



**HAL**  
open science

# Extension et reformulation du modèle SEA par la prise en compte de la répartition des énergies modales

Laurent Maxit

► **To cite this version:**

Laurent Maxit. Extension et reformulation du modèle SEA par la prise en compte de la répartition des énergies modales. Acoustique [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 2000. Français. NNT: . tel-00777764

**HAL Id: tel-00777764**

**<https://theses.hal.science/tel-00777764>**

Submitted on 18 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

Formation doctorale : Acoustique  
École Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon :  
Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique (MÉGA)  
ECL - INSA - UCBL

par

**Laurent MAXIT**

Ingénieur diplômé de l'INSA de Lyon

## **EXTENSION ET REFORMULATION DU MODÈLE SEA PAR LA PRISE EN COMPTE DE LA RÉPARTITION DES ÉNERGIES MODALES**

Soutenue le 6 mars 2000 devant la Commission d'Examen

Jury :	M. F.J. FAHY	rapporteur
	M. S. FINNVEDEN	rapporteur
	M. J.-L. GUYADER	
	M. L. JÉZÉQUEL	président
	M. P. MERMILLOD	
	M. B. POIRÉE	
	M. A. SESTIERI	rapporteur

## ECOLES DOCTORALES

➤ **MATERIAUX DE LYON**

INSAL – ECL -UCB. Lyon1 – Univ. De Chambéry – ENS

**Responsable : Professeur A. HOAREAU**, UCBL (Tél. : 04.72.44.85.66)

Formations doctorales associées :

- Génie des Matériaux (Pr. R. FOUGERES, Tél : 04. 72. 43. 81 .49)
- Matière condensée surfaces et interfaces (Pr. G. GUILLOT, Tél : 04.72.43.81.61)
- Matériaux polymères et composites (Pr. H. SAUTEREAU, Tél : 04.72.43.81.78)

➤ **MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (MEGA)°**

**Responsable : Professeur J. BATAILLE**, ECL (Tél : 04.72.43.8079)

Formations doctorales associées :

- Acoustique (Pr. J.L. GUYADER, Tél : 04.72.43.80.80)
- Génie Civil : Sols, matériaux, structures, physique du bâtiment (Pr. P. LAREAL, Tél : 04.72.43.82.16)
- Mécanique (Pr. G. DALMAZ, Tél : 04.72.43.83.03)
- Thermique et Energétique (Pr. M. LALLEMAND, Tél : 04.72.43.81.54)

➤ **ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE (EEA)**

INSAL - ECL – UCB. Lyon1 – Univ. de Saint-Etienne

**Responsable : Professeur G. GIMENEZ**, INSAL (Tél : 04.72.43.83.32)

Formations doctorales associées :

- Acoustique (Pr. J.L. GUYADER, Tél : 04.72.43.80.80)
- Automatique Industrielle (Pr. SCAVARDA, Tél : 04.72.43.83.41)
- Dispositifs de l'électronique intégrée (Pr. P. PINARD, Tél : 04.72.43.80.79)
- Génie biologique et médical (Pr. I MAGNIN, Tél : 04.72.43.85.63)
- Génie électrique (Pr. J.P. CHANTE, Tél : 04.72.43.87.26)
- Signal, Image, Parole (Pr. G. GIMENEZ, Tél : 04.72.43.83.32)

➤ **ECOLE DOCTORALE INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE (EDISS)**

INSAL – UCB Lyon1 – Univ. de Saint-Etienne – Univ. Aix-Marseille2

**Responsable : Professeur A. COZZONE**, CNRS-Lyon (Tél 04.72.72.26.75)

Formations doctorales associées :

- Biochimie (Pr. M. LAGARDE, Tél : 04.72.43.82.40)
- Génie biologique et médical (Pr. I. MAGNIN, Tél : 04.72.43.85.63)

**AUTRES FORMATIONS DOCTORALES**

➤ **ANALYSE ET MODELISATION DES SYSTEMES BIOLOGIQUE**

**Responsable : Professeur S. GRENIER, INSAL**  
Tél : 04.72.43.83.56

➤ **CHIMIE INORGANIQUE**

**Responsable : Professeur P. GONNARD, INSAL**  
Tél : 04.72.43.81.58

➤ **CONCEPTION EN BATIMENT ET TECHNIQUE URBAINES**

**Responsable : Professeur M. MIRAMOND, INSAL**  
Tél : 04.72.43.82.09

➤ **DEA INFORMATIQUE DE LYON**

**Responsable : Professeur J.M. JOLION, INSAL**  
Tél : 04.72.43.87.59

➤ **PRODUCTIQUE : ORGANISATION ECONOMIQUE ET GENIE INFORMATIQUE POUR L'ENTREPRISE**

**Responsable : Professeur J. FAVREL, INSAL**  
Tél : 04.72.43.83.63

➤ **SCIENCES ET TECHNIQUES DU DECHET**

**Responsable : Professeur P. MOSZKOWICZ, INSAL**  
Tél : 04.72.43.83.45

Janvier 1998

## Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Directeur : J. Rochat

### Professeurs

S.	AUDISIO	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
J.C.	BABOUX	GEMPPM*
B.	BALLAND	PHYSIQUE DE LA MATIERE
D.	BARBIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
G.	BAYADA	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
C.	BERGER (Mlle)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
M.	BETEMPS	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
J.M.	BLANCHARD	LAEPSI**
C.	BOISSON	VIBRATIONS ACOUSTIQUES
M.	BOIVIN	MECANIQUE DES SOLIDES
H.	BOTTA	EQUIPE DEVELOPPEMENT URBAIN
G.	BOULAYE	INFORMATIQUE
J.	BRAU	CENTRE DE THERMIQUE
M.	BRISAUD	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
M.	BRUNET	MECANIQUE DES SOLIDES
J.C.	BUREAU	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
J.Y.	CAVILLE	GEMPPM*
J.P.	CHANTE	COMPOSANTS DE PUISSANCE ET APPLICATIONS
B.	CHOCAT	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
B.	CLAUDEL	LAEPSI**
M.	COUSIN	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
M.	DIOT	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
A.	DOUTHEAU	CHIMIE ORGANIQUE
R.	DUFOUR	MECANIQUE DES STRUCTURES
J.C.	DUPUY	PHYSIQUE DE LA MATIERE
H.	EMPTOZ	RECONNAISSANCE DES FORMES ET VISION
C.	ESNOUF	GEMPPM*
L.	EYRAUD (Prof. Emérite)	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
G.	FANTOZZI	GEMPPM*
M.	FAYET	MECANIQUE DES SOLIDES
J.	FAVREL	GROUPE DE RECHERCHE EN PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
G.	FERRARIS-BESSO	MECANIQUE DES STRUCTURES
Y.	FETIVEAU	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
L.	FLAMAND	MECANIQUE DES CONTACTS
P.	FLEISCHMANN	GEMPPM*
A.	FLORY	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
R.	FOUGERES	GEMPPM*
F.	FOUQUET	GEMPPM*
L.	FRECON	INFORMATIQUE
R.	GAUTHIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
M.	GERY	CENTRE DE THERMIQUE
G.	GIMENEZ	CREATIS***
P.	GOBIN (Prof. émérite)	GEMPPM*
P.	GONNARD	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
M.	GONTRAND	COMPOSANTS DE PUISSANCE ET APPLICATIONS
R.	GOUTTE (Prof. Emérite)	CREATIS***
G.	GRANGE	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
G.	GUENIN	GEMPPM*
M.	GUICHARDANT	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
G.	GUILLOT	PHYSIQUE DE LA MATIERE
A.	GUINET	GROUPE DE RECHERCHE EN PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
J.L.	GUYADER	VIBRATIONS ACOUSTIQUES
J.P.	GUYOMAR	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
J.M.	JOLION	RECONNAISSANCE DES FORMES ET VISION
J.F.	JULLIEN	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
A.	JUTARD	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
R.	KASTNER	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
H.	KLEIMANN	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
J.	KOULOUMDJIAN	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
M.	LAGARDE	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
M.	LALANNE	MECANIQUE DES STRUCTURES
A.	LALLEMAND	CENTRE DE THERMIQUE
M.	LALLEMAND (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE
P.	LAREAL	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
A.	LAUGIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
Ch.	LAUGIER	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
P.	LEJEUNE	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES

<b>A.</b>	<b>LUBRECHT</b>	MECANIQUE DES CONTACTS
<b>Y.</b>	<b>MARTINEZ</b>	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
<b>H.</b>	<b>MAZILLE</b>	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
<b>P.</b>	<b>MERLE</b>	GEMPPM*
<b>J.</b>	<b>MERLIN</b>	GEMPPM*
<b>J.P.</b>	<b>MILLET</b>	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
<b>M.</b>	<b>MIRAMOND</b>	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
<b>N.</b>	<b>MONGEREAU (Prof. Emérite)</b>	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
<b>R.</b>	<b>MOREL</b>	MECANIQUE DES FLUIDES
<b>P.</b>	<b>MOSZKOWICZ</b>	LAEPSI**
<b>P.</b>	<b>NARDON</b>	BIOLOGIE APPLIQUEE
<b>A.</b>	<b>NAVARRO</b>	LAEPSI**
<b>A.</b>	<b>NOURI (Mme)</b>	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
<b>M.</b>	<b>OTTERBEIN</b>	LAEPSI**
<b>J.P.</b>	<b>PASCAULT</b>	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
<b>G.</b>	<b>PAVIC</b>	VIBRATIONS ACOUSTIQUES
<b>J.</b>	<b>PERA</b>	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
<b>G.</b>	<b>PERRACHON</b>	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
<b>J.</b>	<b>PEREZ (Prof. Emérite)</b>	GEMPPM*
<b>P.</b>	<b>PINARD</b>	PHYSIQUE DE LA MATIERE
<b>J.M.</b>	<b>PINON</b>	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
<b>D.</b>	<b>PLAY</b>	CONCEPTION ET ANALYSE DES SYSTEMES MECANIQUES
<b>J.</b>	<b>POUSIN</b>	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
<b>P.</b>	<b>PREVOT</b>	GROUPE DE RECHERCHE EN APPRENTISSAGE, COOPERATION ET INTERFACES MULTIMODALES
<b>R.</b>	<b>PROST</b>	CREATIS***
<b>M.</b>	<b>RAYNAUD</b>	CENTRE DE THERMIQUE
<b>J.M.</b>	<b>REYNOUARD</b>	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
<b>E.</b>	<b>RIEUTORD (Prof. Emérite)</b>	MECANIQUE DES FLUIDES
<b>J.</b>	<b>ROBERT-BAUDOY (Mme)</b>	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
<b>D.</b>	<b>ROUBY</b>	GEMPPM*
<b>P.</b>	<b>RUBEL</b>	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
<b>C.</b>	<b>RUMELHART</b>	MECANIQUE DES SOLIDES
<b>J.F.</b>	<b>SACADURA</b>	CENTRE DE THERMIQUE
<b>H.</b>	<b>SAUTEREAU</b>	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
<b>S.</b>	<b>SCARVARDA</b>	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
<b>D.</b>	<b>THOMASSET</b>	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
<b>M.</b>	<b>TROCCAZ</b>	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
<b>R.</b>	<b>UNTERREINER</b>	CREATIS***
<b>J.</b>	<b>VERON</b>	LAEPSI**
<b>G.</b>	<b>VIGIER</b>	GEMPPM*
<b>A.</b>	<b>VINCENT</b>	GEMPPM*
<b>P.</b>	<b>VUILLERMOZ</b>	PHYSIQUE DE LA MATIERE

Directeurs de recherche C.N.R.S.

<b>Y.</b>	<b>BERTHIER</b>	MECANIQUE DES CONTACTS
<b>P.</b>	<b>CLAUDY</b>	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
<b>N.</b>	<b>COTTE-PATTAT (Mme)</b>	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
<b>P.</b>	<b>FRANCIOSI</b>	GEMPPM
<b>J.F.</b>	<b>GERARD</b>	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
<b>M.A.</b>	<b>MANDRAND (Mme)</b>	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
<b>J.F.</b>	<b>QUINSON</b>	GEMPPM
<b>A.</b>	<b>ROCHE</b>	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES

Directeurs de recherche I.N.R.A.

<b>G.</b>	<b>BONNOT</b>	BIOLOGIE APPLIQUEE
<b>G.</b>	<b>FEBVAY</b>	BIOLOGIE APPLIQUEE
<b>S.</b>	<b>GRENIER</b>	BIOLOGIE APPLIQUEE
<b>Y.</b>	<b>MENEZO</b>	BIOLOGIE APPLIQUEE

Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M.

<b>A.F.</b>	<b>PRINGENT (Mme)</b>	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
<b>I.</b>	<b>MAGNIN (Mme)</b>	CREATIS***

GEMPPM\* : Groupe d'étude métallurgie physique et physique des matériaux

LAEPSI\*\* : Laboratoire d'analyse environnementale des procédés et systèmes industriels

CREATIS\*\*\* : Centre de recherche et d'applications en traitement de l'image et du signal

Cette thèse, préparée au Laboratoire Vibrations-Acoustique de L'INSA de Lyon, a été financée par la Délégation Générale pour l'Armement via une bourse DGA-CNRS et un contrat d'accompagnement passé avec le CTSN de Toulon.

Je tiens avant tout à exprimer ma plus profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, M. J.-L. GUYADER, professeur à l'INSA de Lyon, pour le soutien constant et les conseils avisés qu'il m'a apportés au cours de ces passionnantes années de recherche. Je ne saurais décrire ici en quelques mots sa contribution à cette étude.

Je suis également très sensible à l'honneur que m'ont fait M. F.J. FAHY, professeur à l'ISVR de Southampton, M. S. FINNVEDEN, professeur au KTH de Stockholm, et M. A. SESTIETI, professeur à l'université 'La Sapienza' de Rome, d'avoir accepté, malgré la difficulté de la langue, de rapporter cette thèse. Je leur suis reconnaissant pour l'intérêt et le regard extérieur qu'ils ont portés à ce travail ainsi que pour leurs observations enrichissantes.

Je remercie cordialement M. R. AQUILINA, ingénieur au CTSN de Toulon, pour avoir initialement soutenu ce projet auprès de la DGA, pour la confiance qu'il nous a ensuite accordée en nous laissant une grande liberté d'investigations, et pour l'intérêt qu'il a témoigné tout au long de cette étude.

Mes remerciements vont également à M. P. MERMILLOT, ingénieur au CTSN de Toulon, à M. B. POIREE, ingénieur à la DGA de Paris, ainsi qu'à M. L. JEZEQUEL, professeur à l'École Centrale de Lyon, pour avoir accepté de participer au jury.

Je voudrais aussi saluer tous les membres du LVA, permanents ou de passages, que j'ai eu le plaisir de côtoyer au cours de ces quelques années. Je souhaite, tout particulièrement, exprimer ma gratitude à M. C. PEZERAT et M. M. MARTINET pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée lors de la réalisation des calculs numériques. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à M. B. LAULAGNET, qui a été mon tuteur de DEA il y a quelques années et qui a su me transmettre son goût pour la recherche.

Merci enfin, aux membres de ma famille et à mes amis, pour m'avoir soutenu et encouragé dans les moments difficiles.

*La théorie, c'est quand on sait tout mais que ça ne marche pas.*

*La pratique, c'est quand ça marche mais que l'on ne sait pas pourquoi.*

*Ici sont réunis la théorie et la pratique : rien ne marche et l'on ne sait pas pourquoi!*



*'SEA is basically a simplifying analytic device that enables one to render the formalism manageable. The penalty for employing the device is loss of detail in descriptions of the behavior of the complex.*

*There must exist a balance between the desire to deal with manageable formalisms and the quests for detailed descriptions.*

*Overemphasis of one or the other will surely result in diminishing returns.'*

G. MAIDANIK [MAI77]



**Résumé** Dans cette thèse, on propose une approche permettant d'étendre le domaine de validité de la méthode SEA (Statistical Energy Analysis). Elle repose sur une double formulation modale et une reformulation du modèle SEA en ne posant pas l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales.

La double formulation modale qui est décrite dans le cas général du couplage de systèmes continus tridimensionnels, consiste en une décomposition modale non standard faisant intervenir une double formulation contrainte-déplacement. Les équations modales obtenues sont alors en cohérence avec le modèle supposé de la SEA et se caractérisent à partir des modes des sous-systèmes découplés.

Le modèle SmEdA qui découle de la reformulation de la SEA permet d'améliorer la qualité de la prédiction, notamment quand le recouvrement modal est faible ou quand les sous-systèmes sont excités localement. Un des points forts de l'approche proposée est qu'elle peut être facilement associée à une démarche SEA. Il est possible d'appliquer le modèle SmEdA uniquement pour les couplages des sous-systèmes où une amélioration de la prédiction peut être présumée obtenue, et utiliser le modèle SEA pour les autres couplages.

L'application du modèle SmEdA à des structures industrielles est possible grâce à l'utilisation de modèles Eléments Finis des sous-systèmes. En supposant l'hypothèse d'équirépartition respectée, il découle de cette approche une nouvelle technique de calcul des facteurs de perte par couplage SEA. Celle-ci ne requière que le calcul des modes des sous-systèmes découplés par Eléments Finis. Les facteurs SEA sont alors obtenus par identification des coefficients des équations modales, sans les résoudre.

**Abstract** In this thesis, one proposes an approach allowing to enlarge the efficiency of SEA method (Statistical Energy Analysis). It is based on a dual modal formulation and a reformulation of SEA model without modal energy equipartition assumption.

The dual modal formulation, which is presented in the general case of the coupling of three-dimensional continuous systems, consists of a non standard modal expansion, using a dual formulation stress – displacement. The modal equations are then in coherence with the model assumed by SEA and are characterized by modes of uncoupled subsystems.

The SmEdA model derived from the SEA reformulation, permits to improve the quality of the prediction, especially when the modal overlap is low or when subsystems are locally excited. One of the interests of the present approach is that it can be easily included in a general SEA context. It is possible to apply SmEdA only for the subsystem couplings where an improvement can be presumed to be obtained, and to use classical SEA for the others subsystem couplings.

The application of SmEdA model to industrial structures can be done thanks to finite elements models. It leads to a new technique to estimate SEA coupling loss factors when equipartition assumption is assumed. This approach only requires the subsystem mode calculation with finite elements method. Then, CLF are directly derived from identification of the coefficients of modal equations, without solving the vibratory problem.

# TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS PRINCIPALES	17
-----------------------	----

## CHAPITRE 1

INTRODUCTION - CONTEXTE SCIENTIFIQUE	25
--------------------------------------	----

<b>1. CONTEXTE SCIENTIFIQUE.....</b>	<b>26</b>
--------------------------------------	-----------

1.1. LIMITES DES MÉTHODES DÉTERMINISTES .....	26
1.2. LES MÉTHODES SIMPLIFIÉES.....	27
1.2.1. <i>Les méthodes énergétiques</i> .....	27
1.2.2. <i>D'autres méthodes simplifiées</i> .....	29

<b>2. LA MÉTHODE SEA .....</b>	<b>31</b>
--------------------------------	-----------

2.1. LES DÉBUTS DE LA MÉTHODE.....	31
2.2. LES PRINCIPALES 'CRITIQUES' .....	32
2.3. LES DIFFÉRENTES HYPOTHÈSES.....	34
2.4. LES ÉQUATIONS MODALES DE LA FORMULATION DE BASE.....	35
2.5. FORCE DE COUPLAGE ENTRE LES SOUS-SYSTÈMES .....	37
2.6. L'ASPECT STATISTIQUE.....	38
2.7. VALIDITÉ DES RÉSULTATS EN FONCTION DU RECOUVREMENT MODAL .....	40
2.8. LE CALCUL DES FACTEURS DE PERTE PAR COUPLAGE.....	42
2.9. LES DIFFÉRENTES TENTATIVES POUR AMÉLIORER LE MODÈLE DE BASE .....	44

<b>3. PRINCIPAUX APPORTS DE L'ÉTUDE - STRUCTURE DU DOCUMENT.....</b>	<b>46</b>
--	-----------

## CHAPITRE 2

DÉCOMPOSITION MODALE PAR L'UTILISATION D'UNE DOUBLE FORMULATION	49
---	----

<b>1. BUTS DU CHAPITRE.....</b>	<b>49</b>
---------------------------------	-----------

<b>2. DOUBLE FORMULATION MODALE .....</b>	<b>49</b>
---	-----------

2.1. DESCRIPTION DE LA STRUCTURE.....	49
2.2. SOUS-STRUCTURATION .....	51
2.3. FORMULATIONS VARIATIONNELLES DES PROBLÈMES UTILISANT LA FONCTIONNELLE DE REISSNER .....	52
2.4. MODES DES SOUS-SYSTÈMES DÉCOUPLÉS .....	54
2.4.1. <i>Définition des conditions aux limites des sous-systèmes</i> .....	54

2.4.2. <i>Calculs et propriétés des modes propres</i> .....	56
2.5. DÉCOMPOSITION MODALE DE LA SOLUTION.....	58
2.6. VIBRATIONS LIBRES DES SOUS-SYSTÈMES COUPLÉS.....	59
2.7. VIBRATIONS FORCÉES DES SOUS-SYSTÈMES COUPLÉS.....	62
2.8. VIBRATIONS HARMONIQUES DES SOUS-SYSTÈMES COUPLÉS.....	63
<b>3. ÉNERGIE TOTALE D'UN SOUS-SYSTÈME.....</b>	<b>63</b>
3.1. ÉNERGIE TOTALE ET ÉNERGIE MODALE.....	63
3.2. PROPRIÉTÉS ÉNERGÉTIQUES ASSOCIÉES AUX AMPLITUDES $a_p^1(t)$ ET $c_q^2(t)$ .....	65
3.3. MOYENNE TEMPORELLE DES ÉNERGIES.....	66
3.3.1. <i>Cas des excitations harmoniques</i> .....	67
3.3.2. <i>Cas des excitations aléatoires</i> .....	67
<b>4. EXEMPLES D'APPLICATIONS.....</b>	<b>68</b>
4.1. COUPLAGE RIGIDE DE DEUX POUTRES VIBRANT LONGITUDINALEMENT.....	68
4.2. COUPLAGE RIGIDE DE DEUX POUTRES VIBRANT EN FLEXION PURE.....	70
4.2.1. <i>Sans appui intermédiaire (cas A)</i> .....	71
4.2.1.1. Présentation de la structure.....	71
4.2.1.2. Décomposition modale par utilisation de la DMF.....	72
4.2.2. <i>Avec appui intermédiaire (cas B)</i> .....	76
4.2.3. <i>Applications numériques</i> .....	77
4.2.3.1. Validation.....	77
4.2.3.2. Etude de la convergence des séries modales.....	78
4.3. DEUX PLAQUES COUPLÉES EN $\bar{L}$ .....	81
4.3.1. <i>Modèle analytique</i> .....	81
4.3.2. <i>Validation numérique</i> .....	83
4.3.3. <i>Qualité des résultats de la double formulation modale pour différentes épaisseurs de plaques</i> .....	85
<b>5. CONCLUSION.....</b>	<b>85</b>

## CHAPITRE 3

### REFORMULATION DU MODÈLE SEA PAR LA PRISE EN COMPTE DE LA REPARTITION DES ÉNERGIES MODALES 87

#### 1. BUTS DU CHAPITRE..... 87

#### 2. RELATIONS ÉNERGÉTIQUES POUR DES SYSTÈMES À UN OU DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ..... 88

##### 2.1. RELATIONS POUR UN OSCILLATEUR ISOLÉ..... 88

###### 2.1.1. *Puissance dissipée*..... 88

###### 2.1.2. *Puissance injectée*..... 89

##### 2.2. PUISSANCE ÉCHANGÉE PAR DEUX OSCILLATEURS COUPLÉS PAR UN ÉLÉMENT GYROSCOPIQUE..... 89

#### 3. EQUATIONS ÉNERGÉTIQUES MODALES DU MOUVEMENT..... 91

**4. RÉOLUTION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS ÉNERGÉTIQUES MODALES  
BASÉE SUR LA TECHNIQUE DE GALERKIN..... 96**

**5. CONCLUSION ..... 101**

**CHAPITRE 4**

**RECHERCHE ET ANALYSE DES LIMITES DU MODÈLE  $SmEdA^{max}$   
SUR DES CAS SIMPLES 103**

**1. BUTS DU CHAPITRE..... 103**

**2. FORCE DE COUPLAGE ENTRE LES SOUS-SYSTÈMES..... 104**

- 2.1. PRÉSENTATION DES DIFFÉRENTS CALCULS ..... 105
- 2.2. COUPLAGE DE DEUX POUTRES VIBRANT LONGITUDINALEMENT ..... 105
- 2.3. COUPLAGE DE POUTRES VIBRANT EN FLEXION ..... 110
- 2.4. COUPLAGE PAR UN RESSORT DE TORSION DE DEUX POUTRES VIBRANT EN FLEXION ..... 112
- 2.5. CONCLUSION ..... 114

**3. VALIDITÉ DU MODÈLE POUR DES STRUCTURES INDIVIDUELLES..... 115**

- 3.1. COUPLAGE DE TROIS SOUS-SYSTÈMES ..... 115
  - 3.1.1. *Cas d'un fort recouvrement modal* ..... 116
  - 3.1.2. *Cas d'un faible recouvrement modal* ..... 119
  - 3.1.3. *Décorrélation des amplitudes modales des sous-systèmes non excités* ..... 121
  - 3.1.4. *Conclusion* ..... 122
- 3.2. EXCITATION PONCTUELLE SUR DES STRUCTURES DÉTERMINISTES..... 123

**4. MOYENNE D'ENSEMBLE..... 124**

- 4.1. COUPLAGE DE TROIS POUTRES VIBRANT LONGITUDINALEMENT ..... 126
- 4.2. EXCITATION PONCTUELLE DE DEUX POUTRES VIBRANT LONGITUDINALEMENT ..... 128
- 4.3. CONCLUSION ..... 129

**5. CONCLUSION ..... 130**

**CHAPITRE 5**

**ÉTUDE SUR DIFFÉRENTS CAS DES AMÉLIORATIONS APPORTÉES  
PAR LA PRISE EN COMPTE DE LA RÉPARTITION DES ÉNERGIES  
MODALES 133**

**1. BUTS DU CHAPITRE..... 133**

**2. DIFFÉRENTS CAS DE NON ÉQUIRÉPARTITION DES ÉNERGIES MODALES134**

- 2.1. COUPLAGE DE SOUS-SYSTÈMES À FAIBLE RECOUVREMENT MODAL ..... 134

2.1.1. Couplage de deux poutres vibrant en flexion et couplées par un ressort de torsion	134
2.1.1.1. Effet de l'amortissement sur la répartition des énergies modales	135
2.1.1.2. Analyse des différences entre SEA <sup>onde</sup> et SmEdA <sup>1</sup>	138
2.1.1.3. Conclusion	141
2.1.2. Couplage de trois poutres par des ressorts de torsion	142
2.1.2.1. Mise en évidence de l'effet de 'filtrage des jonctions'	142
2.1.2.2. Calcul SEA avec des CLF évalués par SEA inverse sur les sous-systèmes couplés 2 à 2.	145
2.1.2.3. Conclusion	147
2.1.3. Couplage de deux plaques en L : Effet des coïncidences spatiales	147
2.2. EXCITATION LOCALISÉE SPATIALEMENT	149
2.3. SOUS-SYSTÈMES AVEC DES AMORTISSEMENTS MODAUX VARIABLES	151
2.4. CONCLUSION	154
<b>3. DU MODÈLE SMEDA<sup>1</sup> AU MODÈLE SMEDA<sup>MAX</sup></b>	<b>154</b>
<b>4. CONCLUSION</b>	<b>159</b>

## CHAPITRE 6

### CALCUL DES FACTEURS DE COUPLAGES INTERMODAUX ET DES CLF À PARTIR DE MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS DES SOUS-SYSTÈMES 161

<b>1. BUTS DU CHAPITRE</b>	<b>161</b>
<b>2. TRAVAUX D'INTERACTIONS MODALES POUR DES MODÈLES DISCRETS</b>	<b>162</b>
<b>3. CALCUL DES CLF À PARTIR DES SCHEMAS MODAUX DES SOUS-SYSTÈMES DÉCOUPLÉS</b>	<b>163</b>
3.1. EXEMPLES DE CALCULS À PARTIR DE MODÈLES CONTINUS	164
3.1.1. Description des calculs	164
3.1.2. Influence du rapport des épaisseurs	165
3.1.3. Influence de l'amortissement	166
3.2. EXEMPLE DE CALCULS À PARTIR DE MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS	168
3.2.1. Modèles Éléments Finis	169
3.2.2. Comparaison des rapports de densités modales	170
3.2.3. Comparaison des facteurs de perte par couplage	171
<b>4. EXEMPLES DE CALCULS SMEDA<sup>MAX</sup> À PARTIR DE MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS DES SOUS-SYSTÈMES</b>	<b>174</b>
4.1. DESCRIPTION DE LA STRUCTURE ET DES MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS	174
4.2. COMPARAISON DES RÉSULTATS	174
4.3. INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES	176
<b>5. CONCLUSION</b>	<b>177</b>

### CONCLUSION GÉNÉRALE 179

## ANNEXE A

SCHÉMAS MODAUX DES SOUS-SYSTÈMES	183
<b>1. COUPLAGE DE DEUX POUTRES VIBRANT EN FLEXION SANS APPUI INTERMÉDIAIRE.....</b>	<b>183</b>
1.1. POUTRE 1 AVEC LES CONDITIONS AUX LIMITES : APPUYÉE-LIBRE .....	183
1.2. POUTRE 2 AVEC LES CONDITIONS AUX LIMITES : ENCASTRÉE-APPUYÉE.....	183
<b>2. COUPLAGE DE DEUX POUTRES VIBRANT EN FLEXION AVEC APPUI INTERMÉDIAIRE.....</b>	<b>185</b>
2.1. POUTRE 1 AVEC LES CONDITIONS AUX LIMITES : APPUYÉE-APPUYÉE.....	185
2.2. POUTRE 2 AVEC LES CONDITIONS AUX LIMITES : ENCASTRÉE-APPUYÉE.....	185
<b>3. COUPLAGE DE DEUX PLAQUES EN L.....</b>	<b>186</b>
3.1. PLAQUE 1 APPUYÉE SUR LES QUATRE ARÊTES .....	186
3.2. PLAQUE 2 ENCASTRÉE SUR L'ARÊTE $x_2=0$ , APPUYÉE SUR LES 3 AUTRES ARÊTES .....	186
<b>4. COUPLAGE DE DEUX POUTRES PAR UN RESSORT DE TORSION .....</b>	<b>187</b>
4.1. POUTRE 1 APPUYÉE-APPUYÉE + RESSORT DE TORSION .....	187
4.2. POUTRE 2 APPUYÉE-APPUYÉE .....	187

## ANNEXE B

CALCUL DES RÉPONSES VIBRATOIRES DES STRUCTURES EXCITÉES PAR DES FORCES HARMONIQUES PONCTUELLES	189
<b>1. COUPLAGE DE DEUX POUTRES VIBRANT LONGITUDINALEMENT .....</b>	<b>189</b>
1.1. CALCUL DU CHAMP VIBRATOIRE.....	189
1.2. CALCUL DE LA MOYENNE TEMPORELLE DES ÉNERGIES .....	190
1.2.1. <i>Energie cinétique</i> .....	190
1.2.2. <i>Energie potentielle</i> .....	191
1.2.3. <i>Energie totale</i> .....	191
<b>2. COUPLAGE DE DEUX POUTRES VIBRANT EN FLEXION PURE.....</b>	<b>191</b>
2.1. CALCUL DU CHAMP VIBRATOIRE.....	191
2.2. CALCUL DE LA MOYENNE TEMPORELLE DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE ET DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE .....	193
<b>3. COUPLAGE DE DEUX PLAQUES EN L.....</b>	<b>193</b>



## ANNEXE C

### RÉSOLUTION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS ÉNERGÉTIQUES MODALES 197

#### **1. RÉSOLUTION APPROCHÉE À PARTIR DE CONSIDÉRATIONS SUR LE COUPLAGE FAIBLE ENTRE LES SOUS-SYSTÈMES ..... 197**

1.1. DESCRIPTION ..... 197

1.1.1. *Sous-systèmes couplés en chaîne* ..... 197

1.1.2. *Sous-systèmes couplés en boucle fermée* ..... 201

1.2. APPLICATION ..... 202

#### **2. RÉSOLUTION APPROCHÉE BASÉE SUR UN TRI - MODAL ..... 206**

2.1. DESCRIPTION ..... 206

2.2. APPLICATION ..... 210

### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 213

# PRINCIPALES NOTATIONS

## Caractères latins

$A_p^1(\omega)$	Amplitude du mode $p$ associée au champ de déplacements du sous-système 1 en régime harmonique $e^{j\omega t}$
$a_p^\alpha(t)$	Amplitude du mode $p$ associée au champ de déplacements du sous-système $\alpha$ à l'instant $t$
$a_\alpha$	Longueur de la plaque $\alpha$
$b_p^\alpha(t)$	Amplitude du mode $p$ associée au champ de contraintes du sous-système $\alpha$ à l'instant $t$
$b_\alpha$	Largeur de la poutre/plaque $\alpha$
$C_q^2(\omega)$	Amplitude du mode $q$ du sous-système 2 donnée par : $c_q^2(t) = C_q^2(\omega).e^{j\omega t}$
$c_q^2(t)$	Amplitude du mode $q$ du sous-système 2 donnée par : $\dot{c}_q^2(t) = b_q^2(t)$
$E_\alpha$	Moyenne temporelle de l'énergie totale du sous-système $\alpha$ / Énergie totale de l'oscillateur $\alpha$ / Module de Young, sous-système $\alpha$
$E_t$	Énergie totale d'un oscillateur isolé
$E_\alpha^{en}$	Moyenne temporelle de l'énergie totale de la poutre / plaque $\alpha$ obtenue à partir d'expériences numériques
$E_c^\alpha(t)$	Énergie cinétique instantanée du sous-système $\alpha$
$E_p^\alpha(t)$	Énergie potentielle instantanée du sous-système $\alpha$
$E_t^\alpha(t)$	Énergie totale instantanée du sous-système $\alpha$
$E_c^{\alpha n}(t)$	Énergie cinétique modale instantanée du mode $n$ du sous-système $\alpha$
$E_p^{\alpha n}(t)$	Énergie potentielle modale instantanée du mode $n$ du sous-système $\alpha$
$E_t^{\alpha n}(t)$	Énergie totale modale instantanée du mode $n$ du sous-système $\alpha$
$E_p^\alpha$	Énergie du mode $p$ du sous-système $\alpha$ (moyenne temporelle)
$\tilde{E}_p^\alpha$	Approximation de l'énergie du mode $p$ du sous-système $\alpha$ par SmEdA <sup>simp</sup>
$[\mathbf{E}^\alpha]$	Vecteur représentant la répartition des énergies modales du sous-système $\alpha$

PRINCIPALES NOTATIONS

$[e^\alpha]$	Vecteur constitué par les coefficients de la décomposition en série de la REM du sous - système $\alpha$
$e_\alpha^1$	Coefficient $\alpha$ de la décomposition en série de la REM du sous-système 1
$e_\sigma^2$	Coefficient $\sigma$ de la décomposition en série de la REM du sous-système 2
$\mathbf{F}_t^2(x, t)$	Effort tranchant du torseur de section de la poutre 2
$F_\alpha$	Force excitatrice de l'oscillateur $\alpha$
$\bar{F}_1^e$	Force excitatrice de la poutre 1
$\bar{F}_i^{Exc}$	Force excitatrice, cas général
$\bar{\bar{F}}_i^{Exc}(\omega)$	Amplitude force excitatrice en régime harmonique $e^{j\omega t}$
$F_p^\alpha$	Force généralisée du mode $p$ du sous-système $\alpha$
$\bar{F}_c$	Effort au niveau de la liaison des poutres
$\bar{F}_i^c$	Effort de couplage entre les sous-systèmes
$\tilde{\mathbf{F}}_t^{2q}(x)$	Déformée propre en terme d'effort tranchant du mode $q$ de la poutre 2
$f_k^{\alpha i}$	kième composante de la force nodale du nœud $i$ du sous-système $\alpha$
$\tilde{f}_{pk}^{\alpha i}$	kième composante de la force nodale du nœud $i$ de la déformée propre du mode $p$ du sous-système $\alpha$
$G_c$	Constante caractéristique du couplage 'gyroscopique'
$H_p^1(t)$	Effort appliqué sur le mode $p$ du sous-système 1 par l'ensemble des modes du sous-système 2
$h_\alpha$	Epaisseur de la poutre/plaque $\alpha$
$I_\alpha$	Moment d'inertie de la poutre $\alpha$
$K_\alpha$	Raideur de l'oscillateur $\alpha$
$K_p^\alpha$	Raideur généralisée du mode $p$ du sous-système $\alpha$
$k_p^\alpha$	Nombre d'onde du mode $p$ de la poutre $\alpha$
$k_\alpha$	Nombre d'onde naturel de la poutre $\alpha$
$L_\alpha$	Longueur de la poutre $\alpha$
$L_{1pq}, L_{2pq}$	Efforts appliqués sur le couple de modes $(p, q)$ isolé
$M_\alpha$	Masse de l'oscillateur $\alpha$

PRINCIPALES NOTATIONS

$M_p^\alpha$	Masse généralisée du mode $p$ du sous-système $\alpha$
$\overline{M}_c$	Moment au niveau de la liaison des poutres
$\mathbf{M}_f^2(x, t)$	Moment fléchissant du torseur de secteur de la poutre 2
$\tilde{\mathbf{M}}_f^{2q}(x)$	Déformée propre en terme de moment fléchissant du mode $q$ de la poutre 2
$m, n, p, q, r, s$	Indice modal
$N_\alpha$	Nombre de modes résonnants du sous-système $\alpha$ dans la bande $[\omega_1, \omega_2]$
$n^\alpha$	Vecteur normal extérieur à la surface frontière du sous-système $\alpha$
$n_\alpha$	Densité modale asymptotique, sous-système $\alpha$
$P_{inj}$	Puissance injectée dans l'oscillateur isolé par une force extérieure
$P_{diss}$	Puissance dissipée par l'amortissement interne de l'oscillateur isolé
$P_{12}$	Puissance échangée entre l'oscillateur 1 et l'oscillateur 2
$R^\alpha$	Ensemble des modes résonnants dans la bande $[\omega_1, \omega_2]$
$Rm_\alpha$	Facteur de recouvrement modal, sous-système $\alpha$
$S_\alpha$	Section de la poutre $\alpha$
$S_{Libre}^\alpha$	Surface où les déplacements sont libres, sous-système $\alpha$
$S_{Encastrée}^\alpha$	Surface où les déplacements sont nuls, sous-système $\alpha$
$S_{Couplage}$	Surface de couplage
$S_{Excitation}^\alpha$	Surface où des sources d'excitations sont appliquées, sous-système $\alpha$
$S_{ijkl}^\alpha$	Tenseur des souplesses, sous-système $\alpha$
$S_{a_n^1 a_p^1}(\omega)$	Densité spectrale croisée des amplitudes des modes $n$ et $p$ du sous-système 1
$S_{a_p^1 a_p^1}(\omega)$	Densité spectrale de l'amplitude $a_p^1$ du mode $p$ du sous-système 1
$S_{c_q^2 c_q^2}(\omega)$	Densité spectrale de l'amplitude $c_q^2$ du mode $q$ du sous-système 2
$S_{F_1 F_1}(\omega)$	Densité spectrale de la force excitatrice du sous-système 1
$S_{V_2 V_2}(\omega)$	Densité spectrale de la vitesse excitatrice du sous-système 2
$S_{FF}(\omega)$	Densité spectrale de la force excitatrice de l'oscillateur isolé
$t, t_0, t_1$	Temps
$U^1(x, t)$	Déplacement longitudinal de la poutre 1 (hypothèses traction-compression)

## PRINCIPALES NOTATIONS

$u_k^{\alpha i}$	kième composante du déplacement nodal du nœud $i$ du sous-système $\alpha$
$\tilde{u}_{pk}^{\alpha i}$	kième composante du déplacement nodal du nœud $i$ de la déformée propre du mode $p$ du sous-système $\alpha$
$V^\alpha$	Volume du sous-système $\alpha$
$\bar{V}_i^{Exc}$	Vitesse imposée, cas général
$\bar{\bar{V}}_i^{Exc}(\omega)$	Vitesse imposée en régime harmonique $e^{j\omega t}$
$W_i^\alpha$	Déplacement, sous-système $\alpha$
$\tilde{W}_i^{op}$	Déformée propre en déplacement du mode $p$ du sous-système $\alpha$
$\bar{W}_i^c$	Déplacement sur la surface de couplage
$W_y^\alpha(x, t)$	Déplacement transversal de la poutre $\alpha$ (hypothèses Euler-Bernoulli)
$\tilde{W}_y^{op}(x, t)$	Déformée propre en terme de déplacement transversal du mode $p$ , poutre $\alpha$
$\bar{W}_c$	Déplacement à la jonction des poutres vibrant en flexion
$W^\alpha(x_\alpha, y_\alpha, t)$	Déplacement transversal de la plaque $\alpha$ (hypothèse Love-Kirchhoff)
$\tilde{W}^{\alpha, mn}(x_\alpha, y_\alpha)$	Déformée propre en terme de déplacement transversal du mode de double indice $(m, n)$ de la plaque $\alpha$ (hypothèse Love-Kirchhoff)
$\mathbf{W}_{pq}^{12}$	Travail d'interaction modale entre le mode $p$ du sous-système 1 et le mode $q$ du sous-système 2
$(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$	Coordonnées d'un point de l'espace dans un repère cartésien lié au sous-système $\alpha$
$(x_1, x_2, x_3)$	Repère global du modèle Éléments Finis
$x(t)$	Amplitude du déplacement de la masse de l'oscillateur isolé
$x_\alpha(t)$	Amplitude du déplacement de la masse de l'oscillateur $\alpha$
$Y(\omega)$	Mobilité de l'oscillateur isolé.

### Caractères grecs

$\alpha$	Indice affecté au sous-système
$\bar{\alpha}$	Ordre de troncature de la décomposition de la REM du sous-système 1
$\beta$	Constante reliant la puissance échangée à la différence des énergies totales

## PRINCIPALES NOTATIONS

$\beta_{pq}^{12}$	Facteur de couplage intermodal entre le mode $p$ du sous-système 1 et le mode $q$ du sous-système 2
$\langle \beta_{pq}^{12} \rangle_{\omega_p^1 \omega_q^2}$	Moyenne d'ensemble du facteur de couplage intermodal entre le mode $p$ du sous-système 1 et le mode $q$ du sous-système 2
$\Delta_\alpha$	Bande d'amortissement, sous-système $\alpha$ / oscillateur $\alpha$
$\Delta_p^\alpha$	Bande d'amortissement du mode $p$ du sous-système $\alpha$
$\Delta\omega$	Largeur de la bande de fréquence en <i>rad/s</i>
$\Delta\varepsilon_p^\alpha$	Largeur de la bande d'incertitude liée au mode $p$ du sous-système $\alpha$
$\delta_{pq}$	Symbole de Kronecker ( $\delta_{pq} = 0$ si $p \neq q$ , $\delta_{pq} = 1$ si $p = q$ )
$\varepsilon$	Taux d'incertitude
$\varepsilon_{ij}^\alpha$	Tenseurs des déformations du sous-système $\alpha$
$\gamma(n, p)$	Coefficient de corrélation entre les amplitudes des modes $n$ et $p$ du sous-système 1
$\gamma$	Coefficient de couplage gyroscopique entre deux oscillateurs
$\gamma_{pq}^{12}$	Coefficient de couplage intermodal gyroscopique entre le mode $p$ du sous-système 1 et le mode $q$ du sous-système 2
$\eta_\alpha$	Facteur de perte interne du sous-système $\alpha$
$\eta_p^\alpha$	Facteur de perte interne du mode $p$ du sous-système $\alpha$
$\eta_{\min}$	Valeur minimum du facteur de perte interne
$\eta_{12}$	Facteur de perte par couplage ou Coupling Loss Factor (CLF)
$\eta_{12}^{en}$	CLF obtenu par SEA inverse à partir d'expériences numériques
$\langle \eta_{12} \rangle_e$	Moyenne d'ensemble des facteurs de perte par couplage
$[\varphi^\alpha]$	Vecteur constitué par les coefficients de la décomposition en série de la répartition des puissances modales injectées du sous-système $\alpha$
$[\Lambda_\alpha^1]$	Vecteur de base $\alpha$ de la décomposition de la REM du sous-système 1
$[\Lambda_\sigma^2]$	Vecteur de base $\sigma$ de la décomposition de la REM du sous-système 2
$\mu_p(t)$	Amplitude du mode $p$ de la poutre 1, notation [KAR66]
$v_q(t)$	Amplitude du mode $q$ de la poutre 2, notation [KAR66]
$\nu_\alpha$	Coefficient de Poisson, sous-système $\alpha$

PRINCIPALES NOTATIONS

$\Pi_{inj}^\alpha$	Puissance injectée dans le sous-système $\alpha$ (moyenne temporelle)
$\Pi_{inj}^{op}$	Puissance injectée dans le mode $p$ du sous-système $\alpha$ (moyenne temporelle)
$\Pi_{diss}^{op}$	Puissance dissipée dans le mode $p$ du sous-système $\alpha$ (moyenne temporelle)
$\Pi_{pq}^{12}$	Puissance échangée entre le mode $p$ du sous-système 1 et le mode $q$ du sous-système 2 (moyenne temporelle)
$\bar{\theta}_c$	Rotation angulaire au niveau de la liaison des poutres vibrant en flexion
$\tilde{\theta}_z^{1p}(x)$	Déformée propre en terme de rotation angulaire du mode $p$ de la poutre 1
$\rho^\alpha$	Masse volumique du sous-système $\alpha$
$\Sigma_R^\alpha$	Espace des contraintes admissibles du sous-système $\alpha$
$\Sigma_{Poutre}^\alpha$	Espace des contraintes admissibles de la poutre $\alpha$
$\sigma_{ij}^\alpha$	Tenseur des contraintes du sous-système $\alpha$
$\tilde{\sigma}_{ij}^{op}$	Déformée propre en contrainte du mode $p$ du sous-système $\alpha$
$\sigma_x^\alpha(x, t)$	Contrainte normale généralisée de la poutre $\alpha$ (hypothèses de Euler-Bernoulli)
$\tilde{\sigma}_x^{op}(x, t)$	Déformée propre en terme de contrainte normale généralisée du mode $p$ de la poutre $\alpha$ (hypothèses Euler-Bernoulli)
$\sigma_{xx}^\alpha(x_\alpha, y_\alpha, t)$	Contrainte normale généralisée suivant $x_\alpha$ de la plaque $\alpha$
$\tilde{\sigma}_{xx}^{\alpha, mn}(x_\alpha, y_\alpha)$	Déformée propre en terme de contrainte normale généralisée suivant $x_\alpha$ du mode de double indice $(m, n)$ de la plaque $\alpha$
$\sigma^2(x, t)$	Contrainte longitudinale de la poutre 2 (hypothèses de traction-compression)
$\bar{\sigma}$	Ordre de troncature de la décomposition de la REM du sous-système 2
$\Omega$	Raideur du ressort de torsion
$\Omega_R^\alpha$	Espace des déplacements admissibles du sous-système $\alpha$
$\Omega_{Poutre}^\alpha$	Espace des déplacements admissibles de la poutre $\alpha$
$\omega_\alpha$	Pulsation propre de l'oscillateur $\alpha$
$\omega_p^\alpha$	Pulsation propre du mode $p$ du sous-système $\alpha$
$\hat{\omega}_p^\alpha$	Pulsation propre de l'événement associé au mode $p$ du sous-système $\alpha$
$\omega_c$	Fréquence centrale de la bande de fréquence (en $rad/s$ )
$[\omega_1, \omega_2]$	Bande de fréquence d'intérêt

## PRINCIPALES NOTATIONS

$\psi_R^\alpha$	Fonctionnelle de Reissner associée au sous-système $\alpha$
$\psi_{Poutre}^\alpha$	Fonctionnelle de Reissner, associée à la poutre $\alpha$ (hypothèses Euler-Bernoulli).

### Abréviations

CLF	Coupling Loss Factor
DLF	Damping Loss Factor
DMF	Dual Modal Formulation
FEM	Finite Element Method/Model
PME	Puissances Modales Échangées ( <i>hypothèse sur les</i> )
PMI	Puissances Modales Injectées ( <i>hypothèse sur les</i> )
REM	Répartition des Énergies Modales
SEA	Statistical Energy Analysis
SmEdA	Statistical modal Energy distribution Analysis.

### Références bibliographique

Les références bibliographiques sont repérées de la manière suivante : [BER89] ‘BER’ correspond aux trois premières lettres du nom du premier auteur de la référence, pour cette exemple, il s’agit de Bernasconi.

‘89’ correspond à l’année de parution de la référence, ici 1989.

En cas d’ambiguïté, une lettre est ajoutée à la notation, par exemple : [MAC97a], [MAC97b].



# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION - CONTEXTE SCIENTIFIQUE

La méthode de l'analyse statistique de l'énergie dite méthode SEA (Statistical Energy Analysis) est très utilisée par les industriels pour étudier le comportement vibroacoustique en moyennes et hautes fréquences de systèmes complexes. À l'origine, cette méthode développée dans les années soixante était destinée à donner des indications qualitatives que l'expert en vibroacoustique pouvait interpréter et analyser. De nombreux travaux de recherche ont porté sur la méthode, même si celle-ci est restée pendant longtemps une méthode d'initié.

Dans les années 80, les industriels se sont intéressés plus vivement aux méthodes de modélisation des phénomènes physiques car elles peuvent, au cours du développement de nouveaux produits, remplacer des essais réels sur des prototypes par des simulations numériques, et, par conséquent, réduire les coûts et les durées de développement de ces produits. Dans le domaine de la vibroacoustique en moyennes et hautes fréquences, la méthode SEA semblait la plus adaptée car elle était la plus aboutie et très économique en calcul. Les ingénieurs ont souhaité l'intégrer comme outil de quantification des niveaux de bruit et de vibrations de leurs systèmes. Suivant le type de structures modélisées, les opinions sur la pertinence de la méthode n'ont pas été les mêmes. Certains, comme par exemple dans le bâtiment, ont intégré la méthode comme outil de développement car ils en ont tiré un bénéfice. D'autres, par contre, furent plutôt déçus par les résultats car les nombreuses hypothèses inhérentes à la méthode ne permettent pas toujours de modéliser correctement le comportement vibro - acoustique de leurs structures. En effet, pour certaines structures industrielles, des hypothèses peuvent être irréalistes et donc ne pas être respectées ; le modèle est alors biaisé.

L'objectif de cette étude est de reformuler le modèle SEA en rendant une des hypothèses moins restrictive dans un but d'étendre le domaine de validité de la méthode. L'hypothèse que l'on souhaite faire 'évoluer' concerne la répartition des énergies modales dans chaque sous-système : en effet, le modèle SEA est basé sur une hypothèse d'équirépartition des énergies modales qui, dans certains cas de faible recouvrement modal, ne s'avère pas respectée. L'approche que l'on va développer, basée sur une formulation modale non standard, décrira avec divers degrés d'approximations la répartition des énergies modales de chaque sous-système. On verra que de cette approche découlera une nouvelle technique de

calcul des facteurs de perte par couplage à partir de modèles Éléments Finis des sous-systèmes découplés.

Dans cette introduction, le lecteur trouvera trois paragraphes distincts :

- le premier paragraphe concerne le contexte scientifique dans lequel s'inscrit la méthode SEA ;
- le deuxième paragraphe présente une étude bibliographique sur la SEA. Cette étude est non exhaustive compte tenu du nombre de publications sur le sujet et du nombre d'aspects concernant la méthode. Il n'est pas présenté en détail la description de la méthode car l'ouvrage [LYO95] fait référence en la matière ;
- le dernier paragraphe décrit les principaux apports de l'étude ainsi que la structure du document.

## 1. Contexte scientifique

### 1.1. *Limites des méthodes déterministes*

Le choix d'une méthode de modélisation pour étudier le comportement vibroacoustique d'un système déformable dépend essentiellement de sa capacité à obtenir des résultats pertinents et fiables dans un temps convenable. Pour des systèmes déformables présentant des résonances bien séparées, les méthodes déterministes peuvent calculer en 'tout' point la réponse spectrale du système. Les plus connues sont les méthodes numériques basées sur une approche modale, les éléments finis et les éléments finis de frontières. Ces méthodes s'appliquent généralement aux 'basses fréquences' car c'est dans ce domaine que l'on rencontre le plus souvent un comportement modal de la structure. Cependant, la limite haute de calcul en fréquence de ces méthodes ne peut être définie de façon stricte car elle est liée à la capacité de l'informatique et à la nature du système mécanique étudié. Pour les éléments finis, un critère de maillage de la structure peut être défini à partir d'un nombre d'onde naturel d'une structure plus simple associée. Plus on monte en fréquence, plus la longueur d'onde naturelle est faible, et plus le nombre de degrés de liberté à considérer est important ; il en résulte des calculs coûteux en temps. Deux autres raisons limitent les méthodes déterministes en fréquence. La première est due à des erreurs numériques sur le calcul des fréquences propres pour des systèmes matriciels de grandes tailles. La seconde provient d'une divergence entre les propriétés des matériaux, les conditions aux limites, les géométries du modèle et de la réalité pour des structures complexes. Une dispersion des réponses vibratoires pour des structures apparemment identiques a été observée par différents auteurs [BER96], [REB95], [KOM93]. Ces travaux consistent à mesurer des fonctions de transfert en des points bien définis sur un lot de structures industrielles *a priori* identiques. Les résultats de ces mesures

présentent une forte disparité attribuée à des petites variations non identifiées des caractéristiques des structures considérées. Cette dispersion semble de plus en plus forte pour les fréquences élevées ce qui rend les méthodes déterministes inopérantes.

## ***1.2. Les méthodes simplifiées***

Il apparaît donc, d'une manière inévitable, une limite en fréquence des méthodes déterministes. Celle-ci a conduit au développement de méthodes approchées, réduisant les temps calculs, les données d'entrées et donnant des résultats plus globaux. Un état de l'art sur ces approches est brièvement présenté dans ce paragraphe. Ces techniques s'appuient généralement sur des quantités énergétiques et des quantités moyennées. Chacun de ces deux types de quantités présentent un intérêt particulier ([ORE97]) :

- la densité d'énergie en un point du système est un scalaire positif, et elle est facilement sommable à la différence du déplacement. Les différentes méthodes énergétiques proposées pour prédire le comportement vibroacoustique des structures utilisent la même idée de base ([GUY99]) : relier linéairement, puissance injectée et énergie. Les relations obtenues présentent alors l'avantage d'être plus robustes comparées à la sensibilité des équations reliant force et déplacement ;

- les quantités moyennées donnent des résultats plus globaux, moins sensibles au phénomène de dispersion (voir Schroeder [SCH69]), et sont à la base des méthodes approchées car elles autorisent des simplifications des problèmes mathématiques. Les types de moyennes les plus souvent rencontrées, sont les moyennes spatiales, les moyennes fréquentielles et les moyennes sur un ensemble de structures.

### **1.2.1. Les méthodes énergétiques**

La méthode SEA est la plus connue. Elle a fait, et fait toujours l'objet de nombreux études. Les travaux de cette thèse portant sur cette méthode, un paragraphe spécifique lui est consacré (voir paragraphe 2).

Dans le but d'obtenir une réduction du maillage spatial, on note l'approche développée par Nefske et Sung [NEF87], Wohlever et Bernhard [WOH92], Djimadoum [DJI93], Le Bot [LEB98], Lase et al. [LAS96]. Celle-ci est généralement nommée 'Power Flow Finite Element Analysis (PFEEA)' ou 'équation de la chaleur'. En partant des concepts énergétiques de la SEA, ces travaux donnent naissance à un modèle énergétique local (moyenne spatiale glissante), différent de l'approche SEA qui considère des moyennes spatiales globales. Les bilans de puissance sont écrits au niveau local et conduisent à une équation du second ordre.

Celle-ci s'apparente à l'équation de la chaleur obtenue en thermique. Les gains numériques sont effectués sur le maillage spatial, et les codes d'éléments finis de transfert de chaleur peuvent être employés. Les résultats donnés par cette méthode permettent de connaître la répartition spatiale de l'énergie à l'intérieur des sous-systèmes. Les difficultés rencontrées sont liées à la modélisation des sources dynamiques et des conditions aux limites énergétiques aux niveaux des discontinuités des systèmes ce qui la rend difficilement applicable aux systèmes hétérogènes. La généralisation à des systèmes à deux dimensions ainsi qu'à n'importe quel type d'onde semble également poser problème (voir [CAR95], [LEB96]).

D'autres équations énergétiques locales sont obtenues par Lase et al. [LAS96]. Une première méthode, appelée 'General Energetic Method (GEM)' relie la densité de l'énergie totale, la densité du lagrangien, et le flux d'énergie active et réactive. Deux équations différentielles du second ordre sont obtenues qui traduisent l'évolution de la densité de l'énergie totale et l'évolution de la densité du lagrangien. Cette méthode est appliquée à des poutres vibrant longitudinalement et peut être généralisée à des poutres vibrant en flexion. En appliquant l'hypothèse de champ lointain, et en considérant une moyenne spatiale glissante sur une distance équivalente à une longueur d'onde, la GEM se simplifie pour donner une méthode appelée 'Simplified Energy Method (SEM)' analogue à la PFFEA. Dans [LAS93], cette approche est mise en œuvre pour évaluer des fonctions de transfert dans les moyennes et hautes fréquences sur des poutres.

Toujours par considérations sur les densités d'énergie, l'approche originale présentée par Sestieri et Carcaterra [SES95], [CAR95], [CAR97] se caractérise par le calcul d'une enveloppe spatiale approchée de l'énergie cinétique par la transformation de Hilbert. Cette transformation lisse l'enveloppe dans le nouvel espace. Celle-ci peut alors être calculée avec un code d'éléments finis sans tenir compte d'un maillage très fin. Cette approche a été testée sur des poutres homogènes soumises à des ondes longitudinales et à des ondes de flexion. À la différence de la PFFEA, cette approche reconstitue la contribution du champ proche près des conditions aux limites et des efforts. Pour l'instant, elle n'a cependant été appliquée qu'à des structures mono-dimensionnelles.

La méthode des coefficients d'influence énergétiques (CIE) proposée par Guyader et al. [GUY82] se présente comme une alternative à la SEA. À la différence de la SEA qui traite les aspects acoustiques et mécaniques sur le même plan, la méthode CIE permet de considérer de manière plus fine le couplage mécanique-mécanique que le couplage mécanique-acoustique. Les coefficients d'influence relient linéairement les énergies cinétiques globales des sous-systèmes aux densités spectrales de puissance des forces excitatrices. Les coefficients d'influence entre les sous-systèmes mécaniques peuvent être évalués à partir

d'une approche modale sur le système couplé. Le couplage acoustique qui se caractérise par un couplage 'faible' autorise une approche simplifiée du problème. Cette méthode à la fois de nature modale et de nature énergétique, requière la connaissance des modes globaux de la structure mécanique *in vacuo* ce qui la rend assez lourde dans le cas général. Cependant, expérimentalement, elle présente une mise en œuvre assez légère (pas besoin de calcul de modes) et permet de suivre le cheminement de l'énergie à partir de la zone excitée. Numériquement, cette démarche a principalement été appliquée pour des structures composées d'assemblages de plaques finies (voir [BOI82], [BOI85]).

Récemment, une approche appelée 'Energetic Mean Mobility Approach (EMMA)' a vu le jour ([ORE97]). Cette approche fait appel à la 'mobilité énergétique' définie comme étant le rapport entre le carré de la vitesse vibratoire obtenue en un point d'une structure pour une bande de fréquence et la puissance active injectée en un autre point. Les mobilités énergétiques des sous-systèmes sont établies en considérant les structures isolées et peuvent être calculées à partir des mobilités classiques de ces mêmes structures. À partir de quantités moyennées en fréquence, et comme pour les mobilités classiques, une relation d'additivité sur les mobilités énergétiques est obtenue. Par contre, la relation de connectivité entre deux systèmes s'avère plus compliquée que celle rencontrée pour les mobilités classiques car faisant intervenir un 'facteur de connexion' dépendant des mobilités classiques des deux systèmes. Pour conserver le formalisme classique des mobilités, des 'mobilités énergétiques de connexion' sont alors définies. Ces relations ont été obtenues de manière approchée en négligeant certaines quantités du fait de la moyenne fréquentielle et des oscillations autour de zéro de ces quantités. Cette méthode permet des calculs prédictifs approchés et locaux à partir de quantités moyennées par bande de fréquence. Elle a été testée avec succès sur des assemblages de plaques et de cylindres couplés en plusieurs points. Le domaine de validité n'a pas encore été bien défini. D'après l'auteur, un paramètre important est le nombre de passage par zéro de la mobilité de transfert entre le point de calcul et le point excité. La principale restriction à l'état actuel de la méthode concerne le type de couplage entre structures qui doit être ponctuel.

### 1.2.2. D'autres méthodes simplifiées

Plusieurs méthodes reposent sur les mobilités. Skudrzyk [SKU80] propose 'The Mean Value Method' qui s'attache à ne restituer que la moyenne géométrique entre les amplitudes des résonances et des anti-résonances ainsi que l'enveloppe des valeurs minimum et maximum dues aux résonances et anti-résonances. Pour des poutres, ceci équivaut à ne considérer que les ondes propagatives sans ondes retours, ce qui revient également à considérer les caractéristiques de la structure infinie associée. Une autre approche, présentée par Gaylard [GAY84], consiste à effectuer un 'lissage fréquentiel' de la matrice dite 'des

mobilités réelles'. À partir des matrices de masse et de raideur de la structure, une décomposition en série polynomiale de la matrice des mobilités réelles permet d'obtenir un lissage fréquentiel de la réponse qui s'affranchit du détail des résonances et anti-résonances.

La méthode du 'flou structural' [SOI93] développée par une équipe dirigée par Soize a pour but de prédire la réponse vibroacoustique en moyennes fréquences de structures complexes. Elle introduit une distinction entre la structure maîtresse et les sous-systèmes mécaniques secondaires fixés dessus (complexité structurale). La structure maîtresse désigne la partie du système qui est accessible par des modèles conventionnels et dont les propriétés mécaniques et géométriques sont parfaitement connues. La complexité structurale est constituée par la partie complémentaire du système et n'est pas, par définition, accessible par les modèles conventionnels. Un modèle probabiliste est alors nécessaire qui donne lieu au 'flou structural'. Celui-ci est caractérisé par une matrice d'impédance probabiliste qui vient s'ajouter à la matrice d'impédance de la structure maîtresse, sans augmenter le nombre de degrés de liberté du système. Des exemples d'application sont présentés en référence [SOI93]. Un exemple type est celui d'une coque d'un sous-marin à l'intérieur de laquelle est définie, en terme d'impédance probabiliste, la structure embarquée.

'The Modal Sampling Method' présentée par Trentin et Guyader [TRE94], [TRE95] propose une méthode dite de condensation des modèles vibroacoustiques en moyennes et hautes fréquences. Dans ces domaines de fréquence où un nombre important de modes contribuent à la réponse de la structure, cette méthode vise à lier les réponses modales afin de réduire le nombre de degrés de liberté à prendre en compte. Les amplitudes modales du système de référence sont approchées par une série tronquée à un ordre qui est supposé suffisant pour obtenir des résultats 'convenables'. Le nombre de degrés de liberté à prendre en compte dans les calculs est égal à l'ordre de troncature de la série. Le modèle condensé ainsi posé est directement introduit dans une formulation variationnelle du problème. La convergence en fonction de la taille du modèle condensé a été étudiée pour différentes structures. Pour des structures homogènes, de bons résultats sont obtenus à partir de modèles de petites tailles ce qui est le but de la méthode. Par contre, pour des structures présentant des hétérogénéités ou pour des structures où l'on ne connaît pas les modes, l'approche semble être moins performante. La difficulté réside dans la reconstitution des amplitudes modales à la fois en module et en phase, cette dernière pouvant varier brutalement d'un mode à un autre. Cette idée de groupement de modes est à rapprocher de l'hypothèse que l'on souhaite faire évoluer dans le modèle SEA. En effet, l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales consiste à lier les énergies des modes d'un sous-système en les rendant toutes égales ; il n'y a donc qu'un seul degré de liberté par sous-système. L'avantage d'une condensation sur les énergies

plutôt que sur les amplitudes repose sur le fait que les énergies sont des scalaires positifs ; elles ne posent donc pas le problème de la reconstitution de la phase.

## 2. La méthode SEA

On ne présente pas dans cette partie une description détaillée de la méthode. Notre approche reposant sur la formulation de base de la SEA, de nombreux points seront abordés au cours des prochains chapitres. Plusieurs ouvrages traitent de la méthode dans son ensemble. L'ouvrage qui fait référence en la matière, bien que non impartiale, est celui de Lyon édité en 1975 et réédité en 1995 avec la participation de DeJong [LYO95]. Une publication récente [BUR97] donne un aspect assez synthétique de la formulation. Des 'critiques' très didactiques sont proposées par Fahy [FAH74] et Hodges et al. [HOD86] où les fondements ainsi que les principes physiques mis en jeu sont exposés en détails.

Les principaux points abordés dans cette partie se limitent à ceux qui permettent de mieux cerner les différents aspects de la présente étude. Dans l'ordre de leur développement, ils sont :

- les origines de la méthode,
- les principales 'critiques',
- les différentes hypothèses,
- les équations modales de la formulation de base,
- la force de couplage entre les sous-systèmes,
- la validité des résultats en fonction du recouvrement modal,
- l'aspect 'statistique',
- le calcul des facteurs de perte par couplage,
- les différentes tentatives pour améliorer le modèle de base.

### 2.1. *Les débuts de la méthode*

Les premiers travaux à l'origine de la méthode semblent être ceux de Lyon et Maidanik [LYO62] et de Smith [SMIT62] bien que dans ces références le terme SEA ne soit pas employé. Ces deux publications datent de 1962. Lyon et Maidanik montrent que la puissance échangée par deux oscillateurs faiblement couplés de manière linéaire et conservative, et excités par des sources de type bruit blanc décorrélées entre elles, est proportionnelle à la différence des énergies totales des oscillateurs découplés. Cette relation est ensuite utilisée pour étendre l'approche au problème de l'interaction de deux systèmes multi modaux. Une attention particulière est portée au couplage entre un champ acoustique réverbérant et une structure mécanique afin d'en déduire la partie réelle de l'impédance de

rayonnement. Une analogie avec les circuits est présentée. De son côté, Smith [SMI62] calcule la réponse d'un mode résonnant à une excitation par un champ acoustique diffus large bande. Il trouve que la réponse est proportionnelle au rapport de la 'résistance de rayonnement' sur 'la résistance totale'. Bien que ces approches soient différentes, l'une est modale, l'autre est basée sur les ondes, et que les résultats paraissent différents, ils sont virtuellement les mêmes. En effet, en référence [LYO62] sont retrouvés les résultats présentés en [SMI62]. Le fait que l'approche modale et l'approche par les ondes donnent les mêmes résultats est un élément central de la SEA qui peut bénéficier des deux concepts. En 1965, Scharton et Lyon [SHA65] présentent les principaux fondements de la méthode SEA et mettent en avant son caractère 'statistique' précédemment introduit par Lyon et Maidanik [LYO64b]. Pour la première fois, il est démontré que la relation traduisant la puissance échangée par les deux oscillateurs (sous les hypothèses d'excitations de type bruit blanc décorrélées et de couplage non dissipatif) peut être établie quelle que soit la 'force' de couplage entre les deux oscillateurs. De plus, il est montré que la puissance échangée est proportionnelle à la différence des énergies *actuelles* des oscillateurs à la différence de [LYO62] où elle est proportionnelle à la différence des énergies des oscillateurs découplés. Ungar [UNG66], [UNG67] présente en 1966 une synthèse sur la méthode. Dans ces deux publications sont décrits les concepts et les relations qui forment la base de la méthode. Des indications sur les domaines de validité sont également données. Dans les années soixante, plusieurs travaux utilisent l'approche pour étudier les couplages de différentes structures : Lyon et Maidanik [LYO62], Maidanik [MAI62] pour la réponse d'une structure à une excitation par champ diffus large bande, Lyon et Eichler [LYO64a] pour le couplage de deux systèmes structuraux (résonateur-plaque, poutre-plaque, plaque-plaque), Lyon et Scharton [LYON65] pour le couplage de trois structures, Eichler [EIC65] pour étudier le 'Noise Reduction' d'une boîte rectangulaire, Fahy [FAH69], [FAH70a] pour étudier la réponse vibratoire de structures cylindriques ou parallépipédiques couplées avec le fluide interne.

## 2.2. *Les principales 'critiques'*

La SEA est une méthode approchée qui repose sur un nombre important d'hypothèses qui ne sont pas toujours faciles à appréhender. De nombreux travaux tentent de faire la lumière sur des aspects qui pouvaient ou peuvent paraître obscurs.

Zeman et al. [ZEM69] déterminent la puissance échangée par deux structures faiblement couplées soumises à des excitations aléatoires. Les équations de la SEA sont retrouvées. Il est souligné que l'hypothèse la plus controversée concerne les excitations des modes par les forces extérieures qui doivent être statistiquement indépendantes. Dans un but de cerner le domaine d'application de la SEA, Davies [DAV72b], [DAV73] étudie la réponse de deux systèmes continus couplés par des masses, ressorts et éléments gyroscopiques.



Maidainik [MAI76a], [MAI76b] démontre un certain nombre de résultats exacts concernant la puissance échangée par deux systèmes dynamiques qui sont couplés en un nombre fini de points. Il montre que sous certaines conditions et hypothèses, des termes de couplages intermodaux s'annulent. Les équations standard de la SEA peuvent alors être déduites du cas général. Woodhouse [WOO81] démontre également des relations concernant les puissances échangées et les énergies des sous-systèmes pour le couplage de deux systèmes. Des modifications du schéma classique SEA sont suggérées pour certaines situations comme le transfert non résonnant par loi de masse dans la transmission acoustique ou pour des systèmes avec des amortissements importants.

Plusieurs études comparent les résultats SEA à des calculs analytiques exacts pour des systèmes simples comme le couplage de deux poutres vibrant longitudinalement [KEA87], [KEA91], de deux poutres en flexion [DAV72a], [DAV82], [YAP96], de deux plaques [DIM88].

Langley [LAN89] présente le calcul de la réponse d'un système composé de plusieurs sous-systèmes dynamiques couplés entre eux et excités par des sources aléatoires. Sous l'hypothèse de couplage faible, et de sources décorréelées entre elles, les équations de la SEA sont retrouvées. À la suite de ces travaux, Langley propose en [LAN90] une expression du facteur de perte par couplage à partir de la moyenne spatiale et fréquentielle de la fonction de Green. Une définition théorique du couplage faible est introduite sur des considérations d'approximation de la fonction de Green. Il est montré que la présence du couplage faible ne garantit pas un facteur de perte par couplage nul entre les sous-systèmes qui ne sont pas couplés physiquement. Une condition supplémentaire est nécessaire. Les sous-systèmes doivent être réverbérants. En conclusion, Langley souligne que sous le respect des hypothèses standards, la prédiction SEA est pertinente pour les cas où tous les sous-systèmes sont excités, mais qu'une réserve doit être de rigueur quand un seul sous-système est excité et que la réponse requise est éloignée de l'excitation. Il suggère (en 1989) que d'autres investigations soient menées car la majorité des études ne considèrent que deux sous-systèmes ce qui ne permet pas de mettre en évidence le problème du couplage non direct.

Quelques années plus tard, Fredo [FRE95] et Finnveden [FIN90] étudient les échanges de puissance pour le couplage de trois sous-systèmes. La structure étudiée par Fredo [FRE95] est composée de plaques couplées en U. Sur une approche déterministe qu'il différencie de la SEA en l'appelant 'SEA-like', il met en évidence un couplage indirect entre les sous-systèmes non couplés physiquement. En 'relative contradiction' avec les résultats de Langley, il montre que la SEA surestime la puissance échangée quand l'amortissement est faible, ce qui est confirmé par Yap et al. [YAP96] pour le couplage de deux sous-systèmes.

Finnveden [FIN90] pour le couplage de sous-systèmes mono-dimensionnels met aussi en évidence le couplage indirect entre sous-systèmes non couplés physiquement quand le facteur de recouvrement modal est fort.

Riche d'une forte expérience dans le domaine, Fahy [FAH93], [FAH94] présente une analyse critique de nombreux aspects de la méthode et discute des limites d'application de la SEA.

### **2.3. Les différentes hypothèses**

Pour obtenir les équations de la SEA, un certain nombre d'hypothèses ont été effectuées. Les travaux cités dans les deux paragraphes précédents ont permis de mieux les cerner. Keane et Price [KEA87] donnent une liste de ces hypothèses. Elles sont rappelées et discutées ici pour le modèle classique de la SEA :

- les sous-systèmes et leurs couplages doivent pouvoir être décrits de manière linéaire ;
- l'amortissement doit être relativement faible et doit pouvoir être modélisé par une matrice d'amortissement diagonale quand elle est exprimée sur la base des modes des sous-systèmes découplés ;
- les processus sont aléatoires et stationnaires ce qui implique que les quantités moyennées sur un temps suffisamment long sont constantes. Les processus sont également supposés ergodiques ; la moyenne d'ensemble peut alors être remplacée par la moyenne temporelle ;
- le couplage entre les sous-systèmes doit être conservatif ;
- le couplage entre les sous-systèmes doit être faible (voir paragraphe 2.5) ;
- les excitations extérieures appliquées aux sous-systèmes doivent être statistiquement indépendantes et de type 'Rain on the roof'. En d'autres termes, les forces généralisées pour tous les sous-systèmes doivent être incohérentes et de type bruit blanc ;
- le 'système' étudié est constitué d'une population de structures quasi identiques mais pour lesquelles des petites différences dues à la fabrication et à l'assemblage existent. Les résultats sont donnés pour une moyenne d'ensemble de cette population. Du point de vue théorique, il est considéré que les fréquences propres des sous-systèmes peuvent avoir n'importe quelle valeur dans la bande de fréquence considérée avec une probabilité uniforme de l'événement ;
- les paramètres de couplage d'ensemble sont les mêmes pour tous les modes dans la bande de fréquence considérée ;
- la bande de fréquence d'intérêt est relativement 'étroite' ;
- la bande de fréquence doit contenir un nombre 'important' de modes résonnants pour chacun des sous-systèmes afin qu'il y ait plusieurs interactions modales dans cette bande ;
- les modes en dehors de la bande de fréquence d'intérêt ne participent pas aux échanges d'énergies.

Toutes ces hypothèses font que la SEA a principalement trouvé une légitimité pour l'étude du couplage fluide-structure plutôt que le couplage structural. Toutefois, certains travaux, qui seront décrits au paragraphe 2.9, visent à faire évoluer le modèle de base afin d'étendre le domaine de validité de la méthode.

### 2.4. Les équations modales de la formulation de base

La formulation de la méthode SEA décrite dans l'ouvrage référence [LYO95] chapitre 3, est basée sur une approche modale. Le formalisme repose notamment sur la projection des équations du mouvement des deux sous-systèmes couplés sur les bases modales des sous-systèmes découplés. Les équations modales obtenues sont supposées être de la forme (équations (3.2.5a) et (3.2.5b) en [LYO95]) :

$$\begin{cases} M_1[\ddot{y}_\alpha + \Delta_1 \dot{y}_\alpha + \omega_\alpha^2 y_\alpha] = L_\alpha + \sum_\sigma [\mu_{\alpha\sigma} \ddot{y}_\sigma + \gamma_{\alpha\sigma} \dot{y}_\sigma + \kappa_{\alpha\sigma} y_\sigma] \\ M_2[\ddot{y}_\sigma + \Delta_2 \dot{y}_\sigma + \omega_\sigma^2 y_\sigma] = L_\sigma + \sum_\alpha [\mu_{\alpha\sigma} \ddot{y}_\alpha - \gamma_{\alpha\sigma} \dot{y}_\alpha + \kappa_{\alpha\sigma} y_\alpha] \end{cases}$$

(avec la notation de [LYO95]).

Ce schéma de couplage modal est tel que :

- chaque amplitude modale peut être associée à la description d'un oscillateur ;
- les modes (ou oscillateurs) d'un même sous-système ne sont pas couplés directement entre eux ;
- les modes d'un sous-système sont couplés avec les modes de l'autre sous-système par des éléments non dissipatifs.

Ce schéma que l'on appellera par la suite 'schéma de couplage modal SEA' est représenté symboliquement figure 1.1.

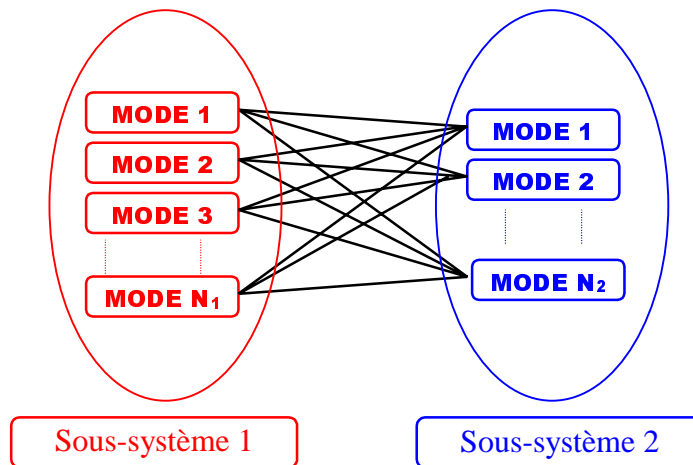


Figure 1.1. Représentation symbolique du schéma de couplage modal suggéré par la SEA.

Dans l'ouvrage de Lyon et al. [LYO95], les modes considérés sont les modes des sous-systèmes découplés-bloqués. La décomposition modale n'est pas clairement formulée mais est communément admise. Les termes de couplage entre les modes ne sont que vaguement identifiés. De plus, un couplage dissipatif apparaît ce qui ne peut être pris en compte par la SEA classique.

Dans certaines références (voir par exemple [UNG66], [WOO81]), les équations modales sont posées sous cette forme comme un *postulat*.

Cependant, plusieurs études justifient ou démontrent ces équations modales dans certaines configurations de couplage :

- pour le couplage entre une structure mécanique et une cavité acoustique, Lyon et al. [LYO62] démontrent rigoureusement que ce schéma de couplage modal peut être obtenu. Les modes considérés pour la cavité sont les modes de la cavité avec les parois bloquées et les modes de la structure sont définis en considérant celle-ci *in-vacuo*. La cavité est décrite par un potentiel de vitesse et la structure par ses déplacements. Les couplages entre les modes des deux structures sont alors de type 'gyroscopique' et les équations modales correspondent bien au schéma de couplage modal SEA. Ces équations sont reprises par Fahy en référence [FAH69], [FAH70a] pour étudier le couplage entre une structure et son fluide intérieur ;

- par une approche semblable à la décomposition modale employée pour étudier le couplage structure-cavité, Karnopp [KAR66] applique la décomposition pour le couplage de deux structures mécaniques. Celle-ci se base sur une double formulation et est proposée pour le couplage de deux poutres de sections identiques et vibrant longitudinalement. Ce cas particulier d'ondes de traction-compression dans la structure autorise un parallèle immédiat avec les ondes acoustiques dans une cavité. Une poutre est décrite en *impulse* (la dérivée de l'*impulse* donne l'effort longitudinal) et les modes considérés de cette poutre sont définis tels que l'extrémité de couplage soit bloquée. Ceci peut être rapproché de la description par un potentiel de vitesse et des modes bloqués pour une cavité. La seconde poutre est décrite en déplacement et les modes considérés sont tels que l'extrémité de couplage soit libre. Les équations modales finalement obtenues se présentent, sous la forme du schéma de couplage modale SEA et les couplages entre modes sont de nature gyroscopique (après correction des erreurs de frappe et de signes en [KAR66]) ;

- Crandall et Lotz [CRA71] établissent des équations modales pour le couplage de poutres vibrant en flexion couplées par un ressort. Les modes des sous-systèmes sont les modes des sous-systèmes découplés libres et les deux poutres sont décrites en déplacement.

Les équations modales obtenues ne sont pas sous une forme cohérente avec le schéma de couplage modal SEA : certains termes traduisent des couplages directs entre modes d'un même sous-système et la définition des fréquences propres des oscillateurs associés aux modes pose problème pour des couplages forts. Cependant pour des raideurs de ressort faibles par rapport aux raideurs dynamiques de flexion des poutres, certains termes peuvent être négligés ce qui conduit à un système d'équations en cohérence avec le schéma de couplage modal SEA. Les modes des deux poutres sont alors couplés en raideur. Sharton et Lyon [SCH68] utilisent également une approche similaire pour obtenir les équations modales pour un autre système de poutres faiblement couplées.

### ***2.5. Force de couplage entre les sous-systèmes***

L'hypothèse de couplage faible entre les sous-systèmes conditionne généralement le découpage du système global en sous-systèmes. Cependant, de toutes les hypothèses de la SEA, c'est sans doute une des plus difficile à cerner. Dans la formulation de base de la SEA, elle intervient pour le passage de la relation d'échanges d'énergies entre deux oscillateurs soumis à des efforts décorrelés à la relation d'échanges d'énergies entre deux ensembles d'oscillateurs (modes). Les définitions du couplage faible données dans la littérature sont généralement très théoriques. Celles-ci varient d'un article à un autre et dépendent fortement de l'approche 'mathématique' qui est mise en œuvre par chaque auteur.

Chandiramani [CHA78] et Smith [SMI79] donnent une définition qui repose principalement sur une conséquence du couplage faible : le couplage est faible si le facteur de perte par couplage entre deux sous-systèmes est beaucoup plus faible que les facteurs d'amortissement interne des deux sous-systèmes. Bien que cet indicateur présente un fort intérêt pratique, il ne fait pas l'unanimité (voir [FIN95]). Par une approche par les ondes, Mace [MAC93], [MAC94] différencie quatre types de force de couplage dont trois couplages forts, et donne des critères délimitant les quatre zones attribuées à ces types de couplage. Ces critères sont définis par deux paramètres qui dépendent des coefficients de réflexion et de transmission au niveau du couplage ainsi que des facteurs de recouvrement modal des sous-systèmes. En accord avec les travaux de Keane et Price [KEA87], de Remington et al. [REM75] et de Davies [DAV73], il montre que pour deux sous-systèmes, la relation d'échanges d'énergies entre deux sous-systèmes est juste quelle que soit la force du couplage mais que l'expression du facteur de proportionnalité dépend de la force du couplage. Finnveden [FIN95] donne un critère de couplage fort identique à celui de Mace (pour les trois types de couplage fort) : l'indicateur de la force de couplage est le rapport entre le coefficient de transmission et le produit des facteurs de recouvrements modaux des deux sous-systèmes. Il montre également que cet indicateur reste valable pour le couplage de trois sous-systèmes. Langley [LAN89] propose une définition du couplage faible à partir de considération sur les

fonctions de Green : le couplage est dit faible si la fonction de Green pour un sous-système donné est approximativement égale à celle du sous-système découplé. Une année plus tard, en référence [LAN90], il donne une définition un peu différente : le couplage sera dit faible si il existe un paramètre  $\varepsilon$  petit tel que le module au carré de la fonction de Green  $|G_{ij}(x, y, \omega)|^2$  est de l'ordre de  $\varepsilon^n$ , ou  $n$  représente le nombre minimum de couplages entre le sous-système  $i$  et le sous-système  $j$ . Fredo [FRE95] étudie l'influence de la force de couplage entre trois sous-systèmes (plaques couplées en U) et les conséquences sur le couplage indirect. Il montre que le couplage indirect n'est pas uniquement lié à la force de couplage entre les sous-systèmes. D'après Fahy [FAH94], le couplage entre deux sous-systèmes est faible s'il assure que le couplage indirect entre les oscillateurs d'un même ensemble via les oscillateurs de l'autre ensemble est négligeable par rapport au couplage direct entre les deux ensembles d'oscillateurs. En référence [FAH97], il donne une autre définition : sous une condition de couplage faible, les modes du système sont localisés dans le sens qu'ils ressemblent de près en fréquence propre et en déformé aux modes des systèmes non couplés (avec les conditions aux limites appropriées), et que leurs énergies résident principalement à l'intérieur du système correspondant.

À l'opposé de ces définitions théoriques, James et Fahy [FAH96], [FAH97], [JAM97] proposent un indicateur permettant expérimentalement de détecter comment le système peut être découpé en sous-systèmes afin de respecter le couplage faible. Cet indicateur repose sur les caractéristiques de la réponse impulsionnelle du système et a été testé, à présent, sur des systèmes composés de deux sous-systèmes effectifs.

## 2.6. L'aspect statistique

Plusieurs études (voir [BER96], [KOM93], [REB95]) montrent que les réponses vibratoires en 'haute' fréquence de structures industrielles apparemment identiques présentent une grande dispersion des spectres de réponses. Il est donc inutile de chercher à prédire de façon déterministe la réponse vibratoire d'un système dans les hautes fréquences car cela serait très coûteux en calcul et nécessiterait de connaître un nombre important de détail du système.

Sur des systèmes mécaniques simples, Hodges et Woodhouse [HOD89] étudient les résultats donnés par différents types de moyennes sur un ensemble de structures. Il est montré qu'une moyenne arithmétique ne donne pas toujours le comportement d'un élément 'typique' de l'ensemble. Ceci est attribué au fait qu'occasionnellement, un élément peut avoir un comportement extrême et avoir un poids démesuré sur la moyenne linéaire qui est alors

‘faussée’. Ils montrent qu’une moyenne géométrique sur l’ensemble donne une meilleure représentation du comportement de l’élément typique.

Dans sa formulation de base, la méthode SEA fait l’hypothèse d’une moyenne d’ensemble sur une population de structures quasi identiques. L’énergie moyennée est alors supposée être typique de la réponse des systèmes de cet ensemble. Du point de vue théorique, cette population de structures est définie tel que la densité de probabilité pour l’événement des fréquences propres soit uniforme dans la bande de fréquence considérée. C’est-à-dire que la fréquence propre de chaque mode peut avoir n’importe quelle valeur comprise entre la fréquence minimum et la fréquence maximum de la bande considérée. Peu d’études traitent de la pertinence de cette hypothèse.

Sur un exemple composé d’un couplage de deux poutres, Scharon et Lyon [SCH68] mettent en évidence l’intérêt de prendre en compte une moyenne d’ensemble sur une population de structures plutôt que de considérer une structure déterministe unique. Dans ce cas, la population de structures est définie telle que la première poutre soit déterministe et la seconde poutre ait chacune de ces fréquences propres avec une valeur équiprobable dans un intervalle de fréquence défini à partir des fréquences propres et de la séparation modale de la première poutre.

Mace et Wester [MAC93], [WES96], [WES97] montrent pour deux sous-systèmes couplés que la relation SEA de proportionnalité entre la puissance échangée et la différence des énergies modales moyennées est valable pour une moyenne d’ensemble de la réponse quelle que soit la force du couplage, mais qu’elle n’est généralement pas vraie pour un système individuel. La population de structures considérée par Mace et al. est définie en concordance avec l’approche par les ondes qu’ils emploient. Elle se caractérise par des phases des ondes (mod  $2\pi$ ) uniformément distribuées dans un intervalle  $\{-\pi, +\pi\}$ .

Finnveden [FIN95] sur une approche similaire donne les mêmes conclusions pour ce qui concerne le couplage de deux sous-systèmes. Il étudie également l’incidence de la moyenne d’ensemble sur le couplage de trois sous-systèmes mono-dimensionnels. La relation de proportionnalité de la SEA n’est pas toujours retrouvée mais le bilan énergétique fait intervenir des termes directement proportionnels aux différences des énergies modales, c’est-à-dire que cela revient à devoir considérer des couplages indirects entre éléments non couplés physiquement. L’importance du couplage indirect dépend de la force du couplage et de la nature réverbérante ou non des sous-systèmes. Pour cette étude, Finnveden définit la population de structures (mono-dimensionnelle) telle que pour chaque élément, à n’importe quelle fréquence, il y ait égale probabilité que la résonance la plus proche soit au-dessous ou au-dessus de cette fréquence. Cela revient à prendre des éléments mono-dimensionnels tels

qu'ils aient des longueurs aléatoires (équiprobable) avec une incertitude de plus ou moins un quart de longueur d'onde. Celle-ci est en concordance avec la définition de "limite acoustique" donnée en [MAC92], [SHO96] : *quand l'incertitude sur le design induit des incertitudes sur les fréquences propres égales à la moyenne des séparations entre elles, il devient alors impossible de suivre une résonance individuelle.*

À partir de calcul sur des couplages de poutres, Keane [KEA93] met en évidence les dangers de faire l'hypothèse que la moyenne d'ensemble sur une population de structures et la moyenne fréquentielle sur une bande de fréquence sont équivalentes.

Lyon [LYO69] étudie la moyenne et la variance de la réponse vibratoire d'ensembles de structures et de cavités. L'aspect aléatoire est introduit sur des paramètres simples tels que les fréquences propres et les points d'observation. Il montre que dans de nombreux cas le facteur de recouvrement modal joue un rôle important sur la variance. En référence [FAH92], une analyse de sensibilité des résultats en fonction de variations aléatoires des paramètres géométriques des sous-systèmes est effectuée pour des systèmes de poutres et de plaques. Sur différents cas, il est montré que les résultats SEA obtenus avec les facteurs de perte par couplage de l'approche onde surestiment les valeurs exactes quand le facteur de recouvrement modal est très inférieur à un. Dans ce cas, la variance sur les puissances échangées devient plus grande que celle des perturbations géométriques. Par contre, la variance sur les puissances échangées devient petite quand le facteur de recouvrement modal excède un. D'autres études similaires sur des systèmes de poutres ont des conclusions semblables : Davies et Wahab [DAV81], Davies et Khandoker [DAV82], Manohar et Keane [MAN94].

Toujours en [FAH92], Fahy et al. soulignent qu'un des désavantages de la SEA est qu'elle ne quantifie pas le degré de variations des paramètres physiques qui peuvent entraîner une déviation du comportement vibratoire d'un système individuel par rapport au modèle 'idéalisé'.

## ***2.7. Validité des résultats en fonction du recouvrement modal***

Dans cette partie, on nomme les résultats de l'approche SEA-onde, les résultats obtenus en appliquant la méthode SEA avec des facteurs de perte par couplage déduits de l'approche asymptotique des ondes (Voir [LYO95], chapitre 10).

Ming et Pan [MIN97] étudient, à partir de résultats numériques, l'exactitude des résultats de l'approche SEA-onde pour un système de plaques couplées. Sur ce cas de couplage, il est mis en évidence que deux facteurs jouent un rôle important sur la qualité des résultats : le premier, est la moyenne géométrique des facteurs de recouvrements modaux ; le second, est le nombre de modes dans la bande de fréquence considérée. En 'basse' fréquence,



où il y a peu de modes, les résultats SEA obtenus ne sont pas bons et les résultats numériques ‘exacts’ présentent une très grande variabilité en fonction de la position de l’excitation. En montant en fréquence, les nombres de modes des deux plaques (par tiers d’octave) ainsi que les facteurs de recouvrement modal augmentent, les résultats de la SEA deviennent alors meilleurs et les variations vis-à-vis du point d’excitation diminuent. Ils notent que le facteur de recouvrement modal ne doit pas être considéré comme étant le seul paramètre jugeant de la qualité des résultats car pour deux valeurs identiques mais des amortissements différents, la qualité des résultats SEA peut ne pas être la même. Les travaux de Fahy et Mohammed [FAH92] déjà cités plus haut donnent des conclusions similaires. Quand le facteur de recouvrement modal moyen est inférieur à un, les transferts d’énergies donnés par la ‘SEA-onde’ surestiment le transfert réel. À partir d’une perturbation des paramètres géométriques des structures, ils montrent que la variation sur les résultats devient de plus en plus faible quand le facteur de recouvrement modal augmente. Une explication est que l’amortissement lisse les réponses en fréquence ce qui les rend moins sensibles aux petites variations géométriques du système.

L’influence de l’amortissement sur la qualité des résultats SEA est étudiée par Yap et Woodhouse [YAP96]. Des calculs numériques ‘exacts’ sont effectués et la SEA inverse est appliquée pour déterminer des facteurs de perte par couplage ‘équivalents’. Il est montré que ces facteurs dépendent fortement de la valeur de l’amortissement ce qui n’est pas le cas du facteur de perte par couplage donné par l’approche onde. Quand l’amortissement est faible, les facteurs de perte par couplage ‘équivalent’ sont proportionnels au facteur d’amortissement interne et sont inférieurs à la valeur du facteur de perte par couplage de l’approche onde. Ce dernier surestime donc les transferts d’énergies. Les deux approches (onde et facteur équivalent) convergent sensiblement vers la même valeur quand l’amortissement devient fort. D’après Yap et Woodhouse, cette forte dépendance avec l’amortissement est due au fait que l’équirépartition des énergies modales n’a pas lieu en générale quand l’amortissement est faible. Il est démontré que l’utilisation des facteurs de perte par couplage de l’approche onde peut conduire à de grosses surestimations des transferts d’énergies, spécialement pour les systèmes composés de multiples sous-systèmes. Dimitriadis et Pierce [DIM88] montrent également, sur un couplage de plaques, l’effet de l’amortissement interne sur le facteur de perte par couplage équivalent.

Mace et al. [MAC97c], [MAC98] étudient l’influence des sous-systèmes dits irréguliers, c’est-à-dire qui n’ont pas de formes géométriques simples. Deux approches sont utilisées : l’une basée sur la théorie des ondes, l’autre sur une approche des modes globaux. Les résultats de ces deux approches sont comparés aux résultats de la ‘SEA-onde’ pour tenter de comprendre les phénomènes. Sur des couplages de plaques de formes pentagonales,

rectangulaires, et mixtes, il est montré que pour des amortissements faibles, les réponses dépendent sensiblement de la géométrie des plaques. Dans ce cas, la ‘SEA-onde’ surestime les puissances échangées par les deux sous-systèmes. Les facteurs de perte par couplage obtenus à partir de l’approche asymptotique des ondes ne prennent pas en compte la spécificité géométrique des sous-systèmes. L’approche avec les modes globaux montre que la réponse vibratoire dépend de la localisation des modes globaux, et, est due à un faible effet d’intercorrélacion entre les réponses modales (faible recouvrement modal). Quand l’amortissement devient fort, les réponses vibratoires ne dépendent plus des formes des sous-systèmes et la SEA donne de meilleurs résultats. En référence [MAC97b], Mace étudie, toujours sur la même approche, les puissances échangées par des plaques rectangulaires quand le facteur de recouvrement modal est petit. Il montre que l’effet de localisation des modes globaux tend à contenir l’énergie dans le sous-système excité. Les mauvais résultats de la ‘SEA-onde’ sont attribués au non-respect de l’hypothèse d’équirépartition des énergies modales.

Pour un système composé de trois plaques couplées en U, Fredo [FRE95] montre qu’un couplage indirect entre la première et la dernière plaque peut être important si l’amortissement est faible. Ce couplage indirect est dû à un non-respect d’une ou des hypothèses de la SEA car il n’est pas inclus dans la formulation de base.

## ***2.8. Le calcul des facteurs de perte par couplage***

Une des difficultés rencontrées lors de l’application de la méthode SEA réside dans l’évaluation des facteurs de perte par couplage (en anglais : Coupling Loss Factor d’où l’abréviation : CLF).

La formulation de base de la SEA donne une expression générale du CLF (voir Lyon [LYO95], chapitre 3). Ce résultat est obtenu à partir d’une approche modale. Jusqu’à présent il n’a pas été exploité pour le couplage de structures mécaniques car comme nous l’avons déjà vu au paragraphe 2.4, une difficulté réside dans l’obtention des équations modales. Par contre, Fahy [FAH69], [FAH70a] tire profit de cette approche pour calculer les CLF entre une structure mécanique (boîte parallélépipédique avec une paroi non rigide, cylindre) et le fluide intérieur. Pour ce type de couplage, les équations modales sont bien connues. À partir de cette approche, Fahy étudie en détails les mécanismes du couplage entre les deux sous-systèmes et en déduit des expressions des facteurs de perte par couplage.

En référence [NEW68], Newland expose une méthode pour évaluer les CLF à partir du changement des valeurs des fréquences propres induit par le couplage des sous-systèmes. Crandall et Lotz [CRA71] montrent que l’approche modale de Lyon et Maidanik [LYO62] et

la méthode de Newland appelée ‘natural shift method’ donnent des résultats identiques quand le couplage est faible mais qu’ils peuvent différer de manière importante quand le couplage est fort.

La méthode la plus employée pour obtenir une expression analytique des CLF repose sur une approche par les ondes et considère des systèmes de dimensions semi-infinies. À partir des coefficients de transmission et de réflexion des ondes à travers la jonction de couplage et suivant la configuration de couplage (ponctuelle, rectiligne, de surface), une expression analytique évalue la valeur du facteur de perte par couplage. Cette méthode a été développée par de nombreux auteurs. Une synthèse se trouve en référence [LYO95], chapitre 10. Cette méthode présente l’avantage d’être peu onéreuse en calcul. Cependant son application se limite à des sous-systèmes de type académiques ou s’en rapprochant. On a vu au paragraphe précédent qu’elle pouvait également conduire à des erreurs importantes quand le facteur de recouvrement modal était faible. Par cette approche, les CLF sont obtenus en faisant l’hypothèse que les ondes directes et les ondes réfléchies sont décorréélées ce qui n’est pas justifié quand le système présente des résonances bien marquées. Fahy note en référence [FAH94] que bien que l’approche modale et l’approche onde reposent sur des considérations différentes, elles donnent des résultats semblables.

Pour appliquer la méthode à des structures industrielles, plusieurs techniques expérimentales ont été développées pour évaluer les CLF :

- [CAC94] utilisant les mesures de mobilités ;
- [ORR97] avec le concept des mobilités énergétiques ;
- [LUN97] à partir de la réponse impulsionnelle du système couplé;
- [BIE80], [FAH98], [LAL97], [SUN85] basées sur l’inversion des équations de la SEA.

Cette dernière, appelée SEA inverse expérimentale (en anglais ‘power injection method’), est la plus populaire. Elle consiste à exciter aléatoirement un sous-système après l’autre et à mesurer à chaque fois les énergies de tous les sous-systèmes. Les paramètres SEA – CLF et DLF (Damping Loss Factor) – sont ensuite déduits en inversant la matrice obtenue en injectant les énergies mesurées dans les équations de la SEA. Les difficultés de cette méthode reposent sur l’inversion d’un système mal conditionné, et sur une lourdeur expérimentale car il est nécessaire de mesurer un nombre important de fonctions de transfert pour évaluer les quantités moyennées spatialement. De plus, pour les systèmes hétérogènes présentant un champ vibratoire très disparate il est difficile de déterminer les énergies moyennes spatiales à partir de quelques mesures ponctuelles. Généralement, il n’est pas tenu compte des mouvements longitudinaux des structures car ils sont difficilement mesurables. Cette technique est très utile dans un contexte industriel, cependant elle n’est pas prédictive

car il est nécessaire de posséder la structure pour effectuer les mesures. Pour palier cet état de fait, plusieurs auteurs ont étudié la possibilité d'exploiter les éléments finis pour simuler numériquement le comportement vibratoire de deux sous-systèmes couplés et d'appliquer ensuite la SEA inverse avec ces résultats numériques : [STE94], [SIM91], [FRE97]. Cette technique est prédictive et est également utilisée pour étudier la validité de certaines hypothèses de la SEA. Comme pour la SEA inverse expérimentale, le choix des points d'excitation pose problème pour les structures hétérogènes. Les limites d'application sont principalement liées aux calculs éléments finis : limitation en fréquence, limitation des dimensions géométriques, impossibilité de donner des amortissements différents aux sous-systèmes (décomposition sur les modes globaux). L'approche présentée par Shankar et Keane en références [SHA95], [SHA97] diffère de la méthode précédente par un calcul des énergies à partir de fonctions de Green qui sont évaluées numériquement par éléments finis. Il est possible de prendre en compte des amortissements différents d'un sous-système à l'autre et dans certains cas, la limite en fréquence peut être augmentée car les calculs éléments finis sont réalisés séparément pour chaque sous-système. Toutefois, il est nécessaire de prendre en compte suffisamment de modes des sous-systèmes découplés pour constituer la fonction de Green ce qui peut induire une limitation en fréquence dans certaines configurations de couplage.

### ***2.9. Les différentes tentatives pour améliorer le modèle de base***

Les hypothèses de la SEA ne pouvant pas toujours être respectées quand il s'agit de systèmes réels, plusieurs études ont eu pour but de reformuler le modèle SEA en tenant compte d'hypothèses moins restrictives. Nous présentons ici quelques reformulations de la SEA.

En référence [MAI77], Maidainik montre sur un exemple qu'il est possible d'améliorer le modèle SEA. Les modes résonnants d'un sous-système sont divisés en deux groupes. Les modes d'un de ces groupes (groupe  $\alpha$ ) sont supposés être faiblement couplés avec les modes de l'autre sous-système alors que les modes de l'autre groupe (groupe  $\beta$ ) sont supposés plus fortement couplés. La conséquence de cette hypothèse est que les modes de ces deux groupes n'ont pas les mêmes niveaux énergétiques une fois les deux sous-systèmes couplés. Ceci implique que l'équirépartition des énergies modales ne doit pas être appliquée globalement au sous-système mais individuellement à chaque groupe. Il montre que la prise en compte de cette distinction entre les deux groupes peut changer de façon importante les résultats en terme de transfert d'énergie. Le rapport entre le nombre de modes du groupe  $\beta$  et le nombre de modes total du sous-système (deux groupes) joue un rôle dans ce changement mais les paramètres des sous-systèmes ainsi que les paramètres de couplage interviennent également. Maidainik souligne que le formalisme simple de la SEA est obtenu en contrepartie

d'une perte de détails dans la description du comportement de systèmes complexes et qu'il doit exister un juste équilibre entre la recherche d'un formalisme maniable et la quête d'une description en détail.

Quelques années plus tard, Maidainik [MAI81a], [MAI81b] présente à la fois une extension et une reformulation de la SEA prenant en compte des systèmes dynamiques non réverbérants. À partir de concepts de l'acoustique des salles, l'extension de la SEA proposée par Maidainik effectue une distinction entre les systèmes réverbérants et non réverbérants. La reformulation englobe l'extension et présente un formalisme plus agréable (au dire de l'auteur!). Aucune application n'est donnée à cette formulation.

Langley et Bercin [LAN92], [LAN94] ont développé une méthode appelée 'Wave Intensity Analysis' (WIA). Cette méthode, basée sur une approche par les ondes, consiste en une reformulation de la SEA en ne faisant pas l'hypothèse de champ diffus. C'est-à-dire que cette méthode prend en compte la dépendance de l'intensité vibratoire du champ d'onde vis-à-vis de la direction des ondes. Au niveau de la formulation, la densité d'énergie vibratoire dans chaque sous-système est décomposée en série de Fourier suivant la direction des ondes. À partir d'un bilan de puissance et en utilisant la technique de Galerkin, un système d'équations linéaires est obtenu. Celui-ci peut être présenté sous la même forme que celui de la SEA classique avec des termes supplémentaires qui s'apparentent à des facteurs de perte par couplage indirect. Par cette approche, les auteurs mettent en évidence un effet de filtrage des jonctions entre les sous-systèmes qui conduit le champ vibratoire à ne plus être diffus pour les sous-systèmes éloignés de l'excitation. La SEA peut alors être mise en défaut. Ils montrent sur un assemblage de 15 plaques couplées en L que l'écart entre la SEA et un calcul exact peut atteindre 30 dB alors que l'approche WIA obtient de bons résultats à partir de 3 à 5 degrés de liberté par sous-systèmes. Langley associe le non-respect de l'hypothèse de champ diffus au non-respect de l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales. Cette approche n'a été testée actuellement que pour des sous-systèmes simples et homogènes. En référence [BOC97] est présentée une comparaison entre les résultats de différentes méthodes dont la WIA. Il est montré que pour les systèmes réverbérants, la WIA donne de meilleurs résultats que la SEA alors que ces deux méthodes surestiment le transfert d'énergies quand les systèmes sont non réverbérants.

En référence [HER94], Heron développe une méthode appelée 'Advanced Statistical Energy Analysis' (ASEA) basée sur un suivi d'ondes. Cette méthode permet de prendre en compte un couplage indirect entre sous-systèmes non couplés physiquement que l'auteur appelle 'mécanisme de tunnel'. Le formalisme de cette approche fait une distinction entre l'énergie modale qui est libre d'aller d'un sous-système à un autre (celle considérée par la

SEA), et une énergie qui est fixe (qui ne peut pas aller d'un sous-système à un autre). Pour chaque type d'énergies, un bilan de puissance est écrit. Finalement, il est obtenu un système d'équations liant les énergies libres aux énergies fixes qui peut être mis sous la forme du système d'équations de la SEA additionné de termes supplémentaires prenant en compte le couplage indirect. Les coefficients des matrices reliant les énergies libres aux énergies fixes peuvent être évalués sur des structures académiques à partir d'un suivi d'onde et avec différents degrés d'approximations (le premier degré correspondant à la SEA). Sur un couplage de six poutres vibrant longitudinalement et couplées rigidement aux extrémités, il montre que la SEA surestime les niveaux vibratoires de 60 dB alors que ASEA<sup>4</sup> (4 ddl par sous-système) converge vers la solution dans la gamme de fréquence considérée. Il faut noter que le système est 'hautement' non réverbérant et de grande longueur (150 mètres); la décroissance exponentielle du champ direct est donc prédominante. L'application de cette approche semble se limiter à des structures simples telles que des poutres et des plaques.

Finnveden [FIN96] propose pour les systèmes mono-dimensionnels avec des forts recouvrements modaux une formulation SEA avec trois degrés de liberté par sous-système. Le constat de départ est que pour ces systèmes les densités d'énergies ne sont pas constantes dans les sous-systèmes en 'violation' avec une hypothèse de la SEA (décroissance exponentielle du champ vibratoire). Les trois degrés de liberté par sous-système choisis par Finnveden sont les énergies modales à chaque extrémité de l'élément (poutre) et la moyenne de l'énergie modale dans l'élément. Le calcul des coefficients de la matrice liant ces trois degrés de liberté repose sur la résolution de l'équation respectée par la densité d'énergie à l'intérieur du sous-système ainsi que la connaissance du facteur de perte par couplage de l'approche onde. Sur deux exemples, il est montré que la méthode proposée donne de bons résultats en hautes fréquences à la différence de la SEA traditionnelle.

À partir de travaux sur le couplage non conservatif de deux oscillateurs [FAH87], Sun et al. [SUN87] proposent d'étendre la SEA au couplage non conservatif de deux structures. Ils montrent que la forme des équations du bilan de puissance modifié (tenant compte de la dissipation d'énergie au niveau du couplage) est la même que pour le couplage conservatif des sous-systèmes, excepté que l'amortissement du couplage augmente, dans une proportion non définie, le facteur d'amortissement interne de chaque sous-système. Une étude expérimentale sur un couplage de deux plaques valide leurs propos.

### **3. Principaux apports de l'étude - Structure du document**

L'idée à la base de l'étude est de reformuler la méthode SEA en prenant en compte finement la répartition des énergies modales dans un but d'étendre le domaine de validité et

d'améliorer la qualité de la prédiction. L'approche qui est proposée dans ce document et en partie en références [MAX99a], [MAX99b], repose sur la formulation modale de base de la SEA.

Le premier obstacle rencontré lors du développement de l'approche se situe au niveau de l'obtention des équations modales en cohérence avec le schéma de couplage modal SEA. Comme nous l'avons vu précédemment (paragraphe 2.4), ces équations ont été obtenues rigoureusement pour le couplage structure mécanique-cavité acoustique, et sont généralement admises pour le couplage d'autres types de structures sans réellement identifier les coefficients de ce système. La première phase de l'étude consiste donc à obtenir ces équations ainsi qu'à identifier les coefficients dans un cas général de couplage de deux systèmes continus élastiques tridimensionnels. Ceci est réalisé à partir d'une double formulation contrainte-déplacement et d'une définition appropriée des conditions aux limites des sous-systèmes découplés pour le calcul des modes. Cette formulation est appelée double formulation modale ou DMF (Dual Modal Formulation).

Ensuite, la reformulation proprement dite de la SEA par la prise en compte de la répartition des énergies modales est développée. La formulation repose sur l'utilisation, sans les résoudre, des équations modales précédemment obtenues et sur la relation d'échange de puissance entre deux oscillateurs couplés. Sous le respect d'hypothèses analogues à celles de la SEA, des équations énergétiques modales du mouvement modélisent le comportement vibratoire des sous-systèmes couplés. Plusieurs approximations sont proposées prenant en compte plus ou moins finement la répartition des énergies modales de chaque sous-système.

On donne le nom de SmEdA (Statistical modal Energy distribution Analysis) au modèle présenté. Toutes les données d'entrée de ce modèle sont définies à partir des schémas modaux des sous-systèmes découplés, des amortissements modaux ainsi que des excitations en terme de niveau et de localisation.

La comparaison entre des calculs issus de la double formulation modale et du modèle SmEdA met en évidence et facilite la compréhension de certaines hypothèses de la SEA (contribution des modes résonnants, couplage faible, corrélation des amplitudes modales,...).

L'intérêt du modèle SmEdA sur la qualité de la prédiction est démontré pour certaines configurations de couplage notamment dans les cas de sous-systèmes à faible recouvrement modal. On a vu au paragraphe 2.7 que pour ces systèmes, les erreurs du modèle SEA étaient dues au non-respect de l'hypothèse d'équirépartition. Le modèle SmEdA ne posant pas cette hypothèse, il modélise correctement les transferts d'énergies de ces sous-systèmes.

Le modèle permet également d'introduire des excitations plus 'localisées' que l'excitation de type 'rain on the roof' car il autorise des variations de la répartition des puissances modales injectées.

Enfin, le domaine d'application du modèle SmEdA est étendu aux structures complexes par l'utilisation des Éléments Finis. Les schémas modaux des sous-systèmes découplés ne sont plus obtenus analytiquement mais par extraction des modes propres des modèles discrets associés. Il découle de cette approche une nouvelle technique de calcul des facteurs de perte par couplage à partir de données élément finis. À la différence des travaux cités au paragraphe 2.8, les calculs élément finis ne servent que pour extraire les modes des sous-systèmes, les CLF pouvant ensuite être calculés directement à partir de ces données et des amortissements modaux.

L'ensemble du document s'articule autour de 6 chapitres :

- le premier a présenté le contexte scientifique et les apports de l'étude ;
- le second porte sur l'obtention des équations modales pour le couplage de deux systèmes élastodynamiques continus quelconques. Des exemples composés de poutres et de plaques couplées entre elles sont montrés pour illustrer la double formulation modale. Des applications numériques sur ces mêmes exemples permettent d'étudier la convergence des séries suivant les caractéristiques des systèmes ;
- le troisième introduit la reformulation du modèle SEA par la prise en compte de la répartition des énergies modales ;
- le quatrième est consacré à rechercher et à analyser les limites du modèle SmEdA. Certaines hypothèses de la SEA qui sont également posées par le modèle proposé sont alors analysées ;
- le cinquième montre, pour différentes configurations de couplage, l'intérêt du modèle SmEdA. Des comparaisons avec des résultats du modèle SEA et des résultats de la littérature sont proposées ;
- le dernier présente l'application du modèle SmEdA en connexion avec les Éléments Finis. La technique de calcul des CLF à partir des modèles Éléments Finis des sous-systèmes est décrite et les résultats sont comparés à d'autres approches.



## CHAPITRE 2

# DÉCOMPOSITION MODALE PAR L'UTILISATION D'UNE DOUBLE FORMULATION

### 1. Buts du chapitre

L'objectif principal de ce chapitre est de proposer une formulation permettant d'obtenir, dans un cas général, des équations modales en cohérence avec le schéma de couplage modal SEA. L'approche présentée ici, basée sur une double formulation n'est pas classique pour les systèmes mécaniques couplés. Toutefois, la double formulation est l'approche standard utilisée pour étudier le couplage entre une cavité acoustique et une structure mécanique (voir [FAH69], [FAH70a], [LYO62]). Chaque fois que cela sera possible nous ferons référence à ce cas pour faciliter la compréhension de la décomposition. La présente formulation est également basée sur les travaux de Karnopp. En effet, en référence [KAR66], Karnopp initie l'utilisation de la double formulation (énoncée par Crandall et al. [CRA68]) au couplage de deux systèmes mécaniques et applique la méthode au couplage de deux poutres de section identique et vibrant longitudinalement. On présente ici une généralisation de cette approche au couplage de deux systèmes élasto-dynamiques continus quelconques.

En deuxième partie de ce chapitre sont développées les relations entre les énergies totales des sous-systèmes, les énergies modales et les énergies associées aux amplitudes modales de la double formulation.

Enfin, en dernière partie sont proposés quelques exemples simples permettant de se familiariser avec la double formulation et d'étudier numériquement la convergence des séries modales en fonction de différents paramètres des systèmes.

### 2. Double formulation modale

#### 2.1. Description de la structure

On considère un système composé de deux sous-systèmes élastodynamiques continus couplés rigidement sur une surface  $S_{\text{Couplage}}$  comme représenté figure 2.1.

$V^1$  (resp.  $V^2$ ) représente le volume occupé par le sous-système 1 (resp. sous-système 2).  $S^1_{Encastrée}$  et  $S^1_{Libre}$  (resp.  $S^2_{Encastrée}$  et  $S^2_{Libre}$ ) sont les surfaces aux frontières avec les déplacements bloqués et les déplacements libres pour le sous-système 1 (resp. sous-système 2). Dans un souci de simplification, on ne considère dans un premier temps que les vibrations libres des systèmes conservatifs.

En coordonnées lagrangienne,  $x_i$ , ( $i=1,2,3$ ), on définit sur les surfaces frontières au volume  $V^1$  (resp.  $V^2$ ) le vecteur unitaire  $n^1$  (resp.  $n^2$ ) normal à la surface et dirigé vers l'extérieur du volume. Les variables  $W_i^1$  et  $W_i^2$  ( $i=1,2,3$ ) sont supposées représenter les déplacements dans  $V^1$  et  $V^2$ , respectivement.  $\sigma_{ij}^1$  et  $\sigma_{ij}^2$  sont les tenseurs de contraintes et  $\varepsilon_{ij}^1$  et  $\varepsilon_{ij}^2$ , les tenseurs des déformations, associés respectivement à  $V^1$  et  $V^2$ .  $S^1_{ijkl}$  et  $S^2_{ijkl}$  sont les tenseurs des souplesses associés aux matériaux de  $V^1$  et  $V^2$ , respectivement.  $\rho^1$  et  $\rho^2$ , les masses volumiques des matériaux de  $V^1$  et  $V^2$  sont supposées indépendantes du temps. On considère les mouvements de la structure entre les temps  $t_0$  et  $t_1$  définis arbitrairement.

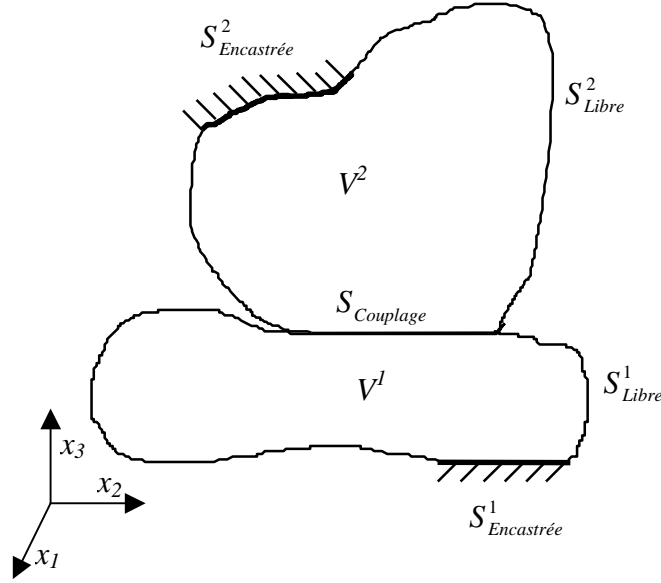


Figure 2.1. Représentation du couplage des deux sous-systèmes continus tridimensionnels.

Les conditions de continuité sur la surface de couplage  $S_{Couplage}$  peuvent être exprimées par :

$$W_i^1 = W_i^2 \quad \text{sur } S_{Couplage} \times ]t_0, t_1[ , \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}^1 n_j^1 + \sigma_{ij}^2 n_j^2 = 0 \quad \text{sur } S_{Couplage} \times ]t_0, t_1[ . \quad (2.2)$$

$n_j^1$  (resp.  $n_j^2$ ) est la jème composante du vecteur normal extérieur pour le sous-système 1 (resp. sous-système 2).

## 2.2. Sous-structuration

Pour la sous-structuration du problème, il est maintenant nécessaire d'imaginer que l'on sépare ces deux sous-systèmes et que l'on prescrive des déplacements ou des efforts sur  $S_{Couplage}$  pour chaque sous-système. On définit  $S_{Couplage}^1$  (resp.  $S_{Couplage}^2$ ) comme la surface de couplage  $S_{Couplage}$  affectée au sous-système 1 (resp. sous-système 2).

On choisit de prescrire des efforts  $\bar{F}_i^c$  sur  $S_{Couplage}^1$ , pour le sous-système 1 et des déplacements  $\bar{W}_i^c$  sur  $S_{Couplage}^2$  pour le sous-système 2 (voir figure 2). On peut donc écrire les conditions aux limites sur  $S_{Couplage}^1$  pour le sous-système 1 par :

$$\sigma_{ij}^1 n_j^1 = \bar{F}_i^c \quad \text{sur } S_{Couplage}^1 \times ]t_0, t_1[ , \quad (2.3)$$

et, sur  $S_{Couplage}^2$  pour le sous-système 2 :

$$W_i^2 = \bar{W}_i^c \quad \text{sur } S_{Couplage}^2 \times ]t_0, t_1[ . \quad (2.4)$$

Remarque : Pour le couplage structure mécanique-cavité acoustique, les conditions aux limites prescrites pour la cavité sur la surface de couplage sont les déplacements imposés par la structure (comme pour le sous-système 2), alors que les conditions aux limites prescrites pour la structure sur la surface de couplage sont les efforts (pression) imposés par la cavité (comme pour le sous-système 1).

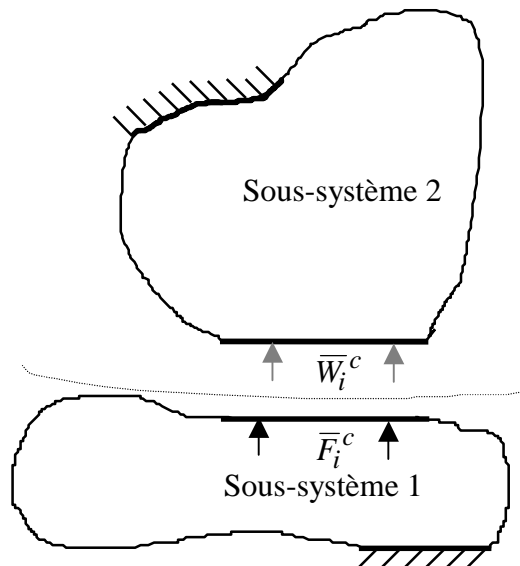


Figure 2.2. Illustration de la séparation fictive entre les deux sous-systèmes.

À partir des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus, on peut écrire pour chaque sous-système le problème décrivant le comportement dynamique de celui-ci.

Pour le sous-système 1, les équations suivantes constituent le problème 1 :

- Équations du mouvement :

$$\rho^1 \frac{\partial^2 W_i^1}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}^1 \quad \text{dans } V^1 \times ]t_0, t_1[. \quad (2.5)$$

- Loi de comportement pour un solide élastique linéaire :

$$\varepsilon_{ij}^1 = \frac{1}{2} (W_{i,j}^1 + W_{j,i}^1) = S_{ijkl}^1 \sigma_{kl}^1 \quad \text{dans } V^1 \times ]t_0, t_1[. \quad (2.6)$$

- Conditions aux limites :

$$\sigma_{ij}^1 n_j^1 = 0 \quad \text{sur } S_{Libre}^1 \times ]t_0, t_1[, \quad (2.7)$$

$$W_i^1 = 0 \quad \text{sur } S_{Encastrée}^1 \times ]t_0, t_1[, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{ij}^1 n_j^1 = \bar{F}_i^c \quad \text{sur } S_{Couplage}^1 \times ]t_0, t_1[. \quad (2.9)$$

Et pour le sous-système 2, on a le problème 2 :

- Équations du mouvement :

$$\rho^2 \frac{\partial^2 W_i^2}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}^2 \quad \text{dans } V^2 \times ]t_0, t_1[. \quad (2.10)$$

- Loi de comportement pour un solide élastique linéaire :

$$\varepsilon_{ij}^2 = \frac{1}{2} (W_{i,j}^2 + W_{j,i}^2) = S_{ijkl}^2 \sigma_{kl}^2 \quad \text{dans } V^2 \times ]t_0, t_1[. \quad (2.11)$$

-Conditions aux limites :

$$\sigma_{ij}^2 n_j^2 = 0 \quad \text{sur } S_{Libre}^2 \times ]t_0, t_1[, \quad (2.12)$$

$$W_i^2 = 0 \quad \text{sur } S_{Encastrée}^2 \times ]t_0, t_1[, \quad (2.13)$$

$$W_i^2 = \bar{W}_i^c \quad \text{sur } S_{Couplage}^2 \times ]t_0, t_1[. \quad (2.14)$$

### 2.3. Formulations variationnelles des problèmes utilisant la fonctionnelle de REISSNER

Pour chaque sous-système, il est possible d'exprimer le problème dynamique en utilisant le principe de Reissner. Ces formulations variationnelles ([NAI71], [SAA74]) facilitent l'introduction des séries modales. De plus, l'utilisation de ce principe exprimé en variables mixtes nous permet de traiter les deux problèmes simultanément. (On pourrait

également utiliser le principe de Hamilton pour un sous-système et sa forme complémentaire pour le second (voir [CRA68]).

Pour le problème 1, la fonctionnelle de Reissner associée  $\Psi_R^1(W_i^1, \sigma_{ij}^1)$  peut être exprimée par (voir en références [DYM73], [DES83], première forme de la fonctionnelle de Reissner) :

$$\begin{aligned} \Psi_R^1(W_i^1, \sigma_{ij}^1) : \Omega_R^1 \times \Sigma_R^1 &\rightarrow \mathfrak{R} \\ (W_i^1, \sigma_{ij}^1) &\rightarrow \Psi_R^1(W_i^1, \sigma_{ij}^1) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\Psi_R^1(W_i^1, \sigma_{ij}^1) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{V^1} \left[ \frac{1}{2} \rho^1 \left( \frac{\partial W_i^1}{\partial t} \right)^2 - \sigma_{ij}^1 \frac{1}{2} (W_{i,j}^1 + W_{j,i}^1) + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^1 S_{ijkl}^1 \sigma_{kl}^1 \right] dV - \int_{S_{Couplage}^1} \bar{F}_i^c W_i^1 dS \right\} dt.$$

Et les espaces admissibles associés sont :

$$\Omega_R^1(V^1 \times ]t_0, t_1[) = \{ W_i^1 / W_i^1 \in H^1(V^1); W_i^1 = 0 / S_{Encastrée}^1 \}, \quad (2.16)$$

$$\Sigma_R^1(V^1 \times ]t_0, t_1[) = \{ \sigma_{ij}^1 / \sigma_{ij}^1 = \sigma_{ji}^1; \sigma_{ij}^1 \in L^2(V^1); \sigma_{ij}^1 n_j = 0 / S_{Libre}^1 \}, \quad (2.17)$$

où l'espace  $H^1(V^1)$  est l'espace de Sobolev engendré par les fonctions de carré intégrable sur  $V^1$  et dont les dérivées premières au sens de la théorie des distributions sont aussi des fonctions de carré intégrable sur  $V^1$ .

Le problème constitué par les équations (2.5-2.9) peut être remplacé par chercher  $W_i^1$  et  $\sigma_{ij}^1$  dans leur espace admissible respectif  $\Omega_R^1$  et  $\Sigma_R^1$  tels qu'ils rendent la fonctionnelle  $\Psi_R^1(W_i^1, \sigma_{ij}^1)$  stationnaire.

De la même manière, pour le problème 2, la fonctionnelle de Reissner  $\Psi_R^2(W_i^2, \sigma_{ij}^2)$  peut être exprimée par (voir en référence [DES83], seconde forme de la fonctionnelle de Reissner) :

$$\begin{aligned} \Psi_R^2(W_i^2, \sigma_{ij}^2) : \Omega_R^2 \times \Sigma_R^2 &\rightarrow \mathfrak{R} \\ (W_i^2, \sigma_{ij}^2) &\rightarrow \Psi_R^2(W_i^2, \sigma_{ij}^2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\Psi_R^2(W_i^2, \sigma_{ij}^2) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{V^2} \left[ \frac{1}{2} \rho^2 \left( \frac{\partial W_i^2}{\partial t} \right)^2 + \sigma_{ij,j}^2 W_i^2 + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^2 S_{ijkl}^2 \sigma_{kl}^2 \right] dV - \int_{S_{Couplage}^2} \bar{W}_i^c \sigma_{ij}^2 n_j^2 dS \right\} dt,$$

et les espaces admissibles associés :

$$\Omega_R^2(V^2 \times ]t_0, t_1[) = \{W_i^2 / W_i^2 \in H^1(V^2); W_i^2 = 0 / S_{Encastrée}^2\}, \quad (2.19)$$

$$\Sigma_R^2(V^2 \times ]t_0, t_1[) = \{\sigma_{ij}^2 / \sigma_{ij}^2 = \sigma_{ji}^2; \sigma_{ij}^2 \in L^2(V^2); \sigma_{ij,j}^2 \in L^2(V^2); \sigma_{ij}^2 n_j = 0 / S_{Libre}^2\}, \quad (2.20)$$

où  $H^1(V^2)$  est l'espace engendré par les fonctions de carré intégrable sur  $V^2$  et dont les dérivées premières au sens de la théorie des distributions sont aussi des fonctions de carré intégrable sur  $V^2$ .

Dans ce cas, le problème constitué par les équations (2.10-2.14) peut être remplacé par chercher  $W_i^2$  et  $\sigma_{ij}^2$  dans leur espace admissible respectif  $\Omega_R^2$  et  $\Sigma_R^2$  tels qu'ils rendent la fonctionnelle  $\Psi_R^2(W_i^2, \sigma_{ij}^2)$  stationnaire.

## 2.4. Modes des sous-systèmes découplés

### 2.4.1. Définition des conditions aux limites des sous-systèmes

Dans un premier temps, nous allons utiliser une décomposition modale des différents champs pour résoudre séparément les deux problèmes variationnels précédents. Pour chacun des problèmes, l'ensemble des déformées modales qui seront considérées dans la décomposition modale engendrera des sous-espaces des espaces admissibles associés à chaque problème variationnel. Les solutions approchées des problèmes variationnels seront trouvés dans ces sous-espaces des espaces admissibles.

La définition des modes de chaque sous-système doit être posée de façon judicieuse afin de pouvoir réunir les deux problèmes dans un second temps. En effet, la réunion des deux problèmes sera possible si la décomposition modale du champ de déplacements du sous-système 1 permet de déterminer les déplacements excitateurs du sous-système 2 (moyennant la relation de continuité (2.1)), et si, inversement, la décomposition du champ de contraintes du sous-système 2 permet de calculer les forces excitatrices du sous-système 1 (moyennant (2.2)). Pour cela, les sous-espaces des espaces admissibles, et par conséquent, les modes des sous-systèmes doivent être choisis de manière adéquate.

Classiquement, il est effectué une décomposition dans la base des modes libres satisfaisant les conditions cinématiquement admissibles. Le théorème du développement (voir [ROS84]) assure alors la convergence des séries liées aux déplacements dans l'espace cinématiquement admissible. Les modes du sous-système 1 sont choisis comme étant ces

modes libres. C'est-à-dire qu'ils sont déterminés avec des contraintes nulles sur  $S_{Couplage}^1$  (comme représenté figure 2.3 (a)). On les appelle les modes du sous-système découplé-libre ou tout simplement les modes libres. Ils respectent les conditions cinématiquement admissibles du problème 1 et ils autoriseront le calcul des déplacements sur  $S_{Couplage}^1$  à partir de la série modale. (Dans le cas du couplage structure-cavité, ils correspondent aux modes *in-vacuo* de la structure.)

Par dualité entre les déplacements et les contraintes, les modes du sous-système 2 sont choisis tels qu'ils aient des déplacements nuls sur  $S_{Couplage}^2$  (comme représenté figure 2.3 (b)). On les appelle les modes du sous-système découplé-bloqué ou brièvement les modes bloqués. Ces modes respectent les conditions d'admissibilité sur les contraintes du problème variationnel 2 ce qui permettra de calculer les contraintes sur  $S_{Couplage}^2$  à partir de la série modale. (Ce sont les modes de la cavité acoustique déterminés avec les parois bloquées pour le couplage structure-cavité.)

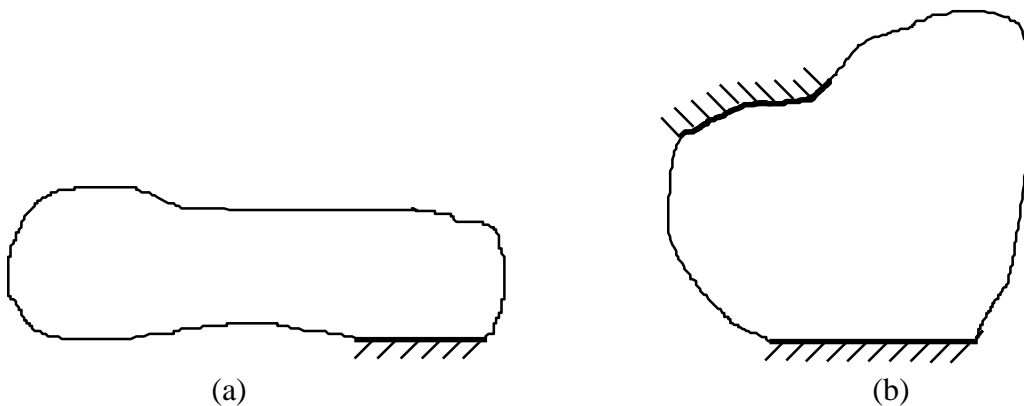


Figure 2.3. Représentation des sous-systèmes découplés. (a) Sous-système 1 découplé-libre. (b) Sous-système 2 découplé-bloqué.

D'un point de vue SEA, il est nécessaire qu'un couplage faible soit effectif entre les deux sous-systèmes, c'est-à-dire que les mobilités d'entrée des deux sous-systèmes soient très différentes au niveau de  $S_{Couplage}$ . Le choix de quel sous-système avec quelles conditions aux limites trouve sa réponse en référence [FAH97] : « *Sous des conditions de couplage faible, les modes du système sont 'localisés' dans le sens qu'ils ressemblent de près en fréquences propres et en déformés aux modes des sous-systèmes découplés (avec les conditions aux limites appropriées)...* » Donc les modes des sous-systèmes découplés doivent être choisis tels qu'ils ressemblent aux modes physiques de la structure globale. Dans le cas du couplage faible, il y a une rupture d'impédance entre les deux sous-systèmes qui conduit à ce qu'un sous-système vibre plutôt librement alors que l'autre vibre plutôt comme s'il était encastré sur la surface de couplage. Les modes libres sont alors les modes physiques du sous-système qui vibre plutôt librement et les modes bloqués sont les modes physiques de l'autre sous-système qui vibre comme s'il était encastré sur la surface de couplage.

### 2.4.2. Calculs et propriétés des modes propres

Les problèmes aux valeurs propres respectés par chacun des champs s'obtiennent à partir des équations du mouvement, de la loi de comportement et des conditions aux limites exprimées en variables mixtes.

- Le problème aux valeurs propres respecté par le champ de déplacements d'un sous-système  $\alpha$  (problème primal) se déduit de :

$$\rho^\alpha \frac{\partial^2 W_i^\alpha}{\partial t^2} = \frac{1}{2} S_{ijkl}^{\alpha -1} (W_{k,l}^\alpha + W_{l,k}^\alpha)_{,j} \quad \text{dans } V^\alpha, \quad (2.21)$$

+ conditions aux limites.

- Le problème aux valeurs propres respecté par le champ de contraintes d'un sous-système  $\alpha$  (problème dual) se déduit de :

$$\rho^\alpha \frac{\partial^2 \sigma_{ij}^\alpha}{\partial t^2} = S_{ijkl}^{\alpha -1} (\sigma_{km,m,l}^\alpha + \sigma_{lm,m,k}^\alpha), \quad (2.22)$$

+ conditions aux limites.

Ces deux problèmes (primal et dual) ont été tirés du même problème exprimé en variables mixtes (équations du mouvement, loi de comportement, conditions aux limites). En général, le problème en variables mixtes est donc respecté par les solutions des deux problèmes à champ unique. Cependant, on peut noter qu'une solution du problème dual ayant une valeur propre nulle peut exister (suivant les conditions aux limites) et ne pas avoir d'équivalent dans le problème primal. Elle ne respecte alors pas le problème en variables mixtes. Pour une cavité, elle correspond au mode de Helmholtz que l'on retrouve en terme de pression et pas en terme de déplacement. Cette solution ayant une fréquence propre nulle, elle apportera une contribution négligeable dans la décomposition modale (non résonnant) dès que d'autres modes seront résonnants. Les calculs SEA ne tenant compte que des modes résonnants nous ne détailleront pas ici ce cas particulier. Nous prenons donc le problème en variables mixtes pour définir les déformées propres en déplacement et en contrainte de chaque mode.

On définit le schéma modal :

- pour le sous-système 1 découplé-libre :

$$\begin{cases} \omega_p^1 : \text{la pulsation propre du mode } p, \\ \tilde{W}_i^{1p}(M) : \text{la déformée en déplacement du mode } p, \text{ et} \\ \tilde{\sigma}_{ij}^{1p}(M) : \text{la déformée en contrainte du mode } p, \end{cases}$$



avec le problème en variables mixtes constitué des équations suivantes ( $\omega_p^1 \neq 0$ ) :

$$-\rho^1 (\omega_p^1)^2 \tilde{W}_i^{1p} = \tilde{\sigma}_{ij,j}^{1p} \quad \text{dans } V^1, \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{2} (\tilde{W}_{i,j}^{1p} + \tilde{W}_{j,i}^{1p}) = S_{ijkl}^1 \tilde{\sigma}_{kl}^{1p} \quad \text{dans } V^1, \quad (2.24)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{1p} n_j^1 = 0 \quad \text{sur } S_{Libre}^1, \quad \tilde{W}_i^{1p} = 0 \quad \text{sur } S_{Encastrée}^1, \quad \tilde{\sigma}_{ij}^{1p} n_j^1 = 0 \quad \text{sur } S_{Couplage}^1, \quad (2.25)$$

- pour le sous-système 2 découplé-bloqué :

$$\begin{cases} \omega_q^2 : \text{la pulsation propre du mode } q, \\ \tilde{W}_i^{2q}(M) : \text{la déformée en déplacement du mode } q, \text{ et} \\ \tilde{\sigma}_{ij}^{2q}(M) : \text{la déformée en contrainte du mode } q, \end{cases}$$

avec les équations suivantes ( $\omega_q^2 \neq 0$ ) :

$$-\rho^2 (\omega_q^2)^2 \tilde{W}_i^{2q} = \tilde{\sigma}_{ij,j}^{2q} \quad \text{dans } V^2, \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{2} (\tilde{W}_{i,j}^{2q} + \tilde{W}_{j,i}^{2q}) = S_{ijkl}^2 \tilde{\sigma}_{kl}^{2q} \quad \text{dans } V^2, \quad (2.27)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{2q} n_j^2 = 0 \quad \text{sur } S_{Libre}^2, \quad \tilde{W}_i^{2q} = 0 \quad \text{sur } S_{Encastrée}^2, \quad \tilde{W}_i^{2q} = 0 \quad \text{sur } S_{Couplage}^2. \quad (2.28)$$

Ces modes ont les propriétés d'orthogonalité suivantes (voir [GUY84]) pour le sous-système  $\alpha$  :

$$\int_{V^\alpha} \omega_p^\alpha \omega_q^\alpha \rho^\alpha \tilde{W}_i^{\alpha p} \tilde{W}_i^{\alpha q} dV = K_p^\alpha \delta_{pq} \quad \alpha = 1,2, \quad (2.29)$$

$$\int_{V^\alpha} \tilde{\sigma}_{ij}^{\alpha p} S_{ijkl}^\alpha \tilde{\sigma}_{kl}^{\alpha q} dV = K_p^\alpha \delta_{pq} \quad \alpha = 1,2, \quad (2.30)$$

$$\int_{V^\alpha} \tilde{\sigma}_{ij,j}^{\alpha p} \tilde{W}_i^{\alpha q} dV = K_p^\alpha \delta_{pq} \quad \alpha = 1,2, \quad (2.31)$$

$$\int_{V^\alpha} \tilde{\sigma}_{ij}^{\alpha p} \frac{1}{2} (\tilde{W}_{i,j}^{\alpha q} + \tilde{W}_{j,i}^{\alpha q}) dV = K_p^\alpha \delta_{pq} \quad \alpha = 1,2, \quad (2.32)$$

où  $K_p^\alpha$  est la raideur généralisée du mode  $p$  du sous-système  $\alpha$ ,  
et  $\delta_{pq}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{pq} = 0$  si  $p \neq q$ ,  $\delta_{pq} = 1$  si  $p = q$ ).

La première est la plus répandue ; les trois autres peuvent être déduites de (2.29) à partir des équations définissant les problèmes aux valeurs propres de chaque sous-système et par intégration par partie.

Les pulsations propres peuvent être exprimées par :

$$\omega_p^\alpha = \sqrt{\frac{K_p^\alpha}{M_p^\alpha}} \quad \alpha = 1,2, \quad (2.33)$$

où  $M_p^\alpha$  est la masse généralisée du mode  $p$  du sous-système  $\alpha$ .

Remarque : Les modes du sous-système 1 découplé-libre respectent les conditions d'admissibilité sur les déplacements du problème variationnel 1 ; donc, l'ensemble des déformées propres en déplacement  $\{\tilde{W}_i^{1p}(M), p = 1, 2, \dots, \infty\}$  constitue une base de  $\Omega_R^1$ . De même, les modes du sous-système 2 découplé-bloqué respectent les conditions d'admissibilité sur les contraintes du problème variationnel 2. L'ensemble des déformées propres en contraintes  $\{\tilde{\sigma}_{ij}^{2q}(M), q = 1, 2, \dots, \infty\}$  constitue une base de  $\Sigma_R^2$  (en tenant compte éventuellement du mode en contrainte de fréquence propre nulle).

### 2.5. Décomposition modale de la solution

En décomposant les déplacements et les contraintes de chaque sous-système dans les bases modales, on peut écrire :

$$W_i^1(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1(t) \tilde{W}_i^{1n}(M), \quad \sigma_{ij}^1(M, t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m^1(t) \tilde{\sigma}_{ij}^{1m}(M), \quad (2.34)$$

$$W_i^2(M, t) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r^2(t) \tilde{W}_i^{2r}(M), \quad \sigma_{ij}^2(M, t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s^2(t) \tilde{\sigma}_{ij}^{2s}(M). \quad (2.35)$$

Les décompositions vont nous permettre de trouver des solutions faibles des deux problèmes (2.5-2.9) et (2.10-2.14) en utilisant le principe de Reissner. Ces solutions seront faibles car les sous-espaces engendrés par les déformées modales n'autoriseront pas la vérification de l'équation (2.9) pour le problème 1 et de l'équation (2.14) pour le problème 2.

Introduisant les décompositions (2.34-2.35) dans les principes variationnels (2.15-2.17), (2.18-2.20), et avec les propriétés d'orthogonalité de modes (2.29-2.32), les solutions sont alors obtenues par trouver les variables amplitudes modales qui rendent stationnaires les fonctionnelles de Reissner. C'est-à-dire que les amplitudes modales doivent satisfaire les équations d'Euler associés à  $a_n^1, b_m^1$ , (resp.  $a_r^2, b_s^2$ ) pour le sous-système 1 (resp. sous-système 2).

$$\text{Soit } \int_{t_0}^{t_1} F(q_j(t), \dot{q}_j(t)) dt \text{ la fonctionnelle à rendre stationnaire, } \delta \int_{t_0}^{t_1} F(q_j(t), \dot{q}_j(t)) dt = 0.$$

On rappelle que l'équation d'Euler associée à la variable  $q_i(t)$  est alors donnée par :

$$/ q_i : \frac{\partial}{\partial q_i} (F(q_j(t), \dot{q}_j(t))) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (F(q_j(t), \dot{q}_j(t))) \right) = 0. \quad (2.36)$$

On obtient finalement pour le sous-système 1 :

$$/a_p^1 : -\frac{K_p^1}{(\omega_p^1)^2} \ddot{a}_p^1(t) - K_p^1 b_p^1(t) + \int_{S_{\text{Couplage}}^1} \bar{F}_i^c \tilde{W}_i^{1p} dS = 0, \quad (2.37)$$

$$/b_p^1 : -K_p^1 a_p^1(t) + K_p^1 b_p^1(t) = 0, \quad (2.38)$$

et, pour le sous-système 2 :

$$/a_q^2 : -\frac{K_q^2}{(\omega_q^2)^2} \ddot{a}_q^2(t) - K_q^2 b_q^2(t) = 0, \quad (2.39)$$

$$/b_q^2 : -K_q^2 a_q^2(t) + K_q^2 b_q^2(t) - \int_{S_{\text{Couplage}}^2} \bar{W}_i^c \tilde{\sigma}_{ij}^{2q} n_j^2 dS = 0. \quad (2.40)$$

En accord avec la double formulation utilisée par Karnopp, on doit décrire le comportement du sous-système 1 avec les amplitudes modales de la décomposition du champ des déplacements,  $a_p^1(t)$ , et celui du sous-système 2 avec les amplitudes modales de la décomposition du champ des contraintes,  $b_q^2(t)$ . Ceci est analogue au couplage cavité-structure où la pression est la variable qui décrit le sous-système avec les modes bloqués (la cavité), alors que les déplacements sont les variables qui décrivent le sous-système avec les modes libres (la structure). Donc en combinant la dérivée seconde par rapport au temps de l'équation (2.40) avec (2.39), et (2.37) avec (2.38), on arrive à :

$$\ddot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) = \frac{1}{M_p^1} \int_{S_{\text{Couplage}}} \bar{F}_i^c \tilde{W}_i^{1p} dS, \quad (2.41)$$

$$\ddot{b}_q^2(t) + (\omega_q^2)^2 b_q^2(t) = \frac{1}{(\omega_q^2)^2 M_q^2} \int_{S_{\text{Couplage}}} \bar{W}_i^c \tilde{\sigma}_{ij}^{2q} n_j^2 dS. \quad (2.42)$$

## 2.6. Vibrations libres des sous-systèmes couplés

Les équations (2.41) et (2.42) peuvent décrire le couplage à travers des efforts spécifiés sur le sous-système 1 et des déplacements sur le sous-système 2. Pour exprimer les conditions de couplage, on doit dire que les efforts spécifiés agissant sur le sous-système 1 sont opposés au tenseur des contraintes du sous-système 2 sur la surface de couplage (voir équation (2.2)), et, que les déplacements prescrits sur le sous-système 2 sont égaux aux déplacements du sous-système 1 sur la frontière de couplage (voir équation (2.1)). Il est maintenant aisé d'exprimer les déplacements et les efforts sur la surface de couplage en utilisant les décompositions modales :

$$\bar{F}_i^c = -\sum_{m=1}^{\infty} b_m^2(t) \tilde{\sigma}_{ij}^{2m} n_j^2 \text{ sur } S_{\text{Couplage}}^1, \quad (2.43)$$

$$\ddot{\tilde{W}}_i^c = \sum_{r=1}^{\infty} \ddot{a}_r^1(t) \tilde{W}_i^{1r} \quad \text{sur } S_{\text{Couplage}}^2. \quad (2.44)$$

Injectant (2.44) dans (2.42), et (2.43) dans (2.41), on arrive au système d'équations :

$$\begin{cases} \ddot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) = -\frac{1}{M_p^1} \sum_{m=1}^{\infty} b_m^2(t) \int_{S_{\text{Couplage}}} \tilde{W}_i^{1p} \tilde{\sigma}_{ij}^{2m} n_j^2 dS, & \forall p \in [1, \dots, \infty[, \\ \ddot{b}_q^2(t) + (\omega_q^2)^2 b_q^2(t) = \frac{1}{(\omega_q^2)^2 M_q^2} \sum_{r=1}^{\infty} \ddot{a}_r^1(t) \int_{S_{\text{Couplage}}} \tilde{W}_i^{1r} \tilde{\sigma}_{ij}^{2q} n_j^2 dS, & \forall q \in [1, \dots, \infty[. \end{cases} \quad (2.45)$$

Pour obtenir un système d'équations en concordance avec le schéma de couplage modal SEA, il est nécessaire d'effectuer le changement de variable :

$$b_q^2(t) = \dot{c}_q^2(t). \quad (2.46)$$

Remarque : Pour le couplage structure-cavité, la pression est remplacée par un potentiel de vitesse qui compte tenu de la loi d'Euler dans le milieu fluide revient à un changement de variable similaire à celui effectué ici (voir [FAH85] page 251).

Finalement, on peut écrire les équations régissant les vibrations libres des sous-systèmes couplés :

$$\begin{cases} \ddot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) = -\frac{1}{M_p^1} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{c}_m^2(t) \int_{S_{\text{Couplage}}} \tilde{W}_i^{1p} \tilde{\sigma}_{ij}^{2m} n_j^2 dS, & \forall p \in [1, \dots, \infty[, \\ \ddot{c}_q^2(t) + (\omega_q^2)^2 c_q^2(t) = \frac{1}{(\omega_q^2)^2 M_q^2} \sum_{r=1}^{\infty} \dot{a}_r^1(t) \int_{S_{\text{Couplage}}} \tilde{W}_i^{1r} \tilde{\sigma}_{ij}^{2q} n_j^2 dS, & \forall q \in [1, \dots, \infty[. \end{cases} \quad (2.47)$$

On remarque qu'il n'y a pas de 'couplages directs' entre les modes d'un même sous-système à la différence des formulations en déplacement (voir [CRA71], [MAX98]). En effet, d'un point de vue formel, le mode  $p$  du sous-système 1 (resp. mode  $q$  du sous-système 2) est couplé avec les modes du sous-système 2 (resp. sous-système 1) mais n'est pas couplé avec les autres modes du sous-système 1 (resp. sous-système 2). Ceci est un avantage de la double formulation et repose sur le fait que, pour chaque sous-système, les modes vérifient les conditions d'admissibilité propres à 'la variable' considérée pour décrire le comportement vibratoire du sous-système. En effet, le sous-système 1 est décrit en déplacement, les modes libres vérifient les conditions sur les déplacements (cinématiques) ; le sous-système 2 est décrit en contrainte, les modes bloqués vérifient les conditions d'admissibilité sur les contraintes. Les décompositions considérées par la double formulation modale peuvent alors être utilisées directement pour évaluer les termes de couplage (déplacements, forces) ce qui ne

peut être fait en utilisant une formulation à champ unique en déplacement. En effet, dans ce cas, pour évaluer les efforts de couplage à partir des modes bloqués et de la décomposition modale du champ de déplacements, il est nécessaire de dériver des fonctions discontinues (par le théorème de dérivation des fonctions sauts), ce qui se traduit finalement, par des couplages entre les modes d'un même sous-système (voir [MAX98], p.10-15).

Une brève synthèse de la formulation qui vient d'être développée est présentée sous forme synoptique figure 2.4. Cette formulation est appelée double formulation modale ou DMF (Dual Modal Formulation).

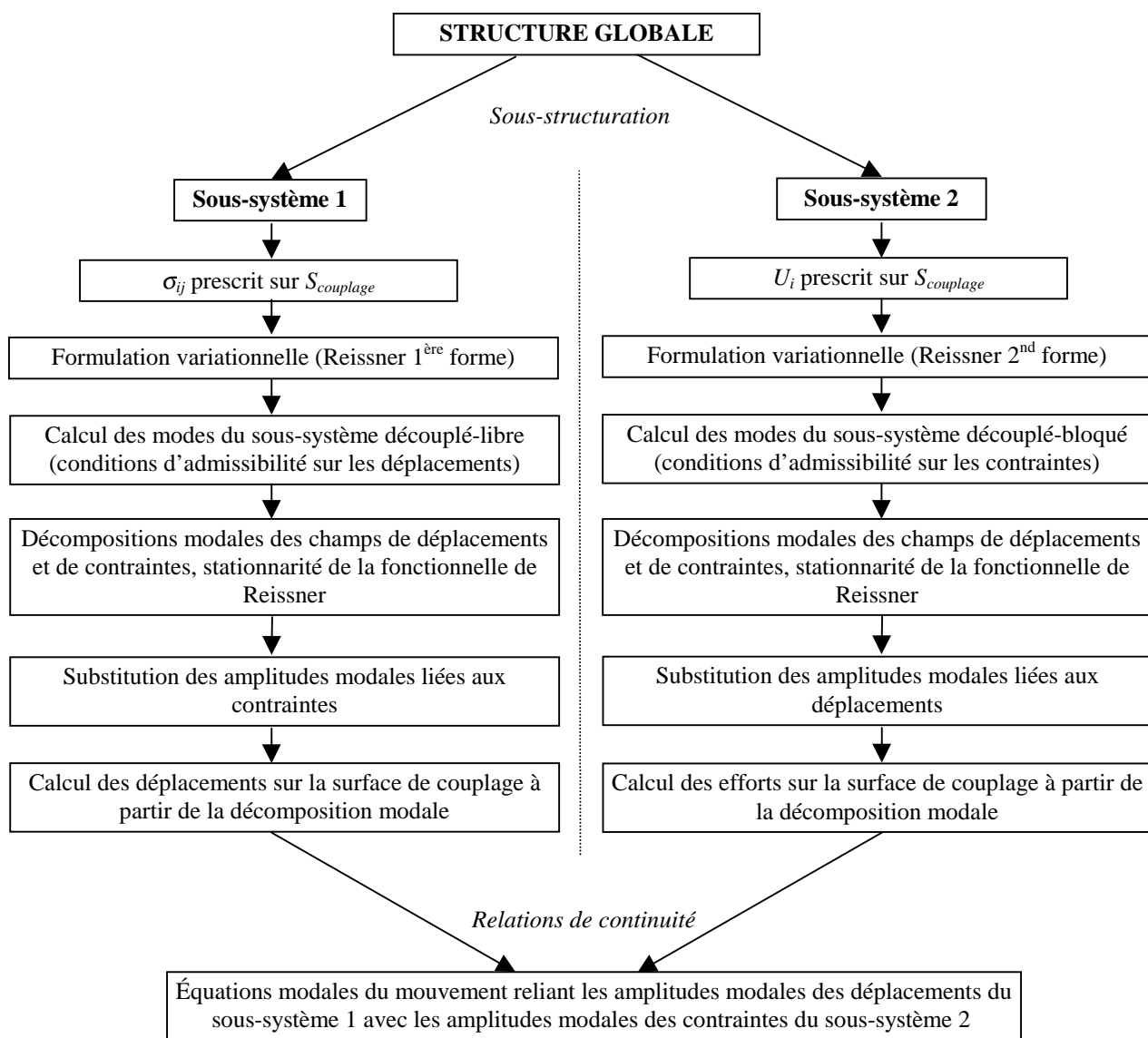


Figure 2.4. Présentation synoptique de la double formulation modale.

### 2.7. Vibrations forcées des sous-systèmes couplés

En introduisant des termes d'excitation et d'amortissement dans (2.47), on obtient un système d'équations décrivant la réponse forcée des sous-systèmes couplés à partir des amplitudes modales des modes des sous-systèmes découplés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{a}_p^1(t) + \Delta_p^1 \dot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) + \frac{1}{M_p^1} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{c}_m^2(t) \int_{S_{Couplage}} \tilde{W}_i^{1p} \tilde{\sigma}_{ij}^{2m} n_j^2 dS = \frac{F_p^1}{M_p^1}, \\ \ddot{c}_q^2(t) + \Delta_q^2 \dot{c}_q^2(t) + (\omega_q^2)^2 c_q^2(t) - \frac{1}{(\omega_q^2)^2 M_q^2} \sum_{r=1}^{\infty} \dot{a}_r^1(t) \int_{S_{Couplage}} \tilde{W}_i^{1r} \tilde{\sigma}_{ij}^{2q} n_j^2 dS = \frac{F_q^2}{(\omega_q^2)^2 M_q^2}, \end{array} \right. \quad \forall p \in [1, \dots, \infty[ \quad (2.48)$$

où on a introduit des amortissements modaux de type visqueux par les bandes d'amortissement modales  $\Delta_p^1$  et  $\Delta_q^2$ , et les excitations extérieures par des forces généralisées.

En posant pour chaque couple de modes  $(p, q)$  :

$$\mathbf{W}_{pq}^{12} = \int_{S_{Couplage}} \tilde{W}_i^{1p} \tilde{\sigma}_{ij}^{2q} n_j^2 dS, \quad (2.49)$$

le système d'équations peut se réécrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{a}_p^1(t) + \Delta_p^1 \dot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) + \frac{1}{M_p^1} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{c}_m^2(t) \mathbf{W}_{pm}^{12} = \frac{F_p^1}{M_p^1}, \quad \forall p \in [1, \dots, \infty[ \\ \ddot{c}_q^2(t) + \Delta_q^2 \dot{c}_q^2(t) + (\omega_q^2)^2 c_q^2(t) - \frac{1}{(\omega_q^2)^2 M_q^2} \sum_{r=1}^{\infty} \dot{a}_r^1(t) \mathbf{W}_{rq}^{12} = \frac{F_q^2}{(\omega_q^2)^2 M_q^2}, \quad \forall q \in [1, \dots, \infty[ \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Du point de vue physique, il est important de noter que le terme  $\mathbf{W}_{pq}^{12}$  représente un travail échangé par le  $p$ ème mode libre du sous-système 1 et le  $q$ ème mode bloqué du sous-système 2. On appellera donc ce terme le travail d'interaction modale. Ceci a été démontré dans un cas général de sous-systèmes mécaniques continus tridimensionnels, et peut donc être accepté comme un principe de base qui s'applique aux modèles simplifiés de poutres, de plaques et de coques. Pour ces cas, on devra considérer le travail d'interaction associé aux variables en dualité introduites dans les modèles 1D et 2D (force-déplacement, moment-rotation, etc.).

Pour des excitations par des efforts imposés  $\bar{F}_i^{Exc}$  sur une surface  $S_{Excitation}^1$  du sous-système 1, et pour des excitations par des vitesses imposées  $\bar{V}_i^{Exc} = \dot{\bar{W}}_i^{Exc}$  sur une surface  $S_{Excitation}^2$  du sous-système 2, on peut exprimer les 'forces' généralisées en reprenant la démarche des paragraphes 2.2 à 2.6. Tout calcul fait, on obtient :

$$F_p^1 = \int_{S_{Excitation}^1} \bar{F}_i^{Exc} \tilde{W}_i^{1p} dS, \quad (2.51)$$



L'énergie cinétique instantanée du sous-système  $\alpha$  s'exprime par :

$$E_c^\alpha = \int_{V^\alpha} \frac{1}{2} \rho^\alpha \left( \frac{\partial W_i^\alpha}{\partial t} \right)^2 dV. \quad (2.58)$$

En utilisant la décomposition modale du champ de déplacements qui converge au moins au sens faible vers la solution, on a :

$$E_c^\alpha(t) = \frac{1}{2} \int_{V^\alpha} \rho^\alpha \left( \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n^\alpha(t) \tilde{W}_i^{\alpha n} \right)^2 dV, \quad (2.59)$$

où on ne fait pas apparaître les variables spatiales.

À partir de la relation d'orthogonalité des déformées modales (2.29), on déduit de (2.59) :

$$E_c^\alpha(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} M_n^\alpha (\dot{a}_n^\alpha(t))^2, \quad (2.60)$$

c'est-à-dire,

$$E_c^\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_c^{\alpha n}(t), \quad (2.61)$$

où  $E_c^{\alpha n}(t) = \frac{1}{2} M_n^\alpha (\dot{a}_n^\alpha(t))^2$  est appelée l'énergie cinétique modale instantanée du mode  $n$  du sous-système  $\alpha$ .

L'énergie potentielle instantanée du sous-système  $\alpha$  s'exprime par :

$$E_p^\alpha(t) = \frac{1}{2} \int_{V^\alpha} \sigma_{ij}^\alpha S_{ijkl}^\alpha \sigma_{kl}^\alpha dV. \quad (2.62)$$

À partir de la décomposition modale du champ de contraintes qui converge au moins au sens faible vers la solution, on a :

$$E_p^\alpha(t) = \frac{1}{2} \int_{V^\alpha} \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n^\alpha(t) \tilde{\sigma}_{ij}^{\alpha n} \right) S_{ijkl}^\alpha \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m^\alpha(t) \tilde{\sigma}_{ij}^{\alpha m} \right) dV. \quad (2.63)$$

Compte tenu de la relation d'orthogonalité des déformées propres (2.30), on a :

$$E_p^\alpha(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} K_n^\alpha (b_n^\alpha(t))^2, \quad (2.64)$$

c'est-à-dire,

$$E_p^\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_p^{\alpha n}(t), \quad (2.65)$$

où  $E_p^{\alpha n}(t) = \frac{1}{2} K_n^\alpha (b_n^\alpha(t))^2$  est appelée l'énergie potentielle modale instantanée du mode  $n$  du sous-système  $\alpha$ .



Finalement, on a :

$$E_t^\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_t^{\alpha n}(t), \quad (2.66)$$

où  $E_t^{\alpha n}(t)$  est l'énergie modale du mode  $n$  du sous-système  $\alpha$ , définie comme étant la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du mode  $n$ .

En conclusion, l'énergie totale d'un sous-système est égale à la somme des énergies modales de tous ses modes. Dans la pratique, nous verrons que pour des excitations tronquées sur une bande de fréquence donnée et pour un choix de type de modes adéquat, l'énergie totale peut être déterminée approximativement en sommant les énergies des modes résonnants.

### 3.2. Propriétés énergétiques associées aux amplitudes $a_p^1(t)$ et $c_q^2(t)$

Le système d'équations (2.50) peut être interprété comme représentant le couplage d'un ensemble d'oscillateurs (modes) associés au sous-système 1 avec un autre ensemble d'oscillateurs associés au sous-système 2. Les couplages entre ces oscillateurs portent sur les dérivées premières par rapport au temps des amplitudes et ne conduisent pas à de la dissipation d'énergie à la différence du couplage visqueux. Ce type de couplage est généralement appelé couplage gyroscopique ou couplage gyrostatique (voir [FAH85]).

Compte tenu de (2.50), l'amplitude modale  $a_p^1(t)$  de la décomposition du champ de déplacements du sous-système 1 peut être rattachée à l'amplitude de déplacement d'un oscillateur associé dont la masse est égale à la masse généralisée et la raideur est égale à la raideur généralisée. Dans ce cas, on identifie immédiatement l'énergie cinétique de cet oscillateur à l'énergie cinétique modale, et son énergie potentielle à l'énergie potentielle modale. L'énergie totale de l'oscillateur représente donc bien l'énergie modale totale.

Pour le sous-système 2, les paramètres qui doivent être associés à l'oscillateur ne sont pas classiques (à la différence du sous-système 1). Quelques calculs sont donc nécessaires pour identifier ce qui est représenté par l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'oscillateur associé.

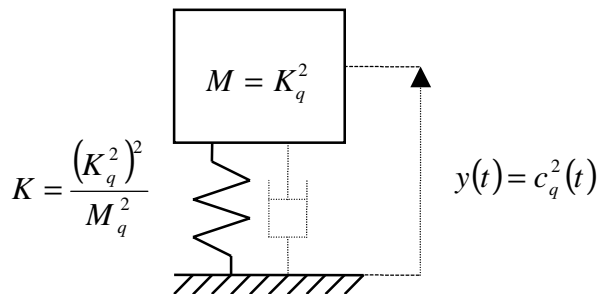


Figure 2.5. Illustration de l'oscillateur associé avec le  $q$ ème mode bloqué.

On note  $M$ , la masse,  $K$ , la raideur et  $y(t)$ , l'amplitude de l'oscillateur.

Par identification à partir de la forme de (2.50), on associe les paramètres modaux du  $q$ ème mode bloqué aux paramètres de l'oscillateur comme représenté figure 2.5 : la masse de l'oscillateur,  $M$ , est égale à la raideur modale,  $K_q^2$  ; et la raideur de l'oscillateur,  $K$ , est égale à  $\frac{(K_q^2)^2}{M_q^2}$ .

L'énergie cinétique instantanée de l'oscillateur peut être exprimée par :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} M (\dot{y}(t))^2 = \frac{1}{2} K_q^2 (\dot{c}_q^2(t))^2. \quad (2.67)$$

En introduisant la relation (2.46), on obtient :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} K_q^2 (b_q^2(t))^2. \quad (2.68)$$

Donc, l'énergie cinétique de l'oscillateur associé correspond à l'énergie modale potentielle du  $q$ ème mode bloqué.

Pour l'énergie potentielle de l'oscillateur, on peut écrire :

$$E_p(t) = \frac{1}{2} K (y(t))^2 = \frac{1}{2} \frac{(K_q^2)^2}{M_q^2} (c_q^2(t))^2. \quad (2.69)$$

Injectant (2.46) dans (2.39), et en intégrant une fois par rapport au temps en tenant compte que l'on considère un processus stationnaire, on a :

$$c_q^2(t) = -\frac{M_q^2}{K_q^2} \dot{a}_q^2(t). \quad (2.70)$$

En injectant dans (2.69), cela donne :

$$E_p(t) = \frac{1}{2} M_q^2 (\dot{a}_q^2(t))^2. \quad (2.71)$$

L'énergie potentielle de l'oscillateur associé correspond à l'énergie cinétique du mode  $q$ . Il est cependant important de noter que l'énergie totale de l'oscillateur associé est égale à l'énergie modale totale.

On remarque que le fait qu'il n'y ait que des couplages gyroscopiques entre les oscillateurs (modes) permet de n'avoir aucune ambiguïté sur la définition et l'équivalence des énergies des oscillateurs à la différence des autres types de couplage qui influencent soit sur l'énergie cinétique (couplage par inertie) soit sur l'énergie potentielle (couplage en raideur).

### 3.3. Moyenne temporelle des énergies

On note par  $\langle X \rangle_t$ , la moyenne temporelle d'un signal  $X(t)$  définie par :

$$\langle X \rangle_t = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X(t) dt. \quad (2.72)$$

D'après la linéarité de l'intégration et à partir de l'expression (2.66), on peut écrire la moyenne temporelle de l'énergie totale d'un sous-système  $\alpha$  sous la forme :

$$\langle E_t^\alpha \rangle_t = \sum_{n=1}^{\infty} \langle E_t^{\omega_n} \rangle_t, \quad (2.73)$$

avec pour le sous-système 1 décrit par les amplitudes modales  $a_p^1(t)$ ,

$$\langle E_t^{1p} \rangle_t = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left[ \frac{1}{2} M_p^1 (\dot{a}_p^1(t))^2 + \frac{1}{2} K_p^1 (a_p^1(t))^2 \right] dt, \quad (2.74)$$

et pour le sous-système 2 décrit par les amplitudes modales  $c_q^2(t)$ ,

$$\langle E_t^{2q} \rangle_t = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left[ \frac{1}{2} K_q^2 (\dot{c}_q^2(t))^2 + \frac{1}{2} \frac{(K_q^2)^2}{M_q^2} (c_q^2(t))^2 \right] dt. \quad (2.75)$$

### 3.3.1. Cas des excitations harmoniques

En régime harmonique,  $e^{j\omega t}$ , on peut déterminer les moyennes temporelles des énergies modales par :

$$\langle E_t^{1p} \rangle_t = \frac{1}{4} M_p^1 (\omega^2 + (\omega_p^1)^2) A_p^1(\omega) \bar{A}_p^1(\omega), \quad (2.76)$$

$$\langle E_t^{2q} \rangle_t = \frac{1}{4} K_q^2 (\omega^2 + (\omega_q^2)^2) C_q^2(\omega) \bar{C}_q^2(\omega), \quad (2.77)$$

où  $A_p^1(\omega)$  et  $C_q^2(\omega)$  sont les amplitudes modales obtenues en résolvant le système (2.54), et  $\bar{A}_p^1(\omega)$  et  $\bar{C}_q^2(\omega)$  sont les quantités complexes conjuguées de  $A_p^1(\omega)$  et  $C_q^2(\omega)$ .

Pour des excitations harmoniques données, on peut, en résolvant le système d'équations (2.54), déterminer les énergies modales moyennées dans le temps de chacun des sous-systèmes. Les énergies totales des sous-systèmes, moyennées dans le temps, peuvent ensuite être déduite en additionnant les énergies modales.

### 3.3.2. Cas des excitations aléatoires

On considère dans ce paragraphe des excitations aléatoires ergodiques définies sur une bande de fréquence  $[\omega_1, \omega_2]$  ([CRA63]). L'excitation du sous-système 1 s'effectue par une source de force avec pour densité spectrale  $S_{F_1 F_1}(\omega)$  et pour le sous-système 2 par une source de vitesse avec pour densité spectrale  $S_{V_2 V_2}(\omega)$ .

Les énergies modales en réponse à ces excitations à la pulsation  $\omega$ , ou plus précisément les densités spectrales des énergies modales sont données par :

$$E_t^{1p}(\omega) = \frac{1}{2} M_p^1 (\omega^2 + (\omega_p^1)^2) S_{a_p^1 a_p^1}(\omega), \quad (2.78)$$

$$E_t^{2q}(\omega) = \frac{1}{2} K_q^2 (\omega^2 + (\omega_q^2)^2) S_{c_q^2 c_q^2}(\omega), \quad (2.79)$$

où  $S_{a_p^1 a_p^1}(\omega)$  (resp.  $S_{c_q^2 c_q^2}(\omega)$ ) est la densité spectrale de  $a_p^1$  (resp.  $c_q^2$ ) définie pour  $\omega > 0$ .

En considérant les densités spectrales nulles en dehors de la bande de fréquence considérée, on peut écrire :

$$\langle E_t^{1p} \rangle_t = \int_{\omega_1}^{\omega_2} E_t^{1p}(\omega) d\omega \quad \text{et} \quad \langle E_t^{2q} \rangle_t = \int_{\omega_1}^{\omega_2} E_t^{2q}(\omega) d\omega, \quad (2.80)$$

c'est-à-dire :

$$\langle E_t^{1p} \rangle_t = \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} M_p^1 (\omega^2 + (\omega_p^1)^2) \mathcal{S}_{a_p^1 a_p^1}(\omega) d\omega, \quad (2.81)$$

$$\langle E_t^{2q} \rangle_t = \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} K_q^2 (\omega^2 + (\omega_q^2)^2) \mathcal{S}_{c_q^2 c_q^2}(\omega) d\omega. \quad (2.82)$$

À partir de ces expressions, on peut déterminer les énergies modales moyennées dans le temps pour des sous-systèmes excités par des sources aléatoires ayant des densités spectrales nulles en dehors de la bande  $[\omega_1, \omega_2]$ . En pratique, on ne peut pas facilement accéder aux densités spectrales des amplitudes modales. On va donc approcher les résultats par échantillonnage des spectres d'excitations en fréquence et en évaluant les amplitudes modales pour des excitations harmoniques déterministes.

## 4. Exemples d'applications

Nous présentons dans cette partie des applications de la double formulation modale. Trois exemples, de difficultés croissantes, sont proposés :

- le premier porte sur un couplage similaire à celui présenté par Karnopp [KAR66] : couplage rigide de poutres vibrant longitudinalement. On vérifiera alors que l'on retrouve bien les mêmes résultats que Karnopp ;
- le second consiste en un couplage rigide de deux poutres vibrant en flexion pure. On s'attachera à étudier la convergence des séries modales en fonction des rapports de section ainsi que des conditions aux limites au niveau de la jonction de couplage ;
- le dernier porte sur un couplage de deux structures bi-dimensionnelles (plaques).

### 4.1. Couplage rigide de deux poutres vibrant longitudinalement

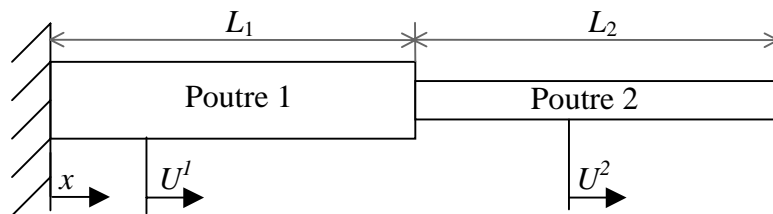


Figure 2.6. Couplage de deux poutres de sections différentes vibrant longitudinalement, encastrée en  $x=0$ , libre en  $x=L_1+L_2$ .

On considère le système représenté figure 2.6.  $L_\alpha, S_\alpha, \rho_\alpha, E_\alpha$  sont respectivement, la longueur, la section, la masse volumique et le module de Young de la poutre  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ). On s'intéresse aux vibrations libres du système conservatif. On suppose que les deux poutres sont constituées du même matériaux ( $E_1 = E_2 = E, \rho_1 = \rho_2 = \rho$ ) et que la poutre 1 est plus grosse que la poutre 2 ( $S_1 > S_2$ ). La conséquence est que la poutre 1 vibre plutôt comme si elle était libre au niveau de la jonction avec la deuxième poutre alors que la poutre 2 vibre plutôt comme si elle était encastrée au niveau de cette même jonction. Les modes des sous-systèmes découplés devant être choisis tels qu'ils se rapprochent des modes physiques de la structure globale, ceux de la poutre 1 sont définis à partir du sous-système découplé-libre et ceux de la poutre 2 à partir du sous-système découplé-bloqué. Pour les deux poutres les conditions aux limites seront donc encastrée-libre (voir figure 2.7).

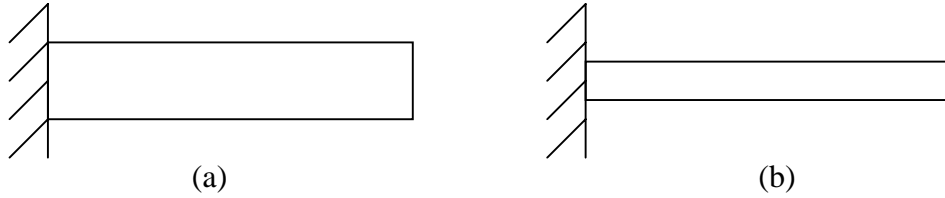


Figure 2.7. Représentation des sous-systèmes découplés : (a) Sous-système découplé-libre : Poutre 1, encastrée-libre. (b) Sous-système découplé-bloqué : Poutre 2, encastrée-libre.

La poutre 1 est donc décrite par le déplacement longitudinal et la poutre 2 par la contrainte longitudinale. Pour cet exemple simple, nous utilisons directement les résultats des paragraphes 2.6 et 2.7 de ce chapitre. Nous reviendrons en détail sur la double formulation modale sur l'exemple suivant.

Soit  $U^1(x, t)$  et  $\sigma^2(x, t)$  le déplacement longitudinal généralisé de la poutre 1 et la contrainte normale généralisée de la poutre 2, les décompositions modales en accord avec le cas général sont :

$$U^1 = \sum_{r=1}^{\infty} a_r^1(t) \tilde{U}^{1r}(x) \text{ et } \sigma^2(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2(t) \tilde{\sigma}^{2m}(x). \quad (2.83)$$

À partir de l'interprétation physique de  $\mathbf{W}_{pq}^{12}$  comme étant un travail d'interaction entre le mode libre  $p$  de la poutre 1 et le mode bloqué  $q$  de la poutre 2, on peut écrire :

$$\mathbf{W}_{pq}^{12} = S_2 \tilde{\sigma}^{2q}(L_1) \tilde{U}^{1p}(L_1). \quad (2.84)$$

Les schémas modaux des deux poutres nous donnent :

$$\omega_p^1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} k_p^1, \quad k_p^1 = \frac{2p-1}{2} \frac{\pi}{L_1}, \quad M_p^1 = \frac{\rho S_1 L_1}{2}, \quad \tilde{W}^{1p}(L_1) = 1, \quad (2.85)$$

$$\omega_q^2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} k_q^2, \quad k_q^2 = \frac{2q-1}{2} \frac{\pi}{L_2}, \quad M_q^2 = \frac{\rho S_2 L_2}{2}, \quad \tilde{\sigma}^{2q}(L_1) = E k_q^2 (-1)^q, \quad (2.86)$$

d'où,

$$\mathbf{W}_{pq}^{12} = ES_2 k_q^2 (-1)^q. \quad (2.87)$$

En injectant (2.85-2.87) dans le système d'équations (2.47), on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) = -\frac{2ES_2}{\rho S_1 L_1} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{c}_m^2(t) k_m^2 (-1)^m, & \forall p \in [1, \dots, \infty[ \\ \ddot{c}_q^2(t) + (\omega_q^2)^2 c_q^2(t) = \frac{2(-1)^q}{k_q^2 L_2} \sum_{r=1}^{\infty} \dot{a}_r^1(t), & \forall q \in [1, \dots, \infty[ \end{cases} \quad (2.88)$$

Cas étudié par Karnopp [KAR66]:  $S_1 = S_2 = S$

On retrouve le système d'équations obtenu par Karnopp en effectuant un changement de variable sur les amplitudes modales car les modes n'ont pas été normalisés de la même manière. En effet, les déformées modales en contrainte  $\tilde{\sigma}^{2q}(x)$ , considérées ici, sont définies dans un rapport  $\frac{k_q^2 E}{S}$  par rapport à celles de Karnopp (équation (22) dans [KAR66]).

En posant  $\mu_p(t) = a_p^1(t)$  et  $v_q(t) = \frac{k_q^2 E}{S} c_q^2(t)$ , le système (2.88) peut se réécrire :

$$\begin{cases} \frac{\rho S L_1}{2} (\ddot{\mu}_p(t) + (\omega_p^1)^2 \mu_p(t)) = -\sum_{m=1}^{\infty} \dot{v}_m(t) (-1)^m, & \forall p \in [1, \dots, \infty[ \\ \frac{S L_2}{2E} (\ddot{v}_q(t) + (\omega_q^2)^2 v_q(t)) = (-1)^q \sum_{r=1}^{\infty} \dot{\mu}_r(t), & \forall q \in [1, \dots, \infty[ \end{cases} \quad (2.89)$$

et est équivalent à l'expression (26) dans [KAR66]<sup>1</sup>.

## 4.2. Couplage rigide de deux poutres vibrant en flexion pure

Deux cas de couplages différents vont être étudiés :

- l'un (cas A), consiste au couplage rigide et sans appui intermédiaire des deux poutres.

Il y a alors continuité des déplacements, des rotations angulaires, des efforts tranchants et des

<sup>1</sup> Compte tenu des erreurs de frappe et de l'erreur de signe intervenue au second membre de l'équation (8).

moments fléchissants. Sur ce cas simple, on détaillera la décomposition modale pour illustrer la formulation ;

- l'autre (cas B), fait intervenir un appui intermédiaire entre les deux poutres. On utilisera directement l'interprétation physique du travail d'interaction modal pour obtenir les équations modales.

Ensuite, il sera présenté une validation numérique et une comparaison des convergences des séries modales pour ces deux cas de couplages et pour différents rapports de sections.

#### 4.2.1. Sans appui intermédiaire (cas A)

##### 4.2.1.1. Présentation de la structure

On considère deux poutres satisfaisant aux hypothèses d'Euler-Bernoulli, couplées rigidement à une de leurs extrémités (voir figure 2.8). Les sections rectangulaires peuvent être différentes. L'autre extrémité de chaque poutre est supposée simplement appuyée. On considère un repère cartésien  $(x, y, z)$  comme représenté figure 2.8.

$L_\alpha, b_\alpha, h_\alpha, E_\alpha, \rho_\alpha, \nu_\alpha$  sont respectivement la longueur, la largeur, l'épaisseur, le module de Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson de la poutre  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ).

Pour la poutre  $\alpha$ , l'aire de la section droite est alors  $S_\alpha = b_\alpha h_\alpha$  et le moment d'inertie par rapport à l'axe  $z$  est  $I_\alpha = 12^{-1} b_\alpha (h_\alpha)^3$ .

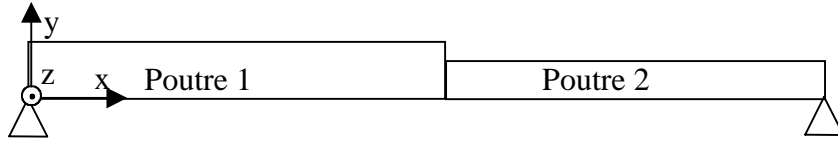


Figure 2.8. Illustration du couplage rigide des deux poutres vibrant en flexion.

Les hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les déplacements et les contraintes de la poutre  $\alpha$  sont :

$$\begin{cases} W_1^\alpha(x, y, z, t) = -y \frac{\partial W_y^\alpha}{\partial x}(x, t), \\ W_2^\alpha(x, y, z, t) = W_y^\alpha(x, t), \\ W_3^\alpha(x, y, z, t) = 0, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.90)$$

où  $W_y^\alpha(x, t)$  est le déplacement transversal généralisé de la poutre  $\alpha$ .

$$\begin{cases} \sigma_{11}^\alpha(x, y, z, t) = y \sigma_x^\alpha(x, t), \\ \sigma_{ij}^\alpha(x, y, z, t) = 0, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.91)$$

où  $\sigma_x^\alpha(x, t)$  est la contrainte normale généralisée de la poutre  $\alpha$ .

### 4.2.1.2. Décomposition modale par utilisation de la DMF

Première étape : *Formulation variationnelle de chaque problème.*

Comme dans le cas général, on sépare les deux poutres pour former deux problèmes indépendants. On spécifie un effort tranchant  $\bar{F}_c$  et un moment fléchissant  $\bar{M}_c$  sur l'extrémité en  $x=L_1$  de la poutre 1, et un déplacement transversal  $\bar{W}_c$  et une rotation angulaire  $\bar{\theta}_c$  sur l'extrémité en  $x=L_1$  de la poutre 2. On introduit également une excitation en force  $\bar{F}_1^e$  en  $x=x_1$  sur la poutre 1.

La fonctionnelle associée au problème de la poutre 1 peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Psi_{Poutre}^1(W_y^1, \sigma_x^1) = & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{L_1} \left\{ \frac{\rho_1 S_1}{2} \left( \frac{\partial W_y^1}{\partial t}(x, t) \right)^2 - I_1 \cdot \sigma_x^1(x, t) \cdot \frac{\partial^2 W_y^1}{\partial x^2}(x, t) + \frac{I_1}{2 \cdot E_1} \cdot (\sigma_x^1(x, t))^2 \right. \\ & \left. - \bar{F}_1^e(t) W_y^1(x, t) \Big|_{x=x_0} + \bar{M}_c(t) \frac{\partial W_y^1}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=L_1} + \bar{F}_c(t) W_y^1(x, t) \Big|_{x=L_1} \right\} dx dt, \end{aligned} \quad (2.92)$$

avec les espaces admissibles :

$$\Omega_{Poutre}^1(\Gamma^1) = \{W_y^1(x, t) / W_y^1(x, t) \in H^2(\Gamma^1); W_y^1(0, t) = 0\}, \quad (2.93)$$

$$\Sigma_{Poutre}^1(\Gamma^1) = \{\sigma_x^1(x, t) / \sigma_x^1(x, t) \in L^2(\Gamma^1); \sigma_x^1(0, t) = 0\}, \quad (2.94)$$

où  $\Gamma^1 = ([0, L_1] \times ]t_0, t_1[)$ .

Et pour le problème de la poutre 2, on a la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \Psi_{Poutre}^2(W_y^2, \sigma_x^2) = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left\{ \frac{\rho_2 S_2}{2} \left( \frac{\partial W_y^2}{\partial t}(x, t) \right)^2 + I_2 \frac{\partial^2 \sigma_x^2}{\partial x^2}(x, t) W_y^2(x, t) + \frac{I_2}{2 E_2} (\sigma_x^2(x, t))^2 \right. \\ & \left. - \bar{\theta}_z(t) I_2 \sigma_x^2(x, t) \Big|_{x=L_1} + \bar{W}_c(t) I_2 \frac{\partial \sigma_x^2}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=L_1} \right\} dx dt, \end{aligned} \quad (2.95)$$

avec les espaces admissibles :

$$\Omega_{Poutre}^2(\Gamma^2) = \{W_y^2(x, t) / W_y^2(x, t) \in H^1(\Gamma^2); W_y^2(L_1 + L_2, t) = 0\}, \quad (2.96)$$

$$\Sigma_{Poutre}^2(\Gamma^2) = \left\{ \begin{aligned} & \sigma_x^2(x, t) / \sigma_x^2(x, t) \in L^2(\Gamma^2); \frac{\partial \sigma_x^2}{\partial x}(x, t) \in L^2(\Gamma^2); \frac{\partial^2 \sigma_x^2}{\partial x^2}(x, t) \in L^2(\Gamma^2) \\ & \sigma_x^2(L_1 + L_2, t) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.97)$$

où  $\Gamma^2 = ([L_1, L_1 + L_2] \times ]t_0, t_1[)$ .



Deuxième étape : Définition et calcul des modes des sous-systèmes découplés.

En accord avec le cas général paragraphe 2.4, les modes associés à la poutre 1 sont ceux du sous-système découplé-libre, et les modes associés à la poutre 2 sont ceux du sous-système découplé-bloqué. Pour la poutre 1, on doit donc considérer les conditions aux limites appuyée-libre et le problème aux valeurs propres en déplacement, et pour la poutre 2, les conditions aux limites encastree-appuyée et le problème aux valeurs propres en contrainte. Les solutions de ces deux problèmes sont présentées en annexe A où deux méthodes sont proposées pour déterminer les déformées en contrainte. Pour chacune de ces poutres, il existe un mode de fréquence propre nulle (mode de corps rigide pour la poutre 1, mode de Helmholtz pour la poutre 2).

On note par  $(\omega_p^1, \tilde{W}_y^{1p}(x), \tilde{\sigma}_x^{1p}(x))$  le triplet associé au mode  $p$  de la poutre 1 et  $(\omega_q^2, \tilde{W}_y^{2q}(x), \tilde{\sigma}_x^{2q}(x))$  le triplet associé au mode  $q$  de la poutre 2.

Les modes de la poutre 1 ont les propriétés d'orthogonalité suivantes :

- pour  $p \neq 0, q \neq 0$  :

$$\int_0^{L_1} \omega_p^1 \omega_q^1 \rho_1 S_1 \tilde{W}_y^{1p}(x) \tilde{W}_y^{1q}(x) dx = K_p^1 \delta_{pq}, \quad (2.98)$$

$$\int_0^{L_1} I_1 \tilde{\sigma}_x^{1p}(x) \frac{\partial^2 \tilde{W}_y^{1q}}{\partial x^2}(x) dx = K_p^1 \delta_{pq}, \quad (2.99)$$

$$\int_0^{L_1} \frac{I_1}{E_1} \tilde{\sigma}_x^{1p}(x) \tilde{\sigma}_x^{1q}(x) dx = K_p^1 \delta_{pq}; \quad (2.100)$$

- pour  $p=0$  :

$$\int_0^{L_1} \rho_1 S_1 \tilde{W}_y^{1,0}(x) \tilde{W}_y^{1q}(x) dx = \frac{\rho_1 S_1 (L_1)^3}{3} \delta_{0q}, \quad (2.101)$$

$$\int_0^{L_1} I_1 \frac{\partial^2 \tilde{W}_y^{1,0}}{\partial x^2}(x) \tilde{\sigma}_x^{1q}(x) dx = 0. \quad (2.102)$$

Et les modes de la poutre 2 ont les propriétés :

- pour  $p \neq 0, q \neq 0$  :

$$\int_{L_1}^{L_1+L_2} \omega_p^2 \omega_q^2 \rho_2 S_2 \tilde{W}_y^{2p}(x) \tilde{W}_y^{2q}(x) dx = K_p^2 \delta_{pq}, \quad (2.103)$$

$$\int_{L_1}^{L_1+L_2} I_2 \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}_x^{2p}}{\partial x^2}(x) \tilde{W}_y^{2q}(x) dx = K_p^2 \delta_{pq}, \quad (2.104)$$

$$\int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{I_2}{E_2} \tilde{\sigma}_x^{2p}(x) \tilde{\sigma}_x^{2q}(x) dx = K_p^2 \delta_{pq}; \quad (2.105)$$

- pour  $p=0$  :

$$\int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{I_2}{E_2} \tilde{\sigma}_x^{2,0}(x) \tilde{\sigma}_x^{2q}(x) dx = \frac{I_2(L_2)^3}{3E_2} \delta_{0q}, \quad (2.106)$$

$$\int_{L_1}^{L_1+L_2} I_2 \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}_x^{2,0}}{\partial x^2}(x) \tilde{W}_y^{2q}(x) dx = 0. \quad (2.107)$$

Troisième étape : Décomposition modale et stationnarité des fonctionnelles

Conformément à la double formulation modale, on décompose les champs de déplacements et de contraintes de chaque poutre en série modale :

$$W_y^1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1(t) \tilde{W}_y^{1n}(x), \quad \sigma_x^1(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^1(t) \tilde{\sigma}_x^{1m}(x), \quad (2.108)$$

$$W_y^2(x,t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^2(t) \tilde{W}_y^{2r}(x), \quad \sigma_x^2(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s^2(t) \tilde{\sigma}_x^{2s}(x). \quad (2.109)$$

Après avoir introduit ces équations dans chacune des fonctionnelles, on simplifie les expressions à partir des propriétés d'orthogonalité. De la même manière que pour le cas général, on rend stationnaire les fonctionnelles en utilisant l'équation d'Euler associée à chaque amplitude modale. On obtient finalement, en ne conservant que les amplitudes modales de la décomposition du champ de déplacements,  $a_p^1(t)$ , pour la poutre 1 :

$$\begin{cases} \ddot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) = \frac{1}{M_p^1} \left[ \bar{F}_1^e(t) \tilde{W}_y^{1p}(x_1) - \bar{F}_c(t) \tilde{W}_y^{1p}(L_1) - \bar{M}_c(t) \frac{\partial \tilde{W}_y^{1p}}{\partial x}(L_1) \right], \forall p \in [1, \infty[ \\ \ddot{a}_0^1(t) = \frac{3}{\rho_1 S_1 (L_1)^3} \left[ \bar{F}_1^e(t) \tilde{W}_y^{1,0}(x_1) - \bar{F}_c(t) \tilde{W}_y^{1,0}(L_1) - \bar{M}_c(t) \frac{\partial \tilde{W}_y^{1,0}}{\partial x}(L_1) \right]. \end{cases} \quad (2.110)$$

Et les amplitudes modales de la décomposition du champ de contraintes,  $b_q^2(t)$ , pour la poutre 2 :

$$\begin{cases} \ddot{b}_q^2(t) + (\omega_q^2)^2 b_q^2(t) = \frac{1}{K_q^2} \left[ -\ddot{W}_c(t) I_2 \frac{\partial \tilde{\sigma}_x^{2q}}{\partial x}(L_1) + \ddot{\theta}_z(t) I_2 \tilde{\sigma}_x^{2q}(L_1) \right], \quad \forall q \in [1, \infty[ \\ b_0^2(t) = \frac{3.E_2}{I_2(L_2)^3} \left[ -\ddot{W}_c(t) I_2 \frac{\partial \tilde{\sigma}_x^{2,0}}{\partial x}(L_1) + \ddot{\theta}_z(t) I_2 \tilde{\sigma}_x^{2,0}(L_1) \right]. \end{cases} \quad (2.111)$$

Quatrième étape : Assemblage des deux problèmes

Soit  $\mathbf{M}_f^2(x,t)$  et  $\mathbf{F}_t^2(x,t)$ , le moment fléchissant et l'effort tranchant du torseur de section de la poutre 2.

À partir de la décomposition modale du champ des contraintes de la poutre 2, on peut exprimer l'effort et le moment qui excite la poutre 1 :

$$\bar{M}_c(t) = -\mathbf{M}_f^2(L_1, t) = -I_2 \sigma_x^2(L_1, t) = -\sum_{m=0}^{\infty} b_m^2(t) I_2 \tilde{\sigma}_x^{2m}(L_1), \quad (2.112)$$

$$\text{et } \bar{F}_c(t) = -\mathbf{F}_t^2(L_1, t) = \frac{\partial \mathbf{M}_f^2}{\partial x}(L_1, t) = +I_2 \frac{\partial \sigma_x^2}{\partial x}(L_1, t) = +\sum_{m=0}^{\infty} b_m^2(t) I_2 \frac{\partial \tilde{\sigma}_x^{2m}}{\partial x}(L_1). \quad (2.113)$$

De même, à partir de la décomposition modale du champ de déplacements de la poutre 1, on peut exprimer le déplacement et la rotation angulaire qui excite la poutre 2 :

$$\bar{W}_c(t) = W_y^1(L_1, t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^1(t) \tilde{W}_y^{1r}(L_1) \quad \text{et} \quad \bar{\theta}_c(t) = \frac{\partial W_y^1}{\partial x}(L_1, t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^1(t) \frac{\partial \tilde{W}_y^{1r}}{\partial x}(L_1). \quad (2.114)$$

Finalement, en posant  $b_q^2(t) = \dot{c}_q^2(t)$  et en introduisant des amortissements modaux visqueux, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{a}_p^1(t) + \Delta_p^1 \dot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) = \frac{1}{M_p^1} \left[ \bar{F}_1^e(t) \tilde{W}_y^{1p}(x_1) - \sum_{m=0}^{\infty} \dot{c}_m^2(t) \mathbf{W}_{pm}^{12} \right], \quad \forall p \in [1, \infty[ \\ \ddot{a}_0^1(t) = \frac{3}{\rho_1 S_1(L_1)^3} \left[ \bar{F}_1^e(t) \tilde{W}_y^{1,0}(x_1) - \sum_{m=0}^{\infty} \dot{c}_m^2(t) \mathbf{W}_{0m}^{12} \right], \\ \ddot{c}_q^2(t) + \Delta_q^2 \dot{c}_q^2(t) + (\omega_q^2)^2 c_q^2(t) = \frac{1}{K_q^2} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \dot{a}_r^1(t) \mathbf{W}_{rq}^{12} \right], \quad \forall q \in [1, \infty[ \\ c_0^2(t) = \frac{3E_2}{I_2(L_2)^3} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \dot{a}_r^1(t) \mathbf{W}_{r0}^{12} \right], \end{array} \right. \quad (2.115)$$

où on a pu faire apparaître les travaux d'interactions modales,

$$\mathbf{W}_{pq}^{12} = -\tilde{W}_y^{1p}(L_1) I_2 \frac{\partial \tilde{\sigma}_x^{2q}}{\partial x}(L_1) + \frac{\partial \tilde{W}_y^{1p}}{\partial x}(L_1) I_2 \tilde{\sigma}_x^{2q}(L_1). \quad (2.116)$$

En posant :

$$\tilde{\theta}_z^{1p}(x) = \frac{\partial \tilde{W}_y^{1p}}{\partial x}(x), \text{ la déformée en terme de rotation angulaire du mode } p \text{ de la poutre 1,}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_f^{2q}(x) = I_2 \tilde{\sigma}_x^{2q}(x), \text{ la déformée en terme de moment fléchissant du mode } q \text{ de la poutre 2,}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_t^{2q}(x) = -I_2 \frac{\partial \tilde{\sigma}_x^{2q}}{\partial x}(x), \text{ la déformée en terme d'effort tranchant du mode } q \text{ de la poutre 2,}$$

l'expression (2.116) peut se réécrire :

$$\mathbf{W}_{pq}^{12} = \tilde{W}_y^{1p}(L_1) \tilde{\mathbf{F}}_t^{2q}(L_1) + \tilde{\theta}_z^{1p}(L_1) \tilde{\mathbf{M}}_f^{2q}(L_1). \quad (2.117)$$

$\mathbf{W}_{pq}^{12}$  s'identifie alors bien comme étant le travail exercé par le mode bloqué  $q$  de la poutre 2 sur le mode libre  $p$  de la poutre 1.

4.2.2. Avec appui intermédiaire (cas B)

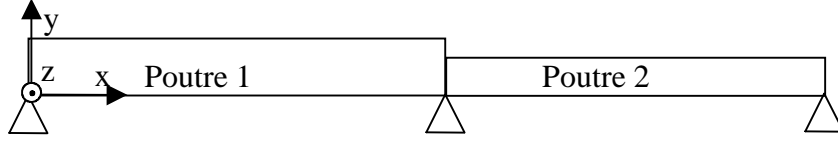


Figure 2.9. Illustration du couplage rigide des deux poutres vibrant en flexion avec appui intermédiaire.

La structure que l'on considère ici (voir figure 2.9) est identique à la précédente exceptée que l'on a introduit un appui au niveau de la jonction de couplage. Étant donné que l'on ne prend en compte que les hypothèses de déplacements en flexion pure, ce système est équivalent à un couplage de deux poutres en L avec des appuis aux deux extrémités du L.

Le couplage se traduit par une continuité des rotations angulaires et des moments fléchissants. On considère comme au paragraphe précédent que la poutre 1 est plus épaisse que la poutre 2, donc elle doit être décrite en variables déplacements alors que la poutre 2 doit être décrite en variables contraintes. Compte tenu de la modélisation 1D (hypothèses de Euler-Bernoulli), le travail d'interaction modale entre un mode  $p$  de la poutre 1 et un mode  $q$  de la poutre 2 est égale au produit de la déformée de la rotation angulaire du mode  $p$  de la 1<sup>re</sup> poutre en  $x=L_1$  avec la déformée du moment fléchissant du mode  $q$  de la 2<sup>e</sup> poutre en  $x=L_1$  :

$$\mathbf{W}_{pq}^{12} = \tilde{\theta}_z^{1p}(L_1) \tilde{\mathbf{M}}_f^{2q}(L_1), \quad (2.118)$$

avec la même notation qu'au paragraphe précédent.

Les modes du sous-système découplé-libre pour la poutre 1 sont déterminés avec les conditions aux limites appuyée-appuyée, et les modes du sous-système découplé-bloqué pour la poutre 2 avec des conditions aux limites encastrée-appuyée. Les schémas modaux sont présentés en annexe A. Tout calcul fait, on obtient :

$$\mathbf{W}_{pq}^{12} = 2(k_q^2)^2 E_2 I_2 k_p^1. \quad (2.119)$$

En injectant cette relation et les données des schémas modaux (voir annexe A) dans le système d'équations (2.50), on obtient la réponse forcée du système couplé.

Remarque : Comme pour le cas A, la poutre 2 a un mode en contrainte de fréquence propre nulle. L'amplitude rattachée à ce mode,  $c_0^2(t)$ , peut être déduite du calcul du paragraphe précédent :

$$\ddot{c}_0^2(t) = \frac{3E_2}{(L_2)^2} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \dot{a}_r^1(t) k_r^1 \right]. \quad (2.120)$$

## 4.2.3. Applications numériques

## 4.2.3.1. Validation

On propose dans ce paragraphe une validation numérique de la double formulation modale proposée précédemment. On considère le système du paragraphe précédent (voir figure 2.9). La poutre 1 est excitée par une force harmonique ponctuelle en  $x_1$  ( $|F_1^e(\omega)| = 1N$ ).

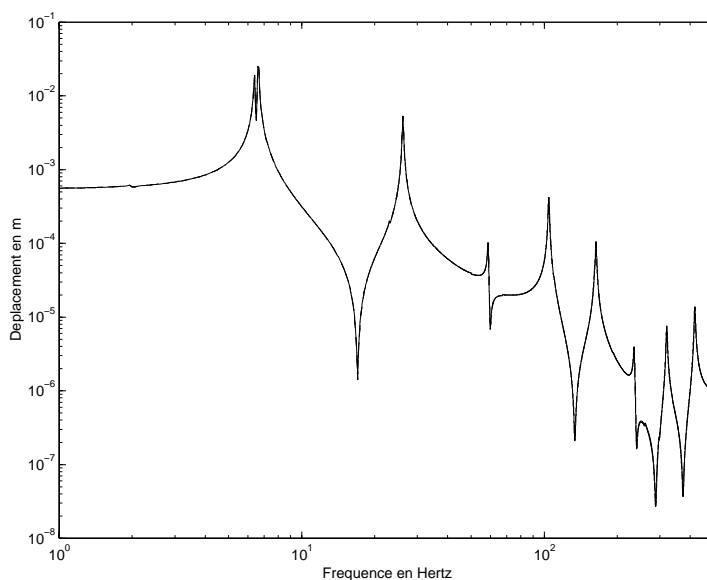


Figure 2.10. Réponse vibratoire en déplacement au point  $x_{r1}$  de la poutre excitée en fonction de la fréquence. Comparaison de trois calculs : —, exact ; - - - -, DMF sans le mode en contrainte de fréquence propre nulle ; - · - · -, DMF avec le mode en contrainte de fréquence propre nulle.  $L_1=3,5m$ ,  $L_2=2,5m$ ,  $b_1=b_2=0,01m$ ,  $h_1=10mm$ ,  $h_2=1mm$ ,  $E_1=E_2=7.10^{10}Pa$ ,  $\rho_1=\rho_2=2700kg/m^3$ ,  $\eta_1=\eta_2=0,01$ ,  $x_1=2,31m$ ,  $x_{r1}=2,95m$ .

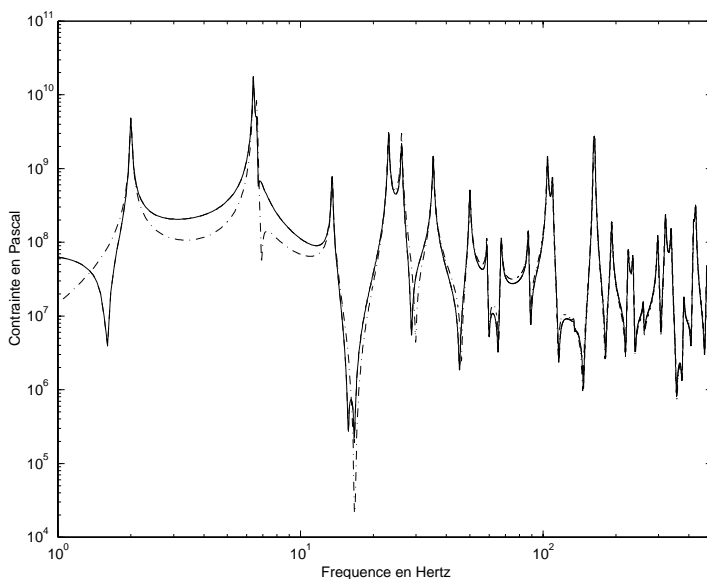


Figure 2.11. Configuration identique à la figure précédente. Réponse vibratoire en terme de contrainte normale généralisée en  $x_{r2}$  de la poutre non excitée en fonction de la fréquence. Comparaison de trois calculs : —, exact ; - - - -, DMF sans le mode en contrainte de fréquence propre nulle ; - · - · -, DMF avec le mode en contrainte de fréquence propre nulle.  $x_{r2}=3,9m$ .

Les figures 2.10 et 2.11 donnent la réponse vibratoire en un point de la poutre 1 et de la poutre 2, respectivement. Le calcul exact est obtenu par une décomposition en ondes forcées (voir annexe B). Deux résultats donnés par la DMF sont présentés : l'un, tenant compte des modes résonnants dans la bande ]0,2000 Hz] ; l'autre, tenant compte des mêmes modes et du mode en contrainte de fréquence propre nulle (17 modes pour la poutre 1, et 30 modes pour la poutre 2). On constate que ce dernier résultat tenant compte du 'mode de Helmholtz' est identique au résultat exact ce qui valide sur ce cas la double formulation modale. Le calcul sans ce mode ne converge pas vers la solution statique de la poutre 2 quand la fréquence d'excitation se rapproche de zéro. On constate également que ce mode joue uniquement un rôle dans le domaine non résonnant du spectre. L'erreur n'est donc importante que pour les très faibles niveaux ce qui permettra de s'affranchir de ce mode pour le calcul des énergies dans une bande de fréquence dès que plusieurs modes sont résonnants dans la bande considérée.

#### 4.2.3.2. Étude de la convergence des séries modales

Pour obtenir une convergence rapide des séries modales, les modes des sous-systèmes doivent être choisis de telle façon qu'ils se rapprochent des modes physiques de la structure globale. Ceci est possible si une rupture d'impédance au niveau de la jonction de couplage est présente. Cette rupture conduit un sous-système à vibrer plutôt librement au niveau de la liaison alors que l'autre vibre plutôt comme s'il était bloqué. Le premier sous-système peut alors être correctement représenté par les modes libres et le deuxième par les modes bloqués. On ne sait toutefois pas de quelle ampleur doit être cette rupture d'impédance pour que les modes résonnants dans une bande de fréquence puissent représenter le comportement vibratoire du système dans cette même bande.

On se propose d'étudier sur le couplage des poutres en flexion, la qualité des résultats de la DMF pour différentes ruptures d'impédances (pour un amortissement donné). Les deux cas de couplage de poutres en flexion, cas A et cas B, sont considérés. Pour chaque cas, la poutre 1 est excitée par une force ponctuelle harmonique au point d'abscisse  $x_1$  ( $|F_1^e(\omega)| = 1N$ ). On donne, figures 2.12 (cas A) et 2.13 (cas B), la réponse vibratoire de la poutre non excitée en fonction de la fréquence pour trois rapports de sections différents. Les spectres sont donnés pour l'octave centrée sur 1000 Hz et les calculs de la DMF sont effectués uniquement à partir des modes résonnants de l'octave considérée. On ne tient ici compte que des modes résonnants dans la bande pour être en correspondance avec l'approche SEA. Le calcul exact est obtenu par décomposition en ondes forcées (voir annexe B).

## DOUBLE FORMULATION MODALE

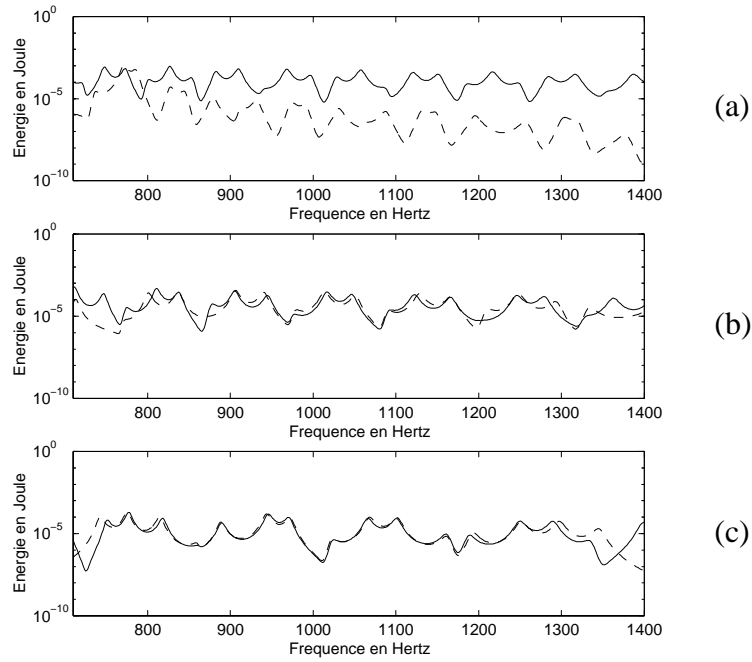


Figure 2.12. Réponse vibratoire en terme d'énergie totale de la poutre non excitée en fonction de la fréquence (Octave 1000Hz). (a)  $h_1=1$  mm. (b)  $h_1=2$  mm. (c)  $h_1=4$  mm. Comparaison de deux calculs : —, exact ; ----, double formulation modale avec les modes résonnants de l'octave considérée.  $L_1=3,5$  m,  $L_2=2,5$  m,  $b_1=b_2=0,01$  m,  $h_2=1$  mm,  $E_1=E_2=7.10^{10}$  Pa,  $\rho_1=\rho_2=2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_1=\eta_2=0,01$ ,  $x_1=2,31$  m.

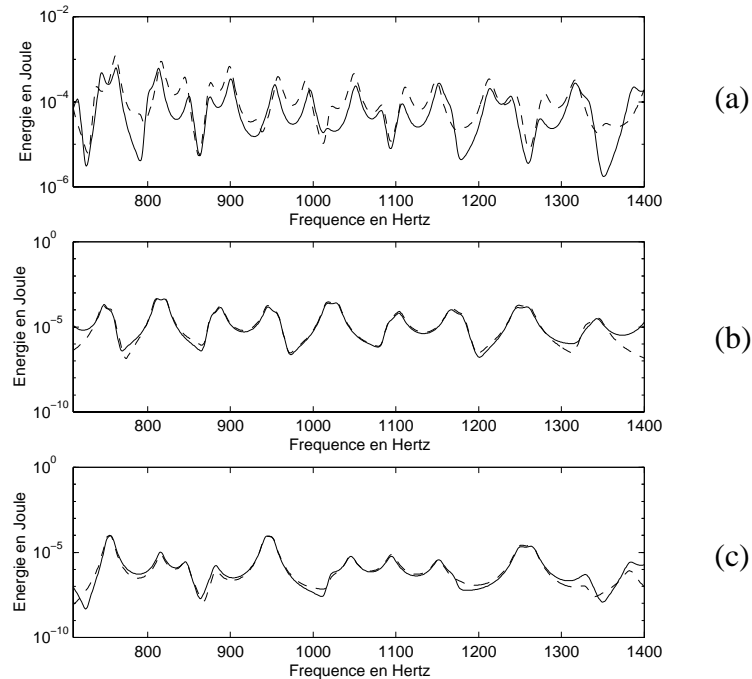


Figure 2.13. Réponse vibratoire en terme d'énergie totale de la poutre non-excitée en fonction de la fréquence (Octave 1000Hz). (a)  $h_1=1$  mm. (b)  $h_1=2$  mm. (c)  $h_1=4$  mm. Comparaison de deux calculs : —, exact ; ----, double formulation modale avec modes résonnants de l'octave considérée.  $L_1=3,5$  m,  $L_2=2,5$  m,  $b_1=b_2=0,01$  m,  $h_2=1$  mm,  $E_1=E_2=7.10^{10}$  Pa,  $\rho_1=\rho_2=2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_1=\eta_2=0,01$ ,  $x_1=2,31$  m.

On constate dans les deux cas que plus le rapport de sections entre les deux poutres est important, c'est-à-dire plus la rupture d'impédance est grande, meilleure est la qualité des résultats du calcul modal.

En comparant les deux figures, on remarque que les résultats sont meilleurs pour la configuration de couplage où un appui intermédiaire est présent au niveau de la liaison (figure 2.13). Le tableau 2.1 où sont présentées les énergies totales moyennées dans la bande de fréquence confirme ce constat. L'écart relatif entre le calcul DMF et le calcul exact diminue quand le rapport des épaisseurs augmente, et est toujours plus petit dans la configuration du cas B.

À partir d'un rapport  $h_1/h_2$  supérieur à 2, les écarts sont inférieurs à 20 % ce qui peut être considéré comme négligeable en terme de niveaux d'énergie. Pour ces deux exemples, le fait de ne prendre en compte que des modes résonnants dans la bande considérée n'est donc pénalisant que si les deux poutres sont de sections voisines.

On peut rappeler, comme démontré par Karnopp [KAR66] sur le couplage de poutres vibrant longitudinalement, que cette double formulation modale converge même dans le cas sévère de poutres de sections identiques si on considère un nombre suffisant de modes.

	<b>h1/h2=1</b>	<b>h1/h2=2</b>	<b>h1/h2=4</b>
Énergie totale poutre 1 - Calcul DMF (Joule)	0,218	0,260	0,109
Énergie totale poutre 1 - Calcul Exact (Joule)	1,069	0,338	0,131
<b>Écart relatif (%)</b>	<b>79,6</b>	<b>23,1</b>	<b>16,9</b>
Énergie totale poutre 2 - Calcul DMF (Joule)	0,113	0,245	0,094
Énergie totale poutre 2 - Calcul Exact (Joule)	0,677	0,297	0,086
<b>Écart relatif (%)</b>	<b>83,4</b>	<b>17,6</b>	<b>9,58</b>

(a) Sans appui intermédiaire (cas A)

	<b>h1/h2=1</b>	<b>h1/h2=2</b>	<b>h1/h2=4</b>
Énergie totale poutre 1 - Calcul DMF (Joule)	1,10	0,379	0,187
Énergie totale poutre 1 - Calcul Exact (Joule)	1,43	0,421	0,192
<b>Écart relatif (%)</b>	<b>22,7</b>	<b>10,0</b>	<b>2,87</b>
Énergie totale poutre 2 - Calcul DMF (Joule)	0,585	0,196	0,022
Énergie totale poutre 2 - Calcul Exact (Joule)	0,386	0,170	0,021
<b>Écart relatif (%)</b>	<b>51,2</b>	<b>15,3</b>	<b>1,75</b>

(b) Avec un appui intermédiaire (cas B)

Tableau 2.1. Comparaison des résultats DMF et 'exact' en terme d'énergie totale moyennée sur l'octave 1000 Hz. Mêmes configurations que les figures 2.12 et 2.13.



### 4.3. Deux plaques couplées en L

#### 4.3.1. Modèle analytique

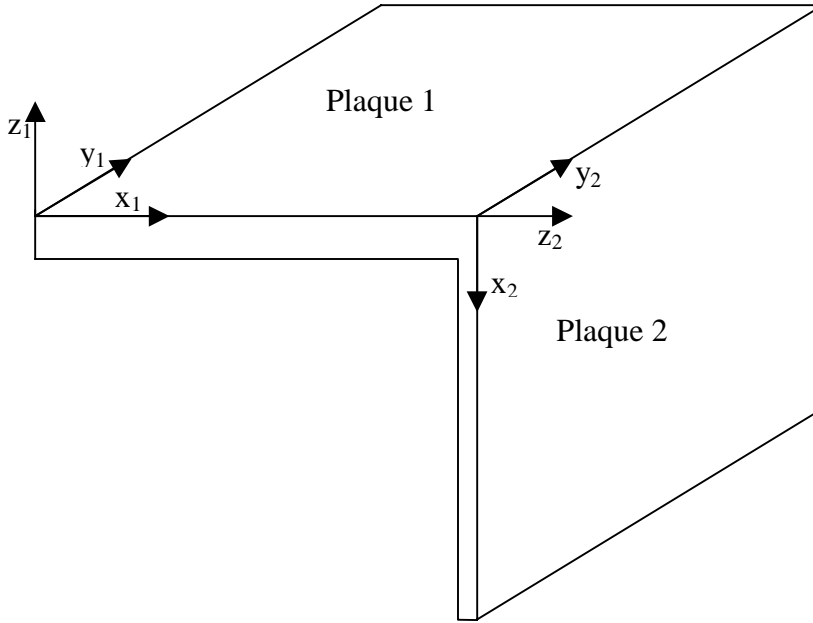


Figure 2.14. Couplage de deux plaques en L.

Soit deux plaques minces couplées rigidement sur une arête et formant un L. On considère la théorie des plaques minces et les hypothèses de Love-Kirchhoff. Toutes les arêtes non couplées de chaque plaque sont supposées être simplement appuyées. Seules les vibrations en flexion pure étant considérées, les déplacements transversaux au niveau des liaisons sont nuls ; le couplage entre les deux plaques se traduit par continuité des rotations angulaires et des moments fléchissants. On note par  $a_\alpha, b, h_\alpha$ , la longueur suivant  $x_\alpha$ , la longueur suivant  $y_\alpha$  (commune aux deux plaques) et l'épaisseur de la plaque  $\alpha$ .

Les hypothèses de Love-Kirchhoff en variables mixtes sont données par :

- pour le champ de déplacements :

$$\begin{cases} W_1^\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, t) = -z_\alpha \frac{\partial W^\alpha}{\partial x}(x_\alpha, y_\alpha, t), \\ W_2^\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, t) = -z_\alpha \frac{\partial W^\alpha}{\partial y}(x_\alpha, y_\alpha, t), \\ W_3^\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, t) = W^\alpha(x_\alpha, y_\alpha, t), \end{cases} \quad (2.121)$$

où  $W^\alpha$  est le déplacement transversal généralisé ;

- et pour le champ de contraintes associé :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}, t) = z_{\alpha} \sigma_{xx}^{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, t), \\ \sigma_{22}^{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}, t) = z_{\alpha} \sigma_{yy}^{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, t), \\ \sigma_{12}^{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}, t) = z_{\alpha} \sigma_{xy}^{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, t), \end{cases} \quad (2.122)$$

où les autres contraintes sont nulles et où  $\sigma_{xx}^{\alpha}, \sigma_{yy}^{\alpha}, \sigma_{xy}^{\alpha}$  sont les contraintes généralisées.

**Variables primales et variables duales du modèle 2D :**

À partir du principe de Reissner, on peut déduire les variables en dualité :

- la flèche et l'effort tranchant ;
- la dérivée normale de la flèche et le moment fléchissant.

Soit  $n^{\alpha}$  la normale extérieure à la frontière et  $(n_x^{\alpha}, n_y^{\alpha})$  les cosinus directeurs associés.

On peut exprimer (en notation condensée) les variables primales :

- la flèche :  $W^{\alpha}$  ;
- la dérivée de la flèche par rapport à la normale :

$$\frac{\partial W^{\alpha}}{\partial n} = n_x^{\alpha} \frac{\partial W^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + n_y^{\alpha} \frac{\partial W^{\alpha}}{\partial y_{\alpha}}. \quad (2.123)$$

Et les variables duales :

- le moment fléchissant :

$$\mathbf{M}_f^{\alpha} = I_{\alpha} \left( \sigma_{xx}^{\alpha} (n_x^{\alpha})^2 + 2\sigma_{xy}^{\alpha} n_x^{\alpha} n_y^{\alpha} + \sigma_{yy}^{\alpha} (n_y^{\alpha})^2 \right); \quad (2.124)$$

- l'effort tranchant (en négligeant l'inertie rotationnelle) :

$$\mathbf{F}_t^{\alpha} = -I_{\alpha} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} (n_x^{\alpha} + n_x^{\alpha} (n_y^{\alpha})^2) + \frac{\partial \sigma_{yy}^{\alpha}}{\partial y_{\alpha}} (n_y^{\alpha} + n_y^{\alpha} (n_x^{\alpha})^2) + 2 \frac{\partial \sigma_{xy}^{\alpha}}{\partial y_{\alpha}} (n_x^{\alpha})^3 \right. \\ \left. - \frac{\partial \sigma_{xx}^{\alpha}}{\partial y_{\alpha}} n_y^{\alpha} (n_x^{\alpha})^2 - \frac{\partial \sigma_{yy}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} n_x^{\alpha} (n_y^{\alpha})^2 - 2 \frac{\partial \sigma_{xy}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} (n_y^{\alpha})^3 \right) \quad (2.125)$$

**Modes des sous-systèmes découplés :**

La plaque 1 est supposée plus épaisse que la plaque 2 ; elle est donc décrite en variable déplacement avec les modes du sous-système découplé-libre. Ces modes sont donc les modes de la plaque appuyée sur ces quatre arêtes.

La plaque 2 doit être décrite en contrainte. Les modes bloqués considérés pour cette plaque sont les modes de la plaque encastrée sur l'arête de couplage  $x_2=0$ , et appuyée sur les autres arêtes.

**Évaluation des travaux d'interactions modales :**

Le couplage se traduit uniquement par des relations de continuité sur les rotations angulaires et sur le moment fléchissant. L'unique variable primale de la plaque 1 à considérer pour évaluer les travaux d'interactions modales est la dérivée de la flèche par rapport à la normal à l'arête de couplage :  $\frac{\partial W^1}{\partial x_1}(a_1, y_1, t)$ .

Pour la plaque 2, la variable duale à considérer est le moment fléchissant sur l'arête de couplage  $x_2=0$ . Celui-ci est donné, pour le modèle 2D décrit plus haut, par :

$$\mathbf{M}_f^2(0, y_2, t) = I_2 \sigma_{xx}^2(0, y_2, t). \quad (2.126)$$

Le travail d'interaction modale entre un mode de double indice  $(m, n)$  de la plaque 1 et un mode  $(r, s)$  de la plaque 2 est donné par :

$$\mathbf{W}_{mn,rs}^{12} = \int_0^b \frac{\partial \tilde{W}^{1,mn}}{\partial x_1}(a_1, y) I_2 \tilde{\sigma}_{xx}^{2,rs}(0, y) dy, \quad (2.127)$$

d'où, à partir des déformées propres données en annexe A :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{mn,rs}^{12} = \frac{E_2 I_2 b \kappa_r}{1 - \nu_2^2} \left( \frac{m\pi}{a_1} \right) \left( \frac{s\pi}{b} \right)^2 \sin\left( \frac{s\pi}{b} \sqrt{\kappa_r + 1} \right) & \text{si } n = s \\ \mathbf{W}_{mn,rs}^{12} = 0, & \text{si } n \neq s \end{cases} \quad (2.128)$$

### 4.3.2. Validation numérique

On présente, figures 2.15 et 2.16, une validation numérique de la double formulation modale dans le cas de la structure de la figure 2.14. La plaque 1 est excitée par une force harmonique ponctuelle en  $(x_0, y_0)$ . La réponse vibratoire en fréquence de la plaque 1 est donnée en terme de déplacement alors que la réponse vibratoire de la plaque 2 est donnée pour les trois contraintes généralisées. Le calcul 'exact' est obtenu par une décomposition semi-modale et est présenté en annexe B. Deux calculs issus de la DMF sont donnés : l'un ne tenant compte que des modes résonnants dans la bande considérée (plaque 1 : 15 modes, plaque 2 : 25 modes), l'autre prenant en compte des modes sur une bande élargie [200Hz-1800Hz] (plaque 1 : 101 modes, plaque 2 : 165 modes). On constate que ce dernier converge correctement vers le résultat exact alors que le premier, comme pour les poutres, ne peut décrire de façon précise le spectre dans le domaine non résonnant et sur le bord de la bande d'analyse.

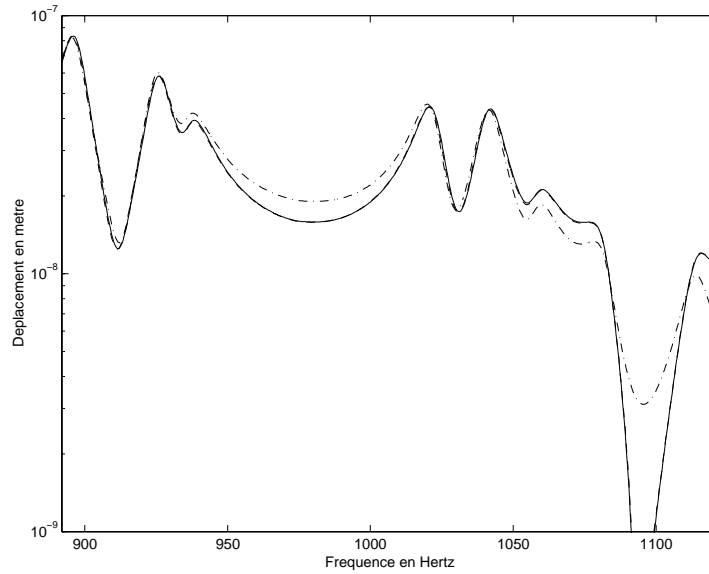


Figure 2.15 Réponse vibratoire en  $(x_{r1}, y_{r1})$  de la plaque excitée en fonction de la fréquence (tiers d'octave 1000 Hz). Comparaison de trois calculs : —, exact ; ----, DMF en ne tenant compte que des modes résonnants du tiers d'octave ; -.-.-, DMF en tenant compte des modes résonnants dans la bande [200 Hz-1800 Hz].  $a_1=2,5$  m,  $a_2=1$  m,  $b=1$  m,  $h_1=12$  mm,  $h_2=3$  mm,  $E_1=E_2=2.10^{11}$  Pa,  $\rho_1=\rho_2=7800$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_1=\eta_2=0,01$ ,  $x_0=0,1$  m,  $y_0=0,25$  m,  $x_{r1}=0,5$  m,  $y_{r1}=0,8$  m.

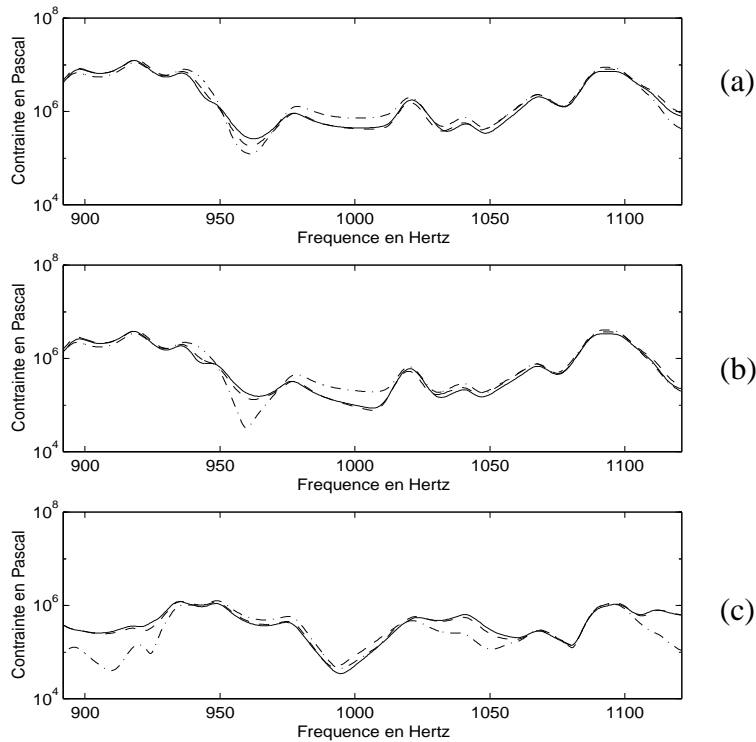


Figure 2.16. Configuration identique à la figure précédente. Réponse vibratoire en  $(x_{r2}, y_{r2})$  de la plaque non excitée en fonction de la fréquence (tiers d'octave 1000 Hz). (a) Contrainte normale suivant  $x$  :  $\sigma_{xx}$ . (b) Contrainte normale suivant  $y$  :  $\sigma_{yy}$ . (c) Contrainte tangentielle :  $\sigma_{xy}$ . Trois calculs : —, exact ; ----, DMF en ne tenant compte que des modes résonnants du tiers d'octave ; -.-.-, DMF en tenant compte des modes résonnants dans la bande [200 Hz-1800 Hz].  $x_{r2}=0,5$  m,  $y_{r2}=0,35$  m.

### 4.3.3. Qualité des résultats de la double formulation modale pour différentes épaisseurs de plaques

En figure 2.17 on présente la contrainte normale suivant  $x_2$  en fonction de la fréquence pour trois rapports d'épaisseurs de plaques différents. Seuls les modes résonnants dans la bande sont pris en compte pour le calcul DMF. On remarque que si le rapport  $h_1/h_2$  grandit, le comportement vibratoire, dans le domaine de fréquence, est de mieux en mieux approché par le calcul ne prenant en compte que les modes résonnants dans la bande. On note cependant qu'aux limites de la bande fréquentielle, une différence demeure.

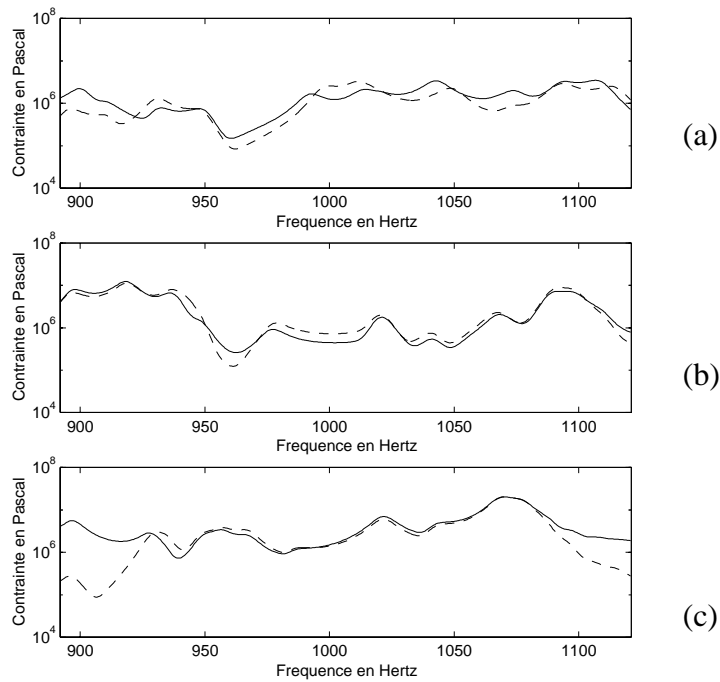


Figure 2.17. Réponse vibratoire  $\sigma_{xx}$  en  $(x_{r2}, y_{r2})$  de la plaque non excitée en fonction de la fréquence (tiers d'octave 1000 Hz). —, exact; ---, DMF en ne tenant compte que des modes résonnants du tiers d'octave considéré. (a)  $h_1/h_2=2$ . (b)  $h_1/h_2=4$ . (c)  $h_1/h_2=8$ .  $a_1=2,5$  m,  $a_2=1$  m,  $b=1$  m,  $h_1=12$  mm,  $E_1=E_2=2 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\rho_1=\rho_2=7800$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_1=\eta_2=0,01$ ,  $x_0=0,1$  m,  $y_0=0,25$  m.

## 5. Conclusion

Une double formulation modale a été développée dans un cas général de deux systèmes tridimensionnelles continus couplés. Grâce à celle-ci, on a obtenu un schéma de couplage entre les modes des sous-systèmes en cohérence avec la formulation de base de la SEA (pas de couplage entre les modes d'un même sous-système). Les couplages entre modes de sous-systèmes différents sont du type gyroscopique uniquement.

Les conditions aux limites pour le calcul des modes des sous-systèmes ont été clairement définies. Deux types de modes sont à considérer : les modes bloqués pour un sous-système et les modes libres pour l'autre. Le sous-système représenté par les modes libres est décrit en déplacements alors que le sous-système représenté par les modes bloqués est décrit en contraintes. Les équations modales obtenues finalement font apparaître des termes d'interaction entre les couples de modes des deux sous-systèmes. Ces termes s'identifient comme étant des travaux d'interactions modales. L'interprétation physique de ces termes permet de s'affranchir du développement de la DMF lorsque des modèles simplifiés sont considérés.

Une conséquence du couplage modal de type gyroscopique est qu'il permet, sans ambiguïté, de déterminer les énergies totales des sous-systèmes à partir des énergies des modes.

Sur des exemples de couplages de poutres et de plaques, on a, d'une part, validé numériquement la formulation, puis d'autre part, étudié la qualité des résultats donnés par la DMF en ne tenant compte que des modes résonnants dans la bande de fréquence considérée (en correspondance avec une hypothèse de la SEA). La qualité de la prédiction dépend de la rupture d'impédance au niveau de la liaison. Si celle-ci est faible (couplage fort), les modes résonnants des sous-systèmes sont éloignés des modes physiques de la structure globale et ne peuvent donc à eux seuls représenter parfaitement le comportement de la structure dans la bande de fréquence.

## CHAPITRE 3

# REFORMULATION DU MODÈLE SEA PAR LA PRISE EN COMPTE DE LA RÉPARTITION DES ÉNERGIES MODALES

### 1. Buts du chapitre

On se propose dans ce chapitre de reformuler la méthode SEA par la prise en compte de la répartition des énergies modales. L'approche présentée, que l'on nomme SmEdA (Statistical modal Energy distribution Analysis), est bâtie sur la formulation modale de base de la SEA. Les résultats du chapitre précédent constituent les piliers de la méthode.

Le but de cette reformulation est d'étendre le domaine de validité de la SEA aux sous-systèmes pour lesquels l'hypothèse d'équirépartition ne peut être respectée. On verra par la suite que ces cas de figures correspondent principalement aux couplages de sous-systèmes *déterministes* à faible recouvrement modal. Par conséquent, on n'introduit pas dans le formalisme de base la moyenne d'ensemble sur une population de structures comme le fait la SEA. Celle-ci sera introduite par la suite, en fonction du système étudié, par une approche de Monte-Carlo.

Trois paragraphes distincts constituent le corps du chapitre :

- le premier, où sont décrits des relations de base sur des oscillateurs isolés ou couplés. Ces relations sont bien connues en SEA et ne feront donc pas l'objet de démonstration ;

- le second, porte sur l'obtention des équations respectées par les énergies modales. Les équations énergétiques modales sont obtenues en effectuant un bilan de puissance pour chaque mode et en faisant intervenir les relations décrites au paragraphe précédent. Des hypothèses identiques à celles de la SEA sont posées, excepté en ce qui concerne la répartition des énergies modales (aucune hypothèse). Le nombre de degrés de liberté pris en compte est alors égal au nombre total de modes devant être considérés ;

- le dernier, où est proposée une méthode de résolution approchée des équations énergétiques modales. Celle-ci est basée sur la technique de Galerkin et impose *a priori* une hypothèse avec un degré d'approximation modulable sur la répartition des énergies modales : de l'équirépartition si un seul degré de liberté est pris en compte par sous-systèmes, à aucune hypothèse si le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de modes. Cette technique permet de faire le lien entre l'approche proposée et le modèle SEA.

## 2. Relations énergétiques pour des systèmes à un ou deux degrés de liberté

### 2.1. Relations pour un oscillateur isolé

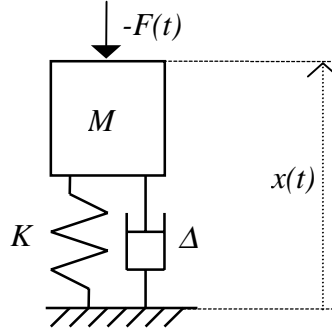


Figure 3.1. Système à un degré de liberté.

On considère l'oscillateur élémentaire de masse  $M$  et de raideur  $K$  comme représenté figure 3.1. Celui-ci est soumis à une force aléatoire stationnaire  $F(t)$  de type bruit blanc.

Soit  $S_{FF}(\omega)$ , la densité spectrale de  $F(t)$  :

$$S_{FF}(\omega) = \bar{S}_F \quad \forall \omega \in [0, \infty[ \quad (3.1)$$

(exprimée en  $N^2/(rad/s)$ ).

L'amortissement du système est supposé de type visqueux. L'équation du mouvement  $x(t)$  de la masse  $M$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\ddot{x}(t) + \omega_0 \eta_0 \dot{x}(t) + (\omega_0)^2 x(t) = F(t)M^{-1}, \quad (3.2)$$

avec -  $\omega_0 = \sqrt{KM^{-1}}$  : la fréquence propre de l'oscillateur ;

-  $\eta_0 = \Delta(\omega_0 M)^{-1}$  : le facteur d'amortissement interne ou DLF (Damping Loss Factor).

La moyenne temporelle de l'énergie totale de l'oscillateur est donnée par :

$$\langle E_t \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left\{ \frac{1}{2} M (\dot{x}(t))^2 + \frac{1}{2} K (x(t))^2 \right\} dt. \quad (3.3)$$

#### 2.1.1. Puissance dissipée

La moyenne temporelle de la puissance dissipée par l'oscillateur est définie par :

$$\langle P_{diss} \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \Delta (\dot{x}(t))^2 dt. \quad (3.4)$$

On peut montrer compte tenu de l'équation du mouvement (voir [UNG66]) :

$$\langle P_{diss} \rangle_t \approx \omega_0 \eta_0 \langle E_t \rangle_t. \quad (3.5)$$

Cette relation relie la puissance dissipée par l'oscillateur à son énergie totale.



### 2.1.2. Puissance injectée

La moyenne temporelle de la puissance injectée par la force extérieure  $F(t)$  dans l'oscillateur est définie par :

$$\langle P_{inj} \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} F(t) \dot{x}(t) dt . \quad (3.6)$$

L'effort appliqué est de type bruit blanc, on peut donc écrire :

$$\langle P_{inj} \rangle_t = \frac{1}{2} \bar{S}_F \omega_0 \eta_0 M \int_0^{+\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega , \quad (3.7)$$

avec  $Y(\omega)$ , la mobilité de l'oscillateur donnée par :

$$Y(\omega) = \frac{j\omega X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{j\omega}{M(-\omega^2 + j\omega\omega_0\eta_0 + (\omega_0)^2)} . \quad (3.8)$$

Compte tenu que  $\int_0^{+\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{2\omega_0\eta_0 M^2}$  (voir [LYO95] p.26), on a :

$$\langle P_{inj} \rangle_t = \frac{\pi \bar{S}_F}{4M} . \quad (3.9)$$

Cette relation permet de calculer la puissance injectée dans un oscillateur à partir de la masse de l'oscillateur et de la densité spectrale de l'effort appliqué (exprimée en  $N^2/(rad/s)$ ).

Remarque : Pour un oscillateur excité par deux forces décorrélées et de type bruit blanc, on peut calculer la puissance injectée par chacune des forces à partir de la relation précédemment établie.

### 2.2. Puissance échangée par deux oscillateurs couplés par un élément gyroscopique

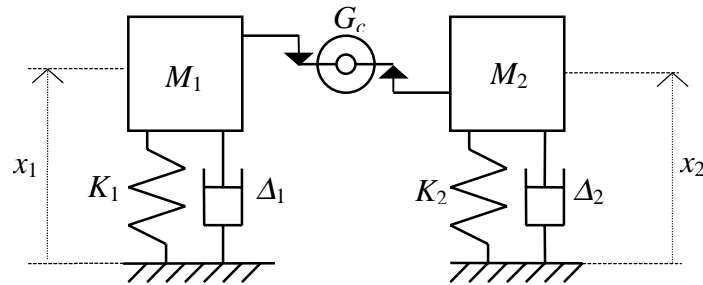


Figure 3.2. Deux oscillateurs couplés par un élément gyroscopique.

Deux oscillateurs couplés via un élément 'gyroscopique' (voir figure 3.2) sont considérés.  $M_1$ ,  $M_2$  sont les inerties, et  $K_1$ ,  $K_2$  les raideurs des oscillateurs. Les pulsations propres des oscillateurs découplés sont données par :

$$\omega_1 = \sqrt{K_1 M_1^{-1}} \quad \text{pour l'oscillateur 1 et } \omega_2 = \sqrt{K_2 M_2^{-1}} \quad \text{pour l'oscillateur 2.}$$

Chaque oscillateur est lié à un amortisseur visqueux de bande d'amortissement :  $\Delta_1$  pour l'oscillateur 1 et  $\Delta_2$  pour l'oscillateur 2. Les forces de couplage transmises à travers l'élément de couplage de constante  $G_c$  sont proportionnelles aux vitesses des deux masses,  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$ . Il est supposé que quand la vitesse de l'oscillateur 1 est positive, la force appliquée sur l'oscillateur 2 est négative, et que quand la vitesse de l'oscillateur 2 est positive, la force appliquée sur l'oscillateur 1 est positive. Bien que ce type de couplage soit relié aux vitesses des masses, il ne dissipe pas d'énergie. On parle d'un couplage de type gyroscopique ou gyrostatique.

Les équations du mouvement des deux oscillateurs couplés et excités par les forces extérieures  $F_1(t)$  et  $F_2(t)$  sont données par :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \Delta_1 \dot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) - \sqrt{M_1^{-1} M_2} \gamma \dot{x}_2(t) = F_1(t), \\ \ddot{x}_2(t) + \Delta_2 \dot{x}_2(t) + \omega_2^2 x_2(t) + \sqrt{M_1 M_2^{-1}} \gamma \dot{x}_1(t) = F_2(t), \end{cases} \quad (3.10)$$

où le coefficient de couplage gyroscopique,  $\gamma$ , est :

$$\gamma = G_c \left( \sqrt{M_1 M_2} \right)^{-1}. \quad (3.11)$$

On suppose que les excitations extérieures sont stationnaires, ergodiques, indépendantes (décorrelées), et de DSP constantes sur le spectre  $[0, \infty[$  (bruits blancs). Cette configuration de couplage est à la base de la SEA et a fait l'objet de nombreux articles : [LYO62], [SCH65], [UNG66], [GER68], [GER69]...

Il a été démontré que la moyenne temporelle de la puissance échangée de l'oscillateur 1 à l'oscillateur 2,  $\langle P_{12} \rangle_t$ , est proportionnelle à la différence des moyennes temporelles des énergies totales des oscillateurs ( $\langle E_1 \rangle_t - \langle E_2 \rangle_t$ ) :

$$\langle P_{12} \rangle_t = \beta (\langle E_1 \rangle_t - \langle E_2 \rangle_t), \quad (3.12)$$

où le coefficient  $\beta$  est exprimé par :

$$\beta = \frac{\gamma^2 (\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2) (\Delta_1 \omega_2^2 + \Delta_2 \omega_1^2)}. \quad (3.13)$$

On remarque que le coefficient  $\beta$  dépend uniquement des pulsations propres des oscillateurs découplés, des constantes d'amortissement et du coefficient de couplage  $\gamma$ .

Cette relation établie pour deux oscillateurs n'est plus vraie dans le cas de trois oscillateurs (voir [WAN98], [SUN96], [KIS95]).

### 3. Equations énergétiques modales du mouvement

On considère maintenant deux sous-systèmes continus couplés et soumis à des excitations aléatoires, stationnaires, ergodiques, de type bruits blancs tronqués (voir figure 3.3). On cherche à déterminer la réponse vibratoire dans la bande de fréquence  $[\omega_1, \omega_2]$  de ces sous-systèmes.

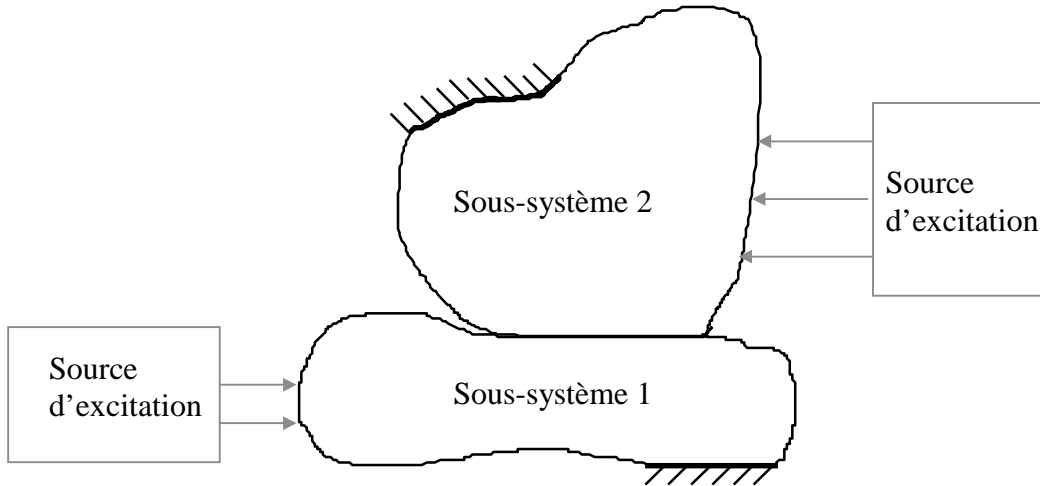


Figure 3.3. Représentation des deux sous-systèmes couplés et excités par des sources extérieures.

À partir des résultats du chapitre 2, on peut étudier l'interaction entre ces deux systèmes en considérant les couplages entre deux groupes de modes. La méthode SEA suppose que le comportement vibratoire dans la bande considérée peut être correctement analysé à partir de l'interaction entre les modes résonnants de la bande de fréquence. On a vu au chapitre précédent, sur différents exemples, que les modes résonnants considérés par la DMF étaient bien habilités à représenter le comportement vibratoire dans la bande si une rupture d'impédance était présente au niveau de la jonction entre les deux sous-systèmes. Par conséquent, on considère les mêmes types de modes que la double formulation modale et on suppose que le comportement vibratoire est correctement représenté par l'interaction entre les  $N_1$  modes résonnants du sous-système 1 et les  $N_2$  modes résonnants du sous-système 2.

Soit  $\mathbf{R}^\alpha$ , l'ensemble des modes résonnants dans la bande  $[\omega_1, \omega_2]$  du sous-système  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) :

$$\mathbf{R}^\alpha = \{r / \omega_r^\alpha \in [\omega_1, \omega_2]\}.$$

On a :  $\text{card}(\mathbf{R}^\alpha) = N_\alpha$ . L'indice des modes de chaque ensemble  $\mathbf{R}^\alpha$  est attribué entre 1 et  $N_\alpha$  suivant un ordre croissant des pulsations propres du sous-système  $\alpha$ .

Les équations respectées par les amplitudes des modes des ensembles  $\mathbf{R}^1$  et  $\mathbf{R}^2$  sont données à partir des résultats du chapitre précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{a}_p^1(t) + \Delta_p^1 \dot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) + \frac{1}{M_p^1} \sum_{m=1}^{N_2} \dot{c}_m^2(t) \mathbf{W}_{pm}^{12} = \frac{F_p^1(t)}{M_p^1}, \\ \forall p \in [1, \dots, N_1] \end{array} \right. \quad (3.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{c}_q^2(t) + \Delta_q^2 \dot{c}_q^2(t) + (\omega_q^2)^2 c_q^2(t) - \frac{1}{(\omega_q^2)^2 M_q^2} \sum_{r=1}^{N_1} \dot{a}_r^1(t) \mathbf{W}_{rq}^{12} = \frac{F_q^2(t)}{(\omega_q^2)^2 M_q^2}, \\ \forall q \in [1, \dots, N_2] \end{array} \right. \quad (3.14b)$$

Compte tenu de la forme des équations modales, ces modes peuvent être modélisés par des oscillateurs. Les couplages entre ceux-ci sont alors de type gyroscopique et peuvent se représenter comme figure 3.4. On rappelle que cette configuration ne fait pas intervenir de couplage direct entre les modes (oscillateurs) d'un même sous-système : un mode d'un sous-système est couplé avec les modes de l'autre sous-système mais n'est pas couplé avec les autres modes du sous-système auquel il appartient.

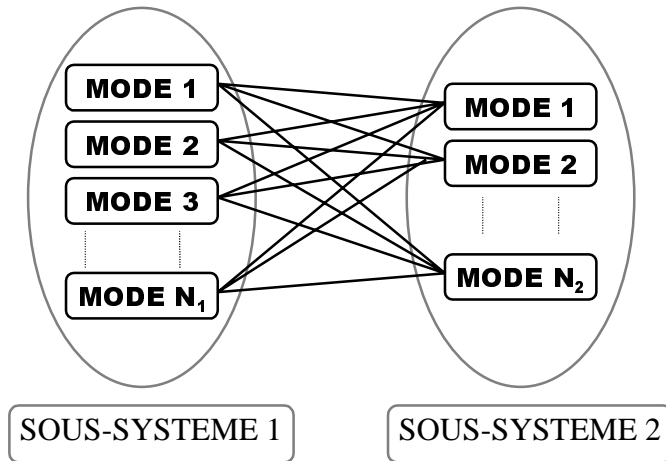


Figure 3.4: Représentation schématique du couplage de  $N_1$  modes du sous-système 1 avec  $N_2$  modes du sous-système 2.

On cherche à calculer les énergies des modes en utilisant les relations de base établies au paragraphe 2. On rappelle que la relation d'échange de puissance entre deux oscillateurs est établie pour des oscillateurs excités par des bruits blancs sur la bande de fréquence  $[0, \infty[$  et que les énergies des oscillateurs sont définies en considérant cette même bande. Cependant, voir par exemple [MAI87], les transferts d'énergie entre les modes et les énergies totales de ceux-ci sont concentrés autour des fréquences de résonance. On peut donc supposer que les énergies des modes (résonnants) correspondantes à la bande  $[\omega_1, \omega_2]$  sont correctement approchées par les énergies de ces mêmes modes correspondantes à la bande  $[0, \infty[$ . (Idem pour les puissances échangées.)

Pour ne pas alourdir l'écriture, on omettra à partir de maintenant de faire apparaître la moyenne temporelle sur les quantités énergétiques bien que celle-ci soit toujours considérée pour ces quantités.

Considérons un mode  $p$  du sous-système 1. On obtient l'équation qui traduit l'équilibre énergétique de ce mode en appliquant le principe de conservation de l'énergie pour un processus stationnaire :

$$\Pi_{inj}^{1p} = \Pi_{diss}^{1p} + \sum_{q'=1}^{N_2} \Pi_{pq'}^{12}, \quad \forall p \in [1, \dots, N_1]. \quad (3.15)$$

Celle-ci exprime que la puissance injectée dans le mode  $p$  par l'excitation extérieure est, soit dissipée par l'amortissement interne du mode soit échangée avec les modes de l'autre sous-système. Nous allons évaluer chacun de ces trois termes à partir des relations établies sur les oscillateurs au paragraphe précédent :

- $\Pi_{inj}^{1p}$ : *Puissance injectée par la force généralisée  $F_p^1(t)$  due à l'excitation extérieure.*

Les efforts appliqués sur ce mode sont dus à l'excitation extérieure de type bruit blanc et aux forces de couplage avec l'autre sous-système. En effet, si en (3.14a), on isole le mode  $p$ , on a :

$$\ddot{a}_p^1(t) + \Delta_p^1 \dot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) = F_p^1(t) (M_p^1)^{-1} + H_p^1(t) (M_p^1)^{-1}, \quad (3.16)$$

où  $H_p^1(t) = \sum_{m=1}^{N_2} \dot{c}_m^2(t) \mathbf{W}_{pm}^{12}$  représente l'ensemble des efforts appliqués par les modes du sous-système 2 sur le mode  $p$  du sous-système 1.

On suppose *a priori* - hypothèse PMI - que les forces de couplage,  $H_p^1(t)$ , sont telles que l'on puisse calculer  $\Pi_{inj}^{1p}$  à partir de la relation (3.9) :

$$P_{inj}^{1p} = \frac{\pi}{4 M_p^1} \bar{S}_{F_p^1}, \quad (3.17)$$

avec  $\bar{S}_{F_p^1}$ , la densité spectrale de la force généralisée  $F_p^1(t)$  définie sur  $[0, \infty[$  et exprimée en  $N^2/(rad/s)$ .

$\bar{S}_{F_p^1}$  peut être calculée à partir de la déformée du mode  $p$ , et des données caractérisant la force extérieure appliquée au sous-système (densité spectrale, répartition spatiale).

L'hypothèse sur les Puissances Modales Injectées (PMI) posée plus haut peut être respectée dans plusieurs cas :

- les forces de couplage ont un effet négligeable sur le comportement du mode. Dans le cas d'un couplage faible entre les sous-systèmes, ceci est fréquemment rencontré car le niveau de l'excitation extérieure est beaucoup plus élevé que celui de l'ensemble des forces de couplage en réaction (un seul sous-système excité) ;

- l'ensemble des forces de couplage,  $H_p^1(t)$ , constitue un processus décorrélé avec la force généralisée et avec un spectre relativement plat en fréquence. Par exemple, ce cas peut se rencontrer quand plusieurs sous-systèmes sont excités par des excitations 'rain on the roof'.

En faisant intervenir une moyenne d'ensemble sur une population de structures (voir chapitre 1, paragraphe 2.6), cette hypothèse peut s'avérer 'moins restrictive'. Nous n'entrons pas ici dans les détails de l'aspect 'moyenne d'ensemble'. Celui-ci fait l'objet de nombreuses discussions et reste un sujet 'ouvert'. Nous évoquerons cet aspect au cours du chapitre suivant qui traite de la validité du modèle SmEdA.

- $\Pi_{diss}^{1p}$  : Puissance dissipée par le mode  $p$ .

Compte tenu de l'hypothèse PMI et de la relation (3.5), on peut écrire :

$$\Pi_{diss}^{1p} = \omega_p^1 \eta_p^1 E_p^1, \quad (3.18)$$

où  $E_p^1$  est l'énergie totale du mode  $p$ .

- $\sum_{q'=1}^{N_2} \Pi_{pq'}^{12}$  : Puissance échangée par le mode  $p$  avec les modes du sous-système 2.

Pour évaluer la puissance échangée entre le mode  $p$  du sous-système 1 et le mode  $q$  du sous-système 2, on isole ces deux modes dans les équations modales du mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{a}_p^1(t) + \Delta_p^1 \dot{a}_p^1(t) + (\omega_p^1)^2 a_p^1(t) + \sqrt{\frac{(\omega_q^2)^2 M_q^2}{M_p^1}} \gamma_{pq}^{12} \dot{c}_q^2(t) = L_{1pq}(t), \\ \ddot{c}_q^2(t) + \Delta_q^2 \dot{c}_q^2(t) + (\omega_q^2)^2 c_q^2(t) - \sqrt{\frac{M_p^1}{(\omega_q^2)^2 M_q^2}} \gamma_{pq}^{12} \dot{a}_p^1(t) = L_{2pq}(t), \end{array} \right. \quad \forall (p, q) \in ([1, N_1], [1, N_2]), \quad (3.19)$$

avec  $L_{1pq}(t) = \frac{F_p^1(t)}{M_p^1} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^{N_2} \frac{\mathbf{W}_{pr}^{12}}{M_p^1} \dot{c}_r^2(t)$ ,  $L_{2pq}(t) = \frac{F_q^2(t)}{(\omega_q^2)^2 M_q^2} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq p}}^{N_1} \frac{\mathbf{W}_{mq}^{12}}{(\omega_q^2)^2 M_q^2} \dot{a}_m^1(t)$  et où on a fait

$$\text{apparaître } \gamma_{pq}^{12} = \frac{\mathbf{W}_{pq}^{12}}{\sqrt{M_p^1 (\omega_q^2)^2 M_q^2}}.$$

Par analogie avec les équations du mouvement des deux oscillateurs couplés (équation (3.10)), et en supposant - hypothèse PME - que  $L_{1pq}(t)$  et  $L_{2pq}(t)$  satisfassent des conditions similaires à  $F_1(t)$  et  $F_2(t)$  au paragraphe 2.2, on peut écrire :

$$\Pi_{pq}^{12} = \beta_{pq}^{12} (E_p^1 - E_q^2), \quad (3.20)$$

où  $\beta_{pq}^{12}$  est appelé le facteur de couplage intermodal et peut être déterminé par analogie avec (3.13) en fonction des pulsations propres  $\omega_p^1, \omega_q^2$ , des masses généralisées  $M_p^1, M_q^2$ , des bandes d'amortissements modales  $\Delta_p^1, \Delta_q^2$ , et du travail d'interaction modale  $\mathbf{W}_{pq}^{12}$  :

$$\beta_{pq}^{12} = \frac{(\mathbf{W}_{pq}^{12})^2}{M_p^1 (\omega_q^2)^2 M_q^2} \left( \frac{(\Delta_p^1 (\omega_q^2)^2 + \Delta_q^2 (\omega_p^1)^2)}{\left( (\omega_p^1)^2 - (\omega_q^2)^2 \right)^2 + (\Delta_p^1 + \Delta_q^2) (\Delta_p^1 (\omega_q^2)^2 + \Delta_q^2 (\omega_p^1)^2)} \right) \quad (3.21)$$

Le domaine de validité de l'hypothèse sur les Puissances Modales Échangées (PME), qui est également posée en SEA, n'est pas facile à cerner. Elle implique 'une certaine indépendance' entre les amplitudes modales (voir [LYO95] p.61) ce qui nécessite notamment un couplage faible entre les sous-systèmes. Il semble en pratique que si l'hypothèse PME est respectée, alors l'hypothèse PMI le soit aussi. L'hypothèse PME trouve une légitimité plus forte à partir d'une moyenne d'ensemble sur une population de structures. Cependant cette dernière n'étant pas toujours réaliste pour le système étudié, on choisit de ne pas la faire intervenir dans le formalisme de base de notre modèle. Comme nous l'avons déjà signalé, nous reviendrons plus en détail sur ce point au chapitre suivant qui traite de la validité du modèle SmEdA.

En injectant (3.18) et (3.20) dans (3.15), on obtient une équation pour chaque indice  $p$  dont les inconnues sont les énergies des modes :

$$\Pi_{inj}^{1p} = \omega_p^1 \eta_p^1 E_p^1 + \sum_{q'=1}^{N_2} \beta_{p'q'}^{12} (E_p^1 - E_{q'}^2), \quad \forall p \in [1, \dots, N_1]. \quad (3.22)$$

De la même manière, on écrit l'équilibre énergétique de chaque mode du sous-système 2 :

$$\Pi_{inj}^{2q} = \omega_q^2 \eta_q^2 E_q^2 + \sum_{p'=1}^{N_1} \beta_{p'q}^{12} (E_q^2 - E_{p'}^1), \quad \forall q \in [1, \dots, N_2]. \quad (3.23)$$

Les relations (3.22) et (3.23) forment un système d'équations linéaires à  $N_1+N_2$  équations et  $N_1+N_2$  inconnues :

$$\begin{cases} \Pi_{inj}^{1p} = \left( \omega_p^1 \eta_p^1 + \sum_{q'=1}^{N_2} \beta_{pq'}^{12} \right) E_p^1 - \sum_{q'=1}^{N_2} \beta_{pq'}^{12} E_{q'}^2, & \forall p \in [1, \dots, N_1], \\ \Pi_{inj}^{2q} = - \sum_{p'=1}^{N_1} \beta_{p'q}^{12} E_{p'}^1 + \left( \omega_q^2 \eta_q^2 + \sum_{p'=1}^{N_1} \beta_{p'q}^{12} \right) E_q^2, & \forall q \in [1, \dots, N_2]. \end{cases} \quad (3.24)$$

Ces équations constituent ce que l'on appelle les équations énergétiques modales du mouvement et les inconnues sont les énergies modales des deux sous-systèmes. Les puissances modales injectées,  $\Pi_{inj}^{1p}$ ,  $\Pi_{inj}^{2q}$  sont des données d'entrée et peuvent être évaluées à partir de (3.17). Celles-ci peuvent être différentes d'un mode à l'autre ; le modèle peut donc prendre en compte des excitations plus localisées que l'excitation 'rain on the roof'.

La résolution de ce système d'équations permet de déterminer la réponse vibratoire des sous-systèmes couplés en terme d'énergies modales. Les énergies totales des sous-systèmes peuvent ensuite être obtenues par sommation des énergies modales :

$$E_1 = \sum_{p=1}^{N_1} E_p^1, \quad E_2 = \sum_{q=1}^{N_2} E_q^2. \quad (3.25)$$

où  $E_1$  (resp.  $E_2$ ) est la moyenne temporelle de l'énergie totale du sous-système 1 (resp. sous-système 2) correspondant à la bande de fréquence  $[\omega_1, \omega_2]$ .

#### 4. Résolution approchée des équations énergétiques modales basée sur la technique de Galerkin

Pour des structures complexes composées de multiples sous-systèmes, le nombre de degrés de liberté à prendre en compte dans le modèle SmEdA peut devenir important. On se propose donc dans ce paragraphe de réduire le nombre de degrés de liberté en utilisant la technique de Galerkin.

La technique présentée ici permet de retrouver dans son approximation la plus forte les équations de la SEA classique et dans sa forme la moins restrictive, les équations énergétiques modales du mouvement.



La Répartition des Énergies Modales de chaque sous-système, que l'on nomme de manière abrégée REM, est représentée par un vecteur dont la  $p$ ème composante correspond à l'énergie du mode  $p$  :

$$[\mathbf{E}^1] = \begin{bmatrix} E_1^1 \\ \vdots \\ E_p^1 \\ \vdots \\ E_{N_1}^1 \end{bmatrix} \text{ pour le sous-système 1, et } [\mathbf{E}^2] = \begin{bmatrix} E_1^2 \\ \vdots \\ E_q^2 \\ \vdots \\ E_{N_2}^2 \end{bmatrix} \text{ pour le sous-système 2.}$$

Dans la théorie de base de la SEA, il est fait l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales ce qui revient à condenser les  $N_1$  degrés de liberté (ddl) du sous-système 1 en un seul ddl. (idem pour le sous-système 2.)

On effectue une hypothèse moins restrictive que l'équirépartition en décomposant la répartition des énergies modales de chaque sous-système sur un ensemble de vecteurs de base (décomposition en série) :

$$[\mathbf{E}^1] = \sum_{\alpha=1}^{\bar{\alpha}} e_{\alpha}^1 [\Lambda_{\alpha}^1], \quad [\mathbf{E}^2] = \sum_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} e_{\sigma}^2 [\Lambda_{\sigma}^2], \quad (3.26)$$

où :

-  $[\Lambda_{\alpha}^1]$  (resp.  $[\Lambda_{\sigma}^2]$ ) sont des vecteurs de base de  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) composantes et l'ensemble des  $N_1$  vecteurs  $\{[\Lambda_1^1], [\Lambda_2^1], \dots, [\Lambda_{N_1}^1]\}$  (resp.  $N_2$  vecteurs  $\{[\Lambda_1^2], [\Lambda_2^2], \dots, [\Lambda_{N_2}^2]\}$ ) constituent une base dans l'espace vectoriel  $R^{N_1}$  (resp.  $R^{N_2}$ ) :

$$[\Lambda_{\alpha}^1] = \begin{bmatrix} \Lambda_{\alpha}^{1,1} \\ \vdots \\ \Lambda_{\alpha}^{1,p} \\ \vdots \\ \Lambda_{\alpha}^{1,N_1} \end{bmatrix}, \quad [\Lambda_{\sigma}^2] = \begin{bmatrix} \Lambda_{\sigma}^{2,1} \\ \vdots \\ \Lambda_{\sigma}^{2,q} \\ \vdots \\ \Lambda_{\sigma}^{2,N_2} \end{bmatrix}; \quad (3.27)$$

-  $e_{\alpha}^1$  (resp.  $e_{\sigma}^2$ ) sont les coefficients de la décomposition de la REM pour le sous-système 1 (resp. sous-système 2) ;

-  $\bar{\alpha}$  (resp.  $\bar{\sigma}$ ) est le nombre total de termes pris en compte dans la décomposition pour le sous-système 1 (resp. sous-système 2).

Par exemple, les vecteurs de base peuvent être issus des séries de Fourier :

$$\begin{aligned}\Lambda_{\alpha}^{1,p} &= \cos\left(\frac{\pi(\alpha-1)(p-1)}{N_1-1}\right), & p \in [1, \dots, N_1], \\ \Lambda_{\sigma}^{2,q} &= \cos\left(\frac{\pi(\sigma-1)(q-1)}{N_2-1}\right), & q \in [1, \dots, N_2].\end{aligned}\quad (3.28)$$

En injectant (3.28) dans (3.26) et en prenant  $\bar{\alpha} = \bar{\sigma} = 1$ , cela revient à faire l'hypothèse d'équirépartition : la répartition des énergies modales est alors uniforme. Si  $\bar{\alpha} = \bar{\sigma} = 2$ , un degré de liberté supplémentaire est introduit dans la description de la REM : une variation des énergies modales de chaque sous-système est permise. La figure 3.5 représente ces deux cas d'approximation où l'énergie de chaque mode du sous-système 1 est donnée en fonction de l'indice modal  $p$ .

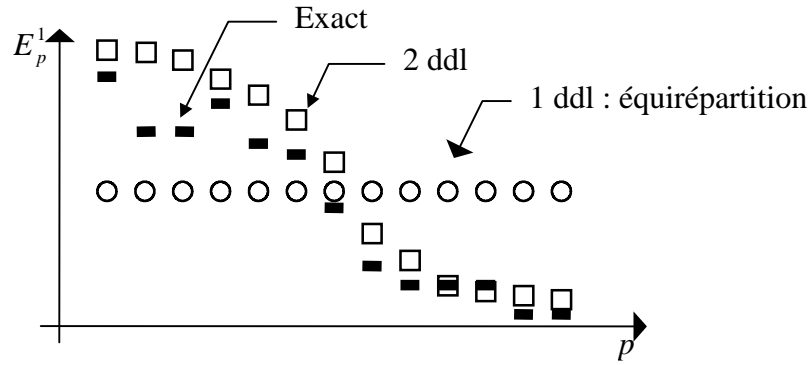


Figure 3.5. Illustration de deux approximations différentes sur la REM d'un sous-système.

Pour résoudre de manière approchée le système d'équations (3.24), nous utilisons la technique de Galerkin.

Premièrement, on introduit (3.26) dans le système d'équations (3.24) :

$$\left\{ \begin{aligned}\Pi_{inj}^{1p} &= \omega_p^1 \eta_p^1 \sum_{\alpha=1}^{\bar{\alpha}} e_{\alpha}^1 \Lambda_{\alpha}^{1,p} + \sum_{q'=1}^{N_2} \beta_{pq'}^{12} \left( \sum_{\alpha=1}^{\bar{\alpha}} e_{\alpha}^1 \Lambda_{\alpha}^{1,p} - \sum_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} e_{\sigma}^2 \Lambda_{\sigma}^{2,q'} \right), \\ & p \in [1, \dots, N_1], \\ \Pi_{inj}^{2q} &= \omega_q^2 \eta_q^2 \sum_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} e_{\sigma}^2 \Lambda_{\sigma}^{2,q} + \sum_{p'=1}^{N_1} \beta_{p'q}^{12} \left( \sum_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} e_{\sigma}^2 \Lambda_{\sigma}^{2,q} - \sum_{\alpha=1}^{\bar{\alpha}} e_{\alpha}^1 \Lambda_{\alpha}^{1,p'} \right), \\ & q \in [1, \dots, N_2].\end{aligned}\right. \quad (3.29)$$

$$\left\{ \begin{aligned}\Pi_{inj}^{2q} &= \omega_q^2 \eta_q^2 \sum_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} e_{\sigma}^2 \Lambda_{\sigma}^{2,q} + \sum_{p'=1}^{N_1} \beta_{p'q}^{12} \left( \sum_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} e_{\sigma}^2 \Lambda_{\sigma}^{2,q} - \sum_{\alpha=1}^{\bar{\alpha}} e_{\alpha}^1 \Lambda_{\alpha}^{1,p'} \right), \\ & q \in [1, \dots, N_2].\end{aligned}\right. \quad (3.30)$$

Ensuite, on effectue la projection sur les vecteurs de base qui décrivent le champ restreint de solutions. Pour l'expression (3.29) établie  $\forall p \in [1, \dots, N_1]$ ,  $\bar{\alpha}$  projections sont

effectuées sur les  $\bar{\alpha}$  vecteurs de base  $\{\Lambda_\alpha^1, \alpha \in [1, \dots, \bar{\alpha}]\}$ . Le produit scalaire utilisé pour les projections est le produit scalaire usuel pour l'espace vectoriel  $R^{N_1}$ . Il se définit par :

$$\langle U, V \rangle = \sum_{p=1}^{N_1} u_p v_p,$$

où  $U, V$  sont deux vecteurs de l'espace  $R^{N_1}$ , et de composantes  $u_p, v_p$ , respectivement ( $p \in [1, \dots, N_1]$ ).

Une procédure analogue est utilisée pour (3.30).

Finalement, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^{N_1} \Pi_{inj}^{1p} \Lambda_{\alpha'}^{1,p} = \sum_{\alpha=1}^{\bar{\alpha}} e_\alpha^1 \sum_{p=1}^{N_1} \left[ \left( \omega_p^1 \eta_p^1 + \sum_{q'=1}^{N_2} \beta_{pq'}^{12} \right) \Lambda_\alpha^{1,p} \Lambda_{\alpha'}^{1,p} \right] - \sum_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} e_\sigma^2 \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q'=1}^{N_2} \left[ \beta_{pq'}^{12} \Lambda_\sigma^{2,q'} \Lambda_{\alpha'}^{1,p} \right], \\ \alpha' \in [1, \dots, \bar{\alpha}], \\ \\ \sum_{q=1}^{N_2} \Pi_{inj}^{2q} \Lambda_{\sigma'}^{1,q} = \sum_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} e_\sigma^2 \sum_{q=1}^{N_2} \left[ \left( \omega_q^2 \eta_q^2 + \sum_{p'=1}^{N_1} \beta_{p'q}^{12} \right) \Lambda_\sigma^{2,q} \Lambda_{\sigma'}^{1,q} \right] - \sum_{\alpha=1}^{\bar{\alpha}} e_\alpha^1 \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{p'=1}^{N_1} \left[ \beta_{p'q}^{12} \Lambda_\alpha^{1,p'} \Lambda_{\sigma'}^{1,q} \right], \\ \sigma' \in [1, \dots, \bar{\sigma}]. \end{array} \right. \quad (3.31)$$

On peut réécrire ce système composé de  $\bar{\alpha} + \bar{\sigma}$  équations linéaires sous une forme condensée :

$$\begin{aligned} [\varphi^1] &= [\xi^1][e^1] - [\zeta^1][e^2], \\ [\varphi^2] &= -[\xi^2][e^1] + [\zeta^2][e^2], \end{aligned} \quad (3.32)$$

où les  $\bar{\alpha} + \bar{\sigma}$  inconnues sont les coefficients de la décomposition de la REM de chaque sous-système :

$$[e^1] = \begin{Bmatrix} e_1^1 \\ \vdots \\ e_{\bar{\alpha}}^1 \end{Bmatrix}, \quad [e^2] = \begin{Bmatrix} e_1^2 \\ \vdots \\ e_{\bar{\sigma}}^2 \end{Bmatrix}. \quad (3.33)$$

La connaissance de ces vecteurs permet de reconstituer la REM de chaque sous-système et de calculer les énergies totales :

$$E_1 = \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{\alpha=1}^{\bar{\alpha}} e_\alpha^1 \Lambda_\alpha^{1,p}, \quad E_2 = \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} e_\sigma^2 \Lambda_\sigma^{2,q}. \quad (3.34)$$

Les vecteurs  $[\varphi^1]$  et  $[\varphi^2]$  sont liés aux puissances modales injectées :

$$[\varphi^1] = \begin{bmatrix} \varphi_1^1 \\ \vdots \\ \varphi_{\alpha}^1 \end{bmatrix} \text{ avec } \varphi_{\alpha}^1 = \sum_{p=1}^{N_1} \Pi_{inj}^{1p} \Lambda_{\alpha}^{1,p}, \quad [\varphi^2] = \begin{bmatrix} \varphi_1^2 \\ \vdots \\ \varphi_{\sigma}^2 \end{bmatrix} \text{ avec } \varphi_{\sigma}^2 = \sum_{q=1}^{N_2} \Pi_{inj}^{2q} \Lambda_{\sigma}^{2,q}. \quad (3.35)$$

On note que le terme  $\varphi_{\alpha}^1$  correspond à la projection de la répartition des puissances modales injectées du sous-système 1 sur le vecteur de base  $[\Lambda_{\alpha}^1]$  (idem pour  $\varphi_{\sigma}^2$ ). Ces deux vecteurs constituent des données d'entrée du modèle.

$[\xi^1], [\xi^2], [\zeta^1], [\zeta^2]$  sont des matrices fonction des pulsations propres, des amortissements modaux, des facteurs de couplages intermodaux et des vecteurs de base. Elles traduisent des couplages entre les différents degrés de liberté utilisés pour décrire la REM de chaque sous-système.

On peut retrouver les équations de la SEA classique en utilisant les vecteurs de base définis par (3.28) et en imposant  $\bar{\alpha} = \bar{\sigma} = 1$ . En effet, dans ce cas le système d'équations (3.32) devient :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{N_1} \Pi_{inj}^{1p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{N_1} \omega_p^1 \eta_p^1 + \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q'=1}^{N_2} \beta_{pq'}^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q'=1}^{N_2} \beta_{pq'}^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \sum_{q=1}^{N_2} \Pi_{inj}^{2q} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \sum_{p'=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \beta_{p'q}^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{q=1}^{N_2} \omega_q^2 \eta_q^2 + \sum_{p'=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \beta_{p'q}^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Compte tenu de la décomposition de la REM (équirépartition) et de la relation (3.34), on peut écrire :

$$e_1^1 = \frac{E_1}{N_1} \text{ et } e_1^2 = \frac{E_2}{N_2}. \quad (3.37)$$

$e_1^1$  et  $e_1^2$  sont donc les densités d'énergies modales du sous-système 1 et du sous-système 2.

On peut faire apparaître le facteur de perte par couplage (déterministe) :

$$\eta_{12} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N_1} \sum_{\sigma=1}^{N_2} \beta_{\alpha\sigma}^{12}}{N_1 \omega_c}, \quad (3.38)$$

où  $\omega_c$  est la fréquence centrale en *rad/s* de la bande de fréquence d'intérêt.

En supposant que les facteurs d'amortissements modaux d'un même sous-système sont tous identiques pour la bande de fréquence considérée :

$$\eta_p^1 = \eta_1, \forall p \in [1, \dots, N_1], \quad \eta_q^2 = \eta_2, \forall q \in [1, \dots, N_2], \quad (3.39)$$

et que les fréquences propres sont uniformément réparties dans la bande de fréquence, on retrouve les équations de la méthode SEA :

$$\begin{cases} \Pi_{inj}^1 = \omega_c \eta_1 E_1 + \omega_c \eta_{12} \left( E_1 - \frac{N_1}{N_2} E_2 \right), \\ \Pi_{inj}^2 = \omega_c \eta_2 E_2 + \omega_c \eta_{12} \left( \frac{N_1}{N_2} E_2 - E_1 \right), \end{cases} \quad (3.40)$$

où on a posé  $\Pi_{inj}^1 = \sum_{p=1}^{N_1} \Pi_{inj}^{1p}$  et  $\Pi_{inj}^2 = \sum_{q=1}^{N_2} \Pi_{inj}^{2q}$ , qui représentent les puissances injectées dans les sous-systèmes 1 et 2 par les excitations extérieures.

On remarque que quelles que soient les valeurs des ordres  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\sigma}$ , le premier terme de chaque matrice de (3.32) est toujours le même. Si le premier vecteur de base à des composantes toutes identiques, on retrouve toujours dans les développements de (3.32) les termes des équations de la SEA accompagnés de termes supplémentaires qui prennent en compte les variations de la REM de chaque sous-système, et les variations des répartitions des puissances modales injectées. On peut donc voir cette approche comme une évolution de la SEA standard (basé sur l'équirépartition des énergies modales).

L'extension de cette technique à des systèmes composés de plus de deux sous-systèmes est immédiate.

On note par :

- SmEdA<sup>1</sup>, la méthode décrite dans ce paragraphe avec  $\bar{\alpha} = \bar{\sigma} = 1$ . (Si les vecteurs de base ont des coefficients tous identiques, la décomposition revient à faire l'hypothèse d'équirépartition.)

- SmEdA<sup>n</sup>, la méthode décrite dans ce paragraphe avec  $\bar{\alpha} = \bar{\sigma} = n$ .

- SmEdA<sup>max</sup>, la méthode décrite dans ce paragraphe avec  $\bar{\alpha} = N_1, \bar{\sigma} = N_2$ . Dans ce cas, les énergies modales sont indépendantes.

## 5. CONCLUSION

Une reformulation et une extension de l'approche SEA a été présentée. Des équations énergétiques modales du mouvement ont été obtenues moyennant des hypothèses similaires à celles de la SEA mais sans supposer l'équirépartition des énergies modales. Ces équations

modélisent le comportement vibratoire des sous-systèmes couplés avec un niveau de détails supérieur à la SEA, mais garde la simplicité des approches énergétiques. L'énergie de chaque mode est considérée individuellement ce qui confère à ce modèle un domaine de validité plus étendu que celui du modèle SEA classique. Les hypothèses posées n'étant pas faciles à appréhender, les limites de validité du modèle vont faire l'objet d'investigations au cours du chapitre suivant.

Les données nécessaires au modèle SmEdA pour représenter le couplage des sous-systèmes sont les facteurs de couplages intermodaux. Ceux-ci sont déterminés à partir des fréquences propres des sous-systèmes, des amortissements modaux, et des déformées propres au niveau des jonctions via les travaux d'interactions modales. Deux phénomènes physiques rentrent en jeu dans les couplages intermodaux : les coïncidences fréquentielles entre les modes des sous-systèmes et les coïncidences spatiales entre ces mêmes modes. On verra au chapitre 5 que ces deux phénomènes peuvent conduire dans certaines configurations de couplage à une grande disparité des forces d'interaction entre les modes et à une non-équirépartition des énergies modales.

Outre la description modale des couplages des sous-systèmes, la prise en compte de la répartition des énergies modales permet de considérer, d'une part, un amortissement propre à chaque mode, et d'autre part, des variations de la répartition des puissances modales injectées ; on peut donc envisager des excitations avec des répartitions spatiales plus localisées que l'excitation 'rain on the roof'.

La principale 'difficulté' d'application du modèle SmEdA repose sur l'obtention des schémas modaux des sous-systèmes. La résolution des équations énergétiques modales n'est pas, par contre, un frein à l'application de la méthode compte tenu des performances actuelles des systèmes informatiques. De plus, la résolution de ces équations par le technique de Galerkin permet d'imposer une hypothèse sur la répartition des énergies modales avec un degré d'approximation modulable. Le degré d'approximation le plus fort correspond à l'équirépartition, alors que le plus faible considère les énergies des modes indépendamment les unes des autres.

## CHAPITRE 4

# RECHERCHE ET ANALYSE DES LIMITES DU MODÈLE $\text{SmEdA}^{\max}$ SUR DES CAS SIMPLES

### 1. Buts du chapitre

Le modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  proposé au chapitre précédent repose notamment sur l'hypothèse PME dont le domaine de validité ne peut être décrit explicitement à partir des données mécaniques et géométriques des systèmes physiques. Cette hypothèse est également posée par le modèle SEA. Il faut noter toutefois une différence importante entre les deux modèles concernant le 'système' étudié. La SEA considère *a priori* une population de structures alors que le modèle  $\text{SmEdA}$  considère *a priori* une seule structure. Le domaine de validité des hypothèses ne peut pas être le même que l'on considère un système déterministe ou un ensemble de structures. En toute rigueur, les limites du modèle  $\text{SmEdA}$  (structure unique) imputable aux hypothèses PMI et PME ne peuvent pas être également attribuées au modèle SEA (population de structures). Toutefois, le modèle SEA est souvent considéré pour une structure unique (voir par exemple SEA-like en [FRE97]). Dans ce cas, les limites des deux modèles –  $\text{SmEdA}$  (structure unique) et SEA (structure unique) – sont les mêmes vis-à-vis de ces hypothèses. Par contre, le modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  ne posant pas l'hypothèse d'équirépartition du modèle SEA, son domaine de validité est plus étendu.

Le but de ce chapitre est de montrer et de comprendre sur des exemples académiques les limites du modèle  $\text{SmEdA}$ . On ne cherchera pas à établir de règles générales sur la validité du modèle mais à étudier sur différents cas la qualité de la prédiction du modèle  $\text{SmEdA}$  et à relier celle-ci aux différentes hypothèses posées au chapitre précédent. L'évaluation d'une manière 'exacte' de la répartition des énergies modales de chaque sous-système peut être effectuée grâce à la résolution exacte des équations modales issues de la double formulation modale. La différence entre ce calcul modal et le calcul  $\text{SmEdA}$  repose uniquement sur la méthode de résolution des équations modales du mouvement : l'une exacte ; l'autre approchée, faisant intervenir les hypothèses que l'on souhaite analyser. Une comparaison des résultats de ces deux calculs permet donc de se focaliser sur les hypothèses du modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$ . (Dans ce chapitre, tous les calculs sont effectués en considérant les énergies des modes indépendamment les unes des autres.)

Trois paragraphes distincts constituent le corps de ce chapitre :

- le premier, concerne l'hypothèse de couplage faible entre les sous-systèmes. Des cas de couplage de deux sous-systèmes déterministes sont considérés dans ce paragraphe. La qualité de la prédiction est mise en correspondance avec la définition de couplage faible donnée en référence [FAH97]. L'évaluation du coefficient de corrélation entre les amplitudes modales issues du calcul DMF permet de mettre en évidence l'hypothèse de couplage faible et de relier celle-ci à l'hypothèse PME posée au chapitre précédent ;

- le second, traite des limites du modèle pour des structures uniques composées de plus de deux sous-systèmes et pour des systèmes excités par des forces localisées spatialement. Ces configurations ont la particularité de présenter, en général, des sous-systèmes dont les amplitudes modales ne sont pas toutes décorréliées les unes des autres. Le but de l'étude de ces cas est de montrer que bien que l'on ne considère pas une population de structures et des excitations spatialement delta-correlées, le modèle peut rester valide pour les systèmes à faible recouvrement modal, systèmes pour lesquels la prise en compte de la répartition des énergies modales apporte des gains significatifs par rapport à l'hypothèse d'équirépartition.

Pour des systèmes à fort recouvrement modal, on verra par contre que la prédiction est moins bonne. L'origine des erreurs sera analysée et confrontée aux hypothèses du modèle SmEdA ainsi qu'à l'effet de 'tunnelling' décrit par Heron [HER94] ;

- enfin, le dernier paragraphe introduit l'aspect 'statistique' par une moyenne d'ensemble sur une population de structures. Les limites établies au paragraphe précédent pour des structures déterministes sont alors à nuancer. On justifie dans ce cas le 'S' de SmEdA par l'adjonction d'une approche de Monte-Carlo pour simuler la population de structures.

## 2. Force de couplage entre les sous-systèmes

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.5 du chapitre 1, l'hypothèse de couplage faible entre les sous-systèmes SEA fait l'objet de plusieurs définitions théoriques. La définition qui se rapproche le plus de 'la philosophie' du modèle SmEdA est celle de Fahy et James [FAH97] déjà évoquée aux chapitres 1 et 2, et que l'on rappelle : « *Sous des conditions de couplage faible, les modes du système sont 'localisés' dans le sens qu'ils ressemblent de près en fréquences propres et en déformées aux modes des sous-systèmes découplés (avec les conditions aux limites appropriées)...* ». À partir d'une comparaison entre des calculs SmEdA et des calculs modaux issus de la double formulation modale, nous allons valider cette définition sur des systèmes simples.



### 2.1. *Présentation des différents calculs*

Trois calculs différents ont été effectués sur des systèmes composés de deux poutres couplées et dont la première poutre est excitée par des efforts ‘rain on the roof’<sup>1</sup> :

- Un calcul dit ‘exact’ (‘x’) est réalisé en résolvant dans un premier temps, les équations du mouvement par décomposition en ondes forcées (voir annexe B, paragraphe 1) pour une force harmonique ponctuelle positionnée aléatoirement sur la poutre 1. L’excitation ‘rain on the roof’ est ensuite approchée en moyennant les énergies des poutres sur un ensemble de 20 points d’excitation répartis aléatoirement (décorrélation des efforts). Finalement, les énergies sont moyennées en fréquence pour obtenir les énergies totales de chaque poutre par bande de fréquence.

- Un calcul DMF (‘o’) obtenu en utilisant la double formulation modale décrite au chapitre 2. Les modes des sous-systèmes pris en compte dans le calcul sont les modes résonnants dans la bande de fréquence d’intérêt.

De manière analogue au calcul ‘exact’, on aurait pu simuler l’excitation ‘rain on the roof’ en moyennant les énergies des poutres sur un ensemble de points d’excitation répartis aléatoirement. Cependant, pour le calcul modal, il est plus intéressant de faire intervenir la conséquence de l’excitation ‘rain on the roof’ sur les forces généralisées. En effet, il a été démontré que les forces généralisées induites par l’excitation ‘rain on the roof’ sont décorréliées entre elles (voir [MAI76], equation (93)). On peut donc, dans un premier temps, calculer pour chacune des forces généralisées, les énergies modales correspondantes, et dans un second temps, sommer ces énergies pour obtenir les énergies modales en réponse à l’excitation spatialement delta-corrélée. Les résultats par bande de fréquence sont ensuite obtenus en moyennant les quantités énergétiques en fréquence.

- Un calcul SmEdA (‘—’) effectué à partir de l’approche décrite au chapitre 3 et en considérant les mêmes modes que le calcul DMF. On rappelle que pour ce calcul on ne fait pas intervenir d’hypothèses sur la répartition des énergies modales (SmEdA<sup>max</sup>).

### 2.2. *Couplage de deux poutres vibrant longitudinalement*

On considère deux poutres vibrant longitudinalement et couplées rigidement à une de leurs extrémités. L’autre extrémité de chaque poutre est supposée libre. La poutre 1 est excitée par des efforts ‘rain on the roof’. On suppose un facteur d’amortissement interne identique pour tous les modes.

---

<sup>1</sup> Type d’excitation généralement considéré en SEA, se caractérisant par un processus aléatoire stationnaire ergodique de type bruit blanc tronqué, présentant une séparabilité temps-espace, et une répartition dite spatialement delta-corrélée (les forces agissant en deux points différents sont décorréliées).

Les modes considérés pour la poutre 1 sont ceux du sous-système découplé-libre alors que pour la poutre 2 ils sont ceux du sous-système découplé-bloqué.

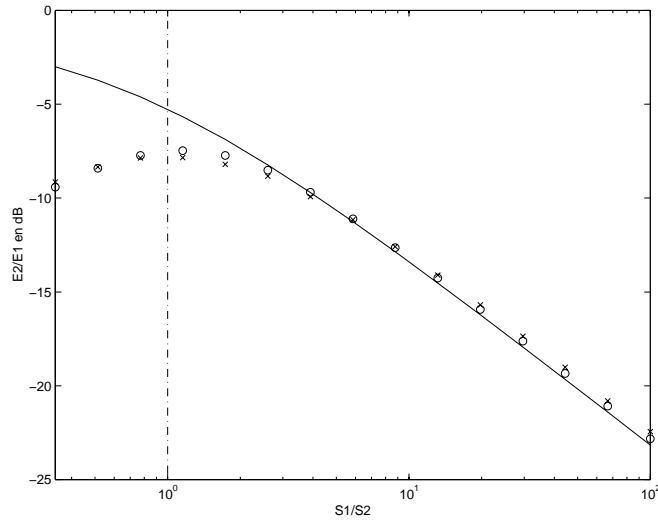


Figure 4.1. Cas d'un amortissement 'fort' :  $\eta_1=\eta_2=0,01$ . Rapport des énergies totales  $E_2/E_1$  en fonction du rapport des sections  $S_1/S_2$ . Comparaison de plusieurs calculs : x, exact ; o, DMF avec les modes résonnants dans la bande de fréquence d'intérêt ; —, SmEdA avec les mêmes modes que le calcul DMF: Bande de fréquence [9000 Hz - 11000 Hz].  $L_1=28$  m,  $L_2=23$  m,  $E_1=E_2=2.10^{11}$  Pa,  $\rho_1=\rho_2=8000$  kg/m<sup>3</sup>.  $N_1=23$  modes,  $N_2=18$  modes. Facteur de recouvrement modal :  $Rm_1=1,12$  (poutre 1),  $Rm_2=0,92$  (poutre 2).

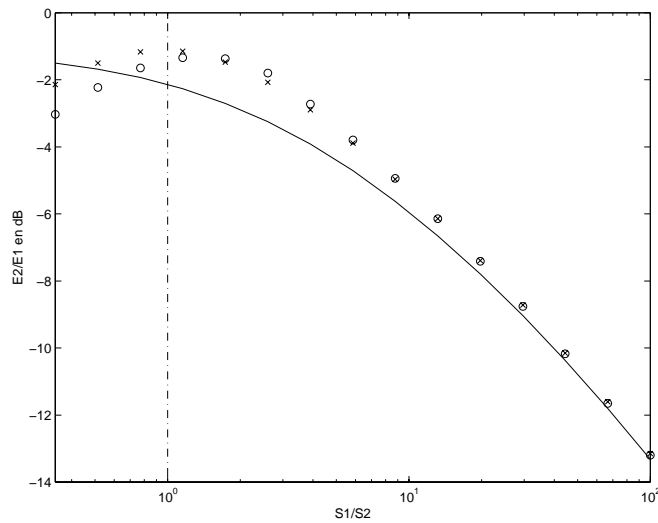


Figure 4.2. Cas d'un amortissement 'faible' :  $\eta_1=\eta_2=0,001$ .  $Rm_1=0,112$ ,  $Rm_2=0,092$ . Voir figure précédente.

Les figures 4.1 et 4.2 montrent, pour deux valeurs d'amortissements différents, le rapport des énergies totales des deux poutres,  $E_2/E_1^2$ , en fonction du rapport de sections  $S_1/S_2$ .

<sup>2</sup> Dans ce chapitre, ainsi que dans les suivants, le rapport des énergies totales des sous-systèmes,  $E_2/E_1$ , est exprimé en décibel (dB) en appliquant la relation :

$$E_2/E_1 = 10 \log_{10} \left( \frac{E_2}{E_1} \right).$$

On constate que lorsque la poutre 1 est beaucoup plus grosse que la poutre 2 ( $S_1/S_2 > 10$ ), le modèle SmEdA donne de bons résultats. Pour des rapports de sections proches ou inférieurs à un, les résultats sont entachés d'une erreur pouvant atteindre 6 dB pour un amortissement de  $10^{-2}$  et 1,5 dB pour un amortissement de  $10^{-3}$ . Les écarts sont donc d'autant plus importants que l'amortissement est fort.

La définition de l'hypothèse de couplage faible de Fahy et James explique ceci. En effet, pour des rapports de sections  $S_1/S_2$  très supérieurs à un, les modes globaux de la structure entière se trouvent 'localisés' aux niveaux de chacun des sous-systèmes et 'se rapprochent' des modes des sous-systèmes découplés que l'on a choisis pour le calcul SmEdA (ainsi que le calcul DMF). Par contre, quand le rapport de sections tend vers un, les modes globaux tendent vers les modes d'une poutre libre-libre de longueur  $L_1+L_2$  à section constante. Ces modes ne sont pas 'localisés' et ne peuvent être comparés aux modes des sous-systèmes découplés. Par conséquent, on est là dans un cas de couplage fort d'après la définition de Fahy et James. Pour un rapport de sections bien inférieur à un, les modes globaux se retrouvent 'localisés' mais les modes des sous-systèmes que l'on a choisis ne s'en rapprochent pas (modes 'inversés'); les résultats ne sont alors pas bons; cependant pour obtenir des résultats corrects, il suffirait d'invertir les types de conditions aux limites choisis pour les sous-systèmes à leur jonction (bloqué ou libre).

On souhaite maintenant mettre en évidence l'influence de la faiblesse du couplage vis-à-vis des hypothèses posées au chapitre précédent :

- en premier lieu, on remarque, figure 4.1, que le calcul DMF donne des résultats proches de ceux du calcul exact quel que soit le rapport de sections alors que figure 4.2, un écart d'environ 1dB entre les deux calculs est observé pour des rapports de sections inférieurs à un. Pour un amortissement de 1% ( $\eta=0,01$ ), les modes résonnants pris en compte sont suffisants pour reconstituer correctement le comportement vibratoire dans la bande de fréquence même si les modes considérés sont éloignés des modes physiques. Dans l'autre cas, où l'amortissement est dix fois plus faible et où le comportement modal de la structure est plus marqué, les modes introduisent une erreur sur la représentation du comportement vibratoire s'ils ne 'ressemblent' pas aux modes physiques de la structure. Les écarts sont cependant faibles car les erreurs s'annulent partiellement sous l'effet des moyennes spatiale et fréquentielle.

- D'autre part, on remarque des écarts entre le calcul SmEdA et le calcul DMF sur les deux figures. L'origine de ceux-ci est à rechercher dans le non-respect de l'hypothèse PME posée au paragraphe 3.1 du chapitre précédent. On rappelle que cette hypothèse intervient

pour le calcul des puissances échangées entre chaque couple de modes à partir de la relation établie pour deux oscillateurs couplés et soumis à des efforts décorrélés de type bruit blanc. Une condition pour que l'hypothèse PME puisse être respectée est que les amplitudes modales d'un même sous-système soient décorrélées (voir [LYO95]). Ceci vient du fait que les forces de couplage sont des combinaisons linéaires (des dérivées premières par rapport au temps) des amplitudes modales.

À partir du calcul issu de la double formulation modale, on va mettre en évidence la corrélation entre les amplitudes des modes du sous-système excité quand le couplage est fort.

En effet, soit  $a_n^1$  et  $a_p^1$ , les amplitudes modales d'indice  $n$  et  $p$  de la poutre 1. Celles-ci peuvent être considérées comme des processus aléatoires, stationnaires et ergodiques.

En supposant que  $a_n^1$  et  $a_p^1$  aient des valeurs moyennes nulles, et compte tenu de l'ergodicité de chaque processus, on peut écrire le coefficient de corrélation,  $\gamma(n, p)$ , entre les amplitudes du mode  $n$  et du mode  $p$  de la poutre 1 par (voir [MAX81]) :

$$\gamma(n, p) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a_n^1(t) a_p^1(t) dt \Big/ \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (a_n^1(t))^2 dt \right]^{1/2} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (a_p^1(t))^2 dt \right]^{1/2}. \quad (4.1)$$

Compte tenu du théorème de Wiener-Khintchine, la valeur de ce coefficient est donnée par :

$$\gamma(n, p) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \text{Re} \left[ S_{a_n^1 a_p^1}(\omega) \right] d\omega \Big/ \left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{a_n^1 a_n^1}(\omega) d\omega \right]^{1/2} \left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{a_p^1 a_p^1}(\omega) d\omega \right]^{1/2}, \quad (4.2)$$

où :

- $\omega_1, \omega_2$  sont les limites inférieures et supérieures de la bande de fréquence d'intérêt,
- $S_{a_n^1 a_n^1}(\omega)$  (resp.  $S_{a_p^1 a_p^1}(\omega)$ ) est la densité spectrale du processus  $a_n^1$  (resp.  $a_p^1$ ), et
- $S_{a_n^1 a_p^1}(\omega)$  est la densité spectrale croisée entre  $a_n^1$  et  $a_p^1$  (définie pour  $\omega$  positif).

Les densités spectrales peuvent être approchées à partir du calcul DMF en discrétisant les spectres en fréquence et en considérant à chaque fréquence la décorrélation des forces généralisées.

Si ce coefficient est égale à un pour un couple de modes  $(n, p)$ , cela indique que les amplitudes des modes d'indice  $n$  et  $p$  sont totalement corrélées, alors que s'il est nul cela indique qu'elles sont décorrélées (voir [MAX81]).

Figures 4.3 et 4.4, on présente les valeurs des coefficients de corrélation entre les amplitudes des modes de la poutre 1. La figure 4.3 est établie pour un facteur d'amortissement interne de 1 % (comme pour la figure 4.1) alors que celui de la figure 4.4 est de 0,1 % (comme pour la figure 4.2). Pour chacune d'elle, deux cas de couplage différents sont envisagés : l'un fort, l'autre faible (au sens de la définition de Fahy). Il est évident que les coefficients  $\gamma(n,n), \forall n \in [1, \dots, N_1]$  sont égaux à un. Par la suite, on exclut ceux-ci de nos propos.

Sur les deux figures, on remarque que les valeurs des coefficients de corrélation (pour  $n \neq p$ ) sont très petites devant un dans le cas d'un couplage faible et que par contre, elles se rapprochent de un pour certains couples de modes dans le cas d'un couplage fort. Cela indique par conséquent que les amplitudes modales sont plus fortement corrélées dans un cas de couplage fort que dans la cas d'un couplage faible, ceci malgré l'excitation 'rain on the roof'. L'hypothèse PME ne peut être respectée quand le couplage est fort au sens de la définition de Fahy et James. Par un raisonnement en fréquence, on peut expliquer les corrélations par le fait qu'il doit s'établir des 'relations de phases fortes' entre les amplitudes modales pour permettre de reconstituer le champ vibratoire des poutres couplées à partir des modes des sous-systèmes qui sont 'éloignés' des modes globaux.

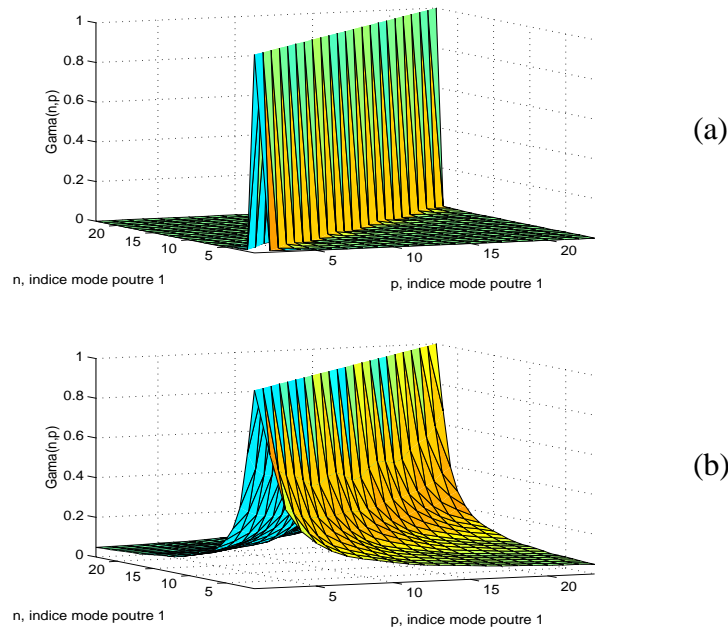


Figure 4.3. Coefficients de corrélation entre les amplitudes modales de la poutre excitée ( $\gamma$  en fonction des couples  $(n,p)$ ).  $N_1=23$  modes. Deux cas : (a)  $S_1/S_2=100$ . (b)  $S_1/S_2=1,15$ . Amortissement 'fort' :  $\eta_1=\eta_2=0,01$ .

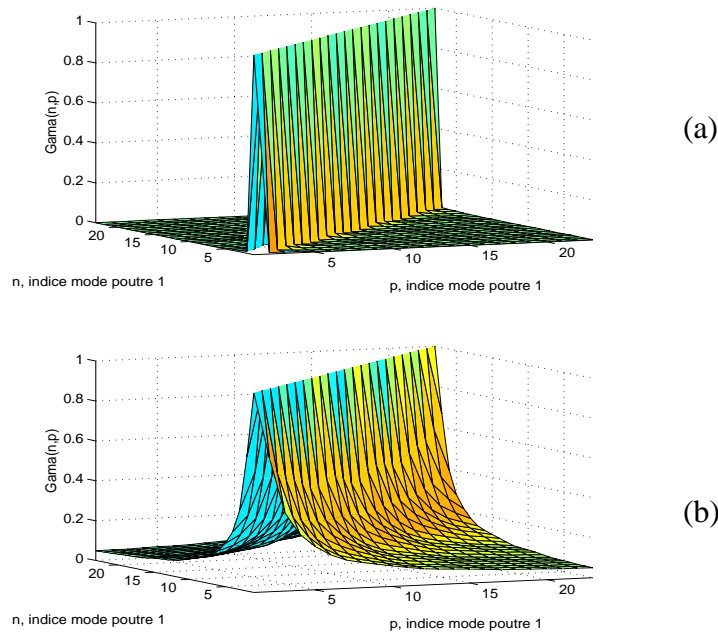


Figure 4.4. Coefficients de corrélation entre les amplitudes modales de la poutre excitée ( $\gamma$  en fonction des couples  $(n,p)$ ). Deux cas : (a)  $S_1/S_2=100$ . (b)  $S_1/S_2=1,15$ . Amortissement 'faible' :  $\eta_1=\eta_2=0,001$ . Voir les autres caractéristiques des poutres figure 4.2.

On remarque que la valeur maximum des coefficients de corrélation (pour  $n \neq p$ ) sont sensiblement les mêmes dans les deux cas d'amortissement (environ 0,5 quand  $S_1/S_2=1,15$ ) alors que les écarts entre le calcul SmEdA et le calcul DMF sont plus importants quand l'amortissement est fort. Comme nous le verrons ultérieurement, le facteur de recouvrement modal est un paramètre qui intervient sur la validité de l'hypothèse PME. Pour le couplage fort, celui-ci joue un rôle d'accentuation de l'effet des corrélations des amplitudes modales.

### 2.3. Couplage de poutres vibrant en flexion

Les figures 4.5 et 4.6 portent sur les cas A et B, respectivement, de couplage de poutres vibrant en flexion présentés au chapitre 2, paragraphe 4.2. On rappelle que le cas A correspond au couplage rigide des deux poutres, alors qu'un appui intermédiaire qui bloque les déplacements transversaux au niveau du couplage, intervient dans le cas B. Sur ces figures, on présente le rapport des énergies totales  $E_2/E_1$  en fonction de l'épaisseur de la poutre 1. Une excitation 'rain on the roof' excite la poutre 1 et l'épaisseur de la poutre 2 reste constante.

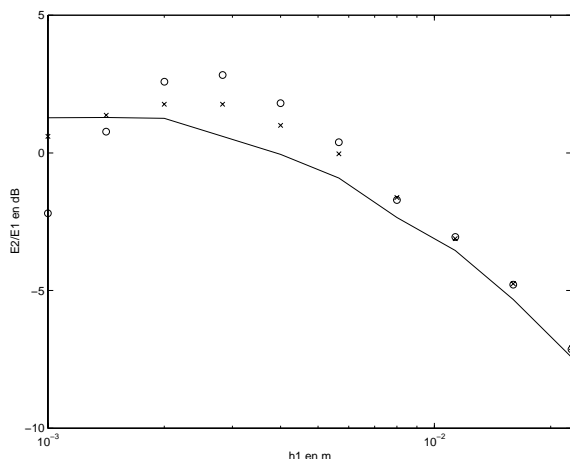


Figure 4.5. Cas A (sans appui intermédiaire).

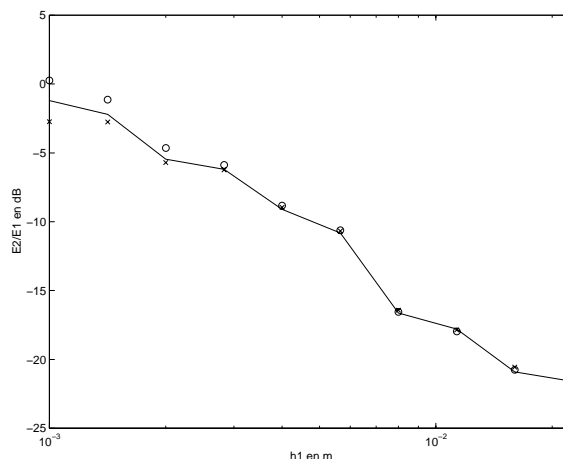


Figure 4.6. Cas B (avec appui intermédiaire).

Rapport des énergies totales  $E_2/E_1$  en fonction de l'épaisseur de la poutre excitée,  $h_1$ . Comparaison de plusieurs calculs :  $x$ , exact ;  $o$ , DMF ; —, SmEdA avec les mêmes modes que le calcul DMF. Octave 1000 Hz.  $L_1=2,5$  m,  $L_2=3,5$  m,  $h_2=1$  mm,  $b_1=b_2=10$  mm,  $E_1=E_2=7.10^{10}$  Pa,  $\rho_1=\rho_2=2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_1=\eta_2=0,01$ .  $Rm_1 \in [0,15 ; 0,70]$ .  $Rm_2=0,98$ .

En comparant les résultats des calculs 'exacts' et DMF, on constate que les modes considérés ne permettent pas de reconstituer correctement le comportement vibratoire des poutres couplées lorsque celles-ci sont de sections voisines. Ce problème de convergence a été évoqué au chapitre 2 paragraphe 4.2.3, et a également été rencontré au paragraphe précédent pour les poutres vibrant longitudinalement.

On constate que le calcul SmEdA donne des résultats meilleurs que le calcul modal. Cependant ceci résulte d'une compensation d'erreurs car le calcul SmEdA n'est qu'une résolution approchée des équations modales. Il faut attribuer une part des erreurs (la différence entre les résultats 'exacts' et DMF) au fait que les modes ne peuvent reconstituer correctement le champ vibratoire, et une autre part (la différence entre les résultats DMF et SmEdA) au non-respect de l'hypothèse PME. Pour la configuration étudiée, ces erreurs se compensent en général. Si on se concentre uniquement sur les erreurs engendrées par la corrélation des amplitudes modales de la poutre excitée, on constate, pour les deux cas traités, que celles-ci sont d'autant plus grandes que  $h_1/h_2$  tend vers un. Comme pour la convergence des séries modales, le cas B est moins défavorable que le cas A. Ceci est confirmé, figure 4.7, où on donne, en fonction de l'épaisseur  $h_1$ , la valeur la plus grande des coefficients de corrélation entre les amplitudes modales de la poutre excitée ( $\max[\gamma(n,p), \forall(n,p) \in [1, \dots, N_1]^2, n \neq p]$ ). En effet, quel que soit le rapport des épaisseurs, celle-ci est plus faible pour le cas B que pour le cas A. Pour un rapport d'épaisseurs donné, les amplitudes modales de la poutre excitée sont donc moins corrélées quand il y a un appui intermédiaire que quand il y en a pas. Dans les deux cas, l'allure générale est décroissante ce qui confirme bien que plus le rapport des épaisseurs est grand, plus l'hypothèse de décorrélation des amplitudes modales est respectée.

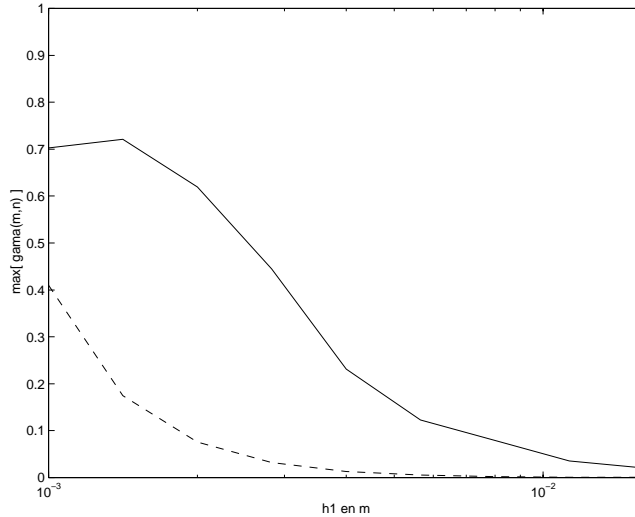


Figure 4.7. Valeur max des coefficients de corrélation des amplitudes modales de la poutre excitée ( $\max[\gamma(n,p), \forall(n,p) \in ([1, \dots, N_1])^2]$ ) en fonction de l'épaisseur de la poutre 1. Deux configurations : —, cas de la figure 4.5 (sans appui intermédiaire) ; ---, cas de la figure 4.6 (avec appui intermédiaire).

#### 2.4. Couplage par un ressort de torsion de deux poutres vibrant en flexion

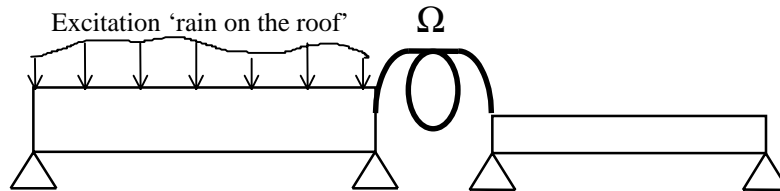


Figure 4.8. Couplage de deux poutres par un ressort de torsion.

On considère les deux poutres vibrant en flexion (hypothèses de Euler-Bernoulli) comme représentée figure 4.8. Un ressort de torsion de raideur  $\Omega$  couple les deux poutres à une des extrémités. La poutre 1, excitée par des forces 'rain on the roof', est plus épaisse que la poutre 2 ( $h_1=5$  mm,  $h_2=2$  mm).

On se propose d'étudier l'impact du choix des modes des sous-systèmes en fonction de la raideur du ressort. Deux possibilités, représentées figure 4.9, vont être considérées :

- Cas 1 : Poutre 1, modes bloqués. Poutre 2, modes libres.
- Cas 2 : Poutre 1, modes libres. Poutre 2, modes bloqués.

Les schémas modaux nécessaires aux calculs DMF et SmEdA sont donnés en annexe A.



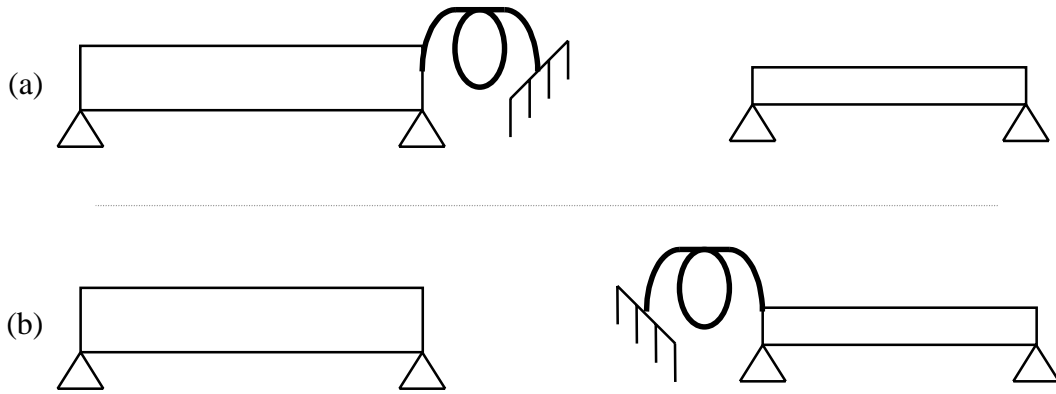


Figure 4.9. Représentation des sous-systèmes découplés. (a) : Cas 1, (b) : Cas 2.

Figure 4.10, on présente pour l'octave 2000 Hz, le rapport des énergies totales  $E_2/E_1$  en fonction de la raideur  $\Omega$  du ressort. Les résultats du calcul modal peuvent être considérés comme représentatifs du comportement vibratoire des poutres couplées. Deux calculs SmEdA ont été effectués : l'un avec les modes du cas 1, l'autre avec les modes du cas 2. On constate que pour des raideurs de ressort 'faibles', les deux calculs donnent des résultats corrects alors que pour des raideurs plus fortes, seuls les calculs avec les modes du cas 2 sont corrects. Ceci était prévisible car pour des raideurs faibles, le ressort joue un rôle négligeable dans la définition des modes des sous-systèmes (modes proches de ceux des poutres appuyées aux deux extrémités). Par contre, quand la raideur devient grande, le ressort intervient fortement dans la définition des modes et le couplage entre les deux poutres tend vers un couplage rigide avec un appui intermédiaire. Les modes du cas 1 ne sont alors plus appropriés car très éloignés ('opposés') aux modes physiques de la structure globale.

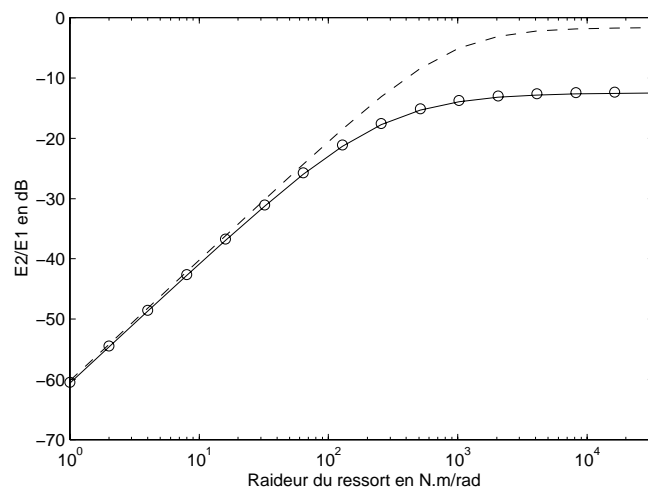


Figure 4.10. Rapport des énergies totales  $E_2/E_1$  en fonction de la raideur du ressort de couplage. Comparaison de plusieurs calculs :  $\circ$ , DMF avec les modes résonnants du cas 2; —, SmEdA avec les mêmes modes que le calcul DMF; ----, SmEdA avec les modes résonnants du cas 1. Octave centrée sur 2000 Hz.  $L_1=3$  m,  $L_2=1,5$  m,  $h_1=5$  mm,  $h_2=2$  mm,  $b_1=b_2=10$  mm,  $E_1=E_2=7.10^{10}$  Pa,  $\rho_1=\rho_2=2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_1=\eta_2=0,05$ .  $Rm_1=0,53$ .  $Rm_2=0,42$ . Rapport exact  $E_2/E_1$  pour les deux poutres couplées rigidement :  $-12,6$  dB.

Contrairement à l'approche classique utilisant les modes libres pour les deux sous-systèmes et une formulation unique en déplacement (voir la référence [CRA71] sur le même cas de couplage), le calcul présenté ici, basé sur la double formulation modale, converge vers la solution pour des valeurs de raideurs importantes (cas 2). Le calcul n'est donc pas limité par le critère de Newland (voir [CRA71]) qui impose que la raideur du ressort de couplage soit très inférieure à la raideur dynamique en rotation de chaque poutre :

$$\Omega \ll E_1 I_1 k_1, E_2 I_2 k_2. \quad (4.3)$$

À 2000 Hz, la raideur dynamique de la poutre 1 est de l'ordre de 200 N.m/rad et celle de la poutre 2 de 1800 N.m/rad. On remarque, sur la figure 4.10, que le critère de Newland peut toutefois s'appliquer au calcul avec les modes du cas 1. Ce critère délimite donc ce que l'on a appelé précédemment des raideurs faibles et des raideurs fortes. Ceci permet de souligner que le choix des modes conditionne fortement la limite de validité de l'hypothèse PME et donc le supposé couplage faible. Pour obtenir une validité la plus large possible, les modes des sous-systèmes doivent être choisis tels qu'ils se rapprochent au mieux des modes physiques de la structure. Ceci n'est possible que si les modes globaux sont 'localisés' au niveau des sous-systèmes d'où la nécessité d'une rupture d'impédance entre les sous-systèmes.

On peut souligner que le calcul SmEdA, tenant compte des modes du cas 2, converge très bien vers la solution pour des raideurs fortes car les poutres ont des épaisseurs différentes (voir paragraphe précédent).

## 2.5. Conclusion

À partir de comparaisons entre différents calculs sur des structures déterministes, on a pu mettre en évidence la notion de couplage faible et de couplage fort entre les sous-systèmes. On a constaté que la définition du couplage faible donnée par Fahy et James était valide et qu'elle s'inscrivait pleinement dans le contexte de la démarche proposée. Le calcul des coefficients de corrélation entre les amplitudes modales du sous-système excité a permis d'établir le lien entre les erreurs constatées et l'hypothèse PME du modèle SmEdA.

Un critère pratique différenciant le couplage faible du couplage fort quelle que soit la nature de la structure n'a pas pu être dégagé à partir des comparaisons effectuées. On peut noter toutefois qu'une extension de ce travail est présentée en référence [OUI99]. Le but de la technique proposée dans cette référence est de déterminer la force du couplage entre deux sous-systèmes à partir de données facilement mesurables que sont les fonctions de transferts. La puissance des réseaux de neurone est alors mise à contribution pour établir le critère de

couplage faible. À partir d'une étape d'apprentissage sur des cas simples où des comparaisons similaires à celles qui ont été présentées sont possible, le réseau de neurone établit lui-même le critère de couplage faible-couplage fort. Une fois la période d'apprentissage finie, il suffit de donner au réseau de neurone des fonctions de transfert mesurées pour qu'il indique la force de couplage d'après son propre critère. Les résultats obtenus sur des systèmes 1D sont encourageants. Le développement de cette étude mérite d'être poursuivi.

Au chapitre 1, on a cité plusieurs études ([KEA87], [REM75], [MAC93],...) qui ont montré que la relation SEA des puissances échangées était valide quelle que soit la force de couplage. Ces études ne considéraient alors pas une seule structure mais une population de structures. On ne peut retrouver ici les mêmes conclusions car on a choisi d'étudier des structures déterministes uniquement. Les critères de couplage faible donnés en [MAC93], [FIN95] considérant une moyenne d'ensemble ne peuvent également s'appliquer. De plus, l'ambiguïté sur la dualité onde-mode (voir [LAN97a]) rend difficile une confrontation des résultats présentés ici, issus d'une approche modale, avec les travaux de Mace et Finnveden dont les investigations sont basées sur une approche par les ondes. Par exemple, au paragraphe 2.4, on a montré que la qualité des résultats dépendaient du choix des modes ce qui n'a pas d'équivalent dans l'approche onde.

### 3. Validité du modèle pour des structures individuelles

Dans ce paragraphe, on se place dans des situations de couplage faible entre les sous-systèmes. Nous allons étudier deux configurations différentes où au moins deux sous-systèmes ne présentent pas des amplitudes modales décorrélées :

- couplage mono-point de trois poutres ;
- couplage de deux poutres excitées par un effort ponctuel.

#### 3.1. Couplage de trois sous-systèmes

On considère le système représenté figure 4.11 composé de trois poutres en acier vibrant longitudinalement et couplées rigidement aux extrémités.

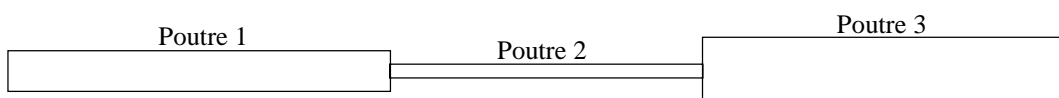


Figure 4.11. Représentation du couplage des trois poutres vibrant longitudinalement.

La poutre 1 est excitée par des efforts de type ‘rain on the roof’. Les modes des sous-systèmes considérés pour le calcul DMF et le calcul SmEdA sont les modes libres pour la poutre 1 et la poutre 3, et les modes bloqués pour la poutre 2.

### 3.1.1. Cas d’un fort recouvrement modal

Figures 4.12 et 4.13, on donne les rapports des énergies totales  $E2/E1$  et  $E3/E1$ , respectivement, en fonction de la fréquence. Outre les différents calculs déjà décrits au paragraphe 2.1, on effectue un calcul de SEA classique, noté SEA<sup>onde</sup> (\*), où les facteurs de perte par couplage sont évalués par l’approche par les ondes (voir [LYO95] chapitre 10).

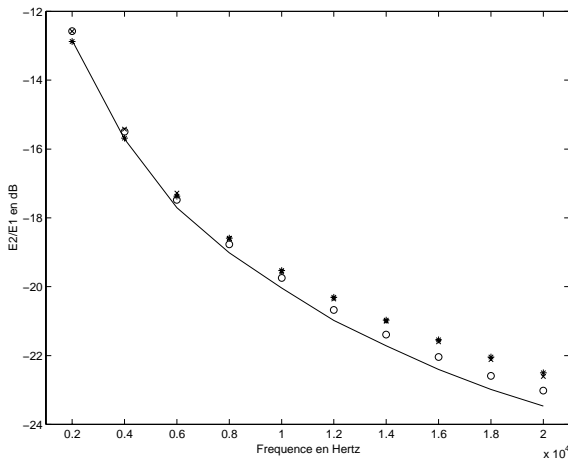


Figure 4.12. Rapport des énergies totales  $E2/E1$  en fonction de la fréquence ( $\Delta f= 2000$  Hz).

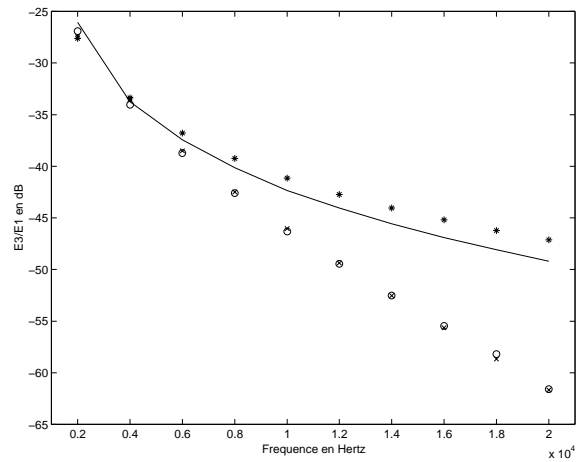


Figure 4.13. Rapport des énergies totales  $E3/E1$  en fonction de la fréquence ( $\Delta f= 2000$  Hz).

Cas d’un ‘amortissement ‘fort’ :  $\eta=0,01$ . Comparaison de plusieurs calculs : x, exact ; o, DMF avec les modes résonnants dans la bande  $\Delta f$ ; —, SmEdA avec les mêmes modes que le calcul DMF ; \*, SEA avec les CLF calculés par l’approche onde.  $L_1=28$  m,  $L_2=23$  m,  $L_3=25$  m,  $S_1/S_2=50$ ,  $S_3/S_2=100$ ,  $E=2.10^{11}$  Pa,  $\rho=8000$  kg/m<sup>3</sup>.

On constate que les transferts d’énergie vibratoire entre la poutre 1 et la poutre 2 sont bien évalués par tous les calculs alors que ce n’est pas le cas entre la poutre 2 et la poutre 3 (voir figure 4.13). Le calcul modal converge correctement donc les modes pris en compte par le calcul SmEdA sont susceptibles de représenter le comportement vibratoire du système. Les erreurs importantes du modèle SmEdA ne proviennent donc pas des bases modales considérées.

Ces erreurs sont à rechercher dans le non-respect de l’hypothèse PME pour le calcul des puissances échangées entre les couples de modes des poutres 2 et 3. En effet, la poutre 2 n’est excitée que par la poutre 1 via un couplage mono-ponctuel ; l’effort de couplage appliqué par la poutre 1 sur la poutre 2 est donc une force aléatoire unique qui n’a pas les caractéristiques d’une excitation ‘rain on the roof’. Les amplitudes modales de la poutre 2, ainsi que de la poutre 3, sont alors totalement dépendantes les unes des autres, c’est-à-dire qu’elles sont corrélées.

Pour l'évaluation des transferts d'énergie entre la poutre 1 et la poutre 2, on a bien corrélations des amplitudes modales de la poutre 2 non excitée. Cependant, leurs effets sont négligeables sur la relation d'échanges de puissance entre les modes des deux premières poutres car les modes de la poutre 1 sont principalement excités par les forces généralisées décorréliées (forces de couplage avec la poutre 2 négligeables :  $L_{1pq}(t) \approx F_p^1(t)$  avec la notation du chapitre 3) et les modes de la poutre 2 sont principalement excités par les efforts de couplage avec la poutre 1 qui sont combinaisons linéaires des amplitudes modales décorréliées de la poutre 1 (cas d'un couplage faible).

Par contre, les efforts appliqués sur les couples de modes des poutres 2 et 3 sont uniquement des efforts de couplage corrélés entre eux. Si on isole le couplage entre un mode de la poutre 2 et un mode de la poutre 3, on ne peut pas affirmer – comme le suppose l'hypothèse PME – que les efforts agissant sur ces deux modes sont décorrélés. La puissance échangée entre les deux modes ne peut pas être correctement évaluée à partir de la relation d'échanges d'énergie entre les deux oscillateurs. Ceci peut être vu comme un frein important à la SmEdA et à la SEA. Toutefois on verra plus tard que ce résultat peut être tempéré car le cas présenté est sévère vis-à-vis de l'hypothèse PME (structure déterministe, couplage mono-point, recouvrement modal important). Les sous-systèmes sont hautement non réverbérants et de grandes dimensions, ils sortent donc du domaine d'applications de la SEA. Cet exemple présente néanmoins l'intérêt de grossir le phénomène que l'on souhaite mettre en évidence.

Dans la littérature Heron [HER94] traite du même cas de couplage et donne une interprétation de ce phénomène qu'il modélise par un mécanisme de 'tunneling' (modèle ASEA). Ce mécanisme se traduit par un couplage direct entre deux sous-systèmes SEA qui sont séparés physiquement par d'autres sous-systèmes. La description du phénomène donnée par Heron est liée à l'approche par les ondes qu'il met en œuvre : les erreurs du modèle SEA sont liées à la décroissance exponentielle due à l'amortissement des champs vibratoires des sous-systèmes non excités. Cette décroissance du champ direct, qui est dominante par rapport au champ réverbérant (pour les amortissements 'forts'), n'est pas prise en compte par la SEA car elle suppose un champ diffus pour chaque sous-système (voir figure 4.14). Vis-à-vis de l'approche modale, le champ diffus est à rapprocher de la décorrélation des amplitudes modales, et la décroissance exponentielle du champ vibratoire des sous-systèmes non excités, à la forte corrélation entre les amplitudes modales de ces mêmes sous-systèmes.

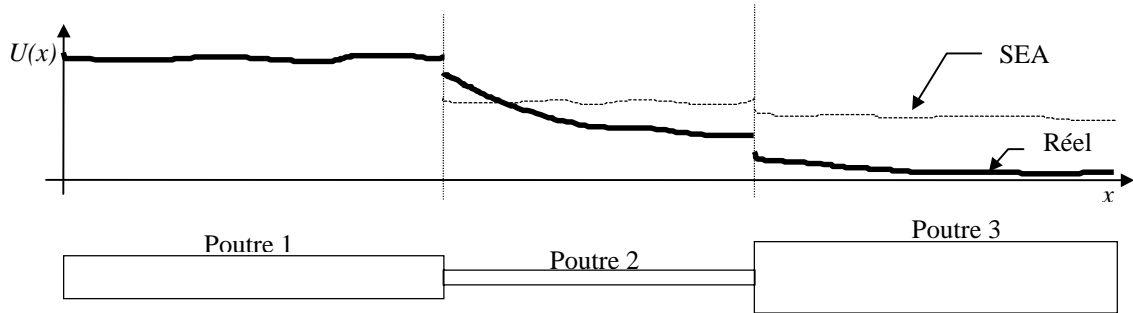


Figure 4.14. Représentation schématique du champ vibratoire réel et du champ vibratoire supposé par la SEA (excitation 'rain on the roof' sur la poutre 1).

Figure 4.15 on donne la répartition des énergies modales de chaque poutre pour la bande de fréquence [19000 Hz-21000 Hz]. On rappelle que le calcul modal converge vers le résultat exact pour cette bande. On remarque un décalage quasiment constant sur une échelle logarithmique entre les énergies modales 'exactes' et les énergies modales prédites par le modèle SmEdA. La décroissance exponentielle du champ vibratoire semble donc jouer un rôle identique sur la prédiction des énergies de tous les modes de la poutre 3.

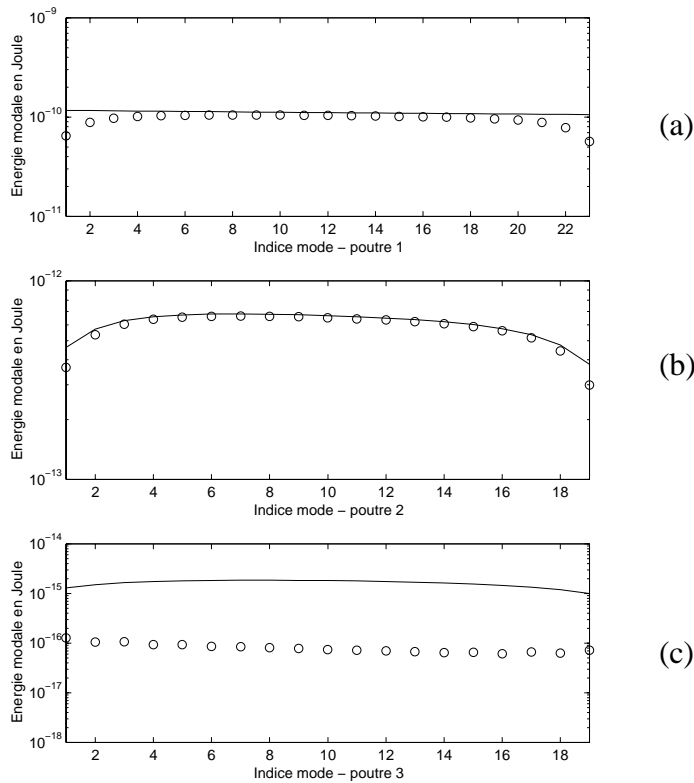


Figure 4.15. Répartition des énergies modales pour la bande de fréquence [19000 Hz - 21000 Hz]. Deux calculs : o, DMF ; —, SmEdA. (a) poutre 1. (b) poutre 2. (c) poutre 3. Paramètres identiques aux figures 4.12, 4.13.

On donne, figure 4.16, le facteur de recouvrement modal de chacune des poutres en fonction de la fréquence. Celui-ci est défini pour une poutre  $\alpha$  par :

$$Rm_{\alpha}(\omega_c) = \omega_c \eta_{\alpha} n_{\alpha}, \quad (4.4)$$

- où :
- $\omega_c$  est la fréquence centrale de la bande de fréquence,
  - $\eta_{\alpha}$  le facteur d'amortissement interne, et
  - $n_{\alpha}$  la densité modale asymptotique (voir [LYO95], chapitre 8).

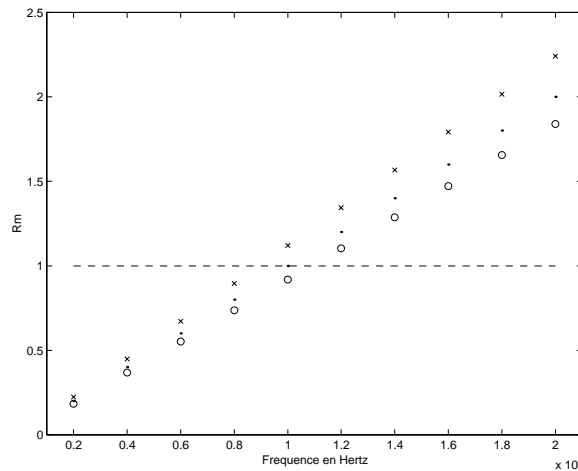


Figure 4.16. Valeur du facteur de recouvrement modal de chaque poutre en fonction de la fréquence. x, poutre 1; o, poutre 2; ., poutre 3.

Dans le cas des poutres vibrant longitudinalement, ce facteur augmente de manière linéaire avec la fréquence. L'importance du mécanisme de 'tunneling' pris en compte dans le modèle ASEA ([HER94]) dépend directement de ce facteur de recouvrement modal. Plus il est grand, plus le mécanisme de 'tunneling' est important, plus les erreurs du modèle SEA sont donc importantes. Vis-à-vis de notre approche, on peut interpréter l'influence du facteur de recouvrement modal par le fait que plus celui-ci est grand, plus il y a de modes qui participent à la réponse vibratoire à une fréquence donnée, et donc, plus les corrélations des amplitudes modales jouent un rôle pénalisant à l'égard de l'hypothèse PME.

Remarque : Si la poutre excitée par des efforts 'rain on the roof' est la poutre 2, alors le modèle SmEdA et la SEA modélisent correctement les transferts d'énergie vibratoire entre chaque poutre.

### 3.1.2. Cas d'un faible recouvrement modal

On considère, maintenant, un facteur d'amortissement interne dix fois plus petit qu'au paragraphe précédent ( $\eta=0,001$ ). Il n'y a donc plus de recouvrement modal sur le spectre [1000 Hz-21000 Hz] ( $Rm < 1$ ).

On présente les résultats, figures 4.17 et 4.18, de la même manière que les figures 4.12 et 4.13 du paragraphe précédent. La comparaison des résultats des calculs ‘exact’ et DMF permet de vérifier que les modes considérés sont habilités à reconstituer le comportement vibratoire du système. (Les légers écarts sur les trois premières bandes sont dus au fait que des modes non résonnants non pris en compte dans le calcul DMF ont des fréquences propres très proches des limites de la bande de fréquence considérée.)

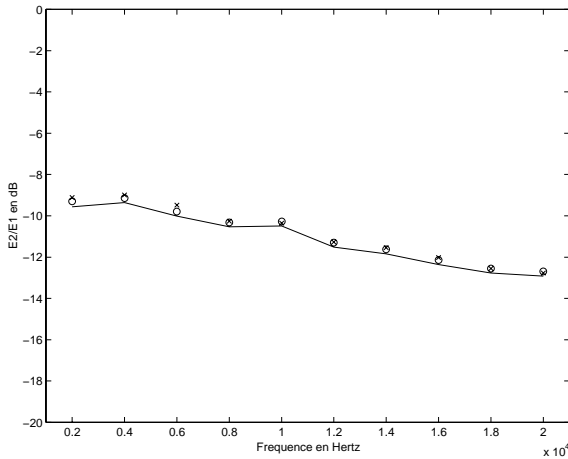


Figure 4.17. Rapport des énergies totales  $E2/E1$  en fonction de la fréquence ( $\Delta f = 2000$  Hz).

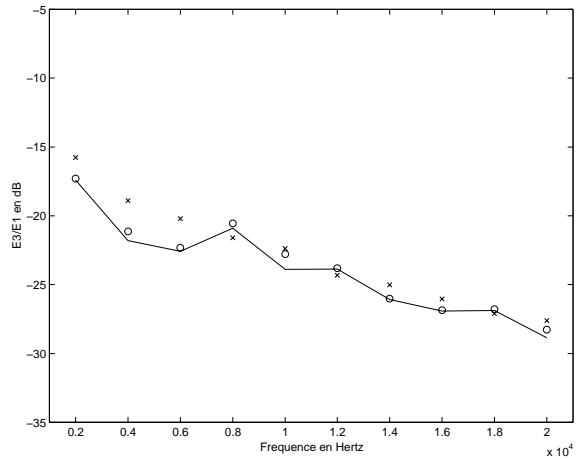


Figure 4.18. Rapport des énergies totales  $E3/E1$  en fonction de la fréquence.

Cas d'un faible amortissement :  $\eta=0,001$ . Comparaison de plusieurs calculs : x, exact ; o, DMF avec les modes résonnants dans la bande  $\Delta f$ ; —, SmEdA avec les mêmes modes que le calcul DMF.  $L_1=28$  m,  $L_2=23$  m,  $L_3=25$  m,  $S_1/S_2=50$ ,  $S_3/S_2=100$ ,  $E=2.10^{11}$  Pa,  $\rho=8000$  kg/m<sup>3</sup>.

On constate que les transferts d'énergie sont très bien évalués par le modèle SmEdA à la différence du paragraphe précédent. On a toujours corrélation entre les amplitudes modales des poutres 2 et 3. Par contre, il n'y a pas de recouvrement modal. Le couplage entre les poutres est donc dominé par les interactions entre les modes de fréquences propres voisines. L'évaluation des puissances échangées via ces couplages modaux dominants peut se faire par paire, indépendamment du couplage avec les autres modes. Dans ce cas, l'hypothèse PME s'avère respectée, non pas par le fait que les amplitudes modales sont décorrélées, mais du fait que l'interaction entre chaque couple de modes est peu influencée par les autres modes. Le système considéré ici rentre mieux dans le cadre d'application de la SEA que celui du paragraphe précédent car le champ est plus réverbérant.

La répartition des énergies modales pour la bande de fréquence [1000 Hz-3000 Hz] est donnée figure 4.19. On remarque quelques faibles erreurs sur la prédiction des énergies modales de la poutre 3. Ces erreurs ne semblent pas toutefois entacher les résultats globaux.



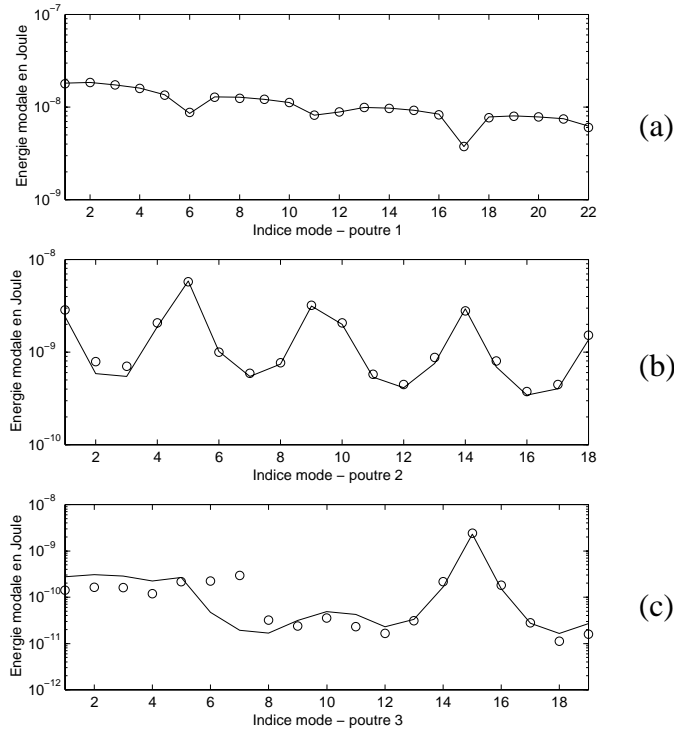


Figure 4.19. Répartition des énergies modales pour la bande [1000 Hz - 3000 Hz]. Deux calculs : o, DMF ; —, SmEdA. (a) : poutre 1. (b) : poutre 2. (c) : poutre 3. Paramètres identiques aux deux figures précédentes.

### 3.1.3. Décorrélation des amplitudes modales des sous-systèmes non excités

On a vu précédemment que les corrélations entre les amplitudes modales des poutres non excitées mettaient en défaut les modèles SmEdA et SEA quand il y avait un fort recouvrement modal. Le cas des poutres couplées aux niveaux des extrémités est un peu particulier car il ne fait intervenir qu'un seul point de couplage entre les sous-systèmes. On souhaite montrer dans ce paragraphe, sur un système composé de deux plaques couplées, que les amplitudes modales des sous-systèmes non excités ne sont pas toujours toutes fortement corrélées les unes aux autres.

On considère le couplage de deux plaques en L présenté au paragraphe 4.3 du chapitre 2, où l'on reprend la même notation. On suppose que la plaque 1 est excitée par des efforts 'rain on the roof'.

Les efforts de couplage appliqués sur un mode de double indice  $(r,s)$  de la plaque 2,  $H_{rs}^2(t)$ , peuvent s'écrire :

$$H_{rs}^2(t) = \sum_{m,n} \mathbf{W}_{mn,rs}^{12} \dot{a}_{mn}^1(t), \quad (4.5)$$

où  $a_{mn}^1(t)$  est l'amplitude du mode d'indice  $(m,n)$  de la plaque 1.

En faisant intervenir l'expression du travail d'interaction modal (équation (2.128), chapitre 2), l'expression devient :

$$H_{rs}^2(t) = C(r,s) \sum_m \left( \frac{m\pi}{a_1} \right) \dot{a}_{ms}^1(t), \quad (4.6)$$

où

$$C(r,s) = \frac{E_2 I_2 b \kappa_r}{1 - \nu_2^2} \left( \frac{s\pi}{b} \right)^2 \sin \left( \frac{s\pi}{b} \sqrt{\kappa_r + 1} \right). \quad (4.7)$$

À partir de cette expression, on peut déduire si les forces appliquées sur les modes  $(r,s)$  et  $(r',s')$  de la plaque 2 sont totalement corrélés ou non. Deux cas de figures se présentent :

- Si  $s' = s$ , c'est-à-dire que les modes ont le même ordre suivant l'arête de couplage alors les forces  $H_{rs}^2(t)$  et  $H_{r's'}^2(t)$  ne diffèrent que d'une constante. Elles sont donc dépendantes l'une de l'autre. Par conséquence les amplitudes modales de ces deux modes sont corrélées.

- Si  $s' \neq s$ , et en considérant que les amplitudes modales de la plaque 1 excitée sont décorréliées (condition de couplage faible), alors les deux efforts ne sont pas corrélés entre eux (car combinaisons linéaires d'amplitudes modales différentes). En conséquence, les amplitudes des deux modes ne sont pas corrélés.

On en conclut que les amplitudes des modes de la plaque non excitée sont non corrélées si les nombres d'onde modaux suivant l'arête de couplage sont différents.

On vient de mettre en évidence pour deux structures couplées rectilignement que des amplitudes modales du sous-système non excité pouvaient être décorréliées. On aurait pu aboutir à des conclusions similaires pour d'autres types de couplage (multi-points, sur une surface,...). Ceci nuance les limites du modèle SmEdA observées précédemment sur les assemblages de poutres pour lesquels les amplitudes modales des poutres non excitées étaient toutes corrélées les unes aux autres.

### 3.1.4. Conclusion

On a mis en évidence sur un couplage de trois poutres que le modèle SmEdA et le modèle SEA (structure individuelle) pouvaient être mis en défaut alors qu'ils sont parfaitement valides pour les couplages de ces mêmes poutres deux à deux. La corrélation des amplitudes modales des sous-systèmes non excités est en cause et conduit au non-respect de l'hypothèse PME posée par les deux modèles. On a vu toutefois que pour des facteurs de recouvrement modal inférieurs à un, la prédiction était bonne car le couplage entre chaque couple de modes est peu influencé par les autres modes.

On peut souligner que le cas présenté au paragraphe 3.1.1 est très sévère et grossit le phénomène. Il peut être qualifié de pathologique car le facteur de recouvrement modal de chaque sous-système est élevé (système hautement non réverbérant), le couplage est mono-punctuel, et le système est déterministe (voir l'aspect moyenne d'ensemble au paragraphe 4). On note cependant que par rapport à l'idée très répandue affirmant que la SEA marche mieux quand le facteur de recouvrement modal est supérieur à un, on constate ici le contraire !

### 3.2. *Excitation ponctuelle sur des structures déterministes*

Dans la réalité on ne trouve que très rarement des sources d'excitation qui peuvent s'assimiler à des excitations de type 'rain on the roof'. On rencontre plus généralement des excitations 'localisées' ou des excitations réparties mais non spatialement delta-correlées. On se propose dans ce paragraphe d'étudier, sur un exemple simple, la conséquence sur la prédiction du modèle SmEdA d'une excitation localisée en un seul point.

Le système est composé de deux poutres couplées rigidement et vibrant longitudinalement. L'excitation ponctuelle de type bruit blanc tronqué est localisée en  $x_0$  sur la première poutre. On donne, figure 4.20 et 4.21, le rapport entre les énergies totales des deux poutres en fonction de la position de l'excitation. La figure 4.20 correspond à un cas de fort recouvrement modal, alors que pour la figure 4.21, le facteur de recouvrement modal de chaque poutre est bien inférieur à un.

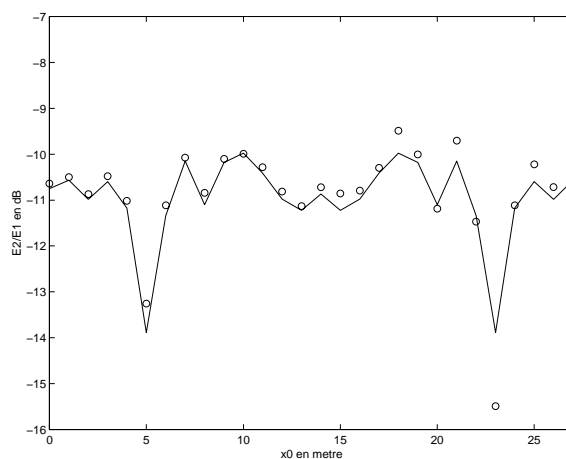
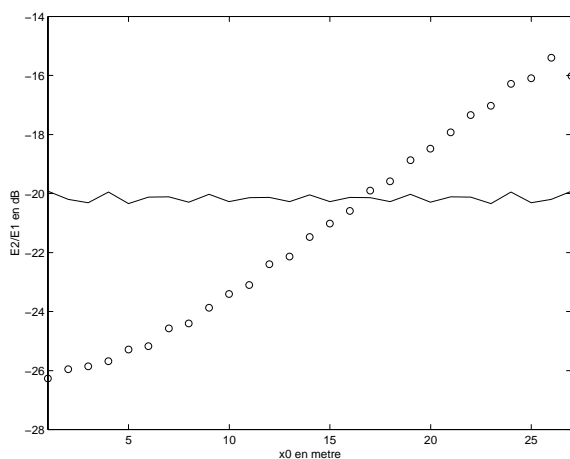


Figure 4.20. Cas d'un 'fort' amortissement :  $\eta=0,01$ .  $Rm1=1,12$ ,  $Rm2=0,92$ .

Figure 4.21. Cas d'un 'faible' amortissement :  $\eta=0,001$ .  $Rm1=0,112$ ,  $Rm2=0,092$ .

Rapport des énergies totales  $E2/E1$  en fonction de la position  $x_0$  de la force ponctuelle. Comparaison de deux calculs : o, DMF avec les modes résonnants dans la bande d'intérêt ; —, SmEdA avec les mêmes modes que le calcul DMF.  $\Delta f = [9000 \text{ Hz} - 11000 \text{ Hz}]$ .  $L_1=28 \text{ m}$ ,  $L_2=23 \text{ m}$ ,  $S_1/S_2=50$ ,  $E=2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\rho=8000 \text{ kg/m}^3$ .  $N_1=23$  modes,  $N_2=18$  modes.

On constate, figure 4.20, que les résultats SmEdA sont identiques quelle que soit la position de l'excitation alors que les résultats du calcul modal indiquent que le transfert d'énergie entre les deux sous-systèmes est de plus en plus important lorsque l'excitation se rapproche de la jonction de couplage. Le phénomène physique qui n'est pas correctement pris en compte est, la encore, la décroissance exponentielle du champ vibratoire de part et d'autre de l'excitation. Les erreurs du calcul SmEdA étaient prévisibles car dans le cas d'une excitation localisée les amplitudes modales des deux poutres sont entièrement dépendantes les unes des autres. On se retrouve alors dans une situation similaire à celle du couplage de trois poutres où les deux poutres non excitées ont leurs amplitudes modales corrélées entre elles.

Quand il n'y a pas recouvrement modal (figure 4.21), les résultats SmEdA sont par contre très bons : les variations des transferts d'énergie suivant la position de l'excitation sont correctement représentées par le modèle. Dans ce cas, le champ réverbérant domine le comportement vibratoire du système ; la décroissance exponentielle du champ direct est alors négligeable. On se retrouve dans une situation où les couplages entre les modes de fréquences propres voisines dominent le couplage entre les deux poutres. La faiblesse du recouvrement modal minimise l'influence des corrélations sur les puissances échangées entre les modes.

Comme le couplage mono-ponctuel de trois poutres, l'excitation ponctuelle est un cas sévère pour le modèle SmEdA pour des forts recouvrements modaux. Plusieurs excitations ponctuelles non corrélées permettraient d'obtenir de meilleurs résultats car elles auraient pour conséquence de décorréler les amplitudes modales de la poutre excitée. Néanmoins, on a pu montrer que l'hypothèse d'une excitation de type 'rain on the roof' n'était pas toujours requise et que le modèle SmEdA pouvait prendre en compte correctement l'effet de la localisation de l'excitation quand le recouvrement modal était faible.

#### **4. Moyenne d'ensemble**

Les comparaisons qui ont été effectuées jusqu'à présent ont portées sur des structures uniques. On a constaté que dans certains cas, le modèle était valide et que pour d'autres, l'hypothèse PME ne pouvait être correctement respectée. Une des idées fortes de la méthode SEA est de moyenniser les quantités énergétiques sur un ensemble de structures (voir paragraphe 2.6 chapitre 1). La population de structures est définie en référence [LYO95] telle que la densité de probabilité pour l'événement des fréquences propres soit uniforme dans la bande  $\Delta\omega$ . C'est-à-dire que la fréquence propre de chaque mode peut avoir n'importe quelle valeur comprise entre la fréquence minimum et la fréquence maximum de la bande considérée. L'intérêt de cette moyenne d'ensemble est d'introduire un facteur supplémentaire de décorrélation des amplitudes modales à partir d'une distribution aléatoire des fréquences

propres. Cette hypothèse sur la population de structures se base sur le fait que des structures apparemment identiques peuvent présenter une grande dispersion des réponses vibratoires dans les ‘hautes fréquences’. Cependant la question du réalisme de cette population de structures reste ouverte.

Dans le formalisme de base du modèle SmEdA, nous n’avons pas introduit l’hypothèse d’une moyenne d’ensemble afin de conserver les informations suffisantes pour décrire les structures déterministes avec un faible recouvrement modal. (Nous verrons au chapitre suivant que l’intérêt du modèle SmEdA par rapport à la SEA réside principalement dans la modélisation de ces structures.) On introduit ici la moyenne d’ensemble dans le modèle SmEdA par une approche de Monte-Carlo. Celle-ci consiste en une succession d’expériences numériques réalisées à partir de calculs SmEdA. Pour permettre une comparaison des résultats, on effectue la même démarche avec des calculs DMF qui sont supposés ‘exacts’, et en tenant compte des mêmes éléments de la population.

Pour étudier les conséquences sur la qualité de la prédiction de différents degrés d’incertitude sur les fréquences propres, on choisit de définir la population de structures de manière sensiblement différente de celle de la SEA. Elle est définie telle que la densité de probabilité pour l’événement d’une pulsation propre,  $\hat{\omega}_p^\alpha$ , soit uniforme dans une bande de largeur  $\Delta\varepsilon_p^\alpha$  centrée sur la pulsation propre déterministe,  $\omega_p^\alpha$ . C’est-à-dire que les pulsations propres peuvent ‘varier’ autour des pulsations propres déterministes dans un intervalle borné de largeur  $\Delta\varepsilon_p^\alpha$ .

La pulsation propre d’un événement associé au mode  $p$  du sous-système  $\alpha$ ,  $\hat{\omega}_p^\alpha$ , est donnée par :

$$\hat{\omega}_p^\alpha = \omega_p^\alpha(1 + \varepsilon\Gamma), \quad (4.8)$$

où :

- $\omega_p^\alpha$  est la pulsation propre du mode  $p$  du sous-système  $\alpha$  déterministe,
- $\varepsilon$  est le taux d’incertitude ( $\Delta\varepsilon_p^\alpha = 2\varepsilon\omega_p^\alpha$ ), et
- $\Gamma$  suit une loi de densité de probabilité uniforme entre -1 et 1, et nulle en dehors de ces bornes.

On se propose d’étudier l’intérêt de la moyenne d’ensemble à partir des deux exemples déterministes présentés au paragraphe 3 et pour lesquels le modèle SmEdA donnait des résultats erronés pour des forts recouvrements modaux.

### 4.1. Couplage de trois poutres vibrant longitudinalement

La structure servant de base à la définition de la population de structures est celle présentée au paragraphe 3.1. Elle est composée de trois poutres vibrant longitudinalement et couplées rigidement. On reprend les mêmes données numériques que celles des figures 4.12 et 4.13 pour définir la structure déterministe (cas d'un fort recouvrement modal). Les calculs sont réalisés pour la bande de fréquence [19000 Hz-21000 Hz]. On rappelle que pour cette bande, le rapport d'énergies entre la poutre 3 et la poutre 1 (système déterministe) est de  $-61,6$  dB par le calcul exact et de  $-49,2$  dB par le calcul SmEdA, soit un écart de  $12,4$  dB entre les deux calculs. L'approche de Monte-Carlo est basée sur 1000 tirages successifs. On présente, figures 4.22 et 4.23, les résultats des 100 premiers tirages pour deux degrés d'incertitude différents : 1 % et 3 %, respectivement. Pour calculer les moyennes d'ensemble, on considère que les réponses vibratoires des structures de la population sont indépendantes (décorrélées) les unes des autres. Les moyennes d'ensemble des quantités énergétiques sont par conséquent égales aux moyennes arithmétiques des quantités énergétiques des 1000 structures individuelles (événements) issus des 1000 tirages. Les rapports d'énergies sont ensuite calculés à partir des moyennes d'ensemble des énergies.

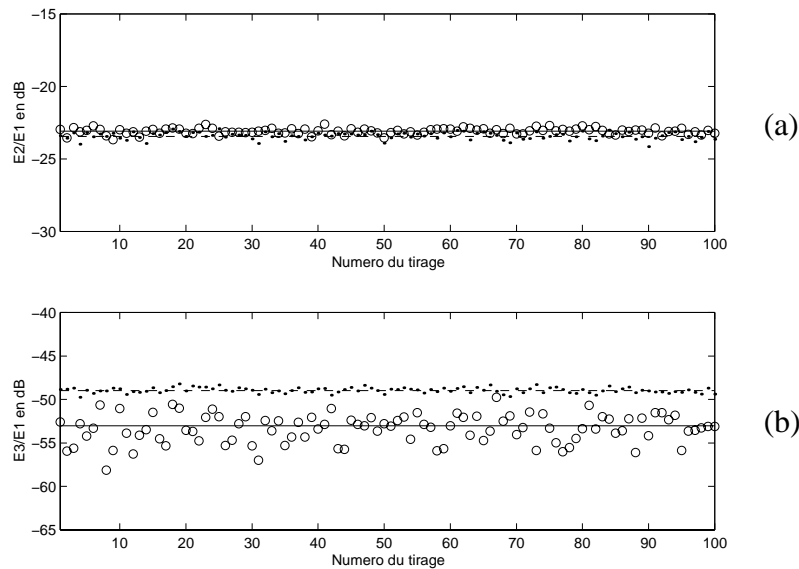


Figure 4.22. Représentation des résultats des 100 premier tirages pour un degré d'incertitude  $\varepsilon=1$  %. (a) Rapport  $E2/E1$  (b) Rapport  $E3/E1$ . Deux calculs :  $\circ$ , DMF (— : Rapport des moyennes d'ensembles);  $\bullet$ , SmEdA (--- : Rapport des moyennes d'ensembles). Bande de fréquence [19000 Hz-21000 Hz].  $L_1=28$  m,  $L_2=23$  m,  $L_3=25$  m,  $S_1/S_2=50$ ,  $S_3/S_2=100$ ,  $E_1=E_2=2 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\rho_1=\rho_2=8000$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_1=\eta_2=0,01$ .  $Rm_1=2,24$ .  $Rm_2=1,84$ .  $Rm_3=2$ .

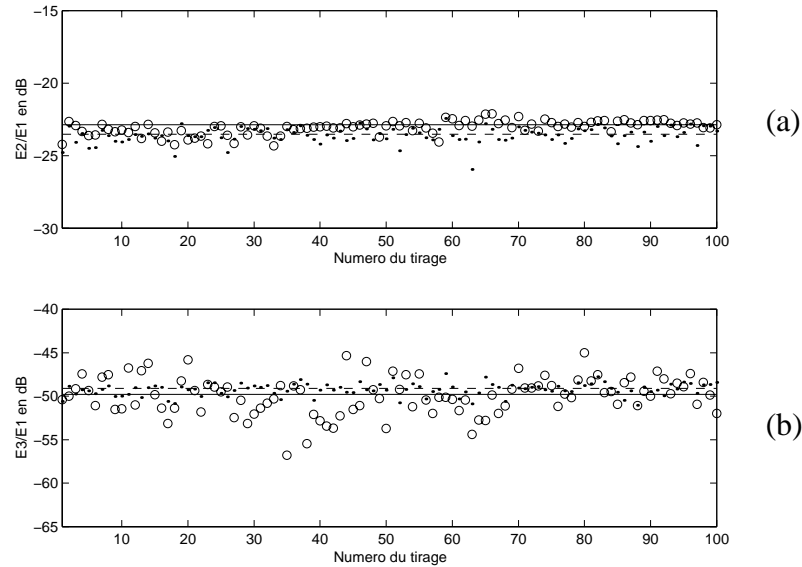


Figure 4.23. Cas identique à la figure précédente avec un degré d'incertitude  $\varepsilon=3\%$ .

On constate, figure 4.22, qu'une incertitude sur les fréquences propres de 1 % entraîne une dispersion sur les résultats du calcul modal. Cependant le 'désordre' introduit par celle-ci n'est pas suffisant pour que les deux calculs, DMF et SmEdA, convergent vers les mêmes résultats.

Figure 4.24, on donne les rapports des moyennes d'ensemble des énergies en fonction du degrés d'incertitude  $\varepsilon$ . On constate que les résultats du calcul SmEdA varient peu en fonction de l'incertitude à la différence des résultats du calcul modal. Plus l'incertitude augmente, plus les résultats du calcul modal se rapprochent des résultats SmEdA. Pour une incertitude de 3 % (voir figure 4.23), l'écart sur les rapports des moyennes d'ensemble des énergies est inférieur à 1 dB. Les décorrélations des amplitudes modales induites par la population de structures sont alors suffisantes pour permettre le respect de l'hypothèse PME. Pour cette configuration de couplage, il n'est donc pas nécessaire que la population de structures soit définie telle que le suppose la SEA en [LYO95]. (À titre indicatif, si on considère celle-ci, le rapport des moyennes d'ensemble des énergies,  $E3/E1$ , est de  $-48,9$  dB par les calculs SmEdA,  $-48,6$  dB par les calculs modaux et de  $-46,8$  dB par l'approche SEA<sup>onde</sup>.)

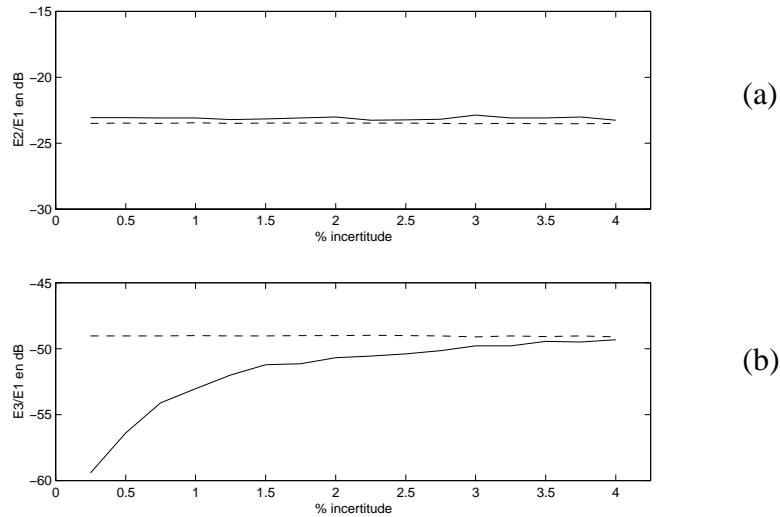


Figure 4.24. Rapport des moyennes d'ensemble des énergies totales en fonction du degré d'incertitude  $\varepsilon$  sur les fréquences propres. (a)  $E2/E1$ . (b)  $E3/E1$ . Deux calculs : —, DMF ; ----, SmEdA.

On peut remarquer que les écarts-types sur la distribution des rapports  $E3/E1$  donnés par les deux calculs ne sont pas les mêmes (voir, par exemple, la dispersion des résultats des deux approches figures 4.22 et 4.23) : les calculs SmEdA donnent des résultats moins sensibles aux incertitudes sur les fréquences propres que les calculs modaux. Ceci était prévisible car le calcul SmEdA ne peut simuler les dispersions liées aux corrélations des amplitudes modales.

On montre donc qu'en considérant une population de structures les résultats du modèle SmEdA sont plus fiables. Pour l'exemple présenté, on peut néanmoins s'interroger sur le bien fondé d'une telle population de structures car dans ce cas elle masque un phénomène physique (décroissance exponentielle du champ direct due à l'amortissement). Pour d'autres structures, où l'hypothèse PME peut être respectée en introduisant une incertitude sur les fréquences propres moins importante, la population de structures peut être plus réaliste et le modèle SmEdA représentatif du 'système étudié'. Un cas limite de ceci est constitué par les structures à faible recouvrement modal pour lesquels il n'est pas nécessaire d'introduire une incertitude sur les fréquences propres pour que le modèle SmEdA soit valide (voir paragraphe 3.1.2).

#### 4.2. Excitation ponctuelle de deux poutres vibrant longitudinalement

On considère la structure décrite au paragraphe 3.2 pour définir la population de structures. On rappelle que celle-ci est composée de deux poutres vibrant longitudinalement. Un effort ponctuel positionné en  $x_0$  excite la première poutre. On se place dans le cas de la figure 4.20 pour lequel SmEdA n'a pas permis de prédire correctement les transferts d'énergie en fonction de la position de l'excitation.



Par une approche identique à celle du paragraphe précédent, on donne, figures 4.25 et 4.26, les résultats de la moyenne d'ensemble en fonction de  $\varepsilon$  pour deux positions d'excitation différentes : l'une, en  $x_0=1$  m, où le modèle SmEdA surestime les transferts d'énergie pour le système déterministe, et l'autre, en  $x_0=26$  m, où, par contre, le modèle SmEdA sous-estime les transferts (voir figure 4.20). On remarque que le degré d'incertitude minimal nécessaire pour obtenir un bon accord entre le calcul SmEdA et le calcul modal n'est pas le même suivant la position de l'excitation : un écart inférieur à 1 dB est obtenu dès un degré d'incertitude de 5 % pour l'excitation éloignée de la jonction de couplage, alors qu'il doit être de 9 % pour l'excitation proche de la jonction. On constate toutefois qu'au-delà de ces limites les résultats entre les deux calculs sont cohérents.

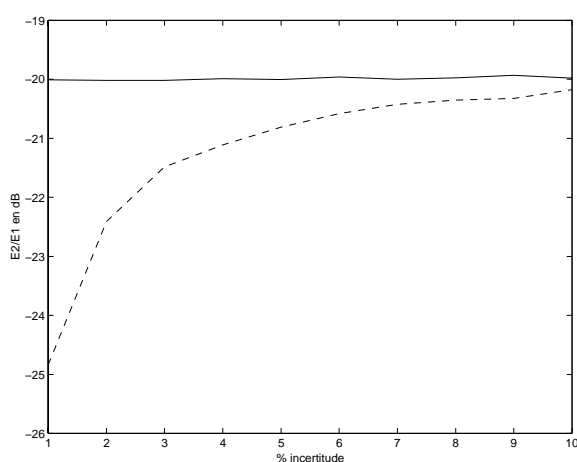


Figure 4.25. Cas d'une excitation ponctuelle en  $x_0=1$ m (loin de la jonction de couplage). Résultats pour le système déterministe (voir paragraphe 3.2) : DMF :  $-26,2$  dB, SmEdA,  $-19,9$  dB.

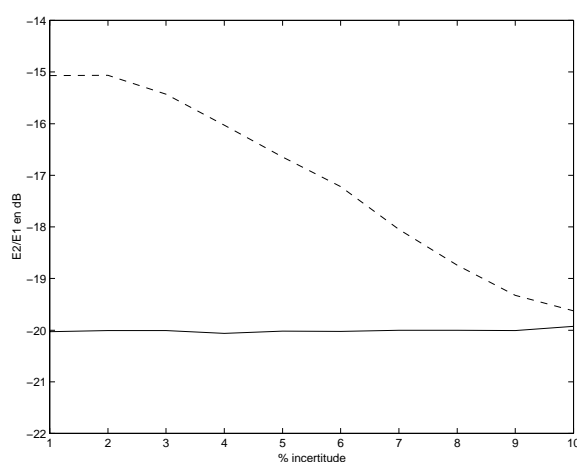


Figure 4.26. Cas d'une excitation ponctuelle en  $x_0=26$ m (près de la jonction de couplage). Résultats pour le système déterministe (voir paragraphe 3.2) : DMF :  $-15,4$  dB, SmEdA,  $-20,1$  dB.

Rapport des moyennes d'ensemble des énergies totales en fonction du degré d'incertitude  $\varepsilon$  sur les fréquences propres. Deux calculs : —, DMF, ----, SmEdA.  $\Delta f = [9000 \text{ Hz} - 11000 \text{ Hz}]$ . Voir description des poutres figure 4.20.

### 4.3. Conclusion

On a montré, sur deux exemples, que le domaine de validité du modèle SmEdA se trouvait élargi sous l'effet de la moyenne d'ensemble sur une population de structures. D'un point de vue théorique, celle-ci introduit un facteur supplémentaire de décorrélation des amplitudes modales et autorise un meilleur respect de l'hypothèse PME. En pratique, elle se justifie par le fait que des structures industrielles apparemment identiques présentent des petites différences sur la géométrie et les propriétés mécaniques qui se répercutent sur les fréquences propres.

On a vu que le degré d'incertitude nécessaire pour obtenir des résultats corrects dépendait de la nature du système. L'hypothèse sur la population de structures qui en résulte peut être jugée réaliste dans certains cas et ne pas l'être pour d'autres.

L'étude menée n'a pas permis de quantifier *a priori* le niveau d'incertitude sur les fréquences propres qu'il est nécessaire de faire intervenir pour obtenir des résultats cohérents. Une étude spécifique est à envisager pour faire la lumière sur cet aspect qui reste mal maîtrisé en SEA.

## 5. Conclusion

Sur des exemples simples, et à partir de comparaisons entre différents calculs ont a pu étudier certains aspects du domaine de validité du modèle SmEdA :

- Le couplage fort entre deux sous-systèmes déterministes a été mis en évidence à partir du calcul des coefficients de corrélation entre les amplitudes modales du sous-système excité. Celui-ci intervient quand la rupture d'impédance entre les deux sous-systèmes est faible et conduit au non-respect de l'hypothèse PME ; le modèle SmEdA donne alors des résultats erronés d'autant plus éloignés de la réalité que l'amortissement est fort. La définition du couplage faible donnée en [FAH97] est confortée par les observations effectuées, et est pleinement en accord avec l'approche SmEdA.

- La qualité des résultats donnés par le modèle SmEdA quand des sous-systèmes ne présentent pas des amplitudes modales décorréliées dépend de l'importance du recouvrement modal. Quand le facteur de recouvrement modal de chaque sous-système est faible, les résultats sont bons car les couplages entre les sous-systèmes sont principalement représentés par les interactions entre les modes de fréquences propres voisines ; les autres couplages modaux n'influencent pas ou très peu les échanges d'énergie entre ces couples de modes dominants. Par contre, quand le recouvrement modal est important, la non-décorrélation des amplitudes modales peut jouer un rôle prépondérant et conduit au non-respect de l'hypothèse PME du modèle. On constate alors des erreurs sur la prédiction des transferts d'énergie entre les sous-systèmes.

- Enfin, on a vu qu'en introduisant la moyenne d'ensemble sur une population de structures, on ajoutait un facteur supplémentaire de décorrélation des amplitudes modales. Celle-ci autorise un meilleur respect de l'hypothèse PME. Les moyennes d'ensemble des énergies données par SmEdA peuvent alors être représentatifs de la population de structures bien que le modèle ne donnait pas des résultats satisfaisants pour la structure déterministe servant de base à la définition de la population. On a constaté sur les exemples présentés que le degré d'incertitude nécessaire pour obtenir des résultats concordants dépendait de la nature du système. Il se pose alors la question du réalisme de la population de structures qui est supposée.

Pour définir la population de structures d'un système entier, on peut concevoir d'attribuer des degrés d'incertitude sur les fréquences propres différents d'un sous-système à un autre. Pour les sous-systèmes à faible recouvrement modal, présentant un comportement modal bien marqué, on peut envisager de considérer les structures déterministes ( $\varepsilon=0$ ), alors que pour les autres sous-systèmes ayant un comportement que l'on suppose attribué au domaine des hautes fréquences, on peut considérer des population de structures avec des degrés d'incertitude à définir. Cette vision nous permet de justifier la relative contradiction entre le modèle SmEdA basé sur une approche modale et le modèle SEA qui abandonne cette approche déterministe. En effet, le modèle SmEdA ne se veut pas un moyen de prédiction du comportement vibratoire des structures complexes en moyennes et hautes fréquences, mais se veut un outil intégré et alternatif à la méthode SEA pour les cas de couplage où cette dernière est mise en défaut (systèmes déterministes à faible recouvrement modal par exemple, voir chapitre suivant).

## CHAPITRE 5

# ÉTUDE SUR DIFFÉRENTS CAS DES AMÉLIORATIONS APPORTÉES PAR LA PRISE EN COMPTE DE LA RÉPARTITION DES ÉNERGIES MODALES

### 1. Buts du chapitre

Après avoir recherché les limites du modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$ , nous allons nous intéresser dans ce chapitre à l'apport de la prise en compte de la répartition des énergies modales sur la qualité de la prédiction. Comme au chapitre précédent, l'étude portera sur des exemples constitués par des couplages de structures académiques. Des comparaisons entre différents calculs, notamment des calculs SEA, sont effectuées pour mettre en évidence les intérêts du modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$ .

Dans un premier temps, on présente trois configurations spécifiques où la prise en compte de la répartition des énergies modales apporte des gains significatifs sur la qualité des résultats par rapport à une hypothèse d'équirépartition :

- la première concerne les couplages de sous-systèmes à faibles recouvrements modaux. Dans la littérature, il est abondamment démontré ([YAP96], [FAH92], [MAC98], [BOI82],...) que la méthode SEA surestime les transferts d'énergies vibratoires pour ce type de couplage. Ces erreurs du modèle SEA sont attribuées au non-respect de l'hypothèse de l'équirépartition des énergies modales (voir [YAP96]). On montre que le modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  obtient de très bons résultats dans ces circonstances. Deux exemples de la littérature sont repris : - Le premier est présenté par Yap et Woodhouse en référence [YAP96]. Cet exemple est composé de poutres couplées. Il met en évidence un effet de 'filtrage' entre les sous-systèmes dû aux coïncidences fréquentielles quand l'amortissement est faible. - Le second exemple est présenté en référence [BOI82] et est constitué d'un couplage de deux plaques couplées en L. Pour ce type de couplage, l'effet de 'filtrage' des jonctions est lié notamment aux coïncidences spatiales entre les modes des sous-systèmes. Pour ces deux exemples, on compare les résultats donnés par  $\text{SmEdA}^{\max}$ ,  $\text{SmEdA}^1$ , et  $\text{SEA}^{\text{onde}}$  ;

- la seconde configuration fait intervenir des variations de la répartition des puissances modales injectées du sous-système excité. Cette situation se rencontre pour des sous-systèmes excités plus localement que par l'excitation 'rain on the roof'. On traite le cas de poutres excitées par des efforts de type ponctuel ;

- la dernière configuration se caractérise par des sous-systèmes pour lesquels les facteurs d'amortissements modaux ne sont pas tous identiques. En s'inspirant des résultats des mesures de facteurs d'amortissement présentés en [SHA68], on établit des variations théoriques de ces facteurs et on étudie les conséquences de ces variations sur les transferts d'énergies de poutres couplées.

Dans un second temps, on illustre la résolution approchée des équations énergétiques modales par la technique Galerkin (voir chapitre 3). On montre notamment que l'on peut décrire finement la REM de certains sous-systèmes pour lesquels un gain sur la prédiction peut être présumé obtenu, et décrire plus grossièrement celle des autres sous-systèmes pour lesquels l'équirépartition semble être respectée.

## 2. Différents cas de non-équirépartition des énergies modales

### 2.1. Couplage de sous-systèmes à faible recouvrement modal

#### 2.1.1. Couplage de deux poutres vibrant en flexion et couplées par un ressort de torsion

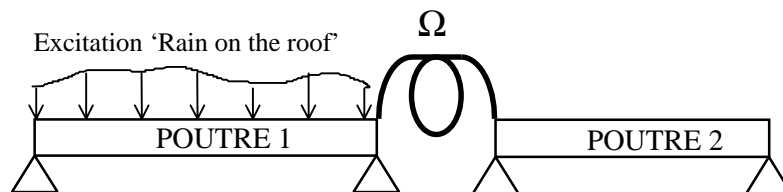


Figure 5.1. Couplage de deux poutres par un ressort de torsion.

La structure considérée dans ce paragraphe est identique à celle considérée en référence [YAP96] par Yap et Woodhouse. Le système est composé de deux poutres en aluminium simplement appuyées et couplées entre elles à une extrémité par un ressort de torsion. Les hypothèses de Euler-Bernoulli sont admises pour chacune des poutres. Celles-ci étant de mêmes sections et de mêmes matériaux, le couplage faible entre les deux sous-systèmes est assuré par une très faible raideur de ressort (voir paragraphe 2.4, chapitre 4). L'amortissement est introduit par des facteurs d'amortissements modaux  $\eta_p^1$ ,  $\eta_q^2$  constants et égaux à  $\eta$ . Seule la poutre 1 est excitée par des efforts de type 'rain on the roof'.

Pour cette structure, Yap et Woodhouse ont montré (voir figure 5.2) que le facteur de perte par couplage obtenu par l'approche par les ondes surestimait les transferts d'énergies vibratoires quand l'amortissement était faible. Ils concluent dans leur article que la cause de ces erreurs est que l'équirépartition des énergies modales n'a pas lieu en général quand l'amortissement est faible.

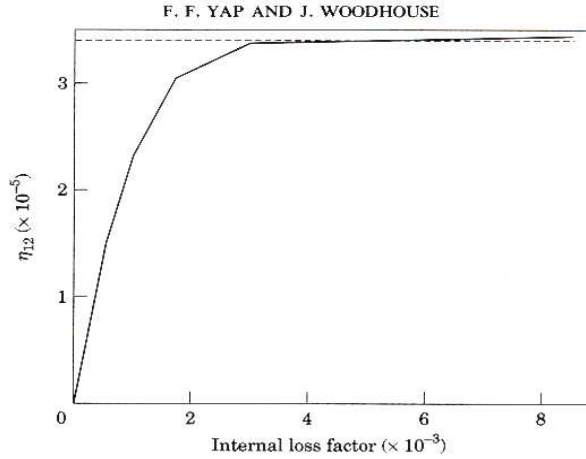


Figure 5.2. Figure tirée de l'article de F.F. Yap et J. Woodhouse JSV 197(3) p.351-371. Facteur de perte par couplage,  $\eta_{12}$ , en fonction du facteur d'amortissement interne. Deux calculs : —, Calcul par SEA inverse à partir de données numériques obtenues par une approche modale ; ----, calcul par l'approche traditionnelle par les ondes.

### 2.1.1.1. Effet de l'amortissement sur la répartition des énergies modales

Pour les mêmes données qu'en [YAP96], on trace, figure 5.3, le rapport des énergies totales des deux poutres en fonction du facteur d'amortissement interne  $\eta$ . Le résultat 'exact' est obtenu par une décomposition en ondes forcées (comme au chapitre précédent), et est en accord avec le résultat donné par Yap et Woodhouse (trait fort de la figure 5.2). Deux résultats SmEdA sont présentés : en trait fort, le calcul  $SmEdA^{max}$ , qui concorde parfaitement avec le calcul exact, et en trait pointillé, le calcul  $SmEdA^1$ , qui donne des résultats erronés quand l'amortissement est faible. La prise en compte de la répartition des énergies modales différenciant ces deux calculs SmEdA, on peut attribuer la cause des erreurs du modèle  $SmEdA^1$  à son hypothèse d'équirépartition.

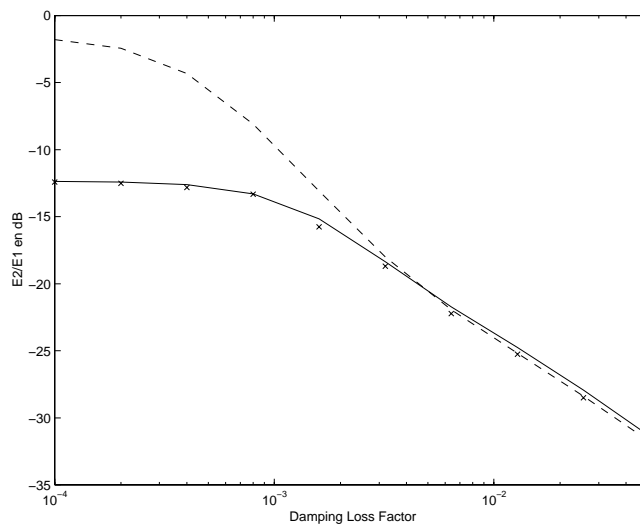


Figure 5.3. Rapport des énergies totales,  $E_2/E_1$ , en fonction du facteur d'amortissement interne  $\eta$ . Bande de fréquence ([2560 Hz-5100 Hz]). Comparaison de trois calculs : x, exact, —,  $SmEdA^{max}$  ; ----,  $SmEdA^1$ .  $L_1=1$  m,  $L_2=0,7$  m,  $\rho_1 S_1=\rho_2 S_2=0,065$  kg/m,  $E_1 I_1=E_2 I_2=0,424$  Pa.m<sup>4</sup>,  $\Omega=2,5$  N.m/rad.  $N_1=10$  modes,  $N_2=7$  modes.

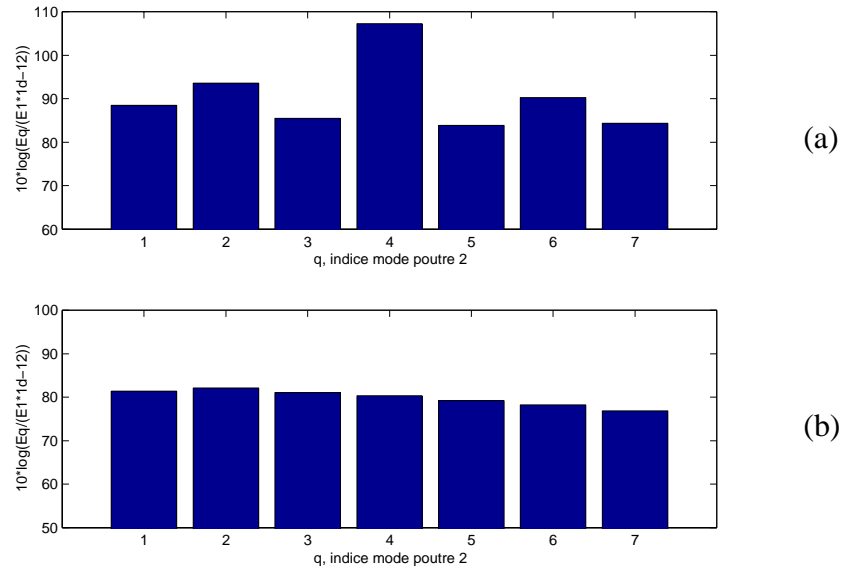


Figure 5.4. Répartition des énergies modales<sup>1</sup> de la poutre réceptrice pour les deux valeurs extrêmes du facteur d'amortissement interne de la figure précédente : (a)  $\eta=0,0001$ . (b)  $\eta=0,052$ .

On donne, figure 5.4, la répartition des énergies modales de la poutre non excitée pour les deux valeurs extrêmes d'amortissement de la figure précédente. On constate pour la valeur la plus forte ( $\eta=0,052$ ) que l'hypothèse d'équirépartition est respectée ; SmEdA<sup>1</sup> donne alors de bons résultats. Par contre, pour la valeur faible, il y a une très grande disparité entre les énergies des modes ; le mode d'indice 4 domine. Dans ce cas, SmEdA<sup>1</sup> ne peut donner de bons résultats car il ne peut décrire ces variations de la répartition des énergies modales de la poutre 2.

La cause de ces disparités est due au fait que les coïncidences fréquentielles jouent un rôle important dans les couplages modaux quand l'amortissement est faible. Certains modes sont fortement couplés entre eux alors que d'autres le sont beaucoup moins.

On montre, figure 5.5, les facteurs de couplages intermodaux pour quatre valeurs d'amortissements différents. On voit nettement l'influence de l'amortissement sur les facteurs de couplages intermodaux. Pour une valeur faible d'amortissement (figure 5.5 (a)), le couplage entre les deux poutres est dominé par l'interaction du mode d'indice 5 de la poutre 1 et du mode d'indice 4 de la poutre 2, car ils sont de fréquences propres voisines. Par conséquent, le mode 4 de la poutre 2 est beaucoup plus excité que les autres modes de cette poutre (voir figure 5.4 (a)). Pour un amortissement plus élevé (figure 5.5 (d)), on constate que

<sup>1</sup> L'énergie de chaque mode est représentée sur une échelle logarithmique,  $10^6 \log \frac{E_q}{E_1 \cdot 10^{-12}}$ , en fonction de l'indice modal  $q$ .

tous les modes de la poutre 2 sont couplés avec les modes de la poutre 1 avec des ‘intensités’ sensiblement équivalentes. L’équirépartition des énergies modales de la poutre 2 est alors respectée (voir figure 5.4 (b)).

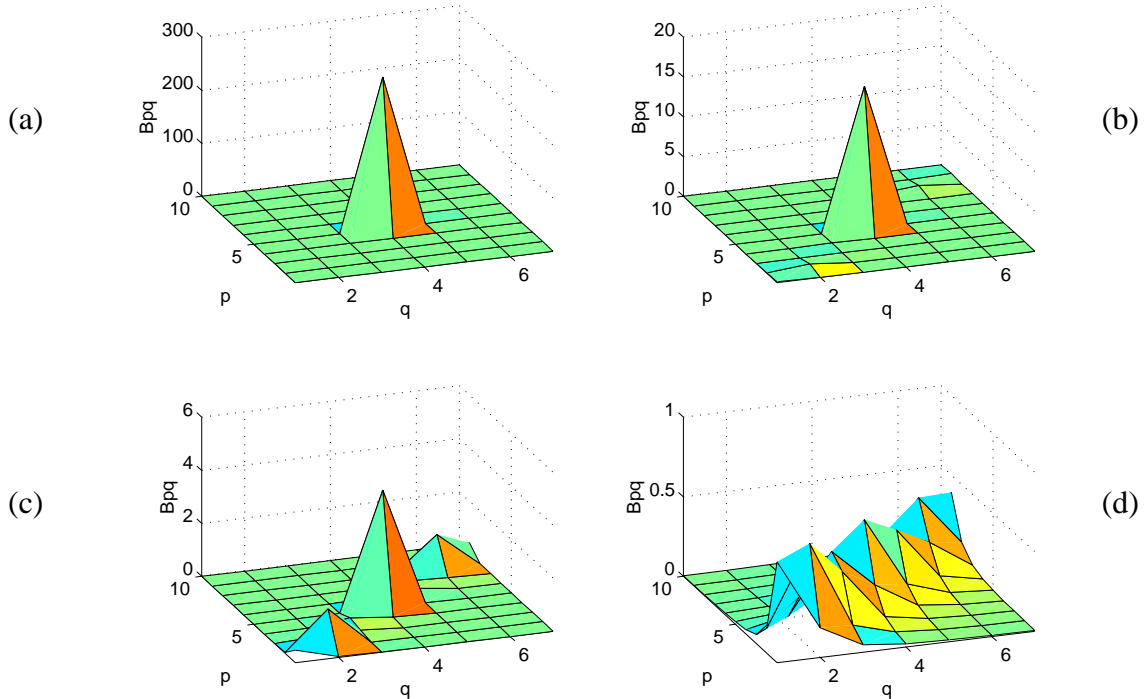


Figure 5.5. Facteurs de couplages intermodaux en fonction des couples  $(p,q)$  de modes. Quatre cas d’amortissements différents : (a)  $\eta=0,0001$ . (b)  $\eta=0,0016$ . (c)  $\eta=0,0064$ . (d)  $\eta=0,052$ .

Dans la littérature ([FAH92], [MAC97], [MIN97],...), le facteur de recouvrement modal est souvent cité comme étant un des paramètres permettant de délimiter le domaine de validité de la SEA. Pour des valeurs de recouvrement modal supérieur à un, il est conventionnellement admis que la SEA donne des résultats corrects (pour le couplage de deux sous-systèmes). On donne, tableau 5.1, le facteur de recouvrement modal pour chacune des poutres (voir expression (4.4), chapitre 4). On souligne que les valeurs données ici sont celles des sous-systèmes et non de la structure globale : la somme des deux donne un ordre de grandeur du recouvrement modal de la structure entière compte tenu de l’additivité des densités modales (voir [BOI85]) et de l’amortissement identique pour les deux poutres.

$\eta$	0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0016	0,0032	0,0064	0,013	0,026	0,052
$Rm_1$	0,0015	0,0031	0,0062	0,0124	0,0247	0,0494	0,0989	0,197	0,395	0,791
$Rm_2$	0,0011	0,0022	0,0043	0,0087	0,0173	0,0346	0,0692	0,138	0,276	0,553

Tableau 5.1. Facteurs de recouvrement modal pour les valeurs des facteurs d’amortissement interne de la figure 5.2.  $Rm_1$  : Poutre 1,  $Rm_2$  : Poutre 2. Valeurs établies à partir des densités modales asymptotiques.



Vis-à-vis des coïncidences fréquentielles, ce facteur est sans doute un indicateur important de validité de l'hypothèse d'équirépartition car il caractérise le 'degré de superposition des modes'. On rappelle qu'il mesure le rapport entre la moyenne des largeurs de bandes d'amortissements modales et la moyenne des séparations fréquentielles entre les modes ([YAP96]). Plus il est grand, moins l'effet de coïncidences fréquentielles a un rôle important, plus l'hypothèse d'équirépartition a une probabilité grande d'être respectée ; on souligne cependant, comme en références [YAP96], [MIN97], que ce facteur ne peut permettre à lui seul de déterminer la qualité de la prédiction. En effet, on constate, tableau 5.1, que les valeurs des facteurs de recouvrement modal sont inférieurs à un pour certaines valeurs d'amortissement pour lesquels  $SmEdA^1$  donne des résultats corrects. Le nombre de modes de chaque sous-système est certainement un paramètre à considérer. En effet, il est possible de constater que pour des systèmes présentant un grand nombre de modes mais un facteur de recouvrement modal faible, les REM présentent des disparités mais les résultats globaux (énergies totales) obtenus en considérant l'équirépartition sont corrects. Il semble que dans ce cas, les erreurs sur les énergies modales dues à l'hypothèse d'équirépartition s'annulent sous l'effet de la moyenne sur un grand nombre de modes.

### 2.1.1.2. Analyse des différences entre $SEA^{onde}$ et $SmEdA^1$

#### A - Structure précédente

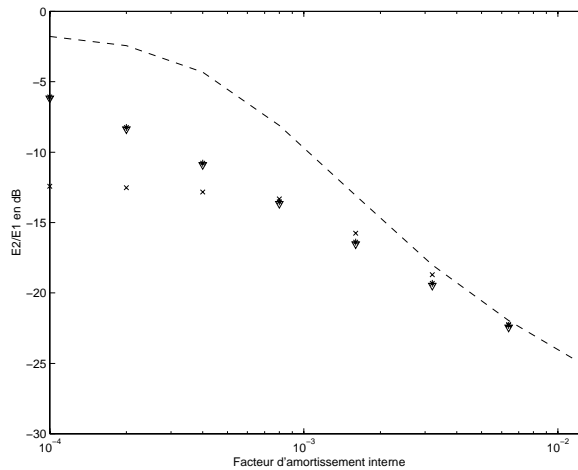


Figure 5.6. Cas identique à celui de la figure 5.2. Comparaison de quatre calculs : x, exact ; ----,  $SmEdA^1$  avec les facteurs de couplages intermodaux déterministes; ∇,  $SmEdA^1$  moyenné avec les facteurs de couplages intermodaux moyennés sur une population de structures; \*, SEA avec les CLF calculés par l'approche onde.

Le cas traité à la figure 5.6 est identique à celui de la figure 5.3 mais des calculs différents sont présentés. On constate, comme Yap et Woodhouse, que le calcul SEA avec le facteur de perte par couplage évalué par l'approche onde ( $SEA^{onde}$ ) surestime les transferts d'énergies vibratoires quand l'amortissement est faible.

On note également une différence entre le résultat  $SEA^{onde}$  et le résultat  $SmEdA^1$ . La description de la REM n'est pas en cause car les deux calculs font l'hypothèse d'équirépartition ; la différence provient de la technique de calcul des facteurs de perte par couplage utilisées par les deux modèles et plus particulièrement des hypothèses qui se rattachent à ces techniques : le calcul du facteur de perte par couplage par l'approche onde (voir [LYO95] chapitre 10) considère des poutres de dimensions semi-infinies ce qui revient à faire une moyenne d'ensemble sur une population de poutres ayant une distribution des fréquences propres équiprobable dans la bande de fréquence considérée (voir [HOD86], [LYO95] paragraphes 2.2-2.3 et 10.1). Alors que le facteur de perte par couplage considéré par le modèle  $SmEdA^1$  est déterminé à partir des facteurs de couplages intermodaux et, par conséquent, tient compte des fréquences propres de la structure déterministe (voir expressions (3.21) et (3.38), chapitre 3).

En moyennant les facteurs de couplages intermodaux sur une population de structures on peut retrouver le résultat  $SEA^{onde}$  à partir d'un calcul  $SmEdA^1$ . En effet, en référence [LYO95], Lyon donne la valeur moyenne du facteur de couplage intermodal pour une population de structures telle que les fréquences propres de chaque sous-système aient leur valeur uniformément probable dans l'intervalle de fréquence d'intérêt,  $\Delta\omega$  (rappelons que cette hypothèse est peu réaliste, mais est couramment utilisée compte tenu des résultats simples qu'elle fournit) :

$$\langle \beta_{pq}^{12} \rangle_{\omega_p^1, \omega_q^2} = \frac{\pi}{2\Delta\omega} (\gamma_{pq}^{12})^2. \quad (5.1)$$

Cette formule peut remplacer les facteurs de couplages intermodaux déterministes du calcul  $SmEdA^1$  pour donner un modèle appelé  $SmEdA^1$  moyenné représentatif de la population de structures tel qu'elle a été considérée. Cela revient à effectuer un calcul SEA en prenant en compte le facteur de perte par couplage donné par :

$$\langle \eta_{12} \rangle_e = \frac{\sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \langle \beta_{pq}^{12} \rangle_{\omega_p^1, \omega_q^2}}{N_1 \omega_c}. \quad (5.2)$$

Figure 5.6, on a représenté les résultats du calcul  $SmEdA^1$  moyenné. Ceux-ci coïncident parfaitement avec les résultats  $SEA^{onde}$ . On met donc bien en évidence que la différence entre le calcul SEA et le calcul  $SmEdA^1$  repose sur le calcul du facteur de perte par couplage.

Figure 5.7, on représente les valeurs de  $\langle \beta_{pq}^{12} \rangle_{\omega_p^1, \omega_q^2}$ . Ceux-ci ne dépendent pas de l'amortissement et des fréquences propres. Un modèle  $SmEdA^{max}$  tenant compte de ces

facteurs présenteraient donc peu d'intérêt dans ce cas de couplage car la moyenne d'ensemble gomme toutes les disparités entre les modes.

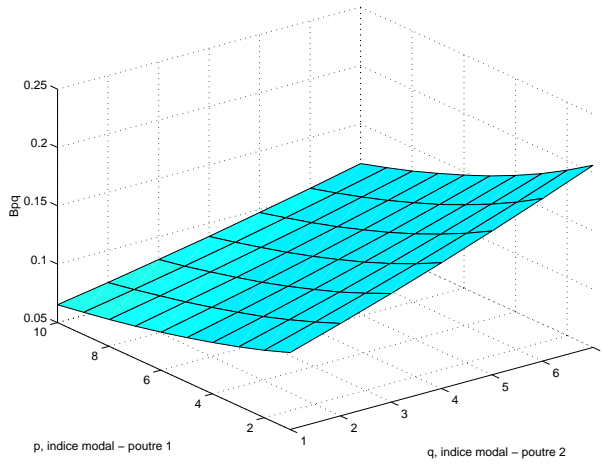


Figure 5.7. Moyenne d'ensemble des facteurs de couplages intermodaux,  $\langle \beta_{pq}^{12} \rangle_{\omega_p^1, \omega_q^2}$ , en fonction des couples  $(p, q)$  de modes.

**B - Couplage de deux poutres identiques**

On considère, figure 5.8, le couplage de deux poutres strictement identiques et couplées comme précédemment par un ressort de torsion. On constate dans ce cas que le modèle SEA<sup>onde</sup> donne des résultats très erronés alors que les modèles SmEdA<sup>1</sup> et SmEdA<sup>max</sup> donnent de très bons résultats.

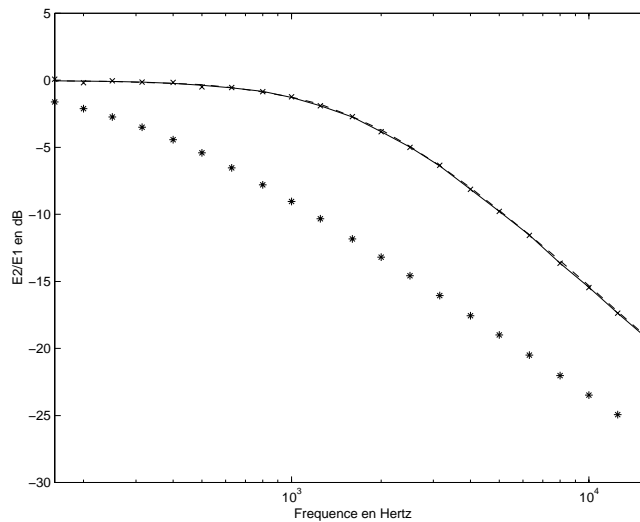


Figure 5.8. Rapport des énergies totales,  $E_2/E_1$ , par tiers d'octave. Comparaison de quatre calculs : x, exact ; —, SmEdA<sup>max</sup> ; ---, SmEdA<sup>1</sup>, \*, SEA avec les CLF calculés par l'approche onde. Poutres identiques :  $L_1=L_2=2$  m,  $\rho_1 S_1=\rho_2 S_2=0,065$  kg/m,  $E_1 I_1=E_2 I_2=0,424$  Pa.m<sup>4</sup>,  $\eta_1=\eta_2=0,001$ ,  $\Omega=2,5$  N.m/rad.

Les erreurs du modèle SEA<sup>onde</sup> pour les structures périodiques sont bien connues (voir par exemple [LAN97b]). Elles sont dues au fait que le modèle ne tient pas compte des fortes coïncidences fréquentielles. La moyenne sur la population de structures masque le fait que les poutres de la structure déterministe aient les mêmes fréquences propres (en théorie). On présente, figure 5.9, un exemple de facteurs de couplages intermodaux pour le couplage des deux poutres identiques. Ceux-ci montrent bien que le couplage entre les deux poutres est dominé par les couplages entre les modes de mêmes fréquences propres. Dans ce cas, bien que le recouvrement modal soit faible ( $Rm_1=0,01$  et  $Rm_2=0,06$ ), l'hypothèse d'équirépartition est respectée et les résultats de SmEdA<sup>1</sup> sont corrects.

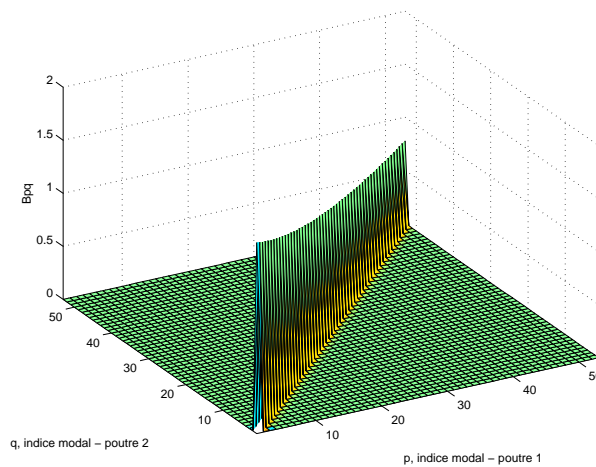


Figure 5.9. Facteurs de couplages intermodaux en fonction des couples de modes  $(p,q)$ . Cas des poutres identiques de la figure précédente. Tiers d'octave centré sur 16000 Hz.

On souligne que la transmission des vibrations à travers des structures périodiques est très sensible au désordre structural (voir [LAN97b]). Les résultats présentés dans ce paragraphe ont donc principalement une validité théorique car en pratique il y a toujours de petites différences entre les fréquences propres des modes des deux structures apparemment identiques. Le but de ce paragraphe n'était pas de faire une étude détaillée sur ce type de couplage mais de mettre en exergue la différence en SmEdA<sup>1</sup> et SEA<sup>onde</sup>.

### 2.1.1.3. Conclusion

On a vu que les coïncidences fréquentielles jouent un rôle important sur le transfert d'énergie entre les poutres quand l'amortissement est faible. Elles conduisent à une disparité de la répartition des énergies modales du sous-système non excité. Ceci induit alors en erreur les modèles SmEdA<sup>1</sup> et SEA<sup>onde</sup> qui supposent que la répartition des énergies des modes est uniforme. On a remarqué que ces deux calculs se différencient par le calcul des facteurs de perte par couplage. L'un considérant la structure déterministe alors que l'autre considère une population de structures.

Le calcul  $\text{SmEdA}^{\text{max}}$  a permis de modéliser correctement le comportement vibratoire des poutres quelle que soit la valeur de l'amortissement car ce modèle prend en compte 'finement' les interactions modales et les énergies des modes.

### 2.1.2. Couplage de trois poutres par des ressorts de torsion

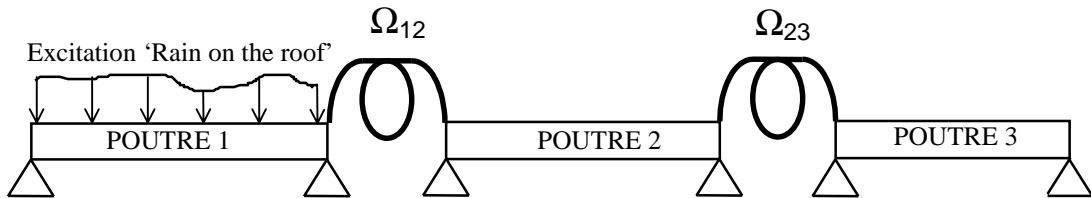


Figure 5.10. Trois poutres vibrant en flexion couplées par des ressorts aux niveaux des extrémités.

On souhaite montrer dans ce paragraphe 'l'effet de filtrage des jonctions' entre les sous-systèmes ainsi que l'apport du modèle  $\text{SmEdA}^{\text{max}}$  par rapport au modèle SEA vis-à-vis de cet effet. On considère pour cela le couplage de trois poutres vibrant en flexion pure et couplées par des ressorts de torsion comme représenté figure 5.10. La poutre 1 est excitée par des efforts de type 'rain on the roof'. Cette structure peut être décomposée en trois sous-systèmes compte tenu des raideurs 'faibles' des ressorts.

#### 2.1.2.1. Mise en évidence de l'effet de 'filtrage des jonctions'

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer sur le système considéré que les couplages entre les sous-systèmes jouent 'des rôles de filtres' vis-à-vis des répartitions des énergies modales des sous-systèmes.

Dans la littérature Langley [LAN92],[LAN94] a montré, par une approche par les ondes, que les jonctions jouaient un rôle de filtre suivant la direction des ondes et que cela pouvait conduire à des champs hautement non diffus que l'on peut rapprocher de la non-équirépartition des énergies modales.

Pour mettre en évidence le rôle des interactions modales sur les REM des sous-systèmes non excités, nous allons déterminer de manière approchée les énergies modales en fonction des facteurs de couplages intermodaux.

En considérant les équations énergétiques modales du mouvement pour les trois sous-systèmes et en faisant intervenir les approximations données en annexe C, basées sur le

couplage faible entre les sous-systèmes, on peut écrire les énergies de chaque mode des trois sous-systèmes :

$$\tilde{E}_p^1 = \frac{\prod_{inj}^{1p}}{\omega_p^1 \eta_p^1 + \sum_{q=1}^{N_2} \beta_{pq}^{12}}, \quad \forall p \in [1, \dots, N_1], \quad (5.3)$$

$$\tilde{E}_q^2 = \frac{\sum_{p=1}^{N_1} \beta_{pq}^{12} \cdot \tilde{E}_p^1}{\omega_q^2 \eta_q^2 + \sum_{p=1}^{N_1} \beta_{pq}^{12} + \sum_{r=1}^{N_3} \beta_{qr}^{23}}, \quad \forall q \in [1, \dots, N_2], \quad (5.4)$$

$$\tilde{E}_r^3 = \frac{\sum_{q=1}^{N_2} \beta_{qr}^{23} \cdot \tilde{E}_q^2}{\omega_r^3 \eta_r^3 + \sum_{q=1}^{N_2} \beta_{qr}^{23}}, \quad \forall r \in [1, \dots, N_3]. \quad (5.5)$$

En posant,

$$C_{pq}^{12} = \frac{\beta_{pq}^{12}}{\omega_q^2 \eta_q^2 + \sum_{p=1}^{N_1} \beta_{pq}^{12} + \sum_{r=1}^{N_3} \beta_{qr}^{23}}, \quad C_{qr}^{23} = \frac{\beta_{qr}^{23}}{\omega_r^3 \eta_r^3 + \sum_{q=1}^{N_2} \beta_{qr}^{23}}, \quad (5.6)$$

on peut écrire :

- pour le sous-système 2 :

$$\tilde{E}_q^2 = \sum_{p=1}^{N_1} C_{pq}^{12} \tilde{E}_p^1, \quad (5.7)$$

- et pour le sous-système 3 :

$$\tilde{E}_r^3 = \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} C_{pq}^{12} C_{qr}^{23} \tilde{E}_p^1. \quad (5.8)$$

On constate que les énergies modales des sous-systèmes non excités sont liées linéairement à celles du sous-système excité par les relations (5.7,5.8). En général, si le sous-système 1 est excité par une excitation ‘rain on the roof’, les énergies modales sont approximativement toutes identiques. Il en va différemment pour les sous-systèmes non excités, car le ‘filtrage’ lié au couplage et caractérisé par les termes  $C_{pq}^{12}$  et  $C_{qr}^{23}$  peut conduire à une répartition énergétique modale très hétérogène (les facteurs de couplages intermodaux pouvant varier fortement suivant les indices des modes).

Remarque : Si on suppose que les termes d’amortissement dominant aux dénominateurs des expressions de (5.6) (ce qui est souvent justifié dans un cas de couplage faible) et que les bandes d’amortissement modales d’un même sous-systèmes varient faiblement d’un mode à l’autre, alors les termes  $C_{pq}^{12}$  (resp.  $C_{qr}^{23}$ ) et  $\beta_{pq}^{12}$  (resp.  $\beta_{qr}^{23}$ ) différent

uniquement d'une constante multiplicative. Dans ce cas, les facteurs de couplages intermodaux jouent un rôle direct sur la REM des sous-systèmes non excités.

Pour illustrer ces propos, on présente une application numérique sur le couplage des trois poutres vibrant en flexion représenté figure 5.10. On considère que le facteur d'amortissement interne est le même pour tous les modes. On donne, figure 5.11, le rapport des énergies totales  $E_3/E_1$  en fonction de la fréquence. Trois calculs SmEdA sont présentés :

- le premier,  $SmEdA^{max}$ , est la résolution exacte des équations énergétiques modales ;
- le second,  $SmEdA^{simpl}$ , correspond aux équations (5.7,5.8) ;
- le dernier,  $SmEdA^1$ , suppose l'équirépartition.

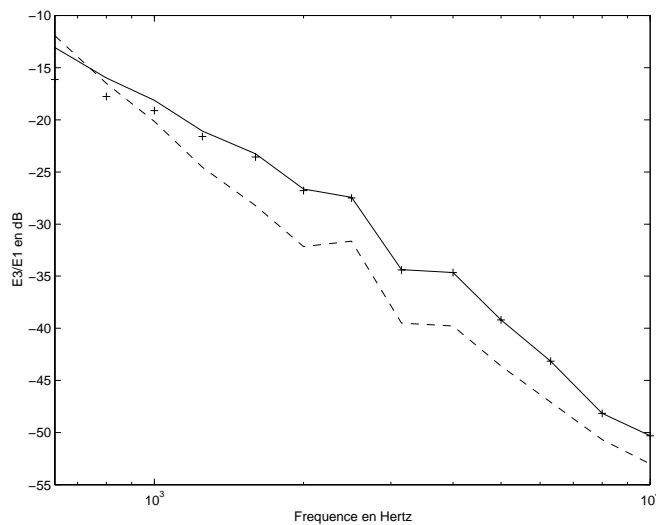


Figure 5.11. Rapport des énergies totales,  $E_3/E_1$ , par tiers d'octave. Comparaison de trois calculs : —,  $SmEdA^{max}$  ; ----,  $SmEdA^1$  ; +,  $SmEdA^{simpl}$  (avec les équations (5.7,5.8)).  $L_1=3,5$  m,  $L_2=4,5$  m,  $L_3=4$  m,  $\rho_1 S_1=\rho_2 S_2=\rho_3 S_3=0,065$  kg/m,  $E_1 I_1=E_2 I_2=E_3 I_3=0,424$  Pa.m<sup>4</sup>,  $\eta_1=\eta_2=\eta_3=0,001$ ,  $\Omega_{12}=2,5$  N.m/rad,  $\Omega_{23}=2,5$  N.m/rad.  $Rm_1 \in [0,022 ; 0,087]$ ,  $Rm_2 \in [0,028 ; 0,11]$ ,  $Rm_3 \in [0,025 ; 0,10]$ .

On constate que le calcul  $SmEdA^{simpl}$  donne des résultats quasi identiques à ceux du calcul  $SmEdA^{max}$  ce qui valide pour ce cas les REM issues des équations (5.7,5.8). Ceci est également illustré, figure 5.12, où est donné un exemple de répartition des énergies modales de la troisième poutre obtenu par les mêmes calculs que figure 5.11. La très grande disparité de cette répartition est la cause des erreurs du calcul  $SmEdA^1$ , elle est due à ce que l'on a appelé l'effet de 'filtrage des jonctions'.

Les valeurs des facteurs de couplages intermodaux jouent donc un rôle important dans la répartition des énergies modales des sous-systèmes non excités. On peut assimiler le rôle des jonctions entre les sous-systèmes à des sortes de 'filtres' qui peuvent conduire à une grande disparité des répartitions des énergies modales des sous-systèmes éloignés du sous-système excité. Dans ce cas, les modèles basés sur l'hypothèse d'équirépartition peuvent

conduire à une mauvaise estimation des transferts d'énergies, spécialement pour les systèmes composés de multiples sous-systèmes (voir également [YAP96]).

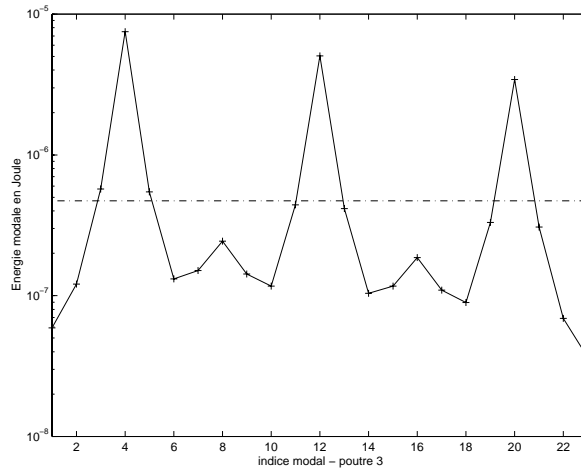


Figure 5.12. Répartition des énergies modales de la poutre 3 pour le tiers d'octave centré sur 10000 Hz. Mêmes calculs que la figure précédente.  $Rm_1=0,087$ ,  $Rm_2=0,11$ ,  $Rm_3=0,10$ .

### 2.1.2.2. Calcul SEA avec des CLF évalués par SEA inverse sur les sous-systèmes couplés 2 à 2.

Sur le même exemple que le paragraphe précédent, on souhaite montrer que les équations de la SEA ne peuvent suffire à elles seules, à représenter le comportement vibratoire d'une structure composée de plus de trois sous-systèmes, même si les facteurs de perte par couplage représentent correctement le couplage des sous-systèmes deux à deux. Pour cela, nous allons réaliser un calcul SEA à partir des facteurs de perte par couplage évalués par SEA inverse sur les sous-systèmes couplés deux à deux. Le calcul se décompose en trois étapes :

- 1<sup>re</sup> étape : On considère les deux premières poutres couplées (sans la troisième). La poutre 1 est excitée par des efforts de type 'rain on the roof'. On calcule les énergies totales des deux poutres,  $E_1^{1-2}$ ,  $E_2^{1-2}$ , par une méthode de décomposition en ondes forcées. Puis on déduit le facteur de perte par couplage  $\eta_{12}^{1-2}$  en écrivant l'équation SEA de la poutre 2 non excitée :

$$\eta_{12}^{1-2} = \frac{\eta_2 E_2^{1-2}}{E_1^{1-2} - \frac{n_1}{n_2} E_2^{1-2}}, \quad (5.9)$$

où  $n_1$ ,  $n_2$  sont les densités modales asymptotiques de la poutre 1 et de la poutre 2 ([LYO95]).



- 2<sup>e</sup> étape : On considère les poutres 2 et 3 couplées. La poutre 2 est excitée par des efforts de type ‘rain on the roof’. On calcule les énergies totales  $E_2^{2-3}$  et  $E_3^{2-3}$  des deux poutres, et on applique:

$$\eta_{23}^{2-3} = \frac{\eta_3 E_3^{2-3}}{E_2^{2-3} - \frac{n_2}{n_3} E_3^{2-3}}, \quad (5.10)$$

où  $n_3$  est la densité modale asymptotique de la poutre 3.

- 3<sup>e</sup> étape : On considère le système composé des trois poutres couplées et on applique les équations de la SEA en tenant compte des facteurs de perte par couplage  $\eta_{12}^{1-2}$  et  $\eta_{23}^{2-3}$ .

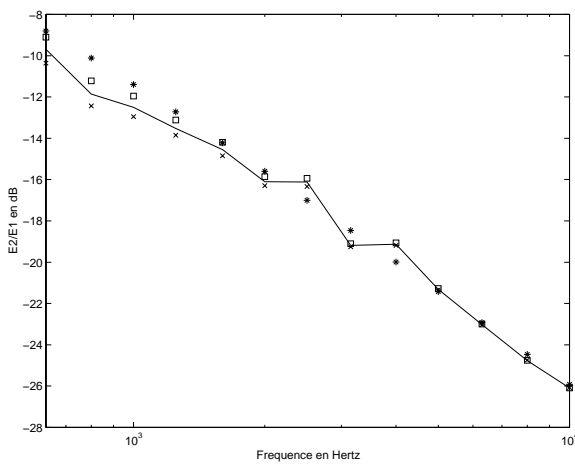


Figure 5.13a. Rapport des énergies totales,  $E_2/E_1$ , par tiers d'octave.

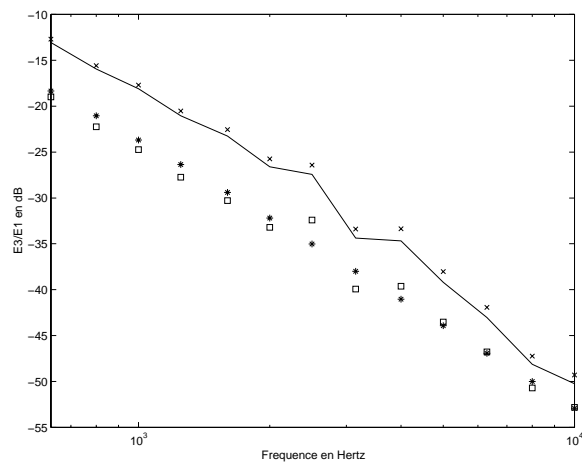


Figure 5.13b. Rapport des énergies totales,  $E_3/E_1$ , par tiers d'octave.

Comparaison de quatre calculs : x, exact, —,  $SmEdA^{max}$ ; \*,  $SEA^{onde}$  avec les CLF calculés par l'approche onde ; □, SEA avec les CLF évalués par SEA inverse entre les poutres couplées 2 à 2. Configuration identique à celle de la figure 5.11.

Les résultats de ce calcul sont donnés figures 5.13a,b. Il est évident que les transferts d'énergie entre la poutre 1 et la poutre 2 sont bien évalués par ce calcul. Par contre, on constate qu'il ne modélise pas correctement les transferts d'énergie vibratoire entre la poutre 2 et la poutre 3 malgré que le facteur de perte par couplage entre ces deux sous-systèmes ait été évalué par SEA inverse. Ceci signifie que les équations de la SEA ne suffisent pas, à elles seules, à modéliser le comportement vibratoire de la structure. Les CLF, qui décrivent en moyenne les couplages modaux ne modélisent pas correctement l'effet de ‘filtrage des jonctions’. Il est nécessaire de considérer individuellement chaque interaction modale ce que permet le modèle  $SmEdA^{max}$  (voir figures 5.13a,b).

### 2.1.2.3. Conclusion

Le couplage de poutres a mis en lumière l'effet de 'filtrage des jonctions' entre les sous-systèmes. Cet effet qui se caractérise par les facteurs de couplages intermodaux peut conduire à une forte disparité des répartitions des énergies modales des sous-systèmes non excités. L'observation des valeurs de ces facteurs permet donc de donner un ordre d'idée - *a priori* - sur le respect ou non de l'hypothèse d'équirépartition.

On a vu que le modèle SmEdA<sup>max</sup> modélise correctement l'effet des jonctions grâce à la prise en compte de la répartition des énergies modales et à la caractérisation des interactions modales par les facteurs de couplages intermodaux.

#### 2.1.3. Couplage de deux plaques en L : effet des coïncidences spatiales

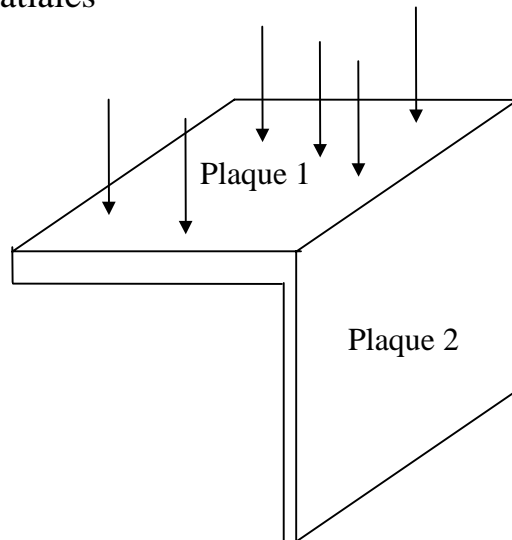


Figure 5.14. Deux plaques couplées en L. Plaque 1 excitée par des efforts de type 'rain on the roof'.

On considère la même structure qu'en références [BOI82]<sup>2</sup> et [BOI85]. Celle-ci est composée de deux plaques en acier couplées en L (figure 5.14) et s'apparente à la structure décrite au paragraphe 4.3 du chapitre 2. La plaque 1 est excitée par des efforts de type 'rain on the roof'.

Figure 5.15, on trace le rapport des énergies totales des deux plaques  $E_2/E_1$  par octave. On peut considérer comme 'exact' les résultats donnés par Boisson et al. [BOI85] obtenus par

<sup>2</sup> La courbe en trait fort de la figure 4 de cet article ne correspond pas à la courbe équivalente présentée en référence [BOI85] (figure 7, structure N°5)! Ne semblant pas non plus cohérente avec les cas d'excitation 1 et 2 de la même figure, on privilégiera les résultats de [BOI85].

la méthode des coefficients d'influence énergétique ([GUY82]). Les résultats donnés par  $SmEdA^{max}$  sont corrects (bien que l'on se rapproche d'une condition de couplage fort) alors que  $SmEdA^1$  et  $SEA^{onde}$  surestiment les transferts d'énergie vibratoire.

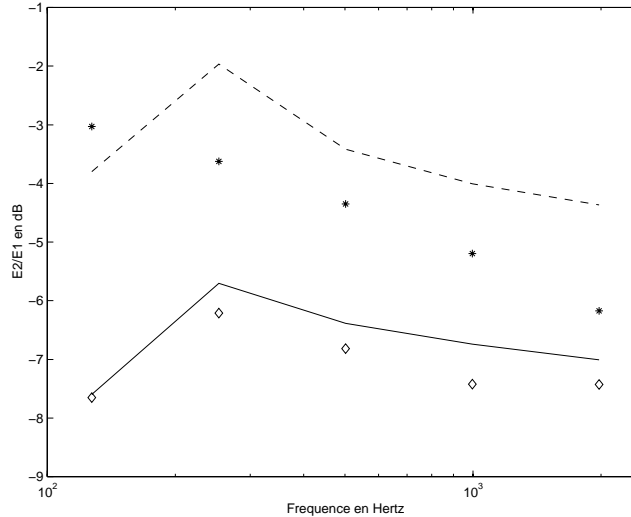


Figure 5.15. Rapport des énergies totales,  $E2/E1$ , par octave. Comparaison de plusieurs résultats : ◇, 'exact' donné par Boisson et al. dans ACUSTICA, —,  $SmEdA^{max}$ ; ---,  $SmEdA^1$ ; \*,  $SEA^{onde}$ . Plaque 1 :  $1.2m \times 1m \times 4mm$ . Plaque 2 :  $0,7m \times 1m \times 3mm$ .  $E_1 = E_2 = 2.10^{11} Pa$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 7800 kg/m^3$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0,01$ .

On donne, figure 5.16, les facteurs de couplages intermodaux pour l'octave centrée sur 500 Hz. Les modes de chaque plaque ont été classés suivant les pulsations propres croissantes. Les coïncidences fréquentielles jouent toujours leurs rôles mais interviennent également les coïncidences spatiales entre les modes. Celles-ci interviennent dans l'expression des facteurs de couplages intermodaux par l'intermédiaire du travail d'interaction modal. Pour le couplage de plaques suivant une arête, l'expression du travail d'interaction modal est donnée au chapitre 2 par l'équation (2.128). On constate que celui-ci est nul pour les couples de modes  $(mn, rs)$  pour lesquels les nombres d'onde des deux modes suivant l'arête de couplage ne sont pas égaux ( $n \neq s$ ). Dans ce cas les modes d'indice  $(mn, rs)$  ne sont pas couplés. Le phénomène de coïncidence spatiale peut donc conduire certains modes résonnants de la plaque 2 à ne pas être couplés avec les modes résonnants de la plaque 1. Leur énergie est alors nulle ce qui implique une grande disparité de la répartition des énergies modales de la plaque non excitée. Ceci est montré figure 5.17 où la REM de la plaque 2 est donnée pour la même octave que la figure 5.16. La disparité de cette répartition peut expliquer les causes des erreurs de  $SmEdA^1$  et  $SEA^{onde}$ .

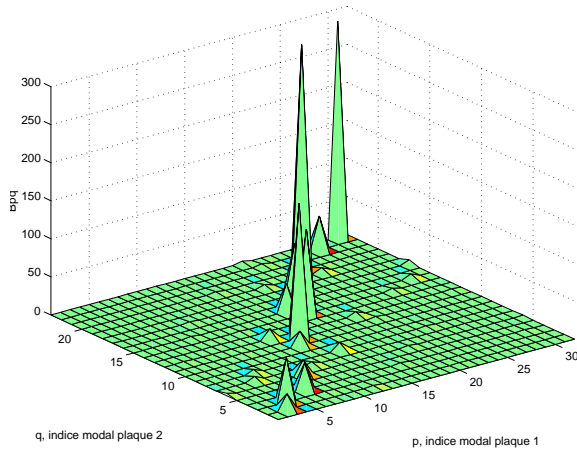


Figure 5.16. Facteurs de couplages intermodaux en fonction des couples  $(p,q)$  de modes. Octave centrée sur 500 Hz.

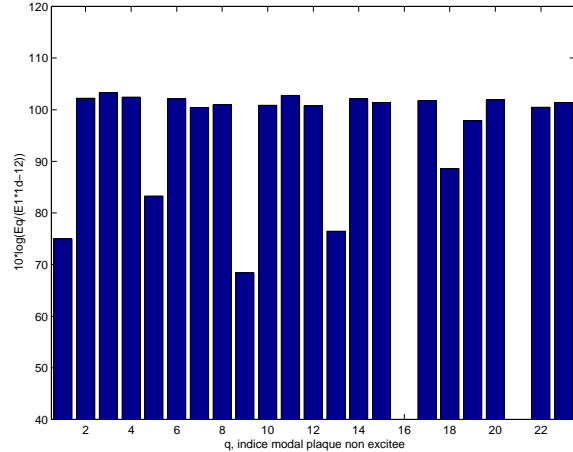


Figure 5.17. Répartition des énergies modales de la plaque réceptrice pour l'octave centrée sur 500 Hz (énergies exprimées en dB).

On donne, tableau 5.2, le facteur de recouvrement modal de chaque plaque par bande d'octave. Bien que pour certaines octaves, ce facteur soit proche ou supérieur à un, des erreurs de prédiction de SmEdA<sup>1</sup> et SEA<sup>onde</sup> subsistent. Une des raisons qui peut être avancée est que ce facteur ne tient pas compte du fait que certains modes ne participent pas au couplage des sous-systèmes (en conséquence du phénomène de coïncidence spatiale). Pour la plaque 2, ce facteur peut être supérieur à un alors qu'il n'y a pas 'recouvrement modal' pour les modes qui participent réellement à la réponse vibratoire.

	150 Hz	250 Hz	500 Hz	1000 Hz	2000 Hz
$Rm_1(N_1)$	0,125 (8)	0,249 (16)	0,495 (32)	0,983 (63)	1,953 (124)
$Rm_2(N_2)$	0,097 (4)	0,193 (12)	0,385 (23)	0,764 (49)	1,519 (80)

Tableau 5.2. Facteurs de recouvrement modal (nombre de modes) pour chaque bande d'octave. Valeurs établies à partir des densités modales asymptotiques ([LYO95]).  $Rm_1(N_1)$  : Plaque 1,  $Rm_2(N_2)$  : Plaque 2.

## 2.2. Excitation localisée spatialement

Pour les cas traités au paragraphe 2.1, l'excitation extérieure était toujours du type 'rain on the roof'. Cette excitation est nécessaire au modèle SEA pour permettre, à la fois, la décorrélation des forces généralisées et un respect de l'hypothèse d'équirépartition ([HOD86]). En effet, pour que la REM du sous-système excité soit uniforme, il faut notamment que tous les modes reçoivent la même quantité d'énergie de la part de la source extérieure, c'est-à-dire que la répartition des puissances modales injectées soit uniforme. L'excitation 'rain on the roof', spatialement répartie, permet effectivement d'injecter la même puissance dans tous les modes ([DIM88]). Cependant, dans la réalité, les sources d'excitation ne peuvent pas toujours être assimilées à des excitations 'rain on the roof'.

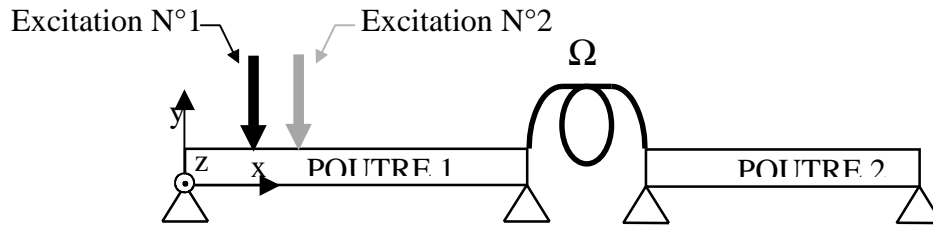


Figure 5.18. Deux poutres couplées par un ressort de torsion. Poutre 1 excitée par un effort ponctuel localisé en  $x_0$ . Cas d'excitation N°1 :  $x_0=0.15m$ . Cas d'excitation N°2 :  $x_0=0.2m$ .

Dans ce paragraphe, on souhaite montrer qu'à partir du modèle  $SmEdA^{max}$ , il est possible de considérer d'autres types d'excitations plus localisées spatialement. On considère la structure du paragraphe 2.1.1 avec deux cas d'excitations ponctuelles différents (voir figure 5.18). Pour chaque cas, l'excitation est une force de type bruit blanc. On rappelle que la question de la validité du modèle  $SmEdA^{max}$  pour ce type d'excitation a été abordée au paragraphe 3.2 du chapitre 4.

Position de l'excitation, $x_0$	0,15 m	0,20 m
Rapport E2/E1 - $SmEdA^{max}$	-9,9 dB	-21,7 dB
Rapport E2/E1 - Exact	-10,2 dB	-22,2 dB

Tableau 5.3. Résultats des rapports d'énergies pour deux points d'excitation différents. Bande de fréquence [2560 Hz-5100 Hz].  $\eta=0,001$ .  $Rm_1=0,015$ ,  $Rm_2=0,011$ .

Tableau 5.3, on donne les rapports des énergies totales des deux poutres qui ont été calculés pour les deux cas d'excitation. On note un bon accord entre les résultats  $SmEdA^{max}$  et les résultats 'exact' ce qui montre que  $SmEdA^{max}$  peut prendre en compte les variations de la répartition des puissances modales injectées de la poutre 1.

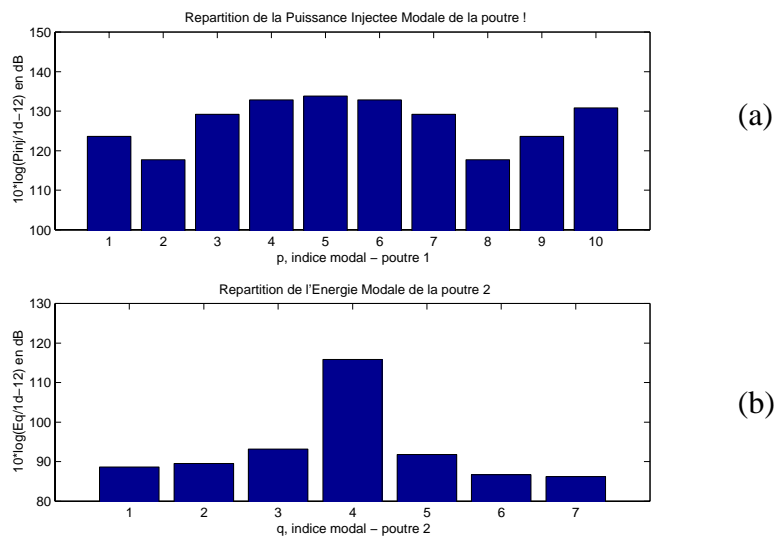


Figure 5.19. Cas de l'excitation ponctuelle localisée en  $x_0=0,15 m$ . (a) : Répartition des puissances modales injectées de la poutre 1 (exprimées en dB). (b) : Répartition des énergies modales de la poutre 2 (exprimées en dB). Bande de fréquence [2560 Hz - 5100 Hz].  $L_1=1 m$ ,  $L_2=0,7 m$ ,  $\rho_1 S_1= \rho_2 S_2=0,065 kg/m$ ,  $E_1 I_1=E_2 I_2=0,424 Pa.m^4$ ,  $\eta_1=\eta_2=0,001$ ,  $\Omega=2,5 N.m/rad$ .  $Rm_1=0,015$ ,  $Rm_2=0,011$ .

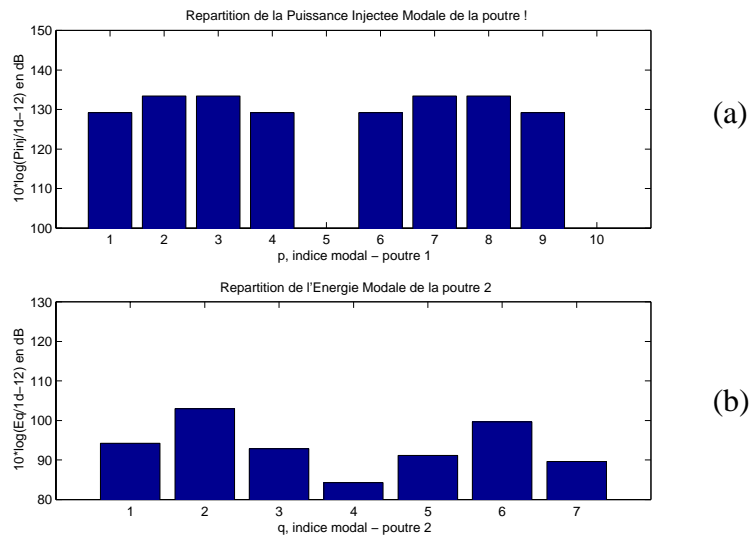


Figure 5.20. Cas de l'excitation ponctuelle localisée en  $x_0=0,2$  m. Voir figure précédente.

En comparant les figures 5.19 et 5.20, on voit que la grande différence du rapport  $E2/E1$  entre les deux cas est principalement due au fait que le mode 5 du sous-système 1 est fortement couplé avec le mode 4 du sous-système 2 (voir figure 5.5 pour des amortissements faibles) et que, dans un cas, le mode 5 de la poutre 1 est fortement excité (figure 5.19 (a)), alors que, dans l'autre cas (figure 5.20 (a)), ce mode n'est pas excité (excitation localisée sur un nœud du mode 5). Les modes doivent être considérés indépendamment les uns les autres pour pouvoir prendre en compte ce phénomène.

L'effet des 'excitations localisées' sur les répartitions des énergies est équivalent à l'effet de 'filtrage des jonctions' entre les sous-systèmes car l'excitation extérieure agissant sur un système est souvent le résultat de l'action d'un autre système.

### 2.3. *Sous-systèmes avec des amortissements modaux variables*

Après avoir étudié les conséquences des 'variations' des puissances échangées entre les modes, et des puissances modales injectées, il nous reste à étudier l'influence des variations sur les puissances dissipées modales.

En référence [SCH68], Scharon et Lyon proposent des résultats de mesures expérimentales des facteurs d'amortissements modaux d'une poutre vibrant en flexion (voir figure 4 en [SCH68]). Ces résultats montrent que le facteur d'amortissement peut varier d'un mode à l'autre dans une plage comprise entre 0,01 et 0,1, et que la répartition des valeurs est plus ou moins uniforme sur une représentation logarithmique. À partir de ce constat, on se

propose d'effectuer des calculs théoriques en prenant comme loi de répartition des valeurs des facteurs d'amortissements modaux, une loi d'équiprobabilité sur une échelle logarithmique pour des valeurs comprises entre  $\eta_{\min}$  et  $10\eta_{\min}$ . C'est à dire que le facteur d'amortissement interne du mode  $p$  du sous-système  $\alpha$ ,  $\eta_p^\alpha$ , est donné par :

$$\eta_p^\alpha = \eta_{\min} 10^{\Gamma'} , \quad (5.11)$$

où  $\Gamma'$  suit une loi de densité de probabilité uniforme entre 0 et 1, et nulle en dehors de ces bornes.

On considère comme structure de test, deux poutres vibrant en flexion couplées par un ressort de torsion (figure 5.1). La poutre 1 est sollicitée par une excitation 'rain on the roof'. On donne, figure 5.21, un exemple de répartition des facteurs d'amortissements modaux des deux poutres avec  $\eta_{\min}=0,001$ . Pour permettre une modélisation SEA, on calcule pour chaque bande de fréquence, un facteur d'amortissement interne équivalent pour chaque sous-système en effectuant la moyenne arithmétique de ces facteurs.

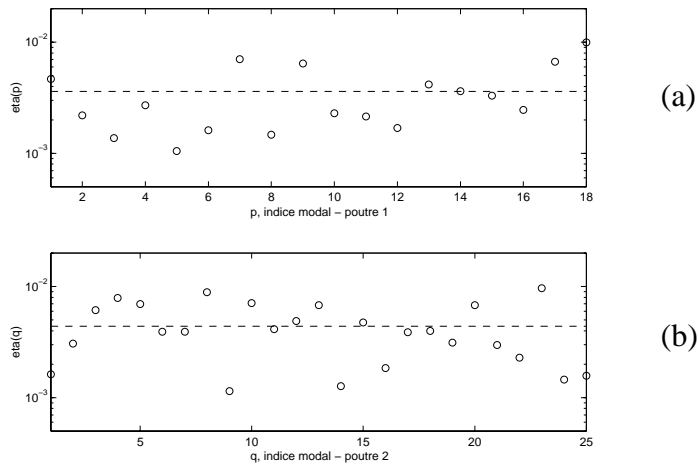


Figure 5.21. Exemple de valeurs des facteurs d'amortissements modaux pour le tiers d'octave centré sur 16000Hz.  $\circ$ , facteur d'amortissement interne pour un mode individuel ; ---, moyenne des facteurs d'amortissements internes pour le tiers d'octave. (a) : poutre 1. (b) : poutre 2.

On trace, figure 5.22, le rapport des énergies totales  $E2/E1$  par tiers d'octave pour une plage de variation des facteurs d'amortissements modaux de 0,001 à 0,01 ( $\eta_{\min}=0,001$ ). Un calcul issu de la double formulation modale donne un élément de comparaison. Deux calculs  $SmEdA^{\max}$  permettent de montrer que les écarts constatés entre le calcul SEA et le calcul modal ne sont pas dus à l'effet de 'filtrage des jonctions'. En effet, le premier calcul  $SmEdA^{\max}$  tient compte des facteurs d'amortissements différents d'un mode à l'autre et donne alors des résultats 'identiques' au calcul modal. Alors que le second calcul  $SmEdA^{\max}$  considère comme le calcul SEA un facteur d'amortissement moyen pour chaque sous-système et donne des résultats très erronés, proches de ceux du calcul SEA. La différence entre ces

deux calculs provient donc de la prise en compte ou non des variations des facteurs d'amortissements modaux. Il est évident que les puissances dissipées par les modes ne sont pas toutes équivalentes ce qui conduit à une non-équirépartition des énergies modales de chaque sous-système (également du sous-système excité).

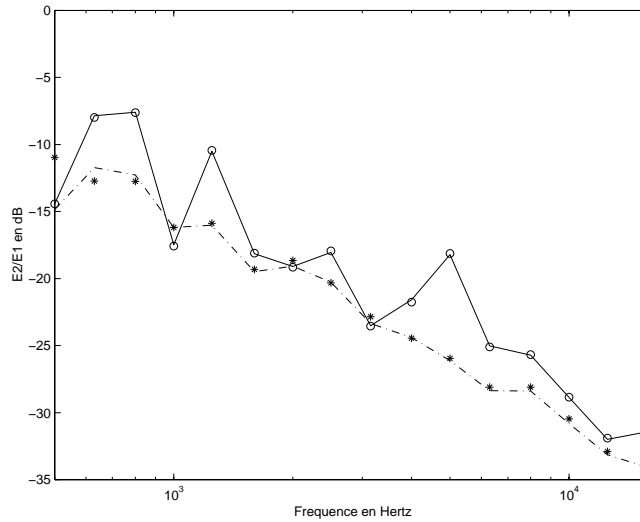


Figure 5.22. Rapport des énergies totales  $E2/E1$  par tiers d'octave. Variation des facteurs d'amortissements modaux entre 0,01 et 0,001 ( $\eta_{min}=0,001$ ). Comparaison de plusieurs calculs : o, calcul DMF ; —,  $SmEdA^{max}$  en tenant compte des variations des facteurs d'amortissements modaux ; - - - -,  $SmEdA^{max}$  en tenant compte d'un facteur d'amortissement modal moyen pour chaque sous-système ; \*, SEA avec les CLF calculés par l'approche onde.  $L_1=2,5$  m,  $L_2=3,5$  m,  $\rho_1 S_1=\rho_2 S_2=0,065$  kg/m,  $E_1 I_1=E_2 I_2=0,424$  Pa.m<sup>4</sup>,  $\Omega=2,5$  N.m/rad.

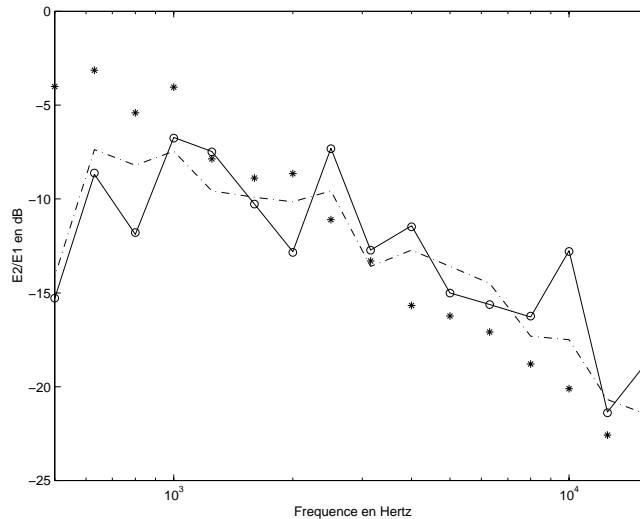


Figure 5.23. Idem figure précédente mais avec des variations des facteurs d'amortissements modaux entre 0,001 et 0,0001 ( $\eta_{min}=0,0001$ ).

Avec une plage de variation des facteurs d'amortissements modaux de  $10^{-4}$  à  $10^{-3}$  ( $\eta_{min}=10^{-4}$ ), on constate, figure 5.23, que l'effet de 'filtrage des jonctions' se superpose à



l'effet 'des dissipations internes'. Dans certains cas, ces effets s'additionnent et dans d'autres ils se retranchent.

On a vu que le modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  peut prendre en compte des facteurs d'amortissements internes différents d'un mode à l'autre. Dans la pratique, il se pose le problème de la lourdeur des mesures de ces facteurs pour tous les modes résonnants des bandes de fréquence considérées. On peut souligner toutefois qu'il peut être intéressant d'avoir un modèle qui prend en compte les variations de ces facteurs afin d'effectuer une analyse de sensibilité des transferts vibratoires à ces variations ; une approche de Monte-Carlo peut en effet, être facilement adjointe au calcul  $\text{SmEdA}^{\max}$ .

## 2.4. Conclusion

Trois configurations distinctes ont été présentées où le modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  apporte des gains significatifs sur la prédiction par rapport aux modèles supposant l'équirépartition modale ( $\text{SmEdA}^1$  et SEA). Chacune des trois configurations présentées intervient sur un terme différent du bilan énergétique modal :

- la première, liée à l'effet de 'filtrage des jonctions' entre les sous-systèmes, intervient sur les puissances échangées entre les couples de modes. Dans le cas de sous-systèmes à faible recouvrement modal, les coïncidences fréquentielles conduisent à une très grande disparité des forces de couplage entre les modes ce qui se traduit par des puissances échangées très différentes d'un couple de modes à l'autre. Les coïncidences spatiales jouent un rôle similaire mais il est plus difficile à cerner au travers d'un indicateur ;

- la seconde, liée aux excitations localisées spatialement, joue un rôle sur la répartition des puissances modales injectées ;

- la dernière, caractérisée par des sous-systèmes avec des facteurs d'amortissements différents d'un mode à l'autre, intervient sur les puissances modales dissipées.

On peut noter que les effets propres à chacune des configurations présentées peuvent se superposer dans d'autres situations.

## 3. Du modèle $\text{SmEdA}^1$ au modèle $\text{SmEdA}^{\max}$

La première partie de ce chapitre a montré l'intérêt du modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  par rapport aux modèles  $\text{SmEdA}^1$  et SEA, plus simplistes mais certes moins coûteux en calculs. Bien que basé sur des considérations modales, le modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  ne nécessite pas de calculs aussi lourds que ceux d'une approche modale classique (pas de calculs à fréquence pure). Une fois les schémas modaux des sous-systèmes obtenus, la résolution d'un unique système

d'équations linéaires est nécessaire par bande de fréquence. Le nombre d'équations de ce système est égal au nombre total de modes considérés. Compte tenu de la performance actuelle et grandissante des moyens informatiques, cette résolution laisse un champ assez large d'applications de la méthode. Cependant, dans le cas de systèmes composés de nombreux sous-systèmes avec des nombres de modes importants, les temps calculs peuvent devenir importants. On se propose dans ce paragraphe d'étudier l'intérêt de la technique de Galerkin qui induit une réduction du nombre de ddl à prendre en compte (voir description paragraphe 4 du chapitre 3).

Deux autres méthodes de résolution approchée des équations énergétiques modales sont également présentées en annexe C. Ces méthodes permettent de réduire les temps CPU tout en ne posant pas d'hypothèse sur la REM. Les simplifications des équations sont effectuées à partir de considérations sur le couplage entre les sous-systèmes. Ces approches ne sont pas décrites dans le corps du document pour ne pas nuire à la compréhension du chapitre.

Le modèle SmEdA<sup>n</sup>, basé sur la technique de Galerkin, permet en théorie de moduler le degré d'approximation sur la répartition des énergies modales de chaque sous-système : de SmEdA<sup>1</sup>, avec l'approximation la plus forte (équirépartition) à SmEdA<sup>max</sup>, sans approximation. Cependant, dans la pratique, il se pose plusieurs problèmes :

- le choix *a priori* des vecteurs de base de la décomposition. En effet, en effectuant deux calculs SmEdA avec le même nombre de degrés de liberté mais en tenant compte de vecteurs de base différents, on peut obtenir des résultats totalement différents ;
- le choix *a priori* du classement des modes de chaque sous-système. Celui-ci intervient au même titre que le choix des vecteurs de base car l'allure de la répartition des énergies modales dépend de l'indice attribué à chaque mode pour représenter la répartition ;
- le choix *a priori* du nombre de degrés de liberté à prendre en compte, ou le contrôle *a posteriori* de la qualité des résultats en fonction du degré d'approximation.

Chaque cas de couplage doit donc être traité spécifiquement vis-à-vis du modèle SmEdA<sup>n</sup>.

Un des intérêts les plus forts du modèle SmEdA<sup>n</sup> est de montrer que les équations de la SEA basées sur l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales correspondent au degré d'approximation le plus fort de la résolution des équations énergétiques modales du mouvement par la technique de Galerkin (pour des systèmes déterministes).

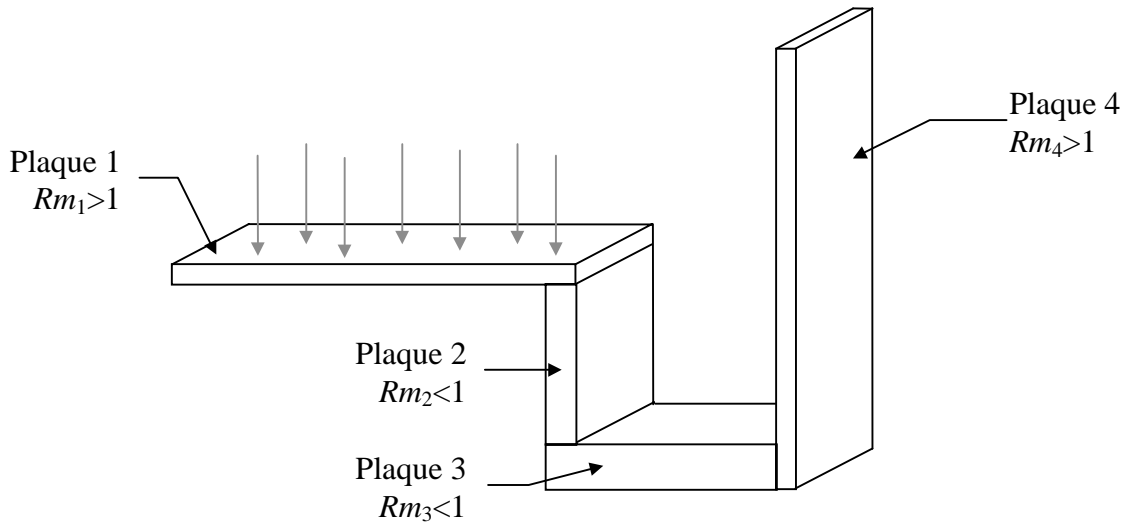


Figure 5.24. Représentation schématique du couplage rigide de quatre plaques minces vibrant en flexion pure. Plaque 1 excitée par des efforts de type 'rain on the roof'.

Un autre intérêt du modèle SmEdA<sup>n</sup> est que l'on peut attribuer des degrés d'approximation différents d'un sous-système à un autre. Sachant par exemple, que pour un sous-système, l'hypothèse d'équirépartition peut être respectée, et que pour un autre, elle ne l'est pas, on peut décrire la REM du premier sous-système en prenant en compte un seul degré de liberté et décrire finement la REM du second en considérant individuellement chaque mode de ce sous-système. L'application de cette approche est proposée dans ce paragraphe sur la structure représentée figure 5.24. Elle est composée de quatre plaques vibrantes en flexion couplées rigidement à angle droit au niveau des arêtes. La plaque 1 et la plaque 4 ont été dimensionnées de telle façon qu'elles présentent un nombre 'conséquent' de modes par bande de fréquence (minimum 40 modes) et que le facteur de recouvrement modal de chaque plaque soit supérieur à un (voir figure 5.25). A contrario, la plaque 2 et la plaque 3 présentent peu de modes par bande de fréquence (densité modale asymptotique de 0,0183 modes/hertz pour la plaque 2 et 0,0096 modes/hertz pour la plaque 3) et le facteur de recouvrement modal de chacune d'entre elles est bien inférieur à un (voir figure 5.25). On considère que chacune des plaques constitue un sous-système compte tenu des différences d'épaisseurs.

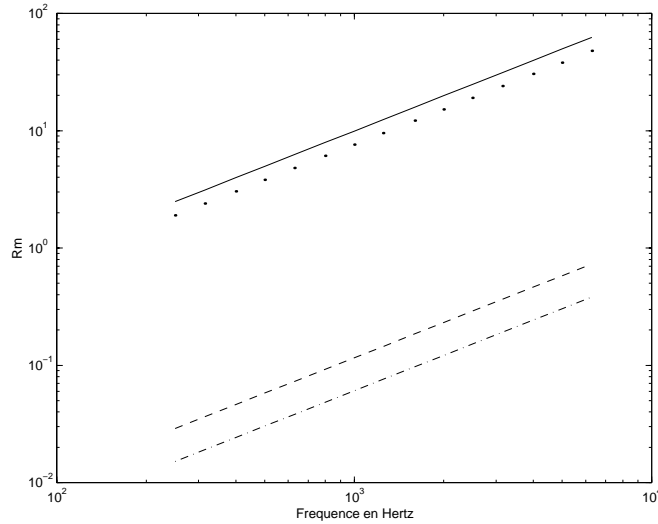


Figure 5.25. Valeur du facteur de recouvrement modal de chaque plaque en fonction de la fréquence. —, Plaque 1; ----, Plaque 2; -.-.-, Plaque 3; ····, Plaque 4. Plaque 1 : 1,5mx1mx0.5mm. Plaque 2 : 0,7mx1mx2mm. Plaque 3 : 1,1mx1mx6mm. Plaque 4 : 2,3mx1mx1mm.  $\eta_1=\eta_4=0,01$ ,  $\eta_2=\eta_3=0,001$ ,  $E_\alpha=2.10^{11}Pa$ ,  $\rho_\alpha=7800\text{ kg/m}^3$  ( $\alpha\in[1,\dots,4]$ ).

On rappelle que les conditions aux limites (libre ou bloqué) des sous-systèmes découplés doivent être définies telles que les modes des sous-systèmes se rapprochent aux mieux des modes globaux de la structure entière. Celles-ci sont données tableau 5.4 pour chacune des arêtes de couplage. Des conditions d'appui simple sont supposées pour les autres arêtes.

	Arête de couplage	C. L.
PLAQUE 1	1 - 2	Encastrée
PLAQUE 2	2 - 1	Appuyée
	2 - 3	Encastrée
PLAQUE 3	3 - 2	Appuyée
	3 - 4	Appuyée
PLAQUE 4	4 - 3	Encastrée

Tableau 5.4. Conditions aux limites (C.L.) sur les arêtes de couplage.

On peut supposer *a priori* que l'hypothèse d'équirépartition est valide pour les plaques 1 et 4, et qu'elle ne peut être respectée pour la plaque 2 et la plaque 3. En conséquence, il peut être judicieux d'appliquer un modèle qui décrit la REM de la plaque 1 et de la plaque 4 avec un seul ddl et prend en compte le même nombre de ddl qu'il y a de modes pour décrire la REM de la plaque 2 et de la plaque 3. Celui-ci est nommé  $\text{SmEdA}^{1-\text{max}-\text{max}-1}$ . Une comparaison de différents calculs est donnée figures 5.26 et 5.27 où sont représentés les résultats des calculs  $\text{SmEdA}^{1-\text{max}-\text{max}-1}$ ,  $\text{SmEdA}^{\text{max}-\text{max}-\text{max}-\text{max}}$  (aucune hypothèse sur les REM) et  $\text{SmEdA}^{1-1-1-1}$  (hypothèse d'équirépartition pour les quatre sous-systèmes). On constate que  $\text{SmEdA}^{1-1-1-1}$  surestime les transferts d'énergie vibratoire alors que  $\text{SmEdA}^{1-\text{max}-\text{max}-1}$  donne des résultats similaires à  $\text{SmEdA}^{\text{max}-\text{max}-\text{max}-\text{max}}$ . Ceci montre bien que l'on peut attribuer des degrés

d'approximation différents à chacun des sous-systèmes Des gains en terme de nombre de ddl (voir figure 5.28) et de temps calculs peuvent ainsi être obtenus. Ceci permet également d'envisager de mixer un modèle SEA standard pour certains sous-systèmes avec un modèle  $SmEdA^{\max}$  pour d'autres.

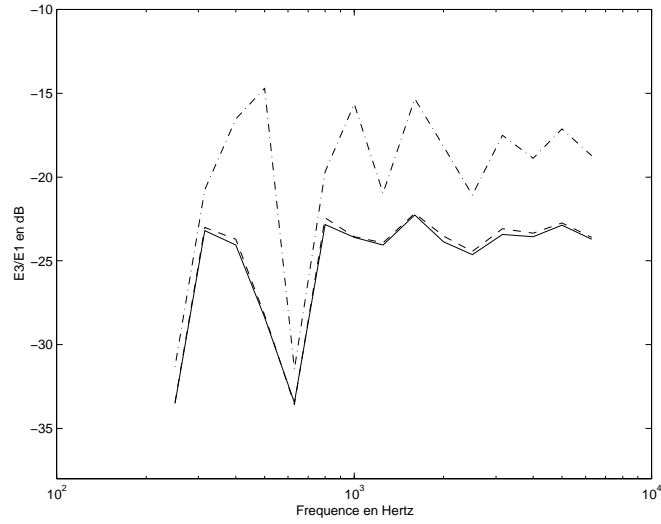


Figure 5.26. Rapport des énergies totales,  $E3/E1$ , par tiers d'octave. Trois calculs : —,  $SmEdA^{\max-\max-\max-\max}$  ; ---,  $SmEdA^{1-\max-\max-1}$  ; -.-,  $SmEdA^{1-1-1-1}$ .

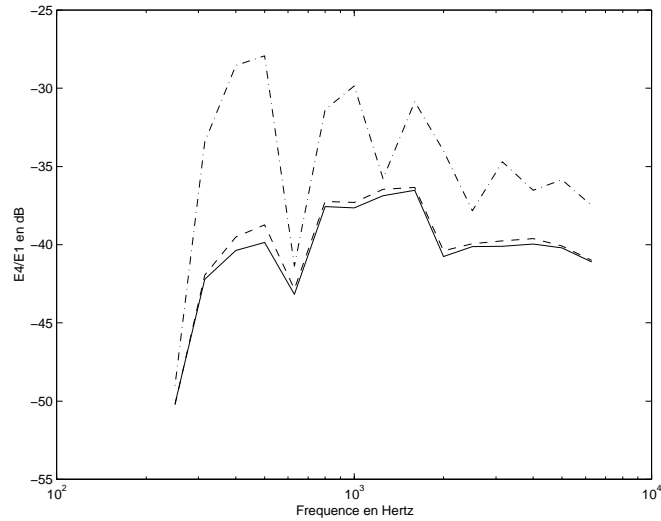


Figure 5.27. Rapport des énergies totales,  $E4/E1$ , par tiers d'octave. Trois calculs : —,  $SmEdA^{\max-\max-\max-\max}$  ; ---,  $SmEdA^{1-\max-\max-1}$  ; -.-,  $SmEdA^{1-1-1-1}$ .

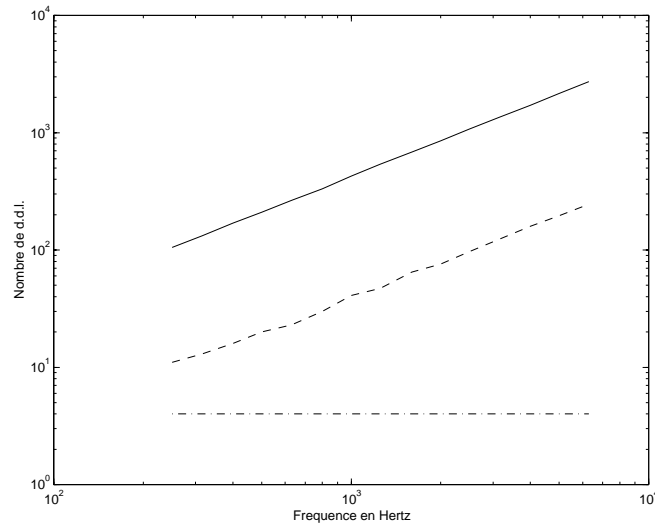


Figure 5.28. Nombre de degrés de liberté pris en compte par chaque modèle en fonction de la bande de fréquence. —,  $SmEdA^{max-max-max-max}$  ; ---,  $SmEdA^{1-max-max-1}$  ; -.-,  $SmEdA^{1-1-1-1}$ .

## 4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté différentes configurations où la prise en compte en détail de la répartition des énergies modales apportent des gains significatifs sur la prédiction par rapport à l’hypothèse d’équirépartition. Ces configurations correspondent aux couplages de sous-systèmes à faible recouvrement modal, aux cas d’excitations spatialement localisées et aux couplages de sous-systèmes pour lesquels les facteurs d’amortissements varient d’un mode à l’autre.

Une différenciation entre les calculs  $SEA^{onde}$  et  $SmEdA^1$  a été observée. Celle-ci ne provient pas de l’hypothèse sur la répartition des énergies modales mais d’une technique différente de calcul des facteurs de perte par couplage.

La principale ‘difficulté’ pour appliquer le modèle  $SmEdA^{max}$  repose dans la détermination des schémas modaux des sous-systèmes, soit analytiquement pour des sous-systèmes de type académique, soit par éléments finis pour des structures plus complexes (voir chapitre suivant). La résolution du système d’équations linéaires liée au modèle ne semble pas, par contre, être un obstacle compte tenu de la performance des moyens informatiques actuels. De plus, l’approche  $SmEdA$  peut facilement être associée à une démarche  $SEA$ . En effet, il est possible d’appliquer le modèle  $SmEdA^{max}$  (ou les modèles dérivés) seulement pour les couplages des sous-systèmes où une amélioration de la prédiction peut être présumée obtenue, et utiliser le modèle  $SEA$  pour les autres couplages. Il est particulièrement aisé d’employer les approches  $SEA$  et  $SmEdA$  ensemble car les deux ont les énergies modales

comme inconnues, et les équations qui doivent être résolues constituent dans les deux cas un système d'équations linéaires. L'application proposée au paragraphe précédent montre bien que l'on peut attribuer des degrés d'approximation différents d'un sous-système à un autre. Le modèle SmEdA ne doit donc pas être vu comme une alternative à part entière au modèle SEA, mais comme un complément à cette méthode.

## CHAPITRE 6

# CALCUL DES FACTEURS DE COUPLAGES INTERMODAUX ET DES CLF A PARTIR DE MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS DES SOUS-SYSTÈMES

### 1. Buts du chapitre

Au cours des chapitres précédents, nous avons appliqué le modèle SmEdA à des structures académiques où l'obtention des schémas modaux ne présentait pas de difficultés par les méthodes analytiques. Dans ce chapitre, nous proposons une extension du domaine d'application de l'approche grâce à l'utilisation de modèles Éléments Finis. En effet, à partir de modèles discrets des sous-systèmes, on peut déterminer les schémas modaux de ceux-ci quelles que soient leurs complexités géométriques (dans la limite des codes Éléments finis) et ensuite évaluer les travaux d'interactions modales et les facteurs de couplages intermodaux. Comme pour les modèles continus, les données à extraire des modèles Éléments Finis sont les fréquences propres des modes des sous-systèmes découplés, les déformées propres aux niveaux des liaisons et les masses généralisées.

Deux cas vont être dissociés en fonction de la configuration de couplage, et notamment, du respect ou non de l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales :

- Premier cas, l'hypothèse d'équirépartition est respectée par chacun des sous-systèmes. Les équations de la SEA et les facteurs de perte par couplage sont alors habilités à représenter correctement les transferts d'énergies vibratoires entre les sous-systèmes. Ces facteurs, plus brièvement nommés CLF (Coupling Loss Factor), peuvent être déterminés par sommation des facteurs de couplages intermodaux (voir expression (3.38) pour les systèmes déterministes). L'approche consiste alors à calculer les schémas modaux des sous-systèmes par Éléments Finis, puis à évaluer les CLF via les facteurs de couplages intermodaux. La présente approche se différencie des approches mixtes SEA-FEM proposées dans la littérature (voir paragraphe 2.8, chapitre 1). En effet, elle ne nécessite pas la résolution des équations modales et ne fait pas intervenir la méthode SEA inverse. Seules les données modales des sous-systèmes découplés sont nécessaires.

Avant d'effectuer des calculs de CLF à partir de données Elements Finis, un premier exemple de couplage de poutres illustre le calcul des CLF à partir de la double formulation



modale et permet une comparaison des résultats avec un calcul ‘exact’ en fonction des différences de sections et d’amortissements.

Une validation du calcul des CLF à partir de données FEM est ensuite présentée. Un exemple de plaques couplées en L est considéré. Celui-ci est représentatif de l’applicabilité de la méthode à des structures plus complexes et autorise une comparaison avec les résultats donnés par la méthode SEA inverse et des expérimentations numériques ;

- second cas, l’hypothèse d’équirépartition ne peut *a priori* être respectée par un ou plusieurs sous-systèmes. Le modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  est alors nécessaire pour modéliser correctement le couplage entre les sous-systèmes. Les facteurs à évaluer sont les facteurs de couplages intermodaux. Ceux-ci peuvent être évalués pour des sous-systèmes de géométrie complexe grâce à des schémas modaux obtenus par Éléments Finis. Une validation sera présentée sur la même configuration de couplage qu’au paragraphe 2.1.3 du chapitre 5 (plaques couplées en L).

Ce chapitre se décompose en trois parties :

- la première consiste en la détermination des travaux d’interactions modales à partir de modèles discrets des sous-systèmes ;
- la seconde traite de l’évaluation des facteurs de perte par couplage ;
- et la dernière montre un exemple d’application du modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  à partir de données Éléments Finis.

Les travaux concernant les deux premières parties de ce chapitre sont également présentés en référence [MAX99b].

## 2. Travaux d’interactions modales pour des modèles discrets

On considère, comme au chapitre 2, une structure mécanique tri-dimensionnelle constituée de deux sous-systèmes continus couplés. Cette structure continue peut être discrétisée par la méthode des Éléments Finis (voir par exemple [IMB79]). Le modèle discret obtenu est une représentation approchée de la structure continue. On peut considérer qu’il est constitué du couplage de deux modèles discrets associés aux sous-systèmes. Quand ceux-ci sont couplés, ils ont un nombre de nœuds en commun sur la frontière de couplage que l’on appelle ‘coupling node set’.

Considérons les variables physiques d’un nœud  $i$  du modèle discret dans un repère global  $(x_1, x_2, x_3)$ . Les variables déplacements sont les trois déplacements  $(u_k^i, k = 1, 2, 3)$  et

les trois rotations angulaires  $(u_k^i, k = 4,5,6)$ . Les variables duales associées sont les trois efforts  $(f_k^i, k = 1,2,3)$  et les trois moments  $(f_k^i, k = 4,5,6)$ .

Comme au chapitre 2, on suppose que pour la détermination des modes, le sous-système 1 est le sous-système découplé-libre et que le sous-système 2 est le sous-système découplé-bloqué. Par conséquent, le sous-système 1 doit être décrit par les variables primales, c'est-à-dire les déplacements nodaux  $(u_k^{1i}, k = 1, \dots, 6)$ , et le sous-système 2 par les variables duales, c'est-à-dire les forces nodales  $(f_k^{2i}, k = 1, \dots, 6)$ .

En considérant le modèle discret du système global, et en tenant compte de l'interprétation physique du travail d'interaction modale, on déduit que l'expression du travail d'interaction modale entre le  $p$ ème mode du sous-système 1 et le  $q$ ème mode du sous-système 2 est donnée par :

$$\mathbf{W}_{pq}^{12} = \sum_{i \in \left\{ \begin{array}{l} \text{Coupling} \\ \text{nodeset} \end{array} \right\}} \sum_{k=1}^6 \tilde{u}_{pk}^{1i} \tilde{f}_{qk}^{2i}, \quad (6.1)$$

où  $\tilde{u}_{pk}^{1i}$  est la  $k$ ème composante du déplacement nodal du nœud  $i$  du  $p$ ème mode du sous-système 1, et  $\tilde{f}_{qk}^{2i}$  est la  $k$ ème composante de la force nodale du nœud  $i$  du  $q$ ème mode du sous-système 2.

N.B. : Toutes les variables nodales doivent être décrites dans le même repère globale (pour les deux sous-systèmes).

Cette expression permet donc de calculer les travaux d'interactions modales uniquement à partir de la connaissance des déformées propres en terme de variables nodales (sur la frontière de couplage).

### 3. Calcul des CLF à partir des schémas modaux des sous-systèmes découplés

La méthode de calcul des CLF à partir de la double formulation modale se décompose en trois étapes :

- la première étape consiste à déterminer les schémas modaux des sous-systèmes découplés. Les conditions aux limites de ceux-ci ont été clairement définies au paragraphe 2.4.1 du chapitre 2. Les données utiles sont les fréquences propres, les déformées propres au

niveau de la frontière de couplage et les masses généralisées. Les déformées propres doivent être exprimées en variables primales ou variables duales suivant le sous-système. Les schémas modaux peuvent être obtenus par des méthodes analytiques pour des structures académiques (poutres, plaques,...). Pour des sous-systèmes de géométrie plus complexes, la méthode des Éléments finis peut être utilisée pour extraire les informations modales ;

- la seconde étape consiste à évaluer les travaux d'interactions modales à partir des déformées propres déterminées précédemment. Pour les modèles continus, l'expression du travail d'interaction modale est obtenu en considérant son interprétation physique et les variables en dualité des modèles simplifiés (voir paragraphe 2.7 du chapitre 2). Pour les modèles discrets, on utilise directement l'expression (6.1) ;

- la dernière étape consiste à calculer les CLF à partir de l'expression suivante (obtenue à partir de (3.21) et (3.38) du chapitre 3) :

$$\eta_{12} = \frac{1}{N_1 \omega_c} \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \left[ \frac{(\mathbf{W}_{pq}^{12})^2}{(\omega_p^1)^2 M_p^1 M_q^2} \left( \frac{[\Delta_p^1 (\omega_q^2)^2 + \Delta_q^2 (\omega_p^1)^2]}{((\omega_p^1)^2 - (\omega_q^2)^2)^2 + (\Delta_p^1 + \Delta_q^2)(\Delta_p^1 (\omega_q^2)^2 + \Delta_q^2 (\omega_p^1)^2)} \right) \right] \quad (6.2)$$

Par la suite, on nommera par CLF-DMF et CLF-DMF/FEM, les facteurs de perte par couplage obtenus par la présente approche avec des modèles continus et des modèles Éléments Finis, respectivement.

### 3.1. Exemples de calculs à partir de modèles continus

#### 3.1.1. Description des calculs

Avant d'effectuer des calculs sur des modèles discrets, on se propose de calculer les CLF avec des modèles continus sur un système composé de deux poutres vibrant en flexion et couplées rigidement comme représenté figure 6.1.

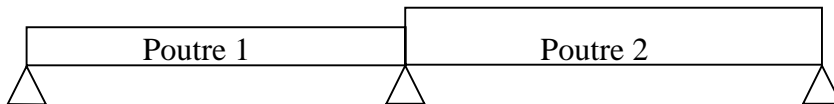


Figure 6.1. Couplage rigide de deux poutres vibrant en flexion.

Dans ce paragraphe, on considère que la poutre 1 est moins épaisse que la poutre 2. On se retrouve donc dans une configuration analogue au paragraphe 4.2.2 du chapitre 2 mais avec les sous-systèmes inversés. Les CLF-DMF sont finalement donnés par l'expression :

$$\eta_{12} = \frac{1}{N_1 \omega_c} \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \left\{ \frac{8(k_q^2)^2 E_1 I_1 \left[ \frac{[\eta_1 \omega_p^1 (\omega_q^2)^2 + \eta_2 \omega_q^2 (\omega_p^1)^2]}{((\omega_p^1)^2 - (\omega_q^2)^2)^2 + (\eta_1 \omega_p^1 + \eta_2 \omega_q^2)(\eta_1 \omega_p^1 (\omega_q^2)^2 + \eta_2 \omega_q^2 (\omega_p^1)^2)} \right]}{L_1 L_2 \rho_2 S_2} \right\} \quad (6.3)$$

On va comparer cette approche aux résultats donnés par la méthode dite SEA inverse effectuée sur des expériences numériques [SIM90] : les hypothèses de Euler-Bernoulli et la décomposition en ondes forcées décrite en annexe B sont utilisées pour simuler les expériences numériques nécessaires à la SEA inverse. L'excitation 'rain on the roof' est approchée en moyennant les énergies des poutres sur 20 points d'excitation aléatoirement répartis. Les CLF sont finalement obtenus en introduisant les énergies totales des poutres dans la relation SEA quand le sous-système 2 n'est pas excité :

$$\eta_{12}^{en} = \frac{\eta_2 E_2^{en}}{E_1^{en} - \frac{n_1}{n_2} E_2^{en}}, \quad (6.4)$$

où  $E_\alpha^{en}$  est l'énergie totale de la poutre  $\alpha$  obtenue à partir des 'expériences numériques', et  $n_\alpha$  est la densité modale asymptotique de la poutre  $\alpha$  donnée par :

$$n_\alpha = L_\alpha \omega^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho_\alpha S_\alpha}{E_\alpha I_\alpha} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (6.5)$$

Le facteur de perte par couplage donné par ce calcul est appelé CLF-SEA inverse.

### 3.1.2. Influence du rapport des épaisseurs

La figure 6.2 montre les valeurs des CLF par tiers d'octave pour quatre rapports d'épaisseurs de poutres différents. Il y a un très bon accord entre les CLF-DMF et les CLF-SEA inverse. Cependant, on note quelques petites différences quand le rapport des épaisseurs est proche de un (voir figure 6.2 (a)). Celles-ci sont dues au fait que l'hypothèse de couplage faible entre les sous-systèmes n'est pas respectée dans ce cas (voir paragraphe 2 du chapitre 4).

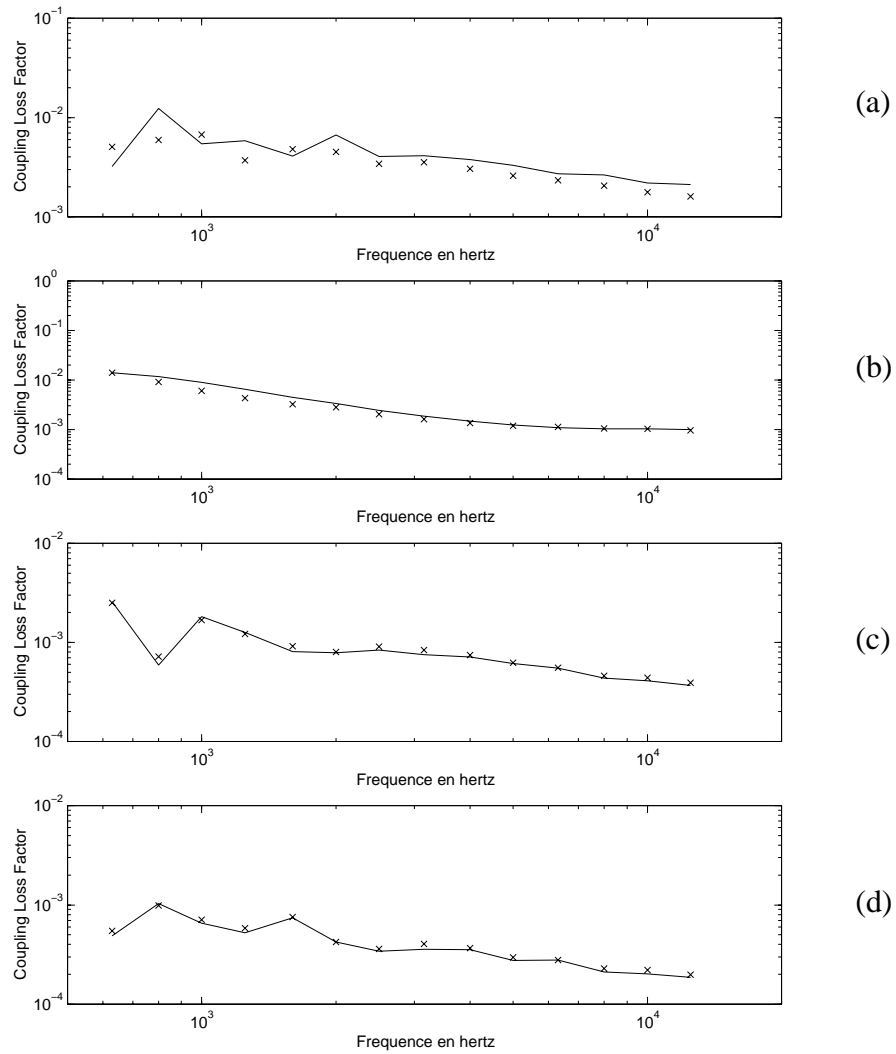


Figure 6.2. Facteur de perte par couplage en fonction de la fréquence (résultats par tiers d'octave). (a)  $h_2/h_1=1,5$ . (b)  $h_2/h_1=2$ . (c)  $h_2/h_1=3$ . (d)  $h_2/h_1=4$ . Deux calculs : —, CLF-DMF; x, CLF-SEA inverse.  $L_1=2,5$  m,  $L_2=3,5$  m,  $b_1=b_2=0,01$  m,  $h_1=0,001$  m,  $\eta_1=\eta_2=0,01$ .

### 3.1.3. Influence de l'amortissement

La figure 6.3 donne les CLF par tiers d'octave pour différentes valeurs d'amortissement. Figure 6.3 (a-b-c), les facteurs d'amortissements internes sont les mêmes pour les deux poutres. Une très bonne concordance entre les deux approches peut être constatée. Dans le cas d'un amortissement 'faible' (voir figure 6.3 (c)), les différences sont plus importantes. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales n'est plus valide. Dans ce cas, il est préférable d'appliquer le modèle  $SmEdA^{\max}$ .

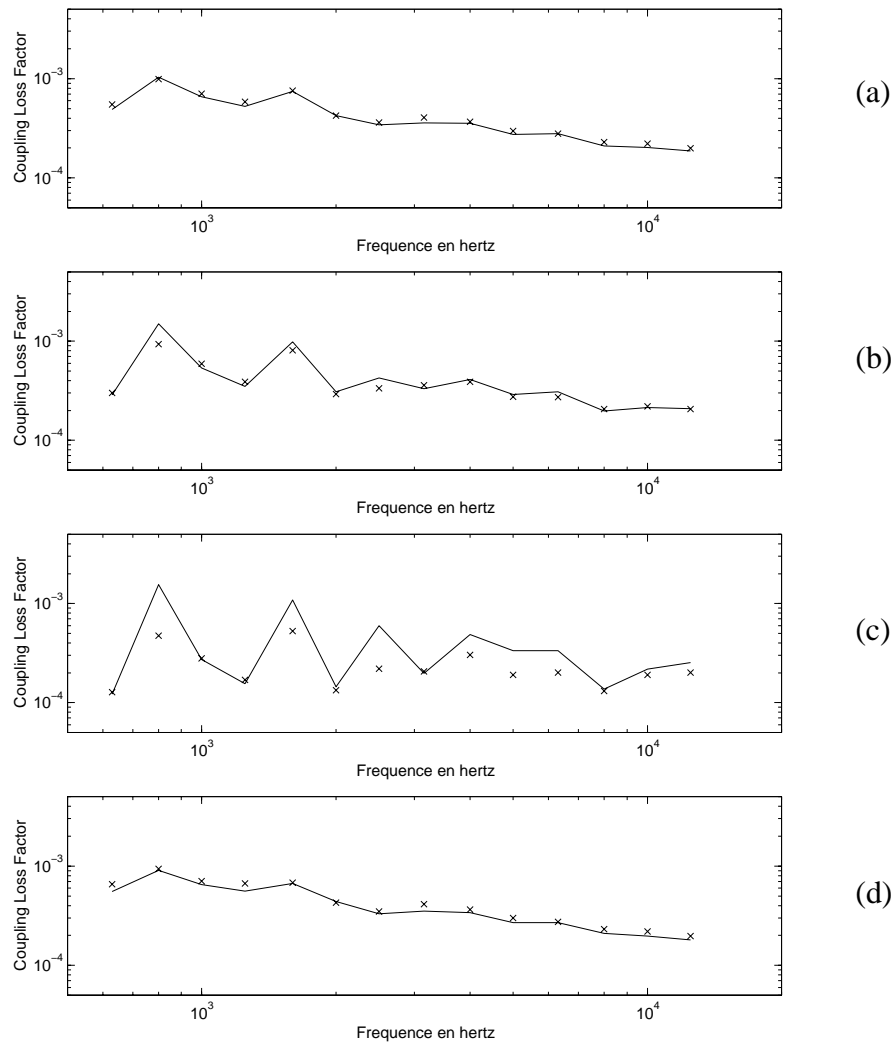


Figure 6.3. Facteur de perte par couplage en fonction de la fréquence (résultats par tiers d'octave). (a)  $\eta_1=\eta_2=0,01$ . (b)  $\eta_1=\eta_2=0,005$ . (c)  $\eta_1=\eta_2=0,002$ . (d)  $\eta_1=0,02$ ,  $\eta_2=0,005$ . Deux calculs : —, CLF-DMF; x, CLF-SEA inverse.  $L_1=2,5$  m,  $L_2=3,5$  m,  $b_1=b_2=0,01$  m,  $h_1=0,001$  m,  $h_2=0,004$  m.

Figure 6.3 (d), des facteurs d'amortissements internes différents sont attribués aux deux poutres. Comme précédemment, l'approche présentée donne des résultats identiques au calcul classique avec (6.4). Ceci permet de souligner que le cas d'amortissements différents d'un sous-système à un autre peut être traité sans difficulté par l'approche basée sur la double formulation modale.

L'approche présentée donne des résultats en accord avec la méthode SEA inverse mais présente l'avantage majeur de ne pas recourir à la résolution d'équations. Les temps de calculs sont donc très courts.

### 3.2. Exemple de calculs à partir de modèles Éléments Finis

Pour montrer la validité du calcul des CLF à partir de données FEM, on envisage le cas simple de deux plaques couplées en L. D'un 'point de vue Éléments Finis', la forme matricielle des équations du mouvement est la même pour une structure simple ou pour une structure compliquée. Donc, en principe, le problème traité ici pourra être représentatif de l'applicabilité de la méthode à des structures plus compliquées. Par ailleurs, ce cas nous permet de faire des comparaisons avec un autre calcul.

On considère la théorie des plaques minces et uniquement les mouvements en flexion. Toutes les arêtes non couplées de chaque plaque sont supposées simplement appuyées. La définition des paramètres ainsi que leurs valeurs sont données tableau 6.1.

	Plaque 1	Plaque 2
Longueur arête suivant x	$a_1=1$ m	$a_2=2,5$ m
Longueur de l'arête commune	$b_1=1$ m	$b_2=1$ m
Épaisseur	$h_1=3$ mm	$h_2=12$ mm
Module de Young	$E_1=2 \times 10^{11}$ Pa	$E_2=2 \times 10^{11}$ Pa
Masse volumique	$\rho_1=7800$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho_2=7800$ kg/m <sup>3</sup>
Coefficient de Poisson	$\nu_1=0,3$	$\nu_2=0,3$
Facteur d'amortissement interne	$\eta_1=0,02$	$\eta_2=0,02$

Tableau 6.1. Définition des paramètres.

La plaque 1 est plus fine que la plaque 2, elle doit être représentée par les modes du sous-système découplé-bloqué alors que la plaque 2 doit être représentée par les modes du sous-système découplé-libre. Pour la définition des sous-systèmes découplés, la plaque 1 est encadrée sur l'arête de couplage et simplement appuyée sur les autres arêtes. La plaque 2 est appuyée sur les quatre arêtes.

Les valeurs des facteurs de recouvrement modal de chaque plaque sont données tableau 6.2 pour la plage de fréquence où l'on souhaite caractériser les transferts d'énergie vibratoire (315 Hz à 2500 Hz). Ceux-ci sont proches ou supérieurs à un ce qui permet de supposer que l'hypothèse d'équirépartition est respectée, et par conséquent, que les facteurs de perte par couplage sont habilités à représenter le couplage entre ces deux sous-systèmes.

	315Hz	400Hz	500Hz	630Hz	800Hz	1000Hz	1250Hz	1600Hz	2000Hz	2500Hz
Rm <sub>1</sub>	0,685	0,870	1,08	1,37	1,74	2,17	2,72	3,48	4,35	5,44
Rm <sub>2</sub>	0,428	0,544	0,680	0,856	1,08	1,36	1,70	2,17	2,72	3,40

Tableau 6.2. Facteurs de recouvrement modal pour chaque bande de fréquence. Rm<sub>1</sub> : Plaque 1, Rm<sub>2</sub> : Plaque 2. Calculs à partir des densités modales asymptotiques.

### 3.2.1. Modèles Éléments Finis

Le modèle Éléments Finis de chaque sous-système est créé et analysé par le code UAI/NASTRAN v11.8. Les Éléments QUAD4 sont considérés pour la discrétisation. Les nombres de nœuds du maillage réglé sont choisis afin d’avoir un minimum de six Éléments par longueur d’onde naturelle à 3000 Hz. Pour la plaque 1, il y a donc 65 nœuds suivant chaque arête, et pour la plaque 2, il y a 65 nœuds suivant la plus petite arête afin d’avoir un maillage coïncident et 80 nœuds suivant l’autre arête (voir figure 6.4). Des conditions aux limites appropriées et la méthode de Lanczos sont utilisées pour calculer les modes de chaque plaque entre 1 Hz et 3000 Hz. Les déformées propres sont normalisées de telle manière que les masses généralisées soient unitaires.

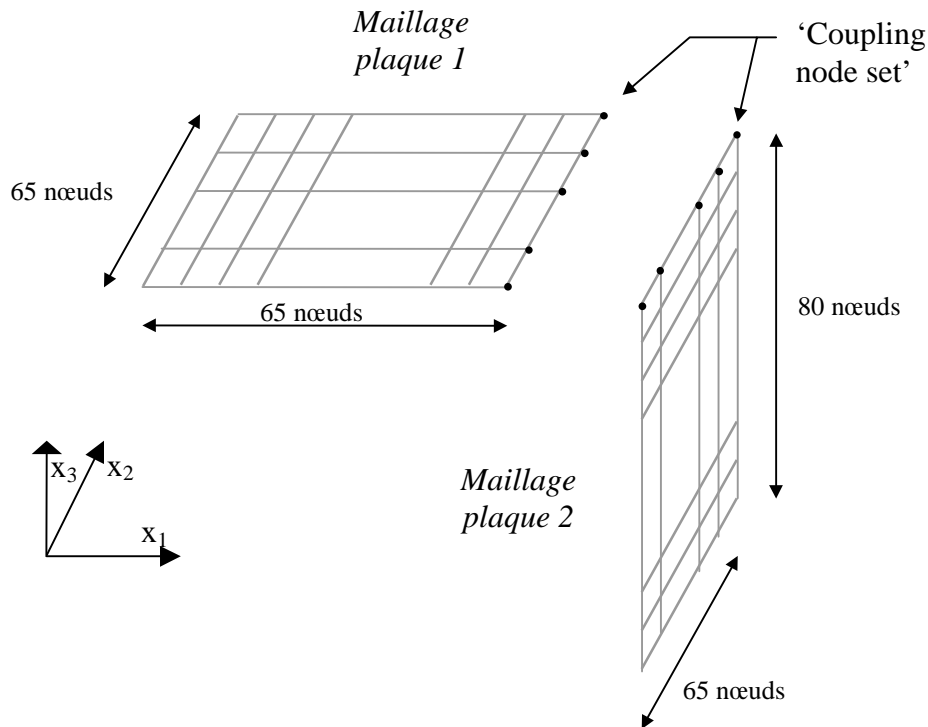


Figure 6.4. Représentation schématique des maillages des deux sous-systèmes dans le repère global  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Les données de sortie des calculs NASTRAN sont, pour chaque mode de chaque sous-système, les fréquences propres, les déformées en terme d’efforts – ‘SINGLE POINT CONSTRAINT FORCE’ – pour la plaque 1, et les déformées en terme de déplacements – ‘DISPLACEMENT’ – pour la plaque 2. L’approche présentée requérant que les déformées propres sur la frontière de couplage, il est possible de sélectionner uniquement les nœuds sur cette frontière pour les données de sortie (output set = coupling node set). Ceci permet de limiter grandement la taille du fichier de sortie NASTRAN. Par exemple, pour la plaque 1, les nœuds sélectionnés pour les données de sortie sont les nœuds qui sont fixes, et les déformées



sont données par le champ ‘SINGLE POINT CONSTRAINT FORCE’. Les données de sortie nécessaires aux calculs des CLF sont récapitulées tableau 6.3. Elles sont extraites du fichier de sortie NASTRAN et analysées par un logiciel sous MATLAB.

		DONNEES DE SORTIE	
	Indice modal	Fréquence propre	Déformée propre sur l’arête commune $i \in \{\text{Coupling node set}\}$
Plaque 1	$p$	$\omega_p^1 /$ $1 \text{ Hz} < \frac{\omega_p^1}{2\pi} < 3000 \text{ Hz}$	‘SINGLE POINT CONSTRAINT FORCE’ SPCFORCE $\rightarrow \{\tilde{f}_{p1}^{1i}, \tilde{f}_{p2}^{1i}, \tilde{f}_{p3}^{1i}, \tilde{f}_{p4}^{1i}, \tilde{f}_{p5}^{1i}, \tilde{f}_{p6}^{1i}\}$
Plaque 2	$q$	$\omega_q^2 /$ $1 \text{ Hz} < \frac{\omega_q^2}{2\pi} < 3000 \text{ Hz}$	‘DISPLACEMENT’ DISPLACEMENT $\rightarrow \{\tilde{u}_{q1}^{2i}, \tilde{u}_{q2}^{2i}, \tilde{u}_{q3}^{2i}, \tilde{u}_{q4}^{2i}, \tilde{u}_{q5}^{2i}, \tilde{u}_{q6}^{2i}\}$

Tableau 6.3. Données extraites du fichier de sortie NASTRAN.  $i$ : nœud appartenant à l’arête commune (coupling node set). Masses généralisées normées à un.

On utilise le résultat du paragraphe 2 pour déterminer les travaux d’interactions modales à partir des composantes nodales des déformées propres. Dans notre cas, seule la 5<sup>e</sup> composante nodale des efforts de la plaque 1, c’est-à-dire la valeur qui correspond au moment fléchissant suivant  $x_2$ , n’est pas nulle. Pour la plaque 2, seule la 5<sup>e</sup> composante nodale des déplacements (rotation angulaire suivant  $x_2$ ) n’est pas nulle. En conséquence, l’expression du travail d’interaction modal entre le mode bloqué  $p$  de la plaque 1 et le mode libre  $q$  de la plaque 2 peut se réduire à :

$$W_{pq}^{12} = \sum_{i \in \left\{ \begin{smallmatrix} \text{Coupling} \\ \text{node set} \end{smallmatrix} \right\}} \tilde{f}_{p5}^{1i} \tilde{u}_{q5}^{2i}, \quad (6.6)$$

où  $\tilde{f}_{p5}^{1i}$  est la 5<sup>e</sup> composante nodale en terme d’effort du nœud  $i$  de la déformée propre du mode  $p$  de la plaque 1, et  $\tilde{u}_{q5}^{2i}$  est la 5<sup>e</sup> composante nodale en terme de déplacement du nœud  $i$  de la déformée propre du mode  $q$  de la plaque 2.

### 3.2.2. Comparaison des rapports de densités modales

Pour vérifier la validité des modèles Éléments Finis pour les bandes de fréquence d’intérêt, il est possible de compter les fréquences propres des calculs FEM (voir tableau 6.4) puis de déterminer la densité modale pour chaque bande de fréquence et enfin comparer la valeur à celle de la densité modale asymptotique  $n_\alpha$  donnée par :

$$n_\alpha = \frac{\sqrt{3a_\alpha b_\alpha}}{h_\alpha \sqrt{\rho_\alpha (1-\nu_\alpha)}}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (\text{modes/Hz}). \quad (6.7)$$

	315Hz	400Hz	500Hz	630Hz	800Hz	1000Hz	1250Hz	1600Hz	2000Hz	2500Hz
plaque 1	7	9	13	12	19	25	27	38	47	57
plaque 2	5	4	8	8	12	15	17	22	32	40

Tableau 6.4. Nombre de modes par bande de fréquence pour chacune des deux plaques. Résultats Éléments finis.

Ceci est présenté en figure 6.5 où le rapport des densités modales entre les deux sous-systèmes est tracé en fonction des tiers d’octave. On peut en conclure que la modélisation FEM est bien représentative du comportement vibratoire des plaques dans le domaine de fréquence d’intérêt ([280 Hz-2800 Hz]). Il est bien connu que dans le domaine des ‘hautes fréquences’, les fréquences propres et les déformées propres d’un modèle Éléments Finis peuvent être ‘découronnées’ par rapport aux fréquences propres et aux déformées propres réelles, ceci même dans le cas d’un modèle Éléments Finis correct (erreurs numériques pour les systèmes matriciels de grande taille). Cependant, comme il est expliqué en référence [SIM91], ces erreurs numériques semblent se réduire sous l’effet des moyennes.

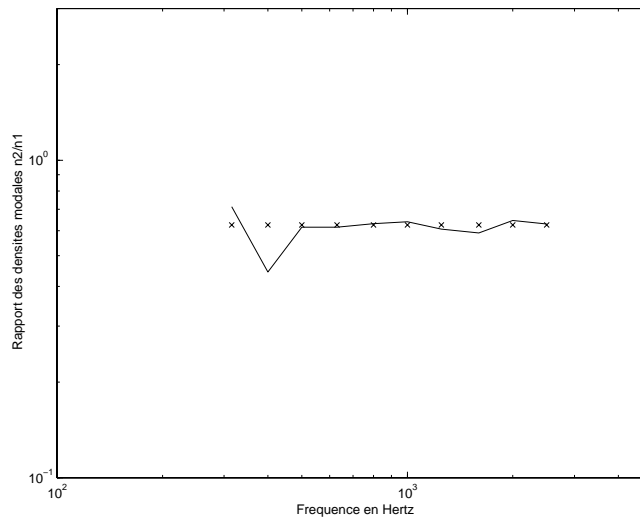


figure 6.5. Rapport des densités modales en fonction de la fréquence (résultats par tiers d’octave). Deux calculs : —, avec la méthode des Éléments Finis ; x, avec la formule asymptotique de la densité modale.

### 3.2.3. Comparaison des facteurs de perte par couplage

A partir des résultats FEM décrit au paragraphe 3.2.1, on calcule les travaux d’interactions modales puis on évalue les facteurs de perte par couplage (CLF-DMF/FEM).

De la même manière qu’au paragraphe 3.1, l’approche présentée est comparée aux résultats donnés par la méthode SEA inverse avec des expériences numériques. Les résultats des expériences numériques sont obtenus à partir de la double formulation modale avec des descriptions analytiques des sous-systèmes (voir paragraphe 4.3 du chapitre 2). Une

comparaison avec la décomposition semi-modale (voir annexe B) a permis de vérifier la convergence des séries modales. L'excitation 'rain on the roof' est simulée en moyennant les énergies des plaques sur 15 points d'excitation aléatoirement répartis. Les énergies sont moyennées spatialement et en fréquence. Les CLF sont ensuite calculés en introduisant les énergies des plaques dans la relation SEA quand le sous-système 1 n'est pas excité :

$$\eta_{12}^{en} = \frac{\eta_1 E_1^{en}}{\frac{n_1}{n_2} E_2^{en} - E_1^{en}}, \quad (6.8)$$

où  $E_\alpha^{en}$  est l'énergie totale de la plaque  $\alpha$  obtenue à partir des 'expériences numériques', et  $n_\alpha$  est la densité modale de la plaque  $\alpha$  donnée par (6.7).

En figure 6.6, on présente une comparaison de trois techniques de calcul des CLF : les deux techniques précédemment décrites et la technique classique issue de l'approche onde (voir les équations (20-23) en référence [BIE80]).

On constate un bon accord entre les trois résultats dans les 'hautes' fréquences. En dessous de 800 Hz, l'approche classique par les ondes, qui considère des plaques semi-infinies, donne de mauvais résultats pour certains tiers d'octave alors que l'approche présentée prend en compte correctement le couplage entre les deux plaques. Les CLF-DMF/FEM sont évalués en tenant compte des dimensions géométriques ainsi que des conditions aux limites.

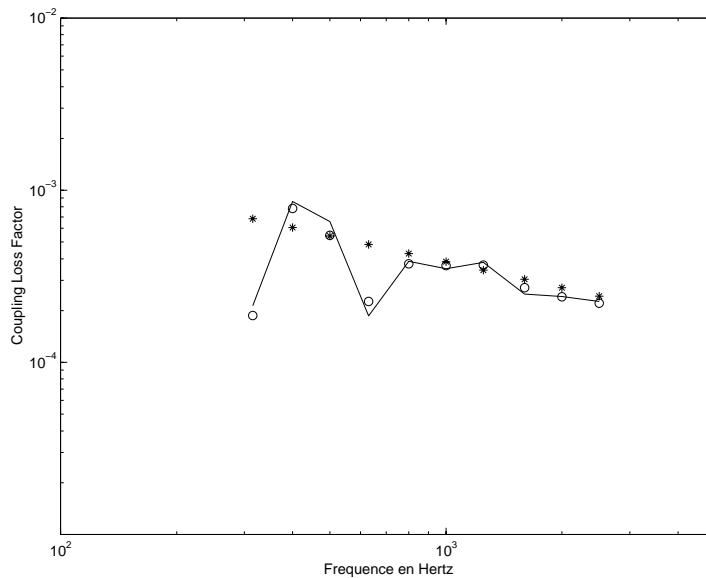


Figure 6.6. Facteur de perte par couplage en fonction de la fréquence (résultats par tiers d'octave). Trois calculs : —, CLF-DMF/FEM ; o, CLF-SEA inverse ; \*, CLF par l'approche traditionnelle par les ondes.

La figure 6.7 présente un calcul SEA utilisant les CLF-DMF/FEM quand la plaque 2 est excitée. Ces résultats sont comparés aux résultats d'un calcul 'exact' (utilisés

précédemment par la méthode SEA inverse). Un très bon accord peut être constaté qui valide définitivement le calcul des CLF par la double formulation modale et les Éléments Finis.

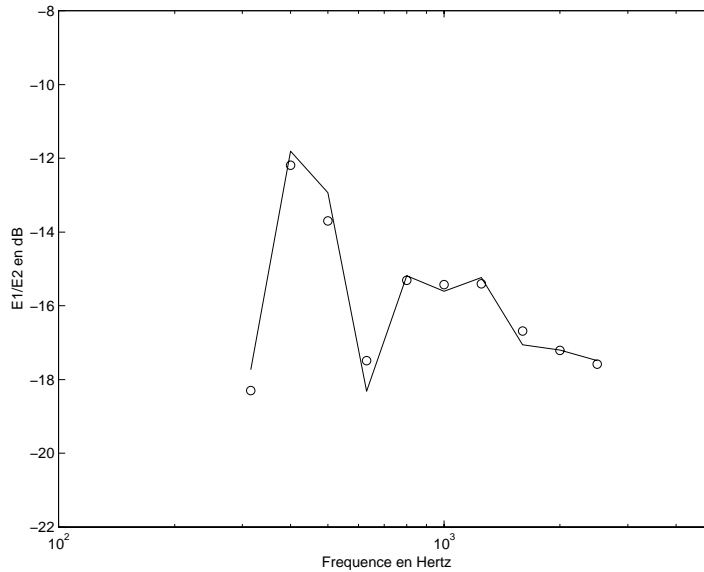


Figure 6.7. Rapport des énergies totales des deux plaques,  $E1/E2$ , en fonction de la fréquence (résultats par tiers d'octave). Plaque 2 excitée par une excitation 'rain on the roof'. Deux calculs : —, SEA avec les CLF - DMF/FEM ; o, 'exact'.

L'approche proposée possède plusieurs avantages :

- les calculs FEM des modes sont effectués uniquement sur les sous-systèmes et non sur la structure globale. Les conditions aux limites des sous-systèmes découplés sont clairement définies en accord avec la double formulation modale ;
- la technique proposée requière des temps de calcul très courts car la résolution des équations du mouvement ne sont pas nécessaires. Les CLF sont directement calculés à partir des coefficients des équations modales ;
- les sous-systèmes hétérogènes ayant des mouvements vibratoires dans les trois dimensions peuvent être traités sans aucun problème. Ceci est un peu plus difficile à faire avec l'approche basée sur les expérimentations numériques et la SEA inverse à cause du choix des positions d'excitation et du type des forces qui doivent être appliquées ;
- un amortissement différent pour chaque sous-système peut être pris en compte dans le calcul ce que ne permet pas les approches basées sur les calculs FEM avec les modes globaux de la structure couplée.

On peut noter qu'il est possible d'établir une moyenne d'ensemble des facteurs de perte par couplage sur une population de structure. Pour cela, il suffit de remplacer l'expression des facteurs de couplages intermodaux déterministes par l'expression de la moyenne d'ensemble de ces facteurs (voir relations (5.1,5.2) au chapitre 5). Dans ce cas, les fréquences propres n'interviennent plus dans la détermination des CLF (exception faite du calcul des raideurs généralisées des modes bloqués à partir des masses généralisées).

## 4. Exemples de calculs $\text{SmEdA}^{\text{max}}$ à partir de modèles Éléments Finis des sous-systèmes

Le paragraphe précédent a porté sur le calcul des CLF à partir de données Éléments Finis. On a vu au chapitre 5 que ces facteurs ne modélisaient correctement le couplage des sous-systèmes que lorsque l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales était respectée. On souhaite montrer dans ce paragraphe que le modèle  $\text{SmEdA}^{\text{max}}$  peut être utilisé en connexion avec les Éléments Finis. Dans ce cas, les modèles discrets des sous-systèmes permettent de déterminer les facteurs de couplages intermodaux. Le modèle  $\text{SmEdA}^{\text{max}}$  peut ensuite être appliqué, même dans les cas de non-équirépartition des énergies modales. Ainsi, grâce aux Éléments Finis, le domaine d'application du modèle  $\text{SmEdA}$  se trouve étendu aux structures de géométrie complexe.

### 4.1. Description de la structure et des modèles Éléments Finis

La structure de test considérée est identique à celle présentée en référence [BOI85] (couplage de deux plaques en L). Celle-ci a également fait l'objet de calculs  $\text{SmEdA}^{\text{max}}$  à partir des schémas modaux obtenus analytiquement au paragraphe 2.1.3 du chapitre 5 (voir la description de la structure dans ce paragraphe). On a montré que l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales n'était pas respectée pour la plaque non excitée et que le modèle  $\text{SmEdA}^{\text{max}}$  était nécessaire pour modéliser correctement les transferts d'énergie vibratoire.

Les modèles Éléments Finis sont établis de manière similaire au paragraphe 3.2.1. Le code UAI/NASTRAN et les Éléments QUAD4 sont considérés pour la discrétisation. Les nombres de nœuds de la plaque 1 sont : 45 suivant la petite arête et 65 suivant l'autre arête (critère  $\lambda/6$  jusqu'à 3000 Hz). Les modes de cette plaque devant être les modes bloqués, les déplacements et les rotations aux nœuds de l'arête commune sont bloqués. Pour la plaque 2, il y a 65 nœuds suivant chaque arête. Les conditions aux limites d'appui simple sont respectées sur les quatre arêtes de cette plaque. La méthode de Lanczos est utilisée pour calculer les modes de chaque plaque entre 1 Hz et 2800 Hz.

### 4.2. Comparaison des résultats

A partir des schémas modaux obtenus par Éléments Finis, on calcul les facteurs de couplages intermodaux nécessaires au calcul  $\text{SmEdA}^{\text{max}}$ . On juxtapose, figures 6.8 et 6.9, les valeurs de ces facteurs avec celles obtenues à partir des expressions analytiques des schémas modaux (voir annexe A).

## CONNEXION AVEC LES ELEMENTS FINIS

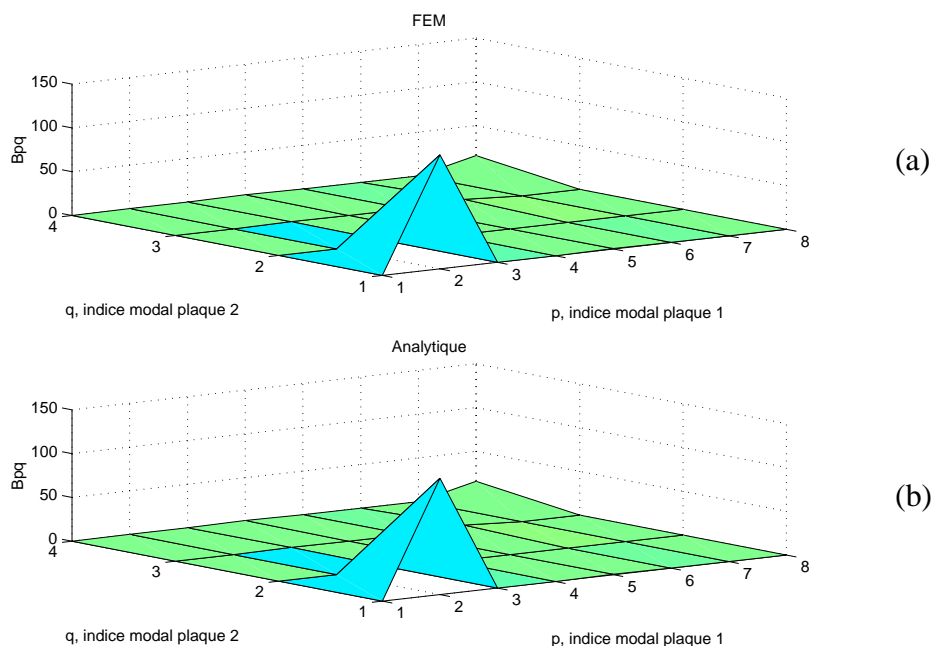


Figure 6.8. Facteurs de couplages intermodaux en fonction des couples  $(p,q)$  de modes. Octave centrée sur 125 Hz. Modes classés suivant les fréquences propres croissantes. (a) à partir des schémas modaux FEM. (b) à partir des expressions analytiques des schémas modaux.

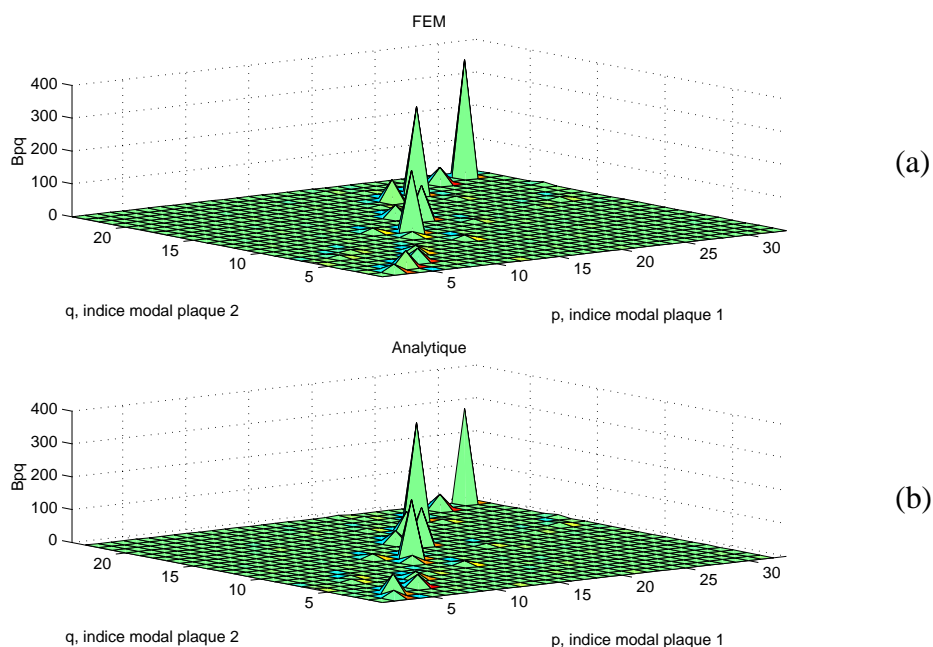


Figure 6.9. Octave centrée sur 500 Hz. Voir figure précédente.

L'allure de ces représentations graphiques sont très proches ce qui permet de conclure à un bon accord entre les deux calculs. On note cependant, figure 6.9, quelques décalages de

pics. Ceux-ci sont liés à des erreurs numériques du calcul FEM sur des fréquences propres voisines. Celles-ci étant utilisées pour classer les modes, il est possible que des couples de modes soient ‘intervertis’ entre les deux calculs. Ces quelques légers décalages n’ont pas d’influence sur la qualité des résultats  $SmEdA^{max}$ . En effet, figure 6.10, on donne les résultats  $SmEdA^{max}$  en terme de rapport d’énergies  $E_2/E_1$  par bandes d’octave. On constate que les résultats  $SmEdA^{max}$  obtenus à partir des modèles FEM des sous-systèmes sont comparables à ceux de Boisson et al. [BOI85] (écarts inférieurs à 0,6 dB) et qu’ils sont quasi identiques à ceux du calcul  $SmEdA^{max}$  obtenus à partir de schémas modaux décrits analytiquement. L’utilisation du modèle  $SmEdA^{max}$  en connexion avec les Éléments Finis est ainsi validée. Ce modèle peut donc s’appliquer à des structures de géométrie complexe. Les exemples académiques traités dans ce document servant de référence pour la validité et l’intérêt du modèle.

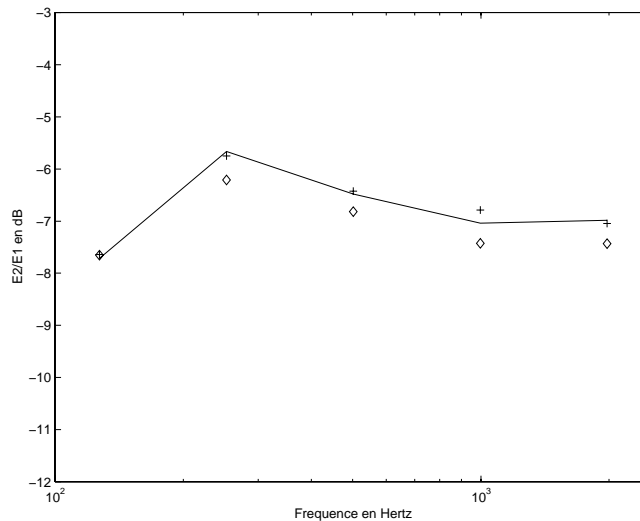


Figure 6.10. Rapport des énergies totales  $E_2/E_1$  par octave. Comparaison de plusieurs calculs :  $\diamond$ , ‘exact’ donné par Boisson et al. dans ACUSTICA, —,  $SmEdA^{max}$  à partir de données FEM; +,  $SmEdA^{max}$  à partir de données analytiques. Plaque 1 : 1,2mx1mx4mm. Plaque 2 : 0,7mx1mx3mm.  $E_1=E_2=2.10^{11}$  Pa,  $\rho_1=\rho_2=7800$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_1=\eta_2=0,01$ .

### 4.3. Influence des conditions aux limites

Sur la base de l’exemple précédent, on souhaite montrer que le modèle  $SmEdA^{max}$  peut prendre en compte les conditions aux limites des systèmes. Quatre cas de conditions aux limites différentes sur les arêtes longitudinales (perpendiculaires à l’arête de couplage) sont envisagés et répertoriés tableau 6.5. On utilise des modèles Éléments Finis qui permettent d’extraire sans difficulté les schémas modaux.

	<i>Plaque 1</i>	<i>Plaque 2</i>
Cas N° 1	Appuyée-Appuyée	Appuyée-Appuyée
Cas N° 2	Libre-Libre	Libre-Libre
Cas N° 3	Appuyée-Appuyée	Libre-Libre
Cas N° 4	Libre-Libre	Appuyée-Appuyée

Tableau 6.5. Conditions aux limites sur les arêtes longitudinales.

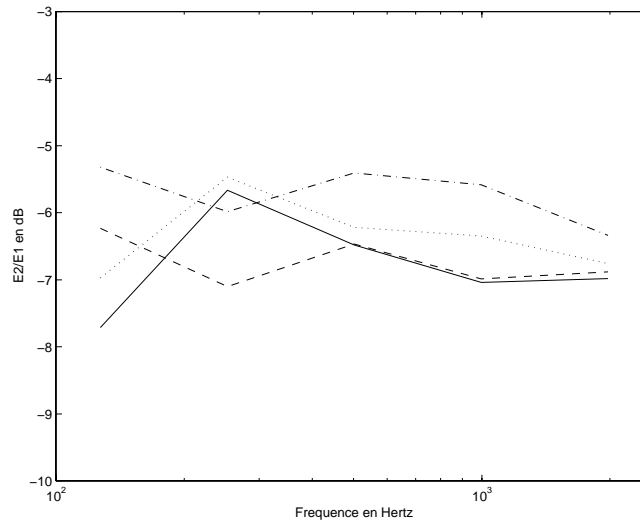


Figure 6.11. Rapport des énergies totales  $E_2/E_1$  par octave. Calculs  $SmEdA^{max}/FEM$  avec différentes conditions aux limites : —, Cas N° 1; ---, Cas N° 2; -.-, Cas N° 3; ....., Cas N° 4. Plaque 1 :  $1,2 \times 1 \times 4 \text{ mm}$ . Plaque 2 :  $0,7 \times 1 \times 3 \text{ mm}$ .  $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0,01$ .

Les résultats sont donnés figure 6.11. On constate que les différences sont plus importantes pour les premières octaves que pour les suivantes. Ceci est plausible car il est bien connu que les conditions aux limites jouent principalement un rôle dans les basses et moyennes fréquences (voir [MAC98], [FOR99]). Le modèle SEA ne peut tenir compte de l'influence des conditions aux limites du fait de la moyenne d'ensemble. Le modèle SmEdA s'impose là encore comme un relais à la SEA.

## 5. Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que l'approche SmEdA peut être utilisée en connexion avec la méthode des Éléments Finis. Des exemples simples de plaques couplées ont été choisis pour permettre des comparaisons. L'application à des structures plus compliquées est rapide compte tenu du fait que la technique est basée sur n'importe quel modèle Éléments Finis. Il en résulte que le domaine d'application de la méthode peut s'étendre à des structures de type industriel. Un point fort de la méthode est que les calculs Éléments Finis portent sur les sous-systèmes découplés et non sur la structure globale, ce qui



implique des temps CPU moindre. Cependant, une limite haute en fréquence apparaît inexorablement compte tenu de la discrétisation requise par la méthode des Éléments finis.

D'un point de vue SEA, c'est-à-dire en supposant l'hypothèse d'équirépartition respectée, la technique revient à calculer les CLF. Ceux-ci sont alors directement évalués à partir des schémas modaux des sous-systèmes obtenus par FEM. Par rapport à la technique qui consiste à utiliser les Éléments Finis pour simuler numériquement le comportement vibratoire de deux sous-systèmes couplés puis à appliquer ensuite la SEA inverse ([STE94], [SIM91], [FRE97]), cette technique présente un domaine d'application plus large. En effet, le calcul des CLF est effectué sans résolution des équations du mouvement et seuls les sous-systèmes découplés sont modélisés par Éléments Finis pour le calcul des modes. Il en résulte des temps CPU plus courts ce qui autorise une augmentation de la limite haute en fréquence des calculs. De plus, les structures hétérogènes peuvent être traitées sans difficulté par la présente approche et un amortissement différent peut être affecté à chaque sous-système.

L'approche SmEdA en connexion avec les Éléments Finis peut être facilement utilisée pour étudier le couplage des structures ayant des mouvements dans plusieurs directions (modélisation par des éléments coques). Les différents mécanismes du couplage des structures peuvent alors être mis en évidence par le biais de cette méthode.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, on a proposé une approche permettant d'étendre le domaine de validité de la méthode SEA. Celle-ci repose sur une double formulation modale et une reformulation du modèle SEA en ne posant pas l'hypothèse standard d'équirépartition. Le modèle SmEdA qui en découle apporte des gains significatifs sur la qualité de la prédiction par rapport au modèle SEA et peut s'appliquer à des structures industrielles grâce aux Éléments Finis.

### *Double formulation modale :*

La prise en compte individuellement de l'énergie de chaque mode a nécessité une connaissance plus fine des interactions entre les modes que ne l'exige la méthode SEA. Les suppléments d'informations ont été obtenus grâce à l'utilisation d'une double formulation modale (DMF). Cette formulation, standard dans l'étude du couplage structure-cavité, et qui a été appliquée au couplage de deux poutres vibrant longitudinalement par Karnopp en 1966, a été généralisée au couplage de sous-systèmes continus élastiques tri-dimensionnels. Les équations modales obtenues sont en concordance avec le schéma de couplage modal supposé par la méthode SEA. Tous les coefficients de ces équations ont été explicitement définis ; On peut donc s'affranchir du développement de la formulation lors de sa mise en œuvre. Dans un contexte SEA, la DMF présente un certain nombre d'avantages : (a) Les modes considérés sont les modes des sous-systèmes découplés avec des conditions aux limites qui sont clairement définies (modes bloqués ou modes libres). (b) Sous la condition de couplage faible [FAH97], ces modes ressemblent (s'ils ont été correctement choisis) aux modes physiques localisés de la structure. En conséquence, ces modes résonnants dans une bande de fréquence sont bien habilités à représenter le comportement de la structure dans cette même bande. (c) Les équations modales du mouvement ne font pas intervenir de couplage direct entre les modes d'un même sous-système (comme le suppose la SEA). (d) Les fréquences de résonance qui doivent être considérées pour déterminer les facteurs de couplages intermodaux sont, sans ambiguïté, les fréquences propres des sous-systèmes découplés (bloqués ou libres). (e) La question des énergies stockées dans les éléments de couplage entre les modes n'a pas lieu car ces éléments sont du type gyroscopique, et par conséquent, ne stockent pas de l'énergie. (f) La formulation est simple d'application car il est possible d'utiliser directement l'interprétation physique des coefficients de couplage entre les modes (travaux d'interactions modales).

### *Modèle SmEdA :*

L'utilisation de la formulation modale de base de la SEA et de la DMF a permis d'obtenir des équations énergétiques modales du mouvement. Celles-ci constituent les

## CONCLUSION

équations de base de l'approche proposée et donne lieu au modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$ . Elles ont été obtenues sans poser d'hypothèses sur les énergies des modes, et modélisent le comportement vibratoire des sous-systèmes couplés avec un niveau de détails supérieur à la SEA tout en gardant la simplicité des approches énergétiques.

Le modèle  $\text{SmEdA}^n$ , basé sur la résolution des équations précédentes par la technique de Galerkin, permet de moduler le degré d'approximation sur la répartition des énergies modales de chaque sous-système. Un lien entre le modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  et le modèle SEA (équirépartition) peut être établi par l'intermédiaire de ce modèle.

L'approche  $\text{SmEdA}^{\max}$  a montré son intérêt pour trois configurations distinctes qui peuvent se retrouver imbriquées dans d'autres situations : (a) Des améliorations notables de la prédiction par rapport au modèle SEA ont été obtenues sur des couplages de sous-systèmes à faible recouvrement modal. Pour ces sous-systèmes avec peu de modes en général, les coïncidences spatiales et fréquentielles entre les modes doivent être considérées finement ce qui ne peut être le cas à partir de l'hypothèse d'équirépartition. (b) Des excitations spatialement localisées introduisant des variations de la répartition des puissances modales injectées peuvent être correctement considérées par le modèle. Il est donc possible d'envisager des excitations autres que l'excitation 'rain on the roof'. (c) Un facteur d'amortissement interne propre à chaque mode peut être pris en compte ce qui offre la possibilité d'effectuer des analyses de sensibilité des réponses vibratoires à la dispersion des amortissements modaux.

Un des points forts de l'approche  $\text{SmEdA}$  est qu'elle peut être facilement associée à une démarche SEA. Il est possible d'appliquer le modèle  $\text{SmEdA}^{\max}$  (ou les modèles dérivés) uniquement pour les couplages des sous-systèmes où une amélioration de la prédiction peut être présumée obtenue, et utiliser le modèle SEA pour les autres couplages. Le modèle  $\text{SmEdA}$  ne doit pas être vu comme une méthode en remplacement de la SEA mais comme un outil intégré et alternatif à la méthode SEA pour les cas de couplage où cette dernière est mise en défaut.

Par ailleurs, des comparaisons entre des calculs issus de la double formulation modale et des calculs  $\text{SmEdA}^{\max}$  ont mis 'en lumière' certaines hypothèses de la SEA, notamment celles du couplage faible entre les sous-systèmes, et des décorrélations des amplitudes modales. La comparaison des résultats donnés par les calculs  $\text{SmEdA}$  et DMF peut constituer un moyen didactique pour le non-initié qui souhaite se familiariser avec les hypothèses de la SEA.

## CONCLUSION

### *Connexion avec les Éléments Finis :*

L'application du modèle  $\text{SmEdA}^{\text{max}}$  à des structures industrielles est rendue possible grâce à l'utilisation des Éléments Finis. La viabilité d'une telle approche a été démontrée sur des cas simples afin d'effectuer des comparaisons avec d'autres calculs. L'application à des structures plus compliquées est immédiate et ne semble pas poser de problème.

En supposant l'hypothèse d'équirépartition respectée, la démarche revient à calculer les facteurs de perte par couplage de la SEA à partir des schémas modaux des sous-systèmes découplés obtenus par Éléments Finis. Cette technique de calcul se différencie par rapport aux techniques existantes : (a) Les calculs Éléments Finis des modes sont effectués uniquement sur les sous-systèmes découplés. Les informations utilisées sont uniquement les fréquences propres, les masses généralisées et les déformées propres au niveau des jonctions de couplage. (b) La technique proposée requière des temps de calcul très courts car la résolution des équations du mouvement ne sont pas nécessaires. Les facteurs de perte par couplage sont directement calculés à partir des coefficients des équations modales. (c) Les sous-systèmes hétérogènes ayant des mouvements vibratoires dans les trois dimensions peuvent être traités sans aucun problème. (d) Un amortissement différent pour chaque sous-système peut être pris en compte dans le calcul.

### *Perspective :*

La voie la plus immédiate à explorer est sans doute l'application du modèle  $\text{SmEdA}$  et des calculs des CLF-DMF, à des structures complexes via les Éléments Finis. En considérant des sous-systèmes discrétisés par des éléments de type coque par exemple, l'approche doit permettre d'analyser les différents mécanismes de transfert d'énergie entre les sous-systèmes (modes de flexion d'un sous-système couplés avec des modes longitudinaux d'un autre sous-système...). Une étude approfondie de l'influence sur les CLF de la géométrie des sous-systèmes ainsi que des conditions aux limites doit pouvoir être menée à partir de cette technique.

Une seconde voie, qui n'a pu être menée au cours de ce travail théorique, est de valider expérimentalement la modélisation  $\text{SmEdA}^{\text{max}}$ . Cette validation doit principalement être axée sur les configurations pour lesquels le modèle a montré son intérêt. Seule une validation expérimentale tranchera entre la vision 'déterministe' qui est celle du modèle  $\text{SmEdA}$  pour les sous-systèmes à faible recouvrement modal et la vision 'moyenne d'ensemble sur une population de structures' de la méthode SEA.

## CONCLUSION

Des voies plus en amont sont également à explorer : concernant l'aspect 'statistique', l'approche de Monte-Carlo peut être mise œuvre en association avec le modèle SmEdA comme au paragraphe 4 du chapitre 4. Cependant, compte tenu de la forme des équations du modèle SmEdA, on pourrait utiliser des formulations analytiques pour rendre les calculs plus rapides.

On a vu, pour les cas de corrélation modale, que les modèles SEA et SmEdA présentaient des erreurs de plus en plus importantes quand le recouvrement modal augmentait car l'hypothèse PME n'était pas respectée. Sur la base des travaux présentés par Fahy en [FAH70b] concernant l'évaluation de la puissance échangée entre une structure mécanique et une cavité pour une excitation ponctuelle (cas de corrélation modale), on peut envisager une extension du modèle SmEdA tenant compte de l'effet des corrélations entre les amplitudes modales. Une adaptation des résultats de Fahy au cas de la figure 4.20 (couplage faible de poutres excitées ponctuellement) est immédiate et permet d'obtenir de bons résultats même pour de forts recouvrements modaux. Le passage à des systèmes composés de plus de deux sous-systèmes nécessite des travaux et des hypothèses supplémentaires. Le phénomène de tunneling décrit par Heron pourrait alors être pris en compte par cette extension du modèle.

Enfin, dans sa forme actuelle, le modèle SmEdA peut prendre en compte un couplage dissipatif entre les sous-systèmes par l'intermédiaire des facteurs d'amortissements modaux du sous-système auquel est rattaché l'élément de couplage dissipatif. La prise en compte se fait globalement au niveau des sous-systèmes alors qu'une extension du modèle SmEdA tenant compte localement du couplage dissipatif pourrait être envisagée. La base de cette extension serait le calcul de la puissance échangée entre deux oscillateurs couplés par un élément gyroscopique et un élément de type amortisseur visqueux (voir l'étude similaire en [FAH87]). La relation obtenue pourrait être injectée dans le modèle SmEdA à la place de (3.20). Le modèle tiendrait ainsi compte d'une dissipation d'énergie entre les modes de sous-systèmes différents via des facteurs d'amortissements intermodaux (facteurs précédemment introduits dans les équations de la DMF et restant à déterminer). La dissipation au niveau des jonctions entre les sous-systèmes serait alors prise en compte localement ce qui autoriserait une étude de son influence sur la transmission vibratoire sans recourir à une modification des facteurs d'amortissements modaux propres à chaque sous-système.

## ANNEXE A

### SCHEMAS MODAUX DES SOUS-SYSTEMES

Dans cette annexe, on donne les schémas modaux des sous-systèmes pour différents cas de couplages étudiés dans le corps du document. Le calcul des déformées en contraintes n'étant pas très répandu dans la littérature, le premier calcul est présenté plus en détail.

#### 1. Couplage de deux poutres vibrant en flexion sans appui intermédiaire

Voir description de la structure paragraphe 4.2.1.1, chapitre 2.

##### 1.1. Poutre 1 avec les conditions aux limites : Appuyée-Libre

Le schéma modal s'exprime par (voir [BLE95]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \omega_p^1 = \sqrt{\frac{E_1 I_1}{\rho_1 S_1}} (k_p^1)^2 \quad \text{avec } k_p^1 \text{ tel que: } \tan(k_p^1 L_1) = \tanh(k_p^1 L_1), \quad (\text{A.1}) \\ \bullet M_p^1 = \rho_1 S_1 L_1, \quad (\text{A.2}) \\ \bullet \tilde{W}^{1p}(x) = \cosh(k_p^1 (L_1 - x)) + \cos(k_p^1 (L_1 - x)) \\ \quad - \frac{\cosh(k_p^1 L_1) - \cos(k_p^1 L_1)}{\sinh(k_p^1 L_1) - \sin(k_p^1 L_1)} (\sinh(k_p^1 (L_1 - x)) + \sin(k_p^1 (L_1 - x))). \quad (\text{A.3}) \end{array} \right.$$

##### 1.2. Poutre 2 avec les conditions aux limites : Encastrée-Appuyée

Les équations régissant les mouvements libres de la poutre sont données par :

$$\rho_2 S_2 \frac{\partial^2 W^2}{\partial t^2}(x, t) + I_2 \frac{\partial^2 \sigma_x^2}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \forall x \in ]L_1, L_1 + L_2[, \quad (\text{A.4})$$

$$-E_2 I_2 \frac{\partial^2 W^2}{\partial x^2}(x, t) + I_2 \sigma_x^2(x, t) = 0 \quad \forall x \in ]L_1, L_1 + L_2[, \quad (\text{A.5})$$

$$W^2(L_1, t) = 0, \quad \frac{\partial W^2}{\partial x}(L_1, t) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$W^2(L_1 + L_2, t) = 0, \quad I_2 \sigma_x^2(L_1 + L_2, t) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Deux méthodes peuvent être utilisées pour obtenir les déformées propres en contrainte à partir d'un problème en déplacement :

- la première, par analogie entre le problème aux valeurs propres en contrainte et un problème aux valeurs propres en déplacement équivalent.

Pour obtenir le problème aux valeurs propres en contrainte, il faut dériver l'équation (A.5) deux fois par rapport au temps et l'introduire dans (A.4). Après une séparation temps-espace de la forme :

$$\sigma_x^2(x, t) = \tilde{\sigma}_x^{2q}(x) e^{j\omega_q^2 t}. \quad (\text{A.8})$$

On obtient :

$$-\rho_2 S_2 (\omega_q^2) \tilde{\sigma}_x^{2q}(x) + E_2 I_2 \frac{\partial^4 \tilde{\sigma}_x^{2q}}{\partial x^4}(x) = 0 \quad \forall x \in ]L_1, L_1 + L_2[, \quad (\text{A.9})$$

$$I_2 \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}_x^{2q}}{\partial x^2}(L_1) = 0, \quad I_2 \frac{\partial^3 \tilde{\sigma}_x^{2q}}{\partial x^3}(L_1) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$I_2 \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}_x^{2q}}{\partial x^2}(L_1 + L_2) = 0, \quad I_2 \tilde{\sigma}_x^{2q}(L_1 + L_2) = 0.$$

Ce problème dual est analogue au problème primal (en variables déplacements) d'une poutre libre en  $x=0$  et simplement appuyée en  $x=L_1$ . La solution peut donc être exprimée par (voir [BLE95]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \omega_q^2 = \sqrt{\frac{E_2 I_2}{\rho_2 S_2}} (k_q^2)^2 \quad \text{avec } k_q^2 \text{ tel que : } \tan(k_q^2 L_2) = \tanh(k_q^2 L_2), \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \int_{L_1}^{L_1+L_2} \rho_2 S_2 (\tilde{\sigma}_x^{2q}(x))^2 dx = \rho_2 S_2 L_2, \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \tilde{\sigma}_x^{2q}(x) = \cosh(k_q^2(x - L_1)) + \cos(k_q^2(x - L_1)) \\ \quad - \frac{\cosh(k_q^2 L_2) - \cos(k_q^2 L_2)}{\sinh(k_q^2 L_2) - \sin(k_q^2 L_2)} (\sinh(k_q^2(x - L_1)) + \sin(k_q^2(x - L_1))). \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

Comme pour une cavité acoustique où il existe le mode de Helmholtz, la poutre encastree-appuyée a un mode en contrainte avec une fréquence propre nulle. En effet, par analogie avec le problème en déplacement, ce mode correspond au mode rigide de la poutre libre-appuyée. Il s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0^2 = 0, \\ \tilde{\sigma}_x^{2,0}(x) = L_1 + L_2 - x. \end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

On souligne que cette technique de calcul des déformées propres en contrainte ne peut être utilisée que pour des structures simples pour lesquelles une analogie avec un problème en déplacement est possible. De plus, elle ne permet pas d'obtenir directement les masses généralisées ou les raideurs généralisées ce qui nous fera préférer l'autre méthode ;

- la seconde, par le calcul des déformées propres en déplacement du problème primal et utilisation de la loi de comportement (voir référence[BER89]).

Le problème primal s'obtient directement en introduisant (A.5) dans (A.4) et en considérant les conditions aux limites. Avec une séparation des variables temps-espace du type,  $W^2(x, t) = \tilde{W}^{2q}(x)e^{j\omega_q^2 t}$ , les solutions du problème peuvent finalement s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \omega_q^2 = \sqrt{\frac{E_2 I_2}{\rho_2 S_2}} (k_q^2)^2 \quad \text{avec } k_q^2 / \tan(k_q^2 L_2) = \tanh(k_q^2 L_2), \\ \bullet M_q^2 = \rho_2 S_2 L_2, \\ \bullet \tilde{W}^{2q}(x) = \cosh(k_q^2(x - L_1)) - \cos(k_q^2(x - L_1)) \\ \quad - \frac{\cosh(k_q^2 L_2) - \cos(k_q^2 L_2)}{\sinh(k_q^2 L_2) - \sin(k_q^2 L_2)} (\sinh(k_q^2(x - L_1)) - \sin(k_q^2(x - L_1))). \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

En utilisant la loi de comportement (A.5), on déduit les déformées propres en contrainte :

$$\tilde{\sigma}_x^{2q}(x) = (k_q^2)^2 E_2 \left[ \cosh(k_q^2(x - L_1)) + \cos(k_q^2(x - L_1)) - \frac{\cosh(k_q^2 L_2) - \cos(k_q^2 L_2)}{\sinh(k_q^2 L_2) - \sin(k_q^2 L_2)} (\sinh(k_q^2(x - L_1)) + \sin(k_q^2(x - L_1))) \right]. \quad (\text{A.16})$$

Par ce calcul on ne peut pas déterminer le mode en contrainte de fréquence propre nulle. Cependant, celui-ci ayant toujours un comportement non résonnant, il n'intervient pas dans l'étude proposée.

## 2. Couplage de deux poutres vibrant en flexion avec appui intermédiaire

Voir description de la structure paragraphe 4.2.2, chapitre 2.

### 2.1. Poutre 1 avec les conditions aux limites : Appuyée-Appuyée

Le schéma modal est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \omega_p^1 = \sqrt{\frac{E_1 I_1}{\rho_1 S_1}} (k_p^1)^2 \quad \text{avec } k_p^1 = \frac{p\pi}{L_1}, \\ \bullet M_p^1 = \frac{\rho_1 S_1 L_1}{2}, \\ \bullet \tilde{W}^{1p}(x) = \sin(k_p^1 x). \end{array} \right. \quad (\text{A.17})$$

$$(\text{A.18})$$

$$(\text{A.19})$$

### 2.2. Poutre 2 avec les conditions aux limites : Encastrée-Appuyée

Idem paragraphe 1.2.



### 3. Couplage de deux plaques en L

Voir description de la structure paragraphe 4.3, chapitre 2.

#### 3.1. Plaque 1 appuyée sur les quatre arêtes

Le schéma modal est donné par :

$$\bullet \omega_{mn}^1 = \sqrt{\frac{D_1}{\rho_1 h_1}} \left( \left( \frac{m\pi}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\bullet M_{mn}^1 = \frac{\rho_1 h_1 a_1 b_1}{4}, \quad (\text{A.21})$$

$$\bullet \tilde{W}^{lmn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a_2} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y_1\right). \quad (\text{A.22})$$

#### 3.2. Plaque 2 encastrée sur l'arête $x_2=0$ , appuyée sur les 3 autres arêtes

A partir de l'approche présentée en référence [SOE93], pages 84-85, on détermine le schéma modal de cette plaque : (A.21-A.23)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \omega_{rs}^2 = \sqrt{\frac{D_2}{\rho_2 h_2}} \left( \frac{s\pi}{b} \right)^2 \kappa_r \quad \text{avec } \kappa_r / \sqrt{\kappa_r - 1} \tanh\left(\frac{b}{a_2} s\pi \sqrt{\kappa_r + 1}\right) = \sqrt{\kappa_r + 1} \tanh\left(\frac{b}{a_2} s\pi \sqrt{\kappa_r - 1}\right) \\ \bullet M_{rs}^2 = \int_0^{a_2} \int_0^b \rho_2 h_2 (\tilde{W}^{2rs}(x_2, y_2))^2 dy_2 dx_2, \\ \bullet \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{xx}^{2rs}(x_2, y_2) = -\frac{E_2}{1-\nu_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{W}^{2rs}}{\partial x_2^2}(x_2, y_2) - \frac{\nu_2 E_2}{1-\nu_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{W}^{2rs}}{\partial y_2^2}(x_2, y_2), \\ \tilde{\sigma}_{yy}^{2rs}(x_2, y_2) = -\frac{\nu_2 E_2}{1-\nu_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{W}^{2rs}}{\partial x_2^2}(x_2, y_2) - \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{W}^{2rs}}{\partial y_2^2}(x_2, y_2), \\ \tilde{\sigma}_{xy}^{1rs}(x_2, y_2) = -\frac{E_2}{1+\nu_2} \frac{\partial^2 \tilde{W}^{2rs}}{\partial x_2 \partial y_2}(x_2, y_2) \end{array} \right. \\ \text{avec } \tilde{W}^{2rs}(x_2, y_2) = \\ \sin\left(\frac{s\pi}{b} y_1\right) \left[ \sinh\left(\frac{s\pi \sqrt{\kappa_r + 1}}{b} (a_2 - x_2)\right) - \frac{\sinh\left(\frac{a_2 s\pi \sqrt{\kappa_r + 1}}{b}\right)}{\sin\left(\frac{a_2 s\pi \sqrt{\kappa_r - 1}}{b}\right)} \sin\left(\frac{s\pi \sqrt{\kappa_r - 1}}{b} (a_2 - x_2)\right) \right] \end{array} \right.$$

## 4. Couplage de deux poutres par un ressort de torsion

Voir description paragraphe 2.4, chapitre 4, cas 1.

### 4.1. Poutre 1 Appuyée-Appuyée + ressort de torsion

Le schéma modal est donné par :

(A.24-A.26)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \omega_p^1 = \sqrt{\frac{E_1 I_1}{\rho_1 S_1}} k_p^1, \\ \quad \text{avec } k_p^1 \text{ tel que : } 2E_1 I_1 k_p^1 \sin(k_p^1 L_1) \sinh(k_p^1 L_1) + \Omega (\sinh(k_p^1 L_1) \sin(k_p^1 L_1) - \sinh(k_p^1 L_1) \cos(k_p^1 L_1)), \\ \bullet M_p^1 = \int_0^{L_1} \rho_1 S_1 (\tilde{W}_y^{1p}(x))^2 dx, \\ \quad \text{avec } \tilde{W}_y^{1p}(x) = \sin(k_p^1 x) - \frac{\sin(k_p^1 L_1)}{\sinh(k_p^1 L_1)} \sinh(k_p^1 x), \\ \bullet \tilde{\sigma}_x^{1p}(x) = -E_1 (k_p^1)^2 \sin(k_p^1 x) - E_1 (k_p^1)^2 \frac{\sin(k_p^1 L_1)}{\sinh(k_p^1 L_1)} \sinh(k_p^1 x). \end{array} \right.$$

### 4.2. Poutre 2 Appuyée-Appuyée

Idem paragraphe 2.1.

## ANNEXE B

# CALCUL DES RÉPONSES VIBRATOIRES DES STRUCTURES EXCITÉES PAR DES FORCES HARMONIQUES PONCTUELLES

## 1. Couplage de deux poutres vibrant longitudinalement

### 1.1. Calcul du champ vibratoire

On considère la structure décrite au paragraphe 2. du chapitre 4 et représentée figure B.1. Une force harmonique,  $e^{j\omega t}$ , excite ponctuellement celle-ci en  $x_0$ .

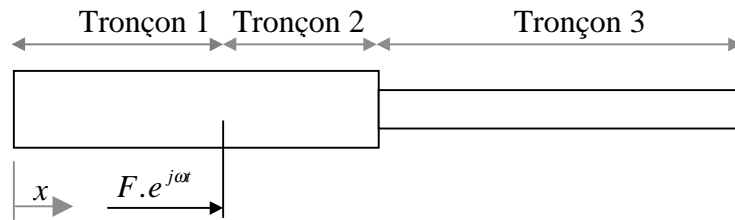


Figure B.1. Couplage de deux poutres de sections différentes vibrant longitudinalement. Conditions aux limites : libre en  $x=0$  et  $x=L_1+L_2$ . Excitation ponctuelle en  $x=x_0$ .

On décompose les systèmes en trois tronçons (voir figure B.1) afin de résoudre des équations du mouvement homogènes. On pose pour le tronçon  $i$  :

$u_i(x,t) = \text{Re}\{U_i(x)e^{j\omega t}\}$  pour décrire le champ de déplacements longitudinaux. (La notation du champ de déplacements employée ici est légèrement différente de celle du corps du document : l'indice  $i$  est attribué au tronçon et non au sous-système.)

Un amortissement de type structural est introduit par l'intermédiaire d'un module de Young complexe :  $E_1^* = E_1(1 + j\eta_1)$  pour la poutre 1 et  $E_2^* = E_2(1 + j\eta_2)$  pour la poutre 2.

Les équations du mouvement pour les trois tronçons s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho_1 S_1 (\omega)^2 U_1(x) + E_1^* S_1 \frac{d^2 U_1}{dx^2}(x) = 0, x \in ]0, x_0[ \\ \rho_1 S_1 (\omega)^2 U_2(x) + E_1^* S_1 \frac{d^2 U_2}{dx^2}(x) = 0, x \in ]x_0, L_1[ \\ \rho_2 S_2 (\omega)^2 U_3(x) + E_2^* S_2 \frac{d^2 U_3}{dx^2}(x) = 0, x \in ]L_1, L_1 + L_2[ \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Les conditions aux limites aux extrémités se traduisent par :

$$\begin{cases} E_1^* S_1 \frac{dU_1}{dx}(0) = 0, \\ E_2^* S_2 \frac{dU_3}{dx}(L_1 + L_2) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Les conditions de raccordement des tronçons sont données par :

$$\begin{cases} U_1(x_0) = U_2(x_0), \\ E_1^* S_1 \frac{dU_1}{dx}(x_0) - E_1^* S_1 \frac{dU_2}{dx}(x_0) = F, \\ U_2(L_1) = U_3(L_1), \\ E_1^* S_1 \frac{dU_2}{dx}(L_1) - E_2^* S_2 \frac{dU_3}{dx}(L_1) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

La solution générale s'écrit pour le tronçon  $i$  sous la forme :

$$U_i(x) = A_i e^{jk_i x} + B_i e^{-jk_i x}, \quad \text{avec } k_i = \omega \sqrt{\frac{\rho_i}{E_i^*}}. \quad (\text{B.4})$$

Les 6 constantes  $\{A_i, B_i, i = 1, 2, 3\}$  sont déterminées en résolvant le système d'équations obtenu en injectant (B.4) dans (B.2-B.3). [OUI99] donne une expression analytique de chacun de ces coefficients.

## 1.2. Calcul de la moyenne temporelle des énergies

### 1.2.1. Energie cinétique

L'énergie cinétique moyennée dans le temps du tronçon 1 est donnée par :

$$\langle E_C^1 \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_0^{x_0} \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \left( \frac{du_1}{dt}(x, t) \right)^2 dx dt, \quad (\text{B.5})$$

d'où, à partir de l'expression du champ de déplacements :

$$\langle E_C^1 \rangle_t = \frac{1}{4} \rho_1 S_1 \int_0^{x_0} U_1(x) \bar{U}_1(x) dx. \quad (\text{B.6})$$

En posant  $k_1 = k_1^r + jk_1^i$ , et en considérant la solution (B.4), on obtient :

$$\langle E_C^1 \rangle_t = \frac{1}{4} \rho_1 S_1 (I(x_0) - I(0)), \quad (\text{B.7})$$

avec

$$I(x) = -\frac{1}{2k_1^i} e^{-2k_1^i x} A_1 \bar{A}_1 - 2Re \left\{ \frac{1}{2jk_1^r} A_1 \bar{B}_1 e^{2jk_1^r x} \right\} + \frac{1}{2k_1^i} e^{2k_1^i x} B_1 \bar{B}_1. \quad (\text{B.8})$$

De la même manière, on obtient l'énergie cinétique du tronçon 2 et du tronçon 3. L'énergie cinétique de la première poutre correspond aux énergies des tronçons 1 et 2.

### 1.2.2. Energie potentielle

L'expression de l'énergie potentielle moyennée dans le temps du tronçon 1 est donnée par :

$$\langle E_p^1 \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left\{ \int_0^{x_0} \frac{1}{2} E_1 S_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \right\} dt. \quad (\text{B.9})$$

A partir d'un calcul analogue à celui de l'énergie cinétique, on obtient finalement :

$$\langle E_p^1 \rangle_t = \frac{1}{4} E_1 S_1 (k_1)^2 (I(x_0) - I(0)). \quad (\text{B.10})$$

### 1.2.3. Energie totale

On obtient pour l'énergie totale du tronçon 1 :

$$\langle E_T^1 \rangle_t = \frac{1}{4} (\rho_1 S_1 + E_1 S_1 (k_1)^2) (I(x_0) - I(0)). \quad (\text{B.11})$$

Remarque : Compte tenu de la définition de  $k_1$  et pour des amortissements faibles, on a :  $\langle E_C^1 \rangle_t \approx \langle E_p^1 \rangle_t$ .

## 2. Couplage de deux poutres vibrant en flexion pure

### 2.1. Calcul du champ vibratoire

On considère les deux structures décrites aux paragraphes 4.2.1. (cas A) et 4.2.2. (cas B) du chapitre 2. Une force harmonique,  $e^{j\omega t}$ , excite ponctuellement chacune d'entre elles en  $x_0$ .

On décompose chaque système en trois tronçons. On pose pour le tronçon  $i$  :

$$w_i(x, t) = \text{Re}\{W_i(x)e^{j\omega t}\}, \quad (\text{B.12})$$

afin de décrire le champ de déplacements transversaux. (L'indice  $i$  est attribué ici au tronçon et non au sous-système comme dans le corps du document).

La solution générale de l'équation du mouvement homogène pour chaque tronçon est de la forme :

$$W_i(x) = A_i e^{jk_i x} + B_i e^{-jk_i x} + C_i e^{k_i x} + D_i e^{-k_i x}, \quad \text{avec } (k_i)^4 = \omega^2 \frac{\rho_i S_i}{E_i^* I_i}. \quad (\text{B.13})$$

Les conditions aux limites aux deux extrémités sont :

$$\begin{cases} W_1(0) = 0, & E_1 I_1 \frac{d^2 W_1}{dx^2}(0) = 0, \\ W_3(L_1 + L_2) = 0, & E_2 I_2 \frac{d^2 W_3}{dx^2}(L_1 + L_2) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Les conditions de continuité entre les deux premiers tronçons sont données par :

$$\begin{cases} W_1(x_0) = W_2(x_0), & \frac{dW_1}{dx}(x_0) = \frac{dW_2}{dx}(x_0), \\ E_1 I_1 \frac{d^2 W_1}{dx^2}(x_0) = E_1 I_1 \frac{d^2 W_2}{dx^2}(x_0), & E_1 I_1 \frac{d^3 W_1}{dx^3}(x_0) = E_1 I_1 \frac{d^3 W_2}{dx^3}(x_0) - F. \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Pour le cas A (poutres couplées sans appui intermédiaire), les conditions à l'interface entre le deuxième et troisième tronçons sont :

$$\begin{cases} W_2(L_1) = W_3(L_1), & \frac{dW_2}{dx}(L_1) = \frac{dW_3}{dx}(L_1), \\ E_1 I_1 \frac{d^2 W_2}{dx^2}(L_1) = E_2 I_2 \frac{d^2 W_3}{dx^2}(L_1), & E_1 I_1 \frac{d^3 W_2}{dx^3}(L_1) = E_2 I_2 \frac{d^3 W_3}{dx^3}(L_1). \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Pour le cas B (poutres couplées avec appui intermédiaire), les conditions sont :

$$\begin{cases} W_2(L_1) = 0, & W_3(L_1) = 0, \\ \frac{dW_2}{dx}(L_1) = \frac{dW_3}{dx}(L_1), & E_1 I_1 \frac{d^2 W_2}{dx^2}(L_1) = E_2 I_2 \frac{d^2 W_3}{dx^2}(L_1). \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

La réponse de chaque système peut être calculée en résolvant le système d'équations obtenu en injectant (B.13) dans (B.14,B.15,B.16) pour le cas A et dans (B.14,B.15,B.17) pour le cas B. Il faut noter toutefois que le système d'équations est mal conditionné. Ceci s'explique par le fait que dans l'expression de la solution générale (B.13) le terme  $e^{k_i x}$  croît très rapidement ; La constante  $C_i$  doit alors être très petite pour le contrebalancer. Pour améliorer le conditionnement de la matrice à résoudre, on pose :

$$\begin{cases} A'_1 = A_1 e^{-jk_1 x_0}, & A'_2 = A_2 e^{-jk_1 L_1}, & A'_3 = A_3 e^{-jk_1 (L_1 + L_2)}, \\ B'_1 = B_1, & B'_2 = B_2 e^{+jk_1 x_0}, & B'_3 = B_3 e^{+jk_1 L_1}, \\ C'_1 = C_1 e^{-k_1 x_0}, & C'_2 = C_2 e^{-k_1 L_1}, & C'_3 = C_3 e^{-k_1 (L_1 + L_2)}, \\ D'_1 = D_1, & D'_2 = D_2 e^{+k_1 x_0}, & D'_3 = D_3 e^{+k_1 L_1}. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Le nouveau système d'équations à résoudre a pour inconnues  $A'_i, B'_i, C'_i, D'_i$  et est correctement conditionné.

## 2.2. Calcul de la moyenne temporelle de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

L'énergie cinétique pour le premier tronçon est donnée par :

$$\langle E_c^1 \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_0^{x_0} \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \left( \frac{dw_1}{dt}(x, t) \right)^2 dx \Bigg| dt, \quad (\text{B.19})$$

en négligeant la contribution des effets d'inertie rotationnelle.

A partir de (B.12), on a :

$$\langle E_c^1 \rangle_t = \frac{1}{4} \rho_1 S_1 \omega^2 \int_0^{x_0} W_1(x) \overline{W_1}(x) dx. \quad (\text{B.20})$$

En injectant (B.13) dans cette expression, on peut en déduire un expression analytique de l'énergie cinétique en fonction des constantes  $A'_i, B'_i, C'_i, D'_i$ .

De même, on peut déterminer l'énergie potentielle donnée par :

$$\langle E_p^1 \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_0^{x_0} \frac{1}{2} E_1 I_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 dx \Bigg| dt. \quad (\text{B.21})$$

Remarque : En négligeant le champ proche, c'est-à-dire :  $W_1(x) \approx A_1 e^{jk_1 x} + B_1 e^{-jk_1 x}$ , on peut écrire :

$$E_1 I_1 \frac{d^2 W_1}{dx^2}(x) \overline{\frac{d^2 W_1}{dx^2}(x)} = E_1 I_1 |k_1|^4 W_1(x) \overline{W_1}(x) = \frac{E_1}{|E_1^*|} \rho_1 S_1 \omega^2 W_1(x) \overline{W_1}(x), \quad (\text{B.22})$$

d'où  $\langle E_c^1 \rangle_t \approx \langle E_p^1 \rangle_t$ .

## 3. Couplage de deux plaques en L

Le calcul de la réponse vibratoire est effectué par une décomposition semi-modale présentée en [REB95]. On rappelle ici brièvement la démarche pour le cas de couplage qui nous concerne. Celui-ci est composé de deux plaques couplées en L comme décrit au paragraphe 4.3. du chapitre 2. Une force harmonique ponctuelle excite la plaque 1 en  $(x_0, y_0)$ .

Dans un premier temps, on ne considère qu'une seule plaque. On omet, par conséquent, l'indice de la plaque dans la notation.

L'équation du mouvement pour une plaque excitée par une force harmonique,  $e^{j\omega t}$ , ponctuelle en  $(x_0, y_0)$  est de la forme :

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}(x, y) + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}(x, y) - \frac{\rho h \omega^2}{D^*} W(x, y) = \frac{F_e}{D^*} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (\text{B.23})$$

avec  $D^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ , rigidité de flexion et où on a posé :  $w(x, y, t) = \text{Re}\{W(x, y)e^{j\omega t}\}$ .

On effectue une décomposition modale suivant la variable  $y$  en posant :

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{W}_n(x) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (\text{B.24})$$

La base modale choisie vérifie les conditions aux limites sur les arêtes  $y=0, y=b$  (appui simple) et jouie de la propriété d'orthogonalité :

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy = \frac{b}{2} \delta_{nm}. \quad (\text{B.25})$$

En injectant (B.24) dans (B.23) et en utilisant la méthode de Galerkin, on obtient pour un indice  $n$  :

$$\frac{d^4 \hat{W}_n}{dx^4}(x) - 2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{d^2 \hat{W}_n}{dx^2}(x) + \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D^*}\right] \hat{W}_n(x) = \frac{2F_e}{bD^*} \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \delta(x - x_0). \quad (\text{B.26})$$

Pour chaque indice  $n$ , on doit résoudre une équation différentielle non homogène à coefficients constants. La solution peut s'écrire comme la somme de la solution générale de l'équation homogène,  $\hat{W}_{nh}(x)$  et d'une solution particulière de l'équation ci-dessus,  $\hat{W}_{np}(x)$  :

$$\hat{W}_n(x) = \hat{W}_{nh}(x) + \hat{W}_{np}(x). \quad (\text{B.27})$$

- La solution de l'équation homogène est obtenue sous la forme suivante (voir [REB95]) :

$$W_{nh}(x) = A_n e^{-k_{n1}x} + B_n e^{-k_{n2}x} + C_n e^{-k_{n1}(a-x)} + D_n e^{-k_{n2}(a-x)}, \quad (\text{B.28})$$

avec

$$k_{n1} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D^*}}} \quad \text{et} \quad k_{n2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D^*}}}. \quad (\text{B.29})$$



- L'obtention d'une solution particulière peut se faire par l'utilisation de la théorie des distributions. Rebillard [REB95] donne une description détaillée du calcul. On donne ici le résultat final.

La solution est exprimée sous la forme :

$$W_{np}(x) = g_n(x_0 - x)H(x_0 - x), \quad (\text{B.30})$$

où  $H(x_0 - x)$  est la fonction d'Heaviside nulle pour  $x > x_0$  et unitaire pour  $x < x_0$ , et  $g_n(x_0 - x)$  est de la forme :

$$g_n(x_0 - x) = a_n e^{-k_{n1}x} + b_n e^{-k_{n2}x} + c_n e^{-k_{n1}(x_0 - x)} + d_n e^{-k_{n2}(x_0 - x)}, \quad (\text{B.31})$$

où les quatre constantes doivent vérifier le système d'équations linéaires formé par :

$$\begin{cases} g_n(0) = 0, \frac{dg_n}{dx}(0) = 0, \\ \frac{d^2 g_n}{dx^2}(0) = 0, \frac{d^3 g_n}{dx^3}(0) = -\frac{2F_e}{bD^*} \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

La solution particulière est à ce stade complètement définie alors que la solution homogène demande encore pour être connue la détermination des constantes  $A_n, B_n, C_n$  et  $D_n$ . Celles-ci peuvent être déduites en résolvant le système d'équations obtenu après avoir écrit les conditions aux limites sur les arêtes  $x=0$  et  $x=a$ . Ces conditions aux limites doivent être établies pour le système de plaques assemblées.

On considère donc maintenant les deux plaques couplées en L et on affecte un exposant à chaque paramètre pour indiquer le numéro de la plaque à laquelle il est rattaché.

Les conditions aux limites sont :

- pour l'arête  $x=0$  de la première plaque,

$$\begin{cases} \hat{W}_n^1(0) = 0, \\ D_1 \frac{d^2 \hat{W}_n^1}{dx^2}(0) + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \hat{W}_n^1(0) = D_1 \frac{d^2 \hat{W}_n^1}{dx^2}(0) = 0; \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

- pour l'arête  $x=a_2$  de la seconde plaque,

$$\begin{cases} \hat{W}_n^2(a_2) = 0, \\ D_2 \frac{d^2 \hat{W}_n^2}{dx^2}(a_2) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

Le raccordement entre les deux plaques se traduit par :

$$\begin{cases} \hat{W}_n^1(a_1) = 0, \hat{W}_n^2(0) = 0, \\ \frac{d\hat{W}_n^1}{dx}(a_1) = \frac{d\hat{W}_n^2}{dx}(0), D_1 \frac{d^2\hat{W}_n^1}{dx^2}(a_1) = D_2 \frac{d^2\hat{W}_n^2}{dx^2}(0). \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

Les 8 équations précédentes permettent de calculer les 8 constantes nécessaires au calcul de la solution de l'équation du mouvement de chacune des deux plaques.

En résumé, pour chaque indice  $n$ , on doit d'abord déterminer les constantes de la solution particulière de la plaque 1 (plaque excitée) puis les constantes de la solution générale de chacune des plaques. La solution finale s'obtient par :

- pour la plaque 1 :

$$W^1(x_1, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^1 e^{-k_{n1}^1 x_1} + B_n^1 e^{-k_{n2}^1 x_1} + C_n^1 e^{-k_{n1}^1 (a_1 - x_1)} + D_n^1 e^{-k_{n2}^1 (a_1 - x_1)} + H(x_0 - x_1) \left[ a_n e^{-k_{n1}^1 x_1} + b_n e^{-k_{n2}^1 x_1} + c_n e^{-k_{n1}^1 (x_0 - x_1)} + d_n e^{-k_{n2}^1 (x_0 - x_1)} \right] \right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\right). \quad (\text{B.36})$$

- pour la plaque 2 :

$$W^2(x_2, y_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^2 e^{-k_{n1}^2 x_2} + B_n^2 e^{-k_{n2}^2 x_2} + C_n^2 e^{-k_{n1}^2 (a_2 - x_2)} + D_n^2 e^{-k_{n2}^2 (a_2 - x_2)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\right). \quad (\text{B.37})$$

On note que dans la zone de la plaque excitée où les deux solutions – particulière et générale – sont sommées ; la différence de deux très grandes valeurs peut alors donner naissance à une faible valeur ce qui peut entraîner des difficultés numériques. Pour les éviter, il faut que l'excitation reste proche de l'arête  $x_1=0$  de la plaque 1 ( $x_0$  voisin de 0).

Le champ de contraintes de la plaque 2 est déduit du champ de déplacements à partir de la loi de comportement :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^2(x_2, y_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{E_2}{1-\nu_2^2} \frac{d^2\hat{W}_n^2}{dx^2}(x_2) + \frac{\nu_2 E_2}{1-\nu_2^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \hat{W}_n^2(x_2) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{b} y_2\right) \\ \sigma_{yy}^2(x_2, y_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{\nu_2 E_2}{1-\nu_2^2} \frac{d^2\hat{W}_n^2}{dx^2}(x_2) + \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \hat{W}_n^2(x_2) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{b} y_2\right) \\ \sigma_{xy}^2(x_2, y_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_2}{1+\nu_2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \frac{d\hat{W}_n^2}{dx}(x_2) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y_2\right) \end{cases} \quad (\text{B.38})$$

## ANNEXE C

# RÉSOLUTION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS ÉNERGÉTIQUES MODALES

Au chapitre 3, on présente la résolution des équations énergétiques du mouvement par la technique de Galerkin. Dans cette annexe, on propose deux autres méthodes de résolution approchée de ces équations :

- la première fait intervenir des considérations liées au couplage faible entre les sous-systèmes pour simplifier les équations ;
- la seconde consiste en un tri modal.

A la différence de la technique de Galerkin, les approximations de ces deux méthodes ne portent pas sur la répartition des énergies modales.

Pour chacune des deux méthodes, on présente d'abord une description théorique, puis un cas d'application permettant d'illustrer la méthode.

## **1. Résolution approchée à partir de considérations sur le couplage faible entre les sous-systèmes**

### ***1.1. Description***

Les simplifications des équations énergétiques modales du mouvement proposées dans ce paragraphe sont 'similaires' à celles employées par Lalor [LAL97] pour simplifier les équations de la SEA. Ces simplifications reposent sur les conséquences du couplage faible entre les sous-systèmes imposé par la démarche proposée.

Deux cas de figures vont être traités séparément :

- le couplage en chaîne des sous-systèmes ;
- le couplage en boucle fermée des sous-systèmes.

#### **1.1.1. Sous-systèmes couplés en chaîne**

On considère quatre sous-systèmes couplés en chaîne comme représenté figure C.1. Seul le sous-système 2 est excité par une excitation extérieure au système.

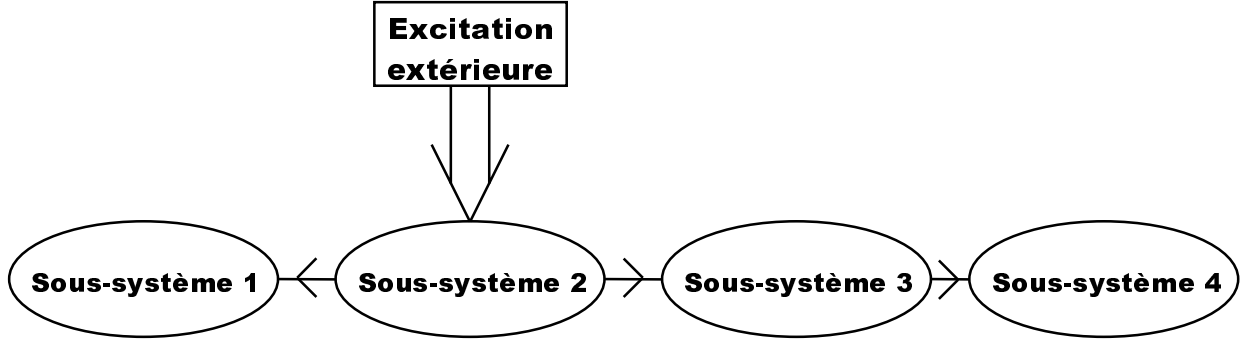


Figure C.1. Couplage des quatre sous-systèmes en chaîne.

On note par  $E_n^\alpha$ ,  $\omega_n^\alpha$ ,  $\eta_n^\alpha$ , l'énergie, la pulsation propre, le facteur de perte interne du mode  $n$  du sous-système  $\alpha$  : ( $n \in [1, \dots, N_\alpha]$ ,  $\alpha \in [1, 2, 3, 4]$ ).

L'écriture des équations énergétiques modales du mouvement pour quatre sous-systèmes s'obtiennent immédiatement à partir de celles établies pour deux sous-systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \left( \omega_m^1 \eta_m^1 + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_{mn}^{12} \right) E_m^1 - \sum_{n=1}^{N_2} \beta_{mn}^{12} E_n^2, \quad \forall m \in [1, \dots, N_1] \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{inj}^{2n} = \left( \omega_n^2 \eta_n^2 + \sum_{m=1}^{N_1} \beta_{nm}^{21} + \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{np}^{23} \right) E_n^2 - \sum_{m=1}^{N_1} \beta_{nm}^{21} E_m^1 - \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{np}^{23} E_p^3, \quad \forall n \in [1, \dots, N_2] \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \left( \omega_p^3 \eta_p^3 + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_{pn}^{32} + \sum_{q=1}^{N_4} \beta_{pq}^{34} \right) E_p^3 - \sum_{n=1}^{N_2} \beta_{pn}^{32} E_n^2 - \sum_{q=1}^{N_4} \beta_{pq}^{34} E_q^4, \quad \forall p \in [1, \dots, N_3] \end{array} \right. \quad (\text{C.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \left( \omega_q^4 \eta_q^4 + \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{qp}^{43} \right) E_q^4 - \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{qp}^{43} E_p^3, \quad \forall q \in [1, \dots, N_4] \end{array} \right. \quad (\text{C.4})$$

### Approche de base :

L'application à chaque couple de modes de la relation établie pour deux oscillateurs couplés impose une hypothèse de couplage faible entre les sous-systèmes. Plusieurs définitions de ce couplage faible ont été données dans la littérature (voir chapitre 1, paragraphe 2.5.). Une conséquence de cette hypothèse est qu'elle conduit, en général, à des disparités importantes entre les énergies totales des sous-systèmes. Ceci a notamment été mis en évidence par Chandiramani [CHA78] et Smith [SMI79]. Du point de vue du modèle SmEdA, ces disparités entre les énergies totales se traduisent généralement par des énergies modales très différentes d'un sous-système à un autre.

Pour la configuration de couplage étudiée, on peut aisément déterminer le sens des flux d'énergie et classer les sous-systèmes suivant leur niveau d'énergie. Par conséquent, on peut raisonnablement poser les hypothèses suivantes :

$$E_n^2 \gg E_m^1, \quad \forall (n,m) \in ([1, \dots, N_2], [1, \dots, N_1]), \quad (\text{C.5})$$

$$E_n^2 \gg E_p^3, \quad \forall (n,p) \in ([1, \dots, N_2], [1, \dots, N_3]), \quad (\text{C.6})$$

$$E_p^3 \gg E_q^4, \quad \forall (p,q) \in ([1, \dots, N_3], [1, \dots, N_4]). \quad (\text{C.7})$$

Ces hypothèses sont posées *a priori* et pourront être vérifiées *a posteriori* une fois les résultats des calculs obtenus.

Comme pour les équations de la SEA, le système d'équations linéaires à résoudre (C.1-C.4) constituent un système bien conditionné. C'est-à-dire que de faibles variations sur les coefficients du système entraînent de faibles variations sur la solution du système. En supprimant certains termes supposés négligeables du système d'équations, on peut donc s'attendre à ne pas modifier la solution de façon conséquente.

A partir de (C.2), et en prenant en compte les hypothèses (C.5) et (C.6), on peut approcher l'énergie de chaque mode  $n$  du sous-système 2 par :

$$\tilde{E}_n^2 = \frac{\Pi_{inj}^{2n}}{\omega_n^2 \eta_n^2 + \sum_{m=1}^{N_1} \beta_{nm}^{21} + \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{np}^{23}}, \quad \forall n \in [1, \dots, N_2] \quad (\text{C.8})$$

où on note  $\tilde{E}_n^2$ , l'approximation de  $E_n^2$ .

Ensuite, avec l'hypothèse (C.7), on peut écrire pour les énergies modales du sous-système 3 :

$$\tilde{E}_p^3 = \frac{\sum_{n=1}^{N_2} \beta_{pn}^{32} \tilde{E}_n^2}{\omega_p^3 \eta_p^3 + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_{pn}^{32} + \sum_{q=1}^{N_4} \beta_{pq}^{34}}, \quad \forall p \in [1, \dots, N_3] \quad (\text{C.9})$$

Et, finalement, pour les modes du sous-système 1 et du sous-système 4, on a (sans hypothèse supplémentaire) :

$$\tilde{E}_m^1 = \frac{\sum_{n=1}^{N_2} \beta_{mn}^{12} \tilde{E}_n^2}{\omega_m^1 \eta_m^1 + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_{mn}^{12}}, \quad \forall m \in [1, \dots, N_1], \quad \tilde{E}_q^4 = \frac{\sum_{p=1}^{N_3} \beta_{qp}^{43} \tilde{E}_p^3}{\omega_q^4 \eta_q^4 + \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{qp}^{43}}, \quad \forall q \in [1, \dots, N_4] \quad (\text{C.10})$$

Les expressions (C.8-C.10) permettent de déterminer les énergies modales sans recourir à l'inversion d'une matrice. Par cette technique, aucune hypothèse n'est posée sur la répartition des énergies modales. Les hypothèses (C.5-C.7) peuvent être vérifiées *a posteriori* à partir des valeurs de  $\tilde{E}_m^1, \tilde{E}_n^2, \tilde{E}_p^3, \tilde{E}_q^4$ . On note par SmEdA<sup>simpl</sup>, la méthode décrite ci-dessus.

**Indicateurs :**

On peut remarquer que les hypothèses (C.5-C.7) sont plus restrictives qu'il ne faut pour passer de  $E_n^\alpha$  à  $\tilde{E}_n^\alpha$ . Par exemple pour le sous-système 2, les approximations posées en

(C.8) consistent à négliger  $\sum_{m=1}^{N_1} \beta_{nm}^{21} E_m^1$  et  $\sum_{p=1}^{N_3} \beta_{np}^{23} E_p^3$  devant les puissances injectées modales.

Un indicateur vérifiant le bien fondé de ces approximations peut être calculé :

$$IND^1 = \max \left( \frac{\sum_{m=1}^{N_1} \beta_{nm}^{21} \tilde{E}_m^1 + \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{np}^{23} \tilde{E}_p^3}{\Pi_{inj}^{2n}}, n \in [1, \dots, N_2] \right). \quad (C.11)$$

Si celui-ci est petit devant un, les approximations sont correctes. On remarque bien que si les hypothèses (C.5,C.6) sont respectées alors l'indicateur est petit. De façon analogue, on peut définir un indicateur lié aux approximations posées pour le calcul des énergies modales du sous-système 3 :

$$IND^2 = \max \left( \frac{\sum_{q=1}^{N_4} \beta_{pq}^{34} \tilde{E}_q^4}{\sum_{n=1}^{N_2} \beta_{pn}^{32} \tilde{E}_n^2}, p \in [1, \dots, N_3] \right). \quad (C.12)$$

**Calcul récursif :**

Un calcul récursif peut être envisagé pour les cas de couplage relativement fort ou d'amortissement très faible pour lesquels les disparités des énergies entre les sous-systèmes sont moins importantes. En effet, on peut reprendre les  $\tilde{E}_n^\alpha$  du calcul précédent comme une première approximation et les réintroduire dans les équations (C.1-C.4) pour calculer de nouvelles approximations des énergies modales. Par exemple, une deuxième approximation des énergies modales du sous-système 2,  $\tilde{E}_n^2$ , est obtenue en considérant  $\tilde{E}_m^1$  et  $\tilde{E}_p^3$  du premier calcul :

$$\tilde{E}_n^2 = \frac{\Pi_{inj}^{2n} + \sum_{m=1}^{N_1} \beta_{nm}^{21} \tilde{E}_m^1 + \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{np}^{23} \tilde{E}_p^3}{\omega_n^2 \eta_n^2 + \sum_{m=1}^{N_1} \beta_{nm}^{21} + \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{np}^{23}}, \quad \forall n \in [1, \dots, N_2] \quad (C.13)$$

Un calcul similaire permet de calculer les  $\tilde{E}_m^1, \tilde{E}_p^3, \tilde{E}_q^4$  :

$$\tilde{E}_m^1 = \frac{\sum_{n=1}^{N_2} \beta_{mn}^{12} \tilde{E}_n^2}{\omega_m^1 \eta_m^1 + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_{mn}^{12}}, \quad \tilde{E}_p^3 = \frac{\sum_{n=1}^{N_2} \beta_{pn}^{32} \tilde{E}_n^2 + \sum_{q=1}^{N_4} \beta_{pq}^{34} \tilde{E}_q^4}{\omega_p^3 \eta_p^3 + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_{pn}^{32} + \sum_{q=1}^{N_4} \beta_{pq}^{34}}, \quad \tilde{E}_q^4 = \frac{\sum_{p=1}^{N_3} \beta_{qp}^{43} \tilde{E}_p^3}{\omega_q^4 \eta_q^4 + \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{qp}^{43}}. \quad (C.14)$$

Les résultats de ce calcul récursif de rang un donnent une seconde approximation des énergies modales des sous-systèmes. A partir des équations précédentes, il est possible d'effectuer des calculs récursifs de rangs supérieurs jusqu'à convergence du processus. On note par  $\text{SmEdA}^{\text{simpl } N}$ , le calcul récursif ci-dessus de rang  $N$ .

### 1.1.2. Sous-systèmes couplés en boucle fermée

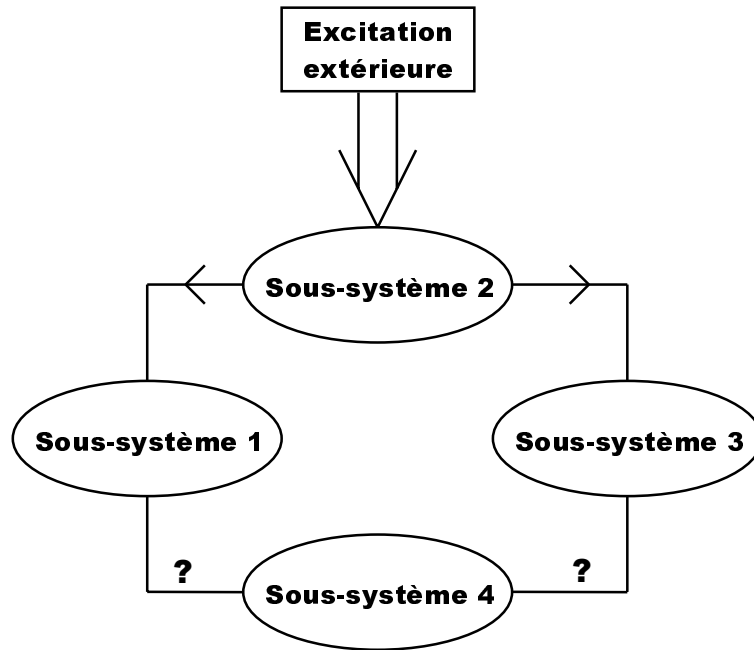


Figure C.2. Représentation symbolique des quatre sous-systèmes couplés en boucle fermée.

Pour cette configuration de couplage (figure C.2), on ne peut pas déterminer *a priori* les sens des différents flux d'énergies. En effet, ceux-ci dépendent des niveaux de couplage entre les sous-systèmes et des amortissements internes. La démarche proposée consiste à effectuer un premier calcul avec  $\text{SmEdA}^1$ , c'est-à-dire en effectuant l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales. Ce calcul peu coûteux en temps CPU est susceptible de donner un résultat fiable sur les sens des flux d'énergie. Supposons, par exemple, que les puissances échangées vont du sous-système 3 au sous-système 4 et du sous-système 1 au sous-système 4. On pose *a priori* les hypothèses (C.5-C.7) et l'hypothèse supplémentaire :

$$E_m^1 \gg E_q^4, \quad \forall (m, q) \in ([1, \dots, N_1] \times [1, \dots, N_4]). \quad (C.16)$$

Pour déterminer les énergies modales approchées des sous-systèmes 1, 2 et 3, on utilise les équations (C.8-C.10) du paragraphe précédent. Par contre pour calculer celles du sous-système 4, on doit faire intervenir les flux d'énergies provenant du sous-système 1 et du sous-système 3, c'est-à-dire :

$$\tilde{E}_q^4 = \frac{\sum_{m=1}^{N_1} \beta_{qm}^{41} \tilde{E}_m^1 + \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{qp}^{43} \tilde{E}_p^3}{\omega_q^4 \eta_q^4 + \sum_{m=1}^{N_1} \beta_{qm}^{41} + \sum_{p=1}^{N_3} \beta_{qp}^{43}}, \quad \forall q \in [1, \dots, N_4]. \quad (\text{C.17})$$

On peut vérifier *a posteriori* le bien fondé des hypothèses qui ont été posées à partir du calcul SmEdA<sup>1</sup>. Un indicateur supplémentaire est à évaluer :

$$IND^3 = \max \left( \frac{\sum_{q=1}^{N_4} \beta_{mq}^{14} \tilde{E}_q^4}{\sum_{n=1}^{N_2} \beta_{mn}^{12} \tilde{E}_n^2}, m \in [1, \dots, N_1] \right). \quad (\text{C.18})$$

## 1.2. Application

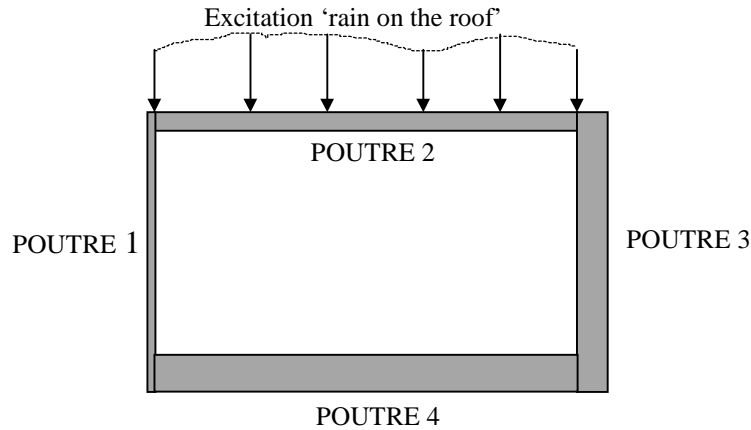


Figure C.3. Représentation schématique de la structure considérée.

La structure considérée dans ce paragraphe est constituée de quatre poutres (hypothèses d'Euler - Bernoulli) couplées rigidement à angle droit comme représentées figure C.3. Un appui bloquant les déplacements transversaux est adjoint au niveau de chaque liaison. Les rapports des épaisseurs entre les poutres ont été choisis de manière à assurer un couplage faible entre les poutres (voir paragraphe 2.3 du chapitre 4). On peut donc décomposer la structure en quatre sous-systèmes SEA : chaque poutre constitue un sous-système. La poutre 2 étant excitée par une excitation 'rain on the roof', on se retrouve dans un schéma de couplage des sous-systèmes identique à celui représenté figure C.2. L'approche SmEdA<sup>simp</sup> que l'on



souhaite mettre en application est donc entièrement décrite du point de vue théorique au paragraphe 1.1.

On rappelle que les conditions aux limites des sous-systèmes pour le calcul des modes doivent être telles que les modes des sous-systèmes puissent se rapprocher au mieux des modes globaux de la structure. Celles-ci sont données, tableau C.1, pour chaque poutre :

<i>Sous-système</i>	<i>Conditions aux limites</i>
poutre 1	Encastrée-Encastrée
poutre 2	Appuyée-Encastrée
poutre 3	Appuyée-Encastrée
poutre 4	Appuyée-Appuyée

Tableau C.1. Conditions aux limites des sous-systèmes pour le calcul des modes.

Le couplage des quatre sous-systèmes constituent une boucle fermée. Il est donc nécessaire d'effectuer un premier calcul SmEdA<sup>1</sup> pour pouvoir ouvrir la boucle et permettre, dans un second temps, un calcul SmEdA<sup>simp</sup>.

Les résultats du calcul SmEdA<sup>1</sup> en terme d'énergies modales moyennes par bande sont donnés figure C.4 pour chaque sous-système et pour une facteur d'amortissement  $\eta=0,01$ . On rappelle que ce calcul est peu coûteux en temps calcul mais qu'il suppose l'équirépartition des énergies modales. On remarque que pour toutes les bandes de fréquences considérées, la poutre 4 a le niveau d'énergie modale moyen le plus faible. En conséquence, l'ouverture de la boucle est réalisée entre le sous-système 3 et le sous-système 4.

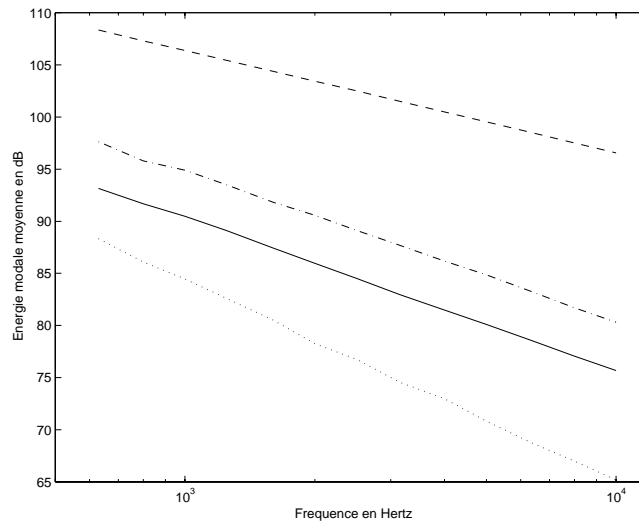


Figure C.4. Energies modales moyennes des 4 poutres calculées par SmEdA<sup>1</sup> en fonction de la fréquence. —, Poutre 1 ; ---, Poutre 2 ; -.-., Poutre 3 ; ..... Poutre 4.  $L_1=7$  m,  $L_2=10$  m,  $L_3=7$  m,  $L_4=10$  m,  $h_2=1$  mm,  $h_2/h_1=3$ ,  $h_3/h_2=3$ ,  $h_4/h_3=3$ ,  $b_\alpha=10$  mm,  $E_\alpha=7.10^{10}$  Pa,  $\rho_\alpha=2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_\alpha=0,01$ . ( $\alpha \in [1, \dots, 4]$ ).

En effectuant les calculs décrits au paragraphe 1.1, on obtient les résultats SmEdA<sup>simp</sup> qui tiennent compte de la répartition des énergies modales mais qui sont des solutions approchées des équations énergétiques modales.

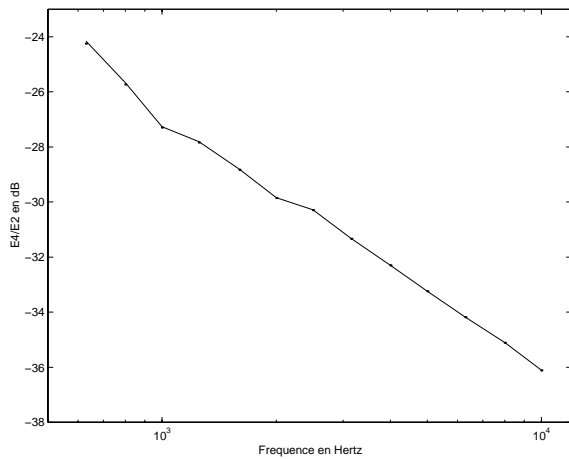


Figure C.5. Rapport des énergies totales  $E4/E2$  par tiers d'octave. Configuration identique à la figure précédente. Deux calculs :  $\dots$ ,  $SmEdA^{simp}$ ;  $—$ ,  $SmEdA^{max}$ .

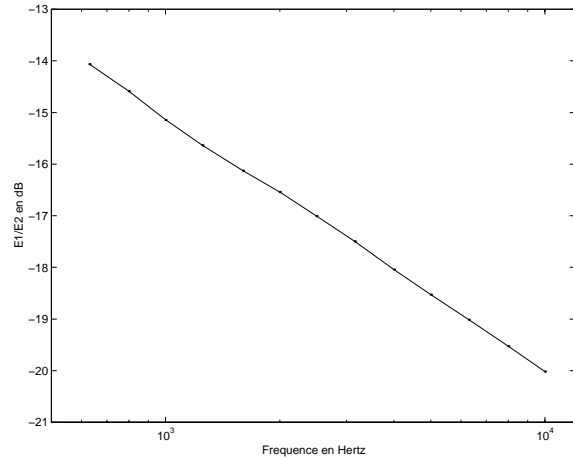


Figure C.6. Rapport des énergies totales  $E1/E2$  par tiers d'octave. Voir figure précédente.

Figure C.5 et C.6, on donne une comparaison des calculs  $SmEdA^{simp}$  et  $SmEdA^{max}$ . On constate une très bonne concordance entre les deux. L'évaluation des différents indicateurs permet de vérifier – *a posteriori* – le bien fondé des hypothèses posées pour le calcul  $SmEdA^{simp}$  (voir figure C.7). Il semble et c'est le cas ici, que pour des valeurs inférieures à 0,1, les résultats de  $SmEdA^{simp}$  sont corrects et ne nécessitent pas de calculs récursifs.

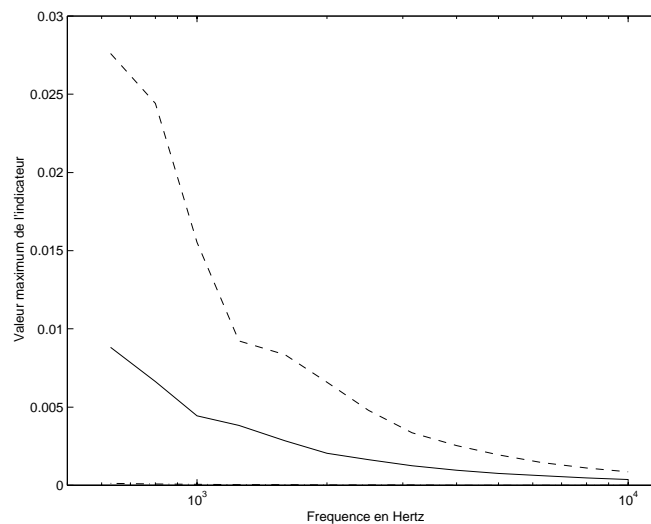


Figure C.7. Valeurs des indicateurs pour chaque bande de fréquence.  $—$ ,  $IND^1$ ;  $---$ ,  $IND^2$ ;  $\dots$ ,  $IND^3$ .

Un second exemple est présenté figures C.8 à C.11 avec un facteur d'amortissement interne dix fois plus faible ( $\eta=0,001$ ). Dans ce cas, les écarts entre les énergies modales moyennes des sous-systèmes sont plus réduits car les sous-systèmes sont plus réverbérants

(comparer figures C.4 et C.8). Par conséquent, ce cas est plus sévère vis-à-vis des hypothèses simplificatrices du calcul  $SmEdA^{simp}$ .

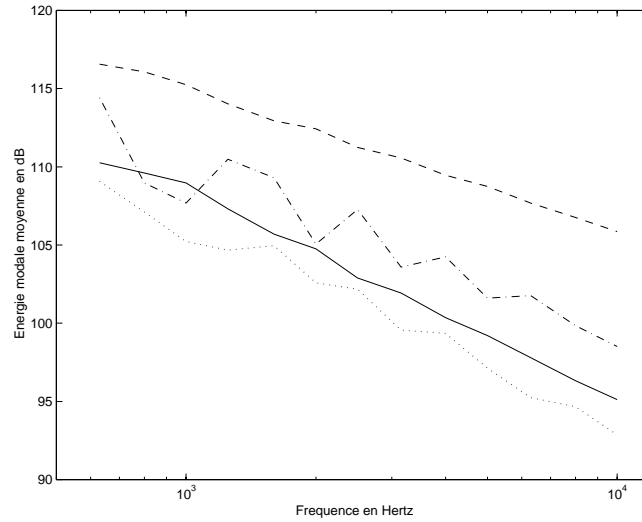


Figure C.8. Energies modales moyennes des 4 poutres calculées par  $SmEdA^1$  en fonction de la fréquence. —, Poutre 1 ; ---, Poutre 2 ; - · - ·, Poutre 3 ; · · · ·, Poutre 4.  $L_1=7$  m,  $L_2=10$  m,  $L_3=7$  m,  $L_4=10$  m,  $h_2=1$  mm,  $h_2/h_1=3$ ,  $h_3/h_2=3$ ,  $h_4/h_3=3$ ,  $b_\alpha=10$  mm,  $E_\alpha=7.10^{10}$  Pa,  $\rho_\alpha=2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_\alpha=0,001$ , ( $\alpha \in [1, \dots, 4]$ ).

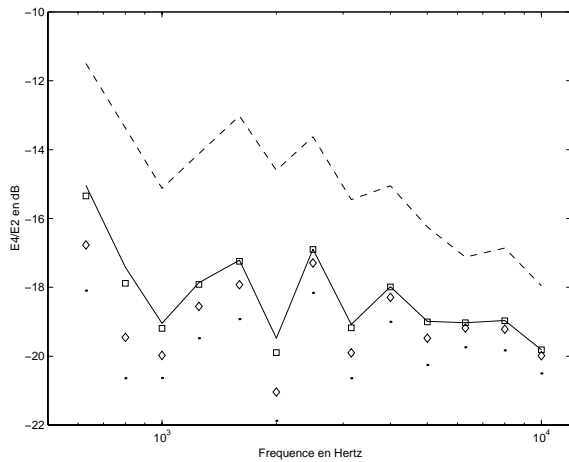


Figure C.9. Rapport des énergies totales  $E4/E2$  par tiers d'octave. Configuration de la figure précédente. Cinq calculs : —,  $SmEdA^{max}$  ; · · · ·,  $SmEdA^{simp1}$  ;  $\diamond$  ;  $SmEdA^{simp2}$  ;  $\triangle$ ,  $SmEdA^{simp4}$  ; ---,  $SmEdA^1$ .

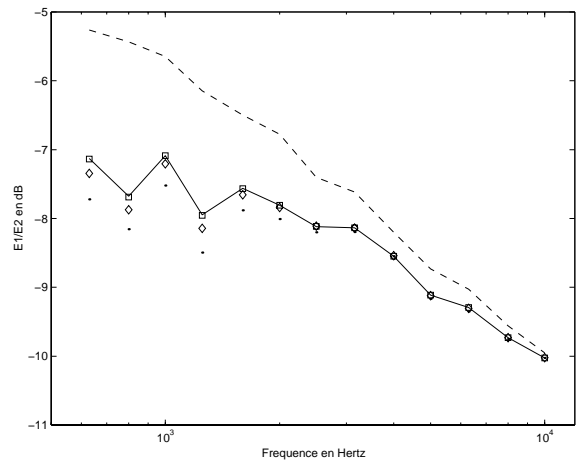


Figure C.10. Rapport des énergies totales  $E1/E2$  par tiers d'octave. Voir figure précédente.

On constate effectivement des erreurs de ce calcul, figure C.9 et C.10. Les indicateurs donnés figure C.11 confirment bien que les hypothèses ne sont pas très bien respectées. Deux calculs récursifs de rang 2 et de rang 4 sont proposés. Ceux-ci montrent la convergence du processus. On peut souligner que le rang des calculs récursifs peut être différent d'une bande de fréquence à une autre. La condition pour sortir de la boucle de récursivité peut être liée à des indicateurs basés sur le même principe que ceux du calcul direct.

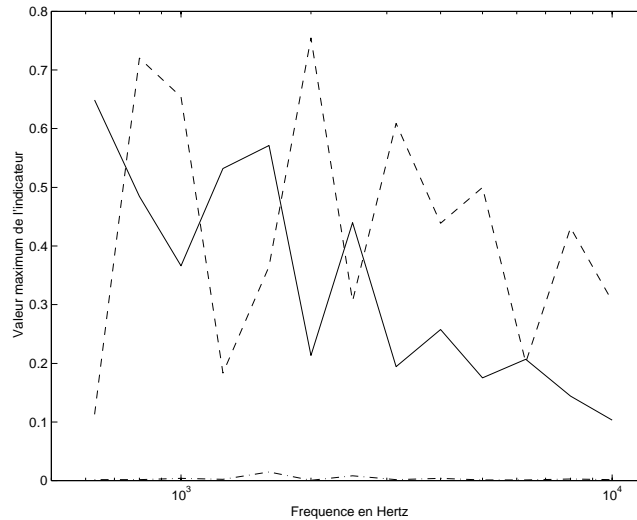


Figure C.11. Valeurs des indicateurs pour chaque bande de fréquence. —,  $IND^1$ ; ---,  $IND^2$ ; -.-,  $IND^3$ .

On remarque, figures C.9 et C.10, que le calcul  $SmEdA^1$  qui a été utilisé pour établir une hiérarchie des niveaux énergétiques des sous-systèmes donne des résultats éloignés du calcul  $SmEdA^{max}$ . La prise en compte de la répartition des énergies modales était donc nécessaire pour ce système à faible recouvrement modal.

En conclusion, pour des systèmes non couplés en chaîne ou pour des systèmes faisant intervenir des excitations sur plusieurs sous-systèmes, un premier calcul  $SmEdA^1$  est nécessaire pour établir une hiérarchie des niveaux énergétiques des sous-systèmes. Celle-ci sert ensuite de base à la pose des hypothèses du calcul  $SmEdA^{simpl}$  qui prend en compte la répartition des énergies modales. Les limites de cette approche peuvent se rencontrer en théorie pour des systèmes pour lesquels il n'y pas de grands écarts sur les niveaux énergétiques des sous-systèmes. Cependant, si l'hypothèse SEA de couplage faible entre les sous-systèmes est respectée et si l'amortissement n'est pas trop faible, ces cas ne doivent pas se rencontrer.

## 2. Résolution approchée basée sur un tri - modal

### 2.1. Description

Les facteurs de couplages intermodaux (voir expression (3.21)), peuvent varier considérablement d'un couple de modes à un autre, c'est-à-dire que certains modes sont plus fortement couplés que d'autres. Par exemple, pour le couplage plaque-cavité, Fahy [FAH69] montre que dans certaines bandes de fréquence, bien que chaque sous-système ait un nombre important de modes, peu participent réellement au couplage. A titre d'indication, pour une

bande de fréquence particulière, 10 des 91000 couples de modes possibles comptent pour 80 % de la puissance échangée. La double formulation modale que l'on emploie pour décrire le couplage de deux structures mécaniques étant identique à celle utilisée par Fahy pour l'étude du couplage cavité-structure, on retrouve les mêmes interprétations physiques. Deux phénomènes sont en cause :

- Les coïncidences spatiales entre les modes des sous-systèmes. Elles dépendent des déformées propres sur la frontière de couplage. Elles interviennent dans l'expression des facteurs de couplages intermodaux via les travaux d'interactions modales. Ce phénomène est classiquement décrit pour le couplage entre une structure mécanique et une cavité acoustique (voir [FAH69], [FAH70]). Les coïncidences spatiales peuvent conduire de nombreux couples de modes à ne pas être couplés.

- Les coïncidences fréquentielles entre les modes des sous-systèmes. Elles dépendent des fréquences propres et des amortissements modaux. Le terme où intervient ce phénomène dans l'expression des facteurs de couplages intermodaux est donné par :

$$C_f(\omega_p^1, \omega_q^2, \Delta_p^1, \Delta_q^2) = \frac{\Delta_p^1 (\omega_q^2)^2 + \Delta_q^2 (\omega_p^1)^2}{\left( (\omega_p^1)^2 - (\omega_q^2)^2 \right)^2 + (\Delta_p^1 + \Delta_q^2) \left( \Delta_p^1 (\omega_q^2)^2 + \Delta_q^2 (\omega_p^1)^2 \right)}. \quad (C.18)$$

Pour des fréquences propres voisines,  $\omega_p^1 \approx \omega_q^2$ , sa valeur devient maximale ( $\Delta_p^1, \Delta_q^2$  fixées) :

$$C_f(\omega_p^1, \omega_q^2, \Delta_p^1, \Delta_q^2) = \frac{1}{\Delta_p^1 + \Delta_q^2}. \quad (C.19)$$

On donne, figure C.12, l'allure type de  $C_f$  en fonction de l'écart relatif entre les deux pulsations propres. Il est évident que plus les fréquences propres sont éloignées, plus ce terme devient petit, donc plus le couplage devient faible. En référence [FAH69], Fahy néglige les couplages des modes  $(p, q)$  si :

$$2|\omega_p^1 - \omega_q^2| > (\Delta_p^1 + \Delta_q^2). \quad (C.20)$$

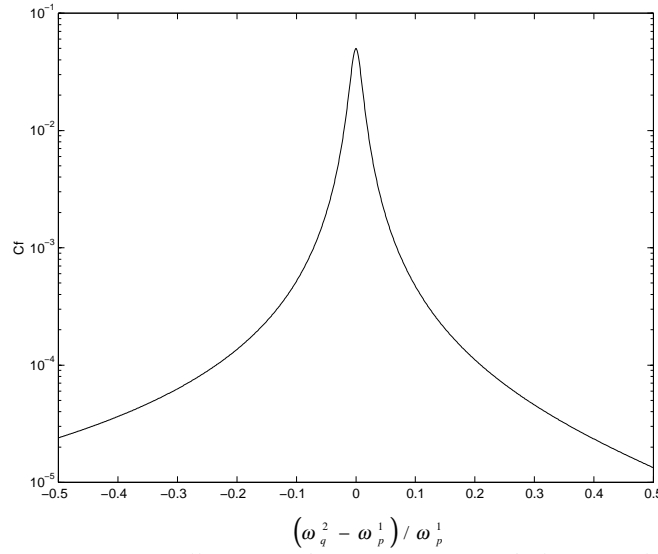


Figure C.12. Allure type de  $C_f$  en fonction de l'écart relatif entre les fréquences propres.

Ces deux phénomènes ont pour conséquences que certains modes soient fortement couplés entre eux et que d'autres le soient beaucoup moins, voir pas du tout (voir figure C.13 une représentation schématique de ce type de couplage). Il est donc envisageable d'effectuer un tri modal qui ne tient compte que du couplage entre les modes fortement couplés.

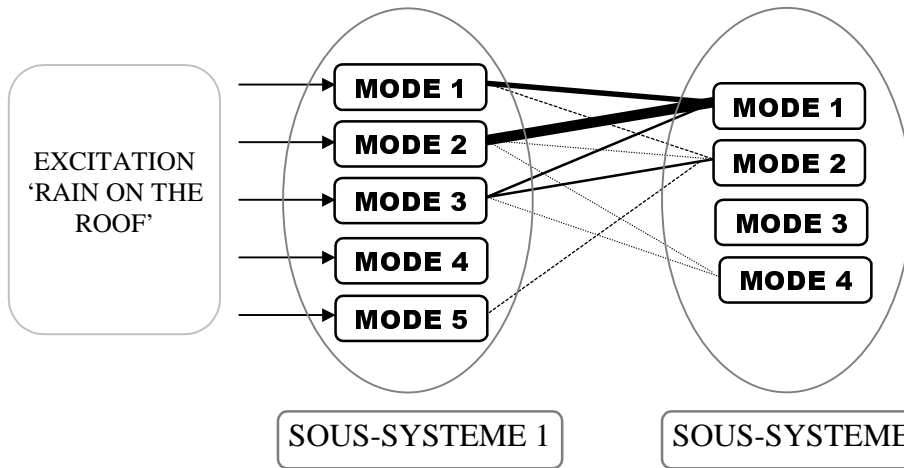


Figure C.13. Représentation symbolique des interactions modales de deux sous-systèmes : la force de couplage est matérialisée par des traits d'épaisseurs différentes.

Considérons un système composé de deux sous-systèmes. Seul le sous-système 1 est excité par un effort de type 'rain on the roof'. Les énergies des modes d'indice  $n$  du sous-système 2 sont données par :

$$E_n^2 = \frac{\sum_{m=1}^{N_1} \beta_{nm}^{21} E_m^1}{\omega_n^2 \eta_n^2 + \sum_{m=1}^{N_1} \beta_{nm}^{21}}, \quad \forall n \in [1, \dots, N_2] \quad (C.21)$$

On suppose compte tenu de l'excitation 'rain on the roof' que la répartition des énergies modales du sous-système 1 est quasiment uniforme (amortissement sensiblement équivalent d'un mode à l'autre).

Pour chaque mode  $n$  du sous-système 2, on définit :

$$\chi_n = \sum_{m=1}^{N_1} \beta_{nm}^{21}.$$

Ce paramètre quantifie la force de couplage du mode  $n$  avec tous les modes avec lesquels il est couplé. On peut donc, à partir de celui-ci, établir un critère de tri modal :

- (a) Si  $\chi_n < \frac{\max(\chi_p, p \in [1, \dots, N_2])}{\lambda}$ , alors  $E_n^2$  est négligée dans le système d'équations (3.24),
- (b) Si  $\chi_n \geq \frac{\max(\chi_p, p \in [1, \dots, N_2])}{\lambda}$ , alors  $E_n^2$  ne peut pas être négligée,

où  $\lambda$  est une constante à définir *a priori* ( $\lambda \gg 1$ ).

Soit  $N_a^2$  (resp.  $N_b^2$ ), le nombre de modes du sous-système 2 respectant la condition (a) (resp. condition (b)). En négligeant les énergies de  $N_a^2$  modes du sous-système 2, on réduit d'autant le nombre de degrés de liberté à prendre en compte dans les équations énergétiques modales. On souligne que le fait que des énergies modales d'un sous-système soient négligeables par rapport à d'autres du même sous-système, implique une forte disparité de la répartition des énergies modales du sous-système.

#### Remarques :

- Pour la configuration de couplage considérée, on peut appliquer l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales pour le sous-système 1, et prendre en compte, indépendamment les uns des autres, tous les modes du sous-système 2 qui respectent le critère de tri modal (condition (b)). Le nombre total de degrés de liberté à prendre en compte dans le calcul est alors de  $1 + N_b^2$ .

- En appliquant dans un premier temps le tri modal, puis dans un second temps, l'hypothèse de l'équirépartition des énergies modales pour chacun des deux sous-systèmes (SmEdA<sup>1</sup>), on obtient les équations de la forme :

$$\begin{cases} \Pi_{ij}^1 = \omega_c \eta_1 E_1 + \omega_c \eta_{12} \left( E_1 - \frac{N_1}{N_b^2} E_2 \right) \\ 0 = \omega_c \eta_2 E_2 + \omega_c \eta_{12} \left( \frac{N_1}{N_b^2} E_2 - E_1 \right) \end{cases} \quad (C.22)$$

avec la notation du paragraphe 4 du chapitre 3.

Celles-ci s'apparentent aux équations de la SEA, excepté que le rapport des nombres de modes ne fait intervenir que les modes du sous-système 2 participant réellement au couplage. Ceci suggère qu'il faut utiliser avec précaution les rapports de densités modales dans les équations de la SEA (voir [MAI77]).

On désigne cette méthode de calcul par  $\text{SmEdA}^{\text{opt}}$ . L'extension de cette technique à des structures composées de plus de deux sous-systèmes semble plus délicate et ne fera pas l'objet de développement. En l'état, cette technique présente un champ d'application limité. Cependant elle permet néanmoins de mettre en évidence des phénomènes liés au couplage de deux sous-systèmes. Le tri modal s'effectue ici par un critère numérique sur les valeurs des facteurs de couplages intermodaux. Pour une compréhension des phénomènes de couplage plus en profondeur, il est également possible, sur le modèle de l'approche utilisée par Fahy ([FAH69], [FAH70]), d'effectuer le tri en considérant les données modales des sous-systèmes (modèles analytiques).

## 2.2. Application

On montre, dans ce paragraphe, une application du modèle  $\text{SmEdA}^{\text{opt}}$  sur un couplage de deux plaques couplées en L. Les longueurs et largeurs des plaques sont similaires, par contre, les épaisseurs sont dans un rapport un quart. Les valeurs du facteur de recouvrement modal de chaque plaque sont présentées tableau C.2.

$f_c$ (Hz)	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000
$R_{m_1}$	0,04	0,05	0,06	0,07	0,09	0,12	0,15	0,19	0,24	0,30	0,37	0,47	0,60	0,75
$R_{m_2}$	0,08	0,10	0,13	0,16	0,20	0,26	0,33	0,41	0,52	0,65	0,82	1,03	1,30	1,63

Tableau C.2. Facteurs de recouvrement modal pour chaque tiers d'octave de fréquence centrale  $f_c$ .  $R_{m_1}$  : Plaque 1,  $R_{m_2}$  : Plaque 2.

On donne les résultats de plusieurs calculs, figure C.14, en fonction de la fréquence. Le calcul  $\text{SmEdA}^{\text{opt}}$  avec  $\lambda \rightarrow +\infty$  revient à exclure les modes de la plaque 2 qui ne sont pas couplés avec les modes de la plaque 1. Les résultats de ce calcul sont évidemment identiques à ceux du calcul  $\text{SmEdA}^{\text{max}}$ . Par contre, le nombre de d.d.l. pris en compte dans le calcul est moins élevé. En effet, on remarque, figure C.15, que le nombre de modes de la plaque 2 réellement couplés avec les modes de la plaque 1 est dans un rapport un tiers par rapport au nombre total de modes de cette même plaque. Ceci est dû à l'effet de coïncidences spatiales entre les modes en conséquence des dimensions géométriques des plaques (différences d'épaisseurs notamment). Du point de vue de la répartition des énergies modales de la plaque 2, ceci se traduit par une grande disparité de répartition car deux modes sur trois ont une énergie nulle. Par conséquent, les valeurs du facteur de recouvrement modal (tableau C.2) de la plaque réceptrice ne sont pas réellement représentatifs de l'état de recouvrement de la



réponse vibratoire de celle-ci. Comme nous l'avons déjà noté au chapitre 5, paragraphe 2.1.3, ce facteur peut être proche ou supérieur à un (pour les bandes de fréquence au dessus de 2000 Hz), et l'hypothèse d'équirépartition des énergies modales ne pas être respectée (écarts entre  $SmEdA^1$  et  $SmEdA^{max}$ ).

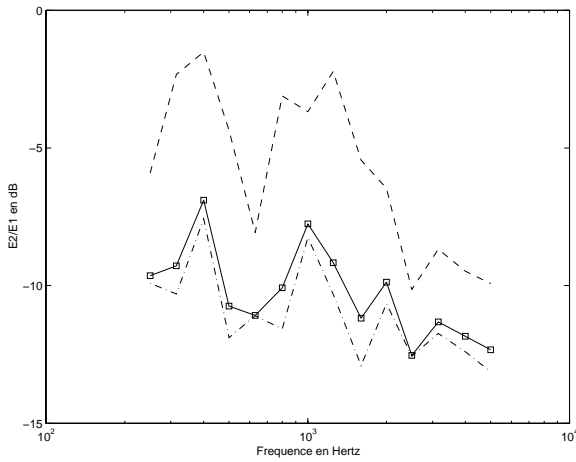


Figure C.14. Rapport des énergies totales  $E_2/E_1$  par tiers d'octave. Comparaison de trois calculs : —,  $SmEdA^{max}$ ; —,  $SmEdA^{opt}$  avec  $\lambda \rightarrow +\infty$ ; -.-.-,  $SmEdA^{opt}$  avec  $\lambda=50$ ; ---,  $SmEdA^1$ . Plaque 1 :  $5m \times 1m \times 12mm$ . Plaque 2 :  $4m \times 1m \times 3mm$ .  $E_1=E_2=2 \cdot 10^{11} Pa$ ,  $\rho_1=\rho_2=7800 kg/m^3$ ,  $\eta_1=\eta_2=0,001$

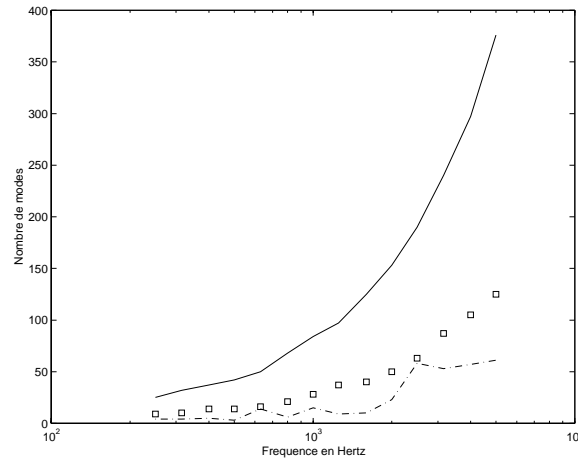


Figure C.15. Représentation en fonction de la fréquence du nombre de d.d.l. de la plaque 2 considérés par les différents calculs: —,  $SmEdA^{max}$ ; —,  $SmEdA^{opt}$  avec  $\lambda \rightarrow +\infty$ ; -.-.-,  $SmEdA^{opt}$  avec  $\lambda=50$ .

Le calcul  $SmEdA^{opt}$  réalisé avec le paramètre  $\lambda$  fixé à 50, donne des résultats satisfaisant tout en tenant compte d'un nombre réduit de degrés de liberté. Ceci implique que certains modes de la plaque 2 sont couplés avec les modes de la plaque 1 mais uniquement très faiblement. Ces couplages modaux sont alors négligeables. 'Peu' de modes de la plaque 2 participent donc réellement au couplage entre les deux plaques. On retombe ici sur des constatations semblables à celles décrites par Fahy [FAH69], [FAH70] pour le couplage structure-cavité.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [BER89] **BERNASCONI, O. et EWINS, D.J.** - Modal strain/stress fields. *Journal of Modal Analysis*, 1989, Vol. 4, N° 2, p. 68-76.
- [BER96] **BERNHARD, R.J.** - The limits of predictability due to manufacturing and environmentally induced uncertainty. *In: internoise'96.* - St Albans, UK : Institute of Acoustics, july 1996, p. 2867-2872.
- [BIE80] **BIES, D.A. et HAMID, S.** - In situ determination of loss and coupling loss factors by the power injection method. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, Vol. 70, N° 2, p. 187-204.
- [BLE95] **BLEVINS, R.D.** - *Formulas for natural frequency and mode shape.* Malabar : Krieger, 1995. 492 p.
- [BOC97] **BOCQUILLET, A., ICHCHOU, M.N., MORON, P. et al.** - On the validity domain of some high frequency energy models. *In: IUTAM symposium on Statistical Energy Analysis.* - Southampton, UK : ISVR, University of Southampton, juillet 1997, p. 25-36.
- [BOI82] **BOISSON, C., GUYADER, J.-L., MILLOT, P. et al.** - Energy transmission in finite coupled plates, part II : Application to and L shaped structure. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, Vol. 81, N° 1, p. 93-105.
- [BOI85] **BOISSON, C., GUYADER, J.-L. et LESUEUR, C.** - Étude numérique de la transmission d'énergie vibratoire entre structures assemblées : cas d'assemblages en L, T et +. *Acustica*, 1985, Vol. 58, p. 223-233.
- [BUR97] **BURROUGHS, C.B., FISCHER, R.W. et KERN, F.R.** - An introduction to statistical energy analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1997, Vol. 101, N° 4, p. 1779-1789.
- [CAC94] **CACCIOLATI, C. et GUYADER, J.-L.** - Measurement of sea coupling loss factors using point mobilities. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 1994, Vol. A346, p. 465-475.
- [CAR95] **CARCATERRA, A. et SESTIERI, A.** - Energy density equations and power flow in structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 188, N° 2, p. 269-282.
- [CAR97] **CARCATERRA, A. et SESTIERI, A.** - Complex envelope displacement analysis : a quasi-static approach to vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 201, N° 2, p. 205-233.

- [CHA78] **CHANDIRAMANI, K.L.** - Some simple models describing the transition from weak to strong coupling in statistical energy analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1978, Vol. 63, N° 4, p. 1081-1083.
- [CRA63] **CRANDALL, S.H. et MARK, W.D.** - *Random vibration in mechanical systems*. New York and London : Academic Press, 1963. 166 p.
- [CRA71] **CRANDALL, S.H. et LOTZ, R.** - On the coupling loss factor in statistical energy analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1971, Vol. 49, N° 1, p. 352-356.
- [CRA82] **CRANDALL, S.H., KARNOPP, D.C., KURTZ, E.F. et al.** - *Dynamics of mechanical and electromechanical systems*. Second Edition. - Melbourne, Florida : Krieger Publishing, ISBN 0-89874-529-2, 1982. 478 p.
- [DAV72a] **DAVIES, H.G.** - Power flow between two coupled beams. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1972, Vol. 51, N° 1, p. 393-401.
- [DAV72b] **DAVIES H.G.** - Exact solutions for the response of some coupled multimodal systems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1972, Vol. 51, N° 1, p. 387-392.
- [DAV73] **DAVIES, H.G.** - Random vibration of distributed systems strongly coupled at discrete points. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1973, Vol. 54, N° 2, p. 507-515.
- [DAV81] **DAVIES, H.G. et WAHAB, M.A.** - Ensemble averages of power flow in randomly excited coupled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, Vol. 77, N° 3, p. 311-321.
- [DAV82] **DAVIES, H.G. et KHANDOKER, S.I.** - Random point excitation of coupled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, Vol. 84, N° 4, p. 557-562.
- [DES83] **DESEIGNE, R.M.** - *Méthodes variationnelles mixtes en élastostatique, application à des structures composites : plaques multicouches et composites plans collés*. - Thèse Doc. d'État : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Univ. Lyon 1, IDE 8303, mai 1983. 368 p.
- [DIM88] **DIMITRIADIS, E.K. et PIERCE, A.D.** - Analytical solution for the power exchange between strongly coupled plates under random excitation : a test of statistical energy analysis concepts. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, Vol. 123, N° 3, p. 397-412.
- [DJI93] **DJIMADOUM, M.** - *Prévision des vibrations stationnaires et instationnaires aux moyennes fréquences : approche en énergie moyenne et approche par admittances impulsionnelles*. - Thèse Sci. : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 93 ISAL 0111, décembre 1993. 196 p.

- [DYM73] **DYM, C.L. et SHAMES, I.H.** - *Solid Mechanics, a variational approach.* - New York : McGraw-Hill Book Company, 1973. 556 p.
- [EIC65] **EICHLER, E.** - Thermal circuit approach to vibrations in coupled systems and the noise reduction of a rectangular box. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1965, Vol. 37, N° 6, p. 995-1007.
- [FAH69] **FAHY, F.J.** - Vibration of containing structures by sound in the contained fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1969, Vol. 10, N° 3, p. 490-512.
- [FAH70a] **FAHY, F.J.** - Response of a cylinder to random sound in the contained fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1970, Vol. 12, N° 2, p. 171-194.
- [FAH70b] **FAHY, F.J.** - Energy flow between oscillators : special case of point excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 1970, Vol. 11, N° 4, p. 481-483.
- [FAH74] **FAHY, F.J.** - Statistical energy analysis : a critical review. *Shock and Vibration Digest*, 1974, Vol. 6, p. 14-33.
- [FAH85] **FAHY, F.J.** - *Sound and Structural Vibration.* - London : Academic Press, 1985. 309 p.
- [FAH87] **FAHY, F.J. et YAO DE-YUAN** - Power flow between non-conservatively coupled oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, Vol. 114, N° 1, p. 1-11.
- [FAH92] **FAHY, F.J. et MOHAMMED, A.D.** - A study of uncertainty in applications of sea to coupled beam and plate systems, part I: Computational experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, Vol. 158, N° 1, p. 45-67.
- [FAH93] **FAHY, F.J.** - Statistical energy analysis : a wolf in sheep's clothing?. In : *internoise'93.* - Leuven, Belgium : Belgian Acoustical Association, august 1993, p. 13-26.
- [FAH94] **FAHY, F.J.** - Statistical energy analysis : a critical overview. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 1994, Vol. A346, p. 431-447.
- [FAH96] **FAHY, F.J. et JAMES, P.P.** - A study of the kinetic energy impulse response as an indicator of the strength of coupling between sea subsystems. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 190, N° 3, p. 363-386.
- [FAH97] **FAHY, F.J. et JAMES, P.P.** - An indicator of coupling strength between SEA subsystems. In : *IUTAM symposium on Statistical Energy Analysis.* - Southampton, UK : ISVR, University of Southampton, juillet 1997, p. 233-244.
- [FAH98] **FAHY, F.J.** - An alternative to the sea coupling loss factor : rationale and method for experimental determination. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, Vol. 214, N° 2, p. 261-267.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [FIN90] **FINNVEDEN, S.** - Energy flows within a three element structure with statistical description of the design parameters. *In* : *internoise'90*. - Gothenburg, Sweden : International Conference on Noise Control Engineering, august 1990, p. 945-948.
- [FIN95] **FINNVEDEN, S.** - Ensemble averaged vibration energy flows in a three-element structure. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 187, N° 3, p. 495-529.
- [FIN96] **FINNVEDEN, S.** - A 3 d.o.f. sea element for modelling one-dimensional structures with very high modal overlaps. *In* : *internoise'96*. - St Albans, UK : Institute of Acoustics, july 1996, p. 2951-2956.
- [FOR99] **FORTUNATO, G. et DE LANGHE, K.** - The influence of boundary conditions on sea parameters in the low and high frequency range. *In* : *6<sup>th</sup> International Congress on Sound and Vibration*. - Copenhagen, Denmark : Technical University of Denmark, july 1999. CD-ROM.
- [FRE95] **FREDO, C.R.** - *Statistical energy analysis and the individual case*. - Doctoral thesis : Chalmers University of Technology Göteborg Sweden, ISBN 91-7197-157-2 ISSN 0283-832X REPORT F95-02, june 1995. 157 p.
- [FRE97] **FREDO, C.R.** - A sea-like approach for the derivation of energy flow coefficients with a finite element model. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 199, N° 4, p. 645-666.
- [GAY84] **GAYLARD, M.E.** - Smoothed frequency responses for matrix-characterised vibrating structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1984, Vol. 93, N° 2, p. 249-271.
- [GER69] **GERSCH, W.** - Average power and power exchange in oscillators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1969, Vol. 46, N° 5, p. 1180-1185.
- [GER70] **GERSCH, W.** - Mean-square responses in structural systems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1970, Vol. 48, N° 1, p. 403-413.
- [GUY82] **GUYADER, J.-L., BOISSON, C. et LESUEUR, C.** - Energy transmission in finite coupled plates, part I : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, Vol. 81, N° 1, p. 81-92.
- [GUY84] **GUYADER, J.-L.** - *Méthode d'étude des vibrations des milieux continus imparfaitement caractérisés*. - Thèse Doc. d'État : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Univ. Lyon 1, IDE 8409, juillet 1984. 195 p.
- [GUY99] **GUYADER, J.-L.** - State of the art of energy methods used for vibro acoustic prediction. *In* : *6<sup>th</sup> International Congress on Sound and Vibration*. - Copenhagen, Denmark : Technical University of Denmark, july 1999. CD-ROM.
- [HER94] **HERON, K.H.** - Advanced statistical energy analysis. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 1994, Vol. A346, p. 501-510.

- [HOD86] **HODGES, C.H. et WOODHOUSE, J.** - Theories of noise and vibration transmission in complex structures. *Reports on Progress in Physics*, 1986, Vol. 49, p. 107-170.
- [HOD89] **HODGES, C.H. et WOODHOUSE, J.** - Confinement of vibration by one-dimensional disorder, part 1 : theory of ensemble averaging, part 2 : a numerical experiment on different ensemble averages. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, Vol. 130, N° 2, p. 237-268.
- [HUG98] **HUGIN, C.T.** - Power transmission between two finite beams at low modal overlap. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, Vol. 212, N° 5, p. 829-854.
- [IMB79] **IMBERT, J.F.** - *Analyse des structures par éléments finis.* - Toulouse, France : Cepadues Editions, 1979. 480p.
- [JAM97] **JAMES, P.P. et FAHY, F.J.** - A technique for the assessment of strength of coupling between sea subsystems : experiments with two coupled plates and two coupled rooms. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 203, N° 2, p. 265-282.
- [KAR66] **KARNOPP, D.** - Coupled vibratory-system analysis, using the dual formulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1966, Vol. 40, N° 2, p. 380-384.
- [KEA87] **KEANE, A.J. et PRICE, W.G.** - Statistical energy analysis of strongly coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, Vol. 117, N° 2, p. 363-386.
- [KEA91] **KEANE, A.J. et PRICE, W.G.** - A note on the power flowing between two conservatively coupled multi-modal subsystems. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, Vol. 144, N° 2, p. 185-196.
- [KEA93] **KEANE, A.J.** - A note on modal summations and averaging methods as applied to statistical energy analysis (s.e.a.). *Journal of Sound and Vibration*, 1993, Vol. 164, N° 1, p. 143-156.
- [KIS95] **KISHIMOTO, Y. et BERNSTEIN, D.S.** - Thermodynamic modelling of interconnected systems, part I : conservative coupling, II : dissipative coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 182, N° 1, p. 23-76.
- [KOM93] **KOMPELLA, M.S. et BERNHARD, R.J.** - Measurement of the statistical variation of structural acoustic characteristics of automotive vehicles. *SAE paper*, 1993, N°931272, p. 65-81.
- [LAL97] **LALOR, N.** - The practical implementation of SEA. In : *IUTAM symposium on Statistical Energy Analysis.* - Southampton, UK : ISVR, University of Southampton, juillet 1997, p. 257-268.

- [LAN89] **LANGLEY, R.S.** - A general derivation of the statistical energy analysis equations for coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, Vol. 135, N° 3, p. 499-508.
- [LAN90] **LANGLEY, R.S.** - A derivation of the coupling loss factors used in statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, Vol. 141, N° 2, p. 207-219.
- [LAN92] **LANGLEY, R.S.** - A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, Vol. 159, N° 3, p. 485-502.
- [LAN94] **LANGLEY, R.S. et BERCIN, A.N.** - Wave intensity analysis of high frequency vibrations. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 1994, Vol. A346, p. 489-499.
- [LAN95] **LANGLEY, R.S.** - Wave transmission through one-dimensional near periodic structures : optimum and random disorder. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 188, N° 5, p. 717-743.
- [LAN97a] **LANGLEY, R.S.** - Some perspectives on wave-mode duality in sea. *In : IUTAM symposium on Statistical Energy Analysis.* - Southampton, UK : ISVR, University of Southampton, juillet 1997, p.1-12.
- [LAN97b] **LANGLEY, R.S., SMITH, J.R.D. et FAHY, F.J.** - Statistical energy analysis of periodically stiffened damped plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 208, N° 3, p. 407-426.
- [LAS93] **LASE, Y., ICHCHOU, M.N., AQUILINA, R. et al.** - Calculating transfer functions using a new energetic method. *In : Intensité vibratoire dans les structures, 4<sup>e</sup> Congrès international sur l'intensimétrie.* Cetim. - Senlis, France, septembre 1993, p. 387-390.
- [LAS96] **LASE, Y., ICHCHOU, M.N. et JEZEQUEL, L.** - Energy flow analysis of bars and beams : theoretical formulations. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 192, N° 1, p. 281-305.
- [LEB98] **LE BOT, A.** - Geometric diffusion of vibrational energy and comparison with the vibrational conductivity approach. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, Vol. 212, N° 4, p. 637-647.
- [LUN97] **LUNGBERG, K.O.** - A method for estimating sea loss factors. *Acustica - Acta acustica*, 1997, Vol. 83, p. 605-613.
- [LYO62] **LYON, R.H. et MAIDANIK, G.** - Power flow between linearly coupled oscillators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1962, Vol. 34, N° 5, p. 623-639.
- [LYO64a] **LYON, R.H. et EICHLER, E.** - Random vibration of connected structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, Vol. 36, N° 7, p. 1344-1354.

- [LYO64b] **LYON, R.H. et MAIDANIK, G.** - Statistical methods in vibration analysis. *AIAA Journal*, 1964, Vol. 2, N° 6, p. 1015-1024.
- [LYO65] **LYON, R.H. et SCHARTON, T.D.** - Vibrational energy transmission in a three element structure. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1965, Vol. 38, N° 1, p. 253-261.
- [LYO69] **LYON, R.H.** - Statistical analysis of power injection and response in structures and rooms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1969, Vol. 45, N° 3, p. 545-565.
- [LYO95] **LYON, R.H. et DEJONG, R.G.** - *Theory and application of statistical energy analysis*. Second edition. - Boston : Butterworth-Heinemann, 1995. 277 p.
- [MAC92] **MACE, B.R.** - The statistics of power flow between two continuous one-dimensional subsystems. . *Journal of Sound and Vibration*, 1992, Vol. 154, N° 2, p. 321-341.
- [MAC93] **MACE, B.R.** - The statistical energy analysis of two continuous one-dimensional subsystems. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, Vol. 166, N° 3, p. 429-461.
- [MAC94] **MACE, B.R.** - On the statistical energy analysis hypothesis of coupling power proportionality and some implications of its failure. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, Vol. 178, N° 1, p. 95-112.
- [MAC97a] **MACE, B.R.** - Wave coherence coupling power and statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 199, N° 3, p. 369-380.
- [MAC97b] **MACE, B.R.** - Energy flow and s.e.a. at low modal overlap. *In* : *Fifth International Congress on Sound and Vibration - Adelaide, Australia* : University of Adelaide, december 1997. CD-ROM.
- [MAC97c] **MACE, B.R. et SHORTER, P.J.** - Irregularity, damping, and coupling strength in sea. *In* : *IUTAM symposium on Statistical Energy Analysis*. - Southampton, UK : ISVR, University of Southampton, juillet 1997, p. 59-70.
- [MAC98] **MACE, B.R. et ROSENBERG, J.** - The sea of two coupled plates : an investigation into the effects of subsystem irregularity. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, Vol. 212, N° 3, p. 395-415.
- [MAI62] **MAIDANIK, G.** - Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1962, Vol. 34, N° 6, p. 809-826.
- [MAI76a] **MAIDANIK, G.** - Response of coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, Vol. 46, N° 4, p. 561-583.
- [MAI76b] **MAIDANIK, G.** - Variations in the boundary conditions of coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, Vol. 46, N° 4, p. 585-589.



- [MAI77] **MAIDANIK, G.** - Some elements in statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, Vol. 52, N° 2, p. 171-191.
- [MAI81a] **MAIDANIK, G.** - Extension and reformulation of statistical energy analysis with use of room acoustics concepts. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, Vol. 78, N° 3, p. 417-423.
- [MAI81b] **MAIDANIK, G. et MAGA, L.J.** - Transition from a non-reverberant to a reverberant dynamic system. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, Vol. 78, N° 3, p. 397-416.
- [MAI87] **MAIDANIK, G. et DICKEY, J.** - Modal and wave approaches to the statistical energy analysis (sea). *In* : *ASME Winter Annual Meeting*. Boston, Massachusetts : ASME, december 1987, p. 63-71.
- [MAN94] **MANNING, J.E.** - Formulation of sea parameters using mobility functions. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 1994, Vol. A346, p. 477-488.
- [MAN94] **MANOHAR, C.S. et KEANE, A.J.** - Statistics of energy flows in spring-coupled one-dimensional subsystems. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 1994, Vol. A346, p. 525-542.
- [MAX81] **MAX, J.** - *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques. Tome 1 : Principes généraux et méthodes classiques*. Paris : Masson, 1981. 302 p.
- [MAX98] **MAXIT, L.** - *Rapport d'avancement des travaux de thèse sur l'amélioration de la méthode SEA*. - Villeurbanne : INSA Lyon-LVA, 1998. 42 p. Rapport interne laboratoire.
- [MAX99a] **MAXIT, L. et GUYADER, J.-L.** - Statistical modal energy distribution analysis (s.m.e.d.a.). *In* : *6<sup>th</sup> International Congress on Sound and Vibration*. - Copenhagen, Denmark : Technical University of Denmark, july 1999. CD-ROM.
- [MAX99b] **MAXIT, L. et GUYADER, J.-L.** - Evaluation of sea coupling loss factors using a dual formulation and fem modal information, part 1 : theory , part 2 : numerical applications. *Soumis au Journal of Sound and Vibration*, 1999.
- [MIN97] **MING, R.S. et PAN, J.** - The limitation in the sea prediction of power transmission and energy distribution. *In* : *Fifth International Congress on Sound and Vibration*. - Adelaide, Australia : University of Adelaide, december 1997. CD-ROM.
- [NAY71] **NAYROLES, B.** - Quelques applications variationnelles de la théorie des fonctions duales à la mécanique des solides. *Journal de Mécanique*, 1971, Vol. 10, N° 2, p. 263-289.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [NEF87] **NEFSKE, D.J. et SUNG, S.H.** - Power flow finite element analysis of dynamic systems : basic theory and application to beams. *In : ASME Winter Annual Meeting*. Boston, Massachusetts : ASME, december 1987. p. 47-61.
- [NEW68] **NEWLAND, D.E.** - Power flow between a class of coupled oscillators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, Vol. 43, N° 3, p. 553-559.
- [ORE97] **OREFICE, G.** - *Description par mobilités énergétiques des échanges vibratoires dans les systèmes couplés.* - Thèse Sci. : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 97 ISAL 0109, novembre 1997. 183 p.
- [OUI99] **OUISSÉ, M.** - *Utilisation de réseaux de neurones pour la caractérisation du couplage faible dans la méthode SEA.* - Villeurbanne : INSA Lyon-LVA, 1999. 49 p. Rapport DEA.
- [REB95] **REBILLARD, I.** - *Vibro-acoustique des réseaux de plaques : modélisation hyper-sensible et populations de structures.* - Thèse Sci. : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 95 ISAL 0085, décembre 1995. 184 p.
- [REM75] **REMINGTON, P.J. et MANNING, J.E.** - Comparison of statistical energy analysis power flow predictions with and 'exact' calculation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1975, Vol. 57, N° 2, p. 374-379.
- [ROS84] **ROSEAU, M.** - *Vibrations des systèmes mécaniques, méthodes analytiques et applications.* Paris : Masson, 1984. 488 p.
- [SAA74] **SAADA, A.S.** - *Elasticity theory and applications.* - New York : Pergamon Press Inc., 1974. Chapter 15, Energy principles and introduction to variational methods, p. 429-489.
- [SCH68] **SCHARTON, T.D. et LYON, R.H.** - Power flow and energy sharing in random vibration. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, Vol. 43, N° 6, p. 1332-1343.
- [SCH69] **SCHROEDER, M.R.** - Effect of frequency and space averaging on the transmission responses of multimode media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1969, Vol. 46, N° 2, p. 277-283.
- [SES95] **SESTIERI, A. et CARCATERRA, A.** - An envelope energy model for high frequency dynamic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 188, N° 2, p. 283-295.
- [SHA95] **SHANKAR, K. et KEANE, A.J.** - A study of the vibrational energies of two coupled beams by finite element and green function (receptance) methods. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 181, N° 5, p. 801-838.

- [SHA97] **SHANKAR, K. et KEANE, A.J.** - Vibrational energy flow analysis using a substructure approach : the application of receptance theory to fea and sea. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 201, N° 4, p. 491-513.
- [SHO96] **SHORTER, P.J. et MACE, B.R.** - Finite elements and statistical energy analysis : redefining the ensemble. In : *internoise'96*. - St Albans, UK : Institute of Acoustics, july 1996, p. 2927-2931.
- [SIM90] **SIMMONS, C. et FREDO, C.** - Vibration analysis of coupled stiffened plates using the finite element method. In : *internoise'90*. - Gothenburg, Sweden : International Conference on Noise Control Engineering, august 1990, p. 965-968.
- [SIM91] **SIMMONS, C.** - Structure-borne sound transmission through plate junctions and estimates of sea coupling loss factors using the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, Vol. 144, N° 2, p. 215-227.
- [SKU80] **SKUDRZYK, E.** - The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1980, Vol. 67, N° 4, p. 1105-1135.
- [SMI62] **SMITH, J.P.W.** - Response and radiation of structural modes excited by sound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1962, Vol. 34, N° 5, p. 640-647.
- [SMI79] **SMITH, J.P.W.** - Statistical models of coupled dynamical systems and the transition from weak to strong coupling. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1979, Vol. 65, N° 3, p. 695-698.
- [SOE93] **SOEDEL, W.** - *Vibrations of shells and plates*. Second edition. - New York : Marcel Dekker, Inc., 1993. 470 p.
- [SOI93] **SOIZE, C.** - A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1993, Vol. 94, N° 2, p. 849-865
- [STE94] **STEEL, J.A. et CRAIK, R.J.M.** - Statistical energy analysis of structure-borne sound transmission by finite element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, Vol. 178, N° 4, p. 553-561.
- [STE96] **STEEL, J.A.** - The prediction of structural vibration transmission through a motor vehicle using statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 193, N° 3, p. 691-703.
- [SUN85] **SUN, J.C. et RICHARD, E.J.** - Prediction of total loss factors of structures, I, theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 1985, Vol. 103, N° 1, p. 109-117.

- [SUN87a] **SUN, J.C., LALOR, N. et RICHARDS, E.J.** - Power flow and energy balance of non-conservatively coupled structures, I: theory. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, Vol.112, N° 2, p. 321-330.
- [SUN87b] **SUN, J.C., CHOW, L.C., LALOR, N. et al.** - Power flow and energy balance of non-conservatively coupled structures, II: experimental verification of theory. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, Vol. 112, N° 2, p. 331-343.
- [SUN96] **SUN, J.C., WANG, C. et SUN, Z.H.** - Power flow between three series coupled oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 189, N° 2, p. 215-229.
- [TRE94] **TRENTIN, D. et GUYADER, J.-L.** - Vibration of a master plate with attached masses using modal sampling method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1994, Vol. 96, N° 1, p. 235-245.
- [TRE95] **TRENTIN, D.** - *Construction de modèles analytiques condensés en vibroacoustique dans le domaine des moyennes et hautes fréquences pour des structures simples.* - Thèse Sci. : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 95 ISAL 0118, décembre 1995. 148 p.
- [UNG66] **UNGAR, E.E.** - *Fundamentals of statistical energy analysis of vibrating systems.* Ohio, USA : US Air Force, 1966, 65 p. Technical Report N° AFFDL-TR-66-52.
- [UNG67] **UNGAR, E.E.** - Statistical energy analysis of vibrating systems. *Journal of Engineering for Industry*, 1967, Vol. 89, p. 626-632.
- [WES96] **WESTER, E.C.N. et MACE, B.R.** - Statistical energy analysis of two edge-coupled rectangular plates : ensemble averages. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 193, N° 4, p. 793-822.
- [WES97] **WESTER, E.C.N. et MACE, B.R.** - A wave analysis of energy flow between two non-uniformly coupled rectangular plates. *In : internoise'97.* - Budapest, Hungary : International Conference on Noise Control Engineering, august 1997, p. 643-646.
- [WOH92] **WOHLEVER, J.C. et BERNHARD, R.J.** - Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, Vol. 153, N° 1, p. 1-19.
- [WOO81] **WOODHOUSE, J.** - An approach to the theoretical background of statistical energy analysis applied to structural vibration. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1981, Vol. 69, N° 6, p. 1695-1709.
- [YAP96] **YAP, F.F. et WOODHOUSE J.** - Investigation of damping effects on statistical energy analysis of coupled structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 197, N° 3, p. 351-371.
- [ZEM69] **ZEMAN, J.L. et BOGDANOFF, J.L.** - A comment on complex structural response to random vibrations. *AIAA Journal*, 1969, Vol. 7, N° 7, p. 1225-1231.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES