# Circuits équivalents pour transformateurs multienroulements : Application à la CEM conduite d'un convertisseur

Ambroise Schellmanns

▶ **To cite this version:**

Ambroise Schellmanns. Circuits équivalents pour transformateurs multienroulements : Application à la CEM conduite d'un convertisseur. Energie électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1999. Français. NNT : . tel-00782970

**HAL Id: tel-00782970**

**https://theses.hal.science/tel-00782970**

Submitted on 31 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T601

*INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE*

***THESE***

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INPG**

Spécialité : "Génie Electrique"

préparée au **Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble**

dans le cadre de l'Ecole Doctorale "Electronique, Electrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal" présentée et soutenue publiquement par

Ambroise SCHELLMANNS

Ingénieur ENSIEG

Soutenue le 9 juillet 1999

* * *

# Circuits équivalents pour transformateurs multi-enroulements : Application à la CEM conduite d'un convertisseur

* * *

Composition du jury :

| | |
|---|---|
| M. A. RAZEK | Président et rapporteur |
| M. B. DAVAT | Rapporteur |
| M. R. PERRET | Examinateur |
| M. J.P. KERADEC | Directeur de thèse |
| M. J.L. SCHANEN | Co-encadrant |

Invités industriels :

M. M. COLLET (THOMSON-CSF)
M. Y. NOLD (MICROSPIRE)

# Table des matières

**INTRODUCTION GENERALE** 15

## CHAPITRE I.

## La représentation des composants bobinés : état de l'art.

1. Introduction 23

2. Modélisation d'une inductance 23

3. Magnétostatique des transformateurs 25

3.1. Couplage et énergie magnétostatique. Coupleur. 25
3.2. Modèle de transformateur à deux enroulements 26

4. Représentation des pertes 27

5. Electrostatique des transformateurs 28

5.1. Energie électrostatique 28
5.2. Modèle pour le transformateur à deux enroulements 28

6. Identification expérimentale des paramètres 31

6.1. Paramètres magnétique 31
6.2. Pertes 32
6.2. Paramètres électrostatique 33

7. Les limites de cette méthode 33

8. Conclusion 34

## CHAPITRE II.

## La modélisation progressive des transformateurs multi-enroulements.

1. Introduction 39

2. Pourquoi et comment mesurer des impédances ? 40

3. Dénombrement des impédances mesurables 40

3.1. Transformateur à deux enroulements 41
3.2. Système à n bornes 43
3.3. Relations quadripolaires 45

4. Dénombrement des résonances 46

4.1. Différents types d'impédances 46
4.2. Dénombrement des pôles et des zéros 48
4.3. Application à un transformateur à deux enroulements 50

5. Modélisation progressive 51

5.1. Le couplage magnétique 51

5.1.1. Transformateur à deux enroulements 52

5.1.2. Transformateur à trois enroulements 53
5.1.3. Généralisation 55

5.2. Le couplage électrostatique 56

5.2.1. Ses origines 56
5.2.2. Problème expérimentaux 57
5.2.3. L'identification électrostatique progressive 58
5.2.4. Les différentes étapes 59
5.2.5. Transformateur à deux enroulements 60
5.2.6. Transformateur à trois enroulements 66

6. Validation expérimentale 73

6.1. Transformateur à deux enroulements 73

6.1.1. Aspect magnétique 74
6.1.2. Aspect électrostatique 77
6.1.3. Comparaison Mesure – Modèle simplifié 80
6.1.4. Comparaison Mesure – Modèle complet 82
6.1.5. Bilan de la méthode 83

6.2. Transformateur à trois enroulements 84

6.2.1. caractérisation magnétique 84
6.2.2. Couplage électrostatique 85

7. Simplifications pratiques des modèles 91

7.1. Domaine fréquentiel 91
7.2. Liens électriques 92
7.3. Impédances externes 92

8. Conclusion 92

## CHAPITRE III.

## La propagation unidirectionnelle dans un transformateur.

1. Introduction 95

2. Propagation unidirectionnelle 96

2.1. Description du dispositif élémentaire 96

2.2. Etude électromagnétique 98

2.2.1. Mise en équations 98
2.2.2. Résolution du système 99

2.3. Représentation par un circuit électrique équivalent 99

2.3.1. Circuit électrique équivalent 100
2.3.2. Propriétés de ce circuit 100
2.3.3. Cas particulier 101

3. Représentation par des circuits simples à constantes localisées 101

3.1. Principe de la recherche 102

3.2. Isolant non absorbant et non dispersif 102

3.3. Matériau magnétique isolant et dissipatif 104

3.4. Conducteur non magnétique 105

3.4.1. Représentation d'une lame 106
3.4.2. Représentation d'une couche de spires par une lame équivalente 107

3.5. Circuit équivalent d'un transformateur 108

3.5.1. Description du dispositif étudié 108
3.5.2. Assemblage du circuit 109

4. Amélioration de la représentation des ferrites 111

4.1. Mesures sur un tore 112

4.2. Amélioration phénoménologique de la représentation 113

4.2.1. Représentation Lp-Rp. Ajout de Cp 113
4.2.2. Modèle phénoménologique. Cellule Cs-Rs 114
4.2.3. Augmentation du nombre de cellules 115
4.2.4. Lien avec la permittivité du ferrite 116

4.3. Nouvelle méthode de caractérisation des ferrites 117

4.3.1. Limites des méthodes standards 117
4.3.2. Principe de la mesure 118
4.3.3. Résultats de caractérisation 119
4.3.4. Conclusion concernant cette caractérisation 120

4.4. Conclusion et perspectives 120

5. Etude détaillée d'un enroulement multicouche 121

5.1. Circuit équivalent à un enroulement 121

5.1.1. Description de l'enroulement étudié et hypothèses 121
5.1.2. Calculs des impédances du circuit équivalent 122
5.1.3. Vérifications 123
5.1.4. Enroulement monocouche et multicouche 123

5.2. Impédance vue du primaire, secondaire en court-circuit 124

5.2.1. Expression analytique et paramètres indépendants 124
5.2.2. Comportement fréquentiel, incidence du nombre de couches 127
5.2.3. Comportement asymptotique 129
5.2.4. Relations utilisables en conception 131

5.3. Identification expérimentale des paramètres 133

5.3.1. Principe de la méthode 133

5.3.2. Recherche du diamètre des conducteurs 134
5.3.3. Détermination du nombre de couches 135
5.3.4. Mesure directe de l'inductance basse fréquence 135

5.4. Identification d'un prototype 136

5.4.1. Présentation du prototype et relevés expérimentaux 136
5.4.2. Détermination des trois paramètres caractéristiques 137
5.4.3. Comparaison Théorie – Mesure 138

6. Représentation précise par un circuit à constantes localisées 140

6.1. Quelles courbes rapprocher ? 141

6.2. Comment les rapprocher ? 142

6.2.1. Développements en série et moindres carrés 142
6.2.2. Ecart relatif maximum fixé 142

6.3. De la fonction de transfert aux éléments du circuit 143

6.3.1. Topologie du circuit choisi. Calcul des éléments 143
6.3.2. Autres structures équivalentes 144

6.4. La recherche des constantes de temps 145

6.5. Application numérique au prototype testé 150

7. Conclusion 151

## CHAPITRE IV.

## Modélisation d'une alimentation industrielle : formes d'ondes de puissance et CEM.

1. Introduction 155

2. Alimentation à découpage 156

2.1. Présentation du convertisseur 156
2.2. Simplification du montage 158
2.3. Etude théorique du fonctionnement 159

3. Simulation des formes d'ondes de puissance 161

3.1. Modèles de simulation (puissance) 162

3.1.1. Semi-conducteurs de puissance 162
3.1.2. Composants passifs 163

3.2. Formes d'ondes de puissance 164

3.2.1. Ouverture de l'interrupteur 165
3.2.2. Ouverture de la diode 166
3.2.3. Amorçage de l'interrupteur 167

3.3. Influence des différents modèles de transformateur 167

4. Performances CEM 169

4.1. Modélisation CEM 169

4.1.1. RSIL 169
4.1.2. Prise en compte des capacités parasites avec le plan de masse 170
4.1.3. Transformateur 171

4.2. Formes d'ondes CEM 172

4.3. Etude des chemins de propagation 173

4.3.1. Ouverture de l'interrupteur 173
4.3.2. Fermeture de l'interrupteur 173
4.4. Formes d'ondes temporelles 175

4.5. Réduction des perturbations 176

4.5.1. Filtre de mode commun 176
4.5.2. Solution industrielle 177

5. Analyse critique 179

5.1. Rôle du transformateur 179

5.2. Autres chemins de propagation 179

6.Conclusion 181

## CHAPITRE V.

## Approche expérimentale du rayonnement des composants bobinés.

Contexte de l'étude 185

1. Introduction 186

2. Réalisation du banc de mesure 187

2.1. Objectifs d'un banc de mesure 187
2.1.1. Motivation 187
2.1.2. Cahier des charges 187
2.1.3. Fabrication du banc 189

2.2. Description 189

2.2.1. Aspect mécanique 189
2.2.2. Alimentation du composant 191
2.2.3. Capteur de champ magnétique 192
2.2.4. Instrumentation de détection 195
2.2.5. Mesure de la phase 196
2.2.6. Adaptation d'impédance 196

3. Approche théorique 197

3.1. Développement multipolaire 197

3.1.1. Représentation des sources 197
3.1.2. Equation de Laplace et la théorie multipolaire 198

3.2. Les harmoniques sphériques 199

3.2.1. Définition 199
3.2.2. Représentation des harmoniques 200
3.2.3. Intérêt des harmoniques sphériques 200
3.2.4. Zone de validité et limite de cette représentation 202
3.2.5. Nombre de paramètres identifiables par des mesures 202
3.2.6. Conclusion 202

4. Approche pratique 203

4.1 Image du potentiel 203

4.2. Mesure non ponctuelle 204

4.3. Erreur due à la précision mécanique 205

4.4. Procédure d'identification des multipôles 206

4.4.1. Principe 206
4.4.2. Comparaison mesure – représentation par multipôles 207

5. Premières mesures de caractérisation du banc 209

5.1. Calcul théorique du champ rayonné par une spire circulaire 210

5.2. Interprétation et premiers éléments critiques sur les mesures 211

5.2.1. Mesure sur l'axe 211
5.2.2. Mesures et test de positionnement hors de l'axe 213

6. Conclusion et perspectives 215

6.1. Bilan critique 215
6.2. Perspectives 215

**CONCLUSION GENERALE** 217

**BIBLIOGRAPHIE** 221

**ANNEXES** 227

# Introduction générale

Depuis une dizaine d'années, l'évolution des techniques et des technologies de l'électronique de puissance s'accompagne d'un accroissement important des fréquences de travail des convertisseurs statiques. Cette augmentation présente de nombreux avantages : fonctionnement à des fréquences inaudibles, diminution de la taille et du poids des convertisseurs et, en particulier, de leurs composants magnétiques.... En contre partie, la diminution de la taille des composants accroît la difficulté de leur refroidissement et, lorsque la fréquence augmente, certains composants parasites deviennent prépondérants. Par exemple, bien qu'assurant toujours ses fonctions principales (transfert de l'énergie, isolation galvanique...), le transformateur voit son fonctionnement altéré par des pertes dues à des courants induits dans les conducteurs et dans le noyau ainsi que par des couplages capacitifs entre enroulements.

D'autre part, la multiplication des équipements électriques et électroniques a contraint à se préoccuper de leur promiscuité. Afin d'assurer le bon fonctionnement de ces équipements industriels ou domestiques lorsqu'ils sont proches, tous les appareils alimentés par le réseau doivent obligatoirement respecter, depuis le 1$^{er}$ janvier 1996, les normes internationales et européennes qui fixent des limites admissibles pour les perturbations conduites et rayonnées. Pour prendre en compte, dès la conception, ces nouvelles contraintes dites de "compatibilité électromagnétique" (CEM), la simulation doit désormais permettre l'évaluation des performances associées. C'est ainsi que l'entrée en vigueur de ces normes, qui visent un domaine spectral très étendu, a relancé, pour tous les composants, la recherche de modèles utilisables en haute fréquence. Les transformateurs ne sont pas restés à l'écart de cette tendance.

Les études menées au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble ont abouti à une bonne compréhension du fonctionnement linéaire haute fréquence des transformateurs à deux enroulements. Un circuit électrique équivalent à constantes localisées a été élaboré et des méthodes de caractérisation expérimentale permettant d'en évaluer les éléments ont été présentées. La validité de ces résultats est indépendante de la taille du composant puisque aucune hypothèse technologique n'a été utilisée pour les établir. Seules des propriétés très générales ont été postulées : tous les matériaux constitutifs du transformateur sont linéaires, homogènes, isotropes et stationnaires et les temps de propagation peuvent être négligés. Cette approche étant suffisamment générale, son extension à des composants multi-enroulements

est envisageable. Elle a même été testée avec succès pour ce qui concerne le couplage magnétique.

Le chapitre I rappelle rapidement les fondements théoriques qui ont conduit à l'établissement d'un schéma équivalent pour un transformateur à deux enroulements. Une méthode de caractérisation a été mise au point, nous en présentons les avantages et les limites. Grâce à la généralité de ses hypothèses physiques, cette méthode peut être appliquée à des transformateurs multi-enroulements. Cependant, le nombre de paramètres augmentant très vite avec le nombre d'enroulements, la prise en compte simultanée de tous devient difficile pour la simulation. En outre, pour certains paramètres dont le rôle est minime, les incertitudes de mesure sont très importantes si bien qu'il n'est pas certain que le modèle complet procure plus de précision qu'un modèle approché....

Face à cette réalité, nous introduisons, dans le chapitre II, une méthode de caractérisation dite "progressive" qui aborde, par approximations successives, la représentation des transformateurs multi-enroulements. Dans ce chapitre, nous établissons les bases de la représentation de ces transformateurs, supposés sans pertes, en nous préoccupant de l'identification expérimentale des constantes caractéristiques. Afin de disposer de repères fréquentiels fiables, nous commençons par recenser les impédances mesurables et leurs fréquences de résonance. Nous présentons ensuite "la caractérisation progressive" des couplages magnétiques puis celle des couplages électrostatiques. Nous terminons cette partie en confrontant les modèles obtenus à l'expérience.

Le chapitre III se rapporte à la représentation des pertes. Pour tenir compte des pertes dans le cadre d'un comportement linéaire, des résistances, indépendantes de la fréquence, sont généralement introduites : en parallèle pour les "pertes fer" et en série pour les "pertes cuivre". La principale limite fréquentielle de cette représentation provient du fait que les résistances mesurées ou même calculées à partir des propriétés des matériaux, varient suivant la fréquence : nous avons affaire à des systèmes d'ordre fractionnaire, un demi par exemple. Nous montrons comment représenter ces pertes par un ensemble de composants standards indépendants de la fréquence. Pour disposer de lois de variation réalistes, nous nous appuyons sur l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques qui couplent les enroulements. Ceci nous amène à associer, à chaque lame traversée (cuivre, air, ferrite), un circuit équivalent qui, connecté à celui des autres lames, conduit finalement au circuit complet du

transformateur. Lorsque la variation des caractéristiques physiques (perméabilité et permittivité) avec la fréquence est connue, celle des diverses impédances l'est également. C'est alors que l'on cherche, pour chacune, une représentation par des composants standards qui assure une précision fixée jusqu'à une fréquence choisie.

Le chapitre IV s'intéresse à un convertisseur très répandu dans les applications industrielles de faible puissance : le flyback. L'étude de ce convertisseur industriel illustre parfaitement la difficulté d'une modélisation CEM réaliste. A l'aide des modèles développés dans le chapitre II, nous mettons en évidence, par simulation, l'impact des imperfections du transformateur non seulement sur les formes d'ondes de puissance mais aussi sur les perturbations conduites. Nous parvenons ainsi à identifier les principales sources de perturbation ainsi que leurs chemins de propagation et nous comparons ceci à la réalité expérimentale. En raison de ses exigences très fortes, cette étude permet d'approcher les limites de validité de nos modèles et donc de les situer.

Enfin, le chapitre V pose les bases d'une nouvelle étude : celle du rayonnement des composants bobinés. Ce sujet est suggéré par des problèmes provoqués, en électronique de puissance, par le couplage parasite de certains composants magnétiques. Dans un premier temps nous présentons la réalisation d'un banc de caractérisation du champ magnétique émis par un composant. A première vue, cette caractérisation nécessite le relevé des trois composantes de l'induction en fonction des trois coordonnées spatiales ce qui conduit à enregistrer plusieurs milliers de valeurs. Dans un second temps, nous montrons que le développement multipolaire permet de condenser ces données de façon très efficace.

Enfin et pour conclure, nous rappelons les principaux sujets abordés au cours de ce travail et nos soulignons les domaines dans lesquels les avancées sont les plus significatives. Nous donnons ensuite quelques indications sur les prolongements possibles de cette étude.

# Chapitre 1

## La représentation des composants bobinés : état de l'art.

# 1. Introduction

Depuis une dizaine d'années, notre équipe étudie les composants bobinés en portant une attention particulière à la représentation de leur comportement électrique par des circuits à constantes localisées [Laveuve91-2] [Cogitore94] [Blache95]. La compréhension progressive de nombreux phénomènes physiques impliqués dans ces composants a permis d'établir un circuit équivalent de plus en plus complet. Ce schéma, introduit dans un logiciel de simulation électronique, mène à des prévisions d'une précision très correcte, au moins pour les besoins courants et tous les paramètres qui le caractérisent peuvent être déduits de mesures externes [Cogitore94-1].

Ce premier chapitre présente, de manière succincte, le savoir-faire de notre équipe au début de cette thèse [Keradec96-2]. La méthode d'identification expérimentale des paramètres est rappelée, ce qui permet d'en situer les faiblesses....

# 2. Modélisation d'une inductance

C'est le composant bobiné le plus élémentaire. Cependant, même lorsqu'il est utilisé dans son domaine linéaire, son comportement diffère notablement de celui d'un composant idéal. Pour illustrer ce point, nous avons mesuré (Figure 1), entre 100Hz et 40MHz, l'impédance d'une inductance d'environ 300µH, à l'aide d'un analyseur d'impédance [HP4194A].

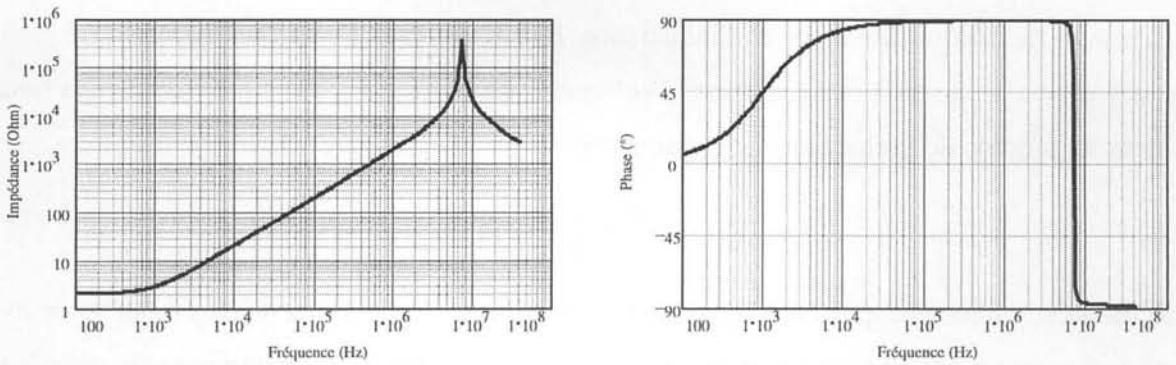
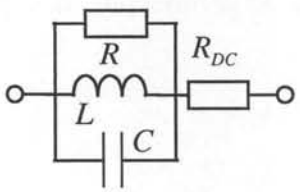



Figure 1 : Module et argument de l'impédance d'une inductance.

En basse fréquence, l'inductance mesurée présente une impédance résistive, tandis qu'en haute fréquence, son comportement est capacitif. Très vite, l'observation du diagramme de Bode

conduit à associer à l'inductance une résistance en série, pour améliorer la vraisemblance du comportement basse fréquence et une capacité en parallèle, pour rendre compte de la résonance.

En pratique, il s'avère que l'amortissement de la résonance de ce modèle simple est généralement plus faible que celui mesuré. Ceci n'est pas surprenant puisqu'une seule catégorie de pertes a été prise en compte. Pour pallier cette insuffisance, nous introduisons, en parallèle, une seconde résistance (Figure 2) censée tenir compte approximativement des autres pertes : fer, courants induits dans les fils.... Notons que la seconde résistance peut être placée en parallèle sur l'ensemble du dipôle : moyennant un ajustement des valeurs des composants, le circuit ainsi obtenu est strictement équivalent au précédent. Les valeurs numériques de la Figure 2 se rapportent aux mesures de la Figure 1




$R_{DC} = 2\Omega, R = 450k\Omega$
$L = 324\mu H, C = 1.5pF$

Figure 2 : Circuit équivalent à une inductance.

Expérimentalement, les valeurs des composants de ce modèle sont identifiées dans l'ordre suivant. L'impédance basse fréquence mène à la résistance série $R_{DC}$ du modèle. Il faut noter que cette valeur peut être déduite directement de la représentation Ls-Rs (inductance série-résistance série), proposée par le pont d'impédance HP4194A. Cette représentation permet également de déduire la valeur de l'inductance $L$. La capacité $C$ est déduite de la fréquence de résonance $F$ à l'aide de la relation (1) et la résistance $R$ est ajustée pour donner la bonne valeur au module de l'impédance à la résonance.

$$F = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (1)$$

Ce modèle, caractérisé par quatre paramètres, simule le comportement de l'inductance avec une précision acceptable sur une plage de fréquence qui s'étend du continu jusqu'à une décade au moins au-delà de la résonance. Il suffit souvent pour simuler le comportement d'une inductance fonctionnant en régime linéaire. Les paragraphes suivants s'intéressent aux transformateurs dont la modélisation est plus complexe.

# 3. Magnétostatique des transformateurs

## *3.1. Couplage et énergie magnétostatique. Coupleur.*

La modélisation d'un transformateur doit, avant tout, rendre compte de ses effets inductifs et des couplages magnétiques qu'il introduit. Ainsi par exemple, pour un transformateur idéal à deux enroulements, les équations reliant les tensions et les courants s'écrivent à l'aide d'une matrice symétrique appelée matrice inductance :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d I_1}{dt} \\ \frac{d I_2}{dt} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$L_{11}$ et $L_{22}$ sont les inductances propres des enroulements tandis que $L_{12}$ est leur inductance mutuelle. L'extension de cette relation à un nombre quelconque d'enroulements est immédiate. Très souvent nous préférons employer une expression équivalente mais plus compacte : celle de l'énergie magnétostatique totale qui s'exprime en fonction des éléments $L_{i,j}$ de la matrice inductance. Dans le cas d'un transformateur à N enroulements, elle s'écrit [Keradec94] :

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} L_{i,j}\, i_i\, i_j \qquad (3)$$

La représentation traditionnelle de ces relations magnétostatiques fait appel soit à un ensemble d'inductances couplées soit à un "transformateur parfait" associé à des inductances. A l'expérience, il s'avère plus facile d'étendre le domaine de validité de la seconde, notamment lorsqu' un couplage varie suivant la fréquence sous l'effet de courants induits.

Depuis plusieurs années, notre équipe regarde le "transformateur parfait" non pas comme un composant idéal mais plutôt comme un élément de circuit qui réalise une opération mathématique bien définie. Pour souligner cette différence d'approche, nous appelons cet élément "coupleur" et nous le représentons comme indiqué par la Figure 3. Conventionnellement, les points figurant sur son symbole indiquent les extrémités des vecteurs tension primaire et secondaire et le "coupleur" se caractérise par les égalités (4) :

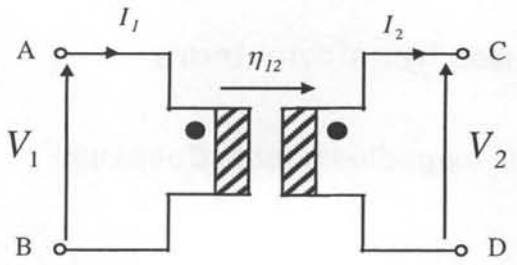



Figure 3 : Le coupleur.

$$\eta_{12} = \frac{V_2}{V_1} \qquad \text{et} \qquad \eta_{12} = \frac{I_1}{I_2} \tag{4}$$

Notons que cet élément n'est pas réservé exclusivement au couplage magnétique. Il permet de représenter tout couplage instantané (c'est à dire sans stockage d'énergie) et sans pertes. Il peut notamment être employé pour représenter un couplage capacitif.

### *3.2. Modèle de transformateur à deux enroulements*

La représentation d'un transformateur à deux enroulements par l'association d'un coupleur et d'un ensemble d'inductances conduit aux schémas en T et en Π. Un choix particulier du rapport de couplage, $\eta = \eta_s$, permet de symétriser la partie inductive de ce modèle. Après avoir défini (5) le coefficient de couplage $k$ dont la valeur est comprise entre 0 et 1, la valeur de $\eta_s$ s'exprime en fonction des éléments de la matrice inductance (6).

$$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_{11}\, L_{22}}} \tag{5}$$

$$\eta_s = sgn(L_{12}).\sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}} \tag{6}$$

Soulignons que toute référence aux nombres de spires des enroulements est abandonnée, l'identification (paragraphe 6) ne nécessitant que des grandeurs mesurables sans démontage.

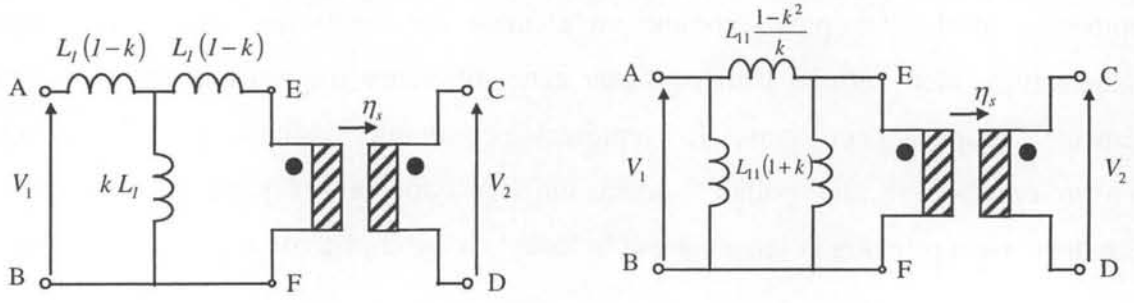



Figure 4 : Circuits en T et en Π, équivalents à un transformateur à deux enroulements.
Ici $\eta$ est choisi de façon à rendre le quadripôle inductif (ABEF) symétrique.

Si on abandonne la symétrie du quadripôle ABEF, le choix de $\eta$ = x . $\eta_s$ devient illimité. On trouve, en fonction de x, les valeurs des éléments des modèles en T et en Π qui rendent ces circuits équivalents à la relation matricielle. On peut ainsi répartir arbitrairement les fuites entre le primaire et le secondaire ou même, les attribuer entièrement à un enroulement.

## 4. Représentation des pertes

Comme pour les inductances, les résistances en continu des enroulements se déduisent de l'observation des impédances en basse fréquence tandis que la résistance de pertes fer Rp est identifiée au module de la première résonance de l'impédance à vide $Z_{01}$.

Pour représenter les pertes dues aux courants de Foucault dans les enroulements (effets de peau et de proximité), il suffit, en première approximation, de remplacer l'inductance de fuite initiale par le circuit de la Figure 5 :

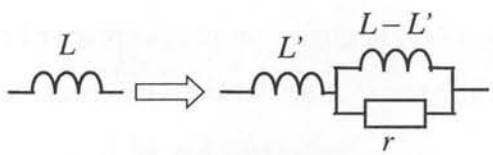



Figure 5 : Représentation des pertes dues aux courants de Foucault.

La déduction des trois constantes est simple si l'on peut discerner les paliers basse et haute fréquence de l'inductance $L$, ainsi que la fréquence $f_{½}$ pour laquelle l'inductance est à mi-chemin de ces deux valeurs. La fréquence de coupure du dipôle r/L-L' doit alors être identifiée à $f_{½}$.

En pratique, le palier d'inductance attendu en haute fréquence est souvent masqué par des résonances dues aux capacités parasites si bien que nous exploitons une autre fréquence repérable $f_{dmax}$ [Laveuve95]. Cette fréquence est celle pour laquelle $L$ présente la décroissance la plus rapide (pente maximum). Elle est toujours bien visible sur les courbes expérimentales. A cette fréquence, la diminution de l'inductance est de 25% (contre 50% à $f_{½}$) de la diminution totale :

$$f_{d\,max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot f_{1/2} \qquad (7)$$

La représentation approximative des pertes par courants induits dans les enroulements, rappelée ci-dessus, convient également aux courants induits dans les circuits magnétiques. Bien entendu, dans ce cas c'est l'inductance magnétisante qu'il faut fractionner et shunter par une résistance.

## 5. Electrostatique des transformateurs

### *5.1. Energie électrostatique*

Une énergie électrostatique non négligeable peut être stockée : entre les surfaces en regard d'enroulements distincts, entre les couches d'un même enroulement ou encore, entre chaque spire de cet enroulement [Prieto95]. Cette énergie peut également être localisée entre la surface du noyau et celle des enroulements. Pour tenir compte de cette énergie électrostatique, il est nécessaire de compléter notre circuit équivalent par des capacités dites "parasites" [Blache94]. En restant dans le domaine de fonctionnement linéaire et aussi longtemps que les temps de propagation peuvent être négligés, on peut exprimer l'énergie électrostatique totale stockée dans le transformateur à partir de ses tensions externes indépendantes :

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{i,j=N} C_{i,j}\, v_i\, v_j \qquad (8)$$

Comme $\|L_{i,j}\|$, la matrice $\|C_{i,j}\|$ est symétrique. Elle possède donc $n(n+1)/2$ éléments indépendants et son identification requiert autant de mesures indépendantes. En résumé, l'identification électrostatique équivaut à celle des coefficients $C_{i,j}$ de la forme quadratique.

### *5.2. Modèles pour le transformateur à deux enroulements*

Tant que le noyau est isolant et que le composant ne comporte pas d'écran, l'énergie électrostatique (8) ne dépend que de trois tensions externes indépendantes. En conséquence, il faut introduire six capacités dans le circuit équivalent. La disposition des capacités est assez libre, voir par exemple la Figure 6, sous réserve que l'expression de l'énergie totale accumulée par les capacités ((9) pour notre exemple) puisse être identifiée à (8). La comparaison de (8) et (9), permet d'exprimer les $\gamma$ en fonction des $C_{i,j}$ et réciproquement.

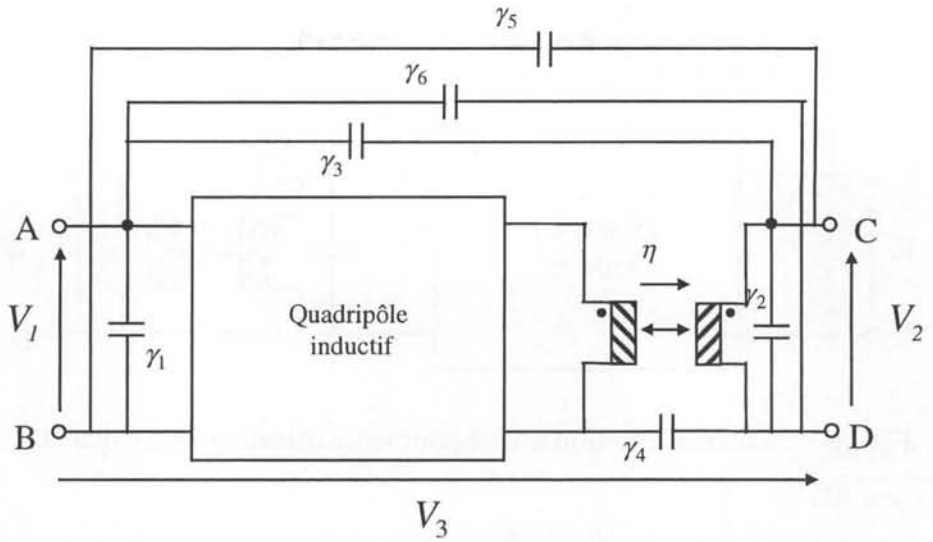



Figure 6 : Modèle de transformateur avec 6 capacités.

$$
\begin{aligned}
W'_e &= \frac{1}{2}\gamma_1 V_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_2 V_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_4 V_3^2 + \frac{1}{2}\gamma_3 (V_1 - V_2 - V_3)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\gamma_5 (V_2 + V_3)^2 + \frac{1}{2}\gamma_6 (V_1 - V_3)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_6).V_1^2 + \frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_5).V_2^2 + \frac{1}{2}(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6).V_3^2 \\
&\quad - \gamma_3.V_1V_2 - (\gamma_3 + \gamma_6).V_1V_3 + (\gamma_3 + \gamma_5).V_2V_3
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Soulignons que cette approche s'attache à représenter essentiellement le comportement global du composant. Les capacités introduites n'ont ni signification ni localisation individuelle. Certaines peuvent même être négatives, sous réserve que toute valeur directement mesurable demeure positive.

Pour déduire les capacités des impédances mesurées, il faut disposer de formules analytiques simples. Dans ce but, nous ramenons à deux le nombre de potentiels indépendants durant l'identification, en ajoutant des connexions primaire-secondaire (liaison : BD, AC, BC, AD). Dans ces conditions, l'expression de l'énergie ne fait plus appel qu'à trois coefficients et on peut réduire la représentation électrostatique (Figure 7) à trois capacités, notées $C_1$, $C_2$ et $C_3$ dont les valeurs dépendent des six coefficients de la matrice capacité.

Le Tableau 1 donne les relations liant les capacités $\gamma$ du modèle complet (Figure 6) aux trois capacités C (Figure 7) qui peuvent être mesurées en présence d'un lien primaire-secondaire.

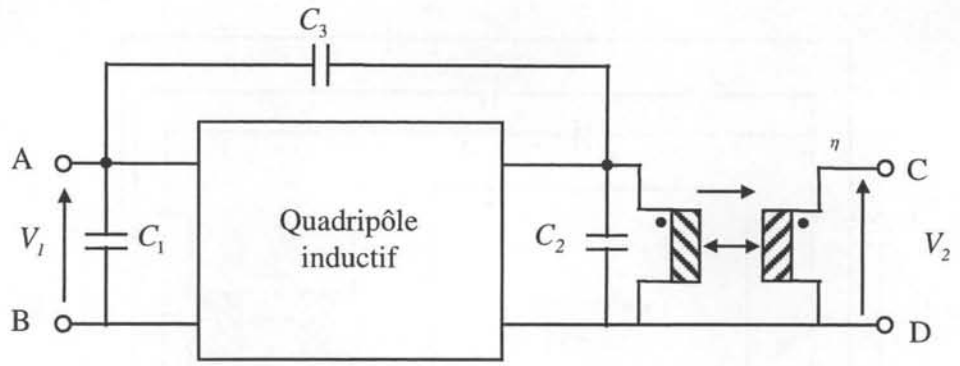



Figure 7 : Schéma simplifié utilisé pour l'identification expérimentale.

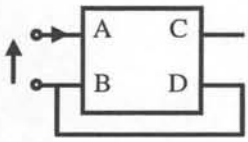
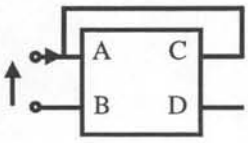
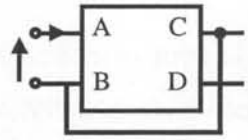
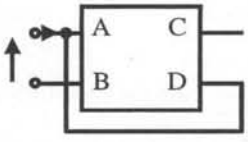
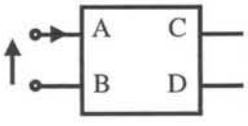
| | |
|---|---|
| Liaison BD   | $C_1 = \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_6 - \eta\gamma_3$<br>$C_2 = \eta^2(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_5) - \eta\gamma_3$<br>$C_3 = \eta\gamma_3$ |
| Liaison AC   | $C_1 = \gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_5 - \eta\gamma_4$<br>$C_2 = \eta^2(\gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6) - \eta\gamma_4$<br>$C_3 = \eta\gamma_4$ |
| Liaison BC   | $C_1 = \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_6 + \eta\gamma_6$<br>$C_2 = \eta^2(\gamma_2 + \gamma_4 + \gamma) + \eta\gamma_6$<br>$C_3 = -\eta\gamma_6$ |
| Liaison AD   | $C_1 = \gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_5 + \eta\gamma_5$<br>$C_2 = \eta^2(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_5) + \eta\gamma_5$<br>$C_3 = -\eta\gamma_5$ |
| Flottant   | $C_1 = \gamma_1 + \dfrac{(\gamma_3+\gamma_6)(\gamma_4+\gamma_5)}{\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6} - \eta\cdot\left(\gamma_3 + \dfrac{(\gamma_3+\gamma_5)(\gamma_3+\gamma_6)}{\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6}\right)$<br>$C_2 = \eta^2\cdot\left(\gamma_2 + \dfrac{(\gamma_3+\gamma_5)(\gamma_4+\gamma_6)}{\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6}\right) - \eta\cdot\left(\gamma_3 + \dfrac{(\gamma_3+\gamma_5)(\gamma_3+\gamma_6)}{\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6}\right)$<br>$C_3 = \eta\cdot\left(\gamma_3 + \dfrac{(\gamma_3+\gamma_5)(\gamma_3+\gamma_6)}{\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6}\right)$ |

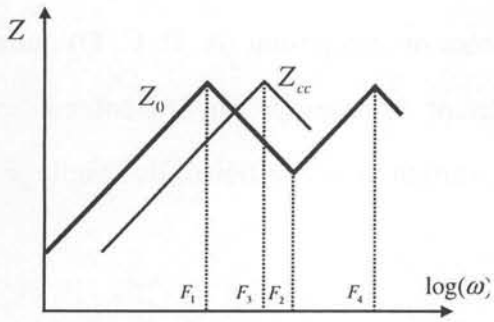
Tableau 1 : Capacités des cinq configurations d'identification.

Notons que, dans la situation où le secondaire flotte par rapport au primaire, $V_3$ résulte d'une division capacitive de $V_1$ et $V_2$, ce qui implique que seuls deux potentiels sont indépendants. La relation qui lie alors les potentiels découle de la nullité de $I_3$ :

$$I_3 = j\omega\left(C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3\right) = 0 \qquad (10)$$

soit : $$-(\gamma_3+\gamma_6)V_1 + (\gamma_3+\gamma_5)V_2 + (\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6)V_3 = 0$$

L'étude analytique du circuit simplifié (Figure 7) fait apparaître, pour les impédances à vide et en court-circuit, quatre fréquences de résonances distinctes (Figure 8).




$$F_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{01}(C_1+C_2)}} \qquad F_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{cc}(C_2+C_3)}}$$

$$F_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{cc}(C_1+C_3)}} \qquad F_4 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{cc}\left(C_3+\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)}}$$

Figure 8 : Impédances vues du primaire, secondaire à vide ( $Z_0$ ) ou en court circuit ( $Z_{cc}$ ).

Les expressions des fréquences de résonance $F_1, F_2$ et $F_3$ montrent que la déduction des capacités est aisée dès que les inductances sont connues. En renouvelant les mesures après modification du lien primaire-secondaire, on aboutit à trois nouvelles valeurs pour $C_1, C_2$ et $C_3$. Ainsi, pour chaque câblage, on obtient un ensemble de trois équations impliquant les coefficients $C_{i,j}$. Finalement, on dispose d'un nombre suffisant d'équations indépendantes pour calculer les coefficients $C_{i,j}$ et les capacités $\gamma$.

## 6. Identification expérimentale des paramètres

### *6.1. Paramètres magnétiques*

La représentation choisie est le modèle en Π (figure 4) et sa caractérisation s'effectue en mesurant uniquement des impédances. La mesure des impédances observées en circuit ouvert et en court-circuit [Keradec92], assure une précision optimum pour des charges très variées.

A l'aide de l'analyseur HP4194A, on mesure : les impédances vues du primaire, secondaire à vide $(Z_{01})$ et secondaire en court circuit $(Z_{cc})$ ainsi que l'impédance vue du secondaire, primaire à vide $(Z_{02})$. Partant de ces impédances, on déduit : l'inductance à vide vue du primaire ( $L_{01}$ ), l'inductance vue du primaire, secondaire en court-circuit ( $L_{cc}$ ) et l'inductance à vide vue du secondaire ( $L_{02}$ ).

On peut maintenant calculer le rapport de couplage $\eta_s$ :

$$\eta_s = sgn\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\sqrt{\frac{L_{02}}{L_{01}}} \tag{11}$$

Le signe de $\eta_s$ est recherché dès le repérage des bornes du composant (A, B, C, D) qui est fondamental pour l'étude électrostatique. Il est important de noter que $|\eta_s|$ ne coïncide pas rigoureusement avec le rapport du nombre de spires, surtout si le coefficient de couplage $k$ diffère notablement de 1.

La définition (5) de $k$ permet d'établir que :

$$k = \sqrt{1 - \frac{L_{cc}}{L_{01}}} \tag{12}$$

On déduit ensuite les valeurs des inductances $L_p$ et $L_s$ du circuit en Π (Figures 4 et 9) :

$$L_p = L_{01}.\frac{(1+k)}{2}\ , \qquad L_s = \frac{L_{cc}}{k} \tag{13}$$

Si $k \geq 0.98$, l'inductance $L_p$ et l'inductance $L_s$ peuvent être confondues respectivement avec l'inductance à vide $(L_{01})$ et l'inductance en court circuit $(L_{cc})$.

### *6.2. Pertes*

En général, nous mesurons les résistances des enroulements à l'aide de l'analyseur [HP4194A] en utilisant soit la représentation module-phase soit, de préférence, la représentation Ls-Rs. Cependant, lorsqu'une meilleure précision est requise, nous effectuons ces mesures à l'aide d'un micro-ohmètre AOIP. La résistance de pertes parallèle est en revanche toujours mesurée à l'aide du HP4194A. Elle est repérée sur la courbe de l'impédance à vide de l'enroulement concerné, en représentation Lp-Rp, à la première fréquence de résonance parallèle.

Les effets des courants de Foucault dans les enroulements apparaissent clairement sur les impédances relevées en court-circuit. En les présentant sous la forme Ls-Rs, l'identification des éléments évoqués au paragraphe 4 est assez simple, à défaut d'être très précise. Le cas échéant, une étude similaire peut être menée concernant les pertes de l'inductance magnétisante, ce qui conduit au circuit complet de la Figure 9.

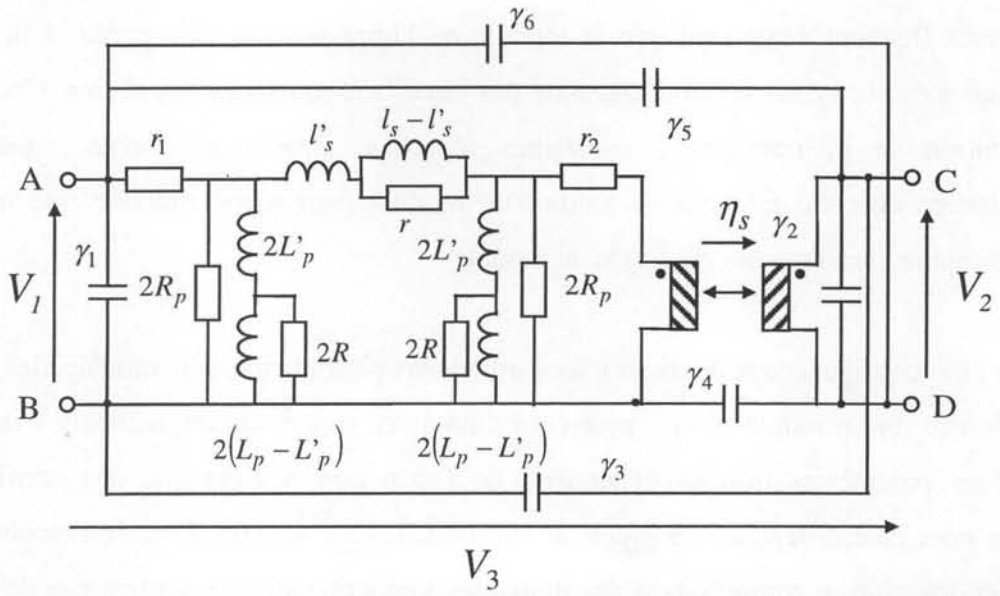



Figure 9 : Schéma équivalent complet d'un transformateur à deux enroulements.

### *6.3. Paramètres électrostatiques*

Puisque ajouter un court-circuit externe à un circuit capacitif diminue ses impédances mesurables, la mesure avec secondaire flottant est toujours celle qui exhibe les capacités les plus faibles. Elle procure ainsi des valeurs de référence très utiles pour améliorer la précision.

En exploitant plusieurs configurations de mesure (Tableau 1), on obtient un nombre suffisant d'équations indépendantes pour déduire les six capacités du modèle complet. La mesure avec enroulement flottant figure toujours parmi les configurations retenues.

051 098021 0

## 7. Les limites de cette méthode

La méthode proposée pour identifier le comportement capacitif consiste à se placer dans des situations simples où seuls deux potentiels sont indépendants. Dans ces conditions, il faut

procéder à l'évaluation de trois capacités en partant de trois fréquences de résonance observées sur les impédances à vide et en court-circuit. Parfois cependant, certaines de ces résonance surviennent à des fréquences situées au-delà du domaine de mesure de l'appareillage et il peut arriver que, le nombre d'équations indépendantes étant insuffisant, aucune capacité ne puisse être évaluée.

Il est assez fréquent également que le module de l'impédance à vide perde, à la première résonance série, la symétrie caractéristique des circuits à constantes localisées. Ceci marque l'intervention de phénomènes à constantes réparties, ignorés par notre représentation. L'exploitation de cette fréquence à l'aide d'un modèle inapproprié entraîne une incertitude supplémentaire sur toutes les capacités du modèle.

Puisque cinq configurations de mesure sont utilisables pour identifier le modèle, des contrôles de cohérence sont possibles. Nous avons constaté qu'en raison des imprécisions évoquées ci-dessus, les paramètres trouvés dépendent, de façon non négligeable, des configurations retenues pour l'identification. La précision du modèle final souffre donc de l'incohérence de cette identification, y compris dans des domaines fréquentiels ne présentant pas de difficulté expérimentale.

Enfin, les paramètres du modèle sont établis à partir de mesures d'impédances exclusivement effectuées aux bornes des enroulements. Les impédances inter-enroulements ne sont donc pas mesurées directement : elles sont déduites. De ce fait, elle peuvent souffrir d'une imprécision non négligeable qu'il est indispensable de réduire pour étudier les perturbations conduites.

## 8. Conclusion

Les études précédentes ont abouti au schéma équivalent à constantes localisées (Figure 9) représentant un transformateur à deux enroulements. Si ce circuit a été établi en supposant que le comportement de tous les matériaux était linéaire et en négligeant les phénomènes de propagation, il a été obtenu sans faire d'hypothèses concernant sa construction et toutes les constantes qui le caractérisent peuvent être déduites de mesures électriques extérieures au composant, menées sans connaissance préalable de sa constitution interne.

Tout n'est pas résolu pour autant. En dehors des difficultés concernant l'identification électrostatique signalées au paragraphe précédent, il faut signaler que la méthode de prise en compte des courants induits ne peut être considérée que comme une première approximation et que même l'identification magnétique doit être affinée pour le cas où, sous l'effet de courants induits, les paramètres magnétiques varient suivant avec la fréquence.

Dans le chapitre II, nous nous attacherons à étendre ces méthodes de caractérisation à des transformateurs comportant un nombre quelconque d'enroulements. Notre approche globale, basée sur des raisonnements énergétiques, s'avèrera alors très féconde. Cependant, la complexité des circuits réactifs obtenus nous conduira à en rechercher des approximations générales et acceptables et à mettre au point des méthodes d'identification par approximations successives. Finalement, cela nous amènera à modifier notre façon de caractériser la partie ré&active d'un transformateur à deux enroulements. Le problèmes liés aux courants induits feront l'objet de notre attention au chapitre III.

# Chapitre 2

## La modélisation progressive des transformateurs multi-enroulements

## 1. Introduction.

Les études rappelées au chapitre I montrent que, tant que l'on néglige ses pertes, un transformateur se comporte comme l'association d'un système magnétostatique et d'un système électrostatique connectés en parallèle. Ceci ne sera plus remis en cause. Grâce à l'introduction du coupleur et en acceptant que certains éléments prennent des valeurs négatives, nous avons obtenu des circuits à constantes localisées valables pour deux et trois enroulements et il est envisageable de continuer ainsi. Malheureusement, le nombre de composants croît très vite avec le nombre d'enroulements, l'identification expérimentale devient très difficile et l'exploitation du circuit complet s'avère très consommatrice de temps lors des simulations électroniques.

Dans le chapitre II, nous reprendrons la représentation du comportement linéaire des transformateurs multi-enroulements sans pertes en conservant les hypothèses physiques admises précédemment. Notre objectif est de proposer, pour tout composant, plusieurs circuits équivalents qui modélisent son comportement de plus en plus finement. Concernant l'identification expérimentale de ces circuits, nous veillerons à ce que seuls les circuits les plus précis fassent appel à des mesures délicates.

Après avoir expliqué pourquoi nous préférons identifier un composant en relevant des impédances, nous procéderons à deux recensements. Tout d'abord, le rôle d'un modèle consiste à permettre la prévision de tout ce qui est mesurable si bien que la même question revient sans cesse : "le modèle est-il cohérent avec toutes les mesures et suis-je certain de ne pas en oublier ?". Afin répondre à cette question, nous recenserons toutes les impédances qu'il est possible de mesurer sur un composant lorsque ses bornes sont soit en l'air soit en court-circuit. Ensuite, le moyen le plus général pour situer la limite de validité fréquentielle d'un modèle consiste à la situer par rapport à ses fréquences de résonances. Afin de bien connaître ces repères, nous dénombrerons les résonances des impédances mesurables.

Certes, il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser un modèle dans son intégralité : suivant l'environnement électronique, certaines simplifications sont compatibles avec la précision des résultats cherchés. Tout en respectant cette liberté du concepteur de circuit, nous adoptons, à l'égard des simplifications, la position du fournisseur qui, en général, ne connaît pas

l'environnement électrique de son composant : l'identification progressive que nous introduirons dans ce chapitre est indépendante de l'environnement électrique.

L'identification progressive procède par approximations successives et la première de ces approximation vise à représenter le comportement du composant en supposant que ses couplages sont parfaits. Cette identification est donc particulièrement efficace lorsque les enroulements sont fortement couplés mais son usage ne se restreint pas à ce cas. Elle permet, dès la caractérisation du composant, de prendre en compte la précision et la limite de validité en fréquence requise pour le modèle. On peut ainsi compliquer progressivement le schéma équivalent jusqu'à ce que le but recherché soit atteint. Cette méthode est extensible à un nombre quelconque d'enroulements.

Enfin, ces circuits seraient inutiles si nous ne savions les identifier. Nous expliquerons donc comment évaluer tous les éléments de ces circuits, puis nous comparerons les courbes relatives aux modèles aux relevés expérimentaux. Cette analyse mettra en évidence les progrès réalisés grâce à la caractérisation progressive.

## 2. Pourquoi et comment mesurer des impédances ?

Pour caractériser un circuit linéaire, il est souvent fait appel à des mesures de gains en tension à vide, gains en courant en court-circuit, trans-impédances... Bien que notre appareil de mesure (HP4194A/B) permette d'analyser des gains aussi bien que des impédances, nous pensons qu'il est préférable de se limiter à exploiter ce dernier type de mesures.

En effet, lorsqu'une mesure est faite entre deux bornes distinctes de celles alimentées, l'impédance placée entre ces bornes n'est jamais idéale, surtout en haute fréquence. Au mieux, l'impédance infinie est une faible capacité et l'impédance nulle une faible inductance. Or, les écarts provoqués par ces impédances parasites sont très difficiles à évaluer et à compenser alors que les corrections (open-short-load) prévues pour les mesures d'impédances [HP4194A] s'avèrent très efficaces pour peu que le composant ait été connecté avec soin.

D'autre part, pour identifier des constantes, il est indispensable que les transferts soient mesurés sur toute l'étendue fréquentielle à caractériser afin de s'assurer que les constantes... ne varient pas. En conséquence, on est souvent contraint de caractériser un quadripôle dont les

impédances sont très éloignées de l'impédance caractéristique d'un câble, ce qui disqualifie l'analyseur vectoriel. Par exemple, pour mesurer une faible capacité inter-enroulements ou une faible inductance de fuite, il ne suffit pas d'en relever une valeur à une fréquence où son impédance est proche de 50 Ω.

En résumé, nous pensons que pour caractériser précisément le fonctionnement linéaire d'un transformateur, l'identification doit s'appuyer, de préférence, sur des mesures d'impédances réalisées à l'aide d'un analyseur d'impédances.

## 3. Dénombrement des impédances mesurables.

### *3.1. Transformateur à deux enroulements.*

Le nombre d'impédances distinctes qu'il est possible de mesurer sur un transformateur à deux enroulements est déjà assez grand. Pour le trouver, regardons ce composant comme une boite reliée à l'extérieur par quatre bornes. Les impédances se relèvent avec zéro, un ou deux liens (Figure 1). Pour plus de deux liens, toutes les bornes seraient court-circuitées.

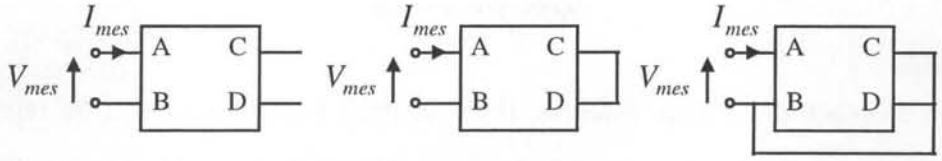



Figure 1 : Exemple de mesure avec 0, 1 ou 2 liens externes.

Les raisonnements élaborés s'appuient sur l'analyse combinatoire. Rappelons que la combinaison $C_p^n$ est le nombre de choix distincts de $p$ éléments parmi $n$.

$$C_p^n = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Le nombre des mesures distinctes, $Nmes$, se calcule de la façon suivante :

$$Nmes = Ng0\,.\,NZ0 + Ng1\,.\,NZ1 + Ng2\,.\,NZ2$$

où $Ngm$ est le nombre de façons distinctes de disposer $m$ liens entre les quatre bornes et $NZm$ le nombre d'impédances mesurables lorsque les $m$ liens sont installés. Ce second nombre coïncide avec le nombre de façons distinctes de choisir *2* bornes parmi les *4-m* encore indépendantes après l'installation des $m$ liens. Il vaut donc :

$$NZm = C_2^{4-m}$$

Recensons maintenant les différentes façons de disposer $n$ liens. Puisque sur notre composant nous ne pouvons installer que zéro, un ou deux liens, détaillons successivement les trois cas. Sur les figures qui suivent, chaque carré (ou boite) représente un groupe de bornes équipotentielles disponible pour la mesure. Il comprend au moins une borne.

Aucun lien externe

Ce cas est trivial : il n'existe qu'une façon de ne disposer aucun lien entre quatre bornes ! Dans ce cas, le système se représente par 4 carrés, incluant chacun une borne.

$Ng0$ [1] [1] [1] [1] $\qquad Ng0 = C_4^4 = 1$

1 lien externe

Pour installer un lien externe, nous choisissons deux bornes parmi les quatre et nous les connectons. Il y a six façons de disposer ce lien (AB, AC, AD, BC, BD, CD).

$Ng1$ [1] [1] [2] $\qquad Ng1 = C_2^4 = 6$

2 liens externes

Pour mettre en place deux liens externes, il existe deux possibilités : soit on regroupe trois bornes, la quatrième étant isolée, soit on réunit les bornes deux à deux. Dans le premier cas, dès que nous avons choisi une borne parmi quatre, il n'y a plus de choix : nous regroupons les trois dernières. Dans le second cas, dès que nous avons choisi les deux premières bornes à lier, les deux autres sont déterminées. Attention : dans ce dernier cas, les deux boites étant identiques, peu importe l'ordre dans lequel elles ont été définies.

[1] [3] $\quad C_1^4 = 4$

$Ng2 = 7$

[2] [2] $\quad \frac{C_2^4}{2!} = 3$

En revenant à la relation initiale, le nombre cherché peut maintenant être évalué :

$$Nmes = Ng0 \,.\, NZ0 + Ng1 \,.\, NZ1 + Ng2 \,.\, NZ2 = 1 \times 6 + 6 \times 3 + 7 \times 1 = 31$$

On peut donc mesurer 31 impédances distinctes sur un transformateur à deux enroulements. Elles sont présentées par la Figure 2.

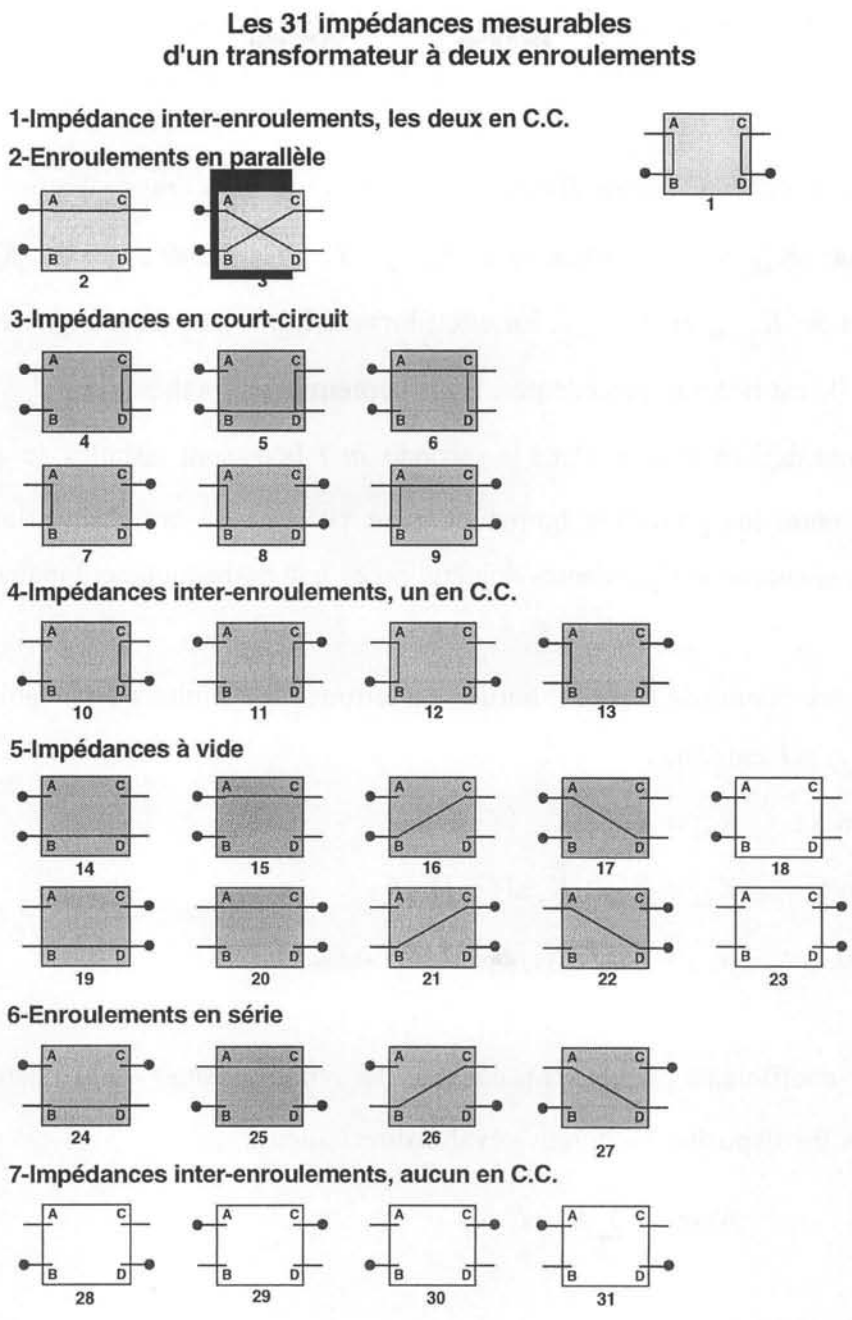



Figure 2 : Impédances mesurables sur un transformateur à deux enroulements

### *3.2. Système à n bornes.*

La généralisation s'opère, par itération, en partant des remarques suivantes :

1/ Lorsqu'on installe $m$ courts-circuits entre $n$ bornes, il reste $n$-$m$ bornes indépendantes et $C_2^{n-m}$ impédances distinctes peuvent être mesurées. On note que $m$ doit être égal où inférieur à $n$-2 pour qu'une mesure soit réalisable.

2/ Le nombre $m$ de liens qu'il est possible d'installer sans doublon est compris entre *0* et *n-1* mais, dans ces deux cas extrêmes, il n'existe qu'une seule façon de les disposer.

3/ Soit $K_{n,m}$ le nombre de façons distinctes de disposer m liens entre n bornes. Nous venons de voir que $K_{n,0} = 1$ de même que $K_{n,n-1} = 1$. Plus généralement, $K_{n,m}$ se déduit directement de $K_{n-1,m}$ et $K_{n-1,m-1}$. En effet, lorsque la n$^{ième}$ borne est ajoutée, soit elle est libre, soit elle est liée aux précédentes. Dans la première hypothèse, les $K_{n-1,m}$ dispositions des liens sont déjà recensées. Dans la seconde, *m-1* liens sont installés de $K_{n-1,m-1}$ façons différentes entre les premières bornes et, pour chacune de ces dispositions, une borne parmi les *n-m* encore indépendantes doit être reliée à la borne ajoutée. Finalement :

$$K_{n,m} = K_{n-1,m} + K_{n-1,m-1}.(n-m)$$

En initialisant les valeurs de *K* pour *2* bornes, on retrouve les résultats déjà établis. En effet, $K_{2,0} = 1$ et $K_{2,1} = 1$ entraîne :

Pour trois bornes : $K_{3,1} = K_{2,1} + K_{2,0}.(3-1) = 3$,

Pour quatre bornes : $K_{4,1} = K_{3,1} + K_{3,0}.(4-1) = 6$,

ainsi que: $K_{4,2} = K_{3,2} + K_{3,1}.(4-2) = 7$.

Dès que les coefficients $K_{n,m}$ sont connus, le nombre *Nmes* d'impédances distinctes mesurables sur un dispositif à *n* bornes s'évalue directement :

$$Nmes = \sum_{m=0}^{n-2} K_{n,m}.C_2^{\,n-m} \qquad (1)$$

Nous n'avons pas établi d'expression analytique générale pour *Nmes* mais nous l'avons calculé en fonction du nombre *n* de bornes.

| *n* | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Nmes* | 1 | 6 | 31 | 160 | 856 | 4802 | 28337 |

Ce nombre croît très vite avec le nombre de bornes (856 pour 3 enroulements, plus de $10^6$ pour 5...). Au-delà de quatre bornes, il est illusoire de vouloir vérifier que le modèle est en accord avec toutes les impédances mesurables ! En pratique, nous identifierons nos circuits

équivalents avec un nombre de mesures voisin du minimum. Cependant, dès que le modèle sera complètement défini, nous vérifierons qu'il est en accord avec l'expérience en observant quelques impédances non exploitées durant l'identification.

### *3.3. Relations quadripolaires.*

Un résultat bien connu, relatifs aux quadripôles passifs, stipule que :

$$Z_0 Z'_{cc} = Z'_0 Z_{cc} \qquad (2)$$

$Z_0$ désigne l'impédance à vide et $Z_{cc}$ l'impédance en court-circuit, la prime indiquant que la mesure est réalisée entre les bornes de sortie.

Après avoir choisi trois bornes notées A, B, et C parmi les $n$ bornes d'un multipôle passif, on peut, par le choix de la borne commune à l'entrée et à la sortie, leur associer un quadripôle de trois façons distinctes. Notons $Z_0 A$ l'impédance vue entre B et C lorsque que A ne leur est pas relié et $Z_{cc} A$ l'impédance mesurable lorsque B et C sont en court-circuit. L'équation précédente conduit à trois relations que l'on peut écrire :

$$Z_0 A \; Z_{cc} A = Z_0 B \; Z_{cc} B = Z_0 C \; Z_{cc} C \qquad (3)$$

Ces relations générales établissent des liens très généraux entre les diverses impédances mesurables. On remarque en particulier qu'une impédance peut se déduire des trois autres par des produits et des quotients ce qui, en termes de précision, est plus favorable qu'une soustraction. En outre, ces relations amènent des identités entre les pôles et les zéros des fonctions de transfert impliquées.

Pour un transformateur à deux enroulements, on peut écrire 33 égalités distinctes de ce type (Tableau 1) mais il faut noter que deux de ces équations résultent des autres : 12 s'établit à partir de 3, 4, 5, 6 et 9 tandis que 13 se déduit de 1, 2, 7, 8 et 10. On peut donc éliminer ces deux équations si bien qu'il en reste autant que des impédances mesurables. Est-ce un hasard ?

Ces relations permettent de retrouver les 31 impédances mesurables, à partir de 14 d'entre elles, en n'effectuant que des multiplications et des divisions. On peut, par exemple, retenir les 14 mesures suivantes : 1, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 16, 18, 23, 24, 26, 28, et 31.

| 1 borne inutilisée | 4 bornes utilisées | 1 court-circuit permanent |
|---|---|---|
| (11) $Z_{18}\,Z_7 = Z_{23}\,Z_4$ | (2) $Z_{29}\,Z_{20} = Z_{31}\,Z_{22} = Z_{23}\,Z_{11}$ | (5) $Z_7\,Z_1 = Z_{12}\,Z_8 = Z_{13}\,Z_9$ |
| (12) $Z_{28}\,Z_{24} = Z_{29}\,Z_{25}$ | (3) $Z_{28}\,Z_{14} = Z_{31}\,Z_{17} = Z_{18}\,Z_{12}$ | (6) $Z_{15}\,Z_9 = Z_{20}\,Z_6 = Z_{25}\,Z_2$ |
| (13) $Z_{30}\,Z_{26} = Z_{31}\,Z_{27}$ | (4) $Z_{30}\,Z_{16} = Z_{29}\,Z_{15} = Z_{18}\,Z_{13}$ | (7) $Z_{17}\,Z_8 = Z_{22}\,Z_6 = Z_{27}\,Z_3$ |
| (1) $Z_{10}\,Z_{23} = Z_{19}\,Z_{28} = Z_{21}\,Z_{30}$ | | (8) $Z_{16}\,Z_9 = Z_{21}\,Z_5 = Z_{26}\,Z_3$ |
| | | (9) $Z_{14}\,Z_8 = Z_{19}\,Z_5 = Z_{24}\,Z_2$ |
| | | (10) $Z_4\,Z_1 = Z_{10}\,Z_5 = Z_{11}\,Z_6$ |

Tableau 1 : Liste des 33 relations quadripolaires.

Les numéro des impédances sont définis par la figure 2.

## 4. Dénombrement des résonances.

### *4.1. Différents types d'impédances.*

Comme au paragraphe précédent, nous nous intéressons aux impédances mesurées entre deux points, lorsque les autres points sont soit en l'air soit en court circuit. On peut les classer en deux catégories : soit les deux points sont reliés en continu, soit ils ne le sont pas. Le premier type d'impédance englobe les mesures aux bornes d'un enroulement, de deux enroulements en parallèle ou en série... Ces impédances sont inductives en basse fréquence. Le second type, quant à lui, se rapporte aux mesures effectuées entre deux enroulements flottants, ces impédances sont capacitives en basse fréquence.

D'une manière générale, le circuit que nous associons à un transformateur sans pertes à N enroulements se compose d'une partie magnétique, traduite par la matrice inductance de dimension N et d'une partie électrostatique, représentée par la matrice capacité de dimensions 2N-1 (N enroulements = 2N bornes = 2N-1 potentiels indépendants.) que nous connectons en parallèle (Figure 3). Les deux matrices définissant ces couplages sont symétriques et le Tableau 2 montre que, pour un transformateur à trois enroulements, il faut déjà 21 paramètres pour rendre compte du comportement réactif.

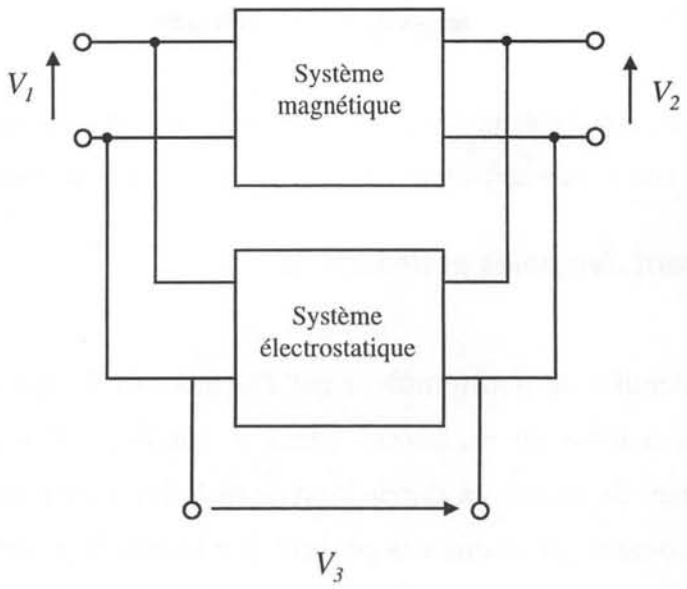



Figure 3 : Association en parallèle de systèmes magnétique et électrostatique.
Exemple pour deux enroulements.

| Nombre d'enroulements | Paramètres magnétiques | Paramètres électrostatiques | Nombre total de paramètres |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 6 | 9 |
| 3 | 6 | 15 | 21 |
| 4 | 10 | 28 | 38 |
| $N$ | $N(N+1)/2$ | $N(2N-1)$ | $N(5N-1)/2$ |

Tableau 2 : Nombre de paramètres réactifs en fonction du nombre d'enroulements.

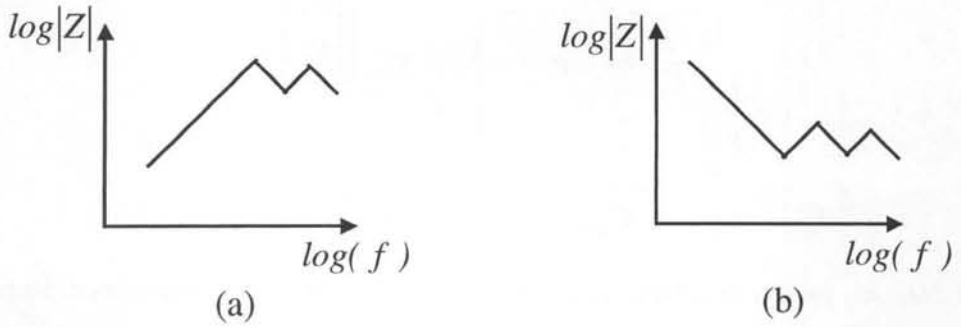



Figure 4 : Deux types de module d'impédances relevées sur un transformateur :
a) impédance "inductive" b) impédance "capacitive"

Sitôt que cette séparation en deux systèmes en parallèle est acceptable, toutes les impédances sont capacitives en haute fréquence puisque, par hypothèse, le système électrostatique shunte

le système magnétique. L'observation des diagrammes de Bode asymptotiques (Figure 4) montre que les impédances "capacitives" présentent autant de pôles (pics des modules d'impédances) que de zéros (creux des modules d'impédances) alors que les "inductives" se caractérisent par un nombre de zéros inférieur d'une unité à celui du nombre de pôles.

### *4.2. Dénombrement des pôles et des zéros.*

Lorsque que l'on identifie un transformateur par des mesures d'impédances extérieures, on observe un certain nombre de résonances (série et parallèle). Par ailleurs, nos circuits équivalents permettent de prévoir un certain nombre de telles résonances. Il est donc utile de savoir rapidement combien de résonances peuvent être justifiées par tel ou tel modèle, pour situer la fréquence jusqu'à laquelle ce modèle est susceptible d'expliquer les mesures. Au-delà de cet objectif premier, cette réflexion pourra également, le cas échéant, suggérer de morceler un enroulement pour rendre compte d'un plus grand nombre de résonances (échantillonnage spatial du dispositif).

Comme dit plus haut, le transformateur est supposé constitué par deux systèmes connectés en parallèle : l'un magnétique l'autre électrostatique. C'est donc sa matrice admittance qui admet l'écriture la plus simple. Si, une fois les courts-circuits externes installés, le dispositif présente encore $z+1$ bornes distinctes, il possède $z$ entrées indépendantes qui se répartissent en $m$ entrées d'enroulements et $n$ entrées inter-enroulements. En adoptant une numérotation adéquate, la relation courant - tension s'écrit , en notant $p$ la variable de Laplace :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \\ \\ I_z \end{bmatrix} = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_{ij}} + C_{ij}\, p^2 \end{bmatrix}}^{m} & \overbrace{C_{ij}\, p^2}^{n} \\ C_{ij}\, p^2 & C_{ij}\, p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \\ \\ V_z \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Le terme $1/\lambda_{i,j}$ est égal à l'élément $L^{-1}{}_{i,j}$ de l'inverse de la matrice inductance. Rappelons que la matrice admittance $Y$ définie par (4) caractérise le système lorsque les courts-circuits présents durant la mesure sont installés. Dans ces conditions, toute impédance mesurable est égale au quotient de $V_i$ par $I_i$ lorsque les autres courants sont nuls. Elle s'identifie donc à l'élément $Z_{ii}$ de la matrice impédance, inverse de $Y$ et s'exprime simplement en fonction des éléments de $Y$.

$$Z_{ii} = \frac{det\ mineur\ de [Y]_{ii}}{det[Y]}$$

Le dénominateur est le déterminant de la matrice admittance, alors que le numérateur est celui du mineur associé à l'élément diagonal $Y_{ii}$. Le déterminant de $Y$ est une somme de termes qui comprennent tous le produit de m termes de type $1/\lambda + C\,p^2$ par n termes de type $Cp^2$, si bien qu'il admet la forme :

$$det[Y] = \frac{1}{p^{m+n}} \left(A_1 + A_2 p^2 + A_3 p^4 + ... + A_m p^{2m}\right) B\, p^{2n}$$

Le mineur se calcule de la même façon mais le résultat diffère suivant que l'on s'intéresse à une impédance "inductive" $(i \leq m)$ ou "capacitive". Dans le premier cas, c'est $m$ qui diminue d'une unité, dans le second, c'est $n$.

Ainsi, une impédance "inductive" peut se mettre sous la forme :

$$Z = \frac{\frac{1}{p^{m-1+n}} \left(\alpha_1 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p^4 + ... + \alpha_{m-1} p^{2m-2}\right) \beta\, p^{2n}}{\frac{1}{p^{m+n}} \left(A_1 + A_2 p^2 + A_3 p^4 + ... + A_m p^{2m}\right) B\, p^{2n}}$$

$$Z = \frac{\alpha_1 \beta}{A_1 B}\, p\, \frac{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} p^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} p^4 + ... + \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_1} p^{2m-2}}{1 + \frac{A_2}{A_1} p^2 + \frac{A_3}{A_1} p^4 + ... + \frac{A_m}{A_1} p^{2m}} \qquad (5)$$

Alors que, pour une impédance "capacitive", on obtient :

$$Z = \frac{\alpha_1 \beta}{A_1 B} \frac{1}{p} \frac{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} p^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} p^4 + ... + \frac{\alpha_m}{\alpha_1} p^{2m}}{1 + \frac{A_2}{A_1} p^2 + \frac{A_3}{A_1} p^4 + ... + \frac{A_m}{A_1} p^{2m}} \qquad (6)$$

En rapprochant ces résultats, on remarque que le nombre de résonances parallèles (pôles) est égal à $m$, c'est-à-dire à celui des tensions d'enroulements indépendantes. En outre, il se confirme que le nombre des résonances série des impédances "capacitives" est identique au précédent et que celui des impédances "inductives" est inférieur d'une unité.

Pour un jeu de potentiels choisis, toutes les impédances $Z_{ii}$ admettent le même dénominateur. Elles présentent donc les mêmes pôles. Ceci reste vrai si on choisit, sans rien changer aux courts-circuits, un jeu différent d'entrées du système. En effet, cette opération de changement

de base pour les tensions et courants, multiplie le déterminant par une constante indépendante de $p$, ce qui est sans incidence sur les pôles. Finalement, tant que les courts-circuits sont conservés, toutes les impédances mesurables admettent les mêmes pôles.

### *4.3. Application à un transformateur à deux enroulements.*

Après les études générales précédentes, que pouvons nous dire à propos des résonances des impédances d'un transformateur à deux enroulements ? Tout d'abord, suivant la configuration des courts-circuits, nous pouvons avoir 0, 1 ou 2 tensions d'enroulements indépendantes, ce qui fixe le nombre des pôles. La classification des 31 impédances de la Figure 2, par ordre croissant du nombre de résonances (Tableau 3), en découle directement.

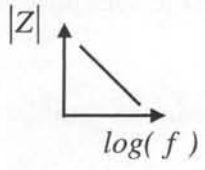
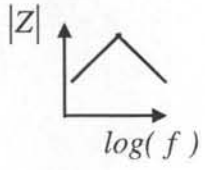
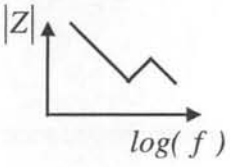
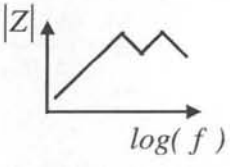
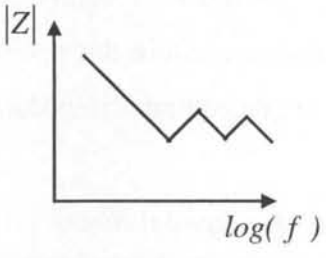
| | |
|---|---|
| Configuration 1 :<br>Impédance inter-enroulement, 2 enroulements en CC (1 mesure) |  |
| Configurations 2 et 3 :<br>Enroulements en parallèle (2 mesures)<br>impédances en court-circuit (6 mesures) |  |
| Configuration 4 :<br>impédances inter-enroulement, 1 enroulement en court-circuit (4 mesures) |  |
| Configurations 5 et 6 :<br>Impédances à vide (10 mesures)<br>Enroulements en série (4 mesures) |  |
| Configuration 7 :<br>Impédances inter-enroulement, aucun en court-circuit (4 mesures) |  |

Tableau 3 : Module asymptotiques des 31 impédances d'un transformateur à deux enroulements.

Au total, 74 résonances apparaissent sur ces courbes: *(2 + 6) + 4* x *2 + (10 + 4)* x *3 + 4* x *4*. Cependant, toutes ces fréquences ne sont pas indépendantes ! Si on se rappelle que les relations quadripolaires générales permettent de retrouver les 31 impédances en partant de 14 (paragraphe 2.3.), le décompte des résonances différentes doit se limiter à ces 14 impédances et tenir compte des identités de pôles.

L'impédance 1 ne présente aucune résonance, tandis que 5, 6, 7, 8 et 9 présentent chacune un pôle. Les impédances 15 et 16 présentent chacune 2 pôles et un zéro, de même que 24 et 26 mais les pôles de 16 et 26 se confondent. Enfin, 18, 23, 28 et 31 partagent la même paire de pôles mais les deux premières ne possèdent qu'un zéro alors que les deux dernières en ont deux. En définitive, le nombre de résonances distinctes est ramené à 23.

D'autres propriétés générales restent à découvrir qui réduiront encore ce nombre. Par exemple, l'étude directe du circuit à trois capacités (Figure 7, chapitre I) montre, que le pôle de l'impédance 9 est identique au zéro de l'impédance 15, ce qui est confirmé par l'expérience....

## 5. Identification progressive.

### *5.1. Couplage magnétique.*

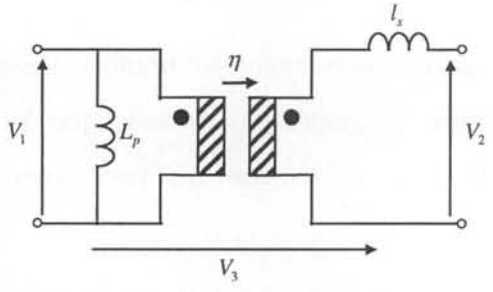
Pour décrire le couplage magnétique d'un transformateur à trois enroulements ou plus, plusieurs auteurs [Hsu] ont proposé d'adopter la structure du circuit équivalent standard du transformateur à deux enroulements. Cette structure, qui associe un transformateur parfait, une inductance magnétisante unique et une inductance de fuite par enroulement, s'avère pourtant inappropriée car elle n'introduit pas suffisamment de paramètres ajustables [Keradec94].

Grâce à l'introduction des coupleur et à la méthode d'orthogonalisation de Schmidt [Keradec94], il est possible de représenter exactement et simplement le couplage magnétique d'un transformateur comprenant un nombre quelconque d'enroulements [Berrouche97]. Nous reprenons ci-dessous cette approche, en adoptant un point de vue plus physique que mathématique et en nous intéressant à l'identification des paramètres pertinents.

### 5.1.1. Transformateur à deux enroulements.

En première approximation, un transformateur à deux enroulements peut être représenté par un coupleur et une inductance magnétisante $L_p$. Nous appelons cette représentation "schéma de base" et l'enroulement aux bornes duquel $L_p$ est connectée est arbitrairement nommé "primaire".

Comme on peut s'en rendre compte en court-circuitant l'inductance magnétisante, ce schéma est incomplet car, vu du secondaire, le transformateur présente encore une inductance $l_s$ non nulle. Cette difficulté est surmontée en plaçant une inductance de fuite $l_s$ au secondaire (Figure 5).




$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_p & \eta L_p \\ \eta L_p & l_s + \eta^2 L_p \end{bmatrix}$$

Figure 5 : Couplage magnétique complet d'un transformateur à deux enroulements.

Ce schéma complet se caractérise par trois valeurs qui se déduisent, de manière univoque, des trois éléments indépendants de la matrice inductance associée. Les grandeurs caractéristiques de ce circuit se déduisent également de trois mesures. Si $L_{02}$ est l'impédance vue du secondaire, le primaire étant à vide, $L_{01}$ l'impédance vue du primaire, le secondaire étant à vide et $l_{cc2}$ l'impédance vue du secondaire lorsque le primaire est en court-circuit, on a :

$$L_p = L_{01} \qquad l_s = l_{cc2} \qquad \eta = \sqrt{\frac{L_{02} - l_s}{L_{01}}} \tag{7}$$

Notons que $L_p$ et $l_s$ se mesurent directement (elles sont donc positives) et que $\eta$ se déduit de trois mesures d'inductances sous réserve qu'une mesure complémentaire nous indique son signe.

En revenant à la description matricielle du couplage, il est facile de montrer que la relation liant l'inductance d'entrée à celle de la charge du quadripôle n'implique que le carré de la mutuelle M, ce qui explique qu'on ne puisse pas déduire son signe des mesures d'impédances

primaire et secondaire. En pratique, pour déterminer le signe de M, il faudra procéder à un essai supplémentaire qui pourra être soit une mesure de gain (gain en tension à vide par exemple), soit la mesure de l'inductance des deux enroulements en série. Notons que cette seconde solution est en accord avec notre décision de nous limiter à des mesures d'impédances. La traduction schématique de la relation matricielle du couplage magnétique (Figure 6). montre que l'impédance relevée entre A et C lorsque B-D est en l'air (enroulements en série) fait intervenir directement la mutuelle inductance avec son signe.

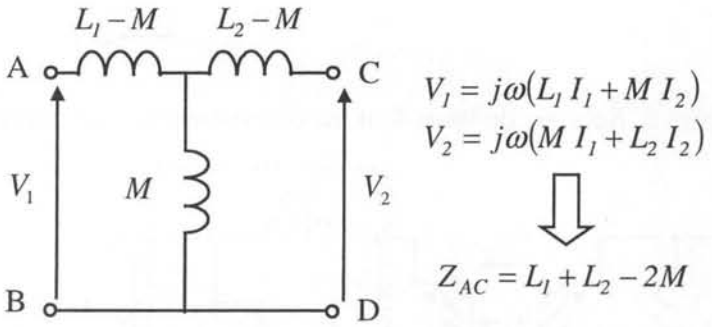



Figure 6 : l'inductance des enroulements en série permet d'accéder au signe de la mutuelle inductance.

### *5.1.2. Transformateur à trois enroulements.*

Pour représenter le couplage magnétique d'un transformateur à trois enroulements, nous adoptons la même démarche progressive. Tout d'abord, nous supposons (schéma de base), que le couplage des trois enroulements est idéal. La seule inductance à prendre en compte est l'inductance magnétisante $L_p$ (Figure 7). Ensuite, pour mettre en lumière les insuffisances de ce circuit, nous court-circuitons le primaire et donc l'inductance magnétisante. Dans ces conditions, les autres enroulements continuent à montrer chacun une impédance faiblement inductive et ces inductances résiduelles n'ont aucune raison d'être découplées.

Finalement, le circuit complet (Figure 8) s'obtient en complétant le schéma de base (Figure 7) par un transformateur à deux enroulements que nous appelons : "transformateur de fuites". Ce circuit se caractérise par six paramètres et, comme il se doit, ce nombre coïncide avec celui des éléments indépendants de la matrice inductance.

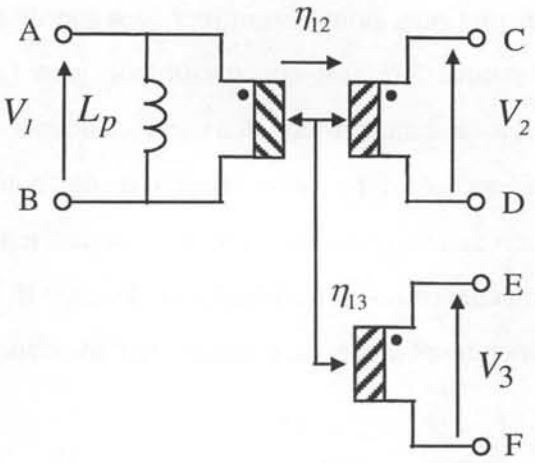



Figure 7: Schéma de base d'un transformateur à trois enroulements.

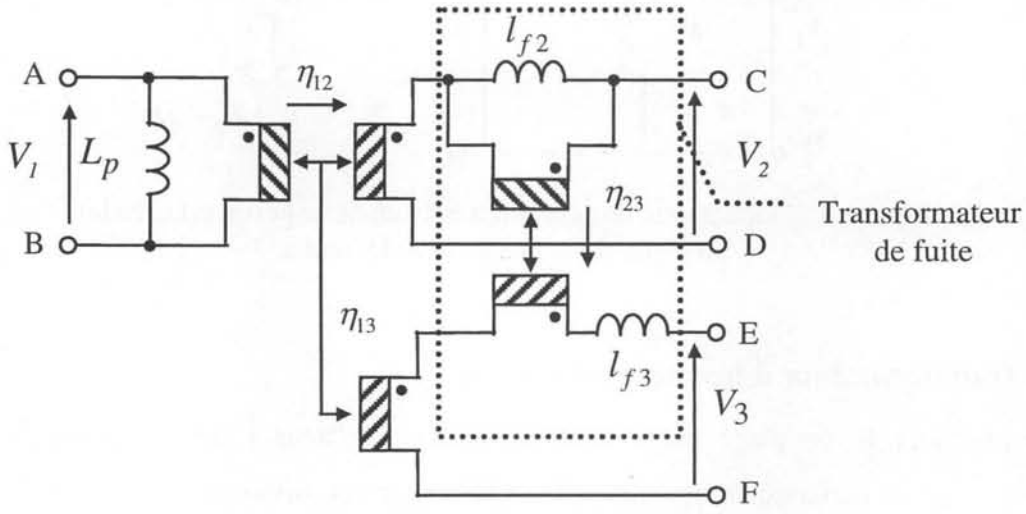



Figure 8 : Représentation magnétique complète d'un transformateur à trois enroulements.

Les six paramètres à évaluer expérimentalement apparaissent sur la Figure 8. Ils comprennent trois inductances et trois rapports de couplage. Les trois inductances se mesurent directement, elles sont donc positives.

$L_p$ : inductance vue de l'entrée 1 quand les 2 autres sont à vide ( $L_{01}$ )

$l_{f2}$ : inductance vue de l'entrée 2 quand l'entrée 1 est en court-circuit et l'entrée 3 à vide

$l_{f3}$ : inductance vue de l'entrée 3 quand les 2 autres sont en court-circuit

Les rapports de couplage sont déduits des relations suivantes :

$$\eta_{12} = \sqrt{\frac{L_{02} - l_{f2}}{L_{01}}} \qquad \eta_{13} = \sqrt{\frac{L_{03} - L_{c3}}{L_{01}}} \qquad \eta_{23} = \sqrt{\frac{L_{c3} - l_{f3}}{l_{f2}}} \tag{8}$$

$L_{01}$, $L_{02}$ et $L_{03}$ sont les inductances à vide vues de chaque enroulement. L'inductance $L_{c3}$ est celle vue de l'enroulement 3, le primaire étant en court-circuit et l'enroulement 2 à vide. Le signe de ces rapports ou, ce qui revient au même, la position du point au secondaire des coupleurs, ne peut pas se déduire de ces mesures. Des essais complémentaires (mesures de gain en tension par exemple) sont nécessaires pour fixer les signes.

On notera qu'en définitive, les six inductances retenues pour caractériser le couplage de trois enroulements se composent de : 3 inductances à vide ( $L_{01}$, $L_{02}$ et $L_{03}$ ), 2 inductances avec un court-circuit ( $l_{f2}$ et $L_{c3}$ ), 1 inductance avec deux courts-circuits ( $l_{f3}$ ).

Les mêmes mesures donnent accès aux coefficients de couplage du transformateur. Si l'on note l'inductance $L_{0i}$ déduite de la mesure à vide vue de l'enroulement $i$ et $L_{cci}$ l'inductance vue du même l'enroulement $i$, l'enroulement $j$ étant en court-circuit, on obtient :

$$k_{ij} = \sqrt{1 - \frac{L_{cci}}{L_{0i}}} \tag{9}$$

Enfin pour évaluer le coefficient de couplage du transformateur de fuites, il suffit de le caractériser en laissant le primaire en court-circuit.

$$k_f = \sqrt{1 - \frac{l_{f3}}{L_{c3}}} \tag{10}$$

### *5.1.3. Généralisation*

La méthode présentée pour dégager le schéma équivalent magnétique d'un transformateur à deux ou trois enroulements est itérative : le circuit général d'un transformateur à quatre enroulements associe son schéma de base (sans fuite) au schéma complet d'un transformateur de fuites à trois enroulements. Elle s'applique donc à un nombre quelconque d'enroulements.

Attention, même si les enroulements d'un transformateur sont fortement couplés, ceux du transformateur de fuites ne le sont pas forcément. L'essentiel du couplage est en effet pris en compte par le schéma de base qui, rappelons-le, a été établi en supposant tous les couplages parfaits.

En résumé, le concept de "transformateur de fuites" précise l'ancienne notion d'inductance de fuite. Il s'applique qu'elle que soit l'intensité du couplage des enroulements et rappelle que les

inductances de fuites sont, elles aussi, couplées : ce fait est établi théoriquement et expérimentalement. Parce qu'ils méconnaissaient cette réalité, les circuits équivalents proposés auparavant pour représenter le couplage magnétique étaient inexacts au-delà de trois enroulements.

## *5.2. Couplage électrostatique.*

### *5.2.1 Ses origines.*

Un modèle électrostatique simple, le modèle plan (Figure 9), nous a beaucoup aidé à comprendre l'origine de ce couplage. C'est un "condensateur" plan dont le potentiel de chaque électrode, plutôt que d'être uniforme, varie linéairement le long de l'électrode, comme le long d'une couche de spires.

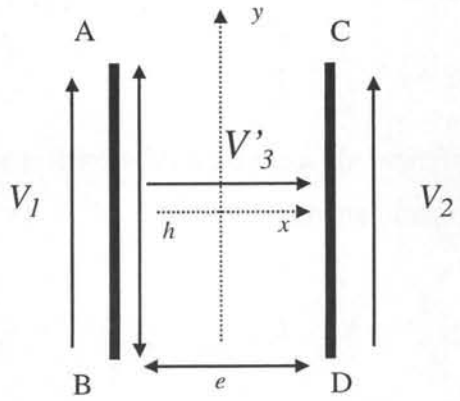



Figure 9 : Le modèle plan. Comme sur une couche de spires,
le potentiel varie linéairement lorsqu'on passe de B à A et de D à C.

L'étude analytique de ce modèle permet d'exprimer l'énergie électrostatique $W$ en fonction des tensions $V_1$, $V_2$ et $V'_3$. Tant que l'épaisseur $e$ est très inférieure à la hauteur $h$, et dans la mesure où chaque enroulement n'est constitué que d'une seule couche, nous pouvons admettre que l'énergie $W$ est essentiellement stockée dans le parallélépipède de section ABCD. En notant $C_0$ la capacité du condensateur de même section et de longueur $l$ (longueur moyenne d'une spire), nous obtenons :

$$W = \frac{1}{2}\frac{C_0}{12}V_1^{\,2} + \frac{1}{2}\frac{C_0}{12}V_2^{\,2} + \frac{1}{2}C_0 V'^{\,2}_3 - \frac{C_0}{12}V_1 V_2 \quad \text{où} \quad C_0 = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\frac{l\,h}{e} \qquad (11)$$

Outre la symétrie des rôles de $V_1$ et $V_2$ qui résulte des symétries du dispositif, on remarque que seuls $V_1$ et $V_2$ sont couplés. Ils le sont même parfaitement puisque $|C_{12}| = \sqrt{C_{11} C_{22}}$. Si maintenant, on rapporte la même énergie aux tensions mesurables, c'est à dire, si on remplace $V'_3$ par $V_3 = V_{BD} = V_1/2 + V'_3 - V_2/2$, il vient :

$$W = \frac{1}{2} C_0 \left[ \frac{1}{3} V_1^2 + \frac{1}{3} V_2^2 + V_3^2 - \frac{2}{3} V_1 V_2 - V_1 V_3 + V_2 V_3 \right] \qquad (12)$$

La symétrie des rôles de $V_1$ et $V_2$ est toujours apparente et leur coefficient de couplage vaut toujours 1. En revanche, $V_3$ est maintenant couplé à $V_1$ comme à $V_2$, avec un coefficient de couplage qui vaut 0.87 $\left( |C_{13}| / \sqrt{C_{11} C_{33}} = \sqrt{3}/2 \right)$. Ainsi, les phénomènes électrostatiques paraissent souvent couplés parce que les potentiels extérieurs du composant ne constituent pas la meilleure base pour les exprimer. Cette situation, qui s'aggrave lorsque les enroulements sont multicouches, doit inciter à la prudence lorsque l'on tente de donner un sens physique à un couplage électrostatique.

On remarque également que les coefficients de couplage sont loin d'être négligeables et qu'ajouter des condensateurs à chaque fois que deux surfaces sont en regard l'une de l'autre est un peu simpliste. Cette méthode suggère de n'introduire que des capacités positives alors qu'un dispositif aussi simple que le modèle plan réclame déjà quelques valeurs négatives.

Cette étude justifie notre approche globale de la modélisation électrostatique. Pour rendre compte des effets électrostatiques, $N(2N-1)$ condensateurs sont introduits dans le circuit (6 pour 4 bornes). Une disposition simple de ceux-ci consiste à en placer un entre tous les couples de bornes externes. Rappelons cependant que toute autre disposition est acceptable, dès lors que l'énergie stockée par l'ensemble des condensateurs est, quels que soient les potentiels, identique à celle du transformateur (qui demeure une fonction quadratique des potentiels extérieurs). Enfin, si certaines de ces capacités peuvent être négatives toutes les capacités directement mesurables doivent impérativement être positives.

### *5.2.2. Problème expérimental.*

En pratique, les capacités d'un transformateur sont souvent difficiles à mesurer parce qu'elles sont masquées par des inductances en parallèle. Plus ces inductances sont faibles, plus il faut

monter en fréquence pour voir l'effet capacitif et plus la mesure est délicate, voire impossible. Le système d'équations conduisant aux capacités inclut souvent quelques valeurs expérimentales très incertaines, ce qui conduit à des valeurs de capacités imprécises. On remarque alors que même les résonances basse fréquence sont mal localisées par le modèle. Parfois même, lorsque certaines résonances sont inaccessibles à l'appareillage, le système d'équation est incomplet, aucune capacité et donc aucune fréquence de résonance, ne peut être évaluée....

Lorsque les enroulements sont bien couplés, les résonances des impédances se répartissent en deux groupes : celles, basse fréquence, liées à l'inductance magnétisante et celles situées nettement plus haut en fréquence qui dépendent du transformateur de fuite dont toutes les inductances sont faibles. Lorsque les fuites sont négligées (schéma de base), toutes les tensions d'enroulements sont proportionnelles à la tension primaire. Le recensement des résonance nous apprend que, dans cette situation, le circuit peut expliquer un pôle pour toutes les impédances plus un zéro pour les impédances capacitives. Il doit donc être possible d'obtenir une prévision précise de ces fréquences de résonances sans recourir à l'observation des résonances haute fréquence.

Nous allons voir que certaines dispositions des capacités facilitent les approximations autorisées par le fort couplage des enroulements. La méthode originale de caractérisation qui en résulte mène à un circuit équivalent simple et apte à expliquer les résonances basse fréquence. Lorsque les résonances haute fréquence sont accessibles, ce circuit peut être affiné, sans remise en cause de la précision basse fréquence, pour rendre compte du comportement haute fréquence. C'est ce qui justifie le qualificatif de "progressive" attribué à cette méthode.

### *5.2.3 Identification électrostatique progressive.*

Tant que l'influence du transformateur de fuites peut être négligée, les tensions aux bornes des enroulements sont liées et seule l'inductance magnétisante intervient. La dimension du système électrostatique peut être ramenée à $N$ : 1 tension d'enroulement et $N-1$ tensions inter-enroulements et la représentation du comportement électrostatique ne nécessite que $N(N+1)/2$ capacités au lieu des $N(2N-1)$ du circuit complet.

L'idée directrice de l'identification progressive consiste à déduire les informations caractérisant cette représentation électrostatique simplifiée des mesures directes (impédances capacitives) et de celles où l'inductance en parallèle est maximale (aucun enroulement en court-circuit) [Schellmanns98].

### *5.2.4. Les différentes étapes.*

Tout d'abord, après avoir court-circuité tous les enroulements, on relève les impédances inter-enroulements. Ceci permet d'accéder directement, sans difficulté expérimentale majeure, à certaines capacités. Pour un transformateur à N enroulements, il s'agit d'identifier un multipôle purement électrostatique à $N-1$ entrées. Pour conclure cette phase, on relie tous les points hauts d'enroulements à tous les autres par un condensateur. On en introduit ainsi $N(N-1)/2$.

Dans un second temps, on suppose que les enroulements sont fortement couplés et on exploite le "schéma de base" du transformateur. Pour que ce schéma soit acceptable, la nouvelle série de mesures est réalisée sans court-circuiter aucun enroulement et seules les résonances les plus basses sont exploitées : la première résonance parallèle pour les impédances "inductives", les premières résonances série et parallèle pour les "capacitives". Les résonances observées sont toutes dues à l'inductance magnétisante et, puisque ce sont les plus basses en fréquence, elles sont faciles à relever.

A la fin de cette étape, nous disposons $N$ capacités supplémentaires sur le circuit. Nous les plaçons entre le point bas du primaire et les points hauts de tous les enroulements, primaire compris. Grâce à cette disposition astucieuse, certaines capacités évaluées durant la première étape se partagent en deux. A ce moment là, le schéma du transformateur à deux enroulements comprend trois capacités et celui du transformateur à trois enroulements six. Pour $N$ enroulements, il en comprend $N(N+1)/2$. Toutes ces capacités sont placées entre les bornes externes du transformateur.

Enfin, si cela est nécessaire et possible, on aborde la troisième étape qui consiste à exploiter les résonances suivantes observées dans les mêmes conditions et/ou celles relevées lorsque au moins un enroulement est court-circuité. Durant cette phase, la prise en compte des fuites est indispensable mais, en revanche, on peut souvent négliger l'inductance magnétisante. Les

résonances à observer sont souvent plus difficiles à mesurer et elles tombent parfois hors du domaine fréquentiel de l'appareil de mesure. Cependant, lorsque les difficultés expérimentales ne sont pas prohibitives, quelques mesures complémentaires permettent d'évaluer toutes les autres capacités. A l'issue de cette détermination, $N(2N-1)$ condensateurs figurent sur le circuit. Nous illustrons ci-dessous ce processus pour deux, puis pour trois enroulements.

### *5.2.5. Transformateur à deux enroulements.*

D'une manière générale, l'énergie stockée par un système électrostatique à trois entrées s'écrit:

$$W_E = \frac{1}{2}C_{11}V_1^{\,2} + \frac{1}{2}C_{22}V_2^{\,2} + \frac{1}{2}C_{33}V_3^{\,2} + C_{12}V_1V_2 + C_{13}V_1V_3 + C_{23}V_2V_3 \qquad (13)$$

Tant que l'on néglige ses pertes et ses fuites, l'état électrique d'un transformateur à deux enroulements ne dépend que de deux tensions indépendantes puisque $V_2 = \eta V_1$. En conséquence, son schéma équivalent ne nécessite que trois capacités. Pour que l'énergie électrostatique stockée ait toujours la bonne valeur, il faut disposer trois capacités entre les quatre bornes du coupleur. Bien entendu, il faut éviter que deux d'entre elles ne soient soumises à des tensions proportionnelles (Figure 10).

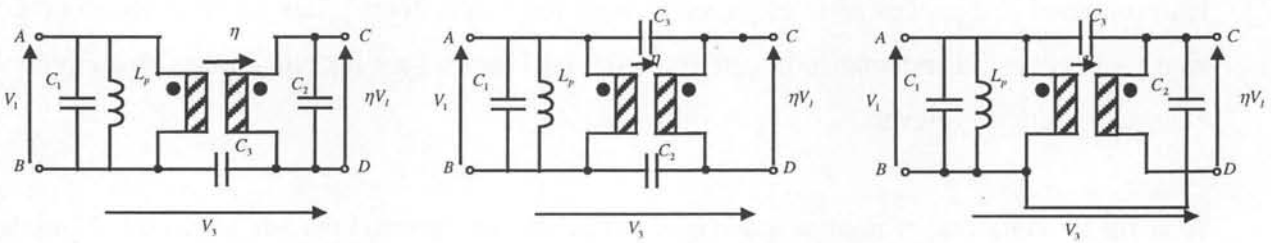



Figure 10 : Différentes dispositions des capacités sur un transformateur sans fuite.

Finalement, les dispositions acceptables sont celles où une capacité est placée entre les bornes d'un enroulement et les deux autres partent d'un point commun pour joindre les deux points de l'autre enroulement. Un exemple est fournit par la Figure 11.

Les capacités de ce dispositif sont faciles à identifier car, tant que la borne D reste libre, le coupleur n'intervient pas et, à l'inductance magnétisante près, le circuit ABC est un triangle purement capacitif. En fait, toute disposition des capacités dont l'énergie totale stockée s'identifie à (13) lorsque $V_2 = \eta V_1$ est acceptable. Pour le circuit de la figure 11, elle vaut :

$$W'_E = \frac{1}{2}\left((C_2 + C_3)\eta^2 - 2C_3\eta + C_1 + C_3\right)V_1^2 + \frac{1}{2}(C_2 + C_3)V_3^2 + (\eta(C_2 + C_3) - C_3)V_1 V_3 \quad (14)$$

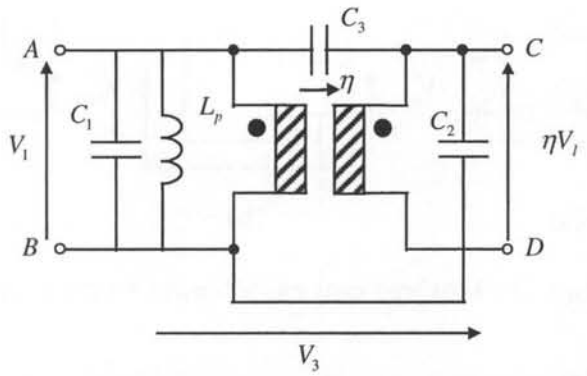



Figure 11 : Représentation d'un transformateur à deux enroulements sans fuite.

En s'appuyant sur les six inégalités que respectent $C_1, C_2, C_3$ (toutes les valeurs mesurables positives), on montre que, quelque soit la valeur de $\eta$, $C_{11} > 0$, $C_{33} > 0$ et $C_{13}^2 < C_{11}C_{33}$. On est ainsi certain que $W'_E$ est toujours positive.

* Impédance inter-enroulement.

La première étape consiste à identifier les capacités inter-enroulements. Dans le cas d'un transformateur à deux enroulements, il n'y en a qu'une. La mesure est réalisée en adoptant la représentation parallèle $C_p - R_p$ qui permet une estimation directe de la capacité.

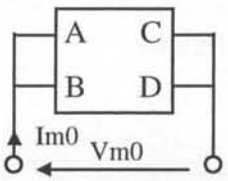



Figure 12 : Mesure inter-enroulement.

Cette mesure (Figure 12) permet de déduire la somme de deux capacités du composant:

$$C_2 + C_3 = C_{m0} \quad (15)$$

* Mesures sans court-circuit d'enroulement.

Durant ces trois mesures, l'inductance magnétisante est en parallèle sur une capacité différente qui dépend des trois recherchées. Les fréquences de résonances parallèles qui en résultent ($Fr_1$, $Fr_2$ et $Fr_3$) se situent assez bas puisque l'inductance magnétisante est plus forte que les inductances relevées lorsqu'un enroulement est court-circuité. Toutes trois

mènent à une valeur de capacité : $C = 1/\left(L_p.\omega_r^{\,2}\right)$ qui se déduit sans difficulté puisque $L_p$ a été évaluée durant l'identification magnétique précédente.

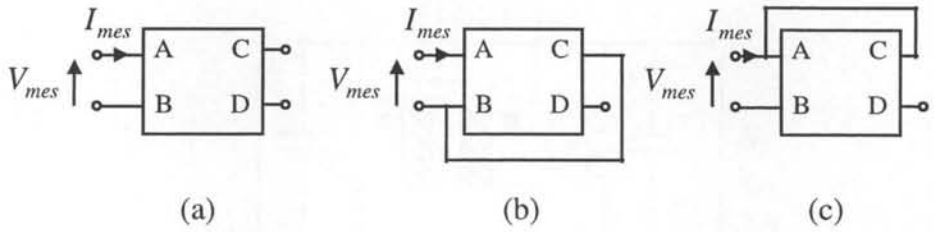



Figure 13 : Mesures sans enroulement en court-circuit.

La première résonance parallèle intervient à : $Fr_1$ pour (a), $Fr_2$ pour (b) et $Fr_3$ pour (c). Ces fréquences (premier pôle de chaque impédance) sont également visibles entre toute paire de bornes tant qu'on ne déplace pas les liens. Les capacités associées sont données par :

$$C_{m1} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \qquad C_{m2} = C_1 + C_3 \qquad C_{m3} = C_1 + C_2 \tag{16}$$

Les expressions de $C_{m0}$, $C_{m2}$ et $C_{m3}$ suffisent à la détermination de $C_1, C_2, C_3$. La valeur de $C_{m1}$ permet ensuite de tester la cohérence de ces mesures.

Il fallait s'y attendre, le problème soulevé par la détermination des signes des rapports de couplages (Figure 6) admet un dual : des mesures complémentaires sont nécessaires pour trouver les signes des coefficients d'influence.

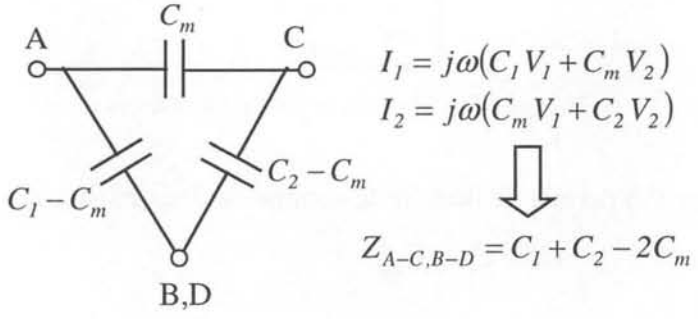



Figure 14 : En reliant les bornes A et C, la capacité mesurable implique directement le coefficient d'influence et son signe.

En observant le circuit équivalent à la matrice de couplage électrostatique (Figure 14), la solution de ce problème apparaît clairement. A chaque fois qu'un quadripôle capacitif devra être identifié, nous utiliserons en premier trois mesures en court-circuit : $Z_{AB}$ lorsque CD est

court-circuité donne $C_1$, $Z_{CD}$ lorsque AB est court-circuité donne $C_2$, et $Z_{AB}$ lorsque AC est court-circuité donne $C_1 + C_2 - 2C_m$.

* Réintroduction de l'inductance de fuite.

La représentation précédente (Figure 11) vise à rendre compte du comportement du transformateur tant qu'aucun enroulement n'est court-circuité. Cependant, en électronique de commutation, il est rare qu'on puisse négliger l'influence de l'inductance de fuite. Nous devons donc, avant toute utilisation en simulation électronique, réintroduire l'inductance de fuite sans compliquer le schéma électrostatique.

A ce moment, il semble que les deux capacités que l'on a reliées à la borne C puissent indifféremment être connectées d'un coté ou de l'autre de l'inductance magnétisante. Pourtant, une de ces capacités peut être négative et la seule certitude que l'on a c'est que, disposées en triangle, aucune des capacité mesurables n'est négative. Il est donc conseillé de continuer à les connecter en triangle. Si une disposition différente est adoptée, certaines impédances du circuit, théoriquement mesurables, risquent de présenter des capacités négatives. Le circuit équivalent risque d'enfreindre des lois physiques et, si cela se concrétise (Figure 15b), les logiciels de simulation le rejetteront.

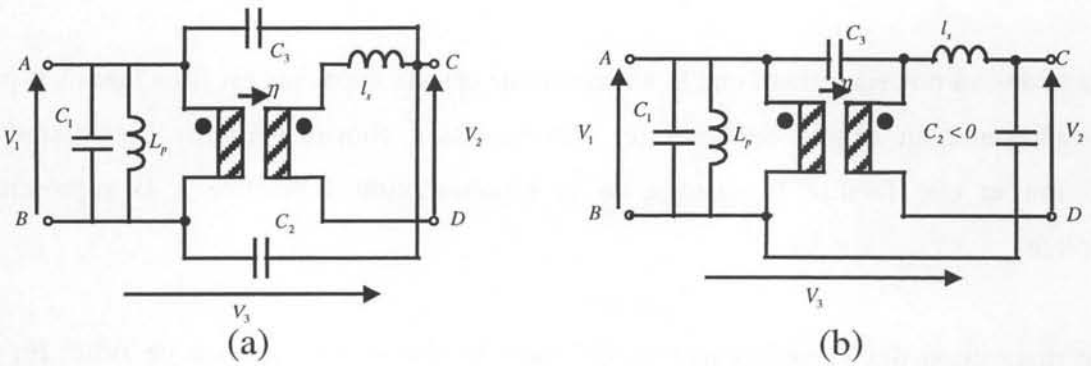



Figure 15 : Différentes dispositions des capacités en présence de l'inductance de fuite.

Nous avons choisi de garder les deux capacités connectées à C (Figure 15a) car, outre le fait que les capacités sont reliées en triangle, la plupart des impédances mesurables conserve son caractère capacitif en haute fréquence. Notons cependant que si les points ABC sont reliés par des courts-circuits, l'impédance secondaire est purement inductive et ne présente aucune capacité parallèle. On atteint ici une limite de cette représentation approximative.

Finalement, le modèle électrostatique simplifié d'un transformateur à deux enroulements (Figure 16) se caractérise par six constantes : trois magnétiques (inductance magnétisante $L_p$, rapport de couplage $\eta$ *et* inductance de fuite $l_s$) et trois électrostatiques ($C_1, C_2, C_3$).

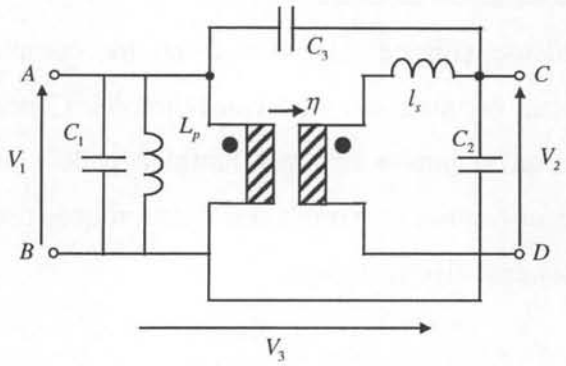



Figure 16 : Représentation simplifiée d'un transformateur à deux enroulements sans perte.

* Mesures avec court-circuit d'enroulement.

Bien que souvent on puisse s'en tenir là, nous allons montrer comment, grâce à quelques mesures complémentaires, on peut accéder à la caractérisation électrostatique complète. Pour franchir cette ultime étape et obtenir un modèle précis jusqu'à des fréquences plus grandes, il est indispensable de prendre en compte l'inductance de fuite lors de la détermination des capacités. Cette fois, les trois potentiels sont indépendants et six capacités sont nécessaires.

Nous avons vu précédemment que le placement de ces six capacités est libre tant qu'il permet une représentation exacte de l'énergie. L'implantation choisie (Figure 17) satisfait cette condition et elle facilite le passage de la représentation simplifiée à la représentation complète.

Cette disposition des capacités met en évidence le rôle de l'inductance de fuite. En basse fréquence, lorsque son impédance est faible, les capacités $\gamma_5$ et $\gamma_6$ apparaissent en parallèle, de même que $\gamma_2$ et $\gamma_3$. Ainsi, cette topologie permet de réutiliser les valeurs trouvées lors de la caractérisation simplifiée au moyen des relations (17).

$$\gamma_1 = C_1, \qquad \gamma_5 + \gamma_6 = C_2, \qquad \gamma_2 + \gamma_3 = C_3 \tag{17}$$

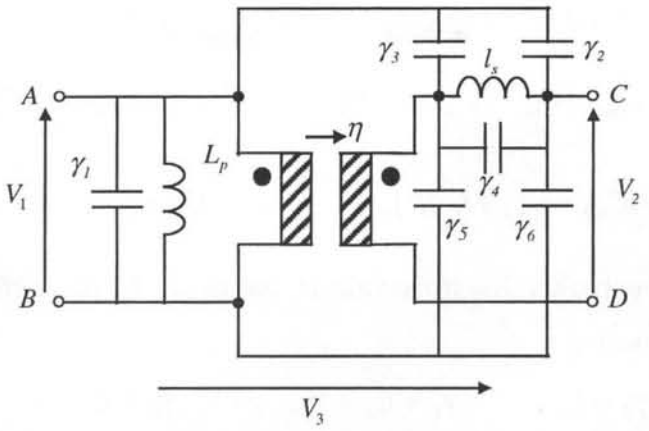



Figure 17 : Schéma équivalent complet d'un transformateur sans perte à deux enroulements

Pour séparer $\gamma_2$ de $\gamma_3$, $\gamma_5$ de $\gamma_6$ et trouver $\gamma_4$, il faut trois nouvelles mesures impliquant l'inductance de fuite ce qui est le cas des impédances relevées en court-circuitant un enroulement. Chaque mesure de ce type ne peut faire apparaître qu'une résonance parallèle cohérente avec le schéma proposé.

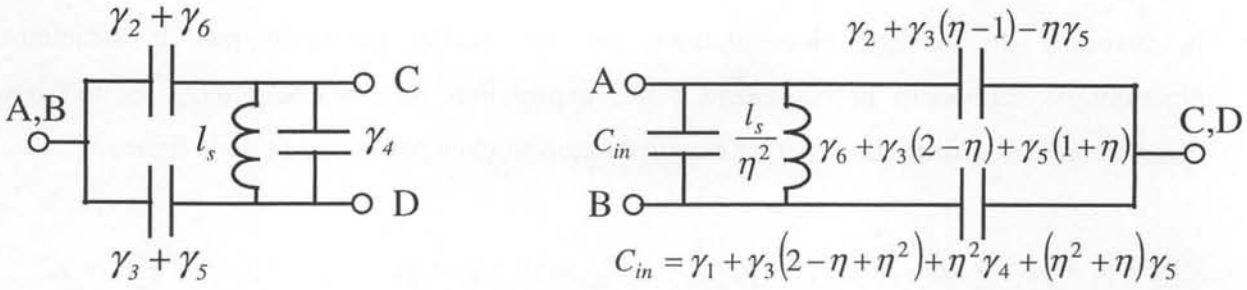



Figure 18 : Schéma équivalent lorsque un enroulement est en court-circuit.

Afin d'obtenir des équations simples, nous avons choisi les trois mesures suivantes (Figure 19). Les trois fréquences ainsi relevées impliquent $l_s$, $l_s$ et $l_s/\eta^2$ en parallèle sur $L_p$ et les capacités qui s'en déduisent sont :

$$(\gamma_4+\gamma_2+\gamma_6),\ (\gamma_4+\gamma_3+\gamma_5) \text{ et } \left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3(\eta-1)^2+(\gamma_4+\gamma_5)\eta^2\right) \qquad (18)$$

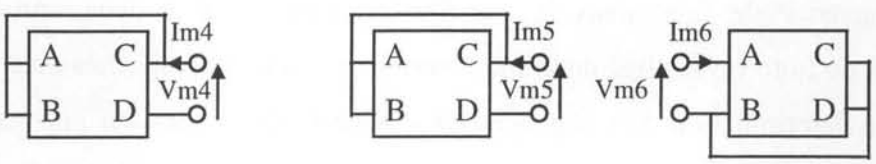



Figure 19 : Mesures complémentaires pour passer du modèle simplifié au modèle complet.

En regroupant les équations (15) à (18), on trouve les expressions de $\gamma_4$, $\gamma_3$ et $\gamma_5$ :

$$\gamma_4 = \frac{1}{2}(C_{m4} + C_{m5} - C_{m0}), \quad \rightarrow \quad C^* = C_{m5} - \gamma_4 = \frac{1}{2}(C_{m0} + C_{m5} - C_{m4})$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\eta^2}\left(C_{m2} - C_{m6} + C^*\eta^2\right), \qquad \gamma_5 = C^* - \gamma_3 \tag{19}$$

Il ne reste plus qu'à exploiter les trois valeurs issues de la première identification pour terminer cette caractérisation :

$$\gamma_1 = C_1, \qquad \gamma_2 = C_3 - \gamma_3, \qquad \gamma_6 = C_2 - \gamma_5 \tag{20}$$

Ainsi déterminé, cet ensemble de six capacités donne nécessairement les mêmes fréquences de résonance basse fréquence que le modèle à trois capacités. Il faut cependant garder à l'esprit que, la précision expérimentale des dernières mesures étant moins bonne, les répartitions $\gamma_2$-$\gamma_3$ et $\gamma_5$-$\gamma_6$ ne sont pas très précises. Pour cette raison, il devient utile de vérifier que les $C_{ij}$ du circuit respectent les inégalités ( $C_{ii} > 0$ et $C_{ij}^{\ 2} < C_{ii}.C_{jj}$ ) qui assurent la positivité de l'énergie électrostatique. Si l'une d'elles ne l'était pas, la simulation électronique échouerait probablement ! Les expressions de ces coefficients se déduisent directement de l'écriture de l'énergie électrostatique stockée par le circuit de la figure 17.

$$C_{1,1} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.(\eta - 1)^2 + (\gamma_4 + \gamma_5).\eta^2 \qquad C_{2,2} = \gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6 \qquad C_{3,3} = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_6$$

$$C_{1,2} = -(\gamma_2 + \gamma_4.\eta) \qquad C_{1,3} = -(\gamma_2 + \gamma_3) + (\gamma_3 + \gamma_5).\eta \qquad C_{2,3} = (\gamma_2 + \gamma_6) \tag{21}$$

### 5.2.6. Transformateur à trois enroulements.

Le modèle complet d'un transformateur à trois enroulements comporte quinze capacités mais, en première approximation, six capacités suffisent (Figure 20). Le circuit équivalent est établi en utilisant les règles énoncées au paragraphe 5.2.4.

Comme l'inductance de fuite dans le cas d'un transformateur à deux enroulements, le transformateur de fuite est négligé durant la détermination des six capacités puis réintroduit à l'issue de cette détermination. Les capacités sont assez faciles à mesurer puisque soit on les observe directement, soit on les déduit de résonances situées en basse fréquence.

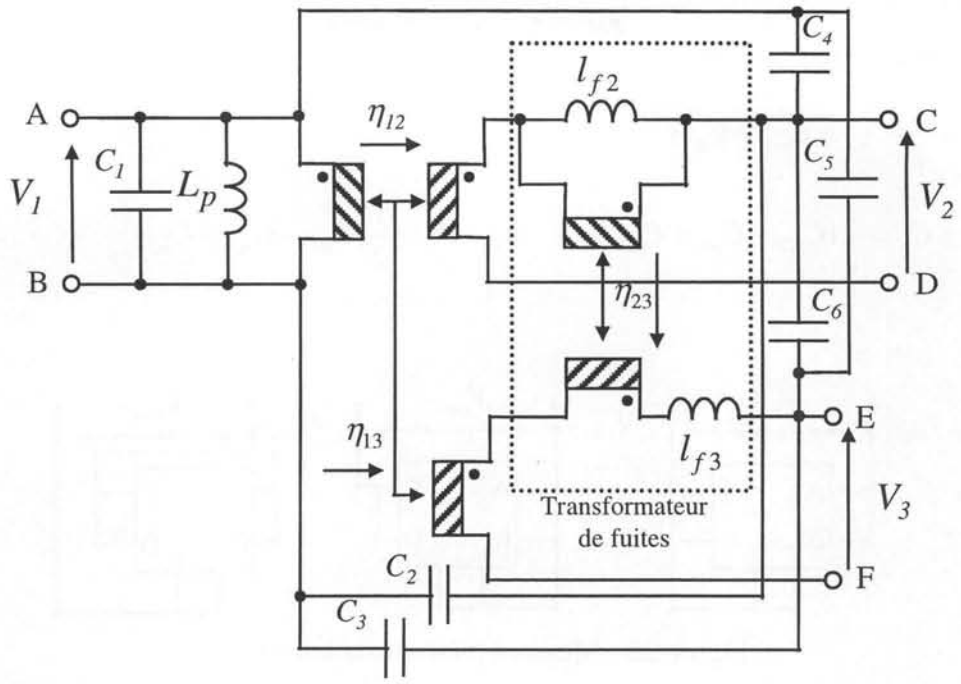



Figure 20 : Modèle simplifié (6 capacités) d'un transformateur à trois enroulements.

* Impédances inter-enroulements

La première étape consiste à identifier les capacités inter-enroulements. Dès que les trois enroulements sont court-circuités, le transformateur se présente comme un système électrostatique terminé par trois points. Le circuit de la Figure 20 se réduit alors à celui de la Figure 21 :

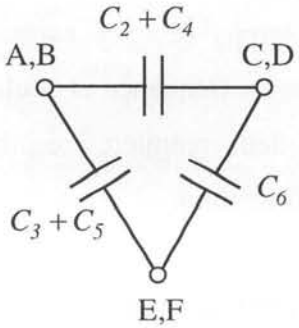



Figure 21 : Schéma équivalent du transformateur
lorsque tous les enroulements sont court-circuités.

Afin d'éviter les indéterminations de signe, nous avons retenu, comme conseillé par la figure 14, les trois mesures réalisées en reliant deux bornes (Figure 22). On obtient ainsi :

$$C_{m1} = C_2 + C_4 + C_3 + C_5 \qquad C_{m2} = C_2 + C_4 + C_6 \qquad C_{m3} = C_3 + C_5 + C_6 \qquad (22)$$

En inversant ce système, on obtient directement les valeurs des trois capacités du circuit (Figure 21) en fonction des grandeurs mesurées :

$$C_6 = \frac{1}{2}(C_{m2} + C_{m3} - C_{m1})$$

$$C_2 + C_4 = \frac{1}{2}(C_{m2} - C_{m3} + C_{m1}) \qquad C_3 + C_5 = \frac{1}{2}(C_{m3} - C_{m2} + C_{m1}) \tag{23}$$

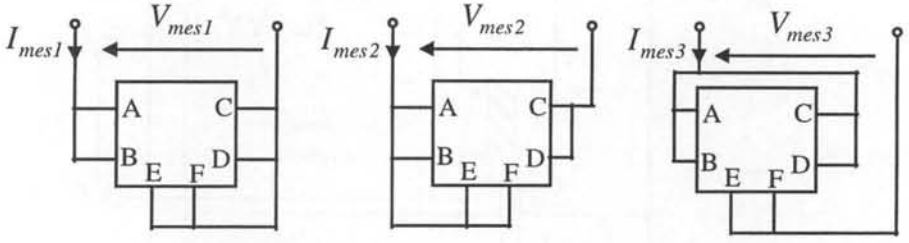



Figure 22 : Mesures inter-enroulements.

Bien que les trois mesures soient positives, une des trois capacités de la Figure 21 peut être négative. Attention, lorsque les capacités sont faibles (<50pF), les capacités parasites du câblage de mesure, qui varient suivant la connexion effectuée, peuvent perturber les résultats. C'est pourquoi il est prudent de vérifier que les trois capacités mesurables sans lien inter-enroulements sont positives.

* Mesure sans court-circuit d'enroulement.

Durant ces mesures, nous négligeons le transformateur de fuites : seule l'inductance magnétisante intervient en même temps que les capacités recherchées. Les résonances impliquées sont donc les plus basses en fréquence et seules la première résonance parallèle aux bornes d'un enroulement et les deux premières résonances inter-enroulements (série et parallèle) peuvent servir à cette détermination.

Les mesures sont faciles à interpréter si on laisse les bornes D et F en l'air car alors les coupleurs ne conduisent plus de courant et on peut les éliminer du schéma. Dans ce cas, le circuit de la figure 23 convient pour trouver les expressions des impédances mesurées.

Puisque $C_6$ est connue, on peut envisager court-circuiter les bornes C et E. Le circuit n'est plus constitué que de trois capacités : $C_1$, $(C_4 + C_5)$ et $(C_2 + C_3)$ qu'on peut évaluer. En joignant ces mesures à (22) il apparaît que $C_6$ et $C_1$ sont déterminées et qu'il reste quatre

équations pour trouver les quatre autres. Malheureusement, ces quatre équations ne sont pas indépendantes puisque $(C_4 + C_5) + (C_2 + C_3) = (C_3 + C_5) + (C_2 + C_4)$.

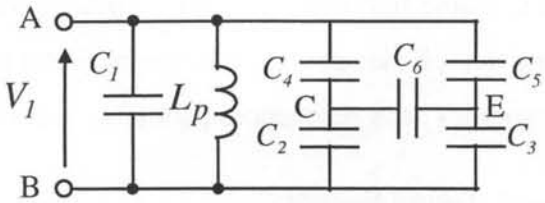



Figure 23 : Représentation électrostatique simplifiée
d'un transformateur à trois enroulements.

Les mesures simples à interpréter s'acquièrent en reliant indépendamment l'une de l'autre, les bornes C et E aux bornes A et B. Nous choisissons celles décrites par la figure 24 :

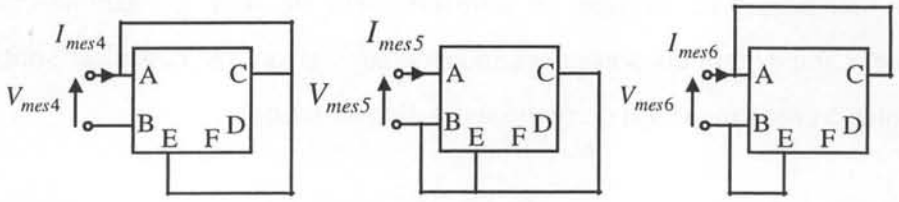



Figure 24 : Configurations de mesure sans enroulement en court circuit.

Les résonances associées à ces impédances donnent respectivement $C_{m4}$, $C_{m5}$, $C_{m6}$ et le système à inverser comprend (22) et les équations suivantes :

$$C_{m4} = C_1 + C_2 + C_3, \quad C_{m5} = C_1 + C_4 + C_5, \quad C_{m6} = C_1 + C_2 + C_5 + C_6 \qquad (24)$$

Il s'ensuit que :

$$C_1 = \frac{1}{2}(C_{m4} + C_{m5} - C_{m1}),$$

$$C_2 - C_4 = C_{m6} - C_{m5} - C_6, \qquad C_5 - C_3 = C_{m6} + C_{m4} - C_6 \qquad (25)$$

En définitive, $C_1$ est fixé par (25) et, en joignant les valeurs données par (22) aux expressions (26) obtenues pour $C_2$ et $C_5$, cette détermination est achevée et nous sommes certains que les capacités inter-enroulement n'ont pas été modifiées.

$$C_2 = \frac{1}{2}(C_{m1} - C_{m3}) + \frac{1}{4}(C_{m6} - C_{m5}), \qquad C_5 = \frac{1}{2}(C_{m1} - C_{m2}) + \frac{1}{4}(C_{m4} + C_{m6}) \qquad (26)$$

Remarque : Les impédances inter-enroulements peuvent également être utilisées durant cette phase de l'étude. Le circuit équivalent exploité pour établir les expressions des capacités (Figure 23) permet de montrer que la première résonance série observée entre deux enroulements se produit à la même fréquence que la résonance parallèle d'un enroulement si, durant cette seconde mesure, on relie les deux bornes qui ont servi à la mesure précédente. Si, on ne place pas ce lien, ce sont les deux résonances parallèles qui coïncident.

* Mesure avec court-circuit d'enroulement.

A l'issue de la caractérisation précédente, la réintroduction du transformateur de fuite engendre des résonances supplémentaires, non envisagées durant ce travail. Bien qu'à première vue elles apparaissent dans la bonne zone fréquentielle, la localisation précise de ces résonances et leur dépendance vis à vis du câblage ne résiste pas à un examen approfondi. Pour aller plus loin, c'est à dire pour rendre compte de ces résonances situées plus haut en fréquence, il faut cesser de négliger le transformateur de fuite pendant la caractérisation électrostatique. Cinq potentiels sont alors indépendants et quinze capacités sont nécessaires pour représenter correctement son comportement électrostatique.

Des travaux antérieurs [Labouré95] ont déjà proposé une méthode de caractérisation électrostatique complète pour un transformateur à trois enroulements. Cependant, cette méthode, basée sur des mesures de trans-impédances, est très sensible aux impédances parasites et notamment à celle du capteur de courant utilisé. C'est pourquoi, en accord avec l'argumentation du paragraphe 2, nous avons développé une méthode de caractérisation basée uniquement sur des mesures d'impédances.

En vue de faciliter la caractérisation progressive, nous disposons les capacités comme indiqué par la Figure 25. Le transformateur de fuite est ici un transformateur à deux enroulements. Il se caractérise par six capacités. Le rapprochement des circuits successifs (Figures 20 et 25) montre que quatre capacités de la figure 20 ont été partagées en deux ($C_2, C_3, C_4, C_6$). En outre, $C_5$ apparaît maintenant comme la capacité inter-enroulements du transformateur de fuites. Nous avons donc six capacités à l'intérieur du transformateur de fuites et neuf à l'extérieur.

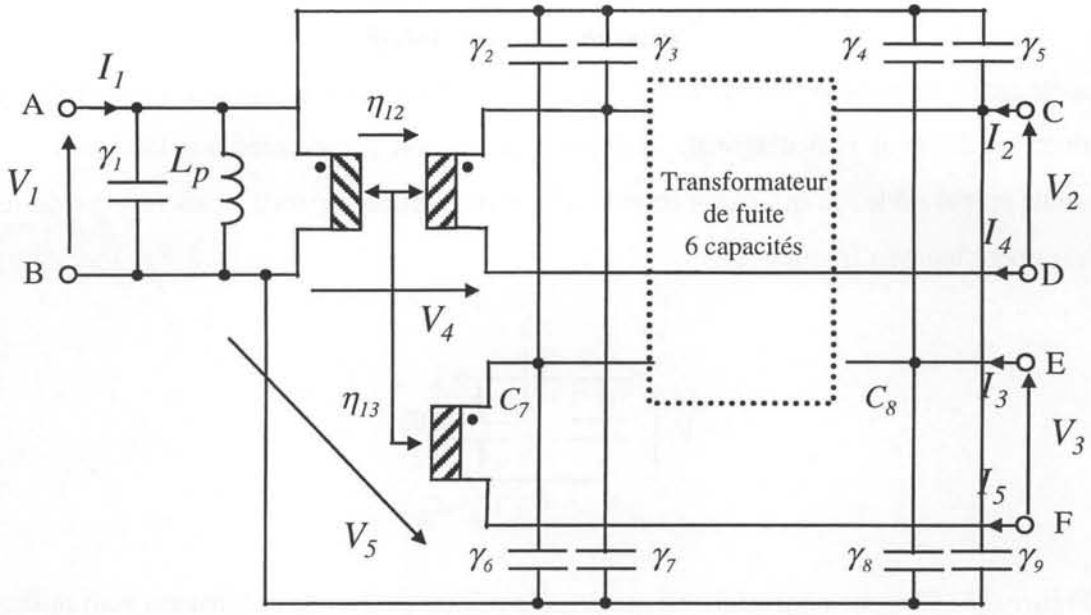



Figure 25 : Modèle complet d'un transformateur à trois enroulements.

La méthode de caractérisation présentée repose sur un raisonnement matriciel. Elle permet la mesure des quinze éléments $C_{ij}$ figurant dans la matrice admittance (Figure 26) d'un transformateur à trois enroulements.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} 1/\lambda_{11} + C_{11}\,p^2 & 1/\lambda_{12} + C_{12}\,p^2 & 1/\lambda_{13} + C_{13}\,p^2 & C_{14}\,p^2 & C_{15}\,p^2 \\ 1/\lambda_{12} + C_{12}\,p^2 & 1/\lambda_{22} + C_{22}\,p^2 & 1/\lambda_{23} + C_{23}\,p^2 & C_{24}\,p^2 & C_{25}\,p^2 \\ 1/\lambda_{13} + C_{13}\,p^2 & 1/\lambda_{23} + C_{23}\,p^2 & 1/\lambda_{33} + C_{33}\,p^2 & C_{34}\,p^2 & C_{35}\,p^2 \\ C_{14}\,p^2 & C_{24}\,p^2 & C_{34}\,p^2 & C_{44}\,p^2 & C_{45}\,p^2 \\ C_{15}\,p^2 & C_{25}\,p^2 & C_{35}\,p^2 & C_{45}\,p^2 & C_{55}\,p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

Figure 26 : Allure de la matrice admittance.

Les éléments de la diagonale principale se déduisent directement d'une mesure d'impédance réalisée avec une seule tension non nulle. En revanche, les éléments non-diagonaux ne peuvent être observés que si deux tensions au moins sont différentes de zéro. Comme le montre la Figure 27, la détermination de trois éléments $C_{ij}$ équivaut à celle de trois capacités disposées en triangle. Ce problème se résout (Figure 14) à partir des trois mesures d'impédances réalisées en maintenant successivement soit $V_i$, soit $V_j$ à 0, soit $V_i = V_j$. En pratique, l'égalité des deux tensions non nulles est assurée en reliant les points concernés. L'impédance observée dans ces conditions montre une capacité parallèle égale à :

$$C_{ii} + C_{jj} - 2C_{ij} .$$

Si les éléments diagonaux ont été déterminés au préalable, chaque mesure de ce type permet d'évaluer un élément non diagonal. Une inductance, non représentée sur la figure 27, peut intervenir en parallèle, ce qui n'empêche pas la mesure de la capacité, sous réserve de monter suffisamment haut en fréquence.

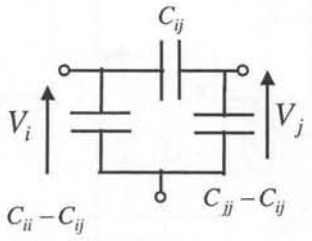



Figure 27 : Circuits équivalent au quadripôle *ij* lorsque les autres tensions sont nulles.

Puisque le système est testé alors qu'une seule tension est libre, les impédances observées ne peuvent comporter qu'un pôle. Cette affirmation est justifiée par le dénombrement effectué au paragraphe 4.2. Toute résonance supplémentaire observée en pratique marque la limite de validité de ce type de modèle. Pour expliquer un plus grand nombre de résonances, il faut admettre que le système magnétique possède plus de tensions indépendantes et "sortir" quelques points supplémentaires. L'énergie électrostatique dépend alors d'autant de tension supplémentaires.

Dans le cas d'une inductance constituée par deux bobinages placés sur les cotés opposés d'un même circuit magnétique et connectés en série, on gagne souvent à sortir le point de liaison interne. Le circuit équivalent est alors celui d'un transformateur dont les deux enroulements sont en série. Il comporte trois capacités puisque deux potentiels magnétiques sont indépendants.

La méthode générale exposée ci-dessus peut être utilisée seule : après 15 mesures bien choisies, les 15 coefficients $C_{ij}$ peuvent être identifiés. Il n'est cependant pas très judicieux de procéder ainsi car la précision atteinte est médiocre. Non seulement le système est mal conditionné mais certaines évaluations de $C_{ij}$ nécessitent de monter à des fréquences où les mesures deviennent incertaines. En pratique, on s'expose à ce que l'accord modèle-expérience pour les fréquences de résonance basse soit moins bon, à l'issue de cette caractérisation complète qu'après la caractérisation simplifiée (6 capacités).

Pour éviter cela, nous considérons comme certaines les valeurs issues de la première phase de caractérisation : elles nous fournissent les six premières équations menant aux $C_{ij}$. Ces six équations s'obtiennent en deux temps. On écrit d'abord l'énergie électrostatique en fonction des $C_{ij}$ en posant $V_2 = \eta_{12} V_1$ et $V_3 = \eta_{13} V_1$. On exprime ensuite, en fonction de $V_1$, $V_4$ et $V_5$, l'énergie électrostatique du circuit de la Figure 20 en oubliant le transformateur de fuite. L'identification de ces deux expressions donne les équations cherchées.

Pour compléter le système, nous mesurons 9 éléments $C_{ij}$ à l'aide de la méthode matricielle présentée ci-dessus. Ces mesures, toutes réalisées alors qu'un ou deux enroulements sont court-circuités, complètent efficacement les précédentes relevées avec le transformateur à vide. En procédant ainsi, les incertitudes attachées aux 9 mesures complémentaires n'ont aucune incidence les fréquences des résonances déjà prises en compte par le modèle à six capacités. Pour finir, il ne reste plus qu'à vérifier que les 15 inégalités fondamentales liant les $C_{ij}$ sont satisfaites.

## 6. Validation expérimentale.

Avant de présenter les résultats expérimentaux, il faut préciser que ceux-ci (et bien d'autres !) ont été acquis pendant toute la durée de la thèse. Certaines réflexions les avaient précédées, d'autres en ont découlé. Les méthodes exposées jusqu'ici reflètent notre savoir-faire à la fin de cette thèse. Parfois elles ne sont pas intégralement appliquées aux exemples qui suivent et qui ont été étudiés antérieurement.

### *6.1. Transformateur à deux enroulements.*

Afin d'illustrer les méthodes précédentes, nous les appliquons d'abord à un transformateur à deux enroulements. Ce composant a été réalisé au laboratoire de la manière suivante :

- Noyau ETD49 ferrite de type 3C85
- Primaire et secondaire réalisés en fil de cuivre cylindrique émaillé de diamètre 1.2mm
- Primaire : 3 couches de 25 spires jointives, idem pour le secondaire.

Les dénominations des impédances mesurées (config. n) sont définies par la Figure 2.

### 6.1.1. Aspect magnétique.

Le modèle à identifier est présenté sur la Figure 28. Excepté la valeur de $\eta$, c'est le circuit standard avec l'inductance de fuite ramenée au secondaire.

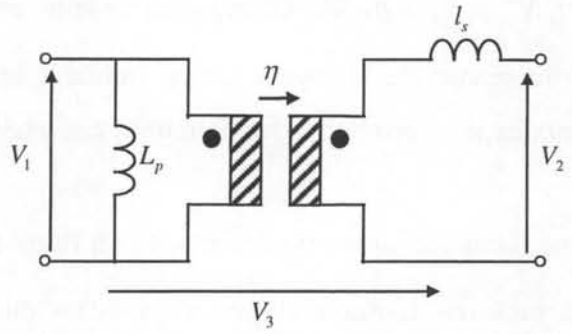



Figure 28 : Modèle magnétique du transformateur à deux enroulements.

* Mesure à vide vue du primaire.

La représentation module-phase permet de situer précisément la résonance mais, pour identifier l'inductance magnétisante, la représentation en $L_p - R_p$ est plus commode (Figure 29). Les courbes présentées ont été relevées alors que le secondaire était flottant. On prend ici $L_p = 20.7\,mH$. Les pertes sont prises en compte par une résistance $R_p$, connectée en parallèle sur l'inductance $L_p$ et dont la valeur est identifiée à celle du module à la résonance parallèle. Ici, $R_p = 550k\Omega$.

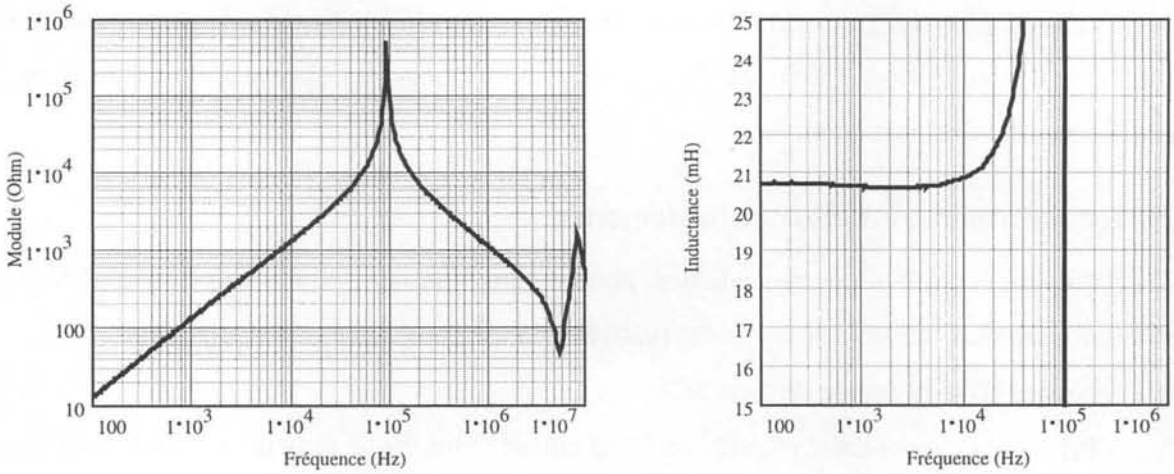



Figure 29 : Module et inductance série de l'impédance primaire à vide.

Mesure vue du secondaire avec le primaire en court-circuit.

La mesure de l'inductance d'un enroulement lorsque l'autre est court-circuité est plus délicate que la précédente. En effet, en basse fréquence, l'inductance magnétisante n'est pas complètement shuntée par $r_1$ (Figure 30) si bien qu'elle peut ajouter une contribution à la mesure. Il est important de retenir qu'en raison de ce phénomène, l'inductance de fuite ne peut pas être mesurée en très basse fréquence.

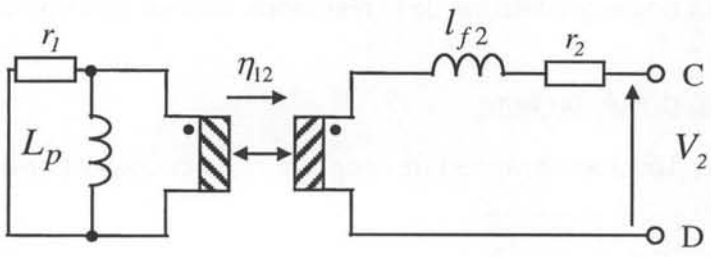



Figure 30 : Identification de l'inductance $l_s$. Influence de $L_p$

En dépit de cette gêne, on constate (Figure 31) une grande variation de l'inductance de fuite en fonction de la fréquence : sa valeur passe de $l_{sbf} = 40\,\mu H$ en basse fréquence à $l_{shf} = 11.5\,\mu H$ en haute fréquence. Provisoirement sans justification, nous représentons $l_s$ par l'ensemble de trois cellules Lp-Rp décrit ci-dessous. Il mène à la courbe pointillée visible sur la Figure 31.

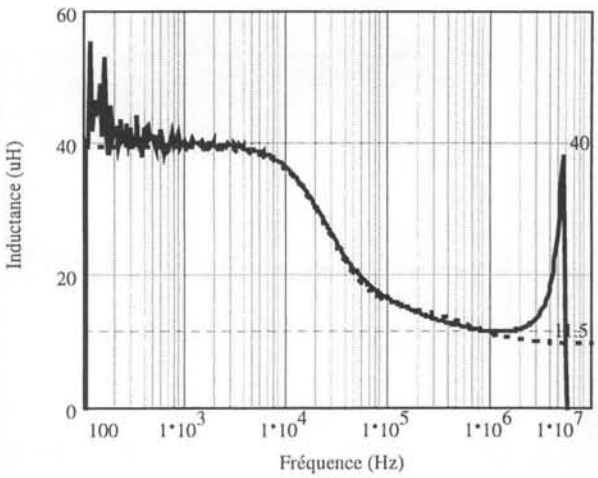
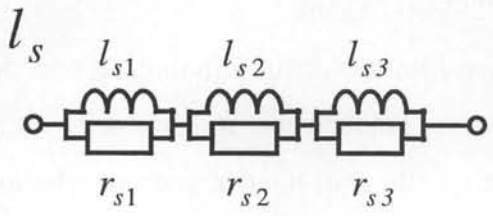



Figure 31 : Inductance de fuite en fonction de la fréquence (Représentation $Ls - Rs$).
Mesure (gras) – Modèle (pointillés).




$$r_{s1} = 3.86\Omega \qquad l_{s1} = 24.78\mu H$$
$$r_{s2} = 5.6k\Omega \qquad l_{s2} = 9.64\mu H$$
$$r_{s3} = 19.28\Omega \qquad l_{s3} = 4.82\mu H$$

Nous verrons, dans le chapitre 3, comment expliquer et comment prendre en compte précisément cette variation fréquentielle. Nous montrerons en particulier que ce phénomène est toujours associé à une augmentation de la résistance série en fonction de la fréquence.

Mesure à vide vue du secondaire.

Cette mesure permet d'évaluer le rapport de couplage $\eta$ du coupleur puisque, selon (7):

$$\eta = \sqrt{\frac{L_{02} - l_s}{L_{01}}}$$

Il faut noter que les inductances à vide ( $L_{01}$ et $L_{02}$ ) sont identifiées par une représentation $Lp - Rp$ tandis que l'inductance $l_s$ est identifiée grâce à une représentation $Ls - Rs$. La valeur découlant de (7) a été tracée en fonction de la fréquence (Figure 32). On remarque très nettement la résonance aux environs de 100kHz. La grande constance de $\eta$ en dessous de cette fréquence nous suggère de le supposer constant dans tout le domaine spectral. Au delà de 100 kHz, le rapport de tension qu'il représente n'est plus accessible à la mesure car le système magnétique est shunté par le système électrostatique. C'est ce dernier qui fixe le rapport de tension en haute fréquence.

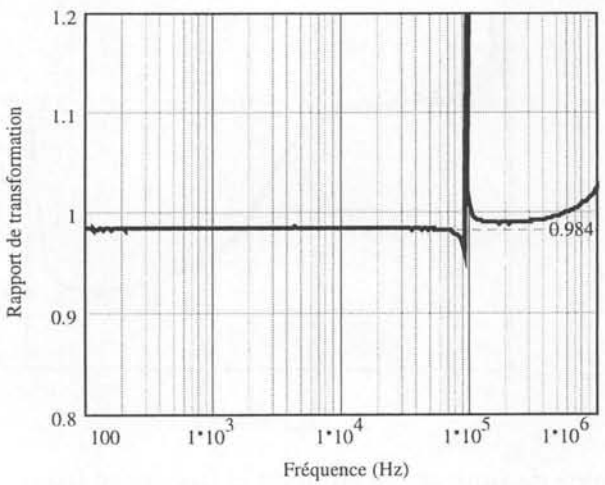



Figure 32 : Variation du rapport de couplage en fonction de la fréquence.

En dessous de la résonance qui intervient à 100kHz, on relève la valeur $\eta = 0.984$. Ce transformateur présente le même nombre de spires au primaire et au secondaire, donc $N_2/N_1 = 1$. Le rapport de couplage choisi est délibérément différent.

### *6.1.2. Aspect électrostatique.*

Soulignons qu'en vue de l'identification des paramètres électrostatiques, les bornes externes du composant doivent être repérées soigneusement.

* Impédance inter-enroulement.

La première étape de la méthode progressive consiste à identifier les capacités inter-enroulements. Dans le cas d'un transformateur à deux enroulements, il n'y en a qu'une. Pour ces mesures, il est commode d'utiliser la représentation parallèle $C_p - R_p$, qui conduit à une estimation directe de la capacité.

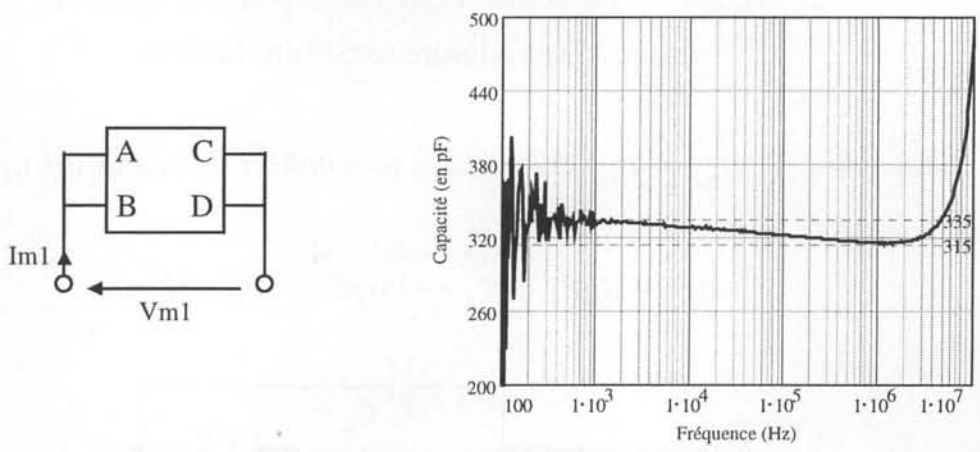



Figure 33 : Mesure inter-enroulement (config 1)

On peut noter (Figure 33) une légère diminution de la capacité lorsque la fréquence augmente. Nous prendrons la valeur relevée à 100kHz : $C_{m0} = 322\,pF$. Cette variation de la capacité est systématique. Nous n'avons pas encore pris le temps d'en chercher l'explication. Par ailleurs, la nette remontée de sa valeur en haute fréquence ne pourra pas être expliquée par nos modèles, mêmes les plus complets, puisqu'un système dont aucun potentiel d'enroulement n'est libre ne présente pas de résonance. Cela situe la limite fréquentielle de nos espérances !

* Mesure sans court-circuit d'enroulement.

Les mesures effectuées (Figure 34) montrent que la première fréquence de résonance est située bien plus bas en fréquence que la résonance série, ce qui indique que les enroulements sont très bien couplés. Connaissant la valeur de $L_p$, on déduit les valeurs suivantes :

$C_{m1} = 126\,pF$ (config 18) $C_{m2} = 976\,pF$ (config 16) $C_{m3} = 252\,pF$ (config 15)

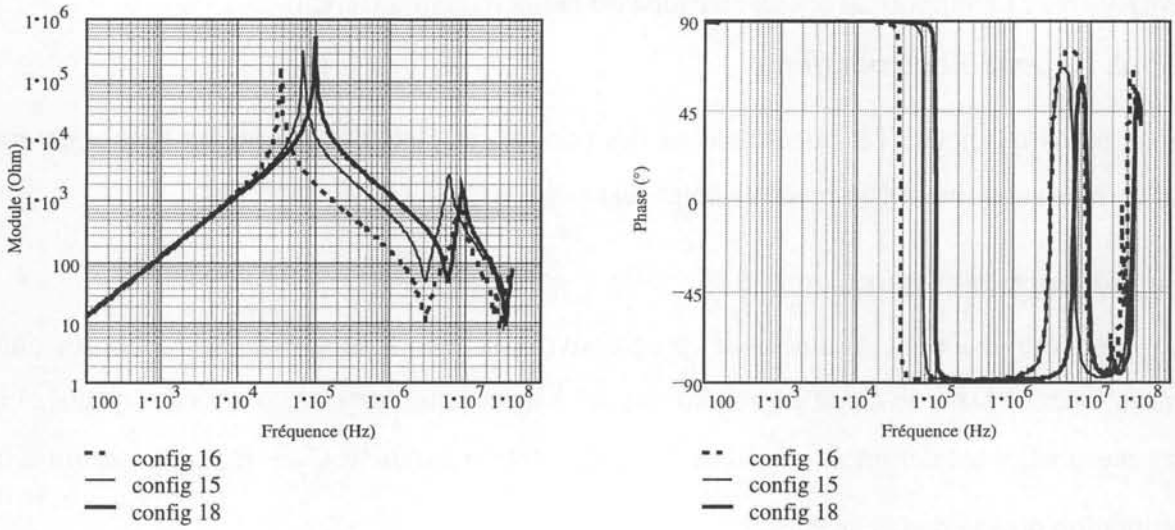
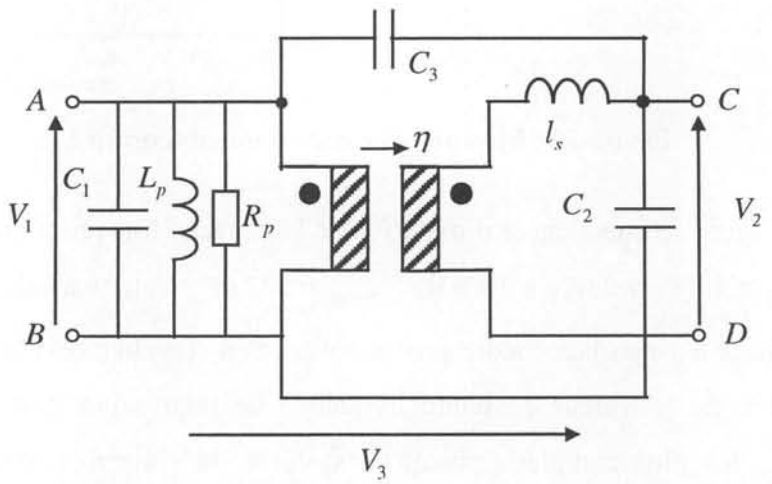



Figure 34 : Impédance à vide vue du primaire, sans lien
et avec 2 liens primaire-secondaire différents.

Les valeurs de $C_{m0}$, $C_{m2}$ et $C_{m3}$ sont utilisées pour déduire les valeurs des trois capacités du premier modèle :

$$C_1 = 453\,pF \qquad C_2 = -201\,pF \qquad C_3 = 523\,pF$$




$L_p = 20.7\,mH$ $\eta = 0.984$ $C_1 = 453\,pF$

$R_p = 550k\Omega$ $l_{sbf} \approx 40\,\mu H$ $C_2 = -201\,pF$

$l_{shf} \approx 11.5\,\mu H$ $C_3 = 523\,pF$

Figure 35 : Schéma utilisable en simulation. Représentation électrostatique partielle.

La représentation complète de $l_s$ est explicité au paragraphe 6.1.1.

On peut maintenant vérifier que la valeur calculée pour $C_{m1}$ est proche de celle mesurée : $126.5\,pF \approx 126\,pF$. Puisqu'un seul potentiel d'enroulement a été supposé libre, à ce niveau d'approximation on ne peut expliquer que le premier pôle de la Figure 34. Ce modèle est donc convenable jusqu'à environ 2 MHz.

* Mesure avec court-circuit d'enroulement.

Pour obtenir un modèle plus précis, il est nécessaire d'effectuer la caractérisation complète qui nécessite trois mesures supplémentaires. Ces trois mesures (Figure 36) sont relevées alors qu'un enroulement est court-circuité. Dans ces conditions, notre modèle ne pourra expliquer que la première résonance parallèle. Ceci nous amène à situer sa limite de validité aux alentours de 10 MHz.

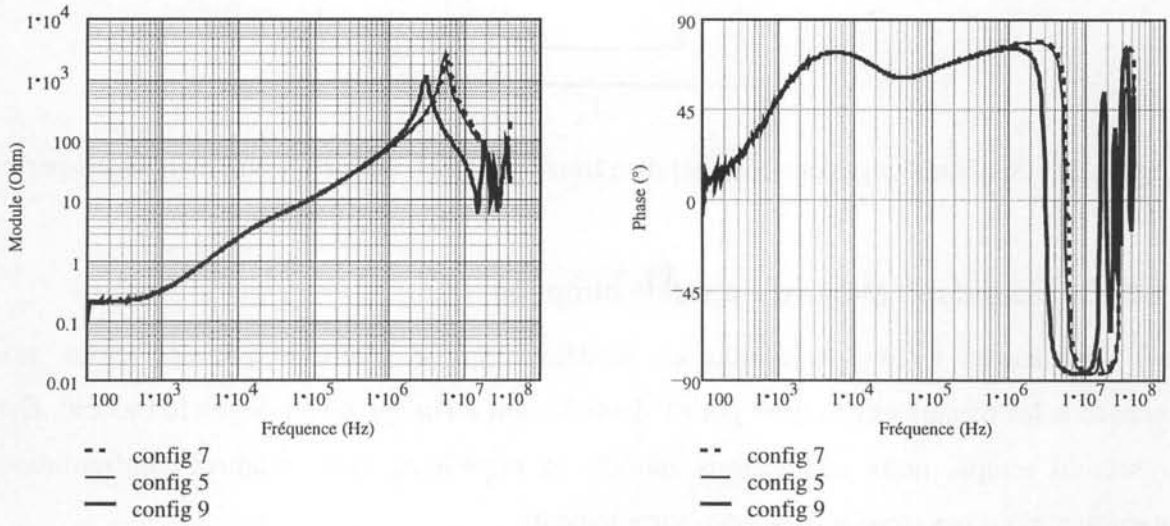



Figure 36 : Impédances relevées avec un enroulement en court-circuit.

On obtient les valeurs suivantes :

$$C_{m4} = 63\,pF \text{ (config 7) } C_{m5} = 79\,pF \text{ (config 5) } C_{m6} = 254\,pF \text{ (config 9)}$$

De $C_{m0}, C_{m5}$ et $C_{m6}$, on déduit les valeurs de $\gamma_4$, $\gamma_3 + \gamma_5$ et $\gamma_2 + \gamma_6$. On vérifie au passage que $\gamma_4 + (\gamma_2 + \gamma_6)/(\gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_2 + \gamma_6)$ est proche de la valeur mesurée $C_{m0}$ ($56.5\,pF$ calculés et $63\,pF$ mesurés). Enfin, en combinant ces équations avec celles issues de la première caractérisation, on trouve les valeurs des six capacités :

$$\gamma_1 = 466\,pF \qquad \gamma_4 = 5\,pF$$

$$\gamma_2 = -217\,pF \qquad \gamma_5 = -670\,pF$$

$$\gamma_3 = 743\,pF \qquad \gamma_6 = 466\,pF$$

A ce moment, il est recommandé de s'assurer qu'aucune capacité mesurable n'est négative. Le plus simple pour le faire est d'écrire l'énergie stockée par les capacités en fonction des trois potentiels externes et de vérifier que les inégalités $C_{ii} > 0$ et $C_{ij}^{\ 2} < C_{ii} C_{jj}$ sont toutes respectées.

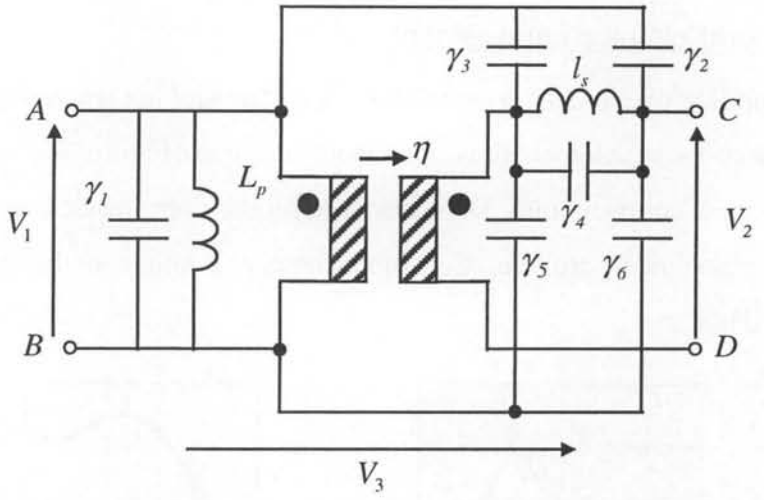



Figure 37 : Schéma équivalent complet d'un transformateur à deux enroulements sans perte.

### 6.1.3. Comparaison Mesure – Modèle simplifié.

Pour commencer, testons la validité du modèle simplifié. Dans un premier temps, nous comparons les mesures exploitées pour l'identification à l'image qu'en donne le modèle. Dans un second temps, nous confrontons modèle et expérience dans d'autres configurations, notamment pour des impédances inter-enroulements.

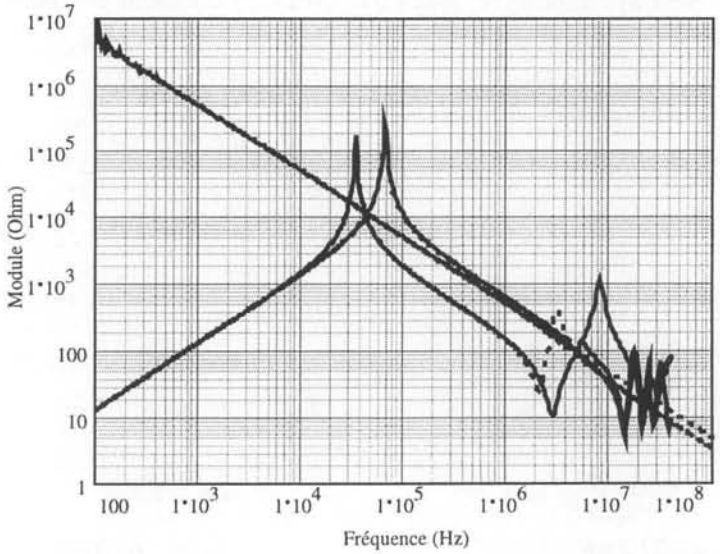



Figure 38 : Comparaison mesure (gras) – modèle (pointillé). Configuration 1, 15 et 16.

Les résultats présentés à la Figure 38 montrent, pour les trois impédances étudiées, une concordance correcte du continu jusqu'à environ 1,6 MHz, c'est-à-dire plus d'une décade au-delà de la fréquence maximum de travail du transformateur (supposée être la première fréquence de résonance à vide). Ce modèle est également correct pour d'autres impédances que celles utilisées pour l'identifier. A titre d'exemple, nous nous sommes intéressés à l'impédance vue du primaire lorsque le secondaire est flottant ainsi qu'à une impédance inter-enroulements (Figure 39).

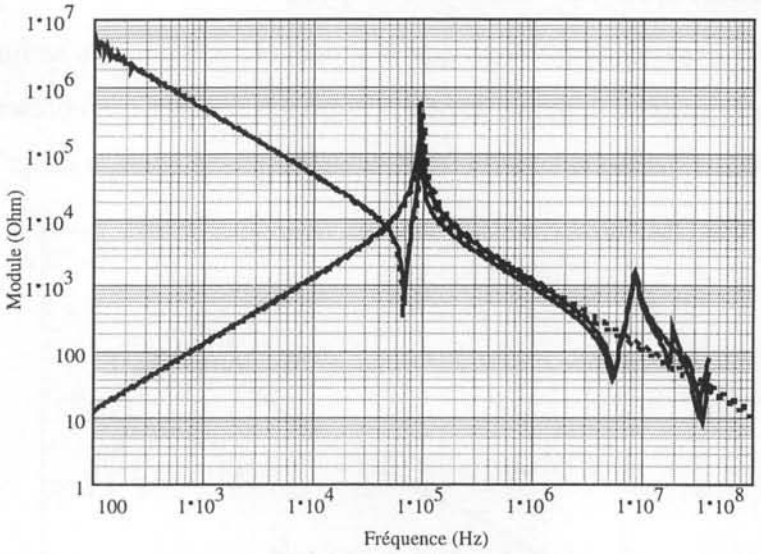



Figure 39 : Comparaison mesure (gras) –modèle (pointillé). Impédance vue du primaire, secondaire flottant (config 18) et impédance inter-enroulements (config 28).

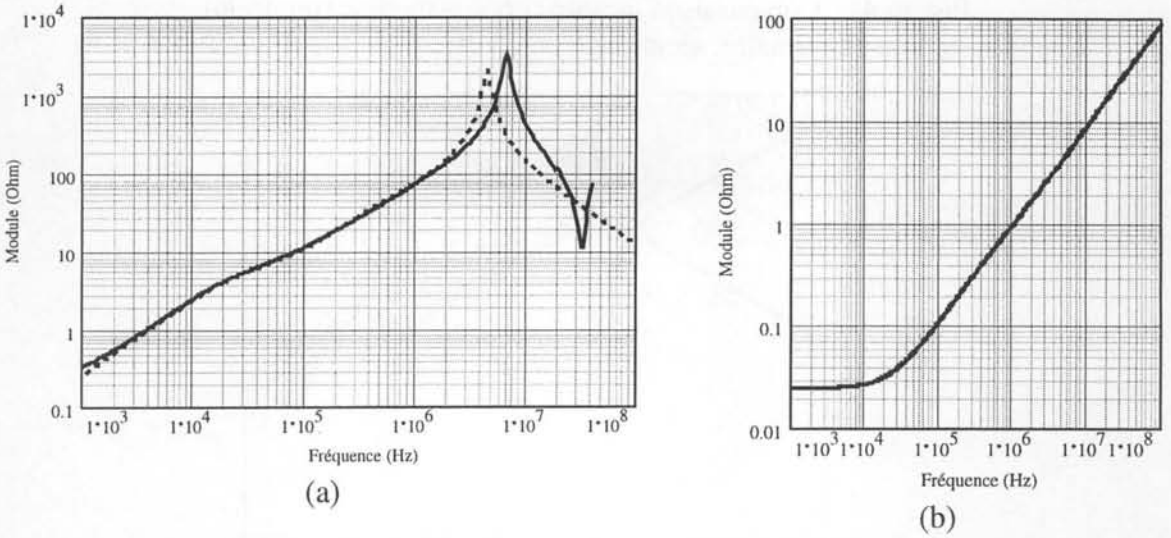



Figure 40 : (a) Comparaison mesure (gras) – modèle (pointillé) :
Impédance en court circuit vue du primaire (config 4).
(b) Impédance du modèle vue du secondaire, primaire en court-circuit

Finalement, le modèle s'avère correct, pour toutes les impédances mesurables, jusqu'à environ 1,6 MHz. Au-delà de cette fréquence, des écarts apparaissent sur toutes les courbes. On remarque en particulier que, si la réintroduction de l'inductance de fuite fait apparaître la résonance de l'impédance en court-circuit, celle-ci est mal localisée. Certains écarts sont bien plus francs. En particulier, lorsque le primaire est en court-circuit, l'impédance vue du secondaire (Figure 40) reste, selon ce modèle, inductive en haute fréquence.

### 6.1.4. Comparaison Mesure – Modèle complet.

Le modèle complet n'est pas plus précis que le modèle simplifié mais sa limite de validité se situe plus haut en fréquence. Comme espéré, ce modèle permet de représenter fidèlement le comportement des 31 impédances du transformateur depuis le continu jusqu'à 10 MHz.

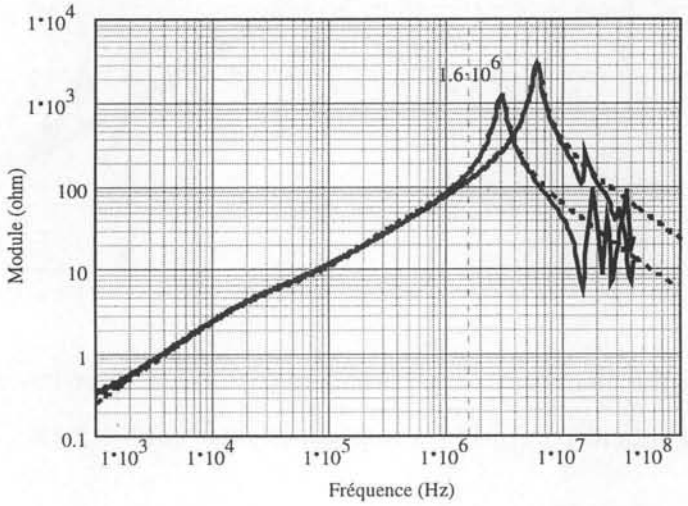



Figure 41 : Comparaison mesure (gras) – modèle (pointillé).
Impédances vue du primaire, secondaire en court-circuit : configuration 6 et 9.

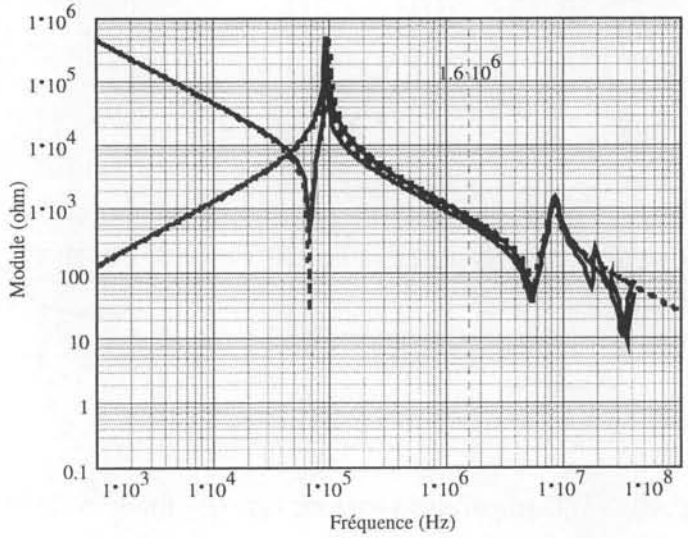



Figure 42 : Comparaison mesure (gras) – modèle (pointillé). Impédance du primaire, secondaire à vide et flottant (config 18) et impédance inter-enroulements (config 28).

Pour faciliter la comparaison entre les deux modèles, nous rapprochons maintenant, pour deux impédances, les courbes expérimentales et les courbes issues des deux modèles. Les différences sont visibles essentiellement sur les résonances intervenant en haute fréquence et notamment, sur celles observées lorsqu'un enroulement est court-circuité (Figure 43).

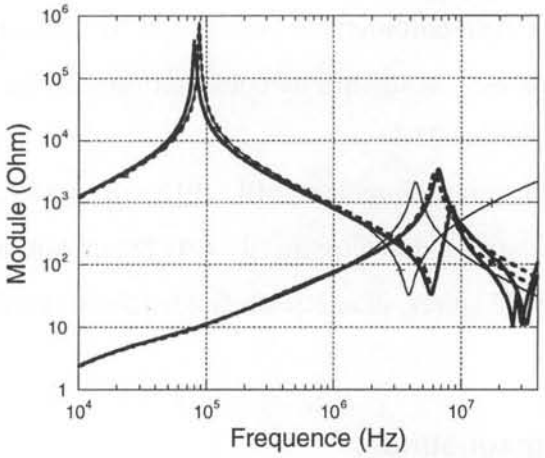



Figure 43 : Comparaison mesures-modèles : mesure (gras),
modèle simplifié (fin) et modèle complet (pointillé).

Il est important de noter que la plupart des résonances haute fréquence sont prévues par les deux modèles. Cependant, le modèle simplifié ne dispose pas de paramètres en nombre suffisant pour ajuster les fréquences des résonance haute fréquence indépendamment de celles observées en basse fréquence.

### 6.1.5. Bilan de la méthode.

Ces résultats très encourageants confortent notre approche. Grâce à cette élaboration progressive, il est possible d'adapter la précision du modèle aux besoins. S'il est clair que dans des applications très haute fréquence la caractérisation doit être menée jusqu'au bout, pour de nombreuses applications la prise en compte approximative des effets électrostatiques suffit. Dans ces conditions, la caractérisation est moins longue et, surtout, elle ne requiert pas une gamme de fréquence aussi étendue pour les appareils de mesure. Indépendamment, le dénombrement des résonances nous permet de savoir, au regard d'une courbe expérimentale, où se situe la limite de validité fréquentielle de tel ou tel modèle.

Ce principe de caractérisation est applicable à un nombre quelconque d'enroulements. Nous allons nous en assurer en présentant maintenant son application à un transformateur à trois enroulements.

### *6.2. Transformateur à trois enroulements*

Le composant que nous allons caractériser maintenant, est le transformateur à trois enroulements utilisé dans le convertisseur industriel flyback étudié au chapitre 4. Ce transformateur est composé d'un enroulement primaire, d'un enroulement secondaire ainsi que d'un enroulement auxiliaire. Ses paramètres de construction sont les suivants :

Noyau : EFD20, matériau 3F3

Primaire : Np = 135 spires, diamètre du fil : 0.15mm (grade 2)

Secondaire : Ns = 7 spires, diamètre du fil : 4*0.28mm bobiné "4 fils en main"

Auxiliaire : Naux = 27 spires, diamètre du fil : 0.15mm (grade 2)

#### 6.2.1. Caractérisation magnétique.

L'inductance magnétisant $L_p$ se déduit directement de la représentation $L_s - R_s$ de l'impédance à vide vue du primaire. La variation de l'inductance $L_p$, bien visible sur la Figure 44, est prise en compte par une seule cellule Lp-Rp.

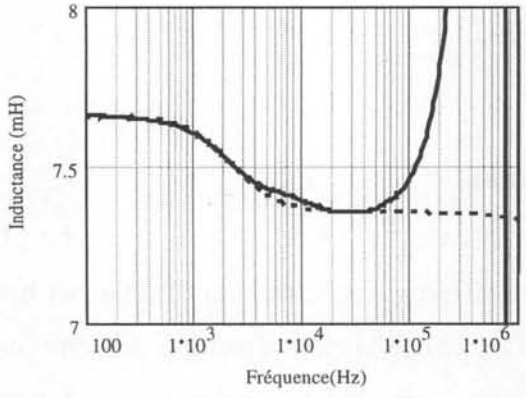
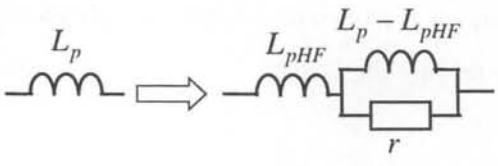



Figure 44 : Inductance $L_p$. Comparaison Mesure (gras) – Modèle (pointillé)




$$L_{pHF} = 7.36mH$$

$$L_p - L_{pHF} = 0.3mH$$

$$r = 4.3\Omega$$

Figure 6 : Représentation de l'inductance magnétisante.

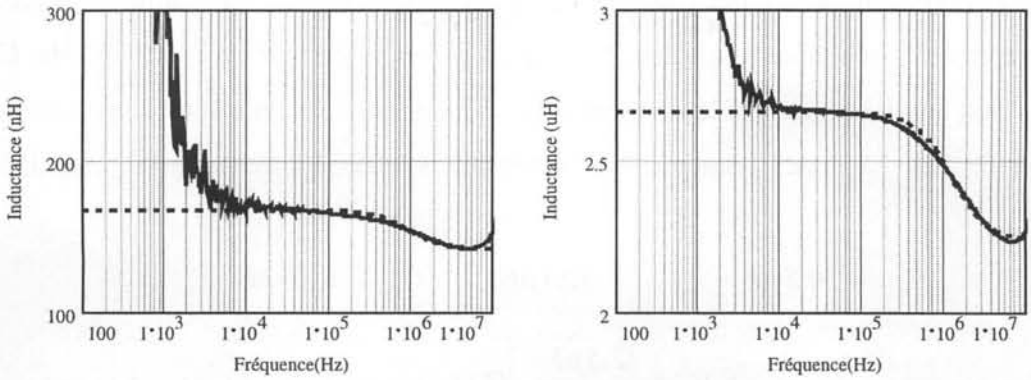



Figure 45 : Comparaison mesure - modèle pour les inductances $l_{f2}$ et $l_{f3}$ du transformateur de fuites.

Les grandeurs des deux inductances que nous retiendrons sont les suivantes :

$$lf_{2HF} = 142nH \qquad l_{f2} - lf_{2HF} = 26nH \qquad rf_2 = 0.15\Omega$$
$$lf_{3HF} = 2.24\mu H \qquad l_{f3} - lf_{3HF} = 0.42\mu H \qquad rf_3 = 3.3\Omega$$

En pratique,. En raison de phénomènes magnétodynamiques que nous étudierons dans le chapitre III et qui interviennent ici vers $400kHz$, les rapports de couplage varient en fonction de la fréquence. Les valeurs que nous retenons sont relevées pour $f = 100kHz$ :

$$\eta_{12} = 0.044 \qquad \eta_{13} = 0.2 \qquad \eta_{23} = 1.3$$

### 6.2.2. Couplage électrostatique.

* Impédances inter-enroulements.

Dans le cas d'un transformateur à trois enroulements, cette première étape nécessite la détermination de trois capacités. Les configurations définies par la Figure  donnent les résultats présentés sur la Figure 46.

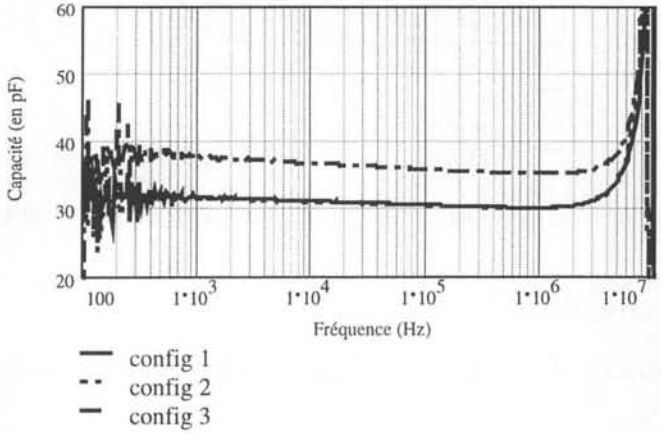
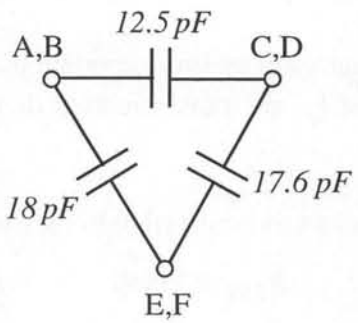



Figure 467 : Mesures inter-enroulements. Représentation $C_p - R_p$.

Comme pour le transformateur à deux enroulements, nous remarquons une faible diminution des capacités quand la fréquence augmente. Nous gardons les valeurs relevées à 100 kHz. Ces mesures montrent aussi que le modèle complet aura du bien du mal à représenter la réalité au-delà de 8 MHz. Les capacités mesurées se présentent synthétiquement par le circuit ci-dessous.

$$C_{m1} = 30.5\,pF \qquad C_{m2} = 30.1\,pF \qquad C_{m3} = 35.6\,pF$$




* Mesure sans court-circuit d'enroulement.

Les configurations de mesure sont présentées par la Figure 24. La première fréquence de résonance est beaucoup plus basse en fréquence que les suivantes si bien que l'hypothèse de fort couplage devrait mener à une approximation assez précise.

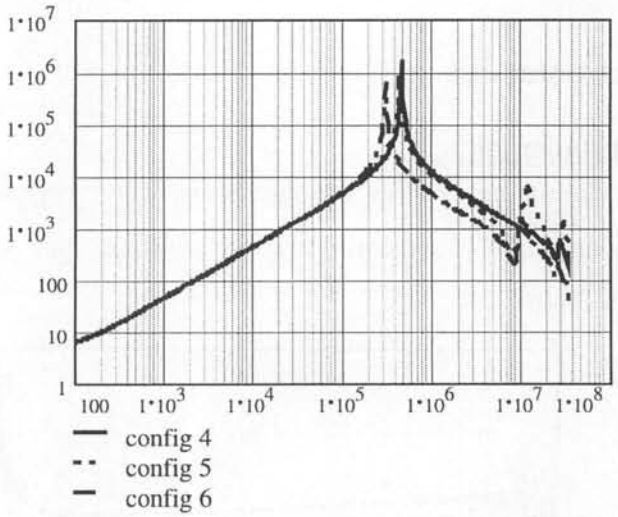



Figure 47 : Impédance du primaire relevée sans court-circuit des autres enroulements.

On relève les valeurs suivantes :

$Fr_4 = 500kHz$ (config 4) $\qquad Fr_5 = 440kHz$ (config 5) $\qquad Fr_6 = 310kHz$ (config 6)

qui mènent à :

$$C_{m4} = 13.7\,pF\,,\ C_{m5} = 17.8\,pF \text{ et } C_{m6} = 35.8\,pF$$

De $C_{m1}$, $C_{m5}$ et $C_{m6}$, on déduit les valeurs de $C_1$, $C_2+C_3$ et $C_4+C_5$. Enfin, en combinant ces équations avec celles issues de la première caractérisation, on trouve les valeurs des six capacités :

$$C_1 = 11.5\,pF \qquad C_2 = -2.4\,pF \qquad C_3 = 26.6\,pF$$

$$C_4 = 14.9\,pF \qquad C_5 = -8.6\,pF \qquad C_6 = 17.8\,pF$$

On vérifie au passage que $C_1+(C_4+C_5)(C_2+C_3)/(C_4+C_5+C_2+C_3)$ est proche de la valeur mesurée $C_{m4}$ ($16.5\,pF$ calculés et $13.7\,pF$ mesurés). On peut noter la présence de deux capacités négatives et la faiblesse des capacités.

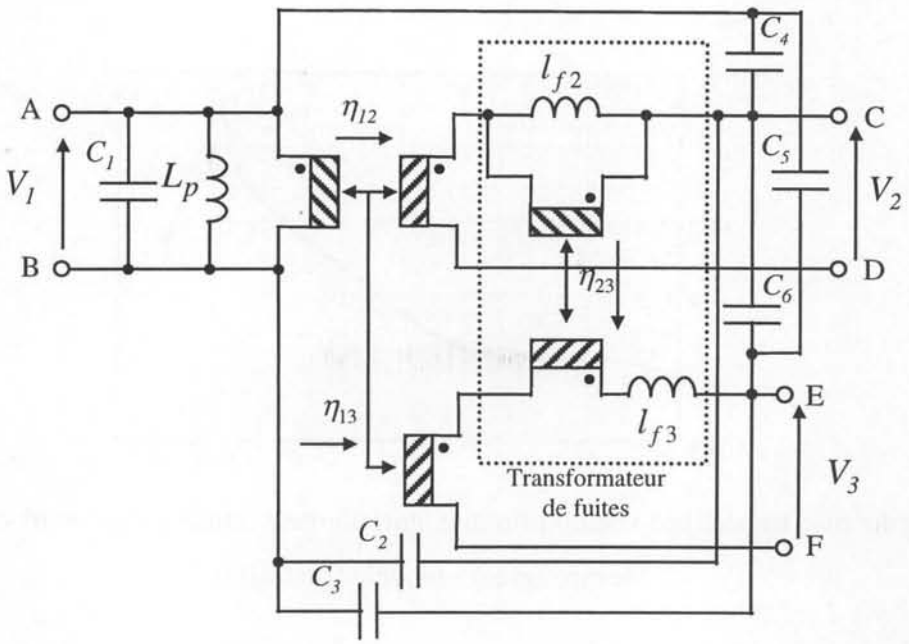



Figure 48 : Modèle simplifié d'un transformateur à trois enroulements.

Le transformateur de fuites remis en place, nous disposons d'un modèle exploitable par un logiciel de simulation. Dans un premier temps, nous comparons (Figure 49) ses prévisions aux mesures dans les configurations de caractérisation.

Observons maintenant le comportement du modèle pour l'impédance du primaire, lorsque l'enroulement numéro 2 est en court-circuit (Figure 50). Cette courbe n'a pas été exploitée pour la caractérisation. L'accord s'avère satisfaisant jusqu'à environ 4 MHz, soit un facteur 15 au-dessus de la fréquence de résonance la plus basse.

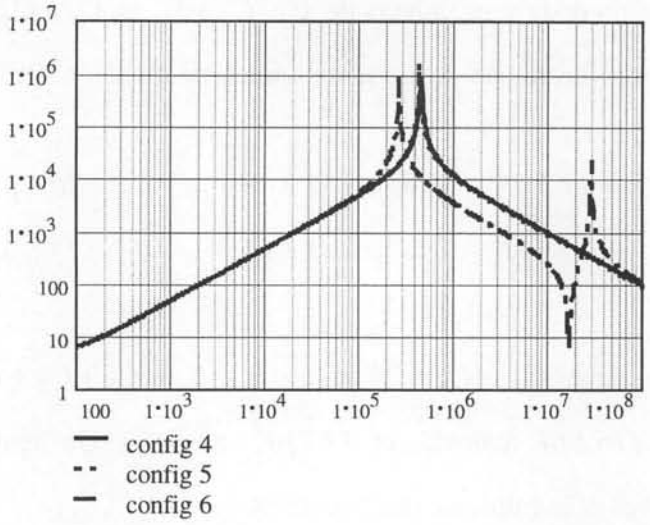



Figure 49 : Impédances du modèle dans les trois configurations de mesure.

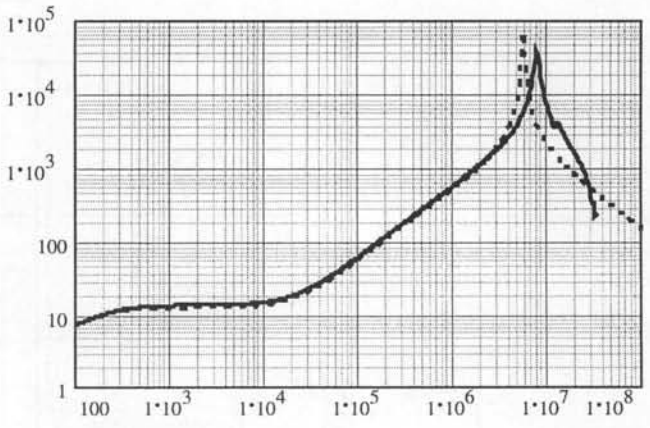



Figure 50 : Impédance vue du primaire, enroulement numéro 2 en court-circuit.
Mesure (gras) - modèle (pointillé).

Il apparaît sur la mesure, une résonance très amortie vers 12 MHz. Certes, cela nécessite une vérification expérimentale mais cette résonance est cohérente avec nos représentations : puisque deux enroulements sont encore indépendants, cette impédance peut présenter deux maximums. Ce modèle simplifié, qui ne peut rendre compte précisément de la fréquence de résonance, est satisfaisant jusqu'à 4 MHz, Cette appréciation sera confirmé au chapitre 4.

Pour étudier les phénomènes qui se déroulent plus haut en fréquence, il est nécessaire de compléter la caractérisation en effectuant des mesures complémentaires avec au moins un des enroulements en court-circuit.

* Mesure avec court-circuit d'enroulement.

Avant de poursuivre la caractérisation, observons l'impédance vue du primaire lorsque les deux autres enroulements sont court-circuités (Figure 51). Si on se réfère aux études du paragraphe 4.3, il est surprenant d'observer, sur cette mesure, plusieurs résonances. En effet, le transformateur ne présente plus qu'un seul enroulement non court-circuité et, en théorie, son impédance ne devrait présenter qu'une seule résonance parallèle. Ceci confirme ce que nous pressentions depuis l'observation des impédances inter-enroulements : nos modèles auront du mal à représenter le comportement de ce composant au delà de 9 ou 10 MHz.

Les modèles proposés, à constantes localisées, sont fondamentalement incapables de représenter des phénomènes de résonances propres probablement impliqués ici. Toutefois le dénombrement des fréquences de résonance nous permet de savoir qu'il faudrait au moins scinder un des enroulements en deux pour rendre compte des observations. On ajouterait ainsi une résonance parallèle et on repousserait la limite de validité aux alentours de 20 MHz.

Finalement, puisque des phénomènes incompatibles avec nos modèles les plus précis prennent place vers 10 MHz alors que le modèle déjà caractérisé est correct jusqu'à 4 MHz, il n'est pas certain que le passage à 15 capacités sera vraiment bénéfique....

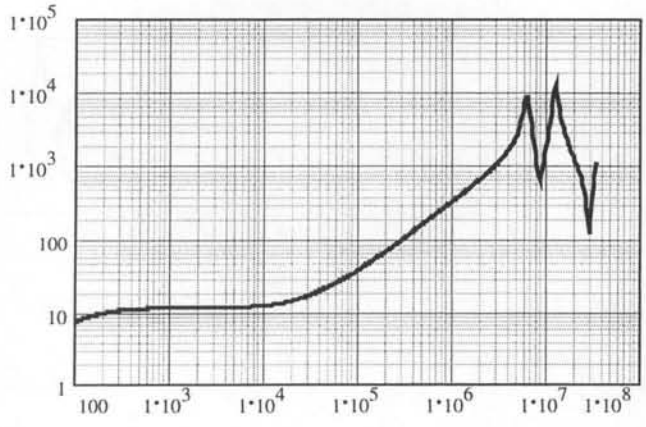



Figure 51 : Impédances d'un enroulement lorsque les deux autres sont en court-circuit.

Nous avons complété la caractérisation en exploitant la méthode matricielle mais les résultats du modèle complet sont décevants (Figure 52). Les fréquences de résonance des impédances non exploitées durant la caractérisation sont assez éloignées de celles mesurées.

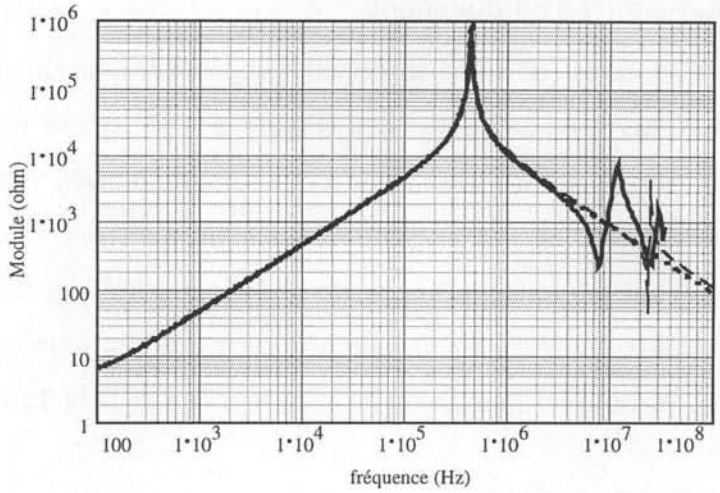



Figure 52 : Comparaison mesure (gras) – modèle 6 capacités (pointillés) et modèle 15 capacités (tirets) sur une impédance à vide vue du primaire.

Face à ces résultats médiocres on peut avancer plusieurs explications. Premièrement, le transformateur étudié qui est, rappelons-le, un transformateur industriel, présente de faibles capacités dont l'observation peut être masquée, en partie, par des capacités de connexions (ordre de grandeurs 2 à 3 pF). Deuxièmement, sur certaines courbes (Figure 53), des couples de résonances très proches et très amorties sont à peine repérables. Les courbes étant quasiment droites, on hésite à prendre ces fréquences en considération.

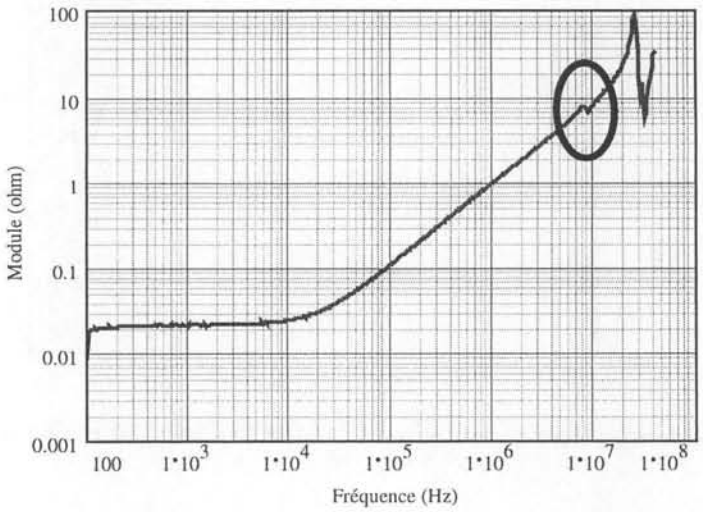



Figure 53 : Mesure avec enroulements en court-circuit.
Exemple de résonances fortement amorties.

Enfin, dans la mesure où des divergences importantes apparaissent entre les potentialités de nos modèles et les observations, il est raisonnable de revenir sur les hypothèses adoptées pour développer ceux-ci. Ce qui semble en cause ici c'est essentiellement le découplage des systèmes magnétiques et électrostatiques. Cela signifie qu'on entre dans le domaine des phénomènes à constantes réparties. Nous verrons, au chapitre suivant, que de tels phénomènes peuvent, parfois, être représentés par plusieurs cellules à constantes localisées mais il y a là tout un champ d'investigation à explorer....

## 7. Simplifications pratiques des modèles.

Après avoir proposé une méthode de caractérisation progressive des transformateurs multi-enroulements qui s'adresse essentiellement aux concepteurs, l'objectif de ce paragraphe est de montrer que l'utilisateur peut parfois exploiter une représentation plus simple, valable dans ses conditions d'utilisation. Nous dégageons ci-après quelques approximations acceptables, en attirant l'attention sur leurs limites de validité [Schellmanns99-2].

### *7.1. Domaine fréquentiel.*

Lorsqu'on a une idée de l'étendue spectrale des signaux appliqués au transformateur, on peut souvent simplifier le schéma utilisé. Par exemple, si la densité spectrale des signaux est pratiquement nulle au-delà de 4 MHz, le circuit à 6 capacités suffit pour représenter le transformateur à trois enroulements vu ci-dessus. Dans certaines applications même, toutes les capacités peuvent être négligées.

Il faut cependant bien évaluer le domaine spectral utile. Celui-ci doit être fixé en pensant à l'objectif assigné à la simulation. Lorsqu'un montage fonctionne à 50 kHz, on peut penser qu'un schéma correct jusqu'à 500 kHz suffit. Ce choix devient moins pertinent si les signaux sont très riches en harmoniques et si, en plus, on veut des prévisions très précises. On peut parfois ignorer les capacités pour étudier le fonctionnement principal d'un convertisseur mais jamais pour étudier le passage des courants perturbateurs entre les enroulements.

### *7.2. Liens électriques.*

Le nombre de capacités utiles dans nos modèles est fonction du nombre de potentiels indépendants. La première simplification qui vient à l'esprit résulte de la prise en compte du nombre de potentiels réellement indépendants lors de l'utilisation. Par exemple, s'il existe un lien entre les enroulements (autotransformateur ou enroulement à point milieu, connexion en étoile ou en triangle dans un transformateur triphasé...). Il est possible de diminuer sensiblement le nombre de capacités.

### *7.3. Impédances externes.*

Considérons un transformateur à deux enroulements alimenté par une source de tension. Dès qu'elle est suffisante, l'impédance parallèle n'intervient pratiquement pas sur la tension vue par la charge. En revanche, elle est déterminante pour connaître le courant délivré par la source, si celui absorbé par la charge est faible. On constate que la règle de simplification n'est pas simple. Pour conclure, l'impédance de source doit être prise en compte autant que celle de la charge. En outre, au sein d'un convertisseur, ces impédances peuvent changer radicalement d'une phase de fonctionnement à la suivante.

## 8. Conclusion.

L'objectif initial assigné à ce chapitre était d'étendre aux transformateurs multi-enroulements, les méthodes de caractérisation développées par notre équipe pour les transformateurs à deux enroulements. En pratique, l'étude d'un grand nombre de prototypes nous a conduit à réviser nos méthodes antérieures si bien que, même pour deux enroulements, nous n'abordons plus aujourd'hui la caractérisation d'un transformateur de la même façon qu'il y a trois ans.

L'hypothèse retenue depuis longtemps, suivant laquelle les couplages magnétiques et électrostatiques sont découplés s'est avérée très fertile et nous l'avons abondamment exploitée. Ainsi, le dénombrement des pôles et des zéros des impédances des modèles basés sur ces hypothèses nous permet aujourd'hui de repérer, sur une courbe expérimentale, jusqu'à quelle fréquence un de nos modèles sera exploitable. L'identité de certains pôles ou zéros nous

amène parfois à rechercher, sur une impédance plus facile à mesurer, une fréquence de résonance utile à l'identification.

L'identification expérimentale a également progressé. Nous savons maintenant pourquoi il est préférable de mesurer des impédances et nous avons résolu les problèmes posés par la détermination des signes des coefficients de couplages. Le dénombrement des impédances mesurables nous a amené à tester nos modèles avec des impédances jusqu'ici oubliées et il nous a appris qu'il était illusoire de vouloir toutes les tester dès lors que le nombre d'enroulements est supérieur à deux.

L'identification progressive introduite ici constitue une avancée décisive, surtout dans le cas fréquent où tous les enroulements sont bien couplés. D'abord elle permet de proposer un circuit équivalent partiel lorsque certaines fréquences caractéristiques ne sont pas accessibles à la mesure. La précision de ce circuit partiel s'avère souvent suffisante en pratique. Enfin lorsque des mesures complémentaires sont réalisées pour parvenir au circuit complet, les fréquences de résonance les plus basses ne sont pas modifiées. Ainsi, même lorsque ces mesures complémentaires sont imprécises, le modèle complet est, pour les basses fréquences, aussi précis que le circuit partiel.

# Chapitre 3

## Propagation unidirectionnelle dans un transformateur

## 1. Introduction.

Au cours du chapitre précédent, nous avons exposé notre façon de rendre compte du comportement réactif d'un transformateur. Pour l'essentiel, nous considérons qu'un transformateur à N enroulements se compose d'un système magnétique à N entrées et d'un système électrostatique à 2N-1 entrées connectées en parallèle. Nous en tirons ensuite, un maximum de conséquences. Comme nous l'avons signalé, cette approche est très générale sous réserve que le composant soit utilisé dans son domaine linéaire et que les phénomènes de propagation interne puissent être négligés, au moins dans la bande de fréquence intéressante.

Bien évidemment, un modèle qui ne tiendrait pas compte des pertes serait d'un intérêt limité. En pratique, il est fréquent que la représentation usuelle des pertes, par des résistances constantes placées en série et en parallèle sur le circuit, se montre très inexacte à une fréquence où les capacités parasites ne se manifestent pas encore. Historiquement, nous avons été gênés par ces insuffisances bien avant que nous soyons amenés à étudier les capacités et, si nous avons décidé ici de présenter les effets électrostatiques avant les pertes, c'est essentiellement pour faire ressortir la ressemblance de traitement des phénomènes magnétiques et électrostatiques.

Notre étude des pertes se fera, comme celle du comportement réactif, dans le cadre d'un comportement linéaire. Certes, cette hypothèse est un peu restrictive à l'égard du comportement réel du circuit magnétique mais, tant que l'induction n'est pas trop proche de la saturation, les ferrites manganèse-zinc qui équipent de nombreux composants bobinés montrent des propriétés quasi-linéaires. Pour d'autres matériaux, les résultats établis constitueront, nous l'espérons, des approximations utiles dont la précision devra être évaluée cas par cas. La prise en compte ultérieure des non-linéarités devra, d'une part, s'appuyer sur un modèle dynamique (haute fréquence) de l'hystérésis et, d'autre part, introduire un composant non-linéaire (à définir) dans le circuit.

Pour tenir compte des pertes dans le cadre d'un comportement linéaire, des résistances, indépendantes de la fréquence, sont habituellement introduites : en parallèle pour les "pertes fer" et en série pour les "pertes cuivre". Ces appellations, usuelles elles aussi, doivent être entendues avec circonspection : notre équipe a déjà rencontré des transformateurs pour

lesquels des pertes parallèles étaient des "pertes cuivre" (pertes dans les conducteurs proches d'un entrefer) et réciproquement, d'autres pour lesquels les pertes série étaient essentiellement des "pertes fer" (faible couplage et flux de fuite traversant un matériau magnétique)... Ceci étant, la principale limite de cette représentation traditionnelle provient du fait que les résistances mesurées, ou même calculées à partir des propriétés des matériaux, varient suivant la fréquence. Nous allons maintenant nous efforcer de savoir où placer des résistances dans le circuit équivalent, comment elles doivent varier avec la fréquence et comment représenter chaque résistance variable par un ensemble de composants standards indépendants de la fréquence.

Pour établir la structure du circuit, nous nous appuyons sur l'étude de la propagation, supposée unidirectionnelle, des ondes électromagnétiques qui couplent les enroulements [Keradec96/1] [Schellmanns97]. Cette approche permet d'associer, à chaque lame traversée (cuivre, air, ferrite), un circuit équivalent qui, connecté à celui des autres lames, conduit finalement au circuit du transformateur complet. Les impédances ainsi introduites dépendent des matériaux traversés par l'intermédiaire de leur perméabilité et de leur permittivité. Lorsque la variation de ces paramètres physiques avec la fréquence est connue, celle des diverses impédances l'est également. On peut alors rechercher, pour chacune, une représentation par des composants standards qui assure une précision fixée jusqu'à une fréquence choisie.

## 2. Propagation unidirectionnelle.

### *2.1. Description du dispositif élémentaire.*

La Figure 1 représente une partie rectangulaire d'une lame à faces parallèles de dimensions transversales infinies (milieu 2) placée symétriquement par rapport au plan z = 0. Cette lame est entourée par deux milieux non nécessairement identiques (milieu 1 à gauche et milieu 3 à droite) mais les trois milieux sont supposés homogènes et isotropes. On note que ce système présente une invariance par translation quelconque vis à vis de x mais aussi vis à vis de y et qu'il est symétrique par rapport à tout plan normal à Ox ou Oy. En définitive, la seule dimension significative est l'épaisseur de la lame (a).

La lame 2 est supposée alimentée par une source de tension V qui crée un champ électrostatique $\overrightarrow{E_s}$, uniforme dans toute la lame et dirigé suivant Ox. Par hypothèse, tous les milieux sont parcourus par des ondes planes parallèles à Oz de polarisation rectiligne (champ électrique selon Ox). En accord avec les symétries imposées au système et à ses excitations (ondes incidentes, source de tension), les champs ne dépendent que de z. Pour les mêmes raisons, les champs électriques sont parallèles à Ox et les excitations magnétiques à Oy.

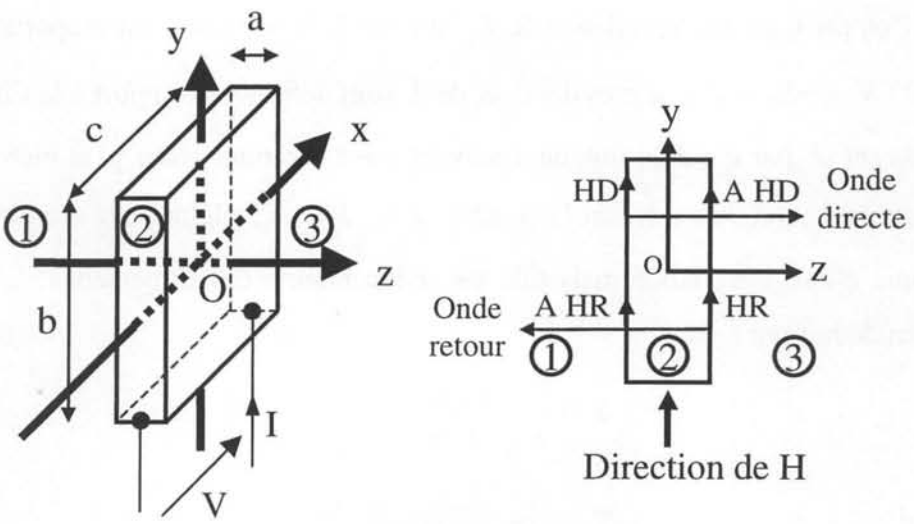



Figure 1 : Dispositif élémentaire de l'étude.

Les milieux traversés sont non seulement homogènes et isotropes mais aussi linéaires et stationnaires, si bien que le comportement électromagnétique de chacun est entièrement déterminé par deux grandeurs complexes : la perméabilité $\overline{\mu}$ et la permittivité $\overline{\varepsilon}$. Nous utiliserons l'impédance caractéristique du matériau $Z_C$ définie par :

$$Z_C = \sqrt{\frac{\overline{\mu}}{\overline{\varepsilon}}} \qquad (1)$$

Dans le vide, cette impédance prend la valeur $Z_{C0} = 377\Omega$.

Chaque milieu étant parcouru par des ondes planes, si la source (V) alimentant la lame est la seule source d'énergie, les milieux 1 et 3 sont uniquement parcourus par des ondes qui se dirigent vers l'extérieur, c'est à dire vers la gauche pour le milieu 1 et vers la droite pour le milieu 3. Dans le milieu 2, les deux directions de propagation sont possibles. Lors d'une traversée complète de celui-ci, le champ électromoteur subit une atténuation et un déphasage, ce qui revient à dire qu'il est multiplié par le coefficient complexe A tel que :

$$A = e^{-j\varphi} \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \omega\sqrt{\overline{\mu}\,\overline{\varepsilon}}\,a \tag{2}$$

Dans les trois milieux, les champs électromoteurs se déduisent des excitations magnétiques grâce à la relation :

$$E = \pm H\ Zc \tag{3}$$

(+ pour l'onde directe dirigée vers les z croissants, - pour l'onde retour)

Remarque : Compte tenu de l'invariance de $E_x$ suivant x, la tension V est proportionnelle à la profondeur c : $V = -E_S\ c$ (les signes de $V$ et de $I$ sont définis par rapport à la Figure 1). De même, le courant $J$ par unité de longueur suivant y est invariant selon y, si bien qu'on peut relier $J$ au courant total $I$ traversant la couche: $J = -I/b$ . Finalement, la grandeur $E_s/J$ a les dimensions d'une impédance mais elle est indépendante des dimensions. L'impédance électrique s'en déduit par :

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{E_s}{J}\frac{c}{b} \tag{4}$$

Désormais la lame est regardée comme un dispositif linéaire et stationnaire à 3 entrées et l'étude qui suit vise à établir un lien entre d'une part, les champs électriques $E_1$, $E_3$ et $E_S$ et, d'autre part, les champs magnétiques $H_1$ et $H_3$ et le courant par unité de longueur $J$ .

### *2.2. Etude électromagnétique.*

Etant donné les hypothèses adoptées, l'établissement des relations recherchées nécessite peu d'équations initiales. Le théorème d'Ampère et la continuité des champs (électrique et magnétique) sur les limites des matériaux fournissent les équations utiles.

#### 2.2.1. Mise en équations

- Théorème d'Ampère :

$$H_1 - H_3 = J \tag{5}$$

- Continuité du champ électrique :

$$\text{en } z = -a/2 : \qquad E_1 = Z_{C2}\left(H_D - A\,H_R\right) + E_S \tag{6}$$

$$\text{en } z = a/2 : \qquad E_3 = Z_{C2}\left(A\,H_D - H_R\right) + E_S \tag{7}$$

Ces deux relations sont établies en utilisant l'expression (3).

- Continuité du champ magnétique :

$$\text{en } z=-a/2 : \quad H_1 = H_D + A H_R \tag{8}$$

$$\text{en } z=a/2 : \quad H_3 = A H_D + H_R \tag{9}$$

Ces équations constituent les seuls liens existant entre $E_1$, $E_3$, $E_S$, $H_1$, $H_3$ et $J$. Elles sont applicables aussi bien si le milieu (2) est conducteur que s'il est isolant. On peut maintenant procéder à la résolution du système.

### 2.2.2. Résolution du système

D'après les équations (6) et (7) on a :

$$E_1 - E_S = Z_{C2}\left(H_D - A H_R\right) \tag{10}$$

$$E_3 - E_S = Z_{C2}\left(A H_D - H_R\right)$$

Les équations de continuité du champ magnétique (8) et (9) permettent d'exprimer $H_D$ et $H_R$ en fonction de $H_1$ et $H_3$ :

$$H_D = \frac{1}{1-A^2} H_1 - \frac{A}{1-A^2} H_3 \tag{11}$$

$$H_R = -\frac{A}{1-A^2} H_1 + \frac{1}{1-A^2} H_3$$

En reportant ces expressions dans le système (10), il vient :

$$E_1 - E_S = Z_{C2} \frac{1+A^2}{1-A^2} H_1 - \frac{2A}{1-A^2} H_3 \tag{12}$$

$$E_3 - E_S = Z_{C2} \frac{2A}{1-A^2} H_1 - Z_{C2} \frac{1+A^2}{1-A^2} H_3$$

Il est alors judicieux d'utiliser la relation (5), afin d'exprimer les membres de droite du système (12) en fonction de $H_1$, $H_3$ et de $J$ :

$$E_1 - E_S = Z_{C2} \frac{1-A}{1+A} H_1 + Z_{C2} \frac{2A}{1-A^2} J \tag{13}$$

$$E_3 - E_S = Z_{C2} \frac{2A}{1-A^2} J - Z_{C2} \frac{1-A}{1+A} H_3$$

### *2.3. Représentation par un circuit électrique équivalent.*

### 2.3.1. Circuit électrique équivalent.

Le circuit de la Figure 2 traduit correctement les équations (13) à condition de choisir les impédances $Z_1$ et $Z_2$ comme suit :

$$Z_1 = Z_{C2}\frac{1-A}{1+A} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = Z_{C2}\frac{2A}{1-A^2} \tag{14}$$

Soit, en revenant à la définition (2) de A, :

$$Z_1 = j\ Z_{C2}\tan(\varphi/2) \qquad \text{et} \qquad Z_2 = -\,jZ_{C2}/\sin\varphi \tag{15}$$

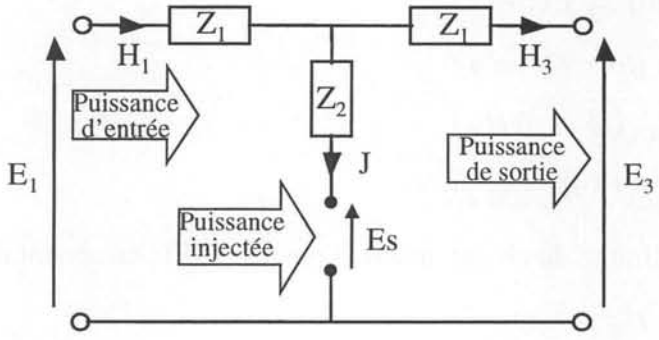



Figure 2 : Circuit équivalent à une lame quelconque.

### 2.3.2 Propriétés de ce circuit.

Le dispositif électrique étudié (Figure 2) inclut un quadripôle (trois bornes) symétrique qui est entièrement caractérisé, à chaque fréquence, par deux impédances. Quatre impédances sont directement accessibles à la mesure lorsque $\overrightarrow{E_S} = 0$ (bornes en court-circuit). Ce sont celles que l'on pourrait relever entre deux points lorsque le troisième est soit en l'air, soit relié à l'un des deux premiers.

$(Z_1 + Z_2)$ l'impédance d'entrée à vide $Z_0$

$\left(Z_1 + \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)$ l'impédance d'entrée en court circuit $Z_{CC}$

$2Z_1$ et $Z = Z_2 + Z_1/2$

Ces impédances, indépendantes de la représentation choisie (T ou π), s'écrivent :

$$Z_0 = \frac{Z_{C2}}{j\tan(\varphi/2)},\quad Z_{CC} = jZ_{C2}\tan\varphi,\quad 2Z_1 = 2jZ_{C2}\tan(\varphi/2),\quad Z = \frac{Z_{C2}}{2j\tan(\varphi/2)} \tag{16}$$

Comme pour tout quadripôle symétrique, $Z_0 \times Z_{CC} = Z_C^{\,2}$ et $2Z_1 \times Z = Z_C^{\,2}$.

Deux de ces impédances sont directement observables :

- $Z$ est l'impédance, avec effet de peau, d'une lame (méplat, feuillard) isolée dans l'espace.
- $Z_0$ est l'impédance de la même lame lorsque l'excitation magnétique est nulle sur une des faces, ceci se produit si elle est plaquée contre le noyau d'un transformateur en court circuit.

Remarque : Le système obtenu en plaçant deux lames identiques l'une contre l'autre et en les alimentant en parallèle équivaut à une lame unique d'épaisseur double. Le circuit proposé à la Figure 2, assorti des expressions de ses impédances, est cohérent avec cette observation.

### 2.3.3 Cas particulier.

Le champ électrostatique $\overrightarrow{E_S}$ et le courant J résultent en général de la connexion d'une source extérieure d'énergie. Cependant, le courant J circule parfois grâce à une connexion externe passive. C'est souvent le cas des fréquences optiques pour lesquelles les lames diélectriques procurent un shunt capacitif naturel entre les deux bornes externes. Dans les autres cas, $Z_2$ n'intervient pas et le schéma se simplifie (Figure 3).

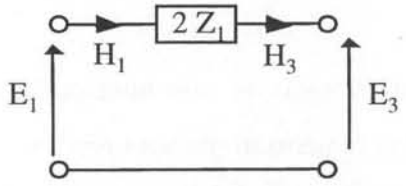



Figure 3 : Circuit équivalent à lame quelconque non alimentée.

## 3. Représentation par des circuits simples à constantes localisées.

Nous cherchons maintenant à retrouver le schéma équivalent élémentaire d'un transformateur et à déterminer ses principaux paramètres électriques à partir de ses dimensions et des propriétés $(\overline{\mu}, \overline{\varepsilon})$ de ses matériaux. Dans un premier temps, nous représentons chaque lame par un circuit équivalent simple, établi grâce à un développement limité, et nous en déduisons un premier schéma équivalent du transformateur. Par la suite, une représentation précise sera

recherchée, en partant des expressions exactes de chacunes des impédances intervenant dans le transformateur.

### 3.1. Principe de la recherche.

Les expressions des impédances $Z_1$ et $Z_2$ ont été établies en régime monochromatique. Pour obtenir les expressions des impédances en régime quelconque, il faut savoir comment elles varient en fonction de la fréquence. C'est pourquoi, il est nécessaire de prendre en compte le comportement fréquentiel des caractéristiques des matériaux ($\overline{\mu}, \overline{\varepsilon}$). Nous allons étudier successivement trois matériaux afin d'établir ces dépendances. Pour chacun, une représentation approximative de la lame par des constantes localisées sera recherchée.

### 3.2. Isolant non absorbant et non dispersif

Nous utilisons les notations suivantes :

$$\varepsilon_0 \mu_0 C^2 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \frac{C}{f} \qquad \varphi_0 = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} \tag{17}$$

C est la vitesse de la lumière et $\lambda_0$ la longueur d'onde dans le vide.

Nous étudions ici une lame d'air mais le raisonnement adopté est applicable à tous les matériaux dont la perméabilité et la permittivité sont réelles et indépendantes de la fréquence. Nous cherchons désormais des approximations valables en basse fréquence, c'est à dire lorsque $\varphi << 1$. Dans ces conditions, les fonctions trigonométriques représentant $Z_1$ et $Z_2$ peuvent être remplacées par le premier terme de leur développement en série de Mac Laurin. D'après les équations (16), on a :

$$Z_1 \approx j\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\,\frac{a}{2} = j\omega\mu_0\frac{a}{2} \qquad Z_2 \approx -j\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{1}{\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\,a} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0 a} \tag{18}$$

Ainsi, au premier ordre, $Z_1$ est essentiellement une inductance et $Z_2$ un condensateur. Le schéma équivalent d'une lame d'air est présenté sur la Figure 4. Cela était prévisible, la propagation étant unidirectionnelle, on retrouve les résultats établis pour une ligne sans pertes.

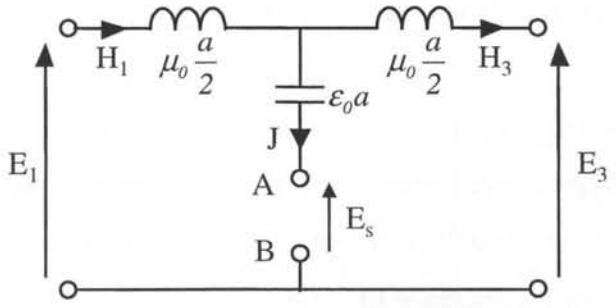



Figure 4 : Circuit équivalent d'une lame d'isolant non absorbant et non dispersif.

L'hypothèse $\varphi << 1$ conduit à $|Z_1| << |Z_2|$, si bien que, dès que le quadripôle est un peu chargé, $Z_2$ est négligeable quelle que soit l'impédance extérieure reliant les bornes A et B. En définitive, seule l'inductance série totale $(l_A = \mu_0 a)$, intervient notablement sur la transmission (Figure 5). On notera son impédance $Z_{air}$ $(Z_{air} = j l_A \omega)$.

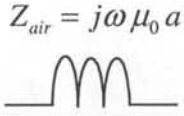



Figure 5 : Circuit équivalent simplifié d'une lame d'air.

Pour une couche d'air de 1 cm d'épaisseur et jusqu'à 1700 MHz, le module de l'impédance de ce circuit ne s'écarte pas de plus d'un pour cent par rapport à son expression exacte (Figure 6). Cette approximation est donc suffisante pour représenter l'air au sein des transformateurs.

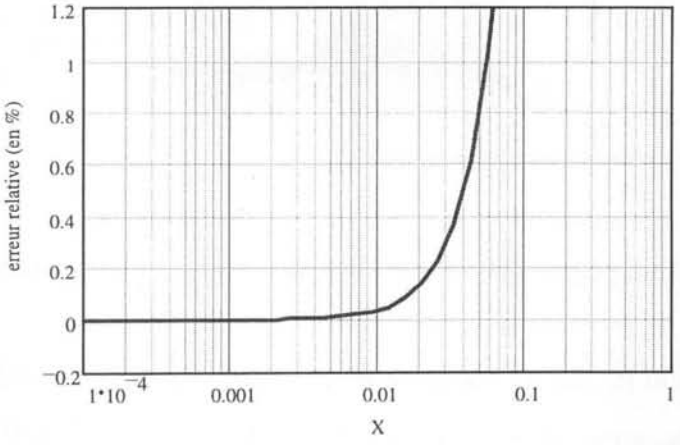



Figure 6 : Ecart relatif du modèle et de l'impédance exacte

en fonction de la fréquence réduite : $X = a / \lambda$.

### 3.3. Matériau magnétique isolant et dissipatif.

D'une manière habituelle, seule la perméabilité complexe est utilisée pour caractériser le ferrite. Dans le but de représenter les pertes fer d'une inductance construite autour d'un noyau de ferrite, une approximation usuelle consiste à placer une résistance $R_{fm}$, indépendante de la fréquence, en parallèle sur l'inductance $L_f$.

Cette façon de prendre en compte la variation fréquentielle de la perméabilité complexe (Figure 7a), équivaut à admettre les lois de variation données par la Figure 8. Ces fonctions se déduisent de la relation donnant l'impédance d'une inductance :

$$Z = j\omega\frac{N^2}{\Re} = j\omega\mu\frac{S}{l}N^2 \qquad \text{d'où} \quad \mu = \frac{Z}{j\omega}\frac{l}{S}\frac{1}{N^2} \tag{19}$$

A l'aide des notations de la Figure 7a, la perméabilité s'exprime en fonction de $R_0$, $L_0$ et de la fréquence :

$$\mu = \frac{L_0 - j\dfrac{L_0^{\,2}}{R_0}\omega}{1 + \dfrac{L_0^{\,2}\,\omega^2}{R_0^{\,2}}}\frac{l}{S}\frac{1}{N^2} \tag{20}$$

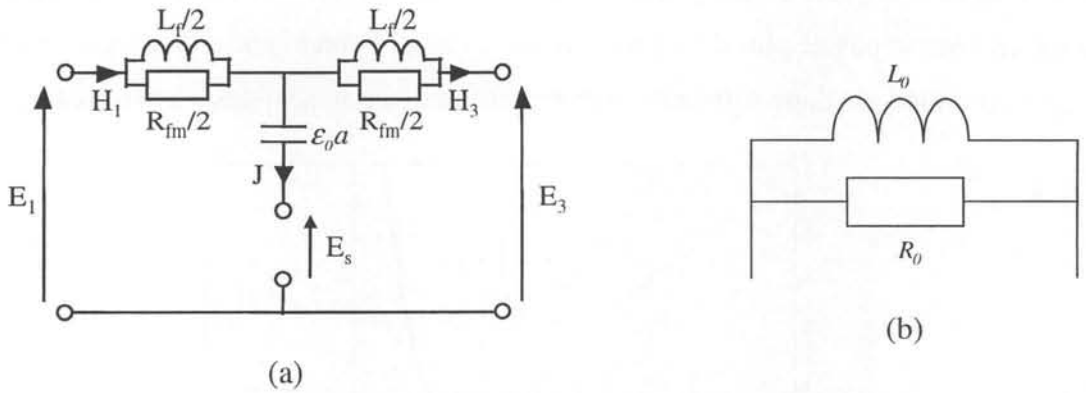



Figure 7 : Schéma équivalent d'une lame de ferrite. Complet (a) et simplifié (b).

Nous verrons par la suite que la variation de la perméabilité représentée par ce circuit n'est acceptable qu'en dessous, pour simplifier, de 100 kHz [Snelling91]. Cependant, cette représentation est simple et, dans un premier temps, nous la considérerons comme convenable.

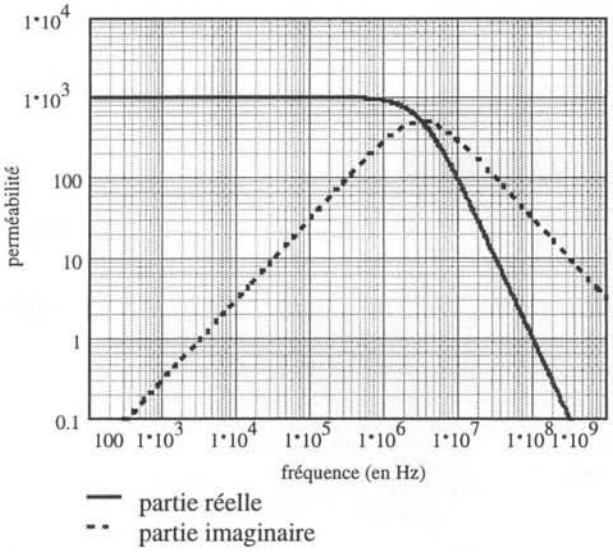



Figure 8 : Variation de la perméabilité en fonction de la fréquence traduite par le modèle Lp-Rp. Exemple avec $L_0 = 1mH$ et $R_0 = 10k\Omega$

### *3.4. Conducteur non magnétique.*

La permittivité complexe d'un conducteur est essentiellement déterminée par sa conductivité. En effet, les courants de déplacement sont négligeables $(\sigma + j\omega\varepsilon_0)E \approx \sigma E$ devant ceux de conduction jusqu'à la fréquence de plasma ( $f_p = \sigma/\varepsilon_0 \approx 7\,10^{18}\,Hz$ pour le cuivre), si bien que :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma}{j\omega} \tag{21}$$

En reportant cette expression dans les définitions (1) et (2) de $Z_C$ et de $\varphi$, on obtient :

$$Z_C = \sqrt{\frac{j\omega}{\sigma}\mu_0} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \omega\sqrt{\frac{\sigma}{j\omega}\mu_0}\, a \tag{22}$$

On peut noter que $Z_C$ et $\varphi$ sont proportionnelles à $\sqrt{\omega}$ ($a$ est l'épaisseur de la lame de cuivre). L'introduction de l'épaisseur de peau $\delta$, de la résistance $rc$ et de l'inductance $l_C$ de la lame en basse fréquence rend les expressions plus lisibles. Posons :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}} \quad rc = \frac{1}{\sigma a} \qquad \text{et} \qquad l_C = \mu_0 a \tag{23}$$

On peut alors écrire :

$$Z_C = rc(1+j)\frac{a}{\delta} \qquad \varphi = (1-j)\frac{a}{\delta} \tag{24}$$

L'expression de $\varphi$ fait apparaître un déphasage réel qui vaut $2\pi$ lorsque $a = 2\pi\delta$. On peut donc retenir que la grandeur $2\pi\delta$ joue un rôle analogue à celui de la longueur d'onde.

### 3.4.1. Représentation d'une lame.

Une première représentation de $Z_1$ s'obtient en substituant, conformément à (21), $\varepsilon_0$ par $\bar{\varepsilon} = \sigma / j\omega$ dans la représentation d'une lame d'air. Cette opération se solde par la transformation de la capacité en une résistance. En effet :

$$\frac{1}{j\omega\bar{\varepsilon}\, a} = \frac{1}{j\omega \dfrac{\sigma}{j\omega} a} = \frac{1}{\sigma\, a} = rc \qquad (25)$$

En première approximation, $Z_1$ est, comme dans l'air, égale à $\mu_0\, a/2$ soit $l_C/2$. On obtient donc :

$$Z_1 = \frac{l_C}{2} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = rc \qquad (26)$$

Cette représentation est correcte mais sa validité en fréquence est très limitée car la longueur d'onde ( $\lambda = 2\pi\,\delta$ ) est beaucoup plus petite que dans l'air. Pour repousser cette limite, on peut envisager de scinder la couche en de nombreuses feuilles plus fines, mais ceci augmente considérablement le nombre d'éléments à représenter. On peut également penser à exploiter un plus grand nombre de termes du développement en série de Mac Laurin. Pour le moment, nous nous contentons de cette représentation simple, pour ne pas dire simpliste, de la couche. La représentation précise, par des constantes localisées, sera étudiée en détail dans le cadre plus pratique de l'enroulement multicouche.

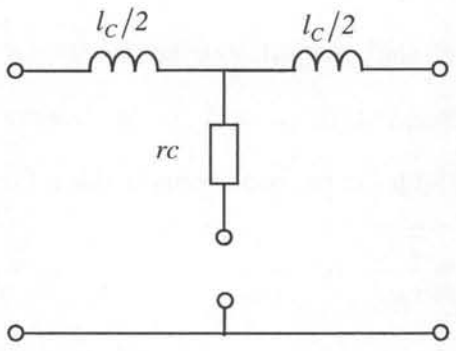



Figure 9 : Représentation élémentaire d'une lame conductrice non magnétique et non diélectrique.

### 3.4.2. Représentation d'une couche de spires par une lame équivalente

Il est maintenant nécessaire de montrer comment un bobinage constitué par des fils cylindriques peut être remplacé par un ensemble de lames. Cette équivalence souvent utilisée, a été introduite dans la littérature par Dowell [Dowell66]. Cette transformation (Figure 10) permet de remplacer chaque couche de $n_t$ spires par une lame équivalente homogène.

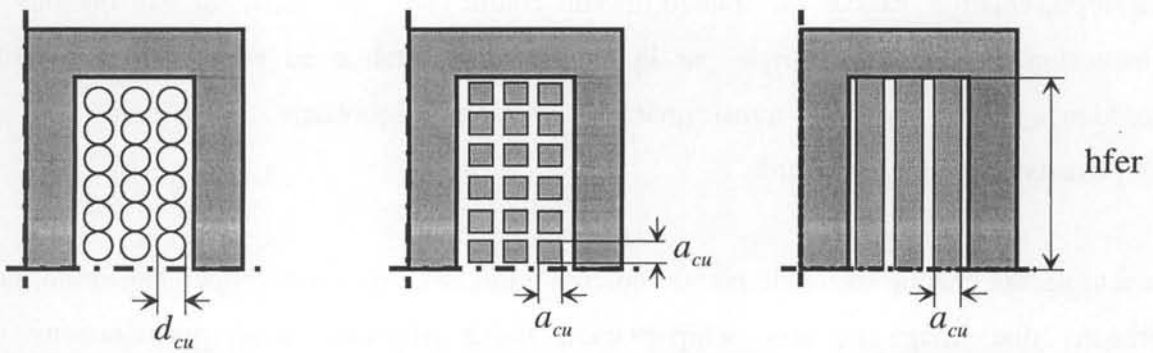



Figure 10 : Représentation d'un bobinage par les lames équivalentes de Dowell.

La transformation s'opère en deux étapes :

1- Chaque conducteur rond ($n_t$) est transformé en un conducteur carré de même section.

Donc : $a_{cu} = d_{cu}\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

2- L'ensemble des conducteurs carrés d'une couche est remplacé par une plaque de même résistance et de même épaisseur $a_{cu}$. Ceci nécessite d'adopter une conductivité légèrement différente de celle du conducteur cylindrique : $\sigma_{eq} = \sigma_{cu}\frac{n_t\, a_{cu}}{hfer}$. Le coefficient $\frac{n_t\, a_{cu}}{hfer}$, légèrement plus petit que l'unité, est appelé "porosité de la couche".

La transformation de Dowell permet de simplifier la prise en compte des courants induits en remplaçant la structure réelle par une autre plus simple mais équivalente. Il ne faut cependant pas omettre, au moment de calculer la résistance de la couche, l'influence du nombre de spires qui multiplie la résistance d'une couche par le nombre de spires au carré $n_t^2$. On vérifie alors que la résistance continue résultant du modèle de Dowell est identique à celle du fil cylindrique initial. La précision de cette représentation est excellente. Elle a été testée au laboratoire par des simulations éléments finis magnétodynamiques [Laveuve91-3].

### *3.5. Circuit équivalent d'un transformateur.*

Nous pouvons maintenant élaborer le circuit équivalent d'un transformateur complet en assemblant les circuits associés à chacune de ses couches. Dans un premier temps, nous conservons la représentation symbolique de chaque impédance par un rectangle. Ceci mène à une représentation exacte du transformateur étudié. Dès que celle ci est obtenue, la substitution de chaque rectangle par la représentation établie au cours des paragraphes précédents donne, pour le transformateur, un circuit équivalent qui n'inclut que des composants électriques standards.

En remplaçant chaque rectangle par sa représentation issue d'un développement limité, nous obtenons une image de son comportement basse fréquence mais nous faisons une approximation dont la validité est limitée en fréquence. Pour les lames de ferrite et de cuivre cette limite est souvent trop basse pour la simulation. Nous chercherons donc, pour chacune de ces lames, une représentation plus satisfaisante.

#### 3.5.1. Description du composant étudié.

Le circuit magnétique (à trois jambes) est supposé très haut et long (b >> a et c >> a). Il est refermé, en haut et en bas, par deux parties horizontales de perméabilité infinie (Figure 11). Les deux enroulements occupent toute la hauteur de la fenêtre. Leurs $n_t$ spires sont, pour le moment, réparties en une seule couche. Les courants qui circulent dans les deux enroulements monocouches circulent, en sens inverse, dans la moitié non représentée du composant.

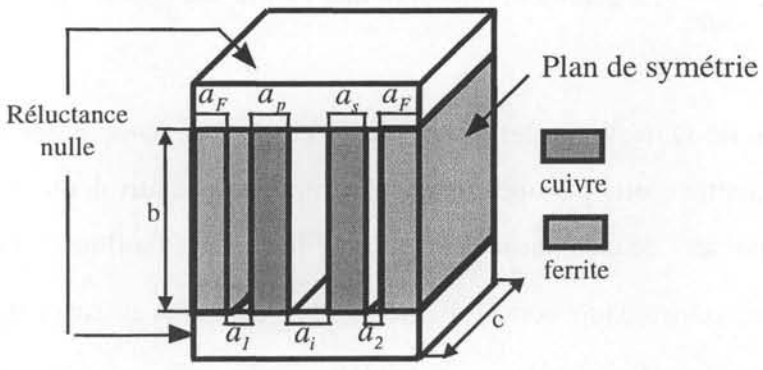



Figure 11 : Structure du transformateur étudié (une moitié représentée).

### 3.5.2. Assemblage du circuit.

En application des développements précédents, nous représentons en cascade les circuits associés à toutes les lames traversées, soit 3 lames d'air, 2 lames de bobinages, et 2 lames de matériau magnétique. Le circuit équivalent du transformateur s'obtient en associant en cascade les circuits de toutes les couches (Figure 12).

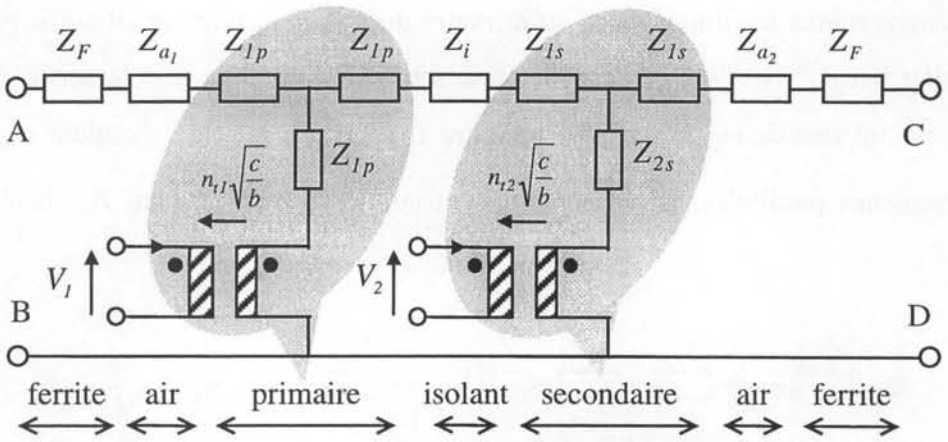



Figure 12 : Quadripôles assemblés en cascade.

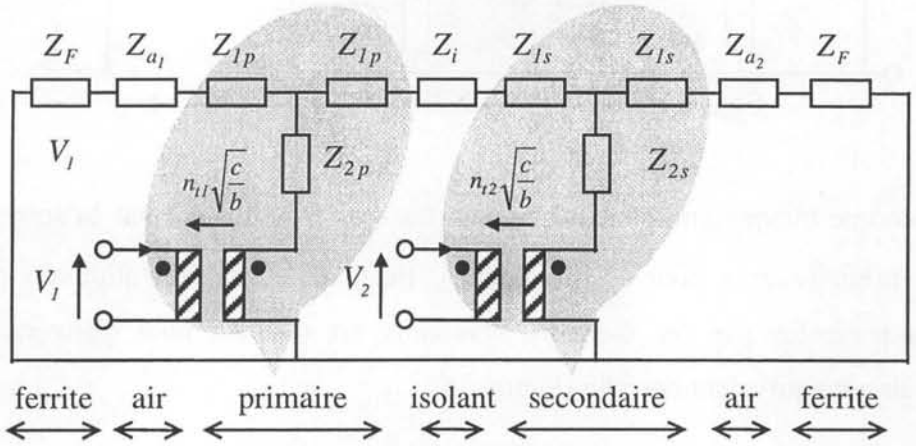



Figure 13 : Schéma initial du transformateur

Pour achever le dessin de ce circuit, il faut encore tenir compte de trois caractéristiques physiques supplémentaires :

- Par raison de symétrie, le potentiel vecteur est nul sur le plan de symétrie (à droite sur la Figure 11). On peut donc court-circuiter l'extrémité droite du circuit (bornes C, D)
- Seules les fuites dans la fenêtre du circuit magnétique sont prises en compte. Les fuites à l'extérieur du circuit magnétique sont supposées négligeables. De ce fait, le potentiel vecteur, et donc la tension, sont nuls sur la surface extérieure gauche du

circuit magnétique. Ceci permet de court-circuiter également l'extrémité gauche du circuit (bornes A, B). On parvient ainsi au circuit de la Figure 13.

- Les enroulements sont constitués par $n_{t1}$ spires au primaire et $n_{t2}$ au secondaire.

Ce schéma est encore peu commode. Aussi, afin de lui donner une apparence plus familière, nous ramenons toutes les impédances au primaire du premier coupleur (il suffit pour cela de les multiplier par ${n_{t1}}^2 . c / b$. Deux coupleurs se retrouvent en cascade à la sortie. On peut les remplacer par un seul de rapport $n_{t2}/n_{t1}$ (Figure 14). Le schéma final s'obtient en négligeant, dans les branches parallèles, les impédances du cuivre $Z_{1p}$ et de l'air $Z_a$ devant celle du ferrite $Z_F$.

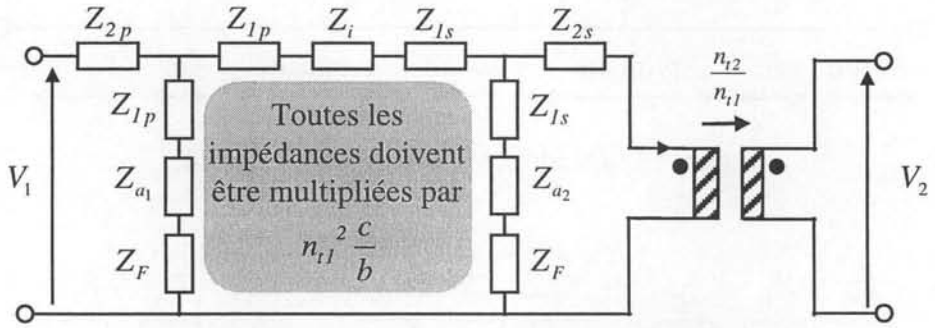
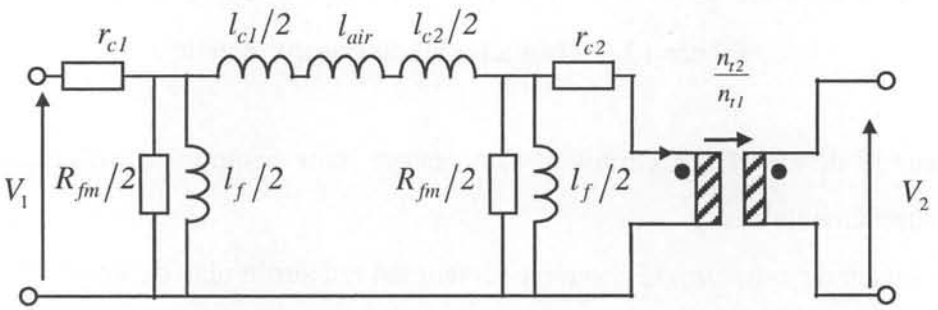



Figure 14 : Circuit équivalent au transformateur.

On remarque que chaque enroulement se manifeste essentiellement par la somme $Z_1 + Z_2$, ($p$ pour le primaire et $s$ pour le secondaire). Puisque la représentation de chacune des impédances présentes par des éléments standards est connue, nous pouvons maintenant dessiner le circuit équivalent cherché (Figure 15).




Toutes les impédances doivent être multipliées par ${n_{t1}}^2 \frac{c}{b}$

Figure 15 : Représentation par des composants standards d'un transformateur à deux enroulements.

Nous venons d'élaborer le schéma électrique équivalent d'un transformateur à deux enroulements monocouches (Figure 14) ainsi qu'une première représentation à constantes localisées (Figure 15). Les expressions établies pour les éléments du circuit de la Figure 15 coïncident, en basse fréquence, avec les calculs habituels des résistances d'enroulement, de l'inductance magnétisante et de l'inductance de fuite.

Notons que cette approche est fondamentalement incapable de rendre compte des capacités parasites. En effet, l'essentiel de l'énergie électrostatique stockée dans un transformateur l'est sous l'effet des tensions inter-couches alors que seule une des composantes de $E$ parallèles à la couche est prise en considération ici.

Afin de proposer des circuits à constantes localisées plus précis, nous allons maintenant reprendre en détail la représentation d'un noyau en ferrite puis celle d'un enroulement réparti sur plusieurs couches.

## 4. Amélioration de la représentation des ferrites.

Si on excepte quelques matériaux ferromagnétiques disponibles en feuilles très minces (amorphes, nanocristallins), les matériaux magnétiques couramment employés au-delà de quelques kHz sont les ferrites et les poudres de fer. Les ferrites sont très répandus en électronique de puissance. Utilisés à des fréquences qui avoisinent aujourd'hui le mégahertz, leur résistivité importante contribue à réduire les pertes liées aux courants de Foucault.

Dans ce domaine, on ne retient généralement que les ferrites Mn-Zn et Ni-Zn. Les premiers sont caractérisés par une induction à saturation de l'ordre de 0,6 T, une perméabilité relative de quelques milliers et par une résistivité électrique de l'ordre de 1 Ωm, responsable de pertes importantes au-delà de 1 MHz. Signalons que, lorsqu'on utilise un ferrite de puissance à haute fréquence, on diminue son induction de fonctionnement : à 100 kHz, les inductions de fonctionnement sont ajustées aux alentours de 200 mT, alors qu'à 1 MHz, on les choisit autour de 50m T [Lebourgeois-97].

### *4.1. Mesures sur un tore.*

Afin de mieux cerner le comportement du ferrite, des études fondamentales ont été menées au laboratoire [Fouassier98]. Cependant, ce travail étant récent, nous n'en avons pas encore tiré toutes les conséquences. C'est pourquoi, avant de connaître les résultats de ces travaux, nous avons identifié une inductance par la mesure de son impédance en fonction de la fréquence. Pour cela, nous avons utilisé un circuit magnétique torique autour duquel nous avons bobiné quelques spires de manière à mesurer une impédance inductive $ZB$.

En dépit de la simplicité théorique de ces mesures, nous avons du prendre plusieurs précautions pratiques. Le bobinage était constitué de spires non jointives (faible capacité parasite), en fil de Litz (effet de peau négligeable). Le nombre de spires influant sur les relevées (Figure 16), nous avons soigneusement choisi ce nombre.

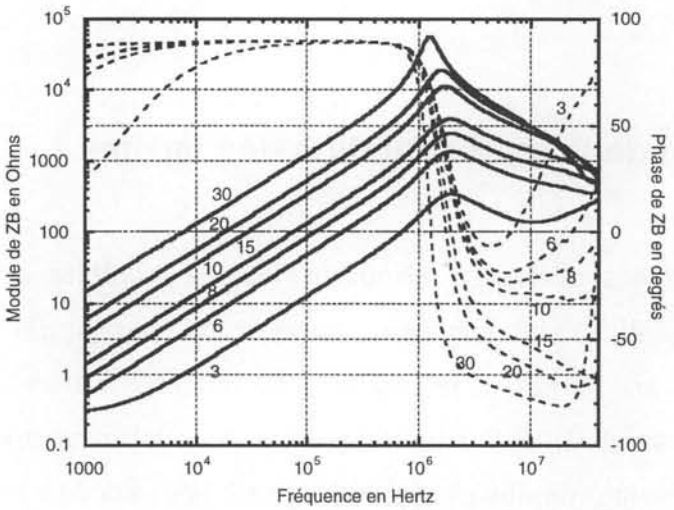



Figure 16 : Impédance ZB d'une inductance torique pour différents nombres de spires.

Jusqu'à l'apparition de la première résonance (1 à 2 MHz) le comportement inductif se manifeste par la pente d'une décade par décade. On passe d'une droite à une autre en invoquant la proportionnalité de l'inductance au carré du nombre de spires. Deux points méritent notre attention :

1- Pour un grand nombre de spires ($n \geq 20$), la résonance se déplace vers les basses fréquences lorsque n augmente et les modules décroissent en $1/\omega$ au-delà de ce

maximum. Ce comportement capacitif est dû aux capacités parasites localisées entre les spires du bobinage et/ou entre les spires et le noyau ferrite [Laveuve90].

2- Pour un petit nombre de spires ($3 \leq n \leq 15$), les modules des impédances demeurent quasiment parallèles jusqu'à 10 MHz, ce qui signifie que la notion de réluctance reste valable. La résonance principale reste proche de 2 MHz, et la pente des modules paraît, au-delà de la résonance, moins inclinée que précédemment (comportement en $1/\sqrt{\omega}$ ?). Le nombre de spires étant faible, les capacités parasites sont négligeables et cette décroissance doit être imputée au matériau.

En définitive, pour réaliser une mesure bien représentative des propriétés du noyau, il faut limiter le nombre de spires afin d'atténuer les effets des capacités parasites. Un nombre compris entre six et quinze semble un bon compromis qui prend en compte cette préoccupation, tout en procurant des impédances suffisamment fortes pour être précisément mesurables.

## *4.2. Amélioration phénoménologique de la représentation.*

### 4.2.1. Représentation Lp-Rp. Ajout de Cp.

D'après ces observations expérimentales, le modèle usuel pour les noyaux en tôles (paragraphe 3.3), est insuffisant pour les ferrites Mn-Zn. Il faut, au minimum, lui ajouter une capacité pour rendre compte de la résonance. Le modèle devient alors un circuit R-L-C parallèle (Figure 17). Signalons, pour justifier cet ajout, que la caractérisation du ferrite par sa seule perméabilité n'est pas suffisante parce que ce matériau est très diélectrique. Nous en reparlerons plus loin.

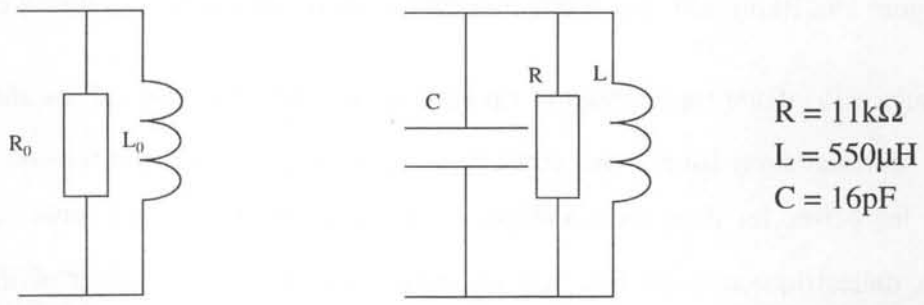



Figure 17 : Schéma équivalent d'une inductance : usuel (2 éléments) et RLC parallèle.

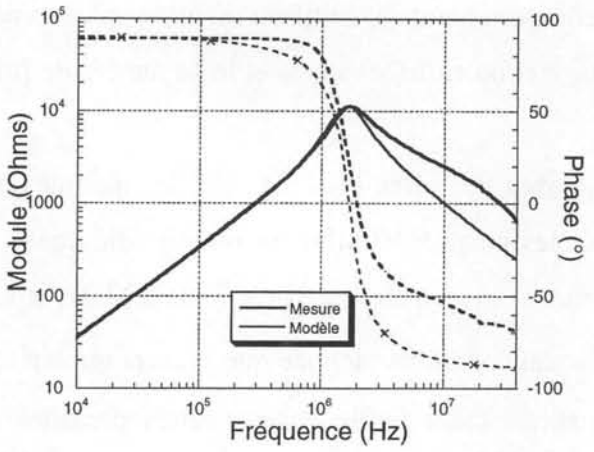


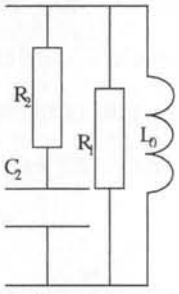

Figure 18 : Impédance d'une inductance sur noyau ferrite :

Comparaison mesure (gras) – modèle RLC parallèle (fin).

Ce modèle est satisfaisant jusqu'à environ 2,5 MHz (Figure 18). Au-delà, le comportement capacitif du ferrite n'est pas correctement représenté car le module de l'impédance ne décroît pas, en haute fréquence, avec une pente égale à -1.

### 4.2.2. Modèle phénoménologique. Cellule Cs-Rs.

Pour améliorer la représentation du comportement des noyaux en ferrite, nous proposons le modèle 4 éléments (Figure 19) [Laveuve90] [Schellmanns97].




$R_1 = 100k\Omega$
$L_0 = 550\mu H$
$R_2 = 3k\Omega$
$C_2 = 15pF$

Figure 19 : Représentation d'une inductance sur noyau ferrite : modèle 4 éléments.

La résistance $R_0$ d'une représentation Lp-Rp rend compte des pertes d'une manière globale. C'est la représentation usuelle qui consiste à supposer que, pour une tension d'alimentation donnée, les pertes fer demeurent indépendantes de la fréquence. La capacité $C_2$ reflète le caractère diélectrique du matériau. Son association avec la résistance $R_2$ améliore la précision de la représentation en haute fréquence. La comparaison de l'impédance mesurée avec celle de

ce nouveau circuit équivalent (Figure 20) montre que l'écart est inférieur à 10% jusqu'à 7 MHz.

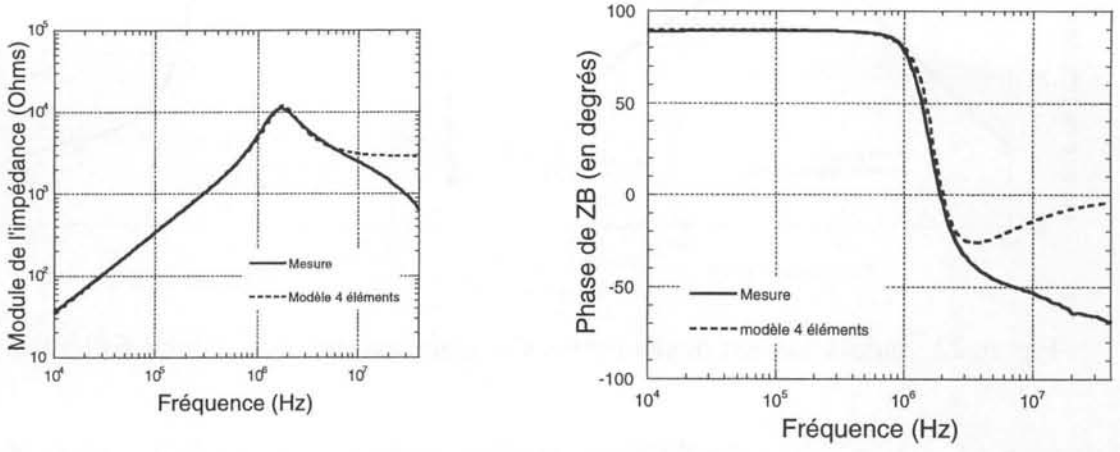


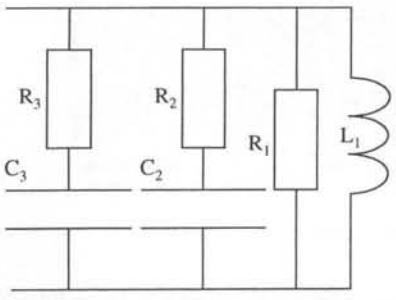

Figure 20 : Inductance sur noyau ferrite. Comparaison : mesure – modèle 4 éléments.

Déduction des paramètres

L'inductance $L_0$ est mesurée en basse fréquence et il est possible d'estimer les trois autres paramètres ($R_1$, $R_2$ et $C_2$) à partir de trois valeurs de l'impédance mesurée à la résonance et au-delà. Ce modèle affine l'évaluation des pertes dans le ferrite et la cellule $R_2$-$C_2$, qui intervient vers 3,5 MHz, repousse la limite de validité qui passe de 2,5 MHz à 7 MHz.

### 4.2.3. Augmentation du nombre de cellules

L'utilisation d'une cellule Rs-Cs supplémentaire (Figure 21) permet d'étendre encore la plage de validité en fréquence du modèle (Figure 22). Cette fois, à 10% près, le modèle est en accord avec la mesure jusqu'à 20 MHz.




$R_1 = 70k\Omega$
$L_1 = 550\mu H$
$R_2 = 6k\Omega$
$C_2 = 12.9pF$
$R_3 = 200\Omega$
$C_3 = 5.5pF$

Figure 21 : Amélioration de la précision des pertes "fer"
par augmentation du nombre de cellules Rs-Cs.

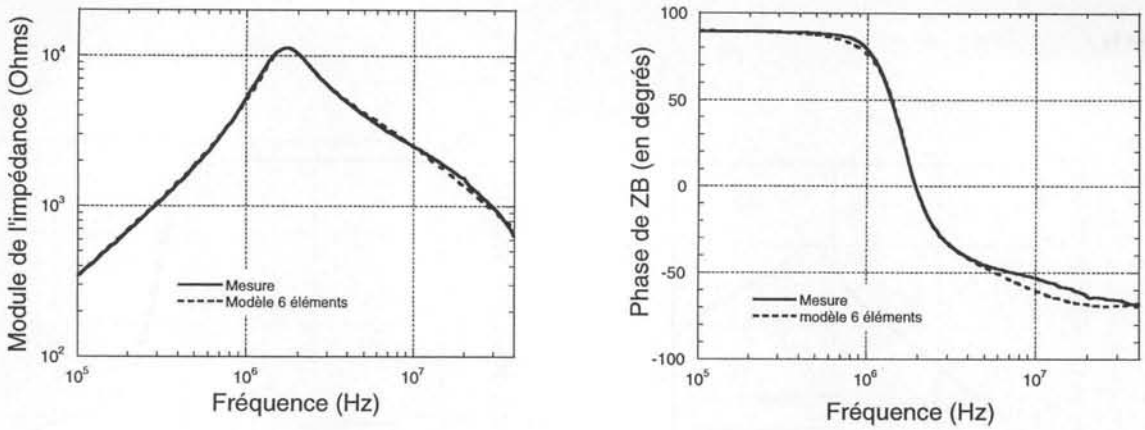



Figure 22 : Inductance sur noyau ferrite. Comparaison mesure - modèle 6 éléments.

Remarque : La comparaison des différents modèles révéle que les modèles à deux et à trois éléments sous-estiment les pertes en haute fréquence. La résistance parallèle associée à ces modèles (Figure 20) est fortement surestimée au-delà de 4 MHz, ce qui peut avoir des conséquences importantes si la tension appliquée au composant présente une densité spectrale forte dans ce domaine.

### 4.2.4. Lien avec la permittivité du ferrite.

Pour étayer ces développements, il est intéressant de calculer l'impédance $Z_l$ d'une lame de ferrite pour deux valeurs différentes de la constante diélectrique (Figure 23).

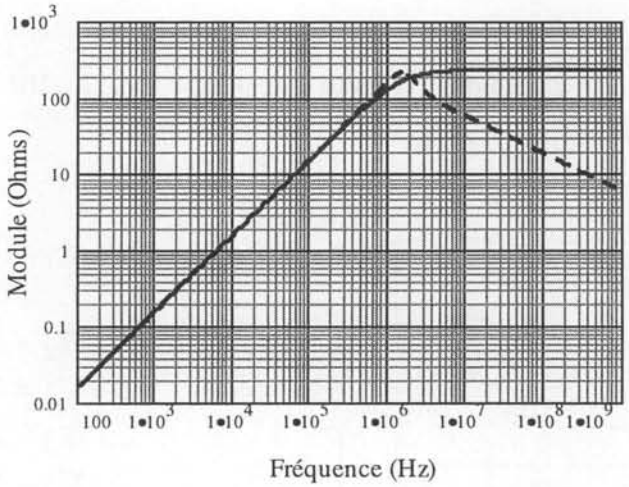



Figure 23 : Impédance d'une inductance sur noyau ferrite Mn-Zn.
Incidence de la constante diélectrique du ferrite.

Avec $\varepsilon r = 1$, la courbe ressemble à celle résultant du model usuel Lp-Rp. Cela est logique puisque nous avons pris pour $\mu$ la loi de variation (20) résultant de ce modèle. Sans rien changer d'autre, avec $\varepsilon r = 5 \times 10^4$, le module présente une résonance puis décroît avec une pente constante très près proche de celle observée expérimentalement.

La Figure 23 prouve qu'il n'est pas nécessaire d'invoquer les capacités parasites pour expliquer la décroissance de cette impédance. Cela montre aussi que pour expliquer la physique de ces matériaux il est peu crédible de s'appuyer sur les mesures habituelles de perméabilité.

### *4.3. Nouvelle méthode de caractérisation des ferrites.*

#### 4.3.1. Limites des méthodes standards.

De nombreux composants bobinés sont utilisés dans leur domaine de fonctionnement linéaire ou dans un domaine à faible non-linéarité. L'étude du comportement linéaire est donc d'une grande importance pratique. Les propriétés linéaires des ferrites sont aujourd'hui spécifiées par leur perméabilité complexe et la mesure de cette grandeur repose sur un modèle magnétostatique.

Longtemps nous avons soupçonné l'existence de courants induits circulant dans les circuits magnétiques grâce à la permittivité des ferrites. Or, dès que ceci est avéré, les méthodes habituelles de caractérisation, fondées sur la magnétostatique [Thottuvelil90] [Gradzki91], doivent être remises en cause.

La structure microscopique des noyaux en ferrite (grains conducteurs de quelques microns de diamètre séparés par une couche isolante très fine) laisse entrevoir un comportement très diélectrique de ces matériaux : l'isolation des grains, qui évite la circulation du courant en basse fréquence, perd rapidement son efficacité au-delà de quelques dizaines de kHz. Plusieurs observations expérimentales [Fouassier98] [Geri94] [Saotome97] ont confirmé que les méthodes de caractérisation utilisées habituellement par les fournisseurs de ferrites sont non fondées et insuffisantes pour représenter correctement le comportement de ce matériau. Une description réaliste doit associer la permittivité à la perméabilité.

Pour ces raisons, une nouvelle méthode de caractérisation des ferrites a été imaginée et développée au laboratoire [Fouassier98-1]. Elle vise à caractériser, d'emblée, l'ensemble des

propriétés électromagnétiques (magnétiques et diélectriques) des matériaux linéaires, homogènes et isotropes. On sait que le comportement électromagnétique de ce type de matériau est fixé par le couple perméabilité-permittivité complexes ($\bar{\mu}$, $\bar{\varepsilon}$) qui rend compte de l'ensemble des phénomènes physiques impliqués, conduction inclue. La méthode, fondée sur un modèle analytique simple, requiert la mesure de deux grandeurs complexes, à chaque fréquence d'intérêt, pour déduire le couple ($\bar{\mu}$, $\bar{\varepsilon}$). La mise au point de cette nouvelle méthode de caractérisation des matériaux magnétiques haute fréquence a donné lieu à plusieurs publications [Fouassier97-1] [Garcia98-1] [Garcia98-2].

Nous rappelons rapidement les principes de cette méthode de caractérisation et nous présentons les résultats que nous avons exploités au cours de cette thèse.

### 4.3.2. Principe de la mesure.

Pour déduire, à chaque fréquence, les deux grandeurs complexes $\bar{\mu}$ et $\bar{\varepsilon}$ qui caractérisent un ferrite, il est nécessaire de disposer de deux mesures complémentaires. Dans cette optique, on utilise des tores de section rectangulaire, dont les faces parallèles sont métallisées et on mesure deux impédances. La première - ZB - est de nature inductive (inductance d'un bobinage de n spires de fil isolé réparties autour du noyau). La seconde - ZE - est de nature capacitive et résistive (impédance entre les deux faces parallèles du tore). L'analyseur d'impédance utilisé pour ces mesures (HP4194A) permet de couvrir la gamme 100 Hz-40 MHz.

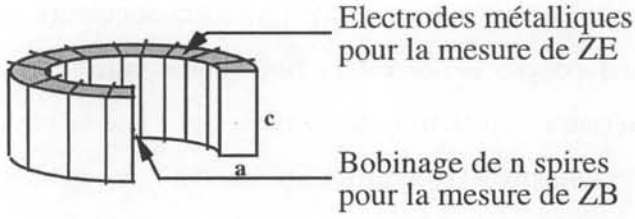



Figure 23 : Equipement d'un échantillon torique en ferrite pour la mesure de ZB et de ZE

Le choix de ces deux mesures a été guidé par le fait que, la mesure habituelle d'inductance (ZB) dépendant principalement de la perméabilité, il fallait lui adjoindre une mesure plutôt liée à la permittivité (ZE). Le couple ($\bar{\mu}$, $\bar{\varepsilon}$) se déduit du jeu de mesures (ZB, ZE) en exploitant un modèle analytique qui suppose que les champs présentent certaines symétries :

$$\begin{cases} ZB = f(\overline{\mu}, \overline{\varepsilon}) \\ ZE = g(\overline{\mu}, \overline{\varepsilon}) \end{cases} \quad \underset{\text{inversion}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} \overline{\mu} = h_1(ZB, ZE) \\ \overline{\varepsilon} = h_2(ZB, ZE) \end{cases}$$

Le modèle analytique doit rendre compte fidèlement du système expérimental. Les essais réalisés ont été choisis de manière à le conserver aussi simple que possible afin que l'inversion des relations donnant ZB et ZE en fonction de $\overline{\mu}$ et $\overline{\varepsilon}$ soit réalisable analytiquement. Les indispensables précautions expérimentales, ainsi que les calculs permettant de déduire le couple $(\overline{\mu}, \overline{\varepsilon})$ sont détaillés dans la thèse de Patrick Fouassier [Fouassier98].

### 4.3.3. Résultats de caractérisation.

Des échantillons de faibles dimensions ($\varnothing_{in}$ = 9,5 mm - $\varnothing_{out}$ = 14 mm - h = 2,3 mm) ont été rectifiés et métallisés pour la mesure de ZE. La mesure de ZB, quant à elle, a été faite grâce à 6 spires bien réparties sur la circonférence des mêmes échantillons. Les courbes de la Figure 24 montrent comment varient la perméabilité et la permittivité complexes d'un ferrite 3C85 de Philips [Philips98]. Les courbes sont données jusqu'à 7 MHz, fréquence jusqu'à laquelle ces paramètres sont fiables. Au-delà, des effets de propagations supplémentaires (2 dimensions) font apparaître d'autres résonances et le modèle analytique exploité ne reflète plus la réalité.

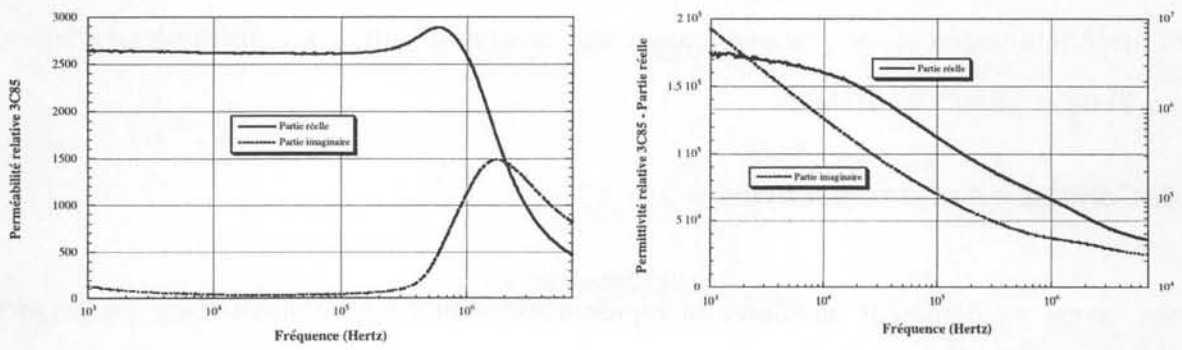



Figure 24 : Perméabilité et permittivité complexe mesurées sur du 3C85 Philips.

En basse fréquence, la valeur de la partie réelle de la perméabilité (autour de 2600) est différente de la valeur annoncée pour la perméabilité initiale ($\mu_i$ = 2000). Cela peut être attribué en partie à la dispersion de fabrication et en partie au fait que le niveau d'excitation du pont de mesure influe sur cette valeur. La permittivité réelle est, en basse fréquence, de l'ordre de $10^5$, ce qui est conforme aux rares données fournies par les constructeurs [Philips]. La résistivité (quelques Ω.m) se déduit de la décroissance en $1/f$ de la partie imaginaire de la

permittivité, bien visible en dessous de 10 kHz. Elle aussi est conforme aux rares données disponibles.

### 4.3.4. Conclusion concernant cette caractérisation.

S'appuyant sur la mesure de deux impédances électriques complémentaires en fonction de la fréquence, cette nouvelle méthode permet d'accéder, à toute fréquence, à la perméabilité et à la permittivité complexes, au moyen de relations analytiques simples et ce, sans faire aucune hypothèse concernant les variations fréquentielles de ces grandeurs.

Dès que l'hypothèse de linéarité est admissible, elle conduit à des paramètres applicables à tout circuit magnétique, quelles que soient sa forme et sa taille. On peut donc s'en servir, dans un logiciel de simulation par éléments finis, pour simuler des circuits de formes non-standards. Son exploitation permet d'obtenir des caractéristiques valides jusqu'à une dizaine de MHz qui corrigent et complètent celles données par les fournisseurs.

Afin d'introduire les données complexes $\overline{\mu}$ et $\overline{\varepsilon}$ dans les calculs de réluctances menés, soit de façon analytique soit numériquement par éléments finis [Flux2d] [Flux3d] [Boucetta94], il est commode d'approcher les variations fréquentielles de ces paramètres par des fonctions de transfert. L'allure des courbes expérimentales demeure simple et le travail d'identification peut être mené intuitivement. En pratique, cinq à sept constantes suffisent à décrire les variations de $\overline{\mu}$ et de $\overline{\varepsilon}$ jusqu'à 7 à 10 MHz.

## *4.4. Conclusion et perspectives.*

Nous avons vu comment améliorer la représentation du comportement d'une inductance réalisée sur un noyau en ferrite en introduisant quelques cellules Rs-Cs en parallèle sur la résistance de pertes fer. Cet ajout a été suggéré par le caractère diélectrique du matériau.
Pour étayer ces raisonnements phénoménologiques, nous essayons actuellement de relier, par des raisonnements physiques, les valeurs des éléments localisés (L, R, C) du schéma équivalent aux paramètres complexes $\overline{\mu}$ et $\overline{\varepsilon}$. Cette analyse vise à déduire, des caractéristiques du matériau et de ses dimensions, une représentation des pertes "fer" du composant, fiable jusqu'à des fréquences élevées. C'est un moyen pour affiner le circuit

équivalent que l'on attribue aux composants magnétiques et dont la partie parallèle, actuellement, sous-estime gravement les pertes en haute fréquence.

Des simulations menées avec les nouvelles données $(\bar{\mu},\bar{\varepsilon})$ ont montré que, dans les conditions normales d'utilisation, la propagation dans des ferrites Mn-Zn de tailles habituelles cesse d'être unidirectionelle vers quelques MHz. Le passage de $(\bar{\mu},\bar{\varepsilon})$ aux éléments du circuit sera donc plus complexe que pour l'air ou le cuivre... à moins que d'autres approximations admissibles ne soient trouvées.

## 5. Etude détaillée d'un enroulement multicouche.

Après avoir établi le schéma équivalent complet d'un transformateur, nous allons étudier en détail l'impédance vue du primaire d'un transformateur, lorsque son enroulement secondaire est en court-circuit. Cette fois nous ne supposons plus que chaque enroulement est monocouche. Après avoir obtenu son expression analytique, nous étudierons son comportement en fonction de la fréquence. Nous montrerons que le comportement d'un enroulement ne dépend que de trois paramètres : sa résistance en continu, le diamètre du fil conducteur et le nombre de couches sur lequel est réparti son bobinage.

Nous présenterons ensuite une méthode expérimentale menant à la connaissance ces paramètres puis nous validerons cette approche théorique par l'identification d'un prototype.

### *5.1. Circuit équivalent à un enroulement.*

#### 5.1.1. Description de l'enroulement étudié et hypothèses.

Nous voulons maintenant étendre le modèle établi au paragraphe 3 pour le transformateur, au cas où les spires de ses enroulements sont réparties en plusieurs couches superposées. Dans cette situation, les couches sont séparées par une mince pellicule d'isolant non magnétique (air, vernis, carton). Pour simplifier le langage, on parlera d'une couche d'air. Cette association de lames de cuivre et de lames d'air est présentée sur la Figure 25. L'épaisseur de la lame de cuivre est déduite de l'approximation de Dowell présentée au paragraphe 3.4.2. Celle de la couche d'air est, par compensation, augmentée pour préserver l'épaisseur totale

(cuivre + air). Le circuit présenté (Figure 25) devra remplacer celui de l'enroulement monocouche (paragraphe 3.4.) au sein du schéma complet du transformateur (Figure 14).

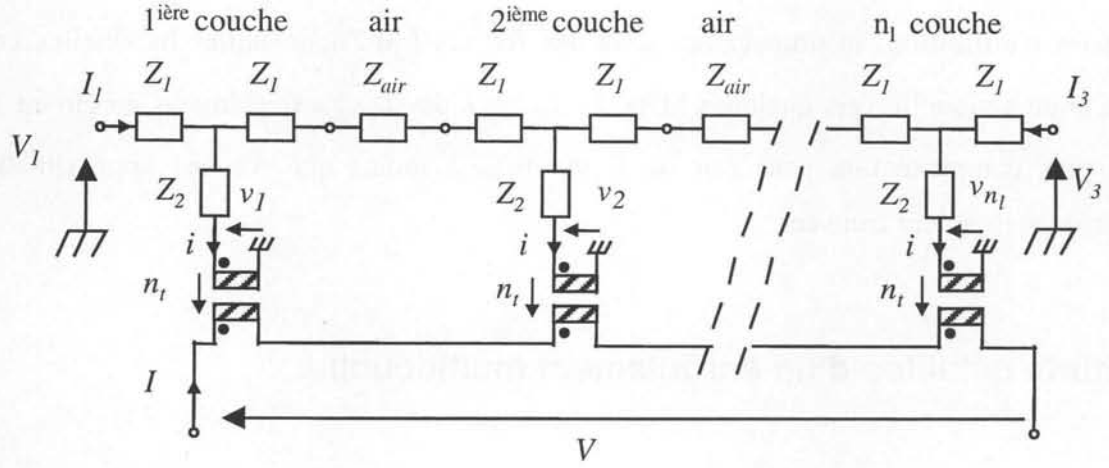
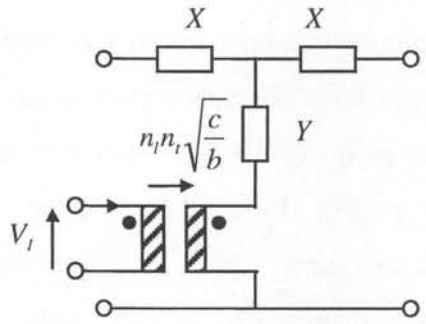



Figure 25 : Quadripôles en cascade et connexions en série
pour la représentation d'un bobinage multicouche.

L'enroulement étudié comprend $n_l$ couches de $n_t$ spires chacune soit $N = n_l\, n_t$ spires totales. Le nombre de spires de chaque couche a été pris en compte grâce à l'introduction, dans le circuit, de coupleurs qui multiplient les impédances par $n_t{}^2$. L'enroulement est composé de $n_l$ couches identiques séparées par $(n_l - 1)$ couches d'air.

### 5.1.2. Calculs des impédances du circuit équivalent.

Des calculs élémentaires de circuits (Annexe 1) permettent d'élaborer le schéma équivalent de cet enroulement. Le comportement d'un bobinage multicouche peut se représenter par le circuit de la Figure 26 si on définit les impédances $X$ et $Y$ par les relations ci-dessous :




$$N = n_l n_t$$

$$X = n_l Z_1 + \frac{n_l - 1}{2} Z_{air}$$

$$Y = \frac{Z_2}{n_l} - \frac{n_l{}^2 - 1}{6 n_l}(2Z_1 + Z_{air})$$

Figure 26 : Représentation d'un bobinage multicouche.

$Z_1$ et $Z_2$ sont les impédances qui apparaissent dans le schéma d'une couche de cuivre et $Z_{air}$ est l'impédance de l'air séparant deux couches de cuivre consécutives. En basse fréquence :

$$Z_1 = \frac{j l_C \omega}{2} \qquad Z_2 = rc \qquad Z_{air} = j\omega l_A \tag{27}$$

Comme il se doit, lorsque $n_l = 1$, on retrouve le schéma d'une lame de cuivre.

### 5.1.3. Vérifications.

Pour nous assurer de la vraisemblance des relations précédentes, nous allons étudier deux limites basse fréquence. Considérons tout d'abord, la résistance de l'enroulement. Puisque seule $Z_2$ ne tend pas vers 0 lorsque $\varphi$ tend vers 0, on a :

$$Y \approx \frac{Z_2}{n_l} = \frac{rc}{n_l} = \frac{1}{\sigma_{eq}\, a_{cu}} \frac{1}{n_l} \tag{28}$$

Pour obtenir la valeur observable, il faut encore multiplier ceci par le carré du rapport de couplage c'est à dire par $N^2 . c \,/\, b$.

Par ailleurs, l'enroulement est constitué de conducteurs de section $a . b \,/\, n_t$ soit $a.b.n_l / N$ puisque $n_t$ conducteurs sont répartis sur la hauteur b. La longueur du fil étant supposée égale à $N . c$, la résistance du fil s'écrit :

$$r_{sdc} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \frac{N}{a_{cu}\, b\, n_l} N c = \frac{1}{\sigma_{eq}\, a_{cu}\, n_l} \left( N^2 \frac{c}{b} \right) \tag{29}$$

Cette expression, établie directement, confirme (28). Nous avons vu par ailleurs (paragraphe 3.4.2.) qu'elle coïncide avec la résistance directement calculable du fil cylindrique.

Etudions maintenant l'impédance série du quadripôle associé à l'enroulement : $Z = 2X$. Lorsque $\varphi$ tend vers 0, on a :

$$Z = 2 n_l Z_1 + (n_l - 1) Z_{air} = n_l\, 4 rc \frac{-\varphi^2}{4} + (n_l - 1) \mu_0\, a_{air}\, j\omega \tag{30}$$

En outre, puisque d'après (22) et (23), $-\varphi^2 rc = j\omega l_C$ (où $l_C = \mu_0 a_{cu}$ est l'inductance de la couche de cuivre) il vient :

$$Z = j\omega \left( n_l\, \mu_0\, a_{cu} + (n_l - 1) \mu_0\, a_{air} \right) \tag{31}$$

Cette impédance est, comme pour la couche d'air, inductive. L'inductance observée est identique à celle d'un matériau non magnétique de même épaisseur totale ce qui, tant que les

courants induits sont négligeables, se justifie par le fait que le cuivre, comme l'air, a une perméabilité égale à $\mu_0$.

## *5.2. Impédance vue du primaire, secondaire en court-circuit.*

### 5.2.1. Expression analytique et paramètres indépendants.

Nous allons maintenant revenir en détail sur l'impédance série du circuit équivalent final du transformateur (Figure 14). L'objectif est, cette fois, d'aboutir à une représentation satisfaisante du comportement du cuivre sur une large plage de fréquence que nous fixons, de manière ambitieuse, à trois ou quatre décades au-delà de la fréquence pour laquelle l'épaisseur de peau est égale à l'épaisseur du conducteur équivalent.

Lorsque la fréquence croît, des courants induits prennent naissance dans les conducteurs des enroulements. Ils sont à l'origine de pertes supplémentaires et, leur action s'opposant à l'induction qui les crée, ils provoquent la diminution de certaines inductances. Tous ces phénomènes sont visibles sur l'impédance *Zsc*, c'est-à-dire l'impédance vue du primaire lorsque le secondaire est en court circuit.

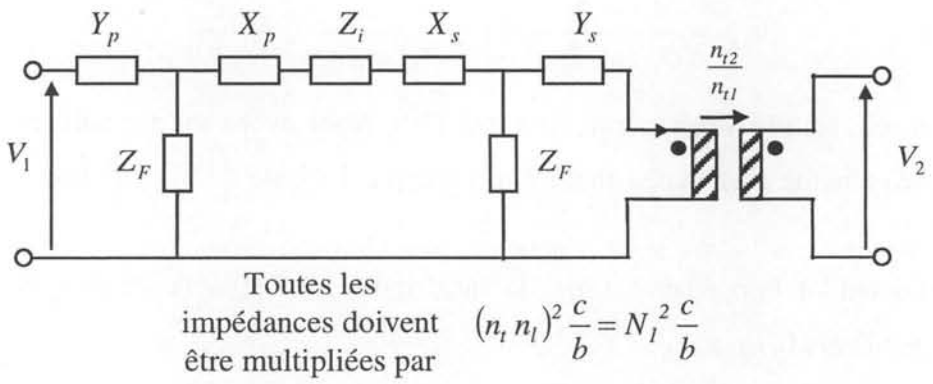



Figure 27 : Représentation d'un transformateur à deux enroulements multicouches

Lorsque les enroulements sont fortement couplés, les impédances parallèles (Figure 27) sont beaucoup plus grandes que les impédances séries. Dans ces conditions :

$$Zsc = (n_{l1}\, n_{t1})^2 \frac{c}{b}\left(Y_p + X_p + Z_i + X_s + Y_s\right) \qquad (32)$$

Où l'on trouve les paramètres suivants :

$n_t$ nombre de spires par couche et $n_l$ nombre de couches de l'enroulement,

$c, b$ : épaisseur et hauteur de la lame de Dowell équivalente à une couche de spires,

$Z_i$ : impédance de l'isolant inter-enroulement (inductance pure) $Z_i = j\,\mu_0\, a_i\, \omega$,

$X$ et $Y$ : impédances du circuit équivalent à un enroulement multicouches. Les indices $p$ et $s$ distinguent les bobinages primaire ($p$) et secondaire ($s$).

Durant cette étude, nous supposons qu'un seul enroulement est le siège de courants induits. Les résultats établis sont directement utilisables si le second enroulement est en fil de Litz ou s'il est identique au premier. Compte tenu de ces conditions restrictives, les indices $p$ et $s$ sont omis.

D'autre part, tant que l'on s'intéresse à la contribution du cuivre d'un enroulement à l'impédance en court-circuit d'un transformateur, il est commode de séparer du reste l'impédance liée à l'air emprisonné entre les couches. Cet air ne fait qu'ajouter une inductance pure constante dont nous allons estimer la valeur. La contribution $Zs_p$ de enroulement primaire à L'impédance *Zsc* admet la présentation suivante :

$$\begin{aligned} Zs_p &= (n_t\, n_l)^2\, \frac{c}{b}(X+Y) \\ Zs_p &= (n_t\, n_l)^2\, \frac{c}{b}\left[ Z_1 \frac{2n_l^{\,2}+1}{3n_l} + \frac{Z_2}{n_l} + Z_a \frac{1}{6n_l}(n_l-1)(2n_l-1) \right] \end{aligned} \tag{33}$$

L'air compris entre les couches de cuivre a une influence très simple : il ajoute une inductance ($l_{air}$) en série. Puisque $Z_a = \mu_0 \,.\, a_{air}$, on a :

$$l_{air} = (n_t\, n_l)^2\, \frac{c}{b} \mu_0\, a_{air}\, \frac{(n_l-1)(2n_l-1)}{6n_l} \tag{34}$$

Nous voyons apparaître $n_t^{\,2}$ et l'inductance d'une couche d'air ($\mu_0\, a_{airp}\, \frac{c}{b}$). Pour comprendre la dépendance vis-à-vis de $n_l$ observons que l'excitation qui règne dans les couches d'air successives croît quand on s'éloigne du noyau. Elle découle du théorème d'Ampère et est, de ce fait, proportionnelle au numéro de la couche. Après la i$^{ème}$ couche, elle vaut :

$$H_{0n} = \frac{n_t\, I}{b}\, i \tag{35}$$

L'énergie totale stockée dans l'air en découle directement :

$$W = \frac{1}{2}\mu_0 \sum_{i=1}^{nl-1}\left(i\, n_t \frac{I}{b}\right)^2 a_{air}\, b\, c = \frac{1}{2} l_{air} I^2 \qquad (36)$$

On utilise ici, la somme des carrés des n premiers entiers [Spiegel74] :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

qui implique : $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = 1 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

En exploitant la seconde relation, on évalue (36) :

$$l_{air} = \mu_0 {n_t}^2 \frac{a_{air}\, c}{b} \sum_{i=1}^{nl-1} i^2 = \mu_0 {n_t}^2 {n_l}^2 \frac{a_{air}\, c}{b} \frac{(n_l - 1)(2 n_l - 1)}{6 n_l}$$

Cette expression coïncidant avec (34), étudions maintenant l'impédance du cuivre de l'enroulement, que nous notons $Zs_{cu}$, et qui s'écrit :

$$Zs_{cu} = (n_t\, n_l)^2 \frac{c}{b}\left[ Z_1 \frac{2{n_l}^2 + 1}{3 n_l} + \frac{Z_2}{n_l} \right] \qquad (37)$$

Pour le cuivre, il est commode d'utiliser les variables suivantes :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\, \omega\, \mu}}, \quad \text{et} \quad X = \frac{a}{\delta} \qquad \text{Pour} \quad X = 1, \quad f = f_p = \frac{1}{\pi\, a^2\, \mu_0\, \sigma} \qquad (38)$$

On désigne $f_p$ par "fréquence de peau" et on a $f = f_p\, X^2$.

Enfin, il est commode de faire apparaître la résistance continue de l'enroulement $rsdc$ :

$$rsdc = \frac{1}{\sigma} \frac{c}{a\, b} {n_t}^2\, n_l \qquad (39)$$

Grâce à ces variables, l'impédance $Zs_{cu}$ prend une allure plus compacte que l'on peut exprimer à l'aide de fonctions hyperboliques :

$$Zs_{cu} = rsdc\; u \left( coth(u) - \frac{2}{3} th(u) + \frac{2}{3} {n_l}^2\, th\left(\frac{u}{2}\right) \right) \quad \text{où } u = (1 + j) X \qquad (40)$$

On constate que cette fonction de la fréquence ne dépend que de trois constantes : la résistance $rsdc$, la fréquence $f_p$ (qui dépend du diamètre des conducteurs) et le nombre de couches $n_l$.

### 5.2.2. Comportement fréquentiel, incidence du nombre de couches.

En séparant les parties réelles et imaginaires de $Zs_{cu}$ , on accède à sa résistance série et à son inductance série. Observons comment varie ces grandeurs en fonction de la fréquence et du nombre de spires.

La Figure 28 présente l'influence du nombre de couches sur la résistance série d'un enroulement multicouche. Les coordonnées sont désormais réduites par rapport, respectivement, à la résistance en continu et à la fréquence de peau. Rappelons que $f = f_p \,.\, X^2$.

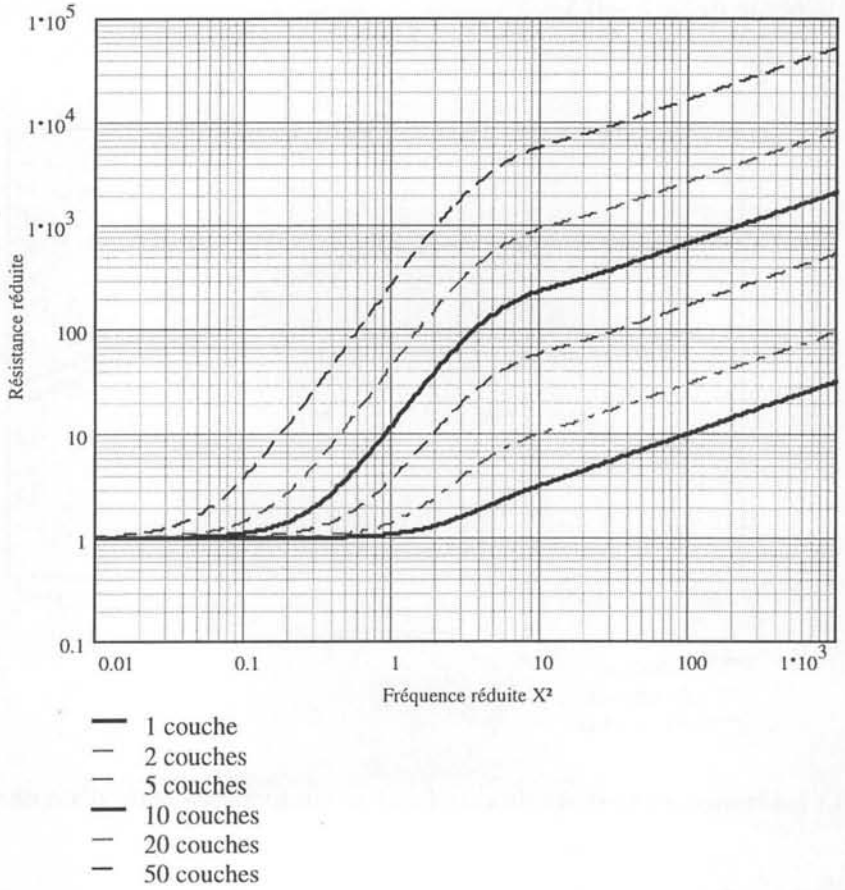



Figure 28 : Influence du nombre de couche sur la résistance série d'un enroulement.

En basse fréquence ( $X^2 < 0.01$ ), l'asymptote horizontale coïncide avec la résistance continue de l'enroulement. Pour plus de trois couches, on constate que, lorsque f augmente, la résistance de l'enroulement est d'abord proportionnelle à $f^2$. Ensuite elle varie en $f^{0.5}$. Pour une couche unique, l'évolution en $f^2$ est peu visible, l'enroulement semblant passer

directement d'une résistance constante à une résistance proportionnelle à $f^{0.5}$. L'évolution proportionnelle à $f^{0.5}$ caractérise un comportement où la section effective des conducteurs est davantage liée à l'épaisseur de peau qu'aux dimensions de sa section. Les effets de peau et de proximité en sont responsables.

Observons maintenant la variation de l'inductance avec la fréquence (Figure 29). On remarque immédiatement que cette fonction dépend peu du nombre de couches. En basse fréquence, l'inductance est constante et son expression (45) est établie au paragraphe suivant. Lorsque la fréquence augmente, les courants induits s'opposent à l'induction qui les crée et l'inductance décroît avec une pente égale à – 0.5.

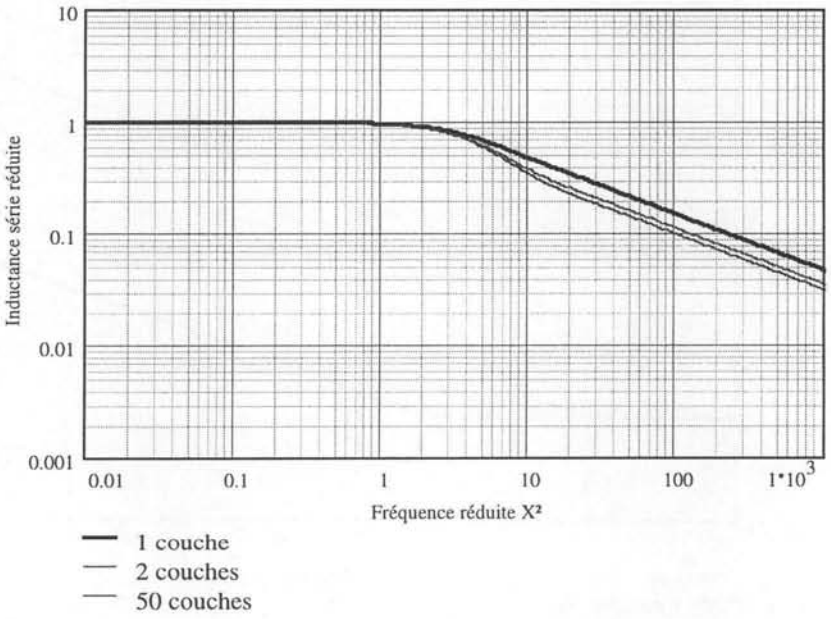



Figure 29 : Influence du nombre de couches sur l'inductance série d'un enroulement.

Nous retrouvons ces comportements sur la courbe du module de l'impédance (Figure 30). En basse fréquence le comportement résistif domine, si bien que le module est constant. En haute fréquence, on retrouve une variation en $\sqrt{f}$. Pour la zone intermédiaire, appelée "moyenne fréquence", le comportement inductif est prépondérant, ce qui explique la pente unitaire.

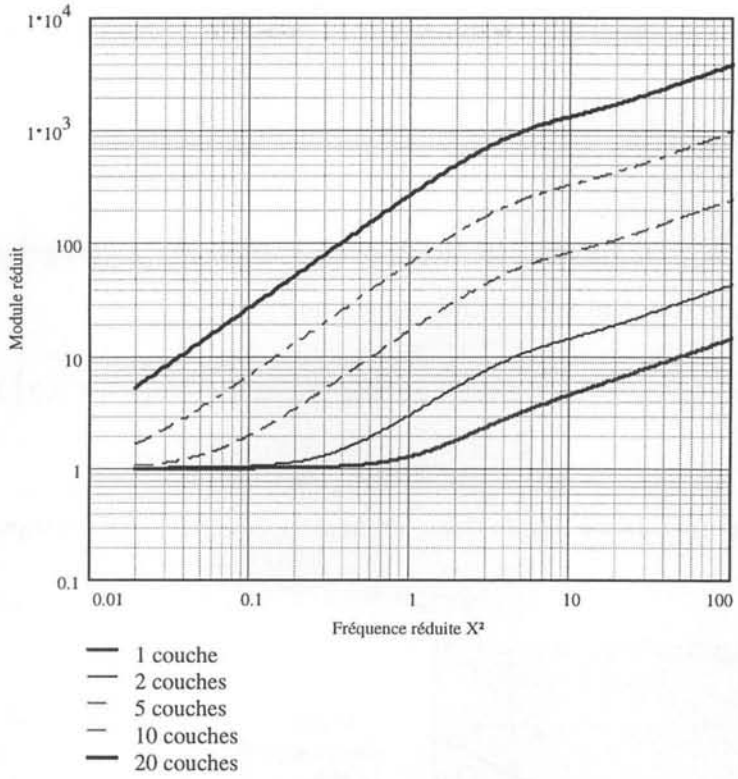



Figure 30 : Influence du nombre de couches sur

le module de l'impédance série d'un enroulement.

### 5.2.3. Comportement asymptotique.

Pour apprécier le comportement de l'impédance en basse fréquence, le plus commode est de développer $Zs_{cu}$ (38) en série de Mac Laurin. Puisque :

$$coth(u) = \frac{1}{u} + \frac{u}{3} + \ldots \qquad th(u) = u - \frac{u^3}{3} + \ldots$$

il vient :

$$Zs_{cu} = rsdc\left(1 + \frac{u^2}{3} n_l^{\,2}\right) = rsdc + \frac{rsdc}{3} n_l^{\,2}\, 2j\frac{f}{f_p} \tag{44}$$

Le premier terme est la résistance continue tandis que le second apparaît comme un terme inductif. Appelons "inductance basse fréquence" la quantité *lsdc* définie par (45) :

$$lsdc = rsdc\frac{n_l^{\,2}}{3}\frac{1}{\pi f_p} \tag{45}$$

Cette inductance, dont l'introduction est parfois commode, n'est pas un paramètre supplémentaire : comme on le vérifie sur (45), elle s'exprime en fonction des trois paramètres déjà recensés pour $Zs_{cu}$.

En haute fréquence, la variable $u$ tend vers l'infini et les tangentes et cotangentes hyperboliques de (38) tendent vers l'unité, si bien que :

$$Zs_{cu} = rsdc\, n_l \frac{2u}{3}\left(n_l{}^2 + 0.5\right) \qquad |Zs_{cu}| = rsdc \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(n_l{}^2 + 0.5\right) X \tag{46}$$

Le module de cette impédance admet donc, en haute fréquence, une asymptote de pente 0,5.

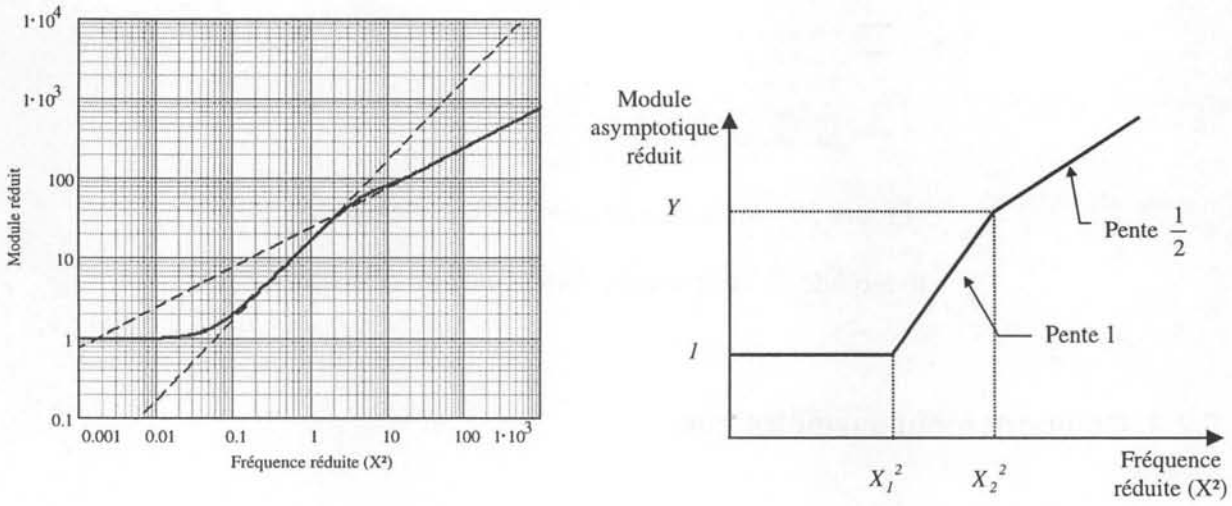



Figure 31 : Comportement asymptotique du module.

Les abscisses réduites des cassures du module asymptotique se déduisent facilement :

$$X_1{}^2 = \frac{3}{2}\frac{1}{n_l{}^2} \qquad X_2{}^2 = 2\left(1 + \frac{0.5}{n_l{}^2}\right)^2 \tag{47}$$

Lorsque $X^2 = X_2{}^2$, le module réduit vaut : $Y = \frac{4}{3} n_l{}^2 \left(1 + \frac{0.5}{n_l{}^2}\right)^2$.

A titre d'illustration, nous avons superposé, sur la Figure 33, les comportements exacts et asymptotiques pour différents nombres de spires (1, 2, 10). Nous retrouvons, même pour $n_l = 1$ (enroulement monocouche), les trois zones asymptotiques.

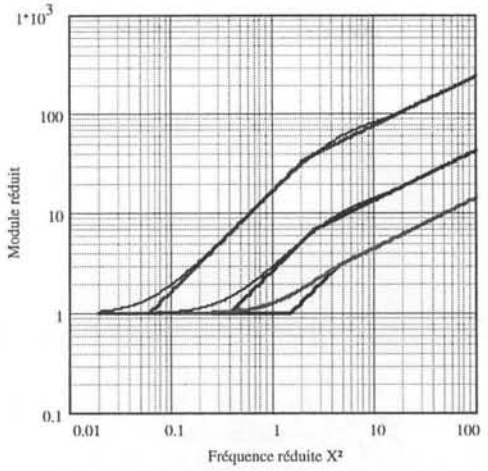



Figure 32 : Variation du module. Comparaison asymptotes – courbes exactes pour un bobinage réparti sur 1, 2 et 10 couches.

Puisque les asymptotes sont assez proches des courbes, il nous a paru intéressant de résumer (Tableau 1) l'ensemble des équations des asymptotes des trois grandeurs qui caractérisent un enroulement. Nous avons également reporté (Tableau 2) les coordonnées de leurs intersections.

| Gamme de fréquence | BF | MF | HF |
|---|---|---|---|
| Module | *rsdc* | $rsdc\frac{2n_l^{\,2}}{3}X^2$ | $rsdc\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(n_l^{\,2}+0.5\right)X$ |
| Résistance | *rsdc* | $rsdc\frac{1}{9}\left(n_l^{\,2}-0.2\right)X^4$ | $rsdc\ \frac{2}{3}\left(n_l^{\,2}+0.5\right)X$ |
| Inductance | *lsdc* | *lsdc* | $lsdc\left(1+\frac{0.5}{n_l^{\,2}}\right)\frac{1}{X}$ |

Tableau 1 : Equations des diverses asymptotes.

### 5.2.4. Relations utilisables en conception.

Lorsqu'un concepteur de composant bobiné étudie un transformateur (ou une inductance), il doit évaluer, au moins approximativement, les pertes dans son composant. Les calculs n'utilisant que la résistance basse fréquence sont généralement insuffisants, même si on leur adjoint la prise en compte de l'effet de peau à l'aide, par exemple, de la formule de Levasseur [Ferrieux87]. Les pertes du composant sont ainsi gravement sous-estimées.

| | 1ère intersection | 2ème intersection |
|---|---|---|
| Module | $X_{m1}{}^2 = \frac{3}{2}\frac{1}{n_l{}^2}$<br>$rsdc$ | $X_{m2}{}^2 = 2\left(1+\frac{0.5}{n_l{}^2}\right)^2$<br>$rsdc\frac{4}{3}\left(\frac{n_l{}^2+0.5}{n_l}\right)^2$ |
| Résistance | $X_{r1}{}^2 = \frac{3}{\sqrt{n_l{}^2-0.2}}$<br>$rsdc$ | $X_{r2}{}^2 = 6^{2/3}\left(\frac{n_l{}^2+0.5}{n_l{}^2-0.2}\right)^{2/3}$<br>$rsdc\frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\frac{\left(n_l{}^2+0.5\right)^{\frac{4}{3}}}{\left(n_l{}^2-0.2\right)^{\frac{1}{3}}}$ |
| Inductance | $X_l{}^2 = lsdc\left(1+\frac{0.5}{n_l{}^2}\right)^2$ | |

Tableau 2 : Coordonnées des intersections des asymptotes.

Les calculs précédents permettent d'améliorer l'estimation des pertes. En premier, on peut estimer la résistance en alternatif *Rac* à l'aide des relations asymptotiques. Contrairement aux relations publiées antérieurement, ces résultats prennent en compte l'effet de proximité.

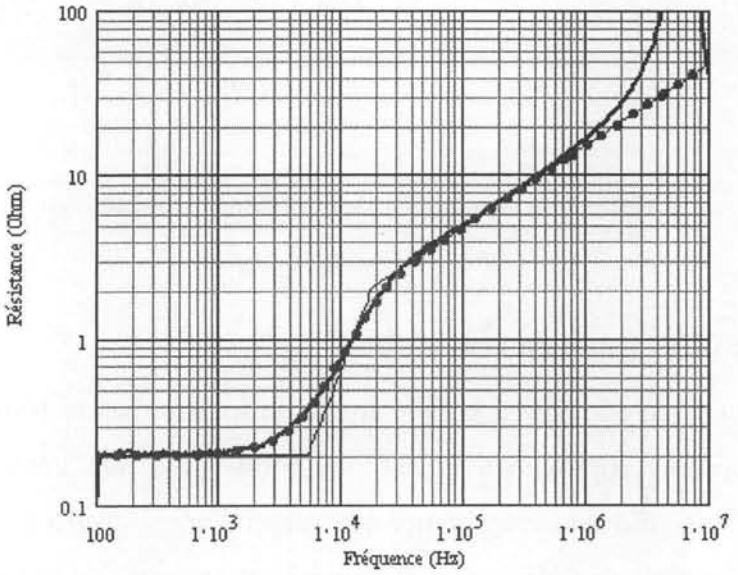



Figure 33 : Résistance série. Comparaison : mesure - comportement asymptotique - expression approché (48) (pointillés).

D'autre part, en partant du comportement asymptotique, nous avons élaboré une formule analytique, facile à calculer, qui fournit une bonne approximation de la résistance série. La présence de $n_l$ atteste de la prise en compte des effets de proximité :

$$X^2 = \frac{f}{f_p}, \quad A = \frac{1}{9}\left(n_l^{\,2} - 0.2\right), \quad B = \frac{1}{6^2}\left(\frac{n_l^{\,2} - 0.2}{n_l^{\,2} + 0.5}\right)^2$$
$$Rac = rsdc\frac{1 + A.X^4}{\sqrt{1 + B.X^6}} \tag{48}$$

L'écart visible sur la Figure 33 au-dessus de 1 MHz entre la courbe expérimentale et les approximations théoriques est imputable à une résonance liée aux capacités. Il diminue dès que nous introduisons les capacités comme indiqué au chapitre précédent.

Pour estimer les pertes cuivre dans son composant, le concepteur dispose maintenant de deux repères. Soit il utilise les relations asymptotiques, soit il exploite l'expression (48).

## *5.3. Identification expérimentale des paramètres.*

### 5.3.1. Principe de la méthode.

Si on admet l'exactitude du modèle en couches développé précédemment, pour identifier le comportement du bobinage en fonction de la fréquence il suffit de trouver les trois grandeurs caractéristiques déjà évoquées. Nous allons donc chercher des repères facilement mesurables, permettant de déduire ces trois grandeurs.

L'idéal serait de trouver des repères qui donnent l'une des grandeurs sans dépendre des autres car cela faciliterait la détermination des suivantes. Dans cette optique, certaines fréquences semblent intéressantes puisqu'elles ne dépendent pratiquement pas du nombre de couches *nl*. Cependant, le repérage sur les courbes réelles n'est pas aussi facile que sur un diagramme asymptotique. Il suppose que le phénomène est observable dans un large domaine fréquentiel où aucun autre ne vient le perturber ou le masquer. C'est pourquoi nous cherchons ici un ou, de préférence, plusieurs repères facilitant la déduction de chaque paramètre et autorisant des recoupements.

La résistance continue de l'enroulement est un premier paramètre facilement mesurable. Dès qu'elle est connue, il ne reste à déduire que deux paramètres : la fréquence $f_p$, qui nous conduira au diamètre des conducteurs, ainsi que le nombre *nl* de couches de l'enroulement.

### 5.3.2. Recherche du diamètre des conducteurs.

La fréquence $f_p$ est obtenue en observant la courbe de l'inductance. La variation de l'inductance présente une dérivée négative maximale à la fréquence $F_{\min}$ (Figure 34). Notons que nous calculons la dérivée de l'inductance et non de son logarithme pour que ce résultat soit insensible à l'ajout d'une constante (air !). Une étude numérique montre que cette fréquence est liée à $f_p$ par un simple coefficient, si bien que la déduction de $f_p$ est immédiate.

$$f_p = \frac{F_{\min}}{4.92} \tag{49}$$

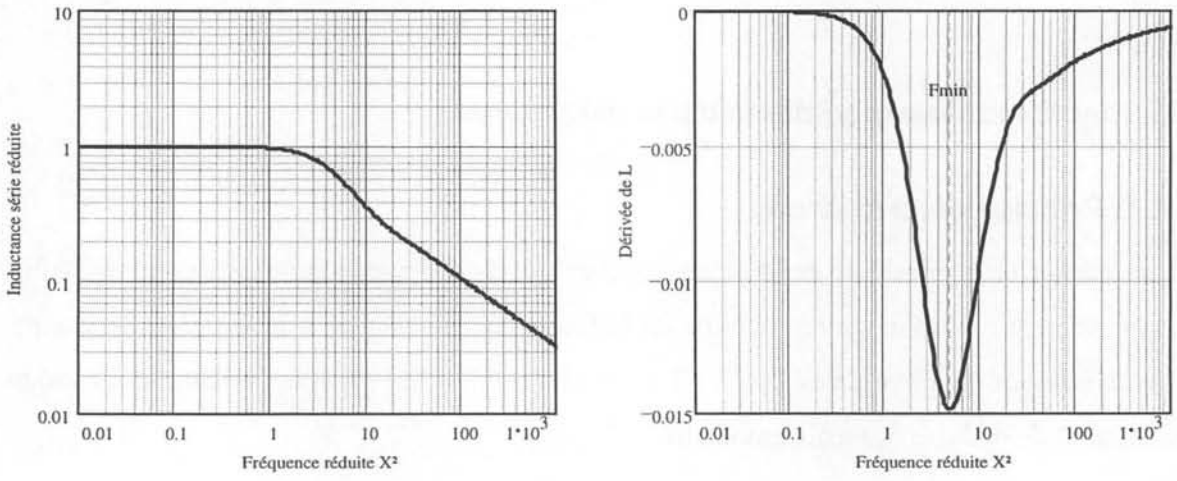



Figure 34 : Variation de l'inductance d'un enroulement (4 couches) et de sa dérivée.

D'après (38), La déduction de $a_{cu}$ passe par la connaissance de $\sigma_{eq}$ qui exige celle du pas de bobinage *hfer / nt*. Il faut donc savoir comment sont réparties les spires d'une couche (ici $hfer = 3{,}5cm$ et $n_t = 25$). En regroupant (38) et les expressions introduites par la méthode de Dowell (paragraphe 3.4.2.), nous obtenons une relation qui donne le diamètre $d$ des conducteurs cylindriques. Celle-ci prend une forme simple (50) si l'on introduit l'épaisseur de peau $\delta_p$ dans le cuivre à la fréquence $f_p$.

$$d = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt[3]{\delta_p{}^2 \frac{hfer}{n_l}} \tag{50}$$

### 5.3.3. Détermination du nombre de couches.

Nous proposons deux méthodes pour déterminer le nombre de couches $n_l$ d'un enroulement.

1/ Les asymptotes de pentes 2 et 0.5 de la résistance série se rejoignent à une ordonnée qui vaut (Tableau 2):

$$rsdc \frac{2\sqrt[3]{6}}{3} \frac{\left(n_l{}^2 + 0.5\right)^{\frac{4}{3}}}{\left(n_l{}^2 - 0.2\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{51}$$

Cette relation, très sensible à $n_l$, permet, moyennant la résolution numérique d'une équation d'ordre 4, de déduire le nombre de couches de l'enroulement. Elle n'est utilisable que si $n_l > 5$ car, lorsque nombre de couches est petit, l'asymptote de pente 2 n'est pas assez visible.

2/ Une autre méthode permet de déduire $n_l$. Elle s'appuie sur la fréquence $F_{2rsdc}$ pour laquelle la résistance de l'enroulement est égale au double de sa valeur en continu. Le rapport de cette fréquence avec $F_{\min}$ (déterminé précédemment) permet de conclure :

$$n_l = 0.613 \sqrt{\left(\frac{F_{\min}}{F_{2rsdc}}\right)^2 + 1.3} \tag{52}$$

La principale cause d'imprécision de ces deux méthodes tient au fait que la valeur de *rsdc* mesurée inclut des résistances de liaison et de connexion non impliquées dans les phénomènes concernés…

### 5.3.4. Mesure directe de l'inductance basse fréquence.

Rappelons que l'inductance mesurée inclut de nombreuses contributions additives (air en particulier). L'inductance que nous voulons évaluer ici, exclusivement liée au cuivre d'un enroulement, n'est donc pas directement accessible à la mesure. Pour parvenir à cette évaluation, nous avons d'abord remarqué que la courbe de l'inductance réduite (Figure 29) dépendait peu de son nombre de couches. Nous avons ensuite montré numériquement que la diminution *Δls* de cette inductance, à la fréquence $F_{\min}$, était proportionnelle à sa valeur basse fréquence *lsdc* si bien que :

$$lsdc = 2.481\,\Delta ls \frac{1}{1-\frac{0.188}{n_l^{\,2}}} \quad \text{où} \quad \Delta ls = lsdc - ls_{F\,min} \tag{53}$$

Cette évaluation directe peut être comparée au résultat du calcul mené à partir des trois paramètres caractéristiques déjà évalués. Ceci donne une idée de la pertinence du modèle.

## *5.4. Identification d'un prototype.*

### 5.4.1. Présentation du prototype et relevés expérimentaux.

Nous allons maintenant illustrer la méthode d'identification en l'appliquant au transformateur à deux enroulements caractérisé dans le chapitre 2. Ce transformateur a été spécialement dimensionné pour présenter de fortes pertes par courants induits. Ses principaux paramètres de construction sont donnés au paragraphe 6.1.

Les mesures sont effectuées à l'aide d'un analyseur HP4194A qui donne accès soit à la représentation module argument (Figure 35), soit à la décomposition *Ls-Rs* (Figure 36).

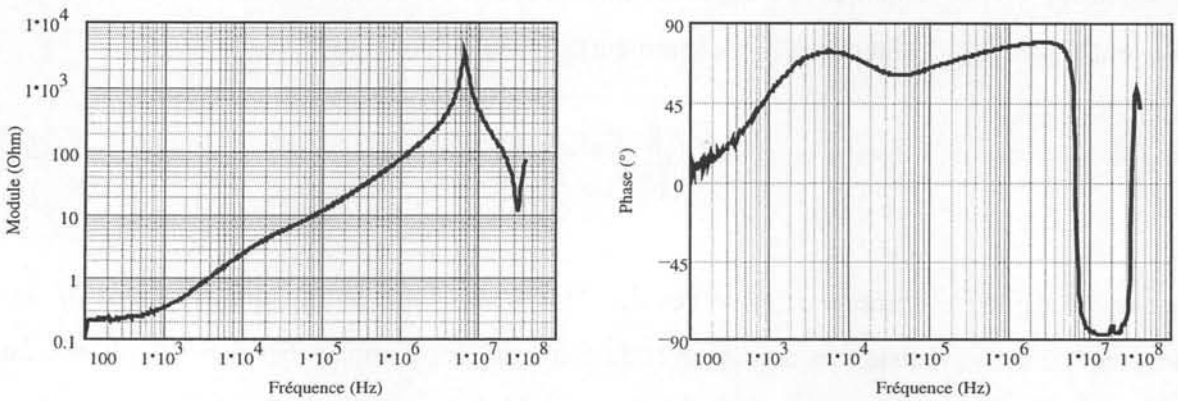



Figure 35 : Impédance vue du primaire, secondaire en court-circuit. Module et phase.

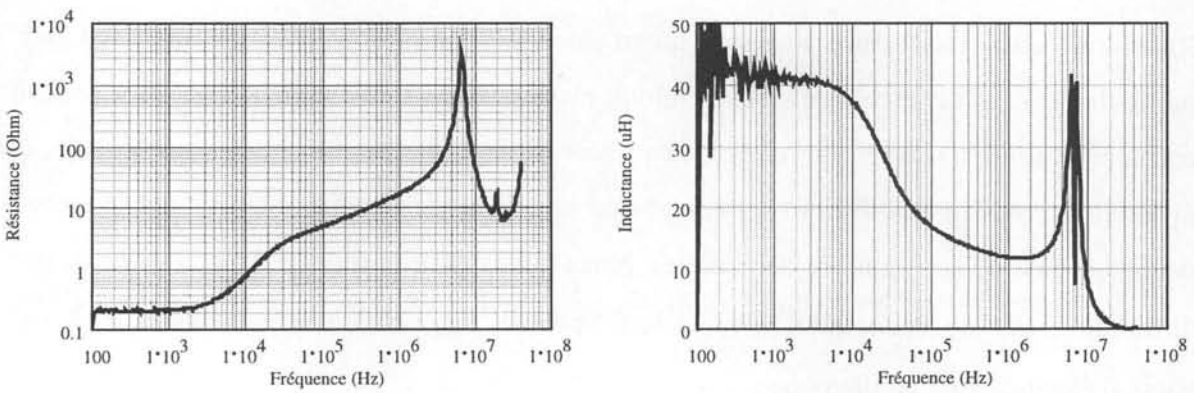



Figure 36 : Impédance vue du primaire, secondaire en court-circuit. Représentation $Rs - Ls$ .

Durant cette mesure, les deux enroulements interviennent et leurs impédances série s'ajoutent. Cependant, étant donné l'identité de ces enroulements (même couches et même nombre de couches), tout se passe comme si l'impédance d'une couche était doublée. Si on veut être plus précis et tenir compte de la différence des longueurs moyennes des spires de l'enroulement intérieur et extérieur, il suffit de remplacer $rsdc$ d'un enroulement par $rsdc_p + rsdc_s$ plutôt que par $2\,rsdc$.

### 5.4.2. Détermination des trois paramètres caractéristiques.

La résistance en continu est facilement déductible de ces essais (Figure 36). On relève :

$$rsdc = 0{,}2\,\Omega .$$

La fréquence $F_{min}$ est celle pour laquelle la dérivée de $Ls$ (Figure 36) est minimale. La Figure 37, montre que la courbe dérivée est très bruitée en basse fréquence. Pour réduire cette gêne, nous effectuons une moyenne glissante, sur un intervalle dont les fréquences extrêmes sont dans un rapport 1.4 et qui est symétrique par rapport à la fréquence pour laquelle est calculée la moyenne. De cette façon, nous localisons cette fréquence (Figure 37) vers 20 kHz. Nous en déduisons que $f_p$ est voisine de 4 kHz et $\delta_p$ = 1 mm. A l'aide de (50) nous parvenons au diamètre du fil :

$$d = 1{,}26 \text{ mm}$$

Rappelons que le diamètre exact est 1,2 mm Nous avons utilisé les données $hfer$ = 35 mm et $n_t$ = 25 pour déterminer le pas de bobinage $hfer / n_t$ = 1,4 mm.

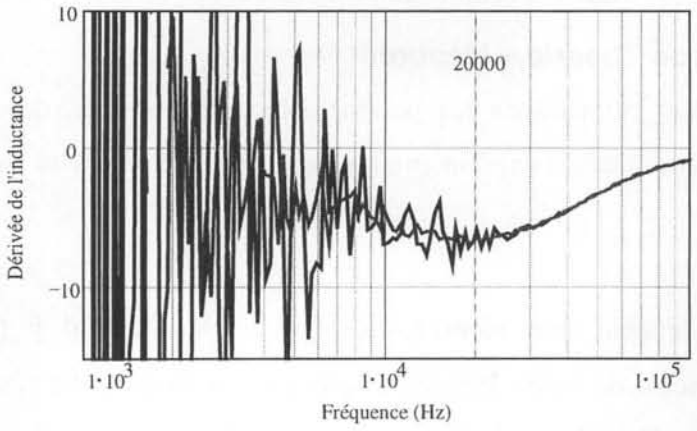



Figure 37 : Dérivée de l'inductance $Ls$ : calcul direct et courbe lissée.

La Figure 36 permet d'obtenir la fréquence pour laquelle la résistance série a doublé. On relève $F_{2rsdc} = 5,6kHz$ ce qui, connaissant $F_{min}$, permet d'obtenir le nombre de couches de l'enroulement. On obtient ainsi 2,3 couches. Ce paramètre est un peu sous estimé puisqu'en réalité le bobinage comprend 3 couches.

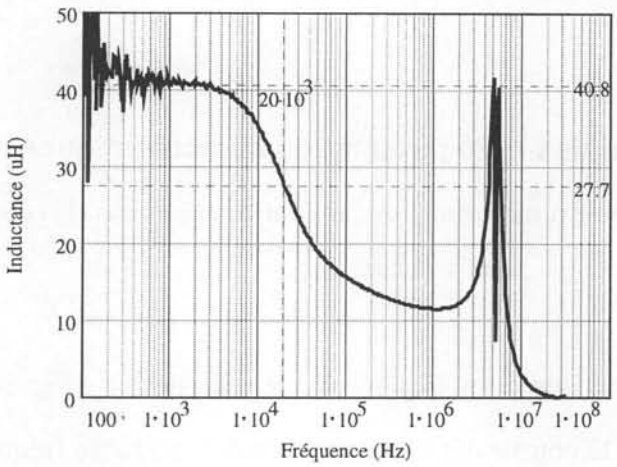



Figure 38 : Inductance série totale.

Nous allons maintenant évaluer l'inductance de l'enroulement en basse fréquence. A la fréquence $F_{min}$, l'inductance a diminué de $13,1\mu H$ (Figure 38) : en basse fréquence, $lsdc = 40,8\mu H$, tandis qu'à $F_{min}$, l'inductance vaut $ls_{F_{min}} = 27,7\mu H$. L'équation (53) s'écrit :

$$lsdc = 2,481\,\Delta ls \frac{1}{1 - \frac{0,188}{n_l^{\,2}}} \quad \text{avec} \quad \Delta ls = lsdc - ls_{F_{min}} \tag{54}$$

Ce calcul donne $l_{sdc} = 33,2\mu H$ et l'inductance de l'air est le complément à $40,8\ \mu H$ : $7,6\mu H$.

### 5.4.3. Comparaison Théorie – Mesure.

Maintenant que nous connaissons les paramètres caractéristiques des enroulements, nous pouvons comparer les courbes expérimentales avec celles relatives au modèle retenu (Figure 39).

Deux phénomènes rendent notre identification critiquable. D'abord, la résistance des fils de connexion et des picots de sortie augmente la valeur mesurée. Cette résistance additionnelle doit être supposée indépendante de la fréquence car elle n'est par concernée par les champs magnétiques agissant sur l'enroulement. L'incidence de cette résistance est susceptible d'expliquer l'erreur commise sur $n_l$ car elle repousse $F_{2rsdc}$.

Ensuite, la résistivité de la couche est corrigée par la porosité de Dowell si bien que l'inductance basse fréquence, la résistance et la fréquence de peau ne sont plus liées d'une façon immuable. Ici nous avons surmonté cette difficulté parce que nous connaissions le pas de bobinage $Hfer / n_t$ . En pratique, c'est 4 paramètres (au lieu de 3) qu'il faudra identifier et même 5 si on ajoute la résistance constante évoquée plus haut.

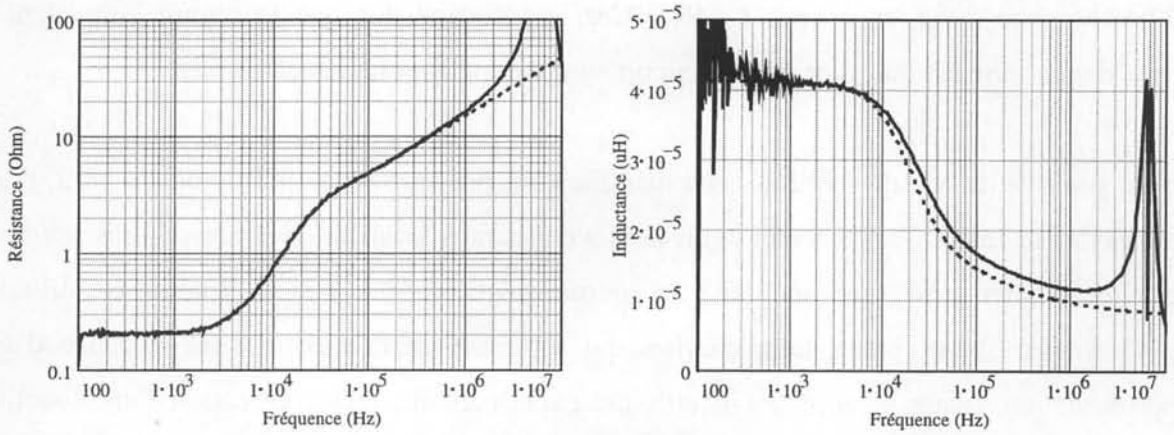



Figure 39 : Impédance d'un transformateur en court-circuit.

Comparaison : mesure (gras) - théorie (pointillés).

En dépit de ces lacunes, l'accord observé est correct : moins de 5% d'écart sur la résistance jusqu'à 600 kHz. Cela valide, dans les limites indiquées ci-dessus, à la fois la théorie développée pour la prise en compte des courants induits et la méthode d'identification de ses paramètres.

Bien entendu, notre transformateur a été conçu conformément aux hypothèses géométriques retenues pour le calcul et il faudra, à l'avenir, observer, comment ce modèle s'applique à des transformateurs de structures différentes (planar par exemple). Il faudra également apprendre à identifier les paramètres des enroulements lorsque ceux-ci sont plus nombreux ou qu'ils diffèrent par le diamètre de leurs fils, leurs nombres de couches…

Les paramètres déduits de l'identification précédente fournissent un point de départ suffisamment précis pour une recherche par régression. A la lumière du travail expérimental, il semble cependant souhaitable de reprendre cette méthode en considérant, dès le départ, que 5 paramètres doivent être déterminés. Il faudra également tenir compte du fait que certains points de repère choisis sont assez sensibles aux incertitudes de mesure. En basse fréquence la résistance à mesurer est très faible. Pour la mesurer précisément, il faut effectuer des relevés

lents pour obtenir des courbes faiblement bruitées, réaliser la compensation de court-circuit au ras des pattes du composant et utiliser de très bons courts-circuits. La résistance continue se mesure plus précisément à l'aide d'un micro-ohmètre mais il n'est par évident que cela accroisse la précision du rapport *Rac / rsdc* (changement de câblage !).

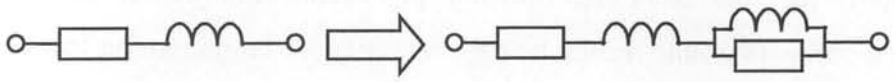
En revanche, puisque le modèle ne prend pas en compte les aspects capacitifs, il est normal d'observer une divergence vers 1 MHz. Ceci est corrigé dès que le circuit équivalent à l'impédance série est introduit dans le circuit complet incluant les capacités.

Outre son rôle de test du modèle, cette identification présente un autre intérêt. En effet, nous savons dès le départ que le circuit équivalent à constantes localisées que nous allons chercher pour représenter cette impédance ne peut fournir qu'une approximation. Il aurait été difficile de minimiser l'écart entre deux courbes qui diffèrent de la théorie l'une à cause d'une approximation, l'autre à cause des incertitudes expérimentales. L'identification d'une fonction analytiquement connue servira de "lissage" et permettra de ne plus se soucier des erreurs expérimentales durant la phase de recherche du circuit équivalent.

## 6. Représentation précise par un circuit à constantes localisées.

Nous allons maintenant chercher un circuit composé de composants passifs standards, qui présente une impédance identique à celle dont nous avons établi l'expression précédemment. A priori, cela semble facile en basse fréquence puisque, après un comportement résistif, on remarque que le module est proportionnel à $f$, ce qui fait immédiatement penser à une inductance. En revanche, dès que l'on atteint l'asymptote haute fréquence, aucun composant standard ne procure, seul, une impédance proportionnelle à $\sqrt{f}$.

Il y a plusieurs années que notre équipe a proposé de rendre compte grossièrement de cette variation en fractionnant l'inductance et en shuntant une partie par une résistance.



Dans quelques cas, nous avons été amenés à introduire deux cellules $Lp-Rp$ pour rendre compte de l'observation expérimentale. Récemment, des mesures calorimétriques [Fouassier98-2] ont permis de relever la résistance série avec une précision telle qu'il a fallu

introduire six cellules $Lp - Rp$ pour en rendre compte. La recherche intuitive des valeurs de ces composants est difficile et fastidieuse. Nous proposons ci-dessous un mode de calcul qui se prête bien à l'automatisation.

### 6.1. Quelles courbes rapprocher ?

Une impédance est toujours la transformée de Fourier d'une fonction causale. De ce fait, ses parties réelle et imaginaire sont liées, si bien que, dans un premier temps, nous allons nous efforcer de rapprocher le module de la fonction d'essai de celui de la fonction cible. Quand ce but sera atteint, nous vérifierons que la partie réelle de la fonction d'essai est proche de celle de la fonction cible et qu'il en est de même pour les parties imaginaires.

L'impédance d'un circuit à constantes localisées s'écrit toujours sous la forme d'une fraction rationnelle de la variable de Laplace $p$. Si l'on met à part la résistance continue $r$, on peut adopter, pour l'impédance, une expression de type :

$$Z(p) = r + L\,p\,\frac{(1+\tau_2 p)(1+\tau_4 p)...(1+\tau_{2n} p)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_3 p)...(1+\tau_{2n-1} p)} \qquad (54)$$

L'idée directrice de ce choix est que, pour des fréquences de coupures successives $(f_{ci} = 1/(2\pi\tau_i))$ réparties régulièrement sur une échelle logarithmique, le diagramme asymptotique associé à $Z(p)$ présente, dans un domaine de fréquence de largeur arbitraire, une pente moyenne égale à 0.5 (Figure 40).

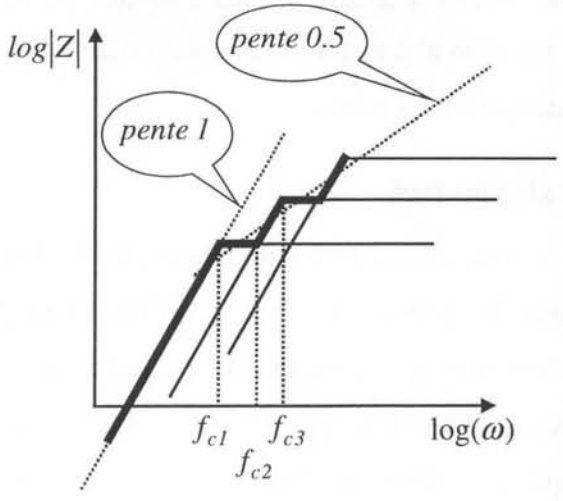



Figure 40 : Fonction de transfert à constantes localisées présentant une pente 0.5.

En adoptant respectivement pour $r$ et $L$ les valeurs *rsdc* et *lsdc* attribuées à l'impédance en basse fréquence, seules les constantes de temps restent à déterminer. Dès qu'elles le sont, une décomposition de la fraction rationnelle (54) en éléments simples de 1$^{ière}$ espèce conduit directement aux valeurs des résistances et inductances du circuit cherché.

### *6.2. Comment les rapprocher ?*

#### 6.2.1. Développements en série et moindres carrés.

Nous avons vu, au moment de représenter les lames, comment un développement en série de Mac Laurin permettait de passer de l'expression d'une impédance à sa représentation par un circuit simple à constantes localisées. Pendant un certain temps, nous avons essayé d'étendre le domaine de validité de cette représentation en tenant compte de termes d'ordre supérieur. En vain. Quelquefois, le développement mathématique demandait d'introduire une impédance variant comme $f^n$ avec $|n| > 1$. Plus souvent, un composant supplémentaire était introduit mais son effet principal consistait à améliorer la précision en basse fréquence en ne repoussant que très légèrement la limite supérieure de validité fréquentielle. En définitive, pour obtenir un schéma qui soit valide sur une large plage de fréquence (deux ou trois décades), cette méthode mène soit à des impossibilités soit à un très grand nombre de composants.

Il est également envisageable de minimiser l'écart quadratique de la fonction d'essai par rapport à la courbe visée. Quelles que soient les précautions prises, une telle méthode réduit l'écart moyen sur un domaine de fréquence choisi, mais rien n'assure que cet écart va être réparti uniformément sur tout le domaine. Nous sommes parvenus ainsi à des résultats présentant une précision excellente dans un large domaine de fréquence mais, simultanément, des écarts inacceptables dans d'autres zones…

#### 6.2.2. Ecart relatif maximum fixé.

Après de nombreux essais, nous avons décidé de tolérer, dès le départ, un certain écart relatif sur le module et de fixer la gamme de fréquences dans laquelle, cette précision serait respectée. Pour illustrer cet objectif, la Figure 42 présente la variation, en fonction de la fréquence, du rapport des modules fonction d'essai / fonction cible. Nous vérifions que la représentation basse fréquence déduite du développement limité est idéale et que l'écart, fixé ici à $\pm 1/100$, est respecté dans un large domaine de fréquence.

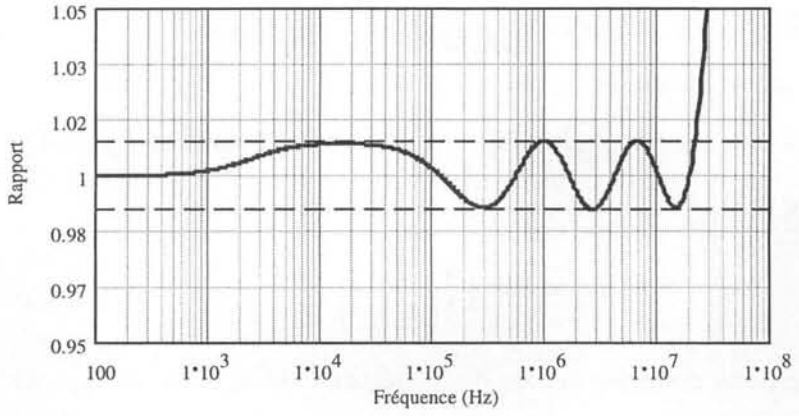



Figure 41 : Module du quotient fonction essai sur fonction cible.

Résultat obtenu à l'aide de 3 cellules $Lp - Rp$ .

### *6.3. De la fonction de transfert aux éléments du circuit.*

#### 6.3.1. Topologie du circuit choisi. Calcul des éléments.

Pour représenter les effets liés aux courants induits dans le cuivre, nous avons choisi d'utiliser une association en série de cellule *Lp-Rp* (Figure 42). Ce circuit présente une fonction de transfert du type recherché (54) et il s'avère qu'il traduit les phénomènes concernés avec précision sans nécessiter un grand nombre de composants. En outre, les composants requis sont assez simples à évaluer.

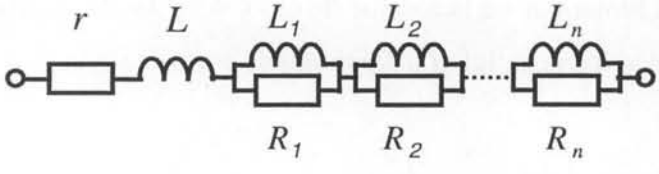



Figure 42 : Représentation par des cellules *Lp-Rp*

Présentons maintenant la méthode de calcul des composants. Pour commencer rappelons la forme de la fonction choisie :

$$Z(p) = rsdc + lsdc\ p\frac{(1+\tau_2 p)(1+\tau_4 p)...(1+\tau_{2nbc} p)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_3 p)...(1+\tau_{2nbc-1} p)} \qquad (55)$$

où *nbc* est le nombre de cellules *Lp-Rp* placées en série avec *rsdc*. A une partie entière près, cette fonction de transfert est une fraction rationnelle. La partie entière comprend non seulement la résistance *rsdc* mais aussi une impédance inductive $l_{HF}\ p$ due à la partie entière de la fraction de (55) :

$$l_{HF} = lsdc \prod_{n=1}^{nbc} \left( \frac{\tau_{2n}}{\tau_{2n-1}} \right) \tag{56}$$

Maintenant que nous connaissons les deux éléments série *rsdc* et $l_{HF}$, ôtons-les de Z(p) et mettons la variable de Laplace *p* en facteur. La fraction rationnelle restante est une fraction rationnelle banale qui admet une décomposition en éléments simples de 1ère espèce :

$$Z(p) = rsdc + l_{HF}\ p + p \sum_{n=1}^{nbc} \frac{L_n}{1 + \tau_{2n-1}\ p} \tag{57}$$

Le coefficient $L_n$, qui a la dimension d'une inductance, s'obtient au moyen d'une méthode bien connue : après avoir identifié (55) et (57), on multiplie par $(1 + \tau_{2n-1}\ p)$ à droite et à gauche puis on donne à p la valeur qui annule ce facteur. Si *m* est un entier compris entre 1 et *nbc*, il en résulte que :

$$L_m = lsdc \left( 1 - \frac{\tau_{2m}}{\tau_{2m-1}} \right) \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{nbc-1} \frac{\left( 1 - \frac{\tau_{2n}}{\tau_{2m-1}} \right)}{\left( 1 - \frac{\tau_{2n-1}}{\tau_{2m-1}} \right)} \tag{58}$$

En réintroduisant p à l'intérieur de la somme de (57), il est facile d'identifier chaque terme de la somme à l'impédance d'une cellule *Lp-Rp* parallèle :

$$\frac{L_m\ p}{1 + \tau_{2m-1}\ p} = \frac{L_m\ p}{1 + \frac{L_m}{R_m} p} \qquad \text{d'où} \qquad R_m = \frac{L_m}{\tau_{2m-1}} \tag{59}$$

On calcule ainsi les valeurs de tous les composants du circuit équivalent.

### 6.3.2. Autres structures équivalentes.

D'autres circuits équivalents ont été proposés pour tenir compte de l'augmentation de la résistance avec la fréquence. Celui de la Figure 43 [Labouré95] présente un le motif récurrent. Nous ne l'avons pas retenu car le calcul de ces éléments à partir de la fonction de transfert est moins direct.

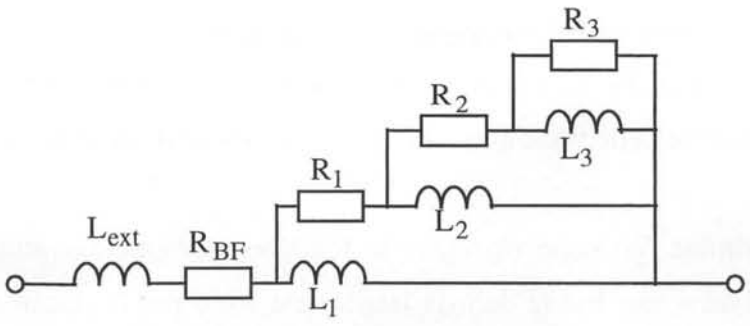



Figure 43 : Modèle représentant les pertes cuivre.

Comme pour le circuit que nous avons adopté (Figure 44), la résistance série augmente et l'inductance série diminue avec la fréquence et, si on se fixe les mêmes contraintes, les composants de cette "échelle" ne sont pas plus nombreux que ceux de notre circuit.

### *6.4. La recherche des constantes de temps.*

Nous avons vu comment identifier la courbe théorique, nous avons dit par quelle fonction à constantes localisées nous comptions la remplacer et nous avons même expliqué comment, de cette fonction, nous déduirions les éléments du circuit. Il ne reste plus qu'à évaluer les constantes de temps de la fonction de transfert.

Des études préliminaires ont montré que l'ondulation de la courbe réellement obtenue était directement liée à la raison de la progression géométrique des fréquences de coupures et donc, finalement, à l'écart du diagramme asymptotique par rapport à la courbe visée.

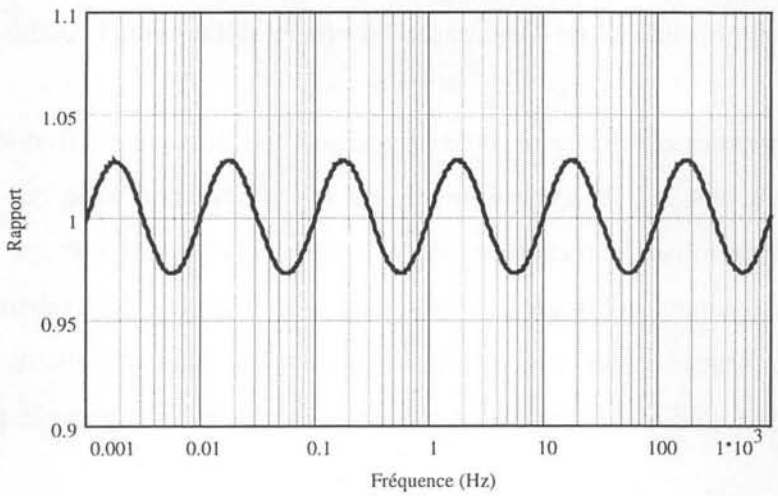



Figure 43 : Rapport entre le comportement en $\sqrt{f}$ et le module de $Z(p)$.
Les constantes de temps forment ici une série géométrique de raison: $\alpha = \sqrt{10}$ ).

Réciproquement, en cherchant des fréquences de coupure telles que l'écart entre le diagramme asymptotique et la fonction exacte se maintienne dans certaines limites, la courbe réelle devrait se rapprocher de celle visée avec une précision proche de celle souhaitée.

Un premier algorithme fait donc zigzaguer la fonction asymptotique autour de la fonction cible (Figure 44) dans une bande dont la largeur est fixée par la raison des fréquences de coupure, elle-même déterminé par la précision visée.

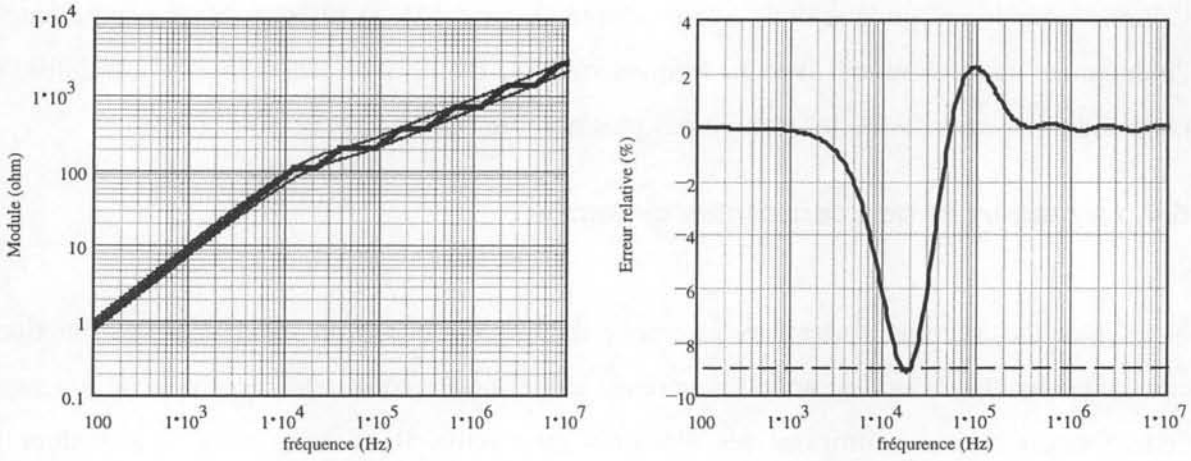



Figure 44 : Fréquences de coupure choisies en zigzags. Ecart relatif obtenu.

L'écart visé (0.1%) est effectivement atteint au-delà de 1MHz. Le modèle suit, avec la précision escomptée, le comportement théorique en haute fréquence. Cependant, lors de la rupture de pente, il sous-estime sensiblement (environ 9%) l'impédance théorique. Les repères établis en vue d'obtenir une pente constante, sont pris en défaut vers le coude de la courbe…

Pour affiner ce premier résultat nous avons remarqué que, lorsque les fréquences de coupures étaient idéalement placées, les extremums de l'écart coïncidaient avec ces fréquences. Il est donc possible de terminer la recherche de ces fréquences de coupure par une recherche de racines (ou de distance minimum) en se bornant à calculer les valeurs du module de l'impédance aux fréquences de coupures et en les égalant alternativement aux deux valeurs définies par l'écart toléré. La Figure 45 montre l'amélioration apportée par cette seconde étape.

Ce résultat n'est pas parfait : il faudrait tenir compte de la rupture de pente qui intervient en très haute fréquence puisque, de ce côté, nous avons opté pour un comportement inductif plutôt que résistif. Actuellement, nous terminons l'ajustement à la main mais nous sommes persuadés que, d'ici peu, la détermination des composants sera entièrement automatisée.

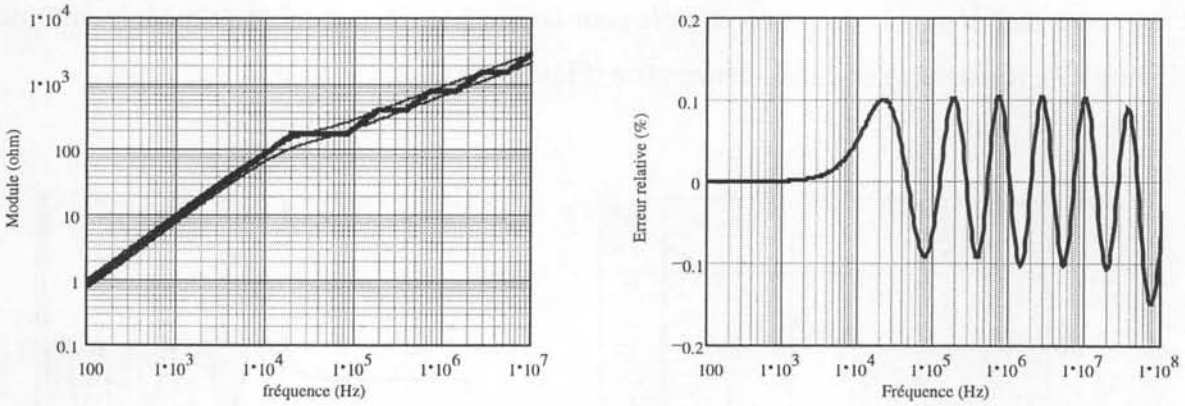



Figure 45 : Prise en compte de la rupture de pente. Erreur relative obtenue.

Nous montrons maintenant la précision qu'il est possible d'atteindre, sur tous les paramètres, à l'aide de 6 cellules Lp-Rp. Notre but est d'assurer, le plus loin possible en fréquence, une erreur relative inférieure à 1/∞ sur le module. Cette exigence inhabituelle de précision vise à valider le choix du module comme point de repère. La comparaison est menée pour un enroulement de 10 couches de 40 spires présentant une résistance continue de 0,512 Ω et une fréquence de peau de 4,05 kHz.

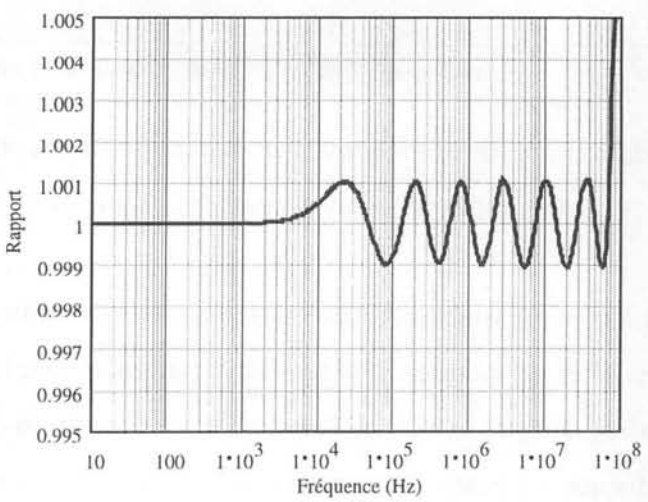



Figure 46 : Module de la fonction obtenue divisé par celui de la fonction théorique.

La recherche des fréquences de coupure nous à mené à une fonction de transfert dont le module suit (Figure 46), avec la tolérance fixée, la loi théorique depuis le continu jusqu'à plus de 4 décades au-dessus de la fréquence de peau (70 MHz à comparer avec 4,05 kHz). Cette courbe présente 6 extremums ce qui résulte de notre choix du nombre de cellules.

Observons maintenant la précision atteinte pour l'ensemble des paramètres : module-argument (Figure 47), résistance série-inductance série (Figure 48).

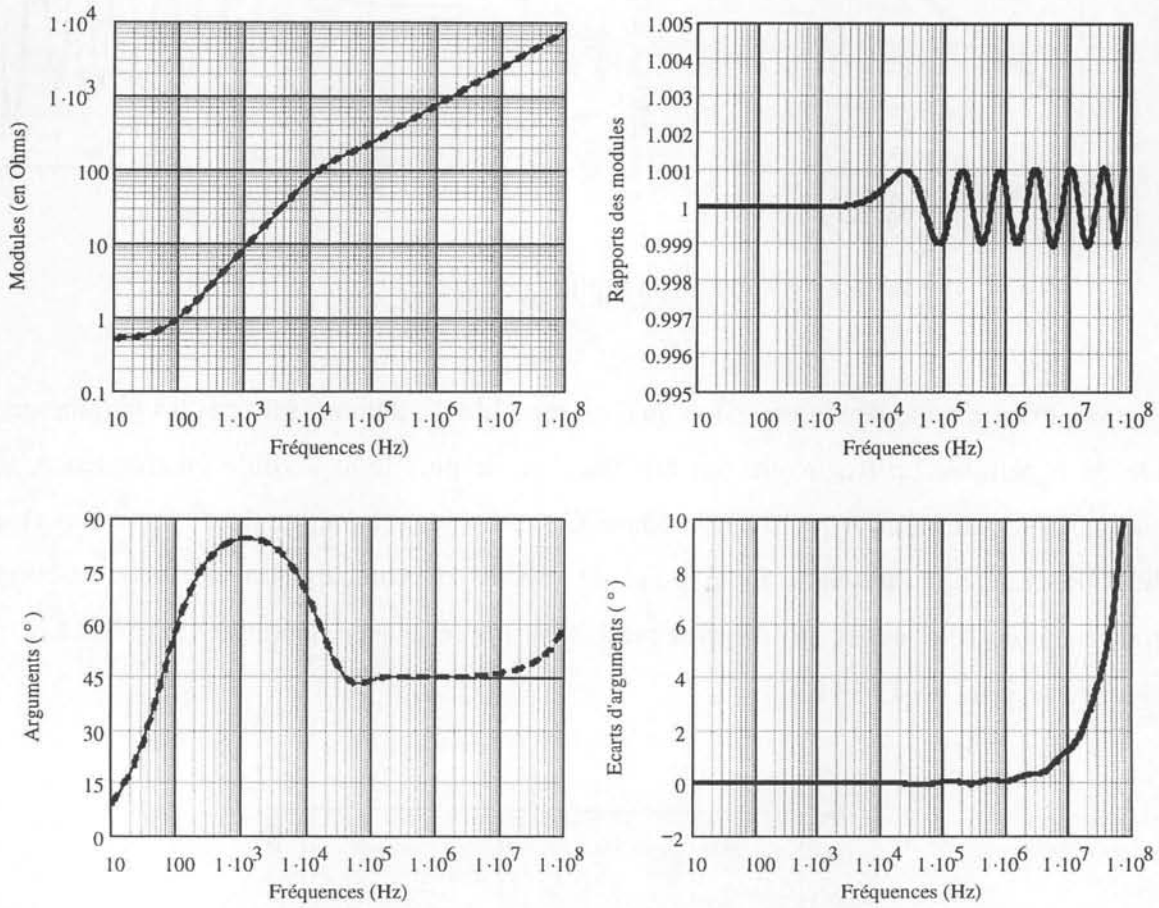



Figure 47 : Module et argument théoriques (trait continu fin) et obtenu (tirets gras). Rapport des modules et écart des arguments.

Bien que pour mener à bien l'optimisation des paramètres nous ne nous soyons préoccupé que du module, les figures 47 et 48 montrent que les autres paramètres de la fonction obtenue sont proches de ceux espérés. Jusqu'à 10 MHz, l'argument ne s'écarte pas de plus de 1,3 ° de la valeur théorique tandis que les écarts sur la résistance et l'inductance série restent inférieurs à 2 %.

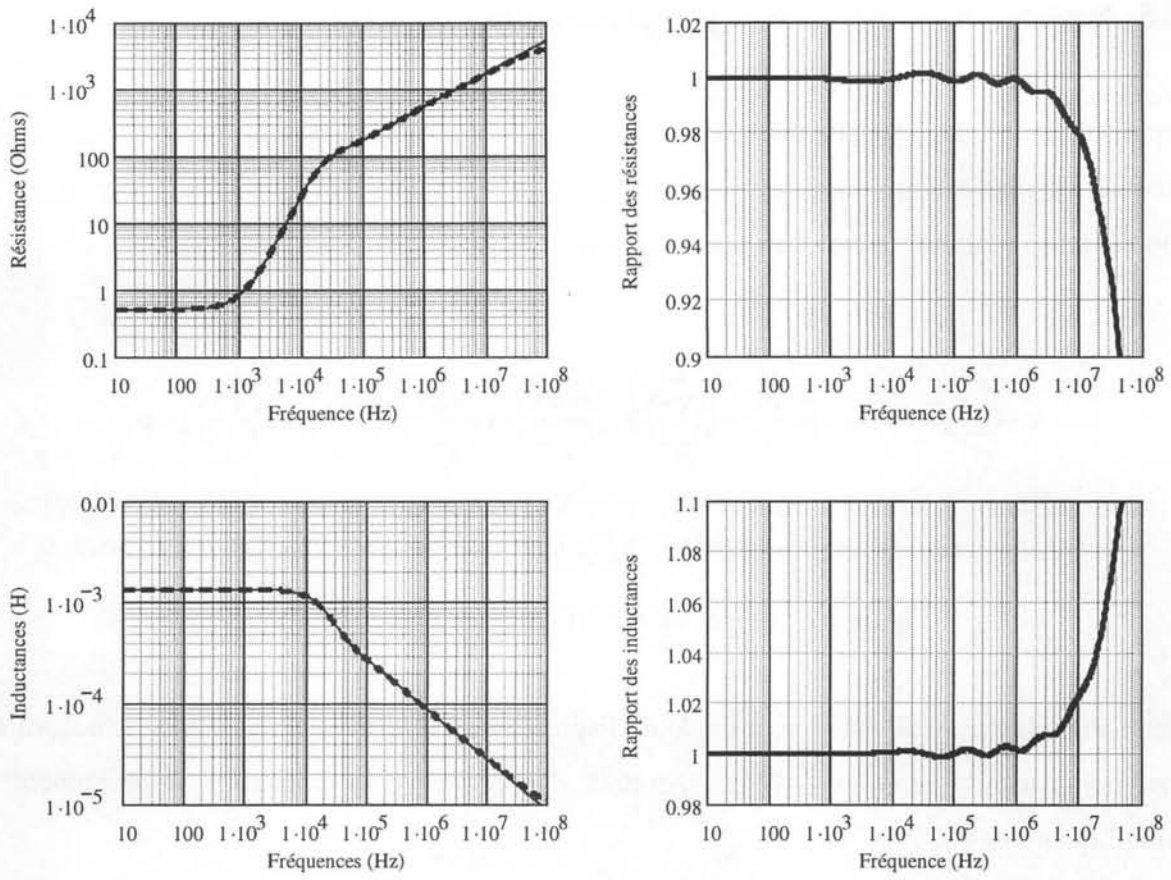


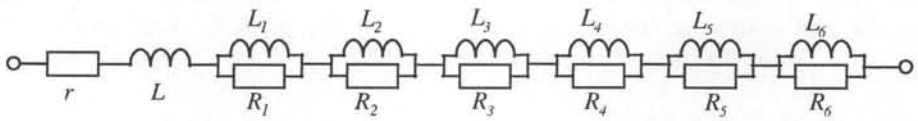

Figure 48 : Résistance et inductance série théoriques (trait continu fin) et obtenu (tirets gras). Rapport des résistances et inductances.

Toutes les grandeurs tracées ici pour représenter l'impédance série sont liées. De ce fait, on peut probablement utiliser la résistance série, à la place du module, pour rapprocher les courbes. Qu'a-t-on à y gagner ? Il nous semble que le point le plus important est qu'avec 6 cellules Lp-Rp seulement, le modèle à constantes localisées suit le comportement de système d'ordre ½ , sur plus de 3 décades de fréquence, avec une erreur sur les pertes inférieure à 2 %. En pratique, il est rare qu'une précision de 0.1% soit nécessaire et trois cellules suffisent souvent pour atteindre une précision de 1 ou 2%, pour le module, sur un domaine fréquentiel suffisamment large.

La représentation, par des circuits à constantes localisées, de phénomènes à constantes réparties, est un problème très général. La méthode présentée ici consiste, pour l'essentiel, à borner l'écart relatif entre le module de la fonction associée aux constantes localisées et celui de la fonction idéale. De cette façon, on aboutit à des circuits simples qui assurent une bonne précision sur un large intervalle fréquentiel.

### *6.5. Application numérique au prototype testé.*

Après l'identification de l'impédance en court-circuit de notre transformateur, nous avons calculé, de manière automatique, les inductances et résistances (Figure 52)qui permettent de modéliser sa fonction de transfert par six cellules Lp-Rp.




$r = 0{,}2\Omega$ $R_1 = 3{,}27\Omega$ $R_2 = 4{,}86\Omega$ $R_3 = 5{,}1\Omega$ $R_4 = 11{,}27\Omega$ $R_5 = 21{,}63\Omega$ $R_6 = 38{,}5\Omega$

$L = 9{,}7\mu H$ $L_1 = 25{,}9\mu H$ $L_2 = 4{,}14\mu H$ $L_3 = 1{,}07\mu H$ $L_4 = 0{,}64\mu H$ $L_5 = 0{,}33\mu H$ $L_6 = 0{,}15\mu H$

Figure 52 : Valeur du circuit équivalent avec 6 cellules

Cette impédance a été calculée, à l'aide de Pspice, puis comparée aux mesures. L'accord est très bon, jusqu'à environ 1 MHz. Au-delà, les phénomènes capacitifs interviennent et compliquent les comparaisons.

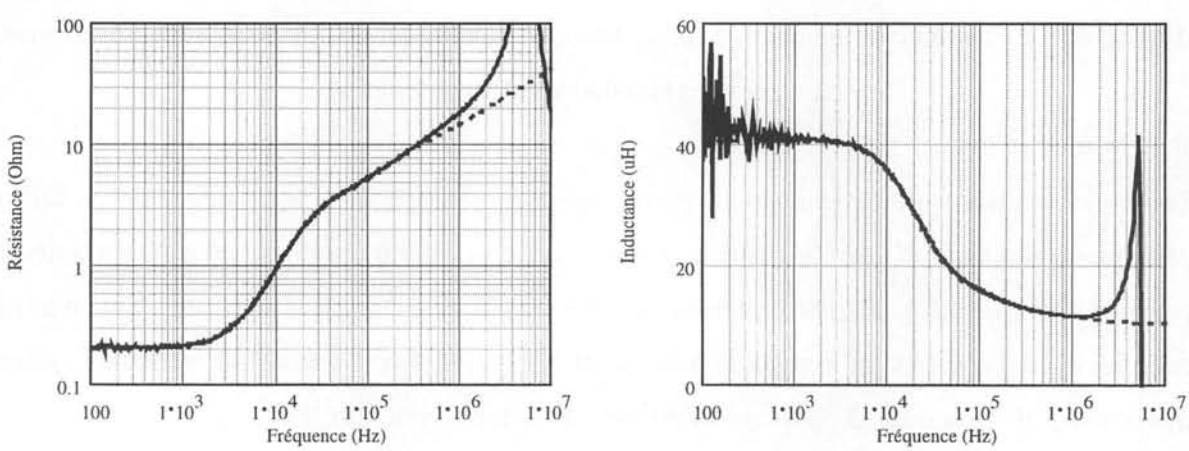
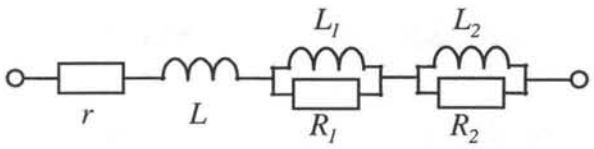



Figure 53 : Comparaison mesure (gras) – modèle (pointillé) pour 6 cellules.

Pour terminer, il aurait fallu comparer les mesures au modèle complet, muni de ses capacités. Faute de temps, nous n'avons pas fait cet essai. En revanche, un circuit plus conforme à la précision escomptée en pratique a été étudié. Il comprend seulement deux cellules Lp-Rp (Figure 54). L'erreur relative commise sur les pertes demeure inférieure à 10% jusqu'à environ 1 MHz.




$r = 0.2\Omega$ $R_1 = 3.6\Omega$ $R_2 = 13.9\Omega$

$L = 11.5\mu H$ $L_1 = 22.5\mu H$ $L_2 = 4.95\mu H$

Figure 54: Valeurs des composants du circuit équivalent à 2 cellules Lp-Rp.

## 7. Conclusion

L'étude, lame par lame, de la propagation énergétique dans un transformateur nous a permis de préciser le sens physique de plusieurs composants du circuit équivalent. Nous avons ainsi montré que les représentations habituelles des pertes dans les circuits magnétiques en ferrite, de même que des pertes par courants induits dans les enroulements, devaient être améliorées. Les ferrites ont été étudiées en détail au laboratoire par P. Fouassier. Ce travail étant récent, nous n'avons pas pu en tirer toutes les conséquences, mais l'importance de la permittivité de ces matériaux qui ressort de ce travail, nous a incité à introduire, avec un bénéfice tangible, plusieurs cellules RC pour affiner la représentation des pertes du circuit magnétique. Nous avons montré que c'est effectivement la permittivité du ferrite qui justifie ces ajouts.

L'étude des enroulements a fait l'objet d'un traitement plus complet. Tout d'abord, une expression analytique a été établie pour la contribution d'un enroulement à l'impédance en court-circuit d'un transformateur. Le comportement fréquentiel de cette impédance a été étudié en détail et une expression analytique simple a été proposée pour calculer rapidement sa résistance série. Une méthode d'identification a été élaborée : elle permet de retrouver les paramètres qui fixent le comportement de cette impédance en partant des courbes expérimentales.

Une spécificité de cette impédance est, qu'en haute fréquence, tant que les capacités n'interviennent pas, elle est proportionnelle à $\sqrt{f}$ . Ce caractère est dû aux courants induits, et donc à des constantes réparties ce qui, en principe, est incompatible avec une représentation par des constantes localisées. Malgré cette objection théorique sérieuse, nous avons cherché un circuit à constantes localisées car un tel circuit est nettement plus commode lors d'une

étude temporelle, en particulier lorsqu'on exploite un logiciel de simulation électronique. Notre étude a montré que, moyennant l'acceptation d'un écart relatif borné et d'une limitation de la fréquence supérieure de validité, une telle représentation est possible. A titre d'illustration, nous avons montré qu'avec une douzaine de composants, on peut suivre le module théorique à $\pm 0.1\%$ près sur près de quatre décades de fréquence. Une démarche analogue sera probablement utile pour représenter précisément les pertes fer des ferrites Mn-Zn dont l'impédance HF varie, en raison de la permittivité de ce matériau, en $1/\sqrt{f}$ .

# Chapitre 4

## Modélisation d'une alimentation industrielle : Formes d'ondes de puissance et CEM

# 1. Introduction

Les chapitres précédents ont montré comment obtenir des modèles de transformateur, permettant de reproduire le comportement réel du composant sur une gamme de fréquence très étendue et dans des configurations plus variées que les classiques vues "du primaire" et/ou "du secondaire". Cette modélisation est particulièrement intéressante pour les études de compatibilité électromagnétique (CEM) au cours desquelles les courants circulant par des chemins inhabituels (inter-enroulements par exemple) sont très importants.

La CEM est aujourd'hui un point crucial de la conception des dispositifs électroniques. En effet, à partir du moment où une alimentation est connectée à un réseau électrique, elle doit respecter des gabarits fréquentiels d'émission conduite et rayonnée, fixés par des normes. En clair, cela signifie que tout convertisseur statique doit "polluer" le moins possible, ce qui est relativement antinomique avec la notion de découpage haute fréquence : les fronts raides de tension et de courant donnent naissance à des courants haute fréquence susceptibles d'être réinjectés sur le réseau [Paul93].

Afin de réduire autant que possible ces émissions à la source avant de les filtrer, il est nécessaire de parfaitement comprendre les mécanismes de création et de recenser les chemins de propagation des perturbations. Pour cela, le recours à la simulation est indispensable [Schellmanns96] [Schutz97-1]. Dans ce chapitre, nous allons étudier un convertisseur Flyback. Ce convertisseur est doublement intéressant : d'une part, il est très répandu dans les applications industrielles de faible puissance et d'autre part, il illustre parfaitement la difficulté d'obtention d'un modèle CEM représentatif de la réalité.

Afin de bien nous familiariser avec ce montage industriel, nous présenterons une étude théorique détaillée de son fonctionnement. Il faut cependant noter que la principale difficulté dans la compréhension des perturbations vient du fait que les mécanismes de création et de propagation de ces perturbations font intervenir des composants dits "parasites". Ces composants sont parasites au sens où leur valeur n'est pas fixée par le concepteur mais liée à un certain nombre de facteurs d'ordre géométrique et technologique.

L'étude de la compatibilité électromagnétique des convertisseurs passe donc par une caractérisation du comportement parasite des semi-conducteurs de puissance, des composants passifs (transformateur d'isolement, inductance de filtrage, capacité de découplage...) et de la connectique (du circuit imprimé) [Schanen94] [Clavel96]. Il est nécessaire de disposer d'un modèle électrique suffisamment précis pour chacun de ces composants.

C'est seulement après avoir identifié ces modèles par calcul et/ou par mesure, qu'il est possible d'étudier et de prévoir le comportement électromagnétique d'un convertisseur [Schutz99].

La simulation [MicroSim96] nous ayant permis d'identifier les principales sources de perturbation et leurs chemins de propagation, nous montrerons que, dans ce convertisseur, le rôle du transformateur est crucial. En utilisant les différents modèles développés dans le chapitre II, nous montrerons leur incidence sur les formes d'onde de puissance et/ou en CEM, ainsi que leurs limites.

## 2. Alimentation à découpage

Nous avons choisi un montage industriel assurant la conversion alternatif-continu. Dans un premier temps, nous présenterons ce convertisseur et analyserons ses caractéristiques. Ensuite, nous adapterons ce convertisseur en vue de l'étudier dans des conditions aussi satisfaisantes et reproductibles que possible.

### *2.1. Présentation du convertisseur*

Le montage que nous allons étudier est une alimentation de type flyback en régime de conduction discontinue. Cette alimentation est un sous-ensemble d'une baie de mesure de puissance triphasée. Cet appareil (Figure 1) permet : la mesure de puissance en monophasé et en triphasé, la mesure du facteur de puissance, du taux de distorsion harmonique, etc... L'alimentation de cette baie de mesure est prélevée sur l'une des tensions entre phases. Celle-ci est redressée puis filtrée avant d'être abaissée et régulée au moyen du convertisseur flyback étudié.

Figure 1 : Vu de face de la baie de mesure

Le principe de conversion de ce dispositif est bien connu [Ferrieux87]. Ce flyback présente la particularité d'utiliser un transformateur à trois enroulements pour réaliser l'isolation galvanique, le troisième enroulement étant utilisé pour la régulation. D'autre part, il faut noter que l'interrupteur utilisé par ce convertisseur n'est pas un interrupteur Mosfet classique, mais un interrupteur avec sa commande intégrée de type "TOPswitch®" [Topswitch96]. Cet interrupteur dit "intelligent" intègre le driver et toute une chaîne analogique de régulation. Ainsi, la patte CONTROL est une entrée analogique permettant directement l'asservissement de la tension de sortie, ce qui facilite la mise en œuvre des convertisseurs faible puissance. Le schéma de principe du convertisseur est présenté sur la Figure 2.

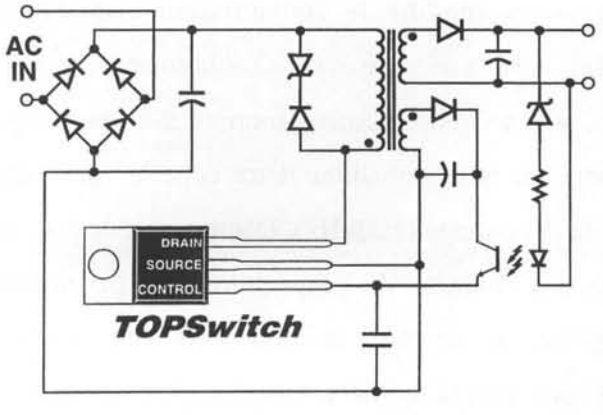



Figure 2 : Schéma de principe de l'alimentation

Il est important de noter que l'interrupteur TOPswitch® fixe la fréquence de découpage à 100kHz. Ce convertisseur est utilisé avec une tension d'entrée susceptible de fluctuer fortement, entre 200 et 600V.

Ce flyback fonctionne en mode de conduction discontinue. Pendant une phase de fonctionnement, les deux semi-conducteurs sont bloquées si bien que le fonctionnement de ce montage se décompose en trois phases (Tableau 1).

| | Interrupteur | Diode (secondaire) |
|---|---|---|
| $1^{ère}$ phase | ON | OFF |
| $2^{ième}$ phase | OFF | ON |
| $3^{ième}$ phase | OFF | OFF |

Tableau 1 : Différentes configurations de conduction

Ce mode de fonctionnement présente l'avantage de limiter le recouvrement de la diode secondaire ainsi que de permettre un meilleur dimensionnement du transformateur. Cependant, après le blocage de cette diode, les potentiels sont imposés uniquement par les éléments parasites du montage qui doivent nécessairement être pris en compte pour simuler correctement le convertisseur. La fin de cette phase de conduction discontinue fixe les conditions initiales pour l'amorçage de l'interrupteur.

### *2.2. Simplification du montage*

En premier lieu, nous avons modifié le convertisseur afin d'effectuer des comparaisons réalistes et reproductibles entre la mesure et les simulations. Tout d'abord, ce convertisseur est alimenté par le réseau, via un redressement monophasé avec capacité en tête. Il est peu commode, en simulation, de faire cohabiter deux échelles de temps, la période du réseau (50Hz) et la fréquence de découpage (100kHz). D'autre part, le pont de diodes fonctionnant en conduction discontinue, les chemins de propagation des perturbations changent toutes les 10ms. De ce fait, l'amplitude mesurée du courant de mode commun fluctue toutes les 10ms. Pour palier ces deux inconvénients majeurs, nous avons supprimé cet étage de conversion et nous alimentons le montage en continu. La suppression du pont de diodes ne modifie pas radicalement la création des perturbations puisque aucun front brutal n'est généré par ce pont (pas d'empiétement) [Scheich93].

En ce qui concerne la charge, pour obtenir un point de fonctionnement stable, nous avons remplacé l'ensemble Microcontroleur-Afficheur de la baie de mesure par une simple résistance, calculée de manière à dissiper sensiblement la même puissance.

### 2.3. Etude théorique du fonctionnement

Avant l'étude CEM d'un convertisseur, il est indispensable d'analyser en détail son fonctionnement. Nous analyserons le fonctionnement du flyback en conduction discontinue classique, c'est à dire avec un transformateur à deux enroulements. En effet, l'enroulement auxiliaire ne modifie pas sensiblement le fonctionnement théorique du montage, puisqu'il débite sur une haute impédance, celle de la patte "CONTROL" du TOPswitch®.

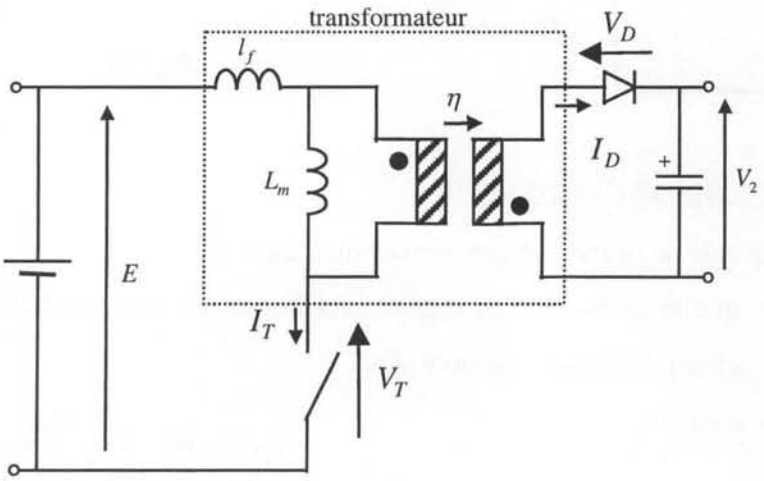



Figure 3 : Alimentation Flyback

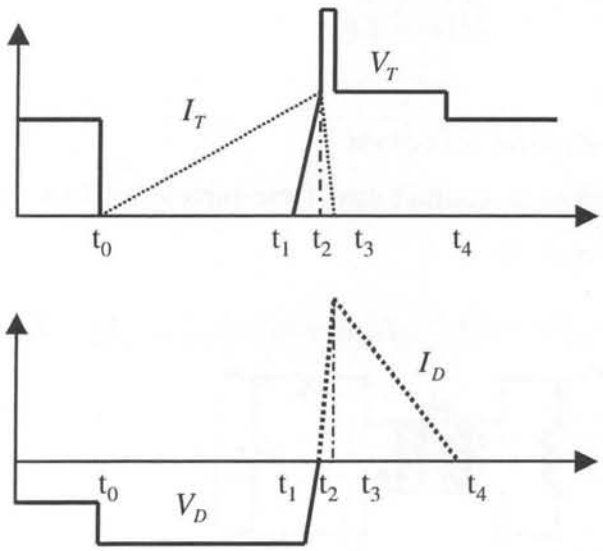



Figure 4 : Formes d'ondes théoriques

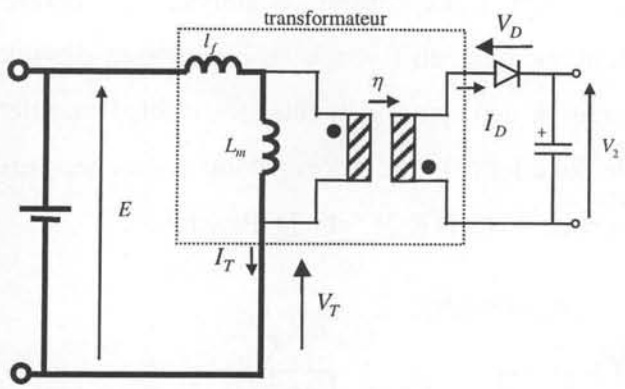
Lm : inductance magnétisante du transformateur

Lf : inductance de fuite

Trois phases sont à distinguer.

## Phase 1 : Mise en conduction de l'interrupteur

Instant t0 : Mise en conduction du transistor




$$V_T = 0$$

$$I_T = \frac{E}{Lm + lf}(t - t_0)$$

$$V_D = -Vs - \eta E\left(\frac{Lm}{Lm + lf}\right)$$

$$I_D = 0$$

## Phase 2 : Blocage de l'interrupteur

Instant t1 : montée de la tension aux bornes du transistor

On supposera que la croissance en tension aux bornes de l'interrupteur s'effectue de manière linéaire. Le gradient de tension est noté $Kv$.

$$V_T = Kv(t - t_1)$$

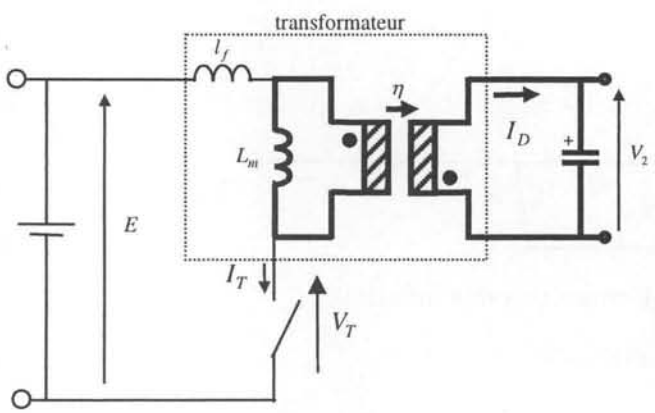
$$V_D = -Vs - \eta\left(\frac{Lm}{Lm + lf}\right)(E - V_T)$$

$$I_T = \frac{E}{Lm + lf}(t - t_0) - \frac{Kv(t - t_1)^2}{2(Lm + lf)}$$

$$I_D = 0$$

Instant t2 : mise en conduction de la diode

On supposera que la chute du courant dans l'interrupteur est linéaire et fixée par celui-ci. Le gradient de courant est noté $Ki$.




$$V_T = E + \frac{Vs}{\eta} + lf\ Ki$$

$$I_T = I_T(t_2) - Ki(t - t_2)$$

$$V_D = 0$$

$$I_D = \frac{Ki}{\eta}(t - t_2) - \frac{V_S(t - t_2)}{\eta^2 Lm}$$

## Phase 3 : Blocage de la diode et conduction discontinue

Instant t3 : La diode secondaire se bloque.

$$V_T = E + \frac{V_S}{\eta} \qquad I_T = 0 \qquad V_D = 0 \qquad I_D = I_D(t_3) - \frac{V_S(t - t_3)}{\eta^2 Lm}$$

Instant t4 : Les deux semi-conducteurs sont bloqués. Le circuit est donc en régime libre.

$$V_T = E \qquad I_T = 0 \qquad V_D = -Vs \qquad I_D = 0$$

C'est principalement dans cette dernière phase que les composants parasites vont fixer les potentiels et que l'approche théorique présentée montre clairement ses limites.

## 3. Simulation des formes d'ondes de puissance

Un de nos objectifs est de simuler l'ensemble de ce convertisseur. La qualité du résultat des simulations dépend essentiellement de la fiabilité des modèles utilisés [Teulings97]. Le support de la simulation temporelle est le logiciel "Pspice", ce logiciel met à disposition une large gamme de librairies et donne la possibilité par l'utilitaire "Parts" de générer les paramètres de ces modèles à partir des données des constructeurs et/ou de données issues de mesures.

Cependant, la précision des modèles de semi-conducteurs n'est pas parfaite, et le nombre de paramètres mis en jeu important. Dans la mesure où, nous le verrons, nous cherchons à cerner l'importance du transformateur dans cette application, nous simplifions au maximum les modèles des autres composants, tout en restant bien sûr réaliste. Ces modèles une fois calés sur la mesure, permettent des simulations reproductibles et évitent ainsi l'accumulation d'erreurs dues aux imprécisions de tous les modèles. En effet, avec un modèle de Mosfet complet dans Pspice, toute modification, par exemple, de modèle de transformateur pourrait engendrer des variations dans les fronts de tensions et donc sur le courant de mode commun.

Nous considérons ici, les inductances et les résistances du circuit imprimé comme négligeables [Clavel96] [Youssef98] devant celles des composants du montage (principalement le transformateur). En ce qui concerne les composants passifs, il est important de se rendre compte qu'aucun composant n'a un comportement idéal sur toute la plage de fréquence. En négligeant certains éléments parasites, on peut commettre des erreurs graves si bien que la simulation avec un tel modèle peut donner des résultats qui n'ont aucune ressemblance avec la réalité.

On abordera rapidement la modélisation des condensateurs électrochimiques. Quant au transformateur, on utilisera bien évidemment les différents modèles présentés au chapitre 2.

## *3.1. Modèles de simulation (puissance)*

### 3.1.1. Semi-conducteurs de puissance

#### 3.1.1.1. Interrupteur Topswitch

Ce composant intégré facilite la mise en œuvre du convertisseur mais présente quelques inconvénients pour la modélisation. Comme pour tous les composants intégrés, il est impossible de connaître tous les paramètres du composant ainsi que ses performances en commutation. En utilisant la documentation du constructeur et quelques mesures externes, nous avons retenu le modèle présenté sur la Figure 5.

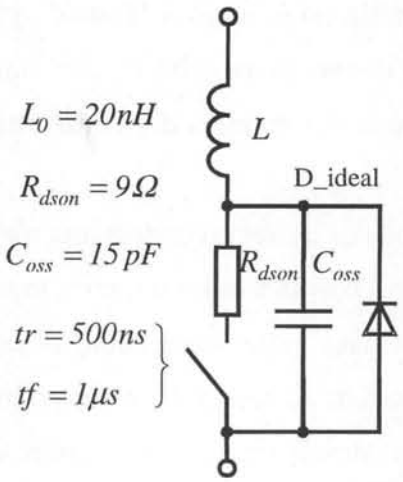



Figure 5 : Circuit équivalent du modèle simplifié

L'interrupteur idéal utilisé permet de régler les fronts de tension. Ces valeurs ont été mesurées sur le convertisseur en fonctionnement pour être reproduites en simulation. Comme nous l'avons mentionné, cette modélisation est quelque peu simpliste, mais assure une bonne reproductibilité des simulations, afin d'étudier l'influence d'autres modèles.

#### 3.1.1.2. Diode

Il apparaît que les modèles de diodes disponibles dans Pspice, dans les librairies standards, ou en utilisant l'utilitaire Parts, ne suffisent pas pour obtenir un modèle précis. En conséquence, il est classique comme pour les interrupteurs, d'utiliser un modèle simplifié [Batard92].

Dans notre cas, le fonctionnement en régime de conduction discontinue est bénéfique, puisque le recouvrement de la diode est négligeable. En effet, l'annulation du courant est naturelle, le modèle de diode peut alors être considéré idéal.

Dans notre convertisseur, un circuit d'aide à la commutation (CALC ou snubber) est associé à la diode secondaire afin d'amortir les surtensions apparaissant au blocage. Le modèle diode-snubber que nous utiliserons est présenté sur la figure suivante :

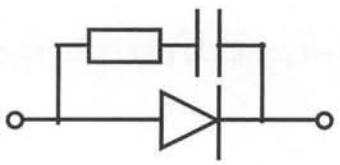


Figure 6 : Modèle Diode idéale-snubber

### 3.1.2. Composants passifs

#### 3.1.2.1. Transformateur

Nous avons évoqué de nombreux modèles possibles de transformateur pour compléter la représentation magnétique par une prise en compte plus ou moins fine des phénomènes capacitifs. Vu le cahier des charges imposé pour ces modèles, qui doivent rendre compte des impédances dans toutes les configurations possibles, il va de soi que l'obtention des formes d'ondes de puissance devrait être aisée à l'aide de ces modèles.

#### 3.1.2.2. Condensateur

Un condensateur présente généralement une fréquence de résonance qui peut être prise en compte par un simple modèle RLC série. La valeur de cette fréquence de résonance est directement reliée à la valeur de la capacité et aux techniques d'interconnexion. Pour obtenir des condensateurs de "bonne" qualité jusqu'à des fréquences élevées, il est courant d'associer plusieurs technologies en parallèle. On aurait tendance à penser que cette solution permet d'éviter la modélisation des condensateurs électrochimiques, quand ils sont associés à des céramiques. Il n'en est rien. En effet, comme l'illustre la Figure 7, cette association peut provoquer des résonances parasites.

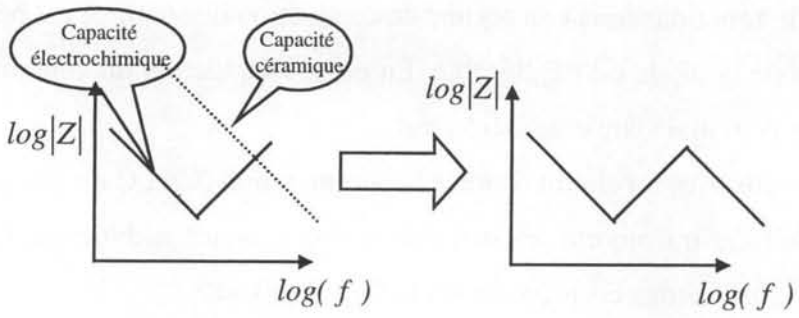



Figure 7 : Association en parallèle de condensateur. Module d'impédance

Il est donc important de modéliser l'ensemble des condensateurs associés en parallèle. La Figure 8 compare les diagrammes de Bode issus de la mesure et ceux issus des deux modèles. On peut noter que le schéma plus complexe que le circuit RLC série (Figure 9) permet une meilleure prise en compte des amortissements, mais celui-ci dépend de la température [Séguin96] [Séguin97] ...

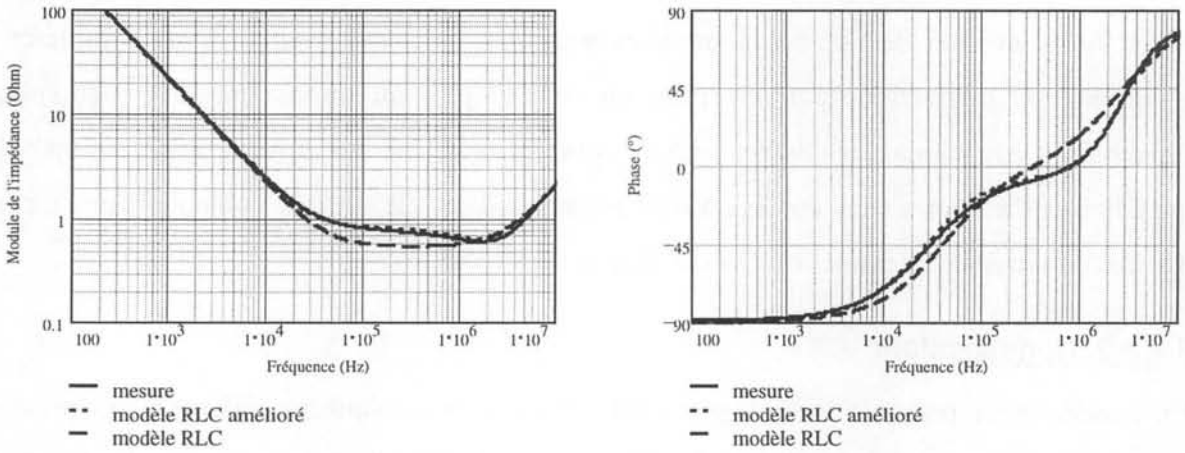
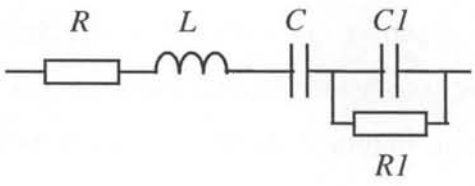



Figure 8 : Impédance d'un condensateur électrochimique. Comparaison Mesure-Modèle




Valeur des paramètres à 25°C :

$R = 0.55\Omega, \quad L = 32nH, \quad C = 7.3\mu F$

$C1 = 0.6\mu F, \quad R1 = 0.28\Omega$

Figure 9 : Modèle "amélioré" de condensateur électrochimique

### 3.2. Formes d'ondes de puissance

La Figure 10 reporte les principaux signaux de puissance. Trois points sont à distinguer :

1. La surtension à l'ouverture de l'interrupteur
2. La fréquence de l'oscillation basse fréquence durant la conduction discontinue
3. Le pic de courant à l'amorçage de l'interrupteur

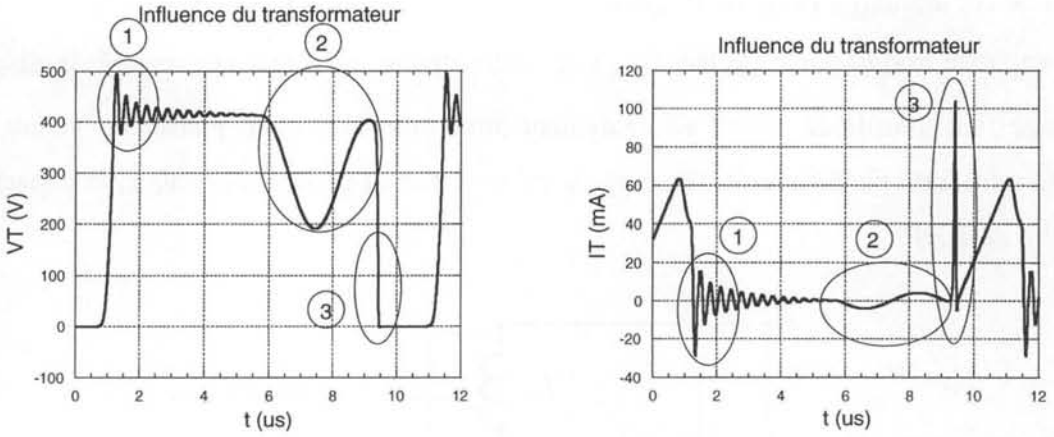



Figure 10 : Formes d'ondes simulées : Tension et courant dans l'interrupteur

Nous allons détailler ces trois phénomènes pour analyser les paramètres prépondérants intervenant durant ces phases.

### 3.2.1. Ouverture de l'interrupteur

Lorsque l'interrupteur s'ouvre, il apparaît une surtension à ses bornes due aux inductances de fuite du transformateur, qui génère des oscillations. Ces oscillations peuvent être expliquées si l'on se réfère au comportement du transformateur dans cette phase. En effet, pendant l'ouverture de l'interrupteur, on constate que les enroulements secondaire et auxiliaire sont parcourus par un courant. On peut donc considérer, que pour des fréquences élevées, ils sont en court-circuit. Il faut donc analyser la caractéristique d'impédance du transformateur lorsque ces deux enroulements sont court-circuités. Le chapitre II justifie l'allure indiquée sur la Figure 11.

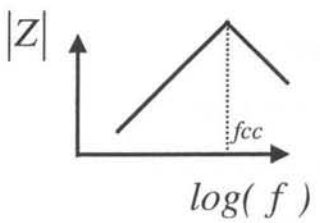



Figure 11 : Impédance du transformateur, deux enroulements en court-circuit

L'impédance du transformateur présente alors un maximum d'impédance qui va correspondre à une fréquence de résonance privilégiée pour la tension primaire. On peut noter que cette fréquence de résonance est située en haute fréquence, le modèle du transformateur devra donc être valide sur une large plage de fréquence. En outre, si l'on observe la Figure 12, on constate que la capacité drain source (notée $C_{oss}$) de l'interrupteur ainsi que la capacité du dispositif d'écrêtage (ici, une diode zener) va également intervenir dans cette phase. La valeur de la capacité introduite par le circuit d'écrêtage a été mesurée au pont d'impédance, la capacité est de l'ordre de 10pF.

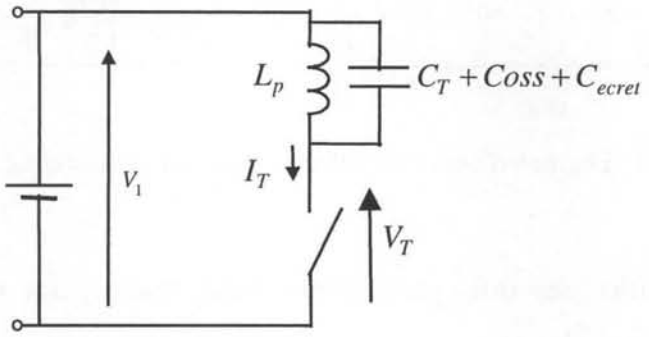



Figure 12 : Ouverture de l'interrupteur

Pour modéliser la surtension aux bornes de l'interrupteur, il est donc utile de bien connaître le comportement électrostatique du transformateur, mais aussi celui de l'interrupteur et du dispositif d'écrêtage, indispensable sur un flyback.

### 3.2.2. Ouverture de la diode

Lorsque le courant secondaire s'annule, la diode secondaire se bloque. Par conséquent, les deux semi-conducteurs sont bloqués. Durant cette phase de conduction discontinue, la tension aux bornes du transformateur n'est plus imposée par le reste du circuit. Ce sont les éléments parasites des composants et notamment ceux du transformateur qui imposent les évolutions des grandeurs électriques. Dans cette phase, les enroulements sont à vide, c'est donc l'impédance à vide du transformateur qui intervient. En observant la Figure 13, on constate que cette impédance vue du primaire présente trois résonances parallèles.

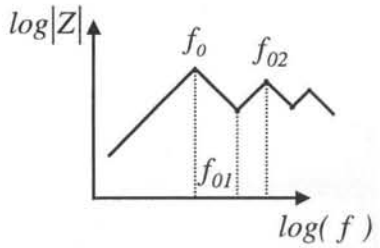



Figure 13 : Impédance vue du primaire, lorsque les deux autres enroulements sont à vide

En théorie, ces deux fréquences devraient correspondre à trois fréquences de résonances privilégiées pour la tension primaire. Nous rappelons que la première fréquence de résonance fait intervenir l'inductance magnétisante du transformateur, elle est donc située très bas en fréquence, par rapport aux deux autres. Les amortissements étant croissant avec la fréquence, seule cette fréquence est visible sur les courbes. Il est important de noter que cette phase de conduction discontinue fixe les conditions initiales de l'amorçage de l'interrupteur, il est donc indispensable de la représenter de manière satisfaisante.

### 3.2.3. Amorçage de l'interrupteur

Lors de la mise en conduction de l'interrupteur, le gradient de tension très important provoque l'apparition d'une pointe de courant due aux capacités parasites du montage. Les enroulements secondaires du transformateur sont ouverts. Comme indiqué sur la Figure 13, nous constatons que l'aspect capacitif est dominant au-delà de la fréquence $f_0$ et que pour une fréquence $f_{01}$, il existe un minimum d'impédance. Ce minimum d'impédance introduit donc une fréquence de résonance série privilégiée, ce qui explique la présence d'oscillations se superposant à la pointe de courant (très visibles en mesure).

## *3.3. Influence des différents modèles de transformateur*

Pour les formes d'ondes de puissance, nous présentons une comparaison des résultats de simulation en utilisant différents modèles de transformateur : un modèle magnétique simple (sans capacité) et deux modèles tenant compte des effets électrostatiques, constitués de trois ou six capacités.

Les comparaisons sont effectuées sur la tension aux bornes de l'interrupteur, cette grandeur est facilement mesurable et donne une bonne image du point de fonctionnement du montage.

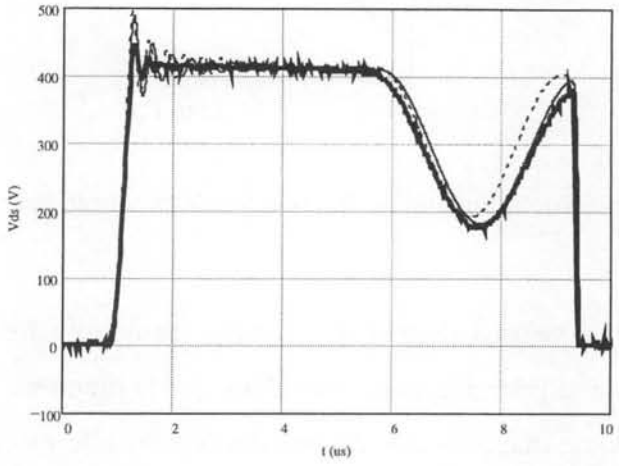



Figure 14 : Comparaison sur la tension aux bornes de l'interrupteur entre la mesure et deux modèles de transformateur. Mesure (gras) – Modèle magnétique simple (pointillé) et Modèle six capacités (fin)

A noter que vu la faible valeur de la capacité $C_{oss}$ du TOPswitch® à l'état bloqué, la sonde de tension de l'oscilloscope peut modifier sensiblement le comportement du montage, et notamment pendant la phase de conduction discontinue. Les simulations présentées tiennent compte de cet état de fait, par un modèle de sonde de tension (capacité de 10.5pF associés en parallèle avec une résistance de 10MΩ).

En ce qui concerne la surtension à l'ouverture de l'interrupteur, le modèle de transformateur modifie sensiblement la fréquence de résonance de l'oscillation. La prise en compte des capacités dans le transformateur améliore sensiblement le réalisme de la simulation. On constate que la simulation surestime légèrement la surtension. Ceci n'est pas surprenant, vu la simplicité des modèles de semi-conducteurs utilisés.

Pour le fonctionnement en conduction discontinue, le modèle magnétique simple du transformateur n'est pas suffisant. On constate que les modèles électrostatiques simplifiés (3 ou 6 capacités) du transformateur sont suffisants pour prendre en compte ce comportement parasite.

Dans ce montage, les capacités parasites de l'interrupteur ajoutées à celle de l'écrêteur sont du même ordre de grandeur que celle du transformateur (Tableau 2). En conséquence, il est indispensable de représenter les phénomènes électrostatiques du transformateur même pour l'étude des formes d'ondes de puissance.

| | Modèle magnétique simple | Modèle 3 capacités | Modèle 6 capacités |
|---|---|---|---|
| $C_{oss}$ | 15pF | 15pF | 15pF |
| $C_{ecret}$ | 10pF | 10pF | 10pF |
| Capacité équivalent vue du primaire du transformateur | 25pF | 27pF | 30pF |

Tableau 2 : Ordre de grandeur des capacités vues du primaire (enroulements à vide)

Cette première comparaison entre les modèles et la mesure permet d'ores et déjà d'exclure le modèle de transformateur sans capacité, même pour représenter les formes d'ondes de puissance. En effet, nous venons de voir que la simulation d'un convertisseur en conduction discontinue nécessite une prise en compte même sommaire des effets électrostatiques des composants.

## 4. Performances CEM

Nous allons maintenant étudier les performances CEM de ce montage. Pour cela, il est nécessaire de compléter la modélisation utilisée pour les formes d'ondes de puissance, en prenant en compte notamment les capacités parasites existant entre le montage et le plan de masse.

### *4.1. Modélisation CEM*

#### 4.1.1. RSIL

Le RSIL (Réseau Stabilisateur d'Impédance de Ligne) représente la victime des perturbations, son modèle est indispensable dans notre circuit équivalent. Le RSIL que l'on appelle aussi "réseau fictif" est intercalé entre le réseau et l'appareil en test, il est constitué de composants de type R, L, C. Comme instrument de mesure, le RSIL recycle toutes les perturbations produites par le convertisseur et empêche la circulation des perturbations provenant de l'alimentation de puissance. Un RSIL réalisé au laboratoire a été utilisé. Sur la bande de fréquence 30kHz-30MHz, il présente un bon comportement (pas de résonance parasite) et peut être modélisé par des composants parfaits.

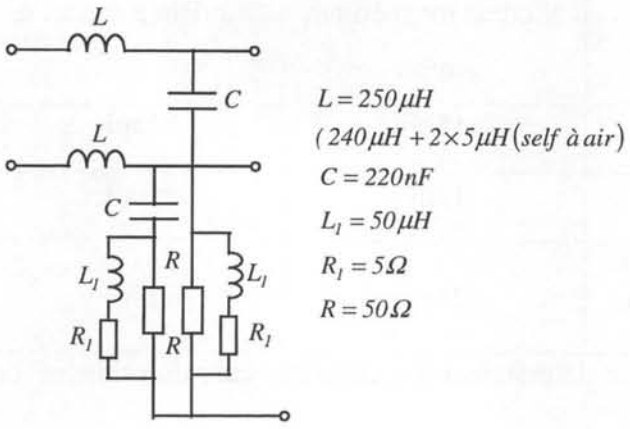



Figure 15 : Modèle du RSIL

### 4.1.2. Prise en compte des capacités parasites avec le plan de masse

Le châssis plastique de la baie de mesure ne permet pas de définir de potentiel de terre. Dans ce cas de figure, la norme préconise de disposer l'appareil à 10cm au-dessus du plan de cuivre de référence. Par conséquent, l'identification des capacités de mode commun à partir du schéma d'implantation est assez délicate (les formules analytiques conduisant à des valeurs très faibles <1pF). Dans ce contexte, en nous basant sur des considérations géométriques, nous avons adopté une représentation simple du chemin de propagation de mode commun. En effet, la charge du convertisseur est constituée d'un microcontrôleur implanté sur un plan de masse local (Figure 16). Ce dernier présente la surface la plus importante de toute la carte, et nous avons considéré que cette capacité de mode commun constitue le chemin de propagation privilégié, voire unique. Il est clair qu'en réalité, il existe d'autres capacités parasites entre le montage et le plan de masse, mais dans un premier temps afin de bien comprendre les mécanismes de perturbation, nous nous limiterons à cette seule capacité.

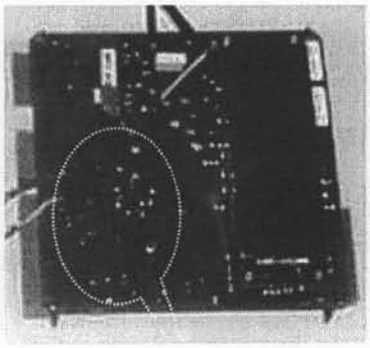


Figure 16 : Plan de masse numérique

C'est seulement, dans la partie 5, "analyse critique", que nous montrerons le rôle d'autres capacités parasites. Le schéma de simulation que nous utilisons maintenant est présenté sur la Figure 18 et la vue générale du dispositif de mesure sur la Figure 17.

Figure 17 : Vu d'ensemble du dispositif expérimental

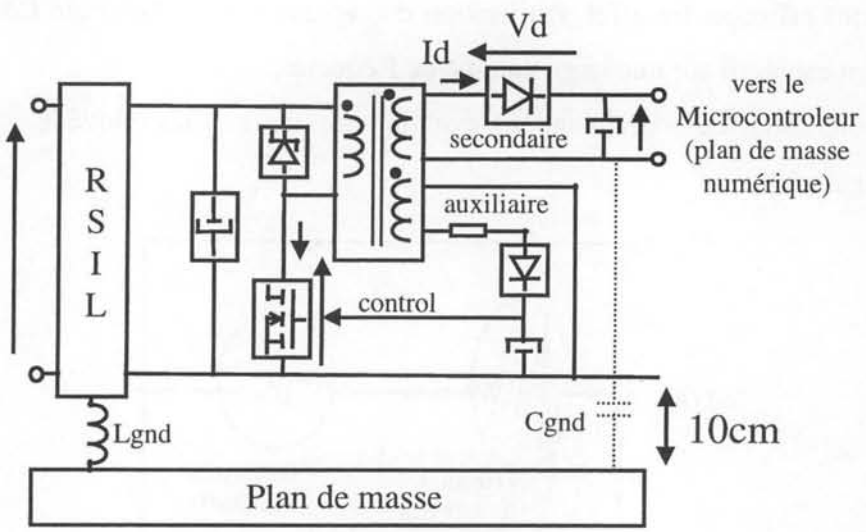



Figure 18 : Circuit du flyback intégrant la capacité de mode commun $C_{gnd}$

### 4.1.3. Transformateur

L'une des fonctions principales d'un transformateur consiste à procurer une isolation galvanique. En pratique, l'impédance inter-enroulement n'est pas infinie et elle offre un chemin à des courants parasites qui dégradent les performances CEM, essentiellement en mode commun. Cette impédance étant de nature capacitive, tous les circuiteurs s'attendent à ce que cette dégradation soit davantage perceptible en haute fréquence. Cependant, considérer que cette impédance est une capacité pure conduit à des prévisions bien trop optimistes car

aux fréquences de résonance série (minimum d'impédances), l'impédance inter-enroulement peut être bien plus faible (disons 5 à 10 fois) que celle de la capacité seule. Cette remarque montre combien il est important de disposer d'un circuit équivalent de transformateur qui rende compte de ces phénomènes. Le modèle du transformateur avec son identification a largement été exposé au chapitre 2. Nous utilisons ici le modèle inductif complet associé avec 6 ou 15 capacités. Il va de soi que le modèle sans capacité ne permet pas aux perturbations de mode commun de se "reboucler".

### *4.2. Formes d'ondes CEM*

Les perturbations générées par ce convertisseur sont essentiellement dues au courant de mode commun. Cette affirmation, confirmée par la mesure, s'explique par un filtre en mode différentiel très efficace. En effet, l'utilisation de capacités de technologie CMS présente un comportement capacitif sur une large gamme de fréquence.
En utilisant une sonde de courant sur la tresse de terre, nous avons relevé le courant de mode commun (Figure 19).

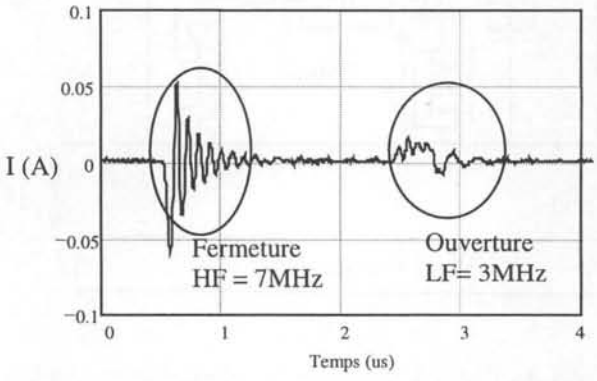



Figure 19 : Allure du courant de mode commun (mesure)

Sur l'allure de ce courant, on note deux phénomènes prépondérants, l'un à la fermeture de l'interrupteur, l'autre à l'ouverture. Lorsque l'interrupteur se ferme, une forte oscillation sur le courant de mode commun est visible à une fréquence notée HF d'environ 7MHz. A l'ouverture de l'interrupteur, une oscillation basse fréquence notée LF d'environ 3MHz est observable. Après cette constatation pratique, nous allons étudier les mécanismes de génération du courant de mode commun selon les différentes phases de fonctionnement.

### *4.3. Etude des chemins de propagation*

Dans cette recherche des chemins de propagation du courant de mode commun, nous utiliserons, comme précédemment, des raisonnements fondés sur des analyses fréquentielles. L'étude des chemins de propagation doit bien sûr prendre en compte les diverses configurations du transformateur mais cette fois, vis-à-vis du mode commun.

#### 4.3.1. Ouverture de l'interrupteur

Pendant cette phase, les enroulements secondaire et auxiliaire du transformateur sont en court-circuits dynamiques. Le chemin de propagation du courant de mode commun faisant intervenir le transformateur est présenté sur la Figure 20. Il part du secondaire, où sera connectée la seule capacité de mode commun, pour revenir au primaire, connecté au RSIL.

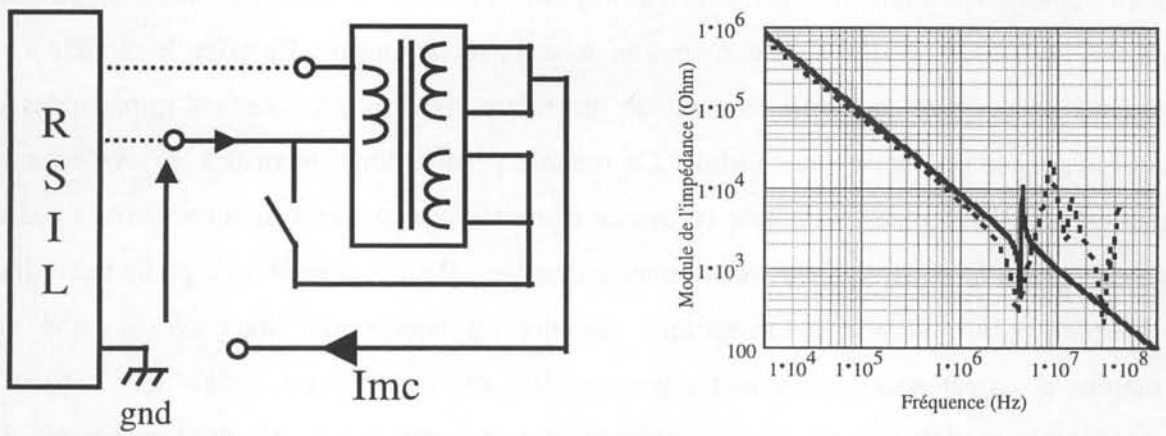



Figure 20 : Module d'impédance. Mesure (pointillé) – Modèle 6 capacités (gras)

L'impédance du transformateur présente un minimum vers 3MHz, qui sera une fréquence privilégiée pour le courant de mode commun. On constate que le schéma à six capacités est suffisant pour représenter ce phénomène sur le mode commun.

#### 4.3.2. Fermeture de l'interrupteur

Pendant la fermeture de l'interrupteur, les enroulements secondaires sont ouverts. Le primaire est quant à lui parcouru par le "courant de puissance" qui croît linéairement. Il est donc en court-circuit dynamique. Pendant cette phase, l'interrupteur est passant, l'enroulement auxiliaire et le primaire du transformateur sont donc reliés. Si on observe l'impédance du

transformateur dans cette phase (Figure 21), on constate que le module de l'impédance présente un minimum aux environs de 7MHz.

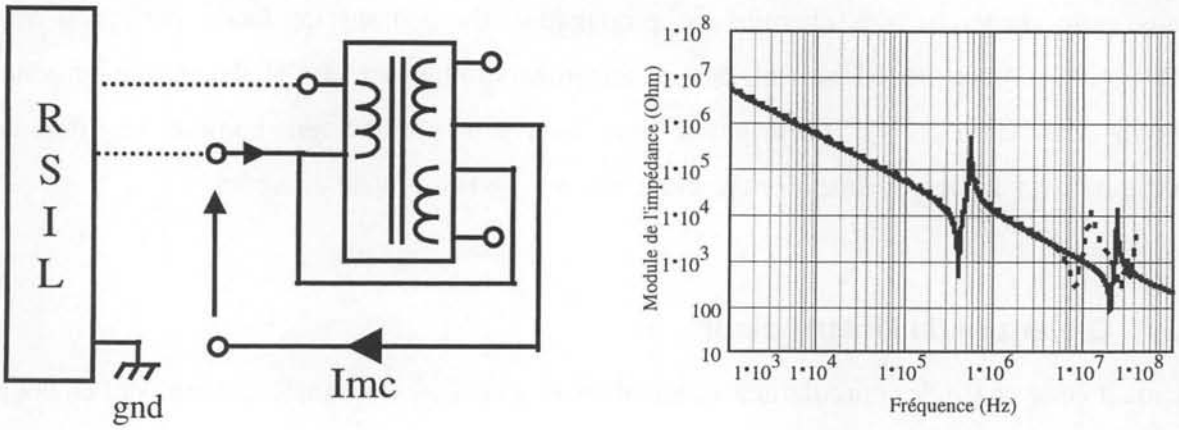



Figure 21 : Module d'impédance. Mesure (pointillés) – Modèle 6 capacités (gras)

En simulation, le modèle du transformateur utilisant six capacités présente une résonance aux environs de 20MHz, ce qui n'est donc pas en accord avec la mesure. En effet, le modèle à six capacités ne contient pas suffisamment de paramètres pour représenter les impédances en haute fréquence de façon satisfaisante. Ce modèle permet donc de mettre en évidence les phénomènes de manière qualitative (présence d'une résonance haute fréquence) mais pas de manière quantitative (fréquence de résonance décalée). Pour représenter ce phénomène haut en fréquence, un modèle électrostatique complet est nécessaire. Nous avons mené une démarche de caractérisation électrostatique complète afin d'obtenir un modèle à 15 capacités. Cependant, le modèle issu de cette caractérisation ne présente pas les résultats escomptés. En théorie, ce modèle permet une meilleure prise en compte du comportement haute fréquence du transformateur, mais des problèmes de précision de mesures ne permettent pas encore d'obtenir un modèle très précis en haute fréquence (Voir chapitre 2).

Remarque : En pratique, l'enroulement secondaire n'est pas réellement en circuit ouvert, en effet, le snubber de la diode représente une charge lorsque celle-ci est bloquée. Cette influence peut s'évaluer sur la Figure 22. On rappelle que les paramètres du snubber sont $C = 1nF$ et $R = 10\Omega$.

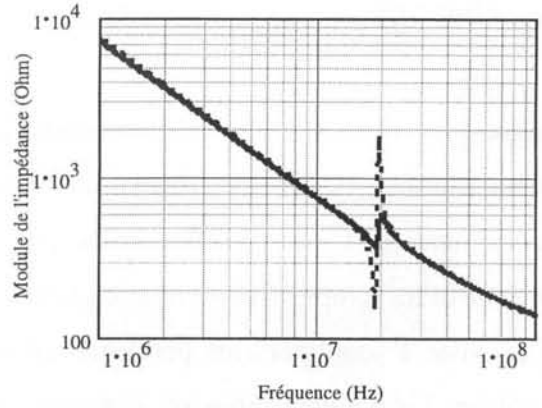



Figure 22 : Influence du snubber sur les amortissements

### *4.4. Formes d'ondes temporelles*

Nous présentons, maintenant l'allure du courant de mode commun obtenue en simulation avec le modèle six capacités du transformateur.

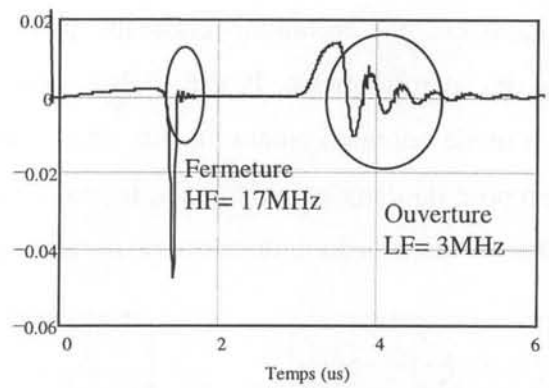



Figure 23 : Allure du courant de mode commun avec un modèle de transformateur 6 capacités

Cette allure est bien en accord avec la mesure, de plus, on constate bien un décalage sur la fréquence de résonance haute fréquence. Ce décalage visible sur les courbes d'impédances est bien mis en évidence sur les courbes temporelles. Cette étude permet de souligner le rôle du transformateur dans les perturbations de mode commun de ce convertisseur. En effet, si le modèle de transformateur ne présente pas de capacités parasites, il n'y a pas de courant de mode commun. L'allure du courant de mode commun est bien représentée, malgré un problème sur les amplitudes. Il semble que la méthode de mesure pour identifier le modèle électrostatique reste encore à affiner. Nous allons maintenant voir comment réduire les perturbations puis dans un deuxième temps, critiquer le schéma de simulation proposé initialement et proposer d'autres chemins de propagation..

### *4.5. Réduction des perturbations*

Il existe plusieurs techniques de réduction des perturbations [Labouré95]. La première consiste à réduire les perturbations en agissant sur la commande des interrupteurs, en ralentissant la vitesse de commutation [Costa91]. Dans le cas des composants intégrés, il est difficile d'agir sur la commande et les temps de commutation sont déjà lents...

Une deuxième technique consiste à "confiner" les perturbations dans un espace déterminé. Deux méthodes sont utilisables. La première consiste à rendre les voies de couplage avec l'extérieur plus difficiles à emprunter pour les perturbations. La deuxième solution consiste à offrir aux perturbations d'autres chemins de propagation moins impédants au sein du convertisseur. Nous allons rapidement illustrer ces deux techniques de filtrage.

#### 4.5.1. Filtre de mode commun

Le filtre de mode commun est une technique classique pour augmenter l'impédance du chemin de propagation des perturbations. Il est réalisé avec deux inductances à flux soustractifs, le courant de mode commun créant un flux dans le noyau magnétique. Un filtre de mode commun est composé de deux enroulements, il peut donc se représenter comme un transformateur. En effectuant l'identification du filtre, on obtient les courbes suivantes :

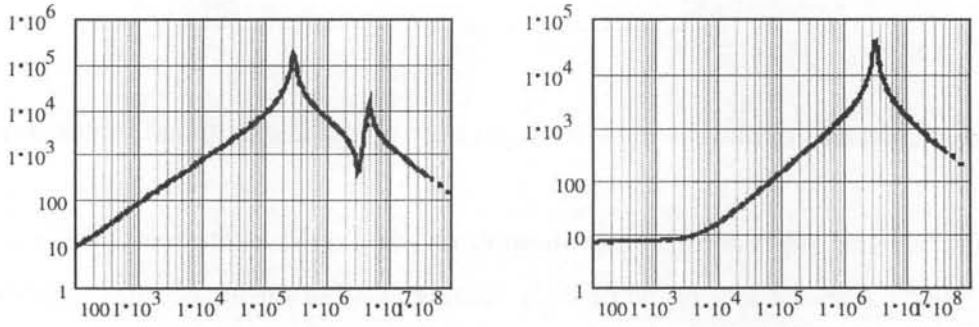



Figure 24 : Exemple de module d'impédances du filtre de mode commun

En observant ces courbes, on constate que la première fréquence de résonance se situe au environ de 300kHz. Cette observation montre qu'au-delà de cette fréquence, le filtre perd de son efficacité.

La Figure 25 compare les mesures des perturbations générées par le convertisseur avec et sans filtre de mode commun. On constate que le filtre de mode commun utilisé dans cette alimentation permet d'améliorer de seulement 3dB le spectre des perturbations et qu'en haute

fréquence, il est inefficace. Malgré ce filtre, le convertisseur est encore beaucoup trop polluant pour respecter les normes CEM conduite. Dans les versions postérieures de cette baie de mesure, le filtre de mode commun a d'ailleurs été supprimé.

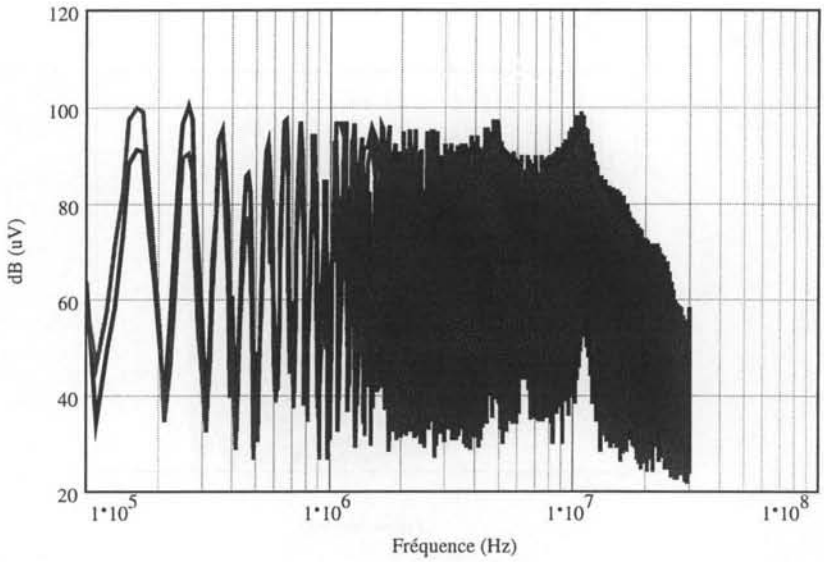



Figure 25 : Comparaison de mesures avec et sans filtre de mode commun

### 4.5.2. Solution industrielle

Nous avons vu que les perturbations de mode commun sont essentiellement générées par le secondaire du transformateur. Ces perturbations sont dues aux fortes variations de potentiels entre le plan de masse numérique et la terre. Par conséquent, en imposant un court-circuit dynamique entre ce plan de masse et le primaire, on confine les perturbations au sein même du convertisseur (Figure 26).

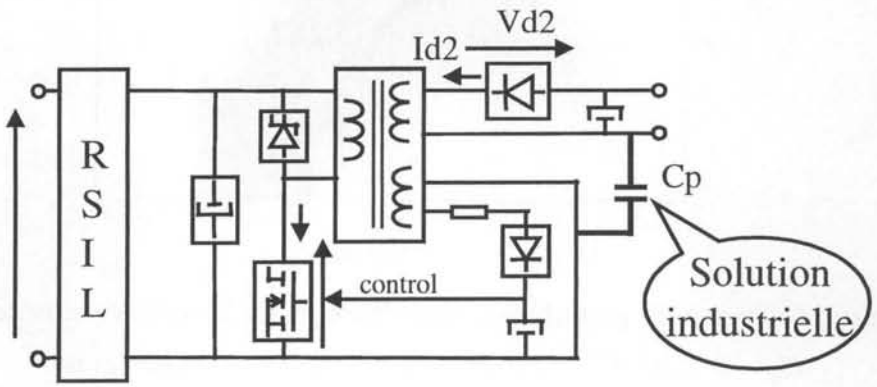



Figure 26 : Solution industrielle pour réduire les perturbations

On constate sur la Figure 27 que cette solution est très efficace. Toutefois, la valeur de 2.2nF est arbitraire et la présence de ce condensateur peut être gênante vis-à-vis des contraintes de susceptibilité de type "onde de choc". En effet, elle détériore l'isolation galvanique primaire-secondaire.

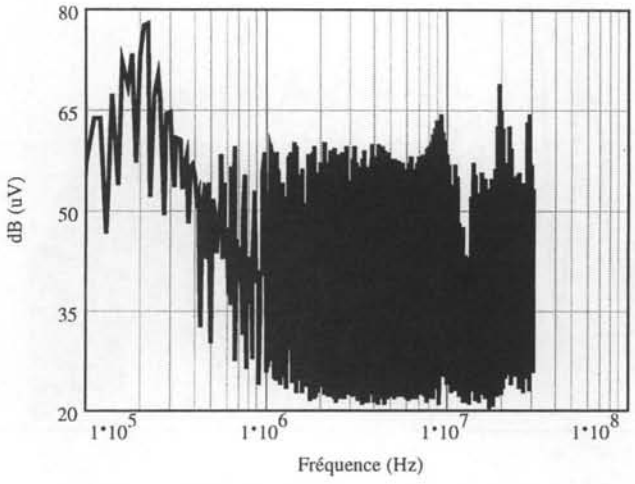



Figure 27 : Spectre de mesure des perturbations avec la capacité $C_p = 2.2nF$

La Figure 28 montre qu'à l'aide de simulation, on peut étudier l'influence de la valeur de $C_p$ sur le spectre des perturbations, pour le cas échéant, pouvoir diminuer cette valeur, voire l'obtenir par un routage astucieux des pistes…

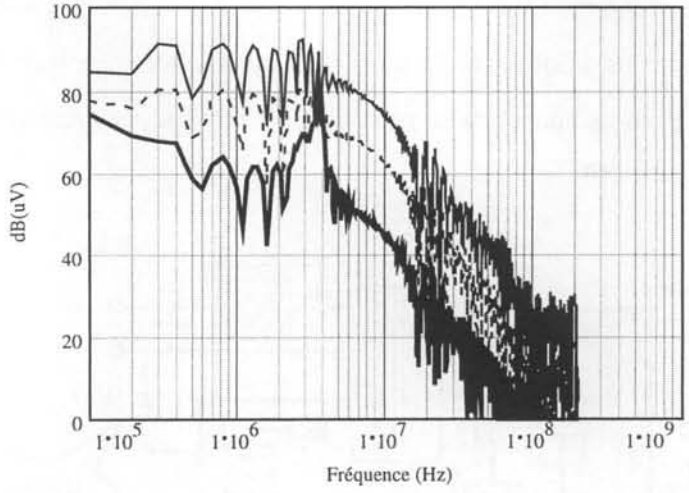



Figure 28 : Spectre de perturbation (simulation) pour les trois valeurs de $C_p$
$C_p = 0$ (fin), $C_p = 220pF$ (pointillés), $C_p = 2.2nF$ (gras)

Pour être complet, on note que finalement l'atténuation obtenue en ajoutant la capacité $C_p$ est fonction du rapport $C_p / C_{gnd}$ . Par conséquent, il est souhaitable de connaître la valeur de

$C_{gnd}$. Cette remarque est confirmée par la simulation. En effet, le spectre obtenu pour $C_{gnd} = 50pF$ et $C_p = 2.2nF$ et celui pour $C_{gnd} = 5pF$ et $C_p = 220pF$ sont quasiment identiques.

## 5. Analyse critique

### *5.1. Rôle du transformateur*

Nous avons considéré dans un premier temps qu'une seule capacité de mode commun assurait le retour des perturbations de mode commun et que c'était le transformateur qui constituait le principal trajet des perturbations. Afin de valider cette hypothèse, nous avons fait varier les composants parasites du chemin de propagation actuel. Les résultats des études de sensibilité sont présentés dans le tableau 3.

| Lgnd | Cgnd | Amplitude du pic | Oscillation HF | Oscillation BF |
|---|---|---|---|---|
| 50nH | 50pF | 47.8mA | 17MHz | 3MHz |
| 50nH | 100pF | 57.4mA | 17MHz | 3MHz |
| 50nH | 10pF | 20.3mA | 17MHz | 3MHz |
| 500nH | 100pF | 58.1mA | 17MHz | 3MHz |

Tableau 3 : Influence des éléments séries parasites

En observant, les valeurs numériques, on peut conclure que c'est bien le transformateur qui impose la fréquence de résonance haute fréquence visible sur le courant de mode commun. D'autre part, les variations de l'amplitude du pic de courant ne sont sensibles que pour une capacité Cgnd faible (< 50pF), par conséquent, on peut conclure que le transformateur impose à la fois l'amplitude et la fréquence de résonance du courant de mode commun dans cette phase.

### *5.2. Autres chemins de propagation*

L'objectif de ce paragraphe est d'analyser l'influence d'autres chemins de propagation en mode commun. Plusieurs capacités peuvent être prises en compte, comme indiqué sur la Figure 29.

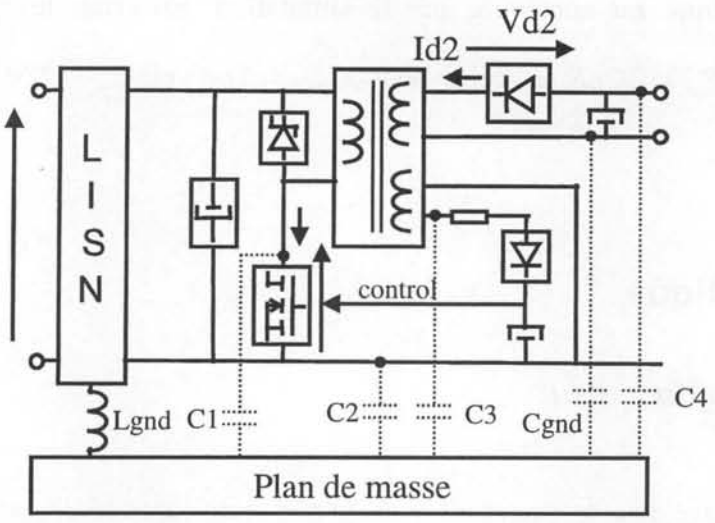



Figure 29 : Schéma électrique complet de la simulation

La capacité parasite C1 est la capacité localisée entre le drain de l'interrupteur et la terre. En observant les formes d'ondes théoriques, on note que le potentiel de drain de l'interrupteur est soumis à de brusques variations de potentiels vis-à-vis de la terre. Par conséquent, une capacité même très faible (<10pF) entraîne un courant de mode commun prohibitif. Cette capacité parfois appelée de "point milieu" est souvent la seule prise en compte dans les modélisations classiques [Scheich93]. Mais si l'on place cette capacité, on constate que la capacité de protection Cp (Figure 26) n'agit pas sur ce chemin de propagation puisque tout est cantonné au primaire. On peut donc en conclure qu'en pratique cette capacité est nécessairement négligeable.

La capacité C4 présente entre le point haut du secondaire et la masse peut également modifier les chemins de propagation. Nous avons considéré qu'en dynamique cette capacité est associée en parallèle avec la capacité Cgnd.

La capacité C2 est connectée en parallèle sur le RSIL, elle joue donc le rôle de capacité de protection, elle permet un recyclage interne des perturbations. En pratique, sa valeur est si faible que son influence est négligeable.

Une dernière capacité peut intervenir dans le montage, la capacité C3 connectée entre l'anode de la diode de l'enroulement auxiliaire et le plan de masse. En conséquence, cette capacité ajoute un chemin de propagation, un courant de mode commun peut donc circuler. En simulation, si l'on place cette capacité, on constate que la capacité de protection Cp (Figure

26) n'agit plus sur la réduction des perturbations, ce qui limite l'influence et par conséquent la valeur de cette capacité.
En définitive, l'hypothèse de considérer Cgnd très grand devant les autres capacités se révèle correcte. Toutefois, malgré leurs faibles valeurs, les autres capacités parasites assurent la circulation d'un courant de mode commun, qui pourrait justifier les écarts relativement importants dans les amplitudes observées en simulation. Il est important de rappeler que les modèles de semi-conducteurs utilisés sont élémentaires, ils peuvent donc intervenir sur l'allure des perturbations. Une étude de sensibilité sur les diverses capacités parasites a permis de montrer que la fréquence de la perturbation HF (17MHz) n'est pas modifiée.

## 4. Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de souligner le rôle que peut tenir le transformateur dans le fonctionnement d'un convertisseur statique et de montrer que les modèles obtenus au chapitre 2 pouvaient être utilisés dans le cadre d'une simulation complète. Dans cet esprit, nous avons recherché un convertisseur représentatif des problèmes industriels. Nous avons choisi un convertisseur de type flyback, cette structure étant très utilisée pour des faibles puissances. Le fonctionnement en conduction discontinue permet en outre de mettre en évidence le comportement électrostatique du transformateur sur les formes d'ondes de puissance.

Cette étude s'est déroulée en deux étapes. La première étape a consisté à retrouver les formes d'ondes de puissance. Le convertisseur fonctionne en conduction discontinue, dès cette étape, le rôle des composants parasites est important. Dans une deuxième étape, nous avons étudié le comportement CEM dans la structure. Dans les deux parties de cette étude, nous avons utilisé les modèles de transformateurs issus des approches progressives développées dans le chapitre 2.

Les résultats obtenus par simulation sont encourageants. En effet, ils ont permis d'identifier clairement l'influence du transformateur dans la génération des perturbations. L'utilisation de plusieurs modèles a permis de fixer les limites de chacun et ce malgré un environnement de simulation difficile (modèles de semi-conducteurs inconnus, capacité de mode commun inconnue...).

Cette étude a permis de montrer qu'il n'est pas indispensable de disposer d'un modèle électrostatique complet pour être utilisé dans une simulation afin d'en prévoir le comportement CEM. En effet, des modèles intermédiaires issus d'une caractérisation progressive permettent de mettre en évidence certains phénomènes de manière qualitative. Cependant, ils ne disposent pas de suffisamment de paramètres pour permettre une étude quantitative. Nous avons vu en outre, que pour un transformateur industriel, l'identification électrostatique complète d'un composant constitué de plus de deux enroulements peut s'avérer délicate, ce qui contribue d'autant plus à l'intérêt d'une méthode de caractérisation progressive.

# Chapitre 5

## Approche expérimentale du rayonnement des composants bobinés

## Contexte de l'étude

Pour prévoir, par modélisation, les performances CEM d'un convertisseur statique complet, il est nécessaire de disposer de modèles fiables. En ce qui concerne les perturbations conduites, l'étude des composants magnétiques a abouti à une bonne connaissance de leur comportement électrique ainsi qu'à des méthodes de caractérisation de ces composants. Même si cette étude n'est pas close, ses résultats permettent aujourd'hui de traiter de nombreux problèmes pratiques de manière satisfaisante.

Pour les perturbations rayonnées, le rayonnement des pistes de circuit imprimé a déjà été longuement étudié [BenHadj97] [Youssef98] [Gombert92] [Lu90] [Puzo92]. En revanche, le rayonnement des composants bobinés est un sujet entièrement nouveau et exploratoire; que nous abordons ici. A l'expérience, on constate que les composants magnétiques proches ont tendance à se coupler. Ils peuvent même se coupler à des composants non magnétiques tels que les pistes de circuit imprimé. Dans certains équipement "sensibles", on a vu des horloges se désynchroniser parce que l'inductance de filtrage d'alimentation captait le champ d'un autre composant.

L'étude directe du couplage entre deux composants magnétiques est difficile et restrictive. Difficile parce que le placement du second composant par rapport au premier présente six degrés de liberté (position et orientation). Restrictive, parce qu'à partir d'une telle étude, il sera difficile de savoir comment l'un des composants se couplerait avec par exemple, le câblage.

L'étude du rayonnement des composants bobinés aborde successivement l'émission et la réception de champ magnétique en espérant que, lorsque ces deux aspects seront compris, une bonne partie du chemin à parcourir pour comprendre le couplage entre deux composants sera accomplie.

Nous avons opté, à l'instar de l'étude relative aux modèles pour la CEM conduite, pour une approche expérimentale afin de "dégrossir" l'étude. Il va de soi que cette vision devra, dans un futur proche être complétée par des simulations éléments finis et des études analytiques, mais

pour débuter, nous avons jugé nécessaire de nous familiariser avec les ordres de grandeurs et de mettre en évidence les paramètres prépondérants.

## 1. Introduction

Dans un premier temps, il s'agit de caractériser le champ magnétique régnant autour du composant bobiné. Si la plus grande dimension du composant est D, ce champ doit être connu jusqu'à une distance de l'ordre de 5D. Le fait de s'intéresser au champ proche laisse craindre qu'il faille tenir compte de détails assez fins de la carte de champ. A l'opposé, si l'on considère que seul le couplage avec des composants de quelques cm présente de l'intérêt, on peut espérer que les détails de petite échelle ne soient pas intéressants et que seul un aspect "filtré" du champ présente de l'intérêt et doive être identifié.

L'approche proposée ici est la suivante. Après l'acquisition expérimentale, les données sont nombreuses : 3 composantes en fonction de 3 coordonnées. Il convient alors de condenser toutes ces mesures en un ensemble plus restreint de données en s'appuyant sur le développement multipolaire. Un échantillonnage spatial approprié doit permettre de retrouver le champ en tout point à partir d'un nombre restreint de paramètres.

Un banc de mesure, permettant de positionner des antennes de champ magnétique autour de l'objet à caractériser, a été construit dans ce but [Schellmanns99-1]. Il est évident que la première partie de cette étude lui est consacrée. Cette étude comprend la définition des besoins de mesure (composants et alimentations), le choix des matériels adaptés, la mise en œuvre de l'ensemble dans un environnement CEM réaliste et la validation par des mesures de référence.

Nous pensons que, pour l'étude des perturbations à courte distance, il est possible de dissocier les rayonnements électrique et magnétique et même de négliger le rayonnement électrique. Dans cette hypothèse, il est envisagé d'apprendre, d'abord, à caractériser le rayonnement magnétique d'un composant.

## 2. Réalisation du banc de mesure

Nous allons donc réaliser un banc de mesures destiné à caractériser le rayonnement magnétique d'un composant bobiné (self ou transformateur). Le travail étant exploratoire et les ordres de grandeurs mal définis, la réalisation d'un banc prototype nous a semblé indispensable. Cette réalisation n'est donc qu'une première étape, vers l'étude du rayonnement des composants et des circuits d'électronique de puissance. Ce banc se compose d'une partie mécanique permettant le positionnement du dispositif sous test et des antennes, d'une partie électronique assurant l'alimentation électrique du dispositif, et la mesure des champs rayonnés.

### *2.1. Objectifs d'un banc de mesure*

#### 2.1.1. Motivation

Cette étude vise à améliorer notre connaissance de la compatibilité électromagnétique rayonné du composant magnétique. En fait, nous souhaitons :

- Observer le rayonnement d'un composant
- Apprendre à le caractériser, voir comment il varie en fonction du niveau d'alimentation
- Voir ce qui influe sur les couplages parasites
- Tester des blindages

#### 2.1.2. Cahier des charges

Il est supposé que les composants à étudier peuvent entrer dans un cube de 1cm à 10cm de côté. Ces composants sont alimentés par des signaux sinusoïdaux de fréquences comprises entre 10kHz et 10MHz. L'amplitude et la forme des champs rayonnés ne sont pas connues à l'avance et en conséquence, les mesures seront effectuées dans toutes les directions. En notant D la plus grande dimension du composant, le champ doit être connu jusqu'à une distance de l'ordre de 5D. La présence d'une cage de faraday n'est pas obligatoire mais le banc devra fonctionner dans un environnement industriel réaliste et être peu sensibles aux perturbations extérieures.

C'est pendant la définition du cahier des charges que la réflexion doit être la plus complète. Elle porte notamment sur les sujets suivants :

La géométrie du dispositif et le positionnement respectif des différents appareils

L'alimentation des composants

Le nombre et le type d'antennes (grandeur, positionnement...)

La qualité des connexions (type, longueur, positionnement...)

La recherche d'une mise en œuvre aisée du dispositif

Cette première partie recense les contraintes imposées à la mécanique permettant de positionner l'objet et les antennes, sans perturber les mesures. Une attention toute particulière devra être portée aux points suivants :

- Les mesures effectuées devant servir d'appui à une modélisation, le repérage du positionnement le plus pratique semble être celui procuré par les coordonnées sphériques $\rho$, $\theta$, $\varphi$.

- Les objets à caractériser sont inscriptibles dans une sphère de diamètre D (10cm max.). Le centre du repère sera placé au centre de l'objet, ce qui suppose que le support du composant puisse reculer d'un demi-rayon. La position de ce composant sur ce support doit être repéré soigneusement

- La discrétisation angulaire de l'espace sera effectuée tous les 15°.

- La distance maximale de mesure sera cinq fois la longueur maximale de l'objet sous test (environ 50cm)

- A l'opposé, les antennes pourront se rapprocher jusqu'au contact de l'objet sous test. Bien entendu, le caractère ponctuel de la mesure ne sera supposé que si le champ émis par le dispositif varie peu sur la surface de l'antenne

- Une réflexion devra être menée sur le volume utile de mesure : un retournement du composant devrait permettre de le limiter à une demi-sphère de rayon 5D, mais il faudra alors tenir compte de l'alimentation du composant, qui ne serait pas disposée de manière symétrique...

- La précision souhaitée pour le positionnement est de l'ordre du millimètre en translation, et de quelques degrés en rotation. Il ne semble pas, au vu de l'encombrement des antennes boucle, qu'un positionnement plus précis soit nécessaire

- Pour ne pas perturber la mesure, aucun matériau, ni magnétique, ni métallique ne devra être disposé à moins de 10D de l'origine des coordonnées. Les matériaux métalliques, même amagnétiques, peuvent être le siège de courants de Foucault qui perturberaient le champ magnétique

- Le nombre de points de mesure est très élevé. Par exemple, prenons une dizaine de points sur la longueur, et une discrétisation angulaire 15°. Le nombre de points ainsi obtenu dans la demi-sphère est alors de $\frac{180}{15}\theta$, $\frac{360}{15}$ $\varphi$, 10 $\rho$, soit 2880 points. Or, en chaque point, les 3 composantes, doivent être relevées, soit donc environ 8500 mesures à effectuer. Notons en outre que chacune de ces composantes est complexe, une partie en phase avec le courant et une autre en quadrature. Bien sur, la multiplication des antennes peut permettre de réduire le nombre de déplacements à effectuer pour relever ces mesures, mais outre les problèmes d'interaction entre antennes, il demeura tout de même quelques milliers de points de l'espace à observer. Il ne semble pas souhaitable de réduire ce nombre de données (en ne mesurant, par exemple, que la composante radiale) dans la mesure où les formes des champs nous sont pour le moment absolument inconnues. Il serait donc extrêmement dommage de limiter la précision des mesures par une limite mécanique. Une motorisation déportée, associée à des capteurs de positions, semble donc indispensable dans la version finale. Par ailleurs, on voit déjà qu'il sera indispensable de condenser ces informations en un nombre réduit de paramètres, ce qui sera évoqué dans le paragraphe 2.

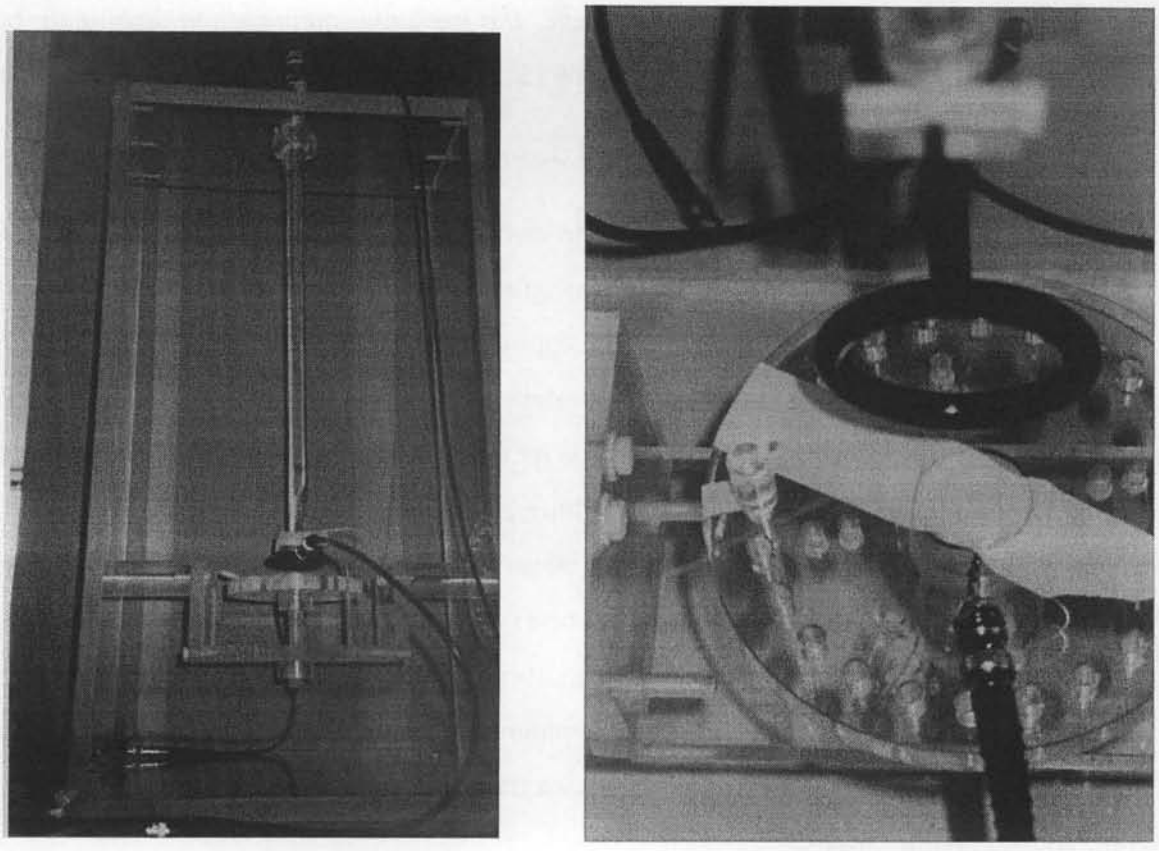
#### 2.1.3. Fabrication du banc

La qualité de fabrication du banc de mesure aura une grosse influence sur la précision des résultats que l'on pourra obtenir par la suite. Un travail de mécanique dans le domaine du positionnement des antennes est nécessaire. Cette réalisation longue et délicate (pas de matériau métallique autorisé) a été effectuée au laboratoire par des ingénieurs et techniciens. Cette première partie se terminera par une ou plusieurs campagnes de mesures permettant de valider le dispositif et de déterminer ses principales caractéristiques électriques (sensibilité, sélectivité, précision...)

### *2.2. Description*

#### 2.2.1. Aspect mécanique

L'aspect général du banc est présenté sur la Figure 1a. Le premier prototype mécanique de positionnement des antennes est décrit Figure 1. Il est entièrement en Plexiglas. La réalisation a été effectuée en sous-traitance par M. C. BRUN, du LEG.



(a) (b)

Figure 1 : (a) Vue générale du banc de mesure
(b) Plateau tournant

Un plateau tournant de rayon 15 cm est fixé en bout d'un axe fileté. Le plateau "fou" autour de cet axe est ainsi mobile en translation, de manière à positionner le centre du dispositif au centre du repère en coordonnées sphériques. Ce plateau est percé tous les 15° de trous destinés à faire varier l'angle φ. Le verrouillage est assuré au moyen d'une clavette (Figure 1b) L'axe du plateau est également mobile selon l'angle de rotation θ. Le repérage et le verrouillage de cet angle sont assurés par le même dispositif de plateau percé tous les 15° et d'une clavette.

L'antenne est positionnée à l'extrémité d'un bras mobile en translation. Celui-ci est creux, de manière à pouvoir faire passer un câble coaxial pour relier l'antenne à l'instrumentation de mesure. Le repérage en position est assuré au moyen d'une règle en plastique.

Afin de pouvoir mesurer les trois composantes du champ, il est nécessaire de modifier le positionnement de l'antenne en bout d'arbre. Ainsi, deux gorges à 90° ont été usinées ; de ce fait, les deux composantes selon les vecteurs θ et φ sont accessibles par simple rotation de l'arbre. Le verrouillage est assuré au moyen d'une vis plongeant dans une des gorges.

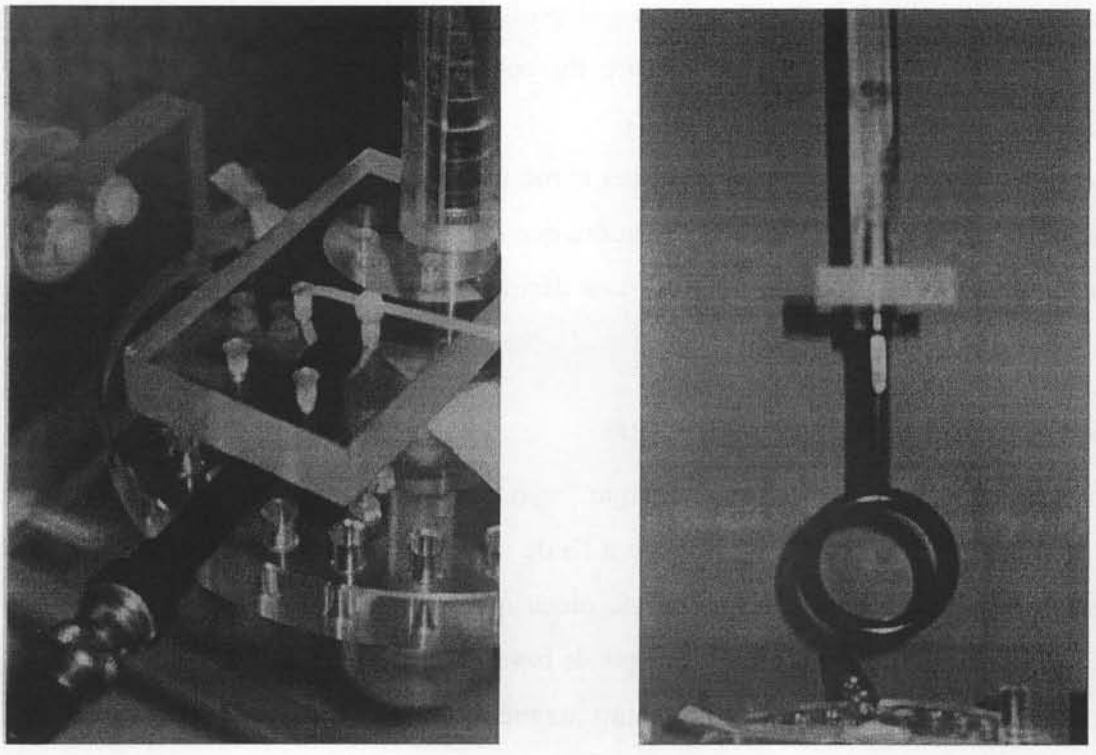


Figure 2 : (a) Dispositif de rotation du plateau tournant selon θ
(b) Positionnement vertical de l'antenne

### 2.2.2. Alimentation du composant

En premier lieu, il conviendra d'alimenter les composants par un moyen perturbant le moins possible les mesures, et adapté aux problèmes de positionnement mécanique. La disposition des fils reliant ce câble aux bornes du composant doit être précisément reproductible, dans la mesure où sa contribution au rayonnement de l'ensemble n'est pas forcément négligeable.

Le signal à appliquer aux composants doit permettre une mesure aisée couvrant une large gamme de fréquence bien sur compatible avec l'utilisation de celui-ci. Dans un premier temps, l'utilisation de signaux sinusoïdaux semble plus appropriée que celle de signaux à contenu harmonique plus riche.

Afin d'évaluer l'effet produit par des signaux réels d'électronique de puissance (fondamental, harmoniques et bruit en haute fréquence), il conviendra de mesurer en sinusoïdal le module et la phase, et d'étendre la gamme de fréquence bien au-delà des fréquences d'utilisation des composants. En outre, l'alimentation du composant devra être effectuée avec un niveau compatible avec l'utilisation réelle de celui-ci. Un amplificateur de puissance [NF4055] sera associé au banc. Les caractéristiques de celui retenu pour les premiers essais sont : 1A et 50Vmax, du continu à 10MHz.

La connectique reliant l'amplificateur au dispositif sera du type câble coaxial-BNC, pour rayonner le moins possible. Une mesure du courant d'alimentation est à prévoir (pince ampèremètrique et oscilloscope, shunt...).
L'alimentation du dispositif devra perturber le moins possible la mesure, notamment en ce qui concerne les connections terminales. Il faudra que le composant soit testé dans des conditions d'implantation proches de celles finales, si on désire obtenir des résultats fiables.

### 2.2.3. Capteur de champ magnétique

La mesure du champ électromagnétique rayonné par un composant ou un système d'électronique de puissance est effectuée à l'aide d'antennes, elles assurent la transformation de l'énergie électromagnétique en énergie électrique. Malgré leur diversité, le principe des antennes utilisées repose sur deux éléments de base : antenne dipôle (ou fouet) pour le champ électrique et antenne boucle pour le champ magnétique. On peut classer ces différents types d'antennes en deux catégories :
- Les antennes en champ lointain, indépendantes de la nature et de la forme de la source.
- Les antennes en champ proche, qui doivent avoir des dimensions très faibles par rapport aux dimensions de la source et cela d'autant plus que celle-ci est proche.

Il est important lorsque l'on désire effectuer une mesure, de savoir si l'on se situe en champ proche ou en champ lointain. La limite entre les deux est ambiguë, on rappelle simplement que le champ proche est défini pour $\rho << \frac{\lambda}{6}$ ($\rho$ distance d'observation, $\lambda$ longueur d'onde).

Dans le cas du champ proche, il n'y a pas de relation simple entre E et H, donc ils doivent être mesurés séparément. Pour une fréquence de 10MHz, $\lambda \approx 30m$, la distance d'observation étant inférieure à 50cm, l'hypothèse de mesure du rayonnement en champ proche est correcte.

#### 2.2.3.1. Principe de l'antenne magnétique

Ces capteurs de champ magnétique [Emco91] sont généralement réalisés à l'aide d'une bobine monospire. Lorsque l'antenne est plongée dans un champ magnétique B, la tension entre ses bornes est donnée par :

$$e = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}\, ds \quad \text{(S : surface de l'antenne)}$$

En haute fréquence, le nombre de spires de l'antenne doit être réduit (antenne monospire) afin d'éviter les résonances dues aux capacités parasites. Leurs dimensions doivent être négligeables par rapport à la longueur d'onde du champ à mesurer pour avoir une distribution de courant constante dans la boucle. (Figure 3).

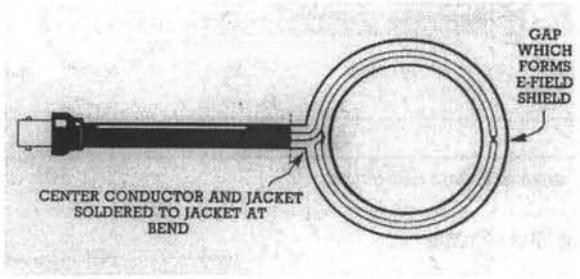



Figure 3 : Antenne magnétique

## 2.2.3.2. Facteur d'antenne

Il est défini comme le rapport entre le champ magnétique capté par l'antenne et la tension effective aux bornes de la boucle, il s'exprime en dB. La documentation constructeur donne le facteur d'antenne associé à chaque diamètre de spire (Figure 4).

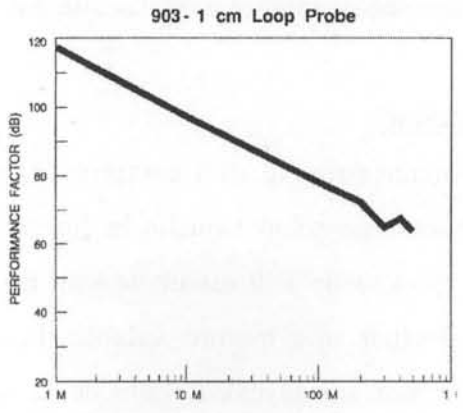



Figure 4 : Facteur d'antenne de la boucle de diamètre 1cm (sonde EMCO)

La valeur du champ magnétique H est obtenue en retranchant $20\ log(377) = 51.5\ dB$ au facteur d'antenne. Le facteur d'antenne ainsi obtenu permet de convertir la tension mesurée e en valeur de champ H (la tension e est exprimée en dB et H est obtenu en ajoutant la valeur du facteur d'antenne).

Une autre méthode consiste à considérer simplement que le flux embrassé par la spire est $\Phi = \mu_0 H S$ (S représentant la surface de la spire). La tension captée est alors $e = \frac{d\Phi}{dt}$, on obtient alors :

$$H = \frac{e}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \pi \cdot d^2/4} \qquad \text{eq (1)}$$

Ce qui se traduit en décibels par une pente à –20dB/décade. Jusqu'à des fréquences de 10MHz, les deux méthodes correspondent exactement, dans la mesure où les antennes ne présentent aucune résonance (Figure 4).

***Exemple numérique :***

Soit une tension mesurée e = 1mV à f = 100kHz avec l'antenne de 6cm de diamètre. Le facteur d'antenne de cette antenne à 100kHz vaut environ 53.5dB, ce qui conduit à une valeur de H de -6.5dB soit 0.47A/m. La méthode de calcul par le flux conduit à H = 0.44A/m, ce qui, au vu de l'incertitude de lecture sur la courbe du facteur d'antenne, est satisfaisant.

En pratique, on utilisera la deuxième méthode, en vérifiant sur les courbes des constructeurs que la limite de validité de l'antenne de mesure n'est pas atteinte.

### 2.2.3.3. Dimension de l'antenne

Le choix du diamètre des antennes résulte d'un compromis entre l'amplitude de la tension détectée et la validité de l'hypothèse selon laquelle le flux embrassé est uniforme dans la surface de la spire (mesure "ponctuelle"). Il est intéressant de chiffrer la taille de l'antenne maximale autorisée pour effectuer une mesure valable. Pour cela, une étude conjointe simulation / mesure a été menée sur le cas d'école de la spire circulaire développé au paragraphe 4. Il semble qu'il soit judicieux de développer une "bibliothèque" de champs (en fonction des transformateurs, des formes géométriques ou de moments multipolaires que l'on cherche à déterminer), de manière à adapter la taille de l'antenne aux champs à mesurer.

Dans un premier temps, nous avons préféré utiliser des antennes commerciales [Emco91] pour le début de cette étude, afin de diminuer les zones d'incertitudes (différents appareils de mesure, influence du positionnement des antennes...). Dans un deuxième temps, nous avons réalisé nos propres antennes de mesure.

### 2.2.4. Instrumentation de détection

Plusieurs essais ont été effectués, afin de déterminer le niveau de signal à mesurer. Dans tous les cas, celui-ci reste très faible. Pour avoir un ordre de grandeur, à quelques centimètres d'une inductance alimentée en sinusoïdal à 50kHz, une antenne boucle de 2cm de diamètre donnait un signal à l'oscilloscope inférieur à 1mV, difficile à sortir du bruit ambiant. Compte tenu de ces faibles niveaux, l'appareillage de mesure doit être spécifique. Les trois appareils possibles sont : l'oscilloscope, l'analyseur de spectres et la détection synchrone. Le principe de mesure d'une détection synchrone peut être comparé à un filtre très sélectif dont la fréquence centrale est variable. Une entrée appelée "entrée référence" permet de fixer cette fréquence centrale. Le signal à mesurer (le signal de sortie de l'antenne de mesure) est injecté sur "l'entrée input". La détection synchrone délivre un signal en phase avec l'entrée et un autre en quadrature, ce qui permet de déduire le module du signal ainsi que sa phase.

Les critères retenus sont les suivants :

- précision
- aptitude à fonctionner en milieu perturbé
- quantité d'information restituée

Les essais ont été effectués dans une salle jouxtant une salle de Travaux Pratiques où des étudiants utilisaient des moteurs et convertisseurs statiques. Le bilan de ces essais permet de conclure :

- L'oscilloscope doit être exclu (sensibilité d'entrée trop faible). L'appareil utilisé (DSA 602 – Tektronix [Tektronix90]) montre clairement ses limites dans la mesure où le signal ne sort plus du bruit ambiant dès que la tension est en dessous de 2mV.
- L'analyseur de spectre (appareil utilisé HP 8560A [HP8560A]) possède une bonne sensibilité d'entrée (quelques dizaines de µV) mais il ne mesure que le module.
- La détection synchrone (appareil utilisé Stanford SR844) [Stanford97] est simple à utiliser et permet de descendre à des niveaux de tension très faibles (<1µV) avec une bande passante inférieure au Hertz.

La détection synchrone semble être l'appareil de mesure le plus adapté. La bande passante très étroite autour de la fréquence d'excitation procure une excellente immunité au bruit, de plus, cet appareil mesure le module et la phase. Une instrumentation semblable a déjà été utilisée dans un environnement perturbé (four à triacs) et a donné de bons résultats.

### 2.2.5. Mesure de la phase

La détection synchrone est un appareil de mesure qui permet d'obtenir un déphasage. Nous allons maintenant étudier, comment réaliser cette mesure. La principale difficulté, pour une détermination précise de la phase consiste à obtenir un signal synchrone avec celui alimentant le dispositif. Le rayonnement magnétique est obtenu par la circulation d'un courant, c'est donc cette grandeur qui servira de référence temporelle. Deux méthodes de mesure sont possibles :

L'amplificateur de puissance comporte une sortie "monitor", qui représente l'image du signal de puissance en tension. Malheureusement en haute fréquence, cette sortie est déphasée par rapport au signal de puissance. Il faudra donc étalonner cette sortie si l'on désire des informations fiables sur la phase. En outre, cette sortie "monitor" est référencée par rapport à la tension de sortie, et non par rapport au courant, la connaissance parfaite de l'impédance du composant sous test est alors indispensable.

La seconde méthode est la réalisation d'une résistance étalon appelée "shunt". La chute de tension aux bornes de cette résistance alimente l'entrée référence de la détection synchrone. Le seul de déclenchement de cette entrée est de 0.7V efficace, en conséquence, nous retiendrons une valeur de 2Ω, pour notre résistance étalon.

Nous avons retenu la seconde méthode qui semble plus adaptée et plus souple d'utilisation.

### 2.2.6. Adaptation d'impédance

Afin d'effectuer des mesures fiables et valables jusqu'en haute fréquence, il faut s'assurer de l'adaptation d'impédance entre l'impédance de l'antenne, l'impédance de la ligne de transmission utilisée et l'impédance d'entrée de la détection synchrone.

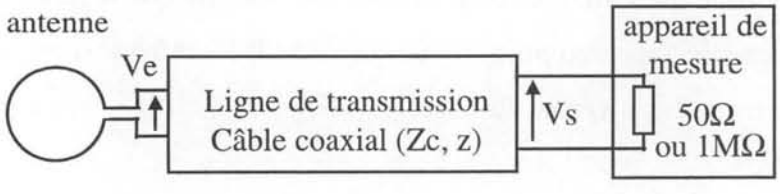



Figure 5 : Adaptation d'impédance antenne - ligne de transmission – appareil de mesure.

Il est clair que l'impédance d'entrée de l'appareil de mesure influence sensiblement la mesure. Nous avons effectué des mesures avec respectivement une impédance de charge de 50Ω et

1MΩ. Dans le cas d'un courant sinusoïdal, on constate que pour des fréquences supérieures au MHz l'adaptation des impédances est indispensable. (Figure 6).

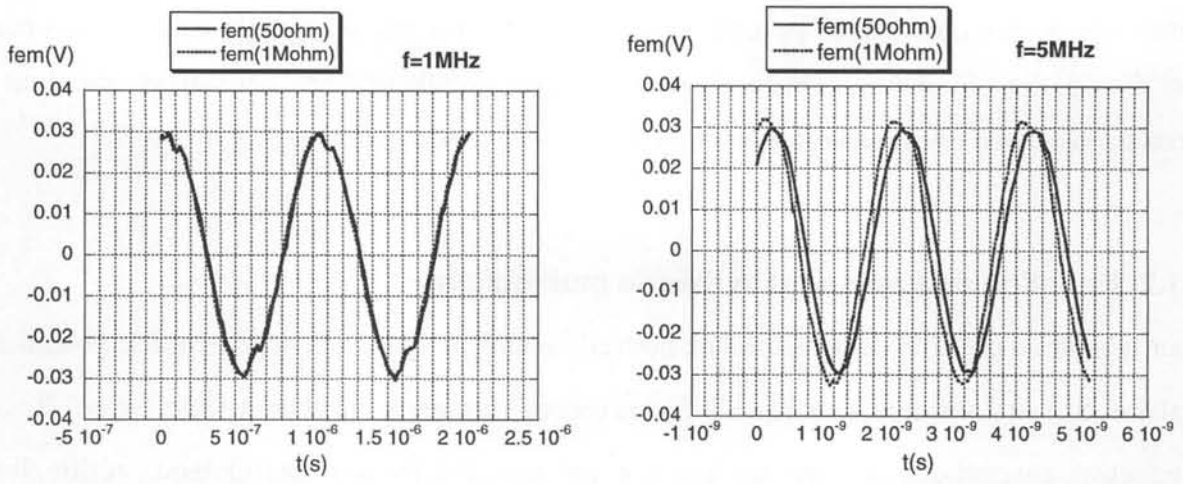



Figure 6 : Comparaison entre deux impédances de charge pour f=1MHz et f=5MHz.

Cette figure met en evidence le phénomène de réflexion qui commence à se produire lorsque l'impédance de l'appareil de mesure n'est pas égale à l'impédance caractéristique de la ligne. En conséquence, pour toutes les mesures, nous utiliserons une impédance d'entrée de 50Ω.

## 3. Approche théorique

Après une phase de caractérisation expérimentale, nous disposons d'un grand nombre de points de mesures. Il convient de condenser toutes ces mesures en tout point de l'espace selon les trois directions en un ensemble plus restreint de paramètres. Ce paragraphe rappelle que toute source de champ magnétique peut être décomposée en une combinaison de différents multipôles. En utilisant une représentation fondée sur les développements multipolaires, nous proposons la représentation du champ magnétique par les fonctions spéciales appelées harmoniques sphériques.

### *3.1. Développement multipolaire*

#### 3.1.1. Représentation des sources

Le champ magnétique est le résultat du déplacement de charge électrique. Il peut être macroscopique (courant dans un conducteur) ou microscopique. A l'échelle macroscopique, nous définissons un vecteur densité de courant volumique $\vec{J}$ pour caractériser les sources. A l'échelle microscopique, on définit plutôt un vecteur $\vec{m}$ appelé densité volumique

d'aimantation, qui définit un courant ponctuel. Ces deux définitions sont reliées par la relation : $\vec{J} = \vec{\nabla} \wedge \vec{m}$ eq (2)

Ainsi, une source quelconque peut être représentée soit par une densité de courant, soit par une distribution dipolaire ou encore par l'utilisation simultanée des deux représentations. Nous avons choisi une représentation dipolaire des sources de courants.

### 3.1.2. Equation de Laplace et la théorie multipolaire

Pour la suite, il est utile d'introduire une nouvelle grandeur, que nous appellerons le potentiel scalaire. Si l'on considère un espace $V$, sans source volumique, le champ magnétique $\vec{H}$ et l'induction magnétique $\vec{B}$, qui est générée par une distribution multipolaire, vérifie les équations locales dans tout l'espace :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \quad \text{et} \quad \nabla \vec{B} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m} \qquad \text{eq (3)}$$

Les deux premières équations expriment, d'une part, la relation entre le champ magnétique $\vec{H}$ en tout point de l'espace et la distribution macroscopique $\vec{J}$, et d'autre part, la conservation du flux de $\vec{B}$. Ainsi, dans un volume où les sources sont représentées uniquement par une distribution dipolaire $\left(\vec{J} = 0\right)$, il existe donc un potentiel scalaire $U$ tel que $\vec{H} = -\vec{\nabla} U$. Dans ces conditions, l'induction en tout point de l'espace s'exprime par :

$$\nabla\left(\vec{B}\right) = \nabla\left(\mu_0\left(-\vec{\nabla} U\right) + \vec{m}\right) = 0 \qquad \text{eq (4)}$$

On obtient alors l'équation de Poisson liant le potentiel scalaire à la distribution multipolaire.

$$\Delta U = \nabla \vec{m} \qquad \text{eq (5)}$$

Cette équation admet pour solution en tout point P de l'espace [Wikswo84], l'équation suivante :

$$U(P) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \iiint_{S \in V} \frac{-\nabla \vec{m}(S)}{\left|\overrightarrow{SP}\right|} \cdot dV \qquad \text{eq (6)}$$

Le point S représente un point quelconque de l'espace $V$. Supposons que cet espace puisse être scindé en un volume $V_{int}$, contenant les sources, et un volume $V_{ext}$, sans source. On détermine une surface $S_{lim}$, délimitant $V_{int}$. Si nous considérons le volume $V_{ext}$ dans lequel, il n'y a pas de distribution multipolaire, on a donc :

$$\Delta U = 0 \qquad \text{eq (7)}$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Laplace et peut être résolue de diverses manières, nous en citerons deux : le développement du potentiel en série de Taylor et la théorie des développements multipolaires. Dans notre application, nous utiliserons uniquement la solution fondée sur les développements multipolaires. Nous avons vu que l'équation de Laplace n'est valable que dans un milieu sans source, en conséquence, il est indispensable de définir un volume englobant toutes les sources. Dans notre application, nous avons choisi d'utiliser le repère sphérique, en conséquence, il est plus facile de définir le volume $V_{int}$ par une sphère. De plus, pour représenter le champ, nous avons choisi d'utiliser des fonctions adaptées à ce repère, ces fonctions spéciales sont appelées, les harmoniques sphériques.

## *3.2. Les harmoniques sphériques*

### 3.2.1. Définition

Il s'agit d'exprimer les différentes fonctions composant le potentiel scalaire. Dans un milieu, où les sources sont représentées par une distribution dipolaire, $\vec{J}$ il s'exprime par [Wilsko84] :

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\vec{r_0} \in V_{int}} \frac{\nabla \vec{m}(\vec{r_0})}{\left\| \vec{r} - \vec{r_0} \right\|} dV \qquad \text{eq (8)}$$

$\vec{r}$ représentant les coordonnées du point d'observation, $\vec{r_o}$ celle des sources. On peut écrire la distance $\left\| \vec{r} - \vec{r_0} \right\|$ en utilisant les harmoniques sphériques $Y_l^m$ [Legris98].

$$\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r_0} \right\|} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r_0}{r} \right)^l \cdot \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta, \varphi) \cdot Y_l^m(\theta o, \varphi o) \qquad \text{eq (9)}$$

Avec

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^{|m|}(\cos\theta) \cdot \begin{cases} \sqrt{2} \cdot \cos(m \cdot \varphi) & m \geq 0 \\ 1 & m = 0 \\ \sqrt{2} \cdot \sin(|m| \cdot \varphi) & m < 0 \end{cases} \qquad \text{eq (10)}$$

avec $0 \leq m \leq l$ et $P_l^m(x)$ · Fonction de Legendre associée.

Ainsi, le potentiel scalaire créé par une distribution dipolaire et solution de l'équation de Laplace s'écrit sous la forme intégrale :

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{a_{l,m}}{r^{l+1}} \cdot Y_l^m(\theta, \varphi) \qquad \text{eq (11)}$$

et $a_{l,m} = \iiint_{\vec{r_0} \in V_{int}} \left( \vec{m}\left(\overrightarrow{ro}\right) \cdot \overrightarrow{\nabla_{ro}} \cdot \left( ro^l \cdot Y_l^m(\theta o, \varphi o) \right) \right)$

Le potentiel est donc déterminé par une somme infinie de fonctions, les termes indépendants que nous notons $a_{l,m}$ étant des constantes à calculer et dépendant de la distribution multipolaire. Notons que la fonction $Y_0^0$ est constante, d'où $a_{0,0} = 0$ selon la conservation du flux.

En observant l'équation (11), on constate qu'il est nécessaire de disposer de $2.l+1$ termes $a_{l,m}$. Le terme de rang 1 est appelé potentiel dipolaire, celui de rang 2 est appelé potentiel quadrupolaire, celui de rang $l$ est appelé potentiel $2l$ polaire. Ce potentiel $2l$-polaire quelconque est un potentiel multipolaire.

### 3.2.2. Représentation des harmoniques

Pour fixer les idées, nous présentons sur la Figure 7 quelques harmoniques sphériques (les termes $Y_l^m$). Les zones en gris foncé correspondent aux grandeurs positives et les zones claires correspondent aux valeurs négatives. Les valeurs de $m$ positives se déduisent des valeurs négatives par une rotation de $\frac{\pi}{2n}$ autour de l'axe z.

### 3.2.3. Intérêt des harmoniques sphériques

Les intérêts de cette représentation sont multiples. Les coefficients $a_{l,m}$ sont difficilement calculables mais possèdent des propriétés remarquables.

- Premièrement, ils sont intrinsèques à l'objet et au repère considéré, c'est-à-dire qu'ils sont indépendants de la mesure. Si, par une mesure donnée supposée parfaite, on obtient un ensemble de valeurs pour les $a_{l,m}$, une mesure faite dans d'autres conditions doit donner les mêmes valeurs si elles sont exprimées dans le même repère et si l'état magnétique de l'objet n'a pas changé.
- Ensuite, la dépendance entre les champs et les composantes $a_{l,m}$ est linéaire. Il est donc simple, en théorie, de calculer ces coefficients par rapport à la mesure. Il suffit donc d'identifier les coefficients $a_{l,m}$ pour représenter le champ magnétique d'un composant.

- Si nous étudions les dépendances des termes en fonction de la distance à l'origine du point P, nous observons pour chaque indice, une décroissance des termes du potentiel en $1/r^{l+1}$.

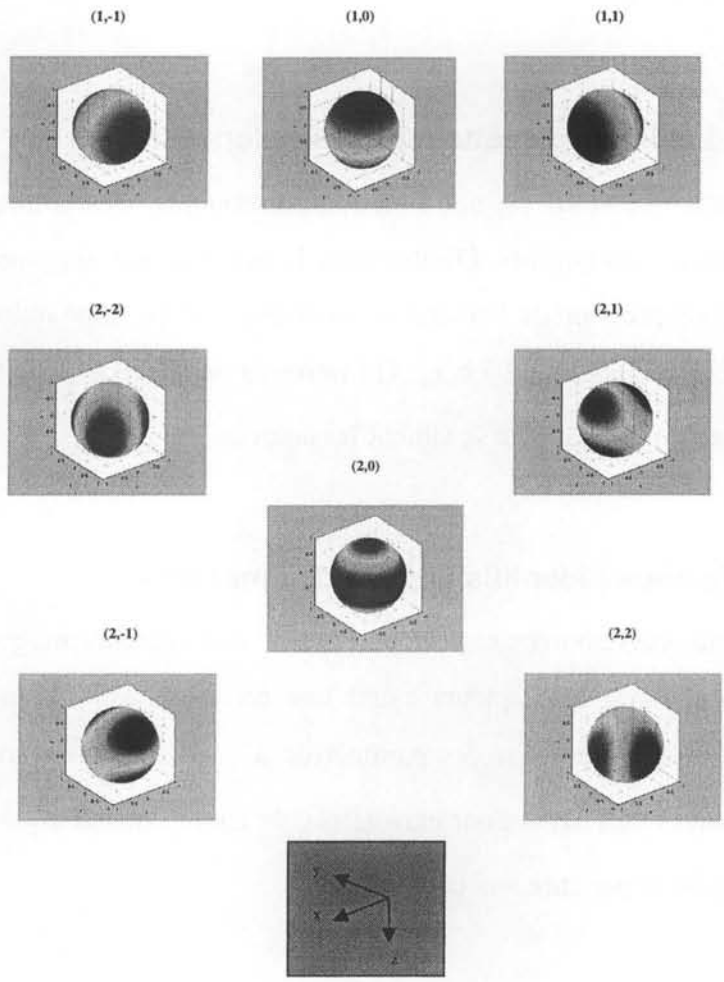



Figure 7 : Représentations des premiers harmoniques sphériques

Cette dernière propriété a des conséquences très importantes pour l'identification des sources de champ magnétique. Pour l'illustrer, nous allons développer un exemple. Supposons qu'un objet soit localisé dans une zone sphérique près de l'origine et dans un état magnétique donné. Nous aurons 3 termes du potentiel qui s'amortissent en $1/r^3$ (termes dipolaires pour $l = 1$ et $m$ allant de $-1$ à $1$), 5 termes qui s'amortissent en $1/r^3$ (les termes quadrupolaires), et $2l + 1$ termes qui s'amortissent en $1/r^{l+1}$. Quand $r$ tend vers l'infini, seuls les termes dipolaires sont

non négligeables. Le champ loin de l'objet ne dépend donc qu'au maximum de trois paramètres indépendants. En nous approchant de la source, les termes quadrupolaires deviennent non négligeables, par conséquent, cinq termes supplémentaires viennent s'ajouter aux termes dipolaires. Ainsi de suite, plus nous nous approchons de la source, plus nous devons prendre en compte des termes supplémentaires du développement afin d'avoir une bonne approximation du champ.

### 3.2.4. Zone de validité et limite de cette représentation

Cette formule n'est valable que si $U$ est une fonction harmonique, c'est-à-dire à l'extérieur d'une sphère contenant toutes les sources. D'autre part, le potentiel est exprimé à partir d'un développement limité de l'expression de l'inverse de la distance. Il est donc indispensable que cette série converge ce qui implique que $r > r_0$. On retrouve bien que le potentiel U ne peut être calculé qu'à l'extérieur du domaine où se situent les sources.

### 3.2.5. Nombre de paramètres identifiables par des mesures

Si nous avons une ou plusieurs sources et si nous plaçons des capteurs magnétiques à une distance donnée de ces sources, les capteurs ayant une précision finie, nous ne pourrons observer sur ceux-ci qu'un nombre limité des paramètres $a_{l,m}$ (disons ceux correspondant à $l \leq l_0$). Cependant, ils seront suffisants pour caractériser le champ magnétique en tout point situé à une distance égale ou supérieure aux capteurs.

### 3.2.6. Conclusion

Le développement multipolaire et les harmoniques sphériques sont des outils bien adaptés à la représentation de champ magnétique. On sait que, dans l'espace entourant le composant, l'induction dérive du potentiel pseudo-scalaire qui satisfait l'équation de Laplace. D'autre part, la résolution de cette équation en coordonnées sphériques montre que sa solution est une combinaison linéaire de fonctions à variation douce, appelées potentiels multipolaires et dont l'écriture fait appel aux harmoniques sphériques. On appelle potentiel $2^{l-1}$ polaire, un potentiel qui décroît en $r^{-l}$. En raison de cette différence de vitesse de décroissance suivant

r, on constate en pratique que la prise en compte d'un petit nombre de potentiels multipolaires donne une bonne image du champ réel.

A titre d'exemple, la description d'un champ par ses composantes jusqu'à l'ordre 8 (champ octupolaire) s'avère suffisante dans la majorité des cas et elle ne requiert que quinze constantes.

## 4. Approche pratique

Après avoir établi un outil théorique de représentation du champ, nous allons l'appliquer de façon pratique afin de déterminer les 3 premiers ordres du développement multipolaire soit 15 coefficients. En effet, nous pensons qu'il est suffisant au moins dans un premier temps de nous limiter aux trois premiers termes des développements multipolaires.

En pratique, les antennes "boucle" que nous utilisons permettent de mesurer le champ magnétique. Nous présentons donc, le lien entre le potentiel scalaire et le champ mesuré. Cette relation établie, nous étudions les différentes erreurs de mesure qu'elles soient dues à la sonde de mesure (mesure non ponctuelle) ou bien au banc de mesure. Par exemple, un objet décentré par rapport au centre du repère sphérique (centre du banc), une erreur de positionnement de l'antenne. Pendant cette étude, nous n'avons considéré que les termes qui présentent une invariance par rotation selon OZ, $a_{1,0}, a_{2,0}, a_{3,0}$, (notation de la Figure 7). Nous avons calculé l'erreur sur une mesure le long de cet axe. Il est important de préciser qu'il ne s'agit que d'une première analyse. Le choix des grandeurs étudiées ainsi que la direction de "mesure" a été motivée par la facilité de calcul et une maximisation de l'erreur.

Pour finir, nous avons défini un mode opératoire afin d'identifier les différents multipoles avec le minimum d'erreur. Un exemple de caractérisation permettra de valider notre approche.

### *4.1. Image du potentiel*

Le banc de mesure nous donne des informations sur l'induction $\vec{B}$ créée par l'objet sous test. Il convient donc de relier la mesure du champ au potentiel scalaire, donc à son développement. Puisque $\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} U$, le champ radial s'exprime par l'équation 12, il est donc une image fidèle du potentiel.

$$Br(\vec{r}) = -\mu_o \cdot \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{(l+1) \cdot a_{l,m}}{r^{l+2}} \cdot Y_l^m(\theta, \varphi) \qquad \text{eq (12)}$$

On retrouve dans cette expression les coefficients $a_{l,m}$ du potentiel scalaire à un facteur près. On voit donc que la mesure de l'induction radiale est très intéressante pour déterminer les termes des développements multipolaires.

### *4.2. Mesure non ponctuelle*

La taille maximale des antennes autorisée dépendra de la nature des champs mesurés (plus ou moins "tourmentés"). Nous avons cherché à exprimer les erreurs dues à une mesure non ponctuelle en fonction du diamètre de l'antenne de mesure et de la distance objet-antenne (effet d'intégration sur la surface de la spire) . Nous pouvons alors tracer une courbe illustrant l'erreur relative en fonction du rapport distance/taille d'antenne. Il nous a semblé intéressant de disposer d'abaques qui permettent de choisir le diamètre de l'antenne en fonction du champ que l'on souhaite mesurer.

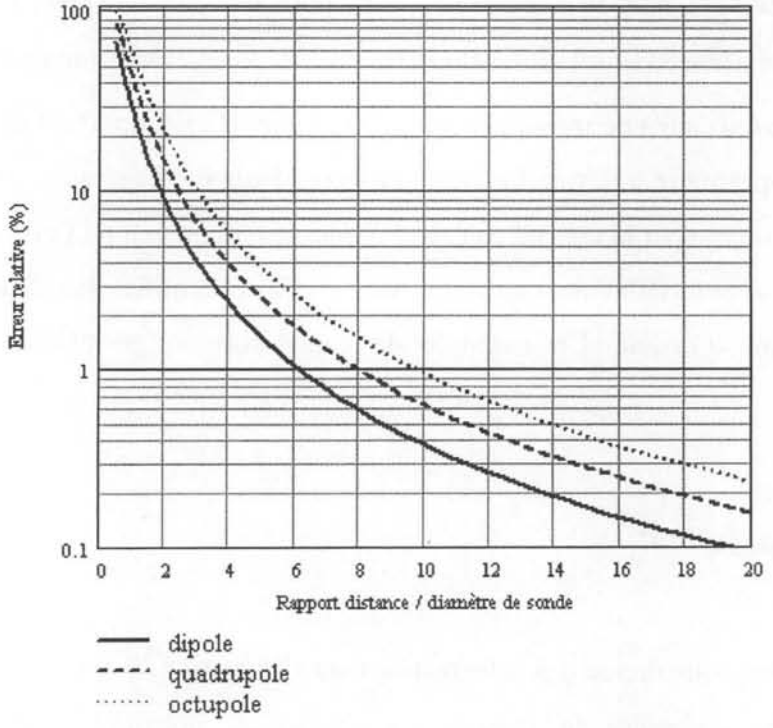



Figure 8 : Erreur relative de mesure sur le champ magnétique due au diamètre de l'antenne en fonction du rapport distance/diamètre de spire. Champ dipolaire, quadrupolaire et octupolaire

Pour une précision de 10% sur le champ dipolaire, un rapport de deux entre la distance de mesure et le diamètre de l'antenne de mesure est tolérable. Il est clair que pour un champ plus rapide (quadrupolaire et octupolaire), la distance d'observation sera supérieure. Ainsi, pour une même erreur (10%) sur les champs quadrupolaire et octupolaire, la distance minimum sera respectivement $\rho \geq 2.5d$ et $\rho \geq 3d$ .

Ces courbes qui nous serviront d'abaques, seront très intéressantes lors de l'identification des multipoles, en effet, il faut être en accord entre la précision de mesure et la précision du modèle (donc de l'approximation) recherchée.

En considérant les trois premiers termes du développement multipolaire, un diamètre d'antenne de 5 mm et une précision maximum de 5% sur chacun des termes, la distance minimale d'observation est au minimum de 2.5 cm.

### *4.3. Erreur due à la précision mécanique*

La précision mécanique du banc de mesure influe sur la mesure du champ émis. Deux types d'erreurs sont à étudier, le positionnement de l'objet au centre du repère et le positionnement de l'antenne de mesure. Afin d'illustrer ces erreurs, nous avons estimé la précision mécanique à $\pm 1$mm pour le rayon et à $\pm 3$ degrés pour les angles. En traçant la courbe d'erreur en fonction de la distance de mesure, on peut définir une distance de mesure pour une précision donnée. La Figure 9 illustre la sensibilité de la mesure, dans le cas particulier d'une erreur de +1 mm sur la distance et de +3° sur les angles.

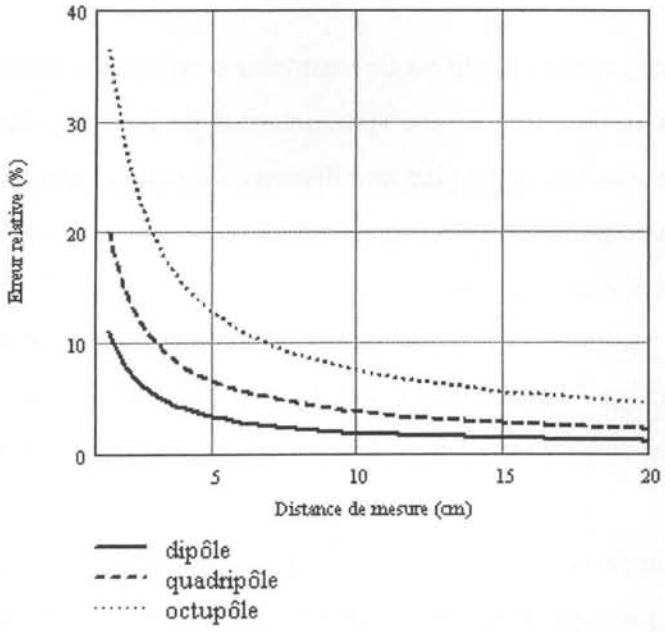



Figure 9 : Erreur relative sur le champ magnétique en fonction de la distance.

On obtient pour une précision de 10% sur le champ dipolaire, une distance supérieure à 1.5 cm . Pour un champ plus rapide, il faudra s'éloigner davantage. Ainsi, pour la même erreur sur les champs quadrupolaire et octupolaire, la distance minimum sera respectivement supérieure à 3 et à 7 cm. Il est clair que la précision de la mesure dépend de l'influence de chaque terme à cette distance. Cependant, afin d'estimer une erreur globale, il est utile de n'observer que l'erreur maximale commise sur le terme le plus grand du développement multipolaire. Pour une erreur donnée par exemple 10%, la distance minimum sera d'environ 7 cm.

## *4.4. Procédure d'identification des multipoles*

### 4.4.1. Principe

Dans un premier temps, nous nous limitons à l'identification des trois premiers ordres du développement multipolaire. Afin de déterminer ces 15 coefficients, il suffit en théorie de 15 mesures indépendantes autour de l'objet. Chaque mesure est considérée comme une combinaison linéaire des 15 premiers multipoles du développement. En pratique, le système d'équation à résoudre est mal conditionné, ce qui nous oblige d'une part, à augmenter le nombre de points de mesure, d'autre part, à prendre en compte leurs positions ainsi que les ordres de grandeur du champ relevé. En effet, il est souhaitable de pondérer le "poids" des mesures en fonction de leurs fiabilités.

Le principe de base de cette méthode est de maintenir constante la distance de mesure et donc de répartir les points de mesure sur une sphère autour de l'objet. Détaillons cette procédure d'identification. Tout d'abord, on se fixe une distance de mesure que nous appelons Rmes, et 22 points de mesure répartis le plus régulièrement possible sur la sphère de mesure. En utilisant une méthode des moindres carrés, on résout le système surdéterminé de 22 équations à 15 inconnues. Les paramètres du modèle ainsi obtenu permettent de calculer le champ dans tout l'espace. Ce champ "calculé" est comparé avec les valeurs du champ mesuré. Cette comparaison permet d'estimer rapidement la précision du modèle ainsi obtenu.

Le choix de la distance de mesure est une donnée très importante pour la précision des résultats. Il peut se faire par une mesure exploratoire le long d'un axe, ce qui permet de déduire approximativement un rayon de mesure où le champ semble être défini totalement par

les 3 premiers termes du développement multipolaire. Dès que cette distance est choisie, on effectue alors l'identification. Si la solution obtenue n'est pas satisfaisante, c'est que le champ est décrit par plus de trois termes multipolaires (soit 15 paramètres). Deux cas de figure sont alors envisageables :

- Il faut augmenter la distance de mesure afin de limiter l'influence des termes multipolaires de rang élevée (décroissance avec la distance)
- Ou bien augmenter le nombre de termes multipolaires à prendre en compte, ce qui d'une part, augmente la taille du système à résoudre et donc le nombre de points de mesure, et d'autre part, impose une plus grande précision de mesure (réduction du diamètre de l'antenne de mesure).

Afin de réduire au maximum le nombre de paramètres, on peut négliger un ou deux ordres dans le développement multipolaire. On diminue ainsi le nombre d'inconnues, la comparaison entre les points de mesure et de calcul étant le seul critère de validation de cette opération.

### 4.4.2. Comparaison mesure – représentation par multipoles

Cette procédure a été appliquée à une simple spire, avec les conditions de mesure suivante :

Fréquence : 100kHz

Courant injecté sinusoïdal : 3.3A (crête à crête)

Diamètre de la spire d'émission : 5.5cm

Distance de mesure : 11cm

Il ne s'agit pas ici d'évaluer la précision du banc mais de valider la procédure d'identification en comparant des valeurs mesurées et la représentation multipolaire qui en résulte.

Les points de mesure ont été répartis comme suit : cinq points répartis sur le périmètre pour quatre altitudes différentes, complétés par deux points près des pôles. L'allure théorique du champ est donc une succession de paliers, l'induction étant uniquement dépendante de l'altitude.

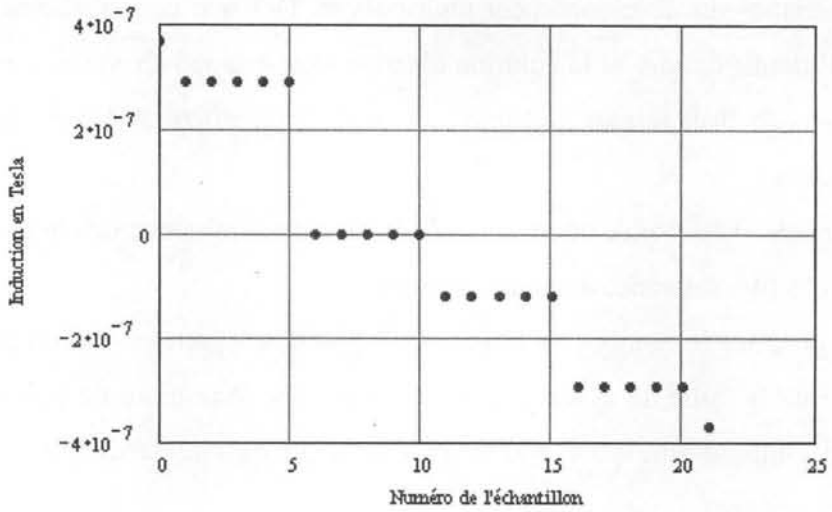



Figure 10 : Allure théorique du champ de mesure

Après avoir effectué les mesures, nous pouvons résoudre le système à 15 inconnues. On trouve 15 coefficients qui nous donnent une erreur moyenne de 6% par rapport à la mesure. Il est important de noter que l'erreur commise est très importante lorsque les champs sont très faibles. Il est donc indispensable de disposer de suffisamment de point de mesure afin d'éventuellement ne pas tenir compte de points de mesure peu fiables.

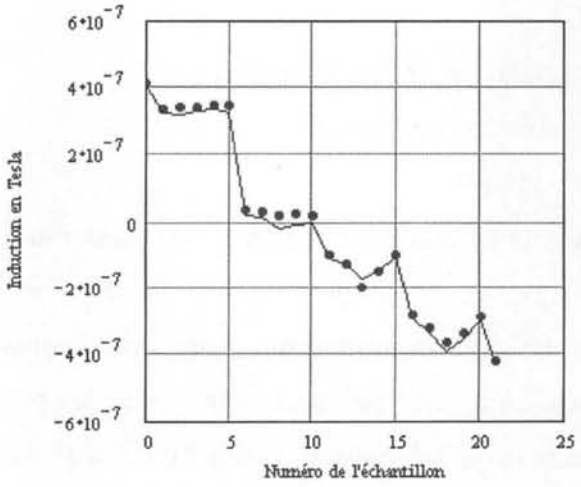



Figure 11 : Comparaison entre les mesures (points) et l'identification (fin).

Le principe de la représentation que nous avons choisi permet à partir de peu de paramètres de représenter de manière fiable le champ magnétique d'un composant. Lorsque le champ à mesurer est faible, on constate que l'erreur de mesure est visible. En outre, il est visible que l'amenée de courant perturbe sensiblement la mesure. Nous avons voulu estimer la fiabilité du

modèle identifié, c'est pourquoi, nous avons comparé des mesures au modèle, en dehors des points de mesure utilisés pour l'identification (Figure 12).

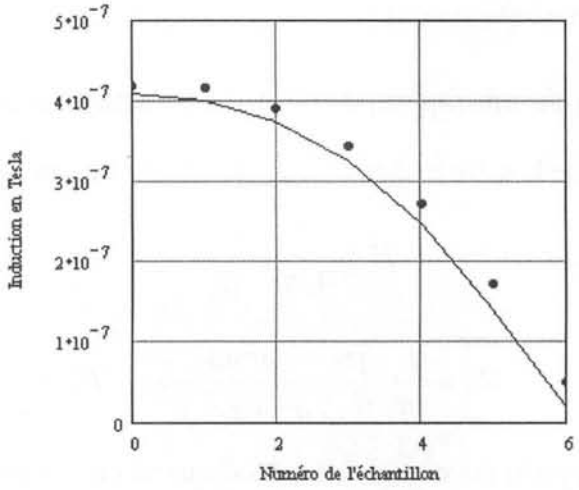



Figure 12 : Comparaison entre le champ mesuré et calculé hors identification

Cette vérification nous permet de valider la procédure d'identification. En effet, ce procédé, nous a permis de déduire les paramètres pour caractériser le champ. Il est à noter que le choix du nombre de points et de leur positionnement est assez délicat. En effet, en certains points, le champ est très faible, les solutions calculées sont alors entachées d'une grande erreur ce qui nuit à l'identification. Une solution est alors d'augmenter le nombre de points de mesure sur la sphère.

## 5. Premières mesures de caractérisation du banc

L'objectif de cette première série de mesures est de valider le choix du principe de positionnement, des appareils de mesure et de la détection retenue. Les premiers tests comparatifs ont été effectués sur une spire unique bobinée en utilisant du fil plein. Cet exemple simple permet de calculer (par la formule de Biot et Savart) l'allure théorique de champ magnétique. Il est de plus relativement représentatif des problèmes à traiter (amenée des fils de connexion, taille...). Seuls, les niveaux de champ rayonné par rapport à ceux de composants bobinés sont différents.

La procédure de mesure est la suivante : tout d'abord il est nécessaire de définir la fréquence d'alimentation puis l'amplitude du courant (réglé par la tension appliquée à la spire).

Ces mesures ont été répétées pour une distance variant de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres, dans une configuration "champ radial" (la spire et l'antenne de mesure sont coaxiales) ainsi que pour des mesures hors de l'axe.

### *5.1. Calcul théorique du champ rayonné par une spire circulaire*

Le calcul de H sur l'axe de la spire est bien connu. La loi de Biot et Savart donne :

$$\vec{H} = \frac{I}{4 \cdot \pi} \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{|r|^3}$$

Sur l'axe z, on obtient: $$Hz = \frac{I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\theta}{(a^2 + z_0{}^2)^{3/2}} \qquad Hz = \frac{I \cdot a^2}{2 \cdot (a^2 + z_0{}^2)^{3/2}} \qquad \text{eq (13)}$$

On obtient un champ magnétique qui varie en $1/z_0{}^3$ quand on s'éloigne de la spire. La même méthode peut s'appliquer pour déterminer le champ hors de l'axe. La résolution des intégrales n'a pas été encore tentée en analytique, mais est tout à fait possible numériquement.

Cette approche analytico-numérique est beaucoup plus souple d'emploi que les éléments finis, et permettra une confrontation aisée avec les mesures. Ce sera le point de départ de bien des analyses théoriques. Cette approche a naturellement été comparée et validée avec le logiciel éléments finis deux dimensions Flux2D [Flux2d].

La Figure 11 ci-dessous montre l'allure du champ obtenu en théorie. On retrouve la décroissance en $1/r$ sur l'axe z, plus des fortes variations près de la spire.

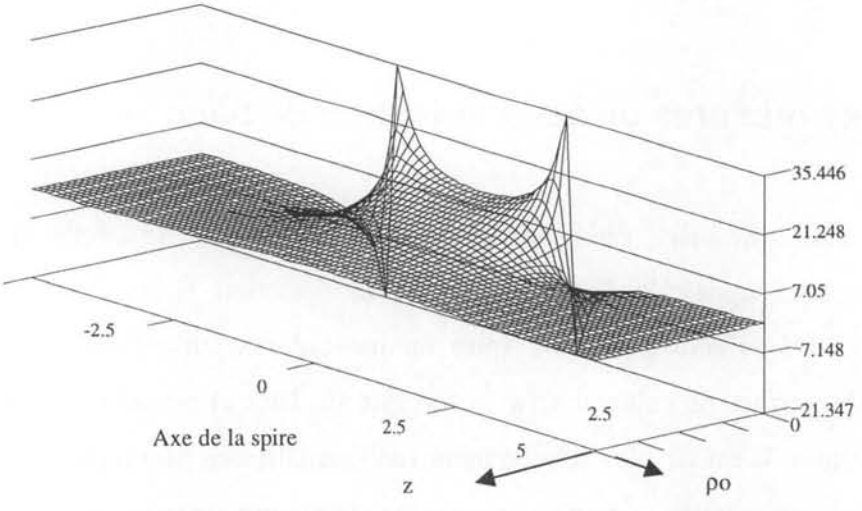



Figure 13 : Allure du champ mesuré par une antenne en position radiale (parallèle à la spire) dans un plan transverse à la spire, passant par l'axe. z représente la cote selon l'axe de la spire, ρo la distance dans le plan de la spire (échelles en cm).

## *5.2. Interprétation et premiers éléments critiques sur les mesures*

### 5.2.1. Mesure sur l'axe

Les premières mesures ont été effectuées, les deux spires parallèles. Dans un premier temps, nous avons étudié le rayonnement d'une simple spire circulaire. Les conditions de mesure des premiers essais sont les suivantes :

Fréquence : 100kHz

Courant injecté sinusoïdal : 3.3A (crête à crête)

Diamètre de la spire d'émission : 5.5cm

La Figure 14 présente la tension relevée aux bornes de la sonde de mesure (diamètre 1cm) en fonction de la distance. Nous pouvons constater que les mesures sont proches du comportement théorique, en effet, une erreur maximum de 10% est commise.

Cet essai a été effectué à fréquence fixe, donc la tension est directement l'image du champ magnétique. Il est très clair sur ce relevé que le champ n'est pas constant, il est donc nécessaire d'adapter l'antenne de mesure en fonction de l'endroit où l'on désire mesurer le champ. En effet, très proche de la spire, le champ évolue rapidement, il sera donc indispensable d'utiliser un capteur de dimension réduite. A contrario, au-delà de 5cm, le champ évolue lentement, le choix du capteur est alors moins critique.

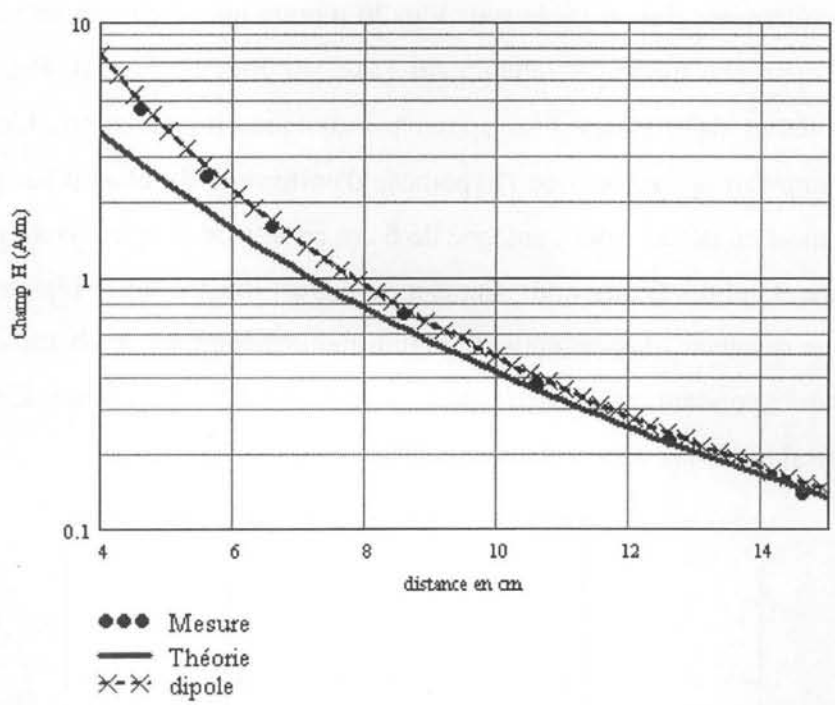



Figure 14 : Mesure dans l'axe z. Comparaison Mesure - Théorie - Développement dipolaire

Comme il a été évoqué précédemment, le choix du diamètre des antennes résulte d'un compromis entre l'amplitude de la tension détectée et la validité de l'hypothèse selon laquelle le flux embrassé est uniforme dans la surface de la spire (mesure "ponctuelle"). Il est intéressant de chiffrer la taille de l'antenne maximale autorisée, en fonction du champ mesuré. Pour cela, une étude conjointe simulation / mesure a été menée sur ce cas d'école. Pour trois distances différentes, les quatre antennes ont été utilisées pour mesurer le champ magnétique. Les résultats obtenus sont reportés dans le Tableau 1, on note que près de la spire, l'antenne de 6cm ne donne plus une indication fiable.

| | Distance Spire - Antenne | | |
|---|---|---|---|
| | 51mm | 132mm | 220mm |
| Antenne 0.5 cm | 2700 | 199 | 46 |
| Antenne 1 cm | 2641 | 199 | 45 |
| Antenne 3 cm | 2132 | 193 | 44 |
| Antenne 6 cm | 2105 | 205 | 48 |
| Théorie | 2730 | 200 | 46 |

Tableau 1 : Champ magnétique en mA/m

Une simulation éléments finis réalisée sous Flux2d montre que le champ au centre de la spire correspond à l'approche théorique (champ sur l'axe par Biot et Savart). Près de l'axe de la spire, des problèmes de maillage font apparaître quelques imprécisions. L'exploitation des courbes de champ fait apparaître que l'hypothèse d'uniformité du champ sur toute la surface de la spire est mise en défaut pour l'antenne de 6 cm proche de la spire (écart de 90% entre le champ au centre et celui à l'extrémité). Cet état de fait est illustré sur la Figure 15. Ce résultat obtenu pour une distance spire-antenne de 60mm montre combien le champ est "tourmenté" sur les 6 cm correspondant au diamètre de la grande antenne de mesure. Ceci explique les résultats erronés donnés par cette antenne.

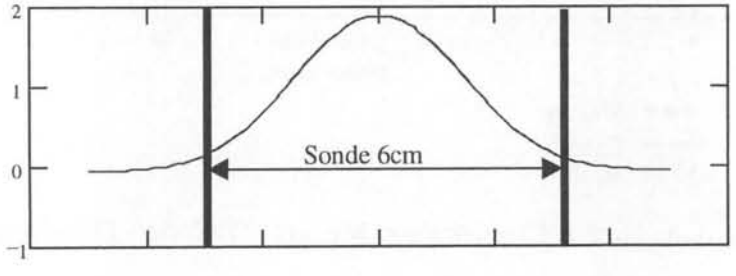



Figure 15 : Allure du champ capté par l'antenne de 6 cm, centrée sur l'axe de la spire

Une conclusion principale qui valide les développements théoriques précédents est d'ores et déjà que près d'un dispositif même de type "spire", les antennes devront être d'un diamètre réduit. Par ailleurs, loin des dispositifs de ce type, la décroissance rapide du champ ($1/r^3$ pour la spire) rend illusoire toute mesure, au vu des tensions mesurables.

La bonne utilisation de ce banc de mesure semble donc se situer pour des distances intermédiaires (il n'est pas aisé de chiffrer ces distances pour le moment). Trop près, le champ sera trop "tourmenté", trop loin, il sera trop faible, la distance de 5d (d étant la plus grande dimension de l'objet) paraît tout à fait raisonnable.

Toutefois, pour obtenir des informations sur le champ très proche, les éléments finis peuvent donner de très bonnes indications, sans avoir à traiter de problèmes trop importants puisque seule la proximité est étudiée.

### 5.2.2. Mesures et test de positionnement hors de l'axe

Il s'agit ici de vérifier que le positionnement désiré peut être facilement atteint, et de juger de la qualité des mesures obtenues dans des configurations quelconques (hors de l'axe en position "radiale", cas d'école sur lequel les essais sur les antennes ont été menés).

Il est clair qu'en théorie, pour des raisons de symétrie, l'angle φ ne joue théoriquement pas sur le champ. Nous avons vérifié expérimentalement que la dissymétrie due à l'amenée de courant ne perturbe que très légèrement la symétrie et que c'est uniquement sur $\rho$ et $\theta$ qu'on peut agir pour tester différentes positions.

Les Figure 16 et Figure 17 montrent l'évolution théorique des deux composantes (selon $\rho$ et $\varphi$) en fonction de $\varphi$, pour une distance $\rho$ donnée ; on note la symétrie autour de zéro de $H\rho$ (composante radiale) et l'antisymétrie de $H\varphi$. Les mesures sont également reportées sur ces courbes et la correspondance semble assez bonne, au vu des approximations introduites par l'antenne (3 cm) et le positionnement.

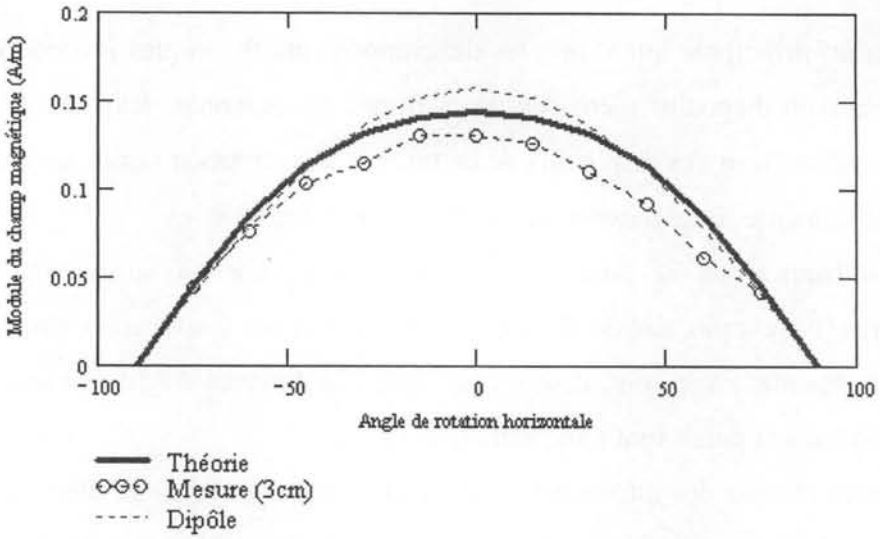



Figure 16 : Evolution de la composante du champ en fonction de $\theta$

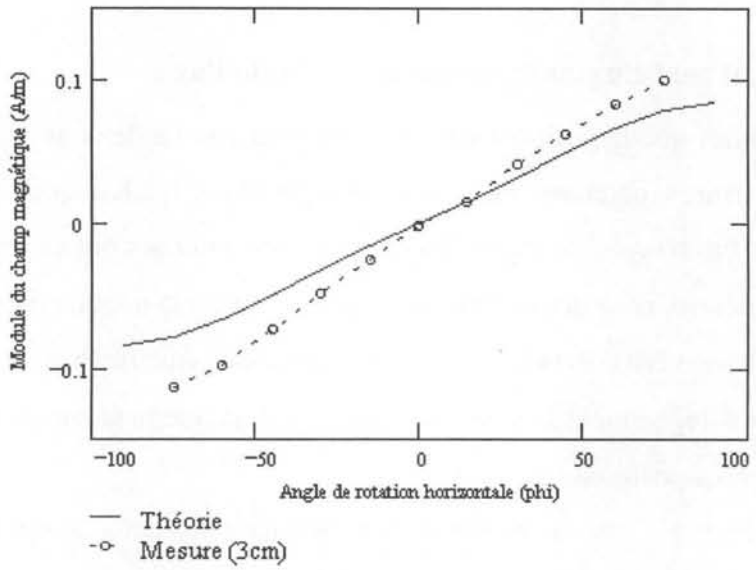



Figure 17 : Evolution de la composante du champ selon $\varphi$ en fonction de $\varphi$ (mesure et simulation)

Cet essai a permis de valider le bon principe de positionnement relatif des antennes et de l'objet à tester. Un inconvénient toutefois est que les angles proches de 90° pour de faibles distances au dispositif sont difficilement atteignables, vu la taille du plateau tournant.

# 6. Conclusion et perspectives

## *6.1. Bilan critique*

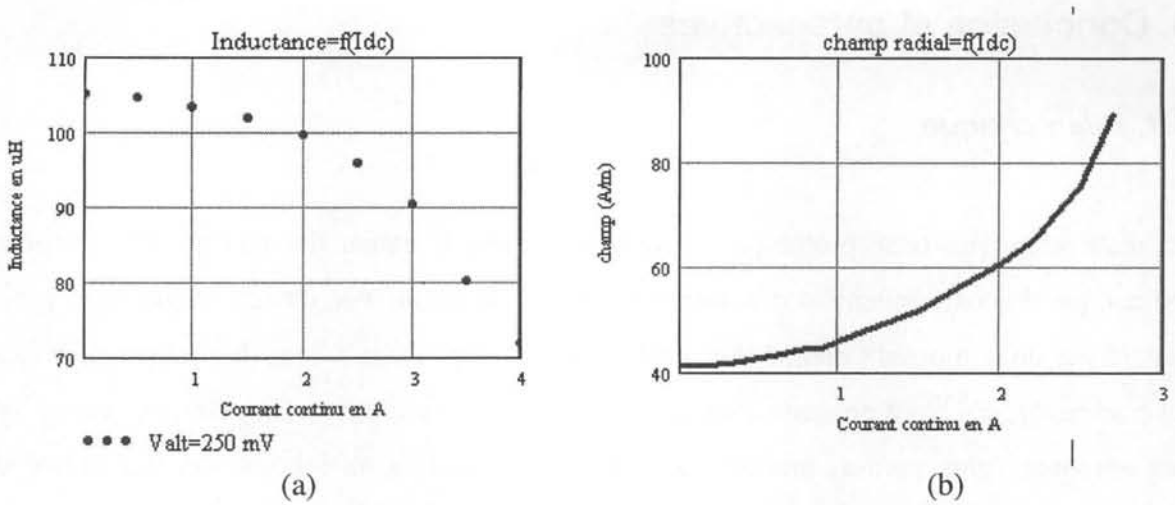
La réalisation d'un banc prototype a permis de valider le cahier des charges d'un dispositif mécanique de positionnement des antennes, en vue de mesurer le champ magnétique proche généré par un composant bobiné. Les capteurs de champs utilisés sont des antennes "boucle" du commerce, qui n'ont présenté aucune difficulté de mise en œuvre. En outre, des essais avec des antennes (plus petites, multispires) qui ont été réalisés au laboratoire, ont donné des résultats satisfaisants.

Pour représenter le champ autour de l'objet, nous proposons d'utiliser les développements multipolaires. En effet, la théorie multipolaire est un outil puissant pour condenser les mesures en un nombre restreint de paramètres. Elle facilite également la compréhension et la représentation du champ. Finalement, la décomposition en composantes multipolaires joue le même rôle que le circuit équivalent pour le comportement électrique.

## *6.2. Perspectives*

Les premiers essais sur ce banc de mesure prototype ont montré que le principe de fonctionnement était correct pour effectuer les mesures désirées. Toutefois, une meilleure précision de positionnement sera nécessaire. Par ailleurs, un dispositif de motorisation semble important.

Des premiers essais de caractérisation de composants bobinés ont déjà été menés avec la version actuelle du banc. Ces premiers résultats sont intéressants et mériteront à l'avenir une attention particulière. Les inductances sont des composants qui peuvent être parcourues par un courant continu non nul. Nous avons étudié l'influence de la saturation sur le rayonnement. Les mesures ont été effectuées à 100kHz. Nous avons mesuré au pont d'impédance, la courbe de saturation de l'inductance à 100 kHz en appliquant 250mV alternatif et en faisant varier le courant de polarisation de 0.5A à 2.5A.




(a) (b)

Figure 18 : Variation de l'inductance (a) et allure du champ magnétique (b) en fonction du courant continu

L'inductance chute fortement pour un niveau de courant supérieur à 1.5A. Après avoir disposé l'inductance au centre du banc de mesure, (centre de l'inductance au centre du repère de mesure). Nous avons fait varier le courant continu de 0.5A à 2.5A, la composante alternative du courant restant fixe et de 0.45A d'amplitude. On constate (Figure 18b) que le champ rayonné par l'inductance dépend du niveau de polarisation du circuit magnétique. En effet, quand l'inductance sature la perméabilité de la ferrite chute. Celle-ci guide alors moins bien le flux, ainsi les fuites augmentent. Cette constatation est assez évidence, cependant, nous avons comparé les évolutions relatives de l'inductance et les champs mesurés. En observant la Figure 19, il semble que la variation du champ soit directement inversement proportionnelle à celle de l'inductance.

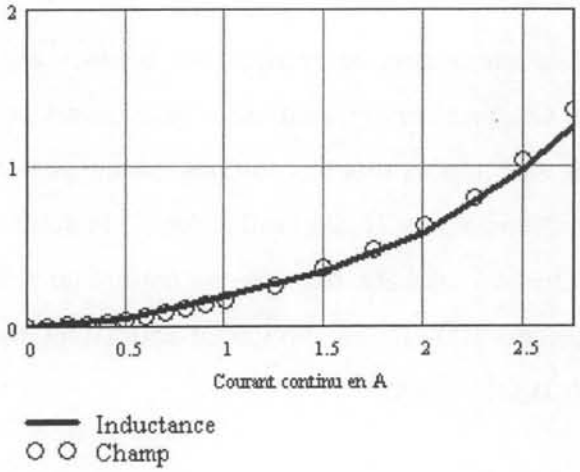



Figure 19 : Comparaison entre la variation de l'inductance et du champ émis par l'inductance (grandeurs normalisées)

Cette première constatation sera bien sûr à approfondir, en corrélation avec des éléments finis.

# Conclusion générale

Au long de ce travail, nous avons développé, caractérisé et exploité des circuits équivalents de transformateurs dont les bases reposent sur la linéarité et la stationnarité du comportement électrique ainsi que le découplage des phénomènes magnétiques et électrostatiques mis en jeu.

En dépit de l'énorme quantité de paramètres mesurables, nous pouvons dire que ces modèles, que nous avons développés indépendamment du nombre d'enroulements, sont cohérents avec toutes les mesures, au moins pour deux et trois enroulements. Nous avons montré également que, dans le cas fréquent où les enroulements sont fortement couplés, un modèle électrostatique partiel pouvait suffire.

Nous avons ensuite abordé la représentation de phénomènes à constantes réparties : les effets de peau et de proximité. Une approche théorique originale nous a conduit à des relations analytiques que nous avons comparées avec un succès certain aux courbes expérimentales. Pour conclure cette partie de façon pratique, nous avons proposé une représentation de ces phénomènes, par des constantes localisées. Nous avons montré, qu'avec un petit nombre de composants, une précision satisfaisante pouvait être atteinte sur un large intervalle de fréquence, ce qui ouvre l'accès à la prise en compte de ces effets au cours d'une simulation temporelle.

Après ces développements théoriques, nous avons mis en pratique notre connaissance du transformateur pour étudier le fonctionnement et les performances d'un convertisseur statique. L'influence des composants parasites du transformateur sur le fonctionnement d'un convertisseur statique a été illustré sur un montage industriel. Cette étude a nécessité l'utilisation de différents modèles du transformateur. Dans une première étape, nous avons retrouvé dans le détail les formes d'ondes de puissance. Le convertisseur fonctionnant en conduction discontinue, les éléments parasites et notamment ceux du transformateur jouent un rôle essentiel. Dans une deuxième étape, nous avons étudié les performances CEM de ce montage. Il s'est confirmé que le transformateur joue un rôle clé sur l'importance des courants de mode commun et que disposer d'un circuit équivalent précis est fondamental pour prévoir, dès la phase de simulation, les performances CEM.

Les modèles de transformateur doivent maintenant être complétés suivant deux directions : Tout d'abord, le modèle électrique actuel pourrait être complété par un modèle thermique qui permettrait de s'assurer, qu'en fonctionnement, aucune température ni aucun écart de

température n'atteint une limite de sécurité. Il faudrait également préciser dans quelle mesure la non linéarité du noyau magnétique intervient et comprendre, au moins, l'essentiel des phénomènes responsables des modes propres qui prennent place, en haute fréquence, dans les bobinages. A ces deux orientations, on pourrait ajouter l'étude du couplage parasite des composants magnétiques proches mais, comme nous l'avons vu, cette étude est déjà en cours dans le laboratoire.

# Références bibliographiques

[Batard92] C. Batard Interactions composants-circuits dans les onduleurs de tension. Caractérisation-Modélisation-Simulation. Thèse de Doctorat, 1992, INPT, Toulouse.

[BenHadj] J.Ben Hadj Slama "Modélisation du rayonnement électromagnétique des circuits d'électronique de puissance, application à un hacheur", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, décembre 97.

[Berrouche97] K. Berrouche. Recherche expérimentale du circuit équivalent d'un transformateur à trois enroulements. Rapport de DEA, juin 1997, INPG, LEG, Grenoble.

[Blache94] F. Blache, J.P. Keradec, B. Cogitore, "Stray capacitances of two-winding transformers: Equivalent circuit, measurements, calculation and lowering" in Proc. IEEE Industry Application Society, Denver, CO, Oct 2-6 1994, pp. 1211-1217.

[Blache95] F. Blache. Modélisation électronique et électromagnétique d'un transformateur haute fréquence à circuit magnétique en fonte. Thèse de Doctorat, décembre 1995, INPG, LEG, Grenoble.

[Boucetta94] A. Boucetta. Contribution au calcul par éléments finis des pertes dans les ferrites. Thèse de Doctorat, juin 1994, Université Claude Bernard, Lyon I.

[Clavel96] E. Clavel "Vers un outil de conception de câblage: le logiciel InCa", thèse de doctorat INPG, novembre 96, Grenoble.

[Cogitore94] B. Cogitore " Recherche de circuits équivalents pour les composants magnétiques haute fréquence ", Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble,1994.

[Cogitore94-1] B. Cogitore, J.P. Keradec, J. Barbaroux. The Two-Winding Transformer : An Experimental Method to Obtain a Wide Frequency Range Equivalent Circuit. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, April 1994, vol. 43, no. 2, pp. 364-371.

[Cogitore95] B. Cogitore, J.P. Keradec, B. Krafft. Understanding Wire Heatings near Magnetic Air Gap. EPE' 95, September 1995, Séville, Spain, vol. 1, Proceedings, pp. 151-156.

[Costa] F. Costa, F. Forest, A. Puzo, G. Rojat "Influence of the switching mode on conducted and radiated perturbations", 4th European Conference on Power Electronics and Application EPE'91, Firence, Italy, 1991.

[Dowell66] P.L. Dowell, " Effects of Eddy Currents in Transformer Windings ", Proceedings IEE, August 1966, vol. 133, no. 8, pp. 1387-1394.

[Degauque90] P. Degauque, J. Hamelin "Compatibilité électromagnétique", éditions Dunod 1990.

[Emco91] Near-field probe set. User's Manual.

[Ferrieux87] J.P. Ferrieux, F. Forest. Alimentations à découpage – Convertisseurs à resonance. Edition Masson, 1987, Collections Technologies, seconde édition

[Flux2d] "Analyse des dispositifs électriques, magnétiques et thermiques par la méthode des éléments finis". Notice d'utilisation, Sept. 1994. Cédrat S.A., 10 Chemin du Pré Carré, ZIRST 4301, 38943 Meylan Cedex France.

[Flux3d] "Analyse tridimensionnelle des dispositifs électriques, magnétiques et thermiques par la méthode des éléments finis". Notice d'utilisation, Nov. 1993. Cédrat S.A., 10 Chemin du Pré Carré, ZIRST 4301, 38943 Meylan Cedex France.

[Fouassier96] P. Fouassier, J.P. Keradec, B. Cogitore, " Vers une nouvelle méthode de caractérisation haute fréquence des ferrites ", EPF'96, Proceedings, Grenoble, décembre 1996, pp. 257-262.

[Fouassier97-1] P. Fouassier, J.P. Keradec, F. Blache, F. Garcia. " Une nouvelle méthode de caractérisation des matériaux magnétiques : Etude des fondements analytiques ". NUMELEC' 97, mars 1997, Lyon, Proceedings, pp. 134-135.

[Fouassier98] P. Fouassier. Modélisation électrique des composants magnétiques haute fréquence : Prise en compte de la température et caractérisation des ferrites. Thèse de Doctorat, octobre 1998, INPG, LEG, Grenoble.

[Fouassier98-1] P. Fouassier, J.P. Keradec. " An Original New Method to Better Characterize Ferrite Materials used in Power Electronic Applications ". Journal de Physique IV, 1998, SMM' 13 Proceedings, Grenoble, France, vol. 8, pp. 449-452.

[Fouassier98-2] P. Fouassier, F.L.S. Garcia, J.P. Keradec, G. Meunier. " Improving Characterization of MnZn Ferrite Materials – Part I : A New Method Accounting for Permittivity Effects". IEEE CEFC' 98, June 1998, Tucson, Arizona, USA, Proceedings, p. 7.

[Garcia98-1] F.L.S. Garcia, G. Meunier, P. Fouassier, J.P. Keradec. " One-Dimensional Model Treatment of a 3D Magneto-Dynamic Problem by the Finite Element Method ". EMF' 98, May 1998, Marseille, France, Proceedings.

[Garcia98-2] F.L.S. Garcia, P. Fouassier, G. Meunier, J.P. Keradec. " Improving Characterization of MnZn Ferrite Materials – Part II : The 1D-Analytical Model Validation by Finite Element Method Simulations ". IEEE CEFC' 98, June 1998, Tucson, Arizona, USA, Proceedings, p. 403.

[Geri94] A. Geri, A. Salvini, G.M. Veca. Displacement Eddy Current Computation in Magnetic Laminates. IEEE Transactions on Magnetics, March 1994, vol. 30, no. 2, pp. 1075-1077.

[Gombert92] P.Gombert. "Caractérisation du rayonnement électromagnétique engendré par un onduleur à thyristor dual". Mémoire CNAM centre régional de Toulouse. Avril 1992.

[Gradzki91] P.M. Gradzki, F.C. Lee, "High-Frequency Core Loss Characterization Technique based on Impedance Measurement". HFPC' 91, 1991, Proceedings, pp. 108-115.

[Hsu] HSU S.P., Middlebrook R. D., Cuk S. Transformer Modelling and Design for Leakage Control.

[Hess93] J. Hess. Measurement and Calculation Techniques for Power Losses of Ferrites from kHz to MHz Range. PCIM' 93, 1993, Proceedings, pp. 327-344.

[HP4194A] Hewlett Packard, "4194A impedance/gain-phase analyzer operation manual" section 1, general information, pp. 4-37.

[HP8560A] Hewlett Packard. Operational Manual: HP8560A - Spectrum Analyser.

[Keradec92] J.P. Keradec, B. Cogitore, E. Laveuve. Des circuits à constantes localisées pour représenter les transformateurs haute fréquence. RGE, mai 1992, n° 5, pp. 36-47.

[Keradec94] J.P. Keradec, B. Cogitore, E. Laveuve, M. Bensoam, " Des schémas équivalents pour les circuits couplés multi-enroulements ", Journal de physique III, n°4 avril 1994, pp. 751-773.

[Keradec96-1] J.P. Keradec, B. Cogitore, F. Blache, " Power Transfer in a Two-Winding Transformer: from 1D Propagation to an Equivalent Circuit ", IEEE Transactions on Magnetic, January 1996, vol. 32, no. 1, pp. 274-280.

[Keradec96-2] J.P. Keradec, "Le temps d'apprivoiser les étoiles filantes". Habilitation à Diriger des Recherches, novembre 1996, LEG, Grenoble.

[Labouré95] E. Labouré, " Contribution à l'étude des perturbations conduites dans les alimentations continu-continu isolées ". Thèse de Doctorat, décembre 1995, LESIR, ENS de Cachan, Paris.

[Labouré96] E. Labouré, F. Forest, J.P. Delvinquier, F. Beauclair, M. Collet. Calcul des impédances d'un transformateur multi-enroulements à partir de sa géométrie. EPF' 96, décembre 1996, Grenoble, Proceedings, pp. 283-288.

[Laveuve90] E. Laveuve, J.P. Keradec, F. Lappas, " Un obstacle à la montée en fréquence : les éléments bobinées", EPF'90, Toulouse, France, octobre 1990, pp. 115-119.

[Laveuve91-1] E. Laveuve, J.P. Keradec, M Bensoam. "Electrostatic of wound components : analytical results, simulation and experimental validation of the parasitic capacitance". Proc. IEEE Ind. Appl. Soc., Dearborn, USA, 28 Sept – 4 Oct 1991, pp 1469-1475.

[Laveuve91-2] E. Laveuve. Modélisation des transformateurs des convertisseurs haute fréquence. Thèse de Doctorat, septembre 1991, INPG, LEG, Grenoble.

[Laveuve91-3] E. Laveuve, JP. Keradec, G. Meunier. "Influence of induced currents in Conductors on Leakage and Losses in a Transformer". EMPS January 1991, vol. 19, n)1, pp. 55-68

[Lebourgeois97] R. Lebourgeois. Les ferrites faibles pertes pour l'Electronique de Puissance. La revue 3EI, SEE, septembre 1997, n° 10, pp. 13-29.

[Legris96] M. Legris " Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche". Thèse de Doctorat, novembre 1996, INPG, LEG, Grenoble.

[Lu90] B. Lu "Contribution à l'étude du rayonnement en champ électromagnétique proche des circuits en Electronique de puissance", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, mai 90.

[MicroSim96] Microsim Corporation. MicroSim PSpice® A/D & Basics+, Circuit Analysis Software. User's Guide, version 7.1, October 1996, USA.

[NF4055] High Speed Power Amplifier, Bipolar power Supply. NF electronic instrument 4055

[Paul93] C.R. Paul "Introduction to Electromagnetic compatibility", Whiley and sons, 1993.

[Philips98] Philips. Data Handbook - Soft Ferrites. Book MA01, Philips Components, Magnetic Products, 1998.

[Prieto95] R. Prieto, R Asensi, J.A. Cobos, O. Garcia, J. Uceda. Model of the capacitive effects in magnetic components.IEEE PESC' 95, 1995, Proceedings, pp. 678-683.

[Puzo92] A. Puzo "Contribution à l'étude des perturbations rayonnées par les convertisseurs HF", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, juin 92.

[Saotome97] H. Saotome, Y. Sakaki. Iron Loss Analysis of Mn-Zn Ferrite Cores. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 33, no. 1, January 1997, pp. 728-734.

[Schanen94] J.L. Schanen "Intégration de la compatibilité électromagnétique dans la conception de convertisseurs en Electronique de puissance", thèse de doctorat INPG, Janvier 94, Grenoble.

[Scheich93] R. Scheich. Caractérisation et prédétermination de perturbations conduites dans les convertisseurs d'électronique de puissance. Thèse de Doctorat, octobre 93, INPG, LEG, Grenoble.

[Schellmanns96] A. Schellmanns. Conception d'une alimentation à découpage haut fréquence.D.E.A. Génie Electrique, septembre 1996, INPG, LEG, Grenoble.

[Schellmanns97] A. Schellmanns, P. Fouassier, J.P. Keradec, J.L. Schanen, " 1D-propagation based equivalent circuits for transformers : accounting for multi-layer structure of windings and ferrite losses " in Proc. IEEE Ind. Appl. Soc., New Orleans, Louisiana, Oct 5-9 1997, pp 1211-1216.

[Schellmanns98] A. Schellmanns, K. Berrouche, J.-P. keradec, "Multiwinding transformers : a successive refinement method to characterize a general equivalent circuit". IEEE - Transactions on Instrumentation and Measurement, Octobre 1998, Vol 47, N°5, pp 1316- 1321

[Schellmanns99-1] A. Schellmanns, J.L. Schanen, J.P. Keradec, B. Cogitore. "Measurement Bench for Near Field Characterization of Wound Components". IEEE IMTC'99, Florence, Italie, May 1998, pp. ??-??.

[Schellmanns99-2] A. Schellmanns, J.P. Keradec, K. Berrouche. "Comment caractériser un transformateur avec la précision juste nécessaire ?". EPF'98, Belfort, France, décembre 1998, pp. 277-282

[Schutz97-1] J. Schutz ,A. Schellmanns, J. Roudet. Design of resonant Flyback converter under EMC constraint.EPE'97, September 1997, Trontheim,Norway, Proceedings, pp 834-839

[Schutz98] J. Schutz, J. Roudet, A. Schellmanns. Transformer Modeling in EMC Applications. IEEE IAS' 98, October 1998, St. Louis, USA, Proceedings.

[Schutz99] J. Schutz "Méthodologie de conception d'une alimentation à découpage". Thèse de doctorat INPG, janvier 99, Grenoble.

[Séguin96] B. Séguin, J.P. Ferrieux, " Etude et modélisation de la résistance série équivalente ESR des condensateurs utilisés en électronique de puissance. Application au calcul de pertes en régime non sinusoïdal ", EPF'96, Grenoble, France, décembre 1996, pp. 263-268.

[Séguin97] B. Séguin, " Les pertes dans les condensateurs bobinés utilisés en électronique de puissance : mesure calorimétrique et modélisation ", Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble 1997.

[Spiegel74] M. R. Spiegel, " Formules et tables mathématiques ", éditions Mac-Graw Hill, New York, 1974, p.111.

[Snelling91] E.C. Snelling. Soft Ferrites - Properties and Applications. 2nd Edition, Borough Green, Sevenoaks, England, Butterworths, 1991, p. 363

[Stanford97] User's Manual. Model SR844 RF Lock-In Amplifier.Stanford Research System.

[Tektronic90] Guide d'utilisation : Analyseurs numériques des signaux DSA 601/602

[Teulings97] W. Teulings "Prise en compte du câblage dans la conception et la simulation des convertisseurs de puissance : performances CEM", thèse de doctorat INPG, avril 97, Grenoble.

[Thottuvelil90] V.J. Thottuvelil, T.G. Wilson, H.A. Owen. "High-Frequency Measurement Techniques for Magnetic Cores". IEEE Transactions on Magnetics, January 1990, vol. 5, no. 1, pp. 41-53.

[Topswitch96] TOPSwitch® Family. (TOP200-4/14). Power Integrations,INC, july 1996.

[Urling89] A.M. Urling, V.A. Niemela, G.R. Skutt, T.G Wilson, "Characterizing High Frequency Effects in Transformer Windings: a Guide to Several Significant Articles", APEC'89, Proceedings, 1989, pp. 373-385.

[Wilsko84] J.P. Wikswo. Jr and Kenneth, R. Swinney. "A comparison of scalar multipole expansions", J.Appl. Phys. , décembre 84, Proceedings, pp. 3039-3049.

[Youssef98] M.Youssef "Rayonnement dans les convertisseurs d'électronique de puissance". Thèse de doctorat INPG, décembre 98, Grenoble.

# Annexes

**Annexe 1 :** Représentation d'un enroulement multicouche

**Annexe 2 :** Algorithme permettant la représentation en fréquence d'un enroulement multicouche

# ANNEXE 1

## Représentation d'un enroulement multicouche

## 1. *Représentation d'un enroulement multicouche*

Nous souhaitons maintenant étendre le modèle de transformateur au cas où les spires de ses enroulements sont réparties entre plusieurs couches superposées. Dans ce cas, les couches sont séparées par une mince pellicule d'isolant non magnétique (air, vernis, carton). Pour simplifier le langage, on parlera d'une couche d'air. Cette association de lames de cuivre et d'air est présentée sur la Figure 1. L'épaisseur de la lame de cuivre est déduite de l'approximation de Dowell. Celle de la couche d'air est en compensation augmentée pour préserver l'épaisseur totale (cuivre + air).

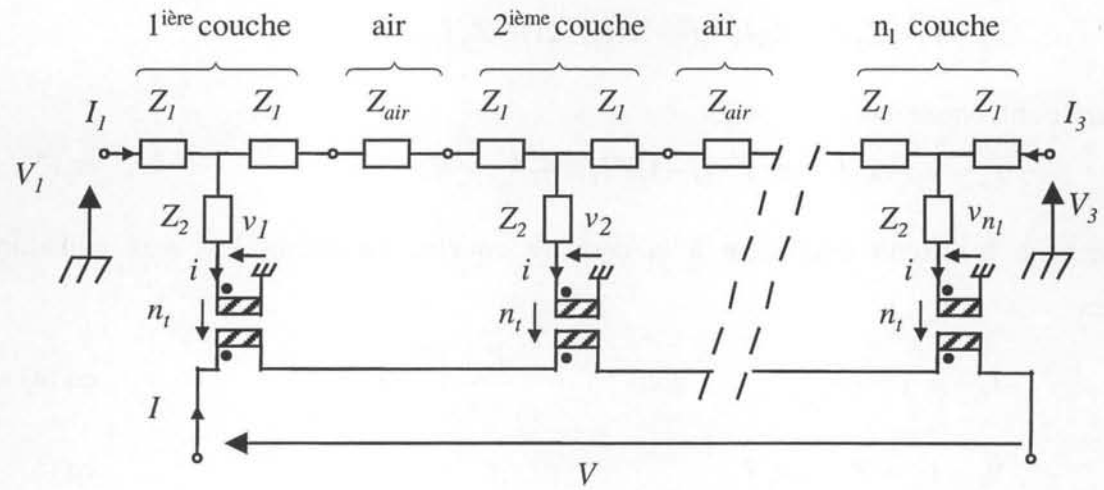



Figure 1 : Association en série pour la représentation d'un bobinage multicouche

Le nombre de spires de chaque couche a été pris en compte grâce aux coupleurs qui multiplient les impédances par $n_t^2$. L'enroulement étudié comprend $n_l$ couches de $n_t$ spires chacune soit $N = n_l n_t$ spires. Le calcul qui suit vise à trouver le schéma équivalent de cet enroulement de $n_l$ couches identiques séparées par $(n_l - 1)$ couches d'air.

Afin de simplifier l'écriture des équations aux impédances liant $V_1$, $V_2$, $V_3$ à $I_1$, $I_2$, $I_3$ nous posons :

$$2Z_1 + Z_{air} = Z \qquad \text{eq (1)}$$

Nous avons également noté $v_j$ la tension secondaire du coupleur associé à la j$^{ième}$ couche.

### 1.1. Mise en équations

En dehors des variables que nous devons lier, nous avons introduit i et $v_j$ qui, en raison de la mise en série des couches, respectent les égalités suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n_l} v_j n_t = V \qquad \text{et} \qquad -I n_t = i \qquad \text{eq (2)}$$

D'autre part, une équation supplémentaire mettant en jeu un potentiel $v_j$ peut être écrite pour chaque cellule.

$$v_1 = V_1 - Z_1 I_1 - Z_2 i$$
$$v_2 = V_1 - Z_1 I_1 - Z(I_1 - i) - Z_2 i$$
$$v_3 = V_1 - Z_1 I_1 - Z(I_1 - i) - Z(I_1 - 2i) - Z_2 i$$

En généralisant, on obtient :

$$v_j = V_1 - Z_1 I_1 - Z_2 i - (j-1) Z I_1 + \frac{j(j-1)}{2} Z i \qquad \text{eq (3)}$$

En observant, le circuit équivalent à la dernière couche, on déduit les deux équations suivantes :

$$I_1 - n_l\, i = -I_3 \qquad \text{soit} \qquad \frac{I_1 + I_3}{n_l} = i \qquad \text{eq (4)}$$

$$V_3 = v_{n_l} + Z_2 i + Z_1 I_3 \qquad \text{eq (5)}$$

L'équation (3) est en réalité un ensemble de n équations si bien que le système se compose de $n_l + 4$ équations alors qu'il lie $n_l + 7$ variables : les $n_l$ potentiels $v_j$, $i$ et les grandeurs mesurables extérieurement. En réduisant le nombre d'équations et de variables de $n_l + 1$ unités, on obtient un système de 3 équations liant les 6 variables externes qui apparaît comme l'ensemble des équations aux impédances du système.

### 1.2. Résolution du système et représentation

Dans un premier temps, nous allons faire disparaître les variables $v_j$ en reportant (3) dans (4) et (5).

$$V_3 = V_1 - Z_1 I_1 - (n_l - 1) Z I_1 + \frac{n_l (n_l - 1)}{2} Z i + Z_1 I_3 \qquad \text{eq (66)}$$

Pour écrire la somme de l'équation (6), nous exploitons les résultats de deux séries numériques [SPIEGEL74].

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{eq (7)}$$

Grâce à ces relations, on déduit : $$\sum_{j=1}^{n} j\,(j-1) = \frac{n}{3}\left(n^2 - 1\right) \qquad \text{eq (87)}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{j=1}^{n_l} v_j = \frac{V}{n_t} = (V_1 - Z_1 I_1 - Z_2\, i + Z\, I_1) n_l - Z\, I_1 \frac{n_l\,(n_l+1)}{2} + Z\, i \frac{n_l}{6}\left({n_l}^2 - 1\right) \qquad \text{eq (98)}$$

d'où $$\frac{V}{N} = V_1 - Z_1 I_1 - Z_2\, i + Z\, I_1 - Z\, I_1 \frac{n_l + 1}{2} + Z\, i \frac{{n_l}^2 - 1}{6} \qquad \text{eq (109)}$$

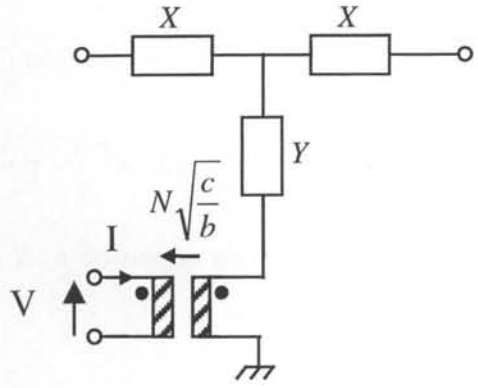
A ce point de la résolution, il faut faire disparaître la variable $i$. Ceci s'opère facilement en reportant (4) dans les autres équations. Commençons par la reporter dans l'équation suivante :

$$\frac{I_1 + I_2}{n_l} = -I\, n_t \qquad \text{ce qui équivaut à} \qquad I = -\frac{I_1 + I_2}{N} \qquad \text{eq (11)}$$

Il reste à reporter (10) cette équation dans (11) et (12). On exprime $V_1 - \frac{V}{N}$ et $V_3 - \frac{V}{N}$ en fonction des courants $I_1$ et $I_3$. Enfin, en remplaçant Z par sa définition, on obtient les équations finales :

$$\begin{cases} V_1 - \dfrac{V}{N} = \left(n_l\, Z_1 + \dfrac{n_l - 1}{2} Z_{air}\right) I_1 + \left(\dfrac{Z_2}{n_l} - \dfrac{{n_l}^2 - 1}{6 n_l}(2 Z_1 + Z_{air})\right)(I_1 + I_2) \\ V_3 - \dfrac{V}{N} = \left(\dfrac{Z_2}{n_l} - \dfrac{{n_l}^2 - 1}{6 n_l}(2 Z_1 + Z_{air})\right)(I_1 + I_3) + \left(n_l Z_1 + \dfrac{n_l - 1}{2} Z_{air}\right) I_3 \end{cases} \qquad \text{eq (12)}$$

Si on définit les impédances $X$ et $Y$ par les relations ci-dessous, ces expressions se traduisent par le circuit de la figure suivante :




$$X = n_l Z_1 + \frac{n_l - 1}{2} Z_{air}$$

$$Y = \frac{Z_2}{n_l} - \frac{{n_l}^2 - 1}{6 n_l}(2 Z_1 + Z_{air})$$

Figure 2 : Représentation d'un bobinage multicouche

$Z_1$ et $Z_2$ sont les impédances qui apparaissent dans le schéma d'une couche de cuivre et $Z_{air}$ est l'impédance de l'air entre chaque couche de cuivre.

Remarque : Pour $n_l = 1$, on retrouve le schéma d'une lame de cuivre.

### *1.3. Vérifications*

On rappelle les expressions BF de ces impédances.

$$Z_1 \approx \frac{j l_C \omega}{2} \qquad Z_2 \approx rc \qquad Z_{air} = j\omega l_A \qquad \text{eq (13)}$$

Pour s'assurer de la vraisemblance des relations précédentes, étudions deux limites basse fréquence.

#### 1.3.1. Inductance de fuite de l'enroulement en basse fréquence

Tout d'abord, lorsque l'enroulement est en l'air ($I = 0$), $Y$ n'intervient pas, l'impédance associée s'exprime par $Z = 2X$ si bien que lorsque $\varphi$ tend vers 0, on obtient :

$$Z = 2n_l Z_1 + (n_l - 1) Z_{air} = n_l \, 4rc \frac{-\varphi^2}{4} + (n_l - 1)\mu_0 \, a_{air} \, j\omega \qquad \text{eq (14)}$$

De plus, on sait que $-\varphi^2 rc = j\omega l_C$ (où $l_C = \mu_0 a_{cu}$ est l'inductance de la couche de cuivre), ce qui permet d'écrire : $Z = j\omega \left( n_l \, l_C + (n_l - 1)\mu_0 \, a_{air} \right)$ eq (15)

Ainsi, on constate qu'au premier ordre, l'inductance totale est identique à celle d'un matériau non magnétique de même épaisseur totale.

#### 1.3.2. Résistance de l'enroulement en basse fréquence

Etudions maintenant la limite basse fréquence de $Y$. Seule $Z_2$ ne tend pas vers 0 lorsque $\varphi$ tend vers 0. C'est pourquoi, on trouve la limite en basse fréquence :

$$Y \approx \frac{Z_2}{n_l} = \frac{rc}{n_l} = \frac{1}{\sigma a_{cu}} \frac{1}{n_l} \qquad \text{eq (16)}$$

Par ailleurs, l'enroulement est constitué de conducteurs de section $a\frac{b}{n_t}$ soit $a\frac{b n_l}{N}$ puisque $n_l$ conducteurs sont répartis sur la hauteur b. La longueur du fil étant supposée à $N c$, la résistance du fil s'écrit :

$$r_{DC} = \frac{1}{\sigma} \frac{N}{a_{cu}\, b\, n_l} N\, c = \frac{1}{\sigma\, a_{cu}\, n_l} N^2 \frac{c}{b} \qquad \text{eq (17)}$$

Puisque le rapport $N^2 \frac{c}{b}$ est assuré par le coupleur, cette valeur est cohérente avec la limite basse fréquence de $Y$.

# ANNEXE 2

Algorithme permettant la représentation en fréquence d'un enroulement multicouche

## I-Introduction

Après avoir introduit tous les paramètres qui caractérisent un enroulement de transformateur, nous traçons les courbes qui traduisent le comportement de son impédance série. Ensuite, nous cherchons un circuit à constantes localisées qui présente le même comportement. Dans un premier temps, il est commode de chercher une fonction de transfert qui soit une une fraction rationnelle de p. Une telle fonction conduira aisément au circuit équivalent recherché.

## II-Paramètres de l'enroulement.

Constantes géométriques de l'échantillon :

$a := .001$ $b := .040$ $c := .080$ Dimensions des couches de cuivre

Constantes physiques :

$\mu 0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Perméabilité du vide

$\rho := 1.6 \cdot 10^{-8}$ $\sigma := \frac{1}{\rho}$ Résitivité et conductivité du cuivre

Paramètres de l'enroulement :

$nt := 40$ Nombre de spires par couche

$nl := 1 .. 50$ Nombre de couches

Valeurs des éléments en continu :

$rsdc_{nl} := \rho \cdot \frac{nt \cdot nl \cdot c}{a \cdot \frac{b}{nt}}$ $rsdc_{10} = 0.5120$

$lsdc_{nl} := \frac{1}{3} \cdot \mu 0 \cdot \frac{a \cdot c}{b} \cdot nt^2 \cdot nl^3$ $lsdc_{10} = 1.3404 \cdot 10^{-3}$

Les valeurs de rsdc et de lsdc seront exploitées pour étudier les variations de ls-rs à l'aide de variables réduites.

Répartition des fréquences :

$fmin := 10$ $fmax := 10^8$ Domaine de fréquence étudié

$nbpt := 500$ Nombre de fréquences de calcul

$i := 0 .. nbpt$

$nbdec := \log\left(\frac{fmax}{fmin}\right)$ $f_i := fmin \cdot 10^{\frac{nbdec}{nbpt} \cdot i}$ Répartition sur échelle log

$\omega_i := 2 \cdot \pi \cdot f_i$ $\delta_i := \sqrt{\frac{2}{\omega_i \cdot \sigma \cdot \mu 0}}$ Pulsations et épaisseurs de peau

$x_i := \frac{a}{\delta_i}$ Variable réduite proportionnelle à $\omega^{1/2}$.

On retiendra que pour x = 1, l'épaisseur de peau est identique à celle des conducteurs. Cela intervient à une fréquence fp (p comme peau) dont la valeur est donnée par :

$fp := \frac{1}{a^2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \mu 0}$ ce qui donne ici : $fp = 4.052847 \cdot 10^3$

## III-Expressions analytiques de l'impédance série.

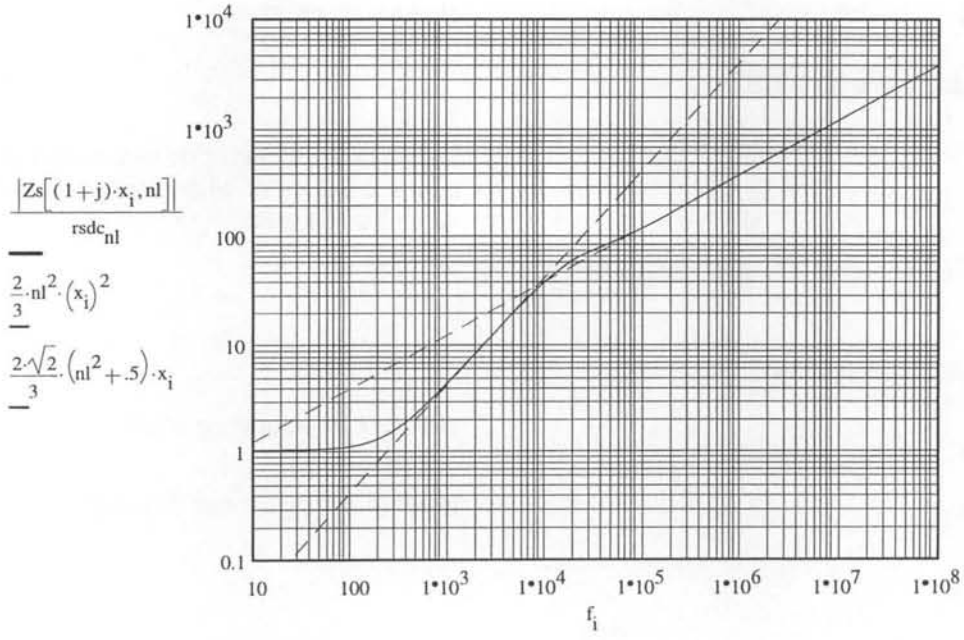
Comme point de comparaison , nous choisissons le module de Zs. Retraçons le ci-dessous.

$j := \sqrt{-1}$

$u := (1 + j) \cdot x$ Remarque : $u(p) := \sqrt{\frac{p}{\pi \cdot fp}}$

$Zs(u, nl) := rsdc_{nl} \cdot u \cdot \left( \coth(u) - \frac{2}{3} \cdot \tanh\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{2}{3} \cdot nl^2 \cdot \tanh\left(\frac{u}{2}\right) \right)$

$nl := 5$



Le module montre trois comportements successifs. Après un comportement résistif en B. F. l'inductance continue prend le dessus et fait apparaître une zône proportionnelle à $\omega$. Ensuite, une plage de variation proportionnelle à $\omega^{1/2}$ illustre l'intervention des courants induits : effets de peau et effets de proximité. Les équations des assymptotes d'impédances sont :

$rsdc_{nl} \cdot \frac{2}{3} \cdot nl^2 \cdot x^2$ soit : $lsdc_{nl} \cdot 2 \cdot \pi \cdot fp \cdot x^2$ et $rsdc_{nl} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \left(nl^2 + .5\right) \cdot x$

Ces assymptotes se coupent au point de coordonnées :

$x0_{nl} := \sqrt{2} \cdot \frac{nl^2 + .5}{nl^2}$ soit : $f0_{nl} := 2 \cdot \left(\frac{nl^2 + .5}{nl^2}\right)^2 \cdot fp$ et $Zsc_{nl} := \frac{4}{3} \cdot \left(nl + \frac{.5}{nl}\right)^2 \cdot rsdc_{nl}$

## IV-Recherche d'une fonction de transfert approchée.

Dans un premier temps, nous cherchons une fonction de transfert ayant la forme d'une fraction rationnelle et dont le module varie de la même façon que la courbe ci-dessus. Cette recherche est conduite en admettant qu'un écart relatif, fixé à l'avance, pourra être toléré et que l'accord ne pourra être assuré qu'en dessous d'une certaine fréquence.

Nous démarrons cette recherche en supposant, à titre d'exemple, que nous avons identifié un enroulement à dix couches et que ses paramètres sont connus sans erreur.

$fp = 4.052847 \cdot 10^3$ $nl := 1, 2 .. 50$ $f0_{nl} := 2 \cdot \left(\frac{nl^2 + .5}{nl^2}\right)^2 \cdot fp$ $Zsc_{nl} := \frac{4}{3} \cdot \left(nl + \frac{.5}{nl}\right)^2 \cdot rsdc_{nl}$

$nl := 10$

$rsdc_{nl} = 0.512$

$lsdc_{nl} = 1.340413 \cdot 10^{-3}$ Vérification : $\frac{rsdc_{nl} \cdot nl^2}{3 \cdot \pi \cdot fp} = 1.340413 \cdot 10^{-3}$

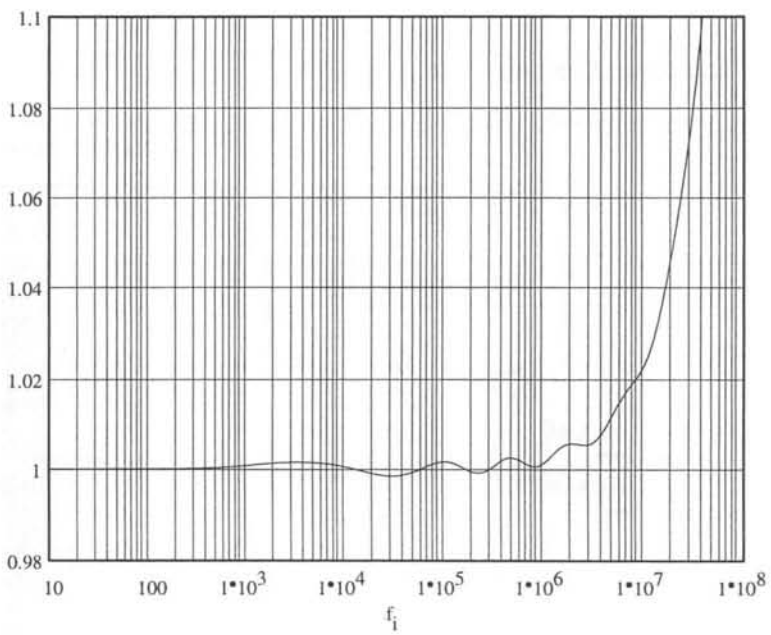
Avec ces paramètres, nous pouvons retracer les courbes exactes des impédances. Notons que l'intersection des assymptotes de rs a pour coordonnées :

$f0_{nl} = 8.186954 \cdot 10^3$ et $Zsc_{nl} = 68.95104$

L'écart demeure inférieur à 1,3 degré jusqu'à 10 MHz.

Enfin, la courbe ci-dessous montre que la résistance série est représentée avec moins de 2% d'erreur jusqu'à 10 MHz.

$$\frac{\mathrm{Re}\left[Zs\left[(1+j)\cdot x_i, nl\right]\right]}{\mathrm{Re}\left(Zfrac\left(f_i, nbc, fc\right)+rsdc_{nl}\right)}$$




## V-Recherche des valeurs des composants.

$rsdc_{nl} = 0.512$ $\qquad$ $lshf_{nl} = 9.342566 \cdot 10^{-6}$

Le circuit équivalent se compose de $rsdc_{nl}$, en série avec $lshf_{nl}$, en série avec 6 cellules Lp-Rp dont les éléments sont calculés ci-dessous.

$m := 1$

$$L_m := lsdc_{nl}\cdot\left(1-\frac{fc_{2\cdot m-1}}{fc_{2\cdot m}}\right)\cdot\prod_{noc=2}^{nbc}\frac{1-\frac{fc_{2\cdot m-1}}{fc_{2\cdot noc}}}{1-\frac{fc_{2\cdot m-1}}{fc_{2\cdot noc-1}}}$$

$m := 2 .. nbc - 1$

$$L_m := lsdc_{nl} \cdot \left(1 - \frac{fc_{2 \cdot m - 1}}{fc_{2 \cdot m}}\right) \cdot \prod_{noc = 1}^{m - 1} \frac{1 - \frac{fc_{2 \cdot m - 1}}{fc_{2 \cdot noc}}}{1 - \frac{fc_{2 \cdot m - 1}}{fc_{2 \cdot noc - 1}}} \cdot \prod_{noc = m + 1}^{nbc} \frac{1 - \frac{fc_{2 \cdot m - 1}}{fc_{2 \cdot noc}}}{1 - \frac{fc_{2 \cdot m - 1}}{fc_{2 \cdot noc - 1}}}$$

$m := nbc$

$$L_m := lsdc_{nl} \cdot \left(1 - \frac{fc_{2 \cdot m - 1}}{fc_{2 \cdot m}}\right) \cdot \prod_{noc = 1}^{nbc - 1} \frac{1 - \frac{fc_{2 \cdot m - 1}}{fc_{2 \cdot noc}}}{1 - \frac{fc_{2 \cdot m - 1}}{fc_{2 \cdot noc - 1}}}$$

$m := 1 .. nbc$

$L_m$

| |
|---|
| $1.086812 \cdot 10^{-3}$ |
| $1.326213 \cdot 10^{-4}$ |
| $5.787612 \cdot 10^{-5}$ |
| $2.994409 \cdot 10^{-5}$ |
| $1.547565 \cdot 10^{-5}$ |
| $8.341068 \cdot 10^{-6}$ |

$$\sum_{noc = 1}^{nbc} L_{noc} + lshf_{nl} = 1.340413 \cdot 10^{-3}$$

Cette somme redonne l'inductance totale BF : $lsdc_{nl} = 1.340413 \cdot 10^{-3}$

Ainsi, l'inductance totale est scindée en 7 parties dont les valeurs s'échelonnent entre 1 mH et 8 uH. Le rapport de ces deux valeurs est cohérent avec le nombre de décades de validité de l'approximation : 4 décades de fréquence = 2 décades d'inductance.

$R_m := L_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot fc_{2 \cdot m - 1}$

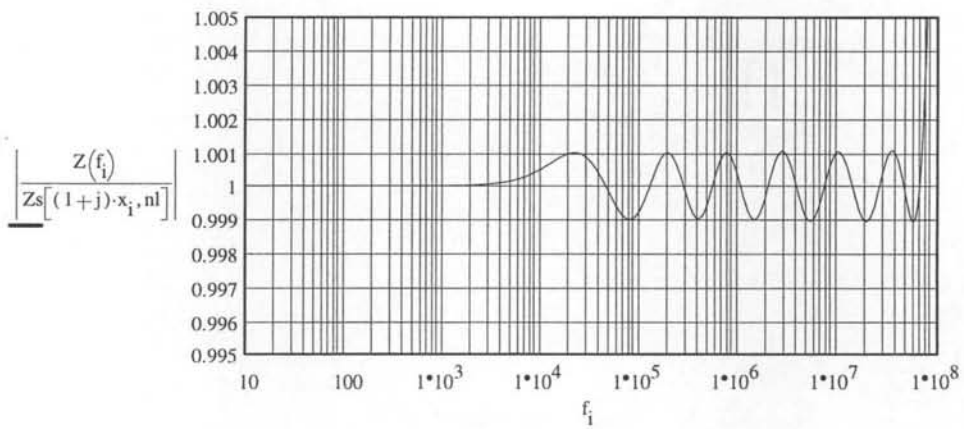
$R_m$

| |
|---|
| 137.084986 |
| 161.140454 |
| 275.680323 |
| 525.110691 |
| $1.00484 \cdot 10^{3}$ |
| $2.145603 \cdot 10^{3}$ |

## VI-Vérification des valeurs des composants.

Pour vérifier ces résultats, nous calculons directement l'impédance déterminée ci-dessus et nous comparons son module à celui de la fonction théorique prise pour cible.

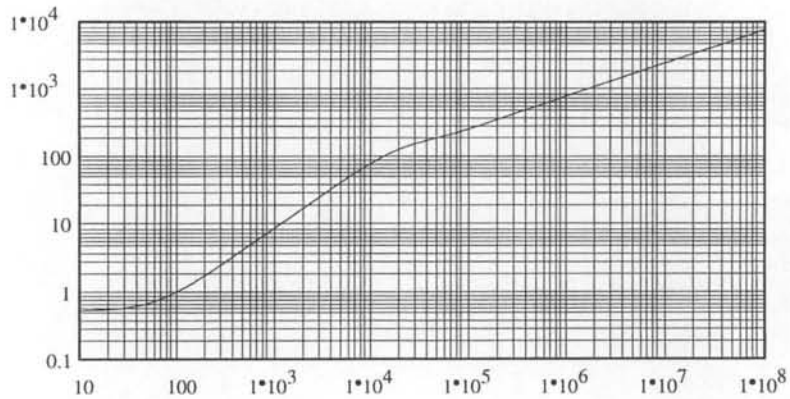
$$Z(f) := rsdc_{nl} + j \cdot lshf_{nl} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + \sum_{noc=1}^{nbc} \frac{R_{noc} \cdot j \cdot L_{noc} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{R_{noc} + j \cdot L_{noc} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$




courbe1 := READPRN(p33_m4)

mod1 := courbe1<1> ph1 := courbe1<2> fm := courbe1<0> long := length(fm) k := 0.. (long – 1)

$$Rs_k := Re\left(mod1_k \cdot e^{i \cdot ph1_k \cdot \frac{\pi}{180}}\right) \quad Ls_k := \frac{Im\left(mod1_k \cdot e^{i \cdot ph1_k \cdot \frac{\pi}{180}}\right)}{2 \cdot \pi \cdot f_k}$$



## Circuits équivalents pour transformateurs multi-enroulements : Application à la CEM conduite d'un convertisseur

Le travail présenté dans ce mémoire se rapporte à la recherche de circuits équivàlents à constantes localisées pour représenter le comportement électrique des transformateurs. Il s'inscrit dans la continuité d'une longue étude, commencée en 1988 et menée en collaboration avec plusieurs industriels. Il généralise les travaux antérieurs et mène à la représentation des transformateurs multi-enroulements.

Les méthodes générales de représentation et d'identification expérimentale des transformateurs multi-enroulements sont établies. Pour y parvenir, des repères généraux concernant le nombre d'impédances mesurables, le nombre de pôles et de zéros de ces impédances sont dégagés. Des notions nouvelles, telles que le transformateur de fuite et la modélisation progressive, sont introduites. Un modèle analytique est développé pour rendre compte des effets des courants induits (peau et proximité) dans les conducteurs. La représentation de ces effets par des constantes localisées, impossible à priori puisqu'ils mènent à des impédances proportionnelles à la racine carrée de la fréquence, est résolue. Tout ceci est validé expérimentalement et, en marge de ce travail, un banc destiné à caractériser le rayonnement magnétique des composants magnétiques est étudié et testé avec succès.

L'intérêt du travail précédent est illustré par l'étude d'une alimentation à découpage industrielle. Il s'avère que les imperfections du transformateur à trois enroulements exploité par cette alimentation, bien représentées par le circuit équivalent, influent très fortement sur le dimensionnement des autres composants ainsi que sur les perturbations de mode commun du montage. Il est ainsi démontré qu'un modèle précis de transformateur est un élément clé pour concevoir des alimentations à découpage fiables et conformes aux normes de compatibilité électromagnétique en vigueur.

## Equivalent circuits for multiwinding transformer: Application to the EMC of a converter

The work presented in this report refers to the search of equivalent circuits with lumped constants to represent the electric behavior of the transformers. It falls under the continuity of a long study, started in 1988 and undertaken in collaboration with several industrialists. It generalizes former work and leads to the representation of the multiwinding transformers.

General methods of representation and experimental identification of the multiwinding transformers are established. For that purpose, from the general reference marks concerning the number of measurable impedances, the number of poles and zeros of these impedances are disengaged. New concepts, such as the leakage transformer and progressive modeling, are introduced. An analytical model is developed to take into account for the effects of the induced currents (skin and proximity) in the conductors. A solution is proposed to solve the problem of the representation of these effects by lumped constants. All this is validated in experiment and, in margin of this work, a bench intended to characterize the magnetic radiation of the magnetic components is studied and tested successfully.

The interest of preceding work is illustrated by the study of an industrial converter. It proves that the imperfections of the transformer using three windings, (well represented by the equivalent circuit) very strongly influence the dimensioning of the other components and the disturbances of common mode of the converter. It is thus shown that a precise model of transformer is a key element to design a reliable power converter and in conformity with the standards of electromagnetic compatibility.

**Mots clés :**
Electronique de puissance, Composants passifs, Transformateur, Compatibilité Electromagnétique, Modélisation, Simulation.

Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble – INPG/UJF-CNRS UMR 5529
BP 46, 38400 Saint-Martin-d'Hères cedex, FRANCE
Phone 33/(0)4.76.82.62.99, Fax 33/(0)4.76.82.63.00