précédemment. Cet algorithme propose l'identification de cinq paramètres simultanément. Ceci nécessite un jeu de données suffisamment riche afin que tous les paramètres soient correctement identifiés. Ici nous présentons une identification rapide de l'offset. Étant donné que cet offset est constant, on va montrer que l'identification de ce paramètre seul peut être réalisée avec très peu de données. Bien que les paramètres du moteur doivent être connus pour réaliser cette identification, elle reste néanmoins intéressante. Les paramètres n'ont pas besoin d'être identifiés chaque fois que le codeur est mis sous tension, une pro-

cédure rapide est alors suffisante. De plus, en présence d'un couple résistant élevé, il n'est pas forcément possible de faire tourner le moteur sur une gamme de vitesse suffisamment étendue. Dans ce paragraphe, nous montrons que seulement quatre jeux de données à faibles vitesses sont suffisants pour identifier l'offset.

En négligeant le terme  $L_2$ , on obtient alors les équations électriques du moteur en présence d'un offset dans le repère  $f - g$ , soit l'équation (2.34) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} L \frac{di_f}{dt} = v_f - Ri_f + K\omega \sin(n_p \delta) + n_p L \omega i_g, \\ L \frac{di_g}{dt} = v_g - Ri_g - K\omega \cos(n_p \delta) - n_p L \omega i_f. \end{cases} \quad (3.11)$$

En considérant que les paramètres  $R$ ,  $L$  et  $K$  sont connus, cette équation est linéaire par rapport à l'offset à estimer, et peut être réécrite sous la forme (1.22) :

$$y_5[n] = W_5^T[n] P_{nom,5}, \quad (3.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} y_5[n] &= \begin{bmatrix} v_f[n] - Ri_f[n] + n_p L \omega[n] i_g[n] \\ v_g[n] - Ri_g[n] - n_p L \omega[n] i_f[n] \end{bmatrix}, \\ W_5[n] &= \begin{bmatrix} -K\omega[n] \\ K\omega[n] \end{bmatrix}, \\ P_{nom,5} &= \begin{bmatrix} p_5 & p_6 \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

où  $\delta$  est déterminé par les conditions (3.10) de façon à ce que l'algorithme des moindres carrés soit applicable.

### Résultats expérimentaux

Lors de cette procédure, seulement un paramètre constant est recherché, l'offset. Dans ce cas, quatre jeux de données sont suffisants pour l'identification. La procédure d'initialisation, lorsque tous les autres paramètres sont connus, est très rapide. On utilise quatre couples de tension  $v_f$  et  $v_g$  menant à des vitesses vitesses égales à 3, 6,  $-3$  et  $-6 rad.s^{-1}$  (approximativement). Il n'est pas nécessaire de couvrir toute la gamme de vitesse car l'offset ne varie pas en fonction de la vitesse. Les résultats sont comparés à l'initialisation utilisant la "méthode par alignement" présenté dans l'introduction de cette section, le courant sur la phase  $a$  étant généré en appliquant une tension  $v_a = 10V$ .

### Initialisation sans couple résistant additionnel

Dans un premier temps, l'identification est réalisée sans ajouter de couple résistant afin d'avoir une valeur de référence de l'offset. En appliquant une tension  $v_a = 10V$ , on obtient un angle de  $0.069rad$  soit un angle de  $3.95^\circ$ . Sachant que le moteur a 50 dents, il y a donc un écart de  $7.2^\circ$  entre chaque dent. Avec l'algorithme des moindres carrés, on obtient un angle de  $0.067rad$  soit  $3.84^\circ$ . La Figure 3.6 représente le vecteur de sortie  $y$  de (3.12) (en bleu), son identification en utilisant le paramètre identifié par moindres carrés (en vert), et en utilisant le paramètre identifié par alignement (en rouge). On observe sur cette figure que les trois courbes sont très proches, reflétant une bonne identification du paramètre avec chacune des deux méthodes.

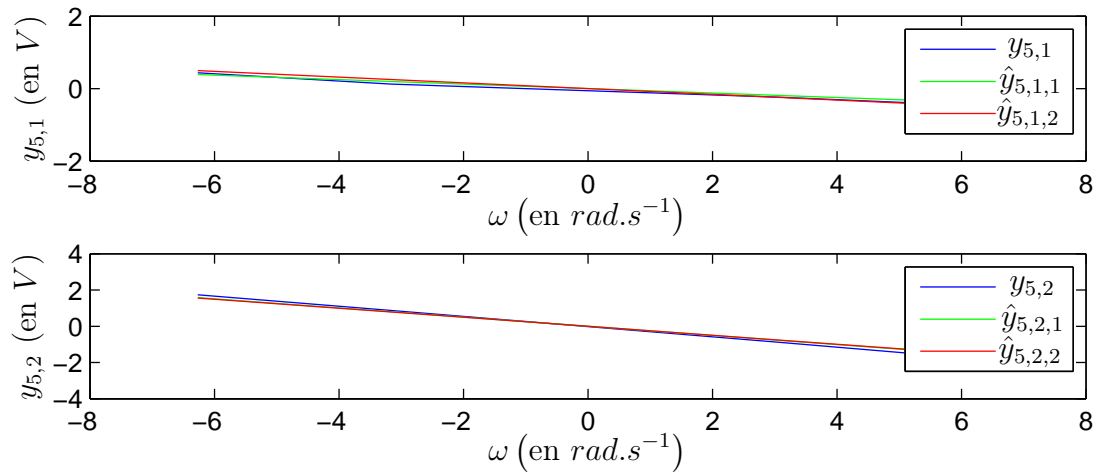


FIGURE 3.6 – Représentation de l'identification de l'angle  $\delta$  sans couple additionnel.

Afin de vérifier le comportement en boucle fermée, on réalise un suivi de trajectoire en utilisant la commande proportionnelle intégrale décrite dans [Blauch 1993]. Ici, l'objectif n'est pas de discuter des performances de la commande, mais seulement de vérifier que l'alignement est correctement réalisé afin de permettre un asservissement en boucle fermée du moteur (la commande du moteur est discutée plus en détail dans la section suivante). On montre sur la Figure 3.7 la trajectoire de référence (en bleu) et le suivi de trajectoire lorsque l'offset est estimé en utilisant les moindres carrés (en vert,  $*_1$ ) et à l'aide de la "méthode par alignement" (en rouge,  $*_2$ ), avec  $* \in \{\theta, \omega\}$  et  $** \in \{1, 2\}$ . Dans les deux cas, le suivi de trajectoire est identique et correct.

### Initialisation en présence de couple résistant additionnel

Les expérimentations sans couple résistant additionnel ont montré que les deux procédures donnaient un angle de décalage identique et correct. Afin d'illustrer les propriétés de



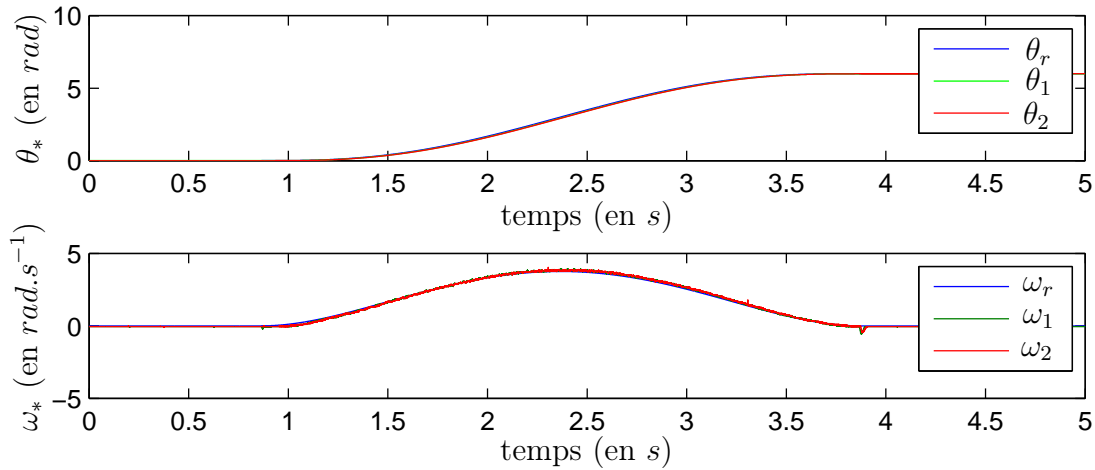


FIGURE 3.7 – Suivi de trajectoire sans couple additionnel.

robustesse de la procédure d'identification par moindres carrés introduite dans ce travail, on réalise des expérimentations en présence d'un couple résistant additionnel (qui n'est pas mesurable sur le banc) produit par le frein à poudre. Plusieurs couples différents sont appliqués au moteur. Les expériences montrent que pour une tension de  $8V$  appliquée au moteur, la méthode d'alignement montre ses limites.

On réalise la même expérience que précédemment. Dans ce cas l'angle  $\delta$ , relevé par la méthode d'alignement est de  $0.08\text{rad}$ , alors que dans le cas des moindres carrés, on obtient  $\delta = 0.068\text{rad}$ . Les moindres carrés montrent des résultats similaires aux expériences sans frein. Afin de vérifier ces identifications, on trace sur la Figure 3.8 le résultat des identifications. On voit très clairement que la courbe rouge correspondant à l'initialisation par alignement ne suit pas les deux autres.

L'offset est compensé en utilisant les deux résultats obtenus pour le même asservissement que celui réalisé sur la Figure 3.7. Les résultats sont tracés sur la Figure 3.9. Dans le cas de l'identification par alignement (en rouge sur la figure), on observe que l'alignement n'est pas correctement réalisé. Ceci se traduit par le fait que le moteur démarre dans le sens inverse de celui désiré. L'asservissement n'est alors pas réalisable. À l'inverse pour la méthode par moindres carrés, le suivi de trajectoire est correctement réalisé, bien que le moteur atteigne difficilement la vitesse de référence au démarrage, en raison du couple résistant additionnel, celui-ci étant inconnu et non compensé dans la commande.

Dans cette section, nous avons montré une procédure d'identification de l'angle de décalage du codeur. On a montré que cette approche était performante même en présence

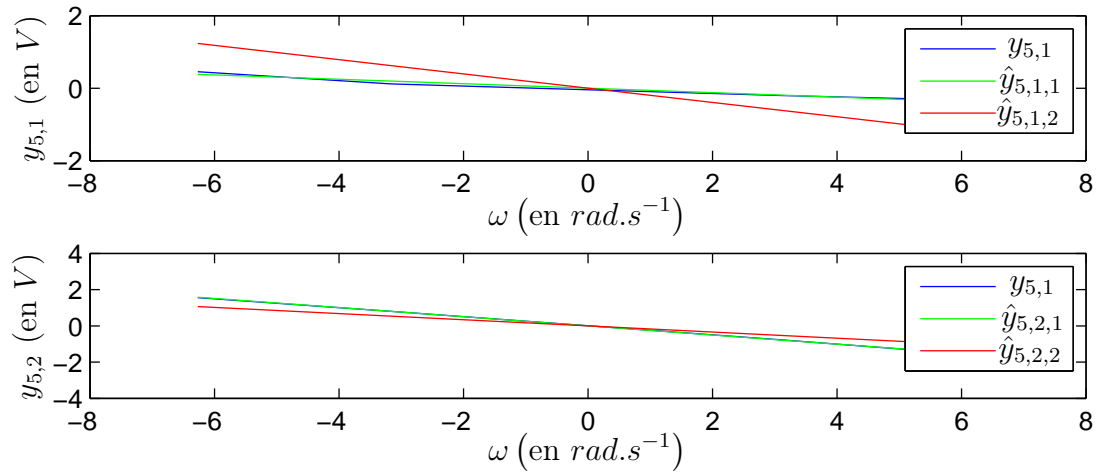
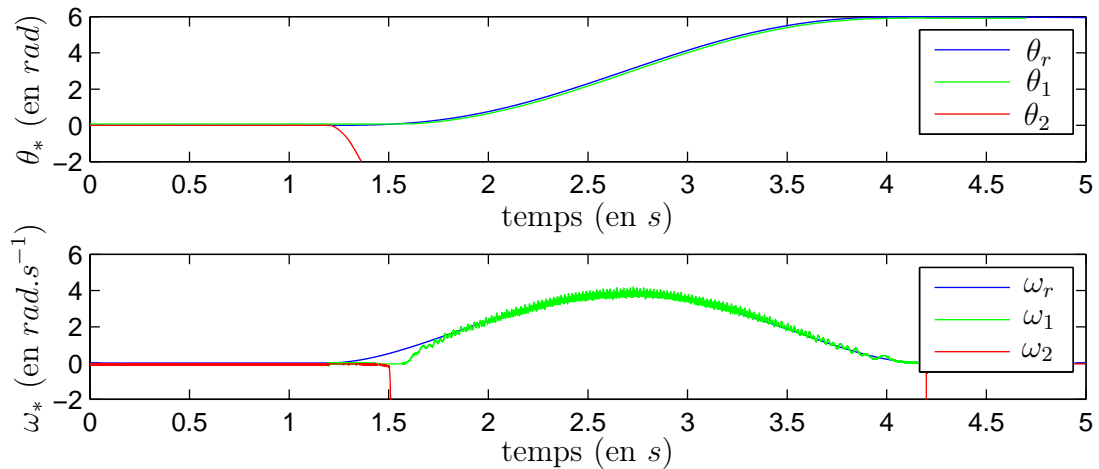
FIGURE 3.8 – Représentation de l'identification de l'angle  $\delta$  avec couple additionnel.

FIGURE 3.9 – Suivi de trajectoire avec couple additionnel.

d'un couple résistant important. À l'inverse, la "méthode par alignement" ne permet pas la convergence de la position vers la valeur désirée lorsque le couple est trop important.

### 3.3 Commande

Sur la base des paramètres estimés précédemment et de l'alignement du codeur de position, une loi de commande pour le MSAP est présentée dans cette section. La commande est développée pour l'asservissement en position du moteur. Dans cette section,

la loi de commande choisie est une loi par modes glissants d'ordre 2 appliquée dans le repère  $d - q$  (ce qui est possible puisque la position est ici mesurée). Afin de réaliser cette commande, il faut tout d'abord définir l'erreur de poursuite.

### 3.3.1 Définition de l'erreur de poursuite

Le but est de stabiliser l'erreur de poursuite à l'origine afin de réaliser un asservissement de position. Pour cela, l'erreur de poursuite est définie par :

$$e_c = [e_d, e_q, e_\omega, e_\theta]^T = [i_d - i_{dr}, i_q - i_{qr}, \omega - \omega_r, \theta - \theta_r]^T,$$

dont les dynamiques sont données par :

$$\begin{cases} \dot{e}_d &= \frac{1}{L}(\bar{v}_d - Re_d + n_p L(e_\omega e_q + e_\omega i_{qr} + e_q \omega_r)), \\ \dot{e}_q &= \frac{1}{L}(\bar{v}_q - Re_q - n_p L(e_\omega e_d + e_\omega i_{dr} + e_d \omega_r) - Ke_\omega), \\ \dot{e}_\omega &= \frac{1}{J}(Ke_q - f_v e_\omega - C_r \text{sgn}(\omega)), \\ \dot{e}_\theta &= e_\omega, \end{cases} \quad (3.13)$$

avec  $\bar{v}_d = v_d - v_{dr}$  et  $\bar{v}_q = v_q - v_{qr}$ .

La relation entre les sorties plates et les entrées de commande s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_d &= \frac{1}{L}\bar{v}_d + \mu_1(e), \\ e_\theta^{(3)} &= \frac{K}{JL}\bar{v}_q + \mu_2(e) + \frac{f_v}{J^2} \frac{1}{J} \dot{C}_r, \end{aligned} \quad (3.14)$$

où :

$$\begin{aligned} \mu_1(e) &= \frac{1}{L}(-Re_d + n_p L(e_\omega e_q + e_\omega i_{qr} + e_q \omega_r)), \\ \mu_2(e) &= -\frac{K}{JL}(Re_q + n_p L(e_\omega e_d + e_\omega i_{dr} + e_d \omega_r) + Ke_\omega) - \frac{f_v}{J^2}(Ke_q - f_v e_\omega). \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.3.2 Commande par modes glissants d'ordre 2

Dans ce paragraphe, on suppose que toutes les variables d'états sont accessibles. On souhaite assurer la stabilité à l'origine du système (3.13). Dans cette section, les perturbations sont inconnues, mais on supposera que ces perturbations ainsi que leur dérivée par rapport au temps sont bornées. Il est alors nécessaire de proposer une loi de commande garantissant la stabilité malgré ces perturbations. D'après les équations (3.14),

on doit réaliser une loi de commande pour le suivi de position et une loi pour le suivi du courant direct. La commande développée dans cette section s'appuie sur les résultats de [Nollet 2008]. Cependant, quelques modifications sont réalisées afin de l'améliorer.

### 3.3.2.1 Suivi du courant direct

Un algorithme par modes glissants d'ordre 1 serait suffisant dans ce cas puisque le degré relatif est 1. Cependant le phénomène de chattering serait plus important si la commande discontinue était appliquée directement à la dérivée temporelle du courant. On propose alors une commande d'ordre 2 afin que l'action discontinue soit appliquée sur la dérivée seconde.

Afin d'assurer le suivi du courant direct, on choisit la variable de glissement suivante :

$$S_d = e_d. \quad (3.16)$$

La dérivée de cette variable est donnée par :

$$\dot{S}_d = \dot{e}_d = \frac{1}{L}\bar{v}_d + \mu_1(e). \quad (3.17)$$

où :

$$\mu_1(e) = \frac{1}{L}(-Re_d + n_p L(e_\omega e_q + e_\omega i_{qr} + e_q \omega_r)), \quad (3.18)$$

La commande apparaissant dans la première dérivée, le système est de degré relatif 1 par rapport à la variable de glissement. On utilise alors l'algorithme du Super Twisting qui ne nécessite que la connaissance de  $e_d$ .

On définit d'abord un retour statique  $\bar{v}_d$  :

$$\frac{1}{L}\bar{v}_d = -\mu_1(e) + u_{st}(S_d). \quad (3.19)$$

La dérivée seconde de la surface est alors donnée par :

$$\ddot{S}_d = \dot{u}_{st} = -\alpha \operatorname{sgn}(S_d) - \frac{1}{2}\lambda |S_d|^{-1/2} \dot{S}_d. \quad (3.20)$$

Cette forme est similaire à l'équation (1.10) où  $\phi = 0$  et  $\varphi = 1$ . Afin de vérifier les conditions de convergence (1.14) données par [Levant 1993], les paramètres  $\alpha$  et  $\lambda$  peuvent être choisis strictement positifs pour assurer la convergence en temps fini vers la surface  $S_d = 0$ .

La détermination des gains de commande peut également se faire en considérant le système (1.16) avec des perturbations nulles. La dérivée de la fonction de Lyapunov (1.19) est ainsi donnée par :

$$\dot{V} = |\psi|^{-1} \psi^T (M^T P + PM) \psi, \quad (3.21)$$

avec  $P$  définie positive et  $M = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$ .

Les gains  $\alpha$  et  $\lambda$  doivent être choisis de telle sorte que :

$$-Q_1 = M^T P + PM \quad (3.22)$$

avec  $Q_1$  définie positive.

Cette condition est vérifiée si la matrice  $M$  est Hurwitz. Pour cela on a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(M) &= -\lambda, \\ \det(M) &= \alpha. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En choisissant  $\alpha$  et  $\lambda$  strictement positifs, cette condition est vérifiée.

### 3.3.2.2 Suivi de position

La variable de glissement suivante est choisie :

$$S_\theta = k e_\theta + \dot{e}_\theta, \quad (3.24)$$

avec  $k > 0$ . De plus, la variable de glissement dépend de la position et de la vitesse seulement et ne dépend pas des paramètres.

Le système a un degré relatif égal à 2 par rapport à  $S_\theta$  est les dérivées successives de  $S_\theta$  sont :

$$\begin{aligned} \dot{S}_\theta &= k \dot{e}_\theta + \ddot{e}_\theta, \\ \ddot{S}_\theta &= k \ddot{e}_\theta + \ddot{e}_\omega \\ &= \frac{k}{J} (K e_q - f_v e_\omega) + \frac{K}{JL} \bar{v}_q + \mu_2(e) - \left( \frac{k}{J} - \frac{f_v}{J^2} \right) C_r \text{sgn}(\omega) \\ &\quad - \frac{1}{J} \frac{dC_r}{dt} \text{sgn}(\omega). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dans le paragraphe 1.3.2, nous avons présenté l'algorithme du Twisting pour traiter les systèmes de degré relatif égal à deux. Dans [Nollet 2008], l'algorithme du Twisting échan-

tillonné est utilisé. Cet algorithme ne nécessite pas la dérivée par rapport au temps de la variable de glissement, mais il utilise la différence de la variable sur une période d'échantillonnage. Cette différence est très sensible au bruit de mesures.

L'entrée  $\bar{v}_q$  est, quant à elle, définie par :

$$\frac{K}{JL}\bar{v}_q = -\frac{k}{J}(Ke_q - f_v e_\omega) - \mu_2(e) + w_t(S_\theta, \dot{S}_\theta). \quad (3.26)$$

On a alors :

$$\ddot{S}_\theta = \phi_1(t) + w_t(S_\theta, \dot{S}_\theta), \quad (3.27)$$

avec :

$$\phi_1(t) = -\left(\frac{k}{J} - \frac{f_v}{J^2}\right) C_r \text{sgn}(\omega) - \frac{1}{J} \frac{dC_r}{dt} \text{sgn}(\omega). \quad (3.28)$$

Pour garantir la convergence en temps fini vers la surface  $S_\theta = 0$ , les conditions (1.21) permettent de conclure que  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$  doivent vérifier :

$$\begin{aligned} \lambda_m &> \left| \left( \frac{k}{J} - \frac{f_v}{J^2} \right) C_r - \frac{1}{J} \frac{dC_r}{dt} \right|_{max}, \\ \lambda_M &> \lambda_m + 2 \left| \left( \frac{k}{J} - \frac{f_v}{J^2} \right) C_r - \frac{1}{J} \frac{dC_r}{dt} \right|_{max}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Par conséquent, la loi commande présentée garantit la convergence exponentielle vers 0 de l'erreur de poursuite pour un système dont l'état complet est mesuré. Notons que cette commande est robuste par rapport aux perturbations et aux incertitudes paramétriques.

### 3.3.3 Estimations de l'accélération et du couple résistant

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté une commande par modes glissants d'ordre 2. Celle qui est présentée fait appel à la dérivée première de la surface de glissement, donc à l'accélération. Or l'accélération n'est pas mesurée sur le banc d'essai. Afin d'appliquer cette commande, on utilise un observateur pour estimer cette accélération. Celui-ci utilise l'équation mécanique (2.33) du moteur dans le repère  $d - q$  :

$$J \frac{d\omega}{dt} = K i_q - f_v \omega - C_r \text{sgn}(\omega). \quad (3.30)$$

Le coefficient de frottement  $C_r$  varie en fonction de la charge et est inconnu. Pour cela, ce terme est considéré comme une perturbation. On réécrit l'équation mécanique en

considérant cette perturbation comme étant une variable d'état augmentée définie par :

$$d_\omega = -\frac{C_r}{J} \text{sgn}(\omega),$$

de telle sorte que le modèle augmenté est défini par :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\omega &= \mathbf{A}_\omega \mathbf{x}_\omega + \mathbf{B}_\omega u_\omega + \mathbf{d}_\omega, \\ \mathbf{y}_\omega &= \mathbf{C}_\omega \mathbf{x}_\omega, \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $\mathbf{x}_\omega = [\omega \quad d_\omega]^T$ ,  $u_\omega = \frac{K}{J} i_q$  et

$$\mathbf{A}_\omega = \begin{bmatrix} -\frac{f_v}{J} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \frac{dC_r}{dt} \text{sgn}(\omega) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C}_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En remplaçant la perturbation par une injection de sortie, et en ajoutant une partie linéaire stabilisante, on peut définir l'observateur par modes glissants comme :

$$\dot{\hat{\omega}} = -\frac{f_v}{J} \hat{\omega} + u_\omega + \chi_\omega(\omega - \hat{\omega}) + l_\omega(\omega - \hat{\omega}), \quad (3.32)$$

où  $l_\omega$  est un gain ajustable à définir et  $\chi_\omega$  est l'algorithme du Super Twisting car la variable de glissement  $(\omega - \hat{\omega})$  a un degré relatif égal à 1 par rapport à la perturbation inconnue  $\mathbf{d}_\omega$ . L'observateur est défini sous sa forme augmentée par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_\omega &= \mathbf{A}_\omega \hat{\mathbf{x}}_\omega + \mathbf{B}_\omega u_\omega + \boldsymbol{\chi}_\omega(\mathbf{y}_\omega - \hat{\mathbf{y}}_\omega) + \mathbf{l}_\omega(\mathbf{y}_\omega - \hat{\mathbf{y}}_\omega), \\ \hat{\mathbf{y}}_\omega &= \mathbf{C}_\omega \hat{\mathbf{x}}_\omega, \end{aligned} \quad (3.33)$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_\omega &= [\hat{\omega} \quad \hat{d}_\omega]^T, \\ \boldsymbol{\chi}_\omega(\mathbf{y}_\omega - \hat{\mathbf{y}}_\omega) &= \begin{bmatrix} \lambda_\omega |\mathbf{y}_\omega - \hat{\mathbf{y}}_\omega|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(\mathbf{y}_\omega - \hat{\mathbf{y}}_\omega) \\ \alpha_\omega \text{sgn}(\mathbf{y}_\omega - \hat{\mathbf{y}}_\omega) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{l}_\omega &= \begin{bmatrix} l_\omega \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'erreur d'observation est définie par :

$$\boldsymbol{\epsilon}_\omega = \mathbf{x}_\omega - \hat{\mathbf{x}}_\omega = \begin{bmatrix} \epsilon_{y_\omega} \\ \epsilon_{d_\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_\omega - \hat{\mathbf{y}}_\omega \\ d_\omega - \hat{d}_\omega \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

menant à la dynamique :

$$\dot{\epsilon}_\omega = \dot{\mathbf{x}}_\omega - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_\omega = (\mathbf{A}_\omega - \mathbf{l}_\omega \mathbf{C}_\omega) \epsilon_\omega + \mathbf{d}_\omega - \boldsymbol{\chi}_\omega(\epsilon_{\mathbf{y}_\omega}). \quad (3.35)$$

En faisant l'hypothèse que le coefficient de friction de Coulomb est dérivable, et que la dérivée de  $C_r$  est bornée c'est-à-dire  $\left| \frac{dC_r}{dt} \right|_{max} < \Pi_{C_r}$ , où  $\Pi_{C_r}$  est une constante positive, la convergence en temps fini de l'observateur en boucle fermée est garantie en choisissant les gains  $\alpha_\omega$ ,  $\lambda_\omega$ , et  $l_\omega$  vérifiant les conditions de la fonction de Lyapunov (1.19). Donc après un temps fini, on a  $\dot{\epsilon}_\omega = \epsilon_\omega = 0$ , ce qui conduit à une estimation de l'accélération  $\dot{\hat{\omega}}$ . On note par la même occasion que le coefficient de friction de Coulomb est aussi estimé.

Dans cette section a décrit une méthode pour estimer l'accélération du moteur. Il est alors nécessaire de prouver la stabilité de la loi de commande basée sur l'observateur.

### 3.3.4 Stabilité de la boucle fermée basée sur l'observateur

La loi de commande décrite dans la section 3.3.2 est utilisée, basée sur l'estimation de l'accélération obtenue par l'observateur décrit dans la section 3.3.3. Le système complet, observateur-commande, étant non linéaire, le principe de superposition n'est pas applicable. La convergence de l'observateur et de la loi de commande pris séparément n'impliquent pas la convergence du système complet. On considère les lois de commande (3.19) et (3.26), les entrées de commande dépendant des mesures et des variables estimées par l'observateur. Dans ce cas, la seule variable modifiée est la dérivée de la variable de glissement définie pour le suivi de position, par :

$$\dot{\hat{S}}_\theta = k\dot{e}_\theta + \ddot{e}_\omega, \quad (3.36)$$

avec  $\ddot{e}_\theta = \dot{\hat{\omega}} - \dot{\omega}_r$ ,

qui peut s'exprimer en fonction des états du système  $\Xi$  et des entrées :

$$\dot{\hat{S}}_\theta = ke_\omega + \left(-\frac{f_v}{J} - l_\omega\right)\epsilon_{\mathbf{y}_\omega} + \epsilon_{d_\omega} \pm \frac{dC_r}{dt} + \dot{w}_{st,2}(\epsilon_{d_\omega}),$$

Les dynamiques des états du système complet incluant les erreurs de suivi ainsi que l'erreur d'estimation :

$$\Xi = [e_d, e_q, e_\omega, e_\theta, \epsilon_{\mathbf{y}_\omega}, \epsilon_{d_\omega}]^T,$$



sont donc données par :

$$\dot{\Xi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}(-Re_d + n_p L(e_\omega e_q + e_\omega i_{qr} + e_q \omega_r)) \\ \frac{1}{L}(-Re_q - n_p L(e_\omega e_d + e_\omega i_{dr} + e_d \omega_r) - Ke_\omega) \\ \frac{1}{J}(Le_q - f_v e_\omega) \\ \begin{matrix} e_\omega \\ \left(-\frac{f_v}{J} - l_\omega\right) \epsilon_{y_\omega} + \epsilon_{d_\omega} \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\bar{v}_d \\ \frac{1}{L}\bar{v}_q \\ \pm \frac{1}{J}C_r \\ 0 \\ w_{st,1}(\epsilon_{y_\omega}) \\ \pm \frac{1}{J} \frac{dC_r}{dt} + \dot{w}_{st,2}(\epsilon_{d_\omega}) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Montrer que le système est borné en temps fini est suffisant pour prouver la stabilité exponentielle du système complet. L'observateur converge vers zéro en temps fini indépendamment de la loi de commande. Ceci implique que lorsque l'observateur a convergé, la loi de commande définie dans la section 3.3.2 se comporte de la même façon. Il est alors seulement nécessaire de prouver que pendant le transitoire lié à la convergence de l'observateur, le temps que l'observateur converge, le système complet (3.37) reste borné.

Le système complet dépend alors des états du système, de la trajectoire désirée et des entrées de commandes :

$$\dot{\Xi} = F(\Xi, \Gamma_r, w_{te}, w_{st}, w_{st,1}(\epsilon_{d_\omega}), \dot{w}_{st,2}(\epsilon_{d_\omega})). \quad (3.38)$$

Selon les hypothèses physiques, les courants  $i_d$ ,  $i_q$  et les perturbations sont bornés. De plus, les algorithmes du Twisting et du Super Twisting sont également bornés.

Le système peut être réécrit comme  $\dot{\Xi} = f(\Xi) + g$ .

Par conséquent, en incluant toutes les dominations dans le système complet, on obtient l'inégalité :

$$\|\dot{\Xi}\| \leq Q\|\Xi\| + \bar{g}, \quad (3.39)$$

où  $Q$  et  $g$  sont des constantes positives.

En intégrant (4.64), on obtient :

$$\|\Xi(t)\| \leq \|\Xi(0)\| + \int_0^t (Q\|\Xi(\tau)\| + \bar{g})d\tau. \quad (3.40)$$

Par application du lemme de Gronwall, on a :

$$\|\Xi(t)\| \leq \|\Xi(0)\| \exp(Ct) + \frac{\bar{g}}{Q} \exp(Ct - 1), \quad (3.41)$$

où  $C$  est une constante positive. Par conséquent, ceci montre que le système d'état complet  $\Xi$  est borné en temps fini, ce qui prouve la stabilité exponentielle du système complet.

### 3.3.5 Résultats expérimentaux

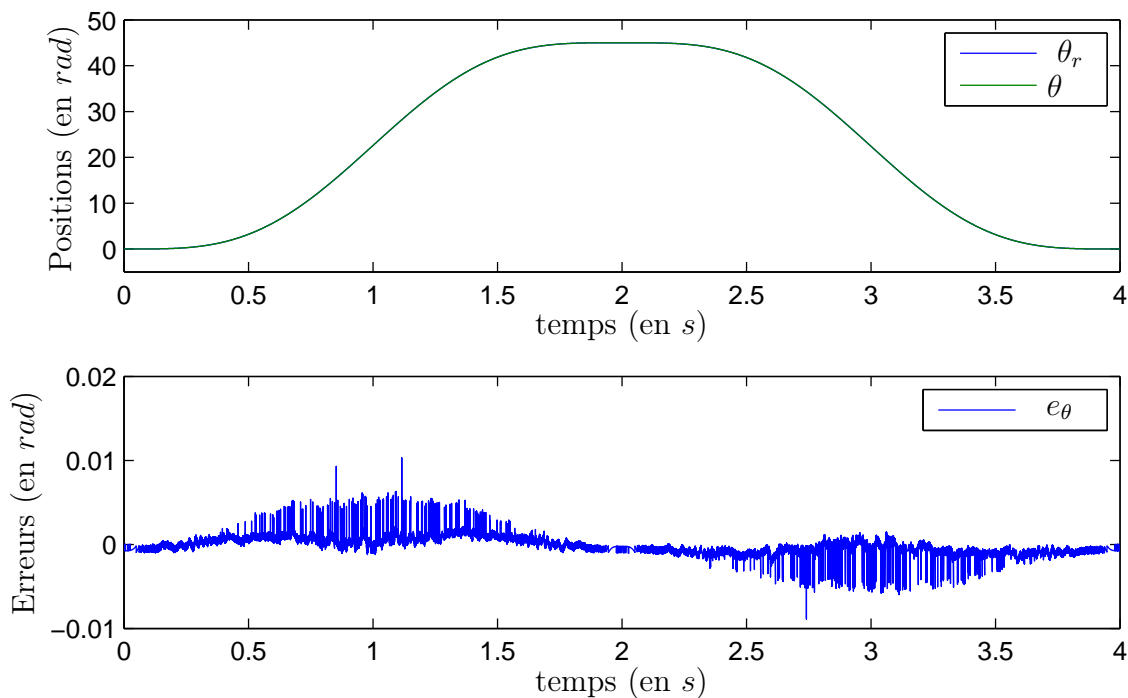


FIGURE 3.10 – Position de référence et position mesurée (haut), erreur de position (bas).

Dans cette section, nous présentons les résultats expérimentaux de la commande du MSAP en présence de capteurs. Les expérimentations suivantes sont réalisées à l'aide de la commande par modes glissants d'ordre 2 présentée précédemment. L'objectif est le suivi de position, en utilisant la trajectoire (2.48). La trajectoire de référence est appliquée au moteur de telle sorte que la position démarre à une position initiale  $\theta_i = 0rad$ , jusqu'à atteindre une position finale égale  $\theta_f = 40rad$ . Finalement, la trajectoire est à nouveau appliquée pour ramener le moteur à sa position initiale. Le moteur atteint alors une vitesse maximale de  $50rad.s^{-1}$ .

La Figure 3.10 montre le suivi de position. Dans le premier graphe, on trace en bleu

la position de référence et en vert la position mesurée. Le second représente l'erreur de position  $e_\theta$ . La figure montre que la position est parfaitement suivie. L'erreur de position maximale est inférieure à  $0.01rad$  en régime transitoire.

La Figure 3.11 représente en haut la vitesse de référence et la vitesse mesurée respectivement en bleu et en vert, et l'erreur de suivi en bas. Ici encore, le suivi de vitesse est très bon, l'erreur de vitesse est inférieur à  $1rad.s^{-1}$ .

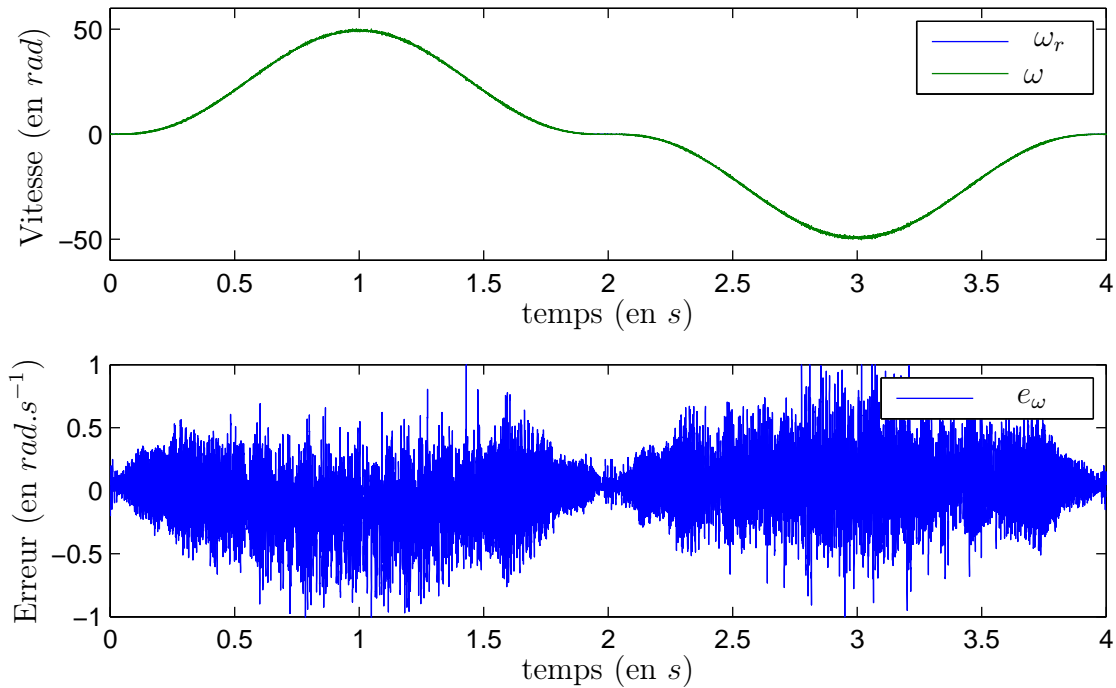


FIGURE 3.11 – Vitesse de référence et vitesse mesurée (haut), erreur de vitesse (bas).

On a représenté sur la figure 3.12 l'accélération de référence et l'accélération estimée à partir de l'observateur. L'estimation obtenue est filtrée à l'aide du filtre discret d'ordre 3 utilisé précédemment.

Finalement, la Figure 3.13 représente le suivi de courant direct et le courant  $i_q$ . Comme désiré, le courant direct est égal à zéro. Le courant de quadrature ne suit pas réellement le courant de référence, car la référence a été calculée sur la base de la platitude en considérant des perturbations nulles.

Dans ce paragraphe, nous avons présenté les résultats expérimentaux de la commande par modes glissants d'ordre 2, basée sur un algorithme du Super Twisting et un algorithme du Twisting. Cette commande nécessite l'utilisation d'un observateur afin de définir la

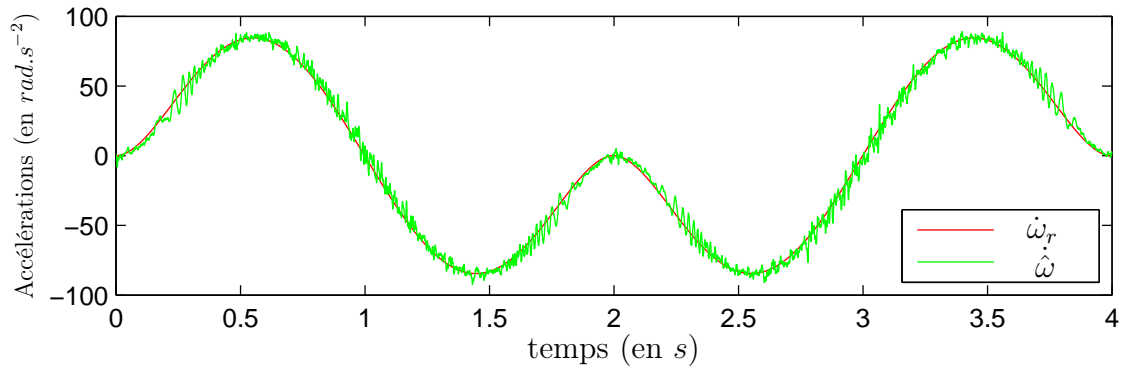


FIGURE 3.12 – Accélération de référence et accélération estimée.

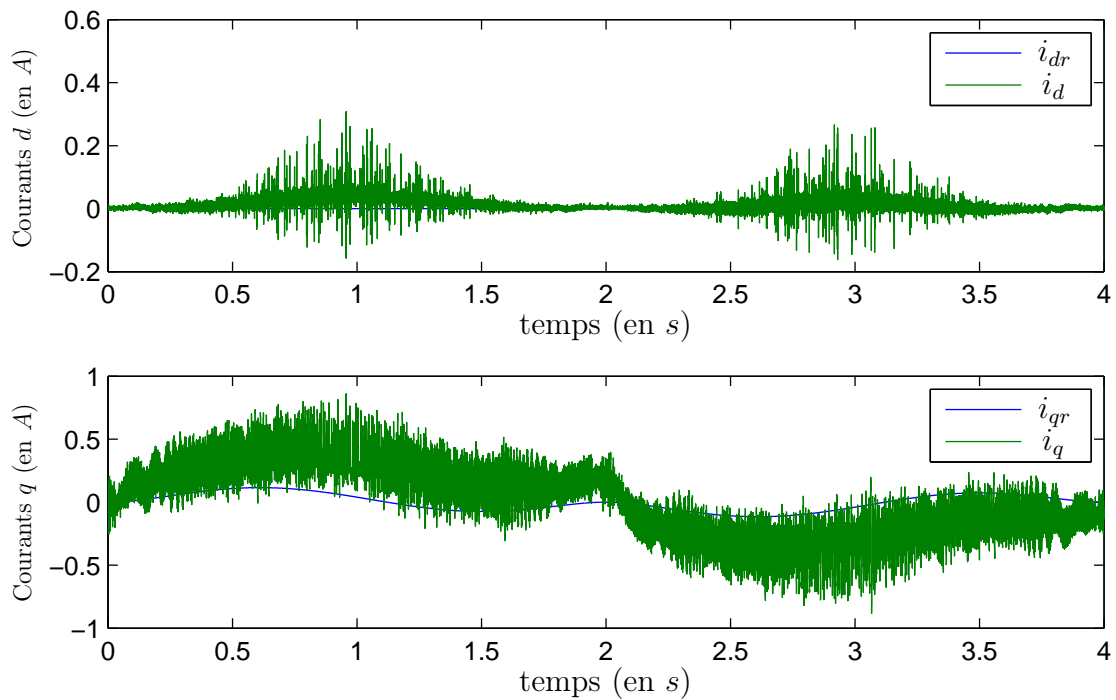


FIGURE 3.13 – Courants de références et courants mesurés.

variable de glissement sur la position. La commande présentée dans ce chapitre sera dans le chapitre suivant utilisée sans capteur mécanique. Ces résultats pourront servir de comparaison.

## 3.4 Identification en ligne

Dans ce chapitre, nous avons précédemment présenté l'identification des paramètres hors ligne, ainsi qu'une commande permettant le suivi de trajectoire du moteur. Pour diverses raisons, les paramètres du moteur peuvent varier au cours du temps (échauffement, ...). L'identification des paramètres hors ligne permet de connaître les paramètres nominaux. Afin d'identifier les paramètres en ligne, nous proposons d'appliquer et de comparer les deux méthodes présentées dans le premier chapitre, l'identification par la méthode algébrique et l'identification en utilisant les modes glissants.

### 3.4.1 Paramètres électriques

On rappelle que les équations électriques dans le repère  $d - q$  sont données par les équations :

$$\begin{cases} L \frac{di_d}{dt} = v_d - Ri_d + n_p L \omega i_q, \\ L \frac{di_q}{dt} = v_q - Ri_q - n_p L \omega i_d - K\omega. \end{cases} \quad (3.42)$$

L'objectif est d'identifier les trois paramètres  $R$ ,  $L$  et  $K$ . Cependant nous disposons seulement de deux équations.

On note :

$$\omega_d = n_p \omega i_d, \quad \omega_q = n_p \omega i_q,$$

et :

$$\Gamma_1 = \frac{1}{L}, \quad \Gamma_2 = \frac{R}{L}, \quad \Gamma_3 = \frac{K}{L}.$$

L'équation (3.42) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{di_d}{dt} = \Gamma_1 v_d - \Gamma_2 i_d + \omega_q, \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} \frac{di_q}{dt} = \Gamma_1 v_q - \Gamma_2 i_q - \omega_d - \Gamma_3 \omega. \end{cases} \quad (3.44)$$

#### 3.4.1.1 Méthode algébrique

Dans ce paragraphe, nous présentons une approche permettant d'identifier les paramètres du moteur en ligne à l'aide de l'identification algébrique présentée dans le paragraphe 1.4.2.1.

Plusieurs manipulations permettent d'identifier les trois paramètres. On propose ici d'identifier les paramètres en générant deux équations à partir de (3.43) et une dernière

à partir de (3.44) permettant ainsi d'obtenir trois équations pour trois inconnues.

Afin d'appliquer le Théorème 1.1, on considère l'équation (3.43) telle que  $\frac{di_d}{dt}$  soit une entrée d'ordre 1 et  $\omega_q$  d'ordre 0.  $v_d$  et  $i_d$  sont les sorties d'ordre 0. Il n'y a pas de perturbations ici, soit  $\kappa = 0$ . Finalement  $P = 2$  est le nombre d'inconnues. L'estimateur s'exprime sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -F_{0,1}[v_d(t)] & F_{0,1}[i_d(t)] \\ -F_{0,2}[v_d(t)] & F_{0,2}[i_d(t)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{1,1}[i_d(t)] + F_{0,1}[\omega_q(t)] \\ -F_{1,2}[i_d(t)] + F_{0,2}[\omega_q(t)] \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

À partir de l'équation (3.44) on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} -F_{0,1}[v_q(t)] & F_{0,1}[i_q(t)] & F_{0,1}[\omega(t)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{1,1}[i_q(t)] - F_{0,1}[\omega_d(t)] \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

On définit le vecteur  $\hat{\Gamma} = [\hat{\Gamma}_1 \quad \hat{\Gamma}_2 \quad \hat{\Gamma}_3]^T$ . Les équations (3.45) et (3.46) sont réécrites ensemble sous la forme :

$$\Delta P \hat{\Gamma} = \Delta Q, \quad (3.47)$$

les matrices  $\Delta P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et  $\Delta Q \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  étant données par :

$$\Delta P = \begin{bmatrix} -F_{0,1}[v_d(t)] & F_{0,1}[i_d(t)] & 0 \\ -F_{0,2}[v_d(t)] & F_{0,2}[i_d(t)] & 0 \\ -F_{0,1}[v_q(t)] & F_{0,1}[i_q(t)] & F_{0,3}[\omega(t)] \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

$$\Delta Q = \begin{bmatrix} -F_{1,1}[i_d(t)] + F_{0,1}[\omega_q(t)] \\ -F_{1,2}[i_d(t)] + F_{0,2}[\omega_q(t)] \\ -F_{1,1}[i_q(t)] + F_{1,1}[\omega_d(t)] \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Si  $\Delta P$  est inversible, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_1 \\ \hat{\Gamma}_2 \\ \hat{\Gamma}_3 \end{bmatrix} = \Delta P^{-1} \Delta Q. \quad (3.50)$$

Finalement, les paramètres estimés  $\hat{L}$ ,  $\hat{R}$  et  $\hat{K}$  sont obtenus par les relations :

$$\hat{L} = \frac{1}{\hat{\Gamma}_1}, \quad \hat{R} = \frac{\hat{\Gamma}_2}{\hat{\Gamma}_1} \text{ et } \hat{K} = \frac{\hat{\Gamma}_3}{\hat{\Gamma}_1}.$$

### 3.4.1.2 Modes glissants

L'objectif est également ici d'identifier les trois paramètres  $R$ ,  $L$  et  $K$ . Cependant, on dispose seulement de deux équations pour identifier trois paramètres et contrairement à l'identification précédente, il est plus compliqué de générer une troisième équation. Une solution serait de dériver une des deux équations pour en générer une troisième. Cependant, on connaît les problèmes liés à la dérivation (amplification du bruit de mesure...). Dans ce paragraphe, on va considérer qu'un des paramètres est connu. On a donc deux paramètres à identifier. Des travaux sont en cours pour tenter d'identifier les trois paramètres simultanément en utilisant les modes glissants.

À partir des équations (3.43) et (3.44), on construit deux observateurs par modes glissants :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{i}_d}{dt} = \omega_q - \chi_{i_d}(i_d - \hat{i}_d), \\ \frac{d\hat{i}_q}{dt} = -\omega_d - \chi_{i_q}(i_q - \hat{i}_q), \end{cases} \quad (3.51)$$

où  $\chi_{i_d}$ ,  $\chi_{i_q}$  sont les termes d'injection de sortie définis par l'algorithme du Super Twisting :

$$\begin{cases} \chi_{i_d}(i_d - \hat{i}_d) \triangleq u_{st}(i_d - \hat{i}_d), \\ \chi_{i_q}(i_q - \hat{i}_q) \triangleq u_{st}(i_q - \hat{i}_q). \end{cases} \quad (3.52)$$

Les erreurs d'observations sont définies par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{i_d} = i_d - \hat{i}_d, \\ \varepsilon_{i_q} = i_q - \hat{i}_q. \end{cases} \quad (3.53)$$

On obtient la dynamique des erreurs, en fonction des paramètres à estimer, des variables mesurées et des injections de sortie :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{i_d} = \Gamma_1 v_d - \Gamma_2 i_d + \chi_{i_d}(\varepsilon_{i_d}), \\ \dot{\varepsilon}_{i_q} = \Gamma_1 v_q - \Gamma_2 i_q - \Gamma_3 \omega + \chi_{i_q}(\varepsilon_{i_q}). \end{cases} \quad (3.54)$$

Le réglage des gains des algorithmes du Super Twisting permet de garantir la convergence en temps fini des erreurs vers 0. En régime glissant, on obtient alors  $\varepsilon_i = \dot{\varepsilon}_i = 0$

avec  $i = \{i_d, i_q\}$  soit :

$$\begin{cases} \chi_{i_d} &= -\Gamma_1 v_d + \Gamma_2 i_d, \\ \chi_{i_q} &= -\Gamma_1 v_q + \Gamma_2 i_q + \Gamma_3 \omega. \end{cases} \quad (3.55)$$

On suppose alors que le paramètre  $\Gamma_1$  est connu, et on identifie les paramètres  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ . On peut réécrire (3.55) sous la forme :

$$N = DP, \quad (3.56)$$

avec :

$$N = \begin{bmatrix} \chi_{i_d} + \Gamma_1 v_d \\ \chi_{i_q} + \Gamma_1 v_q \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} i_d & 0 \\ i_q & \omega \end{bmatrix},$$

et :

$$P = \begin{bmatrix} \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}^T.$$

Lorsque la matrice  $D$  est inversible soit  $i_d \omega \neq 0$ , l'estimation des paramètres  $\hat{P}$  est obtenue par :

$$\hat{P} = D^{-1}N, \quad (3.57)$$

et :

$$L = \frac{1}{\Gamma_1}, \quad \hat{R} = L\hat{\Gamma}_2, \quad \text{et} \quad \hat{K} = L\hat{\Gamma}_3.$$

### 3.4.1.3 Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux obtenus dans ce paragraphe sont obtenus en ligne. La commande considérée pour ces identifications est la commande par modes glissants proposée dans le section précédente. Ici, la trajectoire désirée est modifiée. On a vu (3.57) que la matrice est inversible si la vitesse est non nulle. On a ainsi choisi une trajectoire avec une vitesse strictement positive. De plus, la trajectoire du courant direct  $i_d$  est choisie non nulle comme présenté dans l'article [Verl 1998]. Pour chaque méthode, les identifications sont présentées avec les paramètres initiaux dans une première expérience et en faisant varier les paramètres  $R$  et  $K$  ensuite. Sur le moteur, on simule la variation des paramètres en modifiant les entrées de commandes appliquées au moteur. Les tensions d'entrées  $v_a$  et  $v_b$  sont définies par :

$$\begin{cases} v_a &= v_{a,com} - \Delta R i_a + \Delta K \omega \sin(n_p \theta), \\ v_b &= v_{b,com} - \Delta R i_b - \Delta K \omega \cos(n_p \theta), \end{cases} \quad (3.58)$$



où  $v_{a,com}$  et  $v_{b,com}$  représentent les entrées calculées par la commande,  $\Delta R$  et  $\Delta K$  représentent les variations de paramètres désirées.

#### Identification en ligne par méthode algébrique :

La Figure 3.14 représente l'identification des paramètres  $R$ ,  $L$  et  $K$  sans variations de paramètres en utilisant la méthode algébrique. Dans chacun des cas, nous avons tracé en bleu le résultat obtenu par l'identification hors ligne et en vert l'identification utilisant l'estimateur algébrique. La figure présente de très bons résultats, les paramètres estimés "en ligne" étant proches de ceux identifiés hors ligne avec les moindres carrés. Pour les identifications par la méthode algébrique, la fenêtre de glissement a été choisie égale à 1s. En comparaison avec l'identification réalisée sur le palier magnétique, la fenêtre est choisie plus longue. En effet, les dynamiques du moteur étant plus lentes, la fenêtre doit être choisie plus longue pour refléter correctement les dynamiques. Avec une période d'échantillonnage de  $1.10^{-4}s$ , une fenêtre de 1s représenterait 10000 points. Le calcul des intégrations avec un tel nombre de points n'est pas réalisable en ligne. Les données pour l'identification sont ainsi relevées toutes les millisecondes, soit une fenêtre de 1000 points. De plus les calculs sont répartis sur chaque échantillon.

Les expressions de l'estimateur sont obtenues en considérant les paramètres constants sur la fenêtre de glissement. Afin de montrer que la variation des paramètres est estimée, la Figure 3.15 montre les résultats expérimentaux en appliquant des variations constantes  $\Delta R = 1.5\Omega$  et  $\Delta K = 0.15Nm.A^{-1}$ . Sur cette figure, les paramètres nominaux et leurs variations sont tracés en bleu, les paramètres identifiés étant tracés en vert. La figure montre qu'effectivement l'erreur sur les paramètres est correctement identifiée.

#### Identification en ligne par modes glissants :

L'identification par modes glissants est présentée ici pour l'identification des paramètres  $R$  et  $K$ , en considérant que le paramètre  $L$  est connu. L'identification des paramètres  $R$  et  $L$  ou  $L$  et  $K$  donne les mêmes résultats. La Figure 3.16 représente l'estimation des paramètres nominaux. Les identifications dans ce cas ont été filtrées par un filtre passe-bas de manière à supprimer les variations hautes fréquences causées par les modes glissants. Le résultat des identifications est également très bon.

Dans le cas des modes glissants, il n'y a pas de conditions sur la nature des paramètres à identifier, c'est-à-dire qu'il est possible d'estimer en ligne les paramètres variant dans le temps. Les performances de l'estimateur sont présentées en faisant varier les paramètres. La Figure 3.17 représente l'estimation des paramètres lorsqu'ils varient linéairement au cours du temps. Cette montre que ici, les estimations suivent correctement la variation des paramètres.

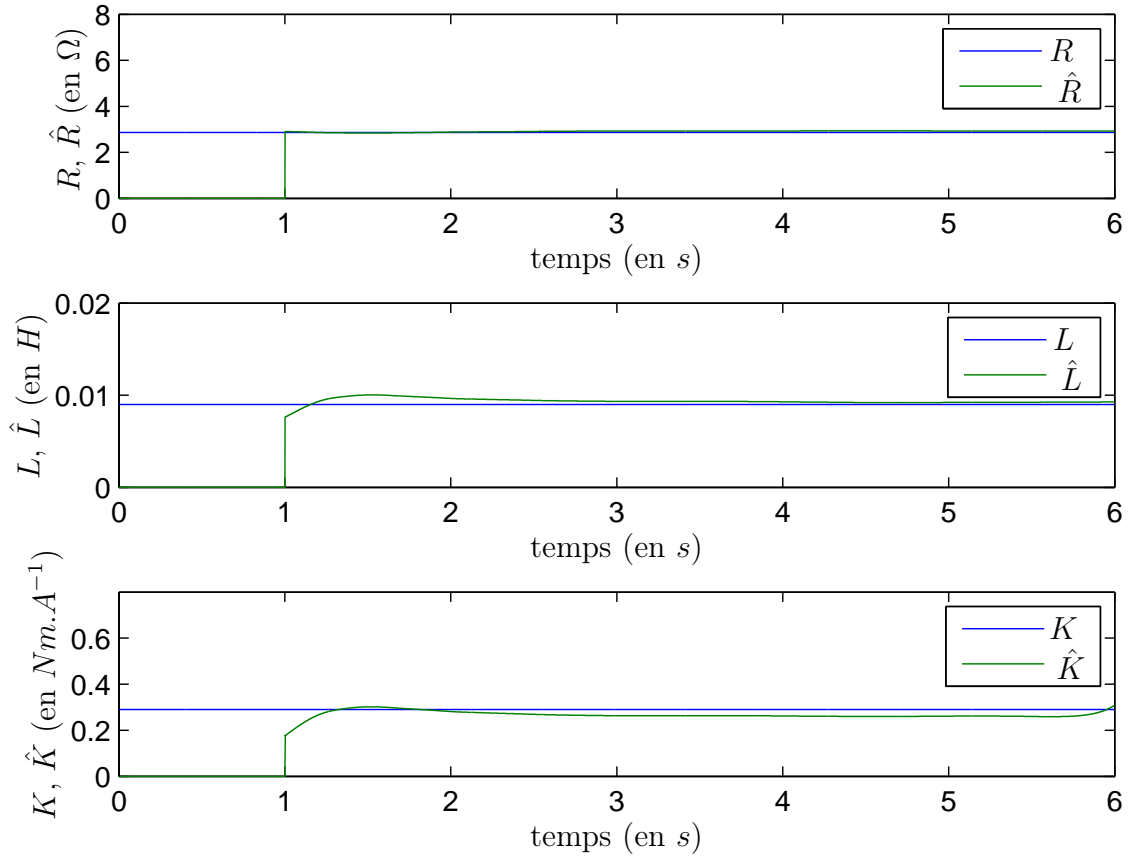


FIGURE 3.14 – Estimation en ligne par méthode algébrique des paramètres  $R$ ,  $L$  et  $K$  sans variation.

### 3.4.2 Paramètres mécaniques

Afin d'identifier les paramètres mécaniques, on rappelle l'équation mécanique du moteur dans le repère  $d - q$  :

$$J \frac{d\omega}{dt} = K i_q - f_v \omega - C_r \operatorname{sgn}(\omega). \quad (3.59)$$

Lorsque une charge est ajoutée au moteur, les frottements sont très faibles par rapport au couple résistant. De plus, on a vu lors de l'identification hors ligne, que des effets non modélisés apparaissaient lors de l'identification des paramètres  $f_v$  et  $C_r$ . On propose ici de considérer le couple  $\tau_e$  introduit dans l'équation (2.25) comme des perturbations. Les paramètres que l'on désire identifier sont donc l'inertie  $J$  et le couple  $\tau_e$ .

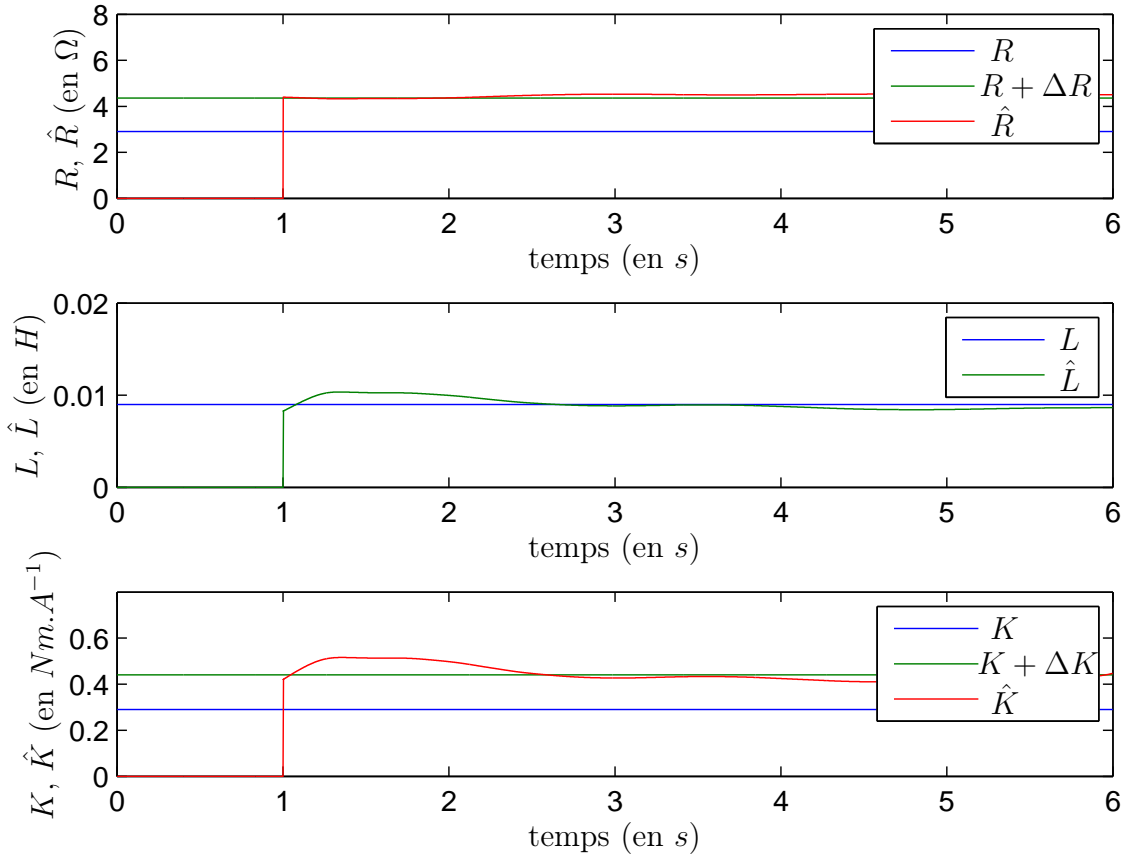


FIGURE 3.15 – Estimation en ligne par méthode algébrique des paramètres  $R$ ,  $L$  et  $K$  avec variations.

On obtient l'équation :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \hat{K} i_q + \tau_e, \quad (3.60)$$

où  $\hat{K}$  est l'estimation de  $K$  obtenue à l'aide de l'équation électrique.

### 3.4.2.1 Méthode algébrique

N'ayant pas d'informations sur le couple  $\tau_e$ , l'identification dans ce cas permet seulement d'identifier l'inertie. Le couple sera annihilé en étant considéré comme constant sur la fenêtre glissante. La méthode est donc valide si celui-ci ne varie pas trop rapidement au cours du temps. L'équation (3.60) est telle que  $\frac{d\omega}{dt}$  est une sortie d'ordre 1,  $\hat{K} i_q$  est une entrée d'ordre 0 et  $\tau_e$  est une perturbation considérée constante, soit  $\kappa = 1$  et  $P = 1$ .

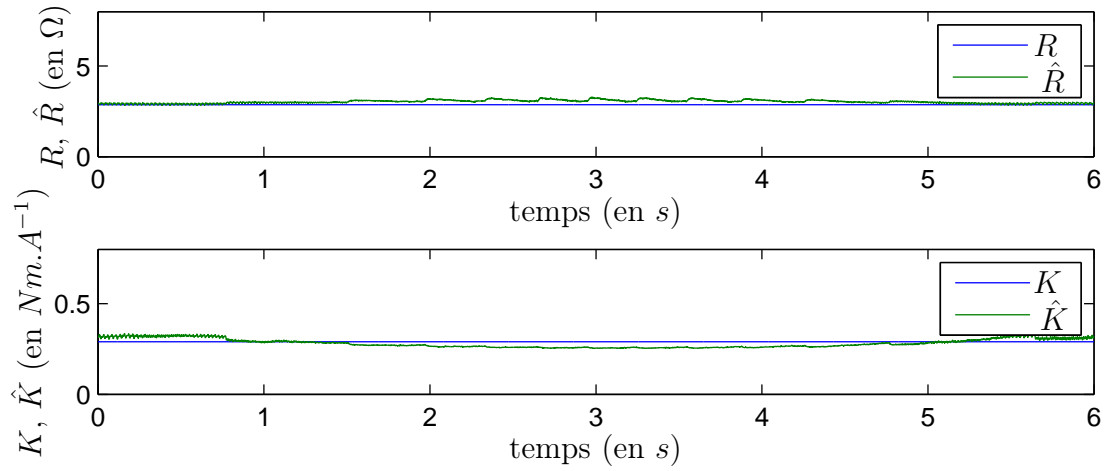


FIGURE 3.16 – Estimation en ligne par modes glissants des paramètres  $R$  et  $K$  sans variation.

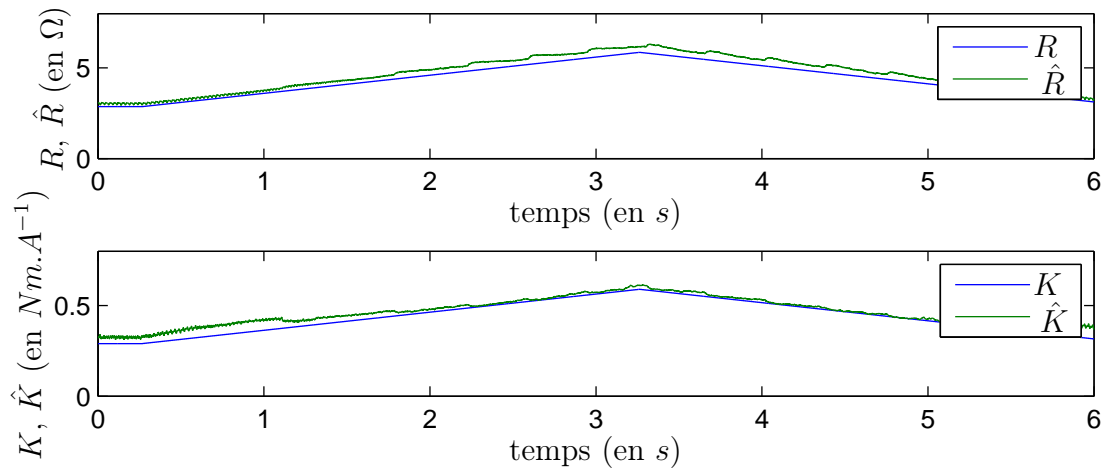


FIGURE 3.17 – Estimation en ligne par modes glissants des paramètres  $R$  et  $K$  avec variations.

L'estimateur s'exprime donc sous la forme :

$$F_{1,1}[\omega(t)]J = F_{0,1}[\hat{K}i_q(t)]. \quad (3.61)$$

Si  $F_{1,1}[\omega(t)]$  est inversible, on obtient l'estimation de l'inertie  $\hat{J}$  :

$$\hat{J} = \frac{F_{0,1}[\hat{K}i_q(t)]}{F_{1,1}[\omega(t)]}. \quad (3.62)$$

Expérimentalement, l'expression est filtrée en utilisant la forme présentée équation (1.54).

### 3.4.2.2 Modes glissants

N'ayant qu'une équation, il n'est pas possible d'utiliser les modes glissants sur celle-ci uniquement afin d'identifier l'inertie et le couple simultanément. Nous utilisons dans ce cas les modes glissants pour estimer seulement le couple  $\tau_e$ . L'observateur est construit à partir de l'équation (3.60) :

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = \frac{\hat{K}}{J}i_q - \chi_\omega(\omega - \hat{\omega}), \quad (3.63)$$

où  $\chi$  est le terme à estimer en utilisant un algorithme du Super Twisting :

$$\chi_\omega(\omega - \hat{\omega}) \triangleq u_{st}(\omega - \hat{\omega}). \quad (3.64)$$

L'erreur d'observation est définie par :

$$\varepsilon = \omega - \hat{\omega}. \quad (3.65)$$

La dynamique de l'erreur est :

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{1}{J}\tau_e + \chi_\omega(\varepsilon_\omega). \quad (3.66)$$

Le couple résistant est considéré borné et dérivable. Sa dérivée est également considérée bornée (c'est-à-dire  $\left| \frac{dC_r}{dt} \right|_{max} < \Pi_{C_r}$ ). En choisissant les gains du Super Twisting correctement, on obtient la convergence en temps fini sur l'ensemble de glissement  $\{\varepsilon = \dot{\varepsilon} = 0\}$ , conduisant à :

$$\hat{\tau}_e = J\chi_\omega. \quad (3.67)$$

### 3.4.2.3 Résultats expérimentaux

Dans ce paragraphe, les estimations sont réalisées de la même façon que les identifications des paramètres électriques. Ici, nous avons utilisé le frein à poudre pour ajouter un couple résistant. N'ayant pas de capteurs pour mesurer le couple appliqué au moteur sur le banc, on ne peut cependant pas connaître le couple réel appliqué. Pour ces identifications, l'objectif est de montrer l'estimation de l'inertie et du couple résistant. Sachant que le couple résistant change de signe en fonction de la vitesse, la trajectoire est identique, ici, à la trajectoire définie dans la commande, c'est-à-dire avec une vitesse positive les deux

premières secondes et négative ensuite.

La Figure 3.18 représente l'identification de l'inertie par la méthode algébrique. La dynamique est ici deux fois plus rapide que la dynamique du système lors de l'identification des paramètres électriques. On choisit ainsi une fenêtre de glissement deux fois plus courte. On voit que l'estimation est très bonne. On observe une variation entre 2 et 2.5 secondes soit la longueur de la fenêtre. Cette variation valide l'hypothèse de perturbations constantes. À l'instant  $t = 2$  secondes, le moteur change de sens, le couple également. Les perturbations ne sont alors plus constantes le temps que toute la fenêtre passe cet instant. Après  $t = 2,5$  secondes, l'estimation est de nouveau très bonne.

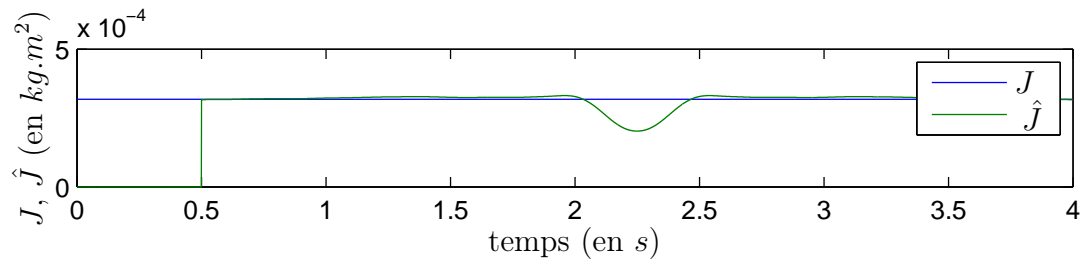


FIGURE 3.18 – Estimation en ligne de l'inertie par la méthode algébrique.

Finalement, le couple estimé par modes glissants est représenté sur la Figure 3.19. Nous n'avons pas d'élément de comparaison. Cependant on peut constater que le changement de signe est bien présent au moment où le moteur change de sens. Ce couple estimé pourrait être utilisé dans la commande afin d'être compensé.

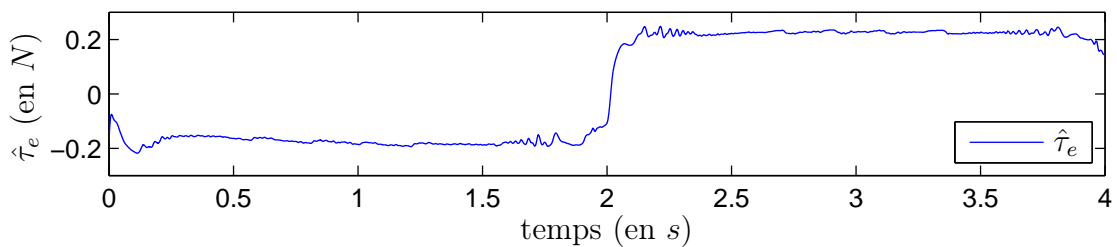


FIGURE 3.19 – Estimation en ligne du couple par modes glissants.

Dans cette section, nous avons étudié l'identification en ligne des paramètres du MSAP en présence de capteurs mécaniques. Nous avons comparé deux méthodes, algébrique et par modes glissants. Ces expériences montrent que les deux méthodes peuvent être utiles en fonction des situations, voire complémentaires. Ceci est parfaitement illustré ici par l'identification des paramètres mécaniques. L'inertie est identifiable indépendamment du

couple par la méthode algébrique. En utilisant cette estimation, le couple peut à son tour être identifié par les modes glissants. On pourrait également exploiter ceci pour identifier les paramètres électriques.

## 3.5 Conclusion

Les résultats obtenus dans ce chapitre considèrent que la mesure des capteurs de mécanique (position et vitesse) est accessible.

Afin de réaliser la commande du moteur, les paramètres ont été identifiés préalablement hors-ligne. En utilisant l'algorithme des moindres carrés, tous les paramètres du moteur sont identifiables à partir du modèle dans le repère  $d - q$ . Le repère  $d - q$  est avantageux pour l'identification car les courants et les tensions sont constants à vitesse constante. La plupart des paramètres sont identifiables en régime permanent, à l'exception de l'inertie qui a été identifiée en régime transitoire.

À partir de ces paramètres nominaux, nous avons considéré une commande par modes glissants d'ordre 2. Cette commande nécessite la connaissance de l'accélération qui n'est pas mesurée. Celle-ci a alors été estimée par un observateur par modes glissants également. Les résultats expérimentaux montrent un suivi de position très précis. De plus, la commande utilisée montre que les algorithmes utilisés limitent le phénomène de réticence, souvent considéré comme un inconvénient dans l'utilisation des modes glissants. De plus, les fonctions signes habituellement utilisées dans ce genre d'algorithme ont été remplacées par des fonctions sigmoïdes plus lisses et qui réduisent aussi cet effet.

Les paramètres étant susceptibles de varier au cours du temps, la dernière partie de ce chapitre a été consacrée à l'identification des paramètres en ligne. Ici, nous avons comparé deux approches différentes permettant ces identifications. Chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients. La méthode algébrique est capable d'identifier plus de paramètres qu'il n'y a d'équations, en considérant que les paramètres sont constants sur la fenêtre de glissement. Les modes glissants (dans l'état actuel des choses) ne permettent d'identifier qu'un nombre de paramètres égal au nombre d'équations, mais ils s'avèrent très efficaces lorsque les paramètres varient. De plus les modes glissants sont plus adaptés en présence de perturbations inconnues. La seule hypothèse est que la dérivée de la perturbation soit bornée, ce qui est souvent le cas en pratique. À l'inverse, la méthode algébrique est utile lorsque les perturbations peuvent être annihilées. Les modes glissants sont plus simples à mettre en place, robustes par rapport à une plus large classe de perturbations et moins long à exécuter en temps réel, en opposition avec les fenêtres glissantes de la méthode

algébrique, qui utilise des boucles en programmation qui sont plus longues à calculer en ligne.





# Chapitre 4

## Identification et commande sans capteur mécanique

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>113</b>
<b>4.2</b>	<b>Identification hors ligne</b>	<b>114</b>
4.2.1	Identification des paramètres en utilisant les mesures en régime permanent	115
4.2.2	Identification de l'inertie en régime transitoire	121
<b>4.3</b>	<b>Commande sans capteur mécanique</b>	<b>124</b>
4.3.1	Observateur par modes glissants sans capteur mécanique	124
4.3.2	Commande basée sur l'observateur	130
4.3.3	Stratégie en boucle ouverte	135
4.3.4	Résultats Expérimentaux	135
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>141</b>

---

### 4.1 Introduction

Le problème de la commande sans capteur a largement été abordée dans la littérature. Celui de l'identification, quant à lui, a reçu peu d'attention, alors que les lois de commande reposent sur la connaissance du modèle et des paramètres du moteur. Dans un premier temps, nous nous intéresserons ici à l'identification des paramètres du moteur sans capteur. Une nouvelle méthode d'identification des paramètres du moteur sans capteur de position ni de vitesse sera présentée dans ce chapitre. En comparaison avec les approches existantes,

on montrera que cette nouvelle méthode a l'avantage : (i) d'identifier tous les paramètres électriques ainsi que les paramètres mécaniques, (ii) de proposer des algorithmes dont la convergence est garantie, les résultats analytiques étant validés expérimentalement. Finalement, cette procédure d'identification sera réalisée dans le repère  $f - g$  présenté précédemment.

L'approche sans capteur présentée dans ce chapitre sera basée sur des observateurs par modes glissants utilisant les équations électriques du moteur dans le repère  $f - g$ . À partir des tensions d'entrées et des courants mesurés, la contre-fem sera estimée. Cet observateur a l'avantage d'être robuste aux variations de paramètres et, en comparaison avec les observateurs par modes glissants d'ordre 1, de réduire le phénomène de réticence. À partir de l'estimation de la contre-fem, la position et la vitesse seront alors reconstruites. Ces estimations seront appliquées à la commande présentée dans le chapitre précédent exprimée dans le repère  $f - g$ .

## 4.2 Identification hors ligne

Dans le chapitre précédent, il a été montré que le modèle  $d - q$  est avantageux pour l'identification en comparaison avec le modèle  $a - b$ . Il permet de calculer la moyenne des données à vitesses constantes. Cependant, son inconvénient est qu'il ne peut pas être utilisé sans capteur de position. Pour réaliser un algorithme d'identification sans capteur mécanique, le repère  $f - g$  est plus adapté.

Les expériences d'identification peuvent être réalisées dans le repère  $f - g$  de la même manière que dans le repère  $d - q$ , avec des tensions  $v_f$  et  $v_g$  constantes. Néanmoins, par opposition au repère  $d - q$ , le moteur ne peut pas fonctionner à toutes les vitesses de cette manière. Il y a des plages de vitesses où le moteur perd son synchronisme à cause de la résonance. L'amplitude de l'accélération est aussi limitée.

Afin de maximiser les informations contenues dans les données, les expérimentations sont réalisées en utilisant une commande proportionnelle dans le repère tournant de référence :

$$v_f = \max(k(I_{max} - I), V_{max}), v_g = 0, \quad (4.1)$$

où  $I = i_a^2 + i_b^2$  est le courant de crête en régime permanent,  $I_{max}$  est le courant limite,  $V_{max}$  est la tension limite, et  $k$  est un gain ajustable. Cette loi de commande est utilisée pour maximiser les courants et les tensions tout en respectant les limites. Comme cette méthode ne tient pas compte des capteurs de position et de vitesse ou d'une estimation de

ces variables, nous désignerons cet algorithme de commande par la *commande en boucle ouverte*.

Lorsque le moteur est commandé en boucle ouverte, on peut supposer que  $\omega_r \simeq \omega$  tant que le moteur conserve son synchronisme. Cette condition peut être facilement vérifiée sans capteur parce que la perte de synchronisme se manifeste par un blocage de l'arbre du moteur et/ou de considérables vibrations. De plus, même si  $\omega$  oscille autour de  $\omega_r$  à cause des perturbations de couple, le calcul de la moyenne des données sur une période de temps supprime l'effet de ces oscillations, de telle sorte qu'on peut supposer que  $\omega_r = \omega$ . Par la suite, dans cette section,  $\omega$  sera remplacée par  $\omega_r$  dans les équations.

Pour réaliser cette identification, la commande en boucle ouverte est appliquée avec différentes valeurs de  $\omega_r$ , qui augmentent lentement de  $\omega_r = 0$  à la vitesse maximum accessible. Pour chaque valeur de  $\omega_r$ , pour laquelle le régime permanent peut être obtenu, les variables sont enregistrées sur un court intervalle de temps, la moyenne sur cet intervalle représente un point de données pour l'identification.

On trace Figure 4.1 les vitesses (moyennes) atteintes et la vitesse de référence pour l'identification. Elle montre que les vitesses moyennes suivent en effet parfaitement les vitesses de référence, lorsque la loi de commande en boucle ouverte (4.1) est utilisée. Comme le montre cette figure, il y a un segment de vitesse entre 14 et 28 rad/s représenté en pointillés sans points de données. Entre ces valeurs, le moteur perd son synchronisme et se bloque, à cause de la résonance. En revanche, des vitesses bien au-delà de la région de résonance peuvent être atteintes tant que la vitesse de référence est lentement augmentée sans s'attarder dans cette région.

La commande en boucle ouverte est utile pour l'identification, mais en-deçà de ce qui serait souhaitable pour une commande sans capteur. En particulier, il serait souhaitable qu'une loi de commande sans capteur basée sur l'estimation des paramètres puisse fonctionner dans la région de résonance et puisse atteindre de plus grands profils d'accélération.

### 4.2.1 Identification des paramètres en utilisant les mesures en régime permanent

Comme pour l'identification dans le repère  $d-q$ , quasiment tous les paramètres peuvent être identifiés en régime permanent dans le repère  $f-g$ , laissant l'identification de l'inertie pour une procédure particulière. En régime permanent, les variables dans le repère  $f-g$

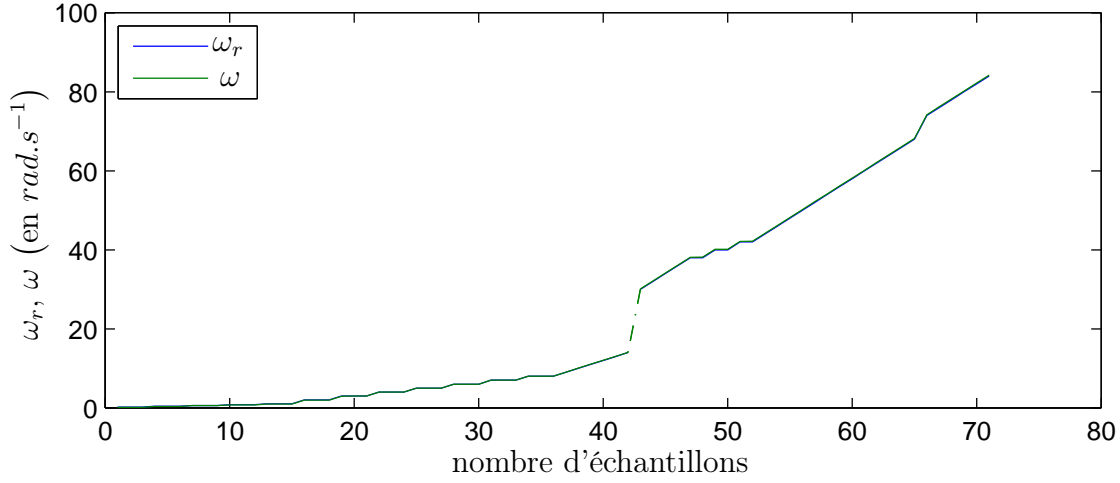


FIGURE 4.1 – Suivi de vitesse en boucle ouverte.

sont liées par :

$$K\omega_r \sin(n_p(\theta_r - \theta)) = v_f - Ri_f + Ln_p\omega_r i_g, \quad (4.2)$$

$$K\omega_r \cos(n_p(\theta_r - \theta)) = v_g - Ri_g - Ln_p\omega_r i_f, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} 0 &= K(i_f \sin(n_p(\theta_r - \theta)) + i_g \cos(n_p(\theta_r - \theta))) \\ &\quad - f_v\omega_r - C_r \text{sgn}(\omega_r). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Etant donné que la position de l'arbre est inconnue, les paramétrisations linéaires apparentes dans le repère  $d - q$  ne peuvent pas être utilisées dans le repère  $f - g$ . Une solution différente doit être utilisée.

Considérant  $(4.2)^2 + (4.3)^2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} K^2\omega_r^2 &= v_f^2 + v_g^2 + R^2(i_f^2 + i_g^2) - R(2v_f i_f + 2v_g i_g) \\ &\quad + L^2(n_p^2\omega_r^2(i_f^2 + i_g^2)) + L(2n_p\omega_r(v_f i_g - v_g i_f)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

En substituant (4.2) et (4.3) dans (4.4), on obtient :

$$v_f i_f + v_g i_g = R(i_f^2 + i_g^2) + f_v\omega_r^2 + C_r|\omega_r|. \quad (4.6)$$

Les équations (4.5) et (4.6) sont indépendantes de la position et fournissent des paramétrisations linéaires. Cependant, les paramètres  $R$  et  $L$  apparaissent ainsi que  $R^2$  et  $L^2$ . On note que la résistance peut être identifiée à partir de (4.5) ou (4.6), permettant deux

méthodes différentes.

#### 4.2.1.1 Première méthode

Ici, on propose d'identifier  $R$ ,  $L$ , et  $K$  à partir de l'équation (4.5) et  $f_v$  et  $C_r$  à partir de l'équation (4.6). L'équation (4.5) peut s'écrire sous la forme standard (1.22) :

$$y_6[n] = W_6^T[n]P_{nom,6}, \quad (4.7)$$

avec :

$$y_6[n] = v_f^2[n] + v_g^2[n], \quad (4.8)$$

$$W_6[n] = \begin{bmatrix} 2(v_f[n]i_f[n] + v_g[n]i_g[n]) \\ -(i_f^2[n] + i_g^2[n]) \\ -2n_p\omega_r[n](v_f[n]i_g[n] + v_g[n]i_f[n]) \\ -n_p^2\omega_r^2[n](i_f^2[n] + i_g^2[n]) \\ \omega_r^2[n] \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$P_{nom,6} = \begin{bmatrix} R \\ R^2 \\ L \\ L^2 \\ K^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

La représentation est linéaire par rapport aux paramètres, mais elle est sur-paramétrée avec :

$$p_2 = p_1^2 \text{ et } p_4 = p_3^2. \quad (4.11)$$

Afin de s'affranchir de la sur-paramétrisation, on utilise dans ce cas la théorie de l'élimination présentée dans le paragraphe 1.4.1.2. Plus de détails sur la résolution d'une telle identification sont présentés en Annexe B.

L'équation (4.6) est linéaire par rapport aux paramètres. En utilisant  $\hat{R}$ , l'estimation de  $R$  obtenue précédemment. On a :

$$y_7[n] = v_f[n]i_f[n] + v_g[n]i_g[n] - \hat{R}(i_f^2[n] + i_g^2[n]), \quad (4.12)$$

$$W_7[n]^T = \begin{bmatrix} \omega_r^2[n] & |\omega_r[n]| \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$P_{nom,7} = \begin{bmatrix} f_v \\ C_r \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Ici l'algorithme des moindres carrés standard est applicable.

Les estimations des paramètres sont reportées dans la Table 4.1. On observe que les valeurs des paramètres estimés sont proches de celles obtenus dans le repère  $d - q$ . La Figure 4.2 illustre le comportement du vecteur de sortie  $y_6[n]$  en fonction de  $\omega_r$ , ainsi que  $W_6^T[n]P_6$  en fonction de  $\omega_r$ . L'estimation est proche de la sortie mesurée.

Paramètres	1 <sup>ière</sup> Méthode	2 <sup>ième</sup> Méthode
$R(\Omega)$	3.0	2.86
$L(mH)$	10.4	10.4
$K(Nm.A^{-1})$	0.27	0.27
$f_v(Nms/rad)$	$5.35.10^{-4}$	$2.69.10^{-4}$
$C_r$	0.0558	0.0742
$J(kg.m^2)$	$3.13.10^{-4}$	$3.13.10^{-4}$

TABLE 4.1 – Résultat de l'identification des paramètres dans le repère  $f - g$ .

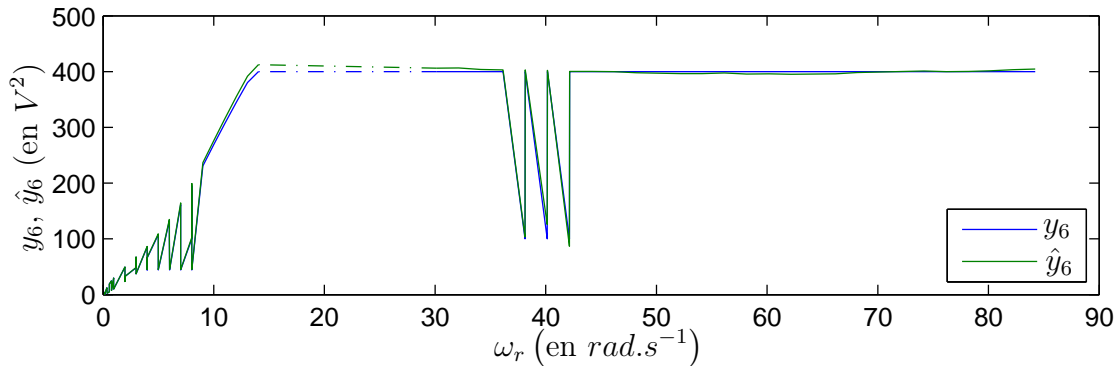


FIGURE 4.2 – Représentation de l'identification des paramètres électriques dans le repère  $f - g$ .

L'identification des paramètres de l'équation mécanique est également reportée dans la Table 4.1. Les paramètres estimés sont eux aussi proches des paramètres identifiés avec capteurs. La Figure 4.3 montre le signal de sortie et son estimation. On note que le signal de sortie représente la puissance électrique convertie. Celle-ci est négative à faible fréquence. Ceci n'est évidemment pas réaliste et indique que la résistance est sur-estimée dans les équations électriques (donnant une sur-estimation des pertes ohmiques). Cette observation motive l'utilisation de la seconde méthode, qui permet d'identifier la résistance à partir de l'équation de puissance.

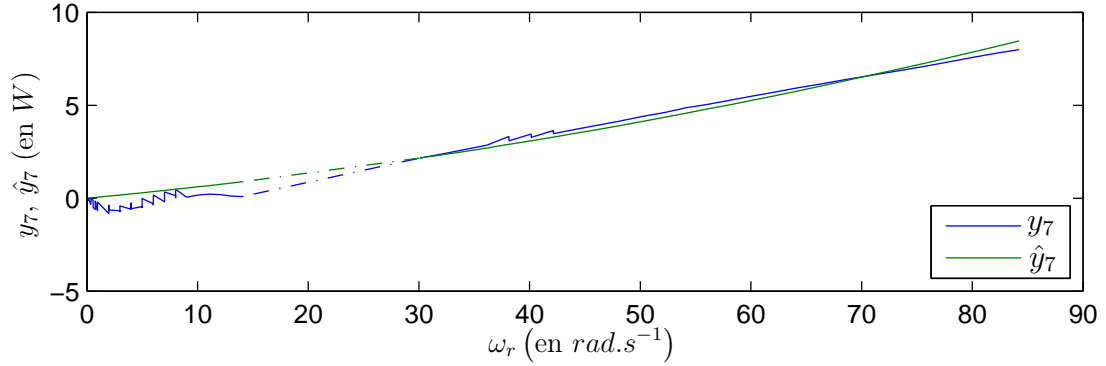


FIGURE 4.3 – Représentation de l’identification des paramètres mécaniques dans le repère  $f - g$ .

#### 4.2.1.2 Deuxième méthode

Dans cette approche, les paramètres  $R$ ,  $f_v$  et  $C_r$  sont identifiés initialement à partir de l’équation (4.6), tandis que  $L$  et  $K$  sont identifiés avec (4.5). L’équation (4.6) est linéaire par rapport aux paramètres avec :

$$y_8[n] = v_f[n]i_f[n] + v_g[n]i_g[n], \quad (4.15)$$

$$W_8[n]^T = \begin{bmatrix} i_f^2[n] + i_g^2[n] & \omega_r^2[n] & |\omega_r[n]| \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$P_{nom,8} = \begin{bmatrix} R \\ f_v \\ C_r \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

de sorte que l’algorithme standard des moindres carrés est applicable.

L’équation (4.5) peut être écrite sous la forme d’une équation linéaire en utilisant  $\hat{R}$ , l’estimation de  $R$  obtenue dans la première étape, de telle sorte que l’ajustement par moindres carrés suivant soit obtenu :

$$\begin{aligned} y_9[n] = & v_f^2[n] + v_g^2[n] \\ & - 2\hat{R}(v_f[n]i_f[n] + v_g[n]i_g[n]) \\ & - \hat{R}^2(i_f^2[n] + i_g^2[n]), \end{aligned} \quad (4.18)$$



$$W_9[n] = \begin{bmatrix} -2n_p\omega_r[n](v_f[n]i_g[n] - v_g[n]i_f[n]) \\ -n_p^2\omega_r^2[n](i_f^2[n] + i_g^2[n]) \\ \omega_r^2[n] \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$P_{nom,9} = \begin{bmatrix} L \\ L^2 \\ K^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Le système est sur-paramétré avec :

$$p_2 = p_1^2. \quad (4.21)$$

Ici aussi, nous utilisons la théorie de l'élimination pour résoudre cette identification. Dans ce cas, il y a moins de contraintes que dans l'estimation précédente. Les résultats de l'identification sont reportés dans la Table 4.1. Les paramètres identifiés sont proches de ceux identifiés dans le repère  $d-q$  en utilisant le capteur de position. La Figure 4.4 montre la variable de sortie  $y_8[n]$ , qui est la puissance absorbée par le moteur. L'ajustement par moindres carrés est excellent. De plus, la puissance est positive contrairement à l'approche précédente.

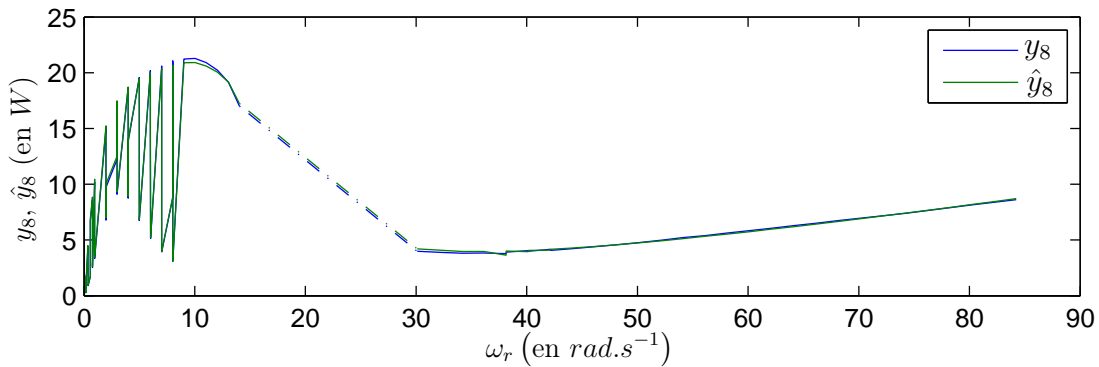


FIGURE 4.4 – Représentation de l'identification de la puissance dans le repère  $f - g$  en utilisant la seconde méthode.

La Figure 4.5 illustre le comportement de la variable de sortie  $y_9[n]$  de (4.18) en fonction de  $\omega_r$ . L'ajustement par moindres carrés est très bon. On peut conclure que la seconde méthode donne de meilleurs résultats que la première. Elle réduit le nombre de contraintes du problème d'identification non linéaire, menant à un algorithme plus simple. La puissance positive montre en effet que l'estimation de la résistance est meilleure.

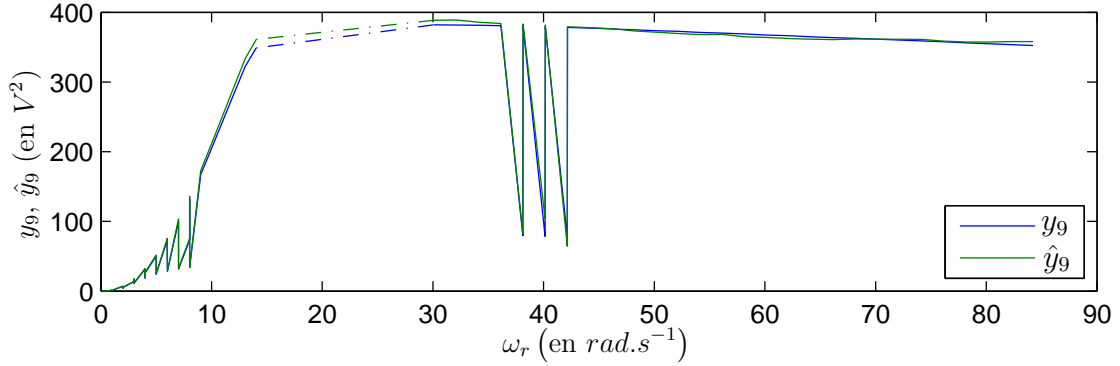


FIGURE 4.5 – Représentation de l'identification des paramètres électriques dans le repère  $f - g$  en utilisant la seconde méthode.

#### 4.2.2 Identification de l'inertie en régime transitoire

Sans capteur, le couple produit par le moteur ne peut pas être directement calculé à partir des courants. Afin de contourner ce problème, la méthode discutée dans cette section est basée sur un calcul de puissance plutôt que par un calcul du couple. Plus exactement, la puissance électrique convertie en puissance mécanique est :

$$P_{em} \triangleq v_a i_a + v_b i_b - R i_a^2 - R i_b^2 - \frac{L}{2} \frac{d}{dt} (i_a^2 + i_b^2). \quad (4.22)$$

Le terme inductif transitoire n'est pas forcément nul comme en régime permanent, mais il est faible dans les expériences à venir, et sera donc négligé.

À partir des équations mécaniques du modèle, on a aussi :

$$P_{em} = P_{kin} + P_f, \quad (4.23)$$

où  $P_{kin}$  est la puissance cinétique, c'est-à-dire la variation de l'énergie cinétique :

$$P_{kin} \triangleq J \omega \frac{d\omega}{dt}, \quad (4.24)$$

tandis que  $P_f$  est la puissance perdue par frottement :

$$P_f = f_v \omega^2 + C_r |\omega|. \quad (4.25)$$

L'inertie peut alors être calculée avec un algorithme des moindres carrés, ou simplement :

$$\hat{j} = \frac{P_{em} - P_f}{\omega(d\omega/dt)}. \quad (4.26)$$

Utiliser (4.26) pour identifier l'inertie est difficile, car en utilisant la commande en boucle ouverte, seuls de faibles niveaux d'accélération peuvent être atteints. Dans ce cas, la puissance électromécanique convertie est principalement égale à la puissance perdue par frottements ( $P_{em} \simeq P_f$ ) et  $d\omega/dt \simeq 0$ . Une solution serait d'utiliser l'estimation des paramètres électriques pour développer une loi de commande sans capteur, obtenir des accélérations plus élevées et utiliser une méthode similaire à celle réalisée dans le repère  $d - q$ . Cependant, on montre qu'en utilisant une expérience soigneusement conçue, il est possible d'identifier l'inertie même avec la commande en boucle ouverte utilisée pour les autres expérimentations.

Avec  $v_f$  et  $v_g$  constants, le moteur fonctionne à une certaine vitesse de référence constante  $\omega_r = \omega_1$ , les données sont mesurées pour une période  $[t_0, t_1]$ . La puissance de frottement  $P_{f,1}$  est la moyenne de  $P_{em}$  sur  $[t_0, t_1]$  (étant donné que  $d\omega/dt = 0$ ). Alors, la vitesse de référence est augmentée rapidement en utilisant :

$$\omega_r(t) = \sqrt{\omega_1^2 + 2c(t - t_1)}. \quad (4.27)$$

Le profil de référence est tel que :

$$\omega_r \frac{d\omega_r}{dt} = c, \quad (4.28)$$

la constante  $c$  est fixée expérimentalement de sorte qu'elle soit la plus grande possible (tout en maintenant le synchronisme), permettant de maximiser le contenu des informations des données. L'accélération est maintenue jusqu'à un certain temps  $t_2$  où une vitesse de référence arbitraire  $\omega_2$  est atteinte. Alors, un troisième lot de données est recueilli à vitesse constante  $\omega_2$  pour une période  $[t_2, t_3]$ , et la puissance de frottement  $P_{f,2}$  est calculée comme étant la moyenne de  $P_{em}$  sur  $[t_2, t_3]$ .

La vitesse du moteur et la vitesse de référence pour une telle expérimentation sont tracées sur la Figure 4.6. On voit que le suivi est approximatif, mais la collecte des données sur une période de temps permet de faire l'hypothèse que  $\omega_r \cong \omega$ . L'estimation de l'inertie est calculée avec :

$$\hat{J} = MOY \left[ \frac{P_{em} - \hat{P}_f}{c} \right], \quad (4.29)$$

où la moyenne est calculée sur  $[t_1, t_2]$  et  $\hat{P}_f$  est une estimation de la puissance de frottement.  $\hat{P}_f$  aurait pu aussi être obtenue en utilisant le coefficient de frottements obtenu en régime permanent. Alternativement, les expérimentations discutées ici utilisent la formule d'interpolation :

$$\hat{P}_f = P_{f,1} + (P_{f,2} - P_{f,1}) \frac{(t - t_1)}{(t_2 - t_1)}. \quad (4.30)$$

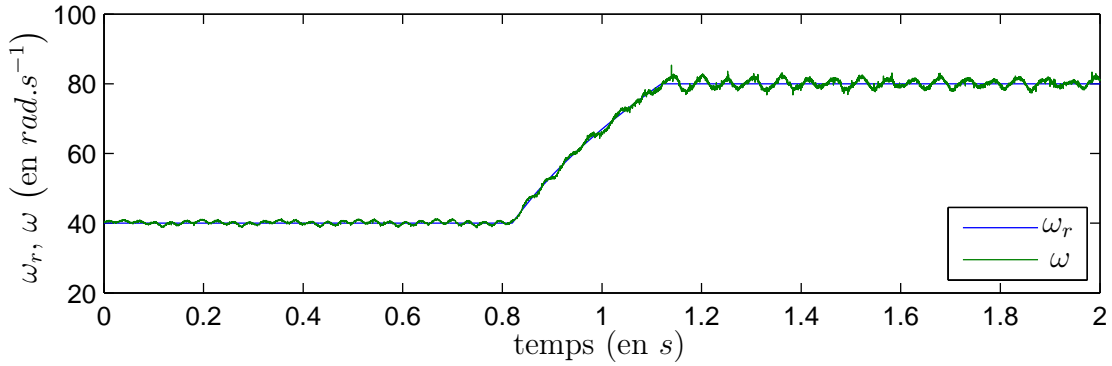


FIGURE 4.6 – Expérimentation d'identification de l'inertie.

La valeur instantanée de l'inertie et sa valeur moyenne pour l'expérimentation de la Figure 4.6 sont montrées sur la Figure 4.7. Sur cette figure, on peut voir les fluctuations de l'estimation dues aux oscillations du moteur autour de la vitesse de référence. Des composantes à plus hautes fréquences dues au couple de détente sont aussi visibles. Cependant la moyenne sur une période de temps, permet d'obtenir une estimation convenable de l'inertie. L'identification de l'inertie est aussi affinée en répétant l'expérimentation avec différentes valeurs de  $c$ . Le résultat de l'expérimentation est reporté dans la Table 4.1, et correspond étroitement à la valeur estimée avec capteurs.

Les lois de commande sans capteur mécanique dépendent de la connaissance du modèle et de ses paramètres, ce qui soulève la question de l'identification de ces paramètres sans capteur de position. Différentes approches d'identification des paramètres ont été présentées. Dans chaque configuration, les données ont été recueillies en boucle ouverte, ce qui est possible avec ce type de moteur, bien que certaines plages de vitesses soient interdites. Même si le suivi de vitesse en boucle ouverte n'est pas satisfaisant du point de vue de la commande, on a montré qu'il a été suffisant pour identifier tous les paramètres du moteur. Les résultats sont très proches des résultats obtenus à l'aide de capteurs. Le nouveau modèle  $f - g$  a montré son utilité dans ce genre d'application. Par la suite, on utilisera ce modèle pour la commande sans capteur. Dans ce cas, le repère  $f - g$  est

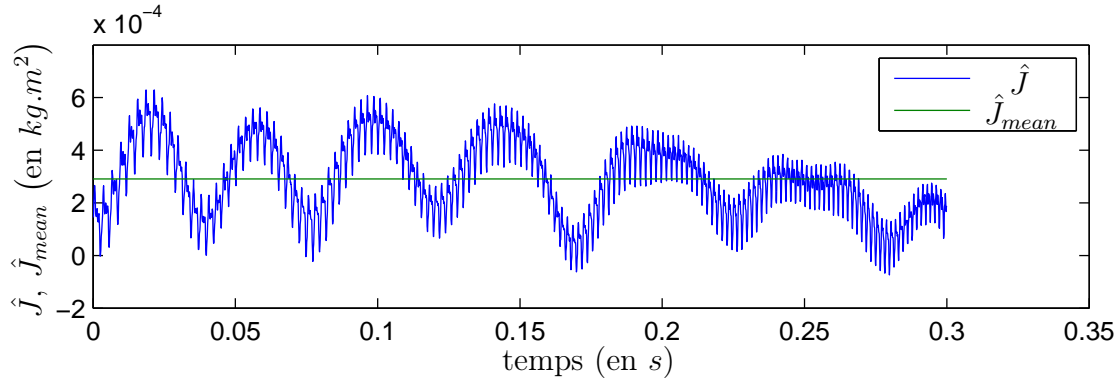


FIGURE 4.7 – Résultat de l'identification de l'inertie.

également utile, car il est obtenu indépendamment de la position estimée. De plus, on verra que l'estimation de la position est obtenue à l'aide de l'erreur entre la position de référence du moteur et la position réelle, et varie donc peu en boucle fermée.

## 4.3 Commande sans capteur mécanique

### 4.3.1 Observateur par modes glissants sans capteur mécanique

Dans ce paragraphe, des observateurs sont développés pour l'estimation de la position, de la vitesse et de l'accélération. Les observateurs sont construits dans le repère  $f - g$ . La position et la vitesse sont estimées à l'aide des équations électriques. Ces estimations sont alors utilisées pour estimer l'accélération à partir de l'équation mécanique. On rappelle que seules les mesures de courants et les tensions d'entrées sont utilisées.

#### 4.3.1.1 Observateur basé sur les équations électriques

##### 4.3.1.1.1 Construction de l'observateur

Les équations électriques du moteur dans le repère  $f - g$  données par le système (2.34) sont rappelées :

$$\begin{cases} L \frac{di_f}{dt} = v_f - Ri_f + K\omega \sin(n_p \Delta\theta) + n_p L \omega_r i_g, \\ L \frac{di_g}{dt} = v_g - Ri_g - K\omega \cos(n_p \Delta\theta) - n_p L \omega_r i_f. \end{cases} \quad (4.31)$$

où  $\delta$ , remplacé par  $\Delta\theta = \theta - \theta_r$ , représente la variation entre la position et la position de

référence à suivre. On définit également  $\Delta\omega = \omega - \omega_r$ , écart entre la vitesse du moteur et sa référence

Ces équations peuvent être représentées sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{fg} &= A_{fg}x_{fg} + u_{fg} + d_{fg}, \\ y_{fg} &= C_{fg}x_{fg}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

où  $x_{fg} = [i_f \ i_g]^T$ ,  $u_{fg} = \left[ \frac{1}{L}(v_f - Ri_f) \quad \frac{1}{L}(v_g - Ri_g) \right]^T$  et

$$A_{fg} = \begin{bmatrix} 0 & n_p\omega_r \\ -n_p\omega_r & 0 \end{bmatrix}, \quad d_{fg} = \begin{bmatrix} d_f \\ d_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{L}\omega \sin(n_p\Delta\theta) \\ -\frac{K}{L}\omega \cos(n_p\Delta\theta) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_{fg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les tensions perturbatrices  $d_{fg}$  sont introduites par les aimants permanents. Un observateur par modes glissants d'ordre 2 est construit. Sachant que les modes glissants d'ordre 2 agissent sur la variable de glissement et sa première dérivée, le modèle (4.32) est réécrit sous une forme augmentée, où les tensions perturbatrices sont les variables d'état augmenté à estimer par l'observateur :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{fg} &= \mathbf{A}_{fg}\mathbf{x}_{fg} + \mathbf{B}_{fg}u_{fg} + \mathbf{d}_{fg} \\ \mathbf{y}_{fg} &= \mathbf{C}_{fg}\mathbf{x}_{fg}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

où  $\mathbf{x}_{fg} = [i_f \ i_g \ d_f \ d_g]^T$  et :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{fg} &= \left[ \begin{array}{c|c} A & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{array} \right], \quad \mathbf{B}_{fg} = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{array} \right], \quad \mathbf{C}_{fg} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{array} \right] \quad \text{et} \\ \mathbf{d}_{fg} &= \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \hline \frac{K}{L}(\dot{\omega} \sin(n_p\Delta\theta) + n_p\omega\Delta\omega \cos(n_p\Delta\theta)) \\ -\frac{K}{L}(\dot{\omega} \cos(n_p\Delta\theta) - n_p\omega\Delta\omega \sin(n_p\Delta\theta)) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

L'observateur par modes glissants est construit en remplaçant les tensions perturbatrices par la matrice d'injection de sortie  $\chi_{fg}(\mathbf{y}_{fg} - \hat{\mathbf{y}}_{fg})$  à définir. Une partie linéaire stabilisante  $\mathbf{L}_{fg}(\mathbf{y}_{fg} - \hat{\mathbf{y}}_{fg})$  est également introduite. Elle a l'avantage de réduire les bruits de mesures et la réticence introduite par les modes glissants. L'observateur est donc défini

par :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{fg} &= \mathbf{A}_{fg}\hat{\mathbf{x}}_{fg} + \mathbf{B}_{fg}u_{fg} - \boldsymbol{\chi}_{fg}(\mathbf{y}_{fg} - \hat{\mathbf{y}}_{fg}) - \mathbf{L}_{fg}(\mathbf{y}_{fg} - \hat{\mathbf{y}}_{fg}), \\ \hat{\mathbf{y}}_{fg} &= \mathbf{C}_{fg}\hat{\mathbf{x}}_{fg}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Les variables de glissement  $i_f - \hat{i}_f$  et  $i_g - \hat{i}_g$  ont un degré relatif égal à 1 par rapport aux injections de sorties. Ces dernières sont donc définies par l'algorithme du Super Twisting :

$$\boldsymbol{\chi}_{fg}(\mathbf{y}_{fg} - \hat{\mathbf{y}}_{fg}) = \begin{bmatrix} \lambda_f |i_f - \hat{i}_f|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(i_f - \hat{i}_f) \\ \lambda_g |i_g - \hat{i}_g|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(i_g - \hat{i}_g) \\ \alpha_f \text{sgn}(i_f - \hat{i}_f) \\ \alpha_g \text{sgn}(i_g - \hat{i}_g) \end{bmatrix}.$$

Le terme linéaire est défini par :

$$\mathbf{L}_{fg} = \begin{bmatrix} l_f & 0 \\ 0 & l_g \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

où  $l_f$  et  $l_g$  sont des gains à déterminer.

Les erreurs d'estimation sont définies par :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{fg} = \mathbf{x}_{fg} - \hat{\mathbf{x}}_{fg} = \begin{bmatrix} \epsilon_f \\ \epsilon_g \\ \epsilon_{d_f} \\ \epsilon_{d_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_f - \hat{i}_f \\ i_g - \hat{i}_g \\ d_f - \hat{d}_f \\ d_g - \hat{d}_g \end{bmatrix}.$$

À partir des équations (4.32) et (4.34), les dynamiques des erreurs sont données par :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{fg} = \dot{\mathbf{x}}_{fg} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{fg} = (\mathbf{A}_{fg} - \mathbf{L}_{fg}\mathbf{C}_{fg})\boldsymbol{\epsilon}_{fg} + \mathbf{d}_{fg} - \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\epsilon}_{fg}). \quad (4.35)$$

Les propriétés physiques du moteur permettent de considérer que la vitesse et l'accélération du moteur sont bornées. Ainsi, les perturbations  $d_f$  et  $d_g$  sont bornées et majorées par  $\Pi_d = \frac{K}{L} (|\dot{\omega}|_{max} + n_p |\omega \Delta \omega|_{max})$ . Les conditions de convergence en temps fini des algorithmes du Super Twisting sont vérifiées en choisissant les paramètres  $\alpha$ ,  $\lambda$  et la matrice de gain  $\mathbf{L}_{fg}$  tels qu'ils vérifient les conditions données par la fonction de Lyapunov présentée dans le Chapitre 1.

Donc, après un temps fini, les dynamiques des erreurs sont données par  $\boldsymbol{\epsilon}_{fg} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{fg} = 0$  ce qui implique :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_f = 0, \\ \dot{\epsilon}_g = 0, \\ \dot{\epsilon}_{d_f} = 0 = \frac{K}{L} (\dot{\omega} \sin(n_p \Delta\theta) + n_p \omega \Delta\omega \cos(n_p \Delta\theta)) - \alpha_f \text{sgn}(\epsilon_f), \\ \dot{\epsilon}_{d_g} = 0 = -\frac{K}{L} (\dot{\omega} \cos(n_p \Delta\theta) - n_p \omega \Delta\omega \sin(n_p \Delta\theta)) - \alpha_g \text{sgn}(\epsilon_g). \end{cases} \quad (4.36)$$

Soit :

$$\begin{cases} \hat{d}_f = \frac{K}{L} \omega \sin(n_p \Delta\theta), & (4.37a) \\ \hat{d}_g = -\frac{K}{L} \omega \cos(n_p \Delta\theta), & (4.37b) \\ \alpha_f \text{sgn}_{eq}(\epsilon_f) = \frac{\dot{\omega}}{\omega} \hat{d}_f - n_p \hat{d}_g \Delta\omega, & (4.37c) \\ \alpha_g \text{sgn}_{eq}(\epsilon_g) = \frac{\dot{\omega}}{\omega} \hat{d}_g + n_p \hat{d}_f \Delta\omega, & (4.37d) \end{cases}$$

où  $\alpha_* \text{sgn}_{eq}(\epsilon_f)$  avec  $* \in \{f, g\}$  représente les injections de sorties équivalentes obtenues après filtrage.

#### 4.3.1.1.2 Reconstruction de la position et de la vitesse

##### Estimation de la position :

À partir des équations (4.37a) et (4.37b), l'estimation  $\Delta\theta_{est}$  de  $\Delta\theta$  est donnée par :

$$\Delta\theta_{est} = \begin{cases} \text{non définie} & \text{si } \omega = 0 \\ \frac{1}{n_p} \arctan\left(\frac{\hat{d}_f}{\hat{d}_g}\right) & \text{si } \hat{c} > 0, \\ \pi/2n_p & \text{si } \hat{s} = 1, \\ -\pi/2n_p & \text{si } \hat{s} = -1, \\ \frac{1}{n_p} \left( \arctan\left(\frac{\hat{d}_f}{\hat{d}_g}\right) - \pi \right) & \text{si } \hat{c} < 0, \\ & \text{et } \hat{s} > 0, \\ \frac{1}{n_p} \left( \arctan\left(\frac{\hat{d}_f}{\hat{d}_g}\right) + \pi \right) & \text{si } \hat{c} < 0, \\ & \text{et } \hat{s} < 0, \end{cases} \quad (4.38)$$



où  $\hat{c} = \hat{d}_g / \sqrt{\hat{d}_f^2 + \hat{d}_g^2}$ ,  $\hat{s} = \hat{d}_f / \sqrt{\hat{d}_f^2 + \hat{d}_g^2}$  sont respectivement les estimations de  $\cos(n_p \Delta\theta)$  et  $\sin(n_p \theta)$ .

La valeur de sortie de la fonction arctan calculée à l'aide de (4.38) prend des valeurs dans l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{n_p}, \frac{\pi}{n_p} \right]$ , menant à une sortie discontinue. La variable  $\Delta\theta_{est}$  est donc calculée modulo  $\frac{2\pi}{n_p}$ . Il faut donc vérifier que l'erreur entre la position et la position de référence reste dans cet intervalle. Si l'erreur sort de cet intervalle, il faut alors ajouter  $\pm 2\frac{\pi}{n_p}$  pour compenser l'erreur. Une procédure est programmée pour compter ces "sauts". L'entier  $k$  est incrémenté si l'estimation sort de l'intervalle par la borne supérieure et décrémenté à l'inverse. Un tel algorithme est sensible au bruit de mesures : un "saut" causé par le bruit pourrait être interprété par le passage à un autre intervalle. Cependant, l'algorithme du Super Twisting utilisé pour cet estimation joue le rôle d'un filtre et fournit une estimation continue de  $\Delta\theta_{est}$ . De cette estimation, la position est reconstruite par :

$$\theta_{est} = \theta_r + \Delta\theta_{est} + 2k \frac{\pi}{n_p}. \quad (4.39)$$

### Reconstruction de la vitesse :

À partir des équations (4.37a) et (4.37b) l'estimation de la vitesse peut également être reconstruite. Le module de la vitesse peut être calculé comme étant :

$$|\omega_{est}| = \sqrt{\hat{d}_f^2 + \hat{d}_g^2}. \quad (4.40)$$

Cette expression donne seulement la valeur absolue de la vitesse. Le signe de la vitesse peut être déterminé à l'aide des équations (4.37c) et (4.37d). En effet, en éliminant  $\omega$  et  $\dot{\omega}$  dans ces équations, on a :

$$\Delta\omega_{est} = \frac{1}{n_p} \frac{\alpha_f \text{sgn}_{eq}(\epsilon_f) \hat{d}_g - \alpha_g \text{sgn}_{eq}(\epsilon_g) \hat{d}_f}{\hat{d}_f^2 - \hat{d}_g^2}. \quad (4.41)$$

Des équations (4.40) et (4.41), on déduit l'estimation de la vitesse :

$$\omega_{est} = \text{sgn}(\omega_r + \Delta\omega_{est}) \sqrt{\hat{d}_f^2 + \hat{d}_g^2}. \quad (4.42)$$

**Remarque 4.1** L'équation (4.41) n'est pas définie pour  $\hat{d}_f^2 - \hat{d}_g^2 = 0$ , soit  $\omega = 0$  ou  $n_p \Delta\theta = \frac{\pi}{4} + \gamma \frac{\pi}{2}$  avec  $\gamma \in \mathbb{N}$ . Expérimentalement, l'indétermination de  $\Delta\omega_{est}$  est éliminée en posant :

$$\Delta\omega_{est}(k) = \begin{cases} \Delta\omega_{est}(k) & \text{si } \theta_{est} \neq \frac{\pi}{4} + \gamma\frac{\pi}{2} \text{ et } |\omega_{est}| \neq 0, \\ \Delta\omega_{est}(k-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 4.2** La vitesse et l'accélération pourraient également être obtenues à partir des équations (4.37c) et (4.37d). Cependant leurs estimations ne sont pas définies pour toutes les valeurs de  $\theta$  et  $\omega$  (voir remarque précédente). Les discontinuités de l'algorithme du Super Twisting qui agissent sur ces équations les rendent plus sensibles au phénomène de réticence. De plus, l'expression de l'accélération qui en résulte est mal conditionnée. Pour toutes ces raisons, la vitesse est reconstruite à partir de l'équation (4.42). Une solution alternative est discutée dans le paragraphe suivant pour obtenir l'accélération.

#### 4.3.1.2 Reconstruction de $\dot{\omega}$ en utilisant l'équation mécanique

Afin d'appliquer la commande par modes glissants d'ordre 2 présentée dans le chapitre 3, on propose de construire un observateur pour estimer l'accélération. Pour cela on réécrit l'équation mécanique dans le repère  $f-g$ , en remplaçant la position et la vitesse par leurs estimations présentées dans le paragraphe précédent :

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} (K(i_f \sin(n_p \Delta\theta_{est}) + i_g \cos(n_p \Delta\theta_{est}) - f_v \omega_{est} - C_r \text{sgn}(\omega_{est})). \quad (4.43)$$

Le couple résistant est considéré comme une perturbation notée :

$$d_{\omega_{est}} = -\frac{C_r}{J} \text{sgn}(\omega_{est}).$$

Et le système augmenté est défini par :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{\omega_{est}} &= \mathbf{A}_{\omega_{est}} \mathbf{x}_{\omega_{est}} + \mathbf{B}_{\omega_{est}} u_{\omega_{est}} + \mathbf{d}_{\omega_{est}}, \\ \mathbf{y}_{\omega_{est}} &= \mathbf{C}_{\omega_{est}} \mathbf{x}_{\omega_{est}}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

où :  $\mathbf{x}_{\omega_{est}} = [\omega_{est} \quad d_{\omega_{est}}]^T$ ,  $u_{\omega_{est}} = \frac{K}{J} (i_f \sin(n_p \Delta\theta_{est}) + i_g \cos(n_p \Delta\theta_{est}))$  et

$$\mathbf{A}_{\omega_{est}} = \begin{bmatrix} -\frac{f_v}{J} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\omega_{est}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_{\omega_{est}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \frac{dC_r}{dt} \text{sgn}(\omega_{est}) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C}_{\omega_{est}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'observateur sous sa forme augmentée est alors défini par :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{\omega_{est}} &= \mathbf{A}_{\omega_{est}} \hat{\mathbf{x}}_{\omega_{est}} + \mathbf{B}_{\omega_{est}} u_{\omega_{est}} + \boldsymbol{\chi}_{\omega_{est}} (\mathbf{y}_{\omega_{est}} - \hat{\mathbf{y}}_{\omega_{est}}) + \mathbf{l}_{\omega_{est}} (\mathbf{y}_{\omega_{est}} - \hat{\mathbf{y}}_{\omega_{est}}), \\ \hat{\mathbf{y}}_{\omega_{est}} &= \mathbf{C}_{\omega_{est}} \hat{\mathbf{x}}_{\omega_{est}},\end{aligned}\quad (4.45)$$

où :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_{\omega_{est}} (\mathbf{y}_{\omega_{est}} - \hat{\mathbf{y}}_{\omega_{est}}) &= \begin{bmatrix} \lambda_{\omega_{est}} |\mathbf{y}_{\omega_{est}} - \hat{\mathbf{y}}_{\omega_{est}}|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(\mathbf{y}_{\omega_{est}} - \hat{\mathbf{y}}_{\omega_{est}}) \\ \alpha_{\omega_{est}} \text{sgn}(\mathbf{y}_{\omega_{est}} - \hat{\mathbf{y}}_{\omega_{est}}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{l}_{\omega_{est}} (\mathbf{y}_{\omega_{est}} - \hat{\mathbf{y}}_{\omega_{est}}) &= \begin{bmatrix} l_{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

L'erreur d'observation est définie par :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\omega_{est}} = \mathbf{x}_{\omega_{est}} - \hat{\mathbf{x}}_{\omega_{est}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\mathbf{y}_{\omega_{est}}} \\ \epsilon_{d_{\omega_{est}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\omega_{est}} - \hat{\mathbf{y}}_{\omega_{est}} \\ d_{\omega_{est}} - \hat{d}_{\omega_{est}} \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

menant à la dynamique :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\omega_{est}} = \dot{\mathbf{x}}_{\omega_{est}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{\omega_{est}} = (\mathbf{A}_{\omega_{est}} - \mathbf{l}_{\omega_{est}} \mathbf{C}_{\omega_{est}}) \boldsymbol{\epsilon}_{\omega_{est}} + \mathbf{d}_{\omega_{est}} - \boldsymbol{\chi}_{\omega_{est}} (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{y}_{\omega_{est}}}). \quad (4.47)$$

En faisant l'hypothèse que le coefficient de friction de Coulomb est dérivable, et que la dérivée de  $C_r$  est bornée (c'est-à-dire  $\left| \frac{dC_r}{dt} \right|_{max} < \Pi_{C_r}$  où  $\Pi_{C_r}$  est une constante positive), la convergence en temps fini de l'observateur en boucle fermée est garantie en choisissant les gains  $\alpha_{\omega_{est}}$ ,  $\lambda_{\omega_{est}}$ , et  $l_{\omega_{est}}$  vérifiant les conditions de la fonction de Lyapunov (1.19). Donc après un temps fini, on a  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\omega_{est}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\omega_{est}} = 0$ , ce qui conduit à une estimation de l'accélération  $\dot{\omega}_{est}$ . On note par la même occasion que le coefficient de friction de Coulomb est aussi estimé.

On a proposé une solution pour l'estimation de la position, la vitesse et l'accélération du moteur. On adapte maintenant la commande par modes glissants présentée dans le Chapitre 3 dans le repère  $f - g$ , en utilisant ces estimations.

## 4.3.2 Commande basée sur l'observateur

### 4.3.2.1 Synthèse de la commande dans le repère $f - g$

La loi de commande présentée dans la section 3.3 a été conçue dans le repère  $d - q$  en supposant que la position était connue. Afin de traiter le cas sans capteur mécanique, la commande est transposée dans le repère tournant de référence  $f - g$ . Le repère  $d - q$  reste

néanmoins plus simple à manipuler que le repère  $f - g$  car il permet de s'affranchir des termes sinusoïdaux. On peut ensuite passer dans le repère  $f - g$  sans difficulté. Afin de passer du repère  $d - q$  au repère  $f - g$ , on rappelle les transformations (2.40) et (2.40) :

$$\begin{aligned} [i_f, i_g]^T &= U(\delta) [i_d, i_q]^T, \\ [v_f, v_g]^T &= U(\delta) [v_d, v_q]^T, \end{aligned} \quad (4.48)$$

où :

$$U(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(n_p \delta) & -\sin(n_p \delta) \\ \sin(n_p \delta) & \cos(n_p \delta) \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

On a vu aussi que lorsque le repère  $f - g$  était utilisé en supposant  $\theta_r$  comme position de référence à suivre, la trajectoire de référence était identique à celle dans le repère  $d - q$ , soit l'équation (2.46). Les erreurs de suivi sont définies dans ce repère par :

$$e_{fg} = [e_f, e_g, e_\omega, e_\theta]^T = \begin{bmatrix} i_f \cos(n_p e_\theta) + i_g \sin(n_p e_\theta) - i_{fr} \\ -i_f \sin(n_p e_\theta) + i_g \cos(n_p e_\theta) - i_{gr} \\ \omega - \omega_r \\ \theta - \theta_r \end{bmatrix}.$$

Les dynamiques sont :

$$\begin{cases} \dot{e}_f &= \frac{1}{L} (\bar{v}_f - R e_f + n_p L (e_\omega e_g + e_\omega i_{g,r} + e_g \omega_r)), \\ \dot{e}_g &= \frac{1}{L} (\bar{v}_g - R e_g + n_p L (e_\omega e_f + e_\omega i_{f,r} + e_f \omega_r) - K e_\omega), \\ \dot{e}_\omega &= \frac{1}{J} (K e_g - f_v e_\omega - C_r \text{sgn}(\omega)), \\ \dot{e}_\theta &= e_3 \end{cases} \quad (4.50)$$

Les lois de commande utilisées sont les lois de commande (3.19) et (3.26) définies dans le Chapitre 3 pour la commande avec capteurs dans le repère  $d - q$ . Ces lois sont transformées dans le repère  $f - g$ , en utilisant les variables estimées à l'aide des observateurs. On définit les erreurs entre les valeurs estimées et la valeur de référence par :

$$\xi = [\xi_f, \xi_g, \xi_\omega, \xi_\theta]^T, \quad (4.51)$$

avec

$$\begin{bmatrix} \xi_f \\ \xi_g \\ \xi_\omega \\ \xi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_f \cos(N(\theta_{est} - \theta_r)) + i_g \sin(N(\theta_{est} - \theta_r)) - i_{f,r} \\ -i_f \sin(N(\theta_{est} - \theta_r)) + i_g \cos(N(\theta_{est} - \theta_r)) - i_{g,r} \\ \omega_{est} - \omega_r \\ \theta_{est} - \theta_r \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_f \\ \bar{v}_g \end{bmatrix} = U(\theta_{est} - \theta_r) \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_f \\ \bar{\gamma}_g \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

avec

$$U(\theta_{est} - \theta_r) = \begin{bmatrix} \cos(N(\theta_{est} - \theta_r)) & \sin(N(\theta_{est} - \theta_r)) \\ -\sin(N(\theta_{est} - \theta_r)) & \cos(N(\theta_{est} - \theta_r)) \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{cases} \gamma_f = L(-\hat{\mu}'_1(\xi, \Gamma_r) + w_{st}(\hat{S}_f)) + v_{f,r}, \\ \gamma_g = \frac{JL}{K} \left( -\frac{k}{J}(K\xi_g - f_v\xi_\omega) - \hat{\mu}'_2(\xi, \Gamma_r) + w_t(\hat{S}_\theta, \dot{\hat{S}}_\theta) \right) + v_{g,r}, \end{cases} \quad (4.54)$$

où  $\hat{S}_\theta$  et  $\hat{S}_f$  sont les estimations des variables de glissement  $S_\theta$  et  $S_f$  :

$$\begin{cases} \hat{S}_\theta = k\xi_\omega + \dot{\xi}_\omega, \\ \hat{S}_f = \xi_f, \end{cases} \quad (4.55)$$

et

$$\begin{cases} \hat{\mu}'_1(e) = \frac{1}{L} (-R\xi_f + NL(\xi_\omega\xi_g + \xi_\omega i_{g,r} + \xi_g\omega_r)), \\ \hat{\mu}'_2(e) = -\frac{K}{JL}(R\xi_g + NL(\xi_\omega\xi_f + \xi_\omega i_{f,r} + \xi_f\omega_r) + K\xi_\omega) - \frac{f_v}{J^2}(K\xi_g - f_v\xi_\omega). \end{cases} \quad (4.56)$$

La loi de commande et les observateurs présentés sont non linéaires. Le principe de séparation n'est donc pas valide. Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier la stabilité de la commande et de l'observateur ensemble.

#### 4.3.2.2 Stabilité en boucle fermée

Les dynamiques des états du système complet incluant les erreurs de suivi ainsi que les erreurs d'estimation :

$$\Xi \triangleq [e_f, e_g, e_\omega, e_\theta, \epsilon_f, \epsilon_g, \epsilon_{d_f}, \epsilon_{d_g}, \epsilon_{\mathbf{y}_{\omega_{est}}}, \epsilon_{d_{\omega_{est}}}]^T, \quad (4.57)$$

sont données par :

$$\dot{\Xi} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L}e_f + n_p(e_\omega e_g + e_\omega i_{g,r} + e_g \omega_r) \\ -\frac{R}{L}e_g + n_p(e_\omega e_f + e_\omega i_{f,r} + e_f \omega_r) - \frac{K}{L}e_\omega \\ \frac{1}{J}(Ke_g - f_v e_\omega) \\ e_3 \\ -l_f \epsilon_f + n_p \omega_r \epsilon_g \\ -n_p \omega_r \epsilon_f - l_g \epsilon_g \\ \frac{K}{L}(\dot{\omega} \sin(n_p e_\theta) + n_p(e_\omega + \omega_r)e_\omega \cos(n_p e_\theta)) \\ -\frac{K}{L}(\dot{\omega} \cos(n_p e_\theta) - n_p(e_\omega + \omega_r)e_\omega \sin(n_p e_\theta)) \\ (-\frac{f_v}{J} - l_{\omega_{est}})\epsilon_{\mathbf{y}_{\omega_{est}}} + \epsilon_{d_g} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\bar{v}_f \\ \frac{1}{L}\bar{v}_g \\ \pm \frac{1}{J}C_r \\ 0 \\ w_{st,1}(\epsilon_f) \\ w_{st,1}(\epsilon_g) \\ \dot{w}_{st,2}(\epsilon_f) \\ \dot{w}_{st,2}(\epsilon_g) \\ w_{st,1}(\epsilon_{\mathbf{y}_{\omega_{est}}}) \\ \pm \frac{1}{J}\frac{dC_r}{dt} + \dot{w}_{st,2}(\epsilon_{\mathbf{y}_{\omega_{est}}}) \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

où :

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}(K(i_f \sin(-Ne_\theta) + i_g \cos(-Ne_\theta)) - f_v(e_\omega + \omega_r) - C_r \text{sgn}(e_\omega + \omega_r)).$$

La commande du système complet est décrite (4.53).

Afin de prouver la convergence exponentielle du système complet observateur-commande, il faut montrer que les trajectoires du système complet (4.58) restent bornées sur un intervalle de temps fini. En effet, si le système est bornée, les trajectoires sont maintenues dans un compact le temps que l'observateur converge. La convergence de l'observateur étant en temps fini, lorsque les estimations ont convergé, la convergence de la commande indépendamment de l'observateur est alors valide. La première étape est d'écrire les variables estimées  $\xi$  en fonction des états du système  $\Xi$ , de la trajectoire de référence  $\Gamma_r$  et des entrées de commande.

$$\begin{bmatrix} \xi_f \\ \xi_g \end{bmatrix} = U(\theta_{est} - \theta_r) \begin{bmatrix} \hat{i}_f \\ \hat{i}_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_{f,r} \\ i_{g,r} \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

avec :

$$\begin{cases} \hat{e}_\theta &= -\frac{1}{n_p} \arctan\left(\frac{\hat{d}_f}{\hat{d}_g}\right), \\ \hat{i}_f &= \epsilon_f + i_f = \epsilon_f + e_f + i_{f,r}, \\ \hat{i}_g &= \epsilon_g + i_g = \epsilon_g + e_g + i_{g,r}. \end{cases} \quad (4.60)$$

De façon similaire :

$$\begin{bmatrix} \xi_\omega \\ \xi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{est} \\ \theta_{est} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_r \\ \theta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \frac{L}{K} \sqrt{\hat{d}_f^2 + \hat{d}_g^2} \\ -\frac{1}{N} \arctan\left(\frac{\hat{d}_f}{\hat{d}_g}\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_r \\ \theta_r \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Après substitution dans le système (4.58), des équations de commande  $\bar{v}_f$  et  $\bar{v}_g$  (4.53) avec les expressions (4.59) et (4.61) des erreurs entre les variables estimées et les variables de référence, on obtient un modèle dépendant seulement des états, de la trajectoire désirée et des entrées de commande :

$$\dot{\Xi} = F(\Xi, \Gamma_r, w_{st,1}(\epsilon_f), w_{st,1}(\epsilon_g), \dot{w}_{st,2}(\epsilon_f), \dot{w}_{st,2}(\epsilon_g), w_{st,1}(\epsilon_{\mathbf{y}_{\omega_{est}}}), \dot{w}_{st,2}(\epsilon_{\mathbf{y}_{\omega_{est}}}))). \quad (4.62)$$

Sans perte de généralités, on peut assumer que la trajectoire de référence choisie  $\Gamma_r$  est bornée. On a donc, en utilisant (4.59) :

$$\begin{cases} \xi_f = O(\epsilon_f + e_f), \\ \xi_g = O(\epsilon_g + e_g). \end{cases} \quad (4.63)$$

Les hypothèses physiques permettent de dire que les courants  $i_f$  et  $i_g$  et leurs estimations  $\hat{i}_f$  et  $\hat{i}_g$  sont bornées menant à des erreurs de courants  $e_f$  et  $e_g$  et des erreurs d'estimation  $\epsilon_f$  et  $\epsilon_g$  bornés. De ce fait, les variables d'erreurs  $\xi_f$  et  $\xi_g$  sont bornées. De plus, les algorithmes du Twisting et du Super Twisting sont bornés.

Le système peut s'écrire sous la forme  $\dot{\Xi} = f(\Xi) + g$ . Ainsi, en incluant toutes les dominations dans le système complet, on obtient l'inégalité :

$$\|\dot{\Xi}\| \leq Q\|\Xi\| + \bar{g}, \quad (4.64)$$

où  $Q$  et  $g$  sont des constantes positives.

En intégrant (4.64) on obtient :

$$\|\Xi(t)\| \leq \|\Xi(0)\| + \int_0^t (Q\|\Xi(\tau)\| + \bar{g})d\tau. \quad (4.65)$$

Par application du lemme de Gronwall, on a :

$$\|\Xi(t)\| \leq \|\Xi(0)\| \exp(Ct) + \frac{\bar{g}}{Q} \exp(Ct - 1), \quad (4.66)$$

où  $C$  est une constante positive.

Par conséquent, le système d'état complet  $\Xi$  est borné. Ceci prouve la stabilité exponentielle de la commande mécanique sans capteur.

### 4.3.3 Stratégie en boucle ouverte

Étant donné que le moteur n'est pas observable à l'arrêt, un scénario à faible vitesse est mis en place. Si le moteur tourne à une vitesse inférieure à une certaine vitesse  $|\omega_{lim}|$ , le moteur est commandé en boucle ouverte. On utilise la loi de commande dans le repère de rotation de référence suivante :

$$v = \begin{cases} \sqrt{R^2 + (n_p \omega_{ref} L)^2 I_{max}^2 + (K \omega_{ref})^2}, & \text{si } v < V_{max}, \\ V_{max}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.67)$$

$I_{max}$  est le courant maximum,  $V_{max}$  est la tension maximum.  $v$  est appliqué au moteur en utilisant la transformation  $v_a = v \cos(N\theta_{ref})$  et  $v_b = v \sin(N\theta_{ref})$ .

Lorsque le moteur est commandé en boucle ouverte, on peut supposer que  $\omega_r \simeq \omega$  tant que le moteur conserve son synchronisme.

### 4.3.4 Résultats Expérimentaux

La Figure 4.8, montre le schéma de commande complet.

Les performances de cette approche sont montrées en appliquant la trajectoire décrite dans la section 2.6. L'objectif est de montrer que le moteur est capable, en démarrant à vitesse nulle, de suivre une trajectoire de référence même pour des vitesses négatives. La trajectoire est alors définie pour une position initiale nulle,  $\theta_i = 0rad$ , devant atteindre une position intermédiaire  $\theta_m = 18rad$  en 2 secondes. Enfin, on désire revenir à la position initiale soit une position  $\theta_f = 0rad$  en 2 secondes également. Le profil de la trajectoire est donné par la Figure 2.3.

Comme mentionné ci-dessus, la commande en boucle ouverte est utilisée pour des vitesses inférieure à  $|\omega_{lim}|$ , où  $\omega_{lim}$  est choisie égal à  $3rad.s^{-1}$ . Les instants de commutations sont représentés sur les figures suivantes par des lignes magenta.



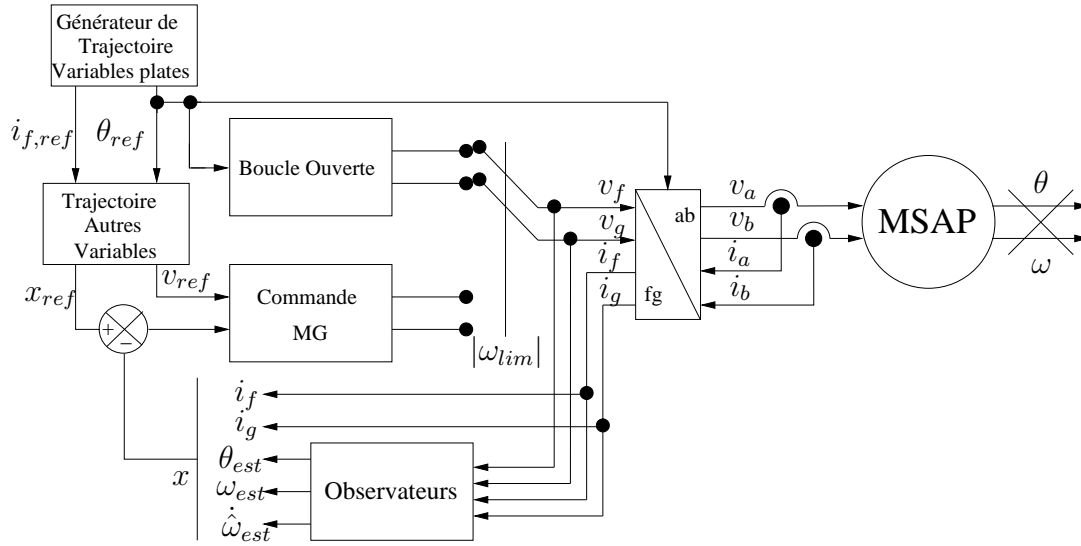


FIGURE 4.8 – Schéma de commande global.

#### 4.3.4.1 Convergence de l'observateur basé sur les équations électriques

La position et la vitesse sont estimées à partir de l'observateur (4.35). Afin que ces dernières soient correctement reconstruites, on doit montrer que l'observateur converge correctement. Les Figures 4.9 et 4.10 donnent l'allure des courants  $i_f$  et  $i_g$  et de leurs estimations  $\hat{i}_f$  et  $\hat{i}_g$ . La figure montre que les courants estimés sont proches des courants mesurés. Les erreurs d'estimations  $\epsilon_f$  et  $\epsilon_g$  sont inférieures à  $0.01A$ .

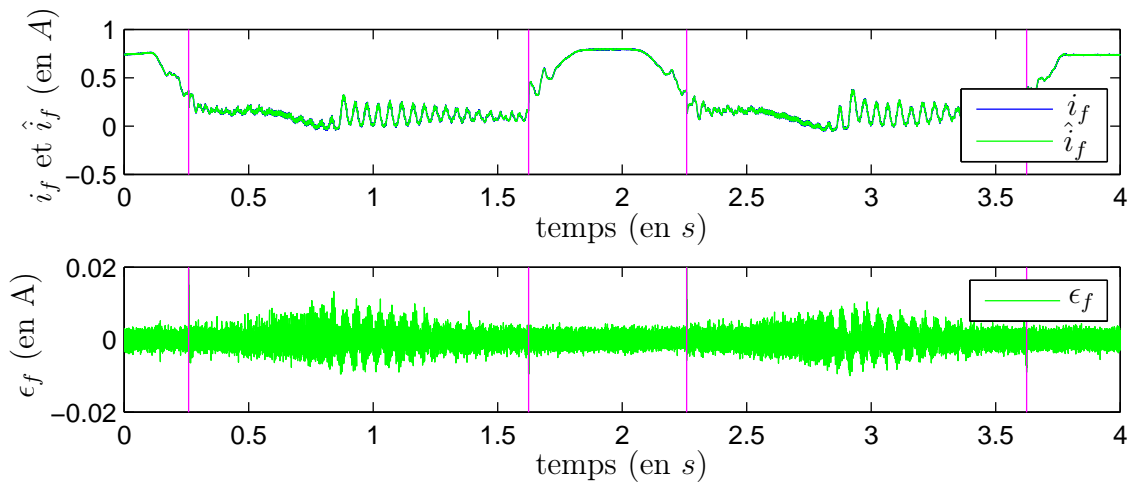


FIGURE 4.9 – Le courant  $i_f$  et son estimation (haut), l'erreur d'observation  $\epsilon_f = i_f - \hat{i}_f$  (bas).

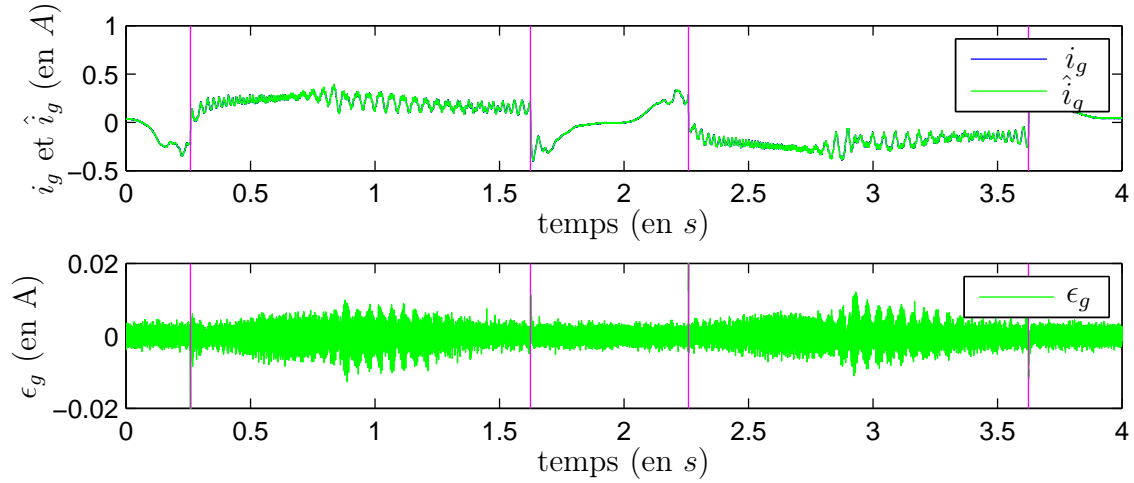


FIGURE 4.10 – Le courant  $i_g$  et son estimation (haut), l'erreur d'observation  $\epsilon_g = i_g - \hat{i}_g$  (bas).

Les contre-fem  $d_f = \frac{K}{L}\omega \sin(n_p \Delta\theta)$  et  $d_g = -\frac{K}{L}\omega \cos(n_p \Delta\theta)$  ainsi que leurs estimations  $\hat{d}_f$  et  $\hat{d}_g$  sont représentées Figure 4.11. On constate que les entrées inconnues de l'observateur sont correctement reconstruites. Les résultats présentés montrent bien la convergence de l'observateur, de telle sorte que la position et la vitesses puissent être reconstruites.

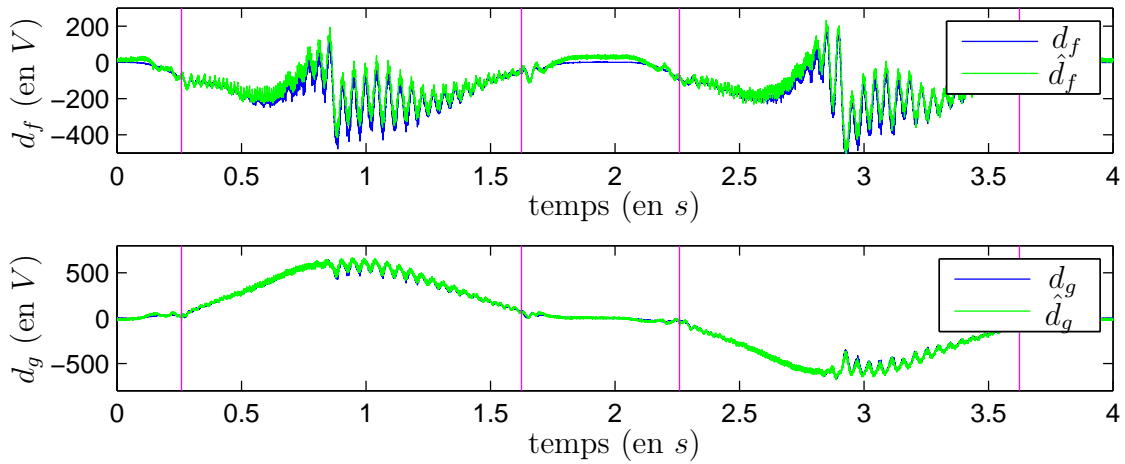


FIGURE 4.11 –  $d_f$ ,  $d_g$  et leurs estimations.

### 4.3.4.2 Reconstruction de la position et de la vitesse

La position est reconstruite à partir des estimations de  $\hat{c} = \cos(n_p \Delta)$  et  $\hat{s} \sin(n_p \Delta)$ . La Figure 4.12 montre l'estimation de ces variables. Les estimations sont tracées seulement lorsque le moteur est commandé en boucle fermée. Il faut noter que l'erreur est toujours inférieure à la distance entre deux pôles. L'erreur maximale se situe autour de  $0.02rad$  tandis que l'angle entre deux dents est égale à  $\frac{2\pi}{n_p} = 0.126rad$  (l'algorithme de "saut" dans cette application n'a pas été utilisé). Enfin, on observe que la différence entre les variables mesurées et estimées est très faible.

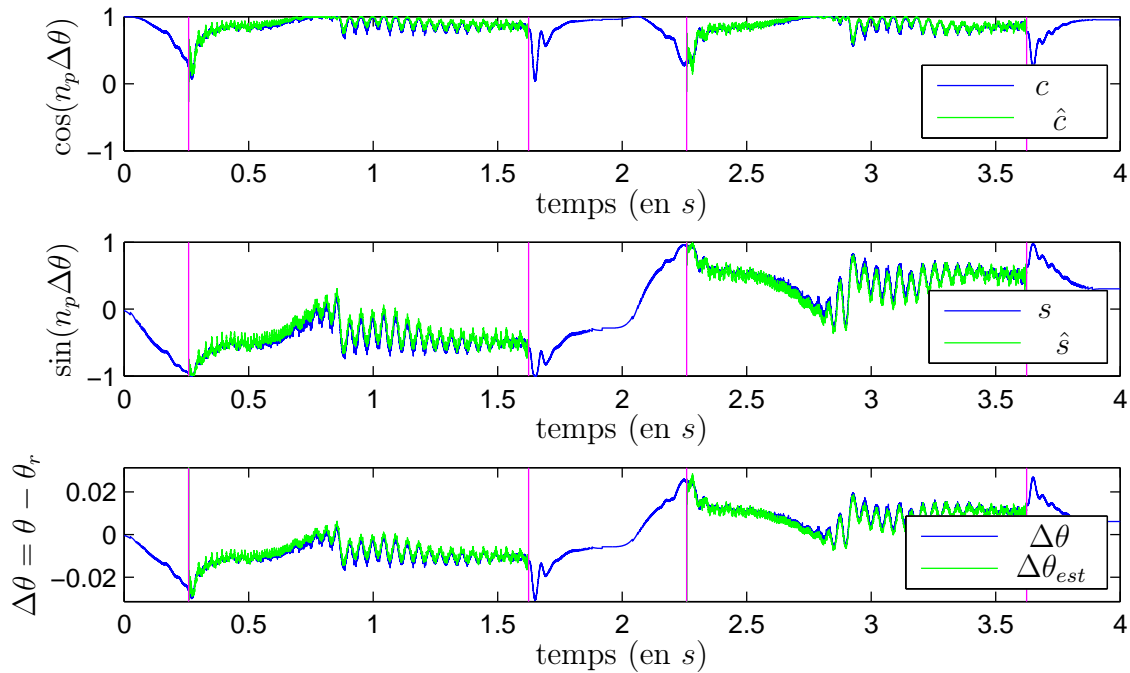


FIGURE 4.12 – Erreur de position et leurs estimations.

La position estimée est reconstruite en utilisant (4.39) où  $k$  est égal à zéro. Le résultat de l'estimation est tracé Figure 4.13. La figure montre également la position de référence et la position mesurée. De nouveau, la position estimée est tracée seulement lorsque le système est commandé en boucle fermée. En boucle ouverte, la position est égale à l'intégrale de la vitesse de référence plus la position initiale, qui est nulle au début de l'expérience et égale à la dernière valeur estimée ensuite.

La position estimée est tracée en vert sur la Figure 4.13. Sur le deuxième graphe de la figure, on montre l'erreur entre la position mesurée et la position estimée. L'erreur estimée

est inférieure à  $0.01\text{rad}$ , ce qui est très bien. La courbe bleue représente les performances en boucle fermée et on observe que l'erreur de poursuite en boucle fermée est inférieure à  $0.02\text{rad}$ . Ce qui signifie que sur trois tours, la position est suivie avec une très bonne précision (erreur inférieure à un degré).

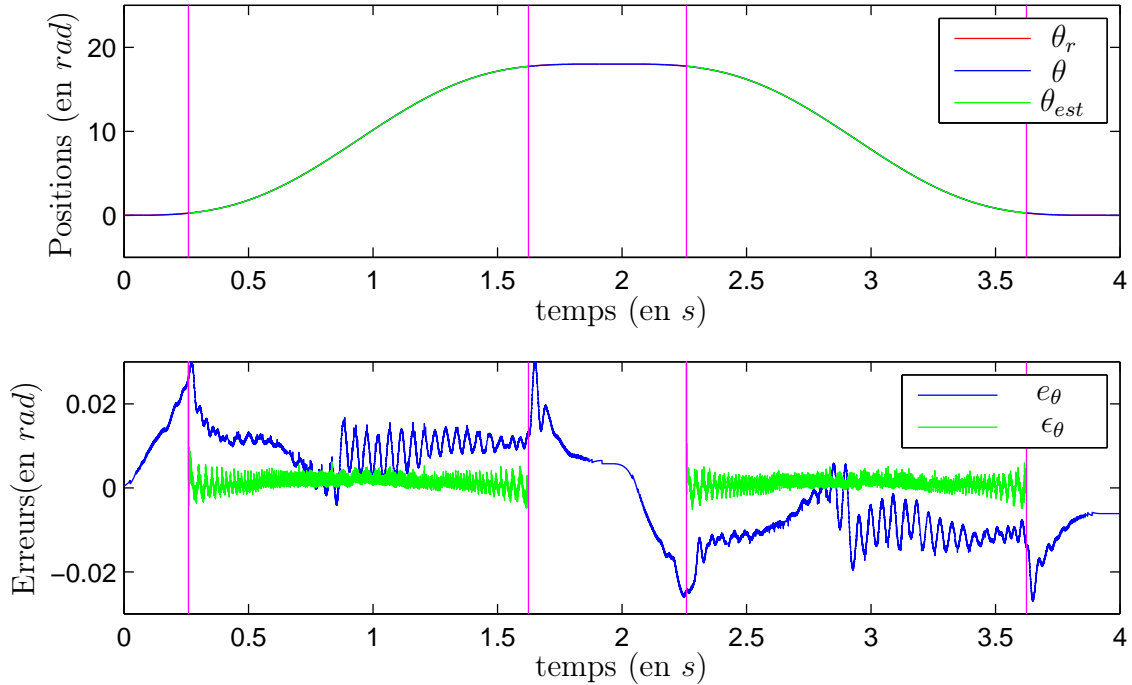


FIGURE 4.13 – Position de référence, position mesurée et position estimée (haut), erreur de suivi de position et erreur d’observation de la position (bas).

La vitesse estimée est tracée Figure 4.14. Cette figure montre la vitesse de référence (rouge), la vitesse mesurée (bleu) et la vitesse estimée (vert) dans le premier graphe et, dans le second graphe, l’erreur  $\epsilon_\omega$  entre la vitesse mesurée et la vitesse estimée (vert), et l’erreur de suivi de vitesse  $e_\omega$  (bleu). L’expérimentation montre que le moteur atteint une vitesse de  $20\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$  avec une précision autour de  $1\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Finalement l’accélération est filtrée par un filtre passe-bas en utilisant un filtre discret d’ordre trois (Butterworth). Le résultat d’estimation est tracé avec l’accélération de référence Figure 4.15.

**Remarque 4.3** *Il est important de rappeler que le moteur utilisé dans les expérimentations a un nombre de pôles élevé ( $n_p = 50$ ), ce qui limite la vitesse du moteur. Dans la littérature, le nombre de pôles des machines utilisées est généralement bien plus faible. Par*

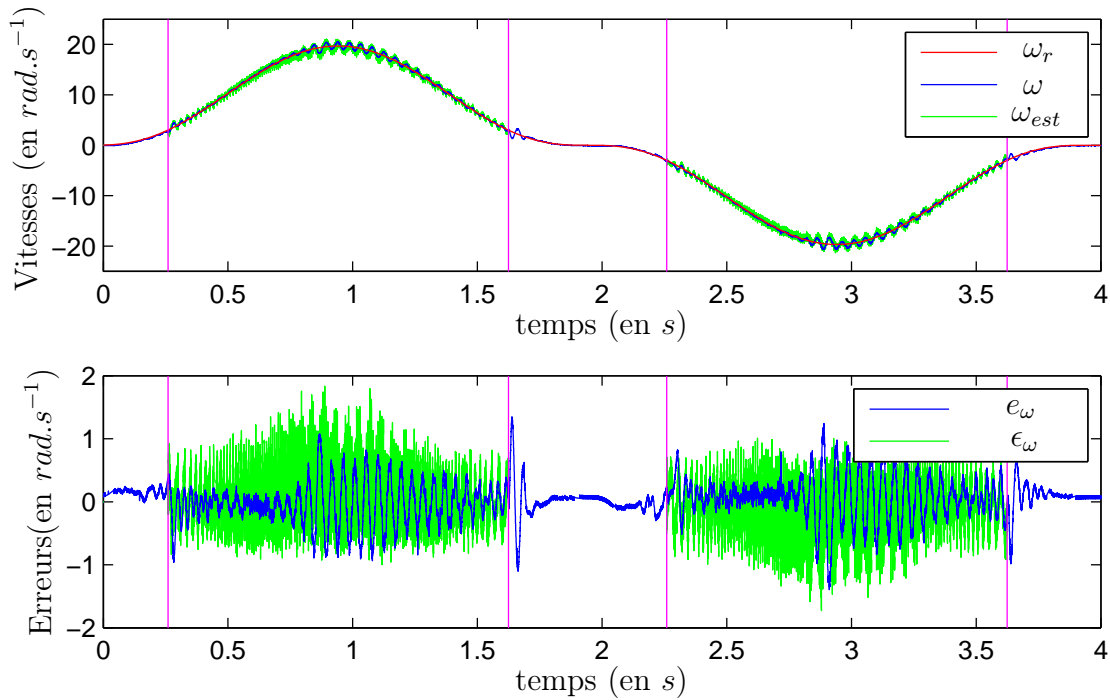


FIGURE 4.14 – (haut) Vitesse de référence, vitesse mesurée et vitesse estimée, (bas) erreur de suivi de vitesse et erreur d’observation de vitesse.

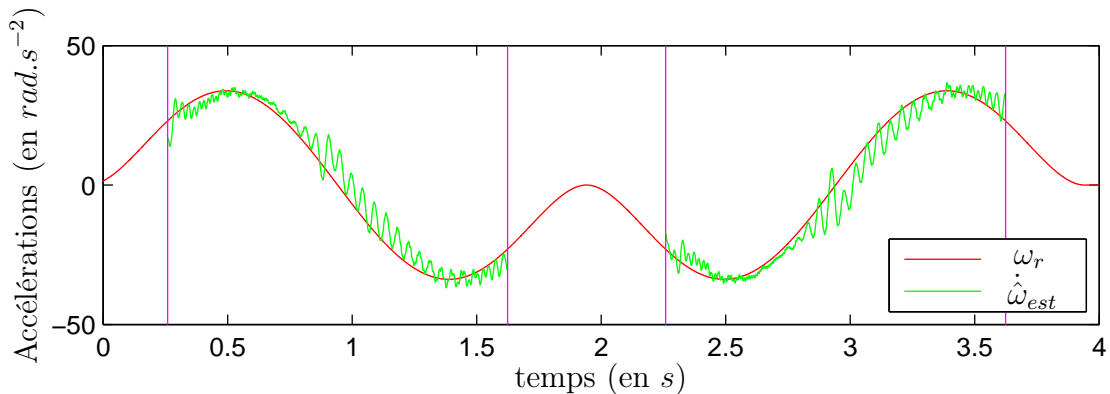


FIGURE 4.15 – Accélération de référence et accélération observée.

exemple, on a  $n_p = 4$  dans [Ortega 2011] et  $n_p = 3$  dans [Khlaief 2011]  $n_p = 3$ . De plus beaucoup d’articles parlent de “position électrique”, ce qui suppose qu’un tour du moteur représente en fait le passage d’une dent à la suivante. Dans notre cas, ceci est équivalent à multiplier la vitesse par 50.

Les résultats présentés dans cette section montrent l’efficacité de l’approche proposée.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux approches permettant d'identifier les paramètres du moteur hors ligne sans capteur mécanique. Dans chacun des cas, l'identification a été développée sur la base des équations du modèle. Les données ont été obtenues en utilisant le moteur en boucle ouverte, ce qui est possible avec ce type de moteur, bien que certaines plages de vitesses soient interdites et l'accélération limitée. Dans ce chapitre, nous avons montré que les informations recueillies étaient suffisantes pour déterminer tous les paramètres du modèle. De plus, les résultats obtenus sans capteur sont proches de ceux obtenus en utilisant les capteurs mécaniques dans le chapitre précédent. Cette identification fournit les paramètres initiaux du moteur.

Par la suite, nous avons proposé une approche de commande sans capteur du moteur en utilisant les capteurs de courants seulement. Le modèle est exprimé dans le nouveau repère tournant de référence  $f-g$ . En utilisant un observateur par modes glissants d'ordre 2, la position, la vitesse et l'accélération sont estimées. La position estimée est la position relative. Il est possible de connaître seulement la position entre deux dents. Cependant, en partant d'une position initiale connue, l'algorithme est capable de reconstruire la position. La position initiale peut être obtenue de plusieurs façons différentes. Notamment, pour des applications industrielles, cette position est connue à l'aide de capteurs sur la chaîne. Toutefois, ces capteurs ne peuvent pas être utilisés dans la commande. Les expériences montrent de bons résultats. En utilisant les variables observées, la loi de commande par modes glissants est capable de suivre la trajectoire désirée avec des erreurs faibles. De plus l'algorithme utilisé permet d'obtenir le signe de la vitesse. En comparaison avec la commande avec capteurs présentée dans le chapitre précédent, la vitesse maximale atteinte est inférieure, mais les performances sont meilleures qu'en boucle ouverte. De plus, la commande proposée a l'avantage d'être robuste aux perturbations.



# Conclusions et Perspectives

Dans ce mémoire nous avons traité l'identification, l'estimation et la commande de moteurs synchrones à aimants permanents. Différents algorithmes contribuant à l'utilisation des MSAP ont été présentés. Dans un premier temps, nous avons utilisé ce moteur en présence d'un capteur de position. Les résultats obtenus ont alors été utilisés comme références afin d'évaluer les performances sans capteur mécanique. Nous avons ainsi pu voir qu'il y avait un intérêt considérable à développer des lois de commande sans capteur pour les moteurs synchrones, et les moteurs à aimants permanents en général. L'objectif était de remplacer les capteurs de position et de vitesse par des capteurs de courants (souvent présents).

## Synthèse :

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la modélisation du MSAP. Les équations dynamiques ont été exprimées dans trois repère différents. Dans un premier temps dans le repère fixe  $a - b$ , mais ce repère est rarement utilisé pour la synthèse de commande car les variables de phases varient à hautes fréquences ( $n_p$  fois la vitesse de rotation). Afin de remédier à cet inconvénient le modèle a été exprimé dans un repère tournant  $d - q$ . Cependant ce repère n'est pas adapté à la commande sans capteur car la position mesurée est nécessaire pour l'obtenir. Nous avons alors introduit un nouveau repère que l'on appelle le repère  $f - g$ . Ce dernier présente les mêmes avantages que le repère  $d - q$ , mais il est adapté pour une perspective de commande sans capteur. Contrairement au modèle  $d - q$ , la position mesurée n'est pas nécessaire pour obtenir ce modèle. Il est obtenue à partir d'une position de référence à définir.

Afin de valider le modèle expérimentalement, une série d'identifications hors ligne a été réalisée. Ces identifications ont permis d'obtenir un jeu de paramètres nominaux afin de réaliser la commande. Ces identifications hors ligne ont été, dans un premier temps,



réalisées en présence de capteurs en utilisant des algorithmes d'identification simples tel que les moindres carrés. Une approche similaire a été appliquée au moteur en enlevant la dépendance des capteurs mécaniques. Sachant que les lois de commande sans capteur dépendent fortement des paramètres, il nous a semblé important de pouvoir identifier tous ces paramètres sans la présence de capteurs mécaniques. L'utilisation du repère de référence  $f - g$  nous a permis de développer des algorithmes pouvant identifier tous les paramètres du moteur sans l'utilisation du capteur de position ni de vitesse. Cette identification utilise en outre la théorie de l'élimination pour résoudre les problèmes liés à des équations non linéaires et sur-paramétrées. Les expérimentations ont montré des résultats très proches pour les algorithmes avec ou sans capteur. Les résultats valident par la même occasion le modèle choisi.

La synthèse de la commande a été réalisée en considérant la propriété de platitude du MSAP. Sur la base de cette théorie, il apparaît que le moteur peut être asservi par deux lois de commande, agissant sur la position et le courant direct. Nous avons alors appliqué les modes glissants d'ordre deux pour réaliser ces asservissements. Ils permettent en effet de garantir la stabilité en présence de perturbations interne ou externe. La commande, basée sur les résultats de [Nollet 2008] a été modifiée pour remplacer l'algorithme du Twisting échantillonné, plus sensible au bruit, par un algorithme du Twisting, auquel on ajoute un observateur (par modes glissants également) permettant d'estimer l'accélération. Cette variable est nécessaire pour calculer la variable de glissement. Les expérimentations ont montré de très bons résultats, les erreurs de suivi étant très faibles. Afin de supprimer les capteurs mécaniques, nous avons réalisé des observateurs par modes glissants. Basées sur les tensions d'entrées et la mesure des courants, les équations électriques du moteur ont été utilisées pour reconstruire la position et la vitesse du moteur. Ces observateurs ont été réalisés dans le repère  $f - g$ , obtenu à partir de la position de référence. Les estimations de la position et de la vitesse ont ainsi pu être utilisées pour supprimer les capteurs mécaniques dans la commande. La commande utilisée avec capteurs a également été transformée dans le repère  $f - g$ . Les résultats expérimentaux sont très prometteurs. Bien que la vitesse atteinte sans capteur soit inférieure à la vitesse atteinte avec capteurs, le suivi de trajectoire a une bonne précision. Les résultats sont bien meilleurs que ceux obtenus en boucle ouverte.

Finalement, nous avons développé des algorithmes d'identification des paramètres en ligne en présence de capteurs. Pour cela nous avons comparé l'identification à l'aide de la

---

méthode algébrique, et celle par modes glissants. On peut conclure que les deux méthodes présentent chacune des avantages et des inconvénients. Chacune d'elle ne peut pas être utilisée dans les mêmes situations. La méthode algébrique est plus difficile à mettre en place et a un temps de calcul plus long. Le calcul de la fenêtre d'intégration peut poser des problèmes pour la réalisation en temps réel. Cependant, elle est très efficace en présence de perturbations inconnues mais constantes (ou variant lentement dans le temps) et lorsque le nombre de paramètres est supérieur au nombre d'inconnues. Les modes glissants, sont quant à eux très simples à mettre en place, mais ils ne permettent pas d'identifier plus de paramètres que d'équations, ni d'identifier avec la technique employée, certains paramètres en présence de perturbations. Ils se révèlent cependant très utiles pour identifier ces perturbations. On peut donc conclure que ces techniques pour l'identification peuvent s'avérer complémentaires.

## Perspectives :

Ce manuscrit présente les résultats des travaux réalisés au cours de mon Doctorat. Ce travail a permis de résoudre un certain nombre de problèmes, mais également de relever d'éventuelles ouvertures, un certain nombre d'entre elles étant en cours d'étude.

L'identification de l'angle d'offset a été présenté hors ligne. Cette identification a été utilisée dans le but d'initialiser le codeur utilisé pour mesurer la position. Les outils présentés dans ce manuscrit ont montré qu'on est capable d'identifier les paramètres en ligne. Une identification de l'offset en ligne permettrait de détecter une erreur ou une panne du codeur. Cette erreur pourrait alors être corrigée ou la mesure de position pourrait être remplacée par son estimation sans capteur, permettant d'assurer le bon fonctionnement du moteur.

Au cours du manuscrit, un terme linéaire a été ajouté dans les observateurs. Il a pour effet de réduire le phénomène de réticence introduit par les modes glissants. On peut remarquer que ce terme n'a pas été ajouté dans les lois de commande par modes glissants. L'introduction de ce terme linéaire devrait avoir le même effet sur la commande. Ceci aurait pour conséquence de réduire l'amplitude de la commande. On pourrait ainsi atteindre notamment des vitesses plus élevées.

L'identification des paramètres par modes glissants a montré que la structure utili-

sée ne permettait pas d'identifier plusieurs paramètres à partir d'une seule équation. La structure utilisée agit sur la première dérivée par rapport au temps de la variables de glissements. Une structure plus adapté, agissant sur la deuxième dérivée par rapport au temps permettrait d'identifier deux paramètres simultanément. On pourrait notamment identifier les trois paramètres des équations électriques simultanément.

L'identification des paramètres en lignes du MSAP en présence de capteurs a été traitée. Cependant, l'identification des paramètres en ligne sans capteur mécanique est absente. Il serait souhaitable de développer des techniques similaires sans capteur. Cependant, les techniques similaires aux techniques développées hors ligne sans capteur ont montré que les équations obtenues ne sont pas linéaires, et sont sur-paramétrées. Ceci a été résolu hors ligne en utilisant la théorie de l'élimination, mais les calculs deviennent vite fastidieux et ne sont donc pas réalisables en ligne. En revanche, les estimations de la position et de la vitesses ne dépendent pas des paramètres  $J$ ,  $f_v$  et  $C_r$ . En utilisant ces estimations, il pourrait alors être possible d'identifier les paramètres mécaniques sans capteur.

La commande sans capteur réalisée dans ce manuscrit utilise le repère  $f - g$ , qui est calculé à partir de la position de référence. Nous avons vu que ce repère peut être dérivé, soit à partir de cette position de référence, soit à partir d'une estimation de la position. Il serait ainsi intéressant de développer cette commande en utilisant une estimation de la position. En effet, le repère resterait proche du repère  $d - q$  même si l'erreur entre la position de référence et la position réelle devenait considérable.

Les expérimentations ont été réalisées sur un moteur pas-à-pas, qui possède notamment un grand nombre de dents. Une comparaison des résultats sur un moteur ayant moins de dents serait profitable. Dans la modélisation, nous avons développé les équations en modélisant  $L_0$ , inductance moyenne d'un enroulement et  $L_2$ , variation moyenne-à-crête de l'inductance. Lors de l'identification, nous avons montré que  $L_2$  était très faible devant  $L_0$ . Nous l'avons alors négligée dans le reste du manuscrit. Il semblerait intéressant de développer des algorithmes applicables à des moteurs dans lesquels cette simplification n'est pas possible, comme par exemple les moteurs synchrones à aimants permanents intérieurs. Il serait également opportun de s'intéresser à d'autres types de moteurs synchrones, voire asynchrones.

# Annexe A

## Modes glissants d'ordre 1

Afin de comprendre le principe des modes glissants, il est intéressant de s'attarder sur la commande par modes glissants d'ordre 1. Ce rappel est extrait de [Floquet 2000] et pour plus de détails, il est recommandé de s'y reporter. Pour plus de simplicité, la classe de systèmes considérée ici sera mono-entrée et affine en entrée. Tous les résultats présentés peuvent être généralisés à des systèmes de la forme  $\dot{x} = f(x, u)$  [Sira-Ramírez 1989] et au cas multivariable.

### A.1 Définition

On considère le système nonlinéaire, affine en entrée :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ S(t, x) &= 0,\end{aligned}\tag{A.1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $f$  et  $g$  sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables, et  $u \in \mathbb{R}^m$  représente l'entrée de commande du système. La fonction  $S(t, x)$  est la fonction de *glissement* ou de *commutation*, une fonction suffisamment différentiable telle que  $\frac{\partial S}{\partial x}$  soit non nulle sur  $\mathbb{R}^n$ .

Des conditions suffisantes permettent de garantir l'existence d'un régime de glissement. Une fois la surface intersectée (fonction de glissement), les trajectoires restent dans un  $\epsilon$ -voisinage de  $S$ , et on dit que le régime de glissement est *idéal* si on a exactement  $S(t, x) = 0$ . Cette condition s'écrit sous la forme :

$$S\dot{S} < 0,\tag{A.2}$$

et est appelée *condition d'attractivité*.

La commande  $u$  est construite de façon à ce que les trajectoires du système soient amenées vers la surface de glissement et soient ensuite maintenues dans un voisinage de celle-ci. C'est une commande dite "à structure variable" définie par :

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } S(t, x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } S(t, x) < 0 \end{cases}, u^+ \neq u^-, \quad (\text{A.3})$$

$u^+$  et  $u^-$  étant des fonctions continues. Le caractère discontinu de la loi de commande permet d'obtenir une convergence en temps fini sur la surface ainsi que des propriétés de robustesse vis-à-vis de certaines perturbations.

## A.2 Condition d'invariance de la surface de glissement

La méthode dite de la *commande équivalente* [Utkin 1992], est un moyen de déterminer le comportement du système lorsqu'il est restreint à la surface  $\{S(t, x) = 0\}$ . Celui-ci est donné par les conditions d'invariance de la surface :

$$\begin{aligned} S(t, x) &= 0 \quad \forall t, \\ \frac{\partial S}{\partial x} [f(x) + g(x)u_e] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La deuxième équation est obtenue en posant  $\dot{S}(t, x) = 0$  et  $u_e$  est appelée *commande équivalente* et s'exprime donc de la façon suivante :

$$u_e(x) = - \left[ \frac{\partial S}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} f(x). \quad (\text{A.5})$$

Un exemple de commande classique pour le système (A.1) est le suivant :

$$u = u_e - K \left[ \frac{\partial S}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \text{sgn}(S), \quad (\text{A.6})$$

où  $K$  est une constante positive et  $\text{sgn}$  est la fonction signe tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On peut alors vérifier que :

$$S\dot{S} = -K|S| < 0, \quad (\text{A.7})$$

et donc qu'un régime glissant s'établit sur  $S = 0$ .

### A.3 Dynamiques en régime de glissement idéal

D'après l'expression de la commande équivalente, il s'ensuit que le mouvement de  $S$  est gouverné par l'équation  $\dot{x}_e = f(x_e) + g(x_e)u_e$ , ou encore

$$\begin{cases} \dot{x}_e = \left[ I - g(x_e) \left[ \frac{\partial S}{\partial x_e} g(x_e) \right]^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_e} \right] f(x_e) \\ S(t, x_e) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

$\frac{\partial S}{\partial x}$  étant non nul sur  $\mathbb{R}^n$ , cela implique que l'on peut exprimer  $m$  états en fonction des  $(n-m)$  autres. Ainsi, en régime glissant, les dynamiques évoluent sur un espace d'état réduit dont la dimension est  $(n - m)$

### A.4 Exemple

Afin de mieux comprendre la commande par modes glissants d'ordre un, il est intéressant de l'appliquer à un exemple.

Soit un système régi par les équations suivantes (double intégrateur) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u + p(t), \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

où  $x = [x_1, x_2]^T$  est l'état du système,  $u$  la commande et  $p$  une perturbation. On définit la surface de glissement suivante :

$$S = x_1 + kx_2 = 0. \quad (\text{A.10})$$

Dans un premier temps, si on choisit  $k = 0$ , en prenant une loi de commande  $u = -U\text{sgn}(S)$ ,  $U > 0$ , on observe qu'en l'absence de frottements, le système n'est pas stabilisé : on obtient une trajectoire périodique comme le montre la figure A.1.

Pour  $k > 0$ , la commande permet de stabiliser le système. La figure A.2 montre la

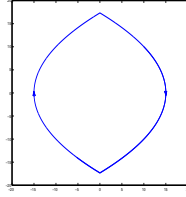


FIGURE A.1 – Trajectoire dans le plan de phase ( $u = -U\text{sgn}(x_1)$ ).

stabilisation pour différentes valeurs de  $U$ . La stabilisation par modes glissants se fait en deux phases : la phase d'approche de la surface, et la phase de glissement le long de cette surface. Le réglage du paramètre  $U$  permet de diminuer la phase d'approche de la surface et donc d'améliorer les performances des modes glissants. La figure A.3 représente

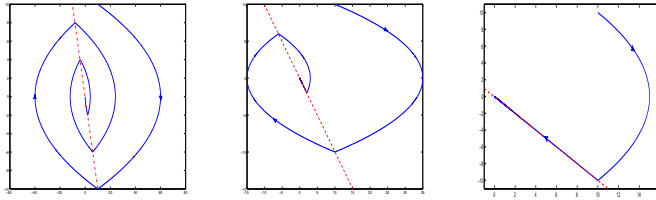


FIGURE A.2 – Trajectoire dans le plan de phase ( $u = -U\text{sgn}(x_1 + kx_2)$ ).

la commande. On retrouve clairement les deux phases, la phase d'approche (en temps fini) et la phase de glissement. Lors de la phase de glissement on observe des commutations à très haute fréquence.

**Etude de la stabilité** La surface de glissement étant choisie et il est important de la rendre attractive. (A.10), est une surface du premier ordre, définissant la dynamique du système, où  $k$  est la constante de temps de la dynamique équivalente en régime de glissement. Prenons la surface :

$$S = x_1 + kx_2. \quad (\text{A.11})$$

Sa dérivée première est :

$$\dot{S} = x_2 + k(u + p). \quad (\text{A.12})$$

Pour des perturbations  $p$  nulles, lorsque les trajectoires du système évoluent exactement sur la surface,  $\dot{s} = 0$ , ceci implique :

$$u_{eq} = -\frac{x_2}{k}, \quad (\text{A.13})$$

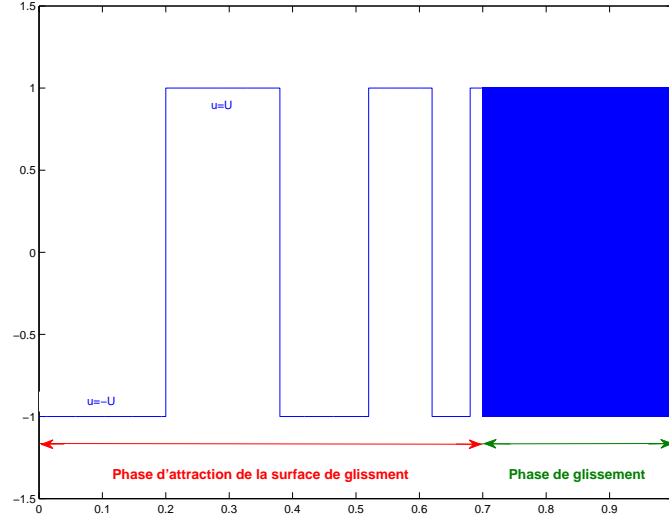


FIGURE A.3 – Fréquence des commutations.

où  $u_{eq}$  est la commande équivalente.

Afin de rendre la surface  $S = 0$  attractive, donc de contraindre le système à suivre la trajectoire imposée, on ajoute la commande discontinue (ou à structure variable) définie par :

$$u_{disc} = -U \operatorname{sgn}(S). \quad (\text{A.14})$$

On a donc la commande globale :

$$u = u_{eq} + u_{disc}. \quad (\text{A.15})$$

En considérant cette commande, (A.12) devient :

$$\dot{S} = k(U \operatorname{sgn}(S) + p) \quad (\text{A.16})$$

On a alors :

$$S\dot{S} < -|S|kU < 0. \quad (\text{A.17})$$

La condition d'attractivité est ainsi vérifiée, permettant de garantir l'existence d'un régime de glissement. Il est cependant intéressant de noter que la condition (A.2) n'est pas suffisante pour assurer une convergence en temps fini vers la surface. En effet, si on reprend



le même exemple mais en modifiant la commande comme suit :

$$u = -\frac{x_2}{k} - kS,$$

on obtient :

$$\dot{S} = -kS.$$

La condition (A.2) est vérifiée, mais la convergence vers  $S = 0$  n'est qu'asymptotique puisque  $S = S(0)e^{-kt}$ . C'est pourquoi on remplace souvent (A.2) par la condition dite de  $\eta$ -attractivité :

$$S\dot{S} \leq -\eta|S|, \text{ avec } \eta > 0, \quad (\text{A.18})$$

qui assure la convergence en temps fini vers  $S = 0$ , étant donné que par intégration :

$$|S(t)| - |S(0)| \leq -\eta t, \quad (\text{A.19})$$

ce qui montre que le temps  $t_e$  requis pour atteindre la surface, partant d'une condition initiale  $S(0)$ , est bornée par :

$$t_e \leq \frac{|S(0)|}{\eta}. \quad (\text{A.20})$$

Si on considère la perturbation, la condition est alors vérifiée si on prend :

$$U > |p|_{max} + \frac{\eta}{k}, \quad (\text{A.21})$$

avec  $|p|_{max}$ , la borne supérieure de la perturbation.

Lorsque le régime de glissement prend place, le système est gouverné par la dynamique d'ordre réduit :

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{k}x_1 = x_2. \quad (\text{A.22})$$

### Phénomène de réticence

Dans la pratique, un régime glissant idéal n'existe pas car il est impossible que la commande commute avec une fréquence infinie. En présence d'imperfections de commutation, tel que des retards de commutations et des petites constantes de temps au niveau des actionneurs, les discontinuités dans le retour d'état produisent un comportement dynamique particulier au voisinage de la surface appelé *chattering* en anglais, ou encore *réticence* ou *broutement*, en français (Figure A.4). Ce phénomène est un des principaux désavantages des modes glissants. Il est susceptible d'exciter des modes à haute fréquence

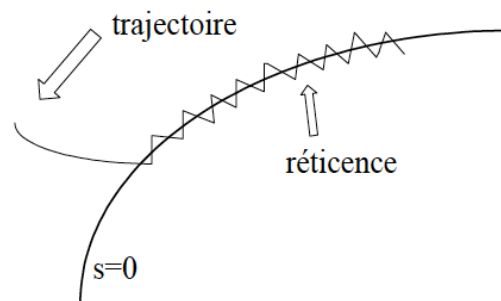


FIGURE A.4 – Phénomène de rétissance.

non modélisés, ceci pouvant même conduire à l’instabilité. De plus, les oscillations posent un problème au niveau mécanique pouvant provoquer une usure prématurée, ainsi que des pertes énergétiques non négligeables au niveau des circuits de puissances électriques. De nombreuses recherches traitent ce problème. Une méthode simple pour limiter cet effet est de remplacer la fonction “signe” par des fonctions “sigmoïdes” plus lisses.

Une autre solution pour remédier au phénomène de rétissance est basée sur les modes glissants d’ordre supérieur, traités dans le paragraphe 1.3.



# Annexe B

## Théorie de l'élimination

Cette annexe décrit avec plus de détails l'identification des paramètres utilisant la théorie de l'élimination.

Le problème est de maximiser :

$$R_e(P_{\min}) = \sum_{n=N_0}^{N_1} \|y(n) - W(n)P\|^2, \quad (\text{B.1})$$

soumis aux contraintes :

$$P_2 = P_1^2, \quad (\text{B.2})$$

et avec  $P_{\min} = [ P_1 \ P_3 ]^T$ . Le problème devient :

$$\begin{aligned} R_e(P_{\min}) &= \sum_{n=1}^N \|y(n) - W(n)P\|^2 \Big|_{P_2=P_1^2} \\ &= R_y - 2R_{Wy}^T P|_{P_2=P_1^2} \\ &\quad + (P^T R_W P)|_{P_2=P_1^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

avec  $R_y \in \mathbb{R}$ ,  $R_{Wy} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ ,  $R_W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Le minimum est obtenu en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} \pi_1(P_{\min}) &\triangleq \frac{\partial R_e(P_{\min})}{\partial P_1} = 0, \\ \pi_2(P_{\min}) &\triangleq \frac{\partial R_e(P_{\min})}{\partial P_3} = 0, \end{aligned}$$

qui sont des polynômes dépendant des paramètres  $P_1$  et  $P_3$ . Les degrés des polynômes sont donnés Table B.1

	deg en $P_1$	deg en $P_3$
$\pi_1(P_{\min})$	1	2
$\pi_2(P_{\min})$	1	3

TABLE B.1 – Degrés de  $\pi_1$  et  $\pi_3$  avant élimination de  $P_1$ .

On calcule la résultante pour éliminer  $P_1$  :

$$r_1(P_3) = \text{Res}(\pi_1, \pi_2, P_1),$$

de telle sorte que  $r_1(P_3)$  soit un polynôme en  $P_3$ . Les degrés sont reportés Table B.2. En

	deg en $P_1$	deg en $P_3$
$r_1(P_3)$	0	3

TABLE B.2 – Degré de la résultant.

résolvant  $r_1(P_3) = 0$ , on obtient trois solutions  $P_3 = \{0.072, 0.032 \pm 0.041j\}$ .  $P_3$  étant un paramètres physique, la solution doit être réelle. La solution complexe conjugué n'est pas prise en compte.

En substituant  $P_3$  par sa valeur estimée dans  $\pi_1(P_{\min})$  (ou  $\pi_2(P_{\min})$ ) et en résolvant  $\pi_1(P_{\min}) = 0$  on obtient un ensemble de trois solutions candidates. Celle que donne le plus petit carré de l'erreur est choisie. Les trois candidates ainsi que l'erreur sont données Table B.3.

	$L$	$K$	$E^2(P_{\min})$
Solution 1	0.07160	0.26758	$1.7772e + 09$
Solution 2	0.00246	0.26758	$6.8341e + 05$
Solution 3	0.01048	0.26758	$1.6839e + 03$

TABLE B.3 – Candidate solutions for the identification,

Le plus petit carré de l'erreur est obtenu pour la troisième solution. Le vecteur de sortie et l'estimation pour chacune des solutions candidates sont tracés sur la Figure B.1. On observe que la bonne solution est la plus proche des données mesurées.

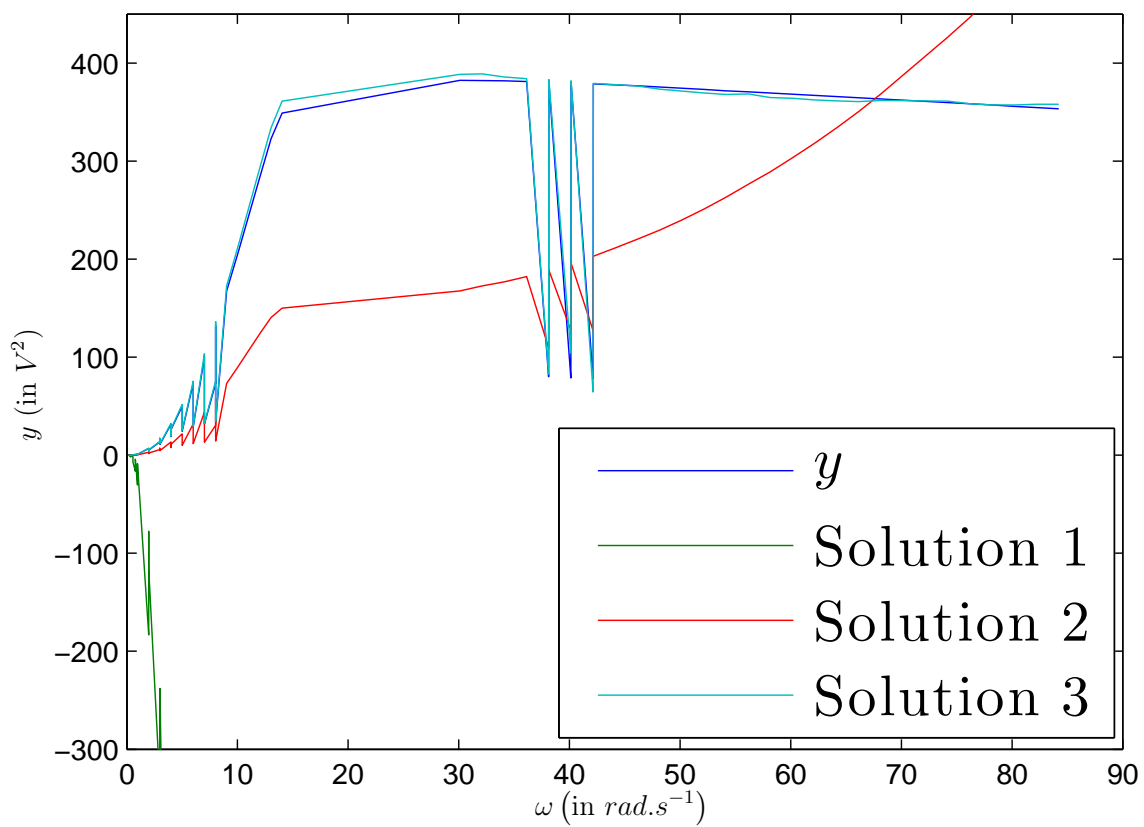


FIGURE B.1 – Comparaison entre les trois solutions candidates.



# Bibliographie

- [Alwi 2008] H. Alwi and C. Edwards. *Fault Detection and Fault-Tolerant Control of a Civil Aircraft Using a Sliding-Mode-Based Scheme*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 16, no. 3, pages 499–510, 2008.
- [Barbot 2010] J.-P. Barbot and T. Floquet. *Iterative higher order sliding mode observer for nonlinear systems with unknown inputs*. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, vol. 17, no. 6, pages 1019–1033, 2010.
- [Bartolini 2003] G. Bartolini, A. Pisano, E. Punta and E. Usai. *A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems*. International Journal of Control, vol. 76, no. 9-10, pages 875–892, 2003.
- [Belkoura 2009] L. Belkoura, J.-P. Richard and M. Fliess. *Parameters estimation of systems with delayed and structured entries*. Automatica, vol. 45, no. 5, pages 1117–1125, 2009.
- [Belkoura 2010] L. Belkoura, T. Floquet, K. Ibn Taarit, W. Perruquetti and Y. Orlov. *Estimation problems for a class of impulsive systems*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 21, no. 10, pages 1066–1079, 2010.
- [Bendjedja 2012] M. Bendjedja, Y. Ait-Amirat, B. Walther and A. Berthon. *Position Control of a Sensorless Stepper Motor*. IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 27, no. 2, pages 578–587, 2012.
- [Blauch 1993] A.-J. Blauch, M. Bodson and J.-N. Chiasson. *High-speed parameter estimation of stepper motors*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 1, no. 4, pages 270–279, 1993.
- [Bodson 1993] M. Bodson, J.-N. Chiasson, R.-T. Novotnak and R.-B. Rekowski. *High performance nonlinear feedback control of a permanent magnet stepper motor*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 1, no. 1, pages 5–14, 1993.
- [Bolognani 1997] S. Bolognani, M. Zigliotto and K. Unterkofler. *On-line parameter com-*



- missioning in sensorless PMSM drives*. In 7th IEEE International Symposium on Industrial Electronics, volume 2, pages 480–484, Guimaraes, Portugal, 1997.
- [Bolognani 2001] S. Bolognani, M. Zigliotto and M. Zordan. *Extended-range PMSM sensorless speed drive based on stochastic filtering*. IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 16, no. 1, pages 110–117, January 2001.
- [Butt 2008] Q.-R. Butt and A.-I. Bhatti. *Estimation of Gasoline-Engine Parameters Using Higher Order Sliding Mode*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 55, no. 11, pages 3891–3898, 2008.
- [Canale 2008] M. Canale, L. Fagiano, A. Ferrara and C. Vecchio. *Vehicle Yaw Control via Second-Order Sliding-Mode Technique*. IEEE Control Systems Magazine, vol. 55, no. 11, pages 3908–3916, 2008.
- [Chiasson 2011] J.-N. Chiasson and A. Oteafy. *Elimination Theory for Nonlinear Parameter Estimation*. In Jean Levine and Philippe Mullhaupt, editeurs, Advances in the Theory of Control, Signals and Systems with Physical Modeling, volume 407 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 65–75. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [D’Andrea Novel 2010] B. D’Andrea Novel, C. Boussard, M. Fliess, O. El Hamzaoui, H. Mounier and B. Steux. *Commande sans modèle de la vitesse longitudinale d’un véhicule électrique*. In 6ième Conférence Internationale Francophone d’Automatique, Nancy, France, 2010.
- [Defoort 2008] M. Defoort, T. Floquet, A. Kökösy and W. Perruquetti. *Sliding-Mode Formation Control for Cooperative Autonomous Mobile Robots*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 55, no. 11, pages 3944–3953, 2008.
- [Defoort 2009] M. Defoort, F. Nollet, T. Floquet and W. Perruquetti. *A Third-Order Sliding-Mode Controller for a Stepper Motor*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 56, no. 9, pages 3337–3346, 2009.
- [Delpoux 2011] R. Delpoux and T. Floquet. *On-line parameter estimation of a magnetic bearing*. In 19th Mediterranean Conference on Control Automation, pages 388–393, Corfu, Greece, 2011.
- [Drakunov 2005] S.-V. Drakunov, T. Floquet and W. Perruquetti. *Stabilization and tracking control for an extended Heisenberg system with a drift*. Systems & Control Letters, vol. 54, no. 5, pages 435–445, 2005.
- [Eckhardt 2004] S. Eckhardt and J. Rudolph. *High Precision Synchronous Tool Path*

- 
- Tracking with an AMB Machine Tool Spindle.* In 9th International Symposium on Magnetic Bearings, Lexington, Kentucky, USA, 2004.
- [Eckhardt 2008] S. Eckhardt, T. Floquet and J. Rudolph. *Stabilization in a new type of axial-radial magnetic bearings.* 8th European Conference on Magnetic Sensors and Actuators, 2008.
- [Edwards 1998] C. Edwards and S.-K. Spurgeon. *Sliding mode control - Theory and application.* Taylor & Francis, 1998.
- [Emel'yanov 1986a] S.-V. Emel'yanov, S.-V. Korovin and L.-V. Levantovsky. *Drift algorithm in control of uncertain processes.* Problems of Control and Information Theory, vol. 15, no. 6, pages 425 – 438, 1986.
- [Emel'yanov 1986b] S.-V. Emel'yanov, S.-V. Korovin and L.-V. Levantovsky. *Higher Order Sliding Modes in the Binary Control System.* Soviet Physics, vol. 31, no. 4, pages 291–293, 1986.
- [Emel'yanov 1996] S.-V. Emel'yanov, S.-K. Korovin and A. Levant. *High-order sliding modes in control systems.* Computational Mathematics and Modeling, vol. 7, no. 3, pages 294–318, 1996.
- [Engelmann 1995] R.-H. Engelmann and W.-H. Middelndorf. *Handbook of electric motors.* Electrical engineering and electronics. M. Dekker, 1995.
- [Ezzat 2010] M. Ezzat, J. De Leon, N. Gonzalez and A. Glumineau. *Observer-controller scheme using high order sliding mode techniques for sensorless speed control of permanent magnet synchronous motor.* In 49th IEEE Conference on Decision and Control, pages 4012–4017, Atlanta, Georgia, USA, 2010.
- [Fiter 2010] C. Fiter, T. Floquet and J. Rudolph. *Sensorless Control of a Stepper Motor Based on Higher Order Sliding Modes.* In 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Bologna, Italy, 2010.
- [Fliess 1990] M. Fliess. *Some basic structural properties of generalized linear systems.* Systems & Control Letters, vol. 15, no. 5, pages 391–396, 1990.
- [Fliess 1995] M. Fliess, J. Lévine and P. Rouchon. *Flatness and defect of nonlinear systems : Introductory theory and examples.* International Journal of Control, vol. 61, pages 1327–1361, 1995.
- [Fliess 2003a] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier and H. Sira-Ramírez. *Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples.* In G. Silva-Navarro H. Sira-Ramirez, editeur, Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation, pages pp. 1–21, Mexico, Mexique, 2003. Editorial Lagares.

- [Fliess 2003b] M. Fliess and H. Sira-Ramírez. *An algebraic framework for linear identification*. ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, vol. 9, pages 151–168, January 2003.
- [Fliess 2005a] M. Fliess, C. Join, M. Mboup and A. Sedoglavic. *Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos*. In GRETSI, pages 136–139, Louvain-la-Neuve, Belgium, 2005.
- [Fliess 2005b] M. Fliess, C. Join, M. Mboup and H. Sira-Ramírez. *Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures*. In GRETSI, Louvain-la-Neuve, Belgium, 2005.
- [Fliess 2006] M. Fliess. *Analyse non standard du bruit*. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Série 1, Mathématiques, vol. 342, pages 797–802, 2006.
- [Fliess 2008a] M. Fliess, C. Join and H. Sira-Ramírez. *Non-linear estimation is easy*. International Journal on Modelling Identification and Control, vol. 4, no. 1, pages 12–27, 2008.
- [Fliess 2008b] M. Fliess and H. Sira-Ramírez. *Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques*. In H Garnier & L Wang, editeur, Identification of Continuous-time Models from Sampled Data, Advances in Industrial Control, pages 362–391. Springer, 2008.
- [Fliess 2009] M. Fliess and C. Join. *Model-free control and intelligent PID controllers : towards a possible trivialization of nonlinear control ?* In 15th IFAC Symposium on System Identification, 2009.
- [Fliess 2010a] M. Fliess and C. Join. *Delta Hedging in Financial Engineering : Towards a Model-Free Approach*. In 18th Mediterranean Conference on Control and Automation, Marrakech, Maroc, 2010. IEEE.
- [Fliess 2010b] M. Fliess, C. Join and M. Mboup. *Algebraic change-point detection*. Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, vol. 21, pages 131–143, 2010.
- [Floquet 2000] T. Floquet. *Contributions à la commande par modes glissants d'ordre supérieur*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, 2000.
- [Floquet 2003] T. Floquet, J.-P. Barbot and W. Perruquetti. *Higher-order sliding mode stabilization for a class of nonholonomic perturbed systems*. Automatica, vol. 39, no. 6, pages 1077–1083, 2003.

- 
- [Floquet 2006] T. Floquet, J.-A. Twiddle and S.-K. Spurgeon. *Parameter estimation via second order sliding modes with application to thermal modelling in a high speed rotating machine*. In 2006 IEEE International Conference on Industrial Technology, pages 2635–2639, Mumbai, India, 2006.
- [Fridman 1996] L. Fridman and A. Levant. *Higher order sliding modes as a natural phenomenon in control theory*. In Franco Garofalo and Luigi Glielmo, editors, *Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques*, volume 217 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 107–133. Springer Berlin, Heidelberg, 1996.
- [Gédouin 2009] P.-A. Gédouin, C. Join, E. Delaleau, J.-M. Bourgeot, S. Arbab-Chirani and S. Calloch. *A new control strategy for shape memory alloys actuators*. In 8th European Symposium on Martensitic Transformations, Prague, Czech Republic, 2009.
- [Gensior 2007] A. Gensior, J. Weber, H. Guldner and J. Rudolph. *An algebraic parameter identification algorithm and asymptotic observers for estimation of the load of a boost converter*. In 2007 IEEE International Symposium on Industrial Electronics, pages 7–11, Athens, Greece, 2007.
- [Gensior 2008] A. Gensior, J. Weber, J. Rudolph and H. Guldner. *Algebraic Parameter Identification and Asymptotic Estimation of the Load of a Boost Converter*. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, no. 9, pages 3352–3360, 2008.
- [Goedel 1984] C. Goedel. *Contribution à la modélisation, à l'alimentation et à la commande des moteurs pas à pas, PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine*, 1984.
- [Grochmal 2009] T.-R. Grochmal and A. Lynch. *Control of a self-bearing servomotor*. *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 29, no. 5, pages 74–92, 2009.
- [Hamida 2012] M.-A. Hamida, J. De Leon, A. Glumineau and R. Boisliveau. *Adaptive Interconnected Observer for Sensorless Control of PM Synchronous Motors with Online Parameters Identification*. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012.
- [Hermann 1977] R. Hermann and A. Krener. *Nonlinear controllability and observability*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 5, pages 728–740, October 1977.
- [Hsu 2003] C.-T. Hsu and S.-L. Chen. *Nonlinear control of a 3-pole active magnetic bearing system*. *Automatica*, vol. 39, no. 2, pages 291–298, 2003.

- [Ibn Taarit 2011] K. Ibn Taarit, L. Belkoura, M. Ksouri and J.-P. Richard. *A fast identification algorithm for systems with delayed inputs*. International Journal of Systems Science, vol. 42, no. 3, pages 449–456, 2011.
- [Ichikawa 2004] S. Ichikawa, M. Tomita, S. Doki and S. Okuma. *Sensorless control for all types of synchronous motors using an on-line parameter identification*. In 30th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society, volume 1, pages 975 – 980, Busan, South Korea, 2004.
- [Ichikawa 2006] S. Ichikawa, M. Tomita, S. Doki and S. Okuma. *Sensorless control of permanent-magnet synchronous motors using online parameter identification based on system identification theory*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 53, no. 2, pages 363–372, 2006.
- [Iqbal 2011] M. Iqbal, A.-I. Bhatti, S.-I. Ayubi and Q. Khan. *Robust Parameter Estimation of Nonlinear Systems Using Sliding-Mode Differentiator Observer*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 58, no. 2, pages 680–689, 2011.
- [Isidori 1995] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 3rd édition, 1995.
- [Jang 2004] J.-H. Jang, J.-I. Ha, M. Ohto, K. Ide and S.-K. Sul. *Analysis of permanent-magnet machine for sensorless control based on high-frequency signal injection*. IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 40, no. 6, pages 1595–1604, 2004.
- [Johnson 1999] J.-P. Johnson, M. Ehsani and Y. Guzelgunler. *Review of sensorless methods for brushless DC*. In 34th IEEE Industry Applications Conference, volume 1, pages 143 –150, Phoenix, Arizona USA, 1999.
- [Join 2008a] C. Join, J. Masse and M. Fliess. *Etude préliminaire d'une commande sans modèle pour papillon de moteur*. Journal Européen des Systèmes Automatisés, vol. 42, no. 2-3, pages 337–354, 2008.
- [Join 2008b] C. Join and S. Tabbone. *Robust curvature extrema detection based on new numerical derivation*. In Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems, Juan-les-Pins, France, 2008. Springer.
- [Jung 1998] D.-H. Jung and I.-J. Ha. *An efficient method for identifying the initial position of a PMSM with an incremental encoder*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 45, no. 4, pages 682–685, 1998.

- 
- [Khlaief 2011] A. Khlaief, M. Bendjedja, M. Boussak and M. Gossa. *A Nonlinear Observer for High Performance Sensorless Speed Control of IPMSM Drive*. IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 27, no. 6, pages 3028–3040, 2011.
- [Kim 2002] H. Kim and R.-D. Lorenz. *Improved current regulators for IPM machine drives using on-line parameter estimation*. In 37th IEEE Industry Applications Conference, volume 1, pages 86 – 91, Pittsburgh, Pennsylvania USA, 2002.
- [Kim 2011] H. Kim, J. Son and J. Lee. *A High-Speed Sliding-Mode Observer for the Sensorless Speed Control of a PMSM*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 58, no. 9, pages 4069–4077, 2011.
- [Konghirun 2005] M. Konghirun. *Automatic Offset Calibration of Quadrature Encoder Pulse Sensor for Vector Controlled Drive of Permanent Magnet Synchronous Motors*. In 2005 IEEE Region 10 TENCN, pages 1–5, Melbourne, Australia, 2005.
- [Laghrouche 2003] S. Laghrouche, F. Plestan, A. Glumineau and R. Boisliveau. *Robust second order sliding mode control for a permanent magnet synchronous motor*. In 2003 American Control Conference, volume 5, pages 4071 – 4076, Denver, Colorado USA, 2003.
- [Landau 1993] I.-D. Landau. Identification et commande des systèmes. Traité des nouvelles technologies. Série Automatique. Hermès, 1993.
- [Lee 2004] K.-W. Lee, D.-H. Jung and I.-J. Ha. *An online identification method for both stator resistance and back-EMF coefficient of PMSMs without rotational transducers*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 51, no. 2, pages 507–510, 2004.
- [Levant 1993] A. Levant. *Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control*. International journal of control, vol. 58, no. 6, pages 1247–1263, 1993.
- [Levant 2001] A. Levant. *Universal single-input-single-output (SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, no. 9, pages 1447–1451, 2001.
- [Lévine 1996] J. Lévine, J. Lottin and J.-C. Ponsart. *A nonlinear approach to the control of magnetic bearings*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 4, no. 5, pages 524–544, 1996.
- [Liu 2008] D.-Y. Liu, O. Gïbaru, W. Perruquetti, M. Fliess and M. Mboup. *An error analysis in the algebraic estimation of a noisy sinusoidal signal*. In 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, Ajaccio, France, 2008.

- [Liu 2011] D.-Y. Liu, O. Gibaru and W. Perruquetti. *Error analysis of Jacobi derivative estimators for noisy signals*. Numerical Algorithms, vol. 58, no. 1, pages 53–83, 2011.
- [Löwis 2000] J.-V. Löwis and J. Rudolph. *Flatness-based trajectory tracking control of a rotating shaft*. In 7th International Symposium on Magnetic Bearings, pages 299–304, Zurich, Switzerland, 2000.
- [Martinez 2008] R. Martinez, J. Alvarez and Y. Orlov. *Hybrid Sliding-Mode-Based Control of Underactuated Systems With Dry Friction*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 55, no. 11, pages 3998–4003, 2008.
- [Mboup 2007a] M. Mboup. *Parameter estimation via differential algebra and operational calculus*. Research report, Université Paris Descartes, 2007.
- [Mboup 2007b] M. Mboup, C. Join and M. Fliess. *A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control*. In 15th Mediterranean Conference on Control and Automation, Athens, Greece, 2007.
- [Mboup 2009] M. Mboup, C. Join and M. Fliess. *Numerical differentiation with annihilators in noisy environment*. Numerical Algorithms, vol. 50, pages 439–467, 2009.
- [Michel 2010] L. Michel, C. Join, M. Fliess, P. Sicard and A. Chériti. *Model-free control of dc/dc converters*. In 12th IEEE Workshop on Control and Modeling for Power Electronics, Boulder, Colorado, États-Unis, 2010.
- [Morales 2010] R. Morales, V. Feliu and H. Sira-Ramírez. *Nonlinear Control for Magnetic Levitation Systems Based on Fast Online Algebraic Identification of the Input Gain*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 19, no. 4, pages 757–771, 2010.
- [Nahid Mobarakeh 2001] B. Nahid Mobarakeh and F.-M. Sargos. *On-line Identification of PMSM Electrical Parameters Based on Decoupling Control*. In 36th IEEE Industry Applications Conference, volume 1, pages 266–273, Witwatersrand, South Africa, 2001.
- [Nee 2000] H.-P. Nee, L. Lefevre, P. Thelin and J. Soulard. *Determination of d and q reactances of permanent-magnet synchronous motors without measurements of the rotor position*. IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 36, no. 5, pages 1330–1335, 2000.
- [Neves 2006] A. Neves, M. Mboup and M. Fliess. *An algebraic receiver for full response CPM demodulation*. In 2006 IEEE International Telecommunications Symposium, Fortaleza-CE, Brésil, 2006.

- 
- [Nollet 2008] F. Nollet, T. Floquet and W. Perruquetti. *Observer-based second order sliding mode control laws for stepper motors*. Control Engineering Practice, vol. 16, no. 4, pages 429–443, 2008.
- [Orlov 2009] Y. Orlov. Discontinuous Systems. Springer-Verlag, 2009.
- [Ortega 2011] R. Ortega, L. Praly, A. Astolfi, J. Lee and K. Nam. *Estimation of Rotor Position and Speed of Permanent Magnet Synchronous Motors With Guaranteed Stability*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 19, no. 3, pages 601–614, 2011.
- [Park 1929] R.-H. Park. *Two-reaction theory of synchronous machines generalized method of analysis-part I*. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, vol. 48, no. 3, pages 716–727, 1929.
- [Perruquetti 2002] W. Perruquetti and J.-P. Barbot. Sliding mode control in engineering. Control Engineering Series, Marcel Dekker Inc, New York, 2002.
- [Pisano 2008] A. Pisano, A. Davila, L. Fridman and E. Usai. *Cascade control of PM-DC drives via second-order sliding mode technique*. In 10th International Workshop on Variable Structure Systems, pages 268–273, Antalya, Turkey, 2008.
- [Poulain 2008] F. Poulain, L. Praly and R. Ortega. *An observer for permanent magnet synchronous motors with currents and voltages as only measurements*. In 47th IEEE Conference on Decision and Control, pages 5390–5395, Mexico, Mexique, 2008.
- [Riachy 2008] S. Riachy, Y. Orlov, T. Floquet, R. Santiesteban and J.-P. Richard. *Second order sliding mode control of underactuated Mechanical systems I : Local stabilization with application to an inverted pendulum*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 18, no. 4-5, pages 529–543, 2008.
- [Riachy 2010] S. Riachy, Y. Bachalany, M. Mboup and J.-P. Richard. *Différentiation numérique multivariable I : estimateurs algébriques et structure*. In 6ième Conférence Internationale Francophone d’Automatique, Nancy, France, 2010.
- [Riachy 2011] S. Riachy, M. Mboup and J.-P. Richard. *Multivariate numerical differentiation*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 236, no. 6, pages 1069–1089, 2011.
- [Rudolph 2008] J. Rudolph and F. Woittennek. *An algebraic approach to parameter identification in linear infinite dimensional systems*. In 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, pages 332–337, Ajaccio, France, 2008.



- [Schroedl 2004] M. Schroedl. *Sensorless control of permanent-magnet synchronous machines : An overview*. In 11th International Conference on Power Electronics and Motion Control, Riga, Latvia, 2004.
- [Shen 2009] Y. Shen and Y. Huang. *Uniformly Observable and Globally Lipschitzian Nonlinear Systems Admit Global Finite-Time Observers*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 11, pages 2621–2625, 2009.
- [Sira-Ramírez 1989] H. Sira-Ramírez. *Sliding regimes in general non-linear systems : a relative degree approach*. International Journal of Control, vol. 50, no. 4, pages 1487–1506, 1989.
- [Sira-Ramírez 2000] H. Sira-Ramírez. *A Passivity plus Flatness Controller for Permanent Magnet Stepper Motor*. Asian Journal of Control, vol. 2, no. 1, pages 1–9, 2000.
- [Sira-Ramírez 2006] H. Sira-Ramírez and M. Fliess. *An algebraic state estimation approach for the recovery of chaotically encrypted messages*. International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 16, no. 2, pages 295–309, 2006.
- [Söderström 1989] T. Söderström and P. Stoica. *System Identification*. Prentice-Hall International Editions, UK, 1989.
- [Son 2002] Y.-C. Son, B.-H. Bae and S.-K. Sul. *Sensorless operation of permanent magnet motor using direct voltage sensing circuit*. In 37th IEEE Industry Applications Conference, volume 3, pages 1674 –1678, Pittsburgh, Pennsylvania USA, 2002.
- [Spurgeon 2008] S.-K. Spurgeon. *Sliding Mode Observers - A Survey*. International Journal of Systems Science, vol. 39, no. 8, pages 751–764, 2008.
- [Tian 2008] Y. Tian, T. Floquet and W. Perruquetti. *Fast state estimation in linear time-varying systems : an algebraic approach*. In 47th IEEE Conference on Decision and Control, pages 2539–2544, Mexico, Mexique, 2008.
- [Tiganj 2010] Z. Tiganj, M. Mboup, C. Pouzat and L. Belkoura. *An algebraic method for eye blink artifacts detection in single channel EEG recordings*. In 17th International Conference on Biomagnetism, volume 28, pages 175–178, Dubrovnik, Croatia, 2010.
- [Trapero 2007] J.-R. Trapero, H. Sira-Ramírez and V. Feliu. *An algebraic frequency estimator for a biased and noisy sinusoidal signal*. Signal Processing, vol. 87, no. 6, pages 1188–1201, 2007.
- [Ushirobira 2011] R. Ushirobira, W. Perruquetti, M. Mboup and M. Fliess. *Estimation algébrique des paramètres intrinsèques d'un signal sinusoïdal biaisé en environnement bruité*. In GRETSI, pages 3–6, Bordeaux, France, 2011.

- 
- [Ushirobira 2012] R. Ushirobira, W. Perruquetti, M. Mboup and M. Fliess. *Algebraic parameter estimation of a biased sinusoidal waveform signal from noisy data*. In 16th IFAC Symposium on System Identification, Brussels, Belgique, 2012.
- [Utkin 1977] V.-I. Utkin. *Variable structure systems with sliding modes*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 22, no. 2, pages 212–222, 1977.
- [Utkin 1992] V.-I. Utkin. *Sliding modes in control optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [Verl 1998] A. Verl and M. Bodson. *Torque Maximization for Permanent Magnet Synchronous Motors*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 6, no. 6, pages 740–745, 1998.
- [Villagra 2009] J. Villagra, B. D’Andrea Novel, S. Choi, M. Fliess and H. Mounier. *Robust stop-and-go control strategy : an algebraic approach for nonlinear estimation and control*. International Journal of Vehicle Autonomous Systems, vol. 7, no. 3-4, pages 270–291, 2009.
- [Wang 2005a] K. Wang, M. Bodson, J.-N. Chiasson and L.-M. Tolbert. *Parameter Identification of Hammerstein Models using Elimination Theory*. In 44th IEEE Conference on Decision and Control, European Control Conference, pages 3444–3449, Seville, Spain, 2005.
- [Wang 2005b] K. Wang, J.-N. Chiasson, M. Bodson and L.-M. Tolbert. *A nonlinear least-squares approach for identification of the induction motor parameters*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, no. 10, pages 1622–1628, 2005.
- [Yoshimi 2010] M. Yoshimi, M. Hasegawa and K. Matsui. *Parameter identification for IPMSM position sensorless control based on unknown input observer*. In 2010 IEEE Symposium on Industrial Electronics Applications, pages 383–388, Penang, Malaysia, 2010.
- [Yu 2009] L. Yu, J.-P. Barbot and T. Floquet. *Tire/Road Contact Condition Identification Using Algebraic Numerical Differentiation*. In 15th IFAC Symposium on System Identification, Saint-Malo, France, 2009.
- [Yu 2010a] L. Yu, J.-P. Barbot, G. Zheng and H. Sun. *Compressive Sensing with Chaotic Sequence*. IEEE Signal Processing Letters, vol. 17, no. 8, pages 731–734, 2010.
- [Yu 2010b] L. Yu, J.-P. Barbot, G. Zheng and H. Sun. *Toeplitz-Structured Chaotic Sensing Matrix for Compressive Sensing*. In 6th IEEE, IET International Symposium on Communication Systems, Networks and Digital Signal Processing, Newcastle, Royaume-Uni, 2010.

- [Zheng 2007] Z. Zheng, Y. Li and M. Fadel. *Sensorless control of PMSM based on extended kalman filter*. In 12th European Conference on Power Electronics and Applications, pages 1–8, Aalborg, Denmark, 2007.
- [Zheng 2008] G. Zheng, D. Boutat, T. Floquet and J.-P. Barbot. *Secure Communication Based on Multi-input Multi-output Chaotic System with Large Message Amplitude*. Chaos, Solitons and Fractals, 2008.
- [Zhu 2009] H. Zhu, X. Xiao and Y. Li. *A simplified high frequency injection method for PMSM sensorless control*. In 6th IEEE International Conference on Power Electronics and Motion Control Conference, pages 401–405, Wuhan, China, 2009.
- [Zribi 2001] M. Zribi, H. Sira-Ramírez and A. Ngai. *Static and dynamic sliding mode control schemes for a permanent magnet stepper motor*. International Journal of Control, vol. 74, no. 2, pages 103–117, 2001.



## Contribution à l'identification, l'estimation et la commande de MSAP.

**Résumé :** Ce travail concerne l'identification, l'estimation et la commande sans capteur mécanique de Moteurs Synchrones à Aimants Permanents (MSAP).

Dans un premier temps, la modélisation du MSAP est réalisée dans le repère fixe  $a - b$ . Ce modèle est ensuite réécrit dans deux repères différents : le repère  $d - q$ , couramment utilisé pour les machines tournantes et un nouveau repère  $f - g$ , avantageux dans le cadre d'applications sans capteur. Il présente des propriétés similaires à celles du repère d-q, sans nécessiter l'utilisation d'un capteur de position.

Afin de valider le modèle expérimentalement, une identification par moindres carrés hors ligne avec capteurs, a été réalisée. Cette démarche permet d'obtenir un jeu de paramètres nominaux. Une approche similaire a été appliquée au moteur en enlevant la dépendance des capteurs mécaniques dans le repère  $f - g$ . Sachant que les lois de commande sans capteur dépendent fortement des paramètres, il a été important de tous les identifier sans la présence de capteurs mécaniques.

La synthèse de la commande a été réalisée en considérant la propriété de platitude du MSAP. Pour cela, l'application des modes glissants d'ordre deux, permet de garantir la stabilité malgré des perturbations interne ou externe. Un observateur (par modes glissants également) permettant d'estimer l'accélération, nécessaire pour calculer la variable de glissement, a été réalisé. Les expérimentations ont donné de très bons résultats. Basée sur les tensions et les courants, la réalisation d'observateurs par mode glissant, permet de supprimer les capteurs mécaniques. Les estimations de la position et de la vitesse sont alors utilisables dans la commande. Les résultats expérimentaux sont très prometteurs. Bien que la vitesse atteinte sans capteur soit inférieure à la vitesse atteinte avec capteurs, le suivi de trajectoire a une bonne précision.

Finalement, des algorithmes d'identification des paramètres en ligne avec capteurs ont été développés. L'identification à l'aide de la méthode algébrique comparée à celle effectuée par modes glissants permet de conclure que les deux méthodes présentent chacune des avantages et des inconvénients et peuvent s'avérer complémentaires.

**Mots clés :** MSAP, commande sans capteur, identification des paramètres, modes glissants, approche algébrique, platitude.

## Contribution to PMSM identification, estimation and control.

### **Abstract :**

This work deals with sensorless identification, estimation and control for Permanent Magnet Synchronous Motors (PMSM). In a first phase, the PMSM modeling is realized in the fix  $a - b$  frame. This model is then rewritten in two different frames : the  $d - q$  frame, commonly used for rotating machine and a new frame called  $f - g$ , advantageous in sensorless applications. It presents similar properties than the  $d - q$  frame, without the use of mechanical sensor.

In order to experimentally validate the model, an identification, using off-line least squares algorithm in the presence of sensors, is performed. This approach provides a set of nominal parameters. A similar procedure is applied to the motor without mechanical sensors in the  $f - g$  frame. Since the sensorless control laws are highly dependent on the parameters, it is important to be able to identify the parameters without mechanical sensor.

The control design is realized based on the flatness properties of the PMSM. Therefore, the second order sliding mode application ensures the stability despite parametric uncertainties or external perturbations. A sliding mode observer is designed to estimate the acceleration, necessary to compute the sliding variable. The experimental results show very good performances. Based on voltages and currents, the design of observers allows to remove the mechanical sensors. The position and velocity estimation are then used for the control. The experimental results are very promising. Although the reached velocity is lower than the velocity reached using sensors, the trajectory tracking provides a good accuracy of the trajectory tracking.

Finally, on-line parameters identification algorithms have been developed. The identification using algebraic method compared to the one realized with sliding modes leads to the conclusion that each method presents advantages and drawbacks but can eventually be complementary.

**Keywords :** PMSM, sensorless control, parameters identification, sliding modes, algebraic approach, flatness.